МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Божидар Јовановић

ИНТЕГРАБИЛНИ НЕХОЛОНОМНИ СИСТЕМИ НА ЛИЈЕВИМ ГРУПАМА

Докторска дисертација

БЕОГРАД, 1999.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГ[illegible]
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНВ. Бр. 293/0/022.
БИБЛИОТЕКА

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Чланови комисије:

ментор
др Владимир Драговић
Математички институт, САНУ
Београд

ментор
проф. др Александар Бакша
Математички факултет
Универзитета у Београду

проф. др Новица Блажић
Математички факултет
Универзитета у Београду

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

ИНТЕГРАБИЛНИ НЕХОЛОНОМНИ СИСТЕМИ НА ЛИЈЕВИМ ГРУПАМА

У дисертацији се разматрају нехолономни системи крутог тела са инваријантном мером као што су Сусловљев и Чаплигинов проблем. Конструисана је фамилија интеграбилних потенцијалних пертурбација Сусловљевог проблема параметризована паром произвољних функција. Познати системи Харламова-Забелине и Козлова су специјални случајеви. Полазећи од Сусловљевог, Харламова-Забелине и Козловљевог случаја, добијени су нови интеграбилни системи додавањем гироскопске силе. Добијена је бесконачно-димензиона фамилија интеграбилних полиномијалних пертурбација Чаплигиновог проблема. Иста класа потенцијала даје интеграбилне пертурбације класичног Ојлеровог случаја ротације крутог тела око непокретне тачке, као и нехолономног проблема Веселова-Веселове. До сада, једини познати интеграбилни потенцијали тих проблема су били Клебш-Тисеринов потенцијал и квадратни потенцијал Богојављенског за Ојлеров случај.

Проучавамо и уопштења датих класичних интеграбилних нехолономних система крутог тела на Лијевим групама. Разматрамо нехолономне системе на Лијевим групама са лево-инваријантим Лагранжијанима и десно-инваријантним (лево-инваријантним) неинтеграбилним дистрибуцијама (тзв. LR и LL системи). Дата је метода конструкције првих интеграла LR и LL система, коришћењем инваријанти ко-придруженог дејства. Добијени резултати су омогућили конструкцију нових интеграбилних LR система на тродимензионим унимодуларним Лијевим групама. Пронађени су закони очувања за четвородимензиони нехолономни проблем Веселова-Веселове. Конструисане су угловне координате за основни интеграбилни LL систем на групи $SO(4)$. У случају постојања инваријантне мере пронађени су нови интеграбилни LL системи на двема класама шестодимензионих Лијевих група, које садрже $SO(4)$, $SO(3.1)$, $SO(2.2)$, $E(3)$, $SL(2,R) \oplus SL(2,R)$ итд.

КЉУЧНЕ РЕЧИ

Ојлер-Поенкареове једначине, интеграбилни системи, нехолономне везе, инваријантна мера, системи крутог тела, инваријанте дејства Лијеве групе, интеграбилне пертурбације, итд.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

INTEGRABLE NONHOLONONIC SYSTEMS ON LIE GROUPS

The dissertation deals with nonholonomic rigid body systems with an invariant measures such as the Suslov and the Chaplygin problem. The family of integrable potential perturbations parametrized by a pair of two arbitrary functions of the Suslov problem has been constructed. Well known systems of Kharlamova-Zabelina and Kozlov are special cases. Starting from the Suslov, Kharlamova-Zabelina and Kozlov cases, we have obtained new integrable systems by adding gyroscopic force. An infinite-dimensional family of polynomial perturbations of the Chaplygin problem was derived. The same class of potentials serves as integrable perturbations of the classical Euler case of the rotations of a rigid body fixed at a point, as well for the nonholonomic Veselov-Veselova problem. Until now, the Klebsh-Tisserand potential and the Bogoyavlenski quadratic potential for the Euler case were the only known integrable potentials of these problems.

We study generalizations of the Suslov and Chaplygin problem on Lie groups. We consider nonholonomic systems on Lie groups with a left-invariant Lagrangian and right-invariant (left-invariant) nonintegrable distributions (LR and LL systems). A method for the construction of the first integrals of LR and LL systems by using the invariants of the co-adjoint action is given. These results are used for the construction of new integrable LR systems on the three dimensional groups. We have found explicit formulae for the conservation laws of the four dimensional nonholonomic Veselov-Veselova problem. An example of the construction of angular coordinates for the basic integrable LL system on group $SO(4)$ is given. In the case of the existence of an invariant measure, we have found new integrable LL systems on two classes of six-dimensional Lie groups, including groups $SO(4)$, $SO(3.1)$, $SO(2.2)$, $E(3)$, $SL(2,R) \oplus SL(2,R)$ etc.

KEY WORDS

Euler-Poincare equations, integrable systems, nonholonomic constraints, invariant measure, rigid body systems, invariants of the Lie group action, integrable perturbations, etc.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Предговор

У овом раду разматраћемо нехолономне системе са инваријантном мером. Наш циљ је конструкција нових интеграбилних система. Већина механичких система није интеграбилна. Интеграбилни системи су зато веома значајни и често се посматрају као прва апроксимација општих неинтеграбилних система. Посебан проблем је непостојање општег метода испитивања интеграбилности нехолономних механичких система.

Међу најпознатије класичне интеграбилне нехолономне проблеме кретања крутог тела са инваријантном мером спадају Сусловљев и Чаплигинов проблем.

Предмет нашег рада су два природно постављена проблема. Први проблем јесте да се пронађу евентуалне интеграбилне пертурбације Сусловљевог и Чаплигиновог задатка. Други проблем јесте да се конструишу аналогони тих система на Лијевим групама и да се проучи њихова интеграбилност.

Рад се састоји из четири главе:

1. Увод. Нехолономни системи

2. Уопштење класичних интеграбилних случајева кретања крутог тела

3. Нехолономни LR системи на Лијевим групама

4. Нехолономни LL системи на Лијевим групама.

Глава 1 се састоји из две целине. У првом параграфу дајемо мотивацију проблема, развој неких основних идеја, као и кратак преглед резултата. У осталим параграфима излажемо неопходне дефиниције и теореме, које се користе у раду: основне чињенице о Лијевим групама, нехолономним и Хамилтоновим системима, примени симетрија система у налажењу интеграла кретања и редукцији једначина кретања.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Главе 2, 3 и 4 садрже оригиналне резултате.

У глави 2 конструишу се интеграбилне пертурбације Сусловљевог и Чаплигиновог задатка, док се у главама 3 и 4 посматрају одговарајућа уопштења датих система на Лијевим групама. У глави 3 се анализирају нехолономни системи на Лијевим групама са лево-инваријантним Лагранжијанима и десно-инваријантним нехолономним дистрибуцијама. У глави 4 проучавамо нехолономне системе на Лијевим групама, при чему су и Лагранжова функција и неинтеграбилна дистрибуција лево-инваријантне.

Формуле се посебно нумеришу у свакој глави. Теореме се нумеришу са два броја, први представља број главе у којој се теорема налази, док је други број редни број теореме у датој глави. Литература се цитира у угластим заградама.

Овом приликом желео бих да се захвалим др Владимиру Драговићу на указаној изузетној помоћи и подршсци при изради рада. Посебну захвалност дугујем професору др Александру Бакши и Катедри за механику Математичког факултета за свесрдно ангажовање. Пријатна ми је дужност да се захвалим професору др Новици Блажићу и Семинару из геометрије Математичког факултета за стицање образовања из диференцијалне геометрије. Од великог је значаја и заједнички рад са колегом мр Бориславом Гајићем, са којим сам дискутовао о потешкоћама које су настајале у току писања рада. Друга глава ове дисертације је управо плод заједничког рада Драговића, Гајића и аутора. Захваљујем се и свим другим колегама и пријатељима који су ме подржали у раду. Посебно жени Вишњи и сину Гаврилу.

Београд, Илиндан 1999.

Божидар Јовановић

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Глава 1

Увод. Нехолономни системи

1.1 Увод

1. Један од основних проблема у проучавању динамичких система:

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in R^n \tag{1}$$

јесте питање интеграбилности, односно решивости у квадратурама диференцијалних једначина. Интеграбилност се манифестује постојањем *првих интеграла*. Функција $f(x)$ је први интеграл једначина (1) уколико је она константна функција дуж трајекторија система (1). Геометријски то значи да ако се трајекторија $x(t)$ налази на подмногострукости одређеној једначином $f(x) = c$ за $t = t_0$, да је тада цела крива на датој подмногострукости. Аналитички услов да функција f буде први интеграл јесте $df(X) = 0$. Довољан, али не и неопходан услов, за интеграбилност једначина (1) је постојање $n-1$ функционално независних интеграла $f_1, \dots, f_{n-1}$. Тада трајекторије система леже на кривама које су одређене једначинама $f_1 = c_1, \dots, f_{n-1} = c_{n-1}$. Систем је *партикуларно интеграбилан* уколико је интеграбилан само за фиксиране вредности неких интеграла кретања.

Поменимо неке од математичара деветнаестог века који су допринели решавању проблема интеграбилности механичких система. Хамилтон и Јакоби су пронашли методу интеграције важне класе механичких система, данас познатих као Хамилтонови системи. Абел, Јакоби

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

и Вајерштрас су засновали теорију елиптичких, хиперелиптичких и θ–функција која је омогућила експлицитну интеграцију многих проблема. Софус Ли је увео теорију, данас познату као теорију Лијевих група и алгебри. Еми Нетер је доказала да свако дејство Лијеве групе које је у сагласности са једначинама кретања система даје прве интеграле система.

Анри Поенкаре, проучавајући кретање планета [50], као фундаменталан проблем механике је поставио питање о интеграбилности система једначина $\dot{x} = X_0(x) + \epsilon X_1(x)$ уколико знамо да су једначине $\dot{x} = X_0(x)$ интеграбилне. У данашње време, на основу рада Поенкареа, А. Н. Колмогоров, В. И. Арнољд, Ј. Мозер, В. В. Козлов, су дали одговоре на проблем интеграбилности многих класичних проблема. Доказано је да је интеграбилност ретка појава. Већина проблема је неинтеграбилна. Проучавање интеграбилних система је изузетно значајно. Неинтеграбилни системи се посматрају као прве апроксимације интеграбилних система [38], [49].

В. И. Арнољд је указао да се проблем кретања крутог тела може природно уопштити у виду геодезијских линија лево-инваријантних метрика Лијевих група. Одговарајуће једначине кретања су Ојлер-Поенкареове једначине:

$$\dot{M}_k = \sum_{ij} C^i_{jk} \frac{\partial H(M)}{\partial M_j} M_i, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2}$$

на Лијевим алгебрама. Откривени су нови интеграбилни системи на Лијевим групама и алгебрама [19], [22], [40]. Динамички системи на Лијевим групама, редукција система са симетријама су нашли велику примену у разним областима геометрије, механике и физике [34], [44].

Питање постојања првих интеграла и интеграбилности система је одвојен проблем од самог решавања проблема у квадратурама. 70-тих година овог века, развијене су алгебарско-геометријске методе експлицитне интеграције динамичких система. Преглед неких од најважнијих резултата се може наћи у књигама [13], [40].

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

2. Ми ћемо проучавати нехолономне механичке системе. Класификацију механичких система са везама на холономне и нехолономне је дао Херц средином деветнаестог века. Механички систем је нехолономан уколико су на кретање система задате неинтеграбилне везе. У супротном систем је холономан. У већини механичких примера везе су линеарне по брзинама.

Крајем деветнаестог и почетком двадесетог века неки од највећих механичара и математичара бавили су се развојем и геометризацијом нехолономних система. Поменимо само неке од њих. Поенкаре и Читајев су написали једначине кретања у квази-координатама. Апел је пронашао примере нехолономних система у којима ограничења нису линеарна по брзинама. Схоутен, Вранчеану, Вагнер су увели тензор-кривине нехолономних система [3], [4].

Структура једначина нехолономних система битно отежава њихово решавање у односу на одговарајуће једначине холономних система. За разлику од холономих система, може се рећи да општа метода проучавања интеграбилности нехолономних система још није развијена. Преглед интеграбилних класичних нехолономних система се може наћи у књизи [21].

Велики допринос нехолономној механици дао је Чаплигин. Између осталог, приметио је да неки нехолономни системи поседују инваријантну меру [31], [33].

Кажемо да једначине (1) *чувају глатку меру* $f(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ уколико се мера сваког мерљивог скупа $D \subset R^n$ не мења под дејством локалне једнопараметарске групе дифеоморфизама Ψ_t једначина (1):

$$\frac{d}{dt}\int_{\Psi_t(D)} f(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = 0. \tag{3}$$

Јакоби је показао да постојање инваријантне мере омогућује конструкцију локално још једног интеграла кретања. На тај начин за интеграбилност једначина (1) довољно је $n-2$ првих интеграла кретања $f_1, \ldots, f_{n-2}$.

В. В. Козлов је теорему Јакобија допунио, тако што је применио теорему Колмогорова о редукцији диференцијалних једначина са инваријантном мером на торусу [18]. Нека су на инваријантној многострукости $E_c = \{x \in R^n,\ f_i(x) = c_i,\ i = 1, \ldots, n-2\}$ функције $f_1, \ldots, f_{n-2}$ независне. Тада се решења једначине (1) која леже на E_c могу наћи у квадратурама (Јакобијева теорема). Нека је L_c повезана компактна компонента површи E_c и нека $X(x) \neq 0$ за $x \in L_c$. Због постојања инваријантне мере L_c је орјентабилно и како је Ојлерова карактеристика L_c једнака 0, L_c је дифеоморфна торусу. По теореми Колмогорова могу се наћи угловне координате φ_1, φ_2 у којима кретање на L_c има облик:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\omega_1}{\Phi(\omega_1, \omega_2)}, \qquad \dot{\varphi}_2 = \frac{\omega_2}{\Phi(\omega_1, \omega_2)}, \tag{4}$$

где су ω_1 и ω_2 константе, $|\omega_1| + |\omega_2| \neq 0$ и Φ глатка позитивна функција 2π периодична по φ_1 и φ_2 [15], [38].

3. Међу најпознатије класичне интеграбилне нехолономне системе са инваријантном мером спадају Сусловљев и Чаплигинов проблем. Сусловљев проблем описује нехолономно кретање крутог тела око непокретне тачке [24]. Чаплигинов проблем описује котрљање динамички несиметричне, избалансиране лопте по хоризонталној равни [33].

Предмет нашег рада су два природна начина уопштења описаних проблема. Први проблем, у складу са питањем Поенкареа о интеграбилности пертурбованих система, јесте да се пронађу евентуалне интеграбилне пертурбације Сусловљевог и Чаплигиновог задатка. Тиме ћемо се бавити у другој глави. Други проблем, следећи идеју Арнолда, јесте да се конструишу аналогони тих система на Лијевим групама и да се проучи њихова интеграбилност. То ће бити садржај треће и четврте главе.

Првим проблемом бавили су се Харламова-Забелина 1957. и Козлов 1985. Харламова-Забелина за Сусловљев и Козлов за Сусловљев

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

и Чаплигинов проблем су конструисали интеграбилне потенцијалне пертурбације [29], [15].

Први корак ка уопштењу нехолономног кретања крутог тела на Лијевим групама урадио је А. П. Веселов 1985, [6]. Он је дефинисао нехолономне геодезијске токове на Лијевим групама са лево-инваријантном метриком и десно-инваријантом неинтеграбилном дистрибуцијом. Веселов је доказао да такви нехолономни системи у случају унимодуларних група имају инваријантну меру. Лијева група је унимодуларна уколико поседује двострану инваријантну меру.

Нешто касније, Козлов је претпоставио лево-инваријантну метрику и лево-инваријантну нехолономну везу. Испоставља се да такви системи имају инваријантну меру само у специјалним случајевима и за компактне групе дат је критеријум постојања инваријантне мере [16].

По енглеским речима *left, right* системи које су увели Веселов и Козлов редом се називају LR и LL системи. Једначине кретања LL и LR система се могу посматрати као пертурбације Ојлер-Поенкареових једначина (2).

Напоменимо још да су природна уопштења Сусловљевог и Чаплигиновог проблема на вишедимензионо кретање крутог тела дата у раду [45].

4. На крају, укратко ћемо приказати резултате добијене у овом раду. У другој глави ћемо развити методу интеграбилних потенцијалних пертурбација Сусловљевог и Чаплигиновог проблема. Метода је модификација оне коришћене за конструкцију интеграбилних пертурбација холономних система [12], [17], [41], [43], [47]. Помоћу дате методе, у параграфу 2, добија се фамилија интеграбилних потенцијала Сусловљевог задатка, параметризована паром произвољних функција. Познати интеграбилни потенцијали Харламове-Забелине и Козлова су специјални случајеви добијених потенцијала. У параграфу 3, полазећи од Сусловљевог, Харламове-Забелина и Козловљевог

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

интеграбилног случаја, добили смо нове интеграбилне системе додавањем гироскопске силе. У параграфу 5, показана је интеграбилност котрљања динамички симетричне лопте по хоризонталној равни под дејством потенцијалне силе са потенцијалом инваријантним у односу на ротације око осе динамичке симетрије. У овом случају, за разлику од Лагранжевог случаја ротације крутог тела око непокретне тачке, допунски интеграл је четвртог степена и не следи из симетрије система. У параграфу 4, у случају динамичке несиметрије лопте, добијена је бесконачно димензиона фамилија полиномијалних пертурбација Чаплигиновог проблема. Иста класа потенцијала даје интеграбилне пертурбације класичног Ојлеровог случаја ротације крутог тела око непокретне тачке, као и проблема Веселова-Веселове [7]. До сада, Клебш-Тисеринов потенцијал, и квадратни потенцијал Богојављенског [2] за Ојлеров случај, су били једини познати интеграбилни потенцијали тих проблема (параграф 6).

У трећој глави анализираћемо LR системе. Излаже се метода конструкције првих интеграла таквих система (параграф 3). При томе се користе инваријанте ко-придруженог дејства групе, као и интеграли Ојлер-Поенкареових једначина. Показује се да је таква метода довољна да обезбеди интеграбилност LR система на тродимензионим унимодуларним Лијевим групама (параграф 4). У истом параграфу се добијају и интеграбилне потенцијалне пертурбације LR система на Хајзенберговој и групи $SL(2, R)$. У параграфу 5 конструишу се интеграли четвородимензионог нехолономног кретања крутог тела око непокретне тачке, која представљају уопштења проблема Веселова-Веселове.

У четвртој глави бавићемо се LL системима. У параграфу 3 изводи се услов постојања инваријантне мере LL система. За нехолономне геодезијске линије групе $SO(4)$, у случају када је нехолономна веза сопствени потпростор метричког тензора, експлицитно се конструишу угловне координате (4) (параграф 4). У параграфу 5 излаже

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

се основни резултат ове главе: конструишу се нови интеграбилни нехолономни LL системи са инваријантном мером на Лијевим групама чије алгебре припадају двема класама шестодимензионих Лијевих алгебри, које укључују алгебре: $so(4)$, $so(3.1)$, $so(2.2)$, $e(3)$, $sl(2,R) \oplus sl(2,R)$.

Примене. Већина механичких система није интеграбилна. Добијени интеграбилни нехолономни системи служе као основа за проучавање општих неинтеграбилних нехолономних система. Методе интеграбилних пертурбација нехолономних система коришћене у раду се могу искористити за добијање интеграбилних уопштења и других класичних интеграбилних нехолономних система.

Део резултата рада је објављен у радовима [42], [48] и приказан на конференцијама *Geometric Combinatoric*, Котор 1998, *22. Југословенски конгрес механике*, Врњачка Бања 1997, *Winter School Geometry and Physics*, Srni 1997.

1.2 Дистрибуције тангентног раслојења

Дајемо кратки преглед неких, неопходних за даље излагање, појмова из теорије дистрибуција. Потребни докази се могу наћи у књигама [46], [53].

Дистрибуција D тангентног раслојења TM $n-$димензионе многострукости M је колекција $k-$димензионих потпростора $D_x \subset T_xM$ која глатко зависи од $x \in M$.

Дистрибуција D је *интеграбилна* уколико за сваку тачку $x \in M$ постоји *интегрална подмногострукост* $N \subset M$ која садржи x, таква да се тангентно раслојење TN поклапа са рестрикцијом дистрибуције D на N. У супротном кажемо да је дистрибуција *неинтеграбилна*. Ако је дистрибуција интеграбилна тада у околини сваке тачке постоји локални координатни систем $\{x^1, \dots, x^n\}$ такав да су интегралне подмногострукости дате једначинама $x^{k+1} = c_1, \dots, x^n = c_{n-k}$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Линеарни простор глатких векторских поља на M који чине модул у односу на множење глатким функцијама на M називамо *диференцијалним системом.* Скуп свих глатких сечења дистрибуције D чини један диференцијални систем. Њега ћемо означавати са $\Gamma(D)$, или просто само са Γ. Нека је:

$$(5)\quad \Gamma^{(i+1)} = [\Gamma^{(i)}, \Gamma^{(i)}] = \{X \in \Gamma(TM),\ X = [Y, Z],\ Y, Z \in \Gamma^{(i)}\},\ \Gamma^{(0)} = \Gamma.$$

Напоменимо да су $\Gamma^{(i)}$ такође диференцијални системи, али да њима не мора одговарати ни једна дистрибуција од TM.

Критеријум о интеграбилности дистрибуције је дао Фробенијус:

Теорема 1.1. *Потребан и довољан услов да дистрибуција D буде интеграбилна је* $\Gamma^{(1)} = [\Gamma(D), \Gamma(D)] \subset \Gamma(D)$.

Уколико је испуњен услов $\Gamma \subset \Gamma^{(1)} \subset \Gamma^{(2)} \subset \dots \Gamma^{(s)} \subset \Gamma^{(s+1)} = \Gamma(TM)$ тада за дистрибуцију кажемо да је *потпуно нехолономна.* Следећа теорема је позната као теорема Чоу-Рашевског:

Теорема 1.2. *Уколико је дистрибуција D потпуно нехолономна тада се произвољне две тачке $x, y \in M$ могу спојити део-по-део глатком кривом $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$) таквом да је $\dot\gamma(t) \in D_{\gamma(t)}$ за све $t \in [0, 1]$.*

1.3 Основни појмови о Лијевим групама

1. *Лијева група* је група G са структуром глатке многострукости, при чему су множење у групи $(a, b) \mapsto ab$ и инверз $a \mapsto a^{-1}$ глатка пресликавања [44], [54]. *Лијева алгебра* над пољем реалних бројева R је векторски простор $\mathcal{V}$ над R са операцијом $[.,.] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ која је билинерна, кососиметрична, и задовољава *Јакобијев идентитет:* $[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0$, $A, B, C \in \mathcal{V}$.

Означимо са L_a и R_a дифеоморфизме групе одређене са левим, односно десним множењем елементом g: $L_g(a) = ga$, $R_g(a) = ag$. За

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

векторско поље $X \in \Gamma(G)$ кажемо да је *лево* (*десно*) инваријанто уколико је $(L_g)_* X|_a = X|_{ga}$ $((R_g)_* X|_a = X|_{ag})$ за свако $g \in G$.

Лево-инваријантна векторска поља се природно идентификују са тангентним простором у јединици групе: $X \in \Gamma(G) \mapsto X|_e \in \mathcal{G} = T_eG$ (e је јединица у групи). Ако су X и Y лево-инваријантна векторска поља, тада је лево-инваријантан и њихов комутатор $[X, Y]$. $(\mathcal{G}, [.,.])$ чини Лијеву алгебру, која се назива *Лијева алгебра Лијеве групе* G. Нека је $(e_1, \dots, e_n)$ база Лијеве алгебре (лево-инваријантних векторских поља) групе G. Величине C^k_{ij} дефинисане са $[e_i, e_j] = \sum_k C^k_{ij} e_k$ називамо *структурним константама* алгебре $\mathcal{G}$.

Глатко пресликавање $f: R \to G$ назива се *једнопараметарска подгрупа* групе G ако је $f(a+b) = f(a)f(b)$ за све $a, b \in R$, и ако је $f(0) = e$. Ако је X лево-инваријантно векторско поље тада је његова једнопараметарска група дифеоморфизама ϕ^t_X дефинисана за свако t. Све једнопараметарске подгрупе су облика $G^t_X = \phi^t_X(e)$.

2. *Група G делује слева на многострукост M* ако је задато глатко пресликавање $h: G \times M \to M$ такво да је: $\overline{g_1 g_2} = \bar{g}_1 \circ \bar{g}_2$, $g_1, g_2 \in G$, и $\bar{e} = id_M$, где је $\bar{g}(x) = h(g, x)$. Уколико је $M = V$ векторски простор, и уколико су $\bar{g}$ линеарна пресликавања, тада кажемо да је са h дато *представљање* групе G [54].

Нека група G делује на многострукост M. Дејству подгрупе G_Y одговара векторско поље: $v_Y(x) = \frac{d}{d\alpha}|_{\alpha=0} \bar{G}^\alpha_Y(x)$. Пресликавање $Y \to v_Y$ је хомоморфизам Лијеве алгебре $\mathcal{G}$ и Лијеве алгебре векторских поља на M: $v_{[Y,Z]} = [v_Y, v_Z]$, и назива се *тангентни хомоморфизам.*

Орбита тачке $x \in M$ је $\mathcal{O}(x) = \{\bar{g}(x),\ g \in G\}$. Функција f на M је *инваријанта* под дејством групе G уколико је $f \circ \bar{g} = f$, за све $g \in G$, односно уколико је константна на орбитама дејства. Неопходан услов за f да буде инваријанта дејства је да $v_Y(f) = 0$ за све $Y \in \mathcal{G}$.

Подгрупу $G_x = \{g \in G,\ \bar{g}(x) = x\}$ називамо *изотропном подгрупом* елемента $x \in M$. Она је затворена (у тополошком смислу) подмно-

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

гострукост од G. Група G делује *транзитивно* на M уколико за сваки пар тачака $x, y \in M$ постоји $g \in G$, при чему је $\bar{g}(x) = y$. Дејство је *ефективно* уколико из $\bar{g} = id_M$ следи да је $g = e$. Уколико група G делује транзитивно на M тада су све изотропне подгрупе G_x изоморфне међу собом и многострукост M је дифеоморфна простору G/G_{x_o} [52].

3. *Придружено дејство* групе G на алгебру $\mathcal{G}$ је дато са

$$Ad: G \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad Ad_g\Theta = (R_{g^{-1}})_*(L_g)_*\Theta, \quad g \in G, \, \Theta \in \mathcal{G}. \tag{6}$$

Диференцијал у јединици e групе G придруженог дејства је придружено дејство ad алгебре $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}$ [26]:

$$ad = d(Ad_g)|_{g=e} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad ad_\Omega\Theta = [\Omega, \Theta]. \tag{7}$$

Ко-придружено дејство групе G на $\mathcal{G}^*$ је дуално придруженом дејству:

$$\begin{aligned} &Ad^* : \; G \times \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*, \quad Ad^*_{g^{-1}}N = (R_{g^{-1}})^*(L_g)^*N, \\ &(N, Ad_g\Theta) = (Ad^*_{g^{-1}}N, \Omega), \qquad M \in \mathcal{G}^*, \, \Omega \in \mathcal{G}, \, g \in G. \end{aligned} \tag{8}$$

Диференцијал ко-придруженог дејства је ко-придружено дејство ad^* алгебре $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}^*$, и оно је дуално придруженом дејству ad:

$$\begin{aligned} &ad^* = d(Ad^*_{g^{-1}})|_{g=e} : \; \mathcal{G} \times \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^* \\ &(ad^*_\Omega N, \Theta) = (N, ad_\Omega\Theta) = (N, [\Omega, \Theta]), \qquad N \in \mathcal{G}^*, \, \Theta, \Omega \in \mathcal{G}. \end{aligned} \tag{9}$$

Орбите $\mathcal{O}(m)$ ко-придруженог дејства су хомогене многострукости: $\mathcal{O}(m) = \{M \in \mathcal{G}^*, \, M = Ad^*_{g^{-1}}m, \, g \in G\} = G/G_m, \, G_m = \{g \in G, \, Ad^*_{g^{-1}}m = m\}$. Тангентни простор у $M \in \mathcal{O}(m)$ је: $T_M\mathcal{O}(m) = \{ad^*_\Theta M, \Theta \in \mathcal{G}\}$. Димензија орбите је $dim(\mathcal{G}) - dim(Ann(m))$, где је Лијева алгебра $Ann(m) = T_eG_m = \{\Theta \in \mathcal{G}, \, ad^*_\Theta m = 0\}$, *анулатор* елемента m. Број $r = \min_{m \in \mathcal{G}^*} dim(Ann(m))$ назива се *индексом алгебре* $\mathcal{G}$ и означава са $r = ind(\mathcal{G})$. За опште m (тј. када m припада отвореном свуда густом скупу у $\mathcal{G}^*$) је $dim(Ann(m)) = r$ и анулатор елемента m је комутативна

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

алгебра, компонента јединице изотропне подгрупе G_m је комутативна група.

Функција $J : \mathcal{G}^* \to R$ је *инваријанта* на $\mathcal{G}^*$ уколико је инваријанта ко-придруженог дејства. Како је $v_\Theta|_M = ad^*_\Theta M$, функција J је инваријанта ако и само ако је

$$(10) \qquad (ad^*_\Theta M, \frac{\partial J}{\partial M}) = (M, [\Theta, \frac{\partial J}{\partial M}]) = 0, \qquad \Theta \in \mathcal{G}, M \in \mathcal{G}^*.$$

Постоји $r = ind(\mathcal{G})$ функционално независних инваријанти: $I_1, \dots, I_r$. Општа орбита ко-придруженог дејства се може видети као подмногострукост задата једначинама: $I_1 = c_1, \dots, I_r = c_r$.

4. Нека $\bar{\mathcal{G}}$ означава векторски простор који одговара Лијевој алгебри $\mathcal{G}$ групе G, и нека је Ad придружено дејство групе G на алгебру $\mathcal{G}$: *Полудиректан производ* Лијеве групе G и комутативне Лијеве групе $\bar{\mathcal{G}}$ је Лијева група $S = G \times_{Ad} \bar{\mathcal{G}}$, са законом множења: $(g_1, \Omega_1)(g_2, \Omega_2) = (g_1 g_2, \Omega_1 + Ad_{g_1}\Omega_2)$. Јединични елемент групе S је $(e, 0)$, и инверз је дат са: $(g, \Omega)^{-1} = (g^{-1}, -Ad_{g^{-1}}\Omega)$. Лијева алгебра $\mathcal{S}$ је полудиректан производ $\mathcal{G} \times_{ad} \bar{\mathcal{G}}$. Придружено и ко-придружено дејство од S и $\mathcal{S}$ су дати са [52]:

$$(11) \qquad \begin{aligned} &Ad_{(g,\Theta)}(\Omega_1, \Omega_2) = (Ad_g\Omega_1, Ad_g\Omega_2 + [\Theta, Ad_g\Omega_1]), \\ &[(\Omega_1, \Theta_1), (\Omega_2, \Theta_2)] = ([\Omega_1, \Omega_2], [\Omega_1, \Theta_2] + [\Theta_1, \Omega_2]), \\ &Ad^*_{(g,\Theta)^{-1}}(M, N) = (Ad^*_{g^{-1}}M - ad^*_\Theta(Ad^*_{g^{-1}}N), Ad^*_{g^{-1}}N), \\ &ad^*_{(\Omega,\Theta)}(M, N) = (ad^*_\Omega M + ad^*_\Theta N, ad^*_\Omega N). \end{aligned}$$

5. Размотримо претходне дефиниције на Лијевој групи $SO(3)$, групи ортогоналних 3×3 матрица са детерминантом 1. Њена Лијева алгебра $so(3)$ се састоји од свих 3×3 кососиметричних матрица. Како важи $(L_B)_*\Theta = B\Theta$, $(R_B)_*\Theta = \Theta B$, тангентни простор у тачки B је $T_B SO(3) = \{B\Theta,\ \Theta \in so(3)\}$.

Лијева алгебра $(so(3), [.,])$ је изоморфна Лијевој алгебри $(R^3, \times)$, где је $\times$ уобичајени векторски производ. Нека је (e_1, e_2, e_3) база $so(3)$

са структурним константама ϵ_{ijk} $([e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k)$, и нека је $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ортонормирана база простора R^3. Изоморфизам матрици $\Theta = \Theta^i e_i$ додељује вектор $\vec{\Theta} = \Theta^i \vec{e}_i$. Можемо изабрати такву базу e_i да је изоморфизам дат са:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -\Theta^3 & \Theta^2 \\ \Theta^3 & 0 & -\Theta^1 \\ -\Theta^2 & \Theta^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mapsto \qquad \vec{\Theta} = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \tag{12}$$

При томе су испуњени услови: $\Theta\vec{Q} = \vec{\Theta} \times \vec{Q}$, $\overrightarrow{Ad_B Q} = \overrightarrow{BQB^{-1}} = B\vec{Q}$, $\vec{Q} \in R^3$, $B \in SO(3)$. Изоморфизам је уједно и изометрија *Килингове форме* алгебре $so(3)$: $\langle .,. \rangle_k$ и Еуклидског скаларног производа $\langle .,. \rangle$: $\langle \Theta_1, \Theta_2 \rangle_k = -\frac{1}{2} tr(\Theta_1 \Theta_2) = \langle \vec{\Theta}_1, \vec{\Theta}_2 \rangle$.

Помоћу Килингове форме $\langle .,. \rangle_k$ можемо извршити идентификацију $so(3) \cong so(3)^*$ при којој операције ad^*, Ad^* прелазе у $-ad$, Ad: $\langle \Theta_1, [\Theta_2, \Theta_3] \rangle_k = -\langle [\Theta_2, \Theta_1], \Theta_3 \rangle_k$, $\langle B^{-1}\Theta_1 B, \Theta_2 \rangle_k = \langle \Theta_1, B\Theta_2 B^{-1} \rangle_k$.

Индекс алгебре $so(3)$ је 1. Инваријанта је $I = \langle M, M \rangle_k$. За $m \neq 0$ орбите придруженог дејства су сфере: $\mathcal{O}(m) = \{M \in so(3),\ M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\} = SO(3)/SO(3)_m$. Изотропна подгрупа $SO(3)_m$ је група ротација око вектора $\vec{m}$: $SO(3)_m = \exp(Ann(m)) = \{B \in SO(3),\ BmB^{-1} = m\ \ (B\vec{m} = \vec{m})\} \cong SO(2)$.

Полудиректан производ Лијеве групе $SO(3)$ и алгебре $so(3)$ је изоморфан групи кретања у Еуклидском простору $E(3)$.

1.4 Даламбер-Лагранжов принцип

1. У овом и следећем параграфу упознаћемо се са нехолономним и холономним механичким системима, посебно динамиком крутог тела. Изложени материјал се може наћи у књигама [21], [24], [36], [55], [37].

Посматрајмо *природни механички систем* од k материјалних тачака маса $m_1, \dots, m_k$. Изаберимо инерцијални систем координата са почетком у тачки O. Положаји материјалних тачака дати су радијус-векторима $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k$. Нека на њих делују силе $\vec{F}_i(\dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_k, \vec{r}_k, t)$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Претпоставимо да су дата ограничења на положаје и брзине тачака веза:

$$
(13) \quad
\begin{array}{ll}
(i) & f_j(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_k,t)=c_j,\ j=1,2,\dots,l,\\
(ii) & \sum_{i=1}^{k}\langle \vec{a}_j^{\,i}(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_k,t),\dot{\vec{r}}_i\rangle = a_j^0(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_k,t),\ j=l+1,\dots,s<3k.
\end{array}
$$

Херц је поделио механичке ситеме на *холономне* односно *нехолономне* у зависности да ли су везе *(ii)* интеграбилне или не, односно да ли су еквивалентне неким везама облика *(i)*.

Вектори $\vec{\xi}_1,\dots,\vec{\xi}_k$ се називају *виртуелна померања* уколико задовољавају услове: $\sum_{i=1}^{k}\langle\frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_i},\vec{\xi}_i\rangle=0$, $\sum_{i=1}^{k}\langle\vec{a}_j^{\,i},\vec{\xi}_i\rangle=0$, $j=1,\dots,s$. Кретање система у случају *идеалних веза* је одређено *Даламбер- Лагранжовим принципом:*

$$
(14) \qquad \sum_{i=1}^{k}\langle m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i,\vec{\xi}_i\rangle=0,
$$

за сва виртуална померања. Овај принцип се може узети за постулат и потврђен је бројним екпериментима.

Подсетимо се дефиниција неких основних појмова из класичне механике. *Центар масе система* је тачка са радијус-вектором $\vec{r}_c=\frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i$ где је $m=\sum_i m_i$ укупна маса система. *Количина кретања* $\vec{k}$, *момент количине кретања (за пол O)* $\vec{m}_o$, *момент силе (за пол O)* $\vec{l}_o$ су редом дати са $\vec{k}=\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i=m\dot{\vec{r}}_c$, $\vec{m}_o=\sum_i m_i\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i$, $\vec{l}_o=\sum_i\vec{r}_i\times F_i$ Уколико за пол изаберемо неку тачку $A\neq O$ тада је $\vec{r}_i=\vec{r}_A+\vec{q}_i$ и веза међу моментима количине кретања је: $\vec{m}_o=\sum_i m_i(\vec{r}_A+\vec{q}_i)\times\dot{\vec{r}}_i=\vec{r}_A\times\vec{k}+\vec{m}_A$.

Из Даламбер-Лагранжовог принципа могу се извести следећа тврђења. Тврђења (а) и (б) се називају и основне теореме динамике. Тврђење (в) је доказао Чаплигин [28].

Теорема 1.3. *(a) Нека је $\vec{f}=\sum_i\vec{F}_i$. Уколико везе допуштају виртуелна померања у правцу неког вектора $\vec{e}$, тада је: $\langle\dot{\vec{k}},e\rangle=\langle\vec{f},\vec{e}\rangle$.*

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

(б) Уколико везе допуштају виртуелна померања које одговарају ротацијама око непокретне осе правца $\vec{e}$ која пролази кроз тачку O (односно допуштају $\vec{\xi}_i$ правца $\vec{e}\times\vec{r}_i$), тада је $\langle\dot{\vec{m}}_o,\vec{e}\rangle = \langle\vec{l}_o(\vec{f}),\vec{e}\rangle$.

(в) Уколико везе допуштају виртуелна померања која одговарају ротацијама око покретне осе правца $\vec{e} = const$ која пролази кроз тачку $A(t)$, тада је $\langle\dot{\vec{m}}_A + \dot{\vec{r}}_A\times\vec{k},\vec{e}\rangle = \langle\vec{l}_A(\vec{f}),\vec{e}\rangle$.

Из теореме 1.3 лако се изводе и основни закони очувања. На пример, уколико важе услови (а) теореме 1.3 и ако је $\langle\vec{f},\vec{e}\rangle = 0$ тада је $\langle\vec{k},\vec{e}\rangle$ интеграл кретања. Навешћемо и *Чаплигинов интеграл површине* [28]. Уколико су испуњени услови (в) теореме 1.3 и још важи да је $\vec{r}_A(t) = \lambda\vec{r}_c(t)+\vec{r}_o$ ($\vec{r}_o$ је фиксиран вектор) и да је пројекција момента сила у односу на пол A на вектор $\vec{e}$ једнака нули, тада је $\langle\vec{m}_A,\vec{e}\rangle$ интеграл кретања механичког система (13), (14).

2. Нека су везе *(i)* функционално независне за свако t. Тада једначине $f_j = 0$, $j = 1,\dots,l$ одређују $n = 3k-l$ димензиону подмногострукост $M\{x\}$ простора $R^{3k}\{\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_k\}$, такву да се једначине $f_j = 0$ могу написати у облику: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(x,t)$. Многострукост M се назива *конфигурациони простор* система.

Нека су $\{x^1,\dots,x^n\}$ локалне координате на M. Координате x^i се називају *Лагранжове* или *генералисане.* Везе *(ii)* се могу написати у облику:

$$(\alpha^j(x,t),\dot{x}) = \beta^j(x,t), \qquad j = 1,\dots,m = n-(s-l) \tag{15}$$

где су $\alpha^j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^j(x,t)dx^i$ диференцијалне 1-форме на M. Нека су форме α^j независне за све (x,t).

Пут $x(t)$ је *допустив* уколико за свако t задовољава везе (15). Уколико је $\beta^j\equiv 0$ тада за везе кажемо да су *хомогене.* У супротном везе су *нехомогене.* Нека је

$$D = ker\{\alpha^j,\ j=\overline{1,m}\} = \{\eta\in T_xM,\ (\alpha^j,\eta)=0,\ x\in M,\ j=\overline{1,m}\} \tag{16}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$n-m$ димензиона дистрибуција тангентног раслојења TM. Напоменимо да она може да зависи од времена t. Виртуелна померања су сечења дистрибуције D.

Да би дали критеријум нехолономности, посматрајмо $(n-m)+1$ димензиону дистрибуцију $\bar{D} = ker\{\bar{\alpha}^j,\ j=\overline{1,m}\} \subset T(M\{x\} \times R\{t\})$, где је $\bar{\alpha}^j(x,t) = \alpha^j(x,t) - \beta^j(x,t)dt$. Систем је нехолономан ако и само ако дистрибуција $\bar{D}$ није интеграбилна. Уколико дистрибуција D не зависи од времена, тада је довољан услов да систем буде нехолономан неинтеграбилност дистрибуције D.

Величина $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{r}_i^2$ се назива *кинетичка енергија система*. Кинетичка енергија допушта представљање $T = T_2 + T_1 + T_0$, где је T_i форма степена i на M: $T(\dot{x},x) = \frac{1}{2}(a(x,t)\dot{x},\dot{x}) + (b(x,t),\dot{x}) + c(x,t)$.

Нека је: $Q = Q_i(\dot{x},x,t)dx^i$, $Q_j = \sum_{i=1}^k \langle \vec{F}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x^j}\rangle$. Величине Q_j се називају *генералисане силе*. Сила Q је *гироскопска* уколико задовољава услов: $\sum_i Q_i(\dot{x},x,t)\dot{x}^i = 0$. Сила је *потенцијална* (*генералисано потенцијална*) уколико постоји функција $U(x,t)$ $(U(\dot{x},x,t))$ таква да је $Q_i(\dot{x},x,t) = -\frac{\partial U}{\partial x^i}$, $\left(Q_i(\dot{x},x,t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial U}{\partial x^i}\right)$. Функција U се назива *потенцијална енергија*. (*генералисана потенцијална енергија*). На пример, уколико је: $\vec{F}_i = -\frac{\partial V(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_k,t)}{\partial \vec{r}_i}$, тада је $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}$ где је $U(x,t) = V(\vec{r}_1(x,t),\dots,\vec{r}_k(x,t),t)$.

Нека је $L = T - U$. Функција $L(\dot{x},x,t)$ се назива *Лагранжијан*.

Теорема 1.4. *Допустива трајекторија $x(t)$ је кретање механичког система са везама (15), Лагранжијаном L, и непотенцијалним силама Q уколико задовољава једначине:*

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} - Q, \xi\right) = 0, \qquad \xi \in \Gamma(D) \tag{17}$$

Координатно једначине (17) имају облик:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = \sum_j \lambda_j \alpha_i^j, \qquad && i = 1,\dots,n, \\ &\sum_i \alpha_i^j(x,t)\dot{x}^i = \beta^j(x,t), \qquad && j = 1,\dots,m. \end{aligned} \tag{18}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Једначине (17) и (18) се такође називају *Даламбер-Лагранжовим једначинама.* Лагранжове множиоце λ_j одређујемо из услова да кретање задовољава везе. Из предходне конструкције имамо да је матрица

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \dot{x}^j}, \quad 1 \leq i, j \leq n \tag{19}$$

позитивно дефинитна. Из теореме о имплицитној функцији следи да се множитељи λ_j могу изразити као глатке функције од променљивих $\dot{x}$, x и t.

3. Уопштење природних механичких система је дато следећом дефиницијом. Четворка (M, L, D, Q), где је M $n-$димензиона многострукост, L функција $L: TM\{\xi, x\} \to R$, $D \subset TM$ неинтеграбилна $n-m$ димензиона дистрибусија, $Q(\xi, x)$ 1-форма на M се назива *(Лагранжовим) нехолономним системом.* M се назива *конфигурациони простор система* и L *Лагранжијан система.* L, Q и D могу зависити од времена као од параметра. Ако је $x(t)$ крива на M са $L(\dot{x}, x)$ означаваћемо $L(\xi, x)|_{\xi=\dot{x}}$. За Лагранжијан претпостављамо да је матрица (19) несингуларна. *Хомогене, нехомогене везе и допустиве трајекторије*, дефинишемо исто као и у случају природних механичких система. Допустива крива $x(t)$ је *кретање нехолономног система* уколико задовољава Даламбер-Лагранжове једначине (17).

Уколико немамо нехолономних веза и ако је $Q \equiv 0$, кретање механичког система на конфигурационом простору M, изведено из Даламбер-Лагранжовог принципа описано је једначинама:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Једначине (20) се називају *Ојлер-Лагранжове једначине.* Оне се могу извести и из *варијационог принципа.* Крива $x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$ задовољава једначине (20) ако и само ако је екстремала функционала *дејства*:

$$S[\gamma(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{\gamma}(t), \gamma(t))dt, \ \gamma : \ C^\infty[t_1, t_2] \to M, \ \gamma(t_1) = a, \ \gamma(t_2) = b. \tag{21}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Када су присутне и нехолономне везе, тада функционал дејства можемо посматрати као функционал над скупом допустивих кривих. Међутим тада се екстремале функционала не поклапају са решењима Даламбер-Лагранжових једначина. Значи да са задатом тројком (M, D, L) имамо два различита нехолономна задатка: варијациони и механички. Варијациони задатак је детаљно обрађен у књигама [46], [53].

Када је Лагранжијан облика $L = \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle$, где је $\langle ., . \rangle$ Риманова метрика тада решења варијационог задатка дају локално најкраће трајекторије, док решења механичког задатка дају геодезијске линије *нехолономне конексије*:

(22) $$\nabla^D : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D), \quad \nabla^D_Y X = \pi(\nabla_Y X), \quad X, Y \in \Gamma(D),$$

$\pi_x : T_x M \to D_x$ је ортогонална пројекција и ∇ је конексија Леви-Чивита метрике $\langle ., . \rangle$. В. В. Вагнер је дефинисао тензор-кривине нехолономне конексије [3], [4], [9], [11].

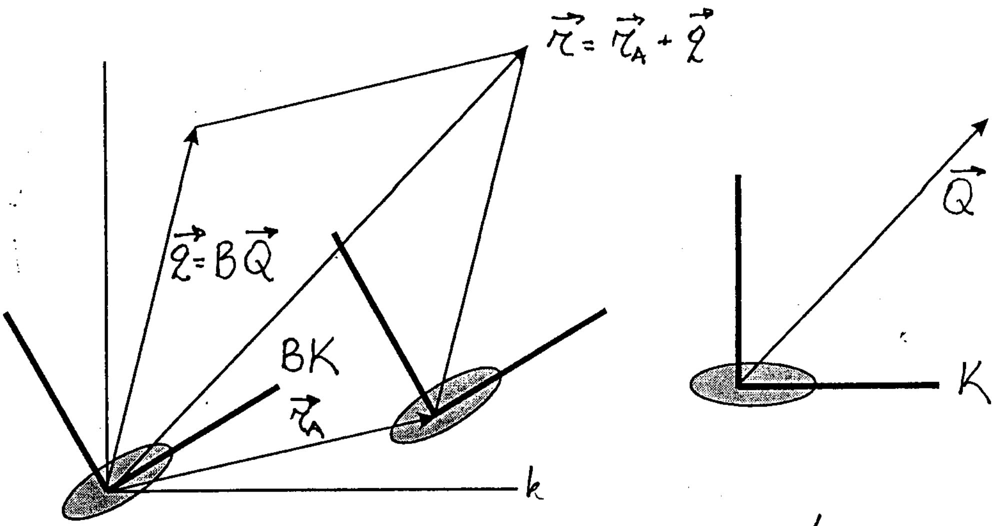
1.5 Динамика крутог тела

1. *Круто тело* је систем од n материјалних тачака са непромењљивим међусобним растојањима: $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = const$. Нека је k непокретни инерцијални систем са почетком у тачки O и нека је K покретни координатни систем "везан за тело", са почетком у тачки A. Нека је $B(t) : K \to k$ ротација која преводи векторе из покретног у векторе непокретног система ($B(t) \in SO(3)$). Положај крутог тела је одређен вектором $\vec{r}_A(t)$ и матрицом $B(t)$.

Уколико другачије не нагласимо, ради једноставности векторе из покретног система писаћемо великим словима, а из непокретног малим. Радијус-вектори $\vec{r}$ и $\vec{Q}$ тачке A' простора у односу на непокретни и покретни систем су повезани релацијом: $\vec{r} = \vec{r}_A(t) + \vec{q}$, $\vec{q} = B(t)\vec{Q}$. Брзина тачке A' је: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{q}}$, $\dot{\vec{q}} = \dot{B}\vec{Q} + B\dot{\vec{Q}} = \dot{B}B^{-1}\vec{q} + B\dot{\vec{Q}} = B(B^{-1}\dot{B}\vec{Q} + \dot{\vec{Q}})$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Матрице $\Omega = B^{-1}\dot{B}$ и $\omega = \dot{B}B^{-1} = Ad_B\Omega$ су кососиметричне и припадају Лијевој алгебри $so(3)$. Помоћу изоморфизма $(so(3)[.,.]) \cong (R^3, \times)$ матрицама ω и Ω се додељују вектори $\vec{\omega} \in k$ и $\vec{\Omega} = B^{-1}\vec{\omega} \in K$, који се редом називају *угаона брзина тела* у односу на непокретни и покретни координатни систем. Угаона брзина не зависи од избора тачке A. Брзина тачке A' је дакле: $\vec{v} = v_A + \vec{\omega} \times \vec{q} + B\dot{\vec{Q}}$, односно $\vec{v} = v_A + B(\dot{\vec{Q}} + \vec{\Omega} \times \vec{Q})$.



слика 1

Теорема 1.5. *(а) Момент количине кретања $\vec{M}_{A'} \in K$ у односу на тачку A' је: $\vec{M}_{A'} = m\vec{Q}'_c \times \vec{V}_{A'} + \sum_i m_i\vec{Q}'_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{Q}'_i)$, где су $\vec{Q}'_c$, $\vec{Q}'_i$ радијус-вектори положаја центра масе и тачака крутог тела у односу на тачку A'. Специјално, када је $A = A'$, израз за момент је: $\vec{M}_A = m\vec{Q}_c \times \vec{V}_A + I_A\vec{\Omega}$, где је I_A линеаран симетричан оператор дат формулом: $I_A\vec{\Omega} = \sum_i m_i\vec{Q}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{Q}_i)$,*

(б) Кинетичка енергија крутог тела је: $T = \frac{1}{2}mV_A^2 + m\langle\vec{\Omega} \times \vec{Q}_c, \vec{V}_A\rangle + \frac{1}{2}\langle I_A\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle$.

Оператор I_A се назива *оператором (или тензором) инерције* у односу на пол A. Постоји база $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ покретног координатног система, у којој је оператор инерције дијагоналан $I_A = diag(I_1, I_2, I_3)$. Осе $A_{\vec{e}_i}$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

називају се *главним осама* а бројеви I_i *главним моментима инерције* крутог тела.

Круто тело може бити и непрекидна средина T. Тада треба све изразе облика $\sum_i m_i f(\dot{\vec{r}}_i, \vec{r}_i, t)$ заменити изразима $\int_T f(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t)\rho(\vec{r})dr$ где је $\rho(\vec{r})$ густина крутог тела у тачки са радијус-вектором $\vec{r}$.

2. Круто тело је везано за тачку A уколико је $v_A = V_A = 0$. Тада је конфигурациони простор група $SO(3)$. Узећемо да је $A = O$, $I = I_o$. Момент кретања у односу на непокретну тачку је $\vec{M} = I\vec{\Omega}$, а кинетичка енергија је квадратна форма $T = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle$.

Из теореме 1.3 изводи се закон промене момента количине кретања крутог тела око непокретне тачке. Нека силе $\vec{f}_i$ делују на материјалну тачку $\vec{r}_i$ крутог тела. Тада, како су дозвољене ротације око произвољне осе која пролази кроз тачку O, важи: $\dot{\vec{m}} = \vec{l} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i$. Како је $\dot{\vec{m}} = B(\dot{\vec{M}} + \vec{\Omega} \times \vec{M})$, $\vec{l} = B\vec{L}$, добијају се *Ојлерове једначине*:

$$\dot{\vec{M}} = \vec{M} \times \vec{\Omega} + \vec{L}, \quad \vec{M} = I\vec{\Omega}. \tag{23}$$

Показује се да уколико је потенцијална енергија крутог тела облика $V = V(\vec{\Gamma})$ ($\vec{\Gamma}$ је фиксиран вектор у непокретном систему) да је тада момент силе $\vec{L} = \vec{\Gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\Gamma}}$. $\vec{\Gamma}$ задовољава *Пуасонову једначину*: $\dot{\vec{\Gamma}} = \vec{\Gamma} \times \vec{\Omega}$. (23) и Пуасонова једначина чине затворен систем по променљивама $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Gamma}$ које се називају *Ојлер-Пуасонове* једначине:

$$I\dot{\vec{\Omega}} = I\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} + \vec{\Gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\Gamma}}, \qquad \dot{\vec{\Gamma}} = \vec{\Gamma} \times \vec{\Omega}. \tag{24}$$

На пример, у хомогеном гравитационом пољу правца $\vec{\Gamma}$, сила која делује на i–ту тачку крутог тела је $\vec{F}_i = -m_i g\vec{\Gamma} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{Q}_i}$, где је $U = \sum_i m_i g\langle \vec{Q}_i, \vec{\Gamma}\rangle = mg\langle \vec{Q}_c, \vec{\Gamma}\rangle$ укупна гравитациона потенцијална енергија. Једноставним рачуном добијамо да је $\vec{L} = mg\vec{\Gamma} \times \vec{Q}_c = \vec{\Gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \vec{\Gamma}}$.

Ојлер-Пуасонове једначине чувају стандардну меру у $R^6\{\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}\}$ и увек имају прве интеграле: $F_1 = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle + V(\vec{\Gamma})$, $F_2 = \langle I\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}\rangle$, $F_3 =$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$\langle \vec{\Gamma}, \vec{\Gamma} \rangle$. По Јакобијевој теореми потребан је још један интеграл за њихову интеграбилност.

Познати интеграбилни случајеви кретања тешког крутог тела су: *Ојлеров случај* ($\vec{Q}_c = 0$, $F_4 = \langle I\vec{\Omega}, I\vec{\Omega} \rangle$); *Лагранжов случај* ($I_1 = I_2$, $\vec{Q}_c = \lambda\vec{e}_3$, $F_4 = \Omega_3$); *Случај Ковалевске* ($I_1 = I_2 = 2I_3$, $\vec{Q}_c = \lambda\vec{e}_1$, $F_4 = (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 - n\Gamma_1)^2 + (2\Omega_1\Omega_2 - n\Gamma_2)^2$, где је $n = mg\lambda/I_3$). Њихова интеграција се може наћи у [10]. Софија Ковалевска је показала да поред тих случја, нема других интеграбилних случаја у којима се решења могу исказати као мероморфне функције времена (које се посматра као комплексна променљива).

Једначине кретања крутог тела око непокретне тачке изводе се и из Ојлер-Лагранжових једначина у локалним координатама групе $SO(3)$ (погледати [24], [37], [55]).

3. Под *гироскопом* ћемо подразумевати динамички симетрично круто тело које је везано за основно круто тело T, и у односу на покретни координатни систем има константну угаону брзину $\theta\vec{L}$, којом се окреће око своје осе симетрије $\vec{L}$. Угаона брзина гироскопа у односу на непокретни координатни систем износи $\vec{\Omega}' = \vec{\Omega} + \theta\vec{L}$, где је $\vec{\Omega}$ угаона брзина тела T у односу на непокретни систем.

Нека су $\vec{M}_A^T$ и $\vec{M}_A^G$ редом моменти инерције тела T и гироскопа G у односу на тачку A. Тада је момент система тело-гироскоп једнак $\vec{M}_A = \vec{M}_A^T + \vec{M}_A^G$. Уколико је систем везан за тачку A, може се показати да је: $\vec{M}_A = I'_A\vec{\Omega} + \vec{P}$, I'_A је модификација оператора инерције тела T, $\vec{P} = J\theta\vec{L}$, J је главни момент инерције гироскопа у односу на центар маса гироскопа у односу на осу симетрије $\vec{L}$.

1.6. Симетрије и интеграли нехолономних система. Хамилтонови системи

1. Погодно је извршити Лежандрову трансформацију [37] и једна-

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

чине кретања посматрати као систем једначина првог реда. Уколико Лагранжијан довољно брзо тежи бесконачности ($L/|\dot{x}| \to \infty$ кад $|\dot{x}| \to \infty$, што је у случају природних система које ми разматрамо увек испуњено), тада је Лежандрова трансформација: $TM\{\xi, x\} \to T^*M\{y, x\}$ дата са:

$$(25)\qquad \begin{aligned} &(\xi, x) \to (y, x), && L(\xi, x, t) \to H(y, x, t), \\ &y = \frac{\partial L}{\partial \xi}, && H(y, x, t) = (y\xi - L)|_{\xi \to y} \end{aligned}$$

дефинисана на целој многострукости. Функција $H(y, x, t)$ се назива *Хамилтонијан*. Нека су $\{y_1, \ldots, y_n, x^1, \ldots, x^n\}$ природне координате котангентног раслојења T^*M.

Теорема 1.6. *Једначине (18) (за $Q \equiv 0$) су еквивалетне једначинама:*

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} + \sum_j \lambda_j a_i^j, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \sum_i \alpha_i^j(x, t)\dot{x}^i|_{\dot{x} \to y} = b^j(x, t), \quad j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Ако Хамилтонијан не зависи од времена, и уколико су везе хомогене, тада је Хамилтонијан интеграл кретања.

У случају природног механичког система $L = T_2 + T_1 + T_0 - V = \frac{1}{2}(a(x,t)\dot{x}, \dot{x}) + (b(x,t), \dot{x}) + c(x,t) - V(x,t)$, имамо да је Хамилтонова функција облика: $H(y, x, t) = T_2 - T_0 + V = \frac{1}{2}(y - b, a^{-1}(x,t)(y - b)) - c(x,t) + V(x,t)$. Ако је $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, тада се $E(\dot{x}, x) = T_2 - T_0 + V$ назива *Јакобијевим интегралом.* Он остаје интеграл и при дејству допунске гироскопске силе Q.

2. Нека група G делује слева на конфигурациони простор нехолономног система (M, D, L, Q). Сваком вектору $Y \in \mathcal{G}$ Лијеве алгебре групе G одговара једнопараметарска подгрупа $G_Y^\alpha \subset G$, $\alpha \in R$, као и векторско поље $v_Y \in \Gamma(M)$. Напоменимо да дејство групе може зависити од времена t као од параметра.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Дејство групе G на M се природно проширује на TM: $\bar{g}(\xi, x) = ((\bar{g})_*|_x\xi, \bar{g}(x))$. Услов да функција $f : TM \to R$ буде инваријанта дејства групе G је: $\frac{d}{d\alpha}_{|\alpha=0} f(\bar{G}^\alpha_Y(\xi, x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}, d(v_Y)|_x(\xi)\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, v_Y\right) = 0$, за све $Y \in \mathcal{G}$.

Дејство групе G је *сагласно са везама* уколико су векторска поља v_Y виртуална померања: $v_Y \in \Gamma(D)$.

Момент система у односу на дејство Лијеве групе G је пресликавање $\mathcal{I} : TM \to \mathcal{G}^*$, одређено са $\mathcal{I}(\xi, x\,|Y) = \left(\frac{\partial L(\xi,x)}{\partial \xi}, v_Y|_x\right)$.

Уколико на систем делују и неке непотенцијалне силе Q, слично дефинишемо и *момент силе* у односу на дејство групе G. То је пресликавање $\Phi : TM \to \mathcal{G}^*$ дефинисано са: $\Phi(\xi, x\,|Y) = (Q(\xi, x), v_Y|_x)$.

Следећа теорема је једна од формулација чувене теореме Еми Нетер [38], [39].

Теорема 1.7. *Нека је Лагранжијан нехолономног система инваријантан под дејством групе G које је сагласно са везама. Тада имамо следећи закон промене момента система:*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}(\dot{x}, x) = \Phi(\dot{x}, x). \tag{27}$$

У случају када је $Q \equiv 0$ тада је $\mathcal{I}(\dot{x}, x)$ интеграл кретања.

Може се показати да се теорема 1.3 може извести из претходне теореме [43]. За тврђење (а) треба посматрати једнопараметарску групу транслација у правцу вектора e, односно за (б) треба посматрати ротације око e.

Дејство групе G се природно проширује и на T^*M. Дејство групе, као и одговарајући момент $\mathcal{J} \;:\; T^*M \to \mathcal{G}^*$ су дати формулама: $\bar{g}(y, x) = \left((\bar{g}^{-1})^*_{\bar{g}(x)}y, \bar{g}(x)\right)$, $\mathcal{J}(y, x, \,|Y) = (y, v_Y|_x)$.

Услов да Хамилтонијан буде инваријантан под дејством групе G је: $\frac{d}{d\alpha}_{|\alpha=0} H(\bar{G}^\alpha_Y(y, x)) = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, v_Y\right) - \left(d^*(v_Y)|_x y, \frac{\partial H}{\partial y}\right) = 0$, $Y \in \mathcal{G}$. Тада је, уколико је дејство групе G сагласно са везама, $\mathcal{J}$ интеграл једначина (26).

Теореме 1.6 и 1.7 практично исцрпљују познате интеграле многих нехолономних система [21]. Нешто другачије методе налажења првих интеграла линеарних по брзинама се могу наћи на пример у [25], [27].

3. Пар (N,ω) је *симплектичка многострукост* уколико је N $2n$–димензиона многострукост и ω недегенерисана, затворена 2-форма на N [34], [37], [44]. Недегенеративност форме ω омогућује увођење *Хамилтоновог векторског поља* и *Хамилтонових једначина* са Хамилтонијаном $f: N \to R$. То су редом векторско поље X_f одређено условом: $(df,.) = \omega(.,X_f)$ и систем једначина $\dot{x} = X_f$. Хамилтонове једначине чувају стандардну меру $\wedge^n\omega$ на N.

Једначине (26), без нехолономних веза, су Хамилтонове једначине на T^*M у односу на *канонску симплектичку структуру* $d\theta = \sum_i dy_i \wedge dx^i$.

Пуасонова заграда глатких функција f и g је извод функције f у правцу Хамилтоновог векторског поља функције g: $\{f,g\} = (df, X_g) = \omega(X_g, X_f)$. Глатке функције на N са операцијом $\{.,.\}$ чине Лијеву алгебру. Пресликавање $f \to X_f$ је хомоморфизам те Лијеве алгебре, у Лијеву алгебру векторских поља на N.

Функција g је интеграл сиситема $\dot{x} = X_f$ ако и само ако су f и g у *инволуцији*: $\{f,g\} = 0$. По теореми *Лиувила*, ако једначине $\dot{x} = X_f$ имају n интеграла f_i у инволуцији $\{f_i, f_j\} = 0$, једначине се могу решити у квадратурама. Уколико су инваријантне многострукости компактне, тада су оне дифеоморфне n-димензионим торусима. У околини инваријантних торуса постоје координате *дејство-угао* $\{I,\varphi\}$ у којима се једначине кретања могу написати у облику $\dot{\varphi}_i = \omega_i(I)$, $\dot{I}_i = 0$, $i = 1,\ldots,n$. Занимљиво је да је строг доказ тог важног тврђења тек дао Арнољд [37].

За разлику од Хамилтонових система, у општем случају, за интеграбилност једначина (26) је потребно $2n-1$ интеграла кретања ($2n-2$ у случају постојања инваријантне мере). Чаплигин је приметио да после замене времена, једначине кретања неких нехолономних

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

система добијају облик Хамилтонових једначина [31], [20].

1.7. Ојлер-Поенкареове једначине

1. Нека су $e_1(x), \dots, e_n(x)$ независна векторска поља на n−димензионом конфигурационом простору M, $e_i(x) = B_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$. Комутатор $[e_i, e_j]$ можемо разложити по пољима e_k, $k = 1, \dots, n$: $[e_i, e_j] = \sum_k C_{ij}^k(x)e_k$, $C_{ij}^k : C^\infty(M) \to R$. Нека $\xi \in T_xM$. Тада је: $\xi = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} = \Omega^i e_i$, $\Omega^i = A_j^i(x)\xi^j$, $A_j^iB_k^j = \delta_k^i$. Променљиве Ω^i се називају *квазибрзине.* Представимо Лагранжијан у виду функције од x и Ω: $\mathcal{L}(\Omega, x, t) = L(\xi, x, t)|_{\xi^i = B_j^i\Omega^j}$. Тада важи следећа теорема [21], [38]:

Теорема 1.8. *Даламбер-Лагранжове једначине (18) (за $Q \equiv 0$) се могу написати у облику Поенкареових једначина:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Omega}^k} = \sum_{ij} C_{ik}^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega^j}\Omega^i + e_k(\mathcal{L}) + \sum_j \lambda_j(\alpha^j, e_k), \\
&(\alpha^j, \dot{x}) = b^j, \quad j = 1, \dots m, \quad e_k(\mathcal{L}(\Omega, x, t)) = \sum_i B_k^i(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Систем (28) није затворен. Њему треба додати релације између Ω и $\dot{x}$. Сличо Лежандровој трансформацији (25) можемо узети $M_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega^k}$, $\mathcal{H}(M, x, t) = (M_k\Omega^k - \mathcal{L})|_{\Omega \to M}$. Како је $e_k(\mathcal{H}) = -e_k(\mathcal{L})$, једначине (28) у променљивама x и M постају:

$$
\begin{aligned}
&\dot{M}_k = \sum_{ij} C_{ik}^j M_j \Omega^i - e_k(\mathcal{H}) + \sum_j \lambda_j(\alpha^j, e_k), \\
&(\alpha^j, \dot{x}) = b^j, \quad j = 1, \dots m, \quad \Omega^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M_i}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Једначине (29) је добио Читајев. Напоменимо да се једначине Поенкаре-Читајева у квазибрзинама често користе у решавању многих нехолономних проблема [21], [55].

2. Нека је M Лијева група и нека су e_i лево-инваријантна векторска поља на G. Тада су C_{ij}^k структурне константе Лијеве алгебре $\mathcal{G}$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Координатама $\{\Omega, x\}$ и $\{M, x\}$ из претходне секције одговарају тривијализације тангентног и котангентног раслојења групе G:

$$
(30) \qquad \begin{aligned}
\Lambda: &\quad TG\{\xi, g\} \to \mathcal{G} \times G\{\Omega, g\}, \quad \Omega = (L_{g^{-1}})_*\xi, \quad \xi \in T_gG,\\
\bar{\Lambda}: &\quad T^*G\{p, g\} \to \mathcal{G}^* \times G\{M, g\}, \quad M = (L_g)^*p, \quad p \in T_g^*G.
\end{aligned}
$$

У тривијализацијама Λ и $\bar{\Lambda}$ лево дејство групе G на $\mathcal{G} \times G$ и $\mathcal{G}^* \times G$ има облик: $a(\Omega, g) = (\Omega, ag)$, $a(M, g) = (M, ag)$.

Лежандрова трансформација "комутира" са пресликавањима Λ, $\bar{\Lambda}$. Нека је $L(\xi, x)$ Лагранжијан, $H(p, g)$ његова Лежандрова трансформација и $\mathcal{L}(\Omega, g) = L(\xi, g)|_{\xi=(L_g)_*\Omega}$. Тада је: $\mathcal{H}(M, g) = (M\Omega - \mathcal{L})|_{\Omega \to M} = H(p, g)|_{p=(L_g^{-1})^*M}$, $M = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega} = (L_g)^*p = (L_g)^*\frac{\partial L}{\partial \xi}$.

Када је Хамилтонијан (Лагранжијан) лево-инваријантна функција тада из једначина Поенкаре-Читајева добијамо теорему:

Теорема 1.8. *Нека је на Лијевој групи дат лево-инваријантни Хамилтонијан* $H: T^*G\{p, g\} \to R$. *Тада се Хамилтонове једначине на* T^*G: $(\dot{p}, \dot{g}) = X_H = (-\frac{\partial H}{\partial g}, \frac{\partial H}{\partial p})$ *после левог множења редукују на једначине*

$$
(31) \qquad \dot{M} = ad^*_\Omega M, \qquad \Omega = \frac{\partial \mathcal{H}(M)}{\partial M}.
$$

Једначине (31) се називају *Ојлер-Поенкареове* једначине. Оне чине затворен систем једначина на $\mathcal{G}^*$. За Лагранжијан облика $L(\xi, g) = \frac{1}{2}\langle \xi, \xi \rangle_g$, где је $\langle .,. \rangle$ лево-инваријантна метрика, једначине (31) су једначине геодезијских линија лево-инваријантне метрике групе G. При томе је Хамилтонијан $\mathcal{H}(M) = \frac{1}{2}(M, AM)$, $A = I^{-1}: \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}$, где је метрика задата оператором $I: \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$: $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_g = (I\Omega_1, \Omega_2) = (M_1, \Omega_2)$.

3. Ојлер-Поенкареове једначине су Хамилтонове једначине на орбитама ко-придруженог дејства групе G.

Орбите ко-придруженог дејства су симплектичке многострукости са симплектичком формом *Кирилова*. Нека су $N_1, N_2 \in T_M\mathcal{O}(m)$, представљени са Θ_1 и Θ_2: $N_1 = ad^*_{\Theta_1}M$ и $N_2 = ad^*_{\Theta_2}M$. Тада форму Кирилова на $\mathcal{O}(m)$ дефинишемо са [26]: $\omega_M(N_1, N_2) = \omega_M(ad^*_{\Theta_1}M, ad^*_{\Theta_2}M) =$

$-(M, [\Theta_1, \Theta_2])$. Показује се да је форма Кирилова добро дефинисана, недегенерисана, затворена два-форма на $\mathcal{O}(m)$. Ако су f и g функције на $\mathcal{G}^*$, Хамилтоново векторско поље функције $f|_{\mathcal{O}(m)}$ и Пуасонова заграда од $f|_{\mathcal{O}(n)}$ $g|_{\mathcal{O}(m)}$ су дате са:

$$
\begin{aligned}
&X_f(M) = ad^*_{df(M)}M, \quad M \in \mathcal{O}(m),\\
&\{f(M), g(M)\} = -(M, [df(M), dg(M)), \quad M \in \mathcal{O}(m).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Векторско поље X_f и Пуасонову заграду можемо посматрати на целом простору $\mathcal{G}^*$. Тада се заграда (32) назива *Ли-Пуасонова заграда.*

4. Као пример размотримо кретање крутог тела око непокретне тачке. Нека је $B(t)$ пут у $SO(3)$ ($B(t) : K \to k$ пресликава покретни у непокретни координатни систем). Тада је $\Omega(t) = (L_{B^{-1}})_*\dot{B}(t) = B^{-1}\dot{B}$ и после идентификације $so(3)$ са Еуклидским простором, $\vec{\Omega}(t)$ је управо вектор угаоне брзине крутог тела у покретном систему. Оператор инерције I крутог тела задаје лево-инваријантну метрику на групи $SO(3)$, $\mathcal{I} : so(3) \to so(3)^* \cong so(3)$, условом: $\overrightarrow{(\mathcal{I}\Omega)} = I\vec{\Omega}$. Уколико на круто тело не делују допунске силе, тада је $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\langle M, \Omega\rangle_k$, $M = \mathcal{I}\Omega$ лево-инваријантни Хамилтонијан и кретање крутог тела се описује Ојлер-Поенкареовим једначинама алгебре $so(3)$: $\dot{M} = [M, \Omega]$.

Приметимо да у случају дејства гравитационог поља, једначине кретања крутог тела (32) немају више облик Ојлер-Поенкареових једначина алгебре $so(3)$. С. П. Новиков, И. Шмељцер, Т. Ратиу су показали да су Ојлер-Пуасонове једначине кретања крутог тела, Хамилтонове једначине на орбитама ко-придруженог дејства групе кретања Еуклидског простора $E(3)$ односно полудиректног производа Лијеве групе $SO(3)$ и алгебре $so(3)$ [22], [52]. Узимајући за Хамилтонијан $\mathcal{H}(M, \Gamma) = \frac{1}{2}\langle M, \Omega\rangle_k + U(\Gamma)$, из (12) добијамо да Ојлер-Поенкареове једначине на полудиректном производу $so(3)\{M\} \times_{Ad} so(3)\{\Gamma\}$ гласе: $(\dot{M}, \dot{\Gamma}) = ([M, \Omega] + [\Gamma, \frac{\partial U}{\partial \Gamma}], [\Gamma, \Omega])$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Глава 2

Уопштење класичних интеграбилних случајева кретања крутог тела

2.1 Увод

У овој глави посматраћемо класичне интеграбилне нехолономне проблеме са инваријантном мером. Резултати који су овде изложени су плод заједничког рада Владимира Драговића, Борислава Гајића и аутора [42].

Инваријантна мера, по Јакобијевој теореми, омогућује интеграцију у одговарајућем n димензионом фазном простору уколико имамо $n-2$ независна интеграла кретања. Ми ћемо конструисати фамилије интеграбилних пертурбација неколико познатих нехолономних проблема: Сусловљевог проблема, Чаплигиновог проблема и проблема Веселова-Веселове. Интеграбилне пертурбације које су раније нашли Харламова-Забелина, В. В. Козлов, А. П. Веселов и Л. Е. Веселова су специјални случајеви наших резултата. Добили смо нове интеграбилне пертурбације кретања крутог тела око непокретне тачке и без нехолономне везе.

Метода коју ћемо користити је модификација оне примењене за пертурбације Јакобијевог проблема о геодезијским линијама на елипсоиду [41] и билијарних система [12], [43], [47]. Мотивација је дата у раду В. В. Козлова [17].

Основна идеја је следећа: претпоставимо да имамо интеграбил-

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

ни природни механички систем са интегралима $F_i(\dot{x}, x)$, $i = 1, \ldots, k$. Поставља се питање да ли можемо додати потенцијалну силу са потенцијалом $V = V(x)$ тако да нови систем има интеграле

$$\tilde{F}_i(\dot{x}, x) = F_i + U_i(x),$$

где су $U_i(x)$ функције које зависе само од променљиве x? Одговор на дато питање даје систем парцијалних диференцијалних једначина за функције V и U.

2.2 Сусловљев проблем

1. Сусловљев проблем описује ротацију крутог тела око непокретне тачке са условом да је пројекција угаоне брзине на фиксиран вектор у покретном координатном систему једнака нули. Нека је $\vec{\Omega}$ угаона брзина и $\vec{N}$ вектор покретног система. Тада везу можемо написати једначином:

$$\langle \vec{N}, \vec{\Omega} \rangle = 0, \tag{1}$$

где је $\langle .,. \rangle$ уобичајени Еуклидски скаларни производ.

Лема 2.1. *Веза (1) одређује неинтеграбилну дистрибуцију тангентног раслојења конфигурационог простора крутог тела* $SO(3)$

Доказ. Лема је последица чињенице да су једине Лијеве подалгебре од $so(3)$ тривијална алгебра 0 и сам простор $so(3)$.

После идентификације $(R^3, \times) \cong (so(3), [,])$, везу (1) можемо написати у облику:

$$\langle N, \Omega \rangle_k = 0. \tag{2}$$

($\Omega = B^{-1}\dot{B}$, $B \in SO(3)$ пресликава покретни у непокретни координатни систем). Нека је (e_1, e_2, e_3) стандардна база Лијеве алгебре $so(3)$. Без

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

губљења општости можемо узети да је $N = e_3$. Тада нам веза (2) одређује дистрибуцију $D \subset TSO(3)$:

$$D_B = \{B(xe_1 + ye_2),\ x, y \in R\}.$$

Нека су $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \in \Gamma(D)$ лево-инваријантна векторска поља: $\bar{e}_i|_B = Be_i$. Тада је $[\bar{e}_1, \bar{e}_2]|_B = Be_3 \notin D_B$ и по Фробенијусовој теореми следи да је D неинтеграбилна дистрибуција.

Кретање крутог тела ћемо разматрати помоћу Ојлер-Пуасонових једначина. Тако се на компактнији начин формулишу резултати него коришћењем Даламбер-Лагранжових једначина у локалним координатама групе $SO(3)$.

Нека је $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ ортонормирана база непокретног координатног система. Нека је круто тело везано за тачку $O = (0, 0, 0)$ и смештено у пољу сила са потенцијалом $v = v(x, y, z)$. Укупна потенцијална енергија крутог тела је:

$$V = \int_T v(\langle \vec{r}, \vec{\alpha} \rangle, \langle \vec{r}, \vec{\beta} \rangle, \langle \vec{r}, \vec{\gamma} \rangle) dm(\vec{r}) = V(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}),$$

где је $\vec{r}$ радијус-вектор тачке крутог тела у односу на непокретну тачку. Ми ћемо разматрати потенцијале који зависе само од $\vec{\gamma}$: $V = V(\vec{\gamma})$. На пример у случају гравитационог поља је $v = gz$ и имамо да је $V(\vec{\gamma}) = mg\langle \vec{r}_c, \vec{\gamma} \rangle$, $\vec{r}_c$ је радијус-вектор центра масе крутог тела, m маса крутог тела и g гравитациона константа.

Једначине кретања у покретном координатном систему су [15], [38]:

$$\begin{aligned} I\dot{\vec{\Omega}} &= I\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} + \vec{\Gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\Gamma}} + \lambda \vec{N} \\ \dot{\vec{\Gamma}} &= \vec{\Gamma} \times \vec{\Omega}, \\ \langle \vec{N}, \vec{\Omega} \rangle &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где је I оператор инерције. Ланграржов множилац λ је одређен условом да кретање задовољава везу (1):

$$\lambda = \frac{1}{\langle I^{-1}\vec{N}, \vec{N} \rangle} \langle I^{-1}\vec{N}, \vec{\Omega} \times I\vec{\Omega} + \frac{\partial V}{\partial \vec{\Gamma}} \times \vec{\Gamma} \rangle.$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Увек постоје два независна интеграла једначина (1), укупна енергија и геометријски интеграл:

$$F_1 = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle + V(\vec{\Gamma}),$$
$$F_2 = \langle \vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}\rangle.$$

За реална кретања, у складу са описаним моделом, ми ћемо фиксирати вредност интеграла $F_2 = \langle \vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}\rangle = 1$.

Тако за фазни простор можемо узети:

$$(4) \qquad \mathcal{M} = \{(\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}) \in R^3\{\vec{\Omega}\} \times R^3\{\vec{\Gamma}\} |\, \langle \vec{N}, \vec{\Omega}\rangle = 0,\ \langle \vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}\rangle = 1\} \cong R^2 \times S^2.$$

Када је $V = 0$, једначине (1) чине затворен систем у $R^3\{\vec{\Omega}\}$, и за опште $\vec{N}$ немају инваријантну меру. Суслов је први разматрао и решио једначине кретања по инерцији крутог тела са нехолономном везом (1) [24].

Систем (3) чува стандардну меру у $\mathcal{M}$ у случају када је $\vec{N}$ сопствени вектор оператора инерције. Зато ћемо надаље претпоставити да је $\vec{N}$ сопствени вектор оператора I. Тада је за интеграбилност потребан још један допунски интеграл. Можемо изабрати такву базу $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ покретног координатног система, да је $I = diag(I_1, I_2, I_3)$ и $\vec{N} = \vec{e}_3$.

Познати интеграбилни случајеви су:

а) Случај Харламова-Забелине [29], где је $V(\vec{\Gamma}) = \langle \vec{b}, \vec{\Gamma}\rangle$, и $\vec{b}$ је такав вектор да је $\langle \vec{N}, \vec{b}\rangle = 0$. Тада је трећи интеграл $F_3 = \langle I\vec{\Omega}, \vec{b}\rangle$.

б) Лагранжов случај (приметио Козлов [15]), када је $I_1 = I_2$. Потенцијал је $V = \langle \vec{b}, \vec{\Gamma}\rangle$, где је $\vec{b} = \epsilon\vec{N}$. Допунски интеграл је $F_3 = \langle I\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}\rangle$.

в) Клебш-Тисерин-Козловљев случај [15], [38] са потенцијалом $V(\vec{\Gamma}) = \frac{\epsilon}{2}\langle I\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}\rangle$ и $F_3 = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}\rangle - \frac{1}{2}\langle A\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}\rangle$, где је $A = \epsilon I^{-1} \det I$.

Напомена 2.1. Приметимо да је у б) Лагранжов множилац $\lambda = 0$, тако да је то у ствари холономни систем. Он остаје интеграбилан и у случају нехомогене везе $\langle \vec{N}, \vec{\Omega}\rangle = c = const$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Напомена 2.2. Физичко значење Клебш-Тисериновог потенцијала $V(\vec{\Gamma}) = \frac{\epsilon}{2}\langle I\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}\rangle$ јесте да он представља потенцијал крутог тела у централном Њутновом пољу сила до на $O(r^4/R^4)$, где је r типична димензија крутог тела и R је растојање од тела до центра привлачења [38].

2. Ми ћемо тражити потенцијале $V(\vec{\Gamma})$ за које постоји интеграл система (3) облика

$$\tilde{F}_3 = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}\rangle + U(\vec{\Gamma}),$$

где функција U зависи само од $\vec{\Gamma}$.

Нека је од сада $I_1 \neq I_2$.

Из услова $\dot{\tilde{F}}_3 = 0$ добијамо релацију:

$$\Omega_1(I_1\Gamma_2\frac{\partial V}{\partial\Gamma_3} - I_1\Gamma_3\frac{\partial V}{\partial\Gamma_2} + \Gamma_3\frac{\partial U}{\partial\Gamma_2} - \Gamma_2\frac{\partial U}{\partial\Gamma_3}) -$$
$$-\Omega_2(I_2\Gamma_1\frac{\partial V}{\partial\Gamma_3} - I_2\Gamma_3\frac{\partial V}{\partial\Gamma_1} + \Gamma_3\frac{\partial U}{\partial\Gamma_1} - \Gamma_1\frac{\partial U}{\partial\Gamma_3}) = 0.$$

Како Ω_1 и Ω_2 могу имати произвољне вредности, то нам даје две парцијалне једначине по непознатим функцијама U и V:

$$\begin{aligned} I_1(\Gamma_2\frac{\partial V}{\partial\Gamma_3} - \Gamma_3\frac{\partial V}{\partial\Gamma_2}) &= \Gamma_2\frac{\partial U}{\partial\Gamma_3} - \Gamma_3\frac{\partial U}{\partial\Gamma_2} \\ I_2(\Gamma_1\frac{\partial V}{\partial\Gamma_3} - \Gamma_3\frac{\partial V}{\partial\Gamma_1}) &= \Gamma_1\frac{\partial U}{\partial\Gamma_3} - \Gamma_3\frac{\partial U}{\partial\Gamma_1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Уводећи смене

$$f = \frac{U - I_1V}{I_2 - I_1}, \qquad g = \frac{U - I_2V}{I_2 - I_1},$$

једначине (5) се раздвајају на две једначине:

$$\frac{\partial f}{\partial\Gamma_2}\Gamma_3 - \frac{\partial f}{\partial\Gamma_3}\Gamma_2 = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial\Gamma_1}\Gamma_3 - \frac{\partial g}{\partial\Gamma_3}\Gamma_1 = 0. \tag{6}$$

Опште решење система (6) је $f = f(\Gamma_1, \Gamma_2^2+\Gamma_3^2)$, $g = g(\Gamma_2, \Gamma_1^2+\Gamma_3^2)$. Тако смо доказали следећу теорему:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Теорема 2.1. *Уколико је* $I\vec{N} = I_3\vec{N}$ *и* $I_1 \neq I_2$ *тада су једначине (3) Сусловљевог проблема интеграбилне за потенцијале:*

$$V(\vec{\Gamma}) = f(\Gamma_1, \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2) - g(\Gamma_2, \Gamma_1^2 + \Gamma_3^2) \ ,$$

где су f, g *произвољне функције од две променљиве. Одговарајући трећи интеграл је:*

$$\tilde{F}_3(\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}) = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}\rangle + I_2 f(\Gamma_1, \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2) - I_1 g(\Gamma_2, \Gamma_1^2 + \Gamma_3^2).$$

Посебно, полиномијална решења система (3) су описана у:

Последица 2.1. *За* $I_1 \neq I_2$, *база полиномијалних решења линеарног система парцијално диференцијалних једначина (5) је дата следећим хомогеним полиномима:*

(5)

$$V_{2L}(\vec{\Gamma}) = \sum_{\substack{m+n+k=L \\ m,\ n,\ k\geq 0}} \left(\binom{n+k}{k} c_{n+k} - \binom{m+k}{k} d_{m+k}\right) \Gamma_1^{2m}\Gamma_2^{2n}\Gamma_3^{2k},$$

$$V_{2L+1}(\vec{\Gamma}) = \sum_{\substack{m+n+k=L \\ m,\ n,\ k\geq 0}} \left(\Gamma_1\binom{n+k}{k} c_{n+k} - \Gamma_2\binom{m+k}{k} d_{m+k}\right) \Gamma_1^{2m}\Gamma_2^{2n}\Gamma_3^{2k},$$

где су $c_0, \ldots, c_L, d_0, \ldots, d_L$ *произвољне константе. Одговарајуће функције* U *су:*

(6)

$$U_{2L}(\vec{\Gamma}) = \sum_{\substack{m+n+k=L \\ m,\ n,\ k\geq 0}} \left(I_2\binom{n+k}{k} c_{n+k} - I_1\binom{m+k}{k} d_{m+k}\right) \Gamma_1^{2m}\Gamma_2^{2n}\Gamma_3^{2k},$$

$$U_{2L+1}(\vec{\Gamma}) = \sum_{\substack{m+n+k=L \\ m,\ n,\ k\geq 0}} \left(I_2\Gamma_1\binom{n+k}{k} c_{n+k} - I_1\Gamma_2\binom{m+k}{k} d_{m+k}\right) \Gamma_1^{2m}\Gamma_2^{2n}\Gamma_3^{2k}$$

Примери.

а) За $L = 0$, имамо случај Харламове-Забелине: $V_1(\vec{\Gamma}) = b_1\Gamma_1 + b_2\Gamma_2 = \langle\vec{b}, \vec{\Gamma}\rangle$, и $\langle\vec{N}, \vec{b}\rangle = 0$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

б) За $L = 1$, потенцијал је

$$V(\vec{\Gamma}) = \frac{1}{2}(a_1\Gamma_1^2 + a_2\Gamma_2^2 + a_3\Gamma_3^2),$$

где су a_1, a_2, a_3 произвољне константе. Трећи независни интеграл је:

$$\tilde{F}_3(\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}) = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}\rangle - \frac{1}{2}(I_2a_3\Gamma_1^2 + (I_2a_1 - I_1a_2 + I_1a_3)\Gamma_2^2 + I_2a_1\Gamma_3^2).$$

Бирањем $a_1 = \epsilon I_1$, $a_2 = \epsilon I_2$, $a_3 = \epsilon I_3$, добијамо Клебш-Тисерин-Козловљев случај.

в) Решења у облику полинома Лорановог типа су на пример: $V(\vec{\Gamma}) = c\,\Gamma_1^m - d\,\Gamma_2^n, \quad m, n < 0$.

2.3. Сусловљев проблем са гироскопском силом

Наводимо још један нови интеграбилни случај Сусловљевог проблема. Укључујући гироскопску силу момента $\epsilon\vec{\Gamma} \times \vec{\Omega}$, једначине (3) постају

$$(9) \qquad \begin{aligned} I\dot{\vec{\Omega}} &= I\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} + \vec{\Gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\Gamma}} + \epsilon\vec{\Gamma} \times \vec{\Omega} + \lambda\vec{N}, \\ \dot{\vec{\Gamma}} &= \vec{\Gamma} \times \vec{\Omega}, \\ \langle n, \vec{\Omega}\rangle &= 0, \\ \lambda &= \frac{1}{\langle I^{-1}\vec{N}, \vec{N}\rangle}\langle I^{-1}\vec{N}, \vec{\Omega} \times (I\vec{\Omega} + \epsilon\vec{\Gamma}) + \frac{\partial V}{\partial \vec{\Gamma}} \times \vec{\Gamma}\rangle. \end{aligned}$$

Оне описују, на пример, кретање крутог тела са магнетним моментом $-\epsilon\vec{\Omega}$ у допунском хомогеном магнетном пољу усмереног у смеру вектора $\vec{\Gamma}$ (погледати на пример [49]). Како је гироскопска сила конзервативна F_1 остаје први интеграл.

Теорема 2.2. *Ако је $I\vec{N} = I_k\vec{N}$ тада је Сусловљев проблем са гироскопском силом (9) интеграбилан за потенцијале $V = 0$, $V(\vec{\Gamma}) = \langle \vec{b}, \vec{\Gamma}\rangle$, где*

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

је $\langle\vec{N},\vec{b}\rangle = 0$ *и* $V(\vec{\Gamma}) = \frac{1}{2}(a_1\Gamma_1^2 + a_2\Gamma_2^2 + a_3\Gamma_3^2)$, *где су* a_1, a_2, a_3 *произвољне константе. Специјално, за* $V = 0$ *све трајекторије су затворене.*

Доказ. Ако је $\vec{N}$ сопствени вектор оператора инерције I, да тада једначине (9) чувају стандардну меру у фазном простору $\mathcal{M}$ (дефинисаног формулом (4)). Нека је, на пример, $I\vec{N} = I_3\vec{N}$. Једначине кретања су:

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\Omega}_1 &= \Gamma_2\frac{\partial V}{\partial\Gamma_3} - \Gamma_3\frac{\partial V}{\partial\Gamma_3} - \epsilon\Gamma_3\Omega_2,\\
I_2\dot{\Omega}_2 &= \Gamma_2\frac{\partial V}{\partial\Gamma_2} - \Gamma_1\frac{\partial V}{\partial\Gamma_3} + \epsilon\Gamma_3\Omega_1,\\
\dot{\Gamma}_1 &= -\Gamma_3\Omega_2,\\
\dot{\Gamma}_2 &= \Gamma_3\Omega_1,\\
\dot{\Gamma}_3 &= \Gamma_1\Omega_2 - \Gamma_2\Omega_1.
\end{aligned}
\tag{9'}
$$

Једноставно се проверава да за систем (9') важи:

$$
\operatorname{div}(\dot{\Omega}_1,\dot{\Omega}_2,\dot{\Gamma}_1,\dot{\Gamma}_2,\dot{\Gamma}_3) = \frac{\partial\dot{\Omega}_1}{\partial\Omega_1} + \frac{\partial\dot{\Omega}_2}{\partial\Omega_2} + \frac{\partial\dot{\Gamma}_1}{\partial\Gamma_1} + \frac{\partial\dot{\Gamma}_2}{\partial\Gamma_2} + \frac{\partial\dot{\Gamma}_3}{\partial\Gamma_3} = 0.
$$

По теореми Лиувила [37], систем (9') чува стандардну меру.

а) $V = 0$. Тада имамо два допунска независна интеграла кретања

$$
\begin{aligned}
F_3 &= I_1\Omega_1 - \epsilon\Gamma_1 = c_1,\\
F_4 &= I_2\Omega_2 - \epsilon\Gamma_2 = c_2.
\end{aligned}
$$

Дакле све трајекторије зу затворене. Нека је $2F_1 = \langle I\vec{\Omega},\vec{\Omega}\rangle + 2V(\vec{\Gamma}) = h$. Интеграцијом добијамо период затворених трајекторија:

$$
T(h,c_1,c_2) = \sqrt{I_1I_2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\epsilon^2 - (c_1 - \sqrt{I_1h}\cos\varphi)^2 - (c_2 - \sqrt{I_2h}\sin\varphi)^2}}.
$$

б) $V(\vec{\Gamma}) = \langle b,\vec{\Gamma}\rangle = b_1\Gamma_1 + b_2\Gamma_2$. Тада је:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(I_1\Omega_1 - \epsilon\Gamma_1) &= -b_2\Gamma_3,\\
\frac{d}{dt}(I_2\Omega_2 - \epsilon\Gamma_2) &= b_1\Gamma_3.
\end{aligned}
$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Тако за трећи независни интеграл можемо узети функцију:

$$F_3 = b_1(I_1\Omega_1 - \epsilon\Gamma_1) + b_2(I_2\Omega_2 - \epsilon\Gamma_2).$$

в) $V(\vec{\Gamma}) = \frac{1}{2}(a_1\Gamma_1^2 + a_2\Gamma_2^2 + a_3\Gamma_3^2)$. Допунски независни интеграл је мање очигледан него у претходним случајевима:

$$\begin{aligned} F_3 =&(I_1^2(a_3 - a_1) + I_1\epsilon^2)\Omega_1^2 + (I_2^2(a_3 - a_2) + I_2\epsilon^2)\Omega_2^2 - 2\epsilon I_1(a_3 - a_1)\Omega_1\Gamma_1 - \\ &- 2\epsilon I_2(a_3 - a_2)\Omega_2\Gamma_2 - (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(I_2\Gamma_1^2 + I_1\Gamma_2^2). \end{aligned}$$

2.4. Чаплигинов проблем

1. У овом параграфу размотрићемо интеграбилне потенцијалне пертурбације Чаплигиновог проблема [33]. Чаплигинов проблем описује котрљање без клизања балансиране динамички-несиметричне лопте по хоризонталној равни. Центар масе лопте поклапа се са њеним геометријским центром и главни моменти инерције лопте у односу на центар су међусобно различити: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$.

Нека је радијус центра лопте $\vec{r}_c = (x, y, z)$ и нека је $B \in SO(3)$ матрица која пресликава покретни координатни систем $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ у непокретни $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$. Конфигурациони простор проблема је

$$R^3\{x, y, z\} \times SO(3)\{B\}, \qquad z = a,$$

где је $z = a$ холономна веза (a је радијус лопте). Нека је $\vec{\omega}$ вектор угаоне брзине лопте. Нехолономна веза је дата условом да је брзина тачке додира $A(x, y, 0)$ једнака нули:

$$\vec{v}_A = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \times (0, 0, -a) = 0 \tag{10}$$

(из (10) такође следи и холономна веза $z = a$). Како су дозвољена виртуелна померања лопте око произвољне осе која пролази кроз

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

тачку додира A и како је $v_A = 0$, теорема 1.3 нам даје да момент количине кретања у односу на пол A задовољава једначину:

$$\dot{\vec{m}}_A = \vec{l}_A, \tag{11}$$

где је l_A момент сила у односу на пол A. Једначина (11) написана у покретном координатном систему гласи:

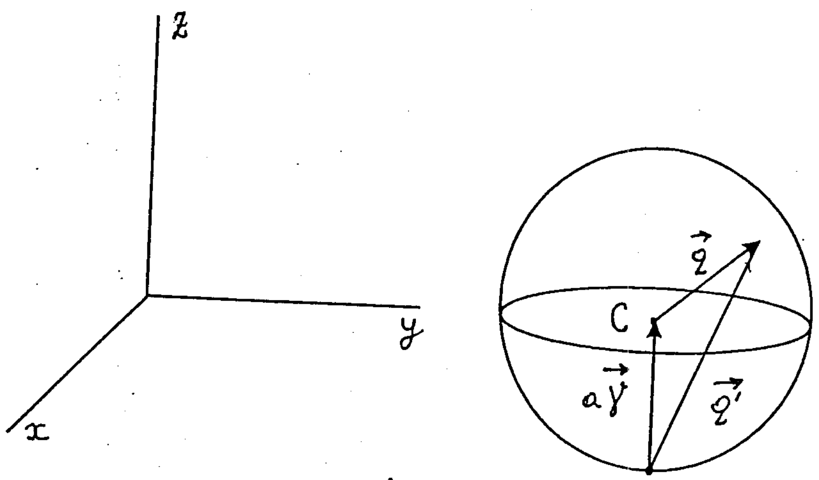
$$\dot{\vec{M}}_A = \vec{M}_A \times \vec{\Omega} + \vec{L}_A. \tag{11'}$$

Нека је $\vec{Q}$ радијус-вектор положаја тачке на лопти T у односу на центар лопте и $\vec{Q}'$ у односу на тачку A. Нека је m маса лопте. Момент количине кретања у односу на тачку A је (теорема 1.5 (а)):

$$\vec{M}_A = ma\vec{\Gamma} \times \vec{V}_A + \int_T \vec{Q}' \times (\vec{\Omega} \times \vec{Q}') dm(\vec{Q}'). \tag{12}$$

Како је $\vec{v}_A = \vec{V}_A = 0$ и $\vec{Q}' = \vec{Q} + a\vec{\Gamma}$, добијамо:

$$\begin{aligned} \vec{M}_A = &\int_T \vec{Q} \times (\vec{\Omega} \times \vec{Q}) dm(\vec{Q}) + \int_T a\vec{\Gamma} \times (\vec{\Omega} \times a\vec{\Gamma}) dm(\vec{Q}) + \\ &+ \int_T a\vec{\Gamma} \times (\vec{\Omega} \times \vec{Q}) dm(\vec{Q}) + \int_T \vec{Q} \times (\vec{\Omega} \times a\vec{\Gamma}) dm(\vec{Q}). \end{aligned} \tag{12'}$$



слика 1

Како је $\int_T dm(\vec{Q}) = m\vec{Q}_c = 0$ други и трећи интеграл у (12') су једнаки нули. Са друге стране први интеграл у (12') је једнак $I\vec{\Omega}$, где је I оператор инерције лопте у односу на центар. Тако имамо да је:

$$\vec{M}_A = I\vec{\Omega} + ma^2\vec{\Gamma} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\Gamma}). \tag{12''}$$

Дакле, једначине кретања у покретном координатном систему у потенцијалном пољу са потенцијалом $V = V(\vec{\Gamma})$ (који ствара момент силе $\vec{\Gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\Gamma}}$) се могу написати у облику затвореног система по променљивама $\{\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}\}$ [38]:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{M}}_A &= \vec{M}_A \times \vec{\Omega} + \vec{\Gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\Gamma}}, \\ \dot{\vec{\Gamma}} &= \vec{\Gamma} \times \vec{\Omega}, \end{aligned} \tag{13}$$

Координатно, једначине (13) имају облик

$$\begin{aligned} K_1\dot{\Omega}_1 - ma^2\Gamma_1\frac{d}{dt}\langle\vec{\Omega},\vec{\Gamma}\rangle &= \Omega_2\Omega_3(K_2 - K_3) + \Gamma_2\frac{\partial V}{\partial \Gamma_3} - \Gamma_3\frac{\partial V}{\partial \Gamma_2} \\ K_2\dot{\Omega}_2 - ma^2\Gamma_2\frac{d}{dt}\langle\vec{\Omega},\vec{\Gamma}\rangle &= \Omega_3\Omega_1(K_3 - K_1) + \Gamma_3\frac{\partial V}{\partial \Gamma_1} - \Gamma_1\frac{\partial V}{\partial \Gamma_3} \\ K_3\dot{\Omega}_3 - ma^2\Gamma_3\frac{d}{dt}\langle\vec{\Omega},\vec{\Gamma}\rangle &= \Omega_1\Omega_2(K_1 - K_2) + \Gamma_1\frac{\partial V}{\partial \Gamma_2} - \Gamma_2\frac{\partial V}{\partial \Gamma_1} \\ \dot{\Gamma}_1 &= \Gamma_2\Omega_3 - \Gamma_3\Omega_2 \\ \dot{\Gamma}_2 &= \Gamma_3\Omega_1 - \Gamma_1\Omega_3 \\ \dot{\Gamma}_3 &= \Gamma_1\Omega_2 - \Gamma_2\Omega_1 \end{aligned} \tag{13'}$$

где је $K_i = I_i + ma^2$, $i = 1,2,3$. Систем (13) поседује инваријантну меру са густином

$$f(\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}) = \frac{1}{\sqrt{(ma^2)^{-1} - \langle\vec{\Gamma}, (I + ma^2E)^{-1}\vec{\Gamma}\rangle}},$$

где је E јединична матрица. Такође систем (14) увек поседује следећа три интеграла кретања:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}\langle\vec{M}_A, \vec{\Omega}\rangle + V(\vec{\Gamma}), \\ F_2 &= \langle\vec{M}_A, \vec{\Gamma}\rangle, \\ F_3 &= \langle\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}\rangle (= 1), \end{aligned} \tag{14}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

F_1 је енергија система, F_2 је Чаплигинов интеграл површине (глава 1) и F_3 је геометријски интеграл.

Чаплигин је посматрао проблем кретања које се одвија без допунске потенцијалне силе. Тада Чаплигинова теорема о интегралу површине даје и четврти интеграл: $\langle \vec{M}_A, \vec{M}_A \rangle$. Метода интеграције коју је применио Чаплигин је веома интересантна. Он је прво интегралио случај фиксиране вредности интеграла $F_2 = 0$. За $F_2 = c \neq 0$, конструисао је замену променљивих $\{\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}\} \to \{\vec{\Omega}', \vec{\Gamma}'\}$ у којој се интеграција система своди на претходни случај [33].

Козлов је уопштио Чапљигинов проблем додавањем потенцијала $V = \frac{\epsilon}{2}\langle I\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}\rangle$ [15], [38]. Тада је четврти интеграл $F_4 = \langle \vec{M}_A, \vec{M}_A \rangle - \langle A\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}\rangle$, где је A дијагонална матрица са дијагоналним елементима $A_1 = \epsilon(I_2 + ma^2)(I_3 + ma^2)$, $A_2 = \epsilon(I_1 + ma^2)(I_3 + ma^2)$, $A_3 = \epsilon(I_1 + ma^2)(I_2 + ma^2)$.

2. Ми ћемо тражити четврти интеграл истом методом као у параграфу 2, у облику

$$\tilde{F}_4 = \frac{1}{2}\langle \vec{M}_A, \vec{M}_A \rangle + U(\vec{\Gamma}).$$

Коришћењем (13'), добија се да је услов $\dot{\tilde{F}}_4 = 0$ еквивалентан следећем систему једначина:

$$\begin{aligned}
K_1\left(\frac{\partial V}{\partial \Gamma_3}\Gamma_2 - \frac{\partial V}{\partial \Gamma_2}\Gamma_3\right) &= \frac{\partial U}{\partial \Gamma_3}\Gamma_2 - \frac{\partial U}{\partial \Gamma_2}\Gamma_3\\
K_2\left(\frac{\partial V}{\partial \Gamma_1}\Gamma_3 - \frac{\partial V}{\partial \Gamma_3}\Gamma_1\right) &= \frac{\partial U}{\partial \Gamma_1}\Gamma_3 - \frac{\partial U}{\partial \Gamma_3}\Gamma_1\\
K_3\left(\frac{\partial V}{\partial \Gamma_2}\Gamma_1 - \frac{\partial V}{\partial \Gamma_1}\Gamma_2\right) &= \frac{\partial U}{\partial \Gamma_2}\Gamma_1 - \frac{\partial U}{\partial \Gamma_1}\Gamma_2,
\end{aligned} \tag{15}$$

Прве две једначине у (15), после замене параметара K_i у I_i, су исте као једначине (5) Сусловљевог проблема.

Тражићемо полиномијална решења.

Применом последице 2.1 на прве две једначине система (15) добијамо да свако полиномијално решење система (15) мора бити парног

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

степена по Γ_3. Користећи симетрију по Γ_1, Γ_2 и Γ_3 у (15), добијамо да мора бити парног степена и по Γ_1 и Γ_2.

Заменом израза за V_{2L} (формула (7)) и U_{2L} (формула (8)) у трећу једначину, добијамо услове које треба да задовољавају константе

$$c_0, ..., c_L, \qquad d_0, ..., d_L$$

да би функције $V = V_{2L}$, $U = U_{2L}$ биле решење система (15):
(16)

$$\begin{gathered}(I_3 - I_2)(m+1)\binom{n+k-1}{k}c_{n+k-1} + (I_1 - I_3)(m+1)\binom{m+k+1}{k}d_{m+k+1} \\ + n(I_3 - I_1)\binom{m+k}{k}d_{m+k} + n(I_2 - I_3)\binom{n+k}{k}c_{n+k} = 0 \\ 1 \le n \le L \quad 0 \le m,k \le L, \quad n+m+k = L.\end{gathered}$$

Систем (10) се састоји од $L(L+1)/2$ линеарних једначина са $2L+2$ непознатих променљивих. За $L > 4$ систем је преодређен. Нека је $\binom{L-1}{-1} = 0$.

Лема 2.2. *Ранг система (16) је* $2L-1$. *Опште решење зависи од три независна параметра* A, B, C *на следећи начин:*

$$\begin{aligned} c_{L-i} &= \binom{L}{i}(1-i)(I_1 - I_3)A + \binom{L-1}{i-1}(I_1 - I_3)B \\ d_i &= \binom{L}{i}(I_3 - I_2)iA + \binom{L-1}{i-1}(I_2 - I_3)B + \binom{L}{i}C. \end{aligned} \tag{17}$$

Доказ. Уколико узмемо индексе

$$(m,\ n,\ k) = (0,\ L-i,\ i), \quad (m,\ n,\ k) = (i,\ L-i,\ 0), \quad i = 0, ..., L-1.$$

добијамо подсистем једначина (16):

$$\begin{aligned} &(I_3 - I_2)\binom{L-1}{i}c_{L-1} + (I_1 - I_3)\binom{i+1}{i}d_{i+1} \\ &\qquad + (L-i)(I_3 - I_1)d_i + (L-i)(I_2 - I_3)\binom{L}{i}c_L = 0 \\ &(I_3 - I_2)(i+1)c_{L-i-1} + (I_1 - I_3)(i+1)d_{i+1} \\ &\qquad + (L-i)(I_3 - I_1)d_i + (L-i)(I_2 - I_3)c_{L-i} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Лако се проверава да систем (18) има $2L-1$ независну једначину. Систем (18) можемо решавати као систем рекурентних једначина. Узимајући за почетне услове:

$$c_L = (I_1 - I_3)A, \qquad c_{L-1} = (I_1 - I_3)B, \qquad d_0 = C,$$

користећи добро познате особине биномних коефицијената добијамо формуле (17). Директним рачуном може се проверити да је то уједно и решење система (15), заменом израза (17) у остатак једначина. Самим тим смо и показали да је ранг целог система $2L-1$.

Следећа теорема је последица леме 2.1 и претходних разматрања.

Теорема 2.3. *Једначине (13) Чаплигиновог проблема (за $I_1 \neq I_2 \neq I_3$), су интеграбилне за потенцијале $V = \sum_L a_L V_{2L}(\vec{\Gamma}|A_L, B_L, C_L)$, где је:*

$$V_{2L} = \sum_{\substack{m+n+k=L \\ m,\ n,\ k\geq 0}} \left(\binom{n+k}{k} c_{n+k} - \binom{m+k}{k} d_{m+k} \right) \Gamma_1^{2m}\Gamma_2^{2n}\Gamma_3^{2k}. \tag{19}$$

Одговарајући четврти интеграл је

$$\tilde{F}_4 = \frac{1}{2}\langle \vec{M}_A, \vec{M}_A\rangle + \sum_L a_L F_{2L}(\vec{\Gamma}|A_L, B_L, C_L),$$

$$F_{2L} = \sum_{\substack{m+n+k=L \\ m,\ n,\ k\geq 0}} \left(K_2 \binom{n+k}{k} c_{n+k} - K_1 \binom{m+k}{k} d_{m+k} \right) \Gamma_1^{2m}\Gamma_2^{2n}\Gamma_3^{2k}.$$

Зависност c-ова и d-ова од A_L, B_L, C_L дата је са (17).

Примери.

а) За $L=1$ решење је Клебшов потенцијал

$$V_2(\vec{\Gamma}) = a_1\Gamma_1^2 + a_2\Gamma_2^2 + a_3\Gamma_3^2,$$

$$a_1(I_2 - I_3) + a_2(I_3 - I_1) + a_3(I_1 - I_2) = 0.$$

б) За $L = 2$ нови интеграбилни потенцијал је

$$
\begin{aligned}
V_4(\vec{\Gamma}) &= \sum_{i+j+k=2} a_{2i2j2k}\Gamma_1^{2i}\Gamma_2^{2j}\Gamma_3^{2k},\\
a_{400} &= c_0 - d_2 = (2I_2 - I_3 - I_1)A + (I_1 - I_2)B - C,\\
a_{040} &= c_2 - d_0 = (I_1 - I_3)A - C,\\
a_{004} &= c_2 - d_2 = (I_1 + 2I_2 - 3I_3)A + (I_3 - I_2)B - C,\\
a_{220} &= c_1 - d_1 = 2(I_2 - I_3)A + (I_1 - I_2)B - 2C,\\
a_{202} &= c_1 - 2d_2 = 4(I_2 - I_3)A + (I_1 - 2I_2 + I_3)B - 2C,\\
a_{022} &= 2c_2 - d_1 = 2(I_1 + I_2 - 2I_3)A + (I_3 - I_2)B - 2C.
\end{aligned}
$$

Напомена 2.3. А. П. Маркејев је доказао интеграбилност кретања по инерцији лопте са додатим гироскопом, масе m_G и оператором инерције у односу на центар масе гироскопа I_G. Нека гироскоп има угаону брзину $\theta\vec{L}$ у односу на лопту, којом се окреће око своје осе симетрије $\vec{L}$.

Једначине кретања су исте као и за Чаплигинов проблем без гироскопа (13), само што уместо израза за $\vec{M}_A$ (12") требамо узети израз за круто тело са гироскопом.

Нека су $\vec{M}_A^T$ и $\vec{M}_A^G$ редом моменти инерције лопте и гироскопа у односу на тачку A. Тада је момент система лопта-гироскоп једнак $\vec{M}_A = \vec{M}_A^T + \vec{M}_A^G$. $\vec{M}_A^T$ је дат формулом (12"). Ради једноставности нека се центар масе гироскопа поклапа са центром лопте. Тада и оса гироскопа пролази кроз центар лопте. Нека су J_1 и J_2 главни моменти инерције гироскопа у односу на центар лопте ($I_G\vec{\Theta} = J_1\langle\vec{\Theta}, \vec{L}\rangle\vec{L} + J_2\vec{L} \times (\vec{\Theta} \times \vec{L})$).

Како угаона брзина гироскопа у односу на непокретни координатни систем износи $\vec{\Omega}' = \vec{\Omega} + \theta\vec{L}$ ($\vec{\Omega}$ је угаона брзина лопте у односу на непокретни систем), слично као и за лопту добијамо:

$$\vec{M}_A^G = I_G(\vec{\Omega} + \theta\vec{L}) + m_G a^2\vec{\Gamma} \times ((\vec{\Omega} + \theta\vec{L}) \times \vec{\Gamma}).$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Тако је:

$$\vec{M}_A = (I + I_G)\vec{\Omega} + J_1\theta\vec{L} + m_G a^2\theta\vec{\Gamma}\times(\vec{L}\times\vec{\Gamma}) + (m_G + m)a^2\vec{\Gamma}\times(\vec{\Omega}\times\vec{\Gamma}).$$

Инваријантна мера се поклапа са инваријантном мером коју је нашао Чаплигин. Систем је интеграбилан. Поседује четири независна интеграла: (14) и $\langle\vec{M}_A, \vec{M}_A\rangle$.

Бобиљев и Жуковски су крајем прошлог века први проучавали тај проблем. Они су интегралили случај када је лопта динамички симетрична ($I_1 \neq I_2 = I_3$) и када се оса гироскопа поклапа са осом динамичке симетрије лопте [21].

2.5. Котрљање динамички симетричне лопте

1. Опште решење система парцијалних једначина (15) за $I_1 \neq I_2 = I_3$ је

$$V = V(\Gamma_1, \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2), \qquad U = K_3 V(\Gamma_1, \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2).$$

Та чињеница једноставно доказује интеграбилност следећег проблема: симетрична али небалансирана лопта котрља се под утицајем потенцијала, који је инваријантан под дејством ротација око осе динамичке симетрије. Приметимо да нехолономна веза (брзина тачке контакта је нула) није инваријантна под дејством таквих ротација, па интеграбилност не следи директно из нехолономне Нетерине теореме.

У овом случају пертурбовани проблем се може експлицитно интегралити у квадратурама. Нека је:

$$\begin{aligned} &2F_1 = K_1\Omega_1^2 + K_3(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - ma^2(\Omega_1\Gamma_1 + \Omega_2\Gamma_2 + \Omega_3\Gamma_3)^2 + 2V = 2h,\\ (20)\quad &F_2 = I_1\Omega_1\Gamma_1 + I_3(\Omega_2\Gamma_2 + \Omega_3\Gamma_3) = c,\\ &F_3 = \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 = 1. \end{aligned}$$

За четрврти интеграл можемо узети функцију која не зависи од избора потенцијала:

$$J_4 = 2\tilde{F}_4 - 2K_3F_1 = \langle\vec{M}_A, \vec{M}_A - K_3\vec{\Omega}\rangle.$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Коришћењем (20), може се показати да се четврти интеграл може написати у еквивалентном облику:

$$\tilde{J}_4 = \Omega_1^2 + \frac{ma^2(I_1 - I_3)}{K_1 I_3}\Omega_1^2\Gamma_1^2.$$

Нека је на пример $\alpha = I_1 - I_3 > 0$. Нека је $\beta^2 = ma^2\alpha/K_1 I_3$. На инваријантној површи:

$$\mathcal{T} = \{(\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}) \in R^6 \,|F_1 = h, F_2 = c, F_3 = 1, \tilde{J}_4 = d^2\}$$

можемо увести координате u и v формулама

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= d\cos u, \\ \Gamma_1 &= \beta^{-1}\tan u, \\ \Omega_2 &= R(u)\cos v, \\ \Omega_3 &= R(u)\sin v, \end{aligned} \tag{21}$$

где је

$$\begin{aligned} R(u)^2 &= \frac{1}{K_3}(2h + ma^2P(u)^2 - 2V(u) - K_1 d^2\cos^2 u), \\ P(u) &= \frac{c}{I_3} - \frac{\alpha d}{I_3\beta}\sin u, \\ V(u) &= V(\beta^{-1}\tan u, 1 - \beta^{-2}\tan^2 u). \end{aligned}$$

Из прве једначине за $\vec{\Gamma}$ (13') добијамо:

$$\dot{\Gamma}_1^2 = (\Gamma_2\Omega_3 - \Gamma_3\Omega_2)^2 = (\Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - (\Omega_2\Gamma_2 + \Omega_3\Gamma_3)^2,$$

односно коришћењем (21), добијамо једначину првог реда по непознатој промењљивој u:

$$I_3^2\dot{u}^2 = I_3^2\cos^4 u R(u)^2\left(\beta^2 - \tan^2 u\right) - \cos^4 u\left(I_1 d\sin u - c\beta\right)^2.$$

Дакле можемо одредити $u = u(t)$. Остало је још да одредимо и $v = v(t)$. Из друге и треће једначине за k (13'):

$$\begin{aligned} K_3\dot{\Omega}_2 - ma^2\Gamma_2\frac{d}{dt}\langle\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}\rangle &= \Omega_3\Omega_1(I_3 - I_1) + \Gamma_3\frac{\partial V}{\partial \Gamma_1} - \Gamma_1\frac{\partial V}{\partial \Gamma_3} \\ K_3\dot{\Omega}_3 - ma^2\Gamma_3\frac{d}{dt}\langle\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}\rangle &= \Omega_1\Omega_2(I_1 - I_3) + \Gamma_1\frac{\partial V}{\partial \Gamma_2} - \Gamma_2\frac{\partial V}{\partial \Gamma_1} \end{aligned}$$

изводимо изразе за Γ_2 и Γ_3:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_2 &= K_3(M\dot{\Omega}_2 - N\dot{\Omega}_3) + \alpha\Omega_1(M\Omega_3 + N\Omega_2), \\
\Gamma_3 &= K_3(M\dot{\Omega}_3 + N\dot{\Omega}_2) + \alpha\Omega_1(N\Omega_3 - M\Omega_2),
\end{aligned} \tag{22}
$$

где су

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{ma^2\dot{P}}{\Delta}, \\
N &= \frac{\beta\cos^2 u\partial_u V}{\Delta}, \\
\Delta &= m^2a^4\dot{P}^2 + (\beta\cos^2 u\partial_u V)^2,
\end{aligned}
$$

познате функције времена. Заменом (22) у $F_2 = c$ добијамо:

$$
\dot{v} = \frac{\alpha d}{K_3}\cos u + \frac{M\dot{R}}{NR} + \frac{I_1 d}{I_3\beta K_3}\frac{\sin u}{NR^2} - \frac{c}{I_3K_3}\frac{1}{NR^2}. \tag{23}
$$

Одатле можемо одредити и $v = v(t)$. Коначно из (21), (22), (23) добијамо $\vec{\Omega}(t)$ и $\vec{\Gamma}(t)$ као познате функције времена.

2. Котрљање динамички симетричне лопте ($I_2 = I_3$) под утицајем потенцијала $V = V(\Gamma_1, \Gamma_2^2+\Gamma_3^2)$ је интеграбилно и уз услов да је центар масе лопте на оси динамичке симетрије ($\vec{Q}_c = (\rho, 0, 0) = \rho\vec{e}_1 \neq 0$). Тада момент количине кретања у односу на тачку A (рачунат по формули (12)) има облик:

$$
\vec{M}_A = I\Omega + ma^2\vec{\Gamma}\times(\vec{\Omega}\times\vec{\Gamma}) + \rho ma\vec{e}_1\times(\vec{\Omega}\times\vec{\Gamma}) + \rho ma\vec{\Gamma}\times(\vec{\Omega}\times\vec{e}_1). \tag{24}
$$

Може се показати да и у овом случају једначине кретања (13) имају инваријантну меру и увек поседују три интеграла кретања (14). Четврти интеграл је модификација интеграла $\tilde{J}_4$:

$$
F_4 = \Omega_1^2\{1 + \frac{ma^2(I_1 - I_3)}{K_1I_3}\Omega_1^2\Gamma_1^2 + \frac{\rho m I_1}{K_1I_3}(a + \rho\Gamma_1)\}.
$$

Специјално, за $V(\vec{\Gamma}) = mg\langle\vec{Q}_c, \vec{\Gamma}\rangle = mg\Gamma_1$ добијамо интеграбилност задатка који је такође решио Чаплигин [30]: котрљање без клизања

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

лопте, са центром масе на оси динамичке симетрије, по хоризонталној равни уз присуство гравитационог поља.

2.6. Веза са другим системима крутог тела

А. П. Веселов и Л. Е. Веселова су разматрали ротацију крутог тела око непокретне тачке са задатом нехолономном везом $\langle\vec{\Omega},\vec{\Gamma}\rangle = 0$. Видимо да је њихов проблем сличан Сусловљевом проблему, само што је сада пројекција угаоне брзине на вектор у непокретном координатном систему једнака нули. Они су показали интеграбилност у случају када нема допунске потенцијалне силе, у случају када се тело креће под дејством Клебш-Тисериновог потенцијала, у Лагранжовом случају ($I_1 = I_2$, $V = \epsilon\Gamma_3$), као и у случају када телу додамо гироскоп [7].

Ј. Н. Фјодоров [28] је интегралио проблем када је $V = 0$ и у случају нехомогене везе:

$$F_1 = \langle\vec{\Gamma},\vec{\Omega}\rangle = q.$$

Како q може имати произвољну вредност, без забуне, можемо функцију F_1 посматрати као интеграл кретања у шестодимензионом фазном простору $R^3\{\vec{\Omega}\} \times R^3\{\vec{\Gamma}\}$.

Једначине кретања у покретном координатном систему су:

$$\begin{aligned}
I\dot{\vec{\Omega}} &= I\vec{\Omega}\times\vec{\Omega} + \vec{\Gamma}\times\frac{\partial V}{\partial\vec{\Gamma}} + \lambda\vec{\Gamma},\\
\dot{\vec{\Gamma}} &= \vec{\Gamma}\times\vec{\Omega},\\
\langle\vec{\Gamma},\vec{\Omega}\rangle &= q,\\
\lambda &= \frac{1}{\langle I^{-1}\vec{N},\vec{N}\rangle}\langle I^{-1}\vec{N},\vec{\Omega}\times I\vec{\Omega} + \frac{\partial V}{\partial\vec{\Gamma}}\times\vec{\Gamma}\rangle.
\end{aligned} \tag{25}$$

Систем има инваријантну меру са густином

$$f(\vec{\Omega},\vec{\Gamma}) = \sqrt{\langle I^{-1}\vec{\Gamma},\vec{\Gamma}\rangle}.$$

Једначине (25) имају увек два независна интеграла кретања [28]:

$$F_2 = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle + V(\vec{\Gamma}) - \langle\vec{\Gamma}, \vec{\Omega}\rangle\langle\vec{\Gamma}, I\vec{\Omega}\rangle,$$
$$F_3 = \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 = 1.$$

Када је $V = 0$, проблем је интеграбилан и четврти независни интеграл је [28]:

$$F_4 = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}\rangle - \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}\rangle^2.$$

Веома је интересантно да се метод из параграфа 3 може користити за налажење интеграбилних пертурбација проблема Веселова-Веселове са нехомогеном везом, тражењем интеграла у облику:

$$\tilde{F}_4(\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}) = F_4(\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}) + U(\vec{\Gamma}). \tag{26}$$

Такође, метод се може применити и за налажење интеграбилних пертурбација једног класичног холономног проблема: Ојлеровог случаја окретања крутог тела око непомичне тачке:

$$\begin{aligned} I\dot{\vec{\Omega}} &= I\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} + \vec{\Gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\Gamma}}, \\ \dot{\vec{\Gamma}} &= \vec{\Gamma} \times \vec{\Omega}. \end{aligned} \tag{27}$$

Добро познати интеграли кретања једначина (27) су:

$$F_1 = \langle\vec{\Gamma}, I\vec{\Omega}\rangle,$$
$$F_2 = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle + V(\vec{\Gamma}),$$
$$F_3 = \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 = 1.$$

У Ојлеровом интеграбилном случају кретања крутог тела (када је $V = 0$) четврти интеграл је [37]:

$$F_4 = \frac{1}{2}\langle I\vec{\Omega}, I\vec{\Omega}\rangle.$$

Уколико четврти интеграл тражимо у облику (26), тада ћемо, као и за проблем Веселова-Веселове, добити систем парцијалних једначина по непознатим функцијама U и V. Тај систем је исти као и у случају Чаплигиновог проблема (15), само што требамо извршити замену параметра K_i редом у I_i, $i = 1, 2, 3$.

Тако је доказана и следећа теорема:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Теорема 2.4. *Нека је $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Ојлер-Пуасонове једначине (27) и једначине (25) проблема Веселова-Веселове су интеграбилне за потенцијале (19).*

Напомена 2.3 У раду [14] је показано да кретање динамички несиметричног крутог тела ($I_1 \neq I_2 \neq I_3$) у гравитационом пољу $V = mg\langle\vec{Q}_c, \vec{\Gamma}\rangle$ нема допунски аналитички интеграл кретања.

Друга конструкција интеграбилних пертурбација кретања крутог тела око непокретне тачке (27) је дата у [2]. Богојављенски је доказао интеграбилност за произвољни квадратни потенцијал:

$$V(\vec{\Gamma}) = a_1\Gamma_1^2 + a_2\Gamma_2^2 + a_3\Gamma_3^2$$

Такође, за фиксирану вредност интеграла

$$F_1 = \langle I\vec{\Omega}, \vec{\Gamma}\rangle = 0,$$

Богојављенски је повезао дати систем са кретањем материјалне тачке по елипсоиду. Тако су у [2], Хамилтон-Јакобијевом методом, нађени следећи парцијално интеграбилни потенцијали:

$$V(\vec{\Gamma}) = \sigma_2 \left(c_1 + \sum_{N\geq 1} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k c_{N+k+1} \binom{N}{k} \sigma_1^{N-k} \sigma_2^k \right) \tag{28}$$

где c_i произвољне константе и:

$$\sigma_1 = \frac{\Gamma_1^2}{I_1} + \frac{\Gamma_2^2}{I_2} + \frac{\Gamma_3^2}{I_3} - (I_1^{-1} + I_2^{-1} + I_3^{-1}),$$

$$\sigma_2 = (I_1 I_2 I_3)^{-1}(I_1\Gamma_1^2 + I_2\Gamma_2^2 + I_3\Gamma_3^2).$$

Веза између наше класе решења и класе Богојављенског је дата у следећој теореми:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Теорема 2.5. *Пресек фамилија функција (19) и (28) се састоји од Клебш-Тисериновог потенцијала* $V = c(I_1\Gamma_1^2 + I_2\Gamma_2^2 + I_3\Gamma_3^2)$.

Доказ. Из (15) користећи само алгебарске операције можемо добити једначину:

$$(29) \qquad (I_1 - I_2)\Gamma_1\Gamma_2\frac{\partial V}{\partial \Gamma_3} + (I_3 - I_1)\Gamma_3\Gamma_1\frac{\partial V}{\partial \Gamma_2} + (I_2 - I_3)\Gamma_2\Gamma_3\frac{\partial V}{\partial \Gamma_1} = 0.$$

Како је (29) последица система (15), сви потенцијали (19) су решења једначине (29). Са друге стране, из фамилије (28), једино Клебш-Тисеринов потенцијал ($c_1 \neq 0$, $c_i = 0$, $i > 1$) задовољава једначину (29).

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Глава 3

Нехолономни ЛР системи на Лијевим групама

3.1 Увод

У овој глави посматраћемо нехолономне системе на Лијевим групама са лево-инваријантним Лагранжијанима и десно-инваријантним нехолономним дистрибуцијама. Те системе, колико је аутору познато, дефинисао је А. П. Веселов [6]. По енглеским речима left-right названи су LR системи.

У параграфу 2 даћемо основне дефиниције и одредити нотацију. Метода конструкције првих интеграла LR система, коришћењем инваријанти ко-придруженог дејства је дата у параграфу 2. При томе смо посматрали и општи случај, када су нехолономне везе нехомогене. Добијени резултати су омогућили конструкцију нових интеграбилних LR система са инваријантном мером на тродимензионим унимодуларним групама у параграфу 3. У параграфу 4 разматрали смо LR системе на Лијевој групи $SO(4)$. Нађене су експлицитне формуле за законе очувања четвородимензионог нехолономног кретања крутог тела, које представља уопштење проблема Веселова-Веселове. Показано је да су инваријантне многострукости петодимензионе. За интеграбилност, по Јакобијевој теореми, потребна су још три интеграла кретања. Пронађени су парцијално интеграбилни случајеви.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3.2. Нохолономни ЛР системи

Мотивишући пример LR система је проблем Веселова-Веселове. Иако смо упознати са проблемом у глави 2, ради једноставности излагања и каснијег уопштења наводимо следећи пример.

Пример 3.1 Проблем Веселова-Веселове описује ротацију крутог тела око непокретне тачке са везом $\langle\vec{N},\vec{\Omega}\rangle = q$ где је $\vec{\Omega}$ угаона брзина крутог тела, $\vec{N}$ је константан вектор у непокретном координатном систему и $\langle.,.\rangle$ уобичајен Еуклидски скаларни производ. Уколико телу додамо симетрични гироскоп тада укупну количину кретања крутог тела можемо написати у облику $\vec{M} = I\vec{\Omega} + \vec{P}$. Једначине кретања система по инерцији, у покретном координатном систему су:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\vec{M}} = \vec{M} \times \vec{\Omega} + \lambda\vec{N},\\
&\dot{\vec{N}} = \vec{N} \times \vec{\Omega},\\
(1)\qquad &\langle\vec{N},\vec{\Omega}\rangle = q,\\
&\lambda = \langle\vec{N}, A\vec{N}\rangle^{-1}\langle\vec{M} \times A\vec{M}, A\vec{N}\rangle,\\
&\vec{M} = I\vec{\Omega} + \vec{P}, \quad A = I^{-1}.
\end{aligned}
$$

Кретање система је неравномерно намотавање по дводимензионим инваријантним торусима и када је $\vec{P} = 0$ експлицитно је решено у квадратурама [7], [28].

Дефиниција 3.1. *Нехолономни LR систем* је нехолономни механички систем (G, L, D), где је G n-димензиона Лијева група, L лево-инваријантни Лагранжијан, $D \subset TG$ је десно-инваријантна $n-k$ димензиона неинтеграбилна дистрибуција.

Дистрибуција се може зедати помоћу k независних десно-инваријантних један-форми $\alpha^i \in \Lambda^1(G)$:

$$D_g = \{\xi \in T_gG,\ (\alpha^i_g, \xi) = 0,\ (R_g)^*\alpha^i_g = n^i = const,\ i = 1, \dots, k < n\},$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

где $(.,.)$ означава спаривање између дуалних векторских простора T_g^*G и T_gG, и R_g означава десно множење са g: $R_g(a) = ag$, $a \in G$.

Из Фробенијусове теореме имамо да је дистрибуција D неинтеграбилна ако и само ако $\mathcal{D} = D_e$ није подалгебра Лијеве алгебре $\mathcal{G} = T_eG$. Заиста, сличним аргументом као и у леми 2.1 добијамо да за модул сечења $\Gamma(D)$ дистрибуције D важи:

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subset \Gamma(D) \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}.$$

Ми ћемо разматрати општи случај, када допустиви путеви задовољавају нехолономну везу $(\alpha_g^i, \dot{g}) = q^i = const$, где q^i може бити различито од нуле.

Увешћемо неке уобичајене ознаке (погледати главу 1). Ако је $g(t)$ глатки пут на групи G, дефинишемо са

$$\Omega(t) = (L_{g^{-1}})_*\dot{g}(t),$$
$$N^i(t) = (L_g)^*\alpha^i_{g(t)} = (L_g)^*(R_{g^{-1}})^*n^i = Ad^*_{g^{-1}}n^i,$$

редом одговарајуће глатке путеве на Лијевој алгебри $\mathcal{G} = T_eG$ и њој дуалном простору $\mathcal{G}^*$. Приметимо да тада $N(t)$ задовољава једначину

$$\dot{N} = ad^*_\Omega N. \tag{2}$$

Заиста, (2) добијамо диференцирајући $N = Ad^*_{g^{-1}}n$ и користећи чињеницу да је ad^* диференцијал ко-придруженог дејства Ad^* групе G на $\mathcal{G}^*$ [26]. Једначина (2) је уопштење Пуасонове једначине (глава 1, параграф 5).

У таквим озакама, нехолономне везе се могу написати на следећи начин:

$$(\alpha_g^i, \dot{g}) = (\alpha_g^i, (L_g)_*\Omega) = (n^i, Ad_g\Omega) = (N^i, \Omega) = q^i, \quad i = 1, \dots, k.$$

За Лагранжијан ћемо узети суму кинетичке енергије (квадратна по брзинама) и гироскопског члана (линеаран по брзинама). Како је Лагранжијан лево-инваријантан, може се написати у форми:

$$L(\dot{g}, g) = \frac{1}{2}(I(L_{g^{-1}})_*\dot{g}, (L_{g^{-1}})_*\dot{g}) + (P, (L_{g^{-1}})_*\dot{g}),$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

где је $P \in \mathcal{G}^*$ и $I : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ симетрични позитивно дефинитни оператор који дефинише лево-инваријантну метрику на Лијевој групи [37]. У левој тривијализацији Λ (глава 1, (30)), Лагранжијан система је:

$$\mathcal{L}(\Omega) = \frac{1}{2}(I\Omega, \Omega) + (P, \Omega).$$

Нека је $H : T^*\{p, g\} \to R$ Лежандрова трансформација Лагранжијана L. Нека је $A = I^{-1} : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}$ и $M = \partial\mathcal{L}/\partial\Omega = I\Omega + P$. Хамилтонова функција у левој тривијализацији $\bar{\Lambda}$ има облик:

$$\mathcal{H}(M) = (M\Omega - \mathcal{L}(\Omega))|_{\Omega = A(M-P)} = \frac{1}{2}(M - P, A(M - P)).$$

Једначине кретања на $T^*G\{p, g\}$, изведене из Даламбер-Лагранжовог принципа су:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial g} + \sum_i \lambda_i \alpha_g^i, \tag{3}$$
$$\dot{g} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (\alpha_g^i, \dot{g})|_{\dot{g} \to p} = q^i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Како се после левог множења једначине (3) без нехолономних веза редукују на Ојлер-Поенкареове једначине (глава 1, (31)) и како је α^i десно-инваријантна форма, једначине кретања се после левог множења редукују на:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= ad^*_\Omega M + \sum \lambda_i N^i, \\ \dot{N}^i &= ad^*_\Omega N^i, \\ (N^i, \Omega) &= q^i \quad i = 1, \ldots, k, \\ \Omega &= A(M - P) = \frac{\partial \mathcal{H}(M)}{\partial M}. \end{aligned} \tag{3'}$$

Лагранжови множиоци λ_i су изабрани тако да кретање задовољава везе $(N^i, \Omega) = q^i$.

Специјално, за $G = SO(3)$ једначине (3') добијају облик (1) (потребне идентификације се могу наћи у глави 1). Други веома важан

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

пример LR система је Чаплигинов проблем котрљања лопте по хоризонталној равни разматран у глави 2. Тада је $G = E(3)$, група кретања Еуклидског простора.

Нас ће посебно интересовати LR системи на унимодуларним групама, односно алгебрама

Дефиниција 3.2. Лијева група G се назива *унимодуларном* ако поседује двострано-инваријантну меру. Лијева алгебра је *унимодуларна* ако њене структурне константе задовољавају једначине $\sum_k C_{ik}^k = 0$ за све i.

Може се показати да је Лијева група унимодуларна ако и само ако је њена Лијева алгебра унимодуларна.

Важна карактеристика LR система на унимодуларним групама, је да поседују инваријантну меру.

Теорема 3.1. *[8] Ако је G унимодуларна Лијева група тада једначине (3) имају инваријантну меру у фазном простору T^*G. Специјално, редукован систем (3') има инваријантну меру са густином:*

$$\mu(N)dMdN^1\dots dN^k, \qquad \mu(N) = \sqrt{\det(N^i, AN^j)}.$$

3.3. Конструкција првих интеграла

1. У овом параграфу посматраћемо LR системе са једном нехолономном везом:

$$(\alpha_g, \dot g) = (Ad^*_{g^{-1}}n, \Omega) = (N, \Omega) = q,$$
$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}] = \mathcal{G}, \quad \mathcal{D} = \{\Theta \in \mathcal{G},\ (n, \Theta) = 0\}, \tag{4}$$

уз присуство допунске силе са потенцијалом $V = V(g) : G \to R$. Напоменимо да тада Хамилтонијан

$$\mathcal{H}(M, g) = \frac{1}{2}(M - P, A(M - P)) + V(g), \tag{5}$$

није више лево-инваријантна функција (када би потенцијал био лево-инваријантан он би морао бити константна функција и самим тим не би утицао на кретање).

Размотримо нешто општију ситуацију.

Лема 3.1. *Нека је на $T^*G\{p,g\}$ дат нехолономни систем са Хамилтонијаном H и везама (4). Нека је H инваријантан под дејством групе $K \subset G$. Тада је*

$$(6) \qquad \begin{aligned} \mathcal{J} :\ \bar{\Lambda}(T^*G) = \mathcal{G}^* \times G \to \mathcal{K} \\ \mathcal{J}(M,g) = (Ad_g^* M)|_{\mathcal{K}\cap\mathcal{D}} \end{aligned}$$

интеграл кретања нехолономног система.

Доказ. Нека $Y \in \mathcal{K}$. Тада је $v_Y(g) = \frac{d}{d\alpha}|_{\alpha=0} G_Y^\alpha g$ десно-инваријантно векторско поље на G:

$$(R_a)_* v_Y(g) = \frac{d}{d\alpha}_{|\alpha=0} (G_Y^\alpha g a) = v_Y(ga).$$

Тако је $v_Y(g) = (R_g)_* Y$. По дефиницији, момент система у односу на дејство групе K делује на Y на следећи начин:

$$\mathcal{J}(p,g|\,Y) = (p, v_Y(g)) = ((R_g)^* p, Y).$$

Како је $(R_g)^* p = (R_g)^* (L_{g^{-1}})^* M = Ad_g^* M$, у левој тривијализацији $\bar{\Lambda}(T^*G)\{M,g\}$ момент је дат са:

$$\mathcal{J}(M,g) = (Ad_g^* M)|_{\mathcal{K}}.$$

Нека је $K' \subset K$ подгрупа, чије је дејство сагласно са везама. Тада за $Y \in \mathcal{K}'$ имамо да је

$$(\alpha(g), v_Y(g)) = (\alpha(g), (R_g)_* Y) = (n, Y) = 0,$$

односно $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \cap \mathcal{D}$. Из Нетерине теореме следи да је (6) интеграл кретања.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Лема 3.2. *Нека је на $T^*G\{p,g\}$ дат G_n инваријантан Хамилтонијан H, где је:*

$$G_n = \{g \in G,\ Ad^*_{g^{-1}} n = n\}, \quad n = (R_g)^* \alpha = const.$$

Тада се једначине кретања нехолономног система са везама (4) редукују на једначине дуалног простора Лијеве алгебре полудиректног производа $S = G \times_{Ad} \bar{\mathcal{G}}$:

$$
\begin{aligned}
&\dot{M} = ad^*_{d_M \mathcal{H}} M + ad^*_{d_N \mathcal{H}} N + \lambda N,\\
&\dot{N} = ad^*_{d_M \mathcal{H}},\\
&(N, \Omega) = q,\\
&\Omega = d_M \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M},\ d_N \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где је $\mathcal{H}(M,N)$ функција на $\mathcal{G}^*\{M\} \times \mathcal{O}(n)\{N\} \subset \mathcal{S}^*$ одређена са:

$$\mathcal{H}(M,N) = H(p,g), \quad M = (L_g)^* p,\ N = Ad^*_{g^{-1}} n.$$

Доказ. Како је H G_n-инваријантна функција и како је $G/G_n = \mathcal{O}(n)$, функција $\mathcal{H}$ је добро дефинисана.

Једначине (7), без нехолономне везе, су последица редукције симплектичке многострукости T^*G са канонском симплектичком структуром $d\theta$ по групи симетрије G_n коју је разматрао Т. Ратиу [52]. Како нас не занима сама симплектичка структура, једначине (7) ћемо извести директно из Даламбер-Лагранжовог принципа и претходних запажања.

Друга једначина је у ствари једначина (2). Докажимо прву једначину. Нека је $(e_1, \dots, e_n)$ база алгебре $\mathcal{G}$ са структурним константама C^k_{ij}: $[e_i, e_j] = C^k_{ij} x_k$. Нека је $(N, e_k) = N_k$. Једначине кретања можемо написати у облику Поенкаре-Читајевљевих једначина (глава 1, (29)):

$$
\begin{aligned}
\dot{M}_k &= \sum_{ij} C^j_{ik} M_j \frac{\partial \mathcal{H}(M,g)}{\partial M_i} - e_k|_g(\mathcal{H}(M,g)) + \lambda(\alpha_g, e_k|_g) =\\
&= (ad^*_{d_M \mathcal{H}} M, e_k) - e_k|_g(\mathcal{H}(M,g)) + \lambda N_k,
\end{aligned}
$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$(N, \Omega) = q,$$

$$\Omega = (L_{g^{-1}})_* \dot{g} = \frac{\partial \mathcal{H}(M, g)}{\partial M}.$$

где је $\mathcal{H}(M, g) = H(p, g)|_{p=(L_{g^{-1}})^* M}$ и $e_k|_g = (L_g)_* e_k$.

Како је $N = Ad^*_{g^{-1}} n$, N можемо посматрати као функцију $N : G \to \mathcal{G}^*$. При томе је $dN|_g(\xi) = ad^*_\Theta N$, $\xi \in T_g G$, $\Theta = (L_{g^{-1}})_* \xi$. Функцију $\mathcal{H}(M, g)$ можемо посматрати као композицију: $\mathcal{H}(M, N(g))$. Тада је:

$$\begin{aligned} e_k|_g(\mathcal{H}) =& \frac{\partial \mathcal{H}(M, N)}{\partial N} dN|_g(e_k|_g) = \\ =& (ad^*_{e_k} N, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N}) = (N, [e_k, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N}]) = -(ad^*_{d_N \mathcal{H}} N, e_k). \end{aligned}$$

Тиме смо доказали лему.

У складу са претходном теоремом, ограничићемо се разматрањем потенцијала V, Лагранжијана (5), инваријантих под дејством подгрупе G_n групе G: $V(g) = V(ag)$, за све $a \in G$, $g \in G_n$. Тада $V(g)$ индукује функцију $U(N)$ на $\mathcal{G}^*$:

$$U(N) = V(g), \qquad N = Ad^*_{g^{-1}} n.$$

Хамилтонова функција (5) у координатама $\{M, N\}$ има облик:

(5') $$\mathcal{H}(M, N) = \frac{1}{2}(M - P, \Omega) + U(N).$$

По леми 3.2, Даламбер-Лагранжеове једначине се редукују на $\mathcal{S}^*$:

(8) $$\begin{aligned} &\dot{M} = ad^*_\Omega M + ad^*_{dU} N + \lambda N, \\ &\dot{N} = ad^*_\Omega N, \\ &(N, \Omega) = q, \\ &\lambda = -(N, AN)^{-1}(ad^*_\Omega M + ad^*_{dU} N, AN), \\ &\Omega = A(M - P) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M}. \end{aligned}$$

Додавање потенцијала нема утицаја на постојање инваријантне мере.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Једначине (8) чине затворен систем једначина за одређивање непознатих M и N. При томе не морамо унапред фиксирати вредност n и функцију U можемо посматрати као функцију на $\mathcal{G}^*\{N\}$.

Напоменимо да из леме 3.1 имамо следећи интеграл на фазном простору $\bar{\Lambda}(T^*G)$:

$$\mathcal{J}(M,g) = (Ad_g^* M)|_{\mathcal{A}nn(n)\cap\mathcal{D}}.$$

2. Нас ће интересовати интеграбилност једначина (8), посматраног као затвореног система на $\mathcal{S}^*\{M,N\}$.

Структура једначина нам даје могућност за конструкцију неких првих интеграла. Сетимо се да је функција $J : \mathcal{G}^* \to R$ инваријанта ко-придруженог дејства групе G на $\mathcal{G}^*$ уколико је у инволуцији у односу на Ли-Пуасонову заграду са свим другим функцијама на $\mathcal{G}^*$:

$$(M,[dJ(M),\xi]) = 0 \qquad \text{za sve} \qquad M \in \mathcal{G}^*,\ \xi \in \mathcal{G}. \tag{9}$$

Функције $f : \mathcal{G}^* \to R$ можемо посматрати као функције на $\mathcal{S}^*$ на два могућа начина:

$$f'(M,N) = f(M), \qquad f"(M,N) = f(N).$$

Следеће леме дају понашање инваријанти на $\mathcal{G}^*$ и Хамилтонијана система дуж трајекторија система (8).

Лема 3.3. *(а) Нека је $J : \mathcal{G}^* \to R$ инваријанта на $\mathcal{G}^*$. Тада је $J"$ интеграл кретања једанчина (8).*

(б): Хамилтонијан се очувава само у случају када је веза хомогена:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \lambda(N,\Omega) = \lambda q.$$

Доказ. (а) Непосредном провером добијамо:

$$\frac{d}{dt}J" = \frac{\partial J"}{\partial M}\dot{M} + \frac{\partial J"}{\partial N}\dot{N} = (ad^*_\Omega N, \frac{\partial J"}{\partial N}) = (N,[\Omega,\frac{\partial J"}{\partial N}]) = 0.$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

При томе смо искористили (4) и чињеницу да је $\frac{\partial J"}{\partial N}_{|N} \in (\mathcal{G}^*)^* = \mathcal{G}$.

(б) Други део леме следи из теореме 1.6. У овом случају може се лако и директно извести:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{H} =&(\dot{M},\Omega) + (\dot{N}, \frac{\partial U}{\partial N})\\ =&(ad^*_\Omega M, \Omega) + (ad^*_{dU}N, \Omega) + (\lambda N, \Omega) + (ad^*_\Omega N, \frac{\partial U}{\partial N}) =\\ =&(M, [\Omega,\Omega]) + (N, [\frac{\partial U}{\partial N}, \Omega] + [\Omega, \frac{\partial U}{\partial N}]) + \lambda(N,\Omega) = \lambda q.\end{aligned}$$

Приметимо да у општем случају J' није интеграл једначина (8) чак и када немамо нехолономну везу.

Лема 3.4. *(а) Нека је $J : \mathcal{G}^* \to R$ инваријанта на $\mathcal{G}^*$ облика $J(M) = \Phi(M,M)$, где је Φ симетрични 2-тензор. Тада дуж трајекторија система (8) важи следећа релација:*

$$\frac{d}{dt}\Phi(M,N) = \lambda\Phi(N,N).$$

(б) Ако је J облика $J(M) = (M,\eta)$, $\eta \in \mathcal{G}$ тада је

$$\frac{d}{dt}(M,\eta) = \lambda(N,\eta).$$

Доказ. Нека је $(e_1,\ldots,e_n)$ база Лијеве алгебре $\mathcal{G}$ са структурним константама C^k_{ij}: $[e_i,e_j] = C^k_{ij}e_k$. Уводећи координате $M_k = (M,e_k)$, $N_k = (N,e_k)$, $\Omega = \Omega^k e_k$, једначине (8) постају:

$$\begin{aligned}&\dot{M}_k = \sum_{ij} C^i_{jk}M_i\Omega^j + \sum_{ij} C^i_{jk}N_i\frac{\partial U}{\partial N_j} + \lambda N_k,\\ &\dot{N}_k = \sum_{ij} C^i_{jk}N_i\Omega^j,\\ (8')\qquad &\sum_i N_i\Omega^i = q\\ &\Omega^i = \sum_j A^{ij}(M_j - P_j).\end{aligned}$$

Извод од $\Phi(N,M) = \Phi^{ij} N_i M_j$ дуж трајекторија система (8') је:
(10)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(N,M) =& C^i_{jk} M_i \Omega^j \Phi^{kg} N_g + C^i_{jk} N_i \frac{\partial U}{\partial N_j} \Phi^{kg} N_g + \\ & + \lambda N_k \Phi^{kg} N_g + C^i_{jk} N_i \Omega^j \Phi^{kg} M_g \\ =& \Omega^j (C^i_{jk} \Phi^{kg} \{M_i N_g + N_i M_g\}) + \frac{\partial U}{\partial N_j} (C^i_{jk} \Phi^{kg} N_i N_g) + \lambda J(N).\end{aligned}$$

Како је $J(M)$ инваријанта, једначине (4) нам дају:

(9') $$\sum_{ik} C^i_{jk} M_i \frac{\partial J}{\partial M_k} = 0, \quad j = 1, \ldots n.$$

Из (9') добијамо:

(11) $$\sum_{ikg} C^i_{jk} \Phi^{kg} M_i M_g = 0, \quad j = 1, \ldots n.$$

Тензор $M_i M_g$ је симетричан по индексима i, g. Дакле из (11) сума $\sum C^i_{jk} \Phi^{kg}$ мора бити антисиметрична по i, g за све $j = 1, \ldots n$. Прва и друга сума у (10) су једнаке нули као производи симетричног и антисиметричног тензора по индексима i, g.

У другом случају, када је $J(M) = (M, \eta) = M_k \eta^k$ имамо:

$$\frac{d}{dt}(M,\eta) = C^i_{jk} \eta^k \{M_i \Omega^j + N_i \frac{\partial U}{\partial N_j}\} + \lambda N_k \eta^k.$$

Једначине (4') дају $C^i_{jk} \eta^k = 0$ за све i, j. То доказује и други део леме.

Применом лема 3.3 и 3.4 можемо добити теорему:

Теорема 3.2. *(а) Нека је $J : \mathcal{G}^* \to R$ инваријанта на $\mathcal{G}^*$ облика $J = \Phi(M, M)$, где је Φ симетрични 2-тензор. Тада једначине (3) имају прве интеграле:*

$$J_1 = \Phi(N,N),$$
$$J_2 = \Phi(N,N)(\frac{1}{2}(M - P, \Omega) + U(N)) - \Phi(M,N)(N,\Omega).$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

У случају када је $U(N)=0$ имамо и полиномијални интеграл четвртог степена:

$$J_3 = \Phi(M,M)\Phi(N,N) - \Phi(M,N)^2.$$

(б) Ако је J облика $J=(M,\eta)$, $\eta \in \mathcal{G}$ тада су интеграли:

$$J_1 = (N,\eta),$$
$$J_2 = (N,\eta)(\frac{1}{2}(M-P,\Omega)+U(N)) - (M,\eta)(N,\Omega).$$

Скица доказа. (а) Докажимо, на пример, да је J_3 интеграл кретања када немамо допунску потенцијалну силу. Лако се показује да је тада $\frac{d}{dt}\Phi(M,M) = 2\lambda\Phi(M,N)$. Тако је

$$\frac{d}{dt}J_3 = 2\lambda\Phi(M,N)\Phi(N,N) - 2\lambda\Phi(M,N)\Phi(N,N) = 0.$$

Такође из лема 3.3 и 3.4 имамо и следеће тврђење:

Последица 3.1. *Нека је $J : \mathcal{G}^* \to R$ инваријанта на $\mathcal{G}^*$ облика $J(M) = \Phi(M,M)$ где је Φ симетрични 2-тензор, или облика $J(M)=(M,\eta)$, $\eta \in \mathcal{G}$, тада су функције $\Phi(M,N)$ и J", односно J' и J", инваријанте на $\mathcal{S}^*$.*

Напомена 3.1. У овом параграфу нисмо користили претпоставку о постојању инваријанте мере.

Интеграл J_2 је модификација Јакобијевог интеграла (теорема 1.3) за случај када везе нису хомогене.

3.4. ЛР системи на тродимензионим групама

Проучаваћемо LR системе са инваријантном мером на тродимензионим групама. Ради тога, подсетимо се класификације тродимензионих унимодуларних Лијевих алгебри. Она се, на пример, може наћи у књигама [44], [53].

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Класификацију ћемо изложити у терминима структурних константи. Нека је (e_1, e_2, e_3) база алгебре. Тада, до на изоморфизам, постоје следеће тродимензионалне Лијеве алгебре:

(а) комутативна алгебра $t(3)$: $[e_i, e_j] = 0$,

(б) алгебра 3×3 косо-симетричних матрица $so(3, R)$: $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$,

(в) алгебра 2×2 матрица са нултим трагом $sl(2, R)$: $[e_1, e_2] = -e_3$, $[e_1, e_3] = 2e_1$, $[e_2, e_3] = -2e_2$,

(г) Хајзенбергова алгебра h: $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$,

(д) Разрешиве алгебре r_α: $[e_1, e_2] = a_{11}e_1 + a_{12}e_3$, $[e_1, e_3] = 0$, $[e_2, e_3] = a_{21}e_1 + a_{22}e_3$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL(2, R).$$

Разрешиве алгебре нису унимодуларне.

На комутативним групама (чија је алгебра изоморфна алгебри $t(3)$) нема неинтеграбилних десно (лево) инваријантних дистрибуција. Тако се нехолономни LR системи са инваријантном мером јављају на тродимензионим групама G у случајевима када је алгебра $\mathcal{G}$ групе једна од облика (б), (в) или (г).

У раду [8] је доказано да се кретање по инерцији, са хомогеном везом $(N, \Omega) = 0$, у шестодимензионом фазном простору T^*G одвија по дводимензионим инваријантним површима. По Јакобијевој теореми, због постојања инваријантне мере, проблем се може решити у квадратурама.

Ми ћемо разматрати општији случај, када је веза нехомогена и када је присутно дејство допунске потенцијалне силе (једначине (8)). У шестодимензионом простору $\mathcal{S}^*\{M, N\}$ имамо инваријантну меру и везу $(N, \Omega) = q$. Дакле, потребна су нам три интеграла кретања за комплетну интеграбилност система (8).

Пример 3.2. Нека је $\mathcal{G} = so(3, R)$ и $U(N) = 0$. Из теореме 3.2, после уобичајене идентификације алгебре $so(3, R)$ са тродимензионим

Еуклидским простором, добијамо добро познате интеграле [7], [28]:

$$J_1 = \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle,$$
$$J_2 = \frac{1}{2}\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle \langle \vec{M} - \vec{P}, \vec{\Omega} \rangle - \langle \vec{N}, \vec{M} \rangle \langle \vec{N}, \vec{\Omega} \rangle,$$
$$J_3 = \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle \langle \vec{M}, \vec{M} \rangle - \langle \vec{M}, \vec{N} \rangle^2.$$

Интеграбилне потенцијалне пертурбације једначина (1) су дате у радовима [7], [42] (погледати главу 2).

Пример 3.3. Ако је $\mathcal{G} = sl(2, R)$ тада у бази (в) једначине кретања имају облик:

$$\begin{aligned}
\dot{M}_1 &= M_3\Omega^2 - 2M_1\Omega^3 + N_3\frac{\partial U}{\partial N_2} - 2N_1\frac{\partial U}{\partial N_3} + \lambda N_1, \\
\dot{M}_2 &= 2M_2\Omega^3 - M_3\Omega^1 + 2N_2\frac{\partial U}{\partial N_3} - N_3\frac{\partial U}{\partial N_1} + \lambda N_2, \\
\dot{M}_3 &= 2M_1\Omega^1 - 2M_2\Omega^2 + 2N_1\frac{\partial U}{\partial N_1} - 2N_2\frac{\partial U}{\partial N_2} + \lambda N_3,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\dot{N}_1 &= N_3\Omega^2 - 2N_1\Omega^3, \\
\dot{N}_2 &= 2N_2\Omega^3 - N_3\Omega^1, \\
\dot{N}_3 &= 2N_1\Omega^1 - 2N_2\Omega^2, \\
N_1\Omega^1 &+ N_2\Omega^2 + N_1\Omega^1 = q, \\
\Omega^i &= A^{ij}(M_j - P_j).
\end{aligned} \tag{12'}$$

Инваријанта ко-придруженог дејства је $J(M) = 4M_1M_2 + M_3^2$. Из теореме 3.2 увек имамо два интеграла једначина (12):

(13)
$$J_1 = 4N_1N_2 + N_3^2,$$
$$J_2 = J_1(N)(\frac{1}{2}(M - P, \Omega) + U(N)) - (N, \Omega)(2M_2N_1 + 2N_2M_1 + M_3N_3)$$

Када је $U(N) = 0$ проблем је интеграбилан. Из теореме 3.2 добијамо и трећи независан интеграл:

$$J_3 = (4N_1N_2 + N_3^2)(4M_1M_2 + M_3^2) - (2M_2N_1 + 2N_2M_1 + M_3N_3)^2. \tag{14}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Интеграбилне потенцијалне пертурбације се могу наћи методом примењеној у другој глави: тражимо потенцијале $U(N)$ за које постоји интеграл облика $\tilde{J}_3 = J_3 + V(N)$. Лако се показује да у том случају мора бити $P = 0$.

Теорема 3.3. *Једначине (12) су интеграбилне за потенцијал:*

$$\frac{\epsilon}{2}(4\frac{N_1^2}{a_2} + 4\frac{N_2^2}{a_1} + \frac{N_3^2}{a_3})$$

где је $A = diag(a_1, a_2, a_3)$ *и* $P = 0$. *Трећи интеграл је:*

$$\tilde{J}_3 = J_3 + 4\epsilon(4N_1N_2 + N_3^2)(\frac{N_1^2}{a_2a_3} + \frac{N_2^2}{a_1a_3} + \frac{N_3^2}{a_1a_2}),$$

J_3 *је дато са (14).*

Функција $\frac{\epsilon}{2}(4\frac{N_1^2}{a_2} + 4\frac{N_2^2}{a_1} + \frac{N_3^2}{a_3})$ је аналогон Клебш-Тисериновог потенцијала код кретања крутог тела. Интересантна чињеница је да је проблем (12) интеграбилан са тим потенцијалом чак и када немамо нехолономну везу.

Пример 3.4. На крају, нека је $\mathcal{G}$ Хајзенбергова алгебра h. У бази (г) једначине (8) и интеграли J_1 и J_2 су:

$$\begin{aligned}
&\dot{M}_1 = -M_3\Omega^2 - N_3\frac{\partial U}{\partial N_2} + \lambda N_1,\\
&\dot{M}_2 = M_3\Omega^1 + N_3\frac{\partial U}{\partial N_1} + \lambda N_2,\\
&\dot{M}_3 = \lambda N_3,\\
&\dot{N}_1 = -N_3\Omega^2, \quad \dot{N}_2 = N_3\Omega^1, \quad \dot{N}_3 = 0,\\
&N_1\Omega^1 + N_2\Omega^2 + N_1\Omega^1 = q,\\
&\Omega^i = A^{ij}(M_j - P_j),
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= N_3,\\
J_2 &= N_3(\frac{1}{2}(M-P,\Omega)) + U(N)) - M_3(N,\Omega).
\end{aligned} \tag{16}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Нека је $U(N) = 0$. За разлику од претходних примера теорема 3.2 нам не даје трећи интеграл. Ипак, може се показати да важе следеће релације:

$$\frac{d}{dt}(N, AN) = 2N_3(\Omega^1 A^{2i} N_i - \Omega^2 A^{1i} N_i), \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}(N, \Omega) = \lambda(N, AN) + M_3(\Omega^1 A^{2i} N_i - \Omega^2 A^{1i} N_i) = 0. \tag{18}$$

Из (17) и (18), користећи $\dot{M}_3 = \lambda N_3$ добијамо:

$$(N, AN)^{-1}\frac{d}{dt}(N, AN) + 2M_3^{-1}\frac{d}{dt}M_3 = \frac{d}{dt}\ln\{M_3^2(N, AN)\} = 0. \tag{19}$$

Тако из релације (19) имамо и трећи интеграл:

$$J_3 = M_3^2(N, AN). \tag{20}$$

Дакле једначине (15) за $U(N) = 0$ се могу решити у квадратурама. Ми ћемо дати скицу решавања случаја када је веза хомогена, $P = 0$ и $A = diag(a_1, a_2, a_3)$. Тада једначине (15) добијају облик:

$$\begin{aligned}
&\dot{M}_1 = -a_2 M_3 M_2 + \lambda N_1\\
&\dot{M}_2 = a_1 M_3 M_1 + \lambda N_2\\
&\dot{M}_3 = \lambda N_3\\
&\dot{N}_1 = -a_2 N_3 M_2, \quad \dot{N}_2 = a_1 N_3 M_1, \quad \dot{N}_3 = 0,\\
&a_1 N_1 M_1 + a_2 N_2 M_2 + a_3 N_3 M_3 = 0
\end{aligned} \tag{15'}$$

Може се показати да су инваријантне површи задате са

$$\begin{aligned}
&a_1 M_1^2 + a_2 M_2^2 + a_3 M_3^2 = h,\\
&N_3 = n,\\
&M_3^2(a_1 N_1^2 + a_2 N_2^2 + a_3 N_3^2) = g,\\
&a_1 N_1 M_1 + a_2 N_2 M_2 + a_3 N_3 M_3 = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

дифеоморфне цилиндрима $S^1 \times R^1$. Уведимо помоћне променљиве u и v формулама:

$$u = a_1 N_1^2 + a_2 N_2^2 + a_3 N_3^2, \qquad v = M_1 N_2 - N_1 M_2.$$

Може се показати да оне задовољавају једначине:

$$\dot{u} = 2a_1 a_2 v, \qquad \dot{v} = nh,$$

које се могу лако интегралити. Дакле $u(t)$ и $v(t)$ су познате функције времена. Из једначине за M_3 после одређивања множиоца λ имамо:

$$\dot{M}_3 = -\frac{a_1 a_2 n v(t) M_3}{u(t)}.$$

На тај начин можемо одредити и $M_3(t)$. Остале променљиве одређујемо из услова (21).

Такође, имамо следеће уопштење.

Теорема 3.4. *Ако потенцијал $U(N)$ задовољава једначину*

$$A^{2i} N_i \partial U / \partial N_1 = A^{1i} N_i \partial U / \partial N_2,$$

тада су једначине (15) интеграбилне. Трећи интеграл је дат са (20).

Пример интеграбилног потенцијала је $U(N) = \epsilon(N, AN)$.

3.5. Нехолономно кретање четвородимензионог крутог тела

У овом поглављу наћи ћемо законе очувања нехолономног кретања четвородимензионог крутог тела. Кретање n димензионог крутог тела око непокретне тачке се описује на сличан начин као и кретање реалног крутог тела (детаљи се могу наћи на пример у [45], [51]. Конфигурациони простор је $SO(n)$: $B \in SO(n)$ пресликава координатни систем везан за тело (покретни координатни систем):

$$(e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t, \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)^t)$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

у непокретни координатни систем:

$$(v_1 = (v_{11}, \dots, v_{1n})^t, \dots, v_n = (v_{n1}, \dots, v_{nn})^t)$$

(v_{ij} је пројекција вектора v_i на e_j). Приметимо да је у наведеним ознакама $B = (v_1, \dots, v_n)^t$ и $v_i = B^t e_i$. Матрице

$$\Omega^c = \Omega = B^{-1}\dot{B},$$
$$\Omega^s = \dot{B}B^{-1} = B\Omega B^{-1}$$

редом се називају угаона брзина крутог тела у односу на покретни систем и угаона брзина тела у односу на непокретни координатни систем.

Ортонормирану базу у односу на Килингову форму Лијеве алгебре $so(n)$

$$\langle \Omega_1, \Omega_2 \rangle = -\frac{1}{2} tr(\Omega_1 \Omega_2)$$

чине матрице:

$$\{e_i \wedge e_j,\ 1 \le i < j \le n\}, \qquad x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x = xy^t - yx^t.$$

Килингова форма омогућује идентификацију $so(n)^* \cong so(n)$ (погледати на пример [44]). У складу са том идентификацијом операција ad^* постаје комутатор Лијеве алгебре, узет са негативним знаком.

Следећи [45] ми ћемо разматрати четвородимензиону генерализацију проблема Веселова-Веселове (1). У тродимензионом случају ротацијама по дводимензионим равнима одговара јединствена оса ротације, док у вишедимензионом кретању крутог тела око непокретне тачке можемо посматрати само ротације крутог тела по дводимензионим равнима а не и осе ротације. Напоменимо да матрице $v_i \wedge v_j \in so(n)$ можемо посматрати и као усмерене дводимензионалне равни у R^n одређене векторима v_i и v_j.

У проблему (1) пројекција угаоне брзине $\vec{\Omega}$ (која одговара инфинитезималној ротацији око осе одређене вектором $\vec{\Omega}$) на фиксиран вектор у непокретном координатном систему $\vec{N}$ је константан. То повлачи

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

да су инфинитезималне ротације крутог тела у (усмереној) равни $\vec{N}^{\perp}$ константе.

Аналогно са проблемом (1), ми ћемо претпоставити да су инфинитезималне ротације четвородимензионог крутог тела у равнима $v_i \wedge v_j$ фиксиране, где $v_i \wedge v_j$ $(i < j)$ припадају k димензионалном потпростору $V \subset so(4)$.

$$V = Span\{v_i \wedge v_j,\ (i,j) \in \mathcal{V}\}, \quad \mathcal{V} \subset \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}, \quad |\mathcal{V}| = k.$$

Одговарајуће десно-инваријантне нехолономне везе су:

$$\begin{aligned} \Omega^s_{ij} =&\langle e_i \wedge e_j, \Omega^s\rangle = \langle e_i \wedge e_j, B\Omega B^{-1}\rangle \\ =&\langle B^{-1}e_i \wedge e_j B, \Omega\rangle = \langle v_i \wedge v_j, \Omega\rangle = q_{ij}, \qquad (i,j) \in \mathcal{V}, \end{aligned} \tag{22}$$

где смо искористили:

$$v_i \wedge v_j = B^t e_i (B^t e_j)^t - B^t e_j (B^t e_i)^t = B^t(e_i e_j^t - e_j e_i^t)B = B^{-1}e_i \wedge e_j B.$$

Да би појаснили претходну мотивацију, као и геометријско значење веза (22) послужићемо се следећим примером.

Пример 3.5. Посматрајмо n-димензиони случај и везу $\Omega^s_{12} = 0$. Нека је r_A вектор положаја тачке A крутог тела у покретном координатном систему (слика 1). Тада је $r^s_A = B(t)r_A$ вектор положаја исте тачке у непокретном систему. Брзина тачке A је:

$$v^s_A = \dot{r}^s_A = \dot{B}(t)r_A = \dot{B}B^{-1}Br_A = \Omega^s r^s_A.$$

Нека тачка A припада равни $v_1 \wedge v_2$. Тада је $r^s_A = (r^s_1, r^s_2, 0, \dots, 0)$ и због везе $\Omega^s_{12} = 0$ добијамо да је $v^s_A = 0$. Значи да не постоје инфинитезималне ротације крутог тела у равни $v_1 \wedge v_2$.

Једначине кретања (3'), уопштења проблема Веселова-Веселове, после идентификације $so(4) \cong so(4)^*$ добијају облик:

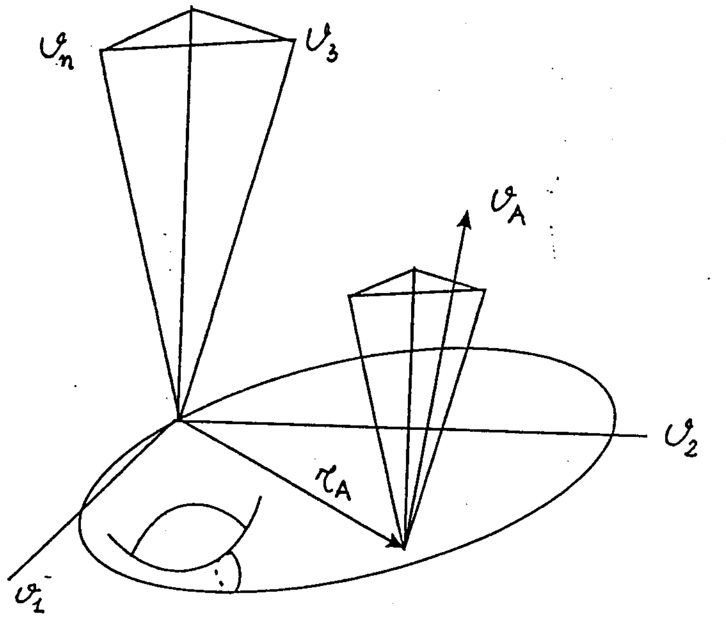
$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}M = [M, \Omega] + \sum \lambda_{ij} v_i \wedge v_j, \\ &\frac{d}{dt}(v_i \wedge v_j) = [v_i \wedge v_j, \Omega], \end{aligned} \tag{23}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$\langle v_i \wedge v_j, \Omega \rangle = q_{ij}, \qquad (i,j) \in \mathcal{V},$$

$M = \mathcal{I}\Omega$ је количина кретња крутог тела у покретном координатном систему. Оператор инерције $\mathcal{I}$ има облик $\mathcal{I}\Omega = J\Omega + \Omega J$ где је $J = diag(J_1, J_2, J_3, J_4)$ тензор масе [51], [45].

У случају када је круто тело динамички симетрично, непосредно добијамо интеграбилност система (23). Зато, од сада ћемо претпоставити да је $\mathcal{I} \neq cId_{so(4)}$ $(c = const)$.



слика 1

На Лијевој алгебри $so(4)$ постоје две функционално независне инваријанте, и то [26]:

$$I_1(M) = \langle M, M \rangle, \qquad I_2(M) = \langle R(M), M \rangle.$$

Оператор $R : e_i \wedge e_j \rightarrow \sum r_{ij,i'j'} e_{i'} \wedge e_{j'}$ је дефинисан са:

$$r_{12,34} = r_{34,12} = r_{14,23} = r_{23,14} = 1, \quad r_{13,24} = r_{24,13} = -1,$$

остали $r_{ij,i'j'}$ су једнаки нули. Слично као и у поглављу 3, можемо показати и следећу лему:

Лема 3.5. *Нека је $\Phi(M,M)$ инваријанта на $\mathcal{G}^*$ (Φ је симетричан 2-тензор) и нека је $\mathcal{H}(M) = \frac{1}{2}(M-P,\Omega)$ Хамилтонијан, тада дуж трајекторија система (3') имамо следеће релације:*

$$(a) \qquad \frac{d}{dt}\Phi(N^i,N^j) = 0,$$

$$(b) \qquad \frac{d}{dt}\Phi(M,M) = 2\sum_j \lambda_j \Phi(M,N^j),$$

$$(v) \qquad \frac{d}{dt}\mathcal{H}(M) = \sum_j \lambda_j (N^j,\Omega) = \sum \lambda_j q^j,$$

$$(g) \qquad \frac{d}{dt}\Phi(M,N^i) = \sum_j \lambda_j \Phi(N^j,N^i).$$

Из леме 3.5 (a) добијамо геометријске интеграле:

$$\begin{aligned} X_{ij,i'j'} &= \langle v_i \wedge v_j, v_{i'} \wedge v_{j'} \rangle, \\ Y_{ij,i'j'} &= \langle R(v_i \wedge v_j), v_{i'} \wedge v_{j'} \rangle, \qquad (i,j),(i',j') \in \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{24}$$

За реална кретања узимамо вредности:

$$X_{ij,i'j'} = \delta_{ij,i'j'}, \qquad Y_{ij,ij} = r_{ij,i'j'}.$$

Те вредности добијамо из услова да је у јединици групе $v_i \wedge v_j = e_i \wedge e_j$.

Теорема 3.5. *(a) Нека је*

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2, \quad V_1 \oplus V_2 = V \cap R(V), \quad V_2 = R(V_1).$$

Следеће функције су интеграли нехолономног кретања четвородимензионог крутог тела око непокретне тачке (18):

(25)

$$Z_{ij} = \langle R(M), v_i \wedge v_j \rangle, \qquad v_i \wedge v_j \in V_0$$

$$J_1 = \langle M,\Omega \rangle - 2 \sum_{v_i \wedge v_j \in V} \langle v_i \wedge v_j, \Omega \rangle \langle v_i \wedge v_j, M \rangle$$

$$J_2 = \langle M,M \rangle - \sum_{v_i \wedge v_j \in V} (\langle M, v_i \wedge v_j \rangle)^2$$

$$J_3 = \langle R(M),M \rangle + \langle M,M \rangle - \sum_{v_i \wedge v_j \in V_0 \oplus V_1} (\langle R(M), v_i \wedge v_j \rangle + \langle M, v_i \wedge v_j \rangle)^2$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

(б) У $6k+6$ *димензионом простору*

$$so(4)\{M\} \times_{(i,j)\in\mathcal{V}} so(4)\{v_i \wedge v_j\}$$

инваријантна површ дата везама (22) и интегралима (24), (25):

$$X_{ij,i'j'} = \delta_{ij,i'j'},\ Y_{ij,ij} = r_{ij,i'j'},\ Z_{ij} = z_{ij},\ J_i = j_i \tag{26}$$

је петодимензиона.

Доказ. Докажимо да је Z_{ij} интеграл кретања. На основу леме 3.5 (г) имамо:

$$\frac{d}{dt}Z_{ij} = \sum_{v_k\wedge v_l\in V} \lambda_{kl}\langle v_k \wedge v_l, R(v_i \wedge v_j)\rangle.$$

Како је на основу дефиниције $R(V_0)\perp V$ и $v_i \wedge v_j \in V_0$ претходна сума је једнака нули.

На основу леме 3.5 (в), (г) важе релације:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\langle M, \Omega\rangle = \sum_{v_i\wedge v_j\in V} \lambda_{ij}\langle v_i \wedge v_j, \Omega\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle v_i \wedge v_j, M\rangle = \sum_{v_k\wedge v_l\in V} \lambda_{kl}\langle v_k \wedge v_l, v_i \wedge v_j\rangle = \lambda_{ij}.$$

Тако је J_1 интеграл кретања. Слично се показује да је и J_2 интеграл кретања.

Покажимо још да је и функција J_3 интеграл. Диференцирањем дуж трајекторија система добијамо:

$$\frac{d}{dt}J_3 = 2\sum_{v_k\wedge v_l\in V} \lambda_{kl}\langle R(M), v_k \wedge v_l\rangle + 2\sum_{v_k\wedge v_l\in V} \lambda_{kl}\langle M, v_k \wedge v_l\rangle -$$

$$2\sum_{v_i\wedge v_j\in V_0\oplus V_1} \big(\langle R(M), v_i \wedge v_j\rangle + \langle M, v_i \wedge v_j\rangle\big)\times$$

$$\times\Big(\sum_{v_k\wedge v_l\in V} \lambda_{kl}\langle R(v_k \wedge v_l), v_i \wedge v_j\rangle + \sum_{v_k\wedge v_l\in V} \lambda_{kl}\langle v_k \wedge v_l, v_i \wedge v_j\rangle\Big)$$

$$= 2\sum_{v_k\wedge v_l\in V} \lambda_{kl}\langle R(M)+M, v_k \wedge v_l\rangle - 2\sum_{v_i\wedge v_j\in V_0\oplus V_1} \lambda_{ij}\langle R(M)+M, v_i \wedge v_j\rangle -$$

$$\sum_{v_i\wedge v_j\in V_0\oplus V_1}\ \sum_{v_k\wedge v_l\in V} \lambda_{kl}\langle R(M)+M, v_i \wedge v_j\rangle\langle R(v_k \wedge v_l), v_i \wedge v_j\rangle.$$

Разлика прве две суме износи:

$$2\sum_{v_i\wedge v_j\in V_2}\lambda_{ij}\langle R(M)+M, v_i\wedge v_j\rangle. \tag{27}$$

Са друге стране, како је $V_0 \perp R(V)$ добијамо да трећа сума износи:

$$\begin{aligned}&\sum_{v_i\wedge v_j\in V_1}\ \sum_{v_k\wedge v_l\in V_1\oplus V_2}\lambda_{lk}\langle R(M)+M, v_i\wedge v_j\rangle\langle R(v_k\wedge v_l), v_i\wedge v_j\rangle =\\ &\sum_{v_i\wedge v_j\in V_1}\ \sum_{v_k\wedge v_l\in V_1\oplus V_2}\lambda_{lk}\langle M+R(M), R(v_i\wedge v_j)\rangle\langle R(v_k\wedge v_l), v_i\wedge v_j\rangle.\end{aligned} \tag{28}$$

Даље, како је $R(V_1)=V_2$, $V_1\perp V_2$, суме (27) и (28) су једнаке. Тако је $\dot{J}_3 = 0$.

За доказ другог дела теореме потребно је извршити пажљиву анализу која зависи од $k = dimV$ и $dimV_0$.

Доказаћемо случај $k = dimV = 1$, $\mathcal{V} = \{(i_0, j_0)\}$. Тада је $V_0 = V$. Нека је $v_{i_0}\wedge v_{j_0} = N$. Уведимо координате у $so(4)$ на следећи начин:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -\Theta_3 & \Theta_2 & -\Theta_4\\ \Theta_3 & 0 & -\Theta_1 & -\Theta_5\\ \Theta_2 & \Theta_1 & 0 & -\Theta_6\\ \Theta_4 & \Theta_5 & \Theta_6 & 0\end{pmatrix}.$$

Тада је $\mathcal{I}$ дијагонална матрица и њен инверз је дат са: $\Omega_i = A_i M_i$, $i = 1, \dots, 6$.

Требамо показати да је у 12–димензионом простору $so(4)\{M\}\times so(4)\{N\}$ подмногострукост задата једначинама

$$X = 1,\quad Y = 0,\quad Z = z,\quad J_i = j_i,\quad i = 1,2,3,\quad F = q, \tag{29}$$

петодимензиона. Функције X, Y, Z, J_i, F су дате са:

$$\begin{aligned} X =&\langle N, N\rangle = \sum_{i=1}^{6} N_i^2,\\ Y =&\langle R(N), N\rangle = 2\sum_{i=1}^{3} N_i N_{i+3},\end{aligned} \tag{30}$$

$$Z =\langle R(M), N\rangle = \sum_{i=1}^{3} M_i N_{i+3} + \sum_{i=1}^{3} N_i M_{i+3}$$

$$J_1 =\langle M, \Omega\rangle - 2\langle N, \Omega\rangle\langle N, M\rangle = \sum_{i=1}^{6} A_i M_i^2 - 2\Big(\sum_{i=1}^{6} A_i N_i M_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{6} N_i M_i\Big),$$

$$J_2 =\langle M, M\rangle - (\langle M, N\rangle)^2 = \sum_{i=1}^{6} M_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{6} M_i N_i\Big)^2,$$

$$J_3 =\langle R(M), M\rangle + \langle M, M\rangle - (\langle R(M), N\rangle + \langle M, N\rangle)^2$$

$$=2\sum_{i=1}^{3} M_i M_{i+3} + \sum_{i=1}^{6} M_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{3} M_i N_{i+3} + \sum_{i=1}^{3} N_i M_{i+3} + \sum_{i=1}^{6} M_i N_i\Big)^2,$$

$$F =\langle \Omega, N\rangle = \sum_{i=1}^{6} A_i M_i N_i.$$

Уведимо нове координате:

$$\begin{aligned} &U_i = M_i + M_{i+3}, \quad V_i = M_i - M_{i+3}, \\ &u_i = N_i + N_{i+3}, \quad v_i = N_i - N_{i+3}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{31}$$

У координатама (31), функције (30) добијају облик:

(30')

$$X =\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2),$$

$$Y =\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2),$$

$$Z =\frac{1}{2}(U_1 u_1 + U_2 u_2 + U_3 u_3) - \frac{1}{2}(V_1 v_1 + V_2 v_2 + V_3 v_3),$$

$$J_2 =\frac{1}{2}(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) + \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2) -$$
$$\Big(\frac{1}{2}(U_1 u_1 + U_2 u_2 + U_3 u_3) + \frac{1}{2}(V_1 v_1 + V_2 v_2 + V_3 v_3)\Big)^2,$$

$$J_3 =U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 - (U_1 u_1 + U_2 u_2 + U_3 u_3)^2,$$

$$F =\frac{1}{4}(C_1 U_1 u_1 + C_2 U_2 u_2 + C_3 U_3 u_3) + \frac{1}{4}(C_1 V_1 v_1 + C_2 V_2 v_2 + C_3 V_3 v_3) +$$
$$\frac{1}{4}(D_1 U_1 v_1 + D_2 U_2 v_2 + D_3 U_3 v_3) + \frac{1}{4}(D_1 V_1 u_1 + D_2 V_2 u_2 + D_3 V_3 u_3),$$

$$J_1 =\frac{1}{4}(C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2 + C_3 U_3^2) + \frac{1}{4}(C_1 V_1^2 + C_2 V_2^2 + C_3 V_3^2) +$$
$$\frac{1}{2}(D_1 U_1 V_1 + D_2 U_2 V_2 + D_3 U_3 V_3) -$$
$$F(U_1 u_1 + U_2 u_2 + U_3 u_3 + V_1 v_1 + V_2 v_2 + V_3 v_3),$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

где је $C_i = A_i + A_{i+3}$, $D_i = A_i - A_{i+3}$, $i = 1, 2, 3$. Посматраћемо општи случај, када је $D \neq 0$, $C_i \neq C_j$. Нека су функције $x_i = x_i(u, v, U, V)$, $i = 1, \dots, 12$ дефинисане са:

(32)

$$x_1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad x_2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$
$$x_3 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2, \quad x_4 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2,$$
$$x_5 = C_1U_1^2 + C_2U_2^2 + C_3U_3^2, \quad x_6 = C_1V_1^2 + C_2V_2^2 + C_3V_3^2,$$
$$x_7 = U_1u_1 + U_2u_2 + U_3u_3, \quad x_8 = V_1v_1 + V_2v_2 + V_3v_3,$$
$$x_9 = C_1U_1u_1 + C_2U_2u_2 + C_3U_3u_3, \quad x_{10} = C_1V_1v_1 + C_2V_2v_2 + C_3V_3v_3,$$
$$x_{11} = D_1U_1v_1 + D_2U_2v_2 + D_3U_3v_3, \quad x_{12} = D_1V_1u_1 + D_2V_2u_2 + D_3V_3u_3,$$

Показује се, када је $D \neq 0$, $C_i \neq C_j$, да се линеарним комбинацијама градијената:

$$\nabla x_1 = (2u_1, 2u_2, 2u_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$
$$\nabla x_2 = (0, 0, 0, 2v_1, 2v_2, 2v_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$
$$\nabla x_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 2U_1, 2U_2, 2U_3, 0, 0, 0)$$
$$\nabla x_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2V_1, 2V_2, 2V_3)$$
$$\nabla x_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 2C_1U_1, 2C_2U_2, 2C_3U_3, 0, 0, 0)$$
$$\nabla x_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2C_1V_1, 2C_2V_2, 2C_3V_3)$$
$$\nabla x_7 = (u_1, u_2, u_3, 0, 0, 0, U_1, U_2, U_3, 0, 0, 0)$$
$$\nabla x_8 = (0, 0, 0, v_1, v_2, v_3, 0, 0, 0, V_1, V_2, V_3)$$
$$\nabla x_9 = (C_1u_1, C_2u_2, C_3u_3, 0, 0, 0, C_1U_1, C_2U_2, C_3U_3, 0, 0, 0)$$
$$\nabla x_{10} = (0, 0, 0, C_1v_1, C_2v_2, C_3v_3, 0, 0, 0, C_1V_1, C_2V_2, C_3V_3)$$
$$\nabla x_{11} = (0, 0, 0, D_1v_1, D_2v_2, D_3v_3, D_1U_1, D_2U_2, D_3U_3, 0, 0, 0)$$
$$\nabla x_{12} = (D_1u_1, D_2u_2, D_3u_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, D_1V_1, D_2V_2, D_3V_3)$$

(за опште вредности (u, v, U, V)) може добити стандардна база простора R^{12}. Значи да јакобијан $\partial x/\partial(u, v, U, V)$ има ранг 12 и да функције x_i можемо узети за локалне координате простора $so(4) \times so(4)$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Лако се проверава да су функције (30'), као функције од x_i, функционално независне. Самим тим је и подмногострукост одређена једначинама (29) петодимензиона.

Доказ осталих случајева је сличан. Напоменимо само да за разлику од доказаног случаја $k = 1$, у већини осталих случајева неки од интеграла (24), (25) су функционално зависни.

Напомена 3.2. Исти број интеграла можемо добити и после додавања гироскопа крутом телу (тада је количина кретања облика $M = \mathcal{I}\Omega + P$). Такође, како нисмо користили релацију $\mathcal{I}\Omega = J\Omega + \Omega J$, сва тврђења важе за произвољни оператор $\mathcal{I}$ који дефинише левоинваријантну метрику на групи $SO(4)$.

Напомена 3.3. Функција J_1 је модификација Јакобијевог интеграла, док су интеграли J_2, J_3 повезани са очувањем $M^s_{V^\perp} = gM_{V^\perp}g^{-1}$, односно пројекције количине кретања у непокретном координатном систему на ортогоналну допуну простора V у $so(4)$. Заиста, из $\frac{d}{dt}\langle v_i \wedge v_j, M\rangle = \lambda_{ij}$ следи да је

$$\dot{M}_{V^\perp} = [M_{V^\perp}, \Omega],$$
$$M_{V^\perp} = M - \sum_{(i,j)\in\mathcal{V}} \langle v_i \wedge v_j, M\rangle v_i \wedge v_j.$$

Очување $M^s_{V^\perp}$ следи и из леме 3.1, где треба узети да је $K = G = SO(4)$.

Интеграбилност система (18) је отворен проблем. Ипак постоје интеграбилни подсистеми, слични тродимензионалном проблему (1).

Лема 3.6. *Нека су нехолономне везе (22) хомогене и за неко* $(i_0, j_0) \in \mathcal{V}$ *почетни услови задовољавају:*

$$\begin{aligned} &M_{kl} = (v_{i_0} \wedge v_{j_0})_{kl} = 0, \quad (k,l) = (1,4),(2,4),(3,4) \\ &(v_i \wedge v_j)_{kl} = 0, \quad (k,l) = (1,2),(1,3),(2,3), \quad (i,j) \in \mathcal{V} - \{(i_0, j_0)\}. \end{aligned} \tag{33}$$

Тада је нехолономно кретање четводимензионог крутог тела (23) неравномерно намотавање по дводимензионим инваријантним торусима и може се решити у квадратурама.

Доказ. Може се показати да је подмногострукост дата условима (26), (33) дводимензионална инваријантна површ једначина (23). Пошто је повезана компонента инваријантне површи компактна, и како за $J_1 \neq 0$ једначине (23) немају сингуларитета на инваријантној површи, лема следи из теореме о интеграцији нехолономних система са инваријантном мером (параграф 1 главе 1, [38]).

Напомена 3.4. Можда је један од могућих начина доказивања комплетне интеграбилности конструкција $L-A$ пара, као у случају кретања вишедимензионог крутог тела по инерцији око непокретне тачке [19]. У складу са тим наводимо резултат В. В. Козлова и Ј. Н. Фјодорова. Посматрајући n-димензионални случај, они су написали једначине (23) са

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{KF} = \{(i,j),\ 2 \leq i < j \leq n\},$$

у еквивалетној комутативној форми:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= [Q, \Omega], \\ \dot{\Gamma} &= [\Gamma, \Omega], \end{aligned} \tag{34}$$

где је $\Gamma = v_1 \otimes v_1$ и $Q = M_{\mathcal{V}^\perp} + \Omega_{\mathcal{V}} = (M\Gamma + \Gamma M) + \Omega - (\Omega\Gamma + \Gamma\Omega)$. Једначине (34) имају $L-A$ пар $\dot{L} = [L, A]$, $L = hQ + \Gamma$, $A = \Omega$, који даје интеграбилност само за $n = 3$. Фјодоров и Козлов су поставили хипотезу да је проблем (34) интеграбилан за произвољну димензију n.

У случају $n = 4$, интеграбилност са допунском везом ($\mathcal{V} = \mathcal{V}_{KF} \cup \{(1,4)\}$):

$$\Omega^s_{23} = \Omega^s_{24} = \Omega^s_{34} = \Omega^s_{14} = 0$$

следи из леме 3.6. Без губљења оппттости можемо за почетни услов узети: покретни систем се поклапа са непокретним координатним системом ($e_i = v_i$, $i = 1, 2, 3, 4$). Тада су сви услови (33) задовољени.

Напомена 3.5. Коришћењем леме 3.5 можемо добити аналогне законе очувања и за друге LR системе (3') на шестодимензионим алгебрама $\mathcal{G}$ са квадратним инваријантама које припадају двема класама алгебри $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, чији се опис може наћу раду [1] (такође, са њима ћемо се сусрети и у следећој глави). Примери алгебри из тих класа су: $so(4)$, $so(3.1)$, $so(2.2)$, $e(3)$, $sl(2.R) \oplus sl(2.R)$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Глава 4

Нехолономни ЛЛ системи на Лијевим групама

4.1 Увод

У овој глави проучаваћемо нехолономне системе које за конфигурациони простор имају Лијеву групу, при чему су и Лагранжова функција и неинтеграбилна дистрибуција лево-инваријантне. По енглеским речима *left-left*, такви нехолономни системи називају се LL системи. Лагранжијан ће имати форму кинетичке енергије тако да су трајекторије система нехолономне геодезијске линије Леви-Чивита повезаности лево-инваријантне метрике.

Када је конфигурациони простор Лијева група ротација Еуклидског простора $SO(3)$ тада дати задатак представља Сусловљев проблем са којим смо се срели у другој глави. Једначине кретања се стога називају и Ојлер-Поенкаре-Сусловљеве једначине.

Колико је аутору познато, међу првим радовима који су се бавили нехолономним геодезијским линијама на Лијевим групама спада [6] (погледати претходну главу). При томе је А. П. Веселов претпоставио да је веза десно-инваријантна. Убрзо затим појавио се и рад Козлова [16] у којем се претпоставља лево-инваријантна веза (Ојлер-Поенкаре-Сусловљеве једначине) и дају услови постојања инваријантне мере у случају компактних група.

Поред механичког нехолономног проблема код кога су трајекторије

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

система "најправље" допустиве трајекторије, постоји и варијациони проблем код кога су трајекторије система "најкраће" допустиве трајекторије. Веома детаљна анализа варијационог задатка нехолономних геодезијских линија на Лијевим групама са ле-во-инваријантном метриком и лево-инваријантном неинтеграбилном дистрибуцијом је дата у књизи А. М. Вершика и В. Ј. Гершковича [53].

У параграфу 2 изабраћемо ознаке и дати преглед основних дефиниција и једначина. У параграфу 3 бавићемо се питањем постојања инваријантне мере код Ојлер-Поенкаре-Сусловљевих једначина. Дат је општији критеријум него у раду [53]. Пример конструкције угловних координата интеграбилног нехолономног система на алгебри $so(4)$ је показан у параграфу 4. У параграфу 5 изложићемо основни резулатат ове главе: у случају постојања инваријантне мере пронађени су нови интеграбилни нехамилтонови системи на двема класама шестодимензионих унимодуларних Лијевих алгебри.

Део резултата ове главе је изложен у раду [48].

4.2 Ојлер-Поенкаре-Сусловљеве једначине

Дефиниција 4.1. *Нехолономни LL систем* је нехолономни Лагранжов систем (G, L, D), где је G Лијева група, $L: TG\{\xi, g\} \to R$ лево-инваријантни Лагранжијан и $D \subset TG$ лево-инваријантна неинтеграбилна дистрибуција.

Нека је дистрибуција D ко-димензије 1. Тада се може задати помоћу лево-инваријантне 1-форме $\alpha \in \Lambda^1(G)$:

$$D_g = \{\xi \in T_gG,\ (\alpha_g, \xi) = 0,\ (L_g)^*\alpha_g = N = const\}$$

где $(.,.)$, као и до сада, означава спаривање између дуалних простора T_g^*G и T_gG а L_g лево множење са g: $L_g(a) = ga$, $a \in G$.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Из Фробенијусове теореме имамо да је дистрибуција D неинтеграбилна ако и само ако $\mathcal{D} = D_e = Ker(N)$ није подалгебра Лијеве алгебре $\mathcal{G} = T_e G$.

Ми ћемо разматрати случај када је Лагранжијан кинетичка енергија:

$$L(\xi, g) = \frac{1}{2}\langle \xi, \xi \rangle_g$$

где је $\langle ., . \rangle$ лево-инваријантна метрика групе G. Она се може задати помоћу оператора $I : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$. Нека су:

$$\Lambda : \; TG \to \mathcal{G} \times G, \quad (\xi, g) \mapsto (\Omega, g), \quad \Omega = (L_{g^{-1}})_* \xi$$
$$\bar{\Lambda} : \; T^*G \to \mathcal{G}^* \times G, \quad (p, g) \mapsto (M, g), \quad M = (L_g)^* p$$

леве тривијализације тангентног и котангентног раслојења. Тада је метрика дата са:

$$\langle \xi, \xi \rangle_g = (I\Omega, \Omega).$$

Нека је $\mathcal{L} = L|_{\xi \to \Omega}$. Хамилтонова функција у левој тривијализацији је: $H(M, g) = (M\Omega - \mathcal{L})|_{\Omega \to M}$, $M = \partial \mathcal{L} / \partial \Omega = I\Omega$, односно:

$$H(M, g) = \frac{1}{2}(M, AM),$$

где је $A = I^{-1} : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}$.

Претпоставићемо да допустиви путеви задовољавају хомогену везу $\dot{g}(t) \in D_{g(t)}$ односно:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(\alpha_g, \dot{g}(t)) = (\alpha_g, (L_g)_* \Omega(t)) = \\ &\qquad = ((L_g)^* \alpha_g, \Omega(t)) = (N, \Omega(t)) = (N, AM(t)) = 0, \end{aligned}$$

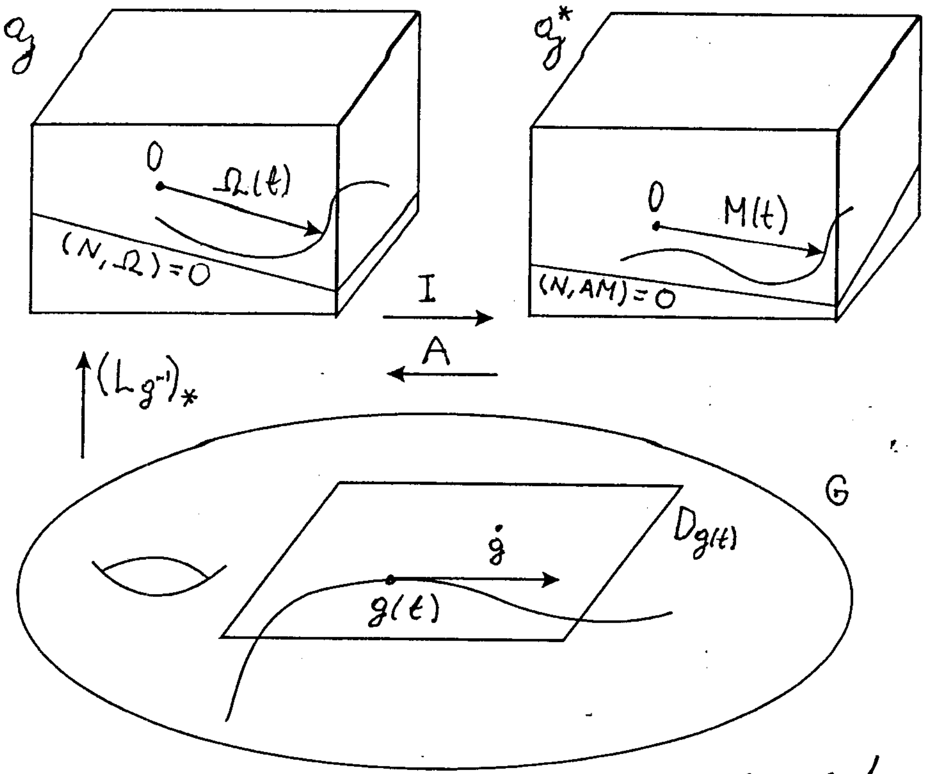
Једначине кретања изведене из Даламбер-Лагранжовог принципа се редукују на $\mathcal{G}^*$, или прецизније на простору $(N, AM) = 0 \subset \mathcal{G}^*$:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\dot{M} = ad^*_{dH} M + \lambda N, \\ &(N, \Omega) = (N, AM) = 0. \end{aligned}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Из услова да кретање задовољава нехолономну везу добијамо Лагранжов множилац:

$$\lambda = -\frac{(N, A(ad^*_{AM}M))}{(N, AN)} = \frac{(M, [AN, AM])}{(N, AN)}. \tag{3}$$



слика 1

Нека је $(e_1, ..., e_n)$ база Лијеве алгебре $\mathcal{G}$ са структурним константама $[e_i, e_j] = \sum_k C^k_{ij} e_k$, и нека је $(e^1, ..., e^n)$ дуална база од $\mathcal{G}^*$. Такође, нека су Ω^j, M_i координате од Ω и M у односу на дате базе, и нека је $A^{ij} = (e^i, Ae_j)$. Са таквим ознакама, координатно једначине (2) добијају облик:

$$\begin{aligned} \dot{M}_k = \{M_k, H\} + \lambda N_k &= \sum_{i,j,l} C^l_{ik} M_l A^{ij} M_j + \lambda N_k, \\ \sum_{i,j} N_i A^{ij} M_j &= 0, \end{aligned} \tag{2'}$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

где је заграда Ли-Пуасона на $\mathcal{G}^*$ задата са

$$\{F, G\} = \sum_{i,j,l} -C_{ij}^l M_l \partial_i F \partial_j G, \qquad F, G \in C^\infty(\mathcal{G}^*).$$

Када је $\mathcal{G} = so(3)$, после идентификације алгебре $so(3)$ са Еуклидским простором, једначине (2) постају једначине Сусловљевог задатка. Зато се једначине (2) називају и *Ојлер-Поанкаре-Сусловљеве* (EPS) једначине.

Напомена 4.1. Притемимо да су EPS једначине интеграбилне на свим тродимензионим Лијевим алгебрама. Трајекторије система леже на пресецима равни $(N, AM) = 0$ и квадрике $\frac{1}{2}(M, AM) = h$.

Напомена 4.2 Како је Лагранжијан једнак кинетичкој енергији, тракекторије система су геодезијске линије нехолономне конексије (глава 1, (22)). Даламбер-Лагранжов принцип се може написати у облику

$$\pi(\nabla_{\dot{g}} \dot{g}) = 0, \qquad \dot{g} \in D_g$$

где је π ортогонална пројекција $\pi : T_g G \to D_g$ и ∇ Леви-Чивита повезаност метрике $\langle .,. \rangle$.

4.3. Услови постојања инваријантне мере

За разлику од нехолономних LR система, EPS једначине не поседују у општем случају инваријантну меру. Козлов је дао неопходне и довољне услове постојања инваријантне мере за случај компактних група [16]. Нама ће бити потребан сличан резултат и за некомпактне групе.

Лема 4.1. *[16] Систем диференцијалних једначина:*

$$\dot{x}_i = f_i(x), \qquad i = 1, \dots, n$$

код којег су функције f_i хомогени полиноми истог степена има глатку инваријантну меру ако и само ако очувава стандардну меру у R^n.

Теорема 4.1. *Ојлер-Поенкаре-Сусловљеве једначине (2) имају инваријантну меру ако и само ако је испуњен услов:*

$$K\, ad^*_{AN} N + T = \mu N, \quad \mu \in R, \tag{4}$$

где је $K = 1/(N, AN)$, $T \in \mathcal{G}^*$, $(T, \xi) = Tr(ad_\xi)$, $\xi \in \mathcal{G}$, *или координатно:*

$$K \sum_{i,g,k} C^k_{ij} A^{ig} N_g N_k + \sum_k C^k_{jk} = \mu N_j, \quad \mu \in R. \tag{4'}$$

Доказ. По леми 4.1 систем (2) има инваријантну меру само ако очувава стандардну меру. По Луивиловој теореми [37], фазни ток чува стандардну меру ако и само ако је

$$\mathrm{div}(\dot{M}) = 0$$

Из (3) имамо да је

$$\lambda = -K \sum_{i,j,l,g,f} C^i_{jg} M_i A^{fj} M_f A^{lg} N_l \tag{3'}$$

где је $K = 1/(N, AN)$. Тако је

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\dot{M}) = \sum_k \frac{\partial (ad^*_{AM} M)_k}{\partial M_k} + \frac{\partial \lambda}{\partial M_k} N_k = C^k_{ik} A^{ij} M_j + C^l_{ik} M_l A^{ik} - \\ - K C^k_{jg} A^{fj} M_f A^{lg} N_l N_k - K C^i_{jg} M_i A^{kj} A^{lg} N_l N_k \end{aligned} \tag{5}$$

Како је $C^l_{ik} M_l$ антисиметричан а A^{ik} симетричан тензор по индексима i, k друга сума у изразу (5) је једнака нули. Слично, како је $C^i_{jg} M_i$ антисиметричан а $A^{kj} A^{lg} N_l N_k$ симетричан тензор по индексима j, g и четврта сума у (5) је једнака нули. Тако смо показали да дивергенција EPS једначина, износи:

$$\mathrm{div}(\dot{M}) = \sum (C^k_{ik} - K C^k_{ig} A^{lg} N_l N_k) \Omega^i,$$

што је због везе (1) једнако нули ако и само ако важи (4'). Тиме је теорема доказана.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Напомена 4.3 Ако је група G унимодуларна тада је $T_i = C^k_{ik} = 0$, па се услов (4) своди на $ad^*_{AN}N = \mu N$. У случају компактних група помоћу Килингове форме се може извршити идентификација $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$ при којој услов (4) постаје

$$[N, AN] = \mu N.$$

Тада је довољан услов постојања инваријантне мере да вектор N буде сопствени вектор оператора A (односно I).

Пример 4.1 Као илустрацију теореме даћемо пример непостојања инваријантне мере код EPS једначина када је $\mathcal{G} = sl(2, R)$. Нека је

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

уобичајена база од $sl(2, R)$. Структурне константе дате базе су:

$$[e_1, e_2] = -e_3, \quad [e_1, e_3] = 2e_1, \quad [e_2, e_3] = -2e_2.$$

Једначине кретања имају облик:

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= M_3\Omega^2 - 2M_1\Omega^3 + \lambda N_1, \\ \dot{M}_2 &= 2M_2\Omega^3 - M_3\Omega^1 + \lambda N_2, \\ \dot{M}_3 &= 2M_1\Omega^1 - 2M_2\Omega^2 + \lambda N_3, \\ N_1\Omega^1 &+ N_2\Omega^2 + N_1\Omega^1 = 0, \quad \Omega^i = A^{ij}M_j. \end{aligned} \tag{6}$$

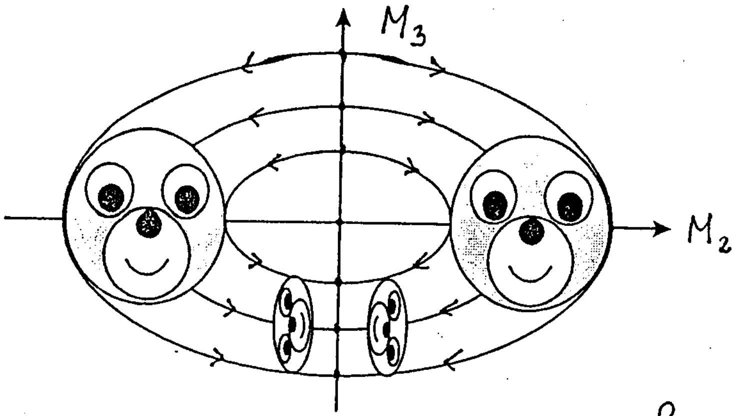
Да би систем (6) имао инваријантну меру мора бити испуњен услов:

$$\begin{aligned} N_3A^{2j}N_j - 2N_1A^{3j}N_j &= \mu N_1, \\ N_3A^{1j}N_j - 2N_2A^{3j}N_j &= \mu N_2, \\ 2N_1A^{1j}N_j - 2N_2A^{2j}N_j &= \mu N_3. \end{aligned}$$

Нека је на пример $N = e_1$ и нека је метрика задата са $A = diag(a, b, c)$. Тада је веза $\Omega^1 = aM_1 = 0$ и једначине (6) постају:

$$\begin{aligned} \dot{M}_2 &= 2cM_2M_3, \\ \dot{M}_3 &= -2bM_2^2. \end{aligned} \tag{6'}$$

Систем (6') има бесконачно много равнотежних положаја који се описују правом $M_2 = 0$. Све остале трајекторије $M(t)$ су асимптотске и леже на елипсама $bM_2^2 + cM_3^2 = h$. При томе $\lim_{t\to-\infty} M(t) = M_{-\infty}$ лежи у области $M_3 \geq 0$ и $\lim_{t\to\infty} M(t) = M_\infty$ лежи у области $M_3 \leq 0$ (слика 2).



слика 2

Ако је $\Psi_t : R^2\{M_2, M_3\}$ једнопараметарска група трансформација система (6') тада је јасно да за сваки мерљиви скуп $D \subset R^2$ и глатку функцију $f(M_2, M_3)$ важи: $\lim_{t\to\pm\infty} \int_{\Psi_t(D)} f(M_2, M_3) dM_1 \wedge dM_2 = 0$. Дакле систем (6') нема глатке инваријантне мере.

4.4 Интеграбилни пример на групи $SO(4)$

Уколико EPS једначине (2) имају интегралну инваријанту и $n-3$ интеграла кретања, по Јакобијевој теореми оне су комплетно интеграбилне. Како је претпостављена веза хомогена, Хамилтонова функција је увек интеграл кретања. Дакле код шестодимензионих алгебри, за интеграбилност EPS једначина са инваријантном мером потребна су нам два допунска интеграла.

Слично као и код LR система, инваријанте ко-придруженог дејства нам могу послужити за конструкцију неких првих интеграла. Подсетимо се да је једна карактеризација инваријанти то да су у инволуцији у односу на заграду Ли-Пуасона са свим функцијама на $\mathcal{G}^*$.

Следћа лема је модификација добро познатог инволутивног услова за интеграле Хамилтонових система.

Лема 4.2. *Ако функција F задовољава услов*

$$\{F, H\} + \lambda dF(N)|_{(N,AM)=0} = 0$$

(λ је одређено формулом (3)) тада је F интеграл кретања једначина (2). Специјално, све инваријанте I ко-придруженог дејства на $\mathcal{G}^*$ које задовољавају услов

$$dI(N)|_{(N,AM)=0} = 0$$

су интеграли EPS једначина.

Лепа илустрација понашања интеграбилог нехолономног система је следећи пример на $SO(4)$.

Пример 4.2. Матрице $f_i \wedge f_j$ ($f_1 = (1,0,0,0), \dots, f_4 = (0,0,0,1)$) чине базу алгебре $so(4)$. Нека је

$$e_1 = -f_2 \wedge f_3, \qquad e_2 = f_1 \wedge f_3, \qquad e_3 = -f_1 \wedge f_2,$$
$$e_4 = -f_1 \wedge f_4, \qquad e_5 = -f_2 \wedge f_4, \qquad e_6 = -f_3 \wedge f_4.$$

Тада матрица $\Omega \in so(4)$ има следећи облик:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{6} \Omega^i e_i = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega^3 & \Omega^2 & -\Omega^4 \\ \Omega^3 & 0 & -\Omega^1 & -\Omega^5 \\ \Omega^2 & \Omega^1 & 0 & -\Omega^6 \\ \Omega^4 & \Omega^5 & \Omega^6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Структурне константе у односу на базу $(e_1, \dots, e_6)$ су:

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k,$$
$$[e_{i+3}, e_{j+3}] = \epsilon_{ijk} e_k,$$
$$[e_i, e_{j+3}] = \epsilon_{ijk} e_{k+3},$$
$$1 \leq i, j, k \leq 3,$$

Имамо две функционално независне инваријанте на $so(4)^*$. У наведеној бази то су:

$$I_1 = \sum_{k=1}^{6} M_k^2, \qquad I_2 = \sum_{k=1}^{3} M_k M_{k+3}.$$

За дијагоналну метрику Хамилтонијан је

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} A^i M_i^2$$

и уколико дефинишемо $A_{ij} = A^i - A^j$, једначине (2') на $so(4)^*$ постају:

$$\begin{aligned}
\dot{M}_1 &= M_2 M_3 A_{32} + M_5 M_6 A_{65} + \lambda N_1,\\
\dot{M}_2 &= M_3 M_1 A_{13} + M_6 M_4 A_{46} + \lambda N_2,\\
\dot{M}_3 &= M_1 M_2 A_{21} + M_4 M_5 A_{54} + \lambda N_3,\\
\dot{M}_4 &= M_5 M_3 A_{35} + M_2 M_6 A_{62} + \lambda N_4,\\
\dot{M}_5 &= M_3 M_4 A_{43} + M_6 M_1 A_{16} + \lambda N_5,\\
\dot{M}_6 &= M_4 M_2 A_{24} + M_1 M_5 A_{51} + \lambda N_6,\\
&\sum_{k=1}^{6} A^k N_k M_k = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Основни интеграбилни пример је када је N сопствени вектор оператора A. Тада једначине (7) чувају стандардну меру у $(N, \Omega) = 0 \subset so(4)^*$. Без губљења општости, претпоставимо да је $N = e^6$. Тада је веза задата условом $M_6 = 0$. Инваријанта I_1 задовољава услове леме 4.2 па је она интеграл кретања. Поред ње ту су и два нова интеграла кретања:

$$\begin{aligned}
F_2 &= A_{13} M_1^2 - A_{32} M_2^2,\\
F_3 &= A_{43} M_4^2 - A_{35} M_5^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

Дакле EPS једначине у овом случају су потпуно интеграбилне. Може се показати да је Хамилтонова функција линеарна комбинација интеграла I_1, F_2, F_3.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Ради једноставности, претпоставимо да је испуњено:

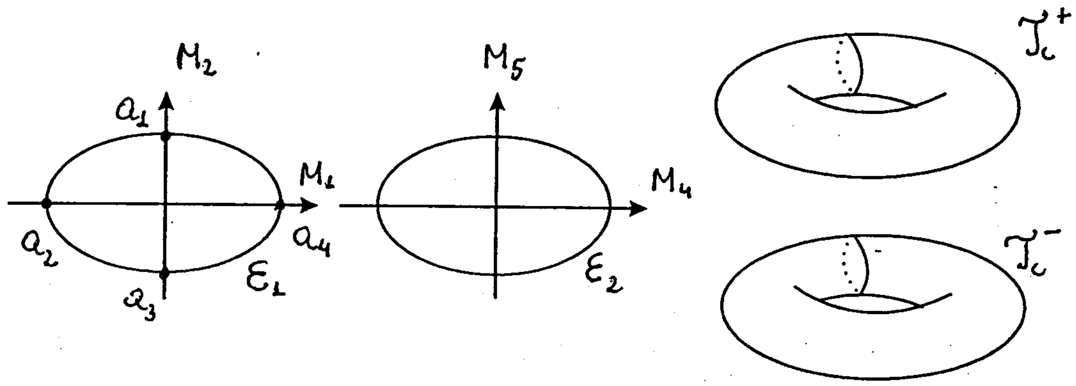
$$A_{13},\ A_{23},\ A_{43},\ A_{53} > 0.$$

Тада се једначинама $F_2 = c_2$ и $F_3 = c_3$ задају две елипсе $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ у равнима $R^2\{M_1, M_2\}$ и $R^2\{M_4, M_5\}$. За сваки пар тачака са тих елипси једначина $I_1 = c_1$ нам даје две вредности за M_3 (сем када је $M_3 = 0$).

Уведимо координате u и v на следећи начин:

$$(9)\qquad \begin{aligned} u &= A_{13}M_1^2 + A_{32}M_2^2, \quad -c_2 \le u \le c_2, \\ v &= A_{43}M_4^2 + A_{35}M_5^2, \quad -c_3 \le v \le c_3. \end{aligned}$$

Тачкама $(\pm M_1, \pm M_2)$ и $(\mp M_1, \pm M_2)$ елипсе $\mathcal{E}_1$ одговара једна вредност координате u (слично важи и за елипсу $\mathcal{E}_2$ и координату v). Значи да при овој трансформацији обиласку елипсе $\mathcal{E}_1$: $a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_4 \to a_1$, у координати u одговара пут: $a_1' \to a_2' \to a_1' \to a_2' \to a_1'$, слика 4а.



слика 3

На инваријантној многострукости

$$\mathcal{T}_c = \{M \in so(4)^* | I_1 = c_1,\ F_2 = c_2,\ F_3 = c_3\},$$

променљиве M_i се изражавају преко u и v на следећи начин:

$$M_1^2 = \frac{u + c_2}{2A_{13}}, \quad M_2^2 = \frac{u - c_2}{2A_{32}},$$
$$M_4^2 = \frac{v + c_3}{2A_{43}}, \quad M_5^2 = \frac{v - c_3}{2A_{35}},$$

$$M_3^2 = c_1 - (\frac{u+c_2}{2A_{13}} + \frac{u-c_2}{2A_{32}} + \frac{v+c_3}{2A_{43}} + \frac{v-c_3}{2A_{35}}).$$

Дакле, када је c_1 довољно велико $\mathcal{T}_c$ је дифеоморфна унији дводимензионалних торуса $\mathcal{T}_c^+$ $(M_3 > 0)$ и $\mathcal{T}_c^-$ $(M_3 < 0)$, слика 3.

Нађимо $\dot{u}$ као функцију променљивих u и v:

$$\begin{aligned}\dot{u} =& 2A_{13}M_1\dot{M}_1 + 2A_{32}M_2\dot{M}_2 = 2A_{13}M_1M_2M_3A_{32}+ \\ &+ 2A_{32}M_2M_3M_1A_{13} = 2A_{13}A_{32}M_1M_2M_3.\end{aligned}$$

Приметимо да важи:

$$\begin{aligned}c_2^2 - u_2^2 =& (A_{13}^2M_1^4 + A_{23}^2M_2^4 + 2A_{13}A_{23}M_1^2M_2^2) - \\ &- (A_{13}^2M_1^4 + A_{23}^2M_2^4 - 2A_{13}A_{23}M_1^2M_2^2) = 4A_{13}A_{23}M_1^2M_2^2.\end{aligned}$$

На сличан начин одређујемо и $\dot{v}$. Дакле, у променљивама u и v једначине (7) на $\mathcal{T}_c$ имају облик:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \pm\sqrt{A_{13}A_{23}}\sqrt{c_2^2 - u^2}M_3(u,v), \\ \dot{v} &= \pm\sqrt{A_{43}A_{53}}\sqrt{c_3^2 - v^2}M_3(u,v),\end{aligned} \tag{10}$$

Уведимо угловне координате φ_1, φ_2 mod(2π) формулама

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \int_{-c_2}^{u} \frac{dz}{\pm\sqrt{c_2^2 - z^2}}, \\ \varphi_2 &= \int_{-c_3}^{v} \frac{dz}{\pm\sqrt{c_3^2 - z^2}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Знак (позитиван или негативан) у интегралима зависи од тога да ли u, односно v, расте или опада (слика 4а).

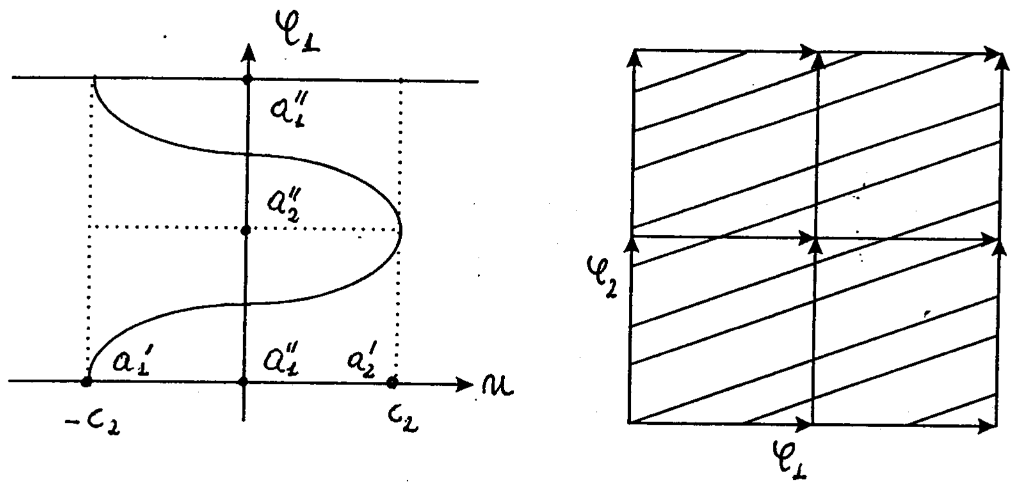
У координатама φ_1 и φ_2 координатна трансформација се "размота" једанпут, односно сада тачкама (M_1, M_2), $(-M_1, -M_2)$ одговара иста координата φ_1 (слично важи и за $\mathcal{E}_2$ и φ_2). Наведеном обиласку елипсе $\mathcal{E}_1$ одговара пут: $a"_1 \to a"_2 \to a"_1 \to a"_2 \to a"_1$, слика 4а. Инваријантне торусе $\mathcal{T}_c^\pm$ добијамо лепљењем четири торуса $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, слика 4б.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

У угловним координатама φ_1, φ_2 кретање на торусу је описано једначинама:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\omega_1}{\Phi(\varphi_1, \varphi_2)}, \tag{12}$$
$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\omega_2}{\Phi(\varphi_1, \varphi_2)},$$

где је $\omega_1 = 2\sqrt{A_{13}A_{23}}$, $\quad \omega_2 = 2\sqrt{A_{43}A_{53}}$, $\qquad \Phi(\varphi_1, \varphi_2) = M_3^{-1}(\varphi_1, \varphi_2)$.



(а) слика 4 (б)

Једначине (12) имају облик из теореме Колмогорова о динамичким системима на торусу са инваријантном мером [18]. Интересантна је чиненица да ако су трајекторије затворене на једном торусу $\mathcal{T}_c^{\pm}$ да су тада оне затворене на свим торусима, и то се дешава када је $\sqrt{A_{13}A_{23}/A_{43}A_{53}}$ рационалан број.

4.5 Интеграбилност Ојлер-Поенкаре-Сусловљевих једначина на шестодимензионим унимодуларним алгебрама

У овом параграфу ћемо модификовати приступ из претходног, да би добили интеграбилност у знатно општијој ситуацији. Размотрићемо

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

две класе $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ унимодуларних Лијевих алгебри $\mathcal{G}$, у којима постоје базе $e_i^{\pm}$ и $f_i^{\pm}$, $i = 1,2,3$ са структурним константама [1]:

$$(13) \qquad \text{класа } \mathcal{A}: \qquad \begin{aligned} [e_i^+, e_j^+] &= n_k \epsilon_{ijk} e_k^+, \\ [e_i^-, e_j^-] &= q n_k \epsilon_{ijk} e_k^+, \\ [e_i^+, e_j^-] &= n_k \epsilon_{ijk} e_k^- \end{aligned}$$

$$(14) \qquad \text{класа } \mathcal{B}: \qquad \begin{aligned} [f_i^+, f_j^+] &= n_k \epsilon_{ijk} f_k^+, \\ [f_i^-, f_j^-] &= m_k \epsilon_{ijk} f_k^-, \\ [f_i^+, f_j^-] &= 0, \end{aligned}$$

где су n_k, m_k и q (структурне) константе.

У класи $\mathcal{A}$ су Лијеве алгебре:

$$\begin{array}{ll} so(4) & n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ q = 1, \\ so(3.1) & n_1 = n_2 = 1,\ n_3 = -1,\ q = -1, \\ so(2.2) & n_1 = n_2 = 1,\ n_3 = -1,\ q = 1, \\ e(3) & n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ q = 0, \\ l(3) & n_1 = n_2 = 1,\ n_3 = -1,\ q = 0, \end{array}$$

и друге. Лијеве алгебре $so(n,m)$ су алгебре група "ротација" у простору R^{n+m} са метриком сигнатуре (m,n). $e(3)$ и $l(3)$ су алгебре група $E(3)$ и $L(3)$, група кретања у тродимензионалном Еуклидком и псудо-Еуклидском простору [44].

У класи $\mathcal{B}$ су Лијеве алгебре:

$$\begin{array}{ll} so(4) = so(3) \oplus so(3) & n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ m_1 = m_2 = m_3 = 1, \\ sl(2,R) \oplus sl(2,R) & n_1 = n_2 = m_1 = m_2 = 1,\ n_3 = m_3 = -1, \end{array}$$

и друге. Базе $e_i^{\pm}$ и $f_i^{\pm}$, алгебре $so(4)$ су повезане пресликавањем:

$$f_i^{\pm} = \frac{1}{2}(e_i^+ \pm e_i^-).$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Посматране класе алгебри имају по две, функционално независне, квадратне инваријанте ко-придруженог дејства. Нека су $e^i_{\pm}$ и $f^i_{\pm}$ дуалне базе на $\mathcal{G}^*$, и нека су $M^{\pm}_i$, $i = 1,2,3$ координате од $M \in \mathcal{G}^*$ у односу на дате базе. Тада су инваријанте на $\mathcal{G}^*$:

$$
\begin{aligned}
&\text{класа } \mathcal{A}: && I_1 = \sum_{k=1}^{3}\left(qn_k(M_k^+)^2 + n_k(M_k^-)^2\right),\\
& && I_2 = \sum_{k=1}^{3} n_k M_k^+ M_k^-,\\
(15)\quad &\text{класа } \mathcal{B}: && I_1 = \sum_{k=1}^{3} n_k (M_k^+)^2,\\
& && I_2 = \sum_{k=1}^{3} m_k (M_k^-)^2.
\end{aligned}
$$

Да би поједноставили писање, уведимо следеће ознаке. Нека је:

$$
\begin{aligned}
M^+ &= (M_1^+, M_2^+, M_3^+),\\
M^- &= (M_1^-, M_2^-, M_3^-),\\
(X,Y) &= X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3.
\end{aligned}
$$

Произвољну метрику можемо задати Хамилтоновом функцијом:

$$
(16)\qquad H = \frac{1}{2}(B_+M^+, M^+) + (CM^+, M^-) + \frac{1}{2}(B_-M^-, M^-),
$$

где су B_+ и B_- симетрични оператори, а C произвољан оператор у R^3. Нека је

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
\Omega_+ &= \frac{\partial H}{\partial M^+} = B_+M^+ + CM^-,\\
\Omega_- &= \frac{\partial H}{\partial M^-} = B_-M^- + CM^+.
\end{aligned}
$$

Тада се нехолономна веза (1) може написати у облику:

$$
(18)\qquad (N^+, \Omega_+) + (N^-, \Omega_-) = 0,
$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

а једначине (2) на $\mathcal{G}^*$ на следећи начин [1]:

$$\text{(19)} \qquad \text{класа } \mathcal{A}: \begin{array}{l} \dot{M}^+ = \bar{M}^+ \times \Omega_+ + \bar{M}^- \times \Omega_- + \lambda N^+, \\ \dot{M}^- = \bar{M}^- \times \Omega_+ + q\bar{M}^+ \times \Omega_- + \lambda N^-, \\ \bar{M}_k^+ = n_k M_k^+, \quad \bar{M}_k^- = n_k M_k^-, \quad k = 1,2,3, \end{array}$$

$$\text{(20)} \qquad \text{класа } \mathcal{B}: \begin{array}{l} \dot{M}^+ = \bar{M}^+ \times \Omega_+ + \lambda N^+, \\ \dot{M}^- = \bar{M}^- \times \Omega_- + \lambda N^-, \\ \bar{M}_k^+ = n_k M_k^+, \quad \bar{M}_k^- = m_k M_k^-, \quad k = 1,2,3, \end{array}$$

$\times$ је уобичајени векторски производ простора R^3, Лагранжов множилац је одређен из везе (18). Једначине (7) одговарају једначинама (18), (19) када су B_+, B_- дијагоналне матрице и када је $C = 0$.

Лема 4.3. *Нека су матрице B_+, B_- и C дијагоналне, и нека је $N^+ = \sigma_+ e_+^k$, $N^- = \sigma_- e_-^k$, $\sigma_\pm \in R$, $\sigma_+^2 + \sigma_-^2 > 0$ у случају када $\mathcal{G} \in \mathcal{A}$ (или $N^+ = \sigma_+ f_+^k$, $N^- = \sigma_- f_-^k$ у случају када $\mathcal{G} \in \mathcal{B}$), тада EPS једначине (18), (19), односно (20), имају инваријантну меру.*

Доказ. Посматране алгебре су унимодуларне тако да је $T_i = C_{ik}^k = 0$. Може се показати да је под условима леме, услов (4) теореме 4.1 испуњен, при чему је $\mu = 0$

Надаље ћемо претпоставити да су испуњени услови леме 4.3. Тада веза има облик:

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} &(N^+, \Omega_+) + (N^-, \Omega_-) = \\ &\qquad = M_k^+(\sigma_+ B_+^k + \sigma_- C^k) + M_k^-(\sigma_+ C^k + \sigma_- B_-^k) = 0. \end{aligned}$$

Мера се може очувати и за друге векторе N, али са допунским условима на елементе матрица $B_\pm$ и C.

Показаћемо да су у овом случају *EPS* једначине интеграбилне. Код холономног проблема, када немамо везу, једначине (19) и (20) у шестодимензионом фазном простору увек имају три интеграла кретања: две инваријанте и Хамилтонову функцију. За интеграбилност је

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

потребан још један интеграл. Детаљно испитивање постојања четвртог интеграла се може наћи у [1].

Код нехолономног проблема, у шестодимензионом фазном простору увек имамо два интеграла кретања: нехолономну везу и Хамилтонијан. Инваријанте (15) више нису (у општем случају) интеграли кретања. Ипак можемо комбиновати две инваријанте док не задовољимо услове леме 4.2. Тада нам остаје, као и код холономног случаја, непознат још један интеграл кретања.

Теорема 4.2. *Ојлер-Поекаре-Сусловљеве једначине (19) (односно (20)) са Хамилтонијаном (16), где су B_+, B_-, C дијагоналне матрице, и нехолономном везом (21) могу се решити у квадратурама.*

Доказ. Без губљења општости, можемо претпоставити да је $N^\pm = \sigma_\pm e^1_\pm$ ($N^\pm = \sigma_\pm f^1_\pm$). Као прво, нека $\mathcal{G} \in \mathcal{A}$. Тада је испуњено:

$$\begin{aligned} dI_1(N) &= 2qn_1\sigma_+M_1^+ + 2n_1\sigma_-M_1^-, \\ dI_2(N) &= n_1\sigma_-M_1^+ + n_1\sigma_+M_1^-. \end{aligned} \tag{22}$$

Ако је $\sigma_- = q = 0$, тада по леми 4.2, I_1 је први интеграл једначина (19). У супротном, из (21), (22) и леме 4.2 интеграл је инваријанта:

$$\begin{aligned} I = (2q\sigma_+^2 - 2\sigma_-^2)(\sigma_+B_+^1 + \sigma_-C^1)(2\sigma_-I_2 - \sigma_+I_1) + \\ + (2\sigma_-^2 - 2q\sigma_+^2)(\sigma_+C^1 + \sigma_-B_-^1)(2q\sigma_+I_2 - \sigma_-I_1). \end{aligned} \tag{23}$$

Слично, када $\mathcal{G} \in \mathcal{B}$, може се показати да инваријанта:

$$I = m_1(\sigma_-\sigma_+B_+^1 + \sigma_-^2C^1)I_1 + n_1(\sigma_+\sigma_-B_-^1 + \sigma_+^2C^1)I_2, \tag{24}$$

задовољава услов $dI(N) = 0$ при вези (21), па је она интеграл једначина (20).

Дакле, питање интеграбилности једначина (19), (20) је сведено на тражење још једног интеграла, функционално независног од Хамилтонове функције (16), инваријанте (23) за $\mathcal{G} \in A$, односно (24) за $\mathcal{G} \in B$, при условима везе (21).

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Допунски интеграл ћемо тражити у полиномијалној форми:

$$
\begin{aligned}
F_3 =& x_+(M_2^+)^2 + y_+(M_3^+)^2 + 2fM_2^+M_2^- \\
&+ 2gM_3^+M_3^- + x_-(M_2^-)^2 + y_-(M_3^-)^2.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Користећи везу, променљиву M_1^+ можемо изразити као функцију од M_1^-. Тада једначине за $M_2^\pm$ и $M_3^\pm$ добијају облик:

$$
\begin{aligned}
\dot{M}_2^+ &= M_3^+M_1^-L_1^+ + M_3^-M_1^-E_1^+, \\
\dot{M}_3^+ &= M_2^+M_1^-L_2^+ + M_2^-M_1^-E_2^+, \\
\dot{M}_2^- &= M_3^-M_1^-L_1^- + M_3^+M_1^-E_1^-, \\
\dot{M}_3^- &= M_2^-M_1^-L_2^- + M_2^+M_1^-E_2^-.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Коефицијенти $L_1^\pm$,$L_2^\pm$, $E_1^\pm$, $E_2^\pm$ су одређени из (19) и (20). Из (26) добијамо да је услов:

$$
\frac{d}{dt}F_3 = 0
$$

еквивалентан следећем систему линеарних једначина по променљивама $x_\pm$, $y_\pm$, f, g:

$$
\begin{aligned}
x_+L_1^+ + y_+L_2^+ + fE_1^- + gE_2^- &= 0, \\
x_+E_1^+ + y_-E_2^- + fL_1^- + gL_2^+ &= 0, \\
x_-L_1^- + y_-L_2^- + fE_1^+ + gE_2^+ &= 0, \\
x_-E_1^- + y_+E_2^+ + fL_1^+ + gL_2^- &= 0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Систем (27) увек има решење, и за опште вредности параметара f и g, интеграл F_3 је независан од других интеграла при условима везе (21).

Тиме је теорема доказана.

Користећи физички смисао EPS једначина, можемо видети да су специјални случајеви теореме 4.2 интеграбилне пертурбације класичног Сусловљевог задатка.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Пример 4.3. Посматрајмо једначине (19) на $e(3)^*$. Нека је $C = 0$ и $N^- = 0$. Уведимо ознаке:

$$\vec{\Gamma} = M^-, \quad \vec{\Omega} = \Omega_+, \quad \vec{N} = N^+,$$
$$A = I^{-1} = B_+, \quad \vec{M} = I\vec{\Omega} = M^+, \quad B = B_-.$$

Тада једначине (19) постају:

$$I\dot{\vec{\Omega}} = I\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} + \vec{\Gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\Gamma}} + \lambda \vec{N},$$
$$\dot{\vec{\Gamma}} = \vec{\Gamma} \times \vec{\Omega},$$
$$\langle \vec{N}, \vec{\Omega} \rangle = 0,$$

где је $V = \frac{1}{2}(B\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma})$. То је Сусловљев задатак, са дејством допунског потенцијалног поља сила потенцијала $V(\vec{\Gamma})$ ($\vec{\Gamma}$ је фиксиран вектор у непокретном координатном систему). Из теореме 4.2 добијамо добро познату чиненицу: ако је $\vec{N}$ сопствени вектор оператора I, да је тада Сусловљев проблем са квадратним потенцијалон интеграбилан [15], [38], глава 2.

Пример 4.4. Једначине (20) на $so(4)^*$ описују ротацију крутог тела, са елипсидном шупљином испуњеном идеалним нестишљивим флуидом, око непокретне тачке. Тај проблем, без нехолономне везе, проучаван је од стране Жуковског, Поенкареа и Стеклова почетком двадесетог века (погледати референце у [1]).

Укупна количина кретања и вртложни вектор флуида су M^+ и M^- редом. За $N^- = 0$ круто тело је подвргнуто истој вези као и код Сусловљевог задатака: $(N^+, \Omega_+) = 0$, где је N^+ константан вектор у покретном координатном систему а Ω_+ је угаона брзина крутога тела. За Хамилтонову функцију треба узети:

$$H = \frac{1}{2}(G^{-1}M^+, M^+) + (2d(CDG)^{-1}M^+, M^-) +$$
$$+ \frac{1}{2}((\frac{m}{5}C^{-1} + 4d^2C^{-2}D^{-2}G^{-1})M^-, M^-),$$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

где је:

$I = diag(I_1, I_2, I_3)$ оператор инерције крутог тела,

$D = diag(D_1, D_2, D_3)$ је оператор који пресликава јединичну сферу у елипсоид који представља шуплину у крутом телу, $d = detD$,

m је маса флуида,

$C = Tr(D^2)E - D^2$, E је јединична матрица и

$G = I + \frac{m}{5}C^{-1}(C^2 - 4d^2D^{-2})$

(за детаље погледати [1]).

Напомена 4.4. Геодезијски токови, без нехолономних веза, лево-инваријантних метрика на групи $SO(4)$ су веома добро проучени. Неопходни услови на коефицијенте метричког тензора (тј. на облик Хамилтонијана (16)) да би једачине (19), односно (20), биле интеграбилне могу се наћи у радовима [1], [19], [35], односно [1], [5].

Напомена 4.5. У раду [45] је дата детаљна анализа EPS једначина на $SO(n)$ са $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ нехолономних веза. Ту је дато уопштење Сусловљевог проблема, аналогно уопштењу проблема Веселова-Веселове у истом раду, а које смо већ навели у глави 3 у виду једначина (34).

Напомена 4.6. Једна од основних последица симетрије нехолономних геодезијских токова на G са лево-инваријантном везом је, је редукција једначина кретања на EPS једначине на $\mathcal{G}^*$. То је део опште редукције нехолономних Лагранжевиха система $(Q, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ проучаване у раду [39]. Тамо је доказано да ако је Q главно раслојење: $Q \to Q/G$, са Лагранжијаном $\mathcal{L}$ и дистрибуцијом $\mathcal{D}$ инваријантним под дејством групе G, да се тада једначине кретања могу посматрати на редукованом простору D/G. Једначине написане у случају основне претпоставке (*general principal case*): $span\{D_x, T_xOrb_G(x)\} = T_xQ$ за све $x \in Q$; узимајући за $(Q, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ нехолономни LL систем код кога је Лагранжијан $\mathcal{L}$ кинетичка енергија, се поклапају са EPS једначинама.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Список литературе

[1] Богоявленский О.И., *Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики*, Изв. Акад. Наук СССР, сер. Мат, **48**, No. 5, 883-938, (1984).

[2] Богоявленский О.И., *Интегрируемые случаи динамикии твердого тела и интегрируемые системы на сферах S^n*, Изв. Акад. Наук СССР, сер. Матх, **49**, No. 5, 899-915, (1985).

[3] Вагнер В. В., *Дифференциальная геометрия неголономных многобразий*, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, в. II-III, 269-315 (1935).

[4] Вагнер В. В., *Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем*, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, в. V, 301-327 (1941).

[5] Веселов А.П., *Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $SO(4)$*, Докл. Акад. Наук. СССР. **270**, No. 5, 1094-1097 (1983).

[6] Веселов А. П., *Геодезические потоки на групах Ли с неголономной связью*, УМН. **40**, No. 5, (1985).

[7] Веселов А.П., Веселова, Л.Е., *Потоки на группах Ли с неголономной сваязью и интегрирумые негамильтоновы системы*, Функц. Анал. Прилож. **20**, No.4, 65-66, (1986).

[8] Веселов А.П., Веселова Л.Е., *Интегрируемые неголономные системы на группах Ли*, Мат. Заметки, **44**, No.5, 604-619, (1988).

[9] Гајић Б., *Геометрија нехолономних система и Вагнеров тензор*, Магистарска теза, Математички факултет, Београд (1997).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

[10] Голубев, В. В., *Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки*, Гостехиздат, Москва, (1953).

[11] Горбатенко Е. М., *Дифференциальная геометрия неголономных многобразий (по В. В. Вагнеру)*, Геом. сб. Томск. у-та, 31-43, (1985).

[12] Драговић В., *Об интегрируемых потентиалах билиарда внутри еллипса*, Прикл. Мат. Мех. **62**, (1998).

[13] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевскии Л. Л., *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Под общей ред. С. П. Новикова, Наука, Москва, (1980).

[14] Козлов В. В., *Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике*, Усп. Мат. Наук **38**, No. 1, 3-67 (1983).

[15] Козлов В.В., *К теории интегрирования уравнений неголономной механики*, Успехи Механики, **8**, No.3, 85-106, (1985).

[16] Козлов, В.В., *Об инвариантиых мерах уравнений Эйлера-Пуенкаре на алгебрах Ли*, Функц. Анал. Прилож. **22**, No.1, 69-70, (1988).

[17] Козлов В. В., *Некоторые интегрируемые обощениы задачи Якоби о геодезических на еллипсоиде*, Прикл. Мат. Мех., **59**, No. 1, 3-9, (1995).

[18] Колмогоров А.Н., *О динамических системах с интегральным инвариантом на торе*, Докл. Акад. Наук СССР, **93**, No. 5, 763-766 (1953).

[19] Манаков, С.В., *Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики $n-$мерного твердого тела*, Функц. Анал. Прилож. **10** No.4, 93-94, (1976).

[20] Мощук Н. К., *О приведении уравнений движения некоторых неголономных систем Чаплыгина к форме уравнений Лагранжа и Гамильтона*, Прикл. Мат. Мех. **51**, No. 2, (1987).

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

[21] Неймарк, Ю.И., Фуфаев, Н.А., *Динамика неголономных систем*, Москва, Наука. (1967).

[22] Новиков С. П., Шмельцер И., *Периодические решения уравнения Кирхгофа свободнога движения твердого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника-Шнирельмана-Морса 1*, Функц. Анал. Прилож. **15**, No. 3, 54-66, (1981).

[23] Переломов А.М., *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Наука, Москва, (1990).

[24] Суслов Г.К., *Теоретическая механика*, Гостехиздат, Москва, (1946).

[25] Субматов А. С., *О линейных интегралах уравнений Чаплыгина*, Прикл. Мат. Мех. **45**, No. 3, 466-470, (1981).

[26] Трофимов В. В., Фоменко А. Т., *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, Факториал, Москва, (1995).

[27] Фан Гуен, *О теории циклических перемещений для обобщенных уравнении Пуанкаре-Читаева*, Прикл. Мат. Мех. **45**, No. 3, 471-480, (1981).

[28] Федоров, Ю.Н., *О двух интегрируемых неголономных системах в классической динамике*, Вестн. Моск. Унив. Сер. 1, Мат. Мех. **105**, No. 4, 38-41, (1989).

[29] Харламова-Забелина Е.И., *Быстрое вращение тверого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи*, Вест. МГУ, Сер 1, Мат. Мех. **12**, No. 6, 25-34, (1957).

[30] Чаплыгин С.А., *О движении тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости*, Избранные труды, Наука, Москва, 363-375, (1976).

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

[31] Чаплыгин С.А., *К теории движения неголономных систем. Теорема о приводяьем множителе*, Избранные труды, Наука, Москва, 376-384, (1976).

[32] Чаплыгин С. А., *О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров*, Избранные труды, Наука, Москва, 385-408, (1976).

[33] Чаплыгин С. А., *О катании шара по горизонтальной плоскости*, Избранные труды, Наука, Москва, 409-428, (1976).

[34] Abraham, R., Marsden, J., *Foundation of mechanics*. Addison-Wesley, (1978).

[35] Adler, M., van Moerbeke, P., *The algebraic integrability of geodesic flow on $SO(4)$*. Invent. Math. **67**, 297-331 (1982).

[36] Appell, P., *Traité de méchanique rationnele*, Tomes 1-2, Gauthier-Villaris, Paris, (1919/1924).

[37] Arnol'd, V.I., *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag. (1978).

[38] Arnol'd, V.I., Kozlov, V.V., Neishtadt, A.I., *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, Dynamical Systems III, Springer-Verlag, (1987).

[39] Bloch A.M., Krishnaprasad, J.E., Marsden, J.E., Murray, R.M., *Nonholonomic mechanical systems with symmetry*, Arch. Rational Mech. Anal. Vol. **136**, 21-99, (1996).

[40] Dubrovin, B.A., Krichever, I.M., Novikov, S.P., *Integrable systems I*, Dynamical Systems IV, Springer-Verlag, (1994).

[41] Dragović V., *On integrable perturbations of the Jacobi problem for the geodesics on the ellipsoid*, J. of Phys. A, Math. and General, Vol. **29**, L317-L321, (1996).

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

[42] Dragović, V., Gajić, B., Jovanović, B., *Generalizations of classical integrable nonholonomic rigid body systems*, J. Phys. A: Math. Gen. Vol. **31**, 9861-9869 (1998).

[43] Dragović V., Jovanović B., *On integrable potential perturbations of billiard system within ellipsoid*, J. of Math. Phys., Vol. **38**, (1997).

[44] Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., Novikov, S.P., *Modern geometry, methods and applications*, Springer-Verlag, (1992).

[45] Fedorov, Yu.N., Kozlov, V.V., *Various aspects of n-dimensional rigid body dynamics*, Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, **168**, 141-171, (1995).

[46] Griffits F., *Exterior differential systems and calculus of variation*, Russian transl.: M. Moskva (1986).

[47] Jovanović B., *Integrable perturbation of billiards on constant curvature surfaces*, Phys. Lett. A, Vol. **231**, 353-358, (1997).

[48] Jovanović, B., *Non-holonomic geodesic flows on Lie groups and the integrable Suslov problem on $SO(4)$*, J. Phys. A: Math. Gen. Vol. **31**, 1415-1422, (1998).

[49] Kozlov V. V., *Summetry, topology and resonantes in Hamiltonian mechanics*, Springer-Verlag, (1998).

[50] Poincaré, H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vols. 1-3, Gauthier-Villaris, Paris, (1892/1893/1899).

[51] Ratiu, T., *The motion of the free n-dimensional rigid body*, Indiana Univ. Math. J. Vol. **29**, No.4, 609-629, (1980).

[52] Ratiu, T., *Euler-Poisson equations on Lie algebras and the n-dimensional heavy rigid body*, Amer. J. Math. Vol. **104**, No. 2, 409-448, (1982).

[53] Vershik, A.M, Gershkovich, V.Ya., *Nonholonomic dynamical systems, geometry of distributions and variational problems*, Dynamical Systems VII, Springer-Verlag, (1994).

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

[54] WARNER, F.W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer-Verlag, (1983).

[55] WHITTAKER, E.T., *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, 4th ed. Cambridge University Press XIV, 456 p. (1960).

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Садржај

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs