

ПРЕДАВАЊА НА БЕОГРАДСКОМ УНИВЕРЗИТЕТУ.

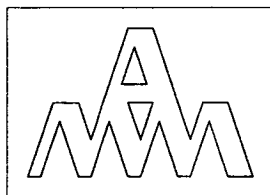
НЕБЕСКА МЕХАНИКА

ОД
М. МИЛАНКОВИЋА
ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА

ИЗДАЊЕ ЗАДУЖБИНЕ ЛУКЕ ЂЕЛОВИЋА-ТРЕБИЊЦА
БЕОГРАД
1935

НОВО-РЕТРОСПЕКТИВНО-НЕИЗМЕЊЕНО ИЗДАЊЕ VESTA Co.
БЕОГРАД
1995

ISBN 86-7212-001-9

**NEBESKA MEHANIKA**

Novo-Retrospektivno-Neizmenjeno izdanje
© 1995, VESTA Company

Izdavač: VESTA COMPANY

Za izdavače: STEVO ŠEGAN, JADRANKA JANKOV

Redakcioni odbor: STEVO ŠEGAN, ALJOŠA JOVANOVIĆ

Recenzent: VREME...

Uređivački odbor: STEVO ŠEGAN, ALEKSANDAR B. D. BALAŠKOVIĆ

Obrada teksta: ALEKSANDAR B. D. BALAŠKOVIĆ

CIP—Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

521.1(075.8)

МИЛАНКОВИЋ, Милутин

Небеска механика : предавања на Београдском
универзитету / од М.[Милутина] Миланковића.
[Ново ретроспективно неизмењено изд.]—Београд :
Vesta Company, 1995 (Београд : Грмеч).—
218 стр. : граф. прикази ; 24 cm

Фототипско изд. из 1935.—ћпр. и лат.—

Тираж 300.—Библиографија: стр. 217–218.
ISBN 86-7212-001-9

а) Небеска механика
ИД = 41543692

Štampa: Grmeč, Beograd
Povez: Grmeč, Beograd
Tiraž: 300 primeraka

Adresa izdavača: VESTA Company, p.o., Beograd-Zemun, Novogradska 51

САДРЖАЈ

Sadržaj

ПРВИ ОДЕЉАК

Translatorno kretanje nebeskih tela

ГЛАВА ПРВА Postanak i razvitak nauke o kretanju nebeskih tela 3–26		ГЛАВА ПЕТА Asteroidni problem 62–79	
§ 01. Haldejci i Egipćani	3	§ 21. Formulisanje problema	62
§ 02. Grci	5	§ 22. Polje skalara W i njegove osobine	65
§ 03. Aleksandrijci	6	§ 23. Jakobijev integral. Hilova granična kriva	70
§ 04. Srednji vek	14	§ 24. Periodične putanje, simetrične prema osi X	72
§ 05. Kopernik	15	§ 25. Periodična rešenja u okolini centara libracije	74
§ 06. Galileo Galilei	17		
§ 07. Keplerovi zakoni	18		
§ 08. Njutnov zakon gravitacije	21		
ГЛАВА ДРУГА Problem dvaju tela 27–43		ГЛАВА ШЕСТА Sila poremećaja i njeno polje 80–90	
§ 09. Postavljanje problema	27	§ 26. Definicija i matematski izraz sile pore- mećaja	80
§ 10. Vektorski integrali problema	27	§ 27. Polje sile poremećaja i njegova primena u statičkoj teoriji plime	82
§ 11. Oblik putanje	32		
§ 12. Kretanje po eliptičnoj putanji	37		
§ 13. Eliptični elementi planetskog kretanja	40		
§ 14. Problem satelita, sveden na problem dvaju tela	41		
ГЛАВА ТРЕЋА Opšti integrali problema n tela 44–51		ГЛАВА СЕДМА Metod varijacije konstanata u jednačinama kretanja nebeskih tela 91–109	
§ 15. Problem n tela	44	§ 28. Lagranžov metod varijacije konstanata	91
§ 16. Opšti integrali problema n tela	45	§ 29. Osobine Lagranžovih zagrada	94
§ 17. Translatorno kretanje Sunčevog sistema	48	§ 30. O izboru konstanata za varijaciju	95
§ 18. Laplasova invarijabilna ravan	49	§ 31. Izračunavanje Lagranžovih zagrada eli- ptičnih elemenata	99
		§ 32. Obrasci za vremenske izvode eliptičnih elemenata	107
ГЛАВА ЧЕТВРТА Problem triju tela 52–61		ГЛАВА ОСМА Račun poremećaja kretanja nebeskih tela 110–126	
§ 19. Centar atrakcije triju tela	52	§ 33. Razvijanje funkcije poremećaja u red	110
§ 20. Egzaktna rešenja problema triju tela	56		

§ 34. Integrisanje diferencijalnih jednačina poremećaja	114	ГЛАВА ДЕВЕТА Planetski sistem 127–135	
§ 35. Klasifikacija poremećaja	116		
§ 36. Oscilatorni karakter sekularnih poremećaja; obrasci za njihovo izračunavanje	117	§ 37. Istorijski podatci	127
		§ 38. Sastav planetkog sistema	131

ДРУГИ ОДЕЉАК

Rotaciono kretanje nebeskih tela

ГЛАВА ДЕСЕТА Teoreme i obrasci Racionalne Mehanike potrebni za proučavanje rotacionih kretanja nebeskih tela 139–151	§ 55. Dejstvo pojedinih delova momenta zaokretanja	170	
§ 39. Nebeska tela kao materijalni sistemi	139	§ 56. Precesija ravnodnevnica	173
§ 40. Teoreme o impulsima	140	§ 57. Periodični članovi precesije	176
§ 41. Teorema o kretanju težišta	141	ГЛАВА ТРИНАЕСТА Astronomska nutacija Zemljine ose 178–183	
§ 42. Nezavisnost rotacionog kretanja od translatornog	142	§ 58. Poremećaji ravni Mesečeve putanje	178
§ 43. Upotreba pokretnih koordinatnih sistema	143	§ 59. Astronomska nutacija Zemljine ose	180
§ 44. Ojlerove jednačine	144	ГЛАВА ЧЕТНАЕСТА Slobodna nutacija Zemlje 184–192	
§ 45. Ojlerovi uglovi	146	§ 60. Istorijski podatci	184
§ 46. Polhodija i herpolhodija	146	§ 61. Mehaniizam pojave	185
§ 47. Funkcija sila atrakcije konačnih tela	148	§ 62. Ojlerova perioda i Čendlerova perioda	190
ГЛАВА ЈЕДНАЕСТА Rotacija nebeskih tela u fluidnom stanju 152–162	§ 63. Istorijski podatci	193	
§ 48. Zonalna rotacija	152	§ 64. Matematska šema izostazije i fluidalnosti Zemljine	195
§ 49. Apelova teorema	155	§ 65. Položaji glavnih osa inercije	199
§ 50. Uslovi ravnoteže	158	§ 66. Prilagođivanje Zemljinog tela	201
§ 51. Kleroova teorema	159	§ 67. Polfugalna sila sialnih santa	202
ГЛАВА ДВАНАЕСТА Precesija Zemljine ose 163–177	§ 68. Osnovna diferencijalna jednačina sekularnog pomeranja Zemljinih polova	204	
§ 52. Istorijski podatci	163	§ 69. Jednačina sekularne putanje pola i načina kretanja pola po toj putanji	208
§ 53. Momenat zaokretanja spoljnih sila na Zemlju	164	§ 70. Zemlja smatrana kao materijalni sistem sa četiri stepena slobode	212
§ 54. Jednačine kretanja. Permanentni i periodični članovi poremećaja	166	Literatura	217

Predgovor izdavača

Ne bih da Vas zamaram, Poštovani čitaoče! Pogotovo ne Vas, koji ste odvojili svoje vreme da se upustite u izučavanje *Nebeske mehanike*. Ali ne mogu da odolim da Vam se ne požalim: *nije što nema, nije ni što ne može, ali jeste što neće.*

Neće da pogledaju, *neće* da naprave, *neće* da učestvuju ni u kom obliku i pokretu osim u „*neću*“; e, pa, i ja se učlanih u pokret „*neću*“, jer *neću* ni ime da im spomenem.

Hvala Vam na strpljenju, knjige radi i uspomene radi na velikog stvaraoča; kažu da nije trebalo da se štampa „neprerađeno i neizmenjeno“ izdanje. *Ali to je i bio cilj; i ništa više.*

Nije provereno da nečije pravo nije nekako ugroženo ovim izdanjem; ako jeste, nadam se da će nam oprostiti. *Nije bila namera.*

Nema recenzenta. Ili, ima jedinog ozbiljnog recenzenta—*vreme* u kojem je živela i doživela nekoliko izdanja različitog obima.

I još samo ovo: zahvaljujem se *Mariji* i *Danilu*, koji su žrtvovali svoj raspust da bi tekst ove knjige pripremili za računarsku obradu; onako kako su znali. Bili su u šestom razredu.

Beograd, novembar 1995.

Stevo D. Šegan

Predgovor tehničkog urednika

Tehničkog urednika, zapravo, i nemamo, ali njegov predgovor bi trebalo da izgleda ovako:

„Ovo izdanje, osim svojevrzne retrospektive dela iz u nas retko zastupljene oblasti astronomske, treba da predstavlja i samosvojan napor da se podigne nivo štamparske kulture, bar u oblasti retkih izdanja i izdanja dela skoro trajnih vrednosti.

Zbog svega toga, štampanje ove knjige praćeno je sa nekoliko posebnih nastojanja na koja ćemo ovde skrenuti pažnju, a od čitalaca i potencijalnih i nepotencijalnih kritičara očekujemo korisne sugestije i primedbe.

Nastojanja možemo podeliti u dve osnovne grupe: grupa *modernih* rešenja svih štamparskih problema i grupa *klasičnih* rešenja, gde naše okruženje i poznavanje problema ne može da izađe iz tog okvira dovoljno kvalitetno.

Kod modernih rešenja posebna pažnja je posvećena izboru tehnologije i programskog okruženja za obradu teksta. Polazeći od izvesnih tvorevina poznatih kao *TEX* i *ADOBE PostScript*, od idejnih astro-inovacija *S. D. Šegana* i tehnoloških inovacija *A. B. D. Balaškovića*, dobijeno je okruženje koje nosi radni naslov *AstroTEX*. *Pretežnost eklektizma i kompilacije* raznih ideja i tehnologija vidi se već i u mešanju pisama u štampi, te svi prigovori, u tom smislu, idu na gornje adrese. *Razlozi za to biće nekom prilikom posebno dati.*

Kod klasičnih rešenja, problem poveza, papira, boje i sl., prepušten je u ovom trenutku firmi „Grmeč“ i nadamo se da će i ovaj tekst da se nađe u knjizi na čiji povez i štampu ili nema ili ima, *ali malo, prigovora.*“

Postanak i razvitak nauke o kretanju nebeskih tela

§ **1. Haldejci i Egipćani.** Prve klice našeg znanja o kretanju nebeskih tela nikle su u staroj Mesopotamiji. Kao da je priroda sama odabrala taj kraj, nazvan baštom sveta, za tu setvu! Sve je izgledalo onde kao stvoreno za sistematsko posmatranje nebeskih pojava: ravno tle, kristalan vazduh, vedro nebo, rani zalazak Sunca i noćna hladovina posle dnevne žege. Sveštenicima Vavilonije stavljeno je posmatranje neba u dužnost, pa su oni, na visokim kulama, iščekivali prvu pojavu Mesečevog srpa i tumačili nebeske pojave. Jer ti su sveštenici bili, u prvom redu, nebeski vraći, pa se u tom značenju očuvalo potonjim naraštajima haldejsko ime, ostavljajući svoj žig na celokupnoj astronomskoj delatnosti starih Vavilonaca, isključujući je njime, za dugo vremena, iz oblasti nauke. Tek u novije doba, kad su pronađene biblioteke zemljanih pločica, ispisanih klinovim pismom, počelo se pravičnije suditi o radu haldejskih posmatrača neba. Sa tih pločica moglo se pročitati da su vavilonski sveštenici bili, zaista, dvorski astrolozi i da su svojim pretskazivanjima, koja se mogu pratiti do u treću hiljadu godina pre Hrista, držali u svojim rukama najvišu vlast u državi. Nijedan važniji državni posao nije preduziman dok oni nisu upitani za savet. Moguće je, a i verovatno, da su oni, prodavajući budućnost drugima, osigurali sebi ugodnu sadašnjicu, ali, pored svega toga, pretstavlja njihov rad prve početke astronomske nauke. Tumačenje nebeskih pojava zahteva dva razna posla, prvi, posmatranje nebeskih pojava, a drugi, tumačenje njihovo. Onaj prvi posao je čista nauka, pa su zato ti astrolozi postali ocevima astronomije, isto onako kao što su i njima srodni alhimičari postali osnivačima hemije.

O starosti i o opsegu astronomskog znanja starih Vavilonaca moći će se stvoriti tek onda pouzdan sud kad budu pročitani svi zapisi sa stotina hiljada zemljanih pločica koje sada leže po muzejima. No jedno je već sada sigurno. Besprekidnim hiljadagodišnjim posmatranjima neba, prikupili su sveštenici Vavilonije bezbroj podataka o astronomskim pojavama, koje su jedino bile u stanju da obrazuju sigurne osnove astronomskoj nauci i na tim temeljima podignuta je, zaista, astronomska nauka. To svedoče već oni istorijski dokumenti koje danas imamo u rukama.

Nebeski vraći Vavilonije su opazili i, dugotrajnim posmatranjima neba, o tom se uverili da nebeske zvezde, sa malim izuzetcima o kojima će odmah biti reći, ne

menjaju svoj međusobni položaj, nego da izgledaju kao prikovane na šupljoj ljusci nebeskog svoda. Oni su grupisali te zvezde u pojedina jata ili sazvežđa i izvršili time, možda već u trećoj hiljadi godina pre Hrista, prvo katalogizovanje neba. Oni su uvideli da se, preko one čvrste mreže zvezda nekretnica, pomeraju Sunce, Mesec i pet planeta (Merkur, Venera, Mars, Jupiter i Saturn), dakle sedam pokretnih nebeskih svetla. Tako je broj sedam kod njih dobio svoj naročiti značaj i očuvao se, u tom svom značaju, u našoj sedmodnevnoj nedelji, čiji je svaki dan dodeljen po jednom od tih sedam nebeskih svetla. Današnji nazivi sedmičnih dana u evropskim jezicima to jasno pokazuju. (Sonntag od Sonne, Montag od Mond ili lundi od lune, mardi po Marsu, mercredi po Merкуру, jeudi po Jupiteru, vendredi po Veneri, Saturday po Saturnu. Pričalo se da su vavilonske astronomske kule imale po sedam spratova. Vavilonci su podelili prividnu putanju Sunca na nebu u dvanaest domova i dali im nazive i oznake koji su još sada u upotrebi, a duž putanje Meseca rasporedili dvadeset i osam konaka. Oni su pratili kretanje tih pokretnih sedam nebeskih tela toliko pažljivo da su znali tačno dužinu godine i upoznali nejednake dužine godišnjih doba. Godinu su podelili u dvanaest meseci, a dan u dvanaest dvočasova. Odredili su tačno dužine srednjeg anomalističkog meseca i našli da za 242 drakonistička obilaženja (t.j. ona od čvora do čvora) Meseca ili za 223 lunacija (ciklusa Mesečevih mena) treba isto toliko vremena kao za 19 drakonističkih obilaženja Sunca. Kako se pomračenja Sunca dešavaju samo onda kada Sunce i Mesec prođu u isti mali kroz čvor (preseka) njihovih prividnih putanja, to će se takva pomračenja ponoviti posle gorње periode vremena koju su oni nazvali Saros. Korak u korak, pratili su kretanje planeta i odredili velike periode njihovog obilaženja oko zvezdanog neba. Već dve hiljade godina pre Hrista bili su načisto s time da su zornjača i večernjača jedna te ista zvezda, što su Grci uvideli tek petnaest vekova kasnije.

Da li su Vavilonci nebeski svod rasprostrli do potpune lopte, o tome se mišljenja razilaze. Na geografskoj širini Vavilona pojavljuju se više od devet desetina nebeske sfere iznad horizonta, pa nam zato korak do potpune nebeske sfere izgleda neminovan. No valja imati u vidu da takvo saznanje nije odgovaralo tadanjim verskim nazorima, a kako su verske predrasude jače od najočiglednijih činjenica, to je moguće da se Vavilonci nisu usudili da izgovore ono što su sagledali, pa je zato tek slobodoumniji grčki narod objavio ono što su i Vavilonci uvideli.

Pre no što pristupimo Grcima, posvetimo nekoliko reči astronomiji starih Egipćana. Ona je bila možda još starija od vavilonske, jer početak prvog egipatskog kalendarskog računanja pada u godinu 4242 pre Hrista. I egipatski sveštenici bili su pažljivi posmatrači neba i održavali su u Denderi, Memfisu i Heliopolisu uređene zvezdare. Razaznavali su se po nebu veoma dobro, a svoje građevine upravljali tačno po nebeskim pravcima. Iščekivajući iz godine u godinu heliakični izlaz Siriusa (Sota), kada se on prvi put u godini pojavi na jutarnjem nebu, uvideli su da se ne samo taj izlaz nego i poplave Nila pomeraju postepeno iz godine u godinu da tek posle 1460 godina dođu na isto mesto u njihovom kalendaru u kojem je godina brojala 365 dana. To je značilo da je za vreme tog dugog intervala, koji su oni zvali Sotisovom periodom, njihov kalendar zaostao prema toku prirode za celu godinu dana. Deleći 365 sa 1460 dobiva se da je njihovoj kalendarskoj godini nedostajala četvrtina dana pa da dođe u sklad sa tokom godišnjih doba. Da se tome ispomognu, oni nisu znali, hteli ili smeli pa ostaviše to, kao što ćemo videti, Aleksandrijcima.

§ 2. Grci. U početku šestoga veka pre Hrista presađena su astronomska znanja Vavilonaca i Egipćana u Grčku. TALES MILEĆANIN (oko 630–540) bio je taj koji ih je prvi doneo u svoju jonsku otadžbinu. Po majci poreklom iz Fenicije, on je izvršio velika putovanja koja su ga odvela u Egipat, a sigurno i u Mesopotamiju gde se je upoznao sa haldejskim učenjem o periodicitetu Sunčevih pomračenja. Samo pomoću njega mogao je pretskazati pomračenje Sunca od 28 maja 585 godine i steći time visoki ugled i naziv svetskog mudraca. On je, kako se bar priča, učio da ne samo nebeski svod, nego i Zemlja sama, imaju oblik lopte što, u koliko se to tiče nebeskog svoda nije nimalo neverovatno, jer je taj plod saznanja u Vavilonu bio toliko sazero da ga je samo trebalo uzabrati. Sigurno je da je njegov učenik i prijatelj ANAKSIMANDROS (611–547) učio da nebo ima oblik lopte, a da naša Zemlja, koju je zamišljao u obliku bubnja, lebdi u središtu te lopte. Slava logički obrazloženog učenja da naša Zemlja ima oblik lopte pripada grčkoj filozofskoj školi Pitagorejaca u južnoj Italiji. PITAGORAS (oko 580–500) i njegovi učenici smatrali su da samo takav oblik Zemlje odgovara zahtevanoj harmoniji vasiona pa su oni smislili prvi sistem sveta. Po tom njihovom sistemu, lebdi loptasta Zemlja u središtu vasiona, oko tog središta obrće se kristalna sfera zvezda nekretnica, a u ovoj se, povlačene od nje, obrću sedam daljih koncentričnih sfera od kojih svaka nosi po jedno od sedam pokretnih nebeskih tela: Mesec, Merkur, Veneru, Sunce, Mars, Jupiter i Saturn. Poluprečnici ovih kristalnih sfera stoje u harmonijskim proporcijama pa šta više, i jedna, nama nečujna, muzika sfera upotpunjava ovu harmoniju vasiona.

Taj Pitagorejski sistem sveta bio je, stavljajući Zemlju u središte vasiona, *geocentričan*. No već u samoj toj školi otpoče postepeni razvitak toga sistema u pravcu ka *heliocentričnom*. FILOLAOS (u drugoj polovini petoga veka pre Hrista) pomerio je Zemlju iz centra vasiona da bi unj stavio nejasno definisanu Centralnu Vatru, a kasniji Pitagorejci HIKETAS SIRAKUŽANIN i EKFAOTOS učili su da se Zemlja obrće oko svoje ose, čime izaziva promenu dana i noći i usled čega dotle zamišljeno obrtanje sfere zvezda nekretnica postaje nepotrebno.

Učenja Pitagorejske škole stigla su u Atinu u najsajjnije doba ovog grada. ANAKSAGORAS (oko 500–428) doneo ih je, pošto se mnogo naputovao, onamo i učio još da Mesec zahvaljuje Suncu svoju svetlost i svoje mene. Optužen zbog ovog učenja za krivoboštvo, spasao se smrtne kazne samo na zauzimanje svoga prijatelja Perikla. Taj događaj objašnjava što je PLATON (429–348) izbegavao da zauzme jasan stav prema novom učenju, pa je sada nemoguće odrediti kako je on o njemu, u stvari, mislio. Sigurno je, međutim, da je u ono doba pitanje, da li Zemlja miruje ili se kreće, stajalo na dnevnom redu naučne diskusije. Tako je Platonov učenik HARKLEIDES PONTIKOS učio da se Zemlja obrće oko svoje osovine i time izaziva promenu dana i noći, oko nje da obilaze Mesec i Sunce, a oko ovoga da se kreću ostale planete, u najmanju ruku, Merkur i Venera. Drugi učenik Platonov, slavni ARISTOTELES (384–322), opredelio se, naprotiv, sasvim za geocentrični sistem sa mirujućom Zemljom u sredini vasiona. Ovakvo učenje velikoga filozofa, kojim je nesumljivo obustavio započetu izgradnju heliocentričnog sistema, ne smemo ipak oglasiti za nenaučno. Već zbog toga ne, što je Aristoteles, u opreci sa mističkim rasuđivanjima Pitagorejaca, ceo problem oblika i kretanja nebeskih tela stavio na čistu naučnu osnovu. On je, pre svega, ubedljivim naučnim razlozima, dokazao da je Zem-

lja okrugla, pozivajući se na to da je pri svakom pomračenju Meseca, u kojem god položaju Zemlje i Meseca se ono desilo, Zemljina senka ograničena krugom, što je moguće samo pri okruglom obliku same Zemlje. Ovome dokazu dodao je i ovaj. Iz pojave zvezda nad horizontom sleduje da je Zemlja okrugla i da nije baš preterano velika, jer kad pođemo jugu ili severu, menja se izgled zvezdanog neba nad horizontom osetno, tako da se zvezde koje prolaze kroz teme nebeskog svoda, od nje ga udaljavaju. Isto se tako mnoge južne zvezde viđaju u Egiptu i na Kipru, koje se u severnim krajevima nikad ne vide, a druge, severnije, zvezde ostaju stalno iznad horizonta, dok u južnim krajevima one, kao i ostale, zalaze pod horizont.

Ova rasuđivanja dokazuju da je konačno rešenje pitanja o obliku Zemlje delo Aristotelovo. A što on nije priznao da se Zemlja kreće, i to je imalo svojih naučnih razloga. Pre svega, pojava teže govori za mirujuću Zemlju, jer sve što je teško teži ka centru sveta pa bi i Zemlja onamo pala kad se ne bi već onde nalazila. A kada bi se Zemlja obrtala ili, šta više, kretala unapred, morali bismo zvezde nekretnice u različitim vremenima videti u različitom međusobnom položaju, što nije slučaj.

Ovo su oba Aristotelova argumenta za mirujuću Zemlju, od kojih bi drugi danas naučno izrazili rečima da zvezde nekretnice ne pokazuju nikakvu paralaksu. Ovim argumentima dodao je, kasnije, PTOLEMAJOS još jedan koji, verovatno, nije ni Aristotelu bio sasvim stran, i to ovaj. Kad bi se Zemlja, zaista obrtala od zapada prema istoku, morali bi se oblaci, ispod kojih bi Zemlja istrčavala, kretati prema zapadu, a isto tako svaki u vis bačeni ili padajući predmet. Ovaj argument može se obesnažiti samo principom inercije, a od postavljanja ovakvog principa bilo se u ono doba još veoma daleko. Bez principa inercije i bez dokaza da je paralaksa zvezda nekretnica neosetna, nije se mogao heliocentrični sistem naučno obrazložiti. Zato je Aristotelovo stanovište odgovaralo ondašnjem stanju nauke, a taj veliki mislioc bio je taj koji je osnovni problem o kretanju nebeskih tela bar jasno formulisao, a takvo naučno postavljenje problema je skoro polovina njegovog rešenja. Uzme li se još u obzir da je Aristoteles na srce stavio svom unuku Kalistenu, koji je sa Aleksandrom Velikim pošao u Vavilon, da prikuplja zapise o astronomskim posmatranjima Haldejaca, onda se mogu potpuno oceniti zasluge Aristitela za astronomsku nauku. On je, u ostalom, bio duhovni otac visoke aleksandrijske škole kojoj je bilo suđeno da reši osnovni problem kretanje nebeskih tela.

§ 3. Aleksandrijci. Kada je Aleksandar Veliki osvojio persijsko carstvo, podigao je 332 godine pre Hr. na morskoj obali Egipta novu jednu varoš koja je dobila njegovo ime. Kada je on, devet godina iza toga, sklopio za navek svoje oči, raspala se njegova ogromna država, koju podeliše između sebe njegove vojskovođe kao kakav ratni plen. Pri toj deobi dođe Egipat pod vlast Ptolemaja I, Lagija, koji je Aleksandriju odabrao za glavni grad svoje države. Ta prestonica Ptolemajovaca—svi naslednici prvog nosili su njegovo ime—razvila se brzo do najlepše varoši staroga sveta i postala njegovo duhovno središte, osobito onda kad je Ptolemajos II, Filadelfos, osnovao slavni aleksandrijski muzej, najveličanstveniji dom nauke staroga sveta. Među prvim nastavnicima te visoke škole nailazimo, još za vreme vladavine prvog Ptolemaja, na poznatog geometričara Euklida koji je i potonjim naraštajima bio učitelj geometrije, jer su njegovi Elementi do sada doživeli preko 1700 izda-

nja. Njegovi savremenici bili su prvi aleksandrijski astronomi TIMOHARIS i ARISTIL koji su, nastavljajući sistematski rad Haldejaca, naročitim istrumentima, armilama, određivali položaje zvezda na nebeskoj sferi i sastavili katalog tih zvezda po njihovim sfernim koordinatama. U ono doba stajala je Aleksandrija u živom saobraćaju sa Vavilonom koji je došao pod vlast Seleukovaca, naslednika jednog od vojskovođa Aleksandrovih. Grčka učenost dobi značaj svetske, a u bibliotekama Aleksandrije prikupiše se, počev od spisa Aristotelovih, sva naučna blaga sredozemnog sveta. Svi koji behu željni nauke pohitaše onamo, a prvi grčki naučnici dobiše poziv da se u tamošnjem muzeju, Visokoj Školi i Akademiji Nauka u isti mah, sasvim posvete naučnom radu. Pa i oni naučnici koji, kao što je to bio slučaj sa slavnim Sirakužaninom Arhimedom (287–212), nisu živeli u Aleksandriji, stajali su u tako uskoj vezi sa aleksandrijskom školom naučnika da ih s pravom možemo u nju ubrajati.

Između 280 i 260 godine pre Hr. učio je u Aleksandriji i vršio onde astronomska posmatranja ARISTARH SA SAMOSA (rođen oko 310, godina i mesto smrti nepoznati). Od njegovih naučnih spisa očuvali su se samo odlomci i citati, no već ti mali ostatci pokazuju jasno da je on bio jedan od najvećih astronoma starog sveta. On je prvi preduzeo da premeri nebeske prostore. To svedoči njegov mali spis „O veličini i otstojanjima Sunca i Meseca“ koji se očuvao potomstvu na taj način što je ušao u zbirku nazvanu „Mali Astronom“ koja je služila kao udžbenik i upotrebljavala se, komentirana od Papos, kao uvod u Ptolemajov Zbornik, do u srednji vek. U tom svom spisu saopštava Aristarh da je Mesec u trenutku kada je tačno po pola osvetljen, udaljen na nebeskom svodu od Sunca 87 stepeni. To znači da tada Sunce, Zemlja i Mesec obrazuju pravougaoni trougao, sa pravim uglom kod Meseca, a uglom od 87 stepeni kod Zemlje. Označimo li otstojanje Zemlje od Sunca sa D , otstojanje Meseca od Zemlje sa d , to je gornja činjenica izražena našim današnjim matematskim oznakama jednačinom:

$$d : D = \cos \alpha,$$

gde valja staviti $\alpha = 87^\circ$. Pošto Sunce i Mesec imaju jednake prividne veličine, jer se ta nebeska tela pri totalnim pomračenjima Sunca taman poklapaju, to sleduje, ako sa S označimo stvarni prečnik Sunca, a sa L stvarni prečnik Meseca,

$$L : S = d : D.$$

Aristarh je, sem toga, premerio prečnik preseka konične senke Zemljine na onom mestu gde Mesec kroz nju prolazi pri totalnim i centralnim svojim pomračenjima, mereći vreme potpunog ulaza Meseca u tu senku i vreme potpunog boravka Mesečevog u toj senci. Na taj način je našao da je prečnik senke taman dva puta toliki koliko prečnik Meseca. Konus Zemljine senke je, zbog velikog otstojanja Zemlje od Sunca, toliko šiljast da je prečnik njegovog preseka na onom mestu gde taj konus dodiruje Zemlju skoro jednak prečniku Zemlje T , a onde gde dodiruje Sunce jednak prečniku Sunca S . Otstojanje tih dvaju preseka je D , a treći presek konusa, kojega je prečnik, prema merenjima Aristarhovim, jednak $2L$, leži s one strane Zemlje u otstojanju d . Odatle sleduje:

$$(T - 2L) : (S - T) = d : D.$$

Izmerili se još prividni prečnik δ Sunca ili, što, prema pređašnjem, izlazi na isto, prečnik Meseca, to je

$$\delta = S : D$$

poznato, pa se iz prednje četiri jednačine mogu veličine D , d , S , L izraziti pomoću prečnika Zemlje T .

Na taj način našao je Aristarh ispravan geometrijski metod da premeri, pomoću Zemljinog prečnika, otstojanja Sunca i Meseca od Zemlje i veličine tih nebeskih tela.

U praktičnoj primeni tog načina merenja bio je Aristarh, ne raspolažući sa dovoljno usavršenim instrumentima, manje sretne ruke. Premeravanje ugla α ispalo mu je netačno (87° mesto $89^\circ 51'$), ne manje ono prividnog prečnika Sunca (2° mesto $30'$); pri merenju preseka Zemljine senke, na mestu gde Mesec kroz nju prolazi, pogrešio je Aristarh za skoro četvrtinu prave vrednosti. Nisu, dakle, ta stvarna merenja, koja je kasnije Hiparhos mogao da, unekoliko, ispravi, veliko delo Aristarhovo, nego geometrijski metod premeravanja nebeskih prostora. Od još većeg značaja bilo je to što je on, tim merenjima, saznao da je Sunce daleko veće od Zemlje i da otstojanja nebeskih tela premašuju daleko sve dotadanje pretstave. Nenadmašna veličina Sunca opredeljavala mu je mesto u sredini vasiona, a svojim smelim duhom, osetio je Aristarh da se najudaljenija nebeska svetla, zvezde nekretnice, nalaze u tolikoj daljini koja obesnažuje Aristotelov argumenat protiv kretanja Zemlje. Jer ako je, kao što je to Aristarh uvideo, poluprečnik Zemljine putanje oko Sunca beskonačno malen prema poluprečniku sfere zvezda nekretnica, onda ne možemo, usled godišnjeg kretanja Zemlje, zvezde nekretnice viđati u različitim međusobnim otstojanjima. Tim dubokim saznanjem bila je stvorena pouzdana naučna osnova na kojoj je Aristarh mogao da sazida svoj heliocentrični sistem.

Od spisa kojim je Aristarh postavio i obrazložio taj svoj heliocentrični sistem nije nam se očuvao ni sam naslov. No o tom Aristarhovom sistemu izveštavaju nas, u istom smislu, nekoliko starih pisaca, a sa toliko pojedinosti da ga možemo potpuno rekonstruisati. Najvažnije i najpouzdanije svedočanstvo daje nam Arhimedes, mlađi savremenik Aristarhova, u svom spisu nazvanom *Arenarius*. I Plutarh izveštava opširnije o Aristarhovom heliocentričnom sistemu, a spominju ga Stobejon, Simplicius, Sekstus i drugi. Iz svih tih svedočanstava sleduje nesumnjivo da je Aristarh postavio hipotezu da Sunce miruje u centru vasiona, da se sfera zvezda nekretnica ne obrće, a da se Zemlja kreće oko Sunca po krugu, obrćući se, pri tome, oko svoje ose, nagnute prema putanji Zemlje. Ovaj sistem ne razlikuje se, svojom suštinom, od potonjeg Kopernikovog.

Po spomenutim svedočanstvima, imao je Aristarh svojih učenika, a njegov sistem svojih pristalica. Za Haldejca SELEUKOSA iz Seleukije, koji je živio oko polovine drugoga veka pre Hr., govori se da je Aristarhov sistem ne samo prihvatio, nego ga i dokazao. U čemu se sastojao taj dokaz, ne zna se.

Aleksandrijskoj školi pripada i slava prvog premeravanja Zemljine lopte, koje je izvršio ERATOSTENES (276–194), slavni upravnik aleksandrijske biblioteke. Doznajući da se u Sijeni, jednom mestu gornjeg Egipta, a južno od Aleksandrije, nalazi jedan bunar u kojem se Sunce jedanput u godini, o podne najdužeg dana, ogleda, preduzeo je Eratostenes da, pomoću toga, izmeri veličinu naše Zemlje. U tome cilju izmerio je, pomoću jednog još od Aristarha izrađenog instrumenta, skafe, zenitsko otstojanje Sunca u Aleksandriji, u samo podne najdužega dana u godini. To je otstojanje, zbog ogromne daljine Sunca, jednako centričnom uglu što ga polupre-

čnici povučeni iz središta Zemlje prema Sijeni i Aleksandriji međusobno zatvaraju. Znajući taj ugao i odgovarajući luk meridiana, ograničen Sijenom i Aleksandrijom, lako je izračunati poluprečnik i opseg najvećega kruga naše Zemlje. Onaj luk merio je, prema podacima kraljevskih premeravača puteva, 5000 stadija, a onaj ugao, meren u lučnoj meri, jednu pedesetinu punog kruga. Odatle je Eratostenes izračunao da opseg Zemlje meri $50 \cdot 5000 = 250\,000$ stadija, rezultat koji, ukoliko nam je tačno poznata dužina stadija, odgovara neočekivano dobro stvarnosti.

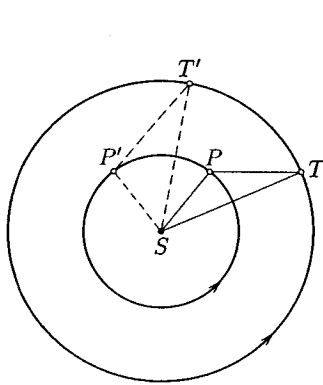
Za vreme Eratostena izvršena je u Aleksandriji reforma starog egipatskog kalendara. Kako nas o tome izveštava jedan 1869 god. pronađen zapis u kamenu (Karnopski edikat), odlučilo je 7 marta 238 god. pre Hr. egipatsko sveštenstvo da svaka četvrta godina bude prestupna, sa 366 dana. Ovo pravilo o prestupnim godinama, izvedeno iz staroegipatske periode Sotis, presadio je, dvesto godina docnije, Aleksandrijac SOSIGENES u Julijanski kalendar, gde se do danas održalo.

Ova kalendarska reforma izvršena je pod vladom Ptolemaja III, Evergeta, poslednjeg od tri velika vladara ptolemajskog Egipta. Njegova vladavina pretstavlja, i u naučnom pogledu, zlatno doba aleksandrijske periode. To je doba obuhvatilo vek Arhimeda i Eratostena i mlade godine najvećeg naslednika Arhimedovog na polju geometrije. APOLONIOS PERGEJSKI (oko 260–170) učio je u Aleksandriji kod naslednika Euklidovih geometriju i u toj varoši napisao je svoje delo o kouičnim presećima, veličanstveni spomenik aleksandrijske nauke. No Apolonios se bavio i problemima astronomije, kako to svedoči jedna njegova teorema saopštena u Ptolemajovom Zborniku. Važno bi bilo znati kojim je povodom došao Apolonios do te svoje teoreme. O tome nam Ptolemajos ništa ne saopštava, a spis Apoloniov o tom predmetu nije se sačuvao. Pokušajmo, ipak, da odgovorimo na postavljeno pitanje, jer je ono od presudnog značaja za istoriju heliocentričnog sistema.

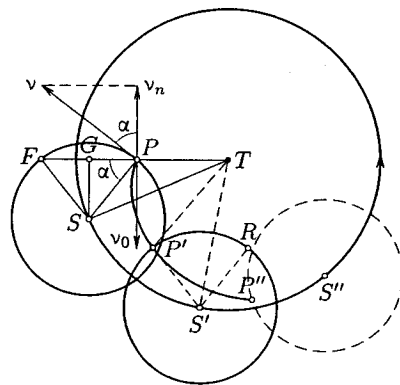
Sigurna je stvar da je Apolonios poznavao Aristarhovo učenje koje je niklo, u doba njegova rođenja, u istoj onoj školi u kojoj je i on, kasnije, učio i koje je, kao što smo čuli, imalo, i iza smrti Aristarhove, svojih pristalica, među kojima je bio možda i sam Apolonios, jer ga Hipolitos spominje uz Aristarha. Nesumnjivo je, na svaki način, da je Aristarhova nauka stajala na dnevnom redu naučne diskusije još za vreme boravka Apolonija u Aleksandriji. O Aristarhu govori, kao što smo čuli, Arhimedes u svome *Arenariusu*. U tome delu spominje se i Eratostenovo premeravanje Zemlje, pa je zato to delo moralo biti napisano baš u doba Apoloniovog boravka u Aleksandriji. Sigurno je da se Apolonios upoznao sa tim spisom Arhimeda, jer je ovaj stajao u tesnoj vezi sa aleksandrijskom školom i svoje spise posvećivao aleksandrijskim naučnicima Kononu, Dositeju i Eratostenu. Ako je, dakle, što nam izgleda nesumnjivo, Apolonios razmišljao o Aristarhovom sistemu, mogao je on da se zapita kako bi izgledala ta Aristarhova kretanja nebeskih tela posmatrana sa Zemlje. On je bio nesumnjivo u stanju da to pitanje reši geometrijskim rasuđivanjima na primer na sledeći način, pri kojemu smo se, jednostavnosti radi, poslužili sadašnjim geometrijskim oznakama i oruđem.

Neka nam u sl. 1 pretstavlja S Sunce, a T Zemlju koja, prema Aristarhovoju nacuci, obilazi oko Sunca po krugu radiusa ST . Neka nam P pretstavlja jednu planetu, recimo Veneru, za koju je već Herakleides Pontikos govorio da oko Sunca opisuje krug, u našem slučaju krug radiusa SP . Jednostavnosti radi, pretpostavimo da obe ove putanje padaju u ravan slike. Početni položaji uočenih triju nebeskih tela

neka budu, dakle, S , T i P . Smisao obilaženja Zemlje i planeta oko Sunca označen je na slici strelicom. Ako sa τ_0 označimo vreme obilaženja Zemlje oko Sunca, mereno, danima, a sa τ vreme obilaženja planete oko Sunca, onda nam $\omega_0 = 360^\circ/\tau_0$ i $\omega = 360^\circ/\tau$ predstavljaju srednja dnevna kretanja tih nebeskih tela oko Sunca. Zato će se uočena tri nebeska tela n dana iza početnog položaja nalaziti u položajima S , T' , P' , pri čemu je $\sphericalangle TST' = n\omega_0$; $\sphericalangle PSP' = n\omega$.



Слика 1



Слика 2

Posmatrana sa Zemlje, ta će se kretanja odigravati ovako. Neka nam, u sl. 2, T predstavlja Zemlju. Nacrtajmo u toj slici trougao TSP paralelan i kongruentan trouglu TSP slike 1. Relativna putanja Sunca prema Zemlji predstavljena je očigledno krugom $SS'S''$ radiusa TS ; po toj prividnoj putanji kreće se Sunce srednjim dnevnim kretanjem ω_0 u pravcu označenom na slici strelicom. n dana posle početnog položaja S stići će Sunce u položaj S' , pri čemu je $\sphericalangle STS' = n\omega_0$. Početni položaj planete predstavljen je u sl. 2 tačkom P . Da nađemo položaj P' planete n dana iza tog početnog položaja P treba da nacrtamo trougao $TS'P'$ paralelan i kongruentan trouglu TSP slike 1. Opišimo još oko S i S' krugove sa istim radiusom $SP = S'P'$, povucimo $S'R$ paralelno sa SP , to sleduje iz uporednosti zraka $S'R$, $S'P'$ sl. 2 sa zracima SP odnosno SP' sl. 1 da je $\sphericalangle RS'P' = n\omega$. Položaj P' planete u sl. 2 je, prema tome, takav kao da se središte kruga opisanog oko S pomerilo u S' , a da se planet na tom krugu za vreme od n dana kretao srednjim dnevnim kretanjem ω . Relativno kretanje planete prema Zemlji može se, prema gornjem, shvatiti kao složeno ep ciklično kretanje: po periferiji kruga SS' , nazvanog koncentar, putuje, srednjim dnevnim kretanjem ω_0 , centar jednog drugog kruga, nazvanog ep cikl, a po periferiji toga kruga kreće se planeta srednjim dnevnim kretanjem ω . Planeta opisuje pri tome, relativno prema Zemlji, ep cikličnu krivu $PP'P''$...

Odgovorimo još na pitanje, u kojem će položaju planet, posmatran sa Zemlje, prividno trenutno zastati, pa zatim obrnuti pravac svoga kretanja. To će se očigledno desiti onda kad obe komponentalne brzine njegove, normalne na radiusvektor, budu jednake, a protivnog pravca. Usled kretanja ep cikla po centru, ima planeta u položaju P brzinu v_0 , normalnu na radiusvektor TP , koja je jed-

naka $v_0 = \omega_0 \overline{TP}$, dok je njena brzina, normalna na SP , usled kretanja po ep ciklu, jednaka $v = \omega \overline{SP}$. Komponenta v_n ove brzine, normalna na TP , jednaka je $v_n = v \cos \alpha = \omega \overline{SP} \cos \alpha$, pa kako v_0 i v_n treba da budu jednake i da, kao u slici, imaju protivan pravac to sleduje odatle $\omega_0 \overline{TP} = \omega \overline{SP} \cos \alpha$. Produžimo li pravu TP do njenog preseka F sa ep ciklom, to je, pošto je $\sphericalangle SPF = \alpha$, duž $\overline{SP} \cos \alpha$ jednaka polovini PG tetive PF . Zato je $\omega_0 \overline{TP} = \omega \overline{PG}$ ili

$$\overline{PG} : \overline{TP} = \omega_0 : \omega.$$

Ovaj rezultat, predstavljen ovde matematskim obrascem, nalazi se, izražen rečima, u prvoj glavi dvanaeste knjige Ptolemajovog Zbornika i nazvan je Apoloniovom teoremom.

Izvođenje ove teoreme otkrilo nam je i suštinu teorije ep cikala koja je, kao što ćemo videti, igrala važnu ulogu u kasnijoj aleksandrijskoj astronomiji. Apolonios se napominje na više mesta kao tvorac te teorije pa se iz prethodnoga jasno vidi da je do teorije ne samo mogao, nego i morao doći, polazeći od Aristarhovog heliocentričnog sistema. Aristarhova nauka morala je biti, u najmanju ruku, radna hipoteza pri stvaranju teorije ep cikala, jer je to najprirodniji postanak te teorije.

Bila je velika nedaća po heliocentričnu nauku da je Apolonios napustio Aleksandriju i otišao u Pergamon da, sprijateljjen sa tamošnjim kraljem Atalosom, nastavi svoj naučni rad. Sa Apolonijom je prekorao vrhunac aleksandrijskog naučnog perioda, posle njega ne beše nikog više koji bi u stanju i da razume, a kamo li da produži, naučni rad Arhimeda koji je, kao što svedoči njegov tek 1906 godine pronađeni spis Efodos, bio već pristupio izgradnji osnova infinitezimalnog računa.

HIPARHOS IZ NIKEJE (u drugoj polovini drugog veka pre Hr.), koji je do nedavna smatran za najvećeg astronoma staroga sveta, živeo je već u doba opadanja aleksandrijske nauke. To se oseća već po tome što su od njegovih mnogobrojnih spisa očuvani samo beznačajni. I o njegovom životu znamo veoma malo. Vršio je (128 i 129 pre Hr.) posmatranja neba na ostrvu Rodosu koje je onda pripadalo egipatskoj državi, boravio je sigurno u Aleksandriji, a bio možda i u Vavilonu. To se vidi iz toga što je sa haldejskom astronomijom bio toliko dobro upoznat da je danas teško odrediti koliko je originalan u svojim učenjima o kojima smo izveštani putem Ptolemajovog Zbornika. Podela kruga u 360 stepena, koju je on primenjivao, saznanje o nejednakosti godišnjih doba, račun sa tetivama, t.j. početci trigonometrije, haldejskog su porekla. No Hiparhos je sva ta pravila stavio na strogo naučnu osnovu. Zato ga možemo smatrati ocem trigonometrije. Nejednakosti godišnjih doba i godišnje kretanje Sunca rastumačio je, stavši na geocentričko stanovište, a ne odstupajući nikako od kružnih uniformnih kretanja, time što je pretpostavio da se Sunce kreće ravnomerno po kružnoj ali ekscentričnoj putanji. Centar te putanje pomerio je, dakle, iz Zemlje pa je, zbog toga, u kasnijoj aleksandrijskoj astronomiji, Apoloniosov koncentar zamenjen ekscentrom. Tim se, zaista, mogu jednostavno rastumačiti nejednakosti godišnjih doba i, pored sve uniformnosti stvarnog kretanja, nejednakosti prividnog kretanja Sunca. Isto to sretstvo upotrebio je u teoriji kretanja Meseca, služeći se pri tome haldejskim posmatranjima toga kretanja. Naročitu sreću imao je sa svojim katalogom zvezda u kojem je saopštio njihove koordinate u pogledu na ekliptiku. Upoređujući ga sa katalogom Aristila i Timoharisa, pronašao je precesiju ravnodnevnica. To je bilo njegovo najveće delo

o kojem će još biti govora. Njegove smo zasluge za merenje otstojanja Sunca i Meseca već spomenuli.

Nema sumnje da je Hiparhos bio najveći astronomski posmatrač staroga veka. no. baš zbog toga, nije on imao smisla za smeće teorije, nego se zadovoljio time da svoja posmatranja izvrši što tačnije i iz njih izvuče najneposrednije zaključke: nije imao ni stvaralačkog genija Arhimedovog ili Apoloniovog niti kosmičkog vidokruga Aristarhovog.

Za vreme aleksandrijskog rata Julija Cezara, zadesila je aleksandrijsku nauku velika nesreća: slavna biblioteka Muzeja posta žrtvom plamena. Iako je, uskoro zatim, Markus Antonius preneo bogatu biblioteku pergamonsku u Aleksandriju i prisajedinio je biblioteci koja je čuvana u Iramu Serapeionu, aleksandrijska škola nije imala više prvog poleta. Godine 30 pre Hr. ušao je, preko leševa Antoniusa i Kleopatre, poslednje kraljice ptolemajskog Egipta, Oktavian u Aleksandriju. Egipat posta provincijom rimskoga carstva.

Sve ove događaje koji su potresali stari svet valja imati u vidu ako hoćemo pravilno da ocenimo poslednjeg velikog astronoma aleksandrijskog o kojem ćemo sada govoriti.

KLAUDIUS PTOLEMAJOS (87–165?) stoji u zavidnom položaju iznad svih astronoma staroga veka time što je njegovo glavno delo „Veliki Zbornik Astronomije“ ili „Velika Sintaksa“, nazvano kasnije, stapajući arapsko „al“ sa grčkim „megiste“, „Almagest“, potpuno sačuvano i dočekalo svoje štampanje u velikom broju rukopisnih egzemplara. To delo je sistematski skup celokupnog astronomskog znanja završnog perioda aleksandrijskog. Podeljeno je u dve sveske i trinaest knjiga od kojih prva služi kao uvod u kojem su izloženi osnovni pogledi na sastav vasiona i potrebna geometrijska sretstva astronomije sa trigonometrijskim tablicama. Druga knjiga posvećena je, uglavnom, astronomskoj geografiji i merenju vremena. Treća knjiga bavi se kretanjem Sunca, četvrta i peta kretanjem Meseca, a šesta pomračenjima Sunca i Meseca. U petoj knjizi opisana je i konstrukcija astronomskih instrumenata, koja se u Aleksandriji vrlo usavršila, sigurno radom poznatoga geodeta i mehaničara HERONA ALEKSANDRIJSKOG (oko 100 pre Hr.). Druga sveska „suština svega“, kako je Ptolemajos sam naziva, posvećena je, sa svojih sedam knjiga, zvezdama, pa sadrži katalog 1022 zvezde nekretnice i vrlo cenjenu piščevu teoriju kretanja pet starih planeta. Vlastita i stvarna, starija, astronomska posmatranja, naročita ona koja je izvršio Hiparhos, iskorišćavana su, a i sedam vavilonskih posmatranja pomračenja iz razdoblja od 721 do 383 pre Hr.

Kako što se već iz ovog kratkog izveštaja može videti, Ptolemajovo delo je, zaista, pravi zbornik znanja slavnog aleksandrijskog doba astronomije. U njemu je Ptolemajos zauzeo, oslanjajući se na Hiparha, geocentrično stanovište, što se vidi već iz osnovnih stavova izloženih u početku dela. To su ovi:

- * 1. *Nebeski svod ima oblik lopte i obrće se kao ova.*
- 2. *Po svom obliku, naša je Zemlja, smatrana kao jedna celina, takođe okrugla.*
- 3. *Svojim položajem, naša Zemlja zauzima, kao kakav centar, središte celokupnog nebeskog svoda.*
- 4. *Svojom veličinom i otstojanjem, naša Zemlja stoji prema sferi zvezda nekretnica u odnosu jedne tačke.*
- 5. *Zemlja nema kretanja koje bi izazvalo promenu njenog položaja.*

Ovi stavovi obrazloženi su i uzdignuti iznad svake sumnje argumentima o kojima smo već kod Aristotela govorili. Ptolemajos pominje, istina, i protivno mišljenje nekih filozofa koji su „smatrali nebesku sferu nepomičnom i uzeli da se Zemlja oko ose sveta obrće od zapada prema istoku“, ali on, tom prilikom, ne spominje ime Aristarhovo, iako njegova genijalna zamisao prozire jasno kroz četvrti gornji stav. Bez podataka o poreklu upotrebljava Ptolemajos jednu nesumnjivo Aristarhovu trigonometrijsku teoremu i njegov način premeravanja otstojanja Sunca i Meseca. Samo, prilikom izračunavanja dužine godine, spominje Ptolemajos Aristarha, no sa slabom ocenom. I Apolonios, genijalni tvorac teorije epicikala, spominje se jedan jedini put, prilikom izvođenja njegove teoreme o kojoj smo govorili, da, odmah zatim, rečima: „ali mi...“, bude ostavljen u dubokoj tami.

Kao što se iz ovih primera vidi, Ptolemajos ne priznaje rado zasluge drugih. U tom pogledu, čini on izuzetak jedino sa Hiparhom da bi njegovim autoritetom potkrepio svoja vlastita saopštenja i stavlja ga iznad svih ostalih astronoma, izuzimajući, prirodno, sebe samoga. Zbog toga govori pokatkad i o Hiparhu sa izvesne visine.

Zbog svega toga, ne daje nam Ptolemajov Zbornik, pored sve svoje vrednosti i za istoriju, potpunu sliku razvitka aleksandrijske nauke pa smo zato baš u najvažnijem pitanju, onom o međusobnom stavu i o sudbini dvaju glavnih sistema sveta, upućeni na naslućivanja i na druga svedočanstva. Nesumnjivo je da su oba sistema sveta imala ne samo svojih pristalica nego i svoje škole u krugu aleksandrijskih naučnika. Neko vreme, u doba Aristarha, Apolonija i Seleukosa, izgleda da je heliocentrični sistem nailazio na priznavanje da ga, pojavom Hiparha, izgubi. Ptolemajos, ubeđeni geocentričar, izbegava da govori o shvatanjima heliocentričara. On iskorišćava za vlastitu upotrebu njihove geometrijske konstrukcije, ali prećutkuje njihov stav. To je naročito slučaj sa teorijom epicikala koja je, kao što smo pokazali, verovatno iznikla iz heliocentričkih rasuđivanja. Metoda epicikala, shvaćena kao matematsko sretstvo, odgovara, ako se broj epicikala proizvoljno uveća, našim današnjim razvijanjima u redove, pa se zato pomoću složenih epicikala mogu predstaviti najraznoličnija kretanja, kako je to pokazao Mebius u svojoj „Nebeskoj Mehanici“ (1843). Ptolemajos je to sretstvo, kao što to sam, i ne bez prava, kaže, iskoristio sa uspehom kao niko pre njega. On je time, da upotrebimo opet njegove reči, izvršio džinovsko delo, ali je njime prikrio prouzročitelj teorije epicikala toliko da je trebalo novog džinovskog dela da bi se opet pronašao put ka heliocentričnom sistemu.

Ptolemajos, oslanjajući se u tome sasvim na Hiparha, dozvoljava samo uniformna kretanja po krugovima, „jer samo takva odgovaraju prirodi nebeskih bića kojima je nepravilnost i nejednakost strana“, pa tumači tim kretanjima sve nejednakosti hoda nebeskih tela. Zbog toga je bio primđen da uveća broj epicikala. On se, kao i Hiparhos, poslužio ekscentričnim nosiocem epicikla, ekscentrom, koji je dobio naziv deferenta. U svojoj veoma cenjenoj teoriji Meseca, pretpostavio je Ptolemajos da se centar tog deferenta kreće po jednom daljem kružnom nosiocu retrogradno. Da bi mogao da pretstavi kretanja planeta u širinu, dao je ravnima epicikala potrebne nagibe prema ekliptici. Kod onih planeta koje se kreću s one strane Zemljine putanje, zamenio je, čime konačan efekat nije bio promenjen, međusobno deferentat sa epiciklom, da ne bi radius epicikla ispao veći od radiusa deferenta. Sva ova, sa matematskog gledišta potpuno opravdana sretstva, prikrija su potpuno stvarni postanak epicikla i put ka heliocentričnom sistemu.

Posle Ptolemaja nije živeo u Aleksandriji niko više koji bi bio u stanju da taj put pronađe, jer naslednici Ptolemaja, PAPOS ALEKSANDRIJSKI (kraj trećeg veka) i TEON ALEKSANDRIJSKI (kraj četvrtog veka) ne behu drugo no brižljivi komentatori njegove knjige. Godine 392 po Hr. razorila je pljačkaška rulja, fanatizovana od arhiepiskopa Teofila, Serapeion, poslednje pribežište aleksandrijske nauke, a godine 640 pade Aleksandrija u ruke Arapa.

§ 4. Srednji vek. Sa srednjim vekom propadoše najdragoceniji plodovi grčke nauke. Nije se više verovalo da je Zemlja okrugla i da je nebeski svod obuhvata sa sviju strana. Hrišćanska vera nije dozvoljavala takvu nauku. Zato se pošlo u shvatanju sveta unatrag, zamišljajući da je Zemlja okrugla ploča sa Jerusalimom u sredini, zapljuskivana sa svih strana okeanom, a prekrivena, zajedno sa morem, neбом koje ima oblik zvona. Iza toga zvona, na jednom kontinentu na istoku, nalazilo se carstvo blaženih. Taj se raj rasprostirao i iznad neba gde su anđeli upravljali kretanjem nebeskih tela; pri tome je Sunce za vreme noći vođeno oko osnove neba do svog ponovnog izlaska.

To je bila, uglavnom, slika sveta ranog srednjeg veka. Da se takvo shvatanje koje je odgovaralo hrišćanskom verovanju ne bi ničim uzdrimalo, zabranjeno je učenje starih, paganskih, klasika. A kada bi crkva bila u nedoumici kako da odredi dane svojih vlastitih praznika, ona je slala svoje poklisare u Španiju da tamo od arapskih naučnika dobije potrebna obaveštenja.

Mladi narod Arapa, pun životne snage i poleta, raširio je za neverovatno kratko vreme svoju vlast od Indije preko Severne Afrike do u samu Španiju. Brže no ostali narodi, utolio je želju za razoravanjem stare kulture pa se posvetio njenoj nezi. Gajeći nauke, a osobito astronomiju, spasili su Arapi od aleksandrijske astronomije što se još spasti moglo. Osnivane su velike škole, podizane su zvezdare, premeravana Zemlja i vršena astronomska posmatranja kojima je precesija ravnodnevniča tačnije određena i otkriveno pomeranje apsida. Sastavljeni su katalogi zvezda, trigonometrijske tablice i tablice kretanja planeta, a dekadni sistem i način pisanja brojeva, koji je nikao u Indiji, presađen je u Evropu. Aristoteles, Euklid, Arhimedes, Apolonios, Heron i Ptolemajos prevedeni su na arapski jezik i našli puta ka zapadnim narodima.

Plodovi jelinske kulture, sačuvani i dostavljeni hrišćanskoj Evropi posretstvom Arapa, prihvaćeni su ovde sa velikim interesovanjem i dali jak potstrek zapadnjačkoj nauci. Kada se preteča Kopernikov, učeni kardinal NIKOLA KUZANUS (1401–1464), koji je učio da se Zemlja kreće, nalazio, kao izaslanik papin, u Carigradu, nije propustio ovu priliku a da odande ne ponese starih grčkih rukopisa u Italiju. Godine 1453 pade Carigrad Turcima u ruke, a ondašnji grčki naučnici izbeguše u Rim gde nađuše gostoprinstvo kod pape Nikole V. Oni donesoše starih rukopisa i raširiše poznavanje grčkog jezika. Prvi zapadnjački astronomi ove epohe, GEORG PURBAH (1423–1461) i njegov učenik JOHAN MILER, REGIOMONTANUS, (1436–1476) behu dobri poznavaoči aleksandrijske nauke, pa izvršiše ili popraviše latinske prevode Ptolemaja i Arhimeda. I genijalni LEONARDO DA VINČI (1452–1519), koji je našu Zemlju smatrao za zvezdu, poznavao je dobro spise sirakuškog naučnika. Padu Carigrada sledovaše brzim korakom drugi, ne manje važni, svetski događaji:

pronađena je Amerika, nađen put u Istočnu Indiju, a Zemlja oplovljena. Slika sveta srednjeg veka nije se mogla više održati, astronomija je postala neophodno potrebno oruđe moreplovaca, preporodu umetnosti sledovao je preporod nauke.

§ 5. Kopernik. Heliocentrični sistem velikoga reformatora astronomije NIKOLE KOPERNIKA (1473–1543) nije drugo do obnova heliocentričnog sistema starih Grka. „Potrudio sam se, što sam više mogao“, izveštava on sam, „da pročitam ponovo sve knjige starih filozofa do kojih sam mogao doći, da vidim e da li je kogod drugi bio različitog mišljenja o kretanju nebeskih tela nego što se sada to uči u školama matematskih nauka. Tako sam našao kod Cicerona da je Hiketas Sirakužanin verovao da se Zemlja kreće. Posle nađoh i kod Plutarha da su i drugi bili istog mišljenja“. Na drugom mestu njegovog rukopisa koje je, čudnovatim slučajem, prebrisano pre štampanja, stoji ovo: „Verovatno je da je Filolaos pretpostavio da se Zemlja kreće, koju je pretpostavku učinio i Aristarh sa Samosa, kako to neki saopštavaju“.

Sa učenjem Aristarha upoznao se Kopernik, kao što to Aleksandar Humbolt s pravom misli, preko Plutarha, jer tog pisca izrično označava kao svoj izvor, a Plutarh govori na dva razna mesta o Aristarhu. Da li je Kopernik poznavao i spomenuti izveštaj Arhimedov o Aristarhu, nije sasvim sigurno. Mnogi misle da nije, jer prvo potpuno izdanje Arhimedovih spisa izašlo je iz štampe tek 1544 godine. No valja uzeti u obzir da su spisi Arhimeda bili poznati zapadu već 1281 godine i, u vreme Kuzanusa, bili dovoljno rasprostranjeni u rukopisnim egzemplarima. Jakov iz Kremone preveo ih je 1449 godine na latinski jezik, godine 1503 štampan je u Italiji, u nepotpunom izdanju, Gaurikusov latinski prevod Arhimeda, a baš te godine bavio se Kopernik na studijama u Italiji. Zato se ne bi smelo kazati da Kopernik nije poznavao ono važno mesto o Aristarhu u Arhimedovom *Arenariusu*. Svakako je sigurno da je Kopernik, bilo posretstvom Plutarha, bilo putem Plutarha i Arhimeda, poznavao heliocentrični sistem Grka, a naročito sistem Aristarhov. No sve to ne umanjuje njegovu slavu da je, suagom titana, ponovo sazidao porušeno zdanje heliocentričke nauke i postavio ga na sigurnu osnovu. On je to izvršio svojim besmrtnim delom: *De revolutionibus orbium coelestium*, 1543.

Kopernikova zgrada vasiona ima ovaj raspored. Nepomična sfera zvezda nekretnica spoljna je granica te zgrade. Koračajući prema njenoj unutrašnjosti, nailazimo prvo na kružnu putanju Saturna, obilaženu za 30 godina, dalje na putanju Jupitra sa dvanaestgodišnjim obilaženjem, zatim na putanju Marsa koji ju obilazi za dve godine. Na četvrtom mestu nalazi se godišnja putanja Zemljina sa epicikličkom putanjom Meseca. Na petom mestu kruži Venera u devet meseci, šesto mesto zauzima Merkur koji u 80 dana obilazi svoju putanju. U sredini cele ove zgrade stoji Sunce, jer „gde bi bilo zanj lepšeg mesta u ovom divnom hramu... Tako upravlja Sunce, sedeći na svom kraljevskom prestolu, svoju porodicu zvezda“.

Po Koperniku, vrši naša Zemlja tri razna kretanja:

1. Dnevno obrtanje oko svoje ose od zapada prema istoku, iz kojeg sleduje prividno kretanje svih zvezda od istoka prema zapadu. ❀
2. Godišnje kretanje oko Sunca od zapada prema istoku, iz kojeg sleduje prividno godišnje kretanje Sunca istog smisla obilaženja.

3. *Godišnje konično kretanje Zemljine ose oko normale uzdignute na ravan ekliptike u obrnutom smislu predašnjih kretanja.*

Kako je Kopernik, bez ikakve potrebe, pretpostavio da bi, inače, Zemljina osa stajala u čvrstoj vezi sa pravom što spaja Zemlju sa Suncem, to ovo treće kretanje treba, s jedne strane, da osigura skoro nepromenjenu orijentaciju Zemljine ose u prostoru za vreme njenog obilaska oko Sunca, a, s druge strane, da time što periode poslednjih dvaju kretanja nisu potpuno jednake, rastumači precesiju ravnodnevnica. Od ovog trećeg kretanja ostalo je danas kao prihvaćeno samo lagano precesionno kretanje Zemljine ose, pošto se uvidelo da slobodno telo koje rotira oko svoje ose održava nepromenjenu orijentaciju te ose u prostoru.

Kopernikov sistem je, u njegovim osnovnim crtama, identičan heliocentričnom sistemu starih Grka. I razlozi koje Kopernik upotrebljava za dokaz svoga sistema nalaze se, većim delom, kod njegovih prethodnika. Otsustvo godišnje paralakse zvezda nekretnica tumači Kopernik, isto tako kao i Aristarh, time što je poluprečnik Zemljine putanje beskonačno malen prema otstojanju zvezda nekretnica. Argumenat u korist heliocentričnog sistema da se Merkur i Venera na nebu nikada mnogo ne udaljuju od Sunca, a da nam ostale planete izgledaju najbliže kad su u opoziciji prema Suncu, nalazi se zabeležen kod Marcianusa Kapele. Relativna priroda svih kretanja objašnjena je bila već od Kuzanusa. Ali je Kopernik sve te pojave i njihove uzroke dublje prozreo no sve njegove preteče i složio ih u logičnu celinu, pa stvorio time potpun jedan sistem koji je zaslužio njegovo ime. On je, iznad svega toga, i to je njegova najveća i neprikosnovena zasluga, razmršio klupče teorije epicikala i prodro do njenog heliocentričnog jezgra.

Kopernik je genijalnim pogledom uvideo da, kod planeta koje kruže u unutrašnjosti Zemljine putanje, kretanje po deferentu ne predstavlja ništa drugo no sliku kretanja Zemlje oko Sunca, a kretanje po epiciklu stvarno kretanje planete oko Sunca. Tim je našao da je ovde srazmera radiusa deferenta prema radiusu epicikla identična srazmeri otstojanja Zemlje i otstojanja planete od Sunca. Kod ostalih planeta, gde su, kao što smo rekli, deferent i epicikl međusobno zamenjeni, obratan je slučaj. Odabere li se, prema tome, radius Zemljine putanje za jedinicu dužine, to se mogu iz brojeva Ptolemajovih, koji nam daju odnose radiusa epicikla i deferenta, očitati otstojanja planeta od Sunca, merena onom jedinicom. Na taj način dobivaju se ova otstojanja: Merkur 0,375; Venera 0,720; Mars 1,52; Jupiter 5,21; Saturn 9,18.

Ove su vrednosti veoma bliske stvarnosti pa pokazuju koliko je dragocenog materijala ležalo skriveno u Ptolemajovom Zborniku. Da bi iz saopštenih relativnih vrednosti našao stvarne, uzeo je Kopernik za poluprečnik Zemljine putanje Ptolemajov broj od 1210 Zemljinih radija koji daleko zaostaje iza stvarnosti. No time se međusobne proporcije sastavnih delova Sunčevog sistema nisu promenile. Zbog toga je Kopernik smeo da kaže sa punim pravom: „Oni koji su smislili epiciklične krugove nisu bili u stanju da nađu, a kamo li da izračunaju ono što je najvažnije, oblik sveta i sigurnu simetriju njegovih delova“. A on ju je, zaista, izračunao.

Prirodno je da je Kopernikov sistem imao svojih nedostataka, i astronomskih i fizikalnih. Astronomskih, što, u koliko se ticalo zakona inercije, nije bio u stanju da obori Ptolemajov argumenat. No Kopernik je Ptolemajovo tvrđenje da bi se naša Zemlja, kada bi se zaista obrtala, morala raspasti, obesnažio time da bi takva opasnost ugrozila u daleko većoj meri sferu zvezda nekretnica koja bi se, po Ptole-

maju, morala obrtati neverovatnom brzinom. Tome je dodao ovo: „Ako uzmemo u obzir beskonačno otstojanje zvezda nekretnica, onda smo jedva u stanju da zamislamo da bi one bile u stanju da prevale svoju ogromnu putanju za 24 sata. A i zašto bi se beskonačna vasiona obrtala oko sićušne Zemlje“.

Ovo su sve ubedljivi razlozi genija koji je bio u stanju da kosmički misli, ali je argumenat, da bi nam rotirajuća Zemlja pri svakom našem skoku u vis istrčala ispod nogu, bio pristupačniji shvatanju običnih ljudi. Zato se veliki posmatrač neba, TIHO BRAHE (1546–1601), pored sveg visokog poštovanja prema njegovom tvorcu, ustručavao da prilivati Kopernikov sistem, postavljajući svoj vlastiti. Po tom Braheovom sistemu, stoji naša Zemlja nepomično u središtu vasiona, a oko nje obilazi Mesec i Sunce, a oko ovog poslednjeg ostale planete. Ceo ovaj sistam obuhvaćen je sferom zvezda nekretnica koja se za 24 časa obrne oko svoje ose, povlačeći, pri tom svom dnevnom obrtanju, celokupnu svoju unutrašnjost.

U Koperniku i Tihu Braheu oličena su dva klasična tipa. Kopernik je bio Aristarh novog veka, a Tiho njegov Hiparhos. Nenadmašiv posmatrač neba i, u prvom redu, njegov vrač, stajao je Tiho Brahe, kao i njegov klasični preteča, na haldejskom tlu. Verujući samo svojim vlastitim opažanjima, a pri tom priznati autoritet, bio je on skoro nesavladiv protivnik heliocentričnog sistema, kao što je to bio i Hiparhos. Tako je izgledalo da će se i u novom veku ponoviti stara sudbina heliocentričnog sistema. Da se to nije dogodilo zasluga je Galileja.

§ 6. **Galileo Galilei.** (1564–1642) skovao je vlastitim rukama dva silna oružja kojima je izvojevao konačnu pobeđu Kopernikove nauke. Jedno od njih bila je Dinamika, glavna jedna grana Mehanike. On ju je, uklonivši, pre svega, sva unutrašnja protivurečja Aristotelove Mehanike, stvorio, našao njome zakone slobodnog pada i pada na strmoj ravni i zakone kosog luitca te prodro do samog zakona inercije. Tim je mogao da obori glavni argumenat protiv heliocentričnog sistema. No još silnije pokazalo se u toj borbi jedno novo oružje, astronomski dogled, sagrađen od Galilejeve ruke. Kada je, prvi od svih ljudi, ovaj dogled upro prema nebu, sagledao je Mesečeva brda, mene Venerine i mesece Jupitrove. Ovi su meseci bili očigledan dokaz da se kretanja nebeskih tela vrše i oko drugih središta no što je Zemlja. Dogled je razmrškao kristalnu sferu zvezda nekretnica, pokazujući da su te zvezde bezbrojne i različno od nas udaljene. Sva ova saznanja opredelila su Galileja da stane na stranu Kopernika i da se bori za njegovu nauku. On je to učinio svojim duhovitim *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo. Tolemaico e Copernicano* (1632) sa tolikim naletom da je bio zbog toga izveden pred sud inkvizicije. Zbog sličnog prekršaja bio je, nedavno pre toga, ĐORDANO BRUNO (1548–1600) živ spaljen na lomači, a Galilei je umakao takvoj sudbini time što je oporekao svoju nauku. Ali je pobeđa bila već izvojevana. Munje uma Kopernika i Galileja odbljesnule su u dubine vasiona toliko silno da se jedanput sagledana istina nije mogla više prikriti.

Tako je heliocentrička nauka starih Grka bila ponovo vaspostavljena. Jer da se radilo samo o obnovi te stare nauke, to su priznavali i sami sledbenici Kopernika. RAJNHOLD (1511–1553), koji je izračunao svoje tablice planetskog kretanja usvajajući Kopernikov sistem, govori o tome: „Moramo biti duboko blagodarni Koperniku što je vaspostavio pravu nauku o kretanju nebeskih tela“. Pa i crkva sama prizna-

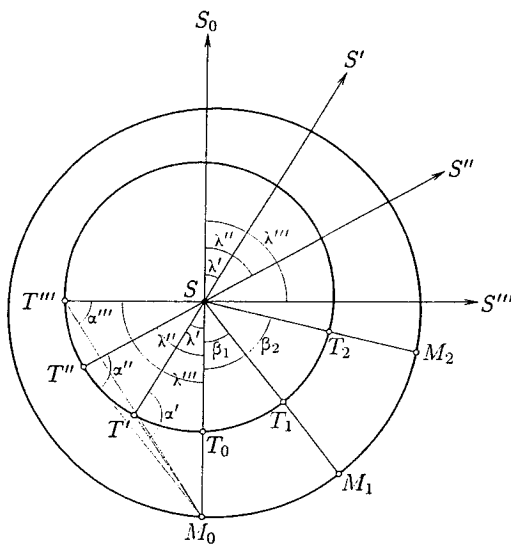
la je prioritet Grka u tome učenju. Godine 1616 stavljeno je Kopernikovo delo na indeks osuđenih, pa se u tom rešenju, opozvanom tek 1822, kaže ovo: „Sveta kongregacija saznala je da se kriva, svetom pismu suprotna, nauka Pitagorejaca o kretanju nebeskih tela, kako je propovedaju Kopernik i neki drugi, sada širi i od mnogih prihvaća. Da se takvo učenje ne bi, na štetu katoličke istine, raširilo, odlučila je sveta kongregacija da se dela Kopernikova i svih ostalih koji isto uče zabrane dogod se ne isprave. Zbog toga se sva ta dela ovim ukazom zabranjuju i anatemišu.“

Tim smo se vratili opet Grcima, pa nam ostaje još da učinimo pravdu Hiparhu i Ptolemaju. Danas znamo da se može govoriti samo o relativnim kretanjima. Istim pravom kojim govorimo o kretanju planeta oko Sunca, možemo govoriti o relativnom kretanju Sunca i planeta oko Zemlje. Po sadašnjem stanju nauke u oba sistema, Ptolemajov i Kopernikov, kinematski potpuno ravnopravna. Samo jedna, čisto praktična, razlika postoji između ta dva stanovišta. Planete opisuju oko Zemlje komplikovane epiciklične putanje, dok je njihovo kretanje oko Sunca daleko jednostavnije. No baš ta jednostavnost omogućila je pronalazak zakona Keplera i Njutna, a i tek tim zakonima smo prekoračili široki vidokrug Aleksandrijaca.

§ 7. Keplerovi zakoni. Kada je JOHANES KEPLER (1571–1630) postavljen za naslednika Tihoo Brahea u zvanju dvorskog astronoma i carskog matematičara sa boravištem u Pragu, primio je on sa tim zvanjem i dragocene pribeške o posmatranjima neba koja je izvršio njegov prethodnik. Služeći se tim naučnim materijalom i usvojivši Kopernikov heliocentrični sistem, preduzeo je on da ispita i matematskim jezikom opiše kretanja planeta oko Sunca. Osnovna ideja koja ga je u tom poslu vodila bila je ova. Tihoo Brahe je, dvadeset neprekidnih godina,

pažljivo pratio kretanja planete Marsa. Ova planeta, zbog njene blizine Zemlji, velikog ekscentriciteta njene putanje i malog nagiba ravni te putanje prema ravni Zemljine putanje, bio je najzgodniji nebeski objekat za preduhvat Keplerov. Zato je on svoja ispitivanja otpočeo na putanji Marsa i putanji Zemlje.

Zbog malog nagiba Marsove putanje prema ravni Zemljine putanje, koji nagib ne dostiže ni puna dva stepena, možemo uzeti da putanje Zemlje i Marsa, koje imamo još da odredimo, leže u ravni slike, a da su predstavljene krivama $T_0T_1T_2...$ odnosno $M_0M_1M_2...$ (slika 3). Kao polaznu tačku naših razmatranja odaberimo onu kon-



Слика 3

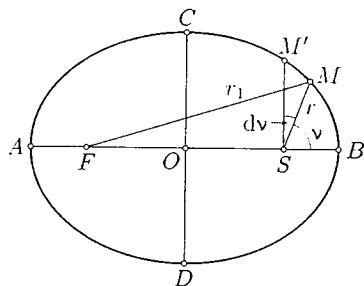
stelaciju pri kojoj se Mars nalazi u opoziciji prema Zemlji, t.j. onu pri kojoj Sunce S , Zemlja T_0 i Mars M_0 leže, tim redom, u istoj pravoj. Ta je konstelacija samo trenutna. Zemlja se kreće brže oko Sunca no njen sused, pa će zato ona izvršiti jedno potpuno obilaženje oko Sunca dok će Mars za to vreme prevaliti tek nešto više od polovine svoje putanje. Zbog toga će se nova opozicija desiti, posle okruglo 800 dana, u položajima T_1 i M_1 , iduća, posle daljih 800 dana, u položajima T_2 i M_2 . Posle petnaest punih obilaženja Zemlje oko Sunca izvršice Mars 7,98 obilaženja, t.j. osma po redu od uočenih opozicija desiće se u blizini početnih položaja T_0 i M_0 . Pošto su 7,98 Marsovih obilaženja jednaki 15 obilaženja Zemlje, to obilaženje U Marsa oko Sunca traje 686,98 dana. Posle vremena U vraća se Mars, kakavgod oblik imala njegova putanja, u svoj stari položaj. Posle intervala vremena U , proteklog iza trenutka prve od uočenih opozicija, stiće Zemlja u položaj T' dok će u tom momentu Mars zauzeti položaj M_0 . Posle ponovnog isteka vremena U stiće Zemlja u položaj T'' , posle novog razdobja U u položaj T''' i t.d., ali svima tim raznim položajima Zemlje odgovara jedan te isti, nepromenjeni položaj M_0 Marsa. Spojimo li sada te razne položaje T' , T'' , T''' ... Zemlje sa položajima S i M_0 Sunca odnosno Marsa, koji se nisu promenili, to dobivamo trouglove SM_0T' , SM_0T'' , SM_0T''' ... koji, svi redom, imaju zajedničku jednu stranu i to SM_0 . Uglovi tih trougla, označeni u slici sa α' , α'' , α''' ..., mogu se odrediti direktnim merenjem pošto oni predstavljaju one uglove koje zatvaraju međusobno obe vizure upravljene iz pojedinih položaja T' , T'' , T''' ... Zemlje prema Suncu i Marsu. Ti su uglovi očito jednaki razlici geocentričnih longituda ovih dvaju nebeskih tela. No i uglovi koje smo označili sa λ' , λ'' , λ''' ... mogu se odrediti astronomskim posmatranjem. Iz položaja T_0 Zemlje izgleda nam Sunce projicirano na nebesku sferu u pravcu T_0S_0 , a iz položaja T' Zemlje, u pravcu $T'S'$. Ugao λ' jednak je, prema tome, razlici geocentričnih longituda Sunčevih pri onim dvama položajima Zemlje. To važi analogno i za uglove λ'' , λ''' ... Kepler je bio, prema tome, u stanju da iz pribležaka posmatranja svoga prethodnika nađe numeričke vrednosti uglova α' , α'' , α''' ..., λ' , λ'' , λ''' ... pa je mogao da iz spomenutih trouglova izračuna strane $\overline{ST'}$, $\overline{ST''}$, $\overline{ST''}$..., t.j. da matematski pretstavi te radiusvektore Zemljine putanje kao funkciju otstojanja $\overline{SM_0} = d$ i uglova λ , što ih ti radiusvektori, povučeni iz stalne tačke S , zatvaraju sa stalnom pravom SM_0 . Tim je bio matematski određen ne samo oblik Zemljine putanje nego i hod Zemljin po toj putanji. Pošto je izvršio taj posao, mogao je Kepler da izračuna i oblik Marsove putanje i kretanje Marsa po njoj. Kao što je pre, iz položaja M_0 Marsa i dužine njegovog radiusvektora $\overline{SM_0}$ nađen oblik Zemljine putanje, tako je sada bilo moguće, ponavljajući prethodne račune za sve opozicione položaje $M_1M_2M_3...$ Marsa, iz već određenog oblika Zemljine putanje predstaviti radiusvektore $\overline{SM_0}$, $\overline{SM_1}$, $\overline{SM_2}$... Marsove putanje kao funkciju promenljivog ugla β i vremena. Pri tome su ostale neodređene apsolutne veličine radiusvektora Zemljine odnosno Marsove putanje, ali su se one mogle izraziti pomoću srednjeg otstojanja Zemlje od Sunca kao jedinice. Ovim načinom našao je Kepler svoja tri zakona planeteskog kretanja. Prva dva svoja zakona objavio je u svom delu *Astronomia nova de motibus stellae Martis* 1609, a treći u svojim *Harmonices mundi* 1619. Ti su zakoni ovi:

I. Planete opisuju oko Sunca eliptične putanje; u zajedničkoj žiži tih elipsa nalazi se Sunce. ❀

II. *Radiusvektor povučen od Sunca do planete prevlači u jednakim delovima vremena jednake površine.*

III. *Kvadrati vremena obilaženja pojedinih planeta oko Sunca stoje u proporciji trećih potencija velikih poluosa njihovih putanja.*

Izrazimo ove zakone, da bismo ih kasnije mogli primeniti jezikom matematike. Pri tome ćemo pod putanjom planete razumevati putanju njenog težišta, iz razloga koji ćemo kasnije upoznati.



Слика 4

Duž

Neka nam $BCADB$ (sl. 4) predstavlja eliptičnu putanju jedne od planeta. AB je velika, a CD mala osa te elipse. Žiža S ove elipse neka bude ona koju je zauzelo Sunce, onda se B zove perihelium, a A afelium planetske putanje. Označimo sa a veliku, a sa b malu poluosu, onda je $OS = OF = \sqrt{a^2 - b^2}$, pa se broj

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (1)$$

zove numerički ekscentricitet elipse. Zato je

$$b^2 = a^2 - e^2 a^2. \quad (2)$$

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (3)$$

zove se parametar elipse.

Spojimo proizvoljnu tačku M elipse, t.j. proizvoljan položaj planete na njenoj putanji, sa žižama S i F pa označimo radiusvektor SM sa r , a radiusvektor FM sa r_1 , onda je, prema samoj definiciji elipse,

$$r + r_1 = 2a.$$

* Ugao BSM , koji ćemo označiti sa ν , zove se *prava anomalija* planete. Iz trougla FSM , gde je $FS = 2ea$, sleduje po Karnoovom obrascu:

$$r_1^2 = (2ea)^2 + r^2 + 4ear \cos \nu.$$

Stavimo ovde za r_1 njegovu vrednost $r_1 = 2a - r$, to dobivamo

$$(1 + e \cos \nu)ar = a^2 - e^2 a^2 = b^2,$$

t.j.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}. \quad (4)$$

Ovo je jednačina planetske putanje i matematski izražaj prvog Keplerovog zakona.

Da drugi Keplerov zakon obuhvatimo matematskim obrascem, označimo sa dv priraštaj prave anomalije koji odgovara beskonačno malenom vremenskom intervalu dt . Za vreme tog intervala prebrisao je radiusvektor r površinu $dF = \frac{1}{2}r^2 dv$ beskonačno uskog trougla MSM' . Količnik

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

zove se sektorska brzina: ona je, po drugom Keplerovom zakonu, konstantna, pa je zato

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2}C.$$

gde C označava jednu konstantu koja je, dakle, jednaka dvostrukoj sektorskoj brzini. Zato je

$$r^2 \frac{dv}{dt} = C \quad (6)$$

matematski izražaj drugog Keplerovog zakona.

Označimo sa T vreme obilaženja planete oko Sunca. Za to vreme prebrisao je radiusvektor celu površinu πab ograničenu elipsom planetske putanje. Zato je sektorska brzina predstavljena i ovim izrazom:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\pi ab}{T}$$

pa je zato

$$C = \frac{2\pi ab}{T}. \quad (7)$$

Treći Keplerov zakon predstavljen je matematski jednačinom

$$\frac{a^3}{T^2} = k, \quad (8)$$

gde je k jedan te isti broj za sve planete.

§ 8. **Njutnov zakon gravitacije.** Veliki holandski naučnik **HRISTIAN HAJGENS** (1629–1695), jedan od trojice klasičara nauke o kretanju, saopštio je u svome delu *Horologium oscillatorium* (Paris 1673) da materijalna tačka koja se kreće uniformno po periferiji kruga ima, u svakom svom položaju, ubrzanje napereno stalno prema centru kruga, pa nazvano zbog toga centripetalnim ubrzanjem, koje je, po svojoj veličini, predstavljeno izrazom $p_c = v^2/a$, gde v označava linearnu brzinu tačke, a a radius njene kružne putanje.

Iz ove Hajgensove teoreme, čiji je dokaz saopšten tek 1703 godine u posmrtnim delima Hajgensovini, izveli su, nezavisno jedan od drugog, tri engleska naučnika, **VREN**, **HUK** i **HALEJ**, ovaj blizak zaključak. Pretpostavili se, što ne odstupa mnogo od stvarnosti, da se planete kreću po kružnim putanjama, pa označili se sa a radius takve jedne putanje, a sa T vreme obilaženja uočene planete oko Sunca, to je, prema gornjim oznakama, $v = 2\pi a/T$, t.j. $p_c = 4\pi^2 a/T^2$. Kako je, prema trećem Keplerovom zakonu, $a/T^2 = k/a^2$, to je $p_c = 4\pi^2 k/a^2$, što znači da planete podleže ubrzanju, naperenom prema Suncu, a inverzno proporcionalnom kvadratu radiusa planetske putanje.

Daleko su zamašnije konzekvencije koje je iz Keplerovih zakona izveo **ISAK NJUTN** (1643–1727) i saopštio ih u svome besmrtnom delu *Philosophiae naturalis principia mathematica* London 1687, pošto je tim delom podigao do krova zgradu

klasične Mehanike, otpočetu od Galileja i Hajgensa. Njuna je, kao što je poznato, bio jedan od dvaju glavnih pronalazača infinitezimalnog računa, ali se ipak nije njime poslužio u tom svom delu, nego, da bi bio pristupačan svojim savremenikima, klasičnim geometrijskim rasuđivanjima. Mi ćemo njegove rezultate izvesti ovde služeći se modernijim oruđem nauke.

Uočimo jednu materijalnu tačku koja se kreće proizvoljnim kretanjem u ravni. Odaberimo u toj ravni pol O i osu OX jednog proizvoljnog polarnog koordinatnog sistema, pa označimo sa r i v polarne koordinate uočenog položaja M posmatrane materijalne tačke (sl. 5). Označimo sa τ vektor položaja tačke M prema tački O , a sa τ_0 jedinični vektor toga pravca, onda je

$$\tau = r\tau_0. \quad (9)$$

Izvod po vremenu t ovog izraza predstavljen je sa

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{dr}{dt}\tau_0 + r\frac{d\tau_0}{dt},$$

pa nam leva strana ove jednačine predstavlja, kao što je poznato, vektor brzine

$$\mathbf{v} = \frac{d\tau}{dt} \quad (10)$$

uočene materijalne tačke. Isto nam tako predstavlja $d\tau_0/dt$ vektor brzine krajnje tačke jediničnog vektora τ_0 pri promeni ugla v . Označimo li sa n_0 jedinični vektor normalan na vektor τ_0 , a naperen u smislu rastućeg v , to je onaj vektor brzine predstavljen sa

$$\frac{d\tau_0}{dt} = \frac{dv}{dt}n_0. \quad (11)$$

Stavljajući

$$v_r = \frac{dr}{dt}; \quad v_n = r\frac{dv}{dt}, \quad (12)$$

dobivamo

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{dr}{dt}\tau_0 + r\frac{dv}{dt}n_0, \quad (13)$$

ili

$$\mathbf{v} = v_r\tau_0 + v_n n_0. \quad (14)$$

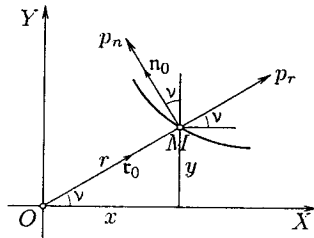
Zato nam v_r i v_n predstavljaju komponente brzine \mathbf{v} u pravcima τ_0 i n_0 . Ponovani izvod od (13) po vremenu daje

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\tau_0 + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\tau_0}{dt} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dv}{dt}n_0 + r\frac{d^2v}{dt^2}n_0 + r\frac{dv}{dt} \cdot \frac{dn_0}{dt},$$

pri čemu je, istim rasuđivanjima kao pri (13),

$$\frac{dn_0}{dt} = -\frac{dv}{dt}\tau_0.$$

Zato je



Слика 5

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right\} \tau_0 + \left\{ r\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} \right\} n_0. \quad (15)$$

Leva strana ove jednačine predstavlja nam vektor akceleracije

$$\mathbf{p} = \frac{d^2\tau}{dt^2} \quad (16)$$

uočene materijalne tačke. Stavljajući

$$p_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \quad (17)$$

$$p_n = r\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dv}{dt} \right), \quad (18)$$

dobivamo

$$\mathbf{p} = p_r\tau_0 + p_n n_0, \quad (19)$$

što znači da su p_r i p_n komponente vektora akceleracije u pravcima τ_0 i n_0 .

Primenimo prednje rezultate na kretanje planeta, pa položimo, u to ime, pol O našeg koordinatnog sistema u Suncu, a njegovu polarnu osu naperimo prema perihelu. Onda koordinate r i v imaju značaj dat im u prethodnom paragrafu. Zato je, prema jednačini (6),

$$r^2 \frac{dv}{dt} = C$$

gde C označava jednu konstantu. Stavljajući ovo u (18), dobivamo

$$p_n = 0, \quad (20)$$

što znači da planeta, u svakoj tački svoje putanje, podleži samo ubrzanju u pravcu koja spaja planetu sa Suncem. Da bismo našli skalarnu veličinu tog ubrzanja, postupićemo ovako. Kako je

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dv} \frac{dv}{dt}, \quad \text{a} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{C}{r^2},$$

to je

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{dv} = -C \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{r} \right),$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -C \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dv}{dt} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right),$$

pa nam (17) daje ovaj, Bineov, obrazac

$$p_r = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right]. \quad (21)$$

Iz prvog Keplеровog zakona, dakle iz (4), sleduje

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos v,$$

t.j.

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{e}{p} \sin v; \quad \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{e}{p} \cos v.$$

dakle

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{p}.$$

Stavljajući ovo u (21), dobivamo:

$$p_r = -\frac{C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2},$$

a primenjujući (3) i (7),

$$p_r = -4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (22)$$

t.j. zbog (8),

$$p_r = -4\pi^2 k \frac{1}{r^2}. \quad (23)$$

Konstanta k je, prema trećem Keplerovom zakonu, jedna te ista za sve planete, pa je to isto slučaj i za konstantu

$$\mu = 4\pi^2 k = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}. \quad (24)$$

Zato je

$$p_r = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (25)$$

Stavljajući ovo i (20) u (19) dobivamo:

$$\mathfrak{P} = -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}_0. \quad (26)$$

Ova nam jednačina kazuje da svaka planeta, u svakom svom položaju, podleži ubrzanju koje je napereño prema Suncu, a čija je skalarna veličina inverzno proporcionalna kvadratu odstojanja planete od Sunca.

Dovde se Njutnovo rasuđivanje razlikuje od onoga njegovih preteča, dakako značajno, samo time što važi za stvarne, eliptične putanje planeta. No Njutn je, došavši do gornjeg rezultata, pošao smelim korakom dalje. On je uvideo i dokazao na primeru Meseca da je nađeno ubrzanje, po svojoj prirodi istovetno sa poznatim ubrzanjem Zemljine teže. Njutn je genijalnom intuicijom shvatio da se privlačno dejstvo naše Zemlje, koje se ispoljava pri padu teških tela, rasprostire u nebeske prostore, dakle i do samog Meseca. Da to dokaže, izvršio je on ovaj račun. Na površini Zemlje, u odstojanju R od Zemljinog središta, pri čemu R označava radius Zemljine kugle, podleže slobodna tela ubrzanju koje, po merenjima Galileja, iznosi okruglo 30 stopa po sec^2 . Označimo li srednje odstojanje Meseca od središta Zemlje sa a , to će na tom odstojanju ubrzanje usled privlačnog dejstva Zemlje, pošto ono opada sa kvadratom odstojanja, biti jednako:

$$p = \frac{R^2}{a^2} g.$$

Ako, dakle, za kretanje Meseca oko Zemlje važi isti zakon kao i za kretanje planeta oko Sunca, onda mora, prema dobivenoj jednačini (22), biti:

$$p = -4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{a^2} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2}.$$

gde T označava vreme obilaženja Meseca oko Zemlje.

Iz prednjih jednačina sleduje:

$$g = -\frac{a^2}{R^2} \cdot \frac{4\pi^2 a}{T^2} = -\frac{4\pi^2 a^3}{R^2 T^2}.$$

O numeričkim vrednostima veličina a i T imao je Njutn ove, dosta tačne, podatke: $a = 60,4R$; $T = 27^d 7^h 43^m 48^s = 2360628^s$, a Pikarovo premeravanje Zemlje, koje je baš u ono doba izvršeno, dalo je $R = 19615000$ stopa, pa je Njutn sa tim vrednostima, primenom gornjeg obrasca, dobio $g = 30,62$ stope po sec^2 , dakle rezultat koji je dobro odgovorio stvarnosti. Time je bila dokazana ispravnost Njutnove zamisli.

No Njutn se nije zaustavio ni na ovom rezultatu. Uvidevši da jedno te isto telo podleži, prema njegovom odstojanju od središta Zemlje, različitom ubrzanju, t.j. da pokazuje različitu težinu, uveo je Njutn pojam mase koja je, kao stvarno obeležje tela, nepromenljiva. Tim je on, prvi od svijuju, odvojio pojam mase od pojma težine. Ovu težinu je definisao kao proizvod mase i ubrzanja teže. Tim je bio dobiven opšti pojam sile kao proizvoda mase i ubrzanja što ga ta sila telu dodeljuje. U isto doba postavio je Njutn svoj poznati princip jednakosti akcije i reakcije. Kao posledica tog prečišćavanja pojmova, sledovala su sledeća razmatranja.

Pomnožimo li jednačinu (26) sa masom m uočene planete, to dobivamo levo proizvod mase i ubrzanja planete, dakle silu koja dejstvuje na planetu:

$$\mathfrak{P} = -\mu \frac{m}{r^2} \mathbf{r}_0. \quad (27)$$

Ta sila naperena je, zbog znaka minus, prema Suncu, pa pretstavlja silu kojom Sunce privlači planetu. Po principu akcije i reakcije, privlači planeta Sunce istom takvom silom, no protivnog znaka, a ta sila mora biti proizvod mase M Sunca i njegovog ubrzanja. Uvedemo li, prema tome, novu jednu veličinu f definisanu jednačinom

$$f = \frac{\mu}{M} \quad (28)$$

ili, zbog (24), jednačinom

$$f = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{M}, \quad (29)$$

to dobivamo, mesto (27),

$$\mathfrak{P} = -f \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}_0. \quad (30)$$

Faktor μ imao je jednu te istu numeričku vrednost za sve planete, pa to važi, zbog (28), i za faktor f . Upotrebljen u značenju koje mu daje jednačina (29), on se pokazao isti i za Mesec i za Zemljinu težu. Zbog toga pretstavlja f jednu konstantu koja važi za ceo Sunčani sistem i izražava jednu opštu osobinu materije nagomilane u tom delu vasione. Kada je Njutn došao do ovoga saznanja, on je, obu-

hvativši njime celu vasionu, uvideo, a to su potvrdila i sva kasnija iskustva, da jednačina (30) važi za svaka dva delića materije u vasioni. To saznanje izrazio je ovim svojim zakonom opšte gravitacije:

* *Svaki delić materije u vasioni privlači svaki drugi delić silom koja pada u pravu tih delića, a ima intezitet proporcionalan proizvodu masa m_1 i m_2 tih delića, a inverzno proporcionalan kvadratu njihovog ostojanja r . Veličina te sile pretstavljena je, dakle, izrazom*

$$P = f \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (31)$$

Pri tome je faktor f proporcionalnosti jedna univerzalna konstanta. U gornjem izrazu otpao je znak minus, pošto je rečju „privlači“ jednoznačno određen pravac te sile.

Njutnovim zakonom posta odgonetnuta hiljadugodišnja zagonetka planetskog kretanja i nova saznanja sledovaše, sama od sebe, iz njega. Sve nejednakosti kretanja planeta i Meseca ispoljiše se kao prirodna posledica toga zakona i kao jasni izražaj međusobnog privlačnog dejstva tih nebeskih tela. Ne samo da je priroda tih nejednakosti postala rastumačena, one su se mogle izračunavati i pratiti u prošlost i budućnost. Pokazalo se, a za komete ubrzo iza postavljanja Njutnovog zakona, da on važi za sva nebeska tela bez izuzetka, dakle i izvan Sunčevog sistema. Precesija ravnodnevnica, koju je, kao što smo čuli, prvi konstatovao Hiparhos, našla je Njutnovim zakonom svoje potpuno razjašnjenje, a isto tako, kasnije opažena, nutacija Zemljine ose. I oblik naše Zemlje, a naročito njena spljoštenost usled rotacije dobi, u svim pojedinostima, svoje mehaničko i geometrijsko obrazloženje. To isti važi i za prastaro pitanje o postanku morske plime koja se pokazala kao neposredna posledica privlačnog dejstva Sunca i Meseca. Tako se Njutnov zakon, najveličanstveniji što ga je ikad smrtni čovek mogao da dokuči, pokazao kao opšti zakon prirode kojem se pokorava cela vasiona. Iz toga zakona je iznikla jedna nova nauka: Nebeska Mehanika.

ГЛАВА ДРУГА

Problem dvaju tela

§ **9. Postavljanje problema.** Iako se svi članovi našeg Sunčanog sistema međusobno privlače, godišnji hod svake pojedine planete skoro je sasvim takav kao kad bi ona stajala samo pod dejstvom privlačne sile Sunca. Uzrok je tome taj, što masa Sunca nadmašava daleko mase svih planeta, pa je zbog toga međusobno privlačno dejstvo tih planetiskih masa prema dejstvu Sunčeve mase toliko slabo da se ono ispoljava, kao nekakav mali poremećaj, tek posle dužih razmaka vremena. Zbog toga pretstavlja, tako nazvani, problem dvaju tela polaznu tačku nauke o kretanju nebeskih tela. Taj problem izražen je ovim zadatkom: Dva nebeska tela privlače se međusobno po Njutnovom zakonu gravitacije; neka se iz zadanih početnih uslova odredi kretanje tih dvaju tela u pogledu na jedan koordinatni sistem, smatran nepomičnim.

§ **10. Vektorski integrali problema.** Da bismo, bez uštrba po opšti značaj sledećih rasuđivanja, imali pred sobom konkretan jedan slučaj, nazovimo posmatrana dva tela Sunce i planetu, pa neka nam M označava masu Sunca, a m masu planete; trenutni položaji težišta tih dvaju nebeskih tela u odabranom koordinatnom sistemu neka budu određeni vektorima položaja \mathfrak{R} odnosno \mathfrak{r} . Relativni položaj planete prema Suncu određen je onda vektorom položaja

$$\tau = \mathfrak{r} - \mathfrak{R}. \quad (1)$$

Označimo li sa r skalarnu veličinu ili moduo vektora τ , to je jedinični vektor u pravcu τ pretstavljen izrazom

$$\tau_0 = \frac{\tau}{r}. \quad (2)$$

Sila kojom Sunce privlači planetu pretstavljena je, prema (30) prve glave, izrazom

$$-f \frac{Mm}{r^2} \tau_0 = -f \frac{Mm}{r^3} \tau,$$

a sila kojom planeta privlači Sunce izrazom

$$f \frac{Mm}{r^3} \tau.$$

Zato su vektorske jednačine kretanja ovih dvaju nebeskih tela ove:

$$M \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} = f \frac{Mm}{r^3} \boldsymbol{\tau} \quad (3)$$

$$m \frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2} = -f \frac{Mm}{r^3} \boldsymbol{\tau}, \quad (4)$$

gde t označava vreme.

Označimo sa \mathfrak{S} vektor položaja zajedničkog težišta S , bolje reći centra masa M i m , to je, prema samoj definiciji tog centra,

$$(M + m)\mathfrak{S} = M\mathfrak{R} + m\mathfrak{I}. \quad (5)$$

Prvi i drugi izvod ove jednačine po vremenu daje:

$$(M + m) \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = M \frac{d\mathfrak{R}}{dt} + m \frac{d\mathfrak{I}}{dt} \quad (6)$$

$$(M + m) \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} = M \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} + m \frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2}. \quad (7)$$

Saberemo li jednačine (3) i (4), pa dobiveni zbir uporedimo sa (7), to dobivamo:

$$\frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} = 0. \quad (8)$$

Ovaj izraz predstavlja vektor akceleracije težišta S , pa kako je on stalno jednak nuli, to se to težište kreće pravolinijski i uniformno. Integrisanje prethodne jednačine daje:

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \mathfrak{B}, \quad (9)$$

gde je \mathfrak{B} konstantan jedan vektor koji predstavlja vektor brzine težišta S . Integriranjem prethodne jednačine dobivamo:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{B}t + \mathfrak{C},$$

gde \mathfrak{C} označava opet jedan konstantan vektor. On je određen inicijalnim uslovima. Označimo li sa \mathfrak{A} vektor položaja težišta S u inicijalnom momentu t_0 , onda je za $t = t_0$; $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}$, pa zato

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}t_0 + \mathfrak{C},$$

t.j.

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(t - t_0) + \mathfrak{A}. \quad (10)$$

Vektori \mathfrak{A} i \mathfrak{B} određeni su inicijalnim uslovima pod kojima razumevamo vektore položaja \mathfrak{R}_0 i \mathfrak{I}_0 uočenih dvaju nebeskih tela u inicijalnom momentu i vektore \mathfrak{W}_0 i \mathfrak{Y}_0 njihovih brzina. Zato su inicijalni uslovi izraženi jednačinama:

$$t = t_0: \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0; \quad \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0; \quad \frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \mathfrak{W}_0; \quad \frac{d\mathfrak{I}}{dt} = \mathfrak{Y}_0. \quad (11)$$

Stavljajući (9), (10), (11) u (5) i (6), dobivamo \mathfrak{A} i \mathfrak{B} .

Jednačine (9) i (10) predstavljaju prva dva vektorska integrala problema dvaju tela, ona kojima je određeno kretanje zajedničkog težišta masa M i m .

Skratimo li jednačinu (3) sa M , a jednačinu (4) sa m , pa ih oduzmemo jednu od druge, to dobivamo:

$$\frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2} - \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} = -f \frac{M + m}{r^3} \boldsymbol{\tau}.$$

Iz (1) sleduje

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\tau}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2} - \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2},$$

t.j.

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\tau}}{dt^2} = -f \frac{M + m}{r^3} \boldsymbol{\tau}, \quad (12)$$

ili

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{\tau}}{dt^2} = -f \frac{m(M + m)}{r^3} \boldsymbol{\tau}. \quad (13)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kretanja planete relativno prema Suncu. Ta nam jednačina kazuje da se planeta kreće tako kao kad bi Sunce stajalo nepomično, imalo masu $(M + m)$, a privlačilo planetu po Njutnovom zakonu. Pretpostavka koju smo učinili u prošloj glavi, smatrajući Sunce nepomičnim bila je opravdana samo time što je m prema M tako maleno da se $(M + m)$ može zameniti sa M .

Iz (12) može se lako izvesti jedan treći vektorski integral problema. Pomnožimo li tu jednačinu vektorielno sa $\boldsymbol{\tau}$, to dobivamo, pošto je $[\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}] = 0$, ovu jednačinu:

$$\left[\boldsymbol{\tau} \frac{d^2 \boldsymbol{\tau}}{dt^2} \right] = 0. \quad (14)$$

Kako je prema pravilima vektorske diferencijacije:

$$\frac{d}{dt} \left[\boldsymbol{\tau} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \right] = \left[\boldsymbol{\tau} \frac{d^2 \boldsymbol{\tau}}{dt^2} \right],$$

to možemo jednačinu (14) zameniti ovom:

$$\frac{d}{dt} \left[\boldsymbol{\tau} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \right] = 0$$

koja, integrisana, daje:

$$\left[\boldsymbol{\tau} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \right] = \mathfrak{C}, \quad (15)$$

gde je \mathfrak{C} jedan vektor koji je nezavisan od vremena.

Geometrijsko značenje dobivenog vektorskog integrala je ovo. Napišemo li ga u obliku:

$$\left[\boldsymbol{\tau} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \right] = \mathfrak{C}, \quad (16)$$

to nam $d\boldsymbol{\tau}$ predstavlja elemenat puta što ga je planeta relativno prema Suncu prevalila za vreme intervala dt . Vektorielni produkt $[\boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{\tau}]$ predstavlja nam onaj vektor koji stoji normalno na ravni vektora $\boldsymbol{\tau}$ i $d\boldsymbol{\tau}$, naperen na onu stranu te ravni sa koje, posmatrano, kretanje planete sleduje u direktnom smislu, t.j. obrnuto skazaljki

na satu, a kojega je skalarna veličina ili intenzitet jednak površini paralelograma, ograničenog vektorima τ i dt . Ta je površina jednaka dvostrukoj onoj površini dF što ju je za vreme intervala dt prebrisao radiusvektor povučen od Sunca ka planeti. Zato nam

$$\frac{1}{2} \int_{\tau} [r dt]$$

pretstavlja sektorsku brzinu planete u vektorskom obliku. Integral (16) izražava, dakle, drugi Keplerov zakon u vektorskom obliku, kazajući da je površina prebrisana u jedinici vremena vektorom položaja τ planete konstantna, ne samo po svojoj skalarnoj veličini, no i po svojoj orijentaciji u prostoru. Kretanje planete oko Sunca sleduje, dakle, konstantnom sektorskom brzinom u ravni koja, prolazeći kroz Sunce, stoji normalno na vektoru \mathcal{C} . Time je određena jednoznačno ravan planetske putanje, smisla obilaženja planete oko Sunca i sektorska brzina kretanja.

Da odredimo, računski, ravan planetske putanje, položimo u Sunce početak jednog ortogonalnog koordinatnog sistema $X-Y-Z$ (sl. 6), vezanoga sa nebeskom sferom. Označimo sa i, j, k jedinične vektore u pravcu osa X, Y, Z toga sistema. Početni položaj planete, t.j. onaj koji odgovara vremenu $t = t_0$, neka bude M_0 , koordinate ove tačke neka su x_0, y_0, z_0 , onda je njen vektor položaja:

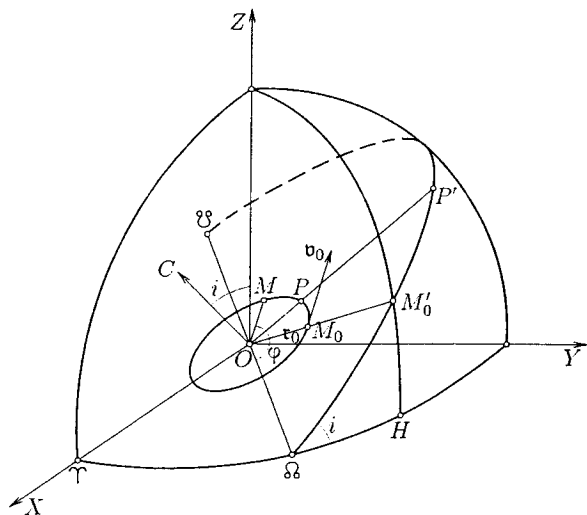
$$\tau = x_0 i + y_0 j + z_0 k. \tag{17}$$

Relativna brzina planete prema Suncu predstavljena je izrazom:

$$v = \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k, \tag{18}$$

ujena početna vrednost neka bude v_0 , a v_1, v_2, v_3 njene koordinate. Onda je:

$$v_0 = v_1 i + v_2 j + v_3 k. \tag{19}$$



Слика 6

Označimo sa C_1, C_2, C_3 koordinate vektora \mathcal{C} , to je

$$\mathcal{C} = C_1 i + C_2 j + C_3 k. \tag{20}$$

Za $t = t_0$ dobiva jednačina (15), zbog (18), ovaj oblik:

$$\mathcal{C} = [r_0 v_0] \tag{21}$$

ili, zbog prethodnih jednačina,

$$C_1 i + C_2 j + C_3 k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Razvijemo li gornju determinantu, to dobivamo, množeći dobivenu vektorsku jednačinu skalarno sa i, j, k , ove tri skalarne jednačine:

$$\begin{aligned} C_1 &= y_0 v_3 - z_0 v_2 \\ C_2 &= z_0 v_1 - x_0 v_3 \\ C_3 &= x_0 v_2 - y_0 v_1, \end{aligned} \tag{22}$$

koje nam daju koordinate vektora \mathcal{C} ; njegov je moduo

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}. \tag{23}$$

Ravan planetske putanje stoji normalno na vektoru \mathcal{C} , pa zatvara zbog toga sa ravni $X-Y$ isti onaj ugao i što ga zatvara vektor \mathcal{C} sa osom Z . Taj je ugao dat jednačinom:

$$C = C_3 \cos i. \tag{24}$$

Ugao i zove se *nagib planetske ravni*, on leži između 0 i π ; kad je veći od $\frac{1}{2}\pi$ ❀ kreće se planeta retrogradno.

Ravan planetske putanje seče ravan $X-Y$ duž prave $\Omega\mathcal{U}$ koja se zove *linijom čvorova*. Prodorna tačka te prave sa prividnom nebeskom sferom u kojoj se planeta uspe iznad ravni $X-Y$, u pravcu pozitivnoga Z , zove se *uzlazni čvor*. Ugao Ω ❀ što ga pravac linije čvorova, naperen ka uzlaznom čvoru Ω , zatvara sa osom X , dakle luk $\Upsilon\Omega$ nebeske sfere, zove se *longituda uzlaznog čvora*. Tu koordinatu nacićemo na ovaj način. Projekcija vektora \mathcal{C} u ravan $X-Y$ ima skalarnu veličinu $C_a = C \sin i$, a zatvara sa osom X ugao koji ćemo označiti sa α . Zato je:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_a \cos \alpha = C \cos \alpha \sin i \\ C_2 &= C_a \sin \alpha = C \sin \alpha \sin i. \end{aligned}$$

Linija čvorova stoji normalno na ovoj projekciji, pa njena grana, naperena prema uzlaznom čvoru Ω , zatvara sa osom X ugao $\Omega = \alpha + \frac{1}{2}\pi$. Zato je $\alpha = \Omega - \frac{1}{2}\pi$. Stavljajući ovo u prethodne jednačine, dobivamo:

$$C_1 = +C \sin \Omega \sin i \tag{25}$$

$$C_2 = -C \cos \Omega \sin i. \tag{26}$$

Jednačine (24), (25), (26) određuju jednoznačno veličine i i Ω , t.j. položaj ravni planetske putanje.

§ 11. **Oblik putanje.** Odaberimo u ravni planetske putanje polarni koordinatni sistem tako da njegov pol O leži u centru Sunca, a njegova polarna osa da je naperena prema uzlaznom čvoru, pa označimo sa φ i r polarne koordinate planete, to se amplituda φ zove, u ovom slučaju, *argumenat latitude*, a r *radiusvektor*. Dvostruka sektorska brzina izražena je pomoću ovih koordinata sa $r^2 d\varphi/dt$, pa zato jednačina (16) dobiva ovaj skalarni oblik:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C. \quad (27)$$

Pošto radiusvektor r predstavlja moduo vektora položaja τ , to je, prema definiciji skalarnog produkta,

$$r^2 = (\tau \tau).$$

I diferencijali ovih dvaju izraza moraju biti međusobno jednaki, pa je zato:

$$r dr = \tau d\tau.$$

Označimo li sa v skalarnu veličinu brzine \mathbf{v} , to je, isto tako,

$$v dv = \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

Ako još, radi jednostavnijeg pisanja, stavimo

$$f(M + m) = \mu, \quad (28)$$

to jednačina (12) dobiva, imajući još u vidu (18), ovaj oblik

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \tau.$$

Pomnožimo ovu jednačinu skalarno sa $\mathbf{v} dt = d\tau$, pa zamenimo, pri tome, $\mathbf{v} d\mathbf{v}$ sa $v dv$, a τdt sa $r dr$, to dobivamo ovu skalarnu jednačinu:

$$v dv = -\frac{\mu}{r^2} dr. \quad (29)$$

Integracijom ove jednačine dobivamo:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}, \quad (30)$$

gde a označava integracionu konstantu koju valja još odrediti.

Da bismo i prednju jednačinu integrisali, t.j. odredili zavisnost r od φ , dakle našli oblik planetske putanje, postupićemo ovako. Kvadrat vektorskog izraza (14) pri glave daje:

$$v^2 = v_r^2 + v_n^2,$$

t.j. zbog (12)

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \quad (31)$$

Iz (27) sleduje:

$$\frac{1}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{1}{d\varphi},$$

pa je zato:

$$v^2 = \frac{C^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}.$$

Kako je:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi},$$

to je:

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right)\right]^2,$$

pa zato:

$$v^2 = C^2 \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2} \right]. \quad (32)$$

Iz (30) i (32) sleduje:

$$\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2} = 2 \frac{\mu}{C^2} \frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} \cdot \frac{1}{a},$$

t.j.

$$\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right) = \frac{\mu^2}{C^4} - \frac{\mu}{C^2} \frac{1}{a}$$

$$\left\{ \frac{\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} - \frac{\mu}{C^2} \cdot \frac{1}{a}}} \right\}^2 + \left\{ \frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} - \frac{\mu}{C^2} \cdot \frac{1}{a}}} \right\}^2 = 1. \quad (33)$$

Stavimo li

$$\frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} - \frac{\mu}{C^2} \cdot \frac{1}{a}}} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}}{\frac{\mu}{C^2} \sqrt{1 - \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{a}}} = z, \quad (34)$$

to dobivamo, mesto (33), ovu diferencijalnu jednačinu:

$$\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2 = 1,$$

dakle

$$d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}. \quad (35)$$

Integrisanjem ove jednačine dobivamo:

$$\varphi = \arcsin z + \left(\omega - \frac{\pi}{2}\right), \quad (36)$$

pri čemu je $(\omega - \frac{1}{2}\pi)$ uvedeno kao integraciona konstanta.

Dobivamo, dakle,

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} + (\varphi - \omega),$$

t.j.

$$z = \cos(\varphi - \omega). \tag{37}$$

Iz jednačina (34) i (37) sleduje:

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \frac{\mu}{C^2} \sqrt{1 - \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{a}} \cos(\varphi - \omega),$$

t.j.

$$r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{a}} \cos(\varphi - \omega)}. \tag{38}$$

Ovo je polarna jednačina planetske putanje.

U prethodnoj glavi izveli smo polarnu jednačinu elipse, pretpostavljajući da pol koordinatnog sistema leži u žiži elipse, a da je polarna osa naperena prema najbližoj tački elipse. Ta jednačina bila je ova:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \tag{39}$$

pri čemu je ugao v nazvan pravom anomalijom. Ista ova jednačina važi za sve konične preseke, samo sa tom razlikom da je za elipsu $e < 1$, za parabolu $e = 1$, a za hiperbolu $e > 1$. Zato nam jednačina (38) predstavlja jedan konični presek. Numerički ekscentricitet tog preseka dat je, kao što to sleduje iz upoređenja (38) sa (39), ovim izrazom:

$$e = \sqrt{1 - \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{a}}. \tag{40}$$

Prema tome da li je ta veličina, koju valja uzeti pozitivno, manja od jedinice, jednaka jedinici ili veća od jedinice, predstavljaće jednačina (38) elipsu, parabolu ili hiperbolu. Parametar tog koničnog preseka dat je izrazom:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{\mu}. \tag{41}$$

Jednačina putanje mase m je, dakle, ova:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \omega)}. \tag{42}$$

Iz (39) i (42) sleduje veza:

$$v = \varphi - \omega \tag{43}$$

koja nam pruža geometrijsko tumačenje integracione konstante ω . Ako nam M (sl. 6) predstavlja proizvoljnu jednu tačku planetske putanje, φ njenu amplitudu, a P perihel, to nam ugao POM predstavlja pravu anomaliju v planete. Pošto je amplituda perihela predstavljen uglo $\varphi - v = \omega$, to nam u (42) ω predstavlja

amplitudu perihela ili *longitudu perihela, merenu od uzlaznog čvora*. Ako, dakle, P' predstavlja projekciju perihela P , bačenu iz tačke O na nebesku sferu, to je longituda perihela, merena od uzlaznog čvora, predstavljen lukom $\Omega P'$ nebeske sfere.

Potrebno je još odrediti veličine a , e i ω iz inicijalnih uslova.

Iz (40) sleduje:

$$1 - e^2 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{a},$$

a iz jednačine (41) i (2) prošle glave:

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{a}, \tag{44}$$

pa se iz prednjih dveju jednačina dobiva:

$$a = a. \tag{45}$$

Integraciona konstanta a predstavlja, dakle, veliku poluosu planetske putanje. Zato dobivamo, mesto (30), ovu jednačinu:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}, \tag{46}$$

t.j.

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - r v^2}. \tag{47}$$

Ako, dakle, r_0 i v_0 predstavljaју skalarne velične vektora τ_0 i v_0 , to je njima određena velika poluosu a planetske putanje:

$$a = \frac{\mu r_0}{2\mu - r_0 v_0^2}. \tag{48}$$

Značajno je da numerička vrednost a velike poluose putanje zavisi samo od skalarnih velična, a ne od prostorne orijentacije vektora τ_0 i v_0 .

Kada smo izračunali veličinu a , to se dobiva numerički ekscentricitet e putanje pomoću jednačine (44).

Valja još da odredimo longitudu ω perihela, merenu od uzlaznog čvora. Iz (12) i (28) sleduje:

$$\frac{d^2 \tau}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \tau.$$

Pomnožimo li ovu jednačinu vektorielno sa \mathcal{C} , to dobivamo:

$$\left[\mathcal{C} \frac{d^2 \tau}{dt^2} \right] = -\frac{\mu}{r^3} [\mathcal{C} \tau].$$

Iz (15) sleduje, primenom poznatog obrasca vektorskog računa

$$[\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}]] = \mathbf{b} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

$$-[\mathcal{C} \tau] = \left[\tau \left[\tau \frac{d\tau}{dt} \right] \right] = \tau \left(\tau \frac{d\tau}{dt} \right) - \frac{d\tau}{dt} (\tau \tau) = r \frac{dr}{dt} \tau - r^2 \frac{d\tau}{dt},$$

t.j.

$$\left[\mathcal{C} \frac{d^2 \tau}{dt^2} \right] = \frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} \tau - \frac{\mu}{r} \frac{d\tau}{dt}.$$

Kako je

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = \left[\mathbf{c} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \mathbf{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

to dobivamo:

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] + \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \mathbf{r} \right) = 0,$$

a posle izvršenog integrisanja,

$$\left[\mathbf{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] + \frac{\mu}{r} \mathbf{r} + \mathcal{D} = 0, \tag{49}$$

gde \mathcal{D} označava jedan vektor koji je nezavisan od vremena.

No kako je, zbog (15), a primenom spomenutog obrasca vektorskog računa,

$$\left[\mathbf{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = - \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] \right] = -\mathbf{r} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \left(\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = -v^2 \mathbf{r} + r \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

to se, uzimajući u obzir (46), dobiva jednačina:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \right) \mathbf{r} - r \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{50}$$

Radiusvektor r perihela B (sl. 4) ima, pošto perihel ima od pola O otstojanje $a - ea$, ovu vrednost:

$$r = (1 - e)a,$$

a vektor položaja perihela \mathbf{r} , pretstavljen je, ako sa \mathbf{n}_0 označimo jedinični vektor u pravcu SB , izrazom:

$$\mathbf{r} = (1 - e)a\mathbf{n}_0.$$

Kako u perihelu veličina r dostiže svoj minimum, to je za perihel

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

Stavimo li poslednja tri izraza u (50) to dobivamo:

$$\mathcal{D} = e\mu \mathbf{n}_0. \tag{51}$$

Vektor \mathcal{D} naperen je, dakle, prema perihelu i ima skalarnu veličinu $e\mu$.

Vektor \mathcal{D} može se primenom jednačine (49), odrediti iz inicijalnih uslova:

$$\text{za } t = t_0: \quad \mathbf{c} = [\mathbf{c} \mathbf{v}_0]; \quad r = r_0; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0,$$

pa je zato:

$$\mathcal{D} = -[\mathbf{c} \mathbf{v}_0] - \frac{\mu}{r_0} \mathbf{r}_0. \tag{52}$$

Kako taj vektor ima moduo $e\mu$, to je jedinični vektor \mathbf{n}_0 pretstavljen izrazom:

$$\mathbf{n}_0 = -\frac{1}{e\mu} [\mathbf{c} \mathbf{v}_0] - \frac{1}{er_0} \mathbf{r}_0. \tag{53}$$

Stavljajući ovamo izraze (20), (19), (17), dobivamo:

$$\mathbf{n}_0 = -\frac{1}{e\mu} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \frac{1}{er_0} (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}). \tag{54}$$

Sada možemo lako odrediti ugao ω što ga taj vektor zatvara sa linijom čvorova. Jedinični vektor \mathbf{h}_0 , naperen iz O prema uzlaznom čvoru Ω (sl. 6), pretstavljen je, pošto taj vektor leži u ravni $X-Y$, i zatvara sa osom X ugao Ω , ovim izrazom:

$$\mathbf{h}_0 = \cos \Omega \mathbf{i} + \sin \Omega \mathbf{j}. \tag{55}$$

Jedinični vektori \mathbf{h}_0 i \mathbf{n}_0 zatvaraju između sebe ugao ω koji je, prema samoj definiciji skalarnog produkta dvaju vektora, dat jednačinom:

$$\cos \omega = (\mathbf{h}_0 \mathbf{n}_0). \tag{56}$$

Stavljajući ovamo izraze (54) i (55) dobivamo, pošto su skalarni produkti jediničnih vektora \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} ili jednaki jedinici ili nuli, jednu skalarnu jednačinu kojom je ugao ω izražen pomoću inicijalnih uslova.

Na taj način određena je relativna putanja mase m prema masi M . Kako se zajedničko težište S tih dveju masa kreće, prema dobivenim vektorskim integralima, na potpuno određen način, pravolinijski i uniformno, to je time određeno i apsolutno kretanje mase M i m u odabranom koordinatnom sistemu. Težište S deli stalno vektor položaja \mathbf{r} mase m prema masi M u obrnutoj srazmeri tih masa, pa će se zato one, relativno prema tom težištu, kretati tako da će prava koja ih spaja prolaziti uvek kroz to težište, a radiusvektori njihovih putanja biti pretstavljeni izrazom (42) koji treba samo pomnožiti sa $M/(M + m)$ odnosno $m/(M + m)$.

Te će putanje biti opet konični preseki istog ekscentriciteta kao i u (42), no smanjenog parametra. Ako je $e < 1$, onda će se obe mase kretati po drugom Keplerovom zakonu po elipsama oko zajedničkog težišta, a zajedno sa tim težištem, još vektorom brzine \mathfrak{B} u prostoru. Zbog toga će obe te mase opisivati u prostoru helikoidalne krive, obavijene oko dvaju valjaka koji imaju za bazu spomenute elipse, a za izvodnicu vektor \mathfrak{B} .

§ 12. Kretanje po eliptičnoj putanji. Ostaje još da matematski opišemo kretanje mase m po putanji čiju smo jednačinu maločas izveli. Pri tome ćemo se ograničiti na slučaj planetskoga kretanja kada je ta putanja elipsa, t.j. kada je $e < 1$. Zato ćemo masu m zvati opet planetom.

Označimo li sa T vreme potpunog, sideričkog obilaska planete oko Sunca, to će za to vreme radiusvektor planete prebrisati celokupnu površinu πab , ograničenu elipsom planetske putanje. Zbog toga je dvostruka sektorska brzina pretstavljena izrazom:

$$C = \frac{2\pi ab}{T}. \tag{57}$$

Iz (41) sleduje:

$$C^2 = \mu \frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2},$$

t.j.

$$\mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}. \quad (58)$$

Uzimajući u obzir (28), dobivamo:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{f}{4\pi^2} (M + m). \quad (59)$$

Ova jednačina izražava jednu važnu relaciju između veličina a i T , koja nije sasvim podudarna sa trećim Keplerovim zakonom. Po tom je zakonu količnik a^3/T^2 za sve planete jedan te isti, što prema prednjoj jednačini ne bi bio slučaj, jer prisustvo mase m u toj jednačini menja vrednost spomenutog količnika od planete do planete. No pošto su mase planeta veoma male prema masi Sunca, to se u gornjoj jednačini može m zanemariti pored M , pa se, na taj način, dobiva podudarnost trećeg Keplerovog zakona sa zakonima Nebeske Mehanike.

Kretanje planete po njenoj putanji sleduje po drugom Keplerovom zakonu, pa se pomoću toga zakona može položaj planete u njenoj putanji pretstaviti kao funkcija vremena. Taj posao izvršio je već sam Kepler na ovaj način.

Kada su zadane obe ose jedne elipse (sl. 7), onda se tačka elipse koja leži na jednoj proizvoljnoj ordinati LM_1 može naći na ovaj način. Opišimo preko tih obih osa,

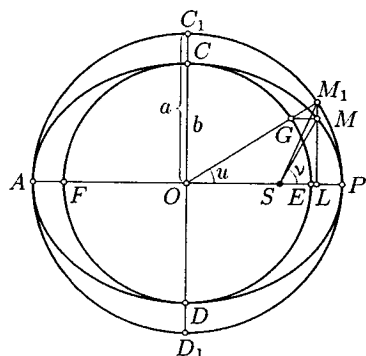
kao prečnika, krugove PC_1AD_1P i $ECFDE$, spojimo M_1 sa središtem O , pa povucimo GM paralelno sa OP . Onda je M tražena tačka elipse. Zaista, ako sa a i b označimo obe poluose elipse, a sa u ugao POM_1 , to je apscisa od M jednaka $x = OL = a \cos u$, a ordinata $y = LM = b \sin u$, pa dobivamo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1,$$

što je, u stvari, jednačina elipse.

Kako je

$$\overline{LM}_1 = a \sin u, \quad \text{t.j.} \quad \frac{\overline{LM}}{\overline{LM}_1} = \frac{a}{b},$$



СЛИКА 7

to elipsa PCA nastaje skraćivanjem ordinata kruga PC_1A u srazmeri b/a . Zbog toga stoje površine sektora PSM i PSM_1 elipse odnosno kruga u istoj toj srazmeri, pa je zato:

$$\text{area } PSM = \frac{b}{a} \text{area } PSM_1.$$

Neka nam sada elipsa $PCADP$ pretstavlja putanju planete oko Sunca, pa neka nam S pretstavlja onu žižu te elipse u kojoj se nalazi Sunce, P perihel, a e ekscentricitet elipse. Onda je:

$$\text{area } PSM_1 = \text{area } POM_1 - \text{area } OSM_1 = \frac{1}{2} a^2 u - \frac{1}{2} a^2 e \sin u,$$

pa zato:

$$\text{area } PSM = \frac{1}{2} ab(u - e \sin u).$$

Ugao u koji se pojavljuje u prednjoj jednačini zove se *ekscentrična anomalija*. *

Sektor PSM elipse raste, prema drugom Keplerovom zakonu, proporcionalno vremenu t . Označimo li sa τ vreme prolaza planete kroz perihel, to je vreme protoklo od tog prolaza pa do trenutka kada je planeta stigla u položaj M jednako $(t - \tau)$. Pomnožimo li taj interval vremena sa sektorskom brzinom $\pi ab/T$, to dobivamo površinu elipsinog sektora PSM . Zato je

$$\frac{\pi ab}{T} (t - \tau) = \frac{1}{2} ab(u - e \sin u),$$

t.j.

$$\frac{2\pi}{T} (t - \tau) = u - e \sin u. \quad (60)$$

Količnik

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (61)$$

pretstavlja srednju uglovnu brzinu planete ili njeno *srednje kretanje*, pa je zato: *

$$n(t - \tau) = u - e \sin u. \quad (62)$$

Pri tome je zbog (59) i (61) n dato jednačinom:

$$n^2 = f \frac{M + m}{a^3}. \quad (63)$$

Jednačina (62) naziva se *Keplerovom jednačinom*; ona daje vezu između t i ekscentrične anomalije u . Da bismo našli vezu između ekscentrične anomalije u i prave anomalije v , valja postupiti ovako. Iz trougla SLM sleduje $\overline{SM}^2 = \overline{SL}^2 + \overline{LM}^2$, t.j.

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - ea)^2 + y^2 \\ &= a^2 [(\cos u - e)^2 + (1 - e^2) \sin^2 u] \\ &= a^2 [\cos^2 u - 2e \cos u + e^2 + \sin^2 u - e^2 \sin^2 u] \\ &= a^2 (1 - e \cos u)^2 \end{aligned}$$

t.j.

$$r = a(1 - e \cos u). \quad (64)$$

Iz (41), (42), (43) i jednačine (2) prve glave sleduje:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}. \quad (65)$$

Poslednje dve jednačine daju:

$$1 - e^2 = (1 + e \cos v)(1 - e \cos u)$$

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}.$$

Zato je:

$$1 + \cos v = 2 \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e \cos u}$$

$$1 - \cos v = 2 \sin^2 \frac{v}{2} = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{1-e \cos u}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e} \cdot \frac{\frac{1}{2}(1-\cos u)}{\frac{1}{2}(1+\cos u)} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}. \quad (66)$$

Da nađemo, dakle, položaj planete u njenoj putanji koji odgovara vremenu t , treba primenom jednačine (62) naći ekscentričnu anomaliju u planete, pa zatim pomoću (64) izračunati radiusvektor r , a pomoću (66) pravu anomaliju v . Vreme prolaza τ planete kroz perihel izračunava se iz inicijalnih uslova na ovaj način.

Numerička vrednost φ_0 argumenta latitude u inicijalnom momentu je onaj ugao što ga vektor položaja τ_0 inicijalnog momenta zatvara sa jediničnim vektorom \mathbf{h}_0 , pa je zato taj ugao dat jednačinom:

$$\cos \varphi_0 = \left(\mathbf{h}_0 \frac{\tau_0}{r_0} \right),$$

gde je \mathbf{h}_0 dato jednačinom (55), τ_0 jednačinom (17), a r_0 jednačinom

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Kada se taj ugao izračuna, onda je vrednost prave anomalije u inicijalnom momentu data jednačinom $v_0 = \varphi_0 - \omega$. Pomoću (66) može se izračunati vrednost u_0 ekscentrične anomalije u inicijalnom momentu, pa stavljajući $t = t_0$; $u = u_0$ u (62) vreme τ .

Veličina

$$n(t - \tau) = 2\pi \frac{t - \tau}{T} = \zeta \quad (67)$$

* naziva se *srednjom anomalijom* planete. Ona je jednaka pravoj anomaliji one fiktivne planete koja bi se kretala u ravni planetske putanje po krugu oko Sunca uniformnom uglovnom brzinom, a prolazila istovremeno sa stvarnom planetom kroz veliku osu njene putanje.

Razlika

$$\xi = v - \zeta \quad (68)$$

* između prave i srednje anomalije planete zove se njena *jednačina centra*.

§ 13. **Eliptični elementi planetskog kretanja.** Do sada nismo učinili još nikakvu pretpostavku o prostornoj orijentaciji upotrebljenog koordinatnog sistema, pošto to nije bilo od potrebe za prethodna teoretska rasuđivanja. U praktičnoj primeni te teorije potrebno je tačno odrediti položaj koordinatnog sistema. Taj se položaj odabire ovako: Ravan $X-Y$ valja položiti u ravan Zemljine putanje jedne određene epohe, na primer epohe 1.0 januara 1900. Osu X valja naperiti prema prolethnoj tački Υ (sl. 6) te iste epohe, a osu Z prema severnom polu ekliptike. Posmatran sa severne strane pozitivni smer obilaženja vodi, najkraćim putem, od ose X ka osi Y , u smislu protivnom skazaljki na satu.

U takvom jednom koordinatnom sistemu može se, kao što smo videli, položaj ravni planetske putanje jednoznačno odrediti longitudom $\Omega = \operatorname{arc} \Upsilon \Omega$ uzlaznog čvora i nagibom i ravni putanje. Orijentaciju putanjine elipse određivali smo, do sada, longitudom $\omega = \operatorname{arc} \Omega P'$ perihela, merenom od uzlaznog čvora. Ta se orijentacija određuje u astronomskoj praksi longitudom Π , merenom od prolethne tačke Υ , a razumevajući pod njom zbir lukova $\Upsilon \Omega$ i $\Omega P'$ nebeske sfere, koji ne leže u istom glavnom preseku te sfere. Zbog toga je:

$$\Pi = \operatorname{arc} \Upsilon \Omega + \operatorname{arc} \Omega P' = \Omega + \omega. \quad (69)$$

Elipsa planetske putanje određena je jednoznačno njenom velikom poluosom a i njenim numeričkim ekscentricitetom e . Tim veličinama određeno je, pri zadatim masama M i m , jednačinom (63) srednje kretanje n planete, a jednačinom (61) njeno siderično vreme obilaženja T . Potrebno je još poznavati položaj planete u jednom određenom trenutku, pa da se, iz svih ovih podataka, može izračunati položaj planete u svakom proizvoljnom momentu. Vreme τ prolaza planete kroz perihel, kojim smo se do sada služili, predstavljalo je vreme jednog određenog položaja planete. Da bismo u naše račune uveli položaj planete u jednom određenom momentu, postupićemo ovako. Veličina

$$\lambda = \Pi + v \quad (70)$$

naziva se *pravom longitudom* planete, a veličina

$$l = \Pi + \zeta = \Pi + n(t - \tau) = \Pi - n\tau + nt \quad (71)$$

srednjom longitudom planete. U inicijalnom momentu $t = 0$, t.j. u doba maločas određene epohe od koje brojimo vreme, ima l vrednost

$$\epsilon = \Pi - n\tau, \quad (72)$$

pa se ona naziva *srednjom longitudom epohe* i pretstavlja traženu konstantu.

Svih šest elemenata

$$\Omega, \quad i, \quad \Pi, \quad a, \quad e, \quad \epsilon \quad (73)$$

zovu se *eliptični elementi* ili *elementi eliptičnog kretanja* planete.

§ 14. **Problem satelita, svoden na problem dvaju tela.** Neka nam m označava jednu planetu a m_1 satelit koji oko nje obilazi. Označimo vektor položaja mase m sa \mathfrak{R} , a vektor položaja mase m_1 sa \mathfrak{I} , to je položaj satelita prema planeti određen vektorom:

$$\tau = \mathfrak{I} - \mathfrak{R}. \quad (74)$$

Svi sateliti našeg planetskog sistema kruže u tako uskim putanjama oko njihovih planeta da je skalarna veličina r vektora τ veoma malena prema otstojanju ρ planete od Sunca. Zbog toga je dozvoljeno otstojanje satelita od Sunca uzeti jednako ρ , a, iz istog razloga, pretpostaviti da su sile kojima Sunce privlači planetu odnosno satelit, a koje ćemo označiti sa \mathfrak{F} i \mathfrak{F}' , međusobno paralelne. Označimo li, dakle, jedinični vektor u pravcu od planete prema Suncu sa \mathbf{j}_0 , a masu Sunca sa M , to dejstvuje na planetu ova privlačna sila Sunca

$$\mathfrak{F} = f \frac{Mm}{\rho^2} f_0,$$

a na satelit

$$\mathfrak{F}' = f \frac{Mm_1}{\rho^2} f_0.$$

Stavimo li

$$f \frac{M}{\rho^2} = k, \quad (75)$$

to je:

$$\mathfrak{F} = kmf_0; \quad \mathfrak{F}' = km_1f_0.$$

Ako ne uzmemo u obzir, zbog toga što su veoma male, privlačna dejstva ostalih članova našeg planetskog sistema, to dejstvuje na planetu, pored sile \mathfrak{F} , još i privlačna sila satelita, predstavljena izrazom

$$f \frac{mm_1}{r^3} \tau,$$

a na satelit, pored sile \mathfrak{F}' privlačna sila planete, predstavljena izrazom

$$-f \frac{mm_1}{r^3} \tau.$$

Zbog toga su diferencijalne jednačine kretanja planete odnosno satelita ove:

$$m \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} = f \frac{mm_1}{r^3} \tau + kmf_0 \quad (76)$$

$$m_1 \frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2} = -f \frac{mm_1}{r^3} \tau + km_1f_0. \quad (77)$$

Zbir ovih dveju jednačina daje:

$$m \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2} = k(m + m_1)f_0. \quad (78)$$

Ako nam tačka S predstavlja centar masa m i m_1 , to je njen vektor položaja f dat sledećom jednačinom:

$$(m + m_1)f = m\mathfrak{R} + m_1\mathfrak{I}. \quad (79)$$

Oдавде sleduje:

$$(m + m_1) \frac{d^2 f}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2}.$$

Zato je, zbog (78) i (75),

$$(m + m_1) \frac{d^2 f}{dt^2} = f \frac{M(m + m_1)}{\rho^2} f_0. \quad (80)$$

Ovo je jednačina kretanja centra masa S . Ona kazuje da se zajedničko težište planete i njenog satelita kreće oko Sunca tako kao da je u tom težištu koncentrisana masa $(m + m_1)$, a ova da je privlačena od Sunca.

Skratimo li jednačinu (76) sa m , a jednačinu (77) sa m_1 , pa oduzmemo li jednu od druge, to dobivamo jednačinu:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} = -f \frac{(m + m_1)}{r^3} \tau.$$

Pošto je, zbog (74),

$$\frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2} - \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} = \frac{d^2 \tau}{dt^2},$$

to sleduje:

$$m_1 \frac{d^2 \tau}{dt^2} = -f \frac{m_1(m + m_1)}{r^3} \tau. \quad (81)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kretanja satelita oko planete. Ona kazuje da se satelit kreće oko planete tako kao kad bi ova bila nepomična, imala masu $(m + m_1)$ i samo ona dejstvovala po Njutnovom zakonu na satelit. Time je problem satelita redukovao na problem dvaju tela. Označimo li, dakle, vreme obilaženja satelita oko planete sa T_1 , a sa a_1 veliku poluosu njegove relativne putanje oko planete, to dobivamo, koristeći se jednačinom (59) iz problema dvaju tela:

$$f(m + m_1) = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2}. \quad (82)$$

Označimo li sa T vreme obilaženja planete oko Sunca, a sa a veliku poluosu planetske putanje, to je, isto tako:

$$f(M + m + m_1) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}. \quad (83)$$

Iz poslednjih dvaju jednačina sleduje:

$$\frac{m + m_1}{M + m + m_1} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2.$$

Masa m_1 je, uglavnom, toliko malena prema masi m da je, u prednjem izrazu, možemo zanemariti; to isto važi, u još većoj meri, za masu m u odnosu prema masi M . Zato je, dosta tačno

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2. \quad (84)$$

Služeći se ovom jednačinom, može se iz vremena obilaženja satelita i velike poluose njegove putanje izračunati odnos mase m planete prema masi M Sunca.

Na ovaj način je Njutn u svojim principijima izračunao mase Zemlje, Jupitra i Saturna. Planete Uranus i Neptun bile su onda još nepoznate, a isto tako i Marsovi sateliti.

Opšti integrali problema n tela

§ 15. **Problem n tela.** Uočimo proizvoljan broj nebeskih tela koja se privlače po Njutnovom zakonu. Zadatak, da se iz inicijalnih uslova odredi kretanje tih tela, zove se problem n tela Nebeske Mehanike. Izrazimo taj zadatak jezikom matematske analize. Označimo, u to ime, sa $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ mase uočenih nebeskih tela, a sa $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n$ vektore položaja njihovih težišta u jednom odabranom koordinatnom sistemu koji smatramo nepomičnim. Privlačne sile koje dejstvuju između dveju proizvoljnih masa m_i i m_k toga materijalnog sistema mogu se matematski predstaviti na ovaj način.

Relativni položaj mase m_k prema m_i predstavljen je vektorom

$$l_{ik} = \tau_k - \tau_i.$$

Ako sa ρ_{ik} označimo moduo vektora l_{ik} , to nam l_{ik}/ρ_{ik} predstavlja jedinični vektor pravca od m_i ka m_k , a l_{ki}/ρ_{ki} jedinični vektor protivnoga pravca. Kako ρ_{ik} i ρ_{ki} predstavljaju duži koje valja uvek smatrati pozitivnima, to je uvek:

$$\rho_{ik} = \rho_{ki}.$$

Iz prethodnoga sleduje da masa m_k dejstvuje na masu m_i silom koja je predstavljena sledećim izrazom:

$$f m_i m_k \frac{1}{\rho_{ik}^2} \cdot \frac{l_{ik}}{\rho_{ik}} = f m_i m_k \frac{\tau_k - \tau_i}{\rho_{ik}^3}.$$

Privlačna dejstva ostalih masa m_1, m_2, \dots, m_n na masu m_i dobićemo ako u gornjem izrazu indeks k zamenimo sa $1, 2, 3, \dots, n$. Zbog toga će jednačina kretanja mase m_i biti ova:

$$m_i \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} = \sum_k f m_i m_k \frac{\tau_k - \tau_i}{\rho_{ik}^3},$$

pri čemu se znak zbira odnosi na sve mase sistema sa jediničnim izuzetkom mase m_i . Ova nam jednačina predstavlja, u isti mah, jednačinu kretanja svake proizvoljne mase m_1, m_2, \dots, m_n sistema, ako samo indeks i zamenimo sa $1, 2, 3, \dots, n$. Zato nam n vektorskih jednačina:

$$m_i \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} = \sum_k f m_i m_k \frac{\tau_k - \tau_i}{\rho_{ik}^3}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

pretstavljaju diferencijalne jednačine kretanja masa m_1, m_2, \dots, m_n . Ovo su sve diferencijalne jednačine drugoga reda, pa bi njihova potpuna integracija dala $2n$ vektorskih ili $6n$ skalarnih jednačina, kojima bi vektori položaja i vektori brzina tih n masa bili izraženi kao funkcije vremena. Sadašnjim matematskim sredstvima moguće je, međutim, izvesti samo tri vektorska i jedan skalarni tip integrala. Ti se integrali zovu opšti integrali problema n tela.

§ 16. **Opšti integrali problema n tela.** U jednačinama (1) pojavljuje se svaka kombinacija dveju proizvoljnih masa m_i i m_k dva puta. Stoji li, u tim jednačinama, levo izraz $m_i d^2 \tau_i / dt^2$, onda se desno, u naznačenom zbiru, pojavljuje član $f m_i m_k (\tau_k - \tau_i) / \rho_{ik}^3$, a kada levo stoji izraz $m_k d^2 \tau_k / dt^2$, onda se desno pojavljuje član $f m_k m_i (\tau_i - \tau_k) / \rho_{ki}^3$. Kako je $\rho_{ik} = \rho_{ki}$, to su ti parovi članova, iz kojih je sastavljen celokupan skup desnih strana gornjih jednačina, opšte predstavljani ovim:

$$f m_i m_k \frac{\tau_k - \tau_i}{\rho_{ik}^3}; \quad f m_i m_k \frac{\tau_i - \tau_k}{\rho_{ik}^3}.$$

Saberemo li, prema tome, svih n jednačina (1), to se desna strana toga zbira može rasčlanati u same takve parove, a kako svaki takav par daje:

$$f m_i m_k \frac{\tau_k - \tau_i}{\rho_{ik}^3} + f m_i m_k \frac{\tau_i - \tau_k}{\rho_{ik}^3} = 0,$$

to će cela desna strana toga zbira biti jednaka nuli, pa zato i leva. Tako dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} = 0. \quad (2)$$

Pomnožimo li jednačine (1), redom, vektorijski sa $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, pa saberemo li ih zatim, to će u desnom zbiru svaki odgovarajući par članova dati:

$$f \frac{m_i m_k}{\rho_{ik}^3} \left\{ [\tau_i (\tau_k - \tau_i)] + [\tau_k (\tau_i - \tau_k)] \right\} = f \frac{m_i m_k}{\rho_{ik}^3} \left\{ [\tau_i \tau_k] + [\tau_k \tau_i] \right\} = 0,$$

pa će zato desna strana toga zbira biti jednaka nuli, a zato i leva. Zbog toga je:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\tau_i \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} \right] = 0. \quad (3)$$

Pomnožimo li jednačine (1), redom, skalarno sa $d\tau_1, d\tau_2, \dots, d\tau_n$ pa saberemo li ih, to će u desnom zbiru svaki od spomenutih parova dati:

$$f \frac{m_i m_k}{\rho_{ik}^3} \left\{ (\tau_k - \tau_i) d\tau_i + (\tau_i - \tau_k) d\tau_k \right\} = -f \frac{m_i m_k}{\rho_{ik}^3} (\tau_k - \tau_i) (d\tau_k - d\tau_i).$$

Kako je

$$(\tau_k - \tau_i) (d\tau_k - d\tau_i) = l_{ik} dl_{ik} = \rho_{ik} d\rho_{ik},$$

to se svaki ovaj par redukuje na

$$-f \frac{m_i m_k}{\rho_{ik}^2} d\rho_{ik},$$

pa je zato:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} dt = -f \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{\rho_{ik}^2} d\rho_{ik}. \quad (4)$$

U gornjem dvostrukom zbiru desne strane pojavljuje se svaka kombinacija masa m_i i m_k samo jedanput, pošto je svaki od gornjih parova dao samo po jedan član.

Diferencijalne jednačine (2), (3) i (4), koje smo na taj način dobili, mogu se lako integrisati. Iz (2) sleduje:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathfrak{B}, \quad (5)$$

gde \mathfrak{B} označava jedan konstantni vektor, nezavisan od vremena.

Integracijom prethodne jednačine dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \mathbf{r}_i = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}t, \quad (6)$$

gde je vektor \mathfrak{A} nezavisan od vremena.

Kako je, sasvim opšte,

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{r}_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] = \left[\mathbf{r}_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right],$$

to možemo jednačinu (3) zameniti ovom:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\mathbf{r}_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] = 0.$$

Integracija ove jednačine daje:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\mathbf{r}_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] = \mathfrak{C}, \quad (7)$$

gde \mathfrak{C} predstavlja opet jedan konstantan vektor.

I jednačina (4) može se lako integrisati. Njena desna strana je, u stvari, diferencijal skalarnoga izraza:

$$U = f \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{\rho_{ik}}, \quad (8)$$

u kojem se, kao što smo već napomenuli, svaka kombinacija masa m_i i m_k pojavljuje samo jedanput. Skalar U naziva se *funkcijom sila* posmatranog materijalnog sistema. Kako je:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i; \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} dt = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} dt = d\mathbf{v}_i = v_i dv_i,$$

pri čemu \mathbf{v}_i predstavlja vektor brzine mase m_i , a v_i njegov moduo, to se jednačina (4) može zameniti ovom:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i dv_i = dU.$$

Integracija te jednačine daje:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i v_i^2}{2} = U + h, \quad (9)$$

pri čemu h označava integracionu konstantu.

Nađena tri vektorska integrala (5), (6), (7) i skalarni (9) koji se, svi zajedno, mogu zameniti sa deset skalarnih jednačina, zovu se opšti integrali problema n tela.

Oba vektorska integrala (5) i (6) nazivaju se integralima težišta, i to iz ovog razloga. Vektor položaja \mathfrak{S} težišta, bolje reći, centra masa m_1, m_2, \dots, m_n dat je, prema samoj svojoj definiciji, jednačinom:

$$M\mathfrak{S} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \mathbf{r}_i, \quad (10)$$

gde

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \quad (11)$$

označava celokupnu masu posmatranog materijalnog sistema. Pošto je vektor brzine \mathfrak{V} težišta predstavljen sa

$$\mathfrak{V} = \frac{d\mathfrak{S}}{dt},$$

to dobivamo diferencijacijom jednačine (10) po vremenu:

$$M\mathfrak{V} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}. \quad (12)$$

Iz (5) i (12) sleduje:

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{M} \mathfrak{B}. \quad (13)$$

a iz (6) i (10)

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{M} \mathfrak{A} + \frac{1}{M} \mathfrak{B}t. \quad (14)$$

Jednačina (13) kazuje da je vektor brzine težišta celokupnog sistema jedan konstantan vektor, zbog čega se to težište kreće u prostoru pravolinijski i uniformno. Putanja toga težišta predstavljena je, u vektorskom obliku, jednačinom (14) u kojoj t igra ulogu parametra; \mathfrak{A}/M je vektor početnog položaja težišta za $t = 0$.

Vektorski integral (7) naziva se i integralom površina, a to zbog ovoga. Izraz $[\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_i/dt]$ predstavlja, kao što smo to već u problemu dvaju tela obrazložili, dvostruku vrednost orientirane površine koju vektor položaja \mathbf{r}_i mase m_i prebriše u jedinici vremena. Jednačina (7) kazuje da je vektorski zbir svih orientisanih površina prebrisanih od vektora položaja $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ u jedinici vremena, a pomnoženih, pre sabiranja, sa odgovarajućim masama, jedan stalan vektor.

Integrali (5) i (6) koje možemo pisati i u ovom obliku:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i v = \mathfrak{B} \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i [\tau_i v_i] = \mathfrak{C} \quad (16)$$

nazivaju se integralima količine kretanja ili integralima impulsa, a to zbog ovoga. Vektor

$$\mathfrak{P} = m_i v_i \quad (17)$$

naziva se količinom kretanja ili impulsom mase m_i . Iz poslednjih triju sleduju ove dve jednačine:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{P}_i = \mathfrak{B}; \quad \sum_{i=1}^{i=n} [\tau_i \mathfrak{P}_i] = \mathfrak{C}.$$

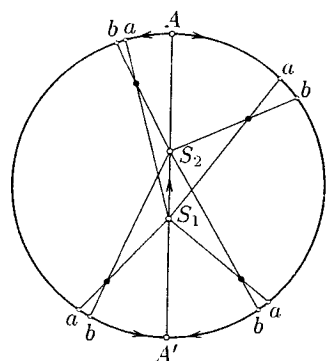
One kazuju da je zbir impulsa svih masa sistema, a i zbir njihovih momenata obzirom na tačku O , nezavisan od vremena.

Integral (9) naziva se integralom žive sile, jer leva strana te jednačine predstavlja živu silu posmatranog materijalnog sistema.

§ 17. Translatorno kretanje Sunčevog sistema. Opšti integrali problema n tela dozvoljavaju, primenjeni na naš Sunčev sistem, pravolinijsko uniformno kretanje težišta tog sistema prema sistemu zvezda nekretnica, što je već Njutn uvideo. Polazeći od toga saznanja, pokušao je, prvi, V. Heršel, a za njim i mnogi drugi astronomi, da odrede to kretanje našeg planetaskog sistema po metodu kojega je osnovna ideja ova.

Položaj težišta planetaskog sistema zavisi od trenutne konstelacije planeta prema Suncu. Zbog ogromne mase Sunca, leži to težište uvek u blizini samoga Sunca, pa se, pri istovremenoj opoziciji svih planeta, može udaljiti od centra Sunca najviše za 2,2 poluprečnika Sunčeva. Kako je godišnja paralaksa zvezda nekretnica toliko

malena da je tek u prošlom veku mogla biti konstatovana, to je otstojanje zvezda nekretnica od planetaskog sistema toliko ogromno da stajalište zemaljskog posmatrača možemo bez ikakve osetne greške identifikovati sa težištem planetaskog sistema. Neka bude, dakle, S_1 (sl. 8) položaj toga težišta u vremenu t_1 . Kreće li se težište planetaskog sistema u pravcu $A'A$, to će u jednom drugom momentu t_2 vremena stajalište posmatrača biti drugo, pa neka bude predstavljeno tačkom S_2 . Pretpostavimo da zvezde nekretnice nemaju vlastitog kretanja, onda će one iz stajališta S_1 posmatračevog izgledati projicirane u tačke a nebeske sfere, a iz stajališta S_2 u tačke b . Translatorno kretanje planetaskog sistema ima, prema tome, za posledicu



Слика 8

da se zvezde nekretnice od tačke A nebeske sfere prividno udaljuju da bi se, krećući se po glavnim krugovima nebeske sfere položenim kroz tačke A i A' , približavale tački A' . Vlastita kretanja zvezda nekretnica pomućavaju ovu jednostavnu sliku i otežavaju znatno tačno određivanje tačaka A i A' nebeske sfere, od kojih se A zove apeks, a A' antiapeks. Zato je bilo potrebno koristiti se statističkim metodama, pa se, na taj način, našlo da se ceo naš planetaski sistem kreće brzinom od kakvih 20 kilometara u sekundi prema onoj tački zvezdanog neba kojoj odgovara rektascenzija od okruglo 270° , a deklinacija od okruglo 30° .

Pri tome kretanju crta težišta planetaskog sistema pravu liniju, oko ove se obavlja putanja težišta Sunčevog, neprekoračavajući saopštenu maksimalnu elongaciju. Planete opisuju, pri tome, eliptične, zbog kretanja Sunca lako zatalasane heliokidalne linije, a visina hoda tih linija proporcionalna je vremenu obilaženja pojedinih planeta.

§ 18. Laplasova invariabilna ravan. Translatorna kretanja svih članova našeg planetaskog sistema određuju, prema rezultatima §16, jedan vektor \mathfrak{C} , nezavisan od vremena. Taj smo vektor odredili uz pretpostavku da poznajemo apsolutna kretanja u prostoru ili bar kretanja prema jednom koordinatnom sistemu koji možemo smatrati kao nepomičan. No mi apsolutna kretanja u prostoru ne samo da ne poznajemo, nego ne možemo, prema sadašnjem shvatanju nauke, o njima ni govoriti, niti smo u stanju da odaberemo jednu nepomičnu tačku u prostoru. Zbog toga možemo govoriti samo o relativnim kretanjima. Zato postavljamo pitanje kako stoji sa vektorom \mathfrak{C} , ako početak O našeg koordinatnog sistema položimo u jednu određenu tačku našeg planetaskog sistema, a taj koordinatni sistem orijentišemo tako da se ne zaokreće prema nebu zvezda nekretnica. Vektor položaja tačke O u bivšem, mirujućem koordinatnom sistemu, na koji su se odnosili računivanja i oznake §16, neka bude označen sa \mathfrak{R} , onda su, upotrebom spomenutih oznaka, vektori položaja masa m_1, m_2, \dots, m_n u novom sistemu predstavljeni sa

$$(\tau_1 - \mathfrak{R}), (\tau_2 - \mathfrak{R}), \dots, (\tau_n - \mathfrak{R}).$$

Odaberimo još jednu, drugu, tačku M našeg planetaskog sistema koja se, u uočenoj momentu, kreće u prvom mirujućem sistemu brzinom v_0 , onda su relativne brzine masa m_1, m_2, \dots, m_n prema tački M predstavljene izrazima:

$$(v_1 - v_0), (v_2 - v_0), \dots, (v_n - v_0).$$

Konstruišimo sada jedan vektor \mathfrak{E} na isti način kao i vektor \mathfrak{C} §16, samo sa tom razlikom da vektore apsolutnog položaja zamenimo sa vektorima relativnog položaja prema tački O , a vektore apsolutnih brzina sa vektorima relativnih brzina prema tački M . Taj će vektor onda biti predstavljen izrazom:

$$\mathfrak{E} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i [(\tau_i - \mathfrak{R})(v_i - v_0)]. \quad (18)$$

Izvršimo naznačena množenja u gornjem izrazu i izvadimo pred znak zbira ono što je u njemu zajedničko. Na taj način dobivamo:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \sum m_i[\tau_i \mathbf{v}_i] - \sum m_i[\mathfrak{R} \mathbf{v}_i] - \sum m_i[\tau_i \mathbf{v}_0] + \sum m_i[\mathfrak{R} \mathbf{v}_0] \\ &= \sum m_i[\tau_i \mathbf{v}_i] - [\mathfrak{R} \sum m_i \mathbf{v}_i] + [\mathbf{v}_0 \sum m_i \tau_i] + [\mathfrak{R} \mathbf{v}_0] \sum m_i.\end{aligned}$$

Kako je prema (11), (10), (12) i (16)

$$\sum m_i = M; \quad \sum m_i \tau_i = M\mathfrak{G}; \quad \sum m_i \mathbf{v}_i = M\mathfrak{W}; \quad \sum m_i[\tau_i \mathbf{v}_i] = \mathfrak{C},$$

to dobivamo:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{C} - M\{[\mathfrak{R} \mathfrak{W}] + [\mathfrak{G} \mathbf{v}_0] - [\mathfrak{R} \mathbf{v}_0]\}. \quad (19)$$

Ovaj izraz nije nezavisan od vremena, jer su u njemu \mathfrak{R} , \mathbf{v}_0 , \mathfrak{G} promenljive veličine.

Položimo sada početak O našeg koordinatnog sistema u težište planetetskog sistema, stavimo, dakle, $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}$, to dobivamo:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{C} - M[\mathfrak{G} \mathfrak{W}].$$

Ostavimo li početak O našeg koordinatnog sistema u proizvoljnoj tački planetetskog sistema, ali zato položimo tačku M , prema kojoj merimo relativne brzine, u težište planetetskog sistema, to valja u (19) staviti $\mathbf{v}_0 = \mathfrak{W}$, pa dobivamo:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{C} - M[\mathfrak{G} \mathfrak{W}].$$

Smestimo li, na posletku, obe tačke sravnjivanja O i M u težište planetetskog sistema, to valja u (19) staviti $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}$, $\mathbf{v}_0 = \mathfrak{W}$, pa dobivamo:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{C} - M[\mathfrak{G} \mathfrak{W}]. \quad (20)$$

Vidimo, dakle, da u sva tri slučaja dobivamo jedan te isti vektor \mathfrak{E} . Potražimo izvod toga vektora po vremenu. On je predstavljen izrazom:

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \frac{d\mathfrak{C}}{dt} - M \left[\frac{d\mathfrak{G}}{dt} \mathfrak{W} \right] - M \left[\mathfrak{G} \frac{d\mathfrak{W}}{dt} \right].$$

\mathfrak{C} i \mathfrak{W} su, kao što smo to pokazali u §16, konstantni vektori, pa je zato

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \frac{d\mathfrak{W}}{dt} = 0,$$

a kako je još

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{W}$$

to iz prednje jednačine sleduje:

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = 0, \quad (21)$$

što znači da je vektor \mathfrak{E} nezavisan od vremena.

Tako nam i relativna kretanja u planetском sistemu određuju, pri odgovarajućem izboru tačaka sravnjivanja O i M , jedan vektor \mathfrak{E} nepomičan prema mirujućem koordinatnom sistemu zvezda nekretnica.

Ravan koja stoji normalno na vektoru \mathfrak{E} ima nepromenljivu orijentaciju u prostoru, pa se zove *Laplasova invarijabilna ravan*.

Koordinate vektora \mathfrak{E} u koordinatnom sistemu ekliptike proizvoljne jedne epohe mogu se izračunati pomoću jednačine (18) iz svake trenutne međusobne konstelacije članova planetetskog sistema i iz njihovih relativnih brzina. Kada su te koordinate, koje ćemo označiti sa E_1 , E_2 , E_3 izračunate, onda su, na isti način na koji smo u §10 odredili ravan planetске putanje, nagib i i longituda Ω uzlaznog čvora invarijabilne ravni dati ovim jednačinama:

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2} \\ E_3 &= E \cos i \\ E_1 &= E \sin \Omega \sin i \\ E_2 &= -E \cos \Omega \sin i,\end{aligned} \quad (22)$$

čime je njen položaj jednoznačno određen.

Problem triju tela

§ 19. Centar atrakcije triju tela. Ako je, u problemu n tela, $n = 3$, onda se taj problem redukuje na problem triju tela. Označimo li, kao i do sada, mase tih triju tela sa m_1, m_2, m_3 a njihove vektore položaja sa τ_1, τ_2, τ_3 , onda su vektorske jednačine kretanja tih nebeskih tela, obzirom na (1) §15. ove:

$$m_i \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} = \sum_k f m_i m_k \frac{\tau_k - \tau_i}{\rho_{ik}^3}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

gde f označava gravitacionu konstantu, a ρ_{ik} odstojanje masa m_i i m_k pri čemu va-
lja u desnom zbiru uzeti u obzir samo kombinacije različitih dveju od uočenih triju
masa.

Ove tri vektorske jednačine drugog reda dale bi, potpuno integrisane, 6 vek-
torskih ili 18 skalarnih integrala, kojima bi vektori položaja i vektori brzina uoče-
nih triju masa bili pretstavljeni kao funkcije vremena. Od tih 18 skalarnih integra-
la poznajemo, kao što je pokazano u §16, samo njih 10, pa je problem triju tela,
u opštem slučaju, nerešljiv sadanjim sretstvima matematike. Samo u specijalnim
slučajevima moguće je, kao što ćemo videti, rešiti taj problem u njegovoj potpuno-
sti, u konačnom obliku.

Pre no što pristupimo iznalaženju tih egzaktnih rešenja problema, izvešćemo
neke korisne konzekvencije iz gornjih jednačina kretanja. Označimo li Njutnove
atrakcione sile koje dejstvuju na mase m_1, m_2, m_3 uočenih triju tela, tim redom,
sa $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$, to je, prema osnovnoj osobini jednačine kretanja slobodnog tela,

$$m_i \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} = \mathfrak{P}_i; \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Iz jednačine (2) §16, sleduje onda:

$$\sum_{i=1}^{i=3} \mathfrak{P}_i = 0, \quad (3)$$

ili

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = 0, \quad (4)$$

dok nam jednačina (3) §16, daje:

$$\sum_{i=1}^{i=3} [\tau_i \mathfrak{P}_i] = 0 \quad (5)$$

t.j.

$$[\tau_1 \mathfrak{P}_1] + [\tau_2 \mathfrak{P}_2] + [\tau_3 \mathfrak{P}_3] = 0. \quad (6)$$

Sile $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$, leže, sve tri, u ravni koja prolazi kroz trenutne položaje masa
 m_1, m_2, m_3 , zato se sile \mathfrak{P}_1 i \mathfrak{P}_2 seku u jednoj tački Γ te ravni. Pomerimo li ta-
čku O , na koju se odnose vektori položaja τ_1, τ_2, τ_3 u tačku Γ , to je, pošto sile \mathfrak{P}_1
i \mathfrak{P}_2 prolaze kroz tu tačku,

$$[\tau_1 \mathfrak{P}_1] = [\tau_2 \mathfrak{P}_2] = 0,$$

pa je zato zbog (6)

$$[\tau_3 \mathfrak{P}_3] = 0,$$

što znači da i sila \mathfrak{P}_3 prolazi kroz tačku Γ . Sve tri sile $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ prolaze, dakle,
kroz jednu te istu tačku ravni uočenih triju tela. Tu tačku nazvaćemo, odstupajući
od naziva koji sam joj dao 1901 godine, *centrom atrakcije* posmatranih triju tela. *

Prema rezultatima §16, kreće se zajedničko težište S posmatranih triju tela
pravolinijski i uniformno u prostoru. Položimo li početak O našeg koordinatnog si-
stema u to težište S i orijentisemo li ga tako da se ne zaokreće prema sistemu zve-
zda nekretnica, to možemo taj koordinatni sistem, prema opštim principima Ra-
cionalne Mehanike, smatrati kao inercijalni ili mirujućii koordinatni sistem. Pada
li i centar atrakcije Γ stalno u tu tačku, onda možemo i taj centar smatrati nepo-
mičnim, pa će uočena tri tela biti izložena dejstvu sila koje prolaze kroz jedan ne-
pomičan centar. U takvom slučaju biće rešenje problema znatno uprošćeno, pa se
zato nameće pitanje: koji uslovi treba da budu ispunjeni da centar Γ atrakcije pa-
da stalno u težište S posmatranih triju tela?

Vektor položaja \mathfrak{S} težišta S prema tački O našeg koordinatnog sistema dat je
jednačinom:

$$M\mathfrak{S} = m_1 \tau_1 + m_2 \tau_2 + m_3 \tau_3,$$

gde je

$$M = m_1 + m_2 + m_3. \quad (7)$$

Pomerimo li tačku O u samo težište S , to je $\mathfrak{S} = 0$, pa zato:

$$m_1 \tau_1 + m_2 \tau_2 + m_3 \tau_3 = 0. \quad (8)$$

Težište masa m_1, m_2, m_3 leži uvek u trouglu ograničenom tim masama, pa su
vektori položaja masa τ_1, τ_2, τ_3 napereni od toga težišta. Sile $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ koje dej-
stvuju na mase m_1, m_2, m_3 padaju uvek u unutrašnje uglove tog trougla i napere-
ne su ka centru atrakcije koji leži takođe u unutrašnjosti trougla. Uslov da centar
atrakcije i težište padnu zajedno biće, dakle, izražen jednačinama:

$$\mathfrak{P}_1 = -\lambda \tau_1; \quad \mathfrak{P}_2 = -\mu \tau_2; \quad \mathfrak{P}_3 = -\nu \tau_3, \quad (9)$$

gde su λ, μ, ν pozitivni skalarni faktori. Saberemo li ove jednačine to dobivamo
zbog (4)

$$\lambda \tau_1 + \mu \tau_2 + \nu \tau_3 = 0. \quad (10)$$

Pomnožimo jednačine (10) i (8) vektorielno sa τ_3 , to dobivamo:

$$\lambda[\tau_1 \tau_3] = -\mu[\tau_2 \tau_3]; \quad m_1[\tau_1 \tau_3] = -m_2[\tau_2 \tau_3],$$

t.j. deleći ove jednačine jednu sa drugom,

$$\frac{\lambda}{m_1} = \frac{\mu}{m_2}.$$

Vektorielnim množenjem jednačina (10) i (8) sa τ_1 dobivamo:

$$\frac{\mu}{m_2} = \frac{\nu}{m_3}.$$

Zato je:

$$\frac{\lambda}{m_1} = \frac{\mu}{m_2} = \frac{\nu}{m_3} = k,$$

gde k označava, pošto su λ , μ , ν , m_1 , m_2 , m_3 same pozitivne veličine, jedan pozitivan skalar. Zbog toga je:

$$\lambda = km_1; \quad \mu = km_2; \quad \nu = km_3. \quad (11)$$

Sva ova rasuđivanja važe i onda kada sve tri mase padnu u istu pravu, jer važe za onu konstelaciju koja se beskončno malo razlikuje od prave. Stavljajući (11) u (9), dobivamo:

$$\mathfrak{P}_1 = -km_1\tau_1; \quad \mathfrak{P}_2 = -km_2\tau_2; \quad \mathfrak{P}_3 = -km_3\tau_3. \quad (12)$$

Eliminišemo li iz (9) pomoću (8) prvo m_1 , pa zatim m_2 i m_3 , to dobivamo ove tri jednačine:

$$\begin{aligned} -M\tau_1 &= m_2(\tau_2 - \tau_1) + m_3(\tau_3 - \tau_1) \\ -M\tau_2 &= m_3(\tau_3 - \tau_2) + m_1(\tau_1 - \tau_2) \\ -M\tau_3 &= m_1(\tau_1 - \tau_3) + m_2(\tau_2 - \tau_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Stavljajući ovako dobivene vrednosti za τ_1 , τ_2 , τ_3 , u (12) dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \frac{k}{M}m_1m_2(\tau_2 - \tau_1) + \frac{k}{M}m_1m_3(\tau_3 - \tau_1) \\ \mathfrak{P}_2 &= \frac{k}{M}m_2m_3(\tau_3 - \tau_2) + \frac{k}{M}m_2m_1(\tau_1 - \tau_2) \\ \mathfrak{P}_3 &= \frac{k}{M}m_3m_1(\tau_1 - \tau_3) + \frac{k}{M}m_3m_2(\tau_2 - \tau_3). \end{aligned} \quad (14)$$

Označimo li strane trougla ograničenog masama m_1 , m_2 , m_3 sa a , b , c , t.j. stavimo li:

$$\rho_{1,2} = \rho_{2,1} = c; \quad \rho_{2,3} = \rho_{3,2} = a; \quad \rho_{3,1} = \rho_{1,3} = b, \quad (15)$$

to dobivamo iz jednačina (1) i (2):

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \frac{f}{c^3}m_1m_2(\tau_2 - \tau_1) + \frac{f}{b^3}m_1m_3(\tau_3 - \tau_1) \\ \mathfrak{P}_2 &= \frac{f}{a^3}m_2m_3(\tau_3 - \tau_2) + \frac{f}{c^3}m_2m_1(\tau_1 - \tau_2) \\ \mathfrak{P}_3 &= \frac{f}{b^3}m_3m_1(\tau_1 - \tau_3) + \frac{f}{a^3}m_3m_2(\tau_2 - \tau_3). \end{aligned} \quad (16)$$

Ne leže li uočena tri tela u jednoj pravoj, to su pravci vektora τ_1 , τ_2 , τ_3 različiti, pa iz (14) i (16) sleduje:

$$\frac{k}{M} = \frac{f}{a^3} = \frac{f}{b^3} = \frac{f}{c^3}, \quad (17)$$

t.j.

$$a = b = c. \quad (18)$$

Leže li, dakle, mase m_1 , m_2 , m_3 (koje mogu biti sasvim proizvoljne) na vrhovima proizvoljnog ravnostranog trougla, to u svakom takvom slučaju centar atrakcije pada u zajedničko težište tih triju masa.

Leže li sve tri mase u istoj pravoj, pa uzmemo li, za sada, da su te mase poredane ovim redom: m_1 , m_2 , m_3 i obeležimo li jedinični vektor toga pravca sa i , to je:

$$\tau_3 - \tau_2 = ai; \quad \tau_1 - \tau_3 = -bi; \quad \tau_2 - \tau_1 = ci. \quad (19)$$

U takvom slučaju dobivamo mesto jednačina (14) i (16) ove:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \frac{k}{M}m_1m_2ci + \frac{k}{M}m_1m_3bi \\ \mathfrak{P}_2 &= \frac{k}{M}m_2m_3ai - \frac{k}{M}m_2m_1ci \\ \mathfrak{P}_3 &= -\frac{k}{M}m_3m_1bi - \frac{k}{M}m_3m_2ai, \\ \mathfrak{P}_1 &= \frac{f}{c^2}m_1m_2i + \frac{f}{b^2}m_1m_3i \\ \mathfrak{P}_2 &= \frac{f}{a^2}m_2m_3i - \frac{f}{c^2}m_2m_1i \\ \mathfrak{P}_3 &= -\frac{f}{b^2}m_3m_1i - \frac{f}{a^2}m_3m_2i. \end{aligned} \quad (20)$$

Iz ovih jednačina sleduju ove tri:

$$\begin{aligned} \frac{k}{fM}(m_2c + m_3b) &= \frac{m_2}{c^2} + \frac{m_3}{b^2} \\ \frac{k}{fM}(m_3a - m_1c) &= \frac{m_3}{a^2} - \frac{m_1}{c^2} \\ \frac{k}{fM}(m_1b + m_2a) &= \frac{m_1}{b^2} + \frac{m_2}{a^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Od ovih jednačina samo su tri nezavisne, jer treća sleduje iz prvih dveju.

Stavimo li

$$\frac{a}{c} = z, \quad (23)$$

to je, zbog (19),

$$b = a + c, \quad (24)$$

dakle

$$a = cz; \quad b = c(1 + z). \quad (25)$$

Podelimo li prvu od jednačina (22) sa trećom, to dobivamo upotrebom prednjih označenja:

$$\frac{m_2 + m_3(1+z)}{m_1(1+z) + m_2z} = \frac{m_2z^2(1+z)^2 + m_3z^2}{m_1z^2 + m_3(1+z)^2},$$

t.j.

$$m_1z^2[1 - (1+z)^3] + m_2(1+z)^2(1-z^3) + m_3[(1+z)^3 - z^3] = 0. \quad (26)$$

Ova jednačina koju je već, drugim načinom, izveo Lagranž, određuje međusobni položaj masa m_1 , m_2 , m_3 poredanih, tim redom, u jednoj pravoj tako da njihov centar atrakcije padne u njihovo zajedničko težište.

Da bismo odredili broj realnih korenova jednačine (26), poredajmo njene članove po padajućim potencijama nepoznate z . Tako uređena, ima ta jednačina ovaj oblik:

$$(m_1 + m_2)z^5 + (3m_1 + 2m_2)z^4 + (3m_1 + m_2)z^3 - (m_2 + 3m_3)z^2 - (2m_2 + 3m_3)z - (m_2 + m_3) = 0. \quad (27)$$

Pošto su mase m_1 , m_2 , m_3 pozitivne, to ova jednačina ima jednu promenu znaka i četiri njegova ponavljanja. Zato ona ima, po poznatom Dekartovom pravilu, najviše jedan pozitivan, a najviše četiri negativna realna korena. Taj pozitivni koren ima jednačina (27) nasigurno, pošto je neparnog stepena, a njen apsolutni član je negativan. Da vidimo da li ona ima uopšte negativnih stvarnih korenova. Zamenimo, da bismo to odredili, u (26) z sa $-y$. Onda dobivamo:

$$m_1y^2[1 - (1-y)^3] + m^2(1-y)^2(1+y^3) + m_3[(1-y)^3 + y^3] = 0 \quad (28)$$

pa pitajmo da li ova jednačina može imati pozitivnih realnih korenova. Ako je y pozitivno, to je, bilo $0 < y < 1$, bilo $y > 1$,

$$y^2[1 - (1-y)^3] > 0; \quad (1-y)^2(1+y^3) > 0; \quad [(1-y)^3 + y^3] > 0,$$

što znači da su u jednačini (28) koeficijenti od m_1 , m_2 , m_3 pozitivni; kako su i mase m_1 , m_2 , m_3 pozitivne, to taj izraz ne može biti jednak nuli. Zato Lagranžova jednačina ne može imati negativnih korenova, nego samo onaj jedan pozitivan, koji određuje položaj srednje mase m_2 između obeju krajnjih m_1 i m_3 .

Promenimo li red masa tako da on bude ovaj: m_2 , m_1 , m_3 ili ovaj: m_1 , m_3 , m_2 , to dobivamo po Lagranžovoj jednačini još dve nove konstelacije koje imaju tu osobinu da njihov centar atrakcije pada u zajedničko težište tih masa. Tima tri- ma konstelacijama određena je srazmera otstojanja srednje mase od obeju krajnjih; apsolutna otstojanja tih masa su, zadržavajući samo onu srazmeru, proizvoljna.

§ 20. Egzaktna rešenja problema triju tela. U jednoj svojoj klasičnoj raspravi o problemu triju tela, pokazao je Lagranž da se taj problem može rešiti u konačnom obliku samo u specijalnim slučajevima, pa se njihova rešenja zovu egzaktna rešenja problema triju tela. Koristeći se rezultatima prošlog paragrafa, pokazaćemo da su ti slučajevi oni u kojima je konstelacija masa m_1 , m_2 , m_3

takva da se njihov centar atrakcije Γ podudara, za vreme celog kretanja, sa težištem S tih masa. Ako je to slučaj, onda su, prema (2) i (12), jednačine uočenih masa ove:

$$\frac{d^2\tau_i}{dt^2} = -k\tau_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (29)$$

gde k označava jedan skalarni faktor, koji će, ako se pri kretanju međusobna otstojanja masa budu, no zadovoljavajući postavljeni uslov podudarnosti tačaka Γ i S , menjala, biti funkcija vremena.

Da nađemo i ispitamo ta egzaktna rešenja, zamislimo da se mase m_1 , m_2 , m_3 nalaze u inicijalnom momentu $t = 0$ u takvom međusobnom položaju da se njihov centar atrakcije Γ podudara sa njihovim težištem, da se, dakle, te tri mase nalaze na vrhovima jednog ravnostranog trougla ili da su rasporedane duž jedne prave tako da njihova međusobna otstojanja zadovoljavaju jednačinu (26). Pitajmo sada da li je moguće masama m_1 , m_2 , m_3 dati takve inicijalne brzine da podudarnost centra atrakcije i težišta bude održavana za vreme celoga kretanja, t.j. da konstelacija masa u svakom momentu t bude slična onoj u inicijalnom momentu? To će, kao što ćemo videti, biti onda slučaj ako inicijalni vektori brzina v_1 , v_2 , v_3 uočenih masa zadovolje ove uslove:

1. Ako ti vektori brzina padnu u ravan masa, koja će, usled toga, biti nepromenljiva.

2. Ako vektori brzina budu sa odgovarajućim vektorima položaja τ_1 , τ_2 , τ_3 zatvarali isti ugao θ .

3. Ako inteziteti v_1 , v_2 , v_3 vektora brzina budu proporcionalni modulima r_1 , r_2 , r_3 vektora položaja.

Ako je to slučaj, onda će vektor položaja mase m_i po isteku vremena dt biti vektorski zbir, t.j. treća strana trougla kojega je jedna strana τ_i , a druga $v_i dt$. Kako su uglovi što ih te dve strane međusobno zatvaraju, prema uslovu 2, za sve tri mase međusobno jednaki, a veličine tih strana stoje, prema uslovu 3, u istim razmerama, to su sva tri trougla, za $i = 1, 2, 3$ ograničena težištem S , položajem mase m_i u momentu $t = 0$ i u momentu dt , međusobno slična. Položaji masa m_1 , m_2 , m_3 biće po isteku vremena dt takvi kao da su se radiusvektori r_1 , r_2 , r_3 masa m_1 , m_2 , m_3 zakrenuli za isti ugao, a njihovi moduli proporcionalno se promenili. Nova konstelacija masa biće, dakle, slična njihovoj početnoj konstelaciji. Da će ta konstelacija biti održana i u idućem elementu vremena, sleduje odatle što su akceleracije tih masa, t.j. vremenski izvodi njihovih brzina, prema jednačini (29) proporcionalni vektorima položaja. Zato su u momentu dt ispunjeni uslovi 1, 2, 3, pa taj momenat možemo smatrati kao inicijalni, odakle sleduje da će i po isteku novog intervala vremena dt sličnost konstelacija ostati održana, što važi i za sve ostale momente kretanja.

Ovaj Laplasov dokaz, kojim je on zamenio komplikovano izvođenje Lagranžovo, može se zameniti ovim analitičkim.

Položimo u težište S pol O polarnog koordinatnog sistema čija osa leži u ravni triju tela, pa označimo sa φ_1 , φ_2 , φ_3 uglove što ih radiusvektori r_1 , r_2 , r_3 uočenih triju masa zatvaraju sa tom osom, to su, prema (12), §8. radialne odnosno na radiusvektor normalne brzine masa pretstavljene sa $d\tau_i/dt$, odnosno sa $\tau_i d\varphi_i/dt$. Ako za inicijalni momenat postoji ova srazmera radiusvektora:

$$\text{za } t = 0: \quad r_2 = \lambda r_1; \quad r_3 = \mu r_1, \quad (30)$$

gde su λ i μ faktori proporcionaliteta, onda mora, prema uslovima 2 i 3, ista ta srazmera postojati i za one komponentalne brzine. Zato mora biti:

$$\text{za } t = 0: \quad \frac{dr_2}{dt} = \lambda \frac{dr_1}{dt}; \quad \frac{dr_3}{dt} = \mu \frac{dr_1}{dt} \quad (31)$$

$$\text{za } t = 0: \quad r_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = \lambda r_1 \frac{d\varphi_1}{dt}; \quad r_3 \frac{d\varphi_3}{dt} = \mu r_1 \frac{d\varphi_1}{dt}. \quad (32)$$

Iz (30) i (32) sleduje:

$$\text{za } t = 0: \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_3}{dt}. \quad (33)$$

Iz (30), (33) i (31) sleduje da je po isteku vremena dt konstelacija uočenih triju masa ostala slična inicijalnoj, jer su uglovi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ porasli za iste veličine $d\varphi_1 = d\varphi_2 = d\varphi_3$, a radiusvektori dobili priraštaje koji stoje u srazmeri tih radiusvektora. Zato se centar atrakcije nije pomerio iz nepomičnoga težišta, pa jednačina (29) važi i po isteku vremenskog intervala dt .

Tu jednačinu možemo, primenom obrasca (15), §8, rastaviti u dve skalarne, jer dobivamo:

$$-k\tau_i = \left\{ \frac{d^2 r_i}{dt^2} - r_i \left(\frac{d\varphi_i}{dt} \right)^2 \right\} \tau_i^0 + \left\{ r_i \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + 2 \frac{dr_i}{dt} \frac{d\varphi_i}{dt} \right\} n_0,$$

gde τ_i^0 označava jedinični vektor u pravcu radiusvektora, a n_0 onaj koji je normalan na taj pravac. Zato je $\tau_i = r_i \tau_i^0$, pa ako prednju jednačinu pomnožimo skalarom sa τ_i^0 , a zatim sa n_0 , to dobivamo, pošto je $(\tau_i^0 n_0) = 0$, ove dve jednačine:

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} + kr_i - r_i \left(\frac{d\varphi_i}{dt} \right)^2 = 0 \quad (34)$$

$$r_i \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + 2 \frac{dr_i}{dt} \frac{d\varphi_i}{dt} = 0. \quad (35)$$

Ove jednačine važe, pre svega, za inicijalni momenat. Stavljajući u njih (30), (31) i (33), dobivamo:

$$\text{za } t = 0: \quad \frac{d^2 r_2}{dt^2} = \lambda \frac{d^2 r_1}{dt^2}; \quad \frac{d^2 r_3}{dt^2} = \mu \frac{d^2 r_1}{dt^2} \quad (36)$$

$$\text{za } t = 0: \quad \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2}, \quad (37)$$

usled čega je konstelacija uočenih triju tela i po izmaku daljeg intervala vremena dt slična inicijalnoj. Zato će jednačine (34) i (35) važiti ako napravimo njihove izvode po vremenu t , pri čemu treba i k smatrati kao funkciju vremena. Te su jednačine homogene obzirom na r_i i njegove izvode, pa ćemo zato, daljom diferencijacijom tih jednačina po vremenu i stavljanjem u njih prednjih inicijalnih uslova, dobiti, korak po korak, ove rezultate:

$$\begin{aligned} \text{za } t = 0: \quad \frac{d^n \varphi_1}{dt^n} = \frac{d^n \varphi_2}{dt^n} = \frac{d^n \varphi_3}{dt^n}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ in inf.} \\ r_2 = \lambda r_1; \quad r_3 = \mu r_1; \quad \frac{d^n r_2}{dt^n} = \lambda \frac{d^n r_1}{dt^n}; \quad \frac{d^n r_3}{dt^n} = \mu \frac{d^n r_1}{dt^n}. \end{aligned} \quad (38)$$

Kako su r_i i φ_i , $i = 1, 2, 3$, funkcije vremena, to za njih važi:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + t\varphi_i'(0) + \frac{1}{2}t^2\varphi_i''(0) + \frac{1}{3!}t^3\varphi_i'''(0) + \dots$$

$$r_i(t) = r_i(0) + tr_i'(0) + \frac{1}{2}t^2r_i''(0) + \frac{1}{3!}t^3r_i'''(0) + \dots$$

Stavljajući u ove izraze relacije (38), dobivamo:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) - \varphi_1(0) = \varphi_2(t) - \varphi_2(0) = \varphi_3(t) - \varphi_3(0); \\ r_2(t) = \lambda r_1(t); \quad r_3(t) = \mu r_1(t). \end{aligned} \quad (39)$$

Ove jednačine kazuju ovo: Radiusvektori masa m_1, m_2, m_3 zatvaraju između sebe, za vreme celoga kretanja, iste one uglove koje su zatvarali u inicijalnom momentu, a dužine tih radiusvektora zadržavaju svoju međusobnu proporciju koju su imali u početku kretanja. Iz toga sleduje, pre svega, da su putanje svih triju masa međusobno slične. To važi i za njihove međusobne konstelacije. Ako su se, prema tome, mase m_1, m_2, m_3 nalazile na vrhovima ravnostranog trougla, one će se kretati tako kao da se taj trougao okreće u svojoj ravni oko težišta masa, rasteći ili stežući se, ne zadržavajući svoj ravnostrani oblik. Slično važi i za pravolinijsku konstelaciju masa koja ne menja svoj pravolinijski oblik ni proporciju rasporeda masa.

Radiusvektor svake od posmatranih masa prebrisava u jednakim delovima vremena jednake površine. To sleduje iz jednačine (34) koju možemo napisati i u ovom obliku:

$$\frac{1}{r_i} \frac{d}{dt} \left(r_i^2 \frac{d\varphi_i}{dt} \right) = 0,$$

pa zatim integrirati, čime dobivamo:

$$r_i^2 \frac{d\varphi_i}{dt} = C_i, \quad (40)$$

gde C_i označava jednu konstantu jednaku dvostrukoj sektorskoj brzini u inicijalnom momentu. Primenjujući uslove (30) i (32) dobivamo

$$\begin{aligned} C_2 = \lambda^2 C_1; \\ C_3 = \mu^2 C_1. \end{aligned} \quad (41)$$

Sektorske brzine odnose se, dakle, kao kvadrati radiusvektora u inicijalnom ili drugom kojem momentu.

Ako pitamo za oblik putanja posmatranih triju tela, to je, zbog toga što su te tri putanje geometrijski međusobno slične, dovoljno ispitati oblik putanje jednoga od tih triju tela. Tim oblikom i zakonom (40), koji je identičan drugom Keplеровom zakonu, određeno je i kretanje tela po njegovoj putanji. Označimo li sa a, b, c strane trougla masa m_1, m_2, m_3 , smatrane za vektore, sa tim smislom obilaznja oko trougla, to je:

$$\begin{aligned} \tau_3 - \tau_2 = a \\ \tau_1 - \tau_3 = b \\ \tau_2 - \tau_1 = c. \end{aligned} \quad (42)$$

Onda dobivamo pomoću jednačina (13):

$$\begin{aligned} -M\tau_1 &= m_2c - m_3b \\ -M\tau_2 &= m_3a - m_1c \\ -M\tau_3 &= m_1b - m_2a. \end{aligned} \quad (43)$$

Ispitajmo prvo slučaj kada se uočena tri tela nalaze za vreme kretanja na vrhovima ravnostrogougla. U tom slučaju imaju vektori \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} istu skalarnu veličinu $a = b = c$, pa je

$$(\mathbf{a} \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \mathbf{c}) = a^2.$$

Kako, sem toga, dva uzastopna od vektora \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{a} zatvaraju između sebe uvek ugao od 120° , to je:

$$(\mathbf{a} \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \mathbf{a}) = a \cdot a \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2.$$

Ako, prema tome, jednačine (43) pomnožimo svaku skalarno sa samom sobom, to dobivamo, pošto je $(\tau_1 \tau_1) = r_1^2$; $(\tau_2 \tau_2) = r_2^2$; $(\tau_3 \tau_3) = r_3^2$,

$$\begin{aligned} M^2 r_1^2 &= (m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2) a^2 \\ M^2 r_2^2 &= (m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2) a^2 \\ M^2 r_3^2 &= (m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2) a^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Bilo je, prema (17),

$$k = \frac{fM}{a^3}. \quad (45)$$

Stavimo li

$$\begin{aligned} \frac{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{3/2}}{M^2} &= M_1 \\ \frac{(m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2)^{3/2}}{M^2} &= M_2 \\ \frac{(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)^{3/2}}{M^2} &= M_3, \end{aligned} \quad (46)$$

gde M_1 , M_2 , M_3 imaju dimenziju mase, to dobivamo, eliminacijom od a iz (44) i (45),

$$k = \frac{fM_1}{r_1^3} = \frac{fM_2}{r_2^3} = \frac{fM_3}{r_3^3}. \quad (47)$$

Stavljajući ovo u jednačine (29), dobivamo da će jednačine kretanja masa m_i biti ove:

$$\frac{d^2 \tau_i}{dt^2} = -fM_i \frac{\tau_i}{r_i^3}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (48)$$

Ova jednačina kazuje da se masa m_i kreće oko centra atrakcije Γ tako kao da je iz njega privlačena nepokretnom masom M_i po Njutnovom zakonu. Ta jednačina postaje identična jednačini (12), §10, iz problema dvaju tela ako u ovoj $(M + m)$ zamenimo fiktivnom masom M_i . Zbog toga će putanja mase m_i biti jedan koničan presek. Ako su inicijalni uslovi takvi da je $e < 0$, onda će ta putanja biti elipsa.

Putanje ostalih dveju masa biće slične elipse. Posmatrana tri tela kretaće se, dakle, pokoravajući se zakonu površina (40), oko njihovog težišta, kao zajedničke žiže, po trima sličnim elipsama tako da će u svakom momentu ta tri tela ograničavati ravnostrogougao koji za vreme kretanja menja svoj položaj i veličinu, ali ne svoj ravnostrogoubrani oblik. Kada je taj trougao najmanji, prolaze sva tri tela, u isti mah, kroz svoje pericentrične položaje, a kada je on najveći, kroz svoje apocentrične položaje.

Ispitajmo još i drugi slučaj kada se posmatrana tri tela kreću tako da leže uvek u jednoj pravoj. U tom slučaju valja, zbog (42) i (19), staviti

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= ai; & \mathbf{b} &= -bi; & \mathbf{c} &= ci \\ \tau_1 &= -r_1 i; & \tau_2 &= \pm r_2 i; & \tau_3 &= r_3 i, \end{aligned}$$

pri čemu uzimamo, kao i do sada, da su mase poredane u pravcu jediničnog vektora i ovim redom: m_1 , m_2 , m_3 . Zbog toga se kod τ_1 pojavljuje na desnoj strani negativni, a kod τ_3 pozitivan znak. Da li će τ_2 biti pozitivno ili negativno, to zavisi od toga da li se težište S masa nalazi između m_1 i m_2 ili između m_2 i m_3 . Sada dobivamo mesto jednačina (43) ove:

$$\begin{aligned} Mr_1 &= m_2c + m_3b \\ \pm Mr_2 &= m_3a - m_1c \\ Mr_3 &= m_1b + m_2a. \end{aligned} \quad (49)$$

Sem ovih su, u ovom slučaju, još u važnosti jednačine (22), (23), (24), (25). Iz tih jednačina dobivamo, brinući se samo za masu m_1 ,

$$k = \frac{f}{r_1} \left(\frac{m_2}{c^2} + \frac{m_3}{b^2} \right). \quad (50)$$

Eliminišemo li iz ove jednačine, pomoću prve od jednačina (49) i pomoću (25), b i c , to dobivamo, stavljajući

$$M_1 = \frac{[m_2 + m_3(1+z)]^2 [m_2(1+z)^2 + m_3]}{M^2(1+z)^2}, \quad (51)$$

gde je M_1 jedna konstanta koja, zbog (26), zavisi samo od masa m_1 , m_2 , m_3 i ima dimenziju mase,

$$k = \frac{fM_1}{r_1^3}.$$

Jednačina kretanja mase m_1 biće, dakle:

$$\frac{d^2 \tau_1}{dt^2} = -fM_1 \frac{\tau_1}{r_1^3}. \quad (52)$$

Ovo kazuje da su, i u ovom slučaju, putanje masa konični preseki, a, uz odgovarajuće inicijalne uslove, elipse. U tom se slučaju uočena tela kreću, ostajući uvek u jednoj pravoj, oko njihovog težišta, kao zajedničke žiže, po trima sličnim elipsama, prolazeći, u isti mah, kroz svoje ekstremne položaje.

ГЛАВА ПЕТА

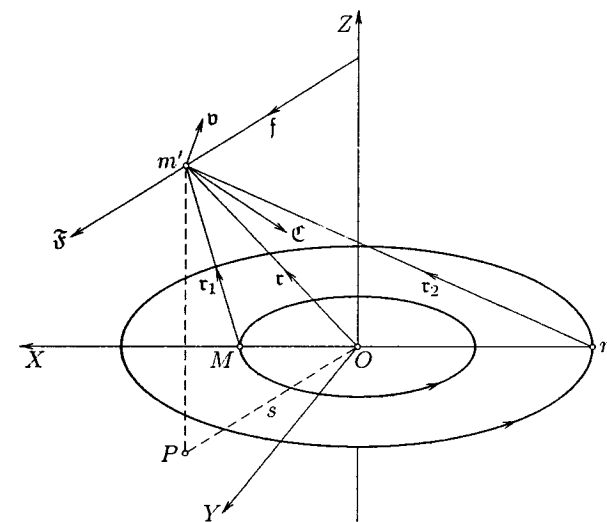
Asteroidni problem

§ 21. Formulisanje problema. Ako je, u problemu triju tela, masa jednog od tih tela toliko sićušna prema masama ostalih dvaju tela da nije u stanju da utiče na njihovo kretanje, onda će se ova dva tela, pokoravajući se zakonima dokazanim u problemu dvaju tela, kretati oko svog zajedničkog težišta po Keplerovim elipsama. Ako su inicijalni uslovi kretanja ovih dvaju glavnih tela takvi da se ona kreću, mesto po elipsama, po krugovima, onda imamo pred sobom jedan specijalni slučaj problema triju tela koji se naziva restringiranim ili asteroidnim problemom. Ovaj potonji naziv potiče otuda što kretanja asteroida, sićušnih nebeskih tela, koja se kreću mahom između putanja Marsa i Jupitera, ispunjavaju u velikoj meri pretpostavke ovog specijalnog slučaja problema triju tela, jer se svaki pojedini od tih asteroida ili planetoida kreće pod preponderantnim uticajem privlačnog dejstva Sunca i Jupitera, ove najveće planete čija se putanja može, u prvoj aproksimaciji, smatrati za krug.

Da bismo asteroidni problem izrazili jezikom matematske analize, označićemo mase glavnih dvaju tela sa M odnosno sa m , pri čemu neka bude $m \leq M$. Ravan u kojoj se ta dva tela kreću oko zajedničkog težišta po krugovima, odabraćemo za ravan $X-Y$ našeg koordinatnog sistema kojega početak O neka leži u težištu masa M i m (sl. 9). Osa X toga koordinatnog sistema neka pada stalno u pravu tih dveju masa, a neka bude naperena od m prema M . Taj koordinatni sistem obrće se, usled kretanja tih dvaju tela, oko svoje ose Z , naperene tako da kretanje masa, posmatrano sa pozitivne grane te ose, sleduje u direktnom smislu, obrnuto skazaljki na satu. Osa Y neka je naperena tako da najkraći zaokretaj pozitivne grane, ose X u pozitivnu granu ose Y sleduje takođe u pozitivnom smislu. Naš koordinatni sistem je, dakle, kao dosadani, engleski. Međusobno otstojanje masa M i m , koje je, prema učinjenoj pretpostavci, nepromenljivo, označićemo sa a . Vreme T za koje oba ta tela obiđu oko svojih putanja, t.j. ono za koje se naš koordinatni sistem obrne oko svoje ose Z , dato je, prema (59), §12, ovom jednačinom:

$$f(M + m) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \quad (1)$$

a skalarna veličina n uglovne brzine te rotacije, prema (62), §12, jednačinom:



Слика 9

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{f(M + m)}{a^3}}. \quad (2)$$

Rotacija našeg koordinatnog sistema pretstavljena je vektorom ω koji ima pravac ose Z , a kojega moduo jednak n . Označimo li jedinične vektore u pravcu koordinatnih osa sa i, j, k , to je

$$\omega = n k. \quad (3)$$

Masu asteroida, koja je izvanredno malena prema masama M i m , označićemo sa m' . Ako želimo da formiramo jednačinu relativnog kretanja mase m' obzirom na naš pokretni koordinatni sistem, to možemo, prema teoriji relativnog kretanja, taj sistem smatrati za nepomičan ako zamislimo da na masu m' dejstvuju, sem gravitacionih sila masa M i m , još ove dve sile:

1. Centrifugalna sila \mathfrak{F} , normalna na osu rotacije, a intenziteta $m'v^2/\rho$, pri čemu v označava linearnu brzinu trenutnog položaja mase m' u sistemu, a ρ radius krivine putanje toga položaja prema nepomičnom koordinatnom sistemu. Označimo li, prema tome, otstojanje trenutnog položaja mase m' od ose rotacije Z sa s , a sa f_0 jedinični vektor toga otstojanja, naperen od ose Z , a normalan na tu osu, to je:

$$\mathfrak{F} = \frac{m'n^2 s^2}{s} f_0 = m'n^2 f, \quad (4)$$

gde

$$f = s f_0$$

pretstavlja vektorski otstojanje mase m' od ose Z .

2. Koriolisova sila koja je, ako sa v označimo vektor brzine asteroida u pokretnom koordinatnom sistemu, pretstavljena ovim izrazom:

$$\mathfrak{C} = -2m'[\omega v] = -2m'[v \omega]. \quad (5)$$

Označimo li sa τ_1 vektor položaja mase m' prema masi M , a sa τ_2 vektor položaja mase m' prema masi m , sa r_1 i r_2 module vektora τ_1 i τ_2 , to su sile Njutnove gravitacije kojom masa M odnosno masa m privlači masu m' predstavljene ovim izrazima:

$$\mathfrak{P}_1 = -f \frac{Mm'}{r_1^3} \tau_1 \tag{6}$$

$$\mathfrak{P}_2 = -f \frac{mm'}{r_2^3} \tau_2. \tag{7}$$

Označimo li sa τ vektor položaja mase m' prema početku O našeg koordinatnog sistema, to je jednačina kretanja asteroida ova:

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{F} + \mathfrak{C}, \tag{8}$$

t.j., imajući u vidu prethodne jednačine,

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = -fM \frac{\tau_1}{r_1^3} - fm \frac{\tau_2}{r_2^3} + n^2\tau + 2[\mathfrak{v} \mathfrak{w}]. \tag{9}$$

Ako pitamo, da bismo gornjoj jednačini dali kondenzovaniji oblik, za gradienat skalara fM/r_1 , to valja imati u vidu da su, pošto je u ovom izrazu samo r_1 promenljivo, ekviskalarne površine toga polja lopte sa centrom u masi M , gradienat stoji normalno na tim površinama, pa da, zbog toga, on ima pravac jediničnog vektora τ_1/r_1 , a da mu je moduo jednak izvodu skalara fM/r_1 po r_1 , t.j. jednak $-fM/r_1^2$. Zato je

$$\text{grad } fM \frac{1}{r_1} = -\frac{fM}{r_1^2} \frac{\tau_1}{r_1} = -fM \frac{\tau_1}{r_1^3}.$$

Na isti način dobivamo i ovaj obrazac:

$$\text{grad } fm \frac{1}{r_2} = -fm \frac{\tau_2}{r_2^3}.$$

Gradienat polja skalara $\frac{1}{2}n^2s^2$ stoji normalno na ekviskalarnim površinama toga polja koje su, pošto je samo s promenljivo, kružni cilindri sa osom Z . Zato taj gradienat ima pravac jediničnog vektora f_0 , njegov moduo je jednak izvodu skalara $\frac{1}{2}n^2s^2$ po s , t.j. jednak n^2s . Zato je

$$\text{grad } \frac{n^2}{2}s^2 = n^2s f_0 = n^2f.$$

Stavimo li, dakle,

$$W = fM \frac{1}{r_1} + fm \frac{1}{r_2} + \frac{n^2}{2}s^2, \tag{10}$$

to je

$$\text{grad } W = -fM \frac{\tau_1}{r_1^3} - fm \frac{\tau_2}{r_2^3} + n^2f, \tag{11}$$

pa zato možemo jednačinu (9) napisati u ovom obliku:

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = \text{grad } W + 2[\mathfrak{v} \mathfrak{w}]. \tag{12}$$

Ovo je jednačina kretanja asteroida kojom je matematski formulisan asteroidni problem.

§ 22. Polje skalara W i njegove osobine. U jednačini kretanja asteroida pojavljuje se gradienat skalarnoga polja:

$$W = fM \frac{1}{r_1} + fm \frac{1}{r_2} + \frac{n^2}{2}s^2, \tag{13}$$

pa je zato od važnosti ispitati glavne osobine toga skalarnoga polja. To polje nastaje superpozicijom triju komponentalnih skalarnih polja. Ekviskalarne površine tih komponentalnih polja predstavljene su jednačinama:

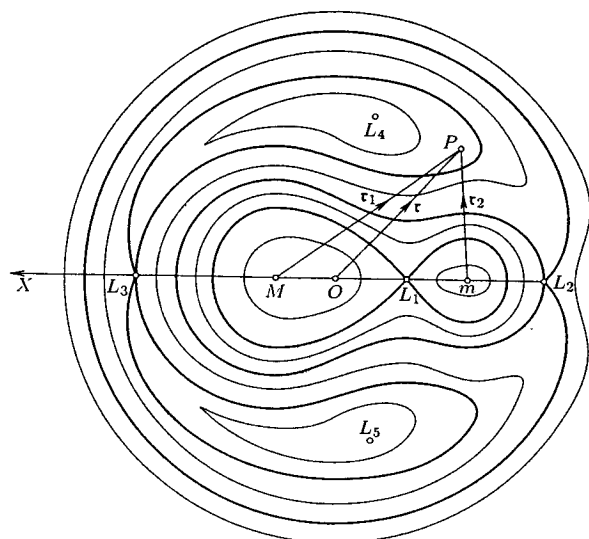
$$fM \frac{1}{r_1} = C_1; \quad fm \frac{1}{r_2} = C_2; \quad \frac{n^2}{2}s^2 = C_3, \tag{14}$$

gde su r_1, r_2, s promenljive, a C_1, C_2, C_3 proizvoljne konstante. Ekviskalarne površine prvog od ovih polja su lopte sa centrom u M . Dodeljujući konstanti C_1 numeričke vrednosti koje rastu u aritmetskoj progresiji, opada radius r_1 ekviskalarnih površina po hiperbolnom zakonu. Ekviskalarne površine drugog komponentalnog polja su lopte sa centrom u m ; njihov radius r_2 opada, kada C_2 raste u aritmetskoj progresiji, takođe po hiperbolnom zakonu. Ekviskalarne površine trećeg komponentalnog polja su kružni cilindri sa osom Z . Kada C_3 raste u aritmetskoj progresiji, raste radius s tih cilindara po parabolnom zakonu. Kako tačke M, m, O leže, sve tri, u osi Z , to su ta komponentalna polja, pa sletstveno i rezultujuće polje skalara W , simetrična prema ravni $X-Z$, a i ravni $X-Y$ našeg koordinatnog sistema. Komponentalna polja skalara W su, dakle, veoma jednostavna, pa se dadu lako geometrijski predstaviti. Njihova geometrijska pretstava postaje naročito jednostavna ako se ograničimo na slučaj kada se asteroid kreće u ravni $X-Y$, što ćemo u buduće pretpostaviti. U takvom slučaju imamo pred sobom jedno ravno polje skalara W i to u ravni $X-Y$, pa mesto ekviskalarnih površina imamo pred sobom ekviskalarne linije. Ekviskalarne linije komponentalnih polja su u ovom slučaju krugovi sa centrom u M, m odnosno O . Kada su ti krugovi nacrtani za slučaj da konstante C_1, C_2, C_3 rastu u aritmetskoj progresiji, onda se ekviskalarne linije rezultujućeg polja

$$fM \frac{1}{r_1} + fm \frac{1}{r_2} + \frac{n^2}{2}s^2 = C \tag{15}$$

dobivaju na taj način da se međusobno spoje one tačke u kojima konstante C_1, C_2, C_3 daju isti zbir. To je poznata metoda konstrukcije ekviskalarnih linija u elektrostatiki. Tim načinom su nađene i šematski predstavljene ekviskalarne linije, za slučaj $M = 10m$, u sl. 10.

Iz te slike može se razabrati ovo: Ekviskalarne linije su, što sleduje i iz prethodnih rasuđivanja, simetrične prema osi X , t.j. prema pravoj koja spaja mase M i m . U neposrednoj okolini tačke M , te su linije jajastog oblika, a isto tako u okolini tačke m . U tački L_1 spajaju se te dve vrste linija u jednu koja ima oblik osmice. Oko te, deblje izvučene linije, koja ima u tački L_1 singularnu dvojnju tačku, obavijaju se iduće, neukrštene, linije koje imaju oblik meridijanskog preseka peščanog sata, obuhvatajući, u isti mah, masu M i m . Kroz tačku L_2 prolazi jedna, opet deblje izvučena, linija kojoj je ta tačka singularna. Unutrašnja grana te krive, oblika peščanog sata, obuhvata, kao i dosadanje, obe mase M i m , dok njena spoljna grana, koja ima oblik meridijanskog preseka jabuke, obuhvata celu prvu granu. Iduće



Слика 10

linije, obuhvaćene jabučastom granom prethodne krive, ne obuhvataju više mase M i m nego imaju oblik potkovica. U tački L_3 , novom singularitetu, sličnom onom u L_2 , kroz koju prolazi jedna deblje izvučena linija, počinju se te potkovice deliti u dve zasebne zatvorene grane od kojih jedna obuhvata tačku L_4 , a druga tačku L_5 . O položaju tih dveju tačaka govorićemo docnije. U tima tačkama degenerišu ekviskalarne linije u izolovane tačke, stvarajući time nova dva singulariteta. Linije koje obuhvataju spoljnu granu krive koja prolazi kroz L_2 su jednostavne zatvorene linije koje se od jabučastog oblika približavaju sve više kružnom obliku i koje ne pokazuju nikakvih singulariteta.

Veoma plastičnu pretstavu polja skalara W dobivamo ako ekviskalarne linije, nacrtane u sl. 10, smatramo za izohipse jedne topografske površine tako da numerička vrednost konstante C koja odgovara pojedinoj ekviskalarnoj liniji označava visinu izohipse iznad ravni $X-Y$. Onda ta površina ima ovaj oblik. U okolini masa M i m uzdižu se dva visoka kupasta brega koja nad tačkama M i m idu u beskonačnost, jer je tu r_1 odnosno r_2 jednako nuli, pa skalar W postaje beskonačno velik. Ta dva brega sastaju se u jednom prevojnom sedlu iznad tačke L_1 u kojoj funkcija W ima u pravcu ose X svoju minimalnu, a normalno na taj pravac svoju maksimalnu vrednost. Između osmične linije koja prolazi kroz L_1 i linije oblika peščanog sata koja prolazi kroz L_2 , topografska površina stalno je u padu da se na spoljnoj jabučastoj grani krive koja prolazi kroz L_2 počne stalno uzdizati u vis do u beskonačnost, jer sa rastućim s raste skalar W u beskonačnost. Zato topografska površina ima iznad tačke L_2 opet jedno prevojno sedlo, pošto ona dostizava u pravcu X svoj minimum, a normalno na taj pravac, svoj maksimum, jer topografska površina opada prema unutrašnjosti potkovičastih linija, dostizavajući iznad tačaka L_4 i L_5 svoje stvarne najniže položaje. Zbog toga dostizava topografska površina

iznad tačke L_3 u pravcu ose X svoj minimum, a u pravcu normalnom na tu osu svoj maksimum, zato ona ima iznad te tačke opet jedno prevojno sedlo.

Ravno polje skalara W može se analitički pretstaviti najjednostavnije pomoću bipolarnih koordinata r_1 i r_2 na ovaj način.

Stavljajući (2) u (10), dobivamo:

$$W = fM \left\{ \frac{1}{r_1} + \frac{m}{M} \frac{1}{r_2} + \frac{1}{2} \frac{M+m}{M} \frac{s^2}{a^3} \right\}. \quad (16)$$

Odaberimo jednu proizvoljnu tačku P u ravni $X-Y$. Vektore položaja tačke prema tačkama M , m , O označili smo sa τ_1 , τ_2 , $\tau = f$. Označimo sa a vektor položaja tačke m prema tački M , onda je

$$\overrightarrow{MO} = \frac{m}{M+m} a; \quad \overrightarrow{Om} = \frac{M}{M+m} a;$$

pa zato sleduju iz trouglova MOP i OmP ove dve vektorske jednačine:

$$\frac{m}{M+m} a + f = \tau_1; \quad \frac{M}{M+m} a - f = -\tau_2.$$

Pomnožimo svaku od ovih jednačina skalarno sa samom sobom, to dobivamo:

$$\frac{m^2}{(M+m)^2} a^2 + \frac{2m}{M+m} (a f) + s^2 = r_1^2$$

$$\frac{M^2}{(M+m)^2} a^2 - \frac{2M}{M+m} (a f) + s^2 = r_2^2.$$

Pomnožimo drugu od ovih jednačina sa m/M , pa je saberimo sa prvom, to dobivamo:

$$\frac{m^2 + mM}{(M+m)^2} a^2 + \frac{M+m}{M} s^2 = r_1^2 + \frac{m}{M} r_2^2,$$

t.j.

$$\frac{M+m}{M} s^2 = r_1^2 + \frac{m}{M} r_2^2 - \frac{m}{M+m} a^2.$$

Stavljajući ovo u jednačinu (16), dobivamo:

$$W = fM \left\{ \frac{1}{r_1} + \frac{m}{M} \frac{1}{r_2} + \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{a^3} + \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{r_2^2}{a^3} - \frac{1}{2a} \frac{m}{M+m} \right\}. \quad (17)$$

Tim smo funkciju W izrazili pomoću bipolarnih koordinata r_1 i r_2 . Prelaz od tih koordinata na ortogonalne x , y vrlo je jednostavan, no za sada izlišan. U funkciji W pojavljuje se jedna aditivna konstanta koju možemo, pošto se u jednačini kretanja (12) pojavljuje samo gradienat te funkcije, bez štete po važnost jednačine kretanja, ispustiti kao što to neki autori čine, pa skalar W zameniti sa ovim:

$$\Omega = fM \left\{ \frac{1}{r_1} + \frac{m}{M} \frac{1}{r_2} + \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{a^3} + \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{r_2^2}{a^3} \right\}. \quad (18)$$

Kako je

$$\text{grad } W = \text{grad } \Omega,$$

to mesto jednačine kretanja (12) možemo upotrebiti i ovu:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \text{grad } \Omega + 2[\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}]. \quad (19)$$

Od naročitog interesa za poznija ispitivanja su singularne tačke polja W ili, što izlazi na isto, polja Ω , o kojima smo maločas govorili.

Jednačina (17) omogućava nam da odredimo položaje tačaka L_4 i L_5 u kojima W dostizava svoju minimalnu vrednost. Zato je tu

$$\frac{\partial W}{\partial r_1} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial r_2} = 0. \quad (20)$$

Koristeći se jednačinom (17), dobivamo:

$$\frac{\partial W}{\partial r_1} = fM \left\{ -\frac{1}{r_1^2} + \frac{r_1}{a^3} \right\}; \quad (21)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r_2} = fm \left\{ -\frac{1}{r_2^2} + \frac{r_2}{a^3} \right\};$$

dakle zbog (20)

$$-\frac{1}{r_1^2} + \frac{r_1}{a^3} = 0; \quad -\frac{1}{r_2^2} + \frac{r_2}{a^3} = 0,$$

t.j.

$$r_1 = r_2 = a. \quad (22)$$

Singularne tačke L_4 i L_5 obrazuju, dakle, sa tačkama M i m ravnostrane trouglove. Kako je, zbog (21),

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_1^2} = fM \left\{ \frac{2}{r_1^3} + \frac{1}{a^3} \right\}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r_2^2} = fm \left\{ \frac{2}{r_2^3} + \frac{1}{a^3} \right\}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r_1 \partial r_2} = 0,$$

to je za $r_1 = r_2 = a$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_1^2} = 3\frac{fM}{a^3}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r_2^2} = 3\frac{fm}{a^3}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r_1 \partial r_2} = 0,$$

dakle

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_1^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r_2^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r_1^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial r_2^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r_1 \partial r_2} \right)^2 > 0,$$

što znači da u tačkama L_4 i L_5 skalar W dostizava stvarno svoje minimalne vrednosti.

Položaje ostalih singularnih tačaka odredićemo ovako. Zamislimo da smo bipolarnе koordinate r_1, r_2 izrazili pomoću ortogonalnih x, y , onda je jednačina proizvoljne od ekviskalarnih linija polja W ova:

$$W(x, y) - C = 0,$$

gde C označava jednu određenu konstantu. Koordinate x, y singularnih tačaka moraju, kao što je poznato, sem gornje, zadovoljiti još ove dve jednačine:

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (23)$$

Kako je gradienat ravnoga polja skalara W pretstavljen izrazom:

$$\text{grad } W = \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j},$$

to iz prethodnih jednačina sleduje da je u singularnim tačkama L gradienat polja jednak nuli. To sleduje i iz osnovne osobine gradienta koji stoji uvek normalno na ekviskalarnim površinama, a u našem slučaju ravnoga polja, normalno na ekviskalarnim linijama. Kako u singularnim tačkama nemaju te linije određene tangente, to nemaju ni određene normale, pa je zato tu gradienat jednak nuli. Pomoću te osobine singularnih tačaka, možemo lako odrediti njihov položaj.

Za tačku L_1 , na primer, za koju je $\mathbf{r}_1 = -r_1 \mathbf{i}$; $\mathbf{r}_2 = r_2 \mathbf{i}$; $\mathbf{f} = s \mathbf{i}$, gde \mathbf{i} označava jedinični vektor u pravcu pozitivne grane ose X koja je naperena od m ka M , imamo, prema jednačini (11),

$$\text{grad } W = \left(fM \frac{1}{r_1^2} - fm \frac{1}{r_2^2} - n^2 s \right) \mathbf{i},$$

pa zato iz uslova da taj gradienat mora biti jednak nuli sleduje:

$$fM \frac{1}{r_1^2} - fm \frac{1}{r_2^2} - n^2 s = 0. \quad (24)$$

Sem toga je

$$r_1 + r_2 = a, \quad (25)$$

jer smo sa a označili međusobno otstojanje masa M i m , a kako je težište O masa M i m udaljeno od M za $[m/(M+m)]a$, to je

$$s + \frac{m}{M+m} a = r_1. \quad (26)$$

Sa poslednje tri jednačine određene su jednoznačno dužine r_1, r_2, s , t.j. položaj tačke L_1 .

Ako u tačku L_1 stavimo asteroid m' , onda dobivamo raspored masa M, m', m koji je, kao što ćemo odmah videti, identičan sa rasporedom tih masa koji odgovara egzaktном rešenju problema triju tela. Da to uvidimo, upotrebimo, mesto gornjih, oznake primenjene u §§19 i 20, t.j. zamenimo gore

$$\text{sa } \begin{matrix} M, & m', & m, & a, & r_1, & r_2 \\ m_1, & m_2, & m_3, & b, & c, & a, \end{matrix}$$

onda dobivamo mesto gornjih jednačina ove:

$$fm_1 \frac{1}{c^2} - fm_3 \frac{1}{a^2} - n^2 s = 0; \quad c + a = b; \quad s + \frac{m_3}{m_1 + m_3} b = c,$$

a mesto jednačine (2) ovu:

$$n^2 = \frac{f(m_1 + m_3)}{b^3}.$$

Eliminišući iz prve od ovih jednačina, pomoću ostalih, n i s , dobivamo:

$$\frac{1}{b^3} (m_3 a - m_1 c) = \frac{m_3}{a^2} - \frac{m_1}{c^2}. \quad (27)$$

Ova je jednačina identična sa drugom od jednačina (22), §19, pošto u jednačini (50), §20 valja za m_2 staviti masu m' asteroida koja je beskonačno malena, dakle $m_2 = 0$, a za r_1 otstojanje mase M od težišta O , dakle $c - s$, tako da je

$$k = \frac{f}{c-s} \frac{m_3}{b^2}$$

dok iz prve jednačine (49), §20 sleduje:

$$(m_1 + m_3)(c - s) = m_3 b,$$

tako da je

$$k = \frac{f(m_1 + m_3)}{b^3},$$

pa stavljajući ovo u drugu od jednačina (22), §19, dobivamo jednačinu (27).

Na isti način možemo da dokažemo da i položaji L_2 i L_3 odgovaraju onima koje zahtevaju egzaktna rešenja problema triju tela, što je već dokazano za L_4 i L_5 . Zato možemo da kažemo: Tačke L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 predstavljaju one položaje u koje treba staviti asteroid, pa da on sa masama M i m obrazuje one konstelacije koje odgovaraju egzaktnim rešenjima problema triju tela. Prve tri od tih tačaka date su Langranžovom jednačinom (27), §19, u koju valja staviti $m_1 = M; m_2 = 0; m_3 = m$, tako da ona dobiva ovaj oblik:

$$Mz^5 + 3Mz^4 - 3Mz^3 - 3mz^2 - 3mz - m = 0; \quad (28)$$

ostale dve tačke obrazuju sa masama M i m ravnopravni trougao.

Do ovog rezultata možemo doći i ovim rasuđivanjem. U tačkama L je, kao što smo videli, grad $W = 0$. Ako se u takvu tačku stavi asteroid sa inicijalnom brzinom prema pokretnom sistemu $v = 0$, onda sleduje iz jednačine kretanja (12) da je u inicijalnom momentu i $d^2r/dt^2 = 0$. Asteroid nema, dakle, u inicijalnom momentu, ni brzine ni ubrzanja prema pokretnom koordinatnom sistemu. Kako je, prema tome, u inicijalnom momentu $v = 0; dv/dt = 0$, to znači da je brzina v i u idućem momentu jednaka nuli. Smatrajući ovaj momenat za inicijalni, sleduje da će i u idućem i svima daljim momentima brzina asteroida biti jednaka nuli, pa zato on neće promeniti svoj položaj u pokretnom koordinatnom sistemu, t.j. međusobna konstelacija masa M, m, m' neće se promeniti, nego će ona, takva kakva je, rotirati uglovnom brzinom n oko težišta masa O .

Tačke L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 zovu se, iz razloga koji ćemo kasnije upoznati, centri libracije polja W .

§ 23. Jakobijev integral. Hilova granična kriva. Pomnožimo jednačinu kretanja asteroida

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \text{grad } W + 2[v\omega] \quad (29)$$

skalarno sa

$$v = \frac{dr}{dt},$$

to će član $2v[v\omega]$ ispasti iz te jednačine, jer je $v[v\omega] = \omega[vv] = 0$, a pošto je $d^2r/dt^2 = dv/dt$, to dobivamo:

$$v dv = dr \text{ grad } W.$$

No kako je

$$dr \text{ grad } W = dW,$$

gde dW predstavlja promenu skalara W koja odgovara pomeranju dr , to dobivamo:

$$v dv = dW.$$

Integracija ove jednačine daje:

$$\frac{v^2}{2} = W + h,$$

gde je h integraciona konstanta. Označimo li skalarnu veličinu brzine v sa v , to je $v^2 = v^2$, pa je zato:

$$\frac{v^2}{2} = W + h. \quad (30)$$

Ovaj integral diferencijalne jednačine kretanja asteroida zove se Jakobijev integral.

Konstanta h određena je inicijalnim uslovima. Ako se asteroid nalazio u inicijalnom momentu na mestu polja W na kojem skalar W ima vrednost W_0 i ako je intenzitet inicijalne brzine imao vrednost v_0 , onda je

$$h = \frac{v_0^2}{2} - W_0. \quad (31)$$

Konstanta h zavisi samo od inicijalnog položaja i od skalarne vrednosti inicijalne brzine, a ne od njenog pravca.

Iz Jakobijevog integrala izveo je Hil ovu interesantnu konzekvenciju. Leva strana jednačine (30), kvadrat realne veličine, ne može nikada postati negativna. Zato je

$$W + h \geq 0. \quad (32)$$

Skalar W , predstavljen izrazom (10), je uvek pozitivan, jer sadrži same pozitivne veličine. Zbir $W + h$ može, prema tome, samo onda biti jednak nuli ako su inicijalni uslovi takvi da je konstanta h negativna. Pretpostavimo da je to slučaj i da je konstanta h jednaka $-h_0$, gde h_0 predstavlja jednu pozitivnu veličinu koja je veća od minimalne vrednosti skalara W , dostignute u tačkama L_4 i L_5 , onda zbog (32), za vreme celog kretanja asteroida, mora biti zadovoljen uslov

$$W - h_0 \geq 0; \quad W \geq h_0, \quad (33)$$

pa nam jednačina

$$W = h_0 \quad (34)$$

predstavlja jednu određenu ekviskalarnu površinu polja W kroz koju asteroid ne može da prođe. Ako je ta površina zatvorena i ako se asteroid nalazi u njenoj unutrašnjosti, onda ona ograničava jedan deo prostora koji asteroid ne može da ostavi. Ako se kretanje vrši u ravni $X-Y$, kao što ćemo pretpostaviti, onda mesto gornje površine imamo jednu liniju. Ta se linija zove Hilova granična kriva. Ispitajmo, koristeći se slikom 10 i topografskom pretstavom polja W , datom u prethodnom paragrafu, kada će postojati takva granična kriva.

Ako su inicijalni uslovi takvi da konstanta h_0 odgovara kojoj najastoj ekviskalarnoj liniji koja se obavila oko tačke M , pa ako se asteroid u inicijalnom momentu nalazio u unutrašnjosti te jajaste linije, onda ona predstavlja graničnu krivu preko koje asteroid ne može da pređe, a oblast ravni $X-Y$, ograničena tom krivom, onu oblast u kojoj će se asteroid stalno da kreće, jer ta oblast zadovoljava uslov (33). Slično je i sa jajastim linijama koje obavijaju položaj mase m . U takvom slučaju možemo asteroid nazvati satelitom mase M odnosno mase m . Ako konstantu h_0 smanjimo

toliko da ona leži ispod one vrednosti koja odgovara osmičnoj liniji što prolazi kroz tačku L_1 , a iznad one vrednosti koja odgovara kojoj od linija oblika peščanog sata, pa ako se asteroid nalazi u unutrašnjosti ove potonje linije, onda ona pretstavlja opet jednu graničnu krivu preko koje asteroid ne može da pređe. Ako je konstanta h_0 tolika da je dostigla svoju minimalnu vrednost prethodnog slučaja, t.j. onu vrednost koja odgovara tački L_2 , a asteroid se nalazi izvan jabučaste linije koja prolazi kroz tu tačku, onda ta jabučasta linija ograničuje iznutra oblast asteroida koji ne može da prekorači tu jabučastu krivu, nego se kreće izvan nje, nemajući spoljne granice svoje oblasti. Isto važi i za jabučaste linije koje obavijaju onu koja prolazi kroz tačku L_2 . Ako su inicijalni uslovi takvi da konstanta h_0 odgovara jednoj takvoj jabučastoj liniji onda asteroid, ako se nalazi van oblasti ograničene takvom linijom ne može ući u tu oblast, pa je oblast u kojoj se on kreće ograničena iznutra, no ne spolja. Slično važi i za potkovičaste linije i one koje imaju oblik suze, a obavile se oko tačke L_4 ili L_5 . Ako konstanta h_0 odgovara jednoj takvoj liniji, pa se asteroid nalazi izvan oblasti koja je tom linijom obavijena, on ne može ući u tu oblast.

§ 24. Periodične putanje, simetrične prema osi X . Pomnožimo li jednačinu (12) sa m' , onda nam leva strana te jednačine pretstavlja silu \mathfrak{P} pod čijim se uticajem kreće asteroid, pa je

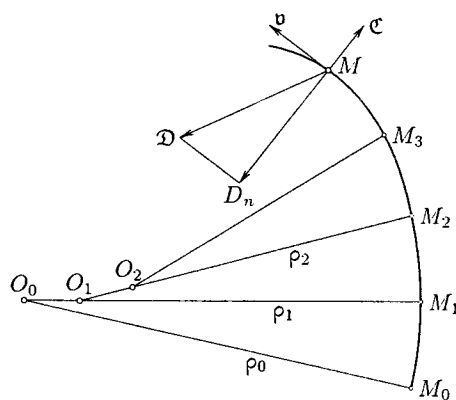
$$\mathfrak{P} = m' \text{grad } W + 2m'[\mathbf{v} \mathbf{v}]. \quad (35)$$

Pretpostavimo da se asteroid kreće u ravni $X-Y$ i da u proizvoljnom momentu ima položaj M , a vektor brzine \mathbf{v} (sl. 11). Tim položajem i tom brzinom, data nam je i sila \mathfrak{P} koja u tom položaju dejstvuje na asteroid. Ona je rezultanta dveju sila: sile $\mathcal{D} = m' \text{grad } W$ i sile $\mathcal{C} = 2m'[\mathbf{v} \mathbf{v}]$. Prva od tih sila ima pravac gradienta polja W u tački M , a druga sila stoji, prema definiciji vektorielnog produkta, normalno na vektor brzine \mathbf{v} . Ona je zbog (3) pretstavljena izrazom:

$$\mathcal{C} = 2m'n[\mathbf{v} \mathbf{t}],$$

a kako vektor \mathbf{t} stoji normalno na ravni $X-Y$ to sila \mathcal{C} pada u tu ravan, stoji normalno na vektoru \mathbf{v} , a ima intenzitet $2m'nv$. Na koju stranu normale u tački M je ta sila naperena, to zavisi od smisla obilaženja asteroida po njegovoj putanji. U našem slučaju ona je naperena onako kako je to u slici pretstavljeno.

Izračunajmo komponentu D_n sile \mathcal{D} koja pada u normalu putanje, t.j. u istu pravu u koju pada i sila \mathcal{C} . Označimo element u pravcu normale, t.j. u pravcu radiusa krivine, sa $\partial\rho$, to, prema definiciji gradienta, ta komponenta ima intenzitet



Слика 11

$$D_n = m' \frac{\partial W}{\partial \rho},$$

a naperena je prema onoj strani normale na kojoj skalar W raste. Uzmimo da je taj pravac onaj kako je u slici označen, onda komponenta sile \mathfrak{P} , normalna na tangentu putanje, ima intenzitet

$$P_\xi = m' \frac{\partial W}{\partial \rho} - 2m'nv. \quad (36)$$

Ova je sila identična centripetalnoj sili koja dejstvuje na mobilnu masu m' , a koja sila ima intenzitet

$$P_\xi = m' \frac{v^2}{\rho}, \quad (37)$$

gde ρ označava radius krivine putanje.

Iz prednjih dveju jednačina sleduje:

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\partial W}{\partial \rho} - 2nv, \quad (38)$$

a iz Jakobijevog integrala (30)

$$v^2 = 2W + 2h. \quad (39)$$

Iz poslednjih dveju jednačina dobivamo:

$$\frac{2W + 2h}{\rho} = \frac{\partial W}{\partial \rho} - 2n\sqrt{2W + 2h},$$

t.j.

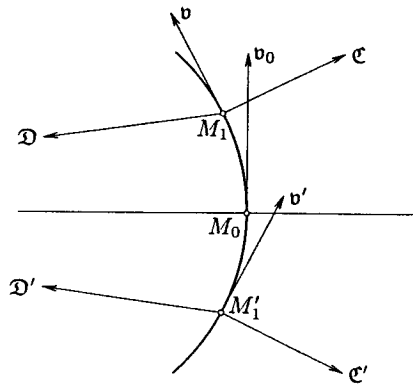
$$\rho = \frac{2W + 2h}{\frac{\partial W}{\partial \rho} - 2n\sqrt{2W + 2h}}. \quad (40)$$

Položajem asteroida i njegovom brzinom dat nam je, dakle, i radius krivine njegove putanje, čime je omogućena konstrukcija te putanje, tačka po tačku, na ovaj način.

Neka se asteroid nalazio u inicijalnom momentu u položaju M_0 za koji je $W = W_0$ i neka ima inicijalnu brzinu v_0 intenziteta v_0 . Tim je, pre svega, određena numerička vrednost konstante h Jakobijevog integrala jednačinom (30). Pravcem brzine v_0 određena je vrednost izvoda $\partial W / \partial \rho$ skalara normalno na taj pravac. Zato možemo pomoću (40) izračunati dužinu radiusa krivine ρ_0 u tački M_0 . Opišemo li tim radiusom, iz centra krivine O_0 , maleni luk M_0M_1 , onda dolazimo do tačke M_1 za koju možemo, pošto je njom dat novi položaj asteroida i novi pravac njegove brzine, izračunati numeričke vrednosti W i $\partial W / \partial \rho$, a pomoću jednačine (40) dužinu ρ_1 radiusa krivine u tački M_1 . Tako možemo, od tačke do tačke, konstruisati putanju asteroida. U koliko budu bili kružni elementi, iz kojih sastavljamo tu putanju, manji, u toliko će konstrukcija putanje biti tačnija. Ta se tačnost može proizvoljno potencirati ako ovu geometrijsku konstrukciju zamenimo računom.

Pretpostavimo da se asteroid nalazio, u inicijalnom momentu, u jednoj tački M_0 ose X i da je vektor inicijalne brzine v_0 bio normalan na tu osu pa zamislimo

da smo, služeći se prethodnom metodom, konstruisali one delove putanje asteroida koji sledeju inicijalnom momentu i one koji su mu prethodili, to je lako uvideti da će ti delovi putanje biti međusobno simetrični prema osi X , jer su u tačkama M_1 i M'_1 simetričnim prema osi X , a koje ograničavaju elementarne lukove M_0M_1 i M'_1M_0 , baš zbog toga što je vektor brzine \mathbf{v} u tački M_1 naperen od ose X , a vektor brzine \mathbf{v}' u tački M'_1 naperen prema toj osi, Koriolisove sile \mathbf{C} i \mathbf{C}' , prema definiciji vektorielnog produkta, simetrične prema osi X . Kako je i polje skalara W simetrično prema toj osi, to ćemo u tačkama M_1 i M'_1 dobiti iste radiuse krivine, pa ćemo, nastavljajući konstrukciju putanje, dobiti je takvu da će cela ta putanja biti simetrična prema osi X . Ako, dakle, asteroid, na ma kojem mestu svoje putanje, preseće osu X normalno, onda ta putanja mora biti simetrična prema osi X .



Слика 12

Ako sada variramo inicijalne uslove, bilo da menjamo inicijalni položaj M_0 duž ose X , bilo da menjamo intenzitet v_0 inicijalne brzine, bilo da menjamo ta oba inicijalna uslova, a sa njima i konstantu h , dotle dok ne dobijemo takvu putanju asteroida koja će, i po drugi put, preseći normalno osu X , onda će ta putanja postati zatvorena. Krećući se po takvoj putanji, asteroid će stizati u svoje bivše položaje na toj putanji uvek onom brzinom kojom je pre prošao kroz te položaje, jer prema Jakobijevom integralu, ta brzina zavisi, pri datoj konstanti h , samo od numeričke vrednosti skalara W na onom mestu na koje je asteroid stigao. Zato će

se posle jednog potpunog obilaska asteroida oko njegove putanje ponoviti njegovo kretanje istim onim brzinama kojima je pre toga kroz nju prolazio. Njegovo kretanje biće periodično i predstavljaće jedno periodično rešenje asteroidnog problema. Služeći se ovom osnovnom idejom i izvedeći je računski, G. H. Darvin je prvi konstruisao i ispitao takve periodične putanje asteroida, simetrične prema osi.

§ 25. Periodična rešenja u okolini centara libracije. Želimo li da vektorsku jednačinu kretanja asteroida

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \text{grad } W + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] \quad (41)$$

zamenimo skalarnima, to valja imati u vidu da je u opštem slučaju, kada asteroid nije ograničen na ravan $X-Y$, njegov vektor položaja \mathbf{r} predstavljen sa

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (42)$$

gde su x, y, z koordinate asteroida, a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jedinični vektori u pravcu koordinatnih osa. Odavde sleduje:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (43)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \quad (44)$$

Gradient skalara W predstavljen je, analitički, ovim izrazom:

$$\text{grad } W = \frac{\partial W}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\mathbf{k}, \quad (45)$$

a bilo je, prema (3),

$$\boldsymbol{\omega} = n\mathbf{k}. \quad (46)$$

Koordinate vektora $\boldsymbol{\omega}$ su, dakle, $0, 0, n$, pa je zato vektorielni produkt $[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]$ predstavljen determinantom:

$$[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ 0 & 0 & n \end{vmatrix} = n \frac{dy}{dt}\mathbf{i} - n \frac{dx}{dt}\mathbf{j}. \quad (47)$$

Stavimo li (42) do (47) u (41), to mora postojati jednakost za koeficiente od \mathbf{i} , odnosno \mathbf{j}, \mathbf{k} , s leve i desne strane dobivene jednačine. Na taj način, ili množeći tu jednačinu skalarno sa \mathbf{i} , pa zatim sa \mathbf{j} , odnosno \mathbf{k} , dobivamo ove tri skalarnе jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned} \quad (48)$$

Nalazi li se asteroid u ravni $X-Y$, to padaju sile $\mathfrak{F}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ predstavljene obrascima (4), (6), (7), u tu ravan, pa zato leži grad W , koji je jednak zbiru tih vektora, u ravni $X-Y$. Zato je, zbog (45), $\partial W/\partial z = 0$, a zbog gornjih jednačina $d^2z/dt^2 = 0$. Ako se, dakle, u inicijalnom momentu, asteroid nalazi u ravni $X-Y$, pa ako i njegova inicijalna brzina pada u tu ravan, onda on tu ravan neće ostaviti, jer njegova brzina i ubrzanje padaju, u tom momentu, pa i u svima ostalima, u tu ravan. U takvom je slučaju njegovo kretanje regulisano prvim dvema od jednačina (48) ili, ako mesto jednačina (10) i (12) upotrebimo jednačine (18) i (19), ovim dvema jednačinama:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}. \end{aligned} \quad (49)$$

Ove jednačine omogućavaju konačna periodična rešenja u blizini centara libracije. Videli smo da je u svima tima centrima gradient od W i od Ω jednak nuli, pa je zato, ako sa a, b označimo koordinate uočenog centra libracije,

$$x = a; \quad y = b, \quad \text{grad } \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\mathbf{j} = 0$$

ili, jednostavnije pisano,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial b} = 0. \quad (50)$$

Pretpostavimo da se asteroid nalazio u inicijalnom momentu u blizini centra libracije (a, b) i da za vreme celog svog kretanja neće, što imamo naknadno da proverimo. ostaviti neposrednu okolinu toga centra, onda su njegove koordinate predstavljene sa

$$\begin{aligned} x &= a + \xi \\ y &= b + \eta, \end{aligned} \quad (51)$$

gde su a i b konstante, a ξ i η promenljive veličine koje ostaju, zbog gornje pretpostavke, uvek male. Zato možemo funkcije $\partial \Omega / \partial x$ i $\partial \Omega / \partial y$ razviti po Tejlorovom obrascu u red i zanemariti sve članove koji sadržavaju više potencije od ξ i η . Na taj način dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial a} + \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} + \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial b} + \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} + \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}, \end{aligned} \quad (52)$$

pri čemu smo uveli ove pokraćene oznake:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial a} &= \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right\}_{a,b}; & \frac{\partial \Omega}{\partial b} &= \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right\}_{a,b} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} &= \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right\}_{a,b}; & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} &= \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right\}_{a,b} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} &= \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right\}_{a,b}. \end{aligned}$$

Iz (51) sleduje:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi}{dt}; & \frac{dy}{dt} &= \frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2\xi}{dt^2}; & \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2\eta}{dt^2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Stavljajući (52) i (53) u (49), a uzimajući u obzir (50), dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} \xi + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \eta \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \xi + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} \eta. \end{aligned} \quad (54)$$

Ove jednačine važe samo za neposrednu okolinu tačke (a, b) . One su linearne, pa će zato biti zadovoljene partikularnim integralima:

$$\xi = Ae^{\lambda t}; \quad \eta = Be^{\lambda t}, \quad (55)$$

gde A, B, λ označavaju konstante koje ćemo još odrediti. Kako je

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= A\lambda e^{\lambda t}; & \frac{d\eta}{dt} &= B\lambda e^{\lambda t} \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= A\lambda^2 e^{\lambda t}; & \frac{d^2\eta}{dt^2} &= B\lambda^2 e^{\lambda t}, \end{aligned} \quad (56)$$

to vidimo, stavljajući (55) i (56) u jednačine (54), da će one biti zadovoljene ako bude:

$$\begin{aligned} A\lambda^2 - 2nB\lambda &= A \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} + B \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \\ B\lambda^2 + 2nA\lambda &= A \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} + B \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}, \end{aligned}$$

t.j.

$$\begin{aligned} A \left(\lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} \right) - B \left(2n\lambda + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \right) &= 0 \\ A \left(2n\lambda - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \right) + B \left(\lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Iz ovih jednačina valja odrediti konstante A i B . Te su jednačine linearne i homogene algebarske jednačine, pa će one, sem trivijalnih korenova $A = B = 0$, imati i drugih ako determinanta koeficijenata od A i B bude jednaka nuli. Tim uslovom dobivamo jednačinu:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} & - \left(2n\lambda + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \right) \\ 2n\lambda - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} & \lambda^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (58)$$

t.j.

$$\lambda^4 - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - 4n^2 \right) \lambda^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \right)^2 = 0. \quad (59)$$

Rešimo li ovu jednačinu po λ^2 , pa usvojimo, iz razloga koji ćemo kasnije upoznati, samo onakav koren koji je realan i negativan, onda ćemo za λ dobiti dva korena ovoga oblika:

$$\lambda_1 = i\nu; \quad \lambda_2 = -i\nu, \quad (60)$$

gde i označava imaginarnu jedinicu, a ν jedan realan broj. Sa ova dva korena daće nam jednačine (57) dva beskonačna niza korenova za A i B ili dva para takvih korenova: A_1, B_1 , i A_2, B_2 , pri čemu možemo A_1 i B_1 , odnosno A_2 i B_2 pomnožiti proizvoljnim brojem, pa da jednačine (57) budu opet zadovoljene. Te nam jednačine daju, u stvari, samo razlomke A_1/B_1 i A_2/B_2 koji su, kao što je poznato, jednaki srazmeri subdeterminanata uz prvu ili drugu vrstu determinante (58). Zato je, uzimajući u obzir drugu vrstu te determinante,

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{2n\lambda_1 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b}}{\lambda_1^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}}; \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{2n\lambda_2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b}}{\lambda_2^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}}. \quad (61)$$

Opšti integrali diferencijalnih jednačina (54) su, dakle, ovi:

$$\begin{aligned}\xi &= A_1 e^{ivt} + A_2 e^{-ivt} \\ \eta &= B_1 e^{ivt} + B_2 e^{-ivt}.\end{aligned}\quad (62)$$

Primenjujući poznati obrazac

$$e^{\pm ivt} = \cos vt \pm i \sin vt,$$

zbog kojega smo i usvojili samo imaginarne korenove jednačine (59), možemo jednačinama (62) dati ovaj oblik:

$$\begin{aligned}\xi &= (A_1 + A_2) \cos vt + i(A_1 - A_2) \sin vt \\ \eta &= (B_1 + B_2) \cos vt + i(B_1 - B_2) \sin vt.\end{aligned}\quad (63)$$

A_1 i A_2 su konjugovani kompleksni brojevi, jer A_2 nastaje iz A_1 , ako λ_1 zamenimo sa λ_2 , t.j. iv sa $-iv$. Isto važi i za B_1 i B_2 . Zato možemo staviti:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{a_1}{2} - i \frac{a_2}{2}; & A_2 &= \frac{a_1}{2} + i \frac{a_2}{2} \\ B_1 &= \frac{b_1}{2} - i \frac{b_2}{2}; & B_2 &= \frac{b_1}{2} + i \frac{b_2}{2},\end{aligned}\quad (64)$$

gde nam a_1, a_2, b_1, b_2 predstavljaju realne brojeve. Stavljajući (64) u (63), dobivamo:

$$\begin{aligned}\xi &= a_1 \cos vt + a_2 \sin vt \\ \eta &= b_1 \cos vt + b_2 \sin vt.\end{aligned}\quad (65)$$

Iz ovih jednačina sleduje:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= -a_1 v \sin vt + a_2 v \cos vt \\ \frac{d\eta}{dt} &= -b_1 v \sin vt + b_2 v \cos vt.\end{aligned}\quad (66)$$

Inicijalnim uslovima dat nam je položaj i brzina asteroida, t.j.

$$t = 0: \quad \xi = \xi_0; \quad \eta = \eta_0; \quad \frac{d\xi}{dt} = v_1^0; \quad \frac{d\eta}{dt} = v_2^0.\quad (67)$$

Stavljajući ovo u (65) i (66), dobivamo:

$$\xi_0 = a_1; \quad \eta_0 = b_1; \quad v_1^0 = a_2 v; \quad v_2^0 = b_2 v,\quad (68)$$

čime bi konstante a_1, a_2, b_1, b_2 bile određene. No te konstante treba da, pomoću jednačina (64), zadovolje obe jednačine (61). Zato su inicijalnim položajem određene komponente v_1^0, v_2^0 , t.j. sam vektor inicijalne brzine koji nije, dakle, proizvoljan. Ako su inicijalni uslovi takvi da su konstante a_1, a_2, b_1, b_2 veoma male, onda će, zbog (65), i koordinate ξ, η za vreme celog kretanja ostati malene, a asteroid se kretati u neposrednoj okolini centra libracije. Tim je ispunjena pretpostavka na koju su se oslanjali prethodni računi.

Koordinate ξ, η asteroida su, kao što to sleduje iz jednačina (65), periodične funkcije vremena sa periodom T , pri čemu je

$$\frac{2\pi}{T} = v; \quad T = \frac{2\pi}{v},\quad (69)$$

pa će putanja asteroida biti jedna zatvorena kriva. Da odredimo tu putanju, zokrenimo naš koordinatni sistem $\xi-\eta$ kojega početak leži u uočenom libracionom centru, a kojega su ose paralelne sa osama X, Y za ugao φ , pa označimo nove koordinate sa ξ' i η' . Onda između koordinata ξ, η i ξ', η' postoji poznata veza:

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi \\ \eta' &= -\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi.\end{aligned}\quad (70)$$

Stavljajući (65) u (70), dobivamo:

$$\begin{aligned}\xi' &= (a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi) \cos vt + (a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi) \sin vt \\ \eta' &= (-a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi) \cos vt - (a_2 \sin \varphi - b_2 \cos \varphi) \sin vt.\end{aligned}\quad (71)$$

Uvedimo sada tri nove konstante M_1, M_2, ϵ i odredimo, njihov tri, i ugao φ tako da te četiri veličine zadovoljavaju ove četiri jednačine:

$$\begin{aligned}a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi &= M_1 \sin \epsilon \\ -a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi &= M_2 \sin \epsilon \\ a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi &= M_1 \cos \epsilon \\ a_2 \sin \varphi - b_2 \cos \varphi &= M_2 \sin \epsilon,\end{aligned}\quad (72)$$

onda dobivamo:

$$\begin{aligned}\xi' &= M_1 \sin(\epsilon + vt) \\ \eta' &= M_2 \cos(\epsilon + vt),\end{aligned}\quad (73)$$

t.j.

$$\frac{\xi'}{M_1} = \sin(\epsilon + vt); \quad \frac{\eta'}{M_2} = \cos(\epsilon + vt).$$

Ako kvadriramo i sabereimo ove dve jednačine, dobivamo:

$$\left(\frac{\xi'}{M_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta'}{M_2}\right)^2 = 1\quad (74)$$

kao jednačinu putanje asteroida. Ta je putanja elipsa. Krećući se po toj putanji i učestvujući u rotaciji pokretnog koordinatnog sistema $X-Y$, asteroid vrda oko centra libracije koji je zbog toga dobio svoje ime. Takve eliptične putanje moguće je, kao što to pokazuje detaljnije ispitivanje u koje se ovde ne možemo upuštati, položiti oko svih centara libracije, kroz svaku tačku njegove okoline. Pri tome treba inicijalne uslove podesiti tako da se asteroid kreće po svojoj putanji u obrnutom smislu kretanja glavnih dvaju tela, a to zato što će u takvom slučaju Koriolisova sila biti naperena prema libracionom centru. Taj je centar, pošto u njemu skalar Ω dostizava svoj minimum, a grad Ω je naperen od njega, položaj labilne ravnoteže, pa bi se asteroid postepeno od njega udaljio kad ga ne bi Koriolisova sila održavala u njegovoj blizini i time učinila njegovu putanju stabilnom.

Sila poremećaja i njeno polje

§ 26. Definicija i matematski izraz sile poremećaja. Spomenuli smo, govoreći o problemu dvaju tela, da se planete kreću oko Sunca skoro sasvim tako kao kad bi svaka od njih stajala samo pod dejstvom privlačne sile Sunca. Slično važi i za satelite planeta, koji se kreću skoro sasvim tako kao kad bi svaki od njih stajao samo pod dejstvom privlačne sile svoje planete. Zato možemo, i pri strožijem ispitivanju kretanja tih nebeskih tela, početi od rezultata dobivenih u problemu dvaju tela, pa ove rezultate postepeno modifikovati da bismo dobili tačnu sliku stvarnih kretanja. Pri tome je potrebno uvesti jedan nov pojam, silu poremećaja, do kojeg dolazimo na ovaj način.

Neka nam m_k označava ono nebesko telo i njegovu masu čije kretanje hoćemo da ispitamo, a m_0 ono nebesko telo oko kojega se uočeno nebesko telo kreće skoro eliptičnim kretanjem. Ako je m_k planeta, onda nam, dakle, m_0 predstavlja Sunce; ako je m_k satelit, onda nam m_0 predstavlja njegovu planetu. Kad ne bi bilo drugih nebeskih tela sem tih dvaju, onda bi jednačina kretanja tela m_k bila, prema (13), §9, ova:

$$m_k \frac{d^2 \tau_k}{dt^2} = -f m_k (m_0 + m_k) \frac{\tau_k}{r_k^3}, \quad (1)$$

gde τ_k označava vektor položaja mase m_k prema masi m_0 , a r_k moduo toga vektora. Zato je

$$\frac{d^2 \tau_k}{dt^2} = -f (m_0 + m_k) \frac{\tau_k}{r_k^3}. \quad (2)$$

Uzmimo, za sada, još jedno treće nebesko telo m_i , u obzir. Njegovo prisustvo poremetiće kretanje nebeskog tela m_k , predstavljeno jednačinom (2), zbog čega ćemo telo m_i nazvati onim koje prouzrokuje poremećaj, a telo m_k onim koje podleži tom poremećaju.

Označimo sa τ_i vektor položaja tela m_i prema telu m_0 , sa l_{ik} vektor položaja tela m_k prema telu m_i , a sa ρ_{ik} moduo ovog potonjeg vektora. Ako \mathfrak{R}_0 , odnosno \mathfrak{R}_k , označava vektor položaja tela m_0 , odnosno tela m_k , prema jednoj nepomičnoj tački prostora, onda su jednačine ovih dvaju tela ove:

$$m_k \frac{d^2 \mathfrak{R}_k}{dt^2} = -f m_k m_0 \frac{\tau_k}{r_k^3} - f m_k m_i \frac{l_{ik}}{\rho_{ik}^3}$$

$$m_0 \frac{d^2 \mathfrak{R}_0}{dt^2} = f m_k m_0 \frac{\tau_k}{r_k^3} + f m_i m_0 \frac{\tau_i}{r_i^3}.$$

Skratimo prvu od ovih dveju jednačina sa m_k , drugu sa m_0 , oduzmimo drugu od prve, pa uzmimo u obzir da je

$$\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_0 = \tau_k; \quad \frac{d^2 \mathfrak{R}_k}{dt^2} - \frac{d^2 \mathfrak{R}_0}{dt^2} = \frac{d^2 \tau_k}{dt^2},$$

to dobivamo:

$$\frac{d^2 \tau_k}{dt^2} = -f (m_0 + m_k) \frac{\tau_k}{r_k^3} - f m_i \left(\frac{l_{ik}}{\rho_{ik}^3} + \frac{\tau_i}{r_i^3} \right). \quad (3)$$

Vektor $-l_{ik}/\rho_{ik}^3$ može se predstaviti kao gradienat skalara $1/\rho_{ik}$, pri čemu treba m_i smatrati za nepomično, a m_k za pokretno. Zaista, u tom slučaju su ekvivalentne površine od $1/\rho_{ik}$ lopte sa centrom u m_i , gradienat stoji normalno sa tim površinama, ima, dakle, pravac jediničnog vektora l_{ik}/ρ_{ik} , njegov moduo jednak je izvodu $-1/\rho_{ik}^2$ od $1/\rho_{ik}$, pa je zato:

$$\text{grad} \frac{1}{\rho_{ik}} = -\frac{1}{\rho_{ik}^2} \cdot \frac{l_{ik}}{\rho_{ik}} = -\frac{l_{ik}}{\rho_{ik}^3}.$$

I vektor τ_i/r_i^3 može se smatrati kao gradienat jedne skalarnе величине. Pitamo li za gradienat skalara $U_i = \tau_i \tau_k / r_i^3$, smatrajući, pri tome, samo m_k kao pokretno, to dobivamo ovaj rezultat. Prema definiciji skalarnog produkta dvaju vektora, je

$$U_i = \frac{x r_i}{r_i^3} = \frac{x}{r_i^2},$$

gde x predstavlja projekciju vektora τ_k u vektor τ_i . Pri obrazovanju gradienta treba r_i smatrati za konstatno, pa je zato:

$$\text{grad} U_i = \frac{1}{r_i^2} \text{grad} x.$$

Ekvivalentne površine od x su ravni normalne na vektor r_i , pa zato grad x ima pravac jediničnog vektora τ_i/r_i , a njegov moduo je $\partial x / \partial r_i = 1$. Zato je

$$\text{grad} U_i = \text{grad} \frac{\tau_i \tau_k}{r_i^3} = \frac{1}{r_i^2} \cdot \frac{\tau_i}{r_i} = \frac{\tau_i}{r_i^3}.$$

Na taj način dobivamo:

$$\text{grad} f m_i \left(\frac{1}{\rho_{ik}} - \frac{\tau_i \tau_k}{r_i^3} \right) = -f m_i \left(\frac{l_{ik}}{\rho_{ik}^3} + \frac{\tau_i}{r_i^3} \right).$$

Stavimo li, dakle,

$$f m_i \left(\frac{1}{\rho_{ik}} - \frac{\tau_i \tau_k}{r_i^3} \right) = R_k, \quad (4)$$

to dobivamo, mesto (3), ovu jednačinu:

$$\frac{d^2 \tau_k}{dt^2} = -f (m_0 + m_k) \frac{\tau_k}{r_k^3} + \text{grad}_k R_k. \quad (5)$$

Indeks k pokazuje da pri obrazovanju gradienta treba samo tačku m_k smatrati za pokretno.

Kad bismo mesto jednog jedinog tela m_i koje izaziva poremećaj imali njih $(n-1)$ i to m_1, m_2, \dots, m_n (m_k se ovde ne pojavljuje), onda bismo za R_k dobili ovaj obrazac:

$$R_k = \sum_i f m_i \left(\frac{1}{\rho_{ik}} - \frac{\tau_i \tau_k}{r_i^3} \right). \quad (6)$$

U gornjem zbiru ne pojavljuje se masa m_k .

U ovom novom slučaju dobili bismo, mesto jednačine (5), n takvih jednačina, dodeljujući indeksu k redom numeričke vrednosti $1, 2, \dots, k, \dots, n$, dakle,

$$\frac{d^2 \tau_k}{dt^2} = -f(m_0 + m_k) \frac{\tau_k}{r_k^3} + \text{grad}_k R_k; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Uporedimo li jednačinu (2), koja važi za eliptično kretanje mase m_k oko mase m_0 , sa jednačinom (7), to vidimo da se ova jednačina razlikuje od prve samo prisustvom svoga člana

$$\text{grad}_k R_k = \mathfrak{S}_k. \quad (8)$$

- * Vektor \mathfrak{S}_k nazivamo silom poremećaja ili silom perturbacije, a skalar R_k funkcijom poremećaja ili funkcijom perturbacije.

§ 27. Polje sile poremećaja i njegova primena u statičkoj teoriji plime.

- * Ako usvojimo terminologiju opšte teorije fizikalnih polja, možemo Njutnov zakon gravitacije izraziti i na ovaj način: *svaki delić m mase u vasioni izaziva jedno gravitaciono polje koje se iz okoline mase m širi u beskonačnost i koje je definisano vektorom:*

$$\mathfrak{F} = -f \frac{m}{r^3} \tau, \quad (9)$$

gde f označava gravitacionu konstantu, τ vektor položaja uočene tačke polja prema masi m , a r moduo toga vektora. Stavimo li na uočeno mesto polja jednu masu m' , to se na njoj pokazuje gravitaciona sila

$$\mathfrak{P} = -f \frac{m m'}{r^3} \tau, \quad (10)$$

t.j. masa m privlači masu m' po Njutnovom zakonu. Vektor \mathfrak{F} predstavlja, slično kao i u elektrostatskom polju, onu silu koja deluje na jedinicu mase.

U stvari se polja svih masa koje se nalaze u vasioni međusobno superponiraju, pa bi zato bilo moguće govoriti o jednom jedinom polju koje obuhvata celu vasionu. No kako intenzitet F polja mase m opada sa kvadratom otstojanja r od te mase, to je moguće oko svake mase m ograničiti jednu oblast prostora u kojoj je intenzitet F polja mase m proizvoljno puta veći od intenziteta sile $\sum \mathfrak{F}$, izazvane svim ostalim masama, tako da je u toj oblasti uticaj mase m toliko preponderantan da se, pri prvom ispitivanju, samo ona uzima u obzir, kao što je to učinjeno u problemu dvaju tela.

Gravitaciono polje izazvano jednom jedinom koncentrisanom masom m , dakle polje (9) zovemo radialnim gravitacionim poljem. Ono se može, kao što smo videli, predstaviti kao gradienat skalara:

$$W = f \frac{m}{r}. \quad (11)$$

Ako se masa m' nalazi, sem mase m , pod uticajem još jedne mase M koja izaziva poremećaj kretanja mase m' , pa ako se, kao što je u prethodnom paragrafu učinjeno, uzinu u obzir sve privlačne sile koje deluju između masa M , m , m' , onda je masa m' izložena, sem uticaju polja (9), još i dejstvu gradienta polja R_k predstavljenog jednačinom (4). U toj jednačini valja, prema oznakama koje smo sada upotrebili, zameniti m_i sa M , τ_k sa τ , a ako vektor položaja mase m prema masi M označimo sa α , onda treba u (5) staviti $-\alpha$ mesto τ , a mesto r_i staviti a . Zamenjujući još oznaku l_{ik} sa f , a ρ_{ik} sa s , dobivamo za funkciju poremećaja ovaj obrazac:

$$R = fM \left(\frac{1}{s} + \frac{\alpha \tau}{a^3} \right). \quad (12)$$

Masa m' nalazi se, dakle, pod uticajem gravitacionog polja koje je gradient skalara:

$$U = W + R, \quad (13)$$

t.j.

$$U = f \frac{m}{r} + fM \left(\frac{1}{s} + \frac{\alpha \tau}{a^3} \right). \quad (14)$$

Ispitajmo osobine ovoga polja. Prema definiciji skalarnog produkta dvaju vektora, je

$$\alpha \tau = ax, \quad (15)$$

gde x označava projekciju vektora τ u vektor α . Zato je

$$U = f \frac{m}{r} + fM \frac{1}{s} + fM \frac{x}{a^2}. \quad (16)$$

Ovo skalarno polje nastaje superpozicijom triju komponentalnih polja. Ekviskalarne površine prvog od tih komponentalnih polja su lopte sa centrom u m , ekviskalarne površine drugog komponentalnog polja su lopte sa centrom u M , a ekviskalarne površine trećeg komponentalnog polja su ravni normalne na pravu koja spaja mase M i m . Zato je rezultujuće polje skalara U simetrično prema toj pravoj, pa su njegove ekviskalarne površine rotacione površine sa osom u toj pravoj. Zato se pri ispitivanju toga polja moramo brinuti samo o meridijanskim presecima tih ekviskalarnih površina.

Da izvedemo jednačine tih meridijanskih preseka ekviskalarnih površina, postupićemo ovako. Kako je (sl. 13)

$$f = \alpha + \tau, \quad (17)$$

to dobivamo, množeći ovu vektorsku jednačinu skalarno sa samom sobom,

$$s^2 = a^2 + 2(\alpha \tau) + r^2. \quad (18)$$

Označimo sa ν ugao što ga vektor τ zatvara sa vektorom α , to je, prema definiciji skalarnog produkta dvaju vektora,

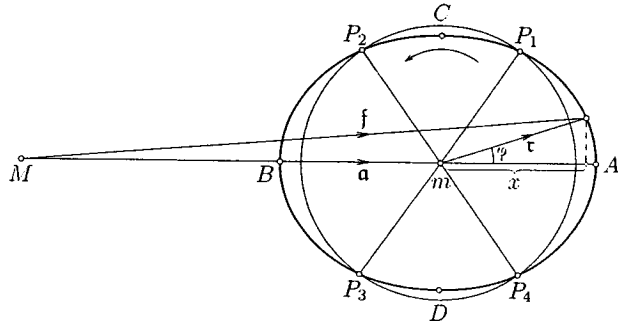
$$\alpha \tau = ar \cos \nu. \quad (19)$$

Stavljajući ovo u (18) i (14), dobivamo:

$$U = f \frac{m}{r} + fM \left\{ (a^2 + r^2 + 2ar \cos \nu)^{-1/2} + \frac{r}{a^2} \cos \nu \right\},$$

t.j.

$$U = f \frac{m}{r} + \frac{fM}{a} \left\{ \left(1 + \frac{r^2}{a^2} + 2 \frac{r}{a} \cos \nu \right)^{-1/2} + \frac{r}{a} \cos \nu \right\}. \quad (20)$$



Слика 13

Ako se uočena tačka M polja nalazi u blizini mase m , onda je r/a mali broj kojega više potencije od druge možemo zanemariti. Zato dobivamo, primenom binomskog obrasca,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{r^2}{a^2} + 2 \frac{r}{a} \cos \nu \right)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{a^2} + 2 \frac{r}{a} \cos \nu \right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2 \cdot 1} \left(\frac{r^2}{a^2} + 2 \frac{r}{a} \cos \nu \right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} - \frac{r}{a} \cos \nu + \frac{3}{2} \frac{r^2}{a^2} \cos^2 \nu. \end{aligned}$$

Stavljajući ovo u (20) dobivamo:

$$U = f \frac{m}{r} + f \frac{M}{a} + \frac{1}{2} f M \frac{r^2}{a^3} (3 \cos^2 \nu - 1).$$

Iz ovog izraza možemo aditivnu konstantu fM/a ispustiti, pošto ona ne utiče ni na gradienat polja ni na oblik ekviskalarnih površina koje dobivamo stavljajući gornji izraz jednak jednoj proizvoljnoj konstanti. Zato možemo pisati:

$$U = f \frac{m}{r} + f M \frac{r^2}{a^3} (3 \cos^2 \nu - 1), \quad (21)$$

a za jednačinu meridijanskih preseka ekviskalarnih površina polja U dobivamo ovu:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{M}{m} \frac{r^2}{a^3} (3 \cos^2 \nu - 1) = C, \quad (22)$$

gde C označava jednu proizvoljnu konstantu.

Dobiveni rezultati imaju svoje primene u statičkoj teoriji morske plime, sa kojom ćemo se sada upoznati.

U drugom odeljku ovog dela pokazaćemo da naša Zemlja privlači jednu spoljnu masu m' skoro sasvim tako kao kad bi celokupna masa m Zemljina bila koncentrisana u Zemljinom centru. Ako nam, prema tome, u našim prethodnim obrascima

m označava masu Zemlje koncentrisanu u jednoj tački, a M masu Meseca koncentrisanu, u otstojanju a od Zemlje, takođe u jednoj tački, pa ako ne uzmemo u obzir centrifugalne sile prouzrokovane rotacijom Zemlje oko njene ose i one, izazvane rotacijom duži a oko zajedničkog težišta Zemlje i Meseca, pošto je uticaj tih sila na pojavu koju ispituje bez osobitog značaja, onda nam jednačina (22) predstavlja jednu od ekviskalarnih površina polja atrakcija Zemlje i Meseca, i to u neposrednoj blizini Zemlje, pošto smo pri izvođenju te jednačine pretpostavili da je r/a jedan mali broj. Nalazeći se u tom polju atrakcije, mora koja pokrivaju našu Zemlju zauzeće, pod dejstvom sila toga polja, onaj oblik pri kojem ogledalo mora predstavljati jednu od ekviskalarnih površina toga polja. Samo u takvom slučaju je sila koja dejstvuje na proizvoljan materijalni delić morske površine normalna na tu površinu, pa nije u stanju da promeni njen oblik. Ta površina biće, prema onome što je napred rečeno, rotaciona površina a njena osa biće prava koja spaja centar Zemlje sa centrom Meseca. Kad ne bi bilo Meseca, onda bi ta površina bila lopta sa jednim izvesnim radiusom r_0 , t.j. mesto jednačine (22), u kojoj bi valjalo staviti $M = 0$, imali bismo jednačinu lopte. Usled prisustva Meseca, ta će se lopta promeniti u jednu rotacionu površinu koja neće mnogo odstupati od lopte, pa zato možemo staviti

$$r = r_0 + h, \quad (23)$$

gde h označava jednu malu veličinu. Zato je, primenjujući binomni obrazac i zanemarujući više potencije maloga broja h/r_0 ,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + h} = \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{h}{r_0} \right)^{-1} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{h}{r_0} \right). \quad (24)$$

Stavimo ovaj izraz u jednačinu (22) na mesto prvog člana njene leve strane, dok u drugom članu, malom zbog toga što je r/a malo, možemo r zameniti direktno sa r_0 . Na taj način dobivamo kao jednačinu morske površine:

$$\frac{1}{r_0} - \frac{h}{r_0^2} + \frac{1}{2} \frac{M}{m} \frac{r_0^2}{a^3} (3 \cos^2 \nu - 1) = C. \quad (25)$$

Pri tome nam h predstavlja odstupanje morskog nivoa od lopte radiusa r_0 . Za $M = 0$ treba prednja jednačina da daje $h = 0$, pa je zato:

$$\frac{1}{r_0} = C.$$

Stavljajući ovo u jednačinu (25), dobivamo:

$$h = \frac{1}{2} \frac{M}{m} \frac{r_0^4}{a^3} (3 \cos^2 \nu - 1). \quad (26)$$

Upotrebom označenja

$$\frac{M}{m} \frac{r_0^4}{a^3} = k, \quad (27)$$

dobivamo:

$$h = \frac{1}{2} k (3 \cos^2 \nu - 1). \quad (28)$$

Ova nam jednačina predstavlja presek površine mora sa jednom od onih ravnih koje prolaze kroz centar Zemlje i centar Meseca. Taj presek predstavljen je u sl. 13 krivom $ACBDA$.

Kako su koreni jednačine

$$3 \cos^2 v - 1 = 0: \quad \begin{cases} v_1 = \pm 54^\circ 44' 8'' \\ v_2 = \pm 125^\circ 15' 52'' \end{cases}$$

to dobivamo ovo:

$$h = \begin{cases} +k; & v = 0, \quad v = 180^\circ \\ 0; & v = v_1, \quad v = v_2 \\ -\frac{1}{2}k; & v = \pm 90^\circ. \end{cases}$$

To znači da u tačkama A i B h dostizava svoj maksimum k , u tačkama P_1, P_2, P_3, P_4 , h je jednako nuli, a u tačkama C i D h dostizava svoj minimum $-\frac{1}{2}k$.

Kada bi se Mesec nalazio u ravni Zemljina ekvatora, onda bi, uzimajući tu ravan za ravan slike, Zemljina osa stajala u tački m normalno na tu ravan, a Zemlja bi, posmatrana sa severa, rotirala oko te ose u smislu kao što je to u slici naznačeno strelicom, dok bi hidrosfera Zemljina, izdužena u pravcu prema Mesecu, zadržavala nepromenjeni položaj prema tom nebeskom telu. Zemlja i njeni kontinenti obrnu se prema Mesecu za 25^h , pa bi zato svako mesto na ekvatoru Zemljinom obišlo za 25^h celu konturu krive $ACBDA$, t.j. prošlo kroz dva maksimuma i dva minimuma morskog nivoa, pa doživelo u toku dana dve jednake plime i dve jednake oseke. No Mesec se, u svome obilaženju oko Zemlje, udaljuje i približuje ravni Zemljina ekvatora i tim dobiva cela pojava komplikovaniji tok, koji se menja i tim kada se na površini Zemlje udaljujemo od ekvatora. Sem toga izaziva i Sunce, svojim privlačnim dejstvom, nešto slabiju, ali sličnu pojavu morskog plime koja se superponira sa onom izazvanom Mesecom. Da bismo dobili jasnu sliku svih tih pojava, postupićemo ovako.

U našim prethodnim rasuđivanjima, pretstavlja $\alpha = 180^\circ - v$ onaj ugao što ga radius uočenog mesta Zemljine površine zatvara sa pravom naperenom prema Mesecu. Taj je ugao, zbog toga, jednak zenitskom odstojanju Meseca z , pa je zato:

$$z = 180^\circ - v. \quad (29)$$

Položimo li kroz oba pola nebeske sfere i kroz trenutni položaj Meseca na joj sferi krug, to se deo toga kruga koji leži između nebeskog ekvatora i Meseca zove deklinacija δ Meseca, a onaj luk nebeskog ekvatora koji leži između proletnje tačke i one tačke gde onaj prvi krug preseca nebeski ekvator zove rektascenzijom α Meseca. Zvezdanim vremenom θ nazivamo časovni ugao proletnje tačke. Između veličina $z, \delta, \alpha, \theta$ i geografske širine φ uočenog mesta Zemljine površine postoji, prema osnovnim obrascima Sferne Astronomije, ova jednačina:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(\theta - \alpha). \quad (30)$$

Kako je, zbog (29),

$$\cos^2 z = \cos^2 v,$$

t.j.

$$3 \cos^2 v - 1 = 3 \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos^2(\theta - \alpha) + 6 \sin \varphi \cos \varphi \sin \delta \cos \delta \cos(\theta - \alpha) + 3 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta - 1,$$

a pošto je

$$\cos^2(\theta - \alpha) = \frac{1 + \cos 2(\theta - \alpha)}{2},$$

to dobivamo:

$$3 \cos^2 v - 1 = \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta + 3 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta - 1 + \frac{3}{2} \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos(\theta - \alpha) + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2(\theta - \alpha). \quad (31)$$

Ovaj izraz valja staviti u (28) da bismo dobili plimu h izazvanu privlačnim dejstvom Meseca.

Na isti način dobivamo, ako sa M' označimo masu Sunca, a sa a' njegovo odstojanje od Zemlje, stavljaajući

$$\frac{M' r_0^4}{m a'^3} = k' \quad (32)$$

da je plima h' , izazvana privlačnim dejstvom Sunca pretstavljena izrazom:

$$h' = \frac{1}{2} k' (3 \cos^2 v - 1). \quad (33)$$

Sada treba u obrascu (31) α zameniti rektascenzijom Sunca, koju ćemo označiti sa α' , a δ deklinacijom Sunca, koju ćemo označiti sa δ' . Celokupna plima

$$H = h + h', \quad (34)$$

izazvana dejstvom Meseca i Sunca pretstavljena je, stavljaajući

$$H_1 = \frac{3}{2} k \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2(\theta - \alpha) + \frac{3}{2} k' \cos^2 \varphi \cos^2 \delta' \cos 2(\theta - \alpha') \quad (35)$$

$$H_2 = \frac{3}{2} k \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos(\theta - \alpha) + \frac{3}{2} k' \sin 2\varphi \sin 2\delta' \cos(\theta - \alpha') \quad (36)$$

$$H_3 = k \left(\frac{3}{2} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta + 3 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta - 1 \right) + k' \left(\frac{3}{2} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta' + 3 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta' - 1 \right), \quad (37)$$

ovim obrascem:

$$H = H_1 + H_2 + H_3. \quad (38)$$

Najjače promenljiva veličina u gornjim izrazima je zvezdano vreme θ . Ono naraste, mereno u lučnoj meri, za vreme jednog zvezdanog dana za 2π , zato imaju jednostavne trigonometrijske funkcije od θ periodu jednog zvezdanog dana, a funkcije od 2θ poludnevnu periodu. Ostale promenljive veličine, ekvatorske koordinate α, δ Meseca i Sunca, menjaju se sporije; perioda Mesečevih koordinata je mesec dana, a Sunčevih, godina dana. Kada njihovo menjanje ne bismo uzimali u obzir, imala bi parcijalna plima H_1 poludnevnu, a plima H_2 jednodnevnu periodu. Ispitajmo dejstvo promenljivosti tih ekvatorskih koordinata na članove H_1, H_2, H_3 , razmatrajući te članove svaki za sebe.

Kako je

$$\begin{aligned} \cos 2(\theta - \alpha') &= \cos[2(\theta - \alpha) + 2(\alpha - \alpha')] \\ &= \cos 2(\theta - \alpha) \cos 2(\alpha - \alpha') - \sin 2(\theta - \alpha) \sin 2(\alpha - \alpha'), \end{aligned}$$

to dobivamo:

$$H_1 = \cos 2(\theta - \alpha) \left[\frac{3}{2} k \cos^2 \varphi \cos^2 \delta + \frac{3}{2} k' \cos^2 \varphi \cos^2 \delta' \cos 2(\alpha - \alpha') \right] - \sin 2(\theta - \alpha) \frac{3}{2} k' \cos^2 \varphi \cos^2 \delta' \sin 2(\alpha - \alpha').$$

Uvedimo dve nove varijabilne a_1 i ϵ_1 , definisane ovim dvema jednačinama:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} k \cos^2 \varphi \cos^2 \delta + \frac{3}{2} k' \cos^2 \varphi \cos^2 \delta' \cos 2(\alpha - \alpha') &= a_1 \cos 2\epsilon_1 \\ \frac{3}{2} k' \cos^2 \varphi \cos^2 \delta' \sin 2(\alpha - \alpha') &= a_1 \sin 2\epsilon_1, \end{aligned} \quad (39)$$

to dobivamo:

$$H_1 = a_1 \cos 2(\epsilon_1 + \theta - \alpha), \quad (40)$$

dok nam kvadriranje i sabiranje jednačina (39), odnosno njihovo deljenje, daje:

$$a_1 = \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \sqrt{k^2 \cos^4 \delta + k'^2 \cos^4 \delta' + 2kk' \cos^2 \delta \cos^2 \delta' \cos 2(\alpha - \alpha')} \quad (41)$$

$$\operatorname{tg} 2\epsilon_1 = \frac{k' \cos^2 \delta' \sin 2(\alpha - \alpha')}{k \cos^2 \delta + k' \cos^2 \delta' \cos 2(\alpha - \alpha')}. \quad (42)$$

Jednačinom (40) predstavljena je parcijalna plima H_1 jednom oscilatornom funkcijom vremena, pri čemu su i amplituda a_1 i perioda T_1 oscilacione promenljive. U argumentu funkcije predstavlja $\theta - \alpha$ njegov glavni član; on naraste, pošto se θ i α mere u protivnom pravcu, za 2π za vreme dok se Zemlja obrne jedanput prema Mesecu, dakle za 25^h . Zato T_1 ima srednju vrednost od dvanaest i po časova, pa se ove oscilacije nazivaju poludnevnicama. Oscilujući tom srednjom periodom, amplituda a_1 oscilacije H_1 se postepeno menja. Ona dostizava svoju maksimalnu vrednost, usled promena rektascenzija α i α' , kada je: $\cos 2(\alpha - \alpha') = 1$, t.j. $2(\alpha - \alpha') = 0$; $2(\alpha - \alpha') = 360^\circ$, dakle za

$$\alpha = \alpha'; \quad \alpha = \alpha' + 180^\circ.$$

U prvom slučaju nalaze se Sunce i Mesec u konjunkciji, u drugom u opoziciji. Oba ta slučaja nazivaju se sicigijama. Onda imamo ili mlad mesec ili pun. Tada su talasi plime najveći. Oni će usled promena deklinacija δ i δ' dostići svoj najveći maksimum kad $\cos^2 \delta$ i $\cos^2 \delta'$ dostignu svoju maksimalnu vrednost, t.j. ako, sem gornje relacije, bude bilo

$$\delta = 0; \quad \delta' = 0.$$

To se dešava onda kad u doba ravnodnevnica imamo pun ili mlad mesec, a čvorovi Mesečeve putanje nađu se u ravnodnevnicama. U doba sicigija, t.j. kada je ispunjena relacija $\alpha = \alpha'$ ili $\alpha = \alpha' + 180^\circ$, je, zbog (42), $\epsilon_1 = 0$. U to doba dostizavaju poludnevni talasi svoju amplitudu za $\cos 2(\theta - \alpha) = 1$, t.j. kad je $2(\theta - \alpha) = 0$; $2(\theta - \alpha) = 360^\circ$,

$$\theta = \alpha; \quad \theta = \alpha + 180^\circ.$$

To se dešava u doba gornje odnosno donje kulminacije Meseca.

Amplituda a_1 oscilacije H_1 dostizava svoju minimalnu vrednost za $\cos 2(\alpha - \alpha') = -1$; $2(\alpha - \alpha') = 180^\circ$; $2(\alpha - \alpha') = 540^\circ$, dakle kada je

$$\alpha - \alpha' = 90^\circ; \quad \alpha - \alpha' = 270^\circ.$$

To se dešava kada se Sunce i Mesec nalaze u kvadraturi, t.j. u doba prve i poslednje četvrti Meseca. I tada je, prema (42), $\epsilon_1 = 0$ pa poludnevni talasi plime dostizavaju svoju amplitudu za $\theta = \alpha$; $\theta = 180^\circ + \alpha$, t.j. u vreme gornje ili donje kulminacije polumeseca, koja se dešava, u to doba, u 6^h u jutro ili na veče.

U sva ostala doba, sem spomenutih dvaju, je $\epsilon_1 \neq 0$, a to znači da se kulminacija talasa plime ne poklapa sa kulminacijama Meseca.

U svakom momentu opada, prema (41), amplituda a_1 sa geografskom širinom φ , pa je najveća na ekvatoru.

Isto tako kao što smo parcijalnu plimu H_1 predstavili jednom oscilacijom promenljive amplitude i faze, možemo isto to učiniti i sa parcijalnom plimom H_2 .

Kako je:

$$\cos(\theta - \alpha') = \cos(\theta - \alpha) \cos(\alpha - \alpha') - \sin(\theta - \alpha) \sin(\alpha - \alpha'),$$

to dobivamo za H_2

$$H_2 = \cos(\theta - \alpha) \left[\frac{3}{2} k \sin 2\varphi \sin 2\delta + \frac{3}{2} k' \sin 2\varphi \sin 2\delta' \cos(\alpha - \alpha') \right] - \sin(\theta - \alpha) \frac{3}{2} k' \sin 2\varphi \sin 2\delta' \sin(\alpha - \alpha').$$

Uvedimo dve nove varijabilne a_2 i ϵ_2 , definisane ovim dvema jednačinama:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} k \sin 2\varphi \sin 2\delta + \frac{3}{2} k' \sin 2\varphi \sin 2\delta' \cos(\alpha - \alpha') &= a_2 \cos \epsilon_2 \\ \frac{3}{2} k' \sin 2\varphi \sin 2\delta' \sin(\alpha - \alpha') &= a_2 \sin \epsilon_2 \end{aligned}$$

ili ovim dvema koje dobivamo kvadriranjem i sabiranjem odnosno deljenjem prednjih dveju jednačina:

$$a_2 = \frac{3}{2} \sin 2\varphi \sqrt{k^2 \sin^2 2\delta + k'^2 \sin^2 2\delta' + 2kk' \sin 2\delta \sin 2\delta' \cos(\alpha - \alpha')} \quad (43)$$

$$\operatorname{tg} \epsilon_2 = \frac{k' \sin 2\delta' \sin(\alpha - \alpha')}{k \sin 2\delta + k' \sin 2\delta' \cos(\alpha - \alpha')}. \quad (44)$$

Sada dobivamo za H_2

$$H_2 = a_2 \cos(\epsilon_2 + \theta - \alpha). \quad (45)$$

Amplituda a_2 ovih talasa, koja se menja vremenom, obično je manja od amplitude a_1 . Ona sadržava: mesto $\cos^2 \delta$, $\cos^2 \delta'$ funkcije $\sin 2\delta$, $\sin 2\delta'$. Kako deklinacija Meseca leži u granicama $-28^\circ 36' < \delta < +28^\circ 36'$, a deklinacija Sunca u granicama $-23^\circ 27' < \delta' < +23^\circ 27'$, to je

$$\begin{aligned} -0.841 < \sin 2\delta < +0.841; & \quad -0.730 < \sin 2\delta' < +0.730 \\ +0.771 < \cos^2 \delta < +1; & \quad +0.842 < \cos^2 \delta' < +1, \end{aligned}$$

pa su zato članovi izraza (41) obično veći no oni izraza (43).

Srednja vrednost periode parcijalne plime H_2 je, pošto je glavni član argumenta $\theta - \alpha$, 25^h ; zato se njeni talasi zovu jednodnevni.

Amplituda a_2 te jednodnevne parcijalne plime dostizava, u koliko to zavisi od rektascenzija, svoju maksimalnu vrednost kada je $\alpha - \alpha' = 0$, t.j. $\alpha = \alpha'$, dakle u doba mladoga meseca, a svoju minimalnu vrednost kada je $\alpha - \alpha' = 180^\circ$, dakle u doba punog meseca. U oba je slučaja, zbog (44), $\varepsilon_2 = 0$, čas plime poklapa se sa kulminacijom Meseca. U koliko to zavisi od deklinacija, dostizava a_2 svoju maksimalnu vrednost kada su one najveće. Dnevna oscilacija ne pojavljuje se, zbog faktora $\sin 2\varphi$ u (43), na ekvatoru i na polovima Zemlje nikada, a na ostalima je širinama jednaka nuli kada je $\delta = 0$, $\delta' = 0$, t.j. kada Sunce i Mesec prođu, u isti mah, kroz nebeski ekvator.

Parcijalna plima H_3 sadrži samo kvadrate trigonometrijskih funkcija od δ i δ' , pa zbog toga dostiže ona istu visinu za pozitivne i negativne vrednosti deklinacije Meseca odnosno Sunca. Zbog toga je njena perioda, u koliko zavisi ona od δ , pola meseca dana, a u koliko zavisi od δ' , pola godine. Ona je u okolini ekvatora, zbog saopštenih granica između kojih variraju δ i δ' , uvek pozitivna; to je srednji nivo mora viši no što bi bio bez privlačnog dejstva Meseca i Sunca.

Statička teorija obuhvatila je suštinu pojave morske plime. Ako talase morske plime, opažane na licu Zemljinom, razložimo u jednostavne harmonijske oscilacije, onda se periode tih oscilacija poklapaju sa periodama eliptičkog prividnog kretanja Sunca i Meseca i periodama svih njihovih nejednakosti, izazvanih međusobnim poremećajima. Najjače morske plime opažaju se, zaista, u doba sicigija, a najslabije u doba kvadratura. I dnevna oscilacija usko je vezana na deklinaciju Sunca i Meseca. U nabrojanim pojavama postoji saglasnost između teorije i stvarnosti. No inače ima velikih raznimolženja. Po statičkoj teoriji plime, a prema jednačini (28), razlika između maksimalne i minimalne vode što je Mesec može da izazove bila bi $H = k - (-\frac{1}{2}k) = \frac{3}{2}k$, a ona što je Sunce može da postigne $H' = \frac{3}{2}k'$. Celokupna razlika između najniže i najviše vode bila bi $\frac{3}{2}(k + k')$. Koristeći se obrascima (27) i (32), dobili bismo, pošto je

$$r_0 = 6377 \text{ km}; \quad \frac{r_0}{a} = \frac{1}{59,678}; \quad \frac{r_0}{a'} = \frac{1}{23480}; \quad \frac{M}{m} = \frac{1}{82}; \quad \frac{M'}{m} = 322000,$$

svega $0,78m$ kao najveću plimu postignutu Suncem i Mesecom. Stvarno postignute plime su, međutim, daleko veće, a isto se tako opažena vremena najviše i najniže vode ne podudaraju sa onima što ih daje statička teorija. Uzrok je tomu taj što more, sledejući svojim ogledalom promene ekviskalarnih površina poremećaja, svojim zamahom daleko ih prekoračava. Zato morska plima nije hidrostatska pojava, no hidrodinamična. Tu pojavu obuhvatila je, dobrim delom, i kvantitativno, tek dinamička teorija plime koja izlazi iz okvira ovoga dela.

ГЛАВА СЕДМА

Metod varijacije konstanata u jednačinama kretanja nebeskih tela

§ 28. **Lagranžov metod varijacije konstanata.** Videli smo da za neporemećeno kretanje planete ili satelita važi jednačina (2), §26, a za poremećeno jednačina (7). Izbacimo sada indeks k , koji postaje izlišan, to te dve jednačine dobivaju ovaj oblik:

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = -f(m_0 + m)\frac{\tau}{r^3} \quad (1)$$

$$\left(\frac{d^2\tau}{dt^2}\right) = -f(m_0 + m)\frac{\tau}{r^3} + \text{grad } R. \quad (2)$$

U jednačini (2) smo stavili levi član u zagradu da bismo na taj način označili da se on odnosi na poremećeno kretanje.

Integral jednačine (1), poznat iz problema dvaju tela, može se simbolički predstaviti sa

$$\tau = F(t, \tau_0, \mathbf{v}_0), \quad (3)$$

gde t predstavlja vreme, τ_0 vektor inicijalnog položaja planete, a \mathbf{v}_0 njen inicijalan vektor brzine. Ovim simboličkim označenjem ne mislimo da kažemo da se τ može vektorskim operacijama izvesti iz τ_0 , \mathbf{v}_0 i t , nego samo to da se koordinate x , y , z vektora τ , mogu izraziti pomoću koordinata x_0 , y_0 , z_0 vektora τ_0 , koordinata v_1 , v_2 , v_3 vektora \mathbf{v}_0 i pomoću vremena t . Mesto ovih šest koordinata možemo upotrebiti šest drugih skalarnih konstanata $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ pomoću kojih se može izraziti vektor položaja τ neporemećenog kretanja, pa zato pisati:

$$\tau = F(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6). \quad (4)$$

Služeći se računskim jednim postupkom koji je Lagranž usavršio i nazvao metodom varijacije konstanata, možemo gornji obrazac smatrati i kao integral jednačine (2) ako samo konstante $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ smatramo za funkcije $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ vremena t , pa stavimo

$$\tau = F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6), \quad (5)$$

gde $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ predstavljaju funkcije vremena.

Ovakvim postupkom mogli bismo τ pretstaviti kao funkciju vremena na beskonačno mnogo načina kad ne bismo funkcije u podvrgli izvesnim uslovima. Vektorska jednačina (5) ekvivalentna je trima skalarnim pa zato možemo, po slobodnom izboru, odabrati tri takva uslova koji će se, kao što ćemo videti, moći obuhvatiti jednom jedinom vektorskom jednačinom.

Kako $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ valja smatrati za funkcije vremena, to je izvod od (5) po vremenu predstavljen ovim obrascem:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial}{\partial u_i} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \frac{du_i}{dt}. \quad (6)$$

Podvrgnimo sada funkcije $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ nagoveštenoj vektorskoj uslovnoj jednačini:

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial}{\partial u_i} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \frac{du_i}{dt} = 0. \quad (7)$$

Tim uslovom zahtevamo ovo. Iz jednačina (6) i (7) sleduje:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6). \quad (8)$$

Smatramo li numeričke vrednosti od $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ koje odgovaraju jednom određenom vremenskom momentu t za konstante, to se putanja

$$\mathbf{r} = F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6), \quad u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 = \text{const.}, \quad (9)$$

izračunata sa tim numeričkim vrednostima, zove se neporemećena putanja trenutka t . Iz prednje jednačine sleduje, diferencijacijom po t ,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6), \quad (10)$$

dakle iz (8) i (10)

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (11)$$

Postavljenim uslovom zahtevamo, dakle, da u uočenom trenutku t neporemećena i poremećena putanja imaju isti vektor brzine, t.j. da se dodiruju.

Ponovna diferencijacija jednačine (8) po vremenu, u kojoj treba veličine u smatrati za funkcije vremena, daje:

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial t} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \frac{du_i}{dt}. \quad (12)$$

Sada možemo, pošto ne postoji više opasnost nesporazuma, u (7) i (12) za $F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ staviti obrazac (4) u kojem valja veličine $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ smatrati za funkcije vremena. Na taj način dobivamo ove dve jednačine:

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_i} \cdot \frac{dc_i}{dt} = 0 \quad (13)$$

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial c_i} \cdot \frac{dc_i}{dt}. \quad (14)$$

Pri tome smo, zbog jednostavnijeg pisanja, stavili $\partial \mathbf{r} / \partial t = \dot{\mathbf{r}}$.

Stavimo li u (14) obrasce (2) i (1), pri čemu je ovaj potonji, pošto se u njemu c smatraju za konstante, jednak $\partial^2 \mathbf{r} / \partial t^2$, to dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial c_i} \cdot \frac{dc_i}{dt} = \text{grad } R. \quad (15)$$

Obe vektorske jednačine (13) i (15) mogu se zameniti sa šest skalarnih jednačina pomoću kojih se mogu izračunati vremenski izvodi

$$\frac{dc_1}{dt}, \quad \frac{dc_2}{dt}, \quad \frac{dc_3}{dt}, \quad \frac{dc_4}{dt}, \quad \frac{dc_5}{dt}, \quad \frac{dc_6}{dt}$$

svih šest elemenata. Taj račun može se uprostiti ako drugu od spomenutih jednačina pomnožimo sa $\partial \mathbf{r} / \partial c_k$, a prvu sa $-\partial \dot{\mathbf{r}} / \partial c_k$, pa obe jednačine saberemo. Na taj način dobivamo:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial c_i} \cdot \frac{dc_i}{dt} - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial c_k} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_i} \cdot \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \text{grad } R,$$

t.j.

$$\sum_{i=1}^{i=6} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial c_i} - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \right) \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \text{grad } R. \quad (16)$$

Uvedimo ova simbolička označenja:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial c_i} - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} = [k, i] \quad (17)$$

i uzmimo u obzir da je

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \text{grad } R = \frac{\partial R}{\partial c_k}, \quad (18)$$

to možemo jednačinu (16) zameniti ovom:

$$\sum_{i=1}^{i=6} [k, i] \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_k}. \quad (19)$$

Ova jednačina važi za $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, pa zato dobivamo ovih šest jednačina:

$$\begin{aligned} [1, 1] \frac{dc_1}{dt} + [1, 2] \frac{dc_2}{dt} + \dots + [1, 6] \frac{dc_6}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial c_1} \\ [2, 1] \frac{dc_1}{dt} + [2, 2] \frac{dc_2}{dt} + \dots + [2, 6] \frac{dc_6}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial c_2} \\ &\vdots \\ [6, 1] \frac{dc_1}{dt} + [6, 2] \frac{dc_2}{dt} + \dots + [6, 6] \frac{dc_6}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial c_6} \end{aligned} \quad (20)$$

§ 29. Osobine Lagranžovih zagrada. Izrazi definisani jednačinom (17), t.j. jednačinom

$$[k, i] = \frac{\partial \tau}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\tau}}{\partial c_i} - \frac{\partial \tau}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \dot{\tau}}{\partial c_k} \quad (21)$$

zovu se Lagranžove zagrada. Oni predstavljaju, u smislu vektorske analize, razliku dvaju skalarnih produkata od po dva vektora, zato su Lagranžove zagrada skalarne veličine, isto tako kao što nam i izraz (18) predstavlja jedan skalar.

Lagranžove zagrada imaju ove značajne osobine. Iz njihove definicione jednačine (21) sleduje, pre svega, da je

$$[k, k] = 0, \quad (22)$$

dakle

$$[1, 1] = [2, 2] = [3, 3] = [4, 4] = [5, 5] = [6, 6] = 0,$$

a sem toga,

$$[i, k] = -[k, i]. \quad (23)$$

Zbog toga se broj različitih kombinacija $[i, k]$; $i = 1, 2, \dots, 6$; $k = 1, 2, \dots, 6$, ne uzimajući u obzir njihov znak, redukuje na petnaest.

Diferencijacijom izraza (21) po vremenu t , a upotrebom označenja $\ddot{\tau}$ za drugi izvod τ , dobivamo:

$$\frac{d[k, i]}{dt} = \frac{\partial \dot{\tau}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\tau}}{\partial c_i} + \frac{\partial \tau}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \ddot{\tau}}{\partial c_i} - \frac{\partial \tau}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \ddot{\tau}}{\partial c_k} - \frac{\partial \tau}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \ddot{\tau}}{\partial c_k}$$

t.j.

$$\frac{d[k, i]}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \ddot{\tau}}{\partial c_i} - \frac{\partial \tau}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \ddot{\tau}}{\partial c_k}. \quad (24)$$

Iz (1) sleduje:

$$\ddot{\tau} = -f(m_0 + m) \frac{\tau}{r^3} = \text{grad } U, \quad (25)$$

pri čemu je, kao što je lako uvideti,

$$U = f(m_0 + m) \frac{1}{r} \quad (26)$$

pa zato dobivamo mesto (24)

$$\frac{d[k, i]}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \text{grad } U}{\partial c_i} - \frac{\partial \tau}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \text{grad } U}{\partial c_k}. \quad (27)$$

Kako je

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial \tau}{\partial c_k} \text{grad } U \right) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial c_i \partial c_k} \text{grad } U + \frac{\partial \tau}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \text{grad } U}{\partial c_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial c_k} \left(\frac{\partial \tau}{\partial c_i} \text{grad } U \right) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial c_i \partial c_k} \text{grad } U + \frac{\partial \tau}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \text{grad } U}{\partial c_k},$$

to dobivamo oduzimajući drugu od ovih jednačina od prve i uzimajući u obzir (27)

$$\frac{d[k, i]}{dt} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial \tau}{\partial c_k} \text{grad } U \right) - \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\frac{\partial \tau}{\partial c_i} \text{grad } U \right).$$

Sem toga je

$$\frac{\partial \tau}{\partial c_k} \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial c_k}; \quad \frac{\partial \tau}{\partial c_i} \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial c_i}$$

pa zato dobivamo

$$\frac{d[k, i]}{dt} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial U}{\partial c_k} \right) - \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\frac{\partial U}{\partial c_i} \right) = 0. \quad (28)$$

Ova jednačina kazuje da su izrazi $[k, i]$ nezavisni od vremena, pa se zato mogu izračunati iz inicijalnih uslova ili iz stanja kretanja u kojem drugom proizvoljnom trenutku vremena.

§ 30. O izboru konstanta za varijaciju. U prethodnim rasuđivanjima nije učinjena nikakva ograničavajuća pretpostavka o konstantama c za varijaciju, sem te da se pomoću tih konstanta može jednoznačno predstaviti vektor τ neporemećenog kretanja, definisan jednačinom (3). Kad bismo za te konstante odabrali koordinate vektora položaja τ_0 i vektora brzine v_0 bilo kojeg određenog trenutka $t = t_0$, t.j. kad bismo stavili

$$c_1 = x_0; \quad c_2 = y_0; \quad c_3 = z_0; \quad c_4 = v_1; \quad c_5 = v_2; \quad c_6 = v_3, \quad (29)$$

onda bi tok računa bio ovaj. Kako je

$$t = t_0; \quad \tau = \tau_0, \quad \dot{\tau} = \dot{\tau}_0$$

i kako se Lagranžove zagrada, nezavisne od vremena, mogu izračunati stavljajući $t = t_0$, to bi one, u ovom slučaju, bile predstavljene obrascem:

$$[k, i] = \frac{\partial \tau_0}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\tau}_0}{\partial c_i} - \frac{\partial \dot{\tau}_0}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \tau_0}{\partial c_k}. \quad (30)$$

Položimo u masu m_0 , dakle u Sunce ako m predstavlja planetu, što ćemo, da bismo imali konkretan slučaj pred sobom, pretpostaviti, početak O našeg koordinatnog sistema $X-Y-Z$, kako je on bio definisan u §§10 i 13, i označimo jedinične vektore u pravcu tih koordinatnih osa sa n_1, n_2, n_3 , to je:

$$\tau_0 = x_0 n_1 + y_0 n_2 + z_0 n_3 \quad (31)$$

$$\dot{\tau}_0 = v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3,$$

dakle zbog (29)

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial c_1} = n_1; \quad \frac{\partial \tau_0}{\partial c_2} = n_2; \quad \frac{\partial \tau_0}{\partial c_3} = n_3; \quad \frac{\partial \tau_0}{\partial c_4} = \frac{\partial \tau_0}{\partial c_5} = \frac{\partial \tau_0}{\partial c_6} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \dot{\tau}_0}{\partial c_4} = n_1; \quad \frac{\partial \dot{\tau}_0}{\partial c_5} = n_2; \quad \frac{\partial \dot{\tau}_0}{\partial c_6} = n_3; \quad \frac{\partial \dot{\tau}_0}{\partial c_1} = \frac{\partial \dot{\tau}_0}{\partial c_2} = \frac{\partial \dot{\tau}_0}{\partial c_3} = 0. \quad (33)$$

Od petnaest Lagranžovih zagrada, definisanih u prošlom paragrafu, dobivamo, stavljajući (32) i (33) u (30), zbog poznatih osobina skalarnih produkata jediničnih vektora:

$$(n_1 n_1) = (n_2 n_2) = (n_3 n_3) = 1; \quad (n_1 n_2) = (n_2 n_3) = (n_3 n_1) = 0,$$

samo tri Lagranžove zagrada različite od nule i to:

$$[1, 4] = -[4, 1] = 1; \quad [2, 5] = -[5, 2] = 1; \quad [3, 6] = -[6, 3] = 1. \quad (34)$$

Označimo koordinate trenutnog položaja planete u nepokretnom koordinatnom sistemu sa x, y, z , a u pokretnom koordinatnom sistemu sa ξ, η pošto je $\zeta = 0$, jer se ravan planetske putanje poklapa sa ravni $\xi-\eta$, to je:

$$\tau = x n_1 + y n_2 + z n_3 \quad (40)$$

$$\tau = \xi i + \eta j. \quad (41)$$

Množeći vektorsku jednačinu (40) skalarno sa n_1 , a zatim sa n_2 odnosno sa n_3 , dobivamo:

$$(\tau n_1) = x; \quad (\tau n_2) = y; \quad (\tau n_3) = z. \quad (42)$$

Zato je

$$\tau = (\tau n_1)n_1 + (\tau n_2)n_2 + (\tau n_3)n_3. \quad (43)$$

Stavljajući u ovu jednačinu mesto τ , jedno za drugim, i, j, ℓ dobivamo ove tri jednačine:

$$\begin{aligned} i &= (i n_1)n_1 + (i n_2)n_2 + (i n_3)n_3 \\ j &= (j n_1)n_1 + (j n_2)n_2 + (j n_3)n_3 \\ \ell &= (\ell n_1)n_1 + (\ell n_2)n_2 + (\ell n_3)n_3. \end{aligned} \quad (44)$$

Množeći ove izraze samim sobom odnosno međusobno i vodeći računa o spomenutim osobinama jediničnih vektora, dobivamo:

$$\begin{aligned} (i n_1)^2 + (i n_2)^2 + (i n_3)^2 &= 1 \\ (j n_1)^2 + (j n_2)^2 + (j n_3)^2 &= 1 \\ (\ell n_1)^2 + (\ell n_2)^2 + (\ell n_3)^2 &= 1, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} (i n_1)(j n_1) + (i n_2)(j n_2) + (i n_3)(j n_3) &= 0 \\ (j n_1)(\ell n_1) + (j n_2)(\ell n_2) + (j n_3)(\ell n_3) &= 0 \\ (\ell n_1)(i n_1) + (\ell n_2)(i n_2) + (\ell n_3)(i n_3) &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Pošto je, po prirodi jediničnih vektora, $i = [j \ell]$; $j = [\ell i]$; $\ell = [ij]$, to dobivamo, stavljajući ovamo obrasce (44), mesto prve od ovih jednačina, a koristeći se poznatim obrascem za vektorski produkt,

$$(i n_1)n_1 + (i n_2)n_2 + (i n_3)n_3 = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ (j n_1) & (j n_2) & (j n_3) \\ (\ell n_1) & (\ell n_2) & (\ell n_3) \end{vmatrix}.$$

Ova vektorska jednačina raspada se, skalarnom multiplikacijom n_1, n_2, n_3 , u tri skalarne pa na taj način, primenjen i na ostale dve od gornjih jednačina, dobivamo:

$$\begin{aligned} (i n_1) &= (j n_2)(\ell n_3) - (j n_3)(\ell n_2) \\ (i n_2) &= (j n_3)(\ell n_1) - (j n_1)(\ell n_3) \\ (i n_3) &= (j n_1)(\ell n_2) - (j n_2)(\ell n_1) \\ (j n_1) &= (\ell n_2)(i n_3) - (\ell n_3)(i n_2) \\ (j n_2) &= (\ell n_3)(i n_1) - (\ell n_1)(i n_3) \\ (j n_3) &= (\ell n_1)(i n_2) - (\ell n_2)(i n_1) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} (\ell n_1) &= (i n_2)(j n_3) - (i n_3)(j n_2) \\ (\ell n_2) &= (i n_3)(j n_1) - (i n_1)(j n_3) \\ (\ell n_3) &= (i n_1)(j n_2) - (i n_2)(j n_1). \end{aligned} \quad (48)$$

množeći jednačinu (41) skalarno, redom, sa n_1, n_2, n_3 , a uzimajući u obzir (42), dobivamo:

$$\begin{aligned} x &= \xi(i n_1) + \eta(j n_1) \\ y &= \xi(i n_2) + \eta(j n_2) \\ z &= \xi(i n_3) + \eta(j n_3). \end{aligned} \quad (49)$$

Stavljajući ovo u (40) dobivamo:

$$\tau = \{\xi(i n_1) + \eta(j n_1)\}n_1 + \{\xi(i n_2) + \eta(j n_2)\}n_2 + \{\xi(i n_3) + \eta(j n_3)\}n_3. \quad (49)$$

Sve veličine u zavijenim zagradama ovog obrasca valja izraziti pomoću eliptičnih elemenata. Za skalarne produkte koji se u njima pojavljuju, to je već učinjeno obrascima (39) iz kojih sleduje da ti skalarni produkti zavise samo od elemenata Ω, i, ω grupe (α) , (38). Ostaje još da izrazimo koordinate ξ i η pomoću eliptičnih elemenata. U §12 pokazano je da su koordinate planete obzirom na koordinatni sistem, pretstavljen slikom 7, ove:

$$x = a \cos u; \quad y = b \sin u = a\sqrt{1-e^2} \sin u.$$

Pomerimo li taj koordinatni sistem, da bi se poklopio sa koordinatnim sistemom $\xi-\eta$, definisanim maločas, paralelno do žiže S , dakle u pravcu ose x za ea , to će koordinate ξ i η biti pretstavljene ovim obrascima:

$$\xi = a(\cos u - e); \quad \eta = a\sqrt{1-e^2} \sin u. \quad (50)$$

Pri tome je ekscentrična anomalija u pretstavljena kao funkcija vremena t Keplerovom jednačinom (62), §12, ili, zbog (37), ovom jednačinom:

$$u - e \sin u = nt + x. \quad (51)$$

Srednje kretanje n dato je jednačinom (63), §12, ili, ako stavimo

$$f(m_0 + m) = K^2, \quad (52)$$

jednačinom

$$n = Ka^{-3/2}. \quad (53)$$

Prednjim obrascima pretstavljene su koordinate ξ i η elementima a, e, x , dakle elementima grupe (β) , (38) čime je sve pripravljeno za izračunavanje Lagranžovih zagrada.

§ 31. Izračunavanje Lagranžovih zagrada eliptičnih elemenata.

Lagranžove zagrade eliptičnih elemenata definisane su obrascima

$$[k, i] = \frac{\partial \tau}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\tau}}{\partial c_i} - \frac{\partial \tau}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \dot{\tau}}{\partial c_k} \quad (54)$$

$$\tau = \{\xi(i n_1) + \eta(j n_1)\}n_1 + \{\xi(i n_2) + \eta(j n_2)\}n_2 + \{\xi(i n_3) + \eta(j n_3)\}n_3, \quad (55)$$

pri čemu su skalarni produkti jediničnih vektora pretstavljani kao funkcije eliptičnih elemenata grupe (α) jednačinama (39), a koordinate ξ i η kao funkcije eliptičnih elemenata grupe (β) jednačinama (50) i (51). Pri obrazovanju izvoda $\partial\tau/\partial c$, da bi on bio stavljen u obrazac (55), od presudnog je značaja da li eliptični element c_k odnosno c_i pripada grupi (α) ili grupi (β). Pripada li taj element grupi (α), što ćemo označiti sa c_x , onda su koordinate ξ i η nezavisne od njega, pa je zato

$$\frac{\partial\tau}{\partial c_k} = \left\{ \xi \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_x} + \eta \frac{\partial(j n_1)}{\partial c_x} \right\} n_1 + \left\{ \xi \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_x} + \eta \frac{\partial(j n_2)}{\partial c_x} \right\} n_2 + \left\{ \xi \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_x} + \eta \frac{\partial(j n_3)}{\partial c_x} \right\} n_3. \quad (56)$$

Pripada li taj element grupi (β), što ćemo označiti sa c_β , onda su skalarni proizvodi jediničnih vektora nezavisni od njega, pa je zato

$$\frac{\partial\tau}{\partial c_\beta} = \left\{ \frac{\partial\xi}{\partial c_\beta}(i n_1) + \frac{\partial\eta}{\partial c_\beta}(j n_1) \right\} n_1 + \left\{ \frac{\partial\xi}{\partial c_\beta}(i n_2) + \frac{\partial\eta}{\partial c_\beta}(j n_2) \right\} n_2 + \left\{ \frac{\partial\xi}{\partial c_\beta}(i n_3) + \frac{\partial\eta}{\partial c_\beta}(j n_3) \right\} n_3. \quad (57)$$

Pri obrazovanju izvoda $\partial\tau/\partial c$ valja imati u vidu da samo koordinate ξ i η zavise od vremena t , pa se zato taj izvod dobiva ako u preduja dva obrasca ξ i η zamenimo sa ξ odnosno sa η .

Imajući prethodno i poznate osobine jediničnih vektora u vidu, dobivamo da će, ako oba eliptična elementa pripadaju grupi (α), njihova Lagranžova zagrada, koju ćemo označiti sa $[k_x, i_x]$, biti pretstavljena obrascem:

$$[k_x, i_x] = (\xi\eta - \eta\xi) \left\{ \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial(j n_1)}{\partial c_i} - \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(j n_1)}{\partial c_k} + \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial(j n_2)}{\partial c_i} - \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(j n_2)}{\partial c_k} \right. \\ \left. - \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial(j n_3)}{\partial c_i} + \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(j n_3)}{\partial c_k} \right\}. \quad (58)$$

Pripada li eliptični element c_k grupi (α), a element c_i grupi (β), onda je njihova Lagranžova zagrada pretstavljena obrascem:

$$[k_x, i_\beta] = \left(\xi \frac{\partial\xi}{\partial c_i} - \xi \frac{\partial\xi}{\partial c_i} \right) \left\{ (i n_1) \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_k} + (i n_2) \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_k} + (i n_3) \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_k} \right\} \\ + \left(\xi \frac{\partial\eta}{\partial c_i} - \eta \frac{\partial\eta}{\partial c_i} \right) \left\{ (j n_1) \frac{\partial(j n_1)}{\partial c_k} + (j n_2) \frac{\partial(j n_2)}{\partial c_k} + (j n_3) \frac{\partial(j n_3)}{\partial c_k} \right\} \\ + \left(\eta \frac{\partial\xi}{\partial c_i} - \eta \frac{\partial\xi}{\partial c_i} \right) \left\{ (i n_1) \frac{\partial(j n_1)}{\partial c_k} + (i n_2) \frac{\partial(j n_2)}{\partial c_k} + (i n_3) \frac{\partial(j n_3)}{\partial c_k} \right\} \\ + \left(\xi \frac{\partial\eta}{\partial c_i} - \xi \frac{\partial\eta}{\partial c_i} \right) \left\{ (j n_1) \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_k} + (j n_2) \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_k} + (j n_3) \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_k} \right\}.$$

Образujemo li izvode jednačina (45) i (46) po c_k , dakle po elementu grupe (α), to dobivamo:

$$(i n_1) \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_k} + (i n_2) \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_k} + (i n_3) \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_k} = 0 \\ (j n_1) \frac{\partial(j n_1)}{\partial c_k} + (j n_2) \frac{\partial(j n_2)}{\partial c_k} + (j n_3) \frac{\partial(j n_3)}{\partial c_k} = 0 \\ (i n_1) \frac{\partial(j n_1)}{\partial c_k} + (i n_2) \frac{\partial(j n_2)}{\partial c_k} + (i n_3) \frac{\partial(j n_3)}{\partial c_k} \\ + (j n_1) \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_k} + (j n_2) \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_k} + (j n_3) \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_k} = 0.$$

Zato dobivamo za Lagranžovu zagradu $[k_x, i_\beta]$ ovaj obrazac:

$$[k_x, i_\beta] = \left(\xi \frac{\partial\eta}{\partial c_i} - \xi \frac{\partial\eta}{\partial c_i} - \eta \frac{\partial\xi}{\partial c_i} + \eta \frac{\partial\xi}{\partial c_i} \right) \cdot \left\{ (i n_1) \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_k} + (j n_2) \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_k} + (j n_3) \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_k} \right\}. \quad (59)$$

Pripadaju li oba eliptična elementa c_k i c_i grupi (β), onda je njihova Lagranžova zagrada pretstavljena obrascem:

$$[k_\beta, i_\beta] = \left(\frac{\partial\xi}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial c_i} - \frac{\partial\xi}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial c_k} \right) \{ (i n_1)^2 + (i n_2)^2 + (i n_3)^2 \} \\ + \left(\frac{\partial\eta}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial c_i} - \frac{\partial\eta}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial c_k} \right) \{ (j n_1)^2 + (j n_2)^2 + (j n_3)^2 \} \\ + \left(\frac{\partial\xi}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial c_i} - \frac{\partial\xi}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial c_k} + \frac{\partial\xi}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial c_k} - \frac{\partial\xi}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial c_i} \right) \cdot \{ (i n_1)^2 (j n_1)^2 + (i n_2)^2 (j n_2)^2 + (i n_3)^2 (j n_3)^2 \},$$

dakle, zbog (45) i (46), obrascem:

$$[k_\beta, i_\beta] = \frac{\partial\xi}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial c_i} - \frac{\partial\xi}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial c_k} + \frac{\partial\eta}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial c_i} - \frac{\partial\eta}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial c_k}. \quad (60)$$

Iz jednačina (50) sleduje:

$$\xi = \frac{d\xi}{dt} = -a \sin u \frac{du}{dt}; \quad \eta = \frac{d\eta}{dt} = a \sqrt{1-e^2} \cos u \frac{du}{dt},$$

a iz jednačine (51)

$$\frac{du}{dt} - e \cos u \frac{du}{dt} = n, \quad \text{t.j.} \quad \frac{du}{dt} = \frac{n}{1-e \cos u}.$$

Zato je

$$\xi = -\frac{na \sin u}{1-e \cos u}; \quad \eta = \frac{na \sqrt{1-e^2} \cos u}{1-e \cos u}. \quad (61)$$

Jednačine (50) i (61) daju:

$$\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{1-e \cos u} [(\cos u - e) \cos u + \sin^2 u],$$

t.j. imajući u vidu (53),

$$\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} = na^2 \sqrt{1-e^2} = K \sqrt{a(1-e^2)}. \quad (62)$$

Pripada li elemenat c_i grupi (β) , kao što je to u obrascu (59) pretpostavljeno, to sleduje iz prethodne jednačine:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} (\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}) = \xi \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial c_i} - \dot{\xi} \frac{\partial \eta}{\partial c_i} - \eta \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial c_i} + \dot{\eta} \frac{\partial \xi}{\partial c_i} = K \frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial c_i}. \quad (63)$$

Stavimo li (62) u (58), a (63) u (59), to dobivamo mesto (58), (59), (60) ova tri obrasca:

$$[k_x, i_x] = na^2 \sqrt{1-e^2} \left\{ \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial(j n_1)}{\partial c_i} - \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(j n_1)}{\partial c_k} + \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial(j n_2)}{\partial c_i} - \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(j n_2)}{\partial c_k} + \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial(j n_3)}{\partial c_i} - \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial(j n_3)}{\partial c_k} \right\} \quad (64)$$

$$[k_x, i_\varphi] = K \frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial c_i} \left\{ (j n_1) \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_k} + (j n_2) \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_k} + (j n_3) \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_k} \right\} \quad (65)$$

$$[k_\varphi, i_\varphi] = \frac{\partial \xi}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial c_i} - \frac{\partial \xi}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial c_k} + \frac{\partial \eta}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial c_i} - \frac{\partial \eta}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial c_k}, \quad (66)$$

definitivno uređena za izračunavanje Lagranžovih zagrada eliptičnih elemenata. Pristupimo sada tom izračunavanju!

Iz (39) sleduje:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(i n_1)}{\partial \Omega} &= -(i n_2), & \frac{\partial(i n_2)}{\partial \Omega} &= (i n_1), & \frac{\partial(i n_3)}{\partial \Omega} &= 0 \\ \frac{\partial(j n_1)}{\partial \Omega} &= -(j n_2), & \frac{\partial(j n_2)}{\partial \Omega} &= (j n_1), & \frac{\partial(j n_3)}{\partial \Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(i n_1)}{\partial \omega} &= (j n_1), & \frac{\partial(i n_2)}{\partial \omega} &= (j n_2), & \frac{\partial(i n_3)}{\partial \omega} &= (j n_3) \\ \frac{\partial(j n_1)}{\partial \omega} &= -(i n_1), & \frac{\partial(j n_2)}{\partial \omega} &= -(i n_2), & \frac{\partial(j n_3)}{\partial \omega} &= -(i n_3) \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(i n_1)}{\partial i} &= (\mathfrak{E} n_1) \sin \omega, & \frac{\partial(i n_2)}{\partial i} &= (\mathfrak{E} n_2) \sin \omega, & \frac{\partial(i n_3)}{\partial i} &= (\mathfrak{E} n_3) \sin \omega \\ \frac{\partial(j n_1)}{\partial i} &= (\mathfrak{E} n_1) \cos \omega, & \frac{\partial(j n_2)}{\partial i} &= (\mathfrak{E} n_2) \cos \omega, & \frac{\partial(j n_3)}{\partial i} &= (\mathfrak{E} n_3) \cos \omega. \end{aligned} \quad (69)$$

Ako je

$$c_k = \Omega; \quad c_i = \omega,$$

onda sleduje iz (64), uzimajući u obzir (67) i (68),

$$[\Omega, \omega] = na^2 \sqrt{1-e^2} \{ (i n_1)(i n_2) + (j n_1)(j n_2) - (i n_1)(i n_2) - (j n_1)(j n_2) \},$$

t.j.

$$[\Omega, \omega] = 0. \quad (70)$$

Ako je

$$c_k = \Omega; \quad c_i = i,$$

onda sleduje iz (64), uzimajući u obzir (67) i (69),

$$\begin{aligned} [\Omega, i] &= na^2 \sqrt{1-e^2} \left\{ -(i n_2)(\mathfrak{E} n_1) \cos \omega + (\mathfrak{E} n_1)(j n_2) \sin \omega \right. \\ &\quad \left. + (i n_1)(\mathfrak{E} n_2) \cos \omega - (\mathfrak{E} n_2)(j n_1) \sin \omega \right\} \\ [\Omega, i] &= na^2 \sqrt{1-e^2} \left\{ [(i n_1)(\mathfrak{E} n_2) - (i n_2)(\mathfrak{E} n_1)] \cos \omega \right. \\ &\quad \left. + [(\mathfrak{E} n_1)(j n_2) - (\mathfrak{E} n_2)(j n_1)] \sin \omega \right\}, \end{aligned}$$

t.j. zbog (47)

$$[\Omega, i] = na^2 \sqrt{1-e^2} \{ -(j n_3) \cos \omega - (i n_3) \sin \omega \}$$

ili zbog (39)

$$[\Omega, i] = -na^2 \sqrt{1-e^2} \{ \cos^2 \omega \sin i + \sin^2 \omega \sin i \},$$

dakle

$$[\Omega, i] = -na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i. \quad (71)$$

Ako je

$$c_k = \omega; \quad c_i = i,$$

onda sleduje, iz (64), uzimajući u obzir (68) i (69),

$$\begin{aligned} [\Omega, i] &= na^2 \sqrt{1-e^2} \left\{ (j n_1)(\mathfrak{E} n_1) \cos \omega + (\mathfrak{E} n_1)(i n_1) \sin \omega + (j n_2)(\mathfrak{E} n_2) \cos \omega \right. \\ &\quad \left. + (\mathfrak{E} n_2)(i n_2) \sin \omega + (j n_3)(\mathfrak{E} n_3) \cos \omega + (\mathfrak{E} n_3)(i n_3) \sin \omega \right\} \\ [\omega, i] &= na^2 \sqrt{1-e^2} \left\{ [(j n_1)(\mathfrak{E} n_1) + (j n_2)(\mathfrak{E} n_2) + (j n_3)(\mathfrak{E} n_3)] \cos \omega \right. \\ &\quad \left. + [(\mathfrak{E} n_1)(i n_1) + (\mathfrak{E} n_2)(i n_2) + (\mathfrak{E} n_3)(i n_3)] \sin \omega \right\}, \end{aligned}$$

t.j. zbog (46)

$$[\omega, i] = 0. \quad (72)$$

Ako je

$$c_k = \Omega; \quad \omega; \quad i, \quad c_i = x,$$

t.j. ako c_k pripada ma kojem elementu grupe (α) , onda treba primeniti obrazac (65), no kako je u njemu, u ovom slučaju,

$$\frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial x} = 0,$$

to je

$$[\Omega, x] = 0 \quad (73)$$

$$[\omega, x] = 0 \quad (74)$$

$$[i, x] = 0. \quad (75)$$

Ako je

$$c_k = \Omega; \quad \omega; \quad i, \quad c_i = a,$$

onda treba primeniti obrazac (65), no kako je u njemu, u ovom slučaju,

$$K \frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial a} = \frac{1}{2} K a^{-1/2} \sqrt{1-e^2},$$

dakle zbog (53)

$$K \frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial a} = \frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2},$$

to obrazac (65) valja zameniti ovim:

$$[k_x, a] = \frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2} \left\{ (j n_1) \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_k} + (j n_2) \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_k} + (j n_3) \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_k} \right\}. \quad (65a)$$

Ako je, dakle,

$$c_k = \Omega; \quad c_i = a,$$

onda obrazac (65a) dobiva, imajući u vidu (67), ovaj oblik:

$$[\Omega, a] = \frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2} \{ -(j n_1)(i n_2) + (j n_2)(i n_1) \},$$

t.j. zbog (47)

$$[\Omega, a] = \frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2} (\xi n_3),$$

dakle zbog (39)

$$[\Omega, a] = \frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2} \cos i. \quad (76)$$

Ako je

$$c_k = \omega; \quad c_i = a,$$

onda obrazac (65a) dobiva, zbog (68), ovaj oblik:

$$[\omega, a] = \frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2} \{ (j n_1)^2 + (j n_2)^2 + (j n_3)^2 \},$$

t.j. zbog (45)

$$[\omega, a] = \frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2}. \quad (77)$$

Ako je

$$c_k = i; \quad c_i = a,$$

onda obrazac (65a) dobiva, zbog (69), ovaj oblik:

$$[i, a] = \frac{1}{2} n a \sqrt{1-e^2} \{ (j n_1)(\xi n_1) + (j n_2)(\xi n_2) + (j n_3)(\xi n_3) \} \sin \omega,$$

t.j. zbog (46)

$$[i, a] = 0. \quad (78)$$

Ako je

$$c_k = \Omega; \quad \omega; \quad i, \quad c_i = e,$$

onda je u obrascu (65), zbog (53),

$$K \frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial e} = -K a^{-1/2} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} = -n a^2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}},$$

pa taj obrazac valja zameniti ovim:

$$[k_x, e] = -n a^2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ (j n_1) \frac{\partial(i n_1)}{\partial c_k} + (j n_2) \frac{\partial(i n_2)}{\partial c_k} + (j n_3) \frac{\partial(i n_3)}{\partial c_k} \right\}. \quad (65b)$$

Uporedimo li ovaj obrazac sa obrascem (65a), to sleduje

$$[k_x, e] = -\frac{2ae}{1-e^2} [k_x, a].$$

Stavljajući ovamo, jedno za drugim, $k_x = \Omega, \omega, i$, to dobivamo, zbog (76), (77) i (78), ove obrasce:

$$[\Omega, e] = -n a^2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i \quad (79)$$

$$[\omega, e] = -n a^2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \quad (80)$$

$$[i, e] = 0. \quad (81)$$

Da pomoću obrasca (66) nađemo Lagranžove zagrade $[a, e]$, $[x, e]$, $[a, x]$ možemo, pošto te zagrade, kao što smo videli, ne zavise od vremena, dati vremenu t jednu određenu vrednost. Ova neka bude vreme prolaza τ kroz perihel, dakle, imajući u vidu (37) i (53),

$$t = \tau = -\frac{x}{n} = -\frac{x}{K} a^{3/2}.$$

Vrednost τ zavisi od elemenata a i x , što valja imati u vidu. Iz Keplerove jednačine (62), §12, sleduje da je

$$t = \tau; \quad u = 0.$$

Zato jednačine (50), (61) i (53) daju:

$$t = \tau; \quad \xi = a(1-e); \quad \eta = 0$$

$$\dot{\xi} = 0; \quad \dot{\eta} = \frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e} = na \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = K a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

Odavde sleduje, pošto se u obrascu za τ ne pojavljuje e ,

$$\frac{\partial \xi}{\partial e} = -a; \quad \frac{\partial \eta}{\partial e} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial e} = 0; \quad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e} = \frac{na}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}.$$

Stavimo li, prema tome, u obrascu (66) $c_i = e$, to on dobiva ovaj oblik:

$$[k_{\xi}, e] = a \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial c_k} \right\}_{t=\tau} + \frac{na}{(1-e)\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial c_k} \right\}_{t=\tau}. \quad (66a)$$

Kako se ostala dva elementa a i x grupe (α) pojavljuju u obrascu za τ , to se za određivanje prednjih izvoda moramo poslužiti obrascima (50) i (61). Iz tih obrazaca sleduje:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial c_k} &= \frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial c_k} = -a \sin u \frac{\partial u}{\partial c_k} \\ \frac{\partial \eta}{\partial c_k} &= \frac{\partial \eta}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial c_k} = a \sqrt{1-e^2} \cos u \frac{\partial u}{\partial c_k} \\ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial c_k} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial c_k} = -na \frac{\cos u - e}{(1-e \cos u)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial c_k} \\ \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial c_k} &= \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial c_k} = na \sqrt{1-e^2} \frac{-\sin u + e \sin 2u}{(1-e \cos u)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial c_k}. \end{aligned}$$

Stavljajući sada $t = \tau$, t.j. $u = 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial c_k} \right\}_{t=\tau} &= 0; & \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial c_k} \right\}_{t=\tau} &= a \sqrt{1-e^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial c_k} \right\}_{t=\tau} \\ \left\{ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial c_k} \right\}_{t=\tau} &= -\frac{na}{1-e} \left\{ \frac{\partial u}{\partial c_k} \right\}_{t=\tau}; & \left\{ \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial c_k} \right\}_{t=\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Ako ovo stavimo u obrazac (66a), dobivamo:

$$[k_{\xi}, e] = 0.$$

Stavimo li u ovaj obrazac za k_{ξ} element a odnosno x , to dobivamo:

$$[a, e] = 0 \quad (82)$$

$$[x, e] = 0. \quad (83)$$

I Lagranžovu zagradu $[a, x]$ možemo naći pomoću obrasca (66) dajući vremenu t vrednost τ .

Iz (51) sleduje:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - e \cos u \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}_{t=\tau} = \frac{1}{1-e},$$

pa jednačina (66) dobiva, uzimajući u obzir gornje obrasce, ovaj oblik:

$$[a, x] = -\frac{na}{(1-e^2)} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial a} \right\}_{t=\tau} - \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e} \left\{ \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial a} \right\}_{t=\tau}. \quad (66b)$$

Iz (50) sleduje:

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = \cos u - e; \quad \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial a} \right\}_{t=\tau} = 1 - e.$$

Iz (61) i (53) sleduje:

$$\dot{\eta} = Ka^{-1/2} \sqrt{1-e^2} \frac{\cos u}{1-e \cos u},$$

t.j.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial a} &= -\frac{1}{2} Ka^{-3/2} \sqrt{1-e^2} \frac{\cos u}{1-e \cos u} = -\frac{n}{2} \sqrt{1-e^2} \frac{\cos u}{1-e \cos u} \\ \left\{ \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial a} \right\}_{t=\tau} &= -\frac{n}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \end{aligned}$$

Stavljajući prednje u obrazac (66b), dobivamo:

$$[a, x] = -\frac{na}{2}. \quad (84)$$

§ 32. Obrasci za vremenske izvode eliptičnih elemenata. Stavimo: $c_1 = a$; $c_2 = e$; $c_3 = x$; $c_4 = \Omega$; $c_5 = i$; $c_6 = \omega$, onda sleduje iz obrazaca (70) do (84) i imajući u vidu da je $[k, k] = 0$, $[k, i] = -[i, k]$,

$$\begin{aligned} [1, 1] &= 0; & [1, 2] &= 0; & [1, 3] &= -\frac{1}{2}na \\ [1, 4] &= -\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2} \cos i; & [1, 5] &= 0; & [1, 6] &= -\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2} \\ [2, 1] &= 0; & [2, 2] &= 0; & [2, 3] &= 0 \\ [2, 4] &= na^2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i; & [2, 5] &= 0; & [2, 6] &= na^2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \\ [3, 1] &= \frac{1}{2}na; & [3, 2] &= 0; & [3, 3] &= 0 \\ [3, 4] &= 0; & [3, 5] &= 0; & [3, 6] &= 0 \\ [4, 1] &= \frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2} \cos i; & [4, 2] &= -na^2 \frac{e \cos i}{\sqrt{1-e^2}}; & [4, 3] &= 0 \\ [4, 4] &= 0; & [4, 5] &= -na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i; & [4, 6] &= 0 \\ [5, 1] &= 0; & [5, 2] &= 0; & [5, 3] &= 0 \\ [5, 4] &= na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i; & [5, 5] &= 0; & [5, 6] &= 0 \\ [6, 1] &= \frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2}; & [6, 2] &= -na^2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}; & [6, 3] &= 0 \\ [6, 4] &= 0; & [6, 5] &= 0; & [6, 6] &= 0. \end{aligned}$$

Zbog toga dobivaju jednačine (20) ovaj oblik:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2}na \frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2} \cos i \frac{d\Omega}{dt} - \frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial a} \\ \frac{nae \cos i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{1}{2}na \frac{da}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2} \cos i \frac{da}{dt} - \frac{na^2e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} - na^2\sqrt{1-e^2} \sin i \frac{di}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ na^2\sqrt{1-e^2} \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2} \frac{da}{dt} - \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \omega} \end{aligned} \right\} (85)$$

Iz ovih jednačina sleduje:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \end{aligned} \right\} (86)$$

Vratimo se opet na uobičajene eliptične elemente, t.j. stavimo, prema (36) i (37), $\omega = \Pi - \Omega$; $x = \varepsilon - \Pi$. U ovim obrascima se sem elemenata ω i x , mesto kojih hoćemo da uvedemo Π i ε , pojavljuje još element Ω . Zbog toga treba provesti ovu transformaciju elemenata: u jednačinama (86) valja grupu elemenata ω , x , Ω zameniti grupom Π , ε , Ω pomoću ovih triju jednačina:

$$\Omega = \Omega; \quad \omega = \Pi - \Omega; \quad x = \varepsilon - \Pi. \quad (87)$$

Odavde sleduje da na levoj strani jednačina (86) treba izvršiti zamenu:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}; \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\Pi}{dt} - \frac{d\Omega}{dt}; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\Pi}{dt}, \quad (88)$$

a na desnoj:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{aligned}$$

Rešimo li jednačine (87) po novim elementima, to dobivamo:

$$\Omega = \Omega; \quad \Pi = \omega + \Omega; \quad \varepsilon = x + \omega + \Omega$$

pa zbog toga:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} &= \frac{\partial R}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \quad (89)$$

Stavljajući (88) i (89) u (86), pa rešavajući taj novi sistem jednačina po vremenskim izvodima novih elemenata, dobivamo sledeće jednačine:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \Pi} - \sqrt{1-e^2} \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \sqrt{1-e^2} \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) \\ \frac{d\Pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \right\} (90)$$

Ovo su glavni obrasci za izračunavanje poremećaja planetskog kretanja.

ГЛАВА ОСМА

**Račun poremećaja kretanja
nebeskih tela**

§ 33. Razvijanje funkcije poremećaja u red. Praktično izračunavanje poremećaja kretanja nebeskih tela svodi se na integrisanje jednačina (90) prošlog paragrafa. Pre no što se pristupi toj integraciji, potrebno je funkciju poremećaja R izraziti pomoću eliptičnih elemenata. To se vrši razvijajući tu funkciju u red. Taj posao, koji je čisto računski stvar, toliko je opsežan da ga je nemoguće ovde izvršiti u svim njegovim pojedinostima. Zbog toga se moramo ograničiti na to da u glavnim crtama opišemo postupak toga računa. Pri tome ćemo, da bismo imali pred sobom konkretan jedan slučaj, uzeti da je uočeno nebesko telo koje podleži poremećaju jedna od planeta čiju ćemo masu označiti sa m . Jednostavnosti radi, uzimamo, za sada, u obzir samo jednu od ostalih planeta koja izaziva poremećaj; njenu masu označićemo sa m' . U takvom slučaju dobiva funkcija poremećaja R , prema (4), §26, ovaj oblik:

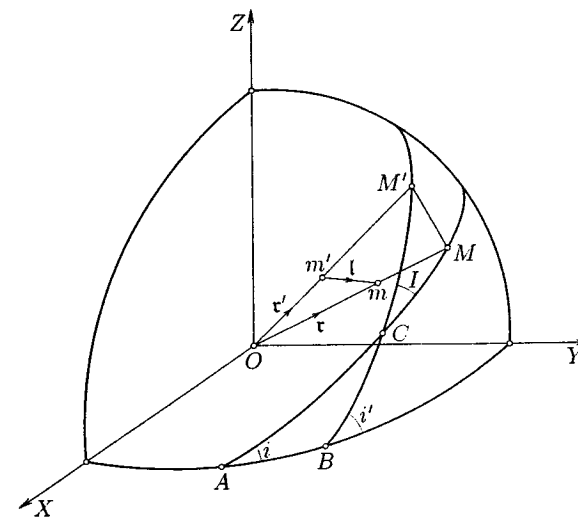
$$R = fm' \left(\frac{1}{\rho} - \frac{(\tau\tau')}{r'^3} \right), \quad (1)$$

gde τ označava vektor položaja mase m prema Suncu, τ' vektor položaja mase m' , a ρ međusobno otstojanje tih dveju masa.

Neka nam u sl. 15 X - Y - Z pretstavlja nepomični koordinatni sistem, definisan u §13, ACM neka pretstavlja projekciju putanje planete m projiciranu na nebesku sferu iz tačke O , a BCM' projekciju putanje planete m' . Trenutni položaji tih dveju planeta neka budu m i m' , a τ i τ' njihovi vektori položaja. Nagibi putanja masa m i m' neka budu označeni sa i odnosno i' . A i B predstavljaju uzlazne čvorove naznačenih dveju putanja. Lučna otstojanja tih dveju tačaka od ose X predstavljaju nam longitude Ω , Ω' tih uzlaznih čvorova. Obe projekcije putanja na nebeskoj sferi seku se u tački C . Sferni ugao ACB označićemo sa I ; on pretstavlja međusobni nagib uočenih dveju planetskih putanja. Označimo lukove AC i BC sa α odnosno sa α' , to sferni trougao ABC ima ove strane a , b , c i ove uglove A , B , C :

$$a = \alpha'; \quad b = \alpha; \quad c = \Omega' - \Omega, \quad A = i; \quad B = 180^\circ - i'; \quad C = I. \quad (2)$$

Sferna trigonometrija daje nam mogućnost da novo uvedene elemente I , α , α' izrazimo pomoću eliptičnih elemenata i , i' , Ω , Ω' .



Слика 15

Označimo vektor položaja mase m prema masi m' sa l , a moduo toga vektora, kao što je napred rečeno, sa ρ , to je:

$$\tau - \tau' = l.$$

Množeći ovu vektorsku jednačinu sa samom sobom, to dobivamo, pošto je $(\tau\tau) = r^2$; $(\tau'\tau') = r'^2$; $(ll) = \rho^2$,

$$r^2 - 2(\tau\tau') + r'^2 = \rho^2. \quad (3)$$

Ugao S što ga vektori τ i τ' međusobno zatvaraju meren je lukom MM' sfernog trougla $MM'C$. Lukovi AM i BM' predstavljaju nam, kao što je u §11 saopšteno, argumente latituda masa m i m' , koje smo lukove označili sa φ i φ' . Zato je u sfernom trouglu MCM' : $\text{arc } MC = \varphi - \alpha$; $\text{arc } M'C = \varphi' - \alpha'$, zbog čega sleduje iz tog trougla, primenom obrasca sferne trigonometrije, saopštenog u §30, ova jednačina:

$$\cos S = \cos(\varphi - \alpha) \cos(\varphi' - \alpha') + \sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi' - \alpha') \cos I.$$

Kako je:

$$\sin^2 \frac{I}{2} = \frac{1 - \cos I}{2}; \quad \cos I = 1 - 2 \sin^2 \frac{I}{2},$$

to dobivamo:

$$\cos S = \cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha) - 2 \sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi' - \alpha') \sin^2 \frac{I}{2}. \quad (4)$$

Pošto je, prema definiciji skalarnog produkta dvaju vektora,

$$(\tau\tau') = rr' \cos S, \quad (5)$$

to dobivamo iz (3) i (5):

$$\frac{1}{\rho} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S)^{-1/2},$$

t.j. zbog (4)

$$\frac{1}{\rho} = \left\{ r^2 + r'^2 - 2rr' \left[\cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha) - 2 \sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi' - \alpha') \sin^2 \frac{I}{2} \right] \right\}^{-1/2},$$

ili

$$\frac{1}{\rho} = \left\{ [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)] \cdot \left[1 + \frac{4rr' \sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi' - \alpha') \sin^2 \frac{I}{2}}{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)} \right] \right\}^{-1/2} \quad (6)$$

Sem toga je, zbog (5) i (4),

$$\frac{(r r')}{r'^3} = \frac{r}{r'^2} \left[\cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha) - 2 \sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi' - \alpha') \sin^2 \frac{I}{2} \right]. \quad (7)$$

Stavljajući (6) i (7) u (1), dobivamo:

$$R = f m' \left\{ [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)]^{-1/2} \cdot \left[1 + \frac{4rr' \sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi' - \alpha') \sin^2 \frac{I}{2}}{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)} \right]^{-1/2} - \frac{r}{r'^2} \left[\cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha) - 2 \sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi' - \alpha') \sin^2 \frac{I}{2} \right] \right\}. \quad (8)$$

Razlomak koji se pojavljuje u prednjem obrascu ima, pošto je I nezavisno od r i r' , ovu maksimalnu vrednost:

$$\frac{4rr'}{r^2 + r'^2} \sin^2 \frac{I}{2}.$$

Ravni planetskih putanja imaju, kao što je poznato, veoma male međusobne nagibe, zbog čega je numerička vrednost gornjeg izraza uvek daleko manja od jedinice. Zbog toga se drugi faktor prvog člana zavijene zgrade obrasca (8) može po binomskom obrascu razviti u apsolutno konvergentan red. Učinimo li to, onda dobivamo mesto (8)

$$R = f m' \left\{ [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)]^{-1/2} - 2rr' \sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi' - \alpha') \sin^2 \frac{I}{2} [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)]^{-3/2} + 6r^2 r'^2 \sin^2(\varphi - \alpha) \sin^2(\varphi' - \alpha') \sin^4 \frac{I}{2} [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)]^{-5/2} - \dots + - \frac{r}{r'^2} \cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha) + 2 \frac{r}{r'^2} \sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi' - \alpha') \sin^2 \frac{I}{2} \right\}. \quad (9)$$

Ovim obrascem razvijena je funkcija poremećaja u red po rastućim potencijama od $\sin^2 \frac{I}{2}$.

Radiusvektori r i r' menjaju se, zbog skoro kružnog oblika planetskih putanja, između uskih granica. Zbog toga možemo staviti:

$$r = a(1 + x); \quad r' = a'(1 + x'). \quad (10)$$

gde a i a' označavaju velike poluose putanja masa m i m' , a gde su x i x' promenljive, no prema jedinici veoma male veličine.

Funkcija poremećaja R homogena je funkcija od r i r'

$$R = F(r, r'), \quad (11)$$

a stepena -1 , t.j. te osobine da ako u njoj zamenimo r i r' sa kr i kr' , onda je, kao što to sleduje iz obrasca (8),

$$F(kr, kr') = \frac{1}{k} F(r, r'). \quad (12)$$

Zamenimo li, dakle, u (8) r i r' sa izrazima (10) ili, što izlazi na isto, sa izrazima

$$r = a(1 + x') \frac{1 + x}{1 + x'} = a(1 + x') \left(1 + \frac{x - x'}{1 + x'} \right); \quad r' = a'(1 + x'),$$

onda možemo, prema obrascu (12), zajednički faktor $(1 + x)$, izvaditi pred znak funkcije, podižući ga na potenciju -1 . Na taj način dobivamo:

$$R = \frac{1}{1 + x'} F \left\{ \left(a + a \frac{x - x'}{1 + x'} \right), a' \right\}. \quad (13)$$

Razvijemo li ovaj izraz obzirom na a u Tejlorov red, to dobivamo:

$$R = \frac{1}{1 + x'} \left\{ F(a, a') + \frac{x - x'}{1 + x'} \cdot \frac{a}{1!} \frac{\partial F(a, a')}{\partial a} + \left(\frac{x - x'}{1 + x'} \right)^2 \cdot \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 F(a, a')}{\partial a^2} + \dots \right\}. \quad (14)$$

Koeficijenti $((x - x')/(1 + x'))^n$; $n = 1, 2, 3, \dots$ ovoga reda mogu se razviti po potencijama od x i x' . Iz (10) i (64), §12, sleduje

$$x = -e \cos u; \quad x' = -e' \cos u',$$

gde e i e' označavaju ekscentricitete putanja masa m i m' , a u i u' njihove ekscentrične anomalije. Zato se ti koeficijenti mogu razviti po potencijama od $e \cos u$ i $e' \cos u'$.

Izvrše li se sva ta razvijanja, to će funkcija R biti predstavljena beskonačnim zbirom različitih trigonometrijskih funkcija $\Phi_i(\varphi, \varphi', \alpha, \alpha', u, u')$ elemenata $\varphi, \varphi', \alpha, \alpha', u, u'$, pomnoženih koeficijentima $C_i(a, a', e, e', I)$ koji su funkcije elemenata $a, a', e, e', \sin^2 \frac{I}{2}$. Zato će R imati ovaj oblik:

$$R = \sum_i C_i(a, a', e, e', I) \Phi_i(\varphi, \varphi', \alpha, \alpha', u, u'). \quad (15)$$

Upotrebom jednačina (62), (67) do (72) glave druge i obrazaca sferne trigonometrije koji se odnose na sferni trougao (2), mogu se trigonometrijski članovi od

(15) razviti u Furijeove redove gde će se, u argumentima trigonometrijskih funkcija, pojaviti zbrovi mnogostrukih od e , e' , Π , Π' , Ω , Ω' . Obrazac (8) svedoči da funkcija R ne menja svoj znak ako se promeni znak argumenta trigonometrijskih funkcija, pa će se zbog toga u spomenutim Furijeovim redovima pojaviti samo kosinusi, a ne sinusi. Opšti član toga reda imaće, dakle, ako srednje longitude l i l' primenom obrazaca (71), (72), §13, zamenimo sa

$$l = \varepsilon + nt; \quad l' = \varepsilon' + n't, \quad (16)$$

ovaj argumenat

$$D = j(nt + \varepsilon) + j'(n't + \varepsilon') + k\Pi + k'\Pi' + s\Omega + s'\Omega', \quad (17)$$

gde su j , j' , k , k' , s , s' proizvoljni celi brojevi, pozitivni, negativni ili jednaki nuli. Zato funkcija R ima, ako se uzme u obzir samo jedno telo m' koje izaziva poremećaj, ovaj oblik:

$$R = fm' \sum C \cos D, \quad (18)$$

pri čemu je, pošto se $\sin^2 \frac{l}{2}$ može izraziti kao funkcija od i , i' ,

$$C = F(a, a', e, e', i, i'). \quad (19)$$

Ima li sem mase m' , koja izaziva poremećaj, njih više m' , m'' , m''' , onda se sve te mase imaju mesto m' redom uzeti u obzir. Koeficienti C opadaju brzo sa rastućim apsolutnim vrednostima celih brojeva j , j' , k , k' , s , s' .

§ 34. Integrisanje diferencijalnih jednačina poremećaja. Obrasci (17) i (18) i (90), §32, sve je pripremljeno za izračunavanje vremenskih promena eliptičnih elemenata. One se dobivaju integrisanjem diferencijalnih jednačina (90), §32. Ta se integracija može izvršiti samo korak po korak, izračunavajući poremećaje prvog, drugog, trećeg i t.d. reda. Poremećaji prvog reda eliptičnih elemenata, koje ćemo označiti sa $\delta_1 a_0$, $\delta_1 \Omega_0$, $\delta_1 e_0, \dots$, dobivaju se na taj način da se svi eliptični elementi koji se nalaze, bilo eksplicitno, bilo posredstvom funkcije R , na desnoj strani jednačina (90), smatraju konstantnima pa zato naznače indeksom nula. Tim ćemo indeksom označiti i njihovu funkciju R u kojoj je sada samo t promenljivo. Na taj način dobivamo, mesto (90), šest odgovarajućih jednačina. Da rastumačimo princip i glavne rezultate toga računa, dovoljno je da napišemo dve od tih jednačina i to, kao najpreglednije, prvu i četvrtu. One imaju oblik:

$$\frac{d\delta_1 a_0}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0} \quad (20)$$

$$\frac{d\delta_1 \Omega_0}{dt} = \frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial i_0} \quad (21)$$

Pri tome je, prema (18) i (17), ako, jednostavnosti radi, uzmemo u obzir samo masu m' koja izaziva poremećaj,

$$R_0 = fm' \sum C_0 \cos D_0 \quad (22)$$

$$C_0 = F(a_0, a'_0, e_0, e'_0, i_0, i'_0) \quad (23)$$

$$D_0 = j(n_0 t + \varepsilon_0) + j'(n_0' t + \varepsilon'_0) + k\Pi_0 + k'\Pi'_0 + s\Omega_0 + s'\Omega'_0. \quad (24)$$

Integracija gornjih dveju jednačina, a i onih koje nismo napisali, svodi se na kvadrature i to, u stvari, na jednu jedinu $\int R_0 dt$, jer ostale zavise od ove, pošto je:

$$\int \frac{\partial R_0}{\partial c_i} dt = \frac{\partial}{\partial c_i} \int R_0 dt.$$

Iz (22) do (24) sleduje:

$$\frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0} = -fm' \sum jC_0 \sin D_0$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial i_0} = fm' \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \cos D_0.$$

Stavljajući ovo u (20) i (21), dobivamo integracijom:

$$\delta_1 a_0 = -\frac{2fm'}{n_0 a_0} \sum jC_0 \int \sin D_0 dt \quad (25)$$

$$\delta_1 \Omega_0 = \frac{fm'}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \int \cos D_0 dt. \quad (26)$$

I ostale četiri jednačine, koje nismo napisali, vode na iste kvadrature.

Iz (24) sleduje:

$$\int \sin D_0 dt = -\frac{\cos D_0}{jn_0 + j'n'_0} \quad (27)$$

$$\int \cos D_0 dt = \frac{\sin D_0}{jn_0 + j'n'_0}.$$

Ovde nismo stavili na desnoj strani integracione konstante, jer će se one stopiti sa članovima nultoga reda rezultujućih integrala, o kojima će odmah biti reč.

Stavljajući (27) u (25) i (26), dobivamo:

$$\delta_1 a_0 = \frac{2fm'}{n_0 a_0} \sum \frac{jC_0 \cos D_0}{jn_0 + j'n'_0} \quad (28)$$

$$\delta_1 \Omega_0 = \frac{fm'}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \sum \frac{\frac{\partial C_0}{\partial i_0} \sin D_0}{jn_0 + j'n'_0}. \quad (29)$$

U našim članovima funkcije poremećaja za koje je

$$j = j' = 0 \quad (30)$$

ne mogu se primeniti obrasci (27), ali je u takvim članovima, prema (24), D_0 konstantno, pa je zato:

$$\int \sin D_0 dt = t \sin D_0 \quad (31)$$

$$\int \cos D_0 dt = t \cos D_0.$$

U takvom slučaju sleduje iz (25), (26), (30), (31), imajući u vidu (30),

$$\delta_1 a_0 = 0 \quad (32)$$

$$\delta_1 \Omega_0 = \frac{fm't}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \cos D_0. \quad (33)$$

Izračunavanje poremećaja drugog reda svodi se, u glavnom, na ponavljanje prednjeg postupka, pri čemu se u obrascu (90), §32, stavljaju desno za eliptične elemente njihove vrednosti pretstavljene gornjim obrascima. Ti će poremećaji biti proporcionalni kvadratima m'^2 masa m' koje izazivaju poremećaj. Na sličan način dobivaju se poremećaji višega reda, pa će konačni obrasci za poremećaje bilo kojeg eliptičnog elementa imati ovaj oblik:

$$c = c_0 + \delta_1 c_0 + \delta_2 c_0 + \dots \quad (34)$$

Pri tome je, obzirom na masu m' koja izaziva poremećaj, c_0 nultoga reda, pa se izračunava iz inicijalnih uslova; član $\delta_1 c_0$ je prvog, član $\delta_2 c_0$ drugog reda i t.d. Uzimajući u obrascu (2), §28, masu m_0 glavnoga tela, t.j. u našem slučaju Sunca, za jedinicu, biće mase m' , m'' , m''' svih planeta redom veoma mali brojevi. Zbog toga opadaju članovi reda (34) toliko brzo da će samo u izuzetnim slučajevima biti potrebno uzeti u obzir poremećaje trećeg reda. Ta konvergencija reda (34) bila je uslov za njegovo razvijanje.

§ 35. Klasifikacija poremećaja. Pored klasifikacije poremećaja u one prvog, drugog, trećeg i t.d. reda, kao što je to učinjeno u prošlom paragrafu, mogu se ti poremećaji klasifikovati i na drugi način. Funkcija poremećaja, pretstavljena obrascima (22), (23), (24) periodična je funkcija vremena. U trigonometrijskim članovima te funkcije, zavisnim od vremena, pojavljuje se vreme t u obliku

$$(jn_0 + j'n'_0)t$$

u argumentima kosinusa. Zato je svaki taj član periodična funkcija vremena sa periodom T za koju važi jednačina:

$$\frac{2\pi}{T} = jn_0 + j'n'_0.$$

Oдавде sledeje:

$$T = \frac{2\pi}{jn_0 + j'n'_0}. \quad (35)$$

Istu periodu imaju trigonometrijski članovi izraza (28) i (29). Zato odgovara svakom članu $C_0 \cos R_0$ funkcije poremećaja sličan član u izrazu za vremenske promene eliptičnog elementa, a iste periode. Takvi se članovi zovu *periodični članovi* ili *periodičke nejednakosti*, kao što ih obično u Astronomiji nazivaju. Perioda tih nejednakosti je, prema obrascu (35), u toliko duža, u koliko je imenitelj $(jn_0 + j'n'_0)$ manji. Kako j i j' pretstavljaju cele brojeve, pozitivne i negativne, to bi taj imenitelj, sem slučaja $j = j' = 0$ o kojem ćemo zasebno govoriti, mogao postati jednak nuli kad bi bilo

$$jn_0 + j'n'_0 = 0; \quad \frac{n_0}{n'_0} = -\frac{j'}{j},$$

t.j. kada bi srednja kretanja uočene planete koja podleži poremećaju i one koja ga izaziva bila strogo komenzurabilna. Taj idealni slučaj nije ostvaren u kretanju pla-

meta, ali mu se srednja kretanja Jupitera i Saturna osetno približuju. Za Jupiter odnosno Saturn je, prema tablici koja će biti saopštena u idućoj glavi,

$$n_0 = 299''13; \quad n'_0 = 120''45$$

tako da je, mal te ne,

$$2n_0 = 5n'_0.$$

Zbog toga članovi funkcije poremećaja za koje je

$$j = 2; \quad j' = -5$$

izazivaju poremećaje nazvane nejednakostima dugih perioda. Kako je u navedenom primeru, dovoljno tačno, $5n'_0 - 2n_0 = \frac{1}{74}n_0$, to je perioda te nejednakosti 74 puta veća od vremena obilaženja Jupitera oko Sunca, pa ima dužinu od skoro 900 godina.

Te nejednakosti dugih perioda značajne su zbog toga što se mali broj $(jn_0 + j'n'_0)$ pojavljuje na desnoj strani obrasca (28), (29) u imenitelju, usled čega se ti poremećaji, pored svega toga što su C_0 i njegovi izvodi mali, izdvajaju svojom relativnom veličinom.

Sem periodičnih članova, pojavili su se u prednjim obrascima za poremećaje prvog reda, a pojavljuju se, prirodno, i u onima obrascima koji nisu napisani, članovi koji sadrže faktor t . Na takav jedan član nailazimo u obrascu (33). Ti se članovi, kao što smo videli, pojavljuju kada se stavi $j = j' = 0$. U poremećajima drugog reda pojaviće se, integrisanjem poremećaja prvog reda, faktor t^2 , u onima trećeg reda faktor t^3 i t.d. Takvi članovi zovu se *sekularni poremećaji* ili *sekularne nejednakosti*. *

Od velikog je značaja da je, prema (32), $\delta_1 a_0 = 0$, što znači da, dogod uzimamo u obzir samo članove sa prvim stepenima masa, velike poluose planetских putanja ne podleže sekularnim poremećajima. U tom rezultatu, do kojeg su došli, nezavisno jedan od drugog, Laplas i Lagranž, sadržan je Laplasov dokaz stabiliteta našeg planetског sistema, jer sekularna invarijabilnost velikih poluosa planetских putanja osigurava planete od međusobnog sudara. Kasnije su Poason, Tiseran i Matije dokazali da velike poluose planetских putanja ne podleže ni sekularnim poremećajima drugog reda.

§ 36. Oscilatorni karakter sekularnih poremećaja; obrasci za njihovo izračunavanje. U obrascima za poremećaje eliptičnih elemenata pojavili su se, kao što smo videli, sekularni članovi oblika:

$$c_1 m' t + c_2 m'^2 t^2 + c_3 m'^3 t^3 + \dots$$

gde m' označava masu koja izaziva poremećaj, a c stalne ili periodičke koeficiente. Zbog toga što faktori m' , m'^2 , m'^3 ... opadaju veoma naglo, moguće je te poremećaje izračunati pomoću gornjih obrazaca sa dovoljnom tačnošću za dug niz godina. Tim su zadovoljene, u punoj meri, potrebe praktične astronomije, ali ne potrebe geofizike, u kojoj je Nebeska Mehanika našla, u poslednje doba, široku i plodnu primenu u ispitivanju klimatskih promena Zemljine prošlosti. Jer ako u prednji obrazac stavimo za vreme t veliku numeričku vrednost, kako je zahteva Istorija Zemlje, onda bi članovi toga obrasca prekoračili one granice do kojih ti obrasci važe. No ti članovi dobili su svoj oblik samo usled načina njihovog izračunavanja, slično kao što se razvijanjem trigonometrijskih funkcija u red dobiva n. pr. za $f(t) = \sin kt$

$$f(t) = kt - \frac{1}{6}k^3t^3 + \dots,$$

dakle red iz kojega se, bez poznavanja njegovog postanka ne bi mogao očitati njegov oscilatorni karakter.

Da sekularne poremećaje pretstavimo u eksplicitno oscilatornom obliku, t.j. pomoću trigonometrijskih funkcija vremena, potrebno je vratiti se diferencijalnim jednačinama (90), §32.

Uvedimo, mesto e i Π , dva druga elementa h i l , definisana ovim dvema jednačinama:

$$\begin{aligned} h &= e \sin \Pi \\ l &= e \cos \Pi, \end{aligned} \quad (36)$$

gde l ne znači, kao do sada, srednju longitudu, onda je:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sin \Pi \frac{de}{dt} + e \cos \Pi \frac{d\Pi}{dt} \\ \frac{dl}{dt} &= \cos \Pi \frac{de}{dt} - e \sin \Pi \frac{d\Pi}{dt}. \end{aligned} \quad (37)$$

Iz prednje transformacije promenljivih sleduje:

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\partial R}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial e}; \quad \frac{\partial R}{\partial \Pi} = \frac{\partial R}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial \Pi},$$

t.j. zbog (36)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial e} &= \sin \Pi \frac{\partial R}{\partial h} + \cos \Pi \frac{\partial R}{\partial l} \\ \frac{\partial R}{\partial \Pi} &= e \cos \Pi \frac{\partial R}{\partial h} - e \sin \Pi \frac{\partial R}{\partial l}. \end{aligned} \quad (38)$$

Stavimo li u jednačine (37) obrasce za de/dt i $d\Pi/dt$ iz (90), §32, to dobivamo, mesto prve od tih dveju jednačina,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \sin \Pi \frac{\partial R}{\partial \Pi} - \sqrt{1-e^2} \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \sin \Pi \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \\ &\quad + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} e \cos \Pi \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} e \cos \Pi \frac{\partial R}{\partial \epsilon}, \end{aligned}$$

t.j. uzimajući u obzir (36),

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{l \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} - \sqrt{1-e^2} \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e^2} h \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \\ &\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \left\{ e \cos \Pi \frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \sin \Pi \frac{\partial R}{\partial \Pi} \right\}. \end{aligned}$$

Iz (36) sleduje:

$$h^2 + l^2 = e^2$$

$$\sqrt{1-e^2} = \sqrt{1-h^2-l^2}$$

$$\sqrt{1-e^2} \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e^2} = \frac{\sqrt{1-e^2}\{1-(1-e^2)\}}{na^2e^2\{1+\sqrt{1-e^2}\}} = \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}} \cdot \frac{1}{na^2},$$

a iz (38)

$$e \cos \Pi \frac{\partial R}{\partial e} - \sin \Pi \frac{\partial R}{\partial \Pi} = e \frac{\partial R}{\partial l},$$

pa zato dobivamo, upotrebljujući isti postupak i za drugu od jednačina (37), ove dve jednačine:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2} \\ &\quad \cdot \frac{h}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{l \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-h^2-l^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2} \\ &\quad \cdot \frac{l}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-h^2-l^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Uvedimo, mesto i i Ω , dva druga elementa p i q , definisana ovim dvema jednačinama:

$$\begin{aligned} p &= \operatorname{tg} i \sin \Omega \\ q &= \operatorname{tg} i \cos \Omega, \end{aligned} \quad (40)$$

onda je

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \operatorname{tg} i \cos \Omega \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sin \Omega}{\cos^2 i} \cdot \frac{di}{dt} \\ \frac{dq}{dt} &= -\operatorname{tg} i \sin \Omega \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\cos \Omega}{\cos^2 i} \cdot \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (41)$$

Iz prednje transformacije promenljivih sleduje:

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial R}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \Omega}; \quad \frac{\partial R}{\partial i} = \frac{\partial R}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial i},$$

t.j. zbog (40)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \operatorname{tg} i \cos \Omega \frac{\partial R}{\partial p} - \operatorname{tg} i \sin \Omega \frac{\partial R}{\partial q} \\ \frac{\partial R}{\partial i} &= \frac{\sin \Omega}{\cos^2 i} \cdot \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{\cos \Omega}{\cos^2 i} \cdot \frac{\partial R}{\partial q}. \end{aligned} \quad (42)$$

Stavimo u jednačine (41) obrasce za $d\Omega/dt$ i di/dt iz (90), §32, to dobivamo, mesto prve od tih dveju jednačina,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\cos \Omega}{\cos i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\sin \Omega}{\sin i \cos^2 i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega}{\cos^2 i} \left(\frac{\partial R}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right),$$

t.j. uzimajući u obzir (40),

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \cos^3 i} \left\{ \cos \Omega \cos^2 i \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{\sin \Omega}{\operatorname{tg} i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\} - \frac{p}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i \cos i} \left(\frac{\partial R}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right).$$

Iz (42) sleduje

$$\begin{aligned} \cos \Omega \cos^2 i \frac{\partial R}{\partial i} &= \sin \Omega \cos \Omega \frac{\partial R}{\partial p} + \cos^2 \Omega \frac{\partial R}{\partial q} \\ \frac{\sin \Omega}{\operatorname{tg} i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \sin \Omega \cos \Omega \frac{\partial R}{\partial p} - \sin^2 \Omega \frac{\partial R}{\partial q}, \end{aligned}$$

t.j.

$$\cos \Omega \cos^2 i \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{\sin \Omega}{\operatorname{tg} i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial R}{\partial q}.$$

Kako je

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{\sin i \cos i} = \frac{\frac{\sin \frac{i}{2}}{\cos \frac{i}{2}}}{2 \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i}{2} \cos i} = \frac{1}{2 \cos i \cos^2 \frac{i}{2}}$$

to dobivamo, upotrebljujući isti postupak i za drugu od jednačina (41), ove dve jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \cos^3 i} \cdot \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p}{2na^2\sqrt{1-e^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right) \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \cos^3 i} \cdot \frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q}{2na^2\sqrt{1-e^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Pristupimo sada, primenom prednjih jednačina, izračunavanju sekularnih promena elemenata e , Π , i , Ω . U takvom računu valja, kao što smo već kazali u §35, staviti $j = j' = 0$ ili, što izlazi na isto, zadržati od funkcije R samo njen sekularni deo koji ćemo označiti sa R_0 , a iz kojega su izbačeni svi članovi koji zavise od ϵ . Zbog toga je

$$\frac{\partial R_0}{\partial \epsilon} = 0.$$

Zbog toga dobivamo iz prve od jednačina (90), §32, da je

$$da = 0,$$

t.j. da velike poluose planetских putanja ne podleže sekularnim promenama, rezultat do kojega smo došli već u §34.

Ekscentriciteti e putanja velikih planeta su veoma mali, a isto tako i međusobni nagibi ravnih planetских putanja. Zato je, izborom koordinatnog sistema $X-Y-Z$, moguće postići da nagibi planetских putanja prema ravni $X-Y$ budu veoma male. Zanemarujući sve više potencije od druge ekscentriciteta e i nagiba i u sekularnom delu R_0 funkcije poremećaja, redukuju se jednačine (39) i (43) na ove:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial e}; \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial h} \quad (44)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial q}; \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial p}. \quad (45)$$

Do ovih jednačina dolazimo, bez poznavanja strukture funkcije R_0 , približnim putem, ako u jednačinama (39) i (43) stavimo, na desnoj njihovoj strani, $e^2 = 0$; $i = 0$ t.j. $\cos i = 1$; $\operatorname{tg} \frac{i}{2} = 0$; $p = q = 0$.

Razvijajući, po postupku opisanom u §33, funkciju poremećaja u red, nalazi se da se izvodi sekularnog njenog dela po elementima h , l , p , q mogu pretstaviti na ovaj način. Uzimajući, još uvek, u obzir samo jednu masu m koja podleži poremećaju i jednu masu m' koja ga izaziva, a označavajući sa a i a' velike poluose njihovih putanja, koje, kao što smo čuli, ne podleže sekularnim poremećajima, a stavljujući:

$$\left. \begin{aligned} \{a, a'\} &= a' \left[a + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{a^2}{a'^2} + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{a^4}{a'^4} + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{a^6}{a'^6} + \dots \right] \\ \{a, a'\}' &= -a' \left[\frac{a}{a'} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{a^3}{a'^3} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{a^5}{a'^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{a^7}{a'^7} - \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$(a, a') = -\frac{3m'a^2 a'n \{a, a'\}'}{4(a'^2 - a^2)^2} \quad (47)$$

$$[a, a'] = -\frac{3m'an [aa'\{a, a'\} + (a^2 + a'^2)\{a, a'\}']}{2(a'^2 - a^2)^2},$$

dobivamo:

$$\frac{1}{na^2} \frac{\partial R_0}{\partial l} = (a, a')l - [a, a']l'; \quad -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R_0}{\partial h} = -(a, a')h + [a, a']h' \quad (48)$$

$$\frac{1}{na^2} \frac{\partial R_0}{\partial q} = -(a, a')q + (a, a')q'; \quad -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R_0}{\partial p} = (a, a')p - (a, a')p', \quad (49)$$

где се h' , l' , p' , q' odnose na planetu koja izaziva poremećaj. Stavljajući ove obrasce u (44) i (45), dobivamo ove diferencijalne jednačine:

$$\frac{dh}{dt} = (a, a')l - [a, a']l'; \quad \frac{dl}{dt} = -(a, a')h + [a, a']h' \quad (50)$$

$$\frac{dp}{dt} = -(a, a')q + (a, a')q'; \quad \frac{dq}{dt} = (a, a')p - (a, a')p'. \quad (51)$$

Ove jednačine predstavljaju poremećaje što ih masa m' izaziva na kretanju mase m . Poremećaji što ih masa m izaziva na kretanju mase m' dati su ovim jednačinama:

$$\frac{dh'}{dt} = (a', a)l' - [a', a]l; \quad \frac{dl'}{dt} = -(a', a)h' + [a', a]h \quad (50a)$$

$$\frac{dp'}{dt} = -(a', a)q' + (a', a)q; \quad \frac{dq'}{dt} = (a', a)p' - (a', a)p. \quad (51a)$$

Jednačine (50) i (50a) čine sistem od četiri diferencijalne jednačine za određbu elemenata h , l , h' , l' kao funkcija vremena t . Izrazi

$$h = N \sin(gt + \beta); \quad l = N \cos(gt + \beta) \quad (52)$$

$$h' = N' \sin(gt + \beta); \quad l' = N' \cos(gt + \beta), \quad (52a)$$

где су N , N' , g , β konstante, zadovoljavaju gornji sistem ako je, kao što to dobivamo stavljajući (52) i (52a) u (50) i (50a),

$$\begin{aligned} \{(a, a') - g\}N - [a, a']N' &= 0 \\ -[a', a]N + \{(a', a) - g\}N' &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Ove dve algebarske jednačine su linearne i homogene obzirom na N i N' pa će, sem trivijalnog rešenja $N = N' = 0$, dati i druga ako je determinanta koeficijenata od N i N' jednaka nuli, t.j. ako je

$$\begin{vmatrix} \{(a, a') - g\} & -[a, a'] \\ -[a', a] & \{(a', a) - g\} \end{vmatrix} = 0 \quad (54)$$

ili

$$\{g - (a, a')\} \{g - (a', a)\} - [a, a'] [a', a] = 0$$

t.j.

$$g^2 - \{(a, a') + (a', a)\}g = [a, a'] [a', a] - (a, a')(a', a). \quad (55)$$

Ova kvadratna jednačina daje, što sleduje iz osobina zagrada (46) i (47), dva realna korena koja ćemo označiti sa g_1 i g_2 . Sistem homogenih jednačina (53) daje nam, kao što je poznato, samo srazmere nepoznatih, koje se odnose kao subdeterminante članova prve ili druge vrste determinante (54). Zato je

$$\frac{N'}{N} = \frac{(a, a') - g}{[a, a']} = \frac{[a', a]}{(a', a) - g}. \quad (56)$$

Kako smo za g dobili dva razna korena, to ćemo i za ovu srazmeru dobiti dve numeričke vrednosti:

$$\frac{N'_1}{N_1} = k_1; \quad \frac{N'_2}{N_2} = k_2. \quad (57)$$

Zato dobivamo dva razna rešenja oblika (52) i (52a) koja će, sabrana, zadovoljiti sistem diferencijalnih jednačina (50) i (50a) i, sadržavajući četiri, još neodređene konstante, predstavljati opšte integrale toga sistema. Ti su integrali, dakle, ovi:

$$\begin{aligned} h &= N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin(g_2 t + \beta_2) \\ l &= N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + N_2 \cos(g_2 t + \beta_2) \\ h' &= k_1 N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + k_2 N_2 \sin(g_2 t + \beta_2) \\ l' &= k_1 N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + k_2 N_2 \cos(g_2 t + \beta_2). \end{aligned} \quad (58)$$

Konstante g_1 , g_2 , k_1 , k_2 određene su jednačinama (55), (56), (57), a još neodređene konstante N_1 , N_2 , β_1 , β_2 , inicijalnim uslovima. Zaista, ako je za $t = 0$; $e = e_0$, $\Pi = \Pi_0$, $e' = e'_0$, $\Pi' = \Pi'_0$, onda su, tim podacima, a upotrebom jednačina (36), određene i numeričke vrednosti novih elemenata h_0 , l_0 , h'_0 , l'_0 za inicijalni momenat. Zato dobivamo, stavljajući $t = 0$ u (58), ove četiri uslovne jednačine:

$$\begin{aligned} h_0 &= N_1 \sin \beta_1 + N_2 \sin \beta_2 \\ l_0 &= N_1 \cos \beta_1 + N_2 \cos \beta_2 \\ h'_0 &= k_1 N_1 \sin \beta_1 + k_2 N_2 \sin \beta_2 \\ l'_0 &= k_1 N_1 \cos \beta_1 + k_2 N_2 \cos \beta_2 \end{aligned} \quad (59)$$

kojima su konstante N_1 , N_2 , β_1 , β_2 jednoznačno određene.

Na isti način valja postupiti i pri rešavanju sistema diferencijalnih jednačina (51) i (51a).

Ako imamo n planeta m_1, m_2, \dots, m_n koje međusobno poremećavaju svoja kretanja, onda dobivaju diferencijalne jednačine (50) i (51) ovaj oblik:

$$\begin{aligned} \frac{dh_k}{dt} &= l_k \sum_i (a_k, a_i) - \sum_i [a_k, a_i] l_i \\ \frac{dl_k}{dt} &= -h_k \sum_i (a_k, a_i) + \sum_i [a_k, a_i] h_i \\ \frac{dp_k}{dt} &= -q_k \sum_i (a_k, a_i) + \sum_i (a_k, a_i) q_i \\ \frac{dq_k}{dt} &= p_k \sum_i (a_k, a_i) - \sum_i (a_k, a_i) p_i. \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq k \quad (60)$$

Ovakvih jednačina imamo $4n$, pri tome mora u zagradama desne strane, kao što je naznačeno, i biti različito od k . Na isti način kao i u slučaju dveju planeta, dobivamo, za ovaj opšti slučaj, ove opšte integrale gornjih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} h_k &= \sum_{i=1}^{i=n} N_{k,i} \sin(g_i t + \beta_i); & l_k &= \sum_{i=1}^{i=n} N_{k,i} \cos(g_i t + \beta_i) \\ p_k &= \sum_{i=1}^{i=n} N'_{k,i} \sin(g'_i t + \beta'_i); & q_k &= \sum_{i=1}^{i=n} N'_{k,i} \cos(g'_i t + \beta'_i). \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (61)$$

Stavimo li, zbog jednostavnijeg pisanja,

$$\sum_i (a_k, a_i) = A_{k,k}; \quad -[a_k, a_i] = A_{k,i}, \quad i \neq k \quad (62)$$

onda dobivamo za određivanje konstanta g_1, g_2, \dots, g_n , mesto (54), ovu jednačinu:

$$\begin{vmatrix} (A_{1,1} - g) & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & (A_{2,2} - g) & A_{2,3} & \dots & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & (A_{3,3} - g) & \dots & A_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & \dots & (A_{n,n} - g) \end{vmatrix} = 0. \quad (63)$$

Ova jednačina zove se sekularna determinanta. Ona je n -tog stepena. zbog čega njenih n korenova predstavljaju konstante g_1, g_2, \dots, g_n . Srazmere njenih subdeterminanata $\alpha_{m,i}$ bilo koje njene vrste m daju srazmere konstanta $N_{k,i}$:

$$N_{k,1} : N_{k,2} : N_{k,3} : \dots = \alpha_{m,1} : \alpha_{m,2} : \alpha_{m,3}.$$

Ostale konstante određene su inicijalnim uslovima.

Istim načinom određuju se i konstante sistema za p_k i q_k . Iz prednjih obrazaca sledeju još ovi važni rezultati. Jednačine (36), primenjene na koju god planetu m_k , daju:

$$e_k^2 = h_k^2 + l_k^2.$$

Stavimo li u ovu jednačinu za h_k i l_k obrasce (61), to dobivamo:

$$e_k^2 = \sum_{i=1}^{i=n} N_{k,i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} N_{k,i} \cdot N_{k,j} \cos[(g_i - g_j)t + \beta_i - \beta_j], \quad (64)$$

gde u dvostrukom zbiru treba da bude j uvek različito od i , a da se svaka kombinacija tih dvaju indeksa uzme samo jedanput, pošto smo pred zbir stavili broj 2.

Dvostruki zbir u prednjoj jednačini dostigao bi svoju moguću, apsolutno uzetu, maksimalnu vrednost kad bi svi njegovi kosinusi postali jednaki jedinici, a imali takav znak da koeficijenti $N_{k,i}$ pomnoženi tim pozitivnim odnosno negativnim jedinicama, budu svi pozitivni ili svi negativni. Označimo li sa $|N_{k,i}|$, apsolutno uzete, numeričke vrednosti koeficijenta $N_{k,i}$, to je dakle,

$$\limsup e_k^2 = \sum_{i=1}^{i=n} N_{k,i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} |N_{k,i}| \cdot |N_{k,j}|.$$

Desna strana ove jednačine predstavlja nam potpuni kvadrat zbira apsolutnih vrednosti koeficijenta $N_{k,i}$, pa je zato:

$$\limsup e_k^2 = \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} |N_{k,i}| \right\}^2,$$

t.j.

$$\limsup e_k = \sum_{i=1}^{i=n} |N_{k,i}| = |N_{k,1}| + |N_{k,2}| + \dots + |N_{k,n}|. \quad (65)$$

Stavljajući u ovaj obrazac numeričke vrednosti koeficijenta $N_{k,i}$, dobivamo onaj broj koji numerička vrednost ekscentriciteta planetske putanje ne može nikad da prekorači.

Iz jednačina (36) i (61) sleduje:

$$\begin{aligned} e_k \sin \Pi_k &= \sum_{i=1}^{i=n} N_{k,i} \sin(g_i t + \beta_i) \\ e_k \cos \Pi_k &= \sum_{i=1}^{i=n} N_{k,i} \cos(g_i t + \beta_i). \end{aligned} \quad (66)$$

Neka je j jedan od n indeksa i prednjih obrazaca, onda je

$$\cos(\Pi_k - g_j t + \beta_j) = \cos \Pi_k \cos(g_j t + \beta_j) + \sin \Pi_k \sin(g_j t + \beta_j).$$

Pomnožimo ovaj obrazac sa e_k pa stavimo, na desnoj strani njegovoj, za $e_k \sin \Pi_k$, $e_k \cos \Pi_k$ obrasce (66). Grupisanjem članova desne strane toga obrasca, dobivamo, u članovima gde je i različito od j ,

$$\begin{aligned} N_{k,i} \cos(g_i t + \beta_i) \cos(g_j t + \beta_j) + N_{k,i} \sin(g_i t + \beta_i) \sin(g_j t + \beta_j) \\ = N_{k,i} \cos[(g_i - g_j)t + \beta_i - \beta_j], \end{aligned}$$

a gde je i jednako j :

$$N_{k,i} \cos^2(g_j t + \beta_j) + N_{k,i} \sin^2(g_j t + \beta_j) = N_{k,i}.$$

Zato je

$$e_k \cos(\Pi_k - g_j t - \beta_j) = N_{k,j} + \sum_i N_{k,i} \cos[(g_i - g_j)t + \beta_i - \beta_j], \quad (67)$$

gde u znaku zbira ove jednačine treba za i staviti sve cele brojeve od 1 do n sa izuzetkom broja j . Taj zbir ne može, svojom apsolutnom vrednosti, prekoračiti zbir apsolutnih vrednosti koeficijenta $N_{k,i}$ koji su u njemu sadržani. Ako se desilo da apsolutna vrednost koeficijenta $N_{k,j}$ nadmašava zbir apsolutnih vrednosti svih ostalih koeficijenta, onda desna strana jednačine (67) ne može postati jednaka nuli, pa ma kako bilo t . To znači da ugao

$$\varphi = \Pi_k - g_j t - \beta_j$$

ne može dostići vrednost pravog ugla, nego će ostati stešnjen u izvesnim granicama

$$-90^\circ < -\varphi_0 < \varphi < +\varphi_0 < +90^\circ,$$

oscilujući između njih. Zato je

$$|\varphi| < \varphi_0.$$

Ugao Π_k , longitudu perihela, treba meriti onako kako je to u §13 pokazano, a isto tako i ugao φ . Da bismo jasnije rastumačili smisao dobivenog rezultata, uzimimo da se ravan planetske putanje poklapa sa ravni $X-Y$ našeg koordinatnog sistema. Tada nam Π_k predstavlja ugao što ga prava povučena iz početka O koordinatnog sistema prema perihelu, dakle prava velike ose planetske putanje, zatvara

sa osom X . Zamislimo sada u ravni $X-Y$, dakle u ravni planetske putanje, jednu pravu koja prolazi kroz tačku O , koja je u inicijalnom momentu $t = 0$ zatvarala sa osom X ugao β_j , a koja se kreće, prolazeći stalno kroz tačku O , u ravni $X-Y$ konstantnom uglovnom brzinom g_j . Jasno je da će ugao α_k što ta prava bude u momentu t zatvarala sa osom X biti predstavljen ovim obrascem

$$\alpha_k = \beta_j + g_j t.$$

Iz prethodnih jednačina sleduje:

$$|\Pi_k - \alpha_k| < \varphi_0.$$

Velika osa planetske putanje, naperena prema perihelu, ne udaljuje se, dakle, od pomenute prave nikad više od ugla φ_0 . Kada se ta prava bez prestanka obrće uniformno u ravni $X-Y$ oko tačke O , to ona gura ili povlači sa sobom veliku osu planete m_k pa njena uglovna brzina g_j predstavlja, analogno srednjem kretanju planete, rastumačenom u §12, srednje kretanje perihela. O takvom srednjem kretanju perihela može, kao što to sleduje iz prethodnih jednačina, biti govora samo onda ako apsolutna vrednost jednog od koeficijenata $N_{k,i}$ nadmašava zbir apsolutnih vrednosti svih ostalih takvih koeficijenata.

Na isti način kao što smo obrascem (65) predstavili krajnju granicu ekscentriciteta planetske putanje, možemo upotrebom jednačina (40) i (61) izvesti sličan obrazac za krajnju granicu nagiba i planetske ravni.

Izračunavanje numeričkih vrednosti veličina N , g , β koje valja, rešavajući sekularnu determinantsku jednačinu (63), staviti u integrale (61) da bi se predstavili međusobni sekularni poremećaji velikih planeta, ogroman je posao. Zato nije ni čudo da je taj račun izvršen, u svojoj potpunosti, za minulih 150 godina, svega tri puta, od Lagranža, Leverijea i Stokvela. Lagranž je u svojim računima uzeo u obzir samo šest starih planeta: Merkur, Veneru, Zemlju, Mars, Jupiter i Saturn; planeta Uranus pronađena je baš za vreme Lagranžovog rada na tom problemu. Leverije je izvršio svoje račune pre no što je pronašao Neptun, pa zato je u njima uzeo u obzir samo sedam velikih planeta, tako da tek Stokvelovi računi uzimaju u obzir svih osam tadanjih velikih planeta.

Ta numerička izračunavanja pokazala su da ekscentriciteti planetskih putanja i nagibi njihovih ravni osciluju između uskih granica, čine je stabilitet našeg planet-skog sistema osiguran za ogroman niz vekova. Dobiveni numerički rezultati igraju važnu ulogu u Astronomskoj Teoriji klimatskih promena Zemljine prošlosti, navedenoj u pregledu literature.

ГЛАВА ДЕВЕТА

Planetski sistem

§ 37. Istorijski podatci. Kada je Kopernikov heliocentrični sistem bio definitivno usvojen, morala se i naša Zemlja ubrojati u porodicu planeta koja, po rečima velikoga reformatora, okružava Sunce na njegovom prestolu. Cela ta grupa nebeskih tela, zajedno sa Suncem i Zemljinim Mesecom, dobila je ime „Sunčani sistem“. Ovaj naziv ne odgovara više potpuno našim današnjim shvatanjima, jer se taj sistem nebeskih tela ne odlikuje od ostalih prisustvom Sunca, jer takvih sunaca ima u vasioni bezbroj, nego baš Sunčevim tamnim pratiocima koji ga obilaze, pridržavani vezom gravitacije. Zato se, u novije doba, mesto gornjega naziva, odomaćilo ime „Planetski sistem“. Nema sumnje da i ostala Sunca vasi-one, zvezde nekretnice, imaju svojih tamnih pratioca, ali su nam oni nevidljivi pa bi nam samo u izuzetnim slučajevima, pri prolazu ispred svoga sunca ili poremećajem njegovog kretanja, mogli da odadu svoje prisustvo.

Još za vreme borbi za vaspostavljanje heliocentričke nauke, uvećan je, kao što smo već saopštili, naš planetski sistem novim članovima, satelitima I, II, III, IV Jupitera, pronađenim 1610 od Galileja, a u isto doba i od MARIUSA. Iste godine prime-tio je Galilei na Saturnu nešto slično rukatkama, ali je tek godine 1656 uspeo Hajgens da reši zagonetku Saturnovog prstena. Njemu je 1655 pošlo za rukom da pronađe najvećeg pratioca Saturnovog, *Titana*, a ubrzo iza toga, pronašao je D. KASINI četiri nova meseca Saturnova, *Japeta* (1671), *Reu* (1672), *Tetidu* (1684), i *Di-onu* (1684). Posle pronalaska tih pet planetskih trabanata proteklo je više od veka do pronalaska novih.

Trinaestog aprila 1781 pronašao je V. HERŠEL u jatu blizanaca nebesko jedno telo koje je menjalo svoj položaj, jednu novu veliku planetu, koja je dobila ime *Uranus*. Heršel je našao i dva satelita nove planete, *Oberona* i *Titaniju* (1787), a iza toga (1789) i dva pratioca Saturnova, *Mima* i *Encelada*.

Kada je izvršeno prvo izračunavanje putanje novo pronađene planete Uranusa, pokazalo se da je on već pre bivao viđan od raznih posmatrača koji nisu upoznali njegovu planetsku prirodu. FLEMSTED ga je video već 1690, a iza toga još pet puta, LEMONIJE (1768, 1769), šta više, osam puta. Te stare pozicije Uranusa, upotrebljene za tačniju odredbu njegove putanje, ubedile su 1821 BUVARA da se kretanja Uranova ne podudaraju sa teorijom. Godine 1845 preduzeo je LEVERIJE, potstre-

knut od Aragoa, da, obrnutim računom poremećaja, ispita da li koja dalja, nepoznata, planeta ne poremećava kretanje Uranusa, a u takvom slučaju, koja bi bila putanja i tadanja pozicija te nepoznate planete. Kao rezultat toga računa, dobio je berlinski astronom GALE, 23 septembra 1846, pismen izveštaj od Leverijea u kojem mu ovaj saopštava računom dobivenu tadanju poziciju nepoznate planete, moleći ga da tu planetu potraži na nebu. Već na veče istoga dana bila je nova planeta, koja je dobila ime *Neptun*, pronađena na nebu, na skoro istom onom mestu koje je bilo označeno u pismu Leverijeovom. Ta planeta pronađena je, dakle, oruđem Nebeske Mehanike. Godinu dana iza toga, pronašao je LASER Neptunovog satelita.

Ne treba prećutati da je ADAMS, onda još student u Kembridžu, izvršio slično izračunavanje, sa skoro istim rezultatom, kao i Leverije i saopštio ga, već oktobra 1845, astronomu ERIU koji je propustio da se njime posluži. Izračunavanje putanje nove planete pokazalo je, prateći je tom putanjom u natrag, da je ona već 1795 bila viđena od LALANDA, ali smatrana za zvezdu nekretnicu; ta Lalandova pozicija bila je od velike koristi za tačno određivanje putanje te planete koja se sporo kreće po zvezdanom nebu.

Godine 1848 pronađen je Saturnov satelit *Hiperion* od BONDA i njegova sina, a nezavisno od njih, i od Lasela koji je 1851 pronašao i dva meseca Uranova, *Ariela* i *Umbruela*. Godine 1877 pronašao je HAL oba Marsova meseca, *Fobosa* i *Dejmosa*, 1892 našao je BARNAR Jupitrov mesec V, a uskoro iza toga, PIKERING dva Saturnova satelita, *Febu* (1898) i *Temis* (1905); iste godine pronašao je PERIN Jupitrove mesece VI i VII. Dva dalja Jupitrova meseca VIII i IX, pronađena su od MELOTA (1908) odnosno od NIKOLZONA (1914).

Treći Keplerov zakon dozvoljava nam, kao što smo videli, da iz vremena obilaženja velikih planeta izračunamo njihova relativna otstojanja od Sunca dosta tačno. Iz toga zakona sleduju, ako otstojanje Sunce-Zemlja odaberemo za jedinicu, ova, na prvu decimalu zaokružena, otstojanja prvih sedam planeta: 0,4; 0,7; 1,0; 1,5; 5,2; 9,5. Već je Kepleru upala u oči velika praznina između četvrti i pete planete, t.j. između Marsa i Jupitra. Mišljenje da se ovde radi, zaista, o jednoj nepopunjenoj praznini, dobilo je svoga oslonca kada je 1766 vitenberski profesor TICIUS pronašao čudnu jednu zakonitost u otstojanjima planeta od Sunca. Napiše li se sledeća geometrijska progresija sa početnim članom nula, koji joj, u stvari, ne pripada, 0; 0,3; 0,6; 1,2; 2,4; 4,8; 9,6 pa doda li se svakom njenom članu broj 0,4, to se dolazi do ovoga niza brojeva: 0,4; 0,7; 1,0; 1,6; 2,8; 5,2; 10,0. Ovaj red nam pretstavlja, zaista neočekivano dobro, otstojanja planeta od Sunca, popunjavajući spomenutu prazninu brojem 2,8.

Kada je, 1 januara 1800, pronašao PIACI jednog novog člana našeg planetenskog sistema, malu planetu *Ceres*, pa se pokazalo da je radius njene putanje, meren spomenutom jedinicom, jednak 2,8, mislilo se da je time popunjena praznina o kojoj je maločas bila reč. Brzo iza toga, pronađene su još tri male planete, *Palas* (1802) od OLBERSA, *Juno* (1804, HARDING) i *Vesta* (1807, Olbers), a radiusi njihovih putanja malo se razlikovali od radiusa putanje Ceresa, pa se mislilo da su sve te četiri planete ostatci jedne jedine. Tek godine 1847, uvečana je ta porodica malih planeta sa tri nova člana, a sada ih imamo preko dvanaest stotina na broju. Velike poluse ovih malih planeta, ili, kako ih još zovu, planetoida i asteroida, veoma su različite (*Eros* 1,458; *Hektor* 5,278), a kako mnoge od njih imaju velike ekscentricitete,

a i velike nagibe putanja, to su one ne samo ispunile nego i daleko prekoračile prostor između Marsa i Jupitra. Nedavno, 24 aprila 1932, pronađeni i za vreme od 21 dana posmatrani, pa zatim iz vida izgubljeni, planetoid 1932 N A ima toliki ekscentricitet putanje da se u svom perihelu približava Suncu više no sama Venera.

Pronalazak malih planeta pomogao je, svojim potrebama, veoma razvika teorije određivanja putanja nebeskih tela. Takvo određivanje može se, kao što je to već Njutn pokazao, izvršiti ako postoje tri međusobno vremenski dovoljno udaljena određivanja pozicije uočenog nebeskog tela. Već pronalazak prve od malih planeta, koja se ubrzo iza toga izgubila iz vida, stvorio je potrebu stvaranja i ispitivanja novih metoda za određivanje putanja pa je, tim povodom, GAUS objavio (1809) svoju teoriju određivanja putanja nebeskih tela. Prva određivanja putanja, posle onih koje je Kepler izveo i o kojima smo opširno govorili, izvršena su od HALEJA i to za komete. Ona su pokazala da repatica koja je pri opsadi Beograda 1456 izazvala strah i trepet i repatice posmatrane u godinama 1531, 1607 i 1682 nisu ništa drugo do periodične pojave jedne te iste komete čiju je putanju Halej odredio i koja je dobila njegovo ime. Ponovne pojave te komete u godinama 1759, 1835 i 1910 pružile su priliku Nebeskoj Mehanici da, izračunavanjem tih povrataka, oproba i dokaže savršenstvo svojih srestava. Pomoću te nauke su računom identifikovane i starije pojave te komete koje se, po kineskim zabeleškama, mogu pratiti do u jedanaesti vek pre Hrista. Tako je Halejeva kometa postala tipičnim predstavnikom ove klase nebeskih tela koja se mogu smatrati za punovažne članove našeg planetenskog sistema.

Još su stari Aleksandrijci, kao što smo već saopštili, preduzeli da geometrijskim metodom mere međusobna otstojanja nebeskih tela. Druga polovina pete knjige Ptolemajevog Zbornika posvećena je tim pitanjima. Tu su saopštena ova rasuđivanja. Ako se posmatrano nebesko telo nalazi u takvoj blizini prema Zemlji da njegovo otstojanje nije beskonačno veliko prema dimenzijama Zemlje, kao što je to, na primer, slučaj sa Mesecom, onda će to imati za posledicu da prava povučena iz centra Zemlje prema tom nebeskom telu neće biti paralelna vizurnoj pravici uperenoj prema tom istom telu iz oka posmatračevog koji se nalazi na jednom mestu Zemljine površine. Te dve prave zatvaraće između sebe jedan ugao za koji se posmatrano nebesko telo različito projicira na nebesku sferu iz obe spomenute tačke. Taj ugao *paralaksa*, dostizava, kao što je lako uvideti, svoju maksimalnu vrednost onda kada se posmatrano nebesko telo nalazi u ravni horizonta posmatračevog; onda je paralaksa π_0 data jednačinom $\sin \pi_0 = r/d$, gde r označava radius Zemljine lopte, a d otstojanje nebeskog tela od centra Zemlje. Ugao π_0 je uvek toliko malen da njegov sinus možemo zameniti sa samim tim uglom, merenim u lučnoj meri, pa je zato $\pi_0 = r/d$. To je, u stvari, onaj ugao pod kojim bi se ukazao radius Zemljine lopte, posmatrane sa uočenog nebeskog tela. Poznajemo li taj ugao, onda smo otstojanje d premerili radiusom Zemljine lopte.

Aleksandrijci su pokušali na razne načine da odrede paralakse Meseca i Sunca. O Aristarhovom radu na tom pitanju već smo govorili. Izgleda da je on, pošto je, spočetka rdavo premereni, prividni prečnik Sunca ispravio docnije na 30', dobio za paralaksu Meseca numeričku vrednost od 61'. Hiparhos je napisao o merenjima paralaksa veće delo koje je obuhvatilo nekoliko knjiga, ali se ono nije sačuvalo. Iz Almagesta i iz Paposove „Matematske Zbirke“ znamo da je Hiparhov metod u suštini jednak Aristarhovom pa se od ovog razlikuje samo oštrijim rezultatima

posmatranja. Na taj način našao je Hiparhos za Mesečevu paralaksu vrednost od $57'$. Ptolemajos je pokušao da Mesečevu paralaksu odredi upoređujući posmatranja Meseca, vršena u Aleksandriji, sa rezultatom teorije koja je davala pozicije Meseca obzirom na centar Zemlje. Numerička vrednost paralakse koju je Ptolemajos na taj način dobio ne razlikuje se, u stvari, od Hiparhove. Kad je, na taj način, paralaksa Meseca bila dobivena, mogla se, pomoću Aristarhoveg metoda sa konusom Zemljine senke, odrediti i paralaksa Sunca, jer tada je, iz vremena prolaza Meseca kroz tu senku, taj konus bio određen pa je valjalo staviti u taj konus Sunce na takvom otstojanju da ono, posmatrano sa Zemlje, pokaže takav prividni prečnik kakav je dobiven direktnim posmatranjem. Na taj način našao je Ptolemajos da se Sunce nalazi u otstojanju od 1210 Zemljinih radija, t.j. da Sunčeva paralaksa ima numeričku vrednost od $2'50''$. Uzme li se u obzir da je stvarna paralaksa Mesečeva $57'2''$, a Sunčeva $8'',80$, onda se može kazati da su Aleksandrijci pri merenju otstojanja Meseca došli istini veoma nablizo, ali da su u merenju otstojanja Sunca silno pogrešili, što nije ni čudo. Paralaksa Sunca je, kao što to sleduje iz prethodnog saopštenja, toliko sićušna da nije mogla biti izmerenim tadašnjim sredstvima astronomskih posmatranja.

Aleksandrijski podatci o paralaksama Meseca i Sunca primenjivani su do duboko u sedamnaesti vek. Godine 1650 izmerio je VENDELIN na Majorci po Aristarhovom metodu, ali služeći se dogledom, otstojanje Meseca od Sunca u momentu jedne od četvrti i našao ga jednakim $89^{\circ}45'$. Odavde sleduje Sunčeva paralaksa od $14''$ koja se već prilično približava stvarnosti. Tačnije merenje Sunčeve paralakse izvršio je 1672 RIŠE koji je zbog toga posla otputovao u Kajen u Južnoj Americi da odande posmatra Mars. Iz rezultata takvih istovremenih posmatranja u Kajeni i u Parizu, izračunata je Marsova paralaksa, a iz ove, pomoću trećeg Keplerovog zakona, Sunčeva sa numeričkom vrednosti od $9'',5$.

Godine 1750 izvršili su LAKAJ i Laland merenje Mesečeve paralakse na taj način da je Lakaj na Rtu Dobre Nade, a Laland u Berlinu vršio posmatranja Meseca. Dobiveni rezultat bio je $57'4'',7$.

Kada je Halej godine 1677 na Svetoj Jeleni proučavao južno nebo i posmatrao prolaz Merkura ispred Sunca, došao je na ideju da bi se takvi prolazi donjih planeta, a naročito Venerin, mogli iskoristiti za određivanje Sunčeve paralakse. On je pokazao da se, ako dva posmatrača, dovoljno udaljena jedan od drugog na Zemljinoj površini, tačno odrede trenutke ulaza planete na Sunčevu ploču i izlaza sa nje, iz tih podataka mogu izračunati dužine i otstojanja tetiva projiciranih sa ona dva gledišta, putanjom planete na Sunčevu ploču, a tim odrediti i Sunčeva paralaksa. Blagodareći tom Halejevom predlogu, posmatrana su oba iduća prolaza Venera ispred Sunca, ona u godinama 1761 i 1769, od mnogih, skoro po celoj Zemljinoj površini rasporedanih astronoma, ali je trebalo još skoro pola veka dok su rezultati tih posmatranja redukovani i od ENKEA iskorišćeni za izračunavanje Sunčeve paralakse za koju je dobio vrednost od $8'',57$. Iduća dva prolaza Venera ispred Sunca, ona u godinama 1874 i 1882, dala su, pri još većem broju posmatrača, Sunčevu paralaksu od $8'',80$ koja se, potvrđena i drugim metodama, danas smatra za najpouzdaniju. Iz toga broja sleduje srednje otstojanje Zemlje od Sunca od 149 500 000 kilometara. Sva ostala otstojanja u planetskom sistemu mogu se izraziti tom „astronomskom jedinicom“ i time odrediti glavne mere toga sistema.

Trinaestog marta 1930 saopštila je Lovelova Opservatorija u Flagstafu (Arizona) telegrafski naučnom svetu da je 21 januara 1930 u jatu blizanaca pronađena i od toga doba svakodnevno praćena nova jedna velika planeta petnaestog stepena prividne veličine; u istom brzozjavu saopštena je i pozicija te planete. Od toga doba, pošto je prvo određivanje putanje te planete izvršeno, pošlo je za rukom pronaći i starije položaje njene na raznim fotografskim pločama neba, a kao najstariji, takav jedan snimak iz godine 1914. Koristeći se tim podacima, određeni su elementi putanje nove planete koja je dobila ime *Pluto*.

Ti elementi su ovi:

$$\begin{aligned}\Omega &= 109^{\circ}21'39''; & i &= 17^{\circ}6'58'' \\ \Pi &= 222^{\circ}23'21''; & a &= 39,60038 \\ e &= 0,24609; & \tau &= 1989 \text{ oktobar } 2. \\ n &= 14''238; & T &= 249,21 \text{ godina.}\end{aligned}$$

Velikim ekscentricitetom i nagibom ravni svoje putanje, ova se planeta izdvaja od svih dosadanih velikih planeta pa se, u perihelu, približuje Suncu više no Neptun. Masa Plutonova, samo približno određena, prevazilazi masu Zemlje najviše za polovinu.

§ 38. **Sastav planetskog sistema.** Naš planetski sistem obuhvata ove članove:

1. *Sunce, kao centralno telo.*
2. *Devet velikih planeta: Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto.*
3. *Veliki broj (preko 1200) malih planeta, nazvanih i planetoidima ili asteroidima, koje su ispunile i prekoračile prostor između Marsa i Jupitera.*
4. *Dvadeset i sedam planetskih trabanata ili satelita od kojih jedan obilazi Zemlju, dva Mars, devet Jupiter, deset Saturn, četiri Uranus, a jedan Neptun.*
5. *Znatan broj periodičkih kometa od kojih su 28 bile posmatrane bar u dva obilaska oko Sunca i bezbroj meteora i bolida; mnogi od ovih meteora kreću se u rojevima.*

U priloženim tablicama saopšteni su elementi putanja velikih osam planeta, podatci o njihovim veličinama, masama i rotacijama te podatci o satelitima planeta.

Iz podataka saopštenih u priloženim tablicama sleduje, pre svega, ovo. Sve planete imaju isti smisao obilaženja oko Sunca. Posmatramo li to njihovo kretanje sa severne strane ekliptike, to ono sleduje od desna na levo, u obrnutom smislu skazaljke na satu. I rotacija Sunca i svih planeta, u koliko nam je ona poznata, sleduje u istom smislu. Već sve ove pravilnosti pokazuju usku pripadnost članova planetskog sistema. Isti smisao obilaženja pokazuju i sve male planete, no ne svi sateliti. Iz priložene tablice satelita vidimo da su putanje Jupitrovih satelita VIII i IX, Saturnovog satelita Febe, sviju četiri Uranovih satelita i satelita Neptunovog nagnute prema ekliptici za više od devedeset stepeni pa je zato njihovo kretanje retrogradno.

Elementi putanja velikih planeta (1 januar 1900, 0^h svetskog vremena)

Planeta	Srednje dnevno kretanje u sekundama	Siderično vreme obilaženja u danima	Srednje ostojanje od Sunca		Ekscentricitet	Longituda perihela	Longituda uzlaznog čvora	Nagib	Srednja longituda
			astronom. jedin.	miliona km.					
Merkur	1473 ^a .42	87.969	0.38710	58	0.20561	75° 53' 50"	47° 8' 41"	7° 0' 11"	182° 16' 17"
Venera	5767.67	224.701	0.72333	108	0.00682	130 8 26	75 47 17	3 23 37	344 22 11
Zemlja	3548.19	365.256	1.00000	149	0.01675	101 13 7	0 0 0	0 0 0	100 40 57
Mars	1886.52	686.980	1.52368	228	0.09331	334 13 6	48 47 12	1 51 1	294 15 53
Jupiter	299.13	4332.589	5.20256	778	0.04833	12 43 15	99 26 36	1 18 31	238 7 57
Saturn	120.45	10759.23	9.55475	1428	0.05589	91 5 54	112 47 25	2 29 33	266 35 2
Uranus	42.23	30688.45	19.21814	2873	0.04634	171 32 55	73 28 38	0 46 21	244 12 33
Neptun	21.53	60181.13	30.10957	4501	0.00900	46 43 38	130 40 53	1 46 45	84 27 50

Sa jedinim izuzetkom novopronađene planete, Pluta, kreću se sve velike planete oko Sunca u ravnima koje zatvaraju međusobno veoma oštre uglove. I ekscentriciteti njihovih putanja su veoma mali, tako da one izgledaju kao krugovi.

Mase svih velikih planeta, bez izuzetka, su veoma malene prema masi Sunca što važi, prirodno, još u većoj meri za male planete i za satelite. Masa najveće od svih planeta, Jupitera, ne dostiže ni hiljaditi deo Sunčeve mase. Zbog njihovih malenih masa, a velikih ostojanja, pokorava se godišnje kretanje njihovo oko Sunca u velikoj meri zakonima problema dvaju tela.

Međusobni poremećaji kretanja planeta, o kojima smo opširno govorili, veoma su maleni, da bi se ispoljili u većoj meri tek u toku vekova. Saopštenja o tima poremećajima valja nadopuniti ovima. Po Ajnštajnuvoj teoriji gravitacije nastupa već u slučaju ako uzmemo samo Sunce i jednu od planeta u obzir, dakle, u opreci sa Njutnovom teorijom, već u problemu dvaju tela, pomeranje perihela planetske putanje. To pomeranje sleduje u smislu obilaženja planete oko Sunca pa dostizava, za vreme jednog punog obilaska planete oko Sunca, ovu vrednost:

$$\delta\Pi = \frac{6\pi n^2 a^2}{c^2(1 - e^2)}$$

gde a označava, kao i do sada, veliku poluosu planetske putanje, e njen ekscentricitet, a n srednje kretanje; c označava brzinu svetlosti. Koristeći se ovim obrascem i tabelarnim podacima, dobivamo kao pomeranje perihela u toku od sto julianskih godina: za Merkur 42"89, za Veneru 8"607, za Zemlju 3"831, za Mars 1"348. Ova kretanja, od kojih je naročito prvo dokazano i opažanjima, dosta su malena prema srednjim kretanjima perihela kako ona sleduju iz računa poremećaja koji daje n.pr. za srednje kretanje

Veličine, mase i trajanja obrtaja Sunca i planeta

Ime	Prečnik ekvatora		Masa		Gustina	Trajanje obrtaja
	Zemlja = 1	kilometara	Sunce = 1	Zemlja = 1	Zemlja = 1	
Merkur	0.37	4 700	1:6 000 000	0,06	1,1	88 ^{d?}
Venera	0.97	12 300	1:408 000	0,82	0,91	24 ^{h?}
Zemlja	1	12 756	1:333 432	1	1	23 ^h 56 ^m 4 ^s
Mars	0.54	6 900	1:3 093 500	0,11	0,69	24 ^h 37 ^m 23 ^s
Jupiter	11.14	142 000	1:1 047,3	318,36	0,25	9 ^h 55 ^m
Saturn	9.40	120 000	1:3 501,6	95,22	0,13	10 ^h 14 ^m 24 ^s
Uranus	4.0	50 700	1:22 869	14,58	0,23	10 ^h 45 ^m
Neptun	4.3	54 400	1:19 314	17,26	0,22	7 ^h 56 ^m
Sunce	195,05	1 391 000	1	333 432	0,26	25 ^d -27 ^d

Merkurova perihela stogodišnju vrednost od 546". Pored sve svoje maloće, ova Ajnštajnova pomeranja perihela mogu narasti do osetnih veličina u toku geoloških vremena, no do sada nije se uspelo uzeti ih u obzir u računu sekularnih poremećaja.

Što se tiče ostojanja i kretanja satelita, važe u velikoj meri pretpostavke učinjene u §14; zato se sateliti kreću oko svojih planeta po eliptičnim putanjama. Pri oštrijem ispitivanju toga kretanja, moraju se uzeti u obzir njegovi poremećaji. To je naročito potrebno kod Zemljinog Meseca zbog njegovog značaja u nautici. Pri kretanju Meseca Sunce je ono telo koje izaziva poremećaj. Masa Sunčeva je 333 000 puta veća od glavnoga tela pri kretanju Meseca, Zemlje. No kako je Sunce 390 puta dalje od Meseca no Zemlja, to i ti poremećaji nisu suviše veliki pa su se mogli izračunati. Već je Njutn glavne nejednakosti Mesečevog kretanja, opažene već odavno, uspeo da rastumači svojim zakonom gravitacije, tako poremećaje Mesečeve longituda: *evekciju* (od 1°17', pronađenu od Ptolemaja), *varijaciju* (do 39'31", pronađenu od ABUL VEFE) i *godišnju nejednakost* (do 11'9", pronađenu od Tiho Brahea).

I kretanje apsidne linije i linije čvorova Mesečeve putanje, koje je već Aleksandrijcima bilo poznato i o kojem će još biti govora, mogao je Njutn da izvede iz svoga zakona. Broj do sada teoretskih izračunatih i posmatranjem potvrđenih nejednakosti Mesečeva kretanja narastao je na nekoliko stotina.

Kod satelita spoljnih planeta pojavljuju se, pored poremećaja izazvanih Suncem, međusobni poremećaji tih satelita. Vrlo jakim poremećajima izloženi su Jupiterovi sateliti VIII i IX, jer se nalaze blizu one granice gde uticaj Sunca postaje jako osetan.

U pogledu na njihovu rotaciju, mogu se članovi našeg planetskog sistema podeliti u tri, jasno odvojene, kategorije. Tipični pretstavnik prve od tih kategorija je samo Sunce. Njegovo obrtanje nije jednako obrtanju čvrstoga tela kod kojega sve tačke njegove imaju istu uglovnu brzinu, nego je ta brzina za razne zone Sunčeve površine različita, opadajući od ekvatora prema polovima. Posmatranjem Sunčevih pega, na primer, pokazalo se da je trajanje pune jedne rotacije na ekvatoru jednako 25 dana, a na heliografskoj širini od 40° punih 27 dana. Sličnu takvu zonalnu rotaciju pokazuju Jupiter i Saturn, a imaju je, verovatno, i ostale spoljne planete.

Podatci o satelitima planeta

Satelit	Siderično vreme obilaženja u danima	Otstojanje od planete		Ekscentricitet putanje	Nagib putanje
		u poluprečnicima planete	u hiljadama kilometara		
Zemljin	27,32166	60,267	384,40	0,0549	5°,13
Marsov					
<i>Fobos</i>	0,31891	2,77	9,15	0,0170	27,48
<i>Dejmos</i>	1,26244	6,95	22,85	0,0031	27,41
Jupitrov					
<i>I</i>	1,76914	5,91	421,50	0,0	2,16
<i>II</i>	3,55118	9,40	671	0,0	2,51
<i>III</i>	7,15455	14,99	1070	0,0	2,33
<i>IV</i>	16,68899	26,36	1881	0,1	2,36
<i>V</i>	0,49818	2,53	184	0,1	2,0
<i>VI</i>	250,611	160,0	11446	0,1550	28,93
<i>VII</i>	260,06	164,0	11884	0,2073	31,00
<i>VIII</i>	738,9	329,0	25610	0,38	151,11
<i>IX</i>	1745,0	351,0	27000	0,248	156,19
Saturnov					
<i>Mimas</i>	0,94242	3,07	181	0,0190	17,49
<i>Enceladus</i>	1,37022	3,94	233	0,0046	28,07
<i>Tetis</i>	1,88780	4,88	287	0,0000	28,68
<i>Dione</i>	2,73692	6,24	369	0,0020	28,07
<i>Rea</i>	4,51750	8,72	515	0,0009	28,38
<i>Titan</i>	15,94543	20,22	1193	0,0289	27,47
<i>Temis</i>	20,85	24,17	1426	0,23	39,10
<i>Hiperion</i>	21,27662	24,49	1445	0,119	27,35
<i>Japetus</i>	79,33015	58,91	3476	0,029	18,47
<i>Febe</i>	550,48	214,4	12650	0,1659	175,08
Uranov					
<i>Ariel</i>	2,52038	7,71	177	0,0	97,97
<i>Umbriel</i>	4,11418	10,75	249	0,0	98,35
<i>Titanija</i>	8,70587	17,63	405	0,0	98,02
<i>Dberon</i>	13,46324	23,57	542	0,0	98,28
Neptunov					
<i>Triton</i>	5,87683	15,33	354	0,0	142,67

Drugoj kategoriji pripadaju oni članovi našeg planetskog sistema kod kojih je trajanje jedne rotacije jednako vremenu obilaženja oko njihovog glavnog tela. Tipični predstavnik ove kategorije je Zemljin Mesec. Trajanje jedne njegove rotacije savršeno je jednako njegovom vremenu obilaženja oko Zemlje. Zato Mesec pokazuje Zemlji uvek isto lice. Kad ne bi ona jednakost vremena bila potpuna, morali bismo postepeno sagledati celokupnu površinu Mesečevu. Međutim, mi ne vidimo nego nešto više od njezine polovine, a taj višak samo zbog ekscentriciteta i nagiba njegove putanje i njegove ose. Po drugom Keplerovom zakonu, nije, zbog onog ekscentriciteta, brzina kojom se Mesec kreće po svojoj putanji stalna, dok je njegova rotacija oko ose konstantna, zbog čega se Mesec prema Zemlji zaokreće nešto

na levo i na desno, što se zove njegovom *libracijom* u longitudi. Nagib njegove putanje i njegove ose izaziva sličnu pojavu, *libraciju* u latitudi. *

Jednakost trajanja Mesečeve jedne rotacije sa vremenom njegovog obilaženja oko Zemlje nije slučajna i može se potpuno rastumačiti. Dok se Mesec nalazio još u žitkom stanju, izazivalo je privlačno dejstvo Zemljino na njemu pojavu sličnu morskoj plimi pa se zato njegova površina ispupčila na mestu najbližem Zemlji i na onome koje joj leži diametralno. Ta ispupčenja, na pravoj koja spaja centar Meseca sa centrom Zemlje, kočila su, kao kakva kočnica, rotaciju Meseca prema Zemlji, dok ona nije sasvim prigušena. Ohlađeni i stvrdnuti Mesec zadržao je taj, prema Zemlji nešto izduženi, oblik, a ovaj održavao tu dobivenu orijentaciju prema Zemlji; oko tog položaja ravnoteže vrši Mesec jednu malu, ali stvarnu, oscilaciju koja se naziva fizičkom libracijom. Merkur, a verovatno i svi planetski sateliti, pripadaju, u pogledu svoje rotacije, ovoj Mesečevoj kategoriji. Uzrok jednakosti vremena njihove rotacije i njihove revolucije isti je kao i kod Meseca, pri tome valja Merkur smatrati za satelit Sunčev.

Trećoj kategoriji pripadaju svi ostali članovi našeg planetskog sistema. O njihovoj rotaciji biće govora u drugom odeljku ove knjige.

ДРУГИ ОДЕЉАК



**Rotaciono kretanje
nebeskih tela**

ГЛАВА ДЕСЕТА

▼

Teoreme i obrasci Racionalne Mehanike potrebni za proučavanje rotacionih kretanja nebeskih tela

§ 39. **Nebeska tela kao materijalni sistemi.** Svaki član našeg planet-skog sistema predstavlja po jedan zasebni materijalni sistem. I naša Zemlja, sa svojom hidrosferom i atmosferom, predstavlja jedan takav sistem u kojem su zastupljena sva tri agregatna stanja materije. Svaki takav materijalni sistem možemo zamisliti rasčlanjen u proizvoljno mnogo, toliko sitnih, delića da svaki takav delić možemo smatrati za materijalnu tačku pa na taj način dolazimo, konačno, do jednog sistema materijalnih tačaka, za koji važe ova rasuđivanja. Sve materijalne tačke njegove privlače se međusobno po Njutnovom zakonu, a bivaju privlačene, po istom zakonu, i od delića ostalih članova planet-skog sistema. Ove potonje sile računaćemo u spoljne sile uočenog materijalnog sistema, dok se privlačne sile između pojedinih delova uočenog nebeskog tela imaju računati u njegove unutrašnje sile. Pored tih unutrašnjih gravitacionih sila dejstvuju u uočenom materijalnom sistemu i druge unutrašnje sile, molekularne sile, naponi, trenje i sve ostale sile koje odgovaraju agregatnom stanju u posmatranom delu uočenog materijalnog sistema. Sve se te sile pokoravaju Njutnovom principu akcije i reakcije, t.j. sila p_{ik} kojom materijalna tačka m_k dejstvuje na drugu materijalnu tačku m_i mora biti jednaka, a protivnog pravca, sili p_{ki} kojom materijalna tačka m_i dejstvuje na tačku m_k ; obe te sile dejstvuju u istoj pravoj, onoj koja spaja uočene dve tačke. Ta jednakost, a protivni pravac uočenih dveju sila izraženi su matematski vektorskom jednačinom:

$$p_{ik} + p_{ki} = 0. \quad (1)$$

Da matematski izrazimo još i to da obe te sile dejstvuju u istoj pravoj, označimo sa \mathfrak{R}_i vektor položaja mase m_i , a sa \mathfrak{R}_k vektor položaja mase m_k obzirom na proizvoljnu jednu tačku upoređivanja, onda je postavljeni uslov izražen, očito, vektorskom jednačinom

$$[\mathfrak{R}_i p_{ik}] + [\mathfrak{R}_k p_{ki}] = 0. \quad (2)$$

Iz dobivenih dveju jednačina mogu se izvesti sledeće teoreme.

§ 40. Teoreme o impulsima. Neka m_i bude proizvoljna jedna materijalna tačka uočenoga sistema, a \mathfrak{P}_i rezultanta svih spoljnih sila koje dejstvuju na nju. Rezultanta svih unutrašnjih sila koje dejstvuju na m_i predstavljena je, prema oznakama usvojenim u prošlom paragrafu, sa $\sum_k p_{ik}$, pri čemu se naznačeni zbir proteže na sve tačke sistema. Zamislimo u prostoru jedan nepomični koordinatni sistem $X_1-Y_1-Z_1$, sa početkom u tački O_1 , pa neka \mathfrak{R}_i označava vektor položaja mase m_i obzirom na taj koordinatni sistem, onda možemo materijalnu tačku m_i pod uticajem svih spoljnih i unutrašnjih sila koje na nju dejstvuju smatrati za slobodnu, zbog čega postoji jednačina:

$$m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \mathfrak{P}_i + \sum_k p_{ik}, \quad (3)$$

gde t označava vreme.

Ovakve jednačine kretanja mogu se zamisliti napisane za sve materijalne tačke sistema, kojih neka bude n na broju. Pri tome valja indeksu i dodeliti vrednosti $1, 2, \dots, n$. Na taj način dolazimo do ovih n jednačina:

$$m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \mathfrak{P}_i + \sum_k p_{ik}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Obrazujemo li zbir svih n jednačina (4), to će se, na desnoj strani toga zbira, pojaviti dvostruki zbir $\sum_i \sum_k p_{ik}$, a u njemu svaka kombinacija indeksa i i k po dva puta, jedanput članom p_{ik} , a drugi put članom p_{ki} . Kako se ti dvojni članovi međusobno potiru zbog (1), to dolazimo do ove jednačine:

$$\sum m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \sum \mathfrak{P}_i. \quad (5)$$

Pomnožimo li jednačine (4), jednu za drugom, vektorielno sa $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$ i obrazujemo li zbir tako dobivenih jednačina, to ćemo, pošto se, kao i u prethodnom slučaju, dva i dva člana $[\mathfrak{R}_i p_{ik}]$ i $[\mathfrak{R}_k p_{ki}]$, zbog (2), međusobno potiru, dobiti sledeću jednačinu:

$$\sum m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} \right] = \sum [\mathfrak{R}_i \mathfrak{P}_i]. \quad (6)$$

Vektorski zbir

$$\mathfrak{K} = \sum \mathfrak{P}_i \quad (7)$$

pretstavlja nam rezultantu svih spoljnih sila koje dejstvuju na uočeni materijalni sistem, a zbir vektorielnih proizvoda

$$\mathfrak{M}_1 = \sum [\mathfrak{R}_i \mathfrak{P}_i] \quad (8)$$

pretstavlja nam momenat zaokretanja tih spoljnih sila obzirom na tačku O_1 . Zato je

$$\sum m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \mathfrak{K} \quad (9)$$

$$\sum m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}_1. \quad (10)$$

Izvod

$$\frac{d \mathfrak{R}_i}{dt} = \mathfrak{V}_i \quad (11)$$

pretstavlja nam vektor brzine materijalne tačke m_i u nepokretnom koordinatnom sistemu pa je zato

$$\frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \frac{d \mathfrak{V}_i}{dt}. \quad (12)$$

Kako je, sem toga,

$$\left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} \right] = \frac{d}{dt} \left[\mathfrak{R}_i \frac{d \mathfrak{R}_i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\mathfrak{R}_i \mathfrak{V}_i],$$

to dobivamo mesto (9) i (10) ove dve jednačine:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \mathfrak{V}_i = \mathfrak{K} \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_i [\mathfrak{R}_i \mathfrak{V}_i] = \mathfrak{M}_1. \quad (14)$$

Ove jednačine izražavaju matematskim jezikom teoreme o impulsima. Već je u §16 kazano da zbir $\sum m_i \mathfrak{V}_i$ predstavlja celokupni impuls ili količinu kretanja posmatranoga materijalnoga sistema, a $\sum m_i [\mathfrak{R}_i \mathfrak{V}_i]$ momenat toga impulsa ili, drugače kazano, impuls obrtanja obzirom na tačku O_1 . Ako je uočeni materijalni sistem čvrsto telo, onda se impuls obrtanja naziva i zamahom. Jednačina (13) kazuje da je vremenski izvod impulsa jednak rezultanti spoljnih sila, a jednačina (14) da je vremenski izvod impulsa obrtanja jednak momentu zaokretanja spoljnih sila obzirom na tačku O_1 .

§ 41. Teorema o kretanju težišta. Ako je S težište, bolje reći centar mase, posmatranog materijalnog sistema, a \mathfrak{G} njegov vektor položaja, to je

$$M \mathfrak{G} = \sum m_i \mathfrak{R}_i, \quad (15)$$

gde

$$M = \sum m_i \quad (16)$$

pretstavlja celokupnu masu uočenog materijalnog sistema. Dvostrukom diferencijacijom obrasca (15) po vremenu t , dobivamo:

$$M \frac{d^2 \mathfrak{G}}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2},$$

t.j. zbog (9)

$$M \frac{d^2 \mathfrak{G}}{dt^2} = \mathfrak{K}. \quad (17)$$

Ova diferencijalna jednačina kretanja težišta S identična je onoj za slobodnu tačku mase M , koja je izložena jedino dejstvu rezultante \mathfrak{K} spoljnih sila, predstavljene obrascem (7). Odatle sleduje:

Težište materijalnog sistema kreće se tako kao kad bi u njemu sjedinjene bile sve mase sistema i sve njegove spoljne sile. Unutarnje sile ne utiču na kretanje težišta. ❀

§ 42. Nezavisnost rotacionog kretanja od translatornog. Pretpostavimo, za sada, da je posmatrani materijalni sistem jedno čvrsto telo, pa pitajmo za kretanje toga tela oko njegovog težišta. Da odgovorimo na postavljeno pitanje, položimo početak O_1 koordinatnog sistema $X_1-Y_1-Z_1$, snatranog, za sada, za nepomičnog, u težište S i označimo taj novi koordinatni sistem koji se, bez zaokretanja, kreće translatorno u prostoru sa $X-Y-Z$, a njegov početak koji leži, kao što smo ugovorili, u težištu S sa O . Vektori položaja materijalnih tačaka m_1, m_2, \dots, m_n obzirom na O neka budu označeni sa $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Onda je

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{G} + \tau_i; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

a zbog (15),

$$M\mathfrak{G} = \sum m_i(\mathfrak{G} - \tau_i) = M\mathfrak{G} - \sum m_i\tau_i, \quad (19)$$

t.j.

$$\sum m_i\tau_i = 0$$

odakle sleduje

$$\sum m_i \frac{d^2\tau_i}{dt^2} = 0. \quad (20)$$

Stavimo (18) u (10), to dobivamo:

$$\sum m_i \left[(\mathfrak{G} + \tau_i) \left(\frac{d^2\mathfrak{G}}{dt^2} + \frac{d^2\tau_i}{dt^2} \right) \right] = \mathfrak{M}_1,$$

t.j.

$$M \left[\mathfrak{G} \frac{d^2\mathfrak{G}}{dt^2} \right] - \left[\frac{d^2\mathfrak{G}}{dt^2} \sum m_i\tau_i \right] + \left[\mathfrak{G} \sum m_i \frac{d^2\tau_i}{dt^2} \right] + \sum m_i \left[\tau_i \frac{d^2\tau_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}_1,$$

dakle, zbog (17), (19) i (20),

$$\sum m_i \left[\tau_i \frac{d^2\tau_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}_1 - [\mathfrak{G} \mathfrak{K}]. \quad (21)$$

Momenat zaokretanja spoljnih sila \mathfrak{P} , obzirom na težište S , t.j. obzirom na pokretnu tačku upoređivanja O , predstavljen je sa

$$\mathfrak{M} = \sum [\tau_i \mathfrak{P}_i] = \sum [(\mathfrak{R}_i - \mathfrak{G}) \mathfrak{P}_i] = \sum [\mathfrak{R}_i \mathfrak{P}_i] - \left[\mathfrak{G} \sum \mathfrak{P}_i \right],$$

t.j. zbog (8) i (7), sa

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 - [\mathfrak{G} \mathfrak{K}]. \quad (22)$$

Zato sleduje iz (21) i (22)

$$\sum m_i \left[\tau_i \frac{d^2\tau_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}. \quad (23)$$

Kretanje čvrstog tela oko njegovog težišta ima tri stepena slobode pa je zato to kretanje jednoznačno određeno prethodnom vektorskom jednačinom koja je ekvivalentna trima skalarnima. Ta jednačina, istoga oblika kao jednačina (10) pri kojoj je tačka upoređivanja O_1 snatrana nepomičnom, kazuje da se posmatrano čvrsto telo kreće oko svoga težišta tako kao kad bi to težište bilo nepomično. To kretanje zavisi samo od momenta zaokretanja \mathfrak{M} spoljnih sila, a ne zavisi od njihove rezultante \mathfrak{K} .

Jednačine (17) i (23), uzete zajedno, izražavaju teoremu o nezavisnosti translatornog i rotacionog kretanja jednog od drugog. Prema (17), redukuje se problem kretanja slobodnog čvrstog tela na problem slobodne materijalne tačke, a, prema (23), problem rotacionog kretanja čvrstog tela oko njegovog težišta na problem obrtanja čvrstog tela oko jedne njegove nepomične tačke. Zato nismo u prvom odeljku ove knjige, pri opisivanju kretanja težišta nebeskih tela, morali voditi računa o njihovim rotacijama oko težišta, a ne moramo ni sada, proučavajući kretanja nebeskih tela oko njihovih težišta, uzimati u obzir njihova translatorna kretanja, sem ako ova ne menjaju momenat zaokretanja spoljnih sila.

Jednačine (17) i (23) ne važe samo za slučaj čvrstoga tela, nego i za opštiji slučaj materijalnog sistema koji zadovoljava pretpostavke učinjene u §39, no u ovom slučaju, kada posmatrani materijalni sistem ima više od šest stepena slobode, nije njegovo kretanje određeno spomenutim dvema vektorskim jednačinama.

§ 43. Upotreba pokretnih koordinatnih sistema. Istim načinom kojim smo iz (10) izveli jednačinu (14), sleduje iz (23)

$$\frac{d}{dt} \sum m_i [\tau_i \mathbf{v}_i] = \mathfrak{M} \quad (24)$$

gde \mathbf{v}_i predstavlja vektor brzine materijalne tačke m_i obzirom na koordinatni sistem $X-Y-Z$ koji ćemo, od sada, zvati ukratko „mirujućim“, jer se u njemu sve tako dešava kao kad bi, zaista, mirovao u prostoru. Iz toga razloga ćemo kretanja i brzine obzirom na taj sistem zvati apsolutnima.

Vektor

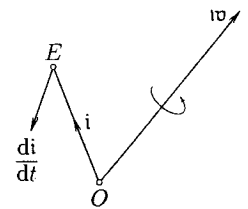
$$\mathfrak{G} = \sum m_i [\tau_i \mathbf{v}_i] \quad (25)$$

predstavlja nam, prema napred ugovorenom, apsolutni impuls obrtanja uočenog materijalnog sistema obzirom na tačku O pa je, prema prethodnom,

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{M}. \quad (26)$$

Često puta je ne samo korisno, nego potrebno da pri našim razmatranjima upotrebimo koordinatni sistem $x-y-z$ koji se obrće prema mirujućem koordinatnom sistemu. Pri tome ćemo pretpostaviti da se početak pokretnog koordinatnog sistema $x-y-z$ poklapa sa početkom O mirujućeg koordinatnog sistema $X-Y-Z$ i da onaj pokretni sistem vrši u uočenom trenutku t prema mirujućem sistemu rotaciju koja, prema učinjenoj pretpostavci, mora sledovati oko jedne trenutne ose obrtanja koja prolazi kroz tačku O . Ta rotacija neka bude predstavljena vektorom ω , t.j. taj vektor neka pada u trenutnu osu obrtanja, neka bude naperen na onu stranu te ose sa koje, posmatrano, obrtanje sleduje u pozitivnom smislu, t.j. protivno kazaljci na satu, a moduo w vektora ω neka bude jednak trenutnoj ugaoj brzini obrtanja.

Neka i, j, k predstavljaju jedinične vektore u pravcu osa x, y, z , onda će, usled obrtanja pokretnog sistema, krajnje tačke tih vektora imati u trenutku t brzine koje će, kao što to sleduje iz sl. 16, biti predstavljene ovim obrascima:



СЛИКА 16

$$\frac{di}{dt} = [\mathfrak{w} i]; \quad \frac{dj}{dt} = [\mathfrak{w} j]; \quad \frac{d\mathfrak{f}}{dt} = [\mathfrak{w} \mathfrak{f}]. \quad (27)$$

Obrazujemo li skalarni vektorski proizvod $(\mathfrak{G} i)$, onda je, po poznatom pravilu za diferencijaciju takvog proizvoda,

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{G} i) = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} i + \mathfrak{G} \frac{di}{dt},$$

t.j., zbog prethodnih jednačina,

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} i = \frac{d}{dt}(\mathfrak{G} i) - \mathfrak{G}[\mathfrak{w} i]. \quad (28)$$

Pomnožimo li jednačinu (26) skalarno sa i , onda dobivamo zbog (28)

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{G} i) - \mathfrak{G}[\mathfrak{w} i] = (\mathfrak{M} i). \quad (29)$$

Dve dalje jednačine istog oblika dobivaju se zamenjujući i sa j odnosno sa \mathfrak{f} .

Označimo sa G_1, G_2, G_3 koordinate vektora \mathfrak{G} obzirom na pokretni koordinatni sistem, sa w_1, w_2, w_3 koordinate vektora \mathfrak{w} , a sa M_1, M_2, M_3 koordinate vektora \mathfrak{M} , onda je

$$\mathfrak{G} = G_1 i + G_2 j + G_3 \mathfrak{f} \quad (30)$$

$$\mathfrak{w} = w_1 i + w_2 j + w_3 \mathfrak{f} \quad (31)$$

$$\mathfrak{M} = M_1 i + M_2 j + M_3 \mathfrak{f}. \quad (32)$$

Uzme li se još u obzir da je, po poznatom pravilu vektorskog računa,

$$\mathfrak{G}[\mathfrak{w} i] = \begin{vmatrix} G_1 & G_2 & G_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

onda dobivamo, mesto jednačine (29) i onih dveju sličnih koje nismo napisali, ove tri jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{dG_1}{dt} + w_2 G_3 - w_3 G_2 &= M_1 \\ \frac{dG_2}{dt} + w_3 G_1 - w_1 G_3 &= M_2 \\ \frac{dG_3}{dt} + w_1 G_2 - w_2 G_1 &= M_3. \end{aligned} \quad (33)$$

§ 44. Ojlerove jednačine. Ako je posmatrani materijalni sistem jedno čvrsto telo, onda je od koristi pokretni koordinatni sistem $x-y-z$, o kojem je u prošlom paragrafu bila reč, vezati sa tim čvrstim telom. U tom slučaju predstavlja vektor \mathfrak{w} , u isti mah, i trenutnu rotacionu brzinu čvrstoga tela obzirom na mirujući koordinatni sistem pa je, zbog toga, apsolutna brzina materijalne tačke m_i predstavljena izrazom:

$$\mathfrak{v}_i = [\mathfrak{w} \tau_i]. \quad (34)$$

Zato je impuls obrtanja, predstavljen obrascem (25), sada jednak

$$\mathfrak{G} = \sum m_i [\tau_i [\mathfrak{w} \tau_i]]. \quad (35)$$

U slučaju čvrstoga tela, u kojemu je raspored masa kontinuiran, treba gornji zbir zameniti integralom

$$\mathfrak{G} = \int [\tau [\mathfrak{w} \tau]] dm \quad (36)$$

izvršenim preko celokupne mase uočenog čvrstoga tela.

Kako je, prema poznatom obrascu vektorskog računa,

$$[\mathfrak{a}[\mathfrak{b} \mathfrak{c}]] = \mathfrak{b}(\mathfrak{c} \mathfrak{a}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a} \mathfrak{b}),$$

to dobivamo:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{w} \int (\tau \tau) dm - \int \tau (\mathfrak{w} \tau) dm. \quad (37)$$

Označimo li koordinate vektora položaja τ u pokretnom koordinatnom sistemu sa x, y, z , to je:

$$\tau = x i + y j + z \mathfrak{f}; \quad (\tau \tau) = x^2 + y^2 + z^2; \quad (\mathfrak{w} \tau) = w_1 x + w_2 y + w_3 z.$$

Stavimo li ove obrasce u vektorsku jednačinu (37), to se ova raspada, uzimajući u obzir obrazac (30), u ove tri skalarnе jednačine:

$$\begin{aligned} G_1 &= w_1 \int (y^2 + z^2) dm - w_2 \int xy dm - w_3 \int zx dm \\ G_2 &= w_2 \int (z^2 + x^2) dm - w_3 \int yz dm - w_1 \int xy dm \\ G_3 &= w_3 \int (x^2 + y^2) dm - w_1 \int zx dm - w_2 \int yz dm. \end{aligned} \quad (38)$$

Ako je pokretni koordinatni sistem $x-y-z$ položen i vezan tako sa uočenim čvrstim telom da se koordinatne ose podudaraju sa glavnim osama inercije toga tela ili, još tačnije rečeno, sa centralnim osama inercije, budući da početak toga koordinatnog sistema leži u samom težištu uočenoga tela, to su onda deviacioni momenti toga tela obzirom na koordinatni sistem jednaki nuli, dakle

$$\int yz dm = 0; \quad \int zx dm = 0; \quad \int xy dm = 0, \quad (39)$$

a glavni momenti inercije predstavljeni ovim izrazima:

$$A = \int (y^2 + z^2) dm; \quad B = \int (z^2 + x^2) dm; \quad C = \int (x^2 + y^2) dm. \quad (40)$$

Zbog svega ovoga, dobivamo mesto jednačina (38) ove:

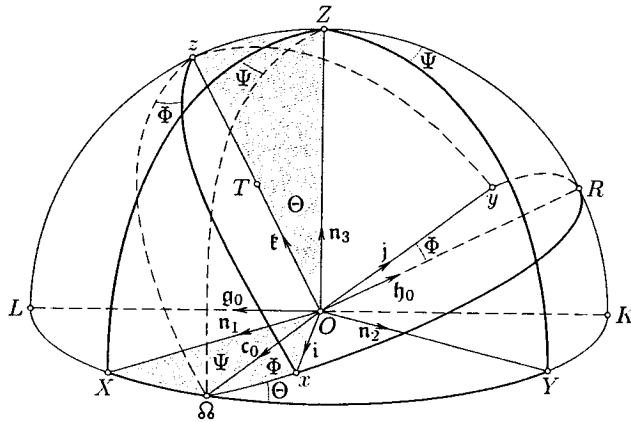
$$G_1 = A w_1; \quad G_2 = B w_2; \quad G_3 = C w_3. \quad (41)$$

Stavljajući ovo u jednačine (33), dobivamo:

$$\begin{aligned} A \frac{dw_1}{dt} + (C - B) w_2 w_3 &= M_1 \\ B \frac{dw_2}{dt} + (A - C) w_3 w_1 &= M_2 \\ C \frac{dw_3}{dt} + (B - A) w_1 w_2 &= M_3. \end{aligned} \quad (42)$$

Ove jednačine, izvedene (1758) od OJLERA, nose njegovo ime.

- § 45. **Ojlerovi uglovi.** Zamislimo da smo oko zajedničkog početka O mirujućeg i pokretnog koordinatnog sistema, kao centra, opisali jednu loptu, onda prodiru pozitivne grane koordinatnih osa tih dvaju sistema površinu te lopte u tačkama X, Y, Z odnosno x, y, z (sl. 17) koje nam, kao temena, ograničavaju dva sferna trougla XYZ i xyz kojima su i strane i uglovi jednaki po 90° . Koordinatne ravni $X-Y$ i $x-y$ seku se međusobno duž prave $O\Omega$ koja prolazi kroz tačku O a koja se zove *linijom čvorova*. Ona prodorna tačka Ω te prave sa spomenutom loptom, koja zadovoljava uslovu da se pozitivnim smislom obilaženja $x-y$ prolazi kroz tu tačku na pozitivnu stranu ravni $X-Y$, t.j. onu na koju je naparena pozitivna grana ose Z , zove se *uzlazni čvor*, a pravac $O\Omega$ pozitivna grana linije čvorova. Ravan položena kroz OZ i Oz , koju smo odabrali za ravan slike, stoji normalno na liniji čvorova. Ugao Ψ zahvaćen između ose X i linije čvorova zove se *precesioni ugao*, nalegli ugao Φ , zahvaćena između linije čvorova i ose x , zove se *rotacioni ugao*, a ugao Θ zahvaćen osama Z i z zove se *nutacioni ugao*. To su tri Ojlerova ugla koja određuju položaj pokretnog koordinatnog sistema u mirujućem sistemu.



Слика 17

- § 46. **Polhodija i herpolhodija.** Označimo li, kao i do sada, jedinične vektore u pravcu osa x, y, z pokretnog koordinatnog sistema sa i, j, k , a jedinične vektore u pravcu osa X, Y, Z mirujućeg koordinatnog sistema sa n_1, n_2, n_3 , onda je vektor rotacije ω u pokretnom koordinatnom sistemu predstavljen obrascem

$$\omega = w_1 i + w_2 j + w_3 k, \quad (43)$$

a u mirujućem sistemu obrascem

$$\omega = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + \omega_3 n_3, \quad (44)$$

gde nam w_1, w_2, w_3 odnosno $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ predstavljaju koordinate vektora ω u pokretnom odnosno u mirujućem koordinatnom sistemu. Ojlerovi uglovi Ψ, Φ, Θ daju nam vezu između oba ta sistema. Koordinate w_1, w_2, w_3 odnosno $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ izražićemo pomoću Ojlerovih uglova i njihovih vremenskih izvoda na ovaj način. Sferni

trougao XYZ (sl. 17) može se dovesti do poklapanja sa trouglom xyz pomoću tri rotacije. Zaokrenuvši trougao XYZ oko ose Z , t.j. oko jediničnog vektora n_3 , za ugao Ψ , doći će on u položaj $\Omega K Z$, zaokrenuvši ga, iza toga, oko linije čvorova $O\Omega$ za ugao Θ , dovešćemo ga u položaj $\Omega R z$, a zaokrenuvši ga, na posletku, oko Oz , t.j. oko jediničnog vektora k , za ugao Φ , stići će on, zaista, u svoj konačni položaj xyz . Sva ta zaokretanja sledovala su u pozitivnom smislu, obrnuto skazaljki na satu.

Označimo sa

$$\Psi' = \frac{d\Psi}{dt}; \quad \Theta' = \frac{d\Theta}{dt}; \quad \Phi' = \frac{d\Phi}{dt}$$

vremenske izvode Ojlerovih uglova, sa c_0 jedinični vektor koji pada u pravac pozitivne grane linije čvorova oko koje smo izvršili drugu od gornjih rotacija, to je rezultujuća rotacija ω koja odgovara vremenskim promenama Ψ', Θ', Φ' , Ojlerovih uglova predstavljena sa

$$\omega = \Psi' n_3 + \Theta' c_0 + \Phi' k. \quad (45)$$

Označimo sa h_0 jedinični vektor pravca OR , to sleduje iz sl. 17

$$\begin{aligned} \Psi' n_3 &= (\Psi' \cos \Theta) k + (\Psi' \sin \Theta) h_0 \\ (\Psi' \sin \Theta) h_0 &= (\Psi' \sin \Theta \sin \Phi) i + (\Psi' \sin \Theta \cos \Phi) j \\ \Theta' c_0 &= (\Theta' \cos \Phi) i - (\Theta' \sin \Phi) j, \end{aligned}$$

t.j.

$$\begin{aligned} \omega &= (\Psi' \sin \Theta \sin \Phi + \Theta' \cos \Phi) i \\ &\quad + (\Psi' \sin \Theta \cos \Phi - \Theta' \sin \Phi) j + (\Psi' \cos \Theta + \Phi') k. \end{aligned} \quad (46)$$

Istim načinom dobivamo, ako sa g_0 označimo jedinični vektor pravca OL ,

$$\begin{aligned} \Theta' c_0 &= (\Theta' \cos \Psi) n_1 + (\Theta' \sin \Psi) n_2 \\ \Phi' k &= (\Phi' \cos \Theta) n_3 + (\Phi' \sin \Theta) g_0 \\ (\Phi' \sin \Theta) g_0 &= (\Phi' \sin \Theta \sin \Psi) n_1 - (\Phi' \sin \Theta \cos \Psi) n_2, \end{aligned}$$

t.j. zbog (45)

$$\begin{aligned} \omega &= (\Theta' \cos \Psi + \Phi' \sin \Theta \sin \Psi) n_1 \\ &\quad + (\Theta' \sin \Psi - \Phi' \sin \Theta \cos \Psi) n_2 + (\Psi' + \Phi' \cos \Theta) n_3. \end{aligned} \quad (47)$$

Iz (43) i (46) sleduje

$$\begin{aligned} w_1 &= \Psi' \sin \Theta \sin \Phi + \Theta' \cos \Phi \\ w_2 &= \Psi' \sin \Theta \cos \Phi - \Theta' \sin \Phi \\ w_3 &= \Psi' \cos \Theta + \Phi' \end{aligned} \quad (48)$$

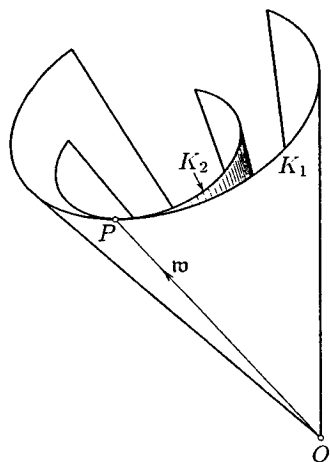
a iz (44) i (47)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Theta' \cos \Psi + \Phi' \sin \Theta \sin \Psi \\ \omega_2 &= \Theta' \sin \Psi - \Phi' \sin \Theta \cos \Psi \\ \omega_3 &= \Psi' + \Phi' \cos \Theta. \end{aligned} \quad (49)$$

Ako su Ojlerovi uglovi dati kao funkcije vremena t , onda nam obrasci (48) i (49) predstavljaju, ako u njih stavimo jednu proizvoljnu odabranu određenu vrednost t , koordinate jedne te iste tačke: krajuje tačke P rotacionog vektora ω . Smatrano li

sada t kao promenljivo, to nam gornji obrasci predstavljaju dve razne krive: obrascima (48) predstavljena je ona kriva koju opisuje, u toku vremena, krajnja tačka P rotacionog vektora ω u pokretnom, dakle sa pokretnim telom vezanom koordinatnom

- * sistemu; ta se kriva zove *polhodijsa*. Obrascima (49) predstavljena je ona kriva koju tačka P opisuje u mirujućem sistemu, t.j. u prostoru; ova kriva zove se *herpolhodijsa*. Smatramo li ω za vektor položaja tačke P , to je (48) vektorska jednačina polhodijsa, a (49) vektorska jednačina herpolhodijsa. Vektor rotacije ω opisuje, prema tome, u toku vremena, u uočenom pokretnom telu jedan konus; direktrisa toga konusa je polhodijsa, a vrh njegov tačka O . Taj se konus zove *konus polhodijsa*. Vektor rotacije ω opisuje u prostoru jedan konus kojemu je direktrisa herpolhodijsa, a vrh tačka O ;
- * taj se konus zove *konus herpolhodijsa*. Konus herpolhodijsa je nepokretan u prostoru,



СЛИКА 18

a konus polhodijsa nepokretan u posmatranom čvrstom telu, a pokretan u prostoru. U svakom trenutku vremena imaju ta dva konusa jednu zajedničku izvodnicu, vektor ω trenutne rotacije, t.j. trenutnu osu rotacije. Oko te ose obrće se, u tom momentu, uočeno čvrsto telo, a s njim i konus polhodijsa da bi se, u idućem trenutku, naredna izvodnica konusa polhodijsa poklopila sa narednom izvodnicom konusa herpolhodijsa i preuzela ulogu trenutne ose rotacije. Odatle sleduje da se oba konusa u svakom trenutku dodiruju duž njihove zajedničke izvodnice, drugim rečima, da se konus polhodijsa kotrlja bez klizanja po konusu herpolhodijsa. Zato možemo rotaciono kretanje uočenog čvrstog tela predstaviti i na ovaj način. Po konusu K_1 herpolhodijsa (sl. 18), nepokretnom u prostoru, kotrlja se bez klizanja konus K_2 polhodijsa, noseći sa sobom uočeno čvrsto telo.

§ 47. Funkcija sila atrakcije konačnih tela. U prvom odeljku ove knjige pretpostavili smo da se nebeska tela privlače međusobno tako kao kada bi masa svakog od tih tela bila koncentrisana u njegovom težištu. Sada je potrebno da ispitamo opravdanost te pretpostavke i odstupanje njeno od stvarnosti. Uočimo, dakle, jedno telo proizvoljnih dimenzija; o obliku i rasporedu mase toga tela ne moramo, za sada, činiti nikakvu naročitu pretpostavku. Položimo u težište toga tela početak O ortogonalnog koordinatnog sistema $x-y-z$ (sl. 19), a orijentišimo taj koordinatni sistem tako da se njegove ose poklapaju sa glavnim osama inercije uočenoga tela. Glavni momenti inercije toga tela neka budu označeni sa A, B, C . U tački S , dovoljno udaljenoj od uočenoga tela, neka se nalazi koncentrisana masa M . Pitajmo kakvom silom privlači, prema Njutnovom zakonu gravitacije, uočeno telo masu M . Označimo li sa \mathfrak{R} vektor položaja tačke S prema početku O našeg koordinatnog sistema, a sa τ vektor položaja proizvoljne tačke M ili elementa mase dm uočenoga tela, to je Njutnova sila $d\mathfrak{K}$ kojom element mase dm privlači masu M predstavljena obrascem:

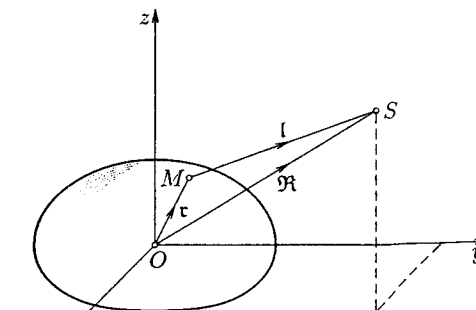
$$d\mathfrak{K} = -f \frac{M}{l^3} l dm, \quad (50)$$

gde f predstavlja gravitacionu konstantu, l vektor položaja tačke S u odnosu na tačku M , a l moduo toga vektora. Pri tome je

$$l = \mathfrak{R} - \tau. \quad (51)$$

Celokupna privlačna sila uočenoga tela na masu M predstavljena je vektorskim integralom

$$\mathfrak{K} = - \int_m f \frac{M}{l^3} l dm \quad (52)$$



СЛИКА 19

izvršenim preko celokupne mase m uočenoga tela.

Vektor $-f(M/l^3)l dm$ može, kao što smo pokazali n.pr. u §21, biti predstavljen kao gradienat skalara $fM dm/l$ pa je zato

$$\mathfrak{K} = \int_m \text{grad} \frac{fM dm}{l}.$$

Kako je, sasvim opšte, proizvoljan, pa i beskonačan, zbir gradienata proizvoljnih skalara jednak gradientu zbira tih skalara, to je

$$\mathfrak{K} = \text{grad} \int_m \frac{fM dm}{l}$$

ili, ako stavimo

$$U = fM \int \frac{dm}{l}, \quad (53)$$

$$\mathfrak{K} = \text{grad} U. \quad (54)$$

Iz (51) sleduje

$$l^2 = \mathfrak{R}^2 - 2(\mathfrak{R}\tau) + \tau^2.$$

Pošto je $l^2 = l^2$; $\mathfrak{R}^2 = R^2$; $\tau^2 = r^2$, gde R odnosno r označava moduo od \mathfrak{R} odnosno τ , to je

$$l^2 = R^2 - 2(\mathfrak{R}\tau) + r^2.$$

Iz ove skalarnе jednačine sleduje

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left\{ 1 - 2 \frac{(\mathfrak{R}\tau)}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right\}^{-1/2} \quad (55)$$

Sada činimo pretpostavku da je tačka S toliko udaljena od uočenoga tela da više potencije od druge razlomka r/R možemo zanemariti prema jedinici. Razvijemo li gorući izraz u red, to dobivamo, zanemarujući spomenute potencije i uzimajući u obzir da je zbog $r < R$, $(\mathfrak{R}\tau) \leq Rr$, $(\mathfrak{R}\tau) < R^2$,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{(\mathfrak{R}\tau)}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{8} \frac{4(\mathfrak{R}\tau)^2}{R^4} \right\}. \quad (56)$$

Stavljajući ovo u obrazac (53), dobivamo:

$$U = \frac{fM}{R} \int_m dm + \frac{fM}{R^3} \left(\mathfrak{A} \int_m \tau dm \right) - \frac{fM}{2R^3} \int_m r^2 dm + \frac{3fM}{2R^5} \int_m (\mathfrak{A}\tau)^2 dm. \quad (57)$$

Integral

$$\int_m dm = m$$

pretstavlja nam celokupnu masu uočenoga tela. Pošto tačka O , na koju se odnose vektori položaja τ , leži u samom težištu uočenoga tela, to je

$$\int_m \tau dm = 0.$$

Zato je

$$U = \frac{fMm}{R} - \frac{1}{2} \frac{fM}{R^3} \int_m r^2 dm + \frac{3fM}{2R^5} \int_m (\mathfrak{A}\tau)^2 dm. \quad (58)$$

Označimo sa x, y, z koordinate tačke M , a sa X, Y, Z koordinate tačke S , to je

$$\begin{aligned} \tau &= xi + yj + z\mathfrak{k} \\ \mathfrak{A} &= Xi + Yj + Z\mathfrak{k}, \end{aligned} \quad (59)$$

dakle

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2; & R^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2; & (\mathfrak{A}\tau) &= Xx + Yy + Zz \\ (\mathfrak{A}\tau)^2 &= X^2x^2 + Y^2y^2 + Z^2z^2 + 2XYxy + 2YZyz + 2ZXzx. \end{aligned}$$

Stavimo li ove obrasce u (58), to će iz njega članovi sa xy, yz, zx iščeznuti, jer, pošto su koordinatne ose, u isti mah, glavne ose inercije, to je

$$\int_m zy dm = \int_m yz dm = \int_m zx dm.$$

Zato je

$$\begin{aligned} U &= \frac{fMm}{R} - \frac{1}{2} \frac{fM}{R^5} (X^2 + Y^2 + Z^2) \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm \\ &\quad + \frac{3fM}{2R^5} \left\{ X^2 \int_m x^2 dm + Y^2 \int_m y^2 dm + Z^2 \int_m z^2 dm \right\}, \end{aligned}$$

t.j.

$$\begin{aligned} U &= \frac{fMm}{R} + \frac{1}{2} \frac{fM}{R^5} \left\{ X^2 \int_m (2x^2 - y^2 - z^2) dm \right. \\ &\quad \left. + Y^2 \int_m (2y^2 - z^2 - x^2) dm + Z^2 \int_m (2z^2 - x^2 - y^2) dm \right\}. \end{aligned}$$

Integrali

$$A = \int_m (y^2 + z^2) dm; \quad B = \int_m (z^2 + x^2) dm; \quad C = \int_m (x^2 + y^2) dm \quad (60)$$

pretstavljaju nam momente inercije uočenoga tela obzirom na koordinatne ose, t.j. glavne momente inercije. Zato je:

$$\begin{aligned} U &= \frac{fMm}{R} + \frac{1}{2} \frac{fMX^2}{R^5} (B + C - 2A) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{fMY^2}{R^5} (C + A - 2B) + \frac{1}{2} \frac{fMZ^2}{R^5} (A + B - 2C). \end{aligned} \quad (61)$$

Ovaj izraz pretstavlja nam, prema (54), funkciju sila atrakcije uočenog tela; njegov gradienat daje nam silu \mathfrak{K} kojom uočeno telo privlači masu M . Kad bi bilo

$$A = B = C,$$

t.j. kada bi elipsoid inercije uočenoga tela bio lopta, onda bi bilo

$$U = f \frac{Mm}{R}$$

dakle

$$\mathfrak{K} = \text{grad} U = -f \frac{Mm}{R^3} \mathfrak{A},$$

t.j. uočeno telo privlačilo bi masu M tako kao kad bi celokupna masa m toga tela bila koncentrisana u njegovom težištu. Takvu smo pretpostavku bili učinili u prvom odeljku ove knjige, pri ispitivanju translatornog kretanja nebeskih tela. Ona bi bila strogo ispunjena kada bi ta tela bila potpune lopte, a sagrađena iz koncentričnih slojeva od kojih bi svaki za sebe bio homogen. Iako taj slučaj nije strogo ostvaren u prirodi, odstupanje od njega oseća se samo kod kretanja našeg Meseca, a iz tih odstupanja može se odrediti spljoštenost naše Zemlje, o čemu će još biti govora.

ГЛАВА ЈЕДНАЕСТА

Rotacija nebeskih tela
u fluidnom stanju

§ 48. **Zonalna rotacija.** Neki članovi našeg planetskog sistema nalaze se još u fluidnom stanju, t.j. u tečnom i gasovitom. I naša Zemlja nalazila se, pre no što se pokrila čvrstom korom, u takvom stanju. Zato je od interesa ispitati, na koji način mogu takva nebeska tela da rotiraju oko jedne nepromenjene upravljene ose u prostoru. Pri tome ćemo pretpostaviti da se medium iz kojeg je takvo telo sagrađeno pokorava zakonima fluida koji ne podleži unutrašnjem trenju i viskozitetu. Pod tom pretpostavkom, važi za svaki elementarni delić uočenoga tela jednačina hidrodinamike:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathfrak{P} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (1)$$

Pri tome označava \mathbf{v} vektor brzine, \mathfrak{P} silu koja deluje na jedinicu mase, ρ gustinu, p pritisak, a t vreme.

Pored te osnovne jednačine, važi i jednačina kontinuiteta

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

i karakteristična jednačina. Ova karakteristična jednačina ima za idealne gasove ovaj oblik:

$$pv = R_0 \theta, \quad (3)$$

gde v označava zapreminu jedinice mase, R_0 gasnu konstantu, a θ apsolutnu temperaturu. Kako je $v = 1/\rho$, to možemo karakterističnoj jednačini dati i ovaj oblik:

$$F(p, \rho, \theta) = 0. \quad (4)$$

Za nestišljive tečnosti važi mesto (2) ova jednačina:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

a mesto (3) ova:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + ku}, \quad (6)$$

gde k označava koeficijent dilatacije, a ρ_0 gustinu pri temperaturi $u = 0$.

U našim ispitivanjima zadovoljićemo se, jednostavnosti radi, sa specijalnim oblicima karakteristične jednačine. Za izotermične promene gasova, t.j. takve pri konstantnoj temperaturi $\theta = \theta_0$, dobivamo, kao karakterističnu jednačinu,

$$p = R_0 \theta_0 \rho, \quad (7)$$

a za adiabatične promene ovu:

$$p = p_0 \rho^{c'/c}. \quad (8)$$

gde c odnosno c' označava specifičnu toplotu pri konstantnoj zapremini, odnosno pri konstantnom pritisku. Obe jednačine (7) i (8) ovoga su oblika:

$$\rho = f(p) \quad (9)$$

pa ćemo se u buduće služiti samo karakterističnom jednačinom takvoga oblika. Uvedimo u naše račune skalarnu funkciju

$$V(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{f}, \quad (10)$$

to je

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Uzmemo li još u obzir da se sila \mathfrak{P} , kao gravitaciona sila, može takođe predstaviti kao gradienat jedne skalarne funkcije sila U , to dobivamo, ako stavimo

$$U - V = Q \quad (11)$$

mesto (1) ovu jednačinu:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{grad } Q. \quad (12)$$

Odaberemo li u osi rotacije, oko koje se, prema učinjenoj pretpostavci, uočeno nebesko telo obrće, jednu stalnu tačku O pa označimo li sa τ vektor položaja uočenog delića u odnosu na tačku O , a sa \mathbf{n} jedinični vektor pozitivne grane ose rotacije, to je

$$\mathbf{v} = w[\mathbf{n} \tau]. \quad (13)$$

Jedinični vektor \mathbf{n} je, prema učinjenoj pretpostavci, stalan vektor, no skalarna vrednost w ugaone brzine može za razne delove uočenoga tela biti različita, dakle biti funkcija od τ ; od nje zahtevamo samo to da ne zavisi od vremena. Zato je

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = w \left[\mathbf{n} \frac{d\tau}{dt} \right] = w[\mathbf{n} \mathbf{v}] = w^2[\mathbf{n}[\mathbf{n} \tau]]. \quad (14)$$

Spustimo li iz položaja M uočenog delića normalu MS na osu rotacije pa označimo li vektor \overrightarrow{SM} sa \mathfrak{R} , to je

$$[\mathbf{n}[\mathbf{n} \tau]] = -\mathfrak{R}. \quad (15)$$

Označimo li sa R moduo vektora \mathfrak{R} , to valja pri određivanju gradienta od R imati u vidu da su, u ovom slučaju, ekviskalarne površine kružni cilindri sa osom

OS , da gradienat stoji normalno na tim površinama, a da mu je moduo jednak $\partial R/\partial R = 1$. Zato je

$$\text{grad } R = \frac{\mathfrak{R}}{R}. \quad (16)$$

Iz (12), (14), (15) i (16) sleduje:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -w^2 R \text{ grad } R = \text{grad } Q. \quad (17)$$

Pomnožimo li ovu jednačinu skalarno sa jednim vektorom $d\mathbf{f}$ koji neka predstavlja jedno proizvoljno elementarno pomeranje, to dobivamo

$$\text{grad } Q d\mathbf{f} = -w^2 R \text{ grad } R d\mathbf{f}. \quad (18)$$

Kako je, sasvim opšte,

$$\text{grad } W d\mathbf{f} = dW,$$

gde dW označava promenu skalara W koja odgovara pomeranju $d\mathbf{f}$, to je

$$dQ = -w^2 R dR. \quad (19)$$

U ovoj jednačini stoji levo egzaktni jedan diferencijal pa zato mora i $w^2 R dR$ predstavljati jedan egzaktni diferencijal, t.j. w^2 sme da bude zavisno samo od R , pa mora da bude funkcija oblika

$$w = F(R). \quad (20)$$

Stavimo li, dakle,

$$\omega^2 R = \Phi'(R), \quad (21)$$

to je zbog (19)

$$dQ + \Phi'(R) dR = 0$$

odakle sleduje integracijom, uzimajući u obzir (11),

$$U - V + \Phi(R) = \text{const}. \quad (22)$$

Nivoske površine, t.j. površine jednakog pritiska dobivaju se dajući veličini V jednu stalnu vrednost. Te su površine predstavljene ovom jednačinom:

$$U + \Phi(R) = C. \quad (23)$$

Iz prethodnog sleduje da uočeno fluidno nebesko telo može, zaista, vršiti rotaciono kretanje oko jedne stalno upravljene ose u prostoru, ali tada ugaona brzina w može biti samo funkcija od R . Pošto, dakle, jednoj određenoj vrednosti od R odgovara jedna određena vrednost od w , to imaju svi delići koji se nalaze na jednom te istom kružnom cilindru, kojega se osa poklapa sa osom rotacije. jednu te istu ugaonu brzinu. Svaki takav cilindar rotira, dakle, kao kakva čvrsta materijalna površina, oko svoje ose, a svaki takav cilindar ima svoju zasebnu ugaonu brzinu. Spolja posmatrano, rotira uočeno nebesko telo tako da svaki njegov uporednik, presek površine nebeskog tela sa jednim takvim cilindrom, ima svoju zasebnu ugaonu brzinu. Takva rotacija nebeskih tela, kakvu vrši, kao što smo već spomenuli naše Sunce, zove se zonalna rotacija.

§ 49. Apelova teorema. Pri zonalnoj rotaciji, kakvu smo upoznali u prošlom paragrafu, pojavljuju se između pojedinih cilindričnih slojeva, koji se obrću raznom ugaonom brzinom, sile trenja koje će biti proporcionalne gradientu tih brzina, dakle izvodu $F'(R)$. Te sile će težiti da izjednače ugaone brzine pojedinih slojeva, ali će, pošto svakim korakom na tom iznenađenju te sile postaju sve slabije, trebati, makar teoretski, beskonačno vreme dok se dođe do konačnog cilja. No ne samo teoretski, nego i stvarno, proteći će, zbog ogromne mase nebeskih tela, svakako izvanredno dugo vreme dok se sve rotacije izjednače. Onda će se nebesko telo, iako je još ostalo fluidalno, obrtati kao kakvo čvrsto telo. Ispitajmo pod kojim uslovima može nastupiti taj slučaj, pretpostavljajući da na uočeno nebesko telo ne dejstvuje nikakav spoljni momenat zaokretanja.

Postavljeno pitanje ispitao je APEL i, svojim odgovorom, postavio svoju teoremu. Mi ćemo se ovde poslužiti ŽARDECKOVIM dokazom te teoreme.

Iz jednačine (12) sleduje:

$$\text{rot } \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{rot grad } Q, \quad (24)$$

a pošto je rotacija gradienta uvek jednaka nuli, to je

$$\text{rot } \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0. \quad (25)$$

Obrće li se uočeno telo kao kakvo čvrsto, to je prema jednačini (34) prethodne glave

$$\mathbf{v} = [\mathbf{w} \boldsymbol{\tau}]. \quad (26)$$

Za sada ne smemo još tvrditi da je orijentacija ose rotacije stalna u prostoru; zato vektor \mathbf{w} može biti funkcija vremena, no u svakom trenutku jedan te isti za sve delove uočenog tela. Pod tim pretpostavkama sleduje iz (25) i (26)

$$\text{rot } \frac{d}{dt} [\mathbf{w} \boldsymbol{\tau}] = \text{rot } \left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \boldsymbol{\tau} \right] + \text{rot } \left[\mathbf{w} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \right] = 0, \quad (27)$$

t.j. pošto je $d\boldsymbol{\tau}/dt = \mathbf{v}$,

$$\text{rot } \left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \boldsymbol{\tau} \right] + \text{rot } [\mathbf{w} \mathbf{v}] = 0. \quad (28)$$

Označimo sa n_1, n_2, n_3 jedinične vektore u pravcu mirujućeg koordinatnog sistema, sa $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ koordinate vektora \mathbf{w} , a sa x, y, z koordinate vektora položaja $\boldsymbol{\tau}$, to je

$$\mathbf{w} = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + \omega_3 n_3; \quad \boldsymbol{\tau} = x n_1 + y n_2 + z n_3 \quad (29)$$

$$\left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \boldsymbol{\tau} \right] = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \frac{d\omega_1}{dt} & \frac{d\omega_2}{dt} & \frac{d\omega_3}{dt} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

t.j.

$$\left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \boldsymbol{\tau} \right] = \left(\frac{d\omega_2}{dt} z - \frac{d\omega_3}{dt} y \right) n_1 + \left(\frac{d\omega_3}{dt} x - \frac{d\omega_1}{dt} z \right) n_2 + \left(\frac{d\omega_1}{dt} y - \frac{d\omega_2}{dt} x \right) n_3$$

$$\operatorname{rot} \left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt} \tau \right] = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{d\omega_2}{dt} z - \frac{d\omega_3}{dt} y \right) & \left(\frac{d\omega_3}{dt} x - \frac{d\omega_1}{dt} z \right) & \left(\frac{d\omega_1}{dt} y - \frac{d\omega_2}{dt} x \right) \end{vmatrix}.$$

Pri diferencijacijama, naznačenih u prethodnoj determinanti, a prema napred rečenom, imaju se izvodi $d\omega_1/dt$, $d\omega_2/dt$, $d\omega_3/dt$ smatrati za nezavisne od x , y , z . Zato je

$$\operatorname{rot} \left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt} \tau \right] = \left(\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_1}{dt} \right) n_1 + \left(\frac{d\omega_2}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} \right) n_2 + \left(\frac{d\omega_3}{dt} + \frac{d\omega_3}{dt} \right) n_3,$$

t.j.

$$\operatorname{rot} \left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt} \tau \right] = 2 \frac{d\mathfrak{w}}{dt}. \quad (30)$$

Kako je, po jednom opštem pravilu vektorskoga računa,

$$[\mathfrak{w}[\mathfrak{w} \tau]] = (\tau \mathfrak{w}) \mathfrak{w} - w^2 \tau,$$

to je

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{w}[\mathfrak{w} \tau]] = \operatorname{rot}(\tau \mathfrak{w}) \mathfrak{w} - w^2 \operatorname{rot} \tau. \quad (31)$$

Pošto je rotor vektora položaja uvek jednak nuli, t.j.

$$\operatorname{rot} \tau = 0, \quad (32)$$

a sem toga

$$\operatorname{rot}(\tau \mathfrak{w}) \mathfrak{w} = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_1 & (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_2 & (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_3 \end{vmatrix},$$

to dobivamo, uzimajući u obzir da su koordinate ω_1 , ω_2 , ω_3 nezavisne od koordinata x , y , z ,

$$\operatorname{rot}(\tau \mathfrak{w}) \mathfrak{w} = 0 \quad (33)$$

t.j.

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{w}[\mathfrak{w} \tau]] = 0. \quad (34)$$

Iz (28), (30) i (34) sleduje

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = 0, \quad (35)$$

što znači da vektor \mathfrak{w} mora biti nezavisan od vremena.

U našem slučaju, gde se uočeno telo kreće kao čvrsto, važe Ojlerove jednačine (42), §44, u koje valja, zbog učinjene pretpostavke, staviti $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. Na taj način dobivamo

$$\begin{aligned} A \frac{dw_1}{dt} + (C - B)w_2w_3 &= 0 \\ B \frac{dw_2}{dt} + (A - C)w_3w_1 &= 0 \\ C \frac{dw_3}{dt} + (B - A)w_1w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Ovde nam w_1 , w_2 , w_3 predstavljaju koordinate vektora \mathfrak{w} u pokretnom koordinatnom sistemu kojega se ose poklapaju sa glavnim osama inercije uočena tela. I ako je vektor \mathfrak{w} nezavisan od vremena, ne moraju njegove koordinate w_1 , w_2 , w_3 u pokretnom koordinatnom sistemu biti konstantne nego samo njegov moduo w . On je dat ovom jednačinom:

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = w^2. \quad (37)$$

Pomnožimo jednačine (36) redom sa w_1 , w_2 , w_3 , pa obrazujmo njihov zbir, to dobivamo:

$$Aw_1 \frac{dw_1}{dt} + Bw_2 \frac{dw_2}{dt} + Cw_3 \frac{dw_3}{dt} = 0,$$

t.j. posle izvršene integracije,

$$Aw_1^2 + Bw_2^2 + Cw_3^2 = \text{const}. \quad (38)$$

Vektor \mathfrak{G} impulsa je, u našem slučaju, zbog odsustva spoljnog momenta, konstantan, a prema (41), §44, predstavljen ovim obrascem:

$$\mathfrak{G}_0 = Aw_1 \mathbf{i} + Bw_2 \mathbf{j} + Cw_3 \mathbf{k}.$$

Označimo li njegov moduo sa G_0 , to dobivamo kvadriranjem prednje jednačine:

$$A^2 w_1^2 + B^2 w_2^2 + C^2 w_3^2 = G_0^2. \quad (39)$$

Jednačine (37), (38) i (39) čine jedan sistem od tri jednačine pomoću kojih jednačina možemo veličine w_1 , w_2 , w_3 izraziti ostalim veličinama koje se pojavljuju u tima jednačinama i koje su sve same konstante. Zato moraju i w_1 , w_2 , w_3 biti konstantne veličine. Zato je

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{dw_2}{dt} = \frac{dw_3}{dt} = 0. \quad (40)$$

Zbog toga dobivamo mesto (36)

$$\begin{aligned} (C - B)w_2w_3 &= 0 \\ (A - C)w_3w_1 &= 0 \\ (B - A)w_1w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Ove tri jednačine mogu, ako su momenti inercije A , B , C različiti jedan od drugog, biti zadovoljene samo onda ako su dve od veličina w_1 , w_2 , w_3 , u isti mah, jednake nuli, t.j. ako se vektor rotacije \mathfrak{w} poklapa sa jednom od triju glavnih osa inercije. Sem toga mogu prednje jednačine i na taj način biti zadovoljene da su dve od veličina A , B , C međusobno jednake, n.pr. $A = B$, a da je komponenta vektora \mathfrak{w} normalna na ravan tih dveju glavnih osa inercije, dakle u odabranom primeru komponenta w_3 , jednaka nuli. U takvom slučaju degeneriše elipsoid inercije na

rotacioni elipsoid te vektor rotacije ω pada u ravan ekvatora tog rotacionog elipsoida pa se poklapa opet sa jednom od glavnih osa inercije. Ako su jednačine (41) zadovoljene tim da je $A = B = C$, onda elipsoid inercije postaje lopta pa se osa rotacije, kakogod ona bila orientisana, može smatrati za glavnu osu inercije. Iz svega toga sleduje Apelova teorema: *Rotacija fluidnog tela može imati samo onda karakter rotacije čvrstog ako ona sleduje oko jedne od glavnih osa inercije.*

§ 50. Uslovi ravnoteže. Obrće li se uočeno nebesko telo kao čvrsta celina oko jedne stalno upravljene ose konstantnom uglovnom brzinom

$$w = n, \quad (42)$$

onda možemo, kao što je to već učinjeno u §21, pokretni koordinatni sistem, vezan sa telom tako da se njegova osa z podudara sa osom rotacije, smatrati za nepomičan ali uzeti da na svaki delić tela dejstvuje, sem gravitacione sile \mathfrak{P} , centrifugalna sila \mathfrak{F} i Koriolisova sila \mathfrak{C} . Centrifugalna sila dejstvuje u pravcu vektora \mathfrak{R} definisanog u §49 te je, izračunata na jedinicu mase, predstavljena, prema (4), §21, a upotrebom gornjih oznaka, ovim obrascem:

$$\mathfrak{F} = n^2 \mathfrak{R}. \quad (43)$$

Istim načinom kao i u §21, možemo tu silu predstaviti kao gradienat skalara ovim obrascem:

$$\mathfrak{F} = \text{grad} \frac{1}{2} n^2 R^2. \quad (44)$$

Koriolisova sila na jedinicu mase predstavljena je obrascem

$$\mathfrak{C} = 2[\mathfrak{v} \omega]. \quad (45)$$

Mesto jednačine (1) dobivamo sada ovu:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{P} + \mathfrak{F} + \mathfrak{C} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (46)$$

Pitajmo sada za uslove ravnoteže, t.j. za one pod kojima će se svi delići uočena tela nalaziti u ravnoteži prema pokretnom koordinatnom sistemu. Tada mora brzina \mathfrak{v} proizvoljnog delića u odnosu na taj sistem biti jednaka nuli pa zato dobivamo iz (45) i (46) ovu jednačinu:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (47)$$

Kako je, prema onom što je rečeno u §48,

$$\mathfrak{P} = \text{grad} U, \quad (48)$$

to sleduje iz (47), (48) i (44)

$$\text{grad} U + \text{grad} \frac{1}{2} n^2 R^2 = \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

$$\text{grad} p = \rho \text{grad} \left(U + \frac{1}{2} n^2 R^2 \right).$$

Stavimo li, dakle,

$$W = U + \frac{1}{2} n^2 R^2, \quad (49)$$

to dobivamo

$$\text{grad} p = \rho \text{grad} W. \quad (50)$$

Pomnožimo li ovu jednačinu skalarno sa df , to dobivamo, istim načinom kao što smo izveli (19) iz (18),

$$dp = \rho dW. \quad (51)$$

Pri pomeranju duž jedne ekviskalarne površine skalara W , t.j. duž površine na kojoj je funkcija W gravitacionih i centrifugalnih sila konstantna, mora biti $dW = 0$, t.j. zbog (51) takođe $dp = 0$. Zato su ekvipotencijalne površine, u isti mah, i površine istoga pritiska. Zbog toga je

$$p = f(W) \quad (52)$$

$$\frac{dp}{dW} = f'(W),$$

t.j. zbog (51)

$$\rho = f'(W). \quad (53)$$

Ova jednačina kazuje da se, u slučaju ravnoteže, površine iste gustine poklapaju sa ekvipotencijalnim površinama.

Iz opšteg oblika (4) karakteristične jednačine, t.j. iz

$$F(p, \rho, \theta) = 0,$$

sleduje da je, u slučaju ravnoteže, na ekvipotencijalnoj površini, pošto je na njoj p i ρ konstantno, i temperatura θ jedna te ista, t.j. te su površine, u isti mah, i izotermične površine.

§ 51. Kleroova teorema. Iz pretpostavke da je naša Zemlja zauzela onaj oblik koji odgovara uslovu ravnoteže fluidnog nebeskog tela, izveo je Klero svoju teoremu o spljoštenosti naše Zemlje, sa kojom ćemo se sada upoznati. Iz prednjih uslova ravnoteže sleduje da Zemljina površina mora biti jedna ekvipotencijalna površina, predstavljena jednačinom:

$$W = W_0. \quad (54)$$

Pri tome je, prema (49),

$$W = U + \frac{1}{2} n^2 R^2. \quad (55)$$

Funkcija sila U atrakcije nebeskog tela na masu M , izvedena u §47. predstavljena je obrascem (61) tog paragrafa.

Za našu Zemlju važi, u velikoj meri, jednakost

$$A = B. \quad (56)$$

Stavimo li ovo u spomenuti obrazac (61) pa zamenimo li u ujetnu masu M sa jedinicom mase, t.j. stavimo li $M = 1$, a označimo li sada masu Zemlje sa M , t.j. za-

menimo li u onom obrascu m sa M , a radiusvektor R sa radiusvektorom Zemljine površine r , to dobivamo

$$U = f \frac{M}{r} + \frac{1}{2} f \frac{X^2 + Y^2 - 2Z^2}{r^5} (C - A). \quad (57)$$

Ovaj obrazac pretstavlja nam funkciju sila privlačne snage Zemljine na jedinicu mase koja se nalazi na mestu X, Y, Z Zemljine površine, pri čemu nam M pretstavlja celokupnu masu Zemlje.

Uvedimo geocentrične polarne koordinate, t.j. spomenuti radiusvektor r , geocentričnu latitudu φ i geografsku dužinu ψ , onda je

$$\begin{aligned} X &= r \cos \varphi \cos \psi \\ Y &= r \cos \varphi \sin \psi \\ Z &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (58)$$

Za otstojanje od ose rotacije u kakvom značenju se ono, pod oznakom R , pojavilo u obrascu (55), valja, pri upotrebi novih označenja, staviti

$$R = r \cos \varphi. \quad (59)$$

Sada dobiva obrazac (55) ovaj oblik:

$$W = f \frac{M}{r} + \frac{f}{2r^3} (C - A) (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{n^2 r^2}{2} \cos^2 \varphi. \quad (60)$$

Izvod ovog izraza po r daje ubrzanje teže u tački r, φ, ψ , a kako je to ubrzanje smatrano za pozitivno kada je napereno prema dole, t.j. u pravcu $-r$, to je

$$g = -\frac{\partial W}{\partial r} \quad (61)$$

t.j.

$$g = \frac{fM}{r^2} \left[1 + \frac{3C - A}{2r^2 M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{n^2 r^3}{fm} \cos^2 \varphi \right]. \quad (62)$$

Tražimo li ubrzanje teže na Zemljinoj površini, to možemo u prethodnoj zagradi, pošto su njen drugi i treći član maleni prema jedinici, r zameniti sa radiusom a Zemljinog ekvatora. Na taj način dobivamo

$$g = \frac{fM}{r^2} \left[1 + \frac{3C - A}{2a^2 M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{n^2 a^3}{fM} \cos^2 \varphi \right]. \quad (63)$$

Isto uprošćenje možemo izvršiti i u obrascu (60) ako onde stavimo $W = W_0$. Ako iz, na taj način dobivene, jednačine izračunamo r , dobivamo:

$$r = \frac{fM}{W_0} \left[1 + \frac{C - A}{2a^2 M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{n^2 a^3}{2fM} \cos^2 \varphi \right]. \quad (64)$$

Eliminišemo li, pomoću (64), r iz (63), dobivamo:

$$g = \frac{W_0^2}{fM} \left[1 + \frac{3C - A}{2a^2 M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{n^2 a^3}{fM} \cos^2 \varphi \right] \cdot \left[1 + \frac{C - A}{2a^2 M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{n^2 a^3}{2fM} \cos^2 \varphi \right]^{-2}. \quad (65)$$

Razvijemo li poslednju zagradu u red i zanemarimo li više potencije njenih sporednih članova, to dobivamo:

$$g = \frac{W_0^2}{fM} \left[1 + \frac{C - A}{2a^2 M} - \frac{2n^2 a^3}{fM} \right] \left[1 + \left(\frac{2n^2 a^3}{fM} - \frac{3C - A}{2a^2 M} \right) \sin^2 \varphi \right]. \quad (66)$$

Označimo sa g_a ubrzanje teže na ekvatoru, a sa g_p njeno ubrzanje na polovima, to dobivamo, stavljajući u (66) $\varphi = 0$, a zatim $\varphi = \frac{1}{2}\pi$,

$$g_a = \frac{W_0^2}{fM} \left(1 + \frac{C - A}{2a^2 M} - \frac{2n^2 a^3}{fM} \right) \quad (67)$$

$$g_p = (1 + \beta) g_a, \quad (68)$$

pri čemu smo stavili

$$\beta = \frac{2n^2 a^3}{fM} - \frac{3C - A}{2a^2 M}. \quad (69)$$

Zato je

$$\beta = \frac{g_p - g_a}{g_a}, \quad (70)$$

t.j.

$$g = g_a + (g_p - g_a) \sin^2 \varphi. \quad (71)$$

Jednačinu (64) možemo dovesti na ovaj oblik:

$$r = \frac{fM}{W_0} \left[1 + \frac{C - A}{2a^2 M} + \frac{n^2 a^3}{2fM} \right] \left[1 - \left(\frac{n^2 a^3}{2fM} + \frac{3C - A}{2a^2 M} \right) \sin^2 \varphi \right]. \quad (72)$$

Za $\varphi = 0$ postaje $r = a$, a za $\frac{1}{2}\pi$ postaje $r = c$ ako sa c označimo polarnu poluosu meridijanskog preseka Zemlje. Zato je

$$a = \frac{fM}{W_0} \left[1 + \frac{C - A}{2aM} + \frac{n^2 a^3}{2fM} \right] \quad (73)$$

$$c = a \left[1 - \left(\frac{n^2 a^3}{2fM} + \frac{3C - A}{2a^2 M} \right) \right]. \quad (74)$$

Stavimo li

$$\frac{n^2 a^3}{2fM} + \frac{3C - A}{2a^2 M} = v, \quad (75)$$

to sleduje iz (74)

$$v = \frac{a - c}{a} \quad (76)$$

a iz (72), (73) i (74)

$$r = a(1 - v \sin^2 \varphi). \quad (77)$$

Ovo je jednačina meridijanskog preseka Zemljinog koja, pri malom v , pretstavlja elipsu. Veličina v , pretstavljena obrascem (76), zove se Zemljina spljoštenost.

Iz jednačina (69) i (75) sleduje

$$v + \beta = \frac{5n^2 a^3}{2fM}, \quad (78)$$

t.j. uzevši u obzir (70),

$$v = \frac{5 n^2 a^3}{2 f M} - \frac{g_p - g_a}{g_a}. \quad (79)$$

Ova jednačina izražava Klerovu teoremu. Pomoću nje možemo, merenjem ubrzanja teže na ekvatoru i na polovima, odrediti spljoštenost v Zemlje. Pomoću takvih merenja i prednjeg obrasca dobilo se

$$v = \frac{1}{298}. \quad (80)$$

Spljoštenost Zemlje može se odrediti i direktnim premeravanjima Zemljine lopte, a kao što smo spomenuli u §47, i iz nejednakosti Mesečevog kretanja. Numeričke vrednosti za spljoštenost Zemlje dobivene na ta dva načina slažu sa vrlo dobro sa gore saopštenom vrednosti, što dokazuje da je Zemlja zauzela, zaista, onaj oblik koji odgovara hidrostatskoj ravnoteži.

ГЛАВА ДВАНАЕСТА

Precesija Zemljine ose

§ 52. **Istorijski podatci.** Klaudius Ptolemajos saopštava u svom Zborniku „da je Hiparhos, upoređujući tačno posmatrana pomračenja Meseca svojega doba sa onima koja je, davno pre njega, posmatrao Timoharis, uvideo da je zvezda Spika udaljena u njegovo doba od jesenje ravnodnevnice, protivno redu znakova zodiaka, za 6° , u doba Timoharisa bila udaljena za skoro 8° “. Slična pomeranja našao je Hiparhos i kod drugih zvezda posmatranih od Timoharisa i Aristila. Pri tome se pokazalo da se tim pomeranjima nije promenilo otstojanje zvezda od ekliptike, t.j. njihova nebeska latituda. Iz svega toga zaključio je Hiparhos, sa izvesnom rezervom. „da se ravnodnevnice svake godine pomeraju za $\frac{1}{100^\circ}$ u retrogradnom smislu“. Ovim saopštenjem Ptolemajosa utvrđen je, i ako se spisi Hiparhovi koji se bave tim pitanjem nisu sačuvali, veliki astronomski pronalazak Hiparhov o kojem smo već govorili u prvoj glavi ove knjige. Da li su već haldejski ili drugi koji stari posmatrači neba приметили to pomeranje ravnodnevnice, nije se moglo dokučiti pored svih istraživanja po tom pitanju.

Ptolemajos je ovoj pojavi, koja je kasnije nazvana *precesijom ravnodnevnice* ✱ posvetio skoro celu sedmu knjigu svog Zbornika, u kojoj saopštava i svoja vlastita posmatranja koja su ga, upoređena sa onima što su ih izvršili Timoharis, Aristil i Hiparhos, osvedočila, van svake sumnje, da se sfera zvezda nekretnica, pored svoje dnevne rotacije oko nebeskih polova, obrće, u redu znakova zodiaka, oko ose koja prolazi kroz polove ekliptike, usled čega se ravnodnevnice pomeraju u protivnom smislu, prevaljujući za sto godina jedan stepen ili $36''$ u godini. Ovaj broj našao je, kao što smo videli, već Hiparhos pa je zbog toga Ptolemajos neopravdano osumnjičen od DELAMBRA i TANERIJA da svoj katalog zvezda nije dobio astronomskim posmatranjem, nego jednostavnom ekstrapolacijom Hiparhovog kataloga.

Ušavši u Ptolemajov Zbornik, gde je opširno, jasno i naučno obrađena, postala je precesija ravnodnevnice sastavnim delom stare astronomije i predmetom daljeg ispitivanja i posmatranja. ALBATEGNIUS je, upoređujući pozicije zvezda, koje je oko godine 879 sam odredio, sa onima kako su saopštene u Ptolemajovom katalogu, izračunao da se ravnodnevnice pomeraju za $55''$ u godini. NASIR EDIN je oko 1260 godine našao za to pomeranje numeričku vrednost od $51''$, čime se veoma približio stvarnoj vrednosti tog pomeranja od $50'',25$.

Aleksandrijska škola pripisivala je, kao što smo saopštili, precesiju ravnodnevnica pomeranju sfere zvezda nekretnica. Kada je Kopernik izgradio svoj heliocentrični sistem, sa mirujućom sferom zvezda nekretnica, rastumačio je, sasvim pravilno, precesiju kao posledicu promena orientacije Zemljine ose, ali je to sekularno pomeranje kombinovano, bez ikakve potrebe, sa godišnjim zaokretanjem Zemljine ose.

Njutn je, svojim zakonom gravitacije, našao pravi uzrok precesije i rastumačio njen mehanizam pa je ta pojava postala jedan od mnogih rečitih argumenata za ispravnost njegove nauke. Ispitujući, u drugom odeljku treće knjige svojih Principija, nejednakosti Mesečevog kretanja, našao je Njutn prisustvo Sunca, koje pri kretanju Meseca oko Zemlje igra ulogu nebeskog tela koje izaziva poremećaj, ima za posledicu retrogradno kretanje čvorova Mesečeve putanje. Došavši do ovog saznanja, mogao je Njutn, u četvrtom odeljku treće knjige, da pokaže da spljoštenost naše Zemlje, zbog koje se njena ekvatorijalna ispupčenost može smatrati kao skup satelita, mora izazvati pojavu sličnu predašnjoj. Sada nam ulogu čvorova putanja spomenutih satelita igraju preseci nebeskog ekvatora sa ekliptikom, t.j. ravnodnevnice; one će se, dakle, obrnuto stvarnom dnevnom kretanju Zemlje, pomerati duž ekliptike, kao što to zahteva pojava precesije. Na taj skup zamišljenih satelita dejstvuju dva nebeska tela koja izazivaju poremećaj, Sunce i Mesec, pa se njihova dejstva sabiru, no kako se presek njihovih putanja, kao što smo videli, pomera retrogradno, vršeći za 19 godina potpuno jedno obilaženje, to će iz toga sledovati periodični poremećaj orientacije Zemljine ose iste periode. Iako je sve ovo sledovalo iz Njutnovih Principija, tek je 1748 uspeo BREDLI da opažanjem dokaže taj periodični poremećaj Zemljine ose. Ta pojava, o kojoj ćemo govoriti u idućoj glavi, dobila je naziv *astronomske nutacije* Zemljine ose; njenu je teoriju izgradio Dalamber.

§ 53. Momenat zaokretanja spoljnih sila na Zemlju. Pri ispitivanju mehanizma precesije potrebno je, kao što smo videli, uzeti u obzir spljoštenost Zemlje, jer samo u tom slučaju izaziva sila kojom Sunce ili Mesec privlači Zemlju jedan spreg ili momenat zaokretanja obzirom na težište Zemlje. Uočimo, za sada, samo jedno od tih dvaju nebeskih tela, zamišljajući njegovu masu M koncentrisanu u tački S (sl. 19). Pokazali smo u §47 da telo konačnih dimenzija predstavljeno tom istom slikom, dakle u našem slučaju Zemlja, privlači masu M silom \mathfrak{K} koja prolazi kroz tačku S , a koja je gradienat funkcije sila U , predstavljene obrascem (61) spomenutog paragrafa. Zato je

$$\mathfrak{K} = \text{grad } U \quad (1)$$

$$U = f \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} \frac{fMX^2}{R^5} (B + C - 2A) + \frac{1}{2} \frac{fMY^2}{R^5} (C + A - 2B) + \frac{1}{2} \frac{fMZ^2}{R^5} (A + B - 2C), \quad (2)$$

gde m označava masu Zemlje, a A, B, C njene glavne momente inercije.

Masa M privlačiće, prema Njutnovom principu akcije i reakcije, Zemlju silom $-\mathfrak{K}$, a prava u kojoj ta sila dejstvuje prolaziće, po istom principu, kroz tačku S . Momenat zaokretanja ove sile obzirom na težište Zemlje, koje se ima zamisliti u ta-

čki O (sl. 19), pretstavljen je, pošto je vektor položaja napadne tačke S bio označen sa \mathfrak{R} , ovim izrazom:

$$\mathfrak{M} = -[\mathfrak{R} \mathfrak{K}], \quad (3)$$

t.j.

$$\mathfrak{M} = -[\mathfrak{R} \text{ grad } U]. \quad (4)$$

Ako stavimo

$$U_0 = f \frac{Mm}{R} \\ U_1 = \frac{1}{2} \frac{fM}{R^5} \quad (5)$$

$$U_2 = (B + C - 2A)X^2 + (C + A - 2B)Y^2 + (A + B - 2C)Z^2,$$

onda je

$$U = U_0 + U_1 U_2,$$

a prema pravilima vektorske diferencijacije,

$$\text{grad } U = \text{grad } U_0 + U_2 \text{ grad } U_1 + U_1 \text{ grad } U_2.$$

Zato je

$$\mathfrak{M} = -[\mathfrak{R} \text{ grad } U_0] - U_2 [\mathfrak{R} \text{ grad } U_1] - U_1 [\mathfrak{R} \text{ grad } U_2].$$

Kako je

$$\text{grad } U_0 = -f \frac{Mm}{R^3} \mathfrak{R}, \quad \text{grad } U_1 = -\frac{5}{2} \frac{fM}{R^7} \mathfrak{R},$$

to je, zbog toga što je $[\mathfrak{R} \mathfrak{R}] = 0$,

$$[\mathfrak{R} \text{ grad } U_0] = 0; \quad [\mathfrak{R} \text{ grad } U_1] = 0.$$

Zato je

$$\mathfrak{M} = -U_1 [\mathfrak{R} \text{ grad } U_2]. \quad (6)$$

Parcijalni izvodi funkcije U_2 po X, Y, Z , t.j.

$$\frac{\partial U_2}{\partial X} = 2(B + C - 2A)X; \quad \frac{\partial U_2}{\partial Y} = 2(C + A - 2B)Y; \quad \frac{\partial U_2}{\partial Z} = 2(A + B - 2C)Z$$

pretstavljaju koordinate vektora $\text{grad } U_2$ dok su koordinate vektora \mathfrak{R} predstavljene sa X, Y, Z . Zato je, prema analitičkom obrascu za vektorielni proizvod,

$$\mathfrak{M} = -\frac{fM}{R^5} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X & Y & Z \\ (B + C - 2A)X & (C + A - 2B)Y & (A + B - 2C)Z \end{vmatrix}.$$

Koordinate M_1, M_2, M_3 vektora \mathfrak{M} predstavljene su, prema gornjem obrascu, ovim izrazima:

$$M_1 = 3 \frac{fM}{R^5} (C - B)YZ \\ M_2 = 3 \frac{fM}{R^5} (A - C)ZY \\ M_3 = 3 \frac{fM}{R^5} (B - A)XY. \quad (7)$$

Za Zemlju je, kao što smo već rekli,

$$B = A \quad (8)$$

pa je zato

$$\begin{aligned} M_1 &= 3 \frac{fM}{R^5} (C - A)YZ \\ M_2 &= -3 \frac{fM}{R^5} (C - A)ZX \\ M_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Stavimo li u ove jednačine masu i koordinate Sunca odnosno Meseca, to dobivamo momenat zaokretanja tih nebeskih tela na Zemlju.

§ 54. Jednačine kretanja. Permanentni i periodični članovi poremećaja. Označimo sa M masu Sunca, sa R njegovo otстоjanje od Zemlje, a sa X, Y, Z njegove koordinate obzirom na koordinatni sistem položen u glavne ose inercije Zemljinog tela, označimo, dalje, sa m_1 masu Meseca, sa r njegovo otстоjanje od Zemlje, a sa x, y, z njegove koordinate obzirom na spomenuti koordinatni sistem, onda su komponente momenta zaokretanja tih dvaju nebeskih tela na Zemlju predstavljene, prema (9), ovim obrascima:

$$\begin{aligned} M_1 &= 3 \frac{fM}{R^5} (C - A)YZ + 3 \frac{fm_1}{r^5} (C - A)yz \\ M_2 &= -3 \frac{fM}{R^5} (C - A)ZX - 3 \frac{fm_1}{r^5} (C - A)zx \\ M_3 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Ispitavajući precesiju Zemljine ose, činimo pretpostavku da je naša Zemlja čvrsto telo. Zato važe za njeno rotaciono kretanje Ojlerove jednačine (42), §44, u koje valja, zbog (8), staviti $A = B$. Zato te jednačine dobivaju ovaj oblik:

$$\begin{aligned} A \frac{dw_1}{dt} + (C - A)w_2w_3 &= M_1 \\ A \frac{dw_2}{dt} - (C - A)w_3w_1 &= M_2 \\ C \frac{dw_3}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Iz jednačina (10) i (11) sleduje:

$$\begin{aligned} A \frac{dw_1}{dt} + (C - A)w_2w_3 &= 3 \frac{fM}{R^5} (C - A)YZ + 3 \frac{fm_1}{r^5} (C - A)yz \\ A \frac{dw_2}{dt} - (C - A)w_3w_1 &= -3 \frac{fM}{R^5} (C - A)ZX - 3 \frac{fm_1}{r^5} (C - A)zx \\ C \frac{dw_3}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Ovo su jednačine rotacionog kretanja Zemlje pod uticajem privlačne snage Sunca i Meseca. Iz poslednje od tih jednačina sleduje:

$$w_3 = n \quad (13)$$

gde n označava jednu konstantu. Ova jednačina kazuje da se uglovna brzina vlastite rotacije Zemljine oko njene polarne glavne ose inercije ne menja pod uticajem privlačnih snaga Sunca i Meseca. Iz poslednje od jednačina (49), §46, sleduje:

$$\Psi' \cos \Theta + \Phi' = n. \quad (14)$$

Upotrebom spomenutih jednačina (49) možemo i veličine w_1 i w_2 izraziti pomoću Ojlerovih uglova Θ, Ψ, Φ , a kako se i komponente M_1, M_2, M_3 mogu izraziti pomoću tih uglova, to se dolazi do diferencijalnih jednačina koje nam, integrisane, daju uglove Θ, Ψ, Φ kao funkcije vremena, t.j. rešenje postavljenog problema. Pri tome valja imati ovo u vidu. U koordinatama X, Y, Z i x, y, z ispoljavaju se sve osobine kretanja Zemlje oko Sunca i kretanja Meseca oko Zemlje sa svim njihovim poremećajima i nejednakostima. Ispitivanje uticaja svih tih nejednakosti na rotaciono kretanje Zemljino ogroman je posao. Tako je, na primer, OPOLCER pri svojim ispitivanjima uzeo u obzir 202 takve nejednakosti. Većina od njih su, međutim, i za astronomske potrebe sporednijeg značaja, zato ćemo se ovde ograničiti samo na najglavnije od njih. Uloga tih članova koji izazivaju poremećaje kretanja Zemljine ose ispoljiće se najjasnije ako ispitamo vremenske promene momenta zaokretanja \mathfrak{M} nebeskog tela koje izaziva poremećaj. Pri tome ćemo, za sada, uzeti samo Sunce u obzir, jer vremenske promene njegovog momenta zaokretanja i njihov uticaj na rotaciono kretanje Zemlje pokazuju i sve osobine uticaja Mesečevog na to kretanje.

Rotacija Zemlje ne menja, pošto je Zemlja rotaciono telo, momenat zaokretanja \mathfrak{M} . Zato ćemo se, pri ispitivanju toga momenta \mathfrak{M} , poslužiti ekvatorijalnim koordinatnim sistemom, vezanim sa nebeskom sferom. Osa x tog koordinatnog sistema neka bude naperena prema prolethnoj tački, a osa z prema severnom polu nebeske sfere. Neka nam \mathfrak{R} predstavlja vektor položaja Sunčevog; on zatvara sa osom x ugao (x, \mathfrak{R}) koji nam, u isti mah, predstavlja Sunčevu longitudu λ . Sa osom z zatvara vektor \mathfrak{R} ugao (z, \mathfrak{R}) koji nam predstavlja polarno otстоjanje, a njegov komplement deklinaciju δ Sunca. Zato je $(z, \mathfrak{R}) = 90^\circ - \delta$. Ugao (y, \mathfrak{R}) , što ga vektor \mathfrak{R} zatvara sa osom y , dat je opštom jednačinom

$$\cos^2(x, \mathfrak{R}) + \cos^2(y, \mathfrak{R}) + \cos^2(z, \mathfrak{R}) = 1.$$

Zato je

$$\begin{aligned} \cos(x, \mathfrak{R}) &= \cos \lambda \\ \cos(z, \mathfrak{R}) &= \sin \delta \\ \cos^2(y, \mathfrak{R}) &= \sin^2 \lambda - \sin^2 \delta. \end{aligned}$$

Između deklinacije δ i longitude λ Sunca i nagiba ekliptike ϵ postoji osnovna jednačina Sferne Astronomije

$$\sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda.$$

Zato je

$$\cos(y, \mathfrak{R}) = \cos \epsilon \sin \lambda.$$

Koordinate X, Y, Z Sunca pretstavljene su, dakle, ovim obrascima

$$\begin{aligned} X &= R \cos(x, \mathfrak{R}) = R \cos \lambda \\ Y &= R \cos(y, \mathfrak{R}) = R \cos \epsilon \sin \lambda \\ Z &= R \cos(z, \mathfrak{R}) = R \sin \epsilon \sin \lambda. \end{aligned} \quad (15)$$

Iz (9) i (15) sleduje:

$$\begin{aligned} M_1 &= 3 \frac{fM}{R^3} (C - A) \sin \epsilon \cos \epsilon \sin^2 \lambda \\ M_2 &= -3 \frac{fM}{R^3} (C - A) \sin \epsilon \sin \lambda \cos \lambda \\ M_3 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Da ispitamo vremenske promene ovih komponenta momenta \mathfrak{M} , a naročito njihov godišnji tok, potrebno je da radiusvektor R Sunca izrazimo pomoću longitude λ . Ako se stavimo na heliocentrično stanovište, to dobivamo pomoću jednačina (65) i (70), glave druge,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a(1-e^2)} [1 + e \cos(\lambda_h - \Pi)],$$

gde a predstavlja veliku poluosu, e ekscentricitet Zemljine putanje, λ_h heliocentričnu longitudu Zemlje, a Π heliocentričnu longitudu perihela, ovo oboje mereno od proletnje tačke. Između heliocentrične longitude Zemlje λ_h i geocentrične longitude Sunca λ postoji, kao što je lako uvideti, jednačina

$$\lambda = 180^\circ - \lambda_h$$

pa zato dobivamo

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{a^3(1-e^2)^3} [1 - e \cos(\Pi + \lambda)]^3.$$

Ovaj izraz može se, pošto je e veoma malo, razviti u red i pri tome potencije kosinusa izraziti pomoću kosinusa mnogostrukog argumenta. Na taj način dobivamo obrazac ovog oblika:

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{a^3} \left[1 + \frac{9}{2} e^2 - 3e \cos(\Pi + \lambda) + \frac{3}{2} e^2 \cos(2\Pi + 2\lambda) + \dots \right].$$

U ovom redu su, kao što smo videli u prvom odeljku ove knjige, veličine e i Π sekularno promenljive, ali tako slabo da ih, za sada, možemo smatrati za konstantne. Longituda λ naraste u godini dana za 2π pa će zbog toga trigonometrijski članovi gornjeg reda imati periode od godinu dana, od polovine godine, od trećine godine i t.d. Videćemo da je uticaj periodičnih članova na rotaciono kretanje Zemlje u toliko manji u koliko je manja njihova perioda, a kako su periodi tih članova maleni, a rapidno opadaju, to su ti članovi prema onima o kojima ćemo još govoriti toliko maleni da se mogu zanemariti. Zbog toga možemo staviti

$$R = a. \quad (17)$$

Na taj način dobivamo mesto (16) ove jednačine

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{3 fM}{2 a^3} (C - A) \sin \epsilon \cos \epsilon - \frac{3 fM}{2 a^3} (C - A) \sin \epsilon \cos \epsilon \cos 2\lambda \\ M_2 &= -\frac{3 fM}{2 a^3} (C - A) \sin \epsilon \sin 2\lambda \\ M_3 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Označimo li sa i, j, k jedinične vektore u pravcu osa x, y, z našeg koordinatnog sistema pa stavimo li, zbog jednostavnijeg pisanja,

$$\frac{3 fM}{2 a^3} (C - A) \sin \epsilon = c, \quad (19)$$

to je

$$\mathfrak{M} = M_1 i + M_2 j; \quad \mathfrak{M} = (c \cos \epsilon) i - (c \cos \epsilon \cos 2\lambda) i - (c \sin 2\lambda) j.$$

Vektor \mathfrak{M} može se predstaviti kao zbir dvaju vektora \mathfrak{M}_s i \mathfrak{M}_p ,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_s + \mathfrak{M}_p \quad (20)$$

stavljajući

$$\mathfrak{M}_s = M_s i; \quad \left\{ M_s = \frac{3 fM}{2 a^3} (C - A) \sin \epsilon \cos \epsilon \right. \quad (21)$$

$$\mathfrak{M}_p = -M'_1 i - M'_2 j; \quad \left\{ \begin{aligned} M'_1 &= \frac{3 fM}{2 a^3} (C - A) \sin \epsilon \cos \epsilon \cos 2\lambda \\ M'_2 &= \frac{3 fM}{2 a^3} (C - A) \sin \epsilon \sin 2\lambda. \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Vektor \mathfrak{M}_s , naperen prema proletnoj tački, stalne je veličine, t.j. nezavisan je od godišnjeg prividnog kretanja Sunca. On leži nepokretno u našem koordinatnom sistemu, zato ćemo ga nazvati *permanentnim* delom momenta zaokretanja \mathfrak{M} . *

Vektor \mathfrak{M}_p je, naprotiv promenljiv. Nadovežemo li ga na početak našeg koordinatnog sistema, onda su koordinate njegove krajnje tačke L pretstavljene ovim obrascima:

$$x = -c \cos \epsilon \cos 2\lambda; \quad y = -c \sin 2\lambda.$$

Eliminišemo li iz ovih dveju jednačina λ , to dobivamo

$$\frac{x^2}{(c \cos \epsilon)^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

kao jednačinu putanje tačke L . Ta je putanja elipsa, dakle zatvorena jedna linija, pa je zato vektor \mathfrak{M}_p periodično promenljiv; njega ćemo nazvati glavnim *periodičnim* delom momenta zaokretanja \mathfrak{M} . *

Prema pretpostavci izraženoj jednačinom (17), longituda λ Sunca raste proporcionalno vremenu t . Brojimo li vreme od prolaza Sunca kroz proletnju tačku, dakle kroz osu x , to je

$$\lambda = \frac{2\pi}{T} t; \quad M'_1 = c \cos \epsilon \cos \frac{4\pi}{T} t; \quad M'_2 = c \sin \frac{4\pi}{T} t \quad (23)$$

gde T označava godinu.

Komponente M'_1 i M'_2 vektora \mathfrak{M}_p podleže, dakle, harmoničnim oscilacijama od polugodišnje periode.

Da smo pri određivanju longitude λ kao funkcije vremena t uzeli u obzir ekscentricitet Zemljine putanje, to bi se, kao što je pokazano na primeru od $1/R$, pojavili još i dalji periodični članovi koji su, iz navedenih već razloga, sporednoga značaja. Zbog toga ćemo, za sada, uzeti u obzir samo oba glavna dela \mathfrak{M}_s i \mathfrak{M}_p momenta zaokretanja, jer su oni, pored svoje veličine, u isti mal, tipični predstavnici obe kategorije članova poremećaja pa njihove osobine ispoljavaju karakter i svih ostalih članova poremećaja.

§ 55. Dejstvo pojedinih delova momenta zaokretanja. Ako, za sada, ne uzmemo u obzir spore i male oscilacije ravni Zemljine putanje, o kojima će još biti govora, onda možemo tu ravan smatrati za nepomičnu i odabrati nju, dakle ravan ekliptike, za ravan $X-Y$ mirujućeg koordinatnog sistema. Neka nam, dakle, (sl. 17) tačka O predstavlja težište Zemlje, a ravan $X-Y$ mirujućeg koordinatnog sistema ravan ekliptike. Osa X neka bude, iz razloga koji ćemo odmah upoznati, naperena prema jesenjoj tački određene jedne epohe. Koordinatni sistem vezan sa Zemljom neka bude označen za $x-y-z$; njegova osa z neka se poklapa sa polarnom glavnom osom inercije Zemljinog tela, a osa x neka pada u presek Zemljinog ekvatora sa ravni griničkog meridijana. Ravan $x-y$ pokretnog koordinatnog sistema neka, u trenutku t , seče ravan $X-Y$ mirujućeg koordinatnog sistema duž prave $O\Omega$; ova prava stoji normalno na ravni ZOz , koju smo ravan odabrali za ravan slike. Prava OR te ravni stoji normalno na pravou $O\Omega$. Tačka Ω predstavlja nam uzlazni čvor nebeskog ekvatora u odnosu na ekliptiku, a silazni čvor ekliptike u odnosu na nebeski ekvator. Zato nam Ω predstavlja jesenju tačku koja odgovara trenutku t . Označimo sa \mathbf{c}_0 jedinični vektor pravca $O\Omega$, a sa \mathbf{h}_0 jedinični vektor pravca OR , to postoji između tih vektora i i j , upotrebljenih pri obrazovanju jednačina (21) i (22), ova veza:

$$i = -\mathbf{c}_0; \quad j = -\mathbf{h}_0. \quad (24)$$

Zato je

$$\mathfrak{M}_s = -M_s \mathbf{c}_0 \quad (25)$$

$$\mathfrak{M}_p = M'_1 \mathbf{c}_0 + M'_2 \mathbf{h}_0. \quad (26)$$

Uglovi $XO\Omega$, $\Omega O x$, ZOz predstavljaju nam Ojlerove uglove Ψ , Φ , Θ koji određuju položaj pokretnog koordinatnog sistema prema mirujućem. Ugao Θ predstavlja nam, kao što je lako uvideti, i nagib ekliptike ϵ u trenutku t pa je

$$\Theta = \epsilon. \quad (27)$$

Ugao Φ meri luk nebeskog ekvatora koji leži između jesenje tačke i griničkog meridijana, on dopunjuje, dakle, zvezdano vreme, mereno uglavnom merom, od 180° .

Ispitivajući precesiono kretanje Zemljine ose, pretpostavićemo da se ta osa podudara sa glavnom osom inercije Zemljinog tela; o neznatnom odstupanju tih dveju osa biće govora u zasebnoj glavi ove knjige. Kako dakle, prema učinjenoj pretpostavci, vektor rotacije \mathbf{w} pada u osu z našeg pokretnog koordinatnog sistema, to je, prema (43) i (41), glave desete,

$$\mathbf{w} = w_3 \mathbf{k} \quad (28)$$

$$w_1 = w_2 = 0; \quad G_1 = G_2 = 0; \quad \mathfrak{G} = C w_3 \mathbf{k}$$

t.j. zbog (13)

$$\mathfrak{G} = nC \mathbf{k}. \quad (29)$$

Vektor \mathfrak{G} leži, dakle, nepomično u osi z pokretnog koordinatnog sistema i ima skalarnu veličinu

$$G = nC.$$

Položimo tu veličinu duž ose z , t.j. učinimo $\overline{OT} = G$ pa pitajmo kako se menja vektor \mathfrak{G} u mirujućem koordinatnom sistemu. Neka nam $d\Phi$, $d\Theta$, $d\Psi$ predstavljaju promene Ojlerovih uglova koje odgovaraju vremenskom intervalu dt . Pošto \mathfrak{G} leži stalno u osi z , to promena ugla Φ ne utiče na položaj vektora \mathfrak{G} u mirujućem koordinatnom sistemu. Uveća li se ugao Θ za $d\Theta$, to će se tačka T pomeriti u ravni ZOz , normalno na OT , dakle u pravcu protivnom jediničnom vektoru \mathbf{h}_0 , za duž $\overline{OT} d\Theta$. Odatle sleduje promena vektora \mathfrak{G} jednaka $-G \mathbf{h}_0 d\Theta$. Uveća li se ugao Ψ za $d\Psi$, to će se, usled toga, ravan ZOz obrnuti oko svoje ose Z za taj prirastaj ugla, a tačka T se pomeriti za $G \sin \Theta d\Psi$, normalno na tu ravan, u pravcu jediničnog vektora \mathbf{c}_0 . Odatle sleduje promena vektora \mathfrak{G} jednaka $G \sin \Theta \mathbf{c}_0 d\Psi$. Celokupna promena vektora \mathfrak{G} predstavljena je, dakle, obrascem

$$d\mathfrak{G} = -G \mathbf{h}_0 d\Theta + G \sin \Theta \mathbf{c}_0 d\Psi,$$

pa je zato

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = -nC \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{h}_0 + nC \sin \Theta \frac{d\Psi}{dt} \mathbf{c}_0. \quad (30)$$

Po teoremi impulsa, mora ova promena biti jednaka momentu zaokretanja

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_s + \mathfrak{M}_p$$

spoljnih sila. Zato je, imajući u vidu (25) i (26),

$$-nC \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{h}_0 + nC \sin \Theta \frac{d\Psi}{dt} \mathbf{c}_0 = -M_s \mathbf{c}_0 + M'_1 \mathbf{c}_0 + M'_2 \mathbf{h}_0.$$

Skalarnom multiplikacijom sa \mathbf{c}_0 odnosno sa \mathbf{h}_0 , raspada se ova vektorska jednačina u ove dve skalarnе:

$$nC \sin \Theta \frac{d\Psi}{dt} = -M_s + M'_1 \quad (31)$$

$$nC \frac{d\Theta}{dt} = -M'_2. \quad (32)$$

Videćemo da su promene od Θ toliko malene da se u članu $\sin \Theta$ ne ispoljavaju skoro nikako, pa zbog toga možemo promene izazvane, prema (31), komponentama M_s i M'_1 na uglu Ψ izračunati svaku za sebe. Na taj način dobivamo da permanentni deo \mathfrak{M}_s momenta zaokretanja \mathfrak{M} izaziva promenu

$$nC \sin \Theta \frac{d\Psi}{dt} = -M_s, \quad (33)$$

a periodični deo \mathfrak{M}_p ove promene:

$$nC \sin \Theta \frac{d\Psi}{dt} = M'_1; \quad nC \frac{d\Theta}{dt} = -M'_2. \quad (34)$$

Iz (33), (21) i (27) sleduje

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3fM}{2a^3} \frac{1}{n} \frac{C-A}{C} \cos\Theta. \quad (35)$$

Ova jednačina kazuje da permanentni deo momenta \mathfrak{M} izaziva negativnu uniformnu promenu ugla Ψ , t.j. njegovo smanjivanje, dakle retrogradno kretanje linije čvorova $O\Omega$. To kretanje ne menja ugao Θ , zbog čega je, ako uzmemo u obzir samo permanentni deo momenta \mathfrak{M} ,

$$\Theta' = 0.$$

Vektor rotacije \mathfrak{w} predstavljen je, dakle, u ovom slučaju, a prema opštem obrascu (45), §46, ovim izrazom:

$$\mathfrak{w} = \Psi' n_3 + \Phi' \mathfrak{k}. \quad (36)$$

Iz slike (17) sleduje:

$$\Psi' n_3 = (\Psi' \cos\Theta)\mathfrak{k} + (\Psi' \sin\Theta)\mathfrak{h}_0.$$

Zato je

$$\mathfrak{w} = (\Phi' + \Psi' \cos\Theta)\mathfrak{k} + (\Psi' \sin\Theta)\mathfrak{h}_0,$$

t.j. zbog (14)

$$\mathfrak{w} = n\mathfrak{k} + (\Psi' \sin\Theta)\mathfrak{h}_0.$$

Kako je

$$(\Psi' \sin\Theta)\mathfrak{h}_0 = (\Psi' \sin\Theta \cos\Phi)\mathfrak{i} + (\Psi' \sin\Theta \sin\Phi)\mathfrak{j},$$

to dobivamo

$$\mathfrak{w} = (\Psi' \sin\Theta \sin\Phi)\mathfrak{i} + (\Psi' \sin\Theta \cos\Phi)\mathfrak{j} + n\mathfrak{k}, \quad (37)$$

dakle zbog (31) i (41), glave desete i zbog (8), ove glave,

$$\begin{aligned} G_1 &= A \sin\Theta \sin\Phi \cdot \Psi' \\ G_2 &= A \sin\Theta \cos\Phi \cdot \Psi' \\ G_3 &= nC. \end{aligned} \quad (38)$$

Vektor impulsa \mathfrak{G} nije dakle obrascem (29) predstavljen sasvim tačno, jer on ima jednu, doduše veoma malu, komponentu

$$G_a = \sqrt{G_1^2 + G_2^2} = A \sin\Theta \cdot \Psi' \quad (39)$$

koja pada u ravan $x-y$ pa se zbog toga taj vektor ne poklapa tačno sa osom z , nego zatvara sa ovom jedan mali ugao φ za koji važi jednačina

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{G_a}{G_3} = \frac{1}{n} \frac{A}{C} \sin\Theta \cdot \Psi'. \quad (40)$$

Videćemo iz kasnije saopštenih numeričkih podataka da su i ta komponenta i taj ugao toliko maleni da ne utiču skoro nikako na rezultat računa predstavljen obrascem (35). Zato nema potrebe dodavati tom rezultatu te poremećaje drugog reda.

Obrascu (35) možemo dati i drugi, zgodniji, oblik. Označimo li sa T vreme obilaženja Zemlje oko Sunca, to je prema (59) i (61), glave druge,

$$\frac{fM}{a^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{M}{M+m} \quad (41)$$

$$\frac{2\pi}{T} = \nu, \quad (42)$$

gde ν označava srednje kretanje Zemlje oko Sunca. Zato je

$$\frac{fM}{a^3} = \frac{M}{M+m} \nu^2. \quad (43)$$

Na taj način dobivamo, mesto (35), ovaj obrazac:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{M}{M+m} \frac{\nu^2}{n} \frac{C-A}{C} \cos\Theta. \quad (44)$$

Obrazac

$$p_T = -\frac{d\Psi}{dt} T = 3\pi \frac{M}{M+m} \frac{\nu}{n} \frac{C-A}{C} \cos\Theta \quad (45)$$

predstavlja nam apsolutno uzeti godišnji iznos solarne precesije, t.j. pomeranja proletnje tačke izazvanog Suncem za vreme jedne godine.

Da bismo našli dejstvo periodičnog dela \mathfrak{M}_p momenta privlačne sile Sunca, treba u (34) staviti obrasce (23). Uzimajući pri tome u obzir (19), (27), (42) i (43), dobivamo:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{3}{2} \frac{M}{M+m} \frac{\nu^2}{n} \frac{C-A}{C} \cos\Theta \cos 2\nu t \quad (46)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{M}{M+m} \frac{\nu^2}{n} \frac{C-A}{C} \sin\Theta \sin 2\nu t. \quad (47)$$

Integracijom ovih diferencijalnih jednačina, pri čemu, kao što je već rečeno, valja, u desnim stranama njihovim, Θ smatrati za konstantno, dobiva se, ako se t broji od onog trenutka u kojem je $\Psi = 0$, a u kojem Θ dostizava svoju maksimalnu vrednost,

$$\Psi = \frac{3}{4} \frac{M}{M+m} \frac{\nu}{n} \frac{C-A}{C} \cos\Theta \sin 2\nu t \quad (48)$$

$$\Theta = \frac{3}{4} \frac{M}{M+m} \frac{\nu}{n} \frac{C-A}{C} \cos\Theta \cos 2\nu t \quad (49)$$

t.j. zbog (45) i (42)

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} p_T \sin \frac{4\pi}{T} t \quad (50)$$

$$\Theta = \frac{1}{4\pi} p_T \operatorname{tg}\Theta \cos \frac{4\pi}{T} t. \quad (51)$$

§ 56. **Precesija ravnodnevnica.** Iz rezultata prethodnog paragrafa sleduje da permanentni deo momenta privlačne sile Sunca izaziva retrogradno kretanje čvorova nebeskog ekvatora i ekliptike, duž same ekliptike. Ovo pomeranje, izračunato na jedinicu vremena, predstavljeno je, prema (44) i (27), obrascem:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{M}{M+m} \frac{\nu^2}{n} \frac{C-A}{C} \cos\varepsilon. \quad (52)$$

Privlačno dejstvo Meseca izaziva slično, no zbog blizine Meseca, još jače pomeranje. Obrazac za to pomeranje dobićemo ako u prethodnoj jednačini zamenimo masu M Sunca masom m_1 Meseca, srednje kretanje v Sunca srednjim kretanjem v_1 Meseca, a nagib ekliptike ϵ nagibom ϵ_2 Mesečeve putanje prema ravni nebeskog ekvatora. Pri tome valja ovo uzeti u obzir. Ravan Mesečeve putanje zatvara sa ravni ekliptike ugao $\epsilon_1 = 5^\circ 9'$ koji se neosetno menja tako da ga možemo smatrati konstantnim, ali se, o čemu ćemo kasnije opširnije govoriti, ravan Mesečeve putanje, zbog poremećaja izazvanim Suncem, obrće održavajući taj svoj nagib prema ekliptici, tako da se čvorovi Mesečeve putanje retrogradno pomeraju duž ekliptike. Zbog svega ovoga osciluje nagib ravni Mesečeve putanje prema ravni nebeskog ekvatora između granica $(\epsilon - \epsilon_1)$ i $(\epsilon + \epsilon_1)$. Pri izračunavanju pomeranja izazvanog permanentnim delom momenta \mathcal{M} valja u (52) za ϵ staviti srednju vrednost od ϵ_2 , t.j. onu koja leži u sredini između $(\epsilon - \epsilon_1)$ i $(\epsilon + \epsilon_1)$, a to je ϵ . Uzimajući sve ovo u obzir, predstavljeno je stacionarno dejstvo privlačne sile Meseca ovim obrascem:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{m_1}{m_1 + m} \frac{v_1^2}{n} \frac{C - A}{C} \cos \epsilon. \quad (53)$$

Pri tome je, prema (42),

$$v = \frac{2\pi}{T}; \quad v_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad (54)$$

gde T predstavlja siderično vreme obilaženja Zemlje oko Sunca, a T_1 siderično vreme obilaženja Meseca oko Zemlje.

Celokupno permanentno dejstvo Sunca i Meseca pri pomeranju ravnodnevnica, dakle lunisolarna precesija, u užem smislu reči, predstavljena je obrascem:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{6\pi^2}{n} \frac{C - A}{C} \left[\frac{1}{T^2} + \frac{m_1}{m + m_1} \frac{1}{T_1^2} \right] \cos \epsilon. \quad (55)$$

Pri tome smo masu m Zemlje zanemarili, kao veoma malenu, prema masi M Sunca.

* Interval za vreme kojega naraste Ojlerov ugao Φ za 2π zove se *zvezdani dan*. Označimo njegovu dužinu sa τ , to je

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (56)$$

Pošto je, kao što ćemo odmah videti, $\Psi' \cos \Theta$ zanemarivo prema Φ' , to možemo staviti:

$$n = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (57)$$

Zato dobivamo za apsolutni godišnji iznos lunisolarne precesije ovaj obrazac:

$$p_T = -\frac{d\Psi}{dt} T = 3\pi\tau \frac{C - A}{C} \left[\frac{1}{T} + \frac{m_1}{m + m_1} \frac{T}{T_1^2} \right] \cos \epsilon. \quad (58)$$

Numerička vrednost ovog izraza zavisi od slabo promenljive veličine ϵ ; ako stavimo za nju njenu sadanju srednju vrednost $\epsilon = 23^\circ 27'$ i uzmemo još u obzir da je

$$T = 366,25\tau; \quad T_1 = 27,397\tau; \quad m_1 = 0,0123m; \quad \frac{C - A}{C} = 0,003261,$$

to dobivamo

$$p_T = 50'',36$$

kao godišnji iznos lunisolarne precesije. U njemu učestvuje Sunce sa $15'',88$, a Mesec sa $34'',48$.

Prednje izračunavanje valja popuniti ovim primedbama. Numerička vrednost veličine p_T određuje se, u stvari, direktnim astronomskim opažanjem, a iz nje se izvodi numerička vrednost razlomka $(C - A)/C$, a ne obrnuto, što, u ostalom, ne menja ispravnost prednjega računa. Tačno određena numerička vrednost lunisolarne precesije iznosi, za epohu 1850,0, $50'',3684$.

Usled napred izračunatog pomeranja ekvinokcijalnih tačaka, izvršila bi svaka od njih za vreme od

$$\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{50,36} = 25735 \text{ godina,}$$

dakle za vreme intervala od okruglo 26000 godina, potpuno jedno obilaženje duž ekliptike. Taj se interval naziva i Platonskom godinom. Usled toga pomeranja ekvinokcijalnih tačaka, opisuju oba nebeska pola, na nebeskoj sferi, krugove oko polova ekliptike sa prividnim radiusom jednakim nagibu ekliptike. Te kružne putanje polova predstavljaju preseke konusa herpolhodijske proučavanog kretanja Zemlje sa nebeskom sferom.

Pitajmo još kakav će oblik imati konus polhodijske proučavanog kretanja, t.j. onaj konus koji opisuje osa rotacije u samom Zemljinom telu. Jednačina polhodijske predstavljena je obrascem (37) pri čemu \mathbf{r} označava vektor položaja, a i, j, k jedinične vektore koordinatnog sistema vezanog sa Zemljom. Iz (37) sleduje da je polhodijska jedna kružna linija koja se, u otstojanju n od centra Zemlje, obavila normalno oko glavne, polarne, ose inercije Zemljine, a koja ima radius R dat ovom jednačinom:

$$R^2 = (\Psi' \sin \Theta \sin \Phi)^2 + (\Psi' \sin \Theta \cos \Phi)^2$$

iz koje sleduje:

$$R = -\Psi' \sin \Theta.$$

Ugao otvora konusa polhodijske, t.j. ugao što ga izvodnice zatvaraju sa osom konusa, predstavljen je obrascem

$$\alpha = -\frac{\Psi'}{n} \sin \Theta \quad (59)$$

u kojem smo, pošto je taj ugao vrlo mali, njegov tangens zamenili lukom.

Koristeći se obrascima (27), (55), (57) i (58), dobivamo

$$\alpha = \frac{1}{2\pi T} p_T \sin \epsilon, \quad (60)$$

a pomoću saopštenih numeričkih vrednosti za T, ϵ, p_T

$$\alpha = 0'',0087.$$

Ovaj ugao zaista je veoma malen, a isto tako i ugao φ predstavljen obrascem (40). Između ta dva ugla postoji, zbog (59) ova jednačina:

$$\varphi = \frac{A}{C} \alpha.$$

Koristeći se saopštenim podatkom o numeričkoj vrednosti razlomaka $(C-A)/C$, dobivamo $\varphi = 0'',008676$, a mereći ovaj ugao lučnom merom, t.j. deleći prednji broj sa 206 265, dobivamo, prema (40),

$$\frac{G_a}{G} = 0,000\,000\,042,$$

dakle srazmeru zanemarenog dela vektora \mathfrak{G} prema onom delu koji smo uzeli u obzir. Taj je broj, zaista, veoma malen, čime je dokazana opravdanost učinjenih pretpostavki.

Iz saopštenog sleduje da rotaciono kretanje Zemlje pod uticajem permanentnog dela momenta zaokretanja izazvanog dejstvom Sunca i Meseca možemo geometrijski predstaviti na ovaj način. U širokom konusu herpolhodijske kojega osa stoji upravno na ravni Zemljine putanje, a kojega izvodnice zatvaraju ugao od $23^\circ 30'$ sa tom osom, kotrlja se, bez klizanja, veoma šiljasti konus polhodijske, sa uglom ose i izvodnice od samo $0'',0087$, vršeći za vreme jednog zvezdanog dana potpuno jedno obrtanje; za vreme od 26 000 godina opkotrlja taj konus u retrogradnom smislu spoljašnji konus herpolhodijske.

U prethodnim ispitivanjima nismo uzeli u obzir pomeranja ravni Zemljine putanje. Ta ravan nije, kao što smo videli u prvom odeljku ove knjige, invariabilna, a to isto važi i za ravan Mesečeve putanje, nego se obe te ravni, usled međusobnog poremećaja članova našeg planetskog sistema, kolebaju u prostoru. Tim poremećajima ne menja se ravan Zemljinog i nebeskog ekvatora, nego se ekvinokcijalna linija pomera u ravni nebeskog ekvatora. To pomeranje sleduje u pozitivnom smislu uvećavajući Ojlerov ugao Ψ za $0'',1231$ godišnje, t.j. ono se dešava u protivnom smislu lunisolarne precesije. Oduzimajući ovaj broj od broja $50'',3684$ koji odgovara lunisolarnoj precesiji, dobivamo za celokupno pomeranje ravnodnevnica iznos od $50'',2453$ koji se zove *generalnom precesijom*. Usled kolebanja ravni ekliptike, menja se i ugao Θ , t.j. nagib ekliptike, pa se ta promena, za razliku od periodičnih promena ugla Θ o kojima ćemo još govoriti, zove *sekularnom promenom nagiba ekliptike*.

§ 57. Periodični članovi precesije. Momenti zaokretanja Zemlje privlačnim dejstvom Sunca i Meseca imaju, kao što smo videli, pored svojih permanentnih delova i svoje periodične delove. Ako, za sada, ne uzmemo u obzir poremećaje ravni putanje Meseca, o kojima ćemo govoriti u idućoj glavi, onda su najvažniji od tih periodičnih članova oni koji imaju periodu od pola godine odnosno pola meseca. Dejstvo tih periodičnih članova na rotaciju Zemlje predstavili smo analitički u §55 pa nam ostaje samo da izračunavamo numeričke vrednosti tih periodičnih poremećaja Zemljine ose.

Godišnji iznos precesije izazvane privlačnim dejstvom Sunca ima numeričku vrednost od $15'',88$. Stavljajući tu vrednost za p_T u obrasce (50) i (51), a za ϵ vrednost od $23^\circ 27'$, dobivamo:

$$\begin{aligned}\Psi &= 1'',26 \sin \frac{4\pi}{T} t \\ \Theta &= 0'',55 \cos \frac{4\pi}{T} t.\end{aligned}\quad (61)$$

Godišnji iznos precesije izazvane privlačnim dejstvom Meseca ima numeričku vrednost od $34'',18$. Sideričnom obilaženju T_1 Meseca oko Zemlje odgovara iznos precesije od $2'',58$. Stavljajući tu vrednost za p_T u obrasce (50) i (51), dobivamo kao dejstvo Meseca

$$\begin{aligned}\Psi &= 0'',205 \sin \frac{4\pi}{T_1} t \\ \Theta &= 0'',089 \cos \frac{4\pi}{T_1} t.\end{aligned}\quad (62)$$

Ovim periodičnim promenama orientacije Zemljine ose menjaju se longitude zvezda podjednako, ali u pravcu protivnom onom u kojima ih menja lunisolarna precesija. U astronomskoj praksi uzimaju se, međutim, i stacionarna i periodična pomeranja ravnodnevnica kao pozitivna kad sleduju u retrogradnom smislu pa, u tom slučaju, valja u gornje obrasce staviti desno znak minus. Tačnije izračunavanje periodičnih članova, no što je ovde bilo izvršeno, pokazalo bi da bi dobivene koeficiente

$$1'',26; \quad 0'',55; \quad 0'',205; \quad 0'',089$$

valjalo zameniti sa

$$1'',269; \quad 0'',551; \quad 0'',204; \quad 0'',089.$$

Periodične promene orientacije Zemljine ose dodaju se obično, kao nutacioni članovi, glavnim članovima astronomske nutacije o kojoj ćemo govoriti u idućoj glavi.

Proletnja ravnodnevnica u kojoj se, u datom momentu, nebeski ekvator i ekliptika stvarno presecaju zove se *pravom proletnjom ravnodnevnicom* odgovarajućeg trenutka, a ona tačka nebeske sfere u kojoj se seku ekvator i ekliptika kada se nutacioni članovi ne uzmu u obzir, nego samo lunisolarna precesija, u užem smislu reči, zovu se *srednjom ekvinokcijalnom tačkom*. U istom smislu govori se o *pravom i srednjem nagibu ekliptike*.

Astronomska nutacija Zemljine ose

§ 58. **Poremećaji ravni Mesečeve putanje.** Ravan Mesečeve putanje ne podudara se sa ravni Zemljine putanje, a odavde sleđuju poremećaji kretanja Meseca koji se ispoljavaju i u rotacionom kretanju Zemlje, zbog čega ih moramo ispitati i uzeti u obzir.

U §14 rešili smo problem satelita u njegovom najjednostavnijem obliku. Uz pretpostavku da su privlačne sile kojima dejstvuje Sunce na planetu i njen satelit međusobno paralelne, mogli smo problem satelita svesti na problem dvaju tela. Sada treba uzeti u obzir i poremećaj toga kretanja.

Od mnogobrojnih poremećaja kojima podleži kretanje Meseca dolaze, pri ispitivanju rotacionog kretanja Zemljinog, kao najvažniji, poremećaji ravni Mesečeve putanje u prvom redu u obzir. Da to ispitivanje ne bismo suviše komplikovali, nećemo uzeti u obzir ekscentricitet Mesečeve putanje, nego ćemo pretpostaviti da je ona krug. Pod tom pretpostavkom, izvode i Zemlja i Mesec oko njihovog zajedničkog težišta O kružna kretanja. Označimo li sa a_1 srednje ostojanje Meseca od Zemlje, sa m masu Zemlje, a sa m_1 masu Meseca, to su radiusi r i r_1 tih kružnih putanja Zemlje odnosno Meseca pretstavljeni obrascima:

$$r = \frac{m_1}{m + m_1} a_1; \quad r_1 = \frac{m}{m + m_1} a_1. \quad (1)$$

Sada možemo sistem Zemlja-Mesec smatrati za jedan zasebni materijalni sistem koji ne menja svoj oblik, a na koji dejstvuje, kao spoljna sila, privlačna snaga Sunca. Taj nepromenljivi materijalni sistem obrće se, oko ose koja prolazi kroz težište O , a stoji uspravno na ravni Mesečeve putanje, konstantnom ugaonom brzinom koja je jednaka srednjem kretanju v_1 Meseca oko Zemlje. Isto tako kao što je pod uticajem privlačnog dejstva Sunčevog, orientacija Zemljine ose podležala stacionarnim i periodičnim promenama, moraće i osa rotacije uočenog materijalnog sistema Zemlja-Mesec menjati stacionarno svoju orientaciju u prostoru. Mi možemo teoriju takvih promena, izvedenu u prošloj glavi za slučaj precesije Zemljine ose, primeniti i na slučaj Zemlja-Mesec, ako učinimo jedno uprošćenje, potrebno da postignemo potpunu analogiju između oba ta slučaja. Rotacija Zemlje oko njene ose ne menja, kao što smo videli, momenat zaokretanja \mathfrak{M} spoljnih sila, a rotacija sistema Zemlja-Mesec oko njene napred definisane ose, menja taj momenat i to, kao

što je lako uvideti, periodički sa periodom T_1 , jednakom sideričnom obilaženju Meseca oko Zemlje. Taj momenat podleži dakle, dvema glavnim periodičnim promenama, jedna od njih ima za periodu vreme obilaženja sistema Zemlja-Mesec oko Sunca, dakle sideričnu godinu T , a druga ima za period vreme obilaženja Meseca oko Zemlje, dakle siderični mesec T_1 .

Periodične promene ove druge, kraće, periode nisu od značaja za pitanje kojim se bavimo, a valja ih eliminisati zbog potrebne analogije. To ćemo učiniti na ovaj način. Za vreme T_1 obiđu i Zemlja i Mesec svoje kružne putanje. Sređuju vrednost momenta \mathfrak{M} koja odgovara tom vremenskom intervalu dobićemo, očito, na taj način, ako zamislimo masu m Zemlje ravnomerno raspoređenu po njenoj putanji, a masu m_1 Meseca raspoređenu po Mesečevoj putanji pa ako zatim izračunamo momenat kojim Sunce zaokreće sistem tih dvaju materijalnih prstenova. Ovakav metod eliminisanja periodičnih promena upotrebio je Gaus u svojoj klasičnoj teoriji sekularnih poremećaja planetskih kretanja, dokazavši da su te sekularne promene identične onima koje dobivamo ako masu svake planete rasporedimo duž njene putanje tako da je gustina tog rasporeda inverzno proporcionalna brzini planete na uočenom delu putanje pa ako zatim izračunamo atrakcione sile kojima se ti materijalni prsteni međusobno privlače.

Izvršivši spomenuti raspored masa u sistemu Zemlja-Mesec, dobivamo da će momenat inercije toga materijalnog sistema obzirom na njegovu osu rotacije, t.j. njegov momenat inercije C , biti pretstavljen obrascem:

$$C = mr^2 + m_1 r_1^2.$$

Tu istu vrednost ima i polarni momenat inercije J_0 , t.j. momenat inercije obzirom na težište O uočenog sistema. Zato je

$$J_0 = C.$$

Kako je, prema opštem obrascu za momente inercije, $A + B + C = 2J_0$, a kako je, iz razloga simetrije, $A = B$, to dobivamo $2A = C$ dakle

$$\frac{C - A}{C} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Sada imamo pred sobom isti slučaj koji smo imali pri proučavanju promena orientacije Zemljine ose pod uticajem privlačnog dejstva Sunca, valja samo u obrascima, dobivenim tom prilikom, izvršiti ove supstitucije. Mesto ose Z upotrebljenog koordinatnog sistema, koja se pre podudarala sa osom rotacije Zemlje, valja uvesti osu koja stoji uspravno na ravni Mesečeve putanje oko Zemlje. Početak tog koordinatnog sistema možemo, pošto smo već izračunali momente inercije sistema, iz težišta O pomeriti u centar Zemlje, osu X valja pri tom naperiti prema uzlaznom čvoru ekliptike u odnosu na Mesečevu putanju, t.j. prema silaznom čvoru Mesečeve putanje. Longitudu Sunca λ valja zameniti longitudom Sunca λ_1 , merenom od spomenutog čvora, nagib ekliptike $\varepsilon = \Theta$ valja zameniti nagibom ε_1 Mesečeve putanje prema ekliptici. Ugaonu brzinu n Zemlje valja zameniti ugaonom brzinom sistema Zemlja-Mesec, t.j. srednjim kretanjem Meseca v_1 po njegovoj putanji, masu m Zemlje treba zameniti masom sistema Zemlja-Mesec, t.j. zbirom $(m + m_1)$ masa Zemlje i Meseca, a razlomak $(C - A)/C$ njegovom numeričkom vrednosti datom obrascem (2). Na taj način dobivamo, mesto (44), prethodne glave,

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{M}{M+m+m_1} \frac{v^2}{v_1} \cdot \frac{1}{2} \cos \varepsilon_1. \quad (3)$$

Zbir ($m+m_1$) masa Zemlje i Meseca možemo zanemariti prema masi M Sunca pa zato dobivamo, imajući u vidu obrasce (54) prethodne glave,

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{3\pi T_1}{2 T^2} \cos \varepsilon_1. \quad (4)$$

Ovaj nam obrazac pretstavlja pomeranje čvorova Mesečeve putanje; ono je retrogradno. Apsolutni godišnji iznos ovog pomeranja pretstavljen je sa

$$p_T = \frac{3\pi T_1}{2 T} \cos \varepsilon_1 \quad (5)$$

ili, ako ga merimo stepenima, sa

$$p_T = 270^\circ \frac{T_1}{T} \cos \varepsilon_1. \quad (6)$$

Sa $\varepsilon_1 = 5^\circ 8' 43''$; $T_1 = 27,322$ dana; $T = 365,25$ dana dobivamo za p_T numeričku vrednost od $20''$. Potpuno jedno obilaženje čvorova Mesečeve putanje oko ekliptike zahtevalo bi, dakle, okruglo 18 godina. U stvari traje to siderično obilaženje čvorova Mesečeve putanje nešto duže i to 6793,42 dana t.j. 18,6 godina. Razlika između izvršenog računa i stvarnosti potiče otuda što pomeranje Ψ_1 , pretstavljeno obrascem (4), nije dovoljno maleno prema srednjem kretanju v_1 da bi moglo biti zanemareno. Zbog toga se obrazac (11) prethodne glave ne može istom tačnosc zameniti obrascem (57).

Pored ovog stacionarnog pomeranja čvorova, podleže rotacioni elementi, i to Ojlerovi uglovi Ψ i Θ , promenama koje dobivamo ako u obrascima (50) i (51) prethodne glave, provedemo naznačene supstitucije. Koristeći se obrascem (6) i saopštenom numeričkom vrednosti za ε_1 , dobivamo:

$$\Psi = 1^\circ 36' \sin \frac{4\pi}{T} t \quad (7)$$

$$\Theta = 8' 39'' \cos \frac{4\pi}{T} t. \quad (8)$$

Obrazac (8) kazuje da nagib ε_1 ravni Mesečeve putanje prema ravni Zemljine putanje osciluje oko svoje srednje vrednosti $5^\circ 8' 43''$ amplitudom od $8' 39''$. Tačnije izračunavanje prednjih koeficijenata $1^\circ 36'$ i $8' 39''$ pokazalo bi da bi ih valjalo zameniti sa $1^\circ 38'$ i $8' 48''$.

§ 59. Astronomska nutacija Zemljine ose. Retrogradno kretanje čvorova Mesečeve putanje izaziva periodična pomeranja Zemljine ose koja su, kao što smo već saopštili, pronađena od Bredlija, dobila naziv nutacije. Taj naziv primenjen je kasnije i na periodične članove precesije o kojima smo već govorili, a i na slobodno pomeranje Zemljine ose o kojem ćemo još govoriti pa je, za razliku od ostalih, Bredlijeva nutacija nazvana astronomsom nutacijom.

Da bismo izveli obrasce za astronomsku nutaciju, neka nam (sl. 20) AA' pretstavlja nebeski ekvator, EE' ekliptiku, LL' presek nebeske sfere sa ravni Mesečeve

putanje, F proletnju tačku, D uzlazni čvor Mesečeve putanje u odnosu na ekliptiku, a C uzlazni čvor Mesečeve putanje u odnosu na nebeski ekvator. Zato nam ugao $DFC = \varepsilon$ pretstavlja nagib ekliptike, ugao $L'DE' = \varepsilon_1$ nagib Mesečeve putanje prema ekliptici, a ugao $DCA' = \varepsilon_2$ nagib Mesečeve putanje prema ekvatoru. Luk $FD = \lambda_1$ pretstavlja nam longitudu čvora D , a luk $FC = \alpha$ rektascenziju čvora C .

Videli smo da je permanentni deo momenta zaokretanja Zemlje izazvanog privlačnim dejstvom Sunca bio naperen prema proletnjoj tački pa će zato permanentni deo M_s momenta zaokretanja M privlačnog dejstva Mesečevog na Zemlju biti naperen prema čvoru C , i imati, prema (21), §54, skalarni iznos

$$M_s = \frac{3}{2} \frac{f m_1}{a_1^3} (C - A) \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2 \quad (9)$$

gde m_1 označava masu Meseca, a a_1 njegovo srednje otstojanje od Zemlje.

Rastavimo li ovaj momenat u dve komponente od kojih jedna, M'_s , pada u ekvinkocijalnu liniju, a druga, M''_s , stoji normalno na njoj, to su te komponente pretstavljene obrascima

$$M'_s = M_s \cos \alpha$$

$$M''_s = M_s \sin \alpha$$

t.j.

$$M'_s = \frac{3}{2} \frac{f m_1}{a_1^3} (C - A) \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2 \cos \alpha \quad (10)$$

$$M''_s = \frac{3}{2} \frac{f m_1}{a_1^3} (C - A) \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2 \sin \alpha. \quad (11)$$

Iz sfernog trougla FCD sleduju ovi obrasce:

$$\cos \varepsilon_2 = \cos \varepsilon \cos \varepsilon_1 - \sin \varepsilon \sin \varepsilon_1 \cos \lambda_1$$

$$\sin \varepsilon_2 \sin \alpha = \sin \varepsilon_1 \sin \lambda$$

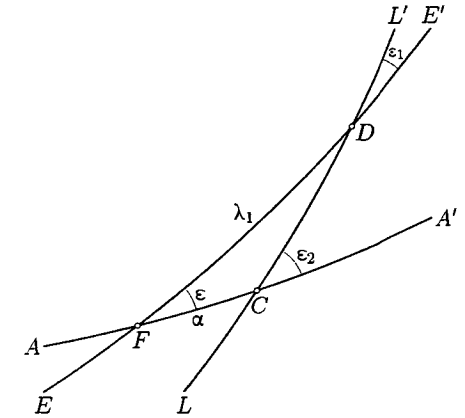
$$\sin \varepsilon_2 \cos \alpha = \sin \varepsilon \cos \varepsilon_1 + \cos \varepsilon \sin \varepsilon_1 \cos \lambda_1.$$

Stavimo li ove izraze u (10) i (11) i uzmemo li u obzir da je

$$\cos^2 \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\lambda_1; \quad \sin \lambda_1 \cos \lambda_1 = \frac{1}{2} \sin 2\lambda_1,$$

to dobivamo

$$M'_s = \frac{3}{2} \frac{f m_1}{a_1^3} (C - A) \left[\sin \varepsilon \cos \varepsilon - \frac{3}{2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cos 2\varepsilon \sin 2\varepsilon_1 \cos \lambda_1 - \frac{1}{2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 \varepsilon_1 \cos 2\lambda_1 \right] \quad (12)$$



Слика 20

$$M_s'' = \frac{3}{4} \frac{fm_1}{a_1^3} (C - A) \left[\cos \epsilon \sin 2\epsilon_1 \sin \lambda_1 - \sin \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \sin 2\lambda_1 \right]. \quad (13)$$

U obrascu (12) pretstavljaja nam

$$\frac{3}{2} \frac{fm_1}{a_1^3} (C - A) \left[\sin \epsilon \cos \epsilon - \frac{3}{2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \right]$$

onu komponentu momenta \mathfrak{M}_s koja je naperena prema prolethnoj tački. Ta je komponenta već bila uzeta u obzir pri izračunavanju lunisolarne precesije Zemljine ose. Ostatak, zavisan od položaja čvorova Mesečeve putanje, pretstavljaja onaj promenljivi, periodični deo \mathfrak{M}_p momenta \mathfrak{M}_s koji izaziva astronomsku nutaciju Zemljine ose. Njegove komponente M_1' , M_2' koje, zbog prve od jednačina (22) prethodne glave, moramo uzeti u račun sa protivnim znakom, pretstavljene su obrascima:

$$M_1' = -\frac{3}{4} \frac{fm_1}{a_1^3} (C - A) \left[\cos 2\epsilon \sin 2\epsilon_1 \cos \lambda_1 - \sin \epsilon \cos \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \cos 2\lambda_1 \right] \quad (14)$$

$$M_2' = -\frac{3}{4} \frac{fm_1}{a_1^3} (C - A) \left[\cos \epsilon \sin 2\epsilon_1 \sin \lambda_1 - \sin \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \sin 2\lambda_1 \right]. \quad (15)$$

Uzmemo li u obzir jednačine (34) i (27) prethodne glave, to dobivamo

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{fm_1}{a_1^3} \frac{1}{n} \frac{C - A}{C} \left[\frac{\cos 2\epsilon}{\sin \epsilon} \sin 2\epsilon_1 \cos \lambda_1 - \cos \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \cos 2\lambda_1 \right] \quad (16)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{3}{4} \frac{fm_1}{a_1^3} \frac{1}{n} \frac{C - A}{C} \left[\cos \epsilon \sin 2\epsilon_1 \sin \lambda_1 - \sin \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \sin 2\lambda_1 \right]. \quad (17)$$

Koristeći se jednačinama (41) i (54) prethodne glave, dobivamo

$$\frac{fm_1}{a_1^3} = \frac{m_1}{m + m_1} v_1^2.$$

Apsolutni godišnji iznos precesije izazvane Mesecom pretstavljen je, zbog (53) prethodne glave, obrascem

$$p_T = \frac{3}{2} \frac{m_1}{m + m_1} \frac{v_1^2}{n} T \frac{C - A}{C} \cos \epsilon.$$

Kako je, zbog retrogradnog kretanja čvorova Mesečeve putanje,

$$\lambda_1 = -\frac{2\pi}{T_2} t \quad (18)$$

gde T_2 označava vreme obilaženja tih čvorova oko ekliptike, to je

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{1}{2} p_T \frac{1}{T} \left[2 \operatorname{ctg} 2\epsilon \sin 2\epsilon_1 \cos \frac{2\pi}{T_2} t - \sin^2 \epsilon_1 \cos \frac{4\pi}{T_2} t \right] \quad (19)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{1}{2} p_T \frac{1}{T} \left[\sin 2\epsilon_1 \sin \frac{2\pi}{T_2} t - \operatorname{tg} \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \sin \frac{4\pi}{T_2} t \right]. \quad (20)$$

Integracija ovih diferencijalnih jednačina daje, pri istim inicijalnim uslovima koje smo postavili pri integraciji jednačina (46) i (47) prethodne glave,

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} p_T \frac{T_2}{T} \left[2 \operatorname{ctg} 2\epsilon \sin 2\epsilon_1 \sin \frac{2\pi}{T_2} t - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon_1 \sin \frac{4\pi}{T_2} t \right] \quad (21)$$

$$\Theta = \frac{1}{4\pi} p_T \frac{T_2}{T} \left[\sin 2\epsilon_1 \cos \frac{2\pi}{T_2} t - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \cos \frac{4\pi}{T_2} t \right]. \quad (22)$$

Sa

$$p_T = 34'',48; \quad T_2 = 18,6T; \quad \epsilon = 23^\circ 27'; \quad \epsilon_1 = 5^\circ 8' 43''$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \Psi &= -17'',06 \sin \frac{2\pi}{T_2} t + 0'',205 \sin \frac{4\pi}{T_2} t \\ \Theta &= 9'',117 \cos \frac{2\pi}{T_2} t - 0'',089 \cos \frac{4\pi}{T_2} t. \end{aligned} \quad (23)$$

U Astronomiji je uobičajena praksa da se ugao Ψ meri retrogradno, zbog čega valja prve obrasce jednačina (61) i (62) prethodne glave i gornjih jednačina (23) upotrebiti sa protivnim znakom. U astronomskoj praksi upotrebljava se, u obrascima za nutacione članove, mesto nezavisne varijable t , longituda Sunca \odot , longituda Meseca \ominus i longituda Ω uzlaznog čvora Mesečeve putanje. Pošto Ω raste retrogradno, to treba u članovima sa $\sin \Omega$ izvršiti još jednu promenu znaka. Na taj način dobivaju se za celokupnu nutaciju ovi na dve decimale tačno izračunati obrasci:

$$\begin{aligned} \Psi &= -1'',27 \sin 2\odot - 0'',20 \sin 2\ominus - 17'',26 \sin \Omega + 0'',21 \sin 2\Omega \\ \Theta &= +0'',55 \cos 2\odot + 0'',09 \cos 2\ominus + 9'',22 \cos \Omega - 0'',09 \cos 2\Omega. \end{aligned}$$

Svaki par onih članova koji imaju istu periodu prouzrokuje pomeranje Zemljine ose rotacije i to takvo da prodorna tačka te ose sa nebeskom sferom opisuje, za vreme odgovarajuće periode, na nebeskom svodu, jednu malu, nutacionu, elipsu. Jer, pomerili se ta osa za uglove Θ i Ψ , to se njena prodorna tačka pomera na nebeskoj sferi za prividne duži

$$\begin{aligned} x &= \Theta \\ y &= \Psi \sin \epsilon, \end{aligned}$$

pa zato dobivamo, na primer, iz oba glavna člana gornjih obrazaca ova pomeranja,

$$\begin{aligned} x &= 9'',22 \cos \Omega \\ y &= -17'',26 \sin \epsilon \sin \Omega. \end{aligned}$$

Eliminišemo li iz ovih dveju jednačina Ω , to dobivamo

$$\frac{x^2}{(9'',22)^2} + \frac{y^2}{(17'',26 \sin \epsilon)^2} = 1.$$

Ovo je jednačina Bredlijeve nutacione elipse. Njene poluose su, pošto je $\epsilon = 23^\circ 27'$, jednake $a = 9'',22$; $b = 6'',87$; velika osa te elipse naperena je prema polu ekliptike.

Slobodna nutacija Zemlje

§ 60. **Istorijski podatci.** Do skoro pred kraj prošloga veka mislilo se da Zemljina osa rotacije ne menja svoj položaj u Zemljinom telu jer su tako govorili rezultati astronomskih posmatranja. Zaista, kada bi se osa rotacije pomerala u Zemljinom telu, morale bi se menjati i geografske širine pojedinih mesta na Zemlji, a takve promene nisu bile opažene na astronomskim opservatorijama, raspoređenim po celoj Zemljinoj površini. Smatralo se, dakle, da je Zemlja, o čemu je svedočila i Klerova teorema, podesila svoj oblik prema svojoj rotaciji tako da se njena geometrijska osa, t.j. njena polarna glavna osa inercije, poklapa sa njenom osom rotacije. Ako je to, zaista, slučaj, onda nema, kao što ćemo odmah videti, razloga da Zemljina osa rotacije menja svoj položaj u Zemljinom telu ako na nju ne deluje moment spoljnih sila. Istina, teorija precesije pokazala je, kao što smo videli, da Zemljina osa rotacije ne može biti potpuno nepokretna u Zemljinom telu, jer ako ta osa menja svoj položaj u prostoru, onda ga mora menjati i u Zemljinom telu; čim postoji herpolhodijska kao konačna kriva, mora postojati i konačna polhodijska. Ali se pokazalo da je polhodijska precesionog kretanja Zemljinog toliko uska da nije mogla biti konstatovana astronomskim posmatranjima, da se, dakle, može smatrati za tačku. Iz te pretpostavke, naknadno opravdane, izveli smo glavne obrasce za precesiju i astronomsku nutaciju Zemljine ose. No Ojlerove jednačine ne isključuju, kao što ćemo videti, ni u slučaju kada na Zemlju ne deluje nikakav spoljni moment zakretanja, mogućnost pomeranja Zemljine ose, ali je takvo pomeranje smatrano samo kao neostvarena mogućnost. No već 1814 godine izrazio je, na temelju svojih posmatranja, veliki nemački astronom BESEL svoju sumnju u nepokretnost Zemljine ose rotacije u Zemljinom telu; i rezultati posmatranja ruskog astronoma PETERSA, izvršenih 1842 godine, govorili su u istom smislu. Ali su promene geografskih širina primećenih od ovih dvaju astronoma, a i drugih koji su se bavili istim pitanjem, bile toliko neznatne da su se mogle rastumačiti i drugim razlozima, na primer, poremećajima opažanja izazvanim optičkom refrakcijom. Kako su, na posletku, 1888 godine, posmatranja berlinskog astronoma KISTNERA nesumnjivo dokazala realnost promena geografskih širina, odlučeno je da se te promene sistematičnije ispituju. Ako se Zemljina osa pomera, zaista, u Zemljinom telu, onda se to pomeranje mora ispoljiti u protivnom smislu na geografskim širinama dvaju mesta, recimo severne hemisfere,

kojih se geografske dužine razlikuju za 180° , jer u koliko se Zemljin pol rotacije približava jednom od tih dvaju mesta, u toliko se on od drugog mora udaljavati. Da bi se definitivno utvrdilo da li je to tako, upućena je jedna nemačka i jedna američka ekspedicija u Honolulu, na Havajskim Ostrvima, da vrše onde posmatranja varijacije geografske širine u isto vreme sa vršenjem takvih posmatranja u Berlinu, Pragu i Štrasburgu. Ta su posmatranja, vršena od maja 1891 do juna 1892, dokazala da se Zemljina osa, iako neznatno, zaista, pomera u Zemljinom telu. Krajem prošloga veka organizovana je internacionalna astronomska služba koja vrši, na šest stanica, raspoređenih duž uporednika od $39^\circ 8'$ severne hemisfere, posmatranja promena geografske širine i prati time, korak u korak, pomeranje Zemljinih polova. O rezultatima tih posmatranja govorićemo pošto ispitamo mehanizam posmatrane pojave.

§ 61. **Mehanizam pojave.** Pretpostavimo, pošto smo efekte momenta spoljnih sila već ispitali, da na Zemlju ne utiče nikakav takav spoljni moment, t.j. da je, prema upotrebljenim oznakama,

$$\mathfrak{M} = 0 \quad (1)$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0. \quad (2)$$

Pretpostavimo, za sada, da je Zemlja čvrsto nepromenljivo telo tako da za nju važe Ojlerove jednačine, izvedene u §44, koje zbog prednjih pretpostavki dobivaju ovaj oblik:

$$A \frac{dw_1}{dt} + (C - B)w_2w_3 = 0$$

$$B \frac{dw_2}{dt} + (A - C)w_3w_1 = 0 \quad (3)$$

$$C \frac{dw_3}{dt} + (B - A)w_1w_2 = 0.$$

Iz jednačine (26), §43, i prednje jednačine (1) sleduje

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = 0. \quad (4)$$

Integracija ove jednačine daje

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \quad (5)$$

gde \mathfrak{G}_0 predstavlja jedan konstantni vektor. Impuls obrtanja je, dakle, jedan u prostoru invarijabilan vektor.

Pri izvođenju Ojlerovih jednačina pretpostavljeno je da je početak O koordinatnog sistema $x-y-z$, vezanog sa posmatranim telom, položen u težište toga tela, a da se njegove koordinatne ose podudaraju sa glavnim, dakle sa centralnim, osama inercije toga tela. Zato je prema jednačinama (41), §44,

$$Aw_1i + Bw_2j + Cw_3k = \mathfrak{G}_0 \quad (6)$$

gde A, B, C predstavljaju centralne glavne momente inercije posmatranoga tela. Srazmera tih momenata inercije određuje karakter rotacionog kretanja uočenoga tela.

Ako je

$$A = B = C,$$

onda je zbog (6)

$$A\boldsymbol{\omega} = \mathfrak{G}_0$$

t.j. vektor rotacije $\boldsymbol{\omega}$ ima isti pravac kao i vektor \mathfrak{G}_0 pa i on ima invariabilnu orijentaciju u prostoru; on ne menja svoj položaj ni u samom uočenom pokretnom telu, jer je onda zbog (3)

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{dw_2}{dt} = \frac{dw_3}{dt} = 0.$$

Uočeno telo obrće se, dakle, oko ose, nepromenljive u njemu i u prostoru, konstantnom ugaonom brzinom w .

Ako su momenti inercije A, B, C nejednaki, onda, u takvom slučaju, vodi ispitivanje kretanja uočenoga tela na eliptične funkcije. Mi ćemo se, pošto imamo da ispitamo kretanje naše Zemlje, zadovoljiti specijalnim slučajem

$$A = B \quad (7)$$

ostvarenim u primeru naše Zemlje. Tu je, pošto osu z našeg koordinatnog sistema polažemo u osu Zemljinoga tela,

$$C > A. \quad (8)$$

Osa z zove se u ovom slučaju i geometrijskom osom Zemlje.

Ojlerove jednačine (3) dobivaju, zbog (7), sada ovaj oblik

$$A \frac{dw_1}{dt} + (C - A)w_2w_3 = 0 \quad (9)$$

$$A \frac{dw_2}{dt} + (A - C)w_3w_1 = 0 \quad (10)$$

$$C \frac{dw_3}{dt} = 0. \quad (11)$$

Iz (11) sleduje integracijom

$$w_3 = n \quad (12)$$

gde n označava jednu konstantu. Zemlja se obrće, dakle, oko svoje geometrijske ose konstantnom ugaonom brzinom n . Označimo li periodu toga obrtanja sa τ , to je

$$w_3 = n = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (13)$$

Stavimo li, kratkoće radi,

$$\frac{2\pi}{\tau} \frac{C - A}{C} = k, \quad (14)$$

gde je, zbog (8), k jedan pozitivan, konstantan broj, to dobivamo mesto (9) i (10) ove dve jednačine

$$\frac{dw_1}{dt} + kw_2 = 0 \quad (15)$$

$$\frac{dw_2}{dt} - kw_1 = 0. \quad (16)$$

Pomnožimo li prvu od ovih dveju jednačina sa w_1 , a drugu sa w_2 , pa sabere-mo li ih, to dobivamo

$$w_1 dw_1 + w_2 dw_2 = 0.$$

Integracija ove diferencijalne jednačine daje

$$w_1^2 + w_2^2 = c^2 \quad (17)$$

gde c označava jednu konstantu. Iz (15), (16) i (17) sleduje

$$\frac{dw_1}{\sqrt{c^2 - w_1^2}} = -k dt; \quad \frac{dw_2}{\sqrt{c^2 - w_2^2}} = k dt.$$

Integracija ovih dveju diferencijalnih jednačina daje, ako za inicijalni momenat $t = 0$ odaberemo jedan od onih trenutaka u kojem je $w_1 = c$; $w_2 = 0$, t.j. u kojem vektor rotacije $\boldsymbol{\omega}$ pada baš u ravan $x-z$,

$$\arccos \frac{w_1}{c} = kt; \quad \arcsin \frac{w_2}{c} = kt$$

t.j.

$$w_1 = c \cos kt \quad (18)$$

$$w_2 = c \sin kt. \quad (19)$$

Da sa pokretnog koordinatnog sistema $x-y-z$ pređemo ne nepokretni $X-Y-Z$, odaberimo pravac invariabilnog vektora \mathfrak{G}_0 za pravac ose Z nepokretnog koordinatnog sistema, onda se ravan $X-Y$ tog koordinatnog sistema, u kojoj možemo osu X proizvoljno orijentisati, zove invariabilnom ravni. Iz slike 17, §45, sleduje, pošto se osa Z podudara sa pravcem vektora \mathfrak{G}_0 ,

$$\mathfrak{G}_0 = G_0 \mathbf{n}_3 = (G_0 \sin \Theta) \mathbf{j}_0 + (G_0 \cos \Theta) \mathbf{k}.$$

Kako je

$$(G_0 \sin \Theta) \mathbf{j}_0 = (G_0 \sin \Theta \sin \Phi) \mathbf{i} + (G_0 \sin \Theta \cos \Phi) \mathbf{j},$$

to dobivamo

$$\mathfrak{G}_0 = (G_0 \sin \Theta \sin \Phi) \mathbf{i} + (G_0 \sin \Theta \cos \Phi) \mathbf{j} + (G_0 \cos \Theta) \mathbf{k}. \quad (20)$$

Iz jednačina (6) i (7) sleduje

$$\mathfrak{G}_0 = Aw_1 \mathbf{i} + Aw_2 \mathbf{j} + Cw_3 \mathbf{k}, \quad (21)$$

a iz (20) i (21)

$$w_1 = \frac{G_0}{A} \sin \Theta \sin \Phi \quad (22)$$

$$w_2 = \frac{G_0}{A} \sin \Theta \cos \Phi \quad (23)$$

$$w_3 = \frac{G_0}{C} \cos \Theta. \quad (24)$$

Iz (21) sleduje kvadriranjem

$$G_0^2 = A^2 w_1^2 + A^2 w_2^2 + C^2 w_3^2 \quad (25)$$

t.j. zbog (17) i (13)

$$G_0^2 = c^2 A^2 + n^2 C^2. \quad (26)$$

Jednačine (24) i (13) daju

$$G_0 \cos \Theta = nC \quad (27)$$

$$\cos^2 \Theta = \frac{n^2 C^2}{c^2 A^2 + n^2 C^2}; \quad \sin^2 \Theta = \frac{c^2 A^2}{c^2 A^2 + n^2 C^2} = \frac{c^2 A^2}{G_0^2}$$

$$\sin \Theta = \frac{cA}{G_0}. \quad (28)$$

Stavljajući (28) u (22) i (23), dobivamo

$$w_1 = c \sin \Phi \quad (29)$$

$$w_2 = c \cos \Phi. \quad (30)$$

Iz (29), (30), (18) i (19) sleduje

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - kt. \quad (31)$$

Jednačina (28), u kojoj na desnoj strani stoje same konstante, kazuje da je Ojlerov ugao Θ nepromenljiv, t.j. da je

$$\Theta' = 0. \quad (32)$$

Jednačine koje daju komponente vektora rotacije u pokretnom odnosno mirujućem koordinatnom sistemu kao funkcije Ojlerovih uglova bile su, kao što smo videli u §46, ove:

$$\begin{aligned} w_1 &= \Psi' \sin \Theta \sin \Phi + \Theta' \cos \Phi \\ w_2 &= \Psi' \sin \Theta \cos \Phi - \Theta' \sin \Phi \\ w_3 &= \Psi' \cos \Theta + \Phi' \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Theta' \cos \Psi + \Phi' \sin \Theta \sin \Psi \\ \omega_2 &= \Theta' \sin \Psi - \Phi' \sin \Theta \cos \Psi \\ \omega_3 &= \Psi' + \Phi' \cos \Theta. \end{aligned} \quad (34)$$

Iz prednjih jednačina i obrazaca (22), (23), (24) sleduje:

$$\Psi' = \frac{G_0}{A}. \quad (35)$$

Izvršimo slobodni izbor orientacije ose X u invariabilnoj ravni tako da je u inicijalnom momentu $t = 0$; $\Psi = 0$, onda dobivamo, integracijom prednje jednačine,

$$\Psi = \frac{G_0}{A} t. \quad (36)$$

Iz jednačina (34) i gornjih jednačina sleduje

$$\omega_1 = -\frac{kcA}{G_0} \sin \frac{G_0}{A} t \quad (37)$$

$$\omega_2 = \frac{kcA}{G_0} \cos \frac{G_0}{A} t \quad (38)$$

$$\omega_3 = \frac{G_0}{A} + \frac{knC}{G_0}. \quad (39)$$

Dobivenim jednačinama opisana je slobodna nutacija Zemlje. Obrasci (12), (18) i (19) predstavljaju nam koordinate vektora rotacije ω u pokretnom koordinatnom sistemu, dakle jednačinu polhodije u parametarskom obliku. Ta je kriva krug sa centrom u geometrijskoj osi Zemlje udaljenim za $w_3 = n$ od početka koordinatnog sistema. Ravan toga kruga stoji normalno na geometrijskoj osi Zemlje, a njegov radius je jednak

$$r = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = c. \quad (40)$$

Onaj radius toga kruga koji spaja njegov centar sa tačkom polhodije koja odgovara trenutku t zatvara sa ravni $x-z$ ugao φ dat jednačinom

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{w_2}{w_1} = \operatorname{tg} kt$$

iz koje sleduje zbog (14)

$$\varphi = kt = \frac{2\pi C - A}{\tau} t.$$

Ovaj ugao raste proporcionalno vremenu pa zato osa rotacije Zemlje obiđe celu polhodiju za vreme periode

$$T = \frac{A}{C - A} \tau \quad (41)$$

i to u pozitivnom smislu.

Obrasci (37), (38) i (39) predstavljaju nam koordinate vektora rotacije ω u mirujućem koordinatnom sistemu, dakle jednačinu herpolhodije u parametarskom obliku. I ta je kriva krug koji se normalno obavio oko ose Z . Radius toga kruga jednak je

$$R = \frac{kcA}{G_0} \quad (42)$$

a onaj njegov radius koji spaja njegov centar, koji leži u osi Z , sa tačkom herpolhodije koja odgovara trenutku t zatvara sa ravni $X-Z$ ugao ψ dat ovom jednačinom

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\operatorname{ctg} \frac{G_0}{A} t$$

iz koje sleduje

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{G_0}{A} t.$$

I ovaj ugao raste proporcionalno vremenu pa zato osa rotacije Zemlje obiđe celu herpolhodiju za vreme periode

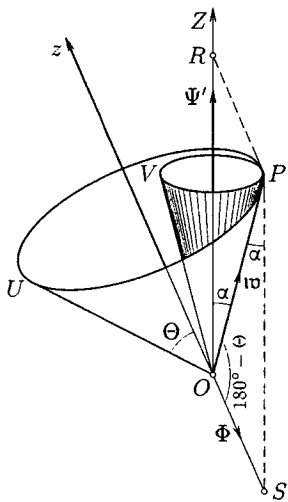
$$T_1 = 2\pi \frac{A}{G_0} \quad (43)$$

i to u pozitivnom smislu.

Našavši polhodiju i herpolhodiju i način kretanja krajnje tačke rotacionog vektora ω po tim dvema krivama, rešen je postavljeni problem. Pre no što dobiveno rešenje primenimo na našu Zemlju, daćemo mu još jednu geometrijsku interpretaciju.

Iz (45), §46, sleduje, uzimajući u obzir (32),

$$\omega = \Psi' n_3 + \Phi' \mathfrak{k}. \quad (44)$$



Слика 21

Ova jednačina kazuje da rotaciju ω možemo smatrati za rezultantu dveju komponentalnih rotacija od kojih prva sleduje oko ose Z ugaonom brzinom Ψ' , a druga oko ose z ugaonom brzinom Φ' . Neka nam dakle, OZ (sl. 21) pretstavlja osu Z mirujućeg koordinatnog sistema, a Oz osu z pokretnog, t.j. geometrijsku osu Zemljinu. Odmerimo na pozitivnoj grani ose Z , duž $\overline{OR} = \Psi' = G_0/A$, a na negativnoj grani ose z duž $\overline{OS} = -\Phi' = k$, to nam dijagonala OP paralelograma $OSPR$ pretstavlja, po veličini i naznačenom smeru, ugaonu brzinu ω ; ona leži, pošto je Φ' negativno, izvan oštrog ugla ZOz . Pošto su \overline{OR} , \overline{OS} i Θ konstantne veličine, to se međusobni položaj obeju osa Z i z i vektora rotacije ω ne menja za vreme kretanja. Krajnja tačka P vektora rotacije ω opisuje oko ose Z kružnu herpolhodiju PV , a oko ose z kružnu polhodiju PU . Krug polhodije obavio se, zbog toga što je $C > A$, oko kruga herpolhodije pa se kotrlja po njemu, povlačeći sa sobom Zemljino telo. To kretanje možemo, prema onom što smo maločas izložili, i tako interpretirati da se geometrijska osa z Zemlje obrće oko ose Z konstantnom ugaonom brzinom Ψ' , a Zemlja se pri toj obrće oko te svoje geometrijske ose ugaonom brzinom $-\Phi'$. Iz trougla OPS sleduje sledeća relacija između uglova otvora Θ odnosno α polhodije

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \Theta} = \frac{-\Phi'}{\Psi'} = \frac{T_1}{T} \tag{45}$$

Ta relacija sleduje, u ostalom, i iz činjenice da se krug polhodije, kotrljajući se po krugu herpolhodije, obrne jedanput za vreme T , a da mu je potrebno vreme T_1 da obiđe celu herpolhodiju.

§ 62. Ojlerova perioda i Čendlerova perioda. Primenimo dobivene rezultate na slučaj naše Zemlje. Iz njih sleduje da, pretpostavljajući Zemlju kao apsolutno čvrstu, njena osa rotacije ocrta u Zemljinom telu konus polhodije za vreme T dato obrascem (41). Prodorne tačke te ose sa Zemljinom površinom pretstavljaju nam trenutne polove rotacije Zemljine, a prodorne tačke geometrijske ose Zemljine sa tom površinom pretstavljaju nam geometrijske polove Zemlje. Za vreme T opiše, dakle, pol rotacije oko geometrijskog pola, kao centra, krug kojega je radius pretstavljen obrascem (40). U obrascu (41) možemo periodu τ , za vreme koje se Zemlja obrne oko svoje geometrijske ose, kao što ćemo videti, identifikovati sa zvezdanim danom; iz numeričke vrednosti razlomka $A/(C-A)$ dobiva se onda za T interval od 305 zvezdanih ili 304 srednjih Sunčevih dana. Ta se perioda zove *Ojlerovom periodom*. Radius c kruga polhodije zavisi od inicijalnih uslova. Kada bi ti uslovi bili takvi da u inicijalnom momentu vektor rotacije ω pada u geometrijsku osu Zemlje, dakle u osu z našeg pokretnog koordinatnog sistema, onda bi ti uslovi bili izraženi sa

$$t = 0; \quad w_1 = w_2 = 0$$

pa bi iz jednačina (9) i (10) sledovalo

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{dw_2}{dt} = 0$$

t.j. komponente w_1 i w_2 rotacionog vektora bile bi stalno jednake nuli, a to znači da bi se Zemlja stalno obrtala oko svoje geometrijske ose. U tom slučaju bi zbog (22) i impuls obrtanja \mathcal{G}_0 , kojega smo pravac odabrali za osu Z mirujućeg koordinatnog sistema, pao u geometrijsku osu Zemljinu pa bi bilo $\Theta = 0$; polhodija i herpolhodija bi degenerisale na jednu zajedničku tačku, a konus polhodije i konus herpolhodije na jednu u prostoru i u Zemljinom telu invariabilnu pravu; Zemlja bi se obrtala konstantnom ugaonom brzinom oko svoje u prostoru nepokretne geometrijske ose. Da je Zemljina slobodna rotacija takve prirode mislilo se, kao što smo kazali, dogod nisu sistematska posmatranja i proučavanja varijacije geografskih širina pokazala da to nije tako. Iz tih posmatranja sleduje da Zemljin trenutni pol rotacije odstupa od geometrijskog pola i obilazi u predviđenom smislu oko njega. Ta obilaženja, koja nisu međusobno sasvim jednaka, ne razlikuju se osetno od kružnih putanja, a pri tome se pol rotacije ne udaljuje od geometrijskog pola dalje od 10 metara ili, ako to otstojanje merimo ugaonom merom, ne dalje od $0''{,}3$. Taj ugao pretstavljaju nam ugao otvora Θ polhodije, t.j. ugao što ga vektor rotacije ω zatvara sa osom z koordinatnog sistema vezanog sa Zemljom. Moduo w vektora ω dat je jednačinom

$$w^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

t.j. zbog (12) i (17) jednačinom

$$w^2 = c^2 + n^2. \tag{46}$$

Kako je

$$\frac{c}{n} = \text{tg } \Theta$$

to dobivamo, ako u ovu jednačinu uvrstimo tangens ugla od $0''{,}3$, koji možemo, pošto je taj ugao vrlo mali, zameniti sa samim tim uglom,

$$c = 0,000\,000\,1\,n.$$

Stavljajući ovo u jednačinu (46), dobili bismo relaciju između ugaone brzine w oko trenutne ose rotacije i ugaone brzine n rotacije oko geometrijske ose Zemljine: razlika između tih ugaonih brzina toliko je neznatna da smo u (41) za τ mogli sa pravom da stavimo trajanje zvezdanog dana. Saopšteni numerički podatci pokazuju da je konus polhodije veoma šiljast. Kako u jednačini (26) možemo, pošto se momenti inercije A i C ne razlikuju osetno jedan od drugog, a c je, kao što smo videli, veoma maleno prena n , zanemariti prvi član desne strane pa dobivamo

$$G_0 = nC$$

t.j. zbog (12), (13) i (43)

$$T_1 = \frac{A}{C}\tau. \tag{47}$$

Perioda T_1 ne razlikuje se, dakle, osetno od dužine jednog zvezdanog dana.

Iz relacije (45), u kojoj možemo, pošto su uglovi α i Θ veoma maleni, njihove sinuse zameniti sa samim tim uglovima merenim u lučnoj meri, sleduje

$$\frac{\alpha}{\Theta} = \frac{T_1}{T}$$

t.j. zbog (47) i (41)

$$\alpha = \frac{C - A}{C} \Theta. \quad (48)$$

Iz saopštenih numeričkih vrednosti za Θ i $(C - A)/C$ sleduje $\alpha = 0'',00098$; ugao α ne prekoračava, dakle, vrednost od $0'',001$. Pomeranje Zemljine ose rotacije u prostoru ne dostiže ni 300-ti deo pomeranja te ose u Zemljinom telu. To pomeranje ose u prostoru toliko je neznatno da ne dostiže granice najoštrijeg astronomskog opažanja; zato možemo orijentaciju Zemljine ose pri njenom slobodnom kretanju, isključujući uticaj precesije i astronomske nutacije, smatrati kao invariabilnu. Oko te ose klimata Zemlja tako da, relativno prema Zemljinoj površini, pol rotacije opisuje svoju usku kružnu putanju oko geometrijskog pola Zemlje. To kretanje

* Zemlje zove se njena *slobodna nutacija*.

Rezultati internacionalne službe posmatranja varijacije geografskih širina pokazali su da pol rotacije treba za jedan potpuni obilazak oko geometrijskog pola, mesto nađene Ojlerove periode, interval vremena od 437 dana, dakle okruglo 14 meseci. Ta se perioda zove, po njenom pronalazaču, *Čendlerova perioda*. Razmimoilaženje između teorije i opažanja, koje se ispoljilo u tim dvema periodama, našlo je ubrzo svoje tumačenje od NJUKEMA. Naša teorijska ispitivanja izvršena su pod pretpostavkom da je naša Zemlja apsolutno čvrsta, što nije slučaj. Uzme li se u obzir elastičnost Zemljina, onda nastupa podudarnost između teorije i opažanja.

ГЛАВА ПЕТАНАЕСТА

Sekularno pomeranje Zemljinih polova

§ 63. **Istorijski podatci.** Klasična teorija rotacionog kretanja Zemlje počiva na pretpostavci da je naša Zemlja apsolutno čvrsta. Iako je ova pretpostavka u prirodi samo nepotpuno ostvarena, uspela je klasična teorija da glavne pojave rotacionog kretanja Zemljinog, precesiju i astronomske nutacije Zemljine ose, potpuno rastumači i matematski savršeno opiše. Zato nije čudo da je prošao vek i po od kada su položeni bili temelji te teorije, a da se nije ni pomisljalo staviti u pitanje njene, tako dobro oprobane, pretpostavke. Tek polovinom prošloga veka, kada je pitanje o unutrašnjosti Zemlje postalo aktuelno, postavljeno je i pitanje kako bi se odigravala precesija i nutacija Zemljine ose kada bi Zemlja imala tečnu unutrašnjost, zatvorenu u čvrstoj ljusci. Sedam decenija bavili su se naučnici tim pitanjem da radovima POENKAREA i OPENHAJMA dođu do rezultata da bi i tečna Zemlja imala istu precesiju kao i potpuno čvrsta, što je ŠVAJNDAR dokazao i za elastičnu. Nije, dakle, bilo razloga klasičnu teoriju precesije i nutacije zamenjivati novom. Istina da je pronalazak Čendlerove periode slobodne nutacije Zemljine pokazao da se, u ovom slučaju, ne može izaći na kraj sa pretpostavkom apsolutno čvrste Zemlje, ali je ovde dovoljno pretpostaviti Zemlju kao elastičnu pa da se postigne saglasnost između teorije i stvarnosti. Ali je, svim tim značajnim rezultatima egzaktno nauke, ostalo jedno, i to možda najvažnije, pitanje nerešeno. Geološka ispitivanja su pokazala da položaji polova Zemljine rotacije nisu nepromenljivi na njenoj površini nego da su se oni, u toku geološke prošlosti, neočekivano daleko pomerali po licu Zemljinom. Od mnogobrojnih dokumenata geologije koji to svedoče da navedemo samo jedan. Bogate naslage kamenog uglja koje su pronađene na Špicberškim Ostrvima i koje se danas u velikoj meri eksploatišu, nisu se mogle obrazovati na sadašnjoj geografskoj širini tih ostrva, jer to ne bi dozvolile njihove klimatske prilike. U doba karbona bio je, to svedoče i ostali dokumenti geologije, položaj Zemljinih polova sasvim drugi no što je sada, a to važi i za ostala geološka doba. Tako su geologija i ostale deskriptivne prirodne nauke postavile egzaktno naučniko pitanje: da li postoje mehanički razlozi za pomeranje polova na Zemljinoj površini i da li je moguće to pomeranje ispitati i opisati oruđem matematike. Pokušaji koji su, u drugoj polovini prošloga veka, činjeni od TOMZONA, DARVINA i SKIAPARELIJA da na postavljeno pitanje odgovore, ostali su bezuspešni, jer su

ti naučnici tražili uzrok onoj pojavi u promeni rasporeda masa na Zemlji. Za vreme Zemljine prošlosti dešavali su se, u istinu, veliki pretovari masa na Zemljinoj površini, a kvarterno ledeno doba, kada su veliki delovi severnih krajeva Evrope i Amerike bili pokriveni slojem snega i leda, debelim hiljada metara, predočava nam jedan takav slučaj. Ali su te promene u rasporedu masa Zemljinih koje nam, na prvi pogled, izgledaju ogromne, bile sasvim nedovoljne da izazovu veća pomeranja polova Zemljinih. Na postavljeno pitanje moglo se samo odgovoriti napuštajući klasičnu pretpostavku o prirodi Zemljinoga tela i zamenjujući je novom koja odgovara bolje stvarnosti, t.j. uzimajući u obzir novija ispitivanja geofizike o prirodi Zemljinog tela. Ta su ispitivanja dokazala ovo. Spoljni sloj čvrste Zemljine kore, u koji ulaze, u prvom redu, Zemljini kontinenti, sagrađen je od lakšeg materijala koji se zove, spajajući prve slogove njegovih glavnih sastavnih elemenata, silicija i aluminijska, ukraćno „sial“. Pod tim gornjim slojem leži drugi, od težeg materijala, koji se zove „sima“ (od silicija i magnezijuma). Ispitivanja teže pokazala su da sialni pokrivač Zemljin počiva na svojoj simatičnoj podlozi „izostatski“, t.j. tako kako to zahteva Arhimedov princip plivanja. Sialni pokrivač Zemljin, koji se najočiglednije ispoljio u kontinentalnim santama, utonuo je, svakim svojim delom, toliko u svoju simatičnu podlogu kako to zahteva spomenuti hidrostatski princip. Kako je i ta podloga čvrsta, u običnom smislu te reči, to bi se moglo, na prvi mah, misliti da sadašnje stanje nije drugo do ostatak iz davnih vremena kada su čvrste sialne sante plivale na još žitkoj simi koja se postepeno stvrdnula, ostavljajući u sadašnjem stanju Zemljine ljuske svedočanstvo svog nekadašnjeg agregatnog stanja. No to nije slučaj. Ona vremena, kada je ta podloga bila stvarno žitka, leže daleko, u prvim epohama Zemljine prošlosti. Od toga doba prohujala je skoro cela geološka istorija Zemlje, a za njeno vreme dešavale su se još velike promene lica Zemljinog koje su ga iz osnova izmenile. Današnje stanje stvari može se rastumačiti samo ovako. Podloga sialnog pokrivača Zemljinog pokazuje, pored sve svoje čvrstoće, i dan danas izvesne osobine tečnih tela; ona je čvrsta ali fluidalna, t.j. ona se ponaša prema kratkotrajnim silama kao čvrsto telo, a prema dugotrajnim kao tečno, isto tako kao što to čine neke čvrste materije, čvrsta smola, pečatni vosak i dr. Da naša Zemlja ima takve osobine, svedoči, između ostalog, jedna dobro ispitana geofizična pojava. Za vreme kvarternog ledenog doba, kada su, kao što smo čuli, severni delovi Evropskog i Američkog kontinenta ležali pod teretom debelog ledenog sloja, ti su delovi kontinentalnih santa utonuli u svoju podlogu, a kada se ledeni sloj, koji ih je pokrivač, otopio, oni su se počeli opet uzdizati u vis, i to njihovo uzdizanje traje i dan današnji. Na taj način dobivamo ovu sliku o stvarnoj prirodi Zemljinoga tela. Zemlja smatrana kao celina, fluidalno je telo, t.j. takvo koje se prema kratkotrajnim silama ponaša kao čvrsto, ali uticaju dugotrajnih sila postepeno popušta i teži onom stanju ravnoteže koje bi odgovaralo tečnom agregatnom stanju. To je posvedočila i Kleroova teorema. Na tom fluidalnom telu Zemljinom počiva izostatski njen sialni pokrivač koji ne čini jednu homogenu ljusku nego je nejednake debljine, raspucan, a možda i raspačan na odvojene delove. On se samo u svojim pojedinim delovima pokazuje kao čvrsto telo, a kao celina ne; zato ga možemo smatrati za skup čvrstih santa koje su utonule u svoju fluidalnu podlogu kako to zahteva hidrostatski princip plivanja.

Usvajajući ovu šemu o prirodi Zemljinog tela, izradio je MILANKOVIĆ svoju teoriju pomeranja Zemljinih polova koju ćemo upoznati, u njenim glavnim crtama, u

narednih šest paragrafa ove knjige. Sa svoje strane, stvorio je BILIMOVIĆ svoju šemu koju ćemo upoznati u poslednjem paragrafu, a u kojoj je shvatio Zemlju koja se obrće oko svoga težišta kao materijalni sistem za šest stepena slobode i pri tome je došao do iste osnovne jednačine kretanja polova kao i njegov prethodnik. Žardcki je pak ispitao uticaj zonalne rotacije o kojoj smo već govorili i pokazao da hipoteza o takvoj rotaciji ne stoji u protivrečju sa postavljenom teorijom pomeranja Zemljinih polova.

§ 64. Matematska šema izostazije i fluidalnosti Zemljine. Osobine Zemljinog tela, saopštene u prethodnom paragrafu, valja, pre no što pristupimo postavljenom problemu, opisati jezikom matematike pa tim stvoriti jasnu matematsku šemu o prirodi Zemljinog tela, pristupačnu egzaktom ispitivanju. Uočimo, u to ime, na proizvoljnom mestu Zemljine površine, jednu elementarnu vertikalnu prizmu sialnog pokrivača Zemljinog sa bazom df ograničenom meridijanima ψ i u ($\psi + d\psi$), a uporednicima kojima odgovaraju geocentrične širine φ i ($\varphi + d\varphi$). Označavajući sa r radiusvektor uočenog dela Zemljine površine, biće baza te elementarne prizme pretstavljena ovim obrascem:

$$df = r^2 \cos \varphi d\varphi d\psi. \quad (1)$$

Označimo sa D debljinu sialnog pokrivača na uočenom mestu Zemljine površine, to nam ta dužina pretstavlja, u isti mah, visinu uočene elementarne prizme. Ta prizma utonula je u svoju fluidalnu podlogu kako to zahteva princip izostazije. Označimo sa H dubinu do koje je ona utonula, sa ρ_0 gustinu sime, a sa ρ gustinu siala, to je princip izostazije izražen jednačinom

$$\rho_0 H = \rho D, \quad (2)$$

jer masa $\rho_0 H df$ istisnutog dela sime mora biti jednaka celokupnoj masi $\rho D df$ uočene elementarne prizme. Zamislimo sada da smo nepravilni sialni pokrivač Zemljin, zajedno sa okeanima koji ga pokrivaju, na svakom mestu Zemljine površine, kondenzovali na gustinu ρ_0 sime, onda će on izgledati potisnut tačno do nivoske površine sime koja, zbog fluidalnosti Zemljinog tela, mora pretstavljati jednu ekvipotencijalnu površinu gravitacionih i centrifugalnih sila kako smo je našli pri izvođenju Kleroove teoreme. Zato će Zemlja, mesto svojom stvarnom neravnom površinom, biti ograničena jednom takvom ekvipotencijalnom površinom, dakle jednim glatkim rotacionim elipsoidom. Pozivajući se na sličan postupak koji se upotrebljava u geodeziji, polažući površinu elipsoida upoređivanja u nivo mora, a kondenzujući mase koje se iznad njega nalaze, nazvaćemo ovaj naš elipsoid, za razliku od geodetskog *unutrašnjim elipsoidom referencije*. Jednačina njegovog meridijanskog preseka biće, prema obrascu (77), §51, ova

$$r = a(1 - v \sin^2 \varphi) \quad (3)$$

gde a označava radius ekvatora tog elipsoida, a v njegovu spljoštenost. Za ovu možemo, pošto je sialni pokrivač veoma tanak, dakle izvršena kondenzacija masa neznačajna, staviti, dovoljnom tačnosti, ovu numeričku vrednost

$$v = \frac{1}{300}. \quad (4)$$

Neka nam A, B, C predstavljaju glavne momente inercije toga, na svojoj površini kondenzovanog Zemljinog tela koji će se, zbog toga što je zgusnuti deo njegov vrlo malen prema celokupnoj Zemlji, veoma malo razlikovati od stvarnih momenata inercije naše Zemlje. Zbog rotacionog oblika elipsoida referencije možemo, kao uvek do sada, staviti

$$B = A. \quad (5)$$

Položimo u centar Zemlje početak O ortogonalnog koordinat. sistema $X-Y-Z$ pa upravimo njegove ose tako da se one poklapaju sa glavnim momentima inercije kondenzovanog Zemljinog tela; pri tome neka osa Z padne u osu elipsoida referencije i bude naperena prema severu. Momenat inercije T tako formiranog Zemljinog tela obzirom na jednu proizvoljnu osu ζ koja prolazi kroz centar Zemlje, a zatvara sa osama upotrebljenog koordinatnog sistema uglove α, β, γ , predstavljen je, prema poznatoj teoremi Racionalne Mehanike, obrascem

$$T = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma. \quad (6)$$

Kako je za svaku pravu koja zatvara sa koordinatnim osama uglove α, β, γ ,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (7)$$

to dobivamo, imajući u vidu (5),

$$T = A(1 - \cos^2 \gamma) + C \cos^2 \gamma$$

t.j.

$$T = A + (C - A) \cos^2 \gamma. \quad (8)$$

Pri daljim izvođenjima i, u opšte, po ceo problem pomeranja polova pokazaće se kao vrlo korisna ova geometrijska pretstava o rasporedu momenata inercije. Zamislimo da smo iz tačke O našeg koordinatnog sistema opisali loptu proizvoljnog radiusa R , onda svakoj tački površine te lopte odgovara jedna određena osa ζ koja prolazi kroz tu tačku i centar Zemlje, a opet ovoj osi jedan određeni momenat inercije T . Zato odgovara svakoj tački površine te lopte jedna određena vrednost skalara T pa zato možemo površinu te lopte smatrati za jedno sferno skalarno polje. To polje definisano je jednoznačno obrascem (8). Ekviskalarne linije toga polja predstavljene su obrascem

$$A + (C - A) \cos^2 \gamma = \text{const.}$$

pa su one uporednici lopte ako prodorne tačke ose Z sa tom loptom smatramo za polove.

Zamislimo da je kondenzovani sialni pokrivač Zemljin vraćen u njegovo stvarno stanje, t.j. da se istegao na svoju pravu gustinu, a Zemlja dobila time svoju stvarnu reljefnu površinu. Tim će se momenat inercije T promeniti za jedan određeni iznos Ω zavisano od konfiguracije sialnog pokrivača. Taj iznos možemo, ne uzimajući, za sada, u obzir neznatne promene gravitacionog potencijala usled istežanja sialnog pokrivača, izračunati na ovaj način. Masa uočene elementarne sialne prizme predstavljena je izrazom

$$d\mu = D\rho df. \quad (9)$$

U kondenzovanom stanju te prizme predstavljen je momenat inercije njene mase (koju možemo, pošto su njene dimenzije veoma malene prema dimenzijama Ze-

mlje, zamisliti koncentrisanu u njenom težištu) obzirom na osu ζ , ako sa θ označimo ugao što ga ta osa zatvara sa radiusvektorom r toga težišta, ovim izrazom

$$r^2 \sin^2 \theta d\mu.$$

Istegnemo li tu elementarnu prizmu koja, kondenzovana, ima visinu H na njenu stvarnu visinu D , to će se time njeno težište uzdignuti u vis za duž

$$z_0 = \frac{1}{2}(D - H). \quad (10)$$

Ovo pomeranje može zbog (2) biti predstavljeno i ovim obrascem

$$z_0 = \frac{\rho_0 - \rho}{2\rho_0} D. \quad (11)$$

Tim pomeranjem težišta mase $d\mu$ promeniće se i njen maločas saopšteni momenat inercije obzirom na osu ζ u

$$(r + z_0)^2 \sin^2 \theta d\mu,$$

ili, pošto je duž z_0 tako malena prema r da njen kvadrat možemo zanemariti, u

$$(r^2 + 2z_0 r) \sin^2 \theta d\mu.$$

Istežanjem elementarne prizme na njenu stvarnu visinu promeniće se, dakle, momenat inercije T za iznos

$$d\Omega = 2z_0 r \sin^2 \theta d\mu. \quad (12)$$

Iznos Ω za koji će se promeniti momenat inercije T ako uzmeo u obzir celokupni pokrivač Zemljin, a koji ćemo iznos nazvati *dopunskim momentom inercije sialnog pokrivača* Zemlje obzirom na osu ζ dobićemo ako izvršimo integrisanje prednjeg izraza širom celokupne Zemljine površine. Svakoj osi ζ koja prolazi kroz centar Zemlje i njenoj prodornoj tački sa spomenutom loptom radiusa R odgovara jedna određena vrednost skalara Ω . Zato nam površina te lopte predstavlja sferno polje skalara Ω . Analitički obrazac za to polje dobićemo na ovaj način. Označimo li sa x, y, z koordinate težišta kondenzovane elementarne prizme, to su momenti inercije odnosno momenti devijacije njene mase obzirom na koordinatne ose predstavljeni obrascima

$$\begin{aligned} dI'_1 &= (y^2 + z^2) d\mu; & dI'_2 &= (z^2 + x^2) d\mu; & dI'_3 &= (x^2 + y^2) d\mu \\ d\Lambda'_1 &= yz d\mu; & d\Lambda'_2 &= zx d\mu; & d\Lambda'_3 &= xy d\mu. \end{aligned} \quad (13)$$

Uvedemo li, mesto ortogonalnih koordinata x, y, z , polarne koordinate r, φ, ψ , to je

$$x = r \cos \varphi \cos \psi; \quad y = r \cos \varphi \sin \psi; \quad z = r \sin \varphi, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} dI'_1 &= r^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi) d\mu \\ dI'_2 &= r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi) d\mu \\ dI'_3 &= r^2 \cos^2 \varphi d\mu \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} d\Lambda'_1 &= r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi d\mu \\ d\Lambda'_2 &= r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi d\mu \\ d\Lambda'_3 &= r^2 \cos^2 \varphi \sin \psi \cos \psi d\mu. \end{aligned} \quad (16)$$

Uzdizanjem mase $d\mu$ vertikalno u vis, t.j. u pravcu radiusvektora r za malu duž z_0 promeniće se gornje veličine za

$$dI = \frac{\partial dI'}{\partial r} z_0; \quad d\Lambda = \frac{\partial d\Lambda'}{\partial r} z_0,$$

pa nam ovi izrazi predstavljaju diferencijale dopunskih momenata inercije odnosno devijacije sialnog pokrivača Zemljinog obzirom na koordinatne ose. Izvršivši naznačenu parcijalnu diferencijaciju i stavljajući, iza toga, u dobivene obrasce zbog (1) i (9)

$$d\mu = r^2 D\rho \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi, \quad (17)$$

dolazimo do ovih obrazaca

$$\begin{aligned} dI_1 &= 2r^3 \rho D z_0 (\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi) \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi \\ dI_2 &= 2r^3 \rho D z_0 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi) \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi \\ dI_3 &= 2r^3 \rho D z_0 \cos^3 \varphi \, d\varphi \, d\psi \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} d\Lambda_1 &= 2r^3 \rho D z_0 \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \psi \, d\varphi \, d\psi \\ d\Lambda_2 &= 2r^3 \rho D z_0 \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos \psi \, d\varphi \, d\psi \\ d\Lambda_3 &= 2r^3 \rho D z_0 \cos^3 \varphi \sin \psi \cos \psi \, d\varphi \, d\psi. \end{aligned} \quad (19)$$

Dopunski momenti inercije I_1, I_2, I_3 odnosno dopunski momenti devijacije $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ sialnog pokrivača Zemljinog obzirom na ose koordinatnog sistema X - Y - Z dobivaju se integriranjem prednjih obrazaca širom cele Zemljine površine, a služeći se podacima Geofizike o konfiguraciji tog pokrivača. Pri tom izračunavanju koje spada u oblast Geofizike i u čije se pojedinosti ovde ne moramo upuštati, dozvoljeno je ovo uprošćenje.

U prednje obrasce trebalo bi za r^3 , prema (3), staviti

$$r^3 = a^3 (1 - \nu \sin^2 \varphi)^3.$$

Ovaj obrazac možemo, pošto je ν veoma malo, zameniti sa

$$r^3 = a^3 (1 - 3\nu \sin^2 \varphi).$$

Uzmemo li u obzir da član $-3\nu \sin^2 \varphi$ dostiže zbog (4) u maksimumu samo jedan procenat prvog člana prednje zgrade, to ga možemo sasvim zanemariti pa staviti $r = a$, t.j. smatrati radiusvektor r za konstantu. To možemo učiniti tim pre što podatci Geofizike o konfiguraciji sialnog pokrivača su još dosta nepouzdati. Učinjenu neznatnu grešku koju činimo naznačenim uprošćenjem možemo još više umanjiti ako za r uvedemo srednji radius Zemlje r_0 . Pošto se pri izračunavanju momenta inercije Ω radi, u prvom redu, o izostatskom pomeranju z_0 , to u tom računu ne igra spljoštenost Zemlje važniju ulogu. Iz istog razloga nismo se do sada obazirali na to da se pri prelazu od kondenzovanog stanja sialnog pokrivača na njegovo stvarno stanje menja i oblik ekvipotencijalnih površina koje, u ovom drugom slučaju, nisu sasvim identične rotacionim elipsoidima. To ostupanje je, kao što su to pokazala geodetska premeravanja Zemlje, zaista veoma malo.

Kada su, izvršenom integracijom, određene vrednosti veličina I i Λ , onda je tim, prema poznatom obrascu Racionalne Mehanike, određen i dopunski momenat

inercije Ω obzirom na osu ζ koja zatvara sa koordinatnim osama uglove α, β, γ . Taj je momenat predstavljen obrascem:

$$\begin{aligned} \Omega &= I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2\Lambda_1 \cos \beta \cos \gamma - 2\Lambda_2 \cos \gamma \cos \alpha - 2\Lambda_3 \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (20)$$

Kako je

$$x = r \cos \alpha; \quad y = r \cos \beta; \quad z = r \cos \gamma, \quad (21)$$

to dobivamo, koristeći se obrascima (14),

$$\cos \alpha = \cos \varphi \cos \psi; \quad \cos \beta = \cos \varphi \sin \psi; \quad \cos \gamma = \sin \varphi. \quad (22)$$

Stavljajući ovo u (20), dobivamo

$$\begin{aligned} \Omega &= I_1 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + I_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + I_3 \sin^2 \varphi \\ &\quad - \Lambda_1 \sin 2\varphi \sin \psi - \Lambda_2 \sin 2\varphi \cos \psi - \Lambda_3 \cos^2 \varphi \sin 2\psi. \end{aligned} \quad (23)$$

Ovaj obrazac određuje nam jednoznačno sferno polje skalara Ω , t.j. dopunskog momenta inercije sialnog pokrivača Zemljinog. To polje igra, kao što ćemo videti, presudnu ulogu u problemu pomeranja Zemljinih polova.

Prednjim rasuđivanjima stvorili smo pravu i najopštiju šemu o prirodi Zemljinog tela, sposobnu za matematsko ispitivanje postavljenog problema. Da je rekapituliramo: Zemlja, smatrana kao celina, fluidalno je telo pokriveno sialnim pokrivačem koji je, raspačan, raspućen ili fleksibilan, utonuo u svoju podlogu po zakonu hidrostatske ravnoteže. Kada bi taj pokrivač bio kondenzovan na gustinu podloge, onda bi Zemlja bila ograničena glatkim elipsoidom referencije, predstavljenim obrascem (3), a njeni glavni momenti inercije bili bi A, B, C , pri čemu je $A = B$. Odbirući ose tih glavnih momenata za ose X, Y, Z našeg koordinatnog sistema, bio bi momenat inercije obzirom na osu ζ koja zatvara sa koordinatnim osama uglove α, β, γ predstavljen obrascem (8). Prisustvo sialnog pokrivača menja momenat inercije T za iznos Ω tako da je momenat inercije J stvarnog Zemljinog tela obzirom na osu ζ predstavljen izrazom

$$J = T + \Omega \quad (24)$$

pri čemu smo Ω nazvali dopunskim momentom inercije; on je dat, kao funkcija uglova α, β, γ obrascima (20) i (7), a kao funkcija uglova φ i ψ , obrascem (23). Ovi obrasci daju nam matematsku šemu prirode Zemljinog tela, vodeći računa o njegovoj fluidalnosti i izostaziji.

§ 65. Položaji glavnih osa inercije. Usled izostazije sialnog pokrivača Zemljinog, promenio se momenat inercije T za iznos Ω . Tom promenom momenta inercije izmeniće se i položaj glavnih osa inercije Zemljinoga tela. Dok je pre osa Z koordinatnog sistema bila, u isti mah, jedna od glavnih osa inercije i dok je prodorna tačka F njene pozitivne grane sa elipsoidom referencije, predstavljala, u isti mah, pol inercije, sada to više neće biti slučaj. Novi, t.j. stvarni, pol inercije Zemljinog tela T neće se podudarati sa polom referencije F , ali će se, zbog toga što je sialni pokrivač veoma tanak, nalaziti u blizini pola referencije, na onom mestu

elipsoida referencije kojem odgovara ekstremna vrednost veličine J . Položimo li, dakle, kroz pol referencije F tangencijalnu ravan na elipsoid referencije i položimo li u toj ravni, sa svojim početkom u tački F , jedan ortogonalni koordinatni sistem $\xi-\eta$, to će položaj pola inercije T u toj ravni biti određen ovim dvema jednačinama

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0. \quad (25)$$

Kako se pol inercije T nalazi u neposrednoj blizini pola referencije F , dakle u blizini početka našeg koordinatnog sistema $\xi-\eta$, to su koordinate ξ i η pola inercije, koje ćemo meriti u lučnom meri, veoma male. Zato dobivamo razvijanjem u redove i zanemarivanjem članova sa višim potencijama od ξ i η , mesto (25), ove dve jednačine

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(0,0)}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 \Omega(0,0)}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial T(0,0)}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 \Omega(0,0)}{\partial \eta^2} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Iz (8) sleduje

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} = -(C - A) \sin 2\gamma; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} = -2(C - A) \cos 2\gamma.$$

Kako, na početku koordinatnog sistema, diferencijali $\partial \xi$ i $\partial \eta$ predstavljaju isto što i $\partial \gamma$, a kako je ovde $\gamma = 0$, to dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(0,0)}{\partial \xi} = \frac{\partial T(0,0)}{\partial \eta} = \frac{\partial T(0,0)}{\partial \gamma} &= 0 \\ \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \gamma^2} &= -2(C - A). \end{aligned} \quad (27)$$

Numeričke vrednosti izvoda $\partial^2 \Omega / \partial \xi^2$ i $\partial^2 \Omega / \partial \eta^2$ su, kao što to pokazuje njihovo izračunavanje iz podataka Geofizike, veoma malene prema $2(C - A)$ pa se zato iz izvodi mogu u jednačinama (26) zanemariti. Koristeći se jednačinama (27), dobivamo iz (26)

$$\xi = \frac{1}{2(C - A)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}; \quad \eta = \frac{1}{2(C - A)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}. \quad (28)$$

Ovo su koordinate pola inercije. Njegov položaj u odnosu na pol referencije predstavljen je vektorom položaja

$$\mathbf{a} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} \quad (29)$$

gde nam \mathbf{i} i \mathbf{j} označavaju jedinične vektore u pravcu koordinata ξ i η . Iz (28) i (29) sleduje

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2(C - A)} \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \mathbf{j} \right\} \quad (30)$$

t.j.

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2(C - A)} \text{grad } \Omega \quad (31)$$

čime je određen položaj stvarnog pola inercije Zemljinog tela prema polu referencije.

Pri sledećim ispitivanjima, u kojima će, kao što smo već rekli i što sleduje iz prethodne jednačine, polje skalar Ω igrati važnu ulogu, ukazaće se potreba da odredimo položaje polova dopunskog momenta inercije Ω , t.j. položaje prodornih tačaka glavnih osa tenzora Ω sa elipsoidom referencije odnosno sa sferom radiusa R , na koju projektujemo polje skalar Ω . Te su tačke one u kojima skalar Ω dostiže svoje ekstremne vrednosti, t.j. u kojima je

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} = 0. \quad (32)$$

Koristeći se obrascem (23), možemo prednje jednačine zameniti ovim dvema

$$\begin{aligned} \text{tg } 2\varphi &= \frac{2\Lambda_1 \sin \psi + 2\Lambda_2 \cos \psi}{I_3 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2) - \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cos 2\psi + \Lambda_3 \sin 2\psi} \\ \text{tg } \varphi &= \frac{(I_1 - I_2) \sin 2\psi + 2\Lambda_3 \cos 2\psi}{2\Lambda_2 \sin \psi - 2\Lambda_1 \cos \psi}. \end{aligned} \quad (33)$$

Koreni ovih jednačina određuju nam položaje polova inercije, t.j. glavnih osa inercije sialnog pokrivača. Te ćemo korene naći najjednostavnije grafičkim putem, nacrtavši obe krive date prednjim jednačinama i odredivši koordinate preseka tih dveju kriva. Tačnost dobivenog rezultata možemo proizvoljno uvećati analitičkim računom.

Jednačine (33) daju nam za interval $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < +\frac{1}{2}\pi$; $0 < \psi < 2\pi$ šest parova realnih korenova od kojih dva po dva para odgovaraju antipodnim tačkama na Zemljinoj sferi. Stavljajući te korene u obrazac (23), dobivamo glavne dopunske momente inercije $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ sialnog pokrivača; oni će se pojaviti u jednačini sekularne putanje polova.

§ 66. Prilagođivanje Zemljinog tela. Prema rezultatima prethodnog paragrafa, nalazi se pol inercije T celokupne Zemlje u otstojanju \mathbf{a} , merenom lučnom merom, od pola referencije F . To otstojanje možemo nazvati *anomalijom pola inercije*. U prethodnoj glavi smo pokazali da trenutni pol rotacije Zemljine opisuje oko pola inercije kružnu putanju, obilazeći je za vreme jedne Čendlerove periode. Pri tome je, isključujući njenu precesiju, osa rotacije Zemljine invaribilna u prostoru, tako da Zemljino telo stvarno klimata oko te ose. Periodički članovi toga kretanja, oni koji se ispoljavaju u relativnom kretanju pola rotacije oko pola inercije, ili obratno, i centrifugalne sile skopčane sa tim klimatanjem izazivaju elastične deformacije Zemljinog tela koje su bile uzrok odstupanju Čendlerove periode od Ojlerove. Naša Zemlja se, kao što smo već saopštili, ponaša prema tim kratkotrajnim, periodičnim silama, zaista, kao čvrsto elastično telo. O tim njenim elastičnim promenama ne moramo sada, kad se radi o sekularnom fenomenu pomeranja polova, dalje voditi računa. No odstojanje pola inercije od pola referencije izaziva jedan sekularan član deformacije Zemljinog tela, a prema tim sekularnim, dakle dugotrajnim, silama deformacije ispoljava Zemlja svoju fluidalnost. Pri ispitivanju dejstva tih sekularnih sila valja eliminisati periodične sile. To ćemo učiniti na taj način ako nađemo srednji položaj pola rotacije koji odgovara njegovom pe-

riodičnom kretanju. To je kretanje krug sa centrom u polu inercije pa je zato srednji položaj pola rotacije centar toga kruga, dakle sam pol inercije. Prema osi koja prolazi kroz taj pol inercije nagnuta je fluidalna jezgra Zemljina, oličena u elipsoidu referencije, za ugao pretstavljen anomalijom α . Kako su sekularne centrifugalne sile simetrične prema srednjoj osi rotacije koja prolazi kroz pol inercije, to će one težiti da deformišu Zemljinu jezgru, t.j. da ispupče elipsoid referencije tako da se njegova osa poklopi sa osom inercije. Te su sile, kao što to pokazuje njihovo izračunavanje, u koje se ovde ne moramo upuštati, proporcionalne anomaliji α ; kad ove ne bi bilo, te bi sile iščeznule. Dejstvo tih sila veoma je sporo a sleđuje savlađivanjem unutrašnjih otpora, zato će brzina deformacije biti proporcionalna tim silama t.j. proporcionalna anomaliji α . Deformacija jezgre Zemljine teži da pol referencije približi polu inercije, t.j. srednjem polu rotacije, pa će brzina v kojom se to približavanje vrši biti proporcionalna anomaliji α dakle biti pretstavljena obrascem

$$v = k\alpha \tag{34}$$

gde k označava jedan skalarni koeficijent koji se zove koeficijentom prilagođavanja. Tom brzinom v , i tim pravcem, došao bi pol referencije do poklapanja sa polom rotacije kad bi tim pomeranjem iščeznula anomalija α . No ova, inače konačna i promenljiva od tačke do tačke Zemljine površine, postaje jednaka nuli tek onda kad, prema (31), gradienat polja Ω postaje jednak nuli, a to je samo na onima tačkama Zemljine površine gde je prodiru glavne ose tenzora Ω . Dogod to nije slučaj, pol će referencije, krećući se prema polu inercije, gurati taj pol ispred sebe u pravcu anomalije α koja odgovara mestu polja Ω što ga je pol referencije zauzeo. Zato će se pol referencije i pol rotacije, u međusobnom malom odstojanju α , kretati jedan iza drugog pravcem vektora α i brzinom proporcionalnom tom vektoru, dogod ne dođu do svoga zajedničkog položaja ravnoteže u kojem je $\alpha = 0$. Zato nam obrazac (34) pretstavlja brzinu kojom se kreću oba ta pola, jedan iza drugog, relativno prema Zemljinoj ljusci. Zbog tog nam vektor v pretstavlja brzinu relativnog pomeranja pola rotacije prema Zemljinoj sialnoj ljusci.

Koristeći se obrascem (31) i stavljajući

$$\frac{k}{2(C - A)} = \kappa,$$

dobivamo

$$v = \kappa \text{ grad } \Omega. \tag{35}$$

Ovo je osnovna jednačina sekularnog pomeranja polova. Mi ćemo je izvesti i na drugi način u iduća dva paragrafa gde ćemo detaljnije ispitati mehanizam tog pomeranja.

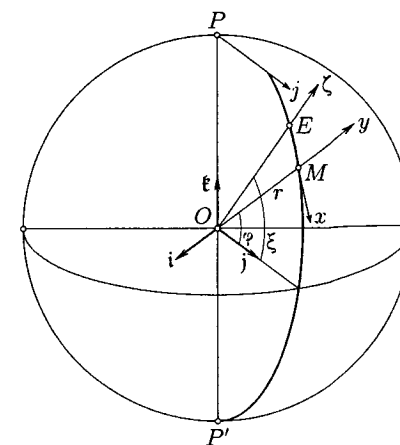
§ 67. Polfugalna sila sialnih santa. Kada je princip izostazije i fluidalnosti Zemlje uhvatio korena u Geofizici, uvideo je КЕРЕН da će, usled divergencije ekvipotencijalnih površina Zemljine teže, sialne sante podležati dejstvu sile koja će težiti da ih pomeri ka ekvatoru. Tu je silu on nazvao „Polfluchtkraft“; mi ćemo je zvati polfugalnom silom. Matematski obrazac za tu silu dobićemo, koristeći se prethodnim rezultatima, na ovaj način.

Funkcija sila Zemljine gravitacije i centrifugalne sile bila je, prema jednačini (60), §51, pretstavljena ovim obrascem:

$$W = f \frac{M}{r} + \frac{f}{2r^3} (C - A)(1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{n^2 r^2}{2} \cos^2 \varphi. \tag{36}$$

Uočimo na proizvoljnom mestu Zemljine površine jednu vertikalnu elementarnu prizmu sialnog pokrivača kako je ona bila naznačena u §64. Ona je utonula izostatски u svoju podlogu do dubine H . Težište istisnutog dela sime pretstavlja nam centar hidrostatskog potiska i nalazi se u polovini visine utonulog dela prizme; označimo ga sa M . Težište same prizme, koje se nalazi u polovini njene visine D , označimo sa S . Visinska razlika z_0 tih dveju tačaka pretstavljena je obrascem (10). Masu $d\mu$ elementarne prizme možemo zamisliti koncentrisanu u tački S . Zato će sila koja dejstvuje na uočenu prizmu biti pretstavljena gradienatom skalara W u tački S , pomnoženim sa masom $d\mu$ prizme. Ta će sila imati jednu tangencijalnu komponentu obzirom na ekviskalarnu površinu koja prolazi kroz tačku M , a ta će komponenta pretstavljati polfugalnu silu koja dejstvuje na masu $d\mu$. Da tu silu nađemo, položimo u tačku M (sl. 22) početak ortogonalnog koordinatnog sistema $x-y$ koji leži u meridijanskoj ravni tačke M kojega je osa y naperena vertikalno u vis, a osa x prema ekvatoru. U tački M je

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \tag{37}$$



Слика 22

jer u toj tački tangira osa x ekviskalarnu površnu. Tačka S ima koordinate $x = 0$; $y = z_0$. Zato izvod funkcije W po x neće u toj tački biti jednak nuli, nego će biti pretstavljen obrascem

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) z_0$$

u kojem se izvodi odnose na tačku M . Zato je, imajući u vidu (37), skalarna vrednost polfugalne sile mase $d\mu$ pretstavljena obrascem

$$dH = z_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) d\mu. \tag{38}$$

Menjajući, što je dozvoljeno, red izvoda, dobivamo

$$dH = z_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) d\mu. \tag{39}$$

Izvod

$$\frac{\partial W}{\partial y} = -g \tag{40}$$

pretstavlja nam akceleraciju Zemljine teže u tački M ; ta je akceleracija naperena prema dole, zbog čega se u prednjoj jednačini pojavio znak minus. Stavljajući (40) u (39), dobivamo

$$dH = -z_0 \frac{\partial g}{\partial x} d\mu. \quad (41)$$

Ova jednačina važi za svaku tačku Zemljine površine ako za g stavimo akceleraciju teže u toj tački, a za ∂x element tangente na meridijanski presek ekvipotencijalne površine. Za taj element možemo, prelazeći na polarne koordinate, a vodeći računa da je osa x bila naperena prema ekvatoru, staviti

$$\partial x = -r \partial \varphi. \quad (42)$$

Zato je

$$dH = \frac{z_0}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} d\mu. \quad (43)$$

Zavisnost akceleracije g od geocentrične širine φ bila je pretstavljena obrascem (71), §51, t.j. ovim

$$g = g_0 + (g_p - g_a) \sin 2\varphi d\mu. \quad (44)$$

Stavljajući ovo u (43) dobivamo

$$dH = \frac{z_0}{r} (g_p - g_a) \sin 2\varphi d\mu. \quad (45)$$

Ovo je analitički izraz polfugalne sile koja deluje na masu $d\mu$; ona je, pošto je osa x bila naperena prema ekvatoru i pošto je $g_p > g_a$, naperena od pola, zbog čega je dobila svoje ime.

Naša sadašnja znanja o konfiguraciji, a naročito o debljini D sialnog pokrivača Zemljinog pa, sletstveno, o veličini z_0 daleko su od toga da bismo bili u stanju tačno izračunati numeričku vrednost polfugalnih sila koje deluju na pojedine delove sialne ljuske. Srećom, ta okolnost ne igra važnu ulogu u pitanjima kojima ćemo se ovde baviti, jer kod ovih dolazi u prvom redu u obzir faktor $\sin 2\varphi$. Prema njemu, zavis, pri istom z_0 , polfugalna sila samo od geografske širine pa dostiže svoj maksimum za $\varphi = 45^\circ$; na polovima i na ekvatoru ona je jednaka nuli.

§ 68. Osnovna diferencijalna jednačina sekularnog pomeranja Zemljinih polova.

Kada bi sialni pokrivač Zemljin, obuhvatajući celu Zemlju, imao svugde istu debljinu i gustinu ili kada bi on pokrivač samo delove Zemljine površine, no bio simetričnog oblika prema polovima, ne bi polfugalne sile težile da izvedu kakvo pomeranje tog pokrivača po njegovoj podlozi, jer bi se one, simetrične prema polovima, međusobno potirale. Uzrok pomeranja sialne ljuske po njenoj podlozi leži u nepravilnosti te ljuske koje su, zaista, veoma velike. Od tih nepravilnosti upada nam najjače u oči veliki kontrast između kontinenata i dna morskog. Njihove površine leže na različitim visinama; razlika između srednje visine površine kontinenata i dna morskog iznosi preko 4 000 metara, a visinska razlika između najviše tačke kontinenata i najdublje tačke mora skoro 20 000 metara. Ta nepravilnost i reliefnost sialnog pokrivača ima za posledicu da se polfugalne

sile koje deluju na sialnu ljusku međusobno ne potiru, nego stvaraju jedan moment zaokretanja \mathfrak{M} obzirom na centar Zemlje. Pri izračunavanju toga momenta, možemo za krak polfugalnih sila svugde staviti srednji radius Zemljin r_0 , već zbog toga što te sile dostizavaju svoje maksimalne vrednosti na srednjim geografskim širinama, baš onde gde je njihov krak stvarno jednak srednjem radiusu Zemlje; sem toga nam naši, još dosta nepotpuni, podatci o konfiguraciji sialnog pokrivača ne bi ni dozvolili veću tačnost računa. Usvajajući ovo uprošćenje, dobivamo da će moment polfugalne sile dH obzirom na centar Zemlje imati skalarnu veličinu

$$dM = r_0 dH. \quad (46)$$

Da bismo taj moment pretstavili, kao što je potrebno, u vektorskom obliku, položimo u centar Zemlje početak O (sl. 22) ortogonalnog koordinatnog sistema X - Y - Z ; osa Z toga sistema neka pada u osu rotacije Zemlje i neka bude naperena prema severu; osa Y naka leži u ravni meridijana mase $d\mu$ na koju deluje posmatrana polfugalna sila dH . Označimo li jedinične vektore u pravcu osa tog koordinatnog sistema sa i , j , k , to je, pošto i stoji normalno na ravni meridijana mase $d\mu$ i pošto moment zaokretanja označavamo pozitivno kad deluje u smislu protivnom kretanju skazaljke na satu, moment zaokretanja $d\mathfrak{M}$ polfugalne sile koja deluje na masu $d\mu$ pretstavljen vektorski ovim obrascem:

$$d\mathfrak{M} = -r_0 dH i. \quad (47)$$

Koristeći se obrascem (45) i stavljajući u njega $r = r_0$ dobivamo

$$d\mathfrak{M} = -z_0 (g_p - g_a) \sin 2\varphi d\mu i. \quad (48)$$

Moment zaokretanja \mathfrak{M} celokupnog sialnog pokrivača dobiva se integracijom prednjeg izraza preko cele Zemljine površine. Tu integraciju izvršićemo na ovaj način.

Dopunski moment inercije $d\Omega$ mase $d\mu$ obzirom na osu ζ koja zatvara sa radiusvektorom r mase $d\mu$ ugao θ bio je pretstavljen obrascem (12). Stavimo li u taj obrazac, prema napred ugovorenom, $r = r_0$, to dobivamo

$$d\Omega = 2z_0 r_0 \sin^2 \theta d\mu. \quad (49)$$

Leži li osa ζ u ravni meridijana mase $d\mu$ i zatvara li ta osa sa ravni ekvatora ugao ξ , to je

$$d\Omega = 2z_0 r_0 \sin^2 (\xi - \varphi) d\mu. \quad (50)$$

Ako osa ζ ne leži u meridijanskoj ravni elementa $d\mu$, onda valja prednji obrazac zameniti drugim, no pošto nam taj obrazac neće biti potreban pri daljem izvođenju, mi ga ne moramo ovde napisati.

Svakoj osi ζ koja prolazi kroz centar Zemlje odgovara jedna određena vrednost skalara $d\Omega$; isto tako odgovara svakoj tački lopte opisane oko centra Zemlje radiusom r_0 jedna određena vrednost skalara $d\Omega$. Zato nam površina te lopte pretstavlja sferno polje skalara $d\Omega$. Pitaćmo sada koliki je gradienat toga polja u severnom polu, t.j. u prodornoj tački pozitivne grane ose Z sa sferom radiusa r_0 . Taj gradienat mora, iz razloga simetrije, pasti u ravan meridijana mase $d\mu$, t.j. on mora tangirati meridijanski krug tačke M u tački P . Jedinični vektor toga pravca, naperen u smislu u kojem ξ raste, pretstavljen je, prema napred ugovorenom, sa $-j$. Zato je traženi gradienat pretstavljen obrascem

$$\text{grad } d\Omega = -\frac{\partial d\Omega}{\partial s} j$$

gde ∂s označava element meridijanskog kruga za koji valja staviti $\partial s = r_0 \partial \xi$. Zato je

$$\text{grad } d\Omega = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial d\Omega}{\partial \xi} j.$$

U ovu jednačinu valja desno za $d\Omega$ staviti obrazac (20) zbog čega je

$$\text{grad } d\Omega = -2z_0 \frac{\partial \sin^2(\xi - \varphi)}{\partial \xi} d\mu j$$

t.j.

$$\text{grad } d\Omega = -2z_0 \sin 2(\xi - \varphi) d\mu j.$$

Pošto tražimo gradienat u samom polu, t.j. za $\xi = 90^\circ$, to dobivamo

$$\text{grad } d\Omega = -2z_0 \sin 2\varphi d\mu j. \quad (51)$$

Pomnožimo li ovu jednačinu vektorielno sa \mathfrak{k} , to dobivamo, pošto je $[\mathfrak{k} j] = -[j \mathfrak{k}] = -i$,

$$[\mathfrak{k} \text{grad } d\Omega] = 2z_0 \sin 2\varphi d\mu i. \quad (52)$$

Iz jednačina (48) i (52) sleduje

$$d\mathfrak{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a)[k \text{grad } d\Omega]. \quad (53)$$

Ovo je momenat zaokretanja polfugalne sile mase $d\mu$ obzirom na centar Zemlje. Momenat zaokretanja \mathfrak{M} polfugalnih sila celokupnog sialnog pokrivača Zemljinog dobivamo integracijom prednjeg izraza širom celog tog pokrivača. Zato je, pošto su g_p , g_a , \mathfrak{k} konstante,

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a) \left[\mathfrak{k} \int \text{grad } d\Omega \right]. \quad (54)$$

Kako je gradienat zbira skalara jednak vektorielnom zbiru gradienata tih pojedinih skalara, to je

$$\int \text{grad } d\Omega = \text{grad} \int d\Omega = \text{grad } \Omega$$

gde nam Ω pretstavlja dopunski momenat inercije celokupnog sialnog pokrivača. Zato je

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a)[\mathfrak{k} \text{grad } \Omega]. \quad (55)$$

Ovaj momenat zaokretanja teži da zaokrene sialnu ljusku Zemljinu oko ose koja, zbog faktora \mathfrak{k} u vektorskoj zagradi, leži u ravni ekvatora. Pomeranje sialne ljuske izazvano tim momentom vrši se, kao što ćemo videti, neopisano sporo, uz savladavanje otpornih sila. Zbog toga će rotaciona brzina \mathfrak{w} tog kretanja biti proporcionalna gornjem momentu. Zato je

$$\mathfrak{w} = -\frac{m}{2}(g_p - g_a)[\mathfrak{k} \text{grad } \Omega] \quad (56)$$

gde m označava faktor spomenutog proporcionaliteta.

Uслед ovog zaokretanja sialnog pokrivača pomerace se svaka tačka njegova brzinom

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w} \mathfrak{r}]$$

preko Zemljine jezgre pri čemu nam \mathfrak{r} pretstavlja vektor položaja uočene tačke sialnog pokrivača u odnosu na centar Zemlje. Za tačku površine sialnog pokrivača koja leži iznad pola rotacije P je

$$\mathfrak{r} = r_0 \mathfrak{k}; \quad \mathfrak{v} = r_0 [\mathfrak{w} \mathfrak{k}].$$

Pol rotacije Zemljine P pomerace se istom brzinom no u protivnom pravcu. Zato nam izraz

$$\mathfrak{v} = -r_0 [\mathfrak{w} \mathfrak{k}] = r_0 [\mathfrak{k} \mathfrak{w}] \quad (57)$$

pretstavlja vektor brzine kojom se pol rotacije P pomera relativno prema površini Zemljine ljuske. Iz (57) i (56) sleduje

$$\mathfrak{v} = -\frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) [\mathfrak{k} [\mathfrak{k} \text{grad } \Omega]]. \quad (58)$$

Upotrebimo li poznati obrazac vektorskog računa

$$[\mathfrak{a} [\mathfrak{b} \mathfrak{c}]] = \mathfrak{b}(\mathfrak{c} \mathfrak{a}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a} \mathfrak{b}),$$

to dobivamo

$$[\mathfrak{k} [\mathfrak{k} \text{grad } \Omega]] = \mathfrak{k}(\text{grad } \Omega \cdot \mathfrak{k}) - \text{grad } \Omega(\mathfrak{k} \mathfrak{k}).$$

Pošto gradienat od Ω u tački P stoji normalno na vektoru \mathfrak{k} , to je $(\text{grad } \Omega \cdot \mathfrak{k}) = 0$, a kako je, sem toga, $(\mathfrak{k} \mathfrak{k}) = 1$, to dobivamo:

$$[\mathfrak{k} [\mathfrak{k} \text{grad } \Omega]] = -\text{grad } \Omega,$$

dakle zbog (58)

$$\mathfrak{v} = \frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) \text{grad } \Omega. \quad (59)$$

Stavimo li

$$\frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) = \alpha \quad (60)$$

gde α označava jedan konstantan koeficienat, to dobivamo

$$\mathfrak{v} = \alpha \text{grad } \Omega. \quad (61)$$

Ova vektorska jednačina, do koje smo došli i na drugi način u §66, pretstavlja nam rešenje postavljenog problema. Ona kazuje da se vektor brzine \mathfrak{v} pomeranja pola relativno prema Zemljinoj površini u svakoj tački putanje pola poklapa sa gradientom skalarnog polja Ω . To znači da je putanja jednog ili drugog pola rotacije Zemljine u odnosu na Zemljinu površinu jedna od vektorskih linija polja $\text{grad } \Omega$. Koja će od tih vektorskih linija pretstavljati stvarnu putanju pola, to je jednoznačno određeno sadanjim položajima polova rotacije na Zemljinoj površini. Prema jednoj opštoj osobini gradienta, preseca ta kriva pod pravim uglom linije jednako-ga Ω pa pretstavlja jednu ortogonalnu trajektoriju ekviskalarnih linija polja Ω .

Videćemo uskoro da se sekularnim pomeranjima polova po Zemljinoj površini ne menja orientacija Zemljine ose u prostoru, a to znači da se, posmatrana iz toga prostora, Zemljina ljuska pomera po Zemljinoj fluidalnoj jezgri tako da polovi

rotacije crtaju po Zemljinoj površini svoje sekularne putanje, sve dotle dok Zemljina ljuska ne dođe do svoje stabilne ravnoteže prema svojoj podlozi, t.j. dok se pol inercije sialnog pokrivača ne poklopi sa polom inercije jezgre. Onda će Zemlja, iako fluidalna, rotirati kao kakvo čvrsto telo oko svoje glavne ose inercije, kako to zahteva Apelova teorema.

§ 69. Jednačina sekularne putanje pola i jednačina kretanja pola po toj putanji. Kriva koju uočeni pol rotacije opiše pri svom relativnom sekularnom pomeranju po Zemljinoj površini, dakle sekularna putanja pola, data je, kao što smo videli, jednoznačno poljem skalara Ω i sadašnjim položajem pola rotacije u tom polju. Skalar Ω dostiže, kao što smo već kazali, u tom sfernom polju na šest mesta svoje ekstremne vrednosti i to na onima tačkama gde glavne ose inercije Ω prodiru sferu radiusa r_0 . Prema ravnima koje prolaze kroz te ose je polje Ω , kao što to sleduje iz opštih teorema o momentima inercije, simetrično pa je zato sfera toga polja podeljena u osam, i po rasporedu vektorskih linija, simetričnih oktanata, osam ravnostranih pravougaonih sfernih trouglova kojima su i strane i uglovi jednaki po 90° . U onome oktantu sfere u kojem se nalazi sadanji položaj uočenog pola rotacije ležaće cela njegova putanja, jer sve vektorske linije te oblasti polja $\text{grad } \Omega$ polaze iz onog temena tog oktanta u kojem Ω dostiže svoj minimum, a svršavaju se u onom temenu gde Ω dostiže svoj maksimum. Početak tih vektorskih linija, tačka izvora vektorskog polja, predstavlja nam labilni položaj ravnoteže koji je pol, ako se, zaista, ikada nalazio u tom položaju, morao, pri najmanjem poremećaju, kakvih je u burnoj istoriji Zemlje dosta bilo, da ostavi pa da, krećući se po jednoj od vektorskih linija polja $\text{grad } \Omega$, stigne konačno, posle ogromno dugog putovanja, u tačku ponora tih linija gde Ω dostiže svoj maksimum, a koja nam tačka predstavlja položaj stabilne ravnoteže. Sadašnji položaj pola pokazuje nam onu od tih vektorskih linija duž koje se pol u prošlosti pomerao i duž koje će se u budućnosti dalje kretati. Da izvedemo jednačinu te krive i jednačinu kretanja pola po toj krivi, postupićemo ovako.

Položimo u centar Zemlje početak O ortogonalnog koordinat. sistema $X-Y-Z$ koji je vezan sa sialnom ljuskom i orientisan tako da njegova osa X prodiru u onoj tački površinu Zemlje koja odgovara minimumu skalara Ω , osa Y u onoj tački koja odgovara maksimum-minimumu, a osa Z u onoj tački koja odgovara maksimumu skalara Ω . Te ose su, dakle, glavne ose dopunskog momenta inercije Ω te je, prema onome što smo sada ugovorili,

$$\Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3. \quad (62)$$

Jednostavnosti radi, a i iz razloga izloženih u prethodnom paragrafu, pretpostavljamo da je Zemljina površina sfera radiusa r_0 . Na toj sferi određen je položaj proizvoljne tačke putanje pola koordinatama Φ i Ψ pri čemu nam Φ predstavlja onaj ugao što ga radiusvektor uočene tačke zatvara sa ravni $X-Y$, a Ψ ugao što ga projekcija radiusvektora u ravan $X-Y$ zatvara sa koordinatnom osom X . Smatramo li, dakle, prodornu tačku ose Z sa sferom radiusa r_0 za pol mreže meridijana i uporednika, to nam Φ predstavlja latitudu, a Ψ longitudu mreže. Položimo u uočenu proizvoljnu tačku $M(\Phi, \Psi)$ putanje pola početak ravnog ortogonalnog koordinatnog sistema $\xi-\eta$ kojega ravan dodiruje Zemljinu sferu, a kojega je osa ξ , dodirujući meri-

dijan maločas definisane mreže, naperena prema polu te mreže, dakle na onu stranu na kojoj Φ raste, to je elemenat $d\xi$ pomeranja pola u pravcu ξ predstavljen obrascem

$$d\xi = r_0 d\Phi \quad (63)$$

dok je elemenat pomeranja pola u pravcu normalnom na onaj prvi, a u smislu rastućega Ψ , predstavljen obrascem

$$d\eta = r_0 \cos \Phi d\Psi. \quad (64)$$

Komponente vektora brzine v pomeranja pola u tim dvama pravcima predstavljene su ovim obrascima:

$$\frac{d\xi}{dt} = r_0 \frac{d\Phi}{dt} \quad (65)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = r_0 \cos \Phi \frac{d\Psi}{dt}. \quad (66)$$

Osnovna jednačina pomeranja polova bila je

$$v = x \text{ grad } \Omega. \quad (67)$$

Označimo sa i i j jedinične vektore u pravcima ξ i η , to je

$$v = \frac{d\xi}{dt} i + \frac{d\eta}{dt} j, \quad (68)$$

t.j. zbog (65) i (66)

$$v = r_0 \frac{d\Phi}{dt} i + r_0 \cos \Phi \frac{d\Psi}{dt} j. \quad (69)$$

Kako je

$$\text{grad } \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} i + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} j, \quad (70)$$

to dobivamo, stavljajući (69) i (70) u (67) i množeći dobivenu vektorsku jednačinu skalarno sa i i odnosno sa j , ove dve skalarne jednačine

$$r_0 \frac{d\Phi}{dt} = x \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}; \quad r_0 \cos \Phi \frac{d\Psi}{dt} = x \frac{\partial \Omega}{\partial \eta},$$

t.j. zbog (63) i (64)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{x}{r_0^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} \quad (71)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{x}{r_0^2 \cos^2 \Phi} \frac{\partial \Omega}{\partial \Psi}. \quad (72)$$

Eliminišemo li iz ovih dveju jednačina vreme t , to dobivamo

$$\frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{1}{\cos^2 \Phi} \cdot \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial \Psi}}{\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi}} \quad (73)$$

kao diferencijalnu jednačinu sekularne putanje pola.

Dopunski momenat inercije Ω sialnog pokrivača obzirom na osu ζ koja, prolazeći kroz centar Zemlje, prodire Zemljinu površinu u tački $M(\Phi, \Psi)$, dobivamo ako u obrascu (23) zamenimo I_1, I_2, I_3 sa $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, a φ, ψ sa Φ, Ψ i pri tome stavimo, pošto su ose upotrebljenog koordinatnog sistema, u isti mah, glavne ose inercije, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$. Zato je

$$\Omega = \Omega_1 \cos^2 \Phi \cos^2 \Psi + \Omega_2 \cos^2 \Phi \sin^2 \Psi + \Omega_3 \sin^2 \Phi, \quad (74)$$

t.j.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Psi} = -\Omega_1 \cos^2 \Phi \sin 2\Psi + \Omega_2 \cos^2 \Phi \sin 2\Psi \quad (75)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = -\Omega_1 \sin 2\Phi \cos^2 \Psi - \Omega_2 \sin 2\Phi \sin^2 \Psi + \Omega_3 \sin 2\Phi. \quad (76)$$

Stavljajući ovo u (73), dobivamo

$$\frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) \sin 2\Psi}{(\Omega_3 - \Omega_2 \sin^2 \Psi - \Omega_1 \cos^2 \Psi) \sin 2\Phi}. \quad (77)$$

Kako je

$$\Omega_1 \cos^2 \Psi = \Omega_1 - \Omega_1 \sin^2 \Psi,$$

to je

$$\frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) \sin 2\Psi}{[(\Omega_3 - \Omega_1 - (\Omega_2 - \Omega_1) \sin^2 \Psi) \sin 2\Phi]}. \quad (78)$$

Stavljajući

$$\frac{\Omega_3 - \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1} = k, \quad (79)$$

gde nam k predstavlja jednu konstantu, dobivamo

$$\frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{\sin 2\Psi}{(k - \sin^2 \Psi) \sin 2\Phi}, \quad (80)$$

t.j.

$$k \frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} - \frac{\sin^2 \Psi d\Psi}{\sin 2\Psi} = \frac{d\Phi}{\sin 2\Phi},$$

a pošto je $\sin 2\Psi = 2 \sin \Psi \cos \Psi$,

$$k \frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \Psi d\Psi = \frac{d\Phi}{\sin 2\Phi}. \quad (81)$$

Kako je

$$\int \frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} = \frac{1}{2} \int \frac{d\Psi}{\sin \Psi \cos \Psi} = \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 \Psi d\Psi}{\operatorname{tg} \Psi} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\operatorname{tg} \Psi)}{\operatorname{tg} \Psi} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \Psi + C$$

$$\int \frac{d\Phi}{\sin 2\Phi} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \Phi + C$$

$$\int \operatorname{tg} \Psi d\Psi = \int \frac{\sin \Psi d\Psi}{\cos \Psi} = - \int \frac{d(\cos \Psi)}{\cos \Psi} = -l \cos \Psi + C,$$

to sleduje integracijom jednačine (81)

$$k \cdot l \operatorname{tg} \Psi + l \cos \Psi = l \operatorname{tg} \Phi + l C_1,$$

dakle

$$\cos \Psi \cdot \operatorname{tg}^k \Psi = C_1 \operatorname{tg} \Phi. \quad (82)$$

Ovo je jednačina sekularne putanje pola.

Konstanta C_1 određena je sadanjim položajem pola na Zemljinoj površini. Ako su Φ_0 i Ψ_0 koordinate toga položaja u odabranoj mreži meridijana i uporednika, onda je

$$C_1 = \frac{\cos \Psi_0 \cdot \operatorname{tg}^k \Psi_0}{\operatorname{tg} \Phi_0}. \quad (83)$$

Kretanje pola po njegovoj putanji određeno je jednačinama (72) i (75). Iz tih jednačina sleduje

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{x}{r_0^2} (\Omega_2 - \Omega_1) \sin 2\Psi. \quad (84)$$

Stavimo li

$$\frac{2x}{r_0^2} (\Omega_2 - \Omega_1) = \mu, \quad (85)$$

gde je μ jedna konstanta, to dobivamo

$$\frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} = \frac{\mu}{2} dt.$$

Integracija ove jednačine daje

$$\frac{1}{2} l \operatorname{tg} \Psi = \frac{1}{2} \mu t + \frac{1}{2} l C_2,$$

t.j.

$$\operatorname{tg} \Psi = C_2 e^{\mu t}. \quad (86)$$

Brojimo li vreme t od sadašnjosti, pošto je, prema napred rečenom, za $t = 0$; $\Psi = \Psi_0$, to je

$$C_2 = \operatorname{tg} \Psi_0. \quad (87)$$

Poslednje dve jednačine određuju nam kretanje pola po njegovoj sekularnoj putanji.

Sekularna putanja pola zavisi, kao što to pokazuju jednačine (82), (83) i (79), samo od konfiguracije Zemljine ljuske i sadanjeg položaja pola na njoj, dakle od geometrije masa Zemlje; ona se iz tih podataka može izračunati. U to izračunavanje nećemo se ovde upuštati, jer spada u oblast Geofizike. Kretanje pola po toj putanji zavisi od koeficienta μ , dakle, posredstvom jednačina (85) i (60), od koeficienta m o kojem nemamo direktnog numeričkog podatka. Ali se iz dokumenata Geologije koji nam, između ostalog, daju, sa izvesnom sigurnosti, položaj Zemljinih polova za vreme karbonske periode, a i interval vremena koje je od toga doba proteklo, može, makar približno, odrediti numerička vrednost koeficienta μ , a time i tok kretanja pola po njegovoj sekularnoj putanji. Iz tih podataka sleduje da je pomeranje Zemljinih polova po njenoj površini teklo neopisano sporo pa su od doba

karbonske periode, koja, prema određivanju starosti geoloških naslaga pomoću radioaktivnih supstancija, leži 300 miliona godina ispred sadašnjosti, Zemljini polovi prevalili putanje koje su kraće od 90° glavnih krugova Zemljine sfere. I rezultati internacionalne službe posmatranja promena geografskih širina pokazuju da je, isključujući periodično kretanje Zemljinih polova o kojem smo govorili u prethodnoj glavi, sekularno pomeranje Zemljinih polova veoma sporo pa iznosi godišnje najviše 160 milimetara. Ovi podaci Geologije i Geofizike veoma su važni, jer pomoću njih možemo ispitati kako se menja orientacija Zemljine ose u prostoru usled pomeranja polova po Zemljinoj površini.

Prema mehanizmu predočenom slikom 21, §61, opkotrlja Zemljina polhodijska Zemljinu herpolhodijsku za vreme jednog zvezdanog dana, zato je celokupni opseg herpolhodijske jednak dužini luka polhodijske koji odgovara jednom zvezdanom danu. Isto je tako opseg preseka konusa herpolhodijske sa Zemljinom sferom jednak putanji pola po toj sferi prevaljenoj za vreme jednog zvezdanog dana. Koristeći se saopštenim podatkom internacionalne službe o sekularnom pomeranju pola, dobivamo da se pol rotacije pomerio za vreme jednog zvezdanog dana za $160 : 360 = 0,44$ milimetra. Ova neopisano mala dužina predstavlja nam opseg preseka herpolhodijske sa Zemljinom sferom pa svedoči da je taj konus izvanredno šiljast. Iz gore navedenih podataka Geologije sledovao bi još oštiji konus herpolhodijske; on je stvarno degenerisao na pravu. Kako se konus herpolhodijske, kao što smo videli u prethodnoj glavi, obavio oko vektora \mathcal{G}_0 , invariabilnog u prostoru, to možemo orientaciju Zemljine ose u prostoru, isključujući njenu lunisolarnu precesiju i nutaciju, smatrati invariabilnom.

§ 70. Zemlja smatrana kao materijalni sistem sa četiri stepena slobode. Ispitivajući u više rasprava problem Zemljine rotacije, stvorio je Bilimović svoju šemu o prirodi Zemljinog tela koja, u neku ruku, čini prelaz od klasične šeme ka onoj kojom smo se do sada poslužili. Po toj Bilimovićevoj šemi, može se naša Zemlja predstaviti materijalnim sistemom koji se sastoji iz dva glavna dela. Prvi deo je materijalna čvrsta lopta poluprečnika r_0 sa takvim rasporedom masa da njeno težište leži u centru sfere, a da je njen centralni elipsoid inercije spljošten obrtni elipsoid. Tu jezgru obuhvatila je ljuska unutrašnjeg radiusa r_0 , a proizvoljne spoljne površine i proizvoljnog elipsoida inercije kojega se glavne ose ne podudaraju sa glavnim osama elipsoida inercije jezgre. Taj materijalni sistem ima, ako se ne ispituje njegovo translatorno kretanje, nego samo njegova rotacija oko težišta, šest stepena slobode, dakle tri stepena više no što ga je imala klasična šema, identifikujući Zemlju sa jednim čvrstim telom. Ispitavši, u svim njegovim pojedinostima, kretanje toga sistema, našao je Bilimović, izvršivši potrebna uprošćenja koja odgovaraju prilikama naše Zemlje, da se jednačinama kretanja polova rotacije po površini jezgre može dati kondenzovani vektorski oblik naših jednačina saopštenih u §§66 i 68, a da u njegovom modelu igraju centrifugalne sile ulogu koju su u našim prethodnim rasuđivanjima igrale polfugalne sile.

Mi ćemo ovde Bilimovićevu šemu, primenjujući je na Zemlju, nešto uprostiti. Videli smo da je orientacija Zemljine ose u prostoru, u koliko nije uplivena spoljnim silama, invariabilna, a da ta invariabilnost sleduje odatle što je sekularno pomeranje polova po ljusci koje odgovara intervalu jednog zvezdanog dana veoma ma-

leno. To sleduje i iz Bilimovićeve šeme. Čineći, dakle, pretpostavku da se maločas opisana ljuska, zbog sila trenja koje ima pri svom kretanju po jezgri da savlada, kreće po toj jezgri veoma sporo u odnosu na jezgrino i svoje dnevno obrtanje, to iz te pretpostavke sleduje da je osa rotacije celokupnog sistema invariabilna u prostoru. Na taj način dolazimo do ove šeme. Čvrsta sferna jezgra uočenog materijalnog sistema obrće se oko jedne u prostoru invariabilne ose uglovnom brzinom n , noseći i povlačeći sa sobom svoju ljusku nepravilnog spoljnog oblika koja se pomera po jezgri, uz savlađivanje sile trenja, sporo u odnosu na rotaciju celokupnog sistema. Pitamo kako će se pomerati ljuska po jezgri, odnosno kako će se pomerati prodorna tačka ose rotacije sa površinom ljuske po toj površini. Ovaj materijalni sistem ima, dakle, četiri stepena slobode.

O rasporedu masa u pokretnoj ljusci činimo, vodeći računa o izostaziji Zemljine kore, pretpostavku da bi ta ljuska kondenzovana svugde na istu gustinu ρ_0 bila ograničena glatkom sferom. Pretpostavljamo još, jednostavnosti radi, da je nejednakost gustine ρ ljuske, zbog koje je ona dobila svoju relifnu površinu, samo funkcija koordinata Φ i Ψ definisanih u prethodnom paragrafu, a da se ta gustina ne menja duž vertikala koje prodiru ljusku. Označimo li sa D debljinu ljuske koja se, prema prethodnom, menja od tačke do tačke površine, to je, prema učinjenoj pretpostavci,

$$\rho D = \rho_0 H, \quad (88)$$

gde su ρ_0 i H konstante.

Kada bi ljuska bila svugde kondenzovana na gustinu ρ_0 , onda bi, imajući svugde i istu debljinu, njen elipsoid inercije bio sfera. Polarni momenat inercije takve ljuske obzirom na centar Zemlje bio bi, kao što je lako izvesti, predstavljen obrascem

$$T_0 = \frac{4}{5} \pi \rho_0 [(r_0 + H)^5 - r_0^5], \quad (89)$$

a glavni momenti inercije, jednaki međusobno, koji nam zbog toga predstavljaju i momenat inercije T obzirom na proizvoljnu osu ζ koja prolazi kroz centar Zemlje, obrascem

$$T = \frac{8}{15} \pi \rho_0 [(r_0 + H)^5 - r_0^5]. \quad (90)$$

Uočimo na proizvoljnom mestu te ljuske jednu vertikalnu elementarnu prizmu baze df koja prolazi kroz celu ljusku i ima, prema učinjenoj pretpostavci, na celoj svojoj visini istu gustinu ρ . Njeno težište koje je u kondenzovanom stanju ljuske ležalo u polovini visine H uzdignuto je sada do polovine njene stvarne visine D , dakle za duž

$$z_0 = \frac{1}{2}(D - H). \quad (91)$$

Ovaj obrazac je identičan sa obrascem (10), zato će se, kao što smo pokazali u §64, tim uzdizanjem težišta elementarne prizme, njen momenat inercije dT obzirom na osu ζ promenuti za dopunski momenat inercije $d\Omega$ predstavljen obrascem (12). Dopunski momenat inercije Ω celokupne ljuske dobiva se na isti način kao što je u §64 pokazano. Zato će stvarni momenat inercije J ljuskin obzirom na osu ζ biti predstavljen obrascem

$$J = T + \Omega \quad (92)$$

u kojem je T konstantno, a Ω promenljivo sa položajem ose ζ .

Da bismo ispitili rotaciono kretanje ovako stvorenog modela naše Zemlje, položimo u centar njegove jezgre početak O ortogonalnog koordinatnog sistema $X-Y-Z$, vezanog sa tom jezgrom; osa Z neka se podudara sa osom rotacije te jezgre i neka bude naperena prema severu. I ljuska učestvuje u toj rotaciji jezgre, pomerajući se po njoj veoma sporo. Mi možemo, kao što smo učinili i u asteroidnom problemu, koordinatni sistem $X-Y-Z$ smatrati za nepomičan ako zamislimo da na svaki element mase posmatranog materijalnog sistema dejstvuju, sem gravitacionih sila, još i odgovarajuća centrifugalna i Koriolisova sila. Smatrajući jezgru za apsolutno čvrstu, neće centrifugalne sile moći izvršiti deformaciju njezinu, a na nju ne dejstvuju Koriolisove sile, jer je ona prema koordinatnom sistemu $X-Y-Z$ nepokretna. Pretpostavljajući, jednostavnosti radi i da bismo jasnije ispoljili efekat centrifugalnih sila, da je jezgrin elipsoid inercije lopta, stajaće gravitacione sile koje dejstvuju između jezgre i ljuske, dakle sile teže ljuskine, normalno na graničnoj površini između tih dvaju delova modela i na njoj se poništavati; one neće težiti da pomere ljusku po jezgri. Te su sile, zbog pretpostavke (88) jednake na celoj spomenutoj graničnoj površini.

Ispitajmo sada raspored dopunskih sila na ljusci. Koriolisove sile su, zbog pretpostavke da je relativno kretanje ljuske po jezgri veoma sporo, toliko malene prema centrifugalnim silama da ih ne moramo uzeti u obzir. Ostaje samo da ispitamo dejstvo centrifugalnih sila.

Centrifugalna sila koja dejstvuje na element mase $d\mu$ koji se nalazi u tački M udaljenoj za vektor \mathfrak{R} od ose rotacije, predstavljena je, prema (43), §50, obrascem

$$d\mathfrak{F} = n^2 \mathfrak{R} d\mu, \quad (93)$$

gde n označava ugaonu brzinu koordinatnog sistema dakle, u našem slučaju, ugaonu brzinu dnevne rotacije Zemljine. Označimo sa f_0 jedinični vektor pravca \mathfrak{R} , a sa r , φ , ψ polarne koordinate tačke M , to je prema (59), §51,

$$R = r \cos \varphi,$$

dakle

$$d\mathfrak{F} = n^2 r \cos \varphi d\mu f_0. \quad (94)$$

Rastavimo li tu centrifugalnu silu u njenu vertikalnu komponentu dV i njenu horizontalnu komponentu dH od kojih prva pada u pravac radiusvektora r , a druga stoji normalno na tom pravcu, a koja je, tangirajući meridijan tačke M , naperena prema ekvatoru. Kako radiusvektor r tačke M zatvara sa vektorom \mathfrak{R} ugao φ , to je

$$dV = n^2 r \cos^2 \varphi d\mu \quad (95)$$

$$dH = n^2 r \cos \varphi \sin \varphi d\mu = \frac{n^2 r}{2} \sin 2\varphi d\mu. \quad (96)$$

Vertikalna komponenta dV stoji normalno na graničnoj površini između jezgre i ljuske pa nije u stanju da izvede pomeranje ljuske po jezgri, zato o njoj ne moramo više voditi računa. Horizontalna komponenta dH upravljena je tangencijalno prema toj graničnoj površini pa teži da element mase $d\mu$ pomeri po jezgri. Skalarna veličina momenta zaokretanja $d\mathfrak{M}$ te sile obzirom na centar Zemlje predstavljena je izrazom

$$dM = r dH = \frac{n^2 r^2}{2} \sin 2\varphi d\mu. \quad (97)$$

Kad bi ljuska bila kondenzovana svugde na gustinu ρ_0 , onda bi, zamišljajući masu $d\mu$ elementarne prizme koncentrisanu u njenom težištu koje se nalazi udaljeno za $\frac{1}{2}H$ od granične sferne površine radiusa r_0 , momenat dM bio pretstavljen obrascem

$$dM_1 = \frac{1}{2} n^2 \left(r_0 + \frac{1}{2} H \right)^2 \sin 2\varphi d\mu.$$

Momenat zaokretanja \mathfrak{M}_1 celokupne kondenzovane ljuske dobili bismo integracijom prednjeg izraza širom cele granične površine između jezgre i ljuske, predstavivši ga pre toga u vektorskom obliku. Kako su centrifugalne sile, a i njihove horizontalne komponente, simetrične prema osi rotacije, one se međusobno potiru pa je zato

$$\mathfrak{M}_1 = 0; \quad M_1 = 0.$$

Uzmimo sada u obzir stvarno stanje ljuske. Usled njega je težište mase $d\mu$ uzdignuto za z_0 iznad težišta njenog u kondenzovanom stanju pa se usled toga, pošto je z_0 prema r_0 veoma malo, momenat dM_1 promenuo za

$$dM = \frac{\partial M_1}{\partial r_0} z_0,$$

dakle za

$$dM = n^2 \left(r_0 + \frac{1}{2} H \right) z_0 \sin 2\varphi d\mu.$$

U ovom izrazu možemo, pretpostavljajući da je ljuska tanka, t.j. H veoma maleno prema r_0 , zanemariti $\frac{1}{2}H$. To možemo učiniti i zbog toga što je, kao što smo videli, H konstantno po celoj ljusci tako da bismo u gornjem obrascu mogli staviti

$$r_0 + \frac{1}{2} H = r_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H}{r_0} \right) = k r_0,$$

gde je k jedan konstantan broj; on bi konačno ušao u koeficijent \times pa izčezao iz računa. Zbog svega toga možemo staviti

$$dM = n^2 r_0 z_0 \sin 2\varphi d\mu. \quad (98)$$

Pretstavimo li sada ovaj momenat vektorielno, upotrebom istih onih jediničnih vektora kojima smo se poslužili pri obrazovanju jednačine (47), to dobivamo

$$d\mathfrak{M} = -n^2 r_0 z_0 \sin 2\varphi d\mu i. \quad (99)$$

Pitajmo sada za raspored akceleracije g teže u proučavanom modelu Zemljinom. Da na to pitanje odgovorimo, treba da, prema napred ugovorenom, stavimo u obrazac (60), §51, $A = C$ pa dobivamo da je funkcija sila W predstavljena, u našem slučaju, obrascem

$$W = f \frac{M}{r} + \frac{n^2 r^2}{2} \cos^2 \varphi, \quad (100)$$

a akceleracija g teže, prema (40), obrascem

$$g = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{fM}{r^2} - n^2 r \cos^2 \varphi. \quad (101)$$

Ona je na polu, t.j. za $\varphi = 90^\circ$; $r = r_0$, jednaka

$$g_p = \frac{fM}{r_0^2}, \quad (102)$$

a na ekvatoru, gde je $\varphi = 0$; $r = r_0$,

$$g_a = \frac{fM}{r_0^2} - n^2 r_0. \quad (103)$$

Zato je

$$g_p - g_a = n^2 r_0. \quad (104)$$

Stavljajući ovo u (99), dobivamo

$$d\mathfrak{M} = -z_0(g_p - g_a) \sin 2\varphi d\mu. \quad (105)$$

Ova je jednačina identična sa našom jednačinom (48) pa zato sleduje iz nje, istim načinom kao što je (61) sledovalo iz (48),

$$v = \kappa \text{ grad } \Omega. \quad (106)$$

Ovoj jednačini možemo, kao što je to učinio Bilimović, dati i drugi oblik, zamenjujući dopunski momenat inercije Ω sa stvarnim momentom inercije J ljsuke. Zaista, iz jednačine (92), u kojoj je T konstantno, sleduje

$$\text{grad } J = \text{grad } \Omega \quad (107)$$

pa zato možemo, mesto (106) pisati i ovaj obrazac

$$v = \kappa \text{ grad } J.$$

ЛИТЕРАТУРА

Literatura

- Claudius Ptolemäus:** *Handbuch der Astronomie.* Uebersetzt von Manitius. Zwei Bände. Leipzig 1912–13.
- Nicolaus Copernicus:** *Ueber die Kreisbewegungen der Wekörper.* Uebersetzt von Menzzer. Thorn 1879.
- Galileo Galilei:** *Le opere;* edizione nazionale. Firenze 1890.
- Kepler J.:** *Opera omnia.* Ed. Ch. Frisch. Francofurti 1858–71.
- Sir Isaac Newton:** *Mathematische Principien der Naturlehre.* Uebersetzt von Wolfers. Berlin 1872.
- Wolf R.:** *Geschichte der Astronomie.* München 1877.
- Rosenberger F.:** *Die Geschichte der Physik.* Zwei Bände. Braunschweig 1882–90.
- Heller A.:** *Geschichte der Physik.* Zwei Bände. Stuttgart 1882–84.
- Dreyer J. L. E.:** *History of the Planetary System from Thales to Kepler.* Cambridge 1906.
- Hoppe E.:** *Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum.* Heidelberg 1911.
- Oppenheim S.:** *Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit.* Zweite Auflage. Leipzig 1912.
- Duhem P.:** *Le système du monde, histoire des doctrines cosmologiques.* 5 tomes. Paris 1913–17.
- Troels-Lund:** *Himmelsbild und Weltanschauung im Wandel der Zeiten.* Uebersetzt von Bloch. Vierte Auflage. Leipzig 1920.
- Dannemann Fr.:** *Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und in ihrem Zusammenhang dargestellt.* Vier Bände. Leipzig 1920–23.
- Heiberg I. L.:** *Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum.* München 1925.
- Laplace P. S. de:** *Traité de Mécanique Céleste.* 5 tomes. I. éd. Paris 1798–1825. IV. éd. Paris 1878–82.
- Pontécoulant P. G. de:** *Théorie analytique du système du monde.* 2 tomes. Paris 1834–56.
- Leverrier U. J. J.:** *Recherches astronomiques.* Annales de l'Observatoire de Paris 1855–77.
- Stockwell J. N.:** *Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets.* Smithsonian contributions to knowledge. Vol. XVIII. Washington 1873.
- Resal M. H.:** *Traité élémentaire de Mécanique Céleste.* II. éd. Paris 1884.
- Dziobek O.:** *Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen.* Leipzig 1888.
- Tisserand F.:** *Traité de Mécanique Céleste.* 4 tomes. Paris 1889–96.
- Souchon A.:** *Traité d'Astronomie Théorique.* Paris 1891.
- Herz N.:** *Artikel „Mechanik des Himmels“ in Valentiners Handwörterbuch der Astronomie.* Breslau 1898.
- Charlier C. V. L.:** *Die Mechanik des Himmels.* Zwei Bände. Leipzig 1902–07.
- Poincaré H.:** *Leçons de Mécanique Céleste.* 3 tomes. Paris 1905–10.
- Milankovitch M.:** *Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire.* Paris 1920.
- Andoyer H.:** *Cours de Mécanique Céleste.* 2 tomes. Paris 1923–26.
- Moulton F. R.:** *Einführung in die Himmelsmechanik.* Uebersetzt von Fender. Leipzig 1927.
- Milankovitch M.:** *Mathematische Klimalehre und Astronomische Theorie der Klimaschwankungen.* Bd. I, Teil A des Köppen—Geigerschen Handbuches der Klimatologie. Berlin 1930.
- Milankovitch M.:** *Abschnitt „Stellung und Bewegung der Erde im Weltall“,* im Band I des Gutenbergischen Handbuches der Geophysik. Berlin 1933.
- D'Alembert:** *Traité de la précession des équinoxes.* Paris 1749.

- Poisson:** *Mémoire sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.* Paris 1827, 30.
- Darwin G. H.:** *Scientific Papers.* Vol. 3. Cambridge 1910.
- Oppolzer:** *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten.* 2 Bde. 2 Aufl. Leipzig 1882.
- Schiaparelli:** *De la rotation de la Terre sous l'influence des actions géologiques.* St. Petersburg 1889.
- Klein und Sommerfeld:** *Ueber die Theorie des Kreisels.* Leipzig 1897–1903.
- De Ball:** *Theorie der Drehung der Erde.* Wien 1908.
- Bauschinger:** *Bahnbestimmung der Himmelskörper.* Leipzig 1906.
- Poincaré:** *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques.* Paris 1911.
- Prey, Mainka und Tams:** *Einführung in die Geophysik.* Berlin 1922.
- Milankovitch:** *Abschnitte „Drehbewegungen der Erde“ und „Säkulare Polverlagerungen“*, im Band I des Gutenbergschen Handbuches der Geophysik. Berlin 1993.