УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Драган Ђорић

СТАТИСТИЧКА АНАЛИЗА МОДЕЛА ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА СА ПРАГОВИМА

Докторска дисертација

БЕОГРАД, 2002

ПРЕДГОВОР

Предмет овог рада је класа модела временских серија са праговима. То је једна класа нелинеарних модела временских серија која је последњих десетак година веома популарна, како међу истраживачима који се баве практичним применама модела у својим областима, тако и међу теоретичарима који настоје да открију вероватносну структуру модела и статистичка својства оцена њихових параметара. Моделе са праговима је предложио Howell Tong још 1978. године. Међутим, све до 1990. године је владало релативно мало интересовање за такве моделе и у том периоду су добијени скромни теоријски резултати. Углавном су то били резултати који су се односили на модел првог реда са једним или више прагова. А онда, у наредних пар година, појавило се неколико значајних радова, а број истраживача који су разматрали или експериментисали са таквим моделима се знатно проширио. Права експанзија радова у којима се примењују модели са праговима је у последње две три године и то нарочито у проблемима економије и финансијских трансакција.

Постојећи теоријски резултати пре израде дисертације

Овде се наводе само резултати који се односе на стационарност, ергодичност и оцене параметара, пошто су они значајни за разматрања у раду.

Питање стационарности и ергодичности је потпуно решено једино за процесе са ауторегресионим (AR) моделима првог реда између прагова. Кад су између прагова ауторегресиони модели првог реда са покретним срединама (ARMA модели), доказано је да параметри покретних средина (MA делови модела) не утичу на стационарност. За процесе вишег реда познати су врло рестриктивни услови који гарантују стационарност и ергодичност. То се посебно односи на случај кад су између прагова ARMA делови модела, при чему је аутор овог рада доказао да ни тада MA делови не утичу на стационарност. Постоје, такође, парцијални резултати о расподелама модела са једним прагом.

Што се тиче оцена параметара модела са праговима, разматране су оцене добијене методом најмањих квадрата, при чему је доказана конзистентност оцена свих параметара, укључујући и оцене прагова. Сличан резултат је добијен и за случај оцењивања методом максималне веродостојности.

Нови резултати

Поред прегледа постојећих резултата, у раду су презентирани нови резултати који се односе на стационарност, ергодичност и оцене параметара модела са праговима.

У трећој глави је детаљно разматран ауторегресиони модел другог реда са једним прагом и добијени су довољни услови за геометријску ергодичност. Специјални случај тих резултата садржи познате резултате за модел првог реда. Разматран је, такође, и ауторегресиони модел вишег реда са више прагова, при чему је, у односу на постојеће резултате, добијена знатно већа област параметара за коју модел генерише ергодичан процес. У доказу је коришћена теорија Марковљевих процеса са непребројивим простором стања. Истом техником су изведени и услови за ергодичност процеса генерисаних ARMA моделима са праговима, као и AR моделима са условним хетероскедастичностима. Поред тога, разматрана је и расподела процеса првог реда са једним прагом при различитим расподелама иновација.

У четвртој глави су резултати о оценама параметара AR модела вишег реда са једним прагом. Најпре је дата рекурзивна верзија методе најмањих квадрата, при чему је доказана конзистентност оцена при знатно блажим условима у односу на услове из других радова. Затим је рекурзивни алгоритам уопштен за оцене типа стохастичке апроксимације, где се применом мартингала доказује конзистентност оцена. На крају је доказана и конзистентност оцена добијених минимизацијом општег критеријума.

Захвалности

Идеју за рад на моделима са праговима, као и почетну литературу, дао ми је ментор Проф Др Јован Малишић. Због тога, али и због разумевања, подршке и помоћи у раду, ја му се најсрдачније захваљујем. Захваљујем се, такође, Проф Др Весни Јевремовић и Проф Др Павлу Младеновићу, члановима комисије који су пажљиво прочитали рад и дали корисне сугестије.

Захвалност дугујем и онима који су ми послали копије својих радова, а то су: Prof Rabi Bhattacharya (Indiana University, Department of Mathematics), Prof Daren B. H. Cline (Texas A & M University, Department of Statistics), Prof Lianfen Qian (Florida Atlantic University, Department of Mathematical Sciences), Prof Roland Günther (Friedrich Schiller University Jena, Institute of Stochastics), Prof Bruce E. Hansen (University of Wisconsin, Department of Economics) i Prof Mehmet Caner (Bilkent University, Department of Economics), као и Др Дубравки Жарков (Institute of Social Studies, The Hague) која ми је послала књигу о нелинеарним временским серијама чији је аутор Howell Tong.

Београд, 2002. Драган Ђорић

САДРЖАЈ

1

НЕЛИНЕАРНИ МОДЕЛИ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА

Временске серије се срећу у различитим областима истраживања (астрономија, метеорологија, хидрологија, геофизика, пољопривреда, екологија, медицина, демографија, економија, финансије,...), а теоријска основа за њихово изучавање се налази у више математичких дисциплина (вероватноћа, математичка статистика, стохастички процеси,...) и у теорији динамичких система (Ozaki, 1985; Tong, 1990). Поред бројних часописа који објављују радове везане за анализу, моделирање и прогнозу временских серија, већ више година постоји и специјализовани часопис *Journal of Time Series Analysis*.

У последње две деценије велики број радова из економије се бави моделирањем временских серија. Методолошку основу савремене теоријске економије чине стохастички динамички модели уместо раније коришћених статичких и детерминистичких (Granger and Terasvirta, 1993). Модели, наравно, најчешће служе за прогнозирање будућих вредности (опсервација) посматране појаве.

Док је теорија линеарних модела комплетирана (Brockwell and Davis, 1991), теорија нелинеарних модела је тек у развоју. Многи проблеми, који се односе и на вероватносну структуру модела и на оцењивање параметара, избор и оцену адекватности модела, су још увек нерешени (De Gooijer and Kumar, 1992; Terasvirta, Tjostheim and Granger, 1994). Није јединствена чак ни дефиниција нелинеарног модела.

1.1 МОДЕЛИ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА

Циљ моделирања временске серије $\{X_t\}$ $(t \in N)$ је да се одреди функција h таква да низ резидуала $\{\varepsilon_t\}$ дефинисан са

$$\varepsilon_t = h(\{X_t\}) \tag{1.1}$$

буде или *бели шум* (низ некорелисаних случајних величина са истим расподелама) или *строги бели шум* (низ независних случајних величина са истим расподелама). Ако резидуали не представљају бели шум, то значи да низ $\{X_t\}$ садржи и структуру која није обухваћена моделом. Пожељно је да модел буде глобално инвертибилан, односно такав да на основу низа $\{\varepsilon_t\}$ и почетне вредности могу да се одреде оригинални подаци, X_t.

У случају линеарног модела је, на пример,

$$\varepsilon_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{t,k} X_{t-k}, \tag{1.2}$$

где су $\{h_{t,k}\}$ тежинске функције које одређују утицај величине X_{t-k} на резидуал ε_t. Ако је процес каузалан, тада је $h_{t,k} = 0$ за $k < 0$.

Претпоставимо да је модел каузалан, односно да је

$$\varepsilon_t = h(X_t, X_{t-1}, \ldots) \tag{1.3}$$

и да је инвертибилан, што значи да из (1.3) може да се добије

$$X_t = g(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots). \tag{1.4}$$

Ако је функција g довољно глатка, онда је

$$X_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} g_k \varepsilon_{t-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} g_{kl}\varepsilon_{t-k}\varepsilon_{t-l} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} g_{klm}\varepsilon_{t-k}\varepsilon_{t-l}\varepsilon_{t-m} + \cdots \tag{1.5}$$

где су језгра дата са

$$\mu = g(0), \quad g_k = \frac{\partial g(0)}{\partial \varepsilon_{t-k}}, \quad g_{kl} = \frac{\partial^2 g(0)}{\partial \varepsilon_{t-k}\partial \varepsilon_{t-l}}, \ \ldots \tag{1.6}$$

Ово је такозвани Волтеров развој који је користио још Wiener (1958). Он је посматрао модел у форми *улаз-излаз*, што се добија ако у Волтеровом развоју заменимо ε_t са улазом U_t, а X_t третирамо као излаз. Ако се узму само прва два члана, добија се линеарни каузални инвертибилни модел.

За линеарне моделе важи принцип суперпозиције по којем је укупан излаз једнак збиру излаза добијених за поједине фреквенције улаза. При томе, ако улаз има фреквенцију ω, односно ако је

$$U_t = Ae^{i\omega t}, \tag{1.7}$$

тада и излаз има ту исту фреквенцију, а амплитуда се множи са $|H(\omega)|$ и фаза помера за $arg\, H(\omega)$, где је H функција прелаза

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k e^{-i\omega k}. \tag{1.8}$$

Према томе, линеарни систем је потпуно описан ако знамо одзиве за све појединачне фреквенције. Другим речима, линеарни модел има алтернативно представљање у фреквентном домену функцијом прелаза (1.8).

За нелинеарне системе ниједно од наведених својстава линеарних система не важи. Наиме, за улаз са фреквенцијом ω, излаз у општем случају може да садржи и компоненте са фреквенцијама 2ω, 3ω, као и другим. То је такозвана *фреквентна мултипликација.* Исто тако, за улазе са фреквенцијама ω_1 и ω_2, излаз ће садржати компоненте са фреквенцијама ω_1, ω_2 и $\omega_1+\omega_2$. То је такозвана *интермодуларна дисторзија.* Према томе, у општем случају не постоји функција преноса за нелинеарне моделе. Међутим, може да се дефинише низ уопштених функција прелаза

$$H_1(\omega) = H(\omega), \quad H_2(\omega_1,\omega_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} g_{kl}e^{-(\omega_1 k+\omega_2 l)i}, \ \cdots \tag{1.9}$$

Ако је улаз стационаран процес са спектралном репрезентацијом

$$U_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} dZ_u(\omega), \tag{1.10}$$

тада је, према Волтеровом развоју (1.5),

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega_1} H_1(\omega_1) dZ_u(\omega_1) + \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(\omega_1+\omega_2)} H_2(\omega_1,\omega_2) dZ_u(\omega_1) dZ_u(\omega_2) + \ \cdots \tag{1.11}$$

Када U_t садржи само једну фреквенцију, $U_t = Ae^{i\omega t}$, тада је $dZ_u(\omega) = A$, па је

$$X_t = AH_1(\omega)e^{i\omega t} + A^2 H_2(\omega,\omega)e^{2i\omega t} + \cdots, \tag{1.12}$$

што значи да X_t садржи компоненте са фреквенцијама $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$.

За одређивање функције h, зависно од тога да ли располажемо додатним информацијама или не, постоје три различита прилаза:

(1) Black box прилаз користи само податке X_t.

(2) Gray box прилаз комбинује информације које могу да се добију из података са информацијама о природи саме појаве коју серија представља, а које могу да се добију из теоријских разматрања (закони физике, хемије,...) или експерименталних истраживања.

(3) White box прилаз уопште не користи статистичке методе, већ модел формира искључиво на бази знања о природи појаве која се моделира.

1.1.1 Нелинеарни насупрот линеарним моделима

Од 1980. године знатно расте интересовање за нелинеарним моделима временских серија и динамичких система. Наравно, основни разлог је што линеарни модели, који су били доминантни у примењеној математици и природним наукама, нису одговарајући за моделирање већине реалних појава и система. Показало се, наиме, да реални подаци временских серија садрже различита својства која линеарни модели не могу да 'ухвате'. То је довело, најпре, до развоја нелинеарних стохастичких модела, а нешто касније су се појавили и нелинеарни детерминистички модели хаотичних појава и система. У периоду 1980-1990 развијена је вероватносна и статистичка теорија ових модела и анализиране су примене на реалним подацима. Међутим, велики број теоријских проблема је остао нерешен. То се нарочито односи на моделе са праговима. Поред тога, поступак избора најбољег нелинеарног модела је везан за сложена нумеричка израчунавања. Наравно, развојем рачунарске технологије тај проблем више није одлучујући.

С друге стране, статистичка теорија линеарних модела је за то време дала практичне методе, а развијен је и одговарајући софтвер, па је примена линеарних модела постала веома једноставна.

Према томе, дилема: *линеарни или нелинеарни модел* и даље остаје актуелна. У анализи реалних података треба, одговарајућим тестовима који тестирају нелинеарност (Tong, 1990), видети да ли подаци представљају линеарну или нелинеарну динамику. Ако је тестовима потврђена хипотеза о нелинеарности, следе нове дилеме везане за избор класе модела: *параметарски или непараметарски приступ, стохастички или детерминистички модел, временски или фреквентни домен*, као и друге. У сваком случају, не постоји универзална процедура за моделирање временске серије, нити за избор линеарног или нелинеарног модела.

1.1.2 Општи нелинеарни модели

Природно уопштење ауторегресионог (AR) модела је нелинеарни AR модел

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}, \varepsilon_t), \tag{1.13}$$

где је $f : R^{p+1} \to R$ нелинеарна функција, а $\{\varepsilon_t\}$ строги бели шум, односно низ независних случајних величина са истим расподелама, при чему је ε_t независна од X_s за $s < t$. Одговарајући детерминистички нелинеарни модел се добија за $\varepsilon_t = 0$. Специјални случајеви су кад је грешка ε_t адитивна, тј. кад је

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}) + \varepsilon_t, \tag{1.14}$$

односно кад је мултипликативна, тј. кад је

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}) \cdot \varepsilon_t. \tag{1.15}$$

Модели (1.14) служе за моделирање условног очекивања, а модели (1.15) за моделирање условне варијансе која је променљива (volatility models). Ова два типа модела могу да се комбинују у један, на пример, на следећи начин:

$$X_t = f_1(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}) + f_2(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-q}) \cdot \varepsilon_t. \tag{1.16}$$

У моделе са адитивном грешком спадају NAAR (Nonlinear Additive **AR**) модели

$$X_t = f_1(X_{t-1}) + f_2(X_{t-2}) + \cdots + f_p(X_{t-p}) + \varepsilon_t, \tag{1.17}$$

што је уопштење нелинеарног модела првог реда (Jones, 1978), као и FAR (**F**unctional coefficient **AR**) модели (Chan and Tsay, 1993; Cai and Fan, 2000)

$$X_t = f_1(X_{t-d})X_{t-1} + f_2(X_{t-d})X_{t-2} + \cdots + f_p(X_{t-d})X_{t-p} + \varepsilon_t. \tag{1.18}$$

И једни и други су, наравно, још увек довољно општи.

На сличан начин се дефинишу општи NMA (Nonlinear **MA**) и NARMA (Nonlinear **ARMA**) модели, а модел

$$X_t = f(x_{t-1}, \ldots, x_{t-p}, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-q}) \tag{1.19}$$

обухвата све претходне моделе.

1.1.3 Модели са зависностима од стања

У моделирању временских серија нелинеарним моделима често се дефинишу различита стања или режими од којих зависе случајне променљиве у моделу, односно њихови статистички показатељи као што су средња вредност, варијанса и други. Та зависност од стања (у сваком тренутку) може да се моделира на различите начине. На пример, једноставно такво уопштење линеарног AR модела је

$$X_t = a_0(S_t) + a_1(S_t)X_{t-1} + \cdots + a_p(S_t)X_{t-p} + \varepsilon_t, \tag{1.20}$$

где су $a_0(S_t), \ldots, a_p(S_t)$ функције стања S_t. Само стање S_t може да буде окарактерисано вектором претходних вредности посматране серије и вектором Z_t који садржи неке друге (спољашње) променљиве

$$S_t = (X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}, Z_t^T)^T. \tag{1.21}$$

Како су коефицијенти $a_0, \ldots, a_p$ функције времена t и стања S_t, у општем случају модел има бесконачно много режима. У пракси је, наравно, битно да број режима буде што мањи. Параметризацијом функција $a_i(S_t)$ са коначним бројем параметара добија се коначан број режима и за сваки режим постоји један конкретан, локални, модел. У сваком тренутку t, зависно од стања S_t, бира се један од тих локалних модела. Такви модели су познати као regime-switching модели.

Модел (1.20) може да се третира и као Тејлорова апроксимација првог реда нелинеарног модела

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}, Z_t) + \varepsilon_t, \qquad (1.22)$$

где је f нелинеарна функција. Ако су $a_i(S_t)$ случајни процеси, независни од ε_t, имамо класу *двоструко стохастичких* (doubly stochastic) модела (Tjostheim , 1986), као и класу модела са случајним коефицијентима (Nicholls and Quinn, 1982) дефинисаних са

$$X_t = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_{i,t}) X_{t-i} + \varepsilon_t,$$

где су $b_{i,t}$ случајне променљиве.

За $S_t = X_{t-d}$ имамо FAR моделе из (1.18) (Chan and Tsay, 1993), а ако је S_t Марковљев процес имамо Markov-switching моделе. Напоменимо и то да је општи случај модела са зависностима од стања (state dependent модела) дефинисао Preistley (1980).

1.1.4 Непараметарске методе

Условно очекивање и условна варијанса, који се моделирају параметарским моделима, могу да се оцењују и непараметарски, без модела (Hardle, 1990). Ако су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ опсервације и ако је

$$M = E(X_t \mid X_{t-1} = x_1, \ldots, X_{t-p} = x_p), \quad V = var(X_t \mid X_{t-1} = x_1, \ldots, X_{t-p} = x_p), \qquad (1.23)$$

онда су оцене $\widehat{M}$ и $\widehat{V}$ условног очекивања M и условне варијансе V дате са

$$\widehat{M}(x_1, \ldots, x_p) = \frac{n-p+1}{n-p} \cdot \frac{\sum_{t=p+1}^{n} X_t \prod_{i=1}^{p} K_h(X_{t-i} - x_i)}{\sum_{t=p+1}^{n+1} \prod_{i=1}^{p} K_h(X_{t-i} - x_i)},$$

$$\widehat{V}(x_1, \ldots, x_p) = \frac{n-p+1}{n-p} \cdot \frac{\sum_{t=p+1}^{n} X_t^2 \prod_{i=1}^{p} K_h(X_{t-i} - x_i)}{\sum_{t=p+1}^{n+1} \prod_{i=1}^{p} K_h(X_{t-i} - x_i)} - \widehat{M}^2(x_1, \ldots, x_p),$$

где је $K_h(x) = h^{-1} K(h^{-1} x)$ и при чему је h ширина језгра K. На сличан начин се оцењују и непознате функције у осталим моделима, на пример, у FAR моделу (Chan and Tsay, 1993).

У непараметарским методама обично се користи услов промешаности

$$\sup_{A \in \mathcal{F}_1^t} \sup_{B \in \mathcal{F}_{t+n}^{\infty}} |P(B \cap A) - P(A)P(B)| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{1.24}$$

где је са $\mathcal{F}_a^b$ означено σ - поље генерисано са $X_a, X_{a+1}, \ldots, X_b$.

Добра страна ових метода је то што се елиминише субјективност која постоји код избора параметарског модела, а лоша страна су рачунски проблеми у случају кад је велика димензија модела (p). Међутим, уз помоћ јаког интерактивног софтвера, непараметарске оцене могу да послуже за дефинисање параметарског модела.

1.1.5 Параметарски модели

Параметризацијом функција f, f_1 и f_2 у моделима (1.14), (1.15) и (1.16), добијамо различите параметарске NAR, NAAR, FAR, NMA и NARMA моделе. На пример, параметарски NAR(1) модел за условно очекивање је

$$X_t = f(X_{t-1}, \theta) + \varepsilon_t, \tag{1.25}$$

где је f позната функција, а θ вектор непознатих параметара. Општи параметарски модел који моделира и условно очекивање и условну варијансу је

$$X_t = f_1(X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}, \theta_1) + f_2(X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}, \theta_2) \cdot \varepsilon_t, \quad f_2 > 0, \tag{1.26}$$

при чему су θ_1 и θ_2 вектори непознатих параметара и

$$E(X_t \mid X_{t-1} = x_1, \ldots, X_{t-p} = x_p) = f_1(x_1, \ldots, x_p, \theta_1),$$

$$var(X_t \mid X_{t-1} = x_1, \ldots, X_{t-p} = x_p) = f_2^2(x_1, \ldots, x_p, \theta_2) var(\varepsilon_t).$$

Напомињемо да су овде наведене само неке познатије класе параметарских модела.

Уопштени AR (GAR) модели

GAR (Generalized AR) модели су полиномијални модели, односно модели који садрже сабирке типа $X_{t-1}^{\alpha_1} X_{t-2}^{\alpha_2} \cdots X_{t-p}^{\alpha_p}$. На пример,

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + a_3 X_{t-1}^2 + a_4 X_{t-2}^2 + a_5 X_{t-1} X_{t-2} + \varepsilon_t.$$

Рационални модели

То су модели дефинисани рационалном функцијом, односно као количник два полинома, на пример

$$X_t = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}X_{t-i}^{j}}{b_0 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{q} b_{ij}X_{t-i}^{j}}, \quad 0 \le p \le q+1.$$

Експоненцијални AR (EXPAR) модели

EXPAR (**Ex**ponential **AR**) модели су дефинисани са (Haggan and Ozaki, 1981)

$$X_t = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i + b_i e^{-aX_{t-d}^2}\right)X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad a > 0.$$

За довољно велику или довољно малу вредност $|X_{t-d}|$, практично се добија $AR(k)$ модел. За разлику од модела са праговима, прелаз из AR режима у EXPAR режим, и обрнуто, је гладак.

Билинеарни модели

Билинеарни модели су дефинисани са

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}X_{t-i}\varepsilon_{t-j}.$$

Интересантно је да инвертибилан, стационаран, билинеарни модел

$$X_t = aX_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

може да се представи као GAR модел (Mittinik, 1991)

$$X_{t+1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,2,\dots,k}X_{t-k}\prod_{i=1}^{k} X_{t-i} + \varepsilon_t.$$

ARCH модели

Код ARCH (**AR** **C**onditional **H**eteroscedastic) модела условна варијанса је линеарна функција квадрата претходних опсервација

$$X_t = \sqrt{a_0 + a_1X_{t-1}^2 + \cdots + a_pX_{t-p}^2}\cdot\varepsilon_t, \quad a_i > 0.$$

1.2 НЕЛИНЕАРНИ ДЕТЕРМИНИСТИЧКИ МОДЕЛИ

Ако у моделима временских серија наведеним у 1.1 изоставимо резидуале ε_t, добијамо диференцне једначине које представљају детерминистичке моделе или моделе детерминистичких система. Тако моделу (1.14) одговара нелинеарни детерминистички модел

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}) \tag{1.27}$$

са почетним вредностима $x_1, x_2, \dots, x_p$. Својства низа $\{x_t\}$ дефинисаног са (1.27) могу бити врло сложена. Чак и у случају $p = 1$, модел

$$x_t = f(x_{t-1}) \tag{1.28}$$

може да генерише низ $\{x_t\}$ који се скоро не разликује од реализације случајног процеса, односно који представља такозвани *хаос*. Поред тога, ако се у модел (1.27) укључи улазна величина, а x_t посматра као излазна величина, онда систем *улаз - излаз* може да има све карактеристике нелинеарних система. Једна од тих, нелинеарних, карактеристика је *резонантни скок*. Наиме, амплитуда излазне величине може да има скок на различитим фреквенцијама зависно од тога да ли фреквенција улазне величине (при константној амплитуди) монотоно опада или монотоно расте. Исто тако, постоји и резонантни скок амплитуде излазне величине за различите амплитуде улазне величине (при константној фреквенцији) зависно од тога да ли улазна амплитуда монотоно расте или опада. Друге нелинеарне карактеристке су, на пример, амплитудно-фреквентна зависност и постојање субхармоника и виших хармоника. Важно је, такође, питање стабилности чиме се бави посебна дисциплина теорије нелинеарних динамичких система.

Овде ће посебно бити истакнута само нека својства везана за периодичност низа $\{x_t\}$ генерисаног моделом (1.27), као и за threshold структуру модела и идеју прагова.

1.2.1 Гранични циклуси

Уместо модела (1.27) можемо посматрати општији модел

$$\mathbf{x}_t = F(\mathbf{x}_{t-1}) \tag{1.29}$$

дефинисан функцијом $F : R^k \to R^k$ и почетном вредношћу $\mathbf{x}_0$. Означимо j - ту итерацију функције F са F^j. Ако постоји $n \in N$ такав да је $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$, онда је низ $\{\mathbf{x}_t\}$ периодичан. Ако су, при томе, $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ међусобно различити, то значи да за пресликавање F^n постоје фиксне (непокретне) тачке, а за пресликавања

$F, F^2, \ldots, F^{n-1}$ не постоје. Претпоставимо да је $\mathbf{x}^*$ једна таква фиксна тачка, односно да је

$$\mathbf{x}^* = F^j(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{x}^* \neq F^j(\mathbf{x}^*) \ \ (1 \leq j \leq n). \tag{1.30}$$

Уређена n - торка

$$(\mathbf{x}^*, F(\mathbf{x}^*), \ldots, F^{n-1}(\mathbf{x}^*))$$

је n - циклус пресликавања F или модела (1.29). Тачка $\mathbf{x}^* \in R^k$ се још зове и периодична тачка са периодом n. Тачка $\mathbf{z} \in R^k$ је асимптотски периодична ако постоји периодична тачка $\mathbf{x}^*$ таква да

$$F^n(\mathbf{z}) - F^n(\mathbf{x}^*) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1.31}$$

Гранични циклуси су познати у теорији нелинеарних осцилација и у теорији нелинеарних диференцијалних једначина.

1.2.2 Threshold структура модела

Многе појаве у природи квалитативно мењају своје карактеристике када нека величина, од које те карактеристике зависе, пређе одређену вредност, односно одређени праг (threshold). Познато је, на пример, да се репродуктивна својства неке животињске популације битно мењају када густина популације пређе критичну вредност. Такви примери постоје и у разним областима технике, као и у друштвеним појавама. У техничким системима се то повезује са такозваним засићењем система (saturation).

Модели који описују такве појаве укључују функције које су различито дефинисане зависно од тога да ли су аргументи функције мањи или већи од threshold вредности, односно од вредности прагова. Типичан пример је модел (1.28) (Tong and Lim, 1980), где је

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & |x| \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}x, & |x| > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Такви модели, са threshold структуром, су били основа за дефинисање стохастичких модела са праговима. О томе ће бити више речи у следећој глави.

2

МОДЕЛИ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА СА ПРАГОВИМА

2.1 УВОД

Модели временских серија са праговима или T (Threshold) модели представљају једну класу нелинеарних модела, где се увођењем прагова модел разлаже на коначан број једноставнијих подмодела. Сваки од подмодела важи између нека два суседна прага и активира се под одређеним условима. Генерисање текуће вредности X_t серије $\{X_t\}$ врши онај подмодел који у тренутку t буде изабран. Сам избор подмодела зависи од вредности неке, најчешће случајне, величине Z_t (*threshold* променљиве). Ако је Z_t нека од претходних вредности серије, онда су то SET (Self-Exciting Threshold) модели. Дефиниција и различите репрезентације T модела, као и уопштење на векторски случај са мултиваријабилним праговима су дати у 2.2.

Ако су подмодели између прагова AR типа и ако се избор једног од њих врши упоређивањем неке од претходних вредности серије са праговима, онда су то SETAR (Self-Exciting Threshold **AR**) модели. Различите репрезентације таквих модела су дате у 2.2.1. У 2.2.2 је дата једна класа TAR (Threshold AR) модела где је threshold променљива функција више претходних опсервација, у 2.2.3 и 2.2.4 су дати неки случајеви TAR модела са јединичним коренима, док је у 2.2.5 дато тврђење о апроксимацији нелинеарних AR модела помоћу TAR модела.

Ако су између прагова MA или ARMA подмодели, онда су то SETMA (Self-Exciting Threshold Moving Average), односно SETARMA (Self-Exciting Threshold **ARMA**) модели који су описани у 2.3. и 2.4. SET модели са случајним коефицијентима, SETRC (Self-Exciting Threshold Random Coefficient) модели су описани у 2.5. Најопштији случај регресионих TAR модела је дат у 2.6.

У 2.7 су дати TAR модели са екстерним величинама које су уједно и threshold променљиве, у 2.8 је дефинисан модел са глатким преласком прагова, у 2.9 су дати SETAR модели код којих су моделиране грешке, а у 2.10 је дат једноставан volatility модел са праговима. Кратак историјски осврт на развој TAR модела је дат 2.10.

2.2 AR МОДЕЛИ СА ПРАГОВИМА

Нека су l, d и $p_1, p_2, \ldots, p_l$ природни бројеви, $a_{j,i}$ за $j = 0, 1, \ldots, l$ и $i = 1, 2, \ldots, p_j$ произвољни реални бројеви, а $r_1, r_2, \ldots, r_l$ реални бројеви такви да је

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_{l-1}. \tag{2.1}$$

Дефиниција 2.1 *Стохастичка диференцна једначина*

$$X_t = \begin{cases} a_{1,0} + a_{1,1}X_{t-1} + \cdots + a_{1,p_1}X_{t-p_1} + \varepsilon_t, & Z_{t-d} \le r_1, \\ a_{2,0} + a_{2,1}X_{t-1} + \cdots + a_{2,p_2}X_{t-p_2} + \varepsilon_t, & r_1 < Z_{t-d} \le r_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{l,0} + a_{l,1}X_{t-1} + \cdots + a_{l,p_l}X_{t-p_l} + \varepsilon_t, & r_{l-1} < Z_{t-d}, \end{cases} \tag{2.2}$$

где су $X_0, X_{-1}, \ldots, X_{-max\{p_1,p_2,\ldots p_l\}+1}$ и $\{Z_t\}$ случајне променљиве, а $\{\varepsilon_t\}$ низ иновација, је AR *модел са праговима $r_1, r_2, \ldots, r_{l-1}$ и кашњењем d.*

Модел (2.2) је, дакле, дефинисан са l подмодела типа AR - први реда p_1, други реда p_2, ..., последњи реда p_l, што може да се означи са TAR$(l; p_1, p_2, \ldots, p_l)$ или само TAR$(p_1, p_2, \ldots, p_l)$. Случајна променљива Z_t, коју ћемо у даљем тексту звати threshold променљива, одређује актуелни подмодел. Ако су сви AR подмодели истог реда p, користимо ознаку TAR$(l; p)$. За $l = 1$ имамо обичан AR модел.

За процес $\{X_t\}$ генерисан моделом (2.2) кажемо да је TAR$(l; p_1, p_2, \ldots, p_l)$ процес. На пример, ако је низ случајних величина $\{X_t\}$ дефинисан са

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t, & Z_{t-1} \le r \\ \beta X_{t-1} + \varepsilon_t, & Z_{t-1} > r \end{cases}, \tag{2.3}$$

где су $\alpha, \beta, r \in R$, онда је $\{X_t\}$ TAR(2;1) процес, а (2.3) је TAR(2;1) модел. Величина r је *праг* и у зависности од тога да ли је Z_{t-1} веће или не од тог прага, X_t се генерише једним од два AR модела првог реда чији су параметри α, односно β. Дакле, модел (2.3) се састоји од два AR модела раздвојена једним прагом. Ако је

$$a(Z_{t-d}) = \alpha I(Z_{t-1} \le r) + \beta I(Z_{t-1} > r), \tag{2.4}$$

онда модел (2.3) има облик модела са функционалним параметром

$$X_t = a(Z_{t-d})X_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{2.5}$$

На сличан начин и модел (2.2) можемо да запишемо и у облику FAR модела

$$X_t = a_0(Z_{t-d}) + \sum_{i=1}^{p(Z_{t-d})} a_i(z_{t-d})X_{t-i} + \varepsilon_t, \tag{2.6}$$

где су a_i одговарајуће функције од Z_{t-d}.

Модел (2.2) може да се напише и у компактнијем облику

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p_j} a_{j,i} X_{t-i} \right) I(Z_{t-d} \in R_j) + \varepsilon_t, \tag{2.7}$$

где је

$$R_j = (r_{j-1}, r_j], \tag{2.8}$$

а $r_0 = -\infty$ и $r_l = +\infty$.

Нека је J_t случајна променљива дефинисана са

$$J_t = \begin{cases} 1, & Z_{t-d} \in R_1, \\ 2, & Z_{t-d} \in R_2, \\ \dots & \dots\dots\dots \\ l, & Z_{t-d} \in R_l. \end{cases} \tag{2.9}$$

Модел TAR$(l; p_1, \dots, p_l)$ може да се запише у облику модела са случајним коефицијентима

$$X_t = a_0(J_t) + \sum_{i=1}^{p(J_t)} a_i(J_t) X_{t-i} + \varepsilon_t(J_t), \tag{2.10}$$

где је $a_i(J_t) = a_{j,i}$ за $J_t = j$ $(j = 1, \dots, l;\ i = 0, 1, \dots, p_j)$.

Ако су X_t, $a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{l,0}$ вектори, а $a_{i,j}$ матрице димензија $p \times p$, имамо векторски TAR модел, али са скаларном threshold променљивом и са једнодимензионалним праговима. Међутим, модел (2.2) може да се уопшти на векторски случај са вишедимензионалном threshold променљивом и са вишедимензионалним праговима.

Дефиниција 2.2 *Нека је* $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_l$ *партиција простора* R^k *и нека је* $\{\mathbf{Z}_t\}$ *низ* k *- димензионалних, а* $\{\varepsilon_t\}$ *низ* m *- димензионалних случајних величина. Стохастичка диференцна једначина*

$$\mathbf{X}_t = \begin{cases} A_{1,0} + A_{1,1}\mathbf{X}_{t-1} + \dots + A_{1,p_1}\mathbf{X}_{t-p_1} + \varepsilon_t, & \mathbf{Z}_{t-d} \in \mathbf{R}_1 \\ A_{2,0} + A_{2,1}\mathbf{X}_{t-1} + \dots + A_{2,p_2}\mathbf{X}_{t-p_2} + \varepsilon_t, & \mathbf{Z}_{t-d} \in \mathbf{R}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ A_{l,0} + A_{l,1}\mathbf{X}_{t-1} + \dots + A_{l,p_l}\mathbf{X}_{t-p_l} + \varepsilon_t, & \mathbf{Z}_{t-d} \in \mathbf{R}_l \end{cases}, \tag{2.11}$$

где су $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_{-1}, \dots, \mathbf{X}_{-max\{p_1, p_2, \dots p_l\}+1}$ m *- димензионалне случајне променљиве, је векторски* AR *модел са праговима и кашњењем* d.

Прагови у моделу (2.11) су границе области $\mathbf{R}_i$ и у општем случају су вишедимензионални. Динамика процеса генерисаног оваквим моделом, означимо га са VTAR$(l; p_1, p_2, \dots, l_p)$, је веома сложена.

Ако се у моделу (2.2) или (2.11) изостави грешка ε_t, добија се одговарајући детерминистички модел са праговима чија динамика такође може бити врло сложена и који може да генерише хаотични низ. Својства таквог модела, под одређеним условима, детерминишу својства одговарајућег TAR, односно VTAR модела.

2.2.1 SETAR модели

За $Z_t = X_t$ у моделу (2.2) имамо SETAR$(l; p_1, \dots, p_l)$ модел

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p_j} a_{j,i} X_{t-1} \right) I(X_{t-d} \in R_j) + \varepsilon_t \tag{2.12}$$

Ако је θ вектор параметара у моделу,

$$\theta = ({\theta_1}^T, {\theta_2}^T, \dots, {\theta_l}^T, r_1, r_2, \dots, r_l, d)^T, \tag{2.13}$$

где је

$$\theta_j = (a_{j,0}, a_{j,1}, \dots, a_{j,p})^T, \quad j = 1, 2, \dots, l \tag{2.14}$$

модел има облик

$$X_t = F(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}, \theta) + \varepsilon_t, \tag{2.15}$$

при чему је

$$F(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, \theta) = \sum_{j=1}^{l} \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p_j} a_{j,i} X_{t-i} \right) I(X_{t-d} \in R_j). \tag{2.16}$$

За $p_1 = p_2 = \dots = p_l = p$ овај модел може да се представи и у облику VTAR модела првог реда

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=1}^{l} (A_{0,j} + A_j \mathbf{Y}_{t-1}) \, I(\mathbf{Y}_{t-1} \in \mathbf{R}_j) + w_t, \tag{2.17}$$

где је

$$\mathbf{Y}_t = (X_t \; X_{t-1} \; \dots \; X_{t-p+1})^T, \tag{2.18}$$

$$w_t = (\varepsilon_t \; 0 \; \dots \; 0)^T, \tag{2.19}$$

$$A_{j,0} = (a_{j,0} \; 0 \; \dots \; 0)^T, \tag{2.20}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{j,1} \; a_{j,2} \; \cdots \; a_{j,p-1} & a_{j,p} \\ I_{p-1} & O \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

$$\mathbf{R}_j = R \times \cdots \times R \times R_j \times R \times \cdots \times R. \tag{2.22}$$

Процес $\{\mathbf{Y}_t\}$, генерисан моделом (2.17), је Марковљев процес.

2.2.2 Једна класа модела са вишедимензионалним праговима

За SETAR модел се скуп R подели (праговима) на неколико дисјунктних интервала, а динамика модела се мења у зависности од тога којем интервалу припада threshold променљива. Модел SETAR$(l;p)$, записан у векторској форми (2.17), описан је помоћу p - димензионалне threshold променљиве $\mathbf{Y}_{t-1}$ и вишедимензионалних области $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_l$. Општији случај је ако се уведе p - димензионална threshold променљива, а простор R^p хипрравнима подели на коначан број дисјунктних делова. Ако је хиперраван h дефинисана са

$$h(\mathrm{c}, c) = \{\mathbf{x} \in R^p \mid \mathrm{c}^T\mathbf{x} = c\}, \tag{2.23}$$

где је $\mathrm{c} \in R^p$, $c \in R$, онда је њом простор R^p подељен на два полупростора $H^+(\mathrm{c}, c)$ и $H^-(\mathrm{c}, c)$, при чему је

$$H^+(\mathrm{c}, c) = \{\mathbf{x} \in R^p \mid \mathrm{c}^T\mathbf{x} \geq c\}, \quad H^-(\mathrm{c}, c) = \{\mathbf{x} \in R^p \mid \mathrm{c}^T\mathbf{x} < c\}. \tag{2.24}$$

Помоћу више хиперравни простор R^p је подељен на неколико полиедарских делова. Сваки део је непразан пресек полупростора одређених хиперравнима.

На пример, у простору R^p чије су координате X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_{t-p} нека је дато k хиперравни $h_1, \ldots, h_k$, дефинисаних са

$$h_i(\mathrm{c}_i, c_i) = \{\mathbf{Z}_{t-1} \mid \mathrm{c}_i\mathbf{Z}_{t-1} \geq c_i\} \tag{2.25},$$

где је

$$\mathbf{Z}_t = (X_t, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p+1}). \tag{2.26}$$

Овим хиперравнима је простор R^p подељен на дисјунктне области $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, ..., $\mathbf{R}_l$. Ако је модел са праговима дат са

$$X_t = a_0(Z_{t-1}) + \sum_{i=1}^{p} a_i(\mathbf{Z}_{t-1})X_{t-i} + \varepsilon_t, \tag{2.27}$$

где је, за $\mathrm{x} \in R^p$,

$$a_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{l} a_{i,j} I(\mathbf{x} \in \mathbf{R}_j), \quad i = 0, 1, \ldots, p, \tag{2.28}$$

тада коефицијенти a_i могу да се изразе и на следећи начин

$$a_i(\mathbf{Z}_{t-1}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j} I(\mathbf{Z}_{t-1} \in H^+(\mathbf{c}_i, c_i)) + \beta_i. \tag{2.29}$$

Из записа (2.28) и (2.29) видимо да модел (2.27) може да се опише и преко индикатора области и преко индикатора полупростора одређених хиперравнима. При томе, између коефицијената a_{ij} у запису (2.28) и коефицијената у запису (2.29) постоје одговарајуће везе.

2.2.3 Модели са јединичним коренима

Ако у TAR моделу допустимо да у неком режиму буде AR модел са јединичним кореном, добијамо TUR (Threshold Unit Root) модел. На пример,

$$X_t = \begin{cases} X_{t-1} + \varepsilon_t, & Z_{t-d} < r, \\ aX_{t-1} + \varepsilon_t, & Z_{t-d} \geq r, \end{cases} \tag{2.30}$$

где је $\{Z_t\}$ стационаран процес, је TUR модел првог реда са једним прагом. Општији случај је модел

$$\Delta X_t = \begin{cases} a_1 \Delta X_{t-1} + \cdots + a_p \Delta X_{t-p}, & Z_{t-1} < r, \\ b_0 X_{t-1} + b_1 \Delta X_{t-1} + \cdots + b_p \Delta X_{t-p}, & Z_{t-1} \geq r, \end{cases} \tag{2.31}$$

где је $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.

Овакви модели се користе у економетрији као алтернатива моделима са јединичним коренима. Уместо фиксног јединичног корена, може да се разматра флексибилнији случај где је јединични корен случајан. Нека је

$$X_t = \phi_t X_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{2.32}$$

где је

$$\phi_t = a_1 I(Z_{t-d} \in R_1) + \cdots + a_l I(Z_{t-d} \in R_l). \tag{2.33}$$

Ако је

$$E(\phi_t) = 1, \quad Var(\phi_t) > 0,$$

тада је са (2.32) и (2.33) дефинисан модел са праговима и стохастичким јединичним кореном, односно TSTUR (Threshold STochastic Unit Root) модел.

2.2.4 MTAR модели

Ако се избор подмодела врши зависно од тога да ли X_{t-1} расте ($\Delta X_{t-1} \geq 0$) или опада ($\Delta X_{t-1} < 0$), имамо такозвани MTAR (Momentum TAR) модел

$$\Delta X_t = \begin{cases} a_0 + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p}, & \Delta X_{t-1} < 0 \\ b_0 + b_1 X_{t-1} + \cdots + b_p X_{t-p}, & \Delta X_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

Овакви модели се користе за моделирање асиметричности која се често јавља у разним економским серијама.

2.2.5 Једно својство TAR модела

Свакако је занимљиво и важно питање апроксимације нелинеарних процеса процесима са праговима. Показало се да TAR модели скоро извесно апроксимирају разне класе нелинеарних модела као што су билинеарни, EAR (Exponential AR) или, чак, SD (State Dependent) модели.

Нека је p - димензионални процес $\{Y_t\}$ дефинисан са

$$Y_t = f(Y_{t-1}) + e_t, \quad t \geq 1, \tag{2.34}$$

где је $f : R^p \to R^p$ непрекидна функција, $\{e_t\}$ низ независних p - димензионалних случајних величина са истим расподелама и нултим очекивањем (p - димензионални строги бели шум). Нека је, даље, $f_n : R^p \to R^p$ низ функција које униформно апроксимирају f на сваком компактном скупу у R^p. Тада важи следеће тврђење (Petruccelli, 1992).

Теорема 2.1 *Нека је низ $\{Y_t\}$ дефинисан са (2.34) и нека је $\{Y_{t,n}\}$ низ процеса дефинисан са*

$$\begin{aligned} Y_{0,n} &= Y_0 \\ Y_{t,n} &= f_n(Y_{t-1,n}) + e_t. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Ако је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ одговарајући простор вероватноће, тада за свако $\omega \in \Omega$ и свако $t \in N$ важи

$$Y_{t,n}(\omega) \to Y_t(\omega), \quad (n \to \infty). \tag{2.36}$$

Ако за f_n изаберемо линеарне функције, онда су процеси $\{Y_{t,n}\}$ дефинисани са (2.35) заправо TAR процеси. Дакле, низ TAR процеса скоро сигурно конвергира ка процесу $\{Y_t\}$ генерисаном нелинеарним моделом (2.34) са непрекидном функцијом f. Постоји и одговарајући резултат у случају кад је функција f у нелинеарном моделу (2.34) само мерљива (Petruccelli, 1992).

2.3 МА МОДЕЛИ СА ПРАГОВИМА

Аналогно AR моделима са праговима могу се дефинисати МА модели са праговима $r_1, r_2, \ldots, r_{l-1}$.

Дефиниција 2.3 TMA$(l; q_1, \ldots, q_l)$ *модел је стохастичка диференцна једначина*

$$X_t = \left(b_{j,0} + \sum_{i=1}^{q_j} b_{j,i}\varepsilon_{j,t-i} + \varepsilon_{j,t} \right) I(Z_{t-d} \in R_j), \tag{2.37}$$

где је

$$\varepsilon_{j,t} = \sigma_j \varepsilon_t, \quad 0 < \sigma_j < \infty. \tag{2.38}$$

Процес $\{X_t\}$ је TMA$(l; q_1, \ldots, q_l)$ *процес ако је генерисан моделом (2.37).*

Дакле, X_t следи један од MA подмодела зависно од тога у ком интервалу се налази Z_{t-d}. За $Z_t = X_t$ имамо SETMA моделе. De Gooijer (1998) је показао да се MA и SETMA не могу разликовати по аутокорелационој функцији, али могу да се разликују по условној аутокорелационој функцији дефинисаној са

$$\rho_{\pm}(k \mid d) = \begin{cases} cov(X_t, X_{t-k} \mid X_{t-d} \geq c)/var(X_{t-d} \mid X_{t-d} \geq c), \\ cov(X_t, X_{t-k} \mid X_{t-d} < c)/var(X_{t-d} \mid X_{t-d} < c), \end{cases} \tag{2.39}$$

где + одговара случају $X_{t-d} \geq c$, а $-$ случају $X_{t-d} < c$.

2.4 ARMA МОДЕЛИ СА ПРАГОВИМА

Нека су R_j интервали дефинисани са (2.8), где су $r_1, r_2, \ldots, r_{l-1}$ прагови, l, p, q и d природни бројеви, а $a_{j,i}$ за $i = 0, 1, \ldots p$ и $j = 1, 2 \ldots, l$ и $b_{j,i}$ за $i = 1, 2, \ldots q$ и $j = 1, 2, \ldots, l$ реални бројеви.

Дефиниција 2.4 *Стохастичка диференцна једначина*

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p} a_{j,i} X_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} b_{j,i} \varepsilon_{t-j} \right) I(Z_{t-d} \in R_j) + \varepsilon_t, \tag{2.40}$$

где су $X_0, X_{-1}, \ldots, X_{-p+1}$ случајне променљиве, а $\{\varepsilon_t\}$ низ иновација, је ARMA *модел реда (l, p, q) са праговима $r_1, r_2, \ldots r_{l-1}$ и кашњењем d.*

Слично као TAR модел, TARMA модел се састоји од l подмодела типа ARMA. За модел (2.40) користимо ознаку TARMA(l, p, q). Процес $\{X_t\}$ је TARMA(l, p, q) процес ако је генерисан моделом (2.40). Познати ARMA(p, q) процес добијамо за $l = 1$.

За $Z_t = X_t$ имамо SETARMA процес који може, такође, да се запише у Марковском облику

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=1}^{l} (A_{0,j} + A_j \mathbf{Y}_{t-1} + B_j e_{t-1}) I(\mathbf{Y}_{t-1} \in R_{j,d}) + C\varepsilon_t, \tag{2.41}$$

где је $\mathbf{Y}_t$ дато са (2.18), $A_{j,0}$ са (2.20), A_j са (2.21), $R_{j,d}$ са (2.22), а

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{j,1} \; b_{j,2} \; \ldots \; b_{j,q} \\ O_{p-1,q} \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

$$C = (1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)^T \tag{2.43}$$

и

$$e_t = (\varepsilon_t \; \varepsilon_{t-1} \; \ldots \; \varepsilon_{t-q+1})^T. \tag{2.44}$$

2.5 RCAR МОДЕЛИ СА ПРАГОВИМА

Нека су $\gamma_{t,1}$, $\gamma_{t,2}$, ..., $\gamma_{t,p}$, $t \in \{1,2,\ldots\}$ међусобно независне случајне променљиве и независне од ε_t и од X_s за $s < t$ и нека су $r_1, r_2, \ldots r_{l-1}$ прагови, l, p и d природни, а $\{a_{j,i}\}$ за $i \in \{0,1,\ldots,p\}$ и $j \in \{1,2,\ldots,l\}$ реални бројеви.

Дефиниција 2.5 *Стохастичка диференцна једначина*

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left\{ a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p} (a_{j,i} + \gamma_{t,i}) X_{t-i} \right\} I(Z_{t-d} \in R_j) + \varepsilon_t \tag{2.45}$$

где је $\{\varepsilon_t\}$ *низ иновација, је* AR *процес са случајним коефицијентима и праговима* $r_1, r_2, \ldots, r_{l-1}$.

Ознака за модел (2.45) је RCAR(l,p). Процес $\{X_t\}$ је RCAR(l,p) процес ако је генерисан моделом (2.45). За $Z_t = X_t$ имамо RCSETAR процес. Ако је процес $\{\mathbf{Y}_t\}$ дефинисан са (2.18), матрице $A_{j,0}$ са (2.20), процес $\{w_t\}$ са (2.19) и ако је

$$A_{j,t} = A_j + \Gamma_t, \tag{2.46}$$

где је A_j дато са (2.21), а

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} \gamma_{t,1} & \gamma_{t,2} & \cdots & \gamma_{t,p} \\ & O_{(p-1)\times p} & & \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

онда модел (2.45) може да се запише у Марковском облику

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=1}^{l} (A_{j,0} + A_{j,t}\mathbf{Y}_{t-1}) I(\mathbf{Y}_{t-1} \in R_{j,d}) + w_t. \tag{2.48}$$

Општији облик векторског SETRCAR процеса $\{\mathbf{Y}_t\}$ првог реда је дефинисан моделом (2.48), где је $\{A_{j,t}\}$ низ случајних независних матрица димензија $l \times l$ са истим расподелама за свако $j \in \{1,2\ldots,l\}$, а $\{w_t\}$ низ случајних l - димензионалних вектора.

2.6 РЕГРЕСИОНИ МОДЕЛИ СА ПРАГОВИМА

Ако у моделу (2.2) AR подмоделе заменимо регресионим моделима, добијамо општији модел са праговима.

Дефиниција 2.6 *Стохастичка диференцна једначина*

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} (a_{j,0} + \mathbf{a}_j \mathbf{Y}_t) I(Z_{t-d} \in R_j) + \varepsilon_t \tag{2.49}$$

је регресиони модел са праговима $r_1, \ldots, r_{l-1}$ *и регресорима* $\mathbf{Y}_t \in R^p$, *при чему је*

$$\mathbf{a}_j = (a_{j,1}, a_{j,2}, \ldots, a_{j,p}).$$

У моделу (2.49) опсервирају се променљиве $X_t, \mathbf{Y}_t$ и Z_t. У случају

$$\mathbf{Y}_t = (X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p})^T$$

добија се TAR модел.

2.7 STAR МОДЕЛИ

SETAR$(2;p)$ модел

$$X_t = \begin{cases} a_{1,0} + a_{1,1}X_{t-1} + \cdots + a_{1,p_1}X_{t-p} + \varepsilon_t, & X_{t-d} \le r, \\ a_{2,0} + a_{2,1}X_{t-1} + \cdots + a_{2,p_2}X_{t-p} + \varepsilon_t, & X_{t-d} > r \end{cases} \tag{2.50}$$

можемо да запишемо и у облику

$$X_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \left(b_0 + \sum_{i=1}^{p} b_i X_{t-i}\right) I(X_{t-d} - r > 0) + \varepsilon_t, \tag{2.51}$$

где је

$$a_0 = a_{1,0},\ a_1 = a_{1,1}, \ldots, a_p = a_{1,p}, \quad b_0 = a_{2,0} - a_{1,0},\ b_1 = a_{2,1} - a_{1,1}, \ldots, b_p = a_{2,p} - a_{1,p}.$$

Ако се у овом моделу функција I замени непрекидном и глатком функцијом F, тада се промена свих параметара дешава истовремено и генерисана је функцијом F. За разлику од SETAR модела где су промене параметара строго скоковите, овде оне могу бити највише глатко скоковите. Због тога се такви модели називају STAR (Smooth Transition **AR**) модели.

Дефиниција 2.7 *Стохастичка диференцна једначина*

$$X_t = a_0 + a_1X_{t-1} + \cdots + a_pX_{t-p} + (b_0 + b_1X_{t-1} + \cdots b_pX_{t-p})\, F(X_{t-d} - r) + \varepsilon_t \tag{2.52}$$

је STAR(p) *модел.*

Обично се узима функција F са скупом вредности $[0,1]$, као што су, на пример, функције расподела случајних променљивих. Ако је F функција логистичке расподеле, такви модели се означавају са LSTAR, ако је F функција нормалне расподеле, онда су то NSTAR модели, а ако је $F(x) = 1 - e^{-x^2}$, онда је то ESTAR модел.

У STAR моделима је промена параметара ауторегресије уведена функцијом F. Ако се за сваки параметар уведе нова функција која дефинише промене, добија се FAR модел. Према томе, STAR је специјални случај FAR модела.

2.8 TARSO и TARSC модели

Једно уопштење SETAR модела је ако у модел уведемо спољашње, опсервабилне, улазе Y_t и помоћу њих дефинишемо избор режима.

Дефиниција 2.8 TARSO *модел је стохастичка диференцна једначина*

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p_j} a_{j,i} X_{t-i} + \sum_{i=1}^{q_j} b_{j,i} Y_{t-i} \right) I(Y_{t-d} \in R_j) + \varepsilon_t, \tag{2.53}$$

где је $\{Y_t\}$ *низ случајних променљивих.*

Модел може да се у запише у облику модела са случајним коефицијентима

$$X_t = a_0(J_t) + \sum_{i=1}^{p(J_t)} a_i(J_t) X_{t-i} + \sum_{i=0}^{q(J_t)} b_i(J_t) Y_{t-i} + \varepsilon_t(J_t), \tag{2.54}$$

где је случајна променљива J_t дата са

$$J_t = \begin{cases} 1, & Y_{t-d} \in R_1, \\ 2, & Y_{t-d} \in R_2, \\ \dots & \dots\dots\dots \\ l, & Y_{t-d} \in R_l. \end{cases} \tag{2.55}$$

Другим речима, у сваком режиму имамо такозвани ARX модел. Систем (X_t, Y_t) је 'open loop' систем, па се модел назива TARSO (Threshold **AR** **O**pen loop **S**ystem). Ако су и систем (X_t, Y_t) и систем (Y_t, X_t) open loop системи, имамо TARSC модел (Threshold **AR** **C**losed loop **S**ystem).

2.9 TAR МОДЕЛИ СА МОДЕЛИРАНИМ ГРЕШКАМА

Један од стандардних модела за моделирање условне варијансе је ARCH модел

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \tag{2.56}$$

где је, за $a_0 > 0$ и $a_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, q)$,

$$h_t = a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + a_2 X_{t-2}^2 + \cdots + a_q X_{t-q}^2. \tag{2.57}$$

Ако у SETAR моделу грешке моделирамо ARCH (**AR** **C**onditional **H**eteroscedastic) моделима, добијамо нову класу модела са праговима.

Дефиниција 2.9 TARCH *модел је стохастичка диференцна једначина*

$$X_t = \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p_j} a_{j,i} X_{t-i} \right) I(r_{j-1} \leq X_{t-d} < r_j) + \varepsilon_t \sqrt{a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_q X_{t-q}^2}. \tag{2.58}$$

Ако грешке у SETAR моделу моделирамо GARCH (Generalized **ARCH** моделом добијамо још једну класу модела са праговима.

Дефиниција 2.10 TGARCH *модел је стохастичка диференцна једначина*

$$X_t = \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p_j} a_{j,i} X_{t-i}\right) I(r_{j-1} \leq X_{t-d} < r_j) + v_t\sqrt{h_t}, \tag{2.59}$$

где је, за $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q_1)$, $b_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q_2)$,

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q_1} a_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q_2} b_i h_{t-i}. \tag{2.60}$$

Ако се дефинише модел у којем постоји двоструки систем прагова - један за моделирање условног очекивања, а други за моделирање условне варијансе, добија се такозвани DTARCH (Duble Threshold **ARCH**) модел.

Дефиниција 2.11 DTARCH *модел је стохастичка диференцна једначина*

$$X_t = \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p_j} a_{j,i} X_{t-i}\right) I(r_{j-1} \leq X_{t-d} < r_j) + v_t, \tag{2.61}$$

где је

$$v_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \tag{2.62}$$

$$h_t = \left(b_{k,0} + \sum_{i=1}^{p'_k} b_{k,i} v_{t-i}^2\right) I(r'_{j-1} \leq X_{t-d'} < r'_j) \tag{2.63}$$

за $j = 1, 2, \ldots, l$ *и* $k = 1, 2, \ldots, l'$.

Дакле, осим прагова $r_1, \ldots, r_l$ за AR делове модела, постоје и прагови $r'_1, \ldots, r'_l$ за ARCH делове модела.

Осим природног уопштења TAR модела, мотив за овакве моделе је био емпиријски закључак о асиметричној промењљивости величина у неким економским и финансијским појавама. Уместо SETAR модела може да се узме било који други модел са праговима, укључујући и STAR моделе.

2.10 TARSV МОДЕЛИ

При моделирању промењљиве варијансе ARCH, односно GARCH моделима, условна варијанса је функција квадрата претходних опсервација серије и претходних вредности варијансе. Други приступ у моделирању промењљиве варијансе је помоћу такозваних SV (Stochastic Volatility) модела. У тим моделима се претпоставља да је нека глатка функција, на пример логаритамска, случајна променљива генерисана неким случајним процесом.

Ако је $X_t = \sigma_t \nu_t$, где је $\{\nu_t\}$ низ независних случајних променљивих ($E(\nu_t) = 0$, $var(\nu_t) = 1$), тада је

$$E(X_t^2 \mid \sigma_t) = \sigma_t^2, \tag{2.64}$$

што значи да је σ_t^2 условна варијанса за X_t. Претпоставимо да је логаритам варијансе AR(1) процес, односно да је

$$Y_t = log\, \sigma_t^2 \tag{2.65}$$

и да је

$$Y_t = a + bY_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{2.66}$$

Тада је

$$X_t = e^{Y_t/2}, \tag{2.67}$$

а (2.66) и (2.67) дефинишу SV модел у којем је σ_t функција од σ_{t-1}. Међутим, за постизање неких додатних ефеката, за процес $\{Y_t\}$ може да се узме TARSO модел са праговима.

Дефиниција 2.12 *Модел* TARSV *је*

$$X_t = e^{Y_t/2}\nu_t, \quad Y_t = \begin{cases} a_1 + b_1 Y_{t-1} + \varepsilon_{t-1}, & X_{t-1} < 0, \\ a_2 + b_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t-1}, & X_{t-1} \geq 0, \end{cases} \tag{2.68}$$

при чему су ν_t *и* ε_t *независне променљиве.*

Ако модел процеса $\{Y_t\}$ напишемо у облику

$$Y_t = a(J_t) + b(J_t)Y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{2.69}$$

где је

$$J_t = \begin{cases} 1, & X_{t-1} < 0, \\ 2, & X_{t-1} \geq 0, \end{cases} \tag{2.70}$$

видимо да није у питању стандардан модел са случајним коефицијентима, јер су коефицијенти a и b корелисани са ε_t.

2.11 ИСТОРИЈАТ МОДЕЛА СА ПРАГОВИМА

Моделе са праговима су промовисали Tong и Lim (1980), а као прва референца се свуда наводи Tong (1978). Међутим, занимљиво је да је потпуно исту идеју модела, у својој књизи (стр.29), дао Hackl (1980), позивајући се на једну референцу из 1963. године. Tong наводи да је инспирација за модел било емпиријско запажање да се понашање појединих система (појава) мења када нека променљива (у систему) пређе одређену вредност. Касније се показало да такви модели имају скоро сва својства нелинеарних система (Tong, 1983; Pemberton and Tong, 1983), а и добро апроксимирају нелинеарне временске серије (Petruccelli, 1992).

У познатој књизи о нелинеарним моделима (Tong, 1990) значајно место заузимају TAR модели. Chen (1993) разматра избор threshold променљиве у случају кад је она нелинеарна функција претходних опсервација. У прегледним радовима о нелинеарним моделима се такође наводе постојећи резултати о TAR моделима: Anděl (1989), Малишић (1992), De Gooijer (1992), Tjostheim (1994), Márkuez и Villazón (1999).

О стационарности, ергодичности и маргиналним расподелама SETAR модела има више радова, али у општем случају проблем још увек није до краја решен (Chan, Petruccelli, Tong and Woolford, 1985; Chan and Tong, 1985; Guo and Petruccelli, 1990; Pham, Chan and Tong, 1991; Lim, 1992; Liu and Susko, 1992; Anděl, Netuka and Zvara, 1984; Anděl and Barton, 1986; Anděl and Fuchs, 1987; Ђорић и Малишић, 1996, 1997, 1998).

Велика пажња је посвећена проблему оцене параметара, прагова и реда SETAR модела (Tsay, 1989, 2000; Chen and Tong, 1986, 1990; Chan, 1990, 1991, 1993; Wong and Li, 1999; Chen and Lee, 1995; Hansen, 1997, 1997a, 1999, 1999a; Schlittgen, 1997; Tong and Stenseth, 1997; Kapetanios, 1999, 2000; Lee and Sriram, 1999; Flaherty, 2000; De Gooijer, 2001).

Постоје и анализе о квалитету предвиђања помоћу SETAR модела (Clements, Franses and Smith, 1996, 1997; De Gooijer and De Bruin, 1997; Terui and Van Dijk, 1999; Clements and Franses, 1999), као и тестови за тестирање SETAR нелинеарности (Petruccelli and Davies, 1986; Mocanaddin and Tong, 1988; Chan, 1990; Chan and Tong, 1990; Ashley and Patterson, 1998; Clements and Smith, 1999; Berben and Van Dijk, 1999). Поред примера примене TAR модела које је дао Tong (1990), постоје и многи други, на пример, Henry, Olekalus and Summers (1998), Peel and Speight (1998, 1998a), Barnes (1999).

Неке теоријске аспекте и примену TUR и TSTUR модела су дали Gonzales и Gonzalo (1998, 1999), као и Caner и Hansen (2000). Модел TSTUR анализирају Gonzalo и Montesinos (2000). Модел MTAR су увели Enders и Granger (1996), а стационарност и ергодичност су разматрали Lee и Shin (2000).

SETMA модел је разматрао De Gooijer (1998), а SETARMA више аутора: Brockwell, Tweedie and Liu (1992), Ђорић и Малишић (1998), Sáfadi and Morettin (2001).

STAR моделе су увели Chan и Tong (1986). Идеја је била да промена режима у моделу, иако скоковита, буде глатка, односно да се промена параметара модела изврши непрекидном и глатком функцијом. Од бројних радова и резултата који су уследили треба поменути оне које су дали Teräsvirta, Tjostheim and

Granger (1994) и Luukkonen, Saikkonen and Teräsvirta (1988). Детаљан опис модела су у својој књизи дали Granger и Teräsvirta (1993). Примену STAR модела на моделирање индустријске производње су дали Terasvirta и Anderson (1992). У докторској тези Van Dijk (2000) разматра вишедимензионалне STAR моделе, као и тестирање у присуству outlier-a.

Tong (1990) је само наговестио могућност комбинације SETAR и ARCH модела, а Li и Lam (1995) су таквим моделом моделирали неке финансијске временске серије, при чему су асиметричност нивоа моделирали SETAR моделом, а зависност варијансе ARCH моделом. DTARCH моделе су увели Li и Li (1996), а даља разматрања услова стационарности и ергодичности дају Liu, Li и Li (1997). Wong и Li (1999) су разматрали тестирање хипотезе о DTARCH нелинеарности. Примену ових модела дају Gospodinov (2000) и Amendola и Niglio (2000). STAR моделе са ARCH резидуалима је разматрао Hagerund (1997) у својој докторској дисертацији.

Детаљну анализу TARSV модела је дао Breidt (2000), а моделима са вишедимензионалним праговима су се бавили Medeiros, Veiga and Resende (1999).

3

СТАЦИОНАРНОСТ И ЕРГОДИЧНОСТ

3.1 УВОД

Као што смо видели у глави 2, велики број нелинеарних модела временских серија може да се представи у облику модела процеса Маркова

$$\mathbf{X}_t = F(\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{e}_t), \tag{3.1}$$

дефинисаног на скупу R^k, где је $\{\mathbf{e}_t\}$ низ вишедимензионалних независних случајних величина и где је $\mathbf{e}_t$ независна од $\mathbf{X}_s$ за $s < t$. Отуда, нарочито последњих неколико година, у анализи нелинеарних временских серија посебну улогу имају процеси Маркова са непребројивим скупом стања.

Ако је Марковљев ланац $\{X_t\}$ са пребројивим скупом стања несводљив и апериодичан и ако има стационарну расподелу, онда расподела за X_t конвергира ка тој расподели. То је стандардан резултат у теорији Марковљевих ланаца. Међутим, за Марковљев процес са непребројивим скупом стања, проблем је далеко компликованији. Па ипак, под одређеним условима, и за такав процес важи сличан резултат, који је доказиван на различите начине од стране више аутора (Rosenthal, 1999).

Примена познатих, па чак и најновијих резултата о процесима Маркова, не даје директно употребљиве резултате о стационарности и ергодичности моделиране временске серије. Најчешће се добијају довољни услови за параметре модела који генерише стационаран процес. Посебно је запажена примена такозваних дрифт критеријума у којима се користи стохастичка Љапуновљева функција. Прве критеријуме тог типа је формулисао Tweedie (1975, 1976), али њихова примена је уследила много касније. Како слични критеријуми, везани за Љапуновљеву функцију, постоје и у теорији стабилности нелинеарних детерминистичких система, природно се намеће питање везе стационарности и ергодичности процеса (3.1) и стабилности одговарајућег детерминистичког система

$$\mathbf{X}^*_t = F(\mathbf{X}^*_{t-1}, 0). \tag{3.2}$$

Више аутора се бавило овим проблемом (Chan and Tong, 1985; Chan, 1990; Guegan and Nguyen, 1999; Cline and Pu, 2000), али дефинитиван одговор још увек није познат. За моделе који су разматрани у овом раду су дати одговарајући резултати или коментари везани за овај проблем.

У 3.2 су изложени основни појмови теорије Марковљевих процеса са непребројивим скупом стања и резултати који се примењују у анализи стационарности и ергодичности нелинеарних временских серија.

У 3.3 је дат детаљан преглед постојећих резултата о стационарности и ергодичности SETAR процеса првог реда. Посебна пажња је посвећена налажењу стационарних расподела у случају кад је позната расподела резидуала. За експоненцијалну, Лапласову и Ерлангову расподелу резидуала су добијени експлицитни изрази за стационарне маргиналне расподеле процеса.

У 3.4 су за SETAR модел другог реда, у случају јединичног кашњења, изведени довољни услови за геометријску ергодичност процеса.

У 3.5 су за SETAR модел вишег реда добијени нови, знатно блажи, услови за геометријску ергодичност процеса. У доказу су коришћени дрифт услови типа Фостер-Љапунова.

У 3.6 се техника из 3.5 проширује на процесе SETARCH, при чему су добијени довољни услови ергодичности.

У 3.7 је доказано да SETARMA модел има стационарно решење при врло благим ограничењима за процес иновација и при истим условима за коефицијенте AR делова модела при којима је познато да постоји стационарно решење SETAR модела. Другим речима, доказано је да у том случају MA делови модела не утичу на стационарност решења. Међутим, као и за SETAR модел, тако и за SETARMA модел остаје отворено питање потребних и довољних услова за стационарност. Исто тако, остаје хипотеза да делови модела између првог и задњег прага не утичу на стационарност.

3.2 ПРОЦЕСИ МАРКОВА - ПОЈМОВИ И РЕЛЕВАНТНИ РЕЗУЛТАТИ

Класична теорија Марковљевих ланаца подразумева коначан или пребројив скуп стања. Међутим, у многим применама је неопходно да скуп стања буде непребројив или чак само мерљив скуп. Показало се да и у том случају могу да се дефинишу аналогни појмови и да такав Марковљев ланац има сличну структуру као и онај са пребројивим скупом стања. Овде се укратко излажу основни појмови и резултати који се користе у анализи нелинеарних временских серија, при чему се, као за процес са дискретним временом, користи термин *процес* уместо *ланац*.

Нека је S скуп са Бореловим σ - пољем $\mathcal{B}$. Марковљев процес на $(S,\mathcal{B})$ је дефинисан вероватноћама прелаза $P(x,dy)$ (transition probabilities, transition laws, kernels), таквим да је $P(x,\cdot)$ вероватносна мера на S за свако $x \in S$ и да је $P(\cdot, A)$ мерљива функција за сваки скуп $A \in \mathcal{B}$. Величина $P(x, A)$ може да се интерпретира као вероватноћа да процес из стања x пређе у неко стање које припада скупу A. Матрици прелаза, у случају Марковог ланца, овде одговара скуп прелаза $\{P(x, A),\ x \in S, A \in \mathcal{B}\}$. Вероватноће прелаза вишег реда се дефинишу рекурзивно

$$P^{n+1}(x, A) = \int_S P^n(x, dy)P(y, A), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.3}$$

где је $P^1(x, dy) = P(x, dy)$.

За дате вероватноће прелаза $P(x, dy)$ постоје случајне променљиве $X_0, X_1, \ldots$ такве да је

$$P(X_{n+1} \in A \mid X_n = x) = P(x, A), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

При томе је

$$P^n(x, A) = P(X_n \in A \mid X_0 = x), \quad x \in S,\ A \in \mathcal{B}. \tag{3.5}$$

Уместо $P(\cdots \mid X_0 = x)$ често се пише $P_x(\cdots)$. Слично важи и за ознаку $E_x(\cdots)$, где је E очекивање случајне променљиве. За ненегативну функцију $f : S \to R$ и меру ν на $\mathcal{B}$ дефинишу се $P^k f$ и νP^k на следећи начин:

$$P^k f(x) = \int_S P^k(x, dy) f(y), \quad \nu P^k(A) = \int_S \nu(dx) P^k(x, A). \tag{3.6}$$

Низ случајних променљивих $\{X_n\}$ је генерисан са P и зовемо га Марковљевим процесом. Процес дефинисан са (3.1) је пример Марковљевог процеса.

Простор стања S, поред σ - поља, може да има и топологију $\mathcal{T}$. Тополошка структура простора $(S, \mathcal{T})$ омогућује разна својства Марковљевог процеса, као што је на пример, непрекидност функција P^n. Од значаја су, такође, компактни скупови који имају улогу коначних скупова у случају Марковљевих ланаца са пребројивим скупом стања. Исто тако, отворени скупови дају могућност да се дефинише несводљивост у односу на њих. Претпоставимо, дакле, да је у даљем тексту $(S, \mathcal{T})$ тополошки простор и уведимо следеће две дефиниције.

Дефиниција 3.1 *Марковљев процес $\{X_t\}$ је слабо непрекидан или слабо Фелеров ако је функција $x \mapsto P(x, O)$ непрекидна за сваки отворен скуп $O \in \mathcal{B}$.*

Дефиниција 3.2 *Марковљев процес $\{X_t\}$ је јако непрекидан или јако Фелеров ако је функција $x \mapsto P(x, A)$ непрекидна за сваки скуп $A \in \mathcal{B}$.*

Познато је да је Марковљев процес $\{X_t\}$ јако Фелеров ако је функција

$$x \mapsto \int_S g(y) P(x, dy) \tag{3.7}$$

непрекидна за сваку ограничену мерљиву функцију $g : R^k \to R$, а слабо Фелеров ако је функција (3.7) непрекидна за сваку непрекидну ограничену функцију g.

Ако је, на пример, $\{X_t\}$ дат са (3.1) и ако је F непрекидна функција, онда је $\{X_t\}$ слабо Фелеров. Напоменимо да се у литератури уместо јако Фелеров користи и термин Фелеров.

Јаче од слабе непрекидности, а слабије од јаке је такозвана T непрекидност која је дата у следећој дефиницији.

Дефиниција 3.3 *Марковљев процес $\{X_t\}$ је T - непрекидан или T - процес ако постоје непрекидна функција прелаза $T(\cdot, A)$ $(A \in \mathcal{B})$ и дистрибуција a_n на N такви да за $x \in S$ и $A \in \mathcal{B}$ важи*

$$\sum_n a_n P^n(x, A) \geq T(x, A), \quad T(x, S) > 0. \tag{3.8}$$

Показује се да T - процеси имају разна својства која повезују вероватносну и тополошку структуру процеса (Tweedie, 1998). За процес $\{X_t\}$ се уводи и појам ограничености у вероватноћи који изражава густину низа вероватноћа $\{P^n(x, \cdot)\}$.

Дефиниција 3.4 *Процес $\{X_t\}$ је ограничен у вероватноћи ако за свако $x \in S$ и $\varepsilon > 0$ постоји компактан скуп $K \subset S$ такав да је*

$$\liminf_{n \to \infty} P_x(X_n \in K) \geq 1 - \varepsilon.$$

За потребе примене на посматране моделе нелинеарних временских серија довољно је узети $S = R^k$. У том случају елементи скупа R^k ће, најчешће, бити означени масним словима.

3.2.1 Несводљивост

Нека је ϕ нетривијална σ - коначна мера на $(S, \mathcal{B})$, односно мера за коју је $\phi(S) > 0$. Следећом дефиницијом се уводи појам ϕ - несводљивости (irreducibility).

Дефиниција 3.5 *Марковљев процес $\{X_t\}$ је ϕ - несводљив ако за свако $x \in S$ и сваки скуп $A \in \mathcal{B}$ $(\phi(A) > 0)$ важи*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) > 0. \tag{3.9}$$

Ако постоји мера ϕ таква да $\{X_t\}$ је ϕ - несводљив, а није битна сама мера ϕ, може се краће рећи да је $\{X_t\}$ несводљив. Каже се још и да је ϕ мера несводљивости. Мера ϕ, дакле, описује све скупове у које процес улази из произвољног стања x. Ако је τ_A тренутак првог уласка процеса у скуп A, тј.

$$\tau_A = min\{n \mid X_n \in A\} \tag{3.10}$$

и ако је

$$L(x, A) = P_x(\tau_A < \infty), \tag{3.11}$$

према претходној дефиницији, процес $\{X_t\}$ је ϕ-несводљив ако за свако x важи

$$\phi(A) > 0 \Rightarrow L(x, A) > 0.$$

Дефинише се и несводљивост у односу на отворене скупове (open-set irreducibility) или o - несводљивост.

Дефиниција 3.6 *Марковљев процес $\{X_t\}$ је o - несводљив ако је $L(x, O) > 0$ за сваки $x \in S$ и сваки отворен скуп $O \in \mathcal{B}$.*

Следећа дефиниција уводи појам достижног стања.

Дефиниција 3.7 *Стање $x \in S$ је достижно ако је*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, O) > 0$$

за свако $y \in S$ и сваки отворен скуп O који садржи стање x.

Према претходним дефиницијама, свако стање $x \in S$ је достижно ако је процес o - несводљив.

Следеће тврђење (Tweedie, 1998) даје везу појмова несводљивости и T - својства процеса.

Теорема 3.1 *Ако је $x \in S$ достижно стање T - процеса, онда је тај процес ϕ - несводљив, при чему је $\phi(A) = T(x, A)$.*

Из овог тврђења следи да је o - несводљив T - процес истовремено и ϕ - несводљив и да је $\phi(O) > 0$ за сваки отворен скуп O.

Максимална мера

Ако је Марковљев процес несводљив, онда он има и такозвану *максималну* меру m несводљивости, односно такву да је:

(1) $L(x, A) > 0$ за свако x ако је $m(A) > 0$,

(2) $m(\{x \mid L(x, A) > 0\}) = 0$ ако је $m(A) = 0$.

Означимо са $\mathcal{B}^+$ колецију свих скупова $A \in \mathcal{B}$ за које је $m(A) > 0$. За ϕ-несводљив процес, из својстава (1) и (2) максималне мере следи да је $A \in \mathcal{B}^+$ ако је $\phi(A) > 0$.

Мали скупови

Својство несводљивости омогућава да се дефинише колекција скупова у $\mathcal{B}$ који имају слична својства као индивидуална стања у случају процеса са пребројивим простором стања.

Дефиниција 3.8 *Скуп $C \in \mathcal{B}$ је мали скуп Марковљевог процеса $\{X_t\}$ ако постоје природан број n, реалан број $\delta > 0$ и вероватносна мера ϕ такви да за свако $x \in C$ и свако $B \in \mathcal{B}$ важи*

$$P^n(x, B) \geq \delta\phi(B). \tag{3.12}$$

Свака тачка из S је мали скуп, али то је тривијалан случај. Под одређеним условима је сваки релативно компактан скуп мали (Feigin and Tweedie, 1985).

Теорема 3.2 *Ако је ϕ-несводљив процес $\{X_t\}$ слабо непрекидан, тада је сваки релативно компактан скуп A $(\phi(A) > 0)$ мали.*

Познат је следећи критеријум за мали скуп (Chan, 1990).

Теорема 3.3 *Борелов скуп C је мали ако постоји $A \in \mathcal{B}$ $(\phi(A) > 0)$ такав да за сваки подскуп B скупа A $(\phi(B) > 0)$ постоји природан број m такав да је*

$$\inf_{x \in C} \sum_{n=0}^{m} P^n(x, B) > 0. \tag{3.13}$$

Ако мали скуп (дефинисан мером ϕ) припада $\mathcal{B}^+$, онда је ϕ мера несводљивости, односно $\{X_t\}$ је несводљив. Везу несводљивости и малих скупова дају и следећа тврђења (Rosenthal 1999; Tweedie 1998).

Теорема 3.4 *Сваки ϕ - несводљив Марковљев процес садржи мали скуп C такав да је $\phi(C) > 0$.*

Теорема 3.5 *Ако је Марковљев процес несводљив, онда постоји пребројив покривач за S који се састоји искључиво од малих скупова, при чему сваки скуп из $\mathcal{B}^+$ садржи мали скуп, који је такође у $\mathcal{B}^+$.*

3.2.2 Апериодичност

Следећа дефиниција даје појам апериодичности процеса.

Дефиниција 3.9 *Марковљев процес је апериодичан ако не постоји разбијање*

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k, \quad k \geq 2,$$

такво да је

$$P(x, S_{i+1}) = 1, \quad x \in S_i \ (1 \leq i \leq k-1)$$

и $P(x, S_1) = 1$ *за* $x \in S_k$.

За проверу апериодичности постоји једноставан критеријум који даје следеће тврђење (Chan, 1990).

Теорема 3.6 *Марковљев процес* $\{X_t\}$ *је апериодичан ако и само ако постоје мали скуп* C *и* $n \in N$ *такви да за свако* $x \in C$ *важи*

$$P^n(x, C) > 0, \quad P^{n+1}(x, C) > 0.$$

Како сваки скуп $A \in \mathcal{B}$ $(\phi(A) > 0)$ садржи мали скуп, то важи и следеће тврђење.

Теорема 3.7 *Марковљев процес* $\{X_t\}$ *је апериодичан ако и само ако постоји* $A \in \mathcal{B}$ $(\phi(A) > 0)$ *такав да за сваки његов подскуп* B *за који је* $B \in \mathcal{B}$ *и* $\phi(B) > 0$ *важи*

$$P^n(x, B) > 0, \quad P^{n+1}(x, B) > 0$$

за свако $x \in B$.

T - непрекидни процеси уводе компактне скупове у вероватносни концепт о чему говори следеће тврђење.

Теорема 3.8 *Ако је процес* $\{X_t\}$ *несводљив, апериодичан и* T *- непрекидан, онда је сваки компактан скуп мали.*

3.2.3 Повратност и пролазност

За несводљив Марковљев процес се дефинишу појмови повратности (рекурентности) и пролазности (транзиентности) скупова у $\mathcal{B}^+$, аналогно истим појмовима за стања у случају Марковљевог процеса са пребројивим скупом стања.

Нека је η_A број улазака процеса $\{X_t\}$ у скуп A, односно нека је

$$\eta_A = \sum_{n=1}^{\infty} I(\mathrm{X} \in A). \tag{3.14}$$

Дефиниција 3.10 *Скуп* A *је пролазан или транзиентан ако је*

$$E_x(\eta_A) < M < \infty, \quad x \in A, \tag{3.15}$$

а повратан или рекурентан ако је

$$E_x(\eta_A) = \infty, \quad x \in A. \tag{3.16}$$

Појмови повратности и пролазности се уводе и за сам процес, што даје следећа дефиниција.

Дефиниција 3.11 *Несводљив процес је рекурентан, ако је сваки скуп из $\mathcal{B}^+$ рекурентан, а у противном је транзиентан.*

Како је

$$E_x(\eta_A) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(\mathrm{x}, A),$$

то значи да је процес $\{X_t\}$ рекурентан ако за сваки скуп $A \in \mathcal{B}^+$ важи

$$\sum_{i=1}^{\infty} P^n(\mathrm{x}, A) = \infty, \quad x \in S.$$

За транзиентне процесе важи следеће тврђење (Mayne and Tweedie, 1993a).

Теорема 3.9 *Ако је процес $\{X_t\}$ транзиентан, тада постоји пребројив покривач од транзиентних скупова и сваки мали скуп је транзиентан.*

Харисовска рекурентност

Постоји и строжији појам рекурентности који је, уместо помоћу $E_x(\eta_A)$, исказан помоћу $L(\mathrm{x}, A)$. Следеће две дефиниције уводе појам такозване *Харисовске* рекурентности.

Дефиниција 3.12 *Скуп A је Харисовски рекурентан ако је $L(x, A) = 1$ за $x \in A$.*

Дефиниција 3.13 *Несводљив Марковљев процес је Харисовски рекурентан ако је сваки скуп из $\mathcal{B}^+$ Харисовски рекурентан.*

За T - непрекидне процесе постоји веза између вероватносних и тополошких појмова коју даје следећа теорема.

Теорема 3.10 *Нека T - непрекидан процес $\{X_t\}$ има бар једно достижно стање и нека $\mathrm{X} \to \infty$ означава да процес у сваки компактан скуп улази само коначно много пута. Тада је $\{X_t\}$ Харисовски рекурентан ако и само ако је $P_x\{\mathrm{X} \to \infty\} = 0$ за свако $x \in S$.*

Фостер - Љапуновљеви услови

За несводљиве Марковљеве процесе за рекурентност је довољно постојање ненегативне функције V која ван неког малог скупа испуњава такозване Фостер-Љапуновљеве или дрифт (drift) услове (Tweedie, 1998).

Теорема 3.11 *Ако је Марковљев процес $\{X_t\}$ несводљив и ако постоји мали скуп C и ненегативна функција V такви да је*

$$\int_S P(x, dy)V(y) \le V(x), \quad x \notin C \tag{3.17}$$

и ако је $\{y \mid V(y) \le n\}$ мали скуп за сваки природан број n, тада је $\{X_t\}$ Харисовски рекурентан.

Постоји и општији услов, где уместо неједнакости (3.17) фигурише неједнакост

$$\int_S P^{n(x)}(x,dy)V(y) \le V(x), \quad x \notin C, \tag{3.18}$$

при чему је $n : S \to N$ мерљива функција (Meyn and Tweedie, 1993a).

За транзиентност, такође, постоји одговарајући услов о чему говори следећа теорема.

Теорема 3.12 *Марковљев процес $\{X_t\}$ је транзиентан ако постоји ограничена функција V таква да за неко $r \in R$ је*

$$\{y \mid V(y) \le r\} \in \mathcal{B}^+, \quad \{y \mid V(y) > r\} \in \mathcal{B}^+$$

и да је

$$\int_S P(x,dy)V(y) > V(x), \quad x \notin \{y \mid V(y) \le r\}. \tag{3.19}$$

Избор функције V зависи од структуре процеса $\{X_t\}$.

3.2.4 Стационарност

Једно од најважнијих својстава Марковљевих процеса је постојање стационарне расподеле, што може да се искаже преко услова за инваријантну меру коју даје следећа дефиниција.

Дефиниција 3.14 *σ - коначна мера ν је инваријантна ако је*

$$\nu(A) = \int_S P(x,A)\nu(dx) \tag{3.20}$$

за свако $A \in \mathcal{B}$.

Постојање коначне инваријантне мере издваја класу Марковљевих процеса за које постоји стационарна расподела.

Дефиниција 3.15 *Марковљев процес $\{X_t\}$ је позитиван ако постоји инваријантна мера која је коначна.*

Ако је Марков процес $\{X_t\}$ позитиван са инваријантном мером ν, онда просто нормирањем те мере добијамо инваријантну вероватносну меру, па према томе постоји и строго стационарна расподела.

Услови постојања стационарне расподеле, односно инваријантне вероватносне мере могу да се искажу преко услова за $P^n(x,A)$. Ако је m коначна мера и ако из $m(A) = 0$ следи да је $P(x,A) = 0$ за свако $A \in \mathcal{B}$, онда потребан и довољан услов за постојање коначне инваријантне мере ν је да постоји скуп A_0 ($m(A_0) > 0$) такав да је

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P^i(x,A) > 0 \tag{3.21}$$

за свако $x \in A_0$. При томе је

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i(A), \tag{3.22}$$

где је

$$P_i(A) = \int_S P^i(x,A)m(dx). \tag{3.23}$$

Важи следеће тврђење (Meyne and Tweedie, 1993a).

Теорема 3.13 *Ако је процес $\{X_t\}$ Харисовски рекурентан, тада постоји инваријантна мера.*

За T-непрекидне процесе постоји еквивалентан услов за стационарност који је дат у следећем тврђењу.

Теорема 3.14 *Нека T - непрекидан процес $\{X_t\}$ има бар једно достижно стање. Тада је $\{X_t\}$ позитиван и Харисовски рекурентан ако и само ако је ограничен у вероватноћи.*

Услови Doeblin - а

Услови Doeblin - а, који су одавно познати (Doob, 1953), су дати следећом дефиницијом.

Дефиниција 3.16 *Марковљев процес $\{X_t\}$ са простором стања S задовољава Doeblin - ов услов ако постоје природан број n, реалан позитиван број ε и вероватносна мера ν, дефинисана на Бореловим скуповима простора S, такви да за свако $x \in S$ и свако $A \in \mathcal{B}(S)$ важи:*

$$\nu(A) \le \varepsilon \;\Rightarrow\; P^n(x,A) \le 1-\varepsilon.$$

Значај *Doeblin* - овог услова је у томе што обезбеђује постојање стационарне расподеле (Tong, 1990).

Теорема 3.15 *Ако Марковљев процес $\{X_t\}$ задовољава Doeblin - ов услов, онда постоји стационарна расподела за $\{X_t\}$.*

Doeblin - ов услов захтева да процес из било ког стања x у S са великом вероватноћом прелази, за фиксиран коначан број корака, у 'центар' простора

S. Функција ν^0 дефинисана са

$$\nu^0(x, A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P^i(x, A) \tag{3.24}$$

одређује стационарну расподелу за свако $x \in S$.

Инваријантна мера ν може да се представи преко мера ν_i^0 везаних за инваријантне скупове дефинисане следећим двема дефиницијама.

Дефиниција 3.17 *Скуп $A \in \mathcal{B}$ је инваријантан ако је $P(x, A) = 1$ за свако $x \in A$.*

Дефиниција 3.18 *Инваријантан скуп A је минималан ако не садржи неки други инваријантан скуп.*

Претпоставимо да је за Марковљев процес испуњен услов *Doeblin* - а за меру m. Тада за непразан инваријантан скуп A важи $m(A) > \varepsilon$, па различитих минималних инваријантних скупова простора S нема више од $m(S)/\varepsilon$. Нека је $A_1, A_2, \ldots, A_k$ систем дисјунктних минималних инваријантних скупова простора S. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x, \cup_{i=1}^{k} A_i) = 1$$

за свако $x \in S$. Другим речима, процес из тачке $x \in S$ са вероватноћом 1, после коначног броја корака, улази у један од инваријантних скупова $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и остаје заувек у њему. При томе је стационарна расподела $\nu^0(x, A)$ за све тачке x које припадају истом инваријантном скупу, односно

$$\nu^0(x, A) = \nu_i^0(A), \;\; A \in \mathcal{B}$$

за свако $x \in A_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Свака инваријантна мера ν простора S је коначна и представља линеарну комбинацију узајамно ортогоналних вероватносних мера ν_i^0 $(i = 1, \ldots, k)$.

Услов равномерне пребројиве адитивности

Liu и Susko (1992) су, инспирисани радовима Бенеша (Beneš, 1967), дали општи услов стационарности Марковаљевог процеса дефинисаног на локално компактном комплетно сепарабилном метричком простору. Наиме, Бенеш је дао услове постојања коначне позитивне инваријантне мере за непрекидне процесе Маркова. Бенешове услове униформне непрекидности функције прелаза Liu и Susko (1992) су прилагодили дискретном процесу, тако што су дефинисали услове за функцију прелаза који имплицирају униформну пребројиву адитивност.

Први услов се односи на функцију прелаза.

Услов 3.1 *За функцију прелаза $P(x, A)$ важи*

$$\lim_{A_n \downarrow \emptyset} \sup_{x \in K} \{P(x, A_n)\} = 0 \tag{3.25}$$

за сваки компактан скуп K метричког простора S у коме су сваки отворен и сваки затворен скуп $\mathcal{B}$ - мерљиви.

Ако је, на пример,

$$P(x, A) = \int_A p(x, y) m(dy), \quad x \in S, \ A \in \mathcal{B},$$

где је m коначна мера на компактним скуповима, тада је претходни услов испуњен ако за сваки компактан скуп K важи

$$p(x, y) \leq \alpha_K, \quad x, y \in K$$

и

$$\sup_{x \in K} Pf = \beta_K < \infty$$

за неку функцију $f : S \to R^+$ и константе α_K и β_K.

Други услов се односи на низ вероватноћа прелаза.

Услов 3.2 *Постоји вероватносна мера P_0 таква да је*

$$\sup_{t \geq 1} \int_S \int_S g(y) P^t(x, dy) P_0(dx) \ < \ \infty. \tag{3.26}$$

Liu и Susko су коментарисали да овај услов контролише све вероватноће прелаза и то су упоредили са низом парцијалних сума датог реда. Они су доказали следеће тврђење.

Теорема 3.16 *За Марковљев процес $\{X_t\}$ постоји коначна позитивна инваријантна мера ν ако и само ако постоји ненегативна функција $g : S \to [0, \infty]$ таква да*

$$\inf_{x \in K_n^C} g(x) \to \infty, \quad K_n \uparrow S \tag{3.27}$$

за неку колекцију компактних скупова K_n и ако су испуњени услови 3.1 и 3.2.

У доказу ове теореме аутори су користили резултат о фиксној тачки за линеарна пресликавања T_n, дефинисана са

$$T_n \mu(\cdot) = \int_S P^n(x, \cdot) \mu(dx) \tag{3.28}$$

на линеарном простору (Банаховом) свих $\mathcal{B}$-мерљивих, реалних, коначних функција μ које су пребројиво адитивне на $\mathcal{B}$.

Фостер - Љапуновљеви услови

Пре појаве резултата претходне теореме, под различитим условима, коришћени су критеријуми типа Фостер - Љапуновљевих услова који тестирају такозвани дрифт (drift) услов на тест скупу C.

Услов 3.3 *Постоје ненегативна функција V, позитиван број ε и коначан број b такви да је $V(x) < \infty$ бар за једно x и*

$$\int_S P(x,dy)V(y) \leq V(x) - \varepsilon + bI(x \in C). \tag{3.29}$$

Тест скуп C је најчешће компактан, а уместо равномерне пребројиве адитивности коришћени су услови јаке или слабе непрекидности функције прелаза или различити услови несводљивости. На пример, важе тврђења (Tweedie 1975, 1988) изражена у следећим теоремама.

Теорема 3.17 *Ако је $\{X_t\}$ φ - несводљив и ако за неки мали скуп C важи услов 3.3, тада за $\{X_t\}$ постоји инваријантна вероватносна мера.*

Теорема 3.18 *Ако је $\{X_n\}$ слаб Фелеров процес и ако за неки компактан скуп C важи услов 3.3, тада за $\{X_n\}$ постоји инваријантна вероватносна мера.*

За обрнуто тврђење видети Costa and Dufour (2000).

Услов 3.3 заправо значи да постоје позитивни бројеви c_1 и c_2 такви да је

$$\int_S P(x,dy)V(y) \leq V(x) - c_1, \quad x \notin C \tag{3.30}$$

и

$$\int_S P(x,dy)V(y) \leq c_2, \quad x \in C. \tag{3.31}$$

Релација (3.30) може да се запише и у облику

$$PV(x) \leq V(x) - \varepsilon + bI(x \in C) \tag{3.32}$$

или у облику

$$E\left(V(X_{t+1}) \mid X_t = x\right) \leq V(x) - \varepsilon + bI(x \in C). \tag{3.33}$$

Ако је $S = R^k$, може да се узме $V(x) = ||x||$, па услов (3.33) постаје

$$E\left(||X_{t+1}|| \mid X_t = x\right) \leq ||x|| - \varepsilon + bI(x \in C). \tag{3.34}$$

Исто тако, услов (3.26) значи да је

$$\sup_{n \geq 1} E\left(g(X_n) \mid X_0 = x\right) < +\infty. \tag{3.35}$$

Иста тврђења важе и ако се уместо услова 3.3 користи следећи строжији услов.

Услов 3.4 *Постоје ненегативна функција V, коначан број b и број λ $(0 < \lambda < 1)$ такви да је*

$$\int_S P(x,dy)V(y) \le \lambda V(x) + bI(x \in C). \tag{3.36}$$

Meyn и Tweedie (1993) су дали уопштење дрифт услова који зависе од стања

$$\int_S P^{n(x)}(x,dy)V(y) \le V(x) - n(x) + bI(x \in C), \tag{3.37}$$

односно

$$\int_S P^{n(x)}(x,dy)V(y) \le \lambda^{n(x)}V(x) + bI(x \in C), \tag{3.38}$$

као и одговарајућа тврђења.

Девет година након идеје да се уместо услова несводљивости и непрекидности користи услов равномерне пребројиве адитивности (Liu and Susko, 1992), Fonseca и Tweedie (2001) су анализирали комбинацију drift услова и услова 3.3. Они су показали да услов 3.3, који контролише све вероватноће прелаза, може да се замени условом за вероватноћу прелаза за један корак. Нека је, на пример,

$$\int_S P(x,dy)g(y) \le \lambda g(x) + b, \tag{3.39}$$

где је g ненегативна функција, $0 < \lambda < 1$ и $b < \infty$. Тада је

$$\begin{aligned}
E\left(g(X_n) \mid X_0 = x\right) &= E\left(E\left(\cdots E\left(g(X_n) \mid X_{n-1}\right)\cdots\right) \mid X_0 = x\right)\\
&\le E\left(\cdots E\left(\lambda g(X_{n-1}) + b \mid X_{n-2}\right)\cdots \mid X_0 = x\right)\\
&\le E\left(\cdots E\left(\lambda(\lambda g(X_{n-2}) + b) + b \mid X_{n-3}\right)\cdots \mid X_0 = x\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\le E\left(\lambda^{n-1}g(X_1) + \lambda^{n-2}b + \cdots + \lambda b + b \mid X_0 = x\right)\\
&\le \lambda^n g(x) + b\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i\\
&= \lambda^n g(x) + b\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

Према томе,

$$\sup_{n\ge 1} E\left(g(X_n) \mid X_0 = x\right) \le g(x) + \frac{b}{1-\lambda} < +\infty,$$

што значи да је испуњен услов (3.35). Fonseca и Tweedie су доказали да услов 3.3 следи и из дрифт услова типа (3.37) и (3.38). На основу тога и претходне теореме имамо нови услов за постојање стационарне вероватносне мере за $\{X_n\}$.

Теорема 3.19 *Ако за низ $\{X_n\}$ важи услов равномерне пребројиве адитивности и ако важи дрифт услов (3.39), где је $g(x) \geq 1$, а V непрекидна функција, тада за $\{X_n\}$ постоји инваријантна вероватносна мера.*

Fonseca и Tweedie су такође показали, на примерима, да из услова равномерне пребројиве адитивности не следе услови несводљивости и непрекидности и обрнуто.

Услови стабилности

Ако је $S = R^k$, за Марковљев процес $\{X_t\}$ могу да се дефинишу и услови стабилности који уз додатне претпоставке о функцији прелаза гарантују постојање инваријантне расподеле. То су следећа два услова.

Услов 3.5 *За Марковљев процес $\{X_t\}$ важи*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} ||X_k||^2 < \infty. \qquad (3.40)$$

Услов 3.6 *За Марковљев процес $\{X_t\}$ важи*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\left(||X_k||^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) < \infty, \qquad (3.41)$$

где је $\mathcal{F}_{k-1}$ ознака за σ - алгебру одређену са $X_1, \ldots, X_{k-1}$.

Meyn и Caines (1987) су доказали следеће тврђење.

Теорема 3.20 *Ако функција прелаза Марковљевог процеса $\{X_t\}$ има Фелерово својство и ако је испуњен Услов 3.5 или Услов 3.6 за неку почетну расподелу, онда постоји инваријантна расподела ν таква да X_k има расподелу ν за свако $k \in N$ ако X_0 има расподелу ν.*

3.2.5 Ергодичност

Нека је π инваријантна мера и нека је $||\cdot||$ норма тоталне варијације, дефинисана са

$$||P^n(x,\cdot) - \pi|| = \sup_{A\in\mathcal{B}} |P^n(x,A) - \pi(A)|. \qquad (3.42)$$

Важи следеће тврђење.

Теорема 3.21 *Ако је $\{X_t\}$ несводљив, апериодичан, позитиван са инваријантном мером π, тада*

$$||P^n(x,\cdot) - \pi|| \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (3.43)$$

У општем случају услов (3.43) се узима за дефиницију ергодичности процеса.

Дефиниција 3.19 *Марковљев процес са инваријантном мером π је ергодичан ако за свако $x \in S$ важи (3.43).*

Из претходне теореме следи да је несводљив, апериодичан и позитиван Марковљев процес ергодичан. Слично тврђење важи и ако норму тоталне варијације заменимо такозваном f - нормом дефинисаном са

$$||P^n(x,\cdot)-\pi||_f = \sup_{|g|\leq f}\left|\int_S P^n(x,dy)g(y) - \int_S \pi(dy)g(y)\right|,$$

где је f ненегативна функција.

Теорема 3.22 *Ако је $\{X_t\}$ несводљив, апериодичан и позитиван Марков процес, тада за сваку ненегативну функцију f за коју је $\int_S f(x)\pi(dx) < \infty$ важи*

$$||P^n(x,\cdot)-\pi||_f \to 0 \quad (n\to\infty)$$

за свако $x \in S$.

Геометријска ергодичност

Ако је процес ергодичан, може се поставити питање брзине конвергенције у (3.43). Геометријска брзина је дата следећом дефиницијом.

Дефиниција 3.20 *Ако постоје константе $\rho < 1$ и $M_x < \infty$ (за $x \in S$) такве да је за свако $n \in N$*

$$||P^n(x,\cdot)-\pi|| \leq M_x\rho^n, \tag{3.44}$$

тада је $\{X_t\}$ геометријски ергодичан.

Довољне услове геометријске ергодичности имамо у следећем тврђењу.

Теорема 3.23 *Нека је $\{X_t\}$ несводљив, апериодичан и позитиван и нека постоји мали скуп $C \in \mathcal{B}^+$ и константе M_c и ρ_c такве да је за свако $n \in N$*

$$|P^n(x,C)-\pi(C)| \leq M_c\rho_c^n, \quad x\in C. \tag{3.45}$$

Тада је $\{X_t\}$ геометријски ергодичан.

Геометријска ергодичност може да се искаже и помоћу τ_c (тренутак првог уласка процеса у скуп C).

Теорема 3.24 *Несводљив апериодичан процес $\{X_t\}$ је геометријски несводљив ако и само ако постоји мали скуп C такав да је*

$$\sup_x E_x\left(\beta^{\tau_C}\right) < \infty \tag{3.46}$$

за неко $\beta > 1$.

Дрифт услови

Као за стационарност, тако и за ергодичност постоје одговарајући дрифт услови. На основу теореме 3.21 и теореме 3.17 имамо следеће тврђење.

Теорема 3.25 *Ако је процес $\{X_t\}$ несводљив и апериодичан и ако за неки мали скуп C важи Услов 3.3, тада он има инваријантну меру π за коју важи (3.43).*

Дакле, несводљив и апериодичан процес је ергодичан ако је испуњен Услов 3.3. За геометријску ергодичност је потребан Услов 3.4. То даје следећа теорема.

Теорема 3.26 *Несводљив, апериодичан процес $\{X_t\}$ је геометријски ергодичан ако и само ако постоји мали скуп C на коме важи Услов 3.4.*

Исто тврђење важи и ако уместо услова (3.36) користимо услов (3.38) који зависи од стања.

Услов геометријске ергодичности може да се искаже и у другом облику.

Теорема 3.27 *Ако за несводљив и апериодичан Марковљев процес $\{X_t\}$ постоје мали скуп C, ненегативна функција V, позитивни реални бројеви M и ε и реалан број $r > 1$ такви да је*

$$rE(V(X_t) \mid X_{t-1} = x) < V(x) - \varepsilon, \quad x \notin C, \tag{3.47}$$

$$E(V(X_t) \mid X_{t-1} = x) < M, \quad x \in C, \quad x \in C, \tag{3.48}$$

тада је $\{X_t\}$ геометријски ергодичан.

Уместо наведених критеријума за геометријску ергодичност могу да се користе аналогни критеријуми за више корака унапред. Основу за то чини резултат који је дао Tjostheim (1990).

Теорема 3.28 *Нека је Марковљев процес $\{X_t\}$ апериодичан и $k \in N$. Ако је процес $\{X_{kt}\}$ геометријски ергодичан, онда је и $\{X_t\}$ геометријски ергодичан.*

Ако на процес $\{X_{kt}\}$ применимо критеријуме (3.47) и (3.48) из теореме 3.27, онда на основу претходне теореме добијамо модификоване критеријуме за геометријску ергодичност.

Теорема 3.29 *Ако за несводљив и апериодичан Марков процес $\{X_t\}$ постоје мали скуп C, ненегативна функција V, позитивни реални бројеви M и ε, реалан број $r > 1$ и природан број k такви да је*

$$rE(V(X_{t+k}) \mid X_t = x) < V(x) - \varepsilon, \quad x \notin C, \tag{3.49}$$

$$E(V(X_{t+k}) \mid X_t = x) < M, \quad x \in C, \quad x \in C, \tag{3.50}$$

тада је $\{X_t\}$ геометријски ергодичан.

Наведена тврђења су из различитих референци, а већина је дата и у познатој књизи о Марковљевим процесима (Mayn and Tweedie, 1993).

3.3 SETAR ПРОЦЕС ПРВОГ РЕДА

Полазећи од услова стационарности линеарног AR(1) модела Pemberton и Tong (1983) су закључили да је SETAR(2;1,1) процес генерисан моделом

$$X_t = \alpha X_{t-1}^{+} + \beta X_{t-1}^{-} + \varepsilon_t \tag{3.51}$$

стационаран ако је $|\alpha| < 1$ и $|\beta < 1$. Међутим, Petruccelli и Woolford (1984) су доказали да је

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad \alpha\beta < 1 \tag{3.52}$$

потребан и довољан услов да $\{X_t\}$ буде ергодичан процес. Тек седам година касније су се појавили резултати о условима ергодичности SETAR (2;1,1) процеса у случају кад је $d > 1$ (Chen and Tsay, 1991; Lim, 1992). Одговарајући резултат за SETAR($l; 1, \ldots, 1$) процес, у случају $d = 1$ (Chan, Petruccelli, Tong and Woolford, 1985), показује да на ергодичност процеса утичу само параметри првог и последњег подмодела процеса.

У случају кад је процес $\{X_t\}$ стационаран, важно је знати његову стационарну расподелу. Међутим, проблем одређивања стационарне расподеле на основу доступних информација није нимало једноставан. За моделе са праговима, па чак и за SETAR модел првог реда има релативно мало резултата. За $\beta = -\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ постоји експлицитан израз за густину стационарне расподеле процеса $\{X_t\}$ у случају кад је $\{e_t\}$ низ променљивих са нормалном расподелом (Anděl, Netuka i Zvána, 1984) и у случају кад је $\{e_t\}$ низ променљивих са Кошијевом расподелом (Anděl, Bartoň, 1986). Исто тако за $\beta = -\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, добијена је стационарна расподела процеса у случају кад је $\{e_t\}$ низ променљивих са експоненцијалном расподелом (Ђорић и Малишић, 1996). Посебно је занимљиво да се за $\alpha = 1$ добија стационаран процес чија је маргинална расподела Лапласова. За $\alpha = 1$ и $\beta < 0$ такође је добијена експлицитна формула за густину стационарне расподеле.

3.3.1 Ергодичност

Област вредности параметара SETAR модела за које је процес генерисан тим моделом ергодичан битно зависи од вредности кашњења d.

Случај $d = 1$

Нека је дат модел (3.51) где је $\{\varepsilon_t\}$ низ независних случајних величина које имају исте расподеле са свуда позитивном густином f на R и са очекивањем 0. Низ $\{X_t\}$ је Марковљев процес који је апериодичан и μ - несводљив, где је μ Лебегова мера на R. Простор стања процеса $\{X_t\}$ је $(R,\mathcal{B})$. Ако је $P(x,A)$ функција прелаза дефинисана са

$$P(x,A)=\int_A p(x,y)dy, \quad x\in R, \quad A\in\mathcal{B}, \tag{3.53}$$

где је

$$p(x,y)=f(y-\alpha x_+ -\beta x_-), \tag{3.54}$$

тада је $\{P(x,\cdot)\}$ строго непрекидна функција. За ергодичност процеса $\{X_t\}$, према услову који је дао Tweedie (1975), довољно је да постоји компактан скуп K, позитивне Лебегове мере, и ненегативна функција $g:R\to R$ за које важи:

$$\int_R p(x,y)g(y)dy\le g(x)-1, \quad x\notin K, \tag{3.55}$$

$$\int_R P(x,y)g(y)dy\le C<\infty, \quad x\in K. \tag{3.56}$$

Претпоставимо да је испуњен услов (3.52). Тада постоје позитивне константе a и bтакве да је

$$\alpha>-\frac{a}{b}, \quad \beta>-\frac{b}{a}, \tag{2.57}$$

а за функцију g дефинисану са

$$g(x)=\begin{cases} ax, & x>0,\\ -bx, & \le 0,\end{cases} \tag{3.58}$$

постоји број $M>0$ такав да на скупу $K=[-M,M]$ важе услови (3.55) и (3.56). Према томе, услови (3.52) су довољни за ергодичност SETAR процеса $\{X_t\}$. Међутим, Petruccelli и Woolford (1984) су доказали да су ти услови и потребни, односно да је $\{X_t\}$ неергодичан ако је $\alpha\ge 1$ или $\beta\ge 1$ или $\alpha<0$ и $\alpha\beta\ge 1$. Дакле, за SETAR(2;1,1) важи следеће тврђење.

Теорема 3.30 *Процес дефинисан моделом (3.51) је ергодичан ако и само ако важе услови (3.52).*

Сличном техником Chan, Petruccelli, Tong и Woolford (1985) су дали потребне и довољне услове за SETAR($l;1,\ldots,1$) процес дефинисан са

$$X_t=\sum_{k=1}^{l}(a_k+b_kX_{t-1}+\varepsilon_t)\,I(X_{t-1}\in R_k). \tag{3.59}$$

На пример, ако је

$$b_1<1, \quad b_l<1, \quad b_1b_l<1 \tag{3.60}$$

и ако је

$$-\frac{b}{a} < b_1 < 1, \quad -\frac{a}{b} < b_l < 1, \tag{3.61}$$

тада за функцију g дефинисану са (3.58) постоји број $M > 0$ такав да на скупу K важе услови (3.55) и (3.56), где је

$$p(x,y) = \sum_{k=1}^{l} f(y - a_k - b_k x) I(x \in R_k). \tag{3.62}$$

При томе, $\{X_t\}$ је μ несводљив и апериодичан. Према томе, у овом случају на ергодичост утичу само параметри првог и последњег подмодела SETAR процеса. Међутим, исто важи и за неке друге вредности параметара.

Теорема 3.31 *Процес $\{X_t\}$ дефинисан са (3.59) је ергодичан ако и само ако је испуњен један од следећих услова:*

(1) $b_1 < 1,\ b_l < 1,\ b_1 b_l < 1$;

(2) $b_1 = 1,\ b_l < 1,\ a_1 > 0$;

(3) $b_1 < 0,\ b_l = 1,\ a_l < 0$;

(4) $b_1 = 1,\ b_l = 1,\ a_1 > 0,\ a_l < 0$;

(5) $b_1 b_l = 1,\ b_1 < 0,\ a_l + a_1 b_l > 0$.

У оквиру доказа ове теореме аутори су показали да је процес транзиентан ако је $b_1 > 1$ или $b_l > 1$ или $b_1 b_l > 1$, а у осталим случајевима кад је процес неергодичан, они су поставили хипотезу да је процес рекурентан и да није позитиван, али то нису могли ни да докажу ни да оповргну. Неколико година касније показало се да је њихова претпоставка била погрешна. Наиме, Guo и Petruccelli (1991) су дали одговор за комплетну област на којој је процес $\{X_t\}$ неергодичан. При томе су претпоставили да је варијанса резидуала коначна, односно да важи следећи услов.

Услов 3.7 *За процес $\{\varepsilon_t\}$ је $E(\varepsilon_t^2) < +\infty$.*

Претходна теорема, наравно, важи ако је овај услов испуњен, а следеће две теореме садрже одговарајуће резултате у случају нергодичности процеса $\{X_t\}$.

Теорема 3.32 *Процес дефинисан са (3.59) за који важи услов 3.7 је рекурентан, али не и позитиван, ако и само ако важи један од услова:*

(1) $b_1 < 1,\ b_l = 1,\ a_l = 0$;

(2) $b_1 = 1,\ b_l < 1,\ a_1 = 0$;

(3) $b_1 = b_l = 1,\ a_l = 0,\ a_1 \geq 0$;

(4) $b_1 = b_l = 1,\ a_l < 0,\ a_1 = 0;$

(5) $b_1 < 0,\ b_1 b_l = 1,\ a_l + a_1 b_l = 0.$

Теорема 3.33 *Процес дефинисан са (3.59) за који важи услов 3.7 је транзиентан ако и само ако важи један од услова:*

(1) $b_1 > 1;$

(2) $b_l > 1;$

(3) $b_1 = 1,\ b_l \leq 1,\ a_1 < 0;$

(4) $b_1 \leq 1,\ b_l = 1,\ a_l > 0;$

(5) $b_1 < 0,\ b_1 b_l > 1;$

(6) $b_1 < 0,\ b_1 b_l = 1,\ a_l + a_1 b_l < 0.$

За следеће тврђење је потребан нови услов.

Услов 3.8 *За процес* $\{\varepsilon_t\}$ *је* $E|\varepsilon_t|^k < +\infty$ $(k \in N)$.

Ако се уместо функције g дефинисане са (3.58) узме функција дата са

$$g(x) = \begin{cases} a^k x^k + c, & x > 0, \\ b^k |x|^k + c, & x \leq 0, \end{cases} \tag{3.63}$$

где је $c > 0$ и где важи (3.57), добија се, при одговарајућим условима за c, тврђење за k - те моменте процеса $\{X_t\}$ (Petruccelli and Woolford, 1984).

Теорема 3.34 *Ако је за неко* $k \in N$ *испуњен услов 3.8 и ако за модел (3.51) важи (3.52), онда је процес* $\{X_t\}$ *геометријски ергодичан, а стационарна расподела има коначан* k *- ти моменат.*

Претходни резултати се односе на SETAR модел са јединичним кашњењем, односно за случај $d = 1$. У случају $d > 1$, динамика процеса је знатно сложенија, а тиме и утицај параметра d на услове ергодичности.

Случај $d > 1$

За ергодичност модела

$$X_t = \begin{cases} aX_{t-1} + \varepsilon_t, & X_{t-d} \leq 0 \\ bX_{t-1} + \varepsilon_t, & X_{t-d} > 0 \end{cases} \tag{3.64}$$

где су $X_{-d+1}, \ldots, X_0$ почетне вредности, а d природан број већи од 1, нису довољни услови

$$a < 1, \quad b < 1, \quad ab < 1. \tag{3.65}$$

Наиме, ако су a и b истог знака, ови услови су довољни, али ако су a и b супротног знака, онда поред њих треба имати и неке додатне услови. За $a \geq 0$ и $b \geq 0$ процес је ергодичан ако и само ако је $a < 1$ и $b < 1$. Довољност ових услова следи из тога што је сваки од режима $\{X_{t-d} \leq 0\}$ и $\{X_{t-d} > 0\}$ геометријски ергодичан за $a < 1$ и $b < 1$, а неопходност из тога што је процес $\{X_t\}$ за $a \geq 1$ или $b \geq 1$ експлозиван.

За $a < 0$ и $b < 0$ из једнакости

$$\begin{aligned} X_{t+2} &= aX_{t+1}I(X_{t-d+2} \leq 0) + bX_{t+1}I(X_{t-d+2} > 0) + \varepsilon_{t+2} \\ &= a^2X_tI(X_{t-d+2} \leq 0)I(X_{t-d+1} \leq 0) + abX_tI(X_{t-d+2} \leq 0)I(X_{t-d+1} > 0)+ \\ &\quad abX_tI(X_{t-d+2} > 0)I(X_{t-d+1} \leq 0) + b^2X_tI(X_{t-d+2} > 0)I(X_{t-d+1} > 0)+ \\ &\quad a\varepsilon_{t+1}I(X_{t-d+2} \leq 0) + b\varepsilon_{t+1}I(X_{t-d+2} > 0) + \varepsilon_{t+2} \\ &= abX_t + (a^2 - ab)X_tI(X_{t-d+2} \leq 0)I(X_{t-d+1} \leq 0)+ \\ &\quad (b^2 - ab)X_tI(X_{t-d+2} > 0)I(X_{t-d+1} > 0)+ \\ &\quad a\varepsilon_{t+1}I(X_{t-d+2} \leq 0) + b\varepsilon_{t+1}I(X_{t-d+2} > 0) + \varepsilon_{t+2} \end{aligned}$$

се изводи да је

$$E\{|X_{t+2}| \mid X_t\} \leq ab|X_t| + c, \tag{3.66}$$

где је c константа. Из ове неједнакости се лако доказује да за низ $\{X_{2t}\}$ важе услови (3.55) и (3.56), па на основу услова које је дао Tjostheim закључујемо да је $\{X_t\}$ геометријски ергодичан. При томе, за $ab \geq 1$ процес $\{X_t\}$ није ергодичан.

За $a > 0$ и $b < 0$ Chen и Tsay (1991) су показали да је за ергодичност потребан и додатни услов

$$a^{\alpha(d)}b^{\beta(d)} < 1,$$

где су $\alpha(d)$ и $\beta(d)$ цели бројеви који зависе од d, при чему је α непаран, а β паран број. Они су дали и конкретне вредности α и β за $d = 1, 2, \ldots, 18$. Општи поступак за налажење тих вредности се формулише преко d - димоензионалних бинарних низова.

Нека је

$$S = \{\mathrm{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \mid a_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, d\} \tag{3.67}$$

и нека је пресликавање $f : S \to S$ дефинисано са

$$f(\mathrm{a}) = (a_1 + a_d, a_1 + a_2 + a_d, \ldots, a_1 + a_1 + \cdots + a_d + a_d)_{(mod2)}. \tag{3.68}$$

Лако се види да је f бијекција и да за свако $\mathrm{a} \in S$ постоји $n \in N$ тако да је $f^n(\mathrm{a}) = \mathrm{a}$. Ако је

$$k(\mathrm{a}) = min\{n \mid f^n(\mathrm{a}) = \mathrm{a}\}, \tag{3.69}$$

онда је $C(\mathrm{a})$ дат са

$$C(\mathrm{a}) = \{\mathrm{a}, f(\mathrm{a}), \ldots, f^{k(\mathrm{a})-1}(\mathrm{a})\} \tag{3.70}$$

циклус који почиње са a. Нека је

$$A(\mathrm{a}) = \sum_{\mathrm{b} \in C(\mathrm{a})} n(\mathrm{b}), \quad B(\mathrm{a}) = \sum_{\mathrm{b} \in C(\mathrm{a})} j(\mathrm{b}), \tag{3.71}$$

где $n(\mathrm{a})$ и $j(\mathrm{a})$ представљају број нула и јединица у низу a. Везу између $\{X_t\}$ и **a** чини пресликавање

$$\gamma \,:\, (X_{t-d+1}, \ldots, X_t) \mapsto (a_1, \ldots, a_d), \tag{3.72}$$

дефинисано са

$$a_i = I(X_{t-d+i} > 0), \quad i = 1, 2, \ldots, d, \tag{3.73}$$

а бројеви $\alpha(d)$ и $\beta(d)$ су дати са

$$\alpha(d) = A(\mathrm{a}_m), \quad \beta(d) = B(\mathrm{a}_m), \tag{3.74}$$

где је m најмањи број за који је

$$\frac{A(\mathrm{a}_m)}{B(\mathrm{a}_m)} = \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} \left\{ \frac{A(\mathrm{a}_i)}{B(\mathrm{a}_i)} \right\}, \tag{3.75}$$

при чему је n број циклуса у S који почињу са $a_1, \ldots, a_n$.

Слично важи и за случај $a < 0$ и $b > 0$. Према томе, кад се узму у обзир сви случајеви, добија се следеће тврђење.

Теорема 3.35 *Процес $\{X_t\}$ дат са (3.64) је геометријски ергодичан ако и само ако је*

$$a < 1, \quad b < 1, \quad ab < 1, \quad a^{\alpha(d)} b^{\beta(d)} < 1, \quad a^{\beta(d)} b^{\alpha(d)} < 1. \tag{3.76}$$

На пример, за $d = 2$ је $\alpha = 1$ и $\beta = 2$, па су услови ергодичности

$$a < 1, \quad b < 1, \quad ab < 1, \quad ab^2 < 1, \quad ab^2 < 1, \tag{3.77}$$

што у односу на случај $d = 1$ представља додатно ограничење области ергодичности. Исте вредности и исти услови су и за $d = 5, 8, 11, 14, 17$. За $d = 3$ је $\alpha = 3$ и $\beta = 4$, али, на пример, за $d = 15$ је $\alpha = 16383$ и $\beta = 16384$.

3.3.2 Веза ергодичности и стабилности детерминистичког модела

Користећи бинарне полиноме, Lim (1992) је добио потребан и довољан услов за стабилност детерминистичког система

$$X_t^* = \begin{cases} aX_{t-1}^*, & X_{t-d}^* \le 0, \\ bX_{t-1}^*, & X_{t-d}^* > 0, \end{cases} \tag{3.78}$$

који се добија изостављањем случајних иновација у моделу (3.64). Ако је

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) = \begin{cases} ax_0, & x_{d-1} \leq 0 \\ bx_0, & x_{d-1} > 0, \end{cases} \tag{3.79}$$

онда за дато d и вектор почетних услова

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \tag{3.80}$$

дискусијом координата вектора $\mathbf{x}$ могу се пратити итерације $f^n(\mathbf{x})$ и уочавати одговарајуће орбите

$$\{\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), f^2(\mathbf{x}), \ldots\}$$

на основу којих добијамо услове стабилности. При томе, систем (3.78) је стабилан ако је за свако $x \in R^d$

$$|f^k(\mathbf{x})| < \infty \quad (k \to \infty).$$

За $d = 1$, зависно од тога да ли је $x_0 > 0$ или $x_0 \leq 0$, орбите су

1. $\{a^n x_0\}$, $\{b^n x_0\}$, $(a > 0,\ b > 0)$;
2. $\{a^n x_0\}$, $\{ba^{n-1} x_0\}$, $(a > 0,\ b < 0)$;
3. $\{a(ab)^n x_0, (ab)^{n+1} x_0\}$, $\{b(ab)^n x_0, (ab)^{n+1} x_0\}$, $(a < 0,\ b < 0)$;
4. $\{ab^{n-1} x_0\}$, $\{b^n x_0\}$, $(a < 0,\ b > 0)$.

Према томе, систем (3.78) је стабилан ако и само ако су испуњени услови (3.66), односно ако важе исти услови као за SETAR модел (3.51). Lim је показао да се и за произвољно d добијају исти услови (3.76) као и за SETAR модел (3.64). Он је дао и процедуру за одређивање вредности $\alpha(d)$ и $\beta(d)$ која се базира на циклусима низа бројева (нула и јединица) генерисаног помоћу бинарног полинома

$$p(x) = x^d + x + 1$$

над пољем Галоа од два елемента.

Иако је реч о једноставном моделу, овај резултат указује на везу ергодичности нелинеарне временске серије и стабилности одговарајућег детерминистичког система.

3.3.3 Стационарна расподела

Познавање расподеле стационарног процеса је вишеструко значајно. У случају кад је процес $\{X_t\}$ ергодичан, стационарна дистрибуција ν задовољава једначину

$$\nu(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A|x)\nu(dx) \tag{3.81}$$

где је A Борелов скуп у R, а $P(\cdot|\cdot)$ условна вероватноћа. Међутим, ако је процес $\{X_t\}$ генерисан неким моделом, интегралну једначину (3.81) је тешко решити.

Осим специјалних случајева, аналитичко решење је тешко добити чак и за линеарне моделе. Познато је, на пример, да линеаран модел са иновацијама које имају симетричну густину расподеле генерише процес који такође има симетричне густине свих заједничких расподела. Исто тако је познато да $AR(1)$ модел са иновацијама које имају стабилну расподелу са експонентом θ $(0 < \theta \leq 2)$ генерише процес који такође има стабилну расподелу са истим експонентом.

У случају модела нелинеарне ауторегресије постоји сличан резултат. Ако је

$$X_t = f(X_{t-1}, \ldots, X_{t-p+1}) + \varepsilon_t, \tag{3.82}$$

где је f непарна функција, а $\{\varepsilon_t\}$ има симетричну густину расподеле, онда су и густине заједничких расподела за $X_{t_1}, \ldots X_{t_k}$ такође симетричне (Tong, 1990). За $p = 1$ је занимљиво да је ауторегресиона функција f линеарна ако је стационарна расподела за $\{X_t\}$ Gauss-ова и ако је $\{e_t\}$ низ независних случајних величина са истом расподелом и са нултом средњом вредношћу. Другим речима, ако је f нелинеарна функција и $p = 1$, процес (3.82) не може бити Gauss-ов.

Поред ових општих резултата, постоји свега неколико покушаја да се експлицитно одреди расподела процеса генерисаног моделом са праговима. Поред приказа досадашњих резултата, овде су дати и резултати везани за стационарну расподелу SETAR(1) процеса у случају ненултог прага, као и у случају иновација са Лапласовом и Ерланговом расподелом.

Маргинална расподела

Нека је дат модел

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} + e_t, & X_{t-1} \leq r \\ \beta X_{t-1} + e_t, & X_{t-1} > r, \end{cases} \tag{3.83}$$

Ако је $g(x)$ густина расподеле за $\{\varepsilon_t\}$, а $h(x)$ густина условне расподеле за X_t при услову $X_{t-1} = y$, онда је

$$h(x) = \begin{cases} g(x - \alpha y), & y \leq 0 \\ g(x - \beta y), & y > 0. \end{cases} \tag{3.84}$$

Интеграцијом по y густине $h(x)p_{t-1}(y)$ заједничке расподеле за X_t и X_{t-1}, где је $p_{t-1}(y)$ густина расподеле за X_{t-1}, добијамо густину $p_t(x)$ расподеле за X_t. Дакле,

$$p_t(x) = \int_{-\infty}^{r} g(x - \alpha y)p_{t-1}(y)dy + \int_{r}^{+\infty} g(x - \beta y)p_{t-1}(y)dy. \tag{3.85}$$

Ако претпоставимо да је $\{X_t\}$ стационаран, онда је $p_{t-1}(x) = p_t(x) = p(x)$, па је

$$p(x) = \int_{-\infty}^{r} g(x-\alpha y)p(y)dy + \int_{r}^{+\infty} g(x-\beta y)p(y)dy. \tag{3.86}$$

За дату функцију g, праг r и параметре α и β треба одредити решење p интегралне једначине (3.86) које може да буде густина расподеле, односно такво да је $p(x) \geq 0$ за $x \in R$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Постоје нумеричке методе за налажење приближног решења (Tong 1990), али не постоји метод за добијање аналитичког решења једначине (3.86).

Ако је $r = 0$ и $\beta = -\alpha$, модел (3.83) постаје такозвани модел апсолутне ауторегресије

$$X_t = -\alpha|X_{t-1}| + e_t, \tag{3.87}$$

а интегрална једначина (3.86) постаје

$$p(x) = \int_{0}^{\infty} g(x+\alpha y)\,[p(-y)+p(y)]\;dy. \tag{3.88}$$

Приметимо још да је у случају симетричне расподеле за $\{\varepsilon_t\}$

$$p(-x)+p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+\alpha y)\,[p(-y)+p(y)]\;dy. \tag{3.89}$$

Према томе, ако је $q(x) = p(-x)+p(x)$, онда q може да се одреди из једначине

$$q(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+\alpha y)q(y)dy \tag{3.90}$$

која одговара линеарном AR(1) процесу. Другим речима, може да се одреди густина $q(x)$ стационарне расподеле процеса $\{a_t\}$, где је

$$a_t = -\alpha a_{t-1} + e_t, \tag{3.91}$$

па да се $q(x)$ замени у (3.88) и добије $p(x)$. У даљем тексту се разматрају решења једначине (3.88) за различите расподеле низа иновација $\{\varepsilon_t\}$.

Иновације са нормалном расподелом

Претпоставимо да је у моделу (3.87) $0 < \alpha < 1$, да низ иновација $\{\varepsilon_t\}$ има нормалну расподелу $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, односно да је

$$g(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.92}$$

и да је $\Phi(x)$ функција расподеле процеса $\{e_t\}$, односно да је

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} g(u)du. \tag{3.93}$$

Једначина (3.88) тада постаје

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} exp\{-(x+\alpha y)^2/2\}\,[p(-y)+p(y)]\,dy \qquad (3.94)$$

и може експлицитно да се добије њено решење.

Теорема 3.36 *Функција p дефинисана са*

$$p(x) = \sqrt{2(1-\alpha^2)/\pi}\, exp\{-(1-\alpha^2)x^2/2\}\,\Phi(-\alpha x)$$

је густине расподеле и јединствено такво решење једначине (3.94).

До овог резултата су дошли Anděl, Netuka i Zvána (1984), при чему су дали још и експлицитан израз за средњу вредност, дисперзију, коефицијент корелације, као и рекурентне везе за моменте стационарне расподеле. Ове изразе су користили за упоређивање са нумеричким резултатима.

Иновације са Кошијевом расподелом

Ако за исти модел као у претходном разматрању претпоставимо да низ иновација $\{\varepsilon_t\}$ има Кошијеву расподелу $C(0,1)$, односно да је

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad (3.95)$$

онда једначина (3.88) постаје

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{p(-y)+p(y)}{1+(x+\alpha y)^2} dy. \qquad (3.96)$$

Решење ове једначине такође може да се добије у експлицитном облику.

Теорема 3.37 *Функција p дефинисана са*

$$p(x) = -\frac{Bx\, ln\{(1+x^2)/A^2\} + (A^2-1+x^2)\, arctan\, x}{4A^2x^2+(1-A^2+x^2)^2} + \frac{B(1+A)\pi}{2Ax^2+2A(1+A)^2}, \qquad (3.97)$$

где је

$$A = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \qquad B = \frac{2A}{\pi^2},$$

је густина расподеле и јединствено такво решење једначине (3.96).

Овај резултат (Anděl and Bartoň, 1986) је показао да је и у случају једноставног модела са једним прагом тешко добити стационарну расподелу и да она може да има врло компликовану густину расподеле.

Иновације са експоненцијалном расподелом

А. Ако низ иновација $\{\varepsilon_t\}$ у моделу (3.87) има експоненцијалну расподелу $\mathcal{E}(\lambda)$, са густином $g(x) = \lambda e^{-\lambda x} I(0, +\infty)$, онда је за $\alpha > 0$

$$g(x+\alpha y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x+\alpha y)}, & y \geq -x/\alpha \\ 0, & y < -x/\alpha, \end{cases} \tag{3.98}$$

па за $x \geq 0$ једначина (3.88) постаје

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \int_0^\infty e^{-\lambda\alpha y} \left[p(-y) + p(y)\right] \, dy \tag{3.99}$$

а за $x < 0$ добијамо једначину

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \int_{-x/\alpha}^\infty e^{-\lambda\alpha y} \left[p(-y) + p(y)\right] \, dy \tag{3.100}$$

Ако интеграл на десној страни једначине (3.99) означима са $K(\lambda, \alpha)$, онда је за $x \geq 0$

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} K(\lambda, \alpha), \tag{3.101}$$

а за $x < 0$

$$\begin{aligned} p(x) =& \lambda e^{-\lambda x} \int_{-x/\alpha}^\infty e^{-\lambda\alpha y} \left[p(-y) + p(y)\right] \, dy \\ =& \lambda e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x/\alpha} e^{\lambda\alpha y} p(y) dy + K(\lambda, \alpha) \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_{-x/\alpha}^\infty e^{-(\lambda\alpha+\lambda) y} dy \\ =& \lambda e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x/\alpha} e^{\lambda\alpha y} p(y) dy + K(\lambda, \alpha) \frac{\lambda}{\alpha+1} e^{\lambda x/\alpha}. \end{aligned}$$

Диференцирањем леве и десне стране ове једнакости добијамо да густина $p(x)$ за $x < 0$ задовољава диференцијалну једначину

$$p'(x) = -\lambda p(x) + \frac{\lambda}{\alpha} p\left(\frac{x}{\alpha}\right) + K(\lambda, \alpha) \frac{\lambda^2}{\alpha} e^{\lambda x/\alpha}. \tag{3.102}$$

Без умањења општости можемо претпоставити да је $\lambda = 1$. Ако у том случају заменимо $p(x)$, $p'(x)$ и $p(x/\alpha)$ (за $x < 0$) у једначини (3.102), добијамо везе између коефицијената a_i и константе $K(\alpha)$. Из услова $\int_{-\infty}^\infty p(x) dx = 1$ добијамо једнакост

$$\sum_1^\infty a_i \alpha^i + K(\alpha) = 1. \tag{3.103}$$

На основу ове једнакости и веза између коефицијената a_i може да се изведе израз за $K(\alpha)$.

Теорема 3.38 *Ако у моделу (3.87) је* $\alpha \in (0,1]$, *онда је густина* $p(x)$ *маргиналне расподеле стационарног* X_t *дата једнакошћу*

$$p(x) = \begin{cases} K(\alpha)e^{-x}, & x \geq 0, \\ q(x), & x < 0, \end{cases} \tag{3.104}$$

где је

$$q(x) = \sum_{1}^{\infty} a_i e^{x/\alpha^i}, \qquad a_i = \frac{\alpha^{i-1}}{\alpha^i + 1} a_{i-1}, \qquad a_1 = \frac{K(\alpha)}{\alpha + 1},$$

$$K^{-1}(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha^3}{(\alpha+1)(\alpha^2+1)} + \frac{\alpha^6}{(\alpha+1)(\alpha^2+1)(\alpha^3+1)} + \cdots$$

Под условима и ознакама теореме следи да је

$$EX_t = K(\alpha) - \sum_{1}^{\infty} a_i \alpha^{2i}.$$

За $\alpha = 1$ добијамо да је $K(1) = 1/2$ и $p(x) = e^{-|x|}/2$, што значи да је маргинална расподела Лапласова. Сличан резултат се добија и за $\beta = -\alpha = 1$ што је, такође, случај са границе области (3.52). То, наравно, представља довољан разлог да се посматрају и други случајеви са границе области ергодичности (3.52).

В. Ако под истим претпоставкама за $\{\varepsilon_t\}$ посматрамо модел (3.83) за случај $0 < \alpha \leq 1$, $\beta < 0$, добијамо да је, за $x \geq 0$

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda \alpha y} p(-y) + e^{\lambda \beta y} p(y)\right] \, dy = \lambda e^{-\lambda x} K(\lambda, \alpha, \beta), \tag{3.105}$$

а за $x < 0$

$$\begin{aligned} p(x) =& \lambda e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x/\alpha} e^{\lambda \alpha y} p(y) dy + \lambda e^{-\lambda x} \int_{x/\beta}^{\infty} e^{\lambda \beta y} p(y) dy \\ & \lambda e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x/\alpha} e^{\lambda \alpha y} p(y) dy + K(\lambda, \alpha, \beta) \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_{x/\beta}^{\infty} e^{(\lambda\beta - \lambda) y} dy \\ & \lambda e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x/\alpha} e^{\lambda \alpha y} p(y) dy + K(\lambda, \alpha, \beta) \frac{\lambda}{1-\beta} e^{-\lambda x/\beta}. \end{aligned}$$

Диференцирањем леве и десне стране ове једнакости добијамо да густина $p(x)$ за $x < 0$ задовољава диференцијалну једначину

$$p'(x) = -\lambda p(x) + \frac{\lambda}{\alpha} p\left(\frac{x}{\alpha}\right) - K(\lambda, \alpha, \beta) \frac{\lambda^2}{\beta} e^{-\lambda x/\beta}. \tag{3.106}$$

Решавањем ове једначине за $\alpha = 1$ добијамо да је $p(x) = K(1,1,\beta)e^{-x/\beta}$ за $x < 0$. Пошто је $p(x) = K(1,1,\beta)e^{-x}$ за $x \geq 0$, из услова $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ следи да је $K(1,1,\beta) = 1/(1-\beta)$. Према томе, имамо одговарајуће тврђење.

Теорема 3.39 *Ако је у моделу (3.83)* $r = 0$, $\alpha = 1$, $\beta < 0$ *и* $\lambda = 1$, *онда је густина* $p(x)$ *маргиналне расподеле стационарног* X_t *дата једнакошћу*

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{1-\beta}, & x \geq 0, \\ \dfrac{e^{-x/\beta}}{1-\beta}, & x < 0. \end{cases}$$

Резултат ове теореме показује да је, са експоненцијалним иновацијама, $\{X_t\}$ стационаран на делу границе области (3.52) ($\alpha = 1$, $\beta < 0$). Слично се добија и за случај $\alpha < 0$ и $\beta = 1$.

C. Стационаран процес на граници области (3.52) може да се добије и у случају двеју иновација са експоненцијалним расподелама. Нека је процес $\{X_t\}$ дефинисан једнакошћу

$$X_t = \begin{cases} X_{t-1} + e_t, & X_{t-1} \leq 0 \\ -X_{t-1} + f_t, & X_{t-1} > 0 \end{cases} \tag{3.107}$$

где је $\{e_t\}$ низ независних променљивих са експоненцијалном расподелом $\mathcal{E}(\lambda)$, а $\{f_t\}$ низ независних променљивих са експоненцијалном расподелом $\mathcal{E}(\mu)$. Ако је $p(x)$ густина расподеле стационарног $\{X_t\}$, онда сличним извођењем као у претходна два случаја добијамо да је, за $x \geq 0$

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} K_1(\lambda) + \mu e^{-\mu x} K_2(\mu), \tag{3.108}$$

а за $x < 0$

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x} e^{\lambda y} p(y)dy + K_1(\lambda)\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\lambda x} + K_2(\mu)\frac{\mu}{2}e^{\mu x}. \tag{3.109}$$

Ако диференцирамо леву и десну страну једначине (3.109) добијамо да $p(x)$ за $x < 0$ задовољава диференцијалну једначину чије је решење

$$p(x) = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}K_1(\lambda)e^{\lambda x} + \frac{\mu+\lambda}{2}K_2(\mu)e^{\mu x}. \tag{3.110}$$

Из услова $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ добијамо да је

$$\left(\frac{2\mu}{\lambda+\mu} + 1\right) K_1(\lambda) + \left(\frac{\lambda+\mu}{2\mu} + 1\right) K_2(\mu) = 1, \tag{3.111}$$

а из услова $\int_0^\infty e^{-\mu y}p(y)dy = K_2(\mu)$ добијамо да је

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}K_1(\lambda)+\frac{1}{2}K_2(\mu). \tag{3.112}$$

Израчунавањем $K_1(\lambda)$ и $K_2(\mu)$ из (3.111) и (3.112) и заменом у $p(x)$ добијамо следеће тврђење.

Теорема 3.40 *Модел (3.107) дефинише стационаран процес чија је маргинална расподела дата густином $p(x)$ где је*

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu\lambda}{\lambda+3\mu}e^{-\lambda x} + \dfrac{2\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)}e^{-\mu x}, & x \geq 0 \\ \dfrac{2\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)}e^{\lambda x} + \dfrac{\mu\lambda}{\lambda+3\mu}e^{\mu x}, & x < 0. \end{cases}$$

D. У претходна три случаја TAR(1) модела са експоненцијалним иновацијама је била претпоставка да је $r=0$. Ако је $r \neq 0$, $\beta = -\alpha$ и $0 < \alpha \leq 1$, тада из интегралне једначине (3.86) добијамо да је $p(x) = e^{-x}K(\alpha, r)$ за $x \geq \alpha r$ и

$$p'(x) = -p(x) + \frac{1}{\alpha}p\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{K(\alpha,r)}{\alpha}e^{x/\alpha} \tag{3.113}$$

за $x < \alpha r$. Како је ова једначина иста као једначина (3.102) за $\lambda = 1$, то је

$$p(x) = \begin{cases} K(\alpha,r)e^{-x}, & x > \alpha r \\ h(x), & -\alpha r \leq x \leq \alpha r \ , \\ q(x), & x < -\alpha r \end{cases} \tag{3.114}$$

при чему је $q(x)$ дефинисано као у теореми 3.8, $h(x)$ засад непозната функција, а $K(\alpha, r)$ такво да је $p(x)$ функција густине. Међутим, за $\alpha = 1$ је

$$h(x) = \int_{-\infty}^{-r} e^{-(x-y)}q(y)dy + \int_{-r}^{x} e^{-(x-y)}h(y)dy + Ke^{-x}\int_r^{+\infty} e^{-2y}dy. \tag{3.115}$$

Заменом израза за $q(x)$ и диференцирањем леве и десне стране ове једначине добијамо да је $h'(x) = 0$, односно $h(x) = c$. Из услова $p(-r) = p(r)$ следи да је $\sum a_i = K$, а из услова

$$\int_\infty^{-r}\sum_1^\infty a_i e^x dx + 2rKe^{-r} + \int_r^{+\infty} e^{-x}K dx = 1 \tag{3.116}$$

одређујемо K. Према томе, важи следеће тврђење.

Теорема 3.41 *Ако је у моделу (3.83)* $\alpha = 1$, $\beta = -1$ *и* $\lambda = 1$, *онда је густина маргиналне расподеле стационарног* X_t *дата једнакошћу*

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{2(e^{-r} + re^{-r})}, & x > r, \\ \dfrac{1}{2(1+r)}, & -r \le x \le r, \\ \dfrac{e^{x}}{2(e^{-r} + re^{-r})}, & x < -r. \end{cases} \tag{3.117}$$

На пример, за $r = 1$ је

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x+1}/4, & x > 1, \\ 1/4, & -1 \le x \le 1, \\ e^{x+1}/4, & x < -1. \end{cases}$$

Иновације са Лапласовом расподелом

Ако у моделу (3.87) низ иновација $\{\varepsilon_t\}$ има Лапласову расподелу, односно ако је $g(x) = e^{-|x|}/2$, онда је $p(x) = K(\alpha)e^{-x}$ за $x \ge 0$ и

$$\begin{aligned} p(x) =& \frac{1}{2}e^{x}\int_0^{-x/\alpha} e^{\alpha y}p(-y)dy + \frac{K(\alpha)}{2}e^{x}\int_0^{-x/\alpha} e^{(\alpha-1)y}dy + \frac{1}{2}e^{-\alpha y}p(-y)dy + \\ &+ \frac{K(\alpha)}{2}e^{-x}\int_{-x/\alpha}^{\infty} e^{-(\alpha+1)y}dy \end{aligned} \tag{3.118}$$

Диференцирањем два пута леве и десне стране ове једнакости добијамо диференцијалну једначину

$$p''(x) = p(x) - \frac{1}{\alpha}p\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{K}{\alpha}e^{x/\alpha}. \tag{3.119}$$

Решење једначине (3.119) може да се одреди у облику реда.

Теорема 3.42 *Ако је у моделу (3.87)* $\alpha \in (0,1)$, *онда је густина* $p(x)$ *маргиналне расподеле стационарног* X_t *дата једнакошћу*

$$p(x) = \begin{cases} K(\alpha)e^{-x}, & x \ge 0, \\ q(x), & x < 0, \end{cases} \tag{3.120}$$

где је

$$q(x) = \sum_1^{\infty} a_i e^{x/\alpha^{i-1}}, \qquad a_i = \frac{\alpha^{2i-3}}{\alpha^{2i-2} - 1}a_{i-1}, \qquad a_2 = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}(a_1 + K),$$

а K и a_1 се одређују из услова

$$\sum_{1}^{\infty} a_i = K, \qquad \sum_{1}^{\infty} a_i \alpha^i = 1.$$

На пример, за $\alpha = 1/2$ је

$$p(x) = \begin{cases} 0.42e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0.97e^{x} - 0.89e^{2x} + 0.37e^{4x} - \cdots, & x < 0 \end{cases}$$

Иновације са Ерланговом расподелом

Претпоставимо да низ иновација $\{\varepsilon_t\}$ има Ерлангову расподелу, односно да је

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{3.121}$$

Ако је у моделу (3.87) $\alpha = 1$, онда је

$$\begin{aligned} p(x) = & \int_0^{\infty} (x+y)e^{(x+y)}[p(-y) + p(y)]dy \\ = & xe^{-x}K_1 + e^{-x}K_2 \end{aligned} \tag{3.122}$$

за $x \geq 0$ и

$$p(x) = \int_{-x}^{\infty} (x+y)e^{-(x+y)}p(-y)dy + \int_{-x}^{\infty} (x+y)e^{-(x+y)}\left(ye^{-y}K_1 + e^{-y}K_2\right)dy \tag{3.123}$$

за $x < 0$. Заменом (3.122) у (3.123) добијамо да је

$$p(x) = xe^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}p(y)dy - e^{-x}\int_{-\infty}^{x} ye^{y}p(y)dy - \frac{1}{4}K_1xe^{x} + \frac{K_1+K_2}{4}e^{x}. \tag{3.124}$$

Диференцирањем два пута леве и десне стране ове једнакости добијамо диференцијалну једначину

$$p''(x) + 2p'(x) = -K_1xe^{x} + K_2e^{x}. \tag{3.125}$$

Решење ове једначине, које испуњава услов густине, даје стационарну расподелу процеса $\{X_t\}$. То говори следећа теорема.

Теорема 3.43 *Ако је у моделу (3.87) $\alpha = 1$, густина маргиналне расподеле стационарног $\{X_t\}$ је*

$$p(x) = \begin{cases} xe^{-x}/2 + e^{-x}/3, & x \geq 0, \\ -xe^{x}/6 + e^{x}/3, & x < 0. \end{cases}$$

3.4 SETAR ПРОЦЕС ДРУГОГ РЕДА

SETAR процес другог реда је генерисан моделом

$$X_t = \begin{cases} a_1 X_{t-1} + b_1 X_{t-2} + \varepsilon_t, & X_{t-d} < 0, \\ a_2 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \varepsilon_t, & X_{t-d} \geq 0. \end{cases} \tag{3.126}$$

Ергодичност процеса дефинисаног са (3.126) зависи од вредности параметара a_1, b_1, a_2, b_2 и d. Међутим, такви услови нису познати чак ни за $d = 1$. Због тога се овде детаљно разматра случај $b_1 = 0$ и $d = 1$.

3.4.1 Процес SETAR(2; 1, 2)

Нека је дат SETAR(2; 1, 2) модел

$$X_t = \begin{cases} cX_{t-1} + \varepsilon_t, & X_{t-1} < 0, \\ aX_{t-1} + bX_{t-2} + \varepsilon_t, & X_{t-1} \geq 0 \end{cases} \tag{3.127}$$

SETAR процеса другог реда. Ако је

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.128}$$

модел (3.127) може да се запише у векторском облику

$$\mathbf{X}_t = \begin{cases} A\mathbf{X}_{t-1} + C\varepsilon_t, & \mathbf{X}_{t-1} \in \mathbf{R}_1, \\ B\mathbf{X}_{t-1} + C\varepsilon_t, & \mathbf{X}_{t-1} \notin \mathbf{R}_1, \end{cases} \tag{3.129}$$

где је, у овом случају,

$$\mathbf{R}_1 = \{(x, y) : x \geq 0\}. \tag{3.130}$$

Процес дефинисан овим моделом је векторски Марковљев процес. У случају кад је $\mathbf{R}_1$ ограничен скуп, Tjostheim (1990) је дао услове геометријске ергодичности. Међутим, тај резултат овде не може да се примени јер је $\mathbf{R}_1$ из (3.130) неограничен скуп.

Детерминистички модел који одговара моделу (3.127) је разматран у раду Chan and Tong (1985). Имајући у виду те резултате, као и резултате за SETAR модел првог реда, овде се изводе услови за геометријску ергодичност процеса (3.127).

Према резултату теореме 3.27, за доказ ергодичности процеса $\{\mathbf{X}_t\}$ треба показати да постоје компактан скуп $K \subset R^2$, ненегативна функција g и природан број kтакви да је

$$rE(g(\mathbf{X}_{t+k}) \mid \mathbf{X}_t = \mathbf{X}) \leq g(\mathbf{X}) - \epsilon, \quad \mathbf{X} \notin K \tag{3.131}$$

и

$$E(g(\mathbf{X}_{t+k}) \mid \mathbf{X}_t = \mathbf{X}) \leq M, \quad \mathbf{X} \in K, \tag{3.132}$$

где је $\epsilon > 0$, $M < +\infty$ и $r > 1$.

Ако се за функцију g изабере норма вектора,

$$g(\mathbf{X}_t) = ||\mathbf{X}_t|| = max\,\{|X_t|, |X_{t-1}|\}\,, \tag{3.133}$$

тада је за услове (3.131) и (3.132) довољно доказати да је

$$E(||\mathbf{X}_{t+k}|| \mid \mathcal{F}_t) \leq \alpha\,||\mathbf{X}_t|| + \beta, \tag{3.134}$$

где је $0 < \alpha < 1$, β реална константа, а $\mathcal{F}_t$ сигма поље генерисано са $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Наиме, тада постоје број M и компактан скуп $K = K(M)$, на пример,

$$K = \{\mathbf{X} \mid ||\mathbf{X}|| \leq M\}\,, \tag{3.135}$$

за које важе услови (3.131) и (3.132).

Примењујући технику коју су користили Chen and Tsay (1991) имамо, најпре, да је

$$\begin{aligned}
X_{t+2} &= \begin{cases} aX_{t+1} + bX_t + \varepsilon_{t+2}, & X_{t+1} \geq 0 \\ cX_{t+1} + \varepsilon_{t+2}, & X_{t+1} < 0 \end{cases} \\
&= (aX_{t+1} + bX_t + \varepsilon_{t+2})I(X_{t+1} \geq 0) + (cX_{t+1} + \varepsilon_{t+2})I(X_{t+1} < 0) \\
&= a(aX_t + bX_{t-1} + \varepsilon_{t+1})I(X_{t+1} \geq 0)I(X_t \geq 0) \\
&\quad + a(cX_t + \varepsilon_{t+1})I(X_{t+1} \geq 0)I(X_t < 0) \\
&\quad + (bX_t + \varepsilon_{t+2})I(X_{t+1} \geq 0) + c(aX_t + bX_{t-1} + \varepsilon_{t+1})I(X_{t+1} < 0)I(X_t \geq 0) \\
&\quad + c(cX_t + \varepsilon_{t+1})I(X_{t+1} < 0)I(X_t < 0) + \varepsilon_{t+2}I(X_{t+1} < 0) \\
&= (a^2X_t + abX_{t-1} + a\varepsilon_{t+1})I(X_{t+1} \geq 0)I(X_t \geq 0) \\
&\quad + (acX_t + a\varepsilon_{t+1})I(X_{t+1} \geq 0)I(X_t < 0) \\
&\quad + (caX_t + cbX_{t-1} + c\varepsilon_{t+1})I(X_{t+1} < 0)I(X_t \geq 0) \\
&\quad + (c^2X_t + c\varepsilon_{t+1})I(X_{t+1} < 0)I(X_t < 0) \\
&\quad + (bX_t + \varepsilon_{t+2})I(X_{t+1} \geq 0) + \varepsilon_{t+2}I(X_{t+1} < 0)
\end{aligned} \tag{3.136}$$

За различите комбинације вредности параметара a, b и c коришћењем услова (3.131) и (3.132) могу се извести довољни услови за ергодичност процеса $\{\mathbf{X}_t\}$, а тиме и процеса $\{X_t\}$. У даљем излагању са $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ су означене позитивне коначне реалне константе.

I) $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c > 0.$

Нека je, најпре, $X_{t+1} \geq 0$ и $X_t \geq 0$. Из (3.136) следи да je

$$\begin{aligned} |X_{t+2}| &= |(a^2+b)X_t + abX_{t-1} + a\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}| \\ &\leq (a^2+ab+b)max\,\{X_t, X_{t-1}\} + |a\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}| \\ &\leq (a^2+ab+b)||\mathbf{X}_t|| + \gamma_1. \end{aligned} \tag{3.137}$$

Како je, тада,

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= aX_t + bX_{t-1} + \varepsilon_{t+1} \\ &\leq (a+b)||\mathbf{X}_t|| + \gamma_2, \end{aligned} \tag{3.138}$$

то je

$$\begin{aligned} ||\mathbf{X}_{t+2}|| &= max\,\{|X_{t+2}|, |X_{t+1}|\} \\ &\leq max\{a^2+ab+b, a+b\}||\mathbf{X}_t|| + \beta_1. \end{aligned} \tag{3.139}$$

Према томе, ако je $a+b<1$, онда je

$$a^2+ab+b = a(a+b)+b < a+b < 1,$$

па постоји број α_1 такав да je $0<\alpha_1<1$ и

$$E\,(||\mathbf{X}_{t+2}|| \mid \mathcal{F}_t) \leq \alpha_1||\mathbf{X}_t|| + \beta_1. \tag{3.140}$$

Другим речима, ако je $X_t \geq 0$, $X_{t+1} \geq 0$ и $a+b<1$, процес $\{\mathbf{X}_t\}$ je геометријски ергодичан.

Нека je, затим, $X_{t+1} \geq 0$ и $X_t < 0$. Из (3.136) следи да je

$$X_{t+2} = acX_t + bX_t + a\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}. \tag{3.141}$$

Како je

$$X_{t+1} = cX_t + \varepsilon_{t+1} \geq 0, \tag{3.142}$$

односно $\varepsilon_{t+1} \geq -cX_t > 0$, то je

$$|X_t| \leq \frac{1}{c}|\varepsilon_{t+1}| \tag{3.143}$$

и

$$\begin{aligned} |X_{t+1}| &= |cX_t + \varepsilon_{t+1}| \\ &\leq |cX_t| + |\varepsilon_{t+1}| \\ &\leq -cX_t + |\varepsilon_{t+1}| \\ &\leq 2|\varepsilon_{t+1}|. \end{aligned} \tag{3.144}$$

Из (3.143) и (3.144) следи да je

$$E\,(||\mathbf{X}_{t+2}|| \mid \mathcal{F}_t) \leq \alpha_2.$$

Према томе, ако је $X_t < 0$, $X_{t+1} \geq 0$ и $c < 1$, процес $\{\mathbf{X}_t\}$ је геометријски ергодичан.

Ако је $X_{t+1} < 0$ и $X_t \geq 0$, тада из (3.136) следи да је

$$\begin{aligned} |X_{t+2}| &= |acX_t + bcX_{t-1} + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}| \\ &\leq acX_t + bc|X_{t-1}| + |c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}| \\ &\leq (a+b)c||\mathbf{X}_t|| + \gamma_3. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Како је

$$\begin{aligned} |X_{t+1}| &= |aX_t + bX_{t-1} + \varepsilon_{t+1}| \\ &\leq (a+b)||\mathbf{X}_t|| + \gamma_4, \end{aligned} \tag{3.146}$$

то је

$$||\mathbf{X}_{t+2}|| \leq max\,\{(a+b)c, a+b\}\,||\mathbf{X}_t|| + \beta_3. \tag{3.147}$$

За $a+b<1$ и $c<1$ постоји број α_3 такав да је $0<\alpha_3<1$ и

$$E(||\mathbf{X}_{t+2}||\mid \mathcal{F}_t) \leq \alpha_3||\mathbf{X}_t|| + \beta_3. \tag{3.148}$$

Према томе, ако је $X_t \geq 0$, $X_{t+1} < 0$, $a+b<1$ и $c<1$, процес $\{\mathbf{X}_t\}$ је геометријски ергодичан.

Ако је $X_{t+1} < 0$ и $X_t < 0$, онда из једнакости

$$X_{t+2} = c^2X_t + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}, \tag{3.149}$$

$$X_{t+1} = cX_t + \varepsilon_{t+1} \tag{3.150}$$

следи да је

$$||\mathbf{X}_{t+2}|| \leq max\{c^2, c\}||\mathbf{X}_t|| + \beta_4. \tag{3.151}$$

То значи да, за $c<1$, постоји број α_4 такав да је $0<\alpha_4<1$ и

$$E(||\mathbf{X}_{t+2}||\mid \mathcal{F}_t) \leq \alpha_4||\mathbf{X}_t|| + \beta_4. \tag{3.152}$$

Према томе, ако је $X_t < 0$, $X_{t+1} < 0$ и $c<1$, процес $\{\mathbf{X}_t\}$ је геометријски ергодичан.

На основу претходних закључака имамо следеће тврђење.

Лема 3.1 *Ако је $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a+b<1$ и $0<c<1$, процес $\{\mathbf{X}_t\}$ дефинисан са (3.129) је геометријски ергодичан.*

II) $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \leq 0.$

Ако је $X_{t+1} \geq 0$ и $X_t \geq 0$ и $a+b<1$, процес $\{\mathbf{X}_t\}$ је ергодичан, што се доказује исто као у случају $c>0$, обзиром да X_{t+2} и X_{t+1} не зависе од c.

Ако је $X_{t+1} < 0$ и $X_t \geq 0$, тада слично као у случају $c > 0$, имамо да је

$$||\mathrm{X}_{t+2}|| \leq max\,\{|c|(a+b), a+b\}\,||\mathrm{X}_t|| + \gamma_5, \tag{3.153}$$

па је процес $\{\mathrm{X}_t\}$ ергодичан за $a+b<1$ и $|c|<1$, односно $c > -1$. Међутим, процес је ергодичан и за све друге вредности $c < 0$.

Ако је $X_{t+2} < 0$, тада из

$$X_{t+2} = cX_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \tag{3.154}$$

следи да је $0 > -cX_{t+1} > \varepsilon_{t+2}$, па закључујемо да је

$$E\left(||\mathrm{X}_{t+2}|| \mid \mathcal{F}_{t+1}\right) < \gamma_6. \tag{3.155}$$

Претпоставимо да је $X_{t+2} \geq 0$.

(1) Ако је $X_{t-1} > 0$, онда из

$$X_{t+1} = aX_t + bX_{t-1} + \varepsilon_{t+1} < 0 \tag{3.156}$$

следи да је

$$\varepsilon_{t+1} < -(aX_t + bX_{t-1}) < 0, \tag{3.157}$$

односно

$$|X_{t+1}| \leq 2|\varepsilon_{t+1}|. \tag{3.158}$$

На основу ове неједнакости и једнакости

$$X_{t+2} = cX_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \tag{3.159}$$

следи да је

$$E\left(||\mathrm{X}_{t+2}|| \mid \mathcal{F}_{t+1}\right) \leq \gamma_7. \tag{3.160}$$

(2) Ако је $X_{t-1} < 0$, тада у случају $X_{t-2} > 0$ и $X_{t-3} > 0$, на основу претходног имамо да је

$$E\left(||\mathrm{X}_t|| \mid \mathcal{F}_{t-2}\right) \leq \gamma_8. \tag{3.161}$$

Дакле, једино остаје занимљив случај

$$X_{t+2} \geq 0,\ X_{t+1} < 0,\ X_t \geq 0,\ X_{t-1} < 0,\ X_{t-2} \geq 0,\ X_{t-3} < 0, \ldots$$

при чему је

$$
\begin{aligned}
X_{t+2} &= cX_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \\
&= caX_t + cbX_{t-1} + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \\
&\le cbX_{t-1} + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \\
&= cb(aX_{t-2} + bX_{t-3} + \varepsilon_{t-1}) + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \\
&= cbaX_{t-2} + cb^2X_{t-3} + cb\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \\
&\le cb^2X_{t-3} + cb\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \\
&\le |c|b^2|X_{t-3}| + |cb\varepsilon_{t-1}| + |c\varepsilon_{t+1}| + |\varepsilon_{t+2}|.
\end{aligned}
\tag{3.162}
$$

Настављањем овог поступка добијамо да је

$$X_{t+2} \le |c|b^k|X_{t-k-1}| + |cb^{k-1}\varepsilon_{t-k+1}| + \cdots + |c\varepsilon_{t+1}| + |\varepsilon_{t+2}|. \tag{3.163}$$

Из ове неједнакости и неједнакости (3.161) следи да је

$$E(||\mathbf{X}_{t+2}|| \mid \mathcal{F}_{t-k-1}) \le \alpha_5||\mathbf{X}_{t-k-1}|| + \beta_5, \tag{3.164}$$

где су природан број k и константа α_5 такви да је

$$0 < |c|b^k < \alpha_5 < 1. \tag{3.165}$$

Померањем индекса из (3.164) добијамо

$$E(||\mathbf{X}_{t+k+3}|| \mid \mathcal{F}_t) \le \alpha_5||\mathbf{X}_t|| + \beta_5, \tag{3.166}$$

што значи да је у овом случају процес $\{\mathbf{X}_t\}$ геометријски ергодичан.

Ако је $X_{t+1} \ge 0$ и $X_t < 0$, тада слично као у претходном случају добијамо да је процес $\{\mathbf{X}_t\}$ геометријски ергодичан за $a + b < 1$ и свако $c < 0$.

Ако је $X_{t+1} < 0$ и $X_t < 0$, онда из једнакости

$$X_{t+2} = cX_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$$

за $X_{t+2} < 0$ је $\varepsilon_{t+2} < -cX_{t+1} < 0$, па је

$$E(||\mathbf{X}_{t+2}|| \mid \mathcal{F}_{t+1}) \le \gamma_9. \tag{3.167}$$

Слично, за $X_{t+2} \ge 0$ из неједнакости

$$c^2X_t + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \ge 0$$

следи да је $c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \ge -c^2X_t \ge 0$, па је

$$E(||\mathbf{X}_{t+2}|| \mid \mathcal{F}_t) \le \gamma_{10}. \tag{3.168}$$

Из (3.156), (3.160), (3.161), (3.165), (3.167) и (3.168) можемо да закључимо да и овом случају параметар c не утиче на ергодичност процеса $\{\mathbf{X}_t\}$.

Дакле, важи следеће тврђење.

Лема 3.2 *Ако је $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \leq 0$ и $a + b < 1$, онда је процес $\{\mathbf{X}_t\}$ дефинисан са (3.129) је геометријски ергодичан.*

III) $a \geq 0$, $b < 0$, $c > 0$.

За $X_{t+1} \geq 0$ и $X_t \geq 0$ из (3.136) следи да је

$$|X_{t+2}| \leq |a^2 + ab + b| \, ||\mathbf{X}_t|| + \gamma_{11} \tag{3.169}$$

Истовремено важи и

$$|X_{t+1}| \leq |a + b| \, ||\mathbf{X}_t|| + \gamma_{12}. \tag{3.170}$$

Из (3.169) и (3.170) видимо да за

$$|a + b| < 1, \quad |a^2 + ab + b| < 1 \tag{3.171}$$

постоји $0 < \alpha_6 < 1$ тако да је

$$E(||\mathbf{X}_{t+2}|| \mid \mathcal{F}_t) \leq \alpha_6 ||\mathbf{X}_t|| + \beta_6. \tag{3.172}$$

При томе, услови (3.171) су испуњени ако је

$$a + b < 1, \quad a^2 + ab + b + 1 > 0. \tag{3.173}$$

Према томе, услови (3.172) обезбеђују геометријску ергодичност процеса $\{\mathbf{X}_t\}$.

За $X_{t+1} \geq 0$ и $X_t < 0$, слично као у *I*), за геометријску ергодичност добијамо услов $c < 1$, а за $X_{t+1} < 0$ и $X_t \geq 0$ добијамо услове

$$|a + b| < 1, \quad c < 1, \tag{3.174}$$

док за за $X_{t+1} < 0$ и $X_t < 0$ имамо само услов $c < 1$.

На основу претходног закључујемо да важи следеће тврђење.

Лема 3.3 *За $a \geq 0$, $b < 0$, $0 < c < 1$ процес $\{\mathbf{X}_t\}$ дефинисан са (3.129) је геометријски ергодичан ако су испуњени услови (3.173) и (3.174).*

IV) $a \geq 0$, $b < 0$, $c \leq 0$.

При $X_{t+1} \geq 0$ и $X_t \geq 0$ за ергодичност процеса $\{\mathbf{X}_t\}$, слично као у случају *III*), добијамо услове (3.173). За $X_{t+1} < 0$ и $X_t < 0$ процес $\{\mathbf{X}_t\}$ је геометријски ергодичан за свако c што се доказује исто као и у случају *II*). За $X_{t+1} < 0$ и $X_t \geq 0$, у случају $X_{t-1} \geq 0$ довољни су већ поменути услови, а у случају $X_{t-1} < 0$ из (3.156) следи (3.157) и (3.158), па је

$$E(||\mathbf{X}_t|| \mid \mathcal{F}_t) < \gamma_{13}. \tag{3.175}$$

Слично важи и за $X_{t+1} \geq 0$ и $X_t < 0$.

Према томе, закључујемо да важи следеће тврђење, аналогно оном из претходног случаја.

Лема 3.4 *За $a \geq 0$, $b < 0$, $c < 0$ процес $\{\mathbf{X}_t\}$ дефинисан са (3.129) је геометријски ергодичан ако су испуњени услови (3.173) и (3.174).*

V) $a < 0, \ b \geq 0, \ c > 0.$

За $X_{t+1} < 0$ и $X_t < 0$ имамо, као и у претходним случајевима у којима је $c > 0$, геометријску ергодичност процеса $\{\mathbf{X}_t\}$ за $c < 1$. Ако је

$$X_{t+1} \geq 0, \quad X_t < 0, \quad X_{t-1} \geq 0, \quad X_{t-2} < 0, \ldots$$

тада је

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= acX_t + bX_t + a\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \\ &\leq acX_t + a\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}, \end{aligned} \tag{3.176}$$

одакле, слично као у *II*), можемо да одредимо k и α_7 тако да буде

$$0 < |a|c^k < \alpha_7 < 1, \tag{3.177}$$

као и

$$E(||\mathbf{X}_{t+k+2}|| \mid \mathcal{F}_t) \leq \alpha_7||\mathbf{X}_t|| + \beta_7. \tag{3.178}$$

Докажимо да је и у случају $X_{t+1} \geq 0$, $X_t \geq 0$, $X_{t-1} \geq 0, \ldots$ за ергодичнсот довољан услов $c < 1$. Како је $a < 0$ и $b \geq 0$, то за сопствене вредности λ_1 и λ_2 матрице A важи

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1, \quad |\lambda_1| < |\lambda_2|, \tag{3.179}$$

па постоји $k \in N$ такав да је $DA^k\mathbf{X}_t < 0$, где је D вектор $(1,\ 0)$. Из једнакости

$$\mathbf{X}_{t+k} = A^k\mathbf{X}_t + \sum_{i=1}^{k} A^{i-1}C\varepsilon_{t+i} \tag{3.180}$$

следи да је

$$D \cdot \sum_{i=1}^{k} A^{i-1}C\varepsilon_{t+i} > -DA^k\mathbf{X}_t > 0, \tag{3.181}$$

па је

$$E(||\mathbf{X}_{t+k}|| \mid \mathcal{F}_t) \leq \gamma_{14}. \tag{3.182}$$

У преосталим случајевима се једноставно показује да је за ергодичност довољан услов $c < 1$.

Према томе, имамо следеће тврђење.

Лема 3.5 *За $a < 0$, $b \geq 0$ и $0 < c < 1$ процес $\{\mathbf{X}_t\}$ дефинисан са (3.129) је геометријски ергодичан.*

VI) $a < 0,\ b \geq 0,\ c \leq 0.$

Претпоставимо, најпре, да је $X_{t+1} < 0$ и $X_t \geq 0$. Из (3.136) следи да је

$$X_{t+2} = acX_t + cbX_{t-1} + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}. \tag{3.183}$$

Ако је $X_{t-1} \geq 0$, онда је, слично као у случају II),

$$E(||\mathbf{X}_{t+2}|| \mid \mathcal{F}_t) \leq \gamma_{15}, \tag{3.184}$$

а ако је $X_{t-1} < 0$, из једнакости (3.183) добијамо да је

$$X_{t+2} = c(ac+b)X_{t-1} + ac\varepsilon_t + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}. \tag{3.185}$$

Како је тада

$$X_{t+1} = (ac+b)X_{t-1} + a\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}, \tag{3.186}$$

из (3.185) и (3.186) следи да је

$$||\mathbf{X}_{t+2}|| \leq max\{ac+b, |c|(ac+b)\}||X_t|| + \gamma_{16}. \tag{3.187}$$

У случају

$$X_{t+1} < 0,\ X_t \geq 0,\ X_{t-1} < 0,\ X_{t-2} \geq 0,\ X_{t-3} < 0, \ldots,$$

применом неједнакости (3.187) добијамо да је, за неко $k \in N$,

$$||\mathbf{X}_{t+2}|| \leq (max\{ac+b, |c|(ac+b)\})^k\, ||X_{t-k+1}|| + \gamma_{17},$$

односно

$$||\mathbf{X}_{t+k+3}|| \leq (max\{ac+b, |c|(ac+b)\})^k\, ||X_t|| + \gamma_{18}. \tag{3.188}$$

За $0 \leq ac+b < 1$, постоје природан број k и позитиван број α_8 такви да је

$$0 \leq (max\{ac+b, |c|(ac+b)\})^k \leq \alpha_8 < 1, \tag{3.189}$$

као и

$$E(||\mathbf{X}_{t+k+3}|| \mid \mathcal{F}_t) \leq \alpha_8 ||\mathbf{X}_t|| + \beta_8, \tag{3.190}$$

што значи да је процес $\{\mathbf{X}_t\}$ ергодичан.

Ако је $X_{t+1} \geq 0$ и $X_t < 0$, аналогно претходном извођењу, добија се исти услов ергодичности. Исто тако, ако је $X_{t+1} \geq 0$ и $X_t \geq 0$ или $X_{t+1} < 0$ и $X_t < 0$, анализирањем случајева $X_{t-1} < 0$ и $X_{t-1} \geq 0$, користи се услови $ac+b < 1$ и $b < 1$, при чему други следи из првог. Према томе, важи тврђење.

Лема 3.6 *За $a < 0$, $b \geq 0$, $c < 0$ процес $\{\mathbf{X}_t\}$ дефинисан са (3.129) је геометријски ергодичан ако је $ac + b < 1$.*

$VII)$ $a<0,\ b<0,\ c>0.$

За $X_{t+1}<0$ и $X_t<0$ је процес $\{\mathbf{X}_t\}$ геометријски ергодичан, као и у осталим случајевима, ако је $c<1$.

За $X_{t+1}\geq 0$ и $X_t<0$ из

$$X_{t+1}=cX_t+\varepsilon_{t+1}\geq 0 \tag{3.191}$$

следи $cX_t\geq -\varepsilon_{t+1}$, односно $|X_{t+1}|\leq|\varepsilon_{t+1}|/c$, па је

$$E(||\mathbf{X}_{t+1}||\mid\mathcal{F}_t)<\gamma_{19}. \tag{3.192}$$

Ако је $X_{t+1}\geq 0$ и $X_t\geq 0$, тада из

$$X_{t+1}=aX_t+bX_{t-1}+\varepsilon_{t+1}>0, \tag{3.193}$$

односно

$$\varepsilon_{t+1}\geq -(aX_t+bX_{t-1})\geq 0$$

следи да је

$$\begin{aligned}|X_{t+1}|&\leq|aX_t+bX_{t-1}|+|\varepsilon_{t+1}|\\&\leq -(aX_t+bX_{t-1})+|\varepsilon_{t+1}|\\&\leq 2|\varepsilon_{t+1}|.\end{aligned} \tag{3.194}$$

Дакле, и у овом случају такође важи неједнакост (3.192).

Случај $X_{t+1}<0$ и $X_t\geq 0$ је обухваћен претходним разматрањима.

Према томе, важи следеће тврђење.

Лема 3.7 *За $a<0$, $b<0$ и $0<c<1$ процес $\{\mathbf{X}_t\}$ дефинисан са (3.129) је геометријски ергодичан.*

$VIII)$ $a<0,\ b<0,\ c\leq 0.$

Ако је $X_{t+1}<0$ и $X_t<0$, тада из једнакости

$$X_{t+1}=cX_t+\varepsilon_{t+1},$$

$$X_{t+2}=c^2X_t+c\varepsilon_{t+1}+\varepsilon_{t+2},$$

слично као у $II)$ показујемо да је процес $\{\mathbf{X}_t\}$ геометријски ергодичан за свако $c\leq 0$.

Ако је $X_{t+1}\geq 0$ и $X_t\geq 0$, тада важи (3.192) исто као и у случају $c>0$.

Ако је $X_{t+1}<0$ и $X_t\geq 0$, тада је довољно разматрати само случај $X_{t+2}\geq 0$.

(1) За $X_{t-1} \geq 0$, $X_{t-2} < 0$ и $X_{t-3} \geq 0$ је

$$\begin{aligned} X_{t+2} &= cX_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \\ &= acX_t + cbX_{t-1} + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \\ &= (a^2c + bc)X_{t-1} + abcX_{t-2} + ac\varepsilon_t + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \\ &= c(a^2c + bc + ab)X_{t-2} + \alpha \end{aligned} \tag{3.195}$$

где је

$$\alpha = bc\varepsilon_{t-1} + ac\varepsilon_t + c\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}. \tag{3.196}$$

Из (3.195) и (3.196) следи да је

$$c(a^2 + bc + ab)|X_{t-2}| \leq \alpha. \tag{3.197}$$

Исто тако, из

$$\begin{aligned} X_{t+1} =& aX_t + bX_{t-1} + \varepsilon_{t+1} \\ =& (a^2 + b)X_{t-1} + abX_{t-2} + a\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} \\ =& (a^2 + bc + ab)X_{t-2} + \beta, \end{aligned}$$

где је

$$\beta = (a^2 + b)\varepsilon_{t-1} + a\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}$$

следи да је

$$|a^2 + bc + ab||X_{t-2}| < -\beta. \tag{3.198}$$

Из (3.197) и (3.198) следи да је

$$E\,(||\mathrm{X}_{t+2}|| \mid \mathcal{F}_{t-2}) < \gamma_{20} \tag{3.199}$$

за $a^2 + bc + ab < 0$. За $0 \leq a^2 + bc + ab < 1$ из (3.195), слично као у II), следи да постоје неко $k \in N$ и $0 < \alpha_9 < 1$ такви да је

$$E\,(||\mathrm{X}_{t+k}|| \mid \mathcal{F}_t) \leq \alpha_9 ||\mathrm{X}_t|| + \beta_9. \tag{3.200}$$

(2) За $X_{t-1} \geq 0$ и $X_{t-2} \geq 0$ или $X_{t-1} \geq 0$, $X_{t-2} < 0$ и $X_{t-3} < 0$ имамо неки од претходних случајева.

(3) Ако је $X_{t-1} < 0$, тада из једнакости

$$X_{t+2} = (ac + b)X_{t-1} + a\varepsilon_t + \varepsilon_{t+2},$$

слично као у (1) и (2), долазимо до услова $ac + b > 1$.

Ако је $X_{t+1} \geq 0$ и $X_t < 0$, анализом свих случајева долазимо до закључка да је при већ добијеним условима процес $\{\mathrm{X}_t\}$ геометријски ергодичан.

Из свих претходних разматрања имамо следеће тврђење.

Лема 3.8 *За $a < 0$, $b < 0$ и $c < 0$ процес $\{\mathrm{X}_t\}$ дефинисан са (3.129) је геометријски ергодичан ако је $ac + b < 1$ и $a^2 + bc + ab < 1$.*

Из геометријске ергодичности процеса $\{\mathrm{X}_t\}$ следи геометријска ергодичност процеса $\{X_t\}$. Према томе, услови добијени у доказаним лемама важе и за процес $\{X_t\}$, односно важи следеће тврђење.

Теорема 3.44 *Процес $\{X_t\}$ дефинисан са (3.127) је геометријски ергодичан ако су испуњени услови неког од следећих случајева:*

(1) $a < 0$ *и* $0 < c < 1$;

(2) $0 < a + b < 1$ *и* $c < 1$;

(3) $b < 0$, $a > 0$, $a + b < 1$, $a^2 + ab + b + 1 > 0$ *и* $c < 1$;

(4) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ *и* $ac + b < 1$;

(5) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, $ac + b < 1$ *и* $a^2c + bc + ab < 1$.

Из ове теореме, као специјалан случај за $b = 0$, добијамо познате услове за ергодичност SETAR процеса првог реда које су добили Petruccelli и Woolford (1984).

3.4.2 Веза ергодичности и стабилности детерминистичког модела

За SETAR процес првог реда смо видели у 3.3.2 да су услови ергодичности потпуно идентични са условима стабилности одговарајућег детерминистичког система. Може се поставити питање да ли то исто важи и за SETAR процес другог реда.

Процесу дефинисаном са (3.127) одговара детерминистички систем

$$X_t^* = \begin{cases} aX_{t-1}^* + bX_{t-2}^*, & X_{t-1}^* \geq 0 \\ cX_{t-1}^*, & X_{t-1}^* < 0 \end{cases} \tag{3.201}$$

Како нису познати услови стабилности система (3.201), није их могуће упоредити са условима ергодичности датим у претходној теореми. За $d = 2$ постоје парцијални резултати о стабилности детерминистичког система

$$X_t^* = \begin{cases} aX_{t-1}^* + bX_{t-2}^*, & X_{t-2}^* \geq 0 \\ cX_{t-1}^*, & X_{t-2}^* < 0 \end{cases} \tag{3.202}$$

(Tong, 1990). Наиме, ако је $a^2 + 4b < 0$, систем (3.202) је стабилан ако су испуњени услови једног од следећих случајева:

(1) $c < 0$, $a \geq 0$, $c(ac + b) \leq 1$;

(2) $c \leq 0,\ a < 0,\ ac + b < 0,\ c(ac+b) \leq 1;$

(3) $c < 0,\ a < 0,\ ac + b = 0;$

(4) $c < 0,\ a < 0,\ 0 < ac + b \leq 1;$

(5) $c = 0;$

(6) $0 < c \leq 1,\ a \geq 0;$

(7) $0 < c \leq 1,\ a < 0,\ (a^2 + b)c + ab \leq 0;$

(8) $0 < c \leq 1,\ a < 0,\ 0 < (a^2 + b)c + ab \leq 1.$

За процес (3.126), у случају $b_1 = 0$ и $d = 2$, сличном анализом као у 3.4.1 могу да се добију услови ергодичности. Међутим, како то нису потребни и довољни услови, упоређивање услова ергодичности и стабилности система (3.202) не би било једноставно.

3.5 SETAR ПРОЦЕС РЕДА p (p > 2)

Нека је дат SETAR($l;p$) модел ($l > 1$, $p > 2$)

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p} a_{j,i} X_{t-i} \right) I(X_{t-d} \in R_j) + \varepsilon_t \tag{3.203}$$

који можемо записати у векторском облику

$$\mathbf{X}_t = F(\mathbf{X}_{t-1}) + \mathbf{e}_t, \tag{3.204}$$

где је

$$\mathbf{X} = (X_t, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p+1})^T, \tag{3.205}$$

$$\mathbf{e}_t = (\varepsilon_t, 0, \ldots, 0)^T. \tag{3.206}$$

Нелинеарна функција $F : R^p \to R^p$ је дефинисана са

$$F(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}), x_1, \ldots, x_{p-1})^T \tag{3.207}$$

за

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)^T \in R^p, \tag{3.208}$$

при чему је

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{l} \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p} a_{j,i} x_i \right) I(x_{i-d} \in R_j). \tag{3.209}$$

Према теореми 3.27, за ергодичност процеса $\{X_t\}$ довољно је доказати да је процес $\{\mathbf{X}_t\}$ несводљив, апериодичан и да за неки његов мали скуп важе дрифт услови.

3.5.1 Несводљивост и апериодичност

На несводљивост и апериодичност процеса $\{X_t\}$ утичу једино својства низа $\{\varepsilon_t\}$. Претпоставимо, као и раније, да је $\{\varepsilon_t\}$ низ независних случајних променљивих са истом расподелом и да је $g : R \to R$ густина те расподеле.

Лема 3.9 *Ако је g мерљива и скоро свуда позитивна функција, тада је процес $\{X_t\}$ μ_p - несводљив и апериодичан.*

Доказ. Очигледно је да је функција $f : R^p \to R$ дефинисана са (3.209) мерљива функција и да је ограничена на сваком компактном скупу. Ако је $p = 2$ и $A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ отворен скуп у R^2, тада је, за $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$,

$$\begin{aligned} P^2(\mathbf{x}, A) &= \int_A P(\mathbf{y}, d\mathbf{y}) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} g(y_2 - f(x_1, x_2)) P(\mathbf{y}, A) dy_2. \end{aligned} \tag{3.210}$$

Како је

$$P(\mathbf{y}, A) = \int_{a_1}^{b_1} g(y_1 - f(y_2, x_1)) dy_1, \tag{3.211}$$

из (3.210) следи да је

$$P^2(\mathbf{x}, A) = \iint_A g(y_2 - f(x_1, x_2)) g(y_1 - f(y_2, x_1)) dy_1 dy_2. \tag{3.212}$$

Једнакост (3.212) важи на сваком скупу $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, па важи и на сваком скупу $A \in \mathcal{B}_2$. Пошто је g скоро свуда позитивна, то је $P^2(\mathbf{x}, A) > 0$, што значи да је процес $\{X_t\}$ μ_2 - несводљив. Слично је и $P^3(\mathbf{x}, A) > 0$, па је процес $\{X_t\}$ и апериодичан.

На исти начин добијамо да за $p > 2$ и $A \in \mathcal{B}_p$ је

$$P^p(\mathbf{x}, A) = \int_A u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu_p(d\mathbf{y}), \tag{3.213}$$

где је

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(y_p - f(\mathbf{x})) \prod_{i=2}^{p} g\left(y_i - f(y_{i+1}, \ldots, y_p, x_1, \ldots, x_i)\right). \tag{3.214}$$

Из неједнакости $u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$, као и у случају $p = 2$, закључујемо да је процес $\{X_t\}$ μ_p - несводљив и апериодичан. ■

За дрифт услове је потребно да је скуп $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| < K\}$ мали у односу на процес $\{X_t\}$. Међутим, ако је g непрекидна функција, онда је сваки компактан скуп B мали. Наиме, за $\mathbf{x} \in B$ и $\mathbf{y} \in B$, због ограничености функције f на B и непрекидности функције g, важи

$$\underset{\mathbf{x},\mathbf{y}\in B}{inf}\ u(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0. \tag{3.215}$$

Према томе,

$$\underset{\mathbf{x}\in B}{inf} \int_A u(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu_p(d\mathbf{y}) > 0, \tag{3.216}$$

што, обзиром на једнакост (3.213) и дефиницију малог скупа, значи да је B мали скуп процеса $\{\mathbf{X}_t\}$.

Занимљиво је да неједнакост (3.216) важи и без претпоставке о непрекидности функције g. Bhattacharya и Lee (1995) су формулисали и користили општије тврђење, а тек касније (Bhattacharya and Lee, 1999) дали коректан доказ. Ради се о следећем тврђењу.

Лема 3.10 *Ако је $g : R \to R$ мерљива и скоро свуда позитивна и ако је $f : R^p \to R$ мерљива функција која је коначна на компактним скуповима, онда за сваки скуп $A \in \mathcal{B}_p$ ($\mu_p(A) > 0$) и сваки компактан скуп $B \in R^p$ важи (3.215).*

Из ове леме следи да је, при условима леме 3.9, сваки компактан скуп у R^p мали за процес $\{\mathbf{X}_t\}$.

3.5.2 Услови ергодичности

Из Марковског облика модела

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=1}^{l}(A_{j,0} + A_j\mathbf{X}_{t-1})\,I(\mathbf{X}_{t-1} \in \mathbf{R}_j) + \mathbf{e}_t \tag{3.217}$$

Tong (1983) је закључио да није могуће искористити довољан услов за стационарност

$$\rho(A_j^T A_j) < 1, \quad j = 1,\dots,l$$

јер, специјално за матрице A_j дефинисане са (2.21), он није испуњен. Заправо, за $p > 1$, је $\rho(A_j^T A_j) \geq 1$. Исти коментар је и у Brockwell, Liu and Tweedie (1992). Примењујући Фостерове дрифт критеријуме Chan и Tong (1985) су доказали да је $\{X_t\}$ ергодичан ако је испуњен услов

$$\underset{j\in\{1,2,\dots l\}}{max} \sum_{i=1}^{p} |a_{j,i}| < 1. \tag{3.218}$$

Овај услов се појављује готово у свим каснијим радовима и књигама (Tong, 1990) у којима се користи SETAR модел, а добијен је и од стране других аутора као специјалан случај резултата за ергодичност општијег модела (Chen and Tsay, 1993; Bhattacharya and Lee, 1995; Ann and Huang, 1996; Chen and Chen, 2000; Lu and Jiang, 2001).

На пример, Bhattacharya и Lee (1995) су разматрајући NAR(p) процес

$$X_t = f(X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}) + \varepsilon_t \tag{3.219}$$

доказали да је за ергодичност довољно да неједнакост

$$|f(\mathbf{x})| \leq \sum_{i=1}^{p} a_i |x_i| + c \tag{3.220}$$

буде испуњена за $||\mathbf{x}|| \geq K$, при чему је $c \geq 0$, $K > 0$, а за позитивне реалне бројеве a_i $(1 \leq i \leq p)$ важи

$$\sum_{i=1}^{p} a_i < 1. \tag{3.221}$$

Овај је резултат, за разлику од претходних резултата који се односе на модел (3.219), занимљив и значајан зато што за функцију f захтева линеарно ограничење само за $||\mathbf{x}|| > K$. Али, примењен на SETAR(p) модел, услови (3.220) и (3.221) дају већ познате услове (3.218). За исти процес, (3.219), Ann и Huang (1996) су доказали ергодичност при услову

$$|f(\mathbf{x})| \leq \lambda max\{|x_1|, \ldots, |x_p|\} + c, \quad 0 < \lambda < 1 \tag{3.222}$$

из којег, за SETAR(p) процес, поново добијамо услов (3.218).

Међутим, користећи друге технике, могуће је доказати да је $\{X_t\}$ ергодичан и под знатно слабијим претпоставкама. У извођењу доказа се користи следеће познато тврђење из теорије матрица (Horn and Johnson, 1985).

Лема 3.11 *За свако $\varepsilon > 0$ постоји матрична норма за коју важи*

$$\rho(A) \leq ||A|| \leq \rho(A) + \varepsilon. \tag{3.223}$$

Главно тврђење даје следећа теорема.

Теорема 3.45 *Процес* SETAR($l; p$), *за који је $E|\varepsilon_n| < \infty$, је геометријски ергодичан ако је*

$$\rho(A_j) < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Доказ. Из (3.203) следи да је

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{j=1}^{l} a_{j,0} I(X_{t-d} \in R_j) + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{l} a_{j,i} I(X_{t-d} \in R_j) \right) X_{t-i} + \varepsilon_t \\ &= \alpha_0(X_{t-d}) + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(X_{t-d}) X_{t-i} + \varepsilon_t, \end{aligned} \tag{3.224}$$

где је

$$\alpha_i(X_{t-d}) = \sum_{j=1}^{l} a_{j,i} I(X_{t-d} \in R_j), \quad i = 0, 1, \dots, p.$$

Слично, модел (3.217) можемо да запишемо у облику

$$\mathrm{X}_t = G_0(X_{t-d}) + G(X_{t-d})\mathrm{X}_{t-1} + \mathrm{e}_t, \tag{3.225}$$

где је

$$G_0(X_{t-d}) = A_{j,0} I(X_{t-d} \in R_j), \quad G(X_{t-d}) = A_j I(X_{t-d} \in R_j). \tag{3.226}$$

Докажимо да су за процес $\{\mathrm{X}_t\}$ и функцију $V : R^p \to R$, дефинисану са

$$V(\mathrm{x}) = ||\mathrm{x}|| + 1, \tag{3.227}$$

испуњени дрифт услови. Нека је

$$\lambda = max\{\rho(A_1), \rho(A_2), \dots, \rho(A_l)\} \tag{3.228}$$

и нека је $\varepsilon > 0$ тако да је $\lambda + \varepsilon < 1$. На основу тврђења леме 3.12 постоји матрична норма $||\cdot||_{\mathrm{x}}$ таква да је

$$\lambda \leq \rho(G(X_{t-d})) \leq ||G(X_{t-d})||_{\mathrm{x}} \leq \rho(G(X_{t-d})) + \varepsilon \leq \lambda + \varepsilon. \tag{3.229}$$

Из (3.225) и (3.229) следи

$$\begin{aligned} E\left(V(\mathrm{X}_{n+1}) \mid \mathrm{X}_n = \mathrm{x}\right) &= E||G_0 + G\mathrm{x} + \mathrm{e}_{n+1}|| + 1 \\ &\leq ||G_0|| + ||G \cdot \mathrm{x}|| + E||\varepsilon_{n+1}|| + 1 \\ &\leq ||G||_{\mathrm{x}} \cdot ||\mathrm{x}|| + ||G_0|| + E||\varepsilon_{n+1}|| + 1 \\ &\leq (\lambda + \varepsilon)||\mathrm{x}|| + ||G_0|| + E||\varepsilon_{n+1}|| + 1 \end{aligned} \tag{3.230}$$

Пошто је $E|\varepsilon_{n+1}| < \infty$, постоји број M такав да за $||\mathrm{x}|| > M$ и $0 < \delta < 1 - \lambda - \varepsilon$ важи

$$||G_0|| + E||\varepsilon_{n+1}|| + 1 < \delta||\mathrm{x}||. \tag{3.231}$$

Из (3.230) и (3.231) следи да је

$$E\left(V(\mathrm{X}_{n+1}) \mid \mathrm{X}_n = \mathrm{x}\right) \leq (\lambda + \varepsilon + \rho)||\mathrm{x}||, \quad \mathrm{x} \in B^C,$$

где је

$$B = \{\mathrm{x} \mid ||\mathrm{x}|| \leq M\}. \tag{3.232}$$

Како је $\lambda + \varepsilon + \delta < 1$ и како је

$$E\left(V(\mathrm{X}_{n+1}) \mid \mathrm{X}_n = \mathrm{x})\right) < \infty, \quad \mathrm{x} \in B,$$

испуњени су услови дрифт критеријума, па је процес $\{\mathrm{X}_t\}$, а тиме и процес $\{X_t\}$, геометријски ергодичан. ■

Исти резултат важи и за модел

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p} a_{j,i} X_{t-i} + \varepsilon_{j,t} \right) I(X_{t-d} \in R_j),$$

с тим што је тада

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=1}^{l} (A_{j,0} + A_j \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{e}_{j,t}) I(\mathbf{X}_{t-1} \in \mathbf{R}_j),$$

где је

$$\mathbf{e}_{j,t} = (\varepsilon_{j,t}, 0, \ldots, 0)^T.$$

3.5.3 Веза ергодичности и стабилности детерминистичког процеса

Као код SETAR процеса првог и другог реда и овде се поставља питање односа услова ергодичности процеса $\{X_t\}$ и одговарајућег детерминистичког процеса. Ако у моделу (3.224) изоставимо стохастички део, добијамо модел

$$X_t^* = \alpha_0(\mathbf{X}_{t-1}^*) + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(\mathbf{X}_{t-1}^*) X_{t-i}^*, \tag{3.233}$$

где је

$$\mathbf{X}_t^* = (X_t^*, X_{t-1}^*, \ldots, X_{t-p+1}^*)^T,$$

који генерише детерминистички процес са веома сложеном динамиком. Chen (1990) је дао везу између ергодичности процеса $\{X_t\}$ и стабилности система дефинисаног моделом (3.233). Он је доказао да је процес $\{X_t\}$ геометријски ергодичан ако је процес $\{X_t^*\}$ асимптотски геометријски стабилан и ако је функција α дефинисана са

$$\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(\mathbf{x}) x_i \tag{3.234}$$

Липшиц - непрекидна.

Наравно, услов (3.234) је врло рестриктиван, па у случају SETAR(p) ($p > 2$) немамо исте услове ергодичности и стабилности, као што је то био случај за SETAR процесе првог реда.

3.6 ПРОЦЕС SETAR-ARCH(p)

На сличан начин може да се добије довољан услов за ергодичност SETAR-ARCH(p) процеса

$$
\begin{aligned}
X_t &= \sum_{j=1}^{l}\left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p} a_{j,i}X_{t-i}\right) I(X_{t-d} \in R_j) + \varepsilon_t\sqrt{h_t} \\
h_t &= \sum_{i=1}^{l}\left(b_{j,0} + \sum_{i=1}^{p} b_{j,i}X_{t-i}^2\right) I(X_{t-d} \in R_j),
\end{aligned}
\tag{3.235}
$$

где је $b_{j,i} > 0$ за $j \in \{1, \dots l\}$ и $i \in \{0, 1, \dots, p\}$.

Теорема 3.46 *Процес* SETAR-ARCH(p) *је геометријски ергодичан ако је*

$$
\rho(A_j) + max\{\sqrt{b_{j,1}}, \sqrt{b_{j,2}}, \dots, \sqrt{b_{j,p}}\} \cdot E|\varepsilon_1| < 1, \quad j = 1, 2, \dots, l. \tag{3.236}
$$

Доказ. Посматрани модел може да се запише у облику

$$
\mathbf{X}_t = G_0(X_{t-d}) + G(X_{t-d})\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{v}_t, \tag{3.237}
$$

где је

$$
\mathbf{v}_t = (\varepsilon_t\sqrt{h_t}, 0, \dots, 0)^T. \tag{3.238}
$$

Нека је функција $V : R^p \to R$ дефинисана са

$$
V(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}|| + 1,
$$

нека је $\lambda_1(\mathbf{x})$ максимална сопствена вредност матрице $G(X_{t-d})$ и нека је $||\cdot||_x$ матрична норма за коју важе релације аналогне релацијама (3.223), при чему је $\varepsilon(\mathbf{x}) > 0$. Из (3.237) следи

$$
\begin{aligned}
E\left(V(\mathbf{X}_{n+1}) \mid \mathbf{X}_n = \mathbf{x}\right) &= E||G_0 + G\mathbf{x} + \mathbf{v}_{n+1}|| + 1 \\
&\le ||G_0|| + ||G \cdot \mathbf{x}|| + E||\mathbf{v}_{n+1}|| + 1 \\
&\le ||G||_{\mathbf{x}} \cdot ||x|| + ||G_0|| + E||\mathbf{v}_{n+1}|| + 1 \\
&\le (\lambda_1 + \varepsilon)||x|| + ||G_0|| + E|\varepsilon_{n+1}| \cdot |\sigma(\mathbf{x})| + 1.
\end{aligned}
\tag{3.239}
$$

Како је

$$
\begin{aligned}
|\sigma(\mathbf{x})| &\le \sum_{j=1}^{l}\left(\left(b_{j,0}+\sum_{i=1}^{p} b_{j,i}x_j^2\right) I(x_d\in R_j)\right)^{1/2}\\
&\le \sum_{j=1}^{l}\left(\sqrt{b_{j,0}}+\sum_{i=1}^{p}\sqrt{b_{j,i}}\right) I(x_d\in R_j)\\
&\le \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{p}\sqrt{b_{j,i}}|x_j|\right) I(x_d\in R_j)+c\\
&\le \sum_{j=1}^{l} max\{b\sqrt{b_{j,1}},\sqrt{b_{j,2}},\dots,\sqrt{b_{j,p}}\} I(x_d\in R_j)||\mathbf{x}||+c_1\\
&\le \lambda_2(\mathbf{x})||\mathbf{x}||+1,
\end{aligned}
$$

из (3.239) следи да је

$$
E\left(V(\mathbf{X}_{n+1}\mid \mathbf{X}_n=\mathbf{x}\right) \le (\lambda_1(\mathbf{x})+\lambda_2(\mathbf{x})E|\varepsilon_1|+\varepsilon(\mathbf{x}))||\mathbf{x}||+c_2, \quad \mathbf{x}\in B^C,
$$

где је

$$
B=\{\mathbf{x}\mid ||\mathbf{x}||\le M\}.
$$

Ако $\varepsilon(\mathbf{x})$ изаберемо тако да је $\varepsilon(\mathbf{x}) < 1-\lambda_1(\mathbf{x})-\lambda_2(\mathbf{x})E|\varepsilon_1|$, онда су при услову $\lambda_1(\mathbf{x})+\lambda_2(\mathbf{x})E|\varepsilon_1| < 1$ испуњени услови дрифт критеријума. Међутим, ови услови се управо своде на услове дате у теореми. ■

3.7 SETARMA ПРОЦЕС

Нека је дат SETARMA(l,p,q) модел

$$
X_t=\sum_{j=1}^{l}\left(a_{j,0}+\sum_{i=1}^{p}a_{j,i}X_{t-i}+\sum_{i=1}^{q}b_{j,i}\varepsilon_{t-i}\right) I(X_{t-d}\in R_j)+\varepsilon_t, \tag{3.240}
$$

који можемо записати у векторском облику

$$
\mathbf{X}_t=F(\mathbf{X}_{t-1})+\mathbf{e}_t, \tag{3.241}
$$

где је

$$
\mathbf{X}=(X_t,X_{t-1},\dots,X_{t-p+1},\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1},\dots,\varepsilon_{t-q+1})^T, \tag{3.242}
$$

$$
\mathbf{e}_t=(\varepsilon_t,0,\dots,0,\varepsilon_t,0,\dots,0)^T. \tag{3.243}
$$

Нелинеарна функција $F: R^{p+q}\to R^{p+q}$ је дефинисана са

$$
F(\mathbf{x})=(f(\mathbf{x}),x_1,\dots,x_{p+q-1})^T \tag{3.244}
$$

за

$$\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{p+q})^T \in R^p, \tag{3.245}$$

при чему је

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{l} \left(a_{j,0} + \sum_{i=1}^{p} a_{j,i} x_i + \sum_{i=1}^{q} b_{j,i} x_{p+i} \right) I(x_{i-d} \in R_j). \tag{3.246}$$

Један од основних проблема је налажење услова под којима модел (3.240) дефинише стационаран SETARMA процес. За SETARMA$(l,1,q)$ је познато да MA делови не утичу на стационарност (Liu and Susko, 1992), а за SETARMA(l,p,q), где је $p > 1$, слично тврђење је доказано у случају кад је

$$b_{j,i} = b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, l \tag{3.247}$$

(Brockwell, Liu and Tweedie, 1992). Тек пет година касније, коришћењем услова стабилности (Услов 3.5 и Услов 3.6) и Теореме 3.20, доказано је (Ђорић и Малишић, 1997) да постоји стационаран SETARMA(l,p,q) процес и без претпоставке (3.247) и да MA делови не утичу на стационарност. При томе је коришћен доста рестриктиван услов за параметре AR делова процеса. Наиме, претпостављено је да је

$$1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^i \neq 0, \quad |z| \leq 1, \tag{3.248}$$

где је

$$a_i = \max_{1 \leq k \leq l} \{|a_{k,i}|\}, \quad i = 0, 1, \ldots, p. \tag{3.249}$$

Овај услов је до тада коришћен и као довољан услов за стационарност SETAR(p) процеса (Chan and Tsay, 1993).

Како је за стационарност процеса $\{X_t\}$ довољно је доказати да за неки његов мали скуп процеса $\{\mathrm{X}_t\}$ важе дрифт услови, могуће је доказати знатно бољи резултат. Он је исказан у следећем тврђењу.

Теорема 3.47 *Ако је процес* $\{\mathrm{X}_t\}$ *Фелеров онда модел (3.240) за који је* $E|\varepsilon_n| < \infty$ *и*

$$\rho(A_j) < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

где је

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,p-1} & a_{j,p} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

дефинише стационарни SETARMA(l,p,q) *процес.*

Доказ. Модел (3.241) може да се запише у облику

$$\mathbf{X}_t = G(X_{t-d}) + H(X_{t-d}) \cdot \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{e}_t, \tag{3.250}$$

где je

$$G(X_{t-d}) = G_j I(X_{t-d} \in R_j), \quad H(X_{t-d}) = H_j I(X_{t-d} \in R_j), \tag{3.251}$$

a G_j и H_j су вектор и квадратна матрица (димензија $p+q$) дефинисани са

$$G_j = (a_{j,0}, 0, \dots, 0)^T, \tag{3.252}$$

$$H_j = \begin{pmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & \cdots & a_{j,p-1} & a_{j,p} & b_{j,1} & b_{j,2} & \cdots & b_{j,q-1} & b_{j,q} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.253}$$

Докажимо да су за процес $\{\mathbf{X}_t\}$ и функцију $V : R^{p+q} \to R$, дефинисану са (3.227) испуњени дрифт услови. Нека је λ дефинисано са (3.228) и нека је $\varepsilon > 0$ тако да је $\lambda + \varepsilon < 1$. Како је

$$|H_j - \alpha I| = |A_j - \alpha I| \cdot (-\alpha)^q, \tag{3.254}$$

имамо да је

$$\begin{aligned} E\left(V(\mathbf{X}_{n+1}) \mid \mathbf{X}_n = \mathbf{x}\right) &= E||G + H\mathbf{x} + \mathbf{e}_{n+1}|| + 1 \\ &\le ||G|| + ||H \cdot \mathbf{x}|| + E||\varepsilon_{n+1}|| + 1 \\ &\le ||H||_{\mathbf{x}} \cdot ||x|| + ||G|| + E||\varepsilon_{n+1}|| + 1 \\ &\le (\max_{1\le j\le l} \rho(H_j) + \varepsilon)||\mathbf{x}|| + ||G|| + E||\varepsilon_{n+1}|| + 1 \\ &\le (\max_{1\le j\le l} \rho(A_j) + \varepsilon)||\mathbf{x}|| + ||G|| + E||\varepsilon_{n+1}|| + 1 \\ &\le (\lambda + \varepsilon)||\mathbf{x}|| + ||G|| + E||\varepsilon_{n+1}|| + 1. \end{aligned} \tag{3.255}$$

Пошто је $E|\varepsilon_{n+1}| < \infty$, постоји број M такав да за $||\mathbf{x}|| > M$ и $0 < \delta < 1 - \lambda - \varepsilon$ важи

$$||G|| + E||\varepsilon_{n+1}|| + 1 < \delta||\mathbf{x}||. \tag{3.256}$$

Из (3.255) и (3.256) следи да је за $\mathrm{x} \in B^C$

$$E(V(\mathrm{X}_{n+1} \mid \mathrm{X}_n = \mathrm{x}) \leq (\lambda + \varepsilon + \rho)||\mathrm{x}||,$$

где је B дефинисано са (3.232). Због $\lambda + \varepsilon + \delta < 1$ и

$$E(V(\mathrm{X}_{n+1}) \mid \mathrm{X}_n = \mathrm{x}) < \infty, \quad \mathrm{x} \in B,$$

испуњени су услови дрифт критеријума. Како је процес $\{X_t\}$ Фелеров (по претпоставци), према теореми 3.18 он је стационаран. ■

Уз додатне претпоставке да је процес $\{\mathrm{X}_t\}$ апериодичан и несводљив, из претходне теореме следи ергодичност процеса $\{\mathrm{X}_t\}$ и $\{X_t\}$. Међутим, услови несводљивости су познати само за специјалне случајеве процеса $\{\mathrm{X}_t\}$ (Liu and Susko, 1992).

4

ОЦЕНЕ ПАРАМЕТАРА SETAR МОДЕЛА

4.1 УВОД

У овој глави се разматрају методе за оцењивање непознатих параметара SETAR модела. Најпре су за неке методе постојећи резултати уопштени, а затим је предложен рекурзивни алгоритам типа стохастичке апроксимације који омогућује конзистентне (стабилне) оцене под знатно блажим условима од оних који су коришћени у другим методама.

За оцену параметара нелинеарних модела се углавном користе метода најмањих квадрата и метода максималне веродостојности. Преглед резултата се може наћи како у прегледним радовима (Tjostheim, 1986; Малишић, 1992; Teräsvirta, Tjostheimand Granger, 1994), тако и у књигама (Hall and Heyde, 1980; Prakasa Rao, 1987; Tong, 1990; Granger and Teräsvirta, 1993).

Tjostheim(1986) је уопштио постојеће резултате за ове две методе тако што је исту технику анализе оцена применио на општи критеријум и на неке нестационарне процесе.

Нека је $\{X_n\}$ стохастички процес који је дефинисан на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$, чија расподела зависи од вектора параметара $\theta \in \Theta \subset R^p$. Ако су дате опсервације $X_1, X_2, \ldots, X_n$ у случају кад је θ_0 стварна вредност параметара θ (али непозната), онда на основу тих опсервација и неког критеријума $Q_n(X_1, X_2, \ldots; \theta)$, или краће $Q_n(\theta)$, треба одредити оцену $\widehat{\theta}_n$ непознатих параметара θ_0. Ако Q_n има непрекидне парцијалне изводе другог реда, онда на основу Тејлоровог развоја функције Q_n у θ_0 имамо да је

$$\begin{aligned} Q_n(\theta) =& Q_n(\theta_0) + (\theta-\theta_0)^T \frac{\partial Q_n}{\partial \theta}(\theta_0) + \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)^T \frac{\partial^2 Q_n(\theta_0)}{\partial \theta^2}(\theta-\theta_0) \\ &+ \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)^T \left(\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta^2}(\theta^*) - \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta^2}(\theta_0) \right)(\theta-\theta_0) \end{aligned} \tag{4.1}$$

за $\theta \in U_\delta(\theta_0)$, где је $U_\delta(\theta_0)$ околина од θ_0, а θ^* нека међувредност између θ и θ_0.

При одређеним условима за $\{X_t\}$ и Q_n постоје оцене $\widehat{\theta}_n$ такве да

$$\widehat{\theta}_n \xrightarrow{s.s.} \theta_0, \quad n \to \infty,$$

при чему Q_n постиже локални минимум у $\widehat{\theta}_n$ и за свако $\varepsilon > 0$ постоје n_0 и догађај E, чија је вероватноћа већа од $1-\varepsilon$ и на коме за $n > n_0$ важи

$$\frac{\partial Q_n}{\partial \theta}(\widehat{\theta}_n) = 0. \tag{4.2}$$

Уз додатне претпоставке да

$$n^{-1}\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \theta^2}(\theta_0) \xrightarrow{s.s.} V, \quad n \to \infty, \tag{4.3}$$

где је V позитивно дефинисана матрица, и да

$$n^{-1/2}\frac{\partial Q_n}{\partial \theta}(\theta_0) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, W), \tag{4.4}$$

важи и асимптотска нормалност

$$n^{1/2}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, V^{-1}WV). \tag{4.5}$$

Ако за Q_n узмемо збир квадрата разлика опсервација X_i и њихових предикција $E_\theta(X_i \mid \mathcal{F}_{i-1})$ на бази свих претходних опсервација,

$$Q_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E_\theta(X_i \mid \mathcal{F}_{i-1})\right)^2, \tag{4.6}$$

добијамо уопштени метод најмањих квадрата, познат и као нелинеарни метод најмањих квадрата (nonlinear least squares (Rao, 1987)) или метод условних најмањих квадрата (conditional least squares (Klimko and Nelson, 1978)). При томе, потребно је да $E_\theta(X_i \mid \mathcal{F}_{i-1})$ буде у околини $U(\theta_0)$ скоро сигурно два пута диференцијабилна. То значи да се ови резултати могу применити само у случају да је регресиона функција глатка. Међутим, у TAR моделима функција која дефинише модел има у r прекид, па није могуће ове резултате применити за оцене свих параметара модела. Наравно, ако се оцењују само коефицијенти a_i у појединим режимима, онда се поменути резултати могу применити.

Резултат (4.5) је добијен из Тејлоровог развоја (4.1). Аналоган резултат може да се добије и без претпоставке о диференцијабилности функције Q_n, али уз додатне услове за процес $\{X_t\}$, односно уз коришћење услова стохастичке равномерне непрекидности (stochastic equicontinuity). Наиме, ако је

$$Q_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} l_t(\theta) \tag{4.7}$$

и ако је $E(l_t(\theta))$ квадратна функција у околини θ_0, тј.

$$E(l_t(\theta)) = K + \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)^T V(\theta-\theta_0) + 0(||\theta-\theta_0||^2), \tag{4.8}$$

развој (4.1) може да се замени са

$$Q_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} \alpha_t + (\theta - \theta_0)^T \sum_{t=1}^{n} \beta_t + R_n, \tag{4.9}$$

где је остатак R_n стохастички равномерно непрекидан у θ_0 и где важи

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \beta_t \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, W), \tag{4.10}$$

(Pollard, 1984; Chan and Tsay, 1998). У случају непрекидног SETAR модела, уз одређене додатне претпоставке, услови (4.8), (4.9) и (4.10) могу да се обезбеде за

$$l_t(\theta) = (X_t - E_\theta(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})^2. \tag{4.11}$$

У 4.2 су презентирани постојећи резултати за методу најмањих квадрата. Најпре се разматра случај кад су прагови и кашњење познати, како за ергодичан тако и за неергодичан процес, а затим се излажу резултати у случају кад се оцењује комплетан вектор непознатих параметара.

У 4.3 су дати основни резултати који се односе на својства оцена добијених методом максималне веродостојности, укључујући и њихову асимптотску расподелу.

Резултати до којих су дошли K.S. Chen (1993) и L.Qian (1998) у својим докторским дисертацијама су уопштени за случај општег критеријума, односно М - оцена. Добијени резултати су дати у 4.4.

У 4.5 се излажу оригинални резултати о рекурзивним оценама, где је добијена конзистентност оцена без претпоставки о ергодичности и стационарности процеса. Поред оцена типа стохастичке апроксимације, дат је и рекурзивни облик методе најмањих квадрата, при чему су коришћени знатно блажи услови од оних које је користио Tsay (1989, 2000).

4.2 МЕТОДА НАЈМАЊИХ КВАДРАТА

Методом најмањих квадрата могу да се добију конзистентне и асимптотски нормалне оцене параметара модела у појединим режимима ако је процес стационаран и ергодичан. Ако процес није ергодичан, онда под одређеним условима могу методом најмањих квадрата да се добију конзистентне оцене.

Што се тиче оцене прагова, проблем се састоји у томе што јединствена оцена прага није могућа на бази коначног броја опсервација. За стационаран и ергодичан процес Chen (1993) је доказао да су оцене параметара модела у појединим режимима и оцене прагова асимптотски независне и да су асимптотска својства оцена параметара иста као и у случају кад су прагови познати.

4.2.1 Познати прагови

Први резултат о конзистентности и асимптотској расподели оцена су дати у раду Petruccelli and Woolford (1984) за SETAR(2; 1, 1) модел са нултим прагом ($r = 0$) за стационаран и ергодичан процес. Међутим, слично важи и у општем случају ергодичног SETAR процеса, а има резултата и за неке случајеве неергодичних процеса.

Случај ергодичног процеса

Petruccelli Woolford (1984) су разматрали модел

$$X_t = \alpha X_{t-1}^+ + \beta X_{t-1}^- + \varepsilon_t \tag{4.12}$$

са иновацијама ε_t које су међусобно независне и имају исте расподеле са свуда позитивном густином на R, очекивањем 0 и варијансом σ^2. Под претпоставком

$$E\left(|\varepsilon_t|^{2+\sigma}\right) < \infty \quad (\sigma > 0)$$

за низ $\{\varepsilon_t\}$ и условом ергодичности за $\{X_t\}$

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad \alpha\beta < 1, \tag{4.13}$$

они су доказали да су оцене $\widehat{\alpha}_n$, $\widehat{\beta}_n$ и $\widehat{\delta}_n^2$ параметара α, β и σ^2 дате са

$$\widehat{\alpha}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i X_{i-1}^+ / \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^{+2}, \tag{4.14}$$

$$\widehat{\beta}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i X_{i-1}^- / \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^{-2}, \tag{4.15}$$

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \widehat{\alpha}_n X_{i-1}^+ - \beta X_{i-1}^+\right)^2 \tag{4.16}$$

конзистентне и асимптотски нормалне. У доказу су користили чињеницу да су, при наведеним условима, процеси $\{X_t^{+2}\}$, $\{X_t^{-2}\}$, $\{X_{t-1}^+\varepsilon_t\}$ и $\{X_{t-1}^-\varepsilon_t\}$ такође ергодични. Наиме, како је

$$\widehat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^+ \varepsilon_i / \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^{+2}$$

и како (због ергодичности)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{+2} \xrightarrow{s.s.} E(X^{+2}), \quad (n \to \infty)$$

и

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^{+}\varepsilon_i \xrightarrow{s.s.} 0, \quad (n \to \infty),$$

то значи да

$$\widehat{\alpha}_n \xrightarrow{s.s.} \alpha \quad n \to \infty.$$

Слично важи и за $\widehat{\beta}_n$ и $\widehat{\sigma}_n^2$.

Chen, Petruccelli, Tong and Woolford (1985) су разматрали SETAR($l;1,\ldots,1$) модел

$$X_t = \sum_{k=1}^{l} (\alpha_k + \beta_k X_{t-1} + \varepsilon_{k,t})\, I(X_{t-1} \in R_k), \tag{4.17}$$

где је $R_k = (r_{k-1}, r_k]$ за $-\infty = r_0 < r_1 < \cdots < r_l = \infty$. У случају кад је $\{X_t\}$ ергодичан процес са стационарном расподелом која има коначан други моменат, они су доказали да оцене $\widehat{\alpha}_{k,n}$, $\widehat{\beta}_{k,n}$ и $\widehat{\sigma}_{k,n}$, дате са

$$\widehat{\beta}_{k,n} = \frac{1}{nS_k^2}\left(\sum_{t\in J_k} X_t X_{t-1} - \sum_{t\in J_k} X_t \sum_{t\in J_k} X_{t+1} \Big/ n_k\right), \tag{4.18}$$

$$\widehat{\alpha}_{k,n} = \frac{1}{n_k}\left(\sum_{t\in J_k} X_{t+1} - \widehat{\beta}_{k,n}\sum_{t\in J_k} X_t\right), \tag{4.19}$$

$$\widehat{\sigma}_{k,n}^2 = \frac{1}{n_k}\sum_{t\in J_k}\sum_{t\in J_k}\left(X_{t+1} - \widehat{\alpha}_{k,n} - \widehat{\beta}_{k,n} X_t\right)^2, \tag{4.20}$$

где је

$$J_k = \{t \;:\; t \in \{0,1,\ldots,n-1\},\ X_t \in R_k\}, \tag{4.21}$$

а n_k је број елемената скупа J_k, су конзистентне и асимптотски нормалне.

Ови резултати могу да се прошире и на општи случај ергодичног процеса SETAR($k; p_1, \ldots, p_k$). Нека је, ради једноставнијег записа, $k = 2$, односно

$$X_t = \begin{cases} a_{1,0} + a_{1,1}X_{t-1} + \cdots + a_{1,p_1}X_{t-p_1} + \varepsilon_{1,t}, & X_{t-d} \le r, \\ a_{2,0} + a_{2,1}X_{t-1} + \cdots + a_{2,p_2}X_{t-p_2} + \varepsilon_{2,t}, & X_{t-d} > r \end{cases} \tag{4.22}$$

и нека је, на пример, $\varepsilon_{1,t} \sim \mathcal{N}(0,\sigma_1^2)$ и $\varepsilon_{2,t} \sim \mathcal{N}(0,\sigma_2^2)$. Ако је

$$A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots, a_{1,p_1})^T, \quad A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,p_2})^T \tag{4.23}$$

и

$$Q_n(A_1, A_2) = Q_{1,n}(A_1) + Q_{2,n}(A_2), \quad p = max\{p_1, p_2, d\}, \tag{4.24}$$

где је

$$Q_{1,n} = \sum_{t=p+1}^{n} \left(X_t - a_{1,0} - a_{1,1}X_{t-1} - \cdots - a_{1,p_1}X_{t-p_1}\right)^2 I(X_{t-d} \le r), \tag{4.25}$$

$$Q_{2,n} = \sum_{t=p+1}^{n} \left(X_t - a_{2,0} - a_{2,1}X_{t-1} - \cdots - a_{2,p_2}X_{t-p_2}\right)^2 I(X_{t-d} \le r), \tag{4.26}$$

онда се оцене $\widehat{A}_1$ и $\widehat{A}_2$ добијају минимизацијом критеријума Q_n, а оцене $\widehat{\sigma}_1$ и $\widehat{\sigma}_2$ су дате са

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{Q_1(\widehat{A}_1)}{n_1}, \quad \widehat{\sigma}_2^2 = \frac{Q_2(\widehat{A}_2)}{n_2}, \tag{4.27}$$

где је

$$n_1 = \sum_{t=p+1}^{n} I(X_{t-d} \le r), \quad n_2 = \sum_{t=p+1}^{n} I(X_{t-d} > r).$$

Да бисмо описали асимптотску расподелу оцена, уведимо још неке величине. Нека је

$$U_t = (1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p_1})I(X_{t-d} \le r), \quad W_t = (1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p_2})I(X_{t-d} > r)$$

и нека је

$$V_1 = E(U_t^T U_t), \quad V_2 = E(W_t^T W_t).$$

Следеће тврђење говори о асимптотској расподели за $(\widehat{A}_1, \widehat{A}_2)^T$.

Теорема 4.1 *Ако је $\{X_t\}$ стационаран ергодичан процес који је горе описан и који има стационарну расподелу са свуда позитивном густином, тада*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{A}_1\\ \widehat{A}_2\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{p_1+p_2}\left(\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 V_1^{-1} & 0\\ 0 & \sigma_2 V_2^{-1}\end{pmatrix}\right) \tag{4.28}$$

и

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \sigma_1^2 \chi^2_{n_1-p_1-1}, \quad \widehat{\sigma}_2^2 = \sigma_2^2 \chi^2_{n_2-p_2-1}. \tag{4.29}$$

Доказ овог тврђења се лако добија из резултата (4.5) и својстава оцена линеарног модела.

Случај нeергодичног процеса

На основу резултата поменутих у 4.1, Tjostheim(1986) је за нестационарни процес $\{X_t\}$, дефинисан са

$$X_t = \sum_{j=1}^{k} a_j X_{t-1} H_j(X_{t-1}) + \varepsilon_t, \tag{4.30}$$

где је $H_j(X_{t-1}) = I(X_{t-1} \in R_j)$, а R_j дисјунктни интервали, чија је унија R, доказао да су оцене $\widehat{a}_{1,n}, \widehat{a}_{2,n}, \ldots, \widehat{a}_{k,n}$, које минимизирају квадратни критеријум Q_n дат са (4.6), конзистентне ако су испуњени услови

$$|a_j| < 1, \quad E(X_t^2 H_j(X_t)) \geq \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

за неке константе $\alpha_j > 0$.

На примеру једноставног модела Pham, Chen and Tong (1989) су показали да могу да се добију конзистентне оцене за нестационаран модел и без додатних услова. За модел

$$X_t = \alpha X_t I(X_{t-1} < 0) + \frac{1}{\alpha} X_{t-1} I(X_{t-1} \geq 0) + \varepsilon_t, \tag{4.31}$$

где је $E\varepsilon_t = 0$ и $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2$, они су показали да је скоро сигурно

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{\alpha:|\alpha-\alpha_0|\geq\delta} \frac{Q_n(\alpha) - Q_n(\alpha_0)}{S_n} > 0, \quad \delta > 0,$$

где је

$$S_n = X_2^2 + \cdots + X_n^2,$$

из чега следи конзистентност оцена $\widehat{\alpha}_n$ које минимизирају квадратни критеријум $Q_n(\alpha)$.

Pham, Chen and Tong (1991) су дали још један пример неергодичног процеса са конзистентним оценама. За модел

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} + \gamma + \varepsilon_t, & X_{t-1} \leq 0, \\ \beta X_{t-1} + \gamma + \varepsilon_t, & X_{t-1} > 0, \end{cases} \tag{4.32}$$

где су ε_t независни са истом расподелом, $E\varepsilon_t = 0$, $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2$ и где је ауторегресиона функција непрекидна у нули, они су доказали да оцене $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$, добијене методом најмањих квадрата, конвергирају ка стварним вредностима α_0 и β_0, које могу припадати и граници области ергодичности модела. Њихов резултат је дат у следећем тврђењу.

Теорема 4.2 *Оцене $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$ су конзистентне ако и само ако важи један од следећих случајева:*

(1) $\alpha_0 \leq 1,\ \beta_0 \leq 1,\ \gamma = 0$;

(2) $\alpha_0 < 1,\ \beta_0 \leq 1,\ \gamma < 0$;

(3) $\alpha_0 \leq 1,\ \beta_0 < 1,\ \gamma > 0$.

За општи SETAR процес из рекурзивног облика методе најмањих квадрата могу да се добију конзистентне оцене без услова ергодичности. Нека је дат

SETAR$(k;p,d)$ и нека је n_j број опсервација у j - том режиму, односно оних за које је

$$r_{j-1} \leq X_{t-d} \leq r_j \tag{4.33}$$

и нека важи

$$\frac{n_j}{n} \xrightarrow{P} c_j, \quad n \to \infty, \ j = 1, 2, \ldots, k \tag{4.34}$$

при чему је $\sum_{i=1}^{k} c_j = 1$. Ако се за сваки режим параметри оцењују методом најмањих квадрата, онда се на основу матрице $\mathrm{X}_j^T \mathrm{X}_j$, где је X_j вектор опсервација за које важи (4.33), добијају оцене $\widehat{\theta}_{j,n}$. Услов за конзистентност ових оцена може да се искаже преко највеће $(\lambda_{j,max})$ и најмање $(\lambda_{j,min})$ сопствене вредности матрице $\mathrm{X}_j^T \mathrm{X}_j$. Наиме, користећи резултате за конзистентност оцена параметара стохастичке регресије (Lai and Wei, 1982), Tsay (1989) је формулисао и доказао следеће тврђење.

Теорема 4.3 *Ако су $\{\varepsilon_{j,t}\}$ мартингал разлике за које важи*

$$E(\varepsilon_{j,t} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad \sup_t E\left(|\varepsilon_{j,t}|^{\delta} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) < \infty \quad s.s.$$

за неко $\delta > 0$ и ако је

$$\log \lambda_{j,max} \overset{s.s.}{=} o(\lambda_{j,min}) \quad n \to \infty, \tag{4.35}$$

тада

$$\widehat{\theta}_{j,n} \xrightarrow{s.s.} \theta_j \quad (n \to \infty).$$

Услов (4.35) је испуњен за ергодичне процесе, али и за неке неергодичне.

Напоменимо да у поглављу о рекурзивним оценама ови услови ће бити још ослабљени.

Секвенцијалне оцене

Идеја коришћења оптималног правила заустављања за одређивање броја потребних опсервација за оцене непознатих параметара у линеарним моделима може да се пренесе и на нелинеарне моделе. Одговарајући резултат за TAR(1) модел су добили Lee и Sriram (1999).

Нека је $\{X_t\}$ процес дефинисан са

$$X_t = \alpha X_{t-1}^{+} + \beta X_{t-1}^{-} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n \tag{4.36}$$

строго стационаран и ергодичан, где је $\{\varepsilon_t\}$ низ независних случајних променљивих са истом расподелом, $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$ и где је $\theta = (\alpha, \beta)$ вектор непознатих параметара α и β. Према резултату о ергодичности процеса (4.36) (Petruccelli and Woolford, 1984) можемо претпоставити да је $\theta \in \Theta$, где је

$$\Theta = \{(\alpha,\beta)^T \, : \, \alpha < 1, \ \beta < 1, \ \alpha\beta < 1\}$$

и да су оцене $\widehat{\theta}_n = (\widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_n)$ добијене методом најмањих квадрата, односно $\widehat{\alpha}_n$ и $\widehat{\beta}_n$ су дати са (4.14) и (4.15). Ако се дефинише критеријум

$$L_n = An^{-1}G_n + n, \tag{4.37}$$

где је

$$G_n = (\widehat{\theta}_n - \theta)^T \Gamma_n (\widehat{\theta}_n - \theta), \tag{4.38}$$

$$\Gamma_n = diag\left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{+2}, \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^{-2}\right), \tag{4.39}$$

онда величина R_n дефинисана са

$$R_n = EL_n \tag{4.40}$$

представља ризик за оцене добијене на основу n опсервација.

Циљ секвенцијалних оцена јесте да се избором броја опсервација тај ризик, односно величина R_n, минимизира. Lee и Sriram (1998) су, под претпоставком да је

$$E|\varepsilon_1|^{4s} < \infty, \quad s \geq 1,$$

доказали да, за $\gamma < s$,

$$\{Q_n^\gamma\} \quad \text{је униформно интеграбилан.} \tag{4.41}$$

Како за оцене $\widehat{\theta}_n$ важи (Petruccelli and Woolford, 1984)

$$\sigma^{-2}(\widehat{\theta}_n - \theta)^T \Gamma_n (\widehat{\theta}_n - \theta) \to \chi_2^2, \quad n \to \infty,$$

то из (4.41) следи да је

$$R_n = 2n^{-1}A\sigma^2 + n + o(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

То омогућава да се за

$$n_0(A) \approx \sqrt{2A}\sigma \tag{4.42}$$

добије минимални ризик

$$R_{n_0(A)} \approx 2\sqrt{2A}\sigma. \tag{4.43}$$

Наравно, ако σ није познато, $n_0(A)$ не може да се користи. Међутим, када σ^2, које је дато са (4.16), заменимо са $\widehat{\sigma}^2$ можемо да дефинишемо правило заустављања T_A на следећи начин:

$$T_A = inf\{n \geq n_A \ : \ n \geq \sqrt{2A}\widehat{\sigma}_n\}, \tag{4.44}$$

где је n_A почетни број опсервација у зависности од A. У том случају улогу $n_0(A)$ има T_A, а основни задатак је процена асимптотског понашања T_A, односно ET_A, као и $R_A = EL_{T_A}$ када $A \to \infty$.

Lee и Sriram (1998) су доказали да је правило заустављања T_A дато са (4.44) асимптотски ефикасно, а добили су и његову асимптотску расподелу, која је дата у следећем тврђењу.

Теорема 4.4 *Нека је* $E|\varepsilon_1|^{4s} < \infty$ *за* $s > 2$ *и* $\theta \in \Theta$. *Ако је почетни број опсервација* n_A *такав да је*

$$A^{1/2(1+\delta)} \leq n_A = o(\sqrt{A}), \quad \delta \in (0, (s-2)/2),$$

тада, за $A \to \infty$,

$$T_A/n_0(A) \xrightarrow{s.s.} 1, \quad E(T_A/n_0(A) - 1) \to 0, \quad R_A/R_{n_0(A)} \to 1,$$

$$\left(T_A - \sqrt{2A}\sigma\right)/\sqrt{\sqrt{2A}\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, a^2), \quad a^2 = Var(\varepsilon_1^2/\sigma^2)/4.$$

4.2.2 Непознати прагови

У пракси су најчешће прагови r_i непознати и треба их оценити на основу опсервација. Разматрајући проблем оцене прага у моделу

$$X_t = a_0 + a_1 X_{t-1} + \cdots a_p X_{t-p} + (b_0 + b_1 X_{t-1} + \cdots + b_p X_{t-p}) H(X_{t-d} - r) + \varepsilon_t, \quad (4.45)$$

где је H Heaviside-ова функција, Chen and Tong (1986) су увели идеју глатког прелаза из једног режима у други. Наиме, уместо функције H увели су функцију F нормалне расподеле,

$$X_t = a_0 + a_1 X_{t-1} + \cdots a_p X_{t-p} + (b_0 + b_1 X_{t-1} + \cdots + b_p X_{t-p}) F\left(\frac{X_{t-d} - r}{z}\right) + \varepsilon_t, \quad (4.46)$$

где је z реалан параметар који дефинише мање или више гладак праг, односно гладак прелаз из режима одређеног параметрима $a_0, a_1, \ldots, a_p$ у режим одређен параметрима $a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_p + b_p$. На овај модел могу да се примене резултати из 4.1 за оцене комплетног вектора θ непознатих параметара

$$\theta = (a_0, a_1, \ldots, a_p, b_0, b_1, \ldots, b_p, r, z)^T.$$

Међутим, то је нова класа модела која није предмет овог рада.

Tsay (1989) је предложио апроксимативну оцену прага на основу дијаграма растурања (scatterplot) преуређених регресија. Све док су опсервације у истом режиму, рекурзивне оцене параметара конвергирају ка константи, а чим се дода опсервација из другог режима, оцене се мењају. Међутим, закључивање на основу дијаграма растурања може да буде субјективно, а самим тим и проблематично.

Ако је процес стационаран и ергодичан могуће су конзистентне оцене прагова помоћу методе најмањих квадрата. За случај $p = d = 1$ Petruccelli (1986) је доказао да је CLSE (Conditional Least Squares Estimate) оцена r_n строго конзистентна, а Chan (1993) је исто то доказао за произвољне вредности параметара p и d. Chan је разматрао случај $l = 2$ и $p_i = p$, односно

$$X_t = \begin{cases} a_{1,0} + a_{1,1}X_{t-1} + \cdots + a_{1,p}X_{t-p} + \varepsilon_{1,t}, & X_{t-d} \le r, \\ a_{2,0} + a_{2,1}X_{t-1} + \cdots + a_{2,p}X_{t-p} + \varepsilon_{2,t}, & X_{t-d} > r, \end{cases} \tag{4.47}$$

где је

$$E\varepsilon_{i,t} = 0, \quad E\varepsilon_{i,t}^2 = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2. \tag{4.48}$$

Ако је

$$A_i = \left(a_{i,0}\; a_{i,1}\; \ldots\; a_{i,p}\right)^T, \quad i = 1, 2 \tag{4.49}$$

и

$$\varphi_t = (1,\; X_{t-1},\; \ldots,\; X_{t-p})^T, \tag{4.50}$$

онда је

$$X_t = A_1^T \varphi_t I(X_{t-d} \le r) + A_2^T \varphi_t I(X_{t-d} > r) + \varepsilon_t. \tag{4.51}$$

Претпоставимо да је $A_1 \neq A_2$, $d \le p$ и да је p познато. На основу низа опсервација $X_0, X_1, \ldots, X_n$ генерисаног овим моделом оцењују се коефицијенти $a_{j,i}$, праг r и кашњење d. При томе је основна претпоставка да је $\{X_t\}$ стационаран и ергодичан процес.

Нека је θ_0 вектор непознатих параметара

$$\theta_0 = \left(A_1^T,\; A_2^T,\; r,\; d\right)^T \tag{4.52}$$

и θ вектор истих димензија

$$\theta = \left(B_1^T,\; B_2^T,\; s,\; c\right)^T \tag{4.53}$$

при чему је

$$\theta \in \Theta, \quad \Theta \subset R^{2p+3} \times \{1, 2, \ldots, p\}.$$

CLS оцена $\widehat{\theta}_n$ је она вредност θ која минимизира критеријум $Q_n(\theta)$, где је

$$Q_n(\theta) = \sum_{i=p}^{n} \left(X_i - E_\theta(X_i \mid \mathcal{F}_{i-1})\right)^2. \tag{4.54}$$

Дакле,

$$\widehat{\theta}_n = \underset{\theta\in\Theta}{argmin}\; Q_n(\theta). \tag{4.55}$$

Како је

$$Q_n(\theta) = Q_{1,n}(\theta) + Q_{2,n}(\theta), \tag{4.56}$$

где је

$$Q_{1,n}(\theta) = \sum_{i=p}^{n} \left(X_i - B_1^T \varphi_i\right)^2 I\left(X_{i-c} \leq s\right), \tag{4.57}$$

$$Q_{2,n}(\theta) = \sum_{i=p}^{n} \left(X_i - B_2^T \varphi_i\right)^2 I\left(X_{i-c} > s\right), \tag{4.58}$$

оцене за σ_i^2 су дате са

$$\widehat{\sigma}_{i,n} = \frac{Q_{i,n}(\theta)}{n_i}, \quad i = 1, 2. \tag{4.59}$$

Сама минимизација критеријума $Q_n(\theta)$ може да се реализује у две етапе следећим алгоритмом:

1. За фиксирано $s \in \overline{R}$ и $c \in \{1, 2, \ldots, p\}$ нека се минимуми функција $Q_{1,n}$ и $Q_{2,n}$ постижу у $B_{1,n}$ и $B_{2,n}$, односно нека је

$$B_{1,n}(s,c) = \underset{B_1}{argmin}\ Q_{1,nsc}(B_1), \quad B_{2,n}(s,c) = \underset{B_2}{argmin}\ Q_{1,nsc}(B_1), \tag{4.60}$$

где је

$$Q_{1,nsc}(B_1) = Q_{1,n}(B_1, s, c), \quad Q_{2,nsc}(B_2) = Q_{1,n}(B_2, s, c). \tag{4.61}$$

2. Како је скуп вредности пресликавања

$$(s, c) \mapsto Q_n(B_{1,n}(s,c), B_{2,n}(s,c), s, c) \tag{4.62}$$

коначан, можемо за оцене $\widehat{r}_n$ и $\widehat{d}_n$ да узмемо најмање одговарајуће вредности s и c за које је

$$Q_n(B_{1,n}(\widehat{r}_n, \widehat{d}_n), \widehat{r}_n, \widehat{d}_n), B_{2,n}(\widehat{r}_n, \widehat{d}_n), \widehat{r}_n, \widehat{d}_n) = \min_{s \in \overline{R},\ c \in \{1,2,\ldots,p\}} Q_n(B_{1,n}(s,c), B_{2,n}(s,c), s, c).$$

Ако је

$$\widehat{A}_{1,n} = B_{1,n}(\widehat{r}_n, \widehat{d}_n), \quad \widehat{A}_{2,n} = B_{2,n}(\widehat{r}_n, \widehat{d}_n), \tag{4.63}$$

онда је

$$\widehat{\theta}_n = \left(\widehat{A}_{1,n}, \widehat{A}_{2,n}, \widehat{r}_n, \widehat{d}_n\right). \tag{4.64}$$

Конзистентност оцена

За доказ конзистентности оцена $\widehat{\theta}_n$ Chen (1993) је најпре сабирке функције Q_n разложио на по 12 нових сабирака и за њих извео одређена својства. Наиме, ако је

$$Q_n(\theta) = \sum_{i=p}^{n} e_i^2(\theta), \tag{4.65}$$

где је

$$e_n(\theta) = X_n - E_\theta(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}), \tag{4.66}$$

онда је

$$e_n^2(\theta) = R_{1,n}(\theta) + R_{2,n}(\theta) + R_{3,n}(\theta) + R_{4,n}(\theta), \tag{4.67}$$

где је

$$R_{1,n}(\theta) = (X_n - B_1\varphi_n)^2 I(X_{n-c} \le s, X_{n-d} \le r),$$

$$R_{2,n}(\theta) = (X_n - B_1\varphi_n)^2 I(X_{n-c} \le s, X_{n-d} > r),$$

$$R_{3,n}(\theta) = (X_n - B_2\varphi_n)^2 I(X_{n-c} > s, X_{n-d} \le r),$$

$$R_{4,n}(\theta) = (X_n - B_2\varphi_n)^2 I(X_{n-c} > s, X_{n-d} > r).$$

Заменом израза за X_n (4.47) из ових једнакости добијамо да је

$$R_{i,n}(\theta) = \phi_{i,1,n}(\theta) + \phi_{i,2,n}(\theta) + \phi_{i,3,n}(\theta), \tag{4.68}$$

где је, на пример,

$$\phi_{1,1,n}(\theta) = \varepsilon_n^2 I(x_{n-c} \le s, x_{n-d} \le r), \tag{4.69}$$

$$\phi_{1,2,n}(\theta) = \varepsilon_n(A_1 - B_1)\varphi_n I(X_{n-c} \le s, X_{n-d} \le r), \tag{4.70}$$

$$\phi_{1,3,n}(\theta) = ((A_1 - B_1)\varphi_n)^2 I(X_{n-c} \le s, X_{n-d} \le r). \tag{4.71}$$

Под претпоставком да је $\{X_t\}$ стационаран и ергодичан процес са коначним моментима другог реда, функције $\phi_{i,j,n}$ имају једно заједничко својство, које је исказано следећим тврђењем.

Лема 4.1 *Ако је $U_\mu(\theta)$ једна μ - околина за $\theta \in \Theta$*

$$U_\mu(\theta) = \{\theta^* = (B_1^*, B_2^*, s^*, c) \;:\; |B_1^* - B_1| < \mu,\ |B_2^* - B_2| < \mu,\ \rho(s^*, s) < \mu\},$$

онда за $i = 1,2,3,4$ и $j = 1,2,3$ важи

$$E \sup_{\theta^* \in U_\mu(\theta)} |\phi_{i,j,n}(\theta^*) - \phi_{i,j,n}(\theta)| \;\to\; 0, \quad \mu \to 0. \tag{4.72}$$

Из ових својстава, између осталог, следи да је

$$E\left(\inf_{\theta^* \in U_\mu(\theta)} (X_{n+1} - E_{\theta^*}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2\right) \to E(X_{n+1} - E_\theta(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2, \quad (\mu \to 0) \tag{4.73}$$

што омогућава да се докаже да за сваки отворен скуп V вектора θ_0 постоји $n_0 \in N$ тако да је $\theta_n \in V$ за $n > n_0$. Наиме, важи следеће тврђење (Chan, 1993).

Теорема 4.5 *Ако је $\{X_t\}$ стационаран и ергодичан процес који има коначне моменте другог реда и ако стационарна расподела за $(X_1\ X_2\ \dots\ X_p)$ има свуда* *позитивну густину, тада је $\widehat{\theta}_n$ строго конзистентна оцена за θ_0, а $\widehat{\sigma}^2_{1,n}$ и $\widehat{\sigma}^2_{2,n}$ су конзистентне оцене за σ_1^2 и σ_2^2.*

Асимптотска расподела оцена

За асимптотску расподелу оцена $\widehat{\theta}_n$ су потребни додатни услови, при чему се може узети да је параметар d познат, односно да је

$$\theta = (B_1^T,\ B_2^T,\ s)^T. \tag{4.74}$$

Нека је

$$\mathbf{X}_n = (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-p+1})^T. \tag{4.75}$$

Уведимо одређене услове за $\{\mathbf{X}_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$ и ауторегресиону функцију.

Услов 4.1 *Процес $\{\mathbf{X}_n\}$ је стационаран, геометријски ергодичан са јединственом инваријантном мером π.*

Услов 4.2 *Густина расподеле за ε_n је свуда позитивна и униформно непрекидна, при чему је $E(\varepsilon_n^4) < \infty$.*

Услов 4.3 *Ауторегресиона функција има прекид, односно постоји φ^*, где је*

$$\varphi^* = (1, x_{p-1}, x_{p-2}, \ldots, x_0)^T, \tag{4.76}$$

тако да је

$$(A_1 - A_2)\cdot\varphi^* \neq 0, \quad x_{p-d} = r. \tag{4.77}$$

Најпре се доказује да је оцена прага n - конзистентна, односно да важи следеће тврђење.

Лема 4.2 *Ако су испуњени услови 4.1-4.3, онда је*

$$\widehat{r}_n = r + O_p(1/n). \tag{4.78}$$

Затим се дефинише процес $\{L_n(z)\}$ за $z \in R$ тако да је

$$L_n(z) = Q_n\left(B_{1,n}\left(r+\frac{z}{n}\right), B_{2,n}\left(r+\frac{z}{n}\right), r+\frac{z}{n}\right) - Q_n\left(B_{1,n}(r), B_{2,n}(r), r\right). \tag{4.79}$$

За опис асимптотског понашања процеса $\{L_n(z)\}$ се посматрају два независна сложена (compound) Poisson - ова процеса $\{L^{(1)}(z), z \geq 0\}$ и $\{L^{(2)}(z), z \geq 0\}$, оба са брзином $\pi(r)$ и таква да је $L^{(1)}(0) = L^{(2)}(0) = 0$ скоро сигурно и да су расподеле скокова дате условним расподелама за ζ_1 и ζ_2 при условима $X_{p-d} = r_-$ и $X_{p-d} = r_+$, где је

$$\zeta_1 = (A_1 - A_2)\varphi_p(2\varepsilon_p + (A_1 - A_2)\varphi_p), \tag{4.80}$$

$$\zeta_2 = (A_2 - A_1)\varphi_p(2\varepsilon_p + (A_2 - A_1)\varphi_p), \tag{4.81}$$

а r_- и r_+ означавају услове

$$r - \delta < X_{p-d} \le r, \quad r < X_{p-d} \le r + \delta$$

при $\delta \to 0_+$.

Расподеле скокова су апсолутно непрекидне са позитивним очекивањем, па постоји случајан интервал $[M_-, M_+)$ на којем процес $\{L(z)\}$, где је

$$L(z) = L^{(1)}(-z)I(z \le 0) + L^{(2)}(z)I(z > 0), \ z \in R, \tag{4.82}$$

постиже свој глобални минимум.

За процес $\{L_n(z)\}$ важи следеће тврђење.

Лема 4.3 *При условима 4.1-4.3 у простору $D[0,\infty) \times D[0,\infty)$ (са метриком Скорохода) важи*

$$(\{L_n(-z), z \ge 0\}, \{L_n(+z), z \ge 0\}) \xrightarrow{D} \left(\{L^{(1)}(-z), z \ge 0\}, \{L^{(2)}(+z), z \ge 0\}\right) \tag{4.83}$$

Из претходне две леме следи

$$n(\widehat{r}_n - r) \xrightarrow{D} M_-, \tag{4.84}$$

где је $[M_-, M_+)$ случајни интервал на којем процес $\{L(z)\}$, дефинисан са (4.82), постиже глобални минимум. При томе, $n(\widehat{r}_n - r)$ и $\sqrt{n}(\widehat{A}_{1,n} - A_1, \widehat{A}_{2,n} - A_2)$ су асимптотски независни, о чему говори следећа теорема (Chen, 1993).

Теорема 4.6 *При условима 4.1-4.3 важи (4.84), а процес*

$$\left\{\sqrt{n}(\widehat{A}_{1,n} - A_1, \widehat{A}_{2,n} - A_2)\right\}$$

има асимптотску расподелу као у случају кад је праг r познат и асимптотски је независан од $n(\widehat{r}_n - r)$.

Асимптотска расподела оцене прага дата са (4.84) и (4.83) није погодна за одређивање интервала поверења. Због тога је Hansen (1999) извео прихватљивију асимптотску расподелу за $\widehat{r}_n$ за случај регресионог модела са прагом, али под претпоставком да се разлика параметара у режимима смањује са повећањем броја опсервација. Наиме, ако је

$$X_n = \begin{cases} A_1\varphi_n + \varepsilon_n, & q_n \le r, \\ A_2\varphi_n + \varepsilon_n, & q_n > r, \end{cases} \tag{4.85}$$

где су регресори p - димензионалне случајне променљиве φ_n, а q_n случајна променљива (која може да зависи од φ_n), Hansen је претпоставио да је

$$A_1 = A_1(n) = A_2 + \delta_n \tag{4.86}$$

и под одређеним условима доказао да метод најмањих квадрата даје оцене које имају иста својства као оцене параметара у такозваном change-point моделу.

Нека r припада ограниченом скупу $\Gamma = [\underline{r}, \overline{r}]$ и нека је

$$D_r = E(\varphi_i \varphi_i^T \mid q_i = r),$$

$$V_r = E(\varphi_i \varphi_i^T \varepsilon_i^2 \mid q_i = r),$$

$$U_r = E(||\varphi_i||^4 \varepsilon_i^4 \mid q_i = r).$$

Ако је f_r густина расподеле за q_i и ако је

$$D = D_{r_0}, \quad V = V_{r_0}, \quad f = f_{r_0},$$

где је r_0 тачна вредност прага, претпоставимо да важи следећи услов.

Услов 4.4 *1. Процес $(\varphi_n, q_n, \varepsilon_n)$ је строго стационаран, β - промешан са коефицијентима β_i, при чему је $\beta_i = O(p^\gamma)$ за неко $\gamma > 6$;*

2. $E(\varepsilon_i \mid \mathcal{F}_{i-1}) = 0$;

3. $E\,||\varphi_i||^4 < \infty$, $E\,|\varepsilon_i|^4 < \infty$;

4. f_r, D_r, V_r и U_r су непрекидне у $r = r_0$;

5. $\delta_n = cn^{-\alpha}$ за $c \neq 0$ и $1/\gamma < \alpha < 1/2 - 1/\gamma$;

6. $c^T Dc > 0$, $c^T Vc > 0$, $f > 0$.

Нека су $W_1(\mu)$ и $W_2(\mu)$ два независна Браунова кретања на $[0, \infty)$ и нека је $W(\mu)$ Брауново кретање на R дефинисано са

$$W(\mu) = \begin{cases} W_1(-\mu), & \mu < 0 \\ 0, & \mu = 0 \\ W_2(\mu), & \mu > 0. \end{cases} \tag{4.87}$$

Hansen (1999) је доказао да важи следеће тврђење.

Теорема 4.7 *Ако важи услов 4.4, онда*

$$n^{1-2\alpha}(\widehat{r}_n - r_0) \xrightarrow{D} \omega T, \tag{4.88}$$

где је

$$\omega = \frac{c^T Vc}{(c^T Dc)^2 f}, \tag{4.89}$$

$$T = \underset{-\infty<r<\infty}{argmax} \left[W(r) - \frac{1}{2}|r| \right]. \tag{4.90}$$

Ако је $E(\varepsilon_i^2 \mid q_i) = \sigma^2$, тада је $V = \sigma^2 D$, па се фактор ω (4.89) који скалира расподелу T из (4.90) упрошћава, односно тада је

$$\omega = \frac{\sigma^2}{(c^T D c) f}. \tag{4.91}$$

Како је расподела за T позната,

$$P(T \leq x) = 1 + \sqrt{\frac{x}{2\pi}} exp\left(-\frac{x}{8}\right) + \frac{3}{2} exp(x) \Phi\left(-\frac{3\sqrt{x}}{2}\right) - \left(\frac{x+5}{2}\right) \Phi\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\right), \; x \geq 0$$

$$P(T \leq x) = 1 - P(T \leq -x), \; x < 0,$$

где је Φ функција стандардне нормалне расподеле, то је асимптотска расподела оцене прага употребљива за статистичке тестове.

Ови резултати могу да се примене и за случај SETAR модела ако се узме да је $q_n = X_{n-d}$, а φ_n, A_1 и A_2 дефинишу једнакостима (4.50) и (4.23), при чему је

$$A_1 = A_1(n) = (a_{1,0}(n), a_{1,1}(n), \ldots, a_{1,p}(n))^T. \tag{4.92}$$

Уместо релације (4.86) може да се дефинише величина λ_n која одређује разлику између A_1 и A_2

$$\lambda_n = n(A_1(n) - A_2)^T D (A_1(n) - A_2) f. \tag{4.93}$$

Ако се претпостави да је $\{\varepsilon_t\}$ низ независних величина са истом расподелом која има непрекидну и свуда на R позитивну густину и да је

$$E(\varepsilon_n^2) = \sigma^2, \quad E|\varepsilon_n|^{2+\delta} < \infty \tag{4.94}$$

за неко $\delta > 0$, тада услови

$$\sum_{i=1}^{p} |a_{1,i}| < 1, \quad \sum_{i=1}^{p} |a_{2,i}| < 1. \tag{4.95}$$

обезбеђују стационарност и геометријску ергодичност, чиме су испуњене прве три тачке услова 4.4. Уз додатни услов за λ_n из претходне теореме добијамо асимптотску расподелу оцене прага за SETAR модел, односно важи следеће тврђење.

Теорема 4.8 *Ако за SETAR модел важи (4.94) и (4.95) и ако*

$$\lambda_n \to \infty, \quad \frac{\lambda_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{4.96}$$

тада

$$\lambda_n(\widehat{r}_n - r) \xrightarrow{D} \sigma^2 T,$$

где је T расподела дефинисана са (4.90).

Непрекидни SETAR модел

Резултат који је добио Chen (1993) показује да је за n - конзистентност оцена прага (добијених методом најмањих квадрата) битан прекид ауторегресионе функције. Ако је ауторегресиона функција непрекидна, онда се уз одређене додатне претпоставке добија стандардна $\sqrt{n}$ конзистентност и асимптотска нормалност оцена прага која је корелисана са оценама осталих параметара.

Непрекидни SETAR модел може да се представи у облику

$$X_t = a_0 + \sum_{j=1, j\neq d}^{p} a_j X_{t-j} + \begin{cases} a_{d_-}(X_{t-d} - r) + \sigma_1 \varepsilon_t, & X_{t-d} \leq r \\ a_{d_+}(X_{t-d} - r) + \sigma_2 \varepsilon_t, & X_{t-d} > r \\ . \end{cases} \tag{4.97}$$

Условно очекивање за X_t, дато са

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}; \theta) = a_0 + \sum_{j=1, j\neq d}^{p} a_j X_{t-j} + a_{d_-}(X_{t-d} - r)_- + a_{d_+}(X_{t-d} - r)_+, \tag{4.98}$$

где је

$$\theta = (a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}, a_{d_-}, a_{d_+}, a_{d+1}, \ldots, a_p, r, d)^T, \tag{4.99}$$

је непрекидно по $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots X_{t-p}$, али није диференцијабилно на хиперравни $X_{t-d} = r$, па на овај модел не могу да се примене резултати из 4.1. Међутим, непрекидност с једне стране даје могућност добијања асимптотске расподеле оцена, а с друге стране утиче на брзину конвергенције оцена прага.

Ако су $X_1, \ldots, X_{n+p}$ опсервације и ако је

$$\widehat{\theta}_n = \underset{\theta}{argmin} \quad Q_n,$$

при чему је

$$Q_n(\theta) = \sum_{t=p+1}^{n+p} (X_t - E(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}; \theta))^2 = \sum_{t=p+1}^{n+p} e_t^2, \tag{4.100}$$

а

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{t=p+1}^{n+p} \widehat{e}_t^2 I(X_{t-\widehat{d}_n} \leq \widehat{r}_n), \quad \widehat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{t=p+1}^{n+p} \widehat{e}_t^2 I(X_{t-\widehat{d}_n} > \widehat{r}_n), \tag{4.101}$$

где је

$$n_1 = \sum_{t=p+1}^{n+p} I(X_{t-\widehat{d}_n} \leq \widehat{r}_n), \quad n_2 = n - n_1, \tag{4.102}$$

тада за конзистентност оцена важи исто тврђење као и у случају SETAR модела.

Теорема 4.9 *Ако је $\{X_t\}$ дефинисан са (4.97) стационаран и ергодичан са коначним другим моментом и ако стационарна расподела за $(X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ има свуда позитивну густину, онда*

$$\widehat{\theta}_n \xrightarrow{s.s.} \theta^*, \quad \widehat{\sigma}_1 \xrightarrow{s.s.} \sigma_1, \quad \widehat{\sigma}_2 \xrightarrow{s.s.} \sigma_2, \quad (n \to \infty),$$

где је θ^* *тачна вредност параметара.*

Како је $\widehat{\theta}_n$ конзистентна оцена, то је скоро сигурно $\widehat{d}_n = d$ за довољно велико n, па се у даљем d изоставља из вектора θ. Обзиром да је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_t}{\partial a_0} &= -1, \\
\frac{\partial e_t}{\partial a_j} &= -X_{t-j},\ j = 1,2,\ldots,p\ (j \neq d), \\
\frac{\partial e_t}{\partial a_{d_-}} &= -(X_{t-d} - r)_-, \\
\frac{\partial e_t}{\partial a_{d_+}} &= -(X_{t-d} - r)_+, \\
\frac{\partial e_t}{\partial r} &= a_{d_-} I(X_{t-d} < r) + a_{d_+} I(X_{t-d} > r),
\end{aligned}$$

док парцијални извод e_t по r за $X_{t-d} = r$ не постоји (мада постоје леви и десни парцијални изводи), може се дефинисати вектор H_t који има улогу парцијалних извода резидуала e_t по вектору θ

$$H_t = (-1, -X_{t-1}, \ldots, -(X_{t-d}-r)_-, -(X_{t-d}-r)_+, \ldots, a_{d_-} I(X_{t-d} \leq r) + a_{d_+} I(X_{t-d} > r))^T.$$

Ако је

$$e_t = e_t(\theta^*), \quad H_t = H_t(\theta^*), \quad \overline{\theta} = (a_0^*, \ldots, a_{d_-}^*, a_{d_+}^*, r)^T, \tag{4.103}$$

онда је

$$\begin{aligned}
e_t(\theta) &= e_t + E(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}; \theta^*) - E(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}; \overline{\theta}) + E(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}; \overline{\theta} - E(X_t \mid \mathcal{F}_{\text{u}-\infty}; \theta) \\
&= e_t + H_t^T(\theta - \theta^*) + ||\theta - \theta^*|| R_t(\theta)
\end{aligned}$$

и

$$R_t(\theta) = R_{1t}(\theta) + R_{2t}(\theta),$$

где је, за $r \geq r^*$,

$$R_{1t} = (a_{d_+}^*(X_{t-d} - r^*)_+ - a_{d_-}(X_{t-d} - r)_- - a_{d_+}^*(r - r^*)) I(r^* < X_{t-d} \leq r) / ||\theta - \theta^*||,$$

$$\begin{aligned}
R_{2t} =& ((a_{d_-}^* - a_{d_-})(r^* - r) I(X_{t-d} \leq r^*) + (a_{d_+}^* - a_{d_+})(r^* - r) I(X_{t-d} > r) + \\
&+ ((a_{d_-}^* - a_{d_-})(X_{t-d} - r)_- - (a_{d_+}^* - a_{d_+})(X_{t-d} - r^*)_+) I(r^* < X_{t-d} \leq r)) / ||\theta - \theta^*||
\end{aligned}$$

и слично за $r < r^*$.

Из израза за e_t следи да је

$$e_t^2(\theta) = e_t^2 + 2e_t H_t^T(\theta - \theta^*) + (\theta - \theta^*)^T H_t H_t^T(\theta - \theta^*) + |\theta - \theta^*| W_t(\theta), \tag{4.104}$$

где је

$$W_t(\theta) = ||\theta - \theta^*|| R_t^2(\theta) + 2e_t R_t(\theta) + 2R_t(\theta) H_t^T(\theta - \theta^*). \tag{4.105}$$

Под претпоставком да је функција расподеле за стационарно X_t ограничена у околини прага, доказује се да

$$E(e_t^2(\theta)) \quad \text{је локално квадратна функција у} \quad \theta^* \tag{4.106}$$

Осим тога, према централној граничној теореми за мартингале,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=p+1}^{n} e_t H_t \sim \mathcal{N}(0, V), \quad n \to \infty, \tag{4.107}$$

где је

$$V = E(e_t^2 H_t H_t^T). \tag{4.108}$$

Уз додатну претпоставку да је $\{X_t\}$ стационаран процес који је β - промешан, доказује се да

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=p+1}^{n} (W_t(\theta) - E(W_t(\theta)) \quad \text{је стохастички равномерно непрекидан у } \theta^*. \tag{4.109}$$

Према уопштењу Теореме 5, стр.144 (Pollard, 1984) за случај стационарног ергодичног процеса, из (4.106), (4.107) и (4.109) добија се следеће тврђење о асимптотској расподели оцена.

Теорема 4.10 (Chan and Tsay, 1998) *Нека је процес* $\{X_t\}$, *дефинисан са (4.97), β - промешан и нека је* $E|X_t|^\alpha < \infty$ *за* $\alpha > 2$. *Ако је функција расподеле за стационарно* X_t *свуда позитивна и ограничена у околини прага, тада*

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta^*) \sim \mathcal{N}(0, U^{-1}VU), \quad n \to \infty$$

где је

$$U = E(H_t H_t^T).$$

4.3 МЕТОДА МАКСИМАЛНЕ ВЕРОДОСТОЈНОСТИ

Инспирисан резултатима које је добио Chen (1993) за методу најмањих квадрата Qian (1998) је у својој докторској дисертацији разматрао методу максималне веродостојности, при чему је добио слична асимптотска својства оцена SETAR модела уз одређене претпоставке о расподелама резидуала.

Нека је дат SETAR$(2; p, p)$ модел дефинисан са (4.47), нека је θ_0 вектор непознатих параметара дат са (4.52), θ вектор истих димензија дат са (4.53) и нека је

$$A = (A_1^T, A_2^T)^T, \quad B = (B_1^T, B_2^T)^T. \tag{4.110}$$

Ако је

$$\mathbf{X}_t = (X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p})^T, \tag{4.111}$$

модел (4.47) може да се представи у облику

$$X_t = h(\mathbf{X}_t, \theta_0) + \varepsilon_t, \quad t \geq 1, \tag{4.112}$$

при чему је, за

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in R^p, \quad \theta \in R^{2p+3} \times \{1, 2, \ldots, p\}, \tag{4.113}$$

функција h дефинисана са

$$h(x, \theta) = \left(a_{1,0} + \sum_1^p a_{1,k} x_k\right) I(x_d \leq r) + \left(a_{2,0} + \sum_1^p a_{2,k} x_k\right) I(x_d > r). \tag{4.114}$$

Претпоставимо да θ_0 припада унутрашњости скупа $R^{2p+2} \times \overline{R} \times \{1, 2, \ldots\}$, где је $\overline{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$. Тада постоји компактан подскуп K скупа R^{2p+2} такав да θ_0 припада скупу $\Theta = K \times \overline{R} \times \{1, 2, \ldots, p\}$.

Ако је $\theta \in \Theta$ и ако је $g_\theta(X_0)$ густина расподеле за $\mathbf{X}_0$ под претпоставком $\theta = \theta_0$, а f густина расподеле за ε_t, тада је функција веродостојности једнака $L_n(\theta) g_\theta(\mathbf{X}_0)$, при чему је

$$L_n(\theta) = \prod_1^n f(X_i - h(\mathbf{X}_{i-1}, \theta)). \tag{4.115}$$

Оцена максималне веродостојности

$$\widehat{\theta}_n = (\widehat{A}_n^T, \, \widehat{r}_n, \, \widehat{d}_n)^T \tag{4.116}$$

је дата са

$$\widehat{\theta}_n = \underset{\theta \in \Theta}{argmax}\, L_n(\theta). \tag{4.117}$$

Обзиром на својства параметра r и функције $L_n(\theta)$, за оцену $\widehat{\theta}_n$ може да се дефинише следећи алгоритам:

1. За фиксирано $s \in \overline{R}$ и $c \in \{1, 2, \ldots, p\}$ нека је

$$L_{nsc}(B) = L_n(B, s, c) \tag{4.118}$$

и нека је

$$B_n(s, c) = \underset{B \in K}{argmax}\, L_{nsc}(B). \tag{4.119}$$

2. Посматрајмо пресликавање

$$(s, c) \mapsto L_n(B_n(s, c), s, c) \tag{4.120}$$

и приметимо да $L_n(B_n(s,c),s,c)$ може да узима само коначно много различитих вредности. Нека су $\widehat{r}_n$ и $\widehat{d}_n$ најмање одговарајуће вредности за s и c за које је

$$L_n(B_n(\widehat{r}_n,\widehat{d}_n),\widehat{r}_n,\widehat{d}_n) = \max_{s\in\overline{R},c\in\{1,2,\ldots,p\}} L_n(B_n(s,c),s,c) \tag{4.121}$$

и нека је

$$\widehat{A}_n = B_n(\widehat{r}_n,\widehat{d}_n). \tag{4.122}$$

Тада је

$$\widehat{\theta}_n = (\widehat{A}_n^T,\ \widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n)^T. \tag{4.123}$$

На основу дефиниције $\widehat{A}_n$, $\widehat{r}_n$ и $\widehat{d}_n$ следи да је за свако $\theta\in\Theta$

$$L_n(\widehat{\theta}_n) = L_n(\widehat{A}_n,\widehat{r}_n,\widehat{d}_n) = L_n(B_n(\widehat{r}_n,\widehat{d}_n),\widehat{r}_n,\widehat{d}_n) \geq L_n(B_n(s,c),s,c) \geq L_n(\theta),$$

па је

$$L_n(\widehat{A}_n,\widehat{r}_n,\widehat{d}_n) = \sup_{\theta\in\Theta} L_n(\theta).$$

Према томе, $\widehat{\theta}_n$ је заиста оцена максималне веродостојности за θ_0.

Наравно, за $\widehat{r}_n$ и $\widehat{d}_n$ не морају се узети најмање одговарајуће вредности за s и c, већ било које вредности за које важи (4.121).

4.3.1 Конзистентност оцена

За доказ конзистентности оцена $\widehat{\theta}_n$ неопходна је претпоставка да је процес $\{X_t\}$ стационаран и ергодичан. Поред тога, потребне су и одређене претпоставке о густини расподеле f случајних променљивих ε_t. Нека је

$$\varphi = \frac{f'}{f}, \quad I(f) = \int \varphi^2(x)f(x)dx \tag{4.124}$$

и нека је $Lip(1)$ скуп функција g за које важи Липшицов услов

$$|g(x)-g(y)| \leq L|x-y|, \quad x,y\in R,\ L\geq 0. \tag{4.125}$$

Уведимо и додатни услов.

Услов 4.5 *Функција f је апсолутно непрекидна, позитивна на R и таква да је $\varphi\in Lip(1)$ и $I(f)<\infty$.*

За процес $\{X_t\}$ важи следеће тврђење (Qian, 1998).

Теорема 4.11 *Нека је $\{X_t\}$ стационаран и ергодичан процес за који важи услов 4.5. Тада*

$$\widehat{\theta}_n \xrightarrow{s.s.} \theta_0 \quad (n\to\infty).$$

У доказу ове теореме кључну улогу има следеће помоћно тврђење.

Лема 4.4 *Ако је $U_\theta(\nu)$ једна ν околина за $\theta \in \Theta$,*

$$U_\theta(\nu) = \{\theta^* \in \Theta \ : \ \theta^* = (B^{*T},\ s^*,\ c)^T,\ |B^* - B| < \nu,\ |s^* - s| < \nu,\ \nu > 0\}, \qquad (4.126)$$

онда под условима Теореме 4.11 важи

$$E \sup_{\theta^* \in U_\theta} |\psi(X_0, \varepsilon_1, \theta^*) - \psi(X_0, \varepsilon_1, \theta)| \ \to\ 0, \quad (\nu \to 0), \qquad (4.127)$$

при чему је

$$\psi(X_0, \varepsilon_1, \theta) = ln \frac{f(\varepsilon_1 + h(X_1, \theta_0) - h(X_1, \theta))}{f(\varepsilon_1)}. \qquad (4.128)$$

Из теореме следи да је $\widehat{d}_n = d$, тако да се у даљем разматрању претпоставља да је параметар d познат.

Прекид функције h у $x = r$ даје могућност да се добије јачи резултат за оцену $\widehat{r}_n$ непознатог прага r, односно да се добије n - конзистентност те оцене. Али, наравно, потребни су следећи додатни услови.

Услов 4.6 *Функција φ је диференцијабилна, при чему је $\varphi' \in Lip(1)$.*

Услов 4.7 *За $\{\varepsilon_n\}$ је $E|\varepsilon_1|^4 < \infty$.*

Поред ових услова потребна је још и геометријска ергодичност процеса $\{X_t\}$, односно важи следећа теорема.

Теорема 4.12 *Ако су испуњени Услови 4.1, 4.2, 4.5, 4.6 и 4.7, онда је*

$$|n(\widehat{r}_n - r)| = O_p(1). \qquad (4.129)$$

4.3.2 Асимптотска расподела оцена

За оцену $\widehat{A}_n$ непознатог вектора A може да се добије асимптотска расподела. Нека је за фиксирано s и познато d дефинисана функција ψ_s и околина U_B (слично као у Леми 4.4)

$$\psi_s(X_0, \varepsilon_1, B) = \psi(X_0, \varepsilon_1, B, s),$$

$$U_B(\nu) = \{B^* \in K \ : \ |B^* - B| < \nu\}\,.$$

Тада важи следеће помоћно тврђење аналогно Леми 4.4.

Лема 4.5 *За $B \in K$, при условима Теореме 4.12, важи*

$$E \sup_{s \in \overline{R},\ B^* \in U_B(\nu)} |\psi_s(X_0, \varepsilon_1, B^*) - \psi_s(X_0, \varepsilon_1, B)| \ \to\ 0, \quad (\nu \to 0). \qquad (4.130)$$

Помоћу овог тврђења се доказује да $\widehat{B}_n(s)$ има униформно својство (по s) у интервалу $[r - \beta/n, r + \beta/n]$ за сваки позитиван број β.

Теорема 4.13 *Ако за $\{X_t\}$ важи Услов 4.5, тада је*

$$\sup_{|s-r|\leq\beta/n} |\widehat{B}_n(s) - A| = o_p(1) \tag{4.131}$$

за $0<\beta<\infty$.

Уз додатне услове 4.6 и 4.7 се добијају резултати слични резултатима које је добио Chen (1993), али без претпоставке о Гаусовој расподели за ε_n.

Теорема 4.14 *Ако за $\{X_t\}$ важе Услови 4.5, 4.6 и 4.7, онда за* $0<\beta<\infty$

$$\sup_{|s-r|\leq\beta/n} \sqrt{n}\left(\widehat{B}_n(s) - A\right) \xrightarrow{D} N(0, G^{-1}), \tag{4.132}$$

где је G матрица која зависи од ε_1 и X_0.

Из ове теореме следи да је

$$\sup_{|s-r|\leq\beta/n} |\sqrt{n}(\widehat{B}_n - A)| = O_p(1). \tag{4.133}$$

За асимптотску расподелу оцена прага се добијају резултати аналогни резултатима из Теореме 4.6. У извођењу асимптотске расподеле за $\widehat{r}_n$ најпре се, за $z\in R$, посматра низ процеса $\{\widehat{l}_n(z)\}$ дефинисан са

$$\widehat{l}_n(z) = -2n\left(l_n\left(B_n\left(r+\frac{z}{n}\right), r+\frac{z}{n}\right) - l_n\left(B_n(r), r\right)\right), \tag{4.134}$$

где је

$$l_n(B,s) = \frac{1}{n}\sum ln\frac{f(X_i - h_s(\mathbf{X}_{i-1}, B))}{f(\varepsilon_i)}, \tag{4.135}$$

а $h_s(x,B) = h(x,B,s)$. Како $B_n(r+z/n)$ апроксимира A равномерно по z на ограниченом скупу (према Теореми 4.12), $\widehat{l}_n$ може да се апроксимира са $\tilde{l}_n$, где је

$$\tilde{l}_n(z) = -2n\left(l_n\left(A, r+\frac{z}{n}\right) - l_n(A,r)\right), \tag{4.136}$$

односно важи следеће тврђење.

Лема 4.6 *Ако за $\{X_t\}$ важе Услови 4.5, 4.6 и 4.7, онда за $0<\beta<\infty$ важи*

$$\sup_{|z|\leq\beta} |\widehat{l}_n(z) - \tilde{l}_n(z)| = o_p(1). \tag{4.137}$$

Према томе, асимптотска својства процеса $\{\widehat{l}_n(z), z\in R\}$ и $\{\tilde{l}_n(z, z\in R\}$ су иста. За опис асимптотског понашања процеса $\{\tilde{l}_n(z)\}$ се посматрају два независна сложена Poisson - ова процеса $\{l^{(1)}(z), z\geq 0\}$ и $\{l^{(2)}(z), z\geq 0\}$, оба са брзином $g(r)$ и таква да је $l^{(1)}(0) = l^{(2)}(0) = 0$ скоро сигурно и да су расподеле скокова дате условним расподелама за ζ_1 и ζ_2 при условима $X_{p-d} = r_-$ и $X_{p-d} = r_+$, где је

$$\zeta_1 = -2ln\frac{f(\varepsilon_1 + (A_2 - A_1)^T\varphi_1)}{f(\varepsilon_1)}, \tag{4.138}$$

$$\zeta_1 = -2ln\frac{f(\varepsilon_1 - (A_2 - A_1)^T\varphi_1)}{f(\varepsilon_1)}. \tag{4.139}$$

У случају Гаусових расподела за ε_n ове једнакости се своде на (4.80) и (4.81). Дакле, важи следеће тврђење.

Лема 4.7 *Ако је $\{X_t\}$ стационаран и ергодичан процес за који важи услов 4.5, тада у простору $D[0,\infty) \times D[0,\infty)$ (са метриком Скорохода)*

$$\left(\{\tilde{l}_n(-z), z \geq 0\}, \{\tilde{l}_n(+z), z \geq 0\}\right) \xrightarrow{D} \left(\{l^{(1)}(-z), z \geq 0\}, \{l^{(2)}(+z), z \geq 0\}\right). \tag{4.140}$$

За процес $\{l(z), z \in r\}$, где је

$$l(z) = l^{(1)}(-z)I(z \leq 0) + l^{(2)}(z)I(z \geq 0), \tag{4.141}$$

постоји случајан интервал $[M_-, M_+)$ на којем има глобални минимум и који дефинише асимптотску расподелу за $\widehat{r}_n$. Та расподела је дата следећом теоремом.

Теорема 4.15 *Ако за $\{X_t\}$ важе Услови 4.5, 4.6 и 4.7, онда*

$$n(\widehat{r}_n - r) \xrightarrow{D} M_-,$$

а процес $\sqrt{n}(\widehat{A}_n - A)$ има нормалну асимптотску расподелу као у случају кад је праг r познат и асимптотски је независан од $n(\widehat{r}_n - r)$.

4.4 РОБУСНЕ ОЦЕНЕ

Општа класа оцена се добија ако се уместо квадратног критеријума (4.55) или критеријума максималне веродостојности (4.115) узме општи критеријум $Q_n(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$. У случају модела са праговима, где нелинеарна ауторегресиона функција није диференцијабилна, па чак ни непрекидна, Тејлоров развој (4.1) за Q_n у околини тачне вредности θ_0 не може да се користи. Као што је већ речено у 4.1 резултати које је формулисао и доказао Tjostheim(1986) за општи критеријум Q_n подразумевају да је Q_n два пута диференцијабилна функција по параметрима θ и не могу се применити за добијање оцена SETAR модела. И многи други резултати који се односе на опште (укључујући и робусне) оцене имају сличне услове. Нека се, на пример, оцена $\widehat{\theta}_n$ добија решавањем једначине

$$G_n(\theta; X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0, \tag{4.142}$$

где је G_n векторска функција (estimating function) која се добија из критеријума Q_n. Под условом да је G_n непрекидно диференцијабилна функција параметара θ Sorenson (2000) је дао услове при којима су оцене $\widehat{\theta}_n$, добијене решавањем једначине (4.142), конзистентне и асимптотски нормалне. У литератури о идентификацији линеарних стохастичких система се, такође, појављују резултати са сличним условима (Davis and Vinter, 1985; Caines, 1988).

С друге стране, резултати које су добили Chen (1993) и Qian (1998) за методу најмањих квадрата и методу максималне веродостојности уопштавају постојеће резултате за глатке нелинеарне ауторегресионе моделе (Klimko and Nelson, 1978; Hall and Heyde, 1980) на случај нелинеарних модела са прекидном ауторегресионом функцијом. То указује да има смисла посматрати и опште оцене параметара SETAR модела и одредити услове за Q_n при којима су одговарајуће оцене конзистентне.

Постоје резултати за нелинеарне моделе са ауторегресионом функцијом која није диференцијабилна, али је непрекидна у Липшицовом смислу. Liebscher (2000) је разматрао модел

$$X_{t+1} = g(X_t, \dots, X_{t-p+1}; \theta_0) + \varepsilon_{t+1}, \quad t = p, p+1, \dots \tag{4.143}$$

где је $\{\varepsilon_t\}$ низ независних случајних променљивих са истим расподелама, $\theta_0 \in \Theta \subset R^p$ и $g : R^p \times \Theta \to R$ непрекидна функција. Он је, користећи варијациони принцип из теорије стохастичке оптимизације, извео доказ строге конзистентности оцена за неке класе робусних естиматора. Ако је

$$Q_n(\theta) = \sum_{t=p}^{n-1} \rho(X_{t+1} - g(\mathbf{X}_t; \theta)), \tag{4.144}$$

где је

$$\mathbf{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1})^T, \tag{4.145}$$

онда је M - оцена одређена функцијом $\rho : R \to R$. Liebscher (2000) је за ρ користио неравномерни Липшицов услов

$$|\rho(x) - \rho(y)| \le L_\rho(|x|^\alpha + |y|^\alpha + 1)|x - y| \tag{4.146}$$

за $\alpha > 0$. Овај резултат може да се примени на непрекидни SETAR модел (4.97), али не и на SETAR модел (4.47).

За регресиони модел Arcones (1997) је користио различите услове за функцију ρ. У случају $\rho(x) = |x|^p$, за $p > 0$, добио је расподеле за $a_n(\widehat{\theta}_n - \theta_0)$, где константе a_n зависе од p. Сличне резултате су добили Bantli and Hallin (2001) за $AR(p)$ модел.

У случају када је критеријум Q_n недиференцијабилна функција параметара θ, за добијање асимптотских својстава оцена параметара модела временских серија користе се и методе емпиријских процеса (Andrews, 1994; Caner, 1999).

У овом делу се доказује да за класе критеријума типа (4.146) могу да се добију конзистентне оцене SETAR модела.

4.4.1 М - оцене

Робусна М - оцена $\widehat{\theta}_n$ је она вредност која минимизира или максимизира критеријум $Q_n(\theta)$ на компактном скупу $\Theta = K \times \overline{R} \times \{1, 2, \ldots, p\}$, где је

$$Q_n(\theta) = \sum_{i=p}^{n} \rho_k(e_k(\theta), \theta), \tag{4.147}$$

а

$$e_k(\theta) = X_k - E_\theta\left(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right). \tag{4.148}$$

Дакле,

$$\widehat{\theta}_n \in \underset{\theta\in\Theta}{argmin}\ Q_n(\theta) \tag{4.149}$$

или

$$\widehat{\theta}_n \in \underset{\theta\in\Theta}{argmax}\, Q_n(\theta). \tag{4.150}$$

Ако претпоставимо да је случај (4.149), онда оцена $\widehat{\theta}_n$, слично као у 4.2 и 4.3, може да се добије у два корака.

1. За $s \in \overline{R}$ и $c \in \{1, 2, \ldots, p\}$ нека је

$$B_n(s, c) \in \underset{B\in K}{argmin}\ Q_{nsc}(B), \tag{4.151}$$

где је

$$Q_{nsc}(B) = Q_n(B, s, c) = Q_n(\theta). \tag{4.152}$$

2. Нека су $\widehat{r}_n$ и $\widehat{d}_n$ оне вредности за s и c за које је

$$Q_n(B_n(\widehat{r}_n, \widehat{d}_n), \widehat{r}_n, \widehat{d}_n) = \min_{s\in\overline{R}, c\in\{1,2,\ldots,p\}} Q_n(B_n(s, c), s, c) \tag{4.153}$$

и нека је

$$\widehat{A}_n = B_n(\widehat{r}_n, \widehat{d}_n). \tag{4.154}$$

Тада је

$$\widehat{\theta}_n = \left(\widehat{A}_n^T, \widehat{r}_n, \widehat{d}_n\right)^T, \tag{4.155}$$

јер за $\theta \in \Theta$ важи

$$\begin{aligned} Q_n(\theta) = Q_n(B, s, c) &\geq Q_n(B_n(s, c), s, c) \\ &\geq Q_n(B_n(\widehat{r}_n, \widehat{d}_n), \widehat{r}_n, \widehat{d}_n) \\ &= Q_n(\widehat{A}_n^T, \widehat{r}_n, \widehat{d}_n) \\ &= Q_n(\widehat{\theta}_n). \end{aligned}$$

4.4.2 Конзистентност оцена

Размотримо случај $\rho_k = \rho(e_k)$. Нека је функција h дефинисана са (4.114) и нека је

$$h(x,\theta) = h_{sc}(x,B) = h(x,B,s,c). \tag{4.156}$$

Ако је

$$\dot{h}_{sc}(x) = \frac{\partial}{\partial B} h_{sc}(x,B) \tag{4.157}$$

и

$$z = (1, x^T)^T, \tag{4.158}$$

тада је

$$\dot{h}_{sc}(x,B) = \left(z^T I(x_c \le s), z^T I(x_c > s)\right)^T \tag{4.159}$$

и

$$h(x,\theta) = B^T \dot{h}_{sc}(x), \tag{4.160}$$

за $s \in \overline{R}$, $x \in R^p$ и $c \in \{1,\ldots,p\}$. Из (4.157), (4.158) и (4.159) следи да је

$$|\dot{h}_{sc}(x)| \le \sqrt{1 + ||x||^2}. \tag{4.161}$$

Из ове неједнакости и (4.160) добијамо

$$|h(x,\theta)| \le ||B|| \sqrt{1 + ||x||^2}, \tag{4.162}$$

па је за $s_1 \in \overline{R}$, $s_2 \in \overline{R}$ и $c \in \{1,2,\ldots,p\}$

$$\begin{aligned} |\dot{h}_{s_1c}(x) - \dot{h}_{s_2c}(x)| &\le \sqrt{2(1 + ||x||^2)} I(min\{s_1,s_2\} < x_c \le max\{s_1,s_2\}) \\ &\le \sqrt{2(1 + ||x||^2)} I(|x_c - s_2| \le |s_1 - s_2|) \end{aligned} \tag{4.163}$$

Следећим условом се одређује класа функција ρ за које се може доказати конзистентност оцена.

Услов 4.8 *За $x \in R$ и $y \in R$ важи*

$$|\rho(x) - \rho(y)| \le \alpha \left(|x|^\beta + |y|^\beta + 1\right) \cdot |x-y|^\gamma \tag{4.164}$$

за $\alpha > 0$, $\beta \ge 10$ и $\gamma > 0$.

За β и γ из претходног услова треба да постоје одговарајући моменти процеса $\{X_t\}$, па се уводи следећи услов.

Услов 4.9 *За $\{X_t\}$ важи $E\,|X_t|^{2\beta} < \infty$ и $E\,|X_t|^{2\gamma} < \infty$.*

За стационаран и ергодичан SETAR процес и функцију ρ која задовољава релацију (4.164) важи исто својство као у случају методе најмањих квадрата или методе максималне веродостојности. Дакле, важи следеће тврђење.

Лема 4.8 *Ако је процес $\{X_t\}$ дефинисан са (4.47) стационаран и ергодичан, при чему важи Услов 4.9, и ако функција ρ задовољава Услов 4.8, онда за $\theta \in \Theta$ важи*

$$E \sup_{\theta^* \in U_\theta(\nu)} |\rho(e_1(\theta^*)) - \rho(e_1(\theta))| \to 0 \quad (\nu \to 0), \tag{4.165}$$

где је $U_\theta(\nu)$ једна ν околина за θ дефинисана са (4.126).

Доказ. Нека је

$$\varepsilon_1(\theta) = X_1 - h(\mathbf{X}_0, \theta) \tag{4.166}$$

и

$$\delta(x, \theta^*) = h(x, \theta) - h(x, \theta^*). \tag{4.167}$$

Због (4.156) је тада

$$\delta(x, \theta^*) = h_{s,c}(x, B) - h_{s,c}(x, B^*). \tag{4.168}$$

За $x \in R^p$, из (4.160) и (4.161), следи

$$|h_{sc}(x, B) - h_{sc}(x, B^*)| \le ||B - B^*||\sqrt{1 + ||x||^2}. \tag{4.169}$$

На основу релација (4.159) и (4.163) имамо да је

$$\begin{aligned} |h_{sc}(x, B^*) - h_{s^*c}(x, B^*)| \le& ||B^*||\sqrt{2(1 + ||x||^2)} I(min\{s, s^*\} < s_c \le max\{s, s^*\}) \\ \le& ||B^*||\sqrt{2(1 + ||x||^2)} I(|x_c - s| \le |s^* - s|). \end{aligned} \tag{4.170}$$

Према томе, за $\theta^* \in U_\theta(\nu)$ и $s \in R$, $x \in R^p$ важи

$$\begin{aligned} |\delta(x, \theta^*)| \le& |h_{sc}(x, B) - h_{s^*c}(x, B)| + |h_{s^*c}(x, B) - h_{s^*c}(x, B^*)| \\ \le& \left(\sqrt{2}||B||I(|x_c - s| \le |s^* - s|) + ||B - B^*||\right) \sqrt{1 + ||x||^2} \\ \le& \left(\sqrt{2}||B||I(|x_c - s| \le \nu) + \nu\right) \sqrt{1 + ||x||^2}. \end{aligned} \tag{4.171}$$

На основу својства функције ρ (Услов 4.8) и неједнакости

$$(a + b)^\beta \le 2^{\beta - 1}(a^\beta + b^\beta), \quad a > 0,\ b > 0,\ \beta \ge 1 \tag{4.172}$$

за $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ и $\gamma > 0$ важи

$$\begin{aligned}
\Delta\rho(\theta,\theta^*) &= |\rho(e_1(\theta^*)) - \rho(e_1(\theta))| \\
&= |\rho(X_1 - h(\mathbf{X}_0,\theta^*)) - \rho(X_1 - h(\mathbf{X}_0,\theta))| \\
&\leq \alpha\left(|X_1 - h(\mathbf{X}_0,\theta^*)|^\beta + |X_1 - h(\mathbf{X}_0,\theta)|^\beta + 1\right)|h(\mathbf{X}_0,\theta) - h(\mathbf{X}_0,\theta^*|^\gamma \\
&= \alpha\left(|\varepsilon_1 + \delta(\mathbf{X}_0,\theta_0,\theta^*)|^\beta + |\varepsilon_1 + \delta(\mathbf{X}_0,\theta_0,\theta)|^\beta + 1\right)|\delta(\mathbf{X}_0,\theta,\theta^*)|^\gamma \\
&\leq \alpha(2^\beta|\varepsilon_1|^\beta + 2^{\beta-1}|\delta(\mathbf{X}_0,\theta_0,\theta^*)|^\beta + 2^{\beta-1}|\delta(\mathbf{X}_0,\theta_0,\theta)|^\beta + 1)|\delta(\mathbf{X}_0,\theta,\theta^*)|^\gamma \\
&\leq \alpha\Big(2^\beta|\varepsilon_1|^\beta + 2^{\beta-1}||A - B^*||^\beta \\
&\quad \cdot (1 + ||\mathbf{X}_0||^2)^{\beta/2} + 2^{\beta-1}||A - B||^\beta(1 + ||\mathbf{X}_0||^2)^{\beta/2} + 1\Big) \\
&\quad \cdot |\delta(\mathbf{X}_0,\theta,\theta^*)|^\gamma \\
&= \alpha\left(2^\beta|\varepsilon_1|^\beta + 1\right)|\delta(\mathbf{X}_0,\theta,\theta^*)|^\gamma + \\
&\quad + \alpha 2^{\beta-1}\left(||A - B^*||^\beta + ||A - B||^\beta\right)(1 + |\mathbf{X}_0|^2)^{\beta/2}|\delta(\mathbf{X}_0,\theta,\theta^*)|^\gamma
\end{aligned} \tag{4.173}$$

Ако је

$$\bar\delta(x,\nu) = \left(\sqrt{2}||B||I(|x_c - s| \leq \nu) + \nu\right)\sqrt{1 + ||x||^2},$$

онда из (4.171) и (4.173) следи да је

$$\Delta\rho(\theta,\theta^*) \leq K_1|\bar\delta(X_0,\nu)|^\gamma + K_2|\varepsilon_1|^\beta|\bar\delta(X_0,\nu)|^\gamma + K_3(1 + ||\mathbf{X}_0||^2)^{\beta/2}|\bar\delta(X_0,\nu)|^\gamma. \tag{4.174}$$

Како је

$$E\ |\varepsilon_1|^\beta|\bar\delta|^\gamma \leq \left(E\ \varepsilon_1^{2\beta}\right)^{1/2}\cdot\left(E\ \bar\delta^{2\gamma}\right)^{1/2} \tag{4.175}$$

и

$$E\ \left(1 + ||\mathbf{X}_0||^2\right)^{\beta/2}|\bar\delta|^\gamma \leq \left(E\ \left(1 + ||\mathbf{X}_0||^2\right)^\beta\right)^{1/2}\cdot\left(E\ \bar\delta^{2\gamma}\right)^{1/2} \tag{4.176}$$

и како

$$E\bar\delta^{2\gamma}(\mathbf{X}_0,\nu) \ \to\ 0, \quad (\nu\ \to\ 0), \tag{4.177}$$

закључујемо да тврђење леме важи за $s \in R$.

За $s = \infty$ је

$$\begin{aligned}
|\delta(x,\theta,\theta^*)| &\leq \left(\sqrt{2}||B||I(x_c > s^*) + \nu\right)\sqrt{1 + ||x||^2} \\
&\leq \left(\sqrt{2}||B||I(d(x_c,\infty) < \nu) + \nu\right)\sqrt{1 + ||x||^2} \\
&= \bar\delta_\infty(x,\nu)
\end{aligned}$$

и

$$E\bar\delta_\infty^{2\gamma}(\mathbf{X}_0,\nu) \ \to\ 0, \quad (\nu\ \to\ 0),$$

па тврђење леме важи и за $s = \infty$. Слично је и за $s = -\infty$. ■

За конзистентност оцена $\widehat{\theta}_n$ потребан је још један услов за функцију ρ. То је следећи услов.

Услов 4.10 *За $a \neq 0$ важи*

$$E\rho(\varepsilon_1 + a) > E\rho(\varepsilon_1). \tag{4.178}$$

За стационаран и ергодичан процес, тврђење о конзистентности оцена $\widehat{\theta}_n$ даје следећа теорема.

Теорема 4.16 *Ако је $\{X_t\}$ стационаран и ергодичан процес дефинисан са (4.47) и ако за функцију ρ важе Услов 4.8 и Услов 4.10, а за $\{X_t\}$ важи Услов 4.9, онда*

$$\widehat{\theta}_n \xrightarrow{s.s.} \theta_0, \quad n \to \infty.$$

Доказ. Нека је функција $f : \Theta \to R$ дефинисана са

$$f(\theta) = E\,\rho\left(e_1(\theta)\right). \tag{4.179}$$

Из услова 4.10 следи да је

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \int_{R^p} E\left(\varepsilon_1 + h(y,\theta_0) - h(y,\theta)\right) dF_{\mathbf{X}_0}(y) \\ &> E\,\rho(\varepsilon_1) \\ &= f(\theta_0), \end{aligned} \tag{4.180}$$

где је $F_{\mathbf{X}_0}$ функција расподеле за $\mathbf{X}_0$.

Нека је, затим, низ функција $f_n : \Theta \to R$ дефинисаних са

$$f_n(\theta) = \frac{1}{n-p+1}\sum_{k=p}^{n} \rho(X_{k+1} - h(\mathbf{X}_0,\theta)). \tag{4.181}$$

Из услова стационарности и ергодичности процеса $\{X_t\}$ имамо (Liebscher, 2000)

$$\sup_{\theta\in\Theta} |f_n(\theta) - f(\theta)| \xrightarrow{s.s.} 0, \quad n \to \infty \tag{4.182}$$

Како је, по дефиницији функција f_n и оцена $\widehat{\theta}_n$

$$\widehat{\theta}_n \in \underset{\theta\in\Theta}{argmin}\ f_n(\theta) \tag{4.183}$$

и, због (4.180),

$$\theta_0 = \underset{\theta\in\Theta}{argmin}\ f(\theta) \tag{4.184}$$

и како је, на основу Леме 4.8, функција f непрекидна, испуњени су сви услови о конвергенцији аргумената минимума функција f_n (Vogel, 1994), одакле следи конзистентност оцена $\widehat{\theta}_n$.■

Напомена. Доказ ове теореме може да се изведе и техником Huber-а коју су користили Chen (1993) и Qian (1998) за случај методе најмањих квадрата и методе максималне веродостојности.

4.5 РЕКУРЗИВНЕ ОЦЕНЕ

У неким применама потребне су *on line* оцене параметара модела, односно у сваком тренутку t, кад се добије нова информација X_t, треба дати нову оцену $\widehat{\theta}_t$. Ако је временски размак између две опсервације кратак, методе које су описане у 4.1 - 4.4 нису погодне, јер захтевају компликована израчунавања приликом оптимизације постављеног критеријума. У том случају су погоднији алгоритми који у тренутку $t+1$ на основу нове опсервације X_{t+1} врше корекцију постојеће оцене

$$\widehat{\theta}_{t+1} = \widehat{\theta}_t + \gamma_t f(X_{t+1}, e_t), \tag{4.185}$$

где је $\{\gamma_t\}$ низ позитивних константи, а $\{e_t\}$ низ резидуала, односно разлика између нове опсервације и њене предикције на основу претходних опсервација.

За модел линеарне стохастичке регресије рекурзивни алгоритми се користе скоро две деценије (Young, 1984; Chen, 1985) са различитим условима за регресоре (Ђорић 1989). Такви алгоритми могу да се примене и за налажење оцена регресионих параметара у појединим режимима SETAR модела.

4.5.1 Методе са преуређеним регресорима

Нека је модел SETAR$(l; p_1, \ldots, p_l)$ дат у облику преуређених ауторегресија

$$X_{(i)+d} = a_{j,0} + \sum_{s=1}^{p_j} a_{j,s} X_{(i)+d-s} + \varepsilon_{(i)+d} \tag{4.186}$$

за $j = 1, \ldots, l$ и $i = m_{j-1}+1, \ldots, m_j$ (Tong 1990). Ако је

$$A_j = (a_{j,0},\ a_{j,1}, \ldots, a_{j,p})^T \tag{4.187}$$

и

$$\varphi_i = \left(1,\ X_{(i)+d-1},\ X_{(i)+d-2},\ \ldots,\ X_{(i)+d-p_j}\right)^T, \tag{4.188}$$

модел (4.186) може да се запише у облику

$$X_{(i)+d} = \varphi_i A_j I(i \in M_j) + \varepsilon_{(i)+d}. \tag{4.189}$$

Пошто је φ_i случајни вектор који је $\mathcal{F}_{(i)}$ мерљив, то модел (4.189) представља модел стохастичке регресије (Ђорић, 1989). За оцену непознатих матрица A_j

могу да се користе различити рекурзивни алгоритми. Овде су дати резултати за рекурзивни облик методе најмањих квадрата, који представљају побољшање раније коришћених резултата (Tsay 1989, 1999), јер су добијени под знатно блажим претпоставкама.

Метода најмањих квадрата

Нека је $Z_{j,n}$ матрица n $(n < n_j)$ регресора j - тог подмодела

$$Z_{j,n} = \left(\varphi_{m_{j-1}+1}\ \varphi_{m_{j-1}+2}\ \cdots\ \varphi_{m_{j-1}+n}\right)^T \tag{4.190}$$

и $Y_{j,n}$ матрица n опсервација

$$Y_{j,n} = \left(X_{(i)+d}\ X_{(i+1)+d}\ \cdots\ X_{(i+n-1)+d}\right)^T \tag{4.191}$$

за $i = m_{j-1}+1, m_{j-1}+2, \ldots, m_j$. Тада је оцена $\widehat{A}_{j,n}$ непознате матрице A_j методом најмањих квадрата дата са

$$\widehat{A}_{j,n} = Y_{j,n}^T Z_{j,n}\left(Z_{j,n}^T Z_{j,n}\right)^{-1}. \tag{4.192}$$

Еквивалентан рекурзивни облик оцене $\widehat{A}_{j,n}$ је

$$\widehat{A}_{j,n} = \widehat{A}_{j,n-1} + \left(X_{(i+1)+d} - A_{j,n-1}\varphi_{j,n}\right)\varphi_{j,n}^T P_{j,n}, \tag{4.193}$$

где је

$$P_{j,n}^{-1} = P_{j,n-1}^{-1} + \varphi_{j,n}\varphi_{j,n}^T. \tag{4.194}$$

Уместо рекурзије (4.194) за информационе матрице $P_{j,n}^{-1}$ може се узети рекурзија за инверзне матрице $P_{j,n}$

$$P_{j,n} = P_{j,n-1} - \rho_{j,n} P_{j,n-1}\varphi_{j,n}\varphi_{j,n}^T P_{j,n-1}, \tag{4.195}$$

где је

$$\rho_{j,n} = \frac{1}{\varphi_{j,n}^T P_{j,n-1}\varphi_{j,n}}. \tag{4.196}$$

Конзистентност оцена

Претпоставимо да грешке модела скоро извесно задовољавају услов

$$\sup_n E\left(\varepsilon_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) < \infty. \tag{4.197}$$

Тада важи следеће тврђење.

Теорема 4.17 *Нека је $f : R^+ \to R$ растућа функција таква да је*

$$\lim_{x \to +\infty} \int \frac{dx}{f(x)} = K < +\infty. \tag{4.198}$$

Тада за грешку $\tilde{A}_{j,n}$ оцене $\widehat{A}_{j,n}$ матрице A_j важи

$$||\tilde{A}_{j,n}||^2 = O\left(\frac{f\left(log\, \lambda^n_{j,max}\right)}{\lambda^n_{j,min}}\right). \tag{4.199}$$

Доказ. Уочимо низ случајних величина $\{c_i\}$ где је

$$c_i = \varphi^T_{j,i} P_{j,i} \varphi_{j,i}. \tag{4.200}$$

Пошто је c_i величина која је $\mathcal{F}_i$ мерљива, то је (Ђорић, 1989)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{f(C_k)} < \infty, \tag{4.201}$$

где је

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} c_i.$$

Нека је

$$\alpha_k = \frac{c_k}{f(C_k)}, \quad \beta_k = f(C_k), \quad \gamma_k = \alpha_k \varepsilon_k^2.$$

Како на скупу $\{w \ : \ \sum_{i=1}^{\infty} c_i(w) = \infty\}$, према релацији (4.201), важи

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty, \tag{4.202}$$

то на том скупу важи и (Lai and Wei, 1982)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty. \tag{4.203}$$

Обзиром да је $\{\beta_k\}$ растући низ, према Кронекеровој леми је

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \beta_k = o(\beta_n). \tag{4.204}$$

Из ове једнакости и једнакости

$$\gamma_k \beta_k = c_k \varepsilon_k^2$$

следи да је

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varepsilon_k^2 = o\left(f\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right)\right). \tag{4.205}$$

Но како је (Lai and Wei, 1982)

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = O\left(log\, \lambda_{j,max}^{n}\right)$$

и (Ђорић, 1989)

$$T_n = tr\left(\tilde{A}_{j,n} P_{j,n} \tilde{A}_{j,n}^{T}\right) = O\left(\sum c_k \varepsilon_k^2\right) + O(1),$$

то је

$$T_n = O\left(f\left(log\, \lambda_{j,max}^{n}\right)\right).$$

Из ове релације и неједнакости

$$\|\tilde{A}_{j,n}\| \leq \frac{T_n}{\lambda_{j,min}^{n}}$$

следи тврђење теореме. ■

4.5.2 Директне методе

Уместо преуређивања опсервација SETAR процеса по режимима и оцењивања параметара преуређених регресија, могу се дефинисати и рекурзивни алгоритми који директно обрађују нове опсевације (информације) и дају on-line адаптације оцена параметара.

Метода стохастичке апроксимације

Метода стохастичке апроксимације се од стандардног проблема нумеричког решавања једначине

$$f(x) = 0$$

у случају кад су вредности функције f доступне са грешкама (Robbins and Monro, 1951), брзо развијала и проширивала области примене (Borkar and Meyn, 1999), а коришћена је и за оцене параметара SETAR модела (Arnold and Gunther, 1998). Овде је дат један нов алгоритам који представља уопштење и побољшање постојећих резултата.

Нека је дат SETAR$(l, p_1, p_2, \ldots, p_l)$ модел

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left(a_{0,j} + \sum_{i=1}^{p_j} a_{i,j} X_{t-i}\right) I(X_{t-d} \in R_j) + \varepsilon_t, \tag{4.206}$$

односно

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} A_j \varphi_{t-1} I(X_{t-d} \in R_j) + \varepsilon_t, \tag{4.207}$$

где је

$$A_j = (a_{0,j}, a_{1,j}, \ldots, a_{p,j}) \tag{4.208}$$

за $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ и где је

$$\varphi_{t-1} = (1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p})^T, \tag{4.209}$$

$$p = max\{p_1, \ldots, p_l\}. \tag{4.210}$$

Алгоритам типа стохастичке апроксимације који рекурзивно дефинише оцене $\hat{A}_{n,j}$ непознатих вектора A_j је дат на следећи начин:

$$\hat{A}_{n,j} = \begin{cases} 0, & n \leq max\{p, d\}, \\ \hat{A}_{n-1,j} + \gamma_{n-1,j} e_n \varphi_{n-1}^T I(X_{t-d} \in R_j), & n > max\{p, d\}, \end{cases} \tag{4.211}$$

где је

$$\begin{aligned} e_n &= X_n - \hat{X}_n, \\ \hat{X}_n &= \sum_{j=1}^{l} \hat{A}_{n-1,j} \varphi_{n-1} I(X_{n-d} \in R_j), \\ \gamma_{n,j} &= \frac{1}{s_{n,j}}, \\ s_{n,j} &= \begin{cases} 1, & n < max\{p, d\}, \\ s_{n-1,j} + \|\varphi_n\|^2 I(X_{n-d} \in R_j), & n \geq max\{p, d\}. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.212}$$

Доказаћемо да овај алгоритам генерише конзистентне оцене $\hat{A}_{n,j}$ уз одређене услове за низове $\{\varphi_n\}$, $\{e_n\}$ и $\{\gamma_{n,j}\}$, при чему се не захтева ни ергодичност ни стационарност SETAR процеса.

Једно својство оцена

Нека је

$$\tilde{A}_{n,j} = A_j - \hat{A}_{n,j}. \tag{4.213}$$

Докажимо, најпре, да низови $\left\{\|\tilde{A}_{n,j}\|\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, l$ конвергирају.

Теорема 4.18 *Ако* $s_{n,j} \to \infty$ $(n \to \infty)$, *онда постоје случајне променљиве* A_j^* *такве да*

$$\|\tilde{A}_{n,j}\| \xrightarrow{s.s.} A_j^* \quad (n \to \infty). \tag{4.214}$$

Доказ. Из дефиниције алгоритма је

$$\begin{aligned}
e_n &= X_n - \hat{X}_n \\
&= \sum_{j=1}^{l} A_{n,j}\varphi_{n-1} I(X_{n-d} \in R_j) + \varepsilon_n - \sum_{j=1}^{l} \hat{A}_{n,j}\varphi_{n-1} I(X_{n-d} \in R_j) \\
&= \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{l} \left(A_{n,j} - \hat{A}_{n,j}\right) \varphi_{n-1} I(X_{n-d} \in R_j) \\
&= \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{l} \tilde{A}_{n,j}\varphi_{n-1} I(X_{n-d} \in R_j),
\end{aligned}$$

па за $n > max\{p,d\}$ је

$$\hat{A}_{n,j} = \hat{A}_{n-1,j} + \gamma_{n-1,j}\left(\varepsilon_n + \sum_{i=1}^{l} \tilde{A}_{n-1,j}\varphi_{n-1} I(X_{n-d} \in R_i)\right) I(X_{n-d} \in R_j).$$

Како је

$$I(X_{n-d} \in R_i) \cdot I(X_{n-d} \in R_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \tag{4.215}$$

то је

$$\hat{A}_{n,j} = \hat{A}_{n-1,j} + \gamma_{n-1,j}\varepsilon_n \varphi_{n-1}^T I(X_{n-d} \in R_j) + \gamma_{n-1,j}\tilde{A}_{n-1,j}\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}^T I(X_{n-d} \in R_j), \tag{4.216}$$

односно

$$\tilde{A}_{n,j} = \tilde{A}_{n-1,j} - \gamma_{n-1,j}\varepsilon_n \varphi_{n-1}^T I(X_{n-d} \in R_j) - \gamma_{n-1,j}\tilde{A}_{n-1,j}\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}^T I(X_{n-d} \in R_j). \tag{4.217}$$

Из ове једнакости добијамо да је

$$\begin{aligned}
||\tilde{A}_{n,j}||^2 &= \sum_{i=0}^{p} \left(\tilde{A}_{n,j}(i)\right)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{p} \Big(\tilde{A}_{n-1,j}(i) - \gamma_{n-1,j}\varepsilon_n\varphi_{n-1}(i) I(X_{n-d} \in R_j) \\
&\qquad - \gamma_{n-1,j}\tilde{A}_{n-1,j}\varphi_{n-1}\varphi_{n-1}(i) I(X_{n-d} \in R_j)\Big)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{p} \left(\tilde{A}_{n-1,j}(i)\right)^2 + (\gamma_{n-1,j}\varepsilon_n I(X_{n-d} \in R_j))^2 \sum_{i=0}^{p} \varphi_{n-1}^2(i) \\
&\qquad + (\gamma_{n-1,j}\tilde{A}_{n-1,j}\varphi_{n-1} I(X_{n-d} \in R_j))^2 \sum_{i=0}^{p} \varphi_{n-1}^2(i) \\
&\qquad - 2\gamma_{n-1,j}\tilde{A}_{n-1,j}\varphi_{n-1} I(X_{n-d} \in R_j) \sum_{i=0}^{p} \tilde{A}_{n-1,j}(i)\varphi_{n-1}(i) I(X_{n-d} \in R_j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - 2M_n\varepsilon_n \\
&= ||\tilde{A}_{n-1,j}||^2 + (\gamma_{n-1,j}\varepsilon_n I(X_{n-d} \in R_j))^2 ||\varphi_{n-1}||^2 \\
&\quad + \gamma_{n-1,j}\tilde{A}_{n-1,j}||\varphi_{n-1}||^2 I(X_{n-d} \in R_j) \\
&\quad - 2\gamma_{n-1,j}\left(\tilde{A}_{n-1,j}\varphi_{n-1}\right)^2 I(X_{n-d} \in R_j) - 2M_n\varepsilon_n,
\end{aligned}
$$

при чему је M_n одговарајући збир. Из ових релација следи да је

$$
\begin{aligned}
E\left(||\tilde{A}_{n,j}||^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{n-1}\right) &= ||\tilde{A}_{n-1,j}||^2 + \sigma_\varepsilon^2 ||\varphi_{n-1}||^2 \gamma_{n-1,j}^2 I(X_{n-d} \in R_j) + M \\
&\le ||\tilde{A}_{n-1,j}||^2 + \sigma_\varepsilon^2 \gamma_{n-1,j}^2 ||\varphi_{n-1}||^2 I(X_{n-d} \in R_j)
\end{aligned}
$$

јер је

$$
M = \gamma_{n-1,j}\left(\tilde{A}_{n-1,j}\varphi_{n-1}\right)^2 I(X_{n-d} \in R_j)\left(\gamma_{n-1,j}||\varphi_{n-1}||^2 I(X_{n-d} \in R_j) - 2\right) < 0.
$$

Из претпоставке $s_{n,j} \to \infty$ $(n \to \infty)$ следи да је

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n-1,j}^2 ||\varphi_{n-1}||^2 I(X_{n-d} \in R_j) < \infty, \tag{4.218}
$$

па су низови $\left\{||\tilde{A}_{n,j}||\right\}$ за $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ скоро супермартингали који су конвергентни. Тиме је теорема доказана. ■

Напомене. 1. Може се показати да закључак теореме важи и без услова $s_{n,j} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Наиме, ако је

$$
\tilde{\tilde{A}}_{n,j} = ||\tilde{A}_{n,j}|| - \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=p+1}^{n} \gamma_{k-1,j}^2 ||\varphi_{k-1}||^2 I(X_{k-d} \in R_j),
$$

онда су низови $\left\{\tilde{\tilde{A}}_{n,j}\right\}$ конвергентни супермартингали. Међутим, поменути услов је потребан у даљем извођењу, као и у захтеву да у сваком режиму има бесконачан број опсервација датог процеса.

2. Arnold i Gunther (1998) су користили строжије захтеве за $s_{n,j}$:

$$
\frac{s_{n,j}}{n} \xrightarrow{s.s.} \mu_j \quad (n \to \infty),
$$

$$
\exists \delta \in (0, 1/2)\ \forall \epsilon : P\left(\left\{\left|\frac{s_{n,j}}{n} - \mu_j\right| \ge \epsilon\right\}\right) = o(n^{-3+\delta}).
$$

3. Овај алгоритам може да се уопшти у погледу избора коефицијената $\gamma_{n,j}$. Уместо једнакости (4.212) којима су ти коефицијенти дефинисани довољно је да буде испуњен услов (4.218) и услов

$$
\gamma_{n-1,j}||\varphi_{n-1}||^2 I(X_{n-d} \in R_j) \le 2.
$$

Конзистентност оцена

Нека су, за $j = 1, 2, \ldots, l$ поднизови $\{n_{j_k}\}$ низа природних бројева дефинисани условима
$$I\left(X_{n_{j_k}-d} \in R_j\right) = 1.$$
Из једнакости (4.217) добијамо да је
$$\tilde{A}_{n_{j_k},j} = \tilde{A}_{n_{j_{k-1}},j} - \gamma_{n_{j_{k-1}},j}\varepsilon_{n_{j_k}}\varphi^T_{n_{j_{k-1}}} - \gamma_{n_{j_{k-1}},j}\tilde{A}_{n_{j_{k-1}},j}\varphi_{n_{j_{k-1}}}\varphi^T_{n_{j_{k-1}}},$$
односно
$$\tilde{A}_{n_{j_k},j} = \tilde{A}_{n_{j_{k-1}},j}\left(I - \gamma_{n_{j_{k-1}},j}\tilde{A}_{n_{j_{k-1}},j}\varphi_{n_{j_{k-1}}}\varphi^T_{n_{j_{k-1}}}\right) - \gamma_{n_{j_{k-1}},j}\varepsilon_{n_{j_k}}\varphi^T_{n_{j_{k-1}}}. \tag{4.219}$$
Ако је
$$B_{k,j} = \tilde{A}_{n_{j_k},j}, \quad \beta_{k,j} = \gamma_{n_{j_k},j}, \quad \phi_{k,j} = \varphi_{n_{j_k}}, \quad \varepsilon_{k,j} = \varepsilon_{n_{j_k}}, \tag{4.220}$$
тада из једнакости (4.219) следи да је
$$B_{k,j} = B_{k-1,j}\left(I - \beta_{k-1,j}\phi_{k-1,j}\phi^T_{k-1,j}\right) - \beta_{k-1,j}\varepsilon_{k,j}\phi_{k-1,j}. \tag{4.221}$$
Према томе, гранична вредност низа $\left\{\tilde{A}_{n,j}\right\}$, за фиксирано j, је одређена граничном вредношћу низа $\{B_{n,j}\}$. За конзистентност оцена $\hat{A}_{n,j}$ потребно је, наравно, да $\tilde{A}_{n,j}$ конвергира ка нули. Ако докажемо да
$$B_{k,j} \xrightarrow{s.s.} 0 \quad (k \to \infty), \tag{4.222}$$
онда из конвергенције нули подниза $\left\{A_{n_{j_k}}\right\}$ следи конвергенција нули подниза $\left\{||\tilde{A}_{n_{j_k}}||\right\}$. Како (према претходној теореми) низ $\left\{||\tilde{A}_n||\right\}$ конвергира, то значи да он конвергира ка нули, па и низ $\left\{\tilde{A}_n\right\}$, такође, конвергира ка нули. Довољно је, дакле, доказати да важи релација (4.222).

Из једнакости (4.221) следи да је
$$B_{n,j} = B_{1,j}\prod_{i=2}^{n}\left(I - \beta_{i,j}\phi_{i,j}\phi^T_{i,j}\right) - \sum_{i=2}^{n}\beta_{i,j}\varepsilon_{i,j}\phi^T_{i,j}\prod_{k=i+1}^{n}\left(I - \beta_{k,j}\phi_{k,j}\phi^T_{k,j}\right). \tag{4.223}$$
За произвољно $B_{1,j}$, $j = 1, 2, \ldots, l$, релација (4.223) је испуњена само ако
$$\prod_{i=2}^{n}\left(I - \beta_{i,j}\phi_{i,j}\phi^T_{i,j}\right) \xrightarrow{s.s.} 0_{p\times p}, \quad (n \to \infty) \tag{4.224}$$
обзиром да други члан десне стране једнакости (4.223) не зависи од $B_{1,j}$. Зато уведимо, најпре, такав захтев у виду следећег услова.

Услов 4.11 *Важи (4.224).*

Ако, дакле, претпоставимо да важи овај услов, проблем се своди на налажење додатних услова под којима

$$\sum_{i=2}^{n} \beta_{i,j}\varepsilon_{i,j}\phi_{i,j}^{T} \prod_{k=i+1}^{n} \left(I - \beta_{k,j}\phi_{k,j}\phi_{k,j}^{T}\right) \xrightarrow{s.s.} 0_{p\times p} \quad (n \to \infty). \tag{4.225}$$

За то је довољан следећи захтев.

Услов 4.12 *За свако $j = 1, 2, \ldots, l$, ред формиран од матрица $\beta_{i,j}\varepsilon_{i,j}\phi_{i,j}^{T}$ је скоро сигурно конвергентан, односно постоји коначна матрица S_j таква да*

$$S_{n,j} = \sum_{i=2}^{n} \beta_{i,j}\varepsilon_{i,j}\phi_{i,j}^{T} \xrightarrow{s.s.} S_j \quad (n \to \infty). \tag{4.226}$$

Овај услов не представља велике рестрикције ни у погледу грешки $\varepsilon_{i,j}$, ни у погледу константи $\beta_{i,j}$, односно $\gamma_{i,j}$ у случају општег алгоритма. Можемо издвојити неколико карактеристичних случајева у којима је испуњен услов (4.226).

1. Грешке су ограничене и важи

$$\sum_{i=2}^{n} \beta_{i,j}||\phi_{i,j}|| < \infty. \tag{4.227}$$

2. Грешке нису ограничене, већ су такве да је

$$||\varepsilon_{i,j}|| < c||\phi_{i,j}||$$

и важи

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{i,j}||\phi_{i,j}||^2 < \infty. \tag{4.228}$$

3. Грешке су такве да је

$$E(||\varepsilon_{i,j}||^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}) \le c\gamma_{i,j}^{\alpha}, \quad -1 < \alpha < 0$$

и важи

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{i,j}^{2+\alpha}||\phi_{i,j}||^2 < \infty. \tag{4.229}$$

4. У општем случају, без претпоставки о грешкама, довољно је да је испуњен услов

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{i,j}||\varepsilon_{i,j}|| \cdot ||\phi_{i,j}|| < \infty. \tag{4.230}$$

Поред услова (4.226) који гарантује конвергенцију реда матрица $\beta_{i,j}\varepsilon_{i,j}\phi_{i,j}^T$, потребан је и захтев за одређеном брзином те конвергенције. Зато уводимо следећи услов.

Услов 4.13 *За* $\tilde{S}_i = S - S_i$ *важи*

$$\sum_{i=2}^{\infty} \beta_{i,j}||\tilde{S}_{i,j}\phi_{i,j}||^2 < \infty. \tag{4.231}$$

Овај услов, у општем случају, представља додатно ограничење и на $\phi_{i,j}$ и на грешке $\varepsilon_{i,j}$ и на коефицијенте $\gamma_{i,j}$. Међутим, у случају кад су испуњени услови (4.228) или (4.229), испуњен је и овај услов. На пример, ако је

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{r_{i,j}^{1+\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

или

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{r_{i,j}(log\, r_{i,j})^{1+\alpha}}, \quad \alpha > 0,$$

где је

$$r_{i,j} = 1 + \sum_{i=1}^{n} ||\phi_{i,j}||^2,$$

онда је испуњен услов (4.228), а тиме и Услов 4.12 без додатних ограничења за $\phi_{i,j}$ и $\varepsilon_{i,j}$.

У доказу наредне Теореме 4.19 се користе следећа два помоћна тврђења (Ђорић, 1989).

Лема 4.9 *Нека је* $\{a_n\}$ *низ* k *- димензионих вектора. Ако је*

$$\pi(i,k) = \begin{cases} \prod_{t=i}^{k} \left(I - a_{k+i-t}a_{k+i-t}^T\right), & 1 \leq i \leq k, \\ I, & i > k \end{cases} \tag{4.232}$$

тада за свако $n \geq 1$ *важи*

$$||a_t|| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{t=1}^{n} ||\pi(t+1,n)a_t||^2 \leq K < \infty. \tag{4.233}$$

Лема 4.10 *Нека је* $\{a_n\}$ *низ реалних ненегативних бројева таквих да је*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$$

и нека су $\{b_{i,j}\}$ *низови релних ненегативних бројева таквих да је*

$$\sum_{j=1}^{i} b_{i,j}^2 < K < \infty$$

за сваки $i \geq 1$ *и*

$$b_{i,j} \longrightarrow 0, \quad (i \longrightarrow \infty)$$

за сваки $j \geq 1$. *Тада важи*

$$\sum_{j=1}^{i} b_{i,j} a_j \longrightarrow 0, \quad (i \longrightarrow \infty). \tag{4.234}$$

Теорема 4.19 *Ако су испуњени услови 4.10, 4.11 и 4.12, онда*

$$B_{n,j} \xrightarrow{s.s.} 0_p \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{4.235}$$

за $j = 1, 2, \ldots, l$.

Доказ. Нека је

$$\pi_j(i,k) = \begin{cases} \prod_{t=i}^{k} (I - \beta_{t,j}\phi_{t,j}\phi_{t,j}^T), & 1 \leq i \leq k, \\ I, & i > k \end{cases}$$

и нека је $S_0 = 0$. Тада је за сваки $j = 1, 2, \ldots, l$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j}\varepsilon_{i,j}\phi_{i,j}^T \prod_{k=i+1}^{n} (I - \beta_{k,j}\phi_{k,j}\phi_{k,j}^T) &= \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j}\varepsilon_{i,j}\phi_{i,j}^T\pi_j(i+1,n) \\ &= S_{n,j}^*, \end{aligned}$$

при чему је

$$\begin{aligned} S_{n,j}^* &= \sum_{i=1}^{n} (S_{i,j} - S_{i-1,j})\pi_j(i+1,n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} S_{i,j}\pi_j(i+1,n) - \sum_{i=1}^{n} S_{i-1,j}\pi_j(i+1,n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} S_{i,j}\pi_j(i+1,n) + S_{n,j}\pi_j(n+1,n) - \sum_{i=1}^{n} S_{i-1,j}\pi_j(i+1,n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} S_{i,j}\pi_j(i+1,n) + S_{n,j} - \sum_{i=1}^{n} S_{i-1,j}\pi_j(i+1,n) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} S_{i-1,j}\pi_j(i,n) + S_n - \sum_{i=1}^{n} S_{i-1,j}\pi_j(i+1,n)$$

$$= S_{n,j} + \sum_{i=1}^{n} S_{i-1,j}\left(\pi_j(i,n) - \pi_j(i+1,n)\right)$$

$$= S_{n,j} + S_j \sum_{i=1}^{n} \left(\pi_j(i,n) - \pi_j(i+1,n)\right) - \sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_{i-1,j}\left(\pi_j(i,n) - \pi_j(i+1,n)\right)$$

$$= S_{n,j} + S_j\left(\pi_j 1,n) - \pi_j(n+1,n)\right) - \sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_{i-1,j}\left(\pi_j(1,n) - \pi_j(n+1,n)\right)$$

$$= S_{n,j} + S_j\pi_j(1,n) - S_j - \sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_{i-1,j}\left(\pi_j(i,1) - I\right)\pi_j)i+1,n)$$

$$= -\tilde{S}_{n,j} + S_j\pi_j(1,n) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_{i-1,j}\beta_{i,j}\phi_{i,j}^T\pi_j(i+1,n).$$

Из ових једнакости следи да је

$$||S_{n,j}^*|| \leq ||\tilde{S}_{n,j}|| + ||S_j\pi_j(1,n)|| + \sum_{i=1}^{n} ||\tilde{S}_{i-1,j}\beta_{i,j}\phi_{i,j}\phi_{i,j}^T\pi_j(i+1,n)||. \tag{4.236}$$

Како из Услова 4.10 имамо да

$$\pi_j(1,n) \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty),$$

из неједнакости (4.236) добијамо да је

$$\lim_{n\to\infty} ||S_{n,j}^*|| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ||\tilde{S}_{i-1,j}\beta_{i,j}\phi_{i,j}\phi_{i,j}^T\pi_j(i+1,n)||. \tag{4.237}$$

Ако у леми 4.9, за дато j, ставимо да је

$$a_i = \beta_{i,j}^{1/2}||\tilde{S}_{i-1,j}\phi_{i,j}||,$$

тада је (према услову 4.12)

$$||a_i|| \leq 1,$$

па на основу Леме 4.10 следи да је

$$\sum_{i=1}^{n} ||\pi_j(i+1,n)a_i||^2 \leq K_a < \infty. \tag{4.238}$$

Исто тако, ако је (за дато j)

$$b_{n,i} = \beta_{i,j}^{1/2}||\phi_{i,j}^T\pi_j(i+1,n)||, \tag{4.239}$$

онда за $i \geq 1$ важи

$$\sum_{i=1}^{n} b_{n,i}^2 < K_b < \infty \tag{4.240}$$

и

$$b_{n,i} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty). \tag{4.241}$$

Из релација (4.238) и (4.239) следи да су за (a_i) и $(b_{n,i})$ испуњени услови леме 4.10, па за сваки $j = 1, 2, \ldots, l$ важи

$$\sum_{i=1}^{n} ||\tilde{S}_{i-1,j}\beta_{i,j}\phi_{i,j}\phi_{i,j}^T\pi_j(i+1,n)|| \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n,i} \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty). \tag{4.242}$$

Према томе, за сваки $j = 1, 2, \ldots, l$ низ $\left\{||S_{n,j}^*||\right\}$ је нула низ, а то значи да је такав и низ $\{||S_{n,j}||\}$, односно и низ $\{B_{n,j}\}$, чиме је теорема доказана. ■

Обзиром на дефиницију вектора $B_{i,j}$, из претходне теореме директно следи тврђење које се односи на конзистентност оцена $\hat{A}_{n,j}$. Дакле, важи следећа теорема.

Теорема 4.20 *Нека је дат* SETAR$(l, p_1, p_2, \ldots, l_p)$ *модел (4.206) и нека је дат алгоритам стохастичке апроксимације дефинисан са (4.211) и (4.212), при чему су испуњени следећи услови:*

$$\prod_{i=1}^{n} (I - \gamma_{i,j}\varphi_i\varphi_i I(X_{n-d} \in R_j)) \xrightarrow{s.s.} 0_{p\times p}, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$S_{n,j} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j} e_i \varphi_i^T I(X_{i-d} \in R_j) \xrightarrow{s.s.} S_j \quad (n \to \infty)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j}||(S_{i,j} - S_j)\varphi_i^T I(X_{i-d} \in R_j)||^2 < \infty.$$

Тада су оцене $\tilde{A}_{n,j}$ непознатих параметара A_j (за $j = 1, 2, \ldots, l$) конзистентне.

Приметимо да за теореме 4.17 и 4.20 није неопходна претпоставка о стационарности и ергодичности процеса $\{X_t\}$, као што је то био случај за теорему 4.16 или одговарајуће теореме које се односе на конзистентност оцена добијених методом најмањих квадрата или методом максималне веродостојности.

5

ЗАКЉУЧАК

У раду су разматрани неки аспекти моделирања временских серија моделима са праговима. Добијене су три групе нових теоријских резултата који се односе на стационарност, ергодичност и оцене параметара модела.

Прва група тезултата се односи на стационарне расподеле SETAR процеса првог реда. Изведене су маргиналне расподеле за процес у случају кад резидуали имају експоненијалну, Лапласову или Ерлангову расподелу. При том су разматрани и случајеви различитих иновација у подмоделима, као и случај ненултог прага.

Друга група резултата обухвата услове стационарности и ергодичности процеса SETAR, SETAR-ARCH и SETARMA. Најпре је детаљно анализиран партикуларни случај - процес SETAR$(2;1,2)$. Применом модификованих критеријума за ергодичност Марковљевог процеса са непребројивим скупом стања, разматрано је осам различитих случајева у зависности од тога да ли су параметри одговарајућег модела позитивни или негативни. За сваки од тих случајева су добијени услови који одређују област ергодичности посматраног процеса. Сличном анализом могу да се добију услови ергодичности и за друге вредности прага, на пример за $d = 2$. У овом делу је најважнији резултат који се односи на општи случај - SETAR модел вишег реда са више прагова. Користећи теорију Марковљевих процеса са непребројивим скупом стања, доказано је да је SETAR процес несводљив и апериодичан ако је густина расподеле резидуала скоро свуда позитивна. Затим су изведени услови ергодичности који су знатно блажи од свих до тада познатих услова које су добијали многи аутори. У тим условима фигурише спектрални радијус матрица чији су елементи параметри појединих подмодела SETAR модела. Аналогни резултати су, затим, добијени и за процесе SETAR-ARCH и SETARMA, с тим што је за процес SETARMA претпостављено да је апериодичан и несводљив, јер услови за то у општем случају нису познати.

Трећа група резултата се односи на оцену параметара SETAR модела вишег реда са једним прагом. Најпре су, познати резултати о својствима оцена добијених методом најмањих квадрата и методом максималне веродостојности, уопштени за случај оцена добијених минимизацијом општег критеријума. Затим се дефинишу рекурзивне оцене, како за методу најмањих квадрата, тако и за методу стохастичке апроксимације, која у суштини обухвата и општи критеријум за оцењивање параметара модела. У овом делу је коришћена теорија мартингала.

У оквиру проблема разматраних у раду остало је низ отворених питања која и даље чекају одговор. Ево неких од њих.

(1) Какав је утицај параметра кашњења (d) на област ергодичности SETAR процеса другог реда?

(2) Да ли на ергодичност SETAR процеса вишег реда, са више прагова, утичу параметри свих подмодела, или само параметри првог и последњег подмодела? У условима који су добијени у овом раду фигуришу, на исти начин, параметри свих подмодела. Међутим, то су само довољни услови, а потребни услови у општем случају нису познати.

(3) Претходно питање важи и за процесе SETAR-ARCH и SETARMA.

(4) Какве све расподеле може да има SETAR процес? Да ли за задату расподелу SETAR процеса може да се одреди расподела резидуала?

(5) Каква је расподела M - оцена параметара SETAR модела?

Поред тога, за даље истраживање остају проблеми који се односе на тестирање различитих хипотеза везаних за моделе са праговима и оцену реда модела. У литератури постоји доста резултата (Petruccelli and Davies, 1986; Moeanaddin and Tong, 1988; Chan and Tong 1990; Chan, 1991; Clements and Smith, 1999; Hansen and Seo; 2000; Tsay, 2000), али и доста нерешених проблема. Затим, све проблеме треба посебно проучити за вишедимензионалне моделе са праговима.

Важно је, наравно, и питање примене модела са праговима у анализи и предвиђању конкретних временских серија. У последњих неколико година је права експанзија радова у којима се приказују експериментални (симулирани) резултати и резултати примене ових модела у економетрији (Clements and Smith, 1996; Peel and Speight, 1998; Henry, Olekalns and Summers, 1998; Barnes, 1999). За успешнију и једноставнију примену је неопходан и одговарајући софтверски пакет.

ИНДЕКС ПОЈМОВА

ЛИТЕРАТУРА

AKDENIZ, L., A.A. SALIN AND M. CANER (1999). An empirical investigation of time varying betas via threshold models. Discussion paper 99-12, Department of Economics, Bilkent University, Ankara.

AMENDOLA, A. AND M. NIGLIO (2000). Predictive distributions of nonlinear time series models. Working paper.

AN, H.Z. AND F.C. HUANG (1996). The geometrical ergodicity of nonlinear autoregressive models. *Statistica Sinica*, 6, 943-956.

ANDĚL, J. (1989). On nonlinear models for time series. *Statistics*, 20, 4, 615-632.

ANDĚL, J. AND M. GARRIDO (1988). On stationary distributions of some time series models. *Trans. of the Tenth Prague Conf. Inf. Th.*, 193- 202, Academia, Prague.

ANDĚL, J., I. NETUKA AND K. ZVÁRA (1984). On threshold autoregressive processes. *Kybernetika*, Vol.20, No.2, 89-106.

ANDĚL, J. AND T. BARTOŇ (1986). A note on the threshold AR(1) model with Cauchy innovations. *J. Time Ser. Anal.*, 7, 1, 1-5.

ANDĚL, J. AND A. FUCHS (1987). On marginal distributions of threshold models. Working paper.

ANDREWS, D.W.K. (1994). Empirical process methods in econometrics. In *Handbook of Econometrics*, Vol.6, Chapter 37, Elsevier Science.

ANDREWS, D.W.K. AND W. PLOBERGER (1995). Admissibility of the likelihood rato test when a nuisance parameter is present only under the alternative. Ann. Statist., 23, 1609-1629.

ARCONES, M.A. (1997). Asymptotic theory for M - estimators over a convex kernel. Working paper, Department of Mathematics, University of Texas.

ARNOLD, M. AND R. GÜNTHER (1998). Adaptive parameter estimation in self- exciting threshold autoregressive models. *Commun. Statist. Simul.*, 27, 4, 921-936.

ASHLEY, R. A. AND D. M. PATTERSON (1998). Nonlinear model specification, diagnostics - insights from a battery of nonlinearity tests. Working paper, Department of Economics, Virginia Tech.

AUESTAD, B. AND D. TJOSTHEIM (1990). Identification of nonlinear time series - first order characterzation and order determination. *Biometrika*, 77, 669-687.

BANTLI, F.E AND M. HALLIN (2000). Asymptotic behaviour of M - estimators in AR(p) models under nonstandard conditions. Working paper.

BARNES, M.L. (1999). Inflation and returns revisited - a TAR approach. *Journal of Multinational Financial Menagement*, 9, 233-245.

BENEŠ, V. E. (1967). Existence of finite invariant measures for Markov processes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18, 1058-1061.

BERBEN, R.P. AND D. VAN DIJK (1999). Unit root tests and asymmetric adjustment. A reassessment. Working paper, Department of Applied Economics, University of Nijmegen.

Bhattacharya, R. (1988). Ergodicity and central limit theorems for a class of Markov processes. *Journal of Multivariate Analysis*, **27**, 80-90.

Bhattacharya, R. and C. Lee (1995). On geometric ergodicity of nonlinear autoregressive models. *Statist. Probab. Lett.*, **22**, 311-315.

Bhattacharya, R. and C. Lee (1999). On geometric ergodicity of nonlinear autoregressive models - erratum. *Statist. Probab. Lett.*, **41**, 439-440.

Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure.* Wiley, New York.

Blakeley, C.A. (1995). On a threshold autoregressive stochastic volatility model. Iowa State University, Iowa.

Borkar, V.S and S.P. Meyn (1999). The O.D.E. method for convergence of stochastic approximation and reinforcement learning. Working paper, Indian Institut of Science, Bangalore.

Breidt, F.J. (2000). A threshold autoregressive stochastic volatility model. Working paper, Iowa State University, Ames, Iowa.

Brockwell, P.J and R.A. Davis (1991). *Time Series - Theory and Methods.* Springer - Verlag, New York.

Brockwell, P. J., J. Liu and R. L. Tweedie (1992). On the existence of stationary threshold autoregressive moving-average processes. *J. Time Ser. Anal.*, **13**, 2, 95-107.

Cai, Z. and J. Fan (2000). Functional-coefficient regression models for nonlinear time series. Working paper.

Caines, P.E. (1976). Presiction error methods for stationary stochastic processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **21**, 500-506.

Caines, P.E. (1988). *Linear Stochastic Systems.* John Willey and Sons, New York.

Caner, M. (1998). Least absolute deviation estimation of a threshold model. Bilkent University Working paper 98-19.

Caner, M. (1999). Large sample theory for M - estimators via empirical process methods. Discussion paper 99-3, Department of Economics, Bilkent University, Ankara.

Caner, M. and B. E. Hansen (2000). Threshold autoregressions with a unit root. Working Papers in Economics No.381, Boston College.

Cavanaugh, J.E. (1997). Unifying the derivations for the Akaike and corrected Akaikeinformation criteria. *Statist. Probab. Lett.*, **33**, 201-208.

Chen, M. and G. Chen (2000). Geometric ergodicity of nonlinear autoregressive models with changing conditional variances. *The Canadian Journal of Statistics*, **28**, 3, 605-613.

Chen and Lee (1995). Bayesian inference of threshold autoregressive models. *J. Time Ser. Anal.*, **16**, 483-492.

Chan, K. S. (1990). Testing for threshold autoregression. *Ann. Statist.*, **18**, 4, 1886-1894.

Chan, K. S. (1991). Percentage points of likelihood ratio tests for threshold autoregression. *J.R. Statist. Soc. B*, **53**, 691-696.

Chen, K. S. (1993). Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model. *Applied Statistics*, **21**, 520-533.

Chan, K. S., J. D. Petruccelli, H. Tong and S. W. Woolford (1985). A multiple - threshold AR(1) model. *J. Appl. Probab.*, **22**, 267-279.

Chen, K. S. and H. Tong (1985). On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations. *Ann. Appl. Probab.*, **17**, 666-678.

Chan, K. S. and H. Tong (1986). On estimating threshold in autoregressive models. *J. Time Ser. Anal.*, 7, 3, 179-190.

Chan, K. S. and H. Tong (1990). On likelihood ratio tests for threshold autoregression. *J.R. Statist. Soc. B*, **52**, 3, 469-476.

Chen, W.S. and J.C. Lee (1995). Bayesian inference of threshold autoregressive models. *J. Time Ser. Anal.*, **16**, 483-492.

Chan, K.S., H. Tong and N.C. Stenseth (1997). Analyzing short time series data from periodically fluctuating rodent populations by threshold models. Technical Report No.258, Department of Statistics and Actuarial Science, University of Iowa.

Chan, K.S., H. Tong and N.C. Stenseth (1997). Testing for common structures in a panel of threshold models. Technical Report No.268, Department of Statistics and Actuarial Science, University of Iowa.

Chen, K. S. and R.S. Tsay (1998). Limiting properties of the least squares estimator of a continuous threshold autoregressive model. *Biometrika*, **85**, 413-426.

Chen, R. (1993). Threshold variable selection in open-loop threshold autoregressive models, *J. Time Ser. Anal.*, **16**, 461-481.

Chen, R. (1999). Functional ceofficient autoregressive models - estimation and tests of hypotheses. Working paper, Department of Statistics, Texas A&M University.

Chen, R. and R. S. Tsay (1991). On the ergodicity of TAR(1) processes. *Ann. Appl. Probab.*, **1**, 4, 613-634.

Chen, R. and R.S. Tsay (1993). Functional coefficient autoregressive models, *JASA*, **88**, 298-308.

Chen, H.F. (1985). *Recursive Estimation and Control for Stochastic Systems.* John Wiley, New York.

Chen, H.F. and G. Lei (1985). Strong consistency of recursive identification by no use of persistent excitation condition. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **2**, 136-145.

Chen, H.F. and G. Lei (1986). The limit of stochastic gradient algorithm for identifying systems not persistently excited. *Kexue Tongbao*, **31**, 1302- 1306.

Clements, M.P. and J. Smith (1996). A Monte Carlo study of the forecasting performance of empirical SETAR models. Warwick Economic Research paper 464, Department of Economics, University of Warwick.

Clements, M.P. and J. Smith (1997). The performance of alternative forecasting methods for SETAR models. Working paper, Department of Economics, University of Warwick.

Clements, M.P. and J. Smith (1999). Testing self-exciting threshold autoregressive models against structural change models. Working paper, Department of Economics, University of Warwick.

Clements, M.P. and H.M. Krolzig (1998). Business cycle asymmetries - characterisation and testing based on Markov switching autoregressions. Research papers 522, Department of Economics, University of Warwick.

Clements, M.P., P.H. Franses and J. Smith (1999). On SETAR non-linearity and forecasting. Working paper, Department of Economics, University of Warwick.

Cline, D.B.H. and H.H Pu (2000). Stability of nonlinear time series: what does noise to do with it? Texas A & M University, Department of Statistics, Working paper.

Costa, O. L. V. and F. Dufour (2000). Invariant probability measures for a class of Feller Markov chains. *Statist. Probab. Lett.*, 50, 13-21.

DAVIES, R.B. (1987). Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika*, 74, 33-43.

DAVIS, M.H.A. AND R.B. VINTER (1985). *Stochastic Modelling and Control*. Chapman and Hall, New York.

DE GOOIJER, J. AND P. DE BRUIN (1998). On SETAR forecasting, *Statist. Probab. Lett.*, 37, 7-14.

DE GOOIJER, J. (1998). On threshold moving-average models, *J. Time Ser. Anal.*, 19, 1-18.

DE GOOIJER, J. (2001). Cross-validation criteria for SETAR model selection. *J. Time Ser. Anal.*, 22, 267-281.

DE GOOIJER, J. AND K. KUMAR (1992). Some recent developments in nonlinear time series modelling, testing and forecasting. *Int. J. of Forec.*, 8, 135-156.

DIACONS, P. AND D. FREEDMAN (1999). Iterated random functions. *SIAM Review*, 41, 45-76.

DJORIĆ, D. (1988). Ocena parametara linearne stohastičke regresije metodom najmanjih kvadrata. XXII ETAN Konferencija, Sarajevo.

DJORIĆ, D. (1989). Ocena parametara linearne stohastičke regresije metodom stohastičke aproksimacije. V JUREMA Simpozijum, Zagreb.

DJORIĆ, D. (1990). Uslovi konzistentnosti ocena parametara linearnih modela. Magistarski rad.

DJORIĆ, D. (1990). Ocena parametara ARMAX modela metodom stohastičke aproksimacije. VI JUREMA Simpozijum, Zagreb.

DJORIĆ, D. (1990). Konzistentne ocene parametara ARMAX modela. XXIV ETAN Konferencija, Zagreb.

DJORIĆ, D. (1995). Recursive estimates of ARMA model parameters. 50^{th} ISI Session, Beijing, *Bulletin of the ISI*, 292-293.

DJORIC, D., J. MALIŠIĆ (1996). TAR(1) model sa eksponencijalnim inovacijama. XXIII SYMOPIS, Zlatibor.

DJORIC, D., J. MALIŠIĆ (1997). Egzistencija stacionarnog SETARMA procesa. XXIV SYMOPIS, Bečići.

DJORIĆ, D., J. MALIŠIĆ (1998). Sufficient conditions for stationarity of the threshold ARMA processes. Prague Stochastics '98, Prague.

DOOB, J. L. (1953). *Stochastic Processes.* Wiley, New York.

DUFRENOT, G. AND V. MIGNON (1999). Pourquoi le taux d'épargne évolue-t-il de facon si irrégulière en France? Une interprétation à partir des modèles à seuil non stationnaires. Working paper, Faculté de Sciences Economiques et de Gestion, Université de Paris XII.

ENDERS, W. AND C.W.J. GRANGER (1996). Unit root tests and asymmetric adjustment with an example using the term structure of interest rates. Discussion paper 96-27, University of California, San Diego.

FEIGIN, P. D. AND R. L. TWEEDIE (1985). Random coefficient autoregressive processes - a Markov chain analysis of stationarity and finitness of moments. *J. Time Ser. Anal.*, 6, 1-14.

FLAHERTY, E. (2000). How reliable are threshold estimates in nonlinear models? A Monte Carlo experiment with an application. College of Charleston Working paper.

FONSECA G. AND R. L. TWEEDIE (2001). Stationary measures for non-irreducible non-continuous Markov chains with time series applications. Working paper.

GHADDAR, D. K. AND H. TONG (1981). Data transformation and self-exciting threshold autoregression, *Applied Statistics*, 30, 238-248.

GONZAÁEZ, M. AND J. GONZALO (1998). Threshold unit root models. Working paper, U. Carlos III de Madrid.

GONZAÁEZ, M. AND J. GONZALO (1999). A threshold unit root model for interest rate. Working paper, U. Carlos III de Madrid.

GONZALO, J. AND R. MONTESINOS (2000). Threskold stochastic unit root models. Working paper, U. Carlos III de Madrid.

GONZALO, J. AND J.Y. PITARAKIS (2001). Estimation and model selection based infernce in single and multiple threshold models. Working paper, U. Carlos III de Madrid.

GOSPODINOV, N. (2000). Nonlinearities in short term interest rate. Working paper, Department of Economics, Concordia University, Montreal.

GRANGER, C.W.J. (1998). Overview of nonlinear time series specifications in economics. Working paper, Department of Economics, University of California, San Diego.

GRANGER, C.W.J. AND T. TERÄSVIRTA (1993). *Modelling nonlinear economic relationships.* Oxford University Press, Oxford.

GUAY, A. AND O. SCAILLET (1999). Indirect inference, nuisance parameter and threshold moving average. Working paper No.95, CREFE, Université du Québec.

GUEGAN, D. AND J.M. NGUYEN (1999). Un nouveau point de vue sur la principe ergodique par rapport à la stabilité statistique - le role de la mesure SBR. Working paper.

GUO, M. AND J. PETRUCCELLI (1991). On the null recurrence and transience of a first-order SETAR model. *J. Appl. Probab.*, **28**, 584-592.

HACKL, P. (1980). *Testing the Constancy of Regression Models over Time.* Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.

HAGGAN, V. AND T. OZAKI (1981). Modelling nonlinear random vibrations using an amplitude dependent autoregressive time series model. *Biometrika*, **68**, 189-196.

HAGERUD, G. E. (1997). *A New Non-Linear GARCH Model.* A Dissertation for the Doctor's Degree in Philosophy, Stockholm School of Economics.

HALL, P. AND C.C. HEYDE (1980). *Martingale Limit Theory and Its Application.* Academic Press, New York.

HANSEN, B.E. (1997). Inference in TAR models. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, **2**, 1-14.

HANSEN, B.E. (1997a). Testing for structural change in conditional models. Boston College working paper No.310.

HANSEN, B.E. (1999). Sample splitting and threshold estimation. *Econometrica*, **68**, 575-603.

HANSEN, B.E. (1999a). Threshold effects in non-dynamic panels: estimation, testing and inference. *J. Econometrics*, **93**, 345-368.

HANSEN, B.E. (1999b). Testing for linearity. Working paper, Department of Economics, University of Wisconsin.

HANSEN, B.E. AND B. SEO (2000). Testing for threshold cointegration. Working paper.

HÄRDLE, W. (1990). *Applied Nonparametric Regression.* Cambridge University Press, Cambridge.

HARVILL, J. AND N.K. RAY (1998). A note on tests for nonlinearity in a vector time series. Working paper, Department of Mathematics and Statistics, Mississippi State University, Mississippi.

HENRY, O.T., N. OLEKALNS AND P.M. SUMMERS (1998). Identifying a currency crisis using threshold autoregressions - Australia and the east asian "meltdown". Research paper 655, Department of Economics, The University of Melbourne.

HERSH, M.A. AND M.B. ZARROP (1986). Strong consistency of a class of recursive stochastic gradient algorithms. *International Journal of Control*, 43, 1115-1123.

HEUNIS, A.J. (1988). Asymptotic properties of prediction error estimators in approximate system identification. *Stochastics*, 24, 1-43.

HOFFMANN, R.G. (1998). Modeling multiple nonlinear time series - a graphical approach to the transfer function. Working paper, The Medical College of Wisconsin.

HONG, Y. AND T.H. LEE (2000). Diagnostic checking for adequacy of linear and nonlinear time series models, Working paper.

HORN, R.A. AND C.R. JOHNSON (1985). *Matrix Analysis.* Camridge Univ. Press, Cambridge.

HUBER, P.J. (1981). *Robust Statistics.* J. Wiley & Sons, New York.

JONES, D. A. (1978). Nonlinear autoregressive processes. *Proc. Roy. Soc. London*, A, **360**, 71-95.

JUREČKOVÁ, J. (1984). M, L and R estimators. *Handbook of Statistics, Vol.4*, Elsevier Science Publishers.

KAPETANIOS, G. (1999). Threshold models for trended time series. Working paper, Department of Applied Economics, University of Cambridge.

KAPETANIOS, G. (1999a). Model selection in threshold models. Working paper, Department of Applied Economics, University of Cambridge.

KAPETANIOS, G. (2000). Small sample properties of the conditional least squares estimator in SETAR models. *Economics Letters*, **69**, 267-276.

KLIMKO, L.A. AND P.L. NELSON (1978). On conditional least-squares estimation for stochastic processes. *Ann. Statist.*, **6**, 629-642.

KNÜPLING, F. (1997). Testing between different types of switching regression models. Working paper, Abteilung Statistik und Ökonometrie, Freiburg.

KOOP, G. AND S. POTTER (1997). Nonlinearity, structural breaks or outliers in economic time series? Working paper, Department of Economics, University of Edindurgh, Edinburgh.

KOUL, H.L. AND A. SCHICK (1997). Efficient estimation in nonlinear autoregressive time series models. *Bernoulli*, 3, 247-277.

KUSHNER, H.J AND D.S. CLARKE (1978). *Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems.* Springer, New York.

KUSHNER, H.J. (1984). *Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes.* MIT Press, Cambridge.

LAI, T. L. AND C. Z. WEI (1982). Least squares estimates in stochastic regression models with applications to identification and control of dynamic systems. *Applied Statistics*, **10**, 154-166.

LASALLE, J.P. (1976). *The Stability of Dynamical Systems.* SIAM, Philadelphia.

LEE, O. AND D.W. SHIN (2000). On geometric ergodicity of the MTAR process. *Statist. Probab. Lett.*, **48**, 229-237.

LEE, S. AND T.N. SRIRAM (1998). Sequential point estimation of parameters in a threshold AR(1) model. Working paper, Department of Statistics, Seoul National University, Seoul.

LI, W.K. AND K. LAM (1995). Modelling asymmetry in stock returns by a threshold autoregressive conditional heteroscedastic model. *The Statistician*, **44**, 333-343.

LI, C.W. AND W.K. LI (1996). On a double threshold autoregressive heteroscedasticity time series model. *Journal of Applied Econometrics*, **11**, 253-274.

LI, W.K. AND M. MCALEER (2001). A survey of recent theoretical results for the time series models with GARCH errors. Discussion paper No.545, The Institute of Social Economic Research, Osaka University.

LIEBSCHER, E. (1999.) Strong convergence of estimators in nonlinear autoregressive models. Working paper, Istitute of Mathematics, Technical University Ilmenau, Ilmenau, Germany.

LIM, K. S. (1992). On the stability of a threshold AR(1) without intercepts. *J. Time Ser. Anal.*, **13**, 2, 119-132.

LIU, J., W. K. LI AND C. W. LI (1997). On a threshold autoregression with conditional heteroscedastic variances. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **62**, 279-300.

LIU, J. AND E. SUSKO (1992). On strict stationarity and ergodicity of a nonlinear ARMA models. *J. Appl. Probab.*, **29**, 363-373.

LJUNG, L. (1978). Convergence analysis of parametric identification methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **23**, 770-783.

LJUNG, L. AND P.E. CAINES (1979). Asymptotic normality of prediction error estimators for approximate system models. *Stochastics*, **3**, 29-46.

LJUNG, L. AND T. SÖDERSTRÖM (1983). *Theory and Practice of Recursive Identification.* MIT Press, Cambridge, Mass. LUUKKONEN, R., P. SAIKKONEN AND T. TERÄSVIRTA (1988). Testing linearity against smooth transition autoregressive models. *Biometrika*, **75**, 491-499.

LU, Z (1998). On the geometric ergodicity of a nonlinear autoregressive model with an autoregressive conditional heteroscedastic term. *Statistica Sinica*, **8**, 1205-1217.

LU, Z. AND Z. JIANG (2001). L_1 geometric ergodicity of a multivariate nonlinear AR model with an ARCH term. *Statist. Probab. Lett.*, **51**, 121-130.

LUUKKONEN, R., P. SAIKKONEN AND T. TERÄSVIRTA (1988). Testing linearity against univariate smooth transition models. Department of Statistics, University of Helsinki.

LYE, J.N. AND V.L. MARTIN (1994). Nonlinear time series modelling and distributional flexibility. *J. Time Ser. Anal.*, **15**, 65-84.

MALIŠIĆ, J. (1989). *Slučajni Procesi - teorija i primene.* Građevinska knjiga, Beograd.

MALIŠIĆ, J. (1992). On some univariate non-linear time series models. *Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, Serija Matematika* , 6:2, 307-320.

MÁRKQUEZ, M.D. AND C. VILLAZÓN (1999). The asymmetry of IBEX-35 returns with TAR models. Working paper 99/3, Universitat Autonoma de Barcelona.

MEDEIROS, M.C., A. VEIGA AND M.G.C. RESENDE (1999). A combinatorial approach to piecewise linear time series analysis. AT&T Labs Technical Report 99.5.1.

MEYN, P.E. AND P.E. CAINES (1987). A new approach to stochastic adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **32**, 220-226.

MEYN, P.E. AND R.L. TWEEDIE (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability.* Springer, London.

MEYN, P.E. AND R.L. TWEEDIE (1993a). State dependent criteria for convergence of Markov chains. Colorado State University, Department of Statistics, Technical report 93/2.

MITRINOVIĆ, D.S, P.M. VASIĆ (1970). *Analitičke nejednakosti.* Građevinska knjiga, Beograd.

MITTNIK, S. (1991). Nonlinear time series analysis with generalized AR - a state space approach. State University of New York, Department of Economics, Working paper.

MLADENOVIĆ, P. (1995). *Verovatnoća i Statistika.* VESTA, Matematički fakultet, Beograd.

MOEANADDIN, R. AND H. TONG (1988). A comparison of likelihood ratio test and CUSUM test for threshold autoregrssion. *The Statistician*, **37**, 213-225.

NEVEU, J. (1975). *Discrete Parameter Martingales.* North Holland, Amsterdam.

NICHOLS, D. E. AND B. G. QUINN (1982). *Random Coefficient Autoregressive Models - An Introduction.* Lecture Notes in Statistics 11, Springer, New York.

NOLSOE, K., J.N. NIELSEN AND H. MADSEN (2000). Optimal weights in prediction error and weighted least squares methods. Working paper.

OZAKI, T. (1985). Nonlinear time series models and dynamical systems, in *Handbook of Statistics*, Vol.5 (Eds. E.J. Hannan, P.R. Krishnaiah and M.M. Rao), Elsevier Science Publishers, 25-83.

PEEL, D.A. AND A.H. SPEIGHT (1998). Threshold nonlinearities in output - some international evidence. *Applied Economics*, **30**, 323-333.

PEEL, D.A. AND A.H. SPEIGHT (1998). The nonlinear time series properties of unemployment rates - some further evidence. *Applied Economics*, 30, 287-294.

PEMBERTON, J. AND H. TONG (1983). Threshold autoregression and some frequency domain characteristics. *Handbook of Statistics*, **3**, 249-273 (Eds. Brillinger, D. R. and P. R. Krishnaiah), Elsevier Science Publishers.

PETRUCCELLI, J. D. (1986). On the consistency of least squares estimators for a threshold AR(1) model. *J. Time Ser. Anal.*, 7, 4, 269-278.

PETRUCCELLI, J. D. (1992). On the approximation of time series by threshold autoregressive models. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series B*, **54**, 106-113.

PETRUCCELLI, J. D. AND S. W. WOOLFORD (1984). A threshold AR(1) model. *J. Appl. Probab.*, **21**, 270-286.

PETRUCCELLI, J. D. AND N. DAVIES (1986). A portmanteau test for self-exciting threshold autoregressive-type nonlinearity in time series. *Biometrika*, **73**, 3, 687-694.

PHAM, D. T., K. S. CHAN AND H. TONG (1989). Strong consistency of the least squares estimator for a non stationary threshold autoregressive model. *47th ISI Session*, Paris.

PHAM, D. T., K. S. CHAN AND H. TONG (1991). Strong consistency of the least squares estimator for a non-ergodic threshold autoregressive model. *Statistica Sinica*, **1**, 361-369.

POLARD, D. (1984). *Convergence of Stochastic Processes.* Springer, New York.

POLITIS, D., J.P. ROMANO AND M. WOLF (1997). Weak convergence of dependent empirical measures with application to subsampling in function spaces. Working paper.

PRAKASA RAO, B.L.S. (1987). *Asymptotic Theory of Statistical Inference.* Wiley, New York.

PRIESTLEY, M.B. (1980). State dependent models - a general approach to nonlinear time series analysis. *J. Time Ser. Anal.*, 1, 47-71.

PRIESTLEY, M.B. (1984). *Spectral Analysis and Time Series.* Academic Press, London.

QIAN, L. (1998). On maximum likelihood estimators for a threshold autoregression. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 75, 21-46.

ROBERTS, G.O. AND J.S. ROSENTHAL (1997). Geometric Ergodicity and hybrid Markov chains. *Elect. Comm. in Probab.*, 2, 13-25.

ROBBINS, H. AND S. MONRO (1951). A stochastic approximation method. *Ann. Math. Stat.*, **22**, 100-107.

ROSENTHAL, J. S. (1999). A review of asymptotic convergence for general state space Markov chains. University of Toronto, Department of Statistics, Working paper.

SÁFADI, T. AND P.A. MORETTIN (2001). Bayesian analysis of threshold autoregressive moving average models. Working paper, University of Sän Paulo.

SCHLITTGEN, R. (1997). Fitting of threshold models for time series. Discussion paper 97-13, University of California, Department of Economics, San Diego.

SKOURAS, K. (1999). Strong consistency in nonlinear stochastic regression models. Working paper, Department of statistical Science, Univesity College London.

SOLO, V. (1978). The convergence of AML. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **24**, 958-962.

SORENSON, M. (2000). On asymptotics estimating functions. University of Copenhagen, Department of Theoretical Statistics, Working paper.

SHAPIRO, A. (2000). Statistical inference of stochastic optimization problems, in *Probabilistic Constrained Optimization - Theory and Applications*, (Ed. S.P. Uryasev), 91-116, Kluwer Academic Publishers.

TERÄSVIRTA, T. (1996). Power properties of linearity tests for time series. *Studies in NonlinearDynamics and Econometrics*, **1**, 3-10.

TERÄSVIRTA, T. AND ANDERSON (1992). Characterizing nonlinearities in business cycles using smooth transition autoregressive models. *Journal of Applied Economics*, **7**, 119-139.

TERÄSVIRTA, T., D. TJOSTHEIM AND C.W.J. GRANGER (1994). Aspects of modelling nonlinear time series. *Handbook of Econometrics, Vol. IV*, Edited by R.F. Engle and D.L. McFadden, Elsevier Science.

TERUI, N. AND H.K. VAN DIJK (1999). Combined forecasts from linear and nonlinear time series models. Econometric Institute Report 9949/A, Erasmus University, Rotterdam.

TJØSTHEIM, D. (1986). Esimation in nonlinear time series models. *Stoch. Proc. Appl.*, **21**, 251-273.

TJØSTHEIM, D. (1990). Nonlinear time series and Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, **22**, 587-611.

TJØSTHEIM, D. (1994). Nonlinear time series - a selective review. *Scandinavian Journal of Statistics*, **21**, 97-130.

TONG, H. (1978). On a threshold models. *Pattern Recognition and Signal Processing* (Ed. C.H. Chen), Sijhoff and Noordhoff, Amsterdam.

TONG, H. (1983). *Threshold Models in Nonlinear Time Series Analysis*. Lecture Notes in Statistics, 21, Springer, Berlin.

TONG, H. (1990). *Non-Linear Time Series - A Dynamical System Approach*. Oxford University Press, Oxford.

TONG, H. AND K. S. LIM (1980). Threshold autoregression, limit cycles and Cyclical data. *J.R. Statist. Soc. B*, **42**, 3, 245-292.

TONG, H. AND I. YEUNG (1991). On tests for self-exiting threshold autoregressive-type non-linearity in partially observed time series. *Applied Statistics*, **40**, 1, 43-62.

TSAY, R.S. (1989). Testing and modeling threshold autoregressive processes. *JASA*, **84**, 405, 231-240.

TSAY, R.S. (2000). Testing and modeling multivariate threshold models. Working paper, Graduate School of Business, University of Chicago.

TWEEDIE, R. L. (1975). Sufficient conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains on a general state space. *Stoch. Proc. Appl.*, **3**, 385-403.

TWEEDIE, R. L. (1976). Criteria for classifying general Markov chain. *Ann. Appl. Probab.*, **8**, 737-771.

TWEEDIE, R. L. (1988). Invariant measures for Markov chains with no irreducibility assumptions. *J. Appl. Probab.*, **25**, 275-285.

TWEEDIE, R. L. (2001). Drift conditions and invariant measures for Markov chains. *Stoch. Proc. Appl.*, **92**, 345-354.

VAN DIJK, D. (2000). *The Smooth Transition Model.* Ph thesis.

VOGEL (1994). A stochastic approach to stability in stochastic programming, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **56**, 65-96.

WHITTEN, S.P. AND R.G. THOMAS (2001). A nonlinear stochastic asset model for actuarial use, Working paper, Institute of Actuaries Research Fund, London.

WIENER, N. (1958). *Nonlinear Problems in Random Theory.* MIT Press, Cambridge, Mass.

WONG, C.S. AND W.K. LI (1999). A note on the corrected Akaike information criterion for the threshold autoregressive models. Working paper.

WORMS, J. (1999). Moderate deviations for stable Markov chains and regression models. *Electronic Journal of Probability*, **4**, 1-28.

YOUNG, P. (1984). *Recursive Estimation and Time Series Analysis.* Springer Verlag, Berlin.

ZHANG, J.F., L. GUO AND H.F. CHEN (1991). L_p stability of estimation errors of Kalman filter for tracking time - varying parameters. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, **5**, 155-174.