Veljko Vujičić

# SILE POJAVNOG I PROGRAMIRANOG KRETANJA

Beograd 2004

# Predgovor

Naslov "Sile pojavnog i programiranog krertanja" objavljen je prvi put na ruskom i engleskom jeziku u zborniku teza VIII Čitajevske medjunarodne konferencije - ANALITIČKA MEHANIKA, STABILNOST I UPRAVLJANJE KRERTANJEM, Kazan, 2002. godine. Pod istim ovim nalovom održano je predavanje 24. decembra 2002. godine u Inženjerskoj akademiji Jugoslavije. U zaključku diskusije predsednik ove Akademije akademik Miomir Vukobratović je predložio da se o predmetnom pitanju i problemu napiše specijalan rad na pristupačnom operativnom matematičkom nivou. Pisac ovog rada je prihvatio taj predlog. Gradivo je odabrano prema sadržaju pomenutog predavanja; osmišljeno je kao

*prvo*, da se sto širem krugu istraživača i čitalaca razjasni valjanost dobijenih i napisanih novih rezultata, s obzirom da se oni ne podudaraju u svemu sa standardima klasične i nebeske mehanike;

*drugo*: da bi ubedljivi opšti teorijski dokazi, kao i navedeni primeri iz tehničke mehanike, mogli unaprediti skolska i inženjerska znanja. Štaviše, u našim naučnim i stručnim krugovima prisutna su osporavanja bez dokaza i napisanih tvrdjenja. Rasprave na naučnim seminarima pokazali su da postoje medju nosiocima visokih naučnih i nastavnih zvanja različita shvatanja i objašnjenja o osnovnim polazištima saznanja o prirodi i matematičkoj teoriji o kretanju tela, pa je ovo jedan prilog razjašnjenu znanja u mehanici.

# Uvod

Uslov iz predgovora o pristupačnom matematičkom znanju uticao je na izbor gradiva, načina izlaganja i pisanja sledećih redova o silama, pod čijim se dejstvom kreću razna tela. Već ta prva rečenica skriva nejasnoće zbog čega može nastati nerazumevanje, te i sporenje. Da bi to izbegli počnimo od tvrđenja prihvatljivih za razne nivoe znanja, od *prednačela postojanja* koje tvrdi: *postoje tela, postoje rastojanja i postoji vreme.* Bitna karakteristika tela je *masa*, koju opisujemo slovom $m$, a položaj tela opisuje jedna tačka u kojoj kažemo da je skoncentisana masa tela; takvo telo u teoriji kretanja nazivamo *materijalna tačka.* Ima autora koji materijalnu tačku nazivaju "čestica,,. U srpskom jeziku ne mogu se izjednačiti ta dva pojma. Pod pojmom *čestica* podrazumeva se veoma veoma malo telo, koje ima svoju masu skoncentrisanu u masenom centru čestice. Dakle, čestica je veoma maleno telo, a pojam *materijalna tačka* obuhvata kako malena tako i svekoliko velika tela pojedinačno. Materijalnu tačku karakteriše samo kretanje čiji je trag linija, a brzinu čini vektor usmeren po pravcu tangente u smeru kretanja, čiji je početak u dodirnoj tački tangente i putanje. Chestica, međutim, opisuje pored takvog kretanja još i sopstveno obrtanje, kao i mnoga tela. U stručnoj literaturi najčešće se kaže da materijalna tačka pretstavlja samo *translatorno* kretanje, dok kretanje tela karakterišu i translatorna i obrtna kretanja.

Naznačena konstatacija da postoje tela proizvodi i drugo tvrđenje da *postoje rastojanja* između materijalnih tačaka. Prihvatljivo je i šire poimanje da postoje rastojanja između geometrijskih tačaka. Pri tom treba da se ima u vidu da li se rastojanje između dve tačke na lopti meri po krivim linijama, koje se mogu povuci između te dve tačke na površini lopte, ili po zamošljenoj pravoj duži između te dve tačke merene iznutra sfere. Razlike su velike, te i posledična proučavanja kretanja značajna. Rastojanja koja treba da pređe neko telo, ili uopšte rastojanja u praksi čovekovog bitisanja, kud i kamo su složenija od pojma rastojanja naučenog u geometriji prave, ravni i prostora. Pomenimo samo neka. Rastojanja između nebeskih tela i dugih letilica, kretanje plovila po okeanima i rekama, vožnja po putevima u ravnici i u brdovitim predelima, prelaženje udaljenja između dva položaja na poljani i dva položaja u gradu. Raznovrsnost svih nabrojanih a, još više nebrojenih, rastojanja upućuju nas na uopštavanje, da ne kažemo uproštavanje. Za sva rastojanja moguće je izabrati po volji malo rastojanje $ds$ za bilo koji put $s$. Tako, kako smo izabrali masu $m$ da predstavlja svakolika tela, tako eto sad imamo i preedstavnika rastojanja $ds$. To nije dovoljno da bi se moglo određivati kretanje. Nije prazna izreka "preko preče, naokolo bliže".

U ranoj mladosti, idući na planini po bespuću, pisac ovih redova sreo je planištaka i zapitao: "koliko je udaljeno Tjentište (ciljno mesto), za koliko se može stići tamo?" Mladić je očekivao odgovor u, školi naučenim vremenskim jedinicama, a dobio je odgovor "dva cigara duvana". Bilo je jasno da to nije dužina od desetak ili petnaestak santimetara cigarete, nego udaljenost koju čovek može da prepešači dok mu ne sagore dve cigarete duvana. Ta rečenica povezuje kretanje - hod čoveka sa trajanjem nečeg drugog, upoređenjem s njemu poznatim i vidljivim promenama, s trajanjem dana od izlaska do zalaska Sunca, s trajanjem padanja tela na Zemlju, s trajanjem jednog treptaja trepavica, ili jednog klaćenja nekog klatna, ili neka druga trajanja drugih promena. To trajanje raznih kretanja ili promena, koje bez sumnje postoji, nazivamo *vreme* i označavamo u mehanici slovom $t$. Tako, vreme se vezuje za kretanja tela - skakanje, plivanje, letenje, rad mašina, prividno i stvarno kretanje nebeskih tela,..., pojavu Sunca, svitaj dana ili padanje mraka. Tako, eto za najraznovrsnija kretanja, kao i za promenu kretanja, čovek um usvaja još jednu postojeću osobinu kretanja i menjanja, nazvanu *vreme*. Pokazuje se da se teorija o kretanju tela može u celosti opisati pomoć u spleta te tri osnovne veličine : *mase, rastojanja* i *vremena*. One su prisutne u klasičnoj i savremenoj fizici. Usvojene su jedinstvene oznake njihovih dimenzija: $\dim m = M, \quad \dim l = L, \quad \dim t = T$. Prema tome, svako kretanje - *pojavno* ili *programirano* sadrži tri navedene dimenzije: $M, L, T$.

Pod pojmom *pojavno kretanje* podrazumevamo zapaženu pojavu u kojoj neki predmet menja rastojanja ili položaj u odnosu na druga postojeća tela u toku vremena posmatranja. Posmatranjem zvezdanog neba u velikim intervalima vremena uočava se da neka svetila menjanju svoj položaj u odnosu na posmatrača, u odnosu jednih prema drugim ili u odnosu prema nekim zvezdama "nekretnicama". Povremeno se može zapaziti noću da se neka svetila, slična mnogim dugim, kreću slično zapaženom letu aviona u toku dana na velikim visinama. Za noćne posmatrače, koji ne znaju da uočene pojave čine kretanja veštačkih satelita ili pak aviona, to je *pojavno kretanje*, ali za projektante, planere i kontrolore tog leta to su *programirana kretanja*. Kretanja u prirodi, koje čovek nije uzrokovao mogu se svrstati u pojavna kretanja, a ona kretanja tela koja se ostvaruju po ljudskom programu i planu nazivaćemo *programiranim kretanjem.* Programirano kretanje čovek ostvaruje skoro svakodnevno – sam sebi određuje: kojim će putem, kojom brzinom, kojim prevoznim sredstvom, za koje vreme, pri raznim uslovima preći iz jednog mesta u drugo. ili kako će ostvariti neku drugu radnju. Najuticajniji te i najzaslužniji naučnici utemeljivači teorije o kretnju tela nazvali su uzročnike kretanja *silama.*

Do sada smo u prethodnom tekstu, kao i u svakodnevnoj prilici, upotrebljavali pojam "kretanje", kao znan od rođenja pa i pre njega. Međutim, za matematičku tačnost teorije mehanike, kao teorijske nauke o kretanju tela, potreban je tačan i nedvosmislen dogovor, tj. kratka i jasna definicija pojma *kretanja.* Takva definicija je izostala u Njutnovom stvaralačkom delu o matematičkim principima prirodnih nauka, za razliku od njegove druge definicije o *količini kretanja*, pa se i danas, kao posledica toga, različito tumači drugi Njutnov zakon mehanike. Previđa se Njutnova napisana pouka:" *Apsolutno kretanje* je premeštanje tela iz jednog njegovog apsolutnog mesta u drugo, a *relaytivno* kretanje iz relativnog u relativno". Pri kraju pojašnjenja te njegove *IV* pouke reč kretanje vezuje se za *brzinu.* Ovde ćemo pod pojmom *kretanje*, kao i kod Njutna, podrazimevati *promenu položaja materijalne tačke u odnosu na neki drugi polozaj, te i svoj prvobitni polozaj, u toku nekog intervala vremena, ma koliki taj interval bio; predstavnik takvog kretanja je brzina, čija je dimenzija* $LT^{-1}$. Napomenimo da se takvo poimanje kretanja ne podudara sa iskazima u matematici kojim se kazuje da je jedna tačka prepisana sa jednog mesta na drugo, jedne tačke pomerene na drugu. Pri takvom poimanju kretanja, čovek ne može logički sustići kornjaču, jer da bi je stigao mora preći prvu polovinu razdaljine,... Kretanje u mehanici podrazumeva odnos dužine i vremena, tj. brzinu kojom se jedna materijalna tačka premešta s jednog položaja na drugi. To otklanja navedeni starogrčki paradoks o kornjači. Ako bude čovek išao jednakom ili manjom brzinom od kornjače, izgleda prirodno da je neće stići, ali će je po želji stići i prestići većom brzinom od brzine njenog hoda. Pri takvom poimanju kretanja, koje karakteriše brzina, nedvosmisleno će se razumeti Njutnov iskaz *"Mutationem motion..."*, tj. "Promena kretanja..."; nikako drukčije nego, kao promena brzine. Dakle naslovno pojavno i programirano kretanje ne može se opisivati bez pojma brzine, kao odnosa pređenog rastojanja u nekom vremenu. Pojam kretanja koga karakteriše brzina treba razlikovati od pojma *Količine kretanja*, koje se definiše kao proizvod mase i brzine.

## Sile

Naslovna i ključna reč ovog rada je *sila*, odnosno sile. Pojam sile mnogima je jasan, ali se ipak stalno spore oko toga da li pojam reči "sila" treba definisati ili je on sam po sebi jasan. Sami se u to uverite; čuli ste ili ste i samo govorili: "Sila Boga ne moli", "Amerika je najveća sila sveta", "Car Dušan silni", "vojna sila", "sila vetra", "živa sila", "sila Zemljine teže", "sila trenja"... Šta od svega toga da usvojimo za naslovni pojam "Sile pojavnog i programiranog kretanja"? Za jedne to je samo po sebi jasno, pa se taj pojam, kao "osnovni", ne definiše, a za druge to je u mehanici matematički definisani uzročnik promene kretanja. Utemeljivač mehanike - Isak Njutn od svojih osam definicija, šest je posvetio silama, da bi i pored definisanih pojmova u daljem razjašnjavao na shvatljiviji način svoje definicije. Ali i danas, vrhunski stručnjaci (najviše po zvanju), žustro se razilaze u shvatanju pojma sile, kao osnovnog ili uvedenog pojma dinamike, iako nema prethodnog dogovora šta je "osnovni pojam". U tim sporovima mogu se čuti ili pročitati tvrđenja; da je i moment sprega sila takođe osnovni pojam, da inerciona sila nije sila, da centrifugalna sila uopšte nije sila, i još štošta drugo. Odatle proističu i tvrđenja da se ne mogu odrediti sile nekog pojavnog ili programiranog kretanja, ako nisu nekako od ranije poznate. Zbog takvih shvatanja i znanja uticajnih školaca pojedinih delova teorije o kretnju tela, citiraćemo dva utemeljivača dve glavne grane klasične mehanike, a zatim ćemo postupmo, prosto i jasno ovde pokazati, kako se mogu odrediti sile na osnovu zadatih programa ili pojavnog kretanja. S obzirom da i to polazište, koje se u mehanici naziva "prvi zadatak dinamike" ima oponente, navedeimo još nekoliko Njutnovih i Lagranžovih rečenica.

U svom znamenitom fundamentalnom delu mehanike "Matematički principi nauke o prirodi"[1] Isak Njutn trećom definicijom uvodi *Urođenu silu materiji*. U pojašnjenju pojma urođene sile je zapisano: "Urođena sila mogla bi biti veoma razumno nazvana *silom inercije*. Tu silu proizvodi telo jedinstveno samo kada druga sila, koja dejstvuje na njega izazivajući promenu njegovog stanja".

Četvrtu definiciju navedimo u orginalu i u prevodu: *"Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.,,*

Prve dve reči "Vis impressa" u prevodu nalazimo kao "Sila nametnuta spolja" ili "nametnuta sila", "aktivna sila", "spoljna sila". Njutn

[1] I. Newton, PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA, Londini, Anno *MDCLXXXVII*

uvodi ili pominje i druge nazive za sile, kao: ubrzavajuća, pokretačka, centripetalna, centrifugalna,..., ali za opšti dalji pojam sile bitna je "Vis impressa". Encikopedijsko značenje reči "Impressa" (l. impressio) u prevodu na srpski, pored ostalog, je "dejstvo koje jedna stvar ima na koga". To bi se moglo kazati i uticaj jedne stvari na drugu, jednog tela na drugo. Uz te napomene usvojimo Milankovićev prevod citirane definicije sa latinskog.

*Sila nametnuta spolja je dejstvo upereno protiv jednog tela da bi mu se stanje izmenilo, bilo stanje mirovanja, bilo jednakog pravolinijskog kretanja.* U pojašnjenju prethodne definicije, autor piše: "ova sila sastoji se samo u dejstvu i ne ostaje u telu kada je izvršila dejstvo". Ova sila "može biti raznog porekla, na primer usled sudara, pritiska, centripetalna sila".

"Takva je centrifugalna sila, s kojom telo pritiska na krug; njoj je jednaka i suprotna sila, s kojom krug otklanja telo ka svome centru". Skoro cela prva knjiga Njutnovog dela "Matematički principi nauke o prirodi" posveć ena je određivanju sila koja se kreću po zadatim krivim linijama. Tako, na primer, na osnovu hipotetičnog kretanja po kružnoj liniji nalazi silu za koju tvrdi: "Pri ravnomernom kretanju tela, po kružnim linijama, centripetalne sile su direktno proporcionalne kvadratima brzina i obrnuto proporcionalne poluprečnicima krugova,,; u narednoj posledici se kaže da su te sile direktno proporcionalne poluprečnicima, a obrnuto proporcionlne kvadratima vremena obilaženja. U predlogu $XI$, u zadatku $VI$ traži silu usmerenu ka žiži elipse i nalazi da je obrnito proporcionalna kvadratu rastojanja tela od žiže. U ne malom broju udžbenika razmatraju se dva glavna zadatka dinamike. Jedan da se odrede sile ako je poznato kretanje, i drugi da se odredi kretanje ako su poznate ili zadate sile. Te glavne zadatke neki autori nazivaju "prvi i drugi zadatak dinamike'; drugi pisci udzbeničke literature koriste i druge nazive, kao "direktni i inverzni" (Pravi i obratni) zadaci mehanike. Čak je razvijena i posebna podoblast u Lagranževoj mehanici pod nazivom "inverzni problemi".

Joseph Louis Lagrange (1736–1813) je napisao: "Pod silom podrazumevamo, uopšte govoreći, ono što pokreće ili teži da pokrene telo, na koje pretpostavljamo da dejstvuje; zato silu treba procenjivati po veličini kretanja koje ona izaziva ili teži da izazove. ... Ako se uzme za jedinicu bilo koja sila ili, pak, njeno dejstvo, tada izraz za bilo koju drugu silu ne predstavlja ništa drugo nego odnos, tj. matematičku veličinu koja može biti izmerena pomoću broja ili duži; s te tačke gledišta treba u mehanici posmatrati sile." Da bi smo lakše izveli matematičku karakteristiku za pojam sile navedimo još jedno Njutnovo pojašnjenje svojih definicija: "Na taj način ubrzavajuća sila odnosi se tako prema pokretačkoj, kao i brzina prema količini kretanja. Količina kretanja predstavlja proizvod brzine i mase, a pokretačka sila je proizvod ubrzavajuće sile i te mase.[2]" S obzirom da se danas umesto izraza "pokretačka sila" upotrebljava kraće reč *sila*, što ćemo i ovde koristiti, lako je odrediti fizičku dimenziju sile

$$\dim F = MLT^{-2}. \tag{1}$$

Međutim ta formula ne određuje svaku silu, pa ni jednu oko bi je posmatrali kao osnovni ili opsti pojam. Iz Lagranžovog tumačenja pojma sile shvata se da je taj pojam tesno vezan za pojam kretanja. To čini i Njutn. Posle uvedenih definicija sile i utvrđivanja njenih dimenzija Njutn je aksiomatizovao teoriju o kretanju tela; postavio je tri aksiome u osnovu te teorije, koju danas nazivamo Njutnova mehanika. Kako autori raznih knjiga te aksiome prepričavaju ne jednako kao osnovne zakone dinamike, citirajmo Njutnov zapis na latinskom, i Milankovićev prevod na srpski (uz minimalno otstupanje); napomenimo da se srpski tekstovi A. Bilimovića i M. Milankovića pomalo razlikuju[3].

*I Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*

Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili jednakog pravolinijskog kretanja, sem ako ga nametnute sile ne primoraju da promeni svoje stanje.

*II Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

Promena kretanja proporcionalna je nametnutoj sili i vrši se u pravcu u kojem ta sila deluje.

III *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper asse aequales et in partes contrarias dirigi.*

Dejstvo je uvek jednako protivdejstvu, ili uzajamna dejstva dvaju tela uvek su jednaka i suprotno usmerena .

---

[2]prevod Njutnovih definicija s objašnjenjima moguće je pročitati u časopisu TEHNIKA, godina $XLII$ – 1987, br.11, str.1007 – 1011.

[3]vidi A. Bilimović Racionalna mehanika I, drugo izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1950, str. 98-99

Ne umanjujući opštost ovih aksioma napišimo ih, za naše ovdašnje potrebe, matematičkim relacijama:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \tag{I}$$

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{II}$$

i posledično

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2. \tag{III}$$

Istaknimo ponovo da su to aksiomi jedne matematičko logične teorije o kretanju tela. Cela teorija o kretanju najraznovrsnijih tela zasniva se na tim aksiomama. S obzirom da ta teorija obuhvata kako misaona, tako i realna tela, navedene aksiome nazivaju češće zakoni kretanja. Sam Njutn ih je oslovio "Axiomata sive legis motus", što u lakom prevodu znači *Aksiomi ili zakoni kretanja.* Svaka druga teorija, koja odstupa od tih aksioma, ne može se nazivati Njutnova mehanika. A tih otstupanja ima podosta, pri čemu se prvo izmene aksiomi a zatim se govori i piše da "Njutnovi zakoni nisu tačni". Tako, na primer, kad se u drugoj aksiomi umesto reči "promena kretanja" napiše "promena količine kretanja", što nije redak slučaj, logično će slediti zaključak s dokazom da navodno "drugi Njutnov zakon nije tačan", bez obzira sto to nije Njutn napisao, niti je to smisao njegovih reči *promena kretanja. Količinu kretanja* Njutn i svojoj definniciji naziva *quantitas motus.* Tačna je konstatacija da zakon promene količine kretanja ne odgovara zakonu kretanja raketa, kao što je to za slučaj projektila konstantne mase. Ali to nije druga Njutnova aksioma. Naša dalja izlaganja zasnivaće se na izvornim Nutnovim aksiomama; nazivaćemo ih upravo aksiomama, da bi ih lakše razlikovali od pojma zakon, kao na primer, Njutnov zakon gravitacije. Na osnovu aksioma i geometrijskih relacija kružne linije, elipse, hiperbole, parabole, kao i bilo koje krive linije Njutn izvodi matematičke obrasce za veličine sila koje prisiljavaju tela da se kreću po pomenutim putanjama.

Bez obzira na ta utemeljena gledišta i shvatanja dinamike, čitamo ili ili čujemo: "U daljem razvoju teorije mehanike svi autori se slažu: silu razmatraju kao unapred poznatu." Takva konstatacija nije retka i ima dalekosežne posledice, naročito za teoriju i praksi upravljanja kretanjem. U teoriji upravljanja kretanjem je centrlno pitanje: kako odrediti sile da bi se realizovalo željeno kretanje. Takve želje opisuju se raznim zahtevima, kao na primer: kojim putem treba preći od jednog mesta do drugog, kolikom brzinom, za koje vreme, koliko tela, po kakvim preprekama,...? Opis planiranog kretanja matematičkim simbolima i relacijama čini *program klretanja*, pa takvo kretanje logično je nazvati *programirano kretanje*. Dakle, kretanje Meseca ili Jupiterovih ili Saturnovih satelita, kao i samih planeta, prema našem poimanju je *pojavno kretanje*, koje ne zavisi od naše volje, a kretanje vestačkih satelita, koji se kreću oko Zemlje ili Marsa, je *programirano kretanje* po programu koji su sastavili stručnjaci, da bi ostvarili poptrebni ili željeni cilj. Sve ove prethodne konstatacije pojasnimo prepoznatljivim primerima pomoću srednjoškolskih matematičkih znanja.

### Prosti primeri određivanja sila

**Primer 1.** Često je vidljiva, ponovljiva i merljiva pojava da ispušteni predmet pada na Zemlju. Slavni naučnik Galileo Galilej utvrdio je merenjem da sva tela, mala i velika, padaju jednim te istim ubrzanjem $g = const.$ (u neotpornoj sredini) prema formuli

$$y = -\frac{gt^2}{2} + y_0, \tag{2}$$

gde je $y$ vertikalna osa, $t$ vreme, a $y_0$ visina s koje je telo počelo da pada bez početne brzine. Zadatak je da se odredi sila koja uzrokuje kretanje prema jednačini (2).

Za ovaj primer drugi Njutnov zakon ili Dalamberov princip svode se na jednu diferencijalnu jednačinu

$$m\ddot{y} = Y, \tag{3}$$

gde je $m$ masa tela koje pada, a $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ drugi izvod ordinate $y(t)$ po vremenu $t$, koje u mehanici predstavlja ubrzanje; $Y$ je, za sada, nepoznata sila koju treba odrediti? Za rešenje zadatka na raspolaganju nam su dve jednačine (2) i (3). Dvostrukim diferenciranjem jednačine (2) po vremenu, dobija se

$$\dot{y} = -gt \to \ddot{y} = -g = const.$$

Zamenom u jednačini (3) proizilazi da je tražena sila

$$Y = -mg. \tag{4}$$

S obirom da je ubrzanje $g$ ovde constantno, uči se da je sila teže proporcionalna masi tela $m$. Tu je prisutna još i vidljiva činjenica da telo pada po vertikalnoj prvoj liniji. Međutim, da li je ili nije baš tako? Ako se zadržimo na tome da je tačno to što je vidljivo, obesimo neki predmet o konac; telo će zategnuti konac, a osu konca smatramo vertikalnom pravom. Ta pojava je prisutna na svakom mestu: na polju, planini, u stanu, vozilu koje miruje; pa i u vozilu koje se kreće pravolinijski s konstantnom horizontalnom brzinom. Ako sedite u nekom vozilu, plovilu, letilici, koji se kreću pravolinijski konstantnom horizontalnom brzinom

$$\dot{x} = \dot{x}_0. \tag{5}$$

videćete istu pojavu; ispustite li predmet, pašće po unutrašnjoj vertikali, kao u obrascu (2). Ako pak to isto padanje tela posmatra ili snima drugo lice, koje miruje spolja na zemlji, utvrdiće da je putanja padanja kriva linija oblika parabole

$$y = cx^2 + y_0, \quad c = const. < 0. \tag{6}$$

Diferencijalne jednačine kretanja u ovom slučaju su:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X, \\ m\ddot{y} &= Y. \end{aligned} \tag{7}$$

gde su $\ddot{x}$ i $\ddot{y}$ koordinate vektora ubrzanja duž horizontale $x$ i vertikale $y$, a $X$ i $Y$ njima odgovarajuče sile.

Zbog uslova (5), za koji je $\ddot{x} = 0$, i prve jednačine (7) sledi da je $X = 0$.

Iz uslova, tj pojave (6), sledi da je $\ddot{y} = 2c\dot{x}^2$. Zamenom u jednačini (7) dobija se tražena sila

$$Y = 2mc\dot{x}_0^2. \tag{8}$$

Na prvi pogled ova sila i sila (4) se razlikuju, što traži razjašnjenje. Formula (4) kazuje da je sila konstantna, tj proporcionalna konstantnom ubrzanju, a formula (8) kazuje da je ta sila direktno proporcionalna kvadratu početne brzine. Potražimo li smisao te razlike u neodređenoj konstanti $c$, može se utvrditi pomoću jednačine (6) da konstanta $c$ mora imati dimennziju obrnuto proporcionalnu parametru parabole $p$, tj. dimenziju dužine

$$\dim c = L^{-1},$$

tj. $c = -\frac{1}{2p}$, To dalje vodi ka zaključku da je sila direktno proporcionalna kvadratu brzine, a obrnuto proporcionalna parametru $p$. Samo za slučaj da je $c = -\frac{g}{2\dot{x}_0^2}$, dobija se formula sile (4). Odatle sledi

$$g = -2c\dot{x}_0^2 = -\frac{\dot{x}_0^2}{p}, \tag{9}$$

pa, prema tome,

$$F = -m\frac{\dot{x}_0^2}{p}. \tag{10}$$

što će se u daljem izlaganju pokazati racionalnijim opisom realnog kretanja od formule (4). Uzme li se još da je parametar parabole $p$ jednak prečniku Zemlje, tj. $p = 2R$, dolazi se do značajne formule druge kosmičke brzine

$$v^2 = 2Rg. \tag{11}$$

Evo, ovaj naprostiji primer pokazuje da je usvojeno školsko znanje (4) samo priblizno tačno; izmereno ubrzanje, već se zna, nije jedno te isto za sve visine i geografske širine. Da bi otklonili eventualne sumnje u navedenu konstataciju, a pobudili veće interesovanje čitalaca, navedimo drugi prost primer o ravnomernom kretanju tela po kružnoj putanji. Pri tom odmah zapazimo da u tom slučaju isčezavaju pojmovi "horizontalno" i "vertikalno", a umesto njih za određivanje pravca sile služiće nam pojmovi "tangentno" i "radijalno".

**Primer 2.** Ravnomerno kretanje tela po kružnoj putanji poluprečnika $\rho$, tj.

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{12}$$

Treba da se odredi veličina sile $F = (X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}$ koja prisiljava telo mase $m$ da se kreče po programiranoj kružnoj putanji, konstantnom brzinom

$$v_0^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2. \tag{13}$$

Polazne diferenencijalne jednačine kretanja su

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X, \\ m\ddot{y} &= Y. \end{aligned} \tag{14}$$

Kao i u prethodnom primeru diferencirajmo jednačine (12) i (13), tako da u njima dobijemo izvode drugog reda, kao u jednačinama (14), tj.

$$\begin{aligned} x\ddot{x} + y\ddot{y} &= -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -v^2, \\ \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Zamenom izvoda $\ddot{x} = \frac{X}{m}$ i $\ddot{y} = \frac{Y}{m}$ iz diferencijalnih jednačina (14) u jednačine (15) dobija se sistem dve linearne algebarske jednačine po $X$ i $Y$,

$$\begin{aligned} xX + yY &= -mv^2, \\ \dot{x}X + \dot{y}Y &= 0. \end{aligned}$$

Determinanta ovog sistema, pri opštem razmatranju, različita je od nule,

$$\Delta = \|x\dot{y} - y\dot{x}\| = \|r\cos\theta r\sin\theta\dot{\theta} + r\sin\theta r\cos\theta\dot{\theta}\| = \|r^2\dot{\theta}\| \neq 0,$$

te postoje rešenja po koordinatama $X$ i $Y$ sile $\mathbf{F}$ i to:

$$X = -\frac{m\dot{y}v^2}{\Delta}, \quad Y = -\frac{m\dot{x}v^2}{\Delta}.$$

Sledi da je veličina tražene sile

$$F = \pm(X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}} = \pm m\frac{v^2}{\Delta}.$$

Ova formula prema prethodnom računu može se napisati u prepoznatljivim oblicima, kao

$$F = \pm m\frac{v^2}{r} = \pm mr\dot{\theta}^2. \tag{16}$$

Uporedimo sile (10) i (16). U obrascu (10) horizontalna brzina $\dot{x}_0$ odgovara (tangentnoj) brzini $v$ u obrazcu (16), parametar $p$ za kružnu liniju je jednak poluprečniku. Prema tome, i po spoljnem vidu i po fizičkim dimenzijama, formule (10) i (16) se podudaraju. Iako je formula (16) u potpunoj saglasnosti s Njutnovom teoremom $IV$ prve knjige ona je izazivala čuđenje, da ne kažemo protivljenje, nekih visokih stručnjaka u oblasti mehanike. To možda zbog toga što se u stručnoj standardnoj literaturi ubzanje $\gamma$ kretanja tela oko Zemlje na kružnim putanjama računaju po obvrascu

$$\gamma = \frac{gR^2}{\rho^2},$$

a fomula (9) je znatno prostija, logičnija, te i tačnija, tj.

$$\gamma = \frac{v^2}{\rho}, \tag{17}$$

pa izaziva sumnjičenja u ispravnost naših tvrđenja. O tome će kasnije još biti reči, a ovde, radi vće pobude radoznalosti, navedimo uporedni tabelarni pregled veličina ubrzanja $\gamma$ u jedinicama $ms^{-2}$ po standardnom obrascu i obrazcu (17), obrazcu u zavisnosti od brzine keretanja $v$ u $ms^{-1}$

i udaljenja $\rho = R + H$, gde je $R = 6370$ u km, a $H$ je visina nad Zemljom, data takođe u kilometrima.[4]

| $H$ | $v$ | $gR^2/\rho^2$ | $v^2/\rho$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 7.91 | 9.810 | 9.823 |
| 100 | 7.84 | 9.489 | 9.492 |
| 200 | 7.78 | 9.201 | 9.210 |
| 300 | 7.73 | 8.947 | 8.942 |
| 400 | 7.63 | 8.679 | 8.689 |
| 500 | 7.61 | 8.419 | 8.429 |
| 1000 | 7.35 | 7.321 | 7.330 |
| 2000 | 6.90 | 5.682 | 5.688 |
| 5000 | 5.92 | 3.080 | 3.081 |
| 10000 | 4.93 | 1.484 | 1.484 |
| 100000 | 1.94 | 0.035 | 0.035 |

Tabela 1

Ni na samoj Zemlji veličina ubrzanja $g$ nije jedna te ista, tj. nije konstanta, nego zavisi od nadmorske visine, od geografske širine, kao i od brzine kretanja objekata po Zemlji. U teorijskoj mehanici čvrstih tela postoje složeniji obrasci kojim se to dokazuje. Kako taj matematički nivo znanja prevazilazi namene ove knjižice, našu konstataciju ćemo potkrepiti prostijim i zanimljivijim navodima.

U univerzitetskom udžbemiku mehanike[5] piše da se "za određivanje ubrzanja Zemljine teže ... koristi obrazac

$$g = (980,632 - 2,586\cos 2\phi + 0.003\cos 4\phi - 0,293h)cms^{-2},$$

gde je $\phi$ geografska širina mesta a $h$ visina iznad morskog nivoa. Normirana vrednost $g_n$ ubrzanja Zamljine teže iznosi

$$g_n = 980,665cms^{-2},$$

dok se u našim geografskim širinama a na Zemljinoj površi koristi vrednost

$$g = 981cms^{-2}."$$

[4]Vidi, na primer, Uvod u asrodinamiku" od T.P. Anđelića; Izd. Matematički intitut SANU, strane 110 i 112, Beograd, 1983.

[5]T. Anđelić i R. Stojanović, Racionalna mehanika, Zavod za udžbenike SR Srbije, Beograd, 1965, str. 120.

Sedamnast godina kasnije isti autor u knjizi "uvod u astrodinamiku" knstatuje da je "Ubrzanje Zemljine teže na njenoj površi $g = 9.78ms^{-2}$ do $9.83ms^{-2}$.

U devetom izdanju popularne knjige "Zanimljiva astronomija" od Pereljmana[6]. na strani 23. postavlja se pitanje: "Dva potpuno jednaka voza se kreću jednakom brzinom u suprotnim smertovima; jedan od istoka na zapad, drugi sa zapada na istok. Koji je od njih teži? Odgovor je: "Teži je (t.j. jače pritiska na šine) taj, koji se kreće suprotno obrtanju Zemlje, s istoka na zapad. Taj voz kreće se sporije oko ose Zamljine lopte; zato usled centrifugalnog efekta on gubi manje od svoje težine, nego voz, koji se kreće na istok.

Računajući centripetalna ubrzanja po obrascu $-\frac{v_i^2}{R}$, kao u (17), autor dolazi do zaključka da je voz, koji se kreće po uporedniku od $60^o$ brzinom od 72 km/čas prema istoku, lakši od voza koji se kreće prema zapadu, za $0,0003$ svoje težine. "Čak i pešak koji ide ulicom Lenjingrada sa zapada na istok brzinom od 5 kilometara na čas lakši je približno $1,5$ grama, nego kad se kreće s istoka na zapad."

**Primer 3.** Njutnov zadatak $V$ (Kniga $I$, Predlog $X$): telo se kreć e po elipsi; treba naci zakon centripeltalne sile, usmerene ka centru elipse. Njutn na dva načina dolazi do zaključka "... sila je direktno proporcionalna rastojanju tela od centra elipse

Pokažimo to i na naš način. Jednačinu elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

napišimo u parametarskom obliku

$$x = a\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t, \tag{18}$$

gde je $\omega = \frac{2\pi}{T}$ kružna učestanost s periodom $T$. Deferencijalne jednačine kretnja su kao i (14). Jednačine (18) diferencirajmo dva puta po vremunu

$$\ddot{x} = -\omega^2 a\cos\omega t = -\omega^2 x,$$
$$\ddot{y} = -\omega^2 b\sin\omega t = -\omega^2 y.$$

Zamenom u diferencijalne jednačine kretanja (14), postaje jasno da je

$$X = -m\omega^2 x, \quad Y = -m\omega^2 y,$$

[6] J.I. Pereljman, Zanimljiva astronomija, (na ruskom) Gos. izd. fiz. mat. lit., Moskva 1958

pa sledi da je veličina tražene sile direktno proporcionalna radijusu $r$, tj.

$$F = -\sqrt{X^2 + Y^2} = -m\omega^2 r.$$

**Pogovor 1.** Dva tri navedena prosta primera izabrani su tako, da se mogu vezati za imena osnivača teorije o kretanju tela - Mehanike Galileja, Hajgensa i Njutna; upotrebljen je račun u čiju valjanost se ne može sumnjati. Pa ipak, na visokim naučnim seminarima se povremeno kazuju tvrđenja, bez dokaza, da se na taj način ne mogu određivati sile. U cilju razuveravanja oponenata navedimo nekoliko nedvosmislenih Njutnovih zapisa:

Drugi odeljak knjige $I$ naslovljen je "O nalaženju centripetalnih sila" i sadrži jasne predloge i zadatke, kao:

"Predlog $VII$. Zadatak $II$. Telo se kreće po kružnoj liniji; treba naći zakon centripetalne sile, koja je usmerena ka bilo kojoj zadanoj tački." "Predlog $IX$. Zadatk $IV$. Telo se kreće po spirali $PQ$, koja preseca sve radijuse $SP, SQ$, i t.d. pod zadatim uglom; treba naći zakon centripetalne sile, usmerenoj ka centru spirale."

Treći odeljak te knjige pod nazivom "O kretanju tela po ekscentričnim konusnim presecima" takođe se odnosi na određivanje sila po elipsnim, hiperbolnim, parabolnim putanjama, koje su usmerene ka fokusima tih krivih.

## Problem dva tela

U klasičnoj i nebeskoj mehamici tako se naziva sistem dva tela koja se kreću jedno u odnosu na drugo. Zašto li se to naziva "problemom' tešo je pouzdano odgovoriti, ako mi to možemo rešiti lako i prosto kao u prethodnim primerima pomoću Njutnovih akxioma mehanike ili pomoču nekog od principa mehanike? Možda zbog toga što su dve Njutnove teoreme treće knige[7] o međusobnom privlačenju dva tela usvojene kao jedan opšti zakon prirode. A taj zakon se smatra najvećim zakonom nauka, najvećeg značaja kako za kretanje tela u čovekovoj okolini, tako i za nebeska tela širom kosmičkog prostranstva; njegova primena tražila je i traži dodatna objašnjenja. Za nas opstaje kao "problem" samo po tome

[7] Predlog $VII$. Teorema $VII$, Privlačenje postoji ka svim telima i proporcionbalno je masi svakog od njih. Predlog $VIII$. Teorema $VII$. Ako je supstanca dveju lopta, koje se privlače jedna prema drugoj, homogena tada je privlačenje svake lopte dugom obrnuto proporcionalno kvadratu rastojanja između njihovih centara.

što su mnogi naučili i uče da se takozvani "Njutnov zakon univerzalne gravitacije" ne može ni u čemu menjati, bez obzira što se svuda ne primenjuje i ne daje iste rezultate. Kao da nije reč o matematičkoj nauci o prirodi, za koju su bitnije nove ponovljive pojave i procene, nego verovanja u predloge ili tvrđenja pojedinih čovekovih teorija. Da bi ovaj problem učinili jasnijim zadržimo se ukratko na tom pitanju, iako je njegova istorija veoma opširna:

-prvo, pomenimo znanja o mogućem uspostavljanju obrasca sile gravitacije

$$F = f\frac{Mm}{\rho^2}; \tag{19}$$

-potom ćemo rešiti zadatak o uzajamnom kretanju dva tela, kao u navedenim primerima, i

-najzad ćemo dokazati pri kojim uslovima je obrazac (19) saglasan sa osnovama klasične mehanike.

Sudeći po Hajgensovoj (1629-1695) knjizi *"Horologium oscilatorium"*, objavljenoj 1679 godine, tada se znalo da je radijalno ubrzanje kod kružnog kretanja jednako količniku $\frac{v^2}{\rho}$ kao i u primeru (17), u kojem je $\rho = R$. To je u punoj saglasnosti s pomenutom $IV$ Njutnovom teoremom prve knige i ovdašnjim obrascem (16), tj.

$$F = -m\frac{v^2}{\rho}. \tag{20}$$

Njutnu su bili poznati Keplerovi zakoni, objavljeni 1609. i 1618. godine, koji se odnose na kretanja planeta Sunčevog sistema. Kako se sva tri zakona opisuju rečima u osnovnoškolskim udžbenicima fizike i u raznim enciklopedijama napišimo ih ovde matematičkim relacijama, koje ćemo koristiti u daljim dokazima.

$$\rho(t) = \frac{p}{1 + e\cos\theta(t)}, \quad p = \frac{b^2}{a}; \quad a, b = const. \quad e < 1; \tag{I}$$

$$\rho^2\dot{\theta} = C, \quad C = \frac{2\pi ab}{T} = const. \tag{II}$$

$$a^3 = kT^2, k = const. \tag{III}$$

Treba napomenuti da je vdeličina $a$ srednje rastojanje planete od Sunca. Srednja brzina po kružnoj, prema tome je $v = \frac{2a\pi}{T}$. Pomnožili se sada brojilac i imenilac ovog razlomka istim brojem $r = a$, u suštini se ništa ne menja, ali se menja izgled obrasca (20),

$$F = -m\frac{v^2}{\rho} = -m\frac{4\pi^2 a^2}{T^2}\frac{1}{r} = -m\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\frac{1}{r^2} = -\mu m r^2, \tag{21}$$

gde je količnik

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \tag{22}$$

konstantna veličina u smislu trećeg Keplerovog zakona. Prema tome, dok ne bude oslobođen tog uslova usrednjenja za planete, ne važi za druga tela. Formula (21) ne menja svoju suštinu ako se pomnoži i podeli istim brojem veličine mase Sunca $M$, tj

$$F = -m\frac{4\pi^2 a^3}{MT^2}\frac{Mm}{r^2} = -f\frac{Mm}{r^2}, \tag{23}$$

gde je sada veličina

$$f = \frac{4\pi^2 a^3}{MT^2} \tag{24}$$

proglašena jednom "univerzalnom konstantnom", bez obzira što je opšte poznato da masa Sunca nije konstanta, kao i to da je treći Keplerovov zakon formulisan samo za planete Sunčevog sistema. Više od toga ova formula je izvedena, kao što se vidi, na osnovu relacija o kretanju jednog tela u kojim ne učestvuje masa Sunca, a naš zadatak je ovde da proučimo kretanje dva tela. Suština formalnog obrasca (23) je prethodna formula (21), koja je izvedena za usrednjeno kružno kretanje jednog tela. Istaknimo ponovo da je masa Sunca u nju formalno upisana, što je po istoj formalnoj logici mogla da bude i neka druga masa bilo kojeg tela.

Za razliku od klasičnog pristupa problemu dva tela, u kojem se polazi od formule sile (23), mi ćemo poći od od Nutnovih aksioma ili zakona, s ciljem da prvo proverimo i na taj način obrazac za silu (20). Prirodno je da se pri tom držimo pretpostavki koje su prethodile formuli (23), tj. o ravnomernom kretanju tela mase $m$ po kružnoj liniji u odnosu na telo mase $M$, čije je središte u centru kruga, a kreće se hipotetično pravolinijski i ravnomerno. Posmatrano u odnosu na Dekartove ortogonalne koordinate $x, y$ taj zamišljeni program kretanja dva tela je sledeći: Postoje dva tela masa $m_1$ i $m_2$, čije položaje opisuju koordinate položaja $x_1, y_1 = 0$; $x_2, y_2$. Rastojanje između tela je

$$(x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = r^2 = const., \tag{25}$$

a brzine su

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_{01} = const.,$$
$$(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \dot{y}_2^2 = v^2 = const. \tag{26}$$

Saglasno drugom i trećem zakonu dinamike imamo jednačine:

$$m_1\ddot{x}_1 = X_1, \quad m_1\ddot{y}_1 = Y_1,$$
$$m_2\ddot{x}_2 = X_2, \quad m_2\ddot{y}_2 = Y_2;$$
$$X_1 = -X_2, \quad Y_1 = -Y_2. \tag{27}$$

Postupajući kao u drugom primeru, diferencirajmo do drugih izvoda relacije (25) i (26), tj:

$$\ddot{x}_1 = 0 \quad \ddot{y}_1 = 0,$$
$$(x_2 - x_1)\ddot{x}_2 + y_2\ddot{y}_2 = -(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \dot{y}_2^2 = -v^2,$$
$$(\dot{x} - \dot{x}_1)\ddot{x}_2 + \dot{y}_2\ddot{y}_2 = 0.$$

Zamenom drugih izvoda $\ddot{x}$ i $\ddot{y}$ iz diferencijalnih jednačina kretanja (27) u prethodne uslove ubrzanja dobija se:

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \tag{28}$$

i jednačine, slične jednačinama (15), tj.

$$(x_2 - x_1)X_2 + y_2Y_2 = -mv^2,$$
$$(\dot{x} - \dot{x}_1)X_2 + \dot{y}_2Y_2 = 0.$$

Na osnovu ovih jednačina, kao i u postupku (15) - (16) određuju se koordinate $X_2, Y_2$ sile, a zatim i veličina sile $F_2$ u obliku (16), t.j. $F = \pm m\frac{v^2}{r} = \pm mr\dot{\theta}^2$. Međutim ovo rešenje, kao što se vidi iz (9) i (10), nije u saglasnosti s trećim Njutnovim zakonom ili axsiomom. Kako? Gde li je greška? Ako nije u računu, što je lako proveriti, nije li u rasuđivanju? Izvršimo proveru. S obzirom da smo dobili isti rezultat za kretanje dva tela, od kojih se jedno kreće ravnomerno i pravolinijski, kao i za kretanje jednog tela u odnosu na neki hipotetički centar ili pol koordinatnog sistema koji miruje, logično je da posvetimo pažnu upravo tom pitanju. Znači ako centar, bilo da je to neko telo ili zamišljena tačka koji miruju ili se ravnomerno i pravolinijski kreću, u formuli za centripetalnu silu neće figurisati masa tog centra. To dalje znači da u formulu (23) ne treba uvoditi formalno masu M, na skriven način pomoću formule (24). Tu se nalazi potpiniji i tačniji odgovor za navodni paradoks. Treći Njutnov aksiom, pored ostalog tvrdi da dva tela dejstvuju jedno na drugo jednakim i suprotnim dejstvima, a dejstvo sile inercije tela koje miruje ili jednoliko kreće je jednako nuli. Naša probna pretpostavka da se jedno telo kreće ravnomerno i pravolinijski, sama po sebi nema uporišta u trećem Njutnovom zakonu, pa prema tome ni u njegovoj mehanici. Iz toga ponovo sledi da u formuli (24), u kojoj je formalno uvrštena masa Sunca $M$, nije prirodna konstanta, nego kao takva zavisi od zadatka opisa kretanja dva tela, pa se i na taj način proizvodi problem, koji faktički ne postoji u zadatku o kretanju dva tela. Dakle, izostavimo neodrživu hipotezu u problemu dva tela u kojem se jedno može kretati ravnomerno i pravolinijski. Ostanimo na zadatku: postoje dva tela masa $m_1$ i $m_2$ koja se kreću jedno u odnosu na drugo na nekom promeljivom rastojanju

$$\rho(t) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{29}$$

Potražimo veličinu sile kojom tela deluju jedno na drugo duž rastojanja $\rho$ bez ikakvih pretpostavki. Nazovimo to *Sila uzajamnog dejstva dva tela duž pravca njihovih rastojanja.* Saglasno drugoj Njutnovoj aksiomi osnovne jednačine kretanja posmatranih dva tela su:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= X_1, \quad m_1\ddot{y}_1 = Y_1, \quad m_1\ddot{z}_1 = Z_1; \\ m_2\ddot{x}_2 &= X_2, \quad m_2\ddot{y}_2 = Y_2, \quad m_2\ddot{z}_2 = Z_2. \end{aligned} \tag{30}$$

Određivanje drugog izvoda po vremenu relacije (29), tj.

$$(x_2 - x_1)(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) + (z_2 - z_1)(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) = \dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - v_{or}^2, \tag{31}$$

gde je

$$v_{or}^2 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2,$$

ni u čemu ne menja suštinu našeg zadatka, ali otkriva koje uslove moraju zadovoljavati odgovarajući drugi izvodi iz diferencijalnih jednačina kretanja (30). Zamenom drugih izvoda $\ddot{x}_1, \ldots, \ddot{z}_2$ iz jednačina (31) u jednačinu (12), dobija se

$$(x_2 - x_1)\Big(\frac{X_2}{m_2} - \frac{X_1}{m_1}\Big) + \cdots (z_2 - z_1)\Big(\frac{Z_2}{m_2} - \frac{Z_1}{m_1}\Big) = \dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - v_{or}^2. \tag{32}$$

Po trećem Njutnovom zakonu je $X_1 = -X_2, \quad Y_1 = -Y_2, \quad Z_1 = -Z_2$. S druge strane može da se uvede smena

$$x_2 - x_1 = \rho\cos\alpha, \quad y_2 - y_1 = \rho\cos\beta, \quad z_2 - z_1 = \rho\cos\gamma.$$

Tada i silu $F_2$, usmerenu prema drugom telu, možemo opisati kao:

$$X_2 = F_2\cos\alpha, \quad Y_2 = F_2 cos\beta, \quad Z_2 = F_2\cos\beta.$$

Zamenom ovih relacija u jednacini (32), posle kraćeg računa, dobija se

$$\rho F_2 = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - v_{0r}^2}{m_1 + m_2} m_1 m_2,$$

tj.

$$F_2 = -F_1 = \chi\frac{m_1 m_2}{\rho}, \tag{33}$$

gde je

$$\chi = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - v_{or}^2}{m_1 + m_2}. \tag{34}$$

Eto, na taj i druge načine pokazujemo da obrazac (33) pretstavlja veličinu sile uzajamnog privlačenja dva tela. Očigledno je da se ovaj obrazac (33) znatno razlikuje od klasičnog obrasca (19), kao sto se i faktor proporcionalnosi (34) znatno razlikuje od koeficijenta proporcionalnosti (24). To ne treba da izaziva čuđenja, jer obrazac (34) je izveden bez ikakvih uslova, a obrazac (24) uz više uslova, uključujući nerealne hipoteze, i previđa značaj aksioma dinamike. Za razne uslove kretanja prirodno je da i obrazac (33) može dobiti drugu matematičku formu; navešćemo nekoliko uverljivih primera.

**Primer 4.** Vertikalni pad tela na Zemlju. To je već razmatrani primer **1.** s tim što se ovde uzima u obzir i kretanje centra inercije planete Zemlje. Kao u uslovu (2), eksperimentalno je utvrđena formula

$$\rho = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Pomoću obrasca sile (33), odredimo silu kojom Zemlja Mase $M_Z$ privlači telo mase m. S obzirom da je reč o kretanju duž rastojanja $\rho$ brzinom $v = \dot{\rho}$ obrazac (33) se svodi na

$$F = -\frac{Mm}{M+m}g = -mg\frac{1}{1+\epsilon},$$

gde je $\epsilon = \frac{m}{M}$ reda veličine $10^{-24}$, tj. zanemarljiva mala velicina za određivanje sile Zemljine teže; ali postoji.

**Primer 5**. Telo iz primera **4** kreće se po zakonu

$$\rho = ct^{2/3}.$$

U tom slučaju, koji podseća na treci Keplerov zakon, sila (33) je

$$F = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\rho} = -\mathcal{M}\frac{1}{9}ct^{-4/3} = -\mathcal{M}\frac{1}{9}c^3\rho^{-2},$$

gde je slovom $\mathcal{M}$ označena takozvana redukovana masa dva tela

$$\mathcal{M} := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

**Primer 6**. Dva tela masa $m_1$ i $m_2$ povezana su oprugom na rastojanju $\rho$ koje se menja u toku vremena po zakonu

$$\rho = \rho_0 + c\cos\omega t.$$

duž neke prave linije. Pomoću obrasca (33) odredimo silu koja uslovljava navedeno kretanje. U ovom primeru je $v = \dot{\rho}$, a ubrzanje

$$\ddot{\rho} = -\omega^2 c\cos\omega t = -\omega^2(\rho - \rho_0).$$

Prema tome, tražena sila opruge jednaka je

$$F = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\omega^2(\rho - \rho_0).$$

**Primer 7**. Kojom silom planeta mase $M_p$ dejstvuje na njen satelit mase $m$, koji se kreće ravnomerno po kružnoj putanji na rastojanju $\rho = r = const.$.

Saglasno obrascu (33), sledi

$$F = -\frac{M_p m}{M_p + m}\frac{v^2}{r} = -\frac{M_p m}{M_p + m}\frac{(2\pi r)^2 T^{-2}}{r} = -\frac{M_p m}{M_p + m}\frac{4\pi^2}{T^2}r.$$

Pokušajmo još da obrazac (34) svedemo na formulu (19) ili, tačnije rečeno, da Njutnovu formulu (19) izvedemo iz našeg obrasca (33).

## Njutnov zakon gravitacije

Pod naslovnim nazivom ili pod nazivom *Njutnova sila univerzalne gravitacije* prihvaćena je formula (19) u svetskoj literaturi. Nesprorno je da je Njutn izveo formulu (19) na osnovu Keplerovih zakona o kretanju glavnih planeta oko Sunca. Zato ćemo i mi usvojiti te zakone, kao pojavne, ili kao program kretanja planete mase $m$ i Sunca čija je masa $M_\odot$. Zapazimo odmah da su Keplerovi zakoni prestavljeni u ravni u odnosu na polarni koordinatni sistem $\rho, \theta$. U odnosu na taj koordinatni sistem brzina $v_{or}^2$ iz formule (33) svodi se na

$$v_{or}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2, \tag{35}$$

Zamenom u izraz (34), a zatim u (33), dobija se prostiji oblik formule sile uzajamnog dejstva dva tela

$$F = -\frac{M_\odot m}{M_\odot + m}(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2). \tag{36}$$

Iz drugog Keplewrovog zakona $(II)$, neposredno sledi da je

$$\dot{\theta} = \frac{C}{\rho^2}. \tag{37}$$

Imajući to u vidu drugi izvod $\ddot{\rho}$ po vremenu svodi se na

$$\ddot{\rho} = C^2\frac{e\cos\theta}{p} = C^2\frac{p-\rho}{p\rho^3} \tag{38}$$

Zamenom $\dot{\theta}$ i $\ddot{\rho}$ iz izraza (37) i (38) u obrazac (36), dobija se:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{M_\odot m}{M_\odot + m}\Big(C^2\frac{p-\rho}{p\rho^3} - \rho\frac{C^2}{\rho^4}\Big) \\ &= -\frac{M_\odot m}{M_{odot} + m}C^2\Big(\frac{p-\rho}{p\rho^3} - \frac{1}{\rho^3}\Big) = -\frac{M_\odot m}{M_\odot + m}C^2\frac{1}{p\rho^2}. \end{aligned} \tag{39}$$

Kako je po drugom Keplerovom zakonu

$$C = \frac{2\pi ab}{T},$$

a parametar elipse

$$p = \frac{b^2}{a},$$

to se relacija (39) konačno svodi na

$$F = -\kappa \frac{M_\odot m}{\rho^2}, \tag{40}$$

gde je

$$\kappa = \frac{4\pi^2 a^3}{(M_\odot + m)T^2}. \tag{41}$$

**Pogovor 2.** Obrazac sile uzajamnog privlačenja planeta i Sunca (40) odgovara po izgledu obrascu Njutnovog zakona gravitacije (19). Međutim obrasci (24) i (40) se razlikuju za masu planete. To ima dalekosežnije posledice za zaključivanje o valjanosti koeficijenta proporcionalnosti $\kappa$. Obrazac (24) je karakterističan za Sunce, s obzirom da u njemu figuriše samo masa Sunca. Obrazac (41) karakterističan je u tom smislu za Sunce i određenu planetu, pa se zato i koristi za Sunčev planetarni sistem. Neki naši istaknuti fizičari ne priznaju nikakav obrazac, ni (24) ni (41) za veličinu $\kappa$, nego je smatraju da je to univerzalna konstanta prirode i isnosi $\kappa = 6,672 \cdot 10^{-11} kg^{-1} m^3 s^{-2}$, tj. upečatljivije $\kappa = 0,0000000000672 \frac{metara^3}{kilograma \cdot sekundi^2}$. Tako je veličina $\kappa$ prihvaćena od fizičara kao neki dar prirode, koji važi za ceo kosmos. Neki astronomi[8] taj isti obrazac (41) nazivaju "gravitacionom konstantom", ali usvajaju njenu naznačenu brojnu vrednost. Prema novijim astronomskim podacima[9], kao što se vidi, sledi (tabela 2) i računu po formulama (34) i (41) za glavne planete i Mesec dobijaju se brojne vrednosti funkcija $\chi$ i $\kappa$ date u tabeli 3.

Pri upoređivanju vrednosti za $\chi$ i $\kappa$ treba imati na umu stepene njihovih vreličina, za $\chi$ $10^{-22}$ a za $\kappa$ $10^{-11}$, kao i stepen dimenzije rastojanja.

[8] vidi, na primer: Brkić - Ševarlić, "Opšta astronomija", univerzitetski udžbenik, drugo ispravljeno i dopunjeno izdanje, "Naučna knjiga", Beograd, 1981., str. 536, izraz 544.

[9] Alan D Fiala, General astrophysikal quantities, Artur Cox editor, American Institute of Physics Press, Springer-Verlag, 2000,p. 12; and Kennerh R. Lang, Astrophysical Data: Planets and Stars, Springer-Verlag, 1991.

| telo | masa $10^{24}$kg | brzina $10^3$m/s | poluosa $a$ $10^9$m | ekscentricitet $e$ |
|---|---|---|---|---|
| Merkur | 0.33022 | 47.89 | 57.9 | 0.2056 |
| Venera | 4.8690 | 35.01 | 108.2 | 0.0068 |
| Zemlja | 5.974 | 29.79 | 149.6 | 0.0167 |
| Mars | 0.6419 | 24.13 | 227.9 | 0.0933 |
| Jupiter | 1898.8 | 13.06 | 778.3 | 0.048 |
| Saturn | 568.50 | 9.64 | 1427.0 | 0.056 |
| Uran | 86.625 | 6.81 | 2869.6 | 0.046 |
| Neptun | 102.78 | 5.43 | 4496.6 | 0.010 |
| Mesec | 0.07348 | 1.02 | 384.4 | 0.0549 |

Tabela 2

| | $\chi$ $[10^{-22}\text{kg}^{-1}\text{m}^2\text{s}^{-2}]$ | $G$ $[10^{-11}\text{kg}^{-1}\text{m}^3\text{s}^{-2}$ |
|---|---|---|
| Merkur | 11.530009763 | 6.675926528 |
| Venera | 6.162068773 | 6.667358417 |
| Zemlja | 4.461522471 | 6.6744376 |
| Mars | 2.927237003 | 6.6771173131 |
| Jupiter | 0.856673545 | 6.6674902 |
| Saturn | 0.467060718 | 6.6649564 |
| Uran | 0.233141020 | 6.6909141 |
| Neptun | 0.148224707 | 6.6650721 |
| Srednje | 3.348253233 | 6.672425 |

Tabela 3

Navedeni tablični rezultati dovoljno jasno pokazuju koliko je koeficijent $\kappa$ konstantan, da bi mogao biti *koeficijent proporcionalnosti* između sile i drugih atributa kretanja. Može se prihvatiti konstantom za svaku planetu ponaosob, ali za sve planete samo kao srednja vrednost navedenih konstanata glavnih planeta. Umesto tog komentara, koji se može izvesti na osnovu prvog pogleda na tablicu, skrenimo pažnju na značajnije poimanje "koeficijenta proporcionalnosti". Potsetimo se da se u matematici, pa prema tome, i u matematičkim naukama koeficijentom proporcionalnosti naziva jedan te isti imenovani broj, koji pokazuje da odnos jednih veličcina prema drugim ostaje jedan te ist, ili koji pokazuje koliko jedninica jednih velicina odnosi se na drugu. Po svom nazivu "univerzalna konstanta gravitacije", u svojstvu koeficijenta proporcionalnosti, trebalo bi da pokazuje da je odnos sile gravitacije i količnika proizvoda masa dva tela i kvadrata njihovog rastojanja od centara masa jedan te isti za svaka dva tela. Velicina $\chi$ izražava odnos sile gravitacije i količnika proizvoda masa i pomenutih rastojanja. Dakle odnos drugačijih dimenzija, nego što je to u veličini $\kappa$. Koeficijent $\chi$ ima drugačije fizičke dimenzije od koeficijenta $\kappa$. Za učenike starijih razreda srednje škole, a pogotovo za studente, je poznato da se radijalno ubrzanje neke materijalne tačke u polarnom ravanskom koordinatnom sistemu piše u obliku

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2. \tag{42}$$

Prema tome formula radijalne sile (36) uzajamnog dejstva dva tela može se napisati kao proizvod redukovane mase $\mathcal{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ i radijalnog ubrzanja $a_\rho$, tj.

$$F = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a_\rho = \mathcal{M} a_\rho. \tag{43}$$

Ovde, kao što se vidi, nema koeficijenta $\kappa$ niti $\chi$ nego, umesto njih, figuriše redukovana masa $\mathcal{M}$. Za čitaoce koji više vole, ili koji bolje poznaju vektorski račun, analogno prethodnoj formuli (42) može se dokazati opštoje tvrđenje da je sila uzajamnog dejstva dva tela proporcionalna drugom izvodu vektora rastojanja

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \tag{44}$$

koji se proteže od centra inercije jednog tela po pravcu rastojanja ka centru inercije drugog tela. Zaista, rastojanje $\rho$ posmatyranih materijalnih tačaka može se prestaviti kao

$$\rho = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$$

a vektorske diferencijalne jednačine kretanja su

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_1, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_2. \end{aligned} \tag{45}$$

Drugi izvod po vremenu relacije (44) je

$$\ddot{\rho} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1. \tag{46}$$

Zamenom drugih iszvoda vektora položaja $\ddot{\mathbf{r}}_1$ i $\ddot{\mathbf{r}}_2$ po vremenu iz diferencijalnih jednačina kretanja (45) u jednačinu (46) dobija se:

$$\ddot{\rho} = \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}. \tag{47}$$

Kako iz treće Njutnove aksiome proizilazi da je $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, prethodna relacija se svodi na

$$\ddot{\rho} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\mathbf{F}_2,$$

odnosno

$$\mathbf{F}_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\rho} = \mathcal{M}\ddot{\rho} = -\mathbf{F}_1, \tag{48}$$

što smo i hteli pokazati. Ova formula je kud i kamo opštija od formule (36), te i od (19), jer ubrzanje $\ddot{\rho}$ u odnosnom ravanskom polarnom sistemu koordinata je

$$\ddot{\rho} = \frac{d}{dt}\dot{\rho} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\rho_0 + \rho\dot{\rho}_0) = \cdots = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\mathbf{g}_\rho + (\ddot{\theta} + \frac{2}{\rho}\dot{\rho}\dot{\theta})\mathbf{g}_\theta,$$

gde su $\mathbf{g}_\rho, \mathbf{g}_\theta$ kordinatni vektori. To pokazuje da vektor ubrzanja ima, pored komponente radijalnog ubrzanja (42), još jednu komponentu.

### Sile upravljanja kretanjem

Već je pokazano na nekoliko primera kako se može odrediti sila ako su poznati dovoljni atributi kretanja - konačne jednačine programiranog kretanja, jednačine putanja, zakon brzina, pridodne sile koje dejstvuju nezavisno od volje programera. Drugim rečima, vec smo pokazali kako se mogu lako određivati sile za realizaciju programiranog kretanja. A te sile su upravo sile upravljanja; s takvim silama programiranog kretanja se i upravlja kretanjem, pa ih zato nazivamo *sile upravljanja.* Da bi ih lakše razlikovali od prirodnih sila $\mathbf{F}$, označavaćemo ih slovom $\mathbf{U}$, a njihove koordinate slovom $U$ s indeksima, na primer: $U_x, U_y, U_z$ ili $U_1, U_2, U_3$. Za razliku od njih, prirodne ili poznate sile označavaćemo slovom $\mathbf{F}$, a njihove koordinate, dok ne bude drukčije rečeno, velikim slovima $X, Y, Z$.

Upravljanje kretanjem jedne materijalne tačke mase $m$, na koju dejstvuje rezultujuća prirodna sila $\mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k$, po programu:

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= 0, \\ f_2(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z}) &= 0, \\ f_3(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) &= 0, \end{aligned} \tag{49}$$

ostvaruje se pomoću odgovarajuće sile upravljanja, koju treba prethodno odrediti. Za rešavanje tog zadatka ispisaćemo osnovne diferencijalne jednačine kretanja

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + U_x, \\ m\ddot{y} &= Y + U_y, \\ m\ddot{z} &= Z + U_z. \end{aligned} \tag{50}$$

Ove tri diferencijalne jednačine drugog reda sadrže, kao što se vidi, tri nepoznate sile upravljanja; program kretanja uslovljen je pomoću tri nezavisne jednačine (49). Da bismo mogli rešavati ova dva sistenma jednačina (49) i (50) treba diferencirati jednačine (49) do drugog izvoda po nezavisno promenljivoj $t$. To nas dovodi do sledećih diferencijalnih jednačina:

$$\dot{f}_1 = \frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\dot{z} = 0,$$

a u drugom koraku

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x \partial x}\dot{x}\dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y \partial x}\dot{x}\dot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial z \partial x}\dot{x}\dot{z} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\ddot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\ddot{z} = 0; \\ \dot{f}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}}\ddot{x} + \frac{\partial f_2}{\partial \dot{y}}\ddot{y} + \frac{\partial f_2}{\partial \dot{z}}\ddot{z} = 0, \\ \dot{f}_3 &= \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}}\ddot{x} + \frac{\partial f_3}{\partial \dot{y}}\ddot{y} + \frac{\partial f_3}{\partial \dot{z}}\ddot{z} = 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Zmenom drugih izvoda

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(X + U_x), \quad \ddot{y} = \frac{1}{m}(Y + U_y), \quad \ddot{z} = \frac{1}{m}(Z + U_z)$$

iz jednačina (50) u jednačinama (51) dobija se:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{1}{m}(X+U_x)+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{1}{m}(Y+U_y)+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{1}{m}(Z+U_z)\\
&\qquad=-m\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x\partial x}\dot{x}\dot{x}+\frac{\partial f_1}{\partial y\partial x}\dot{x}\dot{y}+\frac{\partial f_1}{\partial z\partial x}\dot{x}\dot{z}\Big),\\
&\frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}}(X+U_x)+\frac{\partial f_2}{\partial \dot{y}}(Y+U_y)+\frac{\partial f_2}{\partial \dot{z}}(Z+U_z)\\
&\qquad=-m\Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f_2}{\partial z}dotz\Big),\\
&\frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}}(X+U_x)+\frac{\partial f_3}{\partial \dot{y}}(Y+U_y)+\frac{\partial f_3}{\partial \dot{z}}(Z+U_z)=o. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Sada je vidljivo da imamo sistem od tri linearne nehomogene jednačine po silama uptavljanja $U_1, U_2, U_3$, tj.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{1}{m}(X+U_x)+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{1}{m}(Y+U_y)+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{1}{m}(Z+U_z)&=\phi_1,\\
\frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}}(X+U_x)+\frac{\partial f_2}{\partial \dot{y}}(Y+U_y)+\frac{\partial f_2}{\partial \dot{z}}(Z+U_z)&=-m\phi_2,\\
\frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}}(X+U_x)+\frac{\partial f_3}{\partial \dot{y}}(Y+U_y)+\frac{\partial f_3}{\partial \dot{z}}(Z+U_z)&=0. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

gde su:

$$
\begin{aligned}
\phi_1&=m\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x\partial x}\dot{x}\dot{x}+\frac{\partial f_1}{\partial y\partial x}\dot{x}\dot{y}+\frac{\partial f_1}{\partial z\partial x}\dot{x}\dot{z}\Big),\\
\phi_2&=\frac{\partial f_2}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\dot{z}.
\end{aligned}
$$

Prema tome, za uslov da je determinanta sistema $\Delta$ nejednaka nuli, mogu se lako odrediti $U_i$ u zavisnosti od koordinata $x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ i koordinata sila $X, Y, Z$ u obliku

$$
\begin{aligned}
U_x&=-X+\frac{\Delta_x\cdots}{\Delta},\\
U_y&=-Y+\frac{\Delta_y\cdots}{\Delta},\\
U_z&=-Z+\frac{\Delta_z\cdots}{\Delta}.
\end{aligned}
$$

Umesto daljeg razvijanja navedenih funkcija, navedimo jedan poučan primer.

**Primer 8**. Susret dva tela u ravni. Teško telo mase $m_1$ bačeno je početnom horizontalnom brzinom $\dot{x}_{01}$ s visine $y_0 = h > 0$. Istog trenutka s mesta $y = 0$ horizontalnom brzinom $\dot{x}_{02}$ kreće telo mase $m_2$. Kojom silom $\mathbf{U} = U_1\mathbf{e}_1 + U_2\mathbf{e}_2$ treba dejtvovati na telo mase $m_2$ da bi se sudarilo s padajucím telom mase $m_1$?.

Rešavanje zadatka. Prirodna putanja padajućeg tela u blizini površine Zemlje je parabola

$$y = -\frac{g}{2\dot{x}_{01}^2}x^2 + h.$$

Programirana putanja tela mase $m_2$ neka bude

$$y_2 = \frac{g}{2\dot{x}_{02}^2}x^2. \tag{54}$$

Programirana horizontalna brzina je

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_{02}. \tag{55}$$

Dakle, program kretanja tela mase $m_2$ čine jednačine (54) i (55). Diferencijalne jednačine programiranog kretanja su

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2 &= U_x, \\ m_2\ddot{y}_2 &= -m_2 g + U_y. \end{aligned} \tag{56}$$

Deferenciranjem programiranih jednačina (54) i (55) do drugih izvoda dobija se

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 &= \frac{g}{\dot{x}_{02}^2}\dot{x}_2^2, \\ \ddot{x}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Upoređenjem ovih jednačina s jednačinama (56) dobija se tražena sila $\mathbf{U}$, čije su kordinate $U_x = 0, \quad U_y = 2m_2 g$. Tačka susreta je

$$x = \left(\frac{2h}{g}\frac{\dot{x}_{01}^2\dot{x}_{02}^2}{\dot{x}_{01}^2 + \dot{x}_{02}^2}\right)^{1/2}, \quad y = \frac{h\dot{x}_{01}^2}{\dot{x}_{01}^2 + \dot{x}_{02}^2}.$$

Za slučaj da je $\dot{x}_{01} = \dot{x}_{02}$, tačka preseka putanja je

$$x = \frac{h\dot{x}_{02}^2}{g}, \quad y = \frac{h}{2}.$$

Prema tome, telo mase $m_2$, pokrenuto početnom brzinom $\dot{x}_{02}$ može susresti padajuće telo mase $m_1$ ako na njega bude dejstovala sila veličine $U_y = 2m_2 g$.

### Programirano kretanje sistema tela

Ovde ćemo , kao i ranije, posmatrati tela kao materijalne ili masene tačke masa $m_1, m_2, \ldots, m_N$ ili, kraće napisano $m_\nu$, $\nu = 1, \ldots, N$. U smislu te oznake diferencijalne jednačine kretanja mogu se opisati slično sistemu jednačina (50), tj.

$$
\begin{aligned}
m_\nu \ddot{x}_\nu &= X_\nu + U_{x\nu}, \\
m_\nu \ddot{y}_\nu &= Y_\nu + U_{y\nu}, \\
m_\nu \ddot{z}_\nu &= Z_\nu + U_{z\nu}.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Po izgledu razlika je samo u indeksu $\nu$, koji pokazuje da postoji $N$ tela u kretanju, pa prema tome i $3N$ diferencijalnih jednačina drugog reda. Program može biti opisan sistemima jednačina:

$$
\begin{aligned}
f_\mu(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0, &\quad \mu = 1, \ldots, k; \\
\Psi_i(x_\nu, y_\nu, z_\nu; \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) = 0, &\quad i = 1, \ldots, k_1; \\
\Phi_j(\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) = 0, &\quad j + 1 \ldots, k_2;
\end{aligned}
$$

ili još

$$\Psi_\eta(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu; U_{x\nu}, U_{y\nu}, U_{z\nu}) = 0. \quad \eta = 1, \ldots k_3.$$

Da bi se moglo upravljati kretanjem mehaničkog sistema silama upravljanja $\mathbf{U}_\nu$ program treba da sadrži potpun sistem od $3N = k + k_1 + k_2 + k_2 + k_3$ nezavisnih jednačina. Dalje rešavanje i određivanje opšteg rešenja sila upravljanja $U_{x\nu}, U_{y\nu}, U_{z\nu}$ prevazilazi namenu ove knjižice. Radoznali čitalac može čitati na višem matematičkom nivou o toj problematici u autorovoj knizi "Preprincipi mehanike"[10].

**Napomena umesto pogovora**. U stručnoj literaturi mehanike često se koriste takozvane *generalisane sile* kao funkcije generalisanih koordinata, generalisanih brzina ili generalisanih impulsa. Njih prate *Lagranžove jednačine kretanja druge vrste*, kojih može biti znatno manji broj od $3N$ jednačina (57). Taj metod Lagranžovih i Hamiltyonovih

---

[10] V.Vujičić, Preprincipi mehanike, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1998.

diferencijalnih jednačina s generalisanim silama, čak se smatra znanjem višeg nivoa i modernijeg doba. Ne treba zaboraviti da metod generalisanih sila ne obuhvata sve faktičke sile kojim je neophodno da se upravlja, što može navesti na pogrešno zaključivanje. Kako i u tome postoji nesaglasje na visoko stručnom niviu, pojasnimo prethodno tvrđenje rešenjima zadatka da odredimo silu upravljanja, kojom treba dejstvovati na teško telo da pada po vertikalnoj kružnoj spirali; učinimo to na dva načina: 1. Kao što je to ovde već pokazano, kako bi se matematički reklo, u trodimenzionom euklidskom prostoru $E^3$ i 2. jednodimenzionoj konfiguracionoj mnogoobraznosti. Reči "trodimenzioni" i "jednodimenzioni" same po sebi pobuđuju misao da će u trodimenzionom postupku biti više jednačina, te i više računanja, nego u jednodimenzionom. Ta misao će se pokazati tačnom, ali i to da se neće doći do istog zaključka o određivanju sile upravljanja. Pojasnimo i to tvrđenje prethodno pomoću jednog prepoznateljnog prostog primera; potom će se lako shvatiti rešavanje zadataka o kretanju po zavojnici..

**Primer 9.** Kretanje teške materijalne tačke po unutrašnjoj površi vertikalnog glatkog kružnog cilindra. Odredimo silu reakcije unutrašnje površi cilindra.

Počnimo prvo da rešavamo zadatak pomoću tri Dekartove ortogonalne koordinate $(x, y, z) \in E^3$, a zatim pomoću dve nezavisne Lagranžove generalisane koordinate $(q_1, q_2) \in M^2$.

1. Jednačina navedenog cilindra je

$$f = x^2 + y^2 - R^2 = 0, \tag{58}$$

gde je $R$ poluprečnik poprečcnog preseka kružnog cinindra. Diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke u prisustvu veze (58) i uslovu da je reč o "teškom telu" su[11]:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2\lambda x, \\ m\ddot{y} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 2\lambda y, \\ m\ddot{z} = -mg &+ \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = -mg. \end{aligned} \tag{59}$$

[11] vidi, na primer, B. Vujanović, METODI OPTIMIZACIJE, Novi Sad, 1980, str. 115 i 116.

Drugi izvod po vremenu veze $f = 0$, kao uslov ubrzanja, je

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = -v_{xy}^2, \quad v_{xy}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2. \tag{60}$$

Zamenom drugih izvoda iz jednačina (59) u ovu jednačinu dobijamo

$$2\lambda(x^2 + y^2) = -mv_{xy}^2,$$

a odatle određuje se, u smislu (58), dosad nepoznati množitelj veze

$$\lambda = -m\frac{v_{xy}^2}{2R^2}.$$

Zamenom u diferencijalnim jednačinama (59) nalazimo da su koordinate sile reakcije veze (58):

$$R_x = -m\frac{v_{xy}^2}{2R^2}x, \quad R_y = -m\frac{v_{xy}^2}{2R^2}y, \quad R_z = 0,$$

i, prema tome, veličina $R$ tražene sile reakcije $\mathbf{F}$ je

$$F = -(R_x^2 + R_y^2 + R_z)^{1/2} = -m\frac{v_{xy}^2}{R}. \tag{61}$$

2. Drugi način omogućava, kao što je rečeno, smanjivanje broja nezavisnih koordinata, te i broja diferencijalnih jednačina kretanja. Pomoću jednačine veze (58), i njenog linearnog uslova brzina, moguće je jednu koordinatu izraziti kao funkciju druge. To svodi dalje razmatranje sistema od dve, umesto tri, diferencijalne jednacine kretanja. Prvo se pristupa transformaciji jednačina veza na prostiji oblik, pomoću drugih odgovarajučih kooordinatnih sistema (neortogonalnih pravolinijskih, krivolinijskih: polarnih, cilindriskih, paraboloidnih, bipolarnih,...). U konkretnom slučaju za cilindarske veze prirodno je izabrati cilindarski sistem koordinata $\rho, \theta, \zeta$. U tom sistemu kordinata za $\rho \neq 0$ zadovoljavaju relacije $x = \cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = \zeta$, jednačina veze (58) ima prost oblik

$$\rho = R = const.,$$

čime je eliminisana jedna kordinata, a ostale su dve nezavisne $(\theta, \zeta) \in M^2$. Kako u bilo kojem kordinatnom sistemu mogu biti izabrane dve nezavisne kordinate, uobičajeno je da se se one obeležavaju slovima

$q^1, q^2$; u ovom slučaju to su: $q^1 = \theta, q^2 = \zeta$. Pri tom se ne zaboravljaju razne dimenzije generalisanih koordinata. U ovom slučaju to su: $\dim q^1 = \emptyset$, $\dim \zeta = L$. Nezavisnim koordinatama položaja na mnogoobaznosi $M^2$ odgovaraju dve kovarjantne kordinate sila $Q_1 := Q_\theta, Q_2 := Q_\zeta$, koje obično nazivamo *generalisanim silama*. Ove sile ne obuhvataju sve sile koje dejstvuju na objekt kretanja. U konkretnom slučaju razmatranoga primera, u kojem je $X = R_x, Y = R_y$ generalisane sile su:

$$Q_\theta = X\frac{\partial x}{\partial \theta} + Y\frac{\partial y}{\partial \theta} = -m\frac{v_{xy}^2}{-R^2}(-R^2\cos\theta\sin\theta + R^2\sin\theta\cos\theta) = 0,$$
$$Q_\zeta = Y_z\frac{\partial z}{\partial \zeta} = -mg.$$

Dakle, u ovom metodu generalisanih Lagranževih koordinata izgubila se reakcija veze (61). U slučaju pretpostavke da jednačina (58) ne pretstavlja površ cilindra, nego da je deo programa zavojnog kretanja, to očigledno ne bi dovelo do željenog određivanja sila upravljanja kretanjem. Ne sme se izgubiti iz vida da se pomoú generalisanih sila oslobađamo od reakcija geometrijskih veza, a generalisane sile se dobijaju na osnovu sila pojavnog ili programiranog kretanja u $E^3$ ili $E^{3N}$ pomoću istih linearnih transformacija, koje koordinate vektora brzine preslikavaju iz prostora $TE^3$ na potprostor $TM^2$. To nikako ne znači da se ne mogu koristiti Lagranžove diferencijalne jednačine druge vrste, ali se ne sme izgubiti iz vida, kako su one nastale. Analogno uovom poznatom primeru određivanja reacije veze, sada će se lako razumeti slede'ci slični primer upravljanja kretanjem.

**Primer 10**. Programirano zavojno kretanje. Programirajmo ravnomerno uspinjanje teškog tela (kao materijalne tače) mase $m$ po zavojnom putu $s$, oblika[12]

$$x = r\cos\varpi s, \quad y = r\sin\varpi s, \quad z = h\varpi s, \tag{62}$$

gde su $\varpi = (r^2 + h^2)^{-1/2}, s = vt, v = canst., r = const.$, a $h = const.$ je korak zavojnice, tj. rastojanje $z_2 - z_1 = h$ pri jednom punom zavoju. Diferencijalne jednačine kretanja su kao (57), odnosno

$$m\ddot{x} = U_x,$$
$$m\ddot{y} = U_y,$$
$$m\ddot{z} = -mg + U_z. \tag{63}$$

[12]Vidi, na primer, N. Blažić i N. Bokan, UVOD U DIFERENCIJALNU GEOMETRIJU, Matematički fakultet, Beograd, 1996; str. 12.

Drugi izvodi po vremenu relacija programa su:

$$\ddot{x} = -\varpi^2 \dot{s}^2 \, cos\varpi s = -\varpi^2 v^2 x, \quad \ddot{y} = -\varpi^2 v^2 y, \quad \ddot{z} = 0.$$

Zamenom ovih koordinata ubrznja u jednačine (63) dobija se

$$U_x = -m\varpi^2 v^2 x,$$
$$U_y = -m\varpi^2 v^2 y,$$
$$U_z = mg.$$

Prema tome, veličina tražene sile upravljanja, pod čijim bi se dejstvom telo ravnomerno uspinjalo putanjom kružne zavojnice, je

$$U = m(g^2 - \varpi^4 v^4 r^2)^{1/2}.$$

Za slučaj da se traži sila upravljanja padanjem tela putanjom kružne zavojnice brzinom $\dot{z} = -gt$, $g = const.$ sila upravljanja je kao i sila (61). Zaista, jednačina kružne zavojnice može se napisati u vidu konačnih jednačina kretanja

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t, \quad z = -1/2gt^2;$$

a diferencijalne jednačine kretanja su kao jednačine (63). Drugi izvodi koordinata $x, y, z$ po vremenu su:

$$\ddot{x} = -r\omega^2 \cos t = -r\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -r\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 y, \quad \ddot{z} = -g.$$

Zamenom ovih koordinata ubrznja u jednačine (63) dobija se

$$U_x = -m\omega^2 x,$$
$$U_y = -m\omega^2 y,$$
$$U_z = 0,$$

pa sledi da je tražena veličine sile upravljanja

$$U = -m\omega^2 r = -m\frac{v_{xy}^2}{r},$$

što je identično sili (61).

Ponovimo, ne bez razloga, da bi se pri upotrebi generalisanih nezavisnih koordinata, a s njima i Lagranžovih diferencijalnih jednačina druge vrste, izgubila sila

$$U_{xy} = -\left(U_x^2 + U_y^2\right)^{1/2} = -mR\omega^2,$$

jer su generalisane sile:

$$Q_\theta = U_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + U_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = m\omega R(\cos\theta \sin\theta - sin\theta \cos\theta) = 0,$$
$$Q_\zeta = -mg$$

a bez navedene sile $U_{xy}$ ne može se ostvariti programirano kretanje po zavojnici.

To nikako ne znači da Lagranžove jednačine druge vrste nisu tačne ili da nisu upotrebljive; tačne su za razmatranja na mnogobraznostima. Veoma su pogodne za razvijanje teorije kretanja na konfiguracionim mnogobraznostima, tangentnim prostorima, podobraznostima,..., ali prethodno treba raščistiti sa značenjem u mehanici tih matematičkih pojmova. Ostaje još donekle na snazi primedba: zar realizovana kretanja na Zemlji i u Sunčevom sistemu i svakodnevna tehnička praksa ne potvrđuju veliku tačnost standardne teorije klasične i nebeske mehanike? Odgovor je prost: svakako da potvrđuju, ali na osnovu stvarnih znanja mehanike i stalnih proučavanja, a ne na osnovu sobom opsednutih poimanja teorije. Mehanika je, pre svega, nauka o kretanju realnih tela; tačna je koliko i matematika i to tako, sto se pored matematičkih dokaza, traži potvrda realnog stanja kretanja tela u prirodi i tihničkoj ljudskoj praksi. Naučne istine nisu dogme, ma od koga da su saznane. Nauka proverava i svoje i nametnute istine. Svakim otkrićem novih nepobitnih saznanja nauka menja ili dopunjuje svoje teorije. Sam Isaak Njutn je u svom *IV* pravilu umnog zaključivanja u fizici napisao: *"U eksperimentalnoj fizici predlozi (tvrđenja), izvedeni na osnovu saznanih pojava pomoću sakupljenih tačnijih informacija, ne mareći na mogućnost oponentskih predloga, treba da budu uvaženi za istinitije u tačnosti ili približno tačnim, dok se ne otkriju takve pojave, kojim se oni još više utačnjavaju ili se pak podvrgavaju razmatranju za odbacanje."*