

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

PROSTOR I VREME U APARATU
INFINITEZIMALNOG RAČUNA

PRILOG EPISTEMOLOGIJI MATEMATIKE

- MAGISTARSKI RAD -

AUTOR

ALEKSANDAR NIKOLIC

MENTOR

Dr MILAN BOŽIC

BEOGRAD 1990.

PREDGOVOR

Problemom razvoja prostora i vremena kao i razvojem infinitezimalnog računa, bavili su se mnogi filozofi, naučnici i istoričari nauke, i kao plod njihovih istraživanja objavljen je veliki broj radova i knjiga koji obrađuju probleme tih, uglavnom, odvojenih oblasti. Među opštim matematičko-filozofskim analizama prostora i vremena ističu se dela Grünbauma [22], Reichenbacha [44], Whitrowa [55]. Istorijski razvoj tih pojmova se može pratiti kroz Čapekov [13] izbor filozofskih tekstova Duhema, Cornforda, Samburskya, Koyréa kao i originalnih naučnih tekstova od Aristotela do Ajnštajna. Možda najreprezentativnije delo o razvoju infinitezimalnog računa je Boyerov *The Historical development of the calculus* [9] u kojoj su jasno naznačeni duboki filozofski i matematički koreni Njutnovog i Lajbnicovog zasnivanja infinitezimalnog računa. Čisto matematički pristup ovoj temi je dat u [18].

Ovaj rad je pokušaj određivanja stepena važnosti veze između prostora i vremena sa jedne i infinitezimalnog računa sa druge strane, odnosno pokušaj da se odredi mesto i uloga prostora i vremena u otkriću matematičkih zakonitosti infinitezimalnog računa.

Rad je podeljen u dve celine. Prva celina obuhvata antički period u kome se nalaze počeci naučnog shvatanja prostora i vremena, kao i prvi pokušaji rešavanja matematičkih problema iracionalnosti brojeva, kvadrature kruga, izračunavanja zapremina, površina, određivanja pravca tangente - matematičkih korena infinitezimalnog

računa. U ovom delu su obrađena različita videnja prostora i vremena od Talesa preko elejaca i atomista do Augustina, najznačajnijeg hrišćanskog filozofa koji se njima bavio. Osnovna literatura vezana za ovu temu je, [3], [5], [6], [15], [19]. Razvoj matematičkih ideja u tom vremenu, pa i onih vezanih za problematiku rada nalazi se u [21], [24] i [53].

U drugoj celini je praćen razvoj matematičkog koncepta prostora i vremena i nagli razvoj fizike i mehanike, što je pored same matematike imalo odlučujući uticaj na Njutново otkriće računa fluksija. Najveći deo ove celine zauzima upravo analiza Njutnovog rada na infinitezimalnom računu. Na kraju je izneta mogućnost uticaja alhemije na njegovo otkriće, i to baš preko specifičnog shvatanja prostora i vremena. Glavna literatura na koju se oslanja ova celina je [9], [16], [17], [18].

Na kraju je dat spisak korišćene literature. Žao mi je što do nekih knjiga i radova nisam uspeo doći, a to se prvenstveno odnosi na knjigu M. Baron - The origins of the infinitesimal calculus, Pergamon Press, 1969 i neke radove F. Cajoria. Pošto sam sam prevodio citirane delove strane literature, oni su možda malo slobodniji i neprecizniji, no verujem da se smisao originala nije izgubio. Uglavnom su navedeni svi izvori citiranih delova, a ako je to negde i propušteno kao i za sve ostale greške odgovornost snosim sam.

Konačno, želim da se zahvalim onima koji su mi pomogli pri izradi ovog rada. To je, pre svega, dr. Milan Božić, koji je svojim savetima i sugestijama kao i omogućenoj slobodi u radu najviše doprineo ovakvom njegovom sadržaju. Takođe, veliku zahvalnost dugujem dr. Duri Pauniću čija su predavanja iz istorije matematike

bila moj prvi i odlučujući kontakt sa tom problematikom i koji mi je nesebično pomogao u odabiru literature i tokom pisanja rada uvek bio spreman na diskusije o mojim dilemama.

Seminar iz istorije matematike koji vodi i organizuje prof. dr. Dragan Trifunović kao i razgovori koje sam vodio sa njim tokom poslediplomskih studija imali su veliki uticaj na ideju o ovom radu.

Na kraju moram da kažem da je na moja razmišljanja i ideje o vezi prostora, vremena, beskonačnosti i matematike najinspirativnije delovala izvanredna knjiga Miloša Arsenijevića *Prostor, vreme, Zenon* [5], knjiga koja me je svojim vrcavim stilom i bogatstvom ideja prosto opčinila.

SADRŽAJ

UVOD	1
GLAVA I: MITSKO KOSMOLOŠKE IDEJE O PROSTORU I VREMENU	4
GLAVA II: UTICAJ GRČKIH ANTIČKIH IDEJA O PROSTORU I VREMENU NA PRVE KORAKE U RAZVOJU INFINITEZIMALNOG RAČUNA	9
II.1. Dileme o promenljivosti i mnoštvenosti sveta	10
II.2. Reakcije na Parmenidovo učenje o Jednom	15
II.3. Kvantizacija prostora i vremena	25
II.4. Platon i Aristotel - početak matematizacije prostora i vremena	32
II.5. Prva linearna koncepcija vremena	41
GLAVA III: MATEMATIČKI KONCEPT PROSTORA I VREMENA	45
III.1. Brzina kao odnos puta i vremena	46
III.2. Apsolutni i relativni vid prostora i vremena	49
III.3. Prostor i vreme u računu fluksija	55
III.4. Vreme u alhemiji i infinitezimalni račun	68
ZAKLJUČAK	76
LITERATURA	77

ALS DAS KIND KIND WAR
WAR ES DIE ZEIT DER FOLGENDEN FRAGEN
WARUM BIN ICH ICH UND WARUM NICHT DU?
WARUM BIN ICH HIER UND WARUM NICHT DORT?
WANN BEGAN DIE ZEIT
UND WO ENDEN DER RAUM?

W. Wenders & P. Handke - Nebo nad Berlinom

U V O D

Prostor i vreme su, kao primarne iskustvene kategorije utkane u samu strukturu i bit postojanja vasiona i čoveka u njoj, oduvek bili jedan od središnjih pojmova istraživanja umetnika, filozofa i naučnika. I pored velikog broja različitih shvatanja i tumačenja prostora i vremena, u kojima su se filozofija i nauka stalno prožimale, može se kazati da i do danas nisu potpuno i adekvatno racionalno objašnjeni. Za većinu najstarijih civilizacija prostor kao samostalna kategorija predstavljao je sinonim za Univerzum, vasionu koja jeste. Tako se otkrivanje tajni prostora svodilo na gledanje u Nebo, Zvezde, Sunce, Mesec, i kako se razvijala astronomija tako je evoluiralo i shvatanje prostora koji je postao predmetom aktivnog naučnog i filozofskog proučavanja. Vreme je

takode bilo posmatrano kroz prirodu i Nebo. Sa jedne strane su bili kružno kretanje zvezda i makro ciklusi smenjivanja godišnjih doba i dana i noći, a sa druge strane mikro ciklusi stalnog radanja i umiranja svega živog na zemlji. Sasvim je jasno zašto je bilo dominantno cikličko prikazivanje vremena pri kome je postojanje čista bezvremenost koja isključuje svaku stvarnu novost jer je budućnost bila određena sadašnjošću koja je, u stvari, već bila prošlost. Može se kazati da je, istorijski gledano, današnja, moderna predstava o pravolinijskom toku vremena izuzetna. Ciklička predstava je u različitim kulturama u različitim vidovima vladala sve do 17. veka, a glavni uzrok promene tog shvatanja je bila stalna ekspanzija Hrišćanstva čije je središnje učenje o razapinjanju Hrista na krst smatrano jedinstvenim, neponovljivim događajem kome odgovara pravolinijsko - neponovljivo vreme. Konačan udarac kružnom poimanju vremena zadaće Njutn (Isaac Newton 1643-1727) u čuvenim "Principima". To je naravno, ne znači da je kružno vreme ukinuto, već je samo prepustilo dominantno mesto pravolinijskom shvatanju vremena.

Paralelno sa razvojem pojmova prostora i vremena sazrevala je i ideja infinitezimalnog računa, čiji se koreni nalaze još u starogrčkoj matematici, tačnije u problemu nesamerljivosti pojedinih geometrijskih veličina. Naime, proporcionalnost linija, koje su stari Grci uzimali za kontinualne, nije se mogla izraziti preko odnosa brojeva, koji su smatrani diskretnim veličinama. Tokom daljeg razvoja matematike i nauke uopšte javila su se četiri osnovna problema čije je rešavanje dovelo do ključne ideje infinitezimalnog računa - inverznosti postupka diferenciranja i integraljenja. Ta četiri problema su:

1. Određivanje trenutne brzine ako je poznata veza između pređenog puta i vremena, i obrnuto, određivanje pređenog puta u datom vremenu ako je poznata brzina kretanja.
2. Nalaženje tangente krive.
3. Određivanje minimalne i maksimalne vrednosti funkcije.
4. Određivanje dužine krive, površine i zapremine obrtnih tela.

Sa prostorom i vremenom posebno su vezani prvi i drugi problem, za čije rešavanje je bio neophodan dinamički pristup krivoj i tangenti. A upravo je odlučujući korak (pored Lajbnica) u naučno-matematičkom kreiranju infinitezimalnog računa načinio Njutn, kod koga su centralni pojmovi bili brzina i kretanje, a samim tim i vreme i prostor-rastojanje u čijim okvirima se kretanje odvijalo. Tako je, za razliku od Lajbnica za koga je osnovni problem bila integracija, za Njutna osnovni proces bio proces diferenciranja. No, da bi došao do zadovoljavajućih rezultata, Njutn je morao vladati i geometrijskim metodama razvijenim kod Grka (Eudoks, Demokrit, Arhimed) i kasnije Kavalijerija, i aritmetičkim metodama korišćenim od strane njegovih bliskih prethodnika, Dekarta i Valisa.

Na kraju treba naglasiti da je još jedan pojam imao veliku ulogu u stvaranju infinitezimalnog računa, a to je pojam beskonačnosti odnosno beskonačno male veličine, pojam koji je bio glavni most između filozofskog i naučno-matematičkog pristupa prostoru i vremenu a samim tim i infinitezimalnom računu.

GLAVA I

MITSKO-KOSMOLOŠKE IDEJE O PROSTORU I VREMENU

Još je praistorijski čovek bio svestan stalnosti ciklusa rođanja i smrti i svoje mrtve je sahranjivao u utrobu Majke Zemlje u zgrčenom položaju sa oružijem, oruđem, odelom, nakitom pa i hranom u kojoj su i sami oskudevali - sa svim onim što je smatrao da će im biti potrebno u njihovom budućem životu. Tako je sve bilo spremno za novo rođanje. U svim tim ciklusima su videli Božije delo i volju pa se ne treba čuditi što su i prve civilizacije, koje su sve nepoznanice sveta objašnjavale Bogom ili Bogovima, i vreme smatrali

božanstvom ili oblikom manifestacije Vrhovnog Božanstva od koga teče kao reka života. Kod starih Egipćana vrhovni bog, bog sunča Ra, je bio vladalac vremena. Svakog sata u danu i noći on je menjao oblik - radio se kao skarabej a silazio u podzemni svet kao krokodil. U trenutku uskrsnuća uzimao je oblik dvostrukog lava "juče i sutra". Oziris, vaskrsnuto ljudsko biće koje je postalo bog, o sebi kaže: "Ja sam juče, danas i sutra". On živi u kući Večnosti ili u "kući milion godina" ([51] str. 92). Egipćani su beskrajno vreme predstavljali i u liku boga Heha koji u desnoj ruci nosi magični krst Ankh ⌘ kao simbol miliona godina budućeg života. Njegov krug je savršena slika onoga što nema ni početka ni kraja (vremena) i predstavlja dušu koja je večna. Smatralo se da onaj koji poseduje geometrijski ključ ezoteričnih misterija, kojih je simbol upravo taj krst sa drškom, zna otvoriti vrata sveta mrtvih i može proniknuti skriveni smisao večnog života. Ključni momenat u ovakvom kružnom poimanju vremena kod Egipćana je njihova spoznaja prirodnih ritmova koji su se manifestovali kako na nebu (kružno kretanje zodiaka) tako i na zemlji (sezonsko plavljenje Nila, smeni godišnjih doba, dana i noći).

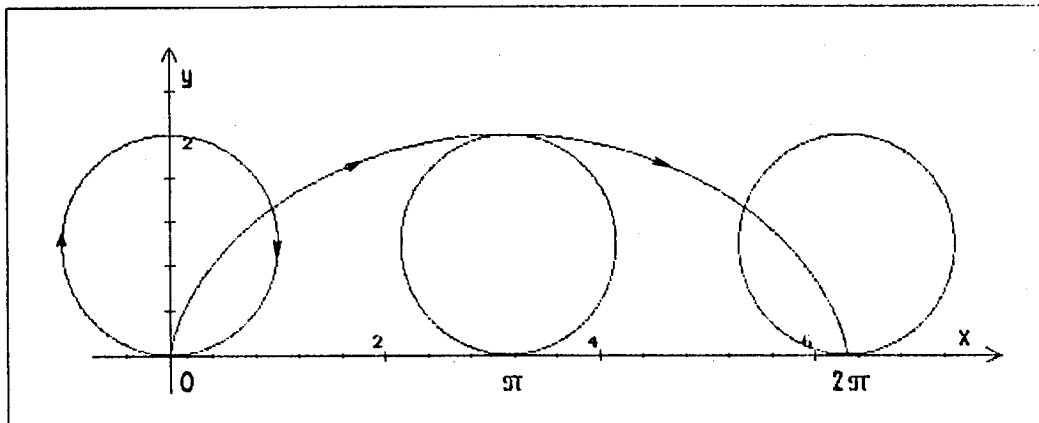
I u Indiji se može naći ovaj isti arhetipski simbolizam božanstva i beskrajnog toka vremena kroz ciklus života i smrti. U Bagavagiti (Pesma Uzvišenog, 3. ili 4. vek p.n.e) Bog Višna kaže: "Znaj da sam ja VREME koje čini da svetovi nestanu kada su zreli za to, i da dolazim da bi im doneo uništenje."* Vreme je takode predstavljano i bogom Šivom koji se prikazuje utelovljenjem kosmičke energije. On je razaratelj života i onaj koji ponovo stvara novi

*Bhagavadgita, 11. poglavlje

život. Boga Šivu su zvali Maha Kala - veliko vreme ili Kala Rudra -
- vreme koje sve proždire. Oko 7. veka p.n.e. osnovna pretpostavka
života je postao Samsara, stalni ciklus ponovnog rođanja i smrti
koji ukazuje na neprekidan krug postajanja koja su pod uticajem dela
svakog pojedinca. Time je naglašena moralna zavisnost svakog budućeg
života, što će kasnije biti karakteristika i Empedoklovog shvatanja
života, smrti i cikličkog vremena. Isto tako je i ceo Univerzum
prolazio kroz cikluse propadanja i ponovnog stvaranja u određenim
vremenskim razmacima. Osnovna jedinica takvog vremena je Yuga (doba)
koja traje 1080000 ljudskih godina. Potpuni ciklus je Maha-Yuga -
niz od četiri Yuge. Hiljadu Maha-Yuga činilo je jedan Brahmin dan,
jednu Kalpu koja je započinjala novim stvaranjem i evolucijom a
završavala raspadanjem što je u isto vreme bio i novi početak.
Nastavak i propast svake Kalpe praćeni su ponavljanjem mitoloških
dogadaja. Na taj način je vreme predstavljalo kosmički ritam,
pulsiranje periodičnog uništenja i stvaranja univerzuma.

I prvobitno grčko poimanje vremena je bilo pod snažnim uticajem
mitskog predstavljanja stvarnosti. Stari Grci su vreme poisto-
većivali sa kružnim tokom božanske reke Okeanos koja je okružavala
zemlju i obuhvatala univerzum. To je često simbolizovano Uroborosom,
zmijom koja sama sebi jede rep. Epimenidovi (oko 600. p.n.e.)
slebdenici su pričali da su mitski blizanci Dioskuri bili muškarac i
žena, i jednog su, kao monadu, nazvali vreme a drugog, kao dijadu,
priroda ([15] str. 36). Kasnije je vreme nazvano Hronosom i često
izjednačavano sa Kronosom, Zevsovim ocem a takode i sa bogom
Aionom. U helensko doba je bog Aion poistovećivan sa starim per-
sijskim bogom-vremenom Zurvanom. Zurvana je imao dva vida: Zur-
vana arkana (beskrajno vreme) i Zurvana dareghochvadhata (vreme

duge vladine koje traje 12000 godina). Treba ipak napraviti razliku boga Aiona (večnost koja se neprekidno ponavlja) i dvojnog boga Zurvane. U uvođenju dva vida vremena - beskonačnog i mada velikog ipak konačnog, nalazi se prva, skrivena misao linearnog, progresivnog vremena. Konačni vid vremena je uveden sa jedne strane kao drugi pol beskonačnog vremena sa kojim se kao celina uklapa u filozofiju dualizma ranog Zoroastrijazma, a sa druge strane to je oblik koji podseća na kružno ponavljanje - tada dominantno i vladajuće shvatanje vremena. Ali samo podseća, razlika je očigledna (slika 1). To nije obično kružno ponavljanje istog. Beskonačno vreme je linearno i večno, a konačno nastaje iz beskonačnog, kružno se kreće sve dok se ne vrati na početak i ponovo stopi sa beskonačnim vremenom. Time je izbegnuta stalno ponavljanje i u isto vreme uvedena vremenitost kao pokušaj nadvladanja večitog kruženja istog vremena. Ta razlika bi se grafički mogla predstaviti pomoću kružnice i cikloide.



Slika 1.

Iz istog razloga, bega iz večnog kruženja istog, Indijci su i uveli onako ogromne vremenske intervale koji za pojedinca, u toku njegovog ništavnog, pojedinačnog, ovozemaljskog života izgledaju ustvari pravolinijski. I Grci su pronašli metod da pobede većito kruženje. Zasnovali su geometriju kao apsolutnu nauku, nauku čije su istine vredele, vrede i sada a vredeće i u svakom novom životnim ciklusu. Bili su prosto očarani bezvremenim deduktivnim sistemom euklidske geometrije. Medutim, kao što je dobro poznato, euklidska geometrija je samo privid koji se javlja iz ograničenosti ljudskih perceptivnih sposobnosti, što je ekvivalentno indijskom prevladavanju bezvremenosti gde je pravolinijski vremenski tok takode samo privid ljudske perceptivne ograničenosti.

GLAVA II

UTICAJ GRČKIH ANTIČKIH IDEJA O PROSTORU I VREMENU NA PRVE KORAKE U RAZVOJU INFINITEZIMALNOG RAČUNA

Kada se jednim opštim pogledom obuhvati razvoj pojmova prostora i vremena u Grčkoj post-kosmološkoj misli, može se kazati da ne postoji neki specifično Grčki pogled na njih. Postoji veliki broj raznih cikličkih ali i začeci linearnih koncepcija vremena, kao i potpuno suprotnih videnja prostora - od prostora kao apsolutne praznine do atomima ispunjenog prostora. U svim tim idejama

provejavaju mnogi uticaji vavilonske, egipatske, indijske kulture. Zbog šire prihvaćene cikličke strukture vremena ono je potpuno apsorbovano u prostoru koji preovladava nad njim, pa samostalno proučavanje vremena, ipak, nema centralno mesto u celokupnoj grčkoj nauci i filozofiji. I pored toga starogrčko videnje prostora i vremena je imalo bitan uticaj na razvoj evropske misli o tim pojmovima, ali je za razliku od grčke, misao vremena evoluirala u pravcu vektorske, linearne veličine i proučava se u okviru zajedničkog relativističkog pojma prostor-vremena. Vrhunac razvoja, u smislu sistemske definisanosti i određenosti, koncept prostora i vremena u Grčkoj je dostignut u Aristotelovoj Fizici. Ali Aristotela treba proučavati isključivo u kontekstu već duge tradicije raznih prethodnika - pojedinaca i škola. Tu su u prvom redu miletska škola (Tales, Anaksimandar, Anaksimenes) Pitagora i njegovi slebdenici, Heraklit, elejska škola (Parmenid, Melis, Zenon), materijalistička škola (Empedoklo, Leukip, Demokrit), Platon.

II.1. DILEME O PROMENLJIVOSTI I MNOŠTVENOSTI SVETA

Prvi, mada nesigurni, pisani podaci o shvatanju prostora i vremena u Grčkoj potiču od Talesa (oko 625-547 p.n.e.). Njemu se pripisuju izreke: "Najveći je prostor jer on obuhvata sve stvari; najmudrije je vreme jer ono pronalazi sve" ([15] str. 65). Dakle za njega je prostor beskonačan i sve u njemu podleže vremenu. Tu nije jasno da li prostor, ako obuhvata sve, obuhvata i vreme i ako vreme pronalazi sve da li pronalazi sebe samo tj. da li su prostor i vreme u interakciji i da li i vreme ima "vremenistost". Kod Talesa nisu

date bilo kakva određene misli o strukturi i suštastvu prostora i vremena. O Talesovom slebdeniku Anaksimandaru (oko 611-546 p.n.e.) saznajemo iz Simplicijusovih komentara Aristotelove fizike. On je tvrdio da je Apeiron tj. ono što nema granica počelo bica i iz njega sve nastaje i sve propada. Sve se može obnavljati ali ne i propasti. Zato nastaju beskonačni svetovi koji propadaju natrag u ono iz čega i nastaju ([15] str. 80). Anaksimandar je izjavio da se propadanje i nastajanje svetova od neograničenog vremena vrte u krugu i stalno smenjuju. Verovao je u kontinuitet radanja i uništenja sveta kao permanentni proces bez početka i kraja. Tu se zapaža životna nit početak-kraj-početak u potpunom jedinstvu gde ništa nije samo početak niti samo završetak, već je pogodnije o početku govoriti kao o početku-završetku a o završetku kao o završetku-početku. Po Simplicijusu Anaksimandar je rekao: "Izvor iz kog bica nastaju je isti u koji se vraćaju svojim uništenjem po nužnosti, jer ona po redu vremena plaćaju kaznu i odštetu jedna drugima zbog nepravde" ([15] str. 85). Tako je ideja vremena jedinstvenom linearnom zavisnošću povezana sa redom ili balansom i teorijom osnovnih suprotnosti pre nego evolucijom. Vreme je na izvestan način odgovorno za regulisanje prirodnog kosmičkog reda i poretka a nije neutralni medijum u kome se stvari jednostavno menjaju. Ceo ovakav koncept je bez sumnje sugerisan prirodnim kružnim tokom godišnjih doba, dana i noći sa svojim alternativnim sukobom suprotnosti toplog i hladnog, suvog i vlažnog. Anaksimandarova kosmologija je prva nemitska kosmologija i naučna teorija koja pokušava da objasni svemir i suštinu promena u prostoru i vremenu, a ne da samo konstatuje da svemir Jeste.

Ovakve Miletske kosmološke spekulacije su izazvale dve potpuno

suprotne reakcije Heraklita (544-480 p.n.e.) i Parmenida (540-480 p.n.e.). Dok je Heraklit učio da su sve stvari sklone promenama, da teku i menjaju svoj oblik (Πάντα ῥεῖ), Parmenid je poricao bilo kakvu mogućnost promena i postojanja u prošlom i budućem vremenu. Dok je za Heraklita vreme prva materijalna suština za Parmenida je osnova fizičke realnosti bezvremena.

Tales i Anaksimandar su prećutno pretpostavljali da svet nije postao već da je večan. Heraklit je to direktno i rekao: "Ovaj kosmos (red sveta), isti za sve, nije učinio ni jedan od bogova niti od ljudi, nego bijaše uvek i jest i bit će večno živa vatra koja se po merama (periodički) pali i po merama gasi" ([15] str. 152). Dakle on je prvi od Grčkih filozofa eksplicitno rekao da je svet-kosmos večan a ne stvoren, da je u neprekidnom kretanju i da prolazi kroz cikluse koji se ponavljaju i svi u vatri nastaju i završavaju. Osnovni pokretač i karakteristika tih ciklusa je borba suprotnosti: "I priroda, mislim, teži ka suprotnom i iz toga stvara sklad, a ne iz jednoga, kao što je doista sjedinila muški pol sa ženskim, a ne svaki od njih sa istorodnim, i tako stvorila pravi sklad kroz suprotnost, a ne kroz jednakost." ([15] str. 150). Pošto je sve u kretanju i promenama, apsolutno postojeće biće mora da bude realitet kao proces a ne jednostavno egzistirajući realitet. Osnovni apstraktni proces je Vreme a osnovna realna forma (kao proces) je vatra. Vreme je potpuno apstraktan opažaj i ako želimo da suštinu vremena predstavimo na neki realan način, kao nešto postojeće onda se mora razumeti jedino kao proces. Realna forma vremena kao procesa je vatra. Suština vremena (kod Heraklita) je u tome što ono i jeste i nije, a inače je bez ikakve odredbe - čisto apstraktno biće i apstraktno nebiće neprekidno u jednom jedinstvu, a ipak razdvojeni.

To ne znači kao da vreme postoji ili ne postoji; već se vreme sastoji u tome što u biću neposredno nije, a u nebiću neposredno jeste... U vremenu nema onoga što je prošlo, ni onoga što je buduće već je u njemu postoji samo sada; i to sada jeste da ga ne bi bilo odmah je uništeno" ([25] str. 250). Za Hegela je Heraklitovo vreme prva forma onoga što postaje.

Za razliku od Heraklitovog večnog menjanja, za Parmenida je Biće jedno, nepokretno, nenastalo, večno i sferično, a promene su iluzije ili privid percepcija. U stihu 5 poeme O Prirodi Parmenid kaže: "Niti je bilo, niti će biti, čitavo sad je, jedno nepokretno." ([15] str. 211). Dakle, bivstvovanje u prošlosti i u budućnosti je ukinuto a ostalo je samo bivstvovanje sada. To "sada" neki tumači uzimaju kao potvrdu mišljenju da Parmenid nije prihvatao ideju bezvremenosti i ono što jeste nije opisivao kao bezvremenost [38]. Drugi tumači, opet, tvrde da je Parmenid koristio vremenske izraze kao što su trajanje, boravljenje, bilo, biće, sada, sa ciljem da porekne vremenske karakteristike bića, slično kao što je koristio prostorne izraze graničenje sa, prijanjanje uz, za odricanje prostornih karakteristika bića [45]. Čini se da su ovi drugi bliži pravim Parmenidovim razmišljanjima i da poricanje "bilo je" i "biće" ipak treba interpretirati kao negiranje proticanja vremena. Parmenid je tvrdio da to biće o kojem se jedino može govoriti i misliti smisljeno mora biti homogeno, kontinuirano, jedinstveno, večno i beskonačno. Zato ga karakteriše prostorna neograničenost i oblik savršene lopte, bez obzira što se na prvi pogled, van konteksta, čitanjem fragmenta B-8 može zaključiti suprotno. Granice o kojima se u njemu govori su samo granice NUŽNOSTI po kojoj stvari stoje onako kako se u argumentu konstatuje da moraju stajati ([5] str. 54). U

stihu 26-27 se govori o granicama tamo gde se s obzirom na vreme poriče postojanje početka i kraja: "Uz to je nepokretno u medama golemih veza bez početka i kraja..." Dalje u stihu 42-44 Parmenid kaže: "A jer ima (Biće) krajnju granicu sa svih je strana konačno, nalik na masu lepe okrugle kugle posvud od središta jednako daleko..." ([15] str. 212). Ta krajnja granica nije jednostavna prostorna granica, već suptilna granica nužnosti ne-početka i ne-kraja i to i u vremenskom i u prostornom smislu. Upoređenje prostora-kosmosa sa sferom može da nam sugerise Parmenidovo početno pripadništvo pitagorejskom krugu. Da li će se ta sfera koja pomalo podseca na Ajnštajnov Prostor-balon uzeti za beskonačnu zavisi od toga kako se shvati izraz beskonačno. Dok je za Melisa (5 vek p.n.e.), takode predstavnika Elejske škole, beskonačnost shvaćena u pogledu veličine, za Parmenida biće je beskonačno u smislu neprekidnosti (nejasno je da li i prostorne i vremenske) postojanja bez granica. Dakle, Parmenida ne zanimaju ni prostor ni vreme kao određeni realiteti koji postoje (jesu) i koje treba definisati i odrediti. Oni su važni samo utoliko da se pomoću vremenskih i prostornih izraza kao atributa bića ono što preciznije odredi. Njega ne interesuje šta je pra-počelo jer se o početku stvari ne može ni govoriti, a bezvremena večnost bića ne dozvoljava ni podelu vremena ni kraj vremena. Parmenid je, što se prirode tiče, možda najznačajniji po tome što se do njega još uvek prihvatalo da je protok vremena simbolizovan i bogu Kronosu koji proždire svoju decu, a posle njega je preovladalo shvatanje da univerzum ne propada i ne nastaje, već da ti pojmovi označavaju sastavljanje i rastavljanje elemenata prirode i Univerzuma. Time se ni prostor ni vreme više nisu uzimali za uzorke prirodnih događaja, već su bili njihove

osnovne odredbe. Šta su prostor i vreme suštinski ostalo je da se još razjasni i odgovori.

II.2. REAKCIJE NA PARMENIDOVO UČENJE O JEDNOM

Parmenidove ideje su ostavile dubok trag u grčkom naučno-filozofskom shvatanju prostora i vremena i izazvale dvojake reakcije. Na jednoj strani je Empedoklo (484-424 p.n.e.) koji je, pored toga što je delimično prihvatio Parmenidovo učenje, ponovo uspostavio promenu i izveo kosmologiju zasnovanu na mnoštvenosti pra-počela, a na drugoj strani su kasniji elejci Zenon (oko 460 p.n.e.) i Melis koji su dali nove argumente protiv mnoštva i kretanja. Da bi se pravilno shvatio Empedoklo i njegov pogled na prostor i vreme mora se pre toga vratiti do Pitagore (582-500 p.n.e.) i Pitagorejske škole koja je u mnogome uticala na filozofiju Empedokla.

O Pitagori saznajemo, uglavnom, iz komentara kasnijih filozofa Aristotela i Platona. Od autentičnih spisa ostali su samo neki delovi učenja o seljenju duša i o kosmologiji koja uključuje pojam vremena i vremensko ponavljanje. Osnova Pitagorejskog učenja je da su sve stvari brojevi, a elementi broja su parovi suprotnosti - parno i neparno ili ograničeno i neograničeno. Što se tiče porekla Pitagorinog matematičkog znanja razlikuju se tri osnovna korena: od Egipćana je naučio geometriju, od Fenićana nauku o brojevima i račun, a Kaldejaca astronomiju ([15] str. 98). I kod Pitagore i njegovih slebdenika pojmovi prostora i vremena su dati kroz kosmo- loške spekulacije o čemu nam svedoče sačuvani tekstovi iz Aristo-

telovih dela. Tako u prvoj knjizi rasprava O Pitagorinoj filozofiji piše da je "nebo jedno i da k sebi uvodi iz neograničenoga vrijeme, dah i prazno, koje vazda određuje mesto svake pojedine stvari." ([15] str. 410). A kakvo je, u ovakvoj kosmogoniji u kojoj je početak sveta dat sa uvođenjem prostornog i vremenskog određenja u nebo-Jedno, Pitagorino shvatanje samih prostora i vremena?

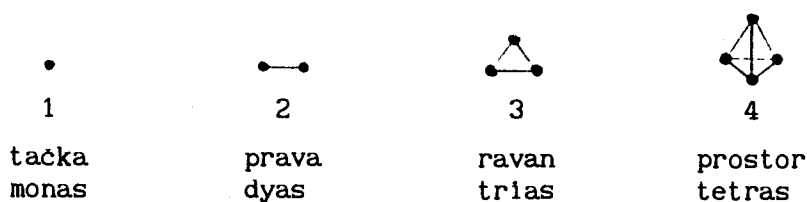
I kod Pitagore u učenju o Velikoj Godini je dominantno kružno poimanje života i smrti a samim tim i vremena. Učenje o Velikoj Godini se nalazi i u Platonovim delima Država (546b) i Timaj (39d) i predstavlja period za koji se sunce, mesec i planete vraćaju u svoj osnovni položaj koji se ogleda u međusobnom odnosu nebeskih tela. Kroz doktrinu u Velikoj Godini Pitagora je izneo verovanje da se vreme ponavlja u smislu rematerijalizacije svih individualnih događaja. "Mogao bi tko doći u nedoumicu (i u pogledu pitanja) da li se (ikada iznova) zbiva isto vrijeme ili ne... ali ako bi tko poverovao pitagorovcima da će se opet zbiti na broj iste stvari, - i da ću ja (iznova) držeći u rukama prutić, pripovijedati vama koji ćete (iznova) tako sjedeti, i da će sve drugo biti istovjento, - razumljivo je da će (po njemu) biti posrijedi isto vrijeme." ([15] str. 411). Pitagora je doktrinu o vremenskom ponavljanju izveo u ekstremnom obliku, dok je ideja reinkarnacije ustvari ideja o besmrtnosti duše. A Pitagora je bez ustezanja zaključio da se i svaki pojedinačni događaj u vremenu ponavlja i time postaje besmrtan. Za Pitagoru vreme je sfera (ili kugla) sveobuhvatnoga i kao takvo ono je Jedno, apsolutno i pitanje da li je večno ili ima početak, a samim tim i kraj, svodi se na pitanje da li je Sve večno ili nije. Jer egzistencija sfere sveobuhvatnog (vremena) ima smisla samo ako postoji to sveobuhvatno. A da je kojim slučajem Pitagora

mogao da prihvati nulu kao broj pridružen praznom-ničemu (a prazno postoji i ulazi u samo Nebo), pitanje večnosti vremena bi za njega bilo rešeno. Jer tada bi i kada nečega ima i kada nema, vreme to obuhvatalo i postojalo nezavisno od postojanja toga šta obuhvata. Ali za poimanje nule kao broja potrebna je bila neka druga kultura, neki drugi Bog, neka druga Duša - Hinduska duša.

Dalje, ako SVE dobija svoj broj tada bi i vreme moralo dobiti neki od njih, pa neka broj vremena bude alef nula (χ_0) kao prva beskonačnost. Tada bi alef nula predstavljao broj koji obuhvata sve brojeve (u to vreme su to samo prirodni brojevi) isto kao što i vreme obuhvata Sve, i dobija se teorija slična Peanovoj definiciji broja

$$0 = \{*\}, 1 = \{1\}, 2 = \{1, 2\}, 3 = \{1, 2, 3\} \dots \Leftrightarrow 0 = \{*\}, 1 = \{\cdot\}, 2 = \{\cdot\cdot\}, 3 = \{\cdot\cdot\cdot\} \dots$$

A gde je tu prostor? Koji je prostor broj? Da li vreme obuhvata i prostor? Ako se svakom broju dodeli grafički prikaz dobijamo prostorne figurativne ili poliedarske brojeve koje su Pitagorejci prou-



čavali. Iz toga se vidi da je prostor "samo" 4 pa je i on obuhvaćen vremenom. Tetras ili broj 4 je bio preciznije shvaćen kao Tetraktisa - savršenstvo koje u sebi sadrži prva četiri broja ($\{4=1, 2, 3, 4\}$). Da li je taj prostor ispunjen ili prazan i da li je beskonačan ne kaže se eksplicitno. Za rešenje tih pitanja veoma je značajan stariji Pitagorovac Arhita (428-365 p.n.e.) koji je poznat po istraživanjima matematičke teorije muzike a po Strojku i najveći matematičar od

Pitagorovaca ([47] str. 51) . Simplicije u Fizici 467,2b i Eudem u Fizici su pisali da je "Arhita ovako pitajući vodio razgovor: Kada bih se našao na kraju prostora, kao na primer na nebu sa zvezdama stajacicama, da li bih mogao ispružiti ruku ili štap izvan njega ili ne? I sad reći da ne bih mogao, bilo bi nerazumno, a ako ispružim ruku van, hoće li ono vani biti tijelo ili prostor... Pa ako je to tijelo, dokazana je pretpostavka (da je prostor konačan, A.N.), a ako je prostor - a prostor je ono u čemu jest ili može biti tijelo... i tako bi tijelo i prostor bili beskonačni." ([15] str. 379).

Pitagorejsko verovanje u seljenje duše se može naći i kod Empedokla u pojedinim fragmentima kosmološke poeme O prirodi i religijske poeme Očišćenja. Tako je glavna tema Očišćenja razvoj duše, njen pad, reinkarnacija u raznim živim bićima i eventualni beg iz večitog točka radanja. U fragmentu 117: "Jedno sam vrijeme već bio i dječak i djevojka, biljka i ptica i nijema riba iz širokog mora što skaće" ([15] str. 313), jasno je izražen stalni ciklus radanja i umiranja, a kako će se pojedino biće roditi i umreti zavisi od toga kako je ko živeo u prethodnom životu. (Duše plaćaju kaznu za svoje greške i grehe... fragment 115). Dakle inkarnacija je kazna za greh a svako novo rođenje je i novo mučenje pod stegom vremena. Ali u fragmentu 147 Empedoklo kaže da "ako se živi sveto i pravedno može se biti sretan i ovde a još više nakon odlaska odavde, jer će se postići blaženstvo ne na određeno vreme već će se moći večno otpočinuti" ([15] str. 320). Za razliku od večnog otpočnika Bog je besmrtn. To znači da se vreme može "pobediti" ispravnim životom koji dovodi do potpunog ukinuća granice života i ne-života jer "pobedeno" vreme postaje beskonačno vreme, a kao takvo nema ni početak ni kraj ni sredinu ni delove. Sve je Jedno. Moralni aspekt

vremena je lako prepoznatljiv i mnogo jasniji nego kod Anaksimandera.

U svojim poemama Empedoklo izlaže osnovnu doktrinu o 4 bazična fizička elementa i dve kosmičke sile-principa Ljubavi i Mržnje kao njihovog uzroka i snage koje njima upravljaju. Voda, vatra, zemlja i vazduh kao koreni svega drugog tj. svih smrtnih stvari ne mogu se jedni u druge pretvarati, već samo međusobno mešati. Ljubav i Mržnja su uvedeni kao uzroci dobra i zla u prirodi i u isto vreme to su aktivne kosmičke sile koje učestvuju u mešanju osnovnih elemenata. Ljubav kao ujediniteljska snaga sastavlja a Mržnja kao razdvojna snaga rastavlja elemente i po nekoj nužnosti izazivaju kretanje i naizmenično preovlađuju u stvarima. Često je i Ljubav razdvajala a Mržnja spajala što Aristotel u Metafizici I, 4, 985a [4] tumači kao nedoslednost u tumačenju prirodnih tokova. Empedoklovo verovanje da nema razdvajanja bez spajanja niti spajanja bez razdvajanja, da u prirodi postoji stalna alternacija suprotnosti i da vladavina Ljubavi dolazi posle uvećanja Mržnje, a vladavina Mržnje posle povećanja Ljubavi predstavlja najdublji deo Empedoklove filozofije (fragment 17, [15] str. 286). Ovakvo shvaćeni principi Ljubavi i Mržnje potpuno su analogni istočnjačkim osnovnim principima Jinu i Jangu. Kao što po kineskom tumačenju ne postoji ni jedna stvar koja je potpuno Jin ili Jang tako ni "u svemiru ništa ni prazno ni prepuno nije" (fragment 13, [15] str. 285).

Empedoklo je donekle prihvatajući Parmenidovo učenje izgradio pluralističku ontologiju ali za razliku od njega nije poricao promene i postojanje već ih je ponovo uspostavio u ciklusima suprotnosti Ljubavi i Mržnje koji su determinisani beskonačnim vremenom kao specifičnim regulatorom - "Kao što i prije bjehu

(Ljubav i Mrznja), i bit će, i nikada, mislim beskrajno vreme bit neće bez jedne i druge od njih", (fragment 16). Kao i vreme, i prostor je samo deo kosmologije. Uz izvesnu dozu proizvoljnog tumačenja fragmenta 13 i 14 (I u svemiru ništa ni prazno ni prepuno nije; Ničeg u svemiru praznog, stog odakle bi nešto pridošlo?) Empedoklovo učenje se može uzeti kao prapočetak atomističke teorije prostora (vidi [5] str. 56).

Pored Empedoklove pluralističke ontologije, kao posledice Parmenidovog učenja, nalaze se ideje Elejaca Melisa i Zenona i njihov svet bez kretanja, promene, postanja, propadanja, prostora i vremena. Melis je prihvatajući Parmenidovo učenje o jedinstvenosti nepromenljivosti Bića uveo još jedno njegovo posebno određenje. Ono nije bezvremeno kao Parmenidovo, već večno u vremenskom i prostornom smislu. Dok Parmenidovo biće nije nikada bilo, niti jeste, niti će ikada biti Melisovo biće uvek je bilo ono što je bilo i uvek će biti. Time se ukazuje na nenastalost Bića. U fragmentu 256 kaže da "ako nije nastalo onda jeste i uvijek je bilo i uvijek će biti i nema ni početka ni kraja već je beskonačno" ([15] str. 241). Ako bi bilo konačno graničilo bi se sa prazninom a ona ne postoji. Tako iz vremenske beskonačnosti sledi i prostorna beskonačnost. A iz beskonačnosti (prostorne i vremenske) Bića, u fragmentu 5 i 6 Melis zaključuje da je Biće Jedno jer ako to nije graničilo se sa nečim drugim a tada ta dva ne bi mogla biti beskonačna jer bi imali granicu jedno prema drugom. Na taj način Melis je ujedinio dve beskonačnosti - prostornu i vremensku, ali ni on, kao ni Parmenid ne kaže jasno da li su prostor i vreme sami po sebi beskonačni, već su oba ta pojma u funkciji određivanja Bića koje je beskonačno u prostoru i vremenu. Nešto pre Melisa Parmenid je prvi negirao

kretanje, prazan prostor i prazninu kao pojam, dok Melis osim tog unutrašnjeg kretanja, nedostatkom prostora negira i svako spoljašnje kretanje." A ni prazno nije ništa. Praznina naime nije ništa. A ništa ne bi moglo biti i ne kreće se (Biće). Nikamo ne može uzmaknuti, već je puno. Kad bi bilo prazno uzmicalo bi u prazninu. Kako praznina ne postoji nema kamo uzmaći." ([15] str. 242). Ovo eleatsko negiranje praznine istorijski se može shvatiti kao indirektno predskazivanje atomizma. Naime negiranjem mnoštva stvari, tvrdnjom da, ako ono ipak postoji, svaka stvar mora biti beskonačna u prostoru i vremenu kao i Jedno, što nije moguće, logički se dopušta jedino pluralizam atomističkog tipa gde su atomi minimalne jedinice svega postojećeg (vidi [18] predgovor str. 40).

Melisovom poimanju beskonačnog jednog pridružio se i Zenon sa svojim dokazima protiv mnoštva i kinematičkim aporijama u kojima se, pri različitim shvatanjima prostora, vremena i kretanja, nalaze protivrečnosti. Zenon, kao i ostali Elejci, negira prostor u kome se nalazi bitak. "Ako mesto (prostor) jeste nešto, na (u) čemu će biti? Ako je svako biće na nekom mestu (u nekom prostoru) očito će i za mesto (prostor) postojati mesto (prostor) i tako do u beskonačnost" ([3] str. 84, str. 89). Uvođenjem u igru ovakve sukcesivne beskonačnosti Zenon je u kinematičkim aporijama probleme prostora, vremena i kretanja podigao na viši nivo od svojih prethodnika. Kod njega se prvi put javljaju pitanja i dileme o unutrašnjoj strukturi tih pojmova. Već zbog same činjenice da nisu sačuvani originalni Zenonovi tekstovi aporija, već da se moramo zadovoljiti Aristotelovom interpretacijom, ne treba se čuditi da danas imamo veliki broj analiza i pristupa problemima koje one obrađuju. Kako su se razvijali matematika, filozofija i nauka o prirodi tako su se

javljala i različita objašnjenja aporija, a u zavisnosti od njih rešavane su i jezičke nedoumice samog teksta. Tako je Aristotelovo $\nu\tilde{\nu}$ tumačeno i kao trenutak bez trajanja i kao trenutak sa minimalnim trajanjem, ali i prevedeno sa nedeljivim "sada" analogno geometrijskoj tački ili kao vremenska infinitezimala. Za aporije se prepostavlja da su nastale kao reakcija na pitagorejsko predstavljanje prostora kao skupa tačaka, na atomističke teorije prostora i vremena, kao odbrana Parmenidovog učenja o jednom; drugi opet tvrde da su aporije čisti sofizmi ili da su date sa ciljem ukidanja kretanja i svake deljivosti (vidi [5] § 38). Uglavnom većina interpretatora i istraživača prihvata da se aporije mogu svrstati u dve grupe: u prvoj su Dihotomija i Ahil u kojima se prepostavlja da su prostor i vreme kontinualni i samim tim beskonačno deljivi, a u drugoj su Strela i Stadion u kojima se prepostavlja kvantizacija odnosno diskontinuitet prostora i vremena.

DIHOTOMIJA: Pre nego što neki objekt prede dato rastojanje mora preći polovinu tog rastojanja, a pre nego što prede polovinu mora preći njenu polovinu i tako do beskonačnost. Zato, pošto je regresija beskonačna a u konačnom vremenu se ne može preći beskonačan broj intervala, kretanje je nemoguće.

AHIL: Da bi Ahil stigao kornjaču mora prvo dostići tačku odakle kreće kornjača. A kada nju dostigne kornjača će napredovati za neku razdaljinu. Sada Ahil mora dostići tu tačku i taj proces se nastavlja do u beskonačnost. Pošto je niz rastojanja beskonačan Ahil nikada neće stići kornjaču. Vidi se da je ova aporija sličnog oblika

kao i Dihotomija samo što se brzonogi Ahil i njegov protivnik (spora kornjača) kreću u beskonačnom vremenu.

Aristotel u Fizici ([3] str. 152) za Zenonov dokaz o nemogućnosti kretanja piše da lažno postavlja kako nešto ne može preći beskonačan broj tačaka niti pak pojedinačno dodirnuti svaki član beskonačnosti u ograničenom vremnu, jer dva su smisla po kojima se dužina i vreme, i, uopšte sve ono što je neprekidno smatra beskonačnim, ili po deobi ili po krajnostima (aditivnosti). Tako, ako je beskonačnost protežna, u ograničenom vremenu nije moguće ostvariti beskonačno mnogo dodira, ali je to moguće ako je beskonačnost deobena, jer i samo je vreme beskonačno u istom smislu. I tako je moguće proći kroz beskonačan broj tačaka u vremenu koje je u istom smislu beskonačno, ali ne i u vremenu koje je konačno, i ostvariti beskonačan broj dodira u odgovarajućim trenutcima kojih je beskonačno mnogo a ne konačno. Niti se, dakle, neograničeno prelazi u ograničenom vremenu, niti ograničeno u neograničenom, nego ako vreme bude neograničeno i veličina će biti neograničena, te ako je takva veličina onda je i vreme.

Za Ahila važi isto rezonovanje i dokaz je isti kao i dokaz polovljenjem ali se razlikuje što u deljenju bilo koja uzeta veličina nije podeljena nadvoje ([3] str. 172).

STRELA: Ako je sve uvek u miru ili u kretanju kada se nalazi u prostoru sebi jednakom, pošto je objekt koji se kreće uvek u jednom trenutku ("sada"), strela koja se kreće je nepokretna. To je pogrešno, kaže Aristotel, jer se vreme ne sastoji od nedeljivih trenutaka kao ni jedna druga veličina. Takođe i tvrdnja da je sve u

mirovanju što je u mestu jednakom samom sebi nije tačna jer trenutak (\tilde{v}) nije interval a Zenon nije pravio razliku ova dva pojma (trenutak-interval). To je, ustvari, problem izračunavanja brzine iz poznatog obrasca $v = \frac{s}{t}$ za $s=0$ i $t=0$. Brzina se dobija nekim vremenskim trajanjem, što je suprotno polaznoj pretpostavci. Trenutna brzina će se izračunavati tek preko pravilno shvaćenih graničnih procesa i infinitezimalnog računa, tačnije izvoda $v = \frac{ds}{dt}$.

STADION: Data su tri niza tačaka. Niz A miruje a nizovi B i C se kreću u suprotnim smerovima od kraja stadiona ka sredini i prolaze kraj niza A.

A A A A A A	A A A A A A
B B B B B B →	B B B B B B →
← C C C C C C	← C C C C C C

Tada će svaki član nizova koji se kreću proći međusobno po 2 člana, ali samo jednog člana niza A koji je stacioniran. Tako je polovina vremena jednaka dvostrukoj polovini a pređeni put jednak dvostrukom putu ($t=2t$ i $s=2s$). Ovde je u pitanju relativnost prostornih i vremenskih intervala u odnosu na tela koja se kreću i koja miruju, kao i činjenica da je preskočen položaj

A A A A A A
B B B B B B
C C C C C C

jer bi se on desio u polovini vremenske jedinice koja je nedeljiva na polovini prostorne jedinice koja je takode nedeljiva.

Jasno je da se u formulaciji i u odgovorima na Zenonove aporije nalaze pojmovi brzine, neprekidnosti i granične vrednosti prostora

i vremena kao i neprekidnosti prave kao brojeven ose, a svi ti pojmovi u Grčkoj još nisu mogli biti pravilno shvaćeni. Aporije su intuitivno podstakle Aristotela, Arhimeda, Platona, Eudoksa i mnoge druge da se upuste u dalje osmišljavanje tih pojmova što je verovatno i najvažniji doprinos Zenona u okviru razvoja infinitezimalnog računa. Sličan uticaj je imalo i otkriće nesamerljivosti dijagonale i stranice kvadrata koje je navelo Eudoksa (408-355 p.n.e.) da u okviru teorije koja je data u V knjizi Euklidovih Elemenata formuliše razmeru u kojoj su sva četiri člana geometrijski objekti. Metod ekshauzije (12. knjiga Elemenata) je bio Eudoksov odgovor na Zenonove aporije. U toj metodi primenjenoj na izračunavanje zapremine i površine Eudoks je odbacio postojanje beskonačno malih veličina i umesto njih uveo proizvoljno male veličine.

II.3. KVANTIZACIJA PROSTORA I VREMENA

Eleatsku školu, misaono i vremenski, produžuju atomisti, a vezu između njih Burnet je nazvao najvažnijom tačkom u istoriji rane Grčke filozofije.* Leukip i Demokrit, kao glavni predstavnici atomista, su ponovo u filozofiju i nauku uveli ideju diskontinuiteta čije je odbacivanje bila osnova elejske koncepcije stvarnosti. Za razliku od Elejaca koji su potpuno negirali postojanje praznine koja je isto što i Ne-biće, Leukip i Demokrit su za osnovne principe sveta uzeli, potpuno ravnopravno, "puninu" i "prazninu". Punina su

* J. Burnet, Early greek philosophy, Adam & Charles Black, London, 1975 (Citirano po [5] str. 101)

atomi kojima su, kao poslednjim jedinicama svega postojećeg, pridodati geometrijski atributi - veličina, oblik, poredak, položaj u prostoru - a praznina je prostor u kome se atomi kreću. Time je i celokupna stvarnost potpuno određena matematičkim zakonima. Dok je punina istovremeno i Jedno i beskonačno mnogo Jednih odvojenih prazninom, praznina je savršeni kontinuitet. Zbog postojanja praznine moguće je i kretanje koje se u njoj odvija. Posto je Parmenid isključivao postojanje praznine i van i unutar Bića, njegovo Biće je zamišljeno kao kontinuum koji se ne može deliti (fragment 8, stih 22-25, [15] str. 211). Dakle za njega apsurd nije bio u beskonačnoj deobi već u samoj mogućnosti deobe. Atomisti u postojanju praznine, pa i u deljivosti, nisu videli ništa apsurdno, čak su i Zenonove dokaze shvatili kao dokaze protiv neograničene deljivosti a ne protiv deljivosti uopšte. Jer ako su atomi poslednje jedinice punine, jasno je da je moguća deljivost ali ne i beskonačna deljivost. Oni koji su odustali od deobe do beskraj, zato što podelu do beskraj ne možemo izvršiti, tvrdili su da se telesa sastoje od nedeljivih sastojaka i da se u te nedeljive sastojke rastvaraju (Atomi su nepropadljivi i večni), piše Simplicije u Fizici ([15] str. 76, II). Aristotel, Simplicije kao i mnogi drugi antički istoričari i komentatori su o Demokritovim i Leukipovim atomima kao počelima na više mesta pisali. Tako Aristotel u Metafizici ([4] str. 16) piše: "Leukip i njegov drug Demokrit uzimaju kao elemente puno i prazno, koje nazivaju biće i ne biće. Od prvih principa puno i čvrsto je biće; prazno i retko je ne-biće (zbog toga, po njihovom mišljenju, ne-biće isto tako postoji kao i biće, dok prazno postoji isto onako kao telo)." Simplicije u Fizici ([15] str. 75, II) kaže da je Leukip uzimajući supstanciju atoma kao

zbijenu i punu, govorio da je ona biće i da se kreće u praznini koju je nazvao ne-bićem, ali je tvrdio da ona postoji ništa manje od bića. Slično je i njegov drug Demokrit iz Abdera kao počela postavio puninu i prazninu od kojih je prvo nazvao bićem a drugo ne-bićem. Ovako shvaćena praznina je ustvari čisto fizički prostor. A takav atomistički prostor-praznina, za razliku od punine, nije kvantizovan tj. ne postoji najmanja jedinica prostora kao što postoje atomi kao najmanji delovi punine. Samim tim što prostor nije kvantizovan to nije ni vreme. Vreme za Demokrita nema većeg značaja u konstrukciji slike sveta niti u prirodnoj filozofiji i matematici. Ono se određuje kao večno da bi nastajanje, prolaženje i propadanje (ono što je vremensko) bilo eliminisano iz atoma. Aristotel (Fizika 251 b16 str. 203), i Siplicije (Fizika) ([15] str. 107) konstatuju da vreme za Demokrita nije stvoreno u šta je toliko bio uveren da je želeći dokazati nemogućnost nastanka svih stvari koristio tvrdnju da vreme nema početka.

Ni Demokrit ni Lekip nisu eksplicitno odredili da li je prostor beskonačan ili ne, ali iz verovanja u beskonačan broj atoma koji su kontinualni, možemo, ipak, pretpostaviti da su i prostor smatrali beskonačnim ([14] str. 48). Posmatrajući beskonačan broj atoma Demokrit je implicirao i pravu sastavljenu iz beskonačnog broja tačaka. A svaka ta tačka, kao matematički atom, mogla je da bude i neka vrsta infinitezimale koja je sadržana i u dijagonali i u stranici kvadrata, pa se iz toga može videti atomistički pristup problemu nesamerljivosti odnosno iracionalnosti. Demokrit je pored filozofskih dela pisao i matematičke radove o geometriji, brojevima, linijama i telima kao neprekidnim veličinama. U istoriji matematike citiraju se Arhimed, Proklus i Plutarh koji kažu da je Demokrit

otkrio da je zapremina kupe i piramide $\frac{1}{3}$ valjka i prizme iste visine i osnove, što je kasnije dokazao Eudoks metodom ekshautije (tako je nazvana tek u radovima Grigorija iz Sen-Vinsenta 1647. godine). Eudoksov metod ekshautije je bio zasnovan na intuitivnom shvatanju kontinualnosti prostora odnosno na geometrijskom kontinuumu jer za aritmetički kontinuum Grci nisu znali. Današnje shvatanje pojma granice (limesa) koje nam omogućuje da se površina ili zapremina stvarno "iscrpi" u to vreme nije moglo biti prisutno, a to znači da se npr. poligon mogao približiti krugu koliko god želimo blizu ali nikada stvarno ne može postati krug. Jer ako bi se to desilo tada bi se beskonačnost savladala korak po korak i kao takva postojala u, kako Aristotel kaže, aktualnom smislu, što po njemu nije moguće. Zato je grčki, Eudoksov, metod ekshautije bio samo približan metod. Sa Demokritovim atomizmom se može povezati i aporija sečenja kupe koja kaže da ako sečemo kupu na slojeve čije su kružne površine paralelne osnovi i ako su slojevi jednaki oni bi činili valjak a ako su nejednaki kupa bi bila stepenasta. Bojer ([9] str. 22) kaže da ne znamo kako da rešimo ovu aporiju ali da je bilo predloženo da je Demokrit koristio tanke, kružne lamine ili nedeljive (indivizibile) da nade zapreminu kupe i valjka anticipirajući Kavalijerijevu teoremu za te specijalne slučajeve. Te lamine su nekakve infinitezimale koje su korišćene pri rešavanju matematičkih problema. Ovde se može dodati i da je Demokrit vidajući različite oblike u makro svetu i tvrdeći da su atomi pored različitih osobina i različitog oblika, vrlo lako mogao od njih na takav način sklopiti lamine da one poslagane jedna na drugu čine kupu. Čak se u matematici išlo tako daleko da se i zapremina tela izračunavala tako što se sabirala zapremina svih atoma iz kojih je

telo sastavljeno. Sličnim metodom su se kasnije koristili Vijet i Kepler kada su smatrali da se kužnica sastoji iz velikog broja duži.

Po pitanju prostora i naročito vremena među atomistima je najzanimljiviji Epikur (347-271 p.n.e.) koji je, i pored peripate-tičke kritike, bio pristalica geometrijskog atomizma što znači da je uz puninu-materiju kvantizovao i prazninu-prostor tj. pored atoma materije pretpostavio je i postojanje atoma prostora a samim tim je uveo i atome vremena. Ove atome možemo nazvati toponi i hrononi.* U Poslanici Herodotu ([29] str. 352) Epikur govori o atomima vremena kao najkraćim trenucima stalnog vremena u kojima se kreću tela i u okviru kojih su atomi u stanju permanentnog kretanja u tako kratkim vremenskim razmacima da se mogu shvatiti samo umom**. Pre toga on takode govori o vremenskim delićima koji su shvatljivi samo razumom, ali i o čulno shvatljivom vremenu koje dolazi istog trenutka čim se telo u kretanju odvoji od bilo kog mesta u beskrajnom prostoru ([29] str. 347). Nije sasvim jasno koje od ova dva "minimalna" vremena - razumski ili čulni vremenski minimum, stvarno predstavlja hronon, atom vremena. Čini se, ipak, da je to čulno shvatljivo vreme koje predstavlja granicu dva vremenska intervala u kojima se atom kreće. Ako se sada posmatra telo koje može i da miruje i da se kreće, trenutak-hronon je granica dva vremena, bilo vremena mirovanja ili vremena kretanja. Na taj način vreme je, kao i kretanje, kontinualno jer se telo na hrononu kreće (miruje) ako se kreće odnosno miruje u oba intervala kojih je on granica. Ako se u jednom intervalu telo kretalo a u drugom mirovalo, tada u hrononu, kao granici, telo i

* Ovi nazivi su navedeni po M. Arsenijeviću, [5], str. 87.

** Pored večnog vremena, za Epikura su večni i atomi u kretanju i prostor (praznina), Poslanica Herodotu, ([29] str. 346)

miruje i kreće se. Između dva intervala nema vremena i kraj jednog je početak drugog.

Ako bi se prihvatila ova definicija hronona on bi odgovarao iracionalnom broju na brojevnoj osi definisanom preko Dedekindovih preseka. Ovde je trenutak dat samo u odnosu na kretanje i mirovanje a kasnije će Aristotel trenutak izjednačiti sa sadašnjošću i vezati ga sa prošlašću i budućnošću. Zenonovi problemi u Dihotomiji, Ahilu, i Strelu su tesno vezani za liniju, koja je kod Grka bila neprekidna ali svakoj tački linije se nije mogao pridružiti broj jer Grci još nisu poznavali iracionalne brojeve. Tako, gledano čisto aritmetički, za njih linija nije mogla biti neprekidna, a kako je linija u prostoru ni on nije mogao biti kontinualan. Ali ako se uzme u obzir da po Pitagorejcima linija nastaje kretanjem tačke iz neprekidnosti kretanja sledi i neprekidnost linije. A kako ravan nastaje kretanjem linije, a telo kretanjem ravni, tela moraju biti neprekidna a samim tim i prostor u kome se ona nalaze. Ovaj prostor kontinuiteta-neprekidnosti linije i njenog nastanka kretanjem tačke imao je jakog uticaja i na Njutnov pronalazak infinitezimalnog računa. Ovakvo shvaćenim hrononom, preko Dedekindovih preseka kao granice dva intervala, dobija se i analogija sa Aristotelovim $\nu\tilde{\nu}$ koje je analogno tački, liniji ili površi kao granicama geometrijskih i materijalnih objekata. Kvantizacijom prostora i vremena kvantizovano je kretanje tako što se ono sastoji iz niza uzastopnih prolaza kroz najmanje nedeljivo mesto - topon, koji se odvijaju u najmanjoj vremenskoj jedinici - hrononu. To znači da se atomi kreću tako što su u svakom sledećem hrononu na sledećem različitom toponu. Na taj način se hronon može definisati i kao vreme-trenutak da ceo atom u kretanju napusti topon na kome je bio.

Kvantizacija prostora je i u tesnoj vezi sa razvojem geometrije. U literaturi se navodi više razloga za dominantnost geometrijskog pristupa u grčkoj matematici. Jedan od njih je grčki osećaj za umetnost, lepotu, harmoniju, uživanje. Ali sa matematičke tačke gledišta osnovni razlog za to je otkriće nesamerljivosti dijagonale i stranice kvadrata čiji se odnos nije mogao predstaviti kao odnos dva cela broja, što je problem iracionalnosti (za dijagonalu kvadrata danas kažemo da je iracionalan broj). Izlaz iz toga je pronaden u negiranju teorije brojeva i razvoju geometrije i geometrijske algebre. Eudoks je stoga formulisao stroge teoreme i definicije date u V knjizi Euklidovih elemenata, što je predstavljalo kraj aritmetičke teorije Pitagorejaca koji su u krajnjoj liniji takode brojeve prikazivali geometrijski. Uvođenjem teorije proporcija u kojoj figurišu samo geometrijski objekti nisu više bile potrebne bilo kakve definicije broja, racionalnog ili iracionalnog. Apsurdno je da je savremena teorija iracionalnih brojeva data u radovima Dedekinda i Vajerstrasa proizišla upravo iz Eudoksovih misli i ideja koje su formulisane sa ciljem izbegavanja nesamerljivosti - iracionalnosti.

Sve do kvantizacije prostora on je bio posmatran tek kao fizički pojam i geometrija je bila samo sastavni deo kosmologije. Geometrijski principi su bili inkorporirani u strukturu svemira čiji je osnovni element bio prostor. Uvođenje atoma prostora u strukturu sveta dovelo je do novog, apstraktno geometrijskog pristupa prostoru. Uz oba ova pristupa, u svesti Grka stalno je bio prisutan i prostor kao fiziološki entitet - prostor gledanja, dodira, sluha, mirisa, osećanja, intuicije. Time je prostor na jednoj strani večit, neuništiv, bezgraničan (svemir), a na drugoj strani subjektivno

ograničen fenomenom opažljivosti-čulnosti sveta. Upravo se iz ove vizuelne koncepcije sveta razvila i teorijska geometrija euklidskog tipa. Danas znamo da takav prostor = izotropan, homogen, beskrajan i bezgraničan, nulte zakrivljenosti, trodimenzionalan - predstavlja samo jedan slučaj od mnogih prostranstava koji definišu isto toliko konzistentnih i neprotivrečnih geometrija. Dakle kako je geometrija tesno povezana sa prostorom, jasno je zašto je i dominantni karakter kontinualnosti pa samim tim i beskonačnosti bio kontinualna deljivost.* To se može povezati i sa Zenonovim aporijama u kojima se kontinualnost vremena takode posmatara kao beskonačna deljivost umesto kao beskonačna aditivnost. A kako se i brojevi prikazuju geometrijski očigledno je da još iz Grčke potiče prevlast prostora nad vremenom i u krajnjem slučaju predstavljanje vremena preko prostora.

II.4. PLATON I ARISTOTEL - POČETAK MATEMATIZACIJE PROSTORA I VREMENA

Dalji razvoj koncepta prostora i vremena vezan je za Platona i Aristotela koji su dali nove filozofske osnove tih pojmova. Njihovo shvaćanje prostora i vremena, vezanih za kretanje, Arhimed je preneo u istraživanje prirode, mehaniku i matematiku preko određivanja tangenti krivih generisanih kretanjem tačke.

Prostor i vreme su kod Platona duboko utkani u kosmogoniju i radanje sveta. U njegovoj kosmogoniji Univezum je delo stvaraoca-umetnika Demijurga koji ga je stvorio po večno postojećem

* Za razliku od Grka istočnjački pristup matematičkom svetu je kontinualno aditivan, algebarski i vremenit.

idealnom uzoru. Dok je vreme stvoreno i predstavlja jedan korak tog procesa stvaranja, prostor je većan i nepropadljiv, tesno vezan sa materijom sa kojom je u stanju haosa. Treće je pak veći rod prostora koji ne podleže propadanju a pruža boravište svemu što postoji... "Postoji biće, prostor, postojanje - to koje na tri načina postoji - rođeno pre postanka neba" ([41] str. 93). Dakle prostor postoji samo kao dati okvir-primatelj u kome se obavljaju aktivnosti Demijurga na oblikovanju kopije idealnog sveta iz bezobličnog haosa. Stvoreni kosmos je učinio sferičnim i uniformno ga je zavrteo učinivši da se obrće u krug. Prostor u kome je sferični prostor lociran je prazan i u njemu osim stvorenog sveta ništa ne postoji. Ali u samom svetu Platon ne dopušta postojanje praznog prostora u pravom smislu te reči. Naime, prostor je u Univerzumu ispunjen geometrijskim telima (tetraedar, kocka, oktaedar, ikosaedar, dodekaedar) ali pošto je Univerzum sferičnog oblika moglo bi ostati praznog prostora između njih bez obzira kako se oni složili. Međutim, Platon kaže da su ti oblici toliko mali da svaki pojedini od njih zbog njihove sićušnosti niko od nas ne vidi, nego se mogu videti tek kada ih se mnogo zgrne na jedno mesto ([41] str. 98). Ovde su zanimljiva dva elementa. Naime, izgleda da je Platon smatrao da se sfera (svet) može "iscrpiti" sa kombinacijama dovoljno velikog broja geometrijskih telašaca, što je ustvari Eudoksov metod iscrpljivanja kružnice upisivanjem mnogouglova sa sve većim brojem stranica, ali primenjen na prostorni entitet - sferu. Kada kružni tok svermira obuhvati rodove on ih, budući da je okruglog oblika i pošto prirodno teži da se svede na sebe samog, sabija jedne uz druge i ne dopušta da preostane ikakvo prazno mesto ([41] str. 100). Platon je tu dao neku vrstu

kinematičke ekshaustije. Uostalom iz Platonove škole potiče i Eudoks, čiji je metod iscrpljivanja, kao što smo videli, imao nešto drugačiji pristup tom problemu. Druga moguća posledica je da su ta slična geometrijska tela neka vrsta prostornih atoma koji poseduju različit oblik i veličinu, slično kao i kod Demokrita kada rešava aporiju kupe. Ali za razliku od atomista kojima je za kretanje bio potreban prazan prostor Platonovo kretanje u okviru sveta je specifično i dato kroz opis disanja kao neprekidnog kružnog procesa. "Dah ne prodire u prazno već potiskuje sa njegovog mesta vazduh sa kojim je u neposrednom dodiru. Ovaj pak potisnuti vazduh neprestano odguruje onaj do njega i na taj način nužno sav vazduh biva potisnut u krug, sve do mesta odakle je dah izašao i ulazi zatim tamo i ispunjava ovo sedište prateći dah. Sve se ovo odvija istovremeno poput točka koji se obrće u krug, budući da nikakve praznine nema" ([41] str. 124). Iz ovog pasusa se vidi i kako je Platon razvio teoriju nekog specifičnog kontinunuma kod koga je kraj jedne stvari početak druge. Ovakav tip kontinuum dat je i kroz ideje o vremenu odnosno trenutku u vremenu. Za razliku od preegzistirajućeg prostora u kome Demijurg iz haosa stvara vidljivi red, vreme je bilo samo jedna etapa tog stvaranja, dakle nastalo kao bitni dodatak racionalnoj strukturi sveta.

"Nu što se tiče vremena, s iznimkom jednoga (Platona, A.N.), čini se kako se svi slažu, jer kazuju da je ono nestalo, i upravo je zbog toga Demokrit i dokazivao kako je nemoguće da su sve stvari nastale, budući da je vreme nenastalo. Jedino je Platonu ono nastalo jer kaže kako bijaše nastalo zajedno s nebom koje je - kaže - nastalo" ([3] str. 203). Postavlja se pitanje kada odnosno u kojoj je etapi stvaranja nastalo vreme. Ono bi moralo nastati prvo jer bi od

nastajanja nečeg drugog pa do nastanka vremena proteklo neko "vreme". A kako da protekne nešto što još nije ni nastalo, što još ne postoji? U Timaju 37c,d (str. 76) Platon piše da je otac Demijurg tek kada je stvorio svet odlučio da ga učini još sličnijim uzoru i i stvori vreme. Tako uređujući tek stvoreno nebo stvarao je i vreme. Ovde se često brkaju vreme i "vreme". Od kada je Demijurg stvorio svet pa do odluke o stvaranju vremena prošlo je neko "vreme", ali to nije ono vreme koje je tek stvoreno, već samo jedan isečak iz večnosti, Demijurgovog večnog trajanja. A od trenutka kada je vreme stvoreno paralelno tek u oba ta vremena - "vreme"-večnost i odgovarajuća slika, vreme-pokretna slika večnosti. Večnost koja je paradigma za vreme Platon naziva Eon, a vreme shvaćeno kao kružno kretanje nebeskih tela koje se odvija u skladu sa brojem nazvao je hronos ([41] str. 76). (U isto vreme Platon kaže da je vreme postalo u istom trenutku kada i nebo, što je kontradiktorno sa činjenicom da je prvo stvoren svet pa onda vreme. (Timaj, 38 b, str. 76)). Tako shvaćeno vreme podvlači dominantnost cikličkih procesa što je još više naglašeno kod Aristotela a kasnije i Stoika.

Dakle vreme nije identifikovano sa svakim kretanjem već samo sa pravilnim, kružnim kretanjem i ono nije mera tog kretanja niti je mereno tim kretanjem već je vreme to samo kretanje. Da bi vreme učinio što sličnijim večnosti, Platon uvodi pojmove "bilo je", "jeste", "biće" kao oblike vremena, i njima karakteriše Univerzum za razliku od idealnog uzora koji kroz celu večnost jeste. Jasno je da ni Platon zbog kružnog toka vremena nije mogao dati eksplicitnu razliku između prošlosti, sadašnjosti i budućnosti što će biti moguće tek kada postane dominantna linearna, iriverzibilna koncepcija vremena.

Platon je prvi pokušao da definiše trenutak, pojam koji će kasnije odigrati važnu ulogu u određivanju trenutne brzine preko koje će Njutn vršiti diferenciranje. Platon formuliše pojam trenutka kao tačku u vremenu u kojoj nema trajanja. Trenutak vezuje za stanje kretanja i mirovanja i shvata ga kao momenat promene između ta dva stanja. U tom momentu nema ni kretanja ni mirovanja a ni vremena. "A kada krećući se stane mirno i kada iz mira pređe u kretanje, to zacemento može da čini samo kada nije u nikakvom vremenu... Trenutno nikako nije u vremenu ono je krajnja i polazna tačka za pokrenuto koje prelazi u mir i za nepokrenuto koje prelazi u kretanje... I kako ono (Jedno, A.N.) menja stanje ta promena se vrši u trenutnom, a dok menja stanje ono se ne može nalaziti ni u kakvom vremenu niti biti tada u kretanju ni u miru" ([40] str. 46-47).

Ideju trenutka koju je anticipirao Platon, Aristotel je, u okviru diskusije o vremenu, razradio u analizi pojma $\nu\upsilon\nu$ (sada, trenutak). Na početku rasprave o vremenu Aristotel je izneo dotadašnje koncepcije vremena kao kretanja neba (Platon), vremena kao same nebeske sfere (Pitagorejci) i vremena kao neke vrste kretanja ili promene. Sve tri koncepcije je odbacio, ali je prihvatio tesnu, recipročnu vezu između vremena i kretanja (promene). "A ne merimo mi samo kretanje vremenom nego i vreme kretanjem, zbog toga što određuju jedno drugo... ([3] str. 117). A pošto je mirovanje samo odsustvo kretanja i budući je vreme mera kretanja bit će i mera mirovanja. Jer svako je mirovanje u vremenu." ([3] str. 120). Vreme je, dalje uči Aristotel, moguće "opaziti" tek ako se opazi kretanje, a ono se opaža razlikovanjem stanja pre i posle. I tu je jasan recipročan odnos vremena i kretanja jer bez vremena ne postoji kretanje, a bez kretanja vreme nije opažljivo.

Ovde se ne kaže da bez kretanja **nema** vremena jer je vreme mera i mirovanja, ali u mirovanju vreme nije "opažljivo". Samo vreme Aristotel definiše kao broj kretanja **prema pre i posle** (ranije i kasnije), i samom tim pošto je kretanje neprekidno, neprekidno je i vreme ([3] str. 114). A vreme je neprekidno upravo preko "sada". Sada-trenutak se ostvaruje samo kao granica pre i posle, odnosno prošlosti i budućnosti, ono spaja vreme prošlo i buduće i granica je vremena, ono je naime jednome početak, drugome svršetak ([3] str. 121). Statičko određivanje sada-trenutka kao uvek drugo i drukčije ili pak kao uvek isto, po Aristotelu dovodi do protivrečnosti (Fizika, 218a 5-30, str. 110-111), i on ga zbog toga objašnjava preko dve analogije - sa telima u kretanju i geometrijskom tačkom. Tako Aristotel predlaže da u kotninuumu vremena sada-trenutak korespondira sa telom u kretanju. Kao što je kretanje fluks tela u kretanju tako je i vreme fluks sada-trenutak ([50] str. 139). Sa druge strane vreme je i deljivo sa sada-trenutkom bez obzira što nije deo vremena isto kao što i tačka nije deo linije, "jer niti se vreme sastoji iz $\nu\tilde{\nu}$, niti linija iz tačaka, niti pak kretanje iz kretaja" (241a 2, str. 178). Tako se došlo do precizno definisanog i objašnjenog pojma trenutka. Jasno je da se, sve dok je u filozofiji u nauci dominirao Aristotelov uticaj, nije moglo uspostaviti matematičko shvatanje vremena, prostora, brzine i ubrzanja preko pojmova zavisne i nezavisne promenljive. Da bi se do toga došlo trebalo je svaki od tih pojmova osloboditi mita i spekulacije, a prvenstveno preoblikovati vreme iz kruga (ma koliko velikog prečnika) u pravu liniju. Aristotel je izbegavanjem spominjanja mitskih asocijacija kružnog vremena kao što su Velika Godina ili Aion, učinio prvi korak u tom "otvaranju" i "ispravljanju" kruga

mada je i dalje smatrao da je primarno kretanje ono po krugu, a jedino večno, uniformno kružno kretanje je kretanje neba i nebeskih tela te je to i najpogodnija mera vremena. Pa i samo se vreme čini da je krug, kaže Aristotel u Fizici, 223 b 28, (str. 126).

Sledeći korak u povezivanju vremena sa infinitezimalnim računom bi bio definisanje trenutne brzine i određivanje pravca tangente u datoj tački krive. Međutim, Aristotel je pojam trenutne brzine učinio potpuno nemogućim jer je dokazao kako se u sada-trenutku ništa ne može kretati niti mirovati (jer oba zahtevaju trajanje) i isto kao i Platon stanje u trenutku je vezao za prošlo i buduće stanje kretanja ili mirovanja ([3] 234 a 25, str. 155). Kretanje još uvek nije bilo posmatrano kao dinamički proces povezan sa brzinom, koja je uostalom i sama merena statičkim uporedivanjem dva rastojanja (prostora) pređenim u dva uniformna kretanja za isto vreme ili uporedivanjem vremena kada su rastojanja ista ([55] str. 123). Trenutna brzina kao veličina predstavljena odnosom beskonačno malog rastojanja i beskonačno kratkog vremena, Aristotelu nije bila shvatljiva iz jednostavnog razloga što je cela njegova fizika bila zasnovana na čulnom iskustvu kome je količina kretanja $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ bila dostupna, ali ne i granična vrednost tog odnosa $\frac{ds}{dt}$ što je i definicija trenutne brzine ([9] str. 43).

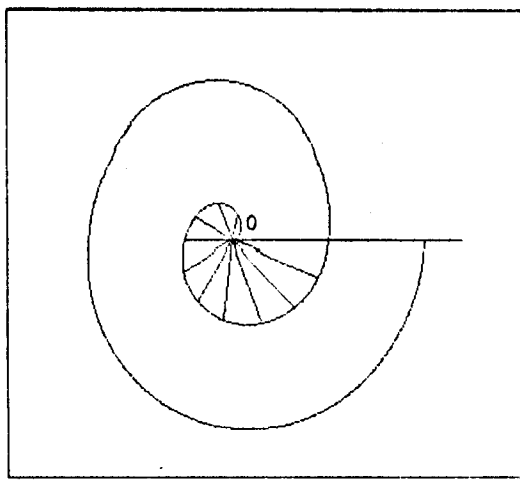
U skladu da statičkim definisanjem brzine i kretanja, i statičkim definisanjem krivih kao geometrijskih mesta tačaka sa određenom osobinom ili kao preseka ravni i geometrijskog tela (konusni preseki), Euklid je u III knjizi Elemenata statički definisao i tangentu kruga kao pravu koja dodiruje krug u samo jednoj tački (definicija 2) ili kao pravu koja dodiruje krug takoda se u postoru između nje i kruga nijedna prava ne može umetnuti.

(propozicija 16). Ovakva definicija tangente nije pružala mogućnost postupka za njeno praktično nalazjenje odnosno za određivanje njenog pravca u dodirnoj tački. Za određivanje pravca tangente u datoj tački bilo je neophodno dinamičko shvatanje prave pa i svake krive linije kao traga* tačke u kretanju. Ko je prvi pravu liniju definisao kao tačku u kretanju teško je sa sigurnošću reći. Najčešće se kaže da je Platon sugerisao da je linija generisana tačkom u kretanju ([56] str. 9) ili da je, po Aristotelu, Ksenokrat zastupao teoriju fluksija - linija koja se kreće stvara površinu, a tačka koja se kreće liniju ([5] str. 223). Takođe nije sasvim jasno koji su razlozi nastanka teorije geometrijskih oblika nastalih kretanjem drugih geometrijskih oblika "nižeg reda" (tačka-linija-površ-telo), da li je to odgovor na Zenonove aporije mnoštva i kretanja ili na otkriće nesamerljivosti. Ali činjenica je da je ovakvom dinamičkom teorijom fluksija prevaziđen problem nastajanja iz "ničega". Naime ako je tačka koja nema veličinu "ništa", linija ne može nastati prostim nagomilavanjem tačaka-ničega u određenom broju i poretku, ali može postati kretanjem tačke. Ove ideje su u 17. veku prihvatili i razradili Galilej, Toričeli, Barou, Njutn i mnogi drugi, i uz konstantan razvoj matematike i mehanike došli do teorije infinitezimalnog računa.

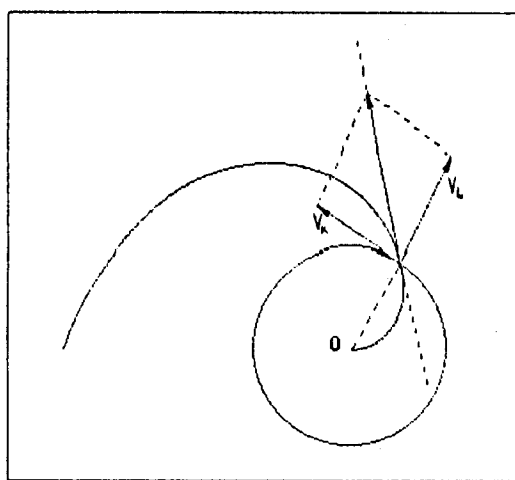
Verovatno je Hippias (oko 460 p.n.e.) bio prvi Grk koji je eksplicitno definisao neku krivu preko kretanja. Ta kriva je bila kvadratriksa (Slika 2) i nastala je dvostrukim kretanjem. Kvadratriksu je opisao Pappus kao krivu koju su koristili Dinostratus i Nikomedes za izračunavanje kvadratne kruga, ([21] str. 130) a Heath je pokazao da ju je otkrio Hippias i da ju je, možda, koristio za rektifikaciju i kvadraturu kruga ([24] str. 225-226). Takođe se

* Flux-a kako je rekao I. Barou u Lecture 1, [7] str. 4-15

korespondirajući našoj upotrebi diferencijalnog računa, što je, ipak, previše proizvoljno i slobodno jer Aristotel nije izvršio



Slika 3.



Slika 4.

nikakvu generalizaciju postupka na različite krive. To je pokazao Bojer koristeći se činjenicom da Grci nisu imali ideju krive kao funkcije niti tangente kao graničnog položaja sečice ([9] str. 58).

II.5. PRVA LINEARNA KONCEPCIJA VREMENA

Mada su Grci analizom bitka i strukture prostora i vremena napravili važan korak ka njihovom uvođenju u matematičku u naučnu misao uopšte, problemi funkcionalnog definisanja krive i graničnih procesa će kroz metod fluksija i infinitezimala tek u 17 veku biti rešeni na zadovoljavajući način. Do tada će se pojaviti još nekoliko opširnih teorija prostora i vremena (Avgustin, Plotin, Stoici), ali one su prvenstveno bile reakcije na Aristotelovo i Platonovo viđenje tih pojmova. Kao takve te teorije su bile više orijentisane na

filozofski aspekt prostora i vremena i nisu imale bitnog uticaja na razvoj infinitezimalnog računa. Ono što je u prelaznom periodu od Grčke do 17. veka značajnije za vezu prostora i vremena i infinitezimalnog računa je pojava i utemeljenje Hrišćanstva kao vodeće religije u Evropi. Tačnije to je ideja o neponovljivosti trenutka i vremena što je otelovljeno u Hristovom rođenju. Time se kružnica vremena potpuno otvorila i preovladavajuća postaje linearna koncepcija vremena. Vreme, istorija i nauka počinju nezadrživo da jure ka potpunoj mehanizaciji Univerzuma.

Prvu teoriju vremena inspirisanu Hrišćanstvom je izneo Aurelije Avgustin (354-430), hrišćanski teolog i filozof, u Ispovestima u XI poglavlju. U opisu stvaranja sveta uticaj Platona na Avgustina je očigledan, ali za razliku od Platonovog Demijurga koji je svet stvorio unoseći red u praiskonski Haos, Avgustinov Bog je svet stvorio iz ničega. Ali kao i Demijurg, vreme je stvorio sa svetom. Pre stvaranja Neba i Zemlje vreme nije postojalo. Već samim tim kružno vreme je nemoguće. Na pitanje šta je Bog radio pre nego što je stvorio svet, Avgustin odgovara da "pre" nije ni postojalo jer to nije ni vreme. Nije bilo nikakvog "tada" jer nije bilo nikakvog vremena. Dakle Bog igra odlučujuću ulogu u vremenu i stvaranju vremena. Na pitanje šta je Bog radio "tada" ili "pre" odgovor bi mogao biti da je Bog bio Bog ili jednostavno Bog je "bogovao". Kao i Platon i Avgustin je napravio razliku između vremena Boga - večnosti i vremena koje je on stvorio. No, ipak je toliko bio zbunjen pojmom vremena da je rekao: Ako me neko ne pita šta je vreme, znam, ali ako bi hteo nekome na pitanje to razjasniti, ne znam. (Ispovesti XI, [6], str. 14). Odmah potom dolazi zanimljiva rasprava o razlikovanju prošlosti, sadašnjosti i budućnosti. Sa sigurnošću znam da kada nebi

ništa prolazilo nebi bilo prošlog vremena i kada nebi ništa prolazilo nebi bilo budućeg vremena i kada nebi ništa postojalo nebi bilo sadašnjeg vremena, piše Avgustin. Prošlo vreme više nije, a buduće još nije. Samo sadašnjost jeste, ali kao trenutak koji je bez trajanja a ipak u sebi sadrži i prošlost i budućnost. To znači da sadašnje vreme nije uvek sadašnje, jer bi to značilo da više nije vreme već večnost. Ali čovek ima, negde u duši osećaj da ipak postoji neko vreme i u prošlosti i u budućnosti. Tu teškoću je Avgustin spretno razrešio tvrdnjom da postoje tri vremena: sadašnjost u prošlosti - pamćenje, sadašnjost u sadašnjosti - gledanje (razmišljanje) i sadašnjost u budućnosti - očekivanje. To je obrazložio na primerima izlaska i zalaska sunca i zapažanju zvuka-zvizduka. Analogiju između vremena i kretanja Avgustin je odbacio: Ako se telo nekada kreće a nekada miruje, tada mi ne merimo samo koliko je dugo kretanje već i mirovanje. Dakle vreme nije kretanje. Time je opovrgao Aristotelovu analogiju vremena i kretanja. Zato se okrenuo duši, radije nego fizičkom redu, kao poslednjoj instanci vremena. Naime vreme kada i prođe ipak ostaje u svesti kao slika prošlosti. I ako se sada vreme treba meriti, prošlost ne može jer više ne postoji, sadašnjost nema trajanje a budućnost još ne postoji. Ali vreme se ipak može meriti i to dok prolazi. Dakle u kretanju. A kako vreme prolazi? Avgustin kaže da svaku prošlost potiskuje budućnost i svaka budućnost sledi iza prošlosti tj. svaka prošlost i budućnost stvara se i izlazi iz sadašnjosti. To znači da vreme iz budućnosti kroz sadašnjost prolazi u prošlost. Kao da pravolinijski ide "unazad" iz onoga što još ne postoji kroz ono što nema trajanja u ono što više ne postoji. To je prvi pokušaj zasnivanja linearne koncepcije vremena koja još uvek

nije potpuno oslobođen ireverzibilnosti. Ovo bi se moglo predstaviti u obliku spirale duž neponovljivog pravolinijskog kretanja istorije. Avgustinova prošlost se može shvatiti i kao skup događaja i bivstvovanja u vremenu koje je bilo, budućnost kao skup događaja i bivstvovanja koje će biti a sadašnjost bez trajanja kao irealni trenutak koji pretstavlja granicu ta dva skupa. Analogija između Platonovog i Aristotelovog trenutka i Avgustinove sadašnjosti je očigledna.

U celom antičkom periodu razvoja nauke i filozofije prostor i vreme nisu bili potpuno povezani ali ni potpuno nezavisni. Povezivali su ih kretanje koje se odvija u prostoru i vremenu, ali i mnogi kosmološki modeli stvaranja Univerzuma. Kontinualnost kretanja kroz prostor i vreme kao i kvantitativno merenje kvantiteta kontinualne promene nije imalo značajniju ulogu u antičkoj matematici jer su njihove veličine bile ili geometrijske-statičke ili numeričke-diskretne. Da bi postali merljivi, prostor i vreme su se morali definisati matematičkim jezikom, što se desilo tek u 14. veku kada je pronaden mehanički sat, model koji je u sebi uključivao i kružni svemir-prostor, i cikličko i nezadrživo pravolinijsko kretanje vremena. Mehanički sat je postao simbol modernog mehanicističkog poimanja sveta.

GLAVA III

MATEMATIČKI KONCEPT PROSTORA I VREMENA

Poreklo matematičkog koncepta prostora i vremena je povezano sa razvojem matematičke analize u kojoj centralni pojam postaje promenljiva veličina i funkcijska zavisnost među njima. Najznačajniji doprinos u tome u srednjem veku su dali članovi Merton koledža u Oxfordu: Thomas Bradwardine, Richard Swineshead-Calculator, William Haytesbury, John Dumbleton, koji su u tom koledžu boravili od 1323-1350, i nešto mladi Nicolaus Oresme (1323-1382). Oni su, opet, imali veliki uticaj na matematičko-kinematičke ideje Galileja. U tom

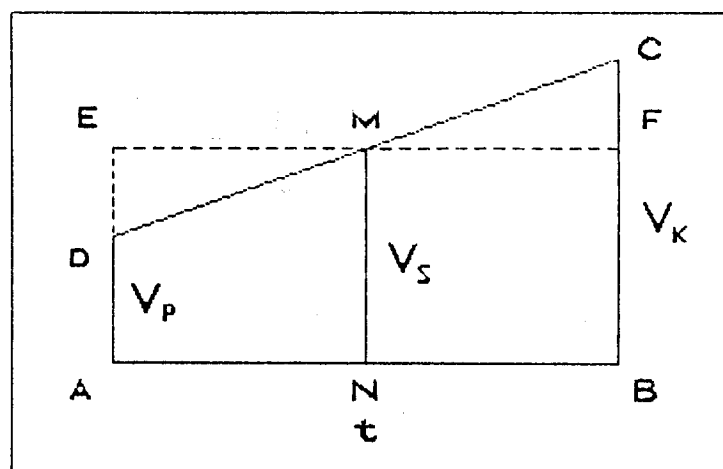
periodu, od 14-17. veka, precizno su uvedeni i potpuno prihvaćeni kinematički pojmovi trenutne brzine, ubrzanog kretanja, ubrzanja, pojmovi koji su grafički predstavljeni u koordinatnom sistemu sa osama vremena i brzine. A iz tih kinematičkih istraživanja je proizašao koncept funkcionalne zavisnosti između matematičkih promenljivih veličina.

III.1. BRZINA KAO ODNOS PUTA I VREMENA

Dok su Grci brzinu dobijali upoređivanjem udaljenosti pri uniformnim kretanjima u istom vremenskom periodu ili upoređivanjem vremena ako su udaljenosti jednake, i time posmatrali odnose a ne iznose brzina, u 14. veku je postavljena metrička, kvantitativna definicija brzine preko obrasca $v=s/t$, s - pređeni put, t - proteklo vreme, v - brzina. Infinitesimalistički vid ovog obrasca $v=ds/dt$ još nije bio prihvaćen, a to je u 17. veku uradio Njutn.

Iz Merton koledža potiče teorema srednje brzine kao i njena posledica - teorema udaljenosti. Ovim teoremama su se kasnije bavili i Orezmo i Galilej i na taj način dali svoj doprinos proučavanju jednakoubrzanog kretanju. Teorema srednje brzine glasi: Bilo da počinje od nule ili nekog drugog stepena svaka širina intenziteta, sve dotle dok se završava sa nekim konačnim stepenom i sve dotle dok se stiže ili gubi ravnomerno, odgovara njenom srednjem stepenu. Tako će telo koje ravnomerno dobija ili gubi brzinu tokom nekog određenog perioda vremena preći udaljenost tačno jednaku onoj koju bi prešlo kada bi se za isti period vremena ravnomerno kretalo sa srednjim stepenom brzine... Jer svako kretanje kao celina, završeno u celom

periodu vremena, odgovara njegovom srednjem stepenu - a to znači stepenu koji je imalo u srednjem trenutku perioda ([31] str. 94.). Ovu teoremu su mertonijanci dokazali algebarski a Orezmo je u delu Rasprava o konfiguracijama kvaliteta i kretanja dao geometrijski dokaz u kome je iznos neprekidne promene uporedio sa pravom linijom -neprekidnom geometrijskom veličinom (Slika 5). Orezmo je vreme kretanja ili trajanja date brzine (AB) predstavio horizontalnom linijom longitudom, a iznos promene brzine vertikalnom linijom latitudom



Slika 5

povučenom normalno na longitudu. Ako se telo kreće i uniformno ubrzava od brzine v_p i v_k u toku datog vremena t , pređeni put s je jednak onom putu koji bi telo prešlo da se za isto vreme uniformno kretalo brzinom koja odgovara srednjoj tački N vremenskog intervala AB. Tako je pređeni put $s = \frac{v_p + v_k}{2} \cdot t$. Da bi to pokazao Orezmo je dokazao jednakost površina trapeza ABCD i paralelograma ABFE koristeći podudarnost trouglova DEM i MFC. Na taj način je pređeni put odgovarao površini ispod prave linije DC koja je predstavljala grafik određen vremenom i brzinom, a razloge za to Orezmo nije jasno

opravdao. Taj grafik je dobijen spajanjem krajnjih tačaka svih latituda povučenih u svakoj tački longitude AB. Te tačke na longitudi su vremenski trenutci a odgovarajući longitudinalni intenziteti su iznosi trenutnih brzina. I pored toga što je, izgleda, Orezmo intuitivno osećao da se merenjem intenziteta brzine u svakoj tački posmatranog intervala kao statičkim infinitezimalama vremena i sabiranjem svih tih vertikalnih linija, što predstavlja grafičku integraciju, dokazuje mertonova teorema srednje brzine, on je ipak jednakost površina dve figure dokazivao čisto geometrijski. Galilej je bio taj koji je te površine stvarno posmatrao kao sume ordinata-latituda odnosno iznosa trenutnih brzina. Orezmove ideje o trenutnoj brzini predstavljenoj pravom linijom su bile korak napred u odnosu na mertonijance koji su trenutnu brzinu još uvek opisivali preko rastojanja koje bi telo prešlo u nekom vremenu ako bi se kretalo brzinom koju ima u tom trenutku, što očigledno predstavlja *circulus vitiosus*. No, i pored tog napretka Orezmo je, kao i Aristotel, tvrdio da svaka brzina, pa i trenutna, traje u vremenu, pa je slično njemu trenutnu brzinu opisao preko korelacije veće brzine sa većim predenim rastojanjem pri uniformnom kretanju. Sve je to bilo nedovoljno precizno i dosledno, što je ispravio Galilej uvođenjem infinitezimalnih priraštaja vremena i kretanja analogno tačkama kao geometrijskom infinitezimalama korišćenim u Orezmovom dokazu. Tako je Galilej dobio diferencijalni trougao sa infinitezimalnim katetama vremena i brzine i infinitezimalnom površinom kao beskonačno malim predenim putem. Time se jasno dobija analogija matematičkog problema određivanja pravca tangente i kinematičkog problema trenutne brzine.

Pod uticajem mertonijanaca i Orezma Galilej je razvio matematički model jednako ubrzanog kretanja i dao njegovo grafičko tumačenje. Pri tome je koristio trenutnu brzinu definisanu preko zbira svih priraštaja brzine od početka kretanja do posmatranog trenutka u čemu je odlučujuću ulogu imalo vreme. Grafički prikaz je spojio dva kontinuuma - kontinuum vrednosti vremena i kontinuum vrednosti brzine ([47] str. 117), i predstavljao je osnovu za dalji razvoj funkcijskog koncepta zavisnosti između promenljivih. Zahvajujući tome mnoge su funkcije kasnije uvedene preko kretanja, slično kao i Arhimedova spirala i kvadratriksa. Galilej je svoj dokaz mertonijanske teoreme srednje brzine dao u delu *Dialoghi delle nuove scienze (Raprave o dvema novim naukama, 1638)* ali pravi napredak je, zapravo dokaz teoreme da pređeni putevi u jedinicama vremena rastu kao neparni brojevi a ukupan put je tada srazmeran kvadratu vremena. Međutim, ni Galileiovi dokazi u sebi ne sadrže pojam granice kome su približili njegovi učenici Kavalieri i Toričeli, što je vodilo ka šire shvaćenom pojmu funkcije i Njutnu koji je pojam granice aktivno iskoristio u računu fluksija i uopšte u radu na infinitezimalnom računu.

III.2. APSOLUTNI I RELATIVNI VID PROSTORA I VREMENA

Objavljivanje Njutnovog najvećeg dela - *Philosophiae naturalis principia mathematica (Principi)* i opšteg zakona gravitacije 1687. godine predstavlja događaj koji je obeležio razvoj nauke i ljudske misli ne samo u 17. veku već i u dužem periodu, sve do Ajnštajna čija opšta teorija relativnosti obeležava današnje vreme. Osnovna karakteristika veka u kome su Principi nastali, veka genije kako ga

je Whitehead (Vajthed) nazvao, je potpuna matematizacija i mehanizacija makrosveta - kosmosa i mikrosveta - Zemlja i čoveka, što je dovelo do ukidanja važnosti opažaja i čulnih istina i do zamenjivanja sveta kvaliteta svetom kvantiteta.* Do samog početka 16. veka dominirao je organski pogled na svet koji se zasnivao na dva autoriteta - Aristotelu i Crkvi - a glavni naučni cilj je bio zapažanje i razumevanje značaja prirodnih pojava. U 16. i 17. veku organsko, živo i duhovno shvatanje sveta zamenjeno je jednim novim, potpuno suprotnim videnjem sveta, sveta kao mašine. R. Descartes (Dekart) je mišljenjem da čovek mora verovati samo u ono što je odobrio razum i potvrdilo iskustvo i da je o fizičkim telima istinito samo ono što je izvedeno jasnoćom matematičkog dokaza iz opšte poznatih pojmova u čiju istinitost ne možemo sumnjati, tačno odredio cilj kome moraju težiti organizatori tog novog sistema sveta. Ogroman doprinos u stvaranju uslova koji bi omogućili naučnicima da matematički opisuju svet dali su Galilej i Kepler. Galilej je postulirao oblik, broj i kretanje - bitne kvalitete materije koji mogu biti mereni i kvantifikovani, i izvodeći oštroumne i fantastične eksperimente 1638. godine otkrio zakon padajućih tela, a Kepler je proučavajući astronomske tablice posle mukotrpnih izračunavanja 1609. godine empirijski izveo tri osnovna zakona kretanja planeta. Njutn je spojio ova dva otkrića tako što je formulisao opšte zakone kretanja svih tela u sunčevom sistemu.

Na sličan način Njutn je došao i do otkrića infinitezimalnog računa. Poznavajući sve dotadašnje radove Ferma-a, Kavalijerija,

* Primarno je postalo traganje za merljivim elementima među posmatranim pojavama, a zatim za vezama između dobijenih mera fizičkih količina.

Galileja, Baroua, kao mnogih drugih matematičara i filozofa na određivanju trenutne brzine, pravca tangente, površine raznih likova, zapremine obrtnih tela i ispitivanju prirode beskonačno malih veličina. Njutn je svojom velikom sposobnošću povezivanja i uopštavanja činjenica došao do revolucionarnih zaključaka o inverznosti postupka određivanja površine ispod krive i određivanja pravca tangente date krive i time postavio prave osnove za dalji razvoj integralnog i diferencijalnog računa.

Na početku Principa u Scholiumu posle definicija Njutn definiše materiju, vreme, prostor i kretanje, pri čemu razlikuje njihov apsolutni i relativni vid. Apsolutni vid prostora i vremena predstavljaju okvir u kome se nalazi materija i u kome se odvijaju sva kretanja. Definicije prostora i vremena glase: Apsolutno, istinsko, i matematičko vreme, po sebi i po svojoj prirodi, ravnomerno teče bez odnosa sa bilo čim spoljašnjem i drugim imenom naziva se trajanje. Relativno, prividno, i obično vreme je čulna i spoljašnja (precizna ili neprecizna) mera nekog trajanja izvedena iz kretanja, mera koja se obično koristi umesto istinskog vremena. To su čas, dan, mesec i godina... Apsolutno vreme se, u astronomiji, razlikuje od relativnog, po jednačini ili korekciji prividnog vremena. Jer, prirodni dani su u stvari nejednaki, iako se obično smatraju jednakim, i koriste za merenje vremena. Astronomi koriguju tu nejednakost da bi mogli meriti nebeska kretanja tačnijim vremenom. Moguće je da ne postoji takva stvar kao što je ujednačeno kretanje, pomoću kojeg se vreme može precizno meriti. Sva kretanja bi mogla biti ubrzana ili usporena, ali proticanje apsolutnog vremena nije podložno nikakvoj promeni. Trajanje neprestanosti postojanja stvari ostaje isto, bilo da su kretanja brza, spora ili

nepostojeća. Prema tome, ovo trajanje treba da se može razlikovati od onoga što je samo njegovo osetno merenje; i iz kojega ga mi izvodimo pomoću astronomske jednačine. Potreba za ovom jednačinom, radi određivanja vremena pojava, ispoljava se kako u eksperimentima sa satom sa klatnom, tako i u zamračenjima Jupiterovih sateliteta. Apsolutni prostor, po svojoj prirodi, i bez ikakvog odnosa sa bilo čim spoljašnjim, ostaje uvek isti i nepokretan. Relativni prostor je neka pokretna dimenzija ili mera apsolutnog prostora; (prostor) koji se čulima opaža po njegovom položaju prema telima i koji se obično uzima za nepokretan prostor. Takva je dimenzija zemaljskog, vazdušnog ili nebeskog prostora prema Zemlji. Apsolutni i relativni prostor isti su po vrsti i veličini ali nisu uvek isti po broju. Jer ako se Zemlja, na primer, kreće, jedan prostor našeg vazduha, koji relativno i u odnosu na našu Zemlju ostaje uvek isti, biće čas jedan deo apsolutnog prostora u koju ulazi vazduh, čas opet u drugo vreme biće u drugom delu, i tako apsolutno gledano, on se stalno menja.* Ovakvo razlikovanje dva vida vremena ekvivalentno je Platonovo večnosti i vremenu kao slici večnosti. Kao što se iz Platonove večnosti izvode mere za sva događaja tako je i Njutново apsolutno vreme ono trajanje iz kojeg proističe svako prirodno - relativno vreme, relativna mera stalnog i uniformnog proticanja apsolutnog, pravog i matematičkog vremena, a koje se meri pomoću cikličkog kretanja. Dakle Njutново vreme nije ni sholatička mera kretanja ali ni Dekartovo trajanje stvari, već ima svoju sopstvenu prirodu i postojalo bi čak i ako fizički svet ne bi postojao. Ovako dato apsolutno vreme kao neprekidni, ravnomerni i beskonačni tok međusobno

* Prevod dat po [31] str. 255

Jednakih trenutaka se može dovesti u vezu sa prostorom preko uporedivanja tih trenutaka sa tačkama na pravoj liniji ili uniformnim kretanjem nekog tela po liniji pod dejstvom inercije. I relativno vreme se sa prostorom dovodi u vezu tako što se kao mera trajanja uzima određeni isečak kruga na časovniku koji opiše kazaljka u kružnom kretanju. Vidi se da je i pored toga što se smatra da je sa Njutnom doslo do konačnog prodora ka čisto matematičkoj ideji linearnog vremena, još uvek bilo prisutno i kružno predstavljanje vremenskog toka što se potvrđuje i iz jednog pisma upućenom Henriju Oldenburgu 1675 godine: Priroda je neprekidan kružni radnik, što tvori tečnosti iz čvrstih tela, postojane stvari iz isparljivih, isparljive iz postojanih, tanane iz grubih i grube iz tananih, neke stvari koje se uspinju i tvore gornje zemaljske sokove, reke i atmosferu; a shodno tome i one što se spuštaju kao naknada predašnjim [56]. Iz pisma se vidi i Njutново verovanje u stalni tok transmutacija u prirodi.

Prostor kao i vreme, po Njutnu, postoji nezavisno od materije i kada i ne bi bilo sveta, on bi postojao, a fizički svet se zajedno sa telima u kretanju nalazi u apsolutnom prostoru isto kao što je i u apsolutnom vremenu. Sve je u vremenu što se tiče redosleda i sve je u prostoru što se tiče reda i položaja. Da bi ipak napravio razliku apsolutnog i relativnog prostora koji se našim čulima čine isti, Njutn uvodi njihovu razliku po broju naglašavajući jedinstvenost apsolutnog prostora i mnoštvenost relativnih prostora. Tvrdnja da su tela u prostoru znači da zauzimaju mesto (relativno ili apsolutno u zavisnosti od kojeg prostora je to mesto deo). Mesta se određuju pomoću položaja i razdaljina od nekog nepomičnog tela a zatim se meri kretanje u odnosu na to mesto. To znači da se služimo

relativnim mestima i kretanjima umesto apsolutnim. Jer, apsolutno kretanje, kretanje u odnosu na prostor, se i ne može odrediti, već samo relativno kretanje koje je u odnosu na druga tela. Apsolutno kretanje Njutn je definisao kao pomeranje tela sa jednog apsolutnog mesta na drugo apsolutno mesto, a relativno kretanje kao pomeranje sa jednog na drugo relativno mesto. Apsolutno kretanje može se odrediti ako se posmatra na nekom nepokretnom mestu, a relativna ako se dovedu u vezu sa pokretnim mestom.

Njutn je mirovanje i kretanje uzimao za jednakovredne u smislu postojanja i kao takve postavio ih na isti nivo. Tako je i kretanje, kao i mirovanje, shvatao kao stanje, a ne kao proces kako je to bilo u čitavom antičkom periodu pa i sve do Galileja. Na taj način su se tela mogla kretati i bez ikakve sile ili uzroka-pokretača. Ali nije svako kretanje uzimao za stanje, već samo ono koje je uniformno i pravolinijsko, jer kao što je A. Koare napisao, nijedno drugo, a naročito nijedno kružno ili rotaciono kretanje, čak i ako je ravnomerno, nije takvo stanje, mada izgleda kao da je rotaciono kretanje sposobno da se održi isto tako dobro, a možda i bolje nego pravolinijsko, koje se - bar u našem iskustvu - završava i to uvek prilično brzo ([28] str. 205). Grci su za razliku od Njutna proučavali jedino kretanje jednakom brzinom, dakle bez ubrzanja, i za odgovarajući model takvog uniformnog kretanja su uzimali većito kružno kretanje nebeskih tela, pa nije ni čudno da su i vreme, tesno povezano sa kretanjem, posmatrali u svom kružnom obliku. A kada je za osnovno kretanje uzeto uniformno pravolinijsko kretanje i vreme je dobilo pravolinijski oblik, odnosno pravu liniju za odgovarajući geometrijsko-prostorni model. Taj vremenski model mogao se uklopiti i u sveobuhvatni, kosmički koordinatni sistem trodimenzionalne

euklidske geometrije kao fizički model Euklidskog prostora ([39] str. 162). U ovakvom koordinatskom prostoru lako su se mogli kvantitativno određivati razni fluksovi - putanje tačke u kretanju u zavisnosti od brzine i vremena, a time su se dobijali grafici različitih funkcija i određivali pravac tangente u nekoj tački i površina ispod krive-putanje. Upravo na takvoj matematičkoj koncepciji izohronog i homogenog vremena, koje zajedno sa beskonačnim, večnim, nepokretnim i nepromenljivim prostorom čini okvir u kome se sva kretanja (promene) bilo uniformna ili ubrzana odvijaju, Njutn je i zasnovao svoj račun fluksija. Možda je odlučujući uticaj pri pronalasku računa fluksija, imao Njutnov učitelj Isaac Barrow (I. Barou) (1630-1677), i to ne samo preko njegovog eksplicitnog poredenja vremena i prave linije već i preko iščezavajućih kvantiteta, koje je Barou obeležio sa "a" i "e", i koje je Njutn iz njegovih dela preuzeo i obeležio sa "o" i "ox" i "oy".

III.3. PROSTOR I VREME U RAČUNU FLUKSIJA

Barou je verovao u analogiju prostora i vremena jer kako vreme ne označava aktualno postojanje već određenu mogućnost kontinualnog postojanja, tako i prostor predstavlja okvir za pružajuće dužine (lekcija 1, [7] str. 35). Poreklo Njutnove ideje apsolutnog vremena takode se može naći u Barouovom delu Lekcije iz Geometrije: "Vreme ne implicira kretanje, dok je posmatrana njena apsolutna i unutrašnja priroda, ništa više nego što implicira mirovanje jer bez obzira da li se stvari kreću ili miruju, da li spavamo ili smo budni, vreme nastavlja jednolično teći" ([7] str. 35). Ali bez obzira što vreme ne implicira kretanje ono omogućuje merenje

kretanja a isto tako se bez kretanja ne može opaziti prolazak vremena. Barou je tvrdio da kao što se prostor meri određenom veličinom, pa se taj izmereni prostor koristi za merenje drugih veličina samerljivih sa prvom, tako se i vreme koristi kao posrednik pri uporedivanju kretanja. Na taj način je vreme mera kretanja. U diskusiji o analogiji vremena kao matematičkog koncepta i linije, Barou je pisao na više mesta. "Kako je vreme uniformno protežni kvantitet svi njegovi delovi korespondiraju proporcionalno respektivnim delovima uniformnog kretanja ili delovima prostora kroz koji se uniformno kretanje odvija; no (vreme) se može prikladno predstaviti u našoj svesti, svakom veličinom sličnom po svim svojim delovima, posebno preko najjednostavnije kao što je prava ili kružna linija; između koje i vreme izgleda da ima mnogo sličnosti i analogije... Mi ćemo zbog toga uvek izražavati vreme preko prave linije" ([7] str. 15). Ovo je prva direktna formulacija koncepta linijskog (geometrijskog) vremena. Barou je dalje uporedio liniju kao sastavljenu iz tačaka ili kao trag kretanja tačke sa vremenom koje je sastavljeno iz nanizanih trenutaka ili je kontinualni tok (fluks) jednog trenutka. Slično je i Njutn, sigurno pod uticajem Baroua, smatrao da momenti apsolutnog vremena obrazuju kontinualni niz kao i tačke na geometrijskoj liniji. Na taj način su se i Barou i Njutn našli u situaciji da razjasne prirodu trenutne brzine. Tu je Barou još uvek neprecizan i još uvek se koleba između atomističkog i infinitezimalističkog prilaza vremenu: Svakom trenutku vremena, ili neodređeno malom delu vremena, (kažem trenutak ili neodređeni deo, jer nema razlike da li pretpostavljamo da je linija sastavljena iz tačaka ili beskonačno (neodređeno) malih "linijica"; i tako na isti način, da li pretpostavljamo da je vreme sastavljeno od trenutaka

ili beskonačno kratkih vremenskih intervala); svakom trenutku vremena, kažem, odgovara određeni stepen brzine koji se uzima da telo koje se kreće ima u svakom trenutku ([7] str. 38). Nejasnoća oko prirode najmanjeg dela vremena produžuje se i na neodređenost oko najmanjih jedinica prostora. Naime, prostor (površina) ispod krive određene vremenom i brzinom kretanja, koji predstavlja pređeni put, po Barou se može predstaviti kao suma pravih linija koje se povlače u svakoj tački vremenske prave (ose vremena) a čija dužina odgovara brzini u tom trenutku, ali i kao suma vrlo tankih pravougaonika ako se vremenska osa shvati kao sastavljena od beskonačno kratkih vremenskih intervala. Taj problema se svodi na pitanje granice (limesa) sume beskonačno mnogo elemenata površine. Njutn je svojim računom fluksija, čija se suština u krajnjoj liniji svodi na vreme koje iščezava u trenutku, razvio pojam granice i sasvim se približio njegovom današnjem shvatanju koje je zasnovao. A. Koši u 19. veku. Barou je uvideo povezanost problema određivanja pravca tangente brzine i problema površine sa vremenom, ali nije naznačio značaj inverznosti ta dva problema. A Njutn je uradio upravo to.

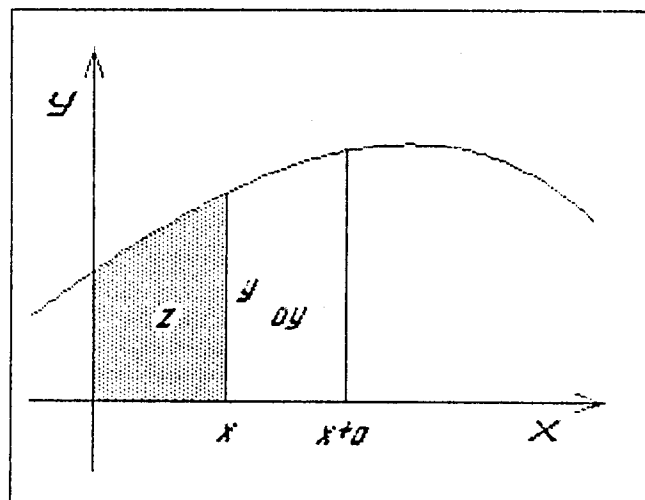
Njutn je svoje glavne matematičke ideje vezane za infinitezimalni račun prvi put izložio u Principima gde se nalaze osnovni koncepti tri razvojne etape njegovog poimanja suštine infinitezimalnog računa. Sve tri faze su pojedinačno obrađene u posebnim delima koja su nastala pre objavljivanja Principa, ali su slično kao i Principi, objavljena znatno kasnije, tek posle 1700. godine. Prvi pristup problemima određivanja pravca tangente i inverznog problema određivanja površine ispod krive je preko infinitezimala i iznet je u spisu *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (0

analizi pomoću jednakosti sa beskonačnim brojem izraza) napisanom 1669. godine ali objavljenom tek 1711. godine. Drugi pristup je preko fluksija i fluenti i dat je u spisu *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (Metod fluksija i beskonačnih redova) iz 1671. godine, objavljenom 1736. godine, a treći pristup je preko prvih i poslednjih odnosa dat u spisu *De quadratura curvarum* (O kvadraturi krivih) napisanom 1676. godine i objavljenom 1704. godine.

Prvi pristup karakterišu geometrijske i analitičke infinitezimale u okviru binomne teoreme. U njemu je Njutn primenio ideju beskonačno malih pravougaonih površina kao infinitezimala prostora, i računao površinu ispod date krive, ili krivu ako je data površina ispod nje. Postupak ćemo ilustrovati na primeru date površine z

$$z = ax^n \quad (1)$$

gde je n ceo broj ili razlomak. Beskonačno malo povećanje nezavisne promenljive x Njutn je nazvao momenat i , kao i James Gregory (1638-1675) u delu *Geometriae pars universalis* (Univerzalna strana



Slika 6.

geometrije) iz 1668. godine, obeležio sa "o". Zatim je površinu ograničenu traženom krivom, x-osom, y-osom i ordinatom u apscisi x+o obeležio sa z+oy gde je oy momenat (infinitesimalni prirastaj) površine z. Tada je

$$z + oy = a(x + o)^n \quad (2)$$

Oduzimajući (1) od (2) dobije se

$$oy = a(x + o)^n - ax^n$$

zatim se primeni binomna teorema

$$oy = aonx^{n-1} + aoo \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + aooo \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} \dots$$

Deleći levu i desnu stranu sa "o" ostaje

$$y = anx^{n-1} + ao \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + aoo \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} \dots$$

a odbacujući sve izraze koji sadrže "o" Njutn je dobio

$$y = anx^{n-1}$$

što predstvalja krivu ispod koje je data površina $z=ax^n$. Postupak se može posmatrati i obrnuto tj. ako je data kriva $y=anx^{n-1}$ površina ispod nje je $z=ax^n$.

Njutn je ovde prvo našao trenutni odnos promene jedne promenljive (z) u odnosu na drugu (x), što pretstavlja diferenciranje zatim izračunao površinu preko inverznog procesa nalazjenja odnosa promene što je neodređeni integral krive (funkcije) y. Odlučujuću ulogu u ovom procesu je odigralo pretpostavljanje prostornih infinitezimala koje, u cilju određivanja površine, nije sabirao, već ih je posmatrao kao trenutno povećanje površine pri infinitezimalnom povećanju nezavisne promenljive x. To znači da u

ovom postupku nije koristio graničnu vrednost zbira, već, kao što je rečeno, pretpostavku da se površina dobija inverznim procesom od izračunavanja odnosa promene. Time je u stvari prvi put data osnovna teorema infinitezimalnog računa o sumaciji (integraciji) kao obrnutom procesu diferenciranja. U ovom postupku se nalaze i začeci druge etape u radu Njutna na infinitezimalnom računu u kojoj će on izneti kinematički koncept fluksija i fluenti, koncept u kome će odlučujući ulogu imati vreme. Naime, ako se ordinata y shvati kao brzina povećanja površine a apscisa x kao vreme, dobiće se prava infinitezimalistička koncepcija izračunavanja površine gde će proizvod y -a i intervala na x -osi koji predstavlja beskonačno mali vremenski priraštaj dati beskonačno mali deo površine ispod krive. Sabiranjem tih momenata površine dobija se cela površina. Ali za razliku od njegovih prethodnika koji su površinu dobijali upravo takvim postupkom, Njutn je celokupnu površinu računao samo iz trenutnog odnosa promene u jednoj tački. U celom tom postupku nije jasno navedeno zašto na koji način i pod kojim uslovima izostavlja članove koji sadrže "o" što je i izazvalo mnoge kritike.

U Kvadraturi krivih Njutn o fluksijama i fluentama piše: "Ne posmatram matematičke veličine kao da su obrazovane od delova, ma kako da su mali ti delovi, nego kao da su opisane neprekidnim kretanjem. Linije su opisane i nastale, ne nizanjem delova jednog do drugog, već neprekidnim kretanjem tačke; površi neprekidnim kretanjem linije; tela neprekidnim kretanjem površi; uglovi rotacijom krakova; vreme neprekidnim tokom. Smatrajući dakle da su veličine koje rastu u jednakim vremenima veće ili manje, prema tome da li rastu većom ili manjom brzinom, tražio sam metodu da odredim veličine prema brzinama kretanja ili rašćenja koje ih proizvode,

nazivajući FLUKSIJAMA brzine ovih kretanja, ili rašćenja, dok nastale veličine FLUENTAMA. Tako sam naišao na metodu fluksija koju sam upotrebio u izračunavanju kvadrature krivih".*

Ako su nastali kvantiteti, fluente, bile obeležene sa x i y , fluksije su bile zapisivane sa \dot{x} i \dot{y} . Fluksije višeg reda ili fluksije fluksije Njutn je obeležio sa \ddot{x} , \ddot{x} i \ddot{y} , \ddot{y} itd. Fluente čije su fluksije date sa x i y obeležio je sa \dot{x} i \dot{y} , a njene fluente, fluente ovih fluenti, sa \ddot{x} i \ddot{y} .

Dva su osnovna problema analize izražena rečnikom metode fluksija:

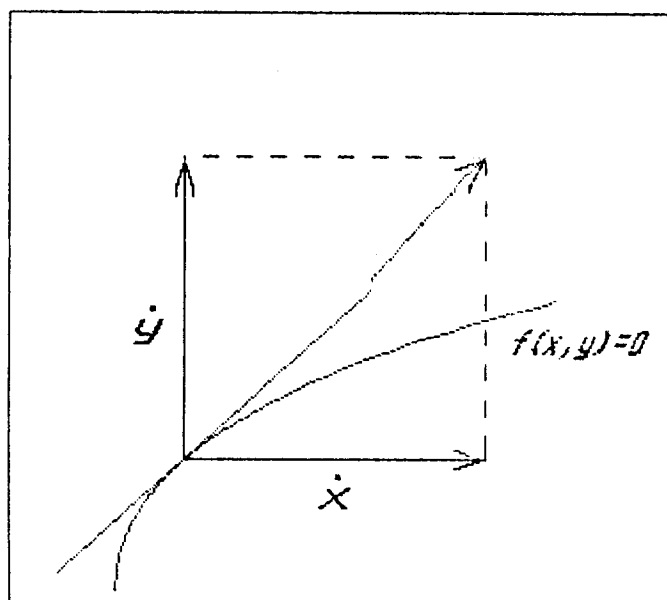
1. Ako je data relacija među fluentama odrediti relaciju među fluksijama, što je diferenciranje funkcije promenljivih koje zavise od vremena
2. Preko date jednačine koja sadrži fluksije naći relaciju među fluentama, što je problem integracije diferencijalne jednačine.

Kinematičkom terminologijom terminima ova dva problema odgovaraju nalaženju brzine kretanja ako je dat pređeni put u prostoru, odnosno nalaženju pređenog puta u prostoru ako je data brzina kretanja. Oba ova problema su neodvojiva od vremena. Tako su i fluente neraskidivo vezane za vreme, ali nisu jednostavno funkcije vremena kao nezavisne promenljive već su u uzajamnim odnosima sa svojim fluksijama kao brzinama menjanja.

Njutn je posmatrao krivu $f(x,y)=0$ kao mesto preseka dve linije u kretanju, jedne vertikalne i jedne horizontalne (Slika 7). Na taj način koordinate tačke $(x$ i $y)$ su u funkciji vremena i označavaju

* Citirano po [27] str. 363.

položaje vertikalne i horizontalne linije. Kretanje se može shvatiti kao kompozicija horizontalnog kretanja sa vektorom brzine \dot{x} i vertikalnog kretanja sa vektorom brzine \dot{y} . Tangentni vektor brzine



Slika 7.

se dobije kao zbir ova dva vektora, pa se pravac tangente dobija iz odnosa \dot{y}/\dot{x} . Ako su oba ova kretanja uniformna tada su predena rastojanja proporcionalna njihovim brzinama a ako su kretanja proizvoljna tada se posmatra beskonačno kratki vremenski interval ("o") u kome je svako kretanje u suštini uniformno. Na taj način su \dot{x} i \dot{y} brzine koje se nalaze diferenciranjem x -a i y -a po vremenu t ($dy/dt, dx/dt$) a odnos $\dot{y}/\dot{x}=dx/dy$.

Ako je "o" beskonačni mali interval vremena tada su \dot{x}_0 i \dot{y}_0 beskonačno mali priraštaji x -a i y -a ili momenti - trenutne promene fluenti. Ove količine koje posmatram kao promenljive i neodredene, i povećavajuće i smanjujuće kao što je kod kontinualnog kretanja ili toka (fluksa), piše Njutn u Principima, ja razumem njihovo trenutno povećanje (inkrement) ili smanjenje (dekrement) pod imenom moment.

Tako se inkrement može smatrati za dodati ili pozitivni moment, a dekrement za oduzeti ili negativni moment... . Momenti treba da se shavataju kao upravo nastali početak konačne veličine ([33] str. 249). Dakle kriva se posmatra u stanju nastajanja a momenti-promene brzine u vremenu koje iščezava. Da bi sada videli kako Njutn nalazi odnos između \dot{y} i \dot{x} posmatračemo fluentu $y=x^n$. Njutn prvo formira

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n \quad (1)$$

zatim razvija desnu stranu po binomnom obrascu, oduzima od (1) fluentu $y=x^n$, dobijenu jednakost deli sa "o", odbacuje sve izraze koji sadrže "o" i dobija $\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}$ odnosno $\dot{y}/\dot{x}=nx^{n-1}$, što u modernom zapisu odgovara jednakostima

$$\frac{dy}{dt} = nx^{n-1} \frac{dx}{dt} \quad \text{odnosno} \quad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

a posle (skraćivanja sa dt) dobija se $dy/dx=nx^{n-1}$ što predstavlja današnji zapis diferenciranja.

Da bi što preciznije zasnovao infinitezimalne procese Njutn je u trećem pristupu, u Kvadratuti krivih, uveo i razradio teoriju graničnih odnosa kao teoriju prvih i poslednjih odnosa promene. Dok je u prva dva pristupa infinitezimalnom računu Njutn koristio izvesne infinitezimale tako da se svaka promena ili svako kretanje sastoji iz beskrajno malih promena, vreme iz beskrajno kratkih vremenskih intervala, prostor iz beskrajno malih prostornih jedinica-momenata, u ovom je pokušao da izbegne beskonačno male veličine na taj način što bi momenti (inkrementi i dekrementi) bili počeci ili krajevi veličina koje nastaju i nestaju. Prikazaćemo taj metod ponovo na funkciji $y=x^n$. Priraštaj nezavisnoj promenljivoj x,

dakle vremenu, Njutn je obeležio sa "o". Pošto je u daljem postupku posmatrao odnos funkcija po samo jednoj promenljivoj, za moment nije uzeo "ox" bez obzira što je taj zapis više u skladu sa računom fluksija. Sada je $(x + o)^n$ priraštaj funkcije x^n . Problem je da se odredi fluksija fluente x^n u stanju nastajanja. Ako se $(x + o)^n$ razvije po binomnoj formuli dobice se

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} oox^{n-2} + \dots$$

Za razliku od prethodnog postupka iz Metoda fluksija, kada je u okviru jednakosti sa dve promenljive jednostavno odbacio izraze koji sadrže "o" jer je "o" nešto što iščezava ili ništa, što je potpadalo pod Berklijevu lemu*, ovde je naglasak na funkciji jedne promenljive i Njutn je uporedio priraštaj za x ("o") sa priraštajem za x^n ($nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} oox^{n-2} \dots$) i dobio odnos

$$\frac{o}{nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} oox^{n-2} + \dots}$$

* Georges Berkeley (1685-1753) je u Analistu (*The Analyst*, 1734) oštro napao Njutnov pristup analizi pomoću fluksija i iščezavajućih kvantiteta, što je F. Cajori nazvao ključni trenutak u istoriji matematički misli u Velikoj Britaniji. U Analistu Berkli je formulisao lemu: Ako se, s namerom da se bilo kakav stav dokaže, prepostavi nešto pomoću čega se dode do nečeg drugog, pa se posle sama prepostavka razori ili odbaci nekom suprotnom prepostavkom, onda, u tom slučaju, i sve do čega se stiglo i svaka posledica toga moraju takođe biti razoreni ili odbačeni i od tada se više ne mogu prepostavljati ili upotrebljavati u dokazivanju, (citirano po [5], str. 226) kojom se napada Njutnov priraštaj "o" koji je po potrebi čas različit od nule (kada formulu razvija po binomnom obrascu) čas jednak nuli (kada odbacuje izraze koji ga sadrže). Ova kritika je otklonjena preciznim formulisanjem graničnih procesa.

a posle skraćivanja sa "o"

$$\frac{1}{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} ox^{n-2} + \dots}$$

Ovaj odnos se može shvatiti kao odnos priraštaja vremena i brzine. U ovom trenutku Njutn pušta da "o" iščezava i dobija poslednji odnos iščezavajućih priraštaja $1/nx^{n-1}$, što ustvari predstavlja granicu (limes) odnosa promena. Ovaj poslednji odnos priraštaja kao veličina koje iščezavaju je isto što i prvi odnos veličina koje nastaju. Poslednje odnose Njutn je najpreciznije definisao u Principima ([33] str. 88): Poslednji odnosi kvantiteta koji iščezavaju nisu, precizno govoreći, odnosi poslednjih kvantiteta, već granica kojoj se odnos tih količina, povećavajući se bez ograničenja, približavaju, i koju, mada mogu prići bliže od bilo koje razlike, oni ne mogu preći niti dostići pre nego količine neodređeno iščeznu. To je u stvari i odgovor na Berklijevu kritiku Njutnovih fluksija i poslednjih odnosa iščezavajućih kvantiteta za koje je Berkli rekao da nisu ni konačni kvantiteti a ni nula i nazvao ih je duhovi minulnih kvantiteta (the ghosts of departed quantities).

Slično je Njutn definisao i poslednju brzinu kao onu brzinu kojom se telo kreće, ne pre nego što stigne na svoje poslednje mesto, kada kretanje prestane, niti posle toga, već u onom trenutku u kome stiže. Ova poslednja brzina ustvari predstavlja trenutnu brzinu. Međutim Njutn ni ovde nije sasvim eliminisao infinitezimale jer se odnos $1/nx^{n-1}$ dobija transformacijom izvesnog količinskog odnosa vremena i brzine u odnos trenutka kao vremenske infinitezimale i momenta kao kinematičke infinitezimale. Tu "o" teče kao vreme i prelazi preko različitih vrednosti i u jednom,

poslednjem trenutku uzima vrednost nula. Ali tada, ako je vremenski priraštaj nula i prostorno povećanje je nula pa ni odnos $0/0$ nema smisla, a samim tim nema ni brzine u trenutku. To je uvideo Berkli i napao je i ovu koncepciju diferencijalnog računa. Njutn je i sam shvatio da pri ovakvom objašnjenju nije sve na svom mestu pa je za priraštaj u brzini dozvolio izvesnu konačnu količinu, a za poslednje odnose je rekao da nisu, strogo govoreći, odnosi poslednjih kvantiteta. U svemu tome se nalazi puno spekulacije i nedostatak preciznog shvatanja koncepta beskonačnosti, neprekidnosti i realnih brojeva, što je u krajnjem slučaju, smisao granice, čemu se Njutn približio ali da je posvetio više vremena razjašnjenju elemenata koji konfigurišu u definiciji poslednjih odnosa, infinitezimalni račun bi bio zasnovan jedan vek pre vremena Košija ([9] str. 196).

Čini se da je metod fluksija najviše odgovarao Njutnovom duhu i da je taj metod najbliži Košijevom shvatanju izvoda kao granice odnosa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Naime na primeru $y=x^n$ Njutn nalazi razliku $f(x+\Delta x) - f(x)$ kada od $y + \dot{oy}$ oduzima y tj. od $(x + \dot{ox})^n$ oduzima x^n jer je $y=x^n$ a $y + \dot{oy} = (x + \dot{ox})^n$ i na taj način dobija

$$\dot{oy} = (x^n + nx^{n-1} \dot{ox} \dots) - x^n$$

ako bi se sada leva i desna strana jednakosti podelila sa \dot{ox} dobio bi se odnos

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(x^n + nx^{n-1} \dot{ox} \dots) - x^n}{\dot{ox}}$$

u kome izraz u zagradi odgovara $f(x + \Delta x)$ a \dot{ox} odgovara Δx . Dalje skraćivanjem sa \dot{ox} dobija se

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \dot{ox} \dots$$

U ovom trenutku Njutn odbacuje sve članove koji sadrže "o" što odgovara "puštanju" da $\Delta x \rightarrow 0$, a rezultat je $\dot{y}/\dot{x} = nx^{n-1}$ što odgovara $dy/dx = nx^{n-1}$, pa se može kazati da fluksije \dot{y} i \dot{x} odgovaraju diferencijalima dy i dx . Ovo je opet vrlo blisko i metodi poslednjih odnosa što bi bilo očiglednije da je posmatran odnos priraštaja x^n i x a ne obrnuto kao što je Njutn posmatrao. Može se zaključiti da neke suštinske razlike u sva tri razvojna stupnja Njutnovog pronalaska infinitezimalnog računa i nema. Još bi bilo preciznije kazati da se odbacuju svi članovi koji sadrže \dot{ox} , a ne "o", odnosno $\dot{ox} \rightarrow 0$ što bi bilo sasvim blizu Košijevom poimanju graničnih procesa. Ostaje još samo poslednji korak u rigoroznom matematičkom shvatanju infinitezimalnog računa, a to je njegovo oslobađanje od kretanja a samim tim i od brzine, prostora i vremena, odnosno svodenje na čisto matematičke pojmove.

Još jedan termin ima važnu ulogu u Njutnovom poimanju infinitezimalnog računa. Taj pojam je princip stalne promene, transmutacije, čime se dolazi do jednog drugog aspekta uticaja vremena na njegovo otkriće diferencijalnog i integralnog računa. To je specifična uloga vremena u alhemiji i alhemijskim procesima čijem je proučavanju Njutn posvetio veliki deo svog stvaralačkog rada, što je u istoriji nauke često zapostavljeno.

III.4. VREME U ALHEMIJI I INFINITEZIMALNI RAČUN

Poreklo Njutnovog znanja je višestruko. Dok su Kepler i Galilei imali prvenstveno uticaj na prirodno-naučne - astronomske, fizičke, mehaničke ideje Njutna. Sistemsko-filozofski uticaj dolazi sa druge strane, od Dekarta i F. Bejkona. Naime, u 17. veku su bila prihvaćena dva osnovna, suprotna naučno-filozofska sistema; jedan je preferirao analitičko-deduktivnu metodu koju je zastupao Dekart, a drugi empirijsko-induktivnu metodu koju je zastupao Bejkon. Svaka od te dve metode je pri dokazivanju i opisivanju određenih, željenih pojava i pojmova u isto vreme bila i superiorna i inferiorna u odnosu na onu drugu. Njutt je to tačno osetio pa je u Principima izneo skladnu sintezu obe metode i pri tom naglasio da ni eksperimenti bez systemske osnove i tumačenja, ni dedukcija od pra-načela bez eksperimentalnog dokaza ne dovode do pouzdane i potpune teorije. Nadmašivši i sjedinivši Bejkonovo sistemsko eksperimentisanje i Dekartovu neeksperimentalnu matematičku analizu razvio je potpuno matematizovanu formulaciju mehanicističkog pogleda na svet na kojoj će se skoro dva veka zasnivati prirodne nauke. Jasno je koliko su opravdane i istinite Njutnove reči da ako je i video malo dalje od drugih to je zato što je stajao na ramenima divova. Međutim, da li su neki divovi - ideje zapostavljeni u naučnoj i istorijskoj analizi Njutnove klasične nauke? Da li je u fantastičnom razvoju nauke u periodu naučne revolucije i kasnije, nešto ispušteno i zaboravljeno?

U Njutnovo misli svakako se krije mnogo više od matematike i iskustva. To je pre svega jasna intuicija granice čisto mehaničkog shvatanja sveta, kao i saznanje da je jedina prava istina u isto

vreme i naučna i filozofska i mistička i perceptivna i da zahteva celovitost mišljenja i znanja. Istoričari nauke i sami naučnici su tek poslednjih petnaestak godina ozbiljno proučavali njegove neobjavljene spise i došli do zaključka da krajnja formulacija materije, kretanja, vremena, sila u univerzumu, ravnopravno proističe iz mehanicističke filozofije, teologije, metafizike, mistike, hermetizma, alhemije, stoicizma. Među onima koji su posebno obrađivali i izučavali ovu temu ističu se Betty Jo Teeter Dobbs, Richard S. Westfall, J. E. McGuire, P. M. Rattansi.

Poznato je da je Njutn čitao knjige sa starogrčkim mitovima, dela mnogih antičkih filozofa kao i radove M. Maiera, E. Ashmolea, John Deea, T. Nortona, H. Kunratha, R. Lulla, R. Fludda, J. Boehmea, Paracelsusa, poznatih renesansnih alhemičara, hermetista i rozenkrojčera. Do nedavno se nije ni slutilo kakvu su ulogu imali ti alhemijski spisi za Njutnova klasična naučna otkrića. Kada je B.J.T. Dobbs objavila rezultate istraživanja i analize Njutnovih neobjavljenih alhemijskih spisa, koje je posle licitacije u Sotheby-ju u periodu od 1937-39 godine sakupio John Maynard Keynes, potpuno su se razjasnile Keynes-ove reči da "Njutn nije bio prvi u veku razuma već je bio poslednji čarobnjak, Vavilonac, Sumerac, poslednji veliki um koji je gledao na vidljivi intelektualni svet sa istim očima kakvim je gledao onaj koji je sagradio intelektualno nasleđstvo pre više od 10000 godina". Bez obzira što je većina istoričara takve ezoterijske korene Njutnovih ideja ili prezirala ili energično odbacivala ili ignorisala i prećutkivala, R. Westfall tvrdi da prisustvo alhemije i Hermetičke filozofije u delima Njutna nije sporno i da je osnovni problem međusobni uticaj ta dva naučno-filozofska sistema, a ceo Njutnov rad posle 1675. godine on

interpretira kao dugotrajan napor da alhemiju integriše sa filozofijom mehanike.

Alhemija, naravno, nije bila nepoznata naučnicima 17.veka. Njom su se bavili Herman Boerhaave, Robert Boyl, Samuel Hartlieb, Kenelm Digby, George Starkey, Nicolas le Fevre, G.W. Lajbnic i drugi, ali, ako su i imali ideju da je povežu sa ostalim svojim naučnim radom i filozofskim idejama, nikome to nije pošlo za rukom, osim možda Lajbnicu. Njutn je jedini uklopio alhemijska proučavanja i eksperimentisanja u sve svoje klasične rezultate - zakone orbitalnog kretanja, infinitezimalni račun, teoriju materije, optiku. Za to je posebno bio zaslužan Barou koji je ohrabrivao i podržavao Njutna u bavljenju alhemijom i stalno ga upućivao da to radi naučno, eksperimentalno i da rezultate i saznanja iskoristi u pogodnom trenutku.

Tako se Njutn, tražeći strukturu sveta, bavio alhemijom prvenstveno sa ciljem da uskladi mikrosvet sa njegovim sistemom univerzuma i učini ih homolognim. Jasno mu je bilo da gravitacija važi u svemiru, među nebeskim telima, što je i matematički dokazao, a takode je bio ubeden da ista/slična sila dejstvuje i među svim delićima materije. Tragajući za tom silom i težeći da mehaničku filozofiju oslobodi okultnog pojma "delovanja na daljinu", Njutn je u svoj sistem sveta i materije uvodio razne etre koji su u početku (do 1665. godine) imali pasivna, čisto mehanička svojstva, a kasnije su primili univerzalni, aktivni karakter. U Pitanju 31 iz Optike ([34] str. 376) Njutn piše: "... Igleđa mi verovatno da je Bog u početku stvorio materiju u obliku čvrstih, masivnih, krutih, neprobojnih, pokretnih čestica... Dalje mi izgleda da te čestice ne poseduju samo silu inercije (Vis Inertia) praćenu sa pasivnim zakonima kretanja kao prirodnim posledicama te sile već da se kreću

zahvaljujući aktivnom principu, kao što je onaj gravitacijski, i onaj koji prouzrokuje fermentaciju i kohezivnost tela... Mi se susrećemo sa vrlo malim brojem kretanja u svetu pored onih koja potiču od tog aktivnog principa". Njutn je smatrao da je taj "aktivni princip" gravitacije agens pomoću koga Bog deluje i među česticama materije-mikrokosmosu i među nebeskim telima-makrokosmosu. Kao o poslednjem izvoru te aktivnosti Njutn razmišlja o česticama svetlosti. Tako u spisu priključenom latinskom izdanju Optike iz 1706. godine piše: "... Sada postoje svetlost najaktivnije od svih nama poznatih tela, i ulazi u sastav svih prirodnih tela, zašto i to ne bi mogao biti glavni aktivni princip u njima?".

U Propositiones, spisu iz 1669. godine Njutn uvodi još jedan aktivni, oživljavajući agens - Magneziju. To je pojam koji u sebi sadrži sva mistična alhemijska svojstva magneta i u alhemijskoj literaturi se naziva "FERMENTAL VIRTUE" ili "VEGETABLE SPIRIT". Njutn piše da je Magnezija jedini vitalni agens rasiren u svim telima koja postoje na svetu i primenjuje ga i na minerale i životinje i biljke. Dakle Njutn je verujući da su sve stvari Jedno i da nastaju iz Jednog izabrao alhemijski put za onaj koji će ga dovesti do krajnje suštine materije gde se ona pokazuje kao to Jedno-do MATERIAE PRIMAE, do LAPIS PHILOSOPHORUM, koji se kao jedinstvo mikrokosmosa i makrokosmosa u alhemiji označuju sa Deus Terestris (Zemaljski Bog) i Fillius Macrocosmi (Sin svemira). A kada konačno sazna to Jedno, biće sposoban da stvara i menja, da ostvari svoj pravi, skriveni cilj života - spoznaju Božanske Transmutacije. O pojmu Transmutacije Njutn je, kao i o ideji univerzalne materije, prva saznanja dobio iz Boyl-ovog dela *Origine of forms and qualities* iz 1666. godine. Tu su, između ostalog, data dva eksperimenta -

- pretvaranje zlata u srebro i vode u zemlju. O Transmutaciji Boyl kaže "... Slobodno ću reći da pod pretpostavkom da se svi metali kao i druga tela sastoje iz jedne Univerzalne materije zajednicke svim telima, ne razlikuju ni u čemu osim obliku, veličini, kretanju ili mirovanju... ja ne vidim u prirodi stvari bilo kakvu nemogućnost pretvaranja jednog metala u drugi" (str. 350)*. Eksperiment o pretvaranju vode u zemlju je spomenuo i Njutn u Pitanju 30 iz Optike ([34] str. 374): "... voda se uzastopnim destilacijama menja u čvrstu zemlju kao što je Mr. Boyl već pokušao...", a u Conclusio pri Principima je izneo sličnu misao: "... ta retka supstanca voda može biti uzastopnim fermentacijama transformisana u gušću supstancu". Ovo intenzivno zanimanje za Transmutaciju vode potpuno odgovara alhemijskom načelu da se ne izvodi nikakav postupak pre nego što se sve reducira na vodu.

Jednom pročitavši ovakve ideje Njutn je do kraja života ostao zanesen i preokupiran Transmutacijom koju je shvatao kao proces dezorganizacije i reorganizacije materije, preko koga se materija reducira, oživljava i razvija u nove forme. Alhemijski agens odgovoran za ovakav proces je univerzalni FERMENTAL VIRTUE čija je "prva uloga da putrefikuje jedinstvenu celinu i razori je u kaos" (Propositiones), jer "ništa ne može biti promenjeno iz onog šta jeste bez putrefakcije... Ništa ne može biti generisano ili razvijeno osim putrefikovane materije". (*On the nature of acids* iz 1691. godine)**. Ovako objašnjena, putrefakcija potpuno odgovara prvoj fazi Velikog alhemijskog Dela (OPUS MAGNUM), Transmutacije

* Navedeno po [17] str. 200

** Dobbs B.J.T., *Newton's Alchemy and his theory of matter*, ISIS 1982, 73 (269) str. 519

koja dovodi do MATERIAE PRIMAE i simbolizira smrt odnosno redukciju materije na bezoblično stanje koje odgovara prvobitnom kosmičkom haosu kada su svi delići materije slični i sposobni da budu remodelovani u bilo koju formu.

Njutn je već u Principima ([33] str. 542) izneo svoje verovanje u mogućnost Transmutacije: "... Sva tela mogu biti transformisana jedno u drugo bilo koje vrste i svi međustupnjevi mogu biti indukovani u toj transmutaciji... sva materija koja padne na zemlju iz repa komete može biti kondenzovana u svaku zemaljsku supstancu". Ovo verovanje je možda najeksplicitnije izrazio u Pitanju 30 ([34] str. 374) : "... Pretvaranje tela u svetlost i svetlosti u tela je potpuno u skladu sa zakonima prirode jer čini se da prirodi gode Transmutacije...". Zatim daje primere Transmutacija u prirodi i završava rečima: "... među tako različitim i čudnim transmutacijama zašto ne bi priroda pretvarala tela u svetlost i svetlost u tela?". U sledećem, 31. Pitanju, kada spominje delovanje Aqua Fortis-a i Aqua Regis-a na razne metale na najbolji način izbija Njutnova, prava alhemijska, čarobnjačka priroda.

Ali kakva je uloga čoveka, alhemičara u Velikom delu, u tom beskrajno dugom Transmutacionom procesu prirode? Njegova uloga je da ubrza ritam vremena i beskonačni proces prirode uklopi u kratki ljudski život. Želja za pretvaranjem zemaljskog tempa u tempo čoveka potiče još iz praistorije, iz vremena kada se verovalo u Zemlju-Majku u čijoj utrobi "rastu" i "dozrevaju" svi metali koji bi se, kada bi ostali dovoljno dugo, možda neko beskonačno vreme, u zemlji, pretvorili u zlato kao najfiniji metal. Vadenje rude iz zemlje je predstavljalo "prevremeni porodaj" i alhemičar svojim postupcima te izvadene rude i metale ubrzanim postupkom pretvara u

zlato. Preuzimajući ulogu prirode čovek-alhemičar počinje da zamenjuje vreme.

Njutn je kao veliki alhemičar znao za ulogu i važnost vremena i u svoj sistem sveta ga je utkao kao jedan od osnovnih pojmova. U Scholium-u pri definicijama I do VIII [33] on je definisao Apsolutno i Relativno vreme: "Apsolutno, istinsko, matematičko vreme po sebi i po svojoj prirodi ravnomerno teče bez odnosa sa bilo čim spoljašnjim i drugim imenom naziva se trajanje; relativno, prividno, obično vreme je čulna i spoljašnja (precizna ili neprecizna) mera nekog trajanja izvedena pomoću kretanja, a to je mera kojom se prost svet obično služi kao zamenom za istinsko vreme".

Ovako definisano Apsolutno vreme kao beskonačno trajanje koje je potpuno nezavisno od bilo kakvog čulno opazljivog kretanja u fizičkom svetu, odgovara stanju večnog pretvaranja "nižih" metala u njihov "najviši" oblik-zlato. Relativno vreme, ono koje se može meriti i čulima izvoditi preko kretanja, odgovara vremenu koje je potrebno čoveku, alhemičaru da ubrzanim postupkom izvede istu Transmutaciju i koje se može potvrditi njenim stupnjevitim proizvodima. Prema tome kretanje kao konstantno stanje je analogno večnoj Transmutaciji, pa i brzina kretanja brzini Transmutacije. U stalnoj težnji da je ubrza, da pobedi vreme, alhemičar u svoje eksperimente uvodi vatru i toplotu. To ubrzanje postupka odgovara ubrzanju tela u kretanju. Dakle, "rast" metala, koji se nalaze u zemlji, do zlata, kao i rad alhemičara sa istim ciljem, su činjenice koje su određene samo dužinom trajanja vremena. Naravno, svaka Transmutacija se može "prekinuti" u bilo kom trenutku i putrefakcijom tek stvorena medumaterija ponovo vratiti unazad do bezoblične, crne Pratečnosti. Ova mogućnost reverzibilnosti je

analogna nalaženju fluksije-kvantiteta u nastajanju iz fluente-
-nastalog kvantiteta i obratno. Ta celokupna analogija, koja je
pomalo i metafizička, nalazi glavnu podršku u činjenici da su i
alhemijski procesi i infinitezimalni račun zasnovani na promeni u
toku vremena. Na taj način je i Njutново bavljenje alhemijom moglo
imati važnu ulogu u poimanju inverznosti postupaka integraljenja i
diferenciranja.

ZAKLJUČAK

Uloga prostora i vremena u istorijskom razvoju i intelektualnom kreiranju infinitezimalnog računa, kao i u Njutnovoj formulaciji računa fluksija očigledno je značajna. Naravno, to ne znači da je infinitezimalni račun nastao isključivo kao posledica razvoja ovih pojmova. Pored već naznačenog, specifičnog alhemijskog uticaja, na njegov nastanak su, sa potpuno ravopravnom važnošću, uticala mnoga matematička otkrića i u istoriji matematike, a posebno infinitezimalnog računa, svi ti koreni su jasno naznačeni.

Koliko su alhemija ili neka druga ezoterična nauka imali uticaj na Njutnova otkrića infinitezimalnog računa i gravitacije, i pored mnogih radova na tu temu, još uvek ostaje nedovoljno razjašnjeno pitanje, no nije smelo pretpostaviti da su njegova genijalnost i znanje bili plod srećne sinteze klasičnih (teologija, alhemija, filozofija...) i modernih - naučnih (matematika, fizika mehanika...) Weltanschauung-a.

L I T E R A T U R A

- [1] ARISTOTEL, O nebu, Moderna, Beograd, 1989.
- [2] ARISTOTEL, O nastajanju i nestajanju, Grafos, Beograd, 1989.
- [3] ARISTOTEL, Fizika, SNL, Zagreb, 1987.
- [4] ARISTOTEL, Metafizika, Kultura, Beograd, 1971.
- [5] ARSENIJEVIĆ M. Prostor, Vreme, Zenon, Biblioteka Teka Filozofsko društvo Srbije i Grafički zavod Hrvatske, Beograd & Zagreb, 1986.
- [6] AUGUSTIN A., Ispovjesti, Kršćanska sadašnjost, Zagreb, 1973.
- [7] BARROW I., Geometrical Lectures, Open Court, Chicago, London, 1916.
- [8] BERKLI G., Rasprava o pitanjima ljudskog saznanja, BIGZ, Beograd, 1977.
- [9] BOYER C.B., The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover, New York, 1949.
- [10] BOYER C.B., A History of Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [11] CAJORI F., The Purpose of Zeno's Arguments on Motion, ISIS 3, 1920.
- [12] CAJORI F., History of Zeno's Arguments on Motion, American Mathematical Monthly 22, 1915.
- [13] CAPEK M., The Concepts of Space and Time - Their Structure and Their Development, Reidel Publishing Company, Dordrecht Holland and Boston - U.S.A., 1976.
- [14] DADIĆ Ž., Razvoj matematike, Školska knjiga, Zagreb, 1975.
- [15] DILS H., Fragmenti predsokratovaca, Naprijed, Zagreb, 1983.
- [16] DIJKSTERHUIS E.J., The Mechanization of the World Picture, Princeton, 1986.
- [17] DOBBS B.J.T., The Foundations of Newton's Alchemy, Cambridge University Press, 1975.
- [18] EDWARDS C.H. Jr., The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.

- [19] Fragmenti Elejaca, prevod Slobodan Žunić, BIGZ, Beograd, 1984.
- [20] CADAMER H.G., The Western View of the Inner Experience of Time and the Limits of Thought, (vidi [49]).
- [21] Greek Mathematical works vol.1 & 2, prevod T. Ivor, Harvard University, Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.
- [22] GRÜNBAUM A., Philosophical Problems of Space and Time, Reidel publishing company, Dordrecht - Holland, Boston - USA, 1974.
- [23] GUREVICH A.J., Time as a problem of cultural history, (vidi [48]).
- [24] HEATH T.L. A history of Greek mathematics, Dover, New York, 1981.
- [25] HEGEL G.V.F., Istorija filozofije, BIGZ, Beograd, 1983.
- [26] JAMMER M., Concepts of Space, Harvard Univesrity Press, Cambridge, Massacheusetts, 1969.
- [27] KLINE M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, New York, 1972.
- [28] KOARE A., Naučna revolucija, Nolit, Beograd, 1981.
- [29] LAERTIJE D., Životi i mišljenja istaknutih filozofa, BIGZ, Beograd, 1979.
- [30] LLOYD G.E.R., Views on Time in Greek Thought, (vidi [48])
- [31] MLADENović M., Razvoj fizike - mehanika i gravitacija, Gradevinska knjiga, Beograd, 1986.
- [32] McGUIRE J.E., RATTANSI P.M., Newton and the "Pipes of Pan", Notes & Records of The Royal Society of London 21, I, 1966.
- [33] SIR ISAAC NEWTON's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World, Translated in to English by Andrew Motte in 1729. The translation revised and supplied with an historical and explanatory appendix by Florian Cajori, Berkeley, 1946.
- [34] NEWTON I., Opticks or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections & Colours of Light, based on the fourth edition London 1730, Pover, New York, 1952.
- [35] Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton. A selection from the Portsmouth Collection in the University Librerary Cambridge. Chosen, edited and translated by A. Rupert Hall and Marie Boas Hall, Cambridge University Press, 1958.

- [36] Isaac Newton's Papers and Letters on Natural Philosophy and Related Documents, Edited with general introduction by I. Bernard Cohen, assisted by R.E. Schoefield, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1958.
- [37] NIKOLIĆ A., O Njutnovom znanju, Zbornik radova simpozijuma Njutnova Philosophia Naturalis - nastanak i prevazilaženje, Kragujevac, 1987.
- [38] OWEN G.E.L., Plato and Parmenides on Timeless Present, The Monist 50, 1966.
- [39] PAVLOVIĆ B.U., Filozofija prirode, Naprijed, Zagreb, 1978.
- [40] PLATON, Parmenid, BIGZ, Beograd, 1973.
- [41] PLATON, Timaj, Mladost, Beograd, 1981.
- [42] PLOTIN, Enade, NIRO Književne novine, Beograd, 1984,
- [43] Prostor i vreme danas, Nolit, Beograd, 1987.
- [44] REICHENBACH H., The Philosophy of Space & Time, Dover, New York, 1958.
- [45] SCHOEFIELD M., Did Parmenides Disc over Eternity?, Archive für Geschichte der Philosophie 52, 1970.
- [46] STIPANIĆ E., O Lajbnicovom i Njutnovom shvatanju izvoda, Nauka i priroda 3, I, Beograd, 1948.
- [47] STROJK D.J., Kratak pregled istorije matematike, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1987.
- [48] Time & Cultures, (zbornik), UNESCO, Paris, 1976.
- [49] Time & Philosophies, (zbornik), UNESCO, Paris, 1977.
- [50] Time & Sciences, (zbornik) UNESCO, Paris, 1979.
- [51] VON FRANZ M-L., Number & Time, Rider, London, 1974.
- [52] VON FRANZ M-L., Vreme - ritam i mirovanje, Polja, 318. Novi Sad, 1985.
- [53] VAN DER WAERDEN B.L., Science Awakening, P.Noordhoff, Groningen, 1954.
- [54] WEYL H., Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton, 1949.
- [55] WHITROW G.J., The Natural Philosophy of Time, Thomas Nelson and Sons Ltd., London and Edinburgh, 1960.
- [56] WHITROW G.J., Šta je vreme, Prosveta, Beograd, 1985.
- [57] WHITROW G.J., Mathematical Time and its Role in the Development of the Scientific World-view, (vidi [50]).