BEOGRADSKI UNIVERZITET

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

Velimir Ž. BRANKOVIĆ

STABILNOST KRETANJA HOLONOMNIH I NEHOLONOMNIH SISTEMA PROMENLJIVE MASE

Disertacija
za sticanje naučnog stepena
doktora mehaničkih nauka

BEOGRAD
1985.

Izražavam zahvalnost Prof. dr VELJKU A. VUJIČIĆU za pomoć u mom naučnom usavršavanju, a Prof. dr ALEKSANDRU BAKŠI na savetima i primedbama koje su mi pomogle u izradi ovog rada.
Posebnu zahvalnost dugujem članu A NSSSR V.V. Rumjancevu za pruženu pomoć u izučavanju teorije stabilnosti kretanja mehaničkih sistema.

S A D R Ž A J

Strana

================

PREDGOVOR

Teorija kretanja mehaničkih sistema promenljive mase i stabilnosti kretanja mehaničkih sistema nije izgubila ni danas na aktuelnosti.

Jednačine Meščersokog [19] objavljene 1897. godine i Ljapunovljeva teorija objavljena 1892. godine nailaze i sada na teorijski interes i široku praktičnu primenu u raketnoj dinamici, u teoriji automatske regulacije i optimalnog upravljanja, u biologiji, hemiji, fizici i drugim naučnim oblastima i praksi.

Kao što je poznato, Meščerski je, prvo, rešavao problem kretanja slobodne materijalne tačke gde se masa menja usled odvajanja čestica od osnovne tačke, a posle i kretanje materijalne tačke kojoj se masa menja usled istovremenog pripajanja i odvajanja čestica od osnovne materijalne tačke.

Radovima I.V. Meščerskog i drugih naučnika oblast istraživanja je proširena na kretanje neslobodne materijalne tačke mehaničkog sistema i tela, za slučaj holonomnih i neholonomnih veza i na druge oblasti. Posebno su interesantna s obzirom na konkretnu primenu, istraživanja, kretanje tela za šupljinama i njihova stabilnost.

Problemi stabilnosti pojavili su se prvo u mehanici u izučavanju ravnotežnog položaja sistema na kojeg deluje sila Zemljine teže. E. Terričeli je 1644. godine formulisao princip o stabilnosti ravnoteže tela, koje se nalazi pod dejstvom sile zemljine teže. 1788 godine Ž. Lagranž je dao dosta tačne uslove stabilnosti ravnoteže proizvoljnih konzervativnih sistema.

Prva tehnološka revolucija i sa njom sve šira primena parnih mašina podsticala je naučna istraživanja u oblasti stabilnosti kretanja.

Istraživanja Dž.K. Marksvela (1868 godine i I.A. Višegradskoga (1876-1877 godine) i drugih pokazala su potrebu pronalaženja opšteg principa stabilnosti kretanja sistema, da bi se dalje mogla razvijati teorija regulacije rada parnih mašina, odnosno rešio problem stabilnog režima rada parnih mašina.

U 1892. godini objavljena je A. M. Ljapunova disertacija "Opšti zadaci o stabilnosti kretanja" koja je dala odgovor na tadašnje zahteve tehničke prakse.

A. M. Ljapunov je objavio dve osnovne metode ispitivanja stabilnosti kretanja, od kojih je drugi metod (direktni metod) široko prihvaćen.

Posle I. V. Mašečskog i A. M. Ljapunova teorija sistema promenljive mase, odnosno stabilnosti kretanja sistema razvijala se novim putevima, razvijena istraživanjima i ostvarenim rezultatima velikog broja naučnika.

Smatrali smo da pitanja stabilnosti ravnoteže i kretanje holonomnih i neholonomnih mehaničkih sistema promenljive mase što je predmet ovog rada nisu dovoljno istražena. Osnovne ideje istražene u radu temelje se na radovima V. Vujičića [36]-[42], A. Bakše [5], i V. V. Rumnjanceva [24] — [30].

U radu smo:

prvo, izvršili pokušaj šire interpretacije diferencijalnih jednačina datih u tenzorskom obliku za materijalnu tačku i mehanički sistem promenljive mase u konfiguracionom i 2n - dimenzionom faznom prostoru i izveli smo transformisane oblike nekih diferencijalnih jednačina holonomnog i neholonomnog mehaničkog sistema tačaka promenljive mase i diferencijalne jednačine poremećenog kretanja holonomnog i neholonomnog sistema tačaka promenljive mase;

Drugo, odredili smo dovoljne uslove da ravnotežno stanje, odnosno kretanja mehaničkog holonomnog i neholonomnog sistema promenljive mase bude stabilno, odnosno nestabilno;

Treće, uslovi stabilnosti stanja ravnoteže i kretanja sistema su dati u smislu direktnog Ljapunovljevog metoda. Pomoću ovih uslova olakšava se rešavanje zadataka jer se smanjuje broj promenljivih u funkciji u poredjenju sa odgovarajućom Ljapunovom funkcijom ili time što se isključuje potreba odredjivanja funkcije Ljapunova pri ispitivanju stabilnosti kretanja, odnosno stanja ravnoteže mehaničkog sistema.

1.1. JEDNAČINE KRETANJA SLOBODNE TAČKE PROMENLJIVE MASE

Hipoteza kontaktnog medjudejstva odbačenih čestica omogućila je I.V. Meščerskom [21] da izvede u vektorskom obliku diferencijalnu jednačinu kretanja tačke promenljive mase:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{u} - \vec{v}), \tag{1}$$

m – masa osnovne tačke,
$\vec{F}$ – rezultanta aktivnih spoljašnjih sila,
$\vec{v}$ – brzina osnovne tačke,
$\vec{u}$ – apsolutna brzina odbačene čestice.

Meščerski je ovu jednačinu izveo smatrajući, da postoji uzajamno delovanje izmedju materijalne tačke i čestice koja se odvaja od tačke i da ovo delovanje ima karakter udara. Izvedena jednačina (1) važi samo kada se čestica odvaja od osnovne tačke ili se pripaja materijalnoj tački.

Kada je apsolutna brzina odbačenih čestica jednaka nuli, tj. $\vec{u} = 0$, tada se jednačina svodi na oblik:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \tag{2}$$

Skalarni oblik jednačina (1) kretanja tačke promenljive mase je:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{dm}{dt}(u^1 - \dot{x}),$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \frac{dm}{dt}(u^2 - \dot{y}), \qquad (3)$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \frac{dm}{dt}(u^3 - \dot{z}).$$

gde su x, y, z projekcije brzine tačke u Dekartovim artogonalnim kordinatama, a u^1, u^2, u^3, projekcije apsolutne brzine odbačenih čestica.

Kao što je već rečeno diferencijalna jednačina (1) primenljiva je za kretanje tačke u slučaju odbacivanja čestica $\frac{dm}{dt}<0$, ili, pripajanja čestica $\frac{dm}{dt}>0$, materijalnoj tački.

I.V. Meščerski je u radu [22] odredio jednačine kretanja tačke promenljive mase kada se masa tačke u toku kretanja menja usled istovremenog pripajanja i odvajanja čestica od osnovne tačke.

Reaktivna sila koja je stvorena odvajanjem čestica mase dm, od osnovne tačke jednaka je

$$\vec{F}_1 = \frac{dm_1}{dt}(\vec{u}_1 - \vec{v}) = \frac{dm_1}{dt}\vec{V}_1$$

gde je,

$\vec{u}_1$ – apsolutna brzina odvojene čestice,

$\vec{v}$ – brzina tačke promenljive mase,

$\vec{V}_1$ – relativna brzina odvojene čestice.

Analogono prethodnom za slučaj pripajanja čestice mase dm, osnovnoj tački sila je:

$$\vec{F}_2 = \frac{dm_2}{dt}(\vec{u}_2 - \vec{v}) = \frac{dm_2}{dt}\vec{V}_2 ,$$

$\vec{u}_2$ - apsolutna brzina pripojene čestice,
$\vec{V}_2$ - relativna brzina pripojene čestice.

Sada diferencijalnu jednačinu kretanja tačke promenljive mase, čija se masa menja usled istovremenog pripajanja i odvajanja čestica od osnovne tačke možemo kako je pokazano u [22] dati u obliku:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt}(\vec{u}_1 - \vec{v}) + \frac{dm_2}{dt}(\vec{u}_2 - \vec{v}), \qquad (4)$$

gde je, m masa posmatrane tačke u datom momentu vremena. Kada je $\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$, tada se jednačina (4) svodi na oblik:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{V}_1 - \vec{V}_2).$$

Masa tačke u ma kojem momentu vremena t jednaka je:

$$m = m_0 - m_1 + m_2 = m_0 - \int_0^t \left|\frac{dm_1}{dt}\right| dt + \int_0^t \frac{dm_2}{dt}\, dt$$

gde je

m_1 - masa odvojenih čestica za vreme (t-to)
m_2 - masa pripojenih čestica za vreme (t-to)
m_0 - masa tačke u trenutku t = to.

Jednačina (4) u skalarnom vidu je:

$$m\ddot{x} = X + \frac{dm_1}{dt}(u^1_{(1)} - \dot{x}) + \frac{dm_2}{dt}(u^1_{(2)} - \dot{x}),$$
$$m\ddot{y} = Y + \frac{dm_1}{dt}(u^2_{(1)} - \dot{y}) + \frac{dm_2}{dt}(u^2_{(2)} - \dot{y}),$$
$$m\ddot{z} = Z + \frac{dm_1}{dt}(u^3_{(1)} - \dot{z}) + \frac{dm_2}{dt}(u^3_{(2)} - \dot{z}).$$

Kada se tačka promenljive mase nalazi u miru, $\vec{v}=0$, $\frac{d\vec{v}}{dt}=0$ tada se jednačine (5) transformišu u jednačine relativne ravnoteže [22] :

$$X+\frac{dm_1}{dt}u^1_{(1)}+\frac{dm_2}{dt}u^1_{(2)}=0,\quad Z+\frac{dm_1}{dt}u^3_{(1)}+\frac{dm_2}{dt}u^3_{(2)}(6)=0.$$
$$Y+\frac{dm_1}{dt}u^2_{(1)}+\frac{dm_2}{dt}u^2_{(2)}=0, \qquad (6)$$

Opšte jednačine Meščerskog u Dekartovom kordinantnom sistemu $D_3\{y^1,y^2,y^3\}$ možemo napisati i u ovome obliku:

$$m\frac{d\dot{y}_i}{dt}=Y_i+\frac{dm}{dt}(u_i-\dot{y}_i) \qquad (7)$$
$$(i=1,2,3)$$

$\frac{dm}{dt}$ = brzina dinamičke promene mase usled otpadanja čestica

Y_i - komponente vektora spoljašnjih sila u Dekartovom sistemu,

u_i - komponente vektora apsolutne brzine otpadajućih čestica

Jednačine (7) iz Dekartovog sistema kordinata možemo transformisati u krivolinijski sistem kordinata x^i. Prvi izvod vektora je brzine $\dot{y}_i=\partial_\alpha y^i\dot{x}_\alpha$, $\frac{dy^i}{dt}=\dot{y}^i$, a kordinate vektora ubrzanja su

$$\frac{d\dot{y}^i}{dt}=\partial_\alpha y^i\ddot{x}^\alpha+\partial_{\alpha\beta}y^i\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta.$$

zamenom ovih vrednosti u (7) i komponovanjem sa $\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^i}$ dobićemo

$$m(\partial_i y^i\partial_i x^\gamma\ddot{x}^\alpha+\partial_{\alpha\beta}y^i\partial_i x^\gamma\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta)=Y^i\partial_i x^\gamma+$$
$$+\frac{dm}{dt}(u^i_{(1)}\partial_i x^\gamma-\partial_\alpha y^i\dot{x}^\alpha\partial_i x^\gamma)$$

odnosno,

$$m(\ddot{x}^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}) = X^{\gamma} + \frac{dm}{dt}(\bar{u}^{\alpha} - \dot{x}^{\gamma}),$$

gde je X^{γ} - kontravarijanta kordinata spoljašnjih sila tj. $X^{\gamma} = Y^{i}\partial_i x^{\gamma}$.

Jednačinu (8) možemo pisati u obliku:

$$\frac{D\dot{x}^{\gamma}}{Dt} = \ddot{x}^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = Q^{\gamma} + \Psi^{\gamma}, \qquad (8)$$

$$\frac{D\dot{x}_{\gamma}}{Dt} = a_{\gamma\beta}\ddot{x}^{\beta} + \Gamma_{\gamma,\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = Q_{\gamma} + \Psi_{\gamma},$$

ili u faznom prostoru opšte jednačine su prema [49] jednake:

$$\dot{x}^{\alpha} = a^{\alpha\beta}p_{\beta} \qquad (9)$$

$$\dot{p}_{\alpha} = a^{\gamma\beta}\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}p_{\delta}p_{\gamma} + Q_{\alpha} + P_{\alpha}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Ovde su generalisane reaktivne sile

$$\Psi^{\gamma} = \frac{1}{m}(\bar{u}^{\gamma} - \dot{x}^{\gamma}), \quad a \quad \bar{u}^{\gamma} = u^{i}\partial_i x^{\gamma},$$

su kontravarijante kordinate vektora brzine otpadajućih čestica.

Generalisane kordinate sila izazvanih otpadanjem čestica su jednake $P_{\alpha} = \frac{dm}{dt}u_i\frac{\partial y^{i}}{\partial q^{\alpha}}$ a generalisane aktivne spoljašnje sile su $\frac{1}{m}X^{\gamma} = Q^{\gamma}$.

1.2. JEDNAČINE KRETANJA NESLOBODNE TAČKE PROMENLJIVE MASE

Tačka promenljive mase m = m (t) gde se masa menja usled pripajanja čestica osnovnoj tački na koju deluje aktivna sila $\vec{F}$, je vezana i kreće se po površini

$$\varphi(\vec{r}) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0. \tag{10}$$

Položaj tačke odredjen je vektorom položaja $\vec{r}$.

Ako kretanje neslobodne tačke po površini (10) posmatramo u Dekartovim kordinatama tada su jednačine kretanja tačke jednake [22] :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{dm}{dt}(u_1 - \dot{x}) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \frac{dm}{dt}(u_2 - \dot{y}) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \frac{dm}{dt}(u_3 - \dot{z}) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Ako posmatramo kretanje tačke po datoj krivoj

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

$$\psi(x, y, z) = 0,$$

jednačine su

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{dm}{dt}(u_1 - \dot{x}) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \nu\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \frac{dm}{dt}(u_2 - \dot{y}) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \nu\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \frac{dm}{dt}(u_3 - \dot{z}) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \nu\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Radijus vektor $\vec{r}$ tačke koja je počinjena vezama (10) može se napisati i u parametarskom obliku:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_i). \qquad (i = 1,2)$$

Brzina posmatrane tačke sada se može izraziti u obliku:

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2}\dot{q}^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^s}\dot{q}^s \qquad (s = 1,2)$$

Izvod brzine po vremenu sada je

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^s}\ddot{q}^s + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^s \partial q^j}\dot{q}^s\dot{q}^j \quad (s,j = 1,2)$$

ili u skalarnom obliku

$$\frac{d\dot{y}_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial q^s}\ddot{q}^s + \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^s \partial q^j}\dot{q}^s\dot{q}^j \quad \begin{matrix}(i = 1, 2)\\(s = 1, 2)\end{matrix} \tag{11}$$

jer je

$$y_i = y_i(q_1, q_2).$$

Diferencijalna vektorska jednačina kretanja neslobodne tačke promenljive mase za posmatrano kretanje je

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{u} - \vec{v}) + \lambda \operatorname{grad}\varphi,$$

ili u sklarnom obliku

$$m\frac{d\dot{y}_i}{dt} = Y_i + \frac{dm}{dt}(u_i - \dot{y}_i) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2)$$

odnosno

$$m\left(\frac{\partial y_i}{\partial q^s}\ddot{q}^s + \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^s \partial q^j}\dot{q}^s\dot{q}^j\right) = Y_i + Y_{ri} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \qquad (s,j = 1,2)$$

Komponovanjem prethodnog izraza sa $\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}$, diferencijalna jednačina dobija oblik:

$$m \frac{\partial y_i}{\partial q^s}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}\ddot{q}^s + m \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^s \partial q^l}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}\dot{q}^s \dot{q}^l = Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} + Y_{ri}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}$$

Generalisane sile u konfiguracionom prostoru kao što je poznato mogu se napisati

$$Q_\beta = Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} .$$

Sila uslovljena otpadanjem čestica Y_{ri} , posle kompozicije sa $\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}$ svodi se na oblik:

$$Y_{ri}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} = \frac{dm}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}\bar{u}^\alpha - \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}\dot{q}^\alpha\right) \overset{def}{=} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\left(\bar{u}^\alpha - \dot{q}^\alpha\right)$$

gde je $\Psi_\beta = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\left(\bar{u}^\alpha - \dot{q}^\alpha\right)$

Konačno diferencijalna jednačina kretanja neslobodne tačke promenljive mase u konfiguracionom prostoru $K_2 = \{q^1, q^2\}$ dobija ovaj oblik:

$$a_{\alpha\beta}\ddot{q}^\alpha + \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\gamma = Q_\beta + \Psi_\beta$$

Koja zajedno sa jednačinama veza (10) odredjuju kretanje sistema M.

2.1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA STACIONARNOG SISTEMA

Posmatramo kretanje sistema M kojeg čini N dinamičkih tačaka promenljive mase $m_\nu = m_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, N)$. Položaj tačke Mi odredjen je vektorom položaja $\vec{r}$. Kretanje sistema ograničeno je sa k holonomnih veza:

$$f_\sigma(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = 0, \quad (\sigma = 1, \ldots, k < 3N) \tag{13}$$

kao i relacijom promene mase

$$m_\nu = m_{o\nu} - \int_{t_0}^{t} \frac{dm}{dt}\, dt.$$

Sistem se kreće pod dejstvom aktivnih sila

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N, t),$$

a zatim sila izazvanih promenom mase (14)

$$\vec{F}_{R\nu} = \frac{dm}{dt}(\vec{u}_\nu - \vec{v}_\nu),$$

i sila reakcija veza

$$\vec{R}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \operatorname{grad}_\nu f_\sigma .$$

Kretanje stacionarnog sistema tačaka promenljive mase moguće je opisati vektorskim diferencijalnim jednačinama

$$\frac{d}{dt}(m_\nu \vec{v}_\nu) = \vec{F}_\nu + \frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \operatorname{grad}_\nu f_\sigma$$

ili,

$$m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \vec{F}_\nu + \frac{dm_\nu}{dt}(\vec{u}_\nu - \vec{v}_\nu) + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \, grad_\nu f_\sigma \quad (15)$$

koje zajedno sa jednačinama veza definišu kretanja sistema .

λ_σ - množioci veza koji podležu odredjivanju,

$\vec{u}_\nu$ - apsolutna brzina odbačenih čestica,

$\vec{v}_\nu$ - brzina tačaka sistema.

Ukoliko se kretanje posmatra u odnosu na neki pravolinijski kordinatni Dekartov sistem y^1, y^2, y^3, sa vektorskom bazom $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ $(|e_i|) = 0$ jednačine (15) su ovoga oblika:

$$\frac{d}{dt}(m_\nu \dot{y}_{\nu i}) = Y_{\nu i} + \frac{dm_\nu}{dt} u_{i\nu} + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y_i} \quad (16)$$

$(\nu = 1, \ldots, n)(i = 1,2,3)$

ili

$m_{3\nu} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu-2}$ tada se jednačine svode na oblik:

$$\frac{d}{dt}(m_j \dot{y}_j) = Y_j + \frac{dm}{dt} u_j + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_i} . \quad (17)$$

$j = 3\nu,\ 3\nu-1,\ 3\nu-2,\ (\nu = 1, \ldots, N)$

Jednačinu (15) možemo dalje izraziti u obliku:

$$m_j \frac{d\dot{y}_j}{dt} = Y_j + \frac{dm}{dt}(u_j - \dot{y}_j) + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_j}$$

što zajedno sa (13)

čini 3N + k skalarnih jednačina. Integraleći ovaj sistem jednačina dobijamo konačne jednačine kretanja stacionarnog sistema dinamičkih tačaka promenljive mase.

Kada Dekartovom sistemu kordinata korespondiramo neki sistem krivolinijskih kordinata $x^1, x^2, \ldots x^{3N}$, tada su Dekartova kordinate y_i povezane sa generalisanim krivolinijskim kordinatama uz uslov

$$\left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right|_1^3 = 0.$$

Baza sistema $x_\nu = \{x_\nu^1, x_\nu^2, x_\nu^3\}$ je $\vec{g}_j = \{\vec{g}_{\nu 1}, \vec{g}_{\nu 2}, \vec{g}_{\nu 3}\}$

gde su

$$\vec{g}_{\nu 1} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^i}, \quad \vec{g}_{\nu 2} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^i}, \quad \vec{g}_{\nu 3} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^3}.$$

Kada se skalarno pomnoži jednačina (15) vektorom sledi,

$$\frac{d}{dt}(m_\nu \vec{v}_\nu)\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j} = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j} + \frac{dm_\nu}{dt}\vec{u}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j} + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \operatorname{grad}_\nu f_\sigma \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j} \qquad (\sigma = 1, \ldots, k) \quad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{18}$$

Izraz na levoj strani jednačine (18) transformisaćemo na sledeći način:

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j}\right) - m_\nu \vec{v}_\nu \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial x^i \partial x^j}\frac{dx^i}{dt} = \ldots$$

Kako je $\dfrac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial x^i \partial x^j} = \left\{ {k \atop i\, j} \right\} \dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^k}$ ili dalje,

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^i}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j}\dot{x}^i\right) - m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^i}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^k}\left\{ {k \atop i\, j} \right\}\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^i}{dt} = \ldots$$

to dobijamo,

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^i}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j}\dot{x}^i - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^l}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^k}\left\{ {k \atop i\, j} \right\}\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^i}{dt} = \ldots$$

Metrički tenzor posmatranog prostora može se definisati izrazom

$$a_{ij} \overset{def}{=} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^i}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j}, \tag{12}$$

odnosno,

pa se prethodni izraz svodi na oblik

$$\frac{d}{dt}\left(a_{ij}\dot{x}^j\right) - a_{\ell k}\left\{ {k \atop ij} \right\}\dot{x}^\ell \dot{x}^j = \dots \tag{19}$$

Generalisani impulsi mogu se izraziti relacijama

$$p_i = a_{ij}\dot{x}^j \tag{20}$$

Iz (20) se dobija kontravarijanta koordinata brzina u obliku

$$\dot{x}^j = a^{ij} p_i$$

gde su a^{ij} kontravarijante kordinate tenzora a_{ij}, te je:

$$a_{ij} a^{ik} = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{za } i = k \\ 0, & \text{za } i \neq k. \end{cases}$$

Masa v-te tačke sistema i brzine dinamičke promene usled otpadanja čestica ostaju invarijantne u odnosu na sve ovde posmatrane transformacije kordinata, s obzirom da zavise samo od vremena t. Skup koordinata x^i definiše n-dimenzionu mnogostrukost koja je snabdevena metrikom

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i dx^j .$$

Kada u jednačinu (19) unesemo relacije (20) dobijamo diferencijalne jednačine kretanja sistema u obliku

$$\frac{dp_i}{dt} - \left\{ {k \atop ij} \right\} p_k \frac{dx^j}{dt} = \frac{Dp_i}{dt} = \dots$$

Na desnoj strani jednačine (18) imamo, prvo, kordinate spoljašnjih sila

$$X_j = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j},$$

zatim, kordinate sila reakcija,

$$R_j = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \, grad_\nu f_\sigma \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j} = 0,$$

i na kraju kordinate sila izazvanih odvajanjem čestica

$$P_j = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{dm_\nu}{dt} \vec{u}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial x^j}.$$

Konačno, dobijamo jednačine koje odredjuju kretanje sistema tačaka promenljive mase u E_{3N} prostoru

$$\frac{Dp_j}{dt} = X_j + P_j \qquad (j = 1, \ldots 3N) \quad (21)$$

i k jednačina veza (13).

2.2. TRANSFORMISANI OBLIK DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KRETANJA SISTEMA TAČAKA

U radu se nalaze diferencijalne jednačine kretanja sistema tačaka promenljive mase u ovome obliku[34] :

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}_c) = \vec{F} + \vec{P} + 2\sum \dot{m}\dot{\vec{r}} + \sum \ddot{m}\vec{r} \qquad (22)$$

$\vec{F}$ - glavni vektor svih spoljnih sila koje deluju na sistem M

$\vec{P}$ - glavni vektor svih reaktivnih sila

$\vec{r}_c$ - vektor položaja centra inercije sistema

$\sum$ - znak sume odnosi se samo na one tačke koje menjaju masu

Polazeći od jednačine Meščerskog izvešćemo ovaj oblik diferencijalnih jednačina kretanja sistema tačaka promenljive mase u konfiguracionom promenljivom $K^{(P)}$ prostoru i pokazati da se ove jednačine sa Dekartovim sistemom kordinata svode opet na jednačine (22) .

Da bi ovo dokazali napišemo diferencijalne jednačine kretanja holonomnog skleronomnog sistema materijalnih tačaka promenljive mase u Dekartovom sistemu koordinata:

$$m_i \frac{d\dot{y}_{i\alpha}}{dt} = Y_{i\alpha} + \dot{m}_i(u_{i\alpha} - \dot{y}_{i\alpha}) + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_{i\alpha}}$$

gde su λ_σ Langranževi množitelji veza,

$\begin{pmatrix} i = 1, \dots, n \\ \alpha = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$
$(\sigma = 1, \dots, k)$

Ove jednačine se mogu napisati i u ovome obliku:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{y}_{i\alpha}\right) = Y_{i\alpha} + \dot{m}_i u_{i\alpha} + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda \frac{\partial f}{\partial y_{i\alpha}} \qquad (23)$$

Ako mesto Dekartovih kordinata uvedemo generalisane kordinate, tada se brzine mogu izraziti u obliku:

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha \qquad i \qquad u_i = \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} \bar{u}^\alpha .$$

Posle zamene ovih kordinata u jednačinu (23) jednačina se svodi na oblik

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha\right) = Y_i + \dot{m}_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} \bar{u}^\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_i} \qquad (24)$$

Sada možemo levu stranu diferencijalnih jednačina transformisati na izraz

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} q^\alpha\right) - \dot{m}_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} q^\alpha - m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha \dot{q}^\beta\right] = Y_i + \dot{m}_i \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_i}$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} q^\alpha\right) - m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha \dot{q}^\beta\right] = - - - - .$$

Posle izvršenog diferenciranja leve strane jednačine, i sredjivanja desne strane, jednačina se svodi na oblik:

$$\frac{d}{dt}\left[m \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} q^\alpha + m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha \dot{q}^\beta + m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha - m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \right.$$

$$= Y_i + m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} \bar{u}^\alpha + \ddot{m}_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} q^\alpha + \dot{m}_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha \dot{q}^\beta +$$

$$+ \dot{m}_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_i} .$$

Drugi i poslednji član sa leve strane u jednačini su istih veličina a različitog znaka te se potiru pa je jednačina jednaka

$$\frac{d}{dt}\left(\dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} q^\alpha\right) + \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha\right) = Y_i + \dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\bar u^\alpha + \ddot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} q^\alpha + \dot m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha \dot q^\beta + \dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k}\lambda_\sigma \frac{\partial f}{\partial y_i}.$$

Da bismo izraz dalje uprostili diferencirali smo članove sa leve strane jednačine

$$\ddot m \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} q^\alpha + \dot m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha \dot q^\beta + \dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha + \dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha + m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot q^\alpha \dot q^\beta + m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\ddot q^\alpha = Y_i + \dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\bar u^\alpha + \ddot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} q^\alpha + \dot m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha \dot q^\beta + \dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k}\lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_i} \tag{25}$$

Ako komponujemo jednačinu (25) sa $\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}$ dobijamo

$$\sum_{i=1}^{N}\ddot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu} q^\alpha + \sum_{i=1}^{N}\dot m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha \dot q^\beta \frac{\partial y_i}{\partial q^\nu} + \sum_{i=1}^{N}\dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\dot q^\alpha + \sum_{i=1}^{N}\dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial y^\beta}\dot q^\alpha + \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\frac{\partial y_i}{\partial y^\nu}\dot q^\alpha \dot q^\beta + \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\ddot q^\alpha =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\nu} + \sum_{i=1}^{N}\dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\bar u^\alpha + \sum_{i=1}^{N}\ddot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu} q^\alpha + \sum_{i=1}^{N}\dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\dot q^\alpha + \sum_{i=1}^{N}\dot m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu} q^\alpha \dot q^\beta + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\sigma=1}^{k}\lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}$$

Kako je $\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^\nu} = \left\{\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\right\}$ upravo na grad $f_\sigma = \left\{\frac{\partial f_\sigma}{\partial y_i}\right\}$ to je proizvod grad $f_\sigma \cdot \frac{\partial \vec r_i}{\partial q^\nu} = 0$, zbog toga poslednji zbir u jednačini sa desne strane otpada.

Drugi član sa leve strane i poslednji sa desne strane se medjusobno potiru, to posle dodavanja i oduzimanja desnoj strani člana $\dot m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\dot q^\alpha$ jednačina se svodi na oblik

$$\sum_{i=1}^{N}\ddot{m}_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}q^\alpha+\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\dot{q}^\alpha+\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\dot{q}^\alpha+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta+\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\ddot{q}^\alpha=\sum_{i=1}^{N}Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}(\bar{u}^\alpha-\dot{q}^\alpha)+\sum_{i=1}^{N}\ddot{m}_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}q^\alpha+2\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}\dot{q}^\alpha$$

Imajući u vidu da je

$\sum_{i=1}^{3N}m_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}=a_{\alpha\nu}$ – metrički tenzor

$\sum_{i=1}^{3N}Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}=Q_\nu$ – generalisane sile

$\sum_{i=1}^{3N}m_i\frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}=\Gamma_{\alpha\beta,\nu}$ – koeficijent povezanosti

$\sum_{i=1}^{3N}\ddot{m}_i\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\nu}=\ddot{a}_{\alpha\nu}$ – generalisana promena mase, diferencijalne jednačine možemo sada izraziti u ovome obliku:

$$\ddot{a}_{\alpha\nu}q^\alpha+2\dot{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^\alpha+a_{\alpha\nu}\ddot{q}^\alpha+\Gamma_{\alpha\beta,\nu}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta=Q_\nu+\dot{a}_{\alpha\nu}(\bar{u}^\alpha-\dot{q}^\alpha)+2\dot{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^\alpha+\ddot{a}_{\alpha\nu}q^\alpha$$

S obzirom da je drugi izvod od $a_{\alpha\nu}q^\alpha$ jednak

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_{\alpha\nu}q^\alpha)=\ddot{a}_{\alpha\nu}q^\alpha+2\dot{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^\alpha+a_{\alpha\nu}\ddot{q}^\alpha$$

to se konačno dobija traženi oblik jednačine

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_{\alpha\nu}q^\alpha)+\Gamma_{\alpha\beta,\nu}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta=Q_\nu+\dot{a}_{\alpha\nu}(\bar{u}^\alpha-\dot{q}^\alpha)+2\dot{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^\alpha+\ddot{a}_{\alpha\nu}q^\alpha$$

odnosno

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_{\alpha\nu}q^\alpha)=Q_\nu+\dot{a}_{\alpha\nu}(\bar{u}^\alpha-\dot{q}^\alpha)+2\dot{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^\alpha+\ddot{a}_{\alpha\nu}q^\alpha-\Gamma_{\alpha\beta,\nu}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta \qquad (26)$$

Posle razvijanja leve strane jednačine i vraćanja pojedinačnih članova sa desne strane jednačine na levu, dobija se

$$\ddot{a}_{\alpha\nu}q^\alpha+2\dot{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^\alpha+a_{\alpha\nu}\ddot{q}^\alpha-2\dot{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^\alpha-\ddot{a}_{\alpha\nu}q^\alpha+\Gamma_{\alpha\beta,\nu}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta=Q_\nu+\Psi_\nu$$

te posle sredjivanja ovoga izraza, jednačina se svodi na poznati oblik diferencijalnih jednačina kretanja sistema materijalnih tačaka promenljive mase

$$a_{\alpha\nu}\ddot{q}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta,\nu}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} = Q_{\nu} + \Psi_{\nu} .$$

a/ Za slučaj da se masa materijalnih tačaka sistema ne menja, tj. m_i = const, jednačine (26) su jednake

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(a_{\alpha\nu} q^{\alpha}\right) = Q_{\nu} - \Gamma_{\alpha\beta,\nu}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$$

S obzirom da su tada izvodi $\ddot{a}_{\alpha\nu}$ i $\dot{a}_{\alpha\nu}$ jednaki nuli, pa se sistem diferencijalnih jednačina (26) kresvodi na poznati oblik diferencijalnih jednačina kretanja sistema tačaka nepromenljive mase:

$$a_{\alpha\nu}\ddot{q}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta,\nu}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} = Q_{\nu} .$$

b/ Ako je masa materijalnih tačaka linearna funkcija vremena tj. $m_i = m_0(1+\varkappa t)$ jednačine (26) se svode na oblik

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(a_{\alpha\nu} q^{\alpha}\right) = Q_{\nu} + \bar{a}_{\alpha\nu}\left(\bar{u}^{\alpha} - \dot{q}^{\alpha}\right) + 2\bar{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta,\nu}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} \qquad (27)$$

U prethodnoj jednačini nije sadržan član u kojem figuriše drugi izvod mase sistema , jer je jednak nuli, tj.

$$\ddot{a}_{\alpha\nu} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{d^2}{dt^2}\left[m_0(1+\varkappa t)\right]\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q^{\alpha}}\frac{\partial y_i}{\partial q^{\nu}} = 0 .$$

Promena mase u jednačini (27) zamenjena je izrazom:

$$\dot{a}_{\alpha\nu} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt}\left[m_0(1+\varkappa t)\right]\frac{\partial y_i}{\partial q^{\alpha}}\frac{\partial y_i}{\partial q^{\nu}} = \bar{a}_{\alpha\nu} .$$

c/ za pravolinijske sisteme koordinata jednačine (26) svode se na oblik

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_{\alpha\nu} q^\alpha) = Q_\nu + \dot{a}_{\alpha\nu}(\bar{u}^\alpha - \dot{q}^\alpha) + 2\dot{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^\alpha + \ddot{a}_{\alpha\nu} q^\alpha, \tag{28}$$

jer su Kristofelovi simboli jednaki nuli $\Gamma_{\alpha\beta,\nu} = 0$, pošto metrički tenzor zavisi samo od vremena

$$a_{\alpha\nu} = a_{\alpha\nu}(t).$$

U slučaju ovog sistema koordinata ako je masa sistema linearna funkcija od vremena tj. $m_i = m_0(1+\alpha t)$ jednačine (26) su:

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_{\alpha\nu} q^\alpha) = Q_\nu + \bar{a}_{\alpha\nu}(\bar{u}^\alpha - \dot{q}^\alpha) + 2\bar{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^\alpha.$$

Diferencijalnim jednačinama

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_{\alpha\nu} q^\alpha) = Q_\nu + \bar{a}_{\alpha\nu}(\bar{u}^\alpha - \dot{q}^\alpha) + 2\bar{a}_{\alpha\nu}\dot{q}^\alpha + \ddot{a}_{\alpha\nu} q^\alpha$$

odgovoraju jednačine :

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_i x_i) = X_i + \dot{m}_i(u_i^1 - \dot{x}_i) + 2\dot{m}_i\dot{x}_i + \ddot{m}_i x_i$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_i y_i) = Y_i + \dot{m}_i(u_i^2 - \dot{y}_i) + 2\dot{m}_i\dot{y}_i + \ddot{m}_i y_i$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_i z_i) = Z_i + \dot{m}_i(u_i^3 - \dot{z}_i) + 2\dot{m}_i\dot{z}_i + \ddot{m}_i z_i$$

ili u vektorskom obliku

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}_c) = \vec{F} + \vec{P} + 2\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^{N}\ddot{m}_i\vec{r}_i$$

što nalazimo u radu [34] .

2.3. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA SISTEMA DINAMIČKIH PROMENLJIVIH TAČAKA U KONFIGURACIONOM PROMENLJIVOM PROSTORU

Posmatramo sistem M od N tačaka promenljive mase, gde su mase $m_\nu = m_\nu(t)$. Položaj tačaka sistema odredjen je vektorima položaja $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q^1, \ldots, q^n, t)$, $(n = 3N - k)$.

Sistem je vezan nestacionarnim vezama

$$f_\sigma(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0. \qquad (\sigma = 1, \ldots, k)$$

Zbog k nestacionarnih veza

$$f_\sigma(y_1, \ldots, y_{3N}, t) = 0,$$

sistem ima 3 N – k nezavisnih kordinata q^α.

Kordinate q^α i njihovi izvodi po vremenu $\dot{q}^\alpha = \frac{dq^\alpha}{dt}$, $\ddot{q}^\alpha = \frac{d^2q^\alpha}{dt^2}$ su nezavisni od $m_\nu = f(t)$. Kretanje se posmatra u proširenom konfiguracionom prostoru

$R_{n+1} = \{q^1, \ldots, q^{n+1}\}$, gde je $t = q^{n+1}$, ili $\dot{q}^{n+1} = 1$,

tada kordinate vektora položaja reprezentativne tačke sistema zavise od $3N+1-k$ kordinata q^α. Tako se dimenzija potprostora proširuje na n+1 te kretanje posmatramo na podprostorima Rn+1.

Baza prostora je

$$\vec{g}_{\alpha(\nu)} = \vec{g}_{\alpha(\nu)}(q^0, \ldots, q^n) = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}.$$

Da bi odredili diferencijalne jednačine kretanja sistema u posmatranom prostoru pomnožimo skalarno diferencijalnu jednačinu vektorima $\vec{g}_{(\nu)\alpha}$ i saberimo po ν:

$$\frac{d}{dt}(m_\nu \vec{v}_\nu) \cdot \vec{g}_{(\nu)\alpha} = \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} + \frac{dm_\nu}{dt} \vec{u}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \, \mathrm{grad}_\nu f_\sigma \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \qquad (30)$$

Transformišemo sada levu stranu jednačine (30) $\frac{d}{dt}(m_\nu \vec{v}_\nu)\vec{g}_{\ldots}$ na oblik:

$$\frac{d}{dt}(m_\nu \vec{v}_\nu\, g_{(\nu)\alpha}) - m_\nu \vec{v}_\nu \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot{q}^\beta = \ldots\ldots$$

$$\vec{v}_\nu = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha \qquad (\alpha = 0,1,\ldots\ldots,n)$$

Prethodni izraz dalje možemo napisati:

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\beta}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\beta\right) - m_\nu \vec{v}_\nu \left(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\gamma} + b_{\alpha\beta(\nu)}\cdot \vec{\eta}_{(\nu)}\right)\dot{q}^\beta = \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\gamma} + b_{\alpha\beta(\nu)}\,\vec{\eta}_{(\nu)}\,.$$

Metrički tenzor posmatranog prostora je

$$a_{\alpha\beta} \overset{def}{=} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\beta}\,, \quad a \text{ impuls} \quad p_\alpha = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta$$

te se izraz $\frac{d}{dt}(m_\nu \vec{v}_\nu)\cdot \vec{g}_{(\nu)\alpha}$ svodi na oblik:

$$\frac{d}{dt}p_\alpha - a_{\delta\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta\dot{q}^\delta = \frac{Dp_\alpha}{dt}$$

zato što je

$$\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\delta} \perp \vec{n} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\delta}\cdot \vec{n} = 0.$$

Konačno dobijamo jednačine kretanja sistema M u obliku:

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha + R_\alpha\,, \quad \text{gde je} \quad p_\alpha = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta \qquad (31)$$

$$(\alpha = 0,1,\ldots,n)$$

koje zajedno sa jednačinama veza omogućuju odredjivanje kretanja posmatranog sistema M.

(31)

Za slučaj da su veze skleronomne tj.

$$f_\gamma(\vec{r}_1,\ldots\ldots,\vec{r}_N) = 0, \quad (\gamma = 1,\ldots,k) \qquad (32)$$

diferencijalne jednačine kretanja stacionarnog sistema imaju sada ovaj oblik:

$$\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} = Q_{\alpha'} + P_{\alpha'} \qquad (\alpha' = 1, \ldots\ldots, n)$$

Ako je masa sistema konstantna a veze skleronomne $f_\gamma(\vec{r}_1, \ldots\ldots, \vec{r}_N) = 0$, tada su jednačine jednake

$$\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} = Q_{\alpha'} \tag{34}$$

gde su $p_{\alpha'}$ impulsi $p_{\alpha'} = a_{\alpha'\beta'}\dot{q}^{\beta'}$.

Ako je sistem pored holonomnih nestacionarnih veza [43] $f_\mu(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$, odnosno $f_\mu(\vec{r}_0, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = 0$, $(\mu = 0, 1, \ldots, k_1)$ vezan i sa neholonomnim reonomnim linearnim vezama

$$C_{(\sigma\nu)i}\frac{Dr^i_{(\nu)}}{dt} + C_{(\sigma\nu)} = 0, \qquad \begin{matrix}(\nu = 1, 2, \ldots, N)\\ (i = 1, 2, 3)\\ (\sigma = 1, 2, \ldots, k_2)\end{matrix} \tag{35}$$

i relacijom promene mase

$$m_{(\nu)} = m_{(\nu)}(t) - \int_{t_0}^{t}\frac{dm}{dt}\,dt \tag{36}$$

tada su diferencijalne jednačine kretanja posmatranog sistema jednake:

$$a_{(\nu)ij}\frac{D^2 r^j_{(\nu)}}{dt^2} = X_{(\nu)i} + \Psi_{(\nu)i} + \sum_{\mu=1}^{k_1}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial r^i_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{k_2}\varkappa_\sigma C_{(\nu)\sigma i}$$

Ovde je Ψ reaktivna sila ~~ove~~ te tačke. Ako usvojimo indekse, tj. i $= 3\nu - 2$, $3\nu - 1$, 3ν; $\forall_\nu \in N_n$ onda ove diferencijalne jednačine svodimo na traženi oblik:

$$a_{k\ell}\frac{D^2 r^\ell}{dt^2} = X_k + \Psi_k + \sum_{\mu=1}^{k_1}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial r^k} + \sum_{\sigma=1}^{k_2}\varkappa_\sigma C_{\sigma k}.$$

gdesu λ_μ i $\varkappa_\sigma$ množitelji veza.

Ove jednačine zajedno sa vezama odredjuju kretanje pojedinačnih tačaka sistema M.

2.4. U radu [33] i monografiji [43] izvedene su diferencijalne jednačine kretanja skleronomnog i reonomnog sistema mehaničkih tačaka čije se mase menjaju u toku vremena u smislu Meščerskog [19] . Medjutim, izmedju diferencijalnih jednačina izvedenih u radovima [33] i [43] postoji odredjena nejednakost, pa ovaj rad pokazuje otkuda ta razlika. S obzirom da je monografski rad [43] pisan veoma koncizno nije moguće izvršiti prosto poredjenje ovih jednačina kretanja bez detaljnije analize, što se ovde i čini. Na prvi pogled veoma je uočljiva razlika. Za kretanja jednog te istog sistema diferencijalne jednačine kretanja prema radu [33] su oblika,

za skleronomni sistem:

$$a_{kl}\frac{D\dot{q}^l}{Dt} = Q_k + P_{k_1} + P_{k_2} - A_k \tag{39}$$

gde je

$$A_k = \frac{\partial a_{kl}}{\partial t}\dot{q}^l = \frac{\partial m_i}{\partial t}\frac{\partial x^i}{\partial q^k}\frac{\partial x^i}{\partial q^l}\cdot\dot{q}^l + m_i\left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial q^k \partial t} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^l \partial t}\right]\dot{q}^l, \tag{40}$$

a za reonomni sistem:

$$a_{kl}\frac{D\dot{q}^l}{Dt} = Q_k + P_k + K_k \qquad (k,l = 1,2,\ldots s) \tag{41}$$

gde su kovarijantne kordinate Kk vektora $\vec{K}$, date izrazom:

$$K_k = -A_k - \frac{d}{dt}\left(b_k + \frac{c}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q^k} - \frac{\partial b_k}{\partial q^k}\dot{q}^k \tag{42}$$

pri čemu su:

$$A_k = \frac{\partial a_{kl}}{\partial t}\dot{q}^l, \quad b_k = m_\nu\frac{\partial x^\nu}{\partial q^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial t}, \quad c = m_\nu\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial t}\right)^2.$$

U monografiji [43] diferencijalne jednačine po formi imaju prostiji oblik i to:

U monografiji [43] diferencijalne jednačine po formi imaju prostiji oblik i to:

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^{\beta}}{Dt}=Q_{\alpha}+\Psi_{\alpha}\quad,\quad(\alpha,\beta=0,1,\cdots n)\qquad(43)$$

gde je $\Psi_{\alpha}=P_{\alpha}-\frac{\partial a_{\alpha\rho}}{\partial t}\dot{q}^{\rho}$ i, kao što se vidi, postoji jedna relacija više, i to:

$$a_{o\rho}\frac{D\dot{q}^{\beta}}{dt}=Q_{o}+\Psi_{o}\qquad(44)$$

Langranžeove jednačine kretanja sistema tačaka promenljive mase su:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{k}}-\frac{\partial T}{\partial q^{k}}=Q_{k}+P_{k_1}+P_{k_2}\qquad(45)$$

$$(k=1,2,\cdots,s)$$

Autori rada [33] uzimajući kao osnov ove jednačine, posmatrajući, prvo skleronomni sistem, izvode jednačine u obliku (39) polazeći od kinetičke energije oblika $T=\frac{1}{2}a_{kl}\dot{q}^{k}\dot{q}^{l}$, i nalaze da je

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{k}}=\frac{d}{dt}(a_{kl}\dot{q}^{l})=\frac{\partial a_{kl}}{\partial q^{j}}\dot{q}^{j}\dot{q}^{l}+a_{kl}\ddot{q}^{l}+\frac{\partial a_{kl}}{\partial t}\dot{q}^{l},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^{k}}=\frac{1}{2}\frac{\partial a_{jl}}{\partial q^{k}}\dot{q}^{j}\dot{q}^{l}\qquad(j,l,k=1,2,\ldots s)$$

Posle smene izvoda kinetičke energije u (45), jednačine se svode na oblik:

$$a_{kl}\ddot{q}^{l}+\frac{\partial a_{kl}}{\partial q^{j}}\dot{q}^{j}\dot{q}^{l}+\frac{\partial a_{kl}}{\partial t}\dot{q}^{l}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{kl}}{\partial q^{j}}\dot{q}^{l}\dot{q}^{j}=Q_{k}+P_{k_1}+P_{k_2}$$

odnosno

$$a_{kl}\frac{D\dot{q}^{l}}{Dt}=Q_{k}+P_{k_1}+P_{k_2}-A_{k}$$

pri čemu je

$$A_k = \frac{\partial a_{kl}}{\partial t} \dot{q}^l.$$

Isti sistem jednačina za skleronomni sistem u radu [43] napisan je u obliku:

$$a_{kl} \frac{D\dot{q}^l}{dt} = Q_k + \Psi_k \qquad (k, l = 1,2, \ldots s) \qquad (46)$$

gde je

$$\Psi_k = P_k - \frac{\partial a_{kl}}{\partial t} \dot{q}^l, \qquad (47)$$

iz čega se može zaključiti da postoji odredjena nejednakost izmedju (46) i (39) jedino u interpretaciji izraza (40). U radu [5] to je

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \dot{q}^\alpha \stackrel{def}{=} \frac{\partial m_i}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} \dot{q}^\alpha \qquad (48)$$

u radu [3] je, kao što se vidi iz (41),

$$A_k = \frac{\partial a_{kl}}{\partial t} \dot{q}^l = \frac{\partial m_i}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{\partial x^i}{\partial q^l} \dot{q}^l + \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial q^k \partial t} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^l \partial t} \right) \dot{q}^l \qquad (49)$$

Očigledno da je ova relacija neodrživa za sistem sa skleronomnim vezama, jer je u tom slučaju

$$\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial q^k \partial t} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^l \partial t} \right) = 0,$$

s obzirom da su svi izvodi $\frac{\partial x^i}{\partial t} = 0$.

Kada je kretanje ograničeno pomoću $s < 3n$ holonomnih reonomnih belateralnih idealno glatkih veza

$$f_\mu (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, s)$$

u radu [33] uzima se ponovno kao polazna osnova jednačina (45), pri čemu je tada kinetička energija:

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}^k \dot{q}^l + b_k \dot{q}^k + \frac{1}{2} C, \qquad (50)$$

a odgovarajući su tada izvodi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^k} = \frac{\partial a_{kl}}{\partial t}\dot q^l + \frac{\partial a_{kl}}{\partial q^i}\dot q^i \dot q^l + a_{kl}\ddot q^l + \frac{\partial b_k}{\partial t} + \frac{\partial b_k}{\partial q^i}\dot q^i$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jl}}{\partial q^k}\dot q^l \dot q^j + \frac{\partial b_l}{\partial q^k}\dot q^l + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q^k}.$$

Zamenom u (45) sledi

$$a_{kl}\ddot q^l + \frac{\partial a_{kl}}{\partial q^i}\dot q^i \dot q^l - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{kl}}{\partial q^i}\dot q^l \dot q^i + \frac{\partial b_k}{\partial q^i}\dot q^i - \frac{\partial b_k}{\partial q^i}\dot q^i + \frac{\partial a_{kl}}{\partial t}\dot q^l + \frac{\partial b_k}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q^k} = Q_k + P_{k_1} + P_{k_2}$$

ili dalje:

$$a_{kl}\frac{D\dot q^l}{Dt} = Q_k + P_{k_1} + P_{k_2} - A_k - \frac{d}{dt}(b_k) - \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q^k} + \frac{\partial b_k}{\partial q^l}\dot q^l \qquad (51)$$

Kada se zamene četiri poslednja člana sa Kk jednačina se konačno svodi na oblik (3), ali za koordinate vektora Kk se dobija

$$K_k = -A_k - \frac{db_k}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q^k} + \frac{\partial b_k}{\partial q^l}\dot q^l \qquad (52)$$

a ne kao u (42).

Da bi došli do konačne ocene da li postoje suštinske razlike potrebno je poći od iste osnove i istim postupkom doći do formalnih ili kvalitetnih razlika. U tom cilju ne gubeći ništa od opštosti, dovoljno je posmatrati mehanički sistem od n tačaka M_ν ($\nu = 1,2, \ldots n$) promenljive mase $m_\nu - m_\nu(t)$ u smislu Meščerskog čije je kretanje kao što je već rečeno ograničeno sa s holonomnih reonomnih veza

$$f_\mu(\vec r_1, \ldots, \vec r_N, t) = 0, \quad (\mu = 1, \ldots \varkappa) \qquad (53)$$

gde su $\vec r_\nu$ vektori položaja tačaka M_ν.

Kretanje posmatranog sistema tačaka odredjuju diferencijalne jednačine Meščerskog

$$m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \vec{F}_\nu + \frac{dm_\nu}{dt}(\vec{u}_\nu - \vec{v}_\nu) + \sum_{\mu=1}^{\varkappa} \lambda_\mu \operatorname{grad}_{\vec{r}_\nu} f_\mu \qquad (\overline{53})$$

zajedno sa jednačinama veza (53).

Za transformisanje vektorskih diferencijalnih jednačina kretanja ($\overline{53}$) u koordinatni oblik nekog konfiguracionog prostora treba veze (53) napisati u ekvivalentnom obliku:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q^1, \ldots\ldots, q^s), \qquad (s = 3n - \varkappa)$$

gde su $q = \{q^1, \cdots, q^s\}$ Langranžeove nezavisne koordinate.

Veze (53) zadovoljavaju uslov brzine

$$\vec{v}_\nu = \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}$$

odakle se vidi da se vektor brzine $\vec{v}_\nu$ razlaže na s + 1 koordinatni vektor $\vec{g}_i(q,t) = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i} \wedge \vec{g}_{(\nu)o} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}$.

Vektor ubrzanja $\frac{d\vec{v}_\nu}{dt}$ tačaka M_ν tj.

$$\frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^i \dot{q}^j + 2\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q^i \partial t}\dot{q}^i + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}\ddot{q}^i \qquad (i,j = 1,2,\ldots,s) \qquad (54)$$

treba takodje razložiti u s + 1 komponentu s + 1 dimenzionog vektorskog prostora $\vec{R}^{s+1}$, koga generišu vektori $\vec{g}_0, \vec{g}_1, \cdots, \vec{g}_s$ i jedan vektor $\vec{n}$, upravan na $\vec{R}^{s+1}$. Da bi dalje izvodjenje bilo preglednije i kraće može se vreme t uzeti kao s+1 kordinata i to $q^0 = t$, što simbolično zadovoljava izraz za generalisanu brzinu $\dot{q}_0 = \frac{dq_0}{dt} = 1$, pa uslovi brzine kraće se pišu u obliku $\vec{v}_\nu = \dot{q}^\alpha \vec{g}_{(\nu)\alpha}$, a vektori ubrzanja

$$\frac{d\vec{v}_\nu}{dt}=\frac{\partial^2\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta+\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\ddot{q}^\alpha ,$$

gde sad indeksi α, β uzimaju vrednosti od nule, do n tj.(α, β = 0, 1, 2, ...n.)

Kao što je rečeno u svakoj tački na s+l konfiguracionoj kordinatnoj mnogostrukosti R^{n+1} može se vektor ubrzanja ν-te tačke razložiti na sumarnu komponentu u s+l dimenzionoj tangentnoj hiper ravni $\vec{R}^{s+1}$ i vektor $\vec{n}\perp\vec{R}^{s+1}$, a to znači da se i vektori $\frac{\partial^2\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}$ razlažu na taj način, tj.

$$\frac{\partial^2\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,\vec{g}_{(\nu)\gamma}+\varkappa_{\alpha\beta}\,\vec{n}_{(\nu)} \tag{55}$$

gde su $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}(q)$

koeficijenti povezanosti, a $b_{\alpha\beta}$ drugi metrički tenzor prostora R_{s+1} u čiju geometrijsku strukturu sada nema potrebe da se zalazi.

Ako se zameni (54) u jednačinu (53) i uzmu u obzir relacije povezanosti (55) sledeće

$$m_\nu(\ddot{q}^\gamma+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta)\vec{g}_{(\nu)\gamma}+m_\nu\varkappa_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\vec{n}= \\ =\vec{F}_\nu+\frac{dm_\nu}{dt}(\vec{u}_\nu-\vec{v}_\nu)+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu \operatorname{grad}_{\vec{r}_\nu} f_\mu . \tag{56}$$

Pomnože li se sve ove diferencijalne vektorske jednačine skalarno odgovarajućim kordinatnim vektorima $\vec{g}_{(\nu)i}$ (i = 1, 2, ..., s) i sabere po indeksu ν, dobija se s diferencijalnih jednačina oblika

$$a_{\gamma i}(\ddot{q}^\gamma+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta)=Q_i+\Psi_i \tag{57}$$

kao i

jer je $\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \varkappa_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\vec{n}_\nu\cdot\vec{g}_{(\nu)i}=0$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \, \mathrm{grad}_{\vec r_\nu} f_\mu \cdot \vec g_{(\nu)i} = 0, \text{ zbog } \vec n_\nu \perp \vec g_{(\nu)i}, \text{ a}$$

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{n} \vec F_\nu \cdot \vec g_{(\nu)i}$$

su i - te kovarijantne kordinate generalisane aktivne sile, i

$$\Psi_i = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dm_\nu}{dt} (u^\gamma - \dot q^\gamma) \vec g_{(\nu)\gamma} \cdot \vec g_{(\nu)i}$$

, odgovarajuće kovarijantne kordinate vektora reaktivne sile. Jednačine (57) odgovaraju jednačinama (43).

Skalarnim množenjem relacija (56) vektorom $\vec g_{(\nu)0} = \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}$ i sumiranjem po ν dobiće se još relacija

$$a_{0\gamma}(\ddot q^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \dot q^\alpha \dot q^\beta) = Q_0 + \Psi_0 \tag{58}$$

što je indentično jednačinama (44).

Relacija (58) nije za poredjivanje sa diferencijalnim jednačinama kretanja (45) jer u njima ta relacija ne postoji. O smislu relacije (58) može se opširnije videti u radu [41].

Prvo treba primetiti da u jednačinama (39) svi indeksi uzimaju vrednosti od 1 do s a u jednačinama (57) latinski indeksi j, k, l ... od 1 do s, a grčki $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ od 0 do s.

Ako se i jednačine (57) svedu na istu vrednost indeksa, sledeće

$$a_{i\beta}(\ddot q^\beta + \Gamma^\beta_{\gamma\delta} \dot q^\gamma \dot q^\delta) = Q_i + \Psi_i$$

ili:

$$a_{i\beta} \ddot q^\beta + \Gamma_{\gamma\delta,i} \dot q^\gamma \dot q^\delta = Q_i + \Psi_i$$

odnosno:

$$a_{ij} \frac{D\dot q^j}{dt} = Q_i + \Psi_i - \Gamma_{00,i} - 2\Gamma_{0k,i} \dot q^k$$

tj.:

kako je

$$\Gamma_{00,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{0i}}{\partial t} + \frac{\partial a_{0i}}{\partial t} - \frac{\partial a_{00}}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial a_{0i}}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{00}}{\partial q^i},$$

a

$$\Gamma_{0k,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial t} + \frac{\partial a_{0i}}{\partial q^k} - \frac{\partial a_{0k}}{\partial q^i}\right)$$

može se napisati zbog $b_i = a_{0i}$, $c = a_{00}$, $\Gamma_{0k,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{ki}}{\partial t} + \frac{\partial b_i}{\partial q^k} - \frac{\partial b_k}{\partial q^i}\right)$.

Zamenom u (59) dobijamo jednačinu koja se svodi na formu jednačine (46) u obliku:

$$a_{ij}\frac{D\dot{q}^j}{dt} = Q_i + \Psi_i - \frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q^i} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial t}\dot{q}^k - \frac{\partial b_i}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial b_k}{\partial q^i}\dot{q}^k$$

ili

$$a_{ij}\frac{D\dot{q}^j}{dt} = Q_i + \Psi_i - \frac{db_i}{dt} + \frac{\partial b_k}{\partial q^i}\dot{q}^k - \frac{\partial a_{ki}}{\partial t}\dot{q}^k + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q^i} \qquad (60)$$

Dakle, bilo da se podje od Lagražeovih jednačina druge vrste (45) ili od jednačina (43) dolazimo do relacije (60), koje se razlikuju od jednačina (41), s obzirom na (42), za skalar $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}c\right)$. Ova omaška očigledno se potkrala autorima rada [33], u izrazu (51), jer u radu [33] nalazimo da je

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial a_{k\ell}}{\partial t}\dot{q}^\ell + \frac{\partial a_{k\ell}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^\ell + a_{k\ell}\ddot{q}^k + \frac{\partial b_k}{\partial t} + \frac{\partial b_k}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q^j}\dot{q}^j,$$

a to je nemoguće s obzirom da $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = a_{kj}\dot{q}^j + b_k$ ne zavisi od C.

Prema tome kovarijantni oblik diferencijalnih jednačina kretanja sistema tačaka promenljive mase u n - dimenzionom konfiguracionom prostoru su

$$a_{k\alpha}\frac{D\dot{q}^{\alpha}}{dt}=Q_k+\Psi_k \qquad \begin{pmatrix} k = 1 \ldots, n \\ \alpha = 0,1\ldots, n \end{pmatrix}$$

ili njima ekvivalentne jednačine

$$a_{k\ell}\frac{D\dot{q}^{\ell}}{dt}=Q_k+P_k+K_k \qquad (\ell = 1,2,\ldots,n)$$

gde je

$$K_k=-\frac{\partial a_{k\ell}}{\partial t}\dot{q}^{\ell}-\frac{da_{k0}}{dt}+\frac{\partial a_{\ell 0}}{\partial q^k}\dot{q}^{\ell}+\frac{1}{2}\frac{\partial a_{00}}{\partial q^k}$$

U proširenom n+1 dimenzionom konfiguracionom prostoru kovarijante diferencijalne jednačine kretanja posmatranog sistema su oblika (43).

2.5. JEDAN NOV OBLIK DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KRETANJA SISTEMA TAČAKA PROMENLJIVE MASE

U svome radu [45] V. Vujčić je izveo sistem od $n-1$ diferencijalnih jednačina kretanja sistema tačaka konstantne mase u obliku

$$\frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\sigma}}{dt}\right)} + C_{\sigma}^{\alpha'}\frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha'}}{dt}\right)} = 0, \quad \begin{pmatrix}\alpha' = 1,\ldots,\ell\\ \sigma = \ell+1,\ldots,n\end{pmatrix} \tag{61}$$

gde je Z Gausova prinuda. Gaus naziva [4] prinudom zbir proizvoda mase svake tačke sistema i kvadrata odstupanja[1*] stvarnog položaja tačke od položaja koji bi ona zauzela kao slobodna za beskonačno malo vreme Δt. Usvaja se za prinudu Gausov izraz

$$Z = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(w_i - \frac{F_i}{m_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\left(F_i - m_i w_i\right)^2$$

odnosno, u Dekartovim pravouglim kordinatama

$$Z = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)^2 + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)^2 + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)^2\right].$$

Kako se Gausov princip, ustvari, zasniva na varijaciji ubrzanja $\vec{W}$, a kako "generalisano ubrzanje" $\ddot{q}^{\alpha}$ ne izražava prirodu ubrzanja $\vec{W}$ to invarijantnost sistema kordinata u nekom konfiguracijskom prostoru V_n ostvarujemo izrazom

---

[1*] $$d\overset{*}{r}_i = \frac{1}{2}\left(w_i - \frac{F_i}{m_i}\right)\Delta t^2$$

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{w}_i^{\,*} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha}\frac{Dq^\alpha}{dt} \quad i \quad Q_\alpha = \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha},$$

pa je sada Gausova prinuda u konfiguracionom n-dimenzionom prostoru jednaka: (ovde je n broj stepeni slobode kretanja holonomnog sistema tačaka promenljive mase):

$$Z = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i}(\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i}\left(\vec{F}_i - m_i \partial_\alpha \vec{r}_i \frac{Dq^\alpha}{dt}\right)^2$$

$$Z = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i}\, \vec{F}_i \vec{F}_i - 2\vec{F}_i \partial_\alpha \vec{r}_i \frac{Dq^\alpha}{dt} + m_i \partial_\alpha \vec{r}_i \partial_\beta \vec{r}_i \frac{Dq^\alpha}{dt}\frac{Dq^\beta}{dt}.$$

Ako sila izrazimo pomoću njihove projekcije na kordinatne ose i ako upotrebimo Hercov izraz za mase tačaka sistema $m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i}$ tada se može pisati:

$$\sum_{k=1}^{3N} \frac{1}{m_k} X_k X_k = \sum_{k=1}^{3N} \frac{1}{m_k} \frac{\partial q^\gamma}{\partial x^k}\frac{\partial q^\rho}{\partial x^k} Q_\gamma Q_\rho = a^{\gamma\rho} Q_\gamma Q_\rho = a_{\alpha\beta} Q^\alpha Q^\beta$$

Sada prinuda dobija invarijantni izraz u konfiguracionom n-dimenzionom prostoru u obliku

$$Z = a_{\alpha\beta}\frac{Dq^\alpha}{dt}\frac{Dq^\beta}{dt} - 2Q_\alpha \frac{Dq^\alpha}{dt} + Q_\alpha Q^\alpha$$

$$(\alpha = 1, \dots, n)$$

---

*ne uzima se u obzir normalna komponenta ubrzanja na konfiguracionom prostoru.

Sledeći ideju rada [45] moguće je diferencijalne jednačine kretanja (61) uopštiti i za sistem tačaka promenljive mase. Zaista, posmatramo li u tom cilju N tačaka mase $m_\nu = m_\nu(t)$, razlika u izrazu za prinudu Z sa sistem konstantne mase, je sada u strukturi sila i zavisnosti kordinate tenzora $a_{\alpha\beta}$. Kao što je ranije istaknuto u tenzor $a_{\alpha\beta}$ ulaze mase $m_\nu = m_\nu(t)$, te je ovaj tenzor zavisan od vremena bez obzira da li su veze skleronomne ili reonomne. Takodje je pokazano da u diferencijalnim jednačinama oblika $a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = Q_\alpha + \Psi_\alpha$, kao što se vidi, pored generalisanih sila Q_α figurišu i reaktivne generalisane sile $\Psi_\alpha = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(u^\beta - \dot{q}^\beta)$. Otuda Gausovu prinudu treba pisati sada u ovom obliku

$$Z = a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} - 2(Q_\alpha + \Psi_\alpha)\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} + (Q_\alpha + \Psi_\alpha)(Q^\alpha + \Psi^\alpha), \tag{62}$$

gde indeksi sabiranja α, β uzimaju vrednost od 1 do n broja stepena slobode kretanja holonomnog sistema.

Ako prinuda u tački q ima najmanju vrednost [45] δZ u toj tački je jednako nuli, tj.

$$\delta Z = \frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt}\right)}\,\delta\left(\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt}\right) = 0, \tag{63}$$

što predswtavlja Gausov princip u konfiguracionom prostoru Vn.

Odavde sledi kao i za sistem tačaka konstantne mase da su diferencijalne jednačine kretanja holonomnog sistema tačaka promenljive mase oblika

$$\frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha}}{dt}\right)} = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{64}$$

koji daje jednačine kretanja sistema tačaka promenljive mase u ovome obliku:

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^{\beta}}{dt} \equiv a_{\alpha\beta}\ddot{q}^{\beta} + [\gamma\beta\alpha]\,\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} = Q_{\alpha} + \Psi_{\alpha}.$$

Dakle, ako je moguće sastaviti Gausovu prinudu u konfiguracionom prostoru za neki holonomni sistem tačaka promenljive mase tada su diferencijalne jednačine kretanja oblika (64).

Ako, medjutim, na sistem tačaka promenljive mase dejstvuju i neholonomne veze oblika

$$\varphi_{\mu}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N; \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0, \qquad (\mu = 1, \ldots, \ell) \tag{64a}$$

ili $$\varphi_{\mu}(q^{\alpha}, \dot{q}^{\alpha}, t) = 0,$$

koje zadovoljavaju uslove

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{grad}_{\vec{v}_i}\varphi_{\mu}\cdot\delta\vec{w}_i = b_{\mu\alpha}\,\delta\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha}}{dt}\right), \tag{65}$$

prirodno je očekivati da relacije (63) i (65) dovedu do broja diferencijalnih jednačina kretanja koji je jednak broju stepeni slobode neholonomnog sistema. Zaista, ako μ ide od 1 do l iz jednačina, za uslov

$$\left| b_{\mu\alpha'} \right| \neq 0 \qquad (\mu, \alpha' = 1, \ldots, l)$$

moguće je l zavisnih varijacija

$$\delta\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha'}}{dt}\right) = C_{\sigma}^{\alpha'}\,\delta\left(\frac{D\dot{q}^{\sigma}}{dt}\right), \tag{66}$$

izraziti pomoću n - l nezavisnih $(\sigma = l+1, \ldots n)$ $\delta\left(\frac{D\dot{q}^{\sigma}}{dt}\right)$. Relacija (63) deli se u tom slučaju na dve sume i to:

$$\frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\sigma}}{dt}\right)}\,\delta\left(\frac{D\dot{q}^{\sigma}}{dt}\right) + \frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha'}}{dt}\right)}\,\delta\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha'}}{dt}\right) = 0$$

odnosno, zamenom izraza (66) u predhodnu relaciju dobijamo:

$$\left[\frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\sigma}}{dt}\right)} + C_{\sigma}^{\alpha'}\frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha'}}{dt}\right)}\right]\delta\left(\frac{D\dot{q}^{\sigma}}{dt}\right) = 0.$$

Odavde s obzirom da su varijacije $\delta\left(\frac{D\dot{q}^{\sigma}}{dt}\right)$ nezavisne, sledi n - l diferencijalnih jednačina kretanja neholonomnog sistema tačaka promenljive mase

$$\frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\sigma}}{dt}\right)} + C_{\sigma}^{\alpha'}\frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha'}}{dt}\right)} = 0, \tag{67}$$

$$(\alpha' = 1, \ldots, l)$$
$$(\sigma = l+1, \ldots, n)$$

koje zajedno sa jednačinama veza (64a) obrazuju potpun sistem od n diferencijalnih jednačina kretanja za rešenje mehaničkog sistema.

Posle zamene vrednosti Z u sistem jednačina (67) i parcijalnog diferenciranja sistema se svodi na oblik:

$$a_{\sigma\beta}\frac{D\dot{q}^{\beta}}{dt} = Q_{\sigma} + \Psi_{\sigma} + C_{\sigma}^{\alpha'}\left(Q_{\alpha'} + \Psi_{\alpha'} - a_{\alpha'\beta}\frac{D\dot{q}^{\alpha'}}{dt}\right) \quad (67^{a})$$

$$(\alpha' = 1, \ldots, l) \quad (\sigma = l+1, \ldots n)$$

Ove jednačine zajedno sa l jednačina veza (65) odredjuju kretanje neholonomnog sistema tačaka promenljive mase.

Kao i u slučaju Gausove prinude, energija Apelovog ubrzanja je invarijantna. Znamo da je energija ubrzanja sistema tačaka promenljive mase u nekom konfiguracionom promenljivom prostoru Vn je

$$2S = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{V}}_i^{2} \qquad \text{kada je}$$

$$\vec{V}_i = \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^s}\dot{q}^s$$

– odnosno,

$$\dot{\vec{V}}_i = \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^s}\ddot{q}^s + \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{s=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^k \partial q^s}\dot{q}^k \dot{q}^s$$

Sada ćemo dobiti koordinantni invarijantan oblik energije ubrzanja u Vn prostoru

$$2S = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{V}}_i^{2} = a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^{\alpha}}{dt}\frac{D\dot{q}^{\beta}}{dt} \qquad (68)$$

Ako izraz (68) zamenimo u (62) dobijamo:

$$Z = 2S - 2[(Q_\alpha + \Psi_\alpha)\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt}] + (Q_\alpha + \Psi_\alpha)(Q^\alpha + \Psi^\alpha),$$

pa se sada jednačine ~~za~~ holonomne sisteme $\dfrac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt}\right)} = 0,$

svode na oblik:

$$\frac{\partial S}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt}\right)} = Q_\alpha + \Psi_\alpha \;; \quad tj. \quad a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = Q_\alpha + \Psi_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots, n)$$

Za neholonomni sistem koristimo sada jednačinu (67)

$$\frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^\sigma}{dt}\right)} + C_\sigma^{\alpha'}\frac{\partial Z}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha'}}{dt}\right)} = 0. \qquad \begin{array}{l}(\alpha' = 1, \dots, \ell)\\(\sigma = \ell+1, \dots, n)\\(\alpha = \alpha' + \sigma)\end{array}$$

i posle zamene Gausove prinude oblika

$$Z = 2S - 2(Q_\alpha + \Psi_\alpha)\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} + (Q_\alpha + \Psi_\alpha)(Q^\alpha + \Psi^\alpha)$$

jednačine ~~se~~ dobijaju ovaj oblik

$$\frac{\partial S}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^\sigma}{dt}\right)} - 2(Q_\sigma + \Psi_\sigma) + 2C_\sigma^{\alpha'}\left(\frac{\partial S}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha'}}{dt}\right)} - Q_{\alpha'} - \Psi_{\alpha'}\right) = 0$$

odnosno,

$$\frac{\partial S}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^\sigma}{dt}\right)} = Q_\sigma + \Psi_\sigma - C_\sigma^{\alpha'}\left(\frac{\partial S}{\partial\left(\frac{D\dot{q}^{\alpha'}}{dt}\right)} - Q_{\alpha'} - \Psi_{\alpha'}\right). \qquad (68^a)$$

Diferencijalne jednačine (67) i (68^a) prestavljaju nov oblik diferencijalnih jednačina kretanja sistema promenljive mase.

3.1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA HOLONOMNOG SISTEMA PROMENLJIVE MASE U FAZNOM PROSTORU

Kretanje holonomnog sistema tačaka promenljive mase možemo posmatrati u faznom prostoru faznih promenljivih umesto u konfiguracionom V_n^p – prostoru u kojem kretanje odredjujemo rešavanjem diferencijalnih jednačina (8) i (9) kojih ima ukupno n i sve su drugog reda.

Diferencijalne jednačine Meščerskog za sistem od N materijalnih tačaka promenljive mase jednak je

$$m_i \frac{d\dot{y}_i}{dt} = Y_i + \sum_{(\nu)}^{1,2} \frac{dm_i}{dt}\left(u_{i(\nu)} - \dot{y}_i\right) \tag{69}$$

ili

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{y}_i) = Y_i + \sum_{(\nu)}^{1,2} \frac{dm_i}{dt} u_{i(\nu)} .$$

A za sistem vezan skleronomnim holonomnim idealno glatkim vezama jednačine se mogu pisati

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{y}_i) = Y_i + \sum_{(\nu)}^{1,2} \frac{dm_i}{dt} u_{i(\nu)} + \sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_{(\sigma)} \frac{\partial f_{(\sigma)}}{\partial y_i} . \tag{70}$$

Posle množenja jednačina (70) sa $\dfrac{\partial y_i}{\partial \varrho^\beta}$ i sabiranja po indeksima i jednačine (70) se svode na oblik:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d\dot{y}_i}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \varrho^\beta} = \sum_{i=1}^{3N} Y_i \frac{\partial y_i}{\partial \varrho^\beta} + \sum_{(\nu)}^{1,2} \frac{dm_i}{dt}\left(-\dot{y}_i + u_{i(\nu)}\right) + \sum_{i=1}^{3N}\sum_{\sigma=1}^{k} \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \varrho^\beta}$$

Ako se izvrši transformacija koordinata u jednačinama (70), a prebace članovi $\dfrac{dm_i}{dt}\dot{y}_i$ na levu stranu, prethodni izraz se tada svodi na oblik:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d\dot{y}_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} + \sum_{i=1}^{3N} \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}\frac{dm_i}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} + \sum_{(\nu)}^{1,2} \frac{dm_i}{dt} u_{i(\nu)} \frac{\partial y_i}{\partial q^\beta},$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{y}_i\right)\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} = \sum_{i=1}^{3N} Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} + \sum_{i=1}^{3N}\sum_{(\nu)}^{1,2} \frac{dm_i}{dt} u_{i(\nu)} \frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} \quad (71)$$

Kako je $\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial q^\gamma}\dot{q}^\gamma$, $u_{i(\nu)} = \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\bar{u}^\alpha$, te se jednačina može dalje predstaviti u obliku:

$$\left[\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3N}\left(m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\gamma}\dot{q}^\gamma\right)\right]\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} = \sum_{i=1}^{3N} Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} + \sum_{i=1}^{3N}\sum_{(\nu)}^{1,2} \frac{dm_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}\bar{u}^\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\gamma}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}\dot{q}^\gamma - \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\frac{\partial y_i}{\partial q^\gamma}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\gamma =$$

$$= \sum_{i=1}^{3N} Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{dm_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}\bar{u}^\alpha$$

Imajući u vidu da je

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\gamma}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} = a_{\gamma\beta}$$ - metrički tenzor

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q^\beta \partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha,\gamma}$$ - koeficijenti povezanosti

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{dm_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q^\beta} \overset{def}{=} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}$$ - generalisana sekundna promena mase

diferencijalne jednačine možemo tada napisati u obliku:

$$\frac{d}{dt}\left(a_{\gamma\beta}\dot{q}^{\gamma}\right)-\Gamma_{\alpha\gamma,\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\gamma}=Q_{\beta}+\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\bar{u}^{\alpha}, \tag{71a}$$

$$\frac{d}{dt}p_{\beta}=Q_{\beta}+\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\bar{u}^{\alpha}+\Gamma_{\alpha\gamma,\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$$

S obzirom da je $m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^{\gamma}}\dot{q}^{\gamma} = K_i$ to se posle kompozicije sa $\frac{\partial y_i}{\partial q^{\beta}}$ izraz svodi na oblik:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^{\gamma}}\frac{\partial y_i}{\partial q^{\beta}}\dot{q}^{\gamma}=\sum_{i=1}^{3N}K_i\frac{\partial y_i}{\partial q^{\beta}},$$

što je po definiciji jednako generalisanom impulsu:

$$p_{\beta}=a_{\gamma\beta}\dot{q}^{\gamma} \tag{72}$$

Posle množenja jednačine (72) sa $a^{\gamma\beta}$ kontravarijantnim tenzorom, jednačina (72) se svodi na oblik:

$$a_{\gamma\beta}a^{\gamma\beta}\dot{q}^{\gamma}=p_{\beta}a^{\alpha\beta}$$

$$\dot{q}^{\alpha}=p_{\beta}a^{\alpha\beta}$$

Kako je kontravarijantni metrički tenzor jednak:

$$a^{\alpha\delta}=a^{\alpha\delta}(q^1,\dots,q^n)=\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{m_i}\frac{\partial q^{\alpha}}{\partial y_i}\frac{\partial q^{\delta}}{\partial y_i}$$

Sada se diferencijalna jednačina (71a) i (72a) mogu na kraju napisati

$$\dot{p}_{\beta}=Q_{\beta}+P_{\beta}+\Gamma_{\alpha\gamma,\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\gamma} \tag{73a}$$

$$\dot{q}^{\alpha}=a^{\alpha\beta}p_{\beta}$$

ili posle zamene $\dot{q}^{\alpha}$ sa p_{δ}

dobijamo:

1) $$\dot{q}^{\alpha}=a^{\alpha\beta}p_{\beta} \tag{73}$$

2) $$\dot{p}_{\beta}=a^{\alpha\delta}\Gamma^{\gamma}_{\delta\beta}p_{\alpha}p_{\gamma}+Q_{\beta}+P_{\beta}$$

sistem od 2n diferencijalnih jednačina prvog reda.

Jednačina (73) predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja sistema mehaničkih tačaka promenljive mase u 2n dimenzionom faznom prostoru.

Odavde se vidi da su dovoljni uslovi da sistem (73) ima ravnotežno stanje da bude $(Q_\beta + P_\beta = 0)$. Ovaj sistem algebarskih nezavisnih jednačina imaju rešenja za koja bez umanjivanja opštosti možemo smatrati da su odredjena vrednostima $q^\alpha = 0$, $p_\alpha = 0$, za svako α.

Jednačine (73) su ujedno i diferencijalne jednačine poremećaja ravnotežnog stanja $q^\alpha = 0, p_\alpha = 0$ sistema materijalnih tačaka promenljive mase u 2n dimenzionom faznom prostoru.

Na sistem mehaničkih tačaka promenljive mase deluje n generalnih sila, gde su $Q_\beta^v = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q^\beta}$ potencijalne sile sa potencijalom Π a Q_β^D su disipativne sile i sile izazvane promenom mase P_α, tada se diferencijalne jednačine (73) svode na oblik

$$\dot{q}^\beta = a^{\alpha\beta} p_\alpha$$
$$\dot{p}_\beta = a^{\alpha\delta} \Gamma^\gamma_{\beta\delta} p_\gamma p_\delta + Q_\beta^v + Q_\beta^D + P_\beta$$

Kao što se vidi pomoću diferencijalnih jednačina (73a) možemo da odredimo kretanje sistema tačaka promenljive mase u 2n- dimenzionom faznom prostoru kada na sistem deluju potencijalne Q_{β}^{V} , disipativne Q_{β}^{D} i reaktivne sile P_{α} .

3.2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE POREMEĆENOG RAVNOTEŽNOG STANJA SISTEMA TAČAKA PROMENLJIVE MASE

U prethodnoj glavi izvedene su diferencijalne jednačine kretanja sistema tačaka promenljive mase za slučaj delovanja generalisanih potencijalnih, disipativnih i reaktivnih sila.

Ako na materijalni sistem deluje n generalnih potencijalnih sila

$$Q^{V}_{\beta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\beta}}$$

gde je $\Pi = \Pi(q^1, \ldots\ldots, q^n)$ potencijalna energija sistema mehaničkih tačaka promenljive mase i reaktivnih sila

$$\Psi_{\beta} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} (\bar{u}^{\alpha} - \dot{q}^{\alpha})$$

tada se diferencijalne jednačine kretanja sistema mehaničkih tačaka promenljive mase u faznom prostoru mogu izraziti, kao što je pokazano u (73) u obliku:

$$\dot{q}^{\alpha} = a^{\alpha\beta}(t) p_{\beta}$$
$$\dot{p}_{\alpha} = a^{\gamma\beta}(t) \left\{ {\delta \atop \alpha\beta} \right\} p_{\delta} p_{\gamma} - \frac{\partial \Pi}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \bar{u}^{\beta} \qquad (74)$$

U okolini ravnotežnog stanja $q=0, p=0$ metrički tenzor je jednak

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial y_i}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial y_i}{\partial q^{\beta}} \Big|_{q^{\alpha}=0} = a_{\alpha\beta}(t)$$

Kada je konfiguracioni prostor odgovarajućeg dinamičkog sistema s konstantnom masom takav da metrika promenljivog konfiguracionog prostora zavisi samo od vremena t, tada je Kristofelov simbol druge vrste jednak

$$\left\{ {\delta \atop \alpha\ \beta} \right\} \equiv 0.$$

Prema tome diferencijalne jednačine poremećenog stanja ravnoteže (74) sada se svode u takvom prostoru na oblik

$$\begin{aligned} \dot{q}^\alpha &= a^{\alpha\beta} p_\beta \\ \dot{p}_\alpha &= Q^v_\alpha + P_\alpha \end{aligned} \tag{75}$$

Razvijajući potencijale Π u red po koordinatama u okolini položaja ravnoteže, tada generalisane potencijalne sile možemo svesti na oblik

$$Q^v_\alpha = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\Big|_{q^\alpha=0} q^\beta = -c_{\alpha\beta}(t)\, q^\beta, \tag{76}$$

kako su reaktivne sile u okolini istog položaja ravnoteže jednake

$$P_\alpha = \dot{a}_{\alpha\beta}(t)\, \bar{u}^\beta, \tag{77}$$

to se jednačine poremećenog stanja ravnoteže svode u faznom prostoru na 2n linearnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima $a^{\alpha\beta}(t)$ i $c_{\alpha\beta}(t)$, i to

$$\begin{aligned} \dot{q}^\alpha &= a^{\alpha\beta}(t)\, p_\beta, \\ \dot{p}_\alpha &= -c_{\alpha\beta}(t)\, q^\beta + \dot{a}_{\alpha\beta}(t)\, \bar{u}^\beta \end{aligned} \tag{78}$$

gde je $$\overset{\cdot}{a}_{\alpha\beta}(t) = \sum_{i=1}^{3N} \dot{m}_i \frac{\partial y_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial y_i}{\partial q^\beta}\Big|_{q^\alpha=0} = \dot{a}_{\alpha\beta}$$

Jednačine izvedene u obliku (78) predstavljaju diferencijalne jednačine poremećaja stanja ravnoteže sistema tačaka promenljive mase u 2n dimenzionom faznom prostoru u okolini $\dot{q}^\alpha = 0$, $p_\alpha = 0$.

Jednačine smo izveli u ovome obliku da bismo ih mogli kasnije koristiti za izvodjenje uslova stabilnosti stanja ravnoteže u okolini položaja ravnoteže $q^\alpha = 0$, $p_\alpha = 0$ sistema tačaka promenljive mase za slučaj kada na sistem deluju generalisane potencijalne i reaktivne sile. Kada na sistem ne dejstvuju samo potencijalne sile, zavisne od položaja i vremena, nego i sile koje zavise od brzine, vremena i impulsa ili nekih drugih fizičkih parametara, tada je generalisana sila jednaka

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q^\alpha, p_\alpha, t).$$

Nju možemo razviti u stepeni red po koordinatima i brzinama u okolini položaja ravnoteže, i dobiti posle odbacivanja članova višeg od prvog reda da je sila jednaka

$$Q_\alpha = -b_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta - c_{\alpha\beta} q^\beta \tag{79}$$

Posle zamene (79) i (71) jednačine poremećenog ravnotežnog stanja za ovaj slučaj se tada svode na 2n linearnih diferencijalnih jednačina

$$\dot{q}^{\alpha} = a^{\alpha\beta}(t)\, p_{\beta}\,, \tag{80}$$

$$\dot{p}_{\alpha} = -c_{\alpha\beta}(t)\, q^{\beta} - b_{\alpha\beta}(t)\, a^{\beta\gamma}(t)\, p_{\gamma} + \dot{a}_{\alpha\beta}(t)\, \bar{u}^{\beta}\,.$$

Jednačine (80) imaju svoj smisao ako se kretanje sistema posmatra u okolini stanja ravnoteže $q^{\alpha} = 0$, $p_{\alpha} = 0$, a na sistem materijalnih tačaka promenljive mase deluju generalisane potencijalne, reaktivne i disipativne sile a stanje sistema posmatramo u 2 n - dimenzionom faznom prostoru.

3.3. USLOVI STABILNOSTI RAVNOTEŽNOG STANJA

Stabilnost neporemećenog ravnotežnog stanja sistema promenljive mase ispitujemo u slučaju delovanja reaktivnih i generalisanih potencijalnih sila služeći se kao osnovom radom Ljapunova i radom V. Vujčića.

Da bismo došli do uslova za stabilnost stanja ravnoteže sistema promenljive mase uzimamo za funkciju V zbir dve pozitivne definitivne funkcije

$$V = T + W \tag{81}$$

pri čemu je $T = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$ kinetička energija sistema promenljive mase, a $W = W(t, q^1, \ldots, q^n)$ neka pozitivno definitna funkcija zavisna od generalisanih koordinata q^α i vremena.

Kako je obični izvod kinetičke energije po vremenu sistema promenljive mase jednak apsolutnom izvodu po istom parametru, t, tj.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{D}{dt}\left(a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta\right) = \frac{DT}{dt}$$

sledi da je

$$\frac{dT}{dt} = \frac{DT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t} p_\alpha p_\beta + a^{\alpha\beta} \frac{Dp_\beta}{dt} p_\alpha . \tag{82}$$

Izvod funkcije V može se sada izraziti u obliku

$$\frac{dV}{dt} = a^{\alpha\beta} \frac{Dp_\beta}{dt} p_\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t} p_\alpha p_\beta + \frac{\partial W}{\partial q^\beta} \dot{q}^\beta + \frac{\partial W}{\partial t} \tag{83}$$

U konfiguracionom promenljivom prostoru apsolutni izvod impulsa je

$$\frac{Dp_\beta}{dt} = \dot{p}_\beta - a^{\alpha\sigma}\left\{ {\delta \atop \alpha\beta} \right\} p_\sigma p_\delta .$$

S obzirom da je Kristofelov simbol druge vrste za posmatrani slučaj (75) jednak $\left\{ {\delta \atop \alpha\,\beta} \right\} \equiv 0$ to se izraz (83) svodi na oblik

$$\frac{dV}{dt} = a^{\alpha\beta}\dot{p}_\beta p_\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t} p_\alpha p_\beta + \frac{\partial w}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\partial w}{\partial t} \tag{84}$$

Posle zamene $\dot{q}^\beta$ sa $\dot{q}^\beta = a^{\alpha\beta} p_\alpha$ i $\dot{p}_\beta = +Q^v_\beta + P_\beta$ u jednačinu (84), dobija se

$$a^{\alpha\beta}p_\alpha(Q^v_\beta + P_\beta) + \frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t} p_\alpha p_\beta + \frac{\partial w}{\partial q^\beta} a^{\alpha\beta} p_\alpha + \frac{\partial w}{\partial t} \leq 0 \tag{85}$$

ili ako je $w = \Pi$

$$\left(Q^v_\beta + P_\beta + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\beta}\right)\dot{q}^\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t} p_\alpha p_\beta + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \leq 0 . \tag{86}$$

Uslov (85) i (86) predstavlja analogan Ljapunovu i Vujčiću kriterij stabilnosti stanja ravnoteže za slučaj delovanja na sistem reaktivnih i potencijalnih sila.

= = =

a) Ako generalisanu potencijalnu silu izrazimo u obliku

$$Q^v_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}$$

a funkciju W možemo izjednačiti sa potencijalom Π , za taj slučaj uslov stabilnosti (86) postoje jednak:

$$\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^\beta} + P_\beta + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\beta}\right)\dot{q}^\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t} p_\alpha p_\beta + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \leq 0 \tag{87}$$

Ako potencijalnu energiju posmatramo u okolini položaja ravnoteže, a prethodno smo je izrazili u najnižoj aproksimaciji $\Pi=\frac{1}{2}C_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta}$ to je generalisana potencijalna sila jednaka

$$Q_{\alpha}^{V}=-C_{\alpha\beta}q^{\beta},$$

a reaktivna sila u istom položaju bila bi

$$R_{\alpha}=\sum_{i=1}^{3N}\dot{m}_i\frac{\partial y_i}{\partial q^{\alpha}}\frac{\partial y_i}{\partial q^{\beta}}\Big|_{q^{\alpha}=0}\bar{u}^{\beta}\overset{def}{=}\dot{a}_{\alpha\beta}\bar{u}^{\beta} \quad (88)$$

to se uslov (86) svodi na oblik:

$$a^{\alpha\beta}\left(-C_{\alpha\beta}q^{\beta}+\dot{a}_{\alpha\beta}\bar{u}^{\beta}+\frac{\partial W}{\partial q^{\beta}}\right)p_{\beta}+\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}p_{\alpha}p_{\beta}+\frac{\partial W}{\partial t}\leq 0, \quad (89)$$

što posle zamene p_{β} sa $p_{\beta}=a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}$ i W sa $W=\frac{1}{2}C_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta}$ postaje:

$$\dot{a}_{\alpha\beta}\bar{u}^{\beta}\dot{q}^{\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}p_{\alpha}p_{\beta}+\frac{1}{2}\frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial t}q^{\alpha}q^{\beta}\leq 0, \quad (90)$$

ili kako je prema [39] $\dot{a}^{\alpha\beta}a_{\alpha\gamma}a_{\delta\beta}=-\dot{a}_{\gamma\delta}$, to se izraz svodi na oblik

$$\dot{a}_{\alpha\beta}\bar{u}^{\beta}\dot{q}^{\alpha}-\frac{1}{2}\dot{a}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}+\frac{1}{2}\dot{C}_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta}\leq 0. \quad (91)$$

=

= =

b) Uvodjenjem proporcionalnosti izmedju brzina

$$\bar{u}^{\beta} \ i \ \dot{q}^{\beta} \quad tj. \quad \bar{u}^{\beta} = \lambda \dot{q}^{\beta}$$

Uslove (90) i (91) dalje možemo izraziti tako što ako vrednost za $\bar{u}^{\beta}$ uvrstimo u (90) dobijamo

$$\dot{a}_{\alpha\beta} \lambda \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t} a_{\alpha\gamma} \dot{q}^{\gamma} a_{\delta\beta} \dot{q}^{\delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial c_{\alpha\beta}}{\partial t} q^{\alpha} q^{\beta} \leq 0.$$

ili posle izvršene transformacije, s obzirom da je prema [39] $\dot{a}^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} a_{\delta\beta} = -\dot{a}_{\gamma\delta}$ uslov (86) je jednak

$$\dot{a}_{\alpha\beta} \bar{u}^{\beta} \dot{q}^{\alpha} - \frac{1}{2} \dot{a}_{\gamma\delta} \dot{q}^{\gamma} \dot{q}^{\delta} + \frac{1}{2} \dot{c}_{\alpha\beta} q^{\alpha} q^{\beta} \leq 0. \qquad (93)$$

Uslovi stabilnosti (90), (91) i (92) omogućuju da se utvrdi stabilnost stanja ravnoteže sistema tač aka promenljive mase u okolini ravnotežnog položaja $q^{\alpha} = 0$, $p_{\alpha} = 0$.

Ispitivanje stabilnosti ravnotežnog stanja pomoću ovih uslova stabilnosti olakšavamo problem time što ceo postupak ispitivanja svodimo na odredjivanje funkcija koje figuriraju u uslovima, a koje možemo ne sa tako velikim teškoćama i odrediti.

c) U slučaju da posmatramo sistem sa jednim stepenom slobodne metrički tenzor jednak je:

$$a^{\alpha\beta} = a^{11} = a^{1}$$

odnosno

$$a_{\alpha\beta} = a_{11} = a_{1}$$

to se (90) svodi na oblik

$$\dot{a}_{1} \bar{u} \dot{q}^{1} + \frac{1}{2} \dot{a}^{1} p_{1}^{2} + \frac{1}{2} \dot{c}_{1} q_{1}^{2} \leq 0. \qquad (94)$$

$$\dot{a} \bar{u} \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{a} \dot{q}^{2} + \frac{1}{2} \dot{c} q^{2} \leq 0$$

3.4. STABILNOST DISIPATIVNIH SISTEMA

Na sistem mehaničkih tačaka promenljive mase pored reaktivnih sila, deluju generalisane potencijalne i generalisane disipativne sile.

Za ovaj slučaj stanje ravnoteže bilo bi stabilno ako je izraz:

$$a^{\alpha\beta}\left(Q_\alpha^{v}+Q_\alpha^{D}+R_\alpha+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\right)p_\beta+\frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}p_\alpha p_\beta+\frac{\partial W}{\partial t}\leq 0 \qquad (96)$$

manji ili jednak nuli.

Za slučaj da je pozitivno definitivna funkcija W jednaka

$$W=\frac{1}{2}\,c_{\alpha\beta}\,q^\alpha q^\beta$$

a da je generalisana disipativna sila Q_α^{D} izražena pomoću Relejeve funkcije, gde je $R=\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta$ generalisana disipativna sila tada je generalisana disipativna sila jednaka

$$Q_\alpha^{D}=-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^\alpha}=-b_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta$$

pa se uslov (96) svodi na oblik:

$$-\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta+\dot{a}_{\alpha\beta}\bar{u}^\beta\dot{q}^\alpha-\frac{1}{2}\dot{a}_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta+\frac{1}{2}\dot{c}_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta\leq 0. \qquad (97)$$

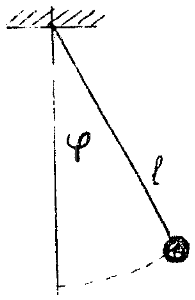
Ovaj uslov možemo koristiti za ispitivanje stabilnosti ravnotežnog stanja sistema tačaka promenljive mase, ako na sistem deluju reaktivne, potencijalne i disipativne sile.

Ako je sistem sa jednim stepenom slobodan, uslov (97) se svodi na oblik

$$\dot{a}\,\bar{u}\,\dot{q}-\frac{1}{2}(\dot{a}+b)\dot{q}^2+\frac{1}{2}\dot{c}\,q^2\leq 0. \qquad (98)$$

Obično matematičko klatno je sistem sa jednim stepenom slobode kretanja, te ćemo s toga na njemu izvršiti primenu uslova stabilnosti ravnotežnog stanja (95) i (98).

3.5. STABILNOST STANJA RAVNOTEŽE MATEMATIČKOG KLATNA PROMENLJIVE MASE



$\varrho = \varphi$

a) Ispitati stabilnost stanja ravnoteže matematičkog klatna kojemu se usled zamrzavanja čestica vode ravnomerno po površini kugle masa kugle ravnomerno menja. Kugla je poluprečnika r. i prvobitne mase m , Na kuglu deluje sila zemljine teže. Kako je matematičko klatno sistem sa jednim stepenom slobode, to da bi stanje ravnoteže matematičkog klatna bilo stabilno, treba da je zadovoljen uslov:

$$\dot{a}\bar{u}\dot{\varrho} - \frac{1}{2}\dot{a}\dot{\varrho}^2 + \frac{1}{2}\dot{c}\varrho^2 \leq 0. \tag{99}$$

Apsolutna brzina čestica vodene pare, koje se zamrzavaju ravnomerno po površini kuglice jednaka je nuli tj. $u = 0$ i time prvi član u uslovu (99) otpada i on se svodi na oblik

$$-\frac{1}{2}\dot{a}_1\dot{\varrho}^2 + \frac{1}{2}\dot{c}_1\varrho^2 \leq 0. \tag{100}$$

Inercioni koeficijent a^1 je $a' = a' = \frac{1}{ml^2}$ odnosno $a_1 = ml^2$ a izvod inercionog koeficijenta po vremenu je

$$\dot{a}_1 = \dot{m}l^2.$$

Koeficijenti restitucije c (t) i njihov izvod bili bi

$$\dot{c}_1 = +\dot{m}gl$$

Ako uvrstimo vrednosti izvoda u uslov (100) on se svodi na oblik

$$-\frac{1}{2}\dot{a}_1\dot{q}^2+\frac{1}{2}\dot{c}_1 q^2\leq 0,$$

(101)

ili $-\frac{1}{2}\dot{m}(l^2\dot{\varphi}^2-gl\varphi^2)\leq 0,$

aKako je izvod mase $\dot{m}$, kordinata φ, i dužine klatna l, veća od nule, to je izraz (1o1) uvek manji od nule, ako je $l^2\dot{\varphi}^2\geq gl\varphi^2$ pa je ravnotežno stanje $\varphi=0, \dot{\varphi}=0$ posmatranog klatna stabilno.

b) Kugla prvobitne mase m, i poluprečnika r. povećava maasu pripajanjem novih čestica usled zamrzavanja ravnomerno po njenoj površini čestica vode i pri tome na nju deluje pored zemljine teže, sila izražena promenom mase i disipativne sile čija je funkcija rasipanja

$R=\frac{1}{2}b\dot{\varphi}^2$ gde je $b>0$.

Stabilnost stanja ravnoteže ovoga sistema ispitaćemo na osnovu uslova (98)

$$\dot{a}\bar{u}\dot{q}-\frac{1}{2}(\dot{a}_1+b_1)\dot{q}^2+\frac{1}{2}\dot{c}_1 q^2\leq 0.$$

Apsolutna brzina čestica vodene pare je u = O, tako da se uslov uprošćuje na oblik

$$-\frac{1}{2}(\dot{a}_1+b_1)\dot{q}^2+\frac{1}{2}\dot{c}_1 q^2\leq 0. \qquad (1o2)$$

Generalisana koordinata je ugaoni otklon tj. inercioni koeficijent je

$$a_1=ml^2$$

a njegov izvod

$$\dot{a}_1=\dot{m}l^2$$

za male oscilacije potencijalna sila je

$$Q_1^v=-mgl\varphi=-c_1\varphi,$$

a izvod po vremenu koeficijenta rastitucije matematičkog klatna bio bi

$$\dot{c}_1 = \dot{m} g l$$

Zamenom gornjih vrednosti u uslove (1o2), dobijamo

$$-[b\dot{\varphi}^2 + \dot{m}l(l\dot{\varphi}^2 - g\varphi^2)] \leq 0.$$

Kako je u posmatranom slučaju izvod mase po vremenu uvek veći od nule tj. $\dot{m}>0$, a isti je slučaj i sa b, l i g, očigledno da je tada izraz sa leve strane za svako $t \geq t_o$ manji od nule ako je $(b\dot{\varphi}^2 + \dot{m}l^2\dot{\varphi}^2) \geq g\varphi^2 l$ pa je ravnotežno stanje matematičkog klatna u položaju $\varphi=0, \dot{\varphi}=0$ stabilno.

Ovde jasno proizilazi i poznati slučaj ponašanja matematičkog klatna konstantne mase u okolini položaja ravnoteže pri dejstvu otpornih sila. U tom slučaju je izvod mase $\dot{m}_1 = 0$, pa se uslov (102) svodi na negativnu funkciju

$$-\frac{1}{2} b\dot{\varphi}^2 \leq 0,$$

te prema kriterijumu (98) dobijamo da je ravnotežno stanje $\varphi=0, \dot{\varphi}=0$ stabilno.

4.1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE POREMEĆENOG KRETANJA MEHANIČKOG HOLONOMNO-SKEE-RONOMNOG SISTEMA PROMENLJIVE MASE

Položaj holonomno-skleronomnog sistema promenljive mase u faznom prostoru kojeg posmatramo odredjen je sa $q^1, \dots, q^\alpha, p_1, \dots, p_\alpha$ nezavisnih kordinata.

Kretanje sistema u faznom prostoru kordinata $\Phi_{2n} = \{q^\alpha, p_\alpha\}$, odredjeno je sa 2n difererencijalnih jednačina prvog reda.

Rešenjima tih jednačina $q_\alpha = q_\alpha(t)$, $p_\alpha = p_\alpha(t)$

odgovsra neko odredjeno kretanje posmatranog sistema.

Uporedjujući ovo kretanje sa drugim mogućim kretanjem za posmatrani sistem ono će biti neporemećeno, a sve ostalo sa kojima se ono uporedjuje prestavljaće poremećena kretanja, odredjena relacijama:

$$\bar{q}^\alpha = q^\alpha(t) + \xi^\alpha(t)$$

$$\bar{p}_\alpha = p_\alpha(t) + \eta_\alpha(t) \qquad (103)$$

Veličine ξ^α i η_α $(\alpha = 1, \dots, n)$ predstavljaju poremećaje kretanja.

Diferencijalne jednačine neporemećenog kretanja holonomno-skleronomnog sistema promenljive mase u faznom prostoru mogu se napisati u obliku:

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \tag{103}$$

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha + P_\alpha,$$

gde je

H – hamiltonova funkcija

Q – nepotencijalne i disipativne generalisane sile

P – generalisane kordinate sila izazvanih promenom mase posmatranog sistema

Medjutim, analizu stabilnosti kretanja možemo izvršiti pomoću varijacije Hamiltonovih kanonskih diferencijalnih jednačina:

$$\delta\left(\frac{dq^\alpha}{dt}\right) = \delta\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)$$

$$\delta\left(\frac{dp_\alpha}{dt}\right) = -\delta\left[\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha(t, q^\alpha, p_\alpha) + P_\alpha(t, q^\alpha, p_\alpha)\right] \tag{104}$$

Vrednost kordinata q^α i p_α za poremećeno kretanje bila bi

$$\bar{q}^\alpha = q^\alpha(t) + \xi^\alpha, \qquad \bar{p}_\alpha = p_\alpha(t) + \eta_\alpha \;;$$

pa se jednačine (103) mogu izraziti u obliku

$$\frac{d(q^\alpha + \xi^\alpha)}{dt} = \frac{\partial H(t, q^\alpha + \xi^\alpha, p_\alpha + \eta_\alpha)}{\partial p_\alpha}, \tag{105}$$

$$\frac{d(p_\alpha + \eta_\alpha)}{dt} = -\frac{\partial H(t, q^\alpha + \xi^\alpha, p_\alpha + \eta_\alpha)}{\partial q^\alpha} + \bar{Q}_\alpha(t, q^\alpha + \xi^\alpha, p_\alpha + \eta_\alpha) + \bar{P}_\alpha(t, q^\alpha + \xi^\alpha, p_\alpha + \eta_\alpha)$$

Razlaganjem desnih strana jednačina (105) u Tajlorov red po, ξ^α i η_α dobijamo

$$\bar{Q}_\alpha = Q_\alpha + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta + F_{\alpha_1},$$

gde F_{α_1}, označava male veličine reda većeg od prvog zavisne od veličina ξ^α i η_α.

Za reaktivnu silu dobijamo:

$$\bar{P}_\alpha = P_\alpha + \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta + F_2 \ .$$

Sada se jednačine (1o5) mogu napisati u obliku:

$$\frac{d(q^\alpha+\xi^\alpha)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta}\xi^\beta + \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\eta_\beta + F_3$$

$$\frac{d(p_\alpha+\eta_\alpha)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\xi^\beta + F_3 + Q_\alpha + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta +$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta}\eta_\beta + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta + F_1 + P_\alpha + \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta + F_2 \qquad (106)$$

Posle oduzimanja jednačina (1o5) od (1o6) dobijaju se jednačine poremećenog kretanja u obliku:

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt} = \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta}\xi^\beta + \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\eta_\beta + F_3 \qquad (1o7)$$

$$\frac{d\eta_\alpha}{dt} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\xi^\beta - \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta}\eta_\beta + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta +$$

$$+ \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\beta}\eta_\beta + F$$

gde je

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \ , \quad (\beta = 1, \dots, n)$$

A ko su kako je pokazano [52] apsolutne brzine čestica tačaka sistema jednake nuli, ili su brzine otpadanja i pripajanja čestica kolinearne i medjusobno jednake kao i brzine dinamičke promene usled otpadanja i pripajanja čestica, onda jednačine (1o7) poremećenog kretanja su:

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt} = \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta}\xi^\beta + \frac{\partial^2 H}{\partial p^\alpha \partial p_\beta}\eta_\beta \qquad (1o8)$$

$$\frac{d\eta_\alpha}{dt} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\xi^\beta - \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta}\eta_\beta + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta$$

Ako je za posmatrani sistem [52] Hamiltonova funkcija jednaka:

$$H = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + V(q^1, \dots, q^n, t),$$

to jednačine (1o8) možemo da svedemo posle izvršene zamene izvoda Hamiltonove fuhkcije

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^\beta \partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q^\beta}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial q^\beta} a^{\alpha\gamma} p_\gamma$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} = a^{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} = \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a^{\gamma\delta}}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} p_\gamma p_\delta + \frac{\partial^2 V}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}$$

na oblik:

$$\dot{\xi}^\alpha = \frac{\partial}{\partial q^\beta} a^{\alpha\gamma} p_\gamma \xi^\beta + \frac{\partial}{\partial q^\beta} a^{\alpha\gamma}\eta_\gamma p_\gamma$$

$$\dot{\eta}_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} a^{\gamma\delta} p_\gamma p_\delta \xi^\beta - \frac{\partial}{\partial q^\alpha} a^{\gamma\delta} p_\delta \eta_\beta - \frac{\partial^2 V}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial Q'_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial Q'_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta,$$

gde je

$$Q'_\alpha = Q^0_\alpha + P_\alpha.$$

Kako je generalisana potencijalna sila jednaka

$$-\frac{\partial V}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha$$

to je

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\xi^\beta = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta$$, pa se (lo9) može

izraziti u obliku

$$\dot{\xi}^\alpha = \frac{\partial a^{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} p_\gamma \xi^\beta + a^{\alpha\gamma}\eta_\gamma$$

$$\dot{\eta}_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 a^{\gamma\delta}}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} p_\gamma p_\delta \xi^\beta - \frac{\partial a^{\gamma\delta}}{\partial q^\alpha} p_\delta \eta_\gamma + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta}\eta_\beta + \frac{\partial Q'_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial Q'_\alpha}{\partial q^\beta}\eta^\beta \tag{110}$$

ili posle zamene

$$\bar{Q}_\alpha = Q_\alpha^r + Q_\alpha^D + P_\alpha$$

dobija se izraz:

$$\dot{\xi}^\alpha = \frac{\partial a^{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} p_\gamma \xi^\beta + a^{\alpha\gamma}\eta_\gamma$$

$$\dot{\eta}_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 a^{\gamma\delta}}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} p_\gamma p_\delta \xi^\beta - \frac{\partial a^{\gamma\delta}}{\partial q^\alpha} p_\delta \eta_\gamma + \frac{\partial \bar{Q}_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial \bar{Q}_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta$$

Prema [3] , kovarijantni izvod metričkog tenzora sistema promenljive mase jednak je:

$$a_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - a_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\alpha\gamma} - a_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} = 0$$

odakle je

$$\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial q^\beta} = -a^{\alpha\mu}\Gamma^\gamma_{\beta\mu} - a^{\gamma\mu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$$

to se jednačine (lo9) mogu konačno napisati u obliku

$$\dot{\xi}^\alpha = -(a^{\alpha\mu}\Gamma^\gamma_{\beta\mu} + a^{\gamma\mu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})p_\gamma\xi^\beta + a^{\alpha\gamma}\eta_\gamma$$

$$\dot{\eta}_\alpha = p_\gamma p_\delta \xi^\beta \frac{\partial}{\partial q^\beta}\Gamma^\delta_{\mu\gamma} a^{\gamma\mu} + (a^{\gamma\mu}\Gamma^\delta_{\mu\alpha} + a^{\delta\mu}\Gamma^\gamma_{\mu\alpha})p_\gamma p_\delta + \frac{\partial \bar{Q}_\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\alpha + \frac{\partial \bar{Q}_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta \tag{111}$$

odnosno

$$\dot{\xi}^{\alpha} = \frac{\partial a^{\gamma\alpha}}{\partial q^{\rho}} p_{\gamma} \xi^{\rho} + a^{\alpha\gamma} \eta_{\gamma}$$

$$\dot{\eta}_{\alpha} = -\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a^{\gamma\delta}}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\rho}} p_{\gamma} p_{\delta} \xi^{\rho} + \frac{\partial a^{\gamma\beta}}{\partial q^{\alpha}} p_{\gamma} \eta_{\beta} \right) + \frac{\partial \bar{Q}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \xi^{\beta} + \frac{\partial \bar{Q}_{\alpha}}{\partial p_{\beta}} \eta_{\beta}$$

Za slučaj kada je osnovni tenzor $a^{\alpha\beta} = const$,

tada su jednačine:

$$\dot{\xi}^{\alpha} = a^{\alpha\gamma} \eta_{\gamma}$$
$$\dot{\eta}_{\alpha} = \frac{\partial \bar{Q}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \xi^{\beta} + \frac{\partial \bar{Q}_{\alpha}}{\partial p_{\beta}} \eta_{\beta} \,. \qquad (112)$$

Diferencijalne jednačine kretanja sistema promenljive mase, možemo sem u kanonskom obliku, faznog prostora, izraziti i u $K_n^{(P)}$ – prostoru.

Diferencijalne jednačine neporemećenog kretanja u kovarijantnom obliku su

$$\ddot{q}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \dot{q}^{\gamma} \dot{q}^{\beta} = Q^{\alpha} + \Psi^{\alpha}. \qquad (113)$$

Ako se prilikom kretanja sistema javljaju poremećaji, tada su generalisane kordinate jednake:

$$\bar{q}^{\alpha} = q^{\alpha} + \xi^{\alpha}$$

gde su ξ^{α} poremećaji.

Diferencijalne jednačine kretanja posle zamene generalisanih kordinata q^{α} sa $q^{\alpha} + \xi^{\alpha}$ svode se na oblik [52]:

$$\ddot{q}^{\alpha} + \ddot{\xi}^{\alpha} + \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} (\dot{q}^{\gamma} + \dot{\xi}^{\gamma})(\dot{q}^{\beta} + \dot{\xi}^{\beta}) = \bar{Q}^{\alpha} + \bar{\Psi}^{\alpha} \qquad (114)$$

$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}$ - kristofelov simbol posle izvršene varijacije uzimajući u obzir samo prve stepene je[42] :

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} + \xi^{\delta}\frac{\partial}{\partial q^{\delta}}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \tag{115}$$

Reaktivna sila Ψ^{α} kako je pokazano kod [ ] je složena funkcija koja uglavnom zavisi od brzine kretanja tačaka sistema i apsolutnih brzina čestica, koje se pripajaju ili odvajaju od tačaka sistema.

Prema I. Meščerskom reaktivna sila je

$$F_R = \sum_{\nu}^{1,2}\frac{dm_{i(\nu)}}{dt}(u_{(\nu)i} - \dot{y}_i) \tag{116}$$

što se u $K_n^{(p)}$ - prostoru može napisati kao

$$\Psi_{\alpha} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(\bar{u}^{\beta} - \dot{q}^{\beta}). \tag{117}$$

Kako je drugi deo izraza (117) zavisan od brzine tačaka sistema $\dot{y}_i$ to je on posle nastalog poremećaja jednak

$$-\sum_{(\nu)}^{1,2}\frac{dm_{i(\nu)}}{dt}(\dot{y}_i + \eta_i)$$, odnosno $$-\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(\dot{q}^{\alpha} + \eta^{\alpha}).$$

Prvi deo obzirom da zavisi od apsolutnih brzina čestica, koje su funkcije

$$\bar{u}_{(\nu)i} = f_i(y_i, \dot{y}_i, \dots)$$

ili posle izvršenog poremećaja

$$\bar{u}_{(\nu)i} = \bar{f}_i(y_i + \xi_i, \dot{y}_i + \eta_i; \dots)$$

i razvijaju apsolutne brzine u Tajlorev red [42]:

$$\bar{u}_{(\nu)i} = u_{(\nu)i} + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial u_{(\nu)i}}{\partial y_i}\right)\xi_j + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial u_{(\nu)i}}{\partial \dot{y}_i}\right)\eta_j + Z \tag{119}$$

gde Z predstavlja članove višeg od prvog reda, svodi se na oblik:

$$\sum_{(\bar{\nu})}^{1,2} \frac{dm_{i(\bar{\nu})}}{dt} \bar{u}_{(\bar{\nu})i} = \sum_{(\bar{\nu})}^{1,2} \frac{dm_{i(\bar{\nu})}}{dt} \left[u_{(\bar{\nu})i} + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial u_{(\bar{\nu})i}}{\partial y_j} \right) \xi_j + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial u_{(\bar{\nu})i}}{\partial \dot{y}_j} \right) \eta_j \right] \tag{119}$$

Ako od jednačine (114) oduzmemo jednačinu (113) predhodno generalisane sile Q_*^α i reaktivne sile Ψ^α se razvijaju u Tajlorev red po poremećejaima ξ^α i η^α.

$$\bar{Q}_\alpha = Q^\alpha + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \xi^\beta + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} \dot{\xi}^\beta + F_1$$

$$\bar{\Psi}^\alpha = \Psi^\alpha + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^\beta} \xi^\beta + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} \dot{\xi}^\beta + F_2 \tag{12o}$$

gde je

$$\Psi_\alpha = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \left(\bar{u}^\beta - \dot{q}^\beta \right)$$

$$\bar{\Psi}_\alpha = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \left(\bar{u}^\beta + \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial q^\gamma} \xi^\gamma + \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial \dot{q}^\gamma} \dot{\xi}^\gamma - \dot{\xi}^\beta - \dot{q}^\beta \right) \tag{121}$$

te posle odbacivanja članova višeg od prvog reda dobija se diferencijalna jednačina poremećenog kretanja u konfiguracionom prostoru $K_n^{(P)}$:

$$\ddot{\xi}^\alpha + \xi^\delta \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma \frac{\partial}{\partial q^\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + 2\, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{\xi}^\gamma \dot{q}^\beta = \frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \xi^\beta + \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} \dot{\xi}^\beta + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^\beta} \xi^\beta + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} \dot{\xi}^\beta$$

Za sistem konstantne mase, diferencijalne jednačine

(122) se svode na prostiji oblik

$$\ddot{\xi}^{\alpha} = \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \xi^{\beta} + \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta}} \dot{\xi}^{\beta} .$$

4.2. USLOV STABILNOSTI KRETANJA SISTEMA TAČAKA PROMENLJIVE MASE

U ovome delu rada, oslanjajući se na rad [16] rešavamo opšti problem stabilnosti kretanja holonomnog skleronomnog sistema tačaka promenljive mase, kada je konfiguracioni prostor takav da njegov metrički tenzor zavisi posredstvom mase samo od vremena t.

a) Varijacione jednačine (111) poremećenog kretanja posmatranog sistema za koji tražimo uslov stabilnosti za uvedeno ograničenje konfiguracije sistema uprošćuje se na oblik

$$\dot{\xi}^{\alpha} = a^{\alpha\delta}\eta_{\delta}$$
$$\dot{\eta}_{\alpha} = \frac{\partial Q'_{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\xi^{\beta} + \frac{\partial Q'_{\alpha}}{\partial p^{\beta}}\eta_{\beta} + \frac{\partial Q^{r}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\xi^{\beta} \qquad (123)$$

gde je $\quad Q'_{\alpha} = Q^{D}_{\alpha} + P_{\alpha}$,

a jednačine (122) se svode na izraz:

$$\ddot{\xi}^{\alpha} = \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\xi^{\beta} + \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta}}\dot{\xi}^{\beta} + \frac{\partial \Psi^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\xi^{\beta} + \frac{\partial \Psi^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta}}\dot{\xi}^{\beta}$$

jer kordinate tenzora $a_{\alpha\beta}$ zavise samo od vremena, to je $\dfrac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}} = 0$.

Ako uzmemo da je

$$c_{\alpha\beta} = \frac{\partial Q'_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} + \frac{\partial Q^{r}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}}$$

tada se jednačine (123) uprošćuju i svode se na oblik

$$\dot{\xi} = a^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma} \qquad (124)$$
$$\dot{\eta}_{\alpha} = c_{\alpha\beta}\xi^{\beta} + \frac{\partial Q'_{\alpha}}{\partial p_{\beta}}\eta_{\beta}.$$

Da bi postavili uslov stabilnosti za posmatrani slučaj kretanja sistema polazimo od rada [52], uzimajući funkciju V , kao zbir dve funkcije od kojih je svaka pozitivno definitna za svoje kordinate, a njihov zbir za sve kordinate

tako da je $$V=\frac{1}{2}a^{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta+w(\xi^1,\dots,\xi^n,t)$$

(125)

Izvod funkcije V po vremenu t jednak je

$$\dot V=a^{\alpha\beta}\dot\eta_\alpha\eta_\beta+\frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}\eta_\alpha\eta_\beta+\frac{\partial w}{\partial\xi^\alpha}\dot\xi^\alpha+\frac{\partial w}{\partial t}$$

ili u smislu jednačine poremećenog kretanja

$$\dot V=a^{\alpha\beta}\eta_\beta\left(C_{\alpha\beta}\xi^\beta+\frac{\partial Q'_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}\eta_\alpha\eta_\beta+\frac{\partial w}{\partial\xi^\beta}\dot\xi^\beta+\frac{\partial w}{\partial t},$$

to možemo dalje napisati u obliku

$$\dot V=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}\eta_\alpha\eta_\beta+\left(C_{\alpha\beta}\xi^\beta+\frac{\partial Q'_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta\right)a^{\alpha\beta}\eta_\beta+\frac{\partial w}{\partial\xi^\alpha}\dot\xi^\alpha$$

ili posle zamene poremećajne brzine sa

$$\dot\xi=a^{\alpha\beta}\eta_\beta$$

izvod funkcije V se svodi na oblik

$$\dot V=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}\eta_\alpha\eta_\beta+\left(C_{\alpha\beta}\xi^\beta+\frac{\partial Q'_\alpha}{\partial p_\alpha}\eta_\beta+\frac{\partial w}{\partial\xi^\alpha}\right)a^{\alpha\gamma}\eta_\gamma$$

Ako je moguće naći takvu pozitivno definitnu funkciju

$W=w(t,\xi^1,\dots,\xi^n)$ u kojoj je izraz

(126)

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}\eta_\alpha\eta_\beta+\left(C_{\alpha\beta}\xi^\beta+\frac{\partial Q'_\alpha}{\partial p_\beta}\eta_\beta+\frac{\partial w}{\partial\xi^\alpha}\right)a^{\alpha\gamma}\eta_\gamma\leq 0$$

manji ili jednak nuli, neporemećeno kretanje skleronomnog holonomnog sistema tačaka promenljive mase je stabilno.

U slučaju kada su apsolutne brzine čestica jednake nuli, ili su brzine čestica pri opadanju i pripajanju kolinearne i medjusobno jednake kao i brzine dinamičke promene usled otpadanja i pripajanja čestica, tada se izraz (126) svodi na oblik:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}\eta_\alpha\eta_\beta + \left(\frac{\partial Q_\alpha^D}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial Q_\alpha^D}{\partial p_\beta}\eta_\beta + \frac{\partial Q_\alpha^V}{\partial q^\beta}\xi^\beta + \frac{\partial w}{\partial \xi^\alpha}\right)\dot{\xi}^\alpha \leq 0$$

pošto svi članovi koji su sadržavali reaktivnu silu otpadaju.

Posle zamene

$$\frac{\partial Q_\alpha^D}{\partial q^\beta} + \frac{\partial Q_\alpha^V}{\partial q^\beta} = \bar{C}_{\alpha\beta} \quad i \quad \frac{\partial Q_\alpha^D}{\partial p_\beta}$$

sa $u_{\alpha\beta}$, dobija se

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}\eta_\alpha\eta_\beta\left(\bar{C}_{\alpha\beta}\xi^\beta + u_{\alpha\beta}\eta_\beta + \frac{\partial w}{\partial \xi^\alpha}\right)\cdot\dot{\xi}^\alpha \leq 0 \quad (127)$$

Na osnovu uslova (127) poznavajući vřednosti metričkog tenzora, generalisanih sila i proizvoljno odabrane pozitivno definitivne funkcije w možemo da utvrdimo da li je kretanje sistema stabilno ili nije.

U slučaju da generalisane sile zavise samo od vremena t, tada bi njihov izvod po koordinatama položaja i po brzinama bio jednak nuli, pa se uslov (127) svodi na oblik:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial t}\eta_\alpha+\frac{\partial w}{\partial \xi^\alpha}a^{\alpha\beta}\right)\eta_\beta \leq 0. \tag{128}$$

b) Uslov (126) izveden je posmatrajući kretanje sistema u 2n- dimenzionom faznom prostoru. Do sličnog uslova za stabilnost kretanja sistema tačaka promenljive mase može se doći ako se kretanje posmatra u n-dimenzionom Euklidovom prostoru.

Za posmatrane uslove za koje je $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=0$ jednačine neporemećenog kretanja mogu biti uprošćene na:

$$\frac{D\dot{q}^\alpha}{dt}=\ddot{q}^\alpha = Q^\alpha+\Psi^\alpha \tag{129}$$

Analogono ovome, za poremećeno kretanje je

$$\frac{D(\dot{q}^\alpha+\dot{\xi}^\alpha)}{dt}=\ddot{q}^\alpha+\ddot{\xi}^\alpha=\bar{Q}^\alpha+\bar{\Psi}^\alpha \tag{130}$$

Kada se desna strana jednačine (13o) razvije u red, a od jednačine (13o) oduzmemo jednačinu (129), tada se dobija apsolutni izvod brzine poremećenog kretanja

$$\ddot{\xi}^\alpha=\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta+\frac{\partial Q^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta}\dot{\xi}^\beta+\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^\beta}\xi^\beta+\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta}\dot{\xi}^\beta \tag{131}$$

funkciju biramo u vidu zbira dve pozitivno definitne funkcije

$$V=\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta+w(\xi^1,\dots,\xi^n,t)$$

Izvod prve ove funkcije je:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(a_{\alpha\beta}\dot{\xi}^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta}\right) = a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{\xi}^{\alpha}}{dt}\dot{\xi}^{\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{\xi}^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta} \qquad (132)$$

a druge

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \xi^{\alpha}}\dot{\xi}^{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial t}. \qquad (133)$$

Posle zamene vrednosti (132) i (133) u:

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{\xi}^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta}\right) + \frac{dW}{dt}$$

dobija se uslov stabilnosti kretanja tako uprošćenog sistema tačaka promenljive mase

$$\frac{\partial W}{\partial \xi^{\beta}}\dot{\xi}^{\beta} + \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{\xi}^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta} + \left(\frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\xi^{\beta} + \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta}}\dot{\xi}^{\beta} + \frac{\partial \Psi^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\xi^{\beta} + \frac{\partial \Psi^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta}}\dot{\xi}^{\beta}\right)a_{\alpha\beta}\dot{\xi}^{\beta} \leq 0. \qquad (134)$$

Posle zamene

$$Z^{\alpha} = \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\xi^{\beta} + \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta}}\dot{\xi}^{\beta} + \frac{\partial \Psi^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\xi^{\beta} + \frac{\partial \Psi^{\alpha}}{\partial \dot{q}^{\beta}}\dot{\xi}^{\beta}$$

uslov se svodi na oblik

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \xi^{\beta}}\dot{\xi}^{\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{\xi}^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta} + Z^{\alpha}a_{\alpha\beta}\dot{\xi}^{\beta} \leq 0$$

odnosno

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(\frac{\partial W}{\partial \xi^{\beta}} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{\xi}^{\alpha} + Z^{\alpha}a_{\alpha\beta}\right)\dot{\xi}^{\beta} \leq 0. \qquad (138)$$

Prema tome, ako možemo naći takvu pozitivno definitnu funkciju W, da je uslov (138) zadovoljen, neporemećeno kretanje posmatranog holonomnog skleronomnog sistema tačaka promenljive mase čiji su inercioni koeficijenti $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}(t)$ je stabilno.

5.1. JEDINIČNA KRETANJA NEHOLONOMNIH SISTEMA MEHANIČKIH TAČAKA

Posmatraćemo mehanički sistem M kojeg čini skup od N dinamičkih tačaka promenljive mase m_i.

Položaj tačke mehaničkog sistema odredjen je vektorom položaja

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t).$$

Kretanje tačaka mehaničkog sistema promenljive mase je ograničeno sa k holonomnih veza.

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \ldots\ldots, \vec{r}_N) = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots\ldots, k) \tag{137}$$

i L neholonomnih skleronomnih veza oblika

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{l}_{bi} \cdot \vec{v}_i + l_b = 0. \qquad (b = 1, \ldots\ldots, L) \tag{138}$$

Neholonomne veze u generalisanim kordinatama su oblika:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{l}_{bi} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + l_b = 0,$$

odnosno, ako je

$$\Phi_{b\alpha} = \sum_{i=1}^{N} l_{bi} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} \; ; \quad \Phi_b = l_b$$

gde su $\Phi_{b\alpha} = f(q^1, \ldots\ldots, q^n)$ i $\Phi_b = f(q^1, \ldots, q^n)$ funkcije neprekidne i diferencijalabilne do reda koji je potreban, veze se mogu izraziti i na ovaj način:

$$\Phi_{b\alpha}\dot{q}^{\alpha} + \Phi_{b} = 0. \tag{139}$$

Sistem je pod dejstvom aktivnih sila

$$\vec{F}_i = f(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N; \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N, t),$$

reaktivnih sila

$$\vec{F}_{Ri} = \mu_i^{*}(\vec{u}_i - \vec{v}_i),$$

i sila reakcija veza

$$\vec{R}_i = \sum_{\rho=1}^{L} \lambda_\rho \, grad_i f_\rho + \sum_{b=1}^{L} \varkappa_b \vec{l}_{bi}$$

Kretanje sistema na koji deluju ove sile posmatra se u nekom promenljivom konfiguracionom prostoru $R_{n+1} = \{q^1, \ldots, q^n, t\}$.

Baza prostora je

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha}.$$

Kretanje se može opisati Lagranžeovim diferencijalnim jednačinama prve vrste

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{Ri} + \sum_{\rho=1}^{k} \lambda_\rho \, grad_i f_\rho + \sum_{b=1}^{L} \varkappa_b \vec{l}_{bi}, \tag{140}$$

gde su $\lambda_\rho, \varkappa_\rho$ množioci veza koji podležu odredjivanju, $\vec{u}_i$ je apsolutna brzina odbačenih i pripojenih čestica, $\vec{v}_i$ je apsolutna brzina tačaka sistema, a μ_i^{*} brzina dinamičke promene mase.

Jednačinu (14o) možemo napisati i u ovom obliku:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i + \mu_i^{*} \vec{u}_i + \sum_{\rho=1}^{k} \lambda_\rho \, grad_i f_\rho + \sum_{b=1}^{L} \varkappa_b \vec{l}_{bi}. \tag{141}$$

Da bi se iz jednačine oslobodili (141) množioca veza i smanjili broj deferencijalnih jednačina, pomnožimo jednačine (141) skalarno vektorima $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha}$ i sabiramo tako dobijene jednakosti:

$$\sum^{N} \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} = \sum^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} + \sum^{N} \mu_i^{*} \vec{u}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} + \sum^{N} \sum^{k} \lambda_\rho \, grad_i f_\rho \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{b=1}^{L} \varkappa_b \vec{l}_{bi} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} . \qquad (142\ )$$

Izraz na levoj strani jednakosti (142) transformisaćemo na ovaj način:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha}\right) - m_i \vec{v}_i \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma} \dot{q}^\gamma$$

Pošto je $\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha \ (\alpha = 1, \dots, n)$ to se jednakost svodi na oblik

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\gamma} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\gamma\right) - m_i \vec{v}_i \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\beta = \dots$$

ili dalje

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\gamma - \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\delta} \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\beta} \dot{q}^\delta \dot{q}^\gamma = \dots$$

Metrički tenzor i generalisani impuls posmatranog prostora definišemo ovim jednakostima

$$a_{\alpha\gamma} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\gamma} , \qquad (143)$$

$$p_\alpha = a_{\alpha\gamma} \dot{q}^\gamma \quad \longleftrightarrow \quad \dot{q}^\alpha = a^{\alpha\gamma} p_\gamma$$

Pošto je $m_i = f_i(t)$, to je $a_{\alpha\beta}$ funkcija i vremena

$$a_{\alpha\gamma} = f(q^1, \dots, q^n, t) .$$

Zato se levi deo jednačina (142) konačno može ovako pisati:

$$\frac{d}{dt}(a_{\alpha\gamma}\dot{q}^\gamma) - a_{\delta\beta} \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} \dot{q}^\delta \dot{q}^\gamma = \frac{Dp_\alpha}{dt} = \dots$$

Masa sistema $m_i = f_i(t)$ i brzina dinamičke promene usled pripajanja i otpadanja čestica ostaju invarijantne u odnosu na sve ovde posmatrane transformacije koordinata, s obzirom da zavise samo od vremena t.

Kada u jednačine (142) unesemo jednakosti (143) dobijamo konačno izraz leve strane jednačine (142) kretanja posmatranog sistema:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} - \left\{ {\beta \atop \alpha \ \gamma} \right\} p_\beta \dot{q}^\gamma = \frac{Dp_\alpha}{dt} \tag{145}$$

Na desnoj strani jednačine (142) imamo, prvo, generalisanu silu

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha . \tag{146}$$

Zatim, kardinate reaktivne sile

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i^* \vec{u}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} = P_\alpha ,$$

i sile holonomnih veza,

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{k} \lambda_\beta \, grad_i f_\beta \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} = 0,$$

i sile neholonomnih veza

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{L} \varkappa_b \vec{l}_{bi} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} = \sum_{b=1}^{L} \varkappa_b \Phi_{b\alpha} .$$

Konačno, dobijamo jednačine kretanja neholonomnog sistema tačaka promenljive mase u linearno povezanom prostoru:

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha + P_\alpha + \sum_{b=1}^{L} \varkappa_b \Phi_{b\alpha} \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \dots, n \\ b = 1, \dots, L \end{pmatrix} \tag{147}$$

koje zajedno sa jednačinama

$$\Phi_{b\alpha} \dot{q}^\alpha + \Phi_b = 0 \quad ; \quad \dot{q}^\alpha = a^{\alpha\rho} p_\rho$$

obrazuju $n+L$ jednačina, pomoću kojih možemo odrediti kretanje sistema M.

Da bi iz jednačine (147) odstranili množioce neholonomnih veza, napišemo prethodnu jednačinu u ovome obliku:

$$\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} = Q_{\alpha'} + P_{\alpha'} + \sum_{b=1}^{L} \varkappa_b \Phi_{\alpha' b} \quad (\alpha' = 1, 2, \dots, L) \tag{148}$$

$$\frac{Dp_\nu}{dt} = Q_\nu + P_\nu + \sum_{b=1}^{L} \varkappa_b \Phi_{b\nu} \quad (\nu = L+1, \dots, n)$$

Sada jednačinu (148) pomnožmo sa $\Phi^{\alpha' c}$

$$\Phi^{\alpha' c} \frac{Dp_{\alpha'}}{dt} = \Phi^{\alpha' c} \Big(Q_{\alpha'} + P_{\alpha'} + \sum_{b=1}^{L} \varkappa_b \Phi_{b\nu} \Phi^{\alpha' c} \tag{149}$$

Obzirom da je

$$\Phi_{b\alpha'} \Phi^{\alpha' c} = \delta_b^c = \begin{cases} 1 & b = c \\ 0 & b \neq c , \end{cases}$$

možemo sada množioce neholonomnih veza da dobijemo iz jednačine (148) u obliku:

$$\varkappa^c = \Phi^{\alpha' c} \Big(\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} - Q_{\alpha'} - P_{\alpha'} \Big). \tag{15o}$$

Ako $\varkappa^c$ iz (15o) zamenimo u jednačine (147) tada se one svode na oblik:

$$\frac{Dp_\nu}{dt} = Q_\nu + P_\nu + \sum_{b=1}^{L} \Phi_{b\nu} \Big[\Phi^{b\alpha'} \Big(\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} - Q_{\alpha'} - P_{\alpha'} \Big) \Big].$$

Konačno, kretanje posmatranog sistema M se odredjuje jednačinama:

$$p_\nu = a_{\nu\alpha}\dot{q}^\alpha \tag{151}$$

$$\frac{Dp_\nu}{dt} = Q_\nu + P_\nu + \Phi_\nu^{\alpha'}\left(\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} - Q_{\alpha'} - P_{\alpha'}\right) \qquad \nu = L+1, \dots, n$$

$$\Phi_{b\alpha}\dot{q}^\alpha + \Phi_b = 0. \qquad b = 1, \dots, L$$

Ovaj sistem sadrži 2n jednačina prvoga reda sa isto toliko nepoznatih kordinata.

5.2. JEDNAČINE KRETANJA NEHOLOLOMNOG SISTEMA PROMENLJIVE MASE SA KVAZICIKLIČNIM KORDINATAMA

Kvazициклične kordinate $q^{\alpha'}$ su kordinate od kojih eksplicitno ne zavisi kinetička energija T, generalisane sile i koeficijenti neholonomnih veza. Ako je generalisana sila Q_{α} koja odgovara kvazicikličnoj kordinati $q^{\alpha'}$ jednaka nuli, kordinate su ciklične.

Da bi dobili jednačine kretanja neholonomnih sistema promenljive mase sa kvazicikličnim kordinatama podjimo od kinetičke energije $T=\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ i jednačina veza

$$\Phi_{b\alpha}\dot{q}^{\alpha}=0, \qquad (152)$$

odnosno

$$b=1,\ldots,l \qquad \alpha,\beta=1,\ldots,n$$

$$\Phi_{b\alpha'}\dot{q}^{\alpha'}+\Phi_{b\nu}\dot{q}^{\nu}=0.$$

gde su ($\alpha'=1,\ldots\ldots,m$) indeksi kvazicikličnih kordinata, a ($\nu=m+1,\ldots,n$) indeksi pozicionih kordinata.

Ako jednačinu (152) komponujemo sa $\Phi^{b\beta'}$ dobija se

$$\Phi^{b\beta'}\Phi_{b\alpha'}\dot{q}^{\alpha'}=-\Phi^{b\beta}\Phi_{b\nu}\dot{q}^{\nu} \qquad ; \quad \Phi=f(q^1,\ldots,q^n)$$

$$\delta^{\beta'}_{\alpha'}\dot{q}^{\alpha'}=-\Phi^{\beta'}_{\nu}\dot{q}^{\nu}$$

$$\dot{q}^{\beta'}=-\Phi^{\beta'}_{\alpha'}\dot{q}^{\nu} \qquad \alpha',\beta'=1,\ldots\ldots,m$$

Da bi se eliminisale generalisane brzine iz kinetičke energije, slediće postupno:

$$T=\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$$

$$T=\frac{1}{2}a_{\alpha'\beta}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\alpha'}+a_{\nu\rho}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\beta}$$

$$T=\frac{1}{2}a_{\alpha'\beta'}\dot{q}^{\alpha'}\dot{q}^{\rho}+\frac{1}{2}a_{\alpha'\nu}\dot{q}^{\alpha'}\dot{q}^{\nu}+\frac{1}{2}a_{\nu\rho'}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\rho'}+\frac{1}{2}a_{\nu\mu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\mu}$$

$$\tilde{T}=\frac{1}{2}a_{\alpha'\beta'}\Phi^{\alpha'}_{\nu}\Phi^{\beta'}_{\mu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\mu}+\frac{1}{2}a_{\alpha'\nu}\Phi^{\alpha'}_{\mu}\dot{q}^{\mu}\dot{q}^{\nu}+\frac{1}{2}a_{\nu\rho'}\Phi^{\rho'}_{\mu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\mu}+$$
$$+\frac{1}{2}a_{\nu\mu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\mu}$$

$$\tilde{T}=\frac{1}{2}\left(a_{\alpha'\beta'}\Phi^{\alpha'}_{\nu}\Phi^{\beta'}_{\mu}+a_{\alpha'\nu}\Phi^{\alpha'}_{\mu}+a_{\nu\rho'}\Phi^{\rho'}_{\mu}+a_{\nu\mu}\right)\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\mu}$$

$$\tilde{T}=\frac{1}{2}b_{\nu\mu}\dot{q}^{\nu}\dot{q}^{\mu}$$

gde je

$$b_{\nu\mu}=b_{\mu\nu}=\left(a_{\alpha'\beta'}\Phi^{\alpha'}_{\nu}\Phi^{\beta'}_{\mu}+a_{\alpha'\nu}\Phi^{\alpha'}_{\mu}+a_{\nu\rho'}\Phi^{\rho'}_{\mu}+a_{\nu\mu}\right).$$

U mesto generalisanih impulsa p_μ ovde ćemo posmatrati veličine $\tilde{p}_\alpha$ koja je po definiciji jednaka:

$$\tilde{p}_\alpha\overset{def}{=}p_\alpha+p_\alpha\varphi^{\alpha'}_{\alpha}\ ;\quad \varphi^{\alpha'}_{\alpha}=\qquad ;\ \tilde{p}_\alpha=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}^{\alpha}}=b_{\nu\alpha}\dot{q}^{\nu}$$

odnosno $p_\alpha=\tilde{p}_\alpha-p_\alpha\varphi^{\alpha'}_{\alpha}$ gde važi da je

$$p_\alpha=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\alpha}}\quad i\quad \tilde{p}_\mu=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}^{\mu}}=b_{\mu\nu}\dot{q}^{\nu}.$$

Pošto je $b^{\mu\sigma}=\frac{B^{\mu\sigma}}{|b_{\mu\nu}|}$ gde je $B^{\mu\sigma}$ kofaktor elemenata $b_{\mu\sigma}$

$$b_{\mu\nu}b^{\mu\sigma}\dot{q}^{\nu}=b^{\mu\sigma}\tilde{p}_\mu\ ;\qquad b_{\mu\nu}b^{\mu\sigma}=\delta^{\sigma}_{\nu}=\begin{cases}0, & \sigma\neq\nu\\ 1, & \sigma=1\end{cases}$$

dobijamo $\dot{q}^{\sigma}=b^{\mu\sigma}\tilde{p}_\mu$.

Uzimajući u obzir rad [5] da su kordinate $q^{\alpha'}$ kvaziciklične, jednačine kretanja posmatranog neholonomnog sistema promenljive mase su:

$$\dot{q}^{\mu}=a^{\mu\nu}p_\nu$$

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} + \frac{Dp_{\alpha'}}{dt}\varphi_\alpha^{\alpha'} = Q_\alpha + Q_{\alpha'}\varphi_\alpha^{\alpha'} + \bar{P}_\alpha \tag{153}$$

$$(a^{\alpha\mu}\varphi_\alpha^{\alpha'} - a^{\mu\alpha'})p_\mu + \varphi^{\alpha'} = 0.$$

ovde je:

$\bar{P}_\alpha$ - generalisane kordinate sila nastalih promenom mase posmatranog sistema.

Kordinate ϱ^ν mogu biti odredjene relacijama

$$\tilde{\varrho}^\nu = \tilde{\varrho}^\nu(\varrho^1, \ldots\ldots, \varrho^m) \quad ; \quad \tilde{\varrho}^{\nu'} = \varrho^{\nu'}$$

$$\dot{\varrho}^{\nu'} = \varphi_\alpha^{\nu'}\dot{\varrho}^\alpha \quad ; \quad \bar{\dot{\varrho}} = \bar{\varphi}_\alpha^{\alpha'}\bar{\dot{\varrho}}^\alpha .$$

To omogućuje uvodjenje linijskog elementa

$$d\sigma^2 = 2\tilde{T}dt^2 = b_{\alpha\beta}\,d\varrho^\alpha d\varrho^\beta .$$

U ovom metričkom Vm prostoru, jednačine kretanja Čapljiginovih sistema mogu se ovako napisati

$$\frac{d\varrho^\nu}{dt} = b^{\nu\beta}\tilde{p}_\beta \tag{154}$$

$$\frac{D\tilde{p}_\nu}{dt} + \Theta_{\beta\nu}^\delta b^{\beta\gamma}\tilde{p}_\delta\tilde{p}_\gamma = \tilde{Q}_\alpha + \bar{P}_\alpha$$

gde su

$$\Theta_{\beta\nu}^\delta = b^{\delta\gamma}(a_{\alpha'\beta} + a_{\alpha'\beta'}\varphi_\beta^{\beta'})\gamma_{\gamma\nu}^{\alpha'} \quad ; \quad \tilde{Q}_\alpha = Q_\alpha + \varphi_\alpha^{\alpha'}Q_{\alpha'}$$

Sistem (154) sastoji se od 2 m jednačina sa isto toliko nepoznatih funkcija $\varrho^\nu = \varrho^\nu(t)$, $\tilde{p}_\nu = \tilde{p}_\nu(t)$. Kada se reši i rešenje zameni u jednačine neholonomnih veza (152), ostale kordinate $\varrho^{\alpha'}$ se iz ovih mogu dobiti kvadraturama.

5.3. JEDNAČINE POREMEĆENOG KRETANJA NEHOLONOMNOG SISTEMA TAČAKA PROMENLJIVE MASE

Kako je pokazano u radu [5] jednačine kretanja posmatranog mehaničkog sistema M imaju rešenja

$$q^\alpha = q^\alpha(t, t_0, q_0^1, \ldots\ldots, q_0^n; p_{10}, \ldots\ldots, p_{n0})$$
$$p_\alpha = p_\alpha(t_0, t, q_0^1, \ldots\ldots, q_0^n; p_{10}, \ldots\ldots, p_{n0}) \tag{155}$$

koja za $t = t_0$ zadovoljavaju početke uslove

$$q_0^\alpha = q^\alpha(t_0, q_0^1, \ldots\ldots, q_0^n; p_{10}, \ldots\ldots, p_{n0})$$
$$p_{\alpha_0} = p_\alpha(t_0, q_0^1, \ldots\ldots, q_0^n; p_{10}, \ldots\ldots, p_{n0}) \tag{156}$$

Sem skalarnih funkcija (155) koje odredjuju kretanje sistema saglasno sa početnim uslovima (156), kretanje sistema možemo dati i u vektorskom obliku

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(q^1(t), \ldots\ldots, q^n(t)). \tag{157}$$

Kretanje sistema M, dato u skalarnom obliku (155) ili vektorskom (157) uzimamo da je neporemećeno, za razliku od poremećenog kretanja opisanog jednačinama

$$\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i^{\,*}(t) = \vec{r}_i(q^{*1}(t), \ldots\ldots, q^{*n}(t)). \tag{158}$$

Za početne uslove poremećenog kretanja uzimamo:

$$\vec{r}_{i_0}^{\,*} = \vec{r}_i^{\,*}(t_0), \qquad \vec{V}_{i_0}^{\,*} = \vec{V}_i^{\,*}(t_0).$$

Razlika vektorskih funkcija kretanja sistema (158) i (157) odredjuju vektore poremećaja $\vec{\rho}_i$ koji su jednaki

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i^{\,*}(t) - \vec{r}_i(t)$$

Početni poremećaji su jednaki

$$\vec{\rho}_{io} = \vec{r}_{io} - \vec{r}_{io}$$

odnosno, brzine

$$\vec{V}_{io} = \vec{V}_{io} - \vec{V}_{io} .$$

Kako su vektori poremećaja $\vec{\rho}_i$ neprekidne funkcije vremena čija je zavisnost od početnih vrednosti takodje neprekidna to sledi da se vektori poremećaja mogu dati u obliku:

$$\vec{\rho}_i = \xi^\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} . \tag{157}$$

Sada su vektori položaja poremećenog kretanja sistema tačaka jednaki

$$\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i + \vec{\rho}_i = \vec{r}_i + \xi^\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} . \tag{16o}$$

Oni zadovoljavaju jednačine holonomnih veza u linearnoj aproksimaciji, pa se poremećeno kretanje vrši saglasno jednačinama holonomnih veza

$$f_\alpha (\vec{r}_1^{\,*}, \ldots\ldots , \vec{r}_N^{\,*}) = 0, \tag{161}$$

koje se mogu razviti u red u okolini tačke $(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ pa dobijamo

$$f_\alpha (\vec{r}_1 , \ldots\ldots , \vec{r}_N) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_i} \vec{\rho}_i + \ldots\ldots = 0.$$

Brzina poremećenog kretanja je

$$\frac{d\vec{r}_i^{\,*}}{dt} = \vec{V}_i^{\,*} = \vec{V}_i + \frac{D\xi^\alpha}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha}. \qquad (162)$$

Ove brzine dopuštene holonomnim vezama u poremećenom kretanju zadovoljavaju uslove $\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i}\right)^{*}\cdot \vec{V}_i^{\,*}=0$

odnosno,

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i}\vec{V}_i + \frac{D\xi^\alpha}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial f_\beta}{\partial \vec{r}_i} + \cdots\cdots = 0,$$

pa jednačine poremećenog kretanja ako je vektor poremećaja (159) imaju smisla samo ako se zadržimo na prvoj linearnoj aproksinaciji.

Kako je dalje pokazano u radu moguće je odrediti uslove koje na vektor poremećaja stavljaju neholonomne veze, koje ograničavaju vektore poremećaja i izvode vektora poremećaja po vremenu tj.

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_{ib}\cdot\vec{v}_i^{\,*} + l_b^{*} = 0, \qquad (163)$$

gde su

$$\vec{l}_{ib} = l_{ib}(\vec{r}_1^{\,*},\ldots\ldots,\vec{r}_N^{\,*});$$

$$\vec{l}_{ib} = l_b(\vec{r}_1^{\,*},\ldots\ldots,\vec{r}_N^{\,*}). \qquad (164)$$

Ako sada ove funkcije (163) razvijemo u red u okolini neporemećenog kretanja, dobijamo

$$\vec{l}^{*}_{ib} = l_{ib}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) + \sum_{j=1}^{N} (\varrho_i \nabla_j) \vec{l}_{ib} + \cdots = \vec{l}_{ib} + \frac{\partial \vec{l}_{ib}}{\partial q^\nu} \xi^\nu + \cdots$$

$$l^{*}_{b} = l_b(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) + \frac{\partial l_b}{\partial q^\nu} \xi^\nu + \cdots \qquad (165)$$

Zamenom 162, (165) i (163) dobijamo

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{l}_{ib} + \frac{\partial \vec{l}_{ib}}{\partial q^\nu} \xi^\nu + \ldots\right) \cdot \left(\vec{v}_i + \frac{D\xi^\alpha}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha}\right) + l_b + \frac{\partial l_b}{\partial q^\nu} \xi^\nu + \cdots = 0$$

Uslove koje neholonomne veze nameću vektoru poremećaja dobijamo iz razlike ove dve jednačine:

prve, $\sum_{i=1}^{N} \vec{l}_{bi} \vec{v}_i + l_b = 0$

i druge,

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{l}_{ib} + \frac{\partial \vec{l}_{ib}}{\partial q^\nu} \xi^\nu + \cdots\right) \cdot \left(\vec{v}_i + \frac{D\xi^\mu}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\right) + l_b + \frac{\partial l_b}{\partial q^\nu} \xi^\nu + \cdots = 0,$$

tj. razlike ove dve jednačine

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{l}_{ib} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial \vec{l}_{ib}}{\partial q^\nu} \xi^\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{D\xi^\mu}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \vec{l}_{ib} + \right.$$

$$\left. + \frac{D\xi^\mu}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \frac{\partial \vec{l}_{ib}}{\partial q^\nu} \xi^\nu + l_b + \frac{\partial l_b}{\partial q^\nu} \xi^\nu - \vec{l}_{bi} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu - l_b = 0,\right.$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\xi^\nu \dot{q}^\nu \frac{\partial \vec{l}_{ib}}{\partial q^\nu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} + \frac{D\xi^\mu}{dt} \vec{l}_{ib} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} + \xi^\nu \frac{D\xi^\mu}{dt} \frac{\partial \vec{l}_{ib}}{\partial q^\nu} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} + \cdots\right) +$$

$$+ \frac{\partial l_b}{\partial q^\nu} \xi^\nu + \cdots = 0. \qquad (166)$$

Uvedimo radi kraćeg pisanja oznake

$$\Phi_{(b)\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{l}_{ib}}{\partial q^\nu} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}, \quad \Phi_{(b)\mu} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_{ib} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}, \qquad (167)$$

$$R_{(b)\nu} = \Phi_{(b)\mu\nu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial l_b}{\partial q^\nu}$$

pa se sada jednačina svodi na oblik

$$\Phi_{(b)\mu} \frac{D\xi^{\mu}}{dt} + R_{(b)\mu} \xi^{\mu} = 0. \tag{168}$$

Ovaj sistem od L jednačina (166) predstavlja uslove koje neholonomne veze nameću na promenljive ξ^{μ}.

Ubrzanje u poremećenom kretanju možemo pisati u obliku:

$$\vec{w}_i^{\,*} = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{w}_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{D\xi^{\mu}}{dt}\right)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\mu}} + \frac{D\xi^{\mu}}{dt}\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^{\nu}\partial q^{\mu}}\dot{q}^{\nu} \tag{169}$$

Odakle dobijamo drugi izvod vektora poremećaja

$$\vec{w}_i^{\,*} - \vec{w}_i = \frac{d^2\vec{\varrho}_i}{dt^2}.$$

Neka je jednačina poremećenog kretanja posmatranog sistema :

$$m_i\vec{w}_i^{\,*} = \vec{F}_i^{\,*} + \vec{\Psi}_i^{\,*} + \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha^* \operatorname{grad}_i f_\alpha^* + \sum_{b=1}^{L}\varkappa_b^* \vec{\ell}_{bi}^{\,*}. \tag{170}$$

Ako jednačinu (17o) izrazimo preko vektora poremećaja $\vec{\varrho}_i$ dobijamo:

$$m_i(\vec{w}_i^{\,*} - \vec{w}_i) = \vec{F}_i^{\,*} - \vec{F}_i + \vec{\Psi}_i^{\,*} - \vec{\Psi}_i + \sum_{\alpha=1}^{k}(\lambda_\alpha^* \operatorname{grad}_i f_\alpha^* - \lambda_\alpha \operatorname{grad}_i f_\alpha) + \sum_{b=1}^{L}(\varkappa_b^* \vec{b}_{bi}^{\,*} - \varkappa_b \vec{\ell}_{bi}) \tag{171}$$

gde su sile $\vec{F}_i^{\,*}, \vec{\Psi}_i^{\,*}$ oblika koordinata $t, \vec{r}^{\,*}, \vec{v}_i^{\,*}$ tj.

$$\vec{F}_i^{\,*} = f(t, \vec{r}_1^{\,*}, \ldots, \vec{r}_N; \vec{v}_1^{\,*}, \ldots, \vec{v}_N^{\,*}).$$

Reaktivna sila zavisi od brzine tačke, apsolutnih brzina čestica, vremena, položaja, pritiska i dr.

$$\vec{\Psi}_i^* = \Psi_i\,(t, \vec{r}_1^*, \ldots, \vec{r}_N^*; \vec{V}_1^*, \ldots, \vec{V}_N^*).$$

Sistem jednačina (171) poremećenog kretanja za $\vec{\rho}_i = 0$ ima trivijalno rešenje.

Kada jednačinu (171) pomnožmo skalarno sa

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}$$

i izvršimo sabiranje po i, dobijamo jednačine u obliku:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{w}_i^* - \vec{w}_i)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i^* - \vec{F}_i)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} + \tag{172}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(\vec{\Psi}_i^* - \vec{\Psi}_i)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(\lambda_\alpha^*\, grad_i f_\alpha^* -$$

$$-\lambda_\alpha\, grad_i f_\alpha)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{b=1}^{L}(\varkappa_b^* \vec{l}_{bi}^* - \varkappa_b \vec{l}_{bi})\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}.$$

Levu stranu ovih jednačina znajući da je

$$\vec{V}_i^* = \vec{V}_i + \frac{D\xi^\mu}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu},$$

možemo svesti na izraz

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{V}_i^* - \vec{V}_i)\Big]\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{V}_i^* - \vec{V}_i)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\Big] - \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{V}_i^* - \vec{V}_i)\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{V}_i^* - \vec{V}_i)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\Big] - \sum_{i=1}^{N} m_i\Big(\vec{V}_i + \frac{D\xi^\mu}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} - \vec{V}_i\Big)\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{V}_i^* - \vec{V}_i)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\Big] - \sum_{i=1}^{N} m_i\frac{D\xi^\sigma}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\sigma}\cdot\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^\nu \partial q^\mu}\dot{q}^\nu.$$

Ako su u poremećenom kretanju generalisani impulsi p_μ^*

$$p_\mu^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}, \tag{173}$$

tada su poremećaji impulsa η_μ jednaki

$$\eta_\mu = p_\mu^* - p_\mu, \tag{174}$$

ili posle smene p_μ^*, p_μ i $\vec{v}_i^*$ u (174) dobijamo poremećaje impulsa u konačnom obliku.

$$\eta_\mu = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^* \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}$$

$$\eta_\mu = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_i + \frac{D\xi^\mu}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}$$

$$\eta_\mu = a_{\mu\nu} \frac{D\xi^\nu}{dt} \iff \frac{D\xi^\nu}{dt} = a^{\mu\nu} \eta_\mu. \tag{175}$$

Sada možemo konačno levu stranu jednačine (172) posle zamene $\frac{D\xi^\nu}{dt}$ pisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{w}_i^* - \vec{w}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \frac{d\eta_\mu}{dt} - \eta_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \dot{q}^\nu \tag{176}$$

Na desnoj strani jednačine (172) imamo prvo, razliku generalisanih impulsa u poremećenom i neporemećenom kretanju

$$\overline{Q}_\mu = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i^* - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = Q_\mu^* - Q_\mu \tag{177}$$

gde su funkcije od

$$\overline{Q}_\mu = f(t, \xi^1, \ldots, \xi^n; \eta_1, \ldots, \eta_n),$$

i predstavljaju poremećaje generalisanih sila.

Razvijanjem ovih funkcija u red u okolini neporemećenog kretanja $q = q(t)$ dobijamo

$$\overline{Q}_\mu = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial q^\nu} \xi^\nu + \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial p_\nu} \eta_\nu + \cdots \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu},$$

odnosno

$$\overline{Q}_\mu = \xi^\mu \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial q^\mu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \right) + \eta_\nu \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial p_\nu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \right) =$$

$$= \xi^\mu \left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial q^\nu} - \left\{ {\sigma \atop \nu\ \mu} \right\} Q_\sigma \right) + \eta_\nu \frac{\partial Q_\mu}{\partial p_\nu} =$$

$$\overline{Q}_\mu = \xi^\nu \nabla_\nu Q_\mu + \eta_\nu \frac{\partial Q_\mu}{\partial p_\nu} . \tag{178}$$

Drugi član na desnoj strani jednačine (172) je razlika generalisanih impulsa reaktivnih sila u poremećenom i neporemećenom kretanju i predstavlja poremećaje reaktivnih sila tj.:

$$\overline{\Phi}_\mu = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\Phi}_i^* - \vec{\Phi}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = Q_\mu^{*(R)} - Q_\mu^{(R)}, \tag{179}$$

$$\vec{P}_i = \frac{dm_i}{dt} \vec{u}_i$$

Istim postupkom kao od (177) do (178) dobija se da je

$$\overline{\Phi}_\mu = \xi^\nu \left(\frac{\partial Q_\mu^{(R)}}{\partial q^\nu} - \left\{ {\sigma \atop \nu\ \mu} \right\} Q_\mu^{(R)} \right) + \eta_\nu \frac{\partial Q_\mu^{(R)}}{\partial p_\nu}, \tag{180}$$

$$Q_\mu^{(R)} = \frac{dm_i}{dt} \vec{u}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}$$

$$\overline{\varphi}_\mu = \xi^\nu \nabla_\nu Q_\mu^{(R)} + \eta_\nu \frac{\partial Q^{(R)}}{\partial p_\nu}. \tag{181}$$

Treći član na desnoj strani jednačine (172) predstavlja razliku reakcija holonomnih veza u poremećenom i neporemećenom kretanju. Ako se zadržimo na prvoj aproksimaciji ovaj član je jednak nuli, t.j.:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\lambda_\alpha^* \operatorname{grad}_i f_\alpha^* - \lambda_\alpha \operatorname{grad}_i f_\alpha \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = 0. \tag{183}$$

Četvrti član predstavlja razliku reakcija neholonomnih veza pomnožena sa $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}$ u poremećenom i neporemećenom kretanju.

Razvijajući u red $\vec{l}_{bi}$ kako je pokazano [5] u okolini neporemećenog kretanja, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{b=1}^{L} \left(\varkappa_b^* \vec{l}_{bi}^{\,*} - \varkappa_b \vec{l}_{bi} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \tag{184}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{b=1}^{L} \left[\varkappa_b^* \left(\vec{l}_{bi} + \frac{\partial \vec{l}_{bi}}{\partial q^\nu} \xi^\nu + \dots \right. - \varkappa_b \vec{l}_{bi} \right] \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} =$$

$$= \sum_{b=1}^{L} \left(\varkappa_b^* \Phi_{(b)\mu} + \varkappa_b^* \Phi_{(b)\mu,\nu} \xi^\nu - \varkappa_b \Phi_{(b)\mu} + \dots \right)$$

Stavljajući u jednačine (172) da je $\xi^{\mu}=0$, i $\eta_{\mu}=0$, dobijamo da su relacije identički zadovoljene, jer je

$$\sum_{b=1}^{L}\left(\varkappa_b^{*}\,\phi_{(b)\mu}-\varkappa_b\,\Phi_{(b)\mu}\right)=0$$

pa je u tom slučaju $\varkappa_b^{*}=\varkappa_b$. Sada koeficijentne možemo izraziti u obliku

$$\varkappa_b^{*}=\varkappa_b+\varkappa_b' \tag{185}$$

Ovde su kako je pokazano [5] $\varkappa_b=f(t)$ množioci veza u neporemećenom kretanju, koji su kao i ostali elementi neporemećenog kretanja poznati, za razliku od funkcija $\varkappa_b'$ t.j.

$$\varkappa_b'=\varkappa_b'(\xi^1,\ldots\xi^n;\eta_1,\ldots,\eta_n),$$

koje su nepoznate funkcije i za $\xi^{\mu}=0$ i $\eta_{\nu}=0$ su jednake nuli tj.

$$\varkappa_b'(0,\ldots,0)=0.$$

Zamenjujući koeficijente $\varkappa_b'$ u jednakost (184) i zanemarujući nelinearne članove, jednakost (185) se svodi na oblik

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{b=1}^{L}\left(\varkappa_b^{*}\,\vec{l}_{bi}^{\,*}-\varkappa_b\,\vec{l}_{bi}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^{\mu}}=\sum_{b=1}^{L}\left(\varkappa_b\,\Phi_{(b)\mu\nu}\,\xi^{\nu}+\varkappa_b'\,\Phi_{(b)\mu}\right) \tag{186}$$

Sada konačno, posle odgovarajućih zamena jednačina (171) se može izraziti u ovoj formi.

$$\frac{D\eta_{\mu}}{dt}=\bar{Q}_{\mu}+\bar{\mathcal{P}}_{\mu}+\sum_{b=1}^{L}\left(\varkappa_b\,\Phi_{(b)\mu\nu}\,\xi^{\nu}+\varkappa_b'\,\Phi_{(b)\mu}\right) \tag{187}$$

Dodajući jednačinama (187) i izraze (175) i (168) dobijamo sistem od 2n + L linearnih jednačina sa isto toliko nepoznatih funkcija, $\xi^\mu = \xi^\mu(t)$, $\eta_\mu = \eta_\mu(t)$, $\varkappa_b' = \varkappa_b'(t)$

$$\mu = 1, \ldots, n \qquad b = 1, \ldots, l$$

Sistem ima oblik:

$$\frac{D\eta_\mu}{dt} = \bar{Q}_\mu + \bar{\Psi}_\mu + \sum_{b=1}^{l} (\varkappa_b \Phi_{(b)\mu\nu}\, \xi^\nu + \varkappa_b' \Phi_{(b)\mu}) \tag{188}$$

$$\frac{D\xi^\mu}{dt} = a^{\mu\nu}\eta_\nu; \qquad a^{\mu\nu}\Phi_{(b)\mu}\,\eta_\nu + R_{(b)\mu}\,\xi^\mu = 0.$$

Ovaj sistem linearnih jednačina (188) odredjuje poremećeno kretanje posmatranog sistema tačaka promenljive mase.

Da bi iz prve jednačine (188) odstranili funkcije $\varkappa_b'$, izrazimo ovu jednačinu u vidu dve jednačine prve,

$$\frac{D\eta_{\bar\mu}}{dt} = \Theta_{\bar\mu} + \sum_{b=1}^{l} \varkappa_b' \Phi_{(b)\bar\mu}, \quad \text{gde je} \quad \Theta_{\bar\mu} = \bar{Q}_\mu + \bar{\Psi}_\mu + \sum_{b=1} \varkappa_b \Phi_{(b)\mu\nu}\, \xi^\nu$$

i druge jednačine

$$\frac{D\eta_{\bar{\bar\mu}}}{dt} = \Theta_{\bar{\bar\mu}} + \sum_{b=1}^{l} \varkappa_b' \Phi_{(b)\bar{\bar\mu}}.$$

$$\mu, \nu = 1, \ldots, n \qquad \bar\mu, b = 1, \ldots, l \qquad \bar{\bar\mu} = l+1, \ldots, n$$

Sada prvu jednačinu pomnožimo sa $\Phi^{(c)\bar\mu}$

$$\Phi^{(c)\bar\mu} \frac{D\eta_{\bar\mu}}{dt} = \Phi^{(c)\bar\mu}\,\Theta_{\bar\mu} + \sum_{b=1}^{l} \varkappa_b' \Phi_{(b)\bar\mu}\,\Phi^{(c)\bar\mu},$$

kako je $\Phi_{(b)\bar\mu} \cdot \Phi^{(c)\bar\mu} = \delta_b^c = \begin{cases} 1, & b = c \\ 0, & b \neq c \end{cases}$

to konačno dobijamo

koeficijente u obliku:

$$\sum_{b=1}^{L} \delta_b^c \varkappa'_b = \Phi^{c\bar{\mu}} \left(\frac{D\eta_{\bar{\mu}}}{dt} - \Theta_{\bar{\mu}} \right) = \varkappa'^c$$

Ako dobijena vrednost za $\varkappa'^c$ uvrstimo u prvu jednačinu (188) tada se ona svodi na oblik

$$\frac{D\eta_\mu}{dt} = \bar{\Psi}_\mu + \bar{Q}_\mu + \sum_{b=1}^{L} \left(\varkappa_b \Phi_{(b)\mu\nu} \xi^\nu + \bar{\Phi}^{c\bar{\mu}} \bar{\Phi}_{b\mu} \left(\frac{D\eta_\mu}{dt} - \Theta_{\bar{\mu}} \right) \right)$$

odnosno,

$$\frac{D\eta_\mu}{dt} = \Theta_\mu + \Phi^{c\bar{\mu}} \Phi_{b\mu} \left(\frac{D\eta_{\bar{\mu}}}{dt} - \Theta_{\bar{\mu}} \right)$$

Sada sistem jednačina (188) možemo napisati u obliku:

$$\frac{D\xi^\mu}{dt} = a^{\mu\nu} \eta_\nu$$

$$\frac{D\eta_\mu}{dt} = \Theta_\mu + \Phi^{c\bar{\mu}} \Phi_{(b)\mu} \left(\frac{D\eta_{\bar{\mu}}}{dt} - \Theta_{\bar{\mu}} \right) = \bar{H}_\mu$$

$$a^{\mu\nu} \Phi_{(b)\mu} \eta_\mu + R_{(b)\mu} \xi^\mu = 0.$$

Ovaj sistem sadrži 2n jednačina sa isto toliko nepoznatih funkcija ξ^μ, η_μ .

6.1. STABILNOST KRETANJA NEHOLONOMNIH SISTEMA PROMENLJIVE MASE

Ovde rešavamo zadatak o stabilnosti kretanja neholomnih sistema mehaničkih tačaka promenljive mase korišćenjem direktnog Ljapunovdjevog metoda, a prema radu [5].

Stabilnost posmatranog kretanja svodi se na ispitivanje stabilnosti trivijalnog rešenja $\xi^{\mu}=0,\ \eta_{\mu} = 0$ jednačina poremećenog kretanja:

$$\frac{D\xi^{\mu}}{dt} = a^{\mu\nu}\eta_{\nu} \tag{19o}$$

$$\frac{D\eta_{\nu}}{dt} = \bar{H}_{\mu}.$$

Početno stanje sistema u poremećenom kretanju mora pripadati $2n-l$ dimenzionoj mnogostrukosti S.

Ako postoji u konfiguracionom prostoru V_n pozitivno definitivna skalarna funkcija

$$V = \frac{1}{2}a^{\mu\nu}\eta_{\nu}\eta_{\mu} + w, \tag{191}$$

čiji izvod sastavljen u smislu jednačina poremećenog kretanja (19o) je negativan ili indentički jednak nuli, tada je neporemećeno kretanje stabilno.

Funkcija $W = f(t, \xi^1, \ldots\ldots, \xi^n)$ je pozitivno difinitna, $a^{\mu\nu}$ su koeficijenti pozitivno definitne kvadratne forme, koji zavise od kordinata i vremena t.

Diferenciranjem po vremenu funkcije V, koju smo uzeli za funkciju Ljapunova, dobijamo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(a^{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu) + \frac{dW}{dt}$$

odnosno

$$\frac{dV}{dt} = a^{\mu\nu}\frac{D\eta_\mu}{dt}\eta_\nu + \frac{\partial W}{\partial \xi^\mu}\frac{D\xi^\mu}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t}$$

<u>Stav:</u>

Ako je izvod funkcije V dat u smislu diferencijalnih jednačina poremećenog kretanja (19o), negativan ili identički jednak nuli, tada je trivijalno rešenje $\xi^\mu = 0, \eta_\mu = 0$ jednačine poremećenog kretanja stabilno, t.j.

$$\frac{dV}{dt} = a^{\mu\nu}\eta_\nu \bar{H}_\mu + \frac{\partial W}{\partial \xi^\mu}a^{\mu\nu}\eta_\nu + \frac{\partial W}{\partial t} \leq 0$$

odnosno,

$$a^{\mu\nu}\left(\bar{H}_\mu + \frac{\partial W}{\partial \xi^\mu}\right)\eta_\nu + \frac{\partial W}{\partial t} \leq 0. \tag{191}$$

Ako u konfiguracionom prostoru Vn postoji pozitivno definitna skalarna funkcija

$$w = w(t, \xi^1, \ldots, \xi^n) \in C \qquad \begin{matrix} w \to 0 & \text{za } \xi^\mu \to 0 \\ t \to & \end{matrix}$$

takva za koju je izraz

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left(\bar{H}_\mu + \frac{\partial w}{\partial \xi^\mu} \right) a^{\mu\nu} \eta_\nu \tag{193}$$

negativno definitan, tada je trivijalno rešenje $\xi^\mu = 0$, $\eta_\mu = 0$ jednačine poremećenog kretanja asimtotski stabilno.

5.2. STABILNOST RAVNOTEŽNOG STANJA HLONOMNOG I NEHOLONOMNOG SISTEMA TAČAKA PROMENLJIVE MASE

Toričeli je formulisao teoremu o stabilnosti položaja ravnoteže kada deluje sila teže. Langranž je ovu teoremu uopštio za proizvoljne potencijalne sile. Teorema Langranža odredjuje samo dovoljne uslove stabilnosti ravnoteže konzervativnog sistema: ako potencijalna energija ima u položaju ravnoteže konzervativnog sistema sa holonomnim i stacionarnim vezama minimum, tada je stanje ravnoteže stabilno.

Ljapunov je postavio pitanje, da li važi i suprotan zaključak? Ako potencijalna energija nema minimum da li je tada stanje ravnoteže sistema nestabilno i zaključuje:

Prvo, ako u položaju ravnoteže potencijalna energija $\Pi(q^1,\dots,q^n)$ konzervativnog sistema nema minimum i njegovo odsustvo se vidi iz članova drugog reda $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha q^\beta$ bez potrebe razmatranja članova višeg reda, tada je položaj ravnoteže nestabilan.

Drugo, ako potencijalna energija Π konzervativnog sistema za $q_1 = \cdots\cdots, q_n = 0$ ima strogi maksimum i ako se ta činjenica može odrediti polazeći od članova najnižeg stepena Π_m, $m \geq 2$ u okolini kordinatnog početka isključujući sam početak uvek je $\Pi_m < 0$ i to pri parnom m tada je položaj $q_1 = \cdots\cdots, q_n = 0$ nestabilni položaj ravnoteže sistema.

Čitajev je dalje uopštio ovu teoremu Ljapunova i dokazao sledeću teoremu:

Ako je potencijalna energija Π kozervativnog sistema bilo kakva homogena funkcija odstupanja $q_1 \cdots q_n$ i u položaju ravnoteže $q_1 = \cdots\cdots = q_n = 0$ nema minimum tada je taj položaj ravnoteže nestabilan.

Medjutim, na ovome se nije zaustavio dalji interes za istraživanjima u oblasti stabilnosti stanja ravnoteže. Radovima mnogih naučnika dalje je razvijena teorija stabilnosti.

6.3. STABILNOST STANJA RAVNOTEŽE NEHOLONOMNOG STACIONARNOG SISTEMA

Neka je sada položaj sistema materijalnih tačaka odredjen sa n nezavisnih generalisanih kordinata $q_1, \cdots q_n$.

Sistem je vezan za m idealnih neintegralnih stacionarnih veza

$$\dot{q}_r = \sum_{i=1}^{k} b_{ri}(q_1, \cdots, q_n)\dot{q}_i \qquad \begin{array}{l} i = 1, \cdots, k \\ r = k+1, \cdots, n \\ j = 1, \cdots, n \end{array} \tag{194}$$

Na sistem deluju potencijalne aktivne sile potencijala $U(q_1, \cdots, q_n)$.

Ravnotežni položaj posmatramo u konfiguracionom prostoru r- dimenzione mnogostrukosti Or u tački

$$q_j = 0\,,$$
$$\dot{q}_j = 0\,.$$

Potencijal U možemo u tački ravnoteže mnogostrukovati O_r izraziti u obliku

$$U = \sum_{j=1}^{n} a_i q_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} q_i q_j + u(q_1, \cdots, q_n)\,.$$

Ovde su a_i, c_{ij}, konstante, a u $(q_1, \cdots, q_n)$ predstavlja sve članove reda većeg od drugog.

Da bi odredili stabilnost ravnotežnog stanja neholonomnog sistema koristimo teoremu Langranža i Apelove jednačine.

Ako je u tački:

$$q_j = 0, \quad \dot{q}_j = 0$$

ispunjen uslov

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

tada ravnotežni položaj predstavlja stacionarnu tačku funkcije $U(q^1, \ldots, q^n)$.

Energija ubrzanja sistema tačaka promenljive mase, u nekom konfiguracionom prostoru Vn jednaka je

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{V}_i^2$$

, ovde je m = f (t).

Brzinu možemo izraziti u ovome obliku:

$$\vec{V}_i = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^s} \dot{q}^s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t},$$

ili

$$\vec{V_i} = \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q^s} \dot{q}^s .$$

Sada je ubrzanje sistema jednako:

$$w_i = \dot{V_i} = \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \vec{r_i}}{\partial q_k \partial q_s} \dot{q}_k \dot{q}_s$$

Sada je energija ubrzanja u Vn prostoru jednaka

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{V}_i^2 = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \frac{D\dot{q}^\alpha}{dt} \frac{D\dot{q}^\beta}{dt}$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\ddot{q}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\delta\gamma} \dot{q}^\delta \dot{q}^\gamma \right) \left(\ddot{q}^\beta + \Gamma^\beta_{\sigma\chi} \dot{q}^\sigma \dot{q}^\chi \right)$$

$$S = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \ddot{q}^\alpha \ddot{q}^\beta + \ddot{q}^\alpha \Gamma^\beta_{\sigma\chi} \dot{q}^\sigma \dot{q}^\chi + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\delta\gamma} \dot{q}^\delta \dot{q}^\gamma \Gamma^\beta_{\sigma\chi} \dot{q}^\sigma \dot{q}^\chi$$

Apelove jednačine za holonomni sistem su jednake:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^\alpha} = a_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \Gamma^\beta_{\sigma\chi} \dot{q}^\sigma \dot{q}^\chi ,$$

odnosno,

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^\alpha} = a_{\alpha\beta} \frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = Q_\alpha + \Psi_\alpha , \qquad (195)$$

$$(\alpha, \beta = 1, \ldots\ldots, n = 3N - k)$$

gde su Q_α generalisane sile, a Ψ_α generalisane reaktivne sile.

Ako posmatramo neholonomni sistem na kojeg ne deluju reaktivne sile, Apelove jednačine možemo tada pisati i u obliku [26] :

$$\frac{\partial S^{(1)}}{\partial \ddot{q}^{i}} = Q_i + \sum_{r=k+1}^{n} b_{ri}\, Q_r = Q_i^{*} \qquad (196)$$

$r = k+1, \dots, n;$
$i = 1, \dots, k$
$k = n-m$

S - je energija ubrzanja,

Q_r i Q_i - generalisane sile.

S obzirom na predpostavku da tačka $(\dot{q}_j=0)$ $(q_j=0)$ pripada mnogostrukosti O_r posmatranog ravnotežnog položaja to da bi bio ispunjen uslov ravnoteže treba da je

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \quad \text{, odnosno,} \quad Q_i^{*} = 0 \quad , \; tj.$$

$$Q_i + \sum_{r=k+1}^{n} b_{ri}\, Q_r = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} b_{ri} \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0,$$

$$a_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, q_j + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} \Big(a_r + \sum_{j=1}^{n} c_{rj}\, q_j + \frac{\partial U}{\partial q_r}\Big) b_{ri} = 0$$

$$a_i + \sum_{r=k+1}^{n} a_r\, b_{ri} = 0, \quad b_{ri_0} = b_{ri}(0, 0, \dots, 0) \qquad (197)$$
1/

Očevidno, da ako je $a_r=0$ ili $b_{ri}=0$, tada su i svi članovi $a_i=$ 0.

Ako su ovi uslovi (197) ispunjeni tada se neholonomni sistem može nalaziti u ravnoteži pod delovanjem

---

(1) Funkcija S je funkcija vremena t, generalisanih kordinata, generalisanih brzina i ubrzanja

potencijalnih sila koje su jednake izvodima funkcija U, koje sadrži linearne članove zavisne od kordinata q_j .

6.4. Stanje ravnoteže neholonomnog sistema tačaka promenljive mase

Na sistem koji je vezan homogenim neholonomnim vezama deluju generalisane aktivne Q_α i reaktivne Ψ_α sile.

Neporemećeno kretanje odredjeno je sa

$$q^\mu(t) = 0 \qquad i \qquad \dot{q}^\mu(t) = 0$$, odnosno

u V_{2n} prostoru $q^\mu = 0,\ p_\mu = 0$.

a poremećeno sa jednačinama

$$\frac{D\xi^\mu}{dt} = a^{\mu\nu}\eta_\nu \quad ; \quad \frac{D\eta_\mu}{dt} = \bar{H}_\mu .$$

Trivijalno rešenje $q^\nu = 0, p_\nu = 0$ ili $\xi^\mu = 0, \quad \eta_\mu = 0$ ovih jednačina predstavlja ravnotežno stanje posmatranog sistema tačaka promenljive mase.

Dovoljne uslove u smislu teoreme Ljapunova da ravnotežno stanje bude stabilno možemo odrediti tako što ćemo u prostoru Vn izabrati pozitivno definitivnu funkciju

$$w = w(q^1, \ldots, q^n)$$

takvu da funkcija Ljapunova V bude pozitivno definitivna tj. jednaka

$$V = T + w = \frac{1}{2} a^{\mu\nu} p_\nu p_\mu + w .$$

ovde je T - kinetička energija, rv

Diferencirajući funkciju V u smislu jednačina poremeće-nog kretanja, dobijamo

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}a^{\mu\nu}p_\nu p_\mu+W\right)=\frac{1}{2}\frac{D}{dt}\left(a^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\right)+\frac{dW}{dt}$$

ili posle zamene jednačina poremećenog kretanja

$$\frac{dq^\mu}{dt}=a^{\mu\nu}p_\nu$$

$$\frac{Dp_\alpha}{dt}=\bar{H}_\mu\,,$$

u izvod funkcije Ljapunova V:

$$\frac{dV}{dt}=a^{\mu\nu}\frac{Dp_\mu}{dt}p_\nu+\frac{\partial W}{\partial q^\nu}\dot{q}^\nu$$

$$\frac{dV}{dt}=a^{\mu\nu}\left[Q_\nu+P_\nu+\Phi_\nu^{\alpha'}\left(\frac{Dp_{\alpha'}}{dt}-Q_{\alpha'}-P_{\alpha'}\right)+\frac{\partial W}{\partial q^\nu}\right]p_\mu .$$

Kada stanje posmatramo u položaju $q^\alpha=0, p=0$ za slučaj da na sistem deluju neholonomne homogene veze oblika

$\Phi_{\iota\mu}\dot{q}^\mu=0$, dobijamo da je izvod funkcije V jednak:

$$\frac{dV}{dt}=a^{\alpha\nu}\left(Q_\alpha+P_\alpha+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\right)p_\nu\leq 0. \qquad (198)$$

Ako je izvod $\dot{V}$ negativan ili identički jednak nuli, ravnotežno stanje je stabilno, ako je izvod $\dot{V}$ negativno definitan, ravnotežno stanje sistema tačaka promenljive mase je asimtotski stabilno.

6.5. NESTABILNOST STANJA RAVNOTEŽE HOLONOMNOG I NEHOLONOMNOG SISTEMA

Predjimo sada na razmatranje pitanja nestabilnosti ravnoteže neholonomnog sistema na kojeg deluju potencijalne aktivne sile. Sistem je vezan sa m stacionarnih neholonomnih veza a stabilnost ispitujemo u smislu teoreme Ćitajeva.

Neka potencijalna funkcija U ima pozitivnu vrednost u makako maloj oblasti C, a u položaju ravnoteže je

$\mathcal{U} = 0.$

Izaberimo funkciju W u obliku

$$W = -H\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} q_i \quad , \quad \text{gde je} \quad H = T - \mathcal{U} \tag{199}$$

oblast C odredjena je na ovaj način:

$$H < 0, \quad \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} q_i > 0 .$$

Izvod funkcije W po vremenu t u smislu jednačina poremećenog kretanja oblika Voronca [26] : (200)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T-\mathcal{U})}{\partial q_i} - \sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial (T-\mathcal{U})}{\partial q_r} b_{ri} = \sum_{r=k+1}^{n} p_r \sum_{j=1}^{k} A_{ij}^{(r)} \dot{q}_j$$

$$(i = 1, \ldots, k)$$

gde je

$$T(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$p_r(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \qquad (r = k+1, \ldots, n)$$

ima oblik

$$\dot{W} = -H\sum_{i=1}^{k}\left(\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + q_i\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

Kako je

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q^i} + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial (T+U)}{\partial q_r} b_{ri} + \sum_{r=k+1}^{n} p_r \sum_{j=1}^{k} A_{ij}^{(r)} \dot{q}_j$$

i

$$2T = a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \ , \ p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2a_{ij}\dot{q}_j \ ,$$

to možemo posle smene ovih izraza izvod funkcije $\dot{w}$ svesti na ovaj oblik

$$\dot{W} = -H\Big[2T + \sum_{i=1}^{k} q_i\Big(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_r} b_{ri}\Big) + \sum_{i,j=1}^{k}\sum_{r=k+1}^{n} A_{ij}^{(r)} p_r q_i \dot{q}_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} q_i\Big(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_r} b_{ri}\Big)\Big].$$

Kada na sistem deluju neholonomne stacionarne veze koje ne zavise od vremene, kinetička energija sistema T je pozitivno definitna funkcija od $\dot{q}_i$.

Za male vrednosti po apsolutnoj veličini kordinata q_j, funkcija

$$2T + \sum_{i=1}^{k} q_i\Big(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_r} b_{ri}\Big) + \sum_{i,j=1}^{k}\sum_{r=k+1}^{n} A_{ij}^{(r)} p_r q_i \dot{q}_j$$

je takodje pozitivno definitivna u odnosu na brzine $\dot{q}_i$. Tada, ako je u oblasti C i izraz

$$\sum_{i=1}^{k} q_i\Big(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_r} b_{ri}\Big) \qquad (201)$$

definitivno pozitivna funkcija q_i tada u oblasti C funkcija $\dot{W}$ je definitivno pozitivna funkcija kordinata $\dot{q}_i, q_i$.

Polazeći od Čitajevljeve teoreme zaključujemo:

Ako u proizvoljno maloj oblasti položaja ravnoteže neholonomnog sistema potencijalna funkcija U ima pozitivnu vrednost, i pri tome u oblasti C, izraz (201) je pozitivno definitna funkcija od q; tada je položaj ravnoteže posmatranog sistema nestabilan u odnosu na $\dot{q}_i$ i q_i.

Posmatrajmo sada isti ovaj sistem ako na njega deluju i reaktivne sile.

Uslove stabilnosti stanja ravnoteže sistema tačaka promenljive mase na koji deluju homogene neholonomne veze da bi odredili izaberimo takvu skalarnu u funkciju koja zadovoljava uslove [5]

$$W = f(q^1, \dots, q^n) \in C_q^{(1)}(\mathcal{H})$$

$$\mathcal{H} = \{ q^r : |q^r| < h = \text{const} \}$$

t.j. koja je neprekidna i ima negativne vrednosti u okolini posmatrane tačke mnogostrukosti O_r.

Funkcija Ljapunova je

$$V = f(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n) \quad t.j.$$

$$V = -(T + W) q^r p_r = -\left(\frac{1}{2} a^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + W\right) q^r p_r .$$

T je pozitivno definitivna kvadratna forma gemeralisanih impulsa, W je neprekidna i u okolini posmatrane tačke ima negativnu vrednost to postoji oblast u kojoj je zadovoljen uslov gde je T + W < 0, $q^r p_r > 0$.

Izračunajmo sada izvod funkcija V u smislu jednačina (151):

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{d'}{dt}\left[(T + W) q^\sigma p_\sigma\right] = -\frac{d}{dt}\left(a^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + W\right) q^\sigma p_\sigma -$$

$$-(T + W) \frac{d}{dt}(q^\sigma p_\sigma).$$

ili dalje

$$\frac{dV}{dt} = -\left(a^{\mu\nu} p_\nu \frac{Dp_\mu}{dt} + \nabla_\mu w \frac{dq^\mu}{dt}\right) - (T+w)\left(p_\sigma \frac{dq^\sigma}{dt} + \left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\} q^\nu p_\sigma \frac{dq^\mu}{dt} + q^\sigma \frac{Dp_\sigma}{dt}\right) \qquad (202)$$

Ako sada ovaj izraz sastavimo u smislu jednačina (151) i ako dobijene vrednosti izvoda funkcija V u okolini posmatrane tačke su veći od nule t.j.:

$$\frac{dV}{dt} > 0$$

zaključujemo da je trivijalno rešenje jednačina poremećenog kretanja u okolini ravnotežnog položaja nestabilno.

Razmotrimo sada stabilnost ravnoteže sistema vezanog stacionarnim neholonomnim vezama

$$\dot{q}_r = \sum_{i=1}^{k} b_{ri}(q_1, \dots, q_n)\dot{q}_i \; ,$$

koji se nalazi pod dejstvom potencijalnih aktivnih i disipativnih sila.

Neporemećeno stanje ravnoteže sistema neka se nalazi u tački

$$q_j = 0, \quad \dot{q}_j = 0$$

mnogostrukosti O_j .

Jednačine poremećenog kretanje date su u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} - \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial (T+U)}{\partial q_r} b_{ri} = Q_i^D + \sum_{r=k+1}^{n} \theta_r \sum_{j=1}^{k} A_{ij} \dot{q}_j \qquad (203)$$

Q_i^D - disiparativna sila

$$Q_i^D = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$$

funkcija $R = \frac{1}{2} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$

Stabilnost stanja ravnoteže ispitujemo u duhu teoreme Ljapunova. Neka je funkcija Ljapunova jednaka

$$V = T - U$$

Izračunajmo sada izvod funkcije:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \frac{\partial U}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

Izvod funkcije u smislu jednačina (203) poremećenog kretanja je:

$$\dot{V} = -2R + \sum_{i=1}^{k} \sum_{r=k+1}^{n} \left[\frac{\partial (T+U)}{\partial q_r} b_{ri} \right]_{q_r=0} \dot{q}_i \qquad (204)$$

Ako [26] u ravnotežnom položaju $q_j = 0, \dot{q}_j = 0$ neholonomnog sistema potencijalna funkcija U zadovoljava uslov

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_r} \right)_0 = 0, \qquad (r = k+1, \ldots, n)$$

ili su koeficijenti jednačine veza jednaki

$$\left(\frac{\partial b_{ri}}{\partial q_j} \right)_0 = 0, \qquad (j, i = 1, \ldots, k) \quad (r = k+1, \ldots, n)$$

a varijacija $\delta^2 U$ potencijalne funkcije je negativno definitna, tada je ravnotežni položaj stabilan u odnosu na promenljive $q_i, \dot{q}_i$ i ne narušava se usled delovanja disipativnih sila.

Ukoliko u razvijenoj potencijalnoj funkciji nema linearnih članova u makako maloj oblasti ravnotežnog položaja neholonomnog sistema i funkcije U, i izraz

$$\sum_{i=1}^{k} q_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_r} b_{ri}\right),$$

su negativno definitni u odnosu na promenljive q_s $(s=1,\ldots,k)$, tada je ravnotežno stanje asimtotski stabilno za promenljive $q_s, \dot{q}_i$ za slučaj delovanja disipativnih sila.

Ukoliko na posmatrani sistem deluju i reaktivne sile, a jednačine poremećenog kretanja su date u obliku:

$$\dot{q}^{\alpha} = a^{\nu\alpha} p_{\nu}$$

$$\frac{Dp_{\alpha}}{dt} = Q_{\nu} - 2R_{\nu} + P_{\nu} + \Phi_{\nu}^{\alpha'}\left(\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} - Q_{\alpha'} - P_{\alpha'}\right)$$

$$\Phi_{b\alpha}\dot{q}^{\alpha} = 0,$$

stanje ravnoteže sistema tačaka promenljive mase će biti stabilno ako je zadovoljen uslov:

$$-2R + P + \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=k+1}^{n}\left[\frac{\partial(T+U)}{\partial q_r} b_{ri}\right]_{q_r=0} \dot{q}_i \leq 0, \qquad (205)$$

ili kada izvod izračunamo u smislu jednačina poremećenog kretanja (151), dobijamo

$$a^{\alpha\nu}\left(Q_{\alpha} + P_{\alpha} - 2R_{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial q^{\alpha}}\right)p_{\nu} \leq 0. \qquad (206)$$

Ako je izraz (206) manji ili jednak nuli, stanje ravnoteže je stabilno, za slučaj da je negativno definitan, stanje ravnoteže je asimtotski stabilno.

L I T E R A T U R A

1. М. Ш. Аминов: Об устойчивост некоторых механических систем, Москва 1948.

2. : К уравнениям возмущеного движения некоторой механической системы, Москва, 1947.

3. T. P. ANDJELIĆ: TENZORSKI RAČUN, BEOGRAD, 1967.

4. P. ANDJELIĆ I R. STOJANOVIĆ: RACIONALNA MEHANIKA, BEOGRAD 1962.

5. A. BAKŠA: STABILNOST KRETANJA NEHOLONOMNIH SISTEMA, BEOGRAD, 1976.

6. A. BILIMOVIĆ: RACIONALNA MEHANIKA, BEOGRAD, 1951.

7. - " - DINAMIKA ČVRSTOG TELA, BEOGRAD, 1955.

8. V.Ž. BRANKOVIĆ: DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA SKLERONOMNOG I REONOMNOG SISTEMA PROMENLJIVE MASE, BEOGRAD, 1984.

9. - " - JEDAN NOV OBLIK DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KRETANJA SISTEMA TAČAKA PROMENLJIVE MASE, BEOGRAD, 1985.

10. Е. А. Барбашин: Введение в теорию устойчивости, Москва, 1967.

11. -"- Функции ляпунова, Москва, 1970.

12. Н. Г. Четаев: Устойчивость движения, Москва, 1965.

13. Л. Э. Эльсгольц: Диференциялниые уравнения , Москва, 1957.

14. Ф. Р. Гантмахер: Аналитичка механика, Москва, 1965.

15. А.А. Космодемьянский: Курс теоритической механики, Москва, 1966.

16. А. М. Ляапунов: Общая задача обустойчивости движения, Москва, 1950.

17. А. И. Лурье: Аналитическая механика, Москва, 1961.

18. И. Г. Малкин: Теория устойчивости движения, Москва-Ленинград, 1959.

19. В. М. Матросов Об устойчивости движения, Москва 1962.

20. Д. Р. Меркин: Введение в теорию устойчивости движения, Москва,1971.

21. И. В. Мещерский: Динамика точки переменой массы, Петербург, 1897.

22. -"-: Уравнения движения точки переменой массы в общем случае, Киеве, 1898.

23. -"-: Задача из динамики переменних масс, Москва, 1952.

24. -"-: Работы по механике тел переменной массы, Москва, 1952.

25. В. С. Новоселов: Уравнения движения нелинейных неголономных систем с перимеными массами, Ленинград, 1959.

26. В. В. Румянцев: Об устойчивости движения неголономных систем, Москва, 1967.

27. -"-: Об устойчивости движения по отношению к части переменных, Москва, 1957.

28. -"-: Об устойчивости стационарних движений, Москва, 1966

29. -"-: Об устойчивости систем с обобщенным потенциалом с сил, Москва, 1977.

30. -"-: Об устойчивости стационарных движений спутников, Москва, 1969.

31. _ " _ : О принципе гамильтона для неголономных систем, Москв 1978.

32. В.А. Сапа: Вариационные принципы в механике переменной массы, Алма-Ата, 1956.

33. И. Д. Молюков и В.А. Сапа: Тензорная форма уравнений движения системы переменой массы, Алма-Ата, 1959.

34. J. TRIVUNAC: OSNOVI DINAMIKE REAKTIVNIH SISTEMA, BEOGRAD, 1968.

35. М. Н. Красовский: Теория управления движением, Москва, 1968.

36. Г. Н. Дубошин: Основи теории устойчивости движения, Москва, 1952.

37. V. VUJČIĆ: KRETANJE DINAMIČKI PROMENLJIVIH OBJEKATA I NJEGOVA STABILNOST, BEOGRAD, 1961.

38. - " - OPŠTI USLOVI STABILNOSTI STANJA RAVNOTEŽE DINAMIČKOG SISTEMA PROMENLJIVE MASE, BEOGRAD, 1968.

39. - " - : Критерий об устойчивости состояния равновесия системы динамических точек, Београд, 1968.

40. - " - O STABILNOSTI STANJA RAVNOTEŽE SISTEMA DINAMIČKIH TAČAKA PROMENLJIVE MASE, BEOGRAD, 1967.

41. - " - : Общее следствие прямого метода ляпунова об устойчивости

42. - " - COVARIJANT EQUATIONS OF DISTURBED MOTION OF MECHANICAL SISTEMS, TOKIO, 1971.

43. - " - KOVARIJANTNA DINAMIKA, BEOGRAD, 1981.

44. V. VUJIČIĆ: TEORIJA OSCILACIJE, BEOGRAD, 1966.

45. V.A. VUJIČIĆ: UNE MANUERE D'OBTENIR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT A

GÉNÉRALISÉES, BEOGRAD, 1964.

46. К. Э. Циолковский: Исследование мировых пространств, изд. Москва, 1954.

47. Г. Н. Дибошин: О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами, Москва, 1926.

48. T.LEVI-CIVITA : SUE MOTO DI UN CORP-DI MASSA VARIABILE, 1928.

49. R. GODDARD. : A METHOD OF REACHING ENTREMA ALTITUDES, SECOND EDITON, 1946.

50. H. OBERT. : DIE RAKETE ZU DEN PLANETENRÄUMEN, 1 AUEL. 1923.

51. R.STOJANOVIĆ : OSNOVI DIFERENCIJALNE GEOMETRIJE, BEOGRAD, 1963.

52. V.Ž. BRANKOVIĆ : STABILNOST RAVNOTEŽE I KRETANJE SISTEMA TAČAKA PROMENLJIVE MASE, BEOGRAD, 1971.