Kontinuum problem

Aleksandar Perović

Beograd 2004.

Sadržaj

Uvod

Do druge polovine XIX veka se smatralo da je beskonačnost jedinstvena, i jedina razlika je pravljena između tzv. potencijalne i aktuelne beskonačnosti.

Ključan prodor je napravio Georg Kantor 70–tih godina XIX veka, prvo dokazom da realnih brojeva ima više nego prirodnih, a zatim i dokazom čuvene nejednakosti

$$|X| < |P(X)| \ ,$$

gde je X ma koji skup.

Kantorovu kontinuum hipotezu možemo formulisati na sledeći način:

Neka je X beskonačan podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je ili $|X| = \aleph_0$, ili $|X| = 2^{\aleph_0}$.

Sam Kantor je pokazao da ovu osobinu imaju zatvoreni podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Kasnije je pokazano da isto važi i za Borelove podskupove skupa $\mathbb{R}$. Smatrajući da su neprekidne slike Borelovih skupova (tzv analitički skupovi)"očigledno" Borelovi, Anri Poenkare "dokazuje" Kantorovu kontinuum hipotezu.

Međutim, Mihail Suslin nalazi primer analitičkog skupa koji nije Borelov, a zatim dokazuje da i za analitičke skupove važi kontinuum hipoteza. Suslinovi radovi predstavljaju početak deskriptivne teorije skupova.

Punu važnost kontinuum problem dobija posle čuvenog Hilbertovog predavanja održanog na svetskom kongresu matematičara u Parizu 1900. godine, gde kao prvi problem koji matematičari XIX veka ostavljaju matematičarima XX veka Hilbert navodi dokaz Kantorove kontinuum hipoteze. Od tada je Kantorova kontinuum hipoteza poznatija kao prvi Hilbertov problem.

Hilbert nije precizirao formalizam u kome bi se izveo odgovarajući dokaz, ali je tokom prve četvrtine XX veka preovladalo uverenje da bi se taj dokaz morao izvesti u predikatskom računu prvog reda iz ZFC aksioma teorije skupova. U

ZFC formalizmu se kontinuum hipoteza iskazuje na sledeći način:

$$\mathbf{CH}: \qquad 2^{\aleph_0} = \aleph_1 \ .$$

Kurt Gedel 1938. godine metodom unutrašnjih modela pokazuje da konsistentnost NBG sistema aksioma teorije skupova povlači konsistentnost tog istog sistema proširenog aksiomom izbora i *generalisanom kontinuum hipotezom* ($\mathbf{GCH}: \quad \forall\alpha(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$).

Obzirom da NBG i ZF imaju iste posledice, kada su u pitanju tvrđenja koja se odnose na skupove, iz ovog Gedelovog rezultata neposrdno sledi :

$$\mathrm{Con(ZF)} \to \mathrm{Con(ZFC+GCH)} \ .$$

Pol Koen 1963. metodom forsinga pokazuje nezavisnost aksiome izbora u odnosu na ZF i nezavisnost CH u odnosu na ZFC. Godinu dana kasnije Iston pokazuje da su jedina ZFC ograničenja kontinuum funkcije ($\aleph_\alpha \mapsto 2^{\aleph_\alpha}$) na regularnim kardinalima ona koja proizilaze iz elementarne kardinalne aritmetike i Kenigove leme:

- $\alpha \leq \beta \to 2^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta}$
- $\mathrm{cf} 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$.

Zanimljiv kontrast ovim rezultatima predstavlja Silverova teorema:

Neka je κ singularan kardinal neprebrojive kofinalnosti. Ako GCH važi na κ, tj. ako za svako $\lambda < \kappa$ važi $2^\lambda = \lambda^+$, onda je $2^\kappa = \kappa^+$.

Uopšte, ponašanje kontinuum funkcije na singularnim kardinalima zavisi od tzv. jakih aksioma beskonačnosti i forsing aksioma, koje za posledicu imaju i negaciju kontinuum hipoteze. Kao primer navedimo sledeću teoremu Foremana, Magidora i Šelaha:

Ako važi Martinov maksimum, onda je $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Obzirom da je CH nezavisna u odnosu na ZFC, prirodno se nameće pitanje prihvatljivosti CH odnosno $\neg$CH. S jedne strane, važenje CH za mnoge vazne klase skupova (zatvoreni, Borelovi analitički, razni skupovi automorfizama itd.) ide u prilog prihvatanju kontinuum hipoteze.

S druge strane, mnoga tvrđenja koja se dokazuju pomoću CH se mogu izvesti korišćenjem Martinove aksiome koja je slabija od CH, a i Koenovi i Istonovi rezultati su jak argument u prilog negaciji kontinuum hipoteze.

Kao dodatni argument za negaciju CH, pogledajmo sledeće tvrđenje:

$$(Ax): \quad (\forall f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leq\omega})(\exists x, y \in \mathbb{R})(x \notin f(y) \ \wedge \ y \notin f(x)) \ .$$

Intuitivno opravdanje (Ax) bi bila činjenica da slučajno izabrani, međusobno nezavisni realni brojevi x i y sa verovatnoćom 1 zadovoljavaju (Ax), jer su $f(x)$ i $f(y)$ najviše prebrojivi skupovi.

Kontrapozicijom se trivijalno pokazuje da je (Ax) ekvivalentno sa $\neg$CH. Zaista, ako bi bilo

$$\mathbb{R} = \{x_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \ ,$$

onda bismo sa

$$f(x_\alpha) = \{x_\beta \mid \beta \leq \alpha\} \ , \ \alpha \in \omega_1 \ ,$$

bila dobro definisana funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ tako da je za svako $x, y \in \mathbb{R}$ $x \in f(y)$ ili $y \in f(x)$.

Obratno, pretpostavimo da postoji funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ tako da je za svako $x, y \in \mathbb{R}$ $x \in f(y)$ ili $y \in f(x)$ i uočimo međusobno različite $x_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \omega_1$. Sada mora biti

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} f(x_\alpha) \ ,$$

jer bi u suprotnom za $x \in \mathbb{R} - \bigcup_{\alpha\in\omega_1} f(x_\alpha)$ važilo

$$|f(x)| \geq \aleph_1 \ ,$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da $f(x) \in [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$.

U ovom radu će biti reči isključivo o ZFC aspektima kontinuum problema. Obzirom da sam se rukovodio principom zaokruženosti teksta (tzv. *self contained*), bilo kakvo proširenje problematike bi bar udvostručilo trenutni obim ovog rada.

Trudio sam se, u meri u kojoj je to moguće, da relevantne stvari isteram do kraja, tj. sa svim detaljima. U nekim slučajevima sam iz tehničkih razloga odstupio od uobičajenih formulacija tvrđenja (ovo se naročito odnosi na Silverovu i Koenovu teoremu), kako bih dokazao opšti slučaj bez preteranog opterećivanja notacije.

Na kraju bih se zahvalio profesorima Aleksandru Jovanoviću, Žarku Mijajloviću i Milošu Kuriliću na pomoći, savetima i sugestijama tokom izrade ovog rada.

1

ZFC

ZFC je teorija prvog reda na jeziku $L_{ZF} = \{\in\}$, pri čemu je u ovom kontekstu $\in$ binarni relacijski simbol. Obzirom da je u najvećem broju slučajeva jasno o kakvoj upotrebi se radi, istim simbolom ćemo označavati i relacuju *biti element*. Samu teoriju čine aksiome ekstenzionalnosti, praznog skupa, para, unije, partitivnog skupa, beskonačnosti, izbora i regularnosti, kao i sheme separacije i zamene, svaka sa prebrojivo mnogo instanci.

Kao meta teoriju koristimo naivnu teoriju skupova i teoriju modela. Posebno, meta implikaciju i ekvivalenciju ćemo redom označavati sa $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$, dok ćemo ostale meta logičke veznike pisati rečima. Simbol $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ koristimo kao "zamena za", odnosno za definicionu jednakost formula.

Objekte koje formalizujemo sistemom ZFC zovemo *skupovima*. Skupove ćemo uglavnom označavati malim i velikim slovima latinice kao i malim grčkim slovima. Izuzetak predstavljaju slova V i L, koja su redom rezervisani simboli za *klasu svih skupova* i *konstruktibilni univerzum*.

Neka je $\varphi(x, \overline{y})$, $\overline{y} = y_1, \ldots, y_n$, proizvoljna formula jezika L_{ZF} i neka su $a_1, \ldots, a_n$ proizvoljni skupovi (parametri). Term

$$\{x \mid \varphi(x, \overline{a})\}$$

ćemo zvati *klasom* određenom formulom φ i parametrima $\overline{a}$. Klase ćemo uglavnom označavati sa $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$, uz korišćenje prirodnih brojeva ili nekih drugih skupova kao indeksa. Posebno, sa $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\overline{a})$ ćemo isticati činjenicu da u definicionoj formuli klase $\mathcal{A}$ učestvuju parametri $\overline{a}$.

Istaknimo činjenicu da je pojam klase čisto tehnički, tj. jedina funkcija mu je pojednostavljenje notacije.

Neka je $\mathcal{A}(\overline{a}) = \{x \mid \varphi(x, \overline{a})\}$ i neka je $\mathcal{B}(\overline{b}) = \{x \mid \psi(x, \overline{b})\}$. Uvedimo sledeće oznake:

- $x \in \mathcal{A}(\overline{a}) \Leftrightarrow_{\text{def}} \varphi(x, \overline{a})$
- $\mathcal{A}(\overline{a}) = \mathcal{B}(\overline{b}) \Leftrightarrow_{\text{def}} \forall x (x \in \mathcal{A}(\overline{a}) \leftrightarrow x \in \mathcal{B}(\overline{b}))$

- $\mathcal{A}(\overline{a}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{b}) \Leftrightarrow_{\text{def}} \forall x(x \in \mathcal{A} \to x \in \mathcal{B})$
- $\mathcal{A}(\overline{a}) \subset \mathcal{B}(\overline{b}) \Leftrightarrow_{\text{def}} \mathcal{A}(\overline{a}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{b}) \ \wedge \ \mathcal{A}(\overline{a}) \neq \mathcal{B}(\overline{b})$
- $\emptyset =_{\text{def}} \{x \mid x \neq x\}$
- $V =_{\text{def}} \{x \mid x = x\}$
- $(\forall x \in \mathcal{A}(\overline{a}))\theta(x, \ldots) \Leftrightarrow_{\text{def}} \forall x(x \in \mathcal{A}(\overline{a}) \to \theta(x, \ldots))$
- $(\exists x \in \mathcal{A}(\overline{a}))\theta(x, \ldots) \Leftrightarrow_{\text{def}} \exists x(x \in \mathcal{A}(\overline{a}) \wedge \theta(x, \ldots))$
- $\bigcup \mathcal{A}(\overline{a}) =_{\text{def}} \{x \mid (\exists y \in \mathcal{A}(\overline{a}))x \in y\}$
- $\bigcap \mathcal{A}(\overline{a}) =_{\text{def}} \{x \mid (\forall y \in \mathcal{A}(\overline{a}))x \in y\}$
- $P(\mathcal{A}(\overline{a})) =_{\text{def}} \{x \mid \forall y(y \in x \to y \in \mathcal{A}(\overline{a}))\}$
- $\{c_1, \ldots, c_n\} =_{\text{def}} \{x \mid x = c_1 \vee \cdots \vee x = c_n\}$,
  pri čemu su $c_1, \ldots, c_n$ proizvoljni skupovi (parametri);
- $\mathcal{A}(\overline{a}) \cap \mathcal{B}(\overline{b}) =_{\text{def}} \{x \mid x \in \mathcal{A}(\overline{a}) \wedge x \in \mathcal{B}(\overline{b})\}$
- $\mathcal{A}(\overline{a}) \cup \mathcal{B}(\overline{b}) =_{\text{def}} \{x \mid x \in \mathcal{A}(\overline{a}) \vee x \in \mathcal{B}(\overline{b})\}$
- $\mathcal{A}(\overline{a}) - \mathcal{B}(\overline{b}) =_{\text{def}} \{x \mid x \in \mathcal{A}(\overline{a}) \wedge x \notin \mathcal{B}(\overline{b})\}$
- Neka je $\Phi(x, y)$ formula jezika L_{ZF}. Tada
  $$\Phi : \mathcal{A}(\overline{a}) \longrightarrow \mathcal{B}(\overline{b}) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall x \in \mathcal{A}(\overline{a}))(\exists_1 y \in \mathcal{B}(\overline{b}))\Phi(x, y) \ .$$
  Umesto $\Phi(x, y)$ ćemo pisati $y = \Phi(x)$. Posebno, za $u \in \mathcal{A}(\overline{a})$ i $v \in \mathcal{B}(\overline{b})$ neka je
  $$\Phi[u] =_{\text{def}} \{x \mid (\exists z \in u)x = \Phi(z)\} \text{ i } \Phi^{-1}(v) =_{\text{def}} \{x \mid x \in \mathcal{A}(\overline{a}) \wedge v = \Phi(x)\} \ .$$

1.1 ZF$^-$

Teorija ZF$^-$ se razlikuje od teorije ZFC po tome što ne sadrži aksiome regularnosti i izbora. Inače, ZF$^-$ predstavlja formalizaciju tzv. *naivne teorije skupova.*

Aksioma ekstenzionalnosti:

$$\forall x \forall y(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \ .$$

Dakle, skupovi su jednaki akko imaju iste elemente. Posebno, svaki skup A je i klasa, jer je jednoznačno određen formulom $x \in A$, tj. $A = \{x \mid x \in A\}$.

Teorema 1.1.1 *Neka je $\varphi(x,\overline{y})$ proizvoljna formula jezika L_{ZF}. Tada*

$$\forall\overline{y}\big(\exists z\forall x(x\in z\leftrightarrow\varphi(x,\overline{y}))\rightarrow\exists_1 z\forall x(x\in z\leftrightarrow\varphi(x,\overline{y}))\big)\ .$$

Dokaz :

Neka su z_1 i z_2 skupovi takvi da $\forall x(x\in z_1\leftrightarrow\varphi(x,\overline{y}))$ i $\forall x(x\in z_2\leftrightarrow\varphi(x,\overline{y}))$. Samim tim,

$$\forall x(x\in z_1\leftrightarrow x\in z_2)\ ,$$

odakle po aksiomi ekstenzionalnosti sledi da je $z_1=z_2$.

□

Aksioma praznog skupa :

$$\exists x\forall y(y\notin x).$$

Neka je a skup čija se egzistencija postulira aksiomom praznog skupa. Obzirom da $\forall x(x=x)$ (tj. $\forall x(x=x)$ je valjana formula) kao i da $\forall x(x\notin a)$, biće

$$\forall x(x\in a\leftrightarrow x\neq x)\ ,$$

tj. $a=\emptyset$.

Shema separacije : Neka je $\varphi(x,z,\overline{y})$ proizvoljna formula jezika L_{ZF} i neka se promenljiva u ne nalazi u φ. Tada je

$$\forall z\forall\overline{y}\,\exists u(u=\{x\mid x\in z\wedge\varphi(x,z,\overline{y})\})$$

instanca sheme separacije. Posebno,

$$\{x\in z\mid\varphi(x,z,\overline{y})\}=_{\mathrm{def}}\{x\mid x\in z\wedge\varphi(x,z,\overline{y})\}\ .$$

Za klasu $\mathcal{A}$ ćemo reći da je *prava klasa* ako nije skup, tj. ako važi $\forall x(x\neq\mathcal{A})$.

Teorema 1.1.2 (Raselov paradoks) *Neka je $\mathcal{A}=\{x\mid x\notin x\}$. Tada je $\mathcal{A}$ prava klasa. Posebno, V je prava klasa.*

Dokaz :

Pretpostavimo suprotno, neka je $\mathcal{A}$ skup. Tada

$$\mathcal{A}\in\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{A}\notin\mathcal{A}\ .$$

Kontradikcija. Odavde sledi i drugi deo tvrđenja, jer ako bi V bio skup, onda bi po shemi separacije i

$$\mathcal{A}\cap V=\mathcal{A}$$

bio skup.

□

Aksioma para:

$$\forall x \forall y \exists u (u = \{x, y\}) \ .$$

Posebno :

- $\{x\} =_{\text{def}} \{x, x\}$
- $\langle x, y\rangle =_{\text{def}} \{\{x\}, \{x, y\}\}$
- $\mathcal{A} \times \mathcal{B} =_{\text{def}} \{x \mid (\exists y \in \mathcal{A})(\exists z \in \mathcal{B}) x = \langle y, z\rangle\}$
- $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_{n+1} =_{\text{def}} (\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n) \times \mathcal{A}_{n+1}$
- $\langle x_1, \ldots, x_{n+1}\rangle =_{\text{def}} \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle$.

Na uobičajeni način se pokazuje da važi

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \ .$$

Aksioma unije :

$$\forall x \exists y (y = \bigcup x) \ .$$

Posebno :

- $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$
- $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\}$
- $x + 1 =_{\text{def}} x \cup \{x\}$.

Numerale uvodimo na sledeći način :

- $\underline{0} = \emptyset$
- $\underline{n+1} = \{\underline{0}, \ldots, \underline{n}\}$.

Teorema 1.1.3 *Za svaka dva prirodna broja m i n važi*

$$m < n \Leftrightarrow \vdash \underline{m} \in \underline{n} \ ,$$

gde se misli na dokazivost iz do sada uvedenih aksioma.

Dokaz :

Ako je $m < n$, onda je po definiciji $\underline{m} \in \underline{n}$. Obratna implikacija sledi iz sledeća dva pomoćna tvrđenja:

(1) Za svaki prirodan broj n važi $\underline{n} \notin \underline{n}$;

(2) Za svaka dva prirodna broja m i n važi $(\vdash \underline{m} = \underline{n}) \Rightarrow m = n$.

(1): Obzirom da $\forall x(x \notin \emptyset)$, važi $\underline{0} \notin \underline{0}$. Pretpostavimo da $\underline{0} \notin \underline{0}$ i, ..., i $\underline{n} \notin \underline{n}$. Tada je

$$\underline{n+1} = \{x \in \underline{n+1} \mid x \notin x\} ,$$

pa $\underline{n+1} \notin \underline{n+1}$.

(2): Neka su prirodni brojevi m i n takvi da je $\underline{m} = \underline{n}$. Ako bi bilo $m < n$, onda bi $\underline{m} \in \underline{n}$, a kako $\underline{m} \notin \underline{n}$, po aksiomi ekstenzionalnosti mora biti $\underline{m} \neq \underline{n}$. Kontradikcija.

Sasvim slično ne može biti ni $n < m$, pa mora biti $m = n$.

Neka su m i n prirodni brojevi takvi da je $\underline{m} \in \underline{n}$. Tada postoji prirodan broj $k < n$ tako da važi $\underline{m} = \underline{k}$. No tada je po (2) $m = k$, pa je samim tim i $m < n$.

□

Nadalje ćemo istim simbolima označavati i numerale i prirodne brojeve. Dakle, $0 = \emptyset, 1 = \{0\},\ 2 = \{0, 1\}$ itd.

Klasu induktivnih skupova, u oznaci Ind, formalno uvodimo na sledeći način:

$$\mathrm{Ind} = \{x \mid 0 \in x \wedge (\forall y \in x)(y + 1 \in x)\} .$$

Ako $x \in \mathrm{Ind}$, onda x sadrži sve numerale, pa je beskonačan.

Aksioma partitivnog skupa :

$$\forall x \exists y(y = P(x)) .$$

Neka je $\mathcal{A}$ klasa i neka $a \in \mathcal{A}$. Tada je

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \in a \mid (\forall y \in \mathcal{A}) x \in y\},$$

pa je $\bigcap \mathcal{A}$ skup. Naravno, $\bigcap 0 = V$.

Primetimo da važi $\forall x \forall y(x \times y \in V)$, jer je za svaka dva skupa x i y

$$x \times y = (x \times y) \cap P(P(x \cup y)) .$$

Aksioma beskonačnosti :

$$\exists x(x \in \mathrm{Ind}).$$

Samim tim, postoji najmanji (u smislu inkluzije) induktivan skup

$$\omega =_{\mathrm{def}} \bigcap \mathrm{Ind} .$$

Shema zamene :
Neka $\Phi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \longrightarrow V$, tj. neka $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists_1 y \Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ i neka se promenljiva z ne javlja u Φ. Tada je rečenica

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists z (z = \Phi[x_1 \times \cdots \times x_n])$$

instanca sheme zamene. Posebno,

$$\{\Phi(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n\} =_{\mathrm{def}} \Phi[X_1 \times \cdots \times X_n] \ .$$

Unutar ZF^- moguće je formalizovati gotovo sve matematičke koncepte, pri čemu se odgovarajuća formalizacija bitno ne razlikuje od uobičajene. Ovde ćemo navesti samo nekoliko primera neophodnih za dalji rad.

- $\mathrm{dom}(X) =_{\mathrm{def}} \{x \in \bigcup\bigcup X \mid (\exists y \in \bigcup\bigcup X)\langle x, y\rangle \in X\}$
- $\mathrm{rng}(X) =_{\mathrm{def}} \{x \in \bigcup\bigcup X \mid (\exists y \in \bigcup\bigcup X)\langle y, x\rangle \in X\}$
- $\mathrm{fun}(f) \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} f \subseteq \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{rng}(f)$
  $\wedge \forall x \forall y \forall z (\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \rightarrow y = z)$

  Umesto $\langle x, y\rangle \in f$ pišemo uobičajeno $y = f(x)$.
- $f : x \longrightarrow y \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \mathrm{fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = x \wedge y \supseteq \mathrm{rng}(f)$
- $f : x \longrightarrow V \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \mathrm{fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = x$

  Sada se na uobičajen način uvode pojmovi injekcije (1–1), surjekcije (“na”), bijekcije (1–1 i “na”), kao i kompozicije funkcija i restrikcije funkcije na skup. Posebno, identičku funkciju skupa x označavamo sa id_x, a restrikciju funkcije f na skup x sa $f|_x$.
- ${}^X Y =_{\mathrm{def}} \{f \in P(X \times Y) \mid f : X \longrightarrow Y\}$
- Neka $f : I \longrightarrow X$ i neka za svako $i \in I$ važi $X_i = f(i)$. Tada
  - $\bigcup\limits_{i \in I} X_i =_{\mathrm{def}} \bigcup f[I]$
  - $\prod\limits_{i \in I} X_i =_{\mathrm{def}} \{g : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i \in I} X_i \mid (\forall i \in I) g(i) \in X_i\}$.

    Posebno, *projekciju* $\pi_j : \prod_{i \in I} \longrightarrow X_j$ definišemo na sledeći način:

    $$\pi_j(f) = f(j) \ .$$
- “x je beskonačan” $\Leftrightarrow_{\mathrm{def}} (\exists f : \omega \longrightarrow x)$(“$f$ je 1–1”) .

1.2 Ordinali

Za skup X kažemo da je *tranzitivan* ako je $\bigcup X \subseteq X$. Primetimo da je ovo ekvivalentno uslovu da za svako $x \in X$ važi $x \subseteq X$.

Posebno, ako je skup X tranzitivan, onda je i $P(X)$ takođe tranzitivan skup. Zaista, neka $x \in P(X)$ i neka $y \in x$. Kako je $x \subseteq X$, imamo da $y \in X$, odakle zbog tranzitivnosti X sledi da je $y \subseteq X$, pa samim tim i $y \in P(X)$.

Dakle, $x \subseteq P(X)$, tj. $P(X)$ je tranzitivan.

Za klasu $\mathcal{A}$ ćemo reći da je tranzitivna ako važi $(\forall x \in \mathcal{A}) x \subseteq \mathcal{A}$.

Klasu svih *ordinala* definišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ord} \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \quad & \bigcup x \subseteq x \ \wedge \ (\forall u, v \in x)(u \in v \rightarrow v \notin u) \\ \wedge \quad & (\forall u, v, w \in x)(u \in v \wedge v \in w \rightarrow u \in w) \\ \wedge \quad & (\forall y \subseteq x)(y \neq 0 \rightarrow (\exists z \in y)(z \cap y = 0)) \ . \end{aligned}$$

Dakle, skup X je ordinal ako je tranzitivan i dobro (strogo) uređen relacijom $\in$. Ordinale ćemo beležiti malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ uz korišćenje indeksa.

Koristeći definiciju ordinala lako se proverava da važi:

- $0 \in \mathrm{Ord}$
- $\forall \alpha(\alpha \neq 0 \rightarrow 0 \in \alpha)$
- $\forall \alpha(\alpha + 1 \in \mathrm{Ord})$
- $\forall \alpha \forall \beta(\alpha \in \beta \rightarrow \beta \notin \alpha)$
- $\forall \alpha(\alpha \notin \alpha)$
- $\forall \alpha \forall \beta \forall \gamma(\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma \rightarrow \alpha \in \gamma)$
- $\forall \alpha(\alpha \subseteq \mathrm{Ord})$
- $\forall x(x \subseteq \mathrm{Ord} \rightarrow \bigcup x \in \mathrm{Ord})$
- $\omega \in \mathrm{Ord}$.

Lema 1.2.1

$$\forall \alpha \forall \beta (\forall f : \alpha \longrightarrow \beta)\big((\forall x, y \in \alpha)(x \in y \leftrightarrow f(x) \in f(y)) \rightarrow ((\forall x \in \alpha) f(x) = x)\big) \ .$$

Dokaz :

Neka su α, β ordinali i neka je $f : \alpha \longrightarrow \beta$ tako da

$$(\forall x, y \in \alpha)(x \in y \leftrightarrow f(x) \in f(y)) \ .$$

Po shemi separacije postoji skup $X = \{x \in \alpha \mid f(x) \neq x\}$. Pretpostavimo da je $X \neq 0$. Tada X u α ima $\in$–minimum γ. Sada je za svako $x \in \gamma \;\; x = f(x)$, odakle sledi

$$\begin{aligned} x \in \gamma &\leftrightarrow f(x) \in f(\gamma) \\ &\leftrightarrow x \in f(\gamma) \ , \end{aligned}$$

odakle sledi da je $\gamma = f(\gamma)$. Kontradikcija.

□

Teorema 1.2.1 Ord *je tranzitivna klasa dobro uređena relacijom* $\in$*. Posebno,* Ord *je prava klasa (tzv. Burali–Forte paradoks).*

Dokaz :
Što se tiče prvog dela tvrđenja, dovoljno je pokazati sledeća dva pomoćna tvrđenja :

(1) Svaka neprazna podklasa klase Ord ima $\in$–minimalni element ;

(2) Ord je linearno uređena klasa sa $\in$.

(1): Neka je $\mathcal{A}$ podklasa klase Ord i neka $\alpha \in \mathcal{A}$. Ako je $\alpha \cap \mathcal{A} = 0$, onda je α $\in$–minimalni element klase $\mathcal{A}$.
U suprotnom, skup $\alpha \cap \mathcal{A}$ ima $\in$–minimum β u α, pa je samim tim β $\in$–minimalni element klase $\mathcal{A}$.

(2): Neka je $\alpha \neq 0$ proizvoljan ordinal i neka je

$$\mathcal{A} = \{\beta \mid \beta \notin \alpha \wedge \alpha \notin \beta \wedge \alpha \neq \beta\} \ .$$

Dovoljno je pokazati da je $\mathcal{A} = 0$. Pretpostavimo suprotno. Tada $\mathcal{A}$ ima $\in$–minimalni element β, i $\beta \neq 0$. Samim tim,

$$(\forall x \in \beta)(x \in \alpha \vee \alpha \in x \vee x = \alpha) \ ,$$

a kako za svako $x \in \beta$ važi $x = \alpha \vee \alpha \in x \rightarrow \alpha \in \beta$, mora biti $\beta \subseteq \alpha$.
Kako je $\alpha \neq \beta$, skup $\alpha - \beta$ u α ima $\in$–minimum γ. Samim tim, $\gamma \subseteq \beta$. Neka je $\xi \in \beta$ proizvoljno. Kako je α dobro uređen sa $\in$ i kako $\xi, \gamma \in \alpha$, mora biti

$$\xi \in \gamma \vee \gamma \in \xi \vee \gamma = \xi \ .$$

Međutim, iz $\gamma = \xi \vee \gamma \in \xi$ sledi da $\gamma \in \beta \cap (\alpha - \beta) = 0$, pa mora biti $\xi \in \gamma$. Dakle, $\beta = \gamma$, odakle sledi da $\beta \in \alpha$. Kontradikcija.

Obzirom da je Ord tranzitivna klasa dobro uređena sa $\in$, Ord ne može biti skup, jer bi u suprotnom važilo Ord $\in$ Ord, što je u kontradikciji sa činjenicom da za svaki ordinal α važi $\alpha \notin \alpha$.

□

Posledica 1.2.1 (transfinitna indukcija) *Neka je $\mathcal{A}$ podklasa klase* Ord *tako da važi*

$$\forall\alpha(\alpha \subseteq \mathcal{A} \to \alpha \in \mathcal{A}) \ .$$

Tada je $\mathcal{A} = \mathrm{Ord}$.

Dokaz :

U suprotnom, klasa $\mathrm{Ord} - \mathcal{A}$ bi imala $\in$–minimum α. Međutim, tada bi bilo $\alpha \subseteq \mathcal{A}$ odakle bi sledilo $\alpha \in \mathcal{A}$. Kontradikcija.

□

Teorema 1.2.2 (transfinitna rekurzija) *Neka* $\Phi : V \longrightarrow V$*. Tada postoji jedinstveno* $\Psi : \mathrm{Ord} \longrightarrow V$ *tako da*

$$\forall\alpha(\Psi(\alpha) = \Phi(\Psi|_\alpha)) \ .$$

Dokaz :

Definišimo predikat $\Psi(x, y)$ na sledeći način:

$$\begin{array}{lll} \Psi(x,y) & \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} & x \in \mathrm{Ord} \\ & \wedge & (\exists_1 f : x \longrightarrow V)\big(y = \Phi(f) \wedge (\forall z \in x)(f(z) = \Phi(f|_z))\big) \ . \end{array}$$

Neka je $\mathcal{A} = \{\alpha \mid \exists_1 y \Psi(\alpha, y)\}$. Transfinitnom indukcijom pokazujemo da je $\mathcal{A} = \mathrm{Ord}$. Neka je $\alpha \subseteq \mathcal{A}$. Tada za svako $\beta \in \alpha$ postoji jedinstvena funkcija f_β sa domenom β tako da je $\Phi(f_\beta)$ jedini svedok za $\exists y \Psi(\beta, y)$. Primetimo da je

$$f_\beta = \{\langle \gamma, \Phi(f_\gamma)\rangle \mid \gamma \in \beta\} \ , \ \beta \in \alpha \ .$$

Samim tim, sa

$$f_\alpha =_{\mathrm{def}} \{\langle \beta, \Phi(f_\beta)\rangle \mid \beta \in \alpha\}$$

je dobro definisana funkcija $f_\alpha : \alpha \longrightarrow V$ tako da je $\Phi(f_\alpha)$ jedini svedok za $\exists y \Psi(\alpha, y)$. Dakle, $\alpha \in \mathcal{A}$, pa po teoremi transfinitne indukcije sledi da je $\mathcal{A} = V$.

Pretpostavimo da $\Psi_1, \Psi_2 : \mathrm{Ord} \longrightarrow V$ zadovoljavaju uslove tvrđenja. Tada za svaki ordinal α važi

$$\Psi_1(\alpha) = \Phi(\Psi_1|_\alpha) = \Phi(f_\alpha) = \Phi(\Psi_2|_\alpha) = \Psi_2(\alpha) \ ,$$

pa je $\Psi_1 = \Psi_2$.

□

Uvedimo sledeće oznake:

- $\langle X, < \rangle \in \mathrm{WO} \Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ “$\langle X < \rangle$ je dobro uređenje”
- $\langle X, < \rangle \in \mathrm{LO} \Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ “$\langle X < \rangle$ je linearno uređenje”

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow_{\text{def}} \alpha \in \beta$
- $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow_{\text{def}} \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$.

Za ordinal α kažemo da je *granični* ako je $\bigcup \alpha = \alpha$. U suprotnom je $\alpha = \bigcup \alpha + 1$, pa u tom slučaju ordinal α zovemo i *sledbenikom*.

Teorema 1.2.3 *Neka* $\langle X, < \rangle \in \mathrm{WO}$. *Tada postoji jedinstveni ordinal* α *i jedinstvena bijekcija* $f : X \longrightarrow \alpha$ *tako da*

$$(\forall x, y \in X)(x < y \leftrightarrow f(x) \in f(y)) \ .$$

Dokaz :
Neka je $\langle X, < \rangle$ proizvoljno dobro uređenje, pri čemu je $X \neq 0$. Transfinitnom rekurzijom po Ord definišimo $\Phi : \mathrm{Ord} \longrightarrow X + 1$ (napomenimo da sa $X + 1$ označavamo skup $X \cup \{X\}$) na sledeći način:

- $\Phi(0) = \min X$
- $\Phi(\alpha + 1) = \begin{cases} X & , \ X - \{\Phi(\beta) \mid \beta \leq \alpha\} = 0 \\ \min(X - \{\Phi(\beta) \mid \beta \leq \alpha\}) & , \ X - \{\Phi(\beta) \mid \beta \leq \alpha\} \neq 0 \end{cases}$
- $\Phi(\alpha) = \begin{cases} X & , \ X - \{\Phi(\beta) \mid \beta < \alpha\} = 0 \\ \min(X - \{\Phi(\beta) \mid \beta < \alpha\}) & , \ X - \{\Phi(\beta) \mid \beta < \alpha\} \neq 0 \end{cases}$

  pri čemu je $\alpha = \bigcup \alpha > 0$.

Φ ne može biti 1–1, jer bi u suprotnom po shemi zamene Ord bio skup, što je u suprotnosti sa činjenicom da je Ord prava klasa.

Samim tim, klasa $\mathcal{A} = \{\beta \mid \Phi(\beta) = X\}$ je neprazna, pa ima $\in$–minimum α. Sada je $f = (\Phi|_{\alpha})^{-1}$ bijekcija koja zadovoljava uslove tvrđenja.

Jedinstvenost je direktna posledica leme 1.2.1.

□

Ordinalnu aritmetiku rekurzivno uvodimo na sledeći način:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
- $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha + \gamma$, ako je β granični ordinal;
- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot (\beta + 1) =_{\text{def}} \alpha \cdot \beta + \alpha$
- $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha \cdot \gamma$, ako je β granični ordinal;
- $\alpha^0 = 1$

- $\alpha^{\beta+1} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha =_{\mathrm{def}} (\alpha^{\beta}) \cdot \alpha$
- $\alpha^{\beta} = \bigcup_{\gamma\in\beta} \alpha^{\gamma}$, $\beta = \bigcup \beta$.

Transfinitnom indukcijom se lako proverava da važi:

1. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
3. $0 + \alpha = \alpha \wedge \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
4. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
5. $\alpha < \beta \leftrightarrow (\exists \gamma > 0)\beta = \alpha + \gamma$
6. $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \to \beta = \gamma$
7. $\beta < \gamma \leftrightarrow \forall \alpha(\alpha + \beta < \alpha + \gamma)$
8. $\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\beta}$
9. $(\gamma^{\alpha})^{\beta} = \gamma^{\alpha\cdot\beta}$
10. $(\forall \gamma > 1)(\forall \alpha \forall \beta(\alpha < \beta \to \gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta})$.

Istaknimo da sabiranje i množenje ordinala nisu komutativne operacije. Primera radi, $1 + \omega = \omega < \omega + 1$ i $2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2 = \omega + \omega$. Takođe $\cdot$ nije distributivno u odnosu na $+$. Naime, $(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega < 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega + \omega$.

Takođe istaknimo činjenicu da je za svaki skup $A \subseteq \mathrm{Ord}$ $\bigcup A$ njegov supremum u Ord.

Neka su α_ξ , $\xi \in \gamma$ proizvoljni ordinali. Ordinal $\sum_{\xi\in\gamma} \alpha_\xi$ definišemo rekurzijom po γ na sledeći način:

- $\sum_{\xi\in 0} \alpha_\xi = 0$
- $\sum_{\xi\in\beta+1} \alpha_\xi = \sum_{\xi\in\beta} \alpha_\xi + \alpha_\beta$
- $\sum_{\xi\in\beta} \alpha_\xi = \bigcup_{\eta\in\beta} \sum_{\xi\in\eta} \alpha_\xi$, $\beta = \bigcup \beta$.

Kanonsku bijekciju $\Gamma : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ definišemo na sledeći način:

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \begin{cases} \sum_{\xi\in\beta}(\xi + \xi + 1) + \alpha & , \quad \alpha < \beta \\ \sum_{\xi\in\alpha}(\xi + \xi + 1) + \alpha + \beta & , \quad \alpha \geq \beta \, . \end{cases}$$

Transfinitnom indukcijom se lako proverava da je Γ zaista bijekcija. Samo dobro uređenje na $\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ indukovano sa Γ shematski možemo prikazati na sledeći način:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \langle\omega,\omega\rangle & \\
 & & & \vdots & \\
 & & & \langle\omega,1\rangle & \\
 & & & \langle\omega,0\rangle & \\
 & & & \vdots & \\
 & \langle 1,1\rangle & & \langle 2,\omega\rangle & \\
 & \langle 1,0\rangle & & \langle 1,\omega\rangle & \\
\langle 0,0\rangle & \langle 0,1\rangle & \ldots & \langle 0,\omega\rangle & \ldots
\end{array}$$

Dakle,

$$\langle\alpha,\beta\rangle < \langle\gamma,\delta\rangle \Leftrightarrow_{\text{def}} \Gamma(\alpha,\beta) < \Gamma(\gamma,\delta)\ .$$

Kumulativnu hijerarhiju uvodimo transfinitnom rekurzijom na sledeći način:

- $V_0 = 0$
- $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$
- $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$, ako je α granični ordinal.

Transfinitnom indukcijom se lako proverava da je svaki od skupova V_α tranzitivan. Klasu WF *dobro zasnovanih* skupova formalno uvodimo na sledeći način:

$$x \in \mathrm{WF} \Leftrightarrow_{\text{def}} \exists\alpha(x \in V_\alpha)\ .$$

Za $x \in \mathrm{WF}$ neka je $\mathrm{rank}(x) = \min\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}\}$. Lako se proverava da važi

$$(\forall x, y \in \mathrm{WF})(x \in y \to \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y))\ .$$

Teorema 1.2.4

$$(\forall X \in \mathrm{WF})(X \neq 0 \to (\exists x \in X)(x \cap X = 0))\ .$$

Dokaz :

Neka je $X \neq 0$ i $X \in \mathrm{WF}$. Tada je skup

$$\{\mathrm{rank}(y) \mid y \in X\}$$

neprazan skup ordinala, pa ima minimum, tj. postoji $x \in X$ tako da za svako $y \in X$ važi $\mathrm{rank}(x) \leq \mathrm{rank}(y)$. Odavde sledi da je $x \cap X = 0$, jer za svako $z \in x$ važi $\mathrm{rank}(z) < \mathrm{rank}(x)$.

□

1.3 Kardinali

Uvedimo sledeće oznake:

- $|x| = |y| \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} (\exists f : x \longrightarrow y)$(“$f$ je bijekcija”)
- $|x| \leq |y| \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} (\exists f : x \longrightarrow y)$(“$f$ je 1–1”)

Primetimo da iz definicije neposredno sledi da je relacija $|x| = |y|$ relacija ekvivalencije na V, a da je relacija $|x| \leq |y|$ refleksivna i tranzitivna na V.

Za uređenje $\langle X, < \rangle$ kažemo da je *mreža* ako svaki neprazan konačan podskup skupa X ima supremum i infimum. Za mrežu kažemo da je *kompletna* ako svaki neprazan podskup ima supremum i infimum. Supremum skupa S se označava sa $\sum S$, a infimum sa $\prod S$.

Teorema 1.3.1 (Lema Tarskog) *Neka je $\langle X, < \rangle$ kompletna mreža, $X \neq 0$ i neka je $f : X \longrightarrow X$ neopadajuća funkcija, tj.*

$$(\forall x, y \in X)(x < y \rightarrow f(x) \leq f(y)) \ .$$

Tada f ima fiksnu tačku, tj. $(\exists x \in X)(f(x) = x)$.

Dokaz :

Neka je $A = \{x \in X \mid x \leq f(x)\}$. Kako $\prod X \in A$, postoji $\sum A$. Dokazujemo da je $f(\sum A) = \sum A$. Primetimo da je za ovo dovoljno pokazati da je

$$\sum A \leq f(\sum A) \ .$$

Obzirom da je f neopadajuća funkcija, skup A je zatvoren za f (tj. za svako $x \in A$ $f(x) \in A$) i $f(\sum A)$ je majoranta skupa A, odakle sledi da je $f(\sum A) \geq \sum A$.

□

Teorema 1.3.2 (Kantor, Šreder, Bernštajn)

$$\forall x \forall y(|x| \leq |y| \wedge |y| \leq |x| \rightarrow |x| = |y|) \ .$$

Dokaz :

Neka su $f : x \longrightarrow y$ i $g : y \longrightarrow x$ 1–1 funkcije. Prvo pokažimo da funkcija $F : P(x) \longrightarrow P(x)$ definisana sa

$$F(z) = x - g[y - f[z]] \ , \ z \in P(x)$$

ima fiksnu tačku. Obzirom na lemu Tarskog, za ovo je dovoljno pokazati da je F neopadajuće preslikavanje kompletne mreže $\langle P(x), \subseteq \rangle$.

Neka su $z, w \in P(x)$ proizvoljni. Tada važi:

$$\begin{array}{rcl} z \subseteq w & \rightarrow & f[z] \subseteq f[w] \\ & \rightarrow & y - f[w] \subseteq y - f[z] \\ & \rightarrow & g[y - f[w]] \subseteq g[y - f[z]] \\ & \rightarrow & x - g[y - f[z]] \subseteq x - g[y - f[w]] \\ & \leftrightarrow & F(z) \subseteq F(w) \ . \end{array}$$

Dakle, F ima fiksnu tačku a.

Neka je $b = g[y - f[a]]$. Kako je $a = F(a) = x - g[y - f[a]]$, $b = x - a$. Sada je sa $h = g^{-1}|_b \cup f|_a$ dobro definisana bijekcija između x i y.

□

Teorema 1.3.3 (Kantor)

$$\forall x(|x| < |P(x)|) \ .$$

Dokaz :

Neka je X proizvoljan skup. S jedne strane, funkcija $f : X \longrightarrow P(X)$ definisana sa

$$f(x) = \{x\}$$

je 1–1, pa je $|X| \leq |P(X)|$.

Ostaje da pokažemo da je $|X| \neq |P(X)|$. U suprotnom, postojala bi bijekcija $g : X \longrightarrow P(X)$. Tada po shemi separacije postoji skup

$$A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\} \ .$$

Obzirom da je g "na", postoji $a \in X$ tako da je $A = g(a)$. Sada dobijamo kontradikciju $a \in A \leftrightarrow a \notin A$.

□

Klasu *kardinala*, tj. *kardinalnih brojeva* formalno uvodimo na sledeći način:

$$x \in \mathrm{Card} \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} x \in \mathrm{Ord} \wedge (\forall y \in x)(|y| < |x|) \ .$$

Lako se proverava da $\omega \in \mathrm{Card}$ kao i da $\omega \subseteq \mathrm{Card}$. Kardinale ćemo beležiti malim grčkim slovima κ, λ, μ uz korišćenje indeksa. Dalje, umesto $|\kappa| * |x|$ i $|x| * |\kappa|$ ćemo pisati $\kappa * |x|$ i $|x| * \kappa$, pri čemu je $*$ ma koji od simbola $<, \leq, >, \geq, =$.

Lema 1.3.1

$$(\forall \alpha \geq \omega)(|\alpha| = |\alpha + 1|) \ .$$

Dokaz :

Neka je $\alpha \geq \omega$. Jedna od bijekcija između $\alpha + 1$ i α je definisana sa

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & , \ \xi = \alpha \\ \xi & , \ \xi \geq \omega \\ \xi + 1 & , \ \xi < \omega \ . \end{cases}$$

□

Teorema 1.3.4
$$\forall x \exists \kappa (\forall f : \kappa \longrightarrow x)(\text{“}f\text{nije 1–1”}) \ .$$

Posebno, najmanji takav kardinal zovemo i Hartogsovim brojem skupa x i označavamo ga sa $h(x)$.

Dokaz :
Neka je X proizvoljan beskonačan skup. Opisaćemo konstrukciju $h(X)$. Uočimo skup $X_{WO} = \{x \in P(X \times X) \mid \langle \mathrm{dom}(x), x\rangle \in \mathrm{WO}\}$. Za svako $x \in X_{WO}$ postoji jedinstveni ordinal α tako da je $\langle \mathrm{dom}(x), x\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$. Neka je

$$h(X) = \bigcup_{x \in X_{WO}} \alpha_x \ .$$

Obzirom da je X beskonačan, $h(X) \geq \omega$. Pokažimo da je $h(X)$ kardinal.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $x \in X_{WO}$ tako da je $|\alpha_x| = |h(X)|$. Neka je $f : \langle \mathrm{dom}(x), x\rangle \cong \langle \alpha_x, \in\rangle$ i neka je $g : \alpha_x \longrightarrow h(X)$ bijekcija. Sada je sa

$$uRv \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} g(f(u)) \in g(f(v)) \ , \ u, v \in \mathrm{dom}(x)$$

definisano dobro uređenje R na $\mathrm{dom}(x)$, pa $R \in X_{WO}$ i $\alpha_R = h(X)$. Međutim, kako je $h(X) \geq \omega$, važi $|h(X)| = |h(X) + 1|$, pa uz argumentaciju sasvim sličnu prethodnoj, postoji $S \in X_{WO}$ tako da je $\alpha_S = h(X) + 1$. Kontradikcija sa činjenicom da je $h(X) = \sup\{\alpha_x \mid x \in X_{WO}\}$.

Upravo opisana argumentacija se koristi u dokazu činjenice da je $h(X)$ najmanji kardinal koji zadovoljava uslove tvrđenja.

□

Posebno, za svaki ordinal α neka je

$$\alpha^+ =_{\mathrm{def}} h(\alpha) \ .$$

Posledica prethodne teoreme je činjenica da je klasa Card *kofinalna*, tj. neograničena u Ord, pa je samim tim prava klasa.

Uopšte, *kofinalnost* graničnog ordinala definišemo na sledeći način:

$$\mathrm{cf}\alpha =_{\mathrm{def}} \min\{\beta \mid (\exists f : \beta \longrightarrow \alpha)(\forall x \in \alpha)(\exists y \in \beta)(x < f(y))\} \ .$$

Iz same definicije neposredno sledi da je $\mathrm{cf}\alpha$ kardinal kao i da je $\mathrm{cfcf}\alpha = \mathrm{cf}\alpha$. Takođe, $\mathrm{cf}\alpha \leq \alpha$.

Za kardinal κ kažemo da je *regularan* ako je $\mathrm{cf}\kappa = \kappa$. U suprotnom za kardinal κ kažemo da je *singularan.* Primetimo da je za svaki granični ordinal α $\mathrm{cf}\alpha$ regularan kardinal.

Za kardinal κ kažemo da je *sledbenik* ako postoji kardinal λ tako da je $\kappa = \lambda^+$. U suprotnom za κ kažemo da je *granični* kardinal.

Alefe rekurzivno definišemo na sledeći način:

- $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$
- $\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta$, $\alpha = \bigcup \alpha$.

Dvostruke oznake za iste skupove ($\aleph_\alpha$ i ω_α) smo uveli zbog razlike u ordinalnoj i kardinalnoj aritmetici. Kad budemo koristili oznaku $\aleph_\alpha$ podrazumevaćemo kardinalnu aritmetiku, a kad budemo koristili oznaku ω_α podrazumevaćemo ordinalnu aritmetiku.

Transfinitnom indukcijom se lako pokazuje da za svaki ordinal α važi

$$\alpha \leq \aleph_\alpha \ .$$

Međutim, niz alefa ima proizvoljno velike fiksne tačke proizvoljno velike kofinalnosti (podsetimo, kofinalnost može da bude isključivo regularan kardinal veći do jednak ω).

Primera radi, neka je α proizvoljan ordinal i neka je λ regularan kardinal, $\lambda \geq \omega$. Transfinitnom rekurzijom po λ definišimo kardinal $\kappa > \alpha$ kofinalnosti λ na sledeći način:

- $\kappa_0 = \alpha^+$
- $\kappa_{\alpha+1} = \aleph_{\kappa_\alpha}$
- $\kappa_\alpha = (\bigcup_{\beta\in\alpha} \kappa_\beta)^+$, $\alpha = \bigcup \alpha$
- $\kappa = \bigcup_{\alpha\in\lambda} \kappa_\alpha$.

Sada je

$$\kappa = \bigcup_{\alpha\in\lambda} \kappa_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\lambda} \aleph_{\kappa_\alpha} = \aleph_\kappa \ .$$

Teorema 1.3.5

$$(\forall \kappa \geq \omega) \exists \alpha (\kappa = \aleph_\alpha) \ .$$

Dokaz :

Neka je κ proizvoljan beskonačan kardinal. Kako je $\kappa \leq \aleph_\kappa < \aleph_{\kappa+1}$, postoji najmanji ordinal α tako da je $\kappa < \aleph_\alpha$.

Ako bi α bio granični ordinal, onda bi za svako $\beta \in \alpha$ važilo $\aleph_\beta < \kappa$, odakle bi zbog tranzitivnosti κ i $\aleph_\alpha$ sledilo da je $\kappa = \aleph_\alpha$. Kontradikcija.

Dakle, $\alpha = \beta + 1$ i $\kappa \geq \aleph_\beta$. Kako je $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^+$, mora biti $\kappa = \aleph_\beta$.

□

Teorema 1.3.6

$$\forall \alpha (|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha) \ .$$

Dokaz :

Neka je $\Gamma : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ kanonska bijekcija. Uočimo klasu

$$\mathcal{A} = \{\alpha \mid \Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] = \omega_\alpha\} \ .$$

Dovoljno je pokazati da je $\mathcal{A} = \mathrm{Ord}$.

Neka je $\alpha \subseteq \mathcal{A}$. Na osnovu konstrukcije Γ neposredno sledi da je $\omega_\alpha \subseteq \Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha]$. Pretpostavimo da postoje $\xi, \eta \in \omega_\alpha$ tako da je $\omega_\alpha = \Gamma(\xi, \eta)$.

Neka je γ maksimum od ξ i η . Tada je $|\gamma| < \aleph_\alpha$, pa postoji $\beta \in \alpha$ tako da je $|\gamma| = \aleph_\beta$. No tada je $|\gamma \times \gamma| = \aleph_\beta$, pa zbog $\omega_\alpha \subseteq \Gamma[\gamma \times \gamma]$, mora biti $\aleph_\beta \geq \aleph_\alpha$. Kontradikcija.

Dakle, $\alpha \in \mathcal{A}$, pa je $\mathcal{A} = \mathrm{Ord}$.

□

1.4 Aksioma izbora

Aksioma izbora je, uz aksiomu ekstenzionalnosti, jedina aksioma teorije skupova koja se eksplicitno navodi u ostalim matematičkim disciplinama. Brojni su njeni ekvivalenti i posledice koje se koriste u raznim granama matematike. Mi ćemo istaći samo nekoliko ekvivalenata.

Aksioma izbora :

$$\forall X (\exists f : P(X) - \{0\} \longrightarrow X)(\forall x \in P(X) - \{0\})(f(x) \in x) \ .$$

Princip dobrog uređenja :

$$\forall x \exists \kappa (|x| = \kappa) \ .$$

Drugim rečima, svaki skup se može dobro urediti.

Zornova lema :

Ako u parcijalnom uređenju svaki lanac ima majorantu, onda to uređenje ima maksimalni element.

Hausdorfov stav maksimalnosti:

Svako parcijalno uređenje ima maksimalni lanac.

Princip dobrog uređenja trivijalno povlači aksiomu izbora. Da bi ilustrovali metodu dokazivanja pomenutih tvrđenja iz aksiome izbora, pokazaćemo princip dobrog uređenja.

Neka je X proizvoljan beskonačan skup i neka je $f : P(X) - \{0\} \longrightarrow X$ funkcija izbora. Transfinitnom indukcijom po $h(X)$ formirajmo niz x_α, $\alpha \in h(X)$ na sledeći način:

$$x_\alpha = \begin{cases} X & , \quad X - \{x_\beta \mid \beta \in \alpha\} = 0 \\ f(X - \{x_\beta \mid \beta \in \alpha\}) & , \quad X - \{x_\beta \mid \beta \in \alpha\} \neq 0 \ . \end{cases}$$

Kako nijedno preslikavanje iz $h(X)$ u X nije 1–1, postoji najmanji ordinal γ tako da je $x_\gamma = X$. Samim tim,

$$X = \{x_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$$

i $\gamma \in \mathrm{Card}$ i $|X| = |\gamma|$.

Uvedimo sledeće oznake:

- $[X]^\kappa =_{\mathrm{def}} \{x \subseteq X \mid |x| = \kappa\}$
- $[X]^{<\kappa} =_{\mathrm{def}} \{x \subseteq X \mid |x| < \kappa\}$
- $\kappa + \lambda =_{\mathrm{def}} |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$
- $\kappa \cdot \lambda =_{\mathrm{def}} |\kappa \times \lambda|$
- $\kappa^\lambda =_{\mathrm{def}} |{}^\lambda\kappa|$
- $\sum_{i\in I} \kappa_i =_{\mathrm{def}} |\bigcup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})|$
- $\prod_{i\in I} \kappa_i =_{\mathrm{def}} |\{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} \kappa_i \mid (\forall i \in I) f(i) \in \kappa_i\}|$.

Na osnovu teoreme 1.3.6 i Kantor–Šreder–Bernštajnove teoreme neposredno sledi da je za svaka dva ordinala α i β

$$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\alpha + \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\} \ .$$

Lako se proveravaju sledeća tvrđenja kardinalne aritmetike:

1. Neka je $f : I \longrightarrow I$ bijekcija. Tada :
   (a) $\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I} \kappa_{f(i)}$
   (b) $\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{i\in I} \kappa_{f(i)}$;
2. Neka je $A_j,\ j \in J$ particija skupa I. Tada je
   $\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{j\in J} \prod_{i\in A_j} \kappa_i$;
3. $\prod_{i\in I} \kappa^{\lambda_i} = \kappa^{\sum_{i\in I} \lambda_i}$
4. Neka je $\kappa_i > 1\ ,\ i \in I$. Tada je
   $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \kappa_i$;
5. Za svaki beskonačan kardinal κ je $2^\kappa = \kappa^\kappa$;
6. Neka je $\kappa \geq \lambda$ i neka je $\kappa \geq \omega$. Tada je $\kappa^\lambda = |[\kappa]^\lambda|$;
7. Neka je $\kappa_i > 0\ ,\ i \in I$ i neka je $\kappa = \sup\limits_{i\in I} \kappa_i = \bigcup\limits_{i\in I} \kappa_i$. Tada :

   (a) $\sum_{i\in I} \kappa_i = |I| \cdot \kappa$

(b) $\prod_{i\in I} \kappa_i = \kappa^{|I|}$.

Za kardinal κ kažemo da je *jako granični* (strong limit) ako za svako $\lambda < \kappa$ važi $2^\lambda < \kappa$. Primeri jako graničnih kardinala su $\beth_\alpha$, za granični ordinal α. Pritom se *beti* rekurzivno definišu na sledeći način:

- $\beth_0 = \aleph_0$
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$
- $\beth_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \beth_\beta$, $\alpha = \bigcup \alpha$.

Primetimo da je $\beth_\alpha = |V_{\omega+\alpha}|$. Posebno, kardinal

$$\mathfrak{c} =_{\text{def}} \beth_1 = |P(\omega)|$$

zovemo i *kontinuumom* .

Kontinuum hipoteza (CH):

$$\beth_1 = \aleph_1 \ .$$

Generalisana kontinuum hipoteza (GCH) :

$$\forall\alpha(\beth_\alpha = \aleph_\alpha) \ .$$

Za sada samo istaknimo činjenicu da je GCH nezavisna u odnosu na ZFC.

Za kardinal κ kažemo da je *nedostižan* (inaccessible) ako je neprebrojiv ($\kappa > \aleph_0$), regularan i jako granični. Sa IC (Inaccessible Cardinal) označimo sledeću rečenicu:

$$(\exists\kappa > \aleph_0)(\kappa = \text{cf}\kappa \wedge (\forall\lambda < \kappa)(2^\lambda < \kappa)) \ .$$

Ako je κ nedostižan kardinal, onda se lako proverava da je $\langle V_\kappa, \in\rangle \models \text{ZFC}$. Samim tim,

$$\text{ZFC} + \text{IC} \vdash \text{Con(ZFC)} \ ,$$

pa ako je teorija ZFC neprotivrečna, po Gedelovim teoremama nepotpunosti sledi da

$$\text{ZFC} \nvdash \text{IC} \ .$$

Za kardinal κ kažemo da je *slabo nedostižan* (weakly inaccessible) ako je neprebrojiv, regularan i granični. Sa WIC označimo rečenicu

$$(\exists\kappa > \aleph_0)(\kappa = \text{cf}\kappa) \ .$$

Ako je κ slabo nedostižan kardinal, onda je $\langle L_\kappa, \in\rangle \models$ ZFC (ovo je posledica činjenice da su u konstruktibilnom univerzumu L pojmovi slabo nedostižnog i nedostižnog kardinala ekvivalentni). Samim tim,

$$\mathrm{ZFC} + \mathrm{WIC} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \ ,$$

odakle, uz neprotivrečnost ZFC, po Gedelovim teoremama nepotpunosti sledi da

$$\mathrm{ZFC} \nvdash \mathrm{WIC} \ .$$

Teorema 1.4.1 (Kenigova lema) *Neka je $\kappa_i < \lambda_i$, $i \in I$. Tada je*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i \ .$$

Dokaz :

Neka je $\lambda = \bigcup_{i\in I} \lambda_i$ i neka je $P = \{f : I \longrightarrow \lambda \mid (\forall i \in I) f(i) \in \lambda_i\}$. Dalje, uočimo proizvoljno $F : \bigcup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\}) \longrightarrow P$. Dovoljno je pokazati da F nije "na".

Za svako $i \in I$ neka je $F_i = \pi_j \circ F$. Kako je za svako $i \in I$ $\kappa_i < \lambda_i$, za svako $i \in I$ postoji $a_i \in \lambda_i - F_i[\kappa_i \times \{i\}]$. Lako se proverava da funkcija $\langle a_i \mid i \in I\rangle$ ne pripada $\mathrm{rng}(F)$.

$\square$

Navedimo neke posledice Kenigove leme:

1. $\forall x(|x| < |P(x)|)$

   Kako je $1 < 2$, po Kenigovoj lemi sledi da je

   $$|x| = \sum_{i\in x} 1 < \prod_{i\in x} 2 = 2^{|x|} = |P(x)| \ .$$

2. $\forall \alpha(\mathrm{cf}\, 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha)$

   Neka je κ_i , $i \in \aleph_\alpha$ niz kardinala manjih od $2^{\aleph_\alpha}$. Tada je

   $$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} 2^{\aleph_\alpha} = (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} \ ,$$

   odakle sledi da je $\mathrm{cf}\, 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$.

3. $\forall\alpha\forall\beta(\mathrm{cf}\, \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} > \aleph_\beta)$

4. $\forall\alpha(\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha)$.

Lema 1.4.1 *Neka je $\kappa > \lambda \geq \aleph_0$ i neka je $[\kappa]^{\leq\lambda}$ skup svih podskupova kardinala κ kardinalnosti manje do jednake λ. Tada važi*

$$\kappa = \lambda^+ \leftrightarrow (\exists f : \kappa \longrightarrow [\kappa]^{\leq\lambda})(\forall \alpha, \beta \in \kappa)(\alpha \in f(\beta) \ \vee \ \beta \in f(\alpha)) \ .$$

Napomena:
Ovo tvrđenje je inspirisano sledećim ekvivalentom negacije kontinuum hipoteze:

$$(\forall f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega})(\exists x, y \in \mathbb{R})(x \notin f(y) \wedge y \notin f(x)) .$$

Dokaz :
$\Rightarrow$: Neka je $\kappa = \lambda^+$. Tada funkcija $\alpha \longrightarrow \alpha + 1$, $\alpha \in \kappa$ zadovoljava uslove tvrđenja.
$\Leftarrow$: Neka postoji funkcija $f : \kappa \longrightarrow [\kappa]^{\leq \lambda}$ tako da za svako $\alpha, \beta \in \kappa$ važi

$$\alpha \in f(\beta) \vee \beta \in f(\alpha) .$$

Obzirom da je $\kappa > \lambda$, mora biti $\lambda^+ \subseteq \kappa$. Sada je

$$\kappa = \bigcup_{\alpha \in \lambda^+} f(\alpha) ,$$

jer bi u suprotnom za proizvoljno $\beta \in \kappa - \bigcup_{\alpha \in \lambda^+} f(\alpha)$ važilo $\lambda^+ \subseteq f(\beta)$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je $|f(\beta)| \leq \lambda$.
Samim tim,

$$\kappa = |\bigcup_{\alpha \in \lambda^+} f(\alpha)| \leq \lambda^+ \cdot \lambda = \lambda^+ ,$$

a kako je $\kappa \geq \lambda^+$, mora biti $\kappa = \lambda^+$.

$\square$

1.5 Stacionarni skupovi

Neka je κ regularan i neprebrojiv kardinal. Za $C \subseteq \kappa$ kažemo da je *zatvoren i neograničen* (kratko : C je CUB) ako je zatvoren u intervalnoj topologiji na κ indukovanoj relacijom $\in$ (bazu topologije čine otvoreni intervali)i ako je neograničen u smislu $\in$, tj. za svako $\alpha \in \kappa$ postoji $\beta \in C$ tako da $\alpha \in \beta$.

U vezi sa topologijom na κ, koristeći uopšteni limes imamo sledeću karakterizaciju zatvorenih skupova u κ :

$$\text{“}C \subseteq \kappa \text{ je zatvoren”} \leftrightarrow (\forall \alpha \in \kappa)(\forall f : \alpha \longrightarrow \kappa)(f[\alpha] \subseteq C \rightarrow \bigcup f[\alpha] \in C) .$$

Lema 1.5.1 *Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal. Tada je presek $< \kappa$ CUB–ova takođe CUB.*

Dokaz :
Obzirom da je presek proizvoljne familije zatvorenih skupova zatvoren skup, ostaje da se pokaže neograničenost. Dalje, glavni slučaj predsatvlja dokaz neograničenosti preseka dva CUB–a. Naime, koristeći regularnost κ, lako se pravi odgovarajuća modifikacija dokaza na opšti slučaj.

Neka su C i D CUB–ovi u κ i neka je $\alpha \in \kappa$ proizvoljno. Obzirom da su C i D kofinalni, postoje nizovi β_n , $n \in \omega$ iz C i γ_n , $n \in \omega$ iz D tako da je

$$\alpha < \beta_0 < \gamma_0 < \beta_1 < \gamma_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \cdots \ .$$

Samim tim, $\alpha < \bigcup_{n\in\omega} \beta_n = \bigcup_{n\in\omega} \gamma_n = \beta$, a kako su C i D zatvoreni, $\beta \in C \cap D$.

□

Neka su X_α , $\alpha \in \kappa$ podskupovi kardinala κ (nadalje ćemo podrazumevati da je κ neprebrojiv i regularan kardinal). *Dijagonalni presek* skupova X_α , $\alpha \in \kappa$ definišemo na sledeći način:

$$\Delta_{\alpha\in\kappa} X_\alpha =_{\text{def}} \{\xi \in \kappa \mid \xi \in \bigcap_{\alpha\in\xi} X_\alpha\} \ .$$

Primetimo da je $\Delta_{\alpha\in\kappa} X_\alpha = \Delta_{\alpha\in\kappa} \bigcap_{\xi\leq\alpha} X_\xi$.

Lema 1.5.2 *Familija CUB–ova u κ je zatvorena za dijagonalne preseke.*

Dokaz :

Neka su C_α , $\alpha \in \kappa$ CUB–ovi u κ. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je za $\alpha < \beta$ $C_\alpha \supseteq C_\beta$. Dalje, neka je $C = \Delta_{\alpha\in\kappa} C_\alpha$. Pokažimo da je C CUB.

(1): C je zatvoren :

Neka je ξ_α , $\alpha \in \lambda < \kappa$ niz u C i neka je $\xi = \bigcup_{\alpha\in\lambda} \xi_\alpha$. Uočimo proizvoljno $\gamma \in \xi$. Kako je C_α , $\alpha \in \kappa$ opadajuća familija, za svako $\gamma < \alpha < \lambda$ važi

$$\xi_\alpha \in \bigcap_{\beta\in\xi_\gamma} C_\beta \subseteq C_\gamma \ ,$$

pa, kako je C_γ zatvoren, $\xi \in C_\gamma$. Obzirom da ovo važi za svako $\gamma < \lambda$, mora biti $\xi \in \bigcap_{\alpha\in\lambda} C_\alpha$, tj. $\xi \in C$. Dakle, C je zatvoren.

(2): C je neograničen :

Neka je $\alpha \in \kappa$ proizvoljno i neka je $f : P(\kappa) - \{0\} \longrightarrow \kappa$ funkcija izbora. Formirajmo rekurzivno niz β_n , $n \in \omega$ na sledeći način:

- $\beta_0 = f(C_0 - (\alpha + 1))$
- $\beta_{n+1} = f(C_{\beta_{n+1}} - (\beta_n + 1))$.

Neka je $\beta = \bigcup_{n\in\omega} \beta_n$. Sasvim slično kao pod (1) se pokazuje da

$$\beta \in \bigcap_{n\in\omega} C_{\beta_n} = \bigcap_{\alpha\in\beta} C_\alpha \ ,$$

tj. $\beta \in C$ i $\beta > \alpha$.

□

Neka je $C = \{\alpha \in \kappa \mid \alpha = \bigcup \alpha\}$. Obzirom da je $C = \Delta_{\alpha\in\kappa}[\alpha + 2, \kappa)$, C je CUB.

Za skup $S \subseteq \kappa$ kažemo da je *stacionaran* ako seče sve CUB-ove u κ. U protivnom za skup S kažemo da je *tanak*.

Primera radi, svaki CUB je stacionaran. Takođe, presek stacionarnog skupa i CUB–a je stacionaran skup. Kao primer skupa koji je stacionaran a nije CUB navedimo skup svih ordinala u κ kofinalnosti ω, pri čemu je $\kappa > \aleph_1$.

Primetimo da za svaki stacionaran $S \subseteq \kappa$ važi $|S| = \kappa$.

Za funkciju $f : S \longrightarrow \kappa$ kažemo da je *regresivna* na stacionarnom $S \subseteq \kappa$ ako $(\forall \alpha \in S - \{0\}) f(\alpha) < \alpha$.

Teorema 1.5.1 (Fodor) *Neka je funkcija $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ regresivna na stacionarnom skupu $S \subseteq \kappa$. Tada postoji stacionaran skup $S_1 \subseteq S$ na kome je funkcija f konstantna.*

Dokaz :

Pretpostavimo suprotno. Tada je za svako $\gamma \in \kappa$ skup

$$A_\gamma = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma\}$$

tanak. Izaberimo CUB C_γ tako da $A_\gamma \cap C_\gamma = 0$. Po prethodnoj lemi je $C = \Delta_{\gamma\in\kappa} C_\gamma$ takođe CUB.

Neka je $S_1 = S \cap C$. Primetimo da je S_1 stacionaran skup jer je presek stacionarnog skupa i CUB–a.

Neka je $\alpha > 0$ iz S_1 proizvoljno. Tada $\alpha \in \bigcap_{\gamma\in\alpha} C_\gamma$ (jer je $S_1 \subseteq C$), odakle neposredno sledi da je za svako $\gamma \in \alpha$ $f(\gamma) \neq \gamma$, pa mora biti $f(\gamma) \geq \gamma$. Međutim, ovo je u kontradikciji sa činjenicom da je $S_1 \subseteq S$ i da je funkcija f regresivna na S.

□

Posledica 1.5.1 *Postoji κ disjunktnih stacionarnih skupova u κ.*

Napomena :

Ako je A_i , $i \in I$ familija nepraznih disjunktnih skupova u κ, onda u κ imamo bar $|I|$ različitih elemenata (iz svakog od skupova A_i izaberemo po jedan), odakle sledi da je $|I| \leq \kappa$.

Dokaz :

Neka je W skup svih ordinala iz κ kofinalnosti ω. Naravno, W je stacionaran skup. Za svako $\alpha \in W$ izaberimo rastući niz $\xi_{n\alpha}$, $n \in \omega$ iz κ tako da je $\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \xi_{n\alpha}$. Pokažimo sledeće pomoćno tvrđenje:

(1) Postoji $m \in \omega$ tako da je za svako $\beta \in \kappa$ skup

$$W_\beta = \{\alpha \in W \mid \xi_{m\alpha} \geq \beta\}$$

stacionaran.

Pretpostavimo suprotno. Tada za svako $n \in \omega$ postoji $\beta_n \in \kappa$ tako da je skup $\{\alpha \in W \mid \xi_{n\alpha} \geq \beta_n\}$ tanak. Neka je $\beta = \bigcup_{n\in\omega} \beta_n$.
Tada je za svako $n \in \omega$ skup $A_n = \{\alpha \in W \mid \xi_{n\alpha} \geq \beta\}$ tanak. Međutim, $A_n \supseteq W \cap [\beta, \kappa)$, odakle bi sledilo da je A_n stacionaran. Kontradikcija.

Neka je $m \in \omega$ svedok za (1). Definišimo funkciju $f : W \longrightarrow \kappa$ na sledeći način:

$$f(\alpha) = \xi_{m\alpha} \ .$$

Sada je f regresivna funkcija na svakom od skupova W_β, pa po Fodorovoj teoremi za svako $\beta \in \kappa$ postoji stacionaran $S_\beta \subseteq W_\beta$ na kome je f konstantna. Neka je $\{\gamma_\beta\} = f[S_\beta]$. Primetimo da je $\beta_\beta \geq \beta$.
Niz γ_β , $\beta \in \kappa$ je kofinalan u regularnom kardinalu κ, pa među skupovima S_β mora biti κ disjunktnih.

□

Za neglavni filter F nad κ kažemo da je *normalan* ako je zatvoren za dijagonalne preseke. Za neglavni filter F nad κ kažemo da je *κ–kompletan* ako je zatvoren za preseke $< \kappa$ mnogo svojih elemenata.

Teorema 1.5.2 *Neka je F normalan filter nad κ koji sadrži sve intervale oblika $[\alpha, \kappa)$, $\alpha \in \kappa$. Tada važi:*

- *F je κ–kompletan ;*
- *F sadrži sve CUB–ove .*

Dokaz :
Neka je $\lambda < \kappa$ i neka je X_α , $\alpha \in \lambda$ familija skupova u F. Definišimo skupove A_α , $\alpha \in \kappa$ na sledeći način:

$$A_\alpha = \begin{cases} X_\alpha \cap [\lambda, \kappa) & , \quad \alpha < \lambda \\ [\lambda, \kappa) & , \quad \lambda \leq \alpha < \kappa \ . \end{cases}$$

Sada je $\bigcap_{\alpha\in\lambda} X_\alpha \supseteq \Delta_{\alpha\in\kappa} A_\alpha$, pa $\bigcap_{\alpha\in\lambda} X_\alpha \in F$.

Neka je C_0 skup svih graničnih ordinala u κ. Kako je

$$C_0 = \Delta_{\alpha\in\kappa}[\alpha + 2, \kappa) \ ,$$

C_0 je CUB i $C_0 \in F$. Dalje, neka je C proizvoljan CUB u κ i neka je ξ_α , $\alpha \in \kappa$ rastuća numeracija skupa C. Samim tim, za svako $\alpha \in \kappa$ je $\alpha \leq \xi_\alpha$. Sada skup

$$D = C_0 \cap \Delta_{\alpha\in\kappa}[\xi_\alpha + 1, \kappa)$$

pripada filteru F .

Neka je $\beta \in D$ proizvoljno. S jedne strane, zbog $D \subseteq C_0$ je $\beta = \bigcup \beta$. S druge strane, kako $\beta \in \Delta_{\alpha\in\kappa}[\xi_\alpha + 1, \kappa)$, po definiciji dijagonalnog preseka i činjenici da je β granični ordinal sledi da

$$\beta \in \bigcap_{\alpha\in\beta} [\xi_\alpha + 1, \kappa) = [\xi_\beta, \kappa) \ ,$$

pa mora biti $\beta = \xi_\beta$. Dakle, $D \subseteq C$, pa $C \in F$.

□

Za nedostižan kardinal κ kažemo da je *Maloov* ako je skup regularnih kardinala u κ stacionaran u κ.

Teorema 1.5.3 *Neka je κ Maloov kardinal. Tada je κ κ–ti nedostižan kardinal.*

Dokaz :
Neka je $C = \{\lambda < \kappa \mid \text{“}\lambda \text{ je jako granični”}\}$. Pokažimo da je C CUB.

Obzirom da je unija jako graničnih kardinala jako granični kardinal, C je zatvoren.

Neka je $\alpha \in \kappa$ proizvoljno. Konstruišimo rekurzivno kardinal $\lambda > \alpha$ na sledeći način:

- $\lambda_0 = \alpha^+$
- $\lambda_{n+1} = 2^{\lambda_n}$
- $\lambda = \bigcup_{n\in\omega} \lambda_n$.

Iz konstrukcije neposredno sledi da je λ jako granični i da je $\lambda > \alpha$, a kako je κ nedostižan, mora biti $\lambda < \kappa$. Samim tim, C je neograničen.

Obzirom da je κ Maloov, skup S svih regularnih kardinala u κ je stacionaran u κ, pa je i skup S_1 svih nedostižnih kardinala u κ takođe stacionaran, jer je $S_1 = S \cap C$.

Samim tim, $|S_1| = \kappa$, odakle neposredno sledi da je κ κ–ti nedostižan kardinal.

□

Na kraju ovog odeljka pokažimo da najmanja fiksna tačka niza nedostižnih kardinala nije Maloov kardinal.

Neka je κ najmanja fiksna tačka niza nedostižnih kardinala, S skup svih regularnih kardinala u κ i neka je C skup svih jako graničnih kardinala u κ.

Ako bi S bio stacionaran, onda bi i $S_1 = S \cap C$ bio stacionaran. Neka je λ_α , $\alpha \in \kappa$ rastuća numeracija skupa S_1. Tada je sa

$$f(\lambda_\alpha) = \alpha$$

definisana regresivna funkcija na stacionarnom skupu S_1, pa po Fodorovoj teoremi postoji stacionaran S_2 na kome je f konstantna. Međutim, f je 1–1, pa mora biti $|S_2| = 1$. Kontradikcija.

Dakle, S nije stacionaran u κ, pa κ nije Maloov.

1.6 Kontinuum funkcija

Pod *kontinuum funkcijom* podrazumevamo funkciju

$$\aleph_\alpha \mapsto 2^{\aleph_\alpha} \ .$$

Za kontinuum funkciju imamo sledeća ograničenja:

- $\kappa < \lambda \rightarrow 2^\kappa \leq 2^\lambda$
- $\mathrm{cf}\, 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$.

Za beskonačan kardinal λ i proizvoljan kardinal κ neka je

$$\kappa^{<\lambda} =_{\mathrm{def}} \bigcup_{\mu<\lambda} \kappa^\mu \ .$$

Lema 1.6.1 *Neka je* $\kappa \geq \aleph_0$. *Tada je* $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\kappa}$.

Dokaz :

Kako je $2^\kappa \geq 2^{<\kappa}$, to je $2^\kappa = (2^\kappa)^{\mathrm{cf}\kappa} \geq (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\kappa}$. Ostaje da pokažemo obratnu nejednakost.

Neka je $\kappa = \sum_{i\in\mathrm{cf}\kappa} \kappa_i$, $\kappa_i < \kappa$. Tada je

$$2^\kappa = 2^{\sum_{i\in\mathrm{cf}\kappa}\kappa_i} = \prod_{i\in\mathrm{cf}\kappa} 2^{\kappa_i} \leq \prod_{i\in\mathrm{cf}\kappa} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\kappa} \ .$$

□

Teorema 1.6.1 (Bukovski, Hehler) *Neka je* $\kappa > \mathrm{cf}\kappa$ *i neka je kontinuum funkcija skoro konstantna na* κ, *tj. neka postoji* $\mathrm{cf}\kappa \leq \lambda_0 < \kappa$ *tako da je za svako* $\lambda_0 \leq \lambda < \kappa$ *važi* $2^\lambda = 2^{\lambda_0}$. *Tada je* $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.

Dokaz :

S jedne strane,

$$2^{<\kappa} = \sum_{\lambda_0\leq\lambda<\kappa} 2^\lambda = \sum_{\lambda_0\leq\lambda<\kappa} 2^{\lambda_0} = \kappa \cdot 2^{\lambda_0} \ .$$

S druge strane, neka je κ_α , $\alpha \in \mathrm{cf}\kappa$ rastući niz kardinala manjih od κ tako da je $\kappa = \sum_{\alpha\in\mathrm{cf}\kappa} \kappa_\alpha$. Tada je

$$\kappa = \sum_{\alpha\in\mathrm{cf}\kappa} \kappa_\alpha \leq \sum_{\alpha\in\mathrm{cf}\kappa} 2^{\kappa_\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathrm{cf}\kappa} 2^{\lambda_0} = \mathrm{cf}\kappa \cdot 2^{\lambda_0} = 2^{\lambda_0} \ .$$

Dakle, $2^{<\kappa} = 2^{\lambda_0}$. Sada je

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\kappa} = 2^{\lambda_0 \cdot \mathrm{cf}\kappa} = 2^{\lambda_0} = 2^{<\kappa} \ .$$

□

Primetimo da je zbog monotonosti kontinuum funkcije uslov skoro konstantnosti ekvivalentan konstantnosti kontinuum funkcije na proizvoljnom kofinalnom skupu u κ.

Takođe, skoro konstantnost kontinuum funkcije na κ je ekvivalentna sa egzistencijom stacionarnog $S \subseteq \mathrm{cf}\kappa$ i rastućeg kofinalnog preslikavanja $f : \mathrm{cf}\kappa \longrightarrow \kappa$ tako da je kontinuum funkcija konstantna na $f[S]$.

Posledica 1.6.1 *Neka je ordinal β takav da važi*

$$\forall\alpha(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\beta}) \ .$$

Tada $\beta \in \omega$.

Dokaz :

Pretpostavimo da je $\beta \geq \omega$. Obzirom da je $\beta + \beta > \beta$, postoji

$$\alpha = \min\{\gamma \mid \gamma + \beta > \beta\} \ .$$

Naravno, mora biti $\alpha = \bigcup\alpha$ i $\omega \leq \alpha \leq \beta$ i za svako $\xi \in \alpha$ važi $\xi + \beta = \beta$. Takođe, $\mathrm{cf}\aleph_{\alpha+\alpha} = \mathrm{cf}\alpha$. Sada je za svako $\xi \in \alpha$

$$2^{\aleph_{\alpha+\xi}} = \aleph_{\alpha+\xi+\beta} = \aleph_{\alpha+\beta} = 2^{\aleph_\alpha} \ ,$$

odakle sledi da je kontinuum funkcija skoro konstantna na $\aleph_{\alpha+\alpha}$. Sada na osnovu Bukovski–Hehler teoreme sledi da je

$$2^{\aleph_{\alpha+\alpha}} = 2^{<\aleph_{\alpha+\alpha}} = 2^{\aleph_\alpha} \ .$$

Međutim, kako je $\alpha + \beta > \beta$ to je

$$2^{\aleph_{\alpha+\alpha}} = \aleph_{\alpha+\alpha+\beta} > \aleph_{\alpha+\beta} = 2^{\aleph_\alpha} \ .$$

Kontradikcija. Dakle, mora biti $\beta \in \omega$.

□

Lema 1.6.2 *Neka je $\aleph_\beta < \mathrm{cf}\aleph_\alpha$. Tada je*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\gamma\in\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \ .$$

Dokaz :

Kako je $\aleph_\beta < \mathrm{cf}\aleph_\alpha$, to je svaka funkcija $f : \aleph_\beta \longrightarrow \aleph_\alpha$ ograničena, tj. postoji $\gamma \in \alpha$ tako da je $f[\aleph_\beta] \subseteq \aleph_\gamma$. Samim tim, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \sum_{\gamma\in\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. Kako obratna nejednakost trivijalno važi, imamo tvrđenje.

□

Posledica 1.6.2 (Hausdorfova formula)

$$\forall\alpha\forall\beta(\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}) \ .$$

Dokaz :

Treba pokazati da je $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$. Ako je $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$, onda je

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\beta} \ .$$

Ako je $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\beta$, onda je po prethodnoj lemi

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \sum_{\gamma\in\alpha+1} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} \ .$$

□

Lema 1.6.3 *Neka je κ granični kardinal i neka je $\lambda \geq \mathrm{cf}\kappa$. Tada je*

$$\kappa^\lambda = (\sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{\mathrm{cf}\kappa} \ .$$

Dokaz :

Neka je κ_i , $i \in \mathrm{cf}\kappa$ rastući niz kardinala manjih od κ tako da je $\kappa = \sum_{i\in\mathrm{cf}\kappa} \kappa_i$. Tada je

$$\kappa \leq \sum_{i\in\mathrm{cf}\kappa} \kappa_i^\lambda \leq \prod_{i\in\mathrm{cf}\kappa} \kappa_i^\lambda \leq \prod_{i\in\mathrm{cf}\kappa} \sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda = (\sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{\mathrm{cf}\kappa} \ .$$

S druge strane,

$$(\sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{\mathrm{cf}\kappa} \leq (\kappa^\lambda)^{\mathrm{cf}\kappa} = \kappa^\lambda \ .$$

□

Teorema 1.6.2 *Neka je β proizvoljan ordinal. Tada za svaki ordinal α važi:*

(1) $\alpha \leq \beta \to \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$

(2) $\alpha > \beta \wedge \big((\exists\gamma \in \alpha)\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha \to (\exists\gamma \in \alpha)\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}\big)$

(3) $\alpha > \beta \wedge (\forall\gamma \in \alpha)\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$. *Tada :*

(3.1) $\aleph_\alpha = \mathrm{cf}\aleph_\alpha \vee \mathrm{cf}\aleph_\alpha > \aleph_\beta \to \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$

(3.2) $\mathrm{cf}\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha \to \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\aleph_\alpha}$.

Dokaz :

Primetimo da je (1) ranije dokazano, tako da ostaje da pokažemo (2) i (3).
(2): Neka je $\alpha > \beta$ i neka je $\gamma \in \alpha$ tako da je $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha$. Tada je

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq (\aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} .$$

(3): Neka je $\alpha > \beta$ i neka je za svako $\gamma \in \alpha$ $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$. Ako je $\alpha = \gamma + 1$, onda je po Hausdorfovoj formuli

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha .$$

Stoga je od interesa slučaj kada je $\alpha = \bigcup \alpha$.

(3.1): Neka je $\mathrm{cf}\aleph_\alpha > \aleph_\beta$. Tada je

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\gamma\in\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leq \sum_{\gamma\in\alpha} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha .$$

(3.2): Neka je $\mathrm{cf}\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha$. Tada je

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = (\sup_{\gamma\in\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{\mathrm{cf}\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\aleph_\alpha} .$$

□

Posledica 1.6.3 *Neka važi GCH. Tada je*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & , \quad \aleph_\beta < \mathrm{cf}\aleph_\alpha \\ \aleph_{\alpha+1} & , \quad \mathrm{cf}\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha \\ \aleph_{\beta+1} & , \quad \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \end{cases} .$$

Dokaz :

Obzirom na prethodnu teoremu i GCH, treba samo pokazati da za za svaki ordinal α važi

$$\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} .$$

Primetimo da prethodne jednakosti važe kad god je $\aleph_\alpha$ regularan. Stoga ostaje da proverimo slučaj kada je $\aleph_\alpha > \mathrm{cf}\aleph_\alpha$.

Obzirom na GCH, tada za svako $\beta \in \alpha$ važi $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$, pa je samim tim $\aleph_\alpha = 2^{<\aleph_\alpha}$. Sada je $2^{\aleph_\alpha} = (2^{<\aleph_\alpha})^{\mathrm{cf}\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\aleph_\alpha}$.

□

Ako je κ jako granični, onda je $2^{<\kappa} = \kappa$, pa je samim tim i $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\kappa} = \kappa^{\mathrm{cf}\kappa}$. Ako je κ nedostižan kardinal, onda je na osnovu teoreme 1.6.2 za svako $\lambda < \kappa$ $\kappa^\lambda = \kappa$, odakle sledi da je $\kappa^{<\kappa} = \kappa = 2^{<\kappa}$.

Najzad, ako je κ slabo nedostižan kardinal i nije nedostizan, onda postoji $\lambda < \kappa$ tako da je $2^\lambda \geq \kappa$. Samim tim, $\kappa^{<\kappa} \leq (2^\lambda)^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$, odakle, obzirom da obratna nejednakost trivijalno važi, sledi da je $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$.

1.7 Silverova teorema

Neka je κ neprebrojiv regularan kardinal. Za funkcije $f, g : \kappa \longrightarrow V$ kažemo da su *skoro disjunktne* ako je $|\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}| < \kappa$. Posebno, ako su funkcije f i g skoro disjunktne na κ, onda za svaki stacionaran $S \subseteq \kappa$ važi

$$|\{\alpha \in S \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}| < |S| = \kappa \ .$$

Lema 1.7.1 *Neka je $\kappa = \mathrm{cf}\kappa > \omega$, γ ordinal takav da je $\aleph_{\gamma+\kappa} > \kappa$ i neka je za svako $\alpha \in \kappa$ $\aleph^{\kappa}_{\gamma+\alpha} < \aleph_{\gamma+\kappa}$. Dalje, neka je $X \subseteq \prod_{\alpha\in\kappa} A_\alpha$ familija skoro disjunktnih funkcija na κ tako da je skup $\{\alpha \in \kappa \mid |A_\alpha| \leq \aleph_{\gamma+\alpha}\}$ stacionaran u κ. Tada je $|X| \leq \aleph_{\gamma+\kappa}$.*

Dokaz :

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je skup

$$S_0 = \{\alpha \in \kappa \mid A_\alpha \subseteq \aleph_{\gamma+\alpha}\}$$

stacionaran u κ. Dalje, kako je skup C svih graničnih ordinala u κ CUB, to je skup $S = S_0 \cap C$ stacionaran u κ.

Prvo pokažimo da za svako $f \in X$ postoji stacionaran $S_f \subseteq S$ tako da je funkcija f ograničena na S_f. Neka je $f \in X$ proizvoljno. Tada za svako $\alpha \in S$ važi $f(\alpha) \in \aleph_{\gamma+\alpha}$, pa kako je α granični ordinal, postoji $\beta \in \alpha$ tako da je $f(\alpha) \in \aleph_{\gamma+\beta}$. Neka je

$$\overline{f}(\alpha) = \min\{\beta \in \alpha \mid f(\alpha) \in \aleph_{\gamma+\beta}\} \ , \ \alpha \in S \ .$$

Funkcija $\overline{f}$ je regresivna na S, pa po Fodorovoj teoremi postoji stacionaran $S_f \subseteq S$ na kome je funkcija $\overline{f}$ konstantna. Samim tim je funkcija f ograničena na S_f, jer je za svako $\alpha \in S_f$ $f(\alpha) < \overline{f}(\alpha)$ i $\overline{f}$ je konstantna na S_f.

Primetimo da je

$$|X| = |\{\langle S_f, f|_{S_f}\rangle \mid f \in X\}| \ ,$$

jer je X familija skoro disjunktnih funkcija i skupovi S_f su stacionarni. Obzirom da je za svako $f \in X$ $S_f \subseteq S$ i funkcija $f|_{S_f}$ je ograničena, to je

$$|X| \leq |Y| \ ,$$

pri čemu je $Y = \{h \mid \mathrm{fun}(h) \wedge \mathrm{dom}(h) \subseteq S \wedge \mathrm{rng}(h) \subseteq \aleph_{\gamma+\kappa} \wedge |\mathrm{rng}(h)| < \aleph_{\gamma+\kappa}\}$. Kako je

$$|P(S)| = 2^\kappa \leq \aleph^\kappa_\gamma < \aleph_{\gamma+\kappa}\aleph_{\gamma+\kappa}$$

i kako je

$$|Y| = 2^\kappa \cdot \sum_{\alpha\in\kappa} \aleph^\kappa_{\gamma+\alpha} \leq \aleph_{\gamma+\kappa} \cdot \sum_{\alpha\in\kappa} \aleph_{\gamma+\kappa} = \aleph_{\gamma+\kappa} \ ,$$

to je $|X| \leq \aleph_{\gamma+\kappa}$.

□

Lema 1.7.2 *Neka je* $\kappa = \mathrm{cf}\kappa > \omega$, γ *ordinal takav da je* $\aleph_{\gamma+\kappa} > \kappa$ *i neka je za svako* $\alpha \in \kappa$ $\aleph_{\gamma+\alpha}^{\kappa} < \aleph_{\gamma+\kappa}$. *Dalje, neka je* $X \subseteq \prod_{\alpha\in\kappa} A_\alpha$ *familija skoro disjunktnih funkcija na* κ *tako da je skup* $\{\alpha \in \kappa \mid |A_\alpha| \leq \aleph_{\gamma+\alpha+1}\}$ *stacionaran u* κ. *Tada je* $|X| \leq \aleph_{\gamma+\kappa+1}$.

Dokaz :

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je skup

$$S_0 = \{\alpha \in \kappa \mid A_\alpha \subseteq \aleph_{\gamma+\alpha}\}$$

stacionaran u κ. Za proizvoljno $f \in X$ i stacionaran $S \subseteq S_0$ neka je

$$X_{fS} = \{g \in X \mid (\forall \alpha \in S) g(\alpha) \leq f(\alpha)\} \ .$$

Obzirom da je S stacionaran i da je X familija skoro disjunktnih funkcija, i X_{fS} je familija skoro disjunktnih funkcija.

Dalje, neka je

$$B_\alpha = \begin{cases} A_\alpha & , \ \alpha \in \kappa - S \\ f(\alpha)+1 & , \ \alpha \in S \ . \end{cases}$$

Kako za svako $\alpha \in S$ $f(\alpha)+1 \in \aleph_{\gamma+\alpha+1}$, to za svako $\alpha \in S$ važi $|B_\alpha| \leq \aleph_{\gamma+\alpha}$. Samim tim, $X_{fS} \subseteq \prod_{\alpha\in\kappa} B_\alpha$ i $S = \{\alpha \in \kappa \mid |B_\alpha| \leq \aleph_{\gamma+\alpha}\}$, odakle po prethodnoj lemi sledi da je

$$|X_{fS}| \leq \aleph_{\gamma+\kappa} \ .$$

Za proizvoljno $f \in X$ neka je

$$X_f = \bigcup \{X_{fS} \mid \text{“}S \subseteq S_0 \text{ je stacionaran”}\} \ .$$

Sada je

$$|X_f| \leq 2^{|S_0|} \cdot \aleph_{\gamma+\kappa} \leq \aleph_\gamma^\kappa \cdot \aleph_{\gamma+\kappa} = \aleph_{\gamma+\kappa} \ .$$

Da bi dokazali tvrđenje, dovoljno je pokazati da postoje $\beta \leq \aleph_{\gamma+\kappa+1}$ i funkcije f_α , $\alpha \in \beta$ iz X tako da je

$$X = \bigcup \{X_{f_\alpha} \mid \alpha \in \beta\} \ .$$

Samim tim, biće $|X| \leq \aleph_{\gamma+\kappa+1}$.

Konstrukciju vršimo transfinitnom rekurzijom dok ne iscrpimo sve funkcije iz X na sledeći način :

- f_0 je proizvoljna funkcija iz X;
- Pretpostavimo da smo konstruisali niz f_α , $\alpha \in \xi$. Ako je

$$X = \bigcup \{X_{f_\alpha} \mid \alpha \in \xi\} \ ,$$

onda stajemo sa konstrukcijom i $\beta = \xi$. U suprotnom, postoji $f \in X - \bigcup\{X_{f_\alpha} \mid \alpha \in \xi\}$, pa samim tim je za svako $\alpha \in \xi$ skup

$$A_\alpha = \{\eta \in S_0 \mid f(\eta) \leq f_\alpha(\eta)\}$$

tanak, odakle sledi da je $S_\alpha = S_0 - A_\alpha$ stacionaran. Samim tim,

$$\bigcup\{X_{f_\alpha} \mid \alpha \in \xi\} \subseteq X_f \ ,$$

a kako su f_α međusobno različite funkcije i kako je $|X_f| \leq \aleph_{\gamma+\kappa}$, mora biti $\xi \in \aleph_{\gamma+\kappa+1}$. Neka je $f_\xi = f$.

Iz konstrukcije neposredno sledi da, ukoliko postoji f_α, mora biti $\alpha \in \aleph_{\gamma+\kappa+1}$, odakle sledi da je $\beta \leq \aleph_{\gamma+\kappa+1}$.

□

Teorema 1.7.1 (Silver) *Neka je* $\kappa = \mathrm{cf}\kappa > \omega$ *i neka je* γ *ordinal takav da je* $\aleph_{\gamma+\kappa} > \kappa$. *Ako je skup*

$$S = \{\alpha \in \kappa \mid 2^{\aleph_{\gamma+\alpha}} = \aleph_{\gamma+\alpha+1}\}$$

stacionaran u κ, *onda je* $2^{\aleph_{\gamma+\kappa}} = \aleph_{\gamma+\kappa+1}$.

Dokaz :

Za svako $x \in P(\aleph_{\gamma+\kappa})$ neka je

$$f_x = \langle x \cap \aleph_{\gamma+\alpha} \mid \alpha \in \kappa\rangle \ .$$

Sada je $X = \{f_x \mid x \in P(\aleph_{\gamma+\kappa})\}$ familija skoro disjunktnih funkcija. Pri tom je $X \subseteq \prod_{\alpha\in\kappa} P(\aleph_{\gamma+\alpha})$ i za svako $\alpha \in S$ važi

$$|P(\aleph_{\gamma+\alpha})| = \aleph_{\gamma+\alpha+1} \ ,$$

odakle po prethodnoj lemi sledi da je

$$|X| = 2^{\aleph_{\gamma+\kappa}} \leq \aleph_{\gamma+\kappa+1} \ .$$

Obzirom da obratna nejednakost trivijalno važi, imamo tvrđenje.

□

Teorema 1.7.2 (Silver) *Neka je* $\kappa = \mathrm{cf}\kappa > \omega$ *i nekaje* γ *ordinal takav da je* $\aleph_{\gamma+\kappa} > \kappa$. *Dalje, pretpostavimo da je za svako* $\alpha \in \kappa$ $\aleph_{\gamma+\alpha}^{\kappa} < \aleph_{\gamma+\kappa}$. *Ako je skup*

$$S_0 = \{\alpha \in \kappa \mid \aleph_{\gamma+\alpha}^{\mathrm{cf}\aleph_{\gamma+\alpha}} = \aleph_{\gamma+\alpha+1}\}$$

stacionaran u κ, *onda je* $\aleph_{\gamma+\kappa}^{\mathrm{cf}\aleph_{\gamma+\kappa}} = \aleph_{\gamma+\kappa}^{\kappa} = \aleph_{\gamma+\kappa+1}$.

Dokaz :

Prvo pokažimo da je skup

$$C = \{\alpha \in \kappa \mid \alpha = \bigcup \alpha \wedge (\forall \beta \in \alpha)(\aleph_{\gamma+\beta}^{\kappa} < \aleph_{\gamma+\alpha})\}$$

CUB u κ. Zatvorenost je (poprilično) očigledna, te ćemo stoga pokazati samo neograničenost.

Neka je $\alpha \in \kappa$ proizvoljno. Koristeći uslov da je za svako $\xi \in \kappa$ $\aleph_{\gamma+\xi}^{\kappa} < \aleph_{\gamma+\kappa}$ možemo formirati niz β_n , $n \in \omega$ tako da je $\beta_0 = \alpha$ i da za svako $n \in \omega$ važi $\aleph_{\gamma+\beta_n}^{\kappa} < \aleph_{\gamma+\beta_{n+1}}$. Sada za $\beta = \bigcup_{n\in\omega} \beta_n$ važi da je $\alpha < \beta$ i $\beta \in C$.

Obzirom da je C CUB i da je S_0 stacionaran, skup $S = S_0 \cap C$ će biti stacionaran u κ. Primetimo da je za svako $\alpha \in S$ $\mathrm{cf}\aleph_{\gamma+\alpha} = \mathrm{cf}\alpha$, kao i da je

$$\aleph_{\gamma+\alpha}^{\kappa} = (\sup_{\beta\in\alpha} \aleph_{\gamma+\beta}^{\kappa})^{\mathrm{cf}\alpha} = \aleph_{\gamma+\alpha}^{\mathrm{cf}\alpha} \ .$$

Za proizvoljno $h : \kappa \longrightarrow \aleph_{\gamma+\kappa}$ definišimo funkcije $h_\alpha : \kappa \longrightarrow \aleph_{\gamma+\kappa}$, $\alpha \in \kappa$ na sledeći način:

$$h_\alpha(\xi) = \begin{cases} h(\xi) & , \quad \xi \in \aleph_{\gamma+\alpha} \\ 0 & , \quad \xi \geq \aleph_{\gamma+\alpha} \end{cases} .$$

Dalje, neka je $f_h = \langle h_\alpha \mid \alpha \in \kappa \rangle$ i neka je $X = \{f_h \mid h : \kappa \longrightarrow \aleph_{\gamma+\kappa}\}$. Primetimo da je X familija skoro disjunktnih funkcija i da je $X \subseteq \prod_{\alpha\in\kappa} {}^{\kappa}\aleph_{\gamma+\alpha}$. Kako za stacionarno mnogo $\alpha \in \kappa$ važi $|{}^{\kappa}\aleph_{\gamma+\alpha}| = \aleph_{\gamma+\alpha}^{\kappa} \leq \aleph_{\gamma+\alpha+1}$, mora biti

$$|X| = \aleph_{\gamma+\kappa}^{\kappa} \leq \aleph_{\gamma+\kappa+1} \ .$$

Obzirom da obratna nejendakost trivijalno važi, imamo tvrđenje.

$\square$

Neznatnom modifikacijom upravo navedenih dokaza dobijamo opšti oblik Silverove teoreme:

Neka je κ singularan kardinal neprebrojive kofinalnosti i neka je κ_α , $\alpha \in \mathrm{cf}\kappa$ *normalan* kofinalan niz u κ (uopšte, rastući niz ordinala ξ_α , $\alpha \in \lambda$ je normalan ako je za svaki granični $\alpha \in \lambda$ $\xi_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \xi_\beta$). Tada važi :

- Ako je skup $\{\alpha \in \mathrm{cf}\kappa \mid 2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+\}$ stacionaran, onda je $2^\kappa = \kappa^+$;
- Ako je skup $\{\alpha \in \mathrm{cf}\kappa \mid \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+\}$ stacionaran, onda je $\kappa^{\mathrm{cf}\kappa} = \kappa^+$.

Formulišimo SCH (Singular Cardinal Hypothesis) na sledeći način:

$$\forall\gamma(2^{\aleph_0} < \aleph_{\gamma+\omega} \rightarrow \aleph_{\gamma+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\gamma+\omega+1}) \ .$$

Teorema 1.7.3 *Neka važi SCH. Dalje, neka je* $\kappa = \mathrm{cf}\kappa \geq \omega$ *i neka je* γ *ordinal takav da je* $\aleph_{\gamma+\kappa} > \kappa$*. Ako GCH važi na* $\aleph_{\gamma+\kappa}$*, tj. ako za svako* $\alpha \in \kappa$ *važi* $2^{\aleph_{\gamma+\alpha}} = \aleph_{\gamma+\alpha+1}$*, onda je* $2^{\aleph_{\gamma+\kappa}} = \aleph_{\gamma+\kappa+1}$.

Dokaz :

Za $\kappa > \omega$ tvrđenje važi na osnovu Silverove teoreme, te je stoga zanimljiv jedino slučaj kada je $\kappa = \omega$. Dakle, neka je γ proizvoljan ordinal i neka GCH važi na $\aleph_{\gamma+\omega}$. Tada je

$$2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\gamma+1} < \aleph_{\gamma+\omega} \ ,$$

pa po SCH sledi da je $\aleph_{\gamma+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\gamma+\omega+1}$. Sada je

$$2^{\aleph_{\gamma+\omega}} = (2^{<\aleph_{\gamma+\omega}})^{\aleph_0} = (\sum_{n\in\omega} 2^{\aleph_{\gamma+n}})^{\aleph_0} = (\sum_{n\in\omega} \aleph_{\gamma+n+1})^{\aleph_0} = \aleph_{\gamma+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\gamma+\omega+1} \ .$$

□

Teorema 1.7.4 *Neka važi SCH. Tada važi*

$$\forall\kappa(2^{\mathrm{cf}\kappa} < \kappa \rightarrow \kappa^{\mathrm{cf}\kappa} = \kappa^+) \ .$$

Dokaz :

Dokaz izvodimo transfinitnom indukcijom po $\mathrm{cf}\kappa$. Neka je $\lambda = \mathrm{cf}\kappa < \kappa$. Tada postoji najmanji ordinal γ tako da je $\kappa = \aleph_{\gamma+\lambda}$. Obzirom na SCH, od interesa je slučaj kada je $\lambda > \omega$.

Pretpostavimo da je $2^\lambda < \aleph_{\gamma+\lambda}$. Tada postoji $\alpha_0 \in \lambda$ tako da je $2^\lambda < \aleph_{\gamma+\alpha_0}$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sva singularne kardinale kofinalnosti manje od λ. Neka je

$$S = \{\alpha \in \lambda \mid \alpha = \bigcup \alpha \ \wedge \ \alpha \geq \alpha_0\} \ .$$

S je CUB u λ, pa je samim tim i stacionaran u λ. Sada je za svako $\alpha \in S$

$$\mathrm{cf}\aleph_{\gamma+\alpha} = \mathrm{cf}\alpha < \lambda \ \text{ i } \ 2^{\mathrm{cf}\alpha} \leq 2^\kappa < \aleph_{\gamma+\alpha_0} \leq \aleph_{\gamma+\alpha} \ ,$$

pa po induktivnoj hipotezi za svako $\alpha \in S$ važi

$$\aleph_{\gamma+\alpha}^{\mathrm{cf}\aleph_{\gamma+\alpha}} = \aleph_{\gamma+\alpha+1} \ .$$

Sada je na osnovu teoreme 1.7.2 $\kappa^{\mathrm{cf}\kappa} = \kappa^+$.

□

SCH ima zanimljiv uticaj na kontinuum funkciju. Naime, za proizvoljan beskonačan kardinal κ važi da je $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\kappa}$. Neka je κ singularan kardinal. Ako je kontinuum funkcija skoro konstantna na κ, onda je po Bukovski–Hehler teoremi $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.

U suprotnom, za $\lambda = 2^{<\kappa}$ važi $\mathrm{cf}\lambda = \mathrm{cf}\kappa$ i $2^{\mathrm{cf}\lambda} < \lambda$ pa po SCH mora biti

$$2^\kappa = \lambda^{\mathrm{cf}\lambda} = \lambda^+ = (2^{<\kappa})^+ \ .$$

SCH je direktno povezana sa jakim aksiomama beskonačnosti (konkretno, egzistencija $0^\sharp$ povlači ne važenje SCH). Napomenimo još i to da u Istonovom modelu važi SCH.

1.8 Aksioma regularnosti

Aksioma regularnosti :

$$\forall x(x \neq 0 \to (\exists y \in x)(y \cap x = 0)) \ .$$

Dakle, svaki neprazan skup ima $\in$–minimalni element. Posebno,

$$(\forall f : \omega \longrightarrow V)(\exists n \in \omega)(f(n+1) \notin f(n)) \ .$$

Zaista, u suprotnom bi postojalo $f : \omega \longrightarrow V$ tako da za svako $n \in \omega$ $f(n+1) \in f(n)$, odakle sledi da skup $\mathrm{rng}(f)$ nema $\in$–minimum.

Odavde neposredno sledi da svaka neprazna klasa ima $\in$–minimalni element.

Dalje, na osnovu aksiome regularnosti sledi da

$$\forall x(x \notin x) \ .$$

Naime, za proizvoljan skup x skup $\{x\}$ po aksiomi regularnosti ima $\in$–minimalni element, odakle neposredno sledi da $x \notin x$.

Teorema 1.8.1 ($\in$–indukcija) *Neka je klasa $\mathcal{A}$ takva da važi*

$$\forall x(x \subseteq \mathcal{A} \to x \in \mathcal{A}) \ .$$

Tada je $\mathcal{A} = V$.

Dokaz :

Sasvim slično kao i kod dokaza teoreme transfinitne indukcije, ova teorema je direktna posledica činjenice da svaka neprazna klasa ima $\in$–minimalni element.

□

Posledica 1.8.1

$$\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha) \ .$$

Dokaz :

Neka je $\mathcal{A} = \{x \mid \exists\alpha(x \in V_\alpha)\}$. Dalje, neka je $X \subseteq \mathcal{A}$. Tada za svako $x \in X$ postoji ordinal α_x tako da $x \in V_{\alpha_x}$. Neka je $\alpha = \bigcup_{x\in X} \alpha_x$. Samim tim, $X \subseteq V_\alpha$, pa $X \in V_{\alpha+1}$.

Odavde po teoremi $\in$–indukcije sledi da je $\mathcal{A} = V$.

□

Posledica 1.8.2 *Svaki skup je sadržan u nekom tranzitivnom skupu, tj. važi*

$$\forall x(\exists y \supseteq x)(\bigcup y \subseteq y) \ .$$

Dokaz :

Neka je $\mathcal{A} = \{x \mid (\exists y \supseteq x)\bigcup y \subseteq y\}$ i neka je $X \subseteq \mathcal{A}$. Samim tim, za svako $x \in X$ postoji tranzitivan $y_x \supseteq x$. Lako se proverava da je

$$Y = X \cup \bigcup_{x\in X} y_x$$

tranzitivni nadskup skupa X. Dakle $X \in \mathcal{A}$, pa po teoremi $\in$–indukcije je $\mathcal{A} = V$

□

Obzirom da je tranzitivnost svojstvo koje se čuva pri preseku, na osnovu prethodnog je za svaki skup x sa

$$\mathrm{TC}(x) =_{\mathrm{def}} \bigcap\{y \mid y \supseteq x \land \bigcup y \subseteq y\}$$

dobro definisan najmanji (u smislu inkluzije) tranzitivni nadskup skupa x. Sam skup $\mathrm{TC}(x)$ zovemo još i *tranzitivnim zatvorenjem* skupa x.

Laganu vežbu predstavlja dokaz činjenice da se $\mathrm{TC}(x)$ rekurzivno može konstruisati na sledeći način:

- $\mathrm{TC}_0(x) = x$
- $\mathrm{TC}_{n+1}(x) = \bigcup \mathrm{TC}_n(x)$
- $\mathrm{TC}(x) = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{TC}_n(x)$.

Dakle,

$$\mathrm{TC}(x) = x \cup \bigcup x \cup \bigcup\bigcup x \cup \ldots$$

Teorema 1.8.2 ($\in$–rekurzija) *Neka je $\Phi : V \longrightarrow V$ proizvoljno. Tada postoji jedinstveno $\Psi : V \longrightarrow V$ tako da*

$$\forall x(\Psi(x) = \Phi(\Psi|_x)) \ .$$

Dokaz :
Neznatna modifikacija dokaza teoreme transfinitne rekurzije, koja se sastoji u definiciji predikata $\Psi(x,y)$:

$$\Psi(x,y) \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} (\exists_1 f : \mathrm{TC}(x) \longrightarrow V)(y = f(x) \wedge (\forall z \in \mathrm{TC}(x)) f(z) = \Phi(f|_z)) \ .$$

Dalje sprovodimo dokaz sasvim slično kao i u slučaju teoreme transfinitne rekurzije, s tim što koristimo $\in$–indukciju.

$\square$

Lema 1.8.1 *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ tranzitivne klase i neka je $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ tako da*

$$(\forall x, y \in \mathcal{M})(x \in y \leftrightarrow \Phi(x) \in \Phi(y)) \ .$$

Tada $(\forall x \in \mathcal{M})(\Phi(x) = x)$.

Dokaz :
Neka je $\mathcal{A} = \{x \mid x \in \mathcal{M} \wedge \Phi(x) \neq x\}$. Dovoljno je pokazati da je $\mathcal{A} = 0$. Pretpostavimo suprotno. Tada klasa $\mathcal{A}$ ima $\in$–minimalni element a. Obzirom da je $\mathcal{M}$ tranzitivna klasa i da $a \in \mathcal{M}$, mora biti i $a \subseteq \mathcal{M}$, odakle sledi da za svako $x \in a$ važi $\Phi(x) = x$. dakle,

$$x \in a \leftrightarrow x \in \Phi(a) \ ,$$

tj. $a = \Phi(a)$. Kontradikcija.

$\square$

Neka je $\mathcal{E} \subseteq V \times V$. Za proizvoljan skup x neka je

$$\mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x) =_{\mathrm{def}} \{y \mid y \,\mathcal{E}\, x\} \ .$$

Za relaciju $\mathcal{E}$ kažemo da je *dobro zasnovana* ako važi:

- $\forall x \exists z (z = \mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x))$
- $(\forall f : \omega \longrightarrow V)(\exists n \in \omega)\neg(f(n+1) \,\mathcal{E}\, f(n))$.

Posebno, iz drugog uslova neposredno sledi da svaka neprazna klasa ima $\mathcal{E}$–minimalni element. Direktna posledica ove činjenice je

Teorema 1.8.3 (WF–indukcija) *Neka je $\mathcal{E}$ dobro zasnovana relacija na V i neka je $\mathcal{A}$ klasa takva da važi*

$$\forall x (\mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x) \subseteq \mathcal{A} \rightarrow x \in \mathcal{A}) \ .$$

Tada je $\mathcal{A} = V$.

$\square$

Teorema 1.8.4 (WF–rekurzija) *Neka je $\mathcal{E}$ dobro zasnovana relacija na V i neka je $\Phi : V \times V \longrightarrow V$ proizvoljno. Tada postoji jedinstveno $\Psi : V \longrightarrow V$ tako da*

$$\forall x\big(\Psi(x) = \Phi(x, \Psi|_{\mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x)})\big) \ .$$

Dokaz :
Modifikacija dokaza teoreme transfinitne rekurzije slična modifikaciji opisanoj u dokazu teoreme $\in$–rekurzije. Razlika se sastoji u tome što moramo uvesti $\mathcal{E}$ pandan tranzitivnom zatvorenju proizvoljnog skupa x. Ovo postižemo na sledeći način:

- $x_0 = \mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x)$
- $x_{n+1} = \bigcup_{y \in x_n} \mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(y)$
- $\mathrm{TC}_{\mathcal{E}}(x) = \bigcup_{n \in \omega} x_n$.

□

Neka je $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ dobro zasnovana relacija i neka je $\mathcal{M}$ proizvoljna klasa. Kažemo da je relacija $\mathcal{E}$ *ekstenzionalna* na $\mathcal{M}$ ako važi:

- $(\forall x \in \mathcal{M})\mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x) \subseteq \mathcal{M}$
- $(\forall x, y \in \mathcal{M})(\mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x) = \mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(y) \to x = y)$.

Drugim rečima, u ekstenzionalnom modelu važi aksioma ekstenzionalnosti (otud i naziv).

Teorema 1.8.5 (Mostovski) *Neka je $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ dobro zasnovana relacija i neka je $\mathcal{M}$ klasa na kojoj je $\mathcal{E}$ ekstenzionalna. Tada postoji jedinstvena tranzitivna klasa $\mathcal{N}$ i jedinstveno $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ tako da važi*

$$(\forall x, y \in \mathcal{M})(x \, \mathcal{E} \, y \leftrightarrow \Phi(x) \in \Phi(y)) \ .$$

Dokaz :
Konstrukciju Φ vršimo WF–rekurzijom na sledeći način:

$$\Phi(x) = \{\Phi(y) \mid y \in \mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x)\} \ , x \in \mathcal{M} \ .$$

Neka je $\mathcal{N} = \Phi[\mathcal{M}]$. Iz same definicije Φ i $\mathcal{N}$ neposredno sledi da je $\mathcal{N}$ tranzitivna klasa.

(1): Φ je 1–1 . WF–indukcijom se lako pokazuje da za svako $x, y \in \mathcal{M}$ iz $\Phi(x) = \Phi(y)$ sledi da je $\mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x) = \mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(y)$, odakle zbog ekstenzionalnosti $\mathcal{E}$ na $\mathcal{M}$ sledi da je $x = y$.
Dakle, Φ je 1–1.

(2): $(\forall x, y \in \mathcal{M})(x\,\mathcal{E}\,y \leftrightarrow \Phi(x) \in \Phi(y))$. Zapravo treba pokazati samo implikaciju zdesna ulevo. Stoga, neka su $x, y \in \mathcal{M}$ takvi da $\Phi(x) \in \Phi(y)$. Tada postoji $z \in \mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(y)$ tako da je $\Phi(x) = \Phi(z)$. No Φ je 1–1, pa je $x = z$, tj. $x\,\mathcal{E}\,y$.

Ostaje još da se proveri jedinstvenost Φ. Međutim, ovo je neposredna posledica leme 1.8.1 i činjenice da je svako preslikavanje koje zadovoljava uslove teoreme bijekcija.

$\square$

Prethodna teorema je poznatija kao *teorema kolapsa*. Na kraju ovog odeljka istaknimo dve interesantne posledice aksiome regularnosti:

- Svaki neprazan tranzitivan skup sadrži 0;
- Skup x je ordinal akko je tranzitivan i linearno uređen sa $\in$.

2

Nezavisnost GCH u odnosu na ZFC

U ovoj glavi ćemo izložiti Gedelove, Koenove i Istonove rezultate vezane za kontinuum problem.

Pod modelom jezika L_{ZF} podrazumevamo par $\mathfrak{M} = \langle M, E\rangle$, gde je M neprazan skup i $E \subseteq M \times M$. Zbog ovakve opštosti, ukoliko ne uvedemo izvesna ograničenja, imaćemo popriličnо egzotične modele koji u mnogome odstupaju od "intuicije" skupa. Potkrepimo ovo primerom:

Neka je $\mathfrak{M} = \langle V_\omega, \in\rangle$. Laganu vežbu predstavlja provera činjenice da je $\mathfrak{M}$ model teorije *striktno konačnih skupova*, tj. teorije koja se od ZFC razlikuje po tome što umesto aksiome beskonačnosti sadrži njenu negaciju. Neka je D neglavni ultrafilter[1] nad ω i neka je

$$\mathfrak{N} = \prod_D \mathfrak{M}$$

ultrastepen[2] modela $\mathfrak{M}$ po D. Na osnovu Lošove teoreme se tada $\mathfrak{M}$ elementarno utapa u $\mathfrak{N}$, pa je i $\mathfrak{N}$ model teorije striktno konačnih skupova.

Međutim, za svako $m \in \omega$ važi

$$\langle m \mid n \in \omega\rangle_D \in_D \langle n \mid n \in \omega\rangle_D \ ,$$

[1] Ultrafilter generisan Frešeovim filterom kofinitnih skupova nad indeksom ultrafiltera, tj. skupom nosačem.

[2] Elementi ultrastepena su klase ekvivalencije

$$\langle x_n \mid n \in \omega\rangle_D = \{\langle y_n \mid n \in \omega\rangle \in \prod_{i\in\omega} V_\omega \mid \{n \in \omega \mid x_n = y_n\} \in D\} \ .$$

Interpretacija $\in_D$ od $\in$ u $\mathfrak{N}$ se definiše na sledeći način:

$$\langle x_n \mid n \in \omega\rangle_D \in_D \langle y_n \mid n \in \omega\rangle_D \Leftrightarrow_{\text{def}} \{n \in \omega \mid x_n \in y_n\} \in D \ .$$

a kako je preslikavanje $m \mapsto \langle m \mid n \in \omega\rangle_D$, $m \in \omega$ elementarno utapanje, možemo smatrati da je $\langle n \mid n \in \omega\rangle_D$ veći od svih numerala. Ovim vidimo da predikat "$x \in \omega$" ne opisuje metateorijski predikat "biti prirodan broj".

I više od toga, gledano spolja, u $\mathfrak{N}$ možemo napraviti beskonačnu $\in_D$–regresiju na sledeći način:

$$f(m) = \langle \underbrace{0, \ldots, 0}_{m+1}, 1, 2, 3, \ldots\rangle_D \ , \ m \in \omega \ .$$

Lako se proverava da za svako $m \in \omega$ važi $f(m+1) \in_D f(m)$, što znači da model $\mathfrak{N}$ nije dobro zasnovan.

Nas će pre svega interesovati tzv. *tranzitivni modeli* tj. modeli oblika $\mathfrak{M} = \langle M, \in\rangle$, gde je M neprazan tranzitivan skup, a $\in$ relacija pripadanja. Trivijalno se proverava da u svakom tranzitivnom modelu $\mathfrak{M}$ važe aksiome ekstenzionalnosti, praznog skupa i regularnosti.

Obzirom na aksiomu regularnosti i teoremu kolapsa Mostovskog, tranzitivni modeli su do na izomorfizam jedinstveni dobro zasnovani ekstenzionalni modeli jezika L_{ZF}.

2.1 Apsolutnost

Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljna klasa i neka je φ formula jezika L_{ZF}. *Relativizaciju* formule φ na klasu $\mathcal{M}$, u oznaci $\varphi^{\mathcal{M}}$, dobijamo iz φ ograničavanjem svih kvantora klji se javljaju u φ na $\mathcal{M}$. Preciznije :

- $(x = y)^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow_{\text{def}} x = y$
- $(x \in y)^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow_{\text{def}} x \in y$
- $(\neg\varphi)^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow_{\text{def}} \neg\varphi^{\mathcal{M}}$
- $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow_{\text{def}} \varphi^{\mathcal{M}} \wedge \psi^{\mathcal{M}}$
- $(\forall x\varphi)^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall x \in \mathcal{M})\varphi^{\mathcal{M}}$.

Lako se proverava da za proizvoljne formule φ i ψ jezika L_{ZF} i proizvoljnu klasu $\mathcal{M}$ važi

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi^{\mathcal{M}} \leftrightarrow \psi^{\mathcal{M}}) \ .$$

Kažemo da je formula $\varphi(\overline{x})$, $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$ *apsolutna* za klasu $\mathcal{M}$ ako

$$(\forall \overline{x} \in \mathcal{M})(\varphi^{\mathcal{M}}(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x})) \ .$$

Posebno, ako je φ aksioma teorije ZFC i ako je $\mathcal{M}$ skup, iz apsolutnosti φ za $\mathcal{M}$ sledi da je $\varphi^{\mathcal{M}}$ teorema, odakle neposredno sledi da je $\langle \mathcal{M}, \in\rangle \models \varphi$.

No važi i obrat. Ako je φ teorema teorije ZFC i ako je $\langle M, \in\rangle \models \varphi$, onda je i φ^M teorema, odakle sledi da je i $\varphi^M \leftrightarrow \varphi$ teorema, tj. φ je apsolutno za M.

Lema 2.1.1 *Neka je $\mathcal{M}$ tranzitivna klasa. Tada skup formula apsolutnih za $\mathcal{M}$ sadrži atomične formule i zatvoren je za bulovske kombinacije i ograničenu kvantifikaciju.*

Dokaz :
Jedino što ne sledi direktno iz definicije je zatvorenost za ograničenu kvantifikaciju. Neka je formula $\varphi(x,\overline{y})$ apsolutna za $\mathcal{M}$. Hoćemo da pokažemo da je i $(\forall x \in z)\varphi(x,\overline{y})$ apsolutno za $\mathcal{M}$.

Neka su $z, \overline{y} \in \mathcal{M}$ proizvoljni. Treba pokazati da je

$$(x \in z \rightarrow \varphi(x,\overline{y})) \leftrightarrow (x \in z \rightarrow \varphi^{\mathcal{M}}(x,\overline{y})) \ .$$

Ako $x \notin z$, onda gornja ekvivalencija trivijalno važi. Neka $x \in z$. Tada je

$$(x \in z \rightarrow \varphi(x,\overline{y})) \leftrightarrow (x \in z \rightarrow \varphi^{\mathcal{M}}(x,\overline{y}))$$

ekvivalentno sa

$$\varphi(x,\overline{y}) \leftrightarrow \varphi^{\mathcal{M}}(x,\overline{y}) \ .$$

Kako je $\mathcal{M}$ tranzitivna klasa i $z \in \mathcal{M}$, mora biti i $z \subseteq \mathcal{M}$, odakle sledi da i $x \in \mathcal{M}$. Sada je poslednja ekvivalencija tačna po pretpostavci.

$\square$

Neka $\Phi : V \times \cdots \times V \longrightarrow V$, pri čemu je $\varphi(\overline{x}, y)$ formula takva da

$$\forall \overline{x} \forall y (y = \Phi(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y))$$

i neka je $\mathcal{M}$ klasa. Relativizaciju $\Phi^{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \times \cdots \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ operacije Φ na klasu $\mathcal{M}$ definišemo sa

$$\Phi^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = y \Leftrightarrow_{\text{def}} \varphi^{\mathcal{M}}(\overline{x}, y) \ , \ \overline{x} \in \mathcal{M} \ .$$

Posebno, ako je $\Phi^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = \Phi(\overline{x})$, onda je operacija Φ apsolutna za klasu $\mathcal{M}$. Primetimo da je za tranzitivnu klasu $\mathcal{M}$ i $x \in \mathcal{M}$ $P^{\mathcal{M}}(x) = P(x) \cap \mathcal{M}$.

Korišćenjem prethodne leme se lako pokazuje da su sledeći predikati i operacije apsolutni za proizvoljnu tranzitivnu klasu $\mathcal{M}$:

- $x \subseteq y$
- $x = \emptyset$
- $x = \{y, z\}$
- $\text{fun}(x)$
- $\bigcup x \subseteq x$
- $x = \text{TC}(x)$

- $x = \{y\}$
- $x \in \mathrm{Ord}$.
- $\{x, y\}^{\mathcal{M}} = \{x, y\}$
- $\bigcup^{\mathcal{M}} x = \bigcup x$
- $\mathrm{TC}^{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{TC}(x)$
- $(x - y)^{\mathcal{M}} = x - y$.

Ako je klasa $\mathcal{M}$ zatvorena za $\{\}$, onda imamo apsolutnost sledećih operacija i predikata:

- $(x \times y)^{\mathcal{M}} = x \times y$
- $\mathrm{dom}^{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{dom}(x)$. Pokažimo ovo. Neka je $x \in \mathcal{M}$ proizvoljno. Kako je

  $$\mathrm{dom}^{\mathcal{M}}(x) = \{a \in \mathcal{M} \mid (\exists b \in \mathcal{M})\langle a, b\rangle \in x\} \ ,$$

  to je $\mathrm{dom}^{\mathcal{M}}(x) \subseteq \mathrm{dom}(x)$. Obratno, neka $\langle a, b\rangle \in x$, tj. $a \in \mathrm{dom}(x)$. Zbog tranzitivnosti $\mathcal{M}$ i činjenice da $x \in \mathcal{M}$ je i $\langle a, b\rangle \in \mathcal{M}$, odakle opet zbog tranzitivnosti $\mathcal{M}$ sledi da $a, b \in \mathcal{M}$, pa $a \in \mathrm{dom}^{\mathcal{M}}(x)$, tj. $\mathrm{dom}(x) \subseteq \mathrm{dom}^{\mathcal{M}}(x)$.
- $(\in \cap (x \times x))^{\mathcal{M}} = \in \cap (x \times x)$
- $0^{\mathcal{M}} = 0$
- $\mathrm{rng}^{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{rng}(x)$
- $x \cup^{\mathcal{M}} \{x\} = x \cup \{x\}$
- “x je granični ordinal”
- “x je sledbenik ordinal”
- $\Gamma^{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha, \beta)$, pri čemu je $\Gamma : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ kanonska bijekcija.

Navedimo važne primere operacija i predikata koji nisu apsolutni za tranzitivnu klasu $\mathcal{M}$:

- $P^{\mathcal{M}}(x) = P(x) \cap \mathcal{M}$
- $({}^{y}x)^{\mathcal{M}} = {}^{y}x \cap \mathcal{M}$
- $(x \in \mathrm{Card})^{\mathcal{M}} \leftrightarrow x \in \mathrm{Ord} \wedge (\forall y \in x)(\forall f \in y^{x} \cap \mathcal{M})$(“$f$ nije bijekcija”).

Činjenica da $x \in \mathrm{Card}$ nije apsolutan predikat je poznata i kao *Skolemov paradoks*.

Teorema 2.1.1 *Neka su $\mathfrak{M} = \langle M, \in\rangle$ i $\mathfrak{N} = \langle N, \in\rangle$ tranzitivni modeli teorije ZFC koji imaju iste skupove ordinala, tj. važi $P(\mathrm{Ord}) \cap M = P(\mathrm{Ord}) \cap N$. Tada je $M = N$.*

Dokaz :

Prvo pokazujemo da M i N imaju iste skupove parova ordinala, tj. da za svako $x \subseteq \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ važi $x \in M \leftrightarrow x \in N$.

Neka je $x \in M$, $x \subseteq \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ i neka je $\Gamma : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ kanonska bijekcija. Tada je $\Gamma[x] \subseteq \mathrm{Ord}$, a kako je Γ apsolutno za tranzitivne modele i kako $x \in M$, to i $\Gamma[x] \in M$.

Po pretpostavci M i N imaju iste skupove ordinala, pa $\Gamma[x] \in N$. Sada iz $\mathfrak{N} \models \mathrm{ZFC}$, apsolutnosti Γ za tranzitivne klase (time i skupove) i činjenice da $\Gamma[x] \in N$ sledi da

$$x = \Gamma^{-1}[\Gamma[x]] \in N \ .$$

Zbog očigledne simetrije imamo i obrat.

Ostaje da pokažemo da je $M \subseteq N$, jer se obratna inkluzija dokazuje sasvim slično. Neka je $x \in M$ proizvoljno. Obzirom na apsolutnost i činjenicu da je $\mathfrak{M} \models \mathrm{ZFC}$, imamo da $\mathrm{TC}(\{x\}) \in M$ i postoje $\alpha \in \mathrm{Ord} \cap M$ i bijekcija $f : \alpha \longrightarrow \mathrm{TC}(\{x\})$, $f \in M$. Dalje, na ordinalu α definišimo binarnu relaciju R na sledeći način :

$$\beta R \gamma \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} f^{-1}(\beta) \in f^{-1}(\gamma) \ .$$

Sada $R \in M$ i $(\mathrm{TC}(\{x\}), \in) \cong (\alpha, R)$, a kako M i N imaju iste skupove ordinala i parova ordinala i kako je $\mathfrak{N} \models \mathrm{ZFC}$, to $(\alpha, R) \in N$. No u $\mathfrak{N}$ važi teorema kolapsa, pa postoji jedinstven tranzitivan skup $z \in M$ tako da je

$$\langle \alpha, R\rangle \cong \langle z, \in\rangle \ .$$

Ovaj izomorfizam važi i spolja, pa mora biti $\mathrm{TC}(\{x\}) = z$, odakle sledi da $x \in N$.

□

Lema 2.1.2 (pressing down) *Neka su $\varphi_1(x_1, \overline{y_1}), \ldots, \varphi_n(x_n, \overline{y_n})$ proizvoljne formule jezika L_{ZF} i neka je X proizvoljan skup. Tada postoji $M \supseteq X$ tako da važi*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} (\forall \overline{y_i} \in M)(\exists x_i \varphi_i(x_i, \overline{y_i}) \to (\exists x_i \in M)\varphi_i(x_i, \overline{y_i})).$$

Posebno :

- *M možemo izabrati tako da je $\bigcup M \subseteq M$;*
- *M možemo izabrati tako da je $M = V_\alpha$, za neki granični ordinal α;*
- *Uz AC M možemo izabrati tako da je $|M| = \max\{\aleph_0, |X|\}$.*

Dokaz :

Prvo primetimo da je za svaku formulu $\varphi(x,\overline{y})$ i svaki skup A klasa

$$\mathcal{A} = \{x \mid (\exists \overline{y} \in A)\big(\varphi(x,\overline{y}) \wedge \forall z(\varphi(z,\overline{y}) \rightarrow \mathrm{rank}(x) \leq \mathrm{rank}(z))\big)\}$$

takođe skup. Sada konstrukciju skupa M rekurzivno duž ω konstruišemo na sledeći način:

- $M_0 = X$
- $M_{n+1} = M_n \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{x \mid (\exists \overline{y_i} \in M_n)\big(\varphi_i(x,\overline{y_i}) \wedge \forall z(\varphi_i(z,\overline{y_i}) \rightarrow \mathrm{rank}(x) \leq \mathrm{rank}(z))\big)\}$
- $M = \bigcup_{n\in\omega} M_n$.

Lako se proverava da M zadovoljava uslove tvrđenja.

Ako bismo hteli da važi $M = V_\alpha$, za neki granični ordinal α, vršimo sledeću modifikaciju prethodne konstrukcije:

- $M_0 = V_{\alpha_0}$, pri čemu je α_0 najmanji ordinal za koji važi $X \subseteq V_{\alpha_n}$;
- $M_{n+1} = V_{\alpha_{n+1}}$, pri čemu je α_{n+1} najmanji ordinal za koji je skup

  $$M_n \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{x \mid (\exists \overline{y_i} \in M_n)\big(\varphi_i(x,\overline{y_i}) \wedge \forall z(\varphi_i(z,\overline{y_i}) \rightarrow \mathrm{rank}(x) \leq \mathrm{rank}(z))\big)\}$$

  sadržan u $V_{\alpha_{n+1}}$;
- $M = V_\alpha$, pri čemu je $\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$.

Što se tiče kontrole kardinalnosti skupa M, vršimo sledeću modifikaciju konstrukcije:

- $M_0 = X$
- $M_{n+1} = M_n \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{a_{i,\overline{y_i}} \mid \overline{y_i} \in M_n\}$, pri čemu je $a_{i,\overline{y_i}}$ ili svedok minimalnog ranga u V formule $\exists x \varphi_i(x,\overline{y_i})$, ili je $a_{i,\overline{y_i}} = 0$;
- $M = \bigcup_{n\in\omega} M_n$.

$\square$

Pojam formule u *modifikovanoj* PNF (PNF = preneksna normalna forma) uvedimo induktivno na sledeći način:

- Σ_0 formule su u modifikovanoj PNF;
- Ako je formula φ u modifikovanoj PNF, onda su i formule $\exists x \varphi$, $\neg\exists x \neg\varphi$ i $\neg\varphi$ takođe u modifikovanoj PNF;
- Do formula u modifikovanoj PNF se može doći isključivo konačnom primenom prethodna dva pravila.

Obzirom na teoremu o preneksnoj normalnoj formi i činjenicu da je za svaku formulu φ formula $\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$ valjana, svaka formula je ekvivalentna nekoj formuli u modifikovanoj PNF.

Teorema 2.1.2 (Levi, Montegju) *Neka je $\varphi(\overline{x})$ formula jezika L_{ZF} i neka je X proizvoljan skup. Tada postoji $M \supseteq X$ tako da*

$$(\forall \overline{x} \in M)(\varphi^M(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x})) \ .$$

Posebno:

- *M možemo izabrati tako da je $\bigcup M \subseteq M$;*
- *M možemo izabrati tako da je $M = V_\alpha$, za neki granični ordinal α;*
- *Uz AC M možemo izabrati tako da je $|M| = \max\{\aleph_0, |X|\}$.*

Pritom u opštem slučaju $M \neq 0$ ne može istovremeno biti i prebrojiv i tranzitivan.

Dokaz :

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\varphi(\overline{x})$ u modifikovanoj PNF. Dalje, obzirom da je formula

$$(\psi \leftrightarrow \theta) \leftrightarrow (\neg\psi \leftrightarrow \neg\theta)$$

valjana, možemo pretpostaviti da formula $\varphi(\overline{x})$ ne počinje negacijom.

Neka je n broj egzistencijalnih kvantora koji se javljaju u φ. Ako je $n = 0$, onda je φ Σ_0 formula, pa možemo uzeti da je $M = X$.

Neka je $n > 0$ i neka je $\varphi(\overline{x})$ oblika

$$\exists y_1 \neg^{a_1} \ldots \exists y_n \psi(y_1, \ldots, y_n, \overline{x}) \ ,$$

pri čemu je ψ Σ_0 formula, $a_i \in \{0,1\}$, $\neg^1\theta \Leftrightarrow_{\text{def}} \neg\theta$ i $\neg^0\theta \Leftrightarrow_{\text{def}} \theta$. Dalje, neka je φ_i po složenosti maksimalna potformula od φ koja sadrži tačno i kvantora, $i \in n$.

Na osnovu pressing down leme postoji $M \supseteq X$ tako da za svako $i \in n$ važi

$$(\forall \overline{y}(i), \overline{x} \in M)\big(\exists y_{n-i}\varphi_i(\overline{y}(i), y_{n-i}, \overline{x}) \to (\exists y_{n-i} \in M)\varphi_i(\overline{y}(i), y_{n-i}, \overline{x})\big) \ ,$$

pri čemu je $\overline{y}(n-1)$ prazan niz, a za ostale vrednosti i je $\overline{y}(i) = y_1, \ldots, y_{n-i-1}$. Neka je ψ_0 formula φ_0 i neka je ψ_{i+1} formula $\exists y_{n-i}\varphi_i$.

Tvrdimo da za svako $i \in n$ važi

$$(\forall \overline{y}(i), \overline{x} \in M)(\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i) \ .$$

Dokaz izvodimo indukcijom po n. Neka tvrđenje važi za i i neka su $\overline{y}(i+1), \overline{x} \in M$ proizvoljni. Tada važi:

$$\begin{aligned}
\psi_{i+1}^M &\leftrightarrow (\exists y_{n-i-1}\varphi_i(\overline{y}(i+1), y_{n-i-1}, \overline{x}))^M \\
&\leftrightarrow (\exists y_{n-i-1} \in M)\varphi_i^M(\overline{y}(i+1), y_{n-i-1}, \overline{x}) \\
&\leftrightarrow (\exists y_{n-i-1} \in M)\varphi_i(\overline{y}(i+1), y_{n-i-1}, \overline{x}) \quad \text{(induktivna hipoteza)} \\
&\to \exists y_{n-i-1}\varphi_i(\overline{y}(i+1), y_{n-i-1}, \overline{x}) \\
&\leftrightarrow \psi_{i+1} \ .
\end{aligned}$$

Kako obratna implikacija sledi iz pressing down leme, važi

$$(\forall \overline{y}(i+1), \overline{x} \in M)(\psi_{i+1}^M \leftrightarrow \psi_{i+1}) \ ,$$

odakle neposredno sledi da je za svako $i \le n$ $\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i$. Obzirom da je φ_0 Σ_0 formula, imamo tvrđenje.

Ostaje da pokažemo poslednji deo teoreme. Neka je θ konjunkcija aksioma para, unije partitivnog skupa i beskonačnosti i neka je $\varphi(x)$ formula

$$\theta \wedge \big(x \neq 0 \rightarrow (\exists y \in \mathrm{Ind})(P(y) \in x)\big) \ .$$

Neka je M neprazan tranzitivan skup takav da je

$$(\forall x \in M)(\varphi^M(x) \leftrightarrow \varphi(x)) \ .$$

Posebno, tada $0 \in M$, pa je $\varphi^M(0) \leftrightarrow \varphi(0)$, tj. $\theta^M \leftrightarrow \theta$, odakle neposrdno sledi da u $\langle M, \in \rangle$ važe aksiome ekstenzionalnosti, praznog skupa, para, unije, partitivnog skupa, beskonačnosti i regularnosti.

Neka je $a \in M$ tako da $\langle M, \in \rangle \models a \in \mathrm{Ind}$. Obzirom da je induktivnost apsolutno svojstvo za tranzitivne modele, skup a je induktivan. Kako u $\langle M, \in \rangle$ važi aksioma partitivnog skupa,

$$P(a) \cap M \in M \ \text{ i } \ b = P(P(a) \cap M) \cap M \in M \ .$$

Posebno, $\varphi^M(b) \leftrightarrow \varphi(b)$, što je na osnovu prethodnih razmatranja ekvivalentno sa

$$(\exists y \in M)(y \in \mathrm{Ind} \wedge P(y) \in b) \leftrightarrow (\exists y \in \mathrm{Ind})(P(y) \in b) \ .$$

Kako $\langle M, \in \rangle \models a \in \mathrm{Ind} \wedge (P(a) \cap M) \in b$, važi i

$$(\exists y \in \mathrm{Ind})(P(y) \in b) \ .$$

Dakle, $|b| \ge 2^{|}y| \ge 2^{\aleph_0}$, a kako je M tranzitivan, mora biti i $b \subseteq M$, odakle sledi da je M neprebrojiv.

□

Prethodnu teoremu zovemo i *teoremom refleksije.*

Neka je $\mathbb{N}$ meta–teorijski skup prirodnih brojeva i neka su φ_n, $n \in \mathbb{N}$ sve instance sheme zamene. Na osnovu teoreme refleksije sledi da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji granični ordinal α_n tako da

$$\langle V_{\alpha_n}, \in \rangle \models \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \ .$$

Ako je α supremum niza ordinala α_n, onda je $\langle V_\alpha, \in \rangle \models \mathrm{ZFC}$.

Međutim, konstrukciju niza α_n ne možemo sprovesti unutar ZFC, jer meta–teorijskim prirodnim brojevima odgovaraju numerali[3], a predikat "x je numeral" nije predstavljiv unutar ZFC.

Iz istih razloga se dokaz konzistentnosti ZFC korišćenjem stava kompaktnosti i teoreme refleksije ne može sprovesti unutar ZFC.

[3] U meta-teorijskom smislu konačni termi sastavljeni od simbola $\}, \{$ i 0.

2.2 Gedelove operacije

Cilj nam je da pokažemo da se shema separacije može zameniti sa konačno mnogo definabilnih operacija apsolutnih za tranzitivne klase. Sam izbor operacija varira od autora do autora, ali se sve one nazivaju *Gedelovim operacijama*. Ovde se odlučujemo za sledećih devet:

- $\mathcal{G}_1(x, y) = \{x, y\}$
- $\mathcal{G}_2(x, y) = x \times y$
- $\mathcal{G}_3(x, y) = \{\langle u, v\rangle \mid u \in x \wedge v \in y \wedge u \in v\}$
- $\mathcal{G}_4(x, y) = x - y$
- $\mathcal{G}_5(x) = \bigcup x$
- $\mathcal{G}_6(x) = \mathrm{dom}(x)$
- $\mathcal{G}_7(x) = \{\langle u, v\rangle \mid \langle v, u\rangle \in x\}$
- $\mathcal{G}_8(x) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \langle u, w, v\rangle \in x\}$
- $\mathcal{G}_9(x) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \langle v, w, u\rangle \in x\}$.

Lako se proverava da su uočene operacije apsolutne za tranzitivne klase zatvorene za $\{\}$. Takođe,

$$x \cap y = x - (x - y) \quad \text{i} \quad \mathrm{rng}(x) = \mathrm{dom}(\mathcal{G}_7(x)) \ .$$

Neka je $\mathcal{U}_i^n : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \longrightarrow V$ tzv. *i–ta projekcija*, tj. za svako $x_1, \ldots, x_n$ je

$$\mathcal{U}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i \ .$$

$\mathcal{U}_i^n$ izražavamo preko Gedelovih operacija na sledeći način:

- $\mathcal{U}_1^n(x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{\mathrm{dom} \circ \cdots \circ \mathrm{dom}}_{n-1}(x_1 \times \cdots \times x_n)$
- $\mathcal{U}_n^n(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{rng}(x_1 \times \cdots \times x_n)$
- Za $1 < i < n$ je

$$\mathcal{U}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{rng} \circ \underbrace{\mathrm{dom} \circ \cdots \circ \mathrm{dom}}_{n-i}(x_1 \times \cdots \times x_n) \ .$$

Lema 2.2.1 *Neka je $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ proizvoljna Σ_0 formula jezika L_{ZF} u kojoj se ne javlja jednakost*[4]*. Tada za proizvoljne skupove $X_1,\dots,X_n$ postoji kompozicija Gedelovih operacija $\mathcal{G}$ tako da važi*

$$\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n \wedge \varphi(\overline{x})\} = \mathcal{G}(\overline{X}) \ ,$$

pri čemu je $\overline{x} = x_1,\dots,x_n$, $\overline{X} = X_1,\dots,X_n$.

Dokaz :

Ako je formula φ kontradikcija, onda je

$$\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n \wedge \varphi(\overline{x})\} = X_1 - X_1 \ .$$

Stoga je od interesa slučaj kad formula φ nije kontradikcija. Sam dokaz teoreme izvodimo indukcijom po složenosti formule φ.

(1) $\mathrm{sl}(\varphi) = 0$.

Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po $n \geq 2$. Ako je $n = 2$, onda imamo sledeća dva slučaja:

- $\{\langle x_1,x_2\rangle \mid x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2 \wedge x_1 \in x_2\} = \mathcal{G}_3(X_1,X_2)$
- $\{\langle x_1,x_2\rangle \mid x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2 \wedge x_2 \in x_1\} = \mathcal{G}_7(\mathcal{G}_3(X_2,X_1))$.

Neka je $n > 2$. Razlikujemo sledeća četiri podslučaja:

- $\{\vec{x} \mid \bigwedge_{i=1}^n x_i \in X_i \wedge x_{n-1} \in x_n\} = \mathcal{G}_9\mathcal{G}_7(X_1\times\cdots\times X_{n-2}\times\mathcal{G}_3(X_{n-1},X_n))$, pri čemu je $\vec{x} = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$;
- $\{\vec{x} \mid \bigwedge_{i=1}^n x_i \in X_i \wedge x_n \in x_{n-1}\} =$
 $\mathcal{G}_9\mathcal{G}_7(X_1 \times\cdots\times X_{n-2} \times \mathcal{G}_7(\mathcal{G}_3(X_n,X_{n-1})))$
- Neka je

 $$B = \{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \bigwedge_{r=1}^{n} x_r \in X_r \wedge x_i \in x_j\} \ ,$$

 pri čemu je $i,j \neq n$. Uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, postoji kompozicija Gedelovih operacija $\mathcal{G}$ tako da je

 $$\{\langle x_1,\dots,x_{n_1}\rangle \mid \bigwedge_{r=1}^{n-1} x_r \in X_r \wedge x_i \in x_j\} = \mathcal{G}(X_1,\dots,X_{n-1}) \ .$$

 Sada je

 $$B = \mathcal{G}(X_1,\dots,X_{n-1}) \times X_n \ ;$$

[4]Jednakost možemo eliminisati na osnovu aksiome ekstenzionalnosti, tj. svako javljanje $x = y$ možemo zameniti sa $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$.

- Neka je
$$B = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \bigwedge_{r=1}^{n} x_r \in X_r \wedge x_i \in x_j\} ,$$
pri čemu je $i, j \neq n-1$. Uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, postoji kompozicija Gedelovih operacija $\mathcal{G}$ tako da je
$$\{\langle x_1, \dots, x_{n-2}, x_n\rangle \mid \bigwedge_{r\in I} x_r \in X_r \wedge x_i \in x_j\} = \mathcal{G}(X_1, \dots, X_{n-2}, X_n) ,$$
pri čemu je $I = \{1, \dots, n-2, n\}$. Tada je
$$B = \mathcal{G}_8(\mathcal{G}(X_1, \dots, x_{n-2}, X_n) \times X_{n-1}) .$$

(2) $\mathrm{sl}(\varphi) > 0$.
Radi pojednostavljenja notacije, za proizvoljnu formulu $\psi(x_1, \dots, x_n)$ neka je
$$B_\psi = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mid \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \in X_i \wedge \psi(x_1, \dots, x_n)\} .$$
Razlikujemo sledeća dva slučaja:

- $\varphi \leftrightarrow \neg\psi$. Uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, postoji kompozicija Gedelovih operacija $\mathcal{G}$ tako da je
$$B_\psi = \mathcal{G}(\overline{X}) .$$
Tada je
$$B_\varphi = (X_1 \times \cdots \times X_n) - \mathcal{G}(\overline{X}) .$$
- $\varphi \leftrightarrow \psi \wedge \theta$. Uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, postoje kompozicije Gedelovih operacija $\mathcal{G}'$ i $\mathcal{G}''$ tako da je
$$B_\psi = \mathcal{G}'(\overline{X}) \ \text{ i } \ B_\theta = \mathcal{G}''(\overline{X},) .$$
Tada je $B_\varphi = B_\psi \cap B_\theta = \mathcal{G}'(\overline{X}) \cap \mathcal{G}''(\overline{X})$.

□

Za klasu $\mathcal{A}$ kažemo da je *skoro univerzalna* ako važi
$$(\forall x \subseteq \mathcal{A})(\exists y \in \mathcal{A})(x \subseteq y) .$$
Primetimo da je svaka skoro univerzalna klasa prava klasa. Zaista, ako bi postojao skoro univerzalan skup X, onda bi zbog $X \subseteq X$ i skoro univerzalnosti postojao $x \in X$ tako da je $X \subseteq x$, što je u kontradikciji sa $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(X)$.

Za proizvoljan skup X definišimo njegovo *zatvorenje za Gedelove operacije*, u oznaci $\mathrm{CL}(X)$, rekurzivno duž ω na sledeći način:

- $\mathrm{CL}_0(X) = X$
- $\mathrm{CL}_{n+1} = \mathrm{CL}_n(X) \cup \bigcup_{i=1}^{4}\{\mathcal{G}_i(x,y) \mid x,y \in \mathrm{CL}_n(X)\}$
  $\cup \bigcup_{i=5}^{9}\{\mathcal{G}_i(x) \mid x \in \mathrm{CL}_n(X)\}$
- $\mathrm{CL}(X) = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{CL}_n(X)$.

Korišćenjem $\in$–indukcije, lako se proverava da iz tranzitivnosti skupa x sledi i tranzitivnost skupa $\mathrm{CL}(x)$.

Dalje, ako je $\mathcal{M}$ tranzitivna klasa zatvorena za $\{\}$, onda je $\mathcal{M}$ apsolutna za Gedelove operacije, odakle se indukcijom lako pokazuje da je za svako $n \in \omega$ i svako $x \in \mathcal{M}$

$$\mathrm{CL}_n^{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{CL}_n(x) \ ,$$

odakle sledi da je za svako $x \in \mathcal{M}$

$$\mathrm{CL}^{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{CL}(x) \ .$$

Samim tim, i predikat $y = \mathrm{CL}(x)$ je apsolutan za tranzitivne klase zatvorene za $\{\}$.

Teorema 2.2.1 *Neka je $\mathcal{M}$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gedelove operacije i neka je $\varphi(\overline{x})$ proizvoljna formula jezika L_{ZF}. Tada za proizvoljne $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{M}$ postoje $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}$ (k je broj neograničenih kvantora koji se javljaju u φ) i kompozicija Gedelovih operacija $\mathcal{G}$ tako da je*

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \in X_i \ \wedge\ \varphi^{\mathcal{M}}(\overline{x})\} = \mathcal{G}(\overline{X}, \overline{A}) \ .$$

Posebno, klasa $\mathcal{M}$ je apsolutna za shemu separacije.

Dokaz :

Indukcijom po složenosti $\varphi^{\mathcal{M}}$. Obzirom na prethodnu lemu, jedini slučaj koji treba zasebno obrazložiti je kada je φ oblika $\exists y \psi(y, \overline{x})$, tj.

$$\varphi^{\mathcal{M}} \leftrightarrow \exists y(y \in \mathcal{M} \ \wedge\ \psi^{\mathcal{M}}(y, \overline{x})) \ .$$

Na osnovu pressing down leme postoji $A \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ tako da

$$(\forall \overline{x} \in A)\big(\exists y(y \in \mathcal{M} \ \wedge\ \psi^{\mathcal{M}}(y, \overline{x})) \to (\exists y \in A)(y \in \mathcal{M} \ \wedge\ \psi^{\mathcal{M}}(y, \overline{x}))\big) \ .$$

Obzirom da važi

$$(\forall \overline{x} \in A \cap \mathcal{M})\big(\exists y(y \in \mathcal{M} \ \wedge\ \psi^{\mathcal{M}}(y, \overline{x})) \to (\exists y \in A)(y \in \mathcal{M} \ \wedge\ \psi^{\mathcal{M}}(y, \overline{x}))\big)$$

i da je $\bigcup_{i=1}^{n} X_i \subseteq A \cap \mathcal{M}$, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $A \subseteq \mathcal{M}$.

Klasa $\mathcal{M}$ je skoro univerzalna, pa kako je $A \subseteq \mathcal{M}$, postoji $A_k \in \mathcal{M}$ tako da je $A \subseteq A_k$. Uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, postoje $A_1, \ldots, A_{k-1} \in \mathcal{M}$ i kompozicija Gedelovih operacija $\mathcal{G}$ tako da je

$$B = \{\langle y, \overline{x}\rangle \mid y \in A_k \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \in X_i \wedge \psi^{\mathcal{M}}(y, \overline{x})\} = \mathcal{G}(A_k, \overline{X}, A_1, \ldots, A_{k-1}) \ .$$

Ako je u pitanju bio ograničeni kvantor, tj. ako je $y \in x_i$ potformula formule ψ, onda za skup A_k možemo uzeti skup $\bigcup X_i$. Sada je

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \in X_i \wedge \varphi^{\mathcal{M}}(\overline{x})\} = \mathcal{U}_2^{n+1}(B) \times \cdots \times \mathcal{U}_{n+1}^{n+1}(B) \ .$$

Otuda i tvrđenje u celini, jer iz zatvorenosti klase $\mathcal{M}$ za Gedelove operacije i upravo dokazanog sledi da za proizvoljnu formulu $\varphi(x, z, \overline{y})$ i proizvoljne $z, \overline{y} \in \mathcal{M}$ važi

$$\{\langle x, z, \overline{y}\rangle \mid x \in z \wedge z \in \{z\} \wedge y_1 \in \{y_1\} \wedge \cdots \wedge y_n \in \{y_n\} \wedge \varphi^{\mathcal{M}}(x, z, \overline{y})\} \in \mathcal{M} \ ,$$

odakle sledi da

$$\{x \mid x \in z \wedge \varphi^{\mathcal{M}}(x, z, \overline{y})\} \in \mathcal{M} \ ,$$

što upravo znači da je klasa $\mathcal{M}$ apsolutna za shemu separacije.

$\square$

Teorema 2.2.2 *Neka je $\mathcal{M}$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gedelove operacije. Tada je $\mathcal{M}$ apsolutna za ZF. Posebno,* $\mathrm{Ord} \subseteq \mathcal{M}$.

Dokaz :
Iz tranzitivnosti klase $\mathcal{M}$ sledi apsolutnost za aksiome ekstenzionalnosti, praznog skupa i regularnosti. Kako je klasa $\mathcal{M}$ zatvorena za Gedelove operacije, imamo apsolutnost i aksioma para i unije, a na osnovu prethodne teoreme sledi i apsolutnost sheme separacije za $\mathcal{M}$.

Prvo pokažimo da je $\mathrm{Ord} \subseteq \mathcal{M}$, odakle će posebno slediti i apsolutnost klase $\mathcal{M}$ za aksiomu beskonačnosti. Neka je

$$\mathcal{A} = \{\alpha \mid \alpha \in \mathcal{M}\} \ .$$

Transfinitnom indukcijom pokazujemo da je $\mathcal{A} = \mathrm{Ord}$. Neka je $\alpha \subseteq \mathcal{A}$. Tada je i $\alpha \subseteq \mathcal{M}$, pa zbog skoro univerzalnosti klase $\mathcal{M}$ sledi da postoji $a \in \mathcal{M}$ tako da je $\alpha \subseteq a$.

Kako je $(x \in \mathrm{Ord})^{\mathcal{M}} \leftrightarrow x \in \mathrm{Ord}$, na osnovu prethodne teoreme sledi da

$$b = \{x \mid x \in a \wedge x \in \mathrm{Ord}\} \in \mathcal{M} \ ,$$

odakle zbog zatvorenosti klase $\mathcal{M}$ za Gedelove operacije i apsolutnosti ordinala za tranzitivne klase sledi da

$$\bigcup b \in \mathcal{M} \cap \mathrm{Ord} \ .$$

Kako je $\alpha \leq \bigcup b$ i kako je $\mathcal{M}$ tranzitivna klasa, mora biti i $\alpha \in \mathcal{M}$, tj. $\alpha \in \mathcal{A}$. Sada po teoremi transfinitne indukcije sledi da je $\mathcal{A} = \mathrm{Ord}$.

Pokažimo apsolutnost $\mathcal{M}$ za aksiomu partitivnog skupa. Treba zapravo pokazati da za svako $X \in \mathcal{M}$ $P(X) \cap \mathcal{M} \in \mathcal{M}$. Obzirom da je $P(X) \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$, iz skoro univerzalnosti klase $\mathcal{M}$ sledi da postoji $A \in \mathcal{M}$ tako da je

$$P(X) \cap \mathcal{M} \subseteq A \; .$$

Sada je

$$P(X) \cap \mathcal{M} = \{x \mid x \in A \wedge x \subseteq X\} \; ,$$

a kako je $(x \in A \wedge x \subseteq X)^{\mathcal{M}} \leftrightarrow x \in A \wedge x \subseteq X$, zbog apsolutnosti sheme separacije za $\mathcal{M}$ mora biti $P(X) \cap \mathcal{M} \in \mathcal{M}$.

Ostaje da pokažemo apsolutnost klase $\mathcal{M}$ za shemu zamene. Uočimo proizvoljno $\Phi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \longrightarrow V$. Tada za proizvoljne $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{M}$ zbog skoro univerzalnosti klase $\mathcal{M}$ postoji $Y \in \mathcal{M}$ tako da je

$$\Phi^{\mathcal{M}}[X_1 \times \cdots \times X_n] \cap \mathcal{M} \subseteq Y \; .$$

Neka je

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} (\exists x_1 \in y_1) \ldots (\exists x_n \in y_n)(x = \Phi^{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n)) \; .$$

Kako je $(\forall x, \overline{y} \in \mathcal{M})(\psi^{\mathcal{M}}(x, \overline{y}) \leftrightarrow \psi(x, \overline{y}))$, mora biti i

$$\Phi^{\mathcal{M}}[X_1 \times \cdots \times X_n] \cap \mathcal{M} = \{x \mid x \in Y \wedge \psi^{\mathcal{M}}(x, X_1, \ldots, X_n)\} \in \mathcal{M} \; ,$$

odakle sledi apsolutnost klase $\mathcal{M}$ za shemu zamene.

□

Posledica 2.2.1 *Neka je $\mathcal{M}$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gedelove operacije. Tada $(\forall x \in \mathcal{M})(\mathrm{CL}(x) \in \mathcal{M})$.*

Dokaz :

Obzirom da je klasa $\mathcal{M}$ apsolutna za ZF i da je rečenica

$$\forall x \exists y (y = \mathrm{CL}(x))$$

teorema teorije ZF (u konstrukciji $\mathrm{CL}(x)$ se nigde ne koristi AC), njena relativizacija na $\mathcal{M}$ je takođe teorema. Obzirom da je odgovarajuća relativizacija rečenica

$$(\forall x \in \mathcal{M})(\exists y \in \mathcal{M})(y = \mathrm{CL}(x)) \; ,$$

imamo tvrđenje.

□

Za proizvoljan skup x neka je

$$D(x) =_{\text{def}} \mathrm{CL}(x+1) \cap P(x) \ ,$$

pri čemu je $x+1 = x \cup \{x\}$. Dakle, $D(x)$ je skup svih *definabilnih* podskupova od x sa parametrima iz $x+1$. Primetimo da za beskonačan skup x važi

$$|D(x)| = |x| \ .$$

Za tranzitivnu klasu $\mathcal{M}$ zatvorenu za $\{\}$ je $D^{\mathcal{M}}(x) = D(x) \cap \mathcal{M}$. Ako je klasa $\mathcal{M}$ zatvorena i za CL, tj. ako za svako $x \in \mathcal{M}$ $\mathrm{CL}(x) \in \mathcal{M}$, onda je $\mathrm{CL}(x) \subseteq \mathcal{M}$, pa samim tim i

$$D^{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{CL}(x) \cap P(x) \cap \mathcal{M} = (\mathrm{CL}(x) \cap \mathcal{M}) \cap P(x) = \mathrm{CL}(x) \cap P(x) = D(x) \ .$$

Posebno, ako je $\mathcal{M}$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gedelove operacije, onda za svako $x \in \mathcal{M}$ $D(x) \in \mathcal{M}$.

Iz prethodnih razmatranja neposredno sledi

Lema 2.2.2 *Neka je $\mathcal{M}$ tranzitivna klasa apsolutna za sledeće tri teoreme teorije ZF:*

- $\forall x \forall y \exists z (z = \{x, y\})$
- $\forall x \exists y (y = \mathrm{CL}(x))$
- $\forall x \exists y (y = P(x))$.

Tada važi $(\forall x \in \mathcal{M})(\exists y \in \mathcal{M})(y = D(x))$.

□

Neka je $\mathcal{M}$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gedelove operacije i neka je $\Gamma : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ kanonska bijekcija. Iz prethodnih razmatranja neposredno sledi da je $\Gamma \subseteq \mathcal{M}$.

Dalje, neka je $\mathcal{J} : 10 \times \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ definisano sa

$$\mathcal{J}(n, \alpha, \beta) = 10 \cdot \Gamma(\alpha, \beta) + n \ .$$

Lako se proverava da je $\mathcal{J}$ bijekcija i da je $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}$. Sada postoje jedinstveni $\mathcal{I}_1 : \mathrm{Ord} \longrightarrow 10$ i $\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3 : \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ tako da

$$\forall \alpha \big(\alpha = \mathcal{J}(\mathcal{I}_1(\alpha), \mathcal{I}_2(\alpha), \mathcal{I}_3(\alpha))\big) \ .$$

Samim tim, mora biti i $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3 \subseteq \mathcal{M}$.

2.3 Konstruktibilni univerzum

Gedelov *konstruktibilni univerzum* L konstruišemo transfinitnom rekurzijom po Ord na sledeći način:

- $L_0 = 0$
- $L_{\alpha+1} = D(L_\alpha)$
- $L_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} L_\beta$, $\bigcup\alpha = \alpha$.

Posebno,

$$x \in L \Leftrightarrow_{\text{def}} \exists\alpha(x \in L_\alpha) .$$

Teorema 2.3.1 *Klasa L svih konstruktibilnih skupova je tranzitivna, skoro univerzalna i zatvorena za Gedelove operacije. Posebno, ako je $\mathcal{M}$ proizvoljna tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gedelove operacije, onda je $L \subseteq \mathcal{M}$.*

Dokaz :
Tranzitivnost neposredno sledi iz definicije klase L i činjenice da je za tranzitivan skup x skup $D(x)$ takođe tranzitivan.

Što se tiče skoro univerzalnosti, prvo primetimo da za svaki ordinal α $L_\alpha \in L$ kao i da iz $\alpha < \beta$ sledi da $L_\alpha \in L_\beta$.
Neka je $X \subseteq L$. Tada za svako $x \in X$ postoji ordinal α_x tako da $x \in L_{\alpha_x}$. Neka je $\alpha = \bigcup_{x\in X} \alpha_x$. Sada imamo da je $X \subseteq L_\alpha$ i da $L_\alpha \in L$, odakle sledi skoro univerzalnost.

U vezi zatvorenosti klase L za Gedelove operacije, prvo primetimo sledeće:

- $\mathcal{G}_1(x,y) = \{x,y\} = \{z \mid z = x \vee z = y\}$
- $\mathcal{G}_2(x,y) = x \times y = \{z \mid (\exists u \in x)(\exists v \in y) z = \langle u,v\rangle\}$
- $\mathcal{G}_3(x,y) = \{z \mid (\exists u \in x)(\exists v \in y)(u \in v \wedge z = \langle u,v\rangle)\}$
- $\mathcal{G}_4(x,y) = x - y = \{z \mid z \in x \wedge z \notin y\}$
- $\mathcal{G}_5(x) = \bigcup x = \{z \mid (\exists y \in x) z \in y\}$
- $\mathcal{G}_6(x) = \mathrm{dom}(x) = \{z \mid z \in \bigcup\bigcup x \wedge (\exists y \in \bigcup\bigcup x)(\langle z,y\rangle \in x)\}$
- $\mathcal{G}_7(x) = \{z \mid (\exists u,v \in \bigcup\bigcup x)(z = \langle u,v\rangle \wedge \langle v,u\rangle \in x)\}$
- $\mathcal{G}_8(x) = \{z \mid (\exists u,v \in \bigcup^4 x)(\exists w \in \bigcup^2 x)(z = \langle u,w,v\rangle \wedge \langle u,v,w\rangle \in x)\}$, pri čemu je $\bigcup^n x = \underbrace{\bigcup\cdots\bigcup}_{n} x$;
- $\mathcal{G}_9(x) = \{z \mid (\exists u,v \in \bigcup^4 x)(\exists w \in \bigcup^2 x)(z = \langle u,w,v\rangle \wedge \langle u,v,w\rangle \in x)\}$.

Ako $x, y \in L_\alpha$ onda $\mathcal{G}_i(x,y), \mathcal{G}_5(x) \in D(L_\alpha)$, pa imamo zatvorenost L za prvih pet Gedelovih operacija. Ako je α ordinal takav da $x, \bigcup^2 x, \bigcup^4 x \in L_\alpha$, onda i $\mathcal{G}_i(x) \in D(L_\alpha)$, pa imamo zatvorenost L i za preostale četiri Gedelove operacije.

Ostaje da pokažemo poslednji deo tvrđenja. Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljna tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gedelove operacije.

Ako $L_\alpha \in \mathcal{M}$, onda zbog zatvorenosti $\mathcal{M}$ za D važi i $L_{\alpha+1} = D(L_\alpha) \in \mathcal{M}$. Ako je $L_\alpha \subseteq \mathcal{M}$, $\bigcup \alpha = \alpha$, onda zbog apsolutnosti klase $\mathcal{M}$ za ZF važi

$$\{L_\beta \mid \beta \in \alpha\} \in \mathcal{M} \ ,$$

odakle iz istog razloga sledi da $L_\alpha = \bigcup\{L_\beta \mid \beta \in \alpha\} \in \mathcal{M}$.

$\square$

Na osnovu prethodne teoreme neposredno sledi da je predikat $x \in L$ apsolutan za tranzitivne skoro univerzalne klase zatvorene za Gedelove operacije. Iz prethodnih razmatranja neposredno sledi

Teorema 2.3.2 *Neka je Θ konjunkcija sledećih šest teorema teorije ZF:*

- $\forall x \forall y \exists z (z = \{x, y\})$
- $\forall x \exists y (y = \bigcup x)$
- $\forall x \exists y (y = P(x))$
- $\forall x \exists y (y = \mathrm{CL}(x))$
- $\exists x (0 \in x \land (\forall y \in x)(y + 1 \in x))$
- $\forall \alpha (\exists_1 f : \alpha + 1 \longrightarrow V)\big(f(0) = 0$
  $\land\ (\forall \beta \in \alpha)\big(f(\beta+1) = D(f(\beta))\big)$
  $\land\ (\forall \beta \in \alpha + 1)(\bigcup \beta = \beta \rightarrow f(\beta) = \bigcup_{\gamma \in \beta} f(\gamma))\big)$.

Ako je klasa $\mathcal{M}$ apsolutna za Θ, onda je

$$(\forall x \in \mathcal{M})((x \in L)^{\mathcal{M}} \rightarrow x \in L) \ .$$

$\square$

Sa $V = L$ označimo rečenicu

$$\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha) \ ,$$

a sa ZFL označimo teoriju ZF + $V = L$.

Teorema 2.3.3 (Gedel)

$$\mathrm{ZFL} \vdash \mathrm{AC} \ .$$

Dokaz :

Neka su $\Gamma, \mathcal{J}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ i $\mathcal{I}_3$ isti kao u razmatranjima na kraju prethodnog odeljka (odeljak 2.2). Obzirom da je L tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gedelove operacije, važi

$$\Gamma, \mathcal{J}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3 \subseteq L \ .$$

Definišimo $\mathcal{L} : \mathrm{Ord} \longrightarrow L$ $\in$–rekurzijom na sledeći način:

$$\mathcal{L}(\alpha) = \begin{cases} L_{\mathcal{I}_2(\alpha)} & , \quad \mathcal{I}_1(\alpha) = 0 \\ \mathcal{G}_{\mathcal{I}_1(\alpha)}(\mathcal{L}(\mathcal{I}_2(\alpha)), \mathcal{L}(\mathcal{I}_3(\alpha))) & , \quad 1 \leq \mathcal{I}_1(\alpha) \leq 4 \\ \mathcal{G}_{\mathcal{I}_1(\alpha)}(\mathcal{L}(\mathcal{I}_2(\alpha))) & , \quad \mathcal{I}_1(\alpha) > 4 \end{cases} .$$

Primetimo da je i $\mathcal{L} \subseteq L$. Dalje, iz definicije $\mathcal{L}$ neposredno sledi da je za svaki ordinal α

$$L_\alpha = \mathcal{L}(\mathcal{J}(0, \alpha, 0)) \ .$$

Neka su $x, y, z \in L$ proizvoljni. Ako je $x = \mathcal{G}_i(y, z)$ i ako je $y = \mathcal{L}(\alpha)$ i $z = \mathcal{L}(\beta)$, onda je

$$x = \mathcal{L}(\mathcal{J}(i, \alpha, \beta)) \ .$$

Ako je $x = \mathcal{G}_i(y)$ i $y = \mathcal{L}(\alpha)$, onda je

$$x = \mathcal{L}(\mathcal{J}(i, \alpha, 0)) \ .$$

Odavde neposredno sledi da za proizvoljne konstruktibilne skupove $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$ i proizvoljnu kompoziciju Gedelovih operacija $\mathcal{G}$ konstruktibilni skup $x = \mathcal{G}(a_1, \ldots, a_n)$ takođe pripada $\mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$.

Neka je $L_\alpha \subseteq \mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$. Tada je i $L_\alpha + 1 \subseteq \mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$. Obzirom da za svako $x \in L_{\alpha+1} = D(L_\alpha)$ postoje $a_1, \ldots, a_n \in L_\alpha + 1$ i kompozicija Gedelovih operacija $\mathcal{G}$ tako da je

$$x = \mathcal{G}(a_1, \ldots, a_n) \ ,$$

na osnovu prethodnih razmatranja sledi da je $L_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$.

Sada se transfinitnom indukcijom lako pokazuje da je za svaki ordinal α $L_\alpha \subseteq \mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$. Samim tim, $\mathcal{L}$ je "na".

Primetimo da je sa

$$x < y \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \min\{\alpha \mid x = \mathcal{L}(\alpha)\} < \min\{\alpha \mid y = \mathcal{L}(\alpha)\}$$

dobro definisano dobro uređenje na L. Samim tim, ako je $V = L$, onda imamo globalno dobro uređenje, odakle neposredno sledi AC.

□

Ako je $\mathfrak{M}$ proizvoljan model teorije ZF, onda je njegov konstruktibilni univerzum $L^{\mathfrak{M}}$ model teorije ZFC. Samim tim,

$$\mathrm{Con(ZF)} \rightarrow \mathrm{Con(ZFC)} \ .$$

Teorema 2.3.4 (Gedel) ZFL $\vdash$ GCH.

Dokaz :

Dokaz : Neka je $V = L$. Treba pokazati da proizvoljan za $x \subseteq \omega_\lambda$ važi $x \in L_{\omega_{\lambda+1}}$. Naime, tada će zbog $|L_{\omega_{\lambda+1}}| = \aleph_{\lambda+1}$ biti $|P(\omega_\lambda)| = \aleph_{\lambda+1}$.

Neka je $x \subseteq \omega_\lambda$ proizvoljan. Obzirom da je metateorija ZFL, postojaće ordinal β tako da $x \in L_\beta$. Na osnovu teoreme refleksije postoji skup A tako da važi:

1. Θ i aksioma ekstenzionalnosti su apsolutni za A
2. $\omega_\lambda \cup \{\beta, x\} \subseteq A$
3. $|A| = \aleph_\lambda$
4. $\beta \in \mathrm{Ord}$ i $x \in L_\beta$ su apsolutni za A.

Po teoremi kolapsa postoje jedinstveni tranzitivan skup M i izomorfizam $f : (A, \in) \cong (M, \in)$. Kako je ω_λ tranzitivan skup, to je $f|_{\omega_\lambda} = 1_{\omega_\lambda}$, pa mora biti $f(x) = x$.

Dalje, obzirom da su ordinali apsolutni za tranzitivne modele, to je $f(\beta)$ ordinal (i u M i spolja). Obzirom da je M tranzitivan, to je $f(\beta) \subseteq M$, a kako je $|M| = \aleph_\lambda$, to $f(\beta) \in \omega_{\lambda+1}$.

Kako je Θ apsolutno za M, svi u M konstruktibilni skupovi su zaista konstruktibilni, pa imamo da je

$$f(x) = x \in L_{f(\beta)} \ ,$$

odakle sledi $x \in L_{\omega_{\lambda+1}}$. Samim tim, imamo tvrđenje.

$\square$

Posebno, ako je $\mathfrak{M}$ model teorije ZF, onda je njegov konstruktibilni univerzum $L^{\mathfrak{M}}$ model teorije ZFC + GCH, odakle neposredno sledi da

$$\mathrm{Con(ZF)} \to \mathrm{Con(ZFC + GCH)} \ .$$

2.4 Kompletne Bulove algebre

Bulova algebra $\mathbb{B} = \langle B, \cdot, +, ', 0, 1\rangle$ je *kompletna* ako svaki neprazan podskup skupa B ima supremum i infimum. Precizirajmo notaciju:

- $\sum X \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{sup} X$;
- $\prod X \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{inf} X$;
- $X' \overset{\mathrm{def}}{=} \{x' \mid x \in X\}$;

- $\sum \emptyset \overset{\text{def}}{=} 0$;
- $\prod \emptyset \overset{\text{def}}{=} 1$.

Važan primer kompletne Bulove algebre je algebra regularno otvorenih skupova u datom topološkom prostoru. U kompletnim Bulovim algebrama važi:

- $(\sum X)' = \prod X'$;
- $(\prod X)' = \sum X'$;
- $\sum X \ \cdot \ \sum Y = \sum XY$;
- $\prod X \ + \ \prod Y = \prod (X+Y)$.

Napomenimo da je

$$XY = \{x \cdot y \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\} \quad \text{i} \quad X+Y = \{x+y \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\}\ .$$

$W \subseteq B$ je *antilanac* ako $0 \notin W$ i ako za svako $x, y \in W$ važi $xy = 0$.

Napomena:

Ako je W maksimalan antilanac u $\mathbb{B}$, onda je $\sum W = 1$, Zaista, ako bi bilo $\sum W = a < 1$, onda bi bilo i $a' > 0$ i za svako $x \in W$ bi bilo $a'x = 0$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je W maksimalan antilanac.

Lema 2.4.1 *Neka je $\mathbb{B}$ kompletna Bulova algebra, X neprazan podskup od B takav da je $XB = B$ i neka je W maksimalan antilanac u X. Tada je*

$$\sum X = \sum W\ .$$

Dokaz :

Obzirom na očiglednu nejednakost $\sum X \geq \sum W$, ostaje da se pokaže obratna nejednakost. Neka je $x \in X$ proizvoljno. Kako je $XB = X$, to

$$b = x \prod W' \in X\ .$$

Sada je $b \sum W = 0$, a kako je $b \in X$ i kako je W maksimalan antilanac u X, mora biti $b = 0$, odakle sledi da je $x' + \sum W = 1$. Množenjem poslednje jednakosti sa x dobijamo da je $x \sum W = x$, odakle neposredno sledi da je $\sum X \leq \sum W$.

□

Neka je $(P, \leq)$ proizvoljno uređenje:

- $U_p \overset{\text{def}}{=} \{q \in P \mid q \leq p\}$;
- $U \subseteq P$ je *rez* ako je za svako $p \in U$ $U_p \subseteq U$;

- Rez $U \subseteq P$ je *regularan* ako za svako $p \in P - U$ postoji $q \leq p$ tako da je $U_q \cap U = \emptyset$;
- $p, q \in P$ su *kompatibilni*, u oznaci $p \,|\, q$, ako postoji $r \in U_p \cap U_q$ tako da je $|U_r| > 1$. U suprotnom su *inkompatibilni*, što ćemo označavati sa $p \perp q$;
- $\langle P, \leq \rangle$ je *separativno* ako za svako $p, q \in P$ važi :

$$p \not\leq q \to (\exists r \leq p) r \perp q \ ;$$

- $D \subseteq P$ je *gust* ako za svako $p \in P$ važi:

$$\text{“}p \text{ nije minimum ”} \to (\exists q \in D) q \leq p \ .$$

Napomena :

Neka je $\mathbb{B}$ kompletna Bulova algebra i neka je D gust u B. Tada je $\sum D = 1$. Zaista, ako bi bilo $\sum D = a < 1$, onda bi bilo $a' > 0$ i $a'D = 0$, što bi bilo u suprotnosti sa činjenicom da je D gust u $\mathbb{B}$.

Za proizvoljno $v > 0$ je $\mathbb{B}_v = \langle \{u \in B \mid u \leq v\}, \cdot, +, ', 0, v \rangle$ kompletna Bulova algebra i skup $D_v = \{u \in D \mid u \leq v\}$ je gust u $\mathbb{B}_v$. Sada na osnovu prethodnog imamo da je

$$\sum D_v = v \ .$$

Odavde neposredno sledi da je skup D gust u kompletnoj Bulovoj algebri $\mathbb{B}$ akko za svako $v > 0$ postoji $D_v \subseteq D$ tako da je $\sum D_v = v$.

Lema 2.4.2 *Neka je uređenje $\langle P, \leq \rangle$ separativno. Tada važi:*

(a) Familija $X = \{U_p \mid p \in P\}$ je baza neke topologije na P;

(b) Za svako $p \in P$ U_p je regularan rez;

(c) U je regularno otvoren u topologiji generisanoj familijom X akko je regularan rez.

Dokaz :

Tvrđenje (a) je očigledno, a tvrđenje (b) je neposredna posledica separativnosti. Pokažimo (c).

$\Leftarrow$: Neka je U regularan rez i neka $p \notin U$. Tada postoji $q \leq p$ tako da je $U_q \cap U = \emptyset$. Samim tim, $q \notin \mathrm{cl}U$, odakle sledi da $U_p \not\subseteq \mathrm{cl}U$, pa $p \notin \mathrm{int\ cl}U$. Dakle, U je regularno otvoren.

$\Rightarrow$: Neka rez U nije regularan. Tada postoji $p \notin U$ tako da je za svako $q \leq p$ $U_q \cap U \neq \emptyset$. Samim tim, $U_p \subseteq \mathrm{cl}U$, pa $p \in \mathrm{int\ cl}U$. Samim tim, U nije regularno otvoren.

$\square$

Lema 2.4.3 *Neka su $\mathbb{B}_1$ i $\mathbb{B}_2$ kompletne Bulove algebre i neka je $(P, \leq)$ separativno uređenje gusto i u $\mathbb{B}_1$ i u $\mathbb{B}_2$, $0 \notin P$ i za svako $p, q \in P$ važi*

$$q \leq p \quad \leftrightarrow \quad q \leq_1 p \quad \leftrightarrow \quad q \leq_2 p \ .$$

Tada je $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{B}_2$.

Dokaz :
Treba pokazati da je odgovarajući izomorfizam definisan sa

$$f(x) = \sum_{\mathbb{B}_2} \{p \in P \mid p \leq_1 x\}, \quad x \in B_1 \ .$$

Ključni korak je dokaz sledećeg pomoćnog tvrđenja:

$$p \leq_1 x \leftrightarrow p \leq_2 f(x), \quad x \in B_1 \ .$$

Neka je $x \in B_1$ proizvoljno i neka x nije minimalni element. Obzirom na definiciju $f(x)$, to očigledno za svako $p \in P$ važi

$$p \leq_1 x \rightarrow p \leq_2 f(x) \ .$$

Neka je $p \in P$ i neka $p \not\leq_1 x$. Obzirom da je svaka Bulova algebra separativno uređenje, postoji $0 < q \leq_1 p$ inkompatibilno sa x. Obzirom da je P gust u $\mathbb{B}_1$, možemo pretpostaviti da $q \in P$. Sada je

$$q \cdot_2 f(x) = q \sum_{\mathbb{B}_2} \{r \in P \mid r \leq_1 x\} = \sum_{\mathbb{B}_2} \{q \cdot_2 r \mid r \leq_1 x \wedge r \in P\} \ .$$

Ako je $0 <_2 q \cdot_2 r$, onda bi zbog gustine P u $\mathbb{B}_2$ postojalo $s \in P$ tako da je

$$s \leq_2 q \quad \text{i} \quad s \leq_2 r \ ,$$

pa bi bilo i

$$s \leq_1 q \quad \text{i} \quad s \leq_1 r \ ,$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da su q i x inkompatibilni. Dakle,

$$q \cdot_2 f(x) = \sum_{\mathbb{B}_2} \{q \cdot_2 r \mid r \leq_1 x \wedge r \in P\} = 0 \ ,$$

pa ne može biti $p \leq_2 f(x)$.

$\square$

Direktna posledica prethodne dve leme je sledeća

Teorema 2.4.1 *Neka je $\langle P, \leq \rangle$ proizvoljno separativno uređenje. Tada postoji do na izomorfizam jedinstvena kompletna Bulova algebra u koju se $\langle P, \leq \rangle$ gusto utapa.*

□

Neka je κ kardinal i $\mathbb{B}$ Bulova algebra. Kažemo da je $\mathbb{B}$ κ*–distributivna* ako za svako $I = \bigcup_{\alpha\in\kappa} I_\alpha$ i svako $\{u_{\alpha,i} \mid \alpha \in \kappa, i \in I\} \subseteq B$ važi

$$\prod_{\alpha\in\kappa}\sum_{i\in I_\alpha} u_{\alpha,i} = \sum_{f\in\prod_{\alpha\in\kappa} I_\alpha}\prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} \ .$$

Neka su W_1 i W_2 particije Bulove algebre $\mathbb{B}$. Kažemo da je W_1 *profinjenje* particije W_2 ako

$$(\forall u \in W_1)(\exists v \in W_2) u \leq v \ .$$

Za proizvoljan $X \subseteq B$ neka je

$$\overline{X} = \bigcup_{x\in X} U_x = \bigcup_{x\in X}\{u \in B \mid u \leq x\} \ .$$

Teorema 2.4.2 *Neka je κ kardinal i neka je $\mathbb{B}$ kompletna Bulova algebra. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{B}$ je κ–distributivna ;

(b) Neka su D_α, $\alpha \in \kappa$ gusti skupovi u $\mathbb{B}$. Tada je skup

$$D = \bigcap_{\alpha\in\kappa}\overline{D_\alpha}$$

gust u $\mathbb{B}$ i pri tom je $D = \overline{D}$;

(c) Svaka familija $\{W_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ particija Bulove algebre $\mathbb{B}$ ima zajedničko profinjenje.

Dokaz :

(a)⇒(b) :

Neka su D_α, $\alpha \in \kappa$ gusti u $\mathbb{B}$ i neka je

$$D = \bigcap_{\alpha\in\kappa}\overline{D_\alpha} \ .$$

Očigledno je $D = \overline{D}$. Neka je $u > 0$ proizvljno. Obzirom da je svaki od skupova $\overline{D_\alpha}$ gust, za svako $\alpha \in \kappa$ će postojati $\{u_{\alpha,i} \mid \alpha \in \kappa,\ i \in I_\alpha\} \subseteq \overline{D_\alpha}$ tako da je

$$u = \sum_{i\in I_\alpha} u_{\alpha,i} \ .$$

Samim tim je i

$$\prod_{\alpha\in\kappa}\sum_{i\in I_\alpha} u_{\alpha,i} = \prod_{\alpha\in\kappa} u = u \ .$$

Obzirom da je $\mathbb{B}$ κ–distributivna, imamo da je

$$u = \sum_{f \in \prod_{\alpha\in\kappa} I_\alpha} \prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} \ ,$$

a kako za svako $f \in \prod_{\alpha\in\kappa} I_\alpha$

$$\prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} \in D \ ,$$

skup D je gust u $\mathbb{B}$.

(b)$\Rightarrow$(c) :
Neka su $W_\alpha,\ \alpha\in\kappa$ particije Bulove algebre $\mathbb{B}$. Za svako $\alpha\in\kappa$ neka je

$$D_\alpha = \{u \in B \mid (\exists v \in W_\alpha) u \leq v\} \ .$$

Sada je na osnovu (b) skup $D = \bigcap_{\alpha\in\kappa} D_\alpha$ gust u $\mathbb{B}$ i pri tom je $D = \overline{D}$. Neka je W maksimalan antilanac u $D - \{0\}$. Očigledno je W zajedničko profinjenje particija $W_\alpha,\ \alpha\in\kappa$.

(c)$\Rightarrow$(a) :
S jedne strane, za svako $f \in \prod_{\alpha\in\kappa} I_\alpha$ je

$$(\forall\alpha\in\kappa)(\prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} \leq \sum_{i\in I_\alpha} u_{\alpha,i}) \ ,$$

odakle sledi da je

$$\prod_{\alpha\in\kappa}\sum_{i\in I_\alpha} u_{\alpha,i} \geq \sum_{f \in \prod_{\alpha\in\kappa} I_\alpha} \prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} \ .$$

S druge strane, neka je $u = \prod_\alpha \sum_i u_{\alpha,i}$. Obratnu nejednakost je dovoljno pokazati u slučaju kada je $u = 1$ (ako je $u < 1$, onda odgovarajući dokaz sprovedemo u algebri $\mathbb{B}_u$).

Neka je $u = 1$. Tada je za svako $\alpha\in\kappa$

$$\sum_{i\in I_\alpha} u_{\alpha,i} = 1 \ .$$

Odavde sledi da za svako $\alpha\in\kappa$ postoji particija W_α Bulove algebre $\mathbb{B}$ tako da

$$(\forall v \in W_\alpha)(\exists i \in I_\alpha) v \leq u_{\alpha,i} \ .$$

Neka je particija W zajedničko profinjenje za $W_\alpha,\ \alpha\in\kappa$. Dakle, za svako $v \in W$ postoji $f \in \prod_{\alpha\in\kappa} I_\alpha$ tako da je

$$v \leq \prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} \ ,$$

odakle sledi da je

$$\sum_{f \in \prod_{\alpha\in\kappa} I_\alpha} \prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} = 1 \ .$$

$\square$

2.5 Bulovsko vrednosni modeli

Neka je L jezik prvog reda, $\mathbb{B} = \langle B, \cdot, +, ', 0, 1\rangle$ kompletna Bulova algebra i neka je $\mathbb{A}$ model jezika L. Funkciju

$$\mathfrak{v} : \mathrm{For}L \times {}^{\mathrm{Var}}A \longrightarrow B$$

zovemo *bulovskom vrednošću*, a par $\langle \mathbb{A}, \mathfrak{v}\rangle$ *bulovsko vrednosnim modelom* sa vrednostima u $\mathbb{B}$ (nadalje $\mathbb{B}$–modelom) ako važi:

- $\mathfrak{v}(x = x, f) = 1$
- $\mathfrak{v}(x = y, f) = \mathfrak{v}(y = x, f)$
- $\mathfrak{v}(x = y, f) \cdot \mathfrak{v}(y = z, f) \le \mathfrak{v}(x = z, f)$
- $\mathfrak{v}(x = y, f) \cdot \mathfrak{v}(R(\dots, x, \dots), f) \le \mathfrak{v}(R(\dots, y, \dots), f) \ , \quad R \in \mathrm{Rel}L$
- $\mathfrak{v}(x = y, f) \le \mathfrak{v}(F(\dots, x, \dots) = F(\dots, y, \dots), f) \ , \quad F \in \mathrm{Fun}L$
- $\mathfrak{v}(\neg\varphi, f) = \mathfrak{v}(\varphi, f)'$,
- $\mathfrak{v}(\varphi \wedge \psi, f) = \mathfrak{v}(\varphi, f) \cdot \mathfrak{v}(\psi, f)$
- $\mathfrak{v}(\varphi \vee \psi, f) = \mathfrak{v}(\varphi, f) + \mathfrak{v}(\psi, f)$
- $\mathfrak{v}(\exists x\varphi, f) = \sum_{a\in A} \mathfrak{v}(\varphi, f^x_a)$, gde je $f^x_a = \begin{cases} f(y) & , \quad x \ne y \\ a & , \quad x = y \end{cases}$
- $\mathfrak{v}(\forall x\varphi, f) = \prod_{a\in A} \mathfrak{v}(\varphi, f^x_a)$.

Ako je $\mathbb{B} \cong \mathbf{2}$, onda je $\langle \mathbb{A}, \mathfrak{v}\rangle$ klasičan model. Sledeća lema se lako dokazuje indukcijom po složenosti formule.

Lema 2.5.1 *Neka je φ proizvoljna formula jezika L. Tada važi:*

1. *Za proizvoljne valuacije $f, g : \mathrm{Var} \longrightarrow A$ takve da je $f|_{\mathrm{Fv}(\varphi)} = g|_{\mathrm{Fv}(\varphi)}$ je $\mathfrak{v}(\varphi, f) = \mathfrak{v}(\varphi, g)$;*
2. $\mathfrak{v}(x = y, f) \cdot \mathfrak{v}(\varphi(\dots, x, \dots), f) \le \mathfrak{v}(\varphi(\dots, y, \dots), f)$.

$\square$

Uvedimo sledeće oznake:

- $||\varphi(a_1,\dots,a_n)|| \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{v}(\varphi,f)$, pri čemu je $\varphi=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ i $f(x_i)=a_i$;
- $\langle \mathbb{A}, ||\ || \rangle =_{\text{def}} \langle \mathbb{A}, \mathfrak{v}\rangle$;
- $\langle \mathbb{A}, ||\ || \rangle \models \varphi \Leftrightarrow_{\text{def}} ||\varphi|| = 1$.

$\mathbb{B}$–model $\langle \mathbb{A}, ||\ || \rangle$ je *pun* ako za svaki maksimalan antilanac W u $\mathbb{B}$ i svako $\{a_u \mid u\in W\}\subseteq A$ postoji $a\in A$ tako da važi

$$(\forall u\in W) u \le ||a=a_u|| \ .$$

Napomena :

Uz prethodnu simboliku, neka su $a,b\in A$ takvi da je za svako $u\in W$

$$u\le ||a=a_u|| \quad \text{i} \quad u\le ||b=a_u|| \ .$$

Tada je

$$u\le ||a=a_u||\cdot||b=a_u|| \le ||a=b|| \ ,$$

odakle sledi da je

$$1=\sum W \le ||a=b|| \ , \quad \text{tj.} \ \ ||a=b||=1 \ .$$

Lema 2.5.2 *Neka je $\langle \mathbb{A}, ||\ || \rangle$ pun $\mathbb{B}$–model jezika L i neka je $\varphi(x,\overline{y})$ proizvoljna formula jezika L, $\overline{y}=y_1,\dots,y_n$. Tada za proizvoljno $\overline{b}\in A$ postoji $a\in A$ tako da je*

$$||\exists x\varphi(x,\overline{b})|| = ||\varphi(a,\overline{b})|| \ .$$

Dokaz :

Neka je

$$X=\{u\in B \mid (\exists a_u\in A) u\le ||\varphi(a_u,\overline{b})||\}$$

i neka je W maksimalan antilanac u X. Kako je $XB=X$, to je $\sum X=\sum W$. Obzirom da je $\langle \mathbb{A}, ||\ || \rangle$ pun model, postojaće $a\in A$ tako da je

$$(\forall u\in W) u\le ||a=a_u|| \ .$$

Hoćemo da pokažemo da je a odgovarajući svedok. S jedne strane, očigledno je

$$||\varphi(a,\overline{b})|| \le ||\exists x\varphi(x,\overline{b})|| \ .$$

S druge strane

$$\begin{aligned} ||\exists x\varphi(x,\overline{b})|| &= \sum_{c\in A} ||\varphi(c,\overline{b})|| \\ &= \sum X \\ &= \sum W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{u\in W} u\cdot ||a=a_u|| \\ &\leq \sum_{u\in W} ||\varphi(a_u,\bar{b})||\cdot||a=a_u|| \\ &\leq \sum_{u\in W} ||\varphi(a,\bar{b})|| \\ &= ||\varphi(a,\bar{b})|| \ . \end{aligned}$$

□

Teorema 2.5.1 *Neka je L jezik prvog reda, $\mathbb{B}$ kompletna Bulova algebra, $\langle\mathbb{A},||\ ||\rangle$ $\mathbb{B}$–model i φ valjana formula jezika L. Tada je $||\varphi||=1$.*

Dokaz :
Prvo pokažimo sledeće pomoćno tvrđenje:

Neka je F ultrafilter u $\mathbb{B}$ i neka je $\sim$ binarna relacija na B definisana sa

$$u\sim v \Leftrightarrow_{\text{def}} uv+u'v'\in F\ .$$

Tada je $\mathbb{B}_{/F}=\mathbb{B}_{/\sim}\cong\mathbf{2}$.

Iz definicije relacije $\sim$ i činjenice da je F ultrafilter neposredno sledi da je

$$\begin{aligned} u\sim v \quad &\leftrightarrow \quad (u\in F\wedge v\in F)\vee(u'\in F\wedge v'\wedge F) \\ &\leftrightarrow \quad (u\in F\wedge v\in F)\vee(u\notin F\wedge v\notin F)\ , \end{aligned}$$

odakle sledi da $\sim$ ima tačno dve klase. Obzirom da kongruencije čuvaju algebarske zakone[5], za dokaz pomoćnog tvrđenja je dovoljno pokazati da je $\sim$ kongruencija.

Refleksivnost, simetričnost i saglasnost sa $'$ neposredno slede iz definicije, a kako se tranzitivnost i saglasnost sa $\cdot$ i $+$ sasvim slično dokazuju, to ćemo pokazati samo saglasnost sa $+$.

Neka $uu_1+u'u_1'\in F$ i $vv_1+v'v_1'\in F$. Tada i

$$\begin{aligned} a &= (uu_1+u'u_1')\cdot(vv_1+v'v_1') \\ &= uu_1vv_1+uu_1v'v_1'+u'u_1'vv_1+u'u_1'v'v_1'\in F\ . \end{aligned}$$

Dalje, neka je

$$\begin{aligned} b &= (u+v)(u_1+v_1)+(u+v)'(u_1+v_1)' \\ &= uu_1+vv_1+uv_1+vu_1+u'u_1'v'v_1'\ . \end{aligned}$$

[5] I više od toga, kongruencije čuvaju pozitivne hornovske formule.

Da bi pokazali saglasnost sa $+$ ostaje da pokažemo da $b \in F$, za šta je dovoljno pokazati da je $b \geq a$. No ovo neposredno sledi iz sledećih nejednakosti:

$$\begin{aligned} uu_1 &\geq uu_1 v' v_1' \\ vv_1 &\geq u' u_1' vv_1 \\ uv_1 + vu_1 &\geq uu_1 vv_1 \ . \end{aligned}$$

Pređimo na dokaz teoreme. Neka je φ formula jezika L takva da je $||\varphi|| < 1$. Tada postoji ultrafilter F u $\mathbb{B}$ takav da $||\varphi|| \notin F$. Sada je $||\varphi||_{/F} = 0$, a kako je $\mathbb{B}_{/F} \cong \mathbf{2}$, to je $\langle \mathbb{A}, || \ ||_{/F} \rangle$ klasičan model u kome ne važi φ, pa φ nije valjana formula.

□

2.6 Bulovski univerzum $M^{\mathbb{B}}$

Uobičajeno je da se opiše $V^{\mathbb{B}}$. Ovde dajemo relativizaciju te konstrukcije na prebrojiv tranzitivan model $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$ teorije T, pri čemu je T ili ZFC ili neka jača teorija.

Dalje, neka

$$\mathfrak{M} \models \text{“}\mathbb{B} \text{ je kompletna Bulova algebra ”} \ .$$

Bulovski univerzum $M^{\mathbb{B}}$ formiramo rekurzivno po $\mathrm{Ord} \cap M$ na sledeći način:

- $M_0^{\mathbb{B}} = 0$;
- $M_{\alpha+1}^{\mathbb{B}} = \{\tau \in M \mid \mathrm{fun}(\tau) \wedge \mathrm{dom}(\tau) \subseteq M_\alpha^{\mathbb{B}} \wedge \mathrm{rng}(\tau) \subseteq B\}$;
- $M_\alpha^{\mathbb{B}} = \bigcup_{\beta \in \alpha} M_\beta^{\mathbb{B}}$, za granični ordinal α;
- $M^{\mathbb{B}} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord} \cap M} M_\alpha^{\mathbb{B}}$.

Iz definicije neposredno sledi da za svaka dva ordinala α i β važi

$$\alpha \in \beta \rightarrow M_\alpha^{\mathbb{B}} \subseteq M_\beta^{\mathbb{B}} \ .$$

Same elemente bulovskog univerzuma $M^{\mathbb{B}}$ zovemo i *imenima*.

Za proizvoljno $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ ćemo sa $r(\tau)$ označavati najmanji ordinal α takav da $\tau \in M_\alpha^{\mathbb{B}}$. Bulovsku vrednost u $M^{\mathbb{B}}$ definišemo $\in$–rekurzijom na sledeći način:

- $||\tau \in \sigma|| =_{\mathrm{def}} \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sigma(x) \cdot ||x = \tau||$
- $||\tau \subseteq \sigma|| =_{\mathrm{def}} \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)' + ||x \in \sigma||)$

- $||\tau = \sigma|| =_{\text{def}} ||\tau \subseteq \sigma|| \cdot ||\sigma \subseteq \tau||$
- $||\neg\varphi|| =_{\text{def}} ||\varphi||'$
- $||\varphi \wedge \psi|| =_{\text{def}} ||\varphi|| \cdot ||\psi||$
- $||\varphi \vee \psi|| =_{\text{def}} ||\varphi|| + ||\psi||$
- $||\exists x\varphi|| =_{\text{def}} \sum\limits_{\tau \in M^{\mathbb{B}}} ||\varphi(\tau)||$
- $||\forall x\varphi|| =_{\text{def}} \prod\limits_{\tau \in M^{\mathbb{B}}} ||\varphi(\tau)||$.

Lema 2.6.1 $\langle M^{\mathbb{B}}, ||\ ||\rangle$ *je* $\mathbb{B}$*–model.*

Dokaz :
Obzirom na definiciju bulovsko–vrednosnog modela dovoljno je pokazati sledeće:

1. $||\tau = \tau|| = 1$
2. $\tau(x) \leq ||x \in \tau||, \quad x \in \text{dom}(\tau)$
3. $||\tau = \sigma|| = ||\sigma = \tau||$
4. $||\tau = \sigma|| \cdot ||\sigma = \rho|| \leq ||\tau = \rho||$
5. $||\tau \in \sigma|| \cdot ||\sigma = \rho|| \leq ||\tau \in \rho||$
6. $||\tau \in \sigma|| \cdot ||\tau = \rho|| \leq ||\rho \in \sigma||$.

(1.),(2.) : Simultano indukcijom po $r(\tau)$. Neka je $x \in \text{dom}(\tau)$ proizvoljno. Tada je $r(x) < r(\tau)$, pa je $||x = x|| = 1$ (induktivna hipoteza). Samim tim je i $\tau(x) \cdot ||x = x|| = \tau(x)$, odakle sledi da je

$$\tau(x) \leq \sum_{y \in \text{dom}(\tau)} \tau(y) \cdot ||y = x|| \ = \ ||x \in \tau||.$$

Koristeći ovo dobijamo da je

$$||\tau \subseteq \tau|| = \prod_{x \in \text{dom}(\tau)} (\tau(x)' + ||x \in \tau||) \geq \prod_{x \in \text{dom}(\tau)} (\tau(x)' + \tau(x)) \ = \ 1 \ ,$$

odakle sledi da je $||\tau = \tau|| = 1$.

(3.): Sledi direktno iz definicije.

(4.),(5.),(6.): Simultano indukcijom po trojkama $\langle r(\tau), r(\sigma), r(\rho)\rangle$ uređenim leksikografski.

$$\begin{aligned}
||\tau \subseteq \sigma|| \cdot ||\sigma = \rho|| &= \prod_{x\in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)' \cdot ||\sigma = \rho|| + ||x \in \sigma|| \cdot ||\sigma = \rho||) \\
&\leq \prod_{x\in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)' + ||x \in \sigma|| \cdot ||\sigma = \rho||) \\
&\leq \prod_{x\in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)' + ||x \in \rho||) \\
&= ||\tau \subseteq \rho|| \ .
\end{aligned}$$

Sasvim slično i $||\sigma \subseteq \tau|| \cdot ||\sigma = \rho|| \leq ||\rho \subseteq \tau||$.

$$\begin{aligned}
||\tau \in \sigma|| \cdot ||\sigma = \rho|| &= \sum_{x\in \mathrm{dom}(\sigma)} \sigma(x) \cdot ||x = \tau|| \cdot ||\sigma = \rho|| \\
&\leq \sum_{x\in \mathrm{dom}(\sigma)} ||x \in \sigma|| \cdot ||\sigma = \rho|| \cdot ||x = \tau|| \\
&\leq \sum_{x\in \mathrm{dom}(\sigma)} ||x \in \rho|| \cdot ||x = \tau|| \\
&\leq \sum_{x\in \mathrm{dom}(\sigma)} ||\tau \in \rho|| \\
&= ||\tau \in \rho|| \ .
\end{aligned}$$

Sasvim slično se pokazuje i (6.).

□

Lema 2.6.2 $\langle M^{\mathbb{B}}, ||\ || \rangle$ *je pun model.*

Dokaz :

Neka je W maksimalan antilanac u $\mathbb{B}$ i neka je $\{\tau_u \mid u \in W\} \subseteq M^{\mathbb{B}}$. Kako je $\{r(\tau_u) \mid u \in W\}$ skup ordinala u M, to će postojati $\alpha \in \mathrm{Ord} \cap M$ tako da je

$$D = \bigcup_{u\in W} \mathrm{dom}(\tau_u) \ \subseteq \ M^{\mathbb{B}}_{\alpha} \ .$$

Za svako $u \in W$ definišimo funkciju $\tau^*_u : D \longrightarrow B$ sa

$$\tau^*_u(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in D - \mathrm{dom}(\tau_u) \\ \tau_u(x) & , \quad x \in \mathrm{dom}(\tau_u) \quad . \end{cases}$$

Pokažimo da je

$$||\tau_u = \tau^*_u|| \ .$$

S jedne strane, ako $x \notin \mathrm{dom}(\tau_u)$, onda je $\tau^*_u(x) = 0$, pa je

$$\tau^*_u(x)' + ||x \in \tau_u|| = 1 \ .$$

Ako $x \in \mathrm{dom}(\tau)$, onda je $||x \in \tau_u|| \geq \tau_u(x) = \tau_u^*(x)$, pa je opet

$$\tau_u^*(x)' + ||x \in \tau_u|| = 1 \ .$$

Dakle, $||\tau_u^* \subseteq \tau_u|| = \prod_{x \in D} (\tau_u^*(x)' + ||x \in \tau_u||) = 1$.

S druge strane,

$$\begin{aligned} ||\tau_u \subseteq \tau_u^*|| &= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau_u)} (\tau_u(x)' + ||x \in \tau_u^*||) \\ &\geq \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau_u)} (\tau_u(x)' + \tau_u^*(x)) \\ &= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau_u)} (\tau_u(x)' + \tau_u(x)) \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

Neka je $\tau : D \longrightarrow B$ funkcija definisana sa

$$\tau(x) = \sum_{u \in W} u\tau_u^*(x), \quad x \in D \ .$$

Pokažimo da za svako $x \in D$ i svako $u \in W$ važi

$$u \leq \tau(x)' + \tau_u^*(x) \quad \text{i} \quad u \leq \tau(x) + \tau_u^*(x)' \ .$$

Zaista,

$$\begin{aligned} u(\tau(x) + \tau_u^*(x)') &= u \sum_{v \in W} v\tau_u^*(x) \ + \ u\tau_u^*(x)' \\ &= u\tau_u^*(x) + u\tau_u^*(x)' \\ &= u \\ u(\tau(x)' + \tau_u^*(x)) &= u\tau(x)' + u\tau_u^*(x) \\ &= u\tau(x)' + u\tau(x) \\ &= u \ . \end{aligned}$$

Neka je $u \in W$ proizvoljno. Tada važi:

$$\begin{aligned} u||\tau \subseteq \tau_u^*|| &= u \prod_{x \in D} (\tau(x)' + ||x \in \tau_u^*||) \\ &\geq \prod_{x \in D} u(\tau(x)' + \tau_u^*(x)) \\ &= \prod_{x \in D} u \\ &= u \ . \end{aligned}$$

Sasvim slično se pokazuje da je i $||\tau_u^* \subseteq \tau|| = u$, odakle sledi da je

$$u \leq ||\tau = \tau_u^*|| \ .$$

Obzirom da je $||\tau_u = \tau_u^*|| = 1$ i da je $||\tau = \tau_u^*|| \cdot ||\tau_u^* = \tau_u|| \leq ||\tau = \tau_u||$, to je

$$u \leq ||\tau = \tau_u|| \ ,$$

čime je tvrđenje dokazano.

$\square$

Utapanje $x \mapsto \check{x}$ modela $\mathfrak{M}$ u bulovski univerzum $M^{\mathbb{B}}$ definišemo $\in$–rekurzijom na sledeći način:

- $\check{0} = 0$
- $\check{x} = \{\langle \check{y}, 1\rangle \mid y \in x\}$.

Primera radi,

$$\begin{aligned} \check{1} &= \{\langle \check{0}, 1\rangle\} = \{\langle 0, 1\rangle)\} \\ \check{2} &= \{\langle \check{0}, 1\rangle, \langle \check{1}, 1\rangle\} \\ &= \{\langle 0, 1\rangle), \langle\{\langle 0, 1\rangle\}, 1\rangle\} \ . \end{aligned}$$

Lema 2.6.3 *Neka su $x, y \in M$ proizvoljni. Tada važi:*

1. $x = y \leftrightarrow ||\check{x} = \check{y}|| = 1$
2. $x \in y \leftrightarrow ||\check{x} \in \check{y}|| = 1$.

Dokaz :

Dovoljno je pokazati sledeće:

(a) $x \neq y \rightarrow ||\check{x} = \check{y}|| = 0$

(b) $x \notin y \rightarrow ||\check{x} \notin \check{y}|| = 0$.

(a) i (b) simultano pokazujemo transfinitnom indukcijom po parovima

$$\langle r(\check{x}), r(\check{y})\rangle$$

uređenim leksikografski.

Neka je $x \neq y$. Obzirom na očiglednu simetriju, razmotrićemo samo slučaj kada postoji $z \in x$ tako da $z \notin y$. Za takvo z je uz odgovarajuću induktivnu hipotezu i $||\check{z} \in \check{y}|| = 0$ i $||\check{z} = \check{z}|| = 1$. Sada je

$$||\check{z} \in \check{x}|| \quad = \quad \sum_{t \in x} \check{x}(\check{t})||\check{t} = \check{z}||$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t\in x} ||\check{t} = \check{z}|| \\
&\geq ||\check{z} = \check{z}|| = 1 \\
||\check{x} \subseteq \check{y}|| &= \prod_{t\in x} (\check{x}(\check{t})' + ||\check{t} \in \check{y}||) \\
&= \prod_{t\in x} ||\check{t} \in \check{y}|| \\
&\leq ||\check{z} \in \check{y}|| = 0 \ .
\end{aligned}$$

Odavde neposredno sledi da je $||\check{x} = \check{y}|| = 0$.

Neka $x \notin y$. Tada je za svako $z \in y$ $z \neq x$, pa je, uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, $||\check{z} = \check{x}|| = 0$. Sada je

$$||\check{x} \in \check{y}|| = \sum_{z\in y} \check{y}(\check{z})||\check{z} = \check{x}|| = \sum_{z\in y} 1 \cdot 0 = 0 \ .$$

□

Teorema 2.6.1 $\langle M^{\mathbb{B}}, ||\ || \rangle \models$ ZFC.

Dokaz :

Ekstenzionalnost :
Neka su $\tau, \sigma \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljni. Hoćemo da pokažemo da je

$$||\forall z(z \in \tau \leftrightarrow z \in \sigma) \rightarrow \tau = \sigma|| = 1 \ .$$

Prvo primetimo da je

$$||(\forall z \in \tau) z \in \sigma|| = ||\tau \subseteq \sigma|| \quad \text{i} \quad ||(\forall z \in \sigma) z \in \tau|| = ||\sigma \subseteq \tau|| \ .$$

Sada je

$$||(\forall z \in \tau) z \in \sigma \wedge (\forall z \in \sigma) z \in \tau \rightarrow \tau = \sigma|| = ||\tau = \sigma||' + ||\tau = \sigma|| = 1 \ .$$

Kako je

$$\forall z(z \in \tau \leftrightarrow z \in \sigma) \leftrightarrow (\forall z \in \tau) z \in \sigma \wedge (\forall z \in \sigma) z \in \tau$$

valjana formula, mora biti

$$||\forall z(z \in \tau \leftrightarrow z \in \sigma)|| = ||(\forall z \in \tau) z \in \sigma \wedge (\forall z \in \sigma) z \in \tau|| = ||\tau = \sigma|| \ ,$$

odakle neposredno sledi da je

$$||\forall z(z \in \tau \leftrightarrow z \in \sigma) \rightarrow \tau = \sigma|| = 1 \ .$$

Prazan skup :

Hoćemo da pokažemo da je

$$||\forall x(x \notin 0)|| = 1 \ .$$

No ovo neposredno sledi iz činjenice da je za svako $\tau \in M^{\mathbb{B}}$

$$||\tau \in 0|| = \prod_{x\in\emptyset}(0(x)' + ||x = \tau||) = \prod \emptyset = 1 \ .$$

Separacija :
Neka je $\varphi = \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ proizvoljna formula jezika teorije skupova i neka su $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljni. Uočimo $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tako da :

- $\mathrm{dom}(\tau) = \mathrm{dom}(\sigma) = D$
- $\tau(x) = \sigma(x) \cdot ||\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)||, \quad x \in D$.

Nadalje ćemo umesto $||\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)||$ pisati kratko $||\varphi||$. Hoćemo da pokažemo da je

$$||\forall x(x \in \tau \leftrightarrow x \in \sigma \wedge \varphi)|| = 1 \ .$$

Kako je

$$\forall x(x \in \tau \leftrightarrow x \in \sigma \wedge \varphi) \leftrightarrow (\forall x \in \tau)(x \in \sigma \wedge \varphi) \wedge (\forall x \in \sigma)(\varphi \rightarrow x \in \tau)$$

valjana formula, dovoljno je pokazati da je

$$||(\forall x \in \tau)(x \in \sigma \wedge \varphi)|| = 1 \quad \text{i} \quad ||(\forall x \in \sigma)(\varphi \rightarrow x \in \tau)|| = 1 \ .$$

$$\begin{aligned}
||(\forall x \in \tau)(x \in \sigma \wedge \varphi)|| &= \prod_{x\in D}(\tau(x)' + ||x \in \sigma|| \cdot ||\varphi||) \\
&= \prod_{x\in D}((\sigma(x) \cdot ||\varphi||)' + ||x \in \sigma|| \cdot ||\varphi||) \\
&\geq \prod_{x\in D}((\sigma(x) \cdot ||\varphi||)' + \sigma(x) \cdot ||\varphi||) = 1 \\
||(\forall x \in \sigma)(\varphi \rightarrow x \in \tau)|| &= \prod_{x\in D}(\sigma(x)' + ||\varphi||' + ||x \in \tau||) \\
&\geq \prod_{x\in D}(\tau(x)' + \tau(x)) = 1 \ .
\end{aligned}$$

Aksioma para :
Neka su $\tau, \sigma \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljni i neka je $\rho \in M^{\mathbb{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\rho) = \{\sigma, \tau\}$
- $\rho(\tau) = \rho(\sigma) = 1$.

Hoćemo da pokažemo da je

$$||\forall x(x \in \rho \leftrightarrow x = \rho \vee x = \sigma)|| = 1 \ .$$

No ovo neposredno sledi iz činjenice da je

$$\begin{aligned} ||x \in \rho|| &= \rho(\tau)||x = \tau|| + \rho(\sigma)||x = \sigma|| \\ &= ||x = \tau|| + ||x = \sigma|| \\ &= ||x = \rho \vee x = \sigma|| \ . \end{aligned}$$

Unija :
Neka je $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljno. Uočimo $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\tau) = \bigcup_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \mathrm{dom}(y) \ = D$
- $\tau(x) = ||(\exists y \in \sigma) x \in y||, \quad x \in D.$

Hoćemo da pokažemo da je

$$||\forall x(x \in \tau \leftrightarrow (\exists y \in \sigma) x \in y)|| = 1 \ .$$

Za ovo je dovoljno pokazati da je

$$||(\forall x \in \tau)(\exists y \in \sigma) x \in y|| = 1 \quad \text{i} \quad ||(\forall x \in \tau)(\exists y \in \sigma) x \in y)|| = 1 \ .$$

$$\begin{aligned} ||(\forall x \in \tau)(\exists y \in \sigma) y|| &= \prod_{x \in D} (\tau(x)' + ||(\exists y \in \sigma) x \in y||) \\ &= \prod_{x \in D} (\tau(x)' + \tau(x)) = 1 \\ ||(\forall y \in \sigma)(\forall x \in y) x \in \tau|| &= \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \big(\sigma(y)' + \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} (y(x)' + ||x \in \tau||)\big) \\ &= \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} (\sigma(y)' + y(x)' + ||x \in \tau||) \\ &\geq \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} \big((\sigma(y) y(x))' + \tau(x)\big) \ . \end{aligned}$$

Kako je

$$\tau(x) = \sum_{z \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sigma(z)||x \in z|| \geq \sigma(y)||x \in y|| \geq \sigma(y) y(x) \ ,$$

to je,

$$||(\forall y \in \sigma)(\forall x \in y) x \in \tau|| \geq \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} \big((\sigma(y) y(x))' + \sigma(y) y(x)\big) = 1 \ .$$

Partitivni skup :
Neka je $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljno. Uočimo $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\tau) = B^{\mathrm{dom}(\sigma)} = D$
- $\tau(x) = ||x \subseteq \sigma||, \quad x \in D$.

Hoćemo da pokažemo da je

$$||\forall x(x \in \tau \leftrightarrow x \subseteq \sigma|| = 1 \ .$$

Za ovo je dovoljno pokazati da je

$$||(\forall x \in \tau) x \subseteq \sigma|| = 1 \quad \text{i} \quad ||\forall x(x \subseteq \sigma \rightarrow x \in \tau)|| = 1 \ .$$

Što se tiče prve jednakosti,

$$\begin{aligned} ||(\forall x \in \tau) x \subseteq \sigma|| &= \prod_{x \in D} (\tau(x)' + ||x \subseteq \sigma||) \\ &= \prod_{x \in D} (||x \subseteq \sigma||' + ||x \subseteq \sigma||) \ = 1 \ . \end{aligned}$$

Da bismo pokazali da je

$$||\forall x(x \subseteq \sigma \rightarrow x \in \tau)|| = 1 \ ,$$

dovoljno je pokazati da je za svako $x \in M^{\mathbb{B}}$

$$||x \subseteq \sigma|| \leq ||x \in \tau|| \ .$$

Za proizvoljno $x \in M^{\mathbb{B}}$ neka je $x^* \in M^{\mathbb{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(x^*) = B^{\mathrm{dom}(\sigma)} = D$
- $x^*(t) = ||t \in x||, \quad t \in D$.

Kako je

$$||x = x^*|| \cdot ||x^* \in \tau|| \leq ||x \in \tau|| \ ,$$

to je za $||x \subseteq \sigma|| \leq ||x \in \tau||$ dovoljno pokazati da je

$$||x \subseteq \sigma|| \leq ||x = x^*|| \ .$$

Obzirom da je

$$\begin{aligned} ||x^* \subseteq x|| &= \prod_{t \in D} (x^*(t)' + ||t \in x||) \\ &= \prod_{t \in D} (||t \in x||' + ||t \in x||) \ = \ 1 \ , \end{aligned}$$

ostaje da se pokaže da je

$$||x \subseteq \sigma|| \leq ||x \subseteq x^*|| \ .$$

Neka su $t \in \mathrm{dom}(x)$ i $s \in D$ proizvoljni. Tada je

$$||x \subseteq \sigma|| \cdot x(t) \cdot ||t = s|| \cdot \sigma(s) \leq ||s \in x|| \ ,$$

pa je i

$$||x \subseteq \sigma|| \cdot x(t) \cdot ||t = s|| \cdot \sigma(s) \leq ||s \in x|| \cdot ||t = s|| \ .$$

Odavde sledi da je

$$||x \subseteq \sigma|| \cdot x(t) \cdot \sum_{s \in D} \sigma(s) \cdot ||t = s|| \leq \sum_{s \in D} ||s \in x|| \cdot ||s = t|| \ ,$$

tj.

$$||x \subseteq \sigma|| \cdot x(t) \cdot ||t \in \sigma|| \leq ||t \in x^*|| \ .$$

Kako je

$$||x \subseteq \sigma|| \cdot x(t) \leq (x(t)' + ||t \in \sigma||) \cdot x(t) \leq ||t \in \sigma|| \ ,$$

imamo da je

$$||x \subseteq \sigma|| \cdot x(t) \leq ||t \in x^*|| \ ,$$

tj.

$$||x \subseteq \sigma|| \leq x(t)' + ||t \in x^*|| \ ,$$

odakle sledi da je

$$||x \subseteq \sigma|| \leq \prod_{t \in \mathrm{dom}(x)} (x(t)' + ||t \in x^*||) \ = \ ||x \subseteq x^*|| \ .$$

Beskonačnost :
Pokazujemo da je $||\check{\omega} \in \mathrm{Ind}|| = 1$ tj. da je

$$||\check{0} \in \check{\omega} \wedge (\forall x \in \check{\omega})(x \cup \{x\} \in \check{\omega})|| = 1 \ .$$

Obzirom da $0 \in \omega$, to je $||\check{0} \in \check{\omega}|| = 1$. Dalje,

$$\begin{aligned} ||(\forall x \in \check{\omega})(x \cup \{x\} \in \check{\omega})|| \ &= \ \prod_{x \in \omega} (\check{\omega}(\check{x})' + ||\check{x} \cup \{\check{x}\} \in \check{\omega}||) \\ &= \ \prod_{x \in \omega} ||\check{x} \cup \{\check{x}\} \in \check{\omega}|| \ = \ 1 \ , \end{aligned}$$

jer $x \cup \{x\} \in \omega$, pa je $||\check{x} \cup \{\check{x}\} \in \check{\omega}|| = 1$.
Zamena :
Neka je $\varphi(x, z, y_1, \ldots, y_n)$ proizvoljna formula jezika teorije skupova. Uočimo sledeći ekvivalent aksiome zamene:

$$\forall u \exists v (\forall x \in u)(\exists z \in v)(\exists t \varphi(x, t, \overline{y}) \rightarrow \varphi(x, z, \overline{y})) \ .$$

Za ovaj oblik aksiome zamene smo se odlučili zbog ograničenih kvantora i činjenice da zbog teoreme refleksije nije potrebna jedinstvenost z–a.

Neka su $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljni. Napomenimo da ćemo radi preglednosti koristiti skraćenicu $\overline{\sigma} = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Hoćemo da pokažemo da je

$$||\exists v(\forall x \in \sigma)(\exists z \in v)(\exists t\varphi(x, t, \overline{\sigma}) \to \varphi(x, z, \overline{\sigma}))|| = 1 \ .$$

Neka je

$$a(x, z) = ||\exists t\varphi(x, t, \overline{\sigma}) \to \varphi(x, z, \overline{\sigma})|| \ , \quad x, z \in M^{\mathbb{B}} \ .$$

Kako je

$$\forall x \exists z(\exists t\varphi(x, t, \overline{y}) \to \varphi(x, z, \overline{y}))$$

valjana formula, mora biti

$$\prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z \in M^{\mathbb{B}}} a(x, z) \ = \ 1 \ .$$

Obzirom da je M tranzitivan model za ZFC, mora biti

$$\{a(x, z) \mid x \in \mathrm{dom}(\sigma), z \in M^{\mathbb{B}}\} \in M \ ,$$

odakle sledi da postoji ordinal $\alpha \in M$ tako da je

$$\prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z \in M^{\mathbb{B}}} a(x, z) = \prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z \in M^{\mathbb{B}}_{\alpha}} a(x, z) \ = \ 1 \ .$$

Neka je $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tako da je

- $\mathrm{dom}(\tau) = M^{\mathbb{B}}_{\alpha}$
- $\tau(x) = 1, \quad x \in M^{\mathbb{B}}_{\alpha}$.

Sada je

$$\begin{aligned} ||(\forall x \in \sigma)(\exists z \in \tau)a(x, z)|| \quad &= \quad \prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z \in M^{\mathbb{B}}_{\alpha}} \tau(z) \cdot a(x, z) \\ &= \quad \prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z \in M^{\mathbb{B}}_{\alpha}} a(x, z) \ = 1 \ . \end{aligned}$$

Regularnost :
Pođimo od sledećeg ekvivalenta aksiome regularnosti :

$$\forall x\big((\forall t \in x)\varphi(t, \overline{y}) \to \varphi(x, \overline{y})\big) \to \forall x\varphi(x, \overline{y}) \ .$$

Neka je

$$b = ||\forall x\big((\forall t \in x)\varphi(t, \overline{y}) \to \varphi(x, \overline{y})\big)|| \ .$$

Neka su $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljni. $\in$–indukcijom pokazujemo da je

$$b \leq ||\varphi(\tau, \overline{\sigma})||, \quad \tau \in M^{\mathbb{B}} \ .$$

Uočimo proizvoljno $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ i neka za svako $t \in \mathrm{dom}(\tau)$ važi

$$b \leq ||\varphi(t, \overline{\sigma})|| \ .$$

Tada je

$$b \leq \prod_{t \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(t)' + ||\varphi(t, \overline{\sigma})||) = ||(\forall t \in \tau)\varphi(t, \overline{\sigma})|| \ .$$

S druge strane,

$$b \leq ||(\forall t \in \tau)\varphi(t, \overline{\sigma})||' + ||\varphi(\tau, \overline{\sigma})|| \ ,$$

pa mora biti $b \leq ||\varphi(\tau, \overline{\sigma})||$.

Izbor :

Neka je $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljno. Obzirom na dužinu dokaza, ovde ćemo samo dati konstrukciju odgovarajuće bulovske funkcije izbora za σ.

Prvo definišimo pojam *bulovskog para.* Za proizvoljne $x, y \in M^{\mathbb{B}}$ neka je $\{x, y\}^{\mathbb{B}} \in M^{\mathbb{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\{x, y\}^{\mathbb{B}}) = \{x, y\}$
- $\{x, y\}^{\mathbb{B}}(x) = \{x, y\}^{\mathbb{B}}(y) = 1$.

Sada bulovski par definišemo sa

$$\langle x, y \rangle^{\mathbb{B}} = \{\{x, y\}^{\mathbb{B}}, \{x\}^{\mathbb{B}}\}^{\mathbb{B}} \ .$$

Kako $\mathfrak{M} \models \mathrm{ZFC}$, to postoji $\beta \in \mathrm{Ord} \cap M$ tako da je

$$\sigma = \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \beta\} \ .$$

Za svako $\alpha \in \beta$ neka je

$$y_\alpha = \sigma(\sigma_\alpha) \cdot \prod_{\xi \in \alpha} ||\sigma_\xi = \sigma_\alpha|| \ .$$

Pokažimo da za svako $\alpha \in \beta$ postoji $s_\alpha \in M^{\mathbb{B}}$ tako da je

$$||\sigma_\alpha \neq 0 \rightarrow s_\alpha \in \sigma_\alpha|| = 1 \ .$$

Obzirom da je $M^{\mathbb{B}}$ pun model, to je dovoljno pokazati da je

$$||0 \neq \sigma_\alpha \rightarrow \exists x(x \in \sigma_\alpha)|| = 1 \ .$$

Zaista,

$$\begin{aligned}
||0 \neq \sigma_\alpha \rightarrow \exists x(x \in \sigma_\alpha)|| &= ||0 = \sigma_\alpha|| + \sum_{x \in M^{\mathbb{B}}} ||x \in \sigma_\alpha|| \\
&= ||\sigma_\alpha \subseteq 0|| + \sum_{x \in M^{\mathbb{B}}} ||x \in \sigma_\alpha|| \\
&= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma_\alpha)} \sigma_\alpha(x)' + \sum_{x \in M^{\mathbb{B}}} ||x \in \sigma_\alpha|| \\
&\geq \prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma_\alpha)} \sigma_\alpha(x)' + \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma_\alpha)} \sigma_\alpha(x) = 1 \ .
\end{aligned}$$

Uz prethodnu simboliku, neka je za svako $\alpha \in \beta$

$$x_\alpha = \langle \sigma_\alpha, s_\alpha \rangle^{\mathbb{B}} \ .$$

Uočimo $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\tau) = \{x_\alpha \mid \alpha \in \beta\}$
- $\tau(x_\alpha) = y_\alpha, \quad \alpha \in \beta$.

Može se pokazati da je τ bulovska funkcija izbora za σ, tj. da je

$$||\sigma \neq 0 \to \tau : \sigma \longrightarrow \bigcup \sigma \wedge (\forall x \in \sigma)\tau(x) \in x|| = 1 \ .$$

□

Posledica 2.6.1 *Neka* ZFC $\vdash \varphi$. *Tada je* $||\varphi|| = 1$.

Dokaz :
Neka ZFC $\vdash \varphi$. Po stavu kompaktnosti tada postoje $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in$ ZFC tako da

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \vdash \varphi \ .$$

No sada je

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \varphi$$

valjana formula, pa je

$$||\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \varphi|| = 1 \ .$$

Kako je po prethodnoj teoremi $||\varphi_i|| = 1$, mora biti $||\varphi|| = 1$.

□

2.7 Forsing

Neka je $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$ prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC i neka

$$\mathfrak{M} \models \text{“}\mathbb{B} \text{ je kompletna Bulova algebra”} \ .$$

Ultrafilter G u $\mathbb{B}$ je *generički* ako

$$(\forall A \in M)(A \subseteq G \to \prod A \in G) \ .$$

Ako je G neglavni generički ultrafilter, onda je $\prod G = 0$, pa $G \notin M$. Ako je $\mathbb{B}$ bezatomična Bulova algebra, onda nijedan generički ultrafilter ne pripada M.

Generičko proširenje $\mathfrak{M}[G] = \langle M[G], \in \rangle$ definišemo sa

$$M[G] = \{\tau_G \mid \tau \in M^{\mathbb{B}}\} \ ,$$

pri čemu τ_G $\in$–rekurzijom definišemo na sledeći način:

- $0_G = 0$
- $\tau_G = \{x_G \mid x \in \mathrm{dom}(\tau) \wedge \tau(x) \in G\}$.

Lema 2.7.1 *Neka je G generički ultrafilter u $\mathbb{B}$. Tada važi:*

(a) $M \subseteq M[G]$

(b) $G \in M[G]$

(c) $M[G] = \mathrm{TC}(M[G])$.

Dokaz :
Tranzitivnost generičkog proširenja $M[G]$ sledi direktno iz definicije, te stoga ostaje da pokažemo (a) i (b).
(a): $\in$–indukcijom. Neka je $x \in M$ proizvoljno. Tada je

$$\begin{aligned} \check{x}_G &= \{\check{y}_G \mid y \in x \wedge \check{x}(\check{y}) \in G\} \\ &= \{y \mid y \in x \wedge 1 \in G\} = x \ . \end{aligned}$$

(b): Uočimo $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\tau) = \{\check{u} \mid u \in B\}$
- $\tau(\check{u}) = u, \quad u \in B$.

Sada je

$$\begin{aligned} \tau_G &= \{\check{u}_G \mid \check{u} \in \mathrm{dom}(\tau) \wedge \tau(\check{u}) \in G\} \\ &= \{u \mid u \in B \wedge u \in G\} = G \ . \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.7.2 *Neka su $\tau, \sigma \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljni i neka je G generički ultrafilter u $\mathbb{B}$. Tada važi:*

- $\tau_G = \sigma_G \leftrightarrow ||\tau = \sigma|| \in G$
- $\tau_G \in \sigma_G \leftrightarrow ||\tau \in \sigma|| \in G$.

Dokaz :
Simultano transfinitnom indukcijom po parovima $\langle r(\tau), r(\sigma)\rangle$.
Neka

$$||\tau \in \sigma|| = \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sigma(x) \cdot ||x = \tau|| \ \in \ G \ .$$

Ako bi za svako $x \in \mathrm{dom}(\sigma)$ $\sigma(x)' + ||x \neq \tau|| \in G$, onda bi iz činjenice da je G generički ultrafilter sledilo da i

$$\prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} (\sigma(x)' + ||x \neq \tau||) = ||\tau \notin \sigma|| \in G\ '$$

što je u kontradikciji sa $||\tau \in \sigma|| \in G$.

Dakle, postoji $t \in \mathrm{dom}(\sigma)$ tako da

$$\sigma(t) \cdot ||t = \tau|| \in G \ .$$

Samim tim $||t = \tau|| \in G$ odakle, uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, sledi da je $t_g = \tau_g$. Kako je

$$\sigma_G = \{x_G \ x \in \mathrm{dom}(\sigma) \wedge \sigma(x) \in G\} \ ,$$

to $\tau_G \in \sigma_G$.

Neka $\tau_G \in \sigma_G$. Tada postoji $t \in \mathrm{dom}(\sigma)$ tako da $\sigma(t) \in G$ i $t_G = \tau_G$. Sada je, uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, $||t = \tau|| \in G$, pa je i $\sigma(t) \cdot ||t = \tau|| \in G$. Kako je

$$||\tau \in \sigma|| \geq \sigma(t) \cdot ||t = \tau|| \ ,$$

to $||\tau \in \sigma|| \in G$.

Neka je $||\tau \subseteq \sigma|| \in G$. Tada važi

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(\tau))(\tau(x)' \in G \vee ||x \in \sigma|| \in G) \ .$$

Neka je $x_G \in \tau_G$ proizvoljno. Tada $x \in \mathrm{dom}(\tau)$ i $\tau(x) \in G$, odakle sledi da $||x \in \sigma|| \in G$. Sada, uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, $x_G \in \sigma_G$, odakle sledi da je $\tau_G \subseteq \sigma_G$.

Neka je $\tau_G \subseteq \sigma_G$ i neka je $x \in \mathrm{dom}(\tau)$ proizvoljno. Ako $\tau(x) \in G$, onda $x_G \in \tau_G$, odakle sledi da $x_G \in \sigma_G$. Sada, uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, $||x \in \sigma|| \in G$, odakle sledi da $\tau(x)' + ||x \in \sigma|| \in G$.

Ako $\tau(x) \notin G$, onda $\tau(x)' \in G$, odakle sledi da $\tau(x)' + ||x \in \sigma|| \in G$, što zajedno sa prethodnim daje

$$\prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)' + ||x \in \sigma||) = ||\tau \subseteq \sigma|| \in G \ .$$

Neka $||\tau \subseteq \sigma|| \in G$ i neka je $x_G \in \tau_G$ proizvoljno. Tada $\tau(x) \in G$, pa kako $\tau(x)' + ||x \in \sigma|| \in G$ i kako je G ultrafilter, mora biti

$$||x \in \sigma|| \in G \ ,$$

odakle uz odgovarajuću induktivnu hipotezu sledi da $x_g \in \sigma_G$.

Samim tim, $\tau_G \subseteq \sigma_G$.

$\square$

Teorema 2.7.1 *Neka je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ proizvoljna formula jezika teorije skupova, G generički ultrafilter u $\mathbb{B}$ i neka su $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljni. Tada*

$$\mathfrak{M}[G] \models \varphi[\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}] \leftrightarrow ||\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)|| \in G \ .$$

Napomena :
Obzirom da svaka teorema φ teorije ZFC ima bulovsku vrednost 1, neposredna posledica ove teoreme je činjenica da je $\mathfrak{M}[G] \models$ ZFC.

Dokaz :
Indukcijom po složenosti formule φ. Slučaj kada je φ atomična formula je dokazan u prethodnoj lemi, a slučaj kada je φ bulovska kombinacija je neposredna posledica definicija relacije zadovoljenja i bulovske vrednosti.

Preostaje nam slučaj kada je φ oblika $\exists y\psi(y, \overline{x})$.

Neka
$$||\exists y\psi(y, \tau_1, \ldots, \tau_n)|| = \sum_{y \in M^{\mathbb{B}}} ||\psi(y, \tau_1, \ldots, \tau_n)|| \in G \ .$$
Obzirom da je G generički ultrafilter, postoji $t \in M^{\mathbb{B}}$ tako da
$$||\psi(t, \tau_1, \ldots, \tau_n)|| \in G \ ,$$
odakle, uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, sledi da je
$$M[G] \models \psi[t_G, \tau_{1G}, \ldots, \tau_{ng}] \ .$$

Neka postoji $t \in M^{\mathbb{B}}$ tako da je $M[G] \models \psi[t_G, \tau_{1G}, \ldots, \tau_{ng}]$. Tada, uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, $||\psi(t, \tau_1, \ldots, \tau_n)|| \in G$, a kako je
$$||\psi(t, \tau_1, \ldots, \tau_n)|| \leq ||\exists y\psi(y, \tau_1, \ldots, \tau_n)|| \ ,$$
mora biti $||\exists y\psi(y, \tau_1, \ldots, \tau_n)|| \in G$.

□

Lema 2.7.3 *Neka je G generički ultrafilter u $\mathbb{B}$. Tada važi:*

(a) $\mathfrak{M}[G] = \langle M[G], \in\rangle$ je najmanji tranzitivan model teorije ZFC takav da je $M \subseteq M[G]$ i $G \in M[G]$;

(b) M i $M[G]$ su iste visine, tj. $\mathrm{Ord} \cap M = \mathrm{Ord} \cap M[G]$.

Dokaz :
(a): Neka je $\mathfrak{N} = \langle N, \in\rangle$ tranzitivan model teorije ZFC takav da je $M \subseteq N$ i $G \in N$. Tada je konstrukcija svakog τ_G apsolutna za N, pa $\tau_G \in N$. Samim tim, $M[G] \subseteq N$.

(b): $\in$–indukcijom pokazujemo da je za svako $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ $\mathrm{rank}(\tau_G) \leq \mathrm{rank}(\tau)$, pri čemu smo sa $\mathrm{rank}(\tau)$ označili najmanji ordinal α takav da $\tau \in V_\alpha$. Kako je
$$\tau_G = \{x_G \mid x \in \mathrm{dom}(\tau) \wedge \tau(x) \in G\} \ ,$$
iz induktivne pretpostavke da je za svako $x \in \mathrm{dom}(\tau)$
$$\mathrm{rank}(x_G) \leq \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(\tau)$$

neposredno sledi da je $\mathrm{rank}(\tau_G) \leq \mathrm{rank}(\tau)$.

Ako je τ_G ordinal u $M[G]$, onda prema prethodnom

$$\tau_G \in \mathrm{rank}(\tau) \in M \ ,$$

čime je tvrđenje dokazano.

□

Neka je $\langle P, \leq \rangle \in M$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata. Ultrafilter[6] G u $\langle P, \leq \rangle$ je *generički* ako seče sve guste skupove u $\langle P, \leq \rangle$ koji pripadaju M. Dalje, neka je $\mathbb{B} \in M$ jedinstvena[7] M–kompletna[8] Bulova algebra u kojoj je $\langle P, \leq \rangle$ gusto.

Obzirom da je $\langle P, \leq \rangle$ gusto u $\mathbb{B}$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata, to je $\mathbb{B}$ bezatomična Bulova algebra. Neka je

$$G^* = \{u \in B \mid (\exists p \in G) p \leq u\} \ .$$

Lako se pokazuje da je G^* generički ultrafilter u $\mathbb{B}$. Obzirom da je $\mathbb{B}$ bezatomična Bulova algebra, $G^* \notin M$, odakle sledi da $G \notin M$. Pokažimo da je $M[G^*]$ najmanji tranzitivan model teorije ZFC koji je nadskup od M i koji sadrži G.

S jedne strane, kako je $G = P \cap G^*$ i kako $P, G^* \in M[G^*]$, to $G \in M[G^*]$.

S druge strane, neka je N tranzitivan model teorije ZFC koji je nadskup skupa M i koji sadrži G. Tada i $B \in N$, odakle sledi da je definiciona formula skupa G^* apsolutna za N, pa $G^* \in N$. Samim tim je i $M[G^*] \in N$.

Uz prethodnu simboliku, ako sa $\mathfrak{M}[G]$ označimo najmanji tranzitivan model teorije ZFC koji sadrži G i čiji je skup nosač nadskup skupa M, onda je

$$\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[G^*] \ .$$

Lema 2.7.4 *Neka je $\langle P, \leq \rangle \in M$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata. Tada za svako $p \in P$ postoji generički ultrafilter G u $\langle P, \leq \rangle$ takav da $p \in G$.*

Dokaz :

Obzirom da je M prebrojiv, to se svi gusti u $\langle P, \leq \rangle$ skupovi iz M mogu poređati u niz. Neka je to niz $D_n, \ n \in \omega$. Uočimo proizvoljno $p \in P$. Obzirom na činjenicu da su skupovi D_n gusti u P, postojaće niz

$$p \geq d_0 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \ , \quad d_n \in D_n, \ n \in \omega \ .$$

[6] $G \subseteq P$ je filter ako važi:

- $G \neq 0$
- Svaka dva elementa iz G su kompatibilna;
- $(\forall p \in G)(\forall q \in P)(p \leq q \to q \in G)$.

[7] do na izomorfizam

[8] $\mathfrak{M} \models$ "$\mathbb{B}$ je kompletna Bulova algebra"

Sada skup $\{p\} \cup \{d_n \mid n \in \omega\}$ ima svojstvo konačnog preseka, pa je sadržan u nekom ultrafiltru G. Samim tim, G je traženi ultrafilter.

$\square$

Sada smo spremni da uvedemo relaciju forsiranja $\Vdash$. Neka je:

- $\langle P, \leq \rangle \in M$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata;
- G generički ultrafilter u $\langle P, \leq \rangle$;
- $\mathbb{B} \in M$ kompletiranje uređenja $\langle P, \leq \rangle$;
- $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ proizvoljna formula jezika teorije skupova;
- $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{B}}$ proizvoljni.

Kažemo da $p \in P$ *forsira* $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ i pišemo

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$$

ako je $p \leq ||\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)||$.

Sledeće osobine relacije forsiranja neposredno slede iz osobina bulovske vrednosti.

1. $p \Vdash \neg\varphi \leftrightarrow (\forall q \leq p) q \nVdash \varphi$
2. $p \Vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow p \Vdash \varphi \;\wedge\; p \Vdash \psi$
3. $p \Vdash \varphi \vee \psi \leftrightarrow (\forall q \leq p)(\exists r \leq q)(r \Vdash \varphi \;\vee\; r \Vdash \psi)$
4. $p \Vdash \forall x \varphi \leftrightarrow (\forall \tau \in M^{\mathbb{B}}) p \Vdash \varphi(\tau_G)$
5. $p \Vdash \exists x \varphi \leftrightarrow (\forall q \leq p)(\exists r \leq q)(\exists \tau \in M^{\mathbb{B}}) r \Vdash \varphi(\tau_G)$
6. Neka je φ proizvoljna formula jezika teorije skupova. Tada za svako $p \in P$ postoji $q \leq p$ tako da $q \Vdash \varphi$ ili $q \Vdash \neg\varphi$.
7. $p \Vdash \varphi \rightarrow (\forall q \leq p) q \Vdash \varphi$.

Teorema 2.7.2 (Koen) *Neka je $\langle P, \leq \rangle \in M$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata i neka je G generički ultrafilter u $\langle P, \leq \rangle$. Tada*

$$1 \Vdash V \neq L \;, \quad \textit{tj.} \quad \mathfrak{M}[G] \models V \neq L \;.$$

Dokaz :
Neka je $\mathcal{L} : \mathrm{Ord} \longrightarrow L$ kanonsko nabrajanje konstruktibilnih skupova. Kako su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}[G]$ iste visine i kako je $\mathcal{L}$ apsolutno za tranzitivne modele teorije ZFC, to je

$$L \cap M = L \cap M[G] \;.$$

Obzirom da je $\langle P, \leq \rangle$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata, $G \notin M$, odakle sledi da $G \notin L \cap M[G]$. Samim tim, $M[G] \models V \neq L$.

□

Obzirom da je Gedel pokazao relativnu konzistentnost aksiome konstruktibilnosti sa sistemom ZFC, ovaj Koenov rezultat daje nezavisnost $V = L$ u odnosu na ZFC.

2.8 Koenova teorema

Prvo precizirajmo terminologiju:

- $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$: prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC;
- $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$: u $\mathfrak{M}$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata;
- $\mathbb{B}$: u $\mathfrak{M}$ kompletna Bulova algebra u kojoj je $\mathbb{P}$ gusto. Obzirom na prirodu uređenja $\mathbb{P}$, $\mathbb{B}$ je bezatomična;
- G : generički ultrafilter u $\mathbb{P}$;
- G^* : produženje ultrafiltra G do generičkog ultrafiltra u $\mathbb{B}$. Obzirom da je $\mathbb{B}$ bezatomična, $G, G^* \notin M$;
- $\mathfrak{M}[G] = \langle M[G], \in \rangle$: generičko proširenje modela $\mathfrak{M}$. Po definiciji je $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[G^*]$.

Neka je κ (u $\mathfrak{M}$) beskonačan kardinal. Kažemo da $\mathbb{P}$ zadovoljava κCC (κ Chain Condition) ako je u $\mathbb{P}$ svaki antilanac kardinalnosti manje od κ.

Lako se vidi da $\mathbb{P}$ ima κCC akko $\mathbb{B}$ ima κCC.

Za uređenje $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ kažemo da je *κ–zatvoreno* ako za svaki nerastući lanac $p_\alpha,\ \alpha \in \kappa$ u $\mathbb{P}$ postoji $p \in P$ tako da

$$(\forall \alpha \in \kappa) p \leq p_\alpha \ .$$

Lema 2.8.1 *Neka je uređenje $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ κ–zatvoreno. Tada je za proizvoljnu familiju $D_\alpha,\ \alpha \in \kappa$ gustih skupova u $\mathbb{P}$ skup*

$$D = \bigcap_{\alpha \in \kappa} \overline{D_\alpha}$$

gust u $\mathbb{P}$ i pri tom je $D = \overline{D}$.

Dokaz :

Podsetimo se, za proizvoljan skup $X \subseteq P$ smo $\overline{X}$ definisali na sledeć i način:

$$\overline{X} = \bigcup_{p \in X} U_p = \{p \in P \mid (\exists q \in X) p \leq q\} \ .$$

Sada iz definicije skupa D neposredno sledi da je $D = \overline{D}$. Ostaje da pokažemo da je D gust u $\mathbb{P}$.

Neka je $p \in P$ proizvoljno. Niz $p_\alpha,\ \alpha \in \kappa$ rekurzivno formirajmo na sledeći način:

- Obzirom da je D_0 gust, izaberimo $p_0 \in D_0$ tako da je $p_0 \leq p$;
- Obzirom da je $D_{\alpha+1}$ gust, izaberimo $p_{\alpha+1} \in D_{\alpha+1}$ tako da je $p_{\alpha+1} \leq p_\alpha$;
- Neka je $\alpha = \bigcup \alpha$. Kako je $\mathbb{P}$ κ–zatvoreno, postoji $q \in P$ tako da je za svako $\xi \in \alpha\ \ q \leq p_\xi$. Obzirom da je D_α gust, izaberimo $p_\alpha \in D_\alpha$ tako da je $p_\alpha \leq q$.

$\mathbb{P}$ je κ–zatvoreno, pa postoji $r \in P$ tako da je za svako $\alpha \in \kappa$

$$r \leq p_\alpha \ .$$

Samim tim $r \in D$ i $r \leq p$, odakle sledi da je D gust u $\mathbb{P}$.

□

Lema 2.8.2 *Neka je $\mathbb{P}$ κ–zatvoreno i neka su $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ i $A \in M$ takvi da $\tau_G : \kappa \longrightarrow A$. Tada $\tau_G \in M$. Posebno, u $\mathfrak{M}[G]$ su očuvani kardinali i kofinalnosti manji do jednaki κ.*

Dokaz :

Obzirom na definiciju generičke ekstenzije, postoji $p \in P$ tako da

$$p \Vdash \tau : \check{\kappa} \longrightarrow \check{A} \ .$$

Za proizvoljno $\alpha \in \kappa$ neka je

$$D_\alpha = \{q \leq p \mid q \Vdash (\exists \check{a} \in \check{A})\tau(\check{\alpha}) = \check{a}\} \ .$$

Primetimo da $D_\alpha \in M$. Ako $q \in D_\alpha$, onda za svako $r \leq q$ važi

$$r \Vdash (\exists \check{a} \in \check{A})\tau(\check{\alpha}) = \check{a} \ ,$$

odakle sledi da $r \in D_\alpha$. Dakle, $D_\alpha = \overline{D_\alpha}$. Pokažimo da je D_α gust ispod p.

Neka je $q \leq p$ proizvoljno. Tada postoji $r \leq q$ tako da

$$r \Vdash (\exists \check{a} \in \check{A})\tau(\check{\alpha}) = \check{a} \quad \text{ili} \quad r \Vdash \neg(\exists \check{a} \in \check{A})\tau(\check{\alpha}) = \check{a} \ .$$

Obzirom da je $r \leq p$, važi $r \Vdash \tau : \check{\kappa} \longrightarrow \check{A}$, odakle sledi da

$$r \Vdash (\exists \check{a} \in \check{A})\tau(\check{\alpha}) = \check{a},$$

tj. $r \in D_\alpha$.

Neka je

$$D = \bigcap_{\alpha \in \kappa} D_\alpha \ .$$

Primetimo da je D gust ispod p, $D = \overline{D}$, kao i da $D \in M$. Obzirom da je G generički ultrafilter, možemo izabrati $q \in D \cap G$. Funkciju $f : \kappa \longrightarrow A$ definišimo na sledeći način:

$$f(\alpha) = a \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} q \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{a} \ , \ a \in A \ .$$

Lako se vidi da $f \in M$ kao i da je $\tau_g = f$.

□

Lema 2.8.3 *Neka $\mathbb{P}$ zadovoljava κCC i neka je λ regularan kardinal u $\mathfrak{M}$ veći do jednak κ. Tada je λ regularan kardinal u $\mathfrak{M}[G]$.*

Dokaz :

Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $\mu < \lambda$ i $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tako da

$$\tau_G : \mu \longrightarrow \lambda \wedge \bigcup \mathrm{rng}(\tau_G) = \lambda \ ,$$

tj.

$$||\tau : \check{\mu} \longrightarrow \check{\lambda} \wedge \bigcup \mathrm{rng}(\tau) = \check{\lambda}|| \in G \ .$$

S jedne strane, za proizvoljno $\alpha \in \mu$ i proizvoljne međusobno različite $\beta, \gamma \in \lambda$ važi

$$||\tau(\check{\alpha}) = \check{\beta}|| \cdot ||\tau(\check{\alpha}) = \check{\gamma}|| \leq ||\check{\beta} = \check{\gamma}|| = 0 \ .$$

S druge strane, za svako $\beta \in \lambda$ postoji $\alpha \in \mu$ tako da

$$||\tau(\check{\alpha}) = \check{\beta}|| \in G \ .$$

Za proizvoljno $\alpha \in \mu$ neka je

$$X_\alpha = \{\beta \in \lambda \mid ||\tau(\check{\alpha}) = \check{\beta}|| > 0\} \ .$$

Primetimo da je svaki od skupova X_α antilanac. Kako je

$$\lambda = \bigcup_{\alpha \in \mu} X_\alpha$$

i kako je $\mu < \lambda$, postoji $\alpha \in \mu$ tako da je $|X_\alpha| = \lambda$. No ovo je u kontradikciji sa činjenicom da $\mathbb{P}$, pa samim tim i $\mathbb{B}$ zadovoljava κCC.

□

Kao neposrednu posledicu prethodne dve leme imamo činjenicu da κ–zatvoreno uređenje koje zadovoljava κCC pri generičkim ekstenzijama čuva kardinale i kofinalnosti.

Isti zaključak možemo izvesti i za uređenje koje je λ–zatvoreno za svako $\lambda < \kappa$ i koje zadovoljava κ^+CC.

Lema 2.8.4 *Neka je κ u $\mathfrak{M}$ regularan kardinal takav da $\mathfrak{M} \models 2^{<\kappa} = \kappa$ i neka $A, B \in M$ pri čemu $\mathfrak{M} \models |B| \leq \kappa$. Dalje, neka je*

$$P = \{p \in M \cap P(A \times B) \mid \mathrm{fun}(p) \wedge (|\mathrm{dom}(p)| < \kappa)^{\mathfrak{M}}\} .$$

Tada uređenje $\mathbb{P} = \langle P, \supseteq \rangle$ zadovoljava u $\mathfrak{M}$ $\kappa^+ CC$.

Dokaz :

Neka je $W \in M$ antilanac u $\mathbb{P}$. Skupove A_α i W_α, $\alpha \in \kappa$, rekurzivno konstruišimo na sledeći način:

- Neka je $q \in W$ proizvoljno, $W_0 = \{q\}$ i $A_0 = \mathrm{dom}(q)$;
- Neka je $S_\alpha = \{p \in P \mid \mathrm{dom}(p) \subseteq A_\alpha \wedge (\exists q \in W) p = q|_{A_\alpha}\}$. Za svako $p \in S_\alpha$ izaberimo $q_p \in W$ tako da je $p = q_p|_{A_\alpha}$. Neka je

  $$W_{\alpha+1} = W_\alpha \cup \{q_p \mid p \in S_\alpha\}$$

  i neka je

  $$A_{\alpha+1} = \bigcup \{\mathrm{dom}(p) \mid p \in W_{\alpha+1}\} ;$$

- Za granični ordinal α neka je

  $$A_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} A_\beta \quad \text{i} \quad W_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} W_\beta .$$

Primetimo da je za $\alpha \in \beta$ $A_\alpha \subseteq A_\beta$ i $W_\alpha \subseteq W_\beta$. Prvo pokažimo da je

$$W = \bigcup_{\alpha \in \kappa} W_\alpha .$$

Neka je $q \in W$ proizvoljno. Kako je $|\mathrm{dom}(q)| < \kappa$ (u $\mathfrak{M}$), postoji $\alpha \in \kappa$ tako da je za svako $\alpha \leq \beta < \kappa$

$$\mathrm{dom}(q) \cap A_\alpha = \mathrm{dom}(q) \cap A_\beta .$$

Neka je $p = q|_{A_\alpha}$. Sada $p \in S_\alpha$, pa je $q = q_p$, tj. $q \in W_{\alpha+1}$.

Da bismo pokazali da $\mathfrak{M} \models |W| \leq \kappa$, dovoljno je pokazati da za svako $\alpha \in \kappa$ u $\mathfrak{M}$ važi $|A_\alpha| \leq \kappa$ i $|W_\alpha| < \kappa$. Ovo pokazujemo indukcijom po κ. Jedini netrivijalni slučaj je sledbenik korak.

Neka je u $\mathfrak{M}$ $|A_\alpha| \leq \kappa$ i $|W_\alpha| \leq \kappa$. Uočimo u $\mathfrak{M}$ skup X svih funkcija čiji je domen podskup skupa A_α kardinalnosti manje od κ i čiji je kodomen podskup skupa B. Tada je u $\mathfrak{M}$

$$|W_{\alpha+1}| \leq |W_\alpha| \cdot |X| .$$

Obzirom da je u $\mathfrak{M}$ $|B| \leq \kappa$, mora u $\mathfrak{M}$ biti i $|X| \leq \kappa^{<\kappa}$. Kako je u $\mathfrak{M}$ κ regularan kardinal takav da je $2^{<\kappa} = \kappa$, mora u $\mathfrak{M}$ biti i $\kappa^{<\kappa} = \kappa$. Samim tim, u $\mathfrak{M}$ važi

$$|W_{\alpha+1}| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa ,$$

odakle po definiciji skupa $A_{\alpha+1}$ neposredno sledi da u $\mathfrak{M}$ važi i $|A_{\alpha+1}| \leq \kappa$.

$\square$

Za potrebe dokaza Koenove teoreme dodatno precizirajmo notaciju:

- κ : u $\mathfrak{M}$ regularan kardinal takav da je $2^{<\kappa} = \kappa$;
- λ : u $\mathfrak{M}$ kardinal takav da je $\lambda^\kappa = \lambda$;
- $P = \{p \in M \cap P((\lambda \times \kappa) \times 2) \mid \mathrm{fun}(p) \wedge (|\mathrm{dom}(p)| < \kappa)^{\mathfrak{M}}\}$;
- $\mathbb{P} = \langle P, \supseteq \rangle$. Koristeći regularnost κ lako se proverava da je $\mathbb{P}$ μ–zatvoreno za svako $\mu < \kappa$, a na osnovu pretnodne leme sledi da $\mathbb{P}$ zadovoljava κ^+CC (u $\mathfrak{M}$). Samim tim, u svakoj generičkoj ekstenziji nad $\mathbb{P}$ će biti očuvani kardinali i kofinalnosti.

Teorema 2.8.1 (Koen) *Uz prethodnu simboliku, neka je G proizvoljan generički ultrafilter u $\mathbb{P}$. Tada*

$$\mathfrak{M}[G] \models 2^\kappa = \lambda \ .$$

Dokaz :

Obzirom da su pri svim generičkim ekstenzijama nad $\mathbb{P}$ očuvani kardinali i kofinalnosti, κ i λ će biti kardinali i u $\mathfrak{M}[G]$.

Da bi pojednostavili notaciju, podrazumevaćemo relativizaciju argumentacije koju ćemo izložiti na $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}[G]$, pri čemu se relativizacija na $\mathfrak{M}[G]$ podrazumeva kad god se u argumentaciji javi G.

Neka su $\alpha \in \lambda$ i $\beta \in \kappa$ proizvoljni. Obzirom da je skup

$$A = \{p \in P \mid \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathrm{dom}(p)\}$$

gust u $\mathbb{P}$ i da je G generički ultrafilter u $\mathbb{P}$, možemo izabrati p_A tako da $p_A \in A \cap G$. Kako su svaka dva elementa iz G kompatibilna, za svako $p \in G$ tako da $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathrm{dom}(p)$ važi

$$p(\alpha, \beta) = p_A(\alpha, \beta) \ .$$

Samim tim, mora biti

$$\bigcup G : \lambda \times \kappa \longrightarrow 2 \ .$$

Prvo pokažimo da je u $\mathfrak{M}[G]$ $2^\kappa \geq \lambda$. Za proizvoljno $\alpha \in \lambda$ neka je

$$X_\alpha = \{\xi \in \kappa \mid \bigcup G(\alpha, \xi) = 1\} \ .$$

Naravno, $X_\alpha \notin M$, jer bi u suprotnom moralo biti i $G \in M$. Ostaje da za proizvoljne, međusobno različite $\alpha, \beta \in \lambda$ pokažemo da je $X_\alpha \neq X_\beta$.

Neka su $\alpha, \beta \in \lambda$ međusobno različiti. Prvo pokažimo da je skup

$$D = \{q \in P \mid (\exists \xi \in \kappa) q(\alpha, \xi) \neq q(\beta, \xi)\}$$

gust u $\mathbb{P}$. Neka je $p \in P$ proizvoljno. Kako je $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$, mora biti i $|\mathrm{rng}(\mathrm{dom}(p))| < \kappa$, odakle zbog regularnosti κ sledi da postoji $\xi \in \kappa$ tako da je $\mathrm{rng}(\mathrm{dom}(p)) \subseteq \xi$. Odavde neposredno sledi da

$$\langle \alpha, \xi \rangle, \langle \beta, \xi \rangle \notin \mathrm{dom}(p) \ .$$

Sada je funkcija

$$q = p \cup \{\langle \alpha, \xi, 0 \rangle, \langle \beta, \xi, 1 \rangle\}$$

takva da $q \in D$ i $q \leq p$, odakle sledi da je skup D gust.

Kako je skup D gust u $\mathbb{P}$ i kako je G generički ultrafilter, mora biti $G \cap D \neq 0$. Samim tim, postoji $\xi \in \kappa$ tako da je

$$\bigcup G(\alpha, \xi) \neq \bigcup G(\beta, \xi) \ ,$$

odakle sledi da je $X_\alpha \neq X_\beta$.

S druge strane, u $\mathfrak{M}[G]$ važi

$$2^\kappa \leq |B|^\kappa = |\lambda \times \kappa|^\kappa = \lambda^\kappa = \lambda \ .$$

$\square$

Iz Koenove teoreme neposredno sledi da

$$\mathrm{Con(ZFC)} \to \mathrm{Con(ZFC} + \neg\mathrm{GCH)} \ ,$$

što zajedno sa Gedelovim rezultatom daje nezavisnost GCH u odnosu na ZFC.

2.9 Istonova teorema

Ukoliko ne naglasimo drukčije, podrazumevaćemo da su uređenja sa kojima radimo ili separativna bez minimalnih elemenata (uz dogovor da sva imaju zajednički maksimum koji ćemo označavati sa 1), ili kompletne bezatomične Bulove algebre.

Ovu restrikciju pravimo iz prostog razloga što nas zanimaju jedino ona uređenja koja u generičkim ekstenzijama daju nove skupove.

Lema 2.9.1 (proizvod lema) *Neka je $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$ prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC , $\mathbb{P}_1 = \langle P_1, \leq_1 \rangle$ i $\mathbb{P}_2 = \langle P_2, \leq_2 \rangle$ u $\mathfrak{M}$ separativna uređenja bez minimalnih elemenata i neka je $\mathbb{P} \in M$ njihov proizvod. Uočimo proizvoljno $G \subseteq P$. Tada je G $\mathfrak{M}$–generički ultrafilter akko važi:*

- $G = \mathrm{dom}(G) \times \mathrm{rng}(G)$;
- $\mathrm{dom}(G)$ *je generički ultrafilter nad* $\mathfrak{M}$;

- $\mathrm{rng}(G)$ *je generički ultrafilter nad* $\mathfrak{M}[\mathrm{dom}(G)]$.

Posebno,

$$\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[\mathrm{dom}(G)][\mathrm{rng}(G)] = \mathfrak{M}[\mathrm{rng}(G)][\mathrm{dom}(G)] \ .$$

Dokaz :

$\Rightarrow$: Neka je G generički ultrafilter i neka je $G_1 = \mathrm{dom}(G)$ i $G_2 = \mathrm{rng}(G)$. Lako se proverava da je G_1 ultrafilter u $\mathbb{P}_1$ i da je G_2 ultrafilter u $\mathbb{P}_2$, kao i da je G_1 generički nad $\mathfrak{M}$.

Neka je $D \in M[G_1]$ gust u $\mathbb{P}_2$ (gledano u $\mathfrak{M}[G_1]$) i neka je $D = \tau_{G_1}$. Samim tim, postoji $p \in G_1$ tako da

$$p \Vdash \text{“}\tau \text{ je gust u } \check{\mathbb{P}}_2\text{”} \ .$$

Obzirom da je D gust u $\mathbb{P}_2$, za svako $q \in P_2$ postoji $r \leq_2 q$ tako da $r \in D$. Samim tim, za proizvoljno $p_1 \leq_1 p$ postoji $p_2 \in G_1$ tako da je $p_2 \leq_1 p_1$ i

$$p_2 \Vdash \check{r} \in \tau \ .$$

Ovim smo pokazali da je za svako $q \in P_2$ i svako $p_1 \leq_1 p$ skup

$$A = \{\langle p_2, r\rangle \in G_1 \times P_2 \mid p_2 \leq_1 p_1 \ \wedge \ r \leq_2 q \ \wedge \ p_2 \Vdash \check{r} \in \tau\}$$

gust u $\mathbb{P}$ ispod $\langle p_1, q\rangle$. Obzirom da je G generički ultrafilter u $\mathbb{P}$, mora biti $G \cap A \neq 0$. Ako $\langle p_2, r\rangle \in G \cap A$, onda $r \in G_2 \cap D$. Dakle, G_2 je generički ultrafilter.

$\Leftarrow$: Neka je $G = G_1 \times G_2$, G_1 $\mathfrak{M}$–genreički ultrafilter u $\mathbb{P}_1$ i G_2 $\mathfrak{M}[G_1]$–genreički ultrafilter u $\mathbb{P}_2$. Lako se proverava da je G ultrafilter u $\mathbb{P}$.

Neka je $D \in M$ gust u $\mathbb{P}$. Hoćemo da pokažemo da je $D \cap G \neq 0$. Uočimo skup

$$A = \{q \in P_2 \mid (\exists p \in G_1)\langle p, q\rangle \in D\} \ .$$

Primetimo da $A \in M[G_1]$. Dovoljno je pokazati da je A gust u $\mathbb{P}_2$. Neka je $q \in P_2$ proizvoljno. Tada za svako $p \in P_1$ iz činjenice da je D gust u P sledi da postoje $p_1 \leq_1 p$ i $q_1 \leq_2 q$ tako da $\langle p_1, q_1\rangle \in D$. Samim tim, skup

$$B = \{p \in P_1 \mid (\exists r \leq_2 q)\langle p, r\rangle \in D\}$$

je gust u $\mathbb{P}_1$, a kako je G_1 generički ultrafilter, postoji $p \in B \cap G_1$. Odavde neposredno sledi da je A gust u $\mathbb{P}_2$.

Poslednji deo tvrđenja neposredno sledi iz minimalnosti generičke ekstenzije.

$\square$

Lema 2.9.2 *Neka je* κ *beskonačan kardinal u* $\mathfrak{M}$, $\mathbb{P}_1$ *i* $\mathbb{P}_2$ *uređenja u* $\mathfrak{M}$ *tako da je* $\mathbb{P}_1$ κ*–zatvoreno i* $\mathbb{P}_2$ *zadovoljava* κCC*. Dalje, neka je* $G \times H$ *generički ultrafilter u* $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$*. Tada za svako* $A \in M$ *i svaku funkciju* $f : \kappa \longrightarrow A$ *u* $\mathfrak{M}[G \times H]$ *važi da* $f \in M$*.*

Dokaz :

Neka su $\mathbb{B}, \mathbb{B}_1$ i $\mathbb{B}_2$ redom kompletiranja uređenja $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$. Dalje, neka je $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tako da je $f = \tau_{G\times H}$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je u $\mathbb{B}$

$$||\tau : \check{\kappa} \longrightarrow \check{A}|| = 1 \ .$$

Za svako $\alpha \in \kappa$ definišimo skup $D_\alpha \subseteq P_1$ na sledeći način:

$p \in D_\alpha \Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ postoje maksimalan antilanac $W \subseteq P_2$ $(W \in M)$ i skup $\{a_{\alpha,p,q} \mid q \in W\} \in M \cap P(A)$ tako da za svako $q \in W$

$$\langle p, q\rangle \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{a}_{\alpha,p,q} \ .$$

Očigledno je $D_\alpha = \overline{D_\alpha}$. Pokažimo da je D_α gust.

Neka je $p \in P_1$ proizvoljno. Kako je $||\tau : \check{\kappa} \longrightarrow \check{A}|| = 1$, mora biti

$$\langle p, 1\rangle \Vdash (\exists \check{a} \in \check{A})\tau(\check{\alpha}) = \check{a} \ ,$$

odakle sledi da postoje $p_0 \leq_1 p, q_0 \in P_2$ i $a_0 \in A$ tako da

$$\langle p_0, q_0\rangle \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{a}_0 \ .$$

Pretpostavimo da smo konstruisali nizove $p_\xi \in P_1, q_\xi \in P_2$ i $a_\xi \in A$, $\xi \in \beta$ tako da je niz p_ξ nerastući, niz q_ξ je antilanac i

$$\langle p_\xi, q_\xi\rangle \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{a}_\xi \ .$$

Ako je niz q_ξ, $\xi \in \beta$ maksimalan antilanac, onda obzirom da $\mathbb{P}_2$ zadovoljava κCC mora biti $\beta \leq \kappa$. Kako je $\mathbb{P}_1$ κ–zatvoreno, postoji $p_\beta \in P_1$ tako da je za svako $\xi \in \beta$ $p_\beta \leq_1 p_\xi$. Samim tim, za svako $\xi \in \beta$

$$\langle p_\beta, q_\xi\rangle \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{a}_\xi \ ,$$

odakle sledi da $p_\beta \in D_\alpha$.

Neka niz q_ξ, $\xi \in \beta$ nije maksimalan antilanac. Tada postoji $q \in P_2$ inkompatibilno sa svakim q_ξ. Obzirom da je $\mathbb{P}_1$ κ–zatvoreno, postoji $r \in P_1$ tako da je za svako $\xi \in \beta$ $f \leq_1 p_\xi$. Kako

$$\langle r, q\rangle \Vdash (\exists \check{a} \in \check{A})\tau(\check{\alpha}) = \check{a} \ ,$$

postoje $p_\beta \leq_1 r, q_\beta \leq_2 q$ i $a_\beta \in A$ tako da

$$\langle p_\beta, q_\beta\rangle \vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{a}_\beta \ .$$

Ovim smo pokazali da je svaki od skupova D_α gust u $\mathbb{P}_1$, a kako je $\mathbb{P}_1$ κ–zatvoreno i kako za svaki od skupova D_α važi $D_\alpha = \overline{D_\alpha}$, skup

$$D = \bigcap_{\alpha\in\kappa} D_\alpha$$

je gust u $\mathbb{P}_1$ i važi $D = \overline{D}$. Na osnovu proizvod leme je G generički ultrafilter u $\mathbb{P}_1$.

Neka $p \in G \cap D$. Obzirom da p pripada svim skupovima D_α, za svako $\alpha \in \kappa$ možemo izabrati maksimalan antilanac W_α u $\mathbb{P}_2$ ($W_\alpha \in M$) i skup $\{a_{\alpha,p,q} \mid q \in W_\alpha\} \in M \cap P(A)$ tako da za svako $q \in W_\alpha$

$$\langle p, q\rangle \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{a}_{\alpha,p,q} \ .$$

Obzirom da je H generički ultrafilter u $\mathbb{P}_2$, za svako $\alpha \in \kappa$ postoji jedinstveno $q_\alpha \in H \cap W_\alpha$. Definišimo u $\mathfrak{M}[H]$ funkciju $g : \kappa \longrightarrow A$ na sledeći način:

$$g(\alpha) = a_{\alpha,p,q_\alpha} \ , \ \alpha \in \kappa \ .$$

Sada za svako $\alpha \in \kappa$ važi

$$\langle p, q_\alpha\rangle \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{g}(\check{\alpha}) \ ,$$

odakle sledi da je $f = g$.

□

Neka su $\mathbb{P}_i = \langle P_i, \leq_i\rangle$, $i \in I$ uređenja i neka je κ beskonačan kardinal. Za proizvoljno $p \in \prod_{i\in I} P_i$ neka je

$$\mathrm{supp}_\kappa(p) = \{i \in I \mid p(i) \neq 1\} \ .$$

Definišimo κ–proizvod $\mathbb{P} = \langle P, \leq\rangle$ uređenja $\mathbb{P}_i$ na sledeći način:

- $P = \{p \in \prod_{i\in I} P_i \mid |\mathrm{supp}_\kappa(p)| < \kappa\}$
- $p \leq q \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} (\forall i \in I) p(i) \leq_i q(i)$.

Ako je $\lambda < \kappa$ beskonačan kardinal i ako je svako od uređenja $\mathbb{P}_i$ λ–zatvoreno, onda se lako proverava da je i njihov κ–proizvod $\mathbb{P}$ takođe λ–zatvoren.

Lema 2.9.3 *Neka je κ regularan kardinal, $\mathbb{P}$ κ–proizvod uređenja $\mathbb{P}_i$, $i \in I$ i neka je W antilanac u $\mathbb{P}$. Tada važi:*

(a) Ako je za svako $i \in I$ $|P_i| \leq \kappa$, onda je $|W| \leq 2^{<\kappa}$;

(b) Ako je $\lambda \geq \kappa$ i ako je za svako $i \in I$ $|P_i| \leq \lambda$, onda je $|W| \leq \lambda^{<\kappa}$;

(c) Ako je $\lambda > \kappa$ nedostižan i ako je za svako $i \in I$ $|P_i| < \lambda$, onda je $|W| < \lambda$.

Dokaz :

Primetimo da je dovoljno pokazati samo (b), jer iz regularnosti κ sledi $2^{<\kappa} = \kappa^{<\kappa}$, a za nedostižan $\lambda > \kappa$ je $\lambda^{<\kappa} = \lambda$.

Dokažimo (b). Definišimo funkciju $f : P \longrightarrow V$ na sledeći način:

$$f(p) = p|_{\mathrm{supp}_\kappa(p)} \ \ , \ p \in P \ .$$

Ako stavimo da je za $p, q \in P$

$$f(p) \leq f(q) \Leftrightarrow_{\text{def}} p \leq q \ ,$$

dobijamo izomorfnost uređenja $\mathbb{P}$ i $\langle f[P], \leq \rangle$. Dalje radimo sa uređenjem $\langle f[P], \leq \rangle$ na sasvim sličan način kao i u dokazu leme 2.8.4 .

$\square$

Neka je I skup čiji su svi elementi regularni beskonačni kardinali i neka je $F : I \longrightarrow \text{Card}$ funkcija takva da za svako $\kappa, \lambda \in I$ važi:

- $\kappa \leq \lambda \rightarrow F(\kappa) \leq F(\lambda)$
- $\text{cf} F(\kappa) > \kappa$.

Dalje, za svako $\kappa \in I$ neka je

$$P_\kappa = \{p \subseteq F(\kappa) \times \kappa \times 2 \mid \text{fun}(p) \ \wedge \ |\text{dom}(p)| < \kappa\}$$

i $\mathbb{P}_\kappa = \langle P_\kappa, \supseteq \rangle$. Za svako $p \in \prod_{\kappa \in I} P_\kappa$ neka je

$$\text{supp}(p) = \{\kappa \in I \mid p(\kappa) \neq 0\} \ .$$

Istonov proizvod $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ uređenja $\mathbb{P}_\kappa$, $\kappa \in I$ definišemo na sledeći način:

- $P = \{p \in \prod_{\kappa \in I} P_\kappa \mid (\forall \lambda \in \text{Reg}) |\text{supp}(p) \cap \lambda| < \lambda\}$
- $p \leq q \Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall \kappa \in I) p(\kappa) \supseteq q(\kappa)$.

Lako se pokazuje da element p Istonovog proizvoda do na izomorfizam možemo posmatrati kao funkciju čiji je kodomen 2, a elementi domena su trojke $\langle \alpha, \kappa, \beta \rangle$, $\alpha \in F(\kappa), \kappa \in I, \beta \in \kappa$ tako da za svaki regularan kardinal λ važi

$$|\{\langle \alpha, \kappa, \beta \rangle \in \text{dom}(p) \mid \kappa \leq \lambda\}| < \lambda \ .$$

Gledajući na ovaj način, poredak na Istonovom proizvodu postaje $\supseteq$.

Neka je λ regularan kardinal i neka $p \in P$. Tada:

- $p^{\leq \lambda} =_{\text{def}} p|_{\{\langle \alpha, \kappa, \beta \rangle \in \text{dom}(p) \ \mid \ \kappa \leq \lambda\}}$
- $p^{> \lambda} =_{\text{def}} p|_{\{\langle \alpha, \kappa, \beta \rangle \in \text{dom}(p) \ \mid \ \kappa > \lambda\}}$
- $P^{\leq \lambda} =_{\text{def}} \{p^{\leq \lambda} \mid p \in P\}$
- $P^{> \lambda} =_{\text{def}} \{p^{> \lambda} \mid p \in P\}$.

Lako se proverava da je $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^{\leq\lambda} \times \mathbb{P}^{>\lambda}$.

Primetimo da je za proizvoljan regularan kardinal λ $\mathbb{P}^{>\lambda}$ λ–zatvoreno. Zaista, ako je p_α , $\alpha \in \lambda$ niz u $\mathbb{P}^{>\lambda}$ tako da je za $\alpha \in \beta$ $p_\alpha \subseteq p_\beta$, onda se lako vidi da $p = \bigcup_{\alpha\in\lambda} p_\alpha \in P^{>\lambda}$. odakle sledi λ–zatvorenost.

Ako važi GCH, onda se lako proverava da $\mathbb{P}^{\leq\lambda}$ zadovoljava λ^+CC.

Sada ćemo pokazati slabiju varijantu Istonove teoreme, koja se odnosi na kontrolu vrednosti kontinuum funkcije za skup mnogo regularnih kardinala. Puna varijanta Istonove teoreme zahteva modifikaciju do sada izloženih forsing argumenata na prave klase.

Teorema 2.9.1 (Iston) *Neka je $\mathfrak{M}$ prebrojiv tranzitivan model teorije* ZFC + GCH, *$I \in M$ skup čiji su elementi u $\mathfrak{M}$ regularni kardinali, $\mathfrak{M} \models F : I \longrightarrow$* Card *pri čemu je F neopadajuća funkcija takva da za svako $\kappa \in I$ u $\mathfrak{M}$ važi* $\mathrm{cf}F(\kappa) > \kappa$*, i neka je $\mathbb{P}$ odgovarajući Istonov proizvod.*

Tada za svaki generički ultrafilter G u $\mathbb{P}$ $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}[G]$ imaju iste kardinale i kofinalnosti i za svako $\kappa \in I$

$$\mathfrak{M}[G] \models 2^\kappa = F(\kappa) \ .$$

Dokaz :

Neka je $\kappa \in I$ proizvoljno. Pretpostavimo da κ nije regularan kardinal u $\mathfrak{M}[G]$. Tada postoji regularan u $\mathfrak{M}[G]$ kardinal $\lambda < \kappa$ i kofinalna funkcija $f : \lambda \longrightarrow \kappa$.

Međutim, kako je $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[G^{>\lambda} \times G^{\leq\kappa}]$, po lemi 2.9.2 $f \in M[G^{\leq\lambda}]$, odakle sledi da λ nije regularan u $\mathfrak{M}[G^{\leq\lambda}]$. Kontradikcija sa činjenicom da $\mathbb{P}^{\leq\lambda}$ zadovoljava λ^+CC i da je $\kappa > \lambda$.

Neka je opet $\kappa \in I$ proizvoljno. Hoćemo da pokažemo da

$$\mathfrak{M}[G] \models 2^\kappa = F(\kappa) \ .$$

Obzirom na konstrukciju Istonovog proizvoda, ostaje da se pokaže da

$$\mathfrak{M}[G] \models 2^\kappa \leq F(\kappa) \ .$$

Na osnovu leme 2.9.2 sledi da je

$$(2^\kappa)^{\mathfrak{M}[G]} = (2^\kappa)^{\mathfrak{M}[G^{\leq\kappa}]} \ .$$

Obzirom da u $\mathfrak{M}$ važi GCH, imamo da je u $\mathfrak{M}$ $2^{<\kappa} = \kappa$ i $F(\kappa)^\kappa = F(\kappa)$. Sada se sasvim slično kao i u dokazu Koenove teoreme pokazuje da

$$\mathfrak{M}[G^{\leq\kappa}] \models 2^\kappa = F(\kappa) \ .$$

□

Napomenimo da se može pokazati da u Istonovom modelu važi SCH, pa u njemu kontinuum funkcija zavisi samo od vrednosti na regularnim kardinalima.

Izlabanje o kontinuum problemu bih završio sledećim Hilbertovim rečima:

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns nimand vertreiben könen.

Literatura

[1] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, Third Edition, North–Holland 1990

[2] Paul J. Cohen,*Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin New York 1966

[3] H. G. Dales, W. H. Woodin, *An Introduction to Independence for Analysts*, Cambridge University Press 1987

[4] Keith J. Devlin, *Aspects of Constructibility*, Springer–Verlag 1973

[5] Keith J. Devlin, Ronald B. Jensen, *Marginalia to a theorem of Silver*, $\models$ ISILC Logic Conf., Lecture Notes in Math. 499, pp. 115–142, Springer–Verlag 1975

[6] William B. Easton, *Powers of Regular Cardinals*, Annals of Mathematical Logic–Volume 1, Number 2 (1970) pp. 139–178

[7] Sy. D. Friedman, *Fine Structure and Class Forcing*, de Gruyter 2000

[8] Kurt Gödel, *The Consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Ann. Math. Studies 3 (1940)

[9] Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), 173–198

[10] Thomas Jech,*Set Theory*, Second Edition, Springer–Verlag 1997

[11] Thomas Jech, *Multiple Forcing*, Cambridge University Press 1986

[12] Ronald B. Jensen, *The fine structure of the constructibile hierarchy*, Ann. Math. Logic 4 (1972) , 229–308

[13] Ronald B. Jensen, Robert M. Solovay, *Some applications of almost disjoint sets*, Mathematical Logic and Foundations of Set Theory (Y. Bar–Hillel, ed.), pp. 84–104, North–Holland 1970

[14] Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer–Verlag 1994

[15] Kenneth Kunen, *Set Theory–An Introduction to Independence Proofs*, North–Holland 1980

[16] Žarko Mijajlović, Zoran Marković, Kosta Došen, *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva–Beograd 1986

[17] Donald H. Pelletier, *Easton's results via iterated Boolean–valued extensions*, Can. J. Math., Vol. XXVI, No. 4, 1974, pp. 820–828

[18] Žikica Perović, *Bulove Algebre*, Univerzitet u Nišu i Prosveta Niš 1998

[19] S. Shelah, *Proper and Improper Forcing*, 2nd ed., Perspect. Math. Logic, Springer–Verlag 1998

[20] Jack Silver, *On the Singular Cardinal Problem*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vancouver, 1974

[21] W. Hugh Woodin, *The Continuum Hypothesis, Part I*, Notices of AMS, June/July 2001, pp. 567–576

[22] W. Hugh Woodin, *The Continuum Hypothesis, Part II*, Notices of AMS, August 2001, pp. 681–690

[23] Martin Zeman, *Inner Models and Large Cardinals*, de Gruyter 2000