УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Александар Крапеж

ТЕОРИЈА МОДЕЛА И ТЕОРЕМЕ ОЧУВАЊА СВОЈСТАВА

Магистарски рад

Београд
1976

САДРЖАЈ

УВОД

Овај рад подељен је на осам делова. У првом делу је у основном дат предикатски рачун првог реда при чему су за аксиоме узете све ваљане формуле, што је Gödel-ову теорему учинило готово тривијалном. Затим, доказано је да скуп затворених теорија (које садрже све своје последице) чини алгебарски систем затворења (Grätzer [14]). Остало су уобичајена тврђења о предикатском рачуну првог реда. На крају првог дела дати су неки основни појмови теорије модела.

У другом делу обрађен је изоморфизам.

У трећем делу доказан је класичан резултат да се својства чувају у подсистему (надсистему) ако су изразива помоћу универзалних (егзистенцијалних) исказа.

За елементарне подсистеме, који су дефинисани у четвртом делу, доказана је Tarski-Vaught-ова лема.

У петом делу дефинисани су ланци система, специјални случај директне границе ($\varinjlim$), конструкције која се често користи у математици. За уније ланаца система доказано је да чувају она заједничка својства система из ланца која се могу изразити универзално-егзистенцијалним исказима.

У шестом делу доказано је да хомоморфне слике система чувају она својства домена која се могу изразити позитивним исказима.

У следећем делу дефинисан је ултрапроизвод и доказана Łoś-ова теорема која, грубо говорећи, тврди да у ултрапроизводу фамилије система неки елементи имају неко својство акко њихове "пројекције" скоро увек имају то својство.

У последњем делу је доказано, и то је оригиналан допринос, да ако имамо фамилију система и систем који у односу на ту фамилију има својство изражено Łoś-овом теоремом тада он мора бити елементарни подсистем ултрапроизвода те фамилије. То значи да је елементарни подсистем ултрапроизвода најопштија конструкција која има својство изражено Łoś-овом теоремом. Зато је та конструкција општија од елементарног подсистема и ултрапроизвода, што је унапред јасно, али и од неких познатих уопштења ултрапроизвода нпр. ултрагранице ([2]), граничног ултрастепена ([11]) и граничног ултрапроизвода ([12]). За овај последњи, скициран је и доказ да је заиста изоморфан неком елементарном подсистему ултрапроизвода.

На крају рада, наведен је списак литературе, као и других извора информација у вези са темом.

1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Премет нашег интересовања биће математички системи које дефинишемо као скупове са скуповима истакнутих операција, релација и елемената. По потреби, ради веће прецизности, скупови операција и елемената ће бити добро уређени. Под претпоставком тог уређења, тип математичког система одређен је пресликавањима скупова операција и релација у скуп природних бројева. Смисао тих пресликавања је да свака операција (релација) има одређену дужину.

Типичан пример математичког система је $\mathcal{A}=(A,(e_\xi)_{\xi<\alpha}, (f_\xi)_{\xi<\beta}, (r_\xi)_{\xi<\gamma})$ где је A произвољан непразан скуп, $e_\xi \in A$ за $\xi<\alpha$, $f_\xi : A^{n_\xi} \to A$ за $\xi<\beta$ и $r_\xi \subset A^{m_\xi}$ за $\xi<\gamma$. α, β и γ су ординални бројеви. Овај пример уједно даје увид у начин означавања.

Да бисмо могли говорити о особинама математичких система, потребно је да дефинишемо језик помоћу кога ћемо то чинити. Наравно, тај језик ће се мењати у зависности од типа система о коме говоримо.

Језик L одређен је са:

(1) фамилијом $(x_k)_{k<\omega}$ променљивих

(2) фамилијом $(e_\xi)_{\xi<\alpha}$ константи

(3) фамилијом $(f_\xi)_{\xi<\beta}$ операцијских симбола, при чему је сваком f_ξ $(\xi<\beta)$ придружен неки природан број већи од нуле, такозвана дужина симбола f_ξ.

(4) фамилијом $(r_\xi)_{\xi<\gamma}$ релацијских симбола, при чему је сваком r_ξ $(\xi<\gamma)$ придружен неки природан број већи од нуле, такозвана дужина симбола r_ξ.

(5) симболом $=$ једнакости

(6) логичким симболима: $\exists$ (симбол егзистенцијалног квантора), $\vee$ (симбол дисјункције) и $\neg$ (симбол негације)

(7) помоћним симболима: ((лева заграда) и) (десна заграда).

Терми се дефинишу на следећи начин:

(1) свака променљива је терм

(2) свака константа је терм

(3) ако су $t_1,\dots,t_n$ терми и f операцијски симбол дужине n тада је и $f(t_1,\dots,t_n)$ терм

(4) терм се може добити само коначним бројем примена правила (1), (2) и (3).

Могуће је доказати да се сваки терм, који није ни константа ни променљива може на јединствен начин представити у облику $f(t_1,\dots,t_n)$ где су $t_1,\dots,t_n$ терми а f операцијски симбол дужине n.

Атомске формуле језика L су речи облика $t_1=t_2$ и $r(t_1,\dots,t_n)$ где су $t_1,\dots,t_n$ терми а r релацијски симбол дужине n.

Следи дефиниција формуле:

(1) свака атомска формула је формула

(2) ако су ϕ и ψ формуле а x променљива, тада су и речи $\exists x\, \phi$, $(\phi \vee \psi)$ и $\neg\phi$ формуле

(3) формула се може добити само помоћу коначног броја примена правила (1) и (2).

Као и код терма свака неатомска формула може се на јединствен начин представити у облику $\exists x\phi$, $(\phi \vee \psi)$ или $\neg\phi$ за неке формуле ϕ, ψ и неку променљиву x.

Скуп свих формула језика L означавамо са Φ.

Дефинишемо слободно и везано појављивање променљиве x у формули ϕ:

(1) свако појављивање променљиве x у атомској формули је слободно.

(2) ако је формула ϕ облика $\phi_1 \vee \phi_2$, $\exists y\psi$ или $\neg\psi$, где је y променљива различита од x, тада је свако слободно (везано) појављивање променљиве x у свакој од формула ϕ_1, ϕ_2, ψ такође слободно (везано) појављивање променљиве x у формули ϕ.

(3) ако је формула ϕ облика $\exists x\psi$ тада су сва појављивања променљиве x у формули ϕ везана.

Исказ је она формула ϕ у којој ниједна променљива нема слободно појављивање.

Преостале основне логичке операције дефинишемо овако:

$\top$ је замена за $\exists x_1(x_1 = x_1)$.

$\bot$ је замена за $\neg\top$.

Ако су ϕ и ψ формуле а x променљива тада:

$\phi \Rightarrow \psi$ је замена за $\neg\phi \vee \psi$

$\phi \wedge \psi$ је замена за $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$

$\phi \Leftrightarrow \psi$ је замена за $(\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$

$\forall x\, \phi$ је замена за $\neg\exists x \neg\phi$.

Дата су два правила извођења, модус поненс (MP) и генерализација (Gen):

(MP) $\dfrac{\phi;\ \phi \Rightarrow \psi}{\psi}$

(Gen) $\dfrac{\phi}{\forall x\phi}$

Интерпретација језика L је одређена са:

(1) непразним скупом A (доменом интерпретације)

(2) придруживањем које свакој константи $e_\xi (\xi<\alpha)$ додељује елемент e_ξ скупа A (симболи које интерпретирамо и елементи у које интерпретирамо симболе имају одговарајуће ознаке. Слично важи и за функције и релације).

(3) придруживањем које сваком операцијском симболу f_ξ $(\xi<\beta)$ (дужине n) додељује операцију f_ξ (дужине n) скупа A.

(4) придруживањем које сваком релацијском сибмолу r_ξ $(\xi<\gamma)$ (дужине n) додељује релацију r_ξ(дужине n) скупа A.

(5) симболу = придружена је релација једнакости ($=$) скупа A .

Дакле, језик L се може интерпретирати само у математичким системима истог типа, одређеног језиком L.

При датој интерпретацији, валуација је сваки елемент скупа A^ω , где је A домен интерпретације. Ако је $a=(a_k)_{k<\omega}$ нека валуација тада са $a(n|b_n)$, где је $b_n \in A$, означавамо валуацију која се од a разликује само по вредности на n-том месту. На n-том месту валуације a налази се a_n а на истом месту валуације $a(n|b_n)$ налази се b_n.

Нека је дата интерпретација језика L (у систему A), валуација a и терм t . Вредност $t(a)$ терма t за валуацију a је:

(1) ако је терм t променљива x_k тада је $t(a) = a_k$.

(2) ако је терм t константа e_ξ тада је $t(a)=e_\xi$

(3) ако је терм t облика $f(t_1,\ldots,t_n)$, где су $t_1,\ldots,t_n$ терми чије су вредности редом $t_1(a),\ldots,t_n(a)$ и f операцијски симбол дужине n, тада је $t(a)=f(t_1(a),\ldots,t_n(a))$ вредност датог терма t за валуацију a.

Очигледно, ако се међу промењивим $x_o,\ldots,x_m$ налазе све промењиве терма t, онда вредност терма t зависи само од $a_o,\ldots,a_m$, тј. ако су a и b две валуације које се поклапају на првих m+1 места тада је $t(a)=t(b)$.

Нека је дата интерпретација језика L , валуација a и формула ϕ. Дефинишемо када је формула ϕ тачна при датој интерпретацији за дату валуацију a (што означавамо са $A\models_a \phi$).

(1) ако је ϕ атомска формула облика $t_1=t_2$ за неке терме t_1 и t_2 тада $A\models_a \phi$ акко $t_1(a)=t_2(a)$.

(2) ако је ϕ атомска формула облика $r(t_1,\ldots,t_n)$, за неки релацијски симбол r дужине n и неке терме $t_1,\ldots,t_n$, тада $A\models_a\phi$ акко $r(t_1(a),\ldots,t_n(a))$. Ако ϕ није атомска формула тада се на њу може применити једно од правила:

(3) $A\models_a \exists x\psi$ акко постоји $b_n\in A$ тако да је $A\models_{a(n|b_n)}\psi$.

(4) $A\models_a \psi_1 \vee \psi_2$ акко $A\models_a \psi_1$ или $A\models_a \psi_2$

(5) $A\models_a \neg\psi$ акко није $A\models_a \psi$.

Слично термима, ако се међу промењивим $x_o,\ldots,x_m$ налазе све слободне промењиве формуле ϕ , тада тачност формуле ϕ при датој интерпретацији за валуацију a , зависи само од $a_o,\ldots,a_m$, тј. ако су a и b две валуације које се поклапају на првих m+1 места тада је $A\models_a\phi$ акко $A\models_b \phi$

Формула ϕ је тачна у систему A (при датој интерпретацији која везује језик L и систем A) ако за сваку валуацију $a\in A^\omega$ вреди $A\models_a \phi$. То означавамо са $A\models\phi$. Када је $A\models\phi$ такође кажемо да A задовољава формулу ϕ или да је A модел формуле ϕ .

Формула ϕ је ваљана ако је тачна при свакој интерпретацији ($\models \phi$).

Кажемо да је A модел скупа формула Σ ($A\models \Sigma$) ако је A модел сваке формуле из скупа Σ .

За скуп формула Σ кажемо да има модел ако постоји интерпретација језика L (којој одговара систем A) тако да је $A \models \Sigma$.

Формула ϕ је последица скупа формула $\Sigma (\Sigma \models \phi)$ ако је сваки модел скупа формула Σ уједно и модел формуле ϕ. Скуп формула Δ је последица скупа формула $\Sigma (\Sigma \models \Delta)$ ако је сваки модел скупа формула Σ уједно и модел скупа формула Δ.

СТАВ 1.0. Ако су ϕ и ψ формуле и a и b валуације, при интерпретацији језика L у систему A, тада је:

(1) $A \models \top$

(2) није $A \models_a \bot$

(3) $A \models_a \phi \Rightarrow \psi$ акко $A \models_a \phi$ повлачи $A \models_a \psi$

(4) $A \models_a \phi \wedge \psi$ акко $A \models_a \phi$ и $A \models_a \psi$

(5) $A \models_a \phi \Leftrightarrow \psi$ акко ($A \models_a \phi$ акко $A \models_a \psi$)

(6) $A \models_a \forall x_n \phi$ акко за свако $b_n \in A$ $A \models_{a(n|b_n)} \phi$

(7) ако је ϕ исказ тада $A \models_a \phi$ акко $A \models_b \phi$

(8) ако је $A \models_a \phi$ и $A \models_a \phi \Rightarrow \psi$ тада је и $A \models_a \psi$

(9) $A \models \phi$ акко $A \models \forall x_n \phi$

Сваки скуп формула Γ називамо теоријом. Ако је Γ теорија тада $\Gamma \vdash \phi$ (ϕ је изведива из Γ) ако постоји коначан низ формула $\phi_o, \ldots, \phi_n$ такав да је $\phi_n = \phi$ и за све $k=o,\ldots,n$ важи:

(1) ϕ_k је ваљана формула, или

(2) $\phi_k \in \Gamma$, или

(3) постоје природни бројеви j и m мањи од k тако да је ϕ_m облика $\phi_j \Rightarrow \phi_k$,или

(4) постоји природан број j мањи од k тако да је ϕ_k облика $\forall x \phi_j$ за неку променљиву x .

ϕ називамо теоремом ($\vdash \phi$) ако је ϕ изведива из празног скупа формула.

Нека је Φ_o скуп свих теорема. За теорију Γ кажемо да је затворена ако важи: $\Gamma \vdash \phi$ акко $\phi \in \Gamma$. Скуп Φ_o свих теорема и скуп Φ свих формула су затворене теорије.

СТАВ 1.1. Пресек произвољне фамилије затворених теорија је затворена теорија.

ДОКАЗ: Нека је $(\Gamma_j)_{j\in J}$ фамилија затворених теорија и $\Gamma=\bigcap_{j\in J}\Gamma_j$. Ако је J празан скуп тада је $\Gamma=\Phi$ па је Γ затворена теорија. Ако је J непразан скуп тада је $\Phi_o\subset\Gamma_j$ за све $j\in J$ па је и $\Phi_o\subset\Gamma$ тј. и Γ је непразан скуп. Нека је $\Gamma\vdash\phi$. Тада је $\Gamma_j\vdash\phi$ за све $j\in J$, па како су све теорије Γ_j затворене биће $\phi\in\Gamma_j$ за све $j\in J$. следи да $\phi\in\Gamma$ па је и Γ затворена теорија.

Нека је Γ нека теорија и нека је $(\Gamma_j)_{j\in J}$ фамилија свих затворених теорија које садрже Γ. Затворену теорију $\Gamma^*=\bigcap_{j\in J}\Gamma_j$ називамо затворењем теорије Γ. Теорија Γ је противуречна ако је $\Gamma^*=\Phi$, иначе је непротивуречна. Пошто је за сваку формулу ϕ формула $\bot\Rightarrow\phi$ ваљана, биће теорија $\{\bot\}$ противуречна. Такође, теорија Γ је противуречна акко $\Gamma\vdash\bot$.

СТАВ 1.2.

(1) $\emptyset^*=\Phi_o$

(2) $\Phi^*=\Phi$

(3) $\Gamma\subset\Gamma^*$

(4) ако је $\Gamma\subset\Delta$ тада $\Gamma^*\subset\Delta^*$

(5) $\Gamma^{**}=\Gamma^*$

(6) ако $\phi\in\Gamma^*$ тада $\phi\in\Delta^*$ за неки коначан подскуп Δ теорије Γ

(7) ако је $(\Gamma_i)_{i\in I}$ усмерена фамилија затворених теорија тада је и $\Gamma=\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ затворена теорија. Ако су све теорије Γ_i непротивуречне тада је таква и теорија Γ.

ДОКАЗ: (6) (6) следи из чињенице да $\phi\in\Gamma^*$ акко $\Gamma\vdash\phi$ и да је извођење ϕ из Γ коначан низ формула.

(7) ако $\phi\in\Gamma$ тада $\phi\in\Gamma_{i_o}$ за неко $i_o\in I$. Пошто је Γ_{i_o} затворена теорија, $\Gamma_{i_o}\vdash\phi$ па $\Gamma\vdash\phi$. Ако $\Gamma\vdash\phi$ тада постоји коначан низ формула $\phi_o,\dots,\phi_n=\phi$ који је извођење ϕ из Γ. ϕ_o је ваљана формула или $\phi_o\in\Gamma$ па $\phi_o\in\Gamma_{i_o}$ за неко $i_o\in I$. Претпоставимо да $\phi_j\in\Gamma_{i_j}$ за све $j<k$. Тада, ако је ϕ_k ваљана формула или $\phi_k\in\Gamma$, $\phi_k\in\Gamma_{i_k}$ за неко

$i_k \in I$. Ако је ϕ_k добијена по МР из ϕ_1 и ϕ_m $(1, m< k)$ тада $\phi_1 \in \Gamma_{i_1}$ и $\phi_m \in \Gamma_{i_m}$ за неке $i_1, i_m \in I$ (и ϕ_m је облика $\phi_1 \Rightarrow \phi_k$). Пошто је $(\Gamma_i)_{i \in I}$ усмерена фамилија, постоји теорија Γ_{i_k} те фамилије, која садржи и Γ_{i_1} и Γ_{i_m} па обе формуле ϕ_1, ϕ_m припадају Γ_{i_k}, а са њима и формула ϕ_k. Ако је ϕ_k добијена из ϕ_1 генерализацијом и $\phi_1 \in \Gamma_{i_1}$ за неко $i_1 \in I$, тада је и $\phi_k \in \Gamma_{i_1}$. Дакле увек постоји $i_k \in I$ тако да за све $k \leqslant n$ $\phi_k \in \Gamma_{i_k}$. Специјално $\phi \in \Gamma_{i_n}$, па $\phi \in \Gamma$. Следи да је Γ затворена теорија.

Ако је Γ противуречна теорија тада $\Gamma \vdash \perp$, па постоји низ $\phi_o, \ldots, \phi_n = \perp$ који је извођење формуле $\perp$ из скупа формула Γ. Пошто је Γ затворена теорија $\phi_k \in \Gamma$ $(o \leqslant k \leqslant n)$. Специјално $\perp \in \Gamma$. Но $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ па $\perp \in \Gamma_{i_o}$ за неко $i_o \in I$, дакле $\Gamma_{i_o} \vdash \perp$ што је немогуће јер су све теорије $\Gamma_i (i \in I)$ непротивуречне.

СТАВ 1.3. Нека је Γ теорија и $(\Gamma_i)_{i \in I}$ фамилија коначних подскупова скупа Γ. Тада је $\Gamma^* = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i^*$.

<u>ДОКАЗ</u>: (1) за све $i \in I$ важи $\Gamma_i \subset \Gamma$ па је $\Gamma_i^* \subset \Gamma^*$. Следи да је $\bigcup_{i \in I} \Gamma^*_i \subset \Gamma^*$

(2) нека је $\phi \in \Gamma^*$. Тада $\Gamma \vdash \phi$ па постоји коначан низ формула $\phi_o, \ldots, \phi_n = \phi$ који је извођење формуле ϕ из скупа формула Γ. Индукцијом доказујемо да за све $k \leqslant n$ $\phi_k \in \Gamma_k^*$, где је Γ_k неки коначан подскуп теорије Γ. $\phi_o \in \{\phi_o\}^* = \Gamma_o^*$. Претпоставимо да за све $j<k$ $\phi_j \in \Gamma_j^*$ и Γ_j је коначан подскуп теорије Γ. Ако је ϕ_k ваљана формула или $\phi_k \in \Gamma$, тада $\phi_k \in \{\phi_k\}^* = \Gamma_k$. Ако је ϕ_k добијена по МР из ϕ_j и ϕ_m $(j, m<k)$ (и ϕ_m је облика $\phi_j \Rightarrow \phi_k$) тада постоје коначни подскупови Γ_j и Γ_m теорије Γ тако да $\phi_j \in \Gamma_j^*$ и $\phi_m \in \Gamma_m^*$. Ако је $\Gamma_k = \Gamma_j \cup \Gamma_m$ тада је $\Gamma_j^* \subset \Gamma_k^*$ и $\Gamma_m^* \subset \Gamma_k^*$ па $\phi_j, \phi_m \in \Gamma_k^*$ а како је Γ_k^* затворена теорија то и $\phi_k \in \Gamma_k^*$ при чему је $\Gamma_k \subset \Gamma$ и Γ_k је коначан скуп. Дакле за све $k \leqslant n$ $\phi_k \in \Gamma_k^*$ за неки коначан подскуп Γ_k теорије Γ па специјално $\phi \in \Gamma_n^*$ за неки коначан подскуп Γ_n теорије Γ. Следи да $\phi \in \bigcup_{i \in I} \Gamma_i^*$.

Из става 1.3 непосредно следи да $\Gamma \vdash \perp$ акко постоји коначан подскуп Δ теорије Γ тако да је $\Delta \vdash \perp$.

СТАВ 1.4. За сваку формулу ϕ $\vdash\phi$ акко $\models\phi$ (Gödel-ова теорема потпуности).

ДОКАЗ: Ако је ϕ ваљана формула она је и теорема.

Према ставу 1.0 формуле добијене по МР или Gen из ваљаних формула, такође су ваљане формуле. Дакле све теореме су ваљане формуле.

СТАВ 1.5. (Став дедукције у ослабљеном облику)

Ако је Γ теорија и ϕ исказ, тада за сваку формулу ψ, из $\Gamma\cup\{\phi\}\vdash\psi$ следи $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\psi$

ДОКАЗ: Нека је $\Gamma\cup\{\phi\}\vdash\psi$. Тада постоји коначан низ $\phi_o,\dots,\phi_n=\psi$ који је извођење формуле ψ из $\Gamma\cup\{\phi\}$. Доказујемо индукцијом да за све k $(o\leq k\leq n)$ важи: $\Gamma\cup\{\phi\}\vdash\phi_k$ повлачи $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\phi_k$

За $k=o$, ако је ϕ_o ваљана формула или $\phi_o\in\Gamma$, формула $\phi\Rightarrow\phi_o$ изведива је из Γ јер је формула $\phi_o\Rightarrow(\phi\Rightarrow\phi_o)$ваљана.

Ако је ϕ_o баш једнако ϕ тада је $\phi\Rightarrow\phi_o$ ваљана формула па $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\phi_o$. Претпоставимо да за све $j<k$ важи да $\Gamma\cup\{\phi\}\vdash\phi_j$ повлачи $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\phi_j$. Доказујемо да то исто важи и за $j=k$. Ако је ϕ_k ваљана формула или $\phi_k\in\Gamma\cup\{\phi\}$ доказ је исти као у случају $k=o$. Нека је формула ϕ_k добијена по МР из ϕ_j, $\phi_m (j,m<k)$ (и ϕ_m је облика $\phi_j\Rightarrow\phi_k$). По претпоставци важи $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\phi_j$ и $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow(\phi_j\Rightarrow\phi_k)$. Како је $(\phi\Rightarrow(\phi_j\Rightarrow\phi_k))\Rightarrow((\phi\Rightarrow\phi_j)\Rightarrow(\phi\Rightarrow\phi_k))$ ваљана формула, следи да је $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\phi_k$. Нека је ϕ_k добијена генерализацијом из $\phi_j (j<k)$(и ϕ_k је облика $\forall x\phi_j$, за неку променљиву x), По претпоставци је $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\phi_j$. Генерализацијом добијамо да је $\Gamma\vdash\forall x(\phi\Rightarrow\phi_j)$. Како је формула $\forall x(\phi\Rightarrow\phi_j)\Rightarrow(\phi\Rightarrow\forall x\phi_j)$ ваљана (јер је ϕ исказ), следи да је $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\forall x\,\phi_j$ тј. $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\phi_k$. Дакле за све k $(o\leq k\leq n)$ из $\Gamma\cup\{\phi\}\vdash\phi_k$ следи $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\phi_k$ па специјално из $\Gamma\cup\{\phi\}\vdash\psi$ (што је претпоставка става дедукције) следи $\Gamma\vdash\phi\Rightarrow\psi$.

СТАВ 1.6. (Лема о проширењу)

Ако је Γ теорија и ϕ исказ, тада ако је $\Gamma\cup\{\phi\}\vdash\perp$ тада $\Gamma\vdash\neg\phi$.

Дакле ако је Γ непротивуречна теорија и формула $\neg\phi$ није изведива из Γ тада је и теорија $\Gamma\cup\{\phi\}$ непротивуречна.

ДОКАЗ: Став се доказује применом става дедукције и ваљане формуле $(\phi \Rightarrow \perp) \Rightarrow \neg\phi$ (ϕ је исказ).

Теорија Γ је потпуна ако за сваки исказ ϕ или је $\Gamma \vdash \phi$ или $\Gamma \vdash \neg\phi$.

СТАВ 1.7. Свака непротивуречна теорија Γ садржи се у некој потпуној, непротивуречној теорији.

ДОКАЗ: Нека је $(\phi_\xi)_{\xi<\delta}$ добро уређење скупа свих исказа и $\Sigma_0 = \Gamma^*$. Ако није $\Sigma_\lambda \vdash \neg\phi_{\lambda+1}$ тада нека је $\Sigma_{\lambda+1} = (\Sigma_\lambda \cup \{\phi_{\lambda+1}\})^*$ а иначе нека је $\Sigma_{\lambda+1} = \Sigma_\lambda$. Ако је μ гранични ординал нека је $\Sigma_\mu = \bigcup_{\lambda<\mu}\Sigma_\lambda$. Доказујемо да је $\Sigma = \bigcup_{\xi<\delta}\Sigma_\xi$ тражена потпуна, непротивуречна теорија која садржи скуп формула Γ.

Пошто је Γ непротивуречна теорија биће Σ_0 непротивуречна затворена теорија. Нека је $\xi<\delta$ и нека су све теорије $\Sigma_\mu (\mu<\xi)$ непротивуречне. Ако ξ није гранични ординал тада постоји ординал λ који је претходник ординала ξ и Σ_λ је по претпоставци непротивуречна теорија. Ако је $\Sigma_\xi = \Sigma_\lambda$ тада је Σ_ξ непротивуречна теорија, а ако је $\Sigma_\xi \neq \Sigma_\lambda$ тада је $\Sigma_\xi = (\Sigma_\lambda \cup \{\phi_\xi\})^*$ и није $\Sigma_\lambda \vdash \neg\phi_\xi$. У том случају ако је Σ_ξ противуречна теорија, мора бити $\Sigma_\lambda \cup \{\phi_\xi\} \vdash \perp$ одакле је према ставу 1.6 $\Sigma_\lambda \vdash \neg\phi_\xi$ супротно претпоставци. Дакле Σ_ξ не може бити противуречна теорија.

Ако је ξ гранични ординал тада је $(\Sigma_\mu)_{\mu<\xi}$ усмерена фамилије непротивуречних затворених теорија, па је према ставу 1.2 и $\Sigma_\xi = \bigcup_{\mu<\xi}\Sigma_\mu$ непротивуречна затворена теорија.

Користећи трансфинитну индукцију, закључујемо да су све затворене теорије $\Sigma_\xi (\xi<\delta)$ непротивуречне. Следи да је $(\Sigma_\xi)_{\xi<\delta}$ усмерена фамилија непротивуречних затворених теорија па је према 1.2 и $\Sigma = \bigcup_{\xi<\delta}\Sigma_\xi$ непротивуречна теорија.

Нека је ϕ неки исказ. тада постоји ординал $\xi<\delta$ тако да је ϕ баш $\phi_{\xi+1}$. Према дефиницији теорије $\Sigma_{\xi+1}$ или је $\Sigma_\xi \vdash \neg\phi_{\xi+1}$, па је тада $\Sigma \vdash \neg\phi_{\xi+1}$, или није $\Sigma_\xi \vdash \neg\phi_{\xi+1}$, па је тада $\Sigma_{\xi+1} = (\Sigma_\xi \cup \{\phi_{\xi+1}\})^*$ па је $\Sigma \vdash \phi_{\xi+1}$. У сваком случају $\Sigma \vdash \phi$ или $\Sigma \vdash \neg\phi$ па је теорија Σ потпуна.

Језик L' добијен из L додавањем нових константи, операцијских или релацијских симбола, назива се продужењем језика L. Специјално, ако је L' добијен из L додавањем једино константи, L' се назива простим продужењем језика L . Језик L је (просто) сужење језика L'.

Свака интерпретација језика L'на природан начин одређује интерпретацију језика L. Прва од ових интерпретација, назива се продужењем друге, а друга сужењем прве.

Ако је $\mathbb{A}$ математички систем у коме се језик L интерпретира, тада L_A дефинишемо као језик коме су као константе додати сви елементи скупа A . Математички систем чији је скуп носилац A а у коме се језик L_A интерпретира тако да се симболи који припадају и језику L интерпретирају као и у језику L, а свака додата константа a интерпретира се баш као елемент a скупа A , означава се са $\mathbb{A}_A$ и назива продужењем система $\mathbb{A}$. Систем $\mathbb{A}$ зовемо сужењем система $\mathbb{A}_A$.

Аналогно се дефинишу, ако је $B\subset A$, језик L_B и систем $\mathbb{A}_B$ у коме се језик L_B интерпретира.

СТАВ 1.8. Теорија је непротивуречна акко има модел.

<u>ДОКАЗ</u>: (1) Нека је дата непротивуречна теорија Γ језика L . Нека је L_A просто продужење језика L помоћу елемената скупа $A = \{a_\xi | \xi<\alpha'\}$ таквог да је $|\Phi| \leqslant |A|$ и ниједан симбол језика L не припада скупу A.

Γ је теорија језика L_A . Лако је доказати да је Γ° (затворење теорије Γ у језику L_A) непротивуречна теорија. Нека је $(\phi_\xi(y_\xi))_{\xi<\delta}$ низ свих формула језика L_A са највише једном слободном промењивом (y_ξ је ознака слободне промењиве формуле ϕ_ξ). Нека је $(a_{\xi_\lambda})_{\lambda<\alpha''}$ подниз низа $(a_\xi)_{\xi<\alpha'}$, такав да се a_{ξ_λ} не појављује у формулама $\phi_\nu(y_\nu)$ за $\nu\leqslant\lambda$ и a_{ξ_λ}је различито од свих a_{ξ_ν} за $\nu<\lambda$. Уочимо формуле $\psi_\lambda(\lambda<\delta)$:

$$\neg\forall y_\lambda\ \phi_\lambda(y_\lambda) \Rightarrow \neg\phi_\lambda(a_{\xi_\lambda})$$

Нека је $\Gamma_o = (\Gamma^\circ \cup \{\psi_o\})^\circ$ и $\Gamma_{\lambda+1}=(\Gamma_\lambda \cup \{\psi_\lambda\})^\circ$ а ако је λ гранични ординал нека је $\Gamma_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda}\Gamma_\nu$. Доказујемо да из непротивуречности теорије Γ° следи непротивуречност теорије Γ_o. Нека је супротно тврђењу Γ_o противуречна. Тада је $\Gamma_o\vdash\perp$ тј. $\Gamma^\circ, \psi_o \vdash \perp$. Према ставу 1.6 тада је $\Gamma^\circ \vdash\neg\psi_o$. Како је $\neg\psi_o \Leftrightarrow \neg\forall y_o\ \phi_o(y_o) \wedge \phi_o(a_{\xi_o})$ теорема биће $\Gamma^\circ\vdash\neg\forall y_o\phi_o(y_o)$ и

$\Gamma^{\circ}\vdash\phi_o(a_{\xi_o})$. У извођењу формуле $\phi_o(a_{\xi_o})$ из скупа формула Γ, заменимо свугде a_{ξ_o} променљивом z_o која се не појављује ни у једној формули извођења формуле $\phi_o(a_{\xi_o})$ из скупа формула Γ. Тако добијамо извођење формуле $\phi_o(z_o)$ из скупа формула Γ, користећи само оне константе низа $(a_{\xi_\lambda})_{\lambda<\alpha}$" које су испред a_{ξ_o}. Генерализацијом, добијамо $\Gamma\vdash\forall z_o\phi_o(z_o)$ тј. $\Gamma^*\vdash\forall z_o\phi_o(z_o)$ што је противуречно са $\Gamma^{\circ}\vdash\neg\forall y_o\phi_o(y_o)$. Дакле теорија Γ_o мора бити непротивуречна.

Аналогно, из непротивуречности теорије Γ_λ следи непротивуречност теорије $\Gamma_{\lambda+1}$.

Ако је λ гранични ординал, према ставу 1.2. и теорија Γ_λ мора бити непротивуречна.

Нека је $\Gamma_\delta=\bigcup_{\lambda<\delta}\Gamma_\lambda$. И Γ_δ је непротивуречна теорија, па се према ставу 1.7 садржи у некој потпуној, непротивуречној теорији Δ.

Назовимо терм језика L_A затвореним ако не садржи слободне променљиве и означимо са M скуп свих затворених терма.

Константе $e_\xi(\xi<\alpha)$ интерпретирамо као терме e_ξ. Константе $a_\xi(\xi<\alpha')$ интерпретирамо као терме a_ξ.

Операцијске симболе $f_\xi(\xi<\beta)$ (дужине n) интерпретирамо као операције f_ξ(дужине n), дефинисане на скупу M са:

$$f_\xi(t_1,\dots,t_n)=f_\xi(t_1,\dots,t_n).$$

Релацијске симболе $r_\xi(\xi<\gamma)$(дужине n) интерпретирамо као релације r_ξ (дужине n), дефинисане на скупу M са:

$$r_\xi(t_1,\dots,t_n) \qquad \text{акко} \qquad \Delta\vdash r_\xi(t_1,\dots,t_n).$$

Математички систем M_A са носачем M, константама $e_\xi(\xi<\alpha)$ и $a_\xi(\xi<\alpha')$, операцијама $f_\xi(\xi<\beta)$ и релацијама $r_\xi(\xi<\gamma)$ је модел теорије Γ. Важи и више; за сваку формулу ϕ језика L_A $\Delta\vdash\phi$ акко је $M_A\models\phi$

(а) Ако је ϕ исказ и атомска формула тврђење је тачно по дефиницији система M_A.

Нека је тврђење тачно за све формуле са мање логичких везника него ϕ.

(б) Ако је ϕ исказ облика $\neg\psi$, тада, пошто је Δ потпуна теорија, биће $\Delta\vdash\phi$ акко $\Delta\vdash\neg\psi$ акко није $\Delta\vdash\psi$ акко није $M_A\models\psi$ акко $M_A\models\neg\psi$ акко $M_A\models\phi$.

(ц) Ако је ϕ исказ облика $\phi_1 \vee \phi_2$, тада, пошто је Δ потпуна теорија, биће $\Delta \vdash \phi$ акко $\Delta \vdash \phi_1 \vee \phi_2$ акко $\Delta \vdash \phi_1$ или $\Delta \vdash \phi_2$ акко $M_A \models \phi_1$ или $M_A \models \phi_2$ акко $M_A \models \phi_1 \vee \phi_2$ акко $M_A \models \phi$.
(д) Ако је ϕ исказ облика $\exists x \psi$ (тј. облика $\neg\forall x \neg \psi$) и ψ има x као јединy слободну променљиву (ако x није слободна променљива формуле ψ, тада је $\exists x \psi$ формула еквивалентна са ψ), тада је према (б) довољно доказати да је $\Delta \vdash \forall x \neg \psi$ акко $M_A \models \forall x \neg \psi$. Пошто $\neg\psi(\psi)$ има x као једину слободну променљиву, постоји $\nu<\delta$ тако да је $\neg\psi$ баш формула $\phi_\nu(y_\nu)$ а y_ν је x.

Нека је $M_A \models \forall x \neg \psi$ и нека није $\Delta \vdash \forall x \neg \psi$. Због потпуности теорије Δ биће $\Delta \vdash \neg\forall x \neg \psi$ тј. $\Delta \vdash \neg\forall x \phi_\nu(x)$. По претпоставци је $\Delta \vdash \psi_\nu$ тј. $\Delta \vdash \neg\forall x \phi_\nu(x) \Rightarrow \neg\phi_\nu(a_{\xi_\nu})$ па следи да је $\Delta \vdash \neg\phi_\nu(a_{\xi_\nu})$. Из $M_A \models \forall x \neg \psi$ тј. $M_A \models \forall x \phi_\nu(x)$ следи $M_A \models \phi_\nu(a_{\xi_\nu})$ одакле је по индукцијској хипотези $\Delta \vdash \phi_\nu(a_{\xi_\nu})$ па је Δ противуречна теорија суптротно доказаном. Дакле из $M_A \models \forall x \neg \psi$ следи $\Delta \vdash \forall x \neg \psi$.

Обрнуто, нека није $M_A \models \forall x \neg \psi$ и нека је $\Delta \vdash \forall x \neg \psi$. Тада није $M_A \models \forall x \phi_\nu(x)$ и јесте $\Delta \vdash \forall x \phi_\nu(x)$, па постоји затворен терм t такав да није $M_A \models \phi_\nu(t)$. По индукцијској претпоставци тада није ни $\Delta \vdash \phi_\nu(t)$. Из $\Delta \vdash \forall x \phi_\nu(x)$ следи да је $\Delta \vdash \phi_\nu(t)$ па из те противуречности следи да мора бити $M_A \models \forall x \neg \psi$.

(е) Нека ϕ није исказ и нека су међу променљивим $x_o, \ldots, x_n$ све њене слободне променљиве. Тада је $\Delta \vdash \phi$ акко $\Delta \vdash \forall x_o \ldots \forall x_n \phi$ акко $M_A \models \forall x_o \ldots \forall x_n \phi$ акко $M_A \models \phi$.

Како је M_A модел теорије Δ која садржи теорију Γ , биће M (добијен из M_A сужењем језика L_A до језика L) модел теорије Γ .
Тиме је доказано да свака непротивуречна теорија Γ има модел.
(2) Нека је Γ противуречан скуп формула и $A \models \Gamma$. Како је због противуречности скупа формула Γ , $\Gamma \vdash \bot$, биће A модел и формуле $\bot$ што је према ставу 1.0 немогуће.

Скуп формула Δ је скуп аксиома теорије Γ ако је $\Delta^* = \Gamma^*$.

СТАВ 1.9 Свака теорија има скуп аксиома који су сви искази.

ДОКАЗ: Нека је Γ теорија и Δ скуп свих исказа из Γ^*. Тада је Δ скуп тражених аксиома. Нека је ϕ формула из Γ^* и нека се међу променљивим $x_o,\dots,x_n$ налазе све њене слободне променљиве. Тада $\forall x_o\dots\forall x_n\phi \in \Delta$ и $\forall x_o\dots\forall x_n\phi \dashv\vdash \phi$ па је $\Delta^* = \Gamma^*$.

Скуп свих исказа означавамо са Ψ. Ако са M означимо класу свих истотипних математичких система (система у којима се неки језик L може интерпретирати) и ако је $K \subset M$ тада је:

$$\mathrm{Th}\, K = \{\phi \in \Phi \mid \text{за свако } A \in K \quad A \models \phi\}$$

Специјално, уместо $\mathrm{Th}\{A\}$ пишемо $\mathrm{Th}A$. Слично ако је Γ теорија :

$$M\Gamma = \{A \in M \mid \text{за свако } \phi \in \Gamma \quad A \models \phi\}$$

$\mathrm{Th}K$ зовемо теоријом за K а $M\Gamma$ је класа свих модела теорије Γ.

СТАВ 1.10

(1) $M\,\emptyset = M$

(2) $\mathrm{Th}\,\emptyset = \Phi_o$

(3) $\mathrm{Th}M\Gamma = \Gamma^*$

(4) $\mathrm{Th}\,M\,\mathrm{Th}\,K = \mathrm{Th}\,K$

(5) $M\,\mathrm{Th}\,M\,\Gamma = M\Gamma$

ДОКАЗ: (3) У свим моделима теорије Γ тачне су све формуле из Γ. Према 1.0 тачност се чува при примени MP и Gen па $\Gamma^* \subset \mathrm{Th}\,M\,\Gamma$. Ако $\phi \notin \Gamma^*$ тада није $\Gamma \vdash \phi$ па је према 1.6 теорија $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ непротивуречна и према 1.8 има неки модел A. $A \in M\Gamma$ али ϕ није тачно у A па $\phi \notin \mathrm{Th}M\Gamma$. Дакле $\mathrm{Th}M\Gamma \subset \Gamma^*$ па $\mathrm{Th}M\Gamma = \Gamma^*$.

(4) Пошто је $K \subset M\mathrm{Th}K$ биће $\mathrm{Th}M\mathrm{Th}K \subset \mathrm{Th}K$. Према (3) $\mathrm{Th}K \subset (\mathrm{Th}K)^* = \mathrm{Th}M\mathrm{Th}K$ па је $\mathrm{Th}M\mathrm{Th}K = \mathrm{Th}K$. Одавде следи да је $\mathrm{Th}K$ увек затворена теорија, па је то јасан доказ значаја затворених теорија.

(5) Због (3) је $\Gamma \subset \mathrm{Th}M\Gamma$ па је $M\mathrm{Th}M\Gamma \subset M\Gamma$. Нека је $A \in M\Gamma$. То значи да за све $\phi \in \Gamma$ $A \models \phi$. На основу 1.0 (8) и (9) важиће за све $\phi \in \Gamma^*$ $A \models \phi$, но према (3) $\Gamma^* = \mathrm{Th}M\Gamma$ па је за све $\phi \in \mathrm{Th}M\Gamma$ $A \models \phi$. То значи да је $A \in M\mathrm{Th}M\Gamma$ па је $M\mathrm{Th}M\Gamma = M\Gamma$.

Нека је $A, B \in M$. Кажемо да су A и B елементарно еквивалентни ($A \equiv B$) акко је $\mathrm{Th}A = \mathrm{Th}B$.

СТАВ 1.11 Следеће је еквивалентно:

(1) $A \equiv B$

(2) за сваку формулу ϕ $A \models \phi$ акко $B \models \phi$

(3) за сваку формулу ϕ ако $A \models \phi$ онда $B \models \phi$

(4) $B \in M\mathrm{Th}_A$

ДОКАЗ: Очигледно (1) акко (2) и (3) акко (4). Такође је јасно да из (2) произлази (3). Доказујемо да из (3) следи (2).

Нека је ϕ нека формула и нека су међу променљивим $x_0, \dots, x_n$ све њене слободне променљиве. Нека је $B \models \phi$ и нека није $A \models \phi$. Тада постоји валуација $a \in A^{\omega}$ тако да није $A \models_a \phi$ па је $A \models_a \neg\phi$. Следи да је $A \models \exists x_0 \dots \exists x_n \neg\phi$ па је по претпоставци $B \models \exists x_0 \dots \exists x_n \neg\phi$. То значи да постоји валуација $b \in B^{\omega}$ тако да је $B \models_b \neg\phi$ па не може бити $B \models \phi$. Дакле мора бити $A \models \phi$ па је (2) доказано.

2. ИЗОМОРФИЗАМ

Истотипни математички системи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ су изоморфни ($\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) ако постоји бијекција $f: A \longrightarrow B$ и ако је:

(1) За сваку константу $e_\xi \in A (\xi < \alpha)$ и одговарајућу константу $e'_\xi \in B$ $f(e_\xi) = e'_\xi$;

(2) За сваку операцију $f_\xi (\xi < \beta)$ (дужине n) скупа A и одговарајућу операцију f'_ξ скупа B, и све $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$f(f_\xi(a_1, \ldots, a_n)) = f'_\xi\ (f(a_1), \ldots, f(a_n))$$

(3) За сваку релацију $r_\xi (\xi < \gamma)$ (дужине n) скупа A и одговарајућу релацију r'_ξ скупа B , и све $a_1, \ldots, a_n \in A$ $r_\xi(a_1, \ldots, a_n)$ акко $r'_\xi\ (f(a_1), \ldots, f(a_n))$.

СТАВ 2.0 Ако је $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ тада је и $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Ако је $\mathcal{A}$ коначан систем, важи и обрат.

<u>ДОКАЗ</u>: (1) По дефиницији изоморфизма, све атомске формуле тачне у $\mathcal{A}$ тачне су и у $\mathcal{B}$. Индукцијом по изграђености формула доказује се да то важи за све формуле.

(2) Нека је $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Формула σ :

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n ((x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_1 \neq x_n) \wedge (x_2 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_2 \neq x_n) \wedge \ldots$$
$$\wedge (x_{n-1} \neq x_n) \wedge \forall x_0 (x_0 = x_1 \vee \ldots \vee x_0 = x_n))$$ изражава својство система $\mathcal{A}$ да има тачно n елемената. Зато је $\mathcal{A} \models \sigma$ одакле због елементарне еквивалентности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ $\mathcal{B} \models \sigma$ па и $\mathcal{B}$ има тачно n елемената.

Доказујемо да постоји $b_1 \in B$ тако да је $(A,a_1)\equiv(B,b_1)$, при чему су (A,a_1) и (B,b_1) системи у којима се интерпретира језик L_1 добијен из језика L продужењем помоћу a_1. Нека $\phi,\theta \in Th(A,a_1)$, $B_\phi=\{b_o\in B\,|\,(B,b_o)\models\phi\}$ и $B_\theta=\{b_o\in B\,|\,(B,b_o)\models\theta\}$. Из $\phi,\theta\in Th(A,a_1)$ следи постојање формула $\phi_1(x_1)$ и $\theta_1(x_1)$ језика L, са највише једном променљивом x_1, тако да је $\phi_1(a_1)$ ϕ а $\theta_1(a_1)$ θ. Нека је $a=(a_k)_{k<\omega}$ и $b=(b_k)_{k<\omega}$. Тада је $A\models_a\phi_1(x_1)$ и $A\models_a\theta_1(x_1)$ па је $A\models_a\phi_1(x_1)\wedge\theta_1(x_1)$ тј. $A\models_a\exists x_1(\phi_1(x_1)\wedge\theta_1(x_1))$ сдакле је $A\models\exists x_1(\phi_1(x_1)\wedge\theta_1(x_1))$, јер је $\exists x_1(\phi_1(x_1)\wedge\theta_1(x_1))$ исказ. Због $A\equiv B$ биће $B\models\exists x_1(\phi_1(x_1)\wedge\theta_1(x_1))$ па постоји $c_1\in B$ тако да је $B\models_{b(1|c_1)}\phi_1(x_1)\wedge\theta_1(x_1)$ тј. $(B,c_1)\models\phi\wedge\theta$. Следи да је $B_\phi\cap B_\theta\neq\emptyset$ за све $\phi,\theta\in Th(A,a_1)$. Такође је пресек коначно много скупова B_ϕ непразан ако за све ϕ важи $\phi\in Th(A,a_1)$. Пошто је B коначан систем постоји само коначно много скупова B_ϕ $(\phi\in Th(A,a_1))$ па је $\bigcap_{\phi\in Th(A,a_1)}B_\phi\neq\emptyset$. То значи да постоји $b_1\in B(b_1\in\bigcap_{\phi\in Th(A,a_1)}B_\phi)$ такав да за све формуле ϕ језика L_1 из $(A,a_1)\models\phi$ следи $(B,b_1)\models\phi$. Према ставу 1.11

$$(A,a_1)\equiv(B,b_1).$$

Аналогно се доказује да за све $k=1,\ldots,n-1$ из $(A,a_1,\ldots,a_k)\equiv(B,b_1,\ldots,b_k)$ за неке $b_1,\ldots,b_k\in B$ произлази постојање елемента b_{k+1} из B за који је $(A,a_1,\ldots,a_{k+1})\equiv(B,b_1,\ldots,b_{k+1})$. Пошто је $(A,a_1,\ldots,a_{k+1})\models a_1\neq a_{k+1}\wedge\ldots\wedge a_k\neq a_{k+1}$ биће $(B,b_1,\ldots,b_{k+1})\models a_1\neq a_{k+1}\wedge\ldots\wedge a_k\neq a_{k+1}$ па су сви елементи $b_1,\ldots,b_{k+1}$ међусобно различити. За $k=n-1$ добијамо да је $(A,a_1,\ldots,a_n)\equiv(B,b_1,\ldots,b_n)$. Нека је $f:A\to B$ функција задата са $f(a_k) = b_k$ за $1 \leq k \leq n$. Како и A и B имају по n елемената биће f бијекција. Ако језик L садржи неки симбол e_ξ константе, тада је за неко k $(1 \leq k \leq n)$ $(A, a_1, \ldots, a_n) \models e_\xi = a_k$ па је $(B, b_1, \ldots, b_n) \models e_\xi = a_k$ па је $f(e_\xi) = f(a_k) = b_k = e'_\xi$. Ако је f_ξ m-арна операција скупа A и $a_{k_1}, \ldots, a_{k_m} \in A$ тада постоји $a_{k_o} \in A$

тако да је $(A, a_1, \ldots, a_n) \models f_\xi(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}) = a_{k_o}$ па је $(B, b_1, \ldots, b_n) \models f_\xi(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}) = a_{k_o}$ па је $f(f_\xi(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m})) =$
$= f(a_{k_o}) = b_{k_o} = f'_\xi(b_{k_1}, \ldots, b_{k_m}) = f'_\xi(f(a_{k_1}), \ldots, f(a_{k_m}))$.

Ако је r_ξ m-арна релација скупа A и $a_{k_1}, \ldots, a_{k_m} \in A$ тада је

$(A, a_1, \ldots, a_n) \models r_\xi(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m})$ или $(A, a_1, \ldots, a_n) \models \neg r_\xi(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m})$

па је $(B, b_1, \ldots, b_n) \models r_\xi(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m})$ тј.

$r_\xi(f(a_{k_1}), \ldots, f(a_{k_m}))$ или

$(B, b_1, \ldots, b_n) \models \neg r_\xi(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m})$ тј. $\neg r_\xi(f(a_{k_1}), \ldots, f(a_{k_m}))$.

У сваком случају важи $r_\xi(a_{k_1}, \ldots, a_{k_m})$ акко важи $r'_\xi(f(a_{k_1}), \ldots, f(a_{k_m}))$.

Дакле f је изоморфизам па је $A \simeq B$.

СТАВ 2.1. Нека је A математички систем и $f: A \longrightarrow B$ бијекција. На B се може дефинисати математички систем B тако да је f изоморфизам система A и B.

<u>ДОКАЗ</u>: Интерпретирајмо e_ξ као $f(e_\xi)$ за све $\xi < \alpha$. Операцијски симбол f_ξ дужине n интерпретирајмо као операцију f'_ξ дефинисану са

$f'_\xi(b_1, \ldots, b_n) = f(f_\xi(f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_n)))$

за све $b_1, \ldots, b_n \in B$. Релацијски симбол r_ξ дужине n интерпретирајмо као релацију r'_ξ дефинисану са

$r'_\xi(b_1, \ldots, b_n)$ акко $r_\xi(f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_n))$ за све $b_1, \ldots, b_n \in B$.

Дефинисане константе, операције и релације одређују на B систем B истотипан са A. Лако се доказује да је f изоморфизам система A и B.

3. ПОДСИСТЕМ И НАДСИСТЕМ

Нека су A и B истотипни системи при чему је још:

(1) $A \subset B$

(2) ако су $e_\xi \in A$ и $e'_\xi \in B$ $(\xi<\alpha)$ одговарајуће константе тада је $e_\xi = e'_\xi$

(3) ако су $f_\xi : A^n \to A$ и $f'_\xi : B^n \to B$ $(\xi<\beta)$ одговарајуће операције тада је $f_\xi = f'_\xi \restriction A^n$ (f_ξ је рестрикција f'_ξ на A^n)

(4) ако су $r_\xi \subset A^n$ и $r'_\xi \subset B^n$ $(\xi<\gamma)$ одговарајуће релације тада је $r_\xi = r'_\xi \cap A^n$ тада кажемо да је A подсистем система B или да је B надсистем (проширење) система A. Ознака је $A \subset B$.

Да би смо лакше говорили о проширењима, али не само због тога, уводимо појам дијаграма система A.

Дијаграм система A(Δ_A) је скуп свих атомских исказа (језика L_A) и негација атомских исказа (истог језика) који су тачни у A_A.

СТАВ 3.0. A се може изоморфно потопити у B (тј. постоји $C \subset B$ тако да је $A \cong B$) акко се B може продужити до модела за Δ_A

<u>ДОКАЗ</u>: Ако је f: $A \to B$ мономорфизам, тада је $(B,(f(a))_{a\in A})$ модел за Δ_A. Обрнуто ако је $(B,(f(a))_{a\in A})$ модел за Δ_A тада је f мономорфизам A у B.

СТАВ 3.1. Нека је Σ непротивуречна теорија језика L и Δ скуп исказа затворен у односу на дисјункцију. Следеће је еквивалентно:

(1) Σ има скуп аксиома Γ тако да је $\Gamma \subset \Delta$

(2) ако је $A \models \Sigma$ и за сваки исказ $\delta \in \Delta$ ако из $A \vdash \delta$ следи $B \models \delta$, тада је и $B \models \Sigma$.

ДОКАЗ: Очигледно из (1) следи (2). Докажимо обрат. Нека важи да ако је $A \models \Sigma$ и ако за сваки исказ $\delta \in \Delta$ из $A \models \delta$ произлази $B \models \delta$, тада је $B \models \Sigma$. Нека је $\Gamma = \{\delta \in \Delta | \Sigma \models \delta\}$. Следи да је $\Sigma \models \Gamma$. Доказујемо да је $\Gamma \models \Sigma$, па је тада Γ скуп аксиома за Σ. Нека је $B \models \Gamma$ и нека је $\Gamma' = \{\neg\delta | \delta \in \Delta, B \models \neg\delta\}$. $\Sigma \cup \Gamma'$ је непротивуречна теорија. Претпоставимо да није тј. $\Sigma \cup \Gamma' \vdash \perp$. Тада постоје искази $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$ тако да је $\Sigma \cup \{\neg\delta_1, \ldots, \neg\delta_n\} \vdash \perp$. Према ставу 1.5 $\Sigma \vdash (\neg\delta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\delta_n) \Rightarrow \perp$ па $\Sigma \vdash \neg(\neg\delta_1 \wedge \ldots \wedge \neg\delta_n)$ тј. $\Sigma \vdash \delta_1 \vee \ldots \vee \delta_n$. Како је Δ скуп исказа затворен у односу на дисјункцију биће $\delta_1 \vee \ldots \vee \delta_n \in \Gamma$ па $B \models \delta_1 \vee \ldots \vee \delta_n$ што противуречи томе да је $B \models \neg\delta_1, \ldots, B \models \neg\delta_n$. Дакле, $\Sigma \cup \Gamma'$ мора бити непротивуречна теорија, па има модел A. Нека је $\delta \in \Delta$ и $A \models \delta$. Ако није $B \models \delta$ тада је $B \models \neg\delta$ па је $\neg\delta \in \Gamma'$ и $A \models \neg\delta$ што је контрадикција. Дакле сваки исказ $\delta \in \Delta$ тачан у A тачан је и у B. Пошто је A модел за $\Sigma \cup \Gamma'$ биће $A \models \Sigma$. По претпоставци (2) биће и $B \models \Sigma$. Зато сваки модел B теорије Γ мора бити и модел теорије Σ па је $\Gamma \models \Sigma$ што је и требало показати.

Формула ϕ је универзална (егзистенцијална) ако је облика $\forall x_o \ldots \forall x_n\ \psi\ (\exists x_o \ldots \exists x_n \psi)$ где је ψ формула без квантора.

СТАВ 3.2. Теорија Σ језика L се чува у подсистемима акко има скуп универзалних исказа за скуп аксиома.

ДОКАЗ: (1) Јасно је да сваки универзалан исказ тачан у неком систему мора бити тачан и у сваком подсистему.

(2) Нека је Σ теорија која се чува у подсистемима и нека је Δ скуп свих исказа еквивалентних са неким универзалним исказом. Како је формула $(\forall x\phi \vee \psi) \Leftrightarrow \forall x(\phi \vee \psi)$ ваљана ако формула ψ не садржи променљиву x као слободну, биће скуп Δ затворен у односу на дисјункцију. Нека су A и B два система, таква да је $A \models \Sigma$ и да је сваки универзалан исказ тачан у A тачан и у B. Тада је сваки егзистенцијалан исказ тачан у B тачан и у A. Теорија $\Sigma \triangleq \Sigma \cup \Delta_B$ језика L_B је непротивуречна. Нека је $\{\phi_o, \ldots, \phi_n\}$ коначан подскуп скупа Δ_B и нека су $b_o, \ldots, b_m$ сви елементи из B који се јављају у формулама $\phi_o, \ldots, \phi_n$. Тада је $B \models \exists x_o \ldots \exists x_m (\phi_o' \wedge \ldots \wedge \phi_n')$ где су ϕ_i' $(i \leq n)$ формуле језика L добијене из формула ϕ_i језика L_B заменом свих елемената b_j $(j \leq m)$ променљивим x_j. По претпоставци

$A \models \exists x_o \ldots \exists x_m(\phi'_o \wedge \ldots \wedge \phi'_n)$ па теорија $\Sigma \cup \{\phi_o,\ldots,\phi_n\}$ не може бити непротивуречна. Следи да је и $\Sigma \cup \Delta_B$ непротивуречна теорија, па има модел C_B. Тада је B подсистем система C (став 3.0) и како је $C \models \Sigma$ биће и $B \models \Sigma$. Према ставу 3.1 теорија Σ има неки скуп универзалних исказа за скуп аксиома.

СТАВ 3.3. Формула ϕ се чува у подсистемима акко је еквивалентна неком универзалном исказу.

ДОКАЗ: Теорија $\{\phi\}$ се чува у подсистемима акко има скуп универзалних исказа Γ као скуп аксиома. Тада је $\Gamma \vdash \phi$. Према ставу 1.2 постоји коначан скуп $\{\phi_o,\ldots,\phi_n\} \subset \Gamma$ тако да је $\{\phi_o,\ldots,\phi_n\} \vdash \phi$. Пошто је $\phi \vdash \Gamma$ биће $\phi \vdash \{\phi_o,\ldots,\phi_n\}$ па је ϕ еквивалентна са $\phi_o \wedge \cdots \wedge \phi_n$. $\phi_o,\ldots,\phi_n$ су универзални искази па је $\phi_o \wedge \ldots \wedge \phi_n$ еквивалентна са универзалним исказом.

СТАВ 3.4. Теорија Σ језика L се чува у надсистемима акко има скуп егзистенцијалних исказа за скуп аксиома.

ДОКАЗ: (1) Јасно је да сваки егзистенцијалан исказ тачан у неком систему мора бити тачан и у сваком његовом надсистему.

(2) Нека је Σ теорија која се чува у надсистемима и нека је Δ скуп свих исказа еквивалентних неком егзистенцијалном исказу. Скуп Δ је затворен у односу на дисјункцију. Нека су A и B два система, таква да је $A \models \Sigma$ и да је сваки егзистенцијалан исказ тачан у A тачан и у B. Теорија $\Delta_A \cup ThB$ је непротивуречна. Ако није тада постоји бар један исказ $\sigma \in \Delta_A$ тако да је $ThB \vdash \neg\sigma$. Ако у σ све константе језика L_A које не припадају језику L заменимо променљивим $x_{n+1},\ldots,x_m$ које се не јављају у формули σ, за тако добијену формулу τ важи $ThB \vdash \forall x_{n+1} \ldots \forall x_m \neg\tau$. Због $\sigma \in \Delta_A$ биће $A \models \exists x_{n+1} \ldots \exists x_m \tau$ па важи и $B \models \exists x_{n+1} \ldots \exists x_m \tau$ што је немогуће. Зато је теорија $\Delta_A \cup ThB$ језика L_A непротивуречна па има модел C_A. Следи да је $A \subset C$ и $C \equiv B$. Пошто се теорија Σ чува у надсистемима биће $C \models \Sigma$. Према ставу 1.9 теорија Σ има скуп аксиома који су сви искази па из $C \equiv B$ следи $B \models \Sigma$. По ставу 3.1 теорија Σ има скуп егзистенцијалних исказа за скуп аксиома.

СТАВ 3.5. Формула ϕ се чува у надсистемима акко је еквивалентна неком егзистенцијалном исказу.

ДОКАЗ: Аналогно доказу става 3.3.

4. ЕЛЕМЕНТАРНИ ПОДСИСТЕМ И ЕЛЕМЕНТАРНИ НАДСИСТЕМ

Нека је језик L интерпретиран у системима A и B и нека је $A \subset B$. A је елементарни подсистем система B ако за сваку формулу ϕ и сваку валуацију $a \in A^{\omega}$ важи $A \models_a \phi$ акко $B \models_a \phi$. Ознака је $A \prec B$, а такође кажемо да је B елементарни надсистем система A .

СТАВ 4.0. Нека је $A \subset B$. Тада је $A \prec B$ акко за сваку формулу ϕ и сваку валуацију $a \in A^{\omega}$, ако је $B \models_a \exists x_n \phi$ тада постоји $b_n \in A$ тако да је $B \models_{a(n|b_n)} \phi$.

ДОКАЗ: Ако је $A \prec B$ и $B \models_a \exists x_n \phi$ тада је $A \models_a \exists x_n \phi$ па постоји $b_n \in A$ тако да је $A \models_{a(n|b_n)} \phi$. Следи да постоји $b_n \in A$ тако да је $B \models_{a(n|b_n)} \phi$.

Обрнуто, нека је ψ произвољна формула, $a \in A^{\omega}$ фиксирана и $b \in A^{\omega}$ произвољна валуација. Ако је ψ атомска формула тада је $A \models_a \psi$ акко $B \models_a \psi$. Нека је ψ формула облика $\neg\psi_1$ и нека за формулу ψ_1 важи: $A \models_b \psi_1$ акко $B \models_b \psi_1$. Тада је $A \models_a \psi$ акко $A \models_a \neg\psi_1$ акко није $A \models_a \psi_1$ акко није $B \models_a \psi_1$ акко $B \models_a \neg\psi_1$ акко $B \models_a \psi$. Нека је ψ облика $\psi_1 \vee \psi_2$ и нека за формуле ψ_1 и ψ_2 важи: $A \models_b \psi_1$ акко $B \models_b \psi_1$ и $A \models_b \psi_2$ акко $B \models_b \psi_2$. Тада је $A \models_a \psi$ акко $A \models_a \psi_1 \vee \psi_2$ акко $A \models_a \psi_1$ или $A \models_a \psi_2$ акко $B \models_a \psi_1$ или $B \models_a \psi_2$ акко $B \models_a \psi_1 \vee \psi_2$ акко $B \models_a \psi$. Нека је ψ формула облика $\exists x_n \psi_1$ и нека за формулу ψ_1 важи: $A \models_b \psi_1$ акко $B \models_b \psi_1$. Следи да је $A \models_a \psi$ акко $A \models_a \exists x_n \psi$ акко постоји $b_n \in A$: $A \models_{a(n|b_n)} \psi_1$ акко постоји $b_n \in A$: $B \models_{a(n|b_n)} \psi_1$ акко $B \models_a \exists x_n \psi_1$ акко $B \models_a \psi$.

СТАВ 4.1. Ако је $A \prec B$ тада је $A \equiv B$.

ДОКАЗ: Коришћењем става 1.11.

Обрат става 4.1 не важи увек. Али ако језик L довољно продужимо важиће и обрат.

СТАВ 4.2. Ако је $A \subset B$, следеће је еквивалентно:

(1) $A \prec B$

(2) за све коначне $C \subset A$ $(A,(a)_{a\in C}) \equiv (B,(a)_{a\in C})$

(3) за све $C \subset A$ $(A,(a)_{a\in C}) \prec (B,(a)_{a\in C})$

(4) за све $C \subset A$ $(A,(a)_{a\in C}) \equiv (B,(a)_{a\in C})$

(5) $(A,(a)_{a\in A}) \equiv (B,(a)_{a\in A})$

ДОКАЗ: (а) нека је $A \prec B$, C неки подскуп скупа A, ϕ произвољна формула језика L_C и $a \in A^{\omega}$. Нека се међу променљивим $x_o,\dots,x_n$ налазе све слободне променљиве формуле ϕ и нека су $c_1,\dots,c_m$ симболи константи језика L_C које се јављају у формули ϕ а нису симболи константи језика L. Нека је ψ формула добијена из ϕ заменом константи c_i $(i=1,\dots,m)$ променљивим x_{n+i} и a' валуација $a(n+i|c_i)$ $(i=1,\dots,m)$. Из $A \prec B$ следи да је $(A,(a)_{a\in C}) \models_a \phi$ акко $A \models_{a'} \psi$ акко $B \models_{a'} \psi$ акко $(B,(a)_{a\in C}) \models_a \phi$ па је $(A,(a)_{a\in C}) \prec (B,(a)_{a\in C})$. Дакле из (1) следи (3).

(б) Према ставу 4.1 из (3) следи (4).

(ц) (2) и (5) су тривијалне последице (4).

(д) Нека је $(A,(a)_{a\in C}) \equiv (B,(a)_{a\in C})$ за све коначне подскупове C скупа A, нека је ϕ формула језика L и $a \in A^{\omega}$. Нека се међу променљивим $x_o,\dots,x_n$ налазе све слободне променљиве формуле ϕ и нека је ψ формула добијена из ϕ заменом свих x_i са a_i $(i=o,\dots,n)$. Пошто је $C=\{a_o,\dots,a_n\}$ коначан подскуп скупа A биће $(A,a_o,\dots,a_n) \equiv (B,a_o,\dots,a_n)$ па је $A \models_a \phi$ акко $(A,a_o,\dots,a_n) \models_a \psi$ акко $(B,a_o,\dots,a_n) \models_a \psi$ акко $B \models_a \phi$. Дакле из (2) следи (1).

(е) Да из (5) следи (1) доказује се аналогно доказу да из (2) следи (1).

5. УНИЈА ЛАНЦА СИСТЕМА

Нека је $(A_\nu)_{\nu<\delta}$ фамилија истотипних система при чему из $\mu\leqslant\nu<\delta$ следи $A_\mu \subset A_\nu$. Нека је A систем за који важи:

(1) $A = \bigcup\limits_{\nu<\delta} A_\nu$

(2) за све $\nu<\delta$ $\quad A_\nu \subset A$

Тада кажемо да је A унија ланца $(A_\nu)_{\nu<\delta}$ и пишемо $A = \bigcup\limits_{\nu<\delta} A_\nu$. Специјално, ланац $(A_\nu)_{\nu<\delta}$ код кога из $\mu\leqslant\nu<\delta$ следи $A_\mu \prec A_\nu$, називамо елементарним ланцем.

СТАВ 5.0. Ако је A унија елементарног ланца $(A_\nu)_{\nu<\delta}$ тада је за све $\nu<\delta$ $\quad A_\nu \prec A$.

ДОКАЗ: С обзиром на став 4.0, индукцијом по броју егзистенцијалних квантора формуле ϕ, доказујемо да је за све $\nu<\delta$ и све валуације $a \in A_\nu^\omega$ $\quad A_\nu \models_a \phi$ акко $A \models_a \phi$.

Нека је формула ϕ облика $\exists x_n \psi$ при чему се међу променљивим $x_0,\ldots,x_n$ налазе све слободне променљиве формуле ψ. Ако је $A_\nu \models_a \phi$ тада је $A_\nu \models_a \exists x_n \psi$ па постоји $b_n \in A_\nu : A_\nu \models_{a(n|b_n)} \psi$. Према индукцијској хипотези постоји $b_n \in A : A \models_{a(n|b_n)} \psi$ па је $A \models_a \exists x_n \psi$. Ако је обрнуто $A \models_a \phi$ тада постоји $b_n \in A : A \models_{a(n|b_n)} \psi$ па за неко $\mu<\delta$ постоји $b_n \in A_\mu : A \models_{a(n|b_n)} \psi$ па по индукцијској хипотези постоји $b_n \in A_\mu$: $A_\mu \models_{a(n|b_n)} \psi$. Ако је $\mu\leqslant\nu$ тада је $A_\nu \models_{a(n|b_n)} \psi$ и $b_n \in A_\nu$ па је $A_\nu \models_a \exists x_n \psi$ тј. $A_\nu \models_a \phi$. Ако је $\nu<\mu$ тада је $a \in A_\mu^\omega$ па је $A_\mu \models_a \exists x_n \psi$ тј. $A_\mu \models_a \phi$ одакле због $A_\nu \prec A_\mu$ следи да је $A_\nu \models_a \phi$.

Како је $A_\nu \subset A$ за све $\nu<\delta$ биће $A_\nu \models_a \phi$ акко $A \models_a \phi$ за све $\nu<\delta$, $a \in A_\nu^\omega$ и све безкванторне формуле ϕ језика L. Тиме је доказано да то важи и за све формуле ϕ језика L.

Формула је универзално-егзистенцијална ако је облика $\forall x_0 \ldots \forall x_n \exists x_{n+1} \ldots \exists x_m \ \psi$ где је ψ безкванторна формула. Универзалне и егзистенцијалне формуле су такође универзално-егзистенцијалне. Аналогно се дефинишу егзистенцијално-универзалне формуле.

СТАВ 5.1. Теорија Σ језика L чува се у унији ланца система акко Σ има скуп универзално-егзистенцијалних исказа за скуп аксиома.

ДОКАЗ: (1) Очигледно, сваки универзално-егзистенцијални исказ се чува у унији ланца система.

(2) Нека је Σ теорија која се чува у унији ланца система, а Δ скуп свих исказа еквивалентних неком универзално-егзистенцијалном исказу. Скуп Δ је затворен у односу на дисјункцију. Нека је $A \models \Sigma$ и нека је сваки универзално-егзистенцијални исказ тачан у A тачан и у B. Тада је сваки егзистенцијално-универзални исказ тачан у B тачан и у A.

(а) Доказујемо да постоје A' и B' тако да је $B \subset A'$, $A' \subset B'$, $B \prec B'$ и $A \equiv A'$.

Продужимо језик L до језика L_B. Нека је Δ_1 скуп свих универзалних исказа језика L_B тачних у B_B. Теорија Th $A \cup \Delta_1$ је непротивуречна. Ако би Th $A \cup \Delta_1$ била противуречна морало би бити Th$A \vdash \neg\sigma$ бар за један исказ $\sigma \in \Delta_1$. Нека се у исказу σ јављају константе $b_1, \ldots, b_m$ језика L_B које не припадају језику L и нека су међу променљивим $x_0, \ldots, x_n$ све (везане) променљиве исказа σ. Пошто $b_1, \ldots, b_n$ нису константе језика L биће Th $A \vdash \forall x_{n+1} \ldots \forall x_{n+m} \neg \tau$ где је τ формула добијена из σ заменом свих $b_i (1 \leq i \leq m)$ променљивим x_{n+i}. По претпоставци је $B_B \models \sigma$ па је $B \models \exists x_{n+1} \ldots \exists x_{n+m} \tau$. Пошто је τ универзални исказ биће $A \models \exists x_{n+1} \ldots \exists x_{n+m} \tau$, што је немогуће, па Th $A \cup \Delta_1$ мора бити непротивуречна теорија.

Нека је A'_B модел теорије Th$A \cup \Delta_1$. Тада је $A \equiv A'$ и $B \subset A'$.

Штавише, сваки универзални исказ тачан у $\mathcal{B}_B$ мора бити тачан и у A'_B, па је сваки егзистенцијални исказ тачан у A'_B тачан и у $\mathcal{B}_B$.

Теорија $\Delta_{A'_B} \cup Th\mathcal{B}_B$ језика $L_{B\cup A'}$ је непротивуречна. Ако није постоји бар један исказ $\sigma \in \Delta_{A'_B}$ тако да је $Th\ \mathcal{B}_B \vdash \neg\sigma$. Ако је τ формула добијена из σ заменом свих $a_i \in A'\setminus B$ одговарајућим промењљивим x_i, биће $Th\ \mathcal{B}_B \vdash \neg\tau$. Из $\sigma \in \Delta_{A'_B}$ следи да је $A'_B \models \ldots \exists x_i \ldots \tau$ па је и $\mathcal{B}_B \models \ldots \exists x_i \ldots \tau$ што је немогуће.

Нека је $\mathcal{B}'_{B\cup A'}$ модел за $\Delta_{A'_B} \cup Th\mathcal{B}_B$. Тада је $A' \subset \mathcal{B}'$ и према ставу 4.2 $\mathcal{B} \prec \mathcal{B}'$. Следи да је сваки универзално-егзистенцијални исказ тачан у A' , тачан и у $\mathcal{B}'$.

(б) Формирајмо ланац система $(C_n)_{n<\omega}$ на следећи начин:

(1) $C_0 = \mathcal{B}$

(2) $C_1 = A'$

(3) C_{2m+2} и C_{2m+3} добијају се из C_{2m} и C_{2m+1} $(m<\omega)$ помоћу (а).

Нека је $C = \bigcup_{n<\omega} C_n$. Тада је $C = \bigcup_{m<\omega} C_{2m+1}$, при чему је $C_{2m+1} \equiv A$ за све $m<\omega$ па је $C_{2m+1} \models \Sigma$. Како се Σ чува у унији ланаца система биће $C \models \Sigma$. Ланац $(C_{2m})_{m<\omega}$ је елементаран и $C = \bigcup_{m<\omega} C_{2m}$ па је према ставу 5.0 $C_0 \prec C$ тј. $\mathcal{B} \prec C$. Следи да је $\mathcal{B} \models \Sigma$ па према ставу 3.1 Σ има скуп универзално-егзистенцијалних исказа за скуп аксиома.

СТАВ 5.2. Формула ϕ се чува у унији система акко је еквивалентна неком универзално-егзистенцијалном исказу.

<u>ДОКАЗ</u>: Аналогно доказу става 3.3.

6. ХОМОМОРФИЗАМ

Нека су A и B истотипни системи и нека је:

(1) $f : A \longrightarrow B$

(2) ако су $e_\xi \in A$ и $e'_\xi \in B(\xi<\alpha)$ одговарајуће константе тада је $e'_\xi = f(e_\xi)$.

(3) ако су f_ξ и $f'_\xi(\xi<\beta)$ одговарајуће n-арне операције тада је за све $a_1,\dots,a_n \in A$: $f(f_\xi(a_1,\dots,a_n)) = f'_\xi(f(a_1),\dots,f(a_n))$

(4) ако су r_ξ и r'_ξ $(\xi<\gamma)$ одговарајуће n-арне релације тада је за све $a_1,\dots,a_n \in A$: ако је $r_\xi(a_1,\dots,a_n)$ тада је $r'_\xi(f(a_1),\dots,f(a_n))$.

Тада кажемо да је f хомоморфизам система A и B и пишемо $f : A \longrightarrow B$. Ако је f сирјекција кажемо да је f епиморфизам или да је B хомоморфна слика система A ($B = f(A)$).

Позитивни дијаграм система A (Δ^+_A) је скуп свих атомских исказа језика L_A тачних у A_A. Разлози увођења овог појма биће одмах јасни.

СТАВ 6.0. Нека су A и B истотипни системи. Постоји хомоморфизам $f: A \longrightarrow B$ акко се B може продужити до модела за Δ^+_A .

ДОКАЗ: Аналогно доказу става 3.0.

Формула је позитивна ако је изграђена од атомских формула једино применом конјункције, дисјункције и квантора.

СТАВ 6.1. Теорија Σ језика L се чува у хомоморфним сликама акко има скуп позитивних исказа за скуп аксиома.

ДОКАЗ: (1) Индукцијом по изграђености позитивних формула лако се доказује да се свака позитивна формула чува у хомоморфним сликама.

(2) Нека се теорија Σ чува у хомоморфним сликама и нека су A и B такви системи да је $A \models \Sigma$ а у B важе сви позитивни искази који важе у A. Скуп Δ свих позитивних исказа затворен је у односу на дисјункцију.

(а) Доказујемо да постоји елементарни надсистем B' система B и хомоморфизам f: $A \to B'$ тако да сваки позитиван исказ који важи у A_A важи у $(B,(f(a))_{a\in A})$.

Нека је Δ_1 скуп свих позитивних исказа језика L_A тачних у A_A. Пошто су сви позитивни искази тачни у A, тачни и у B биће теорија $\Delta_1 \cup \mathrm{Th}\, B_B$ непротивуречна теорија језика $L_{A\cup B}$. Нека је $(B'_B, (a')_{a\in A})$ неки модел те теорије. Тада је $B \prec B'$ и ако f дефинишемо тако да буде $f(a)=a'$, f је хомоморфизам и сваки позитиван исказ тачан у A_A тачан је и у $(B',(f(a))_{a\in A})$.

(б) Постоји елементарно проширење A' система A и пресликавање g : $B' \to A'$ тако да је сваки позитиван исказ тачан у $(A',(g(b))_{b\in B'})$ тачан и у B'_B.

Нека је Δ_2 скуп свих исказа облика $\neg\phi$ где је ϕ позитиван исказ, при чему је $B'_{B'} \models \neg\phi$. Теорија $\mathrm{Th}A_A \cup \Delta_2$ језика $L_{A\cup B'}$ је непротивуречна јер су сви позитивни искази тачни у A тачни и у B. Нека је $(A'_A,(b')_{b\in B'})$ неки модел теорије $\mathrm{Th}A_A \cup \Delta_2$. Тада је $A \prec A'$ и ако g дефинишемо тако да буде $g(b) = b'$, тада сваки позитиван исказ ϕ тачан у $(A',(g(b))_{b\in B'})$ мора бити тачан и у $B_{B'}$ иначе у $B_{B'}$ важи $\neg\phi$ па и у $(A',(g(b))_{b\in B'})$ важи $\neg\phi$ што је контрадикција.

(ц) Дефинишимо елементарне ланце $(A_n)_{n<\omega}$ и $(B_n)_{n<\omega}$ на следећи начин:

(1) $A_0 = A$

(2) $B_0 = B$

(3) B_{n+1} се добија из A_n и B_n као у (а)

(4) A_{n+1} се добија из A_n и B_{n+1} као у (б).

Притом је, због $f_n \subset g_n^{-1} \subset f_{n+1}$, f_{n+1} проширење хомоморфизма f_{n+1}: $A_n \to B_{n+1}$ при чему је сваки позитиван исказ тачан у

$(A_n, (a_o)_{a_o \in A_o}, (g_1(b_1))_{b_1 \in B_1}, \ldots, (a_n)_{a_n \in A_n})$ тачан и у $(B_{n+1}, (f_o(a_o))_{a_o \in A_o}, (b_1)_{b_1 \in B_1}, \ldots, (f_n(a_n))_{a_n \in A_n})$. Нека је $A_\omega = \bigcup_{n<\omega} A_n$, $B_\omega = \bigcup_{n<\omega} B_n$ и $f_\omega = \bigcup_{n<\omega} f_n$. f_ω је хомоморфизам система A_ω и B_ω који је због $g_n^{-1} \subset f_\omega$ $(n<\omega)$ епиморфизам. Према ставу 5.0 $A \prec A_\omega$ па је $A_\omega \models \Sigma$. Пошто се Σ чува у хомоморфним сликама биће $B_\omega \models \Sigma$. Према ставу 5.0 $B \prec B_\omega$ па је $B \models \Sigma$. На основу става 3.1 Σ има скуп позитивних исказа за скуп аксиома.

СТАВ 6.2. Формула ϕ се чува у хомоморфним сликама акко је еквивалентна позитивној формули.

<u>ДОКАЗ</u>: Аналогно доказу става 3.3.

7. УЛТРАПРОИЗВОД

У овом што следи претпоставићемо да језик L има само један симбол константе e и по један релацијски и операцијски симбол r и f, оба дужине 2. Њих задржавамо као представнике одговарајућих фамилија симбола. Лако је увидети да општост резултата до којих ћемо доћи није умањена овом претпоставком.

Нека је I непразан скуп и $(A_i)_{i\in I}$ фамилија истотипних система $A_i=(A_i, e_i, f_i, r_i)$. Нека је F прави филтер на I. То значи да је F непразна фамилија подскупова скупа I која има следећа својства:

(1) ако $J,K\in F$ онда и $J\cap K\in F$

(2) ако $J\in F$ и $J\subset K$ тада и $K\in F$

(3) $\emptyset\notin F$

На скупу $B=\prod_{i\in I} A_i$ дефинишемо релацију $\sim$ на следећи начин:

$(a_i)_{i\in I}\sim(b_i)_{i\in I}$ акко $\{i\in I \mid a_i=b_i\}\in F$.

СТАВ 7.0. Релација $\sim$ је релација еквиваленције скупа $\prod_{i\in I} A_i$.

ДОКАЗ: (1) Тривијално се доказује да је $\sim$ рефлексивна и симетрична релација.

(2) Нека је $a\sim b$ и $b\sim c$. Тада је $I_1=\{i \mid a_i=b_i\}\in F$ и $I_2=\{i \mid b_i=c_i\}\in F$, где је $a=(a_i)_{i\in I}$, $b=(b_i)_{i\in I}$ и $c=(c_i)_{i\in I}$. Пошто је F филтер биће $I_1\cap I_2\in F$ па је због $I_1\cap I_2\subset\{i \mid a_i=c_i\}$ и $\{i \mid a_i=c_i\}\in F$ тј. $a\sim c$. Релација $\sim$ је и транзитивна.

У књизи Models and ultraproducts (стр. 88), аутори Bell и Slomson тврде (без доказа) да ако је $(A_i)_{i\in I}$ фамилија скупова од којих сваки има више од два елемента и $\sim$ релација еквиваленције скупа $B=\prod_{i\in I} A_i$, тада је $F=\{J\subset I \mid$ постоје $a,b\in B : a\sim b$ и $\{i\in I \mid a_i=b_i\}\subset J\}$ прави филтер на I . Дајемо противпример за ово тврђење. Нека је $I=\{1,2\}$, $A_1=\{a_{11},a_{12},a_{13}\}$ и $A_2=\{a_{21},a_{22},a_{23}\}$. Нека је $\sim$ најмања релација еквиваленције на $A_1\times A_2$ која садржи релацију $\sim_0=\{((a_{11},a_{22}),(a_{12},a_{21}))\}$. Пошто је $(a_{11},a_{22})\sim(a_{12},a_{21})$ и одговарајући скуп индекса је празан биће F неправи филтер на I.

Нека је $B=(B,\overline{e},\overline{f},\overline{r})$ систем дефинисан са:
$\overline{e}=(e_i)_{i\in I}$, $\overline{f}((a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I})=(f_i(a_i,b_i))_{i\in I}$ и
$\overline{r}((a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I})$ акко $\{i\in I \mid r_i(a_i,b_i)\}\in F$.

СТАВ 7.1. Релација $\sim$ је конгруенција система B .

ДОКАЗ: (1) Према ставу 7.0 $\sim$ је релација еквиваленције.

(2) Нека је $a\sim b$ и $c\sim d$. Тада је $I_1=\{i \mid a_i=b_i\}\in F$ и $I_2=\{i \mid c_i=d_i\}\in F$ где је $a=(a_i)_{i\in I}$, $b=(b_i)_{i\in I}$, $c=(c_i)_{i\in I}$ и $d=(d_i)_{i\in I}$. Пошто је F филтер $I_1\cap I_2\in F$ па како је $I_1\cap I_2\subset\{i \mid f_i(a_i,c_i)=f_i(b_i,d_i)\}$ биће и $\{i \mid f_i(a_i,c_i)=f_i(b_i,d_i)\}\in F$ па је $\overline{f}(a,c)\sim\overline{f}(b,d)$. Релација $\sim$ је сагласна са операцијом $\overline{f}$.

(3) Нека је $a\sim b, c\sim d$ и $\overline{r}(a,c)$. Тада је $I_1=\{i \mid a_i=b_i\}\in F$, $I_2=\{i \mid a_i=b_i\}\in F$ и $K=\{i \mid r_i(a_i,c_i)\}\in F$ па како је $I_1\cap I_2\cap K\subset\{i \mid r_i(b_i,d_i)\}$ биће и $\{i \mid r_i(b_i,d_i)\}\in F$ па је $\overline{r}(b,d)$. Релација $\sim$ је сагласна и са релацијом $\overline{r}$.

Систем $B/_\sim$ који се обично означава са $\prod_{i\in I} A_i/_F$ назива се редукованим производом фамилије $(A_i)_{i\in I}$. У специјалном случају када је F ултрафилтер, тј. филтер који задовољава услов $J\in F$ или $I\setminus J\in F$ за све $J\subset I$, редуковани производ називамо ултрапроизводом.

Основни став о ултрапроизводима је теорема Łoś-а :

СТАВ 7.2. Нека је $(A_i)_{i\in I}$ фамилија истотипних система и F ултрафилтер на I . Ако је A ултрапроизвод фамилије $(A_i)_{i\in I}$

тада за сваку валуацију $a^{\sim}=(a^{\sim}_k)_{k<\omega}$ на A (и одговарајуће валуације $a^*_i=(a_{ik})_{k<\omega}$ $(i\in I)$, при чему је $a_k=(a_{ik})_{i\in I}$) и сваку формулу ϕ језика L важи: $A\models_{a^{\sim}}\phi$ акко $\{i\in I|A_i\models_{a^*_i}\phi\}\in F$

ДОКАЗ: (1) Пре доказа саме теореме доказујемо да за сваки терм t језика L, у помоћном систему B важи $t(a)=(t(a_i))_{i\in I}$.

Ако је терм t променљива x_n, тада је $t(a)=a_n=$ $=(a_{ni})_{i\in I}=(t(a_i))_{i\in I}$.

Ако је терм t константа e, тада је $t(a)=\overline{e}=(e_i)_{i\in I}=$ $=(t(a_i))_{i\in I}$.

Ако је терм t облика $f(t_1,t_2)$ где су t_1 и t_2 терми за чије вредности је $t_1(a)=(t_1(a_i))_{i\in I}$ и $t_2(a)=(t_2(a_i))_{i\in I}$, тада је $t(a)=\overline{f}(t_1(a),t_2(a)) = \overline{f}((t_1(a_i))_{i\in I},(t_2(a_i))_{i\in I} =$ $=(f_i(t_1(a_i),\ t_2(a_i)))_{i\in I}=(t(a_i))_{i\in I}$.

Нека је $d^{\sim}=(d^{\sim}_k)_{k<\omega}$ произвољна валуација на A (и $d^*_i=(d_{ik})_{k<\omega}$ одговарајуће валуације на A_i $(i\in I)$, при чему је $d_k=(d_{ik})_{i\in I}$).

(2) Нека је ϕ атомска формула облика $t_1=t_2$ за неке терме t_1 и t_2. Тада је $A\models_{a^{\sim}}\phi$ акко $A\models_{a^{\sim}}t_1=t_2$ акко $t_1(a)\sim t_2(a)$ акко $(t_1(a_i))_{i\in I}\sim(t_2(a_i))_{i\in I}$ акко $\{i\in I|\ t_1(a_i)=t_2(a_i)\}\in F$ акко $\{i|A_i\models_{a^*_i}t_1=t_2\}\in F$ акко $\{i|A_i\models_{a^*_i}\phi\}\in F$.

(3) Ако је ϕ атомска формула облика $r(t_1,t_2)$ доказ је аналоган оном у тачки (2).

(4) Нека је ϕ формула облика $\neg\psi$ и нека за формулу ψ важи да је $A\models_{d^{\sim}}\psi$ акко $\{i|A_i\models_{d^*_i}\psi\}\in F$. Тада је $A\models_{a^{\sim}}\phi$ акко $A\models_{a^{\sim}}\neg\psi$ акко није $A\models_{a^{\sim}}\psi$ акко $\{i|A_i\models_{a^*_i}\psi\}\notin F$ акко $I\setminus\{i|A_i\models_{a^*_i}\psi\}\in F$ акко $\{i|$ није $A_i\models_{a^*_i}\psi\}\in F$ акко $\{i|A_i\models_{a^*_i}\neg\psi\}\in F$ акко $\{i|A_i\models_{a^*_i}\phi\}\in F$.

(5) Нека је формула облика $\phi_1\vee\phi_2$ и нека је $A\models_{d^{\sim}}\phi_j$ акко $\{i|A_i\models_{d^*_i}\phi_j\}\in F$ за $j=1,2$. Тада је $A\models_{a^{\sim}}\phi$ акко $A\models_{a^{\sim}}\phi_1\vee\phi_2$ акко

$A \models_{a^\sim} \phi_1$ или $A \models_{a^\sim} \phi_2$ акко $\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \phi_1\} \in F$ или $\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \phi_2\} \in F$ акко $\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \phi_1\} \cup \{i \mid A_i \models_{a_i^*} \phi_2\} \in F$ акко $\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \phi_1$ или $A_i \models_{a_i^*} \phi_2\} \in F$ акко $\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \phi_1 \vee \phi_2\} \in F$ акко $\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \phi\} \in F$.

(6) Нека је ϕ формула облика $\exists x_n \psi$ и нека је $A \models_{a^\sim} \psi$ акко $\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \psi\} \in F$. Тада је $A \models_{a^\sim} \phi$ акко $A \models_{a^\sim} \exists x_n \psi$ акко постоји $b_n^\sim \in A : A \models_{a^\sim(n|b_n^\sim)} \psi$ акко постоји $b_n^\sim \in A$: $\{i \mid A_i \models_{a_i^*(n|b_{in})} \psi\} \in F$

из чега следи да $\{i \mid$ постоји $b_{in} \in A_i : A_i \models_{a_i^*(n|b_{in})} \psi\} \in F$ акко

$\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \exists x_n \psi\} \in F$ акко $\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \phi\} \in F$.

Тиме је доказано да из $A \models_{a^\sim} \phi$ следи $\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \phi\} \in F$.

За доказ обрата довољно је, према претходном, доказати да из $\{i \mid$ постоји $b_{in} \in A_i : A_i \models_{a_i^*(n|b_{in})} \psi\} \in F$ следи да постоји $b_n^\sim \in A$ тако да је $\{i \mid A_i \models_{a_i^*(n|b_{in})} \psi\} \in F$.

Претпоставимо антецеденс. За оне $i \in I$ за које постоји $b_{in} \in A_i$ тако да је $A_i \models_{a_i(n|b_{in})} \psi$, нека је $c_{in} = b_{in}$, а за оне $i \in I$ за које не постоји b_{in} тако да је $A_i \models_{a_i(n|b_{in})} \psi$, нека је c_{in} произвољно. $c_n^\sim = (c_{in})_{i \in I}^\sim \in A$ и $\{i \mid A_i \models_{a_i(n|c_{in})} \psi\} \in F$ па консеквенс важи.

Тиме је став 7.2. у потпуности доказан.

8. УОПШТЕЊЕ УЛТРАПРОИЗВОДА

СТАВ 8.0. Нека је $(A_i)_{i\in I}$ фамилија система у којима се интерпретира језик L , F ултрафилтер на I и $A \prec \prod_{i\in I} A_i/F$. Нека је $a^{\sim}=(a^{\sim}_k)_{k<\omega}$ валуација на A и $a^*_i=(a_{ik})_{k<\omega}$ валуација на A_i $(i\in I)$, при чему је $a_k=(a_{ik})_{i\in I}$. Тада за сваку формулу ϕ језика L важи:

$$A \models_{a^{\sim}} \phi \quad \text{акко} \quad \{i\in I \mid A_i \models_{a^*_i} \phi\} \in F$$

ДОКАЗ: Према ставу 7.2 и дефиницији елементарног подсистема.

Такође за све $n<\omega$ важи: ако за све $i\in I$ постоје $b_{in} \in A_i$ такви да је $\{i \mid A_i \models_{a^*_i(n|b_{in})} \phi\} \in F$ тада постоји $(c_{in})^{\sim}_{i\in I} \in A$ тако да је $\{i \mid A_i \models_{a^*_i(n|c_{in})} \phi\}$ F.

Претходно неколико дефиниција.

Нека је дата фамилија S подскупа скупа I , при чему $I\in S$. За (мета)предикат$\overline{\phi}$ (чија истинитост зависи само од избора $i\in I$) кажемо да важи за скоро све i из I (скоро свуда на I) ако $\{i\in I;\ \overline{\phi}\}\in S$.

Нека је дат систем D , фамилија система $(A_i)_{i\in I}$ и придруживање $\rho\subset D\times\prod_{i\in I} A_i$, при чему за свако $b\in D$ постоји $b'\in\prod_{i\in I} A_i$ тако да је $\rho(b,b')$ и за све $b_1,b_2\in D$ и свако $b'\in\prod_{i\in I} A_i$ из $\rho(b_1,b')$ и $\rho(b_2,b')$ следи $b_1=b_2$. Валуације $b_i=(b_{ik})_{k<\omega}$ на D и $a^*_i=(a_{ik})_{k<\omega}$ на $A_i(i\in I)$ називамо $(\rho$-) везаним ако је за све $k<\omega$ $\rho(b_k,(a_{ik})_{i\in I})$.

За нас посебан значај имају оне фамилије S које се изражавају помоћу $(A_i)_{i\in I}$ и D

$(S=\{\{i\in I;\ A_i \models_{a^*_i} \phi\} \mid D\models_{b}\phi,\ \phi\in\Phi\ ,b\in D^{\omega},$ b и $a^*_{i(i\in I)}$ су везане валуације) који су везани следећим условом:

(*) за сваку формулу ϕ , све валуације $a^*_{i}(i\in I)$ везане са неком валуацијом b на D и све $n<\omega$: ако за све i из I постоје $c_{in}\in A_i$ тако да за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*(n|c_{in})} \phi$ тада постоји $c_n \in D$ тако да за све $(c'_{in})_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ за које је $\rho(c_n,(c'_{in})_{i\in I})$, буде и за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*(n|c'_{in})} \phi$

СТАВ 8.1. Нека је дат систем D , фамилија система $(A_i)_{i\in I}$ и придруживање $\rho\subset D\times \prod_{i\in I} A_i$, при чему за свако $b\in D$ постоји $b'\in\prod_{i\in I} A_i$ тако да је $\rho(b,b')$ и за све $b_1,b_2\in D$ и свако $b'\in\prod_{i\in I} A_i$ из $\rho(b_1,b')$ и $\rho(b_2,b')$ следи $b_1=b_2$. Нека су дате везане валуације b на D и $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ на A_i $(i\in I)$ и нека је

$S=\{\{i\in I|A_i\models_{a_i^*}\phi\}|\ D\models_b\phi,\phi\in\Phi, b\in D^\omega$, b и a_i^* $(i\in I)$ су везане валуације$\}$

при чему је задовољен услов (*) Тада постоји ултрафилтер F на I и систем $C\prec\prod_{i\in I} A_i/_F$ тако да је:

(1) $D\simeq C$

(2) $A_i\models_{a_i^*}\phi$ за скоро све i из I акко $\{i\in I\mid A_i\models_{a_i^*}\phi\}\in F.$

ДОКАЗ: Доказ става 8.1 изводимо помоћу неколико лема.

ЛЕМА 1. Из претпоставки става 8.1 следи постојање система A за који су испуњени услови:

(1) $A\subset\prod_{i\in I} A_i$

(2) $A\simeq D$

(3) за сваку формулу ϕ језика L , све валуације $a=(a_k)_{k<\omega}$ на A (и одговарајуће валуације $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ на A_i, при чему је

$a_k=(a_{ik})_{i\in I}$) и све $n<\omega$: ако за све $i\in I$ постоје $c_{in}\in A_i$ тако да је за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*(n|c_{in})} \phi$ тада постоји $(c'_{in})_{i\in I}\in A$ тако да је за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*(n|c'_{in})} \phi$

(4) за сваку формулу ϕ језика L све валуације $a=(a_k)_{k<\omega}$ на A (и одговарајуће валуације $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ на A_i , при чему је $a_k=(a_{ik})_{i\in I}$) $A \models_a \phi$ акко за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*} \phi$.

ДОКАЗ: Нека је A такав подскуп скупа $\prod_{i\in I} A_i$ да за свако $b\in D$ постоји јединствени $b'\in A$: $\rho(b,b')$, при чему за сваки $b'\in A$ постоји $b\in D$: $\rho(b,b')$. Придруживање ρ тада одређује функцију $g: D\to A$ дефинисану са $b'=g(b)$ акко $\rho(b,b')$. По дефиницији придруживања ρ g је дефинисана на целом D а по дефиницији A , не постоје различити елементи из A који су слике истог елемента из D . Према услову који задовољава придруживање ρ , g је инјекција, а скуп A је тако дефинисан да је g и сирјекција. Пошто је функција g бијекција , према ставу 2.1, на скупу A може се дефинисати систем A тако да је g изоморфизам. Тиме је доказано (1) и (2). (3) следи из (*) због изоморфизма система A и D . Наиме, ако је ϕ произвољна формула, $a=(a_k)_{k<\omega}$ произвољна валуација на A (и $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ одговарајуће валуације на A_i , при чему је $a_k=(a_{ik})_{i\in I}$) и n произвољан пририродан број и ако за све i из I постоје $c_{in}\in A_i$ тако да за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*(n|c_{in})} \phi$, тада је валуација $b=(g^{-1}(a_k))_{k<\omega}$ на D везана са валуацијама a_i^* ($i\in I$) па према (*) постоји $c_n\in D$ тако да је за све $(c'_{in})_{i\in I}\in\prod_{i\in I} A_i$ за које је $\rho(c_n,(c'_{in})_{i\in I})$ истовремено и $A_i \models_{a_i^*(n|c_{in})} \phi$ за скоро све i из I . Специјално, када је $(c'_{in})_{i\in I}=g(c_n)$ биће $\rho(c_n,(c'_{in})_{i\in I})$ па $(c'_{in})_{i\in I}\in A$ и за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*(n|c_{in})} \phi$.

Доказујемо да важи (4). Нека је ϕ произвољна формула језика L и $a = (a_k)_{k<\omega}$ валуација на A (при чему су $a_i^* = (a_{ik})_{k<\omega}$ одговарајуће валуације на A_i , јер је $a_k = (a_{ik})_{k<\omega}$). Према дефиницији g и A $A \models_a \phi$ акко $\mathcal{D} \models_b \phi$, где је $b=(g^{-1}(a_k))_{k<\omega}$ и још су b и $a^*_i (i \in I)$ везане валуације па је $\mathcal{D} \models_b \phi$ акко $\{i \in I \mid A_i \models_{a_i^*} \phi\} \in S$ акко за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*} \phi$ што је и требало показати.

<u>ЛЕМА 2</u>. Из претпоставки (1), (3) и (4) доказаних у леми 1 следи постојање правог филтра G на I тако да за све формуле ϕ језика L и све валуације $a=(a_k)_{k<\omega}$ на A , $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ на A_i $(i\in I)$, при чему је $a_k = (a_{ik})_{i\in I} \in A$, важи:

за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*} \phi$ акко $\{i \mid A_i \models_{a_i^*} \phi\} \in G$.

Дакле, постоји систем A тако да је:

(1) $A \subset \prod_{i\in I} A_i$

(2) $A \simeq \mathcal{D}$

(5) за сваку формулу Φ језика L , све валуације $a=(a_k)_{k<\omega}$, $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ $(a_k=(a_{ik})_{i\in I})$ и за све $n<\omega$: ако постоје $b_{in} \in A_i$ за све $i\in I$ такви да је $\{i \mid A_i \models_{a_i(n|b_{in})} \phi\}\in G$ тада постоји $(c_{in})_{i\in I} \in A$ тако да је $\{i \mid A_i \models_{a_i(n|c_{in})} \phi\} \in G$

(6) за сваку формулу Φ језика L , све валуације $a=(a_k)_{k<\omega}$, $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ $(a_k=(a_{ik})_{i\in I})$ $A \models_a \phi$ акко $\{i \mid A_i \models_{a_i} \phi\} \in G$.

ДОКАЗ: Формирајмо језик L_A и системе A_A, A_i^A $(i\in I)$при чему $a_o\in A$ интерпретирамо у A_i^A као a_{io}, тј. као i-ту пројекцију елемента a_o.

Ако је ϕ исказ језика L_A $I_\phi=\{i\in I|A_i^A\models\phi\}$. Доказујемо да је $I_\phi\cap I_\psi\neq\emptyset$ за $\phi,\psi\in \mathrm{Th}A_A$.

Нека је ϕ облика $\phi(a_o,\dots,a_m,a_{m+1},\dots,a_n)$ а ψ облика $\psi(a_o,\dots,a_m,a_{n+1},\dots,a_j)$ при чему се у ϕ и ψ не јављају као променљиве $x_o,\dots,x_j$. Нека је $I_\phi\cap I_\psi=\emptyset$. Тада је $\{i\in I|A_i^A\models\phi\wedge\psi\}=\emptyset$ па је $I\setminus\{i|A_i^A\models\phi\wedge\psi\}=I$ тј. $\{i|$ није $A_i^A\models\phi\wedge\psi\}=I$ одакле је $\{i|A_i^A\models\neg(\phi\wedge\psi)\}=I$ па је за свако i из I $A_i^A\models\neg\phi\vee\neg\psi$. Следи да је за скоро све i из I $A_i\models_{a_i^*}\neg\phi(x_o,\dots,x_n)\vee\neg\psi(x_o,\dots,x_m,x_{n+1},\dots,x_j)$ $(a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ $(i\in I)$ и $a=(a_k)_{k<\omega}$ су одговарајуће валуације) одакле је према (4) $A\models_a\neg\phi\ (x_o,\dots,x_n)\vee\neg\psi(x_o,\dots,x_m,x_{n+1},\dots,x_j)$ тј. $A_A\models\neg\phi\vee\neg\psi$ па је $A_A\models\neg\phi$ или $A_A\models\neg\psi$ што је немогуће јер је $A_A\models\phi$ и $A_A\models\psi$. Произлази да и пресек коначно много скупова I_ϕ мора бити непразан ако за све узете ϕ важи да $\phi\in\mathrm{Th}A_A$.

Нека је G скуп свих надскупова коначних пресека скупова I_ϕ за $\phi\in\mathrm{Th}A_A$. Лако је доказати да је G прави филтер на I .

Доказујемо да за сваку формулу ϕ језика L важи $\{i\in I|A_i\models_{a_i^*}\phi\}\in G$ или $\{i\in I|A_i\models_{a_i^*}\phi\}\in G$, при чему су $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ $(i\in I)$ и $a=(a_k)_{k<\omega}$ (и $a_k=(a_{ik})_{i\in I}\in A$) произвољне валуације.

Ако је ϕ формула језика L , тада је $\theta\in\mathrm{Th}\ A_A$ или $\neg\theta\in\mathrm{Th}A_A$, где је θ формула добијена из ϕ заменом сваке променљиве x_k $(k<\omega)$ одговарајућом константом a_k . Зато је $I_\theta\in G$ или $I_{\neg\theta}\in G$ тј. $\{i|A_i^A\models\theta\}$ G или $\{i|A_i^A\models\neg\theta\}$ па је

$\{i|A_i\models_{a_i^*}\phi\}\in G$ или $\{i|A_i\models_{a_i^*}\phi\}\in G$.

Доказујемо тврђење леме. Нека су $a=(a_k)_{k<\omega}$ и $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ $(i\in I)$ $(a_k=(a_{ik})_{i\in I}\in A)$ произвољне валуације. Ако је за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*} \phi$ тада је $A \models_{a} \phi$ па је $A_A \models \theta$, где је θ формула језика L_A добијена из ϕ заменом свих слободних променљивих x_n $(n<\omega)$ формуле ϕ одговарајућим константама a_n. Због $\theta\in ThA_A$ биће $I_\theta\in G$ тј. $\{i|A_i^A \models \theta\}\in G$ па је $\{i|A_i \models_{a_i^*} \phi\}\in G$.

Ако није за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*} \phi$ тада није $A \models_{a} \phi$ па је $A \models_{a} \neg\phi$ тј. за скоро све i из I $A_i \models_{a_i^*} \neg\phi$. Према претходном $\{i|\ A_i \models_{a_i^*} \neg\phi\}\in G$ па је $\{i|A_i \models_{a_i^*} \phi\}\notin G$.

Због доказане еквиваленције услови (3) и (4) леме 1 непосредно се преводе на услове (5) и (6).

ЛЕМА 3. Из претпоставки (1),(5) и (6) доказаних у претходним лемама следи постојање ултрафилтра F на I и система C тако да је:

(7) $A \cong C$

(8) $C \prec \prod_{i\in I} A_{i/F}$

(9) $\{i|A_i \models_{a_i^*} \phi\}\in F$ акко $\{i|A_i \models_{a_i^*} \phi\}\in G$

при чему су $a=(a_k)_{k<\omega}$ и $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ $(i\in I)$ $(a_k=(a_{ik})_{i\in I}\in A)$ одговарајуће валуације а ϕ произвољна формула језика L .

<u>ДОКАЗ</u>. Нека је F произвољан ултрафилтер на I који садржи филтер G и $C=\{a_o^\sim | a_o\in A\}$, при чему је $\sim$еквиваленција на $\prod_{i\in I} A_i$ дефинисана ултрафилтром F.

Докажимо да важи (9). По дефиницији ултрафилтра F ако је $\{i|A_i \models_{a_i^*} \phi\}\in G$ тада је и $\{i|A_i \models_{a_i^*} \phi\}\in F$. Нека је $\{i|A_i \models_{a_i^*} \phi\}\in F$. Према (6) $\{i|A_i \models_{a_i^*} \phi\}\in G$ или $\{i|A_i \models_{a_i^*} \neg\phi\}\in G$. Ако би било

$\{i|A_i \models_{a_i^*} \neg\phi\} \in G$ било би и $\{i|A_i \models_{a_i^*} \neg\phi\} \in F$ што је нетачно. Дакле мора бити $\{i|A_i \models_{a_i^*} \phi\} \in G$.

Нека је $h:A \longrightarrow C$ пресликавање дефинисано са $h(a_o)=a_o^\sim$. По дефиницији C, h је сирјекција. Ако је $h(a_1)=h(a_2)$ тада је $a_1^\sim = a_2^\sim$ тј. $a_1 \sim a_2$ па $\{i|\ a_{i1}=a_{i2}\} \in F$. Тада због (9) мора бити и $\{i|a_{i1}=a_{i2}\} \in G$ па је према (6) $a_1=a_2$. h је бијекција. Према ставу 2.1 на скупу C може се дефинисати систем $\mathcal{C}$ тако да је h изоморфизам. Тиме је (7) доказано.

Нека је ϕ формула језика L , $a=(a_k)_{k<\omega}$ валуација на A и $a_i^*=(a_{ik})_{k<\omega}$ валуација на $A_i (i\in I)$ при чему је $a_k=(a_{ik})_{i\in I}$. Ако је $a^\sim=(a^\sim_k)_{k<\omega}$ тада за све $n<\omega$ важи:
ако постоје $b_{in} \in A_i$ тако да је $\{i|A_i \models_{a_i^*(n|b_{in})} \phi\} \in F$ тада постоји $c_n=(c_{in})_{i\in I}$ тако да је $c_n^\sim \in C$ и $\{i|A_i \models_{a_i^*(n|c_{in})} \phi\} \in F$.

Према (9) мора бити $\{i|A_i \models_{a_i^*(n|b_{in})} \phi\} \in G$. Према (5) тада постоји $c_n=(c_{in})_{i\in I}$ тако да је $c_n \in A$ и $\{i|A_i \models_{a_i^*(n|c_{in})} \phi\} \in G$ па постоји c_n тако да је $c_n^\sim \in C$ и $\{i|A_i \models_{a_i^*(n|c_{in})} \phi\} \in F$.

Лако је увидети да је доказано еквивалентно са условом (према ставу 4.0) да буде $\mathcal{C} \prec \prod_{i\in I} A_{i/F}$. Тиме је лема 3 у потпуности доказана.

Вратимо се доказу става 8.1. Комбинујући (2) из леме 1 и (7) из леме 3 добијамо да важи $\mathcal{D} = \mathcal{C}$, а слично из (4) (лема 1), (6) (лема 2) и (9)(лема 3) добијамо да је $A_i \models_{a_i^*} \phi$ за скоро све i и I акко $\{i\in I|A_i \models_{a_i^*} \phi\} \in F$, па је став доказан.

ЛИТЕРАТУРА

1 J.L.Bell, A.B.Slomson: MODELS AND ULTRAPRODUCTS; North-Holland (Amsterdam); (1971)

2 G.Birkhoff: LATTICE THEORY; Amer.Math.Soc. (Providece); (1967)

3 C.C.Chang: ULTRAPRODUCTS AND OTHER METHODS OF CONSTRUCTING MODELS; u knjizi: J.Crossley(ed.): Sets, Models and Recursion Theory; North-Holland (Amsterdam); (1967)

4 C.C.Chang, H.J.Keisler: MODEL THEORY; North-Holland (Amsterdam),American Elsevier (New York);(1973)

5 A.Church: INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC; Princeton University Press (Princeton); (1956)

6 W.W.Comfort, S.Negrepontis: THE THEORY OF ULTRAFILTERS; Springer-Verlag (Berlin); (1974)

7 V.Devide: MATEMATIČKA LOGIKA I; Matematički institut (Beograd); (1964)

8. R.Fraissé: UNE GENERALISATION DE L´ULTRAPRODUIT; J.Symb.Log. Vol.31,p.235

9. R.Fraissé : COURSE OF MATHEMATICAL LOCIC, Vol.1; D.Reidel Publiching Company (Boston); (1973)

10 G.Grätzer: UNIVERSAL ALGEBRA; Van Nostrand (Princeton);(1968)

11 H.J. Keisler: LIMIT ULTRAPOWERS: Trans.Amer.math.Soc.vol.107, p.382

12 H.J.Keisler: LIMIT ULTRAPRODUCTS; J.Symb.Log.vol 30,p.212.

13 H.Lausch, W.Nöbauer: ALGEBRA OF POLINOMIALS; North-Holland (Amsterdam),American Elsevier (New York):(1973)

14 R.C.Lyndon: PROPERTIES PRESERVED UNDER HOMOMORPHISM; Pacific J.Math. vol.9, p.143

15 R.C.Lyndon: PROPERTIES PRESERVED IN SUBDIRECT PRODUCTS; Pacific J.Math. Vol.9, p.155.

16 А.И.Мальцев: АЛГЕБРАИЧЕСНИЕ СИСТЕМЫ; Наука (Москва);(1970)

17 E.Mendelson: INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC;
Van Nostrand (Princeton); (1964)

18 S.B.Prešić: ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE;
Zavod za izdavanje udžbenika S.R.Srbije (Beograd); (1968)

19 H.Rasiowa, R.Sikorski: THE MATHEMATICS OF MATEMATHEMATICS;
Państwowe wydawnictwo naukowe (Warszawa); (1963)

20 A.Robinson: INTRODUCTION TO MODEL THEORY AND TO THE
METAMATHEMATICS OF ALGEBRA;
North-Holland (Amsterdam), American elsevier (New York);(1974)

21 G.E.Sacks: SATURATED MODEL THEORY;
W.A.Benjamin, INC. (Reading); (1972)

22 R.M.Smullyan: THEORY OF FORMAL SYSTEMS;
Princeton University Press (Princeton); (1961)