UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

STEVAN KORDIĆ

JEDNA HEURISTIKA ZA METODU ANALITIČKIH TABLOA

MAGISTARSKA TEZA

MENTOR: DR ALEKSANDAR JOVANOVIĆ

BEOGRAD, 1998.

U ovom radu izloženo je jedno originalno zasnivanje metode analitičkih tabloa, kao i niz rezultata koji proizilaze iz tako zasnovane metode analitičkih tabloa koji se tiču problema kompletnosti i kompaktnosti beskonačnih iskaznih računa i beskonačnih logika. U radu se, takodje, po prvi put izlaže i jedna heuristika za metodu analitičkih tablo i daje ocjena njene efikasnosti. Rezultati koji se tiču kompletnosti i kompaktnost sadrže nove dokaze već poznatih teorema, koji su dobijeni uvodjenjem originalnog zasnivanja metode analitičkih tabloa.

U glavi *Uvod*, date su neophodne definicije pojma stabla i operatora nad stablima koje su potrebne za izlaganje teze. Nakon toga definišu se iskazni računi P_α i beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$ sa svim uobičajnim pratećim pojmovima: skup formula, kompleksnost formula, definicija modela i relacija zadovoljenja. Pored ovih uobičajnih pojmova, uvodi se i operator '$\neg$', *pomjeranja negacije u formuli*, koji je potreban radi lakšeg formulisanja metode analitičkih tabloa.

U glavi *Analitički tabloi* formuliše se metoda analitičkih tabloa za iskazne račune P_α i beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$. Uvedena je autorova originalna formulacija metode analitičkih tabloa koja omogućava da se poznati rezultati metode analitičkih tabloa za iskazni račun i predikatski račun prvog reda uopšte i za pomenute iskazne račune i bekonačne logike.

U glavi *Kompletnost* uvodi se pojam *tablo-izvodivosti.* Za iskazne račune se pokazuje da je formula φ semantička posljedica skupa formula Φ akko je formula φ tablo-izvodiva iz skupa formula Φ. U slučaju beskonačnih logika, dokazuje se da ako je formula φ semantička posljedica skupa formula Φ, onda je formula φ tablo-izvodiva iz skupa formula Φ. Svi dokazi u ovoj glavi su zasnovani na originalnoj autorovoj formulaciji metode analitičkih tabloa.

U glavi *Kompaktnost* razmatra se veza izmedju slabe kompaktnosti kardinala α, iskaznih računa P_α i metode analitičkih tabloa. Dvije teoreme u ovoj glavi su kjučne. Prva od njih tvrdi da ako je kardinal α regularan, tada ako α ima svojstvo stabla, onda je α slabo iskazno kompaktan. Druga teorema tvrdi da ako je kardinal α jako nedostižan, tada ako je α iskazno slabo kompaktan, onda α ima svojstvo stabla. Jedna od posledica ove dvije teoreme je i teorema da, ako je kardinal $\alpha = \omega$ ili je kardinal α jako nedostižan, tada je α iskazno slabo kompaktan akko α ima svojstvo stabla. Predstavljeni dokazi u radu, koriste se prirodnom vezom izmedju slabe kompaktnosti iskaznog računa P_α i svojstvom stabla kojim se karakteriše svojstvo kompaktnosti, a to su tabloi, tj. drveta formula.

Poglavlje *Heuristike* je posvećeno metodi analitičkih tabloa kao metodi za automatsko dokazivanje teorema predikatskog računa prvog reda. U poglavlju se prvo formuliše algoritam za originalan metod analitičkih tabloa, a zatim se predlaže heuristika koja poboljšava originalan metod. Kod dokaza koji su dobijeni primenom osnovnog algoritma, veliki broj formula u tablou je irelevantan. Problem je još veći, kada veliki broj irelevantnih formula u tablou ima mnogo posledica. Heuristika koja je predlažena koncentriše se na postepenom "otkrivanju" relevantnih formula i njihovoj upotrebi u konstrukciji grana koje su ostale otvorene. Ova ideja je osnova za definiciju funkcije μ, koja preslikava skup zatvorenih tabloa u samog sebe, tako da slika zatvorenog tabloa sadrži samo relevantne formule. Na osnovu definicije ove funkcije konstruiše se algoritam heuristike. U radu se dalje uporedjuje osnovni algoritam i algoritam sa predloženom heuristikom.

Prijatna mi je dužnost da se na svesrdnoj pomoći u izradi magisterske teze zahvalim mentoru dr Aleksandru Jovanoviću, kao i članovima komisije dr Zoranu Markoviću i dr Žarku Mijajloviću. Na korisnim sugestijama i na pomoći u nabavci literature zahvaljujem se dr Miodragu Kapetanoviću i dr Miodragu Raškoviću. Zahvaljujem se mr Predragu Janičiću na pažnji sa kojom je pročitao tekst i pomogao mi da ga uobličim, kao i na dugim razgovorima o problemima automatskog dokazivanja teorema, kojima je djelom inspirisana predložena heuristika. Zahvaljujem se i svima ostalima koji su mi na bilo koji način pomogli u radu na magistarskoj tezi, a posebno mojoj familiji na dragocjenoj podršci i razumjevanju.

Beograd, april 1998. Stevan Kordić

Sadržaj

Glava 1

Uvod

U uvodnoj glavi uvodimo elementarne definicije za stabla i uredjena stabla (tačka stabla, rang tačke, nivo stabla, grana stabla, skup grana stabla, skup maksimalnih grana stabla, ...), kao i nekoliko operatora potrebnih radi lakšeg opisa konstrukcije analitičkih tabloa. Takodje, definišu se elementi iskaznih računa P_α i beskonačnih logika $L_{\alpha\beta}$: sintaksni elementi, formule, kompleksnost, operator '$\neg$', valuacija odnosno model, relacija zadovoljenja, kao i pojam dokaza i izvodivosti formule iz skupa aksioma.

Prije nego li definišemo pojmove stabla, iskaznih računa P_α i beskonačnih računa $L_{\alpha\beta}$, uvedimo neke operacije ordinalnog računa i ograničeni μ operator, kako bi lakše mogli da zapišemo pojedine formule u radu.

Kao poznato smatramo elemente teorije skupova, odnosno elemente ordinalnog i kardinalnog računa ([FDrak74]). Pored uobičajnih ordinalnih operacija uvodimo još dvije i to $\overset{*}{+}$ i $\overset{*}{\cdot}$ koje redom nazivamo ***težinskim ordinalnim sabiranjem*** i ***težinskim ordinalnim množenjem***. Za proizvoljne ordinale α i β zadajemo ih sledećim formulama:

$$\alpha \overset{*}{+} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & : \beta \leq \alpha, \\ \beta + \alpha & : \alpha < \beta, \end{cases} \qquad \alpha \overset{*}{\cdot} \beta = \begin{cases} \alpha \cdot \beta & : \beta \leq \alpha, \\ \beta \cdot \alpha & : \alpha < \beta. \end{cases}$$

Primjetimo da za bilo koje ordinale α i β važi da $\alpha, \beta < \alpha \overset{*}{+} \beta$, kao i $\alpha, \beta < \alpha \overset{*}{\cdot} \beta$.

Korističemo radi lakšeg zapisa nekih formula i *ograničeni μ operator*. Za ordinal β i formulu φ definišemo $\mu\alpha < \beta[\varphi(\alpha)]$ slijedećom formulom:

$$\mu\alpha < \beta[\varphi(\alpha)] = \begin{cases} \cap\{\alpha < \beta \mid \varphi(\alpha)\} & : \{\alpha < \beta \mid \varphi(\alpha)\} \neq \emptyset, \\ \beta & : \{\alpha < \beta \mid \varphi(\alpha)\} = \emptyset. \end{cases}$$

Iz definicije operatora μ jasno je da $\mu\alpha < \beta[\varphi(\alpha)]$ predstavlja najmanji ordinal α, ako postoji, za kojeg važi formula $\varphi(\alpha)$, ako takav ordinal ne postoji tada je vrijednost operatora $\mu\alpha < \beta[\varphi(\alpha)]$, jednaka ordinalu β. primjetimo da važi $\mu\alpha < \beta[\varphi(\alpha)] \leq \beta$.

1.1 Stabla

Jedna od osnovhih struktura u ovom radu je struktura stabla. Zbog toga precizno uvodimo ovaj pojam. Mnoštvo definicija u ovom odjeljku služi nam za lakše opisivanje strukture stabla, kao i za lakše formulisanje metode analitičkih tabloa.

Definicija 1.1.1. Pod ***neuredjenim stablom*** podrazumjevamo strukturu $\mathsf{T} = \langle T, <_\mathsf{T} \rangle$ za koju važe slijedeća svojstva:

(1) Skup T je parcijalno uredjen relaciom $<_\mathsf{T}$.

(2) Za svako $x \in T$, skup $\{y \in T \mid y <_\mathsf{T} x\}$ je dobro uredjen relacijom $<_\mathsf{T}$.

Elemente $x \in T$ nazivamo ***tačkama*** stabla $\mathsf{T} = \langle T, <_\mathsf{T} \rangle$. Neuredjeno stablo često ćemo nazivati samo stablom.

Definicija 1.1.2. Za bilo koje stablo $\mathsf{T} = \langle T, <_\mathsf{T} \rangle$ definišemo funkciju *ranga* elementa stabla $x \in T$ u oznaci $r_\mathsf{T}(x)$ slijedećom formulom:

$$r_\mathsf{T}(x) = OT(\{y \in T \mid y <_\mathsf{T} x\}, <_\mathsf{T}).$$

Pošto je skup $\{y \in T \mid y <_\mathsf{T} x\}$ dobro uredjen relaciom $<_\mathsf{T}$ funkcija OT daje tip uredjenja i njena slika je ordinal. Jasno je da su tačke stabla T koje su istog ranga neuporedive u odnosu na relaciju $<_\mathsf{T}$.

Definicija 1.1.3. Za bilo koje stablo $\mathsf{T} = \langle T, <_\mathsf{T} \rangle$ definišemo α-ti nivo stabla u oznaci $\mathsf{T}(\alpha)$ slijedećom formulom:

$$\mathsf{T}(\alpha) = \{x \in T \mid r_\mathsf{T}(x) = \alpha\}.$$

Skup α-tih nivoa stabla u oznaci $\mathsf{T}[\alpha]$ definišemo slijedećom formulom:

$$\mathsf{T}[\alpha] = \{x \in T \mid r_\mathsf{T}(x) < \alpha\}.$$

Na osnovu definicije slijedi da je svako $\mathsf{T}[\alpha]$ unija nivoa manjih od α. Iz definicije takodje slijedi da je $\mathsf{T}[\emptyset] = \emptyset$ i da je $\mathsf{T}[1]$ skup minimalnih elemenata stabla T u odnosnu na parcijalno uredjenje $<_\mathsf{T}$. Pošto je T skup tada mora da za neko α važi $\mathsf{T} = \mathsf{T}[\alpha]$. Najmanje takvo α nazivamo ***visinom*** stabla T i obilježavamo sa $\mathbf{h}(\mathsf{T})$.

Definicija 1.1.4. Neka je x tačka stabla $\mathsf{T} = \langle T, <_\mathsf{T} \rangle$. Ako postoje, elemente skupa $\mathbf{S}_\mathsf{T}(x) = \{y \in T \mid x <_\mathsf{T} y \ \land \ r_\mathsf{T}(y) = r_\mathsf{T}(x) + 1\}$, nazivamo ***neposrednim sljedbenicima*** tačke x, i tačku x nazivamo ***neposrednim prethodnikom*** tačaka iz navedenog skupa. Elemente skupa $\mathbf{D}_\mathsf{T}(x) = \{y \in T \mid x <_\mathsf{T} y\}$ nazivamo ***sljedbenicima*** tačke x.

Primjetimo da na osnovu definicije stabla ne mora svaka njegova tačka da ima neposrednog prethodnika. Takve su tače na primjer one čiji je rang granični ordinal.

Definicija 1.1.5. Tačke x stabla $\mathsf{T} = \langle T, <_\mathsf{T} \rangle$ koje nemaju neposrednih sljedbenika nazivamo ***krajnjim tačkama*** i označavamo sa $end_\mathsf{T}(x)$. Sa End_T obilježavamo skup svih krajnjih tačaka stabla T tj. $End_\mathsf{T} = \{x \in T \mid end_\mathsf{T}(x)\}$, a sa $End_\mathsf{T}(y)$ skup svih krajnjih tačaka stabla T koje su u poredku $<_\mathsf{T}$ veće od y tj.

$$End_\mathsf{T}(y) = \{x \in T \mid end_\mathsf{T}(x) \ \land \ y <_\mathsf{T} x\}.$$

Definicija 1.1.6. Neka je dato stablo $\mathsf{T} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$. Za podskup $X \subset T$ kažemo da je *grana* stabla T, ako je linearno uredjen relaciom $<_{\mathsf{T}}$. Zbog linearnog uredjenja grane stabla često posmatramo kao nizove. Ako je podskup $X \subset T$ grana i ne postoji grana koja je sadrži kažemo da je grana X *maksimalna grana*. Grana X stabla T je *gusta* u oznaci $sat(X)$, ako $(\forall x \in X)\,\{y \in T \,|\, y <_{\mathsf{T}} x\} \subset X$. Skup svih grana stabla $\mathsf{T} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$ obilježavamo sa $\mathbf{G}_{\mathsf{T}}$, skup svih maksimalnih grana obilježavamo sa $\mathbf{M}_{\mathsf{T}}$, a skup svih gustih grana obilježavamo sa $\mathbf{X}_{\mathsf{T}}$.

Slično gornjim definicijama definišemi i skupove $\mathbf{G}_{\mathsf{T}}(x)$ kao skup svih grana stabla T koje sadrže tačku x, $\mathbf{M}_{\mathsf{T}}(x)$ kao skup svih maksimalnih grana stabla T koje sadrže tačku x i $\mathbf{X}_{\mathsf{T}}(x)$ kao skup svih gustih grana koje sadrže tačku x. Na kraju definišimo skup *neposrednh sljedbenika guste grane* X stabla T u oznaci $\mathbf{Y}_{\mathsf{T}}(X)$, slijedećom formulom:

$$\mathbf{Y}_{\mathsf{T}}(X) = \{y \in T \,|\, (X \cup \{y\}) \in \mathbf{X}_{\mathsf{T}}\}.$$

Primjetimo da za $x \in T$ važi $\mathbf{Y}_{\mathsf{T}}(\{y \in T \,|\, y <_{\mathsf{T}} x\} \cup \{x\}) = \mathbf{S}_{\mathsf{T}}(x)$.

Definicija 1.1.7. Strukturu $\langle T, <_{\mathsf{T}}, \theta \rangle$ nazivamo *uredjenim stablom* ako je struktura $\mathsf{T} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$ neuredjeno stablo i funkcija θ ima slijedeća svojstva:

(1) $Dom(\theta) = T \cup \{T\}$.

(2) Svakoj tački $x \in T$ stabla dodjeljuje niz bez ponavljanja njegovih neposrednih sljedbenika $\langle y_\alpha \rangle_{\alpha<\beta}$, gdje $|\mathbf{S}_{\mathsf{T}}(x)| = \beta$.

(3) Vrijednost $\theta(T)$ definišemo kao niz minimalnih elemenata stabla T.

Funkcija θ tačkama stabla dodjeljuje redom njihove neposredne sljedbenike, tako da možemo govoriti o $1, 2, 3, ..., \alpha, ...$ po redu neposrednom sljedbeniku. Na analogan način definišemo pojmove iz prethodnih definicija za uredjena stabla.

Definicija 1.1.8. Neka je dat niz $\theta = \langle \theta_\iota \rangle_{\iota<\alpha}$. Sa $\theta_{\downarrow\beta}$ označavamo niz $\langle \theta_\iota \rangle_{\iota<\beta}$, $\beta < \alpha$, i sa $\theta_{\uparrow\beta}$ označavamo niz $\langle \theta_{\beta+\iota} \rangle_{(\beta+\iota)<\alpha}$.

Iz definicije je jasno da niz $\theta_{\downarrow\beta}$ predstavlja prvih β elemenata niza θ, a niz $\theta_{\uparrow\beta}$ predstavlja niz formiran od niza θ oduzimanje njegovog početnog djela, do β-og elementa po redu. Označimo sa $\theta_1 \diamond \theta_2$ konkatenaciju nizova θ_1 i θ_2. Iz prethodnih definicija jasno je da za bilo koji niz θ dužine α važi formula:

$$(\forall \beta < \alpha) \;\; \theta = \theta_{\downarrow\beta} \diamond \theta_{\uparrow\beta}.$$

Definicija 1.1.9. Neka su $\mathsf{T} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$ i $\mathsf{T}_1 = \langle T_1, <_{\mathsf{T}_1} \rangle$ stabla. Kažemo da je stablo T_1 *podstablo* stabla T ako je $T_1 \subset T$ i $<_{\mathsf{T}_1} \; = <_{\mathsf{T}} |_{T_1}$, i obilježavamo sa $\mathsf{T}_1 \lhd \mathsf{T}$. Ako je x tačka stabla T, tada pod $\mathsf{T}(x)$ podrazumjevamo stablo $\langle T_1, <_{\mathsf{T}} |_{T_1} \rangle$, gdje je $T_1 = \{y \in T \mid x <_{\mathsf{T}} y\}$.

Definicija 1.1.10. Za dato x i niz bez ponavljanja $\mathbf{x} = \langle x_\iota \rangle_{\iota<\gamma}$ takav da $x \neq x_\iota$, $\iota < \gamma$, sa $Tree_\wedge(x, \mathbf{x})$ obilježavamo neuredjeno stablo $\langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$, gdje je su:

(1) $T = \{x\} \cup \{x_\iota \mid \iota < \gamma\}$.

(2) $<_{\mathsf{T}} \; = \{\langle x, x_\iota \rangle \mid \iota < \gamma\} \cup \{\langle x_\sigma, x_\tau \rangle \mid \sigma < \tau < \gamma\}$.

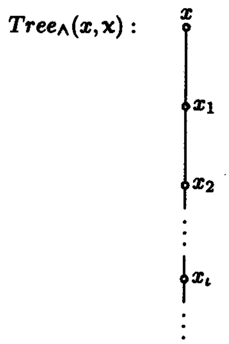
Iz navedene definicije jasno je da je $Tree_\wedge(x, \mathbf{x})$, stablo samo sa jednom granom na čijem je početku x a zatim sa redjaju članovi niza $\mathbf{x}$, Slika 1.

Slično definišimo dalje i $Tree_\vee(x, \mathbf{x})$ kao neuredjeno stablo $\langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$ gdje su:

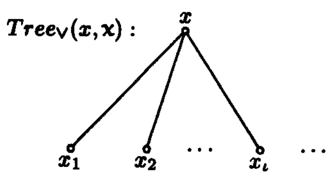
(1) $T = \{x\} \cup \{x_\iota \mid \iota < \gamma\}$.

(2) $<_{\mathsf{T}} \; = \{\langle x, x_\iota\rangle \mid \iota < \gamma\}$.

Kao i u prethodnom slučaju iz definicije vidimo da je $Tree_\vee(x, \mathbf{x})$ stablo takvo da mu je korjen x a njegovi direktni sljedbenici elementi niza $\mathbf{x}$ i to upravo onim redom kojim se pojavljuju u nizu $\mathbf{x}$, Slika 2.



Slika 1.



Slika 2.

Definicija 1.1.11. Neka je dato stablo $\mathsf{T}_1 = \langle T_1, <_{\mathsf{T}_1} \rangle$, maksimalna grana $X \in \mathbf{M}_{\mathsf{T}_1}$ i niz bez ponavljanja $\mathbf{x} = \langle x_i \rangle_{\iota<\gamma}$ takav da $T_1 \cap Range(\mathbf{x}) = \emptyset$, sa $Rep_\wedge(\mathsf{T}, X, \mathbf{x})$ obilježavamo stablo $\langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$ gdje su:

(1) $T \; = \; T_1 \cup Range(\mathbf{x})$.

(2) $<_{\mathsf{T}} \; = <_{\mathsf{T}_1} \; \cup \; \{\langle x, x_\iota\rangle \mid x \in X \; \wedge \; \iota < \gamma\} \; \cup \; \{\langle x_\sigma, x_\tau\rangle \mid \sigma < \tau < \gamma\}$.

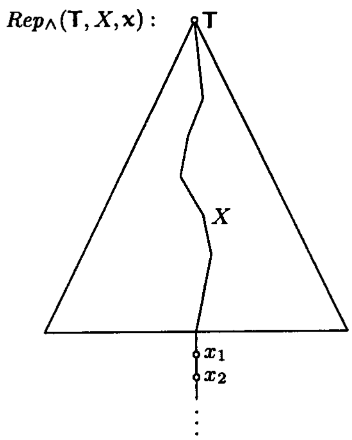
Na osnovu definicije jasno je da $Rep_\wedge(\mathsf{T}, X, \mathbf{x})$ predstavlja stablo koje smo dobili od stabla T_1 tako što smo njegovoj grani X "dodali" granu čiji su tačke elementi niza $\mathbf{x}$ u redoslijedu kojem se pojavljuju u nizu, Slika 3.

Slično definišemo i $Rep_\vee(\mathsf{T}, X, \mathbf{x})$ kao stablo $\langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$ gdje su:

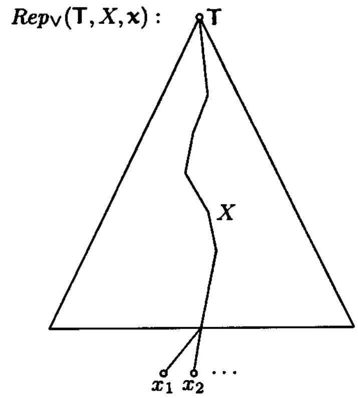
(1) $T \; = \; T_1 \cup Range(\mathbf{x})$.

(2) $<_{\mathsf{T}} \; = <_{\mathsf{T}_1} |_T \cup \; \{\langle x, x_\iota\rangle \mid x \in X \; \wedge \; \iota < \gamma\}$.

Kao i u prethodnom slučaju na osnovu definicije jasno je da $Rep_\vee(\mathsf{T}, X, \mathbf{x})$ predstavlja stablo koje smo dobili od stabla T_1 tako što smo njegovou granu X "produžili" u grane $X \cup \{\mathbf{x}_\iota\}$, za svako $\iota < \gamma$, Slika 4.



Slika 3.



Slika 4.

Način na koji definišemo funkcije potrebne da bi smo prethodne definicije proširili tako da važe za uredjena stabla je očigledan, te ih ovom prilikom izostavljamo.

Definicija 1.1.12. Za dati niz stabala $\mathbf{T}_\iota = \langle T_\iota, <_{\mathbf{T}_\iota}\rangle$, gdje $\iota < \sigma$, definišemo opreaciju *uniranja* u oznaci $\biguplus_{\iota<\sigma} \mathbf{T}_\iota$ slijedećom formulom:

$$\biguplus_{\iota<\sigma} \mathbf{T}_\iota = \langle \bigcup_{\iota<\sigma} T_\iota, \bigcup_{\iota<\sigma} <_{\mathbf{T}_\iota}\rangle.$$

Lema 1.1.1. Neka je dat niz stabala $\mathbf{T}_\iota = \langle T_\iota, <_{\mathbf{T}_\iota}\rangle$, $\iota < \sigma$, takav da za $\tau < \sigma$ važi $T_\iota \subset T_\tau$, za svako $\iota < \tau$, tada je unija stabala $\biguplus_{\iota<\sigma} \mathbf{T}_\iota$ stablo.

DOKAZ. Radi lakšeg označavanja uvedimo sledeće oznake:

$$\mathbf{T} = \biguplus_{\iota<\sigma} \mathbf{T}_\iota, \quad T = \bigcup_{\iota<\sigma} T_\iota, \quad \text{i} \quad <_{\mathbf{T}} = \bigcup_{\iota<\sigma} <_{\mathbf{T}_\iota}.$$

Dokažimo prvo da je skup T parcijano uredjen relacijom $<_{\mathbf{T}}$.

(1) Relacija $<_{\mathbf{T}}$ je refleksivna. Neka je $x \in T$. Na osnovu definicije skupa T, tada postoji $\iota < \sigma$, takvo da $x \in T_\iota$. Pošto je $\mathbf{T}_\iota$ stablo, relacija $<_{\mathbf{T}_\iota}$ je refleksivna, pa važi $x <_{\mathbf{T}_\iota} x$. Kako je $<_{\mathbf{T}_\iota} \subset <_{\mathbf{T}}$, odavde zaključujemo da $x <_{\mathbf{T}} x$, odnosno da je relacija $<_{\mathbf{T}}$ refleksivna.

(2) Relacija $<_{\mathbf{T}}$ je antisimetrična. Neka su $x, y \in T$, takvi da $x <_{\mathbf{T}} y$ i $y <_{\mathbf{T}} x$. Na osnovu definicije skupa T postoji $\iota < \sigma$, takvo da $y \in T_\iota$. Pošto je $x <_{\mathbf{T}} y$, tada na osnovu svojstva niza stabala $\mathbf{T}_\iota$ važi da $x \in T_\iota$ i $x <_{\mathbf{T}_\iota} y$, $y <_{\mathbf{T}_\iota} x$. Kako je relacija $<_{\mathbf{T}_\iota}$ antisimetrična zaključujemo da je $x = y$, pa je i relcija $<_{\mathbf{T}}$ antisimetrična.

(3) Relacija $<_\mathsf{T}$ je tranzitivna. Neka su $x, y, z \in T$, takvi da $x <_\mathsf{T} y$ i $y <_\mathsf{T} z$. Na osnovu definicije skupa T postoji $\iota < \sigma$, takvo da $z \in T_\iota$. Pošto je $y <_\mathsf{T} z$, tada na osnovu svojstva niza stabala T_ι važi da $y \in T_\iota$. Slično prethodnom iz pretpostavke $x <_\mathsf{T} y$ i $y \in T_\iota$ zaključujemo da $x \in T_\iota$. Pošto je relacija $<_{\mathsf{T}_\iota}$ tranzitivna slijedi da $x <_{\mathsf{T}_\iota} z$, pa odavde izvodimo da je i $x <_\mathsf{T} z$, odnosno da je relacija $<_\mathsf{T}$ tranzitivna.

Dokažimo dalje da je za svako $x \in T$, skup $\{y \in T \mid y <_\mathsf{T} x\}$ je dobro uredjen relacijom $<_\mathsf{T}$. Na osnovu svojstva niza stabala T_ι, $\iota < \sigma$, slijedi da postoji $\iota < \sigma$ takav da $x \in T_\iota$. Na osnovu istih svojstava slijedi da i za svako $y \in T$, takvo da $y <_\mathsf{T} x$ važi da $y \in T_\iota$, odnosno da $\{y \in T \mid y <_\mathsf{T} x\} \subset T_\iota$. Kako je T_ι stablo do je skup:

$$\{y \in T \mid y <_\mathsf{T} x\} \ = \ \{y \in T_\iota \mid y <_{\mathsf{T}_\iota} x\},$$

dobro uredjen relacijom $<_{\mathsf{T}_\iota}$, a time i relacijom $<_\mathsf{T}$. ***Q.E.D.***

1.2 Iskazni račun

U formiranju iskaznog računa P_α, gdje je α proizvoljan beskonačan kardinal, navedimo prvo osnovne sintaksne elemente:

(1) Logički veznici : $\neg, \bigwedge, \bigvee, \rightarrow$, koje redom nazivamo *negacijom, konjunkcijom, disjunkcijom* i *implikaciom*. Negacija je unarni veznik dok su preostala tri binarni veznici.

(2) Skup $Var_{P_\alpha} = \{p_\beta \mid \beta < \alpha\}$ koji nazivamo skupom *iskaznih varijabli (slova)*.

(3) Simboli (i) za lijevu i desnu zagradu.

Pošto smo uveli osnovne sintaksne objekte, uvedimo pojam formule iskazanog računa P_α.

Definicija 1.2.1. Skup *formula iskazanog računa* P_α u oznaci For_{P_α} definišemo induktivno pomoću niza For^ι, za $\iota < \alpha$:

$$\begin{aligned}
For^\emptyset &= Var_{P_\alpha}, \\
For^{\iota+1} &= For^n \ \cup \ \{(\neg\varphi) \mid \varphi \in For^\iota\} \\
&\quad \cup \ \{(\varphi \rightarrow \psi) \mid \varphi, \psi \in For^\iota\} \\
&\quad \cup \ \{(\bigwedge \Phi) \mid \Phi \subset For^\iota \wedge |\Phi| < \alpha\} \\
&\quad \cup \ \{(\bigvee \Phi) \mid \Phi \subset For^\iota \wedge |\Phi| < \alpha\}, \quad \iota + 1 < \alpha \\
For^\lambda &= \bigcup_{\iota<\lambda} For^\iota, \quad \lambda \le \alpha, \ Lim(\lambda).
\end{aligned}$$

Na kraju definišemo For_{P_α} kao $For_{P_\alpha} = For^\alpha$.

Prirodno pitanje koje se nameće jeste kardinalnost skupova For_{P_α}. Indukcijom po $\iota < \alpha$ lako dokazujemo da je $|For^\iota| = \alpha$, pa odavde dobijamo $|For_{P_\alpha}| = \alpha$.

Da bi izrazili složenost formula uvodimo funkciju $co_{P_\alpha} : For_{P_\alpha} \rightarrow \omega$, koju definišemo induktivno na osnovu slijedećih formula:

$$co_{P_\alpha}(\varphi) = \begin{cases} \emptyset & : \varphi \in For^\emptyset = Var_{P_\alpha}, \\ \iota + 1 & : \varphi \in For^{\iota+1} \setminus For^\iota. \end{cases}$$

Primjetimo da na osnovu definicije skupa For_{P_α} ne postoji formula $\varphi \in For_{P_\alpha}$ takva da je $co_{P_\alpha}(\varphi)$ granični ordinal, kao i da za bilo koju formulu $\varphi \in For_{P_\alpha}$ važi $co_{P_\alpha}(\varphi) < \alpha$. Primjetimo takodje da je P_ω klasičan iskazni račun.

Od interesa će biti i razmatranje fragmenata iskaznog računa P_α. Za svaki ordinal $\iota < \alpha$ definišemo *ι-fragment* iskaznog računa P_α u oznaci P_α^ι sa skupom formula:

$$For_{P_\alpha^\iota} = \{\varphi \in For_{P_\alpha} \mid co_{P_\alpha}(\varphi) < \iota\}.$$

Često ćemo za neki skup formula $\Phi \subset For^\iota$, umjesto $\bigvee \Phi$ i $\bigwedge \Phi$ pisati $\bigvee_{\varphi\in\Phi} \varphi$ i $\bigwedge_{\varphi\in\Phi} \varphi$.

Definicija 1.2.2. Za datu formulu $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ uvedimo operator *pomjeranja negacije* u oznaci $\varphi\neg$, induktivno po složenosti formule φ slijedećom formulom:

$$\varphi\neg = \begin{cases} \neg\varphi & : \varphi \in Var_{P_\alpha}, \\ \psi & : \varphi = (\neg\psi), \\ \psi \wedge (\neg\theta) & : \varphi = (\psi \to \theta), \\ \bigvee_{\psi\in\Phi} \neg\psi & : \varphi = (\bigwedge_{\psi\in\Phi} \psi), \\ \bigwedge_{\psi\in\Phi} \neg\psi & : \varphi = (\bigvee_{\psi\in\Phi} \psi). \end{cases}$$

Definicija 1.2.3. Posmatrajmo skup $\{T, F\}$ dva različita elementa T i F. Za svaki iskazni račun P_α moguće je pridružiti simbolima za logičke veznike slijedeće unarne, binarne i α-operacije za $x, y \in \{T, F\}$, i $\mathbf{x} : \alpha \to \{T, F\}$:

$$\text{(O1)} \quad v_\neg(x) = \begin{cases} T & : x = F, \\ F & : x = T, \end{cases}$$

$$\text{(O2)} \quad v_\to(x, y) = \begin{cases} F & : x = T \wedge y = F, \\ T & : \text{inače}, \end{cases}$$

$$\text{(O3)} \quad v_\wedge(\mathbf{x}) = \begin{cases} T & : (\forall\beta < \alpha)\, \mathbf{x}(\beta) = T, \\ F & : \text{inače}, \end{cases}$$

$$\text{(O4)} \quad v_\vee(\mathbf{x}) = \begin{cases} T & : (\exists\beta < \alpha)\, \mathbf{x}(\beta) = T, \\ F & : \text{inače}. \end{cases}$$

Definicija 1.2.4. Induktivno po složenosti formule $\varphi \in For_{P_\alpha}$ za svaku totalnu funkciju $\mathfrak{p} : Var_{P_\alpha} \to \{T, F\}$ koju nazivamo *valuacijom* iskaznih varijabli, definišemo preslikavanje $v_\mathfrak{p} : For_{P_\alpha} \to \{T, F\}$ na osnovu slijedeće formule:

$$v_\mathfrak{p}(\varphi) = \begin{cases} \mathfrak{p}(p_\beta) & : \varphi = p_\beta, \\ v_\neg(v_\mathfrak{p}(\psi)) & : \varphi = (\neg\psi), \\ v_\to(v_\mathfrak{p}(\psi), v_\mathfrak{p}(\theta)) & ; \varphi = (\psi \to \theta), \\ v_\wedge(v_\mathfrak{p}(\psi_\emptyset), ..., v_\mathfrak{p}(\psi_\gamma), ...) & : \varphi = (\bigwedge_{\gamma<\beta} \psi_\gamma) \;\wedge\; \beta < \alpha, \\ v_\vee(v_\mathfrak{p}(\psi_\emptyset), ..., v_\mathfrak{p}(\psi_\gamma), ...) & : \varphi = (\bigvee_{\gamma<\beta} \psi_\gamma) \;\wedge\; \beta < \alpha. \end{cases}$$

Definicija 1.2.5. Kažemo da je *valuacija* $\mathfrak{p} : Var_\alpha \to \{T, F\}$ *model* formule $\varphi \in For_{P_\alpha}$, u oznaci $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$, ako $v_\mathfrak{p}(\varphi) = T$.

Definicija 1.2.6. Formula $\varphi \in For_{P_\alpha}$, je *zadovoljiva* ako postoji valuacija $\mathfrak{p} : \alpha \to \{T, F\}$ takva da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$, dok u protivnom kazemo da je formula φ *nezadovoljiva*.

Definicija 1.2.7. Za formulu $\varphi \in For_{P_\alpha}$ kažemo da je *tautologija* u oznaci $\models_{P_\alpha} \varphi$, ako za svako $\mathfrak{p} : \alpha \to \{T, F\}$ vazi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$.

U prethodnih par definicija definisali smo pojam modela za formule iskaznog računa P_α. U nastavku odjeljka o iskaznom računu definišimo pojmove teorija, aksioma, dokaza i teorema.

Definicija 1.2.8. Uvedimo pravilo *modus ponens MP* kao ternarnu relaciju $MP \subset For^3_{P_\alpha}$ tako da su u relaciji MP samo uredjenje trojke formula oblika $\langle \varphi, \varphi \to \psi, \psi \rangle$. Predhodnu činjenicu označavamo sa:

$$MP \, \frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$

Definicija 1.2.9. Bilo koji podskup $\Phi \subset For_{P_\alpha}$, nazivamo *teorijom* iskaznog računa P_α. Elemente skupa Φ nazivamo *aksiomama* teorije Φ.

Definicija 1.2.10. Neka je Φ proizvoljna teorija iskaznog računa P_α. Niz formula $\langle \varphi_\iota \rangle_{\iota \leq \beta}$, iskaznog računa P_α, gdje $\beta < \alpha$, predstavlja *dokaz* formule φ, ako ordinal β nije granični, ako je $\varphi = \varphi_\beta$ i ako za svaku formulu φ_ι u ovom nizu važi da $\varphi_\iota \in \Phi$ ili postoje $\sigma, \tau < \iota$, takvi da $\varphi_\tau = \varphi_\sigma \to \varphi_\iota$, tj.

$$MP \, \frac{\varphi_\sigma, \varphi_\tau}{\varphi_\iota}$$

Onda kažemo da je formula φ *dokaziva* u teoriji Φ, i obilježavamo sa:

$$\Phi \vdash_{P_\alpha} \varphi.$$

Formulu φ_β nazivamo *teoremom teorije* Φ iskaznog računa P_α. Ako je skup formula Φ prazan tada formule $\varphi \in For_{P_\alpha}$ za koje važi $\vdash_{P_\alpha} \varphi$ nazivamo *teoremama* iskaznog računa P_α.

Definicija 1.2.11. Teorija Φ iskaznog računa P_α je *kontradiktorna* ako postoji formula $\varphi \in For_{P_\alpha}$ takva da važi:

$$\Phi \vdash_{P_\alpha} \varphi \ \text{ i } \ \Phi \vdash_{P_\alpha} \neg\varphi.$$

Definicija 1.2.12. Teorija Φ iskaznog računa P_α je *kompletna* ako za svaku formulu $\varphi \in For_{P_\alpha}$ važi:

$$\text{ili } \ \Phi \vdash_{P_\alpha} \varphi \ \text{ ili } \ \Phi \vdash_{P_\alpha} \neg\varphi.$$

Kako je skup tautologija iskaznog računa, označimo ga sa $Taut_{P_\alpha}$, jedna teorija, postavlja se pitanje da li postoji skup aksioma za teoriju $Taut_{P_\alpha}$? Ispostavlja se da takav skup postoji i štoviše postoji više takvih skupova aksioma. Pod Ax_{P_α} podrazumjevati ćemo Lukaševicev sistem aksioma.

Osnovni rezultati za iskazni račun jesu teoreme *kompletnosti* i *kompaktnosti*. Odnos ovih teorema sa analitičkim tabloima ispitati ćemo u posebnom poglavlju.

1.3 Predikatski račun

Struktura koja je mnogo bogatija i predstavlja nadgradnju iskaznog računa je predikatski račun. Definicije koje slijede iskazane su terminima beskonačnih logika, čiji je jedan od specijalnih slučaja i predikatski račun prvog reda. Formulišimo prvo pojam jezika za predikatski račun, odnosno za beskonačne logike.

Definicija 1.3.1. Pod *jezikom* predikatskog računa odnosno logike podrazumjevamo skup L sastavljen od simbola za predikate, funkcije i konstante. Pri čemu simboli predikata i funkcija imaju konačnu arnost, a simboli za konstante imaju nultu arnost. Skup L, tada možemo predstaviti kao:

$$L = Fun_L \cup Rel_L \cup Const_L,$$

gdje je: Fun_L skup funkcija jezika L, Rel_L skup predikata jezika L i $Const_L$ skup konstanti jezika L. Funkcija $ar : L \to \omega$ koja dodjeljuje arnost simbolima iz L ispunjava slijedeće uslove:

(1) $s \in Const_L \ \to \ ar(s) = \emptyset$,

(2) $s \in Fun_L \cup Rel_L \ \to \ ar(s) \geq 1$.

Osnovni sintaksni elementi od kojih dalje gradimo predikatski račun - logiku $L_{\alpha\beta}$, gdje su α i β proizvoljni beskonačni kardinali, su slijedeći:

(1) Logički veznici : $\neg, \bigwedge, \bigvee, \to$ koje kao i u slučaju iskaznog računa nazivamo *negacijom, konjunkcijom, disjunkcijom* i *implikaciom.* Negacija je unarni veznik dok su ostala tri binarni veznici.

(2) Kvantifikatori : $\forall$ i $\exists$ koje nazivamo redom *univerzalnim* i *egzistencijalnim.*

(3) Skup $Var_{L_{\alpha\beta}} = \{v_\iota \mid \iota < \alpha + \beta\}$ koji nazivamo *varijablama.*

(4) Simboli (i) za lijevu i desnu zagradu.

(5) Simbol = za jednakost.

Definicija 1.3.2. Skup *terma* logike $L_{\alpha\beta}$ u oznaci $Term_{L_{\alpha\beta}}$ definišemo induktivno pomoću niza $Term^n$, gdje je $n < \omega$:

$$\begin{array}{rcl} Term^{\emptyset} & = & Var_{L_{\alpha\beta}} \cup Const_L, \\ Term^{n+1} & = & Term^n \cup \\ & & \{F(t_1, ..., t_m) \mid F \in Fun_L \ \wedge \ ar(F) = m \ \wedge \ t_1, ..., t_m \in Term^n\}. \end{array}$$

Na kraju definišemo $Term_{L_{\alpha\beta}}$ kao:

$$Term_{L_{\alpha\beta}} = \bigcup_{n<\omega} Term^n.$$

Na sličan način kao i u procjeni kardinalnosti skupa formula za iskazni račun zaključujemo da $|Term_{L_{\alpha\beta}}| = \alpha \cup \beta$. I za termove uvodimo funkciju složenosti $co_{Term_{L_{\alpha\beta}}} : Term_{L_{\alpha\beta}} \to \omega$ koju definišemo formulom:

$$co_{Term_{L_{\alpha\beta}}}(t) = \begin{cases} \emptyset & : \varphi \in Term^{\emptyset} = Var_{L_{\alpha\beta}} \cup Const_L, \\ n+1 & : \varphi \in Term^{n+1} \setminus Term^n \ \wedge \ \emptyset \leq n. \end{cases}$$

Definicija 1.3.3. Skup *atomičkih* formula logike $L_{\alpha\beta}$ u oznaci $At_{L_{\alpha\beta}}$ definišemo formulom:

$$\begin{array}{rcl} At_{L_{\alpha\beta}} & = & \{t_1 = t_2 \mid t_1, t_2 \in Term_{L_{\alpha\beta}}\} \cup \\ & & \{R(t_1, ..., t_n) \mid R \in Rel_L \ \wedge \ ar(R) = n \ \wedge \ t_1, ..., t_n \in Term_{L_{\alpha\beta}}\}. \end{array}$$

Definicija 1.3.4. Skup *formula* logike $L_{\alpha\beta}$ u oznaci $For_{L_{\alpha\beta}}$ definišemo induktivno pomoću niza For^{ι}, gdje je $\iota < \xi$ i $\xi = |L| + \alpha + \beta$:

$$\begin{array}{rcll} For^{\emptyset} & = & At_{L_{\alpha\beta}}, & \\ For^{\iota+1} & = & For^{\iota} & \cup \ \{(\neg\varphi) \mid \varphi \in For^{\iota}\} \\ & & & \cup \ \{(\varphi \to \psi) \mid \varphi, \psi \in For^{\iota}\} \\ & & & \cup \ \{(\bigwedge \Phi) \mid \Phi \subset For^{\iota} \wedge |\Phi| < \alpha\} \\ & & & \cup \ \{(\bigvee \Phi) \mid \Phi \subset For^{\iota} \wedge |\Phi| < \alpha\} \\ & & & \cup \ \{(\forall X)\varphi \mid X \subset Var_{L_{\alpha\beta}} \wedge |X| < \beta \wedge \varphi \in For^{\iota}\} \\ & & & \cup \ \{(\exists X)\varphi \mid X \subset Var_{L_{\alpha\beta}} \wedge |X| < \beta \wedge \varphi \in For^{\iota}\}, \quad \iota + 1 < \xi, \\ For^{\lambda} & = & \bigcup_{\iota<\xi} For^{\iota}, \quad \lambda \leq \xi, \ Lim(\lambda). & \end{array}$$

Na kraju definišemo $For_{L_{\alpha\beta}}$ kao $For_{L_{\alpha\beta}} = For^{\xi}$.

Složenost formula izražavamo slično kao i u slučaju iskaznog računa funkcijom $co_{L_{\alpha\beta}} : For_{L_{\alpha\beta}} \to \omega$, koju definišemo induktivno formulom:

$$co_{L_{\alpha\beta}}(\varphi) = \begin{cases} \emptyset & : \varphi \in For^{\emptyset} = At_{L_{\alpha\beta}}, \\ \iota + 1 & : \varphi \in For^{\iota+1} \setminus For^{\iota}. \end{cases}$$

Definicija 1.3.5. Za datu formulu $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ uvedimo operator *pomjeranja negacije* u oznaci $\varphi\neg$, induktivno po složenosti formule φ slijedećom formulom:

$$\varphi\neg = \begin{cases} \neg\varphi & : \varphi \in At_{L_{\alpha\beta}}, \\ \psi & : \varphi = (\neg\psi), \\ \psi \wedge (\neg\theta) & : \varphi = (\psi \to \theta), \\ \bigvee_{\psi\in\Phi} \neg\psi & : \varphi = (\bigwedge_{\psi\in\Phi} \psi), \\ \bigwedge_{\psi\in\Phi} \neg\psi & : \varphi = (\bigvee_{\psi\in\Phi} \psi), \\ (\exists X)\neg\psi & : \varphi = (\forall X)\psi, \\ (\forall X)\neg\psi & : \varphi = (\exists X)\psi. \end{cases}$$

Definicija 1.3.6. Definišimo preslikavanje $Fv : For_{L_{\alpha\beta}} \to P(Var_{L_{\alpha\beta}})$, koje svakoj formuli $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ dodjeljuje skup varijabli koje imaju slobodno javljanje u formuli φ. Preslikavanje definišimo indukcijom po kompleksnosti formula, na sedeći način:

(1) Ako $\varphi \in At_{L_{\alpha\beta}}$ onda je $Fv(\varphi)$ skup svih varijabli koje se pojavljuju u formuli φ.

(2) $Fv(\neg\varphi) = Fv(\varphi)$.

(3) $Fv(\varphi \to \psi) = Fv(\varphi) \cup Fv(\psi)$.

(4) $Fv(\bigwedge \Phi) = Fv(\bigvee \Phi) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} Fv(\varphi)$.

(5) $Fv((\forall X)\varphi) = Fv((\exists X)\varphi) = Fv(\varphi) \setminus X$.

Elemente skupa $Fv(\psi)$ nazivamo ***slobodnim varijablama*** formule ψ. Ostale varijable koje se javljaju u formuli ψ nazivamo ***ograničenim varijablama.***

Da bismo naznačili da je skup varijabli $X \subset Fv(\varphi)$ podskup skupa slobodnih promjenjljivih $Fv(\varphi)$ formule φ, koristimo oznaku $\varphi[X]$. Ako je $T : X \to Term_{L_{\alpha\beta}}$, jednoznačnu zamjenu promjenljivih is X odgovarajućm vrijednostima funkcije T označavamo sa $\varphi[T_{|X}]$, a kada to kontekst dozvoljava koristimo jednostavniju oznaku $\varphi[T]$. Kada su skupovi X i F konačni tada upotrebljavamo obične zagrade umjesto uglastih i eksplicitno navodimo varijable i termove.

Definicija 1.3.7. Formule $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ za koje važi $Fv(\varphi) = \emptyset$, nazivamo *rečenicama.* Skup svih rečenica obilježavamo sa $Sent_{L_{\alpha\beta}}$.

Definicija 1.3.8. Kardinalan broj skupa $For_{L_{\alpha\beta}}$ obilježavamo sa $||L||$.
Na osnovu prethodne definicje lako se dokazuje da važi:

$$||L|| = |L| + \alpha + \beta.$$

Primjetimo da nećemo ništa dobiti razmatranjem beskonačnih logika $L_{\alpha\beta}$, gdje je $\alpha < \beta$. Uzmemo li za primjer beskonačnu logiku $L_{\omega\omega_1}$, njene formule će imati konačan broj slobodnih promjenljivih, koje ćemo biti u stanju da "ograničimo" neprebrojivim kvantifikatorima. Zbog toga u ostatku rada podrazumjevati ćemo da se bavimo beskonačnim logikama $L_{\alpha\beta}$ kod kojih je $\alpha \geq \beta$.

Definicija 1.3.9. Bilo koji podskup $\Phi \subset For_{L_{\alpha\beta}}$ nazivamo ***teorijom*** logike $L_{\alpha\beta}$, a članove skupa Φ nazivamo ***aksiomama*** teorije Φ.

Slično kao i kod iskaznog računa uvodimo pojmove dokaza i teoreme. Precizirajmo sada aksime i pravila izvodjenja beskonačnih logika $L_{\alpha\beta}$.

Definicija 1.3.10. Pod pojmom ***logičkih*** aksioma logika $L_{\alpha\beta}$ podrazumjevamo slijedeći niz rečenica:

(1) AKSIOME TAUTOLOGIJA. Ove aksiome dobijamo ako u tautologiju φ iskaznog račun P_α zamjenimo svako pojavljivanje iskazne varijable v_ι nekom formulom $\psi \in For_{L_{\alpha\beta}}$.

(2) AKSIOME NEGACIJE. Za svaku formulu $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ dodajemo po jednu aksiomu *negacije*:
$$(\neg\varphi) \leftrightarrow (\varphi\neg).$$

(3) AKSIOME IDENTITETA. Za sve varijable $x, y \in Var_{L_{\alpha\beta}}$, za svaki term $t \in Term_{L_{\alpha\beta}}$ i za svaku formulu $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ dodajemo slijedeće tri aksiome:

(I1) $(\forall x)\ x = x$,

(I2) $(\forall x, y)\ (\ x = y \to y = x\ )$,

(I3) $(\forall x)\ (\ (\varphi(x) \wedge x = t) \to \varphi(t)\ )$.

(4) AKSIOME KVANTIFIKATORA. Za svaku formulu $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$, $X \subset Fv(\varphi)$ i preslikavanje $T : X \to Term_{L_{\alpha\beta}}$ dodajemo slijedeće dvije aksiome:

(Q1) $(\forall X)\varphi[X] \rightarrow \varphi[T]$,

(Q2) $\varphi[T] \rightarrow (\exists X)\varphi[X]$.

(5) PRAVILA IZVODJENJA. Za bilo koje dvije formule $\varphi, \psi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ dodjajemo slijedeća pravila izvodjenja:

(R1) MODUS PONENS.

$$MP \frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

(R2) GENERALIZACIJA. Pod pretpostavkom da $X \not\subset Fv(\varphi)$:

$$UN \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow (\forall X)\psi} \text{ i}$$

$$EX \frac{\psi \rightarrow \varphi}{(\exists X)\psi \rightarrow \varphi}$$

(R3) PRAVILO IMPLIKACIJE. Za $(\bigwedge \Phi) \in For_{L_{\alpha\beta}}$:

$$IM \frac{\varphi \rightarrow \psi,\ \psi \in \Phi,\ \ (\bigwedge \Phi) \in For_{L_{\alpha\beta}}}{\varphi \rightarrow \bigwedge \Phi}$$

Naglasimo da navedeni skup aksioma nije minimalan, ali kako minimalnost skupa aksioma nije od značaja za dalja razmatranja, zadržavamo ovaj skup aksioma.

Definicija 1.3.11. Neka je Φ proizvoljna teorija logike $L_{\alpha\beta}$. Niz formula $\langle\varphi_\iota\rangle_{\iota\leq\gamma}$, logike $L_{\alpha\beta}$, gdje $\gamma < \alpha$, predstavlja ***dokaz*** formule $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ u teoriji Φ ako ordinal γ nije granični, zatim ako je $\varphi = \varphi_\gamma$ i ako za svaku formulu φ_ι u ovom nizu važi da $\varphi_\iota \in \Phi$ ili da se formula φ_ι može dobiti primjenom nekog pravila izvodjenja iz formula koje joj prethode u nizu $\langle\varphi_\iota\rangle_{\iota<\gamma}$. Tada kažemo je formula φ ***dokaziva*** u teoriji Φ, što obiljezavamo sa:

$$\Phi \vdash_{L_{\alpha\beta}} \varphi.$$

Formulu φ_β nazivamo ***teoremom teorije*** Φ logike $L_{\alpha\beta}$. Ako je skup formula Φ prazan, tada formule $\varphi \in For_{p_\alpha}$ za koje važi $\vdash_{L_{\alpha\beta}} \varphi$ nazivamo ***teoremama*** logike $L_{\alpha\beta}$.

Definicija 1.3.12. Teorija Φ logike $L_{\alpha\beta}$ je ***kontradiktorna*** ako postoji formula $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ takva da važi:

$$\Phi \vdash_{L_{\alpha\beta}} \varphi \text{ i } \Phi \vdash_{L_{\alpha\beta}} \neg\varphi.$$

Definicija 1.3.13. Teorija Φ logike $L_{\alpha\beta}$ je ***kompletna*** ako za svaku formulu $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ važi:

$$\text{ili } \Phi \vdash_{L_{\alpha\beta}} \varphi \text{ ili } \Phi \vdash_{L_{\alpha\beta}} \neg\varphi.$$

U nastavku rada podrazumjevamo da radimo samo sa teorijama koje imaju skup logičkih aksioma iz iz ***Definicije 10.*** za svoj podskup.

Lema 1.3.1. LEMA O NOVIM KONSTANTAMA. Neka je Φ teorija logike $L_{\alpha\beta}$ i neka je C skup simbola konstanti koje se ne javljaju u L tj. $C \cap L = \emptyset$. Tada za svaku formulu $\varphi[X] \in For_{L_{\alpha\beta}}$, ako važi $\Phi \vdash_{L \cup C_{\alpha\beta}} \varphi[C]$, važi i $\Phi \vdash_{L_{\alpha\beta}} (\forall X)\varphi[X]$.

DOKAZ. U dokazu formule $\varphi[C]$ jednoznačno zamjenimo pojavljivanje svake konstante $c \in C$ jednom varijablom $y \in Y$ koja se ne pojavljuje u dokazu. Tada dobijamo dokaz formule $\varphi[Y]$ u teoriji Φ u logici $L_{\alpha\beta}$, tj. $\Phi \vdash_{L_{\alpha\beta}} \varphi[Y]$. Primjenom pravila izvodjenja *UN*, odnosno generalizacijom dobijamo $\Phi \vdash_{L_{\alpha\beta}} (\forall X)\varphi[X]$. ***Q.E.D.***

Definicija 1.3.14. Formula φ logike $L_{\alpha\beta}$ je u ***preneks normalnoj formi*** ako je oblika:

$$\varphi = (Q_1 X_1)...(Q_n X_n)\psi,$$

gdje je formula ψ formula bez kvantifikatora, i $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \{1, ..., n\}$.

Bez navodjenja dokaza navedimo slijedeću teoremu.

Teorema 1.3.1. TEOREMA O PRENEKS NORMALNOJ FORMI. Za svaku formulu φ logike $L_{\alpha\beta}$ postoji njoj ekvivalentna formula $\psi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ u preneks normalnoj formi takva da važi:

$$\vdash_{L_{\alpha\beta}} \varphi \to \psi \text{ i } \vdash_{L_{\alpha\beta}} \psi \to \varphi.$$

Formulišimo dalje pojam modela i relaciju zadovoljenja formule u modelu.

Definicija 1.3.15. Model je svaka struktura $\mathfrak{A} = \langle A, \mathbf{R}, \mathsf{F}, \mathbf{C}\rangle$ gdje je

(1) A je neprazan skup, ***domen*** modela $\mathfrak{A}$.

(2) $\mathbf{R}$ je skup relacija nad skupom A.

(3) F je skup opreacija nad skupom A.

(4) $\mathbf{C}$ je podskup skupa A.

Definicija 1.3.16. Neka je dat jezik L i proizvoljan skup A. ***Interprtacija*** jezika L u domenu A je svako preslikavanje $\mathfrak{I}$ sa domenom u L i za $s \in L$ vrijednost funkcije $\mathfrak{I}$ je odredjena formulom:

$$\mathfrak{I}(s) = \begin{cases} R \subset A^n & : s \in Rel_L \wedge n = ar(s), \\ F : A^n \to A & : s \in Fun_L \wedge n = ar(s), \\ c \in A & : s \in Const_L. \end{cases}$$

Iz gornje definicije zaključujemo da interpretacija $\mathfrak{I}$ jednoznačno odredjuje jedinstven model:

$$\mathfrak{A} = \langle A, \mathfrak{I}(Rel_L), \mathfrak{I}(Fun_L), \mathfrak{I}(Const_L)\rangle.$$

Ovako uveden model jednostavno zapisujemo kao $\mathfrak{A} = \langle A, \mathfrak{I}\rangle$. Radi jednostavnijeg označavanja, za elemente jezika $s \in L$, njihove slike $\mathfrak{I}(s)$ u modelu $\mathfrak{A}$ označavamo sa s^A, dakle, $s^A = \mathfrak{I}(s)$.

Definicija 1.3.17. Neka su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ dva modela jezika L. Kažemo da je model $\mathfrak{B}$ ***podmodel*** modela $\mathfrak{A}$ akko su ispunjeni slijedeći uslovi:

(1) $B \subset A$.

(2) Ako $R \in Rel_L$ i $ar(R) = n$, tada $R^B = R^A \cap B^n$.

(3) Ako $F \in Fun_L$ i $ar(F) = n$, tada $F^B = F^A_{|B^n}$.

(4) Ako $c \in Const_L$, tada $c^A = c^B$.

Definicija 1.3.18. Neka je dat model $\mathfrak{A}$ jezika L. Pod *valuacijom* podrazumjevamo bilo koje totalno preslikavanje $\nu : Var_{L_{\alpha\beta}} \to A$. Valuacija dodjeljuje varijablama vrijednosti iz domena A. Na osnovu date valuacije ν možemo indukcijom po kompleksnosti terma $t \in Term_{L_{\alpha\beta}}$ definisati vrijednosti terma u oznaci $t^A[\nu]$ slijedećom formulom:

$$t^A[\nu] = \begin{cases} \nu(\iota) & : co_{Term_{L_{\alpha\beta}}}(t) = \emptyset \ \wedge \ t = v_\iota \in Var_{L_{\alpha\beta}} \ \wedge \iota < \alpha, \\ c^A & : co_{Term_{L_{\alpha\beta}}}(t) = \emptyset \ \wedge \ t = c \in Const, \\ F^A(t_1^A[\nu], ..., t_n^A[\nu]) & : t = F(t_1, ..., t_n). \end{cases}$$

Definicija 1.3.19. Neka je dat model $\mathfrak{A}$ jezika L logike $L_{\alpha\beta}$ i valuacija $\nu : Var_{L_{\alpha\beta}} \to A$. Za proizvoljnu funkciju $\mathfrak{f}$ čiji je domen V podskup skupa varijabli, $V \subset Var$, i kodomen podskup skupa A, definišemo valuaciju $\nu_{[\mathfrak{f}]}$ na slijedećom formulom:

$$\nu_{[\mathfrak{f}]}(v_\gamma) = \begin{cases} \nu(v_\gamma) & : \gamma \notin V, \\ \mathfrak{f}(v_\gamma) & : \gamma \in V. \end{cases}$$

Definicija 1.3.20. Neka je $\mathfrak{A}$ model jezika L logike $L_{\alpha\beta}$. Za sve njegove valuacije $\nu : Var_{L_{\alpha\beta}} \to A$ i za sve formule $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ definišemo relaciju *zadovoljenja* u oznaci:

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\nu],$$

indukcijom po kompleksnosti formule φ:

(1) Ako je $\varphi = (t_1 = t_2)$, gdje $t_1, t_2 \in Term_{L_{\alpha\beta}}$, tada

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\nu] \ \text{ akko } \ t_1^A[\nu] = t_1^A[\nu].$$

(2) Ako je $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, gdje $R \in Rel_L$, $ar(R) = n$ i $t_1, ..., t_n \in Term_{L_{\alpha\beta}}$, tada

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\nu] \ \text{ akko } \ (t_1^A[\nu], ..., t_n^A[\nu]) \in R^A.$$

(3) Ako je $\varphi = \neg\psi$, tada

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\nu] \ \text{ akko } \ \mathfrak{A} \not\models_{L_{\alpha\beta}} \psi[\nu].$$

(4) Ako je $\varphi = \psi \to \theta$, tada

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\nu] \ \text{ akko } \ (\mathfrak{A} \not\models_{L_{\alpha\beta}} \psi[\nu] \text{ ili } \mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\nu]).$$

(5) Ako je $\varphi = \bigwedge \Phi$, tada

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\nu] \ \text{ akko } \ \text{za svako } \psi \in \Phi \text{ važi } \mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \psi[\nu].$$

(6) Ako je $\varphi = \bigvee \Phi$, tada

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\nu] \ \text{ akko } \ \text{postoji } \psi \in \Phi \text{ tako da važi } \mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \psi[\nu].$$

(7) Ako je $\varphi = (\forall X)\psi$, tada

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\nu] \ \text{ akko } \ \text{za svako } \mathfrak{f} : X \to A \text{ važi } \mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \psi[\nu_{[\mathfrak{f}]}].$$

(8) Ako je $\varphi = (\exists X)\psi$, tada

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\mathbf{v}] \text{ akko postoji } \mathbf{f} : X \to A \text{ tako da važi } \mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \psi[\mathbf{v}_{[\mathbf{f}]}].$$

Na osnovu definicije relacije zadovoljenja, vidimo da vrijednost $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\mathbf{v}]$ zavisi samo od vrijednosti valuacije $\mathbf{v}$ za slobodne promjenljive formule φ. Dakle, ako su valuacije $\mathbf{v}$ i $\mathbf{u}$ takve da $\mathbf{v}_{|Fv(\varphi)} = \mathbf{u}_{|Fv(\varphi)}$, tada važi:

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\mathbf{v}] \text{ akko } \mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\mathbf{u}].$$

Ako je skup slobodnih varijabli formule φ konačan tj. $Fv(\varphi) = \{u_1, ..., u_n\}$, tada umjesto da $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\mathbf{v}]$, za $\mathbf{v}(u_i) = a_i$, gdje $i < (n+1)$ pišemo jednostavnije $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi(a_1, ..., a_n)$. Pošto rečenice $\varphi \in Sent_{L_{\alpha\beta}}$ nemaju slobodne promjenljive to vrijednost relacije zadovoljenja u bilo kojem modelu $\mathfrak{A}$ kod njih ne zavisi od vrijednosti valuacija. U tom slučaju pišemo jednostavnije $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi$.

Definicija 1.3.21. Pod teorijom modela $\mathfrak{A}$ jezika L logike $L_{\alpha\beta}$ u oznaci $Th_{L_{\alpha\beta}}(\mathfrak{A})$ podrazumjevamo skup rečenica koje važe u modelu $\mathfrak{A}$, odnosno slijedeći skup:

$$Th_{L_{\alpha\beta}}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in Sent_{L_{\alpha\beta}} \mid \mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi\}.$$

Lako uočavamo da u modelu $\mathfrak{A}$ za bilo koju formulu $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ i bilo koju valuaciju $\mathbf{v} : Var_{L_{\alpha\beta}} \to A$, važi ili $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[\mathbf{v}]$ ili $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \neg\varphi[\mathbf{v}]$, te iz ovoga zaključujemo da je $Th_{L_{\alpha\beta}}(\mathfrak{A})$ kompletna teorija.

Definicija 1.3.22. Neka je Φ teorija logike $L_{\alpha\beta}$. Model $\mathfrak{A}$ jezika L je model teorije Φ ako za svaku formulu $\varphi \in \Phi$ važi $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi$, tj. $\Phi \subset Th_{L_{\alpha\beta}}(\mathfrak{A})$. U tom slučaju pišemo:

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \Phi.$$

Od interesa će biti samo teorije koje sadrže skup logičkih aksioma logike $L_{\alpha\beta}$ iz ***Definicije 10***, tako da će to biti radna hipoteza za sve teorija sa kojima radimo.

Kao i u slučaju iskaznog računa postavlja se pitanje ***kompletnosti*** i ***kompaktnosti*** logika $L_{\alpha\beta}$. U poglavlju koje je posvećeno ovim problemima vidjeti ćemo da su logike $L_{\alpha\beta}$ kompletne ali bez odredjenih jakih pretpostavki iz terorije skupova ni jedna od logika $L_{\alpha\beta}$ sem $L_{\omega\omega}$ nije kompaktna.

Glava 2

Analitički tabloi

U ovoj glavi slijedi formulacija analitičkih tabloa i njihova svojstva za iskazne račune P_α i beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$. U oba slučaja za niz formula Φ definišemo niz analitičkih tabloa (niz stabala) T_ι^Φ, za $\iota \in On$. Ključno svojstvo tabloa jeste TEOREMA O ZAUSTAVLJANJU, koju možemo formulisati formulom:

$$(\exists\gamma)(\forall\iota)\ (\gamma \leq \iota \rightarrow \mathsf{T}_\gamma^\Phi = \mathsf{T}_\iota^\Phi).$$

Na osnovu ove teoreme definišemo i kompletan tablo za niz formula Φ kao $\mathsf{T}^\Phi = \mathsf{T}_\gamma^\Phi$, (ako γ ima svojstvo iz TEOREME O ZAUSTAVLJANJU). Kopletan tablo je tablo nad kojim više nije moguće primjeniti pravila za konstrukciju tabloa. U slučaju iskaznih računa moguće je dokazati i to da kada je niz formula Φ iskaznog računa P_α takav da $|\Phi| < \alpha$, onda je kardinalnost skupa tačaka kopletnog tabloa T^Φ je manja od α. Ova teorema će biti od presudne važnosti za dokaze u glavi o kompaktnosti. Napomenimo da ekvivalentna teorema za beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$ ne važi.

Metoda analitičkih tabloa predstavlja jednu od osnovnih metoda za automatsko dokazivanje teorema. Razvili su je *E. W. Beth*, *K. J. J. Hintikka* i *R. M. Smullyan* sredinom pedesetih i početkom šezdesetih godina ovoga vijeka. Iako zamišljena kao model-teoretski metod, svoju popularnost stekla je kao metod za automatsko dokazivanje teorema. Postoje brojni dokazivači koji koriste ovu metodu, kao i brojne njene varijante, koje su takodje doživljele veliki broj implementacija.

U ovom radu s jedne strane metoda analitičkih tabloa se uopštava na iskazne račune P_α i na beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$. Tako uopštenom metodom dobijamo poznate rezultate za iskazne račune P_α i beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$.

2.1 Analitički tabloi za iskazne račune P_α

2.1.1 Definicija analitičkih tabloa za iskazne račune P_α

Lema 2.1.1. Neka je dat iskazni račun P_α. Za bilo koje njegove formule $\varphi, \psi, \varphi_\iota \in For_{P_\alpha}$, $\iota < \gamma < \alpha$ i za bilo koju valuaciju $\mathfrak{p} : Var_{P_\alpha} \rightarrow \{T, F\}$ važe slijedeći stavovi:

(P1) Ako $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg\varphi$, tada $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi\neg$.

(P2) Ako $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi \to \psi$, tada je $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg\varphi$ ili $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \psi$.

(P3) Ako $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \bigwedge_{\iota<\gamma} \varphi_\iota$, tada za svako $\iota < \gamma$ važi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi_\iota$.

(P4) Ako $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \bigvee_{\iota<\gamma} \varphi_\iota$, tada postoji $\iota < \gamma$ tako da važi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi_\iota$.

DOKAZ. Dokaz neposredno slijedi na osnovu svojstava relacije zadovoljenja za iskazni račun P_α.

Koristeći oznake ***Leme 2.1.1.*** i simbol | za razdvajanje (disjunkciju), ***Lemu 2.1.1.*** možemo formulisati u vidu slijedeća četiri pravila:

$$(P1)\ \frac{\neg\varphi}{\varphi\neg},\ \varphi \notin Var_{P_\alpha}, \qquad (P2)\ \frac{\varphi \to \psi}{\neg\varphi \mid \psi}$$

$$(P3)\ \begin{array}{c} \bigwedge_{\iota<\gamma}\varphi_\iota \\ \hline \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_\iota \\ \vdots \end{array} \qquad (P4)\ \frac{\bigvee_{\iota<\gamma}\varphi_\iota}{\varphi_0 \mid \varphi_1 \mid \ldots \mid \varphi_\iota \mid \ldots}$$

Na osnovu strukture pravila, možemo ih shvatiti kao pravila za konstrukciju stabla. Naime, podjemo li od neke formule $\varphi \in For_{P_\alpha}$, možemo je primjeniti nad njom neko od pravila (P1)–(P4). Naravno simbol | shvatamo kao odvajanje grana. Nastavimo li postupak, ako je to moguće, izgraditi ćemo stablo čiji će tačke biti formule. Konstrukciju vršimo tako da samo jednom primjenjujemo pravilo nad formulom. Pokazuje se da je konstrukcija moguća sve dok postoje formule u stablu nad kojim nijesmo primjenili pravila. Primjetimo da se nad varijablama i negacijama varijabli ne može primjeniti ni jedno od pravila (P1)-(P2). Kada u stablu nema više formula nad kojima možemo primjenti neko od pravila (P1)–(P4), tada smatramo konstrukciju stabla završenom. Ovako konstruisano stablo nazivamo ***analitčkim tabloom*** formule φ.

Analitički tabloi su nam važni iz dva razloga. Ako pravila (P1)–(P4) shvatimo kao pravila izvodjenja, tada pod izvjesnim uslovima koji treba da važe za grane analitčkog tabloa, analitički tablo možemo smatrati dokazom. S druge strane, grane analitičkog tabloa koje zadovoljavaju izvjesne uslove mogu nam obezbjediti model formule za koju smo generisali analitički tablo.

Iz rečenog, možemo zaključiti da analitičke tabloe možemo posmatrati i kao sintaksnu i kao semantičku metodu.

Uvedimo precizno pojam analitičkih tabloa.

Definicija 2.1.1. ***Tačka anlitičkog tabloa*** biti će struktura oblika: $\langle\delta,\varphi\rangle$, gdje je $\varphi \in For_{P_\alpha}$ i δ je ordinal. ***Analitički tablo*** predstavlja stablo $\mathsf{T} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$, tako da je skup T, skup tačaka analitičkog tabloa.

Pored formule φ u strukturu tačke ulazi i ordinal δ koji objezbjedjuje jedinstvenost svake tačke koja se konstrukcijom uvodi u analitički tablo. Struktura tačaka analitickog tabloa nam omogućava da skup njegovih tačaka posmatramo kao niz, te ako je $\mathsf{T} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$ analiticki tablo, tada tačku $\langle\delta,\varphi\rangle \in T$ obilježavamo sa t_δ.

Za formulu φ iskaznog računa P_α kažemo da *je na* grani X analitičkog tabloa, u oznaci $\varphi \sim X$, ako važi formula:

$$(\exists\sigma)\ \langle\sigma,\varphi\rangle \in X.$$

Niz analitičkih tabloa, niza formula Φ definišemo induktivno po ordinalima i ovu funkciju označavamo sa $\mathsf{T}^{\Phi}_{\iota}$, $\iota \in On$. Uporedo definišemo i funkciju $\mathbf{o}^{\Phi}_{\iota}$, $\iota \in On$ koja nam osigurava da svakoj novoj tački u $\mathsf{T}^{\Phi}_{\iota}$ dodjelimo njen jedinstveni ordinal. Prije nego li definišimo funkcije $\mathsf{T}^{\Phi}_{\iota}$ i $\mathbf{o}^{\Phi}_{\iota}$ uvedimo nekoliko pomoćnih funkcija.

Definicija 2.1.2. Neka je x tačka analitičkog tabloa. Definišimo tada preslikavanje $Ap(x,\delta,\sigma)$ koje tački x i ordinalima δ i σ dodjeljuje niz formula na osnovu formule:

$$Ap(x,\delta,\sigma)=\begin{cases}\langle\ \langle\delta\overset{*}{+}\sigma,\varphi\neg\rangle\ \rangle & : x=\langle\tau,\neg\varphi\rangle\\ & \quad\wedge\ \varphi\notin Var_{P_\alpha},\\[2ex] \langle\ \langle\delta\overset{*}{+}(\sigma\overset{*}{\cdot}2),\neg\varphi\rangle, & : x=\langle\tau,\varphi\to\psi\rangle,\\ \qquad \langle\delta\overset{*}{+}(\sigma\overset{*}{\cdot}2)\overset{*}{+}1,\psi\rangle\ \rangle & \\[2ex] \langle\ \langle\delta\overset{*}{+}(\sigma\overset{*}{\cdot}\gamma)\overset{*}{+}\iota,\varphi_\iota\rangle\ \rangle_{\iota<\gamma} & : x=\langle\tau,\bigwedge_{\iota<\gamma}\varphi_\iota\rangle\\ & \quad\vee\ x=\langle\tau,\bigvee_{\iota<\gamma}\varphi_\iota\rangle,\\[2ex] \emptyset & : \text{inače.}\end{cases}$$

Na osnovu definicije preslikavanja $Ap(x,\delta,\sigma)$ jasno je da ovo preslikavanje svakoj formuli tačke analitičkog tabloa dodjeljuje niz podformula od koje je sagradjena polazna formula, obilježenih ordinalima većim od naznačenih težinskih proizvoda i suma ordinala δ i σ naznačenih u definiciji.

Analitiči tablo definišemo u koracima tako što u svakom koraku ι primjenjujemo neko od pravila (P1)–(P4) nad formulom φ koja je u tački $\langle\iota,\varphi\rangle$, ako ona postoji, inače tablo ostavljamo nepromjenjen.

Definicija 2.1.3. Grana $X \in \mathbf{G}_{\mathsf{T}}$ analitickog tabloa je ***kontradiktorna*** ako postoje tačke $\langle\sigma,\varphi\rangle$ i $\langle\tau,\neg\varphi\rangle$ takve da pripadaju grani X, tj. $\langle\sigma,\varphi\rangle,\langle\tau,\neg\varphi\rangle \in X$. U suprotnom granu X nazivamo ***konzistentnom.*** Skup svih konzistentnih grana tabloa T obilježavamo sa $\mathbf{CG}_{\mathsf{T}}$. Skup svih tačaka koje se nalaze u konzistentnim granama tabloa T obilježavamo sa $\mathbf{CP}_{\mathsf{T}}$. Iz definicije je jasno da:

$$\mathbf{CP}_{\mathsf{T}}=\{\ x \mid (\exists X\in\mathbf{CG}_{\mathsf{T}})\ x\in X\ \}.$$

Skup svih konsiztentnih grana tabloa T koje sadrže tačku x obilježavamo sa $\mathbf{CG}_{\mathsf{T}}(x)$. Analogno definišemo i skupove $\mathbf{CM}_{\mathsf{T}}$ i $\mathbf{CM}_{\mathsf{T}}(x)$ kao skupove maksimalno konzistentnih grana tabloa T i maksimalno konzistentnih grana tabloa T koje prolaze kroz tačku x. Struktura $\langle X_{\mathsf{T};\sigma}\rangle_{\sigma<|\mathbf{CM}_{\mathsf{T}}|}$ predstavlja niz maksimalno konzistentnih grana stabla T, a struktura $\langle X^{x}_{\mathsf{T};\sigma}\rangle_{\sigma<|\mathbf{CM}_{\mathsf{T}}(x)|}$ predstavlja niz maksimalno konzistentnih grana stabla T koje sadrže tačku x.

Iz definicija je jasno da važe slijedeće jednakosti: $Range(\langle X_{\mathsf{T};\sigma}\rangle_{\sigma<|\mathbf{CM}_{\mathsf{T}}|})=\mathbf{CM}_{\mathsf{T}}$ i $Range(\langle X^{x}_{\mathsf{T};\sigma}\rangle_{\sigma<|\mathbf{CM}_{\mathsf{T}}(x)|})=\mathbf{CM}_{\mathsf{T}}(x)$.

Definicija 2.1.4. Neka je dat analitički tablo T, ordinal ι i neka δ predstavlja prvi ordinal veći od svih ordinala u tačkama analitičkog tablo T. Definišimo funkciju R koja preslikava skup uredjenih trojki $(\mathsf{T},\iota,\delta)$ u skup tabloa na osnovu formule:

$$R(\mathsf{T},\iota,\delta)=\begin{cases}\biguplus_{\sigma<|\mathsf{CM}_{\mathsf{T}}(\mathsf{t}_\iota)|} Rep_\wedge(\mathsf{T},X^{\mathsf{t}_\iota}_{\mathsf{T};\sigma},Ap(\mathsf{t}_\iota,\delta,\sigma)) & : \mathsf{t}_\iota=\langle\iota,\neg\varphi\rangle\vee\\ & \quad \mathsf{t}_\iota=\langle\iota,\bigwedge_{\sigma<\gamma}\varphi_\sigma\rangle,\\ \biguplus_{\sigma<|\mathsf{CM}_{\mathsf{T}}(\mathsf{t}_\iota)|} Rep_\vee(\mathsf{T},X^{\mathsf{t}_\iota}_{\mathsf{T};\sigma},Ap(\mathsf{t}_\iota,\delta,\sigma)) & : \mathsf{t}_\iota=\langle\iota,\varphi\to\psi\rangle\vee\\ & \quad \mathsf{t}_\iota=\langle\iota,\bigvee_{\sigma<\gamma}\varphi_\sigma\rangle,\\ \mathsf{T} & : \text{inače.}\end{cases}$$

Intuitivno funkcija $R(\mathsf{T},\iota,\delta)$ primjeni neko od pravila (P1)–(P4) na formulu u tački t_ι tabloa T tako što proširi svaku konzistentnu granu $X^{\mathsf{t}_\iota}_{\mathsf{T};\sigma}$ tabloa T koja sadrži tačku t_ι u skladu sa pravilom koje primjeni, inače ostavlja tablo T nepromjenjenim.

Definicija 2.1.5. Definišimo za niz formula $\Phi=\langle\varphi_\sigma\rangle_{\sigma<\tau}$ iskaznog računa P_α, ***niz analitičkih tabloa*** T^Φ_ι i niz ordinala $\mathbf{o}^\Phi_\iota$ induktivno po ordinalima na osnovu slijedećih formula:

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^\Phi_\emptyset &= Tree_\wedge(\langle\emptyset,\varphi_\emptyset\rangle,\langle\langle\sigma,\varphi_\sigma\rangle\rangle_{\emptyset<\sigma<\tau}),\\ \mathsf{T}^\Phi_{\iota+1} &= R(\mathsf{T}^\Phi_\iota,\iota,\mathbf{o}^\Phi_\iota),\\ \mathsf{T}^\Phi_\gamma &= \biguplus_{\iota<\gamma}\mathsf{T}^\Phi_\iota,\quad Lim(\gamma),\\ \mathbf{o}^\Phi_\iota &= \bigcup_{\langle\sigma,\varphi\rangle\in T^\Phi_\iota}(\sigma+1).\end{aligned}$$

Navedimo nekoliko elementarnih ali važnih poslijedica prethodne definicije.

(D1) Svaki element niza T^Φ_ι je skup.

(D2) Obilježimo li sa $\mathsf{T}^\Phi_\iota=\langle T^\Phi_\iota,<_{\mathsf{T}^\Phi_\iota}\rangle$, važi sledeća formula:

$$(\forall\xi)(\forall\iota<\xi)\ T^\Phi_\iota\subset T^\Phi_\xi.$$

(D3) Za bilo koji ordinal γ, i za sve tačke x tabloa T^Φ_γ postoji ordinal $\xi\le\gamma$ tako da važi formula:

$$((\forall\iota\le\xi)\ x\notin T^\Phi_\iota)\ \wedge\ ((\forall\iota>\xi)\ x\in T^\Phi_\iota).$$

(D4) Za bilo koji granični ordinal γ, i za sve tačke x tabloa T^Φ_γ postoji ordinal $\xi<\gamma$ tako da važi formula:

$$x\notin T^\Phi_\xi\ \wedge\ x\in T^\Phi_{\xi+1}.$$

Da bi olakšali zapis formula za elemente nizova T^Φ_ι, skupove koji su uvedeni u ***Definiciji 2.1.3.*** označimo sa $\mathbf{G}^\Phi_\iota=\mathbf{G}_{\mathsf{T}^\Phi_\iota}$, $\mathbf{CP}^\Phi_\iota=\mathbf{CP}_{\mathsf{T}^\Phi_\iota}$, $\mathbf{CG}^\Phi_\iota=\mathbf{CG}_{\mathsf{T}^\Phi_\iota}$ i $\mathbf{CM}^\Phi_\iota=\mathbf{CM}_{\mathsf{T}^\Phi_\iota}$.

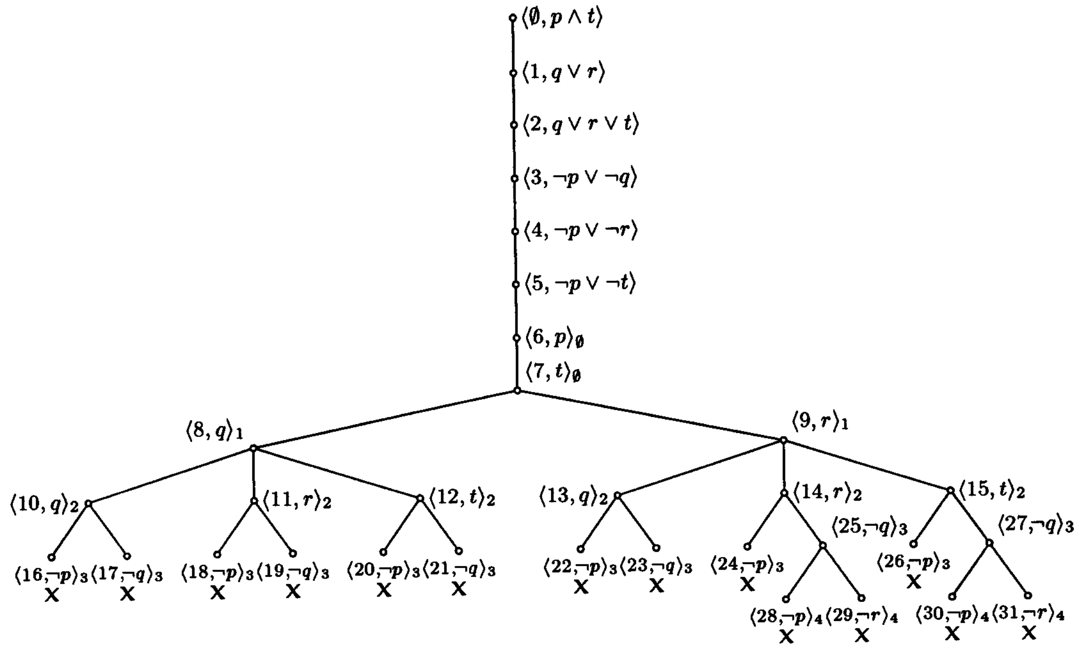
Navedimo nekoliko primjera konstrukcije analitičkih tabloa za iskazne račune P_α. U primjerima koje navodimo iskazne varijable označavamo sa malim slovima latinice

$p, q, r, \ldots$. Tačkama tabloa dodajemo i indeks, koji označava od koje je tačke dobijena data tačka. Grane u kojima dodje do kontradikcije obilježavamo sa **X**.

Primjer 2.1.1. Konstruišimo analitički tablo nad slijedećim formulama iskaznog računa P_ω:

$$p \wedge t, \quad q \vee r, \quad q \vee r \vee t, \quad \neg p \vee \neg q, \quad \neg p \vee \neg r, \quad \neg p \vee \neg t.$$

Tablo T_5 konstruisan nad navedenim formulama je predstavljen Slikom 5.



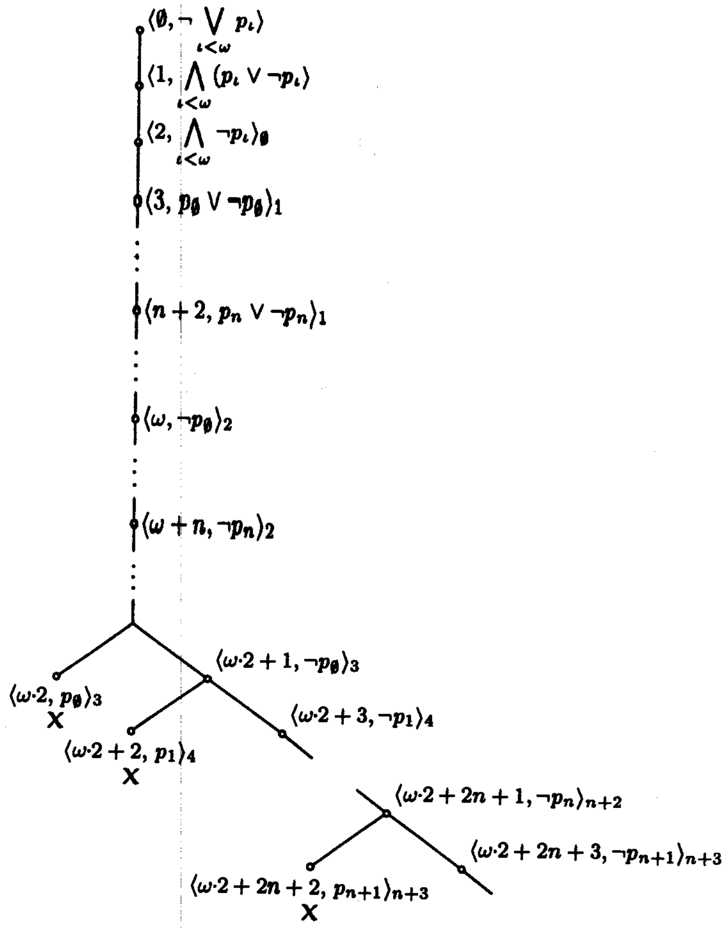
Slika 5.

Primjetimo da je su u tablou $\mathsf{T}_\emptyset$ prisutne tačke sa ordinalima od $\emptyset$ do 5, u tablou T_1 od $\emptyset$ do 7, u tablou T_2 od $\emptyset$ do 9, u tablou T_3 $\emptyset$ do 15, u tablou T_4 od $\emptyset$ do 27 i u tablou T_5 od $\emptyset$ do 31. Primjetimo da je za svaki ordinal $5 \leq \iota$, važi $\mathsf{T}_5 = \mathsf{T}_\iota$. Uopštenje prethodnog svojstva: da poslije nekog ordinala konstrukcija tabloa "staje" biti će osnovni rezultat u nastavku ovog odjeljka za iskazne račune P_α. Ekvivalentnu teoremu ćemo dokaziti i za beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$.

Primjer 2.1.2. Konstruišimo analitički tablo nad slijedećim formulama iskaznog računa P_{ω_1}:

$$\neg \bigvee_{\iota<\omega} p_\iota, \quad \bigwedge_{\iota<\omega} (p_\iota \vee \neg p_\iota).$$

Tablo konstruisan nad navedenim formulama je predstavljen Slikom 6.



Slika 6.

Primjetimo da je su u tablou $\mathsf{T}_\emptyset$ prisutne tačke sa ordinalima od $\emptyset$ do 1, u tablou T_1 od $\emptyset$ do 2, u tablou T_2 od $\emptyset$ do 3, u tablou T_3 prisutne su tačke sa ordinalima $\iota < \omega$, u tablou T_4 prisutne su tačke sa ordinalima $\iota < \omega{\cdot}2$, i dalje u tabloima $\mathsf{T}_5 + \sigma$ za $\sigma < \omega$, prisutne su tačke sa ordinalima $\iota < \omega{\cdot}2 + 2n + 1$.

2.1.2 Svojstva analitičkih tabloa za iskazne račune P_α

Osnovno svojstvo ovako generisanih tabloa je da za bilo koji niz formula Φ konstrukcija mora da stane tj. važi slijedeća formula:

$$(\exists\gamma)(\forall\iota)\ (\gamma \leq \iota \rightarrow \mathsf{T}^\Phi_\gamma = \mathsf{T}^\Phi_\iota).$$

Da bi smo dokazali gornje tvrdjenje uvedimo slijedeći niz pojmova i lema.

Definicija 2.1.6. Pod ***težinom tačke*** u tablou T^Φ_ι podrazumjevamo funkciju w_ι koja svakoj tački $\langle\sigma, \varphi\rangle$ tabloa dodjeljuje ordinal na osnovu slijedeće formule:

$$w_\iota(\langle\sigma,\varphi\rangle) = \begin{cases} \sigma+1 & : \iota \leq \sigma, \\ \emptyset & : \sigma < \iota. \end{cases}$$

Težina tačke $x = \langle\sigma, \varphi\rangle$ nam daje prvi indeks tabloa u nizu T_ι^Φ u kojem je tačka x iskorišćena u konstrukciji tabloa.

Slično pojmu težine tačke u tablou uvodimo pojam težine tabloa.

Definicija 2.1.7. *Kompleksnost tabloa* je funkcija com_T koja svakom analitičkom tablu T_ι^Φ dodjeljuje ordinal na osnovu formule:

$$com_\mathsf{T}(\mathsf{T}_\iota^\Phi) = \bigcup_{x \in \mathbf{CP}_\iota^\Phi} w_\iota(x).$$

Posljedica 2.1.1. Direktno iz definicije slijedi formula:

$$|com_\mathsf{T}(\mathsf{T}_\iota^\Phi)| \leq |\mathsf{T}_\iota^\Phi|.$$

Lema 2.1.2. Za svaki tablo T_ι^Φ važi:

$$(\forall x \in \mathbf{CP}_\iota^\Phi)\ \ (w_\iota(x) \neq \emptyset \to w_{com_\mathsf{T}(\mathsf{T}_\iota^\Phi)}(x) = \emptyset).$$

Navedena lema zapravo znači da za sve tačke koje se nalaze u konzistentnim granama $x \in \mathbf{CP}_\iota^\Phi$ koje nijesu bile iskorišćene u tablou T_ι^Φ (tj. $w_\iota(x) \neq \emptyset$), iskorišćene su u konstrukciji do tabloa $\mathsf{T}^\Phi_{com_\mathsf{T}(\mathsf{T}_\iota^\Phi)}$.

DOKAZ. Na osnovu definicije niza tabloa T_τ^Φ imamo da su sve tačke koje se nalaze u konzistentnim granama $\langle\sigma, \psi\rangle \in \mathbf{CP}_\tau^\Phi$ takve da $\sigma < \tau$, iskorišćene su u konstrukciji niza tabloa, t.j $w_\tau(\langle\sigma, \psi\rangle) = \emptyset$. Dalje, na osnovu definicije preslikavanja com_T imamo da važi da za svaku tačku $\langle\sigma, \varphi\rangle \in \mathbf{CP}_\iota^\Phi$, takvu da $\iota \leq \sigma$ važi:

$$\sigma < \sigma + 1 = w_i(\langle\sigma, \varphi\rangle) \leq \bigcup_{\langle\sigma,\varphi\rangle \in \mathbf{CP}_\iota^\Phi} w_i(\langle\sigma, \varphi\rangle) = com_\mathsf{T}(\mathsf{T}_\iota^\Phi).$$

Iz svega rečenego imamo da su sve tačke $x \in \mathbf{CP}_\iota^\Phi$ iskorišćene u kontrukciji do tabloa $\mathsf{T}^\Phi_{com_\mathsf{T}(\mathsf{T}_\iota^\Phi)}$ tj. $w_{com_\mathsf{T}(\mathsf{T}_\iota^\Phi)}(x) = \emptyset$. ***Q.E.D.***

Definicija 2.1.8. Definišimo preslikavanje $g : (\omega + 1) \to On$ induktivno na osnovu slijedećih formula:

$$\begin{aligned} g(\emptyset) &= \emptyset, \\ g(n+1) &= com_\mathsf{T}(\mathsf{T}^\Phi_{g(n)}), \\ g(\omega) &= \bigcup_{n<\omega} g(n). \end{aligned}$$

Posljedica 2.1.2. Na osnovu ***Leme 2.1.2.*** za svaki ordinal $n < \omega$ i tablo $\mathsf{T}^\Phi_{g(n)}$ važi formula:

$$(\forall x \in \mathbf{CP}^\Phi_{g(n)})\ \ (w_{g(n)}(x) \neq \emptyset \to w_{g(n+1)}(x) = \emptyset).$$

Lema 2.1.3. Za svaki ordinal $n < \omega$ i tablo $\mathsf{T}^\Phi_{g(n)}$ važi formula:

$$com_\mathsf{T}(\mathsf{T}^\Phi_{g(n)}) \neq \emptyset \to g(n) < g(n+1).$$

DOKAZ. Neka je $com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{g(n)}) \neq \emptyset$. Tada postoji tačka $x = \langle\sigma,\varphi\rangle \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{g(n)}$, takva da $w_{g(n)}(x) \neq \emptyset$. Petpostavimo li da je $\sigma < g(n)$ tada $w_{g(n)}(x) = \emptyset$, što je u kontradikciji sa izborom tačke x. Dakle moguće je samo da $g(n) \leq \sigma$, tada važi slijedeći niz relacija:

$$g(n) \leq \sigma < \sigma+1 = w_{g(n)}(x) \leq \bigcup_{y\in\mathbf{CP}^{\Phi}_{g(n)}} w_{g(n)}(y) = com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{g(n)}) = g(n+1).$$

Povežemo li početak sa krajem imamo da $g(n) < g(n+1)$. ***Q.E.D.***

Teorema 2.1.1. TEOREMA O ZAUSTAVLJANJU Za svaki niz tabloa $\mathrm{T}^{\Phi}_{\iota}$, $\iota \in On$ postoji ordinal γ takav da važi formula:

$$(\forall\iota)\ \ (\gamma \leq \iota \to \mathrm{T}^{\Phi}_{\gamma}).$$

DOKAZ. Primjetimo da je na osnovu definicije niza $\mathrm{T}^{\Phi}_{\iota}$, $\iota \in On$, tvrdjenje teoreme je ekvivalentno formuli $com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{\gamma}) = \emptyset$, odnosno

$$(\forall x \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{\gamma})\ \ w_{\gamma}(x) = \emptyset.$$

Pretpostavimo da $com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{g(n)}) \neq \emptyset$, za svako $n < \omega$. Tada na osnovu ***Leme 2.1.3.*** niz $g(n)$ je strogo rastući, pa na osnovu definicije $g(\omega)$ mora biti granični ordinal. Pretpostavimo dalje da postoji tačka $x = \langle\sigma,\varphi\rangle \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{g(\omega)}$, takva da $w_{g(\omega)}(x) \neq \emptyset$. Tada obzirom na definiciju niza $\mathrm{T}^{\Phi}_{\iota}$ i činjenicu da je ordinal $g(\omega)$ granični, postoji ordinal $\xi < g(\omega)$ takav da $x \notin \mathbf{CP}^{\Phi}_{\xi}$ i $x \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{\xi+1}$. Dalje, na osnovu definicije ordinala $g(\omega)$ postoji ordinal $m < \omega$ takav da $\xi + 1 < g(m)$. Dakle $x \in T^{\Phi}_{g(m)}$ i $w_{g(m)}(x) \neq \emptyset$ (u suprotnom bi bilo $w_{g(\omega)}(x) = \emptyset$). Na osnovu ***Posljedice 2.1.2.*** slijedi da $w_{g(m+1)}(x) = \emptyset$, što bi povlačilo da $w_{g(\omega)}(x) = \emptyset$, a to je u kontradikciji sa izborom tačke x.

Iz svega rečenog slijedi da $com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{\gamma}) = \emptyset$. ***Q.E.D.***

Na osnovu prethodne teoreme uvodimo slijedeću definiciju.

Definicija 2.1.9. Za niz formula $\Phi = \langle\varphi_{\sigma}\rangle_{\sigma<\tau}$ definišemo *kompletan tablo* T^{Φ} kao:

$$\mathrm{T}^{\Phi} = \mathrm{T}^{\Phi}_{g(\omega)}.$$

Analogno ***Definiciji 2.1.3.*** i ***Definiciji 2.1.5.*** uvodimo i skupove definisane u ovim definicijama i označavamo sa $\mathbf{G}^{\Phi} = \mathbf{G}^{\Phi}_{g(\omega)}$, $\mathbf{CP}^{\Phi} = \mathbf{CP}^{\Phi}_{g(\omega)}$, $\mathbf{CG}^{\Phi} = \mathbf{CG}^{\Phi}_{g(\omega)}$ i $\mathbf{CM}^{\Phi} = \mathbf{CM}^{\Phi}_{g(\omega)}$.

Primjetimo da su maksimalne grane kompletnog tabloa T^{Φ} ili kontradiktorne ili pripadaju skupu $\mathbf{CM}^{\Phi}$.

Na kraju dokažimo teoremu koja vrši procjenu funkcije g za iskazni račun P_{α}, gdje je α regularan kardinal.

Lema 2.1.4. Neka je dat iskazni račun P_{α}, takav da je kardinal α regularan. Tada za svaki niz formula Φ, takav da $|\Phi| < \alpha$, važi formula:

$$(\forall\iota < \alpha)\ \ (|T^{\Phi}_{\iota}| < \alpha \wedge |\mathbf{CM}^{\Phi}_{\iota}| < \alpha).$$

DOKAZ. Dokaz sprovedimo indukcijom po ordinalima $\iota < \alpha$.

(1) INDUKTIVNI POČETAK, $\iota = 0$. Na osnovu konstrukcije tabloa važi:

$$|T^{\Phi}_{\emptyset}| = |\Phi| < \alpha,$$

$$|\mathsf{CM}^{\Phi}_{\iota}| = 1 < \alpha.$$

(2) INDUKTIVNA HIPOTEZA. Neka za ordinal $\gamma < \alpha$ važi formula:

$$(\forall \iota < \gamma)\ \ (|T^{\Phi}_{\iota}| < \alpha \wedge |\mathsf{CM}^{\Phi}_{\iota}| < \alpha).$$

(3) INDUKTIVNI KORAK. Dokažimo na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE da za γ $(< \alpha)$, važi $|T^{\Phi}_{\gamma}| < \alpha$.

(3.1) Ako je ordinal γ, ordinal sljedbenik tj. postoji ordinal ι takav da $\gamma = \iota + 1$, tada na osnovu definicije tabloa svakoj maksimalnoj konzistentnoj grani "dodamo" najviše $\kappa < \alpha$ neposrednih slijedbenika, pa važi formula:

$$|T^{\Phi}_{\iota+1}| \leq |T^{\Phi}_{\iota}| + |\mathsf{CM}^{\Phi}_{\iota}| \cdot \kappa,$$

Pošto je na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE $|\mathsf{CM}^{\Phi}_{\iota}| < \alpha$, tada je $|\mathsf{CM}^{\Phi}_{\iota}| \cdot \kappa < \alpha$. Zbir dva kardinala manja od α je manji od α, pa odavde zaključujemo da $|T^{\Phi}_{\iota+1}| < \alpha$. Takodje na osnovu definicije tabloa važi formula:

$$|\mathsf{CM}^{\Phi}_{\iota+1}| = |\mathsf{CM}^{\Phi}_{\iota}| \cdot \kappa < \alpha.$$

(3.2) Ako je ordinal γ granični, tada na osnovu definicije tabloa važi formula:

$$|T^{\Phi}_{\gamma}| \leq \bigcup_{\iota<\gamma} |T^{\Phi}_{\iota}|.$$

Pošto na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važi da za svako $\iota < \gamma$ važi $|T^{\Phi}_{\iota}| < \alpha$ i pošto je kardinal α regularan tj. $cf(\alpha) = \alpha$ slijedi da je $|T^{\Phi}_{\gamma}| < \alpha$. Slično, na osnovu definicije tabloa zaključujemo da važi formula:

$$|\mathsf{CM}^{\Phi}_{\gamma}| \leq \bigcup_{\iota<\gamma} |\mathsf{CM}^{\Phi}_{\iota}|.$$

Na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važi da za svako $\iota < \gamma$ važi $|\mathsf{CM}^{\Phi}_{\iota}| < \alpha$ i pošto je kardinal α regularan, slijedi da je $|\mathsf{CM}^{\Phi}_{\gamma}| \leq \alpha$.

Q.E.D.

Lema 2.1.5. Neka je dat iskazni račun P_α, takav da je kardinal α regularan. Tada za svaki niz formula Φ, takav da $|\Phi| < \alpha$, važi formula:

$$(\forall n < \omega)\ \ g(n) < \alpha.$$

DOKAZ. Dokaz sprovedimo indukcijom po ordinalima $n < \omega$.

(1) INDUKTIVNI POČETAK, $\iota = \emptyset$. Na osnovu definicije funkcije g važi:

$$g(\emptyset) = \emptyset < \alpha.$$

(2) INDUKTIVNA HIPOTEZA. Neka za ordinal $n < \omega$ važi formula:

$$(\forall m \leq n) \ \ g(m) < \alpha.$$

(3) INDUKTIVNI KORAK. Dokažimo na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE da za $n+1$ važi $g(n+1) < \alpha$. Na osnovu definicije funkcije g i ***Posljedice 2.1.1.*** važi formula:

$$|g(n+1)| \ = \ |com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{g(n)})| \ \leq \ |T^{\Phi}_{g(n)}|.$$

Iz INDUKTIVNE HIPOTEZE slijedi da $g(n) < \alpha$, pa na osnovu ***Leme 12.1.4.*** važi da $|T^{\Phi}_{g(n)}| < \alpha$, odnosno $|g(n+1)| < \alpha$. Kako je $g(n+1)$ ordinal čija je kardinalnost manja od α to i ordinal $g(n+1)$ sam mora biti manji od α, odnosno važi $g(n+1) < \alpha$.

Q.E.D.

Posljedica 2.1.3. Za iskazni račun P_α, takav da je kardinal α regularan i niz formula Φ, takav da $|\Phi| < \alpha$, direktno na osnovu ***Lema 2.1.4. i 2.1.5.*** slijedi formula:

$$(\forall n < \omega) \ \ |T^{\Phi}_{g(n)}| < \alpha.$$

Teorema 2.1.2. Neka je dat iskazni račun P_α, takav da je kardinal α regularan. Tada za svaki niz formula Φ, takav da $|\Phi| < \alpha$, važi $|T^{\Phi}| < \alpha$.

DOKAZ. Moguć je jedan od dva slučaja:

(1) $\alpha \neq \omega$. Iz definicije kompletnog tabloa slijedi formula:

$$|T^{\Phi}| \ = \ |T^{\Phi}_{g(\omega)}| \ \leq \ \bigcup_{n \in \omega} |T^{\Phi}_{g(n)}|.$$

Na osnovu ***Posljedice 2.1.3.*** za svako $n < \omega$ važi $|T^{\Phi}_{g(n)}| < \alpha$. Pošto je α regularan kardinal tj. $cf(\alpha) = \alpha$, slijedi da $\bigcup_{n\in\omega} |T^{\Phi}_{g(n)}| < \alpha$, odnosno $|T^{\Phi}| < \alpha$.

(2) $\alpha = \omega$. tada je $\Phi < \omega$, dakle Φ je konačan skup. Označimo tada sa co_{T} funkciju koja svakom analitičkom tablou $\mathrm{T}^{\Phi}_{\iota}$ dodjeljuje prirodan broj na osnovu formule:

$$co_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{\iota}) = \bigcup \{ co_{P_\omega}(\varphi) \mid \langle \sigma, \varphi \rangle \in T^{\Phi}_{\iota} \ \wedge \ \iota \leq \sigma \}.$$

Iz definicije co_{T}, neposredno se zaključuje da za svaki ordinal ι važi formula:

$$(\forall \sigma < \iota) \ \ co_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{\sigma}) > co_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{\iota}).$$

Neka je tačka $\langle \sigma, \varphi \rangle \in T^{\Phi}_{\iota}$, takva da $\iota \leq \sigma$. Moguće je da nad formulom φ primjenimo jedno od pravila za konstrukciju tabloa (P1)–(P4):

(P3), (P4) Tada je $\varphi = \bigwedge_{i<n} \varphi_i$, ili $\varphi = \bigvee_{i<n} \varphi_i$, gdje je $n < \omega$. Neka je formula φ_j takva da za svako $i < n$ važi $co_{P_\omega}(\varphi_j) \geq co_{P_\omega}(\varphi_i)$. Tada važi sledeći niz relacija:

$$co_{P_\omega}(\varphi) \ = \ co_{P_\omega}(\varphi_j) + 1 \ > \ co_{P_\omega}(\varphi_j).$$

Odavde zaključujemo da poslije primjene pravila (P3) ili (P4) nad formulom φ, formule koje smo dodali u tablo kompleksnosti manje od kompleksnosti formule φ.

(P1) Tada je $\varphi = \neg\psi$, ako $\varphi \notin Var_{P_\alpha}$, pa važi niz relacija:

$$co_{P_\omega}(\varphi) \;=\; co_{P_\omega}(\neg\psi) \;\geq\; co_{P_\omega}(\psi\neg).$$

U slučaju da je $\psi = \neg\theta$ posljednja relacija je stroga nejednakost, Kada je $\psi = \psi_1 \to \psi_2$, $\psi = \bigwedge_{i<n}\psi_i$ ili $\psi = \bigvee_{i<n}\psi_i$ posljednja relacija je jednakost. Tada je i formula $\psi\neg$ u obliku neke disjunkcije ili konjunkcije, pa dalje nad $\varphi\neg$ moguće primjeniti pravila (P3) ili (P4). Poslije primjene pravila (P3) ili (P4) u stablu se nalaze konsekvence formule φ koje imaju kompleksnost manju od formule φ

(P2) Tada je $\varphi = \psi \to \theta$. Neposredno zaključujemo da važe relacije:

$$co_{P_\omega}(\varphi) \;=\; co_{P_\omega}(\neg\psi), \quad co_{P_\omega}(\varphi) \;>\; co_{P_\omega}(\theta).$$

Ako nad formulom $\neg\psi$ primjenimo pravilo (P1), a zatim nad konsekvecama ove primjene, pravilo (P3) ili (P4), sve konsekvence formule φ imaće manju kompleksnost od formule φ.

Iz svega izloženog slijed da kakvog god da je oblika formula φ, poslije tri primjene odgovarajućih pravila za konstrukciju tabloa (P1)–(P4), konsekvence formule φ, će imati manju kompleksnost od formule φ. Kao direktnu poslijedic ovog stava možemo izvesti sljedeću formulu:

$$(\forall n < \omega)\;\; (\, co_{\mathrm{T}}(\mathbf{T}^{\Phi}_{g(n)}) \neq \emptyset \;\to\; co_{\mathrm{T}}(\mathbf{T}^{\Phi}_{g(n)}) > co_{\mathrm{T}}(\mathbf{T}^{\Phi}_{g(n+3)})\,).$$

Pošto je niz Φ konačan i neprazan, to slijedi da je $co_{\mathrm{T}}(\mathbf{T}^{\Phi}_{g(0)}) < \omega$. Lako se dokazuje na osnovu prethodnog da niz $co_{\mathrm{T}}(\mathbf{T}^{\Phi}_{g(n)})$ ima strogo opadajući konačan podniz. Obilježimo li sa m posljednji element u tom konačnom podnizu, tada mora da važi formula:

$$co_{\mathrm{T}}(\mathbf{T}^{\Phi}_{g(m)}) \;=\; \emptyset.$$

Kako $co_{\mathrm{T}}(\mathbf{T}^{\Phi}_{m}) \;=\; \emptyset$ povlači $com_{\mathrm{T}}(\mathbf{T}^{\Phi}_{m}) \;=\; \emptyset$, odavde zaključujemo da $\mathbf{T}^{\Phi}_{m} = \mathbf{T}^{\Phi}_{g(\omega)} = \mathbf{T}^{\Phi}$. Na osnovu ***Leme 2.1.4.*** važi $|T^{\Phi}_{m}| < \omega$, pa iz prethodnog onda slijedi $|T^{\Phi}| < \omega$. ***Q.E.D.***

Posljedica 2.1.4 Neka je dat iskazni račun P_α, takav da je kardinal α regularan. Tada za svaki niz formula Φ, takav da $|\Phi| < \alpha$, važi

$$g(\omega) < \alpha.$$

DOKAZ. Ako je $\alpha = \omega$, iz dokaza prethodne teoreme, neposredno slijedi zaključak teoreme. U slučaju kada je $\omega < \alpha$, tada je $g(\omega) \leq \alpha$. Ordinal $g(\omega)$ je na osnovu svoje defincije kofinalan sa ω, dok je na osnovu pretpostavke α regularan, pa može da važi samo da $g(\omega) < \alpha$. ***Q.E.D.***

Na osnovu prethodne posljedice zaključujemo da kada je dat iskazni račun P_α, takav da je kardinal α regularan, tada za svaki niz formula Φ, takav da $|\Phi| < \alpha$, konstrukcija kompletnog tabloa $\mathbf{T}^{\Phi}$ staje u manje od α koraka.

Posljedica 2.1.5 Klasični iskazni račun (P_ω) je odlučiv.

DOKAZ. Neposredno na osnovu ***Posljedice 2.1.5.***

2.2 Analitički tabloi za logike $L_{\alpha\beta}$

2.2.1 Definicija analitičkih tabloa za logike $L_{\alpha\beta}$

U ovom djelu formulisati ćemo analitičke tabloe za logike $L_{\alpha\beta}$, slično kako je to bilo uradjeno u prethodnom poglavlju za iskazne račune P_α. Nećemo koristiti posebne oznake za ova dva tipa tabloa, od konteksta će zavisiti da li podrazumjevamo tabloe za iskazne račune ili beskonačne logike. Motivacija za uvodjenje nekih pojmova u ovom djelu je slična motivaciji da se oni uvedu u prethodnom djelu, tako da kada se ona poklapa izostaviti ćemo detaljno obrazlaganje za uvodjenje sličnih pojmova.

Definicija 2.2.1. Za svaku logiku $L_{\alpha\beta}$, jezika L formiramo jezik M takav da je:

$$\begin{aligned} Fun_M &= Fun_L, \\ Rel_M &= Rel_L, \\ Const_M &= Const_L \cup \{c_\delta \mid \delta < rc(||L||)\}, \end{aligned}$$

i gdje je skup $C = \{c_\delta \mid \delta < rc(||L||)\}$ takav da $c_\sigma \neq c_\tau$ za $\sigma \neq \tau$ i $L \cap C = \emptyset$, a funkcija rc je kardinalna funkcija zadata formulom:

$$rc(\kappa) = \begin{cases} \kappa & : cf(\kappa) = \kappa, \\ \kappa^+ & : cf(\kappa) < \kappa. \end{cases}$$

Iz definicije vidimo da je $rc(\kappa)$ najmanji regularan kardinal za koji važi $\kappa \leq rc(\kappa)$. Dakle $|C|$ je regularan kardinal. Jeziku M odgovara beskonačna logika $M_{\alpha\beta}$.

Teorema 2.2.1. Neka je data logika $L_{\alpha\beta}$ takva da $|L| \leq (\alpha + \beta) = \alpha$, Tada za svaku formulu $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ važi formula:

$$\vdash_{L_{\alpha\beta}} \varphi \text{ akko } \vdash_{M_{\alpha\beta}} \varphi.$$

DOKAZ. Pretpostavimo da $\vdash_{L_{\alpha\beta}} \varphi$, tada niz formula koji predstavlja dokaz u logici $L_{\alpha\beta}$ formule φ, je takodje dokaz i u logici $M_{\alpha\beta}$, pa $\vdash_{M_{\alpha\beta}} \varphi$.

Pretpostavimo sada da $\vdash_{M_{\alpha\beta}} \varphi$. Neka je $\langle \varphi_\iota \rangle_{\iota \leq \gamma}$, gdje $\gamma < \alpha$ niz formula koji predstavlja dokaz formule φ. U svakoj od formula φ_ι pojavljuje se manje (u kardinalnom smislu) od α konstanti. Kako formula ukupno ima $\gamma < \alpha$, skup konstanti koje se pojavljuju u dokazu formule φ kardinalnosti manje od α. Slično zaključujemo i za varijable, da ih se manje od α pojavljuju u dokazu formule φ. Tada jednoznačno zamjenimo svako pojavljivanje konstante iz C sa varijablom koja se ne javlja u dokazu. Ovako dobijene formule predstavljaju dokaz formule φ u $L_{\alpha\beta}$, dakle $\vdash_{L_{\alpha\beta}} \varphi$. ***Q.E.D.***

Lema 2.2.1. Neka je data beskonačna logika $L_{\alpha\beta}$ i model $\mathfrak{A}$ jezika L. Za bilo koje njegove formule $\varphi, \psi, \varphi_\iota \in For_{L_{\alpha\beta}}$, $\iota < \gamma < \alpha$ važe slijedeći stavovi:

(P1) Ako $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \neg\varphi$, tada $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi\neg$.

(P2) Ako $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi \to \psi$, tada je $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \neg\varphi$ ili $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \psi$.

(P3) Ako $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \bigwedge_{\iota<\gamma} \varphi_\iota$, tada za svako $\iota < \gamma$ važi $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi_\iota$.

(P4) Ako $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \bigvee_{\iota<\gamma} \varphi_\iota$, tada postoji $\iota < \gamma$ tako da važi $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi_\iota$.

(P5) Ako $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} (\forall X)\varphi[X]$, tada za svako $T : X \to A$ važi $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[X_{|T}]$.

(P6) Ako $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} (\exists X)\varphi[X]$, tada postoji $T : X \to A$ tako da važi $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi[X_{|T}]$.

DOKAZ. Dokaz neposredno slijedi iz osobina relacije zadovoljenja za beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$.

Motivisani ***Lemom 2.2.1.*** kao i u slučaju iskaznih računa, polazeći od beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$, formulišemo za njoj ekvivalnetnu logiku $M_{\alpha\beta}$ pravila (P1)–(P6). Koristeći oznake iz prethodne leme dobijamo slijedećih šest pravila:

$$(P1)\ \frac{\neg\varphi}{\varphi\neg}\ ,\ \varphi \notin Var_{L_{\alpha\beta}}, \qquad (P2)\ \frac{\varphi \to \psi}{\neg\varphi \mid \psi}$$

$$(P3)\ \begin{array}{c} \bigwedge_{\iota<\gamma}\varphi_\iota \\ \hline \varphi_\emptyset \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_\iota \\ \vdots \end{array} \qquad (P4)\ \frac{\bigvee_{\iota<\gamma}\varphi_\iota}{\varphi_\emptyset \mid \varphi_1 \mid \ldots \mid \varphi_\iota \mid \ldots}$$

$$(P5)\ \frac{(\forall X)\varphi[X]}{\varphi[X_{|T}]} \qquad (P6)\ \frac{(\exists X)\varphi[X]}{\varphi[X_{|T}]}$$

za svako $T{:}X \to Const_M$ "potpuno novo" $T{:}X \to Const_M$

Primjedbe uz pravila (P5) i (P6) nas upućuju da se u konstrukciji tabloa posebno vodi računa u upotrebi konstanti koje smo dodali leziku L. U pravilu (P5) za formulu $(\forall X)\varphi[X]$, za svaku funkciju $T : X \to Const_M$ dodajemo u konstrukciji jednu formulu $\varphi[X_{|T}]$. Ovakav postupak je potpuno je u skladu za AKSIOMOM KVANTIFIKATORA (Q1). Slučaj pravila (P6), je nešto komplikovaniji. Naime za svaku formulu $(\exists X)\varphi[X]$ biramo "potpuno novu" funkciju $T : X \to Const_M$ i dodajemo u konstrukciju formulu $\varphi[X_{|T}]$. Ovdje "potpuno nova" funkcija T znači da je T bijekcija i da je kodomen funkcije T, $Range(T)$, takav da se ni jedna konstanta iz $Range(T)$ nije bila u kodomenu neke funkcije koja je bila primjenjena u nekoj prethodnoj primjeni pravila (P6). Ovako izabrana funkcija T je praktično svedok da je formula $(\exists X)\varphi[X]$ tačna. Kada efektivno budemo konstruisali tablo, pravilo (P6) ćemo primjenjivati tako da funkcija T bude "potpuno nova" u okviru grane u kojem sa nalazi formula nad kojom prinjenjujemo pravilo (P6). Primjetimo takodje da pravilo (P5) prestajemo da primjenjujemo nad formulom $(\forall X)\varphi[X]$ kada upotrebimo sve funkcije T.

Definicija 2.2.2. *Tačka anlitičkog tabloa* biti će struktura oblika: $\langle\delta, \varphi\rangle$, gdje je $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ i δ je ordinal. *Analitički tablo* predstavlja stablo $\mathbf{T} = \langle T, <_{\mathbf{T}} \rangle$, tako da je skup T, skup tačaka analitičkog tabloa. (Potpuno analogno kao u slučaju iskaznih računa P_α.)

Oznaku $\mathbf{t}_\delta$ za taču $\langle\delta, \varphi\rangle$ analitičkog tabloa beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$ i relaciju $\sim$ (*"na grani"*) definišemo analogno kao i u slučaju iskaznih računa.

Da bi smo olakšali rad sa pravilima (P5) i (P6) uvedimo slijedeće definicije.

Definicija 2.2.3. Neka je relacija $\ll$, relacija dobrog poretka na skupu $Const_M$ koja zadovoljava slijedeće uslove:

(1) Za svako $c \in Const_L$ i $d \in C$ važi $c \ll d$.

(2) Ako su $c_\sigma, c_\tau \in Const_M$, tada $c_\sigma \ll c_\tau$ akko $\sigma < \tau$.

Za proizvoljan skup $Y \subset Var_{M_{\alpha\beta}}$ označimo sa $\prec_Y$ relaciju uredjenja skupa ${}^Y Const_M$ u odnosu na relaciju $\ll$ ako za $f, g \in {}^Y Const_M$ važi formula:

$$f \prec_Y g \text{ akko } (\exists \sigma \in Y)(\forall v \in Y \cap \{v_\tau \mid \tau < \sigma\})\ f(v) = g(v) \ \wedge\ f(v_\sigma) \ll g(v_\sigma).$$

Ovakve poretke nazivamo ***leksikografskim uredjenjima*** i nije teško dokazati da su leksikografska uredjenja dobra uredjenja. Pošto je relacija $\prec_Y$ dobro uredjenje skupa ${}^Y Const_M$, tada postoji ordinal γ_Y takav da su strukture $\langle {}^Y Const_M, \prec_Y\rangle \cong \langle \gamma_Y, <\rangle$ izomorfne. Neka je funkcija $H^Y : \gamma \to {}^Y Const_M$, funkcija izomorfizma, takva da za $\sigma, \tau < \gamma_Y$, važi formula:

$$\sigma < \tau \text{ akko } H^Y(\sigma) \prec_Y H^Y(\tau).$$

Numerišimo skup varijabli Y, tako da $Y = \{v_{r(\tau)} \mid \tau < |Y|\}$. Definišimo još i funkciju $G^Y : |Const_M| \to {}^Y Const_M$, tavu da za $\sigma < |Const_M|$ važi formula:

$$G^Y(\sigma) = \{ \langle v_{r(\tau)}, c_{\sigma \dot{+} \tau} \rangle \mid \tau < |Y| \}.$$

Definicija 2.2.4. Definišmo funkcije: $nx_\forall(X, \varphi)$ preslikava granu tabloa X i formulu φ u ordinal i funkciju $nx_\exists(X)$ koje preslikava granu tabloa X u ordinal na osnovu slijedećih formula:

$$nx_\forall(X,\varphi) = \begin{cases} \mu\sigma < \gamma_Y[\psi[Y_{|H^Y(\sigma)}] \not\sim X] & : \varphi = (\forall Y)\psi, \\ \emptyset & : \text{inače.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} nx_\exists(X) = \mu\sigma < |C| [&((\exists Y)\psi) \sim X \ \wedge\ \psi[Y_{|T}] \sim X \ \wedge \\ & T \in {}^Y Const_M \ \wedge\ c_\sigma \notin Range(T)]. \end{aligned}$$

Primjetimo da funkcija $nx_\forall(X,\varphi)$ za $\varphi = (\forall Y)\psi[Y]$ dodjeljuje najmanji ordinal σ takav da se formula $\psi[Y_{|H^Y(\sigma)}]$ ne pojavljuje u grani X. Takodje funkcija $nx_\exists(X)$ dodjeljuje ordinal σ takav da se konstanta c_σ ne pojavljuje u formulama grane X.

Definišimo dalje za granu X i formul φ predikat $Pos(X,\varphi)$, tako da on važi ako važi formula:

$$\varphi = (\forall Y)\psi \ \wedge\ nx_\forall(X,\varphi) < \gamma_Y.$$

Iz definicije je jasno da $Pos(X,\varphi)$ važi ako je $\varphi = (\forall Y)\psi$ i moguće je u grani X još primjenjivati pravilo (P5) nad formulom φ.

Na kraju definišimo dvije funkcije: $T_\forall(X,\varphi)$ koja preslikava granu tabloa X i formulu φ funkciju iz ${}^Y Const_M$, za neko $Y \subset Var_{M_{\alpha\beta}}$ i funkciju $T_\exists(X,\varphi)$ koja granu X preslikava u takodje u funkciju iz ${}^Y Const_M$, za neko $Y \subset Var_{M_{\alpha\beta}}$. Funkcije su zadate slijedećim fomulama:

$$T_\forall(X,\varphi) = \begin{cases} H^Y(nx_\forall(X,\varphi)) & : \varphi = (\forall Y)\psi, \\ \emptyset & : \text{inače.} \end{cases}$$

$$T_\exists(X,\varphi) = \begin{cases} G^Y(nx_\exists(X)) & : \varphi = (\exists Y)\psi, \\ \emptyset & : \text{inače.} \end{cases}$$

Intuitivno funkcije $T_\forall$ i $T_\exists$ nam obezbjedjuju da u konstrukciji tabloa kada treba da primjenimo pravilo (P5) i (P6) da funkcija T koja se pojavljuje u pravilima bude ispravno izabrana, u skladu sa pravilima (P5) i (P6).

Definicija 2.2.5. Neka je x tačka analitičkog tabloa $\mathbf{T}_\iota^\Phi$. Definišimo tada preslikavanje $Ap(X, x, \delta, \sigma)$ koje grani X, tački x i ordinalima δ i σ dodjeljuje niz formula na osnovu formule:

$$Ap(X,x,\delta,\sigma) = \begin{cases} \langle\, \langle \delta \overset{*}{+} \sigma, \varphi\neg\rangle \,\rangle & : \; x = \langle \tau, \neg\varphi\rangle \\ & \quad \wedge\, \varphi \notin At_{L_{\alpha\beta}}, \\[2ex] \langle\, \langle \delta \overset{*}{+} (\sigma \overset{*}{\cdot} 2), \neg\varphi\rangle, & : \; x = \langle \tau, \varphi \to \psi\rangle, \\ \qquad \langle \delta \overset{*}{+} (\sigma \overset{*}{\cdot} 2) \overset{*}{+} 1, \psi\rangle \,\rangle & \\[2ex] \langle\, \langle \delta \overset{*}{+} (\sigma \overset{*}{\cdot} \gamma) \overset{*}{+} \iota, \varphi_\iota\rangle \,\rangle_{\iota<\gamma} & : \; x = \langle \tau, \bigwedge_{\iota<\gamma} \varphi_\iota\rangle \\ & \quad \vee\, x = \langle \tau, \bigvee_{\iota<\gamma} \varphi_\iota\rangle, \\[2ex] \langle\, \langle \delta \overset{*}{+} \sigma, \psi[Y_{|T_\exists(X,\varphi)}]\rangle \,\rangle & : \; x = \langle \tau, \varphi\rangle \;\wedge\; \varphi = (\exists Y)\psi, \\[2ex] \langle\, \langle \delta \overset{*}{+} (\sigma \overset{*}{\cdot} 2), \psi[Y_{|T_\forall(X,\varphi)}]\rangle, & : \; x = \langle \tau, \varphi\rangle \;\wedge\; \varphi = (\forall Y)\psi \\ \qquad \langle \delta \overset{*}{+} (\sigma \overset{*}{\cdot} 2) \overset{*}{+} 1, \varphi\rangle \,\rangle & \quad \wedge\, Pos(X,\varphi) \\[2ex] \emptyset & : \; \text{inače.} \end{cases}$$

Na osnovu definicije vidimo da je funkcija $Ap(T, x, \delta, \sigma)$ slična odgovarajućoj funkciji definisanoj za iskazni račun, sem u slučaju kada formula u tački x ima kvantifikatore. Tada u slučaju kada je $x = \langle \tau, (\forall Y)\psi\rangle$, nadjemo, ako postoji najmanju funkciju $T \in {}^Y Const_M$, u poretku $\prec_Y$, takvu da se formula $\psi[Y_{|T}]$ ne pojavljuje u grani X, što nam obezbjedjuje funkcija $T_\forall(X, \varphi)$. U slučaju da postoji, dodamo u granu X tačke sa formulama $\psi[Y_{|T_\forall(X,\varphi)}]$ i $(\forall Y)\psi$. Pomenuta funkcija T ne postoji samo ako u grani X postoje tačke sa formulama $\varphi[Y_{|T}]$ za svako $T \in {}^Y Const_M$ i tada ne koristimo više formulu $(\forall Y)\varphi$ u konstrukciji tabloa. Dake, sve u skladu sa formulacijom pravila (P5).

U slučaju kada je $x = \langle \tau, (\exists Y)\psi\rangle$ i tražimo konstante (prve u smislu poretka $\ll_Y$) iz $Const_M$ koje njesu bile uvedene nekom predjašnjom formulom sa $\exists$ kvantifikatorom u grani X, što nam obezbjedjuje funkcija $T_\exists(X)$. Primjetimo da tražene konstante uvjek postoje jer formula iz $For_{L_{\alpha\beta}}$ koje počinju sa kvantifikatorom $\exists$ ima ukupno $||L||$. Za svaku formulu tražimo $\gamma = |Y|$ "novih" konstanti iz $Const_M$ tako da važe formule:

$$\gamma \;<\; \beta \;\leq\; ||L|| \;\leq\; |C|.$$

Pošto je $|C|$ regularan kardinal, "novih" γ konstanti postoji za svaku pomenutu formulu (suprotnom lako dokazujemo da je kardinal $|C|$ singularan). Neka je T funkcija koja preslikava Y u γ "novih" konstanti, tada formulu $\varphi[Y_{|T}]$ dodajemo grani X i formulu $(\exists Y)\varphi$ ne koristimo dalje u konstrukciji tabloa. Dakle, sve u skladu sa formulaciom pravila (P6).

Definicije koje smo uveli u ***Definiciji 2.1.3.*** na ovom mjestu nećemo navoditi, jer su iste i u slučaju beskonačnih logika $L_{\alpha\beta}$.

Definicija 2.2.6. Neka je dat analitički tablo T, ordinal ι i neka δ predstavlja prvi ordinal veći od svih ordinala u tačkama analitičkog tabloa T. Definišimo funkciju R koja preslikava skup uredjenih trojki $(\mathsf{T}, \iota, \delta)$ u skup tabloa na osnovu formule:

$$R(\mathsf{T},\iota,\delta) = \begin{cases} \biguplus_{\sigma<|\mathsf{CM}_\mathsf{T}(\mathbf{t}_\iota)|} Rep_\wedge(\mathsf{T}, X^{\mathbf{t}_\iota}_{\mathsf{T};\sigma}, Ap(X^{\mathbf{t}_\iota}_{\mathsf{T};\sigma}, \mathbf{t}_\iota, \delta, \sigma)) & : \mathbf{t}_\iota = \langle \iota, \neg\varphi\rangle \vee \\ & \ \mathbf{t}_\iota = \langle \iota, \bigwedge_{\sigma<\gamma}\varphi_\sigma\rangle \vee \\ & \ \mathbf{t}_\iota = \langle \iota, (\forall Y)\varphi\rangle \vee \\ & \ \mathbf{t}_\iota = \langle \iota, (\exists Y)\varphi\rangle, \\ \biguplus_{\sigma<|\mathsf{CM}_\mathsf{T}(\mathbf{t}_\iota)|} Rep_\vee(\mathsf{T}, X^{\mathbf{t}_\iota}_{\mathsf{T};\sigma}, Ap(X^{\mathbf{t}_\iota}_{\mathsf{T};\sigma}, \mathbf{t}_\iota, \delta, \sigma)) & : \mathbf{t}_\iota = \langle \iota, \varphi \to \psi\rangle \vee \\ & \ \mathbf{t}_\iota = \langle \iota, \bigvee_{\sigma<\gamma}\varphi_\sigma\rangle, \\ \mathsf{T} & : \mathbf{t}_\iota \in At_{L_{\alpha\beta}}. \end{cases}$$

I ovdje, slično kao u slučaju iskaznog računa, funkcija $R(\mathsf{T},\iota,\delta)$ primjeni neko od pravila (P1)–(P6) na formulu u tački $\mathbf{t}_\iota$ tabloa T tako što proširi svaku konzistentnu granu $X^{\mathbf{t}_\iota}_{\mathsf{T};\sigma}$ tabloa T koja sadrži tačku $\mathbf{t}_\iota$ u skladu sa pravilom koje primjeni, inače ostavlja tablo T nepromjenjenim.

Ako bi smo na ovom mjestu definisali za niz formula $\Phi = \langle\varphi_\sigma\rangle_{\sigma<\tau}$, niz tabloa T^Φ_ι i niz ordinala $\mathbf{o}^\Phi_\iota$ onako kako smo to uradili za iskazne račune P_α u ***Definiciji 2.1.5***, definicija ne bi bila potpuna za beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$. Naime, ako bi u logici $L_{\omega_1\omega}$ izgradili tablo za samo jednu formulu $(\forall X)\varphi$ tj. $\Phi = \{\langle\emptyset, (\forall X)\varphi(x)\rangle\}$, tada nije teško vidjeti da bi kompletan tablo bio jednak $\mathsf{T}^\Phi = \mathsf{T}^\Phi_\omega$. Odavde slijedi da smo u konstrukciji tabloa pravilo (P5) primjenili na prvih ω konstaniti iz $Const_M$. Kako za $L_{\omega_1\omega}$ važi $|Const_M| = \omega_1$, to znači da bi na ovaj način završili konstrukciju tabloa a postoji još mogućnosti za primjenu pravila (P5).

Potrebno je dakle u graničnim ordinalima γ u svakoji konzistentnoj grani tabloa:

$$\mathsf{T}^{\Phi'}_\gamma = \biguplus_{\iota<\gamma} \mathsf{T}^\Phi_\iota,$$

dodati tačke sa formulama koje počinju sa kvantifikatorom $\forall$, ako još postoji mogućnost da se nad njima primjenjuje pravilo (P5).

Opisani postupak uvodimo preko funkcija datih u slijedeće dvije definicije.

Definicija 2.2.7. Neka su date grana X analitiçkog tabloa. Skup Pos_X definišemo formulom:

$$Pos_X = \{\varphi \sim X \mid Pos(X,\varphi)\}.$$

Iz definicije skupa Pos_X, jasno je da on predstavlja skup svih formula grane X, koje počinju kvantifikatorom $\forall$ i nad kojima je još moguće primjenjivati pravilo (P5). U daljem radu podrazumjevati ćemo da je svaki skup Pos_X indeksiran, odnosno da $\varphi_\tau \in Pos_X$, za $\tau < |Pos_X|$. Na kraju definišemo niz $ApPos_X(\delta)$ gdje je δ proizvoljan ordinal slijedećom formulom:

$$ApPos_X(\delta) = \{\langle \delta \overset{*}{+} \tau, \varphi_\tau\rangle \mid \varphi_\tau \in Pos_X\}.$$

Definicija 2.2.8. Za dati tablo T definišemo niz tabloa $\mathbf{V}_\iota = \langle V_\iota, <_{V_\iota}\rangle$ i niz ordinala $\mathbf{n}_\iota$, za $\iota < |\mathsf{CM}_\mathsf{T}|$ induktivno na osnovu slijedećih formula:

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}_\emptyset &= \mathsf{T},\\
\mathsf{V}_{\iota+1} &= Rep_\wedge(\mathsf{V}_\iota, X_{\mathsf{T};\iota}, ApPos_{X_{\mathsf{T};\iota}}(\mathbf{n}_\iota)),\\
\mathsf{V}_\lambda &= \langle \bigcup_{\iota<\lambda} V_\iota, \bigcup_{\iota<\lambda} <_{\mathsf{V}_\iota}\rangle, \quad Lim(\lambda),\\
\mathbf{n}_\iota &= \bigcup_{\langle\sigma,\varphi\rangle\in V_\iota} (\sigma+1).
\end{aligned}$$

Primjetimo da je gornja definicija dobra jer $X_{\mathsf{T};\iota} \in \mathsf{CM}_{\mathsf{V}_\iota}$, za svako $\iota < |\mathsf{CM}_\mathsf{T}|$. Na osnovu prethodno uvedenih nizova definišimo funkciju S koja preslikava tablo T u tablo tako da:

$$S(\mathsf{T}) = \mathsf{V}_{|\mathsf{CM}_\mathsf{T}|}.$$

Sada imamo sve definicije neophodne da bi smo korektno definisali niz tabloa za dati niz formula.

Definicija 2.2.9. Definišimo za niz formula $\Phi = \langle\varphi_\sigma\rangle_{\sigma<\tau}$ beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$, *niz analitičkih tabloa* T^Φ_ι i niz ordinala $\mathbf{o}^\Phi_\iota$ induktivno po ordinalima na osnovu slijedećih formula:

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}^\Phi_\emptyset &= Tree_\wedge(\langle\emptyset,\varphi_\emptyset\rangle, \langle\langle\sigma,\varphi_\sigma\rangle\rangle_{\emptyset<\sigma<\tau}),\\
\mathsf{T}^\Phi_{\iota+1} &= R(\mathsf{T}^\Phi_\iota, \iota, \mathbf{o}^\Phi_\iota),\\
\mathsf{T}^\Phi_\gamma &= S(\,\mathsf{T}^{\Phi'}_\gamma\,), \quad Lim(\gamma),\\
\mathbf{o}^\Phi_\iota &= \bigcup_{\langle\sigma,\varphi\rangle\in T^\Phi_\iota} (\sigma+1).
\end{aligned}$$

Elementarne posljedice (D1) i (D2) koje smo formulisali za tabloe iskaznih računa važe i za tabloe beskonačnih logika. Poslijedica (D3) ne važi ali važi sledeća poslijedica koja je slična (D3):

(D3') Za bilo koji ordinal γ, i za sve tačke x tabloa T^Φ_γ postoji ordinal $\xi \leq \gamma$ tako da važi formula:

$$((\forall\iota < \xi)\; x \notin T^\Phi_\iota) \;\;\wedge\;\; ((\forall\iota \geq \xi)\; x \in T^\Phi_\iota).$$

Razlika izmedju (D3) i (D3)' je u tome što je najmanji ordinal ι za koji važi $x \in T^\Phi_\iota$ u (D3) ordinal slijedbenik a u (D3)' ne mora biti slijedbenik već može biti i granični ordinal. Iz ovoga direknto izvodimo da elementarna poslijedica (D4) neće važiti za tabloe beskonačnih logika, što čini dokaz TEOREME O ZAUSTAVLJANJU za slučaj beskonačnih logika $L_{\alpha\beta}$ drugačijim od odgovarajućeg dokaza za iskazne račune P_α.

Uvodimo slijedeće skrećenice za skupove koji su uvedeni u ***Definiciji 2.1.3.*** označimo sa $\mathsf{G}^\Phi_\iota = \mathsf{G}_{\mathsf{T}^\Phi_\iota}$, $\mathsf{CP}^\Phi_\iota = \mathsf{CP}_{\mathsf{T}^\Phi_\iota}$, $\mathsf{CG}^\Phi_\iota = \mathsf{CG}_{\mathsf{T}^\Phi_\iota}$ i $\mathsf{CM}^\Phi_\iota = \mathsf{CM}_{\mathsf{T}^\Phi_\iota}$.

2.2.2 Svojstva analitičkih tabloa za logike $L_{\alpha\beta}$

Slično kao i u slučaju iskaznih računa P_α i u slučaju beskonačnih logika $L_{\alpha\beta}$ dokazujemo da za bilo koji niz formula Φ konstrukcija mora da stane tj. važi slijedeća formula:

$$(\exists\gamma)(\forall\iota)\ (\gamma \leq \iota \rightarrow \mathrm{T}_\gamma^\Phi = \mathrm{T}_\iota^\Phi).$$

Sledećih nekoliko definicijija i lema su iste kao i slučaju iskaznih računa, pa ih bez komentara i dokaza navodimo.

Definicija 2.2.10. Pod *težinom tačke* $\langle\sigma,\varphi\rangle$ u tablou T_ι^Φ podrazumjevamo ordinal definisan formulom:

$$w_\iota(\langle\sigma,\varphi\rangle) = \begin{cases} \sigma+1 & : \iota \leq \sigma, \\ \emptyset & : \sigma < \iota. \end{cases}$$

Definicija 2.2.11. *Kompleksnost tabloa* je funkcija com_{T} koja svakom analitičkom tablu T_ι^Φ dodjeljuje ordinal na osnovu formule:

$$com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}_\iota^\Phi) = \bigcup_{x\in \mathbf{CP}_\iota^\Phi} w_\iota(x).$$

Lema 2.2.2. Za svaki tablo T_ι^Φ važi:

$$(\forall x \in \mathbf{CP}_\iota^\Phi)\ (w_\iota(x) \neq \emptyset \rightarrow w_{com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}_\iota^\Phi)}(x) = \emptyset).$$

Navedena lema zapravo znači da za sve tačke koje se nalaze u konzistentnim granama $x \in \mathbf{CP}_\iota^\Phi$ koje nijesu bile iskorišćene u tablou T_ι^Φ (tj. $w_\iota(x) \neq \emptyset$), iskorišćene su u konstrukciji do tabloa $\mathrm{T}^\Phi_{com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}_\iota^\Phi)}$.

Definicija 2.2.12. Definišimo preslikavanje $g : On \rightarrow On$ induktivno na osnovu slijedećih formula:

$$\begin{aligned} g(\emptyset) &= \emptyset, \\ g(\tau+1) &= com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^\Phi_{g(\tau)}), \\ g(\lambda) &= \bigcup_{\tau<\lambda} g(\tau), \quad Lim(\lambda). \end{aligned}$$

Posljedica 2.2.1. Na osnovu ***Leme 2.2.2.*** za svaki ordinal τ i tablo $\mathrm{T}^\Phi_{g(\tau)}$ važi formula:

$$(\forall x \in \mathbf{CP}^\Phi_{g(\tau)})\ (w_{g(\tau)}(x) \neq \emptyset \rightarrow w_{g(\tau+1)}(x) = \emptyset).$$

Lema 2.2.3. Za svaki ordinal τ i tablo $\mathrm{T}^\Phi_{g(\tau)}$ važi formula:

$$com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^\Phi_{g(\tau)}) \neq \emptyset \rightarrow g(\tau) < g(\tau+1).$$

Posljedica 2.2.2. Neka je λ granični ordinal. Ako za svako $\tau \in \lambda$ važi $com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^\Phi_{g(\tau)}) \neq \emptyset$, tada je ordinal $g(\lambda)$ granični, tj. $Lim(g(\lambda))$.

Već smo napomenuli da zbog definicije niza $\mathbf{T}^\Phi_\iota$ za beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$ nije moguće ponoviti dokaz TEOREME O ZAUSTAVLJANJU za iskazne račune P_α iako su prethodne definicije identične u oba slučaja. Uvedimo dalje nekoliko dodatnih pojmova koji će nam omogućiti da dokažemo TEOREMU O ZAUSTAVLJANJU za beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$.

Posmatrajmo kardinalnosti skupova promjenljivih koje se javljaju vezane kvantifikatorom $\forall$ u formulama niza Φ. Obilježimo najveći od ovih kardinala sa λ. Iz definicije beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$ neposredno slijedi da $\lambda < \beta$. Označimo sa $\kappa = |Const_M|^\lambda$. Primjetimo da za svaki skup promjenjljivih $Y \subset Var_M$, takav da se $(\forall Y)$ javlja u formulama niza formula Φ važi sledeći niz relacija:

$$|Const_M|^{|Y|} \le |Const_M|^\lambda = \kappa.$$

Definicija 2.2.13. Definišimo dalje funkciju $h : (\omega + 1) \to On$ induktivno na osnovu slijedećih formula:

$$h(n) = g(\kappa \cdot n),$$

$$h(\omega) = \bigcup_{n<\omega} h(n).$$

(Množenje u definiciji $h(n)$ je ordinalno.)

Posljedica 2.2.3. Za svako $n < \omega$ ordinal $\kappa \cdot n$ je granični ordinal, pa ako za svako $\tau < \kappa \cdot n$ važi $com_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}^\Phi_{g(\tau)}) \neq \emptyset$, tada je ordinal $g(\kappa \cdot n)$ granični, tj. $Lim(g(\kappa \cdot n))$, odnosno $Lim(h(n))$.

Lema 2.2.4. Ako za $n < \omega$, i za svako $\tau < \kappa \cdot n$ važi $com_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}^\Phi_{g(\tau)}) \neq \emptyset$, tada za svaku tačku $x = \langle \sigma, \varphi \rangle \in \mathbf{CP}^\Phi_{h(n)}$ takvu da $h(n) \le \sigma$ važi formula:

$$(\exists Y \subset Var_M)(\exists \psi \in For_{M_{\alpha\beta}})\ x = \langle \sigma, (\forall Y)\psi \rangle.$$

Lema zapravo tvrdi da sve tačke u tablou $\mathbf{T}^\Phi_{h(n)}$ koje nijesmo iskoristili u konstrukciji tabloa imaju formule koje počinju kvantifikatorom $\forall$.

DOKAZ. Na osnovu ***Posljedice 2.2.3.*** slijedi da je ordinal $h(n)$ granični, tj. $Lim(h(n))$, pa na osnovu ***Definicije 2.2.9.*** važi formula:

$$\mathbf{T}^\Phi_{h(n)} = S({\mathbf{T}^\Phi_{h(n)}}').$$

Pretpostavimo suprotno, da za svako $Y \subset Var_{M_{\alpha\beta}}$ i $\psi \in For_{M_{\alpha\beta}}$ važi $x \neq \langle \sigma, (\forall Y)\psi \rangle$. Tada tačku x nije mogla dodati u tablo $\mathbf{T}^\Phi_{h(n)}$ funkcija S, jer ona na osnovu ***Definicije 2.2.8.*** dodaje samo formule kojima predhodi $\forall$ kvantifikator. Ostaje jedino da se tačka x nalazi u tablou ${\mathbf{T}^\Phi_{h(n)}}'$. Odavde neposredno slijedi da postoji ordinal $\xi < h(n)$ takav da $x \notin \mathbf{CP}^\Phi_\xi$ i $x \in \mathbf{CP}^\Phi_{\xi+1}$. Pošto je ordinal $h(n)$ granični i obzirmo na njegovu definiciju:

$$h(n) = g(\kappa \cdot n) = \bigcup_{\tau < \kappa \cdot n} g(\tau),$$

tada postoji ordinal $\delta < \kappa \cdot n$, takav da $\xi + 1 < g(\delta)$. Dakle, $x \in T^\Phi_{g(\delta)}$ i $w_{g(\delta)}(x) \neq \emptyset$. Na osnovu ***Posljedice 2.2.1.*** važi $w_{g(\delta+1)}(x) = \emptyset$, a na osnovu definicije $h(n)$ važi slijedeći niz relacija:

$$\sigma < g(\delta + 1) < h(n),$$

što je u kontradikciji sa izborom tačke x. **Q.E.D.**

Lema 2.2.5. Ako za $n < \omega$, i za svako $\tau < \kappa \cdot n$ važi $com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{g(\tau)}) \neq \emptyset$, tada za svaku tačku $x = \langle \sigma, (\forall Y)\varphi \rangle \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{h(n)}$, takvu da $h(n) \leq \sigma$ važi formula:

$$(\forall T \in {}^{Y}Const_M)(\forall X \in \mathbf{CM}^{\Phi}_{h(n+1)}(x)) \;\; \varphi[Y_{|T}] \sim X.$$

Tvrdjenje leme možemo formulisati i na sledeći način. Neka je tačku x, oblika $x = \langle \sigma, (\forall Y)\varphi \rangle$, tačka tabloa $\mathrm{T}^{\Phi}_{h(n)}$ koja nije iskorišćena u konstrukciji tabloa. Maksimalne grane X tabloa $\mathrm{T}^{\Phi}_{h(n+1)}$ koje sadrže tačku x, pored nje sadrže i tačke sa formulama $\varphi(Y_{|T})$, za sve funkcije $T \in {}^{Y}Const_M$. Drugim riječima u tablou $\mathrm{T}^{\Phi}_{h(n+1)}$ u granama koje sadrže tačku x završili smo sa primjenom pravila (P5) nad formulom $(\forall Y)\varphi$. Prethodnu rečenicu u vidu formule možemo zapisati kao:

$$(\forall X \in \mathbf{CM}^{\Phi}_{h(n+1)}(x)) \;\; \neg Pos(X, (\forall Y)\varphi).$$

Na osnovu konstrukcije tabloa odavde slijedi da se tačka sa formulom $(\forall Y)\varphi$ neće više dodavati u konstrukciji grana koje sadrže tačku x.

DOKAZ. Neka je tačka $x = \langle \sigma, (\forall Y)\varphi \rangle \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{h(n)}$, takva da $h(n) \leq \sigma$ i grana $X \in \mathbf{CM}^{\Phi}_{h(n+1)}(x)$. Posmatrajmo niz grana $\langle X_\sigma \rangle_{\sigma \in \kappa}$ definisan formulom:

$$X_\sigma = X \cap T^{\Phi}_{g(\kappa \cdot n + \sigma)}, \quad \sigma \in \kappa.$$

Iz definicije niza jasno je da za svako $\sigma < \kappa$ važi $X_\sigma \subset X_{\sigma+1}$ i $X_\sigma \in \mathbf{CM}^{\Phi}_{g(\kappa \cdot n + \sigma)}$, za $\sigma < \kappa$ kao i $X = \bigcup_{\sigma \in \kappa} X_\sigma$. Neka je dalje ordinal $\delta = nx_{\forall}(X_{\emptyset}, (\forall Y)\varphi)$. Iz konstrukcije niza $\mathrm{T}^{\Phi}_{\iota}$ slijedi da važi formula:

$$(\forall \xi < \delta) \;\; \varphi[Y_{|H^Y(\xi)}] \sim X_{\emptyset}.$$

Takodje iz definicije niza $\mathrm{T}^{\Phi}_{\iota}$ i ***Posljedice 2.2.1.*** slijedi da za svako $\sigma < \gamma_Y < \kappa$ važi formula:

$$\varphi[Y_{|H^Y(\delta+\sigma)}] \sim X_\sigma.$$

Pošto je κ kardinal, pa time i granični ordinal imamo da je $\delta + \kappa = \bigcup_{\sigma<\kappa} \delta + \sigma = \kappa$. Na osnovu prethodnih formula tada za svako $\xi < \gamma_Y < \kappa$ važi formula:

$$\varphi[Y_{|H^Y(\xi)}] \sim X.$$

Iz definicije funkcije H^Y i prethodne formule onda neposredno slijedi formula:

$$(\forall T \in {}^{Y}Const_M)(\forall X \in \mathbf{CM}^{\Phi}_{h(n+1)}(x)) \;\; \varphi[Y_{|T}] \sim X.$$

Q.E.D.

Teorema 2.2.2. TEOREMA O ZAUSTAVLJANJU Za svaki niz tabloa $\mathrm{T}^{\Phi}_{\iota}$, $\iota \in On$ postoji ordinal γ takav da važi formula:

$$(\forall \iota) \;\; (\gamma \leq \iota \;\rightarrow\; \mathrm{T}^{\Phi}_{\gamma} = \mathrm{T}^{\Phi}_{\iota}).$$

DOKAZ. Kao i u slučaju iskaznih računa tvrdjenje teoreme je ekvivalentno formuli $com_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}^{\Phi}_{\gamma}) = \emptyset$, odnosno:

$$(\forall x \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{\gamma}) \;\; w_{\gamma}(x) = \emptyset.$$

Pretpostavimo da $com_{\mathsf{T}}(\mathsf{T}^{\Phi}_{g(\tau)}) \neq \emptyset$, $\tau < h(\omega)$. Tada na osnovu ***Leme 2.2.3.*** niz $g(\tau)$ je strogo rastući, pa na osnovu ***Posljedice 2.2.2.*** $h(\omega)$ mora biti granični ordinal.

Pretpostavimo dalje da postoji tačka $x = \langle \sigma, \varphi \rangle \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{h(\omega)}$, takva da $w_{h(\omega)}(x) \neq \emptyset$. Ako je formula $\varphi \not\equiv (\forall Y)\psi$, tada je dokaz teoreme isti kao i u ekvivalentnoj teoremi za iskazne račune, te ga izostavljamo. Neka je $\varphi = (\forall Y)\psi$ i uzmimo bilo koju granu $X \in \mathbf{CM}^{\Phi}_{h(\omega)}(x)$. Pošto je $h(\omega)$ granični ordinal, tada na osnovu definicije niza $\mathsf{T}^{\Phi}_{\iota}$ postoji tačka $x' = \langle \tau, (\forall Y)\psi \rangle$ takva da $x' \in X$ i tačka x' je najmanja u grani X u odnosu na poredak $<_{\mathsf{T}^{\Phi}_{h(\omega)}}$. Ovakva tačka postoji jer je svaka grana tabloa dobro uredjena relaciom $<_{\mathsf{T}^{\Phi}_{h(\omega)}}$. Iz definicije niza $\mathsf{T}^{\Phi}_{\iota}$ slijedi da postoji ordinal $\xi < h(\omega)$ takav da $x' \notin \mathbf{CP}^{\Phi}_{\xi}$ i $x' \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{\xi+1}$. Pošto je niz g strogo rastući, a ordinal $h(\omega)$ granični, tada postoji najmanje n, takvo da $\xi < g(\kappa \cdot n) = h(n)$. Tada postoji tačka $x'' = \langle \delta, (\forall Y)\psi \rangle$ takva da $x'' \in X$ i $x'' \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{h(n)}$. U suprotnom bi značilo da je $\neg Pos(X \cap \mathbf{CP}^{\Phi}_{h(n)}, \varphi)$, što je u suprotnosti sa izbormo tačke x. Na osnovu ***Leme 2.2.5.*** izvodimo formulu:

$$(\forall T \in {}^{Y}Const_{M})(\forall Z \in \mathbf{CM}^{\Phi}_{h(n+1)}(x''))\ \ \varphi[Y_{|T}] \sim Z,$$

odnosno $(\forall Z \in \mathbf{CM}^{\Phi}_{h(n+1)}(x''))\ \neg Pos(Z, \varphi)$. Ako obilježimo sa $Z = X \cap T^{\Phi}_{h(n+1)}$, tada pošto je $\neg Pos(Z, \varphi)$ i $Z \subset X$ slijedi $\neg Pos(X, \varphi)$. Na osnovu ***Definicije 2.2.8.*** preslikavanja S, tada tačka x ne može pripadati grani X, što je u kontradikciji sa izborom tačke x.

Iz prethodno dokazanog slijedi da je ordinal $h(\omega)$, onaj koji zadovoljava uslove teoreme, jer za njega važi formula:

$$(\forall x \in \mathbf{CP}^{\Phi}_{h(\omega)})\ \ w_{h(\omega)}(x) = \emptyset.$$

Na osnovu prethodne teoreme uvodimo slijedeću definiciju.

Definicija 2.2.14. Za niz formula $\Phi = \langle \varphi_{\sigma} \rangle_{\sigma<\tau}$ definišemo ***kompletan tablo*** T^{Φ} kao:

$$\mathsf{T}^{\Phi} = \mathsf{T}^{\Phi}_{h(\omega)}.$$

Analogno ***Definiciji 2.1.3.*** i ***Definiciji 2.1.5.*** uvodimo i skupove definisane u ovim definicijama i označavamo sa $\mathbf{G}^{\Phi} = \mathbf{G}^{\Phi}_{h(\omega)}$, $\mathbf{CP}^{\Phi} = \mathbf{CP}^{\Phi}_{h(\omega)}$, $\mathbf{CG}^{\Phi} = \mathbf{CG}^{\Phi}_{h(\omega)}$ i $\mathbf{CM}^{\Phi} = \mathbf{CM}^{\Phi}_{h(\omega)}$.

Primjetimo da su maksimalne grane kompletnog tabloa T^{Φ} ili kontradiktorne ili pripadaju skupu $\mathbf{CM}^{\Phi}$.

Lema 2.2.6. Neka je data beskonačna logika $L_{\alpha\beta}$, takava da je kardinal α regularan i $\beta \leq \alpha$. Tada za svaki niz formula Φ, takav da $|\Phi| < \alpha$, važi formula:

$$(\forall \iota < \alpha)\ \ |T^{\Phi}_{\iota}| < \alpha.$$

DOKAZ. Dokaz sprovedimo indukcijom po ordinalima $\iota < \alpha$, identično dokazu ***Leme 2.1.4.***

Glava 3

Kompletnost

U ovoj glavi uvodimo pojam tablo dokazivosti formule φ u teoriji Φ, u oznaci $\Phi \vdash^{\mathsf{T}}_{P_\alpha} \varphi$, ako je kompletan tablo $\mathsf{T}^{\Phi \cup \{\neg\varphi\}}$ zatvoren, odnosno ako važi formula:

$$\mathsf{CM}^{\Phi \cup \{\neg\varphi\}} = \emptyset.$$

Zatim dokazujemo Teoremu o egzistenciji modela koja za svaku otvorenu granu kompletnog tabloa konstruiše model. Za iskane račune P_α dokazujemo Teoremu o kompletnosti koja tvrdi da za teoriju Φ i formulu φ iskaznog računa P_α važi ekvivalencija:

$$\Phi \models_{P_\alpha} \varphi \ \text{ akko } \ \Phi \vdash^{\mathsf{T}}_{P_\alpha} \varphi.$$

U slučaju beskonačnih logika $L_{\alpha\beta}$ u stanju smo da dokažemo slabiju verziju Teoreme kompletnosti koja tvrdi da za teoriju Φ i formulu φ beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$ važi formula:

$$\Phi \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi \ \rightarrow \ \Phi \vdash^{\mathsf{T}}_{L_{\alpha\beta}} \varphi.$$

Napomenimo da su za prve dokaze kompletnosti beskonačnih logika $L_{\alpha\beta}$, uvodjenjem svojstva *konzistencije*, i dokazom Teoreme o egzistenciji modela, zaslužni su *L. Henkin*, *R. M. Smullyan* i *M. Makkai*.

Na početku navedimo nekoliko definicija koje se odnosne na tabloe, bez obzira da li su tabloi za iskazne račune ili beskonačne logike.

Definicija 3.1. Za kompletan tablo T^Φ niza formula $\Phi = \langle \varphi_\sigma \rangle_{\sigma<\tau}$ kažemo da je *otvoren* ako je $\mathsf{CM}^\Phi \neq \emptyset$ u protivnom kažemo da je *zatvoren*.

Definicija 3.2. Grana tabloa Y *sadrži* sve formule koje se nalaze na grani X, u oznaci $X \simeq Y$, ako važi formula:

$$(\forall\varphi) \ \ \varphi \sim X \ \rightarrow \ \varphi \sim Y.$$

Grane tabloa X i Y *sadrže iste formule*, u ozanci $X \cong Y$, ako $X \simeq Y$ i $Y \simeq X$.

Tablo T_1 je *sadržan* u tablou T_2, u oznaci $\mathsf{T}_1 \approx \mathsf{T}_2$, ako važi formula:

$$(\forall X \in \mathsf{CM}_{\mathsf{T}_1})(\exists Y \in \mathsf{CM}_{\mathsf{T}_2}) \ \ X \simeq Y.$$

Tabloi T_1 i T_2 su ***ekvivalentni***, u oznaci $\mathsf{T}_1 \equiv \mathsf{T}_2$, ako $\mathsf{T}_1 \approx \mathsf{T}_2$ i $\mathsf{T}_2 \approx \mathsf{T}_1$.

Posljedica 3.1. Kako grane tabloa možemo posmatrati kao funkcije, jer su skupovi čiji su elementi uredjene dvojke $\langle \iota, \psi \rangle$, gdje je ι ordinal, a ψ formula, tada za grane tabloa X i Y slijedeći uslovi su ekvivalentni:

$$\begin{array}{rll} \varphi \sim X & \text{akko} & \varphi \in \mathit{Range}(X), \\ X \simeq Y & \text{akko} & \mathit{Range}(X) \subset \mathit{Range}(Y), \\ X \cong Y & \text{akko} & \mathit{Range}(X) = \mathit{Range}(Y). \end{array}$$

3.1 Kompletnost iskaznih računa P_α

Definicija 3.1.1. Neka je T tablo iskaznog računa P_α, i neka je $\mathfrak{p} : Var_{P_\alpha} \to \{T, F\}$ valuacija iskaznih varijabli. Kažemo da je valuacija $\mathfrak{p}$ *model grane* $X \in \mathsf{CM}_\mathsf{T}$ u oznaci $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X$, ako važi formula:

$$(\forall \varphi \sim X) \;\; \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi.$$

Kažemo, dalje da je valuacija $\mathfrak{p}$ ***model niza formula*** $\Phi = \langle \varphi_\sigma \rangle_{\sigma < \tau}$ iskaznog računa P_α u oznaci $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Phi$ ako važi formula:

$$(\forall \sigma < \tau) \;\; \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi_\sigma.$$

Takodje kažemo da je valuacija $\mathfrak{p}$ ***model tabloa*** T u oznaci $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathsf{T}$, ako važi formula:

$$(\exists X \in \mathsf{CM}_\mathsf{T}) \;\; \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X.$$

Lema 3.1.1. Neka je dat niz tabloa T_ι^Φ, $\iota \in On$, za niz formula $\Phi = \langle \varphi_\sigma \rangle_{\sigma < \tau}$ i neka je data valuacija $\mathfrak{p} : Var_{P_\alpha} \to \{T, F\}$, tada važi formula:

$$(\forall \iota) \;\; (\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathsf{T}_\iota^\Phi \;\to\; \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathsf{T}_{\iota+1}^\Phi).$$

DOKAZ. Neka je $\mathfrak{p}$ model tabloa T_ι^Φ, t.j. $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathsf{T}_\iota^\Phi$. Tablo $\mathsf{T}_{\iota+1}^\Phi$ je dobijen tako što je primjenjeno jedno od pravila (P1)–(P4) nad tačkom $x = \langle \iota, \varphi \rangle \in T_\iota^\Phi$. Neka je $X \in \mathsf{CM}_\iota^\Phi$ maksimalna konzistentna grana tabloa T_ι^Φ, takva da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X$.

Ako $x \notin X$, tada na osnovu konstrukcije tabloa slijedi da $X \in \mathsf{CM}_{\iota+1}^\Phi$, odnosno grana X je takodje maksimalna konzistentna grana tabloa $\mathsf{T}_{\iota+1}^\Phi$. Odavde neposredno iz $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X$, slijedi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathsf{T}_{\iota+1}^\Phi$.

Ako $x \in X$, tada smo u tablou $\mathsf{T}_{\iota+1}^\Phi$ granu X produžili u skladu sa nekim od pravila (P1)–(P4) koji smo primjenili u konstrukciji. U zavisnosti od pravila koje smo primjenili imamo slijedeće slučajeve:

(P1) Tada je $\varphi = \neg\psi$ i $\psi \notin Var_{P_\alpha}$, pa smo granu X produžili tačkom $\langle \tau, \psi\neg \rangle$. Obilježimo sa $X_1 = X \cup \{\langle \tau, \psi\neg \rangle\}$. Pošto na osnovu ***Leme 2.1.1*** važi da ako $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg\psi$, tada $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \psi\neg$, pa odavde izvodimo da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X_1$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathsf{T}_{\iota+1}^\Phi$.

(P2) Tada je $\varphi = \psi \to \theta$, pa smo od grane X dobili dvije grane: $X_1 = X \cup \{\langle \tau, \neg\psi \rangle\}$ i $X_2 = X \cup \{\langle \tau + 1, \theta \rangle\}$. Pošto na osnovu ***Leme 2.1.1*** važi da ako $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \psi \to \theta$, tada $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg\psi$ ili $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \theta$, pa odavde izvodimo da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X_1$ ili $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X_1$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathsf{T}_{\iota+1}^\Phi$.

(P3) Tada je $\varphi = \bigwedge_{\sigma<\gamma} \psi_\sigma$, pa smo granu X produžili tačkama $\langle \tau \overset{*}{+} \sigma, \psi_\sigma \rangle$, $\sigma < \gamma$. Obilježimo sa $X_1 = X \cup \{\langle \tau \overset{*}{+} \sigma, \psi_\sigma \rangle \mid \sigma < \gamma\}$. Pošto na osnovu ***Leme 2.1.1*** važi da ako $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \bigwedge_{\sigma<\gamma} \psi_\sigma$, tada za svako $\sigma < \gamma$ važi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \psi_\sigma$, pa odavde izvodimo da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X_1$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathbf{T}^\Phi_{\iota+1}$.

(P4) Tada je $\varphi = \bigvee_{\sigma<\gamma} \psi_\sigma$, pa smo od grane X dobili γ grana: $X_\sigma = X \cup \{\langle \tau \overset{*}{+} \sigma, \psi_\sigma \rangle\}$, $\sigma < \gamma$. Pošto na osnovu ***Leme 2.1.1*** važi da ako $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \bigvee_{\sigma<\gamma} \psi_\sigma$, tada postoji $\sigma < \gamma$ tako da važi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \psi_\sigma$, pa odavde izvodimo da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X_\sigma$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathbf{T}^\Phi_{\iota+1}$.

U slučaju da nijesmo dodali ni jednu tačku grani X, tada $X \in \mathbf{CM}^\Phi_{\iota+1}$, pa neposredno slijedi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathbf{T}^\Phi_{\iota+1}$.

Dakle, bilo da $x \in X$ ili $x \notin X$ imamo da važi formula $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathbf{T}^\Phi_{\iota+1}$. ***Q.E.D.***

Posljedica 3.1.1. Neka je $X \in \mathbf{CM}^\Phi_\iota$ konzistentna grana tabloa $\mathbf{T}^\Phi_\iota$ takva da je $\mathfrak{p}$ njen model, t.j. $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X$. Tada važi formula:

$$(\exists X' \in \mathbf{CM}^\Phi_{\iota+1}) \ \ (X \subset X' \ \wedge \ \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X').$$

DOKAZ. Neposredno slijedi na osnovu dokaza prethodne teoreme.

Teorema 3.1.1. TEOREMA KOREKTNOSTI. Neka je dat niz formula $\Phi = \langle \varphi_\sigma \rangle_{\sigma<\tau}$ iskaznog računa P_α i neka je data valuacija $\mathfrak{p} : Var_{P_\alpha} \to \{T, F\}$. Tada važi formula:

$$\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Phi \ \to \ \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathbf{T}^\Phi.$$

DOKAZ. Neka je $\mathbf{T}^\Phi_\iota$, $\iota \in On$ niz tabloa za niz formula Φ. Dokažimo da iz $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Phi$ slijedi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathbf{T}^\Phi_\iota$, za svako $\iota \in On$, pa time i za $\mathbf{T}^\Phi = \mathbf{T}^\Phi_{g(\omega)}$. Dokaz sprovedimo indukciom po ordinalima.

(1) INDUKTIVNI POČETAK, $\iota = \emptyset$. Iz definicije konstrukcije tabloa, slijedi da $T^\Phi_\emptyset = \Phi$. Odavde direktno slijedi formula:

$$\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathbf{T}^\Phi_\emptyset.$$

(2) INDUKTIVNA HIPOTEZA. Neka za ordinal γ važi formula:

$$(\forall \iota < \gamma) \ \ \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathbf{T}^\Phi_\iota.$$

(3) INDUKTIVNI KORAK. Dokažimo da za ordinal γ iz INDUKTIVNE HIPOTEZE slijedi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathbf{T}^\Phi_\gamma$.

(3.1) Ako je ordinal γ sljedbenik. t.j. postoji ordinal ι takav da $\gamma = \iota + 1$. Tada na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE i ***Leme 3.1.1.*** neposredno slijedi da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathbf{T}^\Phi_{\iota+1}$.

(3.2) Ako je ordinal γ graničan ordinal tada konstruišimo slijedeći niz grana $X_\iota \in \mathbf{CM}^\Phi_\iota$, $\iota \in \gamma$ takav da važi formula:

$$(\forall \iota \leq \gamma) \ \ \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X_\iota.$$

Neka je $X_\emptyset = \Phi$, pošto je to na osnovu konstrukcije tabloa i jedina grana u tablou $\mathrm{T}_\emptyset^\Phi$ i za nju iz pretpostavke teoreme slijedi $\models_{P_\alpha} X_\emptyset$. Za sve ordinale slijedbenike $\sigma + 1$ granu $X_{\sigma+1}$ definišemo na osnovu ***Posljedice 3.1.1.*** tako da $X_\sigma \subset X_{\sigma+1}$ i $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X_{\sigma+1}$. U slučaju da je ordinal σ granični, granu X_σ definišemo formulom:

$$X_\sigma = \bigcup_{\tau<\sigma} X_\tau.$$

Iz definicije grane X_σ i konstrukcije prvo zaključujemo da $X_\sigma \in \mathsf{CM}_\sigma^\Phi$. Pretpostavimo da $\mathfrak{p} \not\models_{P_\alpha} X_\sigma$. Tada bi postojala tačka $x = \langle \tau, \varphi \rangle$ takva da $\mathfrak{p} \not\models_{P_\alpha} \varphi$. Na osnovu konstrukcije tabloa i definicije niza grana X_ι, $\iota < \sigma$, tada bi postojao ordinal $\xi < \sigma$ takav da $x \notin X_\xi$ i $x \in X_{\xi+1}$. Odavde bi iz Induktivne hipoteze slijedilo da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X_{\xi+1}$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$, što je u kontradikciji sa izbormo tačke x. Moguće je da samo važi formula $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X_\sigma$. Iz konstrukcije niza slijedi da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X_\gamma$, pa time $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \mathrm{T}_\gamma^\Phi$.

Q.E.D.

Posljedica 3.1.2. Neka je za niz formula Φ i neka je tablo T^Φ zatvoren. Tada za bilo koju valuaciju $\mathfrak{p} : Var_{P_\alpha} \to \{T, F\}$, slijedi da $\mathfrak{p} \not\models_{P_\alpha} \Phi$.

Definicija 3.1.2. Za formulu $\varphi \in For_{P_\alpha}$ kažemo da je *tablo dokaziva* u teoriji Φ, u oznaci $\Phi \vdash_{P_\alpha}^{\mathrm{T}} \varphi$, ako je tablo $\mathrm{T}^{\Phi \cup \{\neg\varphi\}}$ zatvoren, odnosno ako važi formula:

$$\mathsf{CM}^{\Phi \cup \{\neg\varphi\}} = \emptyset.$$

Ako je $\Phi = \emptyset$, tada $\emptyset \vdash_{P_\alpha}^{\mathrm{T}} \varphi$, označavamo samo sa $\vdash_{P_\alpha}^{\mathrm{T}} \varphi$.

Primjetimo da smo u prethodnoj definiciji teoriju Φ tretirali i kao niz formula, što formalno nije korektno, ali ne dovodi do zabune jer lako definišemo operator koji nam skup preslikava u niz sa elementima iz datog skupa. Pomenutu nekorektnost u zapisu uvodimo da bi pojednostavili zapis formula.

Posljedica 3.1.3. Iz ***Posljedice 3.1.2.*** neposredno slijedi da za bilo koju teoriju Φ i formulu φ iskaznog računa P_α nije moguće da:

$$\Phi \vdash_{P_\alpha}^{\mathrm{T}} \varphi \ \text{ i } \ \Phi \vdash_{P_\alpha}^{\mathrm{T}} \neg\varphi.$$

Takodje iz ***Posljedice 3.1.2.*** neposredno slijedi da su tablo izvodive formule tautologije.

Teorema 3.1.2. Neka je za niz formula Φ dat kompletan tablo T^Φ. Tada svaka njegova konzistentna maksimalna grana $X \in \mathsf{CM}^\Phi$ zadovoljava slijedećih pet uslova:

(C0) Ne postoji formula $\varphi \in For_{P_\alpha}$ takva da $\varphi \sim X$ i $\neg\varphi \sim X$.

(C1) Ako $\neg\varphi \sim X$, tada $\varphi\neg \sim X$.

(C2) Ako $\varphi \to \psi \sim X$, tada $\neg\varphi \sim X$ ili $\psi \sim X$.

(C3) Ako $\bigwedge_{\sigma<\gamma} \varphi_\sigma \sim X$, tada za svako $\sigma < \gamma$ važi $\varphi_\sigma \sim X$.

(C4) Ako $\bigvee_{\sigma<\gamma} \varphi_\sigma \sim X$, tada postoji $\sigma < \gamma$ tako da važi $\varphi_\sigma \sim X$.

DOKAZ. Dokaz sprovedimo diskusijom po uslovima (C0)–(C4).

Uslov (C0) je trivijalno ispunjen, jer u slučaju da nije, grana X ne bi bila konzistentna, što je polazna pretpostavka.

Uslovi (C1)–(C4) su posljedica konstrukcije tabloa $\mathbf{T}^\Phi$. Neka tačka $\langle\iota,\theta\rangle \in X$, tada obilježimo sa $X' = X \cap T^\Phi_\iota$ i $X'' = X \cap T^\Phi_{\iota+1}$. Iz definicije grana X' i X'' jasno je da $X', X'' \subset X$ i $X' \in \mathbf{CM}^\Phi_\iota$ i $X'' \in \mathbf{CM}^\Phi_{\iota+1}$, odnosno grana X'' je direktni produžetak grane X' u zavisnosti od pravila (P1)–(P4) koje smo primjenili nad tačkom $\langle\iota,\theta\rangle$.

(C1) Ako je $\theta = \neg\varphi$ i $\varphi \notin Var_{P_\alpha}$, tada smo primjenili pravilo (P1), pa je $X'' = X' \cup \{\langle\tau,\varphi\neg\rangle\}$, odnosno $\varphi\neg \sim X''$. Pošto je $X'' \subset X$ odavde direktno izvodimo $\varphi\neg \sim X$.

(C2) Ako je $\theta = \varphi \to \psi$, tada smo primjenili pravilo (P2), pa je $X'' = X' \cup \{\langle\tau,\neg\varphi\rangle\}$ ili $X'' = X' \cup \{\langle\tau,\psi\rangle\}$, odnosno $\neg\varphi \sim X''$ ili $\psi \sim X''$. Pošto je $X'' \subset X$ odavde direktno izvodimo da $\neg\varphi \sim X$ ili $\psi \sim X$.

(C3) Ako je $\theta = \bigwedge_{\sigma<\gamma}\varphi_\sigma \sim X$, tada smo primjenili pravilo (P3), pa je $X'' = X' \cup \{\langle\tau_\sigma,\varphi_\sigma\rangle \mid \sigma < \gamma\}$, odnosno za svako $\sigma < \gamma$ važi $\varphi_\sigma \sim X''$. Pošto je $X'' \subset X$ odavde direktno slijedi da za svako $\sigma < \gamma$ važi $\varphi_\sigma \sim X$.

(C4) Ako je $\theta = \bigvee_{\sigma<\gamma}\varphi_\sigma \sim X$, tada smo primjenili pravilo (P4), pa postoji $\sigma < \gamma$ takvo da $X'' = X' \cup \{\langle\tau_\sigma,\varphi_\sigma\rangle\}$, odnosno važi $\varphi_\sigma \sim X''$. Pošto je $X'' \subset X$ odavde direktno slijedi da važi $\varphi_\sigma \sim X$.

Q.E.D.

Teorema 3.1.3. TEOREMA O EGZISTENCIJI MODELA. Za svaku konzistentnu granu X tabloa $\mathbf{T}$ koja zadovoljava uslove (C1)–(C4) iz prethodne teoreme, postoji model $\mathfrak{p}$.

DOKAZ. Definišimo valuaciju $\mathfrak{p} : Var_{P_\alpha} \to \{T, F\}$ slijedećom formulom:

$$\mathfrak{p}(p_\beta) = \begin{cases} T & : p_\beta \sim X, \\ F & : \neg p_\beta \sim X, \\ T & : \text{inače.} \end{cases}$$

U nastavku, indukcijom po složenosti formula $\varphi \sim X$, dokažimo da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X$.

(1) INDUKTIVNI POČETAK, $\iota = 0$. Za sve $p_\beta \sim X$ na osnovu definicije $\mathfrak{p}$ imamo da $v_\mathfrak{p}(p_\beta) = T$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} p_\beta$.

(2) INDUKTIVNA HIPOTEZA. Neka za ordinal $\gamma < \alpha$ važi formula:

$$(\forall\varphi \sim X)\ \ (co_{P_\alpha}(\varphi) < \gamma \ \to\ \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi).$$

(3) INDUKTIVNI KORAK. Dokažimo da za ordinal γ iz INDUKTIVNE HIPOTEZE važi formula:

$$(\forall\varphi \sim X)\ \ (co_{P_\alpha}(\varphi) \leq \gamma \ \to\ \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi).$$

Za formule $\varphi \sim X$ za koje $co_{P_\alpha}(\varphi) < \gamma$ tvrdjenje teoreme slijedi direktno iz INDUKTIVNE HIPOTEZE. Primjetimo da ako je ordinal γ granični, tvrdjenje je trivijalno ispunjeno, jer na osnovu definicije kompleksnoti formule co_{P_α}, ***Definicija 1.2.1***, ne postoji formula φ iskaznog računa P_α, takva da je $co_{P_\alpha}(\varphi)$ granični ordinal. Ostaje da dokažemo INDUKTIVNI KORAK u slučaju kada je ordinal γ slijedbenik, odnosno postoji ordinal ι, takav da $\gamma = \iota + 1$.

Neka je $\varphi \in X$ i $co_{P_\alpha}(\varphi) = \gamma = \iota + 1$. Tada su mogući slijedeći slučajevi:

(3.1) Ako je $\varphi = \neg\psi$. tada na osnovu **Teoreme 3.1.2.** slijedi da $\psi\neg \sim X$. Na osnovu definicjie preslikavanja $\neg$ formula $\psi\neg$ može započeti veznikom $\neg$ samo ako $\psi \in Var_{P_\alpha}$. U tom slučaju $v_{\mathfrak{p}}(\psi) = F$, odnosno $v_{\mathfrak{p}}(\psi\neg) = v_{\mathfrak{p}}(\neg\psi) = T$, pa odavde slijedi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$. Moguće je da $\psi = \neg\theta$, za neku formulu $\theta \in For_{P_\alpha}$, tada $\psi\neg = \theta$, pa pošto $\theta \sim X$ i $\iota + 1 \geq co_{P_\alpha}(\varphi) > co_{P_\alpha}(\theta)$, na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE slijedi da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \theta$. Kako je $\varphi = \neg\neg\theta$, iz prethodnog neposredno slijedi da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$. Preostali su još slučaji kada je $\psi = \bigwedge_{\sigma<\tau} \psi_\sigma$ ili $\psi = \bigvee_{\sigma<\tau} \psi_\sigma$. Tada na osnovu preslikavanja co_{P_α} i $\neg$ važi slijedeći niz relacija:

$$co_{P_\alpha}(\neg\psi) = co_{P_\alpha}(\psi) + 1 = \bigcup_{\sigma<\tau} co_{P_\alpha}(\psi_\sigma) + 2,$$

$$co_{P_\alpha}(\psi\neg) = co_{P_\alpha}(\neg\psi_\sigma) + 1 = \bigcup_{\sigma<\tau} (co_{P_\alpha}(\psi_\sigma) + 1) + 1.$$

Ako je ordinal $\bigcup_{\sigma<\tau} co_{P_\alpha}(\psi_\sigma)$ granični, tada se trivijalno pokazuje da važi relacija:

$$\bigcup_{\sigma<\tau} co_{P_\alpha}(\psi_\sigma) = \bigcup_{\sigma<\tau} (co_{P_\alpha}(\psi_\sigma) + 1),$$

pa odavde slijedi da je $co_{P_\alpha}(\neg\psi) > co_{P_\alpha}(\psi\neg)$. U slučaju da je ordinal $\bigcup_{\sigma<\tau} co_{P_\alpha}(\psi_\sigma)$, ordinal slijdebenik, tada postoji ordinal $\xi < \tau$ takav da formula $co_{P_\alpha}(\psi_\xi) = \bigcup_{\sigma<\tau} co_{P_\alpha}(\psi_\sigma)$. Odavde neposredno zaključujemo da je $co_{P_\alpha}(\neg\psi) = co_{P_\alpha}(\psi_\xi) + 2$. S druge strane slijedi da je

$$\bigcup_{\sigma<\tau} (co_{P_\alpha}(\psi_\sigma) + 1) = co_{P_\alpha}(\psi_\xi) + 1,$$

pa izvodimo da je $co_{P_\alpha}(\psi\neg) = co_{P_\alpha}(\psi_\xi) + 2$. Dakle, u slučaju da je ordinal $\bigcup_{\sigma<\tau} co_{P_\alpha}(\psi_\sigma)$, ordinal slijdebenik, važi $co_{P_\alpha}(\neg\psi) = co_{P_\alpha}(\psi\neg)$. U oba slučaja $co_{P_\alpha}(\neg\psi) \geq co_{P_\alpha}(\psi\neg)$ i $\psi\neg$ počinje jednim od logičkih veznika: $\bigvee$ ili $\bigwedge$, pa je ostatak dokaza isti kao u slučajevima (3.3) i (3.4). Moguće je još i da je $\psi = \psi_1 \to \psi_2$. Tata je $\psi\neg = \psi_1 \wedge (\neg\psi_2)$, pa važi sljedeći niz relacija:

$$co_{P_\alpha}(\varphi) = co_{P_\alpha}(\neg\psi) = co_{P_\alpha}(\psi\neg) > co_{P_\alpha}(\psi_1), co_{P_\alpha}(\neg\psi_2).$$

Na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE slijedi onda da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \psi_1$ i $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg\psi_2$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$.

(3.2) Ako je $\varphi = \psi \to \theta$, na osnovu **Teoreme 3.1.2.** važi da $\neg\psi \sim X$ ili $\theta \sim X$. Tada ili važi na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE $co_{P_\alpha}(\varphi) > co_{P_\alpha}(\theta)$ pa važi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \theta$ ili na osnovu (3.1) važi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg\psi$. Kako je formula φ ekvivalnetna formuli $\neg\psi \vee \theta$, slijedi da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$.

(3.3) Ako je $\varphi = \bigwedge_{\sigma<\tau} \psi_\sigma$, tada na osnovu **Teoreme 3.1.2.** za svako $\sigma < \tau$ važi $\psi_\sigma \sim X$. Pošto je za svako $\sigma < \tau$ važi $co_{P_\alpha}(\varphi) > co_{P_\alpha}(\psi_\sigma)$, to na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \psi_\sigma$. odavde direktno slijedi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$.

(3.4) Ako je $\varphi = \bigvee_{\sigma<\tau} \psi_\sigma$, tada na osnovu **Teoreme 3.1.2.** postoji $\sigma < \tau$ važi $\psi_\sigma \sim X$. Pošto važi $co_{P_\alpha}(\varphi) > co_{P_\alpha}(\psi_\sigma)$, to na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \psi_\sigma$. odavde direktno slijedi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$.

Q.E.D.

Primjetimo da je valuacija $\mathfrak{p}$ konstruisana u prethodnom dokazu, samo jedan od modela grane X. Ako obilježimo sa

$$\lambda = |\{p \in Var_{P_\alpha} \mid p \not\prec X \ \wedge \neg p \not\prec X\}|,$$

tada je broj modela grane X jednak kardinalu 2^λ.

Posljedica 3.1.4. Za svaku konzistentnu granu $X \in \mathsf{CM}^\Phi$ kompletnog tabloa T^Φ postoji model $\mathfrak{p}$.

Definicija 3.1.3. Za niz formula Φ iskaznog računa P_α i formulu φ iskaznog računa P_α kažemo da je formula φ ***semantička poslijedica*** teorije Φ ako za svaki model $\mathfrak{p}$ važi formula:

$$\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Phi \ \rightarrow \ \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi.$$

Teorema 3.1.4. TEOREMA KOMPLETNOSTI. Za svaku teoriju Φ i formulu φ iskaznog računa P_α važi ekvivalencija:

$$\Phi \models_{P_\alpha} \varphi \ \text{ akko } \ \Phi \vdash^{\mathsf{T}}_{P_\alpha} \varphi,$$

odnosno formula φ je semantička poslijedica teorije Φ akko je formula φ tablo izvodljiva iz teorije Φ.

DOKAZ.

($\rightarrow$) Pretpostavimo da $\Phi \models_{P_\alpha} \varphi$ i da $\Phi \not\vdash^{\mathsf{T}}_{P_\alpha} \varphi$. U tom slučaju postoji konzistentna maksimalna grana $X \in \mathsf{CM}^{\Phi\cup\{\neg\varphi\}}$. Na osnovu ***Posljedice 3.1.4***, tada postoji model $\mathfrak{p}$ grane X, t.j. $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X$. Pošto $X \in \mathsf{CM}^{\Phi\cup\{\neg\varphi\}}$, jasno je da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Phi$ i $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg\varphi$. Kako važi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Phi$ i iz pretpostavke da je formula φ semantička poslijedica terorije Φ izvodimo da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$, što je u kontradikciji sa $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg\varphi$.

($\leftarrow$) Pretpostavimo da $\Phi \vdash^{\mathsf{T}}_{P_\alpha} \varphi$. Tada je tablo $\mathsf{T}^{\Phi\cup\{\neg\varphi\}}$ zatvoren. Na osnovu ***Posljedice 3.1.2.*** za svaku valuaciju $\mathfrak{p} : Var_{P_\alpha} \rightarrow \{T, F\}$ važi $\mathfrak{p} \not\models_{P_\alpha} \Phi$ ili $\mathfrak{p} \not\models_{P_\alpha} \neg\varphi$. Odavde zaključujuemo da za svaki model $\mathfrak{p}$ teorije Φ, mora da važi $\mathfrak{p} \not\models_{P_\alpha} \neg\varphi$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$. Dakle, važi da iz $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Phi$ slijedi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$, pa je formula φ semantička poslijedica teorije Φ, tj. $\Phi \models_{P_\alpha} \varphi$.

Q.E.D.

Lema 3.1.2. Za svaku formulu $\varphi \in For_{P_\alpha}$ važi formula:

$$\not\models_{P_\alpha} \neg\varphi \ \rightarrow \ \mathsf{CM}^{\{\varphi\}} \neq \emptyset.$$

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno tj. $\mathsf{CM}^{\{\varphi\}} = \emptyset$. Tada na osnovu definicije analitičkih tabloa za iskazne račune P_α, mora da važi $\mathsf{CM}^{\{\neg\neg\varphi\}} = \emptyset$, pa na osnovu ***Definicije 3.1.2.*** važi $\vdash^{\mathsf{T}}_{P_\alpha} \neg\varphi$. Dalje na osnovu TEOREME O KOMPLETNOSTI slijedi da $\models_{P_\alpha} \neg\varphi$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom da $\not\models_{P_\alpha} \not\varphi$.

Posljedica 3.1.5. Za svaku formulu $\varphi \in For_{P_\alpha}$ važi formula:

$$\models_{P_\alpha} \varphi \ \rightarrow \ \mathsf{CM}^{\{\varphi\}} \neq \emptyset.$$

DOKAZ. Ako je $\models_{P_\alpha} \varphi$, tada je φ tautologija, pa formula $\neg\varphi$ nije tautologija, odnosno $\not\models_{P_\alpha} \neg\varphi$. Na osnovu ***Posljedice 3.1.2.*** zaključujemo da $\mathsf{CM}^{\{\varphi\}} \neq \emptyset$.

Posljedica 3.1.5. Za svaku formulu $\varphi \in For_{P_\alpha}$ i njen model $\mathfrak{p}$ važi formula:

$$\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi \rightarrow \mathsf{CM}^{\{\varphi\}} \neq \emptyset.$$

DOKAZ. Pošto $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \varphi$, tada formula $\neg\varphi$ nije tautologija, tj. $\not\models_{P_\alpha} \neg\varphi$. Na osnovu ***Posljedice 3.1.2.*** zaključujemo da $\mathsf{CM}^{\{\varphi\}} \neq \emptyset$.

3.2 Kompletnost beskonačnih logika $L_{\alpha\beta}$

Definicija 3.2.1. Neka je T tablo beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$, i neka je $\mathfrak{A}$ model jezika L. Kažemo da je $\mathfrak{A}$ *model grane* $X \in \mathsf{CM}_{\mathsf{T}}$ u oznaci $\mathfrak{A} \models_{P_\alpha} X$, ako važi formula:

$$(\forall\langle\sigma,\varphi\rangle \in X)\ \ \mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi.$$

Takodje kažemo da je $\mathfrak{A}$ ***model tabloa*** T ako važi formula:

$$(\exists X \in \mathsf{CM}_{\mathsf{T}})\ \ \mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} X.$$

Definicija 3.2.2. Za formulu $\varphi \in For_{L_{\alpha\beta}}$ kažemo da je ***tablo dokaziva*** u teoriji Φ, u oznaci $\Phi \vdash^{\mathsf{T}}_{L_{\alpha\beta}} \varphi$, ako je tablo $\mathsf{T}^{\Phi'}$ zatvoren, gdje je niz formula Φ' niz bez ponavljanja takav da važi formula:

$$\begin{aligned}
Range(\Phi') \;=\;& Range(\Phi) \cup \{\neg\varphi\} \cup \\
& \{(\forall x)\ \ x = x\} \cup \\
& \{(\forall x, y)\ \ (x = y \rightarrow y = x)\} \cup \\
& \{(\forall x_0, ..., x_{n-1}, y_0, ..., y_{n-1})\ \ ((\textstyle\bigwedge_{i<n} x_i = y_i \ \wedge\ P(x_0, ..., x_{n-1})) \\
& \qquad\qquad \rightarrow\ P(y_0, ..., y_{n-1}))\ |\ P \in Rel_L \ \wedge\ ar(P) = n\} \cup \\
& \{(\forall x_0, ..., x_{n-1})(\exists y)\ \ y = f(x_0, ..., x_{n-1})\ |\ f \in Fun_L \ \wedge\ ar(f) = n\}
\end{aligned}$$

Primjetimo da je $|\Phi'| = |\Phi| + |Rel_L| + |Fun_L|$. Neposredno iz definicije tablo dokazivosti slijedi da $\Phi \vdash^{\mathsf{T}}_{L_{\alpha\beta}} \varphi$, ako važi formula:

$$\mathsf{CM}^{\Phi'} = \emptyset.$$

Ako je $\Phi = \emptyset$, tada $\emptyset \vdash^{\mathsf{T}}_{L_{\alpha\beta}} \varphi$, označavamo samo sa $\vdash^{\mathsf{T}}_{L_{\alpha\beta}} \varphi$.

Teorema 3.2.1. Neka je za niz formula Φ dat kompletan tablo T^{Φ}. Tada svaka njegova konzistentna maksimalna grana $X \in \mathsf{CM}^{\Phi}$ zadovoljava slijedećih osam uslova:

(C0) Ne postoji formula $\varphi \in For_{P_\alpha}$ takva da $\varphi \sim X$ i $\neg\varphi \sim X$.

(C1) Ako $\neg\varphi \sim X$, tada $\varphi\neg \sim X$.

(C2) Ako $\varphi \rightarrow \psi \sim X$, tada $\neg\varphi \sim X$ ili $\psi \sim X$.

(C3) Ako $\bigwedge_{\sigma<\gamma} \varphi_\sigma \sim X$, tada za svako $\sigma < \gamma$ važi $\varphi_\sigma \sim X$.

(C4) Ako $\bigvee_{\sigma<\gamma} \varphi_\sigma \sim X$, tada postoji $\sigma < \gamma$ tako da važi $\varphi_\sigma \sim X$.

(C5) Ako $(\forall Y)\varphi[Y] \sim X$, tada za svako $T \in {}^Y Const_M$ važi $\varphi[Y_{|T}] \sim X$.

(C6) Ako $(\exists Y)\varphi[Y] \sim X$, tada postoji $T \in {}^Y Const_M$ tako da važi $\varphi[Y_{|T}] \sim X$.

(C7) Neka su $P \in Rel_M$, $f \in Fun_M$, i $p, q \in Const_M$.

  (a) Ako $p = q \sim X$, tada $q = p \sim X$.

  (b) Neka je $ar(P) = n$ i $p_0, ..., p_{n-1}, q_0, ..., q_{n-1} \in Const_M$. Ako za svako $i < n$ važi $p_i = q_i \sim X$ i $P(p_0, ..., p_{n-1}) \sim X$, tada $P(q_0, ..., q_{n-1}) \sim X$.

  (c) Neka je $ar(f) = n$ i $p_0, ..., p_{n-1} \in Const_M$. Tada postoji $r \in Const_M \setminus Const_L$, takvo da $r = f(p_0, ..., p_{n-1}) \sim X$.

DOKAZ. Dokaz sprovedimo diskusijom po uslovima (C0)–(C7).

Uslov (C0) je trivijalno ispunjen, jer u slučaju da nije, grana X ne bi bila konzistentna, što je polazna pretpostavka.

Uslovi (C1)–(C7) su posljedica konstrukcije tabloa $\mathbf{T}^\Phi$. Neka tačka $\langle\iota,\theta\rangle \in X$, tada obilježimo sa $X' = X \cap T_\iota^\Phi$ i $X'' = X \cap T_{\iota+1}^\Phi$. Iz definicije grana X' i X'' jasno je da $X', X'' \subset X$ i $X' \in \mathbf{CM}_\iota^\Phi$ i $X'' \in \mathbf{CM}_{\iota+1}^\Phi$, odnosno grana X'' je direktni produžetak grane X' u zavisnosti od pravila (P1)–(P6) koje smo primjenili nad tačkom $\langle\iota,\theta\rangle$. Primjetimo da su dokazi da važe svojstva (C1)–(C4) identični dokazima u ***Teoremi 3.1.2.*** pa ih ovdje izostavljamo.

(C5) Ako $\theta = (\forall X)\varphi[X]$, tada smo primjenili pravilo (P5). Na osnovu ***Definicije 2.2.5***, tada $X'' = X' \cup \{\langle\xi, \varphi[X_{|T_\forall(X',\theta)}]\rangle, \langle\xi+1,\theta\rangle\}$, tj. $\varphi[X_{|T_\forall(X',\theta)}] \sim X$. U $\xi + 1$ koraku u konstrukciji tabloa, ponovo se ponavlja isti postupak, i tako redom dok se ne doda svako $T \in {}^X Const_M$. Dakle za svako $T \in {}^X Const_M$ važi $\varphi[X_{|T}] \sim X$.

(C6) Ako $\theta = (\exists X)\varphi[X]$, tada smo primjenili pravilo (P6). Na osnovu ***Definicije 2.2.5***, tada $X'' = X' \cup \{\langle\xi, \varphi[X_{|T_\exists(X',\theta)}]\rangle\}$, tj. $\varphi(X_{|T_\exists(X',\theta)}) \sim X$.

(C7) Neka su $P \in Rel_M$, $f \in Fun_M$, i $p, q \in Const_M$.

  (a) Ako $\theta = (p = q)$, tada pošto važi formula:

$$(\forall x, y)\ \ (x = y \rightarrow y = x) \quad \sim \quad \Phi',$$

  i važi (C5) slijedi da i $p = q \rightarrow q = p \sim X$. Na osnovu (C2) dalje slijedi da ili $\neg p = q \sim X$ ili $q = p \sim X$. Ako bi $\neg p = q \sim X$, to bi bilo u kontradikciji sa svojstvom (C0), odnosno činjenici da je grana X konzistentna, pa važi $q = p \sim X$.

  (b) Neka je $ar(P) = n$ i $p_0, ..., p_{n-1}, q_0, ..., q_{n-1} \in Const_M$. Takodje neka za svako $i < n$ važi $p_i = q_i \sim X$ i $P(p_0, ..., p_{n-1}) \sim X$. Pošto važi formula:

$$(\forall x_0, ..., x_{n-1}, y_0, ..., y_{n-1})\ \ ((\bigwedge_{i<n} x_i = y_i \wedge P(x_0, ..., x_{n-1}))$$
$$\rightarrow P(y_0, ..., y_{n-1})) \quad \sim \quad \Phi',$$

i važi (C5) slijedi da

$$(\bigwedge_{i<n} p_i = q_i \wedge P(p_0, ..., p_{n-1})) \rightarrow P(q_0, ..., q_{n-1}) \quad \sim \quad X.$$

Kako dalje važi (C2) i (C4) ili postoji $i < n$ tako da $\neg p_i = q_i \sim X$ ili $\neg P(p_0, ..., p_{n-1}) \sim X$ ili $P(q_0, ..., q_{n-1}) \sim X$. Na osnovu polaznih pretpostavki moguće je samo da $P(q_0, ..., q_{n-1}) \sim X$.

(c) Neka je $ar(f) = n$ i $p_0, ..., p_{n-1} \in Const_M$. Pošto važi formula:

$$(\forall x_0, ..., x_{n-1})(\exists y) \ y = f(x_0, ..., x_{n-1}) \quad \sim \quad X,$$

i važi (C5) slijedi da $(\exists y) \ y = f(p_0, ..., p_{n-1}) \sim X$. Dalje, kako važi (C6) to slijedi da postoji $r \in Const_M \setminus Const_L$, tako da $r = f(p_0, ..., p_{n-1}) \sim X$.

Q.E.D.

Teorema 3.2.2. TEOREMA O EGZISTENCIJI MODELA. Za svaku konzistentnu granu X tabloa T koja zadovoljava uslove (C1)–(C7) iz prethodne teoreme, postoji model $\mathfrak{A}$, takav da $\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} X$.

DOKAZ. Definišimo model $\mathfrak{A} = \langle A, \mathsf{R}, \mathsf{F}, \mathsf{C} \rangle$, tako što će mo definisati prvo relaciju $\sim_X \subset Const_M^2$ slijedećom formulom $(p, q \in Const_M)$:

$$p \sim_X q \quad \text{akko} \quad (p = q) \sim X.$$

Relacija $\sim_X$ je relacija ekvivalencije, što neposredno slijedi iz definicije skupa Φ'. Domen modela $\mathfrak{A}$ definišemo tada formulom:

$$A = Const_{M/\sim_X}.$$

Za svaki relacijski simbol $P \in Rel_M$, takav da $ar(P) = n$, njegovu interpretaciju P^A definišemo formulom $(p_{0/\sim_X}, ..., p_{n_1/\sim_X} \in A)$:

$$P^A(p_{0/\sim_X}, ..., p_{n_1/\sim_X}) \quad \text{akko}$$

$$(\exists q_0 \in p_{0/\sim_X})...(\exists q_{n-1} \in p_{n-1/\sim_X}) \ P(q_0, ..., q_{n-1}) \sim X.$$

Za svaki funkcijski simbol $f \in Fun_M$, takav da $ar(f) = n$, njegovu interpretaciju f^A definišemo formulom $(p_{0/\sim_X}, ..., p_{n_1/\sim_X}, r_{/\sim_X} \in A)$:

$$r_{/\sim_X} = f^A(p_{0/\sim_X}, ..., p_{n-1/\sim_X}) \quad \text{akko}$$

$$(\exists q_0 \in p_{0/\sim_X})...(\exists q_{n-1} \in p_{n-1/\sim_X})(\exists t \in r_{/\sim_X}) \ t = f(q_0, ..., q_{n-1}) \sim X.$$

Interpretacije konstanti $p \in Const_M$ definišemo kao $p^A = p_{/\sim_X}$.

Definišemo li dalje $\mathsf{R} = \{P^A \,|\, P \in Rel_M\}$, $\mathsf{F} = \{f^A \,|\, f \in Fun_M\}$ i $\mathsf{C} = \{p^A \,|\, p \in Const_M\}$, model $\mathfrak{A}$ je definisan. Dokažimo dalje da $\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} X$.

Indukcijom po složenosti formula $\varphi \sim X$, dokažimo da $\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} X$. (Podsjetimo se da obilježimo li sa $\xi = |M| + \alpha + \beta$, za svaku formulu beskonačne logike $M_{\alpha\beta}$ važi da je njena kompleksnost manja od ξ. Kako razmatramo logike $M_{\alpha\beta}$, takve da $\alpha > \beta$, tada je $\xi = |M| + \alpha$. U slučaju kada je kardinal α regularna, važi $|M| = \alpha$, pa u tom slučaju $\xi = \alpha$.)

(1) INDUKTIVNI POČETAK, $\iota = 0$. Za sve $\varphi \sim X$ i $\varphi \in At_{L_{\alpha\beta}}$ na osnovu definicije $\mathfrak{A}$ imamo da $\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} \varphi$. Primjetimo takodje da ako $\neg\varphi \sim X$ i $\varphi \in At_{L_{\alpha\beta}}$, tada na osnovu (C0) slijedi da $\varphi \not\sim X$, pa $\mathfrak{A} \not\models_{M_{\alpha\beta}} \varphi$, odnosno $\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} \neg\varphi$

(2) INDUKTIVNA HIPOTEZA. Neka za ordinal $\gamma < \xi$ važi formula:

$$(\forall \varphi \sim X) \ \ (co_{M_{\alpha\beta}}(\varphi) < \gamma \ \rightarrow \ \mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} \varphi).$$

(3) INDUKTIVNI KORAK. Dokažimo da za ordinal γ iz INDUKTIVNE HIPOTEZE važi formula:

$$(\forall \varphi \sim X) \ \ (co_{M_{\alpha\beta}}(\varphi) \leq \gamma \ \rightarrow \ \mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} \varphi).$$

Za formule $\varphi \sim X$ za koje $co_{M_{\alpha\beta}}(\varphi) < \gamma$ tvrdjenje teoreme slijedi direktno iz INDUKTIVNE HIPOTEZE. Primjetimo da ako je ordinal γ granični, tvrdjenje je trivijalno ispunjeno, jer na osnovu definicije kompleksnoti formule $co_{M_{\alpha\beta}}$, ***Definicija 1.3.4***, ne postoji formula φ beskonačne logike $M_{\alpha\beta}$, takva da je $co_{M_{\alpha\beta}}(\varphi)$ granični ordinal. Ostaje da dokažemo INDUKTIVNI KORAK u slučaju kada je ordinal γ slijedbenik, odnosno postoji ordinal ι, takav da $\gamma = \iota + 1$.

Neka je $\varphi \in X$ i $co_{M_{\alpha\beta}}(\varphi) = \gamma = \iota + 1$. Tada su mogući slijedeći slučajevi:

(3.1) Ako je $\varphi = \neg\psi$. U slučaju kada je $\psi \in At_{M_{\alpha\beta}}$ ili $\psi = \neg\xi$, za neku formulu $\theta \in For_{L_{\alpha\beta}}$ dokaz je isti kao u tački (3.1) ***Teoreme 3.1.3***. Preostali su još slučaji kada je $\psi = \bigwedge_{\sigma<\gamma} \psi_\sigma$, $\psi = \bigvee_{\sigma<\gamma} \psi_\sigma$, $\psi = (\exists X)\theta$ ili $\psi = (\forall X)\theta$, tada slično kao i u tački (3.1) ***Teoreme 3.1.3*** važi $co_{M_{\alpha\beta}}(\neg\psi) \geq co_{M_{\alpha\beta}}(\psi\neg)$ pa su dokazi isti kao u slučajevima (3.3), (3.4), (3.5) i (3.6).

(3.2) , (3.3), (3.4) U slučajevima kada je $\varphi = \psi \rightarrow \theta$ ili $\varphi = \bigwedge_{\sigma<\gamma} \psi_\sigma$ ili $\varphi = \bigvee_{\sigma<\gamma} \psi_\sigma$, tada je dokaz isti kao u ***Teoremi 3.1.3*** tače (3.2), (3.3) i (3.4).

(3.5) Ako je $\varphi = (\forall X)\psi[X]$, tada na osnovu ***Teoreme 3.2.1.*** važi da za svako $T : X \rightarrow Const_M$ važi $\psi[X_{|T}] \sim X$. S druge strane kako je $co_{M_{\alpha\beta}}(\varphi) > co_{M_{\alpha\beta}}(\psi[X_{|T}])$, to na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE slijedi da $\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} \psi[X_{|T}]$. Odavde neposredno zaklјucujemo na osnovu definicije relacije zadovoljenja da važi formula:

$$\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} (\forall X)\psi[X].$$

(3.6) Ako je $\varphi = (\exists X)\psi[X]$, tada na osnovu ***Teoreme 3.2.1.*** važi da postoji $T : X \rightarrow Const_M$ tako da važi $\psi[X_{|T}] \sim X$. Kako je $co_{M_{\alpha\beta}}(\varphi) > co_{M_{\alpha\beta}}(\psi[X_{|T}])$, to na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE slijedi da $\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} \psi[X_{|T}]$. Odavde neposredno zaklјucujemo na osnovu definicije relacije zadovoljenja da važi formula:

$$\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} (\exists X)\psi[X].$$

Q.E.D.

Posljedica 3.2.1. Za svaku konzistentnu granu $X \in \mathbf{CM}^{\Phi}$ kompletnog tabloa $\mathbf{T}^{\Phi}$ postoji model $\mathfrak{A}$.

Definicija 3.2.3. Za niz formula Φ beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$ i formulu φ beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$ kažemo da je formula φ *semantička posljedica* teorije Φ ako za svaki model $\mathfrak{A}$ važi formula:

$$\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \Phi \ \rightarrow \ \mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi.$$

Teorema 3.2.3. TEOREMA KOMPLETNOSTI. Za svaku teoriju Φ i formulu φ beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$ važi formula:

$$\Phi \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi \ \rightarrow \ \Phi \vdash^{T}_{L_{\alpha\beta}} \varphi,$$

odnosno formula φ je tablo izvodljiva u teoriji Φ beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$, ako je formula φ semantička poslijedica teorije Φ.

DOKAZ. Pretpostavimo da $\Phi \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi$ i da $\Phi \nvdash^{T}_{L_{\alpha\beta}} \varphi$. U tom slučaju postoji konzistentna maksimalna grana $X \in \mathsf{CM}^{\Phi\cup\{\neg\varphi\}}$. Na osnovu ***Posljedice 3.2.1***, tada postoji model $\mathfrak{A}$ grane X, t.j. $\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} X$. Pošto $X \in \mathsf{CM}^{\Phi\cup\{\neg\varphi\}}$, jasno je da $\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} \Phi$ i $\mathfrak{A} \models_{M_{\alpha\beta}} \neg\varphi$. Pošto se konstante iz skupa $Const_M \setminus Const_L$ ne javljaju u formulama teorije Φ i u formuli φ, tada važi $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \Phi$ i $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \neg\varphi$. Kako važi $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \Phi$ i iz pretpostavke da je formula φ semantička poslijedica terorije Φ izvodimo da $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \varphi$, što je u kontradikciji sa $\mathfrak{A} \models_{L_{\alpha\beta}} \neg\varphi$.

Glava 4

Kompaktnost

U ovoj glavi predmet razmatranja je problem slabe kompaktnosti iskaznih računa P_α. Za beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$ dokazi su ostavljeni u obliku uputstva. Iskazni račun P_α je (κ,λ)-iskazno kompaktan ako svaki skup formula Γ kardinalnosti κ ima model akko svaki njegov podskup kardinalnosti manje od λ ima model. Za kardinal α kažemo da je slabo iskazno kompaktan ako je iskazni račun P_α (α,α)-iskazno kompaktan. Uvodimo takodje i svojstvo drveta koje je esiencijalno za glavne teoreme ove glave. Kardinal α ima svojstvo drveta, ako svako stablo T kardinalnosti α, čiji je svaki nivo kardinalnosti manje od α ima granu dužine α.
Dvije teoreme su ključne u ovoj glavi. ***Teorema 4.1.1.*** tvrdi da ako je kardinal α regularan, tada ako α ima svojstvo drveta, onda je i α slabo iskazno kompaktan. Skica dokaza ove teoreme bi bila sledeća. Posmatramo niz formula Φ takva da je $|\Phi| = \alpha$ i pretpostavimo da svaki njegov podskup kardinalnosti manje od α ima model. Da bi dokazali tvrdjenje teoreme uvodimo operaciju *iterirane konzistentne konkatenacije.* Ta operacija nam od kompletnih tabloa za svaku pojedinačnu formulu iz Φ daje tablo $\mathfrak{T}$, takav da je njegova kardinalnost α i kardinalnost svakog njegovog nivoa je manja od α. Pošto po pretpostavci kardinal α ima svojstvo drveta tablo $\mathfrak{T}$ ima i granu X dužine α, tj. $|X| = \alpha$. Na osnovu svojstava iterirane konkatenacije lako se pokazuje da je ova grana konzistentna i da sadrži svaku od formula iz niza Φ. Na osnovu TEOREME O EGZISTENCIJI MODELA ova grana generiše model $\mathfrak{p}$ koja je model za sve formule grane X, pa je time $\mathfrak{p}$ model niza Φ.
Druga teoreme je ***Teorema 4.1.2.*** i ona tvrdi da ako je kardinal α jako nedostižan, tada ako je kardinal α iskazno slabo kompaktan, onda kardinal α ima svojstvo drveta. Dokaz ove teoreme polazi od stabla $\mathsf{T} = \langle T, <_\mathsf{T}\rangle$, koje je kardinalnosti α i svaki nivo je kardinslnosti manje od α. Neka je funkcija $q : T \to Var_{P_\alpha}$ bijekcija. Uočimo skup Γ formula iskaznog računa P_α:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{\bigvee_{x\in\mathsf{T}(0)} q_x\} \cup \\ &\quad \{\bigwedge_{x\in X} q_x \to \bigvee_{y\in \mathsf{Y}_\mathsf{T}(X)} q_y \mid X \in \mathsf{X}_\mathsf{T} \wedge |X| < \alpha \wedge \mathsf{Y}_\mathsf{T}(X) \neq \emptyset\} \cup \\ &\quad \{\neg \bigwedge_{x\in X} q_x \mid X \in \mathsf{M}_\mathsf{T} \wedge |X| < \alpha\}.\end{aligned}$$

Dokazujemo na osnovu slabe kompaktonsti kardinala α da postoji model $\mathfrak{p}$ skupa formula Γ. Iz definicije skupa Γ slijedi da model $\mathfrak{p}$ je takav da postoji grana X stabla T, takva da je $|X| = \alpha$ i $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} q_x$, za $x \in X$. Dakle postoji grana stabla T dužine α, pa važi svojstvo drveta za kardinal α. Napomenimo da su prve rezultate o slaboj kompaktnosti kardinala nalaze u radovima *H.J. Keisler*-a, *A. Tarski*-og, *W. P. Hanf*-a, *D. S. Scott*-a i *J. H. Silver*-a.

4.1 Kompaktnost iskaznih računa P_α

Definicija 4.1.1. Za iskazni račun P_α kažemo da je (κ, λ) – ***iskazno kompaktan*** ako skup formula Γ, kardinalnosti $|\Gamma| = \kappa$ ima model akko svaki podskup skupa Γ kardinalnosti manje od λ ima model.

Primjer 4.1.1. Posmatrajmo iskazni račun P_{α^+}. Neka je funkcija $Q : \alpha \times \{T, F\} \to Var_{P_{\alpha^+}}$ bijekcija, ovakva funkcija uvjek postoji budući da $|\alpha \times \{T, F\}| = \alpha$ i $|Var_{P_{\alpha^+}}| = \alpha^+$. Posmatrajmo tada skup formula:

$$\Gamma = \{\bigwedge_{\iota<\alpha} (Q_{\iota,T} \vee Q_{\iota,F})\} \cup \{\neg \bigwedge_{\iota<\alpha} Q_{\iota,f(\iota)} \mid f \in {}^\alpha\{T, F\}\}.$$

Neka skup Γ ima model $\mathfrak{p}$. Tada postoji funkcija $f : \alpha \to \{T, F\}$, takva da $\mathfrak{p} \models_{P_{\alpha^+}} Q_{\iota,f(\iota)}$, za svako $\iota < \alpha$. Iz svojstva relacije zadovoljenja, tada slijedi da $\mathfrak{p} \models_{P_{\alpha^+}} \bigwedge_{\iota<\alpha} Q_{\iota,f(\iota)}$. Odavde zaključujemo da skup formula Γ nema modela, dok svaki pravi podskup skupa Γ ima model.

Iz navedenog primjera zaključujemo da iskazni račun P_{α^+} nije $(2^\alpha, 2^\alpha)$ - iskazno kompaktan. Prirodno pitanje koje se postavlja jeste da li uopšte postoje iskazno kompaktni iskazni računi. Da bi odgovorili na to pitanje uvedimo slijedećih nekoliko definicija.

Definicija 4.1.2. Kardinal α je ***iskazno slabo kompaktan*** ako za iskazni račun P_α važi da je (α, α) – iskazno kompaktan.

Definicija 4.1.3. Kardinal α ima ***svojstvo drveta*** ako za svako stablo $\mathbf{T} = \langle T, <_\mathbf{T} \rangle$ za koje važe uslovi:

(S1) $|T| = \alpha$,

(S2) svaki nivo stabla $\mathbf{T}$ je kardinalnosti manje od α, tj.

$$(\forall \iota < \mathbf{h}(\mathbf{T}))\ |\mathbf{T}(\iota)| < \alpha,$$

tada postoji grana stabla $\mathbf{T}$ dužine α.

Definicija 4.1.4. Neka su $\mathbf{T}_1 = \langle T_1, <_{\mathbf{T}_1} \rangle$ i $\mathbf{T}_2 = \langle T_2, <_{\mathbf{T}_2} \rangle$ dva tabloa. Definišimo tada operaciju $\otimes$, koju nazivamo ***konzistentnom konkatenacijom*** stabla $\mathbf{T}_2$ na stablo $\mathbf{T}_1$, tako da je stablo $\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2 = \langle T, <_\mathbf{T} \rangle$ dobijamo konkatenacijom stabla $\mathbf{T}_2$ na svaku maksimalno konzistentnu granu stabla $\mathbf{T}_1$ Konkatenaciju vršimo tako da svakoj dodatoj tački dodjeljujemo jedinstven ordinal. Obilježimo li sa:

$$\sigma_1 = \bigcup_{\langle\sigma,\varphi\rangle \in T_1} (\sigma + 1) \quad \text{i} \quad \sigma_2 = \bigcup_{\langle\sigma,\varphi\rangle \in T_2} (\sigma + 1),$$

(prvi ordinali veći od onih koji se javljaju u tačkama tabloa $\mathbf{T}_1$ i $\mathbf{T}_2$), tada skup T i relacija $<_\mathbf{T}$ moraju da zadovoljavaju slijedeće uslove:

(1) $T = T_1 \cup \{ \langle \sigma_1 \overset{*}{+} \sigma_2 \overset{*}{\cdot} \xi \overset{*}{+} \iota, \varphi \rangle \mid \xi \in |\mathbf{CM}_{\mathbf{T}_1}| \wedge \langle \iota, \varphi \rangle \in T_2 \}.$

(2) Podsjećajući da niz $\langle X_{\mathsf{T}_1,\xi}\rangle_{\xi\in|\mathbf{CM}_{\mathsf{T}_1}|}$ predstavlja niz konzistentnih grana tabloa T_1, relacija $<_{\mathsf{T}}$ zadovoljava formulu:

$$\begin{aligned} <_{\mathsf{T}} \; = <_{\mathsf{T}_1} \quad & \cup \{ \langle x, \langle \sigma_1 \stackrel{*}{+} \sigma_2 \stackrel{*}{\cdot} \xi \stackrel{*}{+} \iota, \varphi \rangle \rangle \mid \\ & \qquad \xi \in |\mathbf{CM}_{\mathsf{T}_1}| \wedge x \in X_{\mathsf{T}_1,\xi} \wedge \langle \iota, \varphi \rangle \in T_2 \} \\ & \cup \{ \langle \langle \sigma_1 \stackrel{*}{+} \sigma_2 \stackrel{*}{\cdot} \xi \stackrel{*}{+} \iota, \varphi \rangle, \langle \sigma_1 \stackrel{*}{+} \sigma_2 \stackrel{*}{\cdot} \xi \stackrel{*}{+} \tau, \psi \rangle \rangle \mid \\ & \qquad \xi \in |\mathbf{CM}_{\mathsf{T}_1}| \wedge \langle \iota, \varphi \rangle \in T_2 \wedge \langle \tau, \psi \rangle \}. \end{aligned}$$

Operaciju konzistentnog konkateniranja možemo i iterirati, tako da ako imamo niz tabloa $\langle \mathsf{T}_\iota \rangle_{\iota<\gamma}$ *iteriranu konkatenaciju* $\bigotimes_{\iota<\gamma} \mathsf{T}_\iota$ definišemo induktivno pomoću niza tabloa $\mathfrak{T}_\iota = \langle \mathbf{T}_\iota, <_{\mathfrak{T}_\iota} \rangle$, $\iota \leq \gamma$ na osnovu slijedeće formula:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_\emptyset &= \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \\ \mathfrak{T}_{\iota+1} &= \mathfrak{T}_\iota \otimes \mathsf{T}_\iota, \quad \iota+1 \leq \gamma, \\ \mathfrak{T}_\lambda &= \biguplus_{\iota<\lambda} \mathfrak{T}_\iota, \quad \lambda \leq \gamma, \ Lim(\lambda), \end{aligned}$$

tako da je $\bigotimes_{\iota<\gamma} \mathsf{T}_\iota = \mathfrak{T}_\gamma$.

Lema 4.1.1. Neka je dat niz tabloa $\langle \mathsf{T}_\iota \rangle_{\iota<\gamma}$, tada za iteriranu konkatenaciju $\mathfrak{T} = \bigotimes_{\iota<\gamma} \mathsf{T}_\iota$ definisanu induktivno pomoću niza tabloa $\mathfrak{T}_\iota = \langle \mathbf{T}_\iota, <_{\mathfrak{T}_\iota} \rangle$, kao u prethodnoj definiciji važi formula:

$$(\forall \sigma < \mathbf{h}(\mathfrak{T}))(\exists \iota < \gamma) \ \ \mathfrak{T}[\sigma] = \mathfrak{T}_\iota[\sigma].$$

DOKAZ. Na osnovu definicije iteriranog proizvoda konstruišimo induktivno $\langle \mathbf{H}_\iota \rangle_{\iota<\gamma}$ niz ordinala na osnovu slijedećih formula:

$$\mathbf{H}_\iota = \bigcap_{X \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota}} OT(X).$$

Funkcija OT predstavlja tip uredjenja. Iz definicije funkcija ranga elementa stabla i konstrukcije iterirane konzistentne konkatenacije slijedi za $X \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota}$, vrijednost funkcije $OT(X)$ predstavlja supremum rangova tačaka grane X jer važi niz relacija:

$$OT(X) = \bigcup_{x \in X} (r_{\mathfrak{T}_\iota}(x) + 1) = \bigcup_{x \in X} OT(\{ y \in \mathbf{T} \mid y <_{\mathfrak{T}_\iota} x \}, <_{\mathsf{T}}).$$

Dakle $OT(X)$ predstavlja supremum rangova (+1) tačaka grane X. Najmanji ordinal $OT(X)$, odnosno $\mathbf{H}_\iota$, predstavlja onda najmanji rang stabla $\mathfrak{T}_\iota$ koji će se mjenjati u $\mathfrak{T}_{\iota+1}$, ili svi rangovi manji od $\mathbf{H}_\iota$ neće biti mjenjani u stablu $\mathfrak{T}_{\iota+1}$.

(1) Pretpostavimo da za svako $\iota < \gamma$ važi $\mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota} \neq \emptyset$ i dokazimo da je niz ordinala $\langle \mathbf{H}_\iota \rangle_{\iota<\gamma}$ strogo rastući, odnosno da važi formula:

$$((\forall \iota < \gamma) \ \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota} \neq \emptyset) \ \rightarrow \ ((\forall \iota < \gamma) \ \mathbf{H}_\iota < \mathbf{H}_{\iota+1})$$

Uočimo tada neko $\iota < \gamma$, tada je na osnovu pretpostavke $\mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota} \neq \emptyset$. Pošto je $\mathfrak{T}_{\iota+1} = \mathfrak{T}_\iota \otimes \mathsf{T}_\iota$, tada se na svaku granu $X \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota}$ konkatenira stablo T_ι, pa je $\mathbf{H}_\iota$ strogo manje od tipa uredjenja bilo koje grane nastale konkatenaciom grane X i granama stabla $\mathbf{T}_\iota$. Kako na osnovu pretpostavke važi $\mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_{\iota+1}} \neq \emptyset$, grane $Y \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_{\iota+1}}$, su nastale konkatenaciom neke grane $X \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota}$ i neke grane stabla $\mathbf{T}_\iota$, pa na osnovu već rečenog $\mathbf{H}_\iota < OT(Y)$. Dakle iz svega rečenog možemo sumirati da važi formula:

$$(\forall Y \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_{\iota+1}})\ \mathbf{H}_\iota < OT(Y).$$

Kako svaki skup ordinala dobro uredjen, pa postoji njegov minimalni element, to i za skup ordinala $\{OT(Y) \mid Y \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_{\iota+1}}\}$, postoji minimalan element, odnosno grana Z takva da je ordinal $OT(Z)$ minimalni element navedenog skupa ordinala. Tada važi i slijedeći niz relacija:

$$\mathbf{H}_\iota < OT(Z) = \bigcap_{Y \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_{\iota+1}}} OT(Y) = \mathbf{H}_{\iota+1}.$$

Dakle dokazali smo da je niz $\langle \mathbf{H}_\iota \rangle_{\iota<\gamma}$ strogo rastući. Dokažimo induktivno po $\iota < \gamma$ da važi $\iota \leq \mathbf{H}_\iota$.

(1.1) INDUKTIVNI POČETAK, $\iota = \emptyset$. Na osnovu definicije $\mathfrak{T}_\emptyset$ važi slijedeći formula:

$$\emptyset \leq \mathbf{H}_\emptyset.$$

(1.2) INDUKTIVNA HIPOTEZA. Neka za ordinal $\tau < \alpha$ važi formula:

$$(\forall \iota < \tau)\ \iota \leq \mathbf{H}_\iota.$$

(1.3) INDUKTIVNI KORAK. Dokažimo na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE za ordinal $\tau < \alpha$ važi $\tau \leq \mathbf{H}_\tau$.

(1.3.1) Ako je ordinal τ, ordinal slijedbenek t.j. postoji ordinal ξ takav da $\tau = \xi + 1$. Tada na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važi slijedeći niz relacija:

$$\tau = \xi + 1 \leq \mathbf{H}_\xi + 1 \leq \mathbf{H}_{\xi+1} = \mathbf{H}_\tau.$$

(1.3.2) Ako je ordinal τ, granični ordinal, tada na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važi slijedeći niz relacija:

$$\tau = \bigcup_{\iota<\tau} \iota \leq \bigcup_{\iota<\tau} \mathbf{H}_\iota \leq \mathbf{H}_\tau.$$

Odavde i neposredno slijedi da važi formula:

$$(\forall \iota < \gamma)\ \iota < \mathbf{H}_{\iota+1}.$$

Dokazimo dalje indukciom po $\sigma < \mathbf{h}(\mathfrak{T})$ glavno tvrdjenje leme.

(1.1) INDUKTIVNI POČETAK, $\sigma = \emptyset$. Na osnovu definicije $\mathfrak{T}_1$ važi formula:

$$\mathfrak{T}[\emptyset] = \mathfrak{T}_1[\emptyset].$$

(1.2) INDUKTIVNA HIPOTEZA. Neka za ordinal $\sigma < \mathbf{h}(\mathfrak{T})$ važi formula:

$$(\forall \tau < \sigma)(\exists \iota < \gamma)\ \mathfrak{T}[\tau] = \mathfrak{T}_\iota[\tau].$$

(1.3) INDUKTIVNI KORAK. Dokažimo na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE za ordinal $\sigma < \mathfrak{h}(\mathfrak{T})$ važi $(\exists \iota < \gamma)\ \mathfrak{T}[\sigma] = \mathfrak{T}_\iota[\sigma]$. Definišimo ordinal β slijedećom formulom:

$$\beta = \bigcup_{\tau<\sigma} \bigcap_{\iota<\gamma} \{\iota \,|\, \tau < \mathsf{H}_\iota\}.$$

Za bilo koji nivo $\tau < \sigma$ stabla $\mathfrak{T}$ ordinal $\xi = \bigcap_{\iota<\gamma}\{\iota \,|\, \tau < \mathsf{H}_\iota\}$ predstavlja najmanji ordinal takav da $\mathfrak{T}[\tau] = \mathfrak{T}_\xi[\tau]$. Unija ovakvih ordinala po nivoima $\tau < \sigma$ predstavlja ordinal takav da važi formula:

$$(\forall \tau < \sigma)\ \ \mathfrak{T}[\tau] = \mathfrak{T}_\beta[\tau].$$

Na osnovu definicije niza ordinala $\langle \mathsf{H}_\iota \rangle_{\iota<\gamma}$ i prethodnog zaključujemo da važi formula:

$$(\forall \tau < \sigma)\ \ \tau < \mathsf{H}_\beta.$$

(1.3.1) Ako je ordinal σ, ordinal slijedbenik tj. postoji ordinal ξ takav da $\sigma = \xi + 1$. Tada budući da $\xi < \sigma$ važi $\xi < \mathsf{H}_\beta$, pa na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važi slijedeći niz relacija:

$$\sigma = \xi + 1 \leq \mathsf{H}_\beta < \mathsf{H}_{\beta+1}.$$

(1.3.2) Ako je ordinal σ, granični ordinal, tada na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važ slijedeći niz relacija:

$$\sigma = \bigcup_{\tau<\sigma} \tau \leq \mathsf{H}_\beta < \mathsf{H}_{\beta+1}.$$

U oba slučaja dakle važi $\sigma < \mathsf{H}_{\beta+1}$, pa na osnovu već dokazanog slijedi da je $\mathfrak{T}[\sigma] = \mathfrak{T}_{\beta+1}[\sigma]$, čime je dokazan INDUKTIVNI KORAK.

(2) Pretpostavimo li da postoji $\iota < \gamma$ tako da važi $\mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota} = \emptyset$, tada na osnovu definicije konzistentne konkatenacije slijedi da je $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\iota$, pa je tvrdjenje leme trivijalno ispunjeno.

Q.E.D.

Lema 4.1.2. Neka su Φ i Φ_1 nizovi formula bez ponavljanja, takvi da $Range(\Phi_1) \subset Range(\Phi)$, tada važi formula:

$$(\forall X \in \mathbf{CM}^{\Phi})(\exists Y \in \mathbf{CM}^{\Phi_1})\ \ Y \simeq X,$$

DOKAZ. Neka je grana $X \in \mathbf{CM}^{\Phi}$ maksimalna konzistentna grana tabloa T^{Φ}. Konstruišimo niz grana $\langle Y_\iota \rangle_{\iota \leq g^{\Phi_1}(\omega)}$, tako da važi slijedeća formula:

$$(\forall \iota \leq g^{\Phi_1}(\omega))\ \ (Y_\iota \in \mathbf{CM}^{\Phi_1}_\iota \wedge Y_\iota \simeq X),$$

gdje je funkcija g^{Φ_1} defisana kao u ***Definiciji 2.1.8.*** za tablo T^{Φ_1}.

Konstrukciju izvedimo indukcijom, po koracima konstrukcije kompletnog tabloa T^{Φ_1}. Definišimo pomenute nizove grana induktivno na osnovu slijedećih formula, (za

$\iota, \lambda \leq g^{\Phi_1}(\omega)$):

$$Y_\emptyset = \Phi_1,$$

$$Y_{\iota+1} = \begin{cases} Z & : \langle \iota, \varphi \rangle \in Y_\iota \wedge Z \in \mathbf{CM}^{\Phi_1}_{\iota+1} \\ & \quad \wedge\, Y_\iota \subset Z \wedge Z \simeq X, \\ Y_\iota & : \text{inače,} \end{cases}$$

$$Y_\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} Y_\iota, \qquad Lim(\lambda).$$

Indukcijom po $\iota \leq g^{\Phi_1}(\omega)$ dokažimo da važi formula

$$(\forall \iota \leq g^{\Phi_1}(\omega))\ Y_\iota \in \mathbf{CM}^{\Phi_1}_\iota \wedge Y_\iota \simeq X.$$

(1) INDUKTIVNI POČETAK, $\iota = \emptyset$. Na osnovu definicije niza tabloa $\mathsf{T}^{\Phi_1}_\iota$ imamo da je $T^{\Phi_1}_\emptyset = \Phi_1$ i $\mathbf{CM}^{\Phi_1}_\emptyset = \{\Phi_1\}$, pa važi $Y_\emptyset \in \mathbf{CM}^{\Phi_1}_\emptyset$. Na osnovu pretpostavke iz formulacije leme važi da je $Range(\Phi_1) \subset Range(\Phi)$, pa važi slijedeći niz relacija:

$$Range(Y_\emptyset) = Range(\Phi_1) \subset Range(\Phi) \subset Range(X),$$

odnosno $Y_\emptyset \simeq X$.

(2) INDUKTIVNA HIPOTEZA. Neka za ordinal $\gamma \leq g^{\Phi_1}(\omega)$ važi formula:

$$(\forall \iota < \gamma)\ Y_\iota \in \mathbf{CM}^{\Phi_1}_\iota \wedge Y_\iota \simeq X.$$

(3) INDUKTIVNI KORAK. Dokažimo na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE da važi formula:

$$Y_\gamma \in \mathbf{CM}^{\Phi_1}_\gamma \wedge Y_\gamma \simeq X.$$

(3.1) Pretpostavimo da je ordinal γ, ordinal slijedbenik, t.j. da postoji ordinal ι takav da $\gamma = \iota + 1$.
Ako $\langle \iota, \varphi \rangle \notin Y_\iota$, tada na osnovu konstrukcije tabloa važi $Y_\iota \in \mathbf{CM}^{\Phi_1}_{\iota+1}$. Kako je u ovom slučaju $Y_{\iota+1} = Y_\iota$, na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE neposredno važi tvrdjenje INDUKTIVNOG KORAKA.
Ako $\langle \iota, \varphi \rangle \in Y_\iota$, tada $\varphi \sim X$ i $Y_{\iota+1} \in \mathbf{CM}^{\Phi_1}_{\iota+1}$. U zavisnosti kakvog je oblika formula φ, mogući su neki od slijedećih slučajeva:

(3.1.1) Ako je $\varphi = \neg\psi$, tada $\neg\psi \sim X$, pa na osnovu ***Teoreme 3.1.2.*** slijedi da $\psi\neg \sim X$. S druge strane na osnovu konstrukcije niza tabloa, odnosno ***Definicije 2.1.5.*** važi formula:

$$Y_{\iota+1} = Y_\iota \cup \{\langle \xi, \psi\neg \rangle\},$$

za neki ordinal ξ. Kako je $Y_\iota \simeq X$ i $\neg\psi \sim X$, to neposredno iz definicije $Y_{\iota+1}$ slijedi da $Y_{\iota+1} \simeq X$.

(3.1.2) Ako je $\varphi = \psi \to \theta$, tada $\psi \to \theta \sim X$, pa na osnovu ***Teoreme 3.1.2.*** slijedi da $\neg\psi \sim X$ ili $\theta \sim X$. S druge strane na osnovu konstrukcije niza tabloa, odnosno ***Definicije 2.1.5.*** važi jedna od formula:

$$Y_{\iota+1} = Y_\iota \cup \{\langle \xi, \neg\psi \rangle\},$$

$$Y_{\iota+1} = Y_\iota \cup \{\langle \xi + 1, \theta \rangle\},$$

za neki ordinal ξ. Kako je $Y_\iota \simeq X$ i važi jedna od formula: $\neg\psi \sim X$ ili $\theta \sim X$, to neposredno iz definicije $Y_{\iota+1}$ slijedi da $Y_{\iota+1} \simeq X$.

(3.1.3) Ako je $\varphi = \bigwedge_{\sigma\in\gamma}\psi_\sigma$, tada $\bigwedge_{\sigma\in\gamma}\psi_\sigma \sim X$, pa na osnovu ***Teoreme 3.1.2.*** slijedi da $\psi_\sigma \sim X$ za svako $\sigma < \gamma$. S druge strane na osnovu konstrukcije niza tabloa, odnosno ***Definicije 2.1.5.*** važi formula:

$$Y_{\iota+1} = Y_\iota \cup \{\langle \xi + \sigma, \psi_\sigma\rangle \,|\, \sigma < \gamma\},$$

za neki ordinal ξ. Kako je $Y_\iota \simeq X$ i za svako $\sigma < \gamma$ važi $\psi_\sigma \sim X$, to neposredno iz definicije $Y_{\iota+1}$ slijedi da $Y_{\iota+1} \simeq X$.

(3.1.4) Ako je $\varphi = \bigvee_{\sigma\in\gamma}\psi_\sigma$, tada $\bigvee_{\sigma\in\gamma}\psi_\sigma \sim X$, pa na osnovu ***Teoreme 3.1.2.*** slijedi da postoji $\sigma < \gamma$ takvo da $\psi_\sigma \sim X$. S druge strane na osnovu konstrukcije niza tabloa, odnosno ***Definicije 2.1.5.*** važi formula:

$$Y_{\iota+1} = Y_\iota \cup \{\langle \xi + \sigma, \psi_\sigma\rangle\},$$

za neki ordinal ξ. Kako je $Y_\iota \simeq X$ i $\psi_\sigma \sim X$, to neposredno iz definicije $Y_{\iota+1}$ slijedi da $Y_{\iota+1} \simeq X$.

(3.2) Pretpostavimo, dalje da je ordinal γ, granični ordinal. Na osnovu definicije niza Y_ι, važi formula:

$$Y_\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} Y_\iota.$$

Tada, na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važi $Y_\iota \in \mathbf{CM}_\iota^{\Phi_1}$, za svako $\iota < \gamma$, pa na osnovu konstrukcije tabloa, ***Definicije 2.1.5.*** slijedi da $Y_\lambda \in \mathbf{CM}_\lambda^{\Phi_1}$. Takodje na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važi $Y_\iota \sim X$, pa važi slijedeći niz relacija:

$$Range(Y_\gamma) = \bigcup_{\iota<\gamma} Range(Y_\iota) \subset X,$$

odnosno $Y_\gamma \sim X$.

Dakle dokazali smo da niz $\langle Y_\iota\rangle_{\iota\le g^{\Phi_1}(\omega)}$ sa željenim svojstvom postoji. Definišimo granu $Y = Y_{g^{\Phi_1}(\omega)}$ Iz upravo dokazanog svojstava niza Y_ι slijedi da važi formula:

$$Y \in \mathbf{CM}^{\Phi_1} \wedge Y \simeq X,$$

Pošto smo granu uzeli proizvoljnu granu $X \in \mathbf{CM}^\Phi$, tada sve dokazano možemo sumirati u formuli:

$$(\forall X \in \mathbf{CM}^\Phi)(\exists Y \in \mathbf{CM}^{\Phi_1})\ Y \simeq X,$$

Q.E.D.

Lema 4.1.3. Neka su Φ i Φ_ι, $\iota < \gamma \le \alpha$ nizovi formula bez ponavljanja, takvi da $\mathbf{CM}^\Phi \ne \emptyset$ i važi formula:

$$Range(\Phi) = \bigcup_{\iota<\gamma} Range(\Phi_\iota),$$

tada označimo li sa $\mathbf{CM}^{\otimes_{\iota<\gamma}\Phi_\iota}$ skup konzistentnih grana tabloa $\bigotimes_{\iota<\gamma} \mathbf{T}^{\Phi_\iota}$, važi formula:

$$(\forall X \in \mathbf{CM}^\Phi)(\exists Z \in \mathbf{CM}^{\otimes_{\iota<\gamma}\Phi_\iota})\ Z \simeq X.$$

DOKAZ. Neka je $X \in \mathbf{CM}^{\Phi}$ proizvoljna maksimalna konzistentna grana. Na osnovu ***Leme 4.1.2.*** za svako $\iota < \gamma$ postoji maksimalno konzistentna grana tabloa $Y_\iota \in \mathbf{CM}^{\Phi_\iota}$ tako da $Y_\iota \simeq X$ ($Range(Y_\iota) \subset Range(X)$), odnosno važi formula:

$$(\forall X \in \mathbf{CM}^{\Phi})(\forall \iota < \gamma)(\exists Y \in \mathbf{CM}^{\Phi_\iota})\ Y \simeq X.$$

Na osnovu ***Definicije 4.1.4.*** iteriranu konzistentnu konkatenaciju $\bigotimes_{\iota<\gamma} \mathbf{T}^{\Phi_\iota}$ definišemo induktivno pomoću niza tabloa $\mathfrak{T}_\iota = \langle \mathbf{T}_\iota, <_{\mathfrak{T}_\iota} \rangle$, $\iota \leq \gamma$ na osnovu slijedećih formula:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_\emptyset &= \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \\ \mathfrak{T}_{\iota+1} &= \mathfrak{T}_\iota \otimes \mathbf{T}^{\Phi_\iota}, \quad \iota + 1 \leq \gamma, \\ \mathfrak{T}_\lambda &= \biguplus_{\iota<\lambda} \mathfrak{T}_\iota, \quad \lambda \leq \gamma,\ Lim(\lambda), \end{aligned}$$

tako da je $\bigotimes_{\iota<\gamma} \mathbf{T}^{\Phi_\iota} = \mathfrak{T}_\gamma$. Dokažimo prvo da postoji niz grana $Z_\iota \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota}$, $\iota \leq \gamma$, tako da su grane Z_ι nastale konkatenaciom grana Y_σ za $\sigma < \iota$ i da važiformula:

$$(\forall \sigma < \iota)\ Z_\sigma \subset Z_\iota.$$

Dokaz sprovedimo indukcijom po $\iota \leq \gamma$.

(1) INDUKTIVNI POČETAK, $\iota = \emptyset$. Na osnovu definicije $Z_\emptyset = \emptyset$, pa možemo smatrati da je $Z_\emptyset$ nastala konkatenacijom grana Y_σ za $\sigma < \emptyset$. Drugi uslov je trivijalno ispunjen.

(2) INDUKTIVNA HIPOTEZA. Neka za ordinal $\tau < \gamma$ važi da za svako $\iota < \tau$ postoje grane $Z_\iota \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota}$, nastale konkatenacijom grana Y_σ za $\sigma < \iota$ i za svako $\iota < \tau$ važi formula:

$$(\forall \sigma < \iota)\ Z_\sigma \subset Z_\iota.$$

(3) INDUKTIVNI KORAK. Dokažimo na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE važi da za ordinal τ ($< \gamma$) postoji grana $Z_\iota \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota}$, nastala konkatenacijom grana Y_σ za $\sigma < \tau$.

(3.1) Ako je ordinal τ, ordinal slijedbenek t.j. postoji ordinal ξ takav da $\tau = \xi + 1$. Tada na osnovu induktivne hipoteze postoji konzistentna grana $Z_\xi \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\xi}$ nastala konkatenaciom grana Y_σ, za $\sigma < \xi$. Na osnovu definicije tabloa $\mathfrak{T}_{\xi+1}$, slijedi da postoji maksimalna grana $Z_{\xi+1} \in \Gamma_{\mathfrak{T}_{\xi+1}}$ nastala konkatenaciom grana Z_ξ i Y_ξ, odnosno grana Y_σ za $\sigma < \xi + 1$. Konzistentnost grane $Z_{\xi+1}$ neosredno slijedi iz slijedećeg niza relacija:

$$Range(Z_{\xi+1}) = \bigcup_{\iota<\xi+1} Range(Y_\iota) \subset Range(X) \in \mathbf{CM}^{\Phi},$$

odnosno $Z_\tau = Z_{\xi+1} \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_{\xi+1}} = \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\tau}$. Budući da je $Z_{\xi+1}$ nastala konkatenacijom grane Z_ξ i Y_ξ, to $Z_\xi \subset Z_{\xi+1}$, pa na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE neposredno slijedi da važi formula:

$$(\forall \sigma < \tau)\ Z_\sigma \subset Z_\tau.$$

(3.2) Ako je ordinal τ, granični ordinal, tada na osnovu definicije tabloa $\mathfrak{T}_\tau$ važi $Z_\tau = \bigcup_{\iota<\tau} Z_\iota \in \mathbf{M}_{\mathfrak{T}_\xi}$, pa odavde važi slijedeći niz relacija:

$$Range(Z_\tau) \;=\; \bigcup_{\iota<\tau} Range(Y_\iota) \;\subset\; Range(X) \in \mathbf{CM}^\Phi,$$

odnosno $Z_\tau \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\tau}$. Takodje iz relacije $Z_\tau = \bigcup_{\iota<\tau} Z_\iota \in \mathbf{M}_{\mathfrak{T}_\xi}$, i INDUKTIVNE HIPOTEZE neposredno zaključujemo da važi formula:

$$(\forall\sigma<\tau)\;\; Z_\sigma \subset Z_\tau .$$

Definišemo li granu $Z = Z_\gamma$, iz dokazanog slijedi da grana $Z \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\gamma} = \mathbf{CM}^{\otimes_{\iota<\gamma}\Phi_\iota}$ i da važi slijedeći niz relacija:

$$Range(Z) \;=\; Range(Z_\gamma) \;=\; \bigcup_{\iota<\gamma} Range(Y_\iota) \;\subset\; Range(X),$$

odnosno $Z \simeq X$, pa važi formula

$$Z \in \mathbf{CM}^{\otimes_{\iota<\gamma}\Phi_\iota} \wedge Z \simeq X.$$

Pošto smo uzeli proizvoljnu granu $X \in \mathbf{CM}^\Phi$, tada sve dokazano možemo sumirati u formuli:

$$(\forall X \in \mathbf{CM}^\Phi)(\exists Z \in \mathbf{CM}^{\otimes_{\iota<\gamma}\Phi_\iota})\;\; Z \simeq X.$$

Q.E.D.

Posljedica 4.1.1. Neka su Φ i Φ_ι, $\iota<\gamma\le\alpha$ nizovi formula bez ponavljanja, takvi da $\mathbf{CM}^\Phi \neq \emptyset$ i važi formula:

$$Range(\Phi) = \bigcup_{\iota<\gamma} Range(\Phi_\iota),$$

tada označimo li sa $\mathbf{CM}^{\otimes_{\iota<\gamma}\Phi_\iota}$ skup konzistentnih grana stabla $\bigotimes_{\iota<\gamma} \mathbf{T}^{\Phi_\iota}$, važi formula:

$$\mathbf{CM}^\Phi \neq \emptyset \;\to\; \mathbf{CM}^{\otimes_{\iota<\gamma}\Phi_\iota} \neq \emptyset.$$

Q.E.D.

Teorema 4.1.1. Neka je α regularan kardinal. Ako kardinal α ima svojstvo drveta, tada je kardinal α iskazno slabo kompaktan.

DOKAZ. Neka kardinal α ima svojstvo drveta, dokažimo dalje da je kardinal α iskazno slabo kompaktan, odnosno da je iskazni račun $P_\alpha\;(\alpha,\alpha)$ iskazno kompaktan.

Neka je Γ skup formula kardinalnosti α, i neka svaki njegov podskup kardinalnosti manje od α ima model, dokažimo tada da Γ ima model.

Označimo sa $\Phi = \langle\varphi_\iota\rangle_{\iota<\alpha}$ niz formula bez ponavljanja takav da $Range(\Phi) = \Gamma$, uvedimo i oznaku $\Phi_\iota = \Phi_{\downarrow\iota}$, za $\iota < \alpha$. Na osnovu prethodne pretpostavke jasno je da svako Φ_ι ima model. Posmatrajmo dalje iteriranu konzistentnu konkatenaciju

$\mathfrak{T} = \bigotimes_{\iota<\gamma} \mathsf{T}^{\langle\varphi_\iota\rangle}$ definisanu induktivno, na osnovu ***Definicije 4.1.4.*** pomoću niza tabloa $\mathfrak{T}_\iota = \langle \mathbf{T}_\iota, <_{\mathfrak{T}_\iota}\rangle$, $\iota \le \alpha$ na osnovu slijedećih formula:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_\emptyset &= \langle\emptyset,\emptyset\rangle,\\ \mathfrak{T}_{\iota+1} &= \mathfrak{T}_\iota \otimes \mathsf{T}^{\langle\varphi_\iota\rangle}, \quad \iota<\alpha,\\ \mathfrak{T}_\gamma &= \biguplus_{\iota<\gamma}\mathfrak{T}_\iota, \quad \gamma\le\alpha,\ Lim(\gamma).\end{aligned}$$

Pošto svako Φ_ι, $\iota < \gamma$ ima model, tada iz ***Posljedice 3.1.6.*** slijedi da je $\mathsf{CM}^{\Phi_\iota} \neq \emptyset$, $\iota < \gamma$. Iz ***Posljedice 4.1.1.*** dalje slijedi da važi $\mathsf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota} \neq \emptyset$, za svako $\iota < \gamma$. Dakle za svako $\iota < \gamma$ tablo $\mathfrak{T}_\iota$ ima konzistentnih grana, pa se na svakom tablou $\mathfrak{T}_\iota$ konzistentno konkatenira tablo $\mathsf{T}^{\langle\varphi_\iota\rangle}$, odnosno važi formula:

$$(\forall\iota<\alpha)\ \ \mathbf{T}_\iota \subset \mathbf{T}_{\iota+1} \ \wedge\ (\mathbf{T}_{\iota+1}\setminus\mathbf{T}_\iota)\neq\emptyset.$$

Procjenimo dalje kardinalnost skupova $\mathbf{T}_\iota$, za $\iota \le \alpha$. Dokažimo indukciom po ordinalima $\iota < \alpha$, da važi $|\mathbf{T}_\iota| < \alpha$. Primjetimo prvo da za tabloe $\mathsf{T}^{\langle\varphi_\iota\rangle} = \langle T_\iota, <_{\mathsf{T}_\iota}\rangle$, na osnovu ***Teoreme 2.1.2.***, budući da $|\langle\varphi_\iota\rangle| = 1 < \alpha$ važi $|T_\iota| < \alpha$.

(1) INDUKTIVNI POČETAK, $\iota = \emptyset$. Na osnovu definicije $\mathfrak{T}_\emptyset$ važi slijedeći niz relacija:

$$|\mathbf{T}_\emptyset| = \emptyset < \alpha.$$

(2) INDUKTIVNA HIPOTEZA. Neka za ordinal $\tau < \alpha$ važi formula:

$$(\forall\iota<\tau)\ \ |\mathbf{T}_\iota|<\alpha.$$

(3) INDUKTIVNI KORAK. Dokažimo na osnovu INDUKTIVNE HIPOTEZE za ordinal τ $(<\alpha)$ važi $|\mathbf{T}_\tau| < \alpha$.

(3.1) Ako je ordinal τ, ordinal slijedbenek t.j. postoji ordinal ξ takav da $\tau = \xi+1$. Tada na osnovu definicije niza $\mathfrak{T}_\iota$ i induktivne hipoteze važi slijedeći niz relacija:

$$|\mathbf{T}_{\xi+1}| \ \le\ |\mathbf{T}_\xi|\cdot|T_\xi| \ =\ \max(|\mathbf{T}_\xi|,|T_\xi|) \ <\ \alpha.$$

(3.2) Ako je ordinal τ, granični ordinal, tada na osnovu definicije tabloa $\mathfrak{T}_\tau$, pretpostavke da je kardinal α regularan i INDUKTIVNE HIPOTEZE, važi slijedeći niz relacija:

$$|\mathbf{T}_\tau| \ =\ |\bigcup_{\iota<\tau}\mathbf{T}_\iota| \ \le\ \bigcup_{\iota<\tau}|\mathbf{T}_\iota| \ <\ \alpha.$$

Na osnovu regularnosti kardinala α i upravo dokazanog važi formula:

$$|\mathbf{T}_\alpha| \ =\ |\bigcup_{\iota<\alpha}\mathbf{T}_\iota| \ =\ \sum_{\iota<\alpha}|\mathbf{T}_{\iota+1}\setminus\mathbf{T}_\iota| \ =\ \alpha.$$

Dakle kardinalnost stabla $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\alpha$ je α. Kako za svako $\iota < \alpha$, važi $|\mathbf{T}_\iota| < \alpha$, i na osnovu ***Leme 4.1.1.*** za svako $(\sigma+1) \le \mathbf{h}(\mathfrak{T})$ postoji $\iota < \alpha$ tako da $\mathfrak{T}[\sigma+1] = \mathfrak{T}_\iota[\sigma+1]$, pa važi slijedeći niz relacija:

$$|\mathfrak{T}(\sigma)| \ \le\ |\mathfrak{T}[\sigma]| \ =\ |\mathfrak{T}_\iota[\sigma+1]| \ \le\ |\mathbf{T}_\iota| \ <\ \alpha,$$

odnosno važi formula:

$$(\forall \sigma < \mathfrak{h}(\mathfrak{T}))\ \ |\mathfrak{T}(\sigma)| < \alpha.$$

Pošto je kardinalnost stabla $\mathfrak{T}$ jednaka α i svaki nivo stabla $\mathfrak{T}$ je kardinalnosti manje od α, zaključujemo na osnovu svojstvo stabla kardinala α, odnosno postoji grana X dužine α, tj. $|X| = \alpha$. Ako bi grana X bila nekonzistentna, tada bi na osnovu njene konstrukcije, postojao ordinal $\iota < \gamma$ takav da važi formula:

$$(X \cap \mathbf{T}_\iota) \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_\iota} \ \wedge\ (X \cap \mathbf{T}_{\iota+1}) \notin \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}_{\iota+1}}.$$

Na osnovu definicije iterirane konzistentne konkatenacije, na granu $X \cap \mathbf{T}_{\iota+1}$ se dalje ne bi konkatenirala preostala stabla, tj. $X \subset \mathbf{T}_{\iota+1}$ odnosno $X \in \mathbf{M}_{\mathfrak{T}_{\iota+1}}$. Kako je $|\mathbf{T}_{\iota+1}| < \alpha$, iz ovog bi slijedilo da $|X| < \alpha$, što je u kontradikciji sa $|X| = \alpha$, pa pretpostavka da je grana X nekonzistentna dovodi do kontradikcije. Primjenimo li pravilo isključenja trećeg, tada mora da važi $X \in \mathbf{CM}_{\mathfrak{T}}$. Kako je grana X nastala konkatenacimo grana $X_\iota \in \mathbf{CM}_{\mathsf{T}(\varphi_\iota)}$, za $\iota < \gamma$ koje na osnovu ***Teoreme 3.1.2.*** zadovoljavaju uslove:

(C0) Ne postoji formula $\varphi \in For_{P_\alpha}$ takva da $\varphi \sim X_\iota$ i $\neg\varphi \sim X_\iota$.

(C1) Ako $\neg\varphi \sim X_\iota$, tada $\varphi\neg \sim X_\iota$.

(C2) Ako $\varphi \to \psi \sim X_\iota$, tada $\neg\varphi \sim X_\iota$ ili $\psi \sim X_\iota$.

(C3) Ako $\bigwedge_{\sigma<\gamma} \varphi_\sigma \sim X_\iota$, tada za svako $\sigma < \gamma$ važi $\varphi_\sigma \sim X_\iota$.

(C4) Ako $\bigvee_{\sigma<\gamma} \varphi_\sigma \sim X_\iota$, tada postoji $\sigma < \gamma$ tako da važi $\varphi_\sigma \sim X_\iota$.

Pošto $X_\iota \simeq X$, i $Range(X) = \bigcup_{\iota<\gamma} Range(X_\iota)$ tada neposredno izvodimo da za i grana X zadovoljava uslove (C0)-(C4). Iz ***Teoreme 3.1.3.*** neposredno zaključujemo da tada postoji $\mathfrak{p}$ model grane X, tj. $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} X$. Budući da za svako $\iota < \gamma$ važi $\varphi_\iota \sim X_\iota$, odavde slijedi da $\Phi \simeq X$, pa na kraju zaključujemo da važi formula:

$$\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Phi, \quad \text{odnosno} \quad \mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Gamma.$$

Dokažimo i suprotan smjer ***Teoreme 4.1.1.***

Teorema 4.1.2. Neka je $\alpha = \omega$ ili α jako nedostižan kardinal. Ako je kardinal α iskazno slabo kompaktan, tada kardinal α ima svojstvo drveta.

DOKAZ. Bilo da je $\alpha = \omega$ ili α jako nedostižan kardinal, to znači da je on regularan i jako graničan kardinal (*strong limit cardinal*). Neka je stablo $\mathsf{T} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$, takvo da važe uslovi:

(S1) $|T| = \alpha$,

(S2) $(\forall \iota < \mathfrak{h}(\mathsf{T}))\ \ |\mathsf{T}(\iota)| < \alpha$.

Dokažimo da postoji grana stabla T dužine α.

Neka je funkcija $q : T \to Var_{P_\alpha}$ bijekcija, i označavajmo radi lakšeg zapisivanja formula oznaku $q_x = q(x)$ za $xyy \in T$. Uočimo skup formula iskaznog računa P_α:

$$\begin{aligned}\Gamma \;=\; & \{ \bigvee_{x \in \mathsf{T}(0)} q_x \} \cup \\ & \{ \bigwedge_{x\in X} q_x \to \bigvee_{y \in \mathsf{Y}_{\mathsf{T}}(X)} q_y \mid X \in \mathsf{X}_{\mathsf{T}} \wedge |X| < \alpha \wedge \mathsf{Y}_{\mathsf{T}}(X) \neq \emptyset \} \cup \\ & \{ \neg \bigwedge_{x\in X} q_x \mid X \in \mathbf{M}_{\mathsf{T}} \wedge |X| < \alpha \}.\end{aligned}$$

Ako bi postojao model $\mathfrak{p}$ za skup formula Γ, tada bi postojala bar jedna grana X stabla $\mathbf{T}$ za koju bi važilo da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} q_x$ za svako $x \in X$. Ako bi kardinalnost takve grane X bila manja od α, tada bi $(\neg \bigwedge_{x \in X} q_x) \in \Gamma$, pa bi važio $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg \bigwedge_{x \in X} q_x$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \bigvee_{x \in X} \neg q_x$. Dakle postojalo bi takvo $x \in X$ tako da važi $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg q_x$, što je u kontradikciji sa $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} q_x$, odnosno pretpostavkom da je $\mathfrak{p}$ model skupa formula Γ. Primjenom pravila isključenja trećeg slijedi da je grana X mora biti dužine α, odnosno $|X| = \alpha$. Dakle ako bi za skup formula Γ postojao model, tada bi kardinal α zadovoljavao svojstvo drveta.

Dokažimo dalje da pomoću pretpostavljene slabe iskazne kompaktnosti kardinala α slijedi da postoji model skupa formula Γ.

Pokažimo prvo da $|\Gamma| = \alpha$. Primjetimo da bilo da je kardinal $\alpha = \omega$ ili α jako nedostižan za njega važi da $\alpha^{<\alpha} = \alpha$. Takodje primjetimo da važe i sledeći niz relacija:

$$|\{X \in \mathbf{M_T} \mid |X| < \alpha\}| \;\le\; |\{X \in \mathbf{X_T} \mid |X| < \alpha\}| \;\le\; |T|^{<|T|} \;=\; \alpha^{<\alpha} \;=\; \alpha.$$

Stablo $\mathbf{T}$ zadovoljava uslove (S1) i (S2) svojstva drveta, i na osnovu prethodnih primjedbi tada važe slijedeće relacije:

$$|\{ \bigvee_{x \in \mathbf{T}(0)} q_x\}| \;=\; 1 \;<\; \alpha,$$

$$|\{ \bigwedge_{x \in X} q_x \to \bigvee_{y \in \mathbf{Y_T}(X)} q_y \mid X \in \mathbf{X_T} \wedge |X| < \alpha \wedge \mathbf{Y_T}(X) \neq \emptyset\}| \;\le\; |\{X \in \mathbf{X_T} \mid |X| < \alpha\}| \;\le\; \alpha,$$

$$|\{\neg \bigwedge_{x \in X} q_x \mid X \in \mathbf{M_T} \wedge |X| < \alpha\}| \;=\; |\{X \in \mathbf{M_T} \mid |X| < \alpha\}| \;\le\; \alpha.$$

Iz navedenih relacija neposredno slijedi da $|\Gamma| \le \alpha$. Ako je $|\Gamma| < \alpha$, tada konstruišemo model za Γ na identičan način koji ćemo upravo opisati.

Neka je $\Phi \subset \Gamma$ bilo kakav skup formula kardinalnosti $|\Phi| < \alpha$. Dokažimo da skup formula Φ ima model. Obilježimo sa $V \subset Var_{P_\alpha}$ skup iskaznih varijabli koje se javljaju u formulama skupa Φ. Kako je $|\Phi| < \alpha$ i u svakoj formula iz Φ pojavljuje se manje od α varijabli, sljedi da $|V| < \alpha$. Kako je preslikavanje q bijekcija, skup V jednoznačno odredjuje podstablo $\mathbf{T_1} = \langle T_1, <_{\mathbf{T_1}} \rangle$ stabla $\mathbf{T}$, gdje je $T_1 = q[V]$ i $<_{\mathbf{T_1}} = <_{\mathbf{T}} |_{T_1}$. Primjetimo da $|T_1| < \alpha$. Obilježimo dalje sa $T_2 = T[\mathbf{h}(\mathbf{T_1})]$ i $<_{\mathbf{T_2}} = <_{\mathbf{T}} |_{T_1}$, odnosno sa $\mathbf{T_2} = \langle T_2, <_{\mathbf{T_2}} \rangle$ podstablo stabla $\mathbf{T}$. Pošto je kardinal α regularan, tada $\mathbf{h}(\mathbf{T_1}) < \mathbf{h}(\mathbf{T}) \le \alpha$, pa iz osobine (2) svojstva drveta slijedi da $|T_2| < \alpha$. Primjetimo da je dovoljno odrediti vrijednosti valuacije na skupu $g^{-1}[T_2]$, da bi valuacija bila model skupa formula Φ, jer ostale iskazne varijable ne utiču na istinitost formula iz Φ pošto se u njima i ne javljaju.

Konstruišimo dalje valuaciju $\mathfrak{p} : Var_{P_\alpha} \to \{T, F\}$ u zavisnosti od slijedećih slučaja:

(1) Ako $\bigvee_{x \in \mathbf{T}(0)} q_x \notin \Phi$, tada valuacija $\mathfrak{p}(p) = F$, za $p \in Var_{P_\alpha}$, je model skupa Φ tj. $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Phi$.

(2) Ako $\bigvee_{x \in \mathbf{T}(0)} q_x \in \Phi$, tada pošto je $|T_2| < \alpha$, tada uvjek postoji tačka $z \in (T \setminus T_2)$. Na osnovu izbora tačke z slijedi da $r_{\mathbf{T}}(z) \ge \mathbf{h}(\mathbf{T_2})$. Obilježimo granu $Z = \{x \in T_2 \mid x < z\}$. Definišemi valuaciju $\mathfrak{p}$ formulom:

$$\mathfrak{p}(q_x) = \begin{cases} T & : x \in Z, \\ F & : \text{inače}, \end{cases}$$

Dokažimo da je valuacija $\mathfrak{p}$ model skupa formula Φ, tj. $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \Phi$. Neka je formula $\varphi \in \Phi$, tada su mogući neki od slijedećih slučaja:

(3.1) Ako je $\varphi = \bigvee_{x \in \mathsf{T}(0)} q_x$, za neko $x \in T$, tada na osnovu definicije skupa Z slijedi da postoji $y \in Z$ i $y \in \mathsf{T}(0)$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} q_y$. Na osnovu definicije relacije zadovoljenja neposredno izvodimo da važi formula:

$$\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \bigvee_{x \in \mathsf{T}(0)} q_x.$$

(3.2) Ako je $\varphi = \bigwedge_{x \in X} q_x \to \bigvee_{y \in \mathsf{Y}_\mathsf{T}(X)} q_y$, za neki čvor $x \in T$, takav da na osnovu definicije skupa Γ važi: $X \in \mathbf{X}_\mathsf{T}$ i $\mathbf{S}_\mathsf{T}(x) \neq \emptyset$.

(3.2.1) Ako $\mathfrak{p} \not\models_{P_\alpha} \bigwedge_{x \in X} q_x$, tada postoji $x \in X$ tako da $x \notin Z$. Iz svojstva linearnosti grane X tada slijedi formula:

$$(\forall u \in X) \ (x \leq u \to u \notin Z).$$

Iz prethodne formule i definicije skupa $\mathsf{Y}_\mathsf{T}(X)$ neposredno izvodimo da za svako $y \in \mathsf{Y}_\mathsf{T}(x)$ važi $y \notin Z$, odnosno $\mathfrak{p} \not\models_{P_\alpha} q_y$. na osnovu svojstava relacije zadovoljenja neposredno izvodimo da važi formula:

$$\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \bigwedge_{x \in X} q_x \to \bigvee_{y \in \mathsf{Y}_\mathsf{T}(X)} q_y.$$

(3.2.1) Ako $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \bigwedge_{x \in X} q_x$, tada $X \subset Z$, pa osnovu definicije skupova $\mathsf{Y}_\mathsf{T}(X)$ i Z, postoji $y \in \mathsf{Y}_\mathsf{T}(x)$ tako da $y \in Z$, odnosno $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} q_y$. Iz svojstava relacije zadovoljenja neposredno izvodimo da važi formula:

$$\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \bigwedge_{x \in X} q_x \to \bigvee_{y \in \mathsf{Y}_\mathsf{T}(X)} q_y.$$

(3.3) Ako je $\varphi = \neg \bigwedge_{x \in X} q_x$, za neko $X \in \mathbf{M}_\mathsf{T}$. Pretpostavimo tada suprotno da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg\varphi$, odnosno da $\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \bigwedge_{x \in X} q_x$. Iz definicije valuacije $\mathfrak{p}$, tada slijedi da $X \subset Z$. Pošto je X maksimalna grana pa slijedi da $Z \subset X$. Dakle važi $X = Z$. Na osnovu izbora tačke z slijedi da $z \notin X$. Kako za svako $y \in Z$ važi da $y < z$, pa i za $y \in X$, važi $y < z$, odatle neposredno izvodimo da grana X nije maksimalna. Dakle na osnovu zakona isključenja trećeg važi formula:

$$\mathfrak{p} \models_{P_\alpha} \neg \bigwedge_{x \in X} q_x.$$

Direktna posljedica ***Teoreme 4.1.1.*** i ***Teoreme 4.1.2.*** je slijedeća teorema.

Teorema 4.1.3. Neka je $\alpha = \omega$ ili α jako nedostižan kardinal. Tada za kardinal α važi slijedeća ekvivalencija:

α je iskazno slabo kompaktan akko α ima svojstvo drveta.

Teorema 4.1.4. (KÖNING-OVA LEMA.) Ako je stablo $\mathsf{T} = \langle T, <_\mathsf{T} \rangle$, takvo da svaka njegova tačka ima samo konačno sljedbenika, onda stablo T ima beskonačnu granu. (Dokaz vidjeti u [FDrak74, str. 202].)

Posljedica 4.1.2. Kardinal $\aleph_0$ ima svojstvo drveta, odnosno kardinal $\aleph_0$ je slabo iskazno kompaktan, pa na osnovu ***Teoreme 4.1.3.*** račun P_ω je kompaktan.

Teorema 4.1.5. Postoji neprebojivo stablo, kojem su svi nivoi prebrojivi, ali koje nema neprebrojivu granu. Stablo sa ovakvim svojstvom nazivamo *Aronszajn-ovim* stablom. (Dokaz vidjeti u [FDrak74, str. 211].)

Posljedica 4.1.3. Kardinal $\aleph_1$ nema svojstvo drveta, odnosno kardinal $\aleph_1$ nije slabo iskazno kompaktan, pa na osnovu ***Teoreme 4.1.3.*** račun P_{ω_1} nije kompaktan.

Teorema 4.1.6. Singularani kardinali nemaju svojstvo drveta. ([FDrak74, str. 215]).

Posljedica 4.1.4. Singularni kardinali nijesu slabo iskazno kompaktni.

Teorema 4.1.7. Za regularan kardinal κ takav da $2^\lambda \leq \kappa$, za $\lambda < \kappa$ postoji κ^+ Aronszajn stablo, tj. stablo čiji su nivoi kardinalnosti $\leq \kappa$, a koje nema granu dužine κ^+. ([FDrak74, str. 217]).

Posljedica 4.1.5. Regularan kardinal κ takav da $2^\lambda \leq \kappa$, za $\lambda < \kappa$ nije slabo iskazno kompaktan, odnosno iskazni račun P_{κ^+} nije kompaktan.

4.2 Kompaktnost beskonačnih logika $L_{\alpha\beta}$

Definicija 4.2.1. Za beskonačnu logiku $L_{\alpha\beta}$ kažemo da je (κ, λ) – ***kompaktana*** ako skup rečenica Γ, kardinalnosti $|\Gamma| = \kappa$ ima model akko svaki podskup skupa Γ kardinalnosti manje od λ ima model.

Lema 4.2.1. Ako je logika $L_{\alpha\beta}$ (κ, λ)–kompaktna, tada za $\gamma \leq \beta$ logike $L_{\alpha\gamma}$ su (κ, λ)–kompaktna.

DOKAZ. Na osnovu definicija skupova $For_{L_{\alpha\beta}}$ i $For_{L_{\alpha\gamma}}$, slijedi da važi $For_{L_{\alpha\gamma}} \subset For_{L_{\alpha\beta}}$, odakle neposredno slijedi tvrdjenje leme.

Definicija 4.2.2. Kardinal α je ***slabo kompaktan*** ako za beskonačnu logiku $L_{\alpha\alpha}$ važi da je (α, α) – kompaktane.

Teoreme i leme iz prethodnog poglavlja važe i za beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$. Operacija konzistentne konkatenacije se definiše za tabloe nad formulama beskonačnih logika uvažavajuci uvedene kvantifikatore. Kao i u slučaju za iskazne račune definišemo i iteriranu konzistentnu konkatenaciju. ***Lemu 4.1.1***, ***Lemu 4.1.2.*** i ***Lemu 4.1.3.*** opštimo tako da na mjestima gdje je to potrebno diskutujemo slučaje gdje se pojavljuju formule sa kvantifikatorima. Tada zaključujemo da i ***Posljedica 4.1.1.*** važi u slučaju tabloa nad formulama beskonačnih logika.

Novi momenat u dokazima nastaje u ***Teoremi 4.1.1.*** gdje za iterirani konaktenaciju definisanu u teoremi kao dokazujemo formulu:

$$(\forall \iota < \alpha)\ |\mathbf{T}_\iota| \leq \alpha,$$

umjesto $(\forall \iota < \alpha)\ |\mathbf{T}_\iota| < \alpha$. Kako je $\mathbf{T} = \bigcup_{\iota<\alpha} \mathbf{T}_\iota$ i kako je kardinal α regularan sljiedi da $|\mathbf{T}| = \alpha$, što nam je potrebno da bi smo u nastavku dokaza zaključili da stablo $\mathfrak{T}$ ima granu X kardinalnosti α. Odavde Slično kao i u ***Teoremi 4.1.1.*** pozivajući se na

Teoremu 3.2.1. zaključujemo da postoji model formula nad kojim smo konstruisali tablo.

Uopšenje ***Teoreme 4.1.2.*** postižemo tako što posmatramo jezik L koji sadrži jedan relaciski simbol $Rel_L = \{Q\}$ i sadrži α simbola konstanti. Označimo li sa $s : T \to Const_L$ i dokazu ***Teoreme 4.1.2.*** zamjenimo svako javljanje simbola q_x sa $Q(s_x)$ dobijamo uopšteni dokaz za beskonačne logike $L_{\alpha\beta}$.

Iz svega rečenog slijedi da važi slijedeća teorema.

Teorema 4.2.1. Neka je $\alpha = \omega$ ili α jako nedostižan kardinal. Tada za kardinal α važi slijedeća ekvivalencija:

$$\alpha \text{ je slabo kompaktan} \quad \text{akko} \quad \alpha \text{ ima svojstvo drveta.}$$

Na osnovu ***Teoreme 4.1.3.*** tada zaključijemo da važi slijedeća teorema.

Teorema 4.2.1. Neka je $\alpha = \omega$ ili α jako nedostižan kardinal. Tada za kardinal α važi slijedeća ekvivalencija:

$$\alpha \text{ je slabo kompaktan} \quad \text{akko} \quad \alpha \text{ je slabo iskazno kompaktan.}$$

Prethodnu ekvivalenciju možemo iskazati kao:

$$L_{\alpha\alpha} \text{ je slabo kompaktna} \quad \text{akko} \quad P_\alpha \text{ je slabo iskazno kompaktan.}$$

Posljedica 4.2.1. Slično kao i uslučaju iskaznih računa izvodimo da važe slijedeće posljedice:

(1) Beskonačna logika $L_{\omega\omega}$ je slabo kompaktna.

(2) Beskonačne logike $L_{\omega_1\omega}$ i $L_{\omega_1\omega_1}$ nijesu slabo kompaktne.

(3) Za svaki singularan kardinal κ i za svaki kardinal $\lambda \leq \kappa$ beskonačna logika $L_{\kappa\lambda}$ nije slabo kompaktna.

(4) Za svaki regularan kardinal κ takav da $2^\lambda \leq \kappa$, za $\lambda < \kappa$ i kardinal $\sigma \leq \kappa$ beskonačna logika $L_{\kappa\sigma}$ je slabo kompaktan.

Glava 5

Heuristika

Analtitički tabloi kako smo ih formulisali u **Glavi 2.** predstavljaju značajan algoritam za automatsko dokazivanje teorema. Postoji veliki broj dokazivača koji se baziranju na analitičkim tabloima, pa su stoga algoritmi, odnosno heuristike koji unaprijedjuju osnovni algoritam dobrodošli. Osnovna formulacija i dvije predložene heuristike biti će glavni sadržaj ove glave. Pošto je predikatski račun prvog reda najinteresantniji sa stanovišta automatskog dokazivanja teorema, to će ova glava biti u potpunosti posvećena predikatskom računu prvog reda. Predloženi algoritmi mogu se lako uopštiti i na ostale beskonačne iskazne račune i logike, ali problemi pri implementaciji ostavljaju otvorenim pitanje njihove primjene, sem naravno teoretskih razmatranja.

U ovoj glavi posebnu pažnju posvećujemo analitičkim tabloima predikatskog računa prvog reda ($L_{\omega\omega}$), sa stanovišta automatskog dokazivanja teorema. Već smo u ***Definiciji 3.2.2.*** precizirali što podrazumjevamo pod pojmov dokazivosti formule φ u teoriji Φ logike $L_{\omega\omega}$. Da bi pojednostavili zapis, pošto ćemo razmatrati samo predikatski račun prvog reda, činjenicu da je formula predikatskog računa φ tablo dokaziva u teoriji Φ obilježavamo sa $\Phi \vdash^{\mathsf{T}} \varphi$.

Od sada pa na dalje podrazumjevamo da jezik L, takav da $|Rel_L| < \omega$ i $|Fun_L| < \omega$. Takodje podrazumjevamo da je za niz formula Φ, definisan niz formula Φ' kao u ***Definiciji 3.2.2.*** Primjetimo dalje nekoliko veoma važnih lema za buduća ramatranja.

Lema 5.1. Neka je data formula φ predikatskog računa prvog reda i teorija Φ prvog reda. Ako je $\Phi \vdash^{\mathsf{T}} \varphi$ i $|\Phi| < \omega$, tada je kompletan tablo $\mathsf{T}^{\Phi'} = \langle T, <_{\mathsf{T}^{\Phi'}} \rangle$, takav da $|T| < \omega$.

DOKAZ. Pošto je $|\Phi| < \omega$, $|Rel_L| < \omega$ i $|Fun_L| < \omega$, tada na osnovu ***Definicije 3.2.2.*** slijedi da $|\Phi'| < \omega$. Na osnovu konstrukcije tabloa i pretpostavke da $\mathsf{T}^{\Phi'}$ zatvoren tablo, važi formula:

$$(\forall X \in \mathbf{M}_{\mathsf{T}^{\Phi'}})\ \ |X| < \omega.$$

Na osnovu prethodne formule slijedi da $\mathbf{h}(\mathsf{T}^{\Phi'}) \leq \omega$, pa iz toga zaključujemo da $\mathsf{T}^{\Phi'} = \bigcup_{\iota<\omega} \mathsf{T}^{\Phi'}(\iota)$. Indukcijom po ordinalima $\iota < \omega$ neposredno dokazujemo da

$|\mathsf{T}^{\Phi'}(\iota)| < \omega$. Tada važi slijedeći niz relacija:

$$|T| \leq \sum_{\iota<\omega} |\mathsf{T}^{\Phi'}(\iota)| \leq \omega.$$

Pretpostavimo li da $|T| = \omega$, tada stablo $\mathsf{T}^{\Phi'}$ na osnovu već dokazanog zadovoljava uslove:

(S1) $|T| = \omega$,

(S2) $(\forall \iota < \mathbf{h}(\mathsf{T}^{\Phi'}))\ |\mathsf{T}^{\Phi'}(\iota)| < \omega$.

Pošto kardinal ω ima svojstvo stabla, slijedi da stablo $\mathsf{T}^{\Phi'}$ ima granu X takvu da $|X| = \omega$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je tablo $\mathsf{T}^{\Phi'}$ zatvoren.

Dakle, na osnovu već pokazanog slijedi da je jedino moguće da $|T| < \omega$. ***Q.E.D.***

Primjetimo da mnoge od tačaka zatvorenog kompletnog tabloa nijesu potrebne da bi smo zatvorili svaku njegovu granu. Veliki broj nepotrebnih tačaka u konstrukciji zatvorenog kompletnog tabloa predstavljaju osnovnu teškoću u radu programa koji za dati niz formula Φ konstruiše kompletan tablo T^{Φ}. Program koji predstavlja implementaciju algoritma za konstrukciju analitičkih tabloa, onako kako smo to opisali u prethodnim poglavljima zvaćemo *dokazivačom*. Opisani algoritam konstrukcije može se poboljšati uvodjenjem heuristika, a da se ne naruši njegovo osnovno svojstvo kompletnosti. Ovo poglavlje će upravo biti posvećeno opisu dvije heuristike koje čuvaju svojstvo kompletnosti algoritma za konstrukciju zatvorenih kompletnih tabloa.

Definicija 5.1. Neka je dat niz formula Φ i neka je kompletan tablo $\mathsf{T}^{\Phi} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$ zatvoren. Za tačku $x = \langle \sigma, \varphi \rangle \in T$ definišemo skup $\mathbf{C}^x_{\Phi}$, koji zovemo *skupom konsekvenci* tačke x, na osnovu pomoćnog niza C^x i slijedećih formula:

$$\begin{aligned} C^x_0 &= \{x\}, \\ C^x_{n+1} &= C^x_n \cup \bigcup_{\langle \sigma, \varphi \rangle \in C^x_n} (T_{\sigma+1} \setminus T_{\sigma}), \quad n \in \omega, \end{aligned}$$

tako da $\mathbf{C}^x_{\Phi} = C^x_{|T|}$. (Skupovi T_{σ} predstavljaju skupovni dio niza tabloa $\mathsf{T}^{\Phi}_{\sigma}$ preko kojeg definišemo kompletan tablo T^{Φ}.)

Primjetimo da ako je T kompletan zatvoren tablo iz ***Leme 5.1.*** slijedi da $|T| < \omega$, pa iz prethodne definicije izvodimo da $|\mathbf{C}^x_{\Phi}| < \omega$.

Definicija 5.2. Neka je dat niz formula Φ i neka je kompletan tablo $\mathsf{T}^{\Phi} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$ zatvoren. Za tačku $x = \langle \sigma, \varphi \rangle \in T$ kažemo da je *irelevantna* u tablou T u oznaci $Irele(x, \mathsf{T}^{\Phi})$, ako je tablo $\mathsf{T}_1 = \langle T_1, <_{\mathsf{T}_1} \rangle$ takav da je:

$$T_1 = T \setminus (\mathbf{C}^x_{\Phi} \cup \bigcup \{\mathbf{C}^y_{\Phi} \mid x <_{\mathsf{T}} y \wedge y \in T \wedge y = \langle \tau, \varphi \rangle\}),$$

i $<_{\mathsf{T}_1} = <_{\mathsf{T}} |_{T_1}$, zatvoren. U suprotnom kažemo da je tačka x *relevantna* u tablou T^{Φ} u oznaci $Rele(x, \mathsf{T}^{\Phi})$.

Predložene heuristike baziraju se na ideji, da se postupno u konstrukciji "forsiraju" formule koje se nalaze u relevantnim tačkama i na taj način ubrza konstrukcija zatvorenog tabloa. U tom cilju precizirajmo kako iz ***Definicije 2.1.5*** konstruišemo algoritam za konstrukciju kompletnog tabloa.

5.1 Osnovni algoritam

Algoritam 5.1. Kao ulaz u algoritam imamo niz formula Φ i formulu φ. Algoritam konstruiše tablo $\mathsf{T}^{\Phi\cup\{\neg\varphi\}}$, granu po granu. Konstrukcija grane se vrši sve dok ona ne postane kontradiktorna, i u tom slučaju prelazimo na drugu granu koju još nijesmo zatvorili, ili u grani nije moguće primjenjivati pravila za konstrukciju tabloa, pa formula φ nije teorema teorije Φ. Iz već rečenog, jasno je da je ovakav algoritam parcijalno odlučiv tj. ako $\mathsf{CM}^{\Phi\cup\{\neg\varphi\}} \neq \emptyset$, tada algoritam neće stati jer postoji beskonačna konzistentna grana.

U notaciji slučnoj programskom jeziku PASCAL, koja se od programskog jezika razlikuje u tome da je moguće operisati sa nizovima kojima nije unaprijed ograničena dužina, i sa funkcijom `len`, koja vraća dužinu takvih nizova. Dužinu ovakvih nizova bi prestavljao najveći indeks člana niza, kojem smo pristupali. Opišimo algoritam `tableaux` koji na ulazu ima niz formula Φ i formulu φ. Podrazumjevamo slijedeće globalne promjenjljive :

(1) X - niz formula, koji predstavlja granu koju konstruišemo.

(2) $lenX$ - cjelobrojna promjenjliva koja predstavlja dužinu niza (grane) X.

(3) c - niz cjelobrojnih vrijednosti, koji za svaki clan niza $X[i]$ predstavlja broj (disjunktnie) konsekvence koji je dodat u grani X primjenom nekog od pravila (P1)–(P6). Iz definicije pravila neposredno slijedi da za prvilo (P1) vrijednost ovog broja je 1, za (P2) je 2, za (P3) je 1, za (P4) ovaj broj je jednak broju disjinkta u formuli nad kojom smo primjenili pravilo, za (P5) je 1 i za (P6) je 1.

(4) l - niz cjelobrojnih vrijednosti, koji za svaki član niza $X[i]$ predstavlja dužinu niza (grane) X, prije nego je primjenjeno nad njim neko od pravila (P1)–(P6).

Bez navodjenja algoritma pretpostavljamo da već imamo tri funkcije: `apply`, `no_cons` i `contradiction`. Funkcija `apply` ima na ulazu cjelobrojnu vrijednost i, i ona nad formulom $X[i]$, primjeni odgovarajuće pravilo konstrukcije tabloa (P1)–(P6) i to $c[i]$ konsekvencu i vraća novu dužinu niza (grane) X nakon primjene odgovarajućeg pravila. Funkcija `no_cons` ima na ulazu cjelobrojnu vrijednost i, i ona vrača broj konsekvenci formule $X[i]$. Funkcija `contradiction` vraća vrijednost boolovskog tipa: `true` ako u grani X postoje atomička formula i njena negacija, inače varaća `false`.

Promjenljive u proceduri `tableaux` su: i i j, koje nam služe kao brojači. Navedimo listing procedure `tableaux`:

```
program prover;

var
      X : array of formula;
      lenX : integer ;
      c : array of integer ;
      l : array of integer ;

      procedure tableaux(Φ : array of formula, φ : formula);

      var
            i, j : integer ;

      begin
            lenX := len(Φ);
            for i := 1 to lenX do begin
                  X[i] := Φ[i];
                  c[i] := 0
            end ;
            lenX := lenX + 1;
            X[lenX] := ¬φ;
            c[lenX] := 0;
            i := 1;
            repeat
                  while ( not contradiction) and i ≤ lenX do begin
                              l[i] := lenX;
                              c[i] := c[i] + 1;
                              lenX := apply(i);
                              i := i + 1
                  end ;
                  if contradiction then begin
                     while c[i] = no_cons(i) and i > 0 do i := i − 1;
                     lenX := l[i];
                     for j := i + 1 to lenX do c[j] := 0
                  end
            until i ≠ 0 and lenX < i;
            if i = 0 then write ('Formula', φ, ' je teorema teorije ', Φ, '.')
                     else write ('Formula', φ, ' nije teorema teorije ', Φ, '.')
      end ;
```

Na početku rada algoritma, sve formule iz ulaznog niza Φ smjestimo u niz (granu) X i za svaku formulu $X[i]$ postavmo brojač disjunktnih konsekvenci koje su dodate grani X na 0, tj. $c[i] := 0$. Glavni brojač u kojem smještamo vrijednost do koje smo formule u grani X "stigli" sa primjenom pravila (P1)–(P6) je promjenljiva i, i na početku postavljamo $i := 1$. Zatim ulazimo u petlju u kojoj smo sve dok vrijednost brojača i ne bude 0 ili i postane veće od *lenX*, dakle dok ne završimo konstrukciju zatvorenog tabloa ili nije više moguće primjeniti ni jedno od pravila (P1)–(P6). Ponovo ulazimo u drugu petlju u kojoj smo sve dok ne dodjemo do kontradikcije ili i postane veće od *lenX*. U toj petlji primjenjujemo pravla konstrukcije (P1)–(P6) nad formulom $X[i]$, i to $c[i] + 1$ konsekvent i pri tome za svaku primjenu pamtimo dužinu niza (grane) X. Ako se pojavi kontradikcija tada prekidamo sa primjenom parvila

(P1)–(P6) i vraćamo se unazad sve dok $c[i] \neq$ `no_cons(i)`. Na ovom mjestu u grani X nalazi se prva formula $X[i]$ od vrha niza (grane) X koja će primjenom pravila (P1)–(P6) stvoriti otvorenu granu, različitu od X. Rekonstruišemo "stanje", tako da možemo dalje nastaviti sa konstrukcijom nove grane. Primjetimo da ako se vratimo tako da $i = 0$, to znači da su sve moguće grane ispitane, tj. zatvorene, pa je to, kao što smo i ranije naveli uslov za izlaz iz petlje. Ako nije više moguće primjenjivati pravila (P1)–(P6), tada takodje izlazimo iz petlje. Na kraju u zavisnosti kako smo izazšli iz petlje štampamo izvještaj o tome da li je formula φ teoreme teorije Φ. Ako je $i = 0$, tada je formula φ teorema teorije Φ, inače nije.

Iz samog algoritma i njegovog opisa jasno je da se radi o konstrukciji stabla po "dubini", (po granama stabla), što je optimalna strategija u ovom slučaju, jer bi konstrukcija po "širini", (po nivoima stabla) vrlo brzo zauzela svu raspoloživu memoriju računara.

Kod dokaza koji su dobijeni primjenom ovog algoritma, kao i uopšte bilo kojim metodom automatskog dokazivanja teorema, veliki broj tačaka u tablou su irelevantne. Problem je još veći, kada veliki broj irelevantnih tačaka ima mnogo disjunktnih konsekvenci. Na primer, ako u jednom dokazu imamo deset irelevantnih tačaka, koje recimo imaju po dvije disjunktne konsekvence, tada će one proizvesti $2^{10} = 1024$ grananja u tablou. Heuristike koje predlažemo upravo će se koncentrisati na "otkrivanje" relevantnih tačaka i njihovo "forsiranje" u daljem procesu konstrukcije tabloa. Neka je grana X zatvorena grana, konstruisana prethodnim algoritmom. Uočimo tačku x prvu u grani X koja ima neku otvorenu granu, i na tom mjestu dodamo nove tačke koje imaju formule relevantih tačaka grane X od tačke x do njenog "vrha". Pošto su navedene tačke "zatvorile" granu X, postoji velika vjerovatnoća da će one zatvoriti i novu granu, što više one će sigurno zatvoriti ako su tačke u grani X od tačke x do njenog "vrha" izuzimajući posljednu, koja mora biti relevantna, bile irelevantne. Ovaj postupak nastavljamo rekurzivno i tada u opštem slučaju dodajemo u nove grane, stabla relevanthih tačaka koja su zatvorila prethodne grane.

Da bi opisali heuristike uvedimo slijedeću operaciju kojima ćemo olakšati njihov opis.

Definicija 5.1.1. Neka su dati tačka x i niz stabala $\mathbf{T}_\iota = \langle T_\iota, <_{\mathbf{T}_\iota} \rangle$, $\iota < \sigma$, takvi da za svako $\iota < \sigma$ važi $x \notin T_\iota$ i takvi da su skupovi T_ι, $\iota < \sigma$, medjusobno disjunktni. Tada sa $\mathbf{A}(x, \langle \mathbf{T}_\iota \rangle_{\iota<\sigma})$ obilježavamo stablo $\langle T, <_{\mathbf{T}} \rangle$ gdje su:

(1) $T = \{x\} \cup \bigcup\limits_{\iota<\sigma} T_\iota$.

(2) $<_{\mathbf{T}} \; = \bigcup\limits_{\iota<\sigma} <_{\mathbf{T}_\iota} \; \cup \{\langle x, y \rangle \mid \iota < \sigma \wedge y \in T_\iota\}$.

U nastavku podrazumjevevamo da pored uobičajnih tačaka analitičkih tabloa, i tačke oblika $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$ mogu biti tačke analitičkih tabloa.

Definicija stabla dozvoljavama mogućnost da stablo ima više elemenata ranga $\emptyset$. Kako u konstrukciji tabloa ne koristmo ovu mogućnost, možemo definisati slijedeću funkciju.

Definicija 5.1.2. Funkcija $root(\mathbf{T})$ slika tablo $\mathbf{T}$ u formulu ili prazan skup, tako da $root(\mathbf{T}) = y$, ako je $x = \langle \sigma, y \rangle$ i $r_{\mathbf{T}}(x) = \emptyset$. Vrijednost $root(\mathbf{T})$ zovemo *korjenom* stabla $\mathbf{T}$.

Na osnovu prethodnih napomena i definicije preslikavanja *root* neposredno slijedi da njena slika je neka formula beskonačne logike ili prazan skup.

Definicija 5.1.3 Funkcija $RepRoot(\mathsf{T}, x)$ slika stablo $\mathsf{T} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$ i tačku x u stablo, tako da ako $x \notin T$ stablo $RepRoot(\mathsf{T}, x) = \langle T_1, <_{\mathsf{T}_1} \rangle$ zadovoljava slijedeće uslove:

(1) $T_1 = \{x\} \cup (T \setminus \mathsf{T}(\emptyset))$,

(2) $<_{\mathsf{T}_1} \; = <_{\mathsf{T}} |_{T_1} \cup \{\langle x, y\rangle \,|\, y \in (T \setminus \mathsf{T}(\emptyset))\}$.

Ako $x \in T$, tada $RepRoot(\mathsf{T}, x) = \mathsf{T}$.

Definišimo dalje funkciju μ koja preslikava skup zatvorenih tabloa u samog sebe, tako da slika tabloa T bude tablo koji sadrži samo relevantne tačke tabloa T. Podrazumjevamo da su zatvoreni tabloa takvi da za svaku zatvorenu granu X, postoje samo jedna formula φ, takva da $\varphi \sim X$ i $\neg\varphi \sim X$. (Lako se konstruiše operator, koji bilo koji zatvorenoi tablo slika u tablo za navedenim svojstvom.)

Definicija 5.1.4 Neka je dat zatvoren tablo $\mathsf{T} = \langle T, <_{\mathsf{T}} \rangle$. Funkciju μ koja preslikava tačke zatvorenog tabloa u zatvorene tabloe, definišemo rekurzivno u odnosu na relaciju $<_{\mathsf{T}}$ pomoću slijedeće formule (za $x \in T$):

$$\mu(x) = \begin{cases} \langle \{x\}, \{\langle x, x\rangle\}\rangle & : end_{\mathsf{T}}(x), \\ \mu(y_k) & : Irel(x) \wedge \mathbf{S}_{\mathsf{T}}(x) = \{y_\emptyset, ..., y_{n-1}\} \\ & \quad \wedge root(\mu(y_k)) = \emptyset, \\ \mu(y_\emptyset) & : Irel(x) \wedge \mathbf{S}_{\mathsf{T}}(x) = \{y_\emptyset, ..., y_{n-1}\} \\ & \quad \wedge ((\forall i < n)\, root(\mu(y_i)) \neq \emptyset) \\ & \quad \wedge ((\forall i, j < n)\, \mu(y_i) \equiv \mu(y_j)), \\ \mathbf{A}(\langle \emptyset, \emptyset\rangle, \langle \mu(y_i)\rangle_{i<n}) & : Irel(x) \wedge \mathbf{S}_{\mathsf{T}}(x) = \{y_\emptyset, ..., y_{n-1}\} \\ & \quad \wedge ((\forall i < n)\, root(\mu(y_i)) \neq \emptyset) \\ & \quad \wedge \neg((\forall i, j < n)\, \mu(y_i) \equiv \mu(y_j)), \\ RepRoot(\mu(y_k), x) & : Rel(x) \wedge \mathbf{S}_{\mathsf{T}}(x) = \{y_\emptyset, ..., y_{n-1}\} \\ & \quad \wedge root(\mu(y_k)) = \emptyset, \\ \mathbf{A}(x, \langle \mu(y_\emptyset)\rangle) & : Rel(x) \wedge \mathbf{S}_{\mathsf{T}}(x) = \{y_\emptyset, ..., y_{n-1}\} \\ & \quad \wedge ((\forall i < n)\, root(\mu(y_i)) \neq \emptyset) \\ & \quad \wedge ((\forall i, j < n)\, \mu(y_i) \equiv \mu(y_j)), \\ \mathbf{A}(x, \langle \mu(y_i)\rangle_{i<n}) & : Rel(x) \wedge \mathbf{S}_{\mathsf{T}}(x) = \{y_\emptyset, ..., y_{n-1}\} \\ & \quad \wedge ((\forall i < n)\, root(\mu(y_i)) \neq \emptyset) \\ & \quad \wedge \neg((\forall i, j < n)\, \mu(y_i) \equiv \mu(y_j)). \end{cases}$$

Zbog važnosti funkcije μ, prokomentarišimo njenu definiciju. Primjetimo na početku, da tačku $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ uvodimo u funkciju $\mu(x)$ samo onda, kada tačka x irelevantna tačka, a vrjednosti funkcije μ neposrednih slijedbenika tačke x su tabloi koji nijesu medjusobno ekvivalentni, i ni jedan od njih ne sadrži tačku $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$. Motivacija uvodjena tačke $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ jeste u tome da je u ovoj situaciji, grananje proizvela primjena pravila nad nekom tačkom, koju još nijesmo u stanju da identifikujemo, zato ostavljamo "mjesto" za tu tačku. Kada dodjemo do prve relevantne tačke u definiciji funkcije μ, zamjenjujemo je umjesto "fiktivne" tačke $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$.

Neka su dati tablo $\mathbf{T} = \langle T, <_{\mathbf{T}} \rangle$ i njegova tačka x. Mogući su neki od slijedećih slučaja:

(1) Tačka x je krajnja u tablou $\mathbf{T}$, tj. $end_{\mathbf{T}}(x)$. Formula u tački je na osnovu konstrukcije tabloa u kontradikciji sa nekom formulom koja se nalazi u grani koja se završava tačkom x, pa je time ona relevantna. Tada definišimo $\mu(x)$ kao:

$$\mu(x) = \langle \{x\}, \{\langle x, x\rangle\}\rangle.$$

(2) Tačka x je irelevantna u tablou $\mathbf{T}$, tj. $Irel(x)$ i neka je $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}(x) = \{y_0, ..., y_{n-1}\}$, tako da $n > 1$. Tada su mogući neki od slijedećih slučaja:

(2.1) Postoji $k < n$ takvo da je $root(\mu(y_k)) = \emptyset$. Tada svi ostali tabloi koji nemaju u korjenu "fiktivnu" tačku $\langle\emptyset, \emptyset\rangle$, nastali su kao poslijedice irelevantnih tačaka. U ovom slučaju same tačke $y_0, .., y_{n-1}$ su nastale primjenom nekog od pravila nad irelevantnom tačkom, što ne znači da su i one same sve irelevantne. Dovoljno je kao vrijednost funkcije $\mu(x)$ uzeti samo tablo $\mu(y_k)$, jer u njemu nema tačke y_k, koja je konsekvenca irelevantne tačke, odnosno:

$$\mu(x) = \mu(y_k).$$

(2.2) Za svako $i < n$ važi $root(\mu(y_k)) \neq \emptyset$. Tada je moguć jedan od dva slučaja:

(2.2.1) Tabloi $\mu(y_i)$, $i < n$ su medjusobno ekvivalentni. Tada budući da je tačka x irelevantna biramo da tablo $\mu(y_\emptyset)$ bude vrijednost $\mu(x)$, odnosno:

$$\mu(x) = \mu(y_\emptyset).$$

(2.2.2) Tabloi $\mu(y_i)$, $i < n$ nijesu medjusobno ekvivalentni. Različitost $\mu(y_i)$, za $i < n$, je rezultat primjene nekog od pravila za konstrukciju tabloa nad relevantnom tačkom, pa ove tabloe moramo dalje prenijeti u definiciji funkcije $\mu(x)$. Kako ne znamo koja je "slijedeća" relevantna tačka, umjesto nje u korjenu stabla $\mu(x)$ postavljamo "fiktivnu" tačku $\langle\emptyset, \emptyset\rangle$. Dakle, $\mu(x)$ definišemo kao:

$$\mu(x) = \mathbf{A}(\langle\emptyset, \emptyset\rangle, \langle\mu(y_i)\rangle_{i<n}).$$

(3) Tačka x je relevantna u tablou $\mathbf{T}$, tj. $Rel(x)$. Neka je tada $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}(x) = \{y_0, ..., y_{n-1}\}$, gdje je $n \geq 1$. Tada su mogući neki od slijedećih slučaja:

(3.1) Postoji $k < n$ takvo da je $root(\mu(y_k)) = \emptyset$. Tada svi ostali tabloi koji nemaju u korjenu "fiktivnu" tačku $\langle\emptyset, \emptyset\rangle$, su nastali kao poslijedice irelevantnih tačaka. U ovom slučaju, slično kao u (2.1) same tačke $y_0, .., y_{n-1}$ su nastale primjenom nekog od pravila nad irelevantnom tačkom, što ne znači da su i one same sve irelevantne. Vrijednost funkcije $\mu(x)$ treba onda da bude stablo dobijeno od stabla $\mu(y_k)$ kome smo zamjenili korjenu tj. tačku $\langle\emptyset, \emptyset\rangle$ sa tačkom x, odnosno:

$$\mu(x) = RepRoot(\mu(y_k), x).$$

(3.2) Za svako $i < n$ važi $root(\mu(y_k)) \neq \emptyset$. Tada je moguć jedan od dva slučaja:

(3.2.1) Tabloi $\mu(y_i)$, $i < n$ su medjusobno ekvivalentni. Pošto su ostali tabloi ekvivalentni sa $\mu(y_\emptyset)$, koji ne sadrži "fiktivnu tačku $\langle\emptyset,\emptyset\rangle$, vrijednost funkcije treba da bude stablo u čijem korjenu se nalazi tačka x, a zatim slijedi stablo $\mu(y_\emptyset)$, odnosno:

$$\mu(x) = \mathbf{A}(x, \langle\mu(y_\emptyset)\rangle).$$

(3.2.2) Tabloi $\mu(y_i)$, $i < n$ nijesu medjusobno ekvivalentni. Na osnovu već iznesenih pretpostavki: da je tačka x relevantna i da su tabloi $\mu(y_i)$, za $i < n$ nijesu ekvivalentni, slijedi da su tačke $y_0, .., y_{n-1}$ rezultat primjene pravila za konstrukciju tabloa nad nekom relevantnom tačkom. Tada tablo $\mu(x)$ treba da u korjenu sadrži tačku x i da za neposredna podstabla ima tabloe $\mu(y_i)$, za $i < n$, odnosno:

$$\mu(x) = \mathbf{A}(x, \langle\mu(y_i)\rangle_{i<n}).$$

Definicija 5.1.5. Neka je dat niz formula Φ, takav da je kompletan tablo T^Φ zatvoren. Definišimo funkciju M koja preslikava zatvoren tablo $\mathsf{T}^\Phi = \langle T, <_\mathsf{T}\rangle$ u zatvoren tablo, na osnovu formule:

$$\mathsf{M}(\mathsf{T}^\Phi) = \mu(\langle\emptyset,\varphi\rangle),$$

gdje $\langle\emptyset,\varphi\rangle \in T$.

Dokažimo da je ova definicija dobra, tj. da je $\mathsf{M}(\mathsf{T}^\Phi)$, zatvoren tablo.

Pokažimo da u tablou $\mathsf{M}(\mathsf{T}^\Phi)$ ne postoji tačka oblika $\langle\emptyset,\emptyset\rangle$. Preptostavimo suprotno tj. da tačka oblika $\langle\emptyset,\emptyset\rangle$ postoji u tablou $\mathsf{M}(\mathsf{T}^\Phi)$. Na osnovu definicije fukcije μ, "fiktivna" tačka $\langle\emptyset,\emptyset\rangle$ uvjek se nalazi kao korjen stabla. Koristeći oznake definicije funkcije μ dokažimo prethodnu tvrdnju induktivno u odnosu na relaciju $<_\mathsf{T}$.

(1) Induktivni početak. Za krajnje tačke x, funkcija je $\mu(x) = \langle\{x\}, \{\langle x, x\rangle\}\rangle$, pa ne sadržit tačku $\langle\emptyset,\emptyset\rangle$.

(2) Induktivna hipoteza. Za tačku x tabloa T sa neposrednim slijedbenicima $y_0, ..., y_{n-1}$ važi da su tabloi $\mu(y_i)$, za $i < n$, takvi da tačku $\langle\emptyset,\emptyset\rangle$ sadrže eventualno samo u svom korjenu.

(3) Induktivni korak. Dokaz sprovedimo po slučajevima koji postoje u definiciji funkcije μ.

(2.1), (2.2.1) Dokaz slijedi neposredno iz Induktivne hipoteze.

(2.2.2) Vrijednost funkcije je $\mu(x) = \mathbf{A}(\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \langle\mu(y_i)\rangle_{i<n})$, gdje su tabloi $\mu(y_i)$, za $i < n$, takvi da $root(\mu(y_i)) \neq \emptyset$. Dakle tablo $\mu(x)$ će imati u korjenu "fiktivnu" tačku.

(3.1) Vrijednost funkcije je $\mu(x) = RepRoot(\mu(y_k), x)$, gdje je tablo $\mu(y_k)$ tako da u korjenu ima tačku $\langle\emptyset,\emptyset\rangle$. Iz definicije funkcije μ jasno je da tablo $\mu(x)$ ne sadrži "fiktivnu" tačku.

(3.2.1) Vrijednost funkcije je $\mu(x) = \mathbf{A}(x, \langle\mu(y_\emptyset)\rangle)$, gdje je tablo $\mu(y_k)$ takav da ne sadrži "fiktivnu" tačku. Neposredno zaključujemo da tablo $\mu(x)$ ne sadrži "fiktivnu" tačku.

(3.2.2) Vrijednost funkcije je $\mu(x) = \mathbf{A}(x, \langle\mu(y_i)\rangle_{i<n})$, gdje su tabloi $\mu(y_i)$, takvi da za svako $i < n$ važi $root(\mu(y_i)) \neq \emptyset$, pa neposredno zaključujemo da tablo $\mu(x)$ ne sadrži "fiktivnu" tačku.

Na osnovu definicije zatvorenog tabloa neposredno izvodimo da bar jedna od formula iz Φ mora biti relevantna tačka. Neka je $x = \langle\iota, \varphi\rangle$ najmanja (u uredjenju $<_{\mathrm{T}}$), od relevantnih tačaka koja sadrži formulu iz niza Φ. Tablo $\mu(x)$ na osnovu prethodno dokazanog neće sadržati tačku $\langle\emptyset, \emptyset\rangle$. Sve tačke, ako postoje, koje su manje u uredjenu $<_{\mathrm{T}}$ od x, su tačke iz niza Φ. One na osnovu konstrukcije imaju samo jednog neposrednog sljedbenika. Vrijednost funkcije μ u njima definišemo na osnovu (2.1.1), pa će vrijednost u njima biti $\mu(x)$. Dakle zaključujemo da $\mathbf{M}(\mathrm{T}^{\Phi}) = \mu(x)$, a pošto tablo $\mu(x)$ ne sadrži tačku $\langle\emptyset, \emptyset\rangle$, to neće ni tablo $\mathbf{M}(\mathrm{T}^{\Phi})$. Neposredno na osnovu definicije funkcije μ zaključujemo da tablo $\mathbf{M}(\mathrm{T}^{\Phi})$ mora biti zatvoren.

Dakle, iz svega recenog zaključujemo da je preslikavanje $\mathbf{M}$ dobro definisano.

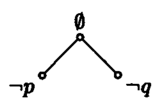
Primjer 5.1.1. Konstruišimo sliku funkcije $\mathbf{M}$ za kompletan zatvoren tablo iz ***Primjera 2.1.1.*** Zbog jednostavnosti uzimamo za primjer tablo koji je generisan za klasičan iskazni račun P_ω . Tablo generisan u ***Primjeru 2.1.1*** je bio generisan nad formulama:

$$p \wedge t,\ \ q \vee r,\ \ q \vee r \vee t,\ \ \neg p \vee \neg q,\ \ \neg p \vee \neg r,\ \ \neg p \vee \neg t.$$

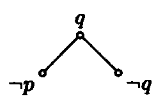
Za sve krajnje tačke, a to su tačke sa ordinalima od 16 do 31, vrijednost funkcije μ je definisana slučajem (1) i data sljedećom formulom:

$$\mu(\langle n, \varphi\rangle) \;=\; \langle\ \langle n, \varphi\rangle,\ \{\langle\langle n, \varphi\rangle, \langle n, \varphi\rangle\rangle\}\ \rangle, \qquad 16 \leq n \leq 31.$$

Tačke koje predstavljamo u slikama vrijednost funkcije μ pišemo bez njihovih ordinala, radi jednostavnijeg praćenja primjera. Tačke sa ordinalima 10, 11 i 12 irelevante, pa je vrijednost funkcije μ u tim tačkama definisana slučajem (2.2.2) i predstavljena Slikom 7. Tačka sa ordinalom 13 je relevantna i vrijednost funkcije μ je definisana slučajem (3.2.2) i predstavljena Slikom 8.

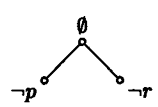


Slika 7.

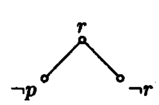


Slika 8.

Tačke sa ordinalima 25 i 27 irelevantne, pa je vrijednost funkcije μ u tim tačkama definisana slučajem (2.2.2) i predstavljena Slikom 9. Tačke sa ordinalima 14 i 15 su takodje irelevantne, pa je vrijednost funkcije μ definisana slučajem (2.1) i takodje predstavljena Slikom 9. Tačka sa ordinalom 9 je relevantna, pa je vrijednost funkcije u njoj dobijena na osnovu slučaja (3.1), tako što "fiktivnu" tačku iz Slike 9. zamjenimo formulom r. Rezultat prethode operacije je predstavljen Slikom 10.

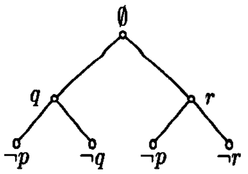


Slika 9.

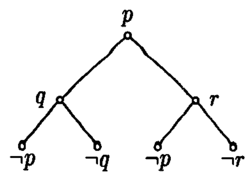


Slika 10.

Tačka sa ordinalom 7 je irelevantna, a vrijednosti funkcije μ u tačkama 8 i 9 nijesu ekvivalentne, pa je vrijednost funkcije μ definisana slučajem (2.2.2) i predstavljena Slikom 11. Tačka sa ordinalom 6 je relevantna, pa je vrijednost funkcije u njoj dobijamo na osnovu slučaja (3.1), tako što "fiktivnu" tačku iz Slike 11. zamjenimo formulom r. Rezultat prethode operacije je predstavljen Slikom 12.

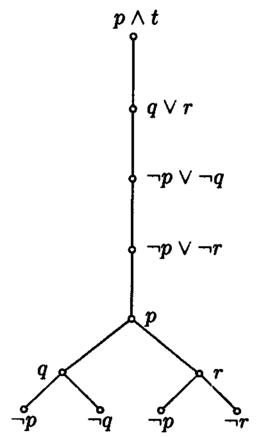


Slika 11.



Slika 12.

Kako su dalje tačke sa ordinalima 4, 3, 1, i $\emptyset$ relevantne (slučaj (2.2.1)), a tačke sa ordinalima 5 i 2 irelevantne (slučaj (3.2.1)), vrijednost funkcije $\mathbf{M}$ za kompletno stablo iz ***Primjera 2.1.1*** će biti stablo predstavljeno Slikom 13.



Slika 13.

5.2 Algoritmi heuristika

Upravo opisano preslikavanje μ možemo iskoristiti da bi brže konstrisali zatvoreni tablo. Primjetimo da je preslikavanje μ induktivno definisano u odnosu na poredak $<_{T^*}$, pa ga u konstrukciji grane X, kako je ona izvedena u ***Algoritmu 5.1***, možemo postupno konstruisati za svaku tačku grane X. Prva heuristika koju ćemo predložit bazira se na slijedećoj strategiji. Neka je data grana X, i tačke x,y i z, takve da je tačka y neposredni sljedbenik tačke x i tačka z je neposredni sljedbenik tačke y. Pretpostavimo da smo konstruisali $\mu(z)$ i da je $root(\mu(z)) = \emptyset$. Obilježimo sa $X_1 = \{u \in X \mid u \leq x\}$. Skup X_1, predstvlja podgranu grane X, čija je "najviša" tačka tačke x. Provjerimo da li su sve grane dobijene konkateniranjem grane X_1 i maksimalnih grana tabloa $\mu(z)$ su zatvorene. Ako jestu nije potrebno konstruisati tabloe za neposredne slijedbenike tačke y. Ovu strategiju primjenjujemo rekurzivno, za svaku tačku stabla T^{Φ}. Iz same formulacije heuristike, jasno je da će ona "zatvoriti" preostale "otvorene" grane tačke y ako je ona irelevanta, što je najčešće i slučaj. Primjetimo da će ova strategija ponekad zatvoriti i otvorene grane tačke y ako je ona relevantna. Moguće je da je tačka y irelevantna za tablo $\mu(z)$, a relevantna za vrijednosti funkcije μ u ostalim tačkama, koje su neposrendi slijedbenici tačke y. Strategija heuristike ipak neće ugroziti korektnu konstrukciju zatvorenog tabloa, što je od značaja za njenu primjenjljivost u dokazivačima. Uslov da je $root(\mu(z)) = \emptyset$, je jako važan za korektnost strategiju heuristike, jer je tada su, sa stanovišta konstrukcije tabloa pomenute konkatenacije korektne.

Precizno formulišimo dalje algoritam koji slijedi iz opisane heuristike.

Algoritam 5.2. Kao ulaz u algoritam imamo niz formula Φ, i formulu φ. Algoritam konstruiše tablo $\mathsf{T}^{\Phi\cup\{\neg\varphi\}}$, uz pomoć heusitike koju ćemo detaljno opisati. Konstrukcija grane se vrši sve dok ona ne postane kontradiktorna, ili u grani nije moguće primjenjivati pravila za konstrukciju tabloa. Ako je grana kontradiktorna, tada definišemo vrijednost funkcije μ u tačkama grane koju smo zatvorili. Vrijednost funkcije u tačakama konstruisane grane može se samo parcijalno odrediti. Ako je od tačke x do "kraja" zatvorene grane funkcija μ definisana, tada sve otvorene grane od x do "kraja" grane "zatvaraju" vrijednost funkcije μ u tačkama koje imaju "otvorene" grane. Konstrukciju tada nastavljamo od neposrednog prethodnika tačke x. Ako u grani nije moguće primjenjivati pravila za konstrukciju tabloa, tada formula φ nije teorema teorije Φ. I ovaj algoritam, slično ***Algoritmu 5.1.*** je parcijalno odlučiv.

Opišimo navedeni algoritam kojeg nazivamo `tableaux_heuristic`. Slično kao u ***Algoritmu 5.1.*** podrazumjevamo slijedeće globalne promjenljive :

(1) X - niz formula, koji predstavlja granu koju konstruišemo.

(2) $lenX$ - cjelobrojna promjenjliva koja predstavlja dužinu niza (grane) X.

(3) c - niz cjelobrojnih vrijednosti, koji za svaki clan niza $X[i]$ predstavlja broj (disjunktnie) konsekvence koji je dodat u grani X primjenom nekog od pravila (P1)–(P6). Iz definicije pravila neposredno slijedi da za prvilo (P1) vrijednost ovog broja je 1, za (P2) je 2, za (P3) je 1, za (P4) ovaj broj je jednak broju disjinkta u formuli nad kojom smo primjenili pravilo, za (P5) je 1 i za (P6) je 1.

(4) l - niz cjelobrojnih vrijednosti, koji za svaki clan niza $X[i]$ predtsvlja dužinu niza (grane) X, prije nego je primjenjeno nad njim neko od pravila (P1)–(P6).

(5) μ niz stabala, čije su tačke formule. Stablo $\mu[i]$ predstavlja vrijednost funkcije μ koja odgovara tački u tablou koja sadrži formulu $X[i]$.

Pretpostavljamo da već imamo četiri funkcije `contradiction`, `apply`, `no_cons` i `define_`μ. Prve tri smo opisali u ***Algoritmu 5.1***, pa njihov detaljan opis izostavljamo. Funkcija `applay` je nesto drugačija od one u ***Algoritmu 5.1.*** jer ona na ulazu ima formulu i broj konsekvenece koje dodajemo na niz (granu) X.

Funkciju `define_`μ pozivamo kada je niz (grana) X kontradiktoran, da bi definisala vrijednosti funkcije μ u nizu (grani) X, ažuriranjem niza μ. Ulazna vrijednost funkcije `define_`μ je cjelobrojan broj k koji predstavlja indeks formule iz niza (grane) X preko koje smo, primjenom pravila (P1)–(P6) došli do kontradikcije. Kako smo već napomenuli, pri "zatvaranju" neke grane moguće je parcijano definisati funkciju μ, pa funkcija define_μ vraća cjeli broj m koji pretstavlja indeks u nizu (grani) X, od kojeg su vrijednosti funkcije μ potpuno definisane. To je ujedno i mjesto od kojeg počinje nova otvorena grana. Pored navedenih funkcija pretpostavljamo da smo uveli i dva nova tipa podataka: *tree* i *ptree*. Ovo su tipovi koji da bi mogli da operišemo sa strukturom sabla, koje nam je potrebno da implementiramo funkciju μ. Za sada, zadržati ćemo se na ovom objašnjenju, koje je dovoljno da bi pratili opis algoritma.

Promjenljive u proceduri tableaux_ su: i i j, i služe nam kao brojači. Navedimo sada sam listing procedure tableaux:

```
program prover;

var
    X : array of formula;
    lenX : integer ;
    c : array of integer ;
    l : array of integer ;
    μ : array of ptree;

    procedure tableaux_heuristic(Φ : array of formula, φ : formula);

    var
        i, j : integer ;

    begin
        lenX := len(Φ);
        for i := 1 to lenX do begin
            X[i] := Φ[i];
            c[i] := 0;
            μ[i] := nil
        end ;
        lenX := lenX + 1;
        X[lenX] := ¬φ;
        c[lenX] := 0;
        i := 1;
        repeat
            while ( not contradiction) and i ≤ lenX do begin
                l[i] := lenX;
                c[i] := c[i] + 1;
                lenX := apply(X[i], c[i]);
                i := i + 1
            end ;
            if contradiction then begin
              j := define_μ(i);
              while l[i] < j and i > 0 do i := i − 1;
              lenX := l[i];
              for j := i + 1 to lenX do begin
                  c[i] := 0;
                  μ[i] := nil
              end
            end
        until i ≠ 0 and lenX < i;
        if i = 0 then write ('Formula',φ,' je teorema teorije ',Φ,'.')
                else write ('Formula',φ,' nije teorema teorije ',Φ,'.')
    end ;
```

Navedeni algoritam radi skoro identično kao i ***Algoritam 5.1.*** do pojave kontradikcije u nizu (grani) X, odnosno do naredbe $j := \texttt{define\_}\mu(i)$. Po pozivu funkcije $\texttt{define\_}\mu$, vrijednost promjenljive j je najmanji indeks niza X, takav da je funkcija μ za tačku koja sadrži formulu $X[j]$, potpuno definisana. Iz definicije preslikavanja μ, slijedi su sve grane koje je moguće konstruisati ispod tačke $X[j]$ zatvorene stablom $\mu[j]$. Zbog toga konstrukciju nastavljamo dalje od primjene pravila (P1)–(P6) nad formulom $X[i]$, čija je konsekvenca formula $X[j]$. Na osnovu definicije preslikavanja μ slijedi da će tačka $X[i]$ biti baš ona čije sve konsekvence nijesmo primjenili u konstrukciji. Dalje nastavljamo isto kao i u ***Algoritmu 5.1.***

Zbiog važnosti funkcije $\texttt{define\_}\mu$, opišimo i nju algoritmom. Prvo detaljno opišimo tipove podataka *tree* i *ptree*. Zapisane u PASCAL-skoj notaciji njihov opis bi bio:

```
type
    ptree = ↑tree;
    tree = record
              φ : formula;
              y : array of ptree;
              R : set of integer
           end
```

Tip *ptree* je pokazivac na tip *tree*. Tip *tree* je tačka stabla i on je složeni tip, sastavljen od tri polja: φ koje sadrži formulu tačke, y je niz neposrednih slijedbeneka i R je skup indeksa niza (grane) X, tako da on sadrži indekse onih formula u grani čije su konsekvence prisutne u stablu na čijem se vrhu nalazi tačka koju predstavlja. Skup R nam služi da bi lakše implementirali funkciju *Rel*.

Prije nego li navedemo algoritam za funkciju $\texttt{define\_}\mu$, navedmo spisak funkcija čiju implementaciju podrazumjevamo. To su funkcije $\mathbf{A}$, *RepRoot*, *max*, *cloused*, *DefRel* i *Rel*. Funkcije $\mathbf{A}$ i *RepRoot* su već opisane u ***Definiciji 5.1.1.*** i ***Definiciji 5.1.3.*** Funkcija *max* ima na ulazu skup cjelih brojeva, a vraća maksimalan broj iz ulaznog skupa. Funkcija *cloused* je bulovska i ima na ulazu dva cijela broja i i j, takva da $i < j$. Vrijednost j predstavlja najmanji indeks formule u nizu (grani) X takav da je funkcija $\mu[j]$ definisana, pa funkcija $cloused(i,j)$, vraća vrijednost `true` ako je stablom $\mu[j]$ moguće "zatvoriti" granu X, ako je posmatramo samo do formule $X[i]$, inače vraća `false`. Drugim riječima, posmatramo granu X' takvu da je $X'[l] = X[l]$, za $l \leq i$. Ako je moguće, u skladu sa pravilima (P1)–(P6), konkatenirati na granu X' svaku maksimalnu granu stabla $\mu[j]$, tako da je svaka konkatenirana grana zatvorena, tada funkcija *cloused* vraća `true`, inače vraća `false`. Neposredno zaključujemo da ako za je $cloused(i,j) = \texttt{true}$, tada su tačke koje sadrže formule $X[l]$, za $i < l \leq j$, su irelevantne i u izvjesnim situacijama relevantne. Ovo situaciju smo već opisali u uvodu ovog poglavlja, a ona nastaje kada je neka od tačaka $X[l]$ za neko $i < l \leq j$ relevantna u tablou, ali nije relevantna u tablou $\mu[j]$. Ako tada definišemo $\mu[l]$ kao $\mu[j]$, narušavamo definiciju funkcije μ, ali ne narušavamo konstrukciju zatvorenog tabloa, jer tablo $\mu[j]$ zatvara i sve grane koje nastaju iz neposrednih slijedbenika tačke $X[l]$. Ovo "narušavanje" definicije funkcije μ je dozvoljeno, jer je cilj heuristike da zatvori što je moguće više otvorenih grana, a ne ispravna konstrukcija funkcije μ. Funkcija *Rel* je bulovskog tipa i ulazna vrijednost je cjeli broj i, koji predstavlja indeks u nizu (grani) X i opisana je ***Definicijom 5.2.*** Primjetimo da je i relaciju *Rel* moguće samo parcijalno definisati, samo za neke tačke. Kako konstrukcija zatvorenog tabloa napreduje, tako se povećeva broj tačaka za koje je moguće odrediti relaciju *Rel*. Relacija *DefRel* je boolovskog tipa, ulazna vrijednost je cijeli broj i. Funkcija *Rel* varća `true` ako je relacija *Rel* definisana u tački $X[i]$, inače, vraća `false`. Motiv da se u strukturu *tree* uvede skup R jeste upravo lakša realizacija funkcije *Rel* i *DefRel*.

Navedimo sada funkciju `define_μ` u PASCAL-skoj notaciji:

```
function define_μ(k : integer ) : integer ;

var
      i, j, m : integer ;
      f : boolean ;
      x : tree;

begin
      i := lenX;
      repeat
            if i = lenX then begin
                new (x);
                x ↑.φ := X[i];
                x ↑.y[0] := nil ;
                x ↑.R := [k];
                μ[i] := x
            end
            else begin
               m := len(μ[i] ↑.y) + 1;
               μ[i] ↑.y[m] := μ[i + 1];
               if DefRel(i) then
                  if μ[i + 1] ↑.φ = nil  then
                     if Rel(i) then μ[i] := RepRoot(μ[i + 1], X[i])
                                else μ[i] := A(X[i], μ[i] ↑.y)
                  else begin
                     f := true ;
                     for j := 2 to no_cons(i) do f := f and (μ[i] ↑.y[0] ≡ μ[i] ↑.y[j]);
                     if Rel(i) then
                        if f then μ[i] := A(X[i], ⟨μ[i + 1]⟩)
                               else μ[i] := A(X[i], μ[i] ↑.y)
                     else
                        if f then μ[i] := μ[i + 1]
                               else μ[i] := A(nil , μ[i] ↑.y)
                  end
            end ;
            i := i − 1;
      until ( not DefRel(i)) and i > 0;
      if μ[i] ↑.φ = nil  then begin
         j := i + 1;
         m := max(μ[j] ↑.R);
         while m < i and cloused(i, j) do begin
                 μ[i] := μ[j];
                 i := i − 1
         end ;
         μ[i + 1] := RepRoot(μ[j], X[i])
      end ;
      define_μ := i + 1
end ;
```

Opišimo dalje funkciju `define_μ`. Funkcija `define_μ` se poziva u onom trenutku kada je niz (grana) X kontradiktorna, zatvorena. Tada polazeći od posljednje formule u nizu (grani) X definišemo funkciju μ unazad kroz niz X, dok god je to moguće, u skladu sa ***Definicijom 5.1.4.*** Tačke u kojim nije moguće definisati funkciju μ su one kod kojih nemamo vriednosti funkcije μ za njene neposredne slijedbenike. Neka je formula $X[i]$, u kojoj nije moguće definisati u potpunosti vrijednost funkcije $\mu[i]$, takva da joj je indeks i najveći (u grani X). Kada sve vrijednosti za funkcije μ budu dodate, za direktne slijedbenike tačke $X[i]$, moguće će biti definisati vrijednost funkcije μ za $X[i]$. Opisane korake algoritma realizuju naredbe od samog početka zaključno sa `repeat - untile` petljom u funkciji `define_`μ.

Kada izadjemo iz `repeat - until` , brojač i sadrži vrijednost takvu da za svako $i < l \leq lenX$, vrijednost funkcije $\mu[l]$ je potpuno odredjena, a za $1 \leq l \leq i$ vrijednost funkcije $\mu[l]$ još nije odredjena. U tom slučaju ako je $j = i + 1$, vrijednost j će predstavljati najmanji indeks za koju je vrijednost funkcije $\mu[j]$ definisana. Ostaje da provjerimo da li $\mu[i] = \mu[j]$, za $1 \leq i < j$. Označimo li sa $m := max(\mu[j] \uparrow .R)$, tada će m prestavljati najveći indeks formule čije su konsekvence sadržane u $\mu[j]$, pa moguće je provjeriti uslov $closed(i, j)$, ako je $m < i < j$. Kao što smo već pomenuli u opisu funkcije *cloused*, ako je ispunjen uslov $closed(i, j)$, tada je tačka sa formulom $X[i]$ irelevantna u $\mu[j]$ i tada definišemo $\mu[i] = \mu[j]$. Sledeća `while` petlja upravo realizuje upravo opisani postupak. Na kraju i opet sarži vrijednost takvu da za svako $i < l \leq lenX$, vrijednost funkcije $\mu[l]$ je potpuno odredjena, a za $1 \leq l \leq i$ vrijednost funkcije $\mu[l]$ još nije odredjena. Funkcija `define_`μ, tada vraća vrijednost $i + 1$.

Primjetimo, koristeći već uvedene oznake i oznaku $\mathfrak{m}_j = |\mathbf{CM}_{\mu[j]}|$ da bi u slučaju ***Algoritma 5.1.*** broj grana koje bi trebalo "zatvoriti" u grani X od formule $X[j]$ do formule $X[i]$, u oznaci $\mathfrak{n}_1$ bio jednak sledećem izrazu (kada je on definisan, inače smatramo da je 0):

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{m}_j \prod_{i<k\leq j} \texttt{no\_cons}(k).$$

Primjenom ***Algoritma 5.2.*** broj grana koje treba "zatvoriti" u grani X od formule $X[j]$ do formule $X[i]$, u oznaci $\mathfrak{n}_2$ je jednak izrazu (kada je on definisan, inače samtramo da je 0):

$$\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{m}_j(j - i).$$

Odnos ova dva broje je jednak izrazu (kada je on definisan):

$$\frac{\mathfrak{n}_1}{\mathfrak{n}_2} = \frac{\prod_{i<k\leq j} \texttt{no\_cons}(k)}{j - i}.$$

Primjer 5.2.1. Pretpostavimo li da je za svako k, takvo da $i < k \leq j$ važi $\texttt{no\_cons}(k) = 2$, tada je:

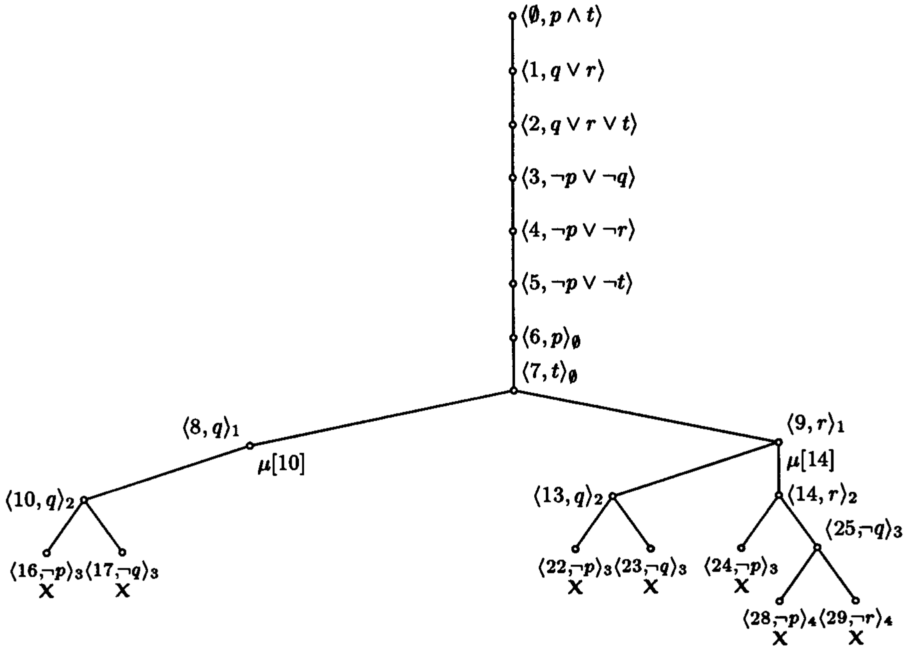
$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{m}_j 2^{j-i}.$$

Da bi sagledali koliko je ***Algoritam 5.2.*** efikasniji u odnosu na ***Algoritam 5.1,*** navedimo slijedeću tabelu njihovog odnosa:

$j-i$	$\frac{n_1}{m_j}$	$\frac{n_2}{m_j}$	$\frac{n_1}{n_2}$
1	2	2	1.00
2	4	3	1.33
3	8	4	2.00
4	16	5	3.20
5	32	6	5.33
6	64	7	9.14
7	128	8	16.00
8	256	9	28.44
9	512	10	51.20
10	1024	11	93.09
11	2048	12	170.66
12	4096	13	315.07
13	8192	14	585.14
14	16384	15	1096.26
15	32768	16	2048.00
16	65536	17	3855.05

Primjetimo kao vrlo važno da efikasnost heuristike ne zavisi od $\mathtt{no\_cons}(k)$, za $i < k \leq j$.

Primjer 5.2.2. Navedimo primjer konstrukcije zatvorenog analitičkog tabloa korišćenjem upravo predložene heuristike. Razmotrimo zatvoreni tablo iz ***Primjera 2.1.1.*** Obilježimo li sa $\mu[n]$, $\emptyset \leq n \leq 31$ vrijednosti funkcije μ za tačke pomenutog tabloa sa ordinalima n, tada je šematski konstrukcija predstavljena Slikom 14. Na Slici 14. posebno su naglašene tačke sa ordinalima 8 i 9, jer se u njima efekat optimizacije najveći. U tački sa ordinalom 8, pošto nam je poznato $\mu[10]$, nije potrebno razvijati tablo za ostale neposredne slijedbenike tačke sa ordinalom 8, a to su tačke sa ordinalima 11 i 12. Slično važi i za tačku sa ordinalom 9, gdje nam je poznato $\mu[14]$, pa nije potrebno dalje konstruisati tablo za tačku sa ordinalom 15. Primjetimo da ukupan broj tačaka u kompletnom tablou za ***Primjer 2.1.1***, konstruisan ***Algoritmom 5.1*** iznosi 32 tačke, dok taj broj za konstrukciju ***Algoritmom 5.2*** iznosi 21 tačku. Primjetimo takodje, da je u konstrukciji tabloa ***Algoritmom 5.1*** upotrebljena samo jedna irelevantna tačka (sa ordinalom 2).



Slika 14.

Opisanu funkciju `define_μ` moguće je još optimizovati. Naime kada izadjemo iz **`repeat - until`** petlje suočavamo se sa zadatkom da nadjemo takvo i za koje važi da tako da za svako l, tako da $i < l \leq j$ važi $\mathit{cloused}(i, j)$. Primjetimo da pretraživanje koje slijedi u `define_μ` je sekvencijalnog tipa. Ako ovaj dio algoritma promjenimo tako da primjenjujemo binarno pretraživanje, ***Algoritam 5.2.*** će se značajno ubrzati.

Algoritam 5.3. Kao ulaz u algoritam imamo niz formula Φ, i formulu φ. Algoritam konstruiše tablo $\mathrm{T}^{\Phi\cup\{\neg\varphi\}}$. Sve globalne promjenljive, funkcije i procedure su iste kao u ***Algoritmu 5.2.*** sem `define_μ`, pa ih nećemo ponovo navoditi. Funkcija `define_μ` je modifikovana tako da pretraživanje koje se nalazi na njenom kraju je binarno, a ne sekvencijalno kao u ***Algoritmu 5.2.***

Listing modifikovane funkcije define_μ, tada je:

```
function define_μ(k : integer ) : integer ;

var
      i, j, : integer ;
      a, b, c : integer ;
      f : boolean ;
      x : tree;

begin
      i := lenX;
      repeat
            if i = lenX then begin
                new (x);
                x ↑.φ := X[i];
                x ↑.y[0] := nil ;
                x ↑.R := [k];
                μ[i] := x
            end
            else begin
                m := len(μ[i] ↑.y) + 1;
                μ[i] ↑.y[m] := μ[i + 1];
                if DefRel(i) then
                    if μ[i + 1] ↑.φ = nil  then
                        if Rel(i) then μ[i] := RepRoot(μ[i + 1], X[i])
                                  else μ[i] := A(X[i], μ[i] ↑.y)
                    else begin
                        f := true ;
                        for j := 2 to no_cons(i) do f := f and (μ[i] ↑.y[0] ≡ μ[i] ↑.y[j]);
                        if Rel(i) then
                            if f then μ[i] := A(X[i], ⟨μ[i + 1]⟩)
                                 else μ[i] := A(X[i], μ[i] ↑.y)
                        else
                            if f then μ[i] := μ[i + 1]
                                 else μ[i] := A(nil , μ[i] ↑.y)
                    end
            end ;
            i := i − 1;
      until ( not DefRel(i)) and i > 0;
      if μ[i] ↑.φ = nil  then begin
         j := i + 1;
         b := j;
         a := max(μ[j] ↑.R);
         while (b − a) > 1 do begin
               c := (a + b) mod 2;
               if cloused(c, j) then b := c
                                else a := c
         end ;
         for i := j − 1 downto b do μ[i] := μ[j];
         i := c;
         μ[i + 1] := RepRoot(μ[j], X[i])
      end ;
      define_μ := i + 1
end ;
```

Primjetimo, koristeći već uvedene oznake i oznaku da bi u slučaju ***Algoritma 5.3.*** broj grana koje bi trebalo "zatvoriti" u grani X od formule $X[j]$ do formule $X[i]$, u oznaci n_3, imajući u vidu dobro poznate osobine binaranog pretraživanja, bio bi jednak sledećem izrazu (kada je on definisan):

$$n_3 = m_j(1 + \mathrm{ilog}_2(j - i)),$$

gdje funkcija ilog_2 predstavlja logaritam u osnovi 2, zaokružen na gore. Odnos n_1 i n_3 je onda jednak izrazu (kada je on definisan):

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\prod_{i<k\leq j} \mathtt{no\_cons}(k)}{1 + \mathrm{ilog}_2(j - i)}.$$

Primjer 5.2.3. Pretpostavimo li da je za svako k, takvo da $i < k \leq j$ važi $\mathtt{no\_cons}(k) = 2$. Da bi sagledali koliko je ***Algoritam 5.3.*** efikasniji u odnosu na ***Algoritam 5.1.*** i ***Algoritam 5.2***, navedimo slijedeću tabelu njihovih odnosa:

$j-i$	$\frac{n_1}{m_j}$	$\frac{n_2}{m_j}$	$\frac{n_3}{m_j}$	$\frac{n_1}{n_3}$	$\frac{n_2}{n_3}$
1	2	2	1	2.00	2.00
2	4	3	2	2.00	1.50
3	8	4	3	2.66	1.33
4	16	5	3	5.33	1.66
5	32	6	4	8.00	1.55
6	64	7	4	16.00	1.75
7	128	8	4	32.00	2.00
8	256	9	4	64.00	2.25
9	512	10	5	102.40	2.00
10	1024	11	5	204.80	2.20
11	2048	12	5	409.60	2.40
12	4096	13	5	819.20	2.60
13	8192	14	5	1638.40	2.80
14	16384	15	5	3276.80	3.00
15	32768	16	5	6553.60	3.20
16	65536	17	5	13107.20	3.40

Primjetimo da kaoi i u ***Algoritmu 5.2.*** efikasnost heuristike ne zavisi od $\mathtt{no\_cons}(k)$, za $i < k \leq j$.

Primjetimo da heuristike opisane u ***Algoritmu 5.2.*** i ***Algoritmu 5.3*** imaju maksimalan efekat uštede u slučaju kada tačke u tabloima imaju više neposrednih slijedbenika, jer u tom slučaju imaju i irelevantne tačke više slijedbenika, a heuristike su upravo "koncentrisane" na minimalizaciju efekata "grananja" irelevantnih tačaka. Navedeni primjeri ilistruju upravo opisanu situaciju.

Na kraju primjetimo i to da implementacija heuristika u već postojeće dokazivače nebi trebala da bude veći problem, jer je relativno izdvojena od samog kontrolnog mehanizma originalnog dokazivača. (Uporedite procedure `tableaux` i `tableaux_heuristic`.)

Moguća je i modifikacija heuristika i za dokazivače koji nijesu bazirani na metodi analitičkih tabloa, za one dokazivače koji u svom radu konstruišu neko stablo. Moguće je naime apstraktno posmatrati vid konstrukcije stabla i preformulisati pojmove i procedure koje se javljaju u ***Algoritmu 5.2.*** i ***Algoritmu 5.3.*** Tako na primer procedura `contradiction` bi predstavljao uslov zavrsetka konstrukcije u grani, funkcija `applay` bi vršila konstrukciju stabla i slično. Ovakvo uopštavanje bi učinilo mogućim primjenu ovih heuristika i van domena automatskog dokazivanja teorema i učinilo bi ih primjenjljivim na probleme vjestačke inteligencije, autmatskog rezonovanja, logičke igre, sistemi za pretraživanje baza podataka i drugi sistemi koji u na neki način konstruišu stabla.

Bibliografija

[MTlog85] Editori: J. Barwise i S. Feferman, *Model-Theoretic Logic.* Springer-Verlag, 1985.

[EWBet59] E. W. Beth, *The Fundations of Mathematic*, North-Holland, 1959.

[CCCJK73] C. C. Chang, Jerome H. Keisler, *Model Theory.* North-Holland Publishing Company, 1973.

[MADic75] M. A. Dickmann, *Large Infinitary Languages*, North-Holland Publishing Company, 1975.

[FDrak74] Franc R. Drake, *Set Theory: An Introduction to Large Cardinas.* North-Holland Publishing Company, 1974.

[WPHan64] W. P. Hanf, *Incompactness in languages with infinitely long expressions.* Fund. Math. **53**, 309–324, (1964).

[LHenk61] L. Henkin, *Some remarks on infinitely long formulas.* Infinitistic Methods, Warsaw, 167–183 (1961).

[KJJHi55] K. J. J. Hintikka, *Form and content in quantification theory*, Acta Philosophica Fennica, **8**, 7–55 (1955).

[AKana94] Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite.* Springer-Verlag, 1985.

[JKeis71] Jerome H. Keisler, *Model Theory for Infinitary Logic.* North-Holland Publishing Company, 1971.

[JKATa64] Jerome H. Keisler, A. Tarski, *From accessible to inaccessible cardinals.* Fund. Math. **53**, 225–308, (1964).

[MMakk69] M. Makkai, *Preservation theorems for logic with denumerable conjunctions and disjunctions.* J. Symb. Logic, **34**, 437–459 (1969).

[ZMija87] Žarko Mijajlović, *An Introduction to Model Theory.* University of Novi Sad, Institute of Mathematics, 1987.

[RSmul68] Raymond M. Smullyan, *First-Order Logic.* Springer-Verlag, 1968.

[RSmul66] Raymond M. Smullyan, *Trees and Nest Structures.* J. Symb. Logic, **31**, 303–321 (1966).

[RSmul63] Raymond M. Smullyan, *A Unifying Principle in Quantification Theory.* Proceedings of the National Academy of Sciences, June 1963