Beogradski univerzitet
Prirodno-matematički fakultet

Đorđe V. Vukomanović

IMPLIKACIJA I MREŽE
(Ogled o implikaciji)
- doktorska disertacija -

Beograd 1985

S A D R Ž A J

P R E D G O V O R

Ovaj ogled koji se predlaže Naučno-nastavnom veću Instituta za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu kao doktorska disertacija sadrži neke rezultate autorovih istraživanja započetih u magistarskom radu pod istim naslovom. Uz izvesne ograde, jer su ideje i metode modernih matematičkih disciplina često vrlo ispreplotene, može se reći da rad pripada oblasti algebarske logike.

Zanimljivo je da je matematizacija logike (ako se izuzme Leibniz) počela upravo njenom algebraizacijom u radovima Boolea 1847 i 1854 godine. Booleovo pionirsko delo imalo je dva aspekta koji su doveli do dva relativno izolovana paralelna razvoja. Prvi razvoj je preko Peircea (1870), Jevonsa (1871), Schrödera (1890-95), Whiteheada (1898) i Huntingtona (1904) doveo do Birkhoffa i radjanja univerzalne algebre 1930-ih godina. Drugi razvoj je preko Fregea (1884, 1891 i 1903) kulminirao u Russelovom logicizmu, čiji je monumentalni spomenik "Principia Mathematica" (1910-1913), u koji su inkorporirani rezultati Cantora (iz 1871 -1883) i Peana (iz 1892-1908). Pojava semantičkih i skupovno-teorijskih antinomija krajem XIX i početkom XX veka prouzrokovala je nastajanje još dva pravca u matematici (pored logicizma), kao odgovor na krizu. To su Hilbertov formalizam i Brouwerov intuicionizam. Intuicionizam je bio radikalniji u svojoj kritici jer je čak odbacivao izvesna pravila klasične logike (i to ona koja omogućuju neefektivne dokaze egzistencije). Ovo je dovelo do intuicionističke logike (slabije od klasične) koju je prvi formalizovao Heyting 1930. Pored Brouwera, i drugi su matematičari kritikovali različite aspekte klasične logike (uglavnom implikaciju i negaciju). Kao rezultat, pojavile su se alternativne neklasične logike kao što su modalne logike Lewisa (1918), polivalentne logike Lukasiewicza (1920, 1929) i Posta (1921), pozitivna logika Hilberta i Bernaysa (1934), minimalna logika Johanssona (1936), konstruktivna logika Nelsona (1949) i Markova (1950), relevantne logike (1960), itd.

Algebrsko ispitivanje raznih neklasičnih logika započela je poljska logička škola 1920-1940 u terminima logičkih matrica koje su izvedene apstraktne algebre. Time su u logiku uvedene algebarske metode čiji se današnji opis nalazi u standardnim knjigama /76/ i /77/. Zanimljiva je činjenica da su upravo one neklasične logike koje su inspirisane čisto filosofskim razmatranjima dovele do novih algebraskih struktura (koje su, za nabrojane neklasične logike, respektivno pseudo-Booleove algebre, algebre sa zatvorenjem, Postove algebre, relativno pseudokomplementirane mreže, kontrapozicionalno komplementirane mreže, kvazi -pseudo-Booleove algebre, intenzionalne mreže, itd.) Tako su moćne metode univerzalne algebre, koja se u medjuvremenu razvila, našle važne primene u logici. Na primer, Henkin i Tarski (1961) i Halmos (1962) su algebarskim sredstvima dobili duboke rezultate o klasičnom iskaznom računu. Naravno, postoji i povratni uticaj, jer je pomoću logike razvijen model-teoretski pristup univerzalnoj algebri, ali o tome nije reč u ovom radu.

Poznato je da klasičan iskazni račun ima strukturu Booleove algebre. Naime, u algebri formula klasičnog iskaznog računa definiše se relacija logičke (preciznije sintaktičke) posledice koja je kvaziuredjenje u skupu formula i koja indukuje, na poznat način, jednu relaciju ekvivalencije za koju se dokazuje da je kongruencija. Količnička tzv. Tarski-Lindenbaumova algebra je Booleova algebra i formula A je teorema ako i samo ako je $|A| = 1$ (jedinični element Booleove algebre).

Na isti način, polazeći od striktnog konačno deduktivnog iskaznog računa S čije su shema aksiome:

(1) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

(2) $A \to (A \vee B)$,

(3) $B \to (A \vee B)$,

(4) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$,

(5) $(A \& B) \to A$,

(6) $(A \& B) \to B$,

(7) $(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to (A \& B)))$,

(8) $(A \to (B \to C)) \to ((A \& B) \to C)$,

(9) $(((A_1 \to A_2) \& B) \to C) \to ((A_1 \to A_2) \to (B \to C))$,

(10) $\neg A \to (A \to B)$,

(11) $(A \to (B \& \neg B)) \to \neg A$.

i jedino pravilo izvodjenja modus ponens:

$$(MP) \qquad \frac{A,\ A \rightarrow B}{B}\ .$$

na Tarski-Lindenbaumovu algebru L(S) dobija se konačno deduktivna mreža sa pseudokomplementacijom u kojoj važi (TDG). (Ako se aksioma (9) zameni nerestringiranom eksportacijom $((A \& B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$, dobija se aksiomatski sistem za intuicionistički iskazni račun). Uz to, formula A je teorema ovog računa ako i samo ako je $|A| = 1$ (gde je $|A|$ klasa ekvivalencije formule A). Ako se, na uobičajeni način, definiše valuacija v iz S u proizvoljnu konačno deduktivnu mrežu sa pseudokomplementacijom, onda činjenica da je L(S) ista takva slobodna algebra u klasi svih konačno deduktivnih algebri sa pseudokomplementacijom daje potpunost i konsistentnost računa S.

Račun S dopušta alternativnu aksiomatizaciju, gde je modus ponens opet jedino pravilo izvodjenja:

(12) $A \rightarrow A$

(13) $(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (B \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2))$

(14) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(15) $A \rightarrow (A \vee B)$

(16) $B \rightarrow (A \vee B)$

(17) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

(18) $(A \& B) \rightarrow A$

(19) $(A \& B) \rightarrow B$

(20) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \& C)))$

(21) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

(22) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Vidi se da je implikacija u računu S u stvari S4 implikacija.

I 1-deduktivne mreže sa pseudokomplementacijom u kojima važi III.1(10) i III.1(11) karakterišu striktan 1-deduktivan iskazni račun S čije su aksiome i pravila izvodjenja:

(23) $A \rightarrow A$

(24) $(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (B \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2))$

$$(25) \qquad \frac{(C_1 \rightarrow C_2) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)),\ (C_1 \rightarrow C_2) \rightarrow (A \rightarrow B)}{(C_1 \rightarrow C_2) \rightarrow (A \rightarrow C)}$$

(26) $A \to (A \vee B)$,

(27) $B \to (A \vee B)$,

(28) $$\frac{A \to C}{(B \to C) \to ((A \vee B) \to C)}$$

(29) $(A \& B) \to A$,

(30) $(A \& B) \to B$,

(31) $$\frac{A \to C}{(A \to B) \to (A \to (B \& C))} ,$$

(32) $$\frac{A \to B}{(A \to \neg B) \to \neg A} ,$$

(33) $\neg A \to (A \to B)$

Ovaj ogled posvećen je algebarskoj analizi implikativnih i implikativno-negacijskih fragmenata iskaznih računa S i S_1, kao i jedne njihove ekstenzije. Tarski-Lindenbaumove algebre tih računa su zapravo striktne deduktivne implikativne algebre koje su posmatrane izolovano u drugom i, u kontekstu deduktivnih implikativnih algebri, u trećem poglavlju. Kao posledica teoremâ reprezentacije za te algebre, kao i teoremâ reprezentacije za distributivne (polu)mreže, sledi da striktne deduktivne implikativne algebre potpuno karakterišu implikativnu operaciju na 1-deduktivnim i konačno deduktivnim (polu)mrežama. Nestriktne deduktivne implikativne algebre, posmatrane u prvom poglavlju, uzgredan su rezultat celog istraživanja. Ovde 1-deduktivne implikativne algebre karakterišu implikativan račun čije su aksiome i pravila:

(34) $A \to A$,

(35) $A \to (B \to A)$,

(36) $$\frac{C_1 \to (A \to (B \to C)),\ C_1 \to (A \to B)}{C_1 \to (A \to C)} ,$$

(37) $$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

1-deduktivne implikativne algebre mogu se posmatrati i kao jednakosna formulacija tog računa u smislu /69/ i /70/. U vezi sa ovim računom K.Došen je izneo hipotezu da se ta implikacija može okarakterisati kao reziduálna operacija u parcijalno uredjenom neasocijativnom monoidu u kojem bi slučaju odmah bila dobijena generalizacija, eliminacija sečenja (i time odlučivost) kao i Kripkeovska semantika. Inače, zanimljivo je da se svakom implikativnom računu u kome važi neki oblik teoreme dedukcije može pridružiti 1-deduktivan takav implikativan račun. Medjutim izgleda da ceo 1-deduktivan račun ne mora uvek biti slabiji od polaznog.

Većina rezultata ovog rada saopštena je na III konferenciji algebrista Jugoslavije u Beogradu u decembru 1982, Godišnjem skupu Udruženja za simboličku logiku u Denveru u januaru 1983 i VII balkanskom kongresu matematičara u Atini u decembru 1983.

U toku rada na ovoj disertaciji autor je naišao na svestranu pomoć i podršku profesora S.Prešića i profesora A.Krona, na čemu im se svesrdno zahvaljuje. Zahvalnost duguje i dr Ž.Mijajloviću na kritičkim primedbama stavljenim prilikom izlaganja rezultata na Seminaru za algebru i logiku kao i svim učesnicima tog Seminara za stalnu saradnju, kolegijalnu pomoć i podršku.

U Beogradu, juna 1985. A u t o r

I POGLAVLJE

NESTRIKTNE DEDUKTIVNE IMPLIKATIVNE ALGEBRE

0. <u>Sinopsis</u> Ovo je poglavlje posvećeno deduktivnim implikativnim algebrama koje su zapravo nestriktni pandani (po svom karakteru striktnih) implikativnih fragmenata deduktivnih mreža. Po analogiji s deduktivnim mrežama, uvedeni su koncepti slabo deduktivnih, n-deduktivnih i ω deduktivnih (ili konačno deduktivnih) implikativnih algebri. Neposredna je posledica njihovih definicija da implikativne algebre obuhvataju slabo deduktivne, a ove sadrže 1-deduktivne implikativne algebre i da je svaka n-deduktivna implikativna algebra istovremeno i k-deduktivna, za sve $1 \leqslant k \leqslant n$. Međutim, dodavanje jednog prirodnog postulata - slabog zakona permutacije antecedenata (SP) - dovodi do delimičnog ukidanja hijerarhije deduktivnih implikativnih algebri koja se tada svodi na samo tri predstavnika. To su slabo deduktivne, 1-deduktivne i ω deduktivne implikativne algebre (u kojima važi (SP)). U stvari, ako je $n \geqslant 2$, onda je implikativna algebra u kojoj važi (SP) n-deduktivna ako i samo ako je ona ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP). Ispostavlja se da je ova poslednja klasa algebri od ranije poznata pod drugim nazivima kao: implikativni modeli (u dualnom obliku, Henkin), Hilbertove algebre (Diego) i pozitivne implikacijske algebre (Rasiowa). Činjenica da ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP) koincidiraju s algebrama koje karakterišu intuicionističku implikaciju ne iznenađuje jer je već Gentzen dokazao da iz deduktivne potpunosti (u smislu važenja klasične teoreme dedukcije) proističe cela teorija intuicionističke implikacije. Ovde su 1-deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP) potpuno nova klasa algebri. Zanimljivo je da se i te algebre, slično pozitivnim implikacijskim algebrama i implikacijskim algebrama koje karakterišu klasičnu implikaciju, mogu realizovati kao skupovne implikativne algebre. Naime, ako je $S(X)$ skup svih invarijanata (fiksnih tačaka) semi-interior operatora I_o proizvoljnog skupa X i $\rightarrow$ operacija na $S(X)$ definisana jednakošću $Y \rightarrow Z = I_o((X \setminus Y) \cup Z)$, onda su algebra $(S(X), X, \rightarrow)$ i njene podalgebre primeri 1-deduktivne implikativne algebre u kojoj važi (SP). Iz teoreme reprezentacije, dokazane u četvrtom odeljku, proizlazi da su to, do na izomor-

finam, sve takve algebre.

Veliki broj stavova prvog odeljka ima za cilj da osvetli logičku međuzavisnost nekoliko ključnih zakona deduktivnih implikativnih algebri, kao i njihove kumulativne efekte. S tim u vezi, pokazano je kako na 1-deduktivne i ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP) utiču promene izazvane dodavanjem, oduzimanjem ili zamenom pojedinih njihovih postulata. Na primer, dodavanjem bilo jakog zakona permutacije antecedenata (JP) bilo jednog od zakona jake tranzitivnosti (JTP) ili (JTS) aksiomama 1-deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP), dobija se ω deduktivna implikativna algebra. Nekoliko ad hoc navedenih primera dopunjuje ovu sliku pokazujući neizvodljivost nekih zakona deduktivnih implikativnih algebri iz drugih.

Drugi odeljak bavi se mogućnostima definisanja dve vrste komplemenata u deduktivnim implikativnim algebrama i vezama takvih algebri s aksiomatski uvedenim deduktivnim implikativnim algebrama s komplementacijom (kao operacijom). I ovde je naglasak na dvema novim algebarskim strukturama: 1-deduktivnim implikativnim algebrama sa pseudokomplementacijom odnosno kontrapozicionalnom komplementacijom, jer se ω deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom (odnosno kontrapozicionalnom komplementacijom) poklapaju sa pseudokomplementiranim (odnosno kontrapoziciono komplementiranim) pozitivnim implikacijskim algebrama.

U trećem odeljku, razmatraju se osobine nekoliko vrsta implikativnih filtara u implikativnim algebrama i njihove veze s homomorfizmima i kongruencijama tih algebri. Poznati rezultati A.Diegoa, A.Monteiroa i H.Rasiowe uopšteni su na deduktivne implikativne algebre i dodana je poneka nova karakterizacija. Inače, glavne primene teorema o implikativnim filtrima u deduktivnim implikativnim algebrama su u dokazu teorema reprezentacije za te algebre, u algebarskim dokazima teorema dedukcije za implikativne iskazne račune čiji su modeli te algebre, kao i u poddirektnoj dekompoziciji implikativnih algebri.

Četvrti odeljak sadrži dokaze teorema reprezentacije za 1-deduktivne implikativne algebre ukojima važi (SP), 1-deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom i 1-deduktivne implikativne algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom.

1. Implikativne algebre, slabo deduktivne, n-deduktivne i ω deduktivne (konačno deduktivne) implikativne algebre (elementarna teorija)

Definicija 1.1 (Rasiowa) Implikativna algebra je apstraktna algebra $(A, 1, \rightarrow)$, gde je 1 nularna operacija (konstanta) a $\rightarrow$ je binarna operacija i one zadovoljavaju sledeće postulate:

(i_1) $a \rightarrow a = 1$

(i_2) Ako $a \rightarrow b = 1$ i $b \rightarrow c = 1$, onda $a \rightarrow c = 1$.

(slaba tranzitivnost)

(i_3) Ako $a \rightarrow b = 1$ i $b \rightarrow a = 1$, onda $a = b$.

(i_4) $a \rightarrow 1 = 1$

Ako, pored toga, postoji u A element O takav da važi

(i_5) $O \rightarrow a = 1$

(uz pomoć (i_5) i (i_3) lako se dokazuje da može postojati najviše jedan takav element), onda se $(A, 1, \rightarrow)$ naziva ograničena implikativna algebra.

Navedene aksiome zadovoljavaju klasična i intuicionistička implikacija, kao i striktne implikacije modalnih logika.

Neposredna posledica Def.1.1 su dve leme:

Lema 1.1 (Rasiowa) U implikativnoj algebri važi (preciznije, dovoljno je pretpostaviti samo (i_3) i (i_4)):

1.1.1 Ako $a = 1$ i $a \rightarrow b = 1$, onda $b = 1$. (slabi modus ponens)

1.1.2 Ako $a = 1$, onda $b \rightarrow a = 1$.

1.1.3 Ako $a = 1$, $a \rightarrow (b \rightarrow c) = 1$ i $a \rightarrow b = 1$, onda $c = 1$.

1.1.4 Ako $a = 1$ i $a \rightarrow (a \rightarrow b) = 1$, onda $b = 1$.

Dokaz: 1.1.1 Iz $a \rightarrow b = 1$ i $a = 1$ izlazi $1 \rightarrow b = 1$, što, zajedno sa $b \rightarrow 1 = 1$ (i_4), daje $b = 1$, po (i_3).

1.1.2 Ako je $a = 1$, iz $b \rightarrow 1 = 1$ (i_4), sledi $b \rightarrow a = 1$.

1.1.3 i 1.1.4 očigledne su posledice 1.1.1.

Lema 1.2 (Rasiowa) Ako je $(A, 1, \rightarrow)$ implikativna algebra, onda je relacija $\leqslant$ definisana na A sa

(1) $a \leqslant b$ ako i samo ako $a \rightarrow b = 1$,

(parcijalno) uređenje na A. Element 1 najveći je element u (parcijalno) uređenom skupu $(A, \leqslant)$, a O je najmanji element u tom uređenju, ako se radi o ograničenoj implikativnoj algebri.

Dokaz sledi neposredno iz (1) i Def.1.1.

Različite implikativne operacije na nekom skupu mogu indukovati isto (parcijalno) uređenje na tom skupu. Na primer, na (parcijalno) uređenom skupu $(A, \leqslant, 1, O)$ s najvećim - 1 - i najmanjim - O - elementom, dve implikacije:

$$(2)\quad a \to_i b = \begin{cases} 1, & \text{za } a \leqslant b \\ b, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{(intuicionistička implikacija)}$$

i

$$(3)\quad a \to_t b = \begin{cases} 1, & \text{za } a \leqslant b \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{(trivijalna S5 implikacija)},$$

obe reprodukuju prvobitni poredak na A.

S druge strane, svaki (parcijalno) uređen skup s najvećim elementom $(A, \leqslant, 1)$ postaje na trivijalan način implikativna algebra, ako se operacija $\to$ definiše ovako (Rasiowa):

$$(4)\quad a \to b = \begin{cases} 1, & \text{ako je } a \leqslant b \\ a_0 \neq 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

U daljem izlaganju, u formulacijama iskaza o implikativnim algebrama, slobodno se koristi termin (parcijalno) uređenje ($\leqslant$), podrazumevajući da je ono uvedeno sa (1).

Klasa implikativnih algebri, kao kvazivarijetet, zatvorena je za podalgebre i direktne proizvode algebri, ali nije zatvorena za homomorfne slike.

Lema 1.3 (Rasiowa) Klasa svih implikativnih algebri nije jednakosno definabilna.

Dokaz: Uzmimo apstraktne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ i $\mathfrak{B} = (B, 1', \to')$ gde je $A = \{1, a_1, a_2\}$ i $B = \{1', b\}$, a operacije $\to$ i $\to'$ definisane su jednakostima: $a_1 \to 1 = a_2 \to 1 = a_1 \to a_1 = a_2 \to a_2 = 1 \to 1 = 1$, $1 \to a_1 = 1 \to a_2 = a_1 \to a_2 = a_2 \to a_1 = a_1$, $b \to' b = b \to' 1 = 1' \to' b = 1' \to' 1' = 1'$. Lako je proveriti da je $\mathfrak{A}$ implikativna algebra, dok $\mathfrak{B}$ nije. Neka je $h: A \to B$ preslikavanje iz A na B definisano ovako: $h(1) = h(a_1) = 1'$, $h(a_2) = b$. Preslikavanje h je epimorfizam $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{B}$. Znači, epimorfna slika implikativne algebre ne mora biti implikativna algebra i, otuda, implikativne algebre nisu jednakosno definabilne.

Naredna definicija inspirisana je pojmom striktne formule iz modalne logike: formula je striktna ako i samo ako je oblika $A \Rightarrow B$ (gde '$\Rightarrow$' označava striktnu implikaciju).

Definicija 1.2 (Herman, Marsden, Piziak) Element c implikativne algebre $(A, 1, \to)$ je implikacija ako i samo ako postoje elementi a i b iz A takvi da je $c = a \to b$. Skup implikacija implikativne algebre u daljem se označava sa I.

Aksiomatski sistem za implikativne algebre preslab je, jer, u implikativnoj algebri, čak ni "gornji konusi" (tj. skupovi oblika $\{x : a \leqslant x\}$, gde je $\leqslant$ definisano sa (1)) ne moraju biti implikativni filtri. Taj se nedostatak otklanja zamenom slabe tranzitivnosti (i_2) jednim jačim uslovom (F_0) za koji se ispostavlja da je za to i potreban.

Definicija 1.3 Slabo deduktivna implikativna algebra je algebra $(A, 1, \rightarrow)$, gde su 1 i $\rightarrow$ redom nularna i binarna operacija koje zadovoljavaju aksiome (i_1), (i_3) i (i_4) za implikativne algebre, kao i

(F_0) Ako $a \rightarrow (b \rightarrow c) = 1$ i $a \rightarrow b = 1$, onda $a \rightarrow c = 1$.

Ograničena slabo deduktivna implikativna algebra $(A, 1, \rightarrow)$ je slabo deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (i_5) za neki element 0 iz A.

Lema 1.4 Svaka slabo deduktivna implikativna algebra je implikativna algebra. Obratno, svaka implikativna algebra u kojoj važi (F_0) predstavlja slabo deduktivnu implikativnu algebru.

Dokaz: Za prvi deo tvrđenja, dovoljno je dokazati da u slabo deduktivnoj implikativnoj algebri važi (i_2). Neka je $a \rightarrow b = 1$ i $b \rightarrow c = 1$. Otuda je, prema Lemi 1.1.2, $a \rightarrow (b \rightarrow c) = 1$ i $a \rightarrow b = 1$, što, po (F_0), daje $a \rightarrow c = 1$.

Ostatak tvrdnje je očigledan.

Ima implikativnih algebri koje nisu slabo deduktivne implikativne algebre. To pokazuje primer Rasiowe iz dokaza Leme 1.3 : $(A, 1, \rightarrow)$, gde je $A = \{1, a_1, a_2\}$, a $\rightarrow$ je operacija definisana na navedeni način, predstavlja implikativnu algebru koja nije slabo deduktivna implikativna algebra, jer je $a_1 \rightarrow (a_1 \rightarrow a_2) = 1$, $a_1 \rightarrow a_1 = 1$, ali je $a_1 \rightarrow a_2 = a_1 \neq 1$, tako da ne važi ($F_0$).

Lema 1.5 Neka je $(A, 1, \rightarrow)$ slabo deduktivna implikativna algebra. Tada je:

1.5.1 $1 \rightarrow a \leqslant a$

1.5.2 Ako $a \rightarrow (a \rightarrow b) = 1$, onda $a \rightarrow b = 1$.

1.5.3 $1 \rightarrow 0 = 0$ (u ograničenoj slabo deduktivnoj implikativnoj algebri)

Dokaz: 1.5.1 Iz $(1 \rightarrow a) \rightarrow (1 \rightarrow a) = 1$ (i_1) i $(1 \rightarrow a) \rightarrow 1 = 1$ (i_4), po (F_0), sledi $(1 \rightarrow a) \rightarrow a = 1$, odakle je, prema (1), $1 \rightarrow a \leqslant a$.

1.5.2 Ako je $a \rightarrow (a \rightarrow b) = 1$, zbog $a \rightarrow a = 1$ (i_1), dobija se $a \rightarrow b = 1$, po (F_0).

1.5.3 Prema 1.5.1, $1 \rightarrow 0 \leqslant 0$, što sa $0 \leqslant 1 \rightarrow 0$ (i_5) i (1) daje traženu jednakost.

Iduća teorema i korolar pokazuju kako uvođenje jedne prirodne pretpostavke - slabog zakona permutacije antecedenata:

(SP) Ako $a \rightarrow (b \rightarrow c) = 1$, onda $b \rightarrow (a \rightarrow c) = 1$, ma dalekosežnu posledicu po implikativne algebre i slabo deduktivne implikativne algebre, jer implikativna operacija time gubi striktan karakter.

Teorema 1.6 Ako u implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$ važi slabi zakon permutacije antecedenata (SP), onda

1.6.1 $a \to (b \to a) = 1$ (zakon afirmacije konsekventa)

1.6.2 $a \leq b \to a$

1.6.3 $a \leq (a \to b) \to b$

1.6.4 $a \leq (a \to a) \to a$

1.6.5 $a = 1 \to a$

1.6.6 $a \to b \leq ((a \to b) \to b) \to b$

Dokaz: 1.6.1 Iz $b \to (a \to a) = b \to 1 = 1$ $((i_1)$ i $(i_4))$, primenom (SP), dobija se $a \to (b \to a) = 1$.

1.6.2 je posledica 1.6.1 i (1).

1.6.3 i 1.6.4 Iz $(a \to b) \to (a \to b) = 1$ (i_1), po (SP), sledi $a \to ((a \to b) \to b) = 1$, tj. $a \leq (a \to b) \to b$, zbog (1).

1.6.5 Iz $(1 \to a) \to (1 \to a) = 1$ (i_1), po (SP), imamo $1 \to ((1 \to a) \to a) = 1$, odakle se po 1.1.1, zbog $1 = 1$, dobija $(1 \to a) \to a = 1$, tj. $1 \to a \leq a$. $a \leq 1 \to a$ sledi iz 1.6.2.

1.6.6 sledi iz $((a \to b) \to b) \to ((a \to b) \to b) = 1$ (i_1), (SP) i (1).

Korolar 1.7 Ako u implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$ važi slabi zakon permutacije antecedenata (SP), onda

(5) $1 \to a = a$,

tj. svi su elementi iz A implikacije (u smislu Def.1.2). Prema tome, operacija $\to$ preslikava $A \times A$ na A.

Postulati za slabo deduktivne implikativne algebre suviše su restriktivni da bi se mogao dokazati makar i vrlo slab oblik algebarskog pandana teoreme dedukcije. Zbog toga se, pojačavanjem uslova (F_o) i (SP) uvode nove implikativne algebre koje su, ipak, slabije od pozitivnih implikacijskih algebri. (Pozitivne implikacijske algebre su algebarski modeli implikativnog fragmenta intuicionističkog iskaznog računa.)

Definicija 1.4 n-deduktivna implikativna algebra je algebra $(A, 1, \to)$, gde je 1 nularna a $\to$ dvoargumentna operacija, i te operacije, pored aksioma (i_1), (i_3) i (i_4) za implikativne algebre, zadovoljavaju ovaj postulat:

(F_n) $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to (b \to c)))\ldots) = 1$ i $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots) = 1$ povlače $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to c))\ldots) = 1$.

Ograničena n-deduktivna implikativna algebra $(A, 1, \to)$ je n-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (i_5) za neki element 0 iz A.

(Ograničena) ω deduktivna ili konačno deduktivna implikativna algebra je (ograničena) implikativna algebra koja je n-deduktivna implikativna algebra za svaki konačan kardinalni broj n.

Iduća lema tvrdi da je u implikativnoj algebri uslov (F_1) jači od uslova (F_0).

Lema 1.8 Ako se pretpostave (i_3) i (i_4), postulat (F_0) posledica je uslova (F_1):

(F_1) $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ i $c_1 \to (a \to b) = 1$ povlače $c_1 \to (a \to c) = 1$.

Drugim rečima, 1-deduktivne implikativne algebre su slabo deduktivne implikativne algebre.

Obrnuto, slabo deduktivne implikativne algebre u kojima važi (F_1) su 1-deduktivne implikativne algebre.

Dokaz: Pretpostavimo da važe (i_3), (i_4) i (F_1). Ako je $a \to (b \to c) = 1$ i $a \to b = 1$, onda je, prema Lemi 1.1.2, $1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ i $1 \to (a \to b) = 1$, odakle je, po (F_1), $1 \to (a \to c) = 1$. Iz poslednje formule i $1 = 1$, po Lemi 1.1.1, sledi $a \to c = 1$. Time je dokazano (F_0).

Obrnuto je očigledno.

Prethodna lema, zajedno sa sledećom, pokazuje da (ograničene) slabo deduktivne, n-deduktivne i ω deduktivne implikativne algebre zapravo čine hijerarhiju.

Lema 1.9 Ako je $(A, 1, \to)$ (ograničena) n-deduktivna implikativna algebra, onda je $(A, 1, \to)$ (ograničena) k-deduktivna implikativna algebra, za sve $k \leq n$. Pored toga, očigledno, svaka (ograničena) ω deduktivna implikativna algebra je (ograničena) n-deduktivna implikativna algebra, za svaki konačan kardinalni broj n.

Dokaz: Dokažimo da, ako se pretpostave (i_3) i (i_4), onda (F_{n+1}) implicira (F_n).

Ako je $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to (b \to c)))\ldots) = 1$ i $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots) = 1$, onda je, prema Lemi 1.1.2, $1 \to (c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to (b \to c)))\ldots)) = 1$ i $1 \to (c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots)) = 1$, odakle je, po (F_{n+1}), $1 \to (c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to c))\ldots)) = 1$. Iz poslednjeg, zbog $1 = 1$ i Leme 1.1.1, sledi $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to c))\ldots)) = 1$. Time je dokazano (F_n).

Sledeća teorema pokazuje da, u implikativnoj algebri, Fregeov zakon (F) i jaki zakon permutacije antecedenata (JP) ovlače delimično brisanje hijerarhije deduktivnih implikativnih algebri. Najpre jedna lema tehničkog karaktera.

ema 1.10 U implikativnoj algebri, jaki zakon permutacije antecedenata:

(JP) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$,

ekvivalentan je sledećem (oslabljenom) obliku zakona (JP):

(JP′) $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) = 1$,

to i svakom od (beskonačno mnogo) iskaza:

(SP_n) Ako $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to (b \to c)))\ldots) = 1$, onda $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (b \to (a \to c)))\ldots) = 1$.

Uz to, u implikativnoj algebri, slabi zakon permutacije antecedenata (SP) sledi iz (JP).

okaz: U implikativnoj algebri, (JP) očigledno povlači (JP′), (SP_n) i (SP). Obratno, zbog simetrije, (JP′) implicira (JP). nalogno dokazu Leme 1.9, lako je videti, uz pretpostavku (i_3) (i_4), da (SP_n) sledi iz (SP_{n+1}). Dokažimo još da je (JP′) osledica (SP_1):

(SP_1) Ako $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $c_1 \to (b \to (a \to c)) = 1$.

ime, iz (SP_1), za $c_1 = a \to (b \to c)$, dobija se da (i_1) daje (JP′).

orema 1.11 U implikativnoj algebri, (F_n)($n = 0, 1, 2, \ldots$) sledice su jakog zakona permutacije antecedenata (JP) kao i egeovog zakona (F):

(F) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

kaz: Očigledno, u implikativnoj algebri, (F_0) sledi iz (F), r se, ako se pretpostavi $a \to (b \to c) = 1$ i $a \to b = 1$, ostrukom primenom Leme 1.1.1, dobija $a \to c = 1$.

Dokažimo indukcijom da, u implikativnoj algebri, (JP) (F) impliciraju (F_n) ($n = 1, 2, \ldots$).

Neka, u implikativnoj algebri, važi (F). Tada naredni z formula predstavlja dokaz za (F_1):

o $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, hyp.

o $c_1 \to (a \to b) = 1$, hyp.

o $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, (F)

o $c_1 \to ((a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))) = 1$, iz 3^o, 1.1.2

o $(c_1 \to ((a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)))) \to ((c_1 \to (a \to (b \to c))) \to (c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c)))) = 1$, (F)

o $(c_1 \to (a \to (b \to c))) \to (c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c))) = 1$, 4^o i 5^o po 1.1.1

o $c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, iz 1^o i 6^o po 1.1.1

o $(c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c))) \to ((c_1 \to (a \to b)) \to (c_1 \to (a \to c)))$ 1 , (F)

9° $(c_1 \to (a \to b)) \to (c_1 \to (a \to c)) = 1$, iz 7° i 8° po 1.1.1

10° $c_1 \to (a \to c) = 1$, iz 2° i 9° po 1.1.1.

Vidi se da su prve dve formule ovog desetočlanog niza konjunkti iz antecedenta uslova (F_1), a poslednja je formula konsekvent tog uslova. Sem toga, svaka je formula tog niza (izuzev prve dve) ili Fregeov zakon ili je dobijena iz neke prethodne formule niza primenom 1.1.2 ili je dobijena iz neke dve prethodne formule tog niza primenom 1.1.1.

Pretpostavimo, opštije, da je niz formula $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $\ldots$, $f_m = 1$ dokaz za (F_n), gde je

$f_1 = c_n \to (\ldots \to (c_1 \to (a \to (b \to c)))\ldots)$,

$f_2 = c_n \to (\ldots \to (c_1 \to (a \to b))\ldots)$,

$f_m = c_n \to (\ldots \to (c_1 \to (a \to c))\ldots)$, i svaka formula ovog niza (izuzev prve dve) je ili Fregeov zakon ili je dobijena iz neke prethodne formule tog niza primenom 1.1.2 ili je dobijena iz neke dve prethodne formule tog niza primenom 1.1.1 ili je dobijena iz neke prethodne formule tog niza primenom (SP) ili (SP_r) $(r = 1, 2, \ldots)$. Formirajmo niz formula $c_{n+1} \to f_1 = 1$, $c_{n+1} \to f_2 = 1$, $\ldots$, $c_{n+1} \to f_m = 1$ i pokažimo kako se, umetanjem konačno mnogo novih formula, iz tog niza, može konstruisati dokaz za (F_{n+1}), u kome se koriste ista pravila zaključivanja. (Pri tome se, faktički, imitira ideja dokaza klasične teoreme dedukcije; vide npr. Church /18/, str.86.)

Najpre, $c_{n+1} \to f_1 = 1$ i $c_{n+1} \to f_2 = 1$ su konjunkti iz antecedenta (F_{n+1}), a $c_{n+1} \to f_m = 1$ je konsekvent tog uslova. Razmotrimo bilo koju formulu $c_{n+1} \to f_i = 1$ $(2 < i \leq m)$ i pretpostavimo da je niz upotpunjen zaključno sa $c_{n+1} \to f_{i-1} = 1$. Mogu nastupiti četiri slučaja.

Ako je $f_i = 1$ Fregeov zakon, tada $c_{n+1} \to f_i = 1$ sledi po 1.1.2 iz $f_i = 1$ i tu formulu treba umetnuti ispred $c_{n+1} \to f_i = 1$.

Ako je $f_i = 1$ dobijena iz neke formule $f_j = 1$ $(j < i)$ primenom 1.1.2, tada je $f_i = d \to f_j$ i postoji dokaz za $c_{n+1} \to f_j = 1$. Umetanjem formule $d \to (c_{n+1} \to f_j) = 1$ (koja, inače, sledi iz $c_{n+1} \to f_j = 1$ po 1.1.2) i iz koje (po (SP)) sledi $c_{n+1} \to (d \to f_j) = c_{n+1} \to f_i = 1$, dobijen je dokaz za $c_{n+1} \to f_i = 1$.

Ako $f_i = 1$ sledi iz $f_j = 1$ i $f_k = f_j \to f_i = 1$ $(j,k < i)$ po 1.1.1, onda postoje dokazi za $c_{n+1} \to f_j = 1$ i $c_{n+1} \to f_k = c_{n+1} \to (f_j \to f_i) = 1$, odakle se, umetanjem dve formule: $(c_{n+1} \to (f_j \to f_i)) \to ((c_{n+1} \to f_j) \to (c_{n+1} \to f_i)) = 1$ (F) i $(c_{n+1} \to f_j) \to (c_{n+1} \to f_i) = 1$, dobija se dokaz za $c_{n+1} \to f_i = 1$.

Najzad, ako je $f_i = 1$ dobijena iz formule $f_j = 1$ ($j < i$) primenom (SP) ili (SP_r)($r = 1, 2, \ldots$), onda i $c_{n+1} \to f_i = 1$ sledi iz formule $c_{n+1} \to f_j = 1$ (za koju postoji dokaz) po pravilu (SP_1) odnosno (SP_{r+1}).

Narednih nekoliko lema i teorema daju još nekoliko osobina 1-deduktivnih i 2-deduktivnih implikativnih algebri. Ispostavlja se da slabi zakon permutacije antecedenata (SP) ima za posledicu delimično ukidanje hijerarhije deduktivnih implikativnih algebri koja se svodi na samo tri predstavnika.

Teorema 1.12 Neka je $(A, 1, \to)$ 1-deduktivna implikativna algebra. Tada:

1.12.1 Ako $(a \to b) \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$.

1.12.2 Ako $(a \to b) \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

1.12.3 Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$.

1.12.4 Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

1.12.5 Ako $b \to c = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$.

1.12.6 Ako $b \leq c$, onda $a \to b \leq a \to c$. (izotonija po desnom argumentu)

1.12.7 Ako $(a \to (b \to c)) \to (a \to b) = 1$, onda $(a \to (b \to c)) \to (a \to c) = 1$.

1.12.8 Ako $(a \to (b \to c)) \to (a \to b) = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) = 1$.

1.12.9 Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to (b \to c)) \to (a \to c) = 1$.

1.12.10 Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) = 1$.

1.12.11 Ako $a \leq b$, onda $a \to (b \to c) \leq a \to c$.

1.12.12 $a \to (a \to b) \leq a \to b$

1.12.13 $(a \to b) \to a \leq (a \to b) \to b$

Dokaz: 1.12.1 Ako je $(a \to b) \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda, zbog $(a \to b) \to (a \to b) = 1$ (i_1), po (F_1), sledi $(a \to b) \to (a \to c) = 1$.

1.12.2 Ako je $(a \to b) \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda je, prema 1.12.1, $(a \to b) \to (a \to c) = 1$, odakle se, primenom 1.1.2, dobija $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

1.12.3 Iz $a \to (b \to c) = 1$, po 1.1.2, sledi $(a \to b) \to (a \to (b \to c)) = 1$, odakle je, po 1.12.1, $(a \to b) \to (a \to c) = 1$.

1.12.4 Iz $a \to (b \to c) = 1$, po 1.12.3, imamo najpre $(a \to b) \to (a \to c) = 1$, a zatim, zbog 1.1.2,

$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1.$

1.12.5 Iz $b \to c = 1$, dobija se $a \to (b \to c) = 1$ (po 1.1.2), odakle je $(a \to b) \to (a \to c) = 1$, prema 1.12.3.

1.12.6 sledi direktno iz 1.12.5 i (1).

1.12.7 Ako je $(a \to (b \to c)) \to (a \to b) = 1$, onda, zbog $(a \to (b \to c)) \to (a \to (b \to c)) = 1$ (i_1), po (F_1), imamo $(a \to (b \to c)) \to (a \to c) = 1$.

1.12.8 posledica je 1.12.7 i 1.1.2.

1.12.9 sledi iz 1.12.7 i 1.1.2.

1.12.10 dobija se iz 1.12.9 još jednom primenom 1.1.2.

1.12.11 direktno sledi iz 1.12.9 i (1).

1.12.12 sledi iz $a \leq a$ i 1.12.11 za $b = a$ i $c = b$.

1.12.13 Iz $(a \to b) \to (a \to b) = 1$ (i_1), po 1.12.3, imamo $((a \to b) \to a) \to ((a \to b) \to b) = 1$, tj. $(a \to b) \to a \leq$ $\leq (a \to b) \to b$, zbog (1).

Teorema 1.13 Neka je $(A, 1, \to)$ 2-deduktivna implikativna algebra. Tada:

1.13.1 Ako $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to (b \to c))) = 1$, onda $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

1.13.2 Ako $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to b)) = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) = 1$.

Dokaz: 1.13.1 Iz $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to b)) =$
$= (a \to (b \to c)) \to 1 = 1$ $((i_1)$ i $(i_4))$ i
$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to (b \to c)) = 1$, po (F_2), sledi
$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

1.13.2 Iz $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to (b \to c))) =$
$= (a \to b) \to 1 = 1$ $((i_1)$ i $(i_4))$ i
$(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to b)) = 1$, po (F_2), imamo
$(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) = 1$.

Teorema 1.14 Neka je $(A, 1, \to)$ 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi slabi zakon permutacije antecedenata (SP). Tada:

1.14.1 Ako $a \to b = 1$, onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$.

1.14.2 Ako $a \leq b$, onda $b \to c \leq a \to c$. (Operacija $\to$ je antitona po levom argumentu.)

1.14.3 $a \to b = ((a \to b) \to b) \to b$

1.14.4 $a \to (a \to b) = a \to b$ (kontrakcija)

1.14.5 $a \to b = ((a \to b) \to a) \to b$

Dokaz: 1.14.1 Ako je $a \to b = 1$, onda je, po 1.12.9, $(a \to (b \to c)) \to (a \to c) = 1$. Iz poslednje formule i 1.5.1 $(b \to c) \to (a \to (b \to c)) = 1$, primenom (i_2), sledi

$(b \to c) \to (a \to c) = 1$.

1.14.2 sledi direktno iz 1.14.1 i (1).

1.14.3 Prema 1.6.6, dovoljno je dokazati $((a \to b) \to b) \to b \leqslant \leqslant a \to b$, što sledi iz $a \leqslant (a \to b) \to b$ (1.6.3) po 1.14.2.

1.14.4 $a \to 1 = 1$ (i_4), tj. $a \leqslant 1$, po 1.14.2, daje $1 \to (a \to b) \leqslant a \to (a \to b)$. No, po Korolaru 1.7 (5) i Lemi 1.8, $1 \to (a \to b) = a \to b$, tako da imamo $a \to b \leqslant a \to (a \to b)$. Obrnuta nejednakost važi prema 1.12.12.

1.14.5 Iz $(a \to b) \to a \leqslant (a \to b) \to b$ (1.12.13), primenom (SP), imamo $a \to b \leqslant ((a \to b) \to a) \to b$. Obrnuto, iz $a \leqslant (a \to b) \to a$ (1.6.2), prema 1.14.2, dobija se $((a \to b) \to a) \to b \leqslant a \to b$.

Teorema 1.15 Neka je $(A, 1, \to)$ 2-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi slabi zakon permutacije antecedenata (SP). Tada:

1.15.1 $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$ (Fregeov zakon)

1.15.2 $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$ (jaki zakon permutacije antecedenata)

1.15.3 $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$ (jaka tranzitivnost-sufiksiranje)

1.15.4 $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$ (jaka tranzitivnost-prefiksiranje)

1.15.5 $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$ (leva samodistributivnost implikacije)

1.15.6 $(a \to b) \to ((b \to a) \to b) = (b \to a) \to ((a \to b) \to a)$

Dokaz: 1.15.1 Po Th.1.6.1 i lemama 1.4, 1.8 i 1.9, važi $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to (b \to c))) = 1$, odakle se, primenom 1.13.1, dobija Fregeov zakon.

1.15.2 Iz (F), (SP) i (1) imamo $a \to b \leqslant \leqslant (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$. No, po 1.6.2 je $b \leqslant a \to b$. Otuda, $b \leqslant (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$. Još jednom primenom (1) i (SP), dobija se $a \to (b \to c) \leqslant b \to (a \to c)$. Simetrično se dobija obrnuta nejednakost.

1.15.3 Prema 1.6.3 važi $b \leqslant (b \to c) \to c$. Primenom 1.12.6, iz prethodnog se dobija $(a \to b) \to b \leqslant (a \to b) \to ((b \to c) \to c)$. Otuda je, zbog $a \leqslant (a \to b) \to b$ (1.6.3), $a \leqslant (a \to b) \to ((b \to c) \to c)$, tj. $a \to ((a \to b) \to ((b \to c) \to c) = = 1$. Iz poslednje formule, dvostrukom primenom 1.15.2 (tj.(JP)), imamo $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$.

1.15.4 je posledica 1.15.3 i (SP).

1.15.5 Prema 1.6.2, važi $b \leqslant a \to b$. Odatle se, primenom 1.14.2 i 1.15.2, dobija $(a \to b) \to (a \to c) \leqslant b \to (a \to c) =$

$= a \to (b \to c)$. Obrnuta nejednakost važi zbog 1.15.1 i (1).

<u>1.15.6</u> Iz $(b \to a) \to b \leqslant (b \to a) \to a$ (1.12.13), sledi $(a \to b) \to ((b \to a) \to b) \leqslant (a \to b) \to ((b \to a) \to a) =$ $= (b \to a) \to ((a \to b) \to a)$, po 1.12.6 i 1.15.2. Simetrično se dobija obrnuta nejednakost: $(b \to a) \to ((a \to b) \to a) \leqslant$ $\leqslant (a \to b) \to ((b \to a) \to b)$.

<u>Lema 1.16</u> U 1-deduktivnoj implikativnoj algebri, slabi zakon permutacije antecedenata (SP) ekvivalentan je sa <u>zakonom afirmacije konsekventa</u> (AC):

(AC) $a \to (b \to a) = 1$.

<u>Dokaz</u>: Ako je, u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri, $a \to (b \to c) = 1$, onda je, po 1.12.3, $(a \to b) \to (a \to c) = 1$, tj. $a \to b \leqslant a \to c$, što, zbog $b \leqslant a \to b$ ((AC) i (1)), daje $b \leqslant a \to c$, odnosno $b \to (a \to c) = 1$.

Obratno, (AC) je posledica (SP) već u implikativnoj algebri, prema 1.6.1, Lemi 1.8 i Lemi 1.4.

<u>Korolar 1.17</u> Ako u implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$ važi slabi zakon permutacije antecedenata (SP), onda, za svako $n \geqslant 2$, $(A, 1, \to)$ je n-deduktivna implikativna algebra ako i samo ako je $(A, 1, \to)$ ω deduktivna implikativna algebra. Štaviše, za $n \geqslant 2$, u n-deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), takođe važe (F) i (JP).(Ovo sledi iz Leme 1.9 i Th.1.11 i 1.15.)

Drugim rečima, ako se aksiomama deduktivnih implikativnih algebri doda, kao postulat, slabi zakon permutacije antecedenata (SP), onda se cela hijerarhija tih algebri redukuje na najviše tri predstavnika (u stvari, iz daljeg se vidi da ih ima tačno tri). To su slabo deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP), 1-deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP) i ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP) (i sledstveno (F) i (JP)).

Navedimo eksplicitno, radi poređenja, <u>aksiome slabo deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP)</u>:

(i_1) $a \to a = 1$

(SP) Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $b \to (a \to c) = 1$.

(F_0) Ako $a \to (b \to c) = 1$ i $a \to b = 1$, onda $a \to c = 1$.

(i_3) Ako $a \to b = 1$ i $b \to a = 1$, onda $a = b$.

(i_4) $a \to 1 = 1$.

Za ograničene slabo deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP), treba dodati:

(i_5) $0 \to a = 1$.

Sledećom teoremom daje se ekvivalentna aksiomatska karakterizaciju (ograničenih) 1-deduktivnih odnosno ω deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP).

Teorema 1.18 Algebra $(A, 1, \rightarrow)$, gde je 1 nularna operacija a $\rightarrow$ binarna operacija, je 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) ako i samo ako te dve operacije zadovoljavaju aksiome:

(i_1) $a \rightarrow a = 1$

(AC) $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$

(F_1) Ako $c_1 \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow c)) = 1$ i $c_1 \rightarrow (a \rightarrow b) = 1$, onda $c_1 \rightarrow (a \rightarrow c) = 1$.

(i_3) Ako $a \rightarrow b = 1$ i $b \rightarrow a = 1$, onda $a = b$.

(i_4) $a \rightarrow 1 = 1$.

Da bi se dobio aksiomatski sistem za n-deduktivne $(n \geq 2)$ implikativne algebre u kojima važi (SP) (ili, što je isto, za ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP), treba (F_1) zameniti sa (F) (u kome slučaju (i_1) postaje redundantno):

(F) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$.

Za ograničene 1-deduktivne i ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP), treba, odgovarajućim aksiomatskim sistemima dodati (i_5):

(i_5) $0 \rightarrow 1 = 1$.

Dokaz: Prvi deo teoreme posledica je Def.1.4 i Leme 1.16.

Drugi deo teoreme sledi iz Def.1.4, Lema 1.9 i 1.16 i Th.1.11 i Th.1.14.

Iz prethodne teoreme, vidi se da su ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP), u stvari, pozitivne implikacijske algebre (vide Rasiowa /76/). Algebre dualne pozitivnim implikacijskim algebrama uveo je Henkin /34/ pod imenom implikativnih modela. Teoriju pozitivnih implikacijskih algebri razvio je Diego /23/, koji ih zove Hilbertovim algebrama. Pozitivne implikacijske algebre su jednakosno definabilne. U svetlosti teoreme reprezentacije, tipični primeri pozitivnih implikacijskih algebri su podalgebre pozitivnih implikacijskih algebri svih otvorenih podskupova topološkog prostora X, gde je $1 = X$, a implikacija se poklapa s relativnim pseudokomplementom u pseudo-Booleovoj algebri svih otvorenih podskupova od X.

Teorema 1.19 (Diego) Neka je $(A, \rightarrow)$ algebra s dvoargumentnom operacijom $\rightarrow$ koja zadovoljava jednakosti:

(p_1) $(a \rightarrow a) \rightarrow b = b$

(p_2) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$

(p_3) $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow b) = (b \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow a)$.

Tada je

(6) $a \to a = b \to b$,

i $(A, 1, \to)$, gde je $1 = a \to a$, predstavlja pozitivnu implikacijsku algebru (odnosno w deduktivnu implikativnu algebru u kojoj važi (SP)).

Dokaz se može naći kod Rasiowe / / ili Diega / /.

Teorema 1.20 (Diego, teorema reprezentacije za pozitivne implikacijske algebre) Neka je I_τ interior operacija topološkog prostora (X, τ), a $G(X)$ kolekcija otvorenih skupova tog prostora. Tada je $(G(X), X, \to_\tau)$, gde je

(7) $Y \to_\tau Z = I_\tau((X \setminus Y) \cup Z)$ $(Y, Z \in G(X))$,

pozitivna implikacijska algebra. U ovoj algebri, relacija (parcijalnog) uređenja definisana sa (1) poklapa se sa skupovnom inkluzijom:

(8) $Y \to_\tau Z = X$ ako i samo ako $Y \subseteq Z$ $(Y, Z \in G(X))$.

Štaviše, svaka neprazna potklasa $G_0(X)$ klase $G(X)$, zatvorena za operaciju $\to_\tau$, sadrži X i $(G_0(X), X, \to_{\tau_0})$ takođe je pozitivna implikacijska algebra ($\to_{\tau_0}$ je restrikcija $\to_\tau$ na $G_0(X)$). Drugim rečima, svaka podalgebra pozitivne implikacijske algebre $(G(X), X, \to_\tau)$ je pozitivna implikacijska algebra i zove se pozitivna implikacijska algebra skupova.

Za svaku pozitivnu implikacijsku algebru $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$, postoji monomorfizam h iz $\mathfrak{A}$ u pozitivnu implikacijsku algebru $(G(X), X, \to_\tau)$ otvorenih skupova topološkog T_0 prostora. Znači, svaka pozitivna implikacijska algebra izomorfna je pozitivnoj implikacijskoj algebri skupova.

Dokaz se može naći kod Rasiowe /76/ ili Diega /23/.

I 1-deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP) mogu se realizovati kao skupovne implikativne algebre. Da bi se to pokazalo, potrebno je nekoliko definicija i stavova tehničkog karaktera.

Definicija 1.5 Neka je $P(X)$ partitivni skup skupa X. Semi-interior operacija na skupu X je funkcija $I_0 : P(X) \to P(X)$ (koja, dakle, svakom skupu $A \subseteq X$ pridružuje skup $I_0(A) \subseteq X$), pri čemu su ispunjeni sledeći zahtevi:

(si_1) $I_0(X) = X$

(si_2) $I_0(A) \subseteq A$

(si_3) $I_0(I_0(A)) = I_0(A)$ (idempotencija)

(si_4) Ako $A \subseteq B$, onda $I_0(A) \subseteq I_0(B)$, (izotonija)

Fiksne tačke operatora I_0 (tj. svaki skup A za koji je $I_0($ $= A)$ zovu se invarijante operatora I_0 (Monteiro i Ribeiro). $I(I_o)$ označava skup svih invarijanata semi-interior operacije I_o.

Leme 1.21 i 1.22 nabrajaju dobro poznate posledice aksioma (si_1) - (si_4) koje su postale deo matematičkog folklora (vide, između ostalog, Monteiro i Ribeiro /58/).

Lema 1.21

(si_5) $I_o(\emptyset) = \emptyset$

(si_6) $I_o(A \cap B) \subseteq I_o(A) \cap I_o(B)$

(si_7) $I_o(A) \cup I_o(B) \subseteq I_o(A \cup B)$

(si_8) Ako $B = I_o(B)$, onda $B \subseteq A$ ako i samo ako $B \subseteq I_o(A)$.

($I_o(A)$ je najveća invarijanta operatora I_o sadržana u A.)

(si_9) Ako je, za svako $j \in J$, $A_j \in I(I_o)$, onda

$$I_o(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} A_j \text{ , tj. } \bigcup_{j\in J} A_j \in I(I_o) .$$

(Klasa $I(I_o)$ zatvorena je za arbitrarne unije.)

(si_{10}) $I_o(A) = \bigcup\{C \in P(X) : C = I_o(C) \text{ i } C \subseteq A\}$

(si_{11}) $I_o(A) = X$ ako i samo ako $A = X$.

Primetimo da se semi-interior operacija razlikuje od interior operacije Kuratowskog jedino u (si_6), gde, za Kuratowskijevu interior operaciju, stoji jednakost umesto inkluzije.

Lema 1.22 Svakom semi-interior operacijom I_o potpuno je određena klasa $I(I_o)$ njenih invarijanata i ta klasa sadrži $\emptyset$ i X i zatvorena je za proizvoljne unije. Štaviše, svaka klasa K podskupova od X, koja sadrži $\emptyset$ i X i zatvorena je za unije, jednoznačno određuje semi-interior operaciju I_K :

(9) $I_K(A) = \bigcup\{C \in P(X) : C \subseteq A \text{ i } C \in K\}$,

čija je klasa invarijanata upravo klasa K : $I(I_K) = K$. Recipročno, zbog (si_{10}), je $I_{I(I_o)} = I_o$, tj. semi-interior operator određen sa (9) klasom $I(I_o)$ invarijanata operatora I_o , poklapa se sa I_o .

Korolar 1.23 Postoji obostrano jednoznačna korespondencija između semi-interior operacija na skupu X i klasa podskupova od X koje sadrže $\emptyset$ i X i zatvorene su za unije.

Definicija 1.6 Neka je K proizvoljna klasa podskupova od X i neka je K' klasa K dopunjena skupovima $\emptyset$, X i svim mogućim unijama iz K i pri tom je najmanja takva klasa. Ili, alternativno i tehnički preciznije, klasa K' definisana je uslovom:

(10) Ako $K'' \subseteq K'$, $\emptyset \in K''$, $X \in K''$, $K \subseteq K''$ i $\bigcup_{j\in J} A_j \in K''$ kadgod, za sve $j \in J$, $A_j \in K''$, onda $K'' = K'$, i $K \cup \{\emptyset, X\} \subseteq K'$.

Za semi-interior operaciju $I_{K'}$, određenu klasom K', kaže se da je generisana klasom K.

Naredna prosta lema koristi se za definiciju semi-interior operacije na proizvoljnom partitivnom skupu nekog skupa.

Lema 1.24 Za svaku klasu K podskupova skupa X, postoji samo jedna semi-interior operacija I_o na X takva da je I_o generisana klasom K.

Dokaz: Egzistencija semi-interior operacije $I_{K'}$, za datu klasu K posledica je Leme 1.22. I jedinost sledi iz te leme: neka je I_o semi-interior operator generisan klasom K. Tada je $K' = I(I_o)$ i, zbog $I_{I(I_o)} = I_o$, imamo $I_{K'} = I_o$.

Teorema 1.25 Neka je $S(X)$ klasa podskupova od X, zatvorena za proizvoljne unije, takva da $S(X)$ sadrži $\emptyset$ i X i neka je I_o semi-interior operacija određena tom klasom. Tada je $(S(X), X, \rightarrow)$, gde je

(11) $\quad Y \rightarrow Z = I_o((X \setminus Y) \cup Z) \quad (Y, Z \in S(X))$,

ograničena 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP). U ovoj algebri, relacija (parcijalnog) uređenja, definisana sa (1), poklapa se sa skupovnom inkluzijom u $(S(X), \subseteq)$:

(12) $\quad Y \rightarrow Z = X$ ako i samo ako $Y \subseteq Z$.

Štaviše, ako je $S_o(X)$, $S_o(X) \subseteq S(X)$, neprazna klasa podskupova iz X, zatvorena za operaciju $\rightarrow$ (definisanu sa (11)), onda je $X \in S_o(X)$ i $(S_o(X), X, \rightarrow_o)$ ($\rightarrow_o$ je restrikcija $\rightarrow$ na $S_o(X)$) takođe je 1-deduktivna implikativna algebra (jer je klasa 1-deduktivnih implikativnih algebri, kao kvazivarijetet, zatvorena za podalgebre). Drugim rečima, svaka podalgebra 1-deduktivne implikativne algebre $(S(X), X, \rightarrow)$ je 1-deduktivna implikativna algebra i zove se 1-deduktivna implikativna algebra skupova u kojoj važi (SP).

Dokaz: Dokažimo najpre (12). Naime,

$A \rightarrow B = X$ ako i samo ako $I_o((X \setminus A) \cup B) = X$

ako i samo ako $(X \setminus A) \cup B = X$ (po (si_{11}))

ako i samo ako $A \subseteq B$.

Očigledno, (i_1) sledi iz $A \subseteq A$ i (12), (i_3) iz (12), (i_4) iz $A \subseteq X$ i (12), a (i_5) iz $\emptyset \subseteq A$ i (12).

Što se tiče (AC), uvek je $A \subseteq (X \setminus B) \cup A$, odakle, po (si_4), imamo $I_o(A) \subseteq I_o((X \setminus B) \cup A)$, tj. $I_o(A) \subseteq B \rightarrow A$, po (11). No, skupovi iz $S(X)$ su invarijante semi-interior operacije I_o: $I_o(A) = A$, tako da imamo $A \subseteq B \rightarrow A$, što je, zbog (12), ekvivalentno sa $A \rightarrow (B \rightarrow A) = X$.

Treba još dokazati (E_1). Neka je $C_1 \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) = X$ i $C_1 \rightarrow (A \rightarrow B) = X$. To znači, prema (11), (12) i (si_4), da je

$C_1 \subseteq A \to (B \to C) = I_o((X \setminus A) \cup I_o((X \setminus B) \cup C)) \subseteq$
$\subseteq (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup C$ i $C_1 \subseteq A \to B = I_o((X \setminus A) \cup B) \subseteq$
$\subseteq (X \setminus A) \cup B$, odakle je
$C_1 \subseteq ((X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup C) \cap ((X \setminus A) \cup B) = (X \setminus A) \cup (B \cap C) \subseteq$
$\subseteq (X \setminus A) \cup C$. Iz poslednjeg se, po ($si_4$), dobija
$I_o(C_1) \subseteq I_o((X \setminus A) \cup C)$, tj. $I_o(C_1) \subseteq A \to C$, odnosno
$C_1 \to (A \to C) = X$, zbog $I_o(C_1) = C_1$ i (12). Time je, prema Th.1.18, dokaz završen.

Iz teoreme reprezentacije za 1-deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP), ispostavlja se da je svaka 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) izomorfna s takvom skupovnom implikativnom algebrom.

Teoreme, leme i korolari do kraja odeljka imaju za cilj da osvetle logičku međuzavisnost nekoliko ključnih zakona deduktivnih implikativnih algebri, kao i njihove kumulativne efekte. Razmatranja su inspirisana relevantnim iskaznim računom. Kao uzgredan rezultat, dobija se osam alternativnihaksiomatizacija w deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP).

<u>Lema 1.26</u> U implikativnoj algebri, iskaz

(ST_1) Ako $c_1 \to (a \to b) = 1$ i $c_1 \to (b \to c) = 1$, onda $c_1 \to (a \to c) = 1$

posledica je jakog zakona permutacije antecedenata (JP), kontrakcije (CTR), kao i jednog od zakona jake tranzitivnosti (JTP), (JTS):

(JP) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$ (upor. 1.15.2)

(CTR) $a \to (a \to b) = a \to b$ (upor. 1.14.4)

(JTP) $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$ (upor. 1.15.4)

(JTS) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$ (upor. 1.15.3)

<u>Primedba</u>: U stvari, (ST_1) važi pod nešto slabijim uslovima. Naime, od postulata za implikativne algebre, dovoljno je pretpostaviti samo (i_3) i (i_4), a zbog simetrije, samo "polovinu" (JP), tj.

(JP′) $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) = 1$.

Isto tako, dovoljno je pretpostaviti slabiji oblik kontrakcije:

(CTR′) $(a \to (a \to b)) \to (a \to b) = 1$ (upor. 1.12.12).

Napomenimo još da je svaki od zakona jake tranzitivnosti (JTP), (JTS) posledica onog drugog i (SP)(odnosno (JP)).

<u>Dokaz</u>: 1° $c_1 \to (a \to b) = 1$, hyp.

2° $c_1 \to (b \to c) = 1$, hyp.

3° $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$ (JTS)

4° $((a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))) \to$
$\to ((c_1 \to (a \to b)) \to (c_1 \to ((b \to c) \to (a \to c)))) = 1$ (JTP)

5° $(c_1 \to (a \to b)) \to (c_1 \to ((b \to c) \to (a \to c))) = 1$, iz 3° i 4° po 1.1.1

6° $c_1 \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$, iz 1° i 5° po 1.1.1

7° $(c_1 \to ((b \to c) \to (a \to c))) \to ((b \to c) \to (c_1 \to (a \to c))) = 1$, (JP′)

8° $(b \to c) \to (c_1 \to (a \to c)) = 1$, iz 6° i 7° po 1.1.1

9° $((b \to c) \to (c_1 \to (a \to c))) \to$

$\to ((c_1 \to (b \to c)) \to (c_1 \to (c_1 \to (a \to c)))) = 1$ (JTP)

10° $(c_1 \to (b \to c)) \to (c_1 \to (c_1 \to (a \to c))) = 1$, iz 8° i 9° po 1.1.1

11° $c_1 \to (c_1 \to (a \to c)) = 1$, iz 2° i 10° po 1.1.1

12° $(c_1 \to (c_1 \to (a \to c))) \to (c_1 \to (a \to c)) = 1$ (CTR′)

13° $c_1 \to (a \to c) = 1$, iz 11° i 12° po 1.1.1

Teorema 1.27 U implikativnoj algebri, Fregeov zakon (F) posledica je jakog zakona permutacije antecedenata (JP), kontrakcije (CTR), kao i jednog od zakona jake tranzitivnosti (JTP) ili (JTS).

Napomena: U implikativnoj algebri, (F) je posledica nešto slabijih uslova: (JP′), (CTR′) i (JTP) ili (JTS); uz to, od aksioma za implikativne algebre, dovoljno je pretpostaviti samo (i_1), (i_3) i (i_4).

Dokaz: Iz $(a \to (b \to c)) \to (a \to (b \to c)) = 1$ (i_1) i $(a \to b) \to (a \to b) = 1$ (i_1), primenom (JP), dobija se $a \to (b \to ((a \to (b \to c)) \to c)) = 1$ i $a \to ((a \to b) \to b) = 1$, odakle, po Lemi 1.26, sledi $a \to ((a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to c)) = 1$. Odatle, ponovnom (višestrukom) primenom (JP) imamo $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

Korolar 1.28 Algebra $(A, 1, \to)$, gde je 1 nularna a $\to$ binarna operacija, je ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) (alias pozitivna implikacijska algebra) ako i samo ako te dve operacije zadovoljavaju aksiome:

(i_1) $a \to a = 1$

(JP′) $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) = 1$

(JTS) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$

(CTR′) $(a \to (a \to b)) \to (a \to b) = 1$

(i_3) Ako $a \to b = 1$ i $b \to a = 1$, onda $a = b$.

(i_4) $a \to 1 = 1$

Primedba: Postulat (i_3) može se zameniti sa sledeća dva postulata (upor. 1.15.3, odnosno 1.6.5 ili (5)):

(13) $(a \to b) \to ((b \to a) \to b) = (b \to a) \to ((a \to b) \to a)$

(14) $1 \to a = a$,

čime se dobija alternativna jednakosna aksiomatizacija ω deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP). Upor. Th.1.19.

Dokaz: Teorema sledi iz Th.1.18 i Th.1.27. Što se tiče primedbe, (13), prema 1.15.2 i Kor.1.17, važi u ω deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), dok je (14) posledica (SP) već u implikativnoj algebri. Dokažimo da (13) i (14) impliciraju (i_3). Naime, iz $a \to b = 1$ i $b \to a = 1$ i (13) imamo $1 \to (1 \to b) = 1 \to (1 \to a)$, odakle se, po (14), dobija $b = a$.

Ključnu ulogu u dokazu Fregeovog zakona (F), pod pretpostavkama formulisanim u Th.1.27, imao je iskaz (ST_1). Naredna lema je neka vrsta konverzije Th.1.27 : uslov (ST_1) posledica je (F_1) i (SP) u implikativnoj algebri.

Lema 1.29 Ako u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri važi slabi zakon permutacije antecedenata (SP), onda u toj algebri važi (ST_1).

Dokaz: 1° $c_1 \to (a \to b) = 1$, hyp.

2° $c_1 \to (b \to c) = 1$, hyp.

3° $a \to (c_1 \to (b \to c)) = 1$, iz 2° po 1.1.2

4° $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, iz 3° po (SP)

5° $c_1 \to (a \to c) = 1$, iz 1° i 4° po (F_1), q.e.d.

Pokazuje se da dodavanje (SP_1) postulatima 1-deduktivne implikativne algebre ima jake posledice:

Teorema 1.30 U 1-deduktivnoj implikativnoj algebri, Fregeov zakon (F) posledica je (SP_1):

(SP_1) Ako $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $c_1 \to (b \to (a \to c)) = 1$.

Dokaz: 1° $(a \to b) \to (a \to b) = 1$, ($i_1$)

2° $(a \to (b \to c)) \to (a \to (b \to c)) = 1$, ($i_1$)

3° $a \to ((a \to b) \to b) = 1$, iz 1° po (SP)

4° $a \to ((a \to (b \to c)) \to (b \to c)) = 1$, iz 2° po (SP)

5° $a \to (b \to ((a \to (b \to c)) \to c)) = 1$, iz 4° po (SP_1)

6° $a \to ((a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to c)) = 1$, iz 3° i 5° po (ST_1)

7° $(a \to b) \to (a \to ((a \to (b \to c)) \to c)) = 1$, iz 6° po (SP)

8° $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) = 1$, iz 7° po (SP_1)

9° $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, iz 8° po (SP).

Inače, prema Lemi 1.10, (SP_1) povlači (SP) u implikativnoj algebri.

Korolar 1.31 Algebra $(A, 1, \to)$, gde je 1 nularna, a $\to$ binarna operacija, je ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) ako i samo ako te dve operacije zadovoljavaju aksiome: (i_1), (SP_1), (F_1), (i_3) i (i_4).

Dokaz: Ovo je posledica Leme 1.10, Th.1.30 i Th.1.18.

Idućih tridesetak lema, teorema i korolara pokazuju da se postulati (JP′), (JTS) i (CTR′) iz Korolara 1.28 mogu zameniti raznim ekvivalentima. Najpre, prvih osam stavova uvode čitave klase ekvivalenata zakona (JTP), (JTS), (CTR′) i (AC) i razmatraju neke odnose među njima i ekvivalentima i oslabljenjima jakog zakona permutacije antecedenata (JP).

Lema 1.32 U implikativnoj algebri, zakon jake tranzitivnosti-prefiksiranja (JTP) ekvivalentan je svakom od (beskonačno mnogo) iskaza:

(STP_n) Ako $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (b \to c))\ldots) = 1$, onda $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to ((a \to b) \to (a \to c)))\ldots) = 1$.

Uz to, u implikativnoj algebri, zakon slabe tranzitivnosti-prefiksiranja:

(STP_o) Ako $b \to c = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$ (up.1.12.5)

posledica je (JTP) (odnosno (STP_n)).

Dokaz: Najpre, u implikativnoj algebri, (STP_o) očigledna je posledica (JTP).

Dokažimo indukcijom po n da (JTP) povlači (STP_n). Pretpostavimo da, u implikativnoj algebri, važi (JTP). Tada, iz (JTP): $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, primenom (STP_o), imamo $(c_1 \to (b \to c)) \to (c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c))) = 1$, što sa $c_1 \to (b \to c) = 1$, po 1.1.1, daje $c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$. Time je dokazano (STP_1).

Pretpostavimo da imamo dokaz za (STP_n) iz (JTP). Tada specijalno imamo dokaz za $(c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (b \to c))\ldots)) \to$ $\to (c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to ((a \to b) \to (a \to c)))\ldots)) = 1$ iz (JTP). Još jednom primenom (STP_o), iz prethodne formule, dobija se $(c_1 \to (c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (b \to c))\ldots))) \to$ $\to (c_1 \to (c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to ((a \to b) \to (a \to c)))\ldots))) = 1$. Iz te formule, ako se pretpostavi $c_1 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (b \to c))\ldots) =$ $= 1$, po 1.1.1, sledi $c_1 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to ((a \to b) \to (a \to c)))\ldots)$ $= 1$. Time je dokazano (STP_{n+1}) iz (JTP).

Dokaz da, u implikativnoj algebri, (STP_{n+1}) povlači (STP_n) izvodi se analogno dokazu Leme 1.9.

Dokažimo još da je (JTP) posledica (STP_1):

(STP_1) Ako $c_1 \to (b \to c) = 1$, onda $c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

Naime, iz (STP_1), za $c_1 = b \to c$, dobija se da posledica (i_1) povlači (JTP).

Lema 1.33 U implikativnoj algebri, (STP_1) je posledica (STP_o) i (SP_1).

Dokaz: Neka, u implikativnoj algebri, važe (STP_o) i (SP_1). Prema Lemi 1.10, u implikativnoj algebri, (SP_1) povlači (SP). Iz $c_1 \to (a \to b) = 1$, po (SP), dobija se $a \to (c_1 \to b) = 1$, odakle, po (STP_o), sledi $(c \to a) \to (c \to (c_1 \to b)) = 1$. Iz poslednje formule, primenom (SP_1) i (SP), imamo $c_1 \to ((c \to a) \to (c \to b)) = 1$.

Korolar 1.34 U implikativnoj algebri, (JTP) i (JTS) slede iz (STP_o) i (SP_1).

Dokaz: (JTP) sledi iz (STP_1) (Lema 1.32), a (STP_1) je posledica (STP_o) i (SP_1), prema prethodnoj lemi. (JTS) sledi iz (JTP) i (SP); inače, (SP_1) povlači (SP) (Lema 1.10).

Lema 1.35 Ako u implikativnoj algebri važi zakon slabe tranzitivnosti-prefiksiranja (STP_o), onda je, u toj algebri, zakon jake tranzitivnosti-sufiksiranja (JTS) ekvivalentan svakom od (beskonačno mnogo) iskaza:

(STS_n) Ako $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots) = 1$, onda $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to ((b \to c) \to (a \to c)))\ldots) = 1$.

Uz to, u implikativnoj algebri, zakon slabe tranzitivnosti-sufiksiranja:

(STS_o) Ako $a \to b = 1$, onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$ (up.1.14.1)

posledica je (JTS), dok (JTS) sledi iz (STS_1):

(STS_1) Ako $c_1 \to (a \to b) = 1$, onda $c_1 \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$,

i (STS_{n+1}) implicira (STS_n).

Dokaz: Analogno dokazu (STP_n) iz (JTP) - Lema 1.32, indukcijom se pokazuje da (STS_n) sledi iz (JTS) i (STP_o). Dokaz da (STS_{n+1}) povlači (STS_n) u implikativnoj algebri, izvodi se analogno dokazu Leme 1.9. Iz (STS_1), za $c_1 = a \to b$, dobija se da (i_1) povlači (JTS). Inače, (STS_o) očigledna je posledica (JTS), (i_3) i (i_4).

Lema 1.36 Ako u implikativnoj algebri važi zakon slabe tranzitivnosti-prefiksiranja (STP_o), onda je, u toj algebri, zakon kontrakcije (CTR′) ekvivalentan svakom od (beskonačno mnogo) iskaza:

(SK_n) Ako $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to (a \to b)))\ldots) = 1$, onda $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots) = 1$.

Uz to, u implikativnoj algebri, iskaz:

(SK_o) Ako $a \to (a \to b) = 1$, onda $a \to b = 1$ (upor.1.5.2)

posledica je (CTR′), (CTR′) sledi iz (SK_1):

(SK_1) Ako $c_1 \to (a \to (a \to b)) = 1$, onda $c_1 \to (a \to b) = 1$,

dok (SK_{n+1}) povlači (SK_n).

Dokaz: Dokažimo indukcijom po n da (CTR′) i (STP_o) povlače (SK_n). Pretpostavimo da u implikativnoj algebri važe (CTR′) i (STP_o).

Tada se, iz (CTR′): $(a \to (a \to b)) \to (a \to b) = 1$, korišćenjem (STP_o), dobija $(c_1 \to (a \to (a \to b))) \to (c_1 \to (a \to b)) = 1$, što s pretpostavkom $c_1 \to (a \to (a \to b)) = 1$, daje $c_1 \to (a \to b) = 1$. Time je dokazano (SK_1).

Pretpostavimo da imamo dokaz za (SK_n) iz (CTR′) i (STP_o). Tada specijalno imamo dokaz za $(c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (a \to (a \to b)))\ldots)) \to (c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (a \to b))\ldots)) = 1$ iz (CTR′) i (STP_o). Još jednom primenom (STP_o), iz prethodne formule, dobija se $(c_1 \to (c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (a \to (a \to b)))\ldots))) \to$ $\to (c_1 \to (c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (a \to b))\ldots))) = 1$. Iz poslednje formule i $c_1 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (a \to (a \to b)))\ldots) = 1$, po 1.1.1, sledi $c_1 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (a \to b))\ldots) = 1$. Time je dokazano (SK_{n+1}) iz (CTR′) i (STP_o).

(SK_o) je očigledna posledica (CTR′). Dokažimo još da (CTR′) sledi iz (SK_1). Naime, iz (SK_1), za $c_1 = a \to (a \to b)$, dobija se da (i_1) povlači (CTR′).

Dokaz da, u implikativnoj algebri, (SK_{n+1}) implicira (SK_n) izvodi se analogno dokazu Leme 1.9.

<u>Korolar 1.37</u> U 1-deduktivnoj implikativnoj algebri, za svako $n = 1, 2, \ldots$, važi iskaz (SK_n).

<u>Dokaz</u> sledi iz 1.12.12 i prethodne leme, kao i 1.12.5.

<u>Lema 1.38</u> U implikativnoj algebri, (SK_o) (resp. (SK_n)) slede iz (F_o) (resp. (F_n)).

<u>Dokaz</u>: (SK_o) sledi iz (F_o) prema 1.5.2. Što se tiče (SK_n), iz $a \to a = 1$ (i_1), višestrukom primenom 1.1.2, dobija se $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to a))\ldots) = 1$, što, zajedno sa $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to (a \to b)))\ldots) = 1$, daje $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots) = 1$, q.e.d.

Prema Lemi 1.1.2, u implikativnoj algebri važi pravilo:

(AC_o) Ako $a = 1$, onda $b \to a = 1$,

dok je, po Th.1.6.1, zakon afirmacije konsekventa:

(AC) $a \to (b \to a) = 1$

posledica slabog zakona permutacije antecedenata (SP). Pozabavimo se jednim nizom pojačanja zakona (AC).

<u>Lema 1.39</u> Ako u implikativnoj algebri važi zakon slabe tranztitivnosti-prefiksiranja (STP_o), onda je, u toj algebri, zakon afirmacije konsekventa (AC) ekvivalentan svakom od iskaza:

(AC_n) Ako $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to a)\ldots) = 1$, onda $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (b \to a))\ldots) = 1$.

Uz to, u implikativnoj algebri, (AC_o) je posledica (AC), (AC) sledi iz (AC_1):

(AC_1) Ako $c_1 \to a = 1$, onda $c_1 \to (b \to a) = 1$,

dok (AC_{n+1}) implicira (AC_n). Štaviše, slabi zakon permutacije antecedenata (SP) implicira (AC_1).

Dokaz: Dokažimo najpre indukcijom da (STP_o) i (AC) impliciraju (AC_n) u implikativnoj algebri. Iz (AC), primenom (STP_o), imamo $(c_1 \to a) \to (c_1 \to (b \to a)) = 1$. Otuda, ako je $c_1 \to a = 1$, po 1.1.1, imamo $c_1 \to (b \to a) = 1$. Time je dokazano (AC_1).

Pretpostavimo da imamo dokaz za (AC_n) iz (AC) i (STP_o). Tada, specijalno, postoji dokaz za $(c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to a)\ldots)) \to$ $\to (c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (b \to a))\ldots)) = 1$ iz (AC) i (STP_o). Još jednom primenom (STP_o), iz prethodne formule, dobija se $(c_1 \to (c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to a)\ldots))) \to (c_1 \to (c_2 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (b \to a))$ $\ldots))) = 1$. Iz poslednje formule, uz pretpostavku $c_1 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to a)\ldots) = 1$, imamo $c_1 \to (\ldots \to (c_{n+1} \to (b \to a))\ldots)$ $= 1$. Time je dokazano (AC_{n+1}) iz (AC) i (STP_o).

(AC_o) je očigledna posledica (AC). (AC) sledi iz (AC_1), jer se iz (AC_1), za $c_1 = a$, dobija da (i_1) povlači (AC).

Da (AC_{n+1}) implicira (AC_n) u implikativnoj algebri, izvodi se kao u dokazu Leme 1.9. (SP) povlači (AC_1), jer iz $c_1 \to a = 1$, po 1.1.2, sledi $b \to (c_1 \to a) = 1$, odakle se, po (SP), dobija $c_1 \to (b \to a) = 1$.

Teorema 1.40 Ako u implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$ važe zakoni:

(SP) Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $b \to (a \to c) = 1$.

(STS_o) Ako $a \to b = 1$, onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$.

(SK_o) Ako $a \to (a \to b) = 1$, onda $a \to b = 1$.,

onda je $(A, 1, \to)$ slabo deduktivna implikativna algebra. Obratno ne vredi, jer ima primera slabo deduktivnih implikativnih algebri u kojima ne važe ni (SP) ni (STS_o). Inače, u implikativnoj algebri, (SK_o) je posledica (F_o) - upor. 1.5.2.

Dokaz: Treba dokazati da je, u implikativnoj algebri, (F_o) posledica (SP), (STS_o) i (SK_o):

1^o $a \to (b \to c) = 1$, hyp.

2^o $a \to b = 1$, hyp.

3^o $b \to (a \to c) = 1$, iz 1^o po (SP)

4^o $(b \to (a \to c)) \to (a \to (a \to c)) = 1$, iz 2^o po (STS_o)

5^o $a \to (a \to c) = 1$, iz 3^o i 4^o po 1.1.1

6^o $a \to c = 1$, iz 5^o po (SK_o).

Teorema 1.41 U implikativnoj algebri, (F_1) je posledica sledećih iskaza:

(SP_1) Ako $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $c_1 \to (b \to (a \to c)) = 1$.

(STS_1) Ako $c_1 \to (a \to b) = 1$, onda $c_1 \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$.

(SK_1) Ako $c_1 \to (a \to (a \to b)) = 1$, onda $c_1 \to (a \to b) = 1$.

<u>Primedba</u>: Od aksioma za implikativne algebre, u dokazu se koriste samo (i_3) i (i_4).

<u>Dokaz</u>: Prvo, prema Lemama 1.10, 1.35 i 1.36, u implikativnoj algebri, (SP_1) implicira (SP), (STS_1) povlači (STS_0) i (SK_1) povlači (SK_0), što, prema prethodnoj teoremi, znači da važi (F_0) (ako se pretpostave (SP_1), (STS_1) i (SK_1)).

Dokažimo (F_1) pod navedenim pretpostavkama:

1° $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, hyp.
2° $c_1 \to (a \to b) = 1$, hyp.
3° $c_1 \to (b \to (a \to c)) = 1$, iz 1° po (SP_1)
4° $c_1 \to ((b \to (a \to c)) \to (a \to (a \to c))) = 1$, iz 2° po (STS_1)
5° $c_1 \to (a \to (a \to c)) = 1$, iz 3° i 4° po (F_0)
6° $c_1 \to (a \to c) = 1$, iz 5° po (SK_1).

<u>Korolar 1.42</u> U implikativnoj algebri, Fregeov zakon (F) posledica je (SP_1), (STS_1) i (SK_1).

<u>Dokaz</u>: Ovo sledi iz prethodne teoreme i Th.1.30.

<u>Korolar 1.43</u> Algebra $(A, 1, \to)$, gde je 1 nularna, a $\to$ binarna operacija, je ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) ako i samo ako te dve operacije zadovoljavaju aksiome:

(i_1) $a \to a = 1$
(SP_1) Ako $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $c_1 \to (b \to (a \to c)) = 1$.
(STS_1) Ako $c_1 \to (a \to b) = 1$, onda $c_1 \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$.
(SK_1) Ako $c_1 \to (a \to (a \to b)) = 1$, onda $c_1 \to (a \to b) = 1$.
(i_3) Ako $a \to b = 1$ i $b \to a = 1$, onda $a = b$.
(i_4) $a \to 1 = 1$

<u>Dokaz</u>: Ovo sledi iz Th.1.41 i Korolara 1.31.

<u>Korolar 1.44</u> Algebra $(A, 1, \to)$, gde je 1 nularna, a $\to$ binarna operacija, je ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) ako i samo ako te dve operacije zadovoljavaju aksiome: (i_1), (SP_1), (STP_0), (SK_1), (i_3) i (i_4).

<u>Dokaz</u> sledi iz prethodnog korolara, Korolara 1.34 i Leme 1.35.

Zanimljivo je da Th.1.41, Kor.1.42 i Kor.1.43 ostaju na snazi ako se iskaz (STS_1) zameni uslovom (ST_1).

<u>Lema 1.45</u> U implikativnoj algebri, (SP), (SK_0) i (JTP) povlače (ST_1), a (ST_1) implicira (STP_0) i (STS_0)

<u>Dokaz</u>: 1° $c_1 \to (a \to b) = 1$, hyp.
2° $c_1 \to (b \to c) = 1$, hyp.
3° $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, (JTP)
4° $(c_1 \to (b \to c)) \to (c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c))) = 1$, iz 3° po (STP_0)
5° $c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, iz 2° i 4° po 1.1.1

6° $(a \to b) \to (c_1 \to (a \to c)) = 1$, iz 5° po (SP)

7° $(c_1 \to (a \to b)) \to (c_1 \to (c_1 \to (a \to c))) = 1$, iz 6° po (STP_o)

8° $c_1 \to (c_1 \to (a \to c)) = 1$, iz 1° i 7° po 1.1.1

9° $c_1 \to (a \to c) = 1$, iz 8° po (SK_o).

Time je u implikativnoj algebri dokazano (ST_1) iz (SP), (SK_o) i (JTP).

Dokaz da (ST_1) implicira (STP_o):

1° $b \to c = 1$, hyp.

2° $(a \to b) \to (b \to c) = 1$, iz 1° po 1.1.2

3° $(a \to b) \to (a \to b) = 1$, ($i_1$)

4° $(a \to b) \to (a \to c) = 1$, iz 2° i 3° po (ST_1)

Slično se dokazuje da (ST_1) povlači (STS_o).

Teorema 1.46 U implikativnoj algebri, (F_1) je posledica (SP_1), (ST_1) i (SK_1).

Dokaz: 1° $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, hyp.

2° $c_1 \to (a \to b) = 1$, hyp.

3° $c_1 \to (b \to (a \to c)) = 1$, iz 1° po (SP_1)

4° $c_1 \to (a \to (a \to c)) = 1$, iz 2° i 3° po (ST_1)

5° $c_1 \to (a \to c) = 1$, iz 4° po (SK_1).

Korolar 1.47 U implikativnoj algebri, Fregeov zakon (F) posledica je (SP_1), (ST_1) i (SK_1).

Dokaz: Ovo sledi iz prethodne teoreme i Th.1.30.

Korolar 1.48 Algebra $(A, 1, \to)$, gde je 1 nularna, a $\to$ binarna operacija, je ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) ako i samo ako te dve operacije zadovoljavaju aksiome: (i_1), (SP_1), (ST_1), (SK_1), (i_3) i (i_4).

Dokaz: Ovo sledi iz Th.1.41 i Korolara 1.31.

U stvari, postulat (SK_1) iz prethodnog korolara je redundantan. Ako se pažljivije analizira dokaz Th.1.30, vidi se da je, u implikativnoj algebri, Fregeov zakon (F) posledica (SP), (SP_1) i (ST_1), pri čemu se, od aksioma implikativnih algebri, koristi samo (i_1).

Lema 1.49 U implikativnoj algebri, Fregeov zakon (F) posledica je (SP_1) i (ST_1). (Od aksioma implikativnih algebri koriste se (i_1), (i_3) i (i_4).)

Dokaz se odmah dobija iz primedbe koja prethodi Lemi 1.49, jer je (SP) posledica (SP_1), (i_3) i (i_4).

Korolar 1.50 Algebra $(A, 1, \to)$, gde je 1 nularna, a $\to$ binarna operacija, je ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) ako i samo ako te dve operacije zadovoljavaju aksiome: (i_1), (SP_1), (ST_1), (i_3) i (i_4).

Korolar 1.51 Algebra $(A, 1, \to)$, gde je 1 nularna, a $\to$ binarna operacija, je ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) ako i samo ako te dve operacije zadovoljavaju sledeće aksiome:

(i_1) $a \to a = 1$

(SP_1) Ako $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $c_1 \to (b \to (a \to c)) = 1$.

(STP_0) Ako $b \to c = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$.

(SK_0) Ako $a \to (a \to b) = 1$, onda $a \to b = 1$.

(i_3) Ako $a \to b = 1$ i $b \to a = 1$, onda $a = b$.

(i_4) $a \to 1 = 1$

Dokaz: Prema Korolaru 1.34, (JTP) sledi iz (i_1), (SP_1) i (STP_0). Prema Lemi 1.45, (SP_1) sledi iz (SP), (SK_0), (JTP), (i_3) i (i_4). Otuda, tvrđenje je posledica Korolara 1.50.

1-deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP) poseduju značajnu stabilnost u nešto kao matematičkom smislu: male promene izazvane dodavanjem, oduzimanjem, ili zamenom pojedinih njihovih postulata dovode ili do ekvivalentnih aksiomatskih sistema ili do aksiomatskih sistema za ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP). Ovo je implicitno sadržano u prethodnim stavovima. Tako smo, na primer, videli iz Kor.1.31 da se, dodavanjem (ekvivalenta (SP_1)) jakog zakona permutacije antecedenata (JP) postulatima 1-deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP), dobija aksiomatski sistem za ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP). Pokažimo da isti efekat proizvodi i svaki od zakona jake tranzitivnosti (JTP) ili (JTS). U tom cilju, potrebno je nekoliko pomoćnih stavova.

Lema 1.52 U implikativnoj algebri, iskaz oblika

(ST_n) Ako $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots) = 1$ i $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (b \to c))\ldots) = 1$, onda

$$c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to c))\ldots) = 1$$

posledica je zakona jake tranzitivnosti - prefiksiranja (JTP) i (F_{n-1}).

Uz to, u implikativnoj algebri, zakon (ST_{n+1}) povlači (ST_n), za $n = 1, 2, \ldots$. Inače, uzmimo, po definiciji, da je (ST_0) isto što i zakon slabe tranzitivnosti (i_2).

Dokaz: Prema Lemi 1.32, u implikativnoj algebri, zakon jake tranzitivnosti (JTP) ekvivalentan je svakom od (beskonačno mnogo) iskaza (STP_n). Izvedimo (ST_n) iz (STP_n) i (F_{n-1}):

1^o $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots) = 1$, hyp.

2^o $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (b \to c))\ldots) = 1$, hyp.

3^o $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to ((a \to b) \to (a \to c)))\ldots) = 1$, iz 2^o po (STP_n)

4^o $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to c))\ldots) = 1$, iz 1^o i 3^o po (F_{n-1})

Ostatak dokaza analogan je dokazu lema 1.8 i 1.9.

Korolar 1.53 U 1-deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), zakon jake tranzitivnosti - prefiksiranja (JTP) ekvivalentan je iskazu (ST_2).

Dokaz: Prema Lemi 1.52, u implikativnoj algebri, (F_1) i (JTP) povlače (ST_2). Dokažimo da, u implikativnoj algebri, (ST_2) i (SP) povlače (STP_1):

1^o $c_1 \to (b \to c) = 1$, hyp.

2^o $(a \to b) \to (c_1 \to (b \to c)) = 1$, iz 1^o po 1.1.2

3^o $c_1 \to ((a \to b) \to (b \to c)) = 1$, iz 2^o po (SP)

4^o $c_1 \to ((a \to b) \to (a \to b)) = 1$, iz (i_1) i (i_4)

5^o $c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, iz 3^o i 4^o po (ST_2).

Po Lemi 1.32, (STP_1) ekvivalentno je sa (JTP).

Ispostavlja se da Th.1.41 ostaje na snazi, ako se (SP_1) zameni iskazom (ST_1) i da to ima jednu važnu posledicu - upor. Kor.1.59.

Teorema 1.54 U implikativnoj algebri, (F_1) je posledica (STS_1), (ST_1) i (SK_1).

Dokaz: 1^o $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$, hyp.

2^o $c_1 \to (a \to b) = 1$, hyp.

3^o $c_1 \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$, iz 2^o po (STS_1)

4^o $c_1 \to (a \to (a \to b)) = 1$, iz 1^o i 3^o po (ST_1)

5^o $c_1 \to (a \to b) = 1$, iz 4^o po (SK_1), q.e.d.

Očigledno, prethodna teorema može se uopštiti:

Teorema 1.55 U implikativnoj algebri, (F_n) je posledica (STS_n), (ST_n) i (SK_n), za n = 0, 1, 2,... .

Dokaz se dobija iz prethodnog očiglednom modifikacijom - prefiksiranjem formula dovoljan broj puta.

U istom stilu, mogu se uopštiti i Th.1.41 i Th.1.46.

Teorema 1.56 U implikativnoj algebri, (F_n) je posledica (SP_n), (STS_n) i (SK_n), za n = 0, 1, 2,... .

Teorema 1.57 U implikativnoj algebri, (F_n) je posledica (SP_n), (ST_n) i (SK_n), za n = 0, 1, 2,... .

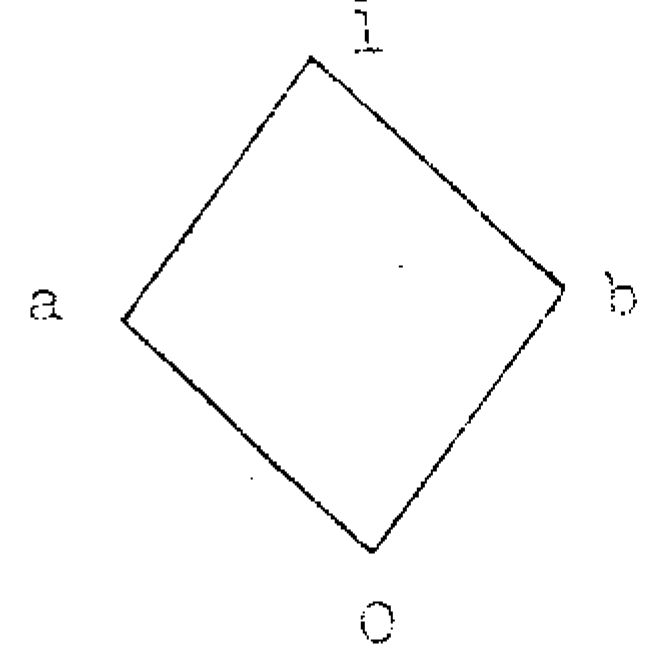
Naredni korolar je pojačanje Th.1.40.

Korolar 1.58 U implikativnoj algebri, (F_o) je posledica je (SK_o) i jednog od iskaza (STS_o) ili (SP).

Dokaz sledi iz Th.1.55 i Th.1.57 (za n = 0) kao i iz činjenice da je (ST_o) isto što i (i_2).

rolar 1.59 Algebra $(A, 1, \rightarrow)$, gde je 1 nularna, a $\rightarrow$ binarna
eracija, je ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi
P) ako i samo ako te dve operacije zadovoljavaju aksiome:
$_1$), (AC), (F_1), (i_3), (i_4), kao i jedan od zakona (JTP) ili
TS). Drugim rečima, 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj
ži (SP) i jedan od zakona jake tranzitivnosti (JTP) ili (JTS)
ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP).
kaz: Dovoljno je dokazati da se iz navedenih postulata može
vesti Fregeov zakon (F). Prema Th.1.15, u implikativnoj al-
bri, Fregeov zakon (F) sledi iz (SP) i (F_2). Po Lemi 1.16,
1-deduktivnoj implikativnoj algebri, (AC) ima za posledicu
P). Po Th.1.55, u implikativnoj algebri, (F_2) sledi iz (STS_2),
T_2) i (SK_2). Dalje, u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri u
joj važi (SP), (STS_2) je ekvivalentno sa (JTS) (odnosno (JTP))
Lema 1.35, (ST_2) je ekvivalentno sa (JTP) - Kor.1.53 i (SK_2)
ekvivalentno sa (CTR´)(tj.1.12.12) - Lema 1.36 i Kor.1.37.

Narednih nekoliko ad hoc navedenih primera služi i kao
vor kontraprimera i dopunjuje sliku o (deduktivnim) implika-
vnim algebrama pokazujući neizvodljivost
vesnih zakona iz drugih. Implikativne o-
racije u svim primerima definisane su na
olecvoj algebri od četiri elementa čiji
Hasseov dijagram prikazan na Sl.1 i te
operacije kompatibilne s polaznim ure-
njem (tj. poredak indukovan implikativnim
eracijama poklapa se s prvobitnim). Zani-
jivo je da je konstrukcija primera (male konačne) 1-deduktiv-
implikativne algebre u kojoj važi (SP) ali ne važi Fregeov
kon (F) (dakle koja nije ω deduktivna implikativna algebra)
opčano s teškoćama o kojima će biti još reči u poglavlju o
riktnim deduktivnim implikativnim algebrama. S tim u vezi,
staje otvoreno pitanje dokaza da 1-deduktivne implikativne al-
bre u kojima važi (SP) nisu jednakosno definabilne.



Sl.1

imer 1.1 Primer implikativne algebre
ja nije slabo deduktivna implikativna
gebra i u kojoj ne važi: (F_0)
$\rightarrow (a \rightarrow b) = 1$, $a \rightarrow a = 1$, ali je
$\rightarrow b = a \neq 1$; (STP_0) $1 \rightarrow a = 1$, ali
$\rightarrow 0) \rightarrow (b \rightarrow a) = ... \neq 1$; (STS_0)
$\rightarrow 1 = 1$, ali $(1 \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) = b \neq 1$;
C)- i time ni (SP)- $b \rightarrow (a \rightarrow b) = b \neq 1$.

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	a	1
b	a	b	1	1
1	0	a	b	1

Primer 1.2 Primer implikativne algebre u kojoj važe (SP), (AC) i (STS_0), ali koja nije slabo deduktivna implikativna algebra, jer ne važi (F_0): $a \to (a \to 0) = 1$, $a \to a = 1$, ali $a \to 0 = a \neq 1$. Takođe ne važi: (STP_0) $0 \to b = 1$, ali $(a \to 0) \to (a \to b) = b \neq 1$; (JTS) $(a \to 0) \to ((0 \to b) \to (a \to b)) = b \neq 1$.

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	b	1
b	b	a	1	1
1	0	a	b	1

Primer 1.3 Primer implikativne algebre u kojoj važe (JTP) i (JTS), koja nije slabo deduktivna implikativna algebra jer ne važi (F_0): $a \to (a \to b) = 1$, $a \to a = 1$ i $a \to b = a \neq 1$. Takođe ne važi (AC) (i samim tim ni (SP)): $b \to (a \to b) = a \neq 1$. (Ovo je, u stvari, poseban slučaj Rasiowinog primeŕa - upor. implikativnu operaciju definisanu sa (4).)

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	a	1
b	a	a	1	1
1	a	a	a	1

Primer 1.4 Primer slabo deduktivne implikativne algebre, koja nije 1-deduktivna implikativna algebra: $b \to (a \to (0 \to b)) = 1$, $b \to (a \to 0) = 1$ i $b \to (a \to b) = a \neq 1$, tj. ne važi ($F_1$). Vidi se da ne važi ni (AC) ni (SP), kao ni: (STS_0) $a \to 1 = 1$ i $(1 \to b) \to (a \to b) = a \neq 1$; ($STP_0$) $0 \to a = 1$, ali $(b \to 0) \to (b \to a) = b \neq 1$.

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	0	1
b	a	0	1	1
1	0	a	b	1

Primer 1.5 Primer ω deduktivne implikativne algebre u kojoj važe (STP_0) i (STS_0), ali ne važi Fregeov zakon (F): $(a \to (a \to b)) \to ((a \to a) \to (a \to b)) = a \neq 1$. Isto tako ne važi: (AC) i time ni (SP) $a \to (1 \to a) = b \neq 1$; ni (JTP) ni (JTS): $(a \to b) \to ((a \to a) \to (a \to b)) = a \neq 1$ i $(b \to a) \to ((a \to a) \to (b \to a)) = b \neq 1$.

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	0	0	1

Primer 1.6 Primer ω deduktivne implikativne algebre u kojoj važe Fregeov zakon (F) i (STP_0), ali ne važi: (AC) (i time ni (SP)) $a \to (b \to a) = 0 \neq 1$; (STS_0) $(1 \to a) \to (b \to a) = 0 \neq 1$, ali je $b \to 1 = 1$; (JTP) $(1 \to a) \to ((b \to 1) \to (b \to a)) = 0 \neq 1$.

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	0	1
b	0	0	1	1
1	0	a	b	1

<u>Primer 1.7</u> Primer ω deduktivne implikativne algebre u kojoj važi (SP) i koja nije implikacijska algebra, jer ne važi Peirceov zakon: $((a \to 0) \to a) \to a = a \neq 1$. Ovo je poseban slučaj Marsdenovog primera (vide /61 /) u kome je implikativna operacija na proizvoljnom parcijalno uređenom skupu definisana sa (2).

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	b	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

<u>Primer 1.8</u> Ovo je primer implikacijske algebre (implikativna operacija definisana je klasično: $x \to y = \neg x \vee y$). Implikacijske algebre su modeli implikativnog fragmenta klasičnog iskaznog računa. Teoriju implikacijskih algebri razvio je J. C. Abbott (vide /1 / i /2 /). To su implikativne algebre koje, pored aksioma za ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP), zadovoljavaju i Peirceov zakon:

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

(P) $((a \to b) \to a) \to a = 1$.

Napomenimo da se, u svim prethodnim primerima, važenje nekog algebarskog zakona dokazuje nabrajanjem (slučajeva) - demonstratio per enumerationem. Dokazi su relativno dugi, ali elementarni i bez principijelnih teškoća, i stoga su izostavljeni.

2. Deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom i kontrapozicionalnom komplementacijom

Ovaj odeljak posvećen je mogućnostima definisanja dve vrste komplemenata u deduktivnim implikativnim algebrama i vezi takvih algebri s aksiomatski uvedenim deduktivnim implikativnim algebrama s komplementacijom (kao operacijom). U stvari, pseudokomplement je implicitno prisutan u svakoj ograničenoj implikativnoj algebri, a kontrapozicionalni komplement već u arbitrarnoj implikativnoj algebri.

Definicija 2.1 U ograničenoj implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$,

(1) $\neg a = a \to 0$.

$\neg a$ se zove pseudokomplement elementa a.

Ograničene implikativne algebre (slabo deduktivne, n-deduktivne, ω deduktivne implikativne algebre) u kojima je operacija $\neg$ definisana sa (1), zovu se pseudokomplementirane implikativne algebre (pseudokomplementirane slabo deduktivne, n-deduktivne, ω deduktivne implikativne algebre).

Lema 2.1 U pseudokomplementiranoj implikativnoj algebri,

(2) $\neg 0 = 1$.

Dokaz sledi iz (i_1) i Def.2.1 odnosno (1): $\neg 0 = 0 \to 0 = 1$.

Lema 2.2 U pseudokomplementiranoj slabo deduktivnoj implikativnoj algebri,

(3) $\neg 1 = 0$.

Dokaz sledi iz 1.5.3 i (1): $\neg 1 = 1 \to 0 = 0$.

Lema 2.3 Ako u pseudokomplementiranoj implikativnoj algebri važi (SP) (slabi zakon permutacije antecedenata), onda:

2.3.1 Ako $a \to \neg b = 1$, onda $b \to \neg a = 1$.

2.3.2 $a \leqslant \neg\neg a$

2.3.3 $\neg a \leqslant \neg\neg\neg a$

Dokaz: 2.3.1 se dobija iz (SP) i (1).

2.3.2 sledi iz 1.6.3 i (1).

2.3.3 je posledica 1.6.6 i (1).

Lema 2.4 U pseudokomplementiranoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri važi:

2.4.1 Ako $(a \to b) \to (a \to \neg b) = 1$, onda $(a \to b) \to \neg a = 1$. (1.12.1)

2.4.2 Ako $(a \to b) \to (a \to \neg b) = 1$, onda $(a \to \neg b) \to ((a \to b) \to \neg a) = 1$. (1.12.2)

2.4.3 Ako $a \to \neg b = 1$, onda $(a \to b) \to \neg a = 1$. (1.12.3)

2.4.4 Ako $a \to \neg b = 1$, onda $(a \to \neg b) \to ((a \to b) \to \neg a) = 1$. (1.12.4)

2.4.5 Ako $(a \to \neg b) \to (a \to b) = 1$, onda $(a \to \neg b) \to \neg a = 1$. (1.12.7)

2.4.6 Ako $(a \to \neg b) \to (a \to b) = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a) = 1$. (1.12.8)

2.4.7 Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to \neg b) \to \neg a = 1$. (1.12.9)

2.4.8 Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a) = 1$. (1.12.10)

2.4.9 Ako $a \leq b$, onda $a \to \neg b \leq \neg a$. (1.12.11)

2.4.10 $a \to \neg a \leq \neg a$ (1.12.12)

2.4.11 $\neg a \to a = \neg\neg a$ (1.12.13, 1.12.5, (i_5) i (1))

2.4.12 $\neg a \to (a \to b) = 1$

Dokaz: Brojevi u zagradama, s desne strane, odnose se na broj teoreme iz koje sledi odgovarajući deo ove leme.

2.4.12 je posledica (i_5), 1.12.5 i (1): iz $0 \to b = 1$ imamo $(a \to 0) \to (a \to b) = 1$, tj. $\neg a \to (a \to b) = 1$.

Lema 2.5 Ako u pseudokomplementiranoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri važi (SP), onda:

2.5.1 Ako $a \to b = 1$, onda $\neg b \to \neg a = 1$. (1.14.1)

2.5.2 Ako $a \leq b$, onda $\neg b \leq \neg a$. (1.14.2)

2.5.3 $\neg a = \neg\neg\neg a$ (1.14.3)

2.5.4 $a \to \neg a = \neg a$ (1.14.4)

2.5.5 $\neg a = \neg(\neg a \to a)$ (1.14.5)

Dokaz: Delovi ove leme direktne su posledice odgovarajućih delova Th.1.14 (brojevi u zagradama s desne strane naznačuju kojih).

Lema 2.6 Ako u pseudokomplementiranoj 2-deduktivnoj implikativnoj algebri važi (SP), onda:

2.6.1 $(a \to \neg b) \to ((a \to b) \to \neg a) = 1$ (1.15.1)

2.6.2 $a \to \neg b = b \to \neg a$ (1.15.2)

2.6.3 $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a) = 1$ (1.15.3)

2.6.4 $a \to \neg b = (a \to b) \to \neg a$ (1.15.5)

2.6.5 $\neg\neg a = \neg a \to a$ (1.15.6)

Dokaz: Svi delovi ove leme slede iz odgovarajućih delova Th.1.15 i (1).

Lema 2.7 Ako je $(A, 1, \to)$ 2-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi slabi zakon permutacije antecedenata (SP), onda:

(4) $a \to (b \to c) = ((a \to (b \to c)) \to c) \to c$.

Dokaz: Iz (F), primenom (SP) i 1(1), imamo $a \to b \leq$
$\leq (a \to (b \to c)) \to (a \to c) = a \to ((a \to (b \to c)) \to c) =$
$= a \to ((((a \to (b \to c)) \to c) \to c) \to c) =$
$= (((a \to (b \to c)) \to c) \to c) \to (a \to c)$, zbog (JP) (tj.1.15.2),

1.14.3 i (JP) i Leme 1.9. Znači, po 1(1),
$(a \to b) \to ((((a \to (b \to c)) \to c) \to c) \to (a \to c)) = 1$, odakle je, prema (SP) i 1(1), $((a \to (b \to c)) \to c) \to c \leq$
$\leq (a \to b) \to (a \to c) = a \to (b \to c)$, zbog 1.15.5. Obrnuta nejednakost važi prema 1.6.3 i Lemama 1.4, 1.8 i 1.9.

Korolar 2.8 U pseudokomplementiranoj 2-deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), imamo:

2.8.1 $a \to \neg b = \neg\neg(a \to \neg b)$

2.8.2 $\neg\neg(a \to b) \leq a \to \neg\neg b$

Dokaz: 2.8.1 je direktna posledica (1) i (4), za $c = 0$.

2.8.2 Iz $b \leq \neg\neg b$ (2.3.2), prema 1.12.6, je $a \to b \leq a \to \neg\neg b$, odakle se, dvostrukom primenom 2.5.2, dobija
$\neg\neg(a \to b) \leq \neg\neg(a \to \neg\neg b) = a \to \neg\neg b$, zbog 2.8.1.

Narednom definicijom daje se aksiomatska karakterizacija pseudokomplementiranih 1-deduktivnih i ω deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP).

Definicija 2.2 1-deduktivna implikativna algebra sa pseudokomplementacijom (kao operacijom) je algebra $(A, 1, \to, \neg)$, gde je $(A, 1, \to)$ 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP), a $\neg$ je jednoargumentna operacija na A (pseudokomplementacija) koja ispunjava sledeća dva zahteva:

(n_1) $\neg a \to (a \to b) = 1$

(n_2) Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to \neg b) \to \neg a = 1$.

ω deduktivna implikativna algebra sa pseudokomplementacijom (kao operacijom) je algebra $(A, 1, \to, \neg)$, gde je $(A, 1, \to)$ ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP), a jednoargumentna operacija $\neg$, pored (n_1), zadovoljava i (n_3):

(n_3) $(a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a) = 1$.

Očigledno, (n_3) je jači uslov od (n_2) u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom.

Korolar 2.9 Svaka ω deduktivna implikativna algebra sa pseudokomplementacijom je 1-deduktivna implikativna algebra sa pseudokomplementacijom.

Dokaz: Ovo je posledica Def.2.2, Leme 1.9 i Korolara 1.17.

Sledeća teorema pokazuje da 1-deduktivne (odnosno ω deduktivne) implikativne algebre sa pseudokomplementacijom esencijalno koincidiraju s pseudokomplementiranim 1-deduktivnim (odnosno ω deduktivnim) implikativnim algebrama u kojima važi (SP). Ili, parafrazirajući, mogu se poistovetiti 1-deduktivne (odnosno ω deduktivne) implikativne algebre sa pseudokomplementacijom (kao operacijom), gde je nula uvedena sa (3), i ograničene 1-deduktivne (odnosno ω deduktivne) implikativne algebre u kojima važi (SP), pri čemu je pseudokomplement definisan sa (1).

Teorema 2.10 Za svaku 1-deduktivnu (odnosno ω deduktivnu) implikativnu algebru sa pseudokomplementacijom $(A, 1, \to, \neg)$, algebra $(A, 1, \to)$ je ograničena 1-deduktivna (odnosno ω deduktivna) implikativna algebra u kojoj važi (SP), u kojoj je najmanji element $0 = \neg 1$ (tj. važi (3)) i vredi (1). Dakle, algebra $(A, 1, \to)$ je pseudokomplementirana s istom operacijom. Obrnuto, svaka ograničena 1-deduktivna (odnosno ω deduktivna) implikativna algebra $(A, 1, \to)$ u kojoj važi (SP) je pseudokomplementirana i pri tom važi (n_1), (n_2) (odnosno (n_1), (n_3)) i (3), ako se pseudokomplement $\neg$ uvede sa (1). Znači, $(A, 1, \to, \neg)$ je 1-deduktivna (odnosno ω deduktivna) implikativna algebra sa pseudokomplementacijom.

Očigledno, opisane konstrukcije kojim se implikativne algebre sa pseudokomplementacijom (kao operacijom) i pseudokomplementirane implikativne algebre pridružuju jedna drugoj međusobno su inverzne.

Dokaz: Neka je $(A, 1, \to, \neg)$ 1-deduktivna implikativna algebra sa pseudokomplementacijom. Najpre, po Def.2.2, $(A, 1, \to)$ je 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP). Stavimo, po definiciji, $0 = \neg 1$. Tada iz (n_1) izlazi $\neg 1 \to (1 \to b) = 1$, tj. $\neg 1 \leq 1 \to b$, odakle je, zbog $1 \to b \leq b$ (1.5.1, Lema 1.8 i Def.2.2), $\neg 1 \leq b$. Dakle, $\neg 1$ je najmanji element u A, tj. algebra $(A, 1, \to)$ je ograničena. Pored toga, takođe iz (n_1), sledi $\neg a \to (a \to 0) = 1$, odnosno $\neg a \leq a \to 0$ (zbog 1(1) i Lema 1.4 i 1.8). S druge strane, iz (n_2) se, zbog $a \to 1 = 1$ (i_4), dobija $(a \to \neg 1) \to \neg a = 1$, tj. $a \to 0 \leq \neg a$. Prema tome, $\neg a = a \to 0$, tj. važi (1).

Ista tvrdnja, za ω deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom, posledica je prethodnog dokaza, Korolara 2.9, kao i činjenice da je (n_2) oslabljenje (n_3) u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom.

Drugi deo teoreme sledi iz Def.2.2, 2.4.12, 2.4.7, (3), Leme 1.8, odnosno 2.6.1, (SP), Leme 1.9 i Korolara 1.17. Ostalo je očigledno.

Teorema 2.11 Algebra $(A, 1, \to, \neg)$, gde je $(A, 1, \to)$ ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP), je ω deduktivna algebra sa pseudokomplementacijom ako i samo ako su ispunjena sledeća dva zahteva:

(CP) $a \to \neg b = b \to \neg a$ (kontrapozicija)

(EFQ) $\neg(a \to a) \to b = 1$ (ex falso quodlibet)

Drugim rečima, ω deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom poklapaju se sa <u>pseudokomplementiranim pozitivnim implikacijskim algebrama</u> (vide Rasiowa /76 /; jer je teorija ω deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP) ekstenzionalno jednaka teoriji pozitivnih implikacijskih algebri).

<u>Dokaz</u>: U ω deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom, prema 2.6.2, Th.2.10, Kor.1.17 i Def.2.2, važi (CP). Što se tiče (EFQ), imamo: $\neg(a \to a) \to b = \neg 1 \to b = 0 \to b = 1$ (po (i_1), (3), (i_5), Lemama 1.4, 1.8, 1.9 i Th.2.10).

Obratno, prema Th.2.10, dovoljno je pokazati, polazeći od algebre $(A, 1, \to, \neg)$ u kojoj važi (CP) i (EFQ), gde je $(A, 1, \to)$ ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP), da je $(A, 1, \to)$ ograničena implikativna algebra u kojoj važe (3) i (1). Stavimo, po definiciji, $0 = \neg 1$. Tada važi (3) i iz (EFQ), (i_1) i 1(1) (kao i Lema 1.2, 1.4, 1.8, 1.9) sledi da je 0 najmanji element u A. Iz (CP) i 1(5), kao i Lema 1.8 i 1.9, sledi (1): $a \to 0 = a \to \neg 1 = 1 \to \neg a = \neg a$. q.e.d.

Primetimo da, kao posledica Th.1.19 i Th.2.11, proizlazi da su ω deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom jednakosno definabilne.

U svetlosti Th.2.10, Th.2.11 i Th.1.20, jasno je da su glavni primeri ω deduktivnih implikativnih algebri sa pseudokomplementacijom (odnosno pseudokomplementiranih pozitivnih implikacijskih algebri) upravo ograničene pozitivne implikacijske algebre $(G(X), X, \to_{\tau})$ svih otvorenih skupova topološkog prostora (X, τ), gde je $\neg Y$, pseudokomplement skupa Y, definisan ovako (upor. Th.1.20):

(5) $\neg Y = I_{\tau}(X \setminus Y) \quad (Y \in G(X))$.

Analogno tome, iz Th.2.10 i Th.1.25, odmah se dobijaju primeri 1-deduktivnih implikativnih algebri sa pseudokomplementacijom.

<u>Teorema 2.12</u> Neka je S(X) klasa podskupova od X, zatvorena za arbitrarne unije, takva da S(X) sadrži $\emptyset$ i X i neka je I_0 semi-interior operacija određena tom klasom, a $\to$ operacija definisana sa 1(11). Tada je, po Th.1.25, $(S(X), X, \to)$ ograničena 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP). Ako se uzme, po definiciji,

(6) $\neg Y = I_0(X \setminus Y) \quad (Y \in S(X))$,

onda je $(S(X),\ X,\ \rightarrow,\ \neg)$ 1-deduktivna implikativna algebra sa pseudokomplementacijom.

<u>Dokaz</u> odmah sledi iz Th.1.25, Th.2.10 kao i $\neg X = I_o(X \setminus X) = I_o(\emptyset) = \emptyset$ ((6) i (si_5)), $\neg Y = I_o(X \setminus Y) = I_o((X \setminus Y) \cup \emptyset) = Y \rightarrow \emptyset$ ((6) i 1(11)).q.e.d.

Odustajanje od zahteva (n_1) odnosno (n_3) kod ω deduktivnih implikativnih algebri sa pseudokomplementacijom (alias pseudokomplementiranih pozitivnih implikacijskih algebri), dovodi do slabijih komplementiranih implikativnih struktura koje su poznate pod imenom <u>kontrapozicionalno komplementirane pozitivne implikacijske algebre</u> odnosno <u>semi-komplementirane pozitivne implikacijske algebre</u> (vide Rasiowa /76/). Od analognih uopštenja pojma pseudokomplementa kod 1-deduktivnih implikativnih algebri, od potencijalnog interesa je samo jedno.

<u>Definicija 2.3</u> <u>1-deduktivna implikativna algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom</u> (kao operacijom) je apstraktna algebra $(A,\ 1,\ \rightarrow,\ -_c)$, gde je $(A,\ 1,\ \rightarrow)$ 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP), a jednoargumentna operacija $-_c$ (kontrapozicionalna komplementacija) na A povezana je s ostalim operacijama postulatima:

(c_1) $-_c a = a \rightarrow -_c 1$

(c_2) Ako $a \rightarrow b = 1$, onda $(a \rightarrow -_c b) \rightarrow -_c a = 1$.

<u>ω deduktivna implikativna algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom</u> (kao operacijom) je algebra $(A,\ 1,\ \rightarrow,\ -_c)$, gde je $(A,\ 1,\ \rightarrow)$ ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP), a jednoargumentna operacija $-_c$, pored (c_1), zadovoljava

(c_3) $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow -_c b) \rightarrow -_c a) = 1$.

Očigledno, (c_2) sledi iz (c_3) u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom.

<u>Korolar 2.13</u> Svaka ω deduktivna implikativna algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom je 1-deduktivna implikativna algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom.

<u>Teorema 2.14</u> Svaka 1-deduktivna (ω deduktivna) implikativna algebra $(A,\ 1,\ \rightarrow)$ u kojoj važi (SP) je kontrapozicionalno komplementirana u smislu da operacija $-_c$, uvedena definicijom:

(7) $-_c a = a \rightarrow c$ (za neki fiksirani element c iz A),

zadovoljava

(8) $-_c 1 = c$,

i, sledstveno, (c_1) i (c_2). Otuda, $(A,\ 1,\ \rightarrow,\ -_c)$ je 1-deduktivna (ω deduktivna) implikativna algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom. Obrnuto, za svaku 1-deduktivnu (ω deduktivnu) implikativnu algebru s kontrapozicionalnom komplementacijom $(A, 1, \to, -_c)$, algebra $(A, 1, \to)$ je 1-deduktivna (ω deduktivna) implikativna algebra u kojoj važi (SP) i, ako se element c definiše kao u (8), onda važi (7). Dakle, algebra $(A, 1, \to)$ je kontrapozicionalno komplementirana s istom operacijom. Pri tom su funkcije koje pridružuju jedne drugim kontrapozicionalno komplementirane 1-deduktivne (ω deduktivne) implikativne algebre i 1-deduktivne (ω deduktivne) implikativne algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom, kao operacijom, međusobno inverzne.

<u>Dokaz</u>: Neka je $(A, 1, \to)$ 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) i definišimo kontrapozicionalni komplement pomoću (7). Tada je $-_c 1 = 1 \to c = c$, tj. (8), zbog 1(5) i Leme 1.8, dok (c_2) važi zbog 1.12.9. Što se tiče (c_1), imamo: $-_c a = a \to c = a \to (1 \to c) = a \to -_c 1$, opet zbog 1(5) i Leme 1.8.

Obrnuto, neka je $(A, 1, \to, -_c)$ 1-deduktivna implikativna algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom. Tada je, po Def.2.3, $(A, 1, \to)$ 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP). Ako se element c uvede sa (8): $c = -_c 1$, onda, zbog (c_1), važi (7). Ostalo je jasno.q.e.d.

Kao posledica prethodne teoreme i Th.1.25, odmah se nameće jedna klasa primera 1-deduktivnih implikativnih algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom.

<u>Teorema 2.15</u> Neka je $(S(X), X, \to)$ 1-deduktivna implikativna algebra skupova u kojoj važi (SP), gde je $\to$ definisano s 1(11) i I_o semi-interior operacija na $P(X)$ određena klasom $S(X)$ (upor. Th.1.25). Ako se uzme, po definiciji,

(9) $\quad -_C Y = I_o((X \setminus Y) \cup C) \quad (Y, C \in S(X))$,

onda je $(S(X), X, \to, -_C)$ 1-deduktivna implikativna algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom.

<u>Dokaz</u> se dobija iz Th.1.25, Th.2.14 i $-_C X = I_o(C) = C$ (zbog $C \in S(X)$) i $-_C Y = Y \to C$ (zbog (9) i 1(11)).

Kao neposredne posledice Th.2.14 i svojstava 1-deduktivnih i ω deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP), dobijaju se iduće tri teoreme o 1-deduktivnim i ω deduktivnim implikativnim algebrama s kontrapozicionalnom komplementacijom.

<u>Teorema 2.16</u> Neka je $(A, 1, \to, -_c)$ 1-deduktivna implikativna algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom. Tada:

<u>2.16.1</u> $\quad -_c 0 = 1$ (iz (c) i (i_5), ako u A postoji nula)

<u>2.16.2</u> $\quad a \leq -_c -_c a$ (1.[illegible] i Leme 1.4 i 1.8)

2.16.3 Ako $a \to -_c b = 1$, onda $b \to -_c a = 1$. (SP)

2.16.4 Ako $(a \to b) \to (a \to -_c b) = 1$, onda $(a \to b) \to -_c a = 1$. (1.12.1)

2.16.5 Ako $(a \to b) \to (a \to -_c b) = 1$, onda $(a \to -_c b) \to ((a \to b) \to -_c a) = 1$. (1.12.2)

2.16.6 Ako $a \to -_c b = 1$, onda $(a \to b) \to -_c a = 1$. (1.12.3)

2.16.7 Ako $a \to -_c b = 1$, onda $(a \to -_c b) \to ((a \to b) \to -_c a) = 1$. (1.12.4)

2.16.8 Ako $(a \to -_c b) \to (a \to b) = 1$, onda $(a \to -_c b) \to -_c a = 1$. (1.12.7)

2.16.9 Ako $(a \to -_c b) \to (a \to b) = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to -_c b) \to -_c a) = 1$. (1.12.8)

2.16.10 Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to -_c b) \to -_c a) = 1$. (1.12.10)

2.16.11 $-_c a \to a \leq -_c -_c a$ (1.12.13)

2.16.12 Ako $a \to b = 1$, onda $-_c b \to -_c a = 1$. (1.14.1)

2.16.13 Ako $a \leq b$, onda $-_c b \leq -_c a$. (1.14.2)

2.16.14 $-_c a = -_c -_c -_c a$ (1.14.3)

2.16.15 $a \to -_c a = -_c a$ (1.14.4)

2.16.16 $-_c a = -_c(-_c a \to a)$ (1.14.15)

Teorema 2.17 U ω deduktivnoj implikativnoj algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom, važi:

2.17.1 $a \to -_c b = b \to -_c a$ (1.15.2)

2.17.2 $(a \to b) \to (-_c b \to -_c a) = 1$ (1.15.3)

2.17.3 $a \to -_c b = (a \to b) \to -_c a$ (1.15.5)

2.17.4 $-_c a \to -_c(-_c 1 \to a) = (-_c 1 \to a) \to (-_c a \to a)$ (1.15.6)

2.17.5 $a \to -_c b = -_c -_c (a \to -_c b)$ ((4), Lema 2.7)

2.17.6 $-_c -_c (a \to b) \leq a \to -_c -_c b$ (iz (4), upor.2.8.2)

Teorema 2.18 Algebra $(A, 1, \to, -_c)$, gde je $(A, 1, \to)$ ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP), je ω deduktivna implikativna algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom ako i samo ako ispunjava uslov:

(CP_c) $a \to -_c b = b \to -_c a$ (kontrapozicija)

Prema tome, u ω deduktivnoj implikativnoj algebri, (CP_c) je ekvivalentno konjunkciji (c_1) i (c_2).

Iz ovog se vidi da su ω deduktivne implikativne algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom zapravo kontrapozicionalno komplementirane pozitivne implikacijske algebre i vice versa.

Dokaz: U ω deduktivnoj implikativnoj algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom, prema 2.17.1, važi (CP_c).

Obratno, prema Th.2.14, dovoljno je dokazati, polazeći od algebre $(A, 1, \rightarrow, -_c)$ u kojoj važi (CP_c) i gde je $(A, 1, \rightarrow)$ ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP), da je algebra $(A, 1, \rightarrow)$ kontrapoziciono komplementirana, tj. da važi (7) i (8). Stavimo, po definiciji, $c = -_c 1$. Tada je : $a \rightarrow c = a \rightarrow -_c 1 = 1 \rightarrow -_c a = -_c a$, zbog (CP_c), 1(5) (kao i Lema 1.8 i 1.9). Znači, važi (7) i (8), q.e.d.

Korolar 2.19 ω deduktivne implikativne algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom su jednakosno definabilne.

Dokaz: Ovo je posledica Th.1.19 i Th.2.18.

Iz prethodne teoreme, Th.2.14 i Th.1.20 odmah se dobijaju tipični primeri ω deduktivnih implikativnih algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom (alias kontrapoziciońalno komplementiranih pozitivnih implikacijskih algebri).

Teorema 2.20 (Rasiowa) Neka je (X, τ) topološki prostor i neka je $(G(X), X, \rightarrow_\tau)$ pozitivna implikacijska algebra svih otvorenih skupova tog prostora, gde je operacija $\rightarrow_\tau$ definisana sa 1(11). Ako se stavi:

(10) $-_c X = Y_0$ (za neko fiksirano $Y_0 \in G(X)$)

i

(11) $-_c Z = Z \rightarrow_\tau Y_0$,

dobija se kontrapoziciono komplementirana pozitivna implikacijska algebra otvorenih podskupova od X. Štaviše, svaka kontrapoziciono komplementirana pozitivna implikacijska algebra izomorfna je nekoj podalgebri kontrapoziciono komplementirane pozitivne implikacijske algebre otvorenih skupova prostora (X, τ).

3. Implikativni filtri u implikativnim algebrama. Veza s homomorfizmima i kongruencijama implikativnih algebri

U ovom odeljku razmatraju se razna svojstva nekoliko vrsta implikativnih filtara u implikativnim algebrama i njihove veze s homomorfizmima tih algebri. Većina rezultata o implikativnim filtrima i homomorfizmima u pozitivnim implikacijskim algebrama (alias ω deduktivnim implikativnim algebrama u kojima važi (SP)) potiču od A.Diegoa i A.Monteiroa, a autor nekoliko uopštenja za implikativne algebre je Rasiowa. Postoje dva opravdanja za iscrpno navođenje već poznatih rezultata: jedno je težnja za sistematičnošću, kada su već poznate činjenice isprepletane s novim, a drugo je želja za poređenjem s uopštenjima tih istih rezultata (kada su takva uopštenja moguća). Ipak, dato je nekoliko novih karakterizacija u kontekstu (komplementiranih) deduktivnih implikativnih algebri, kao i generalizacija Monteiroovih i Diegoovih rezultata na 1-deduktivne implikativne algebre, a rezultati Rasiowe primenjeni su na razne ekstenzije implikativnih algebri. Inače, glavne primene teorema o implikativnim filtrima u deduktivnim implikativnim algebrama su u dokazu teorema reprezentacije za te algebre, kao i u algebarskim dokazima raznih oblika teoreme dedukcije za implikativne račune čiji su modeli te algebre.

Definicija 3.1 Skup F elemenata implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ naziva se implikativan filtar te algebre ako i samo ako ispunjava zahteve:

(f_1) $1 \in F$

(f_2) Ako $a \in F$ i $a \rightarrow b \in F$, onda $b \in F$.

Specijalan implikativan filtar u implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$ je implikativan filtar te algebre koji zadovoljava tri dopunska uslova:

(f_3) Ako $a \in F$, onda $b \rightarrow a \in F$,

(f_4) Ako $a \rightarrow b \in F$ i $b \rightarrow c \in F$, onda $a \rightarrow c \in F$,

(f_5) Ako $b \rightarrow a \in F$ i $c \rightarrow d \in F$, onda $(a \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow d) \in F$.

Najprostiji primeri implikativnih filtara u implikativnoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$ su A i $\{1\}$ i A je očigledno specijalan implikativan filtar. Što se tiče $\{1\}$, važi:

Lema 3.1 Skup $\{1\}$ je specijalan implikativan filtar u implikativnoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$ ako i samo ako u toj algebri vrede zakoni (STP_o) (slaba tranzitivnost - prefiksiranje, upor.1.12.5) i (STS_o) (slaba tranzitivnost - sufiksiranje, upor.1.14.1):

(STP_0) Ako $b \to c = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$,
(STS_0) Ako $a \to b = 1$, onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$.

Dokaz: Najpre, u svakoj implikativnoj algebri, skup $\{1\}$ zadovoljava uslove (f_1), (f_2), (f_3) i (f_4), zbog 1.1.1, 1.1.2 i (i_2). Ako, uz to, važi (STP_0) i (STS_0), onda iz $c \to d \in \{1\}$ i $b \to a \in \{1\}$, tj. $c \to d = 1$ i $b \to a = 1$, imamo $(a \to d) \to (b \to d) = 1$ i $(a \to c) \to (a \to d) = 1$, odakle je $(a \to c) \to (b \to d) = 1$, po ($i_2$). Time je dokazano ($f_5$).

Obratno, ako je skup $\{1\}$ specijalan implikativan filtar u implikativnoj algebri, onda, po (f_5), specijalno važi

(1) Ako $b \to a = 1$ i $c \to d = 1$, onda $(a \to c) \to (b \to d) = 1$.

Odatle se dobija: za $b = a$ – (STP_0), a za $d = c$ – (STS_0), zbog (i_1).

Iz Primera 1.4 vidi se da postoje slabo deduktivne implikativne algebre u kojima skup $\{1\}$ nije specijalan implikativan filtar.

Implikativni filtri u implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$ su završni komadi (vide Kurepa /52/) parcijalno uređenog skupa indukovanog implikativnom operacijom $\to$, u smislu da zadovoljavaju uslov (f_6).

Lema 3.2 U implikativnoj algebri, ako je F neprazan skup koji zadovoljava uslov (f_2), onda F ispunjava uslov (f_1) ako i samo ako F ispunjava (f_6):

(f_6) Ako $a \in F$ i $a \leq b$, onda $b \in F$.

Dokaz: (f_6) je posledica (f_1) i (f_2), jer iz $a \in F$ i $a \leq b$, tj. $a \to b = 1 \in F$, izlazi $b \in F$. Obratno, ako je $F \neq \emptyset$, postoji $a \in F$ i, kako je uvek $a \leq 1$ (Lema 1.2), po (f_6) se dobija $1 \in F$, q.e.d.

Navedimo jedan dovoljan uslov da završni komad parcijalno uređenog skupa koji je indukovan implikativnom operacijom slabo deduktivne implikativne algebre bude implikativan filtar.

Teorema 3.3 U slabo deduktivnoj implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$, neprazan završni komad F (u parcijalno uređenom skupu indukovanom operacijom $\to$) je implikativan filtar ako:

(2) $a \in F$ i $a \to b \in F$ povlači da postoji element $c \in F$ takav da je $c \leq a$ i $c \leq a \to b$.

Dokaz: Neka je F neprazan završni komad u parcijalno uređenom skupu indukovanom operacijom $\to$ slabo deduktivne implikativne algebre $(A, 1, \to)$. Najpre, zbog $F \neq \emptyset$, važi (f_1). Dalje, neka je $a \in F$ i $a \to b \in F$. Po pretpostavci (2), tada postoji element $c \in F$ takav da je $c \leq a$ i $c \leq a \to b$, tj. $c \to a = 1$ i $c \to (a \to b) = 1$, odakle je, prema (F_o), $c \to b = 1$, tj. $c \leq b$, odnosno $b \in F$, zbog (f_6), q.e.d.

Teorema 3.9 daje potrebne i dovoljne uslove da svi implikativni filtri u slabo deduktivnoj implikativnoj algebri budu istovremeno i specijalni implikativni filtri. Stavovi koji prethode toj teoremi, iako su od samostalnog interesa, koriste se u njenom dokazu.

Konstatujmo najpre jednu elementarnu ali važnu činjenicu:

Lema 3.4 U implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$ u kojoj važi slabi zakon permutacije antecedenata (SP), implikativni filtri su skupovi zatvoreni za operaciju $\to$.

Dokaz: U implikativnoj algebri, prema 1.6.1, (SP) implicira zakon afirmacije konsekventa (AC). Otuda, ako je $a \in F$ i $b \in F$, onda, zbog $b \to (a \to b) = 1 \in F$ ((AC) i (f_1)), imamo $a \to b \in F$, po (f_2).

Primedba: U stvari, dokazano je jače tvrđenje: u implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), implikativni filtri zadovoljavaju uslov (f_3).

Teorema 3.5 Ako u implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ važi slabi zakon permutacije antecedenata (SP) i bilo koji od zakona jake tranzitivnosti (JTP) ili (JTS):

(JTP) $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, (upor. 1.15.4)

(JTS) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$, (upor. 1.15.3)

onda je svaki implikativan filtar te algebre istovremeno i specijalan implikativan filtar.

Obratno, ako je u implikativnoj algebri svaki implikativan filtar istovremeno i specijalan implikativan filtar, onda u toj algebri važe zakoni slabe tranzitivnosti prefiksiranja i sufiksiranja (STP_o) i (STS_o).

Dokaz: Neka je F implikativan filtar u implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$ u kojoj važi (SP) i jedan od zakona (JTP) ili (JTS). Tada, zbog (SP), očigledno važi i drugi od zakona jake tranzitivnosti, a, prema 1.6.1, važi i zakon afirmacije konsekventa (AC). Prema primedbi posle dokaza Leme 3.4, važi uslov (f_3). Što se tiče (f_4), ako je $a \to b \in F$ i $b \to c \in F$, onda je, zbog (JTS) i (f_1), $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1 \in F$, odakle se, dvostrukom primenom (f_2), dobija $a \to c \in F$. Treba još dokazati (f_5). Iz $c \to d \in F$ i $(c \to d) \to ((a \to c) \to (a \to d)) = 1 \in F$ ((JTP) i (f_1)), primenom (f_2), dobija se $(a \to c) \to (a \to d) \in F$. S druge strane, $b \to a \in F$ i $(b \to a) \to ((a \to d) \to (b \to d)) = 1 \in F$ ((JTS) i (f_1)) daju $(a \to d) \to (b \to d) \in F$, po (f_2). Prema tome, $(a \to c) \to (b \to d) \in F$, po (f_4).

Drugi deo tvrđenja sledi iz Leme 3.1.

Korolar 3.6 A fortiori, u ω deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), svi su implikativni filtri istovremeno i specijalni implikativni filtri.

Dokaz: Ovo sledi iz 1.15.3, 1.15.4 i Kor.1.17.

U implikativnoj algebri, skup svih elemenata x, takvih da je $a \leq x$ za neki fiksirani element a, ne mora biti implikativan filtar. Ispostavlja se da je (F_0) potreban i dovoljan uslov da svaki takav skup bude implikativan filtar.

Teorema 3.7 (Rasiowa) U implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$, skup $F(a) = \{x \in A : a \leq x\}$ je, za svako $a \in A$, implikativan filtar ako i samo ako je $\mathfrak{A}$ slabo deduktivna implikativna algebra. Štaviše, u slabo deduktivnoj implikativnoj algebri, $F(a)$ je najmanji implikativni filtar koji sadrži a. Za $F(a)$ se kaže da je glavni implikativni filtar generisan elementom a.

Dokaz: Neka je $\mathfrak{A}$ slabo deduktivna implikativna algebra. Pošto je uvek $a \leq 1$, imamo $1 \in F(a)$. Ako je $b \in F(a)$ i $b \to c \in F(a)$, onda je $a \leq b$ i $a \leq b \to c$, tj. $a \to b = 1$ i $a \to (b \to c) = 1$, odakle je, po (F_0), $a \to c = 1$, odnosno $a \leq c$, dakle $c \in F(a)$. Znači, $F(a)$ je implikativan filtar. Obratno, ako je, u implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$, $F(a)$ implikativan filtar za svako $a \in A$, tada, za sve b i c iz A, važi sledeći uslov: ako $b \in F(a)$ i $b \to c \in F(a)$, onda $c \in F(a)$. Drugim rečima, $a \to b = 1$ i $a \to (b \to c) = 1$ povlače $a \to c = 1$, tj važi (F_0).

Dokažimo još da je, u slabo deduktivnoj implikativnoj algebri, $F(a)$ najmanji implikativni filtar koji sadrži a. Neka je F implikativan filtar koji sadrži a. Ako je $b \in F(a)$, tada je $a \to b = 1 \in F$, odakle je, zbog $a \in F$, $b \in F$. Otuda, $F(a) \subseteq F$.

Lema 3.8 U slabo deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj su svi implikativni filtri specijalni implikativni filtri, važe zakoni:

(AC_1) Ako je $c_1 \to a = 1$, onda $c_1 \to (b \to a) = 1$,

(ST_1) Ako $c_1 \to (a \to b) = 1$ i $c_1 \to (b \to c) = 1$, onda $c_1 \to (a \to c) = 1$,

(STP_1) Ako $c_1 \to (b \to c) = 1$, onda $c_1 \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$,

(STS_1) Ako $c_1 \to (a \to b) = 1$, onda $c_1 \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$.

Otuda, prema lemama 1.39, 1.32 i 1.35 važe zakoni (AC), (JTP) i

(JTS).

Dokaz: Dokažimo prvo da (AC_1) sledi iz (f_3). Naime, ako je $c_1 \to a = 1$, tj. $c_1 \leq a$, onda je $a \in F(c_1)$, odakle se, po (f_3), dobija $b \to a \in F(c_1)$, tj. $c_1 \leq b \to a$, odnosno $c_1 \to (b \to a) = 1$.

Na isti način, iz Th.3.7 i (f_4), dokazuje se (ST_1).

Što se tiče (STP_1) i (STS_1), iz Th.3.7 i (f_5), na već opisani način, dobija se

(3) Ako $c_1 \to (b \to a) = 1$ i $c_1 \to (c \to d) = 1$, onda
$$c_1 \to ((a \to c) \to (b \to d)) = 1.$$

Odatle, za $d = c$, zbog (i_1) i (i_4), sledi (STS_1). Takođe iz (3), za $b = a$, po (i_1) i (i_4), dobija se (STP_1).

Teorema 3.9 U slabo deduktivnoj implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$, svaki implikativan filtar istovremeno je specijalan implikativan filtar ako i samo ako u $\mathfrak{A}$ važi zakon afirmacije konsekventa (AC) i oba zakona jake tranzitivnosti (JTP) i (JTS).

Dokaz: Potrebnost sledi iz Leme 3.8, a dovoljnost iz Th.3.5.

Lema 3.10 U 1-deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), svaki glavni implikativni filtar generisan nekim elementom te algebre zadovoljava uslove (f_3) i (f_4).

Dokaz: Prema Lemi 1.8 i Th.3.7, u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri, $F(c_1) = \{x \in A : c_1 \leq x\}$ je implikativni filtar generisan singltonom $\{c_1\}$. Prema primedbi posle dokaza Leme 3.4, $F(c_1)$ zadovoljava uslov (f_3). (Direktan dokaz (f_3): ako je $a \in F(c_1)$, tj. $c_1 \to a = 1$, imamo, po (AC_1), $c_1 \to (b \to a) = 1$, tj. $b \to a \in F(c_1)$, zbog lema 1.39, 1.16 i 1.12.5.) Što se tiče (f_4), ako je $a \to b \in F(c_1)$ i $b \to c \in F(c_1)$, tj. $c_1 \to (a \to b) = 1$ i $c_1 \to (b \to c) = 1$, po (ST_1) i Lemi 1.29, imamo $c_1 \to (a \to c) = 1$, tj. $a \to c \in F(c_1)$, q.e.d.

Svaka neprazna klasa implikativnih filtara u implikativnoj algebri može se posmatrati kao parcijalno uređen skup kod kojeg je uređajna relacija skupovna inkluzija. Štaviše, klasa svih implikativnih filtara implikativne algebre $(A, 1, \to)$ je potpuna mreža u kojoj je $\{1\}$ najmanji, a A najveći element. Stavovi i definicije koji slede u vezi su s ovom problematikom.

Lema 3.11 Presek proizvoljne neprazne klase (specijalnih) implikativnih filtara u implikativnoj algebri je (specijalan) implikativan filtar u toj algebri.

Dokaz se svodi na prostu proveru uslova (f_1) i (f_2) (odnosno (f_1), (f_2), (f_3), (f_4) i (f_5)).

Definicija 3.2 Ako je A_0 skup elemenata implikativne algebre $(A, 1, \to)$, onda se presek svih (specijalnih) implikativnih filtara koji sadrže A_0 naziva (specijalnim) implikativnim filtrom generisanim skupom A_0 i označava sa $F(A_0)$.

Očigledno, u implikativnoj algebri, (specijalni) implikativni filtar generisan skupom A_0 je najmanji (specijalni) implikativni filtar koji sadrži A_0. Takođe je jasno, da je, u implikativnoj algebri, implikativni filtar generisan praznim skupom upravo singlton $\{1\}$. Pored toga, u slabo deduktivnoj implikativnoj algebri, glavni implikativni filtar generisan elementom a poklapa se s implikativnim filtrom generisanim singltonom $\{a\}$: $F(a) = F(\{a\})$.

Jedan Tarskijev rezultat iz 1930.g. (vide Tarski /85/) baca više svetla na strukturu implikativnog filtra $F(A_0)$ generisanog skupom elemenata A_0 implikativne algebre $(A, 1, \rightarrow)$.

Lema 3.12 (Tarski) U implikativnoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$, $F(A_0)$ se poklapa s unijom svih implikativnih filtara $F(A_j)$, gde je $\{A_j : j \in J\}$ klasa svih konačnih podskupova A_0 i $A_0 \subseteq A$. Drugim rečima,

(4) $$F(A_0) = \bigcup\{F(A_j) : j \in J \text{ i } |A_j| < \aleph_0 \text{ i } A_0 = \bigcup_{j\in J} A_j\}.$$

Dokaz: Dokažimo najpre da je, u implikativnoj algebri, unija svih implikativnih filtara generisanih svim konačnim podskupovima A_j skupa A_0, kraće $\bigcup_{j\in J} F(A_j)$, takođe implikativan filtar. Očigledno, (f_1) važi. Ako je $a, a \rightarrow b \in \bigcup_{j\in J} F(A_j)$, onda je $a \in F(A_{j_1})$ i $a \rightarrow b \in F(A_{j_2})$. Iz $A_{j_1} \subseteq A_{j_1} \cup A_{j_2} \subseteq F(A_{j_1} \cup A_{j_2})$ sledi $F(A_{j_1}) \subseteq F(A_{j_1} \cup A_{j_2})$. Na isti način, $F(A_{j_2}) \subseteq F(A_{j_1} \cup A_{j_2})$. Dakle, $a, a \rightarrow b \in F(A_{j_1} \cup A_{j_2})$, odakle je $b \in F(A_{j_1} \cup A_{j_2})$, što znači $b \in \bigcup_{j\in J} F(A_j)$. Time je dokazano (f_2). Ako je F' implikativan filtar i $A_0 \subseteq F'$, onda, za sve konačne podskupove $A_j \subseteq A_0 (j \in J)$, vredi $A_j \subseteq F'$, odakle je $F(A_j) \subseteq F' (j \in J)$, što povlači $\bigcup_{j\in J} F(A_j) \subseteq F'$. Otuda, $\bigcup_{j\in J} F(A_j)$ je najmanji implikativni filtar koji sadrži A_0, tj. važi (4).

Lema 3.13 Klasa $\mathcal{F}_A$ svih implikativnih filtara implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ je potpuna mreža u kojoj je $\{1\}$ najmanji, a A najveći element. U toj mreži, infimum proizvoljne klase implikativnih filtara je (skupovni) presek te klase, dok se supremum klase $\{F_j : j \in J\}$ implikativnih filtara implikativne algebre definiše kao implikativni filtar generisan unijom te klase:

(5) $$\bigvee\{F_j : j \in J\} = F(\bigcup\{F_j : j \in J\}).$$

U slučaju dvočlane klase $\{F_1, F_2\}$ implikativnih filtara, notacija je, kao što je uobičajeno, infiksna:

(6) $F_1 \vee F_2 = \bigvee\{F_1, F_2\}$.

Potpuna mreža svih implikativnih filtara implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ je, dakle, algebarska struktura $\mathfrak{A}^{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_A, \cap, \bigvee, \{1\}, A)$.

Dokaz je trivijalan i izostavljen je.

Sledeće četiri teoreme su algebarski analogoni teoreme dedukcije u 1-deduktivnim i ω deduktivnim implikativnim algebrama u kojima važi (SP).

Teorema 3.14 U slabo deduktivnoj implikativnoj algebri, važi

(7) $F(\{a\} \cup F(c)) = F(a) \vee F(c) = F(\{a, c\})$.

Štaviše, slabo deduktivna implikativna algebra $(A, 1, \rightarrow)$ je 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) ako i samo ako je u $(A, 1, \rightarrow)$ ispunjeno:

(8) $F(a, c) =_{Df.} \{x \in A : a \rightarrow x \in F(c)\} = F(\{a\} \cup F(c))$.

Dokaz: U slabo deduktivnoj implikativnoj algebri, iz očiglednog $\{a\} \cup F(c) \subseteq F(a) \vee F(c)$, odmah se dobija $F(\{a\} \cup F(c)) \subseteq F(a) \vee F(c)$. Obrnuta inkluzija sledi iz $F(a) \subseteq F(\{a\} \cup F(c))$ i $F(c) \subseteq \{a\} \cup F(c) \subseteq F(\{a\} \cup F(c))$. Druga jednakost iz (7) dokazuje se slično.

Prema Th.3.7 i Lemi 1.8, u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$, $F(c) = \{x \in A : c \leq x\}$ je implikativni filtar generisan singltonom $\{c\}$. Dokažimo da je $F(a, c)$ implikativan filtar. $1 \in F(a, c)$, tj. (f_1) važi, jer je, po (i_4), $a \rightarrow 1 = 1 \in F(c)$. Ako je $x \in F(a, c)$ i $x \rightarrow y \in F(a, c)$, tj. $a \rightarrow x \in F(c)$ i $a \rightarrow (x \rightarrow y) \in F(c)$, što znači $c \rightarrow (a \rightarrow x) = 1$ i $c \rightarrow (a \rightarrow (x \rightarrow y)) = 1$, onda je, po (F_1), $c \rightarrow (a \rightarrow y) = 1$, tj. $a \rightarrow y \in F(c)$, odnosno $y \in F(a, c)$. Time je dokazano (f_2). Dalje, $a \in F(a, c)$, jer je $a \rightarrow a = 1 \in F(c)$. Dokažimo inkluziju $F(c) \subseteq F(a, c)$. Iz $x \in F(c)$, tj. $c \leq x$, po 1.12.6, sledi $a \rightarrow c \leq a \rightarrow x$, odakle se, zbog $c \leq a \rightarrow c$ (1.6.2), dobija $c \leq a \rightarrow x$, tj. $a \rightarrow x \in F(c)$, odnosno $x \in F(a, c)$. Konačno, $F(a, c)$ je najmanji implikativni filtar koji sadrži a i $F(c)$: neka je $a \in F$ i $F(c) \subseteq F$, gde je F implikativan filtar; tada je i $F(a, c) \subseteq F$, jer iz $x \in F(a, c)$ sledi $a \rightarrow x \in F(c) \subseteq F$, što sa $a \in F$, po (f_2), daje $x \in F$. Time je dokazano (8).

Obratno, prema dokazanom, u slabo deduktivnoj implikativnoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$ važi (7) i pretpostavimo da važi i (8). Ako je $a \rightarrow (b \rightarrow c) = 1$, tj. $c \in F(b, a)$, zbog (7) i (8), imamo $c \in F(a, b)$, tj. $b \to (a \to c) = 1$. Time je dokazano (SP). Dokažimo još (F_1). Naime, iz $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ i $c_1 \to (a \to b) = 1$, tj. $b \to c \in F(a, c_1)$ i $b \in F(a, c_1)$, korišćenjem (f_2), dobija se $c \in F(a, c_1)$, odnosno $c_1 \to (a \to c) = 1$. Prema tome, $(A, 1, \to)$ je 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP).

Teorema 3.15 (Diego) Ako je, u implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ ispunjen bilo koji od dva uslova:

(F) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$,

(F′) $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) = 1$,

onda, za svaki implikativan filtar F_o u $\mathfrak{A}$ i za svako $a \in A$, skup $F(a, F_o) = \{x \in A : a \to x \in F_o\}$ je implikativan filtar. Ako, uz to, u $\mathfrak{A}$ važi jednakost:

(AC) $a \to (b \to a) = 1$,

onda je $F(a, F_o)$ implikativni filtar generisan skupom $\{a\} \cup F_o$, tj. vredi

(9) $F(a, F_o) = \{x \in A : a \to x \in F_o\} = F(\{a\} \cup F_o) = F(a) \vee F_o$.

Otuda, jednakosti (9) važe u ω deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP).

Dokaz: Najpre, $1 \in F(a, F_o)$, zbog (i_4) i (f_1). Ako $b, b \to c \in F(a, F_o)$, onda $a \to b, a \to (b \to c) \in F_o$. Po (F) ili (F′), (f_1) i (f_2), tada je $a \to c \in F_o$, tj. $c \in F(a, F_o)$. Znači, $F(a, F_o)$ je implikativan filtar. Prema (i_1) i (f_1), $a \in F(a, F_o)$. Ako je $b \in F_o$, tada je po (AC) i (f_1), $b \to (a \to b) \in F_o$ i, otuda, $a \to b \in F_o$, tj. $b \in F(a, F_o)$. Prema tome, $F_o \subseteq F(a, F_o)$. Pretpostavimo da je F' implikativan filtar takav da je $F_o \subseteq F'$ i $a \in F'$. Ako je $b \in F(a, F_o)$, onda je $a \to b \in F_o \subseteq F'$, što, sa $a \in F'$, daje $b \in F'$, po (f_2). Otuda, $F(a, F_o) \subseteq F'$, tj. $F(a, F_o)$ je najmanji implikativni filtar koji sadrži a i F_o i zato važi (9), q.e.d.

Naredna teorema je generalizacija prethodne.

Teorema 3.16 (Diego) Neka je $(A, 1, \to)$ ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) i neka je $\emptyset \neq A_o \subseteq A$. Tada, za implikativni filtar generisan skupom A_o, u oznaci $F(A_o)$, vredi

(10) $F(A_o) = \{x \in A : (\exists c_1, \ldots, c_n \in A_o) c_1 \to (\ldots \to (c_n \to x) \ldots) = 1\}$.

Dokaz: Neka je F_o skup svih $x \in A$ za koje postoje $c_1, \ldots, c_n$ iz A_o takvi da važi $c_1 \to (c_2 \to (\ldots \to (c_n \to x) \ldots)) = 1$. Uzmimo da je $c \in A_o$. Kako je, prema (i_4), $c \to 1 = 1$, imamo $1 \in F_o$. Pretpostavimo da je a, $a \to b \in F_o$. Tada postoje $a_1, \ldots, a_n$ $b_1, \ldots,$ [illegible] iz A_o [illegible] vredi:

(11) $a_1 \to (\ldots \to (a_n \to a)\ldots) = 1$

i (12) $b_1 \to (\ldots \to (b_m \to (a \to b))\ldots) = 1$.

Uzastopnom primenom 1.1.2 i (JP) na (11) i (12), dobija se

(13) $a_1 \to (\ldots \to (a_n \to (b_1 \to (\ldots \to (b_m \to a)\ldots)))\ldots) = 1$

i (14) $a_1 \to (\ldots \to (a_n \to (b_1 \to (\ldots \to (b_m \to (a \to b))\ldots)))\ldots) = 1$.

Iz (13) i (14), po (F_{n+m-1}), sledi

$a_1 \to (\ldots \to (a_n \to (b_1 \to (\ldots \to (b_m \to b)\ldots)))\ldots) = 1$.

Pošto su $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m$ iz A_o, imamo $b \in F_o$. Otuda, F_o je implikativan filtar. Zbog (i_1), inkluzija $A_o \subseteq F_o$ je očigledna. Pretpostavimo da je F implikativan filtar koji sadrži A_o i dokažimo da tada mora biti $F_o \subseteq F$. Ako je $a \in F_o$, tada važi (11), za neke $a_1,\ldots,a_n$ iz A_o. Pošto je tada $a_1,\ldots,a_n \in F$ i F je implikativan filtar, prema (f_1) i (f_2), imamo $a \in F$.

Teorema 3.17 U slabo deduktivnoj algebri važi

(15) $F(\{c_1,\ldots,c_n\}) = F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_n)$.

Pored toga, slabo deduktivna implikativna algebra $(A, 1, \to)$ je ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) ako i samo ako je u $(A, 1, \to)$ ispunjeno

(16) $\{x \in A : c_1 \to (\ldots \to (c_n \to x)\ldots) = 1\} = F(\{c_1,\ldots,c_n\})$.

Dokaz: U slabo deduktivnoj implikativnoj algebri, $F(\{c_1,\ldots,c_n\}) \subseteq F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_n)$ se dobija iz očiglednog $\{c_1,\ldots,c_n\} \subseteq F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_n)$. Obrnuta inkluzija sledi iz $F(c_i) \subseteq F(\{c_1,\ldots,c_n\})$ $(i = 1,\ldots,n)$. Time je dokazano (15).

U ω deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), jednakost (16) dokazuje se slično kao jednakost (10).

Obratno, prema upravo dokazanom, u slabo deduktivnoj implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$ važi (15). Iz pretpostavke da važi i (16), izvodi se, na isti način kao u dokazu Th.3.14, (SP_{n-1}) i (F_{n-1}), odakle, prema Lemi 1.10 i Th.1.15, sledi (SP) i (F), za $n \geq 3$. Dakle, $(A, 1, \to)$ je ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP), q.e.d.

U potpunoj mreži $\mathfrak{A}^{\mathcal{F}}$ svih implikativnih filtara ω deduktivne implikativne algebre $\mathfrak{A}$ u kojoj važi (SP), važi zakon distribucije infimuma prema beskonačnom supremumu. Prema jednoj Wardovoj teoremi iz 1938.g. (vide /93/), takva mreža postaje Heytingova algebra, ako se implikativna operacija $\Rightarrow$ definiše sa:

(17) $F_1 \Rightarrow F_2 = \bigvee\{F \in \mathcal{F}_A : F_1 \cap F \subseteq F_2\}$.

Teorema 3.18 (Diego) U potpunoj mreži $\mathfrak{A}^{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_A, \cap, \bigvee, \{1\}, A)$ svih implikativnih filtara ω deduktivne implikativne algebre

$\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ u kojoj važi (SP), vredi sledeći beskonačni distributivni zakon:

(18) $F' \cap \bigvee_{j \in J} F_j = \bigvee_{j \in J} (F' \cap F_j)$.

Dokaz: Razmotrimo najpre poseban slučaj:

(19) $F' \cap (F_1 \vee F(a)) = (F' \cap F_1) \vee (F' \cap F(a))$.

Dovoljno je dokazati inkluziju:

(20) $F' \cap (F_1 \vee F(a)) \subseteq (F' \cap F_1) \vee (F' \cap F(a))$,

jer obrnuta inkluzija uvek važi. Neka je $x \in F' \cap (F_1 \vee F(a))$, tj. $x \in F'$ i $x \in F_1 \vee F(a)$, odakle je, po (9) iz Th.3.16, $a \to x \in F_1$. S obzirom da iz $x \in F'$ i $x \to (a \to x) = 1 \in F'$ ((AC) i (f_1)) sledi $a \to x \in F'$, imamo

(21) $a \to x \in F' \cap F_1 \subseteq (F' \cap F_1) \vee (F' \cap F(a))$.

S druge strane, $x \in F'$, $a \in F(a)$, $x \leq (a \to x) \to x$ (1.6.2) i $a \leq (a \to x) \to x$ (1.6.3), po (f_6), daju

(22) $(a \to x) \to x \in F' \cap F(a) \subseteq (F' \cap F_1) \vee (F' \cap F(a))$.

Iz (21) i (22), primenom (f_2), dobija se $x \in (F' \cap F_1) \vee (F' \cap F(a))$. Time je dokazano (20) odnosno (19).

Indukcijom se, pomoću (19), lako pokazuje:

(23) $F' \cap (F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_n)) = (F' \cap F(a_1)) \vee \ldots \vee (F' \cap F(a_n))$.

Dokažimo sada jednakost (18). Opet je dovoljno dokazati samo inkluziju

(24) $F' \cap \bigvee_{j \in J} F_j \subseteq \bigvee_{j \in J} (F' \cap F_j)$,

jer je obrnuta inkluzija uvek ispunjena. Pretpostavimo da je $x \in F' \cap \bigvee_{j \in J} F_j$, tj. $x \in F'$ i $x \in \bigvee_{j \in J} F_j = F(\bigcup_{j \in J} F_j)$. Iz poslednje formule, Leme 3.12 i (15) sledi da postoji konačan skup $A_0 = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \bigcup_{j \in J} F_j$ takav da je

(25) $x \in F(A_0) = F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_n)$.

Iz $x \in F'$ i (25), dobija se $x \in F' \cap (F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_n))$, odnosno, zbog (23), $x \in (F' \cap F(a_1)) \vee \ldots \vee (F' \cap F(a_n))$. Neka je $a_k \in F_{j_k}$, $1 \leq k \leq n$, $j_k \in J$. Kako je $F(a_k) \subseteq F_{j_k}$, imamo $x \in (F' \cap F_{j_1}) \vee \ldots \vee (F' \cap F_{j_n}) \subseteq \bigvee_{j \in J} (F' \cap F_j)$, q.e.d.

U svakoj mreži, zakon distribucije supremuma prema (konačnom) infimumu:

(26) $F \vee (F_1 \cap F_2) = (F \vee F_1) \cap (F \vee F_2)$,

posledica je dualnog distributivnog zakona. Međutim, dobro je poznato da zakon distribucije supremuma prema beskonačnom infimumu nije posledica njemu dualnog distributivnog zakona. Isto tako, u mreži implikativnih filtara 1-deduktivne implikativne algebre u kojoj važi (SP), dva restringirana distributivna zakona (27) i (31) ne slede jedan iz drugog iz prostog razloga što implikativni filtri generisani singltonima ne čine podmrežu.

Teorema 3.19 Ako je F' implikativan filtar u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ u kojoj važi (SP), onda važi distributivni zakon:

(27) $F' \cap (F(a) \vee F(b)) = (F' \cap F(a)) \vee (F' \cap F(b))$,

gde su $F(a)$ i $F(b)$ glavni implikativni filtri u $\mathfrak{A}$ generisani elementima a i b iz A.

Dokaz: Dovoljno je dokazati inkluziju:

(28) $F' \cap (F(a) \vee F(b)) \subseteq (F' \cap F(a)) \vee (F' \cap F(b))$,

jer obrnuta inkluzija uvek važi. Pretpostavimo $x \in F' \cap (F(a) \vee F(b))$, tj. $x \in F'$ i $x \in F(a) \vee F(b)$, odakle je, po (7) i (8) iz Th.3.14, $a \rightarrow x \in F(b)$. Kako iz $x \in F'$ i $x \rightarrow (a \rightarrow x) = 1 \in F'$ ((AC) i (f_1)), sledi $a \rightarrow x \in F'$, imamo

(29) $a \rightarrow x \in F' \cap F(b) \subseteq (F' \cap F(a)) \vee (F' \cap F(b))$.

S druge strane, $x \in F'$, $a \in F(a)$, $x \leq (a \rightarrow x) \rightarrow x$ (1.6.2) i $a \leq (a \rightarrow x) \rightarrow x$ (1.6.3), po (f_6), daju

(30) $(a \rightarrow x) \rightarrow x \in F' \cap F(a) \subseteq (F' \cap F(a)) \vee (F' \cap F(b))$.

Iz (29) i (30), primenom (f_2), dobija se $x \in (F' \cap F(a)) \vee (F' \cap F(b))$. Time je dokazano (28) odnosno (27).

Dokaz zakona (27) dobijen je neznatnom modifikacijom dokaza formule (19).

Teorema 3.20 Ako su $F(a)$, $F(b)$ i $F(c)$ glavni implikativni filtri generisani elementima a, b i c 1-deduktivne implikativne algebre u kojoj važi (SP), onda važi sledeći distributivni zakon:

(31) $F(c) \vee (F(a) \cap F(b)) = (F(c) \vee F(a)) \cap (F(c) \vee F(b))$.

Dokaz: Dovoljno je dokazati inkluziju:

(32) $F(c) \vee (F(a) \cap F(b)) \supseteq (F(c) \vee F(a)) \cap (F(c) \vee F(b))$.

Pretpostavimo da je $x \in F(c) \vee F(a)$ i $x \in F(c) \vee F(b)$. Prema (7) i (8) (Th.3.14), tada je

(33) $a \rightarrow x,\ b \rightarrow x \in F(c) \subseteq F(c) \vee (F(a) \cap F(b))$.

Zbog 1.6.3 i 1.6.2, imamo $a \leq (a \rightarrow x) \rightarrow x \leq$ $\leq (b \rightarrow x) \rightarrow ((a \rightarrow x) \rightarrow x)$, odakle sledi $(b \rightarrow x) \rightarrow ((a \rightarrow x) \rightarrow x) \in F(a)$. S druge strane, iz $x \leq (a \rightarrow x) \rightarrow x$ (1.6.2), primenom 1.12.6, dobija se $b \rightarrow x \leq b \rightarrow ((a \rightarrow x) \rightarrow x)$, odakle, po (SP), sledi $b \leq (b \rightarrow x) \rightarrow ((a \rightarrow x) \rightarrow x)$, što znači $(b \rightarrow x) \rightarrow ((a \rightarrow x) \rightarrow x) \in F(b)$. Prema tome,

(34) $(b \rightarrow x) \rightarrow ((a \rightarrow x) \rightarrow x) \in F(a) \cap F(b) \subseteq F(c) \vee (F(a) \cap F(b))$,

Iz (33) i (34), dvostrukom primenom (f_2), dobija se $x \in F(c) \vee (F(a) \cap F(b))$. Time je dokazano (32), odnosno (31).

Dokaz je dobijen modifikacijom prvobitnog Diegovog dokaza (vide / /, Th.7).

Definicije (zaključno s Def.3.8) i stavovi (zaključno s Th.3.33) uvode, u implikativnim algebrama, nekoliko novih vrsta implikativnih filtara i daju njihove razne ekvivalentne karakterizacije.

Definicija 3.3 Implikativan filtar F u implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ je pravi ako i samo ako je F pravi podskup od A, tj. $F \neq A$. Implikativan filtar je nepravi ako i samo ako nije pravi.

Očigledno, u ograničenoj implikativnoj algebri, F je pravi implikativni filtar ako i samo ako $0 \notin F$.

Definicija 3.4 Implikativan filtar F u implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$ je maksimalan ako i samo ako je pravi i nije pravi podskup pravog implikativnog filtra u toj algebri. Drugim rečima, pravi implikativni filtar je maksimalan ako i samo ako je maksimalan element u (parcijalno) uređenom skupu svih pravih implikativnih filtara u $\mathfrak{A}$.

Definicija 3.5 Pod lancem implikativnih filtara u implikativnoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$ podrazumeva se svaki lanac u parcijalno uređenom skupu $(\mathcal{F}_A, \subseteq)$ svih implikativnih filtara te algebre.

Lema 3.21 Unija bilo kojeg lanca implikativnih filtara (koji ne sadrže element a_0) u implikativnoj algebri je implikativan filtar u toj algebri (koji ne sadrži a_0).

Dokaz se svodi na prostu proveru uslova (f_1) i (f_2).

Lema 3.22 U ograničenoj implikativnoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$, za svaki pravi implikativni filtar F, postoji maksimalan implikativan filtar F^{*} koji sadrži F.

Dokaz: Neka je 0 najmanji element u parcijalno uređenom skupu $(A, \leq)$ indukovanom operacijom $\rightarrow$ ograničene implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$. Pošto je F pravi implikativni filtar u $\mathfrak{A}$, onda $0 \notin F$, jer bi, u protivnom, po (f_6), bilo $F = A$. Posmatrajmo parcijalno uređen skup $(\mathcal{F}_A(F), \subsetneq)$ svih pravih implikativnih filtara u $\mathfrak{A}$ koji sadrže F. Nijedan implikativan filtar u $(\mathcal{F}_A(F), \subsetneq)$ ne sadrži 0. Prema Lemi 3.21, svaki lanac u tom parcijalno uređenom skupu ima majorantu i, otuda, po Zornovoj lemi, postoji maksimalan implikativan filtar F^{*} u $\mathfrak{A}$ takav da $F \subseteq F^{*}$, t.e.d.

U dokazu teoreme reprezentacije za deduktivne implikativne algebre, ireducibilni implikativni filtri igraju ulogu analognu ulozi prostih filtara u dokazu teoreme reprezentacije za distributivne mreže.

Definicija 3.6 Implikativan filtar F u implikativnoj algebri je ireducibilan (nesvodiv) ako i samo ako je pravi i, za bilo koja dva prava implikativna filtra F_1 i F_2, $F = F_1 \cap F_2$ povlači $F = F_1$ ili $F = F_2$. Drugim rečima, implikativan filtar je ireducibilan ako i samo ako je pravi i nije presek dva prava implikativna filtra koja su različita od njega.

Neposredna posledica Def.3.4 i Def.3.6 je naredna lema.

Lema 3.23 U implikativnoj algebri, svaki maksimalan implikativan filtar je ireducibilan implikativan filtar. (Obratno ne važi.)

Dokaz kontrapozicije gornje leme je očigledan.

U ω deduktivnoj implikativnoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$ u kojoj važi (SP), ireducibilan implikativan filtar F može se okarakterisati kao implikativan filtar F takav da je $A \setminus F$, zajedno s restrikcijom na $A \setminus F$ parcijalnog uređenja indukovanog implikativnom operacijom $\rightarrow$, usmeren skup.

Teorema 3.24 (Diego) Ako, u implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$, pravi implikativni filtar F ispunjava uslov:

(35) za sve $a, b \in A \setminus F$, postoji element $c \in A \setminus F$ takav da je $a \leq c$ i $b \leq c$,

onda je F ireducibilan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$.

Dokaz: Neka pravi implikativni filtar F u implikativnoj algebri zadovoljava uslov (35). Kada F ne bi bio ireducibilan implikativan filtar, postojali bi pravi implikativni filtri F_1 i F_2, $F_1 \neq F$ i $F_2 \neq F$ i bilo bi $F = F_1 \cap F_2$. Tada bi postojali elementi $a \in F_1 \setminus F$, $b \in F_2 \setminus F$ i $c \in A \setminus F$ takvi da bi vredelo $a \leq c$ i $b \leq c$. Ali, iz $a \in F_1$ i $a \leq c$, $b \in F_2$ i $b \leq c$ sledilo bi $c \in F_1$ i $c \in F_2$, tj. $c \in F_1 \cap F_2 = F$, što bi protivurečilo $c \in A \setminus F$. Dakle, F mora biti ireducibilan implikativan filtar.

Teorema 3.25 (Diego) U ω deduktivnoj implikativnoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$ u kojoj važi (SP), ireducibilan implikativan filtar F zadovoljava uslov (35).

Dokaz: Neka je, u ω deduktivnoj implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$ u kojoj važi (SP), F ireducibilan implikativan filtar. Pretpostavimo, uz to, da je $a, b \in A \setminus F$. Kad ne bi bio ispunjen uslov (35), tj. kad bi, za svako x takvo da je $a \leq x$ i $b \leq x$, x pripadalo F, bilo bi $F(a) \cap F(b) \subseteq F$, to jest $F = F \vee (F(a) \cap F(b))$, odakle bi, zbog distributivnosti mreže $\mathfrak{A}^*$ implikativnih filtara algebre $\mathfrak{A}$, sledilo $F = (F \vee F(a)) \cap (F \vee F(b))$. No, $F \neq F \vee F(a)$ i $F \neq F \vee F(b)$, jer je $a, b \in A \setminus F$, pri čemu bi i $F \vee F(a)$ i $F \vee F(b)$ morali biti pravi implikativni filtri. Otuda, F ne bi bio ireducibilan implikativan filtar, što je protivno pretpostavci.

Neznatnom modifikacijom dokaza Th.3.25, uz korišćenje (31) (Th.3.20) i uzimajući u obzir Th.3.24, dobija se ovaj rezultat:

<u>Teorema 3.26</u> U 1-deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), pravi implikativni filtar F(c) je ireducibilan ako i samo ako ispunjava uslov (35).

<u>Lema 3.27</u> Ako je F_o implikativan filtar u implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ i $a_o \notin F_o$, onda postoji ireducibilan implikativan filtar F^* takav da je $F_o \subseteq F^*$ i $a_o \notin F^*$.[1] (Diego)

<u>Dokaz</u>: Neka je $(\mathcal{F}_A(F_o), \subseteq)$ parcijalno uređen skup svih implikativnih filtara F u $(A, 1, \rightarrow)$ takvih da je $F_o \subseteq F$ i $a_o \notin F$. Po Lemi 3.21, svaki lanac implikativnih filtara u $(\mathcal{F}_A(F_o), \subseteq)$ ima majorantu. Po Zornovoj lemi, postoji u $(\mathcal{F}_A(F_o), \subseteq)$ maksimalan element F^*. Jasno, $F_o \subseteq F^*$ i $a_o \notin F^*$. Uzmimo da je $F^* = F_1 \cap F_2$, za neke prave implikativne filtre F_1 i F_2. Odatle je $F_o \subseteq F_1$ i $F_o \subseteq F_2$ i $a_o \notin F_1$ ili $a_o \notin F_2$ (jer bi, u protivnom, bilo $a_o \in F^*$). Znači, $F_1 \in \mathcal{F}_A(F_o)$ ili $F_2 \in \mathcal{F}_A(F_o)$. Pošto je F^* maksimalan element u $(\mathcal{F}_A(F_o), \subseteq)$ i $F^* \subseteq F_1$ ili $F^* \subseteq F_2$, dobija se da je $F^* = F_1$ ili $F^* = F_2$.

<u>Lema 3.28</u> Ako, u slabo deduktivnoj implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$, za neke elemente $a, b \in A$, nije $a \leq b$, onda postoji ireducibilan implikativan filtar F u $\mathfrak{A}$ takav da je $a \in F$ i $b \notin F$. (Diego)

<u>Dokaz</u>: Kako je, prema Th.3.7, F(a) implikativan filtar koji sadrži a i, ako nije $a \leq b$, ne sadrži b, prema Lemi 3.27 i Lemi 1.4, postoji ireducibilan implikativan filtar F u $\mathfrak{A}$ takav da je $a \in F$ i $b \notin F$.

<u>Definicija 3.7</u> U implikativnoj algebri, implikativan filtar F je <u>maksimalan u odnosu na element a</u> te algebre ako i samo ako je F maksimalan implikativan filtar među svim implikativnim filtrima koji ne sadrže element a.

<u>Teorema 3.29</u> (Monteiro) U implikativnoj algebri, implikativan <u>filtar F je maksimalan u odnosu na element a, ako ispunjava</u>

1) Iz dokaza se vidi da je F^* maksimalan takav implikativan filtar.

uslove:

(36) $a \notin F$

i (37) za svako $x \notin F$, $x \to a \in F$.

Dokaz: Neka, u implikativnoj algebri, implikativan filtar F zadovoljava uslove (36) i (37) i neka, za implikativan filtar F', važi $F \subseteq F'$, $F \neq F'$ i $a \notin F'$. To znači da postoji element x_0 iz F' takav da je $x_0 \notin F$, odakle je, prema (37), $x_0 \to a \in F \subseteq F'$. No, $x_0 \in F'$ i $x_0 \to a \in F'$ daju $a \in F'$, što protivureči $a \notin F'$. Dakle, F nije pravi podskup nijednog implikativnog filtra F' koji ne sadrži a. Otuda, F je maksimalan implikativan filtar u odnosu na element a.

Teorema 3.30 (Monteiro) U ω deduktivnoj implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$ u kojoj važi (SP), implikativan filtar F koji je maksimalan u odnosu na element a ispunjava uslove (36) i (37).

Dokaz: Neka je, u ω deduktivnoj implikativnoj algebri $(A, 1, \to)$ u kojoj važi (SP), implikativan filtar F maksimalan u odnosu na element a. Najpre, po Def.3.7, očigledno je $a \notin F$. Što se tiče (37), ako je $x_0 \notin F$, onda je F pravi podskup implikativnog filtra F' generisanog implikativnim filtrom F i elementom x_0. Zbog maksimalnosti F, tada mora biti $a \in F'$. No, po Th. 3.15, $F' = \{x \in A : x_0 \to x \in F\}$ i otuda $x_0 \to a \in F$. Time je dokazano (37).

Korolar 3.31 U ω deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), implikativan filtar F je maksimalan u odnosu na a ako i samo ako F ispunjava uslove (36) i (37).

Dokaz: Ovo je direktna posledica Th.3.29, Th.3.30, Kor.1.17 i lema 1.9, 1.8 i 1.4.

U kontekstu 1-deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP), može se dokazati nešto slabiji analogon prethodnog korolara.

Korolar 3.32 U 1-deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), glavni implikativni filtar $F(c)$ generisan elementom c je maksimalan u odnosu element a ako i samo ako $F(c)$ ispunjava uslove:

(38) $a \notin F(c)$

i (39) za svako $x \notin F(c)$, $x \to a \in F(c)$.

Dokaz: Dovoljnost uslovâ (38) i (39) sledi iz Th.3.29 i lema 1.8 i 1.4. Nužnost uslova (38) i (39) dobija se modifikacijom dokaza Th.3.30 (koristi se (9) - Th.3.14 umesto Th.3.15), q.e.d.

Ispostavlja se da su, u implikativnoj algebri, implikativni filtri maksimalni u odnosu na element te algebre zapravo tako zvani potpuno ireducibilni implikativni filtri.

Definicija 3.8 Implikativan filtar F u implikativnoj algebri je potpuno ireducibilan (potpuno nesvodiv) ako i samo ako je pravi i $F = \bigcap_{j \in J} F_j$ povlači $F = F_{j_o}$ za neko $j_o \in J$, gde je $\{F_j : j \in J\}$ proizvoljan skup pravih implikativnih filtara.

Drugim rečima, potpuno ireducibilan implikativan filtar je pravi implikativni filtar koji nije presek (nijednog skupa) pravih implikativnih filtara različitih od njega.

Teorema 3.33 (Diego) U implikativnoj algebri, implikativan filtar F je potpuno ireducibilan ako i samo ako je F maksimalan u odnosu na neki element te algebre.[1)]

Dokaz: Neka, u implikativnoj algebri, postoji element $a \notin F$ takav da je F maksimalan u odnosu na element a implikativan filtar. Pretpostavimo da je $F = \bigcap\{F_j : j \in J\}$, gde su F_j $(j \in J)$ pravi implikativni filtri. Otuda je $F \subseteq F_j$ (za sve $j \in J$) i $a \notin F_{j_o}$ (za neko j_o iz J). Znači, F_{j_o} je implikativan filtar koji ne sadrži a, a kako je F maksimalan takav implikativan filtar i $F \subseteq F_{j_o}$, mora biti $F = F_{j_o}$. Dakle, F je potpuno ireducibilan implikativan filtar.

Obratno, pretpostavimo da, u implikativnoj algebri, ni za jedno $a \notin F$, implikativan filtar F nije maksimalan u odnosu na taj element a. Prema Lemi 3.27, to znači da, za svako $a \notin F$, postoji maksimalan implikativan filtar F_a takav da $a \notin F_a$, $F \subseteq F_a$ i $F \neq F_a$. Otuda je $F \subseteq \bigcap_{a \notin F} F_a$. Štaviše, ako $a \notin F$, onda $a \notin F_a$, što znači $F = \bigcap_{a \notin F} F_a$ i $F_a \neq F$ (za sve $a \notin F$), tj. F nije potpuno ireducibilan implikativan filtar, q.e.d.

U daljem, smatramo poznatim sledeće činjenice. Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu A, onda se klasa ekvivalencije relacije $\sim$ određena elementom a, kraće $/a/_{\sim}$ ili samo $/a/$, definiše kao skup svih $b \in A$ koji su u relaciji $\sim$ sa a: $/a/ = \{b \in A : b \sim a\}$. Odgovarajući količnički skup, tj. skup svih klasa ekvivalencije relacije $\sim$ na A, označava se sa $A/_{\sim}$. Ako je $A \neq \emptyset$ i $\sim$ relacija ekvivalencije na A, tada važi:

(40) $a \in /a/$,

(41) $a \sim b$ ako i samo ako $/a/ = /b/$,

(42) $a \in /b/$ ako i samo ako $a \sim b$,

(43) Ako $/a/ \neq /b/$, onda $/a/ \cap /b/ = \emptyset$.

---

1) Def.3.9 i Def.3.10 kao i Th.3.36 i Th.3.37 su specija- Otuda, po L.3.27, potpuno ireducibilni implikativni filtri postoje.

lizacije, u kontekstu implikativnih algebri, dobro poznatih definicija i stavova iz univerzalne algebre.

<u>Definicija 3.9</u> Pod <u>kongruencijom</u> u implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ podrazumeva se relacija ekvivalencije $\sim$ na A koja je saglasna s operacijama u $\mathfrak{A}$:

(44) $a \sim b$ i $c \sim d$ povlači $a \to c \sim b \to d$.

Skup $K_{\sim} = \{a \in A : a \sim 1\}$ zove se <u>jezgro kongruencije $\sim$</u>.

<u>Definicija 3.10</u> Funkcija $h: A \to B$, gde su $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ i $\mathfrak{B} = (B, 1', \to')$ implikativne algebre, je <u>homomorfizam</u> algebre $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$, ako h čuva sve operacije, tj. ako je ispunjeno:

(45) $h(a \to b) = h(a) \to' h(b)$,

(46) $h(1) = 1'$.

Homomorfizam algebre $\mathfrak{A}$ u samu sebe zove se <u>endomorfizam</u>. Homomorfizam koji je surjekcija naziva se <u>epimorfizam</u>. <u>Monomorfizam</u> je homomorfizam koji je injekcija. <u>Izomorfizam</u> je homomorfizam koji je bijekcija. Dve implikativne algebre su međusobno izomorfne ako i samo ako postoji izomorfizam između njih.

<u>Jezgro homomorfizma h</u> implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ u $\mathfrak{B} = (B, 1', \to')$, kraće $K(h)$, je skup svih elemenata iz A koje h preslikava na $1' \in B$: $K(h) = \{a \in A : h(a) = 1'\}$.

Sledeće dve leme bave se elementarnim svojstvima homomorfizama i kongruencija implikativnih algebri.

<u>Lema 3.34</u> Neka su $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ i $\mathfrak{B} = (B, 1', \to')$ dve implikativne algebre i neka je $h: A \to B$ funkcija koja zadovoljava uslov (45). Tada:

<u>3.34.1</u> $h(1) = 1'$, tj. h je homomorfizam $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$.

<u>3.34.2</u> h je morfizam koji čuva poredak:

(47) $a \leq b$ povlači $h(a) \leq' h(b)$.

<u>3.34.3</u> h je monomorfizam ako i samo ako $K(h) = \{1\}$.

<u>3.34.4</u> $K(h)$ je implikativan filtar koji zadovoljava uslove (f_3) i (f_4) [1].

<u>Dokaz</u>: <u>3.34.1</u> $h(1) = h(a \to a) = h(a) \to' h(a) = 1'$

<u>3.34.2</u> Ako je $a \leq b$, tj. $a \to b = 1$, onda je $h(a) \to' h(b) = h(a \to b) = h(1) = 1'$, odakle je $h(a) \leq' h(b)$.

<u>3.34.3</u> Treba dokazati da $h(a) = h(b)$ povlači $a = b$, ako je

---

1) Autoru ovih redova nije pošlo za rukom da dokaže (bez dodatnih pretpostavki) tvrdnju (navedenu bez dokaza) kod Rasiowe /76/, str.19 i 36 da je $K(h)$ specijalan implikativan filtar, tj. da $K(h)$ zadovoljava i (f_5). Upor. takođe Th.3.38 i 3.39.

$K(h) = \{1\}$. Za to je dovoljno dokazati da, pod istom pretpostavkom, $h(a) \leq h(b)$ implicira $a \leq b$. Naime, $h(a) \leq h(b)$, tj. $1' = h(a) \to' h(b) = h(a \to b)$ znači $a \to b \in K(h)$, tj. $a \to b = 1$, odakle je $a \leq b$.

<u>3.34.4</u> $K(h)$ zadovoljava (f_1) zbog 3.34.1 i Def.3.10. Ako je $a \in K(h)$ i $a \to b \in K(h)$, tj. $h(a) = 1'$ i $1' = h(a \to b) = h(a) \to' h(b)$, onda je, po 1.1.1, $h(b) = 1'$, tj. $b \in K(h)$. Dakle, važi (f_2). Dokažimo (f_3): iz $a \in K(h)$, tj. $h(a) = 1'$, sledi $h(b \to a) = h(b) \to' h(a) = h(b) \to' 1' = 1'$, odnosno $b \to a \in K(h)$, zbog (i_4). Što se tiče, (f_4), ako je $a \to b \in K(h)$ i $b \to c \in K(h)$, tj. $h(a) \to' h(b) = h(a \to b) = 1'$ i $h(b) \to' h(c) = h(b \to c) = 1'$, onda, prema (i_2), imamo $h(a \to c) = h(a) \to' h(c) = 1'$, tj. $a \to c \in K(h)$.

<u>Lema 3.35</u> Neka je $\sim$ kongruencija u implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ u kojoj važi slabi zakon permutacije antecedenata (SP). Tada je jezgro $K_\sim$ te kongruencije implikativan filtar koji zadovoljava uslov (f_3).

<u>Dokaz</u>: Po definiciji, $a \in K_\sim$ ako i samo ako $a \sim 1$. (f_1) je ispunjeno zbog refleksivnosti relacije $\sim$. Ako je $a \in K_\sim$ i $a \to b \in K_\sim$, tj. $a \sim 1$ i $a \to b \sim 1$, onda je $1 \sim a \to b \sim 1 \to b = b$, tj. $b \in K_\sim$, zbog 1.6.5 i svojstava kongruencije. Time je dokazano (f_2). Dokažimo (f_3): iz $a \in K_\sim$, tj. $a \sim 1$, sledi $b \to a \sim b \to 1 = 1$, tj. $b \to a \in K_\sim$, prema (i_4).

<u>Teorema 3.36</u> Za svaku kongruenciju $\sim$ implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$, jednakostima:

(48) $/a/ \to_\sim /b/ = /a \to b/$ i $1_\sim = /1/$,

korektno su definisane odgovarajuće operacije u tzv. količničkoj algebri $\mathfrak{A}/\sim = (A/\sim, 1_\sim, \to_\sim)$. Preslikavanje $h_\sim: A \to A/\sim$, $h_\sim(a) = /a/$, je epimorfizam $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}/\sim$, tzv. prirodni ili kanonski epimorfizam. Pored toga, $K_\sim = K(h_\sim)$, tj. jezgro kongruencije poklapa se s jezgrom kanonskog epimorfizma te kongruencije.

<u>Dokaz</u> je uobičajen. Primetimo da $K(h_\sim) = K_\sim$ sledi iz (41): $/a/ = /1/$ ako i samo ako $a \sim 1$.

Upravo smo videli da svakoj kongruenciji odgovara epimorfizam (kanonski). Naredna teorema pokazuje da se i svakom homomorfizmu može pridružiti kongruencija.

<u>Teorema 3.37</u> Ako je h epimorfizam implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ na implikativnu algebru $\mathfrak{B} = (B, 1', \to')$, tada relacija $\sim_h$ uvedena sa

(49) $a \sim_h b$ ako i samo ako $h(a) = h(b)$

predstavlja kongruenciju u $\mathfrak{A}$ za koju se kaže da je indukovana homomorfizmom h. Količnička algebra $\mathfrak{A}/\sim_h$ izomorfna je sa $\mathfrak{B}$. Preslikavanje φ :

(50) $\varphi(/a/) = h(a)$

je izomorfizam $\mathfrak{A}/\sim_h$ na $\mathfrak{B}$, Jezgro K(h) epimorfizma h poklapa se s jezgrom kongruencije indukovane tim epimorfizmom: $K(h) = K_{\sim_h}$.

<u>Dokaz</u> je elementaran i poznat. Dodajmo samo da $K_{\sim_h} = K(h)$ sledi iz (49): $a \sim_h 1$ ako i samo ako $h(a) = h(1) = 1'$.

Iz Th.3.36 i Th.3.37 i (41) izlazi da je svaka kongruencija $\sim$ indukovana kanonskim epimorfizmom te kongruencije: $\sim = \sim_{h_\sim}$. S druge strane, svaki homomorfizam h definisan na $\mathfrak{A}$ esencijalno koincidira s kanonskim homomorfizmom $h_{\sim_h}$ kongruencije $\sim_h$ indukovane homomorfizmom h, jer je h-slika implikativne algebre $\mathfrak{A}$ izomorfna sa $\mathfrak{A}/\sim_h$. Otuda je za proučavanje strukture implikativnih algebri sve jedno da li se posmatraju kongruencije ili homomorfizmi.

Teoreme 3.38 i 3.39 pokazuju da se specijalni implikativni filtri u implikativnoj algebri poklapaju s jezgrima epimorfizama implikativne algebre na implikativnu algebru u kojoj važe (STP_o) i (STS_o).

<u>Definicija 3.11</u> Ako je F implikativan filtar u implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$, onda je, po definiciji,

(51) $a \sim_F b$ ako i samo ako $a \rightarrow b \in F$ i $b \rightarrow a \in F$.

Za relaciju $\sim_F$ kaže se da je određena implikativnim filtrom F.

<u>Teorema 3.38</u> (Rasiowa)[1] Neka je $h : A \rightarrow B$ epimorfizam implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ na implikativnu algebru $\mathfrak{B} = (B, 1', \rightarrow')$ u kojoj važe (STP_o) i (STS_o). Tada je jezgro K(h) epimorfizma h specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$. Pored toga,

(52) $h(a) = h(b)$ ekvivalentno je s $a \rightarrow b,\ b \rightarrow a \in K(h)$.

Otuda, prema Th.3.37, relacija $\sim_{K(h)}$ određena implikativnim filtrom K(h) je kongruencija u $\mathfrak{A}$. Količnička algebra $\mathfrak{A}/\sim_{K(h)}$ izomorfna je sa $\mathfrak{B}$.

<u>Dokaz</u>: Neka je $h : A \rightarrow B$ epimorfizam implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ na implikativnu algebru $\mathfrak{B} = (B, 1', \rightarrow')$ u kojoj važe (STP_o) i (STS_o). Tada je, prema Lemi 3.34.4, jezgro K(h) epimorfizma h implikativan filtar koji zadovoljava uslove (f_3) i (f_4). Dokažimo da K(h) zadovoljava i (f_5). Iz $c \rightarrow d \in K(h)$ i $b \rightarrow a \in K(h)$, tj. $h(c) \rightarrow' h(d) = h(c \rightarrow d) = 1'$ i $h(b) \rightarrow' h(a) = h(b \rightarrow a) = 1'$, sledi $(h(a) \rightarrow' h(d)) \rightarrow' (h(b) \rightarrow' h(d)) = 1'$ i

1) Uporedi fusnotu 1 u vezi s Lemom 3.34.4

$(h(a) \to' h(c)) \to (h(a) \to' h(d)) = 1'$, odakle se, korišćenjem (i_2), dobija $(h(a) \to' h(c)) \to (h(b) \to' h(d)) = 1'$, to jest $h((a \to c) \to (b \to d)) = 1'$, odnosno $(a \to c) \to (b \to d) \in K(h)$.

$h(a) = h(b)$ povlači $h(a \to b) = h(a) \to' h(b) = h(a) \to' h(a) = 1'$ i, analogno, $h(b \to a) = 1'$, što znači $a \to b \in K(h)$ i $b \to a \in K(h)$. Obratno, $a \to b \in K(h)$ i $b \to a \in K(h)$, tj. $h(a) \to' h(b) = h(a \to b) = 1'$ i $h(b) \to' h(a) = h(b \to a) = 1'$, daju $h(a) = h(b)$, po (i_3).

<u>Teorema 3.39</u> Neka je $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ implikativna algebra. Tada važi:

<u>3.39.1</u> Relacija $\underset{F}{\sim}$ na A određena specijalnim implikativnim filtrom F u $\mathfrak{A}$ je kongruencija u $\mathfrak{A}$.

<u>3.39.2</u> Za svaki specijalan implikativan filtar F u $\mathfrak{A}$,

(53) $a \in F$ ako i samo ako $a \underset{F}{\sim} 1$.

<u>3.39.3</u> Ako je F specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$, onda je količnička algebra $\mathfrak{A}/\underset{F}{\sim}$ (koja se označava i sa $\mathfrak{A}/F = (A/F, 1_F, \to_F)$) implikativna algebra u kojoj važe (STP_o) i (STS_o).

<u>3.39.4</u> Ako je F specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$, onda za relaciju parcijalnog uređenja $\leq_F$ u $\mathfrak{A}/F$ važi:

(54) $/a/ \leq_F /b/$ ako i samo ako $a \to b \in F$.

<u>3.39.5</u> Ako je F specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$, onda je $\mathfrak{A}/F$ degenerisana algebra ako i samo ako F nije pravi implikativni filtar (tj. ako i samo ako $A = F$).

<u>3.39.6</u> Ako je F specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$, onda je preslikavanje $h_F: A \to A/F$, definisano sa $h_F(a) = /a/ = \{b \in A : b \underset{F}{\sim} a\}$, (kanonski)epimorfizam $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}/F$ i jezgro $K(h_F)$ tog epimorfizma je specijalan implikativan filtar koji se poklapa sa F: $K(h_F) = F$, tj. svaki specijalan implikativan filtar jezgro je kanonskog epimorfizma kongruencije određene tim implikativnim filtrom.

<u>Dokaz:</u> <u>3.39.1</u> Neka je F specijalan implikativan filtar u implikativnoj algebri i neka je $\underset{F}{\sim}$ definisana sa (51). $\underset{F}{\sim}$ je refleksivna relacija, jer je $a \to a = 1 \in F$ (po (i_1) i (f_1)). Simetričnost sledi neposredno iz (51). Tranzitivnost: $a \underset{F}{\sim} b$ i $b \underset{F}{\sim} c$ znače $a \to b \in F$, $b \to a \in F$, $b \to c \in F$ i $c \to b \in F$, odakle se, dvostrukom primenom (f_4), dobija $a \to c \in F$ i $c \to a \in F$, tj. $a \underset{F}{\sim} c$. Time je dokazano da je $\underset{F}{\sim}$ relacija ekvivalencije.

Neka je $a \underset{F}{\sim} b$ i $c \underset{F}{\sim} d$, tj. $a \to b \in F$, $b \to a \in F$, $c \to d \in F$ i $d \to c \in F$. Tada, po (f_5), iz $b \to a \in F$ i $c \to d \in F$ sledi $(a \to c) \to (b \to d) \in F$. Simetrično, iz

$a \to b \in F$ i $d \to c \in F$ izlazi $(b \to d) \to (a \to c) \in F$. Otuda, $a \to c \sim_F b \to d$. Prema tome, $\sim_F$ je kongruencija u $\mathfrak{A}$.

3.39.2 Neka je F specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$ i neka je $\sim_F$ relacija na A definisana sa (51). Ako je $a \sim_F 1$, onda je $1 \to a \in F$, što zbog $1 \in F$ i (f_2) daje $a \in F$, Obratno, ako je $a \in F$, tada je, po (f_3), $1 \to a \in F$ i, kako je uvek $a \to 1 = 1 \in F$ ((i_4) i (f_1)), imamo $a \sim_F 1$.

3.39.3 Neka je F specijalan implikativan filtar u implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$. Dokaz da količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ zadovoljava jednakosti (i_1) i (i_4) trivijalan je i zasniva se na (48), tj. na činjenici da operacija / / komutira sa $\to$. Dokaz (i_2):

$/a/ \to_F /b/ = 1_F$ i $/b/ \to_F /c/ = 1_F$
ako i samo ako $/a \to b/ = /1/$ i $/b \to c/ = /1/$
ako i samo ako $a \to b \sim_F 1$ i $b \to c \sim_F 1$
ako i samo ako $a \to b \in F$ i $b \to c \in F$
samo ako $a \to c \in F$
ako i samo ako $a \to c \sim_F 1$
ako i samo ako $/a \to c/ = /1/$
ako i samo ako $/a/ \to_F /c/ = 1_F$,

zbog (48), (41), (53) i (f_4).

Dokaz (i_3): $/a/ \to_F /b/ = 1_F$ i $/b/ \to_F /a/ = 1_F$
ako i samo ako $/a \to b/ = /1/$ i $/b \to a/ = /1/$
ako i samo ako $a \to b \sim_F 1$ i $b \to a \sim_F 1$
ako i samo ako $a \to b \in F$ i $b \to a \in F$
ako i samo ako $a \sim_F b$
ako i samo ako $/a/ = /b/$,

zbog (48), (41), (53) i (51).

(STP_0) i (STS_0) posledice su sledećeg:

$/b/ \to_F /a/ = 1_F$ i $/c/ \to_F /d/ = 1_F$
ako i samo ako $/b \to a/ = /1/$ i $/c \to d/ = /1/$
ako i samo ako $b \to a \sim_F 1$ i $c \to d \sim_F 1$
ako i samo ako $b \to a \in F$ i $c \to d \in F$
samo ako $(a \to c) \to (b \to d) \in F$
ako i samo ako $/(a \to c) \to (b \to d)/ = /1/$
ako i samo ako $(/a/ \to /c/) \to (/b/ \to /d/) = 1_F$,

zbog (48), (41), (53) i (f_5). Odatle se, za $/a/ = /b/$, dobija (STP_0), a za $/c/ = /d/$, (STS_0).

3.39.4 Neka je F specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$. Tada je, prema prethodnom, $\mathfrak{A}/F$ implikativna algebra. Otuda

$/a/ \leq_F /b/$ ako i samo ako $/a/ \to_F /b/ = 1_F$

ako i samo ako $/a \to b/ = /1/$

ako i samo ako $a \to b \underset{F}{\sim} 1$

ako i samo ako $a \to b \in F$,

zbog 1(1), (48), (41) i (53).

3.39.5 Neka je F specijalan implikativan filtar u implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$. Pretpostavimo da je A/F jednočlan skup. Tada je, za svako $a \in A$, $/a/ = /1/$ ili, ekvivalentno, $a \underset{F}{\sim} 1$, odnosno $a \in F$, zbog (41) i (53). Znači, $A = F$, tj. F je nepravi implikativni filtar. Obratno, ako je F nepravi implikativni filtar, tj. $F = A$, onda je, za svako $a \in A$, $1 \to a \in F$ i $a \to 1 \in F$, dakle $a \underset{F}{\sim} 1$ ili $/a/ = /1/$ (po (51) i (41)), a to znači da A/F ima samo ledan element.

3.39.6 Ako je F specijalan implikativan filtar u implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$, onda je, prema 3.39.3, $\mathfrak{A}/F$ implikativna algebra u kojoj važe (STP_o) i (STS_o). Prema Th.3.36, h_F je epimorfizam $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}/F$, a prema Th.3.38, jezgro $K(h_F)$ tog kanonskog epimorfizma h_F je specijalan implikativan filtar. Dokažimo $K(h_F) = F$: $a \in K(h_F)$ ako i samo ako $/a/ = /1/$

ako i samo ako $a \underset{F}{\sim} 1$

ako i samo ako $a \in F$,

po Def.3.10, (41) i (53), q.e.d.

U ω deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), može se uspostaviti obostrano jednoznačna korespondencija između kongruencija te algebre i njenih implikativnih filtara. **To je implicitno sadržano u prethodnim stavovima.**

Teorema 3.40 Neka je $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP). Ako je F implikativan filtar u toj algebri, relacija $\underset{F}{\sim}$ na A određena implikativnim filtrom F je kongruencija u $\mathfrak{A}$. Jezgro $K_{\underset{F}{\sim}}$ kongruencije $\underset{F}{\sim}$ je specijalan implikativan filtar koji se poklapa sa F: $K_{\underset{F}{\sim}} = F$. Recipročno, ako je $\sim$ bilo koja kongruencija u $\mathfrak{A}$, tada je $K_\sim$, jezgro kongruencije $\sim$, specijalan implikativan filtar i $\sim$ je kongruencija u $\mathfrak{A}$ određena implikativnim filtrom $K_\sim$, tj. $\sim = \underset{K_\sim}{\sim}$.

Dokaz: Neka je $\mathfrak{A}$ ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP). Prema Th.3.5 i Th.1.15 (kao i Kor.1.17 i lemama 1.4, 1.8 i 1.9) svi su implikativni filtri u $\mathfrak{A}$ specijalni implikativni filtri. Otuda je, po Th.3.39.1, relacija $\underset{F}{\sim}$ kongruencija u $\mathfrak{A}$. Po Th.3.39.2, važi $K_{\underset{F}{\sim}} = F$. Ako je $\sim$ kongruencija u $\mathfrak{A}$, tada je, prema Lemi 3.35, $K_\sim$ specijalan implikativan filtar (jer su svi implikativni filtri u $\mathfrak{A}$ specijalni).

Dokažimo $\sim = \sim_{K_\sim}$. Najpre, $a \sim b$ povlači $a \underset{K_\sim}{\sim} b$: iz $a \sim b$ sledi $a \to b \sim a \to a = 1$ i $b \to a \sim a \to a = 1$, tj. $a \to b \in K_\sim$ i $b \to a \in K_\sim$. Obratno, ako je $a \underset{K_\sim}{\sim} b$, tj. $a \to b \in K_\sim$ i $b \to a \in K_\sim$, odnosno $a \to b \sim 1$ i $b \to a \sim 1$, onda je $a = 1 \to (1 \to a) \sim (b \to a) \to ((a \to b) \to a) = (a \to b) \to ((b \to a) \to b) \sim 1 \to (1 \to b) = b$, dakle $a \sim b$, zbog 1.6.5, 1.15.6 i osobina kongruencije, q.e.d.

Sledeća teorema daje semantičku karakterizaciju pripadnosti implikativnom filtru generisanom nekim skupom elemenata u ω deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP).

Teorema 3.41 U ω deduktivnoj implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ u kojoj važi (SP), element $a \in A$ pripada implikativnom filtru $F(A_0)$ generisanom skupom $A_0 \subseteq A$ ako i samo ako, za svaki homomorfizam h iz $\mathfrak{A}$ u ω deduktivnu implikativnu algebru $\mathfrak{B} = (B, 1', \to')$ u kojoj važi (SP), vredi

(55) za svako $c \in A_0$, $h(c) = 1'$ povlači $h(a) = 1'$.

Dokaz: Prema Th.3.5 i Th.1.15 (kao i Kor.1.17 i lemama 1.4, 1.8 i 1.9), svi implikativni filtri u ω deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP) su specijalni implikativni filtri. Prema Th.3.39, relacija $\underset{F(A_0)}{\sim}$ određena specijalnim implikativnim filtrom $F(A_0)$ je kongruencija u $\mathfrak{A}$ i jezgro $K(h_{F(A_0)})$ kanonskog epimorfizma $h_{F(A_0)}$ algebre $\mathfrak{A}$ na količničku algebru $\mathfrak{A}/F(A_0)$ (koja je takođe ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP)) poklapa se sa $F(A_0)$: $K(h_{F(A_0)}) = F(A_0)$. Otuda je, za svako $c \in A_0$, $c \in K(h_{F(A_0)})$, što, po definiciji znači, za svako $c \in A_0$, $h_{F(A_0)}(c) = /1/$, a ovo, prema (55), povlači $h_{F(A_0)}(a) = /1/$, tj. $a \in K(h_{F(A_0)}) = F(A_0)$.

Obratno, prema Th.3.16, u ω deduktivnoj implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$ u kojoj važi (SP), element a pripada implikativnom filtru $F(A_0)$ generisanom skupom $A_0 \subseteq A$ ako i samo ako

(56) Postoje $c_1, \dots, c_n \in A_0$ takvi da $c_1 \to (\dots \to (c_n \to a)\dots) = 1$.

Ako je h homomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u istu takvu algebru $\mathfrak{B}$ i ako je, za sve $c \in A_0$, $h(c) = 1'$, onda je posebno $h(c_1) = 1', \dots, h(c_n) = 1'$, što, sa posledicom (56): $h(c_1) \to' (\dots \to' (h(c_n) \to' h(a))\dots) = 1'$, višestrukom primenom 1.1.1, daje $h(a) = 1'$, q.e.d.

Stavovi do kraja odeljka razmatraju implikativne filtre u kontekstu ograničenih odnosno pseudokomplementiranih deduktivnih implikativnih algebri i daju nekoliko novih karakterizacija pravih i maksimalnih implikativnih filtara u terminima pseudokomplementa. Ispostavlja se da stavovi o filtrima u pseudo-Booleovim algebrama ostaju na snazi i za implikativne filtre u ω deduktivnim implikativnim algebrama sa pseudokomplementacijom.

Lema 3.42 U ω deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, \neg)$, implikativni filtar $F' = F(\{a\} \cup F_0) = F(a) \vee F_0$ generisan implikativnim filtrom F_0 i elementom a je pravi ako i samo ako $\neg a \notin F_0$.

Dokaz: Ako je $\neg a \in F_0$, onda je $\neg a \in F'$ i, otuda, zbog $a \in F'$ i $\neg a \rightarrow (a \rightarrow 0) = 1 \in F'$ (2.4.12 i (f_1)), dvostrukom primenom (f_2), izlazi $0 \in F'$, tj. F' nije pravi implikativni filtar.

Obratno, ako je F' nepravi implikativni filtar, tada je $0 \in F'$ i, prema (9)(Th.3.15), $\neg a = a \rightarrow 0 \in F_0$, q.e.d.

U 1-deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom, važi mnogo restriktivniji analogon prethodnog stava.

Lema 3.43 U 1-deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, \neg)$, implikativni filtar $F' = F(\{a\} \cup F(c)) = F(a) \vee F(c)$ generisan glavnim implikativnim filtrom $F(c)$ i elementom a je pravi ako i samo ako $\neg a \notin F(c)$.

Dokaz je praktično isti kao dokaz prethodne leme, pri čemu se koristi (8)(Th.3.14) umesto (9)(Th.3.15).

Teorema 3.44 U ω deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, \neg)$, implikativan filtar F je maksimalan ako i samo ako važi

(57) F je pravi implikativni filtar i, za svako $a \in A$, $a \in F$ ili $\neg a \in F$.

Primedba: (57) predstavlja dovoljan uslov da F bude maksimalan implikativan filtar već u pseudokomplementiranoj implikativnoj algebri (zbog $\neg a \rightarrow (a \rightarrow 0) = (a \rightarrow 0) \rightarrow (a \rightarrow 0) = 1$).

Dokaz: Pretpostavimo da je, za implikativan filtar F, ispunjeno (57) i da je F pravi podskup implikativnog filtra F', tj. da postoji element $a \in F'$ takav da $a \notin F$. Otuda je $\neg a \in F$, odnosno $\neg a \in F'$, odakle se zbog $\neg a \rightarrow (a \rightarrow 0) = 1 \in F'$ ((f_1) i 2.4.12), dvostrukom primenom (f_2), dobija $0 \in F'$, tj. F' nije pravi implikativni filtar. Dakle, F je maksimalan implikativan filtar.

Obratno, neka je F maksimalan implikativan filtar. To najpre znači da je F pravi implikativni filtar. Ako nije $a \in F$, onda je F pravi podskup implikativnog filtra F' generisanog implikativnim filtrom F i elementom a. Pošto je F maksimalan, F' je nepravi i, po Lemi 3.42, $\neg a \in F$, q.e.d.

Th.3.45 je analogon prethodne teoreme u 1-deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom.

<u>Teorema 3.45</u> U 1-deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom, glavni implikativni filtar $F(c)$ je maksimalan ako i samo ako važi

(58) $c \neq 0$ i, za svako $a \in A$, $a \in F(c)$ ili $\neg a \in F(c)$.

<u>Korolar 3.46</u> U ω deduktivnoj (1-deduktivnoj) implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, \neg)$ sa pseudokomplementacijom, implikativan filtar F (glavni implikativni filtar $F(c)$) je maksimalan ako i samo ako, za svaki element a te algebre, F ($F(c)$) sadrži tačno jedan od elemenata a, $\neg a$, tj.

(59) za svako $a \in A$, samo jedan od elemenata a, $\neg a$ je u F (odnosno $F(c)$).

<u>Dokaz</u>: Nijedan pravi implikativni filtar F u 1-deduktivnoj (a fortiori u ω deduktivnoj) implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom ne može sadržati oba elementa a i $\neg a$, jer bi, u protivnom, F sadržao 0, zbog $\neg a \rightarrow (a \rightarrow 0) = 1 \in F$ i (f_2). Znači, (59) je posledica (57). Obratno je očigledno.

<u>Lema 3.47</u> Ako je, u implikativnoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$, F specijalan implikativan filtar i F' implikativan filtar i $F \subseteq F'$, tada je skup F'' svih $/a/ \in A/F$ takvih da je $a \in F'$ implikativan filtar u $\mathfrak{A}/F$.

<u>Dokaz</u>: Najpre, ako je F specijalan implikativan filtar u implikativnoj algebri $\mathfrak{A}$, onda je, prema Th.3.39.3, $\mathfrak{A}/F$ implikativna algebra u kojoj važe (STP_0) i (STS_0). $/1/ \in F''$ jer je $1 \in F'$. Ako je $/a/ \in F''$ i $/a/ \rightarrow_F /b/ = /a \rightarrow b/ \in F''$, onda je $a \in F'$ i $a \rightarrow b \in F'$, odakle je $b \in F'$, tj. $/b/ \in F''$.

<u>Teorema 3.48</u> U ω deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, \neg)$, implikativan filtar F je maksimalan onda i samo onda ako količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ ima samo dva elementa.

<u>Dokaz</u>: Neka je F maksimalan implikativan filtar u ω deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom. Prema Korolaru 3.46, za svaki element $a \in A$, je $a \in F$ ili $\neg a \in F$ i samo se jedna od tih mogućnosti ostvaruje. Prema (53)(3.39.2), (41), 3.39.3, Th.3.9 (kao i 1.15.3, 1.15.4, Kor.1.17 i Def.2.2), to znači ili $/a/ = /1/$ ili $/\neg a/ = /a \rightarrow 0/ = /a/ \rightarrow_F /0/ = \neg/a/ = /1/$, tj. ili $/a/ = /1/$ ili $/a/ = /0/$ i pri tom je $/1/ \neq /0/$, jer je implikativni filtar F pravi (3.39.5). Prema tome, algebra $\mathfrak{A}/F$ je dvoelementna.

Obratno, neka količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ ima samo dva elemenata. Pretpostavimo da je F' implikativan filtar u $\mathfrak{A}$, $F \subseteq F'$ i $F \neq F'$. Skup F'' elemenata $/a/ \in A/F$ takvih da je $a \in F'$ predstavlja implikativan filtar u $\mathfrak{A}/F$ (Lema 3.47). Pošto je $F \neq F'$, postoji element $a \in F'$ takav da $a \notin F$, a to, prema (53) i (41), znači $/a/ \neq /1/$ i $/a/ \in F''$, tj. F'' sadrži element različit od $/1/$. Pošto A/F ima samo dva elementa i $F'' \subseteq A/F$, mora biti $/0/ \in F''$, tj. $/a/ = /0/$. Otuda je, prema (41) i (51), $a \to 0 \in F$, odnosno $a \to 0 \in F'$ i, zbog $a \in F'$, imamo $0 \in F'$. Ovo implicira da F' nije pravi implikativni filtar. Dakle, F je maksimalan implikativan filtar, q.e.d.

Navedimo još jednu primenu Leme 3.47.

Teorema 3.49 Neka je $h: A \to B$ epimorfizam implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ na implikativnu algebru $\mathcal{B} = (B, 1', \to')$ u kojoj važe (STP_0) i (STS_0), a $g: A \to C$ homomorfizam $\mathfrak{A}$ u implikativnu algebru $\mathcal{L} = (C, 1'', \to'')$ u kojoj važe (STP_0) i (STS_0). Tada je $K(h) \subseteq K(g)$ ekvivalentno egzistenciji homomorfizma $f: B \to C$ iz $\mathcal{B}$ u $\mathcal{L}$ takvog da je $f \circ h = g$. Štaviše, takav je homomorfizam f jedinstven. Uz to, f je epimorfizam, ako je g epimorfizam i f je monomorfizam ako i samo ako $K(h) = K(g)$.

Dokaz: Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi teoreme. Tada su, prema Th.3.38, $K(h)$ i $K(g)$ specijalni implikativni filtri u $\mathfrak{A}$, količnička algebra $\mathfrak{A}/K(h) = (A/K(h), 1_{K(h)}, \to_{K(h)})$ izomorfna je sa $\mathcal{B}$ (preslikavanje $\varphi: A/K(h) \to B$, $\varphi(/a/_{K(h)}) = h(a)$, je jedan izomorfizam $\mathfrak{A}/K(h)$ na $\mathcal{B}$), dok je količnička algebra $\mathfrak{A}/K(g) = (A/K(g), 1_{K(g)}, \to_{K(g)})$ izomorfna je sa g-slikom algebre $\mathfrak{A}$: $g(\mathfrak{A}) = (g(A), 1'', \to''_g)$ (koja je podalgebra algebre $\mathcal{L}$; preslikavanje $\psi: A/K(g) \to g(A)$, $\psi(/a/_{K(g)}) = g(a)$, je jedan izomorfizam $\mathfrak{A}/K(g)$ na $g(\mathfrak{A})$). Ako je, uz to, $K(h) \subseteq K(g)$, onda, po Lemi 3.47, skup F'' svih $/a/_{K(h)} \in A/K(h)$ takvih da je $a \in K(g)$ predstavlja specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}/K(h)$ ((f_3), (f_4) i (f_5) dokazuju se analogno kao (f_1) i (f_2)). Prema Th.3.39.3, količnička algebra $(\mathfrak{A}/K(h))/F''$ je implikativna algebra u kojoj važe (STP_0) i (STS_0) i izomorfna je sa $\mathfrak{A}/K(g)$. Preslikavanje $\chi: A/K(g) \to (A/K(h))/F''$, $\chi(/a/_{K(g)}) = //a/_{K(h)}/_{F''}$, je jedan izomorfizam $\mathfrak{A}/K(g)$ na $(\mathfrak{A}/K(h))/F''$:

$\chi(/a/_{K(g)}) = \chi(/b/_{K(g)})$ ako i samo ako $//a/_{K(h)}/_{F''} = //b/_{K(h)}/_{F''}$

ako i samo ako $/a/_{K(h)} \equiv_{F''} /b/_{K(h)}$

ako i samo ako $/a/_{K(h)} \to /b/_{K(h)} \in F''$ i $/b/_{K(h)} \to /a/_{K(h)} \in F''$

ako i samo ako $/a \to b/_{K(h)} \in F''$ i $/b \to a/_{K(h)} \in F''$

ako i samo ako $a \to b \in K(g)$ i $b \to a \in K(g)$

ako i samo ako $a \underset{K(g)}{\frown} b$

ako i samo ako $/a/_{K(g)} = /b/_{K(g)}$,

zbog (41), (51), (48) i definicije F''. Prema tome, za f se može uzeti preslikavanje $f = \psi \circ \chi^{-1} \circ h_{F''} \circ \varphi^{-1}$, gde je $h_{F''}$ prirodni homomorfizam $\mathfrak{A}/K(h)$ na $(\mathfrak{A}/K(h))/F''$.

Obratno, neka je $f \circ h = g$, za neki homomorfizam $f: B \to C$ iz $\mathcal{L}$ u $\mathcal{L}$. Prema Th.3.38, K(f) je specijalan implikativan filtar u $\mathcal{L}$. Iz $\{1'\} \subseteq K(f)$ sledi $K(h) = h^{-1}(\{1'\}) \subseteq h^{-1}(K(f)) = h^{-1}(f^{-1}(\{1''\})) = (f \circ h)^{-1}(\{1''\}) = g^{-1}(\{1''\}) = K(g)$.

Što se tiče jedinstvenosti homomorfizma f, ako je $f_1 \circ h = g$ i $f_2 \circ h = g$, tj. $f_1 \circ h = f_2 \circ h$, onda je $f_1 = f_2$, jer je h preslikavanje na.

Ako je g epimorfizam, jasno je da i f mora biti epimorfizam. Ako je f monomorfizam, onda je $K(f) = \{1'\}$ i otuda, prema gornjem, $K(h) = K(g)$. Obratno, ako je $K(h) = K(g)$, onda važi ovaj lanac izomorfizama: $\mathcal{L} \approx \mathfrak{A}/K(h) = \mathfrak{A}/K(g) \approx g(\mathfrak{A})$ i otuda je f monomorfizam $\mathcal{L}$ u $\mathcal{L}$, q.e.d.

Prema poznatom Birkhoffovom rezultatu iz 1944.g., svaka se algebra može predstaviti kao poddirektan proizvod poddirektno nerastavljivih algebri. Diego (vide /23/) je našao tri takve dekompozicije za Hilbertove algebre (ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP)). Ispostavlja se - Th.3.51 - da dve od te tri dekompozicije važe i u opštijem slučaju.

Dve definicije i neke činjenice s njima u vezi koje slede posebni su slučajevi, u kontekstu implikativnih algebri, poznatih definicija i stavova iz univerzalne algebre.

<u>Definicija 3.12</u> Neka je $(\mathfrak{A}_j \mid j \in J) = ((A_j, 1_j, \to_j) \mid j \in J)$ familija (indeksirani skup) implikativnih algebri. <u>Direktan proizvod familije</u> $(\mathfrak{A}_j \mid j \in J)$ <u>implikativnih algebri</u>, kraće: $\prod(\mathfrak{A}_j \mid j \in J)$, je algebra $(\prod(A_j \mid j \in J), 1, \to)$, gde je $\prod(A_j \mid j \in J)$ Descartesov proizvod familije skupova $(A_j \mid j \in J)$,

(60) $1 = (1_j \mid j \in J)$,

a operacija $\to$ definisana je koordinatno:

(61) $(a_j \mid j \in J) \to (b_j \mid j \in J) = (a_j \to_j b_j \mid j \in J)$.

Inače, direktan proizvod familije implikativnih algebri (slabo deduktivnih, 1-deduktivnih, ω deduktivnih implikativnih algebri) opet je algebra iz iste klase, jer su kvazivarijeteti (dakle algebre definisane jednakostima i/ili hornovskim formulama) zatvorene za direktne proizvode.

Pored toga, jasno je da su projekcije, tj. funkcije $p_i^J\colon \prod(A_j \mid j \in J) \to A_i$, definisane jednakošću $p_i^J((a_j \mid j \in J)) = a_i$, epimorfizmi implikativne algebre $\prod(\mathfrak{A}_j \mid j \in J)$ na implikativnu algebru $\mathfrak{A}_i$.

<u>Definicija 3.13</u> Neka je $(\mathfrak{A}_j \mid j \in J)$ familija implikativnih algebri i neka je $A \subseteq \prod(A_j \mid j \in J)$, pri čemu je $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ podalgebra direktnog proizvoda $\prod(\mathfrak{A}_j \mid j \in J)$. $\mathfrak{A}$ je <u>poddirektan proizvod implikativnih algebri</u> $\mathfrak{A}_j$ $(j \in J)$, ako i samo ako je $p_i^J(A) = A_i$, za sve i iz J, gde je p_i^J i-ta projekcija(koja se zove i <u>i-ti morfizam dekompozicije</u>). Poslednji uslov ekvivalentan je zahtevu da, za svako $a \in A_i$, postoji element $f \in A$ takav da je $f(i) = a$.

Implikativna algebra je <u>poddirektno predstavljiva</u> ako i samo ako je izomorfna poddirektnom proizvodu nekih implikativnih algebri; taj poddirektan proizvod zove se <u>poddirektna dekompozicija</u> (rastav) te algebre. Implikativna algebra je <u>poddirektno rastavljiva</u> (reducibilna, dekomponabilna) ako i samo ako je poddirektno predstavljiva, pri čemu nijedan od morfizama dekompozicije nije izomorfizam. U protivnom, kaže se da je implikativna algebra <u>poddirektno nerastavljiva</u> (ireducibilna, indekomponabilna).

<u>Lema 3.50</u> Neka je $\mathfrak{B} = (B, 1', \to')$ implikativna algebra i neka su $h_j\colon B \to A_j$ $(j \in J)$ epimorfizmi implikativne algebre $\mathfrak{B}$ na implikativne algebre $\mathfrak{A}_j = (A_j, 1_j, \to_j)$ u kojima važe (STP_0) i (STS_0). Preslikavanje $h\colon B \to \prod(A_j \mid j \in J)$, definisano, za svako b iz B, jednakošću:

(62) $h(b) = (h_j(b) \mid j \in J)$,

je homomorfizam implikativne algebre $\mathfrak{B}$ u direktan proizvod $\prod(\mathfrak{A}_j \mid j \in J)$ koji je implikativna algebra u kojoj važe (STP_0) i (STS_0). Štaviše, h-homomorfna slika algebre $\mathfrak{B}$ je poddirektan proizvod. Za jezgro $K(h)$ homomorfizma h vredi

(63) $K(h) = \bigcap\{K(h_j) \mid j \in J\}$.

Otuda, prema Th.3.34.3, h je monomorfizam ako i samo ako je

(64) $\bigcap\{K(h_j) \mid j \in J\} = \{1'\}$.

<u>Dokaz</u> je trivijalan i izostavljen je.

<u>Teorema 3.51</u> Implikativna algebra $\mathfrak{A}$ u kojoj važe zakon afirmacije konsekventa (AC) i oba zakona jake tranzitivnosti (JTP) i (JTS) izomorfna je poddirektnom proizvodu algebri $\mathfrak{A}/F_j$ $(j \in J)$, gde je $\{F_j \mid j \in J\}$ skup svih potpuno ireducibilnih implikativnih filtara ili skup svih ireducibilnih implikativnih filtara u $\mathfrak{A}$.

Dokaz: Prema Th.3.5, svaki implikativan filtar implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ u kojoj važe (AC), (JTP) i (JTS) je specijalan implikativan filtar. Neka je $\{F_j \mid j \in J\}$ skup svih potpuno ireducibilnih implikativnih filtara u $\mathfrak{A}$. (Slično se dokazuje kad su F_j ireducibilni implikativni filtri.) Tada su, po Th.3.39, količničke algebre $\mathfrak{A}/F_j = (A/F_j, 1_{F_j}, \rightarrow_{F_j})$ nedegenerisane implikativne algebre u kojima važe (AC), (JTP) i (JTS) (dokaz da ove jednakosti važe i u količničkim algebrama trivijalan je) i za jezgra $K(h_{F_j})$ prirodnih epimorfizama $h_{F_j}: A \rightarrow A/F_j$ implikativne algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}/F_j$ vredi $K(h_{F_j}) = F_j$. No, zbog Th.3.33 i Leme 3.27, imamo $\bigcap\{F_j \mid j \in J\} = \bigcap\{K(h_{F_j}) \mid j \in J\} = \{1\}$. Otuda, teorema je posledica Leme 3.50.

4. Teoreme reprezentacije

Cilj je ovog odeljka dokaz teorema reprezentacije za 1-deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP), 1-deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom i 1-deduktivne implikativne algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom. Odgovarajuće teoreme reprezentacije za ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP) (alias pozitivne implikacijske algebre - upor. Th.1.20), ω deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom (alias pseudokomplementirane pozitivne implikacijske algebre - upor. primedbu posle formulacije Th.2.11) i ω deduktivne implikativne algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom (alias kontrapozicionalno komplementirane pozitivne implikacijske algebre - vide Th.2.20) poznate su od ranije (vide Diego /23/, Rasiowa /76/).

Teorema 4.1 (Teorema reprezentacije za 1-deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP)) Za svaku 1-deduktivnu implikativnu algebru $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ u kojoj važi (SP), postoji monomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u 1-deduktivnu implikativnu algebru skupova $(S(X), X, \rightarrow)$ u kojoj važi (SP) (upor. Th.1.25). Otuda, svaka 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP) izomorfna je 1-deduktivnoj implikativnoj algebri skupova u kojoj važi (SP).

Dokaz: Neka je X klasa svih ireducibilnih implikativnih filtara u $\mathfrak{A}$ i neka je preslikavanje $h: A \rightarrow P(X)$ ($P(X)$ je partitivni skup skupa X) definisano na sledeći način:

(1) $h(a) = \{F \in X : a \in F\}$ $(a \in A)$.

(Ako A ima najmanji element 0, onda je, očigledno, $h(0) = \emptyset$.) Dalje, neka je I_0 semi-interior operacija na skupu X generisana klasom $K = \{h(c) : c \in A\}$ i neka je $S(X)$ klasa invarijanata operatora I_0. Dokažimo da je

(2) $a \leq b$ ako i samo ako $h(a) \subseteq h(b)$.

Ako je $a \leq b$ i $F \in h(a)$, odnosno, zbog (1), $a \in F$, onda je $a \rightarrow b = 1 \in F$, odakle se, po (f_2), dobija $b \in F$, što znači $F \in h(b)$. Otuda, $a \leq b$ povlači $h(a) \subseteq h(b)$. Obratno, ako nije $a \leq b$, onda, po Lemi 3.23, postoji u $\mathfrak{A}$ ireducibilan implikativan filtar F takav da je $a \in F$ i $b \notin F$, tj. $F \in h(a)$ i $F \notin h(b)$, tako da ne može biti $h(a) \subseteq h(b)$.

Ako je $a \neq b$, tada nije $a \leq b$ ili nije $b \leq a$ i, prema (2), jedna od inkluzija $h(a) \subseteq h(b)$, $h(b) \subseteq h(a)$ ne važi, tj. $h(a) \neq h(b)$. Sledstveno, h je injekcija.

Pošto je, po (f_1), $1 \in F$, za svako F iz X, prema (1) izlazi da svako F iz X pripada h(1).

(3) $h(1) = X$.

Treba još dokazati da h čuva implikaciju:

(4) $h(a \to b) = I_0((X \setminus h(a)) \cup h(b)) = h(a) \to h(b)$.

Po definiciji semi-interior operacije I_0, $h(a \to b)$ je invarijanta operatora I_0. Dokažimo najpre:

(5) $h(a \to b) \subseteq (X \setminus h(a)) \cup h(b)$,

što je, prema (si_3), ekvivalentno sa

(6) $h(a \to b) \subseteq I_0((X \setminus h(a)) \cup h(b))$.

Neka je $F \in h(a \to b)$, tj. $a \to b \in F$. Ako je $a \in F$, onda je, po (f_2), $b \in F$, odnosno $F \in h(b)$. Ako je $a \notin F$, onda je $F \notin h(a)$, odnosno $F \in X \setminus h(a)$. Prema tome, $F \in (X \setminus h(a)) \cup h(b)$.

Da bismo dokazali (4), dovoljno je još dokazati da je $h(a \to b)$ najveća invarijanta operatora I_0 koja zadovoljava uslov (5). Pošto je semi-interior operacija I_0 generisana klasom $K = \{h(c) : c \in A\}$, što znači da je svaka invarijanta operatora I_0 unija nekih elemenata iz K, dovoljno je dokazati:

(7) $h(c) \subseteq (X \setminus h(a)) \cup h(b)$ povlači $h(c) \subseteq h(a \to b)$.

Dokazaćemo kontrapoziciju od (7). Uzmimo da je $h(c) \not\subseteq h(a \to b)$. To znači da postoji ireducibilan implikativan filtar F takav da je $F \in h(c)$ i $F \notin h(a \to b)$, tj. $c \in F$ i $a \to b \notin F$. Neka je $F(c)$ glavni implikativni filtar generisan elementom c. Očigledno, $F(c) \subseteq F$ i otuda je $F(c)$ pravi implikativni filtar. Prema Th.3.14, skup $F_1 = \{x \in A : a \to x \in F(c)\}$ je najmanji implikativni filtar koji sadrži skup $F(c) \cup \{a\}$, to jest $F_1 = F(F(c) \cup \{a\})$, odakle je $a \in F_1$ i $c \in F_1$. Zbog $a \to b \notin F(c)$, imamo $b \notin F_1$. Po Lemi 3.27, postoji ireducibilan implikativan filtar F^* takav da je $F_1 \subseteq F^*$ i $b \notin F^*$. Kako je $a \in F^*$, $c \in F^*$ i $b \notin F^*$, vredi $F^* \in h(a)$, $F^* \in h(c)$ i $F^* \notin h(b)$, tj. $h(a) \cap h(c) \not\subseteq h(b)$, što je ekvivalentno sa $h(c) \not\subseteq (X \setminus h(a)) \cup h(b)$.

<u>Korolar 4.2</u> (<u>Teorema reprezentacije za 1-deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom</u>) Za svaku 1-deduktivnu implikativnu algebru $\mathfrak{A} = (A, 1, \to, \neg)$ sa pseudokomplementacijom, postoji monomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u skupovnu 1-deduktivnu algebru sa pseudokomplementacijom $(S(X), X, \to, \neg)$ (upor. Th. 4.12). Otuda, svaka 1-deduktivna implikativna algebra sa pseudokomplementacijom izomorfna je skupovnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri sa pseudokomplementacijom.

<u>Dokaz</u>: Ovo je posledica Th.?.10 i prethodne teoreme.

<u>Korolar 4.3</u> (<u>Teorema reprezentacije za 1-deduktivne implikativne algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom</u>) Za sva-

ku 1-deduktivnu implikativnu algebru s kontrapozicionalnom komplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \to, -_c)$, postoji monomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u skupovnu 1-deduktivnu implikativnu algebru s kontrapozicionalnom komplementacijom $(S(X), X, \to, -_c)$ (upor. Th.2.15). Otuda je svaka 1-deduktivna implikativna algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom izomorfna skupovnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom.

Dokaz: Ovo sledi iz Th.2.14 i Th.4.1.

II POGLAVLJE

STRIKTNE DEDUKTIVNE IMPLIKATIVNE ALGEBRE

0. Sinopsis Hijerarhija striktnih deduktivnih implikativnih algebri u mnogome je bogatija od njoj paralelne hijerarhije (nestriktnih) deduktivnih implikativnih algebri, jer se u prvoj čuvaju neke distinkcije koje ne postoje u drugoj. I ovde, prisutnost svakog od tri striktna slaba zakona permutacije antecedenata ((SSP), (SSP′) i (SSP")) dovodi do redukcije hijerarhije na četiri predstavnika. To su 1-deduktivne i ω deduktivne S3 i S4 implikacijske algebre. 1-deduktivne (ω deduktivne) S5 implikacijske algebre su 1-deduktivne (ω deduktivne) S4 implikacijske algebre u kojima važi striktan Peirceov zakon (P′). ω deduktivne S4 i S5 implikacijske algebre karakterišu implikativne fragmente Lewisovih modalnih sistema S4 i S5 (u Hackingovoj prezentaciji, kada se modalnosti definišu pomoću striktne implikacije), dok su 1-deduktivne S4 i S5 implikacijske algebre Tarski-Lindenbaumove algebre novih implikativnih računa. 1-deduktivne i ω deduktivne S4 i S5 implikacijske algebre imaju zanimljive skupovne realizacije (stavovi 1.25 do 1.29) od kojih su dve poznate od ranije. Analogna prosta skupovna interpretacija (1-deduktivnih) ω deduktivnih S3 implikacijskih algebri (koje su Tarski-Lindenbaumove algebre implikativnih fragmenata računa nešto slabijeg od S3) nije moguća, ako je (semi) interior operacija, kao topološki analogon modalnog operatora "nužno je da", izraziva pomoću analogona striktne implikacije u toj interpretaciji (jer, kao što je poznato, u Lewisovom sistemu S3, takvo izražavanje nije moguće). Prvi odeljak završava se delimičnim razjašnjavanjem međusobnog odnosa nekoliko najvažnijih zakona striktnih deduktivnih implikativnih algebri. Glavna je posledica ovih razmatranja da svaki od zakona jake tranzitivnosti (JTP) odnosno (JTS), zajedno s ostalim aksiomama 1-deduktivne S3 implikacijske algebre, implicira Fregeov zakon (F) (i time čitavu teoriju ω deduktivnih S3 implikacijskih algebri). Ovaj odeljak sadrži i jedan markantno netopološki primer S4 implikacijske algebre (Primer 1.3).

Drugi odeljak posvećen je striktnim deduktivnim implikativnim algebrama sa pseudokomplementacijom odn. kontrapozicionalnom komplementacijom koje su nebitne ekspanzije ograničenih (odnosno proizvoljnih) striktnih deduktivnih implikativnih algebri. Striktne deduktivne implikativne algebre s komplementacijom predstavljaju modele implikacijsko-negacijskih fragmenata odgovarajućih iskaznih računa.

Stavovi izloženi u trećem odeljku su manje-više očekivana i prirodna uopštenja stavova o implikativnim filtrima u (nestriktnim) deduktivnim implikativnim algebrama, mada njihovi dokazi nisu uvek obična preinaka dokaza iz odeljka I.3, jer su u pojedinostima, često potrebna nova tehnička rešenja. Osim u teoremama reprezentacije, ovde naročito dolaze do izražaja specijalni implikativni filtri. Inače, i u teoremama o implikativnim filtrima u striktnim deduktivnim implikativnim algebrama, reflektuju se mnoge metamatematičke osobine implikacijsko-negacijskih iskaznih računa čiji su modeli te algebre (npr. jaka potpunost, tip teoreme dedukcije koji važi, itd.). Zanimljivo je, da se (kao i u nestriktnom slučaju - Th.I.3.14 i Th.I.3.17) i 1-deduktivne i ω deduktivne S4 implikacijske algebre mogu okarakterisati važenjem algebarskog analogona teoreme dedukcije onog tipa koji važi u odnosnim računima (Th.3.4 i Th.3.8).

Četvrti odeljak sadrži dokaze teorema reprezentacije za 1-deduktivne i ω deduktivne S4 implikacijske algebre čije su posledice teoreme reprezentacije za odgovarajuće striktne deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom odnosno kontrapozicionalnom komplementacijom. U zaključku se, pored opšteg osvrta na teoreme reprezentacije nestriktnih i striktnih deduktivnih implikativnih algebri ukazuje na teškoće u vezi s otvorenim problemom reprezentacije S5 implikacijskih algebri.

1. Striktne slabo deduktivne, striktne n-deduktivne i striktne ω deduktivne (konačno deduktivne) implikativne algebre (elementarna teorija)

Videli smo (I poglavlje, Th.1.6) kako dodavanje postulatima implikativnih algebri jedne prirodne pretpostavke - slabog zakona permutacije antecedenata:

(SP) Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $b \to (a \to c) = 1$

- ima dalekosežnu posledicu, jer implikativna operacija time gubi striktan karakter. Pošto je u deduktivnim implikativnim algebrama permutacija antecedenata u ovom ili onom obliku conditio sine qua non, postavlja se pitanje pronalaženja takvog oslabljenja zakona (SP) koje neće poništiti striktnost implikativne operacije. Rešenje tog problema pruža Hackingova /30 / eksplikacija osobina Lewisovih striktnih implikacija. To rešenje nije jednoznačno, jer se odmah nameću tri oslabljenja zakona (SP): to su striktni slabi zakoni permutacije antecedenata (SSP), (SSP′) i (SSP") od kojih su prva dva inspirisana striktnim S4 i S3 implikacijama:

(SSP) Ako $b \in I$ i $a \to (b \to c) = 1$, onda $b \to (a \to c) = 1$,

(SSP′) Ako $a, b \in I$ i $a \to (b \to c) = 1$, onda $b \to (a \to c) = 1$,

(SSP") Ako su a, b i c implikacije, onda $a \to (b \to c) = 1$ povlači $b \to (a \to c) = 1$.

(Ovde je termin "implikacija" upotrebljen u smislu Def.I.1.2; I je skup implikacija.) Očigledno, u implikativnoj algebri, (SSP) je jače od (SSP′), a (SSP′) implicira (SSP").

Na analogan način, može se oslabiti i jaki zakon permutacije antecedenata:

(JP) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$

i uvesti čitav niz ekvivalenata tih oslabljenja. Pođimo od najslabije varijante striktnog jakog zakona permutacije antecedenata.

Lema 1.1 U implikativnoj algebri, striktan jaki zakon permutacije antecedenata:

(SJP") Ako $a, b, c \in I$, onda $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$

ekvivalentan je sledećem (oslabljenom) obliku zakona (SJP"):

(SJP**) Ako $a, b, c \in I$, onda $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) = 1$,

kao i svakom od (beskonačno mnogo) iskaza:

(SSP$''_n$) Ako su $c_1, \ldots, c_n$, a, b i c implikacije, onda $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to (b \to c)))\ldots) = 1$ povlači $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (b \to (a \to c)))\ldots) = 1$.

Pored toga, u implikativnoj algebri, striktan slabi zakon permutacije antecedenata (SSP") sledi iz (SJP").

Dokaz: U implikativnoj algebri, (SJP") očigledno povlači (SJP^{**}), (SSP''_n) i (SSP"). Obratno, zbog simetrije, (SJP^{**}) implicira (SJP"). Analogno dokazu Leme I.1.9, lako je videti (jer je 1 implikacija, zbog (i_1)) da (SSP''_n) sledi iz (SSP''_{n+1}). Dovoljno je još dokazati da je (SJP^{**}) posledica (SSP''_1):

(SSP''_1) Ako su c_1, a, b i c implikacije, onda
$c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ povlači $c_1 \to (b \to (a \to c)) = 1$.

Naime, iz (SSP''_1), za $c_1 = a \to (b \to c)$, dobija se (SJP^{**}), po (i_1), q.e.d.

Sasvim analogna lema može se formulisati za nešto jaču verziju striktnog jakog zakona permutacije antecedenata.

Lema 1.2 U implikativnoj algebri, striktan jaki zakon permutacije antecedenata:

(SJP′) Ako $a, b \in I$, onda $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$,

ekvivalentan je sledećem (oslabljenom) obliku zakona (SJP′):

(SJP^{*}) Ako $a, b \in I$, onda $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) = 1$,

kao i svakom od (beskonačno mnogo) iskaza:

(SSP'_n) Ako su $c_1, \ldots, c_n$, a i b implikacije, onda
$c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to (b \to c)))\ldots) = 1$ povlači
$c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (b \to (a \to c)))\ldots) = 1$.

Pored toga, u implikativnoj algebri, striktan slabi zakon permutacije antecedenata (SSP′) sledi iz (SJP′).

Dokaz je, mutatis mutandis, isti kao dokaz prethodne leme.

Preostaje još jedna mogućnost slabljenja jakog zakona permutacije antecedenata (JP) koje je inspirisano striktnom S4 implikacijom. (Lako je videti da je jaki zakon permutacije antecedenata (JP) ekvivalentan sledećoj striktnoj formulaciji:

(JP") Ako $a \in I$, onda $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) = 1$.

Naime, očigledna posledica (JP") je

(SP") Ako $a \in I$ i $a \to (b \to c) = 1$, onda $b \to (a \to c) = 1$,

što, kao u Th.I.1.6, daje $1 \to a = a$, čime se poništava striktan karakter implikativne operacije. Zbog toga se (JP") svodi na (JP′), odakle, po Lemi I.1.10, sledi (JP).)

Lema 1.3 U implikativnoj algebri, striktan jaki zakon permutacije antecedenata:

(SJP) Ako $b \in I$, onda $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) = 1$,

posledica je iskaza:

(SSP_1) Ako su c_1 i b implikacije, onda
$c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ povlači $c_1 \to (b \to (a \to c)) = 1$,

dok (SSP_{n+1}) implicira (SSP_n):

(SSP_n) Ako su $c_1,\dots,c_n$ i b implikacije, onda

$c_1 \to (\dots \to (c_n \to (a \to (b \to c)))\dots) = 1$ povlači

$c_1 \to (\dots \to (c_n \to (b \to (a \to c)))\dots) = 1.$

Štaviše, ako u implikativnoj algebri važi zakon slabe tranzitivnosti-prefiksiranja (STP_o), onda je (SJP) ekvivalentno svakom od iskaza (SSP_n).

Dokaz prvog dela tvrđenja sasvim je sličan dokazima odgovarajućih delova prethodne dve leme. Poslednji deo tvrđenja dokazuje se indukcijom analogno dokazu Leme I.1.36.

Inače, očigledno je da, u implikativnoj algebri, (SJP) ima za posledicu (SJP′), dok (SJP′) povlači (SJP").

Pokušaj kombinovanja striktnih slabih zakona permutacije antecedenata s aksiomama deduktivnih implikativnih algebri datih u Def.I.1.4 ubrzo dovodi do raznih tehničkih teškoća koje sugeriraju da su tako dobijeni hibridi neprirodni. Međutim, sve se komplikacije otklanjaju ako se u Def.I.1.4 postulati (F_n) oslabe na sledeći način.

Definicija 1.1 Striktna n-deduktivna implikativna algebra je algebra $(A, 1, \to)$, gde je 1 nularna a $\to$ dvoargumentna operacija, i te dve operacije, pored aksioma (i_1), (i_3) i (i_4) za implikativne algebre, zadovoljavaju ovaj postulat:

(F_n') Ako su $c_1,\dots,c_n$ implikacije, onda

$c_1 \to (\dots \to (c_n \to (a \to (b \to c)))\dots) = 1$ i

$c_1 \to (\dots \to (c_n \to (a \to b))\dots) = 1$ povlače

$c_1 \to (\dots \to (c_n \to (a \to c))\dots) = 1.$

Ograničena striktna n-deduktivna implikativna algebra $(A, 1, \to)$ je striktna n-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (i_5) za neki element 0 iz A.

(Ograničena) striktna ω deduktivna ili striktna konačno deduktivna implikativna algebra je (ograničena) implikativna algebra koja je striktna n-deduktivna implikativna algebra za svaki konačan kardinalni broj n.

Iz Def.1.1 očigledno je da je svaka (ograničena) n-deduktivna odnosno ω deduktivna implikativna algebra zapravo (ograničena) striktna n-deduktivna odnosno striktna ω deduktivna implikativna algebra, jer (F_n) povlači (F_n') u implikativnoj algebri.

Naredne dve leme pokazuju da i striktne deduktivne implikativne algebre čine hijerarhiju.

Lema 1.4 Svaka (ograničena) striktna 1-deduktivna implikativna algebra je (ograničena) slabo deduktivna implikativna algebra.

Obratno, svaka (ograničena) slabo deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (F_1'):

(F_1') Ako je $c_1 \in I$, onda $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ i $c_1 \to (a \to b) = 1$ povlače $c_1 \to (a \to c) = 1$,

predstavlja (ograničenu) striktnu 1-deduktivnu implikativnu algebru.

Dokaz je formalno isti kao dokaz Leme I.1.8, jer je 1, zbog (i_1), implikacija.

Lema 1.5 Ako je $(A, 1, \to)$ (ograničena) striktna n-deduktivna implikativna algebra, onda je $(A, 1, \to)$ (ograničena) striktna k-deduktivna implikativna algebra, za sve $1 \leq k \leq n$. Uz to, očigledno, svaka (ograničena) striktna ω deduktivna implikativna algebra je (ograničena) striktna n-deduktivna implikativna algebra, za svaki konačan kardinalni broj n.

Dokaz je formalno isti kao dokaz Leme I.1.9, jer je, zbog (i_1), 1 implikacija.

Zanimljivo je da Fregeov zakon sâm prouzrokuje delimično ukidanje hijerarhije striktnih deduktivnih implikativnih algebri i da se, u tom smislu, može poboljšati i Th.I.1.11.

Teorema 1.6 U implikativnoj algebri, iskazi (F_n) i (F_n') posledice su Fregeovog zakona (F):

(F) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1.$

Dokaz je dobijen modifikacijom dokaza Th.I.1.11. Dokažimo indukcijom po n da (F_n) sledi iz (F), jer je (F_n') posledica (F_n) u implikativnoj algebri.

Najpre, na str.8 i 9, navedeno je izvođenje iskaza (F_1) iz (F) koje se sastoji iz desetočlanog niza formula. Prve dve formule tog desetočlanog niza su konjunkti iz antecedenta uslova (F_1), a poslednja formula niza je konsekvent iskaza (F_1). Svaka od preostalih formula tog niza je ili Fregeov zakon ili je dobijena iz Fregeovog zakona primenom I.1.1.2 ili je dobijena iz neke dve prethodne formule tog niza primenom I.1.1.1. Dakle, nigde nije korišćen slabi zakon permutacije antecedenata (SP).

Opštije, pretpostavimo da je, u implikativnoj algebri, niz formula $f_1 = 1, f_2 = 1, \ldots, f_m = 1$ jedno izvođenje (F_n) iz (F), gde su $f_1 = 1$ i $f_2 = 1$ konjunkti iz antecedenta uslova (F_n), $f_m = 1$ je konsekvent tog uslova, a svaka od preostalih formula tog niza je ili Fregeov zakon ili je dobijena iz Fregeovog zakona (eventualnom višestrukom) primenom I.1.1.2 ili je dobijena iz neke dve prethodne formule tog niza primenom I.1.1.1. Formirajmo niz formula: $c_{n+1} \to f_1 = 1$, $c_{n+1} \to f_2 = 1$,

..., $c_{n+1} \to f_m = 1$ i pokažimo kako se, upotpunjavanjem tog niza s konačno mnogo novih formula, može konstruisati dokaz za (F_{n+1}) iz (F) u kome se koriste ista pravila zaključivanja kao u izvođenju (F_n) iz (F).

Pre svega, $c_{n+1} \to f_1 = 1$ i $c_{n+1} \to f_2 = 1$ su konjunkti iz antecedenta (F_{n+1}), a $c_{n+1} \to f_m = 1$ je konsekvent tog iskaza. Uzmimo bilo koju formulu $c_{n+1} \to f_i = 1$ $(2 < i \leq m)$ i pretpostavimo da je niz upotpunjen zaključno sa $c_{n+1} \to f_{i-1} = 1$. Mogu nastupiti tri slučaja.

Ako je $f_i = 1$ Fregeov zakon, tada $c_{n+1} \to f_i = 1$ sledi, po I.1.1.2, iz $f_i = 1$ i tu formulu treba umetnuti ispred $c_{n+1} \to f_i = 1$.

Ako je formula $f_i = 1$ dobijena iz Fregeovog zakona $f_j = 1$ $(2 < j < i)$ k-tostrukom primenom I.1.1.2, tada se i formula $c_{n+1} \to f_i = 1$ može dobiti iz Fregeovog zakona $f_j = 1$ (k+1)-strukom primenom I.1.1.2, i tih k formula koje predstavljaju izvođenje $f_i = 1$ iz $f_j = 1$ treba umetnuti ispred $c_{n+1} \to f_i = 1$.

Najzad, ako formula $f_i = 1$ sledi iz $f_j = 1$ i $f_k = f_j \to f_i = 1$ $(j, k < i)$ po I.1.1.1, postupa se kao u istom slučaju u dokazu Th.I.1.11, q.e.d.

Narednih nekoliko lema i teorema daju neke posledice aksioma striktnih 1-deduktivnih i striktnih 2-deduktivnih implikativnih algebri. I ovde, kao i u slučaju nestriktnih deduktivnih implikativnih algebri, svaki od tri striktna slaba zakona permutacije antecedenata (SSP), (SSP′) i (SSP″) ima za posledicu delimično brisanje hijerarhije striktnih deduktivnih implikativnih algebri koja se tako svodi na ne više od četiri predstavnika (jer je (SSP′) ekvivalentno sa (SSP″) u striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri).

Teorema 1.7 Neka je $(A, 1, \to)$ striktna 1-deduktivna implikativna algebra. Tada:

1.7.1 Ako $(a \to b) \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$.

1.7.2 Ako $(a \to b) \to (a \to (b \to c)) = 1$, onda $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

1.7.3 Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$.

1.7.4 Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

1.7.5 Ako $b \to c = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$. (Upor.$(STP_0)$)

1.7.6 Ako $b \leq c$, onda $a \to b \leq a \to c$.

1.7.7 Ako $(a \to (b \to c)) \to (a \to b) = 1$, onda

$(a \to (b \to c)) \to (a \to c) = 1.$

1.7.8 Ako $(a \to (b \to c)) \to (a \to b) = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) = 1.$

1.7.9 Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to (b \to c)) \to (a \to c) = 1.$

1.7.10 Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) =$

1.7.11 Ako $a \leq b$, onda $a \to (b \to c) \leq a \to c.$

1.7.12 $a \to (a \to b) \leq a \to b$

1.7.13 $(a \to b) \to a \leq (a \to b) \to b$

1.7.14 $1 \to a \leq a$

Dokaz je isti kao kod Th.I.1.12, izuzev što se umesto (F_1) koristi (F_1'). 1.7.14 sledi iz Th.I.1.5.1 i Leme 1.4.

Teorema 1.8 Neka je $(A, 1, \to)$ striktna 2-deduktivna implikativna algebra. Tada:

1.8.1 Ako $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to (b \to c))) = 1$, onda $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1.$

1.8.2 Ako $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to b)) = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) = 1.$

Dokaz je isti kao kod Th.I.1.13, sem što se, umesto (F_2), koristi (F_2').

Istražimo koje su posledice, za striktne 1-deduktivne implikativne algebre, uvođenja striktnih slabih zakona permutacije antecedenata (SSP′) i (SSP″).

Lema 1.9 U striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri, striktan zakon afirmacije konsekventa:

(SAC′) Ako $a, b \in I$, onda $a \to (b \to a) = 1$,

ekvivalentan je svakom od striktnih slabih zakona permutacije antecedenata (SSP′) i (SSP″). Otuda, (SSP″) i (SSP′) su međusobno ekvivalentni u striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri.

Dokaz: U striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri, prema 1.7.3 i I.1 (1), $a \to (b \to c) = 1$ povlači $a \to b \leq a \to c$ što, zbog $b \leq a \to b$, ako je $a, b \in I$ ((SAC′) i I.1 (1)), daje $b \leq a \to c$, odnosno $b \to (a \to c) = 1$. Time je izvedeno (SSP′) iz (SAC′). Očigledno, (SSP″) sledi iz (SSP′) već u implikativnoj algebri. Dovoljno je još dokazati da (SSP″) implicira (SAC′) u striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri. Naime, iz $b \to (a \to a) = b \to 1 = 1$ ((i_1) i (i_4)), primenom (SSP″), dobija se $a \to (b \to a) = 1$, ako su a i b implikacije.

Teorema 1.10 Neka je $(A, 1, \to)$ striktna 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi striktan slabi zakon permutacije antecedenata (SSP′) ili (SSP″). Tada:

1.10.1 Ako $a, b \in I$, onda $a \leq b \to a$.

1.10.2 $(a \to b) \to ((c \to d) \to (a \to b)) = 1$

1.10.3 Ako $a \in I$, onda $a \leq (a \to b) \to b$.

1.10.4 Ako $a \in I$, onda $1 \to a = a$.

1.10.5 $1 \to (a \to b) = a \to b$

1.10.6 Ako $a \in I$ i $a \to b = 1$, onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$.

1.10.7 Ako $a \in I$ i $a \leq b$, onda $b \to c \leq a \to c$.

1.10.8 Ako je $c \in I$ i $c \leq a$, onda je $c \leq 1 \to a$. ($1 \to a$ je najveća implikacija koja je manja ili jednaka a.)

1.10.9 Ako $a \in I$, onda $a \to (a \to b) = a \to b$.

1.10.10 $a \to b \leq ((a \to b) \to b) \to b$

1.10.11 Ako $a \in I$, onda $a \to b = ((a \to b) \to b) \to b$.

1.10.12 $(a \to b) \to b = (((a \to b) \to b) \to b) \to b$

1.10.13 $(b \to a) \to b = (((b \to a) \to b) \to b) \to b$

1.10.14 $a \to b \leq ((a \to b) \to a) \to b$

1.10.15 Ako $a \in I$, onda $a \to b = ((a \to b) \to a) \to b$.

1.10.16 $(a \to b) \to b = (((a \to b) \to b) \to (a \to b)) \to b$

1.10.17 $(b \to a) \to b = (((b \to a) \to b) \to (b \to a)) \to b$

1.10.18 Ako $a, b \in I$, onda $((a \to b) \to (b \to a)) \to (b \to a) = 1$.

Dokaz: 1.10.1 je posledica (SAC′) i Leme 1.9.

1.10.2 je direktna posledica (SAC′) i Def.I.1.2.

1.10.3 Iz (i_1): $(a \to b) \to (a \to b) = 1$, po (SSP′), sledi $a \to ((a \to b) \to b) = 1$, tj. $a \leq (a \to b) \to b$ (zbog I.1 (1)), ako su a i b implikacije.

1.10.4 Ako je $a \in I$, onda je, po 1.10.1, $a \leq 1 \to a$, jer je 1 implikacija. Obrnuta nejednakost važi prema 1.7.14.

1.10.5 je direktna posledica 1.10.4 i Def.I.1.2.

1.10.6 Ako je $a \to b = 1$, onda je, po 1.7.9, $(a \to (b \to c)) \to (a \to c) = 1$. Iz poslednje formule i (SAC′): $(b \to c) \to (a \to (b \to c)) = 1$, ako je a implikacija, primenom (i_2), sledi $(b \to c) \to (a \to c) = 1$.

1.10.7 je posledica 1.10.6 i I.1 (1).

1.10.8 Iz $c \in I$ i $c \leq a$ sledi $c = 1 \to c \leq 1 \to a$, zbog 1.7.6 i 1.10.4.

1.10.9 Iz $a \leq a$, po 1.7.11, imamo $a \to (a \to b) \leq a \to b$. Obrnuta nejednakost: $a \to b \leq a \to (a \to b)$ posledica je 1.10.1, zbog $a \in I$.

1.10.10 Iz (i_1): $(a \to b) \to b \leq (a \to b) \to b$, primenom (SSP′), dobija se tražena nejednakost.

1.10.11 Ako je a implikacija, onda, iz $a \leq (a \to b) \to b$ (1.10.3), primenom 1.10.7, sledi $((a \to b) \to b) \to b \leq a \to b$. Obrnuta nejednakost, prema 1.10.10, uvek važi.

1.10.12 i 1.10.13 su direktne posledice 1.10.11 i Def.I.1.2.
1.10.14 se dobija iz 1.7.13 primenom (SSP′).
1.10.15 Ako je $a \in I$, onda je $a \leq (a \to b) \to a$ (1.10.1 i Def. I.1.2), odakle se, primenom 1.10.7, dobija $((a \to b) \to a) \to b \leq a \to b$. Obrnuta nejednakost važi prema 1.10.14.
1.10.16 i 1.10.17 su direktne posledice 1.10.15 i Def.I.1.2.
1.10.18 Ako su a i b implikacije, onda je, po 1.10.1, $b \leq a \to b$, odakle se, primenom 1.10.7 i 1.10.9, dobija $(a \to b) \to (b \to a) \leq b \to (b \to a) = b \to a$. Otuda se, po I.1(1), dobija tražena formula, q.e.d.

Zamena postulata (SSP′) nešto jačim postulatom (SSP) omogućuje izvesna pojačanja prethodne teoreme.

Teorema 1.11 Neka je $(A, 1, \to)$ striktna 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi striktan slabi zakon permutacije antecedenata (SSP). Tada:

1.11.1 Ako je $a \in I$, onda $a \to (b \to a) = 1$.
1.11.2 Ako $a \in I$, onda $a \leq b \to a$.
1.11.3 $(a \to b) \to (c \to (a \to b)) = 1$
1.11.4 Ako $a \to b = 1$, onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$. (up. (STS_c))
1.11.5 Ako $a \leq b$, onda $b \to c \leq a \to c$.
1.11.6 $a \to (a \to b) = a \to b$ (kontrakcija)

Dokaz je analogan dokazu odgovarajućih delova Th.1.10, s tim što se, umesto (SSP′), koristi (SSP).

Lema 1.12 U striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri, striktan slabi zakon permutacije antecedenata (SSP) ekvivalentan je striktnom zakonu afirmacije konsekventa:

(SAC) Ako $a \in I$, onda $a \to (b \to a) = 1$.

Dokaz: U striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri, prema 1.7.3 i I.1(1), $a \to (b \to c) = 1$ povlači $a \to b \leq a \to c$, što, zbog $b \leq a \to b$ ((SAC) i I.1(1)), ako je b implikacija, daje $b \leq a \to c$, odnosno $b \to (a \to c) = 1$. Obratno, (SAC) je posledica (SSP) u striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri, po 1.11.1, q.e.d.

Analogno slučaju nestriktnih deduktivnih implikativnih algebri, svaki od striktnih slabih zakona permutacije antecedenata (SSP′) odnosno (SSP), zajedno s aksiomama striktne 2-deduktivne implikativne algebre, ima za posledicu odgovarajući striktan jaki zakon permutacije antecedenata (SJP′) odnosno (SJP).

Teorema 1.13 Neka je $(A, 1, \to)$ striktna 2-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi striktan slabi zakon permutacije antecedenata (SSP") ili (SSP′). Tada:

1.13.1 $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$ (Fregeov zakon)

1.13.2 Ako $a, b \in I$, onda $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$. (SJP')

1.13.3 Ako $a \in I$, onda $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$.

1.13.4 Ako $a \in I$, onda $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$.

1.13.5 Ako $a, b \in I$, onda $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$.

1.13.6 $(a \to b) \to ((b \to a) \to b) = (b \to a) \to ((a \to b) \to a)$

Dokaz: 1.13.1 Fregeov zakon je posledica 1.8.1 i lema 1.9 i 1.5.

1.13.2 Iz (F), po (SSP") i I.1(1), imamo $a \to b \leq (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$. Prema 1.10.1 je $b \leq a \to b$, ako su a i b implikacije. Otuda, $b \leq (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$. Primenom I.1(1) i (SSP"), iz poslednje se formule dobija $a \to (b \to c)$ $b \to (a \to c)$, jer je b implikacija. Simetrično se dobija obrnuta nejednakost, pod pretpostavkom da su a i b implikacije.

1.13.3 Naredni niz formula predstavlja dokaz ovog zakona:

1° $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, (F)

2° $(b \to c) \to ((a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))) = 1$, iz 1°, po I.1.1.2

3° $((b \to c) \to ((a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)))) \to (((b \to c) \to (a \to (b \to c))) \to ((b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)))) = 1$,

4° $((b \to c) \to (a \to (b \to c))) \to ((b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c))) = 1$, iz 2° i 3° po I.1.1.1

5° $(b \to c) \to (a \to (b \to c)) = 1$, ako je $a \in I$; 1.10.2 ili (SAC')

6° $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, ako je $a \in I$; iz 4° i 5° po I.1.1.1

1.13.4 sledi iz 1.13.3 po (SSP")

1.13.5 Prema 1.10.1, važi $b \leq a \to b$, ako su a i b implikacije. Odatle se, primenom 1.10.7 i 1.13.2, dobija $(a \to b) \to (a \to c) \leq b \to (a \to c) = a \to (b \to c)$, ako su a i b implikacije. Obrnuta nejednakost sledi iz Fregeovog zakona.

1.13.6 Iz $(b \to a) \to b \leq (b \to a) \to a$ (1.7.13), sledi $(a \to b) \to ((b \to a) \to b) \leq (a \to b) \to ((b \to a) \to a) = (b \to a) \to ((a \to b) \to a)$, po 1.7.6 i 1.13.2. Obrnuta nejednakost izvodi se simetrično.

Teorema 1.14 Neka je $(A, 1, \to)$ striktna 2-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi striktan slabi zakon permutacije antecedenata (SSP). Tada:

1.14.1 Ako $b \in I$, onda $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)) = 1$.

1.14.2 $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$

1.14.3 $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$

Dokaz: 1.14.1 se izvodi na isti način kao 1.13.2, sem što se, umesto 1.10.1, koristi 1.11.2.

1.14.2 se dokazuje isto kao 1.13.3, uz korišćenje (SAC) umesto (SAC').

1.14.3 je direktna posledica 1.14.2 i (SSP").

Korolar 1.15 Ako u implikativnoj algebri (A, 1, $\rightarrow$) važi jedan od striktnih slabih zakona permutacije antecedenata (SSP") ili (SSP') ili (SSP), onda, za svako $n \geq 2$, (A, 1, $\rightarrow$) je striktna n-deduktivna implikativna algebra ako i samo ako je (A, 1, $\rightarrow$) striktna ω deduktivna implikativna algebra. Štaviše, za $n \geq 2$, u striktnoj n-deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SSP") ili (SSP'), takođe važi Fregeov zakon (F) i striktan jaki zakon permutacije antecedenata (SJP'). Uz to, za $n \geq 2$, u striktnoj n-deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SSP), pored Fregeovog zakona, važi i (SJP). (Ovo je posledica Leme 1.5, Th.1.6, Th.1.13 i Th.1.14.)

Drugim rečima, ako se aksiomama striktnih deduktivnih implikativnih algebri doda, kao postulat, bilo koji od striktnih slabih zakona permutacije antecedenata (SSP"), (SSP') ili (SSP), onda se cela hijerarhija tih algebri svodi na dva predstavnika: na striktne 1-deduktivne i striktne ω deduktivne implikativne algebre. Prema tome, tri striktna slaba zakona permutacije antecedenata,u kombinaciji s aksiomama striktnih deduktivnih implikativnih algebri, daće najviše četiri (jer su tada, po Lemi 1.9, (SSP") i (SSP') međusobno ekvivalentni) različite striktne deduktivne implikativne algebre. To su striktne 1-deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SSP") (a time i (SSP')), odnosno (SSP), i striktne ω deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SSP") (a time i (SSP')), odnosno (SSP).

Imajući u vidu Hackingovu /30 / eksplikaciju osobina Lewisovih striktnih S3, S4 i S5 implikacija, uvodimo definiciju:

Definicija 1.2 1-deduktivna (ω deduktivna) S3 implikacijska algebra je striktna 1-deduktivna (striktna ω deduktivna) implikativna algebra u kojoj važi striktan slabi zakon permutacije antecedenata (SSP').

1-deduktivna (ω deduktivna) S4 implikacijska algebra je striktna 1-deduktivna (striktna ω deduktivna) implikativna algebra u kojoj važi striktan slabi zakon permutacije antecedenata (SSP).

1-deduktivna (ω deduktivna) S5 implikacijska algebra je 1-deduktivna (ω deduktivna) S4 implikacijska algebra u kojoj važi striktan Peirceov zakon:

(P′) Ako $a \in I$, onda $((a \to b) \to a) \to a = 1$.

ω deduktivne S3 (S4, S5) implikacijske algebre zovu se kraće <u>S3 (S4, S5) implikacijske algebre</u>.

Ograničene 1-deduktivne ili ω deduktivne S3, S4 ili S5 implikacijske algebre zadovoljavaju još i aksiom (i_5).

Sledeća teorema daje aksiomatsku karakterizaciju (ograničenih) striktnih 1-deduktivnih i ω deduktivnih implikativnih algebri u obliku u kome je njihova veza s Lewisovim striktnim implikacijama očigledna.

<u>Teorema 1.16</u> Algebra $(A, 1, \to)$, gde je 1 nularna operacija a $\to$ binarna operacija, je 1-deduktivna S3 implikacijska algebra ako i samo ako te dve operacije zadovoljavaju aksiome:

(i_1) $a \to a = 1$,

(SAC′) Ako $a, b \in I$, onda $a \to (b \to a) = 1$,

(F_1') Ako $c_1 \in I$, onda $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ i $c_1 \to (a \to b) = 1$ povlače $c_1 \to (a \to c) = 1$,

(i_3) Ako $a \to b = 1$ i $b \to a = 1$, onda $a = b$,

(i_4) $a \to 1 = 1$.

Ako se postulat (F_1') zameni Fregeovim zakonom:

(F) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$,

dobija se aksiomatski sistem za ω deduktivne S3 implikacijske algebre.

Ako se iskaz (SAC′) zameni jačom verzijom striktnog zakona afirmacije konsekventa:

(SAC) Ako $a \in I$, onda $a \to (b \to a) = 1$,

onda se, umesto aksiomatskog sistema za 1-deduktivne (ω deduktivne) S3 implikacijske algebre dobijaju aksiomatski sistemi za 1-deduktivne (ω deduktivne) S4 implikacijske algebre.

Za dobijanje aksioma za 1-deduktivne (ω deduktivne) S5 implikacijske algebre, treba postulatima 1-deduktivne (ω deduktivne) S4 implikacijske algebre dodati striktan Peirceov zakon: (P′) Ako $a \in I$, onda $((a \to b) \to a) \to a = 1$.

Najzad, ograničene striktne deduktivne implikativne algebre imaju dodatni postulat:

(i_5) $0 \to a = 1$.

<u>Dokaz</u>: Teorema je posledica Def.1.1, Def.1.2, lema 1.9 i 1.12, kao i Th.1.13, Th.1.16 i lema 1.5, 1.4 i I.1.4.

U narednih osam stavova, koji trivijalno uopštavaju odgovarajuće činjenice o implikacijskim algebrama (upor. Primer I.1.8, str. 31), navode se neke posledice striktnog Peirceovog zakona u striktnim deduktivnim implikativnim algebrama.

Teorema 1.17 Neka je $(A, 1, \rightarrow)$ 1-deduktivna S3 implikacijska algebra u kojoj važi striktan Peirceov zakon (P'). Tada važi:

(1) Ako $a \in I$, onda $(a \rightarrow b) \rightarrow a = a$.

Dokaz: Ako je a implikacija, onda je, po 1.10.1, $a \leqslant (a \rightarrow b) \rightarrow a$. Obrnuta nejednakost sledi iz striktnog Peirceovog zakona.

Teorema 1.18 Neka je $(A, 1, \rightarrow)$ ω deduktivna S3 implikacijska algebra u kojoj važi striktan Peirceov zakon (P'). Tada:

1.18.1 Ako $a, b \in I$, onda $(a \rightarrow b) \rightarrow b = (b \rightarrow a) \rightarrow a$.

1.18.2 Ako $a, b, c \in I$, onda
$(a \rightarrow c) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow c)) = 1$.

Dokaz: 1.18.1 Ako je a implikacija, onda je, prema 1.10.3, $a \leqslant (a \rightarrow b) \rightarrow b$, odakle se, primenom 1.7.6, (SSP′) i (P′), dobija $(b \rightarrow a) \rightarrow a \leqslant (b \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow b) =$
$= (a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow b) = (a \rightarrow b) \rightarrow b$.

1.18.2 Ako je a implikacija, onda je, po 1.13.4 i I.1(1), $a \rightarrow c \leqslant (c \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)$ i $(c \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) \leqslant$
$\leqslant ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow b)$, odakle sledi $a \rightarrow c \leqslant$
$\leqslant ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow b)$. Odavde se, primenom 1.18.1 i (SSP′), dobija $a \rightarrow c \leqslant ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow c) =$
$= (b \rightarrow c) \rightarrow (((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow c)$.

Definišimo u implikativnoj algebri novu dvoargumentnu operaciju.

Definicija 1.3 (J.C.Abbott) Ako je $(A, 1, \rightarrow)$ implikativna algebra, onda

(2) $a \cup b = (a \rightarrow b) \rightarrow b$.

Lema 1.19 U striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri važi:

(3) $a \cup (a \rightarrow b) = 1$.

Dokaz: $a \cup (a \rightarrow b) = (a \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b) = 1$, zbog Def.1.3, 1.7.12 i I.1(1).

Lema 1.20 U 1-deduktivnoj S3 implikacijskoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$ u kojoj je I skup implikacija, važi:

(4) Ako $a, b \in I$, onda $(a \rightarrow b) \cup (b \rightarrow a) = 1$.

Dokaz: $(a \rightarrow b) \cup (b \rightarrow a) = ((a \rightarrow b) \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$, ako su a i b implikacije, uz korišćenje Def.1.3 i 1.10.18.

Lema 1.21 U ω deduktivnoj S3 implikacijskoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$, u kojoj važi striktan Peirceov zakon (P'), a I je skup implikacija, imamo

(5) Ako $a, b \in I$, onda $a \cup b = \sup_A\{a, b\}$.

Ovde je $\cup$ operacija iz Def.1.3, supremum se uzima u odnosu na parcijalno uređenje definisano pomoću I.1(1).

Dokaz: Prema 1.10.3, imamo

(6) Ako $a \in I$, onda $a \leq a \cup b$,

a po 1.10.1,

(7) Ako $b \in I$, onda $b \leq a \cup b$.

Pokažimo još

(8) Ako $a, b \in I$, onda $a \leq c$ i $b \leq c$ povlači $a \cup b \leq c$.

Naime, iz $a, b, c \in I$, $a \leq c$ i $b \leq c$, zbog I.1(1), 1.18.2 i I.1.1.1, sledi $a \cup b = (a \to b) \to b \leq c$. Ako je $a, b \in I$ i c nije implikacija, onda, iz $a \leq c$ i $b \leq c$, po 1.10.8, sledi $a \leq 1 \to c$ i $b \leq 1 \to c$, odakle je, prema prethodnom, $a \cup b \leq$ $\leq 1 \to c \leq c$.

Korolar 1.22 Neka je $(A, 1, \to)$ ω deduktivna S3 implikacijska algebra u kojoj važi striktan Peirceov zakon (P') i gde je I skup implikacija. Tada:

1.22.1 $a \cup 1 = (a \to 1) \to 1 = 1 \to 1 = 1$

1.22.2 Ako $a \in I$, onda $a \cup a = a$.

1.22.3 Ako $a, b \in I$, onda $a \quad b = b \quad a$.

1.22.4 Ako $a, b, c \in I$, onda $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.

1.22.5 U ograničenoj striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri,

(9) $a \cup \neg a = 1$.

Dokaz: Ovo je posledica Def.1.3, Def.I.2.1 i Leme 1.19.

Lema 1.23 Neka je $(A, 1, \to)$ ograničena S3 implikacijska algebra u kojoj važi striktan Peirceov zakon (P') i gde je I skup implikacija. Tada,

(10) Ako $a, b \in I$, onda $a \cup b = a$ ako i samo ako $a \cup \neg b = 1$.

Dokaz: Neka su a i b implikacije u ograničenoj ω deduktivnoj S3 implikacijskoj algebri u kojoj važi striktan Peirceov zakon (P'). Najpre, $a \cup b = a$ ekvivalentno je sa $(a \to b) \to b = a$, odnosno sa $b \leq a$, zbog $b \leq (a \to b) \to b$ (1.10.1). S druge strane, iz $b \leq a$, po 1.10.7 i I.2(1), sledi $\neg a = a \to 0 \leq b \to 0 = \neg b$, odakle se, ponovnom dvostrukom primenom 1.10.7, dobija $\neg b \to a \leq$ $\leq \neg a \to a$ i $1 = a \cup \neg a = \neg a \cup a = (\neg a \to a) \to a \leq (\neg b \to a) \to a$ $= \neg b \cup a = a \cup \neg b$, tj. $a \cup \neg b = 1$, zbog Def.1.3, Def.I.2.1, (9) i 1.22.1. Obratno, neka je $a \cup \neg b = 1$. Iz $\neg b \leq b \to a$ (I.2.4.12), dvostruka primena 1.10.7 daje $(b \to a) \to a \leq \neg b \to a$, tj. $1 =$ $= \neg b \cup a = (\neg b \to a) \to a \leq ((b \to a) \to a) \to a = ((a \to b) \to b) \to a$, zbog Def.1.3, 1.18.1. Odatle je $b \leq ((a \to b) \to b \leq a$, po 1.10.1 i I.1(1), dakle $b \leq a$.

Korolar 1.24 Skup implikacija u ograničenoj S3 implikacijskoj algebri u kojoj važi striktan Peirceov zakon (P') (a fortiori, u S5 implikacijskoj algebri), čini Booleovu algebru. Dakle, ako je $(A, 1, \to)$ ograničena ω deduktivna S5 implikacijska algebra, onda je $(I, 1, 0, \cup, \cap, \to)$ Booleova algebra, gde je $\cup$ restrikcija na I operacije definisane pomoću (2), operacija $\neg$ je restrikcija na I operacije definisane pomoću I.2(1), a

(11) $\quad a \cap b = \inf_I\{a, b\} = \neg(\neg a \cup \neg b)$.

Dokaz: Prema Frinkovom rezultatu (vide /25 /), iskazi 1.22.2, 1.22.3, 1.22.4 i (10) predstavljaju adekvatan sistem postulata za Booleovu algebru u terminima specijalnog elementa 1 i nedefinisanih operacija: $\cup$ (binarne) i $\neg$ (unarne). (Zapravo, Frink dokazuje tvrđenje za dualne operacije: 0, $\cap$ i $\neg$.)

Evo i direktnog dokaza (11). Iz (6): $\neg a \cup \neg b \geqslant \neg a$, primenom 1.10.7, I.2(1), 1.18.1, (i_5) i 1.10.4, dobija se $\neg(\neg a \cup \neg b) = (\neg a \cup \neg b) \to 0 \leqslant \neg a \to 0 = (a \to 0) \to 0 = (0 \to a) \to a$ $= 1 \to a = a$, ako je a implikacija. Analogno, ako je b implikacija, iz $\neg a \cup \neg b \geqslant \neg b$ sledi $\neg(\neg a \cup \neg b) \leqslant b$. Dakle, ako su a i b implikacije, onda je $\neg(\neg a \cup \neg b)$ njihova minoranta. Dokažimo još da je to i najveća njihova minoranta. Naime, ako su a, b i c implikacije, onda iz $c \leqslant a$ i $c \leqslant b$, korišćenjem 1.10.7 i I.2(1), imamo $\neg a = a \to 0 \leqslant c \to 0 = \neg c$ i $\neg b = b \to 0 \leqslant c \to 0$ $= \neg c$, odakle je, po (8), $\neg a \cup \neg b \leqslant \neg c$. Još jednom primenom 1.10.7 dobija se $\neg(\neg a \cup \neg b) = (\neg a \cup \neg b) \to 0 \geqslant \neg c \to 0 = (c \to 0) \to 0 =$ $(0 \to c) \to c = 1 \to c = c$, zbog I.2(1), 1.18.1, (i_5), 1.10.4.

Nota bene: za $a, b \in I$, $a \cap b$ je infimum a i b u I koji se ne mora poklapati s infimumom a i b u A (ako postoji).

Neznatnom modifikacijom Th.I.1.25 i Th.I.1.20, dobijaju se primeri skupovnih 1-deduktivnih i ω deduktivnih S4 i S5 implikacijskih algebri. Na žalost, kao što je poznato (vide npr. Hughes i Cresswell /40 /, str. 295), u Lewisovom S3 sistemu, modalni operator "nužno je da" ($\Box$) uopšte se ne može definisati pomoću striktne implikacije ($\Rightarrow$) (u sistemima S4 i S5 to je moguće na uobičajen način: $\Box A = (A \Rightarrow A) \Rightarrow A$) i zato analogna skupovna interpretacija 1-deduktivnih i ω deduktivnih S3 implikacijskih algebri (koje su Lindenbaumove algebre nešto slabijih od C3 implikativnih fragmenata sistema S3) nije moguća, ako je (semi) interior operacija, kao topološki analogon operatora $\Box$, izraziva pomoću analogona striktne implikacije u toj interpretaciji.

Teorema 1.25 Neka je P(X) partitivni skup nekog skupa X, S(X) ($\subseteq$ P(X)) klasa podskupova od X, zatvorena za proizvoljne unije, takva da S(X) sadrži $\emptyset$ i X, i neka je I_o semi-interior operacija određena tom klasom. Tada je $(P(X), X, \Rightarrow)$, gde je

(12) $Y \to Z = I_o((X \setminus Y) \cup Z)$ $(Y, Z \in P(X))$,

ograničena 1-deduktivna S4 implikacijska algebra. U ovoj algebri, invarijante operatora I_o su implikacije i vice versa, a relacija parcijalnog uređenja, definisana sa I.1(1), poklapa se sa skupovnom inkluzijom u $(P(X), \subseteq)$:

(13) $Y \to Z = X$ ako i samo ako $Y \subseteq Z$.

Štaviše, ako je $P_o(X)(\subseteq P(X))$ neprazna klasa podskupova iz X, zatvorena za operaciju $\to$ (definisanu sa (12)), onda je $X \in P_o(X)$ i $(P_o(X), X, \to_o)$ ($\to_o$ je restrikcija na $P_o(X)$ operacije $\to$) takođe je 1-deduktivna S4 implikacijska algebra (jer je klasa 1-deduktivnih S4 implikacijskih algebri, kao kvazivarijetet, zatvorena za podalgebre). Drugim rečima, svaka podalgebra 1-deduktivne S4 implikacijske algebre $(P(X), X, \to)$ je 1-deduktivna S4 implikacijska algebra i zove se <u>1-deduktivna S4 implikacijska algebra skupova</u>.

<u>Dokaz</u> je, u stvari, sadržan u dokazu Th.I.1.25, izuzev što treba još pokazati da se implikacije ove algebre poklapaju s invarijantama semi-interior operatora I_o. Naime, iz (12) i (si_3), odmah sledi da su implikacije invarijante. Obrnuto, i invarijante su implikacije, jer je $Y = I_o(Y) = I_o((X \setminus X) \cup Y) = X \to Y$, q.e.d.

Iz teoreme reprezentacije za 1-deduktivne S4 implikacijske algebre sledi da su skupovne 1-deduktivne S4 implikacijske algebre tipični primeri takvih algebri.

<u>Teorema 1.26</u> Neka je P(X) partitivni skup skupa X, I_o semi-interior operacija na X i neka je operacija $\to$ definisana pomoću (12). Tada je $(P(X), X, \to)$ 1-deduktivna S5 implikacijska algebra ako i samo ako semi-interior operacija I_o ispunjava zahtev:

(14) $I_o(X \setminus I_o(X \setminus I_o(Y))) = I_o(Y)$ $(Y \in P(X))$.

Inače, uslov (14) očigledno je slabiji od:

(15) $I_o(X \setminus I_o(Y)) = X \setminus I_o(Y)$ $(Y \in P(X))$.

<u>Dokaz</u>: Neka je P(X) partitivni skup skupa X, I_o semi-interior operacija na X i neka je operacija $\to$ definisana pomoću (12). Tada je, prema Th.1.25, $(P(X), X, \to)$ ograničena skupovna 1-deduktivna S4 implikacijska algebra.

Dokažimo, prvo, da, u toj algebri, važi striktan Peirceov zakon (P'), ako semi-interior operacija I_o ispunjava zahtev (14): $(I_o(A) \to B) \to I_o(A) = I_o((X \setminus I_o((X \setminus I_o(A)) \cup B)) \cup I_o(A))$ $\subseteq I_o((X \setminus I_o(X \setminus I_o(A))) \cup I_o(A)) \subseteq I_o(X \setminus I_o(X \setminus I_o(A))) = I_o(A)$, zbog (12), (si_4), (si_2) i (14), jer iz (14) sledi $I_o(A) \subseteq X \setminus I_o(X \setminus I_o(A))$, odakle je, po (13),

(16) $((I_o(A) \to B) \to I_o(A)) \to I_o(A) = X$.

Dakle, algebra $(P(X), X, \to)$ i njene podalgebre su, prema Def.1.2, 1-deduktivne S5 implikacijske algebre skupova.

Obratno, ako je $(P(X), X, \to)$ 1-deduktivna S5 implikacijska algebra, tj. u skupovnoj 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri $(P(X), X, \to)$ važi striktan Peirceov zakon (P′), onda, iz (16), po (13), sledi $(I_o(A) \to B) \to I_o(A) \subseteq I_o(A)$, što, po definiciji operacije $\to$, znači $I_o((X \setminus I_o((X \setminus I_o(A)) \cup B)) \cup I_o(A)) \subseteq I_o(A)$. Odavde se, po (si_7) i (si_3), dobija $I_o(X \setminus I_o((X \setminus I_o(A)) \cup B)) \cup I_o(A) \subseteq I_o(A)$. Kako obrnuta inkluzija uvek važi, iz prethodnog imamo

$I_o(X \setminus I_o((X \setminus I_o(A)) \cup B)) \cup I_o(A) = I_o(A)$, to jest

$I_o(X \setminus I_o((X \setminus I_o(A)) \cup B)) \subseteq I_o(A)$. Zbog (si_2) i (si_4), uvek je:

$I_o(I_o(A) \cap (X \setminus B)) = I_o(X \setminus ((X \setminus I_o(A)) \cup B)) \subseteq$

$I_o(X \setminus I_o((X \setminus I_o(A)) \cup B)) \subseteq I_o(A)$, odakle je specijalno, za

$B = \emptyset$, $I_o(I_o(A) \cap (X \setminus \emptyset)) = I_o(X \setminus I_o((X \setminus I_o(A)) \cup \emptyset)) \subseteq I_o(A)$,

tj. $I_o(X \setminus I_o(X \setminus I_o(A))) = I_o(A)$, q.e.d.

Analiza dokaza prethodne teoreme pokazuje da nigde nije korišćena činjenica da, u striktnom Peirceovom zakonu (16), B nije invarijanta semi-interior operacije I_o. Otuda sledi:

<u>Korolar 1.27</u> Neka je S(X) klasa podskupova od X koja sadrži $\emptyset$ i X i koja je zatvorena za proizvoljne unije i neka je I_o semi-interior operacija određena tom klasom. Tada, u ograničenoj (nestriktnoj) 1-deduktivnoj implikativnoj algebri skupova $(S(X), X, \to)$, gde je operacija $\to$ definisana pomoću I(11), važi Peirceov zakon (P)(str. 31) ako i samo ako I_o zadovoljava uslov (14).

O teškoćama, spomenutim na str. 29, na koje se nailazi pri pokušaju konstruisanja primera (male konačne nestriktne) 1-deduktivne implikativne algebre u kojoj važi (SP), ali koja nije ω deduktivna implikativna algebra, indirektno govore Th.1.28 i Primer 1.1.

<u>Teorema 1.28</u> Neka je P(X) partitivni skup nekog skupa X i $(P(X), X, \to)$ 1-deduktivna S4 implikacijska algebra skupova. Tada, u toj algebri, važi Fregeov zakon (F) ako i samo ako semi-interior operator I_o na X, određen klasom implikacija te algebre, ispunjava zahtev:

(17) $I_o((X \setminus Y) \cup Z) \subseteq I_o((X \setminus I_o(Y)) \cup I_o(Z))$ $(Y, Z \in P(X))$,

koji je ekvivalentan sa:

(18) $I_o((X \setminus I_o(Y)) \cup Z) = I_o((X \setminus I_o(Y)) \cup I_o(Z))$ $(Y, Z \in P(X))$.

<u>Dokaz</u>: Dokažimo najpre ekvivalentnost uslova (17) i (18) za bilo

koju semi-interior operaciju I_o. Naime, uvek je $I_o((X\setminus I_o(Y)) \cup I_o(Z)) \subseteq I_o((X\setminus I_o(Y)) \cup Z)$, zbog (si_2) i (si_4), dok obrnuta inkluzija važi prema (17). Time je dokazano da (17) implicira (18). Obratno, iz (18), (si_2) i (si_4) sledi (17): $I_o((X\setminus Y) \cup Z) \subseteq I_o((X\setminus I_o(Y)) \cup Z) = I_o((X\setminus I_o(Y)) \cup I_o(Z))$.

Dalje, neka je $P(X)$ partitivni skup nekog skupa X, $(P(X), X, \to)$ 1-deduktivna S4 implikacijska algebra skupova i I_o semi-interior operator na X, određen klasom implikacija te algebre.

Ako u $(P(X), X, \to)$ važi Fregeov zakon (F), onda je specijalno: $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z)) = X$, odakle je, po (13) i 1.10.5, $Y \to Z \subseteq (X \to Y) \to (X \to Z)$, odnosno, zbog (12), $I_o((X\setminus Y) \cup Z) \subseteq I_o((X\setminus I_o(Y)) \cup I_o(Z))$.

Obratno, ako semi-interior operator I_o na X zadovoljava formulu (18), onda je, zbog (12) i (si_1), međusobno ekvivalentno sledećih pet uslova:

(19) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) = X$,

(20) $I_o((X\setminus I_o((X\setminus A) \cup I_o((X\setminus B) \cup C))) \cup$
$\cup\, I_o((X\setminus I_o((X\setminus A) \cup B)) \cup I_o((X\setminus A) \cup C))) = X$,

(21) $I_o((X\setminus I_o((X\setminus A) \cup I_o((X\setminus B) \cup C))) \cup$
$\cup\, I_o((X\setminus I_o((X\setminus A) \cup B)) \cup (X\setminus A) \cup C)) = X$,

(22) $I_o((X\setminus I_o((X\setminus A) \cup I_o((X\setminus B) \cup C))) \cup$
$\cup\, (X\setminus I_o((X\setminus A) \cup B)) \cup (X\setminus A) \cup C) = X$,

(23) $(X\setminus I_o((X\setminus A) \cup I_o((X\setminus B) \cup C))) \cup$
$\cup\, (X\setminus I_o((X\setminus A) \cup B)) \cup (X\setminus A) \cup C = X$.

No, $X\setminus((X\setminus A) \cup ((X\setminus B) \cup C)) \subseteq X\setminus I_o((X\setminus A) \cup I_o((X\setminus B) \cup C))$ i $X\setminus((X\setminus A) \cup B) \subseteq X\setminus I_o((X\setminus A) \cup B)$, zbog (si_2) i (si_4), tako da je (23) posledica formule:

(24) $(X\setminus((X\setminus A) \cup ((X\setminus B) \cup C))) \cup (X\setminus((X\setminus A) \cup B)) \cup$
$\cup\, (X\setminus A) \cup C = X$,

a (24) trivijalno važi, za sve podskupove A, B, C od X, q.e.d.

Zanimljivo je da uslovi (17) i (18) (mada, naravno, dovoljni) nisu i potrebni da bi u nestriktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri skupova važio Fregeov zakon. To se vidi iz narednog primera.

Primer 1.1 Neka je $X = \{a, b, c\}$, $K = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ i I_o semi-interior operator određen klasom $K = I(I_o)$ svojih invarijanata (za $Y \in P(X)\setminus K$ je $I_o(Y) = \emptyset$). Tada je, prema Th.I.1.25, $(K, X, \to)$, gde je operacija $\to$ definisana formulom I(11), skupovna (nestriktna) 1-deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP). Može se lako videti da je algebra $(K, X, \to)$

izomorfna (nestriktnoj) ω deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), koja je data kao Primer I.1.7, i otuda u $(K, X, \rightarrow)$ važi Fregeov zakon (F), iako I_o ne zadovoljava (17): $\{b, c\} = I_o((X\setminus\{a, b\})\cup\{b\}) \not\subseteq I_o((X\setminus I_o(\{a, b\}))\cup I_o(\{b\}) = \emptyset$. Iz ovog primera, takođe se vidi da se ni inkluzija (17), ni jednakost (18), koje inače važe za Kuratowskijev interior operator I_o, ne mogu izvesti bez pretpostavke:

(25) $I_o(Y\cap Z) = I_o(Y)\cap I_o(Z)$.

<u>Primer 1.2</u> (Primer 1-deduktivne S4 implikacijske algebre koja nije ω deduktivna S4 implikacijska algebra i u kojoj ne važi striktan Peirceov zakon (P′))

Neka je $X = \{a, b, c\}$ i I_o semi-interior operacija na X određena klasom invarijanata $K = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ iz prethodnog primera. Tada je, prema Th.1.25, Th.1.28 i Primeru 1.1, algebra $(P(X), X, \rightarrow)$, gde je $P(X)$ partitivni skup skupa X, a operacija $\rightarrow$ definisana pomoću (12), 1-deduktivna S4 implikacijska algebra u kojoj ne važi ni Fregeov zakon (F): $(X \rightarrow ((a,b) \rightarrow (b))) \rightarrow ((X \rightarrow (a,b)) \rightarrow (X \rightarrow (b))) = (b,c) \neq X$, ni striktan Peirceov zakon (P′): $(((a,b) \rightarrow \emptyset) \rightarrow (a,b)) \rightarrow (a,b) = (a,b) \neq X$.

<u>Korolar 1.28</u> Neka je $P(X)$ partitivni skup skupa X, τ topologija na X i I interior operacija topološkog prostora (X, τ). Tada je $(P(X), X, \rightarrow_\tau)$, gde je

(26) $Y \rightarrow_\tau Z = I((X\setminus Y)\cup Z)$ $(Y, Z \in P(X))$,

ograničena S4 implikacijska algebra. U toj algebri, otvoreni skupovi u topologiji τ su implikacije i vice versa, a relacija parcijalnog uređenja, definisana sa I.1(1), poklapa se sa skupovnom inkluzijom:

(27) $Y \subseteq Z$ ako i samo ako $Y \rightarrow_\tau Z = X$ $(Y, Z \in P(X))$.

Štaviše, ako je $P_o(X)(\subseteq P(X))$ neprazna klasa podskupova skupa X, zatvorena za operaciju $\rightarrow$ (definisanu sa (26)), onda je $X \in P_o(X)$ i $(P_o(X), X, \rightarrow_{\tau o})$ ($\rightarrow_{\tau o}$ je restrikcija na $P_o(X)$ operacije $\rightarrow_\tau$) je takođe S4 implikacijska algebra (jer je klasa S4 implikacijskih algebri, kao kvazivarijetet, zatvorena za podalgebre) koja se zove <u>S4 implikacijska algebra skupova</u>.

<u>Dokaz</u>: Ovo je posledica Def.1.2, Th.1.16, Th.1.25, Th.1.28, kao i činjenice da topološka interior operacija, pored postulata (si_1), (si_2), (si_3) i (si_4), zadovoljava i (25), i samim tim i (17) odnosno (18) (vide: Kuratowski /51 /).

<u>Teorema 1.29</u> Neka je $(P(X), X, \rightarrow_\tau)$ skupovna S4 implikacijska algebra, gde je $P(X)$ partitivni skup skupa X, I_τ interior oper-

acija neke topologije τ na X, a operacija $\rightarrow_{\tau}$ je definisana pomoću (26). Tada je $(P(X), X, \rightarrow_{\tau})$ <u>skupovna S5 implikacijska algebra</u> ako i samo ako interior operacija I_{τ} ispunjava zahtev:

(28) $I_{\tau}(X \setminus I_{\tau}(Y)) = X \setminus I_{\tau}(Y) \quad (Y \in P(X))$.

Inače, kao što je poznato, uslov (28) ekvivalentan je zahtevu da su svi otvoreni (zatvoreni) skupovi topološkog prostora (X, τ) istovremeno i zatvoreni (otvoreni) skupovi. Drugim rečima, otvoreni skupovi topologije τ čine Booleovu algebru (operacije su skupovna unija, presek i komplement).

<u>Dokaz</u>: (28) je dovoljan uslov da skupovna S4 implikacijska algebra $(P(X), X, \rightarrow_{\tau})$ bude S5 implikacijska algebra, jer se striktan Peirceov zakon (P′) izvodi iz (28) kao u dokazu Th.1.26 (jer je (14) posledica (15)).

Obratno, u skupovnoj S5 implikacijskoj algebri $(P(X), X, \rightarrow_{\tau})$, gde je P(X) partitivni skup skupa X, I_{τ} interior operacija neke topologije τ na X, a operacija $\rightarrow_{\tau}$ definisana pomoću (26), prema Def.1.2 i Kor.1.24, skup implikacija (koje se ovde poklapaju s τ-otvorenim skupovima) čini Booleovu algebru. U toj Booleovoj algebri vredi:

(29) $I_{\tau}(A) \cup I_{\tau}(B) = (I_{\tau}(A) \rightarrow_{\tau} I_{\tau}(B)) \rightarrow_{\tau} I_{\tau}(B)$,

(30) $I_{\tau}(A) \cap I_{\tau}(B) = \neg_{\tau}(\neg_{\tau} I_{\tau}(A) \cup \neg_{\tau} I_{\tau}(B))$,

gde je

(31) $\neg_{\tau} I_{\tau}(A) = I_{\tau}(A) \rightarrow_{\tau} \emptyset = I_{\tau}(X \setminus I_{\tau}(A))$,

a na levoj strani jednakosti (29) i (30), operacijski simboli označavaju redom uniju i presek skupova. (29) važi zbog (si_3), (si_9), (27) i činjenice da je unija skupova jednoznačno okarakterisana uslovima (6), (7) i (8). (30) važi zbog (25), (11) i (27), jer je presek dva skupa istovremeno i njihov infimum u odnosu na skupovnu inkluziju. S druge strane, (31) i (3) povlače

(32) $I_{\tau}(A) \cup \neg_{\tau} I_{\tau}(A) = X$,

dok (31) i (25) daju

(33) $I_{\tau}(A) \cap \neg_{\tau} I_{\tau}(A) = I_{\tau}(A \cap (X \setminus I_{\tau}(A))) = I_{\tau}(\emptyset) = \emptyset$.

No, komplementacija je u Booleovoj algebri jedinstvena i otuda sledi $\neg_{\tau} I_{\tau}(A) = X \setminus I_{\tau}(A)$, odnosno (28), zbog (31), q.e.d.

Navedeni primeri skupovnih S4 i S5 implikacijskih algebri i njihovih podalgebri pokrivaju do na izomorfizam sve takve algebre.

Prema Lemi I.1.3, implikativne algebre ne mogu se definisati samo pomoću jednakosnih aksioma, dok su (nestriktne) deduktivne implikativne algebre u kojima važi (SP) (alias pozitivne implikacijske algebre) jednakosno izrazive (Th.I.1.19).

Pitanje mogućnosti jednakosne formulacije nestriktnih 1-deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP) ostaje zasad otvoreno, dok sledeća teorema rešava negativno isti problem za sve striktne deduktivne implikativne algebre, kao i za slabo deduktivne implikativne algebre.

Teorema 1.30 Klasa S5 implikacijskih algebri nije jednakosno izraziva. A fortiori, iz Def.1.2, Th.1.16 i Leme 1.4 sledi da 1-deduktivne i ω deduktivne S3, S4 i S5 implikacijske algebre nisu jednakosno definabilne, kao ni slabo deduktivne implikativne algebre.

Dokaz: Neka je $X = \{a, b, c\}$, P(X) partitivni skup skupa X i $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ topologija na X čija interior operacija I očigledno zadovoljava uslov (28). Ako se operacija $\rightarrow_\tau$ na P(X) definiše pomoću (26), onda je $\mathfrak{A} = (P(X), X, \rightarrow_\tau)$, prema Kor.1.28 i Th.1.29, S5 implikacijska algebra. Tablica za implikativnu operaciju izgleda ovako:

$\rightarrow_\tau$	$\emptyset$	(a)	(b)	(c)	(a,b)	(a,c)	(b,c)	X
$\emptyset$	X	X	X	X	X	X	X	X
(a)	(b,c)	X	(b,c)	(b,c)	X	X	(b,c)	X
(b)	(a)	(a)	X	(a)	X	(a)	X	X
(c)	(a)	(a)	(a)	X	(a)	X	X	X
(a,b)	$\emptyset$	(a)	(b,c)	$\emptyset$	X	(a)	(b,c)	X
(a,c)	$\emptyset$	(a)	$\emptyset$	(b,c)	(a)	X	(b,c)	X
(b,c)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	X	X
X	$\emptyset$	(a)	$\emptyset$	$\emptyset$	(a)	(a)	(b,c)	X

Desno se nalazi tablica za algebru $\mathcal{B} = (B, 1', \rightarrow')$, $B = \{0', 1'\}$, koja nije čak ni implikativna algebra. Lako se proverava da je preslikavanje $h: P(X) \rightarrow B$,

$\rightarrow'$	0'	1'
0'	1'	1'
1'	1'	1'

$$(34)\quad h(Y) = \begin{cases} 0', & Y \in P(X) \setminus \tau \\ 1', & Y \in \tau \end{cases}$$

epimorfizam algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{B}$, jer je $h(Y \rightarrow_\tau Z) = h(Y) \rightarrow' h(Z) = 1'$. To znači da epimorfna slika S5 implikacijske algebre ne mora biti čak ni implikativna algebra. Otuda, klasa S5 implikacijskih algebri ne može se zadati samo pomoću jednakosnih aksioma, q.e.d.

Naredna prosta teorema očigledna je posledica Th.1.16 i Th.I.1.18.

Teorema 1.31 Skup implikacija u 1-deduktivnoj (ω deduktivnoj) S3 implikacijskoj algebri čini nestriktnu 1-deduktivnu (ω deduktivnu) implikativnu algebru u kojoj važi (SP). Preciznije, ako je $(A, 1, \rightarrow)$ 1-deduktivna (ω deduktivna) S3 implikacijska algebra i $I(\subseteq A)$ je skup implikacija te algebre, onda je $(I, 1, \rightarrow_I)$ ($\rightarrow_I$ je restrikcija na I operacije $\rightarrow$) nestriktna 1-deduktivna (ω deduktivna) implikativna algebra u kojoj važi (SP).

Marsdenov primer ω deduktivne implikativne algebre u kojoj važi (SP) (upor. Primer I.1.7, str. 31) može se uopštiti na sledeći način.

Primer 1.3 (Primer S4 implikacijske algebre)

Neka je $(A, \leq, 1)$ parcijalno uređen skup s najvećim elementom 1, pri čemi A može, ali ne mora, sadržati najmanji element 0. Neka podskup $I(\subseteq A)$ sadrži 1 i neka je I zatvoren za proizvoljne supremume:

(35) $B \subseteq I$ povlači $\sup B \in I$,

pri čemu je ispunjen uslov:

(36) Ako, za sve $b \in A$, $b \in B \subseteq I$ povlači $b \leq a$, onda $\sup B \leq a$.

Neka je, uz to, skup I koinicijalan u $(A, \leq, 1)$ u smislu da je svaki element skupa A minoriran nekim elementom iz I:

(37) Za svako $a \in A$, postoji element $c \in I$ takav da je $c \leq a$.

Otuda je jasno da, ako A sadrži 0, mora biti $0 \in I$. Definišimo na A implikativnu operaciju na sledeći način:

(38) $$a \rightarrow b = \begin{cases} 1, \text{ za } a \leq b \\ \sup\{c \in I : c \leq b\}, \text{ inače.} \end{cases}$$

Otuda,

(39) $a \nleq b$ i $b \in I$ povlače $a \rightarrow b = b$.

Prema tome (zbog (35) i (36)),

(40) $a \nleq b$ i $b \notin I$ povlače $a \rightarrow b < b < 1$,

što znači

(41) $a \leq b$ ako i samo ako $a \rightarrow b = 1$.

Ovako definisana operacija $\rightarrow$ očigledno zadovoljava aksiome (i_1), (i_2), (i_3), (i_4) (i (i_5), ako parcijalno uređen skup $(A, \leq, 1)$ ima najmanji element). Što se tiče (SAC), za $c \leq a \rightarrow b$ je $(a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow (a \rightarrow b)) = (a \rightarrow b) \rightarrow 1 = 1$, dok za $c \nleq a \rightarrow b$ važi $(a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow (a \rightarrow b)) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) = 1$ (po (39) i (38)). Primetimo da iz $a \notin I$ i $a \nleq b$ sledi

$b \to a < a < 1$ (po (40)) i, otuda, $a \to (b \to a) = b \to a \neq 1$, tj. (AC) ne važi. Važenje Fregeovog zakona (F) može se dokazati razmatranjem osam glavnih slučaja (u zavisnosti od međusobnog odnosa elemenata a, b i c), od kojih svaki ima nekoliko podslučaja.

(i) Ako su a, b i c međusobno neuporedivi ($a \parallel b$, $a \parallel c$ i $b \parallel c$), onda je $a \nleq b \to c = a \to c \leq c$ (po (39) i (40)) pa je $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) =$
$= (a \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, zbog (39) i (SAC).

(ii) Neka je $a \parallel b$ i $a \parallel c$, ali neka su b i c uporedivi. Tada iz $b \leq c$ sledi $a \to b \leq a \to c$ (zbog (38) i osobina supremuma), odakle je $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) =$
$= (a \to (b \to c)) \to 1 = 1$. Ako je, pak, $c < b$, tada je opet $a \nleq b \to c = a \to c \leq c$ i dalje se rasuđuje kao pod (i).

(iii) Neka je $a \parallel b$, $b \parallel c$ i neka su a i c uporedivi. Ako je $a \leq c$, (F) važi trivijalno: $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to 1) = (a \to (b \to c)) \to 1 = 1$. Ako je $c < a$, onda je $a \nleq b \to c = a \to c \leq c$ i imamo istu situaciju kao pod (i).

(iv) Ako je $a \parallel b$, uz uslov da su a i c uporedivi i b i c uporedivi, onda imamo dva podslučaja: $a \parallel b$, $a < c$ i $b < c$, odnosno $a \parallel b$, $c < a$ i $c < b$, i za oba je dokaz isti kao za podslučajeve ad (iii).

(v) Ako su a i b uporedivi, $a \parallel c$ i $b \parallel c$, onda je opet $a \nleq b \to c = a \to c \leq c$ i dokaz dalje teče kao pod (i).

(vi) Neka je $a \parallel c$ i neka su a i b uporedivi i b i c uporedivi. Tada imamo dva podslučaja. Ako je $a \leq b$, $a \parallel c$, $c < b$, onda je $a \nleq b \to c = a \to c \leq c$ i dokaz dalje ide kao ad (i). Ako je $b < a$, $a \parallel c$ i $b \leq c$, onda je $a \to b \leq a \to c$ i dalje se rasuđuje kao za prvi podslučaj ad (ii).

(vii) Ako je $b \parallel c$, uz pretpostavku da su a i b uporedivi i a i c uporedivi, onda mogu nastupiti dva podslučaja. Za $a < b$, $a < c$ i $b \parallel c$, važenje (F) je trivijalno (dokaz je isti kao za prvi podslučaj ad (iii)). Za $b < a$, $c < a$ i $b \parallel c$ je $a \nleq b \to c = a \to c$, a to je raspravljeno ad (i).

(viii) Ako su sva tri elementa a, b, c uporediva, onda imamo šest podslučajeva (u zavisnosti od njihovog međusobnog odnosa). Ako je $a \leq b \leq c$ ili $a \leq c \leq b$ ili $b \leq a \leq c$, onda je specijalno $a \leq c$ i dokaz je isti kao za prvi podslučaj ad (iii). Ako je $b \leq c < a$, onda je $a \to b \leq a \to c$ i dokaz se svodi na dokaz za prvi podslučaj ad (ii). Ako je $c < a \leq b$, onda je $a \nleq b \to c = a \to c \leq c$ i ovaj se podslučaj svodi na (i).

Neka je, najzad, $c \leqslant b \leqslant a$ i neka je bar jedna od nejednakosti stroga (jer, za $c = b = a$, (F) trivijalno važi). $c < b = a$ svodi se na prethodni podslučaj. $c = b < a$ daje $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = (a \to 1) \to 1 = 1$. Konačno, iz $c < b < a$ dobija se $a \nleqslant b \to c = a \to c \leqslant c$ i dalje se rasuđuje kao za (i).

Stavovi zaključno s Lemom 1.42 doprinose razjašnjavanju međusobnog odnosa nekoliko najvažnijih zakona striktnih deduktivnih implikativnih algebri. Glavna je posledica ovih razmatranja da svaki od zakona jake tranzitivnosti (JTP) odnosno (JTS), zajedno s ostalim aksiomama 1-deduktivne S3 implikacijske algebre, implicira Fregeov zakon. Nije jasno šta se dobija dodavanjem nekog od striktnih jakih zakona permutacije antecedenata (SJP) ili (SJP′) aksiomama striktnih 1-deduktivnih implikativnih algebri, jer se izvođenje Fregeovog zakona iz (JP) u nestriktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri (Th.I.1.30) ne može preneti u striktan kontekst.

<u>Lema 1.32</u> U implikativnoj algebri, zakon jake tranzitivnosti-prefiksiranja:

(JTP) $(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$ (upor. 1.14.3)

ekvivalentan je svakom od (beskonačno mnogo) iskaza:

(STP_n') Ako $c_1, \ldots, c_n \in I$ i $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (b \to c))\ldots) = 1$, onda $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to ((a \to b) \to (a \to c)))\ldots) = 1$.

Pored toga, u implikativnoj algebri, zakon slabe tranzitivnosti-prefiksiranja:

(STP_o) Ako $b \to c = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$ (up.1.7.5)

posledica je (JTP). Inače, očigledno, (STP_n') je oslabljenje od (STP_n).

<u>Dokaz</u> je doslovno isti kao dokaz Leme I.1.32.

<u>Lema 1.33</u> Ako u implikativnoj algebri važi zakon slabe tranzitivnosti-prefiksiranja (STP_o), onda je, u toj algebri, zakon jake tranzitivnosti-sufiksiranja:

(JTS) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$ (upor.1.14.2)

ekvivalentan svakom od(beskonačno mnogo) iskaza:

(STS_n') Ako $c_1, \ldots, c_n \in I$ i $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots) = 1$, onda $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to ((b \to c) \to (a \to c)))\ldots) = 1$.

Uz to, u implikativnoj algebri, zakon slabe tranzitivnosti-sufiksiranja:

(STS_o) Ako $a \to b = 1$, onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$ (upor.1.11.4)

posledica je (JTS), dok (JTS) sledi iz (STS_1'):

(STS_1') Ako je c_1 implikacija i $c_1 \to (a \to b) = 1$, onda $c_1 \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$, a (STS'_{n+1}) implicira (STS'_n).

Naravno, u implikativnoj algebri, iskaz (STS_n) je jači od (STS'_n).

Dokaz se može preuzeti od Leme I.1.35.

Lema 1.34 Ako u implikativnoj algebri važi zakon slabe tranzitivnosti-prefiksiranja (STP_o), onda je, u toj algebri, zakon kontrakcije:

(CTR') $(a \to (a \to b)) \to (a \to b) = 1$ (upor. 1.7.12)

ekvivalentan svakom od (beskonačno mnogo) iskaza:

(SK'_n) Ako $c_1, \ldots, c_n \in I$ i $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to (a \to b)))\ldots)$, onda $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots) = 1$.

Uz to, u implikativnoj algebri, iskaz:

(SK_o) Ako $a \to (a \to b) = 1$, onda $a \to b = 1$ (upor. I.1.5.2)

posledica je (CTR'), (CTR') sledi iz (SK'_1):

(SK'_1) Ako $c_1 \in I$ i $c_1 \to (a \to (a \to b)) = 1$, onda $c_1 \to (a \to b) = 1$

dok (SK'_{n+1}) povlači (SK'_n).

Otuda, u striktnoj 1-deduktivnoj implikativnoj algebri važi (SK'_n), za svako n (zbog 1.7.12 i 1.7.5). Pored toga, očigledno, u implikativnoj algebri, (SK_n) ima za posledicu (SK'_n).

Dokaz je formalno isti kao dokaz Leme I.1.36.

Lema 1.35 U implikativnoj algebri, (SK'_n) sledi iz (F'_n).

Dokaz je analogan dokazu Leme I.1.38.

Lema 1.36 Ako u implikativnoj algebri važi zakon slabe tranzitivnosti-prefiksiranja (STP_o), onda je, u toj algebri, striktan zakon afirmacije konsekventa:

(SAC) Ako $a \in I$, onda $a \to (b \to a) = 1$

ekvivalentan svakom od (beskonačno mnogo) iskaza:

(SAC_n) Ako $c_1, \ldots, c_n, a \in I$ i $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to a)\ldots) = 1$, onda $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (b \to a))\ldots) = 1$.

Uz to, u implikativnoj algebri, (SAC) sledi iz (SAC_1):

(SAC_1) Ako c_1, $a \in I$, onda $c_1 \to a = 1$ povlači $c_1 \to (b \to a) = 1$,

dok (SAC_{n+1}) implicira (SAC_n).

Inače, (SAC_n) predstavlja oslabljenje (AC_n).

Dokaz je formalno isti kao dokaz Leme I.1.39.

Lema 1.37 U implikativnoj algebri, iskaz

(ST'_n) Ako su $c_1, \ldots, c_n$ implikacije, onda:

$c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to b))\ldots) = 1$ i $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (b \to c))\ldots) = 1$

povlače $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to (a \to c))\ldots) = 1$

posledica je striktnog slabog zakona permutacije antecedenata (SSP_{n-1}) ((SSP_o) je isto što i (SSP)) i (F'_n).

Uz to, u implikativnoj algebri, zakon (ST'_{n+1}) povlači

(ST_n'), dok (ST_o) (alias (i_2)) sledi iz (ST_1').

Dokaz: Neka su $c_1,\dots,c_n$ implikacije. Tada:

1^o $c_1\to(\dots\to(c_n\to(a\to b))\dots)=1$, hyp.

2^o $c_1\to(\dots\to(c_n\to(b\to c))\dots)=1$, hyp.

3^o $a\to(c_1\to(\dots\to(c_n\to(b\to c))\dots))=1$, iz 2^o, po I.1.1.2

4^o $c_1\to(\dots\to(c_n\to(a\to(b\to c)))\dots)=1$, iz 3^o, $(SSP_o),\dots,(SSP_{n-1})$

5^o $c_1\to(\dots\to(c_n\to(a\to c))\dots)=1$, iz 1^o i 4^o po (F_n').

(Napomenimo da, po Lemi 1.3, (SSP_{n+1}) povlači (SSP_n).) Ostatak tvrđenja dokazuje se analogno lemama 1.4 i 1.5.

Lema 1.38 U implikativnoj algebri, iskaz (ST_n') posledica je zakona jake tranzitivnosti-prefiksiranja (JTP) i (F_{n-1}').

Dokaz: Prema Lemi 1.32, u implikativnoj algebri, zakon jake tranzitivnosti-prefiksiranja (JTP) ekvivalentan je svakom od iskaza (STP_n'). Dalje, (ST_n') se izvodi iz (STP_n') i (F_{n-1}'), kao u L.I.1.52.

Lema 1.39 U 1-deduktivnoj S3 implikacijskoj algebri, svaki od zakona (JTP) odnosno (JTS) ekvivalentan je iskazu (ST_2').

Dokaz: Prema prethodnoj lemi, u implikativnoj algebri, (F_1') i (JTP) impliciraju (ST_2'). Dokaz da, u implikativnoj algebri, (ST_2') i (SSP') povlače (STP_1') dat je u dokazu Kor.I.1.53. Dodajmo da je, po Lemi 1.32, u implikativnoj algebri, (JTP) ekvivalent.(STP_1').

Lema 1.40 U implikativnoj algebri,(F_n') sledi iz (STS_n'),(ST_n'),(SK_n').

Dokaz: Neka su $c_1,\dots,c_n$ implikacije. Tada:

1^o $c_1\to(\dots\to(c_n\to(a\to(b\to c)))\dots)=1$, hyp.

2^o $c_1\to(\dots\to(c_n\to(a\to b))\dots)=1$, hyp.

3^o $c_1\to(\dots\to(c_n\to((b\to c)\to(a\to c)))\dots)=1$, iz 2^o po (STS_n')

4^o $c_1\to(\dots\to(c_n\to(a\to(a\to c)))\dots)=1$, iz 1^o i 3^o po (ST_n')

5^o $c_1\to(\dots\to(c_n\to(a\to c))\dots)=1$, iz 4^o, po (SK_n').

Teorema 1.41 Ako u 1-deduktivnoj S3 (S4 ili S5) implikacijskoj algebri važi (JTP) ili (JTS), onda važi i (F). Drugim rečima, 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra u kojoj važi (JTP) ili (JTS) je ω deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra.

Dokaz: Dovoljno je, zbog Def.1.2 i Th.1.16, dokazati da se, iz postulata 1-deduktivne S3 implikacijske algebre i (JTP) ili (JTS), može izvesti (F). U implikativnoj algebri, prema Th.1.13, (F) sledi iz (SSP') i (F_2'), a po Lemi 1.40, (F_2') je posledica (STS_2'), (ST_2') i (SK_2'). Dalje, u 1-deduktivnoj S3 implikacijskoj algebri, (STS_2') je ekvivalentno sa (JTS) (ili (JTP)) - Lema 1.33, (ST_2') je ekvivalentno sa (JTP) (ili (JTS)) - Lema 1.39 i (SK_2') je ekvivalentno sa (CTR') - Lema 1.34.

Lema 1.42 U implikativnoj algebri, (SSP'), (SK_o) i (JTP) povlače (ST_1'), a (ST_1') implicira (STP_o) i (STS_o). (Vidi Lema I.1.[illegible])

2. Striktne deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom i kontrapozicionalnom komplementacijom

Poput nestriktnih, i striktne deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom (odnosno kontrapozicionalnom komplementacijom) su nebitne ekspanzije ograničenih (odnosno proizvoljnih) striktnih deduktivnih implikativnih algebri (upor. Th.2.1 i Th.2.10).

Definicija 2.1 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom (kao operacijom) je apstraktna algebra $(A, 1, \to, \neg)$, gde je $(A, 1, \to)$ 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra, a $\neg$ je jednoargumentna operacija na A (pseudokomplementacija) koja ispunjava sledeća dva zahteva:

(n_1) $\neg a \to (a \to b) = 1$,

(n_2) Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to \neg b) \to \neg a = 1$.

S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom (kao operacijom) je algebra $(A, 1, \to, \neg)$, gde je $(A, 1, \to)$ S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra, a jednoargumentna operacija $\neg$, pored (n_1), zadovoljava i:

(n_3) $(a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a) = 1$.

Primedba. Očigledno, svaka S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom je 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom. Uz to, (1-deduktivne) S3 implikacijske algebre sa pseudokomplementacijom obuhvataju (1-deduktivne) S4 implikacijske algebre sa pseudokomplementacijom, a ove sadrže (1-deduktivne) S5 implikacijske algebre sa pseudokomplementacijom.

Teorema 2.1 Za svaku 1-deduktivnu S3 (S4 ili S5) implikacijsku algebru sa pseudokomplementacijom (odnosno za svaku S3 (S4 ili S5) implikacijsku algebru sa pseudokomplementacijom) $(A, 1, \to, \neg)$, algebra $(A, 1, \to)$ je ograničena 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra (odnosno ograničena S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra) u kojoj je najmanji element $0 = \neg 1$ (tj. važi I.2(3)) i vredi I.2(1): $\neg a = a \to 0$. Drugim rečima, algebra $(A, 1, \to)$ je pseudokomplementirana s istom operacijom. Obrnuto, svaka ograničena 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra (odnosno svaka ograničena S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra) $(A, 1, \to)$ je pseudokomplementirana u smislu da, ako se operacija $\neg$ uvede pomoću I.2(1), onda važe (n_1), (n_2) i I.2(3) (odnosno (n_1), (n_3) i I.2(3)). Znači, $(A, 1, \to, \neg)$ je 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom (odnosno S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom).

Očigledno, opisane konstrukcije kojim se striktne deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom (kao operacijom) i pseudokomplementirane striktne deduktivne implikativne algebre pridružuju jedna drugoj međusobno su inverzne.

Dokaz: Neka je $(A, 1, \rightarrow, \neg)$ 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom. Po Def.2.1, to znači da je $(A, 1, \rightarrow)$ 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra. Stavimo, po definiciji, $0 = \neg 1$. Tada, iz (n_1) izlazi $\neg 1 \rightarrow (1 \rightarrow b) = 1$, tj. $\neg 1 \leqslant 1 \rightarrow b$, odakle je, zbog $1 \rightarrow b \leqslant b$ (I.1.5.1, Def.1.2 i lema 1.4, I.1.4 i I.1.2), $\neg 1 \leqslant b$. Dakle, $\neg 1$ je najmanji element u A, tj. algebra $(A, 1, \rightarrow)$ je ograničena. Uz to, takođe iz (n_1), sledi $\neg a \rightarrow (a \rightarrow 0) = 1$, odnosno $\neg a \leqslant a \rightarrow 0$ (zbog 1(1) i lema I.1.2, I.1.4 i 1.4). S druge strane, iz (n_2) (i navedenih stavova) se, zbog (i_4): $a \rightarrow 1 = 1$, dobija $(a \rightarrow \neg 1) \rightarrow \neg a = 1$, tj. $a \rightarrow 0 \leqslant \neg a$. Prema tome, $\neg a = a \rightarrow 0$, tj. važi I.2(1).

Ista tvrdnja, za S3 (S4 ili S5) implikacijske algebre sa pseudokomplementacijom, posledica je prethodnog dokaza, Def. 2.1, kao i činjenice da je (n_2) oslabljenje (n_3) u 1-deduktivnoj S3 (S4 ili S5) implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom.

Obrnuto, neka je $(A, 1, \rightarrow)$ ograničena 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra i definišimo pseudokomplement pomoću I.2(1): $\neg a = a \rightarrow 0$. Tada je: $\neg 1 = 0$ (tj.I.2(3), zbog I.1.5.3, Leme 1.4 i Def.1.2) i važe (n_1) i (n_2) (zbog 1.7.5 i 1.7.9, kao i Def.1.2 i lema 1.4, I.1.4 i (i_5)). (Ako je $(A, 1, \rightarrow)$ ograničena S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra, onda (n_3) važi zbog 1.13.1, (SSP′), Kor.1.15 i Def.1.2.)

Kao neposredne posledice prethodne teoreme i svojstava ograničenih 1-deduktivnih S3 (S4 ili S5) (odnosno ograničenih S3 (S4 ili S5) implikacijskih algebri) odmah se dobijaju osnovni zakoni 1-deduktivnih i ω deduktivnih S3 (S4 ili S5) implikacijskih algebri sa pseudokomplementacijom.

Teorema 2.2 Neka je $(A, 1, \rightarrow, \neg)$ 1-deduktivna S3 implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom. Tada:

2.2.1 $\neg 0 = 1$ (iz (i_1) i I.2(1))

2.2.2 $\neg 1 = 0$ (iz I.1.5.3 i I.2(1))

2.2.3 Ako $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow \neg b) = 1$, onda $(a \rightarrow b) \rightarrow \neg a = 1$.(1.7.1)

2.2.4 Ako $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow \neg b) = 1$, onda
$(a \rightarrow \neg b) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow \neg a) = 1$. (1.7.2)

$\underline{2.2.5}$ Ako $a \to \neg b = 1$, onda $(a \to b) \to \neg a = 1$. (1.7.3)

$\underline{2.2.6}$ Ako $a \to \neg b = 1$, onda $(a \to \neg b) \to ((a \to b) \to \neg a) = 1$. (1.7.4)

$\underline{2.2.7}$ $\neg a \to (a \to c) = 1$ (1.7.5)

$\underline{2.2.8}$ Ako $(a \to \neg b) \to (a \to b) = 1$, onda $(a \to \neg b) \to \neg a = 1$.(1.7.7

$\underline{2.2.9}$ Ako $(a \to \neg b) \to (a \to b) = 1$, onda
$(a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a) = 1$. (1.7.8)

$\underline{2.2.10}$ Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to \neg b) \to \neg a = 1$. (1.7.9)

$\underline{2.2.11}$ Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a) = 1$.(1.7.1

$\underline{2.2.12}$ Ako $a \leq b$, onda $a \to \neg b \leq \neg a$. (1.7.12)

$\underline{2.2.13}$ $a \to \neg a \leq \neg a$ (1.7.12)

$\underline{2.2.14}$ $\neg a \to a = \neg\neg a$ (1.7.13, 1.7.6, (i_5) i I.2(1))

$\underline{2.2.15}$ Ako $a \in I$, onda $a \leq \neg\neg a$. (1.10.3)

$\underline{2.2.16}$ $\neg a \leq \neg\neg\neg a$ (1.10.10)

$\underline{2.2.17}$ Ako $a \in I$, onda $\neg a = \neg\neg\neg a$. (1.10.11)

$\underline{2.2.18}$ $\neg\neg a = \neg\neg\neg\neg a$ (1.10.12)

$\underline{2.2.19}$ Ako $a \in I$, onda $a \to b = 1$ povlači $\neg b \to \neg a = 1$. (1.10.6)

$\underline{2.2.20}$ Ako $a \in I$, onda $a \leq b$ povlači $\neg b \leq \neg a$. (1.10.7)

$\underline{2.2.21}$ Ako $a \in I$, onda $a \to \neg a = \neg a$. (1.10.9)

$\underline{2.2.22}$ $\neg a \leq \neg(\neg a \to a)$ (1.10.14)

$\underline{2.2.23}$ Ako $a \in I$, onda $\neg a = \neg(\neg a \to a)$ (1.10.15)

$\underline{2.2.24}$ $\neg\neg a = \neg(\neg\neg a \to \neg a)$ (1.10.16)

$\underline{2.2.25}$ $\neg a \to a = ((\neg a \to a) \to \neg a) \to a$ (1.10.17)

$\underline{2.2.26}$ Ako $a, b \in I$, onda $a \to \neg b = 1$ povlači $b \to \neg a = 1$.(SSP')

<u>Dokaz</u>: Delovi ove teoreme, osim 2.2.1 i 2.2.2 direktne su posledice I.2(1), Th.2.1 i odgovarajućih delova Th.1.7 i Th.1.10 (brojevi u zagradama pokazuju kojih). Jedino nije neposredno jasno <u>2.2.14</u>: Iz 1.7.13 sledi $\neg a \to a \leq \neg\neg a$. Obrnuta nejednakost se dobija iz (i_5) i I.1(1): $0 \leq a$, odakle je, po 1.7.6, $\neg a \to 0 \leq \neg a \to a$, tj. $\neg\neg a \leq \neg a \to a$, zbog I.2(1).

<u>Teorema 2.3</u> Neka je $(A, 1, \to, \neg)$ 1-deduktivna S4 implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom. Tada, pored zakona iz prethodne teoreme, važe sledeći zakoni:

$\underline{2.3.1}$ Ako $a \to b = 1$, onda $\neg b \to \neg a = 1$. (1.11.4)

$\underline{2.3.2}$ Ako $a \leq b$, onda $\neg b \leq \neg a$. (1.11.5)

$\underline{2.3.3}$ $a \to \neg a = \neg a$ (1.11.6)

<u>Dokaz</u>: Svi delovi ove teoreme slede iz odgovarajućih delova Th.1.11, kao i I.2(1) i Th.2.1.

<u>Teorema 2.4</u> U 1-deduktivnoj S5 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom važi (pored zakona iz prethodne dve teoreme):

$\underline{2.4.1}$ Ako $a \in I$, onda $\neg a \to a = a$.

2.4.2 $\neg\neg a \to \neg a = \neg a$

2.4.3 Ako $a \in I$, onda $\neg\neg a = a$.

2.4.4 $\neg\neg\neg a = \neg a$

Dokaz: 2.4.1 je posledica Th.1.17, Th.1.16, Th.2.1 i I.2(1).

2.4.2 direktno sledi iz 2.4.1, I.2(1) i Def.I.1.2.

2.4.3 sledi iz 2.2.14 i 2.4.1 i primedbe posle Th.2.1.

2.4.4 sledi iz 2.4.3, I.2(1) i Def.I.1.2.

Teorema 2.5 Neka je $(A, 1, \to, \neg)$ S3 implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom. Tada važi (pored zakonâ iz Th.2.2):

2.5.1 $(a \to \neg b) \to ((a \to b) \to \neg a) = 1$ (1.13.1)

2.5.2 Ako $a, b \in I$, onda $a \to \neg b = b \to \neg a$. (1.13.2)

2.5.3 Ako $a \in I$, onda $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a) = 1$. (1.13.4)

2.5.4 Ako $a, b \in I$, onda $a \to \neg b = (a \to b) \to \neg a$. (1.13.5)

2.5.5 Ako $a, b \in I$, onda $a \to \neg b = \neg\neg(a \to \neg b)$.

2.5.6 Ako $a, b \in I$, onda $\neg\neg(a \to b) \leq a \to \neg\neg b$.

Dokaz: Svi delovi ove teoreme (osim poslednja dva) slede iz odgovarajućih delova Th.1.13 (naznačeno je kojih) kao i iz Th.2.1, I.2(1), Kor.1.15 i Def.1.2.

2.5.5 sledi iz striktnog analogona I.2(4)(tj. iz Leme I.2.7) koji se isto dokazuje, s tim što se koristi (SJP′), 1.10.11, 1.13.5 i 1.10.3, kao i Def.1.2, Kor.1.15 i Lema 1.5.

2.5.6 dokazuje se analogno I.2.8.2, uz korišćenje 2.2.15, 1.7.6, 2.2.20 i 2.5.6, kao i Def.1.2, Kor.1.15 i Leme 1.5.

Teorema 2.6 Neka je $(A, 1, \to, \neg)$ S4 implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom. Tada, pored zakonâ iz Th.2.2, Th.2.3 i Th.2.5, važi:

2.6.1 Ako $b \in I$, onda $(a \to \neg b) \to (b \to \neg a) = 1$. (1.14.1)

2.6.2 $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a) = 1$ (1.14.2)

Dokaz: Ovo je posledica Th.1.14, kao i Th.2.1, I.2(1), Kor.1.15 i Def.1.2.

Teorema 2.7 (1-deduktivna) S4 implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \to, \neg)$ je (1-deduktivna) S5 implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom ako i samo ako u $\mathfrak{A}$ važi:

(1) Ako $a \in I$, onda $\neg\neg a = a$.

Dokaz: U (1-deduktivnoj) S5 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom, prema Th.2.4.3, važi (1). Obratno, dovoljno je dokazati da je u 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom, striktan Peirceov zakon (P′) posledica (1). Naime, iz (i_5) i I.1(1): $0 \leq b$, po 1.7.6 i I.2(1), sledi $\neg a = a \to 0 \leq a \to b$, odakle se, primenom 1.11.5, dobija

$(a \to b) \to a \leqslant \neg a \to a = \neg\neg a = a$, zbog 2.2.14, ako je a implikacija. Znači, $((a \to b) \to a) \to a = 1$, ako je $a \in I$, q.e.d.

Iz Th.2.1, kao i Th.1.25, Th.1.26, Kor.1.28 i Th.1.29, odmah se dobijaju primeri, za koje se ispostavlja da su tipični, (1-deduktivnih) S4 i S5 implikacijskih algebri sa pseudokomplementacijom.

Teorema 2.8 Ako se u skupovnoj 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri $(P(X), X, \to)$ (upor. Th.1.25), gde je $P(X)$ partitivni skup skupa X, I_o semi-interior operator na $P(X)$, a operacija $\to$ na X je uvedena pomoću 1(12), uzme, po definiciji,

(2) $\neg Y = I_o(X \setminus Y) \quad (Y \in P(X))$,

onda su algebra $(P(X), X, \to, \neg)$ i njene podalgebre primeri skupovnih 1-deduktivnih S4 implikacijskih algebri sa pseudokomplementacijom. Štaviše, algebra $(P(X), X, \to, \neg)$ i njene podalgebre su skupovne 1-deduktivne S5 implikacijske algebre sa pseudokomplementacijom ako i samo ako semi-interior operator I_o ispunjava zahtev 1(14).

Dokaz odmah sledi iz prve tri citirane teoreme, ako zapazimo da je $\neg Y = I_o(X \setminus Y) = I_o((X \setminus Y) \cup \emptyset) = Y \to \emptyset$, zbog (2) i 1(12).

Teorema 2.9 Ako se u skupovnoj S4 implikacijskoj algebri $(P(X), X, \to_\tau)$ (upor. Kor.1.28), gde je $P(X)$ partitivni skup skupa X, I_τ interior operator topološkog prostora (X, τ), a operacija $\to_\tau$ na X je uvedena pomoću 1(26), uzme, po definiciji,

(3) $\neg_\tau Y = I\,(X \setminus Y) \quad (Y \in P(X))$,

onda su algebra $(P(X), X, \to_\tau, \neg_\tau)$ i njene podalgebre primeri skupovnih S4 implikacijskih algebri sa pseudokomplementacijom. Štaviše, algebra $(P(X), X, \to_\tau, \neg_\tau)$ i njene podalgebre su skupovne S5 implikacijske algebre sa pseudokomplementacijom ako i samo ako interior operacija I_τ zadovoljava uslov 1(28).

Dokaz je analogan dokazu prethodne teoreme, uz korišćenje Th.2.1, Kor.1.28 i Th.1.29, q.e.d.

Kao i kod nestriktnih deduktivnih implikativnih algebri sa pseudokomplementacijom, odustajanje od zahteva (n_1) dovodi do striktnih deduktivnih implikativnih algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom.

Definicija 2.2 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom (kao operacijom) je apstraktna algebra $(A, 1, \to, -_c)$, gde je $(A, 1, \to)$ 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra, a jednoargumentna operacija $-_c$ na A (kontrapozicionalna komplementacija) povezana je s ostalim operacijama postulatima:

(c_1) $-_c a = a \to -_c 1$,

(c_2) Ako $a \to b = 1$, onda $(a \to -_c b) \to -_c a = 1$.

S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom (kao operacijom) je algebra $(A, 1, \to, -_c)$, gde je $(A, 1, \to)$ S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra, a jednoargumentna operacija $-_c$, pored (c_1), zadovoljava i:

(c_3) $(a \to b) \to ((a \to -_c b) \to -_c a) = 1$.

Očigledno, (c_2) je posledica (c_3) u 1-deduktivnoj S3 implikacijskoj algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom.

Teorema 2.10 Svaka 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra (odnosno svaka S3 (S4 ili S5)) implikacijska algebra) $(A, 1, \to)$ je kontrapozicionalno komplementirana u smislu da operacija $-_c$, uvedena definicijom:

(4) $-_c a = a \to c$ (c je fiksirana implikacija algebre $(A, 1, \to)$)

zadovoljava

(5) $-_c 1 = c$,

i, sledstveno, (c_1) i (c_2) (odnosno (c_1) i (c_3)). Otuda, algebra $(A, 1, \to, -_c)$ je 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom). Obrnuto, za svaku 1-deduktivnu S3 (S4 ili S5) implikacijsku algebru s kontrapozicionalnom komplementacijom (odnosno, za svaku S3 (S4 ili S5) implikacijsku algebru s kontrapozicionalnom komplementacijom) $(A, 1, \to, -_c)$, algebra $(A, 1, \to)$ je 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra (odnosno S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra) i, ako se element c definiše pomoću (5), onda važi (4). Dakle, algebra $(A, 1, \to)$ je kontrapozicionalno komplementirana s istom operacijom. Pri tom su funkcije, koje pridružuju jedne drugim striktne deduktivne implikativne algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom (kao operacijom) i kontrapozicionalno komplementirane striktne deduktivne implikativne algebre, međusobno inverzne.

Dokaz: Neka je $(A, 1, \to)$ 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra i definišimo kontrapozicionalni komplement $-_c$ pomoću (4). Tada važi (5): $-_c 1 = 1 \to c = c$, ako je c implikacija, zbog 1.10.4 i Def.1.2, dok (c_2) važi zbog 1.7.9 i Def.1.2. Što se tiče (c_1), imamo: $-_c a = a \to c = a \to (1 \to c) = a \to -_c 1$, zbog 1.10.4, Def.1.2 i (4). (Ako je $(A, 1, \to)$ S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra, onda (c_3) važi zbog 1.13.1, (SSP′), Kor.1.15, Def.1.2 i (4).)

Obrnuto, neka je $(A, 1, \to, -_c)$ 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom.

Tada je, po Def.2.2, $(A, 1, \to)$ 1-deduktivna S3 (S4 ili S5) implikacijska algebra. Ako se, u toj algebri, element c definiše pomoću (5): $c = -_c 1$, onda, zbog (c_1), važi (4): $-_c a = a \to c$.

Ista tvrdnja za S3 (S4 ili S5) implikacijske algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom, posledica je prethodnog, Def.2.2, kao i činjenice da je (c_2) oslabljenje (c_3) u 1-deduktivnoj S3 (S4 ili S5) implikacijskoj algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom, q.e.d.

Kao posledice prethodne teoreme, Th.1.25, Th.1.26, Kor. 1.28 i Th.1.29 dobijaju se tipični primeri (1-deduktivnih) S4 i S5 implikacijskih algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom.

Teorema 2.11 Ako se u skupovnoj 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri $(P(X), X, \to)$ (upor. Th.1.25), gde je $P(X)$ partitivni skup skupa X, I_o semi-interior operator na $P(X)$ određen nekom klasom $S(X) (\subseteq P(X))$ zatvorenom za proizvoljne unije, takvom da $S(X)$ sadrži $\emptyset$ i X, a operacija $\to$ na X je uvedena pomoću 1(12) (otuda se klasa $S(X)$ poklapa sa skupom implikacija algebre $(P(X), X, \to)$), uzme, po definiciji,

(6) $\quad -_C Y = I_o((X \setminus Y) \cup C) \quad (Y \in P(X),\ C \in S(X))$,

onda su algebra $(P(X), X, \to, -_C)$ i njene podalgebre primeri skupovnih 1-deduktivnih S4 implikacijskih algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom. Štaviše, algebra $(P(X), X, \to, -_C)$ i njene podalgebre su skupovne 1-deduktivne S5 implikacijske algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom ako i samo ako semi-interior operator I_o ispunjava zahtev 1(14).

Dokaz sledi iz Th.1.25, Th.1.26, Th.2.10, kao i $-_C Y = Y \to C$ (zbog (6) i 1(12)) i $-_C X = I_o(C) = C$ (zbog $C \in S(X)$).

Teorema 2.12 Ako se u skupovnoj S4 implikacijskoj algebri $(P(X), X, \to_\tau)$ (upor. Kor.1.28), gde je $P(X)$ partitivni skup skupa X, I_τ interior operator topološkog prostora (X, τ), a operacija $\to_\tau$ na X je uvedena pomoću 1(26), uzme, po definiciji,

(7) $\quad -_C Y = I_\tau((X \setminus Y) \cup C) \quad (Y \in P(X),\ C \in \tau)$,

onda su algebra $(P(X), X, \to, -_C)$ i njene podalgebre primeri skupovnih S4 implikacijskih algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom. Štaviše, algebra $(P(X), X, \to_\tau, -_C)$ i njene podalgebre su skupovne S5 implikacijske algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom ako i samo ako topološki interior operator I_τ zadovoljava uslov 1(28).

Dokaz: Ovo je posledica Th.2.10, Kor.1.28, Th.1.29, prethodne teoreme i činjenice da je svaka S4 (S5) implikacijska algebra istovremeno i 1-deduktivna S4 (S5) implikacijska algebra.

Kao neposredne posledice Th.2.10 i osobina 1-deduktivnih i ω deduktivnih S3 (S4 ili S5) implikacijskih algebri, dobijaju se osnovni zakoni 1-deduktivnih S3 (S4 ili S5) implikacijskih algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom, odnosno S3 (S4 ili S5) implikacijskih algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom.

Teorema 2.13 Neka je $(A, 1, \rightarrow, -_c)$ 1-deduktivna S3 implikacijska algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom. Tada:

2.13.1 $-_c 0 = 1$ (iz (4) i (i_5), ako u A postoji nula)

2.13.2 Ako $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow -_c b) = 1$, onda $(a \rightarrow b) \rightarrow -_c a = 1$. (1.7.1)

2.13.3 Ako $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow -_c b) = 1$, onda $(a \rightarrow -_c b) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow -_c a) = 1$. (1.7.2)

2.13.4 Ako $a \rightarrow -_c b = 1$, onda $(a \rightarrow b) \rightarrow -_c a = 1$. (1.7.3)

2.13.5 Ako $a \rightarrow -_c b = 1$, onda $(a \rightarrow -_c b) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow -_c a) = 1$. (1.7.4)

2.13.6 Ako $(a \rightarrow -_c b) \rightarrow (a \rightarrow b) = 1$, onda $(a \rightarrow -_c b) \rightarrow -_c a = 1$. (1.7.7)

2.13.7 Ako $(a \rightarrow -_c b) \rightarrow (a \rightarrow b) = 1$, onda $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow -_c b) \rightarrow -_c a) = 1$. (1.7.8)

2.13.8 Ako $a \rightarrow b = 1$, onda $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow -_c b) \rightarrow -_c a) = 1$. (1.7.10)

2.13.9 Ako $a \leq b$, onda $a \rightarrow -_c b \leq -_c a$. (1.7.12)

2.13.10 $a \rightarrow -_c a \leq -_c a$ (1.7.12)

2.13.11 $-_c a \rightarrow a \leq -_c -_c a$ (1.7.13)

2.13.12 Ako $a \in I$, onda $a \leq -_c -_c a$ (1.10.3)

2.13.13 $-_c a \leq -_c -_c -_c a$ (1.10.10)

2.13.14 Ako $a \in I$, onda $-_c a = -_c -_c -_c a$. (1.10.11)

2.13.15 $-_c -_c a = -_c -_c -_c -_c a$ (1.10.12)

2.13.16 Ako $a \in I$, onda $a \rightarrow b = 1$ povlači $-_c b \rightarrow -_c a = 1$. (1.10.6)

2.13.17 Ako $a \in I$, onda $a \leq b$ povlači $-_c b \leq -_c a$. (1.10.7)

2.13.18 Ako $a \in I$, onda $a \rightarrow -_c a = -_c a$. (1.10.9)

2.13.19 $-_c a \leq -_c(-_c a \rightarrow a)$ (1.10.14)

2.13.20 Ako $a \in I$, onda $-_c a = -_c(-_c a \rightarrow a)$. (1.10.15)

2.13.21 $-_c -_c a = -_c(-_c -_c a \rightarrow -_c a)$ (1.10.16)

2.13.22 $-_c a \rightarrow a = ((-_c a \rightarrow a) \rightarrow -_c a) \rightarrow a$ (1.10.17)

2.13.23 Ako $a, b \in I$, onda $a \rightarrow -_c b = 1$ povlači $b \rightarrow -_c a = 1$. (Ovo je posledica (SSP').)

Teorema 2.14 Neka je $(A, 1, \rightarrow, -_c)$ 1-deduktivna S4 implikacijska algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom. Tada važe sledeći zakoni (uz one iz prethodne teoreme):

2.14.1 Ako $a \to b = 1$, onda $-_c b \to -_c a = 1$. (1.11.4)

2.14.2 Ako $a \leq b$, onda $-_c b \leq -_c a$. (1.11.5)

2.14.3 $a \to -_c a = -_c a$ (1.11.6)

Teorema 2.15 U 1-deduktivnoj S5 implikacijskoj algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom, pored zakonâ iz prethodne dve teoreme, važi:

2.15.1 Ako $a \in I$, onda $-_c a \to a = a$. (Th.1.17, tj. 1(1))

2.15.2 $-_c -_c a \to -_c a = -_c a$ (iz prethodnog i (c_1))

Teorema 2.16 U S3 implikacijskoj algebri s kontrapozicionalnom komplementacijom, pored zakonâ iz Th.2.13, važi:

2.16.1 $(a \to -_c b) \to ((a \to b) \to -_c a) = 1$ (1.13.1)

2.16.2 Ako $a, b \in I$, onda $a \to -_c b = b \to -_c a$. (1.13.2)

2.16.3 Ako $a \in I$, onda $(a \to b) \to (-_c b \to -_c a) = 1$. (1.13.4)

2.16.4 Ako $a, b \in I$, onda $a \to -_c b = (a \to b) \to -_c a$. (1.13.5)

2.16.5 $-_c a \to -_c(-_c 1 \to a) = (-_c 1 \to a) \to (-_c a \to a)$ (1.13.6)

2.16.6 Ako $a, b \in I$, onda $a \to -_c b = -_c -_c (a \to -_c b)$.(I.2(4))

2.16.7 Ako $a, b \in I$, onda $-_c -_c (a \to b) \leq a \to -_c -_c b$.
(I.2.8.2 i Th.1.31)

Teorema 2.17 U S4 implikacijskoj algebri, pored zakonâ iz Th.2.13, Th.2.14 i Th.2.16, takođe važe sledeći zakoni:

2.17.1 $(a \to b) \to (-_c b \to -_c a) = 1$ (1.14.2)

2.17.2 Ako $b \in I$, onda $(a \to -_c b) \to (b \to -_c a) = 1$. (SJP)

2.17.3 Ako $b \in I$, inda $a \to -_c b \leq b \to -_c a$. (iz prethodnog)

Teorema 2.18 U S5 implikacijskoj algebri, pored zakonâ iz prethodnih pet teorema, takođe važe sledeći zakoni:

2.18.1 Ako $a \in I$, onda $-_c -_c a = (-_c 1 \to a) \to a$. (1.18.1)

2.18.2 Ako $a, b \in I$, onda $-_c a \to (-_c b \to -_c((a \to b) \to b)) = 1$.
(1.18.2)

3. Implikativni filtri u striktnim deduktivnim implikativnim algebrama. Veze s homomorfizmima i kongruencijama tih algebri

Stavovi izloženi u ovom odeljku su manje-više očekivane i prirodne generalizacije stavova o implikativnim filtrima u nestriktnim deduktivnim implikativnim algebrama, mada njihovi dokazi nisu uvek obična preinaka dokaza iz odeljka I.3, jer su u mnogim pojedinostima potrebna nova tehnička rešenja. Inače, u teoremama o implikativnim filtrima u striktnim deduktivnim implikativnim algebrama reflektuju se mnoge metamatematičke osobine implikativnih računa čiji su modeli te algebre.

Lema 3.1 U 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri, implikativan filtar F ispunjava uslov (f_3) ako i samo ako F zadovoljava:

(f_3') Ako $a \in F$, onda $1 \to a \in F$.

Dokaz: Očigledno, iskaz (f_3') je poseban slučaj iskaza (f_3). Obratno, neka u 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri implikativan filtar F ispunjava zahtev (f_3'). Ako je $a \in F$, tada je, prema (f_3'), $1 \to a \in F$; no, zbog (i_4): $b \to 1 = 1$, imamo, po 1.11.4 i Def.1.2, $(1 \to a) \to (b \to a) = 1$, tako da se otuda, primenom (f_1) i (f_2), dobija $b \to a \in F$.

Naredni stav je striktan analogon Leme I.3.10.

Lema 3.2 U 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri, glavni implikativni filtar generisan nekom implikacijom te algebre zadovoljava uslove (f_3) i (f_4).

Dokaz: Prema Th.I.3.7, Lemi 1.4 i Def.1.2, u 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri $(A, 1, \to)$, skup $F(c_1) = \{x \in A : c_1 \leq x\}$ je implikativan filtar generisan singltonom $\{c_1\}$, tj. $F(c_1) = F(\{c_1\})$. Dokažimo (f_3') (što je, prema prethodnoj lemi, ekvivalentno sa (f_3)): ako je c_1 implikacija i $a \in F(c_1)$, tj. $c_1 \leq a$, onda je, po 1.7.6, 1.10.4 i Def.1.2, $c_1 = 1 \to c_1 \leq 1 \to a$, tj. $1 \to a \in F(c_1)$. Što se tiče (f_4), iz $a \to b \in F(c_1)$ i $b \to c \in F(c_1)$, tj. zbog I.1(1), iz $c_1 \to (a \to b) = 1$ i $c_1 \to (b \to c) = 1$, po (ST_1') i Lemi 1.37, sledi $c_1 \to (a \to c) = 1$, tj. $a \to c \in F(c_1)$.

Lema 3.3 U S4 implikacijskoj algebri, svaki implikativan filtar zadovoljava uslove (f_4) i (f_5). Otuda, prema prethodnoj lemi, svaki glavni implikativni filtar generisan nekom implikacijom S4 implikacijske algebre je specijalan implikativan filtar u toj algebri. Opštije, u S4 implikacijskoj algebri, implikativan filtar je specijalan ako i samo ako zadovoljava uslov (f_3').

Dokaz: U S4 implikacijskoj algebri, prema Th.1.14 i Def.1.2, važe oba zakona jake tranzitivnosti (JTP) i (JTS). Izvođenje (f_4) i (f_5) iz (f_1), (f_2), (JTP) i (JTS) isto je kao u dokazu Th.I.3.5, q.e.d.

Iduće četiri teoreme su algebarski analogoni teoremâ dedukcije tipa S4 (kao što su teoreme I.3.14, I.3.15, I.3.16 i I.3.17 (nestriktni) analogoni teoremâ dedukcije klasičnog tipa).

Teorema 3.4 Slabo deduktivna implikativna algebra $(A, 1, \rightarrow)$ je 1-deduktivna S4 implikacijska algebra ako i samo ako je u toj algebri ispunjeno:

(1) Ako $c \in I$, onda $F(a, c) = F(\{a\} \cup F(c)) = F(a) \vee F(c)$, gde je (prema I.3(8)) $F(a,c) = \{x \in A : a \rightarrow x \in F(c)\}$, a $F(\{a\} \cup F(c))$ je implikativan filtar generisan elementom a i glavnim implikativnim filtrom $F(c)$ generisanim elementom c.

Dokaz: U 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri, važenje (1) pokazuje se formalno isto kao u dokazu Th.I.3.14, pri čemu se poziva na 1.7.6 i 1.11.2 (kao i Def.1.2), umesto na I.1.12.6 i I.1.6.2). Obratno, slabo deduktivna implikativna algebra čiji svaki implikativan filtar $F(\{a\} \cup F(c))$ generisan nekim elementom a i glavnim implikativnim filtrom $F(c)$ generisanim nekom implikacijom c mora biti 1-deduktivna S4 implikacijska algebra, jer se (F_1') izvodi formalno isto kao (F_1) u drugom delu dokaza Th.I.3.14; (SAC) se dokazuje ovako: zbog $c \in F(\{a\} \cup F(c))$ i (1) imamo $c \in F(a, c)$, tj. $a \rightarrow c \in F(c)$, odnosno $c \leqslant a \rightarrow c$ ili $c \rightarrow (a \rightarrow c) = 1$, ako je c implikacija. Time je, prema Th.1.16, dokaz završen.

Teorema 3.5 U S3 implikacijskoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$, za svaki implikativan filtar F_0 u $\mathfrak{A}$ i svaki element $a \in A$, skup

(2) $F(a, F_0) = \{x \in A : a \rightarrow x \in F_0\}$

je implikativan filtar koji sadrži a. Ako je a implikacija i $\mathfrak{A}$ je S4 implikacijska algebra, onda je $F(a, F_0)$ specijalan implikativan filtar. Ako je F_0 specijalan implikativan filtar, onda je $F(a, F_0)$ najmanji implikativan filtar koji sadrži a i F_0, tj.

(3) Ako je F_0 specijalan implikativan filtar, onda
$$F(a, F_0) = F(\{a\} \cup F_0) = F(a) \vee F_0.$$

Dokaz: Najpre, $1 \in F(a, F_0)$, zbog (i_4) i (f_1): $a \rightarrow 1 = 1 \in F_0$. Ako je $b, b \rightarrow c \in F(a, F_0)$, tj. $a \rightarrow b$, $a \rightarrow (b \rightarrow c) \in F_0$, tada je, prema (F), (f_1) i (f_2), $a \rightarrow c \in F_0$, tj. $c \in F(a, F_0)$. Zbog (i_1) i (f_1) važi $a \rightarrow a = 1 \in F_0$, tj. $a \in F(a, F_0)$. Znači, $F(a, F_0)$ je implikativan filtar koji sadrži a. (Ovaj deo dokaza preuzet je od dokaza Th.I.3.15.) Ako je a implikacija, onda iz $b \in F(a, F_0)$, tj. $a \rightarrow b \in F_0$, sledi $a \rightarrow (1 \rightarrow b) \in F_0$ (zbog

(SJP′) i 1.10.5: $a \to (1 \to b) = 1 \to (a \to b) = a \to b$) odakle je $1 \to b \in F(a, F_o)$. Time je dokazano (f_3'), što, prema Lemi 3.3, znači da je $F(a, F_o)$ specijalan implikativan filtar. Ako je F_o specijalan implikativan filtar i $b \in F_o$, onda je, po (f_3), $a \to b \in F_o$, tj. $b \in F(a, F_o)$. Otuda, $F_o \subseteq F(a, F_o)$. Pretpostavimo da je F' implikativan filtar koji sadrži element a i specijalan implikativan filtar F_o: $a \in F'$ i $F_o \subseteq F'$. Tada $b \in F(a, F_o)$, tj. $a \to b \in F_o \subseteq F'$, sa $a \in F'$ i (f_2), daje $b \in F'$, što znači $F(a, F_o) \subseteq F'$. Prema tome, $F(a, F_o)$ je najmanji implikativan filtar koji sadrži element a i specijalan implikativan filtar F_o, odnosno važi (3), q.e.d.

Lema 3.6 je tehničkog karaktera i koristi se u dokazu Th.3.7 koja time postaje nezavisna od Th.1.6.

Lema 3.6 U S3 implikacijskoj algebri važi:

(4) Ako su c_1 i c_2 implikacije, onda

$$(c_1 \to c_2) \to (a \to b) \leqslant c_1 \to ((c_2 \to a) \to (c_2 \to b)).$$

Dokaz: Ako su c_1 i c_2 implikacije u S3 implikacijskoj algebri, onda, zbog Def.1.2, Kor.1.15 i Leme 1.5, prema 1.10.1, važi $c_2 \leqslant c_1 \to c_2$, odakle, po 1.10.7, sledi $(c_1 \to c_2) \to (a \to b) \leqslant c_2 \to (a \to b)$. No, $c_2 \to (a \to b) \leqslant (c_2 \to a) \to (c_2 \to b) \leqslant c_1 \to ((c_2 \to a) \to (c_2 \to b))$, ako je c_1 implikacija, zbog 1.13.1, I.1(1) i 1.10.1 (kao i zbog Def.1.2, Kor.1.15, Leme 1.5, Leme 1.4 i Leme I.1.4).

Teorema 3.7 (Herman, Marsden, Piziak) Neka je $(A, 1, \to)$ S4 implikacijska algebra i neka je A_o neprazan skup implikacija te algebre (tj. $\emptyset \neq A_o \subseteq I \subseteq A$). Tada je implikativan filtar generisan skupom implikacijâ A_o, u oznaci $F(A_o)$, specijalan implikativan filtar i vredi:

(5) $F(A_o) = \{x \in A : (\exists c_1, \dots, c_n \in A_o)\ c_1 \to (\dots \to (c_n \to x)\dots) = 1\}$.

Dokaz: Neka je F_o skup svih x iz A za koje postoje implikacije $c_1, \dots, c_n$ iz A_o takve da važi $c_1 \to (\dots \to (c_n \to x)\dots) = 1$. Tada je, za bilo koje c iz A_o, $c \to c = 1$ i $c \to 1 = 1$ (zbog (i_1) i (i_4)) i, otuda, $A_o \subseteq F_o$ i $1 \in F_o$.

Uzmimo da je a, $a \to b \in F_o$, to jest,

(6) $a_1 \to (\dots \to (a_n \to a)\dots) = 1$ (za neke $a_1, \dots, a_n$ iz A_o),

(7) $b_1 \to (\dots \to (b_m \to (a \to b))\dots) = 1$ (za neke $b_1, \dots, b_m \in A_o$).

Tada je: $1 = ((\dots(a_1 \to a_2) \to \dots) \to a_n) \to 1$

$= ((\dots(a_1 \to a_2) \to \dots) \to a_n) \to (b_1 \to (\dots \to (b_m \to (a \to b))\dots))$

$= b_1 \to (\dots \to (b_m \to (((\dots(a_1 \to a_2) \to \dots) \to a_n) \to (a \to b)))\dots)$

$\leqslant b_1 \to (\dots \to (b_m \to (((\dots(a_1 \to a_2) \to \dots) \to a_{n-1}) \to ((a_n \to a) \to (a_n \to b))))\dots)$

....

$\leq b_1 \to (\ldots \to (b_m \to ((a_1 \to (\ldots \to (a_n \to a)\ldots)) \to (a_1 \to (\ldots \to (a_n \to b)\ldots))))\ldots)$
$= b_1 \to (\ldots \to (b_m \to (1 \to (a_1 \to (\ldots \to (a_n \to b)\ldots))))\ldots)$
$= b_1 \to (\ldots \to (b_m \to (a_1 \to (\ldots \to (a_n \to b)\ldots)))\ldots)$.
Prema tome, $b \in F_o$. (Ovde je korišćeno (i_4), (6), (7), (SJP′), (4), 1.7.6, 1.10.4, kao i Def.1.2, Kor.1.15 i Lema 1.5.)

F_o je specijalan implikativan filtar, jer se iz $a \in F_o$, tj. (6), pomoću 1.10.4, (SJP′) i definicije F_o dobija $a_1 \to (\ldots \to (a_n \to (1 \to a))\ldots) = 1$, tj. $1 \to a \in F_o$, čime je dokazano (f_3').

Treba još dokazati da je F_o najmanji implikativan filtar koji sadrži A_o. Pretpostavimo da je F' implikativan filtar takav da je $A_o \subseteq F'$ i pokažimo da tada mora biti $F_o \subseteq F'$. Naime, ako je $a \in F_o$, onda važi (6) i, pošto je $a_1,\ldots,a_n \in A_o \subseteq F'$, primenom (f_1) i (f_2), dobija se $a \in F'$.

<u>Teorema 3.8</u> Slabo deduktivna implikativna algebra $(A, 1, \to)$ je S4 implikacijska algebra ako i samo ako je u $(A, 1, \to)$ ispunjeno:

(8) Ako su $c_1,\ldots,c_n$ implikacije, onda
$F(\{c_1,\ldots,c_n\}) = \{x \in A : c_1 \to (\ldots \to (c_n \to x)\ldots) = 1\}$,
pri čemu je $F(\{c_1,\ldots,c_n\})$ specijalan implikativan filtar.

<u>Dokaz</u>: Da je, u S4 implikacijskoj algebri $(A, 1, \to)$, skup F' svih x iz A za koje je, za fiksirane implikacije $c_1,\ldots,c_n$, $c_1 \to (\ldots \to (c_n \to x)\ldots) = 1$, specijalan implikativan filtar, dobija se na sledeći način: (f_1) sledi iz (i_4), dok je (f_2) posledica (F_o) (za $n = 1$) odnosno (F'_{n-1}) (za $n \geqslant 2$). (f_3') se pokazuje kao u Th.3.7 iz 1.10.4 i (SJP′). $c_i \in F'$ $(i = 1,\ldots,n)$ proizlazi iz (i_1) i (i_4). Najzad, isto kao u Th.3.7, pokazuje se da je F' najmanji implikativni filtar koji sadrži $\{c_1,\ldots,c_n\}$.

Obratno, prema Th.I.3.17, u slabo deduktivnoj implikativnoj algebri važi I.3(15): $F(\{c_1,\ldots,c_n\}) = F(c_1)\vee\ldots\vee F(c_n)$, odakle se, zbog (8), dobija (SSP′) (za $n = 2$) odnosno (SSP'_{n-2}) (za $n \geqslant 3$). Takođe, iz (8) i iz I.3(15), dobija se (F_o) (za $n = 1$) i (F'_{n-1}) (za $n \geqslant 2$), što, po Def.1.2, znači da je $(A, 1, \to)$ S3 implikacijska algebra. Treba još dokazati (SAC). Po pretpostavci, $F(\{c_1\}) = F(c_1)$ je specijalan implikativan filtar, za bilo koju implikaciju c_1. Otuda, po Th.3.5, $\{x \in A : a \to x \in F(c_1)\} = F(a) \vee F(c_1)$, za sve a iz A i c_1 iz I. No, $c_1 \in F(a) \vee F(c_1)$ i, odatle, $a \to c_1 \in F(c_1)$, odnosno $c_1 \leqslant a \to c_1$, to jest $c_1 \to (a \to c_1) = 1$, ako je c_1 implikacija, q.e.d.

Prema Lemi I.3.11, presek proizvoljne klase (specijalnih) implikativnih filtara u implikativnoj algebri je (specijalan) implikativan filtar, što, po Lemi I.3.13, ima za posledicu da skup svih implikativnih filtara implikativne algebre čini potpunu mrežu, gde je infimum skupovni presek, a supremum klase implikativnih filtara je implikativni filtar generisan unijom te klase. Isto tako, i specijalni implikativni filtri implikativne algebre čine mrežu.

Lema 3.9 Klasa $\mathcal{F}_A^s$ svih specijalnih implikativnih filtara implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ je potpuna mreža u kojoj je A najveći element, a $\{1\}$ je, po Lemi I.3.1, najmanji element ako i samo ako u $\mathfrak{A}$ važe (STP_0) i (STS_0). U toj mreži, infimum proizvoljne klase specijalnih implikativnih filtara je skupovni presek te klase, dok se supremum klase $\{F_j : j \in J\}$ specijalnih implikativnih filtara definiše kao specijalan implikativan filtar generisan unijom te klase:

(9) $\bigvee_s \{F_j : j \in J\} = F_s(\bigcup \{F_j : j \in J\})$,

što, po Def.I.3.2, znači da je to presek svih specijalnih implikativnih filtara koji sadrže uniju te klase.

U slučaju dvočlane klase $\{F_1, F_2\}$ specijalnih implikativnih filtara, oznake su uobičajene (infiksne):

(10) $F_1 \vee_s F_2 = \bigvee_s \{F_1, F_2\} = F_s(F_1 \cup F_2)$.

Potpuna mreža svih specijalnih implikativnih filtara implikativne algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$, u oznaci $\mathfrak{A}_s^*$ (gde je $\mathfrak{A}_s^* = (\mathcal{F}_A^s, \cap, \bigvee_s, \{1\}, A)$, ako u $\mathfrak{A}$ važe (STP_0) i (STS_0)) nije podmreža mreže svih implikativnih filtara te algebre $\mathfrak{A}^* = (\mathcal{F}_A, \cap, \bigvee, \{1\}, A)$ (upor. Lemu I.3.13), jer je, u opštem slučaju, $F_1 \vee F_2 \subseteq F_1 \vee_s F_2$, ako su F_1 i F_2 specijalni implikativni filtri.

Zanimljivo je da se operator F_s iz (9) i (10) ponaša kao operator zatvorenja na mreži $\mathfrak{A}^*$ svih implikativnih filtara implikativne algebre $\mathfrak{A}$.

Teorema 3.10 Ako je $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$ implikativna algebra, $\mathfrak{A}^* = (\mathcal{F}_A, \cap, \bigvee, \{1\}, A)$ mreža njenih implikativnih filtara i $F_s(B)$ ($B \subseteq A$) je presek svih specijalnih implikativnih filtara koji sadrže B, onda važi:

3.10.1 $B \subseteq F_s(B)$ $(B \subseteq A)$

3.10.2 Ako $B \subseteq F_s(C) \subseteq A$, onda $F_s(B) \subseteq F_s(C)$.

3.10.3 Ako $B \subseteq C \subseteq A$, onda $F_s(B) \subseteq F_s(C)$.

3.10.4 $F_s(F_s(B)) = F_s(B)$ $(B \subseteq A)$

3.10.5 $F_s(A) = A$

3.10.6 $F(B) \subseteq F_s(B)$ $(B \subseteq A)$

3.10.7 $F_s(\{1\}) = \{1\}$ ako i samo ako u $\mathfrak{A}$ važe (STP_0) i (STS_0).

3.10.8 $F_s(F_1 \vee F_2) = F_s(F_1) \vee F_s(F_2)$ $(F_1, F_2 \in \mathcal{F}_A)$

Dokaz: 3.10.1 - 3.10.6 je jasno.

3.10.7 je posledica Leme I.3.1.

3.10.8 Iz $F_1 \subseteq F_1 \vee F_2 \subseteq F_s(F_1 \vee F_2)$ sledi, po 3.10.1 i 3.10.2, $F_s(F_1) \subseteq F_s(F_1 \vee F_2)$; analogno se dobija $F_s(F_2) \subseteq F_s(F_1 \vee F_2)$. Otuda, $F_s(F_1) \vee F_s(F_2) \subseteq F_s(F_1 \vee F_2)$. S druge strane, $F_s(F_1 \vee F_2) = F_s(F(F_1 \cup F_2)) \subseteq F_s(F_s(F_1 \cup F_2)) = F_s(F_1 \cup F_2) \subseteq F_s(F_1) \vee F_s(F_2)$, zbog 3.10.6, 3.10.3, 3.10.4, 3.10.1 i 3.10.2.

Analiza dokaza Leme I.3.12 (Tarski) pokazuje da se ona, bez izmena, odnosi i na specijalne implikativne filtre.

Lema 3.11 U implikativnoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$, $F_s(A_o)$ se poklapa s unijom svih implikativnih filtara $F(A_j)$, gde je $\{A_j : j \in J\}$ klasa svih konačnih podskupova skupa A_o i $A_o \subseteq A$. Drugim rečima,

(11) $F_s(A_o) = \bigcup \{F_s(A_j) : j \in J \text{ i } |A_j| < \aleph_0 \text{ i } A_o = \bigcup_{j \in J} A_j\}$.

Iduća tri stava bave se nekim distributivnim relacijama u mreži svih specijalnih implikativnih filtara striktnih deduktivnih implikativnih algebri.

Lema 3.12 U potpunoj mreži svih specijalnih implikativnih filtara $\mathfrak{A}_s^* = (\mathcal{F}_A^s, \cap, \vee_s, \{1\}, A)$ S4 implikacijske algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ važi sledeći distributivni zakon:

(12) $F_1 \cap (F_2 \vee_s F(a)) = (F_1 \cap F_2) \vee_s (F_1 \cap F(a))$ $(a \in I)$.

Dokaz je modifikacija prvog dela dokaza Th.I.3.18. Dovoljno je dokazati inkluziju:

(13) $F_1 \cap (F_2 \vee_s F(a)) \subseteq (F_1 \cap F_2) \vee_s (F_1 \cap F(a))$ $(a \in I)$,

jer obrnuta inkluzija uvek važi. Neka je $x \in F_1 \cap (F_2 \vee_s F(a))$, tj. $x \in F_1$ i $x \in F_2 \vee_s F(a)$. Tada je $a \rightarrow x \in F_1$ (po (f_3), jer je F_1 specijalan implikativan filtar) i $a \rightarrow x \in F_2$ (po Th.3.5, zbog $F_2 \vee_s F(a) = F_2 \vee F(a) = F(a, F_2)$, jer je F_2 specijalan implikativan filtar i a je implikacija). Otuda,

(14) $a \rightarrow x \in F_1 \cap F_2 \subseteq (F_1 \cap F_2) \vee_s (F_1 \cap F(a))$ $(a \in I)$,

po Lemi I.3.11. S druge strane, $x \in F_1$ povlači $(a \rightarrow x) \rightarrow x \in F_1$ (po (f_3)), dok $a \in F(a)$ i 1.10.3: $a \leq (a \rightarrow x) \rightarrow x$, ako je a implikacija, daju $(a \rightarrow x) \rightarrow x \in F(a)$, odakle je

(15) $(a \rightarrow x) \rightarrow x \in F_1 \cap F(a) \subseteq (F_1 \cap F_2) \vee_s (F_1 \cap F(a))$ $(a \in I)$.

Iz (14) i (15), primenom (f_2), dobija se $x \in (F_1 \cap F_2) \vee_s (F_1 \cap F(a))$. Time je dokazano (13), odnosno (12).

Indukcijom se, pomoću (12), lako pokazuje:

(16) Ako su $a_1, \dots, a_n$ implikacije i F' specijalan implikativan filtar, $F' \cap (F(a_1) \vee_s \dots \vee_s F(a_n)) = (F' \cap F(a_1)) \vee_s \dots \vee_s (F' \cap F(a_n))$

Posledica Lema 3.11 i 3.12 je zakon distribucije infimuma prema beskonačnom supremumu u potpunoj mreži svih specijalnih implikativnih filtara S4 implikacijske algebre.

Teorema 3.13 U potpunoj mreži $\mathfrak{A}_s^* = (\mathcal{F}_A^s, \cap, \bigvee_s, \{1\}, A)$ svih specijalnih implikativnih filtara S4 implikacijske algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$, važi sledeći beskonačan distributivan zakon:

(17) $F' \cap \bigvee_{s\, j \in J} F_j = \bigvee_{s\, j \in J} (F' \cap F_j)$.

Dokaz je formalno isti kao dokaz drugog dela Th.I.3.18.

Sledeća teorema uopštava Th.I.3.19 i Th.I.3.20.

Teorema 3.14 Ako su F(a), F(b) i F(c) glavni implikativni filtri generisani implikacijama a, b i c 1-deduktivne S4 implikacijske algebre, onda važe sledeći distributivni zakoni:

(18) $F(c) \cap (F(a) \vee F(b)) = (F(c) \cap F(a)) \vee (F(c) \cap F(b))$,

(19) $F(c) \vee (F(a) \cap F(b)) = (F(c) \vee F(a)) \cap (F(c) \vee F(b))$.

Napomena: Zakoni (18) i (19) ne slede jedan iz drugog, jer, u 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri, glavni implikativni filtri generisani implikacijama ne čine mrežu.

Dokaz: Umesto (18), dovoljno je dokazati inkluziju:

(20) $F(c) \cap (F(a) \vee F(b)) \subseteq (F(c) \cap F(a)) \vee (F(c) \cap F(b))$,

gde su a, b i c implikacije, jer obrnuta inkluzija uvek važi. Iz $x \in F(c) \cap (F(a) \vee F(b))$, tj. $x \in F(c)$ i $x \in F(a) \vee F(b)$ i $a, b, c \in I$, sledi $a \rightarrow x \in F(c)$ (po (f_3) i Lemi 3.2) i $a \rightarrow x \in F(b)$ (po Th.3.4), odakle je

(21) $a \rightarrow x \in F(c) \cap F(b) \subseteq (F(c) \cap F(a)) \vee (F(c) \cap F(b))$

$(a, b, c \in I)$. Opet po (f_3) i Lemi 3.2, $x \in F(c)$ povlači $(a \rightarrow x) \rightarrow x \in F(c)$, dok $a \in F(a)$ i 1.10.3: $a \leq (a \rightarrow x) \rightarrow x$, ako je a implikacija, daju $(a \rightarrow x) \rightarrow x \in F(a)$, odakle je

(22) $(a \rightarrow x) \rightarrow x \in F(c) \cap F(a) \subseteq (F(c) \cap F(a)) \vee (F(c) \cap F(b))$,

gde su a, b i c implikacije. Iz (21) i (22), primenom (f_2), dobija se $x \in (F(c) \cap F(a)) \vee (F(c) \cap F(b))$. Time je dokazano (20) odnosno (18). (Dokaz je dobijen neznatnom modifikacijom dokaza formule (12).)

Što se tiče (19), opet je dovoljno dokazati samo inkluziju:

(23) $F(c) \vee (F(a) \cap F(b)) \supseteq (F(c) \vee F(a)) \cap (F(c) \vee F(b))$,

gde su a i b implikacije. Pretpostavimo da je $x \in F(c) \vee F(a)$ i $x \in F(c) \vee F(b)$, gde su a i b implikacije. Prema Th.3.4, tada je $c \rightarrow x \in F(a)$ i $c \rightarrow x \in F(b)$, tj. $c \rightarrow x \in F(a) \cap F(b)$, odakle je

(24) $c \rightarrow x \in F(c) \vee (F(a) \cap F(b))$ $(a, b \in I)$.

S druge strane, očigledno je

(25) $c \in F(c) \subseteq F(c) \vee (F(a) \cap F(b))$.

Iz (24) i (25), primenom (f_2), dobija se $x \in F(c) \vee (F(a) \cap F(b))$.

Time je dokazano (23), odnosno (19). (Ovo je znatno uprošćenje ideje dokaza Th.I.3.20.)

Naredna teorema pokazuje da, u ograničenoj S5 implikacijskoj algebri, glavni implikativni filtri generisani implikacijama te algebre čine mrežu koja je izomorfna mreži implikacija te algebre.

Teorema 3.15 U S5 implikacijskoj algebri važi:

(26) $F(a) \cap F(b) = F(a \cup b)$ $(a, b \in I)$,

(27) $F_s(a) \cap F_s(b) = F_s(a \cup b)$ $(a, b \in I)$.

Uz to, u ograničenoj S5 implikacijskoj algebri važi:

(28) $F(a) \vee F(b) = F(a \cap b)$ $(a, b \in I)$,

(29) $F_s(a) \vee_s F_s(b) = F_s(a \cap b)$ $(a, b \in I)$.

Dokaz: Dokažimo (26). Ako su a i b implikacije u S5 implikacijskoj algebri, onda je, prema lemama 3.3 i I.3.11, $F(a) \cap F(b)$ specijalan implikativan filtar. Zato, iz $x \in F(a) \cap F(b)$, prema Lemi 3.3 i (f_3'), sledi $1 \to x \in F(a) \cap F(b)$, tj. $a \to (1 \to x) = 1$ i $b \to (1 \to x) = 1$ (zbog I.1(1) i Th.I.3.7), odakle se, zbog 1.18.2 i Def.1.3, dvostrukom primenom I.1.1.1, dobija $(a \cup b) \to (1 \to x) = 1$, odnosno $1 \to x \in F(a \cup b)$. Otuda, po (f_1) i (f_2), imamo $x \in F(a \cup b)$. Time je dokazana inkluzija $F(a) \cap F(b) \subseteq F(a \cup b)$. Obrnuta inkluzija sledi iz 1(6), 1(7), Th.I.3.7 i Leme I.1.2. (27) je direktna posledica (26), jer je, po Lemi 3.3, $F_s(c) = F(c)$, ako je c implikacija.

Dokažimo (28). Ako su a i b implikacije ograničene S5 implikacijske algebre, onda je, prema Kor.1.24, $a \cap b \leq a$ i $a \cap b \leq b$, odakle sledi $F(a) \subseteq F(a \cap b)$ i $F(b) \subseteq F(a \cap b)$, po Th.I.3.7 i Lemi I.1.2. Ako je F' implikativan filtar, $F(a) \subseteq F'$ i $F(b) \subseteq F'$, onda je $a, b \in F'$, odakle se, zbog:

(30) Ako $a, b \in I$, onda $a \to (b \to (a \cap b)) = 1$,

(f_1) i (f_2), dobija $a \cap b \in F'$, tj. $F(a \cap b) \subseteq F'$. Time je dokazano (28). (29) sledi iz (28) iz istih razloga iz kojih iz (26) sledi (27).

(Dokaz (30): Najpre imamo $a \cap b = \neg(\neg a \cup \neg b) = \neg((\neg a \to \neg b) \to \neg b)$ $= \neg((b \to \neg\neg a) \to \neg b) = \neg((b \to a) \to (b \to 0)) = \neg(b \to (a \to 0)) =$ $= \neg(b \to \neg a)$, zbog 1(11), 2.5.2, 2.4.3, I.2(1), 1.13.5 i I.2(1), ako su a i b implikacije. Sada je $a \to (b \to (a \cap b)) =$ $= a \to (b \to \neg(b \to \neg a)) = a \to ((b \to \neg a) \to \neg b) = (b \to \neg a) \to (a \to \neg b)$ $= (a \to \neg b) \to (a \to \neg b) = 1$, zbog prethodnog, 2.5.2, 1.13.2, 2.5.2 i (i_1).)

Naredna četiri stava posvećena su karakterizacijama nekih klasa implikativnih filtara u (1-deduktivnim) S4 implikacijskim algebrama (upor. Th.I.3.24, Th.I.3.25, Kor.I.3.31 i Kor. I.3.32).

Slabljenjem uslova I.3(35) koji karakteriše ireducibilne implikativne filtre u ω deduktivnoj implikativnoj algebri u kojoj važi (SP), dobija se jedan potreban (ali ne i dovoljan) uslov za specijalne i ireducibilne implikativne filtre S4 implikacijske algebre.

Teorema 3.16 U S4 implikacijskoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$, specijalan i ireducibilan implikativan filtar F_0 zadovoljava uslov:

(31) Za sve implikacije $a, b \in A \setminus F_0$, postoji element c iz $A \setminus F_0$ takav da je $a \leqslant c$ i $b \leqslant c$.

Dokaz: Neka je u S4 implikacijskoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$ specijalan implikativan filtar F_0 istovremeno i ireducibilan. Kad ne bi bio ispunjen uslov (31), tj. kad bi za neke implikacije a, b iz F i svako x takvo da je $a \leqslant x$ i $b \leqslant x$, x pripadalo F_0, bilo bi $F(a) \cap F(b) \subseteq F_0$, tj. $F_0 = F_0 V_s (F(a) \cap F(b))$, odakle bi, zbog (12) (jer bi, po lemama 3.2, 3.3 i 3.9, $F(a)$, $F(b)$ i njihov presek bili specijalni implikativni filtri, pod uslovom da su a i b implikacije), sledilo $F_0 = (F_0 V_s F(a)) \cap (F_0 V_s F(b))$. No, $F_0 \neq F_0 V_s F(a)$ i $F_0 \neq F_0 V_s F(b)$, jer je $a, b \in A \setminus F_0$, pri čemu bi $F_0 V_s F(a)$ i $F_0 V_s F(b)$ morali biti pravi implikativni filtri. To bi značilo da F_0 ne bi bio ireducibilan implikativan filtar. (Dokaz je modifikacija dokaza Th.I.3.25.)

Da (31) nije dovoljan uslov da specijalan implikativan filtar F_0 bude ireducibilan, pokazuje primer skupovne S4 implikacijske algebre $(P(X), X, \rightarrow_{\tau})$, gde je $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$ i $F_0 = \{\{a, c\}, X\}$.

Malom modifikacijom dokaza prethodne teoreme, uz korišćenje (19), dobija se ovaj rezultat:

Teorema 3.17 U 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri, glavni implikativni filtar $F(c)$ generisan nekom implikacijom c, ako je ireducibilan, zadovoljava uslov (31).

Teorema 3.18 U S4 implikacijskoj algebri $(A, 1, \rightarrow)$, specijalan implikativan filtar F je maksimalan u odnosu na element a ako i samo ako F ispunjava uslove:

(32) $a \notin F$

i (33) za svako $x \notin F$, $x \rightarrow a \in F$.

Dokaz: Prema Th.I.3.29, uslovi (32) i (33) su dovoljni već u implikativnoj algebri da implikativan filtar F bude maksimalan u odnosu na element a. Nužnost tih uslovâ može se pokazati modifikacijom dokaza Th.I.3.30. Neka je, u S4 implikacijskoj algebri

$(A, 1, \rightarrow)$, specijalan implikativan filtar F maksimalan u odnosu na element a. Po Def.I.3.7, očigledno važi (32). Što se tiče (33), ako je $b \notin F$, onda je F pravi podskup implikativnog filtra F′ generisanog specijalnim implikativnim filtrom F i elementom b. Zbog maksimalnosti F u odnosu na element a, tada mora biti $a \in F'$. No, po Th.3.5, je $F' = \{x \in A : b \rightarrow x \in F\}$ i, otuda, $b \rightarrow a \in F$, q.e.d.

Teorema 3.19 U 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri, glavni implikativni filtar F(c) generisan implikacijom c je maksimalan u odnosu na element a ako i samo ako F(c) ispunjava zahteve:

(34) $a \notin F(c)$

i (35) za svako $x \notin F(c)$, $x \rightarrow a \in F(c)$.

Dokaz: Dovoljnost uslovâ (34) i (35) sledi iz Th.I.3.29 i Def. 1.2 i lema 1.4 i I.1.4. Nužnost uslovâ (34) i (35) dobija se modifikacijom dokaza Th.3.18, gde se koristi Th.3.4 umesto Th.3.5.

U S4 i S5 implikacijskim algebrama, specijalni implikativni filtri mogu se okarakterisati na sledeći način (upor. Th. I.3.38 i Th.I.3.39).

Teorema 3.20 Neka je $h : A \rightarrow B$ epimorfizam S4 (ili S5) implikacijske algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ na S4 (ili S5) implikacijsku algebru $\mathfrak{B} = (B, 1', \rightarrow')$. Tada je jezgro K(h) epimorfizma h (vide Def.I.3.10) specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$. Uz to, h(a) = h(b) ekvivalentno je sa $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a \in K(h)$. Otuda, prema Th. I.3.37, relacija $\sim_{K(h)}$ određena implikativnim filtrom K(h) (vide Def.I.3.11) je kongruencija u $\mathfrak{A}$. Količnička algebra $\mathfrak{A}/\sim_{K(h)}$ izomorfna je sa $\mathfrak{B}$.

Dokaz: Teorema sledi iz Th.I.3.38 (zbog Def.1.2, Kor.1.15 i lema 1.5, 1.4 i I.1.4), jer u S4 (ili S5) implikacijskim algebrama važe (STP_0) i (STS_0), prema 1.7.5 i 1.11.4.

Teorema 3.21 Neka je $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ S4 (ili S5) implikacijska algebra i neka je F implikativan filtar u toj algebri. Tada:

3.21.1 Relacija $\sim_F$ na A određena implikativnim filtrom F u $\mathfrak{A}$ (vide I.3(51)) je kongruencija algebre $\mathfrak{A}$.

3.21.2 Ako je F specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$, onda $a \in F$ ako i samo ako $a \sim_F 1$.

3.21.3 Količnička algebra $\mathfrak{A}/\sim_F$ (koja se označava i sa $\mathfrak{A}/F = (A/F, 1_F, \rightarrow_F))$ takođe je S4 (ili S5) implikacijska algebra.

3.21.4 Za relaciju parcijalnog uređenja $\leqslant_F$ (uvedenog pomoću I.1(1)) u $\mathfrak{A}/F$ važi:

(36) $/a/_F \leqslant_F /b/_F$ ako i samo ako $a \rightarrow b \in F$.

3.21.5 Količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ je degenerisana ako i samo ako

F nije pravi implikativni filtar (tj. ako i samo ako $A = F$).

<u>3.21.6</u> Preslikavanje $h_F : A \to A/F$, definisano sa $h_F(a) = /a/_F = \{b \in A : b \sim_F a\}$ je (kanonski) epimorfizam $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}/F$ i jezgro $K(h_F)$ tog epimorfizma je specijalan implikativan filtar sadržan u F : $K(h_F) \subseteq F$. Štaviše, ako je F specijalan implikativan filtar, onda je $K(h_F) = F$, tj. svaki specijalan implikativan filtar F jezgro je kanonskog epimorfizma kongruencije određene tim implikativnim filtrom.

<u>3.21.7</u> Za svaki implikativan filtar F, postoji jedinstveni specijalan implikativan filtar $F' \subseteq F$ takav da je $\mathfrak{A}/F = \mathfrak{A}/F'$.

Dokaz: <u>3.21.1</u> se dokazuje isto kao Th.I.3.39.1, jer, po Lemi 3.3, implikativni filtri u S4 (a fortiori S5) implikacijskoj algebri zadovoljavaju uslove (f_4) i (f_5).

<u>3.21.2</u> Dokaz se može preuzeti od Th.I.3.39.2.

<u>3.21.3</u> Dokaz da količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ zadovoljava iste jednakosne aksiome kao polazna algebra $\mathfrak{A}$ trivijalan je i zasniva se na činjenici da operacija $//_F$ komutira sa $\to$: $/a/_F \to_F /b/_F = /a \to b/_F$. Prema Th.1.16, dovoljno je još dokazati (i_3):

$/a/_F \to_F /b/_F = 1_F$ i $/b/_F \to_F /a/_F = 1_F$

ako i samo ako $/a \to b/_F = /1/_F$ i $/b \to a/_F = /1/_F$

ako i samo ako $a \to b \sim_F 1$ i $b \to a \sim_F 1$

ako i samo ako $a \to b \in F$ i $b \to a \in F$

ako i samo ako $a \sim_F b$

ako i samo ako $/a/_F = /b/_F$,

zbog I.3(48), I.3(41), I.3(51), kao i:

(37) $a \to b \sim_F 1$ ako i samo ako $a \to b \in F$.

Dokaz (37): $a \to b \sim_F 1$ ako i samo ako $(a \to b) \to 1 \in F$ i $1 \to (a \to b) \in F$ ako i samo ako $a \to b \in F$, zbog I.3(51), (i_4), (f_1) i 1.10.5.

<u>3.21.4</u> Dokaz je formalno isti kao dokaz I.3.39.4, s tim što se umesto na I.3(53) pozivamo na (37).

<u>3.21.5</u> Pretpostavimo da je A/F jednočlan skup. Tada je, za svako $a \in A$, $/a/_F = /1/_F$ ili, po I.3(41), ekvivalentno, $a \sim_F 1$, odakle je, po I.3(51), $1 \to a \in F$, što sa (f_1) i (f_2), daje $a \in F$. Znači, $A \subseteq F$, a kako je uvek $F \subseteq A$, imamo $F = A$, tj. F je nepravi implikativni filtar. Konverzija se dokazuje isto kao za I.3.39.5.

<u>3.21.6</u> Ako je F implikativan filtar u S4 (ili S5) implikacijskoj algebri, onda je, prema 3.21.3, $\mathfrak{A}/F$ takođe S4 (ili S5) implikacijska algebra. Prema Th.I.3.36, h_F je (kanonski) epimorfizam $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}/F$, a prema Th.3.20, jezgro $K(h_F)$ tog epi-

morfizma h_F je specijalan implikativan filtar u $\mathfrak{A}$. $K(h_F) \subseteq F$, jer $a \in K(h_F)$ znači $/a/_F = /1/_F$, odnosno (po I.3(41)) $a \sim_F 1$, odakle je (po I.3(51)) $1 \to a \in F$, što, zbog 1.7.14: $1 \to a \leqslant a$ i (f_6), daje $a \in F$. Ako je, uz to, F specijalan implikativan filtar, onda je $F \subseteq K(h_F)$. Naime, tada iz $a \in F$, po Lemi 3.3 i (f_3'), sledi $1 \to a \in F$, što, sa $a \to 1 = 1 \in F$ ((i_4) i (f_1)), povlači $a \sim_F 1$, tj. $a \in K(h_F)$. Prema tome, $K(h_F) = F$, ako je F specijalan implikativan filtar.

3.21.7 Neka je $\mathfrak{A}$ S4 (ili S5) implikacijska algebra. Egzistencija specijalnog implikativnog filtra F' sadržanog u F takvog da važi $\mathfrak{A}/F = \mathfrak{A}/F'$ posledica je 3.21.6: $K(h_F)$ je specijalan implikativan filtar, $K(h_F) \subseteq F$, kao i $\sim_{K(h_F)} = \sim_F$. Dokaz poslednje jednakosti:

$a \sim_{K(h_F)} b$ ako i samo ako $a \to b \in K(h_F)$ i $b \to a \in K(h_F)$
ako i samo ako $h_F(a \to b) = 1_F$ i $h_F(b \to a) = 1_F$
ako i samo ako $/a \to b/_F = /1/_F$ i $/b \to a/_F = /1/_F$
ako i samo ako $a \to b \sim_F 1$ i $b \to a \sim_F 1$
ako i samo ako $a \to b \in F$ i $b \to a \in F$
ako i samo ako $a \sim_F b$,

zbog I.3(51), Def.I.3.10, 3.21.6 i (37).

Što se jedinosti tiče, ako je F' specijalan implikativan filtar i $\mathfrak{A}/F = \mathfrak{A}/F'$, onda je $\sim_F = \sim_{F'}$, što sa upravo dokazanim $\sim_F = \sim_{K(h_F)}$, daje $\sim_{F'} = \sim_{K(h_F)}$. To znači: $a \to b, b \to a \in F'$ ako i samo ako $a \to b, b \to a \in K(h_F)$, odakle, zbog (i_4) i (f_1), sledi: $1 \to a \in F'$ ako i samo ako $1 \to a \in K(h_F)$. Ako je $a \in F'$, onda je, po (f_3'), $1 \to a \in F'$, odnosno, prema prethodnom, $1 \to a \in K(h_F)$. Ali, $1 \to a \leqslant a$ (1.7.14) i zato, po (f_6), $a \in K(h_F)$. Dakle, $F' \subseteq K(h_F)$. Obrnuta inkluzija dokazuje se simetrično, jer je, prema 3.21.6, $K(h_F)$ specijalan implikativan filtar. Otuda, $F' = K(h_F)$, q.e.d.

Dodajmo da (za razliku od ω deduktivnih implikativnih algebri u kojima važi (SP) - upor. Th.3.40), u S5 (i S4) implikacijskoj algebri, nisu sve kongruencije određene nekim implikativnim filtrom. To se vidi iz primera S5 implikacijske algebre datog u dokazu Th.1.30, i iz kongruencije te algebre uvedene datim epimorfizmom pomoću I.3(49).

Th.I.3.41 može se uopštiti i tako dobiti karakterizacija, u terminima homomorfizama, pripadnosti specijalnom implikativnom filtru generisanom nekim skupom implikacija u S4 implikacijskoj algebri.

Teorema 3.22 U S4 implikacijskoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$, element a iz A pripada implikativnom filtru $F(A_o)$ generisanom nepraznim skupom implikacijâ A_o ako i samo ako, za svaki homomorfizam h iz $\mathfrak{A}$ u S4 implikacijsku algebru $\mathcal{L} = (B, 1', \to')$, važi:

(38) za svako $c \in A_o$, $h(c) = 1'$ povlači $h(a) = 1'$.

Dokaz je dobijen malom modifikacijom dokaza Th.I.3.41. Dokažimo prvo da je uslov (38) dovoljan da, u S4 implikacijskoj algebri $\mathcal{L} = (A, 1, \to)$, element a iz A pripada implikativnom filtru $F(A_o)$ generisanom skupom A_o implikacija te algebre. Prema Th.3.7, $F(A_o)$ je specijalan implikativan filtar, a po Th.3.21, relacija $\widetilde{F(A_o)}$ na A određena specijalnim implikativnim filtrom $F(A_o)$ je kongruencija u $\mathfrak{A}$ i jezgro $K(h_{F(A_o)})$ kanonskog epimorfizma $h_{F(A_o)}$ algebre $\mathfrak{A}$ na količničku algebru $\mathfrak{A}/F(A_o)$ (koja je takođe S4 implikacijska algebra) poklapa se sa $F(A_o)$: $K(h_{F(A_o)}) = F(A_o)$. Otuda je, za svako $c \in A_o$, $c \in K(h_{F(A_o)})$, što, po definiciji jezgra epimorfizma, znači da je, za svako $c \in A_o$, $h_{F(A_o)}(c) = /1/$, a ovo, po (38), povlači $h_{F(A_o)}(a) = /1/$, tj. $a \in K(h_{F(A_o)}) = F(A_o)$.

Obratno, prema Th.3.7, u S4 implikacijskoj algebri $\mathfrak{A}$, element a te algebre pripada implikativnom filtru $F(A_o)$ generisanom skupom implikacija A_o ako i samo ako

(39) postoje $c_1, \dots, c_n \in A_o$ takvi da $c_1 \to (\dots \to (c_n \to a)\dots) = 1$.

Ako je h homomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u istu takvu implikativnu algebru $\mathcal{L}$ i ako je, za sve $c \in A_o$, $h(c) = 1'$, onda je, posebno, $h(c_1) = 1'$, $\dots, h(c_n) = 1'$, što, sa posledicom (39):
$h(c_1) \to' (\dots \to' (h(c_n) \to' h(a))\dots) = 1'$, višestrukom primenom I.1.1.1, daje $h(a) = 1'$, q.e.d.

Uslov (38) iz prethodne teoreme je nužan i u nešto širem kontekstu:

Teorema 3.23 U S4 implikacijskoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$, ako element b iz A pripada implikativnom filtru $F(A_o) \vee F(a) = F(A_o \cup \{a\})$ (generisanom skupom implikacija A_o i elementom a te algebre), onda, za svaki homomorfizam h iz $\mathfrak{A}$ u S4 implikacijsku algebru $\mathcal{L} = (B, 1', \to')$, važi:

(40) $h(a) = 1'$ i, za svako $c \in A_o$, $h(c) = 1'$ povlače $h(b) = 1'$.

(Obratno nije tačno.)

Dokaz: U S4 implikacijskoj algebri, prema Th.3.7, $F(A_o)$ je specijalan implikativan filtar, a prema Th.3.5, $b \in F(A_o) \vee F(a)$ ako i samo ako $a \to b \in F(A_o)$. Ako je h homomorfizam iz S4 implikacijske algebre $\mathfrak{A}$ u takvu algebru $\mathcal{L}$, i ako je, za svako

$c \in A_o$, $h(c) = 1'$, onda je, prema drugom delu dokaza prethodne teoreme, $h(a \to b) = 1'$, odakle je $h(a) \to' h(b) = 1'$, što sa $h(a) = 1'$, po I.1.1.1, daje $h(b) = 1'$, q.e.d.

Kad se iskaz (40) parafrazira u terminima jezgara homomorfizama koja su, prema Th.3.20 i Th.3.21, zapravo specijalni implikativni filtri, onda je jasno da (40) može važiti uz $b \notin F(A_o) \vee F(a)$. Naime, dovoljno je dokazati da, u S4 implikacijskoj algebri, za neki skup implikacija A_o i neke elemente a i b, b pripada svakom specijalnom implikativnom filtru koji sadrži $F(A_o) \vee F(a)$, ali $b \notin F(A_o) \vee F(a)$. Upravo takvu situaciju imamo u skupovnoj S5 implikacijskoj algebri iz dokaza Th.1.30 za $A_o = \{\{b, c\}\}$ i $\{b\} \notin F(A_o) \vee F(\{c\}) = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$.

Stavovi do kraja odeljka bave se, uglavnom, implikativnim filtrima u kontekstu ograničenih odnosno pseudokomplementiranih striktnih deduktivnih implikativnih algebri i predstavljaju prirodne i očekivane generalizacije stavova I.3.42 do I.3.48 iz prvog poglavlja.

Lema 3.24 U S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \to, \neg)$, implikativni filtar $F' = F(\{a\} \cup F_o)$ generisan specijalnim implikativnim filtrom F_o i elementom a je pravi ako i samo ako $\neg a \notin F_o$.

Dokaz: Ako je $\neg a \in F_o$, onda je $\neg a \in F'$ i, kako je $a \in F'$ i $\neg a \to (a \to 0) = 1 \in F'$ (2.2.7 i (f_1)), dvostrukom primenom (f_2), dobijamo $0 \in F'$, tj. F' nije pravi implikativan filtar.

Obratno, ako je F' nepravi a F_o specijalan implikativan filtar, tada je $0 \in F'$ i $F' = F(a, F_o)$ (Th.3.5), što znači $\neg a = a \to 0 \in F_o$.

Teorema 3.25 U S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \to, \neg)$, specijalan implikativan filtar F je maksimalan ako i samo ako važi:

(41) F je pravi implikativan filtar i, za svako $a \in A$, $a \in F$ ili $\neg a \in F$.

Dokaz: (41) predstavlja dovoljan uslov da proizvoljan implikativan filtar F bude maksimalan i to se pokazuje kao u prvom delu dokaza Th.I.3.44.

Obratno, neka je F specijalan i maksimalan implikativan filtar. To znači da je F pravi implikativan filtar. Ako nije $a \in F$, onda je F pravi podskup implikativnog filtra F' generisanog specijalnim implikativnim filtrom F i elementom a. Pošto je F maksimalan, F' nije pravi i, po Lemi 3.24, $\neg a \in F$.

Korolar 3.26 U S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, \neg)$, specijalan implikativan filtar F je maksimalan ako i samo ako

(42) za svako $a \in A$, F sadrži samo jedan od elemenata $a, \neg a$.

Dokaz se može preuzeti od Kor.I.3.46.

U 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom, važe mnogo restriktivniji analogoni prethodna tri stava.

Lema 3.27 U 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, \neg)$, implikativan filtar $F' = F(\{a\} \cup F(c))$ generisan glavnim implikativnim filtrom $F(c)$ $(c \in I)$ i elementom a je pravi ako i samo ako $\neg a \notin F(c)$.

Dokaz je, mutatis mutandis, isti kao dokaz Leme 3.24, s tim što se koristi Th.3.4 umesto Th.3.5.

Teorema 3.28 U 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, \neg)$, glavni implikativni filtar $F(c)$, generisan nekom implikacijom c te algebre, je maksimalan ako i samo ako važi:

(43) $c \neq 0$ i, za svako $a \in A$, $a \in F(c)$ ili $\neg a \in F(c)$.

Dokaz je analogan dokazu Th.3.25, s tim što se koristi Lema 3.27 umesto Leme 3.24.

Korolar 3.29 U 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, \neg)$, glavni implikativni filtar $F(c)$, generisan nekom implikacijom c te algebre je maksimalan ako i samo ako

(44) za svako $a \in A$, $F(c)$ sadrži tačno jedan od elemenata $a, \neg a$.

Dokaz: Ovo je posledica prethodnog, jer pravi implikativni filtar ne može sadržati oba elementa a i $\neg a$.

Lema 3.30 Ako su F i F' implikativni filtri u S4 implikacijskoj algebri $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow)$ i $F \subseteq F'$, tada je skup F'' svih $/a/_F$ iz A/F takvih da je $a \in F'$ implikativan filtar u $\mathfrak{A}/F$. Pri tom je F'' specijalan implikativan filtar, ako je F' takav filtar. Štaviše, preslikavanje $f : A/F' \rightarrow (A/F)/F''$,

(45) $f(/a/_{F'}) = //a/_F/_{F''}$,

predstavlja jedan izomorfizam algebre $\mathfrak{A}/F'$ na algebru $(\mathfrak{A}/F)/F''$.

Dokaz: Ako je F implikativan filtar u S4 implikacijskoj algebri $\mathfrak{A}$, onda je, prema Th.3.21.3, količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ S4 implikacijska algebra. F'' je implikativan filtar u $\mathfrak{A}/F$, jer $/1/_F \in F''$ zbog $1 \in F'$ i, ako je $/a/_F \in F''$ i $/a/_F \rightarrow_F /b/_F = /a \rightarrow b/_F \in F''$ (I.3(48)), tj. $a \in F'$ i $a \rightarrow b \in F'$, onda je (po (f_2)) $b \in F'$, što znači $/b/_F \in F''$. Ako je F' specijalan implikativan filtar i $/a/_F \in F''$, tj. $a \in F'$, tada je $1 \to a \in F'$, tj. $/1/_F \to_F /a/_F = /1 \to a/_F \in F''$. Prema Lemi 3.3, F'' je specijalan implikativan filtar. Preslikavanje f je izomorfizam $\mathfrak{A}/F'$ na $(\mathfrak{A}/F)/F''$, jer:

$f(/a/_{F'}) = f(/b/_{F'})$ ako i samo ako $//a/_F/_{F''} = //b/_F/_{F''}$

ako i samo ako $/a/_F \widetilde{_{F''}} /b/_F$

ako i samo ako $/a/_F \to_F /b/_F \in F''$ i $/b/_F \to_F /a/_F \in F''$

ako i samo ako $/a \to b/_F \in F''$ i $/b \to a/_F \in F''$

ako i samo ako $a \to b \in F'$ i $b \to a \in F'$

ako i samo ako $a \widetilde{_{F'}} b$

ako i samo ako $/a/_{F'} = /b/_{F'}$,

zbog I.3(41), I.3(51), I.3(48) i definicije F''.

<u>Teorema 3.31</u> U S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \to, \neg)$, specijalan implikativan filtar F je maksimalan onda i samo onda ako količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ ima samo dva elementa.

<u>Dokaz</u>: Neka je, u S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom $(A, 1, \to, \neg)$, implikativan filtar F specijalan i maksimalan. Prema Kor.3.26, za svaki element a iz A je $a \in F$ ili(ekskl.) $\neg a \in F$. Prema Th.3.21.1, 3.21.2 i I.3(41), to znači $a \widetilde{_F} 1$ ili(ekskl.) $\neg a \widetilde{_F} 1$, odnosno $/a/_F = /1/_F$ ili (ekskl.) $/\neg a/_F = /1/_F$. No, jednakost $/1/_F = /\neg a/_F = /a \to 0/_F = /a/_F \to_F /0/_F$ (zbog Th.2.1, I.2(1) i I.3(48)), budući da je (po 3.21.3) $\mathfrak{A}/F$ S4 implikacijska algebra u kojoj je $/0/_F$ najmanji element (zbog (36)-3.21.4, (i_5) i (f_1)), moguća je samo ako je $/a/_F = /0/_F$. Otuda, $/a/_F = /1/_F$ ili (ekskluzivno) $/a/_F = /0/_F$, i pri tome je $/0/_F \neq /1/_F$, jer je implikativan filtar F pravi (3.21.5). Dakle, količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ je dvoelementna.

Obratno, neka količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ ima samo dva elementa. Pretpostavimo da je skup F' implikativan filtar u $\mathfrak{A}$, $F \subseteq F'$ i $F \neq F'$. Skup F'' elemenata $/a/_F \in A/F$ takvih da je $a \in F'$ je implikativan filtar u $\mathfrak{A}/F$ (Lema 3.30). Pošto je F pravi podskup skupa F', postoji element $a \in F'$ takav da $a \notin F$, a to, prema 3.21.6, znači $a \notin K(h_F)$, tj. $/a/_F \neq /1/_F$. Otuda F'' sadrži element različit od $/1/_F$. Pošto A/F ima samo dva elementa i $F'' \subseteq A/F$, mora biti $F'' = A/F$, tj. F'' je nepravi implikativan filtar u $\mathfrak{A}/F$. Prema Th.3.21.5 i Lemi 3.30, količničke algebre $(\mathfrak{A}/F)/F'' \approx \mathfrak{A}/F'$ su degenerisane, što povlači da je F' nepravi implikativan filtar. Prema tome, F je maksimalan implikativan filtar.

Korolar 3.32 Ako je F implikativan filtar u S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A}$, onda količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ ima samo dva elementa ako i samo ako je F maksimalan i specijalan implikativan filtar.

Dokaz: Prema prvom delu dokaza Th.3.31, maksimalnost i specijalnost implikativnog filtra F su dovoljni uslovi da količnička algebra $\mathfrak{A}/F$ bude dvoelementna. Obratno, dvoelementnost količničke algebre $\mathfrak{A}/F$ implicira maksimalnost implikativnog filtra F kao u drugom delu dokaza prethodne teoreme. Kad implikativan filtar F ne bi bio i specijalan, onda bi, prema Th.3.21.7, postojao specijalan implikativan filtar F', takav da je $F' \subseteq F$ i $\mathfrak{A}/F = \mathfrak{A}/F'$. Opet prema drugom delu dokaza prethodne teoreme, to bi značilo da je F' maksimalan i, pošto je F pravi implikativan filtar, bilo bi $F' = F$, tj. i F bi bio specijalan implikativan filtar, q.e.d.

Svaki maksimalan implikativan filtar u implikativnoj algebri očigledno je potpuno ireducibilan, a ovi su, prema Th. I.3.33, isto što i implikativni filtri maksimalni u odnosu na neki element. U implikacijskoj algebri (koja karakteriše implikativni fragment klasičnog iskaznog računa) važi i obrnuto: implikativan filtar maksimalan u odnosu na neki element je maksimalan implikativan filtar. U S5 implikacijskoj algebri, imamo dosta restriktivniji rezultat za koji je potrebna naredna lema.

Lema 3.33 U S5 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom, ako je specijalan implikativan filtar F_a maksimalan u odnosu na implikaciju a, onda je $\neg a \in F_a$.

Dokaz: Neka je specijalan implikativan filtar F_a maksimalan u odnosu na implikaciju a u S5 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom. To, po Def.I.3.7, najpre znači $a \notin F_a$. Kad bi, uz to, bilo $\neg a \notin F_a$, onda bi $F(\neg a) \vee F_a$ bio pravi nadskup od F_a, odakle bi sledilo $a \in F(\neg a) \vee F_a$, tj. $a = \neg a \to a \in F_a$, zbog 2.4.1 i Th.3.5. Dakle, kontradikcija.

Teorema 3.34 U S5 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom, specijalan implikativan filtar koji je maksimalan u odnosu na neku implikaciju te algebre je maksimalan implikativan filtar.

Dokaz: Neka je u S5 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom, specijalan implikativan filtar F_a istovremeno i maksimalan u odnosu na implikaciju a. Tada je, prema prethodnoj lemi, $\neg a \in F_a$ i, ako je, uz to, $F_a \subseteq F'$ i $F_a \neq F'$, mora biti $a \in F'$, što, zbog $\neg a \to (a \to 0) = 1$ (2.2.7), (f_1) i (f_2), daje $0 \in F'$.

Otuda, F' je nepravi, odnosno F_a je maksimalan implikativan filtar, q.e.d.

Naredna definicija i tri teoreme odnose se na jednu važnu klasu implikativnih filtara u S5 implikacijskoj algebri.

Definicija 3.1 U S5 implikacijskoj algebri, implikativan filtar F je I-prost ako i samo ako

(46) $a, b \in I$ i $a \cup b \in F$ povlači $a \in F$ ili $b \in F$.

Teorema 3.35 U S5 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom, pravi implikativan filtar je I-prost ako i samo ako

(47) $a \in I$ povlači $a \in F$ ili $\neg a \in F$.

Dokaz: Neka je F I-prost implikativan filtar u S5 implikacijskoj algebri. Tada, zbog $a \cup \neg a = 1 \in F$ (1.22.5 i (f_1)), iz (46) sledi (47). Obratno, neka pravi implikativan filtar F u S5 implikacijskoj algebri zadovoljava uslov (47). Kad F ne bi bio I-prost implikativan filtar, postojale bi implikacije a, $b \notin F$, $a \neq b$, pri čemu bi bilo $a \cup b \in F$. To bi, po (47), značilo $\neg a, \neg b \in F$, odakle bi, zbog (30): $\neg a \to (\neg b \to (\neg a \cap \neg b)) = 1$, (f_1) i (f_2), sledilo $\neg a \cap \neg b \in F$, odnosno $a \cup b = \neg(\neg a \cap \neg b) \notin F$, jer je F pravi implikativan filtar (De Morganovi zakoni važe zbog Kor.1.24). Time bi se dobila kontradikcija.

Teorema 3.36 U S5 implikacijskoj algebri, svaki specijalan i ireducibilan implikativan filtar je I-prost.

Dokaz: Kad u S5 implikacijskoj algebri specijalan i ireducibilan implikativan filtar F ne bi bio I-prost, postojale bi implikacije $a, b \notin F$ takve da je $a \cup b \in F$. Prema Th.3.16, tada bi postojao element $c \notin F$ i bilo bi $a \leq c$ i $b \leq c$, odakle bi, po Lemi 1.21 (tj.1(5)) sledilo $a \cup b \leq c$, što bi značilo $a \cup b \notin F$, dakle kontradikcija.

Iz primera datog u dokazu Th.1.30 vidi se da, u S5 implikacijskoj algebri, specijalan i I-prost implikativan filtar $F = \{\{b, c\}, X\}$ ne mora biti ireducibilan.

Teorema reprezentacije za S5 implikacijske algebre bila bi prosta posledica teoreme reprezentacije za S4 implikacijske algebre ako bi se uspelo pokazati da su potpuno ireducibilni (ili ireducibilni) implikativni filtri I-prosti. Jedan korak u tom pravcu je zamena zahteva iz Th.3.36 da ireducibilan implikativan filtar bude specijalan nekim uslovom druge prirode. Za to su potrebna sledeća tri pomoćna stava.

Lema 3.37 U 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri $(A, 1, \to)$, ako implikativan filtar F_o zadovoljava uslov:

(48) $c_1, c_2 \notin F_o$ povlači da postoji element $c \notin F_o$ takav da je $c \leq c_1$ i $c \leq c_2$,

a je implikacija te algebre, onda

.9) $F_o \vee F(a) = F(F_o, F(a)) =_{Df} \{x \in A: (\exists c \in F_o) c \to x \in F(a)\}$.

kaz: Očigledno, $F_o \subseteq F(F_o, F(a))$ zbog (i_1) i (f_1) i $\in F(F_o, F(a))$, zbog 1.11.2. $1 \in F(F_o, F(a))$ jer $c \to 1 = 1 \in$ a) (zbog (i_4) i (f_1)). Ako je x, $x \to y \in F(F_o, F(a))$, tj. $\to x \in F(a)$ i $c_2 \to (x \to y) \in F(a)$, za neke elemente c_1, c_2 iz , onda postoji $c \in F_o$ takav da je $c \leq c_1$ i $c \leq c_2$. Odatle , primenom 1.11.5, dobija $c_1 \to x \leq c \to x$ i $c_2 \to (x \to y) \leq \to (x \to y)$, tako da, po ($f_6$) imamo, $c \to x \in F(a)$ i $c \to (x - y)$ $F(a)$, odnosno $a \to (c \to x) = 1$ i $a \to (c \to (x \to y)) = 1$, akle, po ($F_1'$), sledi $a \to (c \to y) = 1$, odnosno $c \to y \in F(a)$, o znači $y \in F(F_o, F(a))$. Dakle, $F(F_o, F(a))$ je implikativan ltar koji sadrži F_o i $F(a)$. Dokažimo da je $F(F_o, F(a))$ najnji takav implikativan filtar. Naime, neka je $F_o \subseteq F'$, $a \in F'$ $x \in F(F_o, F(a))$, tj. $a \to (c \to x) = 1$, za neki element c iz . Tada je, očigledno, a, c, $a \to (c \to x) \in F'$, odakle se, dvorukom primenom (f_2), dobija $x \in F'$. Otuda, $F(F_o, F(a)) \subseteq F'$.

Lema 3.38 uopštava distributivnu relaciju (19) iz Th.3.14.

ma 3.38 Ako, u 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri, imikativan filtar F_o zadovoljava uslov (48) i a i b su implikaje te algebre, onda važi sledeći distributivan zakon:

50) $F_o \vee (F(a) \cap F(b)) = (F_o \vee F(a)) \cap (F_o \vee F(b))$ $(a, b \in I)$.

kaz: Dovoljno je dokazati inkluziju:

51) $F_o \vee (F(a) \cap F(b)) \supseteq (F_o \vee F(a)) \cap (F_o \vee F(b))$ $(a, b \in I)$,

r obrnuta inkluzija trivijalno važi. Ako je $x \in (F_o \vee F(a)) \cap$ $_o \vee F(b))$ $(a, b \in I)$, tj. $x \in F_o \vee F(a)$ i $x \in F_o \vee F(b)$, da je, prema prethodnoj lemi, za neke elemente c_1, c_2 iz F_o, $\to x \in F(a)$ i $c_2 \to x \in F(b)$. No,tada, po uslovu (48), postoelement c iz F_o takav da je $c \leq c_1$ i $c \leq c_2$, odakle se, imenom 1.11.5, dobija $c_1 \to x \leq c \to x$ i $c_2 \to x \leq c \to x$, što vlači $c \to x \in F(a)$ i $c \to x \in F(b)$ (po (f_6)), tj. $c \to x \in$ a) $\cap F(b) \subseteq F_o \vee (F(a) \cap F(b))$. Kako je, uz to, $c \in F_o \subseteq$ $\vee (F(a) \cap F(b))$, primenom (f_2), dobija se $x \in F_o \vee (F(a) \cap F(b))$.

ma 3.39 Ako, u 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri , 1, $\to$), ireducibilan implikativan filtar F_o ispunjava zahtev 8), onda F_o zadovoljava uslov (31).

kaz je isti kao dokaz Th.3.16, ali se koristi (50) umesto (12).

orema 3.40 U S5 implikacijskoj algebri, svaki ireducibilan plikativan filtar F_o koji ispunjava zahtev (48) je I-prost.

kaz se, prema prethodnoj lemi, može preuzeti od Th.3.36.

U implikacijskoj algebri (koja je model implikativnog fragmenta klasičnog iskaznog računa), klase prostih, ireducibilnih, potpuno ireducibilnih i maksimalnih implikativnih filtara se poklapaju. U S5 implikacijskoj algebri, specijalni implikativni I-prosti filtri mogu se ekvivalentno okarakterisati kao s-ireducibilni ili s-maksimalni.

Definicija 3.2 U implikativnoj algebri, implikativan filtar F je s-ireducibilan ako i samo ako je pravi i specijalan i, za bilo koja dva prava i specijalna implikativna filtra F_1 i F_2, $F = F_1 \cap F_2$ povlači $F = F_1$ ili $F = F_2$. Drugim rečima, implikativan filtar je s-ireducibilan ako i samo ako je pravi i specijalan i nije presek dva prava specijalna implikativna filtra koja su različita od njega.

Očigledno, specijalni i ireducibilni implikativni filtri su s-ireducibilni, ali obrnuto ne važi (jer postoje specijalni I-prosti implikativni filtri koji nisu ireducibilni - vide primedbu posle dokaza Th.3.36).

Slično se definišu (upor. Def.I.3.8) s-potpuno ireducibilni implikativni filtri.

Definicija 3.3 U implikativnoj algebri, implikativan filtar je s-maksimalan ako i samo ako je pravi i specijalan i nije pravi podskup pravog i specijalnog implikativnog filtra. Drugim rečima, implikativan filtar je s-maksimalan ako i samo ako je maksimalan element u parcijalno uređenom skupu svih pravih i specijalnih implikativnih filtara.

Očigledno, specijalni i maksimalni implikativni filtri su s-maksimalni, ali obrnuto nije tačno. Takođe je jasno da su s-maksimalni implikativni filtri s-(potpuno) ireducibilni.

Teorema 3.41 U S5 implikacijskoj algebri, sledeći su uslovi međusobno ekvivalentni:

3.41.1 Implikativan filtar F je pravi, specijalan i I-prost.

3.41.2 F je s-ireducibilan implikativan filtar.

3.41.3 F je s-maksimalan implikativan filtar.

Dokaz međusobne ekvivalentnosti uslova 3.41.1, 3.41.2 i 3.41.3 može se dobiti neznatnom modifikacijom dokaza teorema II.6.1 i II.6.2 iz /76 /, str.33.

Napomenimo da se egzistencija s-maksimalnih i s-(potpuno) ireducibilnih implikativnih filtara dokazuje pomoću Zornove leme na isti način kao egzistencija maksimalnih i (potpuno) ireducibilnih implikativnih filtara.

Lema 3.42 (Upor. Lemu I.3.22) U ograničenoj S4 implikacijskoj algebri, svaki specijalan implikativan filtar sadržan je u smaksimalnom implikativnom filtru.

Lema 3.43 Za svaki element a u ograničenoj S4 implikacijskoj algebri, ako je $1 \to a \neq 0$, postoji s-maksimalan implikativan filtar F takav da je $a \in F$.

Dokaz: Ovo sledi iz prethodne leme i Leme 3.3.

Lema 3.44 (Upor. Lemu 3.27) Ako je F_0 specijalan implikativan filtar u S4 implikacijskoj algebri i $a \notin F_0$, onda postoji s-(potpuno) ireducibilan implikativan filtar F takav da $F_0 \subseteq F$ i $a \notin F$.

4. <u>Teoreme reprezentacije</u>

U ovom odeljku, dokazane su teoreme reprezentacije za 1-deduktivne S4 implikacijske algebre, S4 implikacijske algebre, kao i za odgovarajuće striktne deduktivne implikativne algebre sa pseudokomplementacijom, odnosno kontrapozicionalnom komplementacijom.

<u>Teorema 4.1</u> (<u>Teorema reprezentacije za 1-deduktivne S4 implikacijske algebre</u>) Za svaku 1-deduktivnu S4 implikacijsku algebru $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$, postoji monomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u 1-deduktivnu S4 implikacijsku algebru skupova $(P(X), X, \to)$ (upor. Th.1.25). Drugim rečima, svaka 1-deduktivna S4 implikacijska algebra izomorfna je nekoj skupovnoj 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri.

<u>Dokaz</u>: Neka je X klasa svih ireducibilnih implikativnih filtara u $\mathfrak{A}$ i neka je h preslikavanje iz A u klasu $P(X)$ svih podskupova od X definisano na sledeći način:

(1) $h(a) = \{F \in X : a \in F\}$ $(a \in A)$.

Ako je $\mathfrak{A}$ ograničena 1-deduktivna S4 implikacijska algebra, onda je, očigledno, $h(0) = \emptyset$. Dalje, neka je I_0 semi-interior operacija na $P(X)$ generisana klasom $K = \{h(c) : c \in I\}$, gde je I skup implikacija algebre $\mathfrak{A}$. Napomenimo da se

(2) $a \leqslant b$ ako i samo ako $h(a) \subseteq h(b)$

i (3) $a \neq b$ samo ako $h(a) \neq h(b)$,

dokazuju isto kao u dokazu Th.I.4.1. Otuda, preslikavanje h je jedan-jedan. Zbog (f_1), imamo

(4) $h(1) = X$.

Takođe, isto kao u dokazu Th.I.4.1, pokazuje se inkluzija

(5) $h(a \to b) \subseteq (X \setminus h(a)) \cup h(b)$

koja je, po (si_8), ekvivalentna sa

(6) $h(a \to b) \subseteq I_0((X \setminus h(a)) \cup h(b))$,

jer je $h(a \to b)$, po definiciji semi-interior operacije I_0, invarijanta te operacije. Da bismo dokazali da h čuva implikaciju:

(7) $h(a \to b) = I_0((X \setminus h(a)) \cup h(b)) = h(a) \to h(b)$,

dovoljno je dokazati da je $h(a \to b)$ najveća invarijanta semi-interior operacije I_0 koja zadovoljava (5). Pošto je semi-interior operacija I_0 generisana klasom $K = \{h(c) : c \in I\}$, što znači da je svaka invarijanta operacije I_0 unija nekih elemenata iz K, dovoljno je dokazati:

(8) $c \in I$ i $h(c) \subseteq (X \setminus h(a)) \cup h(b)$ povlače $h(c) \subseteq h(a \to b)$.

Dokaz kontrapozicije (8): Neka je $h(c) \not\subseteq h(a \to b)$, gde je c implikacija. To znači da postoji ireducibilan implikativan filtar F_o takav da je $F_o \in h(c)$ i $F_o \notin h(a \to b)$, tj. $c \in F_o$ i $a \to b \notin F_o$. Otuda je $F(c) \subseteq F_o$ i $F(c)$ je pravi implikativan filtar. Prema Th.3.4, $F_1 = \{x \in A : a \to x \in F(c)\} = F(a) \vee F(c)$, odakle je $a \in F_1$ i $c \in F_1$. Zbog $a \to b \notin F(c)$, imamo $b \notin F_1$. Po Lemi I.3.27, postoji ireducibilan implikativan filtar F^* takav da je $F_1 \subseteq F^*$ i $b \notin F^*$. Kako je $a \in F^*$, $c \in F^*$ i $b \notin F^*$, imamo $F^* \in h(a)$, $F^* \in h(c)$ i $F^* \notin h(b)$, to jest $h(a) \cap h(c) \not\subseteq h(b)$, što je ekvivalentno sa $h(c) \not\subseteq (X \setminus h(a)) \cup h(b)$.

Posledica 4.2 (Teorema reprezentacije za 1-deduktivne S4 implikacijske algebre sa pseudokomplementacijom) Za svaku 1-deduktivnu S4 implikacijsku algebru sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \to, \neg)$, postoji monomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u skupovnu 1-deduktivnu S4 implikacijsku algebru sa pseudokomplementacijom $(P(X), X, \to, \neg)$ (upor. Th.2.8). Otuda, svaka 1-deduktivna S4 implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom izomorfna je nekoj skupovnoj 1-deduktivnoj S4 implikacijskoj algebri sa pseudokomplementacijom.

Dokaz: Ovo je posledica Th.2.8, Th.2.1 i prethodne teoreme.

Posledica 4.3 (Teorema reprezentacije za 1-deduktivne S4 implikacijske algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom) Za svaku 1-deduktivnu S4 implikacijsku algebru s kontrapozicionalnom komplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \to, -_c)$, postoji monomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u skupovnu 1-deduktivnu S4 implikacijsku algebru s kontrapozicionalnom komplementacijom $(P(X), X, \to, -_C)$ (upor. Th.2.11). Znači, svaka je 1-deduktivna S4 implikacijska algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom izomorfna skupovnoj takvoj algebri.

Dokaz: Ovo sledi iz Th.2.10, Th.2.11 i Th.4.1.

Teorema 4.4 (Teorema reprezentacije za S4 implikacijske algebre) Za svaku S4 implikacijsku algebru $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$, postoji monomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u S4 implikacijsku algebru skupova $(P(X), X, \to)$ (upor. Kor.1.28). Otuda, svaka S4 implikacijska algebra izomorfna je nekoj skupovnoj S4 implikacijskoj algebri.

Dokaz: Neka je X skup svih ireducibilnih implikativnih filtara S4 implikacijske algebre $\mathfrak{A} = (A, 1, \to)$. Kao u dokazu Th.4.1, definiše se, pomoću (1), preslikavanje $h : A \to P(X)$ (gde je $P(X)$ partitivni skup skupa X) i pokzuje (2) i (3), odakle sledi da je h injekcija. Iz (f_1) i (1) dobija se (4), što znači da h čuva jedinu nularnu operaciju.

Uzmimo da je skup X snabdeven topologijom τ čija je podbaza klasa $\{h(c) : c \in I\}$, gde je I skup implikacija algebre $\mathfrak{A}$ i definišimo implikativnu operaciju $\rightarrow_\tau$ na X kao u 1(26):

(9) $Y \rightarrow_\tau Z = I_\tau((X \setminus Y) \cup Z) \quad (Y, Z \in P(X))$.

Treba dokazati da h čuva implikaciju:

(10) $h(a \rightarrow b) = I_\tau((X \setminus h(a)) \cup h(b)) = h(a) \rightarrow_\tau h(b)$.

Inkluzija

(11) $h(a \rightarrow b) \subseteq (X \setminus h(a)) \cup h(b)$

pokazuje seisto kao u dokazu Th.4.1 (inkluzija (5)). Po definiciji topologije τ, $h(a \rightarrow b)$ je otvoren skup i, da bi se dokazalo (10), dovoljno je još dokazati da je $h(a \rightarrow b)$ najveći otvoren skup koji zadovoljava uslov (11). Pošto je $\{h(c) : c \in I\}$ podbaza topološkog prostora (X, τ) koja sadrži X, dovoljno je dokazati

(12) $c_1, \ldots, c_n \in I$ i $h(c_1) \cap \ldots \cap h(c_n) \subseteq (X \setminus h(a)) \cup h(b)$ povlači $h(c_1) \cap \ldots \cap h(c_n) \subseteq h(a \rightarrow b)$.

Dokažimo kontrapoziciju (12). Uzmimo da su $c_1, \ldots, c_n$ implikacije i $h(c_1) \cap \ldots \cap h(c_n) \not\subseteq h(a \rightarrow b)$. To znači da postoji ireducibilan implikativan filtar F_o takav da je $F_o \in h(c_1) \cap \ldots \cap h(c_n)$ i $F_o \notin h(a \rightarrow b)$, tj. $c_1, \ldots, c_n \in F_o$ i $a \rightarrow b \notin F_o$. Neka je $F(c_1, \ldots, c_n)$ implikativan filtar generisan skupom implikacija $\{c_1, \ldots, c_n\}$. Očigledno je $F(c_1, \ldots, c_n) \subseteq F_o$, što znači da je to pravi implikativan filtar, a po Th.3.8, $F(c_1, \ldots, c_n)$ je specijalan implikativan filtar. Prema Th.3.5, $F_1 = \{x \in A : a \rightarrow x \in F(c_1, \ldots, c_n)\} = F(c_1, \ldots, c_n) \vee F(a)$. Zbog $a \rightarrow b \notin F(c_1, \ldots, c_n)$ imamo $b \notin F_1$. Po Lemi I.3.27, postoji ireducibilan implikativan filtar F^* takav da je $F_1 \subseteq F^*$ i $b \notin F^*$. Kako je $a, c_1, \ldots, c_n \in F^*$ i $b \notin F^*$, važi $F^* \in h(a) \cap h(c_1) \cap \ldots \cap h(c_n)$ i $F^* \notin h(b)$, tj.
$h(a) \cap h(c_1) \cap \ldots \cap h(c_n) \not\subseteq h(b)$, što je ekvivalentno sa $h(c_1) \cap \ldots \cap h(c_n) \not\subseteq (X \setminus h(a)) \cup h(b)$.

<u>Posledica 4.5</u> (<u>Teorema reprezentacije za S4 implikacijske algebre sa pseudokomplementacijom</u>) Svaka S4 implikacijska algebra sa pseudokomplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, \neg)$ izomorfna je podalgebri neke skupovne S4 implikacijske algebre sa pseudokomplementacijom $(P(X), X, \rightarrow_\tau, \neg)$.

<u>Dokaz</u>: Ovo je posledica prethodne teoreme, Th.2.1 i Th.2.9.

<u>Posledica 4.6</u> (<u>Teorema reprezentacije za S4 implikacijske algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom</u>) Svaka S4 implikacijska algebra s kontrapozicionalnom komplementacijom $\mathfrak{A} = (A, 1, \rightarrow, -_c)$ izomorfna je podalgebri neke skupovne S4 impli-

kacijske algebre s kontrapozicionalnom komplementacijom.
<u>Dokaz</u>: Ovo sledi iz Th.4.4, Th.2.10 i Th.4.12.

Analiza dokazâ teoremâ reprezentacije (Th.I.4.1, Th.4.1 i Th.4.4) otkriva da nigde nije korišćena pretpostavka da se moraju uzimati isključivo ireducibilni implikativni filtri (ili potpuno ireducibilni implikativni filtri, kao u originalnom Diegoovom dokazu teoreme reprezentacije za Hilbertove algebre). U stvari, može se uzeti da je X skup <u>svih</u> implikativnih filtara implikativne algebre o kojoj je reč. S tim u vezi, stoji pitanje da li je skupovna algebra $(P(X), X, \rightarrow)$ u koju se potapa algebra $(A, 1, \rightarrow)$ minimalna. Odgovor je negativan čak i ako se za X uzme skup svih potpuno ireducibilnih implikativnih filtara. To se vidi iz primera četiriielementne Booleove algebre čiji je Hasseov dijagram prikazan na slici 1.1 (str.29), koja postaje S5 implikacijska algebra $(A, 1, \rightarrow)$, gde je $A = \{0, a, b, 1\}$, ako se implikativna operacija definiše pomoću I.1(3)(str.4). Ovde su potpuno ireducibilni implikativni filtri: $F_1 = \{a, 1\}$, $F_2 = \{b, 1\}$ i $F_3 = \{a, b, 1\}$, tako da je $X = \{F_1, F_2, F_3\}$ i $P(X)$ ima osam elemenata.

Što se tiče reprezentacije S5 implikacijskih algebri, ključno je mesto da monomorfizam h zadovoljava jednakost:

(13) $h(a \cup b) = h(a) \cup h(b) \quad (a, b \in I)$,

(gde je na levoj strani jednakosti (13) sa '$\cup$' označen supremum implikacija - Def.1.3, a na desnoj strani, '$\cup$' označava skupovnu uniju). Jednakost (13) ekvivalentna je inkluziji:

(14) $h(a \cup b) \subseteq h(a) \cup h(b) \quad (a, b \in I)$,

jer je obrnuta inkluzija posledica (2). Očigledno, inkluzija (14) važi ako i samo ako su implikativni filtri koji se pojavljuju u teoremi reprezentacije I-prosti. Otuda, (13) bi važilo ako bi se pokazalo da su npr. (potpuno) ireducibilni implikativni filtri I-prosti. Druga mogućnost bila bi da se za X uzme skup svih I-prostih implikativnih filtara i onda dokaže da $a \not\leq b$ povlači da postoji I-prost implikativan filtar F takav da je $a \in F$ ili $b \notin F$. Posebno, S5 implikacijska algebra u kojoj svaki (potpuno) ireducibilan implikativan filtar zadovoljava uslov 3(48) predstavljiva je kao skupovna takva algebra.

III POGLAVLJE

DEDUKTIVNE POLUMREŽE I DEDUKTIVNE MREŽE

0. Sinopsis U ovom se poglavlju (1-deduktivne) S4 implikacijske algebre posmatraju u kontekstu deduktivnih (polu)mreža. Uopšteno govoreći, deduktivne (polu)mreže su proizvoljne (polu)mreže s jedinicom u kojima je definisana jedna operacija koja ima neka bitna svojstva implikacije. Pristup je aksiomatski i motivisan je mogućnošću uvođenja više različitih implikativnih operacija određenog tipa u arbitrarnoj polumreži ili mreži. Sledeći Hermana, Marsdena i Piziaka /35/ (kojima je to sugerirao Zeman), definisani su pojmovi slabo deduktivne, n-deduktivne i potpuno deduktivne (polu)mreže i uveden je nov pojam konačno (ili ω) deduktivne (polu)mreže. Iz njihovih definicija sledi da klasa slabo deduktivnih (polu)mreža obuhvata klasu 1-deduktivnih (polu)mreža, da je svaka (n+1)-deduktivna (polu)mreža n-deduktivna (polu)mreža i da sve zajedno sadrže potpuno deduktivne (polu)mreže koje su prirodno uopštenje Skolemovih ili Heytingovih ili Brouwerovih potpunih mreža. Međutim, ispostavlja se da za n konačno i n veće od 1 važi i obratno: svaka n-deduktivna (polu)mreža je (n+1)-deduktivna i time se dolazi do koncepta konačno (ili ω) deduktivne (polu)mreže. Ispostavlja se da se 1-deduktivne i konačno deduktivne (polu)mreže mogu okarakterisati prostim jednakosnim aksiomama. Implikacija u konačno deduktivnim mrežama i polumrežama je Lewisova S4 implikacija, a u 1-deduktivnim mrežama 1-deduktivna S4 implikacija. Iako potpuno deduktivne mreže ne moraju biti distributivne i mada se svaka mreža sa 0 i 1 može učiniti potpuno deduktivnom makar na trivijalan način, postoji veza između 1-deduktivnosti i izvesne restringirane distributivnosti. Ta restringirana distributivnost je potreban i dovoljan uslov da bi se dosta široka klasa potpunih mreža učinila potpuno deduktivnom na netrivijalan način. Uopšte, razni oblici ograničene distributivnosti su lajtmotiv čitavog izlaganja i postoji puno zanimljivih veza između tih distributivnosti i raznih činjenica o deduktivnim mrežama. Da bi se pokazalo da slabo deduktivne, 1-deduktivne, konačno deduktivne i potpuno deduktivne (polu)mreže čine pravu hijerarhiju, dati su odgovarajući primeri i kontraprimeri. Glavni netrivijalni primeri proizvoljnih potpuno deduktivnih potpunih

mreža su tako zvane Z-mreže, a skupovne 1-deduktivne i konačno deduktivne distributivne (polu)mreže su tipični primeri 1-deduktivnih i konačno deduktivnih distributivnih (polu)mreža (zbog Stoneovih teorema reprezentacije). S druge strane, iz teorema reprezentacije za (1-deduktivne) S4 implikacijske algebre sledi da se svaka takva implikacijska algebra može izomorfno potopiti u (skupovnu 1-deduktivnu distributivnu (polu)mrežu) skupovnu konačno deduktivnu distributivnu polumrežu ili mrežu tako da se čuva implikacija. To pokazuje da (1-deduktivne) S4 implikacijske algebre potpuno karakterišu implikaciju (1-deduktivnih) konačno deduktivnih (polu)mreža.

1. Deduktivne (polu)mreže (elementarna teorija i reprezentacija)

Pojmove slabodeduktivne (polu) mreže, n-deduktivne (polu) mreže i potpune deduktivne (polu) mreže uveli su Herman, Marsden i Piziak /35/, po sugestiji Zemana.

Slabo deduktivne (polu) mreže su zapravo (polu) mreže s jedinicom i dodatnom operacijom $\to$ koja zadovoljava minimalne pozitivne implikativne kriterijume (Hardegree /33/): <u>princip dedukcije</u> (PD) i <u>modus ponens</u> (MP).

<u>Definicija 1.1</u> <u>Slabo deduktivna (polu) mreža</u> je apstraktna algebra $(M,\cap,\cup,1,\to)((M,\cap,1,\to))$, gde je $(M,\cap,\cup,1)$ mreža s jedinicom ($(M,\cap,1)$ polumreža s jedinicom), a $\to$ je dvoargumentna operacija koja zadovoljava uslove:

(PD) Ako $a\leq b$, onda $a\to b=1$, i

(MP) $a\cap(a\to b)\leq b$

Ograničena slabo deduktivna (polu) mreža je slabo deduktivna (polu) mreža koja ima najmanji element 0.

<u>Teorema 1.1</u> U slabo deduktivnoj (polu) mreži $(M,\cap,1,\to)$ važi:

<u>1.1.1.</u> $a\leq b$ ako i samo ako $a\to b=1$

<u>1.1.2.</u> Ako $c\leq a\to b$, onda $c\cap a\leq b$ (importacija)

<u>1.1.3.</u> $a\to a=1$, i otuda $a\to a=b\to b$

<u>1.1.4.</u> Ako $a\to b=1$ i $b\to c=1$, onda $a\to c=1$ (slaba tranzitivnost)

<u>1.1.5.</u> Ako $a\to b=1$ i $b\to a=1$, onda $a=b$.

<u>1.1.6.</u> $a\to 1=1$

<u>1.1.7.</u> Ako $a\to(b\to c)=1$ i $a\to b=1$, onda $a\to c=1$.

(1.1.1.-1.1.7. pokazuju da je $(M,1,\to)$ slabo deduktivna implikativna algebra čije se parcijalno uređenje uvedeno implikacijom $\to$ poklapa s polaznim uređenjem polumreže).

<u>1.1.8.</u> $a\cap(a\to b)\leq a\cap b$

<u>1.1.9.</u> $a\cap(a\to b)\cap(a\to c)\leq b\cap c$

<u>1.1.10.</u> $1\to a\leq a$

<u>1.1.11.</u> $a\to b=1$ i $a\to c=1$ ako i samo ako $a\to(b\cap c)=1$

<u>1.1.12.</u> Ako $a=1$ i $a\to b=1$, onda $b=1$.

<u>1.1.13.</u> Ako $a=1$, onda $b\to a=1$.

<u>1.1.14</u> Ako $a=1$ i $b=1$, onda $a\cap b=1$

U ograničenoj slabo deduktivnoj polumreži, pored nabrojanih zakona važe i :

<u>1.1.14.</u> $0\to 1=1$

<u>1.1.15.</u> $1\to 0=0$

<u>Dokazi</u> su elementarni i laki i mogu se naći u /35/ ili autorovom magistarskom radu, izuzev 1.1.7.

1.7. $a\wedge(a\to b)\wedge(a\to(b\to c))\leq a\wedge b\wedge(a\to(b\to c))\leq b\wedge(b\to c)\leq c$, zbog 1.1.8., (MP) izotonije infimuma. Odatle, iz $a\to b=1$ i $a\to(b\to c)=1$ odmah sledi c, tj. $a\to c=1$.

orema 1.2 U slabo deduktivnoj mreži, uz zakone iz pret-dne teoreme, važi:

2.1 $a\to c=1$ i $b\to c=1$ ako i samo ako $(a\vee b)\to c=1$.

kaz: Ovo je posledica osobina supremuma i 1.1.1.

orema 1.3 Ako operacije $\to_1$ i $\to_2$ čine (polu) mrežu slabo deduk-vnom, onda je takvom čini i operacija $\to_3$, gde je

) $a\to_3 b = (a\to_1 b)\wedge(a\to_2 b)$.

u mreži postoje proizvoljni infimumi, onda je uopštenje očigledno.

kaz se svodi na prostu proveru (PD) i (MP).

Uslovi (PD) i (MP) su vrlo slabi, jer čak i Booleova mreža mo- biti slabo deduktivna s različitim implikativnim operacijama. S ige strane, klasični implikativni uslovi (zakon eksportacije (E) nodus ponens (MP), koji su zajedno ekvivalentni zakonu importacije-ksportacije (IE) suviše su jaki u smislu da čine mrežu distribu-vnom. Zbog toga se slabljenjem postulata importacije -eksportacije E) uvode nove algebarske strukture koje se nalaze izmedu slabo duktivnih (polu) mreža i Skolemovih klasičnih implikativnih mreža.

finicija 1.2 Element c slabo deduktivne (polu) mreže je implikacija o i samo ako postoje elementi (polu) mreže a i b takvi da je $c=a\to b$. ip implikacija deduktivne (polu) mreže označavaćemo sa I.

finicija 1.3 n-deduktivna (polu) mreža je apstraktna algebra $,\wedge,\vee,1,\to)((M,\wedge,1,\to))$, gde je $(M,\wedge,\vee,1)$ mreža s jedinicom (gde je $,\wedge,1)$ polumreža s jedinicom), a $\to$ je binarna operacija koja ima edeća dva svojstva:

(PD) Ako $a\leq b$, onda $a\to b=1$,

i (IE$_n$) Ako je c infimum od n implikacija, onda

$$c\wedge a\leq b \text{ ako i samo ako } c\leq a\to b .$$

(Polu) mreža je konačno deduktivna ili ω deduktivna ako i no ako je n-deduktivna za svaki konačan kardinalni broj n.

Potpuna mreža je potpuno deduktivna ako i samo ako je n-de-ktivna za svaki kardinalni broj n.

(Napomenimo da je potpuna polumreža s jedinicom zapravo potpu- mreža.)

Naravno, potpuno deduktivna potpuna mreža je konačno deduk-vna, ali treba razlikovati konačno deduktivnu potpunu mrežu (koja potpuna kao mreža, može biti beskonačna i ne mora biti potpuno duktivna (upor. Primer 1.4.))od konačne potpuno deduktivne mreže oja je uvek konačna).

Lema 1.4 Svaka n-deduktivna (polu) mreža je k-deduktivna (polu) mreža, za svako $k \leq n$. Uz to, svaka potpuno deduktivna (polu) mreža je konačno deduktivna (polu) mreža.

Dokaz je jasan jer je 1 implikacija.

Lema 1.5 Skolemova implikativna potpuna mreža je potpuno deduktivna mreža u kojoj je svaki element implikacija.

Dokaz: Očigledno, za svaki kardinalni broj n, (IE_n) je oslabljenje (IE). Dokaz (PD) može se naći kod Curryja /20/. Pošto je $1 \to a = a$, svaki element Skolemove mreže je implikacija.

Teorema 1.5 Neka je $\mathcal{M} = (M, \cap, 1, \to)$ 1-deduktivna polumreža. Tada:

1.5.1 $\mathcal{M}$ je slabo deduktivna polumreža.

1.5.2 Ako je a implikacija, onda $a \to (b \to a) = 1$.

1.5.3 Ako je c_1 implikacija, onda: $c_1 \to (a \to (b \to c)) = 1$ i $c_1 \to (a \to b) = 1$ povlače $c_1 \to (a \to c) = 1$.

Otuda, prema 1.5.1, 1.5.2, 1.5.3, Th.1.1 i Th.II.1.16, $(M, 1, \to)$ je 1-deduktivna S4 implikacijska algebra.

1.5.4 $(a \to b) \to (c \to (a \to b)) = 1$ (1.11.3)

1.5.5 Ako $a \to (b \to c) = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$. (1.7.3)

1.5.6 Ako je b implikacija i $a \to (b \to c) = 1$, onda $b \to (a \to c) = 1$.(SSP)

1.5.7 Ako je $b \to c = 1$, onda $(a \to b) \to (a \to c) = 1$. (1.7.5)

1.5.8 Ako $a \to b = 1$, onda $(b \to c) \to (a \to c) = 1$. (1.11.4)

1.5.9 $a \to (a \to b) = a \to b$ (1.11.6)

1.5.10 $(a \to b) \to a \leq (a \to b) \to b$ (1.7.13)

1.5.11 Ako $b \in I$, onda $(a \to b) \to (a \to c) \leq b \to (a \to c)$.

1.5.12 Ako $a \in I$, onda $a \leq (a \to b) \to b$ (1.10.3)

1.5.13 Ako $a \in I$, onda $1 \to a = a$ (1.10.4)

1.5.14 $1 \to (a \to b) = a \to b$

1.5.15 Ako $c \in I$ i $c \leq a$, onda $c \leq 1 \to a$.($1 \to a$ je najveća implikacija koja je manja ili jednaka a.) (1.10.8)

1.5.16 $a \to b \leq ((a \to b) \to b) \to b$ (1.10.10)

1.5.17 Ako $a \in I$, onda $a \to b = ((a \to b) \to b) \to b$. (1.10.11)

1.5.18 $(a \to b) \to b = (((a \to b) \to b) \to b) \to b$ (1.10.12)

1.5.19 $(b \to a) \to b = (((b \to a) \to b) \to b) \to b$ (1.10.13)

1.5.20 $a \to b \leq ((a \to b) \to a) \to b$ (1.10.14)

1.5.21 Ako $a \in I$,onda $a \to b = ((a \to b) \to a) \to b$ (1.10.15)

1.5.22 $(a \to b) \to b = (((a \to b) \to b) \to (a \to b)) \to b$ (1.10.16)

1.5.23 $(b \to a) \to b = (((b \to a) \to b) \to (b \to a)) \to b$ (1.10.17)

1.5.24 Ako $a, b \in I$, onda $((a \to b) \to (b \to a)) \to (b \to a) = 1$. (1.10.18)

1.5.25 Ako je b implikacija, onda $a \cap (a \to b) = a \cap b$.

1.5.26 $a \cap (a \to (b \to c)) = a \cap (b \to c)$

1.5.27 Ako je b implikacija, onda je $b \cap (a \to b) = b$

1.5.28 $(b \to c) \cap (a \to (b \to c)) = b \to c$

1.5.29 $a\to b=a\to(a\cap b)$

1.5.30 Ako $a\to b=1$, onda $(a\to c)\to(a\to(b\cap c))=1$

1.5.31 Ako $a\to c=1$, onda $(a\to b)\to(a\to(b\cap c))=1$

1.5.32 $a\to(b\cap c)\leqslant(a\to b)\cap(a\to c)$ (Jednakost važi (umesto nejednakosti) u 1-deduktivnoj polumreži ako i samo ako je 2-deduktivna).

1.5.33 $a\to(b\to c)\leqslant(a\cap b)\to c$

1.5.34 Ako je a implikacija, onda $a\leqslant b\to(a\cap b)$

Dokaz: 1.5.1 Dovoljno je uzeti (MP) iz (IE_1) : iz $a\to b\leqslant a\to b$ i (IE_1), sledi $a\cap(a\to b)\leqslant b$.

1.5.2 Ako je a implikacija, onda iz $a\cap b\leqslant b$, po (IE_1) sledi $a\leqslant b\to a$, tj. $a\to(b\to a)=1$.

1.5.3 Najpre, primenom (MP), imamo:

$$a\cap c_1\cap(c_1\to(a\to(b\to c)))\cap(c_1\to(a\to b))\leqslant a\cap(a\to(b\to c))\cap$$

$\cap(a\to b)\leqslant b\cap(b\to c)\leqslant c$. Ako je, uz to, $c_1\to(a\to(b\to c))=1$ i $c_1\to(a\to b)=1$, onda je $a\cap c_1\leqslant c$, odakle se, po (IE_1), dobija $c_1\leqslant a\to c$.

1.5.4 do 1.5.24 su posledica 1.5.3.

1.5.25 i 1.5.26 posledice su 1.1.8 i 1.5.2.

1.5.27 i 1.5.28 posledice su (MP) i 1.5.2.

1.5.29 Iz $a\cap b\leqslant b$, po 1.5.7 sledi $a\to(a\cap b)\leqslant a\to b$. Obrnuta nejednakost sledi iz 1.5.31 i 1.1.3.

1.5.30 Primenom (MP) i 1.1.8 dobija se $a\cap(a\to b)\cap(a\to c)\leqslant$ $\leqslant a\cap b\cap(a\to c)\leqslant b\cap c$, odakle, za $a\to b=1$, sledi $a\cap(a\to c)\leqslant b\cap c$, što daje $a\to c\leqslant a\to(b\cap c)$, po (IE_1).

1.5.31 sledi iz prethodnog.

1.5.32 Iz $b\cap c\leqslant b$ i $b\cap c\leqslant c$, primenom 1.5.7, dobija se $a\to(b\cap c)\leqslant a\to b$ i $a\to(b\cap c)\leqslant a\cap c$, odakle sledi tražena nejednakost.

1.5.33 Iz $a\cap b\cap(a\to(b\to c))\leqslant b\cap(b\to c)\leqslant c$, primenom (IE_1), sledi tražena nejednakost.

1.5.34 dobija se iz $a\cap b\leqslant a\cap b$, primenom (IE_1).

Teorema 1.6 Neka je $\mathcal{M}=(M,\cap,\cup,1,\to)$ 1-deduktivna mreža. Tada, (pored zakona iz prethodne teoreme) važi:

1.6.1 $\mathcal{M}$ je slabo deduktivna mreža.

1.6.2 $(a\cup b)\to a\leqslant b\to a$.

1.6.3 $(a\cup b)\to c\leqslant(a\to c)\cap(b\to c)$ (nejednakost se ne može zameniti jednakošću ni u potpuno deduktivnoj mreži)

1.6.4 $(a\to c)\cup(b\to c)\leqslant(a\cap b)\to c$

1.6.5 $(c\to a)\cup(c\to b)\leqslant c\to(a\cup b)$

(U 1.6.4 i 1.6.5 obrnuta nejednakost ne mora važiti ni u Skolemovoj mreži)

1.6.6 Ako su a i b implikacije, onda $a \cup b \leq (a \to b) \to b$.

1.6.7 $(a \cup b) \to (a \cap b) \leq (a \to b) \cap (a \to b)$

Dokaz: 1.6.1 je posledica 1.5.1.

1.6.2 je posledica 1.6.3 i 1.1.3.

1.6.3 $a \leq a \cup b$ i $b \leq a \cup b$ daju, po 1.5.8, $(a \cup b) \to c \leq a \to c$ i $(a \cup b) \to c \leq b \to c$, odakle se dobija tražena nejednakost.

1.6.4 Iz $a \cap b \leq a$ i $a \cap b \leq b$, po 1.5.8, sledi $a \to c \leq (a \cap b) \to c$ i $b \to c \leq (a \cap b) \to c$, što daje traženu nejednakost.

1.6.5 Iz $a \leq a \cup b$ i $b \leq a \cup b$, dobija se (po 1.5.7) $c \to a \leq c \to (a \cup b)$ i $c \to b \leq c \to (a \cup b)$, odakle sledi 1.6.5.

1.6.6 je posledica 1.5.12 i 1.5.2.

1.6.7 $(a \cup b) \to (a \cap b) \leq (a \to (a \cap b)) \cap (b \to (a \cap b)) = (a \to b) \cap (b \to a)$, zbog 1.6.3 i 1.5.29.

Sledeća prosta lema ima dalekosežan značaj.

Lema 1.7 Supremum dve implikacije (i time konačno mnogo implikacija) u 1-deduktivnoj mreži , opet je implikacija.

Dokaz: $(a \to b) \cup (c \to d) = (1 \to (a \to b)) \cup (1 \to (c \to d))$, po 1.5.14

$\leq 1 \to ((a \to b) \cup (c \to d))$, po 1.6.5.

Obrnuta nejednakost posledica je 1.1.10. Otuda,

$(a \to b) \cup (c \to d) = 1 \to ((a \to b) \cup (c \to d))$.

Lema 1.8 Ako skup implikacija 1-deduktivne mreže $\mathcal{M}$ čini podmrežu, onda je $\mathcal{M}$ konačno deduktivna mreža.

Dokaz: Treba dokazati (IE_n), za svako konačno n. Ako je c infimum od n implikacija i n konačno, onda je c implikacija (jer skup implikacija čini podmrežu), tako da je, po (IE_1), $c \cap a \leq b$ ako i samo ako $c \leq a \to b$.

Naredna teorema pokazuje da postoji dobra interakcija između $\to$ i infinitarnih operacija mreže, već u 1-deduktivnoj potpunoj mreži.

Teorema 1.9 Ako je potpuna mreža 1-deduktivna, onda:

1.9.1 $$a \to \Big(\bigcap_{b \in B} b\Big) \leq \bigcap_{b \in B} (a \to b)$$

(Pod gornjim pretpostavkama, nejednakost se može zameniti jednakošću ako i samo ako je mreža potpuno deduktivna - upor.Th.1.11.)

1.9.2 $$\Big(\bigcup_{b \in B} b\Big) \to a \leq \bigcap_{b \in B} (b \to a)$$

(Jednakost, umesto nejednakosti, ne mora važiti u 1-deduktivnoj distributivnoj mreži - upor. 1.6.3 , Primer 1.3, pa čak ni u potpuno deduktivnoj potpunoj mreži - upor. Th.1.35.)

1.9.3 $$\bigcup_{b \in B}(b \to a) \leq (\bigcap_{b \in B} b) \to a$$

1.9.4 $$\bigcup_{b \in B}(a \to b) \leq a \to (\bigcup_{b \in B} b)$$

(Što se tiče 1.9.3 i 1.9.4, obrnute nejednakosti ne moraju važiti ni u potpunoj Skolemovoj implikativnoj mreži)

Dokaz je analogan dokazu 1.5.32, 1.6.3, 1.6.4 i 1.6.5.

Za 1-deduktivne i potpune mreže, Lema 1.7. može se uopštiti.

Lema 1.10. U 1-deduktivnoj potpunoj mreži, skup implikacija zatvoren je za proizvoljne unije.

Dokaz je analogan dokazu Leme 1.7, s tim što se koristi 1.9.4, umesto 1.6.5.

Teorema 1.11 Ako je potpuna mreža 1-deduktivna, onda su sledeći uslovi međusobno ekvivalentni:

1.11.1 $$a \to (\bigcap_{b \in B} b) = \bigcap_{b \in B}(a \to b)$$

1.11.2 Infimum proizvoljno mnogo implikacija, opet je implikacija.

1.11.3 Mreža je potpuno deduktivna.

Dokaz: 1.11.1 povlači 1.11.2

$$\bigcap_{a \in A, b \in B}(a \to b) = \bigcap_{a \in A, b \in B}(1 \to (a \to b)) = 1 \to \bigcap_{a \in A, b \in B}(a \to b)$$

zbog 1.5.14 i 1.11.1.

1.11.2 povlači 1.11.1

$$a \cap \bigcap_{b \in B}(a \to b) \leq a \cap (a \to b) \leq b \quad , \text{ po (MP)}$$

$$a \cap \bigcap_{b \in B}(a \to b) \leq \bigcap_{b \in B} b \quad , \text{ po definiciji infimuma}$$

$$\bigcap_{b \in B}(a \to b) \leq a \to \bigcap_{b \in B} b \quad , \text{ po 1.10.2 i } (IE_1) .$$

Obrnuta nejednakost važi prema 1.9.1.

Dokaz da 1.11.3 povlači 1.11.1 formalno je isti kao prethodni.
1.11.2 povlači 1.11.3 Po (IE_1), (IE_n) važi za svaki kardinalni broj n, jer je infimum proizvoljnog broja implikacija opet implikacija.

Korolar 1.12 U potpuno deduktivnoj potpunoj mreži,

(2) $$\bigcap_{a \in A, b \in B} (a \to b) \leqslant \left(\bigcap_{a \in A} a\right) \to \left(\bigcap_{b \in B} b\right) .$$

Dokaz je isti kao kod Rasiowe-Sikorskog /77/, str.136.

Teorema 1.13 otkriva prisutnost izvesne restringirane distributivnosti u 1-deduktivnim mrežama. Ispostavlja se da je ova restringirana distributivnost dovoljan uslov da potpuna mreža, s podskupom zatvorenim za proizvoljne supremume, bude 1-deduktivna mreža tako da se ovaj podskup poklapa sa skupom implikacija.

Teorema 1.13 Neka je $\mathcal{M}=(M,\cap,\cup,1,\to)$ 1-deduktivna mreža. Ako je I skup implikacija, onda važi:

(3) $$c \cap (a \cup b) = (c \cap a) \cup (c \cap b) \qquad (a,b \in I,\ c \in M).$$

Štaviše, ako je $\mathcal{M}$ potpuna mreža i $A \subseteq I$ (gde je I skup implikacija), onda važi beskonačni analogon (3) :

(4) $$c \cap \bigcup_{a \in A} a = \bigcup_{a \in A} (c \cap a) \qquad (A \subseteq I,\ c \in M) .$$

Otuda, ako skup implikacija 1-deduktivne mreže čini podmrežu, onda ova podmreža mora biti distributivna.

Dokaz formule (3) dat je u /35/, ideja dokaza za beskonačne distributivnosti (4) je ista i potiče iz dokaza distributivnosti Skolemovih implikativnih mreža.

U Skolemovoj implikativnoj mreži $(M,\cap,\cup,1,\rightarrow)$, implikativna operacija $\rightarrow$ jednoznačno je okarakterisana uslovom importacije-eksportacije:

(IE) $\quad a\cap c \leqslant b$ ako i samo ako $c \leqslant a \cap b$,

tako da je

(5) $\quad a \rightarrow b = \sup\{c \in M:\ a\cap c \leqslant b\}$.

U 1-deduktivnim, konačno i potpuno deduktivnim mrežama formula (5) može se prirodno uopštiti.

<u>Teorema 1.14</u> U 1-deduktivnoj mreži $(M,\cap,\cup,1,\rightarrow)$ u kojoj je I skup implikacija, važi:

(6) $\quad a \rightarrow b = \sup\{c \in I:\ a\cap c \leqslant b\}$.

<u>Dokaz</u>: Posledica (IE_1) je:

$c \in I$ i $a \cap c \leqslant b$ ako i samo ako $c \in I$ i $c \leqslant a \rightarrow b$,

što daje $\{c \in I:\ a\cap c \leqslant b\} = \{c \in I:\ c \leqslant a \rightarrow b\}$, odakle se odmah dobija (6), q.e.d.

Ispostavlja se da je uslov (4) i dovoljan da potpuna mreža s podskupom I zatvorenim za proizvoljne supremume bude 1-deduktivna. (Time se uopštava poznat Wardov rezultat /93/ za Skolemove implikativne mreže).

<u>Teorema 1.15</u> Potpuna mreža $(M,\cap,\cup,1,0)$ sa podskupom I $(0,1 \in I)$ zatvorenim za proizvoljne supremume je 1-deduktivna, tako da se skup implikacija poklapa sa I, ako i samo ako važi (4).

<u>Dokaz</u>: Nužnost uslova (4) proističe iz Teoreme 1.13. Obratno, neka su ispunjeni uslovi teoreme i neka važi (4). Definišimo implikativnu operaciju pomoću (6). Tada (PD) važi, jer, ako je $a \leqslant b$, onda je $a \cap 1 \leqslant b$ i $1 \in \{c \in I:\ a \cap c \leqslant b\}$, odakle sledi $a \rightarrow b = 1$. Za sve a,b iz M, $a \rightarrow b \in I$, jer je skup I zatvoren za supremume. S druge strane, ako je $b \in I$, onda je $1 \rightarrow b = \sup\{c \in I:\ 1\cap c \leqslant b\} = b$ i skup implikacija se poklapa sa I. Što se (IE_1) tiče, ako je c implikacija, onda $a\cap c \leqslant b$ povlači $c \leqslant a \rightarrow b$, zbog (6). Time je dokazana restringirana eksportacija. Importacija je posledica (MP), prema 1.1.2. Modus ponens je posledica (4): Stavimo $B = \{c \in I:\ a\cap c \leqslant b\}$. Tada je $a\cap(a\rightarrow b) = a \cap \bigcup_{c \in B} c = \bigcup_{c \in B}(a\cap c) \leqslant b$.

<u>Teorema 1.16</u> U 1-deduktivnoj mreži važi:

<u>1.16.1</u> Ako $a,b \in I$ i $b \rightarrow c = 1$, onda $(a\rightarrow c)\rightarrow((a\cup b)\rightarrow c) = 1$.

<u>1.16.2</u> Ako $a,b \in I$ i $a \rightarrow c = 1$, onda $(b\rightarrow c)\rightarrow((a\cup b)\rightarrow c) = 1$.

<u>1.16.3</u> Ako $a,b \in I$, onda $(a\cup b)\cap(a\rightarrow b) = b$.

Dokaz: 1.16.1 Neka su a i b implikacije u 1-deduktivnoj mreži i $b \to c = 1$. Tada je $b \cap (a \to c) \leqslant b \leqslant c$ i $a \cap (a \to c) \leqslant c$ (MP), odakle je $(b \cap (a \to c)) \cup (a \cap (a \to c)) \leqslant c$, odakle se, primenom (3), dobija $(a \cup b) \cap (a \to c) \leqslant c$, odnosno $a \to c \leqslant (a \cup b) \to c$, zbog (IE_1).

1.16.2 se dokazuje simetrično.

1.16.3. Iz 1.16.1, za $c = b$, sledi $a \to b \leqslant (a \cup b) \to b$, odakle se importacijom dobija $(a \cup b) \cap (a \to b) \leqslant b$. Obrnuta nejednakost sledi iz $b \leqslant a \cup b$ i $b \leqslant a \to b$ (1.5.2).

Teoremom 1.17 daje se jednakosna formulacija 1-deduktivnih (polu)mreža.

Teorema 1.17 Algebra $\mathcal{M} = (M, \cap, \cup, 1, \to)$ ($\mathcal{M} = (M, \cap, 1, \to)$) tipa (2,2,0,2) (tipa (2,0,2)) je 1-deduktivna (polu)mreža ako i samo ako, pored aksioma (polu)mreže, zadovoljava sledeće postulate:

(1D1) $1 \cap a = a$

(1D2) $a \to a = 1$ (1.1.3)

(1D3) $a \cap (a \to b) \cap b = a \cap (a \to b)$ (1.1.8 i 1.5.1)

(1D4) $(a \to (b \to c)) \cap (b \to c) = b \to c$ (1.5.28)

(1D5) $a \to (b \cap c) = (a \to (b \cap c)) \cap (a \to b) \cap (a \to c)$ (1.5.32)

(1D6) $a \to (a \cap b) = a \to b$ (1.5.29).

Dokaz: Brojevi u zagradi s desne strane odnose se na broj teoreme u kojoj je odgovarajući postulat dokazan u 1-deduktivnoj (polu)mreži. Otuda, u 1-deduktivnoj (polu)mreži važe aksiome (1D1) - (1D6).

Obratno, neka apstraktna algebra $\mathcal{M}$ zadovoljava aksiome (polu)mreže i aksiome (1D1) - (1D6). Ako se $a \leqslant b$ definiše kao $a \cap b = a$, tada je $\leqslant$ parcijalno uredjenje u odnosu na koje je $a \cap b = \inf\{a,b\}$ i $a \cup b = \sup\{a,b\}$.

Dokaz (PD). Ako je $a \leqslant b$, tj. $a \cap b = a$, onda je $1 = a \to a = a \to (a \cap b) = (a \to (a \cap b)) \cap (a \to a) \cap (a \to b) = (a \to b) \cap 1 \cap (a \to b) = a \to b$, zbog (1D2), (1D5), (1D6), (1D1) (kao i asocijativnosti idempotentnosti operacije $\cap$).

Dokaz (IE_1). Ako je $c \leqslant a \to b$, onda $a \cap c \leqslant a \cap (a \to b) = a \cap (a \to b) \cap b \leqslant b$, po (1D3). (U dokazu importacije nije potrebna pretpostavka da je c implikacija.

Neka je c implikacija, tj. $c = d \to e$, za neke d, e iz M i pretpostavimo da je $c \cap a \leqslant b$, tj. $(d \to e) \cap a \leqslant b$. Tada je $(d \to e) \cap a = ((d \to e) \cap a) \cap b$ i $a \to ((d \to e) \cap a) = a \to (((d \to e) \cap a) \cap b$ odakle se dobija $(a \to ((d \to e) \cap a)) \cap (a \to (d \to e)) \cap (a \to a) =$ $(a \to ((d \to e) \cap a) \cap b) \cap (a \to ((d \to e) \cap b)) \cap (\ldots$

koristi (1D5). Odatle sledi $(a\to(d\to e))\cap(a\to(d\to e))\cap 1 = (a\to((d\to e)\cap b))\cap(a\to((d\to e))\cap(a\to a)$, po (1D6) i (1D2). Prema tome, $a\to(d\to e) = (a\to((d\to e)\cap b)\cap(a\to(d\to e))\cap(a\to b)$, zbog (1D1). Iz poslednje jednakosti dobija se $(d\to e)\cap(a\to(d\to e)) = (a\to((d\to e)\cap b)\cap(d\to e)\cap(a\to(d\to e))\cap(a\to b)$, što daje $d\to e = (a\to((d\to e)\cap b))\cap(d\to e)\cap(a\to b)$, po (1D4), a to znači: $d\to e\leqslant a\to b$. (Dokaz je modifikacija originalnog Monteireovog dokaza /59/).

Iz prethodnog je jasno da se Skolemova implikativna mreža dobija ako se postulat $1\to a = a$ doda navedenim aksiomama.

Korolar 1.18 1-deduktivna (polu)mreža je Skolemova implikativna (polu)mreža ako i samo ako $1\to a = a$ za sve elemente (polu) mreže.

Iz Korolara 1.18 je jasno zašto se, umesto postulata (1D3) ne može uzeti jače tvrdjenje: $a\cap(a\to b) = a\cap b$, jer bi ono dalo $1\cap(1\to b) = 1\cap b$, tj. $1\to b = b$.

Teorema 1.19 Neka je $\mathcal{M} = (M,\cap,1,\to)$ 2-deduktivna polumreža. Tada je $\mathcal{M}$ 1-deduktivna polumreža i važi:

1.19.1 $(a\to(b\to c))\to((a\to b)\to(a\to c)) = 1$ (1.13.1)

Otuda, prema Lemi 1.4, 1.5.1, 1.5.2, 1.19.1, Teoremi 1.1 i Teoremi II.1.16, $(M,1,\to)$ je S4 implikacijska algebra.

1.19.2 Ako $b\in I$, onda $(a\to(b\to c))\to(b\to(a\to c)) = 1$. (1.14.1)

1.19.3 Ako $a,b\in I$, onda $a\to(b\to c) = (a\to c)\to(b\to c)$. (1.13.5)

1.19.4 $(a\to b)\to((b\to a)\to b) = (b\to a)\to((a\to b)\to a)$. (1.13.6)

1.19.5 $(a\to b)\to((b\to c)\to(a\to c)) = 1$. (1.14.2)

1.19.6 $(b\to c)\to((a\to b)\to(a\to c)) = 1$. (1.14.3)

1.19.7 Ako $a,b\in I$, onda $a\to(b\to c) = b\to(a\to c)$. (1.13.2)

1.19.8 $(a\to b)\cap(b\to c)\leqslant a\to c$.

1.19.9 $a\to(b\cap c) = (a\to b)\cap(a\to c)$.

1.19.10 Ako je a implikacija, onda $(a\cap b)\to c = a\to(b\to c)$.

1.19.11 $((c\to d)\cap a)\to b = (c\to d)\to(a\to b)$.

1.19.12 Ako $c\in I$, onda $c\cap(a\to b) = c\cap((a\cap c)\to(b\cap c))$.

Dokaz: 1.19.1 Iz $a\cap(a\to(b\to c))\cap(a\to b)\leqslant a\cap b\cap(a\to(b\to c))\leqslant b\cap(b\to c)\leqslant c$, zbog 1.1.8, (MP) i izotonije infimuma, primenom (IE_2) i (IE_1), dobija se Fregeov zakon.

1.19.2 do 1.19.7 su posledica 1.19.1.

1.19.8 se dobija iz 1.19.5 jednom primenom importacije.

1.19.9 Iz $a\cap(a\to b)\leqslant b$ i $a\cap(a\to c)\leqslant c$ izlazi $a\cap(a\to b)\cap(a\to c)\leqslant b\cap c$, odakle je $(a\to b)\cap(a\to c)\leqslant a\to(b\cap c)$, po (IE_2). Obrnuta nejednakost važi već u 1-deduktivnoj polumreži

1.19.10 Ako je a implikacija, onda iz $(a\cap b)\cap((a\cap b)\to c)\leq c$ izlazi, po (IE_2) i (IE_1), $(a\cap b)\to c\leq a\to(b\to c)$. Obrnuta nejednakost važi prema 1.5.33.

1.19.11 je direktna posledica 1.19.10.

1.19.12 Prema 1.19.9, 1.1.1 i 1.5.8,
$(c\cap a)\to(c\cap b)=((c\cap a)\to c)\cap((c\cap a)\to b)=(c\cap a)\to b\geq a\to b$, odakle sledi $c\cap((c\cap a)\to(c\cap b))\geq c\cap(a\to b)$. S druge strane, po (MP), $a\cap c\cap((a\cap c)\to(b\cap c))\leq b\cap c\leq b$, odakle se, po (IE_2), dobija $c\cap((a\cap c)\to(b\cap c))\leq a\to b$ (jer je c implikacija), što povlači $c\cap((a\cap c)\to(b\cap c))\leq c\cap(a\to b)$. Time je dokaz završen.

Teorema 1.20 Neka je $\mathcal{M}=(M,\cap,\cup,1,\to)$ 2-deduktivna mreža. Tada, pored zakona iz prethodne teoreme, važi:

1.20.1 Ako $a,b\in I$, onda $(a\cup b)\to c=(a\to c)\cap(b\to c)$.

1.20.2 Ako $a,c\in I$, onda $c\cup(a\to b)\leq(a\cup c)\to(b\cup c)$.

(Nejednakost se ne može zameniti jednakošću čak ni u Skolemovoj implikativnoj mreži.)

Dokaz: 1.20.1 Iz
$(a\cap(a\to c)\cap(b\to c))\cup((b\cap(b\to c)\cap(a\to c))\leq$
$\leq(c\cap(b\to c))\cup(c\cap(a\to c))\leq c$, po (3), jer su a i b implikacije, imamo $(a\cup b)\cap(a\to c)\cap(b\to c)\leq c$, odakle se primenom (IE_2), dobija $(a\to c)\cap(b\to c)\leq(a\cup b)\to c$. Obrnuta nejednakost važi prema 1.6.3.

1.20.2 $(a\cup c)\to(b\cup c)=(a\to(b\cup c))\cap(c\to(b\cup c))=(a\to(b\cup c))\cap 1\geq$
$\geq(a\to b)\cup(a\to c)\geq(a\to b)\cup c$, po 1.20.1, (PD), 1.6.5 i 1.5.2.

Vidi se da je implikacija u 2-deduktivnoj mreži u stvari Lewisova S4 implikacija.

Napomenimo da se dokazi mnogih (ali ne svih) zakonâ deduktivnih implikativnih algebri nalaze u /35/ i da su pravila za računanje analogna pravilima u Skolemovoj implikativnoj mreži i da su ta pravila detaljno izložena kod Curryja /20/. Videti takođe Rasiawa-Sikorski /77/.

Navedena prosta lema ima dalekosežan značaj.

Lema 1.21 U n-deduktivnoj (polu) mreži, za $n\geq 2$, infimum dve (i sledstveno konačno mnogo implikacija) opet je implikacija.

Dokaz: $(a\to b)\cap(c\to d)=(1\to(a\to b))\cap(1\to(c\to d))=$
$=1\to((a\to b)\cap(c\to d))$, po 1.5.14 i 1.19.9.

Korolar 1.22 Za svako $n\geq 2$, (polu) mreža je n-deduktivna ako i samo ako je 2-deduktivna. Otuda su pojmovi n-deduktivne (polu) mreže, za $n\geq 2$, i konačno deduktivne (polu) mreže ekvipolentni.

Dokaz: Ovo je posledica Def.1.3 i lema 1.4 i 1.21.

Korolar 1.23 Skup implikacija u konačno deduktivnoj mreži čini distributivnu podmrežu. Preciznije, ako je $\mathcal{M}=(M,\cap,\cup,1,\to)$ konačno deduktivna mreža i I skup njenih implikacija, onda je $\mathcal{M}_I=(I,\cap,\cup,1)$ distributivna mreža. Ako je $\mathcal{M}$ potpuno deduktivna potpuna mreža (sledstveno sa 0), onda je $\mathcal{M}_I$ potpuna podmreža (koja sadrži 0) . Štaviše, $\mathcal{S}=(I,\cap,\cup,1,\to)$ je Skolemova algebra i otuda je $(I,1,\to)$ pozitivna implikacijska algebra (tj. ω deduktivna implikativna algebra u kojoj važi (SP)).

Dokaz: Da je $\mathcal{M}_I$ distributivna podmreža, sledi iz lema 1.4, 1.7 i 1.21, Th.1.13, Kor.1.22 i Def.1.3. Ako je $\mathcal{M}$ potpuno deduktivna potpuna mreža, onda je $\mathcal{M}_I$ potpuna podmreža zbog lema 1.10 i 1.4, Th.1.11 i Def.1.3. $\mathcal{S}$ je Skolemova algebra zbog 1.1.3, 1.5.28, 1.5.25, 1.19.9 i 1.20.1 , kao i 1.5.1, Leme 1.4, Kor. 1.22 i /59/. Poslednji deo teoreme formulisan je takođe u /35/ i sledi iz Th.I.1.19, 1.19.3, 1.19.4, 1.1.3, 1.5.13 kao i 1.5.1, Leme 1.4 i Kor.1.22.

I konačno deduktivne mreže mogu se okarakterisati prostim jednakosnim aksiomama.

Teorema 1.24 Algebra $\mathcal{M}=(M,\cap,\cup,1,\to)$ $(\mathcal{M}=(M,\cap,1,\to))$ tipa (2,2,0,2) (tipa (2,0,2)) je konačno deduktivna (polu) mreža ako i samo ako, pored aksioma (polu) mreže, zadovoljava i sledeće postulate:

(FD1) $1\cap a=a$ (1D1)

(FD2) $a\to a=1$ ((1D2) ili 1.1.3)

(FD3) $a\cap(a\to b)\cap b=a\cap(a\to b)$ ((1D3) ili 1.1.8 i 1.5.1)

(FD4) $(a\to(b\to c))\cap(b\to c)=b\to c$ ((1D4) ili 1.5.28)

(FD5) $a\to(b\cap c)=(a\to b)\cap(a\to c)$ (1.19.9)

Dokaz: Svi navedeni postulati važe već u 1-deduktivnoj (polu) mreži, a poslednji važi zbog 1.19.9 , Leme 1.4 i Kor. 1.22.

Obratno, ako algebra $\mathcal{M}$ zadovoljava postulate (polu) mreže i (FD1)-(FD5), onda je (polu) mreža i $\leqslant$, definisano sa $a\leqslant b$ ako i samo ako $a\cap b=a$, je (polu) mrežno uređenje.

Dokaz (PD) iz ovih aksioma prostiji je nego kod Th.1.17: ako je $a\leqslant b$, tj. $a\cap b=a$, onda $1=a\to a=a\to(a\cap b)=(a\to a)\cap(a\to b)=1\cap(a\to b)=a\to b$, po (FD2),(FD5) i (FD1).

Dokaz (IE_n). (Nerestringirana) importacija može se dokazati na isti način kao u Th.1.17. Činjenica da je infimum konačno mnogo implikacija opet implikacija posledica je (kao u dokazu Leme 1.17) (FD5) i $1\to(b\to c)=b\to c$ što, sa svoje strane sledi iz (FD4),(FD3) i (FD1): $(1\to(b\to c))\cap(b\to c)=b\to c$
$1\cap(1\to(b\to c))\cap(b\to c)=1\cap(1\to(b\to c))$.

Ako je $c=d\to e$ i $c\cap a\leq b$, tj. $(c\to d)\cap a=((c\to d)\cap a)\cap b$, onda je $a\to((c\to d)\cap a)=a\to(((c\to d)\cap a)\cap b)$, što daje $(a\to(c\to d))\cap(a\to a)=(a\to((c\to d)\cap a))\cap(a\to b)$, tj. $(a\to(c\to d))\cap 1=(a\to(c\to d))\cap(a\to a)\cap(a\to b)$, i konačno $a\to(c\to d)=(a\to(c\to d))\cap(a\to b)$, po (FD5),(FD2)i (FD1). Otuda, $(a\to(c\to d))\cap(c\to d)=(a\to(c\to d))\cap(c\to d)\cap(a\to b)$, odakle se dobija $c\to d=(c\to d)\cap(a\to b)$, po (FD4). Dakle $c\to d\leq a\to b$.

Primedba Pošto je aksioma (1D6) posledica (FD5),(FD2) i (FD1), ona se može izostaviti iz spiska aksioma za konačne deduktivne (polu)mreže kao redundantna. Otuda se aksiomatski sistemi za 1-deduktivne i konačno deduktivne (polu)mreže razlikuju samo za jednu aksiomu.

Korolar 1.25 1-deduktivna (polu)mreža $\mathcal{M}$ je konačno deduktivna (polu)mreža ako i samo ako u $\mathcal{M}$ važi (FD5).

Teorema 1.26 ukazuje na zanimljivu činjenicu da je preslikavanje $I_o(a)=1\to a$, interior operacija na deduktivnoj mreži.

Teorema 1.25 U slabo deduktivnoj mreži :

1.25.1 $I_o(1)=1$ (1.1.3)

1.25.2 $I_o(a)\leq a$ (1.1.10)

U 1-deduktivnoj mreži:

1.25.3 $I_o(I_o(a))=I_o(a)$ (1.5.14)

1.25.4 Ako $a\leq b$, onda $I_o(a)\leq I_o(b)$ (1.5.7)

1.25.5 U konačno deduktivnoj mreži, $I_o(a\cap b)=I_o(a)\cap I_o(b)$.(1.19.9)

1.25.6 U potpuno deduktivnoj potpunoj mreži,

$$I_o(\bigcap_{a\in A} a)=\bigcap_{a\in A} I_o(a) \quad .$$

Zbog Leme 1.21 i Th.1.11, implikativna operacija u konačno i potpuno deduktivnim mrežama izražava se na isti način kao u 1-deduktivnim mrežama.

Korolar 1.26 U konačno i potpuno deduktivnoj mreži, u kojoj je I skup implikacija, važi formula (6).

Za konačno i potpuno deduktivne mreže, važe rezultati analogni Th 1.15 čiji su dokazi mala modifikacija dokaza te teoreme.

Teorema 1.27 Potpuna mreža $(M,\cap,\cup,1,0)$ koja ima distributivnu podmrežu $(I,\cap,\cup,1,0)$, gde je skup I zatvoren za proizvoljne supremume, je konačno deduktivna tako da se skup implikacija poklapa sa I, ako i samo ako je zadovoljen distributivan zakon (4).

Teorema 1.28 Potpuna mreža $(M,\cap,\cup,1,0)$ koja ima distributivnu potpunu podmrežu $(I,\cap,\cup,1,0)$ je potpuno deduktivna tako da se skup implikacija poklapa sa I, ako i samo ako je zadovoljen zakon (4).

Naredna teorema ustanovljuje zanimljivu i neočekivanu vezu između izvesnog restringiranog distributivnog zakona i postulata za koji se ispostavlja da je nezavisan od aksioma za konačno deduktivne mreže.

Teorema 1.29 U konačno deduktivnoj mreži $(M,\cap,\cup,1,\rightarrow)$ gde je I skup implikacija, distributivan zakon:

(7) $c\cap(a\cup b) = (c\cap a)\cup(c\cap b) \quad (a,b\in M,\ c\in I)$

ekvivalentan je svakom od sledećih iskaza:

(FD6) $(a\cup b)\rightarrow c = (a\rightarrow c)\cap(b\rightarrow c)$

(8) $(a\rightarrow c)\cap(b\rightarrow d)\leq(a\cup b)\rightarrow(c\cup d)$.

Dokaz: Neka (FD6) važi i neka je $d=(c\cap a)\cup(c\cap b)$, gde je c implikacija. Iz $c\cap a\leq d$ i $c\cap b\leq d$, dobija se $c\leq a\rightarrow d$ i $c\leq b\rightarrow d$ (po (IE_1)), što daje $c\leq(a\rightarrow d)\cap(b\rightarrow d)=(a\cup b)\rightarrow d$ (po (FD6)), odakle je $c\cap(a\cup b)\leq d$, zbog importacije. Obrnuta nejednakost važi u svakoj mreži, i time je dokazano (7).

Obratno, neka važi (7). Tada $a\cap(a\rightarrow c)\cap(b\rightarrow c)\leq$ $\leq c\cap(b\rightarrow c)\leq c$ i $b\cap(b\rightarrow c)\cap(a\rightarrow c)\leq c\cap(a\rightarrow c)\leq c$ povlače

(9) $(a\cap(a\rightarrow c)\cap(b\rightarrow c))\cup(b\cap(b\rightarrow c)\cap(a\rightarrow c))\leq c$.

Po Lemi 1.21 i Kor.1.22, infimum dve implikacije u konačno deduktivnoj mreži opet je implikacija, tako da se može primeniti (7). Otuda, $(a\cup b)\cap(a\rightarrow c)\cap(b\rightarrow c)\leq c$, odakle se dobija $(a\rightarrow c)\cap(b\rightarrow c)\leq(a\cup b)\rightarrow c$, po (IE_2). Time je dokazani (FD6), jer obrnuta nejednakost važi već u 1-deduktivnoj mreži, po 1.6.3.

Ako (FD6) važi, tada je $(a\cup b)\rightarrow(c\cup d) = (a\rightarrow(c\cup d))\cap$ $\cap(b\rightarrow(c\cup d))\geq((a\rightarrow c)\cup(a\rightarrow d))\cap((b\rightarrow c)\cup(b\rightarrow d))\geq$ $\geq(a\rightarrow b)\cap(c\rightarrow d)$, zbog 1.6.5.

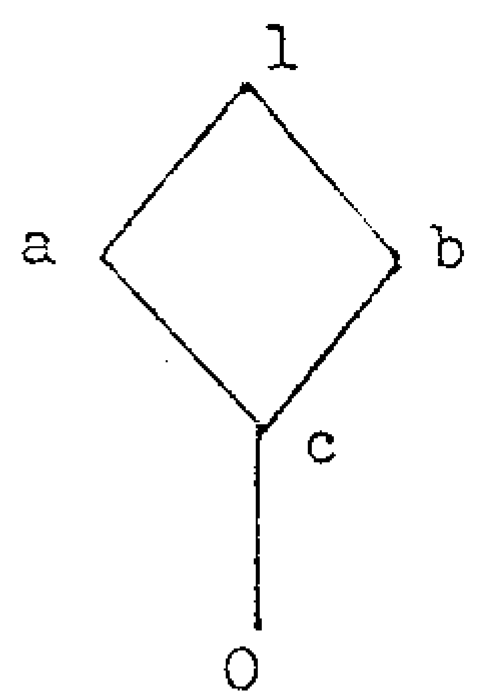
Obratno, iz (8), za c=d, sledi $(a\rightarrow c)\cap(b\rightarrow c)\leq$ $\leq(a\cup b)\rightarrow c$, odakle imamo (FD6), jer obrnuta nejednakost važi već u 1-deduktivnoj mreži zbog 1.6.3, q.e.d.

Analiza prvog dela prethodnog dokaza pokazuje da (FD6) implicira distributivan zakon (7) već u 1-deduktivnoj mreži.

Korolar 1.30 U 1-deduktivnoj mreži , distributivan zakon (7) posledica je (FD6).

Naredni primer pokazuje da ne važi konverzija prethodnog korolara.

Primer 1.1 Mreža čiji je Hasseov dijagram prikazan na slici 2,



sl.2.

primer je 1-deduktivne distributivne mreže koja nije konačno deduktivna i u kojoj (FD6) ne važi, ako se implikacija uvede pomoću (6), gde je $I=\{0,a,b,1\}$ skup implikacija. Pošto je $0=1\to(a\cap b)<(1\to a)\cap(1\to b)=$ $=c$, (FD5) ne važi. Takođe, zbog $0=(a\cup b)\to c<(a\to c)\cap(b\to c)=c$, (FD6) ne važi, mada je mreža distributivna.

Teorema 1.31. U 1-deduktivnoj mreži, distributivan zakon (7) povlači sledeća dva iskaza:

(10) Ako $a\to c=1$, onda $(b\to c)\to((a\cup b)\to c)=1$,

(11) Ako $b\to c=1$, onda $(a\to c)\to((a\cup b)\to c)=1$.

Dokaz: Ako je $a\to c=1$, onda, iz (9), sledi: $(a\cap(b\to c))\cup$ $\cup(b\cap(b\to c))\leq c$, odakle se primenom (7), dobija $(a\cup b)\cap(b\to c)\leq c$, što daje $b\to c\leq(a\cup b)\to c$, po (IE_1). (11) se dokazuje simetrično.

Teorema 1.32 U 1-deduktivnoj mreži svaki od uslova (10),(11) povlači sledeću oslabljenu modularnost mreže:

(12) Ako $c\in I$ i $a\leq c$, onda $a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap c$.

Dokaz: Neka je, u 1-deduktivnoj mreži c implikacija, $a\leq c$ i stavimo $d=a\cup(b\cap c)$. Tada je, očigledno $a\leq d$, tj. $a\to d=1$, što (po (10)) daje $b\to d\leq(a\cup b)\to d$. S druge strane, iz $c\cap b\leq d$, po (IE_1), imamo $c\leq b\to d$, što, prema prethodnom, povlači $c\leq(a\cup b)\to d$ odnosno $c\cap(a\cup b)\leq d$. Obrnuta nejednakost važi trivijalno, ako je $a\leq c$, q.e.d.

Nije jasno šta se dobija ako se aksiomama 1-deduktivne mreže doda postulat (FD6).

U 1-deduktivnoj mreži, dva distributivna zakona (3) i (7) zajedno impliciraju (13).

Teorema 1.33 U 1-deduktivnoj mreži, distributivan zakon (7) povlači:

(13) $c\cup(a\cap b)=(c\cup a)\cap(c\cup b)$ $(c,a\in I$ ili $c,b\in I)$,
gde je I skup implikacija te mreže.

Dokaz: Ako su a i c implikacije u 1-deduktivnoj mreži, onda je i njihov supremum implikacija (Lema 1.7). Otuda,

$(c\cup a)\cap(c\cup b)=((c\cup a)\cap c)\cup((c\cup a)\cap b)$, po (7)

$=c\cup((c\cup a)\cap b)$, po apsorptivnosti

$=c\cup((c\cap b)\cup(a\cap b))$, po (3)

$=(c\cup(c\cap b))\cup(a\cap b)$, po asocijativnosti

$=c\cup(a\cap b)$, po apsorptivnosti.

Dokaz kad su b i c implikacije je simetričan.

U 1-deduktivnoj mreži u kojoj važi (FD6), 1.20.2, 1.16.3 i 1.6.2 mogu se pojačati.

Teorema 1.34 Ako u 1-deduktivnoj mreži važi (FD6) onda

1.34.1 Ako $c\in I$, $c\cup(a\to b)\leq(a\cup c)\to(a\cup b)$.

1.34.2 Ako $b\in I$, onda $(a\cup b)\cap(a\to b)=b$

1.34.3 $(a\ \ b)-a=a-b$(ovo je posledica (7),čak i ako (FD6) ne važi)

Za potpuno deduktivnu potpunu mrežu važi beskonačan analogon Th.1.29.

Teorema 1.35 U potpuno deduktivnoj potpunoj mreži u kojoj je I skup implikacija, beskonačan distributivan zakon:

(14) $$c\cap\bigcup_{b\in B} b=\bigcup_{b\in B}(c\cap b)\qquad (c\in I)$$

ekvivalentan je svakoj od formula:

(FD6') $$\Big(\bigcup_{b\in B} b\Big)\to a=\bigcap_{b\in B}(b\to a)\ ,$$

(15) $$\bigcap_{a\in A,\,b\in B}(a\to b)\leq\Big(\bigcup_{a\in A} a\Big)\to\Big(\bigcup_{b\in B} b\Big)\ .$$

Dokaz je analogan dokazu Th.1.29. i može se naći u autorovom magistarskom radu.

Sledeća tri primera pokazuju da su postulati (FD6) kompatibilni sa aksiomama konačno (i čak potpuno) deduktivnih mreža kao i da su od njih nezavisni.

Primer 1.2 U svetlosti Th.1.28,glavni netrivijalni primeri potpuno deduktivnih potpunih mreža su tzv. Z-mreže, gde se implikacija definiše na Zemanov način:

(16) $a\to b=\sup\{c\in Z(\mathcal{M}) : a\cap c\leq b\}$,

gde je $Z(\mathcal{M})$ centar mreže $\mathcal{M}$. Z-mreže su potpune mreže kod kojih je centar mreže potpuna mreža i važi distributivan zakon:

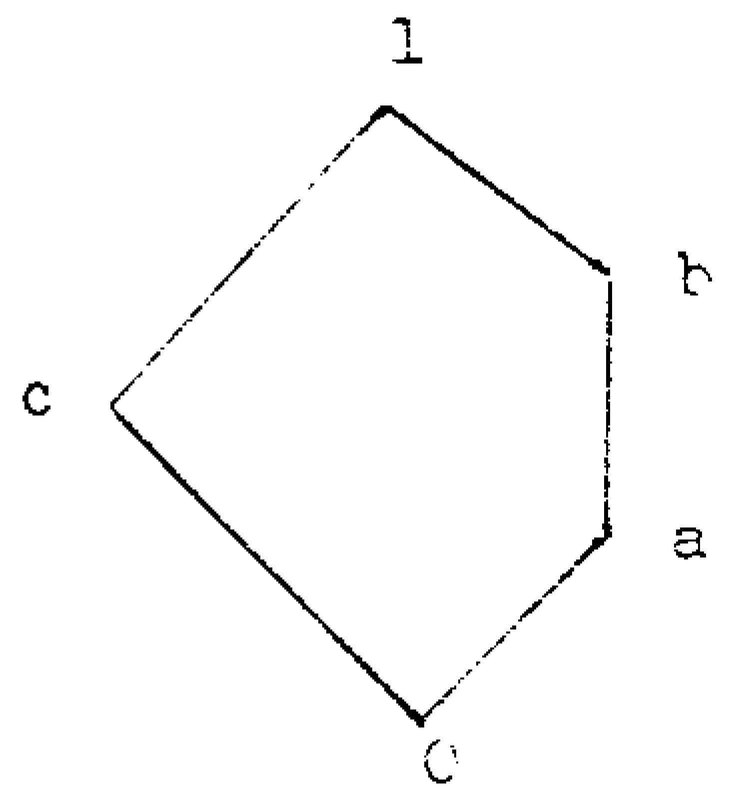
(17) $\quad a \cap \bigcup_{c \in C} c = \bigcup_{c \in C} (a \cap c)' \qquad (C \subseteq Z(\mathcal{M})).$

Kako u svakoj potpunoj mreži $\mathcal{M}$ važi distributivan zakon

(18) $\quad c \cap \bigcup_{a \in A} a = \bigcup_{a \in A} (c \cap a) \qquad (c \in Z(\mathcal{M})),$

u Z-mrežama važi (FD6) i (FD6') (Th.1.29 i Th.1.35) Inače, svaka potpuna, relativno komplementirana mreža je Z-mreža (videti npr. /56/). Naravno, za skup implikacija, koji se ovde poklapa sa centrom mreže, može se uzeti bilo koji podskup centra zatvoren za proizvoljne supremume i infimume.

Primer 1.3 Poznata pentagonalna nemodularna mreža može se učiniti konačno odnosno potpuno deduktivnom, ako se za skup implikacija uzme $I = \{0, a, b, 1\}$, a implikativna operacija definiše pomoću (6). Implikacije čine potpunu distributivnu podmrežu (jer je u pitanju lanac). Distributivan zakon (3) (a samim tim i (4), jer je mreža konačna) očigledno važi. Međutim, ne važi distributivan zakon (7) :



sl.3.

$b = b \cap (a \cup c) > (b \cap a) \cup (b \cap c) = a \qquad (b \in I)$ i prema Th.1.29. ne važi (FD6).

Primer 1.4 Primer konačno deduktivne potpune mreže koja nije potpuno deduktivna u kojoj važi (FD6') i (FD6).

Neka je $M = \{1/n : n \in N\} \cup \{0, -1\}$ lanac, $I = M \setminus \{0\}$ skup implikacija i implikacija definisana pomoću (6). Tada je

$$1 \to \bigcap_{n \in N} \{1/n\} = 1 \to 0 = -1 < \bigcap_{n \in N} (1 \to 1/n) = \bigcap_{n \in N} \{1/n\} = 0 \ .$$

Međutim, distributivan zakon (14) važi, jer je u pitanju lanac. Otuda, po Th.1.35. , važi (FD6') i time (FD6).

I distributivne deduktivne (polu)mreže imaju skupovnu interpretaciju.

Teorema 1.36 Neka je $P(X)$ partitivni skup nekog skupa X, $S(X)$ klasa podskupova od X, zatvorena za proizvoljne unije, takva da $S(X)$ sadrži $\emptyset$ i X, i neka je I_o semi-interior operacija na $P(X)$ određena tom klasom. Tada su algebra $(P(X), \cap, \cup, X, \to)$ $((P(X), \cap, X, \to))$ i njene podalgebre, gde je

(19) $\quad Y \to Z = I_o((X \setminus Y) \cup Z) \qquad (Y, Z \in P(X))$,

a $\cap$ i $\cup$ su skupovni presek i unija, skupovne 1-deduktivne distributivne (polu)mreže. U ovim algebrama invarijante operatora I_0 su implikacije i obrnuto, implikacije su invarijante.

Dokaz (PD) i da se implikacije poklapaju sa invarijantama operacije I_0, izvodi se isto kao za Th.II 1.25. Dokažimo još (IE_1), tj. da je $Y \cap V \subseteq Z$ ekvivalentno sa $V \subseteq Y \to Z$, ako je V invarijanta I_0. Naime, $Y \cap V \subseteq Z$ važi ako i samo ako $V \subseteq (X \setminus Y) \cup Z$. Ako je, uz to, V invarijanta, poslednja inkluzija ekvivalentna je sa $V \subseteq I_0((X \setminus Y) \cup Z) = Y \to Z$. Time je dokaz završen.

Teorema 1.37 Neka je P(X) partitivni skup skupa X, τ topologija na X i I_τ interior operacija topološkog prostora (X, τ). Tada su algebra $(P(X), \cap, \cup, X, \to)$ $((P(X), \cap, X, \to))$ i njene podalgebre, gde je

(20) $\quad Y \to_\tau Z = I_\tau((X \setminus Y) \cup Z) \qquad (Y, Z \in P(X))$,

a $\cap$ i $\cup$ su skupovni presek i unija, skupovne konačno deduktivne distributivne (polu)mreže. U ovoj algebri, otvoreni skupovi se poklapaju s implikacijama.

Dokaz: Pošto je svaki topološki operator semi-interior operator, zbog prethodne teoreme i Kor.1.25, dovoljno je još dokazati (FD5):

$$\begin{aligned} V \to_\tau (Y \cap Z) &= I_\tau((X \setminus V) \cup (Y \cap Z)) \\ &= I_\tau(((X \setminus V) \cup Y) \cap ((X \setminus V) \cup Z)) \\ &= I_\tau((X \setminus V) \cup Y) \cap I_\tau((X \setminus V) \cup Z) \\ &= (V \to_\tau Y) \cap (V \to_\tau Z) \quad . \end{aligned}$$

Naravno, u distributivnij konačno deduktivnoj mreži važi (FD6) (Th.1.29), q.e.d.

Naravno, iz Stoneovih teorema reprezentacije odmah se dobija da su skupovne 1-deduktivne distributivne (polu)mreže, do na izomorfizam, tipični primeri takvih mreža.

S druge strane, iz teorema reprezentacije za(1-deduktivne) S4 implikacijske algebre sledi da se svaka takva implikacijska algebra može izomorfno potopiti u (skupovnu 1-deduktivnu distributivnu (polu)mrežu) skupovnu konačno deduktivnu distributivnu polumrežu ili mrežu tako da se čuva implikacija. To pokazuje da 1-deduktivne S4 implikacijske algebre potpuno karakterišu implikaciju deduktivnih implikativnih mreža.

Dodajmo još da su 1-deduktivne i konačno deduktivne (polu)mreže sa pseudo-komplementacijom nebitna ekspanzija ograničenih 1-deduktivnih i konačno deduktivnih (polu)mreža jer se pseudokomplement elementa a , u oznaci $\neg a$ može shvatiti kao zamena za $a \to 0$.

B I B L I O G A F I J A

1. Abbott, J.C., Implication Algebras, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S. Roumanie, Tome 11(59), No 1, 1967, pp.3-23.
2. Abbott, J.C., Semi-Boolean Algebra, Matematički vesnik 4(19), 1967, pp.177-198.
3. Anderson, A.R., Belnap, N.D., Entailment, The Logic of Relevance and Necessity, Vol.I, Princeton University Press, Princeton 1975.
4. Balbes, R., A representative theory for prime and implicative semilattices, Trans.Am.Math.Soc. 136(1969), pp.261-267
5. Barcan Marcus, R., Strict implication, deducibility and the deduction theorem, The Journal of Symbolic Logic, vol.18, No 3, 1953, pp.234-236.
6. Bergmann, G., Multiplicative Closures, Portugaliae Mathematica, Vol.11 - Fasc.4 - 1952, pp.169-172.
7. Birkhoff, G., On the Structure of Abstract Algebras, Proc. of the Cambridge Phil.Soc., Vol.31, 1935, pp.433-454.
8. Birkhoff, G., Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol.25, Rev.Ed., New York 1948, third ed. 1967.
9. Blyth, T.S., Janowitz, M.F., Residuation Theory, Pergamon Press, Oxford 1972.
10. Boričić, B.R., Equational reformulations of intuitionistic propositional calculus and classical first order predicate calculus, Publ. Inst. Math., Tome 29(43), 1981, pp.23-28.
11. Božić, M., Prilog semantici relevantnih logika (doktorska disertacija), Beograd 1983.
12. Bruns, G., Verbandstheoretische Kennzeichnung vollständiger Mengenringe, Archiv der Mathematik, Vol.X, 1959, pp.109-112
13. Bruns, G., Distributivität und subdirekte Zerlegbarkeit vollständiger Verbände, Archiv der Mathematik, vol.XII, 1961, pp.61-66.
14. Bruns, G., Darstellungen und Erweiterungen geordneter Mengen. I,II, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 209, 210, 1962.

15. Buchi, R., Representation of Complete Lattice by Sets, Portugaliae Mathematica, vol.11 - Fs.4, 1952.
16. Calugareanu, G., Some remarks about Mutual Pseudocomplements in Lattices, Mathematica, Tome 22(45), No.2, 1980, pp.237-9.
17. Chang, C.C., Horn, A., On the Representation of α-complete Lattices, Fundamenta Mathematicae, LI (1962), pp.253-258.
18. Church, A., Introduction to Mathematical Logic, Princeton University Press, Princeton 1956.
19. Crawley, P., Regular Embeddings which preserve Lattice structure, Proc.Am.Math.Soc., vol.13, No 5 (1962),pp.748-752.
20. Curry, H.B., Foundations of Mathematical Logic, Dover Publ. New York 1977.
21. Daigneaut, A., Studies in Algebraic Logic, Math.Asoc. of America, 1974.
22. Diaz, M.R., Deductive Completeness and Conditionalization in systems of weak Implication, Notre Dame journal of Formal Logic, vol.XXI, No 1, 1980, pp. 119-130.
23. Diego, A., Sur les algèbres de Hilbert, Collection de Logique Mathematique, Gauthier-Villars, 1966, pp. 1-52.
24. Enderton, H.B., A Mathematical Introduction to Logic, Academic Press, New York, London 1972.
25. Frink, O., Representations of Boolean Algebras, Bull.Am.Math. Soc., vol.47, No 10 (1941), pp. 755-756.
26. Frink, O., Pseudo-complements in Semi-lattices, Duke Math.J. 29, 1962, pp.505-514.
27. Fuchs,L., Teilweise geordnete algebraische Strukturen, Akademiai Kiado, Budapest 1966.
28. Grätzer, G., General Lattice Theory, Birkhäuser Verlag, Basel und Stutgart 1978.
29. Grätzer, G., Universal Algebra, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1979.
30. Hacking, I., What is Strict Implication?, Journal of Symbolic Logic, 28(1), 1963, pp.51-71.
31. Halmos, P.R., Algebraic Logic, Chelsea, New York 1962.
32. Hardegree, G.N., The Conditional in Abstract and Concrete Quantum Logic, u Hocker, C.A.,(ed.), The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics, vol.2, D.Reidel, Dordrecht 1979, pp. 49-108.

33. Hardegree, G.M., Material Implication in Orthomodular (and Boolean) Lattices, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol.22, No 2, 1981.
34. Henkin, L., An Algebraic Characterization of Quantifiers, Fundamenta Mathematicae, vol.37, 1950, pp.63-74.
35. Herman, L., Marsden, E.L., Piziak, R., Implication Connective in Orthomodular Lattices, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol.16(3), 1975.
36. Hermes, H., Einführung in die Verbandstheorie, Zweite Auflage, Springer Verlag, Berlin 1967.
37. Hilbert, D., Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, I,II, Springer Verlag, Berlin 1968, 1970.
38. Hoo, C.S., Pseudocomplemented and Implicative Semilattices, Canadian Journal of Mathematics, vol.34, No 2, 1982, 423-437
39. Horn, A., On α-homomorphic images of α rings of sets, Fundamenta Mathematicae, LI, 1962, pp.259-266.
40. Hughes, G.E., Cresswell, M.J., An Introduction to Modal Logic, Methuen and Co, London 1968.
41. Janowitz, M.F., The Center of a Complete Relatively Complemented Lattice is a Complete Sublattice, Proc.Am.Math.Soc. 18 (1967), pp.189-190.
42. Karp, C.R., Set Representation Theorems in Implicative Models, Amer.Math.Monthly, vol.61 (1954), p.523.
43. Katriňak, T., Pseudocomplementäre Halbverbande, Matematicky časopis, 18 (1968), No 2.
44. Katriňak, T., Charakterisierung der Veralgemeinerten Stoneschen Halbverbände, Matematicky časopis, 19 (1969), No 3,
45. Katriňak, T., Die Kennzeichnung der distributiven pseudokomplementaren Halbverbände, Journal für die seine und angewandte Mathematik, Band 241, 1970, pp.160-179.
46. Katriňak, T., Die Kennzeichnung der Beschrankten Brouwerschen Verbände, Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (97) 1972, pp. 427-434.
47. Katriňak, T., Uber eine Konstruktion der distributive pseudokomplementären Verbande, Mathematische Nachrichten, Band 53, Heft 1-6 (1972), pp.85-99.
48. Kon, P., Universaljnaja algebra, Moskva 1968. (Cohn, P.M. Universal Algebra, Harper and Row, New York 1965).

49. Kotas, J, Logical systems with implications, Studia Logica, Tom XXVIII, 1971, pp. 101-115.

50. Kron, A., Deduction theorems for relevant logics, Zeitschrift f. Math. Logik und Grundlagen d. Mathematik, Band 19 (1973), pp.85-92.

51. Kuratowski, K., Topology, Academic Press, New York 1966.

52. Kurepa, Dj., Teorija skupova, Zagreb 1951.

53. Lakser, H., The Structure of Pseudocomplemented Distributive Lattices, I: Subdirect Decomposition, Trans.Am.Math.Soc. Vol.156, 1971, pp.335-358.

54. Lee, K.B., Equational Classes of Distributive Pseudo-complemented Lattices, Can.J.Math., Vol.XXII, No 4, 1970, pp.881-891.

55. Lewis, C.I., Langford, C.M., Symbolic Logic, Second Ed., Dover Publ. 1959 (first ed. New York 1932).

56. Maeda F., Maeda, S., Theory of Symmetric Lattices, Springer Verlag, Berlin 1970.

57. Mandelker, M., Relative Annihilators in Lattices, Duke Mathematical journal, Vol.37, No 2 (1970), pp.377-386.

58. Monteiro, A., Ribeiro, H., L'Operation de Fermeture et ses Invariants dans les Systémes Partiellement Ordonnes, Portugaliae Mathematica, vol. 3, 1942, pp.171-184.

59. Monteiro, A., Axiomes Independante pour les Algebre de Brouwer, Revista de la Union Mathematica Argentina y de la Associacion Fisica Argentina, 17(1955), pp.149-160.

60. Marsden, E.L., Compatible Elements in Implicative Models, J.of Phil.Log., 1(1972), pp.156-161.

61. Marsden, E.L., A Note on Implicative Models, Notre Dame J. of Formal Logic, 14(1), 1973, pp.139-144.

62. Morgado, J., Quasi-isomorphisms between complete lattices, Portugaliae Mathematica, vol.20 - Fas.1 - 1961, pp. 17-31.

63. Morgado, J., Some remarks on quasi isomorphisms between finite lattices, Portugaliae Mathematica, vol.20 - Fasc.5 - 1961, pp. 137-145.

64. Nemitz, C.W., Implicative semi-lattices, Trans.Am.Math.Soc. Vol.117, 1965, pp.128-142.

65. Ogasawara, T., Relation between Intuitionistic Logic and Lattice, Journal of Science of Hiroshima Univ., ser.A, 9 1939, pp.157-164.

66. Pahi, B., On the non-existence of finite characteristic matrices for some implicational calculi, The Journal of Symbolic Logic, vol.31, No 4, 1966, pp.682-683.
67. Papert, D., Congruence Relations in Semi-Lattices, Journal of London Math.Soc. 39 (1964), 723-729.
68. Pogorzelski, W.A., On the scope of the classical deduction theorem, The Journal of Symbolic Logic, vol.33, No 1, 1968, pp.77-81.
69. Prešić, S.B., Equational reformulation of formal theories, Publ. de l'Inst.Math., tome 19(33), 1975, pp.131-138.
70. Prešić, S.B., A completeness theorem for one class of propositional calculi, Publ. de l'Inst. Math., tome 26(40), 1979, pp.249-254.
71. Priestley, H.A., Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces, The Bull.of the Lond. Math. Soc., vol.2, 1970, pp.186-190.
72. Priestley, H.A., Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices, Proc. of the Lond. Math. Soc., Third series, vol.24, part 3, 1972, pp.507-530.
73. Prior, A.N., The theory of implication, Zeitschr.f.Mathem. Logik und Grundlagen d. Mathematik, Band 9, 1963, pp.1-6.
74. Ramana Murty, P.V., Prime and Implicative Semilattices, Algebra Universalis, 10 (1980), pp.31-35.
75. Raney, G., Completely Distributive Complete Lattices, Proc. Am. Math. Soc., vol.3 (1952), pp.677-680.
76. Rasiowa, H., An Algebraic Approach to Non-Classical Logics, Studies in Logic and the Foundations in Mathematics, Vol.78, North-Holland, Amsterdam 1974.
77. Rasiowa, H., Sikorski, R., The Mathematics of Metamathematics, Sec. Ed. Rev., Monografie Matematyczne, Tom 41, Warszawa 1968.
78. Schein, B.M., On the Definition of Distributive Semilattices, Algebra Universalis, 2 (1972), pp.1-2.
79. Schütte, K., Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik, Springer Verlag, Berlin, 1968.
80. Sikorski, R., Boolean Algebras, Springer Verlag, Berlin 1964.
81. Skornjakov, L.A., Elementy Teorii Struktur, Nauka, Moskva 1982.

82. Stone, M.H., The Theory of Representations for Boolean Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), pp.37-111.
83. Stone, M.H., Topological Representations of Distributive Lattices and Brouwerian Logics, Časopis pro péstovani matematiky a fiziky, 67, 1937, pp.1-25.
84. Szász, G., Théorie des treillis, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971.
85. Tarski, A., On some fundamental concepts of metamathematics, Logic, Semantics, Metamathematics, Clarendon Press, Oxford 1969.
86. Thomason, R.H., On the strong semantical completeness of the intuitionistic predicate calculus, The Journal of Symbolic Logic, vol.33, No 1, 1968, pp.1-7.
87. Urquhart, A., A topological representation theory for lattices, Algebra Universalis, 8 (1978), pp.45-58.
88. Varlet, J.C., Distributive Semilattices and Boolean Lattices, Bulletin de la Societe Royale des Sciences de Liege, 41e ann. No 1-2, 1972, pp.5-10.
89. Varlet, J.C., Relative Annihilators in Semilattices, Bull. Austral. Math. Soc., vol.9, 1973, 169-185.
90. Varlet, J.C., On Separation Properties in Semilattices, Semigroup Forum, vol.10, No 3 (1975), pp.220-228.
91. Vukomanović, Dj.V., Implikacija i mreže (magistarski rad) VI + 104, Beograd 1981.
92. Vukomanović, Dj.V., Deductive Lattices (abstract), Journal of Symbolic Logic, vol.49, No 2, 1984, p.681.
93. Ward, M., Structure residuation, Annals of Mathematics, vol. 39, No 3, 1938, pp.558-568.
94. Zeman, J.J., Modal Logic, The Lewis-Modal Systems, Clarendon Press, Oxford 1973.