MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITET U BEOGRADU

Momčilo Bjelica

NEPOKRETNA TAČKA I NEJEDNAKOSTI

doktorska disertacija

BEOGRAD 1990

SADRŽAJ

UVOD

U teoriji nepokretne tačke se dokazuju principi nepokretne tačke - preslikavanja s određenim svojstvima na skupu koji ima odgovarajuću strukturu imaju nepokretnu tačku. Pored postojanja ispituje se i jedinstvenost nepokretne tačke kao i metode za njeno nalaženje. Osnovne su teoreme Brouwera (1909) da neprekidno preslikavanje konveksnog zatvorenog ograničenog skupa s nepraznom unutrašnjošću ima nepokretnu tačku, teorema Banacha (1922) da kontrakcija kompletnog metričkog prostora ima jedinstvenu nepokretnu tačku i Tarskog (1955) da izotono preslikavanje na mreži kompletno uređenoj relacijom poretka ima nepokretnu tačku.

Problem rešavanja jednačina iz različitih oblasti matematike je ekvivalentan problemu nalaženja nepokretne tačke. Ovde će biti pokazano da se problem dokazivanja nejednakosti i određivanja ekstrema funkcionala može svesti na problem nalaženja preslikavanja monotonog u odnosu na funkcional u čijim nepokretnim tačkama funkcional dostiže ekstremne vrednosti.

" Osnovni rezultati matematike češće se iskazuju nejednakostima nego jednakostima " - Beckenbach, Bellman. Prvo sistematsko izlaganje nejednakosti su dali Hardy, Littlewood i Pólya 1934. u klasičnom delu "Inequalities". Danas ova oblast sadrži obiman i raznovrstan materijal. Neke osnovne nejednakosti su posledica Jensenove nejednakosti za konveksne funkcije. Takođe, veliki broj njih se izvodi u teoriji majoracije, Marshal i Olkin, koja polazi od teoreme o majoraciji funkcije n promenljivih konveksnih u smislu Schura (ako je $x \prec y$, onda je $f(x) \leqslant f(y)$). Sredine u Jensenovoj nejednakosti i preraspodele u teoriji majoracije su posebne vrste preslikavanja F.

Svaka nejednakost može proizaći iz jednakosti koja je čini očiglednom - Bellman. Ideal nalaženja jednakosti koja, makar i posredno, daje nejednakost je retko postignut. Tako veza nepokretne tačke i nejednakosti zatvara trougao pojmova nepokretna tačka, jednakost i nejednakost.

Problem dokazivanja nejednakosti može se izborom prostora i funkcionala svesti na problem određivanja minimuma i maksimuma (infimuma i supremuma) funkcionala, i obrnuto, određenje ekstrema funkcionala daje nejednakost.

U ovom radu je opisan postupak zajedničke nepokretne tačke preslikavanja monotonih u odnosu na funkcional. Postupkom se mogu odrediti ekstremi funkcionala, dokazati nejednakosti i druga tvrđenja. Primenjen je na klasične analitičke i geometrijske nejednakosti, ostale i nove nejednakosti, neke teoreme i jednakosti. Cilj rada je da se nađe analitička i topološka osnova za nejednakosti.

Polazna teza je : Za dati funkcional $f : X \longrightarrow R$ postoji preslikavanje $F : X \longrightarrow X$ monotono nerastuće u odnosu na funkcional

(1) $$f(x) \geqslant f(F(x)),$$

pri tome su tačke u kojima funkcional dostiže ekstremnu vrednost - nepokretne tačke preslikavanja F. Identično preslikavanje i konstantno, ukoliko funkcional dostiže minimum, su trivijalna rešenja funkcionalne nejednačine (1).

Problem određivanja ekstrema funkcionala i dokazivanja nejednakosti svodi se na ekvivalentan problem nalaženja preslikavanja monotonih u odnosu na funkcional u čijim nepokretnim tačkama funkcional dostiže ekstremnu vrednost.

Često je jednostavnije naći više preslikavanja monotonih u odnosu na funkcional u čijoj zajedničkoj nepokretnoj tački se dostiže ekstrem. Kao i u teoriji nepokretne tačke, ovo pitanje se postavlja i na uređenim skupovima.

U teoremama o nepokretnoj tački se dokazuje da preslikavanje koje zadovoljava određene uslove ima nepokretnu tačku. Ovde je postavljen suprotan problem - postojanja i nalaženja preslikavanja monotonog u odnosu na funkcional sa svojstvom da se ekstremne vrednosti funkcionala dostižu na skupu nepokretnih tačaka.

Neka je dat funkcional $f : X \longrightarrow R$ za koji treba dokazati nejednakost ili naći ekstrem

$$f(x) \geqslant f(x_o), \qquad f(x) \geqslant \text{const.} \tag{2}$$

Pretpostavimo da funkcional f dostiže minimum i da postoji preslikavanje $F : X \longrightarrow X$ koje zadovoljava (1). Ako preslikavanje F ima jedinstvenu nepokretnu tačku i ako za sve pokretne tačke važi stroga nejednakost u (1), tada, pošto se u pokretnim tačkama ne dostiže minimum, može se izvesti indirektan zaključak da se minimum dostiže u nepokretnoj tački. Pitanje egzistencije se postavlja prvenstveno za ekstremnu vrednost preslikavanja, a zatim za nepokretnu tačku. Ako niz $(F^n(x))$ dobijen uzastopnom primenom preslikavanja F konvergira ka x_o, dokaz je direktan

$$f(x) \geqslant f(F(x)) \geqslant \ldots \geqslant f(F^n(x)) \geqslant \ldots \geqslant f(x_o). \tag{3}$$

Time je dobijena sekvencijalna interpolacija (atomizacija) nejednakosti (2) sa konačnim, običnim pa i transfinitnim nizom - orbitom koja vodi do ekstrema. Da bi se dokazala konkretna nejednakost treba odrediti prostor promenljive x, funkcional f i zatim naći saglasno preslikavanje F. Umesto nejednakosti (2) dokazuje se stroža, ali često jednostavnija za proveru nejednakost (1).

Procedure adekvatnog matematičkog aparata potiskuju pojedinačne složene i elegantne dokaze. Courant i Robbins kažu : " U naučnom mišljenju po pravilu je bolje razmotriti individualne karakteristike problema, nego osloniti se isključivo na opšte metode, mada pojedinačni pokušaji uvek moraju biti vođeni principom koji objašnjava značaj posebnih postupaka koji su primenjeni. ... Savremeno traganje za opštošću predstavlja samo jednu stranu, vitalnost matematike nesumnjivo više zavisi od individualne boje problema i metoda. " Umesto dokazivanja od slučaja do slučaja, nejednakosti su ovde dokazane na jedan način. Najprikladnija preslikavanja se dobijaju analizom konkretnog problema.

U prvoj glavi je dokazano više teorema o postojanju preslikavanja monotonog u odnosu na funkcional, ekstremima funkcionala i nepokretnim i zajedničkim nepokretnim tačkama. Može se izdvojiti teorema 1.1.K. o nepokretnoj tački. U drugoj glavi je postupak zajedničke nepokretne tačke primenjen na analitičke nejednakosti. Tačka 2.1. sadrži interpolaciju Jensenove nejednakosti i jedan obrat, 2.2. nejednakost za anharmonijsku razmeru sredina i 2.3. karakterizaciju ortogonalne matrice. U tački 2.7. je data nejednakost koja obuhvata tri poznate, u 2.12. nova varijanta Muirheadove leme i u 2.26. dve nove nejednakosti. Prilozi su dati i u 2.5., 2.9. i 2.13. U trećoj glavi su date geometrijske nejednakosti, nova u 3.1. je jedinstvena po tome što postaje jednakost za jednakokrake i pravougle trouglove. Četvrta glava sadrži dokaze nekoliko teorema - Fishera i min - maxu, Landauovu kombinatornu i dr. U petoj glavi je dokazano više elementarnih nejednakosti, kada se ideja postupka pojavljuje u jasnijem obliku, nego prilikom dokazivanja složenijih primera. Nova nejednakost je data u tački 5.1.

Srdačno se zahvaljujem profesoru Milosavu Marjanoviću, kao i dr S. Vrećici i dr V. Jankoviću.

GLAVA I

NEPOKRETNA TAČKA I EKSTREMI

Problem rešavanja jednačina je ekvivalentan problemu nalaženja nepokretne tačke pridruženog preslikavanja. U teoriji nepokretne tačke se dokazuje da preslikavanje koje ima određena svojstva na prostoru struktuisanom odgovarajućom strukturom ima nepokretnu tačku.

Problem dokazivanja nejednakosti je ekvivalentan problemu nalaženja ekstrema ili granica funkcionala. Problem određivanja ekstremnih vrednosti funkcionala rešava se postupkom zajedničke nepokretne tačke preslikavanja monotonih u odnosu na funkcional. Pitanje postojanja i nalaženja se ne postavlja za tačke nego za preslikavanja koja imaju svojstvo monotonosti u odnosu na dati funkcional i svojstvo da ne pomeraju tačke u kojima funkcional dostiže minimum ili maksimum.

U prvoj tački je dokazano nekoliko teorema o postojanju preslikavanja. U prve dve teoreme se dokazuje da za funkcional koji dostiže minimum i maksimum u jedinstvenim tačkama postoji saglasno preslikavanja čije su to jedine nepokretne tačke. Sledeće tvrđenje pokazuje da ako funkcional ne dostiže ekstremne vrednosti, preslikavanje saglasno u strogom smislu ne postoji uvek, itd. Način dobijanja preslikavanja iz dokaza ovih teorema nije korišćen prilikom dokazivanja konkretnih nejednakosti. Jednostavnija preslikavanja se dobijaju razmatranjem pojedinih nejednakosti koje treba proveriti. U drugoj tački su date neke teoreme o zajedničkoj nepokretnoj tački više preslikavanja.

1.1. PRESLIKAVANJE MONOTONO U ODNOSU NA FUNKCIONAL.

U ovoj tački se ispituje problem egzistencije preslikavanja monotonog u odnosu na funkcional. Najopštije, ako je $f : X \longrightarrow R$ neprekidan funkcional na topološkom prostoru, postavlja se pitanje postojanja i nalaženja rešenja funkcionalne nejednačine

$$(1) \qquad f(x) \geqslant f(F(x)) , \qquad F : X \longrightarrow X.$$

Može se postaviti i zahtev da funkcional f minimalnu ili obe ekstremne vrednosti dostiže na skupu Fix(F) nepokretnih tačaka preslikavanja F. Preslikavanje F je monotono neopadajuće u odnosu na funkcional ili je saglasno s funkcionalom ako je $f(x) \leqslant f(F(x))$.

Neka je

$$Mon_f = \{ F \mid F : X \longrightarrow X, \ f(x) \geqslant f(F(x)) \} .$$

Identično i konstantno preslikavanje - u slučaju da funkcional dostiže minimum - su trivijalna rešenja nejednačine (1). Ako $F_1, F_2 \in Mon_f$, onda je

$$f(x) \geqslant f(F_1(x)) \geqslant f(F_2(F_1(x))),$$

tako da $F_2 \circ F_1 \in Mon_f$.

Ovakav problem je suprotan standardnom problemu nepokretne tačke. Npr., teorema A. Tarskog, 1955., [TAS12] tvrdi da u mreži kompletno uređenoj relacijom poretka preslikavanje saglasno s relacijom poretka (izotono) ima nepokretnu tačku. U teoremi H. se za dato preslikavanje traži funkcional koji zadovoljava (1).

TEOREMA A. Neka je $X \subseteq R$, $f : X \longrightarrow R$ neprekidan funkcional koji dostiže minimum i maksimum u jedinstvenim tačkama m i M i neka je $conv\{m, M\} \subseteq X$. Tada , postoji neprekidno preslikavanje $F : X \longrightarrow X$ takvo da je

$$F(m) = m, \quad F(M) = M,$$

$$f(x) > f(F(x)), \qquad x \in X \setminus \{m,M\}.$$

D o k a z. Neka funkcional f dostiže minimum u tački m i neka je $m < M$. Neka je

$$b = \sup \{ x \mid [M,x] \subseteq X \}, \qquad I = [M,b] \cap X.$$

Ako se vrednost

$$h = \inf \{ f(x) \mid x \in I \}$$

dostiže, onda je

$$a = \min \{ x \mid x \in I,\ f(x) = h \}.$$

Ako se h ne dostiže, onda je $a = b$. Preslikavanje

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in [m,a] \cap X \\ a, & x \in I \setminus [M,a] \\ m, & \text{inače} \end{cases}$$

je neprekidno i monotono nerastuće u odnosu na funkcional

$$f(x) \geqslant f(G(x)).$$

Neka je

$$\Gamma = \{ (x,y) \mid y = f(x),\ m \leqslant x \leqslant M \}$$

deo grafika i

$$\operatorname{sub}\Gamma = \{ (x,y) \mid y \leqslant f(x),\ m \leqslant x \leqslant M \}$$

podgrafik funkcionala f. Neka je

$$C = \operatorname{conv} \operatorname{sub}\Gamma$$

konveksan omotač podgrafika. Gornja granica Γ' skupa C je grafik funkcije g

$$g : [m,M] \longrightarrow R$$

$$g(x) = y \iff y = \max \{ t \mid (x,t) \in C \}.$$

Vrednost funkcije $g(x)$ je jedinstveno određena. Funkcija g je konkavna i time neprekidna [ROB4]. Sem toga, g je strogo rastuća funkcija, tako da ima neprekidnu inverznu funkciju.

Preslikavanje H odredimo najpre na segmentu $[m,M]$

$$H(x) = y \Longleftrightarrow g(y) = \frac{x-m}{M-m}\left[f(x) - f(m)\right] + f(m)$$

$$y = g^{-1}\left[\frac{x-m}{M-m}\left[f(x) - f(m)\right] + f(m)\right].$$

(Ako je $m = 0 = f(0)$ i $M = 1$, onda je $g(y) = xf(x)$.)
Tada je

$$(2) \qquad f(x) \geqslant \frac{x-m}{M-m}\left[f(x) - f(m)\right] + f(m)$$

$$= g(H(x)) \geqslant f(H(x))$$

preslikavanje H monotono nerastuće u odnosu na funkcional f. Jednakost u (2) važi jedino ako je $x = m$ ili $x = M$. Na segmentu $[M,a] \cap X$ je

$$H(x) = g^{-1}\left[\frac{a-x}{a-M}\left[f(x) - f(m)\right] + f(m)\right]$$

i takođe

$$f(x) \geqslant \frac{a-x}{a-M}\left[f(x) - f(m)\right] + f(m)$$

$$= g(H(x)) \geqslant f(H(x)).$$

Preslikavanje $F = H \circ G$ ima tražena svojstva.

Topološki linearni prostor L_n je linearno izomorfan euklidskom prostoru E_n [VAL7].

TEOREMA B. Neka je $X \subset L_n$ kompaktan konveksan skup i $f : X \longrightarrow R$ neprekidan funkcional koji minimum i maksimum dostiže u jedinstvenim tačkama m i M. Tada, postoji neprekidno preslikavanje $F : X \longrightarrow X$ takvo da je

$$F(m) = m, \quad F(M) = M,$$

$$f(x) > f(F(x)), \qquad x \in X \setminus \{m,M\}.$$

D o k a z. Neka je $X \subset E_n$ i $m, M \in \mathrm{bd}\, X$. Može se pretpostaviti da je

$$d(m,M) = \mathrm{diam}\, X$$

(m i M povezane tačke). Uz oznake prethodnog dokaza , preslikavanje

$$K(x) = g^{-1}\left[\frac{d(m,x)}{d(m,M)}\left[f(x) - f(m)\right] + f(m)\right]$$

je monotono nerastuće u odnosu na funkcional f. Ako postoji $x \in X$, $x \neq M$ takvo da je $d(m,x) = d(m,M)$, zahtev za strogom monotonošću je ispunjen ako se preslikavanje K komponuje s preslikavanjem iz teoreme A.

TEOREMA C. Ako neprekidan funkcional $f : I \longrightarrow R$ ne dostiže ekstremne vrednosti, tada ne mora postojati neprekidno preslikavanje $F : I \longrightarrow I$ koje je strogo monotono u odnosu na funkcional.

Ili, postoji neprekidan funkcional $f : [0,+\infty) \longrightarrow R$ koji ne dostiže ekstremne vrednosti, takav da nijedno neprekidno preslikavanje $F : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ ne zadovoljava uslov

(3) $$f(x) > f(F(x)), \qquad x \in [0,+\infty).$$

Svako preslikavanje koje je monotono nerastuće (ili neopadajuće) u odnosu na funkcional f

$$f(x) \geqslant f(F(x)), \qquad x \in [0,+\infty)$$

ima beskonačno mnogo nepokretnih tačaka u lokalnim ekstremima.

D o k a z. Funkcional f dobijen linearnom interpolacijom iz

$$f(0) = 0, \quad f(n) = (-1)^n \frac{n-1}{n}, \quad n = 1,2,\ldots$$

ne dostiže ekstremne vrednosti. Pretpostavimo da postoji neprekidno preslikavanje F koje zadovoljava uslov stroge monotonosti (3). Neka je $2k-1 > F(0)$. Iz definicije funkcionala f i (3) sledi da je $F(2k-1) > 2k$. Slika segmenta $[0,2k-1]$ je segment $F([0,2k-1])$. Pri tome je $F(0) \in F([0,2k])$ i

$$f(x) < f(2k), \qquad x \in [0,2k-1],$$

tako da $2k \notin F([0,2k-1])$. Time je $F([0,2k-1]) \subseteq [0,2k)$, odakle je $F(2k-1) < 2k$, što je kontradikcija.

Ako se zahteva nestroga monotonost, onda je $F(2k-1) \geqslant 2k-1$, odakle na sličan način sledi $F(2k-1) = 2k-1$. Pokažimo da je i $F(2k) = 2k$. Ako se pretpostavi da je $F(2k) = 2k+\varepsilon$, onda je $F([2k-1,2k]) \supseteq [2k-1, 2k+\varepsilon]$. Time je $2k$ slika nekog broja iz segmenta $(2k-1,2k)$, što protivreči pretpostavci o monotonosti preslikavanja.

TEOREMA D. Neka je $f : X \longrightarrow R$, $X \subseteq R$ neprekidan funkcional. Ako f dostiže minimum i maksimum, tada postoje neprekidna preslikavanja $F, G : X \longrightarrow X$ takva da je

$$f(x) \geqslant f(F(x)) \quad \text{i} \quad f(x) \leqslant f(G(x)).$$

Jednakost važi jedino za tačke u kojima funkcional dostiže ekstremne vrednosti.

Slično tvrđenje se može formulisati i za funkcionale koji dostižu jedan ekstrem.

LEMA. Neka je $S \subseteq [a,b]$ zatvoren skup. Neprekidno preslikavanje $F : [a,b] \longrightarrow R$ takvo da je $F(S) \subseteq \operatorname{conv} S$ ima nepokretnu tačku u skupu $\operatorname{conv} S$.

D o k a z. Preslikavanje $G : \operatorname{conv} S \longrightarrow \operatorname{conv} S$, $\operatorname{conv} S = [c,d]$

$$G(x) = \begin{cases} c, & F(x) < c \\ F(x), & F(x) \in \operatorname{conv} S \\ d, & d < F(x) \end{cases}$$

je neprekidno.

Na osnovu Brouwerove teoreme preslikavanje G ima nepokretnu tačku x, $G(x) = x$. Pokažimo da je x nepokretna tačka i preslikavanja F. Neka $x \in \text{int conv } S$. Ako se pretpostavi da $F(x) \notin \text{conv } S$, dobija se kontradikcija $x = G(x) \in \{c,d\}$. Time je $F(x) \in \text{conv } S$ i $F(x) = G(x) = x$. Ako je $x \in \text{bd conv } S = \{c,d\}$, onda iz $\{c,d\} \subseteq S$ i uslova $F : S \longrightarrow S$ takođe sledi $F(x) \in \text{conv } S$.

TEOREMA E. Neprekidan funkcional $f : [a,b] \longrightarrow R$ dostiže minimum u tački a ako i samo ako postoji neprekidno preslikavanje $F : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ monotono neopadajuće u odnosu na funkcional

$$f(x) \geqslant f(F(x)), \qquad x \in [a,b]$$

za koje je a jedina nepokretna tačka. Za maksimum važi suprotna nejednakost.

D o k a z. Ako se minimum funkcionala f dostiže u tački a, onda konstantno preslikavanje $F(x) = a$ zadovoljava tražene uslove. Neka je F preslikavanje koje zadovoljava tražene uslove. Skup

$$\text{Min}_f = \left\{ x \,\middle|\, x \in [a,b], \quad f(x) = \min_{t \in [a,b]} f(t) \right\}$$

je zatvoren, a iz uslova monotonosti sledi da $F : \text{Min}_f \longrightarrow \text{Min}_f$. Na osnovu prethodne leme, jedina nepokretna tačka a preslikavanja F pripada conv Min_f, a kako je a granična tačka, to je $a \in \text{Min}_f$.

TEOREMA F. Neka je X skup u lokalno konveksnom topološkom prostoru, $f : X \longrightarrow R$ neprekidan funkcional i

$$\text{Min}_f = \left\{ x \,\middle|\, x \in X, \quad f(x) = \inf_{t \in X} f(t) \right\}$$

kompaktan i konveksan skup koji nije prazan. Tada ,

$a \in Min_f$ ako i samo ako postoji neprekidno preslikavanje $F : X \longrightarrow X$ za koje je

$$f(x) \geqslant f(F(x)), \quad x \in X$$

i a jedina nepokretna tačka.

D o k a z. Ako je $a \in Min_f$, onda je preslikavanje $F(x) = a$, $x \in X$. Ako je preslikavanje F monotono nerastuće u odnosu na funkcional f, onda $F : Min_f \longrightarrow Min_f$. Na osnovu Schauderove teoreme o nepokretnoj tački preslikavanje F ima nepokretnu tačku u skupu Min_f. Kako je a jedina nepokretna tačka to je $a \in Min_f$.

Teorema J. Schaudera, 1930. i A. Tychonoffa, 1935. o nepokretnoj tački glasi : Neka je C kompaktan konveksan skup u lokalno konveksnom topološkom prostoru E. Tada neprekidno preslikavanje $F : C \longrightarrow C$ ima nepokretnu tačku. Sledeće tvrđenje uopštava i u svom dokazu koristi ovu teoremu.

TEOREMA G. Neka je C kompaktan konveksan skup s nepraznom unutrašnjošću (telo) u lokalno konveksnom topološkom prostoru L_n. Neprekidno preslikavanje $F : C \longrightarrow L_n$ takvo da je $F(bdC) \subseteq C$ ima nepokretnu tačku.

D o k a z. Može se pretpostaviti da je $L_n = E_n$ euklidski prostor. Skup C određuje preslikavanje $d_C : E_n \longrightarrow C$ za koje je $d_C(x)$ jedinstvena tački x naj - bliža tačka iz skupa C. Kompozicija preslikavanja $d_C \circ F : C \longrightarrow C$ je neprekidno preslikavanje kompaktnog konveksnog skupa u samog sebe. Prema Schauderovoj teoremi pres - likavanje G ima nepokretnu tačku $G(a) = d_C(F(a)) = a$.

Ako $F(a) \in C$, onda je $d_C(F(a)) = F(a) = a$, tj. a

je nepokretna tačka preslikavanja F. Ako pretpostavimo da $F(a) \notin C$, onda $G(a) \in \mathrm{bd}\, C$, tj. $a \in \mathrm{bd}\, C$. Na osnovu pretpostavke teoreme, iz $a \in \mathrm{bd}\, C$ sledi $F(a) \in C$ kontradikcija.

TEOREMA H. Neka je X kompletan metrički prostor, $F : X \to X$ neprekidno preslikavanje i neka svaki niz $(F^n(x))$, $x \in X$ brzo konvergira. Tada postoji funkcional $f : X \to R$ takav da je

$$f(x) \geqslant f(F(x)), \qquad x \in X.$$

D o k a z. Dovoljno je uzeti

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d\left[F^{n-1}(x), F^n(x)\right]. \tag{4}$$

U [BJE25] je dokazano da ako je funkcional (4) neprekidan u svim nepokretnim tačkama preslikavanja F, onda je funkcional neprekidan. Na taj način preslikavanje F generiše nejednakost.

Neka je

$$\inf(f) = \inf\left\{ f(x) \mid x \in X \right\},$$
$$\min(f) = \min\left\{ f(x) \mid x \in X \right\},$$
$$\mathrm{Min}(f) = \left\{ x \mid x \in X,\ \ f(x) = \inf(f) \right\},$$
$$\mathrm{Fix}(F) = \left\{ x \mid x \in X,\ \ F(x) = x \right\}.$$

TEOREMA I. Neka je X konveksan zatvoren skup u lokalno konveksnom topološkom prostoru L_m i $f : X \to R$ konveksan neprekidan funkcional. Tada, postoji neprekidno preslikavanje $F : X \to X$ takvo da je

$$f(x) \geqslant f(F(x)), \qquad x \in X \tag{5}$$

i

$$\mathrm{Min}(f) = \mathrm{Fix}(F),$$

pri čemu jednakost u (5) važi jedino na skupu $Fix(f)$. Takođe, za sve $x \in X$ važi

(6) $$\lim_{n\to\infty} f(F^n(x)) = \inf(f) ,$$

a ako skup $Min(f)$ nije prazan, onda postoji granica

(7) $$\lim_{n\to\infty} F^n(x) \in Min(f) .$$

D o k a z. Neka je $X \subseteq E_m$. Ako je $\inf(f) = -\infty$, onda se tvrđenje može dokazati za funkcional $e^{f(x)}$. Dakle, može se pretpostaviti da je $\inf(f) \in R$. Takođe, tvrđenje je dovoljno dokazati za funkcional $f(x) - \inf(f)$, tako da se može smatrati da je $\inf(f) = 0$.

Za $x \in X$ neka je

$$C_x = f^{-1}\left(\left[0, \tfrac{1}{2}f(x)\right]\right) = \left\{t \mid t \in X,\ \ 0 \leqslant f(t) \leqslant \tfrac{1}{2}f(x)\right\}.$$

Skup C_x je konveksan, jer ako $p \in C_x$ i $q \in C_x$, onda je $\frac{p+q}{2} \in X$ i

$$0 \leqslant f\left[\frac{p+q}{2}\right] \leqslant \frac{f(p) + f(q)}{2} \leqslant \frac{1}{2} f(x),$$

tako da $\frac{p+q}{2} \in C_x$. Skup C_x je zatvoren jer je inverzna slika zatvorenog skupa.

Neka je $y = F(x)$ tački x najbliža tačka iz skupa C_x. Skup C_x nije prazan i preslikavanje $F : X \longrightarrow X$ je jednoznačno određeno.

Ako je $f(x) = 0$ onda $x \in C_x$, pa je $F(x) = x$. I obrnuto, ako je $F(x) = x$ onda $x \in C_x$, pa je $f(x) \leqslant \frac{1}{2}f(x)$ i time $f(x) = 0$. Dakle,

$$Min(f) = Fix(F).$$

Pokažimo da je preslikavanje F monotono nerastuće u odnosu na funkcional f

$$f(x) \geqslant f(F(x)).$$

Važi više od toga

$$f(x) \geqslant \frac{1}{2}f(x) = f(F(x)),$$

tako da jednakost važi jedino ako je $f(x) = 0$. Iz $F(x) \in C_x$ sledi da je $f(F(x)) \leqslant \frac{1}{2}f(x)$, a iz $f(F(x) < \frac{1}{2} f(x)$ sledi $F(x) \in \mathrm{int}_X C_x$ - konveksna funkcija dostiže maksimum na granici domena. Detaljnije, ako se pretpostavi da je $f(F(x)) < \frac{1}{2} f(x)$, tada unutar segmenta $[x, F(x)]$ postoji tačka z takva da je $f(z) = \frac{1}{2} f(x)$, što je suprotno pretpostavci da je $F(x)$ najbliža tačka.

Pokažimo da je preslikavanje F neprekidno. Pretpostavimo suprotno, da postoji $x \in X$, niz (x_n) u X koji konvergira ka x

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{i} \quad \eta > 0$$

takvi da je

$$y = F(x), \quad (y_n) = (F(x_n)) \quad \text{i} \quad d(y_n,y) \geqslant \eta \quad , n \in N$$

Neka je $n_o \in N$ takvo da je $\frac{1}{2} f(x_n) \geqslant \frac{1}{3} f(x)$, za sve $n \geqslant n_o$. Postoji tačka $z \in X$ takva da je $f(z) = \frac{1}{3} f(\acute{x})$, čime je $z \in C_{x_n}$, $n \geqslant n_o$. Za iste n važi

$$\begin{aligned} d(x,y_n) &\leqslant d(x,x_n) + d(x_n,y_n) \\ &\leqslant d(x,x_n) + d(x_n,z). \end{aligned}$$

Dakle, niz (y_n) je ograničen tako da ima konvergentni podniz, koji ćemo označiti na isti način. Za njegovu graničnu tačku $y' = \lim_{n\to\infty} y_n$, prelaskom na graničnu vrednost dobija se $d(y',y) \geqslant \eta$. Istim postupkom iz $f(y_n) = f(F(x_n)) = \frac{1}{2} f(x_n)$ sledi $f(y') = \frac{1}{2} f(x)$, pa $y' \in C_x$.

U narednom delu dokaza pokazaćemo da je y' - budući granica niza y_n najbližih tačaka iz C_{x_n} tački x_n , $n \in N$ - i sama najbliža tačka iz C_x tački x. Zbog jedinstvenosti najbliže tačke je $y = y'$, što će biti tražena kontradikcija.

Najpre, za tačku x važi $f(x) > 0$. Ako se pretpostavi da je $f(x) = 0$, tada $x \in C_{x_n}$, $x \in C_x$, $y = x$ i

$$d(y,y') = d(x,y') = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$$

što je u suprotnosti s $d(y',y) \geqslant \eta$.

Pošto je najbliža tačka jedinstvena , neka je

$$d(x,y') - d(x,y) = 5\varepsilon > 0.$$

Pokažimo da je

$$K(y,\varepsilon) \cap \bigcup_{n=n_1}^{\infty} C_{x_n} = \emptyset ,$$

gde je $n_1 \in N$ takvo da je

$$d(x_n,x) \leqslant \varepsilon , \quad d(y_n,y') \leqslant \varepsilon, \qquad n \geqslant n_1.$$

Ako se pretpostavi da za neko $n \geqslant n_1$ presek $K(y,\varepsilon) \cap C_{x_n}$ sadrži tačku z, tada je

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(x,y') - 5\varepsilon \\ &\leqslant d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y') - 5\varepsilon \\ &\leqslant d(x_n,y_n) + 2\varepsilon - 5\varepsilon \\ &\leqslant d(x_n, z) - 3\varepsilon \end{aligned}$$

$$\leqslant d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,z) - 3\varepsilon$$

$$\leqslant d(x,y) + 2\varepsilon - 3\varepsilon$$

$$= d(x,y) - \varepsilon$$

i time $\varepsilon \leqslant 0$, što je nemoguće.

Posmatrajmo raslojavanje prostora X odredeno **funkcionalom** f, jedan sloj je

$$S_\alpha = \{x \mid x \in X,\ f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\alpha), \qquad \alpha \in [0,+\infty).$$

Time je

$$x \in S_{f(x)} \quad \text{i} \quad C_x = \bigcup \{S_\alpha \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \tfrac{1}{2} f(x)\} .$$

($y \in S_{f(y)}$ i kugla $K(y,\varepsilon)$ ne seče nijedan od beskonačno mnogo slojeva $S_{f(y_n)} = f^{-1}(\ f(y_n)\ )$ koji teže ka $S_{f(y)}$. Za konveksnu funkciju, izuzev za minimum, sloj je dimenzije najviše $m-1$.)

Ni za jedno $n \geqslant n_1$ nije $C_x \subseteq C_{x_n}$, jer bi tada bilo $y \in K(y,\varepsilon)$ i $y \in C_x \subseteq C_{x_n}$. C - skupovi su uporedivi, tako da je $C_{x_n} \subset C_x$, $C_{x_n} \neq C_x$, $n \geqslant n_1$. Za proizvoljnu tačku $z \in K(y,\varepsilon)$ je $z \notin C_{x_n}$ za sve $n \geqslant n_1$, tako da je $f(z) > \frac{1}{2} f(x_n)$ i zato $f(z) \geqslant \frac{1}{2} f(x)$. Kako je $f(y) = \frac{1}{2} f(x)$, to znači da restrikcija funkcionala f na kuglu $K(y,\varepsilon)$ minimalnu vrednost dostiže u centru kugle.

Kako je $\inf(f) = 0$ i $f(x) > 0$, to postoji tačka $u \in X$ takva da je $f(u) < f(y) = \frac{1}{2} f(x)$. Za neko $\alpha \in (0,1)$ je $v = \alpha u + (1-\alpha)y \in K(y,\varepsilon)$. Sada je

$$f(v) \leqslant \alpha f(u) + (1-\alpha)f(y) < f(y),$$

što je u suprotno zaključku **da** funkcional f na kugli

$K(y,\varepsilon)$ najmanju vrednost dostiže u tački y. Time je $y = y'$ i preslikavanje F neprekidno.

Neka je $(x_n) = (F^n(x))$ orbita tačke x. Tada je

$$f(x_n) = f(F(x_{n-1})) = \frac{1}{2} f(x_{n-1}) = \dots = \frac{1}{2^{n-1}} f(x),$$

tako da je

$$\lim_{n\to\infty} f(F^n(x)) = 0 ,$$

čime je dokazano (6).

Dokažimo da važi (7). Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka i $x_o \in \mathrm{Min}(f)$. Za orbitu (x_n) tačke x važi

$$x_{n+1} \in K(x_o , d(x_o,x_n)), \qquad n \in N ,$$

jer tačka $x_{n+1} = F(x_n)$ je tački x_n najbliža tačka iz skupa C_{x_n}, koji sadrži x_o. Neka je HR_n hiperravan kroz tačku x_{n+1} koja je ortogonalna na segment $x_n x_{n+1}$, ako $x \notin \mathrm{Min}(f)$ onda je $x_{n+1} \neq x_n$. HR_n je ravan oslonca skupa C_{x_n} i ona razdvaja tačke x_n i x_o. Ako bi neka tačka $z \in C_{x_n}$ ($x_o \in C_{x_n}$) bila strogo s iste strane hiperravni HR_n s koje je x_n, onda bi na segmentu $x_{n+1}z \subseteq C_{x_n}$ postojala tačka bliža x_n nego što je x_{n+1}, što je suprotno određenju tačke x_{n+1}. Dakle, $\angle x_n x_{n+1} x_o \geq \frac{\pi}{2}$ tako da tačka x_{n+1} pripada kugli čije su antipodalne tačke x_n i x_o. Ta kugla $K(\frac{1}{2}(x_n+x_o) , \frac{1}{2} d(x_n,x_o))$ je sadržana u kugli $K(x_o , d(x_o,x_n))$, tako da je $x_{n+1} \in K(x_o , d(x_o,x_n))$.

Niz (x_n) je ograničen tako da ima bar jednu tačku nagomilavanja x'. Kako je $d(x_o,x_{n+1}) \leq d(x_o,x_n)$ - veći broj je rastojanje antipodalnih tačaka, to je niz $(d(x_n,x_o))$ monotono nerastući. Time se niz (x_n) približava svim tačkama skupa Min(f). Iz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ sledi $f(x') = 0$ tj. $x' \in \mathrm{Min}(f)$. Niz (x_n) nema drugih tačaka nagomilavanja, jer bi tada bilo

$$d(x',x_n) < d(x',x_{n+m}),$$

za neko $m \in N$. Dakle, ceo niz (x_n) konvergira tački $x' \in \mathrm{Min}(f)$. Primetimo da je

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap \Big\{ K(m,\ d(m,x_n)\ ) \;\Big|\; m \in \mathrm{Min}(f),\ n \in N \Big\}$$
$$\subset \bigcap \Big\{ K(m,\ d(m,x) \;\Big|\; m \in \mathrm{Min}(f) \Big\}$$

Za topološki prostor L_m treba primeniti bikontinualnu bijekciju $E_m \longrightarrow L_m$ koja je linearni izomorfizam.

TEOREMA J. Neka je $X \subseteq E_m$ konveksan zatvoren skup i $f : X \longrightarrow R$ konveksan neprekidan funkcional koji dostiže minimalnu vrednost. Tada niz sukcesivnih aproksimacija

$$x_1 = x,\ x_2 = F(x_1),\ \dots\ ,\ x_n = F(x_{n-1}),\ \dots$$

dobijen uzastopnom primenom preslikavanja F iz dokaza prethodne teoreme brzo konvergira

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1}) < +\infty .$$

D o k a z konvergencije reda kvadrata rastojanja. Neka je $c \in \mathrm{Min}(f)$. Metodom matematičke indukcije pokažimo da je

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{n} d(x_i,x_{i+1})^2 \leqslant d(x_1,c)^2 - d(x_{n+1},c)^2 .$$

Za $n = 1$ se dobija

$$d(x_1,x_2)^2 \leqslant d(x_1,c)^2 - d(x_2,c)^2,$$

što sledi iz $x_2 = F(x_1)$ i $\angle x_1 x_2 c = \angle x_1 F(x_1) c \geqslant \frac{\pi}{2}$. Ako se pretpostavi da je (9) tačno za $n = m$, onda se za $n = m+1$ dobija

$$\sum_{i=1}^{m+1} d(x_i,x_{i+1})^2 \leqslant d(x_1,c)^2 - d(x_{m+1},c)^2 + d(x_{m+1},x_{m+2})^2$$

$$\leqslant d(x_1,c)^2 - d(x_{m+1},c)^2 ,$$

jer je $\angle x_{m+1} x_{m+2} c \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Prelazak na granične vrednosti u (9) daje

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1})^2 \leqslant d(x,c)^2 - d(\lim_{n\to\infty} x_n , c)^2.$$

Ako se izabere da je $c = \lim_{n\to\infty} x_n$, onda je

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1})^2 \leqslant d(x , \lim_{n\to\infty} x_n)^2 .$$

Iz nejednakosti (9) sledi

$$\sum_{i=n}^{n+m} d(x_i,x_{i+1})^2 \leqslant d(x_n,c)^2 - d(x_{n+m+1},c)^2$$

nejednakost kojoj u Banachovoj teoremi o nepokretnoj tački odgovara

$$d(F^n(x),F^{n+m}(x)) \leqslant (\alpha^n + \ldots + \alpha^{n+m-1})\, d(x,F(x)) ,$$

α je koeficijent kontrakcije. Veća je sličnost izmedu (8) i formule za položaj nepokretne tačke u Banchovoj teoremi

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in K(x , \frac{1}{1-\alpha} d(x,F(x))).$$

Prilikom dokazivanja nejednakosti uglavnom se postavlja pitanje postojanja preslikavanja saglasnog s datim funkcionalom. U ovom radu se ne postavlja suprotno pitanje postojanja funkcionala saglasnog s datim preslikavanjem. Ono vodi principu nepokretne tačke za kompaktne topološke prostore. Svojstvo konveksnosti prostora nije neophodno, a za postojanje nepokretne tačke kompaktnost se može zameniti svojstvom da bar jedna orbita ima konvergentni podniz. Funkcional f je strogo monoton u odnosu na preslikavanje F ako je strogo monotono opadajući ili strogo monotono rastući tj.

$$f(x) \geqslant f(F(x)) \quad \text{ili} \quad f(x) \leqslant f(F(x)),$$

za sve $x \in X$, pri čemu jednakost važi jedino za nepokretne tačke preslikavanja F.

TEOREMA K. Neka je X kompaktan topološki prostor i $F : X \longrightarrow X$ neprekidno preslikavanje. Ako postoji neprekidan funkcional $f : X \longrightarrow R$ strogo monoton u odnosu na preslikavanje F, tada preslikavanje F ima nepokretnu tačku. Za sve $x \in X$ niz $(F^n(x))$ konvergira nepokretnoj tački.

D o k a z. Neka je $x \in X$, $f(x) \geqslant f(F(x))$ i $x_1 = F(x)$, $x_{n+1} = F^n(x_n)$, $n=2,3,\ldots$. Tada je

$$f(x) \geqslant f(x_1) \geqslant \ldots \geqslant f(x_n) \geqslant \ldots .$$

U kompaktnom prostoru X niz (x_n) ima konvergentni podniz (x_{i_n}) s granicom x_0. Pretpostavimo da je $F(x_0) \neq x_0$ i time $\varepsilon = f(x_0) - f(F(x_0)) > 0$. Funkcional f je neprekidan tako da postoje okline U i V redom tačaka x_0 i $F(x_0)$ takve da je

$$f(U) \subseteq \left[f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$f(V) \subseteq \left[f(F(x_0)) - \frac{\varepsilon}{2}, f(F(x_0)) + \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Preslikavanje F je neprekidno pa postoji okolina $W \subseteq U$ tačke x_0 takva da je $F(W) \subseteq V$. Za dovoljno veliki indeks m je $x_{i_m} \in W$ i $F(x_{i_m}) = x_{i_m+1} \in V$. Time je $f(x_{i_m+1}) \leqslant \leqslant f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$, što je nemoguće. Dakle, x_0 je nepokretna tačka. Takođe, ceo niz (x_n) konvergira tački x_0.

Dovoljna je i pretpostavka da je funkcional odozgo neprekidan i strogo monotono opadajući, što ima sličnosti s teoremom Kirka i Caristija o nepokretnoj tački.

TEOREMA L. Neka je X kompaktan metrički prostor. Neprekidno preslikavanje $F : X \longrightarrow X$ ima nepokretnu tačku i za sve $x \in X$ niz $(F^n(x))$ konvergira nepokretnoj tački ako i samo ako postoji odozgo neprekidan funkcional $f : X \longrightarrow R$ koji je strogo monotono opadajući u odnosu na preslikavanje F.

D o k a z. Neka niz $(F^n(x)) = (x_n)$ konvergira nepokretnoj tački x_0 i neka je $d_1 = d(x, x_1)$, $d_n = d(x_{n-1}, x_n)$, $n=2,3,\ldots$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$. Niz rastojanja (d_n) se može preurediti u nerastući niz $d_{[1]} \geqslant d_{[2]} \geqslant \ldots \geqslant d_{[n]} \geqslant \ldots$, slično konačnim nizovima. Niz $(d_{[n]})$ se definiše induktivno, $d_{[1]} = d_{i_1}$ ako je i_1 najmanji indeks za koji je $d_{i_1} = \max \{d_1, d_2, \ldots\}$. Ako su određeni članovi $d_{[1]}, \ldots, d_{[n]}$, onda je $d_{[n+1]} = d_{i_{n+1}}$, gde je i_{n+1} najmanji indeks za koji je

$$d_{i_{n+1}} = \max \left[\{d_1, d_2, \ldots\} \setminus \{d_{[1]}, \ldots, d_{[n]}\} \right].$$

Funkcional

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_{[n]} \leqslant \operatorname{diam} X$$

je strogo monotono opadajući u odnosu na preslikavanje F i odozdo neprekidan. Funkcional

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \sup \left\{ P(t) \mid t \in K(x,r) \right\}$$

je odozgo neprekidan i strogo monoton. Za kontrakciju je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}).$$

1.2. ZAJEDNIČKA NEPOKRETNA TAČKA I EKSTREMI.

Navedimo neke teoreme koje se odnose na zajedničke nepokretne tačke familije preslikavanja [WAL61-64] .

TEOREMA A. A.A. Markov, 1936, S. Kakutani, 1938.

Neka je K kompaktan konveksan podskup lokalno konveksnog topološkog linearnog prostora i neka je $\mathcal{F}$ komutativna familija neprekidnih afinih transformacija skupa K u samog sebe. Tada, postoji $x \in K$ takav da je $F(x) = x$ za sve $F \in \mathcal{F}$.

TEOREMA B. S. Kakutani, 1938. Neka je K kompaktan konveksan podskup lokalno konveksnog topološkog prostora i $\mathcal{G}$ grupa ekvikontinualnih afinih transformacija skupa K u samog sebe. Tada K ima nepokretnu tačku familije $\mathcal{G}$.

M.M. Day (1961) je uopštio Markov - Kakutanijevu teoremu na opštije semigrupe preslikavanja. Teorema A.D. Myškisa (1954) se odnosi na poliedre i semigrupu preslikavanja.

TEOREMA C. Z. Hedrlín, 1962. Neka je $\mathcal{F}$ komutativna semigrupa neprekidnih preslikavanja topološkog prostora X u samog sebe i neka $\mathcal{F}$ sadrži identično preslikavanje. Tada X ima zajedničku nepokretnu tačku familije $\mathcal{F}$ ako i samo ako orbita $\mathcal{F}(a)$ za neko $a \in X$ je kompaktan prostor koji ima svojstvo nepokretne tačke za neprekidna preslikavanja.

Familija Mon_f je nekomutativna semigrupa s neutralnim elementom. Neka je

$$Fix(\mathcal{F}) = \bigcap \left\{ Fix(F) \mid F \in \mathcal{F} \right\}$$

skup zajedničkih nepokretnih tačaka preslikavanja $F : X \to X$,

$F \in \mathcal{F}$. Postavlja se pitanje postojanja familije $\mathcal{F} \subseteq Mon_f$ takve da je

$$Min_f = Fix(\mathcal{F}).$$

Izolovaneunutrašnje tačke lokalnog maksimuma funkcionala f su tačke prekida preslikavanja.

TEOREMA D. Neka je $f : X \longrightarrow R$ funkcional na skupu X. Neka je $\mathcal{F}$ familija preslikavanja koja su monotono opadajuća u odnosu na funkcional f, tj.

$$f(x) \geqslant f(F(x)),$$

pri čemu jednakost važi jedino za nepokretne tačke preslikavanja F. Tada je

$$\inf(f) = \inf(f \,|_{Fix(\mathcal{F})})$$

i funkcional f dostiže minimum ako i samo ako je skup zajedničkih tačaka $Fix(\mathcal{F})$ neprazan i restrikcija funkcionala f na skup $Fix(\mathcal{F})$ dostiže minimum.

TEOREMA E. Neka je X topološki prostor i $F_i : X \longrightarrow X$, $i \in I$ neprekidna preslikavanja. Neka je (i_n) niz indeksa u kome se svaki od indeksa $i \in I$ javalja beskonačno puta. Ako niz dobijen primenom preslikavanja (F_{i_n}) na $x \in X$

$$x, \quad x_1 = F_{i_1}(x) \;, \;\ldots, \; x_{n+1} = F_{i_n}(x_n), \ldots$$

konvergira tački x_o, tada je x_o zajednička nepokretna tačka svih preslikavanja F_i, $i \in I$.

D o k a z. Preslikavanje F_k, $k \in I$ je neprekidno tako da je

$$\lim_{n \to \infty} F_k(x_n) = F_k(x_o).$$

Neka je (j_n) niz takav da je $i_{j_n} = k$ ($n \in N$). Niz

$$x_{i_{j_n+1}} = F_{i_{j_n}}(x_{i_{j_n}}) = F_k(x_{i_{j_n}})$$

je konvergentni podniz oba konvergentna niza

(1) (x_n) i $(F_k(x_n))$,

tako da nizovi (1) konvergiraju istoj granici

$$x_o = F_k(x_o).$$

GLAVA II

ANALITIČKE NEJEDNAKOSTI

Sve analitičke nejednakosti date u ovoj glavi su dokazane metodom zajedničke nepokretne tačke preslikavanja monotonih u odnosu na funkcional.

U tački 2.1. je data interpolacija Jensenove nejednakosti i pojačanje i obrat Brunk - Olkinove nejednakosti. U 2.2. je data hipoteza o anharmonijskoj razmeri sredina. Kao posledica dokaza Hadamardove nejednakosti 2.3. dobijena je karakterizacija pojma ortogonalne matrice. Kod nejednakosti za indefinitne forme 2.5. dati su potrebni i dovoljni uslovi za važenje jednakosti i ispravljeni su početni uslovi za važenje jedne nejednakosti.

U tački 2.7. je data nejednakost koja sadrži tri posebne nejednakosti - Schweitzera, Karamate i Knoppa. Za Grüssovu nejednakost 2.9. određena je bliža granica. Dokazana je varijanta Muirheadove leme 2.12. U tački 2.13. je uveden funkcional na R^n saglasan s uređenjem majoracije (konveksan u smislu Schura). Tačka 2.19. sadrži interpolaciju integralne Buniakowskijeve nejednakosti. U poslednjoj tački je dat svojevrsni obrat nejednakosti potencijalne i geometrijske sredine, kao i nejednakost koja uopštava odnos aritmetičke i geometrijske sredine.

2.1. NEJEDNAKOSTI ZA KONVEKSNE FUNKCIJE.

Funkcija $f : I \longrightarrow R$, I je segment, je konveksna ako je

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

za sve $x,y \in I$, $\alpha \in [0,1]$. Funkcija je konveksna u Jensenovom smislu ako važi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

za sve $x,y \in I$.

2.1.1. JENSENOVA NEJEDNAKOST, INTERPOLACIJA.

TEOREMA A. J.L.W.V. Jensen, 1906.

Neka je f neprekidna funkcija konveksna u Jensenovom smislu. Tada je

$$f\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(a_1)+\dots+f(a_n)}{n}. \tag{1}$$

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{x \mid x_i \in I,\ i = 1,\dots,n,\ x_1+\dots+x_n = a_1+\dots+a_n\right\}$$

i funkcional

$$\varphi(x) = \frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}.$$

Neka su preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) =$$

$$= \left(x_1,\dots,\frac{x_i+x_j}{2},\dots,\frac{x_i+x_j}{2},\dots,x_n\right),$$

$i,j = 1,\dots,n$. Preslikavanja F_{ij} su monotono nerastuća u odnosu na funkcional

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(F_{ij}(x)) \tag{2}$$

jer se zahtev (2) za saglasnošću preslikavanja i funkcionala svodi na

$$f(x_1) + f(x_2) \geqslant 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

J - konveksnost funkcije f.

Funkcional φ na kompaktnom prostoru X dostiže minimum. Taj minimum se dostiže u jedinstvenoj zajedničkoj nepokretnoj tački

$$a^o = (s,\dots,s), \qquad s = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

svih preslikavanja F_{ij}, $i,j=1,\dots,n$. Time je

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(a^o) = f(s).$$

Primena niza preslikavanja u kome se svako od preslikavanja F_{ij} javlja beskonačno puta daje niz vektora koji konvergira nepokretnoj tački a^o. Dovoljno je pretpostaviti i da se svaki od indeksa $1,\dots,n$ javlja beskonačno puta, ne računajući preslikavanja $F_{ii} = id$. Dobijeni niz brzo konvergira [BJE96]. Tako je određen interpolacioni niz

$$\varphi(a) \geqslant \varphi(F_{ij}(a)) \geqslant \dots \geqslant f(s).$$

Sledeća nejednakost je posledica nejednakosti (1):

$$f(r_1a_1+\dots+r_na_n) \leqslant r_1f(a_1) + \dots + r_nf(a_n),$$

gde je $r_i \geqslant 0$, $i=1,\dots,n$, $r_1+\dots+r_n = 1$.

U naredne dve teoreme date su interpolacije Jensenove nejednakosti koje imaju konačno članova. Same formule sugerišu kako izgledaju kompletne interpolisane nejednakosti.

TEOREMA B.

a) Ako je funkcija f konveksna, tada je

$$\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \geqslant \frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})+\ldots+f(\frac{x_{n-1}+x_n}{2})+f(\frac{x_n+x_1}{2})}{n}$$

(3) $$\geqslant f(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}).$$

b) Ako je $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ ili $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, tada

$$\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \geqslant \frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})+\ldots+f(\frac{x_n+x_1}{2})}{n} \geqslant$$

(4) $$\geqslant \frac{f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})+\ldots+f(\frac{x_{n-1}+x_n+x_1}{3})+f(\frac{x_n+x_1+x_2}{3})}{n}$$

$$\geqslant f(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}).$$

Jedna nejednakost u (4) ne važi za nemonotone nizove.

D o k a z. a) Druga nejednakost u (3) je posledica Jensenove nejednakosti (1). Prva nejednakost se dobija primenom teoreme Hardy - Littlewood - Pólya - Karamata 2.13. na vektore (v.2.13.2.)

(5) $$(x_1,\ldots,x_n) \succ (\frac{x_1+x_2}{2},\ldots,\frac{x_n+x_1}{2}).$$

Ako je $(y_1,\ldots,y_n)$ vektor s desne strane u (5), tada zbir $y_{[1]}+\ldots+y_{[i]}$, $i=1,\ldots,n$ (v.2.12.) sadrži $2i$ brojeva $x_1,\ldots,x_n$, od kojih se svaki broj x_i najviše dvaput ponavlja, tako da je

$$y_{[1]}+\ldots+y_{[i]} \leqslant x_{[1]}+\ldots+x_{[i]}.$$

Ova nejednakost u (3) za monotone nizove može se lako dokazati matematičkom indukcijom.

b) Poslednja nejednakost u (4) je posledica Jensenove nejednakosti.

Pokažimo da je

$$(6)\qquad \left(\frac{x_1+x_2}{2},\ldots,\frac{x_n+x_1}{2}\right) \succ \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ldots,\frac{x_n+x_1+x_2}{3}\right).$$

Ako smatramo da je niz $x_1,\ldots,x_n$ ciklično produžen $x_{n+1} = x_1,\ldots$, onda je odnos majoracije (6) tačan za $n = 1,2,3$. Može se pretpostaviti da je $n \geqslant 4$.

Neka je

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{x_1+x_2}{2} & \geqslant & \ldots & & \frac{x_{i-1}+x_i}{2} & \geqslant & \frac{x_n+x_1}{2} & \geqslant & \frac{x_i+x_{i+1}}{2} & \geqslant & \ldots & \geqslant & \frac{x_{n-1}+x_n}{2} \\
\parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\
a_1 & \geqslant & \ldots & \geqslant & a_{i-1} & \geqslant & a_n & \geqslant & a_i & \geqslant & \ldots & \geqslant & a_{n-1}
\end{array}$$

i

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{x_1+x_2+x_3}{3} & \geqslant & \ldots & \geqslant & \frac{x_{j-1}+x_j+x_{j+1}}{3} & \geqslant & \frac{x_n+x_1+x_2}{3} & \geqslant & \frac{x_j+x_{j+1}+x_{j+2}}{3} & \geqslant \\
\parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\
b_1 & \geqslant & \ldots & \geqslant & b_{j-1} & \geqslant & b_n & \geqslant & b_j & \geqslant
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \geqslant & \frac{x_{k-1}+x_k+x_{k+1}}{3} & \geqslant & \frac{x_{n-1}+x_n+x_1}{3} & \geqslant & \ldots & \geqslant & \frac{x_{n-2}+x_{n-1}+x_n}{3} & \\
 & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & \\
\ldots & \geqslant & b_{k-1} & \geqslant & b_{n-1} & \geqslant & \ldots & \geqslant & b_{n-2} & ,
\end{array}$$

$$1 < i < n, \quad 1 < j < k < n.$$

Najpre je

$$b_1 + \ldots + b_n = a_1 + \ldots + a_n.$$

Takođe je

$$b_1 \leqslant a_1 \quad \text{jer} \quad 2x_1+2x_2+2x_3 \leqslant 3x_1+3x_2\ , \quad 2x_3 \leqslant x_1 + x_2\ ,$$

kao i $b_{[n]} = b_{n-2} \geqslant a_{n-1} = a_{[n]}$, tako da je

$$b_{[1]} + \dots + b_{[n-1]} \leqslant a_{[1]} + \dots + a_{[n-1]} .$$

Pokažimo da je

$$b_{[1]} + \dots + b_{[m]} \leqslant a_{[1]} + \dots + a_{[m]},$$

(7)

tj. $$6b_{[1]} + \dots + 6b_{[m]} \leqslant 6a_{[1]} + \dots + 6a_{[m]},$$

$m = 2,\dots,n-2$. Za slučajeve (i) i (ii) važi stroža nejednakost

(8) $$b_{[1]} + \dots + b_{[m]} \leqslant a_1 + \dots + a_m .$$

(i) $m < j$. Za $m = 2$ nejednakost (8) postaje

$$2x_1+4x_2+4x_3+2x_4 \leqslant 3x_1+6x_2+3x_3 , \quad x_3+2x_4 \leqslant x_1+2x_2 .$$

Za $m > 2$ je

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \dots + 6x_m + 4x_{m+1} + 2x_{m+2} \leqslant$$
$$\leqslant 3x_1 + 6x_2 + \dots + 6x_m + 3x_{m+1} ,$$

što sadrži i vrednost $m = 2$.

(ii) $j \leqslant m < k$. Sada je (8)

$$b_{[1]}+\dots+b_{[m]} = b_1 + \dots + b_m + b_n - b_m \leqslant a_1 + \dots + a_m$$

ekvivalentno sa

$$x_{m+1} + 2x_{m+2} + 6b_n - 6b_m \leqslant x_1 + 2x_2 ,$$

$$x_{m+1} + 2x_{m+2} + 2x_n + 2x_1 + 2x_2 \leqslant x_1 + 2x_2 + 2x_m + 2x_{m+1} + 2x_{m+2},$$

$$x_1 + 2x_n \leqslant 2x_m + x_{m+1} .$$

Poslednja nejednakost sledi iz

$$x_1 + 2x_n \leqslant x_1 + x_n + x_{n-1} = 3b_{n-1} \leqslant$$
$$\leqslant 3b_m = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} \leqslant 2x_m + x_{m+1} .$$

(iii) $m \geq k$, $m < i$. Sada je

$$b_{[1]} + \dots + b_{[m]} = b_1 + \dots + b_m + b_n + b_{n-1} - b_m - b_{m-1}$$

tako da (7) postaje

$$x_{m+1} + 2x_{m+2} + 6b_{n-1} + 6b_n - 6b_{m-1} - 6b_m \leqslant x_1 + 2x_2 ,$$

$$x_{m+1} + 2x_{m+2} + 2x_{n-1} + 2x_n + 2x_1 + 2x_n + 2x_1 + 2x_2 \leqslant$$

$$\leqslant x_1 + 2x_2 + 2x_{m-1} + 2x_m + 2x_{m+1} + 2x_m + 2x_{m+1} + 2x_{m+2} ,$$

(9) $$2x_{n-1} + 2x_n + 3x_1 \leqslant 2x_{m-1} + 4x_m + 3x_{m+1} ,$$

$$3(x_n + x_1) + 2x_{n-1} + x_n \leqslant 3(x_m + x_{m+1}) + 2x_{m-1} + x_m .$$

Iz uslova $m < i$ sledi $a_n \leqslant a_m$, tj. $x_n + x_1 \leqslant x_m + x_{m+1}$.

(iv) $m \geq k$, $m \geq i$. Nejednakost (7) postaje

$$b_1 + \dots + b_m + 6b_n + 6b_{n-1} - 6b_m - 6b_{m-1} \leqslant a_1 + \dots + a_m + a_n - a_m .$$

Koristeći (9) dobija se

$$2x_{n-1} + 4x_n + 3x_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2x_{m-1} + 4x_m + 3x_{m+1} + 3x_n + 3x_1 - 3x_m - 3x_{m+1} ,$$

ili $$2x_{n-1} + x_n \leqslant 2x_{m-1} + x_m .$$

Ako je $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-1,1,-1,1)$, tada je

$$(a_1,a_2,a_3,a_4) = (0,0,0,0) \prec (-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) = (b_1,b_2,b_3,b_4),$$

a za konveksnu funkciju $f(x) = |x|$ je

$$f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4) = 0$$

i $$f(b_1) + f(b_2) + f(b_3) + f(b_4) = \frac{4}{3} .$$

Time je završen dokaz.

TEOREMA C. Neka je funkcija f konveksna. Tada je

(10) $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant \frac{1}{m}\sum f\left(\frac{x_i+x_j}{2}\right) \geqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

gde je m broj sabiraka u zbiru $\sum$ koji sadrže sve parove $i,j = 1,\ldots,n$ takve da je a) $i < j$, b) $i \leqslant j$, c) $i \lesseqgtr j$.

D o k a z. a) Prvu nejednakost u (10) dokazaćemo matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ nejednakost je tačna, pretpostavimo da je tačna za n

(11) $$(n-1)\sum_{i=1}^{n} f_i - 2\sum_{i<j=1}^{n} f_{ij} \geqslant 0,$$

gde je $m = \frac{n(n-1)}{2}$, $f_i = f(x_i)$, $f_{ij} = f\left(\frac{x_i+x_j}{2}\right)$. Treba pokazati da je

$$n\sum_{i=1}^{n+1} f_i - 2\sum_{i<j=1}^{n+1} f_{ij} =$$

$$= (n-1)\sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{i=1}^{n} f_i + nf_{n+1} - 2\sum_{i<j=1}^{n} f_{ij} - 2\sum_{i=1}^{n} f_{i,n+1} \geqslant 0$$

Ova nejednakost sledi iz induktivne pretpostavke i

$$\sum_{i=1}^{n} f_i + nf_{n+1} \geqslant 2\sum_{i=1}^{n} f_{i,n+1}\,.$$

b) Ovde je $m = \frac{n(n+1)}{2}$. Iz nejednakosti (11) se dobija

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} f_i - 2\sum_{i\leqslant j=1}^{n} f_{ij} \geqslant 0$$

nejednakost ekvivalentna nejednakosti pod b).

c) Broj sabiraka je $m = n^2$, a (11) daje

$$n\sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} \geqslant 0.$$

2.1.2. STEFFENSENOVA NEJEDNAKOST.

Ova nejednakost uopštava Jensenovu nejednakost tako da se zove i Jensen - Steffensenova nejednakost.

TEOREMA. J.F. Steffensen, 1919., [MIT109]

Neka je f konveksna funkcija i niz a_k ($k = 1,\dots,n$) neopadajući. Neka brojevi c_k ($k=1,\dots,n$) zadovoljavaju uslove

$$0 \leqslant \sum_{k=m}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_k, \quad m=1,\dots,n, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k > 0 .$$

Tada je

$$f\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} c_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} c_k}\right] \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k f(a_k)}{\sum_{k=1}^{n} c_k} . \tag{1}$$

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{ x \,\middle|\, a_1 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant a_n , \quad \sum_{k=1}^{n} c_k x_k = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k \right\}$$

i funkcional

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^{n} c_k} .$$

Neka je

$$x_1 = \dots = x_{i_1} < x_{i_1+1} = \dots = x_{i_2} < x_{i_2+1} = \dots$$

$$\dots = x_{i_{s-1}} < x_{i_{s-1}+1} = \dots = x_{i_s} = x_n ,$$

$$d_k = c_{i_{k-1}+1} + \dots + c_{i_k} , \quad k = 1,\dots,s$$

$$i_o = 0, \ i_{s+1} = n+1, \ x_o = -\infty , \ x_{n+1} = +\infty .$$

Ako je $x_i = x_{i_p}$ i $x_j = x_{i_q}$, definišimo preslikavanja

$$F_{ij}(x) = \begin{cases} x', & x_i < x_j, \quad d_p d_q > 0 \\ x, & \text{inače} \end{cases},$$

$i,j = 1,\dots,n,\ i<j$. Vektor x' je

$$x' = (x_1,\dots,x_{i_{p-1}}, x_{i_p+1}+\varepsilon,\dots,x_i+\varepsilon,\dots,x_{i_p}+\varepsilon, x_{i_p+1},\dots$$

$$\dots,x_{i_{q-1}}, x_{i_{q-1}+1}-\delta,\dots,x_j-\delta,\dots,x_{i_q}-\delta, x_{i_q+1},\dots,x_n).$$

Pri tome je $\delta = \frac{d_p}{d_q}\varepsilon$, tako da je ispunjen drugi uslov u definiciji domena X.

Ako je $p+1=q$, onda se uzima da je

$$x_i+\varepsilon = x_j-\delta, \text{ tj. } \quad \varepsilon = \frac{x_j - x_i}{1+\frac{d_p}{d_q}}.$$

Neka je $p+1<q$. Ako je $d_p>0$, onda je

$$\varepsilon = \min\left\{x_{i_{p+1}} - x_{i_p},\ \frac{d_q}{d_p}(x_{i_q} - x_{i_{q-1}})\right\} > 0.$$

Time je $x_i+\varepsilon = x_{i_p+1}$ ili $x_j-\delta = x_{i_q-1}$, a monotonost niza je sačuvana.

Ako je $d_p<0$, pa i $d_q<0$, tada je

$$\varepsilon = \max\left\{x_{i_{p-1}} - x_{i_p},\ \frac{d_q}{d_p}(x_{i_q} - x_{i_{q+1}})\right\} < 0.$$

Iz uslova teoreme sledi

$$\sum_{k=i_s}^{n} c_k = d_s \geqslant 0.$$

Sem toga

$$\sum_{k=i_1+1}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_k = d_1 + \sum_{k=i_1+1}^{n} c_k,$$

tako da je $d_1 \geqslant 0$. Dakle, ako je $\varepsilon<0$, onda je $p > 1$ i $q < n$ tako da $x' \in X$.

Preslikavanja F_{ij} su monotono nerastuća u odnosu na funkcional φ

(2) $$\varphi(x) \geqslant \varphi(F_{ij}(x))$$

Za $x \neq x'$ (2) je ekvivalentno sa

$$d_p f(x_i) + d_q f(x_j) \geqslant d_p f(x_i+\varepsilon) + d_q f(x_j-\delta) \quad \Big| \; : d_q\varepsilon>0$$

ili

$$\frac{f(x_j) - f(x_j - \frac{d_p}{d_q}\varepsilon)}{\frac{d_p}{d_q}\varepsilon} \geqslant \frac{f(x_i+\varepsilon) - f(x_i)}{\varepsilon},$$

što je svojstvo konveksne funkcije f.

Funkcional φ na kompaktnom skupu X dostiže minimum u nekoj zajedničkoj nepokretnoj tački svih preslikavanja F_{ij}. Ako je

$$a^o = (a_1^o, \ldots, a_n^o)$$

neka zajednička nepokretna tačka i $d_1, \ldots, d_s$ parcijalne sume koeficijenata $c_1, \ldots, c_n$ određene vektorom a^o. Zato je

$$a_i^o = a_j^o \quad \text{ili} \quad d_p\, d_q \leqslant 0, \text{ pri čemu je } a_i^o = a_{i_p}^o, a_j^o = a_{i_q}^o$$

za sve $i,j = 1,\ldots,n$, $i<j$.

Među brojevima $d_1, \ldots, d_s$ ne postoje tri različita od nule, jer bi tada dva od njih imala isti znak i a^o bi bila pokretna tačka nekog preslikavanja. Ako se pretpostavi da su dva broja d_k i d_I $(k < I)$ različita od nule, tada iz uslova teoreme sledi da je $d_I > 0$. Kako su d_k i d_I

suprotnog znaka, to je $d_k < 0$, što protivreči pretpostavkama datim u teoremi. Dakle, najviše jedan broj među $d_1, \ldots$ $\ldots, d_s$ nije nula. Ako je to d_m, onda je

$$d_m = d_1 + \ldots + d_s = c_1 + \ldots + c_n > 0.$$

Dalje je

$$\sum_{k=1}^{n} c_k a_k^o = d_m a_{i_m}^o = \sum_{k=1}^{n} c_k a_{i_m}^o = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k ,$$

tako da je

$$a_{i_m}^o = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} c_k}.$$

Na kraju je

$$\varphi(a^o) = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k f(a_k^o)}{\sum_{k=1}^{n} c_k} = \frac{d_m f(a_{i_m}^o)}{d_m} = f\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} c_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} c_k}\right].$$

Primenom preslikavanja F_{ij} može se obrazovati konačan interpolacioni niz nejednakosti (1). Dokaz se može završiti i primenom matematičke indukcije po broju različitih koordinata vektora a.

2.1.3. POVRATNI NIZOVI.

Iz relacije koja definiše konveksne funkcije

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

proizašle su nejednakosti oblika

(1) $$f(L(x_1,\ldots,x_n)) \leqslant L(f(x_1),\ldots,f(x_n)),$$

gde L označava linearnu kombinaciju. Za monotone nizove i njihove alternirajuće kombinacije važe nejednakosti oblika (1) - teoreme Szegöa, Bellmana i Brunk - Olkina 2.1.4. Ovde uvedeni povratni nizovi se mogu smatrati za suprotnost monotonim nizovima i za njih važe nejednakosti suprotne (1). Teorema B. data u ovoj tački može se dokazati neposrednom primenom teoreme majoracije HLPK 2.13., a ona je i poseban slučaj teoreme A. Za razliku od uslova ovih teorema, osobina povratnosti niza se jednostavno proverava, tako da je u posledici dato nekoliko novih jednostavnih nejednakosti suprotnih formuli (1). U poslednjem tvrđenju su povezani povratni nizovi i uređenje majoracije. Takođe, povratni nizovi s neparnim brojem članova imaju ceo broj "oscilacija", što može objasniti neparan broj elemenata u nekim nejednakostima (Szegö).

TEOREMA A. P.M. Vasić, R.R. Janić, 1970. [PEČ73]
Ako je funkcija f konveksna i ako brojevi $a_1,\dots,a_{2m+1}$ zadovoljavaju uslove

$$a_{2k} \leqslant a_{2k+1}, \quad \sum_{i=1}^{2k}(-1)^{i-1}a_i \geqslant 0, \quad k = 1,\dots,m ,$$

tada je
$$\sum_{i=1}^{2m+1}(-1)^{i-1}f(a_i) \leqslant f\left[\sum_{i=1}^{2m+1}(-1)^{i-1}a_i\right] .$$

D o k a z. Neka je prostor
$$X = \left\{x \;\middle|\; \sum_{i=1}^{2m+1}(-1)^{i-1}x_i = \sum_{i=1}^{2m+1}(-1)^{i-1}a_i\right\}$$
i funkcional
$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{2m+1}(-1)^{i-1}f(x_i) .$$
Preslikavanje
$$F_2(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_3,\dots,x_n)$$
je monotono neopadajuće u odnosu na funkcional φ

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(F_2(x)),$$

tj. $$-f(x_1) + f(x_2) \leqslant -f(x_1 + \varepsilon) + f(x_2 + \varepsilon), \quad \varepsilon = x_3 - x_2$$

$$f(x_1 + \varepsilon) - f(x_1) \leqslant f(x_2 + \varepsilon) - f(x_2),$$

što je definiciona nejednakost Wright konveksnosti. Vektor $F_2(x)$ pripada prostoru X i zadovoljava uslove teoreme. Tako se mogu definisati i preslikavanja $F_4, \ldots, F_{2m}$. Interpolacioni niz je

$$\varphi(a) \geqslant \varphi(F_2(a)) \geqslant \ldots \geqslant \varphi(F_{2m} \ldots (F_2(a) \ldots) =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{2m+1} (-1)^{i-1} a_i, a_3, a_3, \ldots, a_{2m+1}, a_{2m+1} \Big)$$

$$= f\Big(\sum_{i=1}^{2m+1} (-1)^{i-1} a_i \Big) - f(a_3) + f(a_3) - \ldots - f(a_{2m+1}) + f(a_{2m}$$

$$= f\Big(\sum_{i=1}^{2m+1} (-1)^{i-1} a_i \Big)$$

DEFINICIJA. Niz $a_1, \ldots, a_n$ je povratan ako je

$$a_{2i-1} \leqslant a_{2i} \geqslant a_{2i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

niz je obrnuti povratan ako je

$$a_{2i-1} \geqslant a_{2i} \leqslant a_{2i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Drugačije zapisano

$$a_1 \leqslant a_2 \geqslant a_3 \leqslant a_4 \geqslant \ldots, \quad a_1 \geqslant a_2 \leqslant a_3 \geqslant a_4 \leqslant \ldots .$$

Za povratan niz je

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k \leqslant \min \{a_1, \ldots, a_n\},$$

dok za obrnuti povratan niz važi

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k \geqslant \max \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

TEOREMA B. Neka je $a_1,\dots,a_{2n+1}$ povratan ili obrnuti povratan niz i funkcija f konveksna, tada je

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}f(a_k) \leqslant f\left[\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}a_k\right].$$

Ako je $a_n \geqslant 0$ ili, za obrnuti povratan niz $a_n \leqslant 0$, $f(0) \geqslant 0$, tada je

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f(a_k) \leqslant f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k\right].$$

D o k a z. Dokaz nejednakosti (2) je sličan dokazu prethodne teoreme. Povratan niz $a_1,\dots,a_n$, $n = 2m$, $a_n \geqslant 0$ se može produžiti s $a_{n+1} = 0$ do povratnog niza s neparnim brojem članova. Primena nejednakosti (1)

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f(a_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}f(a_k) \leqslant$$

$$\leqslant f\left[\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}a_k\right] = f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k\right]$$

daje nejednakost (2).

Diskretna Opialova nejednakost 2.21. je posledica ne - jednakosti (3).

POSLEDICA. Neka je $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_{2n+1}$ i f konveksna funkcija, tada je

$$(4)\qquad f(a_1) + \sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k f(a_k) \leqslant f\left[a_1 + \sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k a_k\right]$$

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f(a_k) + f(a_{2n+1}) \leqslant f\left[\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k a_k + a_{2n+1}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(a_k) - \sum_{k=n+2}^{2n+1} f(a_k) \leqslant f\left[\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=n+2}^{2n+1} a_k\right]$$

$$-\sum_{k=1}^{n} f(a_k) + \sum_{k=n+1}^{2n+1} f(a_k) \leqslant f\left[-\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k\right].$$

Ako je $f(0) \geqslant 0$, tada je

$$-\sum_{k=1}^{n} f(a_k) + \sum_{k=n+1}^{2n} f(a_k) \leqslant f\left[-\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k\right].$$

D o k a z. Nejednakosti se dobijaju primenom teoreme B. na povratne nizove respektivno

$$a_1, a_3, a_2, \dots, a_{2n+1}, a_{2n},$$

$$a_2, a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n-1}, a_{2n+1},$$

$$a_1, a_{n+2}, \dots, a_n, a_{2n+1}, a_{n+1},$$

$$a_{2n+1}, a_n, \dots, a_{n+2}, a_1, a_{n+1},$$

$$a_{2n}, a_n, \dots, a_{n+1}, a_1, 0 .$$

Ove nejednakosti se mogu dokazati primenom teoreme HLPK 2.13. Npr., nejednakosti (4) napisanoj u obliku

$$f(a_1) + \sum_{k=1}^{n} f(a_{2k}) \leqslant f(c) + \sum_{k=1}^{n} f(a_{2k+1}), \quad c = a_1 + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k$$

odgovaraju vektori

$$x = (a_1, a_2, \dots, a_{2n}), \quad y = (c, a_3, \dots, a_{2n+1})$$

za koje važi odnos majoracije $x \prec y$.

TEOREMA C. Neka je $x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n$ povratan ili obrnuti povratan niz i

$$y_n = x_1 + \dots + x_n - y_1 - \dots - y_{n-1} .$$

Tada je

$$x \prec y .$$

D o k a z. Neka je f proizvoljna konveksna funkcija čiji je domen interval koji sadrži brojeve $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

Prema teoremi B. za dati povratan niz važi

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(y_k) \leqslant f \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n-1} y_k$$

ili

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(y_k). \tag{5}$$

Nejednakost (5) važi za sve konveksne funkcije, tako da na osnovu teoreme HLPK 2.13. sledi da je $x \prec y$.

Direktan dokaz je duži. Za dati povratan niz važi

$$\begin{gathered} x_1 \leqslant y_1 \\ x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} \leqslant y_1 + \cdots + y_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n \end{gathered} \tag{6}$$

Nejednakosti (6) svojim oblikom liče na definiciju relacije majoracije, ali ne dokazuju odnos majoracije jer nizovi x i y ne moraju biti monotono opadajući. Odnos majoracije sledi iz

$$\begin{aligned} x_{[1]} + \cdots + x_{[k]} &= x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} \\ &\leqslant y_{i_1} + \cdots + y_{i_k} \\ &\leqslant y_{[1]} + \cdots + y_{[k]}, \end{aligned}$$

$k = 1,\ldots,n-1$, tako da je $x \prec y$.

Za obrnuti povratni niz je

$$\begin{gathered} x_1 \leqslant x_1 + x_2 - y_1 + \cdots + x_n - y_{n-1} = y_n \\ x_1 + x_2 \leqslant x_1 + x_2 + x_3 - y_2 + \cdots + x_n - y_{n-1} = y_n + y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} \leqslant x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n - y_{n-1} = y_n + y_1 + \cdots + y_{n-2}. \end{gathered}$$

Takođe je

$$
\begin{aligned}
x_{[1]} + \dots + x_{[k]} &= x_{i_1} + \dots + x_{i_k} \\
&\leqslant x_{i_1} + \dots + x_{i_k} + \sum (x_s - y_s) \\
&= y_{i_1} + \dots + y_{i_k} \\
&\leqslant y_{[1]} + \dots + y_{[k]},
\end{aligned}
$$

gde se sabiranje $\sum$ vrši po indeksima $s = 1,\dots,n$, $s \neq 1,\dots,k$.

2.1.4. NEJEDNAKOSTI SZEGÖA, BELLMANA I BRUNK-OLKINA. INTERPOLACIJA I OBRAT.

TEOREMA A. G. Szegö, 1950.

Ako je $a_1 > a_2 > \dots > a_{2m-1} > 0$ i f konveksna funkcija na $[0,a_1]$, tada je

$$
\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^{k-1} f(a_k) \geqslant f\left[\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^{k-1} a_k\right]. \tag{1}
$$

TEOREMA B. R. Bellman, 1953.

Neka je $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant 0$, f konveksna funkcija na $[0,a_1]$ i $f(0) \leqslant 0$. Tada je

$$
\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f(a_k) \geqslant f\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k\right]. \tag{2}
$$

TEOREMA C. H.D. Brunk, 1956., [BEC48,MIT113,BRU]

Neka je $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant 0$, $1 \geqslant h_1 \geqslant \dots \geqslant h_n \geqslant 0$, $f(0) \leqslant 0$ i f konveksna funkcija na $[0,a_1]$. Tada je

$$
\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k f(a_k) \geqslant f\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k a_k\right]. \tag{3}
$$

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{ x \;\middle|\; a_1 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k x_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k a_k \right.$$

i funkcional

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k f(a_k).$$

Ako je $x_2 = \dots = x_j$, onda je preslikavanje

$$F(x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) =$$

$$= (x_1 - \varepsilon, x_{j+1}, \dots, x_{j+1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad x_{n+1} =$$

Pri tome je

$$h_1 x_1 + h x_j = h_1 (x_1 - \varepsilon) + h x_{j+1}, \qquad h = \sum_{k=2}^{j} (-1)^{k-1} h_k$$

tj.

$$\varepsilon = \frac{h}{h_1} (x_{j+1} - x_j) \geq 0.$$

Preslikavanje F je monotono nerastuće u odnosu na funkcional

$$\varphi(x) \geq \varphi(F(x)),$$

tj.

$$h_1 f(x_1) + h f(x_j) \geq h_1 f(x_1 - \varepsilon) + h f(x_{j+1}),$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \geq \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j},$$

što je svojstvo konveksne funkcije.

Funkcional φ na kompaktnom prostoru X dostiže minimu u nepokretnoj tački

$$a^o = \left(\frac{1}{h_1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k a_k, 0, \dots, 0\right)$$

preslikavanja F. Može se obrazovati i interpolacioni niz

$$\varphi(a) \geq \varphi(F(a)) \geq \dots \geq \varphi(F^{n-1}(a)) = \varphi(a^o).$$

Dobijena je nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k f(a_k) \geqslant$$

(4)

$$\geqslant h_1 f\left[\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right] + \left[\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}h_k\right]f(0),$$

u kojoj je drugi sabirak nenegativan. Na kraju je

$$h_1 f\left[\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right] \geqslant h_1 f\left[\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right] + (1-h_1)f(0$$

$$\geqslant f\left[h_1\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k + (1-h_1)0\right]$$

$$= f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right].$$

TEOREMA D. Neka je $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$, $1 \geqslant h_1 \geqslant \cdots$ $\cdots \geqslant h_n \geqslant 0$, $f(0) \leqslant 0$ i f konveksna funkcija na $[0,a_1]$. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k f(a_k) \geqslant h_1 f\left[\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right] + \left[\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}h_k\right]f($$

(5)

$$\geqslant f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k \;-\left[1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k\right]f(0\right.$$

$$\geqslant f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right],$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k f(a_k) \geqslant h_1 f\left[\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right]$$

(6)

$$\geqslant h_1 f\left[\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}h_k a_k\right] + (1-h_1)f(0)$$

$$\geqslant f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right].$$

D o k a z. Nejednakosti (5) slede iz dokaza teoreme C. Nejednakost (6) se dobija iz Brunkove nejednakosti (3) za

niz
$$\frac{h_1}{h_1} \geqslant \dots \geqslant \frac{h_n}{h_1} \geqslant 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{h_k}{h_1} f(a_k) \geqslant f\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{h_k}{h_1} a_k\right],$$

iz uslova $f(0) \leqslant 0$ i definicije konveksne funkcije.

Ako se u Brunkovoj nejednakosti (3) $f(x)$ zameni sa $f(x) - f(0)$ dobija se Olkinova nejednakost (I. Olkin,1959.)

(7)
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k f(a_k) + \left[1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k\right] f(0) \geqslant$$
$$\geqslant f\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k a_k\right].$$

Sledeća teorema pokazuje kako **Olkinova** nejednakost može pojačati samu sebe, a takođe i dati svoj obrat. Primetimo da su nejednakosti (9) sadržane u (5).

Množenjem nejednakosti (7) s -1 i dodavanjem jednog člana dobija se nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} h_k f(a_k) + \left[1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} h_k\right] f(0) \leqslant$$
$$\leqslant 2f(0) - f\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k a_k\right]$$

koja zajedno s

$$2f(0) \leqslant f\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k a_k\right] + f\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} h_k a_k\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} h_k f(a_k) + \left[1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} h_k\right] f(0) \leqslant$$

(8)
$$\leqslant f\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} h_k a_k\right].$$

Sledi teorema koja interpoliše Olkinovu i obrnutu Olkinovu nejednakost.

TEOREMA E. Neka je $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant 0$ i $1 \geqslant h_1 \geqslant \dots \geqslant h_n \geqslant 0$ i f konveksna funkcija na $[0, a_1]$ odnosno $\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k h_k a_k\, ,\, a_1\right]$. Tada je

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k f(a_k) + \left[1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k\right]f(0) \geqslant \\
&\geqslant h_1\, f\left[\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right] + (1-h_1)f(0) \qquad (9)\\
&\geqslant f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right]
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}h_k f(a_k) + \left[1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}h_k\right]f(0) \leqslant \\
&\leqslant -h_1\, f\left[\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right] + (1+h_1)f(0) \qquad (10)\\
&\leqslant f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}h_k a_k\right].
\end{aligned}$$

D o k a z. Olkinova nejednakost (7) za niz $\frac{h_1}{h_1} \geqslant \dots \geqslant \frac{h_n}{h_1} \geqslant 0$ daje

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k f(a_k) + \left[h_1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k\right]f(0) \geqslant \\
&\geqslant h_1\, f\left[\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right]
\end{aligned}$$

nejednakost koja s definicionom nejednakošću za konveksne funkcije daje (9).

Prva nejednakost u (10) sledi iz (9), a druga iz

$$(1+h_1)f(0) \leqslant f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}h_k a_k\right] + h_1\, f\left[\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}h_k a_k\right].$$

Iz nejednakosti (8) se dobija dualna Brunkova teorema

TEOREMA F. Neka je $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant 0$, $1 \geqslant h_1 \geqslant \dots \geqslant h_n \geqslant 0$, $f(0) \geqslant 0$ i f konveksna funkcija na $\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k h_k a_k\,,\, a_1\right]$. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k h_k f(a_k) \leqslant f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k h_k a_k\right].$$

Polazne teoreme ove tačke važe sa suprotnom nejednakošću ako se neki od uslova zameni suprotnim : konveksnost funkcije s konkavnošću, monotonost niza s povratnošću i znak $(-1)^{k-1}$ sa znakom $(-1)^k$.

TEOREMA G. Ako je $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_{2m-1} \geqslant 0$ i f konkavna funkcija ili $a_1,\dots,a_{2m-1}$ povratan niz i f konveksna funkcija, tada važi obrnuta nejednakost (1).

Dokaz sledi iz (1) i iz teoreme 2.1.3.B.

TEOREMA H. Ako je $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_n$, f konkavna funkcija na $[0,a_1]$ i $f(0) \leqslant 0$ ili $a_1,\dots,a_n$ povratan niz i $a_n \geqslant 0$ ($a_n \leqslant 0$ za obrnuti niz), f konveksna funkcija na $[0,a_1]$ i $f(0) \leqslant 0$, tada važi suprotna nejednakost u (2). Ako je $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant 0$, f konveksna funkcija na $\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\,,\, a_1\right]$ i $f(0) \geqslant 0$, tada je

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(a_k) \leqslant f\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\right].$$

2.1.5. NEJEDNAKOSTI PETROVIĆA I BARLOW - MARSHAL - - PROSCHANA.

Ako je f konveksna funkcija na segmentu $[0,a]$, $x_i \in [0,a]$, $i = 1,\dots,n$ i $x_1 + \dots + x_n \in [0,a]$, tada je

$$(1) \qquad f(x_1) + \dots + f(x_n) \leqslant f(x_1 + \dots + x_n) + (n-1)f(0).$$

Petrovićeva nejednakost (1), kao i Olkinova nejednakost 2.1.4. sadržane su u nejednakosti R.E. Barlow, A.W. Marshall F. Proschan, 1969. [BAR, PEČ68]

Neka je $x_1 \leqslant \dots \leqslant x_m \leqslant 0 \leqslant x_{m+1} \leqslant \dots \leqslant x_n$, $m \in \{0,1,\dots,n\}$, $x_i \in I$, $i = 1,\dots,n$, $0 \in I$ i neka je

$p = (p_1,\dots,p_n)$, $P_k = p_1 + \dots + p_k$, $\bar{P}_k = p_k + \dots + p_n$, $k = 1,\dots,n$.

Ako je

$$0 \leqslant P_k \leqslant 1, \ k=1,\dots,m, \qquad 0 \leqslant \bar{P}_k \leqslant 1, \quad k=m+1,\dots,n,$$

tada je

$$(2) \qquad f\left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + \left[1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\right] f(0).$$

Uz nešto drukčije pretpostavke važi suprotna nejednakost (2). Ove nejednakosti se mogu dokazati postupkom primenjenim u prethodnim dokazima.

Ako je

$$p_1 > 0, \ 0 \leqslant P_k \leqslant p_1, \ k=1,\dots,m, \quad 0 \leqslant \bar{P}_k \leqslant p_1, \quad k=m+1,\dots,n,$$

tada iz (2) sledi

$$f\left[\frac{1}{p_1} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] \leqslant \frac{1}{p_1} \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + \left[1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_1}\right] f(0),$$

tj.

$$p_1 f\left[\frac{1}{p_1} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] + (1-p_1) f(0) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + \left[1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\right] f(0).$$

Ako je

(3) $$0 \leqslant P_k \leqslant \min\{p_1, 1\}, \quad k = 1, \ldots, m,$$
$$0 \leqslant \bar{P}_k \leqslant \min\{p_1, 1\}, \quad k = m+1, \ldots, n,$$

onda važi interpolisana nejednakost (2)

(4) $$f\left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] \leqslant p_1\, f\left[\frac{1}{p_1}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] + (1-p_1)f(0) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + \left[1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\right] f(0).$$

Uslovi (3) su potrebni i dovoljni da bi nejednakosti (4) važile za sve nizove i sve konveksne funkcije.

Nejednakost M. Petrovića se može uopštiti na sličan način

(5) $$p_1 f(x_1) + \ldots + p_n f(x_n) \leqslant$$
$$\leqslant p_1\, f\left[\frac{1}{p_1}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] + p_2 f(0) + \ldots + p_n f(0).$$

2.2. NEJEDNAKOSTI SA SREDINAMA.

Neka je $a = (a_1,\ldots,a_n)$ n-torka pozitivnih brojeva. Kvadratna, aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina su

$$K(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

$$A(a) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

$$G(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot\ldots\cdot a_n},$$

$$H(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Potencijalna sredina reda p je

$$M_p(a) = \left[\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad p \neq 0.$$

2.2.1. NEJEDNAKOSTI SA OSNOVNIM SREDINAMA.

TEOREMA A. A.L. Cauchy, H.A. Schwarz, V.J. Buniakowski

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

jednakost važi ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni.

D o k a z. Neka je $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n$, prostor

$$X = \left\{ x \;\middle|\; x_i \geqslant 0,\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right\} \times$$

$$\times \left\{ y \,\middle|\, y_i \geqslant 0,\ i=1,\dots,n,\quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\}$$

i funkcional

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) =$$

$$= \left(x_1,\dots,\sqrt{\frac{x_i^2+x_j^2}{2}},\dots,\sqrt{\frac{x_i^2+x_j^2}{2}},\dots,x_n\right),$$

odnosno proizvod $F_{ij}\times F_{ij}$, su monotono neopadajuća u odnosu na funkcional - saglasna su s funkcionalom f

(2) $$f(x,y) \leqslant f(F_{ij}(x),F_{ij}(y))$$

Zahtev (2) je ekvivalentan sa

$$x_i y_i + x_j y_j \leqslant 2\sqrt{\frac{x_i^2+x_j^2}{2}}\ \sqrt{\frac{y_i^2+y_j^2}{2}},$$

$$x_i^2 y_i^2 + 2x_i y_i x_j y_j + x_j^2 y_j^2 \leqslant x_i^2 y_i^2 + x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 + x_j^2 y_j^2,$$

$$(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqslant 0$$

tj. $$\left[\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j}\right]^2 \geqslant 0, \quad \text{za } y_i, y_j > 0.$$

Na kompaktnom prostoru X funkcional f dostiže maksimum i to može biti jedino u zajedničkim nepokretnim tačkama preslikavanja $F_{ij}\times F_{ij}$, $i,j = 1,\dots,n$. Nepokretna tačka je par vektora

$$a^0 = (K(a),\dots,K(a)), \quad b^0 = (K(b),\dots,K(b)).$$

Uzastopnom primenom preslikavanja $F_{ij}\times F_{ij}$, beskonačno puta svako, dobija se interpolacioni niz koji ima podniz (ceo niz) koji konvergira nepokretnoj tački i za koji je

$$f(a,b) \geqslant f(F_{12}(a),F_{12}(b)) \geqslant \ldots \geqslant f(a^o,b^o) = nK(a)K(b).$$

jednakost važi jedino ako je $a_ib_j = a_jb_i$, za sve $i,j = 1,\ldots,n$, tj. ako su nizovi a i b proporcionalni.

TEOREMA B. $$G(a) \leqslant A(a),$$

jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{ x \mid x_i \geqslant 0,\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \right\},$$

funkcional

$$f(x) = x_1 \ldots x_n$$

i preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) =$$
$$= (x_1,\ldots,\frac{x_i+x_j}{2},\ldots,\frac{x_i+x_j}{2},\ldots,x_n),$$

$i,j = 1,\ldots,n$. Preslikavanja F_{ij} su monotono neopadajuća u odnosu na funkcional

$$f(x) \leqslant f(F_{ij}(x)),$$

jer

$$x_ix_j \leqslant \left[\frac{x_i+x_j}{2}\right]^2 \quad \text{daje} \quad (x_i - x_j)^2 \geqslant 0.$$

Funkcional f na kompaktu X dostiže maksimum u zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja F_{ij}. Nepokretna tačka je vektor s jednakim koordinatama $a^o = (A(a),\ldots,A(a))$. Interpolacioni niz, u kome se svako preslikavanje pojavljuje beskonačno puta, brzo konvergira nepokretnoj tački

$$f(a) \leqslant f(F_{12}(a)) \leqslant \ldots \leqslant f(a^o) = A(a)^n.$$

2.2

TEOREMA C. $A(a) \leqslant K(a)$,

jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = \dots = a_n$.

D o k a z. Neka su prostor i preslikavanje kao u prethodnom dokazu i funkcional

$$f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 .$$

Tada je

$$f(x) \geqslant f(F_{ij}(x)),$$

jer

$$x_i^2 + x_j^2 \geqslant 2\left[\frac{x_i+x_j}{2}\right]^2 \quad \text{ili} \quad (x_i - x_j)^2 \geqslant 0.$$

TEOREMA D. $H(a) \leqslant G(a)$,

jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = \dots = a_n$.

D o k a z. Neka je $m = \min\{a_1,\dots,a_n\}$, $M = \max\{a_1,\dots,a_n\}$, prostor

$$X = \{x \mid m \leqslant x_i \leqslant M,\ i=1,\dots,n,\ x_1\cdots x_n = a_1\cdots a_n\}$$

i funkcional

$$f(x) = H(x).$$

Preslikavanje

$$F_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = \\ = (x_1,\dots,\sqrt{x_ix_j},\dots,\sqrt{x_ix_j},\dots,x_n)$$

$(i,j = 1,\dots,n)$ su monotono neopadajuća u odnosu na funkcional

$$f(x) \leqslant f(F_{ij}(x))$$

jer

$$\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_j} \geqslant \frac{2}{\sqrt{x_ix_j}} \quad \text{ili} \quad (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2 \geqslant 0.$$

Funkcional f na kompaktnom prostoru X dostiže maksimum u zajedničkoj nepokretnoj tački $a^0 = (G(a) ,\ldots, G(a))$. Nejednakost se interpolira primenom preslikavanja.

TEOREMA E. H. Minkowski, 1910., [POL79 ,data dva dokaza].

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1\ldots b_n} ,$$

tj.

$$G(a+b) \geqslant G(a) + G(b),$$

jednakost se dostiže ako i samo ako je $a_i = \lambda b_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

D o k a z. Neka je $m = \min\{a_1,\ldots,a_n\}$, $M = \max\{a_1,\ldots,a_n\}$, $s = \min\{b_1,\ldots,b_n\}$, $S = \max\{b_1,\ldots,b_n\}$ i prostor

$$X = \left\{ x \mid m \leqslant x_i \leqslant M,\ i=1,\ldots,n,\ x_1\ldots x_n = a_1\ldots a_n \right\} \times$$
$$\times \left\{ y \mid s \leqslant y_i \leqslant S,\ i=1,\ldots,n,\ y_1\ldots y_n = b_1\ldots b_n \right\}.$$

Neka je funkcional

$$f(x,y) = G(x+y)$$

i preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) =$$
$$= (x_1,\ldots,\sqrt{x_i x_j},\ldots,\sqrt{x_i x_j},\ldots,x_n).$$

Tada je proizvod preslikavanja $F_{ij} \times F_{ij}$ monotono nerastući u odnosu na funkcional f

$$f(x,y) \geqslant f(F_{ij}(x),F_{ij}(y)),$$

jer

$$(x_i + y_i)(x_j + y_j) \geqslant (\sqrt{x_i x_j} + \sqrt{y_i y_j})^2,$$

daje

$$0 \leqslant \left[x_i y_j - x_j y_i \right]^2 \quad \text{ili} \quad \left[\frac{\sqrt{x_i}}{\sqrt{y_i}} - \frac{\sqrt{x_j}}{\sqrt{y_j}} \right]^2 \geqslant 0.$$

Funkcional f na kompaktnom skupu X dostiže minimum u zajedničkoj nepokretnoj tački svih preslikavanja $F_{ij}\times F_{ij}$ ($i,j = 1,\dots,n$). Nepokretna tačka je par vektora

$$a^0 = (G(a), \dots, G(a)),\ b^0 = (G(b),\dots,G(b)).$$

Može se obrazovati interpolacioni niz, a jednakost važi jedino za proporcionalne nizove.

2.2.2. HÖLDEROVA NEJEDNAKOST.

TEOREMA. O. Hölder, 1889.

Neka je $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$, $i = 1,\dots,n$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right]^{\frac{1}{q}} . \tag{1}$$

Ako je $p < 0$ ili $q < 0$ važi obrnuta nejednakost.

Jednakost važi ako i samo ako je $a_i^p = \alpha b_i^q$ ili $b_i^q = \beta a_i^p$, $i = 1,\dots,n$, α i β su konstante.

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{ x \mid x_i \geqslant 0,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^p = \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right\}$$

i funkcional

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i .$$

Neka su F_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$ preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_i',\dots,x_j',\dots,x_n),$$

$$x_i' = b_i^{\frac{q}{p}} \left[\frac{x_i^p + x_j^p}{b_i^q + b_j^q}\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad x_j' = b_j^{\frac{q}{p}} \left[\frac{x_i^p + x_j^p}{b_i^q + b_j^q}\right]^{\frac{1}{p}},$$

čime je postignuto da je

$$x_i'^p + x_j'^p = x_i^p + x_j^p, \quad x_i'^p : x_j'^p = b_i^q : b_j^q.$$

Pokažimo da su preslikavanja F_{ij} monotono neopadajuća u odnosu na funkcional

(2) $$f(x) \leqslant f(F_{ij}(x)),$$

tj.

$$x_i b_i + x_j b_j \leqslant x_i' b_i + x_j' b_j,$$

$$b_i(x_i - x_i') \leqslant b_j(x_j' - x_j).$$

Ako je $x_i^p - x_i'^p = x_j'^p - x_j^p > 0$, dobija se

$$\frac{b_i}{b_j} \leqslant \frac{x_j' - x_j}{x_i - x_i'} \leqslant \frac{\left[x_j'^p\right]^{\frac{1}{p}} - \left[x_j^p\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[x_i^p\right]^{\frac{1}{p}} - \left[x_i'^p\right]^{\frac{1}{p}}}$$

Lagrangeova teorema za funkciju $y(t) = t^{1/p}$ daje

$$\left[x_j'^p\right]^{\frac{1}{p}} - \left[x_j^p\right]^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left[z_j^p\right]^{\frac{1}{p}-1}\left[x_j'^p - x_j^p\right], \quad x_j^p \leqslant z_j^p \leqslant x_j'^p$$

$$\left[x_i^p\right]^{\frac{1}{p}} - \left[x_i'^p\right]^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left[z_i^p\right]^{\frac{1}{p}-1}\left[x_i^p - x_i'^p\right] \quad x_i'^p \leqslant z_i^p \leqslant x_i^p .$$

Time (3) postaje

$$\frac{b_i}{b_j} \leqslant \frac{\left[z_j^p\right]^{\frac{1}{p}-1}}{\left[z_i^p\right]^{\frac{1}{p}-1}} = \frac{\left[z_i^p\right]^{\frac{1}{q}}}{\left[z_j^p\right]^{\frac{1}{q}}}$$

ili

$$\frac{z_i^p}{z_j^p} \geqslant \frac{b_i^p}{b_j^p} = \frac{x_i'^p}{x_j'^p} ,$$

što je tačno.

Ako je $x_i^p - x_i'^p = x_j'^p - x_j^p < 0$, onda je (3) ekvivalentno sa

$$\frac{b_i}{b_j} \geqslant \frac{x_j' - x_j}{x_i - x_i'} = \frac{x_j - x_j'}{x_i' - x_i} ,$$

kada je i $x_i^p \leqslant z_i^p \leqslant x_i'^p$ i $x_j'^p \leqslant z_j^p \leqslant x_j^p$.

Funkcional f na kompaktnom skupu X dostiže maksimum, koji se može dostići jedino u zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja F_{ij} ($i,j = 1,\ldots,n$). Za nepokretne tačke preslikavanja F_{ij} važi

$$x_i^p : x_j^p = b_i^q : b_j^q,$$

tako da postoji tačno jedna zajednička nepokretna tačka

$$a^o = (a_1^o,\ldots,a_n^o), \qquad a_i^o = b_i^{\frac{q}{p}} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} \right]^{\frac{1}{p}} ,$$

$i = 1,\ldots,n$. Tada je

$$f(a^o) = \sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{q}{p}+1} \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right]^{1-\frac{1}{p}} ,$$

pri čemu je korišćena jednakost $\frac{q}{p} + 1 = \frac{q+p}{p} = \frac{qp}{p} = q.$

Uzastopna primena preslikavanja F_{ij} određuje niz vektora a, $F_{12}(a)$, ... koji konvergira ka a^o i interpolacioni niz

$$f(a) \leqslant f(F_{12}(a)) \leqslant \dots \leqslant f(a^o).$$

NAPOMENA 1. Nejednakost (3) se može napisati u obliku

$$x_i b_i + x_j b_j \leqslant \frac{\left[x_i^p + x_j^p\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[b_i^q + b_j^q\right]^{\frac{1}{p}}} \left[b_i^{\frac{q}{p}+1} + b_j^{\frac{q}{p}+1}\right]$$

$$= \left[x_i^p + x_j^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[b_i^q + b_j^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Dakle, glavni deo dokaza je sadržan u dokazivanju Hölderove nejednakosti za $n = 2$.

NAPOMENA 2. Neka su preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) =$$

$$= \left(x_1,\dots,\left[\frac{x_i^p+x_j^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}},\dots,\left[\frac{x_i^p+x_j^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}},\dots,x_n\right)$$

i

$$G_{ij}(y_1,\dots,y_i,\dots,y_j,\dots,y_n) =$$

$$= \left(y_1,\dots,\left[\frac{y_i^q+y_j^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}},\dots,\left[\frac{y_i^q+y_j^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}},\dots,y_n\right).$$

Tada, zahtev monotonosti

$$f(x,y) \leqslant f(F_{ij}(x),G_{ij}(y)),$$

tj.

$$x_i y_i + x_j y_j \leqslant 2\left[\frac{x_i^p + x_j^p}{2}\right]^{1/p}\left[\frac{y_i^q + y_j^q}{2}\right]^{1/q} =$$

$$= \left[x_i^p + x_j^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[y_i^q + y_j^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

takođe postaje Hölderova nejednakost za $n = 2$. Ova preslikavanja određuju drukčiji interpolacioni niz.

2.2.3. ODNOS SREDINA.

Ako je $p_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n$, $p_1 + \ldots + p_n = 1$, može se definisati ponderisana sredina reda s

$$M_s^p(a) = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^s\right]^{\frac{1}{s}} .$$

TEOREMA. Ako je $-\infty \leqslant s < t \leqslant +\infty$, tada

(1) $$M_s^p(a) \leqslant M_t^p(a).$$

Jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{x \mid x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ldots,n,\ M_t^p(x) = M_t^p(a)\right\}$$

i funkcional

$$f(x) = M_s^p(x).$$

Neka su preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) =$$

$$= \left(x_1,\ldots,\left[\frac{p_i x_i^t + p_j x_j^t}{p_i + p_j}\right]^{\frac{1}{t}},\ldots,\left[\frac{p_i x_i^t + p_j x_j^t}{p_i + p_j}\right]^{\frac{1}{t}},\ldots,x_n\right)$$

$i,j = 1,\ldots,n$. Preslikavanja F_{ij} su saglasna s funkcionalom

$$f(x) \leqslant f(F_{ij}(x))$$

ili

$$p_i x_i^s + p_j x_j^s \leqslant (p_i+p_j)\left[\frac{p_i x_i^t + p_j x_j^t}{p_i + p_j}\right]^{\frac{s}{t}},$$

(2) $$\left[\frac{p_i x_i^s + p_j x_j^s}{p_i + p_j}\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant \left[\frac{p_i x_i^t + p_j x_j^t}{p_i + p_j}\right]^{\frac{1}{t}}, \qquad s>0,$$

što je nejednakost (1) za slučaj $n = 2$.

Ako je

$$\alpha = \frac{p_i}{p_i+p_j}, \quad \beta = \frac{p_j}{p_i+p_j}, \quad c = x_i^s, \quad d = x_j^s,$$

(2) se može napisati u obliku

(3) $$(\alpha c + \beta d)^{\frac{t}{s}} \leqslant \alpha c^{\frac{t}{s}} + \beta d^{\frac{t}{s}},$$

ili

$$\varphi(\alpha c + \beta d) \leqslant \alpha\varphi(c) + \beta\varphi(d), \quad \varphi(x) = x^{\frac{t}{s}}, \quad \frac{t}{s} > 1,$$

što je nejednakost koja važi za sve konveksne funkcije.

Skup X je kompaktan, tako da funkcional f dostiže svoj maksimum na X. Taj maksimum se dostiže u zajedničkoj nepokretnoj tački (postoji tačno jedna takva)

$$a^o = (M_t^p(a) ,\ldots, M_t^p(a))$$

svih preslikavanja F_{ij} , $i,j = 1,\ldots,n$.

Uzastopna primena preslikavanja F_{ij} kojom se svaka koordinata " ujednačuje " beskonačno puta, daje brzo konvergentni niz sukcesivnih aproksimacija kome odgovara interpolacioni niz

$$f(a) \leqslant f(a^{(1)}) \leqslant \ldots \leqslant f(a^o).$$

2.2.4. MINKOWSKIJEVA NEJEDNAKOST.

TEOREMA. H. Minkowski, 1896., [BEC25].

Ako je $p > 1$, tada

(1) $$M_p(a+b) \leqslant M_p(a) + M_p(b) .$$

Za $p < 1$ važi suprotna nejednakost.

Jednakost važi ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni.

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{ x \mid x_i \geqslant 0,\ i = 1,\dots,n,\ M_p(x) = M_p(a) \right\}$$

i funkcional $$f(x) = M_p(x+b).$$

Neka su preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_i',\dots,x_j',\dots,x_n), \quad i,j=1,\dots,n,$$

$$x_i' = b_i\left[\frac{x_i^p+x_j^p}{b_i^p+b_j^p}\right]^{1/p} \qquad x_j' = b_j\left[\frac{x_i^p+x_j^p}{b_i^p+b_j^p}\right]^{1/p}$$

čime je postignuto da je

$$x_i' : x_j' = b_i : b_j \quad \text{i} \quad x_i'^p + x_j'^p = x_i^p + x_j^p.$$

Preslikavanja F_{ij} su monotono neopadajuća u odnosu na funkcional f

$$f(x) \leqslant f(F_{ij}(x)),$$

ili

$$(x_i+b_i)^p + (x_j+b_j)^p \leqslant (x_i'+b_i)^p + (x_j'+b_j)^p, \ p>0$$

(3) $$\left[(x_i^p)^{\frac{1}{p}}+b_i\right]^p - \left[(x_i'^p)^{\frac{1}{p}}+b_i\right]^p \leqslant \left[(x_j'^p)^{\frac{1}{p}}+b_j\right]^p - \left[(x_j^p)^{\frac{1}{p}}+b_j\right]^p.$$

Radi određenosti, neka je $x_i \leqslant x_j$. Neka je i

$x_i^p - x_i'^p = x_j'^p - x_j^p > 0$. Primenom Lagrangeove teoreme na

$$y(t) = \left[t^{1/p} + c\right]^p, \qquad c \text{ - konstanta,}$$

nejednakost (3) postaje

$$p\left[(z_i^p)^{\frac{1}{p}} + b_i\right]^{p-1} \frac{1}{p}(z_i^p)^{\frac{1}{p}-1}\left[x_i^p - x_i'^p\right] \leqslant$$

$$\leqslant p\left[(z_j^p)^{\frac{1}{p}} + b_j\right]^{p-1} \frac{1}{p}(z_j^p)^{\frac{1}{p}-1}\left[x_j'^p - x_j^p\right],$$

gde je

$$x_i'^p \leqslant z_i^p \leqslant x_i^p, \quad x_j^p \leqslant z_j^p \leqslant x_j'^p.$$

Dalje je

$$\left[\frac{z_i + b_i}{z_i}\right]^{p-1} \leqslant \left[\frac{z_j + b_j}{z_j}\right]^{p-1} \qquad p > 1,$$

$1 + \dfrac{b_i}{z_i} \leqslant 1 + \dfrac{b_j}{z_j}$, odakle je $\dfrac{x_i'}{x_j'} = \dfrac{b_i}{b_j} \leqslant \dfrac{z_i}{z_j}$, što je tačno.

Ako je $x_i^p - x_i'^p = x_j'^p - x_j^p < 0$, onda je $x_i^p \leqslant z_i^p \leqslant x_i'^p$ i $x_j^p \leqslant z_j^p \leqslant x_j'^p$, dovoljno je promeniti smer nejednakosti posle (3).

Funkcional f na kompaktnom skupu X dostiže maksimum ($p > 1$) u zajedničkoj nepokretnoj tački

$$a^o = (a_1^o, \ldots, a_n^o), \quad a_i^o = b_i \frac{\left[\sum_{i=1}^n a_i^p\right]^{1/p}}{\left[\sum_{i=1}^n b_i^p\right]^{1/p}}, \quad i=1,\ldots,n$$

svih preslikavanja F_{ij}, to je

$$f(a^o) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left[b_i\frac{\left[\sum_{i=1}^n a_i^p\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[\sum_{i=1}^n b_i^p\right]^{1/p}} + b_i\right]^p\right]^{\frac{1}{p}} = M_p(a) + M_p(b).$$

Ova preslikavanja određuju i interpolacioni niz. Za druge vrednosti parametra p, dovoljno je u dokazu promeniti smer nekih nejednakosti.

NAPOMENA. Nejednakost (2)

$$(x_i+b_i)^p+(x_j+b_j)^p \leqslant \left[b_i\left[\frac{x_i^p+x_j^p}{b_i^p+b_j^p}\right]^{\frac{1}{p}}+b_i\right]^p + \left[b_j\left[\frac{x_i^p+x_j^p}{b_i^p+b_j^p}\right]^{\frac{1}{p}}+b_j\right]^p$$

$$= (b_i^p+b_j^p)\left[\frac{\left[x_i^p+x_j^p\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[b_i^p+b_j^p\right]^{1/p}} + 1\right]^p$$

$$= \left[(x_i^p+x_j^p)^{\frac{1}{p}} + (b_i^p+b_j^p)^{\frac{1}{p}}\right]^p$$

je ekvivalentna nejednakosti (1) za n = 2.

Ako je

$$H_{ij}(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n) =$$

$$= (a_1,\dots,\left[\frac{a_i^p+a_j^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}},\dots,\left[\frac{a_i^p+a_j^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}},\dots,a_n),$$

onda zahtev za monotonošću

$$f(a,b) \leqslant f(H_{ij}(a),H_{ij}(b))$$

takođe je ekvivalentan nejednakosti (1) za n = 2.

2.2.5. GEOMETRIJSKA SREDINA KAO POTENCIJALNA, UOPŠTENA A - G NEJEDNAKOST.

TEOREMA A. [HAR27]

$$\lim_{r\to 0} M_r(a) = G(a)\ .$$

D o k a z. Neka je $m = \min\{a_1,\dots,a_n\}$, $M = \max\{a_1,\dots,a_n\}$ i prostor

$$X = \left\{ x \mid m \leqslant x_i \leqslant M,\ i=1,\dots,n,\ G(x) = G(a) \right\}.$$

Neka je funkcional

$$f(x) = \inf \left\{ M_r(x) \mid r > 0 \right\}$$

i preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) =$$

$$= (x_1,\dots,\sqrt{x_i x_j},\dots,\sqrt{x_i x_j},\dots,x_n),$$

$i,j=1,\dots,n$. Preslikavanja F_{ij} su monotono nerastuća u odnosu na funkcional f

$$f(x) \geqslant f(F_{ij}(x)).$$

Dovoljno je pokazati da je

$$M_r(x) \geqslant M_r(F_{ij}(x)),$$

tj.

$$x_i^r + x_j^r \geqslant 2 \left[\sqrt{x_i x_j} \right]^r,$$

što je deo nejednakosti (1) za $n = 2$. Funkcija

$$y(t) = t^r + \bar{t}^r, \quad t > 0, \quad t\bar{t} = x_i x_j$$

ima izvode

$$\bar{t}' = \left[\frac{x_i x_j}{t} \right]' = -\frac{x_i x_j}{t^2} = -\frac{t\bar{t}}{t^2} = -\frac{\bar{t}}{t}$$

i

$$y'(t) = rt^{r-1} - r\bar{t}^{r-1}\frac{\bar{t}}{t} = \frac{r}{t}\left[t^r - \bar{t}^r \right],$$

tako da funkcija $y(t)$ ima minimum za $t = \bar{t} = \sqrt{x_i x_j}$.

Funkcional f na kompaktnom skupu X dostiže minimum u zajedničkoj nepokretnoj tački

$$a^o = (\ G(a)\ ,\dots,\ G(a)\ )$$

svih preslikavanja F_{ij}. Time je $f(a) \geqslant f(a^o) = G(a)$.

Slično se dokazuje i druga nejednakost

$$\sup \left\{ M_r(a) \mid r < 0 \right\} \leqslant G(a).$$

TEOREMA B. [HAR29]

$$a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n} \leqslant \left[\frac{p_1a_1 + \dots + p_na_n}{p_1 + \dots + p_n}\right]^{p_1+\dots+p_n}.$$

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{x \mid x_i \geqslant 0,\ i = 1,\dots,n,\ p_1x_1+\dots+p_nx_n = p_1a_1+\dots+p_na_n\right\}$$

i funkcional

$$f(x) = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}.$$

Neka su preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) =$$

$$= \left(x_1,\dots,\frac{p_ix_i+p_jx_j}{p_i+p_j},\ \dots,\ \frac{p_ix_i+p_jx_j}{p_i+p_j},\dots,x_n\right),$$

$i,j=1,\dots,n$. Preslikavanja F_{ij} su monotono neopadajuća u odnosu na funkcional

$$f(x) \leqslant f(F_{ij}(x)),$$

što je ekvivalentno sa

$$x_i^{p_i}\, x_j^{p_j} \leqslant \left[\frac{p_ix_i + p_jx_j}{p_i + p_j}\right]^{p_i+p_j}.$$

Funkcija

$$y(t) = t^{p_i}\, \bar{t}^{p_j}, \quad t \geqslant 0, \quad p_it + p_j\bar{t} = p_ix_i + p_jx_j$$

ima izvod

$$y'(t) = p_it^{p_i-1}\, \bar{t}^{p_j-1} - p_jt^{p_i}\, \bar{t}^{p_j-1}\, \frac{p_i}{p_j}$$

$$= p_it^{p_i-1}\, \bar{t}^{p_j-1}\left[\bar{t} - t\right],$$

tako da $y(t)$ ima najveću vrednost za $t = \bar{t}$. Funkcional f na kompaktnom skupu X dostiže maksimum u zajedničkoj nepokretnoj tački

$$a^o = (s,\dots,s), \quad s = \frac{p_1 a_1 + \dots + p_n a_n}{p_1 + \dots + p_n}$$

svih preslikavanja. Može se obrazovati interpolacioni niz

$$f(a) \leqslant f(F_{12}(a)) \leqslant \dots \leqslant f(a^o) = s^{p_1+\dots+p_n}.$$

2.2.6. SREDINE ZA MATRICU.

TEOREMA. [MIn57] Neka je $a_{mn} \geqslant 0$, $m = 1,\dots,M$, $n = 1,\dots,N$ i neka $M_r^{(m)}$ označava sredinu reda r u odnosu na indeks m. Ako je $r < s$, tada važi nejednakost

(1) $$M_s^{(n)}\left[M_r^{(m)}(a_{mn})\right] \leqslant M_r^{(m)}\left[M_s^{(n)}(a_{mn})\right].$$

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{(x_{mn}) \mid x_{mn} \geqslant 0,\ M_s^{(n)}(x_{mn}) = M_s^{(n)}(a_{mn}),\ m = 1,\dots,M,\ n = 1,\dots,N\right\}$$

i funkcional
$$f(x_{mn}) = M_s^{(n)}\left[M_r^{(m)}(x_{mn})\right].$$

Neka su preslikavanja

$$F_{ij}^{ik}\left[\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots\cdots\cdots & x_{1N} \\ \cdots\cdots x_{ij} & \cdots x_{ik} & \cdots\cdots \\ x_{M1} & \cdots\cdots\cdots & x_{MN}\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots\cdots\cdots & x_{1N} \\ \cdots\cdots x_{ij}^o & \cdots x_{ik}^o & \cdots\cdots \\ x_{M1} & \cdots\cdots\cdots & x_{MN}\end{bmatrix},$$

gde je

$$x_{ij}^o = \frac{p^{\frac{s}{r}}}{p^{\frac{s}{r}} + q^{\frac{s}{r}}}(x_{ij}^s + x_{ik}^s), \quad x_{ik}^o = \frac{q^{\frac{s}{r}}}{p^{\frac{s}{r}} + q^{\frac{s}{r}}}(x_{ij}^s + x_{ik}^s),$$

$$p = \sum_{m=1}^{M} x_{mj}^r - x_{ij}^r, \qquad q = \sum_{m=1}^{M} x_{mk}^r - x_{ik}^r.$$

Pokažimo da je preslikavanje F_{ij}^{ik} monotono neopadajuće u odnosu na funkcional

$$f(x_{mn}) \leqslant f(F_{ij}^{ik}(x_{mn})).$$

Funkcija

$$y(t) = f\left[\begin{bmatrix} x_{11} & \ldots\ldots & x_{1N} \\ \ldots\ldots t & \ldots \bar{t} & \ldots\ldots \\ x_{M1} & \ldots\ldots & x_{MN} \end{bmatrix}\right]^{s} NM^{\frac{s}{r}}, \qquad t^{s} + \bar{t}^{s} = x_{ij}^{s} + x_{ik}^{s}$$

ima izvod

$$y'(t) = \frac{s}{r}\left[t^{r}+p\right]^{\frac{s-r}{r}} rt^{r-1} - \frac{s}{r}\left[\bar{t}^{r}+q\right]^{\frac{s-r}{r}} r\bar{t}^{r-1}\frac{t^{s-1}}{\bar{t}^{s-1}}$$

$$= st^{s-1}\left[\left[t^{r}+p\right]^{\frac{s-r}{r}} t^{r-s} - \left[\bar{t}^{r}+q\right]^{\frac{s-r}{r}} \bar{t}^{r-s}\right]$$

$$= st^{s-1}\left[\left[1+t^{-r}p\right]^{\frac{s-r}{r}} - \left[1+\bar{t}^{-r}q\right]^{\frac{s-r}{r}}\right]$$

Za $r>0$ je $y'(t)\geqslant 0$ ako je $t^{-r}p \geqslant \bar{t}^{-r}q$, tj. $\bar{t} : t \geqslant q^{\frac{1}{r}} : p^{\frac{1}{r}}$, a za $r<0$ je $y'(t)\geqslant 0$ ako je $t^{-r}p \geqslant \bar{t}^{-r}q$ što daje isti odnos. Time funkcija $y(t)$ ima maksimum za

$$t : \bar{t} = p^{\frac{1}{r}} : q^{\frac{1}{r}}$$

što daje vrednosti x_{ij}^{o} i x_{ik}^{o}.

Funkcional f na kompaktnom skupu X dostiže maksimum u zajedničkoj nepokretnoj tački (d_{mn}) svih preslikavanja F_{ij}^{ik}, $i=1,\ldots,M$, $j,k = 1,\ldots,N$. Pri tome je

$$d_{ij}^{r} : d_{ik}^{r} = p : q$$

$$= \left[\sum_{m=1}^{M} d_{mj}^{r} - d_{ij}^{r}\right] : \left[\sum_{m=1}^{M} d_{mk}^{r} - d_{ik}^{r}\right] =$$

$$= \left[\sum_{m=1}^{M} d_{mj}^{r} \right] : \left[\sum_{m=1}^{M} d_{mk}^{r} \right]$$

ili

$$d_{ij} : d_{ik} = M_r^{(m)}(d_{mn}) : M_r^{(m)}(d_{mn}).$$

Dakle, zajednička nepokretna tačka preslikavanja je matrica s proporcionalnim kolonama, a s time i proporcionalnim vrstama. Njeni elementi su oblika $d_{mn} = b_m c_n$, $m = 1, \ldots, M$, $n = 1, \ldots, N$. Time je

$$\begin{aligned} f(a_{mn}) \leqslant f(d_{mn}) &= f(b_m c_n) = \\ &= M_s^{(n)}(\, c_1 M_r(b_m), \ \ldots\ , \ c_N M_r(b_m)\,) \\ &= M_r(b_m)\ M_s(c_n) \\ &= M_r(\, b_1 M_s(c_n), \ \ldots\ , \ b_M M_s(c_n) \\ &= M_r^{(m)}\left[M_s^{(n)}(b_m c_n)\right], \qquad (d_{mn}) \in X \\ &= M_r^{(m)}\left[M_s^{(n)}(a_{mn})\right]. \end{aligned}$$

Eksplicitan izraz za elemente nepokretne tačke je

$$d_{ij} = \frac{M_r(a_{mj})\ M_s(a_{in})}{M_s^{(n)}\left[M_r^{(m)}(a_{mn})\right]},$$

tako da je

$$b_i = \frac{M_s(a_{in})}{\sqrt{M_s^{(n)}\left[M_r^{(m)}(a_{mn})\right]}}, \qquad c_j = \frac{M_r(a_{mj})}{\sqrt{M_s^{(n)}\left[M_r^{(m)}(a_{mn})\right]}},$$

$i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, N$.

Uzastopna primena preslikavanja F_{ij}^{ik} daje interpolacioni niz.

2.2.7. ANHARMONIJSKA RAZMERA SREDINA.

Anharmonijska razmera četiri tačke A, B, C, D na pravoj je broj

$$[A,B,C,D] = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} .$$

Pri tome je količnik AC/CB pozitivan ako su duži AC i CB istog smera, a negativan ako su suprotnog smera.

Harmonijska razmera je anharmonijska razmera koja ima vrednost -1. Anharmonijska razmera ima osobinu da se ne menja primenom projektivnog preslikavanja.

Anharmonijska razmera (dvorazmera) za brojeve $[a,b,c,d]$ se definiše na sličan način. Svojstvo očuvanja anharmonijske razmere je karakteristično svojstvo za bilinearna preslikavanja

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} .$$

Pojmovi razmere i (potencijalne) sredine su povezani posredstvom pojma mere.

HIPOTEZA. Neka je $s \in [-\infty, +\infty]$. Ako je $s > 0$, tada

$$\left|\left[M_{-1}(a), M_1(a), M_0(a), M_s(a)\right]\right| \leqslant \left|[-1,1,0,s]\right| , \tag{1}$$

ako je $s < 0$ važi suprotna nejednakost.

Jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = \dots = a_n$ ili $s = -1, 0, 1$, pri čemu nejednakost (1) treba napisati u obliku bez deljenja.

Nejednakost (1) se može zapisati i u oblicima

$$\left|\left[M_{-1}, M_1, M_0, M_s\right]\right| \leqslant \left|[-1,1,0,s]\right| , \quad M_s(a) = M_s$$

$$\left|\left[H, A, G, M_s\right]\right| \leqslant \left|[-1, 1, 0, s]\right| ,$$

$$\left|\frac{G - H}{A - G} : \frac{M_s - H}{A - M_s}\right| \leqslant \left|\frac{1 - s}{1 + s}\right| ,$$

$$\frac{G - H}{A - G} \leqslant \left|\frac{1 - s}{1 + s}\right| \left|\frac{M_s - H}{A - M_s}\right| ,$$

(2) $$|1+s|\,|A - M_s|(G - H) \leqslant |1 - s|(A - G)|M_s - H| .$$

Detaljnije,

$$s > 1 : \qquad \frac{1-s}{1+s} < [H\ A\ G\ M_s] < 0$$

$$0 < s < 1 : \qquad 0 < [H\ A\ G\ M_s] < \frac{1-s}{1+s}$$

$$-1 < s < 0 : \qquad \frac{1-s}{1+s} < [H\ A\ G\ M_s] < +\infty$$

$$s < -1 : \qquad -\infty < [H\ A\ G\ M_s] < \frac{1-s}{1+s} .$$

Time je za $s \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$

$$[H\ A\ G\ M_s] < \frac{1-s}{1+s} ,$$

ili $$(1+s)(A - M_s)(G - H) < (1-s)(A - G)(M_s - H),$$

za druge vrednosti parametra s važi suprotno.

Ako niz vektora (a_m) konvergira vektoru sa jednakim koordinatama, tada je

(3) $$\lim_{m\to\infty} \left[H(a_m), A(a_m), G(a_m), M_s(a_m)\right] = [-1,1,0,s] .$$

Dakle, anharmonijska razmera se može neprekidno dodefinisati i za vektore sa jednakim koordinatama.

Za pridruživanje $M : s \to M_s$ može se reći da je subprojektivno odnosno superprojektivno. Ako vektor a ima " približno " jednake koordinate , tada je preslikavanje

$$a : s \longrightarrow M_s(a)$$

" blizu " projektivnog preslikavanja. Anharmonijski odnos je tada aproksimiran bilinearnom funkcijom

$$f(s) = \frac{1 - s}{1 + s} \quad .$$

Anharmonijska razmera vrednosti - sredina $H(a)$, $G(a)$, $A(a)$ i $M_s(a)$ je približna razmeri brojeva -1, 0, 1, s. Kako je

$$\lim_{m \to \infty} \frac{G(a_m) - H(a_m)}{A(a_m) - G(a_m)} = 1 ,$$

time su vrednosti $M_s(a)$ na segmentu $[\min a , \max a]$, $s \in [-\infty , +\infty]$ raspoređene u istim (običnim) razmerama kao i brojevi s na realnoj pravoj tj. njenom segmentu $[-c, c]$, $c \in R$ (prava umanjena na beskrajno malom segmentu).

Za $s = -\infty$ i $s = +\infty$ nejednakost (1) postaje

$$\frac{H - \min}{A - \min} \leqslant \frac{G - H}{A - G} \leqslant \frac{\max - H}{\max - A} \quad ,$$

$\max = \max \{a_1, \ldots, a_n\}$; za $s = 2$

$$\frac{G - H}{A - G} \leqslant \frac{1}{3} \frac{K - H}{K - A} \quad .$$

Funkcional

$$f_s(a) = \left| [H \; A \; G \; M_s] \frac{1 + s}{1 - s} \right|$$

je mera ujednačenosti ili koncentracije koordinata vektora $a_1, \ldots, a_n$. Za $s > 0$ je $f_s(a) < 1$, vrednosti bliske 1 se dobijaju za vektore s ujednačenim koordinatama. U 2.13.2. je ova mera dopunjena s merom rasejanosti n - torke tačaka. Za razliku od nje, ova mera nije saglasna s relacijom $\prec$.
Odnos

$$f_s(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) \leqslant$$

$$\leqslant f_s(a_1, \ldots, \frac{a_i + a_j}{2}, \ldots, \frac{a_i + a_j}{2}, \ldots, a_n)$$

je u vrlo retkim slučajevima narušen, tako da odnos majoracije $x \prec y$ ne povlači $f_s(x) \leqslant f_s(y)$.

Neke nejednakosti se mogu napisati u obliku sličnom (1), npr. nejednakosti tipa Radoa i Popoviciua, kao i nejednakost H. Kobera, 1958. [KOB, MIT379]

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i + n(a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i a_j)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$$

se može napisati kao razmera

$$\frac{M_{1/2} - G}{A - G} \leqslant \frac{n-1}{n} .$$

2.3. J. HADAMARD, 1893. [HAR49]. Najpoznatija nejednakost u teoriji matrica je nejednakost J. Hadamarda. Kao posledica novog dokaza ove nejednakosti dobijena je karakterizacija pojma ortogonalne matrice.

TEOREMA A. Ako je A realna kvadratna matrica reda n, tada je

$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right] . \tag{1}$$

Jednakost važi ako i samo ako je

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{jn} = 0 \tag{2}$$

za svaki par različitih i,j ili kad je bar jedan od faktora s desne strane (1) jednak nuli (tj. kada (2) važi bar za jedno $i=j$).

D o k a z. Neka je

$$X = \left\{ (x_{ij}) \mid \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2,\ i=1,\ldots,n \right\}$$

i $f(A) = |A| \neq 0$. Neka je

$$F_i(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a'_{ij} = \frac{\sqrt{a_{i1}^2+\ldots+a_{in}^2}}{\sqrt{A_{i1}^2+\ldots+A_{in}^2}} A_{ij} \tag{3}$$

$j = 1,\ldots,n$, A_{ij} su kofaktori. Pokažimo da su preslikavanja F_i $(i=1,\ldots,n)$ monotono neopadajuća u odnosu na funkcional f. Relacija

$$f(A) \leqslant f(F_i(A))$$

je Cauchy-Schwartz-Buniakowskijeva nejednakost

$$(4)\qquad a_{i1}A_{i1}+\dots+a_{in}A_{in} \leqslant \frac{\sqrt{a_{i1}^2+\dots+a_{in}^2}}{\sqrt{A_{i1}^2+\dots+A_{in}^2}}\,(A_{i1}^2+\dots+A_{in}^2).$$

Jednakost u (4) važi jedino ako je vrsta $a_{i1},\dots,a_{in}$ proporcionalna vrsti odgovarajućih kofaktora $A_{i1},\dots,A_{in}$.

Skup zajedničkih nepokretnih tačaka preslikavanja $F_1,\dots,F_n$ nije prazan jer sadrži dijagonalnu matricu s dijagonalom $\sqrt{a_{i1}^2+\dots+a_{in}^2}$, $i=1,\dots,n$. Ako je $D = (d_{ij})$ proizvoljna matrica iz skupa zajedničkih nepokretnih tačaka, tada je

$$\begin{aligned}|D| &= |d_{i1}D_{i1}+\dots+d_{in}D_{in}|\\ &= \sqrt{d_{i1}^2+\dots+d_{in}^2}\ \sqrt{D_{i1}^2+\dots+D_{in}^2} = c_i(d_{i1}^2+\dots+d_{in}^2).\end{aligned}$$

gde su $c_i \neq 0$ $(i=1,\dots,n)$ koeficijenti proporcionalnosti. Odatle je

$$(5)\qquad |D|^n = \prod_{i=1}^{n} c_i \left[\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^2\right]$$

S druge strane je

$$|D| = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d_{n1} & \cdots & d_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{D_{11}}{c_1} & \cdots & \frac{D_{1n}}{c_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{D_{n1}}{c_n} & \cdots & \frac{D_{nn}}{c_n}\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c_1\cdots c_n}\begin{vmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ D_{n1} & \cdots & D_{nn}\end{vmatrix} = \frac{1}{c_1\cdots c_n}\,\big||D|\ D^{-1}\big|.$$

$$= \frac{1}{c_1\cdots c_n}\,|D|^n|D^{-1}| = \frac{1}{c_1\cdots c_n}\,|D|^{n-1}$$

Time je

$$|D|^n = c_1 \dots c_n \, |D|^2. \tag{6}$$

Jednakosti (5) i (6) daju

$$|D|^2 = \prod_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^2 \right] = \prod_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right].$$

Funkcional f najveću vrednost dostiže na kompaktnom skupu X na skupu zajedničkih nepokretnih tačaka preslikavanja $F_1, \dots, F_n$.

Iteracijom niza preslikavanja $F_1, \dots, F_n$ generiše se niz matrica koji konvergira (očigledno je da ima podniz koji konvergira) zajedničkoj nepokretnoj tački tih preslikavanja.

NAPOMENA. Funkcija

$$y(x) = \begin{vmatrix} x & \bar{x} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = xA_{11} + \bar{x}A_{12} + C, \quad x^2 + \bar{x}^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2$$

ima najveću vrednost ako je $x : \bar{x} = A_{11} : A_{12}$. Tako određena preslikavanja

$$F_{12}^{11}(A) = \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad a_{11}' = \frac{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}{\sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2}} A_{11},$$

slično se definišu i ostala preslikavanja, imaju isti skup zajedničkih nepokretnih tačaka kao i preslikavanja $F_1, \dots, F_n$.

Navedeni dokaz daje drugačiju karakterizaciju skupa matrica na kome važi Hadamardova jednakost, tako da se može formulisati sledeće tvrđenje.

TEOREMA B. Neka je A realna kvadratna matrica reda n. Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) Jednakost

$$v_i v_j = a_{i1}a_{j1} + \dots + a_{in}a_{jn} = 0$$

važi za svaki par različitih i,j, ili je bar jedna od vrsta nula-vektor.

(ii) Postoje konstante $c_i \neq 0$ takve da je

$$(A_{i1},\dots,A_{in}) = c_i(a_{i1},\dots,a_{in}), \quad i=1,\dots,n$$

ili je bar jedan od tih vektora nula-vektor.

TEOREMA C. Matrica A je ortogonalna ako i samo ako je ispunjen neki od međusobno ekvivalentnih uslova

(i) $$v_i v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(ii) $A'A = I$, ($AA' = I$), gde je A' transponovana matrica i I jedinična matrica

(iii) $A' = A^{-1}$

(iv) $A = \operatorname{adj} A'$

(v) Vrste matrice A su normirane

$$v_i^2 = a_{i1}^2 + \dots + a_{in}^2 = 1, \quad i=1,\dots,n$$

i srazmerne vrstama matrice kofaktora $\operatorname{adj} A'$

$$(A_{i1},\dots,A_{in}) = c_i(a_{i1},\dots,a_{in}), \quad c_i \neq 0, \quad i=1,\dots,n$$

Dobijeni uslov proporcionalnosti vrsta matrice i vrsta matrice kofaktora je analogon proporcionalnosti nizova stepena kod Hölderove nejednakosti i nekih drugih.

2.4. OSNOVNA NEJEDNAKOST GEOMETRIJSKOG PROGRAMIRANJA.

R.J. Duffin, E.L. Peterson i C. Zener, 1967., [DUF110] su dokazali nejednakost koja je osnova geometrijskog programiranja.

TEOREMA. Neka je x proizvoljan vektor s n komponenata i y proizvoljan vektor s n nenegativnih komponenata. Tada

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left[\ln \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] + \sum_{i=1}^{n} y_i \ln y_i - \left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] \ln \sum_{i=1}^{n} y_i ,$$

gde se podrazumeva da je $y \ln y = 0$ kada je $y = 0$.

Jednakost važi ako i samo ako je $y_i = \alpha e^{x_i}$, $i=1,..,n, \alpha \in R$.

D o k a z. Neka je $\sum_{i=1}^{n} y_i > 0$, prostor

$$K_y = \left\{ (z_1,\dots,z_n) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} y_i,\ z_i \geqslant 0,\ i=1,\dots,n \right\}$$

i funkcional

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i .$$

Neka je

$$\varphi(t) = f(y_1,\dots,y_{i-1},t,\dots,\bar{t},y_{j+1},\dots,y_n)$$

$$t + \bar{t} = y_i + y_j, \qquad t \in [0, y_i + y_j] .$$

Tada je

$$\varphi'(t) = \ln t + 1 - \ln \bar{t} - (x_i - x_j)$$

$$= \ln\left[\frac{t}{\bar{t}} : \frac{e^{x_i}}{e^{x_j}}\right] .$$

Time funkcija $\varphi(t)$ ima minimum kada je $t : \bar{t} = e^{x_i} : e^{x_j}$, ili eksplicitno

$$t_o = \frac{y_i + y_j}{e^{x_i} + e^{x_j}} e^{x_i}, \qquad \bar{t}_o = \frac{y_i + y_j}{e^{x_i} + e^{x_j}} e^{x_j}.$$

Preslikavanje

$$F_{ij}(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_j, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, t_o, \ldots, \bar{t}_o, \ldots, y_n)$$

je monotono nerastuće u odnosu na funkcional f

$$f(y) \geqslant f(F_{ij}(y)).$$

Zajednička nepokretna tačka $z = (z_1, \ldots, z_n)$ preslikavanja F_{ij} $(i,j=1,\ldots,n)$ je takva da je $z_i : z_j = e^{x_i} : e^{x_j}$, za sve i,j, pa je

$$z_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}} e^{x_i} \quad \text{ili} \quad \frac{z_i}{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \frac{e^{x_i}}{\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}}, \quad i=1,\ldots,n.$$

Na kompaktnom skupu K_y funkcional f ima minimum i taj minimum može biti jedino u nepokretnoj tački z. Iteracija niza preslikavanja $F_{11}, F_{12}, \ldots, F_{nn}$ generiše niz tačaka koji konvergira ka z. Dakle,

$$f(y) \geqslant f(F_{12}(y)) \geqslant \ldots \geqslant f(z) =$$

$$= \left[\ln \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\right]\left[\sum_{k=1}^{n} z_k\right] + \sum_{i=1}^{n} z_i \left[\ln e^{x_i} - \ln \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\right]$$

$$- \sum_{k=1}^{n} x_k z_k = 0.$$

NAPOMENA. Nejednakost E. Duca [Pseudogeometric inequalities, Anal. numer. et theor. approxim., 1987., RŽ88-12B1] je produženje navedene nejednakosti dobijeno tako što je $\ln \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$ zamenjeno s većim izrazom

$$\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} - 1 .$$

2.5. NEJEDNAKOSTI ZA INDEFINITNE FORME.

2.5.1. U ovoj tački su dati dokazi Aczélove, Popoviciuove i Bellmanove nejednakosti za indefinitne forme . Neke pretpostavke su ispravljene i dati su potrebni i dovoljni uslovi kada u Popoviciuovoj i Bellmanovoj nejednakosti važi jednakost. Takođe, dato je i jedno uopštenje i pojačanje Bellmanove nejednakosti.

Indefinitna forma je [BEL]

$$\phi(x) = (x_1^p - x_2^p - \dots - x_n^p)^{1/p} , \qquad p \geq 1$$

za vrednosti x_i u oblasti R određenoj pomoću

(a) $x_i \geq 0$

(b) $x_1 > (x_2^p + x_3^p + \dots + x_n^p)^{1/p}$.

Ovakve forme se pojavljuju u Einsteinovoj teoriji specijalne relativnosti. Sledeću teoremu je dokazao J. Aczél, 1956. [MIT58].

TEOREMA A. Neka su $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ dva niza realnih brojeva takvih da je

$$a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0, \quad \text{ili} \quad b_1^2 - b_2^2 - \dots b_n^2 > 0.$$

Tada

$$(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq (a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)^2,$$

s jednakošću ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni.

2.5.2. T. Popoviciu je uopštio Aczélovu nejednakost

$$(1)\quad (a_1^p-a_2^p-\dots-a_n^p)(b_1^p-b_2^p-\dots-b_n^p) \leqslant (a_1b_1-a_2b_2-\dots-a_nb_n)^p.$$

Uslovi

$$(2)\quad a_1^p-a_2^p-\dots-a_n^p > 0, \quad \text{ili} \quad b_1^p-b_2^p-\dots-b_n^p > 0$$

i $p \geqslant 1$ dati u [MIT] nisu dovoljni. Jedini izvorni članak Popoviciua u bibliotekama u našoj zemlji više ne postoji. Kontraprimer je $p = 3$, $a = b = (2,1,1,1)$ kada (1) postaje $5\cdot 5 \leqslant 1$. Za svako $p > 2$, $n = 2$ i $a_1 > a_2$ važi suprotna nejednakost

$$(3)\quad (a_1^p - a_2^p)^2 > (a_1^2 - a_2^2)^p$$

ili

$$t-1 > (t^q-1)^{1/q}, \quad t = \left[\frac{a_1}{a_2}\right]^p, \quad q = \frac{2}{q}.$$

Funkcija $y(t) = (t^q-1)^{1/q}$, $t \geqslant 1$, $0 < q < 1$ ima izvod $y'(t) = (1-t^{-q})^{\frac{1-q}{q}}$ s granicama $0 \leqslant y'(t) < 1$, iz čega sledi (3).

TEOREMA B. Ako su $a = (a_1,\dots,a_n)$ i $b = (b_1,\dots,b_n)$ nizovi nenegativnih realnih brojeva takvih da je

$$(4)\quad a_1^p - a_2^p - \dots - a_n^p \geqslant 0 \quad \text{i} \quad b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p \geqslant 0,$$

tada, za $0 < p \leqslant 2$ važi

$$(5)\quad (a_1^p - a_2^p - \dots - a_n^p)^{1/p}(b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n,$$

i obrnuto za $p < 0$.

Ako je $p<2$ jednakost važi ako i samo ako je $a = (a_1,0,\dots,0)$ i $b = (b_1,0,\dots,0)$. Ako je $p = 2$ jednakost važi ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni.

D o k a z. Neka je $0<p\leqslant 2$,

$$X = \left\{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1\geqslant 0,\dots, x_n\geqslant 0,\ x_1^p - x_2^p - \dots -x_n^p = a_1^p - a_2^p - \dots - a_n^p\right\},$$

$$Y = \left\{(y_1,\dots,y_n) \mid y_1\geqslant 0,\dots, y_n\geqslant 0,\ y_1^p - y_2^p - \dots -y_n^p = b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p\right\},$$

i funkcional $f : X\times Y \longrightarrow R$

$$f(x,y) = (x_1y_1 - x_2y_2 - \dots - x_ny_n)^p - (x_1^p - x_2^p - \dots -x_n^p)(y_1^p - y_2^p - \dots - y_n^p).$$

Ako je $a_1=a_i$ ili $b_1=b_i$ za neko $i\in\{2,3,\dots,n\}$, tada je (5) trivijalno. Dakle, može se pretpostaviti da je $a_1>a_i$ i $b_1>b_i$ za sve $i = 2,3,\dots,n$.

Neka je $\alpha = \dfrac{a_i}{a_1}$, $\beta = \dfrac{b_i}{b_1}$ i $\alpha<\beta$. Neka je

(6) $$b' = (b_1', b_2,\dots,b_{i-1}, b_i', b_{i+1},\dots,b_n),$$

gde su b_1' i b_i' takvi da je

(7) $$b_1'^p - b_i'^p = b_1^p - b_i^p \quad \text{i} \quad b_1' : b_i' = a_1 : a_i.$$

Uslovi (7) su zadovoljeni ako je

$$b_1' = \delta a_1,\quad b_i' = \delta a_i,\qquad \delta = \left[\frac{b_1^p - b_i^p}{a_1^p - a_i^p}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Odnos $\alpha<\beta$ povlači da je $b_1'<b_1$ i $b_i'<b_i$.

Pokažimo da je $f(a,b)>f(a,b')$ tj.

$$a_1b_1 - a_ib_i > a_1b_1' - a_ib_i' = \delta(a_1^2 - a_i^2),$$

ili

(8) $$\frac{b_1^p-b_i^p}{a_1^p-a_i^p} < \left[\frac{a_1b_1-a_ib_i}{a_1^2-a_i^2}\right]^p, \qquad \frac{1-\beta^p}{(1-\alpha\beta)^p} < \frac{1-\alpha^p}{(1-\alpha\alpha)^p}.$$

Neka je $g(t) = \frac{1-t^p}{(1-t)^p}$, $t\in[\alpha, 1]$, tako da je $g'(t)=\frac{p(\alpha-t^{p-1})}{(1-\alpha t)^{p+1}}$.

Ako je $0<p\leqslant 1$ tada $\alpha<1\leqslant t^{p-1}$, a ako je $1<p\leqslant 2$ tada $\alpha\leqslant \alpha^{p-1}\leqslant t^{p-1}$, tako da je $g'(t)<0$, $\alpha<t<1$, što povlači (8).

U slučaju da je $\alpha>\beta$ slično se definiše a' . Presli - kavanja

$$F_i : X\times Y \longrightarrow X\times Y, \quad i=2,\dots,n$$

$$F_i(x,y) = \begin{cases} (x,y'), & \text{ako } x_iy_1\leqslant x_1y_i \\ (x',y), & \text{ako } x_iy_1\geqslant x_1y_i \end{cases},$$

su u saglasnosti s funkcionalom f - monotono su neopadajuća

$$f(x,y) \geqslant f(F_i(x,y)).$$

Neka je

(9) $$F_{i_1}, F_{i_2}, \dots , F_{i_n}, \dots$$

niz obrazovan od preslikavanja $F_2,\dots,F_n$ u kome se svako od ovih preslikavanja pojavljuje beskonačno puta. Primena niza (9) generiše niz vektora

(10) $$(a,b), \quad (a^{(1)},b^{(1)}) = F_{i_1}(a,b), \dots$$

$$\dots, \quad (a^{(n)},b^{(n)}) = F_{i_n}(a^{(n-1)},b^{(n-1)}), \dots .$$

Koordinate vektora u (10) ne rastu, tako da postoji

$$\lim_{m\to\infty} (a^{(m)}, b^{(m)}) = (c,d) \in X \times Y$$

i

(11) $f(a,b) \geqslant f(a^{(1)},b^{(1)}) \geqslant \ldots \geqslant f(a^{(m)},b^{(m)}) \geqslant \ldots \geqslant f(c,d).$

Preslikavanje F_k, $k \in \{2,3,\ldots,n\}$ je neprekidno tako da je

$$\lim_{m\to\infty} F_k(a^{(m)}, b^{(n)}) = F_k(c,d).$$

Neka je $\{j_m\}$ niz indeksa takvih da je $i_{j_m} = k$, $m \in N$. Niz

$$(a^{(i_{j_m}+1)}, b^{(i_{j_m}+1)}) = F_k(a^{(i_{j_m})}, b^{(i_{j_m})}), \quad m=1,2,\ldots$$

je podniz od dva konvergentna niza

$$\{(a^{(m)}, b^{(m)})\} \quad \text{i} \quad \{F_k(a^{(m)}, b^{(m)})\},$$

tako da oni konvergiraju istoj granici $(c,d) = F_k(c,d)$.

Dakle, (c,d) je zajednička nepokretna tačka za sva preslikavanja $F_2,\ldots,F_n$, što povlači proporcionalnost $d = \lambda c$, $\lambda > 0$.

Ostaje da se dokaže

$$f(c,c) = (c_1^2 - c_2^2 - \ldots - c_n^2)^p - (c_1^p - c_2^p - \ldots - c_n^p)^2 \geqslant 0.$$

Neka je $i \in \{2,\ldots,n\}$,

$$h_i(t) = (t^2 - c_2^2 - \ldots - c_{i-1}^2 - \bar{t}^2 - \ldots - c_n^2)^p -$$

$$- (t^p - c_2^p - \ldots - c_{i-1}^p - \bar{t}^p - \ldots - c_n^p)^2,$$

pri tome je $t \geqslant \sqrt{c_1^2 - c_i^2}$, $t^2 - \bar{t}^2 = c_1^2 - c_i^2$, odakle se diferenciranjem dobija $t - \bar{t}\bar{t}' = 0$. Izvod funkcije je

$$h_i'(t) = -2(t^p - c_2^p - \ldots - \bar{t}^p \ldots - c_n^p)pt(t^{p-2} - \bar{t}^{p-2}) \geqslant 0,$$

tako da je
$$f(c,c) \geqslant f(H_i(c),H_i(c)),$$

gde je
$$H_i(c) = (\sqrt{c_1^2 - c_i^2}, c_2, \ldots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \ldots, c_n).$$

Zato je
$$f(c,c) \geqslant f(H_2(c),H_2(c)) \geqslant \ldots \geqslant$$

(12)
$$\geqslant f(H_n(\ldots H_2(c)\ldots),H_n(\ldots H_2(c)\ldots)) =$$

$$= f((\sqrt{c_1^2 - c_2^2 - \ldots - c_n^2}, 0, \ldots, 0), (\sqrt{c_1^2 - c_2^2 - \ldots - c_n^2}, 0, \ldots, 0)) = 0.$$

Ako je $p < 0$, tada je
$$\phi(a)\phi(b) \geqslant a_1b_1 \geqslant a_1b_1 - a_2b_2 - \ldots - a_nb_n,$$

i očigledno je kada važi jednakost. Ako je $p=0$ uslovi (4) nisu zadovoljeni, tako da je teorema tačna.

Za $p < 2$ jednakost u (5) važi ako i samo ako ona važi u nizovima (11) i (12), što povlači da mora biti $a = (a_1, 0, \ldots, 0)$ i $b = (b_1, 0, \ldots, 0)$. Ako je $p = 2$, tada je $f(c,c) = 0$, tako da jednakost važi jedino za proporcionalne nizove.

2.5.3. Za Bellmanovu nejednakost (13) u [MIT] su pretpostavljeni isti uslovi (2). Protivprimer je $p = 3$, $a = (\sqrt[3]{9}, 2, 0, \ldots, 0)$, $b = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, kada (13) postaje $1 + (-1) \leqslant \sqrt[3]{-18}$. U originalnom članku [BEL], kao i u [BEC36-39], pretpostavka je stroža

$$a_1^p - a_2^p - \ldots - a_n^p > 0 \quad \text{i} \quad b_1^p - b_2^p - \ldots - b_n^p > 0.$$

Ovi uslovi su u sledećoj teoremi malo oslabljeni.

TEOREMA C. Ako su $a = (a_1,\ldots,a_n)$ i $b = (b_1,\ldots,b_n)$ dva niza nenegativnih realnih brojeva koji zadovoljavaju uslov

$$a_1^p - a_2^p - \ldots - a_n^p \geqslant 0 \quad \text{i} \quad b_1^p - b_2^p - \ldots - b_n^p \geqslant 0,$$

tada, za $p>1$ važi

$$(a_1^p - a_2^p - \ldots - a_n^p)^{1/p} + (b_1^p - b_2^p - \ldots - b_n^p)^{1/p} \leqslant \tag{13}$$

$$\leqslant \left((a_1+b_1)^p - (a_2+b_2)^p - \ldots - (a_n+b_n)^p \right)^{1/p} .$$

Jednakost važi ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni.

D o k a z. Neka je funkcional

$$f(a,b) = \phi(a,b) - \phi(a) - \phi(b). \tag{14}$$

Nejednakost $f(a,b) \geqslant f(a,b')$, v. (6), je ekvivalentna s

$$\begin{aligned}(a_1+b_1)^p - (a_i+b_i)^p &\geqslant (a_1+\delta a_1)^p - (a_i+\delta a_i)^p \\ &= (a_1^p - a_i^p)\,(\,1+\delta\,)^p \\ &= ((a_1^p-a_i^p)^{1/p} + (b_1^p-b_i^p)^{1/p})^p\end{aligned}$$

ili

$$(a_1^p-a_i^p)^{1/p} + (b_1^p-b_i^p)^{1/p} \leqslant \left[(a_1+b_1)^p - (a_i+b_i)^p\right]^{1/p} \tag{15}$$

što predstavlja nejednakost (13) za $n=2$.

Radi određenosti, neka je $\dfrac{a_i}{a_1} \leqslant \dfrac{b_i}{b_1}$. Funkcija

$$g(t) = \left[(t+b_1)^p - (a_i+b_i)^p\right]^{1/p} - (t^p - a_i^p)^{1/p} - (b_1^p - b_i^p)^{1/p} ,$$

gde je $t \geqslant \dfrac{b_1}{b_i} a_i$, ima izvod

$$g'(t) = \left[(t+b_1)^p - (a_i+b_i)^p\right]^{\frac{1-p}{p}} (t+b_1)^{p-1} - (t^p - a_i^p)^{\frac{1-p}{p}} t^{p-1}.$$

Relacija $g'(t) \geqslant 0$ se može svesti na

$$(t+b_1)^p\ (t^p-a_i^p) \geqslant \left[(t+b_1)^p - (a_i+b_i)^p\right] t^p,$$

tj. $t^p(a_i+b_i)^p \geqslant a_i^p(t+b_1)^p$ i time $tb_i \geqslant b_1 a_i$.

Dakle, $g(a_1) \geqslant g(\frac{b_1}{b_i} a_i) = 0$, što dokazuje (15).

Kao i u dokazu prethodne teoreme B. i ovde se može formirati niz (11). Funkcija (14) ima nultu vrednost za proporcionalne nizove c i d - kada jedino važi jednakost u nejednakosti (13).

Napomenimo da se u ovom dokazu može transformisati samo jedan vektor, npr. $b, b^{(1)}, \dots , b^{(n)}, \dots$, koji konvergira ka vektoru proporcionalnom vektoru a.

2.6.1. KOLIČNIK SREDINA. Posebni slučajevi odnosa sredina $\frac{A}{H}$ i $\frac{K}{A}$ su ocenjeni u nejednakostima Schweitzera i Polya - Szegöe. Gornju granicu odnosa sredina

$$Q_{s,t}(a) = \frac{M_s^{(n)}(a)}{M_t^{(n)}(a)}, \quad -\infty < t < s < +\infty$$

je odredio W. Specht, 1960. [SPE], a G.T. Cargo i O. Shisha, 1962. [SHI] su ponovo dobili isti rezultat sa uslovima kada nastupa jednakost [MIT79]. Od nejednakosti koje su ovim postupkom nezavisno ponovo dobijene, ove formule (za neponderisane sredine) su najsloženije. Pri tome je najpre razmatran odnos M_s i A - jednostavniji odnos koji je i istorijski ranije rešen od strane K. Knoppa, 1935.

2.6.2. TEOREMA. Ako je $0 < m \leqslant a_i \leqslant M$ $(i=1,\ldots,n)$ i $t < s$, tada važi sledeća nejednakost

(1) $$Q_{s,t}(a) \leqslant \Gamma_{s,t},$$

gde je $C = \dfrac{M}{m}$ i

$$\Gamma_{s,t} = \left[\frac{t(C^s - C^t)}{(s-t)(C^t-1)}\right]^{\frac{1}{s}} \left[\frac{s(C^t-C^s)}{(t-s)(C^s-1)}\right]^{-\frac{1}{t}} \qquad (st \neq 0)$$

$$= \left[\frac{C^{s/(C^s-1)}}{e\ \ln(C^{s/(C^s-1)})}\right]^{\frac{1}{s}} \qquad (t=0)$$

$$= \left[\frac{C^{t/(C^t-1)}}{e\ \ln(C^{t/(C^t-1)})}\right]^{-\frac{1}{t}} \qquad (s=0).$$

Jednakost u (1) za $st \neq 0$ važi ako i samo ako su

$$K = \frac{1}{s-t}\left[\frac{sC^s}{C^s-1} - \frac{tC^t}{C^t-1}\right] n$$

$$L = \frac{1}{s-t}\left[\frac{t}{C^t-1} - \frac{s}{C^s-1}\right] n$$

celi brojevi i ako je K brojeva od $a_1,\ldots,a_n$ jednako m, a L brojeva jednako M.

D o k a z. Neka je funkcional

$$f(a) = Q_{s,t}(a), \qquad t > 0.$$

Neka je $a_i \leqslant a_j$ i

$$F_{ij}(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_n) = (a_1,\ldots,a_i-u,\ldots,a_j+v,\ldots,a_n),$$

gde je $u \cdot a_i^{t-1} = v \cdot a_j^{t-1}$. Ako su u i v beskrajno male nenegativne veličine, tada je

$$a_i^t + a_j^t = a_i^t\left(1 - t\frac{u}{a_i}\right) + a_j^t\left(1 + t\frac{v}{a_j}\right) = (a_i - u)^t + (a_j + v)^t$$

$$a_i^s + a_j^s \leqslant a_i^s\left(1 - s\frac{u}{a_i}\right) + a_j^s\left(1 + s\frac{v}{a_j}\right) = (a_i - u)^s + (a_j + v)^s .$$

(Drukčije iskazano, ako je

$y(x) = f((a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, \bar{x}, a_{j+1}, \ldots, a_n)),$

gde je $x^t + \bar{x}^t = a_i^t + a_j^t = \text{const}$. ("vezane" promenljive)

$m \leqslant x \leqslant M$, $m \leqslant \bar{x} \leqslant M$ i $x \leqslant \bar{x}$, tj. $x \leqslant \left[\frac{a_i^t + a_j^t}{2}\right]^{\frac{1}{t}} = M_t^{(2)}(a_i, a_j)$,

tada je $y(x)$ nerastuća funkcija po x.)

Time je funkcional f monotono neopadajući u odnosu na preslikavanja F_{ij} $\qquad f(a) \leqslant f(F_{ij}(a))$,

pri čemu su u i v određeni tako da je $m \leqslant a_i - u \leqslant M$, $m \leqslant a_j + v \leqslant M$ i tačna je bar jedna od jednakosti $a_i - u = m$ ili $a_j + v = M$. Posle konačno primena preslikavanja F_{ij} dobija se vektor

$$b = (m, \ldots, m, d, M, \ldots, M)$$

sa k i l elemenata jednakih m i M respektivno i nejednakost

$$f(a) \leqslant f(b) = \frac{\left[km^s + d^s + lM^s\right]^{\frac{1}{s}}}{\left[km^t + d^t + lM^t\right]^{\frac{1}{t}}} = g(d).$$

Sada je

$$g'(d) = \left[(km^t + lM^t)\, d^{\,s-t} - km^t - lM^t\right] d^{\,t-1} M_s^{1-s}(b) M_t^{-t-1}(b),$$

tako da $g(d)$, $m \leqslant d \leqslant M$ najveću vrednost dostiže na granici segmenta $[m,M]$.

Otuda proizlazi da je

$$f(a) \leqslant \frac{\left[km^s + \bar{k}M^s\right]^{1/s}}{\left[km^t + \bar{k}M^t\right]^{1/t}} = h(k),$$

gde je k racionalan broj iz segmenta $[0,1]$ i $k+\bar{k} = 1$. Ispitajmo ekstenziju funkcije $h(k)$ na ceo segment $[0,1]$.

Izvod funkcije $h(k)$ je

$$\left[km^s+\bar{k}M^s\right]^{1-\frac{1}{s}} \left[km^t+\bar{k}M^t\right]^{\frac{1}{t}+1} h'(k) =$$

$$= \frac{1}{s}(m^s-M^s)(km^t+\bar{k}M^t) - \frac{1}{t}(m^t-M^t)(km^s-\bar{k}M^s)$$

$$= \frac{m^{s+t}}{st\bar{k}}\left\{\varkappa\left[s(C^t-1) - t(C^s-1)\right] + sC^s(C^t-1) - tC^t(C^s-1)\right\} = i(\varkappa),$$

gde je $\varkappa = \frac{k}{\bar{k}} \geqslant 0$. Koeficijent uz $\varkappa$ je negativan jer je $\frac{C^t - C^0}{t - 0} < \frac{C^s - 0}{s - 0}$. Slobodni član u vitičastoj zagradi je pozitivan jer je funkcija $y(x) = \frac{xC^x}{C^x-1}$ rastuća, njen izvod je

$$y'(x) = \frac{C^x - x\ln C - 1}{[C^x - 1]^2} \geqslant 0.$$

Sem toga, neka je

$$(2) \qquad \varkappa_o = \frac{sC^s(C^t-1) - tC^t(C^s-1)}{t(C^s-1) - s(C^t-1)}$$

rešenje jednačine $i(\varkappa) = 0$. Time je

$$k_o = \frac{sC^s(C^t-1) - tC^t(C^s-1)}{sC^s(C^t-1) - tC^t(C^s-1) + t(C^s-1) - s(C^t-1)}$$

$$= \frac{sC^s(C^t-1)-tC^t(C^s-1)}{(s-t)(C^s-1)(C^t-1)}$$

$$= \frac{1}{s-t}\left[\frac{sC^s}{C^s-1} - \frac{tC^t}{C^t-1}\right]$$

i

$$\bar{k}_o = \frac{t(C^s-1)-s(C^t-1)}{(s-t)\ (C^s-1)\ (C^t-1)}$$

$$= \frac{1}{s-t}\left[\frac{t}{C^t-1} - \frac{s}{C^s-1}\right] .$$

Zaključuje se da je $i(\varkappa) > 0$ za $\varkappa \in (0, \varkappa_o)$ i $i(\varkappa) < 0$ za $\varkappa > \varkappa_o$ i time $h'(k) > 0$ za $k \in (0, k_o)$ i $h'(k) < 0$ za $k \in (k_o, 1)$. Funkcija $h(k)$ ima maksimum

$$h(k_o) = \left[(s-t)(C^s-1)(C^t-1)\right]^{\frac{1}{t} - \frac{1}{s}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left[sC^s(C^t-1) - tC^t(C^s-1) + tC^s(C^s-1) - sC^s(C^t-1)\right]^{\frac{1}{s}}}{\left[sC^s(C^t-1) - tC^t(C^s-1) + tC^t(C^s-1) - sC^t(C^t-1)\right]^{\frac{1}{t}}}$$

$$= \left[(s-t)(C^s-1)(C^t-1)\right]^{\frac{1}{t} - \frac{1}{s}} \frac{\left[t(C^s-1)(C^s-C^t)\right]^{\frac{1}{s}}}{\left[s(C^t-1)(C^s-C^t)\right]^{\frac{1}{t}}}$$

$$= \Gamma_{s,t} .$$

Za slučaj $s < 0 < t$, kao i $t < 0$, jedina promena u dokazu je u smeru nekih pomoćnih nejednakosti.

Odredimo $\Gamma_{s,o} = \lim\limits_{t \to o} \Gamma_{s,t}$. Prema definiciji izvoda

je $\dfrac{t}{C^t-1} \xrightarrow[t \to o]{} \dfrac{1}{\ln C}$. Takođe,

$$\left[\frac{s-t}{s}\right]^{\frac{1}{t}} = \left[1 - \frac{t}{s}\right]^{-\frac{s}{t}(-\frac{1}{s})} \xrightarrow[t \to o]{} e^{-\frac{1}{s}} ,$$

dalje se dobija

$$\lim_{t\to o}\left[\frac{C^s-1}{C^s-C^t}\right]^{\frac{1}{t}} = \exp\left\{\lim_{t\to o}\left[\frac{C^s-1}{C^s-C^t}-1\right]\frac{1}{t}\right\}=$$

$$= \exp\left[\lim_{t\to o}\frac{C^t-1}{C^s-C^t}\;\frac{1}{t}\right] = \exp\frac{\ln C}{C^s-1} = C^{\left[\frac{1}{C^s-1}\right]}.$$

Tako je

$$\Gamma_{s,o} = \lim_{t\to o}\Gamma_{s,t} = \left[\frac{1}{\ln C}\right]^{\frac{1}{s}}\left[\frac{C^s-1}{s}\right]^{\frac{1}{s}} e^{-\frac{1}{s}}\, C^{\left[\frac{1}{C^s-1}\right]},$$

što daje izraz iz teoreme. Preostala ocena se dobija na sličan način. Jednakost (1) važi jedino ako funkcija h dostiže maksimum.

Takođe, primetimo da je

$$\Gamma_{+\infty,t} = \lim_{s\to+\infty}\Gamma_{s,t} = C = \Gamma_{s,-\infty},$$

što je očigledna ocena

$$Q_{+\infty,t} = \frac{M}{M_t} < \Gamma_{+\infty,t} = \frac{M}{m}.$$

2.6.3. Nejednakost (1) važi i za ponderisane sredine, u dokazu treba samo dopisati ponderske koeficijente. Takođe, isti dokaz za ocenu količnika $M_s : M_t$ važi i za sve funkcije $F(x,y)$ čiji je izvod oblika

$$F(M_s,M_t)' = G\left[M_s'M_t - M_sM_t'\right]$$

tj.

(2) $\quad g(u)' = F'(x(u),y(u)) = G(u)\left[x'(u)y(u) - x(u)y'(u)\right],$

$x(u),\ y(u)\quad m,M\;$ i $\;G(u)\quad 0.$ S druge strane je

(3) $$g'(u) = F_x'x'(u) + F_y'y'(u).$$

Iz (2) i (3) sledi da je $F_x' = Gy$ i da je $F_y' = -Gx$.

Time su dobijeni uslovi koji su ekvivalentni (2)

(4) $$F'_x > 0 \quad \text{i} \quad xF'_x + yF'_y = 0.$$

Parcijalna diferencijalna jednačina (4) ima pridruženu karakterističnu jednačinu

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

čija su rešenja $z = C_1$, $x / y = C_2$. Time su sva rešenja jednačine (4) funkcije oblika $F(x,y) = f(\frac{x}{y})$, gde je f proizvoljna funkcija. Zahtev nenegativnosti parcijalnog izvoda $F'_x = f'(\frac{x}{y})\frac{1}{y} > 0$ se svodi na zahtev da je funkcija f rastuća.

Dakle, ako je $f(u)$ strogo rastuća funkcija na segmentu $\left[\frac{m}{M}, \frac{M}{m}\right]$, tada je

(5) $$f\left(\frac{M_s}{M_t}\right) \leqslant f\left(\frac{(Km^s + LM^s)^{1/s}}{(Km^t + LM^t)^{1/t}}\right),$$

što je očigledna posledica nejednakosti (1).

PRIMER 1. Funkcija $f(u) = \frac{u-1}{u+1}$, $u > 1$ je rastuća , tako da za $st \neq 0$ važi

$$\frac{M_s-M_t}{M_s+M_t} \leqslant \frac{t^{\frac{1}{s}}(s-t)^{\frac{1}{t}}\left[C^s-1\right]^{\frac{1}{t}}\left[C^s-C^t\right]^{\frac{1}{s}} - t^{\frac{1}{s}}(s-t)^{\frac{1}{s}}\left[C^t-1\right]^{\frac{1}{s}}\left[C^s-C^t\right]^{\frac{1}{t}}}{t^{\frac{1}{s}}(s-t)^{\frac{1}{t}}\left[C^s-1\right]^{\frac{1}{t}}\left[C^s-C^t\right]^{\frac{1}{s}} + t^{\frac{1}{s}}(s-t)^{\frac{1}{s}}\left[C^t-1\right]^{\frac{1}{s}}\left[C^s-C^t\right]^{\frac{1}{t}}}$$

posebno je

$$\frac{A - G}{A + G} \leqslant \frac{C^{\frac{1}{C-1}} - e \ln C^{\frac{1}{C-1}}}{C^{\frac{1}{C-1}} + e \ln C^{\frac{1}{C-1}}}.$$

PRIMER 2. Neka je

$$f(u) = \frac{\left[u^a+1\right]^{\frac{1}{a}}}{\left[u^b+1\right]^{\frac{1}{b}}}, \quad a>b,\ u>1,$$

tada

$$(u^b+1)^{\frac{2}{b}} f'(u) = \frac{1}{a}\left[u^a+1\right]^{\frac{1}{a}-1} a\,u^{a-1}\left[u^b+1\right]^{\frac{1}{b}} -$$

$$- \left[u^a+1\right]^{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}\left[u^b+1\right]^{\frac{1}{b}-1} b\,u^{b-1}$$

$$= \left[u^a+1\right]^{\frac{1}{a}-1}\left[u^b+1\right]^{\frac{1}{b}-1}\left[u^{a-1}(u^b+1) - u^{b-1}(u^a+1)\right]$$

$$= \left[u^a+1\right]^{\frac{1}{a}-1}\left[u^b+1\right]^{\frac{1}{b}-1}\left[u^{a-1} - u^{b-1}\right] > 0,$$

jer je $u^{a-1} > u^{b-1}$. Time je

$$\frac{M_a(M_s,M_t)}{M_b(M_s,M_t)} = \frac{\left[M_s^a + M_t^a\right]^{\frac{1}{a}}}{\left[M_s^b + M_t^b\right]^{\frac{1}{b}}}\, 2^{\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right]} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left[\frac{1}{2}\left[\frac{t(C^s-C^t)}{(s-t)(C^t-1)}\right]^{\frac{a}{s}} + \frac{1}{2}\left[\frac{s(C^s-C^t)}{(s-t)(C^s-1)}\right]^{\frac{a}{t}}\right]^{\frac{1}{a}}}{\left[\frac{1}{2}\left[\frac{t(C^s-C^t)}{(s-t)(C^t-1)}\right]^{\frac{b}{s}} + \frac{1}{2}\left[\frac{s(C^s-C^t)}{(s-t)(C^s-1)}\right]^{\frac{b}{t}}\right]^{\frac{1}{b}}}$$

POSLEDICA. Najgrublja ocena $1 \leqslant \Gamma_{s,t} \leqslant C$ daje nejednakost

$$1 \leqslant \left[\frac{t}{s-t}\,\frac{C^s-C^t}{C^t-1}\right]^{\frac{1}{s}}\left[\frac{s}{t-s}\,\frac{C^t-C^s}{C^s-1}\right]^{-\frac{1}{t}} \leqslant C$$

koja je ekvivalentna sledećoj

$$1 \leqslant \left[\frac{C^s-C^o}{s-o}\right]^{s-o} \left[\frac{C^o-C^t}{o-t}\right]^{o-t} \left[\frac{s-t}{C^s-C^t}\right]^{s-t} \leqslant C^{st},$$

nejednakosti čiji opšti oblik ($n=3$) sadrži izraz

$$\left[\frac{C^s-C^t}{s-t}\right]^{s-t} \left[\frac{C^t-C^u}{t-u}\right]^{t-u} \left[\frac{C^u-C^s}{u-s}\right]^{u-s} .$$

NAPOMENA. Jedan obrat tvrđenja (5) glasi : Funkcija $F(x,y)$, $x \geqslant y \geqslant 0$ koja ima osobinu da $F(M_s(a),M_t(a))$ dostiže maksimum za vektor određen u teoremi, za sve parametre n,s,t,m,M i proizvoljne pondere, je nužno homogena funkcija nultog stepena $F(x,y) = f(x/y)$ i $F'_x > 0$.

2.7. O OBRATU CAUCHYEVE NEJEDNAKOSTI.

P. Schweitzer [BEC44], kao i G. Pólya - G. Szegö,1925. [MIT60] su dokazali obrat Cauchyeve nejednakosti. U drugom delu tačke je dato uopštenje koje umesto kvadratnih suma (sredina) ima sredine proizvoljnog stepena, ovo uopštenje sadrži i diskretnu nejednakost J. Karamate. Time su jednom formulom obuhvaćene ove dve nejednakosti, kao i odnos $M_s : A$.

2.7.1. TEOREMA A. Ako je $0 < m_1 \leqslant x_i \leqslant M_1$, $0 < m_2 \leqslant y_i \leqslant M_2$, $i = 1,\dots,n$, tada

$$(1) \qquad 1 \leqslant \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right]^2} \leqslant \left[\frac{\left[\frac{M_1M_2}{m_1m_2}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{m_1m_2}{M_1M_2}\right]^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^2 .$$

Jednakost u drugoj nejednakosti (1) važi ako i samo ako su brojevi

$$K = \frac{\frac{M_1}{m_1}}{\frac{M_1}{m_1} + \frac{M_2}{m_2}} n, \qquad L = \frac{\frac{M_2}{m_2}}{\frac{M_1}{m_1} + \frac{M_2}{m_2}} n$$

prirodni i ako je K odnosno L brojeva $x_1,\dots,x_n$ jednako m_1 odn. M_1 respektivno, i ako je odgovarajući broj $b_1,\dots,b_n$ jednak M_2 i m_2 respektivno. (Dopuna: Jednakost očigledno važi i ako je $m_1 = M_1$ i $m_2 = M_2$.)

D o k a z. Prva nejednakost u (1) je Cauchyeva nejednakost. Neka je

$$X = \left\{ z = (z_1,\dots,z_n) \mid z_1+\dots+z_n = x_1+\dots+x_n \right\}$$

i $f(x,y)$ funkcional na X određen srednjim izrazom u (1). Može se pretpostaviti da je

(2) $$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \quad \text{i} \quad y_1 \geqslant y_2 \geqslant \dots \geqslant y_n,$$

jer se sume u brojiocu $f(x,y)$ ne menjaju preuređenjem, dok na osnovu teoreme Hardy - Littlewood - Pólya imenilac ima najmanju vrednost (a time funkcional najveću) za suprotno uređene nizove (2).

Ako je

$$F(x) = (m_1,\dots,m_1,x_i-d,\dots,x_j+d,M_1,\dots,M_1),$$
$$m_1 < x_i, x_j < M_1, \qquad d = \min\left\{x_i-m_1, M_1-x_j\right\},$$

tada je

$$x_i^2 + x_j^2 \leqslant (x_i-d)^2 + (x_j+d)^2$$

i

$$x_iy_i + x_jy_j \geqslant x_iy_i+x_jy_j-d(y_i-y_j) = (x_i-d)y_i + (x_j+d)y_j.$$

Time je preslikavanje F monotono rastuće u odnosu na funkcional f

$$f(a,b) \leqslant f(F(a),b).$$

Primenom preslikavanja F može se obrazovati konačan monotono rastući niz u odnosu na funkcional

$$f(a,b) \leqslant f(a',b) \leqslant \ldots \leqslant f(c,b),$$

gde je

$$c = (m_1,\ldots,m_1,d,M_1,\ldots,M_1), \quad m_1 \leqslant d \leqslant M_1$$

vektor sa k i l elemenata jednakih donjoj i gornjoj granici respektivno - nepokretna tačka preslikavanja F.
Neka je $g(d) = f(c,b)$, tada je

$$\frac{b_1^2 + \ldots + b_n^2}{\left[m_1(b_1+\ldots+b_k) + db_{k+1} + M_1(b_{k+2}+\ldots+b_n)\right]^2}\, g'(d) =$$

$$= \; 2d\left[m_1(b_1+\ldots+b_k)+M_1(b_{k+2}+\ldots+b_n)\right] -2b_{k+1}(km_1^2+lM_1^2).$$

Izvod $g'(d)$ ima isti znak kao i linearna funkcija s desne: $g'(0)<0$ i $g'(d)>0$ za dovoljno veliko d. Time funkcija $g(d)$ najveću vrednost dostiže na granici domena $[m_1, M_1]$.
Dakle,

$$f(c,b) \leqslant f(c',b),$$

gde c' ima, uz slične oznake, k i $\bar{k}$ elemenata jednakih m_1 i M_1 - donjoj i gornjoj granici - respektivno. Istim postupkom se može dobiti niz b' sa l i $\bar{l}$ elemenata jednakih M_2 i m_2 respektivno, za koji je

$$f(c',b) \leqslant f(c',b') = \frac{\left[\dfrac{km_1^2 + \bar{k}M_1^2}{n}\right]\left[\dfrac{lM_2^2 + \bar{l}m_2^2}{n}\right]}{\left[\dfrac{km_1M_2 + (l-k)M_1M_2 + \bar{l}M_1m_2}{n}\right]^2}, \quad k<l.$$

Treba ispitati funkciju, uz istu oznaku

$$f(r,s) = \frac{\left[rm_1^2 + \bar{r}M_1^2\right]\left[sM_2^2 + \bar{s}m_2^2\right]}{\left[rm_1M_2 + (s-r)M_1M_2 + \bar{s}M_1m_2\right]^2},$$

$$r,s \in [0,1], \quad r + \bar{r} = s + \bar{s} = 1, \ r \leqslant s.$$

Ako je

$$r \leqslant \bar{0} = \frac{K}{L} = \frac{M_1 m_2}{M_1 m_2 + m_1 M_2},$$

tada

$$\frac{\left[r m_1 M_2 + (s-r) M_1 M_2 + \bar{s} M_1 m_2\right]^3}{s M_2^2 + \bar{s} m_2^2} f'_r(r,s) =$$

$$= (m_1^2 - M_1^2)\left[r m_1 M_2 + (s-r) M_1 M_2 + \bar{s} M_1 m_2\right] -$$

$$- (r m_1^2 + \bar{r} M_1^2)\ 2\ (m_1 M_2 - M_1 M_2)$$

$$= (M_1 - m_1)\ \Big[- r M_2 (M_1^2 - m_1^2) - s M_1 (m_1 + M_1)(M_2 - m_2) +$$

$$+ 2 M_1^2 M_2 - M_1 m_2 (m_1 + M_2)\Big]$$

$$\geqslant (M_1 - m_1)\left[\frac{M_1 m_2}{M_1 m_2 + m_1 M_2}\left(-M_1^2 M_2 + m_1^2 M_2\right) - M_1 M_2 m_1 -\right.$$

$$\left. - M_1^2 M_2 + M_1 m_1 m_2 + M_1^2 m_2 + 2 M_1^2 M_2 - M_1 m_1 m_2 - M_1^2 m_2\right]$$

$$= \frac{M_1 - m_1}{M_1 m_2 + m_1 M_2}\ \Big[- M_1^3 M_2 m_2 + M_1 M_2 m_1^2 m_2 - M_1^2 M_2 m_1 m_2 +$$

$$+ M_1^3 M_2 m_2 - M_1 M_2^2 m_1^2 + M_1^2 M_2^2 m_1\Big]$$

$$= m_1 M_1 M_2\ (M_1 - m_1)(M_2 - m_2) \geqslant 0.$$

Time je $f(r,s) \leqslant f(r',s)$, gde je $r' = \min\{s, \bar{0}\}$. Ako je $r > \bar{0}$, tada je $s > \bar{0}$ i $\bar{s} < 1 - \bar{0}$, zbog simetričnosti funkcije f je $f'_{\bar{s}} \geqslant 0$ i $f(r,s) \leqslant f(r,s')$, $s' = \max\{r, \bar{0}\}$.

Posle jednog ili dva ovakva preslikavanja je

$$f(r,s) \leqslant f(t,t).$$

Za $r > s$ funkcional f se iskazuje drugačije

$$f(r,s) = \frac{\left[rm_1^2 + \bar{r}M_1^2\right]\left[sM_2^2 + \bar{s}m_2^2\right]}{\left[sm_1M_2 + (r-s)m_1m_2 + \bar{r}M_1m_2\right]^2}.$$

Zahtevi $f_r'(r,s) = 0$, $f_s'(r,s) = 0$ daju

$$(3)\quad \begin{aligned} m_2(M_1^2-m_1^2)r + m_1(m_1+M_1)(M_2-m_2)s &= 2m_2M_1^2-M_1m_2(m_1+M_1) \\ m_2(M_1-m_1)(M_2+m_2)r + m_1(M_2^2-m_2^2)s &= 2m_1m_2^2+M_1m_2(m_2+M_2) \end{aligned}$$

Determinanta sistema (3) linearnih jednačina po r i s je jednaka nuli, sistem nema rešenja tako da funkcional f dostiže maksimum na granici oblasti $0 \leqslant r,s \leqslant 1$, $r \geqslant s$. Na segmentu granice $s = 0$ je

$$f(r,0) = \frac{rm_1^2 + \bar{r}M_1^2}{\left[rm_1 + \bar{r}M_1\right]^2},$$

(što je odnos sredina). Kako je

$$\left[rm_1+\bar{r}M_1\right]^3 f_r'(r,0) = (m_1^2-M_1^2)(rm_1+\bar{r}M_1)-(rm_1^2+\bar{r}M_1^2)2(m_1-M_1)$$

$$= (M_1-m_1)(\ -rm_1^2-\bar{r}m_1M_1-rM_1m_1-\bar{r}M_1^2+2rm_1^2+2\bar{r}M_1^2\ )$$

$$= (M_1-m_1)^2(\bar{r}M_1-rm_1),$$

to $f(r,0)$ ima najveću vrednost za $r = \frac{M_1}{m_1}$

$$f\left(\frac{M_1}{m_1},0\right) = \frac{\dfrac{m_1^2M_1+m_1M_1^2}{m_1+M_1}}{\left[\dfrac{2m_1M_1}{m_1+M_1}\right]^2} = \frac{(m_1+M_1)^2}{4m_1M_1} = \left[\frac{\sqrt{\dfrac{M_1}{m_1}} + \sqrt{\dfrac{m_1}{M_1}}}{2}\right]^2,$$

Što je manje ili jednako oceni u (1). Ista ocena se dobija i za deo granice $r = 1$, Tako da ostaje da se odredi maksimum funkcionala na dijagonali oblasti.

Ispitajmo funkciju

$$f(r,r) = \frac{\left[rm_1^2 + \bar{r}M_1^2\right]\left[rM_2^2 + \bar{r}m_2^2\right]}{\left[rm_1M_2 + \bar{r}M_1m_2\right]^2}$$

$$= \frac{\mathfrak{x}^2m_1^2M_2^2 + m_1^2m_2^2 + M_1^2M_2^2 + M_1^2m_2^2}{\left[m_1M_2 + M_1m_2\right]^2} = y(\mathfrak{x}),$$

gde je $\mathfrak{x} = \frac{r}{\bar{r}}$. Sada je

$$\left[m_1M_2 + M_1m_2\right]^3 y'(\mathfrak{x}) =$$

$$= \left[2\mathfrak{x}m_1^2M_2^2 + m_1^2m_2^2 + M_1^2M_2^2\right]\left[\mathfrak{x}m_1M_2 + M_1m_2\right] -$$

$$- \left[\mathfrak{x}^2m_1^2M_2^2 + m_1^2m_2^2 + M_1^2M_2^2 + M_1^2m_2^2\right]2m_1M_2$$

$$= \mathfrak{x}m_1M_2\left[2m_1M_2M_1m_2 + m_1^2m_2^2 + M_1^2M_2^2 - 2m_1^2m_2 -\right.$$

$$\left.- 2M_1^2M_2^2\right] + M_1m_2\left[m_1^2m_2^2 + M_1^2M_2^2 - 2m_1m_2M_1M_2\right]$$

$$= \left[M_1M_2 - m_1m_2\right]^2\left[-\mathfrak{x}m_1M_2 + M_1m_2\right],$$

tako da $y(\mathfrak{x})$ ima najveću vrednost za $\mathfrak{x} = \frac{M_1m_2}{m_1M_2}$.

Dobijena vrednost $\mathfrak{x}$ i uslov $\mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}} = 1$ daju brojeve K i L i granicu (1). Iz dokaza je jasno kada može da važi jednakost u nejednakosti (1).

2.7.2. TEOREMA B. Neka je $s \geqslant 1$ i

$$0 < a \leqslant x_i \leqslant A, \quad 0 < b \leqslant y_i \leqslant B \quad \text{za} \quad i=1,\ldots,n.$$

Tada

$$\text{(4)} \qquad \frac{M_s(x)\, M_s(y)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i} \leqslant \frac{\left[Ka^s + LA^s\right]^{\frac{1}{s}} \left[KB^s + Lb^s\right]^{\frac{1}{s}}}{KaB + LAb},$$

gde je

$$K = \frac{v + \sqrt{D}}{-2u + v + \sqrt{D}}, \quad L = \frac{-2u}{-2u + v + \sqrt{D}}$$

$$u = p^s + q^s - 2 - s(pq-1)$$

$$v = (s-1)(1-pq)(p^s+q^s) + 2(p^s q^s - pq)$$

$$D = (s-1)^2(pq-1)^2(p^s-q^s)^2 + 4(p^s-1)(1-q^s)(p^s-pq)(pq-q^s)$$

$$p = \frac{A}{a}, \quad q = \frac{b}{B}.$$

Jednakost u (4) važi ako i samo ako su Kn i Ln celi brojevi i ako je Kn brojeva među $x_1,\ldots,x_n$ jednako a i Ln istih brojeva jednako A, i ako je Kn i Ln brojeva $y_1,\ldots,y_n$ jednako B i b respektivno.

Nejednakost (4) za $s=1$ i $s=2$ daje nejednakosti KARAMATE i SCHWEITZERA respektivno, a za $b=B$ nejednakost KNOPPA za količnik sredina M_s / A - poseban slučaj opšteg količnika sredina (2.6.)

D o k a z. Neka je funkcional

$$f(x,y) = \frac{M_s(x)\, M_s(y)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}.$$

2.7

Može se pretpostaviti da je

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \quad i \quad y_1 \geqslant y_2 \geqslant \dots \geqslant y_n,$$

jer takvim uređenjem brojilac $f(x,y)$ ne menja, a imenilac ima najmanju vrednost. Neka je preslikavanje

$$F(x) = (a,\dots,a,x_i-d,\dots,x_j+d,A,\dots,A)$$

$$a \leqslant x_i, x_j \leqslant A, \quad d = \min\left\{x_i-a,\ A-x_j\right\},$$

tada je

$$x_i^s + x_j^s \leqslant (x_i-d)^s + (x_j+d)^s$$

$$= x_i^s - s\xi^{s-1}d + x_j^s + s\eta^{s-1}d$$

$\xi \in [x_i-d, x_i]$, $\eta \in [x_j, x_j+d]$, je ekvivalentno

$$0 \leqslant sd(\eta^{s-1} - \xi^{s-1}).$$

Takođe je

$$x_i y_i + x_j y_j \geqslant (x_i-d)y_i + (x_j+d)y_j,$$

tako da je

$$f(x,y) \leqslant f(F(x),y).$$

Posle primene nekoliko preslikavanja F na vektor x dobija se

$$f(x,y) \leqslant f((a,\dots,a,d,A,\dots,A),y) =$$

$$= n^{\left[1-\frac{1}{s}\right]} \frac{(ka^s + d^s + lA^s)^{\frac{1}{s}} M_s(y)}{a(y_1+\dots+y_k) + dy_{k+1} + A(y_{k+2}+\dots+y_n)} = g(d).$$

Sada je

$$n^{\left[-1+\frac{1}{s}\right]} M_s^{-1}(y) \left[a(y_1+\dots+y_k) + dy_{k+1} + A(y_{k+1}+\dots+y_n)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[ka^s+d^s+lA^s\right]^{1-\frac{1}{s}} g'(d) = d^{s-1}\left[a(y_1+\dots+y_k) + dy_{k+1} + \right.$$

$$\left. + A(y_{k+2}+\dots+y_n)\right] - (ka^s+d^s+lA^s)y_{k+1} \cdot$$

Izvod $g'(d)$ ima isti znak kao i funkcija s desne strane koja ima oblik $d^{s-1}\lambda - \mu$, pa funkcija $g(d)$ ima maksimum na granici domena, tj za $d = a$ ili $d = A$. Sličan zaključak se može izvesti i za vektor y.

Time je

$$f(x,y) \leqslant \frac{\left[\frac{k}{n}a^s + \frac{\bar k}{n}A^s\right]^{\frac{1}{s}} \left[\frac{l}{n}B^s + \frac{\bar l}{n}b^s\right]^{\frac{1}{s}}}{\frac{k}{n}aB + \frac{l-k}{n}AB + \frac{\bar l}{n}Ab},$$

$k,l \in \{0,1,\ldots,n\}$, $k + \bar k = l + \bar l = n$, $k \leqslant l$. Novi funkcional opišimo istim slovima

$$f(k,l) = \frac{\left[ka^s + \bar k A^s\right]^{\frac{1}{s}} \left[lB^s + \bar l b^s\right]^{\frac{1}{s}}}{kaB + (l-k)AB + \bar l Ab}$$

s domenom D i varijablama $k,l \in [0,1]$, $k + \bar k = l + \bar l = 1$ $k \leqslant l$. Na segmentima granice $k = 0$ i $l = 1$ je

$$f(0,l) = \frac{\left[lB^s + \bar l b^s\right]^{\frac{1}{s}}}{lB + \bar l b}, \quad f(k,1) = \frac{\left[ka^s + \bar k A^s\right]^{\frac{1}{s}}}{ka + \bar k A},$$

što je količnik (ponderisanih)sredina $M_s : A$. Da bi izbegli poređenje ocene za količnik sredina $M_s : A$ i ocene (4) primetimo da je

$$f(k,1) = \frac{\left[ka^s + \bar k A^s\right]^{\frac{1}{s}}}{ka + \bar k A}$$

$$\leqslant \frac{\left[ka^s + \bar k A^s\right]^{\frac{1}{s}} \left[kB^s + \bar k b^s\right]^{\frac{1}{s}}}{kaB + \bar k Ab} = f(k,k),$$

što je posledica sledećih nejednakosti

2.7

$$\frac{kaB + \bar{k}Ab}{ka + \bar{k}A} \leqslant kB + \bar{k}b \leqslant \left[kB^s + \bar{k}b^s\right]^{\frac{1}{s}}, \quad s \geqslant 1.$$

Sada je

$$\frac{\left[kaB + (l-k)AB + \bar{l}Ab\right]^2}{\left[lB^s + \bar{l}b^s\right]^{1/s}} f'_k(k,l) = \frac{1}{s}\left[ka^s + \bar{k}A^s\right]^{\frac{1}{s}-1} \cdot$$

$$\cdot\left[kaB + (l-k)AB + \bar{l}Ab\right]\left[a^s - A^s\right] - \left[ka^s + \bar{k}A^s\right]^{\frac{1}{s}}(aB - AB),$$

tako da $f'_k(k,l)$ ima isti znak kao i

$$\left[kB(a-A)+lA(B-b)+Ab\right](a^s-A^s) - sB(a-A)\left[k(a^s-A^s)+A^s\right] =$$

$$= -k(s-1)(A^s-a^s)(A-a) - lA(A^s-a^s)(B-b) + sA^sB(A-a) - Ab(A^s-a^s).$$

Parcijalni izvod po drugoj promenljivoj je

$$\varrho \cdot f'_l(k,l) = -kB(A-a)(B^s-b^s) -$$

$$- l(s-1)A(B-b)(B^s-b^s) + Ab(B^s-b^s) - sAb^s(B-b),$$

($\varrho > 0$). Tačka ekstrema funkcionala f zadovoljava sistem jednačina $f'_k(k,l) = 0$, $f'_l(k,l) = 0$

$$(5) \quad \begin{aligned} &k(s-1)B(A-a)(A^s-a^s) + lA(B-b)(A^s-a^s) = \\ &\qquad = sA^s(A-a) - Ab(A^s-a^s) \\ &kB(A-a)(B^s-b^s) + l(s-1)A(B-b)(B^s-b^s) = \\ &\qquad = Ab(B^s-b^s) - sAb^s(B-b). \end{aligned}$$

Determinanta sistema (5) je

$$D = \begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ 1 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 2s.$$

Primetimo i da su izrazi s desne strane (5) pozitivni

$$sA^sB(A-a) > Ab(A^s-a^s), \text{ tj. } sA^{s-1}\frac{B}{A} > \frac{A^s-a^s}{A-a}.$$

Deljenjem prve jednačine u (5) s (A^s-a^s), druge sa (B^s-b^s) i sabiranjem se dobija

$$\text{(6)} \quad kB(A-a) + \bar{k}A(B-b) = \frac{A^s}{A^s-a^s}B(A-a) + \frac{b^s}{B^s-b^s}A(B-b).$$

Kako je $\frac{A^s}{A^s-a^s} > 1$ i $\frac{b^s}{B^s-b^s} > 1$, za $2b^s > B^s$, to prava (6) seče pravu $k = \bar{k}$ u $k = \bar{k} > 1$, sem toga, seče pozitivne delove osa k i $\bar{k}$, tako da prava (6) nema zajedničkih tačaka s oblašću D.

Ostaje da se ispita funkcija

$$f(k) = f(k,k) = \frac{\left[ka^s + \bar{k}A^s\right]^{\frac{1}{s}}\left[kB^s + \bar{k}b^s\right]^{\frac{1}{s}}}{kaB + \bar{k}Ab}$$

$$= \frac{\left[k + \bar{k}p^s\right]^{\frac{1}{s}}\left[k + \bar{k}q^s\right]^{\frac{1}{s}}}{k + \bar{k}pq}$$

gde je $k \in [0,1]$, $k + \bar{k} = 1$, $p = \frac{A}{a}$ i $q = \frac{b}{B}$. Sada je

$$(k+\bar{k}pq)^2 \cdot f'(k) = \left[\frac{1}{s}\left[k+\bar{k}p^s\right]^{\frac{1}{s}-1}\left[k+\bar{k}q^s\right]^{\frac{1}{s}}(1-p^s) + \right.$$

$$\left. + \left[k+\bar{k}p^s\right]^{\frac{1}{s}}\frac{1}{s}\left[k+\bar{k}q^s\right]^{\frac{1}{s}-1}(1-q^s)\right](k+\bar{k}pq) -$$

$$- \left[k+\bar{k}p^s\right]^{\frac{1}{s}}\left[k+\bar{k}q^s\right]^{\frac{1}{s}}(1-pq),$$

ili

$$(k+\bar{k}pq)^2 \left[k+\bar{k}p^s\right]^{1-\frac{1}{s}} \left[k+\bar{k}q^s\right]^{1-\frac{1}{s}} \frac{s}{\bar{k}^2} f'(k) =$$

$$= \left[(1-p^s)(\xi+q^s) + (1-q^s)(\xi+p^s)\right](\xi+pq) -$$

$$- s(1-pq)(\xi+p^s)(\xi+q^s)$$

$$= y(\xi), \quad \xi = \frac{k}{\bar{k}} \in [0,+\infty].$$

Dovoljno je ispitati znak funkcije

$$y(\xi) = \xi^2 \left[s(pq-1) + 2 - (p^s+q^s)\right] +$$

$$+ \xi\left[(s-1)(p^s+q^s)(pq-1) + 2(pq-p^sq^s)\right] +$$

$$+ (1-q^s)p^spq - (p^s-1)q^spq - s(1-pq)p^sq^s$$

$$= u\xi^2 + v\xi + w.$$

Primetimo da je

$$u = spq - p^s - q^s + 2 - s$$

i

$$w = p^{s+1}q^{s+1}\left[-\frac{s}{pq} + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{q^s} - 2 + s\right].$$

Pokažimo da je $u<0$, a kako uslovi $p\geqslant 1$ i $0<q\leqslant 1$ prelaskom na recipročne vrednosti daju $0<\frac{1}{p}\leqslant 1$, $\frac{1}{q}\geqslant 1$, tako da iz uslova $u<0$ zbog simetričnosti sledi $w>0$.

Ako je

$$\varphi(q) = spq - p^s - q^s + 2 - s = a(p,q,s),$$

onda

$$\varphi'(q) = sp - sq^{s-1} = s(p - q^{s-1}) \geqslant 0,$$

jer je $p\geqslant 1$, $q\leqslant 1$ i $s\geqslant 1$. Time je

$$\varphi(q) \leqslant \varphi(1) = sp - p^s + 1 - s = \Psi(p).$$

Dalje je

$$\psi'(p) = s - sp^{s-1} = s\,(1-p^{s-1}) \leqslant 0$$

i zato

$$\psi(p) \leqslant \psi(1) = s - 1 + 1 - s = 0.$$

Funkcija $y(\chi)$ je parabola za koju je $y(0) = w > 0$ i $y(\chi)$, za veliko χ, ima znak kao i $u < 0$. Neka je χ_0 nula kvadratne jednačine $y(\chi) = 0$

$$\chi_0 = \frac{v + \sqrt{D}}{-2u} =$$

$$= \frac{(s-1)(pq-1)(p^s+q^s) + 2(pq-p^sq^s) + \sqrt{}}{2\left[p^s + q^s - 2 - s(pq-1)\right]}$$

$$\frac{+ \sqrt{(s-1)^2(pq-1)^2(p^s-q^s)^2 + 4(1-q^s)(p^s-1)(p^s-pq)(pq-q^s)}}{}$$

Navodimo transformacije kojima se diskrimenanta jednačine transformiše u zbir nenegativnih izraza

$$\begin{aligned}
D &= v^2 - 4uw \\
&= (s-1)^2(pq-1)^2(p^s+q^s)^2 + 4(s-1)(pq-1)(p^s+q^s)\cdot \\
&\qquad \cdot(pq-p^sq^s) + 4(pq-p^sq^s)^2 - \\
&\qquad - 4\left[s(pq-1) + 2 - (p^s+q^s)\right]\left[sp^sq^s(pq-1) - \right. \\
&\qquad \left. - 2p^{s+1}q^{s+1} + pq(p^s+q^s)\right] \\
&= \quad s^2\,(pq-1)^2(p^s-q^s)^2 \\
&\quad -2s\,(pq-1)^2(p^s-q^s)^2 \\
&\quad + \left[(p^s+q^s)(p^s+1) - 2(pq+p^sq^s)\right]^2 \\
&= (s-1)^2(pq-1)^2(p^s-q^s)^2 - (pq-1)^2(p^s-q^s)^2 + \\
&\qquad + \left[(p^s+q^s)(pq+1) - 2(pq+p^sq^s)\right]^2
\end{aligned}$$

$$= (s-1)^2(pq-1)^2(p^s-q^s)^2 +$$
$$+ \left[pq(p^s+q^s-2)+p^s+q^s-2p^sq^s-pq(p^s-q^s)+p^s-q^s\right] \cdot$$
$$\cdot \left[pq(p^s+q^s-2)+p^s+q^s-2p^sq^s+pq(p^s-q^s)-p^s+q^s\right]$$
$$= (s-1)^2(pq-1)^2(p^s-q^s)^2 + \left[2pqq^s-2pq+2p^s-2p^sq^s\right]\left[2pqp^s-2pq+2q^s-2p^sq^s\right]$$
$$= (s-1)^2(pq-1)^2(p^s-q^s)^2 + \left[2pq(q^s-1) + 2p^s(1-q^s)\right]\left[2pq(p^s-1) + 2q^s(1-p^s)\right]$$
$$= (s-1)^2(pq-1)^2(p^s-q^s)^2 + 4(p^s-1)(1-q^s)(p^s-pq)(pq-q^s)$$

Iz $\varkappa = \dfrac{k}{\bar{k}} = \dfrac{k}{1-k}$ sledi da je $k = \dfrac{\varkappa}{1+\varkappa}$. Neka je

$$K = \frac{\varkappa_0}{1+\varkappa_0} = \frac{\frac{v+\sqrt{D}}{-2u}}{1+\frac{v+\sqrt{D}}{-2u}} = \frac{v+\sqrt{D}}{-2u+v+\sqrt{D}}, \quad L = \frac{-2u}{-2u+v+\sqrt{D}}.$$

Na intervalu $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ odnosno $k \in [0, K]$ funkcional $f(k)$ je rastući, a na intervalu $\varkappa \in [\varkappa_0, +\infty]$ odn. $k \in [K, 1]$ funkcional $f(k)$ je opadajući, tako da $f(k)$ maksimalnu vrednost dostiže za $k = K$.

Da ova teorema sadrži tri navedene nejednakosti ne proverava se na način da se iz ocene u (4) izvode ocene iz tih nejednakosti, nego se iz $\varkappa$- odnosa $K : L$ dobijaju odnosi iz tih nejednakosti. Prvi način je direktniji, a drugi je kraći i možda važniji.

Za $s = 1$ u nejednakosti (4) se dobija količnik proizvoda aritmetičkih sredina dva niza brojeva i aritmetičke sredine njihovog skalarnog proizvoda iz diskretnog analogona nejednakosti J. KARAMATE. Tada je

$$\chi = \frac{\sqrt{4(p-1)(1-q)(p-pq)(pq-q)}}{2\,[p + q - 2 - pq + 1]}$$

$$= \frac{\sqrt{pq}\,(p-1)(1-q)}{(p-1)(1-q)} = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{Ab}{aB}},$$

što je odnos K : L iz nejednakosti Karamate.

Za $s = 2$ se dobija količnik iz nejednakosti A.L. CAUCHYA i P. SCHWEITZERA i tada je

$$\chi = \frac{(pq-1)(p^2+q^2) + 2pq(1-pq) + \sqrt{}}{2\,(p^2 + q^2 - 2pq)}$$

$$\overline{+ \sqrt{(pq-1)^2(p^2-q^2)^2 + 4(p^2-1)(1-q^2)(p^2-pq)(pq-q^2)}}$$

$$= \frac{(pq-1)(p-q)^2 + \sqrt{}}{2\,(p-q)^2}$$

$$\overline{+ \sqrt{(p-q)^2\ (p^2+q^2)(pq+1)^2 + 2pq(p^2q^2-2pq+1-2p^2q^2-2)}}$$

$$= \frac{(pq-1)(p-q)^2 + \sqrt{(p-q)^2(pq+1)^2(p-q)^2}}{2(p-q)^2}$$

$$= \frac{pq - 1 + pq + 1}{2} = pq = \frac{Ab}{aB},$$

što je odnos iz nejednakosti Schweitzera.

Ako je $b = B$ tj. $q = 1$, onda nejednakost (4) daje gornju granicu količnika sredina

$$\frac{M_s(x)}{M_1(x)} = \frac{M_s(x)}{A(x)},$$

što je odnos $M_s : M_t$, za $t = 1$, iz tačke 2.6. (koji je, prema literaturi, prvi odredio K. KNOPP). Umesto jednakosti gornjih granica količnika M_s / A u ove dve nejednakosti, proverićemo jednakost $\varkappa$- odnosa. Za $t = 1$ i uz $C = p$ formula 2.6.(2) postaje

$$\varkappa_0 = \frac{sp^s(p-1) - p(p^s-1)}{p^s-1 -s(p-1)}$$

$$= \frac{(s-1)pp^s - sp^s + p}{p^s -sp^s +s -1}.$$

Za $q = 1$ formula (5) daje istu vrednost

$$\varkappa_0 = \frac{(s-1)(p-1)(p^s+1) +2(p-p^s) +(s-1)(p-1)(p^s-1)}{2\left[p^s -1 -s(p-1)\right]}$$

$$= \frac{(s-1)(p-1)2p^s + 2(p-p^s)}{2\left[p^s -sp +s -1\right]}$$

$$= \frac{(s-1)pp^s -(s-1)p^s +p -p^s}{p^s -sp +s -1}$$

kao i odnos u nejednakosti SPECHTA 2.6.

NAPOMENA. Za $s \geqslant 2$ je $M_2(x) \leqslant M_s(x)$, pa je na osnovu Cauchyeve nejednakosti donja granica količnika u (4) jednaka tačno 1, a za $1 < s \leqslant 2$ granica je manja od 1.

2.8. P. SCHWEITZER, 1914. [MIT59,MAR81].

Nejednakost (1) se može posmatrati i kao količnik aritmetičke i harmonijske sredine, i kao takva sadržana je u opštoj nejednakosti SPECHTA 2.6.(1). Takođe, Schweitzer je dokazao i integralni slučaj nejednakosti. Primetimo i da je

$$\frac{(M+m)^2}{4Mm} = \frac{M+m}{2} \cdot \frac{\frac{1}{M}+\frac{1}{m}}{2}.$$

TEOREMA. Ako je $0 < m \leqslant a_k \leqslant M$, $k = 1,\ldots,n$, tada

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right] \leqslant \frac{(M+m)^2}{4Mm}. \tag{1}$$

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \mid m \leqslant x_k \leqslant M,\ k=1,\ldots,n,\ \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$$

i funkcional

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right].$$

Ako je

$$y(x) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},x,\ldots,a_{j-1},\bar{x},\ldots,a_n), \quad x+\bar{x} = a_i+a_j,$$

tada je

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right]^{-1} y'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\bar{x}^2} = \frac{(a_i+a_j)(x-\bar{x})}{x^2\bar{x}^2}.$$

Neka je $\quad d = \left\{\min\left\{\min a_i,a_j\right\} - m,\ M - \max\left\{a_i,a_j\right\}\right\}.$

Preslikavanje

$$F_{ij}(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_n) = (a_1,\ldots,a_i',\ldots,a_j',\ldots,a_n)$$

odredimo tako da je $a_i' = a_i - d$, $a_j' = a_j + d$ ako je $a_i \leqslant a_j$, i da je $a_i' = a_i + d$, $a_j' + a_j - d$ ako je $a_i > a_j$. Tako određeno preslikavanje F_{ij} je monotono neopadajuće u odnosu na funkcional f

$$f(a_1,\dots,a_n) \leqslant f(F_{ij}(a_1,\dots,a_n)).$$

Zajednička nepokretna tačka preslikavanja F_{ij} ($i \neq j$) je do na redosled koordinata vektor oblika

$$(m,\dots,m,M,\dots,M,d), \qquad m \leqslant d \leqslant M,$$

$km + lM + d = a_1 + \dots + a_n$. Funkcional f dostiže svoj maksimum na skupu zajedničkih nepokretnih tačaka

$$f(a_1,\dots,a_n) \leqslant \frac{1}{n^2}\left[km + lM + d\right]\left[\frac{k}{m} + \frac{l}{M} + \frac{1}{d}\right].$$

a) Ako je $k \leqslant l$, pokažimo da je

$$f(m,\dots,m,M,\dots,M,d) \leqslant f(m,\dots,m,M,\dots,M,m),$$

što je ekvivalentno s

$$k\left[\frac{m}{d} + \frac{d}{m} - 2\right] \leqslant l\left[\frac{M}{m} + \frac{m}{M} - \frac{M}{d} - \frac{d}{M}\right].$$

Dovoljno je proveriti da je

$$g(d) = \frac{M}{d} + \frac{d}{M} + \frac{m}{d} + \frac{d}{m} \leqslant 2 + \frac{M}{m} + \frac{m}{M},$$

što sledi iz

$$g'(d) = \frac{m + M}{d^2}(d^2 - mM) \quad \text{i} \quad g(m) = g(M) = 2 + \frac{M}{m} + \frac{m}{M}.$$

b) Ako je $k \geqslant l$, onda je

$$f(m,\dots,m,M,\dots,M,d) \leqslant f(m,\dots,m,M,\dots,M,M),$$

ili

$$l\left[\frac{M}{d} + \frac{d}{M} - 2\right] \leqslant k\left[\frac{M}{m} + \frac{m}{M} - \frac{m}{d} - \frac{d}{m}\right],$$

što se svodi na prethodni slučaj.

Dakle, možemo pretpostaviti da je koordinata $d = m$

ili $d = M$ i da je ubrojana u k ili l.

c) Ako je $k < l$, pokažimo da je

$$f(m,\dots,m,M,M,\dots,M) \leqslant f(m,\dots m,m,M,\dots,M),$$

ili

$$\left[km + lM\right]\left[\frac{k}{m} + \frac{l}{M}\right] \leqslant \left[km + lM + m - M\right]\left[\frac{k}{m} + \frac{l}{M} + \frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right],$$

tj.

$$0 \leqslant (km+lM)\frac{M-m}{Mm} + (m-M)\frac{kM+lm}{Mm} + (m-M)\frac{M-m}{Mm},$$

što se svodi na $0 \leqslant (l - k - 1)(M-m)$.

d) Ako je $k > l$, onda se

$$f(m,\dots,m,m,M,\dots,M) \leqslant f(m,\dots,m,M,M,\dots,M)$$

svodi na $0 \leqslant (k - l - 1)(M-m)$.

Na osnovu c) i d) može se pretpostaviti da je $|k - l| < 1$.

e) Ako je $k = l$, onda je

$$\left[km + kM\right]\left[\frac{k}{m} + \frac{k}{M}\right] = k^2\left[m + M\right]\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right].$$

f) Ako je $k+1 = l$, onda se

$$\frac{1}{n^2 mM}\left[km + lM\right]\left[kM + lm\right] \leqslant \frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

svodi na

$$mM \leqslant \left[\frac{M+m}{2}\right]^2.$$

NAPOMENA. Iz dokaza sledi da jednakost u (1) važi jedino ako je $m = M$ ili je n paran broj i $n/2$ brojeva $a_1,\dots,a_n$ jednako m, a ostali brojevi jednaki M.

Zamena $s = 1$, $t = -1$ u 2.6.(1) daje

$$K = \frac{1}{1-(-1)}\left[\frac{C}{C-1} - \frac{-C^{-1}}{C^{-1}-1}\right]n = \frac{1}{2}\left[\frac{C}{C-1} + \frac{1}{1-C}\right]n = \frac{1}{2}n,$$

pri tome je i $L = \frac{1}{2}n$, što daje maksimum iz nejednakosti.

2.9. G. GRÜSS, 1935., [MIT70].

U dokazu ove nejednakosti je korišćena permutacija nizova, jednostavniji pojam nego permutacija - - " rearrangement " funkcija [HAR313], što inače predstavlja sadržinu prvog dela datog dokaza.

TEOREMA. Neka su f i g funkcije integrabilne na (c,d) i neka je

$$a \leqslant f(x) \leqslant A \quad \text{i} \quad b \leqslant g(x) \leqslant B,$$

za svako $x \in (c,d)$. Tada je

$$\left| \frac{1}{d-c} \int_c^d f(x)g(x)dx - \frac{1}{(d-c)^2} \int_c^d f(x)dx \int_c^d g(x)dx \right| \leqslant \tag{1}$$

$$\leqslant \frac{1}{4} (A-a)(B-b).$$

D o k a z. Može se pretpostaviti da je $c = 0$ i $d = 1$. Neka je

$$D(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx.$$

Neka su $p = (p_1,\ldots,p_n)$ i $q = (q_1,\ldots,q_n)$ vektori čije su koordinate p_i, q_i ($i=1,\ldots,n$) vrednosti funkcija f i g redom u tačkama ekvidistantne podele intervala (0,1). Razlika integrala D(f,g) može se proizvoljno dobro aproksimirati funkcionalom

$$\varphi(p,q) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{2}$$

pomnoženim korakom podele intervala. Odredimo maksimum funkcionala $\varphi(p,q)$ na Dekartovom proizvodu $X \times Y$, gde je

$$X = \left\{(x_1,\dots,x_n) \mid a \leqslant x_i \leqslant A,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i\right\}$$

$$Y = \left\{(y_1,\dots,y_n) \mid b \leqslant y_i \leqslant B,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} q_i\right\}.$$

Na osnovu teoreme Hardy - Littlewood - Polya važi

$$\varphi(p,q) \leqslant \varphi(r,s),$$

gde su r i s permutacije nizova p i q redom u neopadajućem poretku

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \dots \leqslant r_n, \quad s_1 \leqslant s_2 \leqslant \dots \leqslant s_n.$$

Ako je

$$a = r_1 = \dots = r_{i-1} < r_i \leqslant r_j < r_{j+1} = \dots = r_n = A,$$

definišimo preslikavanje

$$F(r) = (r_1,\dots,r_i-d,\dots,r_j+d,\dots,r_n),$$

gde je $d = \min\left\{r_i-a,\ A-r_j\right\}$. Pri tome je ispunjen uslov monotonosti

$$\varphi(r,s) \leqslant \varphi(F(r),s),$$

jer je $0 \leqslant -ds_i + ds_j$. Nepokretna tačka preslikavanja F je vektor oblika $r^o = (a,\dots,a,\alpha,A,\dots,A)$, $a \leqslant \alpha \leqslant A$. Ako je $s^o = (b,\dots,b,\beta,B,\dots,B)$, $b \leqslant \beta \leqslant B$, nepokretna tačka analogno određenog preslikavanja $G : Y \longrightarrow Y$, to je

$$\varphi(r,s) \leqslant \varphi(r^o,s^o).$$

Nizovima r^o i s^o mogu se pridružiti funkcije (i ispitivanje nastaviti ponovo u skupu funkcija).

$$\rho(x) = \begin{cases} a, & 0 < x \leqslant u \\ A, & u < x < 1 \end{cases}, \qquad u = \frac{1}{A-a}\left[A - \int_0^1 f(x)dx\right],$$

2.9

$$\sigma(x) = \begin{cases} b, & 0 < x \leqslant v \\ B, & v < x < 1 \end{cases}, \qquad v = \frac{1}{B-b}\left[B - \int_0^1 g(x)dx\right]$$

Do sada je utvrđeno da je $D(f,g) \leqslant D(\varrho,\sigma)$. Ako je $u \leqslant v$, $u + w = v$ i

$$\sigma'(x) = \begin{cases} b, & 0 < x \leqslant u \\ B, & u < x < 1 \end{cases},$$

onda je

$$D(\varrho,\sigma) - D(\varrho,\sigma') =$$

$$= \int_0^1 \varrho(x)\left[\sigma(x) - \sigma'(x)\right]dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \left[\sigma(x) - \sigma'(x)\right]dx$$

$$= - wA(B-b) + w(B-b)\int_0^1 f(x)dx$$

$$= - w(B-b)\left(A - \int_0^1 f(x)dx \right) \leqslant 0.$$

Na kraju je

$$D(f,g) \leqslant D(\varrho,\sigma') =$$

$$= uab + (1-u)AB - \left[ua + (1-u)A\right]\left[ub + (1-u)B\right]$$

$$= uab + AB - uAB - u^2ab - u(1-u)aB -$$

$$- u(1-u)Ab - (1-u)^2AB$$

$$= (A-a)(B-b)(u-u^2)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}(A-a)(B-b),$$

jednakost važi za $u = \frac{1}{2}$.

Slično se određuje minimalna vrednost funkcionala D, koja se dostiže za jednu rastuću i jednu opadajuću funkciju i iznosi $-\frac{1}{4}(A-a)(B-b)$.

Ovaj dokaz daje i profinjenje Grüssove nejednakosti

$$D(f,g) \leqslant (u-u^2)(A-a)(B-b) \leqslant \frac{1}{4}(A-a)(B-b).$$

Zbog simetričnosti važi i

$$D(f,g) \leqslant (v-v^2)(A-a)(B-b) \leqslant \frac{1}{4}(A-a)(B-b).$$

Sjedinjavanjem ovih nejednakosti se dobija

$$D(f,g) \leqslant \min\{u(1-u),v(1-v)\}(A-a)(B-b) \leqslant \frac{1}{4}(A-a)(B-b).$$

2.10. J. KARAMATA, 1948., [MIT73].

TEOREMA. Neka su f i g integrabilne funkcije na $[0,1]$ i neka je

$$0 < a \leqslant f(x) \leqslant A \quad \text{i} \quad 0 < b \leqslant g(x) \leqslant B \quad \text{za} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Neka je

$$R(f,g) = \frac{\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx}{\int_0^1 f(x)g(x)dx} \quad \text{i} \quad K = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{AB}}{\sqrt{aB}+\sqrt{Ab}},$$

tada je

$$\frac{1}{K^2} \leqslant R(f,g) \leqslant K^2.$$

NAPOMENA. Primetimo da je $K \geqslant 1$.

D o k a z. Zbir $f(x_1)g(x_1) + \dots + f(x_n)g(x_n)$ ima najmanju vrednost za onu permutaciju za koju je $f(x_i)$, $i = 1,\dots,n$ rastući i $g(x_i)$ opadajući niz. Postupkom kao u prethodnoj tački se dobija da funkcional R na skupu parova funkcija s domenom $[0,1]$ za koje su integrali konstantni, najveću vrednost za par funkcija oblika

$$k(x)=\begin{cases} a, & 0\leq x\leq p \\ A, & p<x\leq 1 \end{cases}, \qquad l(x)=\begin{cases} b, & 0\leq x\leq q \\ B, & q<x\leq 1 \end{cases}.$$

Tada je , uz $\bar{p}=1-p$, $\bar{q}=1-q$, $q\leq p$,

$$R(k,l)=\frac{[pa+\bar{p}A][qB+\bar{q}b]}{qaB+(p-q)ab+\bar{p}Ab}=S(p,q),$$

tako da ostaje da se ispita jednostavniji funkcional $S(p,q)$.

Sada je

$$\frac{[qaB+(p-q)ab+\bar{p}Ab]^2}{pa+\bar{p}A}S'_q(p,q)=$$

$$=(B-b)\left[qaB+(p-q)ab+\bar{p}Ab\right]-(qB+\bar{q}b)(aB-ab)$$

$$=qaB^2+(p-q)abB+\bar{p}AbB-qabB-(p-q)ab^2-$$

$$-\bar{p}Ab^2-qaB^2+qabB-\bar{q}abB+\bar{q}ab^2$$

$$=(1-p)(A-a)(B-b),$$

tako da je $S(p,q)\leq S(p,p)$.

Ako je $q\geq p$, onda je

$$S(p,q)=\frac{[pa+\bar{p}A][qB+\bar{q}b]}{paB+(q-p)AB+\bar{q}Ab}$$

i

$$\frac{paB+[(q-p)AB+\bar{q}Ab]^2}{pa+\bar{p}A}S'_q(p,q)=$$

$$=(B-b)\left[paB+(q-p)AB+\bar{q}Ab\right]-(qB+\bar{q}b)(AB-Ab)$$

$$=paB^2+(q-p)AB^2+\bar{q}AbB-pabB-$$

$$-(q-p)AbB - \bar{q}Ab^2 - qAB^2 + qAbB - \bar{q}AbB + \bar{q}Ab^2$$
$$= - pB(A-a)(B-b),$$

tako da je $S(p,q) \leqslant S(p,p)$.

Ostaje još da se odredi najveća vrednost funkcije

$$S(p,p) = \frac{(p+\bar{p}m)(pn+\bar{p})}{pn + \bar{p}m}, \qquad m = \frac{A}{a}, \quad n \cdot \frac{B}{b} .$$

Izračunajmo izvod

$$(pn+\bar{p}m)^2 S'(p,p) = \left[(1-m)(pn+\bar{p}) + (p+\bar{p}m)(n-1)\right] (pn+\bar{p}m) -$$
$$- (p+\bar{p}m)(pn+\bar{p})(n-m)$$
$$= p^2n^2 + p\bar{p}n - p^2mn^2 - p\bar{p}mn + p^2n - p^2n +$$
$$+p\bar{p}mn - p\bar{p}mn + p\bar{p}mn + \bar{p}^2m - p\bar{p}m^2n - \bar{p}^2m^2 +$$
$$+p\bar{p}mn - p\bar{p}m + \bar{p}^2m^2n - \bar{p}^2m^2 - p^2n^2 - p\bar{p}n -$$
$$-p\bar{p}mn^2 - \bar{p}^2mn + p^2mn + p\bar{p}m + p\bar{p}m^2n + \bar{p}^2m^2$$
$$= - p^2n(m-1)(n-1) + \bar{p}m(m-1)(n-1).$$

Dakle, funkcional $S(p,p)$ ima najveću vrednost kada je

$$\frac{p}{\bar{p}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{Ab}}{\sqrt{aB}} ,$$

pa je time

$$p = \frac{\sqrt{Ab}}{\sqrt{Ab} + \sqrt{aB}}, \qquad \bar{p} = \frac{\sqrt{aB}}{\sqrt{Ab} + \sqrt{aB}} = \frac{\sqrt{Ba}}{\sqrt{Ba} + \sqrt{bA}} .$$

Za funkcije određene tim parametrom funkcional R dostiže maksimum

$$S(p,p) = \frac{\left[a\sqrt{Ab} + A\sqrt{ab}\right]\left[B\sqrt{Ab} + b\sqrt{aB}\right]}{\left[\sqrt{Ab} + \sqrt{aB}\right]^2} \frac{\sqrt{Ab} + \sqrt{aB}}{aB\sqrt{AB} + Ab\sqrt{aB}}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{ab} + \sqrt{AB}\right]^2}{\left[\sqrt{Ab} + \sqrt{aB}\right]^2} = K^2.$$

Donja granica se određuje slično.

Nejednakost J. Karamate, tj. njen diskretni analogon, je sadržana kao poseban slučaj u opštoj nejednakosti datoj u tački 2.7.

2.11. KY FANOVA NEJEDNAKOST, OBRAT I SRODNE NEJEDNAKOSTI.

TEOREMA A. [Ky Fan, 1961., [BEC5]]. Ako je $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2}$ za $i = 1,\ldots,n$, tada

$$\text{(1)} \qquad \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^n} \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{n} (1-x_i)}{\left[\sum_{i=1}^{n} (1-x_i)\right]^n},$$

sa jednakošću ako i samo ako su svi x_i međusobno jednaki.

D o k a z. Nejednakost (1) se može napisati u obliku

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-x_i} \leqslant \left[\frac{s}{n-s}\right]^n,$$

gde je $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $s = x_1 + \ldots + x_n$. Time je određen funkcional. Neka je

$$X = \left\{ (y_1,\ldots,y_n) \;\middle|\; 0 \leqslant y_i \leqslant \frac{1}{2}, i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = s \right\}$$

i $F_{ij}(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) =$

$$= (x_1,\ldots,\frac{x_i+x_j}{2},\ldots,\frac{x_i+x_j}{2},\ldots,x_n)$$

$i,j = 1,\ldots,n.$ Tada se zahtev monotonosti

$$f(x) \leqslant f(F_{ij}(x))$$

svodi na

$$\frac{x_i}{1-x_i}\,\frac{x_j}{1-x_j} \leqslant \left[\frac{x_i+x_j}{2-x_i-x_j}\right]^2 ,$$

ili

$$x_ix_j(\bar{x}_i+\bar{x}_j)^2 \leqslant \bar{x}_i\bar{x}_j(x_i+x_j)^2, \quad \bar{x}_i=1-x_i,\ \bar{x}_j=1-x_j,$$

$$x_ix_j\left[\bar{x}_i^2+\bar{x}_j^2\right] \leqslant \bar{x}_i\bar{x}_j\left[x_i^2+x_j^2\right] ,$$

$$\left[\bar{x}_ix_j - x_i\bar{x}_j\right]\left[x_j\bar{x}_j - x_i\bar{x}_i\right] \geqslant 0,$$

$$(x_j-x_i)(x_j-x_i)(1-x_i-x_j) \geqslant 0,$$

što je ispunjeno. Funkcional $f(x)$ na kompaktu X dostiže maksimum u zajedničkoj nepokretnoj tački svih preslikavanja F_{ij}

$$x^0 = \left(\frac{s}{n},\ \ldots,\ \frac{s}{n}\right).$$

Može se obrazovati i niz sukcesivnih aproksimacija

$$f(x) \leqslant f(F_{12}(x)) \leqslant f(F_{23}(F_{12}(x))) \leqslant \ldots. \leqslant f(x^0) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}} = \left[\frac{s}{n-s}\right]^n .$$

Nejednakost (1) se može dokazati i direktnom i obrnutom indukcijom, kao i primenom Jensenove nejdnakosti na funkciju $y = \ln\dfrac{x}{1-x}$.

TEOREMA B. [Alzer Horst, 1989., A converse of Ky Fan's inequality, Math. Repts. Acad. Sci. Can. 11 , RŽ89-7B3].

Ako je $a_i \in (0,1)$, $i = 1,\dots,n$, tada važi obrat nejednakosti K. Fana

$$(2) \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} (1-a_i)} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{1-a_i}\right]^{\left[\frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j}\right]} .$$

D o k a z. Neka je $s = a_1 + \dots + a_n$,

$$X = \left\{ x=(x_1,\dots,x_n) \,\middle|\, 0 < x_i < 1,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = s \right\},$$

funkcional na X

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i}{1-x_i}\right]^{\frac{a_i}{s}}$$

i

$$p_{kl} = \prod_{i=1, i\neq k, l}^{n} \left[\frac{a_i}{1-a_i}\right]^{\frac{a_i}{s}}$$

Neka je

$$y(x) = f(a_1,\dots,a_{i-1},x,\dots,\bar{x},a_{j+1},\dots,a_n),$$

$$x \in (0,1),\ \bar{x} \in (0,1),\ x + \bar{x} = a_i + a_j .$$

Najpre, za funkcije oblika $z = u^v$ je $\ln z = v \ln u$, tako da je njen izvod

$$(3) \qquad z' = u^v \left[v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right].$$

Primenjujući formulu (3) za logaritamsko diferenciranje funkcija dobija se

$$\frac{1}{p_{ij}}\, y'(x) = \left[\frac{x}{1-x}\right]^{\frac{x}{s}} \left[\frac{1}{s}\ln\frac{x}{1-x} + \frac{x}{s}\,\frac{1}{(1-x)^2}\,\frac{1-x}{x}\right] \left[\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}\right]^{\frac{\bar{x}}{s}} +$$

$$+ \left[\frac{x}{1-x}\right]^{\frac{x}{s}} \left[\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}\right]^{\frac{\bar{x}}{s}} \left[-\frac{1}{s}\ln\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}} + \frac{\bar{x}}{s}\,\frac{-1}{(1-\bar{x})^2}\,\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}\right]$$

$$= \frac{1}{s}\left[\frac{x}{1-x}\right]^{\frac{x}{s}} \left[\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}\right]^{\frac{\bar{x}}{s}} \left[\ln\frac{x}{1-x} - \ln\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-\bar{x}}\right].$$

Ako je $x \leqslant \bar{x}$, onda je $\dfrac{x}{1-x} \leqslant \dfrac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$ i $\dfrac{1}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{1-\bar{x}}$,

tako da $y(x)$ ima najveću vrednost za $x = \bar{x} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$. Time je utvrđeno da je preslikavanje

$$F_{ij}(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_n) = $$
$$= (a_1,\ldots,\frac{a_i+a_j}{2},\ldots,\frac{a_i+a_j}{2},\ldots,a_n)$$

monotono nerastuće u odnosu na funkcional f

$$f(a) \geqslant f(F_{ij}(a)).$$

Zajednička nepokretna tačka preslikavanja F_{ij}, za sve $i,j = 1,\ldots,n$, je vektor s jednakim koordinatama $a^o = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$, za koji funkcional f dostiže minimum

$$f(a) \geqslant f(a^o) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{\frac{s}{n}}{1-\frac{s}{n}}\right]^{\frac{n}{n}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)}.$$

Može se formirati beskonačni niz sukcesivnih aproksimacija koji interpolira vrednosti $f(a)$ i $f(a^o)$.

TEOREMA C. [M.S. KLAMKIN, D.J. NEWMAN, 1970., KLAMKIN, 1975., MAR87].

Ako je

$$x_i > 0,\ i = 1,\dots,n \quad i \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

tada

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1+x_i}{x_i} \geqslant (n+1)^n, \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{1-x_i}{x_i} \geqslant (n-1)^n,$$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1+x_i}{1-x_i} \geqslant \left[\frac{n+1}{n-1}\right]^n .$$

D o k a z poslednje nejednakosti. Neka je

$$X = \left\{ y=(y_1,\dots,y_n) \;\middle|\; y_i > 0,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \right\}$$

i funkcional

$$f(y) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1+y_i}{1-y_i} .$$

Preslikavanja odredimo kao u prethodnim teoremama

$$F_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) =$$

$$= \left(x_1,\dots,\frac{x_i+x_j}{2},\dots,\frac{x_i+x_j}{2},\dots,x_n\right)$$

$i,j = 1,\dots,n$. Takva preslikavanja su monotono nerastuća u odnosu na funkcional f

$$f(x) \geqslant f(F_{ij}(x)).$$

Da bi se proverila monotonost odredimo minimum funkcije

$$y(x) = \frac{1+x}{1-x}\,\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}, \qquad x+\bar{x} = x_1 + x_2.$$

Njen izvod je

$$y'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\,\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}} - \frac{1+x}{1-x}\,\frac{2}{(1-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{2(x^2-\bar{x}^2)}{(1-x)^2(1-\bar{x})^2},$$

tako da $y(x)$ ima najmanju vrednost za $x = \bar{x} = \frac{x_i+x_j}{2}$. Zajednička nepokretna tačka preslikavanja F_{ij}, $i,j=1,\ldots,n$, je vektor sa jednakim koordinatama. Jedino za vektor sa koordinatama $\frac{1}{n}$ važi jednakost. Dokaz se završava time da niz sukcesivnih aproksimacija konvergira zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja, ili uočavanjem zatvorenog podskupa domena X.

2.12. MUIRHEADOVA LEMA. Poznata Muirheadova lema je u teoriji majoracije jedno od osnovnih tvrđenja. Originalna lema se odnosi na vektore sa celobrojnim koordinatama : vektor x, takav da je $x \prec y$, može se dobiti od vektora y uzastopnom primenom konačnog broja T - transformacija . Hardy, Littlewood i Pólya [MAR29] su dokazaliovu lemu za vektore s proizvoljnim realnim koordinatama tako da iz samog dokaza sledi da se vektor x može dobiti primenom ne više od $n-1$ T - transformacija.

Iz dokaza datog u ovoj tački dobija se jedna varijanta ove leme : Vektor x se može dobiti od vektora y ($\succ x$) uzastopnom primenom konačnog broja T - transformacija iz skupa koji ima $n-1$ transformaciju (što je posledica dokaza koji su dali Hardy i dr.) - pri tome skup transformacija koje se koriste ne zavisi od vektora y. Drugim rečima, dovoljna je $n-1$ T - transformacija čijom se uzastopnom primenom od svakog vektora y , za koji je $y \succ x$, može dobiti u konačno koraka nekonstantni vektor x.

Matrica T-transformacije (termin Muirheada) ima oblik

$$T = \lambda I + (1-\lambda)Q,$$

gde je $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ i Q - matrica permutacije koja se od jedinične matrice I dobija zamenom mesta dve vrste ili dve kolone. T-transformacija je

$$xT = (x_1,\ldots,x_{j-1},\lambda x_j+(1-\lambda)x_k,x_{j+1},\ldots$$

$$\ldots,x_{k-1},\lambda x_k+(1-\lambda)x_j,x_{k+1},\ldots,x_n)$$

$$= (x_1,\ldots,x_j+d,\ldots,x_k-d,\ldots,x_n).$$

U lemi se pojavljuje relacija majoracije, čiji termin i oznaku su uveli Hardy i dr. navedenih godina. Uz oznaku $x_{[1]} \geqslant \cdots \geqslant x_{[n]}$ za nerastuću permutaciju vektora x, relacija $x \prec y$ važi ako je

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, \qquad k = 1,\ldots,n-1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}.$$

2.12.1. LEMA. [R.F. Muirhead, 1903., G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, 1934.,1952.]

Ako je $x \prec y$, tada se vektor x može dobiti od vektora y uzastopnom primenom konačnog broja T - transformacija.

D o k a z. Bez ograničenja opštosti može se pretpostaviti da je $x_1 \geq \dots \geq x_n$ i $y_1 \geq \dots \geq y_n$. Neka je

$$X = \left\{ z \;\middle|\; z_1 \geq \dots \geq z_n,\ z_1+\dots+z_n = x_1+\dots+x_n \right\}$$

prostor i preslikavanja

$$F_i^x(y) = (y_1,\dots,y_i-d,y_{i+1}+d,\dots,y_n) = y',$$

$$d = \min\left\{ \frac{y_i-y_{i+1}}{2},\ d_i \right\}, \qquad i = 1,\dots,n-1.$$

Pri tome je

$$\begin{array}{lll} \text{za } y: & y_1 - x_1 = d_1 \geq 0, & \text{za } y': d_1' = d_1 \\ & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ & y_1+\dots+y_{i-1}-x_1-\dots-x_{i-1} = d_{i-1} \geq 0 & d_{i-1}' = d_{i-1} \\ & y_1+\dots+y_i - x_1-\dots-x_i = d_i \geq 0 & d_i' = d_i-d \\ & y_1+\dots+y_{i+1}-x_1-\dots-x_{i+1} = d_{i+1} \geq 0 & d_{i+1}' = d_{i+1} \\ & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ & y_1+\dots+y_n-x_1-\dots-x_n = d_n = 0 & d_n' = 0\,. \end{array}$$

Time je postignuta monotonost koordinata vektora y'

$$y_{i-1} \geq y_i-d \geq y_{i+1}+d \geq y_{i+2},$$

kao i saglasnost preslikavanja F_i^x s poretkom

$$y \succ F_i^x(y) \succ x,$$

što se neposredno proverava.

Neka je funkcional na prostoru X

$$f^x(y) = \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

Tako su preslikavanja F_i^x monotono nerastuća u odnosu na funkcional f^x

$$f^x(y) \geqslant f^x(F_i^x(y)).$$

Niz preslikavanja u kome se svako od preslikavanja $F_1^x,\dots,F_{n-1}^x$ javlja beskonačno puta generiše niz vektora koji konvergira zajedničkoj nepokretnoj tački - vektoru $y^o = (y_1^o,\dots,y_n^o)$. Najpre je

$$d(y,F_i^x(y) = d(y,y') = \sqrt{(y_1-y_1)^2 + \dots + (y_{i-1}-y_{i-1})^2 + + (y_i-y_i+d)^2+(y_{i+1}-y_{i+1}-d)^2 +\dots+(y_n-y_n)^2}$$

$$= \sqrt{d^2 + d^2} = \sqrt{2}\, d$$

$$= \sqrt{2}\left[f^x(y) - f^x(F_i^x(y')\right],$$

tako da , prema [BJE22] niz sukcesivnih aproksimacija $(y^{(i)})$ dobijen primenom preslikavanja $F_1^x ,\dots, F_{n-1}^x$ brzo konvergira

$$\sum_{i=1}^{+\infty} d(y^{(i)},y^{(i+1)}) < +\infty .$$

Pokažimo da je $y^o = x$. Za svaku nepokretnu tačku , konkretno za nepokretnu tačku y^o preslikavanja F_i^x , $i = 1,\dots,n-1$, važi

(1) $y_i^o = y_{i+1}^o$ ili $d_i = y_1^o +\dots +y_i^o -x_1 -\dots-x_i = 0.$

Ako je $d_1 = d_2 =\dots= d_n = 0$, onda je $y^o = x$. Ako se pretpostavi da je $d_1 = \dots = d_{k-1} = 0$ i $d_k > 0$, tada je

$$y_1^o = x_1,\ \dots\ ,\ y_{k-1}^o = x_{k-1},\ y_k^o > x_k ,$$

pa je na osnovu (1) $y_k^o = y_{k+1}^o$. Sada je

$$d_{k+1} = d_k + y^o_{k+1} - x_{k+1} \geqslant d_k + y^o_k - x_k = 2d_k, \quad \text{itd.}$$

Nastavljajući postupak dolazi se do kontradikcije

$$0 < d_k < d_{k+1} < \ldots < d_n = 0.$$

Pokažimo da se vektor x može dobiti primenom konačnog broja T - transformacija. Konstantni i minimalni vektor $x_1 = \ldots = x_n$ se lako može dobiti iz vektora y pomoću najviše $n-1$ T - transformacija. Za ovaj vektor, uz $y \neq x$ i $n > 2$, svaki niz, dobijen primenom svih preslikavanja F^x_i beskonačno puta, ima beskonačno međusobno različitih članova.

Pretpostavimo da vektor x nema sve međusobno jednake koordinate. Primenimo metod matematičke indukcije i iz pretpostavke da je tvrđenje tačno za sve $k < n$, pokažimo da je tačno za n. Ako u nizu sukcesivnih aproksimacija

$$y \succ y^{(1)} \succ y^{(2)} \succ \ldots \succ x$$

bar za jedno preslikavanje F^x_i, koje se primenjuje na vektor $y^{(k)}$, važi

$$\min\left\{\frac{y^{(k)}_i - y^{(k)}_{i+1}}{2},\ d^{(k)}_i\right\} = d^{(k)}_i\,, \tag{2}$$

onda je $d^{(k+1)}_i = 0$. Zato se vektori x i $y^{(k+1)}$ mogu razbiti na podvektore

$$u_1 = (x_1, \ldots, x_i), \qquad u_2 = (x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

$$v_1 = (y^{(k+1)}_1, \ldots, y^{(k+1)}_i), \quad v_2 = (y^{(k+1)}_{i+1}, \ldots, y^{(k+1)}_n),$$

za koje važe odnosi $v_1 \succ u_1$ i $v_2 \succ u_2$.

Prema indukcijskoj pretpostavci, postoje konačni nizovi vektora dobijeni primenom T - transformacija kojima se vektori v_1 i v_2 transformišu redom u vektore u_1 i u_2. Tim transformacijama su jednovremeno određene i transformacije vektora $y^{(k+1)}$ u vektor x.

Ako $d_i^{(k)}$ nijednom nije minimum u (2), tada niz $(y^{(k)})$ konvergira vektoru sa međusobno jednakim koordinatama, što je suprotno pretpostavci.

Kao posledica ovog dokaza može se formulisati sledeća varijanta Muirheadove leme.

LEMA A. Ako je $x \prec y$, tada se x može dobiti iz y uzastopnom primenom konačno puta najviše $n-1$ različitih T - transformacija koje ne zavise od y.

Sledeća formulacija je određenija.

Neka je

$$x_{i_1} \geqslant x_{i_2} \geqslant \cdots \geqslant x_{i_n} \quad \text{ili} \quad x_{[1]} \geqslant x_{[2]} \geqslant \cdots \geqslant x_{[n]}$$

i

$$M_x = \left\{ y \mid x \prec y \right\}.$$

Tada, nekonstantni vektor x se može dobiti od ma kog vektora $y \in M_x$ uzastopnom primenom konačnog broja T - transformacija parova koordinata

(3) $$(i_1, i_2),\ (i_2, i_3),\ \ldots\ ,\ (i_{n-1}, i_n)$$

ili $$([1],[2]),\ ([2],[3]),\ \ldots\ ,\ ([n-1],[n]).$$

Ako je x konstantan vektor, tada se za $n = 2$ vektor x može dobiti jednom primenom jedine (neidentične) T - transformacije.

Ako je $n > 2$ i $y \neq x$, tada se vektor x može dobiti jedino uzastopnom primenom T - transformacija iz skupa (3) beskonačno puta - vektor x je granica niza sukcesivnih aproksimacija.

2.12.2. TEOREMA. [R.F. Muirhead, 1903., G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, 1934., 1952., MAR97]

Neka je $y_i \geqslant 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ i $a \prec b$, tada

$$(4) \qquad \sum_p y_{p(1)}^{a_1} y_{p(2)}^{a_2} \cdots y_{p(n)}^{a_n} \leqslant \sum_p y_{p(1)}^{b_1} y_{p(2)}^{b_2} \cdots y_{p(n)}^{b_n},$$

gde se sumiranje vrši po svim permutacijama niza $1,\ldots,n$.

D o k a z. Prema Muirheadovoj lemi, postoji konačan niz vektora dobijen T - transformacijama za koji je

$$a \prec a^{(1)} \prec a^{(2)} \prec \ldots \prec b.$$

Neka je

$$f(a) = \sum_p y_{p(1)}^{a_1} y_{p(2)}^{a_2} \cdots y_{p(n)}^{a_n}$$

i

$$a^{(1)} = (a_1,\ldots,a_i+d,\ldots,a_j-d,\ldots,a_n), \qquad a_i \geqslant a_j .$$

Da bi se dokazala nejednakost (4) dovoljno je utvrditi da su T - transformacije monotono neopadajuće u odnosu na funkcional f

$$f(a) \leqslant f(a^{(1)}).$$

Sume $f(a)$ i $f(a^{(1)})$ se mogu razbiti na pojedinačne sume čiji faktori obrazuju nejednakost

$$(5) \qquad y_k^{a_i} y_l^{a_j} + y_l^{a_i} y_k^{a_j} \leqslant y_k^{a_i+d} y_l^{a_j-d} + y_l^{a_i+d} y_k^{a_j-d},$$

faktori uz levu i desnu stranu (5) su jednaki - to je suma proizvoda po permutacijama ostalih brojeva.

Ako je $s = \frac{a_i + a_j}{2}$, $e = \frac{a_i - a_j}{2}$, onda (5) postaje

$$y_k^{s+e} y_l^{s-e} + y_l^{s+e} y_k^{s-e} \leqslant y_k^{s+e+d} y_l^{s-e-d} + y_l^{s+e+d} y_k^{s-e-d},$$

$$\left[\frac{y_k}{y_l}\right]^e + \left[\frac{y_l}{y_k}\right]^e \leqslant \left[\frac{y_k}{y_l}\right]^{e+d} + \left[\frac{y_l}{y_k}\right]^{e+d}.$$

Ostaje da se proveri da je funkcija $g(t) = c^t + c^{-t}$ monotono rastuća. Njen izvod je

$$g'(t) = c^t \ln c + \left(\frac{1}{c}\right)^t \ln\frac{1}{c} = \ln c\left[c^x + c^{-x}\right] \geqslant 0.$$

Dobijeni dokaz je sličan originalnom dokazu Muirheada [MAR121].

2.13. NEJEDNAKOST HARDY - LITTLEWOOD - PÓLYA - KARAMATA I MERA RASEJANOSTI SKUPA.

Pored dokaza poznate nejednakosti u ovoj tački je data i mera rasejanosti skupa brojeva koja je saglasna sa relacijom majoracije.

2.13.1. TEOREMA. [G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, 1929., J. Karamata, 1932. BEC30, MIT164]

Neka je $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ i $x \succ y$. Tada, za svaku konveksnu funkciju f važi

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geqslant \geqslant f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n). \tag{1}$$

D o k a z. Neka je prostor

$$M_y = \{ x \mid x \succ y \}$$

i funkcional

$$g(x) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n).$$

Kako je $x \succ y$, prema Muirheadovoj lemi, postoji konačan niz vektora dobijen T - transformacijama za koji je

$$x \succ x' \succ x'' \succ \ldots \succ y.$$

Saglasnost funkcionala $g(x)$ i preslikavanja T - transformacije

$$g(x) \geqslant g(xT),$$

tj.

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geqslant$$
$$\geqslant f(x_1') + f(x_2') + \ldots + f(x_n')$$

se svodi na elementarno svojstvo konveksne funkcije

$$f(x_i) + f(x_j) \geqslant f(x_i - d) + f(x_j + d),$$

uz npr. $x_i > x_j$ i time $0 < d \leqslant \dfrac{x_j - x_i}{2}$.

2.13.2. Ovde uvedena jednostavna mera rasejanosti, razbacanosti skupa ima važno svojstvo saglasnosti sa uređenjem majoracije.

TEOREMA. Neka je $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ i $x \prec y$, tada je

$$\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |y_i - y_j| . \tag{2}$$

D o k a z. Ako je

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} |t - x_i|,$$

onda se funkcional f može predstaviti u obliku

$$f(x) = g(x_1) + \cdots + g(x_n)$$

Pokažimo da je funkcija $g(t)$ konveksna

$$2\, g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant g(a) + g(b).$$

Ako je $x_i \leqslant a < b$ ili $x_i \geqslant b$, tada

$$2\left|\frac{a+b}{2} - x_i\right| = |a-x_i| + |b-x_i|,$$

dok za $a < x_i < b$ važi

$$2\left|\frac{a+b}{2} - x_i\right| < |a-x_i| + |b-x_i| .$$

Kao zbir konveksnih funkcija, funkcija g je konveksna. Sada nejednakost (2) sledi na osnovu nejednakosti Hardy-- Littlewood - Pólya - Karamata (1).

Napomenimo da se nejednakost (2) može izvesti i iz Muirheadove leme.

U [BJE99] je dokazana teorema :

Neka je

$$x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n,$$

$$l(x) = \sum_{\substack{p,q=1\\ p<q}}^{n} |x_p - x_q| ,$$

$$x' = \left(\tfrac{1}{2}(x_1+x_2), \tfrac{1}{2}(x_2+x_3), \dots, \tfrac{1}{2}(x_n+x_1)\right).$$

Tada je

(2) $$l(x) - l(x') \geqslant \max\left\{|x_p - x_q|, p,q=1,\dots,n\right\}.$$

Ova ocena se dostiže.

Poređenje (2) i (3) navodi na pretpostavku da je

$$\left(\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ \tfrac{1}{2}(x_2+x_3),\ \dots,\ \tfrac{1}{2}(x_n+x_1)\right) \prec$$

$$\prec (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

2.14. NEJEDNAKOST ČEBIŠEVA I HARDY - LITTLEWOOD - - PÓLYA

2.14.1. TEOREMA. [P.L. Čebišev, 1882., MIT36]

Ako su $a = (a_1,\ldots,a_n)$ i $b = (b_1,\ldots,b_n)$ konačni ekvimonotoni nizovi

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \quad \text{i} \quad b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$$

ili

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \quad \text{i} \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n,$$

tada

(1) $$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right] \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i ,$$

sa jednakošću ako i samo ako je

(2) $$a_1 = a_2 = \ldots = a_n \quad \text{ili} \quad b_1 = b_2 = \ldots = b_n.$$

D o k a z. Neka je funkcional

$$f(a,b) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$

prostor $$X = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \mid x_1+\ldots+x_n = a_1+\ldots+a_n \right\}$$

i preslikavanje

$$F_{ij}(x) = \left(x_1,\ldots,x_{i-1},\frac{x_i+x_j}{2},\ldots,x_{j-1},\frac{x_i+x_j}{2},\ldots,x_n\right),$$

$i,j = 1,2,\ldots,n$. Tada su preslikavanja F_{ij} monotono nerastuća u odnosu na funkcional f

$$f(a,b) \geqslant f(F_{ij}(a),b),$$

tj.

$$a_ib_i + a_jb_j \geqslant \frac{a_i+a_j}{2}(b_i+b_j),$$

što daje

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0.$$

Funkcional f najmanju vrednost dostiže u zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja F_{ij}, to je konstantni vektor

$$a^o = (\bar{a},\ldots,\bar{a}), \quad \bar{a} = \frac{1}{n}(a_1+\ldots+a_n).$$

Niz preslikavanja F_{ij} u kome se svaki par indeksa javlja beskonačno puta daje niz sukcesivnih aproksimacija koji konvergira nepokretnoj tački

(3) $f(a,b) \geqslant f(a',b) \geqslant \ldots \geqslant f(a^o,b) = \frac{1}{n}\bar{a}(b_1+\ldots+b_n) = \bar{a}\bar{b}$.

Jednakost u (1) odnosno (3) važi ako i samo ako je $f(a,b) = f(F_{ij}(a),b)$ za sva preslikavanja i time

(4) $a_i = a_j$ ili $b_i = b_j$, za sve $i,j=1,\ldots,n$.

Pokažimo da su uslovi (2) i (4) ekvivalentni. Za $n = 2$ iz uslova (4) sledi uslov (2). Neka je $n \geqslant 3$ i neka svi a_i, ako i svi b_i, nisu međusobno jednaki. Dakle, ako je $a_i \neq a_j$ i $b_j \neq b_k$, prema (4) tada je $b_i = b_j$ i $a_j = a_k$. Odatle dalje sledi $a_i \neq a_k$ i $b_i \neq b_k$ kontradikcija sa (4).

Dokaz se može izvesti i polazeći od nejednakosti $f(a,b) \geqslant f(F_{ij}(a),F_{ij}(b))$.

2.14.2. TEOREMA. [G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, 1934., HAR314]

Neka je $a = (a_1,\ldots,a_n)$, $b = (b_1,\ldots,b_n)$ i $a_{[1]} \geqslant a_{[2]} \geqslant \ldots \geqslant a_{[n]}$ preuređen niz a. Tada je

(5) $$\sum_{i=1}^{n} a_{[i]} b_{[n-i+1]} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{[i]} b_{[i]} .$$

D o k a z. Neka je funkcional

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

i preslikavanje

$$T_{ij}(a) = (a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$$

$i,j = 1,2,\ldots,n, \quad i < j$ transpozicija.

Za drugu nejednakost (5) preslikavanja

$$F_{ij}(a,b) = (a',b')$$

odredimo formulama

$$(6)\quad \begin{array}{llll} a_i \geqslant a_j, & b_i \geqslant b_j \quad \text{tada} & a' = a, & b' = b \\ a_i < a_j, & b_i < b_j & a' = T_{ij}(a), & b' = T_{ij}(b) \\ a_i \geqslant a_j, & b_i < b_j & a' = a, & b' = T_{ij}(b) \\ a_i < a_j, & b_i \geqslant b_j & a' = T_{ij}(a), & b' = b\ . \end{array}$$

U prva dva slučaja formula (6) je

$$f(a,b) = f(F_{ij}(a,b)),$$

a u druga dva odnos

$$f(a,b) \leqslant f(F_{ij}(a,b)),$$

je ekvivalentan sa

$$a_i b_i + a_j b_j \leqslant a_i b_j + a_j b_i\ ,$$

ili

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leqslant 0.$$

Preslikavanja F_{ij} uređuju nizove smanjujući broj inverzija. Posle konačno koraka dobija se zajednička nepokretna tačka preslikavanja - dva monotono rastuća niza.

Prva nejednakost u (5) se dokazuje slično.

2.15. MARKOVIĆEVA NEJEDNAKOST.

D. Marković, 1958., [VAS103] je dao uopštenje Nejednakosti M. Petrovića.

TEOREMA A. Ako je funkcija f predstavljena redom

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i ,$$

čiji je poluprečnik konvergencije a i

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0, \quad a_k > 0, \quad a_{k+i} \geqslant 0$$

($k \geqslant 1$, $i = 1,2,\dots$), tada važi nejednakost

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant f\left[\sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}\right] + (n-1)f(0),$$

gde je $x_i \in [0,a)$, $i=1,2,\dots,n$, $\sqrt[k]{x_1^k + \dots + x_n^k} \in [0,a)$.

D o k a z. Neka je funkcional

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

i preslikavanje

$$F_i(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = (\sqrt[k]{x_1^k + x_i^k},\dots,0,\dots,x_n)$$

($i = 2,\dots,n$) na skupu n-torki. Tada je preslikavanje F_i monotono neopadajuće u odnosu na funkcional φ

$$(2) \qquad \varphi(x_1,\dots,x_n) \leqslant \varphi(F_i(x_1,\dots,x_n)).$$

Nejednakost(2) sledi iz

$$2\, a_o = 2\, a_o$$

i

$$a_j\, x_1^j + a_j\, x_i^j \leqslant a_j \left[x_1^k + x_i^k\right]^{j/k}$$

što je posledica konveksnosti funkcije $y(x) = x^{j/k}$ $(j \geqslant k)$.

U zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja F_i dostiže se najveća vrednost funkcionala

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) \leqslant \varphi\left[\sqrt[k]{x_1^k+x_2^k},\ 0,x_3,\ldots,x_n\right] \leqslant \cdots$$

$$\leqslant \varphi\left[\sqrt[k]{x_1^k+\ldots+x_n^k},\ 0,\ldots,\ 0\right]$$

$$= f\left[\sqrt[k]{x_1^k+\ldots+x_n^k}\right] + (n-1)f(0).$$

Dalje generalizacije su dali P.M. Vasić, 1968. i J.D. Kečkić i I.B. Lacković, 1970., [MIT358].

TEOREMA B. Neka je f dva puta diferencijabilna funkcija na $[0,a)$ i neka na tom intervalu zadovoljava sledeću diferencijalnu nejednačinu

$$x\, f''(x) - (k-1)\, f'(x) \geqslant 0,$$

gde je k realan broj različit od nule. Tada je

$$(4)\qquad f\left[\sqrt[k]{\frac{x_1^k+\ldots+x_n^k}{n}}\right] \leqslant \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{f\left[\sqrt[k]{x_1^k+\ldots+x_n^k}\right] + (n-1)f(0)}{n},$$

za $x_i \in [0,a)$ $(i=1,\ldots,n)$ i $\sqrt[k]{x_1^k+\ldots+x_n^k} \in [0,a)$.

D o k a z. Neka je funkcional

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n)$$

i preslikavanja, za $i = 2,3,\ldots,n$,

$$F_i(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = (\sqrt[k]{x_1^k+x_i^k},\ldots,0,\ldots,x_n)$$

$$G_i(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = \left(\sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_i^k}{2}},\dots,\sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_i^k}{2}},\dots,x_n\right).$$

Tada je ispunjen zahtev monotonosti tj. saglasnosti preslikavanja i funkcionala

$$\varphi\left[G_i(x_1,\dots,x_n)\right] \leqslant \varphi(x_1,\dots,x_n) \leqslant \varphi\left[F_i(x_1,\dots,x_n)\right].$$

(Radi jednostavnosti $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ ne razlikujemo od $\varphi((x_1,\dots,x_n))$.) Za funkciju

$$y(x) = f(x^{\frac{1}{k}}) + f((s-x)^{\frac{1}{k}}), \quad x\in[0,s), \quad s=x_1^k+x_i^k \in [0,a^k), k>0$$

je

$$k\, y'(x) = f'(x^{\frac{1}{k}})\, x^{\frac{1}{k}-1} - f'((s-x)^{\frac{1}{k}})\, ^{\frac{1}{k}-1}$$

$$k^2\, y''(x) = f''(x^{\frac{1}{k}})\, x^{\frac{2}{k}-2} + f'(x^{\frac{1}{k}})\,(1-k)\, x^{\frac{1}{k}-2} +$$

$$+ f''((s-x)^{\frac{1}{k}})(s-x)^{\frac{2}{k}-2} + f'((s-x)^{\frac{1}{k}}(1-k)(s-x)^{\frac{1}{k}-2}$$

$$= x^{\frac{1}{k}-2}\left[x^{\frac{1}{k}} f''(x^{\frac{1}{k}}) - (k-1)\, f'(x^{\frac{1}{k}})\right] +$$

$$+ (s-x)^{\frac{1}{k}-2}\left[(s-x)^{\frac{1}{k}} f''((s-x)^{\frac{1}{k}}) - (k-1) f'((s-x)^{\frac{1}{k}})\right].$$

Kako je $x^{1/k}\in[0,a)$ i $(s-x)^{1/k}\in[0,a)$, na osnovu (3) sledi da je $y''(x)\geqslant 0$, tako da $y(x)$ ima najmanju vrednost za $x=\frac{s}{2}$ i najveću za $x=0$ ($x=s$).

U zajedničkim nepokretnim tačkama preslikavanja G_i, odnosno F_i, funkcional φ dostiže najmanju, odn. najveću vrednost.

NAPOMENA. Pretpostavka da je $k > 0$ nije data u teoremi, a korišćena je u dokazu. Neophodnost pretpostavke sledi iz suprotnog primera $k = -1$ i $y = x$. Pozitivna vrednost za k može biti pretpostavljena u oznaci $\sqrt[k]{}$.

2.16. UOPŠTENJE BERNOULLIEVE NEJEDNAKOSTI.

Poznata nejednakost

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

se može uopštiti [MIT35]

(1) $$(1+x_1) \ldots (1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + \ldots + x_n.$$

Dovoljno je polaznu nejednakost napisati u obliku

$$(1+x) \ldots (1+x) \geqslant 1 + x + \ldots + x,$$

što vodi uopšenju (1) na koje se već može lako primeniti postupak nepokretne tačke.

Sledeća nejednakost interpolira Bernoullievu, a sadrži i nejednakost (1). U dokazu se pojavljuje i jednostavna nejednakost (3). U drugoj teoremi se daju slabiji uslovi za važenje nejednakosti (1).

TEOREMA A. Neka su $x_i > -1$, $i = 1,\ldots,n$ svi istog znaka i

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n).$$

Tada je

(2) $$(1+x)^n \geqslant (1+x_1) \ldots (1+x_n) > 1 + nx ,$$

jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = \ldots = x_n$.

D o k a z. Prva nejednakost u (2)

$$\frac{1+x_1 + \ldots + 1+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{(1+x_1) \ldots (1+x_n)}$$

je odnos aritmetičke i geometrijske sredine.

Druga nejednakost, za slučaj $x_i \geqslant 0$, posle množenja postaje očigledna. Neka je $-1 < x_i \leqslant 0$ i $y_i = 1 + x_i$, tada (2) postaje

$$y_1 \ldots y_n \geqslant 1 + y_1-1 + \ldots + y_n-1$$

ili

(3) $$y_1 + \ldots + y_n \leqslant n-1 + y_1 \ldots y_n, \qquad 0 \leqslant y_i \leqslant 1.$$

Neka je funkcional

$$f(y_1,\ldots,y_n) = y_1 +\ldots+ y_n - y_1 \ldots y_n$$

i preslikavanja

$$F_i(y_1,\ldots,y_i,\ldots,y_n) = (y_1,\ldots,1,\ldots,y_n),$$

($i = 1,\ldots,n$). Ta preslikavanja su saglasna s funkcionalom - monotono su neopadajuća

$$f(y_1,\ldots,y_n) \leqslant f(F_i(y)),$$

jer je

$$y_1+\ldots+y_i+\ldots+y_n - y_1\ldots y_{i-1}y_iy_{i+1}\ldots y_n \leqslant$$

$$\leqslant y_1+\ldots+y_{i-1}+1+y_{i+1}+\ldots+y_n - y_1\ldots y_{i-1}1y_{i+1}\ldots y_n$$

ili

$$y_i + (1-y_i)y_1\ldots y_{i-1}y_{i+1}\ldots y_n \leqslant y_1 +1 -y_1 = 1.$$

Time je

$$f(y_1,\ldots,y_n) \leqslant f(1,y_2,\ldots,y_n) \leqslant f(1,1,y_3,\ldots,y_n) \leqslant$$

$$\leqslant \ldots \leqslant f(1,\ldots,1) = n - 1.$$

Sledeće tvrđenje proširuje uslove za važenje nejednakosti (1).

TEOREMA B. Neka su svi brojevi x_i ($i = 1,\dots,n$) istog znaka. Ako su brojevi negativni, neka postoji podskup skupa indeksa $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ sa 1 ili $2k$ ($k = 0,1,2,\dots$) elemenata, takav da je

$$x_i < -1, \quad i \in I \quad \text{i} \quad x_j \geqslant -1, \quad j \notin I.$$

Tada je

$$(1+x_1)\ \dots\ (1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + \dots + x_n,$$

jednakost važi ako i samo ako je $n = 1$.

D o k a z. Neka je $I = \{1\}$. Tada je

$$(1+x_2)\ \dots\ (1+x_n) \leqslant (1+x)^{n-1},$$

$$x = \frac{x_2 + \dots + x_n}{n-1},$$

pošto proizvod nenegativnih brojeva, uz stalan zbir, ima najveću vrednost kada su ti brojevi jednaki. Time je

(4) $$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geqslant (1+x_1)(1+x)^{n-1}.$$

Iz nejednakosti

$$(1+x_1)\left[(1+x)^{n-1} - 1\right] \geqslant 0 > (n-1)x$$

sledi

(5) $$(1+x_1)\ (1+x)^{n-1} \geqslant 1 + x_1 + (n-1)x.$$

Iz (4) i (5) proizlazi

$$(1+x_1)\ (1+x_2)\ \dots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Neka je $I = \{1,\dots,2k\}$, $k \geqslant 1$, tada je

$$(1+x_1)\ \dots\ (1+x_{2k})\ (1+x_{2k+1})\ \dots\ (1+x_n) \geqslant 0 \geqslant$$

$$\geqslant (1 + x_1 + \dots + x_{2k})\ (1+x_{2k+1})\ \dots\ (1+x_n)$$

$$\geqslant 1 + x_1 + \dots + x_{2k} + x_{2k+1} + \dots + x_n,$$

gde poslednja nejednakost sledi iz prethodno razmotrenog slučaja.

Nisu ispitani slučajevi s 3,5,... brojeva manjih od -1.

2.17. CIKLIČNA NEJEDNAKOST.

TEOREMA. A. Zulauf, 1958.,[MIT134]
Važi sledeća nejednakost

$$1 < \frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1} < n-1 ,$$

gde su $x_1,\dots,x_n$ ($n \geqslant 3$) nenegativni brojevi i svi imenioci pozitivni.

D o k a z. Funkcija

$$y(x) = \frac{a}{a+x} + \frac{x}{x+c}, \quad x \geqslant 0, \quad a,c \neq 0$$

ima izvod

$$y'(x) = \frac{c(x+a)^2 - a(x+c)^2}{(x+a)^2(x+c)^2}$$

i ekstremne vrednosti za

$$\frac{x+a}{x+c} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \quad \text{tj.} \quad x = \sqrt{ac}.$$

Ako je $a \geqslant c$, onda je $y(\sqrt{ac}) = \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$ najveća, a $y(0) = 1$ najmanja vrednost. Za $a \leqslant c$ važi obrnuto.

Neka je funkcional

$$f(x_1,\dots,x_n) = \frac{x_1}{x_1+x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_n+x_1}$$

i preslikavanja

$$F_i(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = (x_1,\dots,\sqrt{x_{i-1}x_{i+1}},\dots,x_n), \; i=2,\dots,n.$$

Gornja granica. Ako je $x_i = 0$, tada je $f(x_1,\ldots,x_n) \leqslant n-1$, pri čemu jednakost ne može da nastupi. Sem toga, ako za neko i važi $x_{i-1} < x_{i+1}$, onda je

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \leqslant f(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n) < n-1.$$

Pretpostavimo da je $x_{i-1} \geqslant x_{i+1}$ za sve $i=2,\ldots,n-1$. Ako je $n = 2m+1$, onda je

$$x_1 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_{2m+1}, \quad x_2 \geqslant x_4 \geqslant \cdots \geqslant x_{2m}$$

i time

$$f(x_1,\ldots,x_{2m+1}) \leqslant f(x_1,\sqrt{x_1x_3},x_3,\ldots,x_{2m+1}) \leqslant \cdots \leqslant$$

$$\leqslant f(x_1,\sqrt{x_1x_3},x_3,\sqrt{x_3x_5},x_5,\ldots,x_{2m+1}),$$

poslednji niz je monotono nerastući. Ako je $n = 2m$, onda je

(1) $$f(x_1,\ldots,x_{2m}) \leqslant$$

$$\leqslant f(x_1,\sqrt{x_1x_3},x_3,\ldots,x_{2m-3},\sqrt{x_{2m-3}x_{2m-1}},x_{2m-1},x_{2m}).$$

Za $x_{2m-1} \geqslant x_{2m}$ poslednji niz je nerastući. Ako je $x_{2m-1} \leqslant x_{2m} \leqslant \sqrt{x_{2m-3}x_{2m-1}}$, onda se veća vrednost u (1) može majorisati sa

$$f(x_1,\ldots,\sqrt{x_{2m-3}x_{2m-1}},\sqrt{\sqrt{x_{2m-3}x_{2m-1}}\,x_{2m}},x_{2m})$$

vrednošću za nerastući niz. Najzad, ako je $x_{2m} \geqslant \sqrt{x_{2m-3}x_{2m-1}}$ može se $\sqrt{x_{2m-3}x_{2m-1}}$ zameniti sa 0.

Ostaje da se ispita slučaj $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$. Prostor

$$Z = \left\{ (x_1,z_2,\ldots,z_{n-1},x_n) \,\middle|\, x_1 \geqslant z_2 \geqslant \cdots \geqslant z_{n-1} \geqslant x_n,\ z_i \in R \right\}.$$

je kompaktan i funkcional $f(x)$ na prostoru Z dostiže maksimum. Taj maksimum može biti jedino u zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja $F_2,\dots,F_{n-1}$. Ta tačka je geometrijska progresija

$$x^0 = (x_1, x_1 q, \dots, x_1 q^{n-2}, x_n), \quad x_n = x_1 q^{n-1}.$$

Niz preslikavanja $F_2,\dots,F_{n-1},F_2,\dots$ određuje niz sukcesivnih aproksimacija

$$x,\ F_2(x),\ F_3(F_2(x)),\ \dots$$

koji konvergira ka x^0 za koji je

$$f(x_1,\dots,x_n) \leqslant f(F_2(x_1,\dots,x_n)) \leqslant \dots \leqslant f(x^0) = h(q).$$

Sada je

$$h(q) = \frac{x_1}{x_1+x_1q} + \frac{x_1q}{x_1q+x_1q^2} + \dots + \frac{x_1q^{n-1}}{x_1q^{n-1}+x_1}$$

$$= \frac{n-1}{1+q} + \frac{q^{n-1}}{1+q^{n-1}},$$

i

$$h'(q) = -\frac{n-1}{(1+q)^2} + \frac{(n-1)q^{n-2}}{(1+q^{n-1})^2}$$

$$= (n-1)\,\frac{(1+q)^2q^{n-2} - (1+q^{n-1})^2}{(1+q)^2(1+q^{n-1})^2}$$

$$= (n-1)\,\frac{(1-q^n)(q^{n-2}-1)}{(1+q)^2(1+q^{n-1})^2}.$$

Kako je $h'(q) < 0$, dobija se

$$h(q) < \lim_{q\to 0} h(q) = n-1.$$

Donja granica. Važi isti dokaz, uz promenu smera nejednakosti i $q \to +\infty$, što daje ocenu 1.

2.18. WIRTINGEROVA NEJEDNAKOST.

Nejednakost W. Wirtinger, 1916., E. Almanski, 1905., [BEC177] je interpolirana u dokazu.

TEOREMA. Ako $u(t)$ ima periodu 2π i

$$\int_0^{2\pi} u(t)dt = 0,$$

tada je

$$\int_0^{2\pi} [u(t)]^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} [u'(t)]^2 dt,$$

sa strogom nejednakošću, izuzev za

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

D o k a z. Funkcija $u(t)$ se može razviti u Fourierov red

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos kt + b_k \sin kt\right].$$

Nejednakost je dovoljno dokazati za konačne trigonometrijske sume

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos kt + b_k \sin kt\right]$$

$$= (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)(t)$$

Neka je funkcional

$$f(v) = \int_0^{2\pi} \left[v'(t)^2 - v(t)^2\right] dt$$

i preslikavanja

$$F_k(v) = (a_1, \ldots, b_{k-1}, 0, 0, a_{k+1}, \ldots, b_n)$$

$$= w, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Sada je

$$f(v) = \int_0^2 \Big[(-ka_k \sin kt + kb_k \cos kt + w')^2 - (a_k \cos kt + b_k \sin kt + w)^2 \Big] dt$$

$$= \int_0^2 \Big[k^2 a_k^2 \sin^2 kt + k^2 b_k^2 \cos^2 kt + w'^2 - 2k^2 a_k b_k \sin kt \cos kt - 2ka_k \sin kt w' + 2kb_k \cos kt w' - a_k^2 \cos^2 kt - b_k^2 \sin^2 kt - w^2 - 2a_k b_k \cos kt \sin kt - 2a_k \cos kt w - 2b_k \sin kt\, w \Big] dt .$$

Kako je

$$\int_0^2 \cos kt \sin kt \, dt = 0,$$

$$\int_0^2 \cos kt \sin it \, dt = 0, \qquad k \neq i$$

$$\int_0^2 \cos kt \cos it \, dt = 0, \qquad k \neq i,$$

to je

$$f(v) = f(w) + (k^2-1)(a_k^2+b_k^2) \int_0^2 \cos^2 kt \, dt.$$

Time je pokazana saglasnost preslikavanja i funkcionala

$$f(v) \geqslant f(F_k(v)), \qquad k = 1,\ldots,n,$$

pri čemu jednakost važi jedino ako je $k = 1$ ili $a_k = b_k = 0$. Zajedničke nepokretne tačke preslikavanja $F_2,\ldots,F_n$ su funkcije oblika $a_1 \cos t + b_1 \sin t$. Može se obrazovati niz sukcesivnih aproksimacija

$$f(v) \geqslant f(F_n(v)) \geqslant \ldots \geqslant f(F_2(\ldots(F_n(v))\ldots)) = 0.$$

2.19. INTERPOLISANA BUNIAKOWSKIJEVA NEJEDNAKOST.

V. Buniakowski - L. Schwarzova integralna nejednakost [BEC21] je direktna posledica diskretnog slučaja. Dati dokaz interpoliše ovu nejednakost.

TEOREMA. Neka su f i g realne i integrabilne funkcije na $[a,b]$. Tada je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

jednakost važi jedino ako je $Af \equiv Bg$, gde su A i B konstante od kojih bar je jedna različita od nule.

D o k a z. Neka je X skup svih periodičnih integrabilnih funkcija sa periodom $b-a$ i funkcional

$$\varphi(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Neka je preslikavanje na skupu X

$$\left[F_d(f)\right](x) = \left[\frac{f^2(x) + f^2(x+d)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad d \in R.$$

Pri tome je

$$\int_a^b F_d^2(f)(x)dx = \int_a^b \frac{f^2(x)+f^2(x+d)}{2}\,dx = \int_a^b f^2(x)dx.$$

Integracijom nejednakosti (diskretan slučaj nejednakosti (1) za n=2, koji se direktno proverava)

$$f(x)g(x)+f(x+d)g(x+d) \leqslant \tag{2}$$

$$\leqslant \left[f^2(x) + f^2(x+d)\right]^{\frac{1}{2}} \left[g^2(x) + g^2(x+d)\right]^{\frac{1}{2}}$$

se dobija da je preslikavanje F_d monotono neopadajuće u odnosu na funkcional φ

$$\varphi(f,g) \leqslant \varphi(F_d(f),F_d(g)).$$

Integracijom kvadrata nejednakosti geometrijske i kvadratne sredine

$$f(x)g(x) \leqslant \frac{1}{2}\left[f^2(x) + g^2(x)\right]$$

dobija se

$$\varphi(f,g) \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx\right].$$

Time je funkcional φ ograničen na prostoru

$$X_f \times X_g = \left\{u \,\middle|\, \int_a^b u^2(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx\right\} \times$$

$$\times \left\{v \,\middle|\, \int_a^b v^2(x)dx = \int_a^b g^2(x)dx\right\} \subset X \times X$$

na kome dostiže maksimum.

Najveću vrednost funkcional φ dostiže u zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja F_d, $0 \leqslant d \leqslant b-a$. Nepokretna tačka preslikavanja F_d je konstantna funkcija, za koje funkcional φ dostiže maksimum i kada u (1) važi jednakost. Sem toga, jednakost u (1) važi i za one funkcije za koje važi jednakost u (2), a to su srazmerne funkcije.

POSLEDICA.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \int_a^b \left[\frac{f^2(x)+f^2(x+d)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{g^2(x)+g^2(x+d)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} dx \leqslant$$

$$\leqslant \ldots \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

$$\varphi(g_1,\ldots,g_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} f_i g_i\right] d ,$$

gde su $f_i = f(x_i)$, $g_i = g(x_i)$, $i = 1,\ldots,n$ vrednosti funkcija u tačkama ekvidistantne podele koraka d. Dakle, neka je prostor

$$X = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \;\middle|\; 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} g_i\right\}$$

i φ ocenjivani funkcional. Ako je

$$1 = g_1 = \ldots = g_{i-1} > g_i ,\ g_j > g_{j+1} = \ldots = g_n = 0,$$

neka je preslikavanje

$$F(g_1,\ldots,g_i,\ldots,g_j,\ldots,g_n) =$$
$$= (g_1,\ldots,g_i+h,\ldots,g_j-h,\ldots,g_n),$$

gde je $h = \min\left\{1-g_i,\ g_j\right\}$. Očigledno je ispunjen zahtev monotonosti

$$\varphi(g_1,\ldots,g_n) \leqslant \varphi(F(g_1,\ldots,g_n)).$$

Nepokretna tačka preslikavanja F je vektor, koji se dobija posle uzastopne primene konačnog broja preslikavanja F,

$$g^o = (1,\ldots,1,\gamma_{k+1},0,\ldots,0),$$

gde je $\gamma_{k+1} = \left[\sum_{i=1}^{n} g_i\right] - k$, $k = \mathrm{En}\left[\sum_{i=1}^{n} g_i\right]$, gde je En - funkcija ceo deo. Time je

$$\varphi(g_1,\ldots,g_n) \leqslant \left[\sum_{i=1}^{k} f_i\right] d + \gamma_{k+1} f_{k+1} d. \tag{2}$$

Neka je

$$g^*(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant c \\ 0, & c < x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Suma s desne strane (2) aproksimira integral

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^{a+c} f(x)dx ,$$

što završava dokaz.

Leva nejednakost se dokazuje simetrično.

2.21. OPIALOVA NEJEDNAKOST.

U navedenom dokazu se dolazi i do diskretne Opialove nejednakosti (5). Izdvaja se i zanimljiva nejednakost (4), koja je poseban slučaj Hölderove nejednakosti

$$\frac{p_1^2}{q_1} + \ldots + \frac{p_n^2}{q_n} \geqslant \frac{(p_1 + \ldots + p_n)^2}{q_1 + \ldots + q_n}.$$

TEOREMA. Z. Opial, 1960., [MIT154]

Neka je f apsolutno neprekidna funkcija na $[0,h]$ i neka je $f(0) = f(h) = 0$. Tada važi nejednakost

$$(1)\qquad \int_0^h |f(x)f'(x)|dx \leqslant \frac{h}{4}\int_0^h |f'(x)|^2dx.$$

Jednakost važi samo ako je $f(x) = cx$, za $0 \leqslant x \leqslant \frac{h}{2}$, i $f(x) = c(h-x)$, za $\frac{h}{2} \leqslant x \leqslant h$, gde je c konstanta.

D o k a z. Nejednakost je dovoljno dokazati za poligonalne funkcije određene tačkama $M_0(0,0)$, $M_i(x_i,y_i)$ za $i = 1,\ldots,n-1$ i $M_n(h,0)$. Može se pretpostaviti i da je $y_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n-1$. Tada je

$$\psi = \int_0^h f(x)f'(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)f'(x)dx =$$

$$(2) \qquad = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2} \frac{|y_i - y_{i-1}|}{x_i - x_{i-1}}(x_i-x_{i-1})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |y_{i-1}^2 - y_i^2|$$

$$= b_1^2 + \dots + b_k^2 - a_1^2 - \dots - a_k^2 ,$$

gde su

$$0 = a_1 \leqslant b_1 \geqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant b_{k-1} \geqslant a_k \leqslant b_k \geqslant \dots \geqslant a_k \leqslant b_k$$

lokalni minimumi i maksimumi funkcije $f(x)$.

Druga strana je

$$(3) \qquad \varphi = \frac{h}{4}\int_0^h f'(x)^2 dx = \frac{h}{4}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)^2 dx$$

$$= \frac{h}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-y_{i-1})^2}{x_i-x_{i-1}} .$$

Integral φ ne zavisi od podele $x_1,\dots,x_n$ intervala $[0,h]$, tako da treba naći najmanju vrednost φ po svim podelama intervala $[0,h]$, uz nepromenjene vrednosti y_i. Kako je

$$x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1} = h,$$

to treba posmatrati funkciju

$$y(x) = \frac{r^2}{x} + \frac{s^2}{c-x} .$$

Njen izvod je

$$y'(x) = -r^2x^{-2} + s^2(c-x)^{-2},$$

tako da $y(x)$ ima najmanju vrednost za $x : c-x = r : s$. Time suma (3) ima najmanju vrednost ako je niz brojilaca proporcionalan nizu imenilaca, uz nove oznake,

$$(4) \qquad \frac{p_1^2}{q_1} + \dots + \frac{p_n^2}{q_n} \geqslant kp_1 + \dots + kp_n =$$

$$= k(p_1 + \ldots + p_n) = \frac{(p_1 + \ldots + p_n)^2}{q_1 + \ldots + q_n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1, \quad q_i = \frac{1}{k} p_i, \quad i = 1, \ldots, n .$$

Jednostavnije, nejednakost (4) je poseban slučaj Hölderove nejednakosti za nizove

$$p_1^2, \ldots, p_n^2, \quad \frac{1}{q_1}, \ldots, \frac{1}{q_n}$$

uz vrednosti $p = \frac{1}{2}$, $q = -1$.

Na osnovu (4) je

$$\varphi \geqslant \frac{h}{4} \frac{1}{h} \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i - y_{i-1}| \right]^2$$

$$= (b_1 + \ldots + b_k - a_1 - \ldots - a_k)^2 .$$

Dakle, ostaje da se dokaže Opialova nejednakost za nizove

(5) $\quad (b_1 + \ldots + b_k - a_1 - \ldots - a_k)^2 \geqslant b_1^2 + \ldots + b_k^2 - a_1^2 - \ldots - a_k^2 .$

Dokaz izvodimo metodom matematičke indukcije. Za $n=1$ je $b_1^2 \geqslant b_1^2$, jer je $a_1 = 0$. Pretpostavimo da je (5) tačno za $n = k$. Tada je

$$(b_1 - a_1 + \ldots + b_{k+1} - a_{k+1})^2 = (b_1 - a_1 + \ldots + b_k - a_k)^2 +$$

$$+ 2(b_1 - a_1 + \ldots + b_k - a_k)(b_{k+1} - a_{k+1}) +$$

$$+ (b_{k+1} - a_{k+1})^2 \geqslant$$

$$\geqslant b_1^2 - a_1^2 + \ldots + b_k^2 - a_k^2 +$$

$$2(b_1 - a_1 + \ldots + b_k - a_k)(b_{k+1} - a_{k+1}) +$$

$$+ b_{k+1}^2 - 2b_{k+1}a_{k+1} + a_{k+1}^2 ,$$

tako da treba proveriti

$$2(b_1-a_1+\ldots+b_k-a_k)(b_{k+1}-a_{k+1}) -2b_{k+1}a_{k+1} +a_{k+1}^2 \geqslant -a_{k+1}^2,$$

što daje

$$2(b_1-a_1+\ldots+b_k-a_k-a_{k+1})(b_{k+1}-a_{k+1}) =$$

$$= (b_1-a_2+b_2-a_3+\ldots+b_{k-1}-a_k+b_k-a_{k+1})(b_{k+1}-a_{k+1}) \geqslant 0.$$

NAPOMENA. Za poligonalnu liniju sa ekvidistantnom podelom $[0,h]$ odnos $\frac{\psi}{\varphi}$ raste ako se izvrši linearizacija funkcije na monotonom segmentu, tj. ako je $f(x_{i-1}) \leqslant f(x_i) \leqslant f(x_{i+1})$, onda se $f(x_i)$ zamenjuje sa $\frac{1}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})\right]$. Uzastopna primena preslikavanja linearizacije daje (5).

2.22. NEJEDNAKOSTI OSTROWSKOG.

TEOREMA A. A. Ostrowski, 1938. [MIT297]

Neka je f diferencijabilna funkcija u intervalu (a,b) i neka je, u (a,b), $|f'(x)| \leqslant M$. Tada je, za svako $x \in (a,b)$

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \left[\frac{1}{4} + \frac{\left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2}{(b-a)^2}\right](b-a)M. \tag{1}$$

D o k a z. Neka je

$$f(x) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx .$$

Od svih funkcija koje za dato x imaju vrednost $f(x)$ najveći integral ima funkcija za koju je $f'(t) = -M$ na intervalu (a,x) i $f'(t) = M$ na (x,b) - posmatraju se samo funkcije koje zadovoljavaju uslove teoreme. Tada se postiže maksimum

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant -f(x) + \frac{x-a}{2(b-a)}\Big[2f(x) + (x-a)M\Big] +$$

$$+ \frac{b-x}{2(b-a)}\Big[2f(x) + (b-x)M\Big]$$

$$= \Big[(x-a)^2 + (b-x)^2\Big]\frac{M}{2(b-a)}$$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{\left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2}{(b-a)^2}\right](b-a)M \; .$$

TEOREMA B. A. Ostrowski, 1952., [BEC32]

Ako realna funkcija F od n promenljivih zadovoljava uslove Schura

$$(x_i - x_j)\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_j}\right) \geqslant 0$$

za svako $i \neq j$, tada za $x \succ y$ važi

(2) $$F(x) \geqslant F(Y) .$$

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{(z_1,\ldots,z_n) \mid z_1 \geqslant \ldots \geqslant z_n,\ z_1+\ldots+z_n = x_1+\ldots+x_n\right\}$$

i funkcional $f : X \to R$

$$f(x_1,\ldots,x_n) = F(x).$$

Kako je $x \succ y$, prema Muirheadovoj lemi postoji niz dobijen T - transformacijama u skupu X takav da je

$$x \succ x^{(1)} \succ \ldots \succ x^{(m)} = y.$$

Izvršene transformacije su oblika

$$F_{ij}(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_i-d,\ldots,x_j+d,\ldots,x_n),$$

za neko $d \geqslant 0$. Dovoljno je pokazati da su preslikavanja

F_{ij} monotono nerastuća u odnosu na funkcional

(3) $$f(x_1,\ldots,x_n) \geqslant f(F_{ij}(x_1,\ldots,x_n)).$$

Ako je

$$u(x) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},x,\ldots,x_{j-1},\bar{x},\ldots,x_n),$$

$$x \in [x_i-d,x_i], \quad x + \bar{x} = x_i + x_j,$$

tada je

$$u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x,\ldots,\bar{x},\ldots,x_n) - $$

$$- \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x,\ldots,\bar{x},\ldots,x_n).$$

Iz uslova Schura i $x \geqslant \bar{x}$ sledi da je $u'(x) \geqslant 0$ i time važi (3).

Važi i obrnuto tvrđenje, ako je $F(x) \geqslant F(y)$ za svaku funkciju koja zadovoljava uslov Schura, onda je $x \succ y$.

2.23. NEJEDNAKOSTI LANDAUA I ABELA.

TEOREMA A. E. Landau, 1914., [MIT381]

Neka je f realna funkcija koja na intervalu dužine ne manje od 2, ispunjava uslove

$$|f(x)| \leqslant 1 \quad \text{i} \quad |f''(x)| \leqslant 1.$$

Tada je

$$|f'(x)| \leqslant 2,$$

gde je konstanta 2 najbolja moguća.

D o k a z. Bez smanjenja opštosti, može se posmatrati interval $[0,2]$. Neka je $a \in [0,2]$ proizvoljan broj, pokažimo da je $|f'(a)| \leqslant 2$. Takođe, može se pretpostaviti da je $f'(a) \geqslant 0$. Neka je prostor

$$X_a = \Big\{ g \;\Big|\; g : [0,2] \longrightarrow R, \quad g(a) = f(a), \; g'(a) = f'(a), \; |g''(x)| \leqslant 1 \quad \text{za sve} \quad x \in [0,2] \Big\}$$

i funkcional

$$\varphi(g) = g(2) - g(0).$$

U skupu X_a nađimo funkciju g za koju funkcional φ dostiže minimum, tj. za koju je $g(2) - g(0)$ najmanje. Vrednost $g(2)$ je najmanja kada funkcija $g(x)$ u svakoj tački intervala $[a,2]$ ima najmanju vrednost $g'(x)$ - najsporiji rast. Funkcija $h(x) = g'(x)$ ima najmanju vrednost na intervalu $[a,2]$ ako njen izvod $h'(x) = g''(x)$ ima vrednost -1. Tada je

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + Cx + C_1$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \left[f'(a)+a\right]x + \frac{a^2}{2} - \left[f'(a)+a\right]a + f(a)$$

za $a \leqslant x \leqslant 2$, gde su C i C_1 određeni tako da funkcija g pripada skupu X. Slično, $g(0)$ je najveće za funkciju

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + \left[f'(a) - a\right]x - \frac{a^2}{2} - \left[f'(a) - a\right]a + f(a)$$

za $0 \leqslant x \leqslant a$. Dakle,

$$g(2) - g(0) = -2 + 2(\ f'(a) + a\ ) - a^2$$
$$= 2f'(a) - (a-1)^2 - 1,$$

tako da je

$$2f'(a) - (a-1)^2 - 1 \leqslant f(2) - f(0) \leqslant 2,$$

odakle je

$$f'(a) \leqslant \frac{3}{2} + \frac{(a-1)^2}{2} \leqslant 2 \tag{2}$$

ili

$$f'(x) \leqslant \frac{3}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} \leqslant 2.$$

Uopštenje ovog rezultata su dali V.G. Avakumović i S. Aljančić.

TEOREMA B. N.H. Abel.

Neka su

$$a_1,\dots,a_n \quad i \quad b_1,\dots,b_n \quad (b_1 \geqslant \dots \geqslant b_n \geqslant 0)$$

dva niza realnih brojeva i

$$s_k = a_1 + \dots + a_k \qquad (k = 1,\dots,n).$$

Ako je

$$m = \min \{s_1,\dots,s_n\} \quad i \quad M = \max \{s_1,\dots,s_n\},$$

tada je

(3) $$mb_1 \leqslant a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leqslant Mb_1.$$

D o k a z. Druga nejednakost (3). Neka je prostor

$$X = \{(x_1,\dots,x_n) \mid b_1 = x_1 \geqslant \dots \geqslant x_n \geqslant 0\}$$

i funkcional

$$f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \qquad x=(x_1,\dots,x_n).$$

Neka je $i,j = 1,\dots,n$, $1 < i \leqslant j$ i preslikavanja

$$F_{ij}(x) = \begin{cases} \bar{x}, & \text{ako je } x_i = \dots = x_j, \\ x, & \text{inače} \end{cases}$$

gde je

$$\bar{x} = \begin{cases} (x_1,\dots,x_{i-1},\dots,x_{i-1},x_{j+1},\dots,x_n), \\ \qquad\qquad \text{ako je } a_i + \dots + a_j \geqslant 0 \\ (x_1,\dots,x_{i-1},x_{j+1},\dots,x_{j+1},\dots,x_n), \\ \qquad\qquad \text{ako je } a_i + \dots + a_j < 0, \ x_{n+1}=0. \end{cases}$$

Time je ispunjen zahtev monotonosti

$$f(x) \leqslant f(F_{ij}(x)).$$

Niz x za koji je

$$x_1 \geqslant \dots \geqslant x_{i-1} > x_i = \dots = x_j > x_{j+1} \geqslant \dots \geqslant x_n$$

je pokretna tačka preslikavanja F_{ij}. Dakle, zajedničke nepokretne tačke svih preslikavanja F_{ij} su nizovi oblika

$$b_1 = c_1 = \ldots = c_k > c_{k+1} = \ldots = c_n = 0,$$

$k \in \{2,\ldots,n\}$. Pri tome je $s_k = M$. Ako je $s_j = M$ $(j<k)$, tada je $a_{j+1} + \ldots + a_k \leqslant 0$. Kako je c nepokretna tačka preslikavanja $F_{(j+1)k}$, to ne može biti $a_{j+1} + \ldots + a_k < 0$. Time je $a_{j+1} + \ldots + a_k = 0$ i $s_k = M$. Slično, ako je $s_l = M$ $(k < l)$, tada je $a_{k+1} + \ldots + a_l \geqslant 0$. Niz c je nepokretna tačka preslikavanja $F_{k(l-1)}$ tako da nije $a_{k+1} + \ldots + a_l > 0$ i time je $s_k = M$.

Funkcional f na kompaktnom skupu X dostiže najveću vrednost i to može biti jedino u nepokretnim tačkama preslikavanja F_{ij} (nizovi (4)), što je potreban i dovoljan uslov da važi jednakost u (1).

Uz promenu smera nekih nejednakosti, isti dokaz važi i za prvi deo (1).

TEOREMA C. [MIT337]
Neka su $b_1,\ldots,b_n$ realni brojevi i neka je $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$ i neka je

$$\sum_{r=1}^{k} a_r \leqslant \sum_{r=1}^{k} b_k \qquad (k=1,\ldots,n). \tag{4}$$

Tada je

$$\sum_{r=1}^{n} a_r^2 \leqslant \sum_{r=1}^{n} b_r^2 .$$

D o k a z. Primenićemo metod matematičke indukcije. Za $n = 1$ tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve $i < n$. Neka je funkcional

$$f(a) = \sum_{r=1}^{n} a_r^2 .$$

Neka je $a_1' = a_1 + d$, gde je d najmanji broj za koji neka od nejednakosti (4) postaje jednakost, tj.

$$d = \min \left\{ \sum_{r=1}^{k} b_r - \sum_{r=1}^{k} a_k,\ k = 1,\dots,n \right\} .$$

Ako se jednakost pojavi za neki indeks $k < n$, onda se uslovi (4) dele u dve grupe nejednakosti

$$a_1' < b_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1' + \dots + a_k = b_1 + \dots + b_k$$

$$a_{k+1} \leqslant b_{k+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{k+1} + \dots + a_n \leqslant b_{k+1} + \dots + b_n$$

i tada se može izvesti induktivni zaključak.

Ako je $k = n$, onda se transformacija može nastaviti primenom preslikavanja

$$F(a_1,\dots,a_n) =$$

$$= \left(a_1+e,\ a_2 - \frac{e}{n-1},\ \dots,\ a_n - \frac{e}{n-1} \right) = a' ,$$

gde je e najmanji broj za koji se u (4) negde postiže jednakost - ovoga puta je $k < n$. Sem toga je

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \leqslant$$

$$\leqslant (a_1+e)^2 + (a_2 - \frac{e}{n-1})^2 + \dots + (a_n - \frac{e}{n-1})^2 .$$

Time je tvrđenje blago pojačano :

Postoji k, $k < n$, takvo da je

2.23

$$\sum_{r=1}^{k} a_r^2 \leqslant \sum_{r=1}^{k} b_r^2 \qquad \text{i} \qquad \sum_{r=k+1}^{n} a_r^2 \leqslant \sum_{r=k+1}^{n} b_r^2 \ .$$

2.24. FAN - TODDOVA NEJEDNAKOST.

U ovoj tački je interpolisana Fan - Toddova nejednakost.

2.24.1. TEOREMA A. A.M. Ostrowski, 1951., [MIT66]

Neka su $a = (a_1,\dots,a_n)$ i $b = (b_1,\dots,b_n)$ dva niza, neproporcionalna, realnih brojeva. Neka je $x = (x_1,\dots,x_n)$ priozvoljan niz realnih brojeva za koje važi

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1.$$

Neka je

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 , \qquad B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 , \qquad C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

Tada

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{A}{AB - C^2} ,$$

sa jednakošću ako i samo ako je

$$(3) \qquad x_k = \frac{Ab_k - Ca_k}{AB - C^2} \qquad k = 1,\dots,n.$$

D o k a z. Neka je prostor $X = R^n$ i funkcional

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ .$$

Neka je $y = (y_1,\dots,y_n)$ vektor čije su koordinate date formulom (3). Neposredno se proverava da vektor y zadovoljava uslove (1). Neka je preslikavanje najjednostavnije

$$F(x) = \frac{x + y}{2} \ .$$

Pokažimo da je uslov monotonosti

(4) $$f(x) \geqslant f(F(x))$$

ekvivalentan sa nejednakošću (2) koju treba dokazati.

(4) daje

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2}{4}$$

ili

$$3\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{Ab_i - Ca_i}{AB-C^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(Ab_i-Ca_i)^2}{(AB-C^2)^2}$$

$$= \frac{2}{AB-C^2}\left[\sum_{i=1}^{n} Ax_ib_i - \sum_{i=1}^{n} Ca_ix_i\right] +$$

$$+ \frac{1}{(AB-C^2)^2}\left[\sum_{i=1}^{n} A^2b_i^2 - 2AC\sum_{i=1}^{n} b_ia_i + \sum_{i=1}^{n} C^2a_i^2\right]$$

$$= \frac{2A}{AB-C^2} + \frac{A^2B - 2AC^2 + C^2A}{(AB-C^2)^2}$$

$$= \frac{3A}{AB-C^2} .$$

Pretpostavimo da za neko x važi suprotna nejednakost

(5) $$f(x) \leqslant \frac{A}{AB-C^2} .$$

Neka je

(6) $$x,\ x_1 = x+(x-y),\ \ldots,\ x_n = x_{n-1} + (x_{n-1}-y),\ \ldots$$

" udaljavajući " niz, suprotan nizu

(7) $$x,\ F(x),\ \ldots ,\ F^n(x),\ \ldots$$

koji konvergira vektoru y. Iz (5) sledi da je $f(x) \leqslant f(\frac{x+y}{2})$, tako da za niz (6) važi

$$f(x) \geqslant f(x_1) \geqslant \ldots \geqslant f(x_n) \geqslant \ldots .$$

Ali, $\lim_{m\to+\infty} f(x_m) = +\infty$, što je kontradikcija koja obara (5).

Niz (7) je interpolacioni niz

$$f(x) \geqslant f(F(x)) \geqslant \ldots \geqslant f(F^n(x)) \geqslant \ldots \geqslant \frac{A}{AB-C^2}\,.$$

2.24.2. TEOREMA B. K. Fan, J. Todd, 1955., [MIT67]

Ako su $a = (a_1,\ldots,a_n)$ i $b = (b_1,\ldots,b_n)$ $(\, n \geqslant 2\,)$ dva niza realnih brojeva takvih da je $a_i b_j \neq a_j b_i$ za $i \neq j$.

Tada

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i} \leqslant$$

(8)
$$\leqslant \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \right]^2 .$$

Sledeći član interpoliše nejednakost (8)

$$2^{-2} \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{2}^{-2} \sum_{j\neq i} \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j} + \frac{Ab_i + Ca_i}{AB-C^2} \right]^2$$

Dokaz je sličan prethodnom.

2.25. MATRIČNA NEJEDNAKOST. [KUR383]

Za kompleksne brojeve $\{a_{ij} \mid i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m\}$ važi nejednakost

$$\text{(1)} \qquad \left[\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|\right]^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}} .$$

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{ [x_{ij}] \;\middle|\; x_{ij} \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij},\ i=1,\dots,n \right\}$$

i funkcional

$$f(A) = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Ako je

$$y(x) = f\left[\begin{bmatrix} x & \bar{x} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}\right], \quad x \geqslant 0,\ x + \bar{x} = a_{11} + a_{12}$$

$$= \left[x^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\bar{x} + a_{22}^2 + \dots + a_{n2}^2\right]^{\frac{1}{2}} + C,$$

onda je

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \dots + a_{n1}^2}} - \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \dots + a_{n2}^2}},$$

tako da $y(x)$ ima minimum za

$$\text{(2)} \qquad \frac{x^2}{\bar{x}^2} = \frac{a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2}{a_{22}^2 + \dots + a_{n2}^2} .$$

Uslovom (2) su određene vrednosti a'_{11} i a'_{12} i preslikavanje $F_{12}^{11}(A)$ koje elemente a_{11} i a_{12} matrice A zamenjuje sa a'_{11} i a'_{12}. Slično se određuju i ostala preslikavanja F_{ik}^{ij} ($i = 1,\dots,n$, $j,k = 1,\dots,m$, $j \neq k$) koja su monotono nerastuća u odnosu na funkcional f

$$f(A) \geqslant f(F_{ik}^{ij}(A)).$$

Uzastopna primena preslikavanja F_{ik}^{ij} , beskonačno puta svako, određuje niz matrica (A_r) monotono nerastući u odnosu na funkcional

(3) $$f(A) \geqslant f(A_1) \geqslant \dots \geqslant f(A_r) \geqslant \dots$$

Niz matrica (A_r) u kompaktnom prostoru X ima konvergentni podniz koji konvergira matrici $B = \left[b_{ij}\right]$. Matrica B je zajednička nepokretna tačka svih preslikavanja F_{ik}^{ij}.

$$\frac{b_{ij}^2}{b_{ik}^2} = \frac{b_{1j}^2+\dots+b_{nj}^2-b_{ij}^2}{b_{1k}^2+\dots+b_{nk}^2-b_{ik}^2} = \frac{b_{1j}^2+\dots+b_{nj}^2}{b_{1k}^2+\dots+b_{nk}^2}$$

kvadrati elemenata, a time i sami elementi kolona međusobno proporcionalni $K_i = c_i K_1$, $i = 2,\dots,m$. Sada je

$$f(B) = \sum_{j=1}^{m}\left[b_{1j}^2 + b_{2j}^2 + \dots + b_{nj}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left[c_j^2 b_{11}^2 + c_j^2 b_{21}^2 + \dots + c_j^2 b_{n1}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + c_2 + \dots + c_m)\sqrt{b_{11}^2 + \dots + b_{n1}^2}$$

i

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right]^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n}\left[b_{i1} + b_{i2} + \dots + b_{im}\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \left[b_{i1} + c_2 b_{i1} + \ldots + c_m b_{i1}\right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + c_2 + \ldots + c_m) \sqrt{b_{11}^2 + \ldots + b_{n1}^2} \, .$$

Iz dokaza sledi da jednakost (1) važi ako i samo ako su kolone matrice međusobno proporcionalne.

Prethodni primer [KUR383]

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \right]^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i \bar{a}_j}{i+j}$$

nije korektan, npr. $a = (1,1)$.

2.26. DVE NEJEDNAKOSTI ZA SREDINE.
(OBRAT I UOPŠTENJE A - G NEJEDNAKOSTI.)

Nejednakost (1) predstavlja svojevrsni obrat nejednakosti potencijalne i geometrijske sredine

$$G(a) \leqslant M_s(a) \, , \qquad s > 0$$

$$M_s(a) \leqslant G(a) \, , \qquad s < 0.$$

Izdvojen je obrat aritmetičke i geometrijske nejednakosti. U drugom delu je dato uopšenje A - G nejednakosti.

2.26.1. TEOREMA A. Ako je $s > 0$, tada

(1) $$M_s(a)^{M_s(a)^s} \leqslant \left[a_1^{a_1^s} \ldots a_n^{a_n^s} \right]^{\frac{1}{n}} \, ,$$

za $s < 0$ važi obrnuta nejednakost. Jednakost u (1) važi ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$ ili $s = 0$.

D o k a z. Logaritmovanjem nejednakosti (1) se dobija

(2) $$M_s(a)^s \ln M_s(a) \leqslant \frac{1}{n} \left[a_1^s \ln a_1 + \ldots + a_n^s \ln a_n \right] .$$

Ako se uvedu oznake $a_i^s = x_i$, $i=1,\dots,n$ i $f(x) = x\ln x^{1/s}$, onda se (2) može zapisati u obliku

$$f\left[\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right] \leqslant \frac{1}{n}\left[f(x_1)+\dots+f(x_n)\right]$$

Jensenove nejednakosti za funkciju $f(x)$. Njen izvod je $f'(x) = \frac{1}{s}(\ln x + 1)$ i $f''(x) = \frac{1}{sx}$, tako da je funkcija f konveksna za $s>0$ i konkavna za $s<0$ (log. konv.).

Za $s=0$ nejednakost (1) postaje

$$G(a) \leqslant G(a),$$

a za $s=1$ dobija se

$$\left[\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right]^{a_1+\dots+a_n} \leqslant a_1^{a_1}\dots a_n^{a_n}, \tag{3}$$

što je jedan obrat uopštene A - G nejednakosti 2.2.5.t.B.

$$a_1^{p_1}\dots a_n^{p_n} \leqslant \left[\frac{p_1a_1+\dots+p_na_n}{p_1+\dots+p_n}\right]^{p_1+\dots+p_n}.$$

Može se napisati produžena nejednakost

$$\left[\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right]^{a_1+\dots+a_n} \leqslant a_1^{a_1}\dots a_n^{a_n} \leqslant \left[\frac{a_1^2+\dots+a_n^2}{a_1+\dots+a_n}\right]^{a_1+\dots+a_n}. \tag{4}$$

Nejednakost (3) se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}\frac{a_1+\dots+a_n}{n} &\leqslant \left[a_1^{a_1}\dots a_n^{a_n}\right]^{\frac{1}{a_1+\dots+a_n}}\\ &= \left[a_1^{\frac{a_1}{A}}\dots a_n^{\frac{a_n}{A}}\right]^{\frac{1}{n}}\\ &= G\left(a_1^{\frac{a_1}{A}},\dots,a_n^{\frac{a_n}{A}}\right),\end{aligned}$$

gde je $A = A(a)$. Dobijena nejednakost (3) je obrat $A - G$ nejednakosti

$$A(a_1,\dots,a_n) \leqslant G\left(a_1^{\frac{a_1}{A}}, \dots, a_n^{\frac{a_n}{A}}\right),$$

(4) daje

$$A \leqslant G\left(a_1^{\frac{a_1}{A}},\dots, a_n^{\frac{a_n}{A}}\right) \leqslant \frac{K^2}{A}.$$

2.26.2. U sledećoj nejednakosti (5) je data jedna gornja granica za potencijalne sredine nenegativnog reda. Ona se može posmatrati i kao uopštenje $A - G$ nejednakosti : za $s = 0$ se dobija $G \leqslant A$.

TEOREMA B. Ako je $s \geqslant 0$, tada

$$M_s(a) \leqslant \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{s+1}}{a_1^s+\dots+a_n^s - a_i^s}. \tag{5}$$

Jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = \dots = a_n$.

D o k a z. Neka je prostor

$$X = \left\{x \mid x_i \geqslant 0,\ i=1,\dots,n,\ M_s(x) = M_s(a)\right\}$$

i funkcional

$$f(x) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{s+1}}{x_1^s+\dots+x_n^s - x_i^s}.$$

Neka su preslikavanja

$$F_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) =$$

$$= \left(x_1,\dots,\left[\frac{x_i^s+x_j^s}{2}\right]^{\frac{1}{s}},\dots, \left[\frac{x_i^s+x_j^s}{2}\right]^{\frac{1}{s}},\dots,x_n \right).$$

Pokažimo da su preslikavanja F_{ij} monotono nerastuća u odnosu na funkcional f

$$f(x) \geqslant f(F_{ij}(x)),$$

tj.

$$\frac{x_i^{s+1}}{x_i^s+c}+\frac{x_j^{s+1}}{x_j^s+c} \geqslant 2\,\frac{\left[\dfrac{x_i^s+x_j^s}{2}\right]^{\frac{s+1}{s}}}{\dfrac{x_i^s+x_j^s}{2}+c},$$

$$c = x_1^s + \ldots + x_n^s - x_i^s - x_j^s .$$

Pokažimo da funkcija

$$y(t) = \frac{t^{s+1}}{\bar{t}^s + c} + \frac{\bar{t}^{s+1}}{t^s + c}, \quad t \geqslant 0, \quad t^s + \bar{t}^s = x_i^s + x_j^s$$

ima minimum za $t = \bar{t} = \left[\dfrac{x_i^s+x_j^s}{2}\right]^{1/s}$. Najpre je

$$\left[\bar{t}^s\right]' = -st^{s-1}, \quad \bar{t}' = -\frac{t^{s-1}}{\bar{t}^{s-1}}, \quad \left[\bar{t}^{s+1}\right]' = -(s+1)\bar{t}t^{s-1}.$$

Dalje je

$$y'(t) = \frac{(s+1)t^s(\bar{t}^s+c) + t^{s+1}st^{s-1}}{(\bar{t}^s + c)^2} +$$

$$+ \frac{-(s+1)\bar{t}t^{s-1}(t^s+c) - \bar{t}^{s+1}st^{s-1}}{(t^s + c)^2},$$

$$(t^s+c)^2(\bar{t}^s+c)\, y'(t) = (s+1)t^s(t^s+c)^2(\bar{t}^s+c) + st^{s-1}t^{s+1}(t^s+c)^2 -$$

$$- (s+1)t^{s-1}\bar{t}(t^s+c)(\bar{t}^s+c)^2 - st^{s-1}\bar{t}^{s+1}(\bar{t}^s+c)^2$$

$$= (s+1)t^{s-1}(t^s+c)(\bar{t}^s+c)\left[t(t^s+c) - \bar{t}(\bar{t}^s+c)\right] +$$

$$+ st^{s-1}\left[t^{s+1}(t^s+c)^2 - \bar{t}^{s+1}(\bar{t}^s+c)\right] .$$

Dakle, izvod $y'(t)$ ima isti znak kao i izraz $t - \bar{t}$, tako da funkcija $y(t)$ ima najmanju vrednost za $t = \bar{t}$ (konveksnost).

Funkcional f na kompaktnom skupu X dostiže minimum u zajedničkoj nepokretnoj tački

$$a^0 = (M_s(a) , \ldots , M_s(a))$$

svih preslikavanja F_{ij}. Time je

$$f(a) \geqslant f(a^0) = M_s(a).$$

Za $s = 0$ nejednakost (5) postaje

$$G \leqslant A.$$

Za $s = 1$ se dobija

$$s \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\frac{s - a_i}{n-1}}, \qquad s = a_1 + \ldots + a_n,$$

ili

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{s - a_i} \geqslant \frac{s}{n-1} \quad \left[= \frac{n}{n-1} A(a) \right]. \tag{6}$$

Ova nejednakost je slična s poznatim odnosom [MIv59]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} > \frac{n}{n-1},$$

za $n = 3$ v. 5.5. Ako je $n = 2$, onda (6) glasi

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_1} \geqslant a_1 + a_2, \quad \text{tj.} \quad a_1^3 + a_2^3 \geqslant (a_1+a_2)a_1a_2,$$

ili

$$(a_1+a_2)(a_1^2-a_1a_2+a_2^2) \geqslant (a_1+a_2)a_1a_2 .$$

Za $n = 3$ dobija se

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

TEOREMA C. Ako je $s \geqslant 1$, onda

$$M_s(a) \leqslant \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^s}{a_1^{s-1} + \ldots + a_n^{s-1} - a_i^{s-1}}. \tag{7}$$

Jednakost (7) važi ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$ ili je $s = 1$.

D o k a z. Dokaz je sličan dokazu prethodne teoreme. Ovde se posmatra funkcija

$$y(t) = \frac{t^s}{\bar{t}^{s-1}+c} + \frac{\bar{t}^s}{t^{s-1}+c}, \quad t > 0, \quad t^s + \bar{t}^s = x_i^s + x_j^s.$$

Tako je $\quad \left[\bar{t}^{s-1}\right]' = (s-1)\bar{t}^{s-2}\dfrac{-t^{s-1}}{\bar{t}^{s-1}} = -(s-1)\bar{t}^{-1}\,t^{s-1}$

i

$$y'(t) = \frac{st^{s-1}(\bar{t}^{s-1}+c) + t^s(s-1)\bar{t}^{-1}t^{s-1}}{(\bar{t}^{s-1}+c)^2} +$$

$$+ \frac{-st^{s-1}(t^{s-1}+c) - \bar{t}^s(s-1)t^{s-2}}{(t^{s-1}+c)^2}.$$

Dalje je

$$(t^{s-1}+c)^2(\bar{t}^{s-1}+c)^2\, y'(t) = st^{s-1}(t^{s-1}+c)(\bar{t}^{s-1}+c)\left[t^{s-1}-\bar{t}^{s-1}\right]$$

$$+ (s-1)t^{s-2}\bar{t}^{-1}\left[t^{s+1}(t^{s-1}+c)^2 - \bar{t}^{s+1}(\bar{t}^{s-1}+c)^2\right].$$

Ostalo je isto.

Za $s = 1$ se dobija

$$A = A.$$

Za $s = 2$ se dobija nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}K, \qquad K = K(a) = M_2(a),$$

koja je stroža od odgovarajuće nejednakosti (6).

GLAVA III

GEOMETRIJSKE NEJEDNAKOSTI

Većina geometrijskih nejednakosti je nastala u ovom veku. Opšti postupak nepokretne tačke je primenjen na jednom izboru tih nejednakosti. U prvoj tački je data nova nejednakost jedinstvena po tome što postaje jednakost za jednakokrake i pravougle trouglove. Time su ove dve važne grupe trouglova okarakterisane jednom nejednakošću. Inače, većina nejednakosti za trouglove postaje jednakost za jednakostranične trouglove, a samo mali broj za neke posebne, npr. 3.2. U 3.13. je dato uopštenje izoperimetrijske nejednakosti za poligone.

3.1. KARAKTERIZACIJA JEDNAKOKRAKIH I PRAVOUGLIH TROUGLOVA.

TEOREMA A. I.J.Schoenberg, 1935. [KOO]. Ako tačke A_i ($i=1,\dots,n$) s-dimenzionog euklidskog prostora R^s leže na (hiper)sferi poluprečnika R, tada za sve realne brojeve λ_i ($i=1,\dots,n$) važi

$$2R^2\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)^2 \geq \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j d^2(A_i,A_j),$$

gde $d(A_i,A_j)$ označava euklidsko rastojanje između A_i i A_j.

Iz Schoenbergove nejednakosti za $n=3$, O. Kooi, 1958. [KOO, BOT121] je dobio više poznatih nejednakosti za trouglove, kao što su formule Kubota, Weitzenböck, Finsler i Hadwiger i Gerretsen.

TEOREMA B. Ako su p_1, p_2, p_3 realni brojevi, tada

(1) $$(p_1+p_2+p_3)^2 R^2 \geqslant p_2p_3a^2 + p_3p_1b^2 + p_1p_2c^2.$$

D o k a z. Neka je

(2) $$p_1 + p_2 + p_3 = p$$

i $$f(p_1,p_2,p_3) = p_2p_3a^2 + p_3p_1b^2 + p_1p_2c^2.$$

Ako je $y = f(x,\bar{x},p_3)$ i $x+\bar{x} = p_1+p_2$, tada je

$$y' = p_3(b^2-a^2) + (\bar{x}-x)c^2.$$

(Ako je $x_o, \bar{x}_o$ rešenje jednačine $y'=0$, može se definisati preslikavanje $F_3(p_1,p_2,p_3) = (x_o,\bar{x}_o,p_3)$ koje je monotono u odnosu na funkcional $f(p_1,p_2,p_3) \leqslant f(F_3(p_1,p_2,p_3))$. Dakle, da bi $f(p_1,p_2,p_3)$ bila ekstremna vrednost mora biti

(3) $$(p_1-p_2)c^2 + (a^2-b^2)p_3 = 0.$$

Za parove p_2,p_3 i p_3,p_1 slično se dobija

(4) $$(p_2-p_3)a^2 + (b^2-c^2)p_1 = 0,$$

(5) $$(p_3-p_1)b^2 + (c^2-a^2)p_2 = 0.$$

Sistem linearnih jednačina (2)-(5)

$$\begin{aligned} p_1 + {} & p_2 + {} & p_3 &= p \\ -c^2p_1 + {} & c^2p_2 + {} & (b^2-a^2)p_3 &= 0 \\ b^2p_1 + {} & (a^2-c^2)p_2 - {} & b^2p_3 &= 0, \end{aligned}$$

tj. $$\begin{aligned} p_1 + {} & p_2 + {} & p_3 &= p \\ & 2c^2\,p_2 + {} & (b^2+c^2-a^2)p_3 &= c^2p \\ & (a^2-b^2-c^2)\,p_2 - {} & 2b^2\,p_3 &= -b^2p, \end{aligned}$$

pri čemu se poslednja jednačina može zameniti s

$$\left(\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{2c^2} - 2b^2 \right) p_3 = p\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2} - b^2 p,$$

ima rešenje

$$q_1 = ka^2(b^2+c^2-a^2)$$
$$q_2 = kb^2(c^2+a^2-b^2)$$
$$q_3 = kc^2(a^2+b^2-c^2),$$

gde je

$$k = \frac{p}{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}.$$

Korišćenjem obrazaca za površinu trougla, Heronovog i $P = \frac{abc}{4R}$ imamo

$$f(q_1,q_2,q_3) = ka^2b^2c^2 \left[(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) + (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) + (b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)\right]$$
$$= k^2a^2b^2c^2(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)$$
$$= \frac{p^2a^2b^2c^2}{2a^2b^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4} = \frac{p^2a^2b^2c^2}{16P^2} = p^2R^2.$$

Schoenbergova jednakost važi ako je $\sin 2\alpha = rp_1$, ($r \in R$) $\sin 2\beta = rp_2$ i $\sin 2\gamma = rp_3$ [BOa]. Takođe je

$$q_1 = ka^2 2bc\cos\alpha = p\,\frac{R^2}{2P}\sin 2\alpha .$$

Nejednakosti za trougao u većini slučajeva postaju jednakosti za jednakostraničan trougao. Sledeća nejednakost je poseban slučaj opšte nejednakosti Schoenberga, a ima svojstvo da postaje jednakost za jednakokrake i pravougle trouglove. Nejednakostranični slučajevi u [BOT] su 2.- 10,11,13,17,18,19,20., 4.-19., 11.-18,20,21,22., 14.-2., i to $\alpha = \beta$ i $\cos\alpha = \sqrt{3}/3$; jednakokraki trougao (4.19.) ; pravougli sa uglovima $\pi/4$.

TEOREMA C. Neka su a, b i c stranice i R poluprečnik kružnice opisane oko trougla.

a)
$$2R \geqslant \frac{b^2+c^2}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}},$$

jednakost važi ako i samo ako je $b=c$ ili $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

b)
$$2R \geqslant \max\left\{\frac{b^2+c^2}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}, \frac{c^2+a^2}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}, \frac{a^2+b^2}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}\right\}.$$

Jednakost važi ako i samo ako je trougao jednakokraki ili pravougli.

c) Ako je $\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, tada

$$\sin\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{\sqrt{2b^2+2c^2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}, \qquad 2R \geqslant \frac{\sqrt{2b^2+2c^2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

i obrnuto za $\alpha\geqslant\frac{\pi}{2}$. Jednakost važi ako i samo ako je $b=c$ ili $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

D o k a z. Posmatrajmo Schoenbergovu nejednakost (1) sa dva jednaka parametra. Funkcija $f(p_1,p_2,p_2)$, $p_1+2p_2 = \text{const.}$ ima maksimum ako je

$$p_1(b^2+c^2) + 2p_2(a^2-b^2-c^2) = 0,$$

tj.

(6)
$$p_1 = 2p_2\frac{b^2+c^2-a^2}{b^2+c^2}.$$

Za ovu vrednost nejednakost (1) postaje

$$\left(2\frac{b^2+c^2-a^2}{b^2+c^2}+2\right)^2R^2 \geqslant a^2 + 2(b^2+c^2-a^2),$$

što daje a).

Ako je $\alpha=\frac{\pi}{2}$, onda važi jednakost a), takođe, za $b=c$ je

$$\frac{2b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}=\frac{2b^2}{\sqrt{2b^2+2b^2\cos\alpha}}=\frac{2b}{\sqrt{2+4\cos^2\frac{\alpha}{2}-2}}=\frac{2b}{2\sin\beta}=2R$$

Ako pretpostavimo da jednakost važi u a), tada ona važi u (1) i iz $q_2=q_3$ sledi

$$b^2(a^2-b^2)=c^2(a^2-b^2),$$

tj.

$$b^2\cos\alpha=c^2\cos\alpha,$$

tako da je $b=c$ ili $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Funkcija $f(p_1,1,1)-(p_1+2)^2R^2$ ima maksimum za

$$2R^2p_1=b^2+c^2-4R^2,$$

što takođe daje a). Poređenje s (6) daje

$$2\,\frac{b^2+c^2-a^2}{b^2+c^2}\leqslant\frac{b^2+c^2-4R^2}{2R^2},$$

$$-4R^2a^2+16R^4\leqslant(b^2+c^2)^2-8R^2(b^2+c^2)+16R^4,$$

$$b^2+c^2-4R^2\geqslant 2R\sqrt{4R^2-a^2}=2R\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2\alpha}-a^2},$$

$$b^2+c^2\geqslant\frac{a^2}{\sin^2\alpha}+\frac{a}{\sin\alpha}\,\frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}=a^2\,\frac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=a^2\,\frac{1}{1-\cos\alpha},$$

tj.

(7) $$\frac{b^2+c^2}{a^2}\leqslant\frac{1}{1-\cos\alpha}.$$

(7) je ekvivalentno s $c_1)$ i $(b-c)^2\cos\alpha\geqslant 0$. Na kraju, $c_4)$ je ekvivalentno s

$$\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\geqslant\frac{\sqrt{2b^2+2c^2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

a time i s c_1).

Relacije c) mogu dati više novih nejednakosti. Nejednakost J. Karamate [BOT27]

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geqslant \sqrt{3}$$

postaje jednakost ako i samo ako je trougao jednakostraničan. Za oštrougle i pravougle trouglove se dobija

$$(8) \qquad \frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}} \geqslant \sqrt{3}\,.$$

Neka je $A = \sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, $B = \sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$, $C = \sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$ f - leva strana (8) i

$$X = \{(a,b,c) \mid a \geqslant 0,\ a \leqslant b+c,\ \text{cikl.}\}$$

Razmotrimo sistem jednačina

$$(9) \qquad \begin{aligned} f'_a &= (b^2+c^2)A^{-3} - abB^{-3} - caC^{-3} = 0 \\ f'_b &= -abA^{-3} + (c^2+a^2)B^{-3} - bcC^{-3} = 0 \\ f'_c &= -caA^{-3} - bcB^{-3} + (a^2+b^2)C^{-3} = 0\,. \end{aligned}$$

Prve dve jednačine (9) daju

$$((b^2+c^2)(c^2+a^2)-a^2b^2)B^{-3} = ((b^2+c^2)bc+a^2bc)C^{-3},$$

$$c^2(a^2+b^2+c^2)B^{-3} = bc(a^2+b^2+c^2)C^{-3},$$

tj.

$$b : c = B^{-3} : C^{-3}.$$

Tako je

$$a : b : c = A^{-3} : B^{-3} : C^{-3}.$$

Ako je $d = 2a^2+2b^2+2c^2$, tada

$$a^{2/3} : b^{2/3} = B^2 : A^2 = (d-3b^2) : (d-3a^2),$$

ili

$$d(a^{2/3} - b^{2/3}) = 3(a^{8/3} - b^{8/3}).$$

Dakle,

$$a = b \quad \text{ili} \quad d = \frac{r^3-s^3}{r-s},$$

(10)
$$b = c \quad \text{ili} \quad d = \frac{s^3-t^3}{s-t},$$

$$c = a \quad \text{ili} \quad d = \frac{t^3-r^3}{t-r},$$

gde je $\quad r = a^{2/3}, \quad s = b^{2/3}, \quad t = c^{2/3}.$

Ako u prvoj koloni (10) važe dve ili tri jednakosti, tada je $a = b = c$. Ako u prvoj koloni (10) ne važi nijedna jednakost, tada iz

$$(r+s)(r^2+s^2) = (r+t)(r^2+t^2)$$

sledi

$$rs^2-rt^2+r^2s-r^2t+s^3-t^3 = 0$$

tj. $s = t$, a time i $a = b = c$. Ako u prvoj koloni (10) važi tačno jedna jednakost, npr. $a=b$, tada je

$$d = 4r^3+2t^3 = 3(r+t)(r^2+t^2),$$

$$2r^3 = (r+t)^3, \quad t = (2^{1/3} - 1)r.$$

Za takav trougao sa stranicama : $1, 1, (2^{1/3} - 1)^{3/2}$ je $f > \sqrt{3}$.

Pokažimo da je $f > 2$ na granici skupa X. Ako je npr. $c = a+b$, tada

$$f = \frac{a}{a+2b} + \frac{b}{2a+b} + \frac{a+b}{a-b} .$$

Neka je $u = a+b = \text{const.}$, onda

$$f'_a = 2u \left(\frac{1}{(u+b)^2} - \frac{1}{(u+a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2} \right) < 0,$$

tako da je

$$f > \lim_{a\nearrow u} f = 2 > \sqrt{3} .$$

3.2. D.F. BARROW, 1937, R.R. JANIĆ, 1967. za negativne brojeve, [BOT123]

Neka su x,y,z realni brojevi takvi da je $xyz > 0$, tada

(1) $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \leqslant \frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z},$$

Ako je $xyz < 0$, tada je nejednakost (1) obrnuta.

Jednakost važi u oba slučaja ako i samo ako je

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma .$$

D o k a z. Neka je $f(\alpha,\beta,\gamma)$ leva strana (1) i neka su x,y i z pozitivni brojevi. Ako je

$$y(t) = x\cos t + y\cos\bar{t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \alpha+\beta, \quad \bar{t}+t = \alpha+\beta,$$

tada

(2) $$y'(t) = -x\sin t + y\sin\bar{t} = \left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}} - \frac{\sin t}{\sin\bar{t}}\right] x\sin\bar{t}.$$

Odnos $k(t) = \dfrac{\sin t}{\sin\bar{t}}$ je strogo rastuća funkcija po t jer je $k'(t) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\bar{t}}$. Dakle, postoji jedinstven par brojeva α_1, β_1 takav da je $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \dfrac{y}{x}$. Tako je određeno preslikavanje $F_C(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ koje je monotono u odnosu na funkcional f

$$f(\alpha,\beta,\gamma) \leqslant f(F_C(\alpha,\beta,\gamma)).$$

Niz preslikavanja $F_A, F_B, F_C, F_A, F_B, \ldots$ formira niz trojki brojeva, koji ima podniz koji konvergira k $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ - zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja F_A, F_B, F_C. Pri tome je $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = \pi$ i

$$f(\alpha,\beta,\gamma) \leqslant f(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) \leqslant \ldots \leqslant f(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0).$$

i) Neka je $\min\{\alpha_0,\beta_0,\gamma_0\} > 0$. Vektor $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ je nepokretna tačka preslikavanja F_A,F_B,F_C, tako da je

$$\sin\alpha_0 : \sin\beta_0 : \sin\gamma_0 = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}.$$

Za proizvoljan trougao s uglovima $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$ i stranama a,b,c važi

$$\sin\alpha_0 : \sin\beta_0 : \sin\gamma_0 = a : b : c.$$

Dakle, postoji trougao s uglovima $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$ i stranama $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$, pa je

$$\begin{aligned} f(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0) &= x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0 \\ &= xyz\left(\frac{1}{y}\frac{1}{z}\cos\alpha_0 + \frac{1}{z}\frac{1}{x}\cos\beta_0 + \frac{1}{x}\frac{1}{y}\cos\gamma_0\right) \\ &= \frac{xyz}{2}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right) \\ &= \frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z}. \end{aligned}$$

ii) Neka je $\alpha_0=0$, $\beta_0 \leqslant \gamma_0$. Ne može biti $\beta_0 > 0$, jer tada $(0,\beta_0,\gamma_0)$ nije nepokretna tačka za F_C. Kako je $f(0,0,\pi) = x+y-z$, treba proveriti

$$w = \frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z} - x - y + z \geqslant 0.$$

Ako je $z \leqslant y$, tada

$$w'_x = \frac{z}{2y} + \frac{y}{2z} - \frac{yz}{2x^2} - 1 = \frac{(y-z)^2}{2yz} - \frac{yz}{2x^2},$$

odakle se izračunava najmanja vrednost za w

$$w\left(\frac{yz}{y-z}\right) = \frac{yz}{2}\frac{y-z}{yz} + \frac{(y-z)^2}{2yz}\frac{yz}{y-z} - y + z = 0.$$

Neka je $x \leqslant z < 0$. Iz (2) sledi

$$f(\alpha,\beta,\gamma) \leqslant f(\alpha+\beta,0,\gamma) = -x\cos\gamma+y+z\cos\gamma \leqslant f(\pi,0,0) = -x+y+z,$$

što je slučaj b).

3.3. T.R. CURRY, 1966. [BOT45].

$$4P\sqrt{3} \leqslant \frac{9abc}{a+b+c}.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $a=b=c$.

D o k a z. Neka je

$$f(a,b,c) = \frac{abc}{a+b+c}.$$

Neka je h visina iz temena C i $x=AC'$ - rastojanje do podnožja visine, koje je negativno ako je $A\in C'B$. Dalje, neka je

$$y(x)=f(a(x),b(x),c), \quad b^2=x^2+h^2, \; a^2=\bar{x}^2+h^2, \; x+\bar{x}=c.$$

Tada je

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{c}y'(x) &= (a'b+ab')(a+b+c) - ab(a'+b')\\ &= a'(b^2+bc) + b'(a^2+ac)\\ &= \frac{x}{b}\,a(a+c) - \frac{\bar{x}}{a}\,b(b+c).\end{aligned}$$

Ako je $x<0$ ($x>c$ tj. $\bar{x}<0$), tada je $y'(x)<0$ ($y'(x)>0$). Zato funkcija $y(x)$ minimalnu vrednost dostiže na intervalu $[0,c]$. Radi određenosti, nejednakost $y'(x)\leqslant 0$ je ekvivalentna s

$$(1) \qquad \frac{x}{\bar{x}} \leqslant \frac{b+c}{a+c}\,\frac{b^2}{a^2}.$$

Uslov (1) se može transformisati

$$\frac{\frac{x}{b}}{\frac{\bar{x}}{a}}\,\frac{a}{b} \leqslant \frac{b+c}{a+c}, \qquad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \leqslant \frac{b+c}{a+c},$$

ili

$$\frac{\sin2\alpha}{b+c} \leqslant \frac{\sin2\beta}{a+c}, \qquad \frac{\sin2\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma} \leqslant \frac{\sin2\beta}{\sin\alpha+\sin\gamma}.$$

Dakle, neka vrednost $x_1\in[0,c]$ određuje trougao

$$F_C(\Delta) = \Delta_1 = \Delta ABC_1$$

s elementima $a_1, b_1, c, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, za koji je

$$f(\triangle) = f(a,b,c) \geqslant f(a_1,b_1,c) = f(F_C(\triangle))$$

i

$$\frac{\sin 2\alpha_1}{b_1+c} = \frac{\sin 2\beta_1}{a_1+c}.$$

Niz preslikavanja $F_A, F_B, F_C, F_A, \ldots$ određuje niz trouglova $(\triangle_n)$ koji konvergira zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja F_A, F_B, F_C u kojoj funkcional f dostiže ekstremnu vrednost. Sledeća lema završava dokaz.

LEMA. Ako je

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\gamma+\sin\alpha} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta}, \tag{2}$$

tada je $\alpha = \beta = \gamma$.

D o k a z. Ako je $\alpha = \beta$, onda

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha} = \frac{-\sin 4\alpha}{2\sin\alpha} \quad \text{ili} \quad \frac{1}{1+2\cos\alpha} = -\cos 2\alpha,$$

tj.

$$-2\cos^3\alpha - \cos^2\alpha + \cos\alpha = 0.$$

Dakle, $\cos\alpha$ može biti $0, \frac{1}{2}, -1$, pa je $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Iz prve jednakosti (2) sledi

$$\sin(\alpha+\beta)(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) = \sin\beta\sin 2\beta - \sin\alpha\sin 2\alpha,$$

ili

$$\sin^2\alpha\cos\alpha\cos\beta - \sin^2\beta\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\sin\alpha\sin\beta -$$
$$- \cos^2\beta\sin\alpha\sin\beta = \cos\beta - \cos^3\beta - \cos\alpha + \cos^3\alpha,$$

odakle je

$$(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)\cos(\alpha+\beta) =$$
$$= (\cos\beta - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha\cos\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta).$$

Ako je $\alpha \neq \beta$, onda

$$(\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma) = 1 + 3\cos\alpha\cos\beta. \tag{3}$$

Formule slične (3) važe i za parove β,γ i γ,α, čijim sabiranjem se dobija

$$(4)\qquad 2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) = 3+3(\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha).$$

Za oštrougli trougao je [BOT24]

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma<1,$$

tako da iz nemogućnosti (4) sledi $\alpha=\beta$. Za pravoguli i tupougli trougao (2) ne može biti tačno, jer bi tada jedan razlomak bio nula odn. negativan, dok su ostali pozitivni.

3.4. M. PETROVIĆ, 1938. [BOT136].

Ako je $(n-1)s$ $(s>0)$ obim poligona od n strana a_i $(i=1,\dots,n)$ i ako je $a_i\leqslant s$ $(i=1,\dots,n)$, važi nejednakost

$$\frac{n}{n-1}\leqslant\frac{a_1}{a_2+\dots+a_n}+\frac{a_2}{a_3+\dots+a_n+a_1}+\dots$$
$$\dots+\frac{a_n}{a_1+\dots+a_{n-1}}\leqslant\frac{n-1}{n-2}.$$

D o k a z. Najpre je

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\geqslant 2\,\frac{A+C}{B+D}$$

ekvivalentno s $\qquad (D-B)(AD-BC)\geqslant 0.$

Tako je

$$\frac{a_1}{a_2+c}+\frac{a_2}{a_1+c}\geqslant 2\,\frac{\frac{a_1+a_2}{2}}{\frac{a_1+a_2}{2}+c},\qquad c=a_3+\dots+a_n$$

ekvivalentno s

$$(a_1-a_2)(a_1^2+a_1c-a_2^2-a_2c)=(a_1-a_2)^2(a_1+a_2+c)\geqslant 0.$$

Time je

$$f(a_1,\dots,a_n)=\frac{a_1}{a_2+\dots+a_n}+\dots+\frac{a_n}{a_1+\dots+a_{n-1}}$$

$$\geqslant f\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3,\ldots,a_n\right) \geqslant \ldots$$

$$\geqslant f\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n},\ldots,\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)$$

$$= \frac{n}{n-1} .$$

Druga nejednakost (1) sledi iz

$$f(a_1,\ldots,a_n) \leqslant f(a_1+a_2-s,s,a_3,\ldots,a_n) \leqslant$$

$$\leqslant f(a_1+a_2+a_3-2s,s,s,a_4,\ldots,a_n) \leqslant \ldots$$

$$\leqslant f(0,s,\ldots,s) = \frac{n-1}{n-2} ,$$

gde $a_1+a_2-s \geqslant 0$, itd. sledi iz uslova teoreme.

3.4.' L. EULER, 1765. [BOT5,48].

Ako su R i r - poluprečnik opisane i upisane kružnice trougla respektivno, tada

$$R \geqslant 2r.$$

Jednakost važi jedino za jednakostranične trouglove.

D o k a z. Neka je $\triangle = \triangle ABC$ i $f(\triangle) = R$ funkcional na skupu X svih trouglova opisanih oko kruga k upisanog u trougao $\triangle$. Neka je A_1 presečna tačka simetrale ugla A i kruga k, ona za koju AA_1 sadrži centar I kruga k. Neka su B_1 i C_1 preseci tangente kroz A_1 na k s pravama AB i AC redom. Ako je $\beta \geqslant \gamma$, onda $B \in AB_1$ i $C_1 \in AC$.

Pokažimo da novi jednakokraki trougao

$$F_A(\triangle) = \triangle AB_1C_1 = \triangle_1$$

ima manji ili jednak poluprečnik opisanog kruga R_1. Prema sinusnoj teoremi $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ i $R_1 = \dfrac{a_1}{2\sin\alpha}$ ($a_1 = B_1C_1$), tako da je dovoljno utvrditi da je $a \geqslant a_1$. Ako je φ ugao između visine h_a i AA_1, onda

(1) $$h_a = r + AI\cos\varphi \leqslant r + AI = AA_1 = h_a'.$$

Neka je $D = BC \cap B_1C_1$ i E tačka na produžetku AB_1 takva da je $\angle BDB_1 = \angle B_1DE$. Ugao B_1 je oštar, tako da je $BB_1 \leqslant B_1E$, a sem toga $B_1D \leqslant DC_1$, tako da je

$$P(BDB_1) \leqslant P(B_1DE) \leqslant P(DC_1C),$$

gde P označava površinu. Odatle sledi $P(ABC) \geqslant P(AB_1C_1)$, što zajedno s (1) daje $a \geqslant a_1$. Niz preslikavanja $F_A, F_B, F_C, F_A, \ldots$ određuje niz trouglova $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ koji ima konvergentni podniz (ceo niz konvergira) čija je granica zajednička nepokretna tačka preslikavanja F_A, F_B, F_C - to je jednakostranični trougao Δ_o. Znači

$$R = f(\Delta) \geqslant f(\Delta_1) \geqslant \ldots \geqslant f(\Delta_o) = 2r.$$

D o k a z II. Neka je $f(\Delta) = r$ i X prostor svih trouglova upisanih u krug K opisan oko Δ. Neka je A_1 središte luka $\widehat{BAC}$ kruga K i $\Delta_1 = A_1BC$. Ako su I i I_1 centri krugova upisanih u Δ i Δ_1, poluprečnika r i r_1, tada je $\angle BIC = \angle BI_1C = 2\alpha$. Tačke B, I, I_1, C se nalaze na jednom luku, pa je $r \leqslant r_1$. Na osnovu teoreme [BJE53], niz regulacija (Δ_n) brzo konvergira pravilnom trouglu Δ_o i

$$r = f(\Delta) \leqslant f(\Delta_1) \leqslant \ldots \leqslant f(\Delta_o) = \frac{R}{2}.$$

3.5. S.I. ZETEL', 1962. [BOT127].

Neka je P unutrašnja tačka trougla ABC. Neka su L, M, N tačke u kojima prave AP, BP, CP seku strane BC, CA, AB respektivno. Tada

$$8 \cdot AM \cdot BN \cdot CL \leqslant abc.$$

Jednakost važi ako i samo ako je P težište trougla.

D o k a z. Neka je funkcional

$$f(P) = AM\cdot BN\cdot CL .$$

Uvedimo oznake $m = BL$, $n = LC$, $y' = CM$,
$x' = AN$, $x = NB$, $y = MA$.

Na duži AL odredimo tačku P_1 u kojoj funkcional f dostiže najveću vrednost. Na osnovu Chevijeve teoreme je

$$\frac{m}{n}\frac{y'}{y}\frac{x'}{x} = 1,$$

odakle je $y' = y\frac{nx}{mx'}$. Dalje je $y + y\frac{nx}{mx'} = b$, što daje $y = b\frac{mx'}{mx'+nx}$. Funkcija $g(x) = xy = bm\frac{xx'}{mx'+nx}$ $(0<x<c)$ ima izvod

$$\frac{(mx'+nx)^2}{bm}g'(x) = (x'-x)(mx'+nx) - xx'(n-m)$$
$$= mx'^2 - nx^2.$$

Funkcija $g(x)$ dostiže najveću vrednost ako je $\frac{x}{x'} = \sqrt{\frac{m}{n}}$, kada je i $\frac{y}{y'} = \frac{m}{n}\frac{x'}{x} = \sqrt{\frac{m}{n}}$. Preslikavanje $F_A(P) = P_1$ odredimo tako da je P_1 tačka na AL za koju je

$$\frac{BN}{NA} = \frac{AM}{MC} = \sqrt{\frac{m}{n}} .$$

Tada je $f(P) \leqslant f(P_1)$. Niz preslikavanja $F_A, F_B, F_C, F_A, \ldots$ određuje niz tačaka $P, P_1, P_2, \ldots$ za koji je

$$f(P) \leqslant f(P_1) \leqslant f(P_2) \leqslant \ldots .$$

Niz (P_n) ima bar podniz koji konvergira tački P_o trougla. Uz iste oznake, P_o je nepokretna tačka za preslikavanje F_A tako da je $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \sqrt{\frac{m}{n}}$. Takođe, P_o je nepokretna tačka za F_B, pa je $\frac{x}{x'} = \frac{n}{m}$, što zajedno daje $m = n$. Time je i $x = x'$ i $y = y'$, znači, P_o je težište trougla ABC.

3.6. S.I. ZITEL′, 1962. [BOT128].

Neka je M unutrašnja tačka trougla ABC. Prave kroz središne tačke duži AM, BM, CM paralelne stranama BC, CA, AB respektivno, obrazuju sa stranama trougla ABC trouglove s površinama P_A, P_B, P_C. Tada

$$P_A + P_B + P_C \geqslant \frac{1}{3} P .$$

Jednakost važi ako i samo ako je P težište trougla ABC.

D o k a z. Ako su A_1, B_1, C_1 preseci pravih iz temena A,B,C redom kroz tačku M sa suprotnim stranama, tada je

$$P_C = P\left(\frac{CM}{2CC_1}\right)^2 = \frac{P}{4}\,\frac{CM^2}{CC_1^2} .$$

Neka je

$$f(M) = \frac{P}{4}\left[\frac{CM^2}{CC_1^2} + \frac{BM^2}{BB_1^2} + \frac{AM^2}{AA_1^2}\right].$$

Neka su E i F presečne tačke strana AC i BC s pravom kroz tačku M koja je paralelna s AB. Neka su M′ i M″ preseci strane AB s pravama kroz M paralelnim s BC i AC redom. Tada

$$\frac{BM^2}{BB_1{}^2} + \frac{AM^2}{AA_1{}^2} = \frac{BM''^2}{c^2} + \frac{AM'^2}{c^2} .$$

Pošto je $AM' + BM'' = c + P'P'' = \text{const.}$,

to zbir kvadrata $BM''^2 + AM'^2$ ima najmanju vrednost kada su sabirci jednaki. Dakle, ako je preslikavanje $F_C(M) = M_1$ takvo da je M_1 središte duži EF, onda je funkcional f monoton u odnosu na preslikavanje $f(M) \geqslant f(M_1)$. Niz preslikavanja $F_A, F_B, F_C, F_A, \ldots$ određuje niz tačaka $M, M_1, M_2, \ldots$ koje konvergiraju težištu T - zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja F_A, F_B, F_C i $f(M) \geqslant \ldots \geqslant f(T) = P/3$.

3.7. Ž. MITROVIĆ, 1967. [BOT22]

Ako je λ realan broj, tada

(1) $$\cos\alpha + \lambda(\cos\beta + \cos\gamma) \leqslant 1 + \frac{\lambda^2}{2}.$$

Jednakost važi ako je $0 < \lambda < 2$, $\cos\alpha = 1 - \frac{\lambda^2}{2}$, $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{\lambda}{2}$.

D o k a z. Neka je

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \cos\alpha + \lambda(\cos\beta + \cos\gamma).$$

Zbir $\cos\beta + \cos\gamma$, uz $\beta + \gamma = \text{const.}$, ima najveću vrednost ako je $\beta = \gamma$, tj.

$$\cos\beta + \cos\gamma \leqslant 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2},$$

jer $$2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \leqslant 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2} \quad \left(\frac{\beta+\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}\right).$$

Dakle,

$$f(\alpha,\beta,\gamma) \leqslant f\left(\alpha, \frac{\beta+\gamma}{2}, \frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \cos\alpha + 2\lambda\cos\frac{\beta+\gamma}{2} =$$

$$= \cos\alpha + 2\lambda\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha + \lambda\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha}.$$

Neka je $$y(x) = x + \lambda\sqrt{2}\sqrt{1-x}, \quad 0 < x < 1,$$

onda $$y'(x) = 1 - \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x} - \lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}.$$

Za $\lambda \leqslant 0$ u (1) važi stroga nejednakost, a za $\lambda \geqslant 2$ je $y' < 0$

$$y(x) < y(-1) = -1 + 2\lambda \leqslant 1 + \frac{\lambda^2}{2},$$

tj. $(\lambda-2)^2 \geqslant 0$. Za $0 < \lambda < 2$ funkcija $y(x)$ ima najveću vrednost za $\sqrt{2}\sqrt{1-x} = \lambda$, tj. $x = 1 - \frac{\lambda^2}{2}$ i tada je

$$y\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) = 1 + \frac{\lambda^2}{2}.$$

3.8. J.M. CHILD, 1939. [BOT31].

$$\sec\alpha + \sec\beta + \sec\gamma \geqslant 6.$$

Jednakost važi ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

D o k a z. Pokažimo da je zbir $\sec\alpha + \sec\beta$, uz uslov $\alpha+\beta=$ const., najmanji kada je $\alpha=\beta$. Neka je

$$y(x) = \sec x + \sec\bar{x}, \quad 0 < x < \alpha+\beta, \quad x+\bar{x} = \alpha+\beta<\pi.$$

Sada je

$$\cos^2 x\cos^2\bar{x}\; y'(x) = \sin x \cos^2\bar{x} - \sin\bar{x}\cos^2 x$$

$$= \sin x - \sin x\sin^2\bar{x} - \sin\bar{x} + \sin\bar{x}\sin^2 x$$

$$= (\sin x - \sin\bar{x})(1 + \sin x\sin\bar{x}),$$

tako da y ima njamanju vrednost za $x=\bar{x}$. Tako za funkcional

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \sec\alpha + \sec\beta + \sec\gamma$$

važi

$$f(\alpha,\beta,\gamma) \geqslant f\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha+\beta}{2},\gamma\right) \geqslant \ldots \geqslant f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = 6,$$

najmanja vrednost se postiže u nepokretnoj tački preslikavanja

$$(\alpha,\beta,\gamma) \longrightarrow \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha+\beta}{2},\gamma\right), \text{ cikl.}$$

3.9. C.V. DURELL, A. ROBSON, 1948. [BOT27].

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 1.$$

Jednakost važi ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

D o k a z. Neka je

$$y(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2\bar{x}, \; 0 < x < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}, \; \bar{x} = \frac{\alpha+\beta}{2} - x,$$

tada

$$\cos^2 x\cos^2\bar{x}\; y'(x) = 2\operatorname{tg}x\cos^2\bar{x} - 2\operatorname{tg}\bar{x}\cos^2 x,$$

$$\frac{1}{2}\cos^3 x\cos^3\bar{x}\; y'(x) = \sin x\cos^3\bar{x} - \sin\bar{x}\cos^3 x$$

$$= \sin x\cos\bar{x} - \sin x\cos\bar{x}\sin^2\bar{x} - \cos x\sin\bar{x} + \cos x\sin\bar{x}\sin^2 x$$

$$= \sin(x-\bar{x}) + \sin x\sin\bar{x}(\sin x\cos x - \sin\bar{x}\cos\bar{x})$$

$$= \sin(x-\bar{x}) + \sin x\sin\bar{x}\cos(x+\bar{x})\sin(x-\bar{x})$$

$$= \sin(x-\bar{x})\,(1 + \sin x\sin\bar{x}\cos(x+\bar{x})).$$

Znači, $y'(x)$ ima isti znak kao $x-\bar{x}$, pa $y(x)$ ima najmanju vrednost za $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Tražena nejednakost sledi iz niza nejednakosti

$$f(\alpha,\beta,\gamma) \geqslant f(\tfrac{\alpha+\beta}{2},\tfrac{\alpha+\beta}{2},\gamma) \geqslant \dots \geqslant f(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{3}) = 1,$$

najmanja vrednost se postiže za zajedničku nepokretnu tačku preslikavanja $(\alpha,\beta,\gamma) \longrightarrow (\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha+\beta}{2},\gamma)$, cikl.

3.10. H.W. GUGGENHEIMER, 1967. [BOT34].

(1) $$\frac{1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} \geqslant \sqrt{3}\,.$$

Jednakost važi ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

D o k a z. Neka je $f(\alpha,\beta,\gamma)$ funkcional određen izrazom s leve strane (1) i

$$y(x) = f(x,\bar{x},\gamma), \quad 0 < x < \alpha+\beta\,, \quad \bar{x} = \alpha+\beta-x.$$

Tada je

$$\sin^2 x \sin^2 \bar{x} \sin\gamma\, y'(x) = (-\sin x\cos\bar{x} + \cos x \sin\bar{x})\cos\gamma \sin x \sin\bar{x} -$$
$$- (1 + \cos x\cos\bar{x}\cos\gamma)(\cos x\sin\bar{x} - \sin x\cos\bar{x})$$
$$= \sin(\bar{x}-x)\ (\cos\gamma\sin x\sin\bar{x} - \cos x\cos\bar{x}\cos\gamma - 1)$$
$$= \sin(\bar{x}-x)(-\cos\gamma\cos(x+\bar{x}) - 1).$$

Time $y(x)$ ima najmanju vrednost za $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Dakle, funkcional f dostiže minimalnu vrednost u zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja $(\alpha,\beta,\gamma) \longrightarrow (\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha+\beta}{2},\gamma)$, cikl. i to $f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

3.11. J.M. CHILD, 1939. [BOT24].

$$\cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta \leqslant \frac{3}{4}\,.$$

Nejednakost je stroga, izuzev kada je trougao jednakostraničan.

D o k a z. Neka je $f(\alpha,\beta,\gamma)$ izraz s leve strane gornje nejednakosti i zamenimo α s x i β s $\bar{x}=\alpha+\beta-x$. Tada je

$$f'_x = \cos\gamma\,(\sin\bar{x}-\sin x) - \sin x\cos\bar{x} + \cos x\sin\bar{x}$$
$$= \cos\gamma\, 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\bar{x}-x}{2} + \sin(\bar{x}-x)$$
$$= 2\sin\frac{\bar{x}-x}{2}\left(\cos\gamma\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\bar{x}-x}{2}\right).$$

Izraz u zagradi je uvek pozitivan, tako da f'_x ima isti znak kao i $\bar{x}-x$, $0<x<\alpha+\beta$. Time je

$$f(\alpha,\beta,\gamma) \leqslant f\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha+\beta}{2},\gamma\right) \leqslant \dots \leqslant f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}.$$

3.12. J.M. CHILD, 1939. [BOT111,ŠKL51].

$$R_1R_2R_3 \geqslant 8r_1r_2r_3.$$

L. FEJES TÓTH, 1948, 1953. [BOT138,ŠKL55].

Neka su R_i rastojanja unutrašnje tačke M poligona od vrhova i r_i rastojanja M do njegovih strana. Tada je

$$R_1 \dots R_n \geqslant \left(\sec\frac{\pi}{n}\right)^n r_1 \dots r_n,$$

gde jednakost važi jedino za regularan poligon i njegov centar.

D o k a z. Neka je $P = A_1\dots A_n$ poligon i funkcional

$$f(P) = \frac{r_1\dots r_n}{R_1\dots R_n}.$$

Neka su M_i podnožja visina iz tačke M na prave A_iA_{i+1} ($i=1,\dots,n$), $\beta'_i = \angle A_iMM_i$ i $\beta''_i = \angle M_iMA_{i+1}$ orijentisani uglovi, tako da je

$$\beta'_1 + \beta''_1 + \dots + \beta'_n + \beta''_n = 2\pi.$$

Tako je

$$f(P)^2 = \frac{r_1 r_1 r_2 r_2 r_3 \dots r_{n-1} r_n r_n}{R_1 R_2 R_2 R_3 R_3 \dots R_n \; R_n R_1} =$$

$$= \cos\beta_1' \cos\beta_1'' \dots \cos\beta_n' \cos\beta_n''$$

$$= g(\beta_1', \dots, \beta_n'').$$

Najpre je

$$\cos\alpha \cos\beta \leqslant \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2},$$

što sledi iz konkavnosti funkcije $y(x) = \ln \cos x$, jer je $y'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$ i $y''(x) = \frac{-1}{\cos^2 x} < 0$. Time funkcional g najveću vrednost dostiže u zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n}) \to \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \dots, x_{2n}\right),$$

cikl., tj.

$$f(P)^2 = g(\beta_1', \dots, \beta_{2n}'') \leqslant g\left(\frac{2\pi}{2n}, \dots, \frac{2\pi}{2n}\right) = \cos^{2n} \frac{\pi}{n}.$$

POSLEDICA. Tačka koja ima najveći količnik f u trouglu je centar upisanog kruga.

3.13. E.JUST, N. SCHAUMBERGER, 1963. [BOT138].

Za svaki konveksan poligon P sa stranama $a_1, \dots, a_n$ važi

(1) $$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 4P \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Jednakost važi jedino za regularne poligone.

D o k a z. Neka je $Q = A_1 \dots A_n$ poligon i funkcional

$$f(Q) = a_1^2 + \dots + a_n^2.$$

Preslikavanje

$$F_i(Q) = Q_1 = A_1 \dots A_{i-1} A_i' A_{i+1} \dots A_n$$

je takvo da je prava $A_i A_i'$ paralelna s pravom $A_{i-1}A_{i+1}$ i $a_{i-1}' = A_{i-1}A_i' = A_i'A_{i+1} = a_i'$. Poligoni Q i Q_1 imaju istu površinu i preslikavanje je monotono u odnosu na funkcional

$$f(Q) \geqslant f(F_i(Q)).$$

Ako je $\underline{A}_i$ podnožje visine h iz A_i na $A_{i-1}A_{i+1}$,
to je

$$\begin{aligned} f(Q)-f(Q_1) &= a_{i-1}^2 + a_i^2 - 2a_i'^2 \\ &= A_{i-1}\underline{A}_i^2+h^2+\underline{A}_iA_{i+1}^2+h^2-\frac{1}{2}A_{i-1}A_{i+1}^2-2h^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[2A_{i-1}\underline{A}_i^2+2\underline{A}_iA_{i+1}^2-(A_{i-1}\underline{A}_i+\underline{A}_iA_{i+1})^2\right] \\ &= \frac{1}{2}(A_{i-1}\underline{A}_i-\underline{A}_iA_{i+1})^2 \\ &= A_iA_i'^2 \end{aligned}$$

i

$$a_{i-1}' = a_i' \leqslant \max\{a_{i-1}, a_i\}. \tag{2}$$

Niz preslikavanja

$$F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}, \ldots = F_1, F_2, \ldots, F_n, F_1, \ldots$$

određuje niz poligona $Q, Q_1, Q_2, \ldots$. Ako je rastojanje

između poligona

$$d(Q_s, Q_{s+1}) = \max\{A_i^{(s)}A_i^{(s+1)}\ i=1,\ldots,n\},$$

onda

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} d^2(Q_s, Q_{s+1}) &= \lim_{s\to\infty}(A_{i_s}^{(s)}A_{i_s}^{(s+1)})^2 = \\ &= \lim_{s\to\infty}\left(f(Q_s) - f(Q_{s+1})\right) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Iz (3) sledi da postoji $m\in N$, takvo da je za sve $s \geqslant m$ $d(Q_s, Q_{s+1}) \leqslant \varepsilon/2n$. Neka je $s \geqslant m$ takvo da je $i_s=2$, tada za $i=2,\ldots,n$

$$\begin{aligned} \left|a_1^{(s)} - a_i^{(s)}\right| &= \Big|a_1^{(s)}-a_1^{(s+1)}+\underset{(=)^2}{a_2^{(s+1)}}-a_2^{(s+2)}+\underset{(=)^3}{a_3^{(s+2)}}- \\ &\quad -a_3^{(s+3)}+\ldots-a_{i-1}^{(s+i-1)}+\underset{(=)^i}{a_i^{(s+i-1)}}-a_i^{(s+i)}\Big| \\ &\leqslant \frac{i\varepsilon}{2n} \end{aligned}$$

i

$$\left|a_i^{(s)}-a_j^{(s)}\right| \leqslant |a_i^s-a_1^s| + |a_1^s-a_j^s| \leqslant 2\,\frac{i\varepsilon}{2n} \leqslant \varepsilon.$$

(Primetimo da je $\sum_{s=1}^{\infty} d(Q_s,Q_{s+1})^2 < \infty$, postupkom kao u [BJEIV] može se utvrditi da niz (Q_s) brzo konvergira jednakostraničnom poligonu.)

Funkcional f je neprekidan, tako da je nejednakost (1) dovoljno dokazati za poligone s jednakim stranama $a_1 = \ldots = a_n = a$. Pokažimo da od svih poligona Q s jednakim stranama a najveću površinu ima pravilan poligon. Definišimo preslikavanja u skupu J_a svih jednakostraničnih poligona čije strane su a

$$G_i(Q) = G_i(A_1 \ldots A_i A_{i+1} \ldots A_n) = A_1 \ldots A_i' A_{i+1}' \ldots A_n = Q_1 .$$

Temena A_i' i A_{i+1}' su tačke za koje je prava $A_i'A_{i+1}'$ paralelna pravoj $A_{i-1}A_{i+2}$ i time

$$\angle A_i' = \angle A_{i-1}A_i'A_{i+1}' = \angle A_i'A_{i+1}'A_{i+2} = \angle A_{i+1}'.$$

Da bi se dokazao odnos monotonosti $P(Q) \leqslant P(G_i(Q))$, P označava površinu, treba dokazati

$$P(A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}) \leqslant P(A_{i-1}A_i'A_{i+1}'A_{i+2}).$$

Neka je $c = A_{i-1}A_{i+2}$ i x - rastojanje, koje može biti i negativno, temena A_{i-1} do podnožja visine iz A_i na pravu $A_{i-1}A_{i+2}$. Tada je

$$\begin{aligned} y(x) &= 4P(A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}) \\ &= 2c\sqrt{a^2-x^2} + 2\sqrt{a^2-x^2+(c-x)^2}\sqrt{a^2-\frac{1}{4}(a^2-x^2+(c-x)^2} \\ &= 2c\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{a^2+c^2-2cx}\sqrt{3a^2-c^2+2cx} \\ &= 2c\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{2a^2+(c^2-a^2-2cx)}\sqrt{2a^2-(c^2-a^2-2cx)} \\ &= 2c\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{4a^4-(c^2-a^2-2cx)^2}. \end{aligned}$$

Prvi izvod je

$$y'(x) = \frac{-cx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{2}\,\frac{2(c^2-a^2-2cx)2c}{2\sqrt{4a^4-(c^2-a^2-2cx)^2}}$$

$$= \frac{-cx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{(c^2-a^2-2cx)c}{\sqrt{4a^4-(c^2-a^2-2cx)^2}} \geqslant 0,$$

ako je

$$\frac{(c^2-a^2-2cx)^2}{4a^4-(c^2-a^2-2cx)^2} \geqslant \frac{x^2}{a^2-x^2},$$

$$a^2(c^2-a^2-2cx)^2 \geqslant 4a^4x^2,$$

tj. $\quad c^2-a^2 \geqslant 2cx+2ax, \qquad$ ili $\quad \frac{c-a}{2} \geqslant x.$

Dakle, $y(x)$ ima minimum za $2x=c-a$, što je trebalo dokazati.

Niz preslikavanja $G_1,\ldots,G_n,G_1,\ldots$ određuje niz jednakostraničnih poligona $Q_1,Q_2,\ldots$ u kome se izjednačuju susedni uglovi i u kome je površina poligona neopadajuća. Jednakost se postiže za pravilne poligone - nepokretne tačke preslikavanja F_i i G_i.

NAPOMENA. Nejednakost (1) se može izvesti iz izoperimetrijske nejednakosti za poligone i odnosa između kvadratne i aritmetičke sredine brojeva. Postupak dat u prethodnom dokazu se može primeniti i na ispitivanje nejednakosti (1) za sredine strana proizvoljnog reda.

TEOREMA A. Neka je $Q = A_1\ldots A_n$ bilo koji poligon površine P sa stranama $a_1,\ldots,a_n$. Posmatrajmo nejednakost

$$(4) \qquad M_p(a_1,\ldots,a_n) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant n\sqrt{\frac{4}{n}\,P\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

ili

$$(4') \qquad a_1^p + \ldots + a_n^p \geqslant n\left[\frac{4}{n}\,P\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right]^{\frac{p}{2}}, \qquad (p \neq 0).$$

Neka je $p(n) = \min\{p \mid \text{važi (4) za sve } Q\}$

a) $p(n) \leqslant 1$, za sve $n \in N$,

$p(n) > 0$, za $n > 3$.

b) $p(3) = 0$.

Za p=4 važi

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant 16P^2$$

(F.Goldner, 1949. [BOT45]),

za p=2 važi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,P$$

(R.Weitzenböck, 1919. [BOT42]).

za p>0

$$M_p(a,b,c) \geqslant \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}P}$$

(C.N.Mills - O.Dunkel, 1927. [BOT47])

i za p=0

(5) $$M_0(a,b,c) = \sqrt[3]{abc} \geqslant \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}P}.$$

(L.Carlitz - F.Leuenberger, 1961, H.W.Guggenheimer, 1965. [BOT46]).

Jednakost važi ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

c) $$p(4) = 4\,\frac{\ln 4/3}{\ln 16/3} = 0{,}687422..$$

Za p=2 važi

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4P$$

(Z.A.Skopec, V.A.Žarov, 1962. [BOT32]),

za p=1 važi izoperimetrijska nejednakost

$$a + b + c + d \geqslant 4\sqrt{P},$$

za $p \geqslant p(4)$

(6) $$\underline{a^p + b^p + c^p + d^p \geqslant 4\,P^{\frac{p}{2}}}.$$

Za $p > p(4)$ važi jednakost u (6) ako i samo ako je četvorougao pravilan, a za $p = p(4)$ jednakost važi ako i samo ako je četvorougao pravilan ili je sveden na jednakostraničan trougao.

Nejednakost (6) pojačava izoperimetrijsku nejednakost

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \left[\frac{a^{p(4)}+b^{p(4)}+c^{p(4)}+d^{p(4)}}{4}\right]^{1/p(4)} \geqslant \sqrt{P} .$$

D o k a z. a) Prva nejednakost sledi na osnovu izoperimetrijske nejednakosti za poligone. Dokažimo drugu nejednakost. Postoji poligon $B_1 \dots B_{n-1}$ ($n-1 \geqslant 3$) čija je površina $P > 0$. Neka je B_n tačka na strani $B_{n-1}B_1$, tada n-poligon $B_1 \dots B_{n-1}B_n$ ima takođe površinu P. Ako $B_n \longrightarrow B_1$, tada $b_n \longrightarrow 0$ i time

$$M_0(b_1, \dots, b_n) = \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} \longrightarrow 0,$$

tako da (4) ne važi za $p=0$.

b) Dokažimo nejednakost (5). Neka je funkcional

$$f(ABC) = abc.$$

Radi određenosti, pretpostavimo da je ugao γ oštar i neka su x i $\bar{x}$ rastojanja podnožja $\underline{C}$ visine h iz temena C na stranu AB do B i A respektivno (x je negativnog znaka ako $B \in \underline{C}A$). Funkcija

$$y(x) = a(x)b(x), \quad a(x)=\sqrt{x^2+h^2}, \quad b(x)=\sqrt{\bar{x}^2+h^2}, \quad x+\bar{x}=c$$

ima izvod

$$y'(x) = a'b + ab' = \frac{x}{a}b - a\frac{\bar{x}}{b} .$$

Tako je $y'(x) \leqslant 0$ ako je

$$x(\bar{x}^2+h^2) \leqslant \bar{x}(x^2+h^2),$$

ili

$$x\bar{x}(\bar{x}-x) \leqslant h^2(\bar{x}-x).$$

Za oštar naspramni ugao je $x\bar{x} \leqslant h^2$, tako da je $y'(x)$ istog znaka kao $x-\bar{x}$. Neka je C_1 takva tačka da je CC_1 paralelno AB i da je zadovoljen jedan od uslova

$$AC_1 = BC_1, \quad \angle ACB \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{ili} \quad \angle AC_1B = \frac{\pi}{2}.$$

Preslikavanje $F_C(ABC) = ABC_1$ čuva površinu i monotono opada u odnosu na funkcional f

$$P(ABC) = P(F_C(ABC)), \quad f(ABC) \geqslant f(F_C(ABC)).$$

Niz preslikavanja $F_C, F_B, F_C, \ldots$ određuje niz trouglova $\Delta = ABC$, $\Delta_1 = F_C(ABC)$, ... Niz (Δ_n) se nalazi u kugli $K(A, \operatorname{diam}\Delta)$, tako da ima konvergentni podniz, koji konvergira nepokretnoj tački preslikavanja F_B i F_C - jednakostraničnom trouglu $\Delta_o = A_oB_oC_o$ površine P. Time je dobijen niz nejednakosti

$$f(\Delta) \geqslant f(\Delta_1) \geqslant \ldots \geqslant f(\Delta_o) = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}P}.$$

Ako je $p<0$, onda

$$M_p(a,a,c) = \left(\frac{a^p+b^p+c^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{c^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{p}}c.$$

Nejednakost (4) ne važi jer se c može proizvoljno smanjiti, a a povećati, tako da površina P jednakokrakog trougla ostane nepromenjena.

c) Neka je funkcional

$$f(Q) = \frac{f_1(Q)}{f_2(Q)} = \frac{\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_2A_3} + \sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_4A_1}}{4\sqrt[4]{P}}.$$

Možemo pretpostaviti da je četvorougao $Q = A_1A_2A_3A_4$ konveksan, jer se od strana dužina jednakih dužinama strana četvorougla Q može obrazovati konveksan četvorougao veće površine. Neka je $\underline{A}_i$ podnožje visine h iz temena A_i na $A_{i-1}A_{i+1}$, x - rastojanje između A_{i-1} i $\underline{A}_i$, koje je negativnog znaka ako je $A_{i-1} \in \underline{A}_i A_{i+1}$ i $\bar{x}$ - na sličan način određeno rastojanje između $\underline{A}_i$ i A_{i+1}, tako da je $x + \bar{x} = A_{i-1}A_{i+1} = \text{const}$. Pri tome se podrazumeva da je $A_o = A_4$ i $A_5 = A_1$. Sem toga neka je

$$a_{i-1} = A_{i-1}A_i,\ a_i = A_iA_{i+1},\ \alpha = \angle A_iA_{i+1}A_{i-1},\ \beta = \angle A_iA_{i-1}A_{i+1}.$$

Tada, zbir dva člana iz $f_1(Q)$

$$y(x) = \sqrt{a_{i-1}(x)} + \sqrt{a_i(x)} = \sqrt[4]{x^2+h^2} + \sqrt[4]{\bar{x}^2+h^2}$$

ima izvod

$$y'(x) = \frac{x}{2a_{i-1}^{3/2}} - \frac{\bar{x}}{2a_i^{3/2}}.$$

Ako je $x \leqslant 0$, onda je $y'(x) < 0$. Neka je $0 < x < \bar{x}$, tada zahtev $y'(x) < 0$ daje

$$\frac{x^2}{a_{i-1}^3} < \frac{\bar{x}^2}{a_i^3}, \quad \text{tj.} \quad \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha} < \frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$\sin\beta(1 - \sin^2\beta) < \sin\alpha(1 - \sin^2\alpha),$$

$$\sin\beta - \sin\alpha < \sin^3\beta - \sin^3\alpha,$$

$$(7) \qquad 1 < \sin^2\alpha + \sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta.$$

Ako je $A_{i-1}A_iA_{i+1} \leqslant \frac{\pi}{2}$, onda je

$$\sin^2\alpha + \sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta \geqslant \sin^2\alpha + \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \\ + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 + \sin\alpha\cos\alpha > 1.$$

Neka je tačka A_i^s takva da je $A_iA_i^s$ paralelno s $A_{i-1}A_{i+1}$ i $A_{i-1}A_i^s = A_i^sA_{i+1}$. Neka je tačka $A_i' \in A_iA_i^s$ takva da funkcija $y(x)$ ima maksimum za $x = A_iA_i'$. Na osnovu prethodnog sledi da ako je $\angle A_{i-1}A_i^s A_{i+1} \leqslant \frac{\pi}{2}$, onda je $A_i' = A_i^s$.

Neka je

$$H_i(Q) = Q_1 = A_1 \ldots A_{i-1}A_i'A_{i+1} \ldots A_4, \; i=1,\ldots,4$$

i

$$F_i(Q) = \begin{cases} Q, & \angle A_i \text{ je tup} \\ H_i(Q), & \text{inače}\ . \end{cases}$$

Preslikavanja F_i ne menjaju površinu četvorougla i monotono su opadajuća u odnosu na funkcional f

$$f_1(Q) \geqslant f_1(F_i(Q)), \quad f_2(Q) = f_2(F_i(Q)).$$

Osim toga, ako je $\max Q$ - najduža strana četvorougla Q, onda je $\max Q \geqslant \max F_i(Q)$.

Definišimo i drugo preslikavanje

$$G(Q) = \begin{cases} Q, & Q \text{ nema naspramnih tupih ili} \\ & \text{oštrih uglova} \\ Q_2, & \text{inače} \end{cases} .$$

Ako su $\angle A_2$ i $\angle A_4$ tupi (oštri) uglovi, tada je $Q_2 = A_1''A_2''A_3''A_4''$ četvorougao sa stranama jednakih dužina analognim stranama četvorougla Q, kod koga je jedan od uglova $\angle A_2''$ ili $\angle A_4''$ prav a drugi tup ili prav i npr. $A_1'', A_3'' \in A_1A_3$ i $A_1A_1'' = A_3A_3''$ (za oštre uglove $A_1, A_3 \in A_1''A_3''$). Preslikavanje G ne menja dužine strana četvorougla i monotono je opadajuće u odnosu na funkcional f

$$f_1(Q) = f_1(G(Q)), \quad f_2(Q) \leqslant f_2(G(Q)).$$

Osim toga, primetimo da je $\max Q = \max G(Q)$.

3.13

Niz preslikavanja

$$F_1, F_2, F_3, F_4, G, F_1, F_2, F_3, F_4, G, F_1, \ldots$$

određuje niz četvorouglova $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ za koji je

$$f(Q) \geqslant f(Q_1) \geqslant f(Q_2) \geqslant \cdots$$

i

$$\max Q \geqslant \max Q_1 \geqslant \max Q_2 \geqslant \cdots .$$

Neka je

$$R = C_1C_2C_3C_4,\ R_1 = C_1^{(1)}C_2^{(1)}C_3^{(1)}C_4^{(1)},\ R_2 = C_1^{(2)}C_2^{(2)}C_3^{(2)}C_4^{(2)}, \ldots$$

niz četvorouglova podudarnih četvorouglovima niza $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ respektivno, za koji je $C_1 = C_1^{(1)} = C_1^{(2)} = \ldots$. Niz četvorouglova (R_n) ima neopadajuću površinu i nalazi se u kompaktnom skupu, tako da ima bar konvergentni podniz koji konvergira četvorouglu $R_o = C_1^oC_2^oC_3^oC_4^o$ - zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja F_1, F_2, F_3, F_4 i G.

Time je

$$f(Q) = f(R) \geqslant f(Q_1) = f(R_1) \geqslant \ldots \geqslant f(R_o).$$

Nepokretna tačka preslikavanja G je četvorougao bez naspramnih tupih uglova, a nepokretna tačka preslikavanja F_1, F_2, F_3, F_4 je četvorougao kod koga su strane koje obrazuju oštar ili prav ugao jednakih dužina. Četvorougao R_o je nepokretna tačka preslikavanja G, tako da može imati najviše dva tupa ugla. Ti uglovi moraju biti nenaspramni i time susedni. Dakle, bar dva susedna ugla, na primer $\angle C_1^o$ i $\angle C_2^o$ su oštri ili pravi i time je $C_4^oC_1^o = C_1^oC_2^o = C_2^oC_3^o = a$. Ako je ijedan od uglova $\angle C_3^o$ ili $\angle C_4^o$ oštar ili prav, četvorougao R_o je kvadrat. Zato , pretpostavimo da su uglovi $\angle C_3^o$ i $\angle C_4^o$ tupi i time je $C_3^oC_4^o = b < a$. U prethodnom dokazu je pokazano da od svih četvorouglova sa stranama a,a,a,b najveću površinu ima (jednakokraki) trapez. Ako je $T = C_1D_2D_3D_4$ trapez sa stranama $D_4C_1 = C_1D_2 = D_2D_3 = a$ i $D_3D_4 = b$, onda je

$$f(R_o) \geqslant f(T).$$

Dakle, nejednakost (6) je dovoljno proveriti na skupu jednakokrakih trapeza J. Umesto na celom skupu J, nejednakost ćemo proveriti samo za dva njegova člana. Nastavimo postupak ispravljanja četvorougla. Neka je $H_3(T) = T_1$, tako da je $\max T = \max T_1$. Niz preslikavanja $G, F_1, F_2, F_3, F_4, G, F_1, \ldots$ određuje novi niz četvorouglova $T_1, T_1', T_1'', \ldots$. Ovaj niz četvorouglova, na isti način kao gore, određuje novi jednakokraki trapez T_2 za koji je $f(T_1) \geqslant f(T_2)$ i $\max T_1 \geqslant \max T_2$. Nastavljanjem postupka dobija se niz jednakokrakih trapeza $T_1, T_2, T_3, \ldots$, za koji je

$$f(T_1) \geqslant f(T_2) \geqslant \ldots \text{ i } \max T_1 \geqslant \max T_2 \geqslant \ \ldots \ .$$

(Time je obrazovan i transfinitni niz popravki polaznog četvorougla Q.)
Niz (T_n) ima konvergentni podniz koji konvergira trapezu ABCD, koji je nužno nepokretna tačka preslikavanja H_1, H_2, H_3, H_4.

Neka je $DA = AB = BC = a$, $CD = b \leqslant a$, $\alpha = \angle ACD$ i $\beta = \angle CAD$. Četvorougao ABCD je nepokretna tačka preslikavanja H_4, tako da je

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \leqslant 1.$$

Dalje je $b = a - 2a\cos(\alpha+\beta)$, tako da je

$$\frac{b}{a} = 1 - 2\cos(\alpha+\beta) = 1 + 2\sin\alpha\sin\beta - 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Ako se uvedu oznake $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$, dobija se sistem jednačina

$$(8) \qquad 1 + 2xy - 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = \frac{1-x^2}{1-y^2} = \frac{y}{x} = k.$$

Tako je $y = kx$ i $1-y^2 = \frac{1}{k}(1-x^2)$, i dalje

$$1-k^2x^2 = \frac{1}{k}(1-x^2), \quad (1-k^3)x^2 = 1-k.$$

Ako je $k=1$, četvorougao je kvadrat, a ako je $0 \leqslant k < 1$, onda je

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+k+k^2}}, \qquad y = \frac{k}{\sqrt{1+k+k^2}},$$

$$1-x^2 = \frac{k+k^2}{1+k+k^2}, \qquad 1-y^2 = \frac{1+k}{1+k+k^2}.$$

Smena u (8) daje

$$1 + \frac{2k}{1+k+k^2} - 2\sqrt{\frac{k(1+k)^2}{(1+k+k^2)^2}} = k,$$

$$2k - 2\sqrt{k}(1+k) = k^3-1,$$

tj.

$$\sqrt{k} = \frac{-k^3+2k+1}{2(k+1)} = \frac{-k^2+k+1}{2},$$

odakle je

$$k^2 = k - 2\sqrt{k} + 1 = (1-\sqrt{k})^2.$$

Time je $k = 1 - \sqrt{k}$, tj. $k + \sqrt{k} - 1 = 0$,

što daje $k = \frac{b}{a} = \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$

Dakle, četvorougao ABCD je kvadrat ili " zlatni " trapez - jednakokraki trapez sa stranama a,a,a,b za koje je odnos $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ odnos zlatnog preseka, tj. čiji je odnos strana $a : b$ kvadrat odnosa zlatnog preseka. Funkcional f za kvadrat ima vrednost 1, a za "zlatni" trapez ZT je

$$f_1(ZT) = 3\sqrt{a} + \sqrt{b} = \left(3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\sqrt{a} = 3,6180339..\sqrt{a},$$

$$f_2(ZT) = 4\sqrt[4]{\frac{5-\sqrt{5}}{4}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}\,\sqrt{a} = 3,6014584..\sqrt{a},$$

tako da je $f(ZT) = 1.0046024..$. Dakle, nejednakost (6) za $p \geqslant 1/2$ važi za sve one četvorouglove čija je granica kvadrat ili "zlatni" trapez.

Ostala je da se ispita još jedna nepokretna tačka datih preslikavanja - pravilan trougao $DA = AB = BC = a$ i $CD = 0$. Za $a = 1$ nejednakost (6) postaje

$$\left[\frac{3}{4}\right]^{1/p} \geqslant \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}} \quad \text{ili} \quad \left[\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\right]^p \leqslant \frac{3}{4},$$

eksplicitno,

$$\frac{1}{p}\ln\frac{3}{4} \geqslant \ln\frac{\sqrt[4]{3}}{2},$$

$$p \geqslant \frac{\ln\frac{3}{4}}{\ln\frac{\sqrt[4]{3}}{2}} = \frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln\frac{2}{\sqrt[4]{3}}} = 4\,\frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln\frac{16}{3}},$$

tako da je uslov $p \geqslant p(4)$ neophodan.

Neka je

$$f_p(Q) = \frac{1}{\sqrt{P}}\left[A_1A_2^p + A_2A_3^p + A_3A_4^p + A_4A_1^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Ako je

$$\varphi(x) = a_{i-1}^p(x) + a_i^p(x),$$

tada
$$\varphi'(x) = p\, a_{i-1}^{p-1} a'_{i-1} + p\, a_i^{p-1} a'_i$$
$$= p\, a_{i-1}^{p-1} \frac{x}{a_{i-1}} - p\, a_i^{p-1} \frac{\bar{x}}{a_i}$$
$$= p \left[\frac{x}{a_{i-1}^{2-p}} - \frac{\bar{x}}{a_i^{2-p}} \right].$$

Iz nejednakosti
$$\frac{x}{\bar{x}} \leqslant \left[\frac{a_{i-1}}{a_i}\right]^{\frac{3}{2}} \leqslant \left[\frac{a_{i-1}}{a_i}\right]^{2-p}$$
sledi da uslov $y'(x) \leqslant 0$ povlači $\varphi'(x) \leqslant 0$. Na osnovu toga i definicije preslikavanja F_i sledi
$$f_p(Q) \geqslant f_p(F_i(Q)),$$
a očigledno je i
$$f_p(Q) \geqslant f_p(G(Q)).$$

Formirani nizovi četvorouglova su monotono opadajući i u odnosu na funkcional f_p, jedina izmena je neophodna kod određivanja trapeza T_1. Vrh D_3' je takav da je D_3D_3' paralelno s D_2D_4 i da tada f_p ima najmanju vrednost, tj.

$$(9) \qquad \frac{x}{\bar{x}} = \left[\frac{a_{i-1}}{a_i}\right]^{2-p}.$$

Slična izmena važi i za naredne članove niza $T_2, T_3, \ldots$.

U skupu jednakokrakih trapeza $DA = AB = BC = a$, $CD = b \leqslant a$, odredimo moguću granicu tako obrazovanog niza. Iz (9) sledi da je

$$\frac{\frac{x}{a}}{\frac{\bar{x}}{b}} = \left[\frac{a}{b}\right]^{1-p}, \qquad \left[\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right]^{\frac{1}{1-p}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

što vodi do izmenjene produžene jednakosti (8)

$$1 + 2xy - 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = \frac{\left[1-x^2\right]^{\frac{1}{2(1-p)}}}{\left[1-y^2\right]^{\frac{1}{2(1-p)}}} = \frac{y}{x} = q.$$

Njeno rešenje je

$$q = \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]^{\frac{1}{1-p}},$$

za $p = \frac{1}{2}$ dobija se $q = k$. Time je

$$b = \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]^{\frac{1}{1-p}} a .$$

Nejednakost (6) je dovoljno dokazati za $p = p(4)$. Za tu vrednost i $a = 1$ odnos

$$\left[\frac{3a^p + b^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant \sqrt{\frac{a+b}{2}\sqrt{a^2 - \left[\frac{a-b}{2}\right]^2}}$$

postaje

$$0{,}7716296.. \geqslant 0{,}7557594.. ,$$

što završava dokaz.

NAPOMENA 1. Za paralelograme, kao i za trouglove, dovoljno je pretpostaviti da je $p \geqslant 0$ da bi važila nejednakost (4).

NAPOMENA 2. Nejednakost (6) za jednakokrake trapeze se može napisati u obliku

$$\left[\frac{3x^p + 1}{4}\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant \sqrt{\frac{x+1}{2}\sqrt{1 - \left[\frac{x-1}{2}\right]^2}}, \quad x \geqslant 1 .$$

3.14. V.O.GORDON, 1966. [BOT43]

$$bc + ca + ab \geqslant 4\,P\sqrt{3}\,,$$

jednakost važi ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

D o k a z. Neka je $\Delta = \Delta ABC$ i funkcional

$$f(\Delta) = bc + ca + ab.$$

Neka je $\underline{C}$ podnožje visine iz temena C na suprotnu stranu, x - rastojanje između A i $\underline{C}$, koje je negativno ako je $A \in \underline{C}B$, $\bar{x}$ - rastojanje između $\underline{C}$ i B, tako da je $x + \bar{x} = c$.

Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= b'c + ca' + a'b + ab' \\ &= \frac{x}{b}c - c\frac{\bar{x}}{a} - \frac{\bar{x}}{a}b + a\frac{x}{b} \\ &= \frac{x}{b}(a+c) - \frac{\bar{x}}{a}(b+c). \end{aligned}$$

Ako je $x \leqslant 0$, onda je $f'(x) \leqslant 0$, može se pretpostaviti da je $0 \leqslant x \leqslant \bar{x}$. Zahtev $f'(x) \leqslant 0$ je ekvivalentan s

(1) $$\frac{x}{\bar{x}} \leqslant \frac{b+c}{a+c}\,\frac{b}{a}\,.$$

Nejednakost (1) je ispunjena ako je γ oštar ugao, jer

(2) $$\frac{x}{\bar{x}} \leqslant \frac{b^2}{a^2} \leqslant \frac{b+c}{a+c}\,\frac{b}{a}\,,$$

prva nejednakost (2) se može napisati u obliku

$$x(\bar{x}^2 + h^2) \leqslant \bar{x}(x^2 + h^2)$$

ili

$$x\bar{x}(\bar{x} - x) \leqslant h^2(\bar{x} - x).$$

Neka je tačka D takva da je CD paralelno s AB i $AD=BD$. Ako je $\angle ADB \leqslant \frac{\pi}{2}$, tada je $C' = D$, a ako je $\angle ADB > \frac{\pi}{2}$, tada uzmimo da je tačka C' na CD takva da je $\angle AC'B = \frac{\pi}{2}$. Time je određeno preslikavanje

$$F_C(\Delta) = \Delta_1 = ABC'$$

koje je monotono opadajuće u odnosu na funkcional f

$$f(\Delta) \geqslant f(F_C(\Delta)).$$

Niz preslikavanja $F_C, F_B, F_C, F_B, F_C, \ldots$ određuje niz trouglova

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \tag{3}$$

Za niz (3) funkcional f je monotono nerastući

$$f(\Delta) \geqslant f(\Delta_1) \geqslant f(\Delta_2) \geqslant \ldots \ .$$

Niz (3) ima bar konvergentni podniz, koji konvergira zajedničkoj nepokretnoj tački preslikavanja F_B i F_C - jednakostraničnom trouglu Δ_o. Time je

$$f(\Delta) \geqslant f(\Delta_1) \geqslant \ldots \geqslant f(\Delta_o) = 4\, P\sqrt{3}.$$

3.15. F. GOLDNER, 1949. [BOT15]

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geqslant 16P^2,$$

jednakost važi ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

D o k a z. Uz oznake iz prethodnog dokaza, funkcional f određen izrazom s leve strane nejednakosti ima izvod

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2bb'c^2 + c^2 2aa' + 2aa'b + 2a^2bb' \\ &= c^2(x-\bar{x}) + a^2x - b^2\bar{x}. \end{aligned}$$

Za $x < \bar{x}$ i oštar ugao γ je $x : \bar{x} \leqslant b^2 : a^2$, tako da je $f'(x) \leqslant 0$. Može se obrazovati niz trouglova za koji je $f(\Delta) \geqslant f(\Delta_1) \geqslant \ldots \geqslant f(\Delta_o) = 16P^2$.

3.16. NEJEDNAKOSTI S POLUOBIMOM TROUGLA.

A. PADOA, 1925. [BOT12]

$$8(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant abc,$$

jednakost važi ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

D o k a z. Neka je

$$f(a,b,c) = abc - 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

traženi funkcional. Ako je

$$y(x) = f(x,\bar{x},c),\ x+\bar{x}=a+b,\ x,\bar{x} \geqslant 0,$$

tada

$$y'(x) = \bar{x}c-xc-8(s-c)(-s+\bar{x}+s-x)$$
$$= (\bar{x}-x)(c-8(s-c))$$
$$= (\bar{x}-x)(5c-4a-4b).$$

Ako je c najkraća stranica trougla i $e = \frac{a+b}{2}$, onda je $f(a,b,c) \geqslant f(e,e,c)$. Nejednakost $f(e,e,c) \geqslant 0$ se svodi na $c(c-e)^2 \geqslant 0$.

A. SANTALÒ, 1943. [BOT16].

$$\sqrt{s} < \sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c} \leqslant \sqrt{3s}\ .$$

Jednakost važi ako i samo ako je trougao jednakostraničan.

D o k a z. Neka je funkcional

$$f(a,b,c) = \sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c}\ .$$

Ako je

$$y(x) = f(x,\bar{x},c),\ x+\bar{x}=a+b,\ x,\bar{x} > 0,$$

tada je

(1) $$y'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{s-x}} + \frac{1}{2\sqrt{s-\bar{x}}}\ .$$

Funkcija $y(x)$ ima maksimum ako je $x = \bar{x}$, tako da se za preslikavanje može uzeti

$$F_C(a,b,c) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right),\ \text{cikl.}$$

Preslikavanja F_A, F_B, F_C su monotono neopadajuća u odnosu na funkcional f i funkcional f najveću vrednost dostiže u zajedničkoj nepokretnoj tački tih preslikavanja

$$f\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) = \sqrt{3s}\ .$$

Takođe, na osnovu (1), uz oznaku $e = \frac{a+b-c}{2}$, važi

$$f(a,b,c) > f(e,s,c) = \sqrt{s-e}+\sqrt{s-c} = \sqrt{c}+\sqrt{e} > \sqrt{c+e} = \sqrt{s}.$$

GAZ. MAT.,1956. [BOT16].

$$\frac{15}{4} \leqslant \frac{s+a}{b+c} + \frac{s+b}{c+a} + \frac{s+c}{a+b} < \frac{9}{2},$$

jednakost važi ako i samo ako je $a = b = c$.

D o k a z. Neka je funkcional

$$f(a,b,c) = \frac{s+a}{b+c} + \frac{s+b}{c+a} + \frac{s+c}{a+b}.$$

Ako je
$$y(x) = f(x,\bar{x},c), \quad x+\bar{x} = a+b, \quad x,\bar{x} > 0,$$
tada je

(1) $$y'(x) = \frac{\bar{x}+c+s+x}{(\bar{x}+c)^2} - \frac{c+x+s+\bar{x}}{(c+x)^2}$$

$$= \frac{2s}{(\bar{x}+c)^2} - \frac{2s}{(c+x)^2}.$$

Funkcija $y(x)$ ima minimum ako je $x = \bar{x}$, čime se sugerišu preslikavanja

$$F_C(a,b,c) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right), \quad \text{cikl.}$$

Preslikavanja F_A, F_B, F_C su monotono neopadajuća u odnosu na funkcional f i funkcional f najveću vrednost dostiže u zajedničkoj nepokretnoj tački tih preslikavanja

$$f\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) = \frac{15}{4}.$$

Iz (1) sledi da $y(x)$ ima najmanju vrednost za svedeni trougao sa stranama c, $\frac{a+b-c}{2} = e$, $\frac{a+b+c}{2} = s$, kada je

$$f(e,s,c) = \frac{s+e}{s+c} + \frac{2s}{c+e} + \frac{s+c}{e+c}$$

$$= 2 + \frac{c+2e}{2c+e} + \frac{2c+e}{c+2e}$$

$$= 4 + \frac{e - c}{2c+e} + \frac{c - e}{c+2e}$$

$$= 4 + \frac{(c-e)^2}{(2c+e)(c+2e)} < \frac{9}{2} .$$

Primetimo da prva nejednakost u tvrdenju važi za sve $a, b, c > 0$.

GLAVA IV

DOKAZI NEKIH TEOREMA

Postupkom nepokretne tačke mogu se dokazivati i teoreme koje ne sadrže nejednakost : minimaks teorema Fishera, Birkhoffova teorema o konveksnom omotaču bistohastičkih matrica, Landauova teorema o turnirima i dr.

4.1. MINIMAKS TEOREMA FISHERA. E. Fisher, 1905., R. Courant, D. Hilbert, 1953. [MAR514]

Neka je A matrica reda n s karakterističnim vrednostima

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n .$$

Tada

$$\max_x \frac{xAx'}{xx'} = \max_{xx'=1} xAx' = \lambda_1,$$

$$\min_y \max_{\substack{x \\ yx'=0}} \frac{xAx'}{xx'} = \lambda_2,$$

$$\min_{\substack{y^i \\ i=1,..,j}} \max_{\substack{x \\ y^i x'=0 \\ i=1,..,j}} \frac{xAx'}{xx'} = \lambda_{j+1}, \quad j=1,\ldots,n-1,$$

$$\min_x \frac{xAx'}{xx'} = \lambda_n .$$

Zamena mesta min i max daje s druge strane λ_{n-j}.

D o k a z. Proizvod xAx' ne zavisi od izbora baze. Neka je $e_1,e_2,\ldots,e_n$ karakteristična baza, tj.

$$e_i e_j = \delta_{ij}, \quad Ae_i' = \lambda_i e_i, \quad i,j=1,\ldots,n.$$

Ako je

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = (x_1,\ldots,x_n),$$

tada

$$Ax' = x_1\lambda_1 e_1 + \ldots + x_n\lambda_n e_n$$

i
$$xAx' = x_1^2\lambda_1 + \dots + x_n^2\lambda_n.$$

Neka je
$$f(x) = \frac{xAx'}{xx'} = \frac{x_1^2\lambda_1 + \dots + x_n^2\lambda_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

i
$$g(y^1,\dots,y^j) = \max_{\substack{x \\ y^i x'=0 \\ i=1,\dots,j}} f(x), \quad j=1,\dots,n-1$$

$j=1$. Kako je
$$f(x) \leqslant \frac{\lambda_1(x_1^2+\dots+x_n^2)}{x_1^2+\dots+x_n^2},$$

to funkcional $f(x)$ dostiže maksimum za $x=e_1=(1,0,\dots,0)$.

$j=2$. Pokažimo da se ekstremna vrednost postiže za $y = e_1$ i $x = e_2$. Najpre pokažimo da je
$$g(y) \geqslant g(y+pe_1), \qquad p>0.$$

Neka je $x=(x_1,\dots,x_n)$ n-torka za koju se dostiže maksimum $g(y+pe_1)$. Nađimo n-torku $\bar{x}$ takvu da je $y\bar{x}'=0$ i
$$g(y) \geqslant f(\bar{x}) \geqslant f(x) = g(y+pe_1).$$

Kako je
$$(y+pe_1)x' = (y_1+p)x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n = 0,$$

ako se uzme $\bar{x} = x + \frac{x_1}{y_1}pe_1$, $y_1 \neq 0$, biće $y\bar{x}' = 0$.

(Ako je $y_1=0$, onda je $g(y)=\lambda_1$.). Tada je odnos

$$(1)\quad f(\bar{x}) = \frac{x_1^2(1+py_1^{-1})^2\lambda_1 + x_2^2\lambda_2 + \dots + x_n^2\lambda_n}{x_1^2(1+py_1^{-1})^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{x_1^2\lambda_1 + \dots + x_n^2\lambda_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2} = f(x)$$

ekvivalentan s

$$x_1^2(1+py_1^{-1})^2\lambda_1(x_1^2+\dots+x_n^2) \geqslant x_1^2(1+py_1^{-1})^2(x_1^2\lambda_1+\dots+x_n^2\lambda_n).$$

Dakle, $g(y) \geqslant g(y+pe_1) \geqslant \lim_{p\to\infty} g(y+pe_1) =$

$$= \lim_{p\to\infty} g(\frac{y}{p} + e_1) = g(e_1) = \lambda_2.$$

Za vektore $y^1,\ldots,y^j$ možemo pretpostaviti, bez ograničenja opštosti, da su oblika

$$y^1 = (y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1)$$
$$y^2 = (0, y_2^2, \ldots, y_n^2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^j = (0,\ldots,0,y_j^j,\ldots,y_n^j).$$

Slično kao u prethodnom slučaju, pokažimo da je

(2) $g(y^1,\ldots,y^j) \geqslant g(y^1+pe_1,y^2,\ldots,y^j) \geqslant g(e_1,y^2,\ldots,y^j)$.

Neka je x vektor takav da je

$$(y^1+pe_1)x' = 0 \quad i \quad y^i x' = 0, \quad i=2,\ldots,j$$

i za koji se dostiže maksimum $g(y^1+pe_1,y^2,\ldots,y^n)$.

Za isti vektor $\bar{x} = x + x_1 y_1^{-1} pe_1$ je $y^i \bar{x}' = 0$, $(i=1,\ldots,j)$ i prva nejednakost (2) je ekvivalentna (1). Niz (2) se može nastaviti

$$g(y^1,\ldots,y^j) \geqslant \ldots\ldots \geqslant g(e_1,\ldots,e_j) = \lambda_{j+1},$$

ekstrem se postiže za $x=e_{j+1}$.

4.2. BISTOHASTIČKE MATRICE. Jednakost skupova (1) nije dokazana metodom nepokretne tačke, nego sekvencijalnom " dekompozicijom " matrice. Time je variran opšti pristup da se relacija $A \subset B$ dokazuje iz niza $A = A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset B$. Dobijen je dokaz L. Dulmagea i I. Halperina iz 1955. [MAR46], ali na način da je jasno zašto se uzima vrednost (3).

Dva puta stohastičke matrice su kvadratne matrice čiji su elementi nenegativni brojevi i čiji zbir u svakoj vrsti i svakoj koloni iznosi 1. Matrica permutacije je matrica koja u svakoj vrsti i svakoj koloni ima tačno jednu jedinicu, a svi ostali elementi su jednaki nuli.

TEOREMA. G. Birkhoff 1946. Skup dva puta stohastičkih matrica jednak je konveksnom omotaču skupa matrica permutacija

(1) $$\text{BSHM} = \text{conv}\{\pi_1, \dots, \pi_{n!}\}.$$

D o k a z. $\supset$: Matrice permutacija su dva puta stohastičke matrice, a skup BSHM je konveksan, tako da sadrži konveksan omotač conv $\{\pi_1, \dots, \pi_{n!}\}$ - najmanji konveksan skup koji sadrži $\pi_1, \dots, \pi_{n!}$.

$\subset$: Nađimo razlaganje dva puta stohastičke matrice P

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = \alpha_1 \pi_1 + \dots + \alpha_{n!} \pi_{n!},$$

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,n.$$

Neka je π proizvoljna matrica permutacija. Pokažimo da postoji $\alpha \in [0,1]$ i dva puta stohastička matrica P' takvi da je

(2) $$P = \alpha\pi + \bar{\alpha} P', \quad \bar{\alpha} = 1 - \alpha.$$

Iz (2) sledi

$$P' = \frac{1}{\bar{\alpha}} (P - \alpha\pi), \quad \bar{\alpha} \neq 0.$$

Zbir elemenata proizvoljne vrste matrice P' je

$$\frac{p_{i1}}{\bar{\alpha}} + \dots + \frac{p_{ij} - \alpha}{\bar{\alpha}} + \dots + \frac{p_{in}}{\bar{\alpha}} = 1,$$

jer se u svakoj vrsti matrice π nalazi tačno jedna jedinica. Isto važi i za kolone. Sem toga, matrica P' mora imati nenegativne elemente, tako da se zahteva da je $p_{ij} - \alpha \geq 0$, za sve parove (i,j) za koje matrica π ima $\pi(i,j)$-ti element jednak jedinici. Najbolje je uzeti

(3) $\alpha = \min \{p_{ij} \mid p_{ij}>0, \pi(i,j)=1, i,j=1,\dots,n\}$.

Matrica P′ ima više nula elmenata nego matrica P, tako da se " dekompozicija " završava posle konačno koraka.

4.3. TEOREMA LANDAUA O TURNIRIMA. Tvrđenje H.G. Landaua, 1953. [MAR197] iz kombinatorne analize utvrđuje potrebne i dovoljne uslove za strukturu rezultata takmičenja. Turnir je konačan graf $G = (X,U)$ bez petlji (x,x), takav da je svaki par različitih čvorova $x,y \in X$ povezan samo jednom granom iz U - ili (x,y) ili (y,x). Broj poena t_i čvora $x_i \in X$ jednak je broju grana u G koje polaze iz x_i. Vektor rezultata turnira G je vektor $(t_1,t_2,\dots,t_n)$ za koji je $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$.

TEOREMA. Neka su $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ celi nenegativni brojevi. Da bi vektor $(t_1,t_2,\dots,t_n)$ bio vektor rezultata nekog turnira, potreban i dovoljan uslov je

$$(t_1,t_2,\dots,t_n) \prec (n-1,n-2,\dots,1,0).$$

D o k a z. Neophodnost. Neka je $(t_1,\dots,t_n)$ vektor rezultata turnira (predstavljenog grafom) $G = (X,U)$. Neka je $\mathfrak{X}$ skup svih turnira s istim skupom čvorova X i f funkcional na $\mathfrak{X}$

$$f(G) = (t_1,t_2,\dots,t_n).$$

Čvor koji odgovara broju poena t_r $(r=1,\dots,n)$ označimo s x_{i_r}. Neka je $t_1=n-1, \dots, t_{j-1}=n-j+1$, $t_j \neq n-j$ i time $t_j < n-j$. Tada, postoji indeks

$$k = \min \{r \mid (x_{i_r},x_{i_j}) \in G,\ r>j\}.$$

Neka je $F(G) = G'$ novi turnir koji se od grafa G razlikuje jedino u tome što umesto grane (x_{i_k},x_{i_j}) sadrži granu (x_{i_j},x_{i_k}). Ako je $t_r=n-r$ $(r=1,\dots,n)$, onda je $F(G)=G$.

Za novi turnir je

$$f(G') = (n-1,\dots,n-j+1,t_j+1,t_{j+1},\dots,t_{k-1}, ,t_{k+1},\dots,t_l,t_k-1,t_{l+1},\dots,t_n),$$

gde je $t_k = \dots = t_l > t_{l+1}$, za $l=n$ vektor se završava s t_k-1. Preslikavanje F je monotono u odnosu na funkcional f

$$f(G) < f(F(G)).$$

Nepokretne tačke preslikavanja F su maksimalni elementi i postoji lanac

$$(t_1,\dots,t_n) = f(G) < f(F(G)) < \dots < f(F^m(G)) = (n-1,\dots,1,0),$$

za neko $m=0,1,\dots$.

Dovoljnost. Neka je dat vektor $(t_1,\dots,t_n) <$ $(n-1,\dots,0)$ i neka je $t_1=n-1,\dots,t_{j-1}=n-j+1$ i $t_j < n-j$. Ako je $t_j = n-j-d$, onda je $t_r \leq n-j-d$, $r \geq j$, pa je

$$(1) \qquad \sum_{r=j}^{j+d} (n-r-t_r) \geq \sum_{r=j}^{j+d} (n-r-n+j+d) = \sum_{r=1}^{d} r .$$

Neka je $i_m > j$ takav indeks da je

$$(2) \qquad \sum_{r=1}^{k} t_r < \sum_{r=1}^{k} n-r \quad (j \leq r \leq i_{m-1}), \quad \sum_{r=1}^{i_m} t_r = \sum_{r=1}^{i_m} n-r$$

i $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ indeksi za koje je $t_{i_r} > n - i_r$ ($r = 1,\dots,m$). Metodom matematičke indukcije pokažimo da za njih važi

$$(3) \qquad t_{i_r} - n + i_r \leq r .$$

Za $r=1$ je $t_{i_1} \leq t_{i_1-1} \leq n-i_1+1$, pa je $t_{i_1} = n-i_1+1$.

Neka je (3) tačno za proizvoljno r. Ako je $i_{r+1} = i_r +1$, tada je

$$t_{i_{r+1}}-n+i_{r+1} \leq t_{i_r}-n+i_r+1 \leq r+1.$$

U slučaju da je $i_{r+1} > i_r+1$, to je $t_{i_{r+1}}-n+i_{r+1} = 1$.

Iz (1), (2) i (3) proizlazi da je $m \geq d$.

Podniz $j_1,\dots,j_d$ niza $i_1,\dots,i_m$ odredimo tako da za

$$F(t_1,\dots,t_n) = (t_1,\dots,t_{j-1},t_j+d,\dots,t_{j_r}-1,\dots,t_n)$$

za sve $r=d,\dots,1$, pored očiglednog uslova monotonosti

$$(t_1,\dots,t_n) < F(t_1,\dots,t_n)$$

bude zadovoljeno i

$$F(t_1,\dots,t_n) \prec (n-1,\dots,0).$$

Neka je $j_1=i_m$. Kako je $t_{i_m} > t_{i_m+1}$, za $i_m<n$, to je vektor $(t_1,\dots,t_j+1,\dots,t_{i_m}-1,\dots,t_n)$ uređen po veličini i, na osnovu (2), manji od $(n-1,\dots,0)$. Ostale članove definišimo induktivno. Neka je $j_k=i_l$. Ako je

$$(4) \qquad \sum_{r=1}^{s} (t_r+k) < \sum_{r=1}^{s} (n-r), \qquad s=1,\dots,j_k-1$$

onda je $j_{k+1} = i_{l-1}$. Ako se u (4) negde pojavi jednakost, onda je $j_{k+1} = i_h$, gde je i_h najmanji indeks za koji važi takva jednakost. Transformisani vektor

$$(t_1,\dots,t_j+k+1,\dots,t_{j_r}-1,\dots,t_n), \qquad r=k+1,\dots,1$$

je uređen po veličini.

Dakle, postoji niz interpoliranih vektora

$$(t_1,\dots,t_n) < F(t_1,\dots,t_n) \prec \dots \prec F^{n-1}(t_1,\dots,t_n) = (n-1,\dots,0).$$

Sem toga, postoji maksimalno stratifikovani turnir G s vektorom rezultata $(n-1,\dots,0)$. Turnir G′ s vektorom rezultata $F^{n-2}(t_1,\dots,t_n)$ se dobija od grafa G tako što grane (x_j,x_{j_r}) $(r=1,\dots,d)$ promene smer, itd. Nizom transformacija grafa G obrnutim od niza transformacija vektora $(t_1,\dots,t_n)$ dobija se traženi turnir.

4.4. TEOREMA " REZONANCE ". E. Landau 1907. [BEC116]

Potreban i dovoljan uslov da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p, \quad p>1$$

konvergira jeste da redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

konvergiraju za sve nizove (b_n) za koje

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q$$

konvergira, $q = p/(p-1)$.

D o k a z. Neophodnost. Sledi na osnovu Hölderove nejednakosti

$$\sum_{n=1}^{m} a_n b_n \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{m} a_n^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{n=1}^{m} b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}} .$$

Dovoljnost. Pretpostavimo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p = \infty .$$

Pokažimo da postoji niz (b_n) takav da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = c < \infty \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \infty .$$

Neka je

$$X = \Big\{(x_n) \,\Big|\, x_n > 0,\ n \in N,\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^q = c\Big\}$$

i

$$f((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n .$$

Neka je $n_1, \dots, n_k, \dots$ podniz skupa prirodnih brojeva takvih da je

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^p \geqslant 2^{(k+1)p} \qquad (n_0=0).$$

Preslikavanje

$$F_k((x_n)) = (x_1,\dots,x_{n_k}, b_{n_k+1},\dots,b_{n_{k+1}}, x_{n_{k+1}+1},\dots)$$

($k= 1,2,\dots$) određujemo tako da je segment

$b^q_{n_k+1}, \dots, b^q_{n_{k+1}}$ proporcionalan segmentu $a^p_{n_k+1},\dots,a^p_{n_{k+1}}$

i da je

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} b_n^q = \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} x_n^q$$

što se postiže s

$$(1) \qquad b_n^q = a_n^p \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} x_n^q \Big/ \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^p$$

Preslikavanje F_k je monotono rastuće u odnosu na funkcional f

$$f((x_n)) \leqslant f(F_k((x_n))).$$

Zajedničke nepokretne tačke preslikavanja F_k $(k\in N)$ su nizovi (b_n) za koje važi (1) tj. koji su po segmentima proporcionalni nizu (a_n). Za niz (b_n) važi Hölderova jednakost

$$f((b_n)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} b_n^q \right]^{\frac{1}{q}} .$$

Ako uzmemo da je $\displaystyle\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} b_n^q = 2^{-k-1}c$ $(k\in N)$, tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \dots + \tfrac{1}{2^n} + \dots)c = c,$$

pa je $(b_n)\in X$ i

$$f((b_n)) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1}(2^{-k-1}c)^{\frac{1}{q}} \geqslant c^{\frac{1}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty .$$

4.5. NEWTON, HERON, STEINER-LEMUS.

4.5.1. I. Newton, 1665.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad n=1,2,\dots .$$

D o k a z. Neka je

$$f(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Ako je $\bar{x} = a+b-x$ i $y = f(x,\bar{x})$, tada

$$y' = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}(n-k)x^{n-k-1}\bar{x}^k - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{n-k}\bar{x}^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}(k+1)x^{n-k-1}\bar{x}^k - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} k x^{n-k-1}\bar{x}^k = 0,$$

tako da je $f(a,b) = f(a+b,0) = (a+b)^n$.

4.5.2. HERONOV OBRAZAC.

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} ,$$

a,b,c - strane, s - poluobim, P - površina trougla.

D o k a z. Transformišimo funkcional f pod korenom

$$\begin{aligned} 16f &= (a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c) \\ &= ((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2) \\ &= (2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2) \\ &= 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2. \end{aligned}$$

Neka je A_1 podnožje visine h iz temena A, $x = CA_1$ rastojanje koje je negativno ako je $C \in A_1B$ i $\bar{x} = a-x$. Tada je

$b^2 = x^2+h^2$ i $c^2 = \bar{x}^2+h^2$ i

$$16f'(x) = 8a^2bb' - 2(a^2+b^2-c^2)(2bb'-2cc')$$

$$= 8a^2x - 4(a^2+x^2-\bar{x}^2)(x+\bar{x})$$

$$= 4a(2ax-a^2-x^2-(a-x)^2) = 0,$$

tako da f ne zavisi od x. Ako je $\Delta = \Delta ABC$ i preslikavanje $F(\Delta) = \Delta_1 = A_2BC$ u skup pravouglih trouglova za koje je $A_2C = h$ kateta, tada je

$$f(x) = f(0) = \frac{1}{4}a^2h^2 = P^2(\Delta_1) = P^2(\Delta).$$

4.5.3. STEINER, LEMUS, 1840. [COX23]. Ovo je jedno od najpoznatijih i najviše dokazivanih tvrđenja. Svi poznati dokazi su indirektni. Navedeni je takav u onoj meri koliko je indirektno zaključivanje :

$$A = B \quad i \quad A \leqslant C \leqslant B, \quad \text{tada} \quad A = C$$

TEOREMA. Svaki trougao koji ima jednake dužine simetrala dva ugla je jednakokraki.

D o k a z. Neka je $s_a = AA_1$, $p = CA_1$ i $q = BA_1$, tada

$$p^2 = b^2+s_a^2-2bs_a\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$q^2 = c^2+s_a^2-2cs_a\cos\frac{\alpha}{2}$$

(1) $$p^2 - q^2 = (b-c)(b+c-2s_a\cos\frac{\alpha}{2}),$$

(2) $$a^2 = (p+q)^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha = b^2+c^2+2bc-4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= (b+c)(b+c-\frac{4bc\cos^2\alpha/2}{b+c})$$

Kako je $\frac{p}{q} = \frac{b}{a}$, to je $\frac{p-q}{p+q} = \frac{b-c}{b+c}$, tako da iz (1) i (2) sledi

$$s_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2} = H(b,c)\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Neka je $\alpha \leqslant \beta$, tada

(3) $$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \leqslant \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+c}.$$

Ako je $s_a = s_b$, tada

$$\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2},$$

odakle

$$\frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{ac\sin\beta}{(a+c)\sin\frac{\beta}{2}},$$

gde su brojioci jednaki dvostrukoj površini trougla, tako da je

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{a+c}{b+c}. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) sledi $\alpha = \beta$.

GLAVA V

ELEMENTARNE ANALITIČKE NEJEDNAKOSTI

U poslednjem odeljku su dokazane različite elementarne analitičke nejednakosti. Tu se često ideja postupka zajedničke nepokretne tačke preslikavanja pojavljuje u jasnijem obliku nego prilikom dokazivanja složenijih nejednakosti. U tački 5.1. je data nova nejednakost.

5.1. TEOREMA A., AMM1935, [MIv61]

$$x^2+y^2+z^2 - (yz+zx+xy) + u^2+v^2+w^2 - (vw+wu+uv)$$

$$\geqslant \sqrt{3} \begin{vmatrix} u & x & 1 \\ v & y & 1 \\ w & z & 1 \end{vmatrix} . \tag{1}$$

D o k a z. Neka je funkcional $f(x,y,z,u,v,w)$ razlika leve i desne strane nejednakosti (1) i preslikavanje

$$F_a(x,y,z,u,v,w) = (x-a,y-a,z-a,u,v,w).$$

Tada je

$$f(F_a(x,y,z,u,v,w)) = (x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2-(y-a)(z-a)-$$

$$-(z-a)(x-a)-(x-a)(y-a) +u^2+v^2+w^2- (vw+wu+uv)-$$

$$- \sqrt{3} \begin{vmatrix} u & x-a & 1 \\ v & y-a & 1 \\ w & z-a & 1 \end{vmatrix} = f(x,y,z,u,v,w).$$

Time je

$$f(x,y,z,u,v,w) = f(x-z,y-z,0,u-w,v-w,0).$$

Radi jednostavnosti, umesto $x-z$, $y-z$, $u-w$, $v-w$ dalje se može pisati x, y, u, w respektivno. Funkcija

$$f(x,y,0,u,v,0) = x^2+y^2-xy + u^2+v^2-uv - \sqrt{3}\,(uy-vx)$$

po argumentu x je kvadratna sa minimumom u

$$x_0 = \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} v$$

$$f(x,y,0,u,v,0) \geqslant f(x_0,y,0,u,v,0) =$$

$$= \frac{3}{4}y^2+u^2+\frac{3}{4}v^2-uv-\sqrt{3}uy+\frac{\sqrt{3}}{2}vy .$$

Nova funkcija po argumentu y ima najmanju vrednost za

$y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}u - \frac{v}{\sqrt{3}}$,

$$f(x_0,y,0,u,v,0) \geqslant f(x_0,y_0,0,u,v,0) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}u^2-\frac{4}{3}uv+\frac{v^2}{3}\right)+u^2+\frac{3}{4}v^2-uv-2u^2+uv+uv-\frac{v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \geqslant 0.$$

Najmanja vrednost se postiže za $v=0$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}}u$, $x=\frac{u}{\sqrt{3}}$, tj.

$(x,y,z) = (a+z,2a+z,z)$, $(u,v,w) = (\sqrt{3}a+w,w,w)$, $a\in R$.

Nejednakost (1) se može uopštiti.

TEOREMA B. Ako su $x_1,\ldots,x_n$ i $y_1,\ldots,y_n$, $n\geqslant 3$ monotoni nizovi realnih brojeva

$x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ ili obrnuto i

$y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_n$ ili obrnuto,

tada je

$$\begin{aligned} & x_1^2+\ldots+x_n^2 - (x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1) + \\ (2) \quad & + y_1^2+\ldots+y_n^2 - (y_1y_2+\ldots+y_{n-1}y_n+y_ny_1) \\ & \geqslant \sqrt{3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} . \end{aligned}$$

Jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = \ldots = x_n$ i $y_1 = \ldots = y_n$.

POSLEDICA 1.

$$\begin{aligned} & x_1^2+\ldots+x_n^2 - (x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1) + \\ & + y_1^2+\ldots+y_n^2 - (y_1y_2+\ldots+y_{n-1}y_n+y_ny_1) \geqslant \end{aligned}$$

$$\text{(3)} \quad \geq \sqrt{3}\max\left\{\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix} x_1 & y_n & 1 \\ x_2 & y_{n-1} & 1 \\ x_3 & y_{n-2} & 1 \end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix} y_1 & x_n & 1 \\ y_2 & x_{n-1} & 1 \\ y_3 & x_{n-2} & 1 \end{matrix}\right\|\right\}.$$

POSLEDICA 2.

$$x_1^2+\ldots+x_n^2 - (x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1) \geq$$

$$\text{(4)} \qquad \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & x_n & 1 \\ x_2 & x_{n-1} & 1 \\ x_3 & x_{n-2} & 1 \end{matrix}\right\|.$$

NAPOMENA 1. Na osnovu teoreme Cauchy-Schwartza i takođe Hardy-Littlewood-Pólyae, za svaki niz važi

$$a_1^2+\ldots+a_n^2 \geq a_1a_2+\ldots+a_{n-1}a_n+a_na_1,$$

jednakost važi jedino ako je niz $a_1,\ldots,a_n$ proporcionalan nizu $a_2,\ldots,a_n,a_1$ tj. $a_1=\ldots=a_n$. Nejednakost (4) je pojačanje Cauchy-Schwartzove nejednakosti za monotoni niz i za jedno mesto ciklično pomereni isti niz. Ocena $\sqrt{3}$ je dobijena za proizvoljne trojke brojeva, tako da se za monotone nizove možda može poboljšati.

NAPOMENA 2.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_4 & y_4 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ x_n & y_n & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

U dokazu teoreme B. koristićemo sledeću lemu.

LEMA. Ako je

(5) $$g_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1},\quad x_{n+1}=x_1$$

tada je
$$g_n(x_1+a,\dots,x_n+a)=g_n(x_1,\dots,x_n),\quad a\in R.$$

D o k a z. Primenićemo metod matematičke indukcije, za $n=1$ je
$$(x_1+a)^2-(x_1+a)(x_1+a)=x_1^2-x_1x_1.$$

Ako pretpostavimo da je (5) tačno za proizvoljno $n\in N$, tada je
$$\begin{aligned}g_{n+1}(x_1+a,\dots,x_{n+1}+a)&=(x_1+a)^2+\dots+(x_n+a)^2+(x_{n+1}+a)^2-\\&-(x_1+a)(x_2+a)-\dots-(x_{n-1}+a)(x_n+a)-(x_n+a)(x_{n+1}+a)-\\&-(x_{n+1}+a)(x_1+a)=g_n(x_1,\dots,x_n)+(x_{n+1}+a)^2+\\&+(x_n+a)(x_1+a)-(x_n+a)(x_{n+1}+a)-(x_{n+1}+a)(x_1+a)=\\&=g_n(x_1,\dots,x_n)+(x_{n+1}+a)(x_{n+1}-x_n)+(x_1+a)(x_n-x_{n+1})\\&=g_n(x_1,\dots,x_n)+(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_1)\\&=g_n(x_1,\dots,x_n)+x_nx_1+x_{n+1}^2-x_nx_{n+1}-x_{n+1}x_1\\&=g_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}),\end{aligned}$$
što završava dokaz.

D o k a z teoreme B. Neka je
$$f_n(x,y)=g_n(x)+g_n(y)-\sqrt{3}\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}$$
i
$$F_n(x)=(x_1-x_n,\dots,x_{n-1}-x_n,0).$$
Tada je
$$\begin{aligned}f_n(x,y)&=f_n(F_n(x),F_n(y))\\&=f_{n-1}((x_1-x_n,\dots,x_{n-1}-x_n),(y_1-y_n,\dots,y_{n-1}-y_n))\\&+(x_{n-1}-x_n)(x_1-x_n)+(y_{n-1}-y_n)(y_1-y_n)\geqslant\end{aligned}\tag{6}$$

$$\geqslant f_{n-1}((x_1-x_n,\ldots,x_{n-1}-x_n),(y_1-y_n,\ldots,y_{n-1}-y_n))$$

$$\geqslant f_{n-2}((x_1-x_{n-1},\ldots,x_{n-2}-x_{n-1}),(y_1-y_{n-1},\ldots,y_{n-2}-y_{n-1}))$$

$$\geqslant\ldots\geqslant f_3((x_1-x_4,x_2-x_4,x_3-x_4),(y_1-y_4,y_2-y_4,y_3-y_4))$$

$$= f_3((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))\geqslant 0.$$

Dokaz se završava primenom teoreme A.

Jednakost u (2), prema (6), važi ako i samo ako je

$$x_n=x_{n-1}=\ldots=x_3,\quad y_n=y_{n-1}=\ldots=y_3$$

i ako jednakost važi na kraju (6) tj. (1), što zbog monotonosti povlači $x_1=x_2=x_3$ i $y_1=y_2=y_3$.

5.2. A.Ostrowski [MIv40]

$$\frac{a+b}{2}\,\frac{a^2+b^2}{2}\,\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2}\qquad (a,b>0).$$

D o k a z. Neka je f(a,b) funkcional određen izrazom s leve strane nejednakosti i $a'=b'=(\frac{a^6+b^6}{2})^{1/6}=S_6(a,b)$. Tada je

$$f(a,b)\leqslant f(a',b')=\frac{a^6+b^6}{2},$$

jer je $\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a'^3+b'^3}{2}=a'^3$ ili $S_3(a,b)\leqslant S_6(a,b)$ i sl.

5.3. V.A.Krečmar [MIv40]

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leqslant\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}},\quad (a,b,c,d>0).$$

D o k a z. Neka je $f(a,b,c,d)$ funkcional određen izrazom s desne strane nejednakosti. Ako je $0\leqslant x\leqslant a+c$, $x+x'=a+c$ i

$$y=\frac{bx}{x+b}+\frac{dx'}{x'+d},$$

tada

$$y'=\frac{b(x+b)-bx}{(x+b)^2}-\frac{d(x'+d)+dx'}{(x'+d)^2}=\frac{b^2(x'+d)^2-d^2(x+b)^2}{(x+b)^2(x'+d)^2}.$$

Funkcija y ima maksimum kada je $b(x'+d) = d(x+b)$ ili $x : x' = b : d$. Dakle, ako je $k = \frac{a+c}{b+d}$ imamo

$$f(a,b,c,d) \leqslant f(kb,b,kd,d) = \frac{kb+kd}{1+k} = \frac{1}{\frac{1}{k(b+d)} + \frac{1}{b+d}} .$$

5.4. G.H.HARDY [MIv41]

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geqslant 8, \quad a,b,c>0,\ a+b+c=1.$$

D o k a z. Pošto je

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right) \geqslant \left(\frac{1}{\frac{a+b}{2}}-1\right)^2,$$

jer

$$\frac{1}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{(a+b)^2} - \frac{4}{a+b}, \quad \frac{1-a-b}{ab} \geqslant 4\,\frac{1-a-b}{(a+b)^2} \quad \text{ili } (a-b)^2 \geqslant 0,$$

to je

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) = f(a,b,c) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right) \geqslant$$

$$\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+2c+a}{4}, \frac{b+2c+a}{4}\right) \geqslant \ldots \geqslant f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 8.$$

5.5. V.A.Krečmar [MIv41]

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2} \qquad (a,b,c>0).$$

D o k a z. Neka je $f(a,b,c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$, $0 \leqslant x \leqslant a+b$, $x+\bar{x} = a+b$ i

$$y = \frac{x}{\bar{x}+c} + \frac{\bar{x}}{c+x} + \frac{c}{x+\bar{x}} .$$

Tada je

$$y' = \frac{\bar{x}+c+x}{(\bar{x}+c)^2} - \frac{x+c+\bar{x}}{(x+c)^2} = \frac{a+b+c}{(\bar{x}+c)^2} - \frac{a+b+c}{(x+c)^2},$$

pa y ima najmanju vrednost kada je $x = \bar{x}$ i

$$f(a,b,c) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right) \geqslant \ldots \geqslant f\left(\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{3}{2} .$$

5.6. V.A.Krečmar [MIv41]

$$\frac{s}{s-a_1} + \frac{s}{s-a_2} + \dots + \frac{s}{s-a_n} \geqslant \frac{n^2}{n-1},$$

gde je $a_1+\dots+a_n = s$, $a_k>0$, $k=1,\dots,n$.

D o k a z. Neka je

$$f(a_1,\dots,a_n) = \frac{s}{s-a_1} + \dots + \frac{s}{s-a_n},$$

$0 \leqslant x \leqslant a_1+a_2$, $x+\bar{x} = a_1+a_2$ i $y = \frac{s}{s-x} + \frac{s}{s-\bar{x}}$. Tada je

$y' = \frac{s}{(s-x)^2} - \frac{s}{(s-\bar{x})^2}$, tako da y ima najmanju vrednost kada je $x = \bar{x}$. Neka je

$$F_{ij}(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n) = (a_1,\dots,\frac{a_i+a_j}{2},\dots,\frac{a_i+a_j}{2},\dots,a_n).$$

Tada je

$$f(a_1,\dots,a_n) \geqslant f(F_{ij}(a_1,\dots,a_n)),$$

pa funkcional f najmanju vrednost dostiže u zajedničkoj nepokretnoj tački $(\frac{s}{n},\dots,\frac{s}{n})$ svih preslikavanja F_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$, a to je upravo data vrednost.

5.7. C.V.Durell, A.Robson [MIv57]

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})\sqrt{d} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab} \leqslant \frac{3}{2}(a+b+c+d),$$
$$a,b,c,d>0.$$

D o k a z. Neka je $f(a,b,c)$ funkcional određen izrazom s leve strane nejednakosti. Tada je zahtev

$$f(a,b,c) \leqslant f(F_{12}(a,b,c)) = f(\bar{a},\bar{a},c), \quad 2\bar{a} = a+b$$

ekvivalentan s

(1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{d} + \sqrt{c}(\sqrt{b}+\sqrt{a})+\sqrt{ab} \leqslant 2\sqrt{\bar{a}}\sqrt{d} + \sqrt{c}2\sqrt{\bar{a}} + \bar{a}$

Relacija $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{\bar{a}}$ se svodi na $\sqrt{ab} \leqslant \bar{a}$, što dokazuje (1).

Otuda je $f(a,b,c) \leqslant f(\bar{a},\bar{a},c) \leqslant \dots \leqslant f(s,s,s)$, $3s=a+b+c$.

Ostaje da se proveri $3\sqrt{s}\sqrt{d} + 3s \leqslant \frac{3}{2}(3s+d)$, što ponovo daje odnos aritmetičke i geometrijske sredine $2\sqrt{sd} \leqslant s+d$.

5.7. AMM1961 [MIv42] $\left(\frac{xy}{z^2}\right)^n \leqslant \frac{1}{4}$,

gde je $x^n + y^n = z^n$, n realan broj i $x,y,z>0$.

D o k a z. Ako je $x^n+y^n = c$, c je konstanta, to je

$$nx^{n-1}x' + ny^{n-1}y' = 0 \quad \text{i} \quad y' = -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}.$$

Funkcija $f(x) = x^n y^n$ ima izvod

$$f'(x) = nx^{n-1}y^{n-1}\left(y - x\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}\right) = nx^{n-1}(y^n-x^n),$$

pa postiže maksimum za $x=y$.

5.8. L. Crosland [MIv40]

$$6abc \leqslant bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b).$$

D o k a z. Neka je $f(a,b,c)$ razlika desne i leve strane nejednakosti, zbir $b+c$ konstantan i time $b'=1$ i $c'=-1$. Tada je

$$f_b'(a,b,c) = (c-b)(b+c)-ca-a(c+a)+a(a+b)+ab-6ac+6ab$$
$$= (b-c)(8a-b-c).$$

Ako je $a \geqslant b \geqslant c$ i $2d = b+c$, to je

$$f(a,b,c) \geqslant f(a,d,d) = 2d(a-b)^2 \geqslant 0.$$

5.9. L. Crosland [MIv40]

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2) \geqslant 9a^2b^2c^2.$$

D o k a z. Nejednakost je ekvivalentna sa

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right) \geqslant 9,$$

što je sadržano u nejednakosti

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9.$$

Ako je zbir $x+y$ konstantan, tada je zbir recipročnih vrednosti $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ najmanji za jednake brojeve, i dokaz sledi uobičajeni postupak.

5.10. AMM1964 [MIv40]

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 4p,$$

a,b,c su strane trougla, 2p perimetar trougla.

D o k a z. Neka je $f(a,b,c)$ funkcional određen levom stranom dokazivane nejednakosti. Postoji trougao sa stranama $\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}$, c, njegov obim je takođe 2p. Relacija

$$f(a,b,c) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)$$

je ekvivalentna s

$$g(a,b) = a^3+b^3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}- 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3- 2\,\frac{2}{a+b} \geqslant 0.$$

Neka je $b \leqslant a$, tada je

$$g_b'(a,b) = 3\left(b^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) + \frac{4}{(a+b)^2}-\frac{1}{b^2} \leqslant 0$$

i time $g(a,b) \geqslant g(a,a) = 0$. Trougao sa stranama a,a,c postoji. Dakle,

$$f(a,b,c) \geqslant \ldots \geqslant f\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right).$$

Ako je $e=\frac{2p}{3}$, onda se odnos $f(e,e,e) = 3(e^3+\frac{1}{e}) \geqslant 12e$ svodi na $\left(e - \frac{1}{e} \right)^2 \geqslant 0$.

5.11. AMM1964 [MIv54]

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} p_k \log q_k ,$$

gde je $p_k>0$, $q_k>0$, $k=1,\ldots,n$, $p_1+\ldots+p_n = q_1+\ldots+q_n$.

D o k a z. Neka je $p = (p_1,\ldots,p_n)$, $q = (q_1,\ldots,q_n)$

i
$$f(q) = \sum_{k=1}^{n} p_k \log q_k .$$

Ako je
$$y = p_i \log x + p_j \log \bar{x} , \quad x+\bar{x} = q_i+q_j,$$

tada
$$y' = p_i\frac{1}{x} - p_j\frac{1}{\bar{x}} ,$$

tako da y ima minimum kada je $x : \bar{x} = p_i : p_j$. Dakle, ako je

$$\bar{q} = (q_1,\dots,\bar{q}_i,\dots,\bar{q}_j,\dots,q_n), \quad \bar{q}_s = \frac{q_i+q_j}{p_i+p_j}p_s, s=i,j$$

onda $f(q) \leqslant f(\bar{q})$. Tako dobijena preslikavanja $F_{ij}(q)=\bar{q}$ $(i<j)$ su saglasna s funkcionalom f. Njihova zajednička nepokretna tačka je niz proporcionalan p, a time i jednak p. Funkcional f na domenu

$$X = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1>0,\dots,x_n>0,\ x_1+\dots+x_n=q_1+\dots+q_n\}$$

je ograničen s gornje strane i nije ograničen s donje strane, tako da najveću vrednost dostiže u p. Niz sukcesivnih aproksimacija u kome se primenjuju sva preslikavanja F_{ij} beskonačno puta

$$f(q) \leqslant f(F_{12}(q)) \leqslant \dots \leqslant f(p)$$

konvergira maksimumu.

5.12. C.V.Durell, A.Robson [MIv58]

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geqslant 4, \qquad a,b,c,d>0.$$

Ova nejednakost je sadržana u sledećoj [VRE28].

Neka je $g : R \to R$ pozitivna, neprekidna, periodična funkcija periode 1. Tada važi nejednakost

$$(1) \qquad \int_0^1 \frac{g(x)}{g(x+a)}\,dx \geqslant 1.$$

D o k a z. Dovoljno je dokazati diskretni analogon. Pretpostavimo da je $a=\frac{p}{q}$ racionalan broj, q sadržano u n, $x_0=0, x_1=\frac{1}{n},\dots,x_n=1$ ekvidistantna podela intervala (0,1) i $g_i=g(x_i)$, $i=1,\dots,n$. Integral u (1) se može proizvoljno blizu aproksimirati sumom, tako da je dovoljno dokazati

$$(2) \qquad f(g_1,\dots,g_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{g_{i+p}} \geqslant n\ .$$

Ako je

$$y = f(g_1,\dots,g_{i-1},x,\dots,g_n),$$

tada je $y' = \frac{1}{g_{i+p}} - \frac{g_{i-p}}{x^2}$, tako da y ima najmanju vrednost za $x = \sqrt{g_{i-p}g_{i+p}}$. Zajedničke nepokretne tačke preslikavanja

$$F_i(g_1,\dots,g_i,\dots,g_n) = (g_1,\dots,\sqrt{g_{i-p}g_{i+p}},\dots,g_n),$$

$i=1,\dots,n$, zbog cikličnosti, su jedino nizovi jednakih brojeva. Funkcional f na domenu

$$[m, M]^n,\ m = \{\min g_1,\dots,g_n\},\ M = \max\{g_1,\dots,g_n\}$$

dostiže minimum i to može biti jedino u zajedničkim nepokretnim tačkama. Jednakost u (2) važi ako i samo ako je $g_1 = \dots = g_n$. Nejednakost (1) za iracionalne brojeve sledi iz neprekidnosti funkcije g i dokazanog.

Za direktan dokaz (1) može se uzeti

$$F(g(x)) = \sqrt{g(x-a)g(x+a)},$$

kada je

$$f(g) = \int_0^1 \frac{g(x)}{g(x+a)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{g(x-a)}{g(x)} + \frac{g(x+a)}{g(x+2a)}\right)dx$$

$$\geqslant \int_0^1 \sqrt{\frac{g(x-a)}{g(x)}\,\frac{g(x+a)}{g(x+2a)}}\,dx = f(F(g)).$$

5.13. G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Pólya [HAR79]

Ako je $a_k > 0$ ili $-1 < a_k < 0$, tada je

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

D o k a z. Neka je $f(a) = (1+a_1)\dots(1+a_n)$

i

$$F_i(a) = (a_1+a_i, a_2,\dots,a_{i-1},0,\dots,a_n).$$

Tada je $(1+a_1)(1+a_i) > (1+a_1+a_i)(1+0)$ i time $f(a) > f(F_i(a))$.

Ako je $a_1+\dots+a_n \leqslant -1$ nejednakost je očigledna, inače je

$$f(a) \geqslant f(F_2(a)) \geqslant \dots \geqslant f(F_n(\dots(F_2(a)\dots)) =$$

$$= f(a_1+\dots+a_n, 0,\dots,0)$$

$$= 1 + a_1 + \dots + a_n.$$

5.14. [HAR80] Ako je $a_k > 0$ i $\prod_{k=1}^{n} a_k = b^n$,

tada je $$\prod_{k=1}^{n} (1+a_k) \geqslant (1+b)^n.$$

D o k a z. Ako je $f(a) = (1+a_1) \dots (1+a_n)$

i $$F_{ij}(a) = (a_1,\dots,a_{i-1},\sqrt{a_i a_j},\dots,a_{j-1},\sqrt{a_i a_j},\dots,a_n),$$

tada se zahtev $f(a) \geqslant f(F_{ij}(a))$ tj.

$(1+a_i)(1+a_j) \geqslant (1+\sqrt{a_i a_j})^2$ svodi na $a_i+a_j \geqslant 2\sqrt{a_i a_j}$.

Funkcional f najmanju vrednost dostiže u zajedničkoj nepokretnoj tački $(b,\dots,b)$.

5.15. C.V.Durel, A.Robson [MIv57]

$$a^c\, b^d\, (c+d)^{c+d} \leqslant c^c\, d^d\, (a+b)^{a+b}, \quad a,b,c,d>0$$

D o k a z. Neka je $x+\bar{x} = c+d$ i $y = x^x\, \bar{x}^{\bar{x}}$.

Tada je $$y'(x) = \log y\, (\log x - \log\bar{x}),$$

tako da y ima maksimum za $e = \frac{c+d}{2}$, kada nejednakost postaje

$$a^e\, b^e\, 4^e \leqslant (a+b)^{2e}.$$

5.16. G.H.Hardy [MIv50]

$$(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n) \leqslant 1 + s_n + \frac{s_n^2}{2!} + \dots + \frac{s_n^2}{n!},$$

$a_k>0$, $s_n = a_1+\dots+a_n$.

D o k a z. Neka je $f(a_1,\dots,a_n) = (1+a_1) \dots (1+a_n)$.

Najpre je $(1+a_1)(1+a_2) \leqslant (1+\frac{a_1+a_2}{2})^2$, jer je

$$a_1+a_2+a_1a_2 \leqslant a_1+a_2+\frac{(a_1+a_2)^2}{4} \quad \text{ili} \quad (a_1-a_2)^2 \geqslant 0.$$

Time je $$f(a_1,\dots,a_n) \leqslant f(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},a_3,\dots,a_n) \leqslant \dots$$

$$\dots \leqslant f(\frac{s_n}{n},\dots,\frac{s_n}{n}) = (1+\frac{s_n}{n})^n$$

$$= 1 + \binom{n}{1}\frac{s_n}{n} + \binom{n}{2}\frac{s_n^2}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{s_n^n}{n^n}$$

$$\leqslant 1 + s_n + \frac{s_n^2}{2!} + \dots + \frac{s_n^n}{n!}.$$

LITERATURA

1. AMM American Mathematical Montly.

2. Baiocchi C., Capelo A., Variational and Quasivariational Inequalities, Applications to Free Boundary problems, prevod, Moskva, 1988, 447s.

3. BAR Barlow R.E., Marshal A.W., Proshan F., Some inequalities for starshaped and convex functions, Pac. Your. of Math., vol.29, No 1, (1969),19-42.

4. BEC Beckenbach E.F., Bellman R., Inequalities, Berlin--Heiderberg-New York-Tokyo, 1983, 198s.

5. Bellman R., Introduction to Matrix Analysis, New York Toronto London, 1960, 351s.

6. BEL Bellman R., On an inequality concerning an indefinite form, Amer. Math. Montly, 63 (1956),108-109.

7. BJE Bjelica M., Regulacija simpleksa na sferi, magistarski rad, Beograd, 1985, 108s.

8. Bjelica M., Hadamardova nejednakost i ortogonalna matrica, Zbor. radova Tehn. fak. "M. Pupin",1990.

9. Bjelica M., An inequality for the triangle, Simon Stevin, Wis- en Natuurkundig Tijdschrift,(1990)

10. Bjelica M., On an inequalities for indefinite form, L´anal. numér. et la theorie de l´approx. (1990)

11. BOa Bottema O., An inequality for the triangle, Simon Stevin 33 (1959), 97-100.

12. BOT Bottema O., Đorđević R.Ž., Janić R.R., Mitrinović D.S., Vasić P.M., Geometric Inequalities, Groningen, 1969, 151s.

13. BRU Brunk H.D., On an inequality for convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 817-824.

14. Courant R., Robbins H., What is Mathematics?, London New York Toronto, 1953, 521s, 341-342.

15. Coxeter H.S.M., Greitzer S.L., Geometry Revisited, Toronto-New York, 1967, 223s.

16. Davies P.J., Interpolation and Approximation, Blaisdell, New York-Toronto-London, 1963, 393s.

17. Duca E., Pseudo-geometric inequalities, L'anal. numer. et la théorie de l'aprox., T. 16, No 2, (1987), 127-132.

18. DUF Duffin R.J., Peterson E.L., Zener C., Geometric Programming - Theory and Application, New York , London, Sydney, 1967, 278s.

19. Engelking R., General Topology, rus. prevod, Moskva 1986, 751s.

20. Giusti E., Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, prevod, Moskva, 1989, 240s,

21. HAR Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G., Inequalities, Cambridge 1934, 314s., rus. prevod V.I. Levina , s dodacima, Moskva, 1948, 456s.

22. Kantorovič L.V., Akilov G.P., Funkcional'nij analiz, Nauka, Moskva, 1977, 742s.

23. Kelley J.L., General Topology, Toronto New York London, 1957, 431s.

24. KOB Kober H., On the arithmetic and geometric means and on Hölders inequality, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 452-459.

25. KOO Kooi O., Inequalities for the triangle, Simon Stevin 32 (1958), 97-101.

26. Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P., Geometričeskie metody nelinejnogo analiza, Moskva, 1975, 511s.

27. KUR Kurepa S., Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primene, Zagreb, 1967, 788s.

28. Landau E., Grundlagen der Analysis, New York, 1948, 139s.

29. Marr R. de, Common fixed points for isotone mappings, Colloq. Math. 53 (1964), 45-48.

30. MAR Marshal A.W., Olkin I., Inequalities : Theory of Majoration and Its Applications, New York London Toronto Sydney San Francisco, 1979, 574s.

31. Matematičeskaja ènciklopedija, gl. redaktor I.M. Vinogradov, Sovetskaja ènc., Moskva, 1977-1985. t. I-V.

32. Maunder C.R.F., Algebraic Topology, VNR, New York Cincinati Toronto Melbourne, 1970, 368s.

33. MIn Mitrinović D.S., Nejednakosti, Beograd,1965,240s.

34. Mitrinović D.S., Vasić P.M., Sredine, Mat. bibl. sv. 40, Beograd, 1969, 122s.

35. Mitrinović D.S., Pečarić J.E., Srednje vrednosti u matematici, prilog Merkle, Mat. probl. i ekspoz. Beograd 1989, 394s.

36. MIT Mitrinović D.S., u saradnji sa Vasić P.M., Analitic inequalities, Berlin-Heiderberg-New York,'70,400s.

37. MIv Mitrinović D.S., Važnije nejednakosti, Beograd , 1958, 64s.

38. PEČ Pečarić J.E., Konveksne funkcije - nejednakosti, Beograd, 1987, 243s.

39. Petrović M., Računanje s brojnim razmacima, Beograd, 1932, 193s., drugo izdanje 1969.

40. Petrović M., Sur une fonctionelle, Publ. Math. Univ. Belgrade 1 (1932), 149-156.

41. Pólya G., Szegö G., Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I,II, Springer-Verlag, Berlin, 1964,822s.

42. ROB Roberts A.W., Varberg D.E., Convex Functions, New York, London, 1973, 300s.

43. Robinson A.P., Robinson W, Topological Vector Spaces, University Press, Cambridge, 1964.

44. Rohlin V.A., Fuks D.B., Načal'nyj kurs topologii - geometričeskie glavy, Nauka, Moskva, 1977, 485s.

45. SHI Shisha O., B. Mond, Difference of means, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 328-333.

46. SPE Specht W., Zur Theorie der elementaren Mittel, Math. Z. 74 (1960), 91-98.

47. ŠKL Šklarskij D.O., Čencov N.N., Jaglom I.M., Geometričeskie neravenstva i zadači na maksimum i minimum, Nauka, Moskva, 1970, 335s.

48. TAS Tasković M.R., Osnove teorije fiksne tačke, Mat. bibl. sv. 50, Beograd, 1986, 271s.

49. Tóth L.F., Reguläre Figuren, Teubner, Leipzig , 1965, 316s.

50. VAL Valentine F.A., Convex Sets, New York, 1976, 233s.

51. VAS Vasić P.M., Geometrijske nejednakosti u radovima Mihaila Petrovića, Mat. bibl. 38 (1968), 105-111.

52. VRE Vrećica S., Neprekidne funkcije, Beograd, 1982., 33s.

53. WAL Walt T. van der, Fixed and Almost Fixed Points, Amsterdam, 1963, 128s.

OZNAKE

$f : X \to R$	funkcional na skupu X
$F : X \to X$	preslikavanje skupa X u samog sebe
$\mathrm{Fix}(F)$	skup nepokretnih tačaka preslikavanja F
(x_n)	niz $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
$\mathrm{int}\ S$	unutrašnjost skupa S
$\mathrm{bd}\ S$	granica skupa S
$\mathrm{conv}\ S$	konveksan omotač skupa S
$d(x,y)$	rastojanje tačaka x i y
$K(x,r)$	kugla s centrom x i poluprečnikom r
$M_p(x)$	potencijalna sredina brojeva $x_1, \ldots, x_n$ reda p
H	harmonijska sredina
G	geometrijska sredina
A	aritmetička sredina
K	kvadratna sredina
$x_{[i]}$	permutacija $x_{[1]} \geqslant \cdots \geqslant x_{[n]}$ niza $x_1, \ldots, x_n$

$(x_1, \ldots, x_n) \prec (y_1, \ldots, y_n)$, $x_{[1]} + \cdots + x_{[k]} \leqslant y_{[1]} + \cdots + y_{[k]}$,
$k = 1, \ldots, n-1$, $x_{[1]} + \cdots + x_{[n]} = y_{[1]} + \cdots + y_{[n]}$

a, b, c	strane trougla
s	poluobim trougla
R	poluprečnik opisanog kruga trougla
r	poluprečnik upisanog kruga trougla
A'	transponovana matrica