Математички факултет
Универзитет у Београду

Елементи вероватноће у настави математике у средњој школи и израда електронског материјала

мастер рад

Ментор:
доц. др Мирослав Марић

Студент:
Драгана Бадњаревић
1008/2013

Београд,
2015.

Садржај

1 Увод

Теорија вероватноће је математичка област која има велику примену у науци. Посебно велику примену има математичка статистика која је заснована на теорији вероватноће. Вероватноћа се примењује у решавању разних проблема како у природним наукама тако и у техничким и друштвеним наукама.

У овом раду биће представљен електронски наставни материјал за средњу школу. Материјал садржи теоријски део и део у коме ће бити обрађен одређени број задатака. Оба дела ће бити пропраћена сликама и анимацијама које ће бити креиране у програмском пакету GeoGebra у циљу интерактивног представљања наставне теме.

Сврха овог рада је да укаже на могућност чешћег коришћења интерактивних материјала у редовној настави математике и да се истакне корисност повезивања образованог процеса са информационим технологијама.

Овај наставни материјал биће намењен ученицима и наставницима као додатно наставно средство које нуди визуелни приказ како теоријског дела, тако и дела у коме су приказани задаци.

Књиге [1] и [2] су коришћене као главни извор приликом формулисања основних појмова, дефиниција и теорема, а збирке [5], [6] и [7] као главни извор за навођење примера и задатака.

Прво поглавље, *Основни појмови комбинаторике*, указује на везу између теорије вероватноће и елементарне комбинаторике. Због те везе корисно је подсетити се основних појмова и формула. Поред дефиниција везаних за пермутације, варијације и комбинације са и без понављања, поменут је појам факторијела и биномног коефицијента. Како се елементарна комбинаторика у средњим школама обрађује као засебна наставна тема, дато је само неколико примера у циљу подсећања.

У другом поглављу, *Дискретан простор вероватноћа*, уводи се појам случајног догађаја и говори се о операцијама са догађајима. Свака дефиниција је пропраћена анимацијом креираном помоћу GeoGebra програма. Такође се уводи класична дефиниција вероватноће и својства вероватноће.

Треће поглавље, *Условна вероватноћа и независност*, бави се појмовима условне вероватноће и независности догађаја. До формалних дефиниција се долази анализом датих примера. Дат је доказ теореме која говори о својствима условне вероватноће. Доказана је формула тоталне вероватноће и Бајесова формула.

У четвртом поглављу, *Геометријска вероватноћа*, обрађује се појам геометријске вероватноће. Овај појам је био главни разлог за повезивање теорије вероватноће са GeoGebra анимацијама, па је због тога решење сваког примера и задатка визуелно приказано помоћу

GeoGebra анимација. У овом поглављу је такође на интерактиван начин илустрован Бертранов парадокс.

У Петом поглављу, *Случајне величине,* приказани су појмови случајна величина, расподела вероватноћа случајне величине, функција расподеле, густина расподеле, математичко очекивање и дисперзија, које представљају нумеричке особине случајних величина. Разматрањем почетних примера се долази до дефиниција.

Шесто поглавље, *Закон расподеле вероватноћа случајних величина,* посвећено је расподелама које се најчешће јављају и то су: униформна, биномна, нормална и експоненцијална расподела. Сваку од наведених расподела прате одговарајуће GeoGebra анимације на којима су приказани графици густине расподеле и функције расподеле случајне величине.

Сама веб презентација се може погледати на адреси:
http://www.alas.matf.bg.ac.rs/~ml08055/master/.

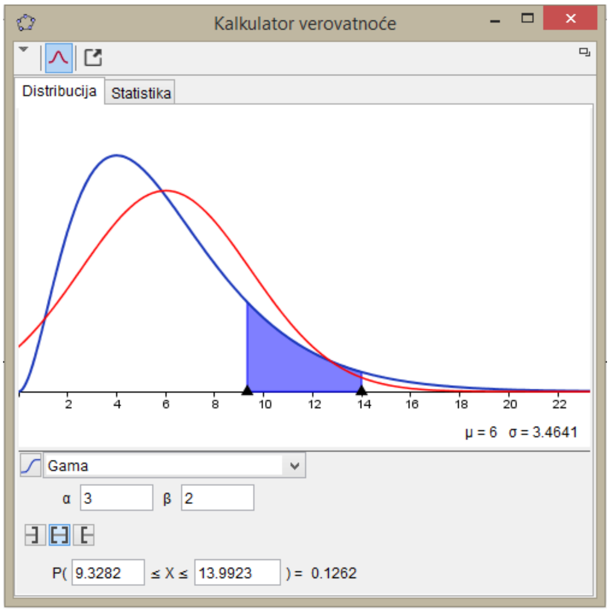
Слика 1.1. *Почетна страна веб презентације*

Као што је већ поменуто за креирање анимација, приказаних у оквиру веб презентације, коришћен је GeoGebra програмски пакет. Творац овог програма је *Маркус Хоенвартер*[1]. Програм пружа могућност креирања анимираног садржаја који на интерактиван начин уводи нове појмове. Помоћу овог програма површина за цртање је повезана са алгебарским приказом. Баш због ове чињенице GeoGebra је изузетно погодна за графички приказ густине расподеле и одговарајуће функције расподеле, јер се паралелно може пратити промена изгледа графика функција са променом одређених параметара.

[1] Markus Hohenwarter

Циљ овог рада је такође да укаже на то да се поред геометријске вероватноће и друге наставне јединице могу репрезентовати на интерактиван начин. Сврха веб презентације је да се увођењем информационих технологија у наставу математике повећа заинтересованост ученика и олакша, у одређеној мери, процес учења.

Поред поменутих могућности које нуди GeoGebra програм, такође постоји уграђени калкулатор вероватноће и статистике (Слика 1.2). Калкулатор рачуна вероватноћу да случајна величина узме вредност из једностраног десног, односно левог интервала и двостраног интервала и приказује одговарајуће графике густина расподела, у зависности од тога која је расподела изабрана (постоји велики број разних расподела).



Слика 1.2. *Калкулатор вероватноће*

1.1 Историјски развој теорије вероватноће

Не може се са сигурношћу рећи када је теорија вероватноће почела да се изучава. Главни разлог за почетак изучавања вероватноће су биле хазардне игре, тј. игре са коцкама. Жеља за лаким и брзим начином за стицање новца је натерала многе коцкаре да размишљају о томе како да повећају шансу за победу. Тако је око 1560. године италијански лекар, професор геометрије и страствени коцкар *Кардано* [2] израчунао да је вероватноћа појављивања сваке стране коцке $\frac{1}{6}$ и да ово важи само за исправну, односно „поштену"коцку. Ово откриће се брзо проширило међу математичарима. Кардано је написао књигу под називом *Књига о играма са коцком* у којој говори о резултатима до којих је дошао.

Чак је и познати *Галилео Галилеј* [3] објавио рад *Размишљања о играма са коцком* 1620. године. У раду говори о вероватноћама различитих исхода ако се игра са две коцке.

За даљи развој теорије вероватноће битна је писмена дискусија која се одиграла око 1655. године између *Блеза Паскала* [4] и *Пјера Фермаа* [5]. Дискусија се бавила законитостима вероватноће код коцке за игру и била је подстакнута писмом које је Паскалу послао његов пријатељ, коцкар *Шевалие Мере* [6]. Мере је зарадио велику своту новца кладећи се да ће код четири бацања коцке за игру, шестица пасти бар једанпут.

Холандски математичар *Кристијан Хајгенс* [7] је 1657. године издао књигу *Теорија о хазардним играма* у којој се бави теоријским заснивањем вероватноће и први пут помиње појмове као што су математичко очекивање, случајне величине и друге.

Вероватноћа постаје научна дисциплина након објављивања књиге *Вештина предвиђања* швајцарског математичара *Јакоба Бернулија.* [8] У овој књизи је по први пут представљена и доказана теорема о закону великих бројева која је данас позната као Бернулијева теорема и представља прву граничну теорему теорије вероватноће. Више о овој теореми се може наћи у књизи [1].

У осамнаестом веку *Моавр* [9] издаје више радова међу којима је и рад *Доктрина случајности. Пјер Симон Лаплас* [10] у књизи *Аналитичка теорија вероватноће* уводи дефиницију која је данас позната као класична дефиниција вероватноће или Лапласова дефиниција.

---

[2] Girolamo Cardano (1501-1576), италијански математичар, лекар, астролог и филозоф
[3] Galilep Galilei (1564-1642), италијански астроном, физичар, математичар и филозоф
[4] Blaise Pascal (1623-1662), француски математичар, физичар и филозоф
[5] Pierre de Fermat (1601-1665), француски математичар и правник
[6] Chevalier de Méré (1607-1684), француски племић и коцкар
[7] Christiaan Hauygens (1629-1695), холандски математичар, астроном и физичар
[8] Jacob Bernoulli (1654-1705), швајцарски математичар и научник
[9] Abraham de Moivre (1667-1754) је био француски математичар. Занимљиво је да је за живот зарађивао играјући шах.
[10] Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749-1827), француски математичар и астроном

Немачки математичар *Карл Гаус* [11] је познат по нормалном закону расподеле вероватноћа случајне величине. У Гаусову част овај закон носи његово име.

У двадесетом веку на даљем развоју вероватноће радио је *Андреј Колмогоров* [12] и 1933. године је издао књигу *Основе теорије вероватноће.*

Слика 1.1.1. *Кристијан Хајгенс и Карл Фридрих Гаус*

Може се рећи да је у почетку развоја вероватноће њена главна примена била у коцкарским играма, али данас је вероватноћа широко распрострањена у науци. У физици се вероватноћа примењује у квантној механици, у биологији у законима наслеђивања, на пример да се одреди вероватноћа преноса генетских обољења. Метереологија такође има велику корист од вероватноће, као и осигуравајућа друштва у оквиру процене ризика.
Више о математичарима који су допринели развоју теорије вероватноће може се видети у [4].

[11] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), немачки математичар
[12] Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987), руски математичар

2 Основни појмови комбинаторике

Проблеми комбинаторике се јављају приликом изучавања различитих математичких области попут алгебре, статистике и геометрије. Комбинаторика такође налази своју примену у другим наукама, на пример у информатици, оптимизацији, физици и многим другим.
Једна математичка област не може се замислити без елементарне комбинаторике. То је теорија вероватноће. Другим речима, вероватноћа се у великој мери ослања на законе комбинаторике. Због нераскидиве везе између ове две математичке области у овом поглављу биће поменути основни појмови елементарне комбинаторике.

2.1 Факторијел

Факторијел се користити приликом дефинисања основних појмова области комбинаторике, а самим тим се користити и у решавању задатака.

Дефиниција 2.1.1. *Факторијел неког природног броја n је производ свих природних бројева који су мањи или једнаки њему. Ознака је $n!$, а формула по којој се одређује је:*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$$

Дакле, уколико се тражи факторијел броја 8, по дефиницији се добија:

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320.$$

Такође се на основу једнакости

$$n! = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}_{(n-1)!}$$

може приметити да важи

$$n! = n \cdot (n-1)!. \tag{1}$$

Једнакост (1) се користи како би се скратио поступак решавања задатака.
Уколико се у једнакост (1) уврсти $n = 1$ добија се једнакост

$$1! = 1 \cdot (1-1)!.$$

Даљим сређивањем се добија $1 = 1 \cdot 0!$ односно $1 = 0!$. Дакле, по дефиницији се користи

$$0! = 1.$$

Пример 2.1.1. *Одредити вредност израза:*

а) $\dfrac{102!}{100!}$;

б) $\dfrac{6! - 5!}{120}$.

Решење: а) Бројилац се коришћењем једнакости (1) може разложити како би се скратио дати разломак.

$$\frac{102!}{100!} = \frac{102 \cdot 101!}{100!} = \frac{102 \cdot 101 \cdot 100!}{100!} = 102 \cdot 101 = 10302$$

б) Након примене једнакости (1) издваја се заједнички чинилац испред заграде у бројиоцу.

$$\frac{6! - 5!}{120} = \frac{6 \cdot 5! - 5!}{120} = \frac{5! \cdot (6-1)}{5!} = 6 - 1 = 5$$

△

Пример 2.1.2. *Скратити разломке:*

а) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$;

б) $\frac{n!}{(n+1)! - n!}$.

Решење: Користи се иста идеја приликом решавања овог примера.

а)

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = (n-2)(n-3).$$

б)

$$\frac{n!}{(n+1)! - n!} = \frac{n!}{(n+1)n! - n!} = \frac{n!}{n!(n+1-1)} = \frac{1}{n}.$$

△

Пример 2.1.3. *Решити једначину* $\frac{(x+2)!}{(x-1)!} = 120, \ x \in \mathbb{N}$.

Решење: Коришћењем једнакости (1) добија се једначина

$$\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)!}{(x-1)!} = 120, \text{ тј.}$$

$$(x+2)(x+1)x = 120. \tag{2}$$

Једначина (2) је еквивалентна једначини

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 120 = 0. \tag{3}$$

Нека је полином $x^3 + 3x^2 + 2x - 120$ означен са $P(x)$, тј.

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 120.$$

Како је $P(4) = 0$, онда је $x = 4$ нула полинома $P(x)$, па се може закључити да је полином $P(x)$ дељив са полиномом $x - 4$. Дељењем се добија:

$$(x^3 + 3x^2 + 2x - 120) : (x - 4) = x^2 + 7x + 30.$$

Дакле, важи $P(x) = (x-4)(x^2 + 7x + 30)$. Како за дискриминанту D квадратне једначине $x^2 + 7x + 30 = 0$ важи $D < 0$, једначина нема реалних решења. Дакле, једино решење у скупу природних бројева једначине (2), а самим тим и почетне једначине, је $x = 4$. △

Битно је још напоменути да $n!!$ није исто што и $(n!)!$. Двоструки факторијел се дефинише на следећи начин.

Дефиниција 2.1.2. *Двоструки факторијел неког природног броја n, у ознаци $n!!$, представља производ свих парних бројева који су мањи или једнаки њему или производ свих непарних бројева који су мањи или једнаки њему. Дакле, за $n = 2k$, $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)$, а за $n = 2k+1$, $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ . \ . \ . \ \cdot (2k+1)$.*

Тако је на пример $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, док је $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

2.2 Биномни коефицијент

Још један битан појам је биномни коефицијент.

Биномни коефицијент се означава са $\binom{n}{k}$, а чита n над k.

Дефиниција 2.2.1. *Биномни коефицијент је број*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{4}$$

где је $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \{0, 1, ..., n\}$. По дефиницији је $\binom{n}{0} = 1$.

Помоћу биномног коефицијента се заправо одређује на колико различитих начина се од n предмета може изабрати k предмета.
Формула (4) се често појављује и у облику

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!},$$

јер је

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Пример 2.2.1. *Одредити колико је:*

а) $\binom{7}{4}$;

б) $\binom{9}{3} - \binom{9}{6}$.

Решење: а)

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35.$$

б)

$$\binom{9}{3} - \binom{9}{6} = \frac{9!}{3!(9-3)!} - \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} - \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 0.$$

△

У следећој теореми биће описана битна својства биномних коефицијената.

Теорема 2.2.1. *За биномне коефицијенте* $\binom{n}{k}$ *важи:*

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *(својство симетричности);*

3) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},\ 0 \le k \le n-1$ *(правило сабирања).*

Доказ ове теореме може се наћи у књизи [2].

Може се приметити да се до решења у примеру 2.2.1 под *б)* може доћи коришћењем својства симетричности.

2.2.1 Уметање програмског кода

Приликом израде веб стране у HTML документ је уграђен програмски код који омогућава да се одреди факторијел, двоструки факторијел природног броја n и биномни коефицијент $\binom{n}{k}$.

Искази програмског језика се наводе у заглављу < script>, а атрибут language говори о томе да се користи *JavaScript* [13] језик. Форма за одређивање факторијела:

```
<form name="faktorijel">
```

садржи два текстуална поља и једно дугме. Помоћу првог текстуалног поља

```
<input type="text" name="argument" value="" size="20" maxlength="3">
```

се уноси природан број n, а затим се кликом на дугме

```
<input type="button" value="Odredi faktorjel" onclick="racunaj()">
```

израчунава факторијел унетог броја n и резултат се исписује у друго текстуално поље

```
<input name="result" value="" size="20">.
```

Код помоћу кога се одређује факторијел природног броја n **:**

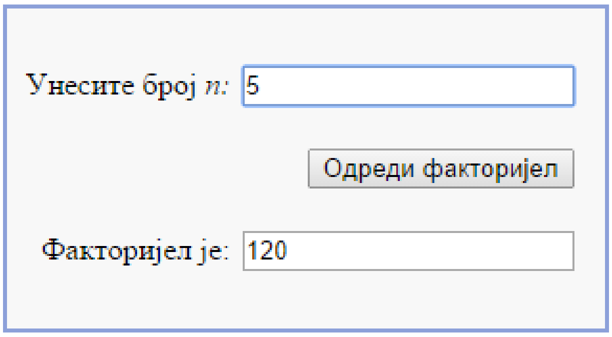
```
<script language="Javascript">

  function fact(n)
      {
```

[13] JavaScript је објектно-оријентисани језик који је намењен за развој апликација.

```
            if (isNaN(n)||n<0) return "Unesite prirodan broj!";
            return(n==0 ? 1 : n*fact(n-1));
        }

    function racunaj()
        {
            n=parseInt(document.faktorijel.argument.value);
            document.faktorijel.result.value=fact(n);
        }
</script>
```

У наведеном коду функција fact, чији је аргумент n, одређује факторијел природног броја n помоћу рекурзивне формуле. Прво се испитује да ли је унета коректна вредност, тј. ако је унет број мањи од нула или карактер који није број, исписује се порука: ,,*Унесите природан број!*", у супротном функција враћа факторијел броја n.

Помоћу функције racunaj() се промењивој n додељује унета вредност, а затим се резултат исписује у текстуално поље.



Слика 2.2.1.1. *Изглед програма који одређује факторијел природног броја n*

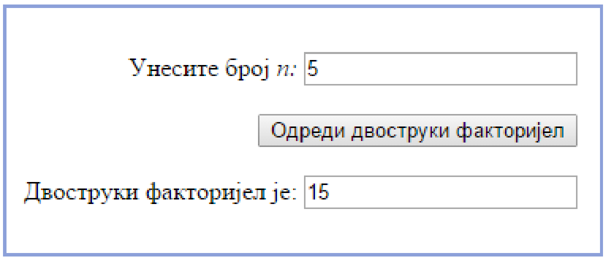
На исти начин су уметнути програмски кодови помоћу којих се одређује двоструки факторијел природног броја n и биномни коефицијент $\binom{n}{k}$.

Форма за одређивање двоструког факторијела такође садржи два текстуална поља и једно дугме.

Код помоћу кога се одређује двоструки факторијел природног броја n :

```
<script language="Javascript">
    function dvostrukifact(n)
        {
            if (isNaN(n)||n<0) return "Unesite prirodan broj!";
```

```
            return((n==0)||(n==1) ? 1 : n*dvostrukifact(n-2));
        }

    function racunajdvostruki()
        {
            n=parseInt(document.dvostrukifaktorijel.argument.value);
            document.dvostrukifaktorijel.result.value=dvostrukifact(n);
        }
</script>
```



Слика 2.2.1.2. *Изглед програма који одређује двоструки факторијел природног броја n*

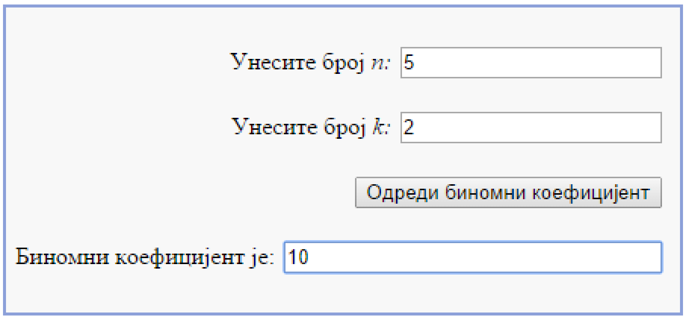
Форма за одређивање биномног коефицијента садржи три текстуална поља и једно дугме. Помоћу прва два текстуална поља се уносе вредности за n и k, док се у треће текстуално поље, уз помоћ дугмета, исписује резултат.

Код помоћу кога се одређује биномни коефицијент $\binom{n}{k}$:

```
<script language="Javascript">

function izracunaj()
{
        var n=parseInt(document.forma.br1.value);
        var k=parseInt(document.forma.br2.value);
        var rezultat;
        var i, j, s, fact1=1, fact2=1, fact3=1;

        for(i=1; i<=n; i++)
        {
                fact1*= i;
        }

        for(j=1; j<=k; j++)
        {
                fact2*= j;
        }
```

```
        for(s=1; s<=(n-k); s++)
        {
                fact3*=s;
        }

rezultat=fact1/(fact2*fact3);

if(k>n)
        document.forma.ime.value=”n mora da bude vece ili jednako k!”;
else
        document.forma.ime.value=rezultat;
}
</script>
```

У представљеном коду се посебно одређује $n!$, $k!$ и $(n-k)!$, а затим се до коначног решења долази помоћу формуле $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.



Слика 2.2.1.3. *Изглед програма који одређује биномни коефицијент* $\binom{n}{k}$

2.3 Основна правила комбинаторике

Као што је познато комбинаторика се заправо бави пребројавањем коначних скупова. Овом приликом биће наведена правила помоћу којих се одређује број елемената тражених скупова. За број елемената скупа A користиће се ознака $|A|$.

2.3.1 Правило збира

Нека су $A_1, A_2, ..., A_n$ непразни коначни подскупови скупа A и нека су они међусобно дисјунктни скупови, онда је број елемената скупа A

$$|A| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|.$$

Пример 2.3.1. *На колико начина се 7 истих оловака може поделити двојици ученика тако да сваки добије бар једну оловку?*

Решење: У овом примеру A је скуп свих могућих подела. Како је речено да сваки ученик добија бар једну оловку, односно најмање једну, а може и више, скупови A_i представљају скупове у којима први ученик добија i оловака $(1 \leq i \leq 6)$.
Дакле, ако први ученик добије 1 оловку други ће добити 6, ако први ученик добије 2 оловке други ће добити 5 и тако даље. Овим поступком се долази до свих могућности $(1+6,\ 2+5,\ 3+4,\ 4+3,\ 5+2,\ 6+1)$ којих укупно има 6. $\triangle$

Пример 2.3.2. *На правој p дато је пет различитих тачака A, B, C, D и E. Колико има и које су то дужи чији су крајеви дате тачке?*

Решење: Користе се следеће ознаке:

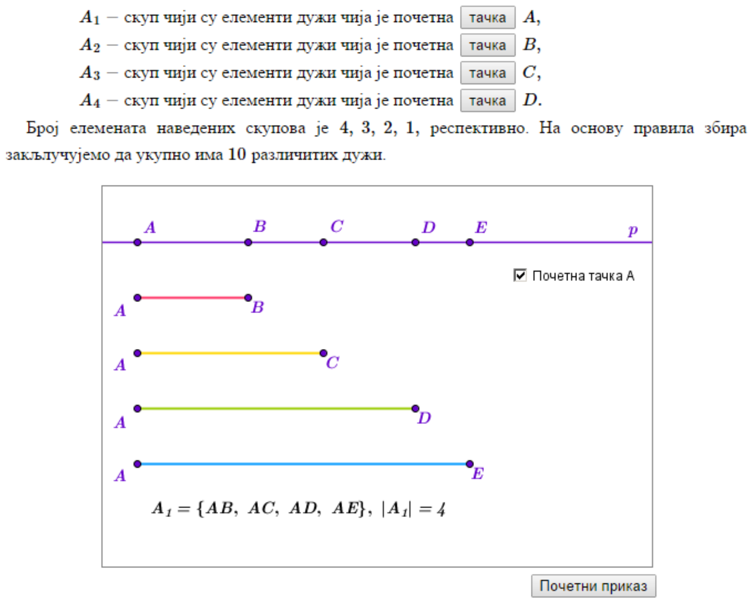
A_1-скуп чији су елементи дужи чија је почетна тачка A,

A_2-скуп чији су елементи дужи чија је почетна тачка B,

A_3-скуп чији су елементи дужи чија је почетна тачка C,

A_4-скуп чији су елементи дужи чија је почетна тачка D.

Број елемената наведених скупова је редом 4, 3, 2, 1. На основу правила збира може се закључити да укупно има 10 различитих дужи.



Слика 2.3.1. *Приказ аплета у случају када је почетна тачка A*

На аплету приказаном на слици 2.3.1, у зависности од одабране опције, добија се приказ свих дужи које почињу одређеном тачком.

$\triangle$

2.3.2 Правило производа

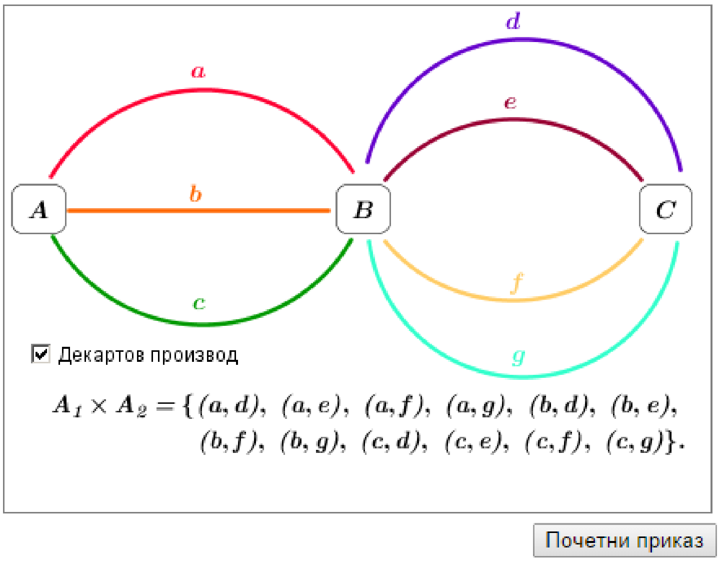
Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ непразни коначни подскупови скупа A и нека су они међусобно дисјунктни скупови, онда је број елемената Декартовог производа

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Пример 2.3.3. *Од места* **A** *до места* **B** *воде* 3 *пута, а од места* **B** *до места* **C** *воде* 4 *пута. На колико начина путник може да стигне од места* **A** *до места* **C***?*

Решење: Нека су путеви који воде од места A до места B означени словима $a,\ b,\ c$, а путеви који воде од места B до места C словима $d,\ e,\ f,\ g$. Скупови $A_1 = \{a,\ b,\ c\}$ и $A_2 = \{d,\ e,\ f,\ g\}$ су дисјунктни скупови и њихов број елемената је $|A_1| = 3,\ |A_2| = 4$. На основу правила производа, може се закључити да је укупан број путева од места A до места C

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2| = 3 \cdot 4 = 12.$$



Слика 2.3.2. *Приказ путева и Декартов производ*

△

2.4 Пермутације

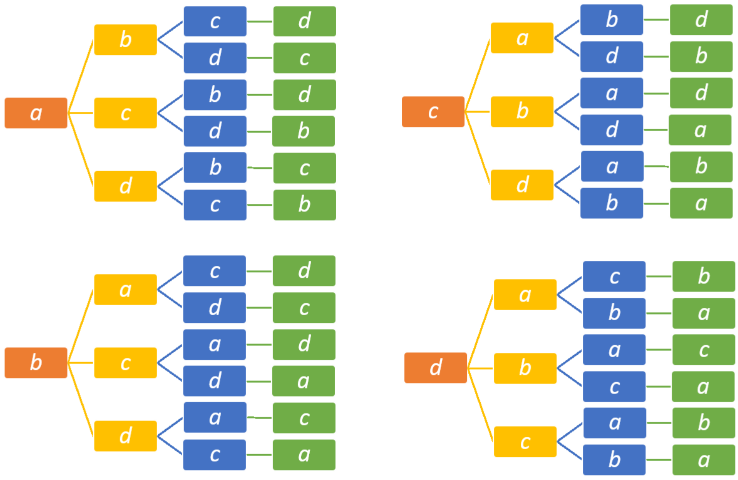
У овом делу ће бити приказана дефиниција појма пермутације и формула по којој се одређује број тражених пермутација. У пермутацијама учествују сви елементи и распоред елемената је битан. Разликују се ***пермутације са понављањем*** и ***пермутације без понављања***.

Дефиниција 2.4.1. *Пермутација без понављања скупа A, који има n различитих елемената, је сваки низ у коме се сви елементи скупа A појављују тачно једанпут. Број пермутација скупа A је $n!$.*

Дефиниција 2.4.2. *Пермутација са понављањем скупа* $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ *је сваки низ дужине* $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$ *у коме се елемент* a_1 *појављује* k_1 *пута,* a_2 *појављује* k_2 *пута, ...,* a_m *појављује* k_m *пута. Број пермутација скупа* A *је* $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$.

Пример 2.4.1. *Одредити број свих пермутација*
а) *без понављања од елемената скупа* $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$;
б) *од елемената* $a,\ b,\ b,\ c,$ *а затим исписати све те пермутације.*

Решење: **а)** Пошто се ради о пермутацијама без понављања, број свих могућих пермутација је $4! = 24$. Све пермутације без понављања скупа A могу се представити графом на следећи начин.



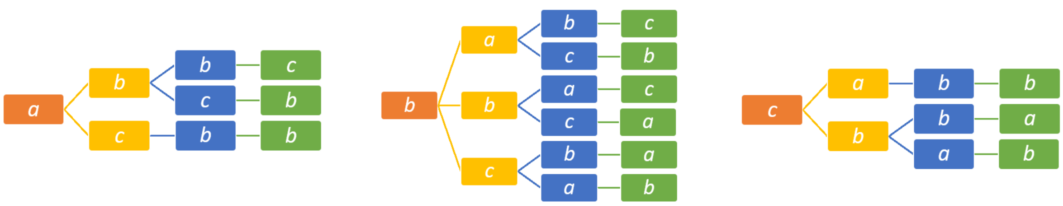
Слика 2.4.1. *Пермутације без понављања*

Уколико би се пребројале све приказане пермутације у графу, заиста би се добио број 24.

б) Пошто се елемент b понавља два пута ради се о пермутацијама са понављањем па је број свих могућих пермутација

$$\frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12.$$

Ове пермутације се могу представити као у претходном примеру.



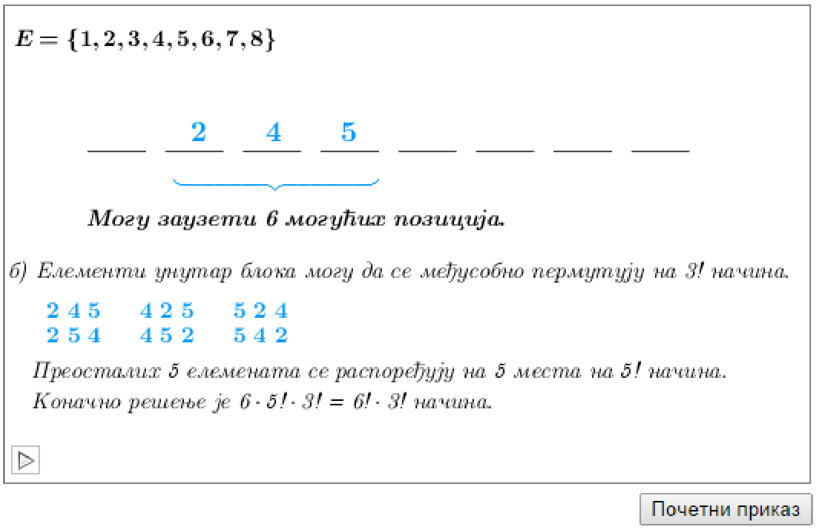
Слика 2.4.2. *Пермутације са понављањем*

△

Пример 2.4.2. *У колико пермутација од елемената скупа $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ се елементи $2, 4, 5$ налазе један поред другог:*
а) *у задатом поретку;*
б) *у произвољном поретку?*

Решење: **а)** Три елемента, која по услову задатка треба да стоје један до другог у задатом поретку, могу да заузму шест различитих позиција. Преосталих пет елемената се могу разместити на пет места на $5!$ начина, па је коначно решење $6 \cdot 5! = 6!$.

б) По услову задатка, три елемента која стоје један до другог могу да се међусобно пермутују и то на $3!$ начина. Када се узме у обзир овај услов и разматрање из претходног дела, може се закључити да је коначно решење $6 \cdot 5! \cdot 3! = 6! \cdot 3!$.



Слика 2.4.3. *Аплет који даје приказ различитих позиција датих елемената*

Из овог примера може се извести општи случај за n елемената од којих m стоји један поред другог:
-у датом поретку $(n - m + 1)!$,
-у произвољном поретку $(n - m + 1)! \cdot m!$. △

2.5 Варијације

Код варијација од n елемената бира се k. Дакле, не бирају се сви елементи и битан је редослед по коме се елементи бирају. Као и код пермутација, разликују се варијације ***без понављања*** и варијације ***са понављањем.***

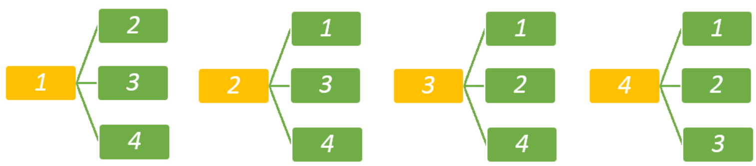
Дефиниција 2.5.1. *Варијација без понављања k-те класе скупа A, који има n различитих елемената, где је $(n \geq k)$, је сваки низ који има k елемената скупа A. Број варијација без понављања је $n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$.*

Може се приметити да је за $k = n$ варијација без понављања скупа A пермутација тог скупа, јер у пермутацијама учествују сви елементи, а када је $k = n$ заправо се бирају сви елементи скупа A.

Дефиниција 2.5.2. *Варијација са понављањем k-те класе скупа A, који има n елемената, где је $(n \geq k)$, је сваки низ који има k елемената скупа A, који могу да се понављају. Број варијација са понављањем је n^k.*

Пример 2.5.1. *Дат је скуп $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Формирати све двоцифрене бројеве чије су цифре различите од елемената датог скупа и одредити њихов број.*

Решење: Сви двоцифрени бројеви морају да имају различите цифре по услову задатка па се на основу тога може закључити да се ради о варијацијама без понављања којих има $4 \cdot 3 = 12$. Овакви бојеви се могу формирати помоћу графа приказаног на слици 2.5.1.



Слика 2.5.1. *Варијације са понављањем*

Дакле, тражени бројеви су: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

△

Пример 2.5.2. *Гост у хотелу за доручак може да бира кафу, чај или млеко. Колико има начина за избор, ако остаје у хотелу седам дана?*

Решење: Гост сваког дана има три могућа избора: млеко, кафа или чај. Дакле, ради се о варијацијама са понављањем па се може закључити да има 3^7 начина за избор. △

2.6 Комбинације

Комбинације дају одговор на питање: *На колико начина се од n предмета може изабрати k предмета?* Како се код комбинација од n елемената скупа A извлачи k елемената, где је $k \leq n$, може се закључити да не морају бити изабрани сви елементи скупа A.

Као и код пермутација и варијација и код комбинација се разликују ***комбинације без понављања*** и ***комбинације са понављањем.***

Дефиниција 2.6.1. *Комбинација без понављања k-те класе скупа A који има n различитих елемената, где је $n \geq k$, је сваки подскуп скупа A који има k елемената. Број комбинација без понављања је $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.*

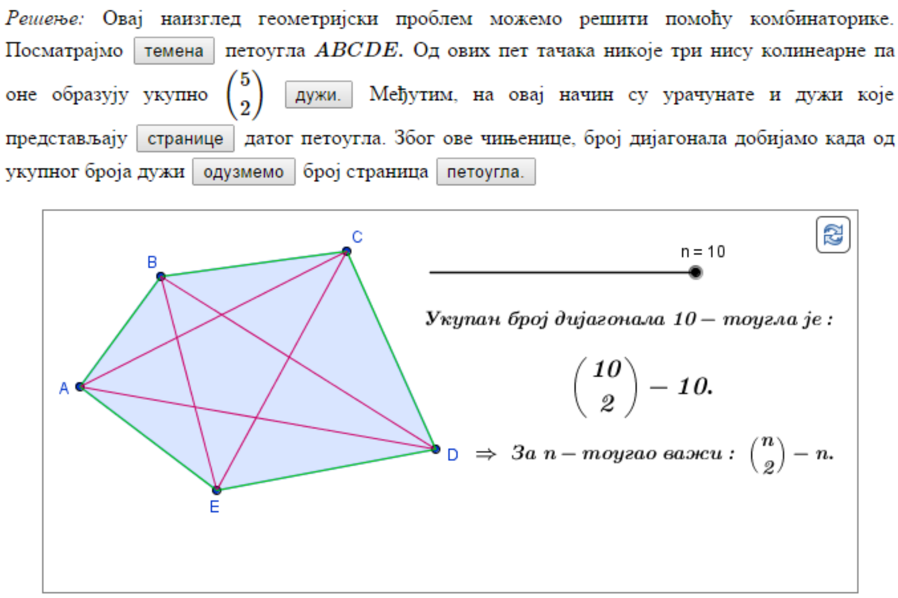
У овом случају се k елемената бира одједном па није битан редослед.

Дефиниција 2.6.2. *Комбинација са понављањем k-те класе скупа A који има n елемената је сваки подскуп скупа A од k елемената од којих један исти елемент може да се понавља до k пута. Број комбинација са понављањем је* $\binom{n+k-1}{k}$.

У овом случају редослед није битан, а елементи се бирају један по један са враћањем па се због тога елементи могу понављати.

Пример 2.6.1. *Одредити укупан број дијагонала петоугла $ABCDE$.*

Решење: Овај наизглед геометријски проблем могуће је решити помоћу комбинаторике. Посматрају се темена петоугла $ABCDE$. Од ових пет тачака никоје три нису колинеарне па оне образују укупно $\binom{5}{2}$ дужи. Међутим, на овај начин су урачунате и дужи које представљају странице датог петоугла. Због ове чињенице, број дијагонала се добија када се од укупног броја дужи одузме број страница петоугла: $\binom{5}{2} - 5 = 10 - 5 = 5$.



Слика 2.6.1. *Геометријски приказ проблема*

Овај пример је пропраћен аплетом, приказаним на слици 2.6.1, помоћу кога се визуелно може пратити ток решавања задатог проблема. Помоћу овог аплета се повезују области геометрије и комбинаторике. △

У геометрији се укупан број дијагонала $n-$тоугла може одредити помоћу формуле

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2},$$

за чије се извођење примењује поступак приказан у примеру 2.6.1. Дакле, од укупног броја дужи одузима се број страница $n-$тоугла:

$$D_n = \binom{n}{2} - n.$$

Даљим сређивањем добија се тражена формула:

$$D_n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1-2)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Пример 2.6.2. *У једном одељењу* 10 *ученика говори руски, а* 15 *енглески језик. На колико начина се може изабрати* 5 *ученика за секцију од којих бар један говори руски језик?*

Решење: Потребно је изабрати пет ученика од којих бар један говори руски, што заправо значи међу пет изабраних ученика мора да се нађе најмање један ученик који говори руски, а могу се наћи и два, три, четири или пет, тако да би требало сабрати све те могућности. Да би се скратио поступак решавања, од укупног броја комбинација одузима се број комбинација у којима ни један ученик не говори руски. Дакле, добија се

$$\binom{25}{5} - \binom{15}{5} = 50127$$

начина. △

Помоћу комбинација се такође може решити и пример 2.3.2: *На правој p дато је пет различитих тачака A, B, C, D и E. Колико има и које су то дужи чији су крајеви дате тачке?*
Како би се одредило колико укупно има различитих дужи чији су крајеви дате тачке, користи се формула за одређивање броја комбинација без понављања. Дакле, има

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

различитих дужи.

3 Дискретан простор вероватноћа

Приликом изучавања теорије вероватноће уводе се нови појмови као што су случајни експеримент, елементарни исход, случајни догађај, скуп елементарних исхода.
За даљи рад неопходно је дефинисати основне појмове теорије вероватноће. ***Елементарни исход*** је основни појам и он се не дефинише.

3.1 Случајни догађаји

Дефиниција 3.1.1. *Експерименти који се, под истим условима, могу понављати неограничен број пута, а да при томе исход не мора да буде увек исти називају се* ***случајни експерименти.***

Као примери за случајне експерименте могу се навести бацање једне или више коцкица за игру, бацање једног или више новчића, извлачење добитака наградних игара и тако даље.

Дефиниција 3.1.2. *Скуп свих могућих елементарних исхода једног случајног експеримента назива се* ***скуп елементарних исхода*** *и означава се са* Ω.

Елементи скупа Ω означавају се са ω_1, ω_2, ω_3, и тако даље. Скуп Ω може бити коначан, пребројив или непребројиво бесконачан.

Дефиниција 3.1.3. *Сваки подскуп скупа елементарних исхода назива се* ***случајни догађај.*** *Случајни догађаји се означавају великим словима латинице, на пример* A, B, C, D, *и тако даље, а по потреби се могу користити и индекси.*

Догађај A се реализује ако је исход експеримента један од елемената скупа A.
Скуп Ω и празан скуп $\emptyset$ су такође случајни догађаји. Скуп Ω се назива ***сигуран догађај,*** а празан скуп се назива ***немогућ догађај.***

Дефиниција 3.1.4. *Случајни догађај који се реализује у сваком извођењу случајног експеримента назива се* ***сигуран догађај****, а случајни догађај који не може да се реализује у том експерименту* ***немогућ догађај****.*

Напомена: У даљем излагању случајни експеримент ће се називати само експеримент, елементарни исход само исход, а случајни догађај само догађај.

Битно је правити разлику између ових основних појмова теорије вероватноће па ће сходно томе бити наведени следећи примери.

Пример 3.1.1. ***Случајни експеримент:*** *бацање коцкице за игру.*
Елементарни исходи *(све оно што може да се деси): може да падне јединица, двојка, тројка, четворка, петица или шестица.*
Скуп елементарних исхода *записује се на следећи начин:* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Догађаји *овог експеримента могу да буду на пример:* A*-појављивање броја* 3, B*-пао је број већи од* 4, C*-пао је паран број.*

Пример 3.1.2. ***Случајни експеримент:*** *бацање новчића.*
Елементарни исходи *(све оно што може да се деси): може да падне глава или писмо.*
Скуп елементарних исхода *записује се на следећи начин:* $\Omega = \{P, G\}$.
Догађај *овог експеримента може да буде на пример:* A*-пала је глава.*

3.1.1 Решени задаци

У овом делу су приказани задаци који се сврставају у основни ниво знања и помоћу којих се ученици уводе у област теорије вероватноће. Још сличних примера и задатака се може наћи у збиркама [6] и [7].

Задатак 1. *Одредити скуп елементарних исхода следећих експеримената:*

а) *бацају се две коцкице за игру;*

б) *бацају се два новчића;*

в) *бацају се једна коцкица и један новчић.*

Решење: Прво је потребно одредити све могуће исходе датих експеримената.

а) Експеримент: бацају се две коцкице за игру.
Скуп елементарних исхода: $\Omega = \{11, 12, 13, ..., 16, ..., 61, 62, ..., 66\}$.

б) Експеримент: бацају се два новчића.
Скуп елементарних исхода: $\Omega = \{PG,\ PP,\ GP,\ GG\}$.

в) Експеримент: баца се један новчић и једна коцкица.
Скуп елементарних исхода: $\Omega = \{P1,\ P2,\ ...,\ P6,\ G1,\ G2,\ ...,\ G6\}$. △

Задатак 2. *У кутији се налазе две беле и три црне куглице. Из кутије се извлаче једна по једна три куглице. Одредити скуп свих елементарних исхода.*

Решење: Експеримент: извлаче се три куглице.
Скуп елементарних исхода: $\Omega = \{cbb,\ bcb,\ bbc,\ ccb,\ cbc,\ bcc, ccc\}$. △

Задатак 3. *У кутији се налазе четири листића обележена бројевима* 1, 2, 3 *и* 4. *Одредити скуп свих елементарних исхода, ако се листићи извлаче један по један до појаве непарног броја:*

а) *без враћања;*

б) *са враћањем.*

Решење: **а)** Експеримент: листићи се извлаче један по један без враћања до појаве непарног броја.
Број извлачења зависи од тога када ће се појавити непаран број. Тако да је могуће из прве извући непаран број 1 или 3, два извлачења су неопходан ако је при првом извлачењу извучен паран број 2 или 4, а највише се може извлачити три пута и то у случају да је прва два пута извучен паран број. Дакле, скуп елементарних исхода је

$$\Omega = \{1,\ 3,\ 21,\ 23,\ 41,\ 43,\ 241,\ 243,\ 421,\ 423\}.$$

б) Експеримент: листићи се извлаче један по један са враћањем до појаве непарног броја. Како се извучени листићи поново враћају у кутију могуће је да се при извлачењу више пута појави исти паран број јер ће увек бити парних бројева у кутији, па је скуп елементарних исхода

$$\Omega = \{1,\ 3,\ 21,\ 23,\ 41,\ 43,\ 241,\ 243,\ 421,\ 423,\ 221,\ 223,\ 441,\ 443,\ 2221, ...\}.$$

$\triangle$

Задатак 4. *Два играча играју три партије неке игре, при чему се свака партија завршава победом једног играча. Одредити простор елементарних исхода.*

Решење: Нека је победа првог играча означена са A, а победа другог са B. У свакој од три партије могуће је да победи један од два играча, па је скуп елементарних исхода:

$$\Omega = \{AAA,\ ABA,\ BAA,\ BBA,\ AAB,\ ABB,\ BAB,\ BBB\}.$$

$\triangle$

Задатак 5. *Новчић се баца три пута. Одредити скуп елементарних исхода и догађаје:*

а) *A-пала су тачно два писма;*

б) *B-пала су бар два писма;*

в) *C-у сва три бацања пала је иста страна.*

Решење: Скуп елементарних исхода је $\Omega = \{PPP,\ PPG,\ PGP,\ GPP,\ PGG,\ GPG,\ GGP,\ GGG\}$.

а) Елементарни исходи повољни за догађај A су: $A = \{PPG,\ PGP,\ GPP\}$.

б) Елементарни исходи повољни за догађај B су: $B = \{PPG,\ PGP,\ GPP,\ PPP\}$.

в) Елементарни исходи повољни за догађај C су: $C = \{GGG,\ PPP\}$. $\triangle$

3.2 Операције са случајним догађајима

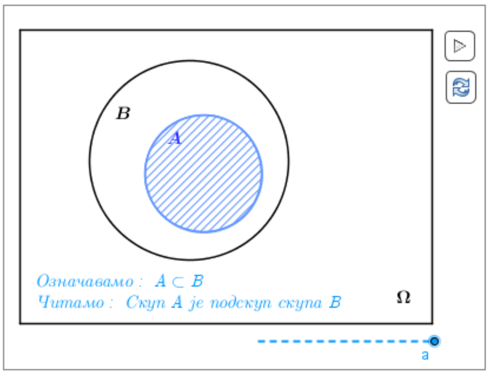
У овом делу биће формулисане дефиниције везане за операције са случајним догађајима. У одговарајућем електронском материјалу свака дефиниција је пропраћена GeoGebra аплетом. Улога ових аплета је да прикажу везу између теорије вероватноће и теорије скупова.

За догађаје се користе операције које важе и у теорији скупова, па се тако може говорити о ***пресеку, унији, разлици, подскуповима*** догађаја.

Значи, скуп елементарних исхода и случајне догађаје је могуће визуелно представити помоћу добро познатих *Венових* [14] дијаграма.

Дефиниција 3.2.1. *Ако се сваком реализацијом догађаја A реализује и догађај B, тада се каже да догађај A* ***повлачи*** *(имплицира) догађај B.*

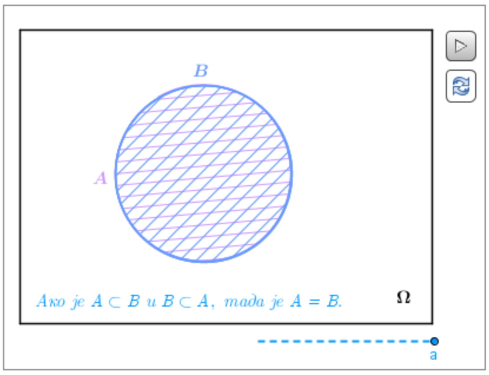
Значи, елементи скупа A су истовремено и елементи скупа B, односно скуп A је **подскуп** скупа B, што се означава на исти начин као и у теорији скупова $A \subset B$.



Слика 3.2.1. *Аплет који приказује догађаје из дефиниције 3.2.1.*

Дефиниција 3.2.2. *Ако је $A \subset B$ и $B \subset A$, тада су догађаји A и B* ***једнаки*** *односно* ***еквивалентни.***

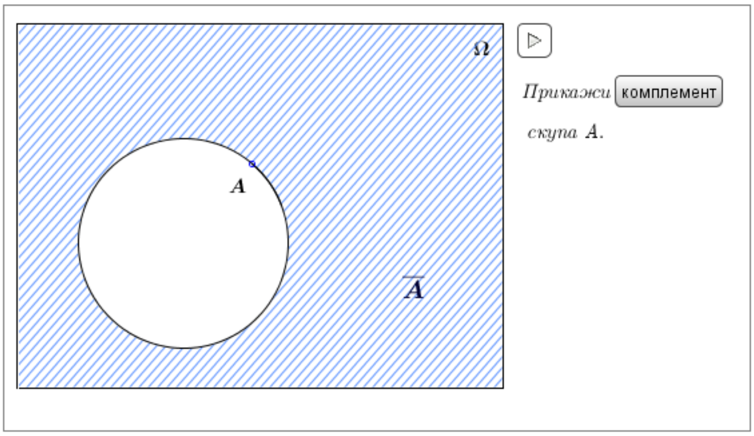
Дакле, сваки елементарни исход догађаја A, уједно је и елементарни исход догађаја B. И обрнуто, сваки елементарни исход догђаја B, уједно је и елеметарни исход догађаја A.



Слика 3.2.2. *Аплет који приказује два еквивалентна догађаја A* и *B*

[14] Џон Вен (John Venn, 1834-1923), британски логичар и филозоф по коме дијаграми носе назив.

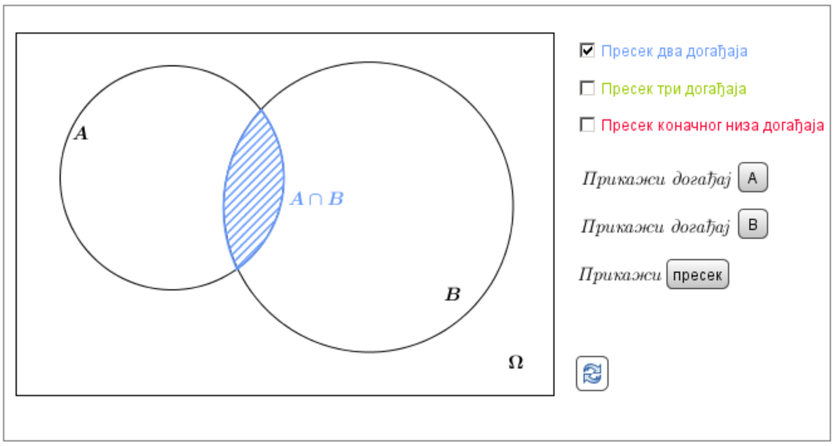
Дефиниција 3.2.3. *Догађај који се реализује онда када се догађај A не реализује назива се* ***супротни догађај*** *даогађаја A и обележава се са $\overline{A}$. Догађај $\overline{A}$ се такође често назива* ***комплемент*** *догађаја A и означава се са A^C.*



Слика 3.2.3. *Аплет који приказује догађај супротан догађају A*

Дефиниција 3.2.4. *Ако се догађај C реализује уколико се реализују и догађај A и догађај B, тада се догађај C назива* ***пресек*** *(или* ***производ****) догађаја A и B и означава се са $C = A \cap B$ (или $C = AB$).*

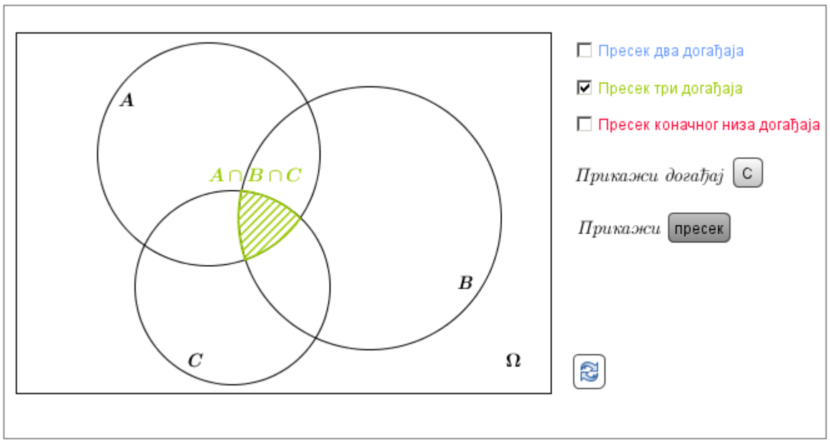
Дакле, елементарни исходи догађаја C су уједно елементарни исходи и догађаја A и догађаја B.



Слика 3.2.4. *Аплет који приказује пресек два произвољна догађаја*

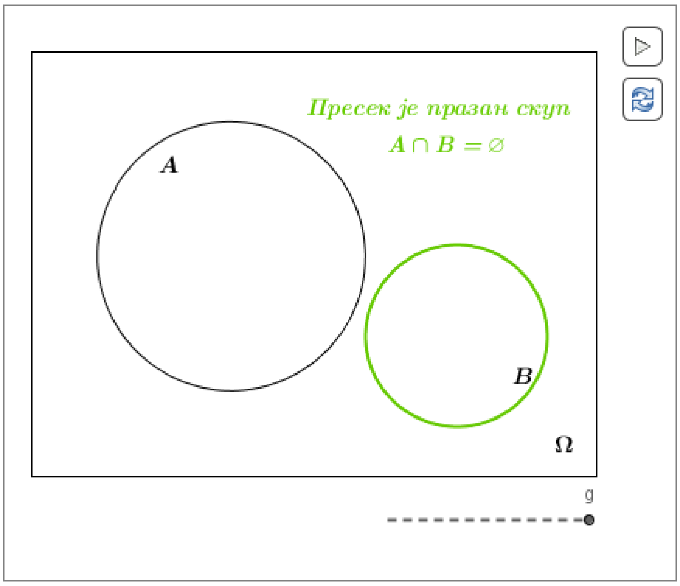
Појам пресека догађаја се може проширити на коначан низ догађаја $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$, где је $n > 2$. Њихов пресек је догађај $C = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ који се реализује ако и само ако се реализују сви догађаји датог низа.

Дефиниција 3.2.4. је пропраћена аплетом чији је изглед приказан на слици 3.2.4 и слици 3.2.5. Аплет пружа приказ пресека два произвољна догађаја A и B и приказ пресека три произвољна догађаја $A,\ B$ и C, у зависности од тога која је опција приказа изабрана.



Слика 3.2.5. *Аплет који приказује пресек три произвољна догађаја*

Дефиниција 3.2.5. *Ако је $A \cap B = \emptyset$, (A и B не могу да се реализују истовремено), тада се каже да су догађаји A и B међусобно* ***дисјунктни догађаји.***

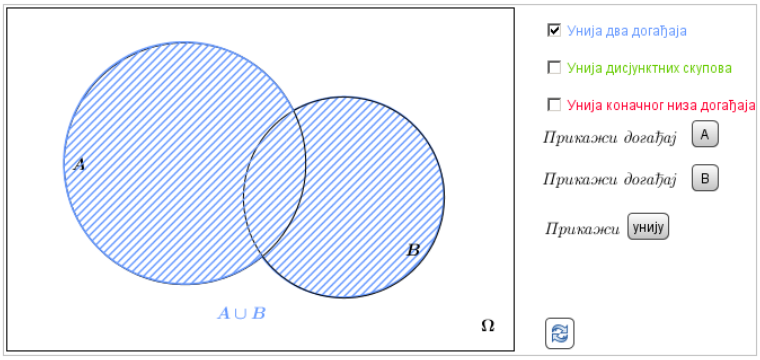


Слика 3.2.6. *Аплет који приказује два дисјунктна догађаја*

Напомена: Аплет приказан на слици 3.2.6. пружа могућност промене положаја догађаја B помоћу миша. Дакле, може се такође видети пресек два произвољна догађаја и пресек догађаја A и B када је $B \subset A$.

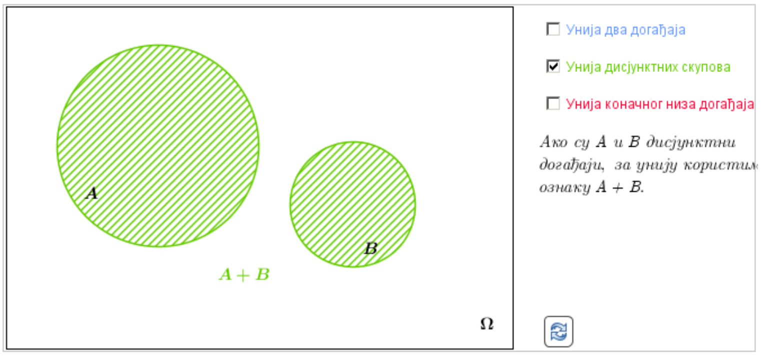
Дефиниција 3.2.6. *Ако се догађај C реализује уколико се реализује бар један од догађаја A и B, тада се догађај C назива* ***унија*** *догађаја A и B и користи се ознака $C = A \cup B$. Ако је $A \cap B = \emptyset$, онда се користи ознака $C = A + B$.*

Дефиниција 3.2.6 је пропраћена аплетом чији је изглед приказан на слици 3.2.7 и слици 3.2.8.



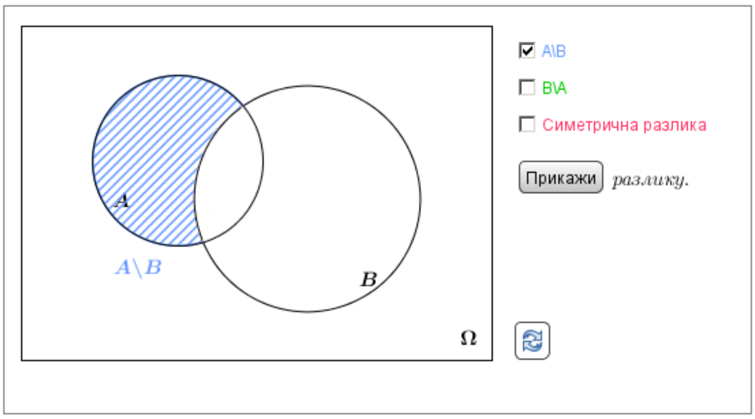
Слика 3.2.7. *Аплет који приказује унију два произвољна догађаја*

Појам уније догађаја се може проширити на низ коначних догађаја A_1, A_2, ..., A_n, где је $n > 2$. Догађај $C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ се реализује ако се реализује бар један од догађаја датог низа.



Слика 3.2.8. *Аплет који приказује унију два дисјунктна догађаја*

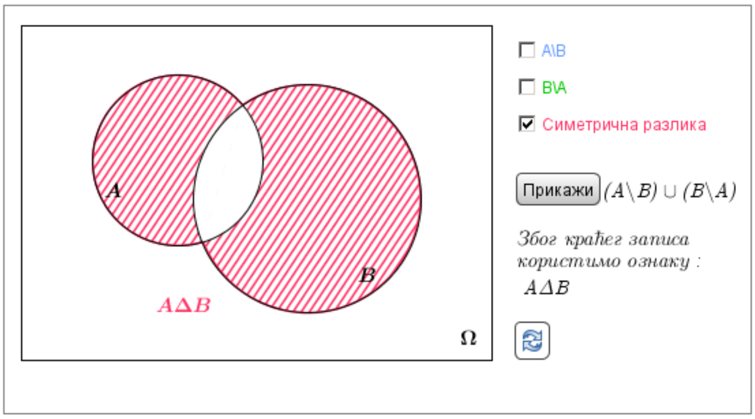
Дефиниција 3.2.7. *Догађај C се назива* ***разлика*** *догађаја A и B, ако се реализује догађај A и не реализује догађај B и користи се ознака $C = A \backslash B$.*



Слика 3.2.9. *Аплет који приказује догађај $A \backslash B$*

Дефиниција 3.2.8. *Догађај C се назива* ***симетрична разлика*** *догађаја A и B, ако се реализује догађај $A\backslash B$ или ако се реализује догађај $B\backslash A$ и користи се ознака $C = A\triangle B$.*

Дакле, симетрична разлика је унија догађаја $A\backslash B$ и $B\backslash A$.



Слика 3.2.10. *Аплет који приказује догађај $A\triangle B$*

Дефиниција 3.2.9. *Нека су догађаји $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ такви да су свака два различита догађаја међусобно дисјунктни ($A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$) и њихова унија сигуран догађај, тада они чине* ***потпуни систем догађаја.***

Такође је потребно, када се посматрају догађаји из истог простора елементарних исхода, знати међусобне односе посматраних догађаја.

Особине операција

1) $A \cup A = A,\ \ A \cap A = A$

2) $A \cup B = B \cup A,\ \ A \cap B = B \cap A$

3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ \ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ \ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5) $A \cup \overline{A} = \Omega,\ \ A \cap \overline{A} = \varnothing$

6) $A \cup \Omega = \Omega,\ \ A \cap \Omega = A$

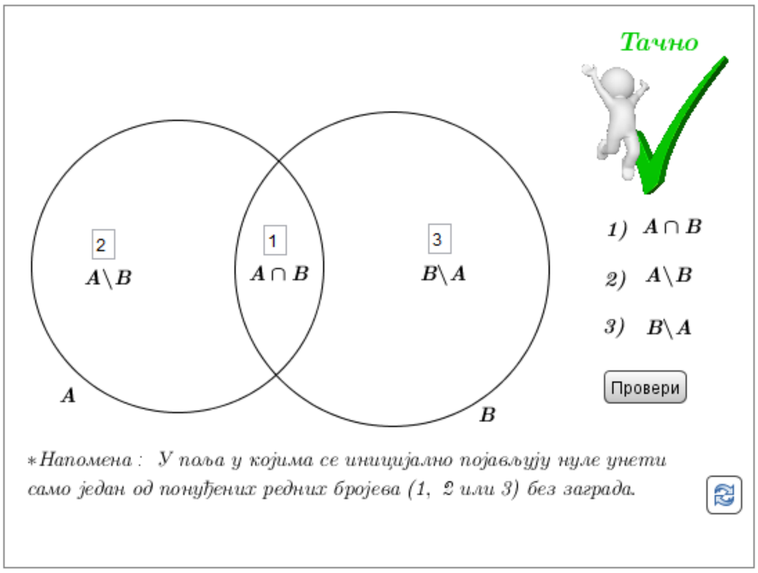
7) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *(Де Моргранови [15] обрасци)*

Више о особинама операција се може погледати у књизи [2].

[15] Augustus De Morgan(1806-1871), је био енглески математичар. Бавио се логиком и формулисао је наведене законе који носе његово име.

3.2.1 Решени задаци

Задатак 6. *Означити одговарајуће релације на аплету (Слика 3.2.1.1).*



Слика 3.2.1.1. *Аплет помоћу кога се решава задатак 6.*

Пре уношења решења на аплету у текстуалним пољима су иницијално постављене нуле. Када се након уношења одговора притисне дугме **Провери** појављује се обавештење да ли је задатак тачно урађен или не.

Задатак 7. *Баца се коцкица за игру. Нека је A догађај да је добијени број дељив са* 2, *а догађај B да је добијени број дељив са* 4. *Одредити:* $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$ *и* $\overline{A} \backslash \overline{B}$.

Решење: Потребно је прво одредити скуп елементарних исхода $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Елементарни исходи повољни за догађај A су: $A = \{2, 4, 6\}$, а исходи повољни за догађај B су: $B = \{4\}$. Сада се могу одредити повољни исходи за тражене догађаје:

$$A \cup B = \{2, 4, 6\},\ \overline{A} = \{1, 3, 5\},\ \overline{B} = \{1, 2, 3, 5, 6\},\ A \cap \overline{B} = \{2, 6\},\ \overline{A} \backslash \overline{B} = \emptyset.$$

△

Задатак 8. *Дата су три догађаја A, B и C. Помоћу симболичких операција и датих догађаја одредити следеће догађаје:*

а) *реализован је догађај A, а нису реализовани догађаји B и C;*

б) *реализована су сва три догађаја;*

в) *није реализован ниједан догађај;*

г) *реализован је тачно један од ових догађаја.*

Решење: Тражени догађаји су:

а) $A\overline{BC}$;

б) ABC;

в) $\overline{ABC}$;

г) $A\overline{BC} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{AB}C$. $\triangle$

Задатак 9. *Доказати да важе једнакости:*

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Решење: Нека је десна страна једнакости означена са D, а лева са L. Према дефиницији 3.2.2, ако је $L \subset D$ и $D \subset L$, онда су догађаји D и L једнаки. Нека је ω исход који припада догађају L, тада важи:

а)

$$\omega \in L = \overline{A \cup B} \Rightarrow \omega \notin A \cup B \Rightarrow \omega \notin A \wedge \omega \notin B \Rightarrow \omega \in \overline{A} \wedge \omega \in \overline{B} \Rightarrow \omega \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow L \subset D.$$

Такође важи:

$$\omega \in D = \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \omega \in \overline{A} \wedge \omega \in \overline{B} \Rightarrow \omega \notin A \wedge \omega \notin B \Rightarrow \omega \notin A \cup B \Rightarrow \omega \in \overline{A \cup B} \Rightarrow D \subset L.$$

Како важи $L \subset D$ и $D \subset L$, онда важи да је $L = D$, тј. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Може се приметити да се приликом доказивања уместо знака импликације може користити знак еквиваленције.

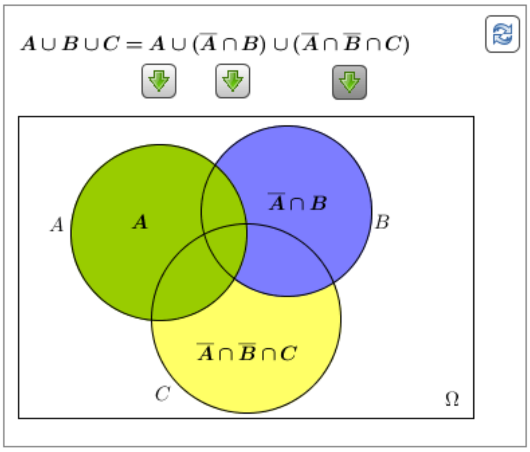
б) На основу следећих еквиваленција доказује се да важи наведена једнакост.

$$\omega \in D = \overline{A \cap B} \Longleftrightarrow \omega \notin A \cap B \Longleftrightarrow \omega \notin A \vee \omega \notin B \Longleftrightarrow \omega \in \overline{A} \vee \omega \in \overline{B} \Longleftrightarrow \omega \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

$\triangle$

Задатак 10. *Нека су A, B и C произвољни догађаји. Представити догађај $A \cup B \cup C$ у облику уније три међусобно дисјунктних догађаја.*

Решење: Посматрају се догађаји A, $\overline{A} \cap B$ и $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ приказане на слици 3.2.1.2. Ови догађаји су међусобно дисјунктни па важи $A \cup B \cup C = A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$. Битно је напоменути да ово није једино решење. Решење зависи од тога који се дисјунктни догађаји посматрају.



Слика 3.2.1.2. *Аплет који приказује решење задатка 10.*

△

3.3 Класична дефиниција вероватноће

Често се у свакодневном говору могу чути изрази везани за вероватноћу реализације неких догађаја, а овом приликом биће математички дефинисан појам вероватноће догађаја.

Дефиниција 3.3.1. *Нека је* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ *скуп елементарних исхода и нека је* $A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, ..., \omega_{j_k}\}$ *догађај, где је* $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n$. *Свако елементарном исходу* ω_k ($1 \leq k \leq n$) *придружује се број* p_k *тако да важи:*

1) $p_k \geq 0$ *(ненегативност);*

2) $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ *(нормираност).*

Тада се број p_k *назива вероватноћа елементарног исхода* ω_k, *а број* $P(A) = p_{j_1} + p_{j_2} + ... + p_{j_k}$ *вероватноћа догађаја* A.

Дакле, вероватноћа догађаја A је једнака збиру вероватноћа исхода повољних за догађај A.

Специјални случај дефиниције

Када су елементарни исходи једнако вероватни, односно када важи $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$, вероватноћа догађаја A одређена је са $P(A) = \frac{k}{n}$, где је k број исхода повољних за догађај A, а n број свих могућих исхода.

Овај специјални случај дефиниције познат је под називом *Лапласова* [16] или ***класична дефиниција вероватноће.***

[16] Пјер Симон Лаплас (Pierre-Simon, Marquis de Laplace, 1749-1827) је био француски математичар и астроном.

Пре формулисања следеће дефиниције неопходно је увести пјам: $\sigma-$поље догађаја.

$\sigma-$поље догађаја

Нека је $\mathcal{F}$ фамилија догађаја из Ω за коју важи:
(А1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
(А2) Ако $A \in \mathcal{F}$, онда и $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
(А3) Ако је $A_1,\ A_2,\ A_3, ...$ коначан или пребројив низ догађаја фамилије $\mathcal{F}$, тада и њихова унија припада $\mathcal{F}$.
Таква фамилија догађаја $\mathcal{F}$ је $\sigma-$поље догађаја.

Ако је скуп свих елементарних исхода коначан скуп, тада је и свака фамилија догађаја из Ω коначна фамилија. Ако за такву фамилију $\mathcal{F}$ важе услови **(А1)**, **(А2)** и ако важи да за сваки коначан низ догађаја из фамилије $\mathcal{F}$ и њихова унија припада тој фамилији, онда је фамилија $\mathcal{F}-$поље догађаја.

Дефиниција 3.3.2. *Уређена тројка* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ *назива се простор вероватноћа* ($P : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ *је функција којом се елементарним исходима придружује вероватоноћа).*

Пример 3.3.1. *Коцкица за игру се баца једанпут. Одредити вероватноћу да ће пасти број дељив са три.*

Скуп свих елементарних исхода је $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Исходи повољни за догађај A су: $A = \{3, 6\}$. Применом класичне дефиниције вероватноће добија се:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Пример 3.3.2. *Случајно се бира природан број не већи од* 20. *Колика је вероватноћа да је изабран прост број?*

Прво се одређује скуп свих елементарних исхода: $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\}$. Простих бројева мањих од 20 има осам и то су $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. На основу класичне дефиниције вероватноће добија се:

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

3.3.1 Решени задаци

Задатак 11. *У кутији се налази десет куглица од којих су три црвене и седам плавих. Колика је вероватноћа да се приликом једног извлачења појави куглица плаве боје?*

Решење: Применом класичне дефиниције вероватноће добија се да је

$$P(A) = \frac{7}{10}.$$

$\triangle$

Задатак 12. *Међу* 20 *предмета има седам неисправних. Случајно се бира истовремено пет предмета. Колика је вероватноћа да међу њима нема неисправних?*

Решење: Нека је A догађај да међу изабраним предметима нема неисправних. Укупан број начина на који се од 20 предмета бира 5 је $\binom{20}{5}$. Исхода повољних за догађај A има $\binom{13}{5}$. Тражена вероватноћа је:

$$P(A) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{20}{5}}.$$

△

Пример 3.3.3. *Одредити колика је вероватноћа да се приликом бацања 6 коцкица за игру појави ,,јамб комбинација"(најмање пет истих).*

Решење: Нека је A догађај да се појавила ,,јамб комбинација". Укупан број исхода приликом бацања 6 коцкица је 6^6, а број повољних исхода за догађај A је $6 + \binom{6}{5} \cdot 5 \cdot 6$. Дакле, вероватноћа догађаја A је:

$$P(A) = \frac{6 + \binom{6}{5} \cdot 5 \cdot 6}{6^6} = \frac{6 + 6 \cdot 5 \cdot 6}{6^6} = \frac{6(1 + 6 \cdot 5)}{6^5 \cdot 6} = \frac{31}{6^5}.$$

△

Пример 3.3.4. *Коцка, чије су странице обојене плавом бојом, расечена је на хиљаду малих коцки истих димензија. Мале коцке су стављене у кутију и измешане. Која је вероватноћа да случајно извучена коцка има:*

а) *три обојене стране;*

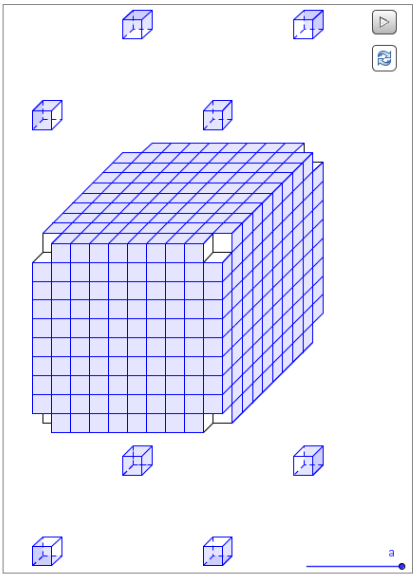
б) *две обојене стране?*

Решење: Нека је A догађај да случајно изабрана коцкица има три обојене стране, а B догађај да случајно изабрана коцкица има две обојене стране.

а) Како су сви елементарни исходи једнако вероватни може се применити класична дефиниција вероватноће. Број свих могућих исхода је 1000. Коцкице са обојене три стране се налазе на теменима велике коцке. Пошто коцка има 8 темена, број исхода повољних за догађај A је 8. Дакле, тражена вероватноћа је:

$$P(A) = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}.$$

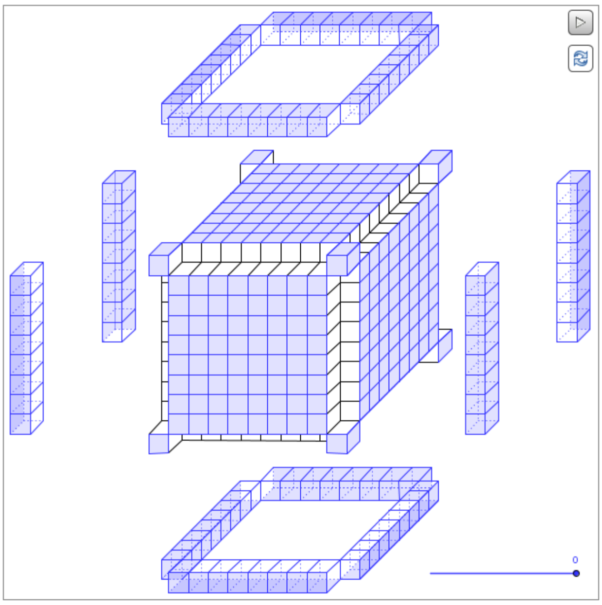
Овај задатак је пропраћен одговарајућим аплетом. Аплет заправо представља анимацију на којој је приказано растављање коцке. Анимација се покреће кликом на дугме ,, play".



Слика 3.3.1.1. *Аплет који приказује растављену коцку*

б) У овом случају повољних исхода за догађај B има онолико колико има коцкица обојених са две стране. Све такве коцкице се налазе на ивицама велике коцке изузимајући коцкице са темена. Коцка има 12 ивица, а на свакој ивици има по 8 таквих коцкица. Дакле, повољних исхода има $8 \cdot 12 = 96$, па је тражена вероватноћа:

$$P(B) = \frac{96}{1000} = 0,096.$$



Слика 3.3.1.2. *Аплет који приказује растављену коцку*

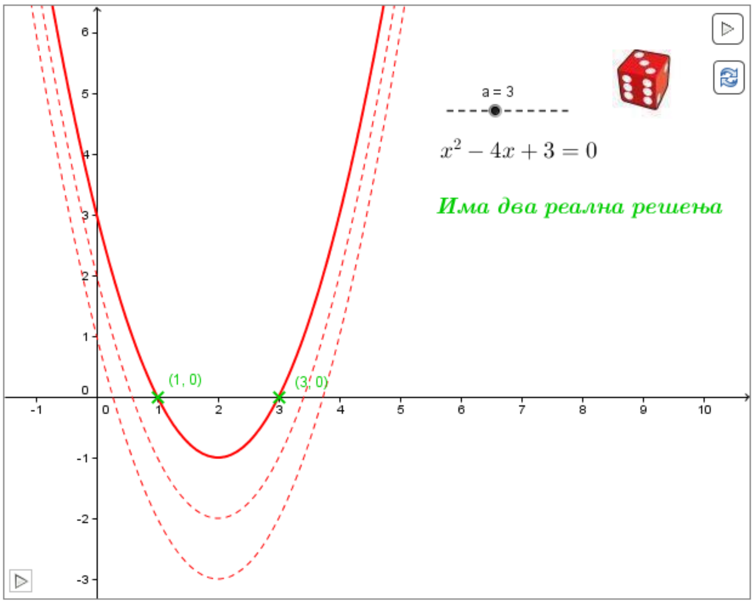
$\triangle$

Пример 3.3.5. *Дата је квадратна једначина* $x^2 - 4x + a = 0$. *Баца се коцкица и за а се узима број који је пао. Одредити вероватноћу да ће за тако добијено а дата једначина имати реална решења.*

Решење: Нека је догађај A да једначина има реална решења. Приликом бацања коцкице сви елементарни исходи су једнако вероватни па се користи класична дефиниција вероватноће. Укупан број елементарних исхода је 6. Једначина има реална решења ако x-оса сече криву $f(x) = x^2 - 4x + a$ или ако је додирује. Овај услов је испуњен у случају да је приликом бацања коцкице пала јединица, двојка, тројка или четворка, односно када за дискриминанту D дате једначине, важи $D \geqslant 0$. Дакле, повољних исхода има 4, па је вероватноћа:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Аплет приказан на слици 3.3.1.3. помаже да се одреди број исхода повољних за догађај A. На овом аплету постоји могућност да се помоћу клизача мења положај криве f. На осову положаја криве може се закључити које су повољне вредности за a. Уколико крива f сече x-осу исписује се порука да у том случају једначина $x^2 - 4x + a = 0$ има два реална решења. Ако крива f додирује x-осу исписује се порука да једначина има једно реално решење, а ако једначина и крива немају заједничких тачака, исписује се порука да једначина нема реална решења.



Слика 3.3.1.3. *Аплет који приказује положај криве* $f(x)$

△

3.4 Својства вероватноће

У овом делу биће формулисана и доказана нека основна својства вероватноће.

Теорема 3.4.1. ***1)*** *За сваки догађај* A *важи* $0 \leq P(A) \leq 1$.

2) *Вероватноћа сигурног догађаја је* $P(\Omega) = 1$.

3) *За унију два дисјунктна догађаја* A *и* B, $A \cap B = \emptyset$, *важи* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4) *За сваки догађај* A *важи* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, *где је* $\overline{A}$ *супротни догађај.*

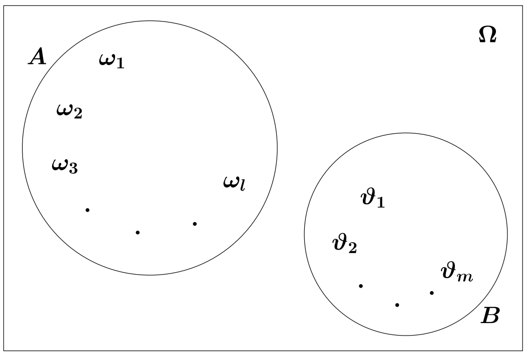
5) *Вероватноћа немогућег догађаја је* $P(\emptyset) = 0$.

6) *Ако је* $A \subset B$, *онда важи једнакост* $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.

7) *Ако је* $A \subset B$, *онда важи неједнакост* $P(A) \leq P(B)$.

Доказ: Прва два својства следе из саме дефиниције вероватноће. По дефиницији, вероватноћа догађаја A је једнака збиру ненегативних вероватноћа елементарних исхода повољних за догађај A и збир вероватноћа свих елементарних исхода је једнак 1.

3) Догађаји су дисјунктни, односно њихов пресек је празан скуп. У ознаци $A \cap B = \emptyset$. Нека су $\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_l$ елементарни исходи повољни за догађај A и $\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ ...,\ \vartheta_m$ елементарни иходи повољни за догађај B, тј. $A = \{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_l\}$ и $B = \{\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ ...,\ \vartheta_m\}$ (Слика 3.4.1).



Слика 3.4.1. *Елементарни исходи дисјунктних догађаја*

Одавде је $A \cup B = \{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_l,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2,\ ...,\ \vartheta_m\}$. Из дефиниције вероватноће следи да је

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \underbrace{p(\omega_1) + p(\omega_2) + ... + p(\omega_l)}_{P(A)} + \underbrace{p(\vartheta_1) + p(\vartheta_2) + ... + p(\vartheta_m)}_{P(B)} \\ &= P(A) + P(B). \end{aligned}$$

4) Како су догађај A и њему супротан догађај $\overline{A}$ дисјунктни (Слика 3.4.2), тј. $A \cap \overline{A} = \emptyset$, важи $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Применом својства 3) добија се

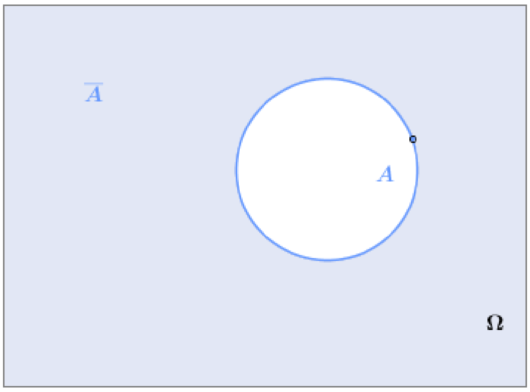
$$P(\underbrace{A \cup \overline{A}}_{\Omega}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

односно $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$. На основу својства 2) је $P(\Omega) = 1$, па се добија

$$1 = P(A) + P(\overline{A}).$$

Даљим сређивањем се долази до тражене једнакости

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$



Слика 3.4.2. *Супротни догађај*

5) Ако се стави да је $A = \Omega$, онда се својство 4) може написати у следећем облику:

$$P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega).$$

Како је $\overline{\Omega} = \emptyset$, добија се:

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega).$$

На основу својства 2) $P(\Omega) = 1$ се добија: $P(\emptyset) = 1 - 1$, тј. $P(\emptyset) = 0$.

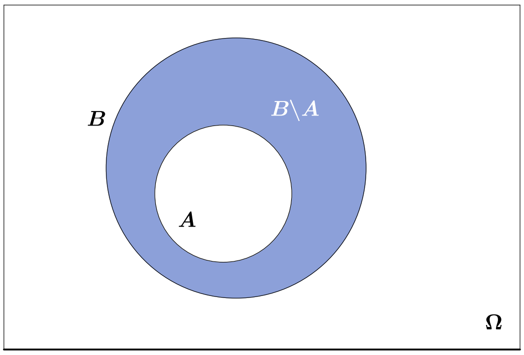
6) Догађаји A и $B \backslash A$ приказани на слици 3.4.3 су међусобно дисјунктни ($A \subset B$). Пошто су догађаји дисјунктни и $A \cup (B \backslash A) = B$, може се применити својство 3)

$$P(\underbrace{A \cup (B \backslash A)}_{B}) = P(A) + P(B \backslash A)$$

$$P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$$

Овим се добија тражена једнакост.

$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$$



Слика 3.4.3. *Дисјунктни догађаји* A *и* $B \backslash A$ *ако је* $A \subset B$

7) Како је $A \subset B$ може се применити својство 6):

$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A).$$

На основу својства 1) познато је да је $P(B \backslash A) \geq 0$ па је $P(B) - P(A) \geq 0$. Овим се добија тражена неједнакост $P(A) \leq P(B)$.

$\square$

Својство 3) такође важи за $k \geq 2$ међусобно дисјунктних догађаја.

Теорема 3.4.2. *Ако је* $k \geq 2$ *и ако су догађаји* $A_1, \ A_2, ..., \ A_k$ *међусобно дисјунктни, онда важи*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).$$

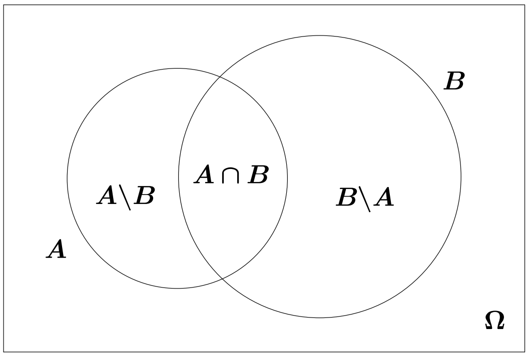
Својство 3) се може формулисати и за било која два догађаја.

Теорема 3.4.3. *За два произвољна догађаја* A *и* B *важи једнакост*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Доказ: Интуитивно је јасно да се приликом сабирања пресек рачуна два пута па је због тога потребно одузети вероватноћу пресека. Приликом доказа користе се претходно наведена својства вероватноће. Догађаји $A \cup B$, A и B се могу изразити преко дисјунктних догађаја $A \backslash B$, $A \cap B$ и $B \backslash A$ који су приказани на слици 3.4.4.

$$A \cup B = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$$
$$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$$
$$B = (B \backslash A) \cup (A \cap B)$$



Слика 3.4.4. *Разлагање догађаја $A \cup B$ на дисјунктне догађаје*

Применом својства адитивности за унију дисјунктних догађаја добија се једнакост:

$$P(A \cup B) = P(A\backslash B) + P(A \cap B) + P(B\backslash A).$$

Када би се десној страни ове једнакости додала, а затим и одузела вероватноћа $P(A \cap B)$ добила би се следећа једнакост:

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A\backslash B) + P(A \cap B)}_{P(A)} + \underbrace{P(B\backslash A) + P(A \cap B)}_{P(B)} - P(A \cap B).$$

Даљим сређивањем добија се:

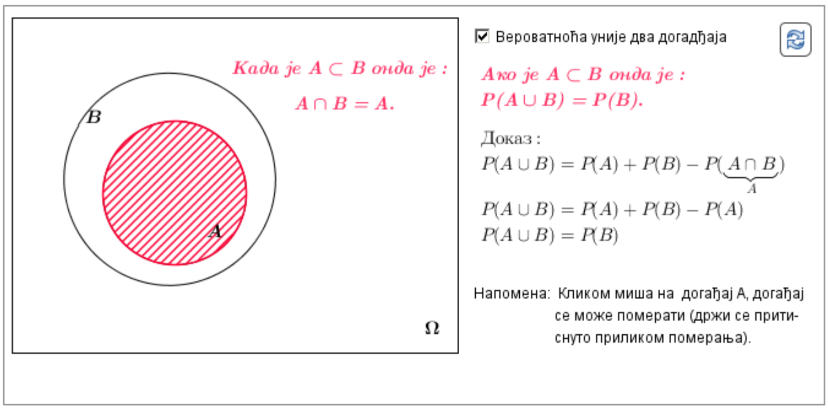
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

што је и требало доказати.

$\square$

Напомена: Може се приметити да се у случају када је $A \cap B = \emptyset$ добија једнакост $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (јер је $P(\emptyset) = 0$). Дакле, својство 3) представља специјални случај теореме 3.4.3.

На крају овог поглавља у оквиру електронског материјала је приказан аплет у коме је изведена једнакост $P(A \cup B) = P(B)$, која важи ако је $A \subset B$ (Слика 3.4.5).



Слика 3.4.5. *Аплет у оквиру кога је приказан доказ специјалног случаја теореме 3.4.3*

Специјални случај теореме 3.4.3: Ако је $A \subset B$, онда је $P(A \cup B) = P(B)$. Како је $A \subset B$ важи $A \cap B = A$, па се заменом у једнакост:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

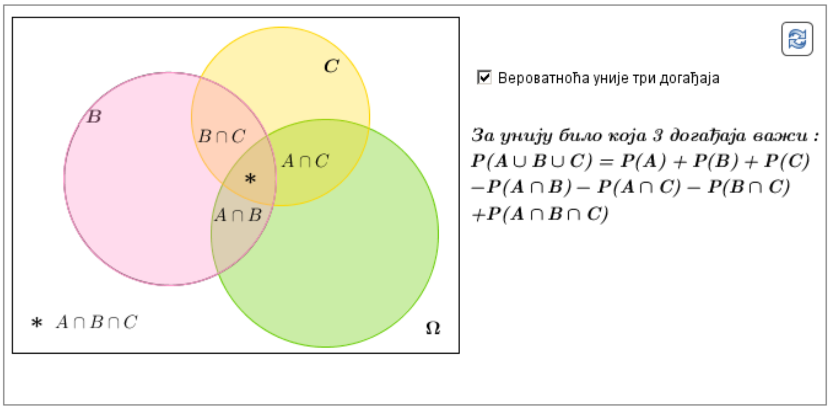
добија

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A),$$

тј.

$$P(A \cup B) = P(B).$$

Поред поменутог извођења аплет пружа приказ једнакости која важи за унију било која три догађаја (Слика 3.4.6).



Слика 3.4.6. *Аплет у оквиру кога је приказана вероватноћа уније било која три догађаја*

За унију три произвољна догађаја важи:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \quad (5)$$

Формула (5) се често користи приликом решавања задатака.

3.4.1 Примери

Пример 3.4.1. *За догађаје A и B је познато $P(A) = \frac{1}{4}$ и $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Одредити $P(B)$ ако је:*

а) $A \cap B = \emptyset$;

б) $A \subset B$.

Решење: **а)** Како су дати догађаји дисјунктни важи $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, па се добија да је $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$.

б) У овом случају је $A \subset B$, па се на основу тога може закључити да важи $P(A \cup B) = P(B)$, односно $P(B) = \frac{1}{3}$. △

Пример 3.4.2. *Из шпила од* 52 *карте извлаче се истовремено четири карте. Одредити вероватноћу догађаја да се међу извученим картама налази:*

а) *тачно једна треф карта;*

б) *бар једна треф карта;*

в) *све четири треф карте;*

г) *ниједна треф карта.*

Решење: Приликом решавања овог примера биће коришћена својства вероватноће. Познато је да се међу 52 карте налази 13 треф карата.

$$52 = 13\clubsuit + \underbrace{13\diamondsuit + 13\heartsuit + 13\spadesuit}_{39}$$

а) Нека је A догађај да је извучена тачно једна треф карта, па је: $P(A) = \dfrac{\binom{13}{1}\binom{39}{3}}{\binom{52}{4}}$.

б) Нека је B догађај да је извучена бар једна треф карта, а $\overline{B}$ ниједна извучена карта није треф.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}}$$

в) Нека је C догађај да су извучене све четири треф карте, па је $P(C) = \dfrac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}$.

г) Нека је D догађај да није извучена треф карта, па је: $P(D) = \dfrac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}}$. △

Пример 3.4.3. *Од* 100 *читалаца,* 60 *чита Новости,* 40 *Политику,* 37 *Блиц,* 20 *Новости и Политику,* 15 *Новости и Блиц,* 7 *Политику и Блиц, а* 5 *сва три. За анкету се случајно бира један читалац. Колика је вероватноћа да ће случајно изабрани читалац да чита:*

а) *најмање два листа;*

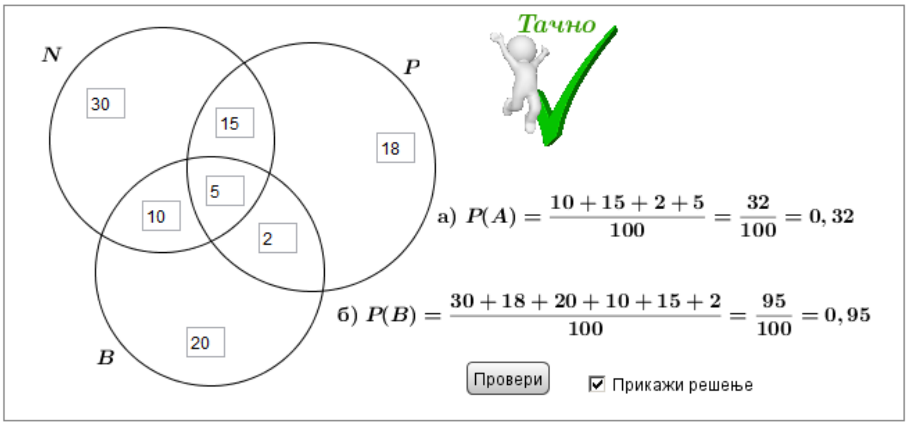
б) *не више од два листа?*

Нека је A догађај да изабрани читалац чита најмање два лист, а B догађај да изабрани читалац чита не више од два лист.

Решење примера 3.4.3 је приказано помоћу одговарајућег аплета (Слика 3.4.1.1). Аплет је креиран тако да се у свако текстуално поље уноси одговарајући број читалаца. На основу Веновог дијаграма одређују се тражене вероватноће:

$$P(A)=\frac{10+15+2+5}{100}=\frac{32}{100}=0,32,\quad P(B)=\frac{30+18+20+10+15+2}{100}=\frac{95}{100}=0,95.$$

Такође постоји и опција провере решења кликом на дугме ,,*Провери*". Уколико задатак није тачно решен, поступак се може видети уколико се изабере опција ,,*Прикажи решење*".



Слика 3.4.1.1. *Аплет помоћу кога је приказано решење примера 3.4.3*

4 Условна вероватноћа и независност

4.1 Условна вероватноћа

До сада се говорило о вероватноћи неког датог догађаја, али шта се дешава са вероватноћом тог догађаја ако је познато да се реализовао неки други догађај. Односно, често ће бити потребно да се одреди вероватноћа неког догађаја при одређеном услову. Због тога се оваква вероватноћа назива ***условна вероватноћа.***

У циљу што бољег схватања појма условне вероватноће биће анализиран следећи пример.

Пример 4.1.1. *Коцка за игру се баца два пута. Одредити вероватноћу да је збир добијених вредности мањи од 7, ако се зна да није пала јединица.*

Решење: Нека су догађаји означени на следећи начин: A-није пала јединица, B-збир добијених вредности је мањи од 7.
Свих могућих елементарних исхода укупно има 36. Елементарних исхода повољних за догађај A има 25, елементарних исхода повољних за догађај B има 16, а исхода повољних за пресек $A \cap B$ има 6. Дакле, вероватноће ових догађаја су $P(A) = \frac{25}{36}$, $P(B) = \frac{16}{36}$ и $P(A \cap B) = \frac{6}{36}$. Приликом разматрања условне вероватноће догађаја B користићемо ознаку $P(B|A)$. Како се зна да није пала јединица, онда је број свих елементарних исхода 25, а број повољних исхода је 6, па је условна вероватноћа $P(B|A) = \frac{6}{25}$. Може се приметити да је условна вероватноћа једнака количнику $\frac{6/36}{25/36}$, односно, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. △

Дефиниција 4.1.1. *Условна вероватноћа догађаја B при услову A је број*

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

где је $P(A) > 0$.

Из дефиниције следи једнакост

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

која је позната и као формула множења вероватноћа. Уопштена формула множења вероватноћа је

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}),$$

где је $P(A_1A_2...A_{n-1}) > 0$.

Својства условне вероватноће

Следећом теоремом биће формулисана основна својства условне вероватноће.

Теорема 4.1.1. *Нека је* $P(A) > 0$, *тада важи:*

1) $P(A|A) = 1$, $P(\Omega|A) = 1$ *и* $P(\emptyset|A) = 0$;

2) *Ако је* $A \subset B$, *онда је* $P(B|A) = 1$;

3) *Ако је* $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, *онда је* $P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A)$;

4) $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)$.

Доказ: Дате једнакости се могу доказати директном применом дефиниције.

1)

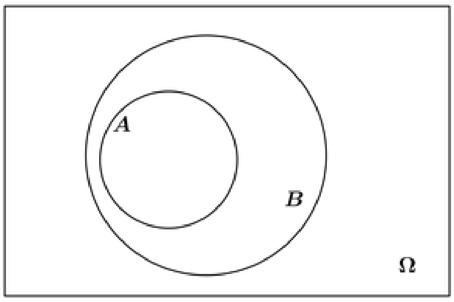
$$P(A|A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$$P(\Omega|A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$$P(\emptyset|A) = \frac{P(\emptyset \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

2) Ако је $A \subset B$, онда је $A \cap B = A$.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$



Слика 4.1.1. *Догађаји* A и B

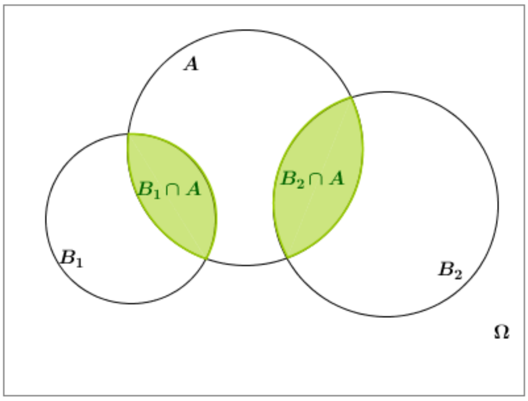
3)

$$P(B_1 \cup B_2|A) = \frac{P((B_1 \cup B_2) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A))}{P(A)}$$

Како су догађаји B_1 и B_2 дисјунктни, онда су и догађаји $B_1 \cap A$ и $B_2 \cap A$ такође дисјунктни, па се добија:

$$\frac{P((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A))}{P(A)} = \frac{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} =$$

$$= P(B_1|A) + P(B_2|A) \Rightarrow P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A).$$



Слика 4.1.2. *Дисјунктни догађаји*

4) Из доказаног првог својства $P(\Omega|A) = 1$ може се доћи до тражене једнакости. Како је $\Omega = B \cup \overline{B}$ добија се:

$$P(B \cup \overline{B}|A) = 1.$$

Пошто су догађај B и њему супротан догађај $\overline{B}$ дисјунктни, применом трећег својства долази се до једнакости

$$P(B|A) + P(\overline{B}|A) = 1,$$

односно

$$P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A).$$

4.2 Независност и зависност

Нека су A и B два догађаја. Ако реализација једног од ова два догађаја не утиче на вероватноћу реализације другог догађаја, онда се каже да су ти догађаји ***независни,*** тј. $P(A|B) = P(A)$, а ако утиче, онда се каже да су ти догађаји ***зависни.***

Ако се једнакост $P(A|B) = P(A)$ уврсти у формулу за условну вероватноћу $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ добија се: $P(A) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, односно $P(AB) = P(A)P(B)$.

Такође треба размотрити, да ли ако догађај A не зависи од догађаја B важи и обратно, тј. и догађај B не зависи од догађаја A.

Ако би се сада једнакост $P(B|A) = P(B)$ уврстили у формулу за условну вероватноћу, даљим сређивањем би се поново дошло до једнакости $P(AB) = P(A)P(B)$. Дакле, може се закључити да важи и обратно.

Овим разматрањем се долази и до формалне дефиниције независности догађаја.

Дефиниција 4.2.1. *Догађаји A и B су* ***независни*** *ако и само ако важи једнакост*

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Ако једнакост није испуњена догађаји су ***зависни.***

Пример 4.2.1. *У кутији су три плаве и пет зелених куглица. Случајно се извлаче две куглице, једна за другом, без враћања. Одредити вероватноћу да су обе извучене куглице зелене боје.*

Решење: Нека је A догађај да је прва извучена куглица зелене боје, а B догађај да је друга извучена куглица зелене боје.

Прво је потребно размотрити да ли су ова два догађаја зависна или независна. У кутији има укупно осам куглица па је $P(A) = \frac{5}{8}$. Након првог извлачења остало је укупно седам куглица од којих су четири зелене. Дакле, вероватноћа догађаја B зависи од реализације догађаја A, па је $P(B|A) = \frac{4}{7}$. Тражена вероватноћа је

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}.$$

△

Теорема 4.2.1. *Ако су догађаји A и B независни, онда су независни и догађаји:*

1) *A и $\overline{B}$;*

2) *$\overline{A}$ и B;*

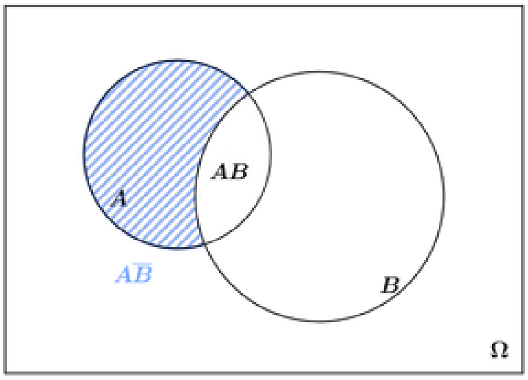
3) *$\overline{A}$ и $\overline{B}$.*

Доказ:

1) Догађаји A и B су независни па важи једнакост $P(AB) = P(A)P(B)$.

$$P(A\overline{B}) = P(A \backslash AB) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$$

Значи важи једнакост $P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$ па су догађаји A и $\overline{B}$ независни.



Слика 4.2.1. *Пресек догађаја* A и $\overline{B}$

2) Аналогно претходном случају доказује се независност догађаја $\overline{A}$ и B.

3) У овом случају се користе претходно доказане независности.

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\Omega\backslash(A\cup B)) = P(\Omega) - P(A\cup B) = 1 - P(A\overline{B}\cup AB\cup \overline{A}B) =$$

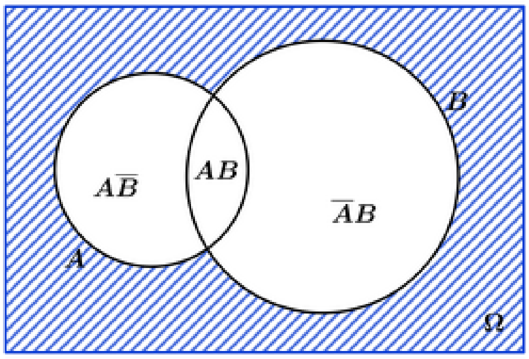
$$= 1 - (P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B)) = 1 - (P(A)P(\overline{B}) + P(A)P(B) + P(\overline{A})P(B))$$

$$= 1 - (P(A)(P(\overline{B}) + P(B)) + P(\overline{A})P(B)) = 1 - (P(A)P(\Omega) + P(\overline{A})P(B))$$

$$= 1 - (P(A) + P(\overline{A})P(B)) = \underbrace{1 - P(A)}_{P(\overline{A})} - P(\overline{A})P(B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A})P(B)$$

$$= P(\overline{A})\underbrace{(1 - P(B))}_{P(\overline{B})} = P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

Значи, важи једнакост $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$ па су догађаји $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независни.



Слика 4.2.2. *Пресек догађаја* $\overline{A}$ и $\overline{B}$

□

Пример 4.2.2. *Доказати да су дисјунктни догађаји зависни.*

Решење: Како је $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, онда је $P(A)P(B) > 0$. Догађаји A и B су дисјунктни, тј. $AB = \emptyset$, па је $P(AB) = P(\emptyset) = 0$. На основу овога може се закључити да је $P(AB) \neq P(A)P(B)$, односно да су догађаји зависни. △

Дефиниција 4.2.2. *Догађаји* $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ *су потпуно независни ако за свако* $k \in \{2, 3, ..., n\}$ *и сваки подскуп* $A_{j_1},\ A_{j_2},\ ...,\ A_{j_k},\ j_1 < j_2 < ... < j_k \leqslant n$, *важи једнакост*

$$P(A_{j_1}A_{j_2}...A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdot ...\cdot P(A_{j_k}).$$

Дефиниција 4.2.3. *Догађаји* $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ *су независни у паровима, ако за произвољне различите догађаје* A_i *и* A_j *важи* $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j),\ 1 \leq i < j \leq n$.

Пример 4.2.3. *Новчић се баца два пута. Проверити да ли су догађаји:* $A = \{ПП,\ ПГ\}$, $B = \{ПП,\ ГП\}$ *и* $C = \{ПП,\ ГГ\}$ *потпуно независни.*

Решење: Скуп свих могућих елементарних исхода је $\Omega = \{ПП, ПГ, ГП, ГГ\}$. Вероватноће догађаја су $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, а вероватноће пресека су $P(AB) = P(BC) = P(CA) = P(ABC) = \frac{1}{4}$ (јер је једини елементарни исход повољан за наведене пресеке ПП). Дакле, испуњене су једнакости:

$$\frac{1}{4} = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4} = P(BC) = P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4} = P(CA) = P(C)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

што значи да су догађаји независни у паровима.

Да би догађаји били потпуно независни мора да буде испуњена и једнакост

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

Провером се може закључити да једнакост није испуњена, тј.

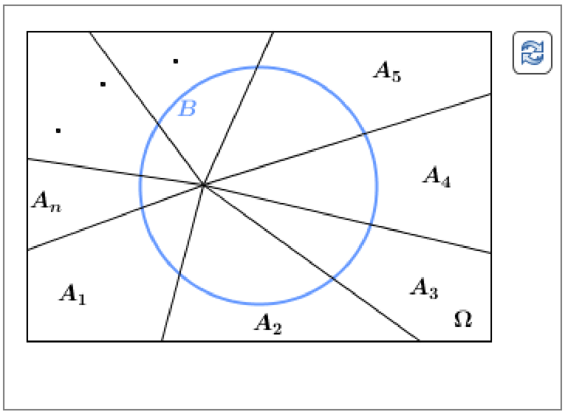
$$\frac{1}{4} = P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

па догађаји нису потпуно независни. $\triangle$

4.3 Формула тоталне вероватноће

Теорема 4.3.1. *Нека је скуп Ω представљен у облику уније међусобно дисјунктних скупова, тј. $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ и нека је $B \subset \Omega$. Тада важи*

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j).$$



Слика 4.3.1. *Разлагање догађаја B на унију дисјунктних догађаја*

Доказ: Пошто је $B \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, онда догађај B може да се представи у облику $B = BA_1 \cup BA_2 \cup ... \cup BA_n$. Догађаји $A_1, A_2, ..., A_n$ су дисјунктни па су и догађаји $BA_1, BA_2, ..., BA_n$ такође дисјунктни. Вероватноћа догађаја B је:

$$P(B) = P(BA_1 \cup BA_2 \cup ... \cup BA_n) = P(BA_1) + P(BA_2) + ... + P(BA_n) = \sum_{j=1}^{n} P(BA_j).$$

Применом формуле множења вероватноћа добија се

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j).$$

$\square$

Напомена: Пресек догађаја B и неког од догађаја $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ може да буде празан.

Бајесова формула

Нека је скуп Ω *представљен у облику уније међусобно дисјунктних скупова, тј.* $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ *и нека је* $B \subset \Omega$. *На основу формуле множења вероватноћа за свако* $1 \leq j \leq n$ *важи:*

$$P(A_jB) = P(BA_j) = P(B)P(A_j|B).$$

Даљим сређивањем добија се:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)}.$$

На основу формуле тоталне вероватноће важи формула

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)},$$

која је позната под називом Бајесова [17] *формула.*

Пример 4.3.1. *Три стрелца при гађању погађају мету редом са вероватноћама* $p_1 = 0,2,\ p_2 = 0,4$ *и* $p_3 = 0,8$. *Случајно се бира један од три стрелца да гађа мету. Одредити вероватноћу:*

1) *да ће мета бити погођена;*

2) *да је мету погодио други стрелац, ако се зна да је мета погођена.*

Решење: Приликом решавања биће коришћене следеће ознаке:

[17] Томас Бајес (Thomas Bayes, (1702-1761) је био енглески математичар.

A_1-изабран је први стрелац,

A_2-изабран је други стрелац,

A_3-изабран је трећи стрелац.

Наведени догађаји су једнако вероватни, односно $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$.

1) B-мета је погођена

Приликом одређивања вероватноће догађаја B користиће се формула тоталне вероватноће.

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(A_j)P(B|A_j) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) =$$

$$= \frac{1}{3}P(B|A_1) + \frac{1}{3}P(B|A_2) + \frac{1}{3}P(B|A_3) = \frac{1}{3}(P(B|A_1) + P(B|A_2) + P(B|A_3))$$

Условне вероватноће $P(B|A_1),\ P(B|A_2),\ P(B|A_3)$ могу се објаснити на следећи начин:

$P(B|A_1)-$вероватноћа да је мета погођена под условом да је гађао први стрелац,

$P(B|A_2)-$ вероватноћа да је мета погођена под условом да је гађао други стрелац,

$P(B|A_3)-$ вероватноћа да је мета погођена под условом да је гађао трећи стрелац.

Ово су заправо дате вероватноће p_1, p_2 и p_3, па је

$$P(B) = \frac{1}{3}(0,2 + 0,4 + 0,8) = \frac{1}{3} \cdot 1,4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{15}.$$

2) Користи се Бајесова формула.

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,4}{\frac{7}{15}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{7}{15}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}$$

△

5 Геометријска вероватноћа

У овом поглављу се уводи појам геометријске вероватноће и обрађују се одговарајући примери. Примери су визуелно обрађени уз помоћ GeoGebra анимација. У оквиру електронског материјала се помоћу button компоненти, које су имплементиране у код html документа, успоставља веза између формулација датих проблема и самих GeoGebra анимација.

Такође ће бити формулисан и визуелно приказан Бертранов парадокс.

5.1 Појам геометријске вероватноће

Увођењем овог новог појма биће приказано да скуп елементарних исхода може да буде на пример нека дуж, или геометријска фигура у равни, или неко геометријско тело у простору. Односно, у општем случају, Ω је скуп у простору $\mathbf{R^n}$, где је $n \in \{1,2,3\}$. Елементарни исходи су у овом случају тачке, а догађај A ће бити подскуп скупа Ω.

Када би се вероватноћа дефинисала као што је то био случај до сада, онда би вероватноћа елементарних исхода ω (тј. вероватноћа за сваку тачку скупа Ω) заправо била

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

јер је Ω непребројив скуп ($|\Omega|$-број елемената скупа Ω). Због овога се геометријска вероватноћа дефинише на следећи начин.

Дефиниција 5.1.1. *Вероватноћа догађаја A је број*

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где су $m(A)$ и $m(\Omega)$ у једнодимензионалном случају дужине, у дводимензионалном случају површине, а у тродимензионалном случају запремине.

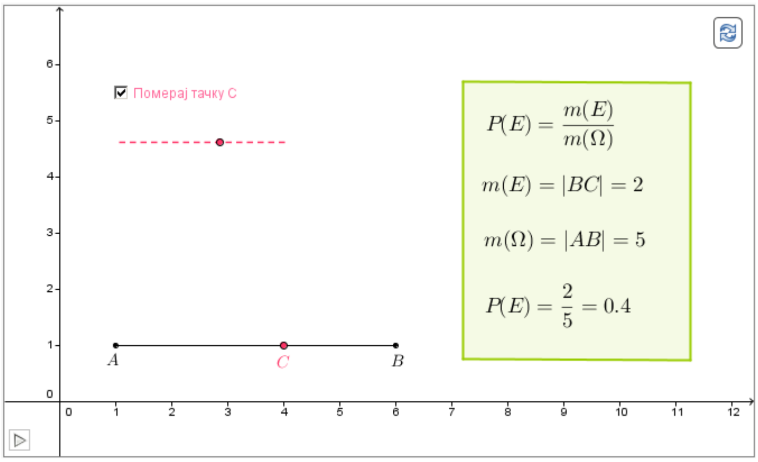
Такође треба напоменути да вероватноћа догађаја A не зависи од положаја тог догађаја у скупу Ω.

Једнодимензионални простор $\mathbf{R^1}$

Пример 5.1.1. *Дата је дуж AB дужине $5cm$ и тачка C која припада дужи тако да је $|BC| = 2cm$. Случајно се бира тачка D која припада дужи AB ($D \neq C$). Одредити вероватноћу да случајно изабрана тачка припада дужи BC.*

Решење: Догађај $E-$сучајно изабрана тачка припада дужи BC. Користи се геометријска дефиниција вероватноће $P(E) = \dfrac{m(E)}{m(\Omega)}$, где је $m(E) = |BC| = 2$ и $m(\Omega) = |AB| = 5$, па је $P(E) = \dfrac{2}{5} = 0,4$. △

Визуелни приказ овог примера приказан је на слици 5.1.1. Аплет има две опције које приказују промену положаја тачке C и промену дужине дужи AB. Аплет такође исписује вероватноћу догађаја E у зависности од тога како се мењају поменути положаји. Променом положаја тачке C мења се и вероватноћа догађаја E јер се мења дужина дужи BC. Такође се може приметити да када се тачка C поклопи са тачком A ради се о вероватноћи сигурног догађаја, тј. $P(E) = P(\Omega) = 1$. Ако се тачка C поклопи са тачком B вероватноћа је $P(E) = 0$. Међутим, променом дужине дате дужи, вероватноћа догађаја остаје иста јер однос дужина дужи AB и BC остаје исти.



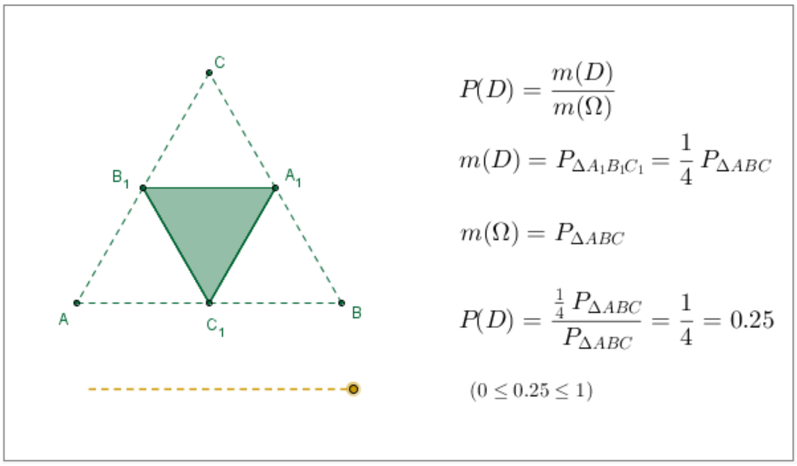
Слика 5.1.1. *Анимација примера геометријске вероватноће у једнодимензионалном случају*

Дводимензионални простор $\mathbf{R}^2$

Пример 5.1.2. *Случајно се бира једна тачка из једнакостраничног троугла ABC. Нека су тачке A_1, B_1 и C_1, редом, средишта страница BC, AC и AB. Одредити вероватноћу да случајно изабрана тачка припада троуглу $A_1B_1C_1$.*

Решење: Догађај $D-$случајно изабрана тачка припада троуглу $A_1B_1C_1$. Троуглови $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, C_1BA_1 и B_1A_1C су једнакостранични и међусобно подударни, па површина троугла $A_1B_1C_1$ представља четвртину површине троугла ABC. Да би се одредила вероватноћа догађаја D користи се дефиниција геометријске вероватноће $P(D) = \dfrac{m(D)}{m(\Omega)}$, где је $m(D) = P_{\triangle A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{4}P_{\triangle ABC}$ и $m(\Omega) = P_{\triangle ABC}$, па је $P(D) = \dfrac{1}{4} = 0,25$. $\triangle$

На одговарајућем аплету се може покренути анимација која демонстрира подударност поменутих троуглова.



Слика 5.1.2. *Анимација примера геометријске вероватноће у дводимензионалном случају*

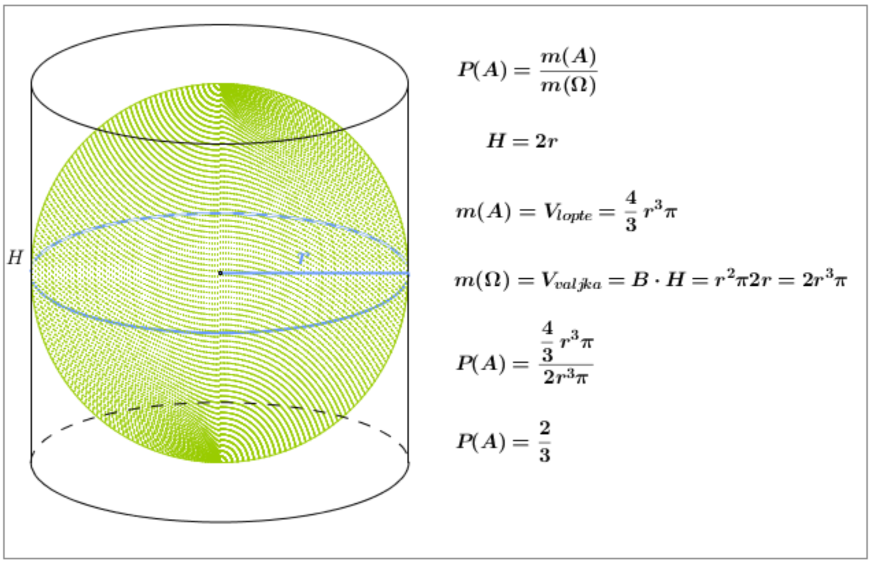
Тродимензионални простор $\mathbf{R}^3$

Пример 5.1.3. *У ваљак код кога је $H = 2r$, уписана је лопта. Случајно се бира тачка у унутрашњости ваљка. Одредити вероватноћу да случајно изабрана тачка припада унутрашњости лопте.*

Решење: Догађај $A-$случајно изабрана тачка припада унутрашњости лопте. Применом формуле добија се:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$
$$m(A) = V_{lopte} = \frac{4}{3}r^3\pi$$
$$m(\Omega) = V_{valjka} = B \cdot H = r^2\pi 2r = 2r^3\pi$$
$$P(A) = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{2r^3\pi} = \frac{2}{3}.$$

△



Слика 5.1.3. *Анимација примера геометријске вероватноће у тродимензионалном случају*

5.2 Примери геометријске вероватноће

Пример 5.2.1. *Случајно се бира једна тачка на тежишној дужи AA_1 троугла ABC. Ако је T тежиште тог троугла, одредити вероватноћу да изабрана тачка припада:*

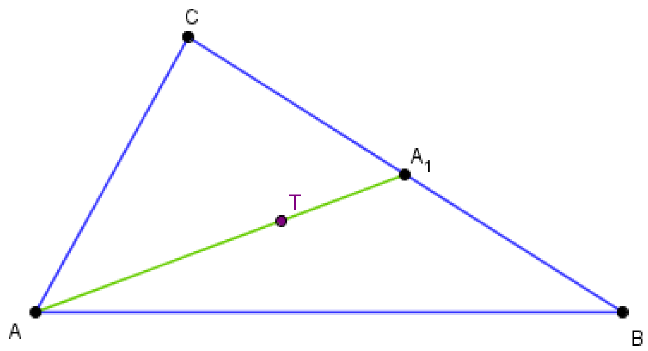
1) дужи AT;

2) дужи TA_1.

Решење: **1)** Нека је догађај $A-$тачка припада дужи AT. Применом формуле добија се

$P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$, где је $m(A) = \dfrac{2}{3}|AA_1|$ и $m(A) = |AA_1|$, па је $P(A) = \dfrac{\frac{2}{3}|AA_1|}{|AA_1|} = \dfrac{2}{3}$.

2) Нека је догађај $A-$тачка припада дужи TA_1. Применом формуле добија се $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$, где је $m(A) = \dfrac{1}{3}|AA_1|$ и $m(A) = |AA_1|$, па је $P(A) = \dfrac{\frac{1}{3}|AA_1|}{|AA_1|} = \dfrac{1}{3}$.



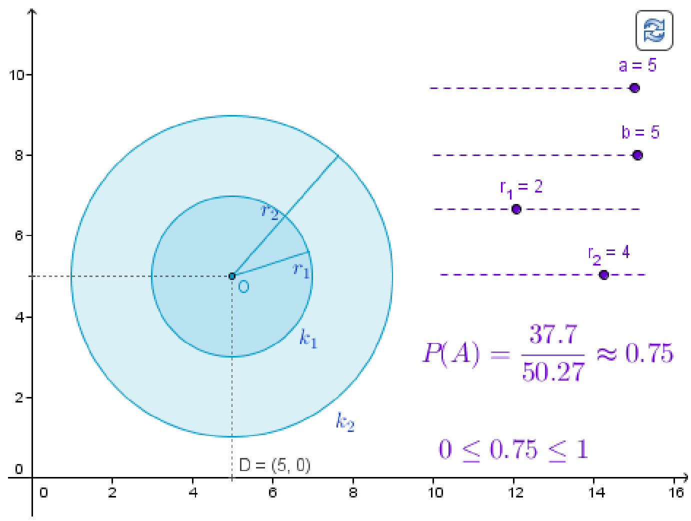
Слика 5.2.1. *Троугао и његово тежиште*

△

Пример 5.2.2. *Дата су два концентрична круга полупречника 2 cm и 4 cm. Случајно се бира тачка у већем кругу. Одредити вероватноћу да се случајно изабрана тачка нађе у кружном прстену.*

Решење: Нека је A догађај да случајно изабрана тачка припада прстену. Применом дефиниције добија се:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{P_2 - P_1}{P_2} = \frac{r_2^2\pi - r_2^2\pi}{r_2^2\pi} = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\pi}{r_2^2\pi} = \frac{16-4}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

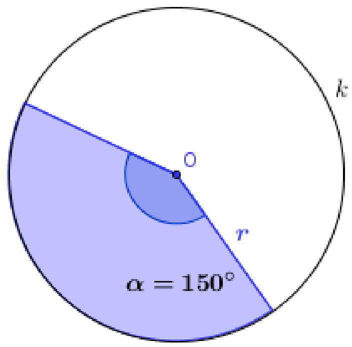


Слика 5.2.2. *Аплет који израчунава вероватноћу прстена*

Може се приметити да је увек испуњен услов $0 \leqslant p \leqslant 1$, без обзира на положај концентричних кругова у координатном систему и дужине полупречника. Уз овај пример је креиран и аплет који показује да услов остаје испуњен. Положај концентричних кругова и дужине полупречника се мењају помоћу клизача. △

Пример 5.2.3. *У кругу полупречника r случајно се бира тачка. Одредити вероватноћу да случајно изабрана тачка припада кружном исечку чији је централни угао* $150°$.

Решење: Нека је догађај A−тачка је унутар исечка. Применом формуле добија се $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, где је $m(A) = P_i = \frac{r^2\pi}{360°}\alpha$ и $m(\Omega) = P_k = r^2\pi$, па је $P(A) = \frac{\frac{r^2\pi\alpha}{306°}}{\frac{r^2\pi}{1}} = \frac{\alpha}{360°} \approx 0,42.$

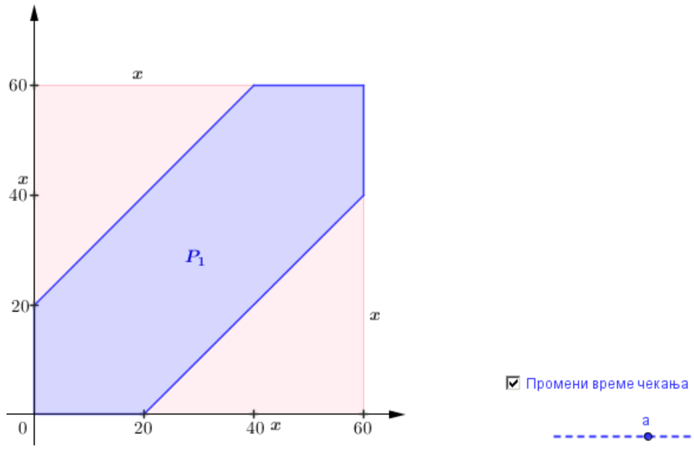


Слика 5.2.3. *Кружни исечак*

△

Пример 5.2.4. *Два пријатеља су се договорила да се нађу између* 12 *и* 13 *часова и да на уговореном месту чекају један другог највише* 20 *минута. Колика је вероватноћа да ће доћи до сусрета?*

Решење: Нека је x и y време доласка два пријатеља, а A догађај да је дошло до сусрета. Да би се догађај A реализовао мора да буде испуњен услов $|x-y| \leq 20$, тј. $x-20 \leqslant y \leqslant x+20$. Скуп Ω је скуп свих тачака из квадрата чија је дужина странице 60 (јер је договор да се нађу између 12 и 13). Тражена вероватноћа се одређује применом геометријске дефиниције вероватноће $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$, где је $m(A) = P_1 = P_{\square} - 2P_{\triangle}$, односно $m(A) = a^2 - 2 \cdot \dfrac{x^2}{2} = a^2 - x^2$ и $m(\Omega) = P_{\square} = a^2$, па је $P(A) = \dfrac{a^2 - x^2}{a^2} = \dfrac{2000}{3600} \approx 0,56$.



Слика 5.2.4. *Аплет који одређује вероватноћу сусрета*

На слици 5.2.4 је приказан аплет који одређује вероватноћу сусрета. Помоћу датог клизача време чекања се може мењати, тако да се уочава како се мења вероватноћа променом времена чекања (мења се површина P_1). $\triangle$

Пример 5.2.5. *На случајан начин бира се тачка* (x, y) *у квадрату* $[0,1] \times [0,1]$. *Колика је вероватноћа да за координате те тачке важи:*

1) $y \leqslant x^2$;

2) $y \leqslant \sin x$ *и* $y \leqslant \cos x$;

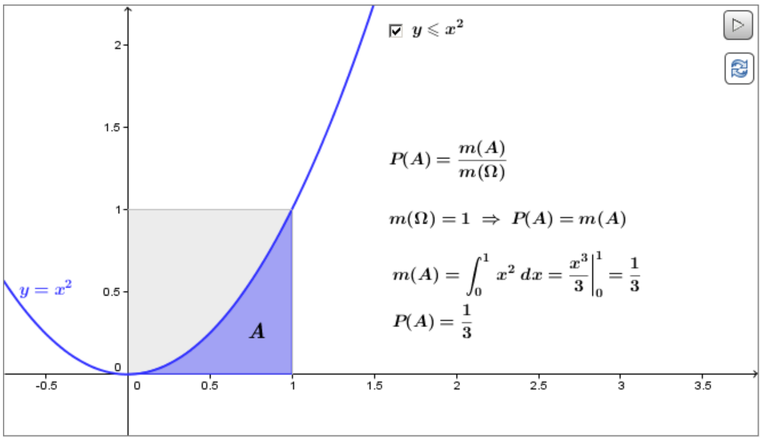
3) $x \leqslant y \leqslant \operatorname{tg} x$?

Решење: Користи се геометријска дефиниција вероватноће $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$. Уочава се да је $m(\Omega) = 1^2 = 1$, па одатле следи да је $P(A) = m(A)$.

1) Дакле, коначна вероватноћа се добија тако што се одреди $m(A)$.

$$m(A) = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Решење овог примера је приказано помоћу аплета приказаног на слици 5.2.5.



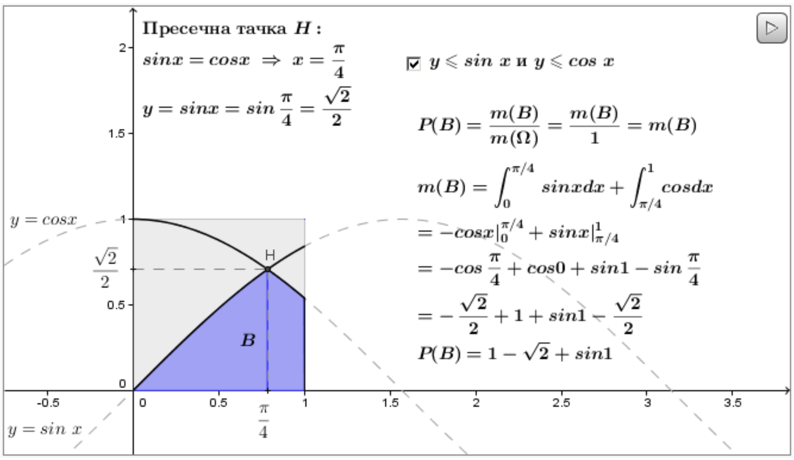
Слика 5.2.5. *Аплет који одређује вероватноћу при датим условима*

2) Да би се одредила тражена вероватноћа потребно је прво нацртати графике функција $y = \sin x$ и $y = \cos x$, а затим одредити повољну област B која испуњава услове $y \leqslant \sin x$ и $y \leqslant \cos x$. Пресечна тачка функције $\sin x$ и $\cos x$ на интервалу $[0, 1]$ је $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Површина области B се може наћи помоћу одређеног интеграла.

$$\begin{aligned} m(B) &= \int_0^{\pi/4} \sin x dx + \int_{\pi/4}^{1} \cos x dx \\ &= -\cos x\big|_0^{\pi/4} + \sin x\big|_{\pi/4}^{1} \\ &= -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 + \sin 1 - \sin\frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \sin 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Дакле, добија се:

$$P(B) = 1 - \sqrt{2} + \sin 1.$$



Слика 5.2.6. *Аплет који одређује вероватноћу при датим условима*

3) И у овом случају се користи исти поступак решавања.

$$P(C) = m(C) = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx + \int_{\pi/4}^{1} dx - \int_0^1 x dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\ dx + x|_{\pi/4}^{1} - \frac{x^2}{2}\ \Big|_0^1$$

Након увођења смене $t = \cos x$ за први интеграл добија се:

$$= -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t} + 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

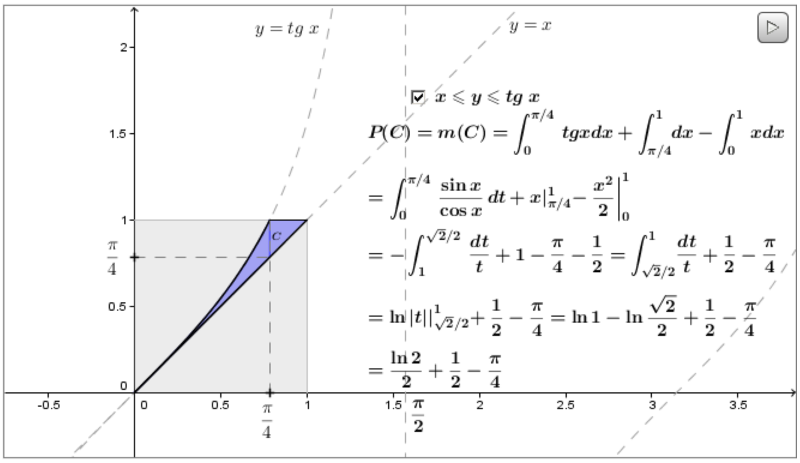
$$= \ln|t||_{\sqrt{2}/2}^{1} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$= -\ln\sqrt{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = -\ln 2^{\frac{1}{2}} + \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}\ \ln 2 + \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Коначно се добија:

$$P(C) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$



Слика 5.2.7. *Аплет који одређује вероватноћу при датим условима*

△

Пример 5.2.6. *Дуж дужине a подељена је на три деле. Одредити вероватноћу да се од добијених делова може конструисати троугао.*

Решење: Нека је x дужина првог дела, а y дужина другог, тако да се овај проблем може свести на проблем случајног одабира тачке чије су координате (x, y). Посматра се само први квадрант јер дужине делова не могу бити негативне и како је дужина дужи a онда мора да буде испуњен и услов $x + y < a$. Овако добијена област представља скуп свих елементарних исхода.

Да би се од добијених делова могао конструисати троугао мора да буде испуњена неједнакост троугла.

$$1)\ x + y > a - x - y \Rightarrow y > \frac{a}{2} - x$$

$$2)\ x + a - x - y > y \Rightarrow y < \frac{a}{2}$$

$$3)\ y + a - x - y > x \Rightarrow x < \frac{a}{2}$$

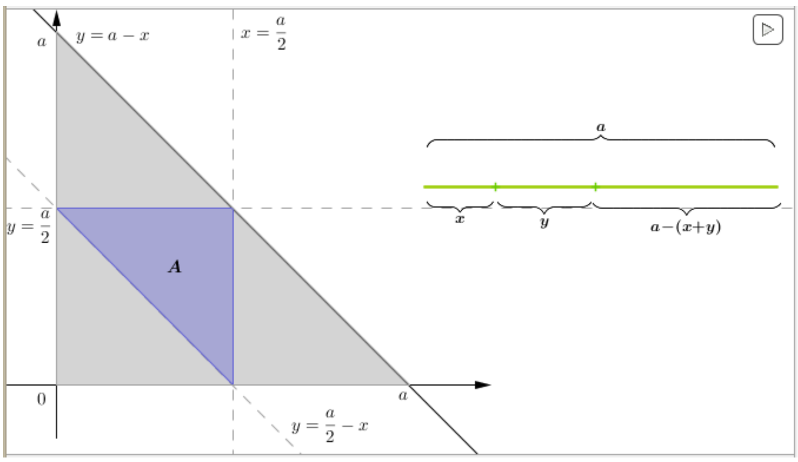
На овај начин се добија област која представља скуп елементарних исхода повољних за догађај A (Слика 5.2.8). Применом геометријске дефиниције вероватноће добија се:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

$$m(\Omega) = \frac{a^2}{2}$$

$$m(A) = \frac{1}{4} m(\Omega) = \frac{a^2}{8}$$

$$P(A) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{8}{a^2} = \frac{1}{4}.$$



Слика 5.2.8. *Аплет који одређује повољну област*

△

5.3 Бертранов парадокс

Овај проблем је добио име по математичару *Јозефу Бертрану* [18] и може се формулисати на следећи начин.

Нека је троугао ABC, ***једнакостранични троугао око кога је описан круг*** k. ***Случајно се бира тетива круга*** k. ***Одредити вероватноћу да случајно изабрана тетива буде дужа од странице троугла*** ABC.

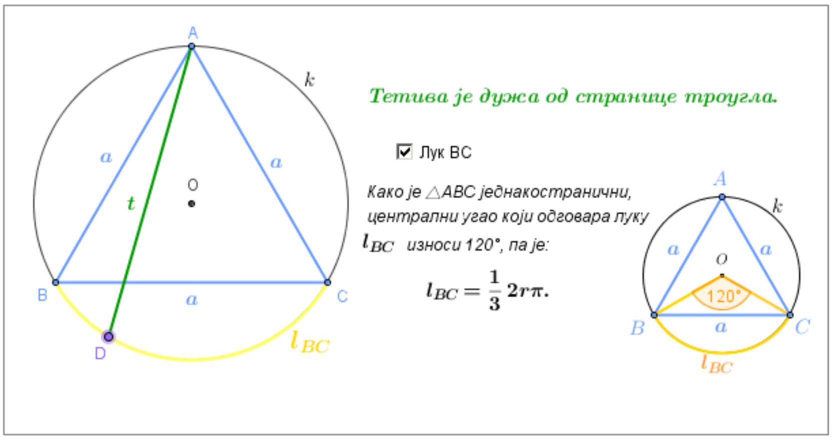
У зависности од тога на који начин се случајно бира тетива круга k, овај проблем се може разматрати на три начина и добити три различита решења.

Нека је A догађај да је случајно изабрана тетива круга k дужа од странице троугла ABC.

Први начин:

Нека је тачка D тачка која припада кружној линији. Тачке A и D су крајње тачке тетиве t, при чему је A фиксна тачка. Како је тачка A фиксна, онда се случајним избором тетиве може сматрати избор друге крајње тачке D тетиве t. Тетива t ће бити дужа од странице a троугла ABC ако тачка D припада луку l_{BC} који не садржи тачку A. Лук l_{BC}[19] представља трећину кружне линије. Дакле, тражена вероватноћа је:

$$P(A) = \frac{l_{BC}}{O_k} = \frac{\frac{1}{3}2r\pi}{2r\pi} = \frac{1}{3}.$$



Слика 5.3.1. *Визуелизација првог решења проблема*

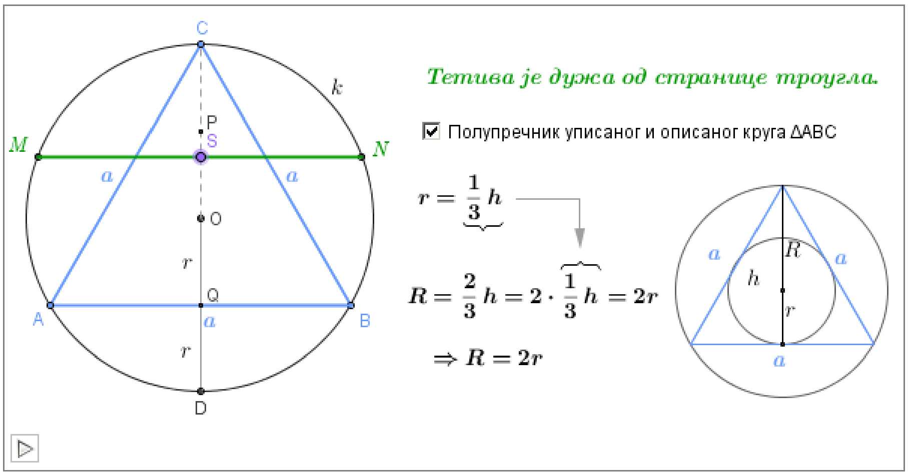
[18] Joseph Louis Francois Bertrand (1822-1900) је био француски математичар који се бавио нумеричком теоријом, диференцијалном геометријом, теоријом вероватноће, економијом и термодинамиком. Био је професор на Универзитету у Француској. Поред овог парадокса још један парадокс у теорији игара носи његово име.

[19] Како је $\triangle ABC$ једнакостранични, централни угао који одговара луку l_{BC} износи 120°, па је: $l_{BC} = \frac{1}{3}2r\pi$.

Други начин:

Нека је CD пречник који је нормалан на страницу AB троугла ABC и нека је MN тетива која је паралелна са страницом AB, а P и Q средишта дужи CO и OD. Нека је S пресечна тачка тетиве MN и пречника CD. Случајним избором тетиве се може сматрати избор тачке S која припада пречнику CD. Тетива ће бити дужа од странице a ако тачка S припада дужи PQ. Значи, вероватноћа се одређује као количник дужина дужи PQ и CD. Пошто је $PQ = 2r$, $CD = 2R$ и $R = 2r$, [20] добија се:

$$P(A) = \frac{PQ}{CD} = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2}.$$



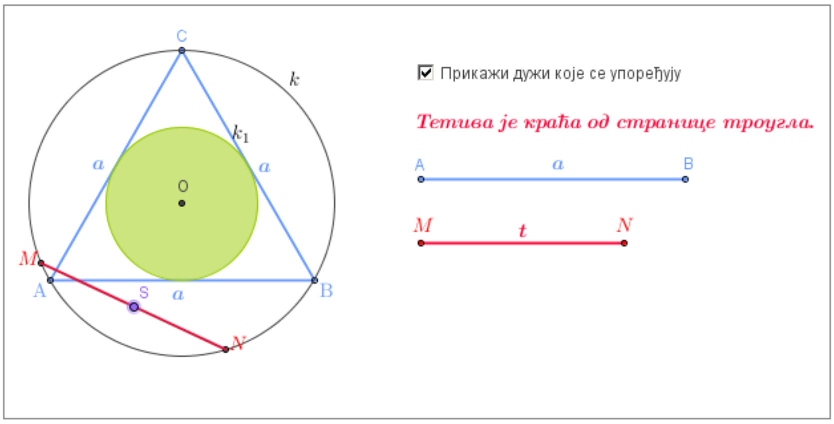
Слика 5.3.2. *Визуелизација другог решења проблема*

Трећи начин:

Нека је круг k_1 уписан у троугао ABC и нека је MN тетива круга k, а S средиште тетиве MN. У овом случају, случајним избором тетиве може се сматрати избор њеног средишта S у унутрашњости описаног круга. Тетива ће бити дужа од странице a ако тачка S припада унутрашњости круга уписаног у троугао ABC. Вероватноћа се одређује као количник површина уписаног и описаног круга. На основу разматрања из претходног случаја познато је да је $R = 2r$, па је:

$$P(A) = \frac{P_u}{P_o} = \frac{r^2\pi}{R^2\pi} = \frac{r^2}{(2r)^2} = \frac{r^2}{4r^2} = \frac{1}{4}.$$

[20] Како код једнакостраничног троугла важи $r = \frac{1}{3}h$ и $R = \frac{2}{3}h$, заменом се добија $R = 2r$.



Слика 5.3.3. *Визуелизација трећег решења проблема*

Закључак

Дакле, приликом разматрања сва три начина добијају се различите вероватноће иако се ради о истом догађају. Ово се дешава зато што проблем није прецизно дефинисан. Односно, мора се прецизно дефинисати шта се подразумева под случајним избором тетиве круга.

За сваки од случајева је креиран одговарајући GeoGebra аплет. На аплету приказаном на слици 5.3.1 положај тачке D, а самим тим и тетиве t, се може мењати помоћу миша. На аплетима приказаним на слици 5.3.2 и слици 5.3.3 положај тачке S, па и тетиве t, се може мењати. Са променом положаја ових елемената исписује се и пратећа порука која говори о томе да ли је тетива дужа од странице троугла или не. Помоћу ових аплета се на интерактиван начин пружа визуелни приказ датог поблема.

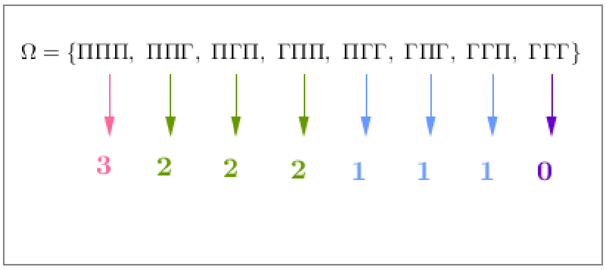
6 Случајне величине

6.1 Закон расподеле вероватноћа случајне величине

У овом делу ће бити дефинисан појам случајне величине. Како би се што боље схватио овај појам прво ће бити анализиран следећи пример.

Пример 6.1.1. *Баца се новчић три пута. Посматра се колико пута је пало писмо приликом та три бацања.*

Прво се одређује скуп свих елементарних исхода. Сваком елементарном исходу придружује се број који представља број појављивања писма.



Слика 6.1.1. *Скуп елементарних исхода*

На овај начин се добија функција која пресликава скуп свих елементарних исхода у скуп реалних бројева. Ова функција се означава са $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$. Значи важи:

$$X(PPP) = 3,\ X(PPG) = X(PGP) = X(GPP) = 2,$$

$$X(PGG) = X(GPG) = X(GGP) = 1,\ X(GGG) = 0.$$

Дакле, бројеви који се придружују елементарним исходима су $3, 2, 1$ и 0. Ова функција се назива ***случајна величина.***

Дефиниција 6.1.1. *Нека је* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ *простор вероватноћа са коначно много исхода. Функција* $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, *за коју важи*
1) $\{\omega | X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F}$, *за свако* $x \in \mathbf{R}$,
2) $P\{\omega | X(\omega) = -\infty\} = P\{\omega | X(\omega) = +\infty\} = 0$,
назива се случајна величина.

Вероватноћа реализације сваког од исхода скупа Ω је $\frac{1}{8}$. Вероватноћа догађаја да случајна величина X узме вредност i, где је $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, се одређује на следећи начин:

$$P\{X = 0\} = P\{GGG\} = \frac{1}{8},$$

$$P\{X = 1\} = P\{PGG\} + P\{GPG\} + P\{GGP\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8},$$

$$P\{X = 2\} = P\{PPG\} + P\{PGP\} + P\{GPP\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8},$$

$$P\{X = 3\} = P\{PPP\} = \frac{1}{8}.$$

Запис који се користи је

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Ово је ***закон расподеле вероватноћа*** случајне величине X.
Може се такође приметити да је збир $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$.
Уопштено расподела вероватноћа случајне величине X одређена је вредностима $x_1, x_2, ..., x_n$ које може да узме и вероватноћама $p_1, p_2, ..., p_n$ са којима узима наведене вредности па се пише $P\{X = x_k\} = p_k,\ k = 1, 2, ..., n$, или краће $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ p_1 & p_2 & ... & p_n \end{pmatrix}$. Такође важи једнакост $p_1 + \ p_2 + \ ... \ + p_n = 1$.

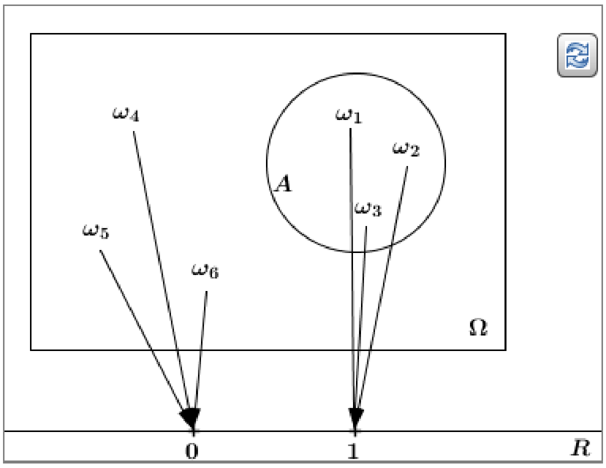
Дефиниција 6.1.2. *Случајна величина је дискретног типа ако узима коначно или пребројиво много вредности.*

Индикатор догађаја A

Нека је $A \subset \Omega$ произвољан догађај и нека је његова вероватноћа $P(A) = p$. Функција $I_A : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ одређена са

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

зове се индикатор догађаја A.



Слика 6.1.2. *Индикатор догађаја А*

Вероватноћа да индикатор догађаја A узме вредност 1 једнака је вероватноћи догађаја A, односно важи

$$P\{I_A = 1\} = P(A) = p.$$

Вероватноћа да индикатор догађаја A узме вредност 0 је $1 - P(A) = 1 - p$. На основу овога закона расподеле вероватноћа индикатора догађаја A је $I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-p) & p \end{pmatrix}$.

Дефиниција 6.1.3. *Случајна величина која узима вредност 0 са вероватноћом $1 - p$, а вредност 1 са вероватноћом p зове се Бернулијева* [21] *случајна величина.*

[21] Jacob Bernoulli (1654-1705), је швајцарски математичар. Био је професор математике на Универзитету у Базелу од 1687 године. Докторат Ars Conjectandi који је написао је допринео у великој мери развоју теорије вероватноће. Докторат је постхумно објављен 1713 (осам година након смрти аутора).

Биномна случајна величина

Изводи се n независних експеримената, под истим условима, са два могућа исхода, успех и неуспех. Успех се означава са 1 са вероватноћом p, а неуспех са 0 са вероватноћом $1-p$.

Нека је ознака за случајну величину која представља број успеха у n независних експеримената S_n. Ова случајна величина може узети вредности $0, 1, 2, ..., n$. Исходи су уређене $n-$торке нула и јединица. На пример, један повољан исход је

$$\underbrace{01100101...01000}_{n},$$

од чега је k јединица и $n-k$ нула. Оваквих исхода има $\binom{n}{k}$ јер се од n места бира k за јединице, док на преосталих $n-k$ места стоје нуле. Пошто су експерименти независни, вероватноћа сваке $n-$торке је $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, где је $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. На основу овог разматрања уводи се следећа дефиниција.

Дефиниција 6.1.4. *Случајна величина S_n чија је расподела одређена са*

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0, 1, 2, ..., n\},$$

зове се биномна случајна величина са параметрима n и p.

Може се видети да је Бернулијева случајна величина заправо специјални случај биномне случајне величине за $n = 1$. Биномна случајна величина S_n се може представити у облику збира n Бернулијевих случајних величина, тј. $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$, где је

$$I_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

индикатор успеха у $k-$том експерименту (I_k узима вредност 1 при успеху или вредност 0 при неуспеху).

Са случајним величинама се могу вршити аритметичке операције при чему се опет добијају случајне величине. На пример, нека су X и Y случајне величине, онда су и $X+Y,\ X-Y,\ Y+3,\ XY,\ X^2$ и друге, такође случајне величине. Ово важи и за више случајних величина. Да би могле да се одреде расподеле новодобијених случајних величина потребно је прво дефинисати једну функционалну карактеристику коју имају случајне величине од којих се полази.

6.2 Функција расподеле случајне величине

Дефиниција 6.2.1. *Нека је дата случајна величина X. Функција $F_X : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ за коју је $F_X(x) = P\{X \leqslant x\}$ назива се* ***функција расподеле*** *случајне величине X.*

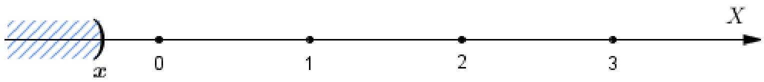
Ова функција сваком реалном броју додељује вероватноћу одговарајућег случајног догађаја.

Пример 6.2.1. *Одредити функцију расподеле случајне величине X чији је закон расподеле*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

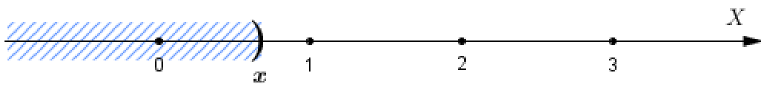
Случајна величина X узима вредности 0, 1, 2 и 3. Разликује се више случајева у зависности од тога ком интервалу припада x.

1) Ако је $x < 0$, онда је $F_X(x) = P\{X < x\} = 0$.



Слика 6.2.1. *Приказ случаја када је* $x < 0$

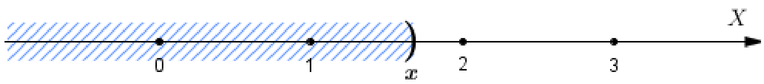
2) Ако је $0 \leqslant x < 1$, онда је $F_X(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} = \dfrac{1}{8}$.



Слика 6.2.2. *Приказ случаја када је* $0 \leqslant x < 1$

3) Ако је $1 \leqslant x < 2$, онда је

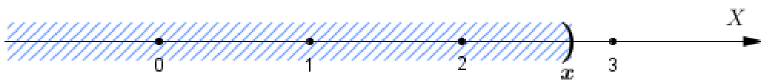
$$F_X(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$



Слика 6.2.3. *Приказ случаја када је* $1 \leqslant x < 2$

4) Ако је $2 \leqslant x < 3$, онда је

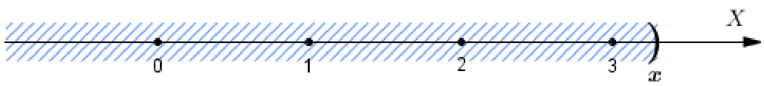
$$F_X(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}.$$



Слика 6.2.4. *Приказ случаја када је* $2 \leqslant x < 3$

5) Ако је $x \geqslant 3$, онда је

$$F_X(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

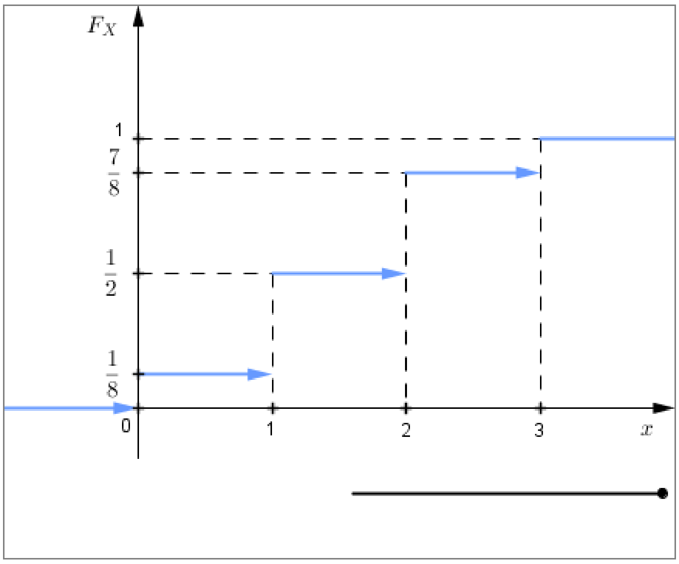


Слика 6.2.5. *Приказ случаја када је* $x \geqslant 3$

Обично се користи краћи запис:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \leqslant x < 3 \\ 1, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

Након овог разматрања може се нацртати график функције расподеле случајне величине X. График ове функције је приказан аплетом чији изглед може да се види на слици 6.2.6.



Слика 6.2.6. *График функције случајне величине* X

Расподела вероватноћа случајне величине X једнозначно је одређена њеном функцијом расподеле и обрнуто.

Помоћу функције расподеле случајне величине X може се израчунати колика је вероватноћа да та случајна величина узме вредност у интервалу облика $(a, b]$:

$$P\{X \in (a, b]\} = P\{a < X \leqslant b\} = P\{X \leqslant b\} - P\{X \leqslant a\} = F_X(b) - F_X(a).$$

Основна својства функције расподеле

1) F_X је неопадајућа функција, односно важи $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leqslant F_X(x_2)$.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$

3) Функција F је непрекидна са десне стране, тј. за свако $a \in \mathbf{R}$ важи

$$\lim_{x \to a+0} F_X(x) = F_X(a).$$

6.3 Густина случајне величине

Овај део ће бити посвећен функцији расподеле апсолутно непрекидног типа. При дефинисању се уводи нови појам: ***густина расподеле*** случајне величине, а затим ће бити речено нешто више о густини расподеле.

Дефиниција 6.3.1. *Функција расподеле* $F_X : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *је апсолутно непрекидног типа ако постоји ненегативна функција* f *тако да се функција расподеле* F_X *може представити у облику*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

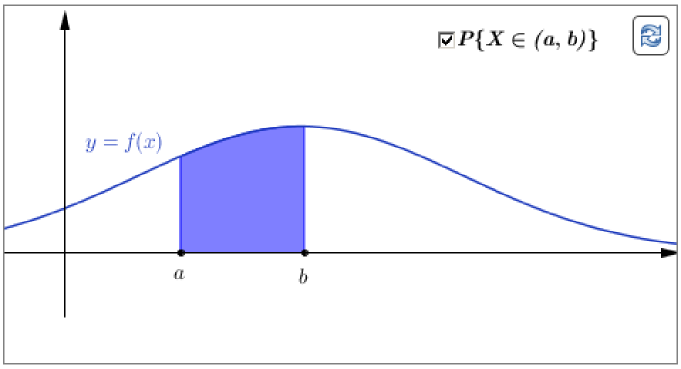
За функцију $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *важи* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. *Функција* f *се зове* ***густина расподеле*** *случајне величине* X.

Дакле, вредност функције F_X у тачки x је једнака површини између апцисе и графика функције $f(t)$ над интервалом $(-\infty, x)$.

Вероватноћа да непрекидна случајна величина узме вредност из интервала (a, b) једнака је

$$P\{a < X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F_X(b) - F_X(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$



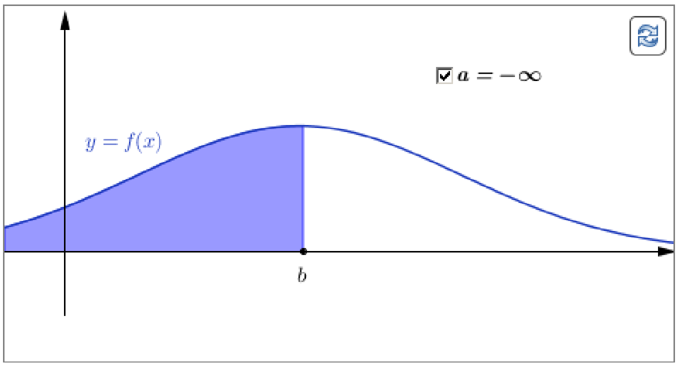
Слика 6.3.1. *График функције густине расподеле*

Такође за непрекидну случајну величину важе и једнакости:

$$P\{a < X < b\} = P\{a \leqslant X < b\} = P\{a < X \leqslant b\} = P\{a \leqslant X \leqslant b\},$$

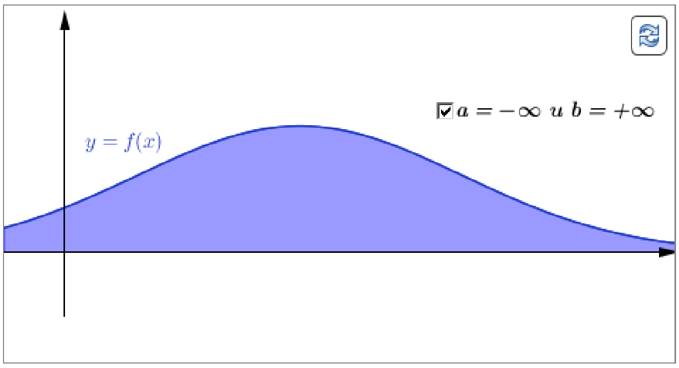
јер је $P\{X = x\} = 0$ за сваки реалан број x.

За $a = -\infty$ добија се $P\{X < b\} = F_X(b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$,



Слика 6.3.2. *График функције густине расподеле*

а за $a = -\infty$ и $b = +\infty$ добија се $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.



Слика 6.3.3. *График функције густине расподеле*

Може се приметити да се диференцирањем интеграла из дефиниције 6.3.1 добија $F'_X(x) = f(x)$ за сваку тачку x у којој је функција f непрекидна.

У овом делу је такође креиран аплет чији је изглед приказан на слици 6.3.1, слици 6.3.2 и слици 6.3.3. На аплету се, у зависности од чекираног поља, приказује геометријска интерпретација вероватноће да случајна величина узме вредност из датог интервала. Такође се пружа могућност промене граница a и b помоћу миша. Како се мењају границе тако се мења приказана површина, а самим тим и вероватноћа.

6.4 Математичко очекивање

Математичко очекивање и дисперзија се сврставају у нумеричке карактеристике случајне величине. Математичко очекивање односно очекивана вредност је заправо просечна вредност која се очекује при великом броју понављања случајног експеримента.

Дефиниција 6.4.1. *Нека је X случајна величина чији је закон расподеле*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

При чему је $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. *Математичко очекивање случајне величине* X *је број*

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Пример 6.4.1. *Нека је случајна величина* X *број добијен бацањем коцкице за игру. Одредити математичко очекивање случајне величине* X.

Решење: Како су исходи једнако вероватни, закон расподеле случајне величине X је

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Применом дефиниције добија се:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

△

Дефиниција 6.4.2. *Нека је* X *случајна величина чији је закон расподеле*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

при чему је $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ *и нека је* $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *произвољна функција. Тада је* $g(X)$ *такође случајна величина са законом расподеле*

$$X : \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \ldots & g(x_n) \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}.$$

Математичко очекивање случајне величине $g(X)$ *је број*

$$E(g(X)) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + \ldots + g(x_n)p_n.$$

Пример 6.4.2. *Нека је закон расподеле случајне величине* X

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Одредити математичко очекивање случајне величине:

1) X^2;

2) 2^X;

3) $(X+1)^3$.

Решење: Прво је потребно одредити расподелу вероватноћа датих случајних величина.

1) Вредности функције $g(x) = x^2$ у тачкама $0,\ 1,\ 2,\ 3$ су:

$$g(0) = 0^2 = 0,\ g(1) = 1^2 = 1,\ g(2) = 2^2 = 4 \text{ и } g(3) = 3^2 = 9.$$

Дакле, расподела вероватноћа случајне величине X^2 је

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Применом дефиниције добија се да је

$$E(X^2) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,4 = 4,9.$$

2) Вредности функције $g(x) = 2^x$ у тачкама $0,\ 1,\ 2,\ 3$ су:

$$g(0) = 2^0 = 1,\ g(1) = 2^1 = 2,\ g(2) = 2^2 = 4 \text{ и } g(3) = 2^3 = 8.$$

Дакле, расподела вероватноћа случајне величине 2^X је

$$2^X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Применом дефиниције добија се да је

$$E(2^X) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,4 = 4,8.$$

3) Вредности функције $g(x) = (x+1)^3$ у тачкама $0,\ 1,\ 2,\ 3$ су:

$$g(0) = (0+1)^3 = 1,\ g(1) = (1+1)^3 = 8,\ g(2) = (2+1)^3 = 27 \text{ и } g(3) = (3+1)^3 = 64.$$

Дакле, расподела вероватноћа случајне величине $(X+1)^3$ је

$$(X+1)^3 : \begin{pmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Применом дефиниције добија се да је

$$E(X+1)^3 = 1 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,1 + 27 \cdot 0,3 + 64 \cdot 0,4 = 34,7.$$

$\triangle$

Дефиниција 6.4.3. *Нека је X случајна величина апсолутно непрекидног типа чија је густина расподеле $f(x)$, онда је математичко очекивање ове случајне величине*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \tag{6}$$

уколико такав интеграл постоји.

Пример 6.4.3. *Наћи математичко очекивање случајне величине X чија је густина расподеле:*

1) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases};$

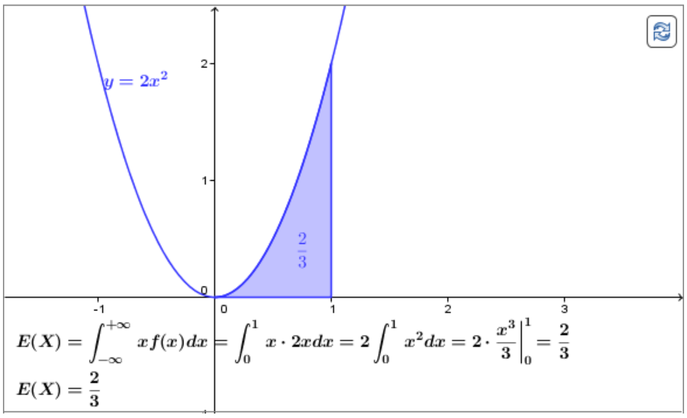
2) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2 - 4x + 5), & x \in [1,3] \\ 0, & x \notin [1,3] \end{cases}.$

Решење: Како је позната густина расподеле случајне величине X користи се формула (6).

1)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=2\int_0^1 x^2dx=2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

Дакле, добија се да је $E(X)=\dfrac{2}{3}$.



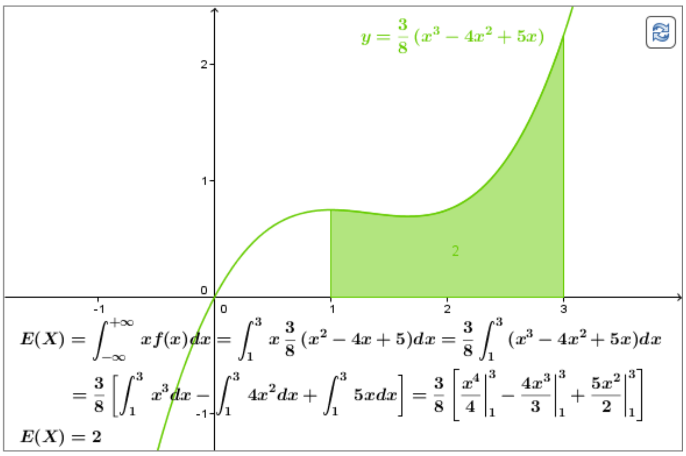
Слика 6.4.1. *Геометријска интерпретација очекивања*

2)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_1^3 x\frac{3}{8}(x^2-4x+5)dx=\frac{3}{8}\int_1^3(x^3-4x^2+5x)dx$$

$$=\frac{3}{8}\left[\int_1^3 x^3dx-\int_1^3 4x^2dx+\int_1^3 5xdx\right]=\frac{3}{8}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_1^3-\frac{4x^3}{3}\Big|_1^3+\frac{5x^2}{2}\Big|_1^3\right]$$

Значи, математичко очекивање је $E(X)=2$.



Слика 6.4.2. *Геометријска интерпретација очекивања*

△

Особине математичког очекивања

Нека су X и Y случајне величине и нека су a и b реални бројеви, онда важи:

1) $E(a) = a$;

2) $E(aX + b) = aE(X) + b$;

3) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

4) $E(XY) = E(X)E(Y)$, ако су X и Y међусобно независне случајне величине.

Докази ових особина се могу наћи у књизи [2].

6.4.1 Примери са решењима

Задатак 13. *Одредити матемтичко очекивање случајне величине X чији је закон расподеле:*

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \dfrac{1}{8} & \dfrac{2}{8} & \dfrac{2}{8} & \dfrac{2}{8} & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Решење: Применом дефиниције добија се:

$$E(X) = -2 \cdot \frac{1}{8} - 1 \cdot \frac{2}{8} + 0 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 0.$$

△

Задатак 14. *Нека је $P(A) = p$ и нека је I_A индикатор догађаја A. Одредити математичко очекивање индикатора.*

Решење: Закон расподеле индикатора је $I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, па је тражено математичко очекивање:

$$E(I_A) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

△

Задатак 15. *Математичко очекивање случајне величине X је $12,5$. Одредити математичко очекивање случајне величине:*

1) $\dfrac{X}{5}$;

2) $2X + 5$.

Решење: Како је познато математичко очекивање случајне величине X, могуће је применити особине математичког очекивања.

1) $E\left(\dfrac{X}{5}\right) = E\left(\dfrac{1}{5}X\right) = \dfrac{1}{5}E(X) = \dfrac{12,5}{5} = 2,5$

2) $E\left(2X + 3\right) = E(2X) + 3 = 2E(X) + 3 = 2 \cdot 12,5 + 3 = 25 + 3 = 28$ △

Задатак 16. *На путу кретања аутомобила налази се пет семафора. Вероватноћа заустављања на првом семафору је* $0,4$*, на другом* $0,6$*, на трећем* $0,5$*, на четвртом* $0,7$ *и на петом* $0,4$*. Описати случајну величину* $X-$*број семафора поред којих је аутомобил прошао до првог заустављања и одредити математичко очекивање случајне величине* X*.*

Решење: Вредности које случајна величина X може да узме су: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ и 5. Следеће што треба одредити су вероватноће са којима X узима ове вредности.

$P\{X=0\}=0,4$-вероватноћа да се аутомобил заустави већ на првом семафору

$P\{X=1\}=0,6\cdot 0,6=0,36$-вероватноћа да аутомобил прође поред првог, а заустави се на другом семафору

$P\{X=2\}=0,6\cdot 0,4\cdot 0,5=0,12$-вероватноћа да аутомобил прође поред првог и другог, а заустави се на трећем семафору

$P\{X=3\}=0,6\cdot 0,4\cdot 0,5\cdot 0,7=0,084$-вероватноћа да аутомобил прође поред првог, другог и трећег, а заустави се на четвртом семафору

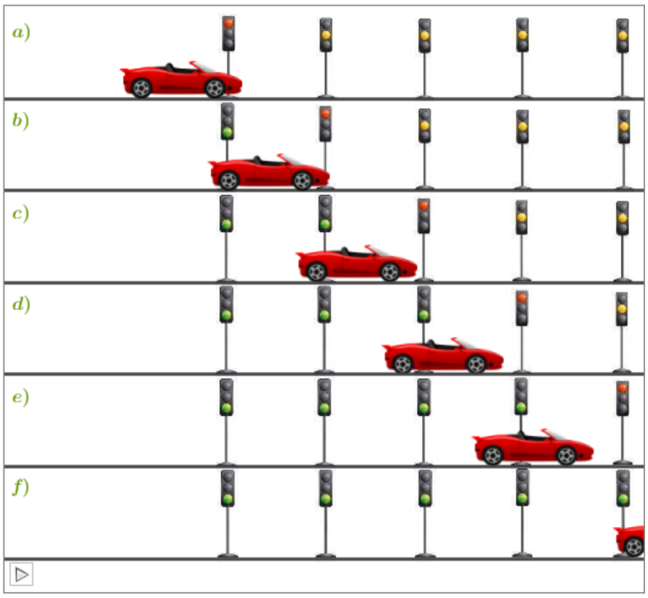
$P\{X=4\}=0,6\cdot 0,4\cdot 0,5\cdot 0,3\cdot 0,4=0,0144$-вероватноћа да аутомобил прође поред првог, другог, трећег и четвртог, а заустави се на петом семафору

$P\{X=5\}=0,6\cdot 0,4\cdot 0,5\cdot 0,3\cdot 0,6=0,0216$-вероватноћа да аутомобил прође поред свих пет семафора

Математичко очекивање је

$$E(X)=0\cdot 0,4+1\cdot 0,36+2\cdot 0,12+3\cdot 0,084+4\cdot 0,0144+5\cdot 0,0216=1,02.$$

△



Слика 6.5.1.1. *Аплет који даје илустрацију задатка 16*

6.5 Дисперзија

Пошто је математичко очекивање случајне величине X дефинисано у претходном делу, дисперзија случајне величине X ће бити дефинисана помоћу математичког очекивања. Дисперзија представља средње квадратно одступање случајне величине X од њеног математичког очекивања.

Дефиниција 6.5.1. *Нека је X случајна величина. Дисперзија случајне величине X је број*

$$D(X) = E(X - E(X))^2.$$

Број $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ се зове стандардно одступање случајне величине X.

Применом особина математичког очекивања добија се да важи:

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = E(X^2) - 2EXEX + (EX)^2$$

$$D(X) = E(X^2) - 2(EX)^2 + (EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

$$\Rightarrow D(X) = E(X^2) - (EX)^2.$$

Пример 6.5.1. *Одредити дисперзију случајне величине X чији је закон расподеле*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Решење: Како се дисперзија дефинише помоћу математичког очекивања, потребно је прво одредити матемтичко очекивање случајне величине X и случајне величине X^2.

$$E(X) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 1,1$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 = 1,9$$

Даљом применом дефиниције добија се да је дисперзија:

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 1,9 - (1,1)^2 = 1,9 - 1,21 = 0,69.$$

△

Дефиниција 6.5.2. *Нека је X случајна величина апсолутно непрекидног типа чија је густина расподеле $f(x)$ и нека је $E(X) = m$, онда је дисперзија ове случајне величине*

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x)dx.$$

Особине дисперзије

Нека су X и Y случајне величине и нека су a и b реални бројеви, онда важи:

1) $D(a) = 0$;

2) $D(aX + b) = a^2 D(X)$;

3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, ако су X и Y међусобно независне случајне величине.

Више о особинама дисперзије може се наћи у књизи [1].

Пример 6.5.2. *Нека је $P(A) = p$ и нека је I_A индикатор догађаја A. Одредити дисперзију индикатора.*

Решење: Закон расподеле индикатора је $I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, па је тражена дисперзија:

$$D(I_A) = E(I_A - EI_A)^2 = (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = p(1-p).$$

△

Пример 6.5.3. *Дисперзија случајне величине X је 5. Одредити дисперзију случајне величине:*

1) $X - 1$;

2) $2X$;

3) $-3X + 6$.

Решење: Пошто је позната дисперзија случајне величине X, тј. $D(X) = 5$, могу се користити наведене особине дисперзије.

1) $D\left(X - 1\right) = D(X) = 5,$ јер је $D(-1) = 0$

2) $D\left(2X\right) = 2^2 D(X) = 4 \cdot 5 = 20$

3) $D\left(-3X + 6\right) = (-3)^2 \cdot D(X) + D(6) = 9 \cdot 5 + 0 = 45$ △

Пример 6.5.4. *Ако су X и Y независне случајне величине доказати да важи једнакост*

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Решење: Коришћењем особина дисперзије добија се:

$$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 \cdot D(Y) = D(X) + D(Y).$$

△

Још примера овог типа може се наћи у збиркама [5], [6] и [7].

7 Закон расподеле вероватноћа случајних величина

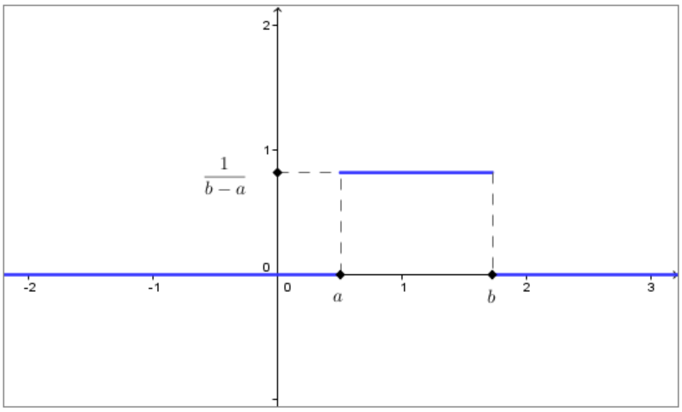
У овом поглављу ће бити дефинисане расподеле случајних величина које се најчешће појављују у теорији вероватноће, математичкој статистици и применама. Помоћу GeoGebra анимација биће представљени одговарајући графици густина расподела и функција расподела.

7.1 Униформна расподела

Униформна или равномерна расподела на интервалу $[a,b]$ означава се са $\mathcal{U}[a,b]$, а ознака $X \in \mathcal{U}[a,b]$ се користи како би се нагласило да случајна величина X има униформну расподелу.

Дефиниција 7.1.1. *Униформна расподела на интервалу* $[a,b]$ *одређена је густином расподеле*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$



Слика 7.1.1. *Аплет који показује како се мења изглед функције густине расподеле*

Функција расподеле случајне величине $X \in \mathcal{U}[a,b]$ се одређује на основу дефиниције, тј.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

1) Ако је $x < 0$, онда је $F_X(x) = 0$.

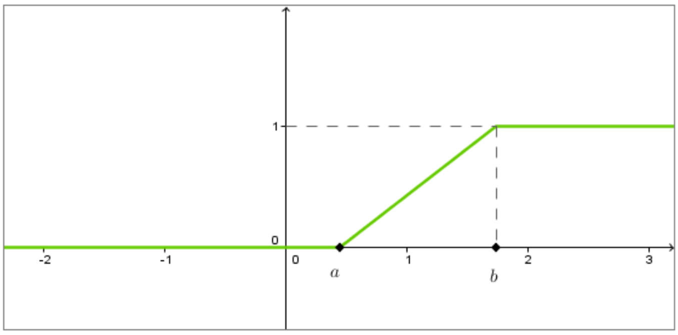
2) Ако је $a \leqslant x < b$, онда је

$$F_X(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{1}{b-a}\, t \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

3) Ако је $x \geqslant b$, онда је $F_X(x) = 1$.

Дакле, одговарајућа функција расподеле је:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$$



Слика 7.1.2. *Аплет који показује како се мења изглед функције расподеле*

Пример 7.1.1. *Одредити математичко очекивање и дисперзију случајне величине* $X \in \mathcal{U}[a, b]$.

Решење: Математичко очекивање се одређује на следећи начин.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Да би се одредила дисперзија случајне величине X прво треба одредити $E(X^2)$ јер је $D(X) = E(X^2) - (EX)^2$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \end{aligned}$$

Како је $(EX)^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}$, даљим сређивањем се добија:

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\ &= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} \\ &= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}. \end{aligned}$$

△

Напомена: Помоћу функције расподеле $F_X(x)$ случајне величине X може се израчунати вероватноћа догађаја $\{a < X < b\}$:

$$P\{a < X < b\} = F_X(b) - F_X(a).$$

7.1.1 Решени задаци

Задатак 17. *Случајна величина* X *има униформну расподелу на интервалу* $[2,4]$. *Одредити функцију расподеле случајне величине* X *и одредити:*

1) $P\{X \leqslant 3\}$;

2) $P\{1 < X \leq 2,5\}$;

3) $P\{2,5 \leq X \leq 3,5\}$.

Решење: Како је $X \in \mathcal{U}[2,4]$, густина расподеле је: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [2,4] \\ 0, & x \notin [2,4]. \end{cases}$

Одговарајућа функција расподеле случајне величине X се одређује на следећи начин.

1) Ако је $x < 2$, онда је $F_X(x) = 0$.

2) Ако је $2 \leqslant x < 4$, онда је

$$F_X(x) = \int_2^x f(t)dt = \int_2^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\, t \mid_2^x = \frac{x-2}{2}.$$

3) Ако је $x \geqslant 4$, онда је $F_X(x) = 1$.

Дакле, одговарајућа функција расподеле је

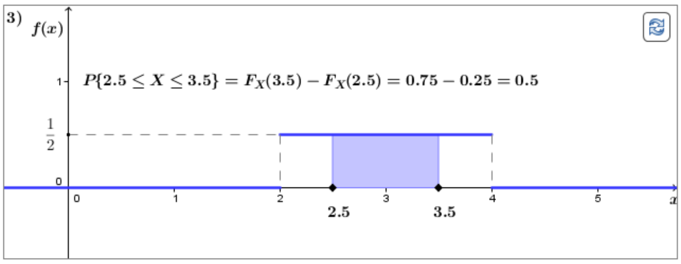
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{x-2}{2}, & 2 \leqslant x < 4 \\ 1, & x \geqslant 4. \end{cases}$$

Помоћу добијене функције расподеле могу се одредити тражене вероватноће.

1) $P\{X \leq 3\} = F_X(3) = 0,5$

2) $P\{1 < X \leq 2,5\} = F_X(2,5) - F_X(1) = 0,25 - 0 = 0,25$

3) $P\{2,5 \leq X \leq 3,5\} = F_X(3,5) - F_X(2,5) = 0,75 - 0,25 = 0,5$



Слика 7.1.1.1. *Аплет који рачуна вероватноћу* $P\{a \le X \le b\}$

△

Задатак 18. *Случајна величина* X *има униформну расподелу на интервалу* $[a, b]$. *Ако је дужина интервала* 2 *и* $E(X) = 3$, *одредити* a *и* b.

Решење: Густина расподеле случајне величине X за коју важи $X \in \mathcal{U}[a, b]$ је

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,\ b] \\ \\ 0, & x \notin [a,\ b]. \end{cases}$$

Даље се користи дато математичко очекивање.

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Пошто је $E(X) = 3$, добија се:

$$\frac{a+b}{2} = 3 \ \Rightarrow \ a + b = 6.$$

Решавањем система:

$$\begin{array}{c} a + b = 6 \\ \underline{b - a = 2} \end{array}$$

долази се до решења $a = 2$ и $b = 4$. Дакле, $X \in \mathcal{U}[2, 4]$. △

Задатак 19. *Нека је* $X \in \mathcal{U}[0, 1]$ *и нека су* $c > 0$ *и* d *константе. Одредити расподелу вероватноћа случајне величине* $Y = cX + d$.

Решење: Густина расподеле случајне величине X за коју важи $X \in \mathcal{U}[0, 1]$ је

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases}$$

а одговарајућа функција расподеле је

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Функција расподеле случајне величине Y за $x \in [d, c+d]$ одређује се на следећи начин:

$$F_Y(x) = P\{Y \leqslant x\} = P\{cX + d \leqslant x\} = P\{cX \leqslant x - d\} = P\left\{X \leqslant \frac{x-d}{c}\right\} = F_X\left(\frac{x-d}{c}\right).$$

Дакле, случајна величина Y има униформну расподелу на интервалу $[d, c+d]$, односно $Y \in \mathcal{U}[d, c+d]$. △

Задатак 20. *Нека је* $X \in \mathcal{U}[0,1]$. *Одредити густину расподеле случајне величине:*

1) $Y = X^2$;

2) $Z = \sqrt{X}$.

Решење: Пошто је позната расподела случајне величине X, могуће је одредити њену густину расподеле $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$$

и одговарајућу функцију расподеле $F_X(x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

1) За $x \in (0,1]$ функција расподеле случајне величине Y је

$$F_Y(x) = P\{Y \leqslant x\} = P\{X^2 \leqslant x\} = P\{X \leqslant \sqrt{x}\} = F_X(\sqrt{x}) = \sqrt{x},$$

па је густина расподеле

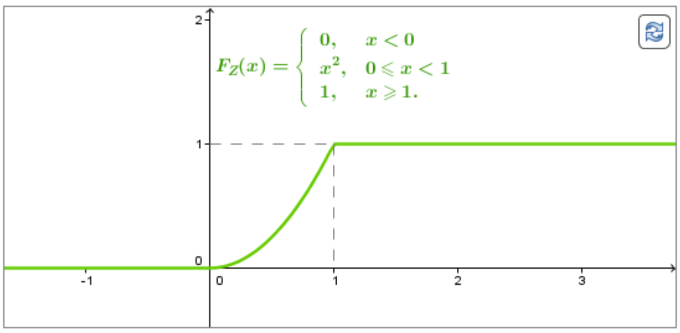
$$f_Y(x) = F_Y'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2) За $x \in [0,1]$ функција расподеле случајне величине Z је

$$F_Z(x) = P\{Z \leqslant x\} = P\{\sqrt{X} \leqslant x\} = P\{X \leqslant x^2\} = F_X(x^2) = x^2,$$

па је густина расподеле

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = (x^2)' = 2x.$$



Слика 7.1.1.2. *Аплет који кликом на одговарајуће дугме црта графике функција*

△

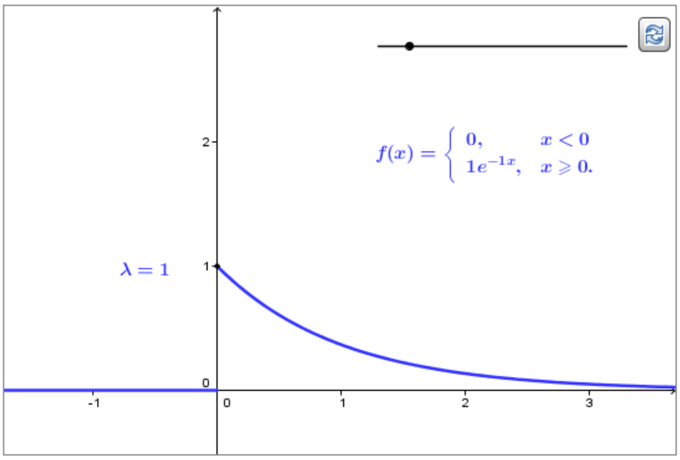
7.2 Експоненцијална расподела

Експоненцијална расподела са параметром $\lambda > 0$ означава се са $\mathcal{E}(\lambda)$, а ознака $X \in \mathcal{E}(\lambda)$ се користи како би се нагласило да случајна величина X има експоненцијалну расподелу.

Дефиниција 7.2.1. *Експоненцијална расподела са параметром* $\lambda > 0$ *одређена је густином расподеле*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ову дефиницију прати и аплет (Слика 7.2.1) на коме се помоћу клизача може мењати параметар λ. На овај начин може се видити како се мења изглед графика функције f променом параметра λ.



Слика 7.2.1. *Аплет који приказује експоненцијалну густину расподеле*

Функција расподеле случајне величине $X \in \mathcal{E}(\lambda)$ се одређује на основу дефиниције, тј.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

1) Ако је $x < 0$, онда је $F_X(x) = 0$.

2) Ако је $x \geqslant 0$, онда је

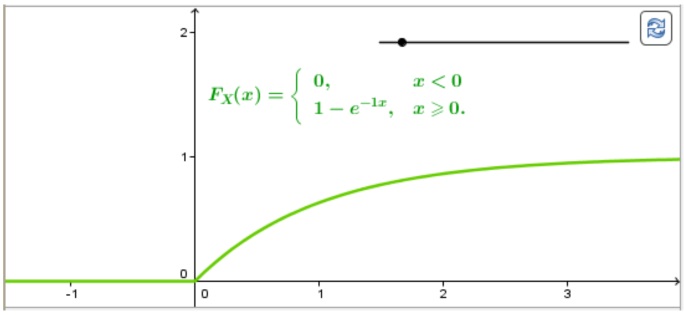
$$F_X(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}dt.$$

Увођењем смене $l = -\lambda t$, добија се $dl = -\lambda dt$, тј. $dt = -\dfrac{dl}{\lambda}$. Даљим решавањем добија се:

$$F_X(x) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda x}^{0} e^{\,l}dl = e^{\,l}|_{-\lambda x}^{0} = e^0 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Дакле, одговарајућа функција расподеле је

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$



Слика 7.2.2. *Аплет који приказује експоненцијалну функцију расподеле*

Решени задаци

Задатак 21. *Случајна величина X има експоненцијалну расподелу $\mathcal{E}(1)$.*

а) *Одредити $P\{X \geqslant x\}$, за $x > 0$.*

б) *Одредити x тако да је $P\{X \geqslant x\} = 0,01$.*

Решење: **а)** Познато је да је $\lambda = 1$, па је густина расподеле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geqslant 0, \end{cases} \tag{7}$$

а функција расподеле је

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{8}$$

Такође је познато да важи $P\{X \geqslant x\} = 1 - P\{X < x\}$, па се даљим сређивањем добија:

$$P\{X \geqslant x\} = 1 - P\{X < x\} = 1 - F_X(x) = 1 - (1 - e^{-x}) = 1 - 1 + e^{-x} = e^{-x}.$$

б) На основу услова $P\{X \geqslant x\} = 0,01$ и претходног дела задатка, $P\{X \geqslant x\} = e^{-x}$, важи једнакост $e^{-x} = 0,01$. Даљим сређивањем добија се

$$\ln e^{-x} = \ln 0,01 = \ln \frac{1}{100} = \ln 1 - \ln 100 = 0 - \ln 10^2 = -2 \ln 10,$$

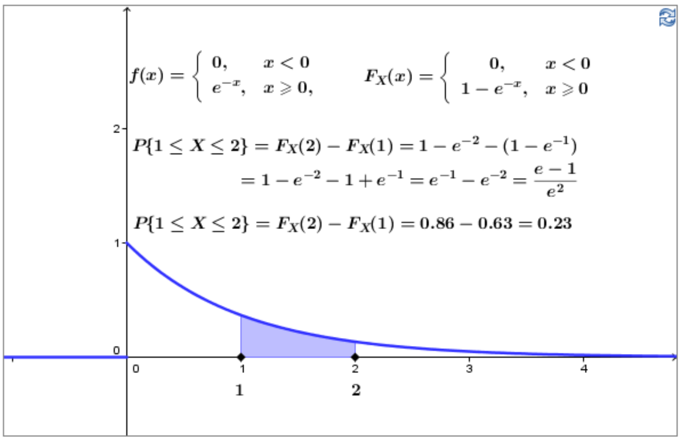
односно, $-x = -2 \ln 10$. Дакле, тражена вредност је $x = 2 \ln 10$. △

Задатак 22. *Ако случајна величина X има експоненцијалну расподелу $\mathcal{E}(1)$, одредити $P\{1 \leqslant X \leqslant 2\}$.*

Решење: Како је експоненцијална расподела иста као у задатку 21, користи се густина расподеле (7) и функција расподеле (8), тако да се добија

$$P\{1 \leqslant X \leqslant 2\} = F_X(2) - F_X(1) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} = e^{-1} - e^{-2} = \frac{e-1}{e^2}.$$

△



Слика 7.2.3. *Аплет помоћу кога је приказано решење задатка 22.*

На слици 7.2.3 је приказан аплет који одређује вероватноћу да случајна величина X узме вредности из интервала $[a, b]$. Границе a и b се могу мењати.

Задатак 23. *Случајна величина X има експоненцијалну расподелу $\mathcal{E}(\lambda)$. Одредити расподелу случајне величине $Y = cX,\ c > 0$.*

Решење: Функција расподеле случајне величине X је

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Функција расподеле случајне величине Y за $x > 0$ је

$$F_Y(x) = P\{Y \leqslant x\} = P\{cX \leqslant x\} = P\left\{X \leqslant \frac{x}{c}\right\} = F_X\left(\frac{x}{c}\right) = 1 - e^{-\lambda \frac{x}{c}} = 1 - e^{-\frac{\lambda}{c}x}.$$

На основу облика добијене функције расподеле може се закључити да случајна величина Y има експоненцијалну расподелу са параметром $\frac{\lambda}{c}$, односно $Y \in \mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{c}\right)$. △

7.3 Биномна расподела

Приликом увођења појма *случајних величина* дефинисана је биномна случајна величина S_n која представља број успеха у n независних експеримената.

Дефиниција 7.3.1. *Случајна величина S_n чија је расподела одређена са*

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0, 1, 2, ..., n\},$$

зове се биномна случајна величина са параметрима n и p. Одговарајућа расподела назива се ***биномна расподела.***

Биномна расподела са параметрима n и p означава се са $\mathcal{B}(n, p)$.

Може се приметити да закон расподеле ове случајне величине представља $k+1$-ви члан у развоју бинома $(p+q)^n$, где је $q = 1-p$. Применом биномне формуле добија се да је збир вероватноћа свих вредности случајне величине S_n једнак 1:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+q)^n = (p+1-p)^n = 1^n = 1.$$

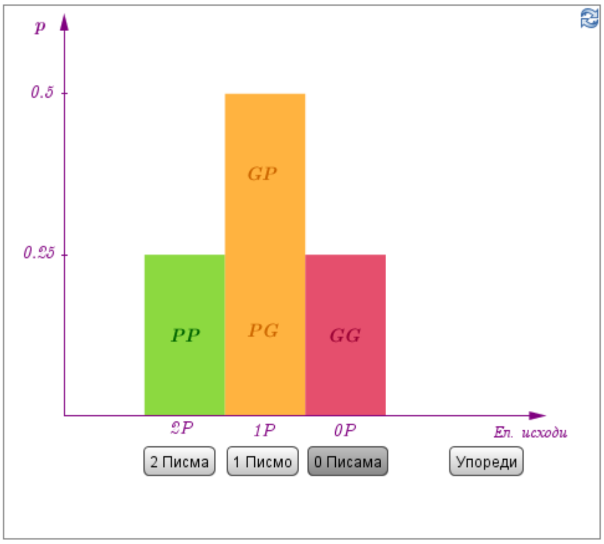
Веза са Паскаловим [22] ***троуглом***

Пример 7.3.1. *Бацају се два новчића. Одредити колико има различитих комбинација у којим је пало једно писмо.*

Решење: Број различитих комбинација може се одредити помоћу биномне формуле и Паскаловог троугла. Овај начин одређивања је погодан када у експерименту учествује велики број новчића.

Ако би се у биномној формули $(p+q)^n$, p и q заменили са P и G, добило би се $(P+G)^2$. У овом случају n представља број новчића који се бацају. Коефицијенти у развоју $(P+G)^2 = P^2 + 2PG + G^2$ представљају број комбинација, тј. једна комбинација у којој се појављују два писма, две комбинације у којима се појављује једно писмо и једна глава и једна комбинација у којој се појављују две главе. Дакле, има две комбинације у којим је пало једно писмо.

Битно је нагласити да је вероватноћа да падну две исте стране иста као и вероватноћа да падну различите стране, али само у случају кад се бацају два новчића.



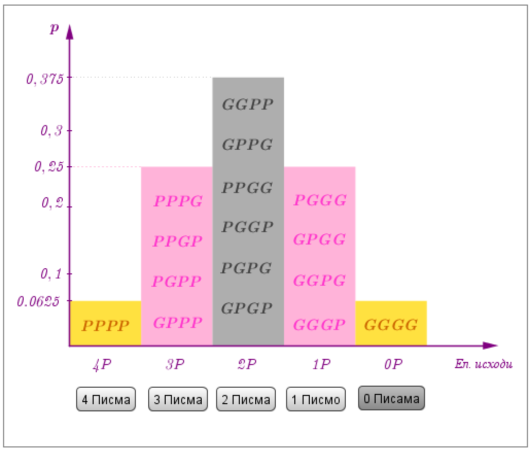
Слика 7.3.1. *Исходи при бацању два новчића*

△

Пример 7.3.2. *Бацају се четири новчића. Одредити колико има различитих комбинација у којима су пала два писма.*

[22] Blaise Pascal (1623-1662), је био француски математичар и физичар.

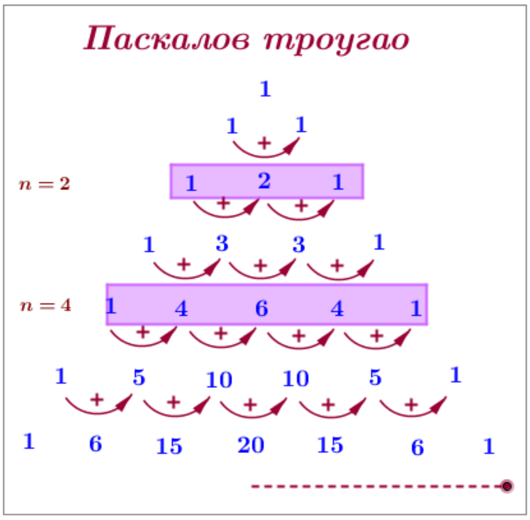
Решење: Аналогно првом примеру важи: $(P+G)^4 = P^4 + 4P^3G + 6P^2G^2 + 4PG^3 + G^4$, тј. једна комбинација у којој се појављују четири писма, четири комбинације у којима се појављују три писма и једна глава, шест комбинација у којима се појављују два писма и две главе, четири комбинације у којима се појављује једно писмо и три главе и једна комбинација у којој се појављују четири главе. Дакле, има шест комбинација у којима су пала два писма.



Слика 7.3.2. *Исходи при бацању четири новчића*

△

Број тражених комбинација је лако одредити помоћу Паскаловог троугла. Тако је у првом примеру $n = 2$, а у другом примеру $n = 4$.



Слика 7.3.3. *Аплет који приказује како се формира Паскалов троугао*

Пример 7.3.3. *Одредити математичко очекивање и дисперзију случајне величине* $S_n \in \mathcal{B}(n,p)$.

Решење: Биномна случајна величина се може представити у облику збира n независних индикатора: $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$, где је

$$I_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

индикатор успеха у $k-$том експерименту. Познато је да је $E(I_k) = p$ и $D(I_k) = p(1-p)$. Математичко очекивање биномне случајне величине је:

$$E(S_n) = E(I_1 + I_2 + ... + I_n) = E(I_1) + E(I_2) + ... + E(I_n) = np.$$

Дисперзија биномне случајне величине је:

$$D(S_n) = D(I_1 + I_2 + ... + I_n) = D(I_1) + D(I_2) + ... + D(I_n) = np(1-p).$$

△

Решени задаци

Задатак 24. *Коцкица се баца 6 пута. Колика је вероватноћа догађаја:*

а) *неће пасти ни једна шестица;*

б) *пашће тачно једна шестица;*

в) *пашће бар једна шестица;*

г) *пашће свих шест шестица.*

Решење: Нека је случајна величина X број палих шестица. Експеримент је бацање коцкице и тај експеримент се понавља шест пута. Успехом се сматра ако је пала шестица, а неуспехом ако није пала шестица. Вероватноћа да падне шестица је $\frac{1}{6}$. Дакле, случајна величина X има биномну расподелу $\mathcal{B}\left(6, \frac{1}{6}\right)$, тј. $P\{X = k\} = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{6-k}$. Након одређивања расподеле могуће је наћи и вероватноће тражених догађаја.

а)

$$P\{X = 0\} = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

б)

$$P\{X = 1\} = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 6 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

в)

$$P\{X \geqslant 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

г)

$$P\{X = 6\} = \binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \left(\frac{1}{6}\right)^6$$

△

Задатак 25. *На пријемном испиту кандидати одговарају на 20 питања. За свако питање понуђено је пет одговора од којих је само један тачан. Одредити вероватноћу да кандидат који на свако питање случајно бира одговор:*

а) *тачно одговори на сва питања;*

б) *не одговори тачно ни на једно питање.*

Решење: Нека је случајна величина $X-$ број тачних одговора. Експеримент је случајан одабир одговора и тај експеримент се понавља 20 пута. Успехом се сматра ако је кандидат изабрао тачан одговор, а неуспехом ако је изабрао нетачан одговор. Вероватноћа да је кандидат изабрао тачан одговор је $\frac{1}{5}$. Дакле, случајна величина X има биномну расподелу $\mathcal{B}\left(20, \frac{1}{5}\right)$, тј. $P\{X = k\} = \binom{20}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{20-k}$. Пошто је расподела случајне величине X сада позната, могуће је одредити вероватноће следећих догађаја.

а)

$$P\{X = 20\} = \binom{20}{20} \left(\frac{1}{5}\right)^{20} \left(\frac{4}{5}\right)^{0} = \left(\frac{1}{5}\right)^{20} \approx 0,1049 \cdot 10^{-13}$$

б)

$$P\{X = 0\} = \binom{20}{0} \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \left(\frac{4}{5}\right)^{20} = \left(\frac{4}{5}\right)^{20} \approx 0,0115$$

△

Задатак 26. *Случајна величина X има биномну расподелу $\mathcal{B}(n,p)$. Математичко очекивање $E(X)$ је 30 и дисперзија $D(X)$ је 20. Одредити параметре n и p биномне расподеле.*

Решење: Приликом решавања овог задатка биће коришћене формуле које су већ изведене у теоријском делу:

$$E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p).$$

Пошто су математичко очекивање и дисперзија познати добија се:

$$np = 30, \quad np(1-p) = 20.$$

Даљим сређивањем долази се до вероватноће p.

$$30(1-p) = 20 \ \Rightarrow \ 1 - p = \frac{2}{3} \ \Rightarrow \ p = \frac{1}{3}$$

Како је вероватноћа p одређена, из једнакости $np = 30$ се може одредити и n.

$$n \cdot \frac{1}{3} = 30 \ \Rightarrow \ n = 90$$

△

Задатак 27. *У Ивановом одељењу има 32 ученика. На сваком часу професор математике на случајан начин бира и испитује три ученика. Која је вероватноћа да ће Иван за 6 часова одговарати бар једном?*

Решење: Нека је случајна величина $X-$ број Иванових одговарања. Експеримент је професор случајно бира три ученика и тај експеримент се понавља 6 пута. Успехом се сматра ако је међу та три ученика изабран Иван, а неуспехом ако није изабран. Укупан број начина на који се три ученика могу изабрати од 32 ученика је $\binom{32}{3}$, а број начина на који се од 32 ученика бира три али тако да је међу њима Иван је $\binom{31}{2}$. Значи, вероватноћа да се међу три изабрана ученика налази Иван је $\dfrac{3}{32}$. Случајна величина X има биномну расподелу $\mathcal{B}\left(6, \dfrac{3}{32}\right)$, па је

$$P\{X \geqslant 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{3}{32}\right)^0\left(\frac{29}{32}\right)^6 = 1 - \left(\frac{29}{32}\right)^6 \approx 0,446.$$

$\triangle$

Задатак 28. *Дат је круг и у њега је уписан квадрат. Случајно се бира* 10 *тачака у кругу. Нека је X број тачака које се налазе у уписаном квадрату. Одредити расподелу вероватноћа случајне величине X.*

Решење: Случајна величина X има биномну расподелу $\mathcal{B}(n, p)$. Како се бира 10 тачака, онда је $n = 10$, а да би се одредио параметар p користи се геометријска дефиниција вероватноће. Како је познато да важи $r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, добија се

$$p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{P_{\square}}{P_{\bigcirc}} = \frac{a^2}{r^2\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

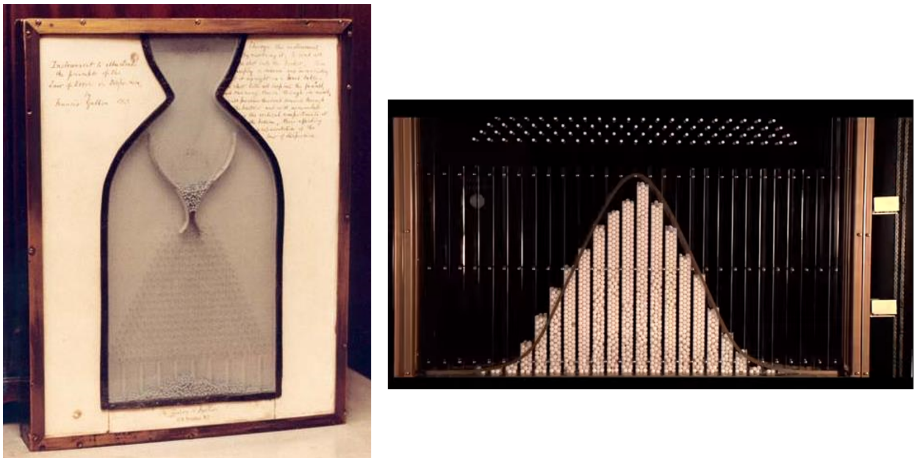
Значи, важи $X \in \mathcal{B}\left(10, \dfrac{2}{\pi}\right)$. $\triangle$

7.4 Нормална расподела

Нормална расподела позната је још као *Гаусова* [23] расподела. Нормални закон расподеле је најважнији закон расподеле вероватноћа. Велики број случајних величина за расподелу има баш нормалну расподелу (висина, коефицијент интелигенције, успех ученика у одељењима), али такође се и многе случајне величине могу апроксимирати нормалном расподелом. Тако на пример биномни закон расподеле за $n > 30$ и $np > 10$ апроксимира се нормалним законом расподеле.

Нормална расподела са параметрима m и σ^2 означава се са $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, а ознака $X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ се користи како би се нагласило да случајна величина X има нормалну расподелу. Случајне величине које имају нормалну расподелу су непрекидног типа.

За демонстрацију настанка нормалне расподеле користи се Галтонова машина. Машина носи назив по енглеском научнику *Ф. Галтону* [24] који ју је изумео у деветнаестом веку. На самом врху машине се налази отвор кроз који се пуштају куглице које наилазе на препреке. Препреке ометају куглице да се неометано спуштају ка дну. Када куглице ударе у препреку имају две могућности: да се одбију лево или десно. Вероватноће обе могућности су једнаке. Куглице на крају падају у преграде које се налазе на дну машине. Куглице се групишу по преградама у облику нормалне расподеле, највише их има у преградама које се налазе у средини, а у крајњим преградама их има све мање. Куглице се распоређују на овај начин зато што има највише оних куглица код којих се могући исходи потиру, односно одбију се десно онолико пута колико се одбију лево. Само мали број куглица одступа од овога и те куглице заврше у крајњим преградама.



Слика 7.4.1. *Галтонова машина*

[23] Карл Фридрих Гаус (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), био је немачки математичар и научник. Допринео је развоју теорије бројева и многим другим научним дисциплинама. Први је решио проблем конструкције правилног 17-тоугла. Позната је једна анегдота везана за Гауса. Једном приликом је Гаусов учитељ задао да се саберу сви бројеви од 1 до 100. Седмогодишњи Гаус одмах је решио задатак. Посматрајући низ бројева које је требало сабрати, приметио је да када спари први и последњи, 1 и 100, а затим 2 и 99, па 3 и 98 и тако даље, добија збир 101. Како таквих парова има 50, тражени збир је $50 \cdot 101 = 5050$. Овај поступак назван је *Гаусов поступак.*

[24] Sir Francis Galton (1822-1911), енглески научник

На слици 7.4.1 приказана је машина коју је лично Ф. Галтон направио. Ова машина се чува на Универзитету у Лондону. Занимљиво је да је Галтон као куглице користио оловну сачму. Такође је приказана и савремена верзија Галтонове машине.

Дефиниција 7.4.1. *Нормална расподела са параметрима* $m \in \mathbf{R}$ *и* σ^2 *одређена је густином расподеле*

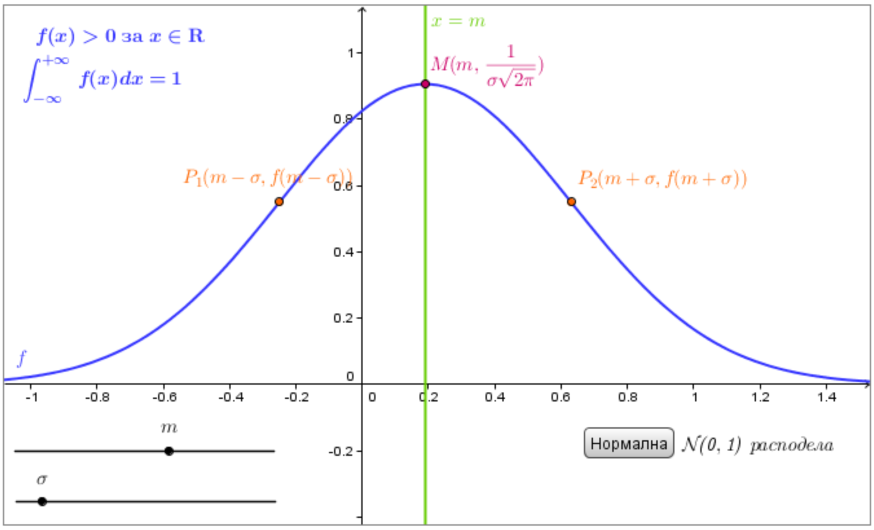
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где је $x \in \mathbf{R}$ *и* $\sigma > 0$.

Нормална расподела са параметрима 0 *и* 1 *назива се стандардна нормална расподела и она је одређена густином расподеле*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Теорема 7.4.1. *Нека случајна величина* X *има нормалну* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *расподелу. Тада је* $E(X) = m$ *и* $D(X) = \sigma^2$.



Слика 7.4.2. *Аплет који приказује густину расподеле*

Дакле, график густине расподеле зависи од математичког очекивања m и дисперзије σ^2. Ова зависност је приказана на одговарајућем GeoGebra аплету. Промена вредности параметра m доводи до транслације графика функције f дуж $x-$осе, а промена вредности параметра σ доводи до промене максималне вредности функције f. Што је σ веће то је максимална вредност мања, односно што је σ мање то је максимална вредност већа. Поред ових особина корисно је навести још неке особине графика функције f.

-График функције је симетричан у односу на праву $x = m$.

-Тачка максимума је $M(m, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$.

-Тачке превоја су $P_1(m-\sigma, f(m-\sigma))$ и $P_2(m+\sigma, f(m+\sigma))$.

Одговарајућа функција расподеле је $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. За нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу користи се ознака $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$. Како се неодређени интеграл $\int \varphi(t)dt$ не може одредити на уобичајени начин, вредност функције расподеле $F(x)$ се одређује читањем из дате таблице приближних вредности за $m = 0$ и $\sigma = 1$. Међутим, шта ако се не ради о нормалној расподели са параметрима 0 и 1, онда се примењује поступак преласка са нормалне $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподеле на нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу.

Нека је $X \in \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ и $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$, тада је $X^* \in \mathcal{N}(0,1)$.

Прво је потребно одредити функцију расподеле случајне величине X^* :

$$F_{X^*}(x) = P\{X^* \leqslant x\} = P\left\{\frac{X-m}{\sigma} \leqslant x\right\} = P\{X-m \leqslant \sigma x\} =$$

$$P\{X \leqslant \sigma x + m\} = F_X(\sigma x + m) = \int_{-\infty}^{\sigma x+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt.$$

Увођењем смене $\left(\dfrac{t-m}{\sigma}\right) = s$ добија се:

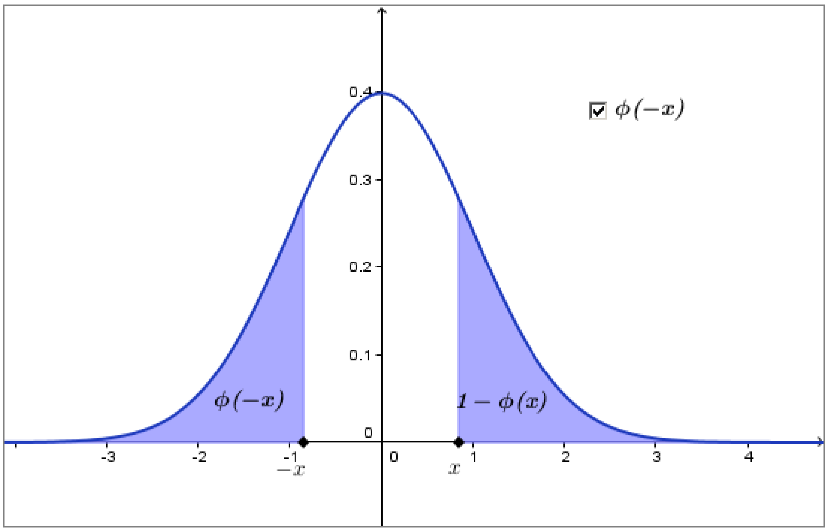
$$F_{X^*}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Дакле, добија се функција расподеле која одговара нормалној $\mathcal{N}(0,1)$ расподели, значи за случајну величину X^* заиста важи $X^* \in \mathcal{N}(0,1)$.

Напомена: Функција густине нормалне $\mathcal{N}(0,1)$ расподеле је симетрична у односу на $y-$осу па се вредности одговарајуће функције расподеле $F_X(x)$ одређују помоћу формуле:

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Због овог својства се у таблици налазе само приближне вредности за позитивне реалне бројеве.



Слика 7.4.3. *Аплет који приказује својство симетричности функције*

Решени примери

Пример 7.4.1. *Ако случајна величина* X *има нормалну* $\mathcal{N}(0,1)$ *расподелу одредити:*

а) $P\{X<1\}$;

б) $P\{0<X<1,42\}$;

в) $P\{-0,73<X<0\}$;

г) $P\{|X|<0,5\}$.

Решење: Како се ради о нормалној $\mathcal{N}(0,1)$ расподели, тражене вероватноће се добијају на следећи начин.

а) $P\{X<1\}=\phi(1)=0,8413$

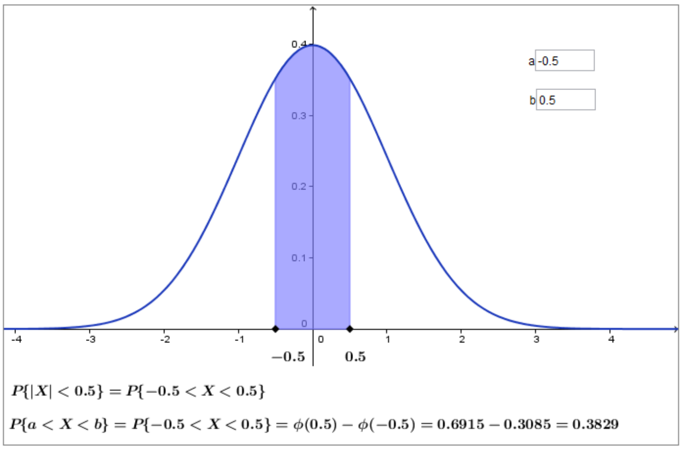
б) $P\{0<X<1,42\}=\phi(1,42)-\phi(0)=0,9222-0,5=0,4222$

в) $P\{-0,73<X<0\}=\phi(0)-\phi(-0,73)=0,5-0,2327=0,2673$

г) $P\{|X|<0,5\}=P\{-0,5<X<0,5\}=\phi(0,5)-\phi(-0,5)=0,6915-0,3085=0,3829$

При одређивању $\phi(-0,73)$ и $\phi(-0,5)$ користи се формула $\phi(-x)=1-\phi(x)$. △

Геометријска интерпретација овог примера је дата аплетом приказаним на слици 7.4.4. На аплету се може видети да је вероватноћа у геометријском смислу приказана површина. Како се мења површина тако се мења и вероватноћа. Аплет такође пружа могућност уноса граница a и b путем два текстуална поља, тако да се могу израчунати вероватноће $P\{a<X<b\}$.



Слика 7.4.4. *Аплет помоћу кога је приказано решење примера* 7.4.1

Пример 7.4.2. *Случајна величина* $X \in \mathcal{N}(120, 64)$ *представља отпор кидања једног металног конца. Узорак који се испитује сматра се дефектним ако је* $X < 110$. *Одредити вероватноћу да је узорак дефектан.*

Решење: Како се не ради о стандардној нормалној расподели примењује се поступак преласка са нормалне $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ на стандардну нормалну расподелу.

$$P\{X < 110\} \quad = P\left\{\frac{X-m}{\sigma} < \frac{110-m}{\sigma}\right\} = P\left\{\frac{X-120}{\sqrt{64}} < \frac{110-120}{\sqrt{64}}\right\}$$

$$= P\left\{X^* < \frac{110-120}{8}\right\} = P\{X^* < -1,25\}$$

$$= \phi(-1,25) = 1 - \phi(1,25) = 1 - 0,8946 = 0,1054$$

△

Приликом решавања следећег примера користиће се формуле за математичко очекивање и дисперзију случајне величине $S_n \in \mathcal{B}(n, p)$ изведене у примеру 7.3.3:

$$E(S_n) = np \text{ и } D(S_n) = np(1-p).$$

Већ је поменуто да се за $n > 30$ и $np > 10$, биномни закон расподеле $\mathcal{B}(n, p)$ апроксимира нормалним законом расподеле $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Пример 7.4.3. *Израчунати вероватноћу да у* 10000 *бацања новчића број палих грбова буде између* 4950 *и* 5100.

Решење: Нека је случајна величина $X-$ број палих грбова. Експеримент је бацање новчића који се понавља 10000 пута, па је $n = 10000$. Успех је ако је пао грб, а неуспех ако је пало писмо. Вероватноћа успеха је $p = \dfrac{1}{2}$, а неуспеха $q = 1 - p = \dfrac{1}{2}$. Значи, случајна величина X има биномну расподелу $\mathcal{B}\left(10000, \dfrac{1}{2}\right)$. Пошто је $np = 10000 \cdot \dfrac{1}{2} = 5000$, односно

$np > 10$, биномна расподела се апроксимира нормалном расподелом са параметрима $m = np$ и $\sigma^2 = np(1-p)$:

$$
\begin{aligned}
P\{4950 < X < 5100\} &= P\left\{\frac{4950 - np}{\sqrt{npq}} < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{5100 - np}{\sqrt{npq}}\right\} \\
&= P\left\{\frac{4950 - 5000}{\sqrt{2500}} < X^* < \frac{5100 - 5000}{\sqrt{2500}}\right\} \\
&= P\{-1 < X^* < 2\} = \phi(2) - \phi(-1) \\
&= 0,9772 - (1 - \phi(1)) = 0,9772 - 1 + \phi(1) \\
&= 0,9772 - 1 + 0,8413 = 0,8185.
\end{aligned}
$$

△

8 Закључак

Као што је већ речено у уводу, визуелизација математичких садржаја, а самим тим и теорије вероватноће, је јако битна. Материјал није од користи само ученицима, већ и наставницима, јер им пружа могућност да на интерактиван начин прикажу нове математичке садржаје.

Како је обрађен и одређени број задатака, из поглавља *Закон расподеле вероватноћа случајних величина*, који нису предвиђени планом и програмом, поред редовне наставе веб презентација се може користити и у додатној настави.

Што се тиче GeoGebra програмског пакета, уграђени калкулатор вероватноће може бити јако користан приликом спровођења одређених истраживања код којих је неопходна анализа података, тако да сам програм ученици могу да користе и у даљем образовању.

Корисност веб презентације се огледа и у томе што се материјалу може увек приступити, може се мењати, исправљати и могу се додавати нове наставне теме. У креирању новог садржаја могу чак да учествују и ученици. У неким основним и средњим школама се на часовима информатике користи GeoGebra, тако да се може постићи корелација између математике, информатике и других предмета.

Литература

[1] Павле Младеновић, Елементарни увод у вероватноћу и статистику, Друштво математичара Србије, Београд, 1998.

[2] Милутин Обрадовић, Душан Георгијевић, Математика 4: уџбеник за четврти разред средње школе, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2006.

[3] Јован Малишић, Вероватноћа и математичка статистика, уџбеник за IV разред математичке гимназије, Круг, Београд 1999.

[4] Весна Јевремовић, Вероватноћа и статистика, Математички факултет, Београд, 2009.

[5] Павле Младеновић, Вероватноћа и статистика, Збирка задатака за 4. разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 2012.

[6] Живорад Ивановић, Срђан Огњановић, Математика 4: збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа, Круг, Београд, 2007.

[7] Вене Богославов, Збирка решених задатака из математике 4, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2003.

[8] Момчило Новковић, Илија Ковачевић, Збирка решених задатака из вероватноће и статистике, Stylos, Нови Сад, 2002.