Matematički fakultet u Beogradu

Magistarski rad
Halpern – Läuchlijeva teorema

1. Primene u analizi
2. Hausdorff-ove operacije.
3. Selektivni ultrafilteri
4. CH.

autor
Ramović Goran

u Beogradu
novembra 1994.

mentor
dr. Žarko Mijajlović
S. Vujošević
M. Božić

Sadržaj

Predgovor

Halpern – Läuchlijeva teorema pripada oblasti kombinatorike u teoriji skupova. To je teorema Ramseyevog tipa, koja se može formulisati u sledeća tri oblika.

$HL(\alpha)$ *Neka su :*

(1) $d \in (\omega+1) \setminus 1$;

(2) $k \in \omega \setminus 1$;

(3) $\vec{T} = \langle T_i : i \in d \rangle$ *sekvencija perfektnih* $(\omega, <\omega)$*–stabala* ;

(4) $f : \bigotimes_{i \in d} T_i \to k$.

Tada postoje $\vec{S} = \langle S_i : i \in d \rangle$, A *i* l *za koji važi :*

(5) $\vec{S} = \langle S_i : i \in d \rangle$ *sekvencija perfektnih* $(\omega, <\omega)$*–stabala* ;

(6) $\forall i \in d$ (S_i *je na dole zatvoreno podstablo stabla* T_i) ;

(7) $A \in [\omega]^{\omega}$;

(8) $f'' \bigotimes_{i \in d}^{A} S_i = \{ l \}$.

$HL(\beta)$ *Neka su :*

(1) $d \in (\omega+1) \setminus 1$;

(2) $k \in \omega \setminus 1$;

(3) $\vec{T} = \langle T_i : i \in d \rangle$ *sekvencija* $(\omega, <\omega)$*–stabala* ;

(4) $f'' \bigotimes_{i \in d} T_i \to k$.

Tada postoje $\vec{t} = \langle t_i : i \in d \rangle$, $\vec{S} = \langle S_i : i \in d \rangle$ *i* l *za koji važi :*

(5) $\vec{t} \in \prod_{i \in d} T_i$;

(6) $\vec{S} \in str^{\omega}(\langle T_i[t_i] : i \in d \rangle)$;

(7) $f'' \bigotimes_{i \in d} S_i = \{ l \}$.

$HL(\gamma)$ *Neka su :*

(1) $d \in (\omega+1) \setminus 1$;

(2) $k \in \omega \setminus 1$;

(3) $\vec{T} = \langle T_i : i \in d \rangle$ *sekvencija* $(\omega, <\omega)$*–stabala* ;

(4) $f : \bigotimes_{i \in d} T_i \to k$.

Tada važi sledeća alternativa :

(5) $\forall m\in\omega\ \exists n\in\omega\ \exists < S_i \subseteq T_i(n) : i\in d > (m \leqq n \ \& \ \forall i\in d$ (S_i *je m–gust skup u stablu* T_i) $\& \ f''\prod_{i\in d} S_i = 1)$

ili

(6) $\exists \vec{t}\in \prod_{i\in d} T_i \forall m\in\omega\ \exists n\in\omega\ \exists < S_i \subseteq T_i[t_i](n) : i\in d > (m\leqq n \ \& \ \forall i\in d$ (S_i *je m–gust skup u stablu* $T_i[t_i]$ $\& \ f''\prod_{i\in d} S_i \subseteq k\setminus 1$).

$HL(\alpha)$ je prosta verzija, $HL(\beta)$ je strukturna verzija a $HL(\gamma)$ je gusta verzija Halpern – Läuchlijeve teoreme. U radu je pokazano da $HL(\beta) \to HL(\alpha)$ i da $HL(\gamma) \to HL(\beta)$. Ostaje otvoren problem da li su te tri verzije Halpern – Läuchlijeve teoreme ekvivalentne i da li važi $HL(\gamma)$ za $d=\omega$.

§ 1. *uvodi radne definicije koje se koriste u daljem tekstu. Prosta perfektna stabla i sekvencije prostih perfektnih stabala se upotrebljavaju kod dokazivanja Blassove teoreme. Selektivni ultrafilter nad ω je u prisnoj vezi sa HL teoremom, zbog čega su navedene brojne njegove definicije i zbog čega je dokazana njegova egzistencija sa pretpostavkom kontinuum hipoteze. Uvodenjem linearnog poretka $\lhd$ u skup $2^{<\omega}$ je u vezi sa particionisanjem $\eta^d \to k$. Preslikavanjem stabala u definiciji* 1.35. *i njihove osobine dokazane u stavu* 1.11. *omogućavaju kombinatorni dokaz proste HL i strukturne HL za $d=\omega$, uz ograničenje da $\vec{T}\in K_\omega$.*

§ 2. *razmatra posebne slučajeve HL teoreme pri čijem dokazivanju nema potrebe da se napušta okvir kombinatorike. Stav* 2.6. *čiji dokaz zahteva samo Ramseyevu teoremu i Königovu lemu, čini osnov u kombinatornom dokazu proste HL teoreme.*

§ 3. *iznosi kombinatorni dokaz proste HL teoreme po algoritmu Lavera, koji sam modifikovao tako da važi za $d\in(\omega+1)\setminus 1$. Laver je koristio ovaj algoritam u dokazu proste HL teoreme za $d=\omega$.*

§ 4. *iznosi matematički dokaz guste HL teoreme za $d\in(\omega+1)\setminus 1$, koji je modifikacija originalnog dokaza Halperna i Läuchlija. Stav* 4.3. *demonstrira prelaz sa guste HL teoreme na strukturnu HL teoremu. Stav* 4.4. *je generalizacija strukturne HL teoreme, koja potiče od K.Milliken dok je stav* 4.5. *finitna verzija stava* 4.4. *Stav* 4.10. *i stav* 4.11. *su modifikacije strukturne HL za $d=\omega$, u kojima se za $\vec{T}\in K_\omega$ ($\vec{T}\in L_\omega$) traži $\vec{S}\in K_\omega$ ($\vec{S}\in L_\omega$) izomorfan sa $\vec{T}$, tako da je funkcija $f:\bigotimes_{i\in\omega} T_i \to l$ homogena na $\bigotimes_{i\in\omega} S_i$. Laver je dao jedan nedovoljan dokaz stava* 4.10.

§ 5. *iznosi Harringtonov dokaz guste HL teoreme pomoću Koenovog k–lateralnog forcinga.*

§ 6. *demonstrira prisnu vezu izmedu proste HL teoreme i činjenice da svaki podskup od ω ili njegov komplement u bilo kom k–lateralnom Sacksovom generičkom modelu za $k\in(\omega+1)\setminus 1$ sadrži beskonačan podskup od ω u osnovnom modelu. To je izraženo stavom* 6.1.

§ 7. *iznosi jednu primenu guste HL teoreme u realnoj analizi, koja* *potiče od Blassa i centralni rezultat je iznet u stavu* 7.5.

§ 8. *iznosi jednu primenu proste HL teoreme u realnoj analizi, koja potiče od Harringtona, a centralni rezultati su izneti u stavu* 8.9. *i* 8.10.

§ 9. *iznosi primenu strukturne HL teoreme u konačnom particionisanju najviše prebrojivih Dekartovih prizvoda* η *tipova. Osnovni rezultati su izneti u korolaru* 9.1. , *koji potiče od Lavera, i korolaru* 9.2. , *koji predstavlja jedno pojačanje tvrdenja iznetog od Halperna i Pincusa.*

§ 10. *u stavu* 10.1. *preinačava gustu HL teoremu dovodeći je u vezu sa neglavnim ultrafilterima nad* ω, *a u stavu* 10.2. *se uspostavlja veza izmedu proste HL teoreme i particionisanja skupa* $(2^{\omega})^{d}$ *u konačno mnogo delova po proizvoljnom selektivnom ultrafilteru nad* ω.

§ 1. Definicije

Definicija 1.1. *Stablo $\mathcal{T}$ je uređeni par $<T,\leqq>$ koji zadovoljava sledeće uslove:*

(1) *T je neprazan skup delimično uređen relacijom $\leqq$ sa najmanjim elementom , koji se zove koren stabla i označava se koren($\mathcal{T}$);*

(2) *Za svaki element $t\in T$ je skup $\{s: s\leqq t \,\&\, s\in T\}$ dobro uređen relacijom $\leqq$.*

Elementi skupa T se nazivaju čvorovi stabla $\mathcal{T}$. □

<u>Primedba</u>. *U daljem ćemo identifikovati $\mathcal{T}$ i T.* □

Definicija 1.2. *Neka je $\mathcal{T}=<T,\leqq>$ stablo.Tada su definisani sledeći skupovi:*

(1) $pred\ (t,T)=\{s: s\in T \,\&\, s\leqq t\}$;

(2) $pred^*\ (t,T)=\ pred(t,T)\setminus\{t\}$;

(3) $sled\ (t,T)=\{s: s\in T \,\&\, t\leqq s\}$;

(4) $sled^*\ (t,T)=\ sled(t,T)\setminus\{t\}$

za svako $t\in T$. □

Definicija 1.3. *Neka je $\mathcal{T}=<T,\leqq>$ stablo.Tada je :*

(1) *nivo (t,T) ordinal izomorfan sa $<pred^*(t,T),\leqq>$ za svako $t\in T$;*

(2) *$T(\alpha)=\{t: t\in T \,\&\, nivo(t,T)=\alpha\}$ za svaki ordinal α ;*

(3) *$visina(T)=sup\ \{nivo(t,T)+1 : t\in T\}$;*

(4) *grana stabla svaki maksimalni lanac u $\mathcal{T}$;*

(5) *(T) skup svih grana u stablu $\mathcal{T}$.* □

Definicija 1.4. *Neka je $\mathcal{T}=<T,\leqq>$ stablo. Za $s\in T$ se kaže da je neposredni sledbenik $t\in T$ ako $s\in sled^*(t,T)$ & $sled^*(t,T)\cap pred^*(s,T)=0$. Za svako $t\in T$ se može definisati skup $nsled(t,T)=\{s: s$ je neposredan sledbenik t u $T\}$.Za $t\in T$ se kaže da je neposredni prethodnik $s\in T$ ako $s\in nsled(t,T)$.* □

Definicija 1.5. *Neka su $\mathcal{T}=<T,\leqq>$ stablo α ordinal različit od 0 i k kardinal različit od 0. $\mathcal{T}$ je $\alpha-$stablo ako $\forall B\in(T)(<B,\leqq>$ je izomorfan sa $\alpha)$. $\mathcal{T}$ je $(\alpha,k)-$stablo ako je $\alpha-$stablo i ako je $\forall\ t\in T\,(nsled(t,T)\neq 0\rightarrow|nsled(t,T)|=k)$. $\mathcal{T}$ je $(\alpha,<k)-$stablo ako je $\alpha-$stablo i ako je $\forall\ t\in T(|nsled(t,T)|<k)$. $\mathcal{T}$ je $(\alpha,\leqq k)-$stablo ako je $\alpha-$stablo i ako je $\forall\ t\in T(|nsled(t,T)|\leqq k)$.* □

Definicija 1.6. $\mathcal{T}=\langle T,\leq\rangle$ je perfektno stablo ako je $\forall\, t\in T\,\exists\, s\in sled(t,T)\,(\,|nsled(s,T)|>1)$. $\square$

Definicija 1.7. Neka su α i β ordinali,takvi da je $\alpha\leq\beta$ .Tada je rast $(\alpha,\beta)=\{f:\ f\in{}^{\alpha}\beta\ \&\ f$ je strogo monotono rastuća funkcija$\}$. $\square$

Definicija 1.8. Neka su $\mathcal{S}=\langle S,\leq_{\mathcal{S}}\rangle$ α–stablo i $\mathcal{T}=\langle T,\leq_{\mathcal{T}}\rangle$ β–stablo, pri čemu je $\alpha\leq\beta$.Stablo $\mathcal{S}$ je strogo upisano u stablo $\mathcal{T}$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(1.) $S\subseteq T\ \&\ \leq_{\mathcal{S}}=\leq_{\mathcal{T}}\cap S^2$;

(2) $\forall s\in S\ \forall t\in nsled(s,T)\,\exists!\, r(nsled(s,S)\neq 0\rightarrow r\in nsled(s,S)\cap sled(t,T))$;

(3) $\exists f\in rast\,(\alpha,\beta)\,\forall\gamma\in\alpha\,(S(\gamma)=T(f(\gamma)))$.

Funkcija $f\in rast(\alpha,\beta)$ iz uslova (3) se naziva funkcija za označavanje nivoa i označava sa $fon(S,T)$. $\square$

Definicija 1.9. Neka su $f\in rast\,(\alpha,\beta)$ i $\mathcal{T}=\langle T,\leq\rangle$ β–stablo.Tada je $str_f(\mathcal{T})=\{\mathcal{S}:\mathcal{S}$ je α-stablo strogo upisano u $\mathcal{T}\ \&\ fon(S,T)=f\}$ .Tada se mogu definisati sledeći skupovi:

(1) $str^{\alpha}(\mathcal{T})=\bigcup\limits_{f\in rast(\alpha,\beta)} str_f(\mathcal{T})$;

(2) $str^{<\alpha}(\mathcal{T})=\bigcup\limits_{\gamma\in\alpha} str^{\gamma}(\mathcal{T})$;

(3) $str^{\leq\alpha}(\mathcal{T})=\ str^{<\alpha}(\mathcal{T})\cup str^{\alpha}(\mathcal{T})$. $\square$

Definicija 1.10. Neka je $\vec{\mathcal{T}}=\langle\mathcal{T}_i:i\in d\rangle$ d–sekvencija β–stabala za nenulti ordinal d i neka $f\in rast(\alpha,\beta)$.Tada se mogu definisati sledeći skupovi :

(1) $str_f(\vec{\mathcal{T}})=\{\langle\mathcal{S}_i:i\in d\rangle\ :\ \forall i\in d\ (\mathcal{S}_i\in str_f(\mathcal{T}_i))\}$;

(2) $str^{\alpha}(\vec{\mathcal{T}})=\bigcup\limits_{f\in rast(\alpha,\beta)} str_f(\vec{\mathcal{T}})$;

(3) $str^{<\alpha}(\vec{\mathcal{T}})=\bigcup\limits_{\gamma\in\alpha} str^{\gamma}(\vec{\mathcal{T}})$;

(4) $str^{\leq\alpha}(\vec{\mathcal{T}})=\ str^{<\alpha}(\vec{\mathcal{T}})\cup str^{\alpha}(\vec{\mathcal{T}})$. $\square$

Definicija 1.11. Neka su $\vec{\mathcal{T}}=\langle\mathcal{T}_i\ \ i\in d\rangle$ d–sekvencija β–stabala i $\vec{f}=\langle f_i:\ i\in d\rangle$ d–sekvencija funkcija iz skupa rast (α,β) za nenulti ordinal d.Tada se mogu definisati sledeći skupovi :

(1) $\underline{str}_{\vec{f}}(\vec{\mathcal{T}})=\{\langle\mathcal{S}_i:i\in d\rangle\ :\ \forall i\in d\ (\mathcal{S}_i\in str_{f_i}(\mathcal{T}_i))\}$;

(2) $\underline{str}^{\alpha}(\vec{\mathcal{T}})=\bigcup\limits_{\vec{f}\in(rast(\alpha,\beta))^{\alpha}} \underline{str}_{\vec{f}}(\vec{\mathcal{T}})$;

(3) $\underline{str}^{<\alpha}(\vec{\mathcal{T}})=\bigcup\limits_{\gamma\in\alpha} \underline{str}^{\gamma}(\vec{\mathcal{T}})$;

(4) $\underline{str}^{\leq\alpha}(\vec{\mathcal{T}})=\ \underline{str}^{<\alpha}(\vec{\mathcal{T}})\cup \underline{str}^{\alpha}(\vec{\mathcal{T}})$. $\square$

Primedba. U daljem ćemo posmatrati samo $(\omega,<\omega)$ – stabla. $\square$

Definicija 1.12. Neka su $\mathcal{T}=<T,\leqq>$ stablo i $t\in T$. Čvor t se cepa ako je $|nsled(t,T)|>1$. Eliminisati cepanje na čvoru t znači odabrati tačno jedan čvor $s\in nsled(t,T)$ i formirati stablo $<T\setminus \bigcup_{r\in nsled(t,T)\setminus\{s\}} sled(r,T), \leqq \cap (T\setminus \bigcup_{r\in nsled(t,T)\setminus\{s\}} sled(r,T))^2>$. $\square$

Definicija 1.13. Neka su $\mathcal{T}=<T,\leqq>$ stablo, r,s i t čvorovi stabla $\mathcal{T}$ koji zadovoljavaju sledeće uslove :

(1) $r\leqq s\leqq t$

(2) r je čvor koji se cepa ;

(3) $s\in nsled(r,T)$;

(4) $\neg\exists x\in sled(s,T)\cap pred(t,T)$($x$ je čvor koji se cepa).

Ukloniti čvor t iz stabla $\mathcal{T}$ znači formirati stablo $<T\setminus sled(s,T), \leqq \cap (T\setminus sled(s,T))^2>$. $\square$

Definicija 1.14. $\mathcal{T}=<T,\leqq>$ je prosto perfektno stablo ako je perfektno stablo i ako $\forall\alpha\in visina(T)\,\forall x\in T(\alpha)\,\forall y\in T(\alpha)\,(|nsled(x,T)|>1\ \&\ |nsled(y,T)|>1\rightarrow x=y)$. $\square$

Definicija 1.15. $\vec{\mathcal{T}}=<\mathcal{T}_i : i\in d>$ je d–sekvencija prostih perfektnih stabala ako ispunjava sledeće uslove :

(1) $d\leqq\omega\ \&\ 1\leqq d$;

(2) $\mathcal{T}_i$ je prosto perfektno stablo za svako $i\in d$;

(3) $\forall\alpha\in visina(T_0)\forall i\in d\forall j\in d\forall x\in T_i(\alpha)\forall y\in T_j(\alpha)(|nsled(x,T_i)|>1\ \&$
$|nsled(y,T_j)|>1\rightarrow i=j\ \&\ x=y)$.

Stav 1.1. Za svaku d–sekvenciju $\vec{\mathcal{T}}=<\mathcal{T}_i : i\in d>$ perfektnih stabala, gde je $1\leqq d<\omega$ postoji d–sekvencija $\vec{\mathcal{S}}=<\mathcal{S}_i : i\in d>$ perfektnih stabala koja zadovoljava sledeće uslove :

(1) $\forall n\in\omega\exists m\in\omega\forall i\in d\,(S_i(n)\subseteq T_i(m))$;

(2) $\forall k\in\omega\forall l\in\omega\forall m\in\omega\forall i\in d\,(S_i(k)\subseteq T_i(l)\ \&\ S_i(k+1)\subseteq T_i(m)\rightarrow l<m)$;

(3) $\forall i\in d\forall n\in\omega\forall S\in S_i(n)\exists u\in S_i(n+1)\exists v\in S_i(n+1)(s\leqq_i u\ \&\ s\leqq_i v\ \&\ u\neq v\ \&$

$\forall w\in S_i(n+1)(s\leqq w\rightarrow w=u\vee w=v))$.

Dokaz. Indukcijom se konstruiše sekvencija $<<S_i(n) : i\in d>\ n\in\omega>$, tako da $<\bigcup_{n\in\omega} S_i(n) : i\in d>=<S_i : i\in d>$ zadovoljava uslove (1)–(3). $\square$

Stav 1.2. Za svaku ω–sekvenciju $\vec{\mathcal{T}}=<\mathcal{T}_i : i\in\omega>$ perfektnih stabala postoji ω–sekvencija perfektnih stabala $<\mathcal{S}_i : i\in\omega>$ koja zadovoljava sledeće uslove :

(1) $\forall n\in\omega\,\exists m\in\omega\,\forall i\in\omega\,(S_i(n)\subseteq T_i(m))$;

(2) $\forall k\in\omega\,\forall l\in\omega\,\forall m\in\omega\,\forall i\in\omega\,(S_i(k)\subseteq T_i(l)\,\&\,S(k+1)\subseteq T_i(m)\rightarrow l<m)$;

(3) $\forall i\in\omega\,\forall j\in\omega\,\forall s\in S_i(j)((j<i\rightarrow|nsled(s,S_i|)=1)\,\&\,(i\leqq j\rightarrow|nsled(s,S_i|)=2))$.

Dokaz. *Indukcijom po n se konstruiše sekvencija $<<S_i(n): i\in\omega>:n\in\omega>$, tako da $<S_i : i\in\omega>=<\bigcup_{n\in\omega} S_i(n): i\in\omega>$ zadovoljava uslove* (1)–(3). □

Definicija 1.16. *$<<\mathcal{T}_i,n_i>: i\in\omega>$ se naziva fuziona sekvencija ako su zadovoljeni sledeći uslovi :*

(1) $\forall i\in\omega((\mathcal{T}_i$ *je perfektno stablo*$)\,\&\,n_i\in\omega)$;

(2) $\forall i\in\omega\,\forall j\in\omega\,(i<j\rightarrow T_j\subseteq T_i\,\&\,n_i<n_j)$;

(3) $\forall i\in\omega(\bigcup_{m\leqq n_i}T_i(m)=\bigcup_{m\leqq n_i}T_{i+1}(m))$;

(4) $\forall i\in\omega\,\forall t\in T_i(n_i)\,\exists x\in T_{i+1}(n_{i+1})\,\exists y\in T_{i+1}(n_{i+1})\,(x\neq y\,\&\,t\leqq x\,\&\,t\leqq y)$. □

Stav 1.3. *Neka je $<<\mathcal{T}_i,n_i>: i\in\omega>$ fuziona sekvencija. Tada je $\bigcap_{i\in\omega}T_i$ perfektno stablo.*

Dokaz. *Jasno je da koren $(T_0)\bigcap_{i\in\omega}T_i$. Neka je $t\in\bigcap_{i\in\omega}T_i$. Tada postoje $j\in\omega$ i $m\leqq n_j$, tako da $t\in T_j(m)$, a takođe postoje $x\in T_{j+1}(n_{j+1})$ i $y\in T_{j+1}(n_{j+1})$, $x\neq y$, $t\leqq x$ i $t\leqq y$. Pri tome $\{x,y\}\subseteq\bigcap_{i\in\omega}T_i$. Time je dokazano da je $\bigcap_{i\in\omega}T_i$ perfektno stablo.* □

Stav 1.4. *Za svaku d–sekvenciju perfektnih stabala $<\mathcal{T}_i:i\in d>$ postoji d–sekvencija prostih perfektnih stabala $<\mathcal{S}_i:i\in d>$, za $1\leqq d<\omega$, koja zadovoljava sledeći uslov :*

$\forall i\in d(\mathcal{S}_i$ *je dobijen uklanjanjem čvorova iz* $\mathcal{T}_i)$.

Dokaz. *Neka je za svako $i\in d$ $T_i=\{t_{in}: n\in\omega\}$ pri čemu je $\forall n\in\omega\,\forall m\in\omega\,(n\neq m\rightarrow t_{in}\neq t_{im})$. Indukcijom po n konstruišemo sekvenciju $<<T(i,n):i\in d>,<l(i,n): i\in d>, m(n), <B(i,n):i\in d>, <b(i,n):i\in d>: n\in\omega>$ koja ispunjava sledeće uslove :*

(1) $\forall i\in d\,\forall n\in\omega\,(T(i,n)$ *je perfektno* $(\omega,\leqq 2)$*–stablo*$)$;

(2) $\forall i\in d\,(T(i,o)$ *je dobijen uklanjanjem čvorova iz* $T_i)$;

(3) $\forall i\in d\,\forall n\in\omega\,(T(i,n+1)$ *je dobijen uklanjanjem čvorova iz* $T(i,n))$;

(4) $\forall i\in d\,\forall n\in\omega\,(\bigcup_{m\leqq m(n)}T(i,n)(m)=\bigcup_{m\leqq m(n)}T(i,n+1)(m))$;

(5) $\forall i\in d\,\forall n\in\omega\,(\bigcup_{m(n)\leqq m\leqq m(n+1)}T(i,n)(m)$ *sadrži tačno jedan čvor koji se cepa u skupu* $T(i,n+1)(l(i,n)))$;

(6) $\forall n\in\omega\,(m(n)<l(o,n)<\ldots<l(d-1,n)<m(n+1))$;

(7) $m(o)=0$;

(8) $\forall n\in\omega\,(m(n)\in\omega\,\&\,m(n)<m(n+1))$;

(9) $\forall i\in d\,(B(i,o)=\{n: t_{in}\in T(i,o)\})$;

(10) $\forall i\in d\ \forall n\in\omega\ (B(i,n)\subseteq\omega\ \&\ B(i,n+1)=\{m:\ t_{im}\in T(i,n+1)\}\cap B(i,n)\setminus\{b(i,n)\})$;

(11) $\forall i\in d\ \forall n\in\omega\ (b(i,n)=\min B(i,n))$.

1° *Eliminacijom čvorova u stablima d–sekvencije $<T_i : i\in d>$ formira se d–sekvencija $<T(i,o) : i\in d>$ perfektnih $(\omega,\leq 2)$–stabala. Zatim se definiše $m(o)=0$, $B(i,o)=\{n:\ t_{in}\in T(i,o)\}$ za svako $i\in d$ i $b(i,o)=\min B(i,o)$ za svako $i\in d$.*

2° *Pretpostavimo da je sekvencija $<<T(i,k+1) : i\in d>, <l(i,k) : i\in d>, m(k+1), <B(i,k+1) : i\in d>, <b(i,k+1) : i\in d> : k<n>$ konstruisana. Za svako $i\in d$ odaberemo čvor koji se cepa $t(i,n+1)\in T(i,n)(l(i,n))$, tako da je $t_{ib(i,n)}\leq t(i,n+1)$ i da je $m(n)<l(o,n)<\ldots<l(d-1,n)$. Zatim definišemo $m(n+1)=l(d-1,n)+1$. Za svako $i\in d$ u stablu $T(i,n)$ eliminišemo rascep na svakom čvoru iz $\bigcup_{m(n)\leq m\leq m(n+1)} T(i,n)(m)\setminus\{t(i,n+1)\}$ i tako dobijemo stablo $T(i,n+1)$. Zatim definišemo $B(i,n+1)=\{m:\ t_{im}\in T(i,n+1)\}\cap B(i,n)\setminus\{b(i,n)\}$ i $b(i,n+1)=\min B(i,n+1)$ za svako $i\in d$.*

3° *Na kraju induktivne procedure definišemo $<S_i : i\in d>=<\bigcap_{n\in\omega} T(i,n) : i\in d>$.* □

Stav 1.5. *Za svaku ω–sekvenciju perfektnih stabala $<\mathcal{T}_i : i\in\omega>$ postoji ω–sekvencija prostih perfektnih stabala $<\mathcal{S}_i : i\in\omega>$ koja zadovoljava sledeći uslov :*

$\forall i\in\omega$ (*$\mathcal{S}_i$ je dobijen uklanjanjem čvorova iz $\mathcal{T}_i$*).

Dokaz. *Neka je za svako $i\in\omega$ $Ti=\{t_{in}: n\in\omega\}$, pri čemu je $\forall n\in\omega\forall m\in\omega(n\neq m\rightarrow t_{in}\neq t_{im})$. Indukcijom po n konstruišemo sekvenciju $<<T(i,n) : i\in\omega>, <l(i,n) : i\leq n>, m(n), <B(i,n) : i\in\omega>, <b(i,n) : i\in\omega> : n\in\omega>$ koja ispunjava sledeće uslove :*

(1) $\forall i\in\omega\forall n\in\omega$ (*$T(i,n)$ je perfektno $(\omega,\leq 2)$–stablo*) ;

(2) $\forall i\in\omega$(*$T(i,o)$ je dobijen uklanjanjem čvorova iz stabla Ti*) ;

(3) $\forall i\in\omega\forall n\in\omega$ (*$T(i,n+1)$ je dobijen uklanjanjem čvorova iz stabla $T(i,n)$*) ;

(4) $\forall i\in\omega\forall n\in\omega\ (\bigcup_{m\leq m(n)} T(i,n)(m)=\bigcup_{m\leq m(n)} T(i,n+1)(m))$;

(5) $\forall n\in\omega\ \forall i\leq n(\bigcup_{m(n)\leq m\leq m(n+1)} T(i,n+1)(m)$ *sadrži tačno jedan čvor koji se cepa u skupu* $T(i,n+1)(l(i,n)))$;

(6) $\forall n\in\omega\ \forall k\leq n(\bigcup_{m\leq m(n)} T(n,k)(m)$ *ne sadrži ni jedan čvor koji se cepa*) ;

(7) $\forall n\in\omega\ (m(n)<l(o,n)<\ldots<l(n,n)<m(n+1))$;

(8) $m(o)=0$;

(9) $\forall n\in\omega\ (m(n)\in\omega\ \&\ m(n)<m(n+1))$;

(10) $\forall i\in\omega\ (B(i,o)=\{n:\ t_{in}\in T(i,o)\})$;

(11) $\forall n\in\omega\ \forall i\leq n(B(i,n+1)=\{m:\ t_{im}\in T(i,n+1)\}\cap\{B(i,n)\setminus b(i,n)\})$;

(12) $\forall n\in\omega\ \forall i>n\ (B(i,n)=B(i,o))$;

(13) $\forall i\in\omega\ \forall n\in\omega\ (b(i,n)=\min B(i,n))$.

1^0 *Eliminacijom čvorova u stablu To formira se perfektno* $(\omega, \leqq 2)$*–stablo* $T(0,0)$*.Zatim se definišu* $m(0)=)$, $B(0,0)=\{n : t_{0n} \in T(0,0)\}$ *i* $b(0,0)=\min B(0,0)$.

2^0 *Pretpostavimo da je sekvencija* $<<T(i,k+1) : i \leqq k>, <l(i,k) : i \leqq k>, m(k+1), <B(i,k+1) : i \leqq k>, <b(i,k+1) : i \leqq k> : k<n>$ *već definisana.Eliminicajom čvorova u stablu Tn formira se perfektno* $(\omega, \leqq 2)$*–stablo* $T(n,o)$*.Zatim se definišu :*

$$\forall\, m \leqq n\ (T(n,m)=T(n,o))$$
$$B(n,o)=\{m : t_{nm} \in T(n,o)\}$$
$$\forall\, m \leqq n\ (B(n,m)=B(n,o))$$
$$\forall\, m \leqq n\ (b(n,m)=\min B(n,m)).$$

Za svako $i \in n+1$ *odaberemo čvor koji se cepa* $t(i,n+1) \in T(i,n)(l(i,n))$ *tako da je* $t_{ib(i,n)} \leqq t(i,n+1)$ *i da je* $m(n)<l(o,n) < \ldots\ l(n,n)$. *Zatim definišemo* $m(n+1)=l(n,n)+1$. *Za svako* $i \in n+1$ *u stablu* $T(i,n)$ *eliminišemo rascep na svakom čvoru iz* $\bigcup_{m(n) \leq m \leq m(n+1)} T(i,n)\ (m) \setminus \{t(i,n+1)\}$ *i tako dobijamo stablo* $T(i,n+1)$.
Zatim definišemo :

$$\forall i \leqq n(B(i,n+1)=\{m : t_{im} \in T(i,n+1)\} \cap B(i,n) \setminus \{b(i,n)\})$$
$$\forall i \leqq n(b(i,n+1)= \min B(i,n+1))\ .$$

3^0 *Na kraju induktivne procedure definišemo* $<S_i : i \in \omega> = <\bigcap_{n\in\omega} T(i,n) : i \in \omega>$. □

Definicija 1.17. *Neka je* $\vec{\mathcal{T}}=<\mathcal{T}_i : i \in d>$ *sekvencija stabala za* $1 \leqq d \leqq \omega$. *Tada su definisani sledeći skupovi:*

(1) $\bigotimes_{i\in d} \mathcal{T}_i = \bigcup_{n\in\omega} \prod_{i\in d} T_i(n)$;

(2) $\bigotimes_{i\in d}^{A} \mathcal{T}_i = \bigcup_{n\in A} \prod_{i\in d} T_i(n)$ *za* $A \subseteq \omega$. □

Definicija 1.18. *Neka je* $\mathcal{T}$ *stablo.Skup A je m–gust u stablu* $\mathcal{T}$ *ako postoji* $n \geqq m$ *takav da je* $A \subseteq T(n)$ *i ako* $\forall t \in T(m) \exists s \in A (t \leqq s)$. □

Definicija 1.19. *Neka je* $\vec{\mathcal{T}}=<\mathcal{T}_i : i \in d>$ *sekvencija stabala za* $1 \leqq d < \omega$. *Skup A je m–gust u* $\vec{\mathcal{T}}$ *ako* $\exists n \exists A_0 \ldots \exists A_{d-1} ((A_0 \subseteq T_0(n)\ \&\ A_0$ *je m–gust u* $\mathcal{T}_0) \& \ldots \& (A_{d-1} \subseteq T_{d-1}(n) \& A_{d-1}$ *je m–gust u* $\mathcal{T}_{d-1}) \& A=\prod_{i\in d} A_i)$. □

Definicija 1.20. *Neka je* $\vec{\mathcal{T}}=<\mathcal{T}_i : i \in \omega>$ *sekvencija stabala.Tada se mogu definisati sledeći skupovi :*

(1) *A je slabo m–gust skup u* $\vec{\mathcal{T}}$ *ako za svako* $i \in m$ *postoji m–gusti skup* $A_i \subseteq T_i(n)$ *u stablu* $\mathcal{T}_i$*,gde je* $n \geqq m$, *tako da za svaki* $\vec{a} \in \prod_{i\in m} A_i$ *postoji* $\vec{b} \in \prod_{i\in\omega\setminus m} T_i(n)$, *uz uslov* $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} \in A$;

(2) *A je m–gust skup u* $\vec{\mathcal{T}}$ *ako za svako* $i \in \omega$ *postoji skup* $A_i \subseteq T_i(n)$ *tako da je za svako* $i \in m$ A_i *m–gusti skup u stablu* $\mathcal{T}_i$ *i da je za svako* $i \in \omega \setminus m$ $A_i \neq 0$, *za* $n \geqq m$, *uz uslov* $A=\prod_{i\in\omega} A_i$;

(3) *A je jako m–gust skup u* $\vec{\mathcal{T}}$ *ako za svako* $i \in \omega$ *postoji skup* $A_i \subseteq T_i(n)$ *gde je* $n \geqq m$, *uz uslov* $A= \prod_{i\in m} A_i \times \prod_{i\in\omega\setminus m} T_i(n)$. □

Definicija 1.30. *Neglavni ultrafilter* $\mathcal{U}$ *nad* ω *je selektivan ako zado–*

voljava jedan od sledećih međusobno ekvivalentnih uslova :

(1) *Za svaku sekvenciju* $<U_n : n\in\omega>$ *elemenata ultrafiltera* $\mathcal{U}$ *postoji element* U *ultrafiltera* $\mathcal{U}$, *takav da je* $U\setminus n\subseteq U_n$ *za svako* $n\in\omega$ *.*U *se naziva dijagonalizacija sekvencije* $<U_n : n\in\omega>$;

(2) *Za svaku funkciju* $f\colon \omega\to\omega$ *postoji element* U *ultrafiltera* $\mathcal{U}$, *takav da je* $f\upharpoonright U$ *konstantna funkcija ili injekcija* ;

(3) *Za svaku opadajuću sekvenciju* $<U_n : n\in\omega>$ *elemenata ultrafiltera* $\mathcal{U}$ *postoji strogo monotona funkcija* $f\colon\omega\to\omega$, *pri čemu* $f''.\omega\in\mathcal{U}$ *i* $\forall n[f(n+1)\in U_{f(n)}]$;

(4) *Za svaku funkciju* $f\colon [\omega]^2\to 2$ *postoji element* U *ultrafiltera* $\mathcal{U}$, *takav da je* $f''[U]^2=\{k\}$ *za neko* $k\in 2$;

(5) *Za svaki analitički podskup* A *topološkog prostora* $[\omega]^\omega$ *postoji element* U *ultrafiltera* $\mathcal{U}$ *takav da je ili* $[U]^\omega\subseteq A$ *ili* $[U]^\omega\subseteq[\omega]^\omega\setminus A$. □

Stav 1.6. *(CH) Neka je* $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(\omega)$ *familija podskupova od* ω *za koji važi :*

(1) $|\mathcal{A}|<2^\omega$;

(2) $\forall\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}\ (|\mathcal{F}|<\omega\to|\omega\setminus\bigcup\mathcal{F}|=\omega)$.

Tada postoji beskonačan podskup A *od* ω *,takav da je* $\forall B\in\mathcal{A}(|B\cap A|<\omega)$.

Dokaz. *Neka je* $\mathcal{A}=\{B_n : n\in\omega\}$. *Indukcijom po* n *konstruišemo sekvenciju* $<a_n : n\in\omega>$ *koja zadovoljava sledeće uslove :*

(1) $\forall n\in\omega\,(a_n\in\omega)$;

(2) $\forall n\in\omega\forall m\in\omega\,(n\neq m\to a_n\neq a_m)$;

(3) $\forall n\in\omega\,(a_n\in\omega\setminus\bigcup_{m\leq n}B_m)$.

Na kraju induktivne procedure definišemo $A=\{a_n : n\in\omega\}$. □

Korolar 1.1. *(CH) Neka je* $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(\omega)$ *familija podskupova od* ω *za koji važi*

(1) $|\mathcal{A}|<2^\omega$;

(2) $\forall\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}\ (|\mathcal{F}|<\omega\to|\bigcup\mathcal{F}|=\omega)$.

Tada postoji beskonačan podskup A *od* ω *,takav da je* $\forall B\in\mathcal{A}(|A\setminus B|<\omega)$.
□

Stav 1.7. *(CH) Postoji selektivni ultrafilter* $\mathcal{U}$ *nad* ω .

Dokaz. *Neka je* $\{f_\alpha : \alpha\in\omega_1\}$ *skup svih funkcija iz* $[\omega]^2$ *u* 2. *Induktivno konstruišemo sekvenciju* $<U_\alpha : \alpha\in\omega_1>$ *koja zadovoljava sledeće uslove :*

(1) $\forall\alpha\in\omega_1\,(U_\alpha\subseteq\omega\ \&\ |U_\alpha|=\omega)$;

(2) $\forall\alpha\in\omega_1\,(U_{\alpha+1}\subseteq U_\alpha)$;

(3) $U_0 = \omega$;

(4) $\forall\alpha\in\omega_1\ \forall\beta\in\omega_1(\alpha\in\beta) \rightarrow |U_\beta \setminus U_\alpha| < \omega)$;

(5) $\forall\alpha\in\omega_1\ \exists k\in 2(f''_\alpha[U_{\alpha+1}]^2=\{k\})$.

1^o $U_0 = \omega$.

2^o $\alpha = \beta+1$. *Tada postoji beskonačan podskup* U_α *od skupa* U_β *i* $k\in 2$ *tako da je* $f''_\beta[U_\alpha]^2=\{k\}$.

3^o α *je limitni ordinal.Primenimo korolar* 1.1. *na familiju* $\mathcal{A} = \{U_\beta : \beta\in\alpha\}$ *i izaberemo beskonačan podskup* U_α *od* ω *takav da je* $\forall\beta\in\alpha(|U_\alpha\setminus U_\beta| < \omega)$.
Na kraju induktivne procedure generišemo ultrafilter nad centriranom familijom $\{U_\alpha : \alpha\in\omega_1\}\cup\{\omega\setminus\{n\} : n\in\omega\}$. □

Definicija 1.31. *Neka je* $\vec{\mathcal{T}} = <\mathcal{T}_i : i\in d>$ *d–sekvencija stabala za* $1\leq d\leq\omega$ *.Tada je* $\forall i\in d$ *definisana funkcija* $\Pi_{di} : \bigotimes_{i\in d} T_i \rightarrow \bigotimes_{i\in d} T_i$ *na sledeći način. Neka je* $\vec{t}$ *proizvoljan element* $\bigotimes_{i\in d} T_i$ *.Ako* $\exists s_i\in pred(t_i, T_i)(|nsled(s_i, T_i)| > 1)$, *tada je* $\Pi_{di}(\vec{t}) = \vec{s}$ *pri čemu važi* $s_i\in pred(t_i, T_i)$ & $|nsled(s_i, T_i)| > 1$ & $\forall r\in pred(t_i, T_i)\setminus pred(s_i, T_i)(|nsled(r, T_i)| = 1)$ & $\forall j\in d(s_j\leq t_j)$. *Ako je* $\forall s_i\in pred(t_i, T_i)$ $(|nsled(s_i, T_i)|) = 1)$, *tada je* $\Pi_{di}(\vec{t}) = \vec{t}$. □

Definicija 1.32. $(2^{<\omega}, \lhd)$ *je definisano na sledeći način* :

$\forall s\in 2^{<\omega}\ \forall t\in 2^{<\omega}$ $(s\lhd t \leftrightarrow |s| = |t|$ & $\exists n\in|s|\,(s(n)<t(n)) \vee |s|<|t|$ & $t(|s|)=1 \vee |s| > |t|$ & $s(|t|)=0)$. □

Stav 1.8. $(2^{<\omega}, \lhd)$ *je izomorfan sa skupom racionalnih brojeva sa njegovim prirodnim poretkom.*

Dokaz. $2^{<\omega}$ *je prebrojiv skup, a poredak* $\lhd$ *je gusti linearni poredak.* □

Stav 1.9. Neka je $T\in str^\omega(<2^{<\omega}, \subseteq>)$. *Tada je* $<T, \lhd>$ *izomorfan sa* $<2^{<\omega}, \lhd>$. □

Stav 1.10. U stablu $<2^{<\omega}, \subseteq>$ *postoji gusti s obzirom na poreak* $\lhd$ *antilanac.*

Dokaz. $\{s\ ;\ s\in 2^{<\omega}$ & $(|s|\equiv 0\ (mod\ 3))$ & $(|s|>0)$ & $\forall i\in|s|\,((i\equiv 0(mod\ 3)$ & $i+3 = |s| \rightarrow <s(i), s(i+1), s(i+2)> = <0,0,1>)$ & $(i\equiv 0(mod\ 3)$ & $i+3\neq|s| \rightarrow <s(i), s(i+1), s(i+2)\neq <0,0,1>))\}$ *je gusti s obzirom na poredak* $\lhd$ *antilanac u stablu* $<2^{<\omega}, \subseteq>$. □

Definicija 1.33. *Neka je* $\mathcal{T} = <T, \leq>$ *stablo i neka je* $t\in T$ *proizvoljan element stabla.Tada je* $T[t] = \{s\ ;\ s\in t$ & $(s\leq t \vee t\leq s)\}$. □

Definicija 1.34. *Neka su* $\vec{\mathcal{T}} = <\mathcal{T}_i : i\in d>$ *d–sekvencija stabala za* $1\leq d\leq\omega$ *i* $\vec{t}\in\bigotimes_{i\in d} T_i$. *Tada je* $\vec{\mathcal{T}}[\vec{t}] = <T_i[t_i] : i\in d>$. □

Definicija 1.35. *Neka su* :

(2) $\forall k \in d \forall j \in \omega (T_{kj} = \{t : t \in 2^{<\omega} \& \forall i \in j\, (t(i) \neq 1)\})$.

(3) $\forall k \in d\ (R_k = 2^{<\omega})$;

(4) $\forall k \in d\ (S_k = \{s : s \in 2^{<\omega} \& \exists n \in \omega (|s| = \binom{n+1}{2})\})$.

Tada se mogu definisati preslikavanja :

(5) $F : \bigotimes_{\substack{k \in d \\ j \in \omega}} T_{kj} \to \bigotimes_{k \in d} R_k$;

(6) $H : \bigotimes_{\substack{k \in d \\ j \in \omega}} T_{kj} \to \bigotimes_{k \in d} S_k$

na sledeći način.Za svako $n \in \omega$ *i* $\vec{t} \in \prod_{\substack{k \in d \\ j \in \omega}} T_{kj}(n)$ *važi* :

(7) $F(\vec{t}) = \langle\langle \bigoplus_{j \in i+1} t_{kj}(i) : i \in n \rangle : k \in d \rangle$;

(8) $H(\vec{t}) = \langle\langle\langle t_{kj}(i) : j \in i+1 \rangle : i \in n \rangle : k \in d \rangle$. $\square$

<u>*Primedba*</u>. $\oplus$ *je sabiranje po modulu* 2. $\square$

Stav 1.11. *Funkcije* F *i* H *iz definicije* 1.35. *imaju sledeće osobine* :

(1) $\forall \vec{t} \in \bigotimes_{\substack{k \in d \\ j \in \omega}} T_{kj}\ (nivo(t_{00}, T_{00}) = nivo(F(\vec{t})_0, R_0) = nivo(H(\vec{t})_0, S_0))$;

(2) $\forall \vec{s} \in \bigotimes_{\substack{k \in d \\ j \in \omega}} T_{kj} \forall \vec{t} \in \bigotimes_{\substack{k \in d \\ j \in \omega}} T_{kj}\ (\vec{s} \leq \vec{t} \to F(\vec{s}) \leq F(\vec{t}) \& H(\vec{s}) \leq H(\vec{t}))$;

(3) F *i* H *preslikavaju Dekartov proizvod na Dekartov proizvod* ;

(4) $\forall \langle A_{kj} : k \in d \& j \in \omega \rangle (\forall k \in d\, \forall j \in \omega\, (A_{kj} \subseteq (T_{kj}) \& |A_{kj}| = 2) \to \forall i \in d$ $(((F'' \bigotimes_{\substack{k \in d \\ j \in \omega}} A_{kj})i$ *je perfektno na dole zatvoreno podstablo stabla* $R_i) \& ((H'' \bigotimes_{\substack{k \in d \\ j \in \omega}} A_{kj})i$ *je perfektno na dole zatvoreno podstablo stabla* $S_i)))$;

(5) F *i* H *su surjektivna preslikavanja* ;

(6) H *je bijektivno preslikavanje.*

Dokaz. (1),(2),(5) *i* (6) *proizlazi neposredno iz definicije funkcija* F *i* H. (3) *proizlazi iz sledeće činjenice. Ako je* $F(\vec{t}) = \vec{s}$ *ili* $H(\vec{t}) = \vec{s}$, *onda za svako* $k \in d$, s_k *zavisi samo od* $\langle t_{kj} : j \in \omega \rangle$. (4) *proizlazi iz sledeće dve činjenice.Za svako* $k \in d$, $j \in \omega$ *i* $n \in \omega$, *ako je* $t_{kj} \in A_{kj}(n)$ *čvor koji se cepa u stablu* A_{kj}, *on proizvodi cepanje svih čvorova u* $(F'' \bigotimes_{\substack{k \in d \\ j \in \omega}} A_{kj})_k$, *odnosno* $(H'' \bigotimes_{\substack{k \in d \\ j \in \omega}} A_{kj})_k$ *na nivou* n. *Za svako* $k \in d$, $\lim_{j \to \omega} nivo$ *((čvor koji se cepa u stablu* S_{kj}), S_{kj}) $= \infty$. $\square$

§2. *Specijalni slučajevi HL*

Stav 2.1. *Neka su* :

(1) $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω ;

(2) $\mathcal{T}=<2^{<\omega}, \subseteq>$;

(3) $f : T \to 2$.

Tada važi :

(1) $\forall n\in\omega \exists A \in \mathcal{U} \forall m\in A \exists B \subseteq T(m)((B$ *je* n*–gust u stablu* $T)$ & $f''B=\{0\}$ *ili*

(2) $\exists t\in T \exists A \in \mathcal{U} \forall m\in A\, (f''T[t](m)=\{1\})$.

Dokaz. *Za svako* $s \in T$ *definišemo skup* $A_s=\{m : \exists r \in 2^m (s\subseteq r$ & $f(r)=0)\}$. *Tada važi sledeća alternativa* :

(1) $\forall s\in T(A_s \in \mathcal{U})$ *ili*

(2) $\exists t\in T(A_t\notin\mathcal{U})$.

Pretpostavimo da važi (1). *Tada za proizvoljan* $n\in\omega$ *definišemo* $A=\bigcap_{s\in 2^n} A_s\in\mathcal{U}$ *i za svako* $m\in A$ *definišemo* $B=\{t : t\in 2^m$ & $f(t)=0\}$, *koji je* n*–gust u stablu* T.
Pretpostavimo da važi (2). *Tada* $A_t^c=\{m : \forall s\in 2^m (t\subseteq s\to f(s)=1)\}\in\mathcal{U}$ *i zato* $A=A_t^c\setminus|t|\in\mathcal{U}$. □

Stav 2.2. *Neka su* :

(1) $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω ;

(2) $\mathcal{T}=<2^{<\omega}, \subseteq>$;

(3) $f : T\to 2$.

Tada postoje $k\in 2$, $g\in rast(\omega,\omega)$ *i* $S\in str_g(T)$, *takvi da važi* :

(1) $g''\omega\in\mathcal{U}$;

(2) $f''S=\{k\}$.

Dokaz. *Pretpostavimo da važi alternativa* (1) *iz stava* 2.1. *Za svako* $n\in\omega$ *definišemo skup* $A_n\in\mathcal{U}$, *tako da* $\forall m\in A_n \exists B\subseteq T(m)((B$ *je* $n+1$*–gust u stablu* $T)$ & $f''B=\{0\})$. *Bez gubitka na opštosti možemo pretpostaviti da je* $<A_n : n\in\omega>$ *monotono opadajuća sekvencija elemenata* $\mathcal{U}$. *Pošto je* $\mathcal{U}$ *selektivan ultrafilter postoji strogo monotono rastuća funkcija* $g: \omega\to\omega$, *takva da* $g''\omega\in\mathcal{U}$ *i* $\forall n\in\omega$ $(g(n+1)\in A_{g(n)})$. *Sada za svako* $n\in\omega$ *postoji skup* $B_n\subseteq T(g(n+1))$ *koje* $(g(n)+1)$*–gust i* $f''B_n=\{0\}$. *Indukcijom po* $n\in\omega$ *konstruiše se sekvencija* $<S(n) : n\in\omega>$ *koja zadovoljava sledeće uslove* :

(1) $\forall n\in\omega(S(n)\subseteq Bn)$;

(2) $|S(0)|=1$

(3) $\forall n\in\omega\forall x\in S(n)\forall y\in T(g(n+1)+1)(x\subseteq y\to\exists! z\in S(n+1)(y\subseteq z))$.

Na kraju induktivne procedure definišemo $S=\bigcup_{n\in\omega}S(n)$. *U slučaju da važi alternativa* (2) *iz stava* 2.1 *tvrđenje je očigledno.* □

Stav 2.3. *Neka su* :

(1) $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω ;

(2) $\mathcal{T}=<T,\leqq>$ $(\omega,<\omega)$–*stablo* ;

(3) $f : T\to l$ *za* $l\in\omega\setminus 1$.

Tada postoje $k\in l$, $g\in rast(\omega,\omega)$ *i* $S\in str_g(T)$, *takvi da važi* :

(1) $g''\omega\in\mathcal{U}$;

(2) $f''S=\{k\}$.

Dokaz. *Za* $l=1$ *tvrđenje je očigledno.Za* $l=2$ *dokaz je isti kao u stavu* 2.2 *Pretpostavimo da je stav istinit za* $l=n$ *i dokazujemo njegovu istinitost za* $l=n+1$, *gde* $n\in\omega$. *Neka je* $f : T\to n+1$. *Tada postoje* $g\in rast(\omega,\omega)$ *i* $S\in str_g(T)$ *takvi da važi* :

(1) $g''\omega\in\mathcal{U}$;

(2) $f''S\subseteq n$ *ili* $f''S=\{n\}$.

U slučaju da je $f''S\subseteq n$ *primenimo induktivnu pretpostavku, a u slučaju da je* $f''S=\{n\}$ *nema šta da se dokazuje.* □

Definicija 2.1. *Neka su* :

(1) $d\in\omega\setminus 1$, $n\in\omega$ *i* $k\in\omega\setminus 1$;

(2) $<T_i : i\in d>$ *d–sekvencija stabala* $<2^{<\omega},\subseteq>$;

(3) $f : \bigotimes_{i\in d}T_i\to l$ *za* $l\in\omega\setminus 1$.

Tada sa $\Phi_k(f,n)$ *označavamo sledeći iskaz* :

(4) $\forall<B_i : i\in d>(\forall i\in d\,(B_i\subseteq T_i(n)\,\&\,|B_i|=k)\to\exists<b_i : i\in d>(\forall i\in d(b_i\in B_i)\,\&\,f(<b_i : i\in d>)=0))$. □

Stav 2.4. *Neka je* f: $\bigotimes_{i\in d}T_i\to 2$, *gde su* $d\in\omega\setminus 1$ *i* $<T_i : i\in d>$ *d–sekvencija stabala* $<2^{<\omega},\subseteq>$, *takva da* $\forall n\in\omega(\Phi_2(f,n))$. *Tada* $\forall m\in\omega\;\exists\, n\in\omega\;\exists<A_i : i\in d>(m\leqq n\,\&\,\forall i\in d\,(A_i\subseteq T_i(n)\,\&\,A_i$ *je m–gust u* T_i) & $\forall<a_i : i\in d>(\forall i\in d\; a_i\in A_i)\to f(<a_i : i\in d>)=0))$.

Dokaz. *Pretpostavimo da je* $f : \bigotimes_{i\in d}T_i\to 2$ *takva funkcija da* $\forall n\in\omega\;(\Phi_2(f,n))$.

Odaberemo proizvoljan $m\in\omega$ i prizvoljnu sekvenciju $<a_i : i\in d>\in \prod_{i\in d} T_i(m)$. Za svako $n\geq m$ je $|sled(a_i,T_i)\cap T_i(n)|=2^{n-m}$ i elementi skupa $sled(a_i,T_i)\cap T_i(n)$ mogu da se zamene priridnim brojevima iz skupa 2^{n-m}, tako da leksikografskom poretku skupa $sled(a_i,T_i)\cap T_i(n)$ odgovara poredak na skupu 2^{n-m}, za svako $i\in d$. Na taj način funkcija f indukuje sekvenciju funkcija $<f^{(k)}_{<a_i:i\in d>} : k\in\omega>$, takvih da $\forall k\in\omega(f^{(k)}_{<a_i\, i\in d>} : (2^k)^d\to 2)$. Skup $\prod_{i\in d} T_i($ $m)$ ima 2^{md} elemenata, tako da se njegovi elementi mogu zameniti prirodnim brojevima iz skupa 2^{md}, pri čemu su usaglašeni leksikografski poredak na skupu $\prod_{i\in d} T_i(m)$ i poredak $\in$ na skupu 2^{md}. Tako je pomoću funkcije f indukovana sekvencija $<<f^{(k)}_l : l\in 2^{md}> : k\in\omega>$ kod koje je $\forall l\in 2^{md}\,\forall k\in\omega\,(f^{(k)}_l : (2^k)^d\to 2)$. Sada definišemo stablo $S=\bigcup_{k\in\omega}(2^{(2^k)^d})^{2^{md}}$ sa poretkom $\leq$ za koji važi $:\forall\vec{x}\in S\,\forall\vec{y}\in S(\vec{x}\leq\vec{y}\leftrightarrow\forall i\in 2^{md}(x_i\subseteq y_i))$. Stablo $<S, \leq>$ je $(\omega,<\omega)$ stablo. U $<S,\leq>$ izdvojimo na dole zatvoreno podstablo $<R,\leq>$ tako da $\forall\vec{r}\in R\,\exists k\in\omega(\vec{r}\leq<f^{(k)}_l : l\in 2^{md}>)$. Stablo $<R,\leq>$ sadrži beskonačnu granu $\{<g^{(k)}_l : l\in 2^{md}> : k\in\omega\}$, pri čemu je $\forall l\in 2^{md}\forall k\in\omega(g^{(k)}_l : (2^k)^d\to 2)$. Neka je $<g_l : l\in 2^{md}>=<\bigcup_{k\in\omega} g^{(k)}_l : l\in 2^{md}>$. Tada je $\forall l\in 2^{md}(g_l : \omega^d\to 2)$. Definišemo funkciju $h:[\omega]^d\to 2^{md}$ na sledeći način $:\forall<n_l : l\in d>((<n_l : l\in d>$ je strogo monotono rastuća sekvencija elemenata iz $\omega)\to h(\{n_l : l\in d\})$ $=<g_k(<n_l : l\in d>) : k\in 2^{md}>)$. Postoji beskonačan podskup A od ω na kojem je funkcija h konstantna. U skupu A odaberemo elemente $x_0<y_0<x_1<y_1<\ldots<x_{d-1}<y_{d-1}$. Neka je za svako $i\in d$ $B_i=\{x_i,y_i\}$. Tada za svako $l\in 2^{md}$ postoji $<b_i : i\in d>$, $\forall i\in d\,(b_i\in B_i)$, tako da je $g_l(<b_i : i\in d>)=0$. Zbog toga je $h''[A]^d=<0 : l\in 2^{md}>\}$. Neka je k najmanji prirodni broj takav da $\{x_i : i\in d\}\subseteq 2^k$. Tada je $\forall l\in 2^{md}(g^{(k)}_l(<x_i : i\in d>)=0)$. Neka je n najmanji prirodan broj takav da je $<g^{(k)}_l : l\in 2^{md}>\leq<f^{(n)}_l : l\in 2^{md}>$. Tada je $\forall l\in 2^{md}(f^{(n)}_l(<x_i : i\in d>)=0)$. Na kraju za svako $i\in d$ definišemo skup $A_i=\{a:\exists\, b\in 2^m$ (a je zamenjen sa x_i u skupu $sled(b<T_i)\cap T_i(n))$, koji je m-gust u stablu T_i. Tada je $f''\prod_{i\in d} A_i=\{0\}$. □

Stav 2.5. Neka su $m\in\omega$ $d\in\omega\setminus 1$ i $<T_i : i\in d>$ sekvencija $<2^{<\omega},\subseteq>$ stabala. Tada postoji $p\in\omega\setminus m$ takav da $\forall f : \bigotimes_{i\in d} T_i\to 2(\forall n\in\omega\setminus p\,\Phi_2(f,n)\to\forall n\in\omega\setminus p\,\exists$ $<A_i : i\in d>(\forall i\in d\,(A_i\subseteq T_i(n)\,\&\,A_i$ je m-gust u stablu $T_i)\,\&\,f''\prod_{i\in d} A_i=\{0\}))$.

Dokaz. Pretpostavimo da stav nije istinit za neko $m\in\omega$. Tada za svaki prirodan broj $p\geq m$ postoji prirodni broj $g(p)>p$ i postoji funkcija $f_{g(p)} : \bigotimes_{i\in d} T_i\to 2$, takva da važi $\Phi_2(f_{g(p)}, g(p))\,\&\,\forall<A_i : i\in d>(\forall i\in d\,(A_i\subseteq T_i\,(g(p))\,\&$ A_i je m-gust u stablu $T_i)\to f''\prod_{i\in d} A_i\neq\{0\}$). Definišemo $A=\{n : \exists\, k\in\omega\,(n=$ $g^{k+1}(m))\}$ i funkciju $f : \bigotimes_{i\in d} T_i\to 2$ na sledeći način. Ako $\vec{t}\in\prod_{i\in d} T_i(n)$ za

$n \in A$, onda je $f(\vec{t})=f_n(\vec{t})$. Na funkciju f primenimo argumentaciju iz stava 2.4. i dolazimo do kontradikcije. □

Stav 2.6. Neka su :

(1) $d \in \omega \setminus 1$;

(2) $<T_i : i \in d>$ sekvencija $<2^{<\omega}, \subseteq>$ stabala ;

(3) $\mathcal{U}$ selektivni ultrafilter nad ω ;

(4) $g : \omega \to \omega \setminus 1$;

(5) $U : \omega \to \mathcal{U}$;

(6) $f : \bigotimes_{i \in d} T_i \to 2$.

Pretpostavimo da važi :

(7) $\forall n \in \omega \, \forall m \in U(n) \, \Phi_{g(n)}(f, m)$.

Tada postoje $h : \omega \to \omega$, $h'' \omega \in \mathcal{U}$, i $<S_i : i \in d> \in str_h(<T_i : i \in d>)$, pri čemu je $f'' \bigotimes_{i \in d} S_i = \{0\}$.

Dokaz. Iz uslova (7) sledi da za svako $n \in \omega$ postoji $A_n \in \mathcal{U}$, takav da $\forall m \in A_n \exists <B_i : i \in d> (\forall i \in d \, (B_i \subseteq T_i(m) \,\&\, B_i$ je $(n+1)$ –gust u stablu $T_i) \,\&\, f'' \prod_{i \in d} B_i = \{0\})$. Primenjujući argumentaciju stava 2.2. dokaz se završava. □

Stav 2.7. Neka su :

(1) $\forall i \in \omega \, (T_i = \{t : t \in 2^{<\omega} \,\&\, \forall j \in i \, (t(j)=0)\})$;

(2) $\mathcal{U}$ selektivni ultrafilter ;

(3) $g : \omega \to \omega \setminus 1$;

(4) $U : \omega \to \mathcal{U}$;

(5) $f : \bigotimes_{i \in \omega} T_i \to 2$;

(6) $\forall m \in \omega \, (f_m : \bigotimes_{i \in m+1} T_i \to 2 \,\&\, \forall \vec{t} \in \bigotimes_{i \in m+1} T_i \, (f_m(\vec{t}) = f(\vec{t} \frown \vec{0})))$.

Pretpostavimo da važi :

(7) $\forall n \in \omega \, \forall m \in U(n) \, \Phi_{g(n)}(f_n, m)$.

Tada postoje $A \in \mathcal{U}$ i $<S_i : i \in \omega>$, takvi da je :

(8) $\forall i \in \omega \, ((S_i$ je podstablo na dole zatvoreno stabla $T_i) \,\&\, (\bigcup_{n \in A} S_i(n)$ je izomorfno stablo sa stablom $T_i))$;

(9) $f''\bigotimes\limits_{i\in\omega}^{A} S_i=\{0\}$.

Dokaz. *Argumentacija je analogna argumentaciji iz stava* 2.6. $\square$

Definicija 2.2. *Neka su* :

(1) $n, m\in\omega$ *i* $k\in\omega\setminus 1$;

(2) $\forall i\in\omega\,(T_i=\{t : t\in 2^{<\omega}\ \&\ \forall j\in i(t(j)=0)\})$;

(3) $f : \bigotimes\limits_{i\in\omega} T_i\to l$ *za* $l\in\omega$.

Tada sa $\psi_k(f,m,n)$ *označavamo sledeći iskaz* :

(4) $\forall <B_i : i\in\omega>(\forall i\in\omega\,(B_i\subseteq T_i(n))\ \&\ \forall i\in m(|B_i|)=2)\ \&\ \forall i\in\omega\setminus m(|B_i|)=1)$
$\to\exists <b_i : i\in\omega>(\forall i\in\omega\,(b_i\in B_i)\ \&\ f(<b_i : i\in\omega>)=0))$. $\square$

Stav 2.8. Neka su ispunjeni uslovi (1)–(5) *iz stava* 2.7. *Pretpostavimo da važi* :

(6) $\forall n\in\omega\,\forall m\in U(n)\ \psi_{g(n)}(f,n,m)$.

Tada postoje $A\in\mathcal{U}$ *i* $<S_i : i\in\omega>$ *koji ispunjavaju uslove* (8) *i* (9) *iz stava* 2.7. $\square$

§ 3. *Kombinatorni dokaz HL*

Definicija 3.1. *Sa* $\Phi(n, \bigotimes\limits_{i\in\omega\setminus m}^{A} T_i, f)$ *označavamo konjunkciju sledećih iskaza* :

(1) $n\in A\ \&\ n>0$;

(2) $m\in\omega$;

(3) $A\subseteq\omega\ \&\ |A|=\omega$;

(4) $\forall i\in\omega\setminus m(T_i$ *je perfektno stablo*) ;

(5) $f : \bigotimes\limits_{i\in\omega\setminus m}^{A} T_i\to 2$;

(6) $\forall k\in A\setminus n\,\forall <S_j : j\in\omega\setminus m>(\forall j\in\omega\setminus m>(S_j\subseteq T_j(k))\ \&\ \forall j\in(m+n)\setminus m(S_j$ *je* n*–gust skup u stablu* T_j) $\&\ \forall j\in\omega\setminus(m+n)(|S_j|=1)\to f''\prod\limits_{j\in\omega\setminus m} S_j\neq\{0\}$). $\square$

Definicija 3.2. *Sa* $\psi(n,\bigotimes\limits_{i\in\omega\setminus m}^{A} S_i,\bigotimes\limits_{i\in\omega\setminus m}^{B} T_i,g,f)$ *označavamo konjunkciju* sledećih iskaza :

(1) $m\in\omega$ & $n\in\omega\setminus 1$;

(2) $B\subseteq\omega$ & $|B|=\omega$ & $A\subseteq B$ & $|A|=\omega$;

(3) $g : \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus(m+n)} S_i \to 2$ & $f : \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i \to 2$;

(4) $\forall i\in\omega\setminus m$ (T_i je perfektno stablo) ;

(5) $\forall i\in\omega\setminus m$ (S_i je na dole zatvoreno podstablo stabla T_i)&(S_i je ω-stablo)) ;

(6) $\forall i\in(m+n)\setminus m$ (S_i je dvograno stablo) ;

(7) $\forall i\in\omega\setminus(m+n)$ (S_i je perfektno stablo) ;

(8) $\forall k\in A\ \forall\vec{s}\in\prod_{i\in\omega\setminus(m+n)} S_i(k)(g(\vec{s})=1 \leftrightarrow \forall\vec{t}\in\prod_{i\in\setminus(m+n)\setminus m} S_i(k)(f(\vec{t}\frown\vec{s})=1))$;

(9) $\forall k\in A\ \exists\vec{s}\in\prod_{i\in\omega\setminus(m+n)} S_i(k)(g(\vec{s})=1)$. $\square$

Definicija 3.3. Sa $\chi(n, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} S_i, \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i, g,f)$ označavamo konjunkciju sledećih iskaza :

(1) $\Psi(n, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} S_i, \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i, g,f)$;

(2) $\forall C\ \forall <R_i : i\in\omega\setminus m>\ \forall h(C\subseteq A$ & $|C|=\omega$ & $\forall i\in(m+n)\setminus m(R_i=S_i)$& $\forall i\in\omega\setminus(m+n)(R_i$ je perfektno na dole zatvoreno podstablo stabla $S_i)$&$h=g\restriction\bigotimes^{C}_{i\in\omega\setminus(m+n)} R_i \to \Psi(n,\bigotimes^{C}_{i\in\omega\setminus m} R_i, \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i, h,f))$. $\square$

Lema 3.1. $\Phi(n, \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i, f) \to \exists A\ \exists <S_i : i\in\omega\setminus m>\ \exists g\ \chi(n, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} S_i, \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i, g,f)$.

Dokaz. Bez gubitaka na opštosti možemo pretpostaviti da je $m=0$, $B=\omega$ i $\forall i\in\omega$ (T_i je stablo $<2^{<\omega},\subseteq>$).Neka je p prirodan broj iz stava 2.5. koji odgovara sekvenciji stabala $<T_i : i\in n>$ i prirodnom broju n.Za svako $i\in n$ definišemo stablo $R_i=\{r : \exists k\in\omega(r\in 2^k$ & $\forall j\in k\setminus p(r(j)=0))\}$ i skup $\mathcal{S}_i=\{S$: (S je na dole zatvoreno ω-podstablo stabla R_i) & (S ima dve grane)$\}$. Neka je $\prod_{i\in n}\mathcal{S}_i = <S_{il} : i\in n> : l\in L$ za neko $L\in\omega$.

Pretpostavimo da važi :

(1) $\forall l\in L\ \forall A\subseteq\omega\ \forall <S_i : i\in\omega\setminus n>(|A|=\omega$ & $\forall i\in\omega\setminus n(S_i$ je perfektno na dole zatvoreno podstablo stabla $T_i)\to\exists C\subseteq A\ \exists <U_i : i\in\omega\setminus n>$ $(|C|=\omega$ &$\forall i\in\omega\setminus n(U_i$ je perfektno na dole $\underset{i\in\omega\setminus m}{\text{zatvoreno}}$ podstablo stabla $S_i)\forall k\in C\ \forall\vec{u}\in\prod_{i\in\omega\setminus m} U_i(k)\ \exists\vec{s}\in\prod_{i\in n} S_{il}(k)(f(\vec{s}\frown\vec{u})=0)))$.

U tom slučaju važi :

(2) $\exists <S_i : i\in\omega\setminus n>\exists A\subseteq\omega\ \forall l\in L(\forall i\in\omega\setminus n(S_i$ je perfektno na dole

zatvoreno podstablo stabla T_i) & $|A| = \omega$ & $\forall k\in A \forall \vec{t} \in \prod_{i\in\omega\setminus n} S_i(k) \exists \vec{s} \in \prod_{i\in n} S_{il}(k)$ (f $\vec{s}\,\hat{}\,\vec{t}$)=0)).
Međutim (2) protivreči $\Phi(n, \bigotimes_{i\in\omega} T_i, f)$ i stavu 2.

5. Zbog toga važi $\neg$(1) odnosno $\exists A \exists <S_i: i\in\omega> \exists g \chi(n, \bigotimes_{i\in\omega}^{A} S_i, \bigotimes_{i\in\omega} T_i, g, f)$. $\square$

Stav 3.1. Neka su :

(1) $\forall i\in\omega (T_i = \{ t : t \in 2^{<\omega}$ & $\forall j\in i\ (t(j)\neq 1)\})$;

(2) $f : \bigotimes_{i\in\omega} T_i \to 2$.

Tada postoje A, $<S_i: i\in\omega>$ i $k\in 2$, koji zadovoljavaju sledeće uslove :

(3) $A\subseteq\omega$ & $|A| = \omega$;

(4) $\forall i\in\omega$((S_i je na dole zatvoreno ω-podstablo stabla T_i) & (S_i ima dve grane)) ;

(5) $f'' \bigotimes_{i\in\omega}^{A} S_i = \{k\}$.

Dokaz. Slučaj $\forall n\in\omega\setminus 1 \neg \Phi(n, \bigotimes_{i\in\omega} T_i, f)$ je trivijalan. Pretpostavimo da važi $\exists n\in\omega\setminus 1\ \Phi(n, \bigotimes_{i\in\omega} T_i, f)$. Indukcijom po $n\in\omega$ konstruišemo sekvenciju $<<S_{in} : i\in\omega >, f_n, A_n, a_n, m_n : n\in\omega >$ koja zadovoljava sledeće uslove :

(1) $<S_{i0}: i\in\omega> = <T_i: i\in\omega>$;

(2) $f_0 = f$ & $A_0 = \omega$ & $a_0 = 0$ & $m_0 = 0$;

(3) $\forall n\in\omega\ \chi(m_{n+1}, \bigotimes_{i\in\omega\setminus\sum_{k\le n} m_k}^{A_{n+1}} S_{in+1}, \bigotimes_{i\in\omega\setminus\sum_{k\le n} m_k}^{A_n} S_{in}, f_{n+1}, f_n)$;

(4) $\forall n\in\omega\ \Phi(m_{n+1}, \bigotimes_{i\in\omega\setminus\sum_{k\le n} m_k}^{A_n} S_{in}, f_n)$;

(5) $\forall n\in\omega\ f'' \prod_{i\in\omega} S_{in+1}(a_{n+1}) = \{1\}$;

(6) $\forall n\in\omega (\forall i\in m_{n+1}(|S_{in+1}(a_{n+1})| = 2)$ & $\forall i\in\omega\setminus m_{n+1}(|S_{in+1}(a_{n+1})| = 1))$

(7) $\forall n\in\omega\ \forall i\in\sum_{k\le n+1} m_k \setminus \sum_{k\le n} m_k\ \forall l\in\omega\setminus(n+1)(S_{il} = S_{il+1})$;

(8) $\forall n\in\omega\ (a_n = \min A_n)$;

(9) $\forall n\in\omega\ (a_n < a_{n+1})$.

Početak induktivne procedure i induktivni korak se realizuje na osnovu leme 3.1. Na kraju definišemo sekvenciju $<S_i : i\in\omega>$ i skup A koji zadovoljava sledeće uslove :

(10) $\forall n\in\omega\ \forall i \in \sum\limits_{k\leq n+1} m_k \setminus \sum\limits_{k\leq n} m_k\ (S_i = S_{in+1})$;

(11) $A=\{ a_{+1} : n\in\omega \}$.

Jasno je da važi :

(12) $f'{\bigotimes\limits_{i\in\omega}}^{A} S_i =\{ 1\}$.

Stav 3.2. Neka su ispunjeni uslovi (1)–(2) *iz stava* 3.1. *i neka je* $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω*.Tada su ispunjeni uslovi* (3)–(6) *iz stava* 3.1. *pri čemu se može zahtevati da* $A\in\mathcal{U}$.
Dokaz. Skup $X=\{ A : A\in[\omega]^{\omega}\ \&\ \exists <S_i: i\in\omega> \exists k \in 2(\forall i\in\omega\ \varphi(S_i ,T_i)\ \&\ f'{\bigotimes\limits_{i\in\omega}}^{A} S_i = \{k\}) \}$, *gde je* $\varphi(S,T)$ *iskaz : (*T *je perfektno stablo)&(*S *je na dole zatvoreno podstablo* T*)&(*S *je* ω*–stablo)&(*S *je dvograno stablo), je analitičan u topološkom prostoru* $[\omega]^{\omega}$*.Zato postoji* $A\in\mathcal{U}$ *takav da važi :*

(1) $[A]^{\omega}\subseteq X$ *ili*

(2) $[A]^{\omega}\cap X = 0$.

Pošto (2) *protivreči argumentaciji u stavu* 3.1. *mora da važi* (1) . □

Stav 3.3. Neka su :

(1) $d\in(\omega+1)\setminus 1$ *i* $l\in\omega\setminus 1$;

(2) $\forall i\in d$ (T_i *je perfektno stablo*) ;

(3) $f : \bigotimes\limits_{i\in\omega} T_i \to l$.

Tada postoje $<S_i: i\in\omega>$, A *i* k *koji zadovoljavaju sledeće uslove :*

(4) $\forall i\in\omega$ (S_i *je perfektno na dole zatvoreno podstablo stabla* T_i) ;

(5) $A\subseteq\omega\ \&\ |A|=\omega$;

(6) $k\in l$;

(7) $f''{\bigotimes\limits_{i\in\omega}}^{A} S_i =\{ k \}$.

Ako je $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω*,tada se može zahtevati da* $A\in\mathcal{U}$.

Dokaz. *Sledi iz stavova* 3.1. , 3.2. *i* 1.11.□

§4. Struktura HL

Definicija 4.1 *Atomni simboli su* $\exists A_i$, $\forall a_i$, $\exists x_i$ *i* $\forall x_i$ *za svako* $i \in \omega$. *Skup atomnih simbola označavamo sa* $\mathcal{A}$. *Za svako* $d \in \omega \setminus 1$ *definisan je skup* L_d *nizova atomnih simbola iz* $\mathcal{A}^{2d}$ *koji zadovoljavaju sledeći uslov : za svako* $i \in d$ *u nizu se nalaze atomi* $\exists A_i$ *i* $\forall x_i$, *pri čemu atom* $\exists A_i$ *prethodi atomu* $\forall x_i$, *ili se u nizu nalaze atomi* $\exists a_i$, *i* $\exists x_i$,*pri čemu atom* $\forall a_i$ *prethodi atomu* $\exists x_i$. *Relacija* $\vdash d$ *na skupu* L_d *označava sledeća pravila :*

(1) $U \exists \alpha \exists \beta V \vdash d\ U \exists \beta \exists \alpha V$
$U \forall \alpha \forall \beta V \vdash d\ U \forall \beta \forall \alpha V$
$U \exists \alpha \forall \beta V \vdash d\ U \forall \beta \exists \alpha V$

(2) $U \forall a_i \exists x_i V \vdash d\ U \exists A_i \forall x_i V$
$U \exists A_i \forall x_i V \vdash d\ U \forall a_i \exists x_i V$

(3) $\forall \sigma \in d^d \,\&\, r \in d\,(\sigma \text{ je bijekcija } \& \, 0 \in r \rightarrow (\forall a\sigma i)_{i \in r} (\exists A \sigma i)_{i \in d \setminus r}$
$V \vdash d\ (\exists A\sigma i)_{i \in d \setminus r} (\forall a \sigma i)_{i \in r} V)$.

U pravilima (1)–(3) U i V označavaju nizove atoma a α *i* β *označavaju* A_i, a_i *ili* x_i *za* $i \in d$.*Relacija* $\Vdash d$ *na skupu* L_d *je definisana na sledeći način :* $U \Vdash d$ *važi ako i samo ako postoje* $n+1 \in \omega$ *i sekvencija* $\langle W_j : j \in n+1 \rangle$ *koji ispunjavaju sledeće uslove :*

(1) $\forall j \in n+1 (W_j \in L\ )$;

(2) $W_0 = U \,\&\, W_n = V$;

(3) $\forall j \in n\ (W_j \vdash d\, W_{j+1})$. $\square$

Lema 4.1. $\forall a_n (\exists A_i)_{i \in n} (\forall x_i)_{i \in n} \exists x_n \Vdash_{n+1} \exists A_n (\forall a_i)_{i \in n} (\exists x_i)_{i \in n} \forall x_n$.

Dokaz.
$\forall a_n (\exists A_i)_{i \in n} (\forall x_i)_{i \in n} \exists x_n$

$\Vdash_{n+1} (\exists A_i)_{i \in n} \forall a_n (\forall x_i)_{i \in n} \exists x_n$

$\Vdash_{n+1} (\exists A_i)_{i \in n} (\forall x_i)_{i \in n} (\forall a_n \exists x_n)$

$\Vdash_{n+1} (\exists A_i \forall x_i)_{i \in n} (\forall a_n \exists x_n)$

$\Vdash_{n+1} (\forall a_i \exists x_i)_{i \in n} (\exists A_n \forall x_n)$

$\Vdash_{n+1} (\forall a_i)_{i \in n} (\exists x_i)_{i \in n} (\exists A_n \forall x_n)$

$\Vdash_{n+1} (\forall a_i)_{i \in n} \exists An (\exists x_i)_{i \in n} \forall x_n$

$\Vdash_{n+1} \exists A_n (\forall a_i)_{i \in n} (\exists x_i)_{i \in n} \forall x_n$. $\square$

Lema 4.2. *Neka su $UV \in L_d$ i $WV \in L_d$, takvi da su zadovoljeni sledeći uslovi :*

(1) *U ne sadrži $\forall x_i$, $\exists x_i$ za svako $i \in d$;*

(2) *V ne sadrži $\forall a_i$, $\exists A_i$ za svako $i \in d$;*

(3) *W je dobijen permutacijom atoma u U.*

Tada $UV \Vdash d\ WV$.

Dokaz.

$UV \Vdash d (\forall a_{\sigma i})_{i \in r} (\exists A_{\sigma i})_{i \in d \setminus r} V$

$\Vdash d (\exists A_{\sigma i})_{i \in d \setminus r} (\forall a_i)_{i \in r} V$

$\Vdash d (\exists A_{\tau i})_{i \in d \setminus r} (\forall a_{\tau i})_{i \in r} V$

$\Vdash d\ WV$. □

Lema 4.3. *Ako je $U \Vdash d\ V$ onda*

(1) $\forall a_d U \exists x_d \Vdash d{+}1 \forall a_d V \exists x_d$;

(2) $\exists A_d U \forall x_d \Vdash d{+}1 \exists A_d V \forall x_d$.

Dokaz. *Neka su $n+1 \in \omega$ i $< W_j : j \in n+1 >$ sekvencija koji ispunjavaju sledeće uslove :*

(1) $\forall j \in n+1 (W_j \in L_d)$;

(2) $W_0 = U \ \& \ W_n = V$

(3) $\forall j \in n (W_j \vdash d\ W_{j+1})$.

Izaberimo proizvoljan $j \in n$. Ako je $W_j \vdash d\ W_{j+1}$ pravilo (1) ili (2), onda je $\forall a_d W_j \exists x_d \vdash d+1 \forall a_d W_{j+1} \exists x_d$ i $\exists A_d W_j \forall x_d \vdash d+1 \exists A_d W_{j+1} \forall x_d$ isto pravilo. Ako je $W_j \vdash d\ W_{j+1}$ pravilo (3), onda je $\forall a_d W_j \exists x_d \Vdash d{+}1 \forall a_d W_{j+1} \exists x_d$ i $\exists A_d W_j \forall x_d \Vdash d{+}1 \exists A_d W_{j+1} \forall x_d$ na osnovu leme 4.2. □

Lema 4.4. $(\forall a_i)_{i \in n} (\exists x_i)_{i \in n} \Vdash n\ (\exists A_i)_{i \in n} (\forall x_i)_{i \in n}$.

Dokaz. *Sprovodi se indukcijom po $n \in \omega \setminus 1$. Za $n=1$ imamo pravilo (2).*

$(\forall a_i)_{i \in n+1} (\exists x_i)_{i \in n+1}$

$\Vdash_{n+1} \forall a_n (\forall a_i)_{i \in n} (\exists x_i)_{i \in n} \exists x_n$

$\Vdash_{n+1} \forall a_n (\exists A_i)_{i \in n} (\forall x_i)_{i \in n} \exists x_n$

$\Vdash_{n+1} \exists A_n (\forall a_i)_{i \in n} (\exists x_i)_{i \in n} \forall x_n$

$\Vdash_{n+1} \exists A_n (\exists A_i)_{i\in n} (\forall x_i)_{i\in n} \forall x_n$

$\Vdash_{n+1} (\exists A_i)_{i\in n+1} (\forall x_i)_{i\in n+1}$. □

Stav 4.1. *Za svako $U, V \in L_d$ važi $U \Vdash_d V$.*

Dokaz. *Sprovodi se indukcijom po $d \in \omega \setminus 1$.*

$U \Vdash_d (\forall a_{\sigma i})_{i\in r} U^*(\exists x_{\sigma i})_{i\in r}$

$\Vdash_d (\forall a_{\sigma i})_{i\in r} (\exists A_{\sigma i} \forall x_{\sigma i})_{i\in d\setminus r} (\exists x_{\sigma i})_{i\in r}$

$\Vdash_d (\forall a_{\sigma i})_{i\in r} (\forall A_{\sigma i} \exists x_{\sigma i})_{i\in d\setminus r} (\exists x_{\sigma i})_{i\in r}$

$\Vdash_d (\forall a_{\sigma i})_{i\in d} (\exists x_i)_{i\in d}$

$\Vdash_d (\forall a_i)_{i\in d} (\exists x_i)_{i\in d}$

$\Vdash_d (\exists A_i)_{i\in d} (\forall x_i)_{i\in d}$

$\Vdash_d \exists A_{d-1} (\exists A_i)_{i\in d-1} (\forall x_i)_{i\in d-1} \forall x_{d-1}$

$\Vdash_d \exists A_{d-1} V^* \forall x_{d-1}$

$\Vdash_d V$. □

Definicija 4.2. *Neka su :*

(1) $<T_i : i\in d>$ *sekvencija ω–stabala za $d \in \omega\setminus 1$;*

(2) $<B_i : i\in d>$ *sekvencija skupova za koje važi $\forall i\in d(B_i \subseteq T_i(q))$ za $q \in\omega$;*

(3) $f: \bigotimes_{i\in d} T_i \to 2$.

Tada za svako $n \leqq q$ i $W \in \mathcal{L}_m$, $m \leqq d$, definišemo iskaz $W(n,\vec{B})$ na sledeći način :

(1) *W je prazan niz : $W(n,\vec{B})$ je iskaz $f(<x_i : i\in d>)=0$;*

(2) *W je oblika $\exists A_i V$: $W(n,\vec{B})$ je iskaz $\exists A_i(A_i\subseteq B_i$ & A_i je n–gust skup u stablu T_i & $V(n,\vec{B}))$;*

(3) *W je oblika $\forall a_i V$: $W(n,\vec{B})$ je iskaz $\forall a_i(a_i\in T_i(n) \to V(n,\vec{B}))$;*

(4) *W je oblika $\exists x_i V$: $W(n,\vec{B})$ je iskaz $\exists x_i(x_i \in sled(a_i ,T_i)\cap B_i$ & $V(n,\vec{B}))$;*

(5) *W je oblika $\forall x_i V$: $W(n,\vec{B})$ je iskaz $\forall x_i(x_i \in A_i \to V(n,\vec{B}))$.* □

Definicija 4.3. *Neka su :*

(1) $<T_i : i \in d>$ *sekvencija* ω *–stabala za* $d \in \omega \setminus 1$;

(2) $n \in \omega \,\&\, p \in \omega \,\&\, n<p \,\&\, W \in Ld$;

(3) $\mathcal{U}$ *neglavni ultrafilter nad* ω ;

(4) $U \in \mathcal{U} \,\&\, p \cap U=0$.

Tada je $\Phi(W, n, p, U)$ *sledeći iskaz* :

(5) $\forall <B_i : i \in d> \forall q \in U(\forall i \in d(B_i \subseteq T_i(q) \,\&\, (B_i$ *je p–gust skup u stablu* $T_i) \to W(n,\vec{B}))$,

a $\Psi(W, \mathcal{U})$ *je sledeći iskaz* :

(6) $\forall n \in \omega \exists p \in \omega \exists U \in \mathcal{U}(n<p \,\&\, p \cap U=0 \,\&\, \Phi(W, n, p, U))$. $\square$

Lema 4.5. Neka su :

(1) $f : \bigotimes_{i \in d} T_i \to 2$ *za* $d \in \omega \setminus 1$;

(2) $\mathcal{U}$ *neglavni ultrafilter nad* ω ;

(3) $V \in Ld \,\&\, W \in Ld$.

Tada $\Psi(V, \mathcal{U}) \to \Psi(W, \mathcal{U})$

Dokaz. Dovoljno je dokazati $V \vdash d\ W \to (\Psi(V, \mathcal{U}) \to \Psi(W, \mathcal{U}))$. *Idemo redom po pravilima* (1)–(3).

1° *Pravila* (1) *su univerzalni logički zakoni i zato ako* $V \vdash d\ W$ *reprezentuje pravilo iz grupe* (1) *onda* $\Psi(V, \mathcal{U}) \to \Psi(W, \mathcal{U})$.

2° (a) $V \forall a_i \exists x_i W \vdash d\ V \exists A_i \forall x_i W$.

Neka je $n \in \omega$ *proizvoljan, a* $p \in \omega$ *i* $U \in \mathcal{U}$ *takvi da je* $n<p \,\&\, U \cap p=0 \,\&\, \Phi(V \forall a_i \exists x_i W, n, p, U)$. *Svakom elementu* $a_i \in T_i(n)$ *odgovara element* $x_i \in sled(a_i, T_i) \cap B_i$ *tako da se od njih može načiniti skup* $A_i \subseteq B_i$, *pri čemu je* A_i *n–gust skup u stablu* T_i, *tako da važi* $\exists A_i(A_i \subseteq B_i \,\&\, A_i$ *je n–gust skup u stablu* $T_i \,\&\, \forall x_i(x_i \in A_i \to W(n,\vec{B})))$. *Zbog toga je* $\Phi(V \exists A_i \forall x_i W, n, p, U)$. *Dakle,* $\Psi(V \forall a_i \exists x_i W, \mathcal{U}) \to \Psi(V \exists A_i \forall x_i W, \mathcal{U})$.

(b) $V \exists A_i \forall x_i W \vdash d\ V \forall a_i \exists x_i W$.

Neka je $n \in \omega$ *proizvoljan, a* $p \in \omega$ *i* $U \in \mathcal{U}$ *takvi da je* $n<p \,\&\, U \cap p=0 \,\&\, \Phi(V \exists A_i \forall x_i W, n, p, U)$. *Zbog toga što je* A_i *n–gust skup u stablu* T_i *važi* $\forall a_i (a_i \in T_i(n) \to \exists x_i(x_i \in sled(a_i, T_i) \cap B_i \,\&\, W(n,\vec{B})))$. *Dakle, važi* $\Phi(V \forall a_i \exists x_i W, n, p, U)$. *Prema tome,* $\Psi(V \exists A_i \forall x_i W, \mathcal{U}) \to \Psi(V \forall a_i \exists x_i W, \mathcal{U})$.

3° $(\forall a_i)_{i \in r}(\exists A_i)_{i \in d \setminus r} V \vdash d\ (\exists A_i)_{i \in d \setminus r}(\forall a_i)_{i \in r} V$.

Pretpostavimo da važi $\Psi((\forall a_i)_{i\in r}(\exists A_i)_{i\in d\setminus r}V, \mathcal{U})$.

Formulu $V(n,\vec{B})$ označavamo sa $\Theta(\langle a_i : i\in r\rangle, \langle A_i : i\in d\setminus r\rangle$, jer se u toku dokaza menjaju kolekcije $\langle a_i : i\in r\rangle$ i $\langle A_i : i\in d\setminus r\rangle$, a n i $\vec{B}$ ostaju nepromenjeni. Kada se kolekcija $\langle a_i : i\in r\rangle$ zameni kolekcijom $\langle a_i^* : i\in r\rangle$, pri čemu je $\forall i\in r(a_i^*\leqq a_i)$, a kolekcija $\langle A_i : i\in d\setminus r\rangle$ zameni kolekcijom $\langle A_i^* : i\in d\setminus r\rangle$, pri čemu je $\forall i\in d\setminus r(A_i^*\subseteq A_i)$, u iskazu $\Theta(\langle a_i : i\in r\rangle, \langle A_i : i\in d\setminus r\rangle)$, onda $\Theta(\langle a_i : i\in r\rangle, \langle A_i : i\in d\setminus r\rangle)\rightarrow\Theta(\langle a_i^* : i\in r\rangle, \langle A_i : i\in d\setminus r\rangle)$. Neka su $F\colon \omega\rightarrow\omega$ strogo rastuća funkcija i $G\colon \omega\rightarrow\mathcal{U}$ strogo opadajuća funkcija, tako da su ispunjeni sledeći uslovi :

(1) $\forall k\in\omega\, F(k)=\min G(k)$;

(2) $\forall k\in\omega\,\Phi((\forall a_i)_{i\in r}(\exists A_i)_{i\in d\setminus r}V, k, F(k), G(k))$.

Neka je n proizvoljan prirodni broj i $K=|\bigotimes_{i\in d}T_i(n)|$. Formiramo sekvenciju prirodnih brojeva $\langle n_k : k\in K+1\rangle$ koja ispunjava sledeće uslove :

(1) $n_0=n$;

(2) $\forall k\in K(n_{k+1}=F(n_k))$.

Dokazujemo da važi $\Phi((\exists A_i)_{i\in d\setminus r}(\forall a_i)_{i\in r}V, n, n_k, G(n_k))$. Neka su $\{\vec{a_k} : k\in K\}=\bigotimes_{i\in d}T_i(n)$ i $h : K\rightarrow\bigotimes_{i\in d}T_i$, takvi da važi :

(1) $\forall k\in K(\vec{a_k}\leqq h(k)\ \&\ nivo(h(k))=n_k)$.

Izaberemo proizvoljan prirodni broj $q\in G(n_{k-1})$ i proizvoljnu sekvenciju $\vec{B}=\langle B_i : i\in d\rangle$ za koju važi :

(1) $\forall i\in d(B_i\subseteq T_i(q)\ \&\ B_i$ je n_k-gust skup u stablu $T_i)$.

Silaznom indukcijom po $k\in K+1$ konstruiše se sekvencija $\langle\langle A_{ik} : i\in d\setminus r\rangle : k\in K+1\rangle$ uz sledeće uslove :

(1) $\langle A_{ik} : i\in d\setminus r\rangle=\langle B_{ik} : i\in d\setminus r\rangle$;

(2) $\forall i\in d\setminus r\ \forall k\in K(A_{ik}\subseteq(A_{ik+1})$;

(3) $\forall i\in d\setminus r\ \forall k\in K+1\,(A_{ik}$ je n_k-gust skup u stablu $T_i)$;

(4) $\forall k\in K\,\Theta\,(h(k), \langle A_{ik} : i\in d\setminus r\rangle)$.

Pretpostavimo da je sekvencija $\langle\langle A_{il} : i\in d\setminus r\rangle : k+1\leqq l\leqq K\rangle$ već konstruisana za $k\in K$. Pošto je $\forall i\in d\setminus r\ (A_{ik+1}$ je n_{k+1}-gust skup u stablu $T_i)$ i $\Phi((\forall a_i)_{i\in r}(\exists A_i)_{i\in d\setminus r}V, n_k, n_{k+1}, G(n_k))$ postoji sekvencija $\langle A_{ik} : i\in d\setminus r\rangle$ takva da je :

(1) $\forall i\in d\setminus r\ (A_{ik}\subseteq A_{ik+1})$;

(2) $\forall i\in d\setminus r\ (A_{ik}$ je n_k-gust skup u stablu $T_i)$;

(1) $\otimes\,(h(k), <A_{ik} : i \in d \setminus r >)$.

Na kraju ove konstrukcije definišemo $<A_i : i \in d\setminus r > = <A_{i0} : i \in d\setminus r >$ *pri čemu važi* :

(1) $\forall i \in d\setminus r\ (A_i$ *je n–gust skup u stablu* $T_i)$;

(2) $\forall\, k \in K\ \otimes(\vec{a_k}, <A_i : i \in d\setminus r >)$.

Time je dokazano $\Psi\,((\exists A_i)_{i\in d\setminus r}(\forall a_i)_{i\in r}\, V, \mathcal{U}\ )$. □

Stav 4.2 *Neka su* :

(1) $f : \bigotimes_{i\in d} T_i \to 2$ *za* $d \in \omega \setminus 1$;

(2) $\mathcal{U}$ *neglavni ultrafilter nad* ω.

Tada važi jedna od sledeće dve mogućnosti :

(1) $\forall n\in\omega\ \exists A \in \mathcal{U}\ \forall m\in A\ \exists <B_i : i \in d> (\forall i \in d\ (B_i \subseteq T_i\,(m)$ & B_i *je n–gust skup u stablu* $T_i)$ & $f''\prod_{i\in d} B_i = \{0\})$;

(2) $\exists\, \vec{t} \in \bigotimes_{i\in d} T_i\ \forall n\in\omega\ \exists A \in \mathcal{U}\ \forall\, m \in A\ \exists <B_i : i \in d>(\forall i \in d\ (B_i \subseteq T_i\,[\,t_i]\,(m)$ & B_i *je n–gust skup u stablu* $T_i\,[t_i\,])$ & $f''\prod_{i\in d} B_i = \{1\})$.

Dokaz. 1^0 $\Psi\,((\exists A_i)_{i\in d}\,(\forall x_i\,)_{i\in d}\,,\ \mathcal{U})$. *Tada važi alternativa* (1) *iz zaključka stava.* $2^0\ \neg\, \Psi\ ((\forall a_i)_{i\in d}\,(\exists\, x_i\,)_{i\in d}\,, \mathcal{U}\ )$.*To znači* : $\exists\ n\in\omega\ \forall\ p > n\ \forall U\in \mathcal{U} \cap \mathcal{F}\,(\,\omega \setminus p)\,\exists q \in U \exists <B_i \subseteq T_i\,(q)\ : i \in d >(\forall i \in d\ (B_i$ *je p–gust skup u stablu* $T_i)$ & $\exists <a_i : i \in d > \in \prod_{i\in d} T_i\,(n) \forall <x_i : i \in d > \in \prod_{i\in d} sled(a_i\,, T_i\,) \cap B_i\,(f(<x_i : i \in d >) = 1))$.

Odatle proizlazi alternativa (2) *iz zaključka stava.* □

Stav 4.3 *Neka su* :

(1) $d \in \omega \setminus 1$ & $l \in\omega \setminus 1$;

(2) $<T_i : i \in d >$ *sekvencija* ω *–stabala* ;

(3) $f\!: \bigotimes_{i\in d} T_i \to l$;

(4) $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω .

Tada postoje g, $<S_i : i \in d >$ *i* k, *koji zadovoljavaju sledeće uslove* :

(5) $g \in rast(\,\omega,\ \omega)$ & $g''\omega \in \mathcal{U}$;

(6) $<S_i : i \in d > \in str_g\,(<T_i : i \in d>)$;

(7) $f''\ \bigotimes_{i\in d} S_i = \{k\ \}$.

Dokaz. Sprovodimo za $l=2$. Slučaj $l=1$ je trivijalan, a slučaj $l>2$ sledi indukcijom iz slučaja $l=2$. Za obe alternative iz zaključka stava 4.2. dokaz je isti, pa ćemo pretpostaviti da važi alternativa (1). Za svako $n\in\omega$ postoji $A_n \in \mathcal{U} \cap \mathcal{P}(\omega\setminus(n+1))$, tako da važi $\forall m\in A_n \exists <B_i \subseteq T_i(m) : i\in d>(\forall i\in d\ (B_i$ je $n+1$-gust skup u stablu $T_i) \,\&\, f''\prod_{i\in d} B_i=\{0\})$. Možemo pretpostaviti da je $<A_n : n\in\omega>$ monotono opadajuća sekvencija elemenata iz $\mathcal{U}$. Pošto je $\mathcal{U}$ selektivan ultrafilter, postoji $h\in rast(\omega,\omega)$, takva da $h''\omega \in \mathcal{U} \,\&\, \forall n\in\omega\ (h(n+1)\in A_{h(n)})$. Indukcijom po $n\in\omega$ konstruišemo sekvenciju $<<S_i(n) : i\in d> : n\in\omega>$ koja zadovoljava sledeće uslove :

(1) $\forall i\in d\ (|S_i(0)|=1)$;

(2) $\forall i\in d\ \forall n\in\omega\ (S_i(n)\subseteq T_i(h(n+1)))$;

(3) $\forall i\in d\ \forall n\in\omega\ \forall s\in S_i(n) \forall t \in nsled(s,T_i) \exists! r\in S_i(n+1)(t\leqq r)$;

(4) $\forall n\in\omega\ (f''\prod_{i\in d} S_i(n)=\{0\})$.

Na kraju induktivne procedure definišemo $<S_i : i\in d>=<\bigcup_{n\in\omega} S_i(n) : i\in d>$ i $g\in rast(\omega,\omega)$, tako da je $\forall n\in\omega\ (g(n)=h(n+1))$. $\square$

Stav 4.4 Neka su :

(1) $m\in\omega\setminus 1 \,\&\, d\in\omega\setminus 1 \,\&\, l\in\omega\setminus 1$;

(2) $<T_i : i\in d>$ sekvencija ω-stabala ;

(3) $f : str^m(<T_i : i\in d>) \to l$;

(4) $\mathcal{U}$ selektivni ultrafilter nad ω.

Tada postoje g, $<S_i : i\in d>$ i k, koji zadovoljavaju sledeće uslove :

(5) $g\in rast(\omega,\omega) \,\&\, g''\omega\in\mathcal{U}$;

(6) $<S_i : i\in d> \in str_g(<T_i : i\in d>)$;

(7) $f''\ str^m(<S_i : i\in d>)=\{k\}$.

Dokaz. Sprovodi se indukcijom po $m\in\omega\setminus 1$. Za $m=1$ dobijamo stav 4.3. Pretpostavimo da je stav istinit za m i odatle dokazujemo njegovu istinitost za $m+1$. Prvo ćemo definisati iskaze $\Phi(\vec{t}, \bigotimes^A_{i\in d} T_i, f, g, m)$ i $\Psi(n, \bigotimes^A_{i\in d} T_i, f, m)$.

1^0 $\Phi(\vec{t}, \bigotimes^A_{i\in d} T_i, f, g, m)$ je konjunkcija sledećih iskaza :

(8) $\vec{t} \in \bigotimes^A_{i\in d} T_i$;

(9) $d\in\omega\setminus 1 \,\&\, A\subseteq\omega \,\&\, |A|=\omega$;

(10) $\forall i \in d\ (T_i$ je ω–stablo) ;

(11) $f\ :\ str^{m+1}(<\bigcup_{n\in A} T_i(n)\ : i\in d>) \to l$ za $l\in\omega\setminus 1$;

(12) $g\ :\ str^{m}(<<sled(s,\bigcup_{n\in A} T_i(n))\ : s\in nsled(t_i, \bigcup_{n\in A} T_i(n))>: i\in d>) \to l$;

(13) $\forall \vec{R}\in dom(g)(g(<<R_s\ :\ s\in nsled(t_i, \bigcup_{n\in A} T_i(n))>: i\in d>) = f(<\bigcup R_s \cup \{t_i\}_{s\in nsled(t_i, \bigcup_{n\in A} T_i(n))}\ :\ i\in d>))$.

2^o $\Phi\ (n, \bigotimes_{i\in d}^{A} T_i\ ,\ f,\ m)$ je konjunkcija sledećih iskaza :

(14) $A=\{a_i\ :\ i\in\omega\}$;

(15) $\forall i\in\omega(a_i < a_{i+1})$;

(16) $\forall \vec{t}\in \prod_{i\in d} T_i(a_n)\ \exists k\ \exists g(\Phi\ (\vec{t}, \bigotimes_{i\in d}^{A} T_i\ ,\ f,\ g,\ m)\ \&\ ran(g)=\{k\})$.

Indukcijom po n konstruiše se sekvencija $<<T_{in}\ :\ i\in d>, A_n\ :\ n\in\omega>$, *tak–va da su zadovoljeni sledeći uslovi :*

(17) $\forall n\in\omega\ (A_n\subseteq\omega\ \&\ |A_n| = \omega\ \&\ A_{n+1}\subseteq A_n)$;

(18) $\forall n\in\omega\ (A_n = \{a_{ni}\ :\ i\in\omega\})$;

(19) $\forall n\in\omega\ \forall i\in\omega(a_{ni} < a_{ni+1})$;

(20) $\forall i\in\omega\ \forall n \geq i\ (a_{ni} = a_{n+1i})$;

(21) $\forall i\in d\ \forall n\in\omega\ ((T_{in}$ je ω–stablo$)\ \&\ (T_{in}\subseteq T_i))$;

(22) $<\bigcup_{m\in A_0} T_i(m)\ :\ i\in d> \in str^{\omega}(<T_i\ :\ i\in d>)$;

(23) $\forall n\in\omega\ (<\bigcup_{m\in A_{n+1}} T_{in+1}(m)\ : i\in d> \in str^{\omega}(<\bigcup_{m\in A_n} T_{in}(m)\ :\ i\in d>))$;

(24) $\forall n\in\omega\ \Psi(n, \bigotimes_{i\in d}^{A_n} T_{in}\ ,\ f\restriction str^{m+1}(<\bigcup_{j\in A_n} T_{in}(j)\ :\ i\in d>),\ m)$.

Skup $\mathcal{A}=\{A\ :\ \exists <<T_{in} : i\in d>,\ A_n :\ n\in\omega>(\ \&_{17\leq j\leq 24}(j)\ \&\ A=\bigcap_{n\in\omega} A_n)\}$ *je analitičan u topološkom prostoru* $[\omega]^{\omega}$ *i zato postoji* $A\in\mathcal{U}$ *,takav da* $[A]^{\omega}\subseteq\mathcal{A}$. *Izaberi–mo sekvenciju* $<<T_{in} : i\in d>, A_n\ :\ n\in\omega>$, *takvu da su ispunjeni uslovi* (17)–(24) *i da je* $A=\bigcap_{n\in\omega} A_n$. *Sada definišemo* $<R_i : i\in d> = <\bigcup_{m\in A\cap n\in\omega} T_{in}(m) : i\in d>$ *i funkciju* $h\ :\ \bigotimes_{i\in d} R_i \to l$, *tako da važi :*

(25) $\forall \vec{r}\in \bigotimes_{i\in d} R_i\ \forall k(h(\vec{r})=k \leftrightarrow \exists g(\ \Phi\ (\vec{r}, \bigotimes_{i\in d} R_i\ ,\ f\restriction str^{m+1}(<R_i : i\in d>),\ g\ ,m)\ \&\ ran(g)=\{k\}))$.

Primenimo stav 4.3. *na funkciju* h , *pri čemu dobijamo* $<S_i : i\in d>$ *i* k *za koje važi :*

(26) $<S_i : i\in d> \in str^{\omega}(R_i : i\in d>)$;

(27) $h'' \bigotimes_{i\in d} S_i = \{k\}$.

Iz činjenice da :

(28) $<R_i : i\in d> \in str^{\omega}(<T_i : i\in d>)$

sledi :

(29) $<S_i : i\in d> \in str^{\omega}(<T_i : i\in d>)$;

a iz (25) i (27) sledi :

(30) $f'' str^{m+1}(<S_i : i\in d>)=\{k\}$.

Pošto $A\in\mathcal{U}$ jasno je da postoji $g : \omega\to\omega$, takav da je :

(31) $g''\omega\in\mathcal{U}$;

(32) $<S_i : i\in d> \in str_g(<T_i : i\in d>)$.

Time je stav utvrđen za $m+1$, dakle i za svako $m\in\omega\setminus 1$. ☐

Stav 4.5. Neka su :

(1) $f : \omega\to\omega\setminus 1$;

(2) $\{M, m, l, d\}\subseteq\omega\setminus 1$;

(3) $m\leqq M$.

Tada postoji N sa sledećim osobinama :

(4) $N\in\omega \mathbin{\&} M\leqq N$;

(5) $\forall <T_i : i\in d>\forall g(\forall i\in d((T_i$ *je* N*–stablo*$)\mathbin{\&}\forall k\in N\ \forall t\in T_i(k)(|nsled(t,T_i)|\leqq f(k)))\mathbin{\&}(g : str^m(<T_i : i\in d>)\to l)\to\exists k\in l\ \exists <S_i : i\in d> \in str^M(<T_i : i\in d>)(g'' str^m(<S_i : i\in d>)=\{k\}))$.

Dokaz. Neka su f, M, m, l i d takvi da važi (1), (2) i

(6) $\forall N\geqq M\ \exists <T_i : i\in d>\exists g(\forall i\in d((T_i$ *je* N*–stablo*$)\mathbin{\&}\forall k\in N\ \forall t\in T_i(k)(|nsled(t,T_i)|\leqq f(k)))\mathbin{\&}(g : str^m(<T_i : i\in d>)\to l)\mathbin{\&}\forall k\in l\ \forall <S_i : i\in d> \in str^M(<T_i : i\in d>)(g'' str^m(<S_i : i\in d>)\neq\{k\}))$.

(7) $\exists <T_i : i\in d>\exists g(\forall i\in d((T_i$ *je* ω*–stablo*$)\mathbin{\&}\forall k\in\omega\ \forall t\in T_i(k)(|nsled(t,T_i)|\leqq f(k)))\mathbin{\&}(g : str^m(<T_i : i\in d>)\to l)\mathbin{\&}\forall k\in l\ \forall <S_i : i\in d> \in str^M(<T_i : i\in d>)(g'' str^m(<S_i : i\in d>)\neq\{k\}))$.

To protivreči stavu 4.4. ☐

Definicija 4.4. *Neka su :*

(1) $d\in\omega\setminus 1$;

(2) T ω*–stablo* ;

(3) $\vec{t}\in\bigotimes_{i\in d} T$.

Tada je $tip(\vec{t},T)=\{\vec{s} : \vec{s}\in\bigotimes_{i\in d} T \mathbin{\&} \forall i\in d(t_i\leqq s_i)\mathbin{\&}\forall i\in d\ \forall j\in d\ (t_i=t_j\leftrightarrow s_i=s_j)\}$. ☐

Stav 4.6. Neka su :

(1) $d \in \omega \setminus 1$ & $l \in \omega \setminus 1$;

(2) T ω-stablo ;

(3) $\vec{t} \in \bigotimes_{i\in d} T$;

(4) $f : tip(\vec{t},T) \to l$;

(5) $\mathcal{U}$ selektivni ultrafilter nad ω .

Tada postoje g, S, $\vec{s}$ i k, koji zadovoljavaju sledeće uslove :

(6) $g \in rast(\omega,\omega)$ & $g''\omega \in \mathcal{U}$; .

(7) $S \in str_g(T)$;

(8) $\vec{s} \in \bigotimes_{i\in d} S$ & $\vec{s} \in tip(\vec{t},T)$;

(9) $f''tip(\vec{s},S)=\{k\}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}=\{A : A\in\mathcal{P}(d)$ & $\forall i\in A\,\forall j\in A\,(t_i = t_j)$ & $\forall i\in A\,\forall j\in d\,(t_i = t_j \to j\in A)\}$. Pretpostavićemo bez gubitka na opštosti da je $\mathcal{A} = \{A_i : i\in m\}$ za $m\in d+1$, pri čemu $\forall i\in m(i\in A_i)$. Sada definišemo funkciju $h : \bigotimes_{i\in m} sled(t_i,T) \to l$ koja zadovoljava sledeći uslov

(10) $\forall \vec{s}\in \bigotimes_{i\in m} sled(t_i,T)\, \exists !\vec{r}\ \bigotimes_{i\in d} T\ (\forall i\in m\ (s_i=r_i)$ & $\forall A\in\mathcal{A}\,\forall i\in A\,\forall j\in A\ (r_i= r_j)$ & $h(\vec{s})=f(\vec{r}))$.

Jasno je da postoje g^* , $<S_i : i\in m>$ i k, takvi da važi :

(11) $g^*\in rast(\omega,\omega)$;

(12) $<S_i : i\in m> \in str_{g^*}(<sled(t_i,T) : i\in m>)$;

(13) $h''\bigotimes_{i\in m} S_i = \{k\}$.

Neka je $<s_i : i\in m> \in \prod_{i\in m} s\ (0)$. Proširimo sekvenciju $<s_i : i\in m>$ do sekvencije $<s_i : i\in M>$ koja sadrži sve elemente skupa $T(nivo(s_0,T))$, a zatim proširimo sekvenciju $<S_i : i\in m>$ do sekvencije $<S_i : i\in M> \in str_{g^*}(<sled(s_i,T) : i\in M>)$, pri čemu je $M=|T(nivo(s_0,T))|$. Na kraju definišemo :

(14) $S=\bigcup_{i\in M}(S_i\cup pred(s_i,T))$

(15) $<s_i : i\in d>$ je proširenje sekvencije $<s_i : i\in m>$ takvo da $\forall A\in \mathcal{A}\ \forall i\in A\ \forall j\in A(s_i=s_j)$.

Jasno je da važi :

(16) $f''tip(<s_i : i\in d>,S)= \{k\}$;

(17) $<s_i : i\in d> \in tip(\vec{t},T)$.

Poznati argument pokazuje da postoji $g \in rast(\omega, \omega)$, *takav da je* $g''\omega \in \mathfrak{U}$ *i* $S \in str_g(T)$. $\square$

Stav 4.7. Neka je :

(1) $\{d, l\} \subseteq \omega \setminus 1$;

(2) $j \in d$;

(3) $\vec{T} = \langle T_i : i \in d \rangle$ *d–sekvencija prostih perfektnih stabala* ;

(4) $f : \bigotimes_{i \in d} T_i \to l$;

(5) $\forall \vec{t} \in \bigotimes_{i \in d} T_i \, (f(\vec{t}) = f(\Pi_{dj}(\vec{t})))$.

Tada postoje $\vec{S} = \langle S_i : i \in d \rangle$ *i* k, *koji zadovoljavaju sledeće uslove :*

(6) $\vec{S}$ *je d–sekvencija prostih perfektnih stabala* ;

(7) $\forall i \in d$ (S_i *je na dole zatvoreno podstablo stabla* T_i) ;

(8) $\forall \vec{s} \in \bigotimes_{i \in d} S_i \, (|nsled(s_j, S_j)| = 2 \to f(\vec{s}) = k)$.

Dokaz. Bez gubitaka na opštosti možemo pretpostaviti da je $j=0$. *Postoje* $\vec{t} \in \bigotimes_{i \in d} T_i$ *i* $k \in l$, *takvi da važi :*

(9) $\forall n \in \omega \, \exists m \geq n \, \exists \langle B_i : i \in d \rangle (\forall i \in d$ ($B_i \subseteq T_i(m)$ & B_i *je n–gust skup u stablu* $T_i[t_i]$ & $f''\prod_{i \in d} B_i = \{k\}$).

Neka je $T_0 = \{t_{0j} : j \in \omega\}$. *Indukcijom po n konstruišemo sekvenciju* $\langle\langle S_{in} : i \in d\rangle, s_n, m_n, B_n, b_n : n \in \omega\rangle$ *koja zadovoljava sledeće uslove :*

(10) $\forall i \in d \, (S_{i0} = T_i[t_i])$;

(11) $\forall i \in d \, \forall n \in \omega$ (S_{in+1} *je na dole zatvoreno perfektno podstablo stabla* S_{in}) ;

(12) $\forall i \in d \, \forall n \in \omega \, (\bigcup_{j \leq m_n} S_{in+1}(j) = \bigcup_{j \leq m_n} S_{in}(j))$;

(13) $\forall n \in \omega$ ($\bigcup_{m_n \leq j \leq m_{n+1}} S_{in+1}(j)$ *sadrži tačno jedan čvor sa dva neposredna sledbenika* s_{n+1}) ;

(14) $\forall n \in \omega \, (s_{n+1} \geq t_{0b_n})$;

(15) $s_0 = t_0$;

(16) $m_0 = 0$;

(17) $\forall n \in \omega \, (m_n \in \omega$ & $m_n < m_{n+1})$;

(18) $B_0=\{j : t_{0j}\in S_{00}\}$;

(19) $\forall n\in\omega\,(B_{n+1}=\{j : t_{oj}\in S_{on+1}\}\cap B_n\setminus\{b_n\})$;

(20) $\forall n\in\omega\,(b_n=min B_n)$;

(21) $\forall n\in\omega\,\forall\vec{r}\in\bigotimes_{i\in d}S_{in+1}\,(r_0=s_{n+1}\rightarrow f(\vec{r})=k)$.

U prvom koraku definišemo :

(22) $S_{io}=T_i[t_i]$ *za svako* $i\in d$;

(23) $s_o=t_0$;

(24) $m_o=0$;

(25) $B_o=\{j : t_{0j}\in S_{00}\}$;

(26) $b_0=min B_0$.

Pretpostavimo da je sekvencija $\langle\langle S_{in} : i\in d\rangle, s_n, m_n, B_n, b_n\rangle$ *definisana. Tada postoje* m_{n+1} *i* $\langle A_i : i\in d\rangle$, *koji zadovoljavaju sledeće uslove :*

(27) $m_n < m_{n+1}$;

(28) $\forall i\in d\,(A_i\subseteq S_{in}(m_{n+1}))$;

(29) $\forall i\in d\;\forall x\in A_i\,\exists y\in S_{in}(m_n)(y\leqq x)$;

(30) $\exists m\in\omega\,\exists x\in S_{in}(m)(m_n<m\;\&\;m<m_{n+1}\;\&\;t_{ob_n}\leqq x\;\&\;|nsled(x,S_{in})|=2\;\&\;\exists y\in A_o(x\leqq y))$;

(31) $\forall i\in d\setminus 1\,\forall x\in S_{in}(m_n)\,\exists y\in A_i\,\exists z\in A_i(y\neq z\;\&\;x\leqq y\;\&\;x\leqq z)$;

(32) $f''\prod_{i\in d}A_i=\{k\}$.

Definišemo stabla :

(33) $\overset{*}{S}_{on}=\{s : s\in S_{on}\;\&\;\exists t\in A_0(s\leqq t\vee t\leqq s)\}$;

(34) $\forall i\in d\setminus 1\,(S_{in+1}=\{s : s\in S_{in}\;\&\;\exists t\in A_i(s\leqq t\vee t\leqq s)\})$.

U stablu $\overset{*}{S}_{on}$ *odaberemo element* $s_{n+1}\geqq t_{ob_n}$ *koji se cepa na najvišem nivou* $m<m_{n+1}$, *a zatim uklonimo cepanja na svim elementima* $\bigcup_{m_n\leq j\leq m_{n+1}}\overset{*}{S}_{on}(j)\setminus\{s_{n+1}\}$. *Na taj način dobijamo stablo* S_{on+1}. *Na kraju definišemo :*

(35) $B_{n+1}=\{j : t_{oj}\in S_{on+1}\}\cap B_n\setminus\{b_n\}$;

(36) $b_{n+1}=min B_{n+1}$.

Time je završen induktivni korak. Na kraju induktivne procedure definišemo :

(37) $<S_i : i\in d> = <\bigcap_{n\in\omega} S_{in} : i\in d>$. $\square$

Definicija 4.5. *Sa* $K(<T, \leqq>)$ *označavamo sledeći iskaz* : $\exists\, i\in\omega\, (<T, \leqq>$ *je izomorfan sa* $<\{s : s\in 2^{<\omega}\ \&\ \forall j\in i\,(s(j)=0)\}, \subseteq>)$. *Sa* $<T, \leqq>\in K$ *označavamo* $K(<T, \leqq>)$. $\square$

Definicija 4.6. *Za* $d\in\omega\setminus 1$ *sa* $K_d(<<T_i, \leqq i> : i\in d>)$ *označavamo sledeći iskaz* : $\forall i\in d\,(K(<T_i, \leqq i>)$. *Sa* $<<T_i, \leqq i> : i\in d> \in K_d$ *označavamo* $K_d(<<T_i, \leqq i> : i\in d>)$. $\square$

Definicija 4.7. *Sa* $K_\omega(<<T_i, \leqq i> : i\in\omega>)$ *označavamo sledeći iskaz:* $\forall i\in\omega\,(K(<T_i, \leqq i>))\ \&\ \exists f: \omega\to\omega\ (\forall i\in\omega\ (|T_i(f(i))|=1\ \&\ |T_i(f(i)+1)|=2)\ \&\ \lim_{n\to\infty} f(n)=\infty.$). *Sa* $<<T_i, \leqq i> : i\in\omega> \in K_\omega$ *označavamo* $K_\omega(<<T_i, \leqq i> : i\in\omega>)$. $\square$

Definicija 4.8. *Neka su* :

(1) $d\in(\omega+1)\setminus 1$;

(2) $<T_i : i\in d>$ *sekvencija* ω*–stabala* ;

(3) $C\subseteq \bigotimes_{i\in d} T_i$.

Skup C *je kofinalan u* $\bigotimes_{i\in d} T_i$ *ako ispunjava sledeći uslov* :

(4) $\forall \vec{t}\in \bigotimes_{i\in d} T_i\ \exists \vec{c}\in C\ \forall i\in d\ (t_i\leqq c_i)$. $\square$

Definicija 4.9. *Neka su* :

(1) $\mathcal{T}=<T, \leqq>$ ω*–stablo* ;

(2) $t_1\in T\ \&\ t_2\in T$;

(3) $S\subseteq T\ \&\ 0<|S|<\omega$.

Tada je :

(4) $\wedge(t_1, t_2, \mathcal{T}) = sup(pred(t_1, \mathcal{T})\cap pred(t_2, \mathcal{T}))$;

(5) $\wedge(S, \mathcal{T}) = sup(\bigcap_{s\in S} pred(s, \mathcal{T}))$. $\square$

Definicija 4.10. *Neka su* :

(1) $d\in(\omega+1)\setminus 1$;

(2) $<\mathcal{T}_i = <T_i, \leqq i> : i\in d>$ *sekvencija* ω*–stabala* ;

(3) $<S_i : i\in d>$;

(4) $\forall i\in d\ (S_i\subseteq T_i\ \&\ 0<|S_i|<\omega)$.

Tada je :

(5) $\wedge(<S_i : i\in d>,<\mathcal{T}_i: i\in d>)=<\wedge(S_i,\mathcal{T}_i) : i\in d>$. $\square$

Definicija 4.11. *Neka su* :

(1) $\{d,k,l\}\subseteq\omega\setminus 1\ \&\ n\in\omega$;

(2) $<T_i : i\in d>\in K_d$;

(3) C *kofinalan skup u* $\bigotimes_{i\in d} T_i$;

(4) $f : \bigotimes_{i\in d} T_i\to l$.

Tada sa $\Phi_k(C,f,n)$ *označavamo sledeći iskaz* :

(5) $\forall<B_i : i\in d>(\forall i\in d\ (B_i\subseteq T_i(n)\ \&\ |B_i|=k)\ \&\ \wedge(<B_i : i\in d>,<T_i : i\in d>)\in C\to\exists<b_i\in B_i : i\in d>(f(<b_i : i\in d>)=0))$. $\square$

Stav 4.8. Neka su $m\in\omega$, $d\in\omega\setminus 1$, $<T_i : i\in d>\in K_d$ *i* C *kofinalan skup u* $\bigotimes_{i\in d} T_i$. *Tada postoji* $p\in\omega\setminus m$ *takav da* $\forall f: \bigotimes_{i\in d} T_i\to 2(\forall n\in\omega\,\Phi_2(C,f,n)\to\forall n\in\omega\setminus p\,\exists<A_i\subseteq T_i(n) : i\in d>(\forall i\in d\ (A_i$ *je* m*–gust skup u stablu* $T_i)\ \&\ f''\prod_{i\in d} A_i=\{0\}))$.

Dokaz Pretpostavimo da stav nije istinit za $m,d,<T_i : i\in d>$ *i* C. *To znači da za svaki prirodan broj* $p\geqq m$ *postoji prirodan broj* $g(p)>p$ *i postoji funkcija* $f_{g(p)} : \bigotimes_{i\in d} T_i\to 2$, *pri čemu važi* $\Phi_2(C,f_{g(p)},g(p))(\&\ \forall<A_i\subseteq T_i(g(p)) : i\in d>(\forall i\in d(A_i$ *je* m*–gusti skup u stablu* $T_i)\to f''\prod_{i\in d} A_i\neq\{0\})$. *Definišemo skup* $A=\{n : n\leqq m\vee\exists k\in\omega\setminus 1(n=g^k(m))\}$ *i funkciju* $f : \bigotimes_{i\in d}^{A} T_i\to 2$ *na sledeći način. Za* $n\in m+1$ *i* $\vec{t}\in\prod_{i\in d} T_i(n)$ *važi* $f(\vec{t})=1$, *a za* $n\in A\setminus(m+1)$ *i* $\vec{t}\in\prod_{i\in d} T_i(n)$ *važi* $f(\vec{t})=f_n(\vec{t})$. *Postoji* $\vec{t}\in\bigotimes_{i\in d}^{A} T_i$, *takav da* $\forall\ n\in A\ \exists\ m\in A\setminus n\,\exists<B_i\subseteq T_i[t_i](m) : i\in d>(\forall i\in d\ (B_i$ *je* n*–gust skup u stablu* $T_i[t_i]$ $)\ \&\ f''\prod_{i\in d} B_i=\{1\})$. *Iz toga sledi da postoje* $\vec{c}$, $<B_i : i\in d>$ *i* n *takvi da* :

(1) $\vec{c}\in C\ \&\ \forall i\in d\ (t_i\leqq c_i)$;

(2) $n\in A\setminus(m+1)\ \&\ \forall i\in d(B_i\subseteq T_i(n)\ \&\ |B_i|=2)$;

(3) $\wedge(<B_i : i\in d>,<T_i : i\in d>)=\vec{c}$;

(4) $f''\prod_{i\in d} B_i=\{1\}$.

Uslov (4) *protivreči definiciji funkcije* f. $\square$

Definicija 4.12.

1^0 $\alpha(\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} S_i, \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i)$ *je konjunkcija sledećih iskaza* :

(1) $m \in \omega$;

(2) $A \subseteq B \subseteq \omega \;\&\; |A| = \omega$;

(3) $\forall i \in \omega \setminus m (S_i$ *je na dole zatvoreno podstablo stabla* $T_i)$;

(4) $\forall i \in \omega \setminus m(\forall x \in \bigcup_{n\in A} S_i(n) \forall y \in \bigcup_{n\in A} S_i(n)(\wedge(x,y,\bigcup_{n\in A} S_i(n)) = \wedge(x,y,S_i))$;

(5) $\forall i \in \omega \setminus m(\forall x \in \bigcup_{n\in B} T_i(n) \forall y \in \bigcup_{n\in B} T_i(n)(\wedge(x,y,\bigcup_{n\in B} T_i(n)) = \wedge(x,y,T_i))$;

(6) $< \bigcup_{n\in A} S_i(n) : i \in \omega \setminus m > \in K_\omega$;

(7) $< \bigcup_{n\in B} T_i(n) : i \in \omega \setminus m > \in K_\omega$.

2^0 $\beta(\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} S_i) = < s_i : i \in m \setminus n >$ *je konjunkcija sledećih iskaza* :

(8) $\{m,n\} \subseteq \omega \;\&\; m > n$;

(9) $A \subseteq \omega \;\&\; |A| = \omega$;

(10) $\forall i \in m \setminus n(S_i$ *je dvograno* ω*–stablo*$)$;

(11) $\forall i \in m \setminus n \, \exists j \in A \, (|S_i(j)| = 1 \;\&\; |S_i(j+1)| = 2)$;

(12) $\forall i \in m \setminus n \;\; (|nsled(s_i)| = 2)$.

3^0 $\gamma(\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i, f)$ *je konjunkcija sledećih iskaza* :

(13) $\alpha(\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i)$;

(14) $f\colon \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i \to 2$;

(15) $f^{-1}(\{1\})$ *je kofinalan skup u* $\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i$.

4^0 $\delta(n, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i, f)$ *je konjunkcija sledećih iskaza* :

(16) $n \in A \setminus 1$;

(17) $\alpha(\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i)$;

(18) $f\colon \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i \to 2$;

(19) $\forall k \in A \setminus n \forall < S_j : j \in \omega \setminus m > (\forall j \in \omega \setminus m \, (S_j \subseteq T_j(k)) \;\&\; \forall j \in (m+n) \setminus m(S_j$ *je* n*–gust skup u stablu* $T_j) \;\&\; \forall j \in \omega \setminus (m+n)(|S_j| = 1) \to f'' \prod_{j\in\omega\setminus m} S_j$
$\neq \{0\}$).

5^0 $\varepsilon(\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i, f)$ *je konjunkcija sledećih iskaza* :

(20) $\alpha(\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i)$;

(21) $f\colon \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i \to 2$;

(22) $\forall \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} S_i\, (\alpha(\bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} S_i, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i) \to \exists\, \vec{s} \in \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} S_i\, (f(\vec{s})=1))$.

6^0 $\eta(n, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} S_i, \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i, g, f)$ *je konjunkcija sledećih iskaza* :

(23) $n \in \omega\setminus 1$;

(24) $\alpha(\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus(m+n)} S_i, \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus(m+n)} T_i)$;

(25) $\alpha(\bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i, \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i)$;

(26) $\forall i \in (m+n)\setminus m$ (S_i *je na dole zatvoreno podstablo stabla* T_i) ;

(27) $\exists\, k\in B(\forall j\in\omega\setminus m(|S_j(k)|=1)\ \&\ \beta(\bigotimes^{B}_{j\in(m+n)\setminus m} S_j) \in \prod_{j\in(m+n)\setminus m} S_j(k)\ \&\ f''\prod_{j\in\omega\setminus m} S_j(k)$
$=\{1\})$;

(28) $f\colon \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} T_i \to 2$;

(29) $g\colon \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus(m+n)} S_i \to 2$;

(30) $\exists\, k\in A\, \forall\, \vec{s} \in \prod_{i\in\omega\setminus(m+n)} S_i(k)\ (g(\vec{s})=1 \leftrightarrow \forall\, \vec{t} \in \prod_{i\in(m+n)\setminus m} S_i(k)\ (f(\vec{t}\frown\vec{s})=1))$;

(31) $\varepsilon(\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus(m+n)} S_i, g)$. $\square$

Lema 4.6. $\gamma(\bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i, f)\ \&\ \delta(n, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i, f) \to \exists \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} S_i\, \exists\, g\ \ \eta(n, \bigotimes^{B}_{i\in\omega\setminus m} S_i, \bigotimes^{A}_{i\in\omega\setminus m} T_i, g, f)$.

Dokaz. Bez gubitka na opštosti možemo pretpostaviti da je $m=0$, $A=\omega$ *i* $\forall j\in\omega(T_j=\{t : t\in 2^{<\omega}\ \&\ \forall i\in j\,(t(i)=0)\})$. *Induktivno konstruišemo* C *i* $<G_i : i\in\omega\setminus n>$ *koji zadovoljavaju sledeće uslove* :

(1) C *je kofinalan podskup od* $\bigotimes_{i\in n} T_i$;

(2) $\forall i\in\omega\setminus n$ (G_i *je maksimalna grana stabla* T_i) ;

(3) $\forall k\in\omega\ \forall\, \vec{c}\in C_i(\vec{c}\in\prod_{i\in n} T\ (k) \to \exists\, \vec{d} \in \prod_{i\in\omega\setminus n} G_i(k)(f(\vec{c}\frown\vec{d})=1))$.

Prema stavu 4.8. *za* n, $\bigotimes_{i\in n} T_i$ *i* C *definisan je prirodni broj* $p\geq n$, *koji zadovoljava uslov naveden u stavu* 4.8. *Za svako* $i\in n$ *definišemo stablo* $R_i = \{r : \exists\, k\in\omega(r\in T_i(k)\ \&\ \forall j\in k\setminus p(r(j)=0))\}$ *i skup* $\mathcal{S}_i=\{S : (S$ *je na dole zatvoreno podstablo stabla* $R_i)\ \&\ (S$ *je dvograno* ω*–stablo*$)\}$. *Definišemo skup* $\mathcal{S}=\{<S_i : i\in n> : <S_i : i\in n> \in \prod_{i\in n}\mathcal{S}_i\ \&\ \beta(\bigotimes_{i\in n} S_i)\in C\} = \{S_{il} : i\in n> : l\in L\}$

za neko $L \in \omega$. Pretpostavimo da važi :

$$(4)\ \forall l \in L \forall \underset{i\in\omega\setminus n}{\overset{A}{\otimes}} S_i (\alpha (\underset{i\in\omega\setminus n}{\overset{A}{\otimes}} S_i , \underset{i\in\omega\setminus n}{\otimes} T_i) \to \exists \underset{i\in\omega\setminus n}{\overset{B}{\otimes}} R_i (\alpha (\underset{i\in\omega\setminus n}{\overset{B}{\otimes}} R_i , \underset{i\in\omega\setminus n}{\overset{A}{\otimes}} S_i) \,\&\, \forall k \in B \forall \vec{r} \in \prod_{i\in\omega\setminus n} R_i (k) \exists \vec{s} \in \prod_{i\in n} S_{il} (k)(f(\vec{s} \frown \vec{r})=0))).$$

Tada važi :

$$(5)\ \exists \underset{i\in\omega\setminus n}{\overset{A}{\otimes}} S_i \forall l \in L (\alpha (\underset{i\in\omega\setminus n}{\overset{A}{\otimes}} S_i , \underset{i\in\omega\setminus n}{\otimes} T_i) \,\&\, \forall k \in A \forall \vec{t} \in \prod_{i\in\omega\setminus n} S_i (k) \exists \vec{s} \in \prod_{i\in\omega\setminus n} S_{il} (k)(f(\vec{s} \frown \vec{t})=0))).$$

Međutim (5) protivreči $\delta(n, \underset{i\in\omega}{\otimes} T_i , f)$ i stavu 4.8.

Zbog toga važi $\neg$(4) odnosno $\exists \underset{i\in\omega}{\overset{A}{\otimes}} S_i \exists g\ \eta(n, \underset{i\in\omega}{\overset{A}{\otimes}} S_i , \underset{i\in\omega}{\otimes} T_i , g, f)$. □

Lema 4.7. $\varepsilon(\underset{i\in\omega\setminus m}{\overset{A}{\otimes}} T_i , f) \to \exists n \exists \underset{i\in\omega\setminus m}{\overset{B}{\otimes}} S_i \exists g\ \eta(n, \underset{i\in\omega\setminus m}{\overset{B}{\otimes}} S_i , \underset{i\in\omega\setminus m}{\overset{A}{\otimes}} T_i , g, f)$.

Dokaz. $\varepsilon(\underset{i\in\omega\setminus m}{\overset{A}{\otimes}} T_i , f) \to \gamma(\underset{i\in\omega\setminus m}{\overset{A}{\otimes}} T_i , f) \,\&\, \exists n \delta(n, \underset{i\in\omega\setminus m}{\overset{A}{\otimes}} T_i , f)$. Uzimajući u obzir lemu 4.6. završen je dokaz. □

Stav 4.9. Neka su :

(1) $<T_i : i\in\omega > \in K_\omega$;

(2) $f : \underset{i\in\omega}{\otimes} T_i \to 2$.

Tada važi :

(3) $\exists \vec{t} \in \underset{i\in\omega}{\otimes} T_i (f'' \underset{i\in\omega}{\overset{\omega\setminus nivo(\vec{t},\vec{T})}{\otimes}} T_i\ [t_i] = \{0\})$ ili

(4) $\forall n \in \omega \setminus 1 \neg \delta(n, \underset{i\in\omega}{\otimes} T_i , f)$ ili

(5) $\exists <S_i : i\in\omega > \exists A(\forall i \in\omega ((S_i$ je na dole zatvoreno podstablo stabla $T_i) \,\&\, (S_i$ je dvograno ω–stablo$)) \,\&\, A = \{n : \exists i\in\omega (|S_i(n)|=1 \,\&\, |S_i(n+1)|=2) \,\&\, f'' \underset{i\in\omega}{\overset{A}{\otimes}} S_i = \{1\})$.

Dokaz. Pretpostavimo da važi $\neg$(3) & $\neg$(4) . Indukcijom po $n\in\omega$ konstruišemo sekvenciju $<<S_{in} : i\in\omega >, f_n , A_n , m_n : n\in\omega >$ koja zadovoljava sledeće uslove :

(6) $<S_{i0} : i\in\omega > = <T_i : i\in\omega >$;

(7) $f_0 = f \,\&\, A_0 = \omega \,\&\, m_0 = 0$;

(8) $\forall n\in\omega\, \eta(m_{n+1}, \underset{i\in\omega\setminus \sum_{k\le n} m_k}{\overset{A_{n+1}}{\otimes}} S_{in+1} , \underset{i\in\omega\setminus \sum_{k\le n} m_k}{\overset{A_n}{\otimes}} S_{in} , f_{n+1}, f_n)$;

$$(9)\ \forall n\in\omega\ \delta\ (m_n+1, \bigotimes^{A_n}_{i\in\omega\setminus \sum\limits_{k\leq n} m_k} S_{in}\ , f_n)\ ;$$

$$(10)\ \forall n\in\omega\setminus 1\ \gamma\ (\bigotimes^{A_n}_{i\in\omega\setminus \sum\limits_{k\leq n} m_k} S_{in}\ , f_n)\ ;$$

$$(11)\ \forall n\in\omega\ \forall\ i\in \sum_{k\leq n+1} mk \setminus \sum_{k\leq n} mk\ \forall l\in\omega\setminus(n+1)(S_{il}=S_{il+1}).$$

Induktivni korak se izvodi na osnovu lema 4.6. i 4.7.Na kraju definišemo sekvenciju $<S_i : i\in\omega>$ i skup A koji zadovoljavaju sledeće uslove :

$$(12)\ \forall n\in\omega\ \forall\ i\in \sum_{k\leq n+1} mk \setminus \sum_{k\leq n} mk\ \ (S_i = S_{in+1})\ ;$$

$$(13)\ A=\{n\ :\ \exists\, i\in\omega\ (|\ S_i(n)|=1\ \&\ |\ S_i\,(n+1)|=2)\}\ .$$

Iz uslova (8) *sledi* $f''\bigotimes^{A}_{i\in\omega} S_i = \{1\}$. □

Stav 4.10. Neka su :

(1) $<T_i : i\in\omega >\in K_\omega$;

(2) $l\in\omega\setminus 1$;

(3) $f : \bigotimes_{i\in\omega} T_i \to l$;

(4) $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω .

Tada postoje $A, <S_i : i\in\omega>$ *i* k, *koji zadovoljavaju sledeće uslove :*

(5) $A\in\mathcal{U}$;

(6) $\alpha\ (\bigotimes^{A}_{i\in\omega} S_i , \bigotimes_{i\in\omega} T_i)$;

(7) $\forall i\in\omega\ (<\bigcup_{n\in A} S_i(n),\ \leq i>\cong <T_i\ , \leq i>)$;

(8) $f''\ \bigotimes^{A}_{i\in\omega} S_i=\{k\}$.

Dokaz. Sledi iz stavova 4.9. *i* 4.11. *uz standardni argument za* $A\in\mathcal{U}$. □

Definicija 4.13. *Sa* $L(<T, \leq >)$ *označavamo sledeći iskaz :* $\exists\, i\in\omega\ \forall n\in\omega\forall t\in T(n)(|\,nsled(t,T)| = max(1,2^{\,n+1-i}))$.*Sa* $<T, \leq > \in L$ *označavamo* $L(<T, \leq >)$. □

Definicija 4.14. *Za* $d\in\omega\setminus 1$ *sa* $Ld(<<T_i, \leq i> : i\in d>)$ *označavamo sledeći iskaz :* $\forall i\in d\,(L(<T_i , \leq i>)$. *Sa* $<<T_i , \leq i> : i\in d> \in L_d$ *označavamo* $Ld(<<T_i : i\in d>)$. □

Definicija 4.15. *Sa* $L_\omega(<<T_i ,\leq i>: i\in\omega >)$ *označavamo sledeći iskaz:* $\forall i\in\omega\,(L\,(<T_i\ , \leq i>))\ \&\ \exists f\colon \omega \to \omega\ (\forall i\in\omega\ (|T_i\,(f(i))|=1\ \&\ |T_i\,(f(i)+1)|>1)\ \&\ \lim_{n\to\infty} f(n$

$)=\infty)$.*Sa* $<<T_i, \leqq i> : i\in\omega> \in L_\omega$ *označavamo* $L_\omega\ (<<T_i, \leqq i> : i\in\omega>$. $\square$

Stav 4.11. Neka su :

(1) $<T_i : i\in\omega> \in L_\omega$;

(2) $f : \bigotimes_{i\in\omega} T_i \to l\ \&\ l\in\omega\setminus 1$;

(3) $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω .

Tada postoje A, $<S_i : i\in\omega>$ *i* k *koji zadovoljavaju sledeće uslove* :

(4) $A\in\mathcal{U}$;

(5) $\forall i\in\omega\ (S_i$ *je na dole zatvoreno podstablo stabla* $T_i)$;

(6) $\forall i\in\omega\ \forall x\in \bigcup_{n\in A} S_i(n)\forall y\in \bigcup_{n\in A} S_i(n)\,(\wedge(x,y,\bigcup_{n\in A} S_i(n))=\wedge(x,y,S_i))$;

(7) $\forall i\in\omega\ (<\bigcup_{n\in A} S_i(n), \leqq i> \cong <T_i, \leqq i>)$;

(8) $f''\bigotimes_{i\in\omega}^{A} S_i=\{k\}$.

Dokaz. *Sledi iz stavova* 4.10. *i* 1.11. $\square$

Stav 4.12. Neka su :

(1) $l\in\omega\setminus 1$;

(2) $<T_i : i\in\omega>$ *sekvencija* ω*–stabala* ;

(3) $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω .

(4) $f : \bigotimes_{i\in\omega} T_i \to l$.

Tada postoje g, $<S_i : i\in\omega>$ *i* k *koji zadovoljavaju sledeće uslove* :

(5) $g\in rast(\omega,\omega)$;

(6) $g''\omega\in\mathcal{U}$;

(7) $<S_i : i\in\omega>\in str_g(<T_i : i\in\omega>)$;

(8) $\forall n\in\omega\ \tilde{\forall} m\in\omega\ \forall \vec{s}\in\prod_{i\in n} S_i(m)\exists\, \vec{t}\in\prod_{i\in\omega\setminus n} T_i(g(m))(f(\vec{s}\,^\frown\vec{t})=k)$.

Dokaz. *Za* $l=1$ *tvrđenje je očigledno.Sada ćemo pokazati kako se vrši redukcija sa* $l+1$ *na* l, *za* $l\geqq 1$.*Za svako* $m\in\omega\setminus 1$ *definišemo funkciju* f_m: $\bigotimes_{i\in m} T_i \to 2$, *tako da za svako* $n\in\omega$ *i za svako* $\vec{t}\in\prod_{i\in m} T_i(n)$ *važi* :

$$(9)\quad f_m(\vec{t})=\begin{cases}0 & \exists\vec{s}\in\prod_{i\in\omega\setminus m} T_i(n)(f(\vec{t}\,^\frown\vec{s})=l)\\ 1 & \forall\vec{s}\in\prod_{i\in\omega\setminus m} T_i(n)(f(\vec{t}\,^\frown\vec{s})<l).\end{cases}$$

Tada važi sledeća alternativa :

(10) $\forall m\in\omega\setminus 1\ \exists A\in \mathcal{U}\cap\mathcal{P}(\omega\setminus m)\forall n\in A\ \exists\langle S_i\subseteq T_i(n)\ :\ i\in m\rangle(\forall i\in m\ (S_i$ *je m–gust skup u stablu* $T_i)\ \&\ f'^{m}\prod_{i\in m} S_i=\{0\}$ *ili*

(11) $\exists M\in\omega\setminus 1\exists A\in\mathcal{U}\cap\mathcal{P}(\omega\setminus M)\ \forall n\in A\neg\exists\langle S_i\subseteq T_i(n)\ :i\in M\rangle(\forall i\in M\ (S_i$ *je M–gust skup u stablu* $T_i)\ \&\ f''\prod_{i\in M} S_i=\{0\}$).

U slučaju da važi (10) *stav se dokazuje bez redukcije, a u slučaju da važi* (11) *postoje* A *i* $\langle S_i\ :\ i\in\omega\rangle$, *koji zadovoljavaju sledeće uslove* :

(12) $A\in\mathcal{U}$;

(13) $\forall i\in\omega(S_i$ *je na dole zatvoreno podstablo stabla* $T_i)$;

(14) $\forall i\in\omega\ (S_i$ *je* ω*–stablo*) ;

(15) $\langle \bigcup_{n\in A} S_i(n)\ :i\in\omega\rangle\in str^{\omega}(\langle T_i\ :\ i\in\omega\rangle)$;

(16) $f''\bigotimes_{i\in\omega}^{A} S_i\subseteq l$. $\square$

Definicija 4.16. *Neka su* :

(1) T ω*–stablo* ;

(2) $n\in\omega\ \&\ \{m,l\}\subseteq\omega\setminus 1$;

(3) $\vec{x}\in\prod_{i\in m} T(n)$.

Tada je :

(4) $tip^{l}(\vec{x},T)=\{\vec{y}\ :\ \vec{y}\in\bigotimes_{i\in l} T\ \&\ \forall i\in l\cap m\forall j\in l\cap m((x_i=x_j\leftrightarrow y_i=y_j)\ \&(x_i\leq y_i))\}$;

(5) $tip^{<\omega}(\vec{x},T)=\bigcup_{k\in\omega\setminus 1} tip^{k}(\vec{x},T)$;

(6) $tip^{\omega}(\vec{x},T)=\{\vec{y}\ :\ \vec{y}\in\bigotimes_{i\in\omega} T\ \&\ \forall i\in m\forall j\in m\ ((x_i=x_j\leftrightarrow y_i=y_j)\ \&(x_i\leq y_i))\}$

. $\square$

Stav 4.13. *Neka su* :

(1) $\{m,l\}\subseteq\omega\setminus 1$;

(2) T ω*–stablo* ;

(3) $\vec{x}\in\bigotimes_{i\in m} T$;

(4) $f\ :\ tip^{\omega}(\vec{x},T)\to l$;

(5) $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω .

Tada postoji $\langle g, S, \vec{y}, k\rangle$, *sekvencija koja zadovoljava sledeće uslove :*

(6) $g \in rast(\omega, \omega)$;

(7) $g''\omega \in \mathcal{U}$;

(8) $S \in str_g(T)$;

(9) $\vec{y} \in tip^{<\omega}(\vec{x}, T)$;

(10) $\exists n \in \omega (\vec{y} \in \bigotimes_{i \in n} S)$;

(11) $\forall n \in \omega \tilde{\forall} m \in \omega \forall \vec{s} \in tip^n(\vec{y}, S) \cap (S(m))^n \exists \vec{t} \in (T(g(m)))^{\omega \setminus n} (f(\vec{s} {}^\frown \vec{t}) = k)$.

Dokaz. *Za* $l=1$ *tvrđenje je očigledno.Sada ćemo pokazati kako se redukuje sa* $l+1$ *na* $l \geq 1$.*Važi sledeća alternativa :*

(12) $\forall m \in \omega \setminus 1 \exists A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{P}(\omega \setminus m) \forall n \in A \exists D \subseteq T(n)((D$ *je* m*–gust skup u stablu* $T) \,\&\, \forall \vec{y} \in D^m \cap tip^m(\vec{x}, T) \exists \vec{z} \in (T(n))^{\omega \setminus m} (f(\vec{y} {}^\frown \vec{z}) = l))$

ili

(13) $\exists M \in \omega \setminus (mUnivo(\vec{x}, \vec{T})) \exists A \in \mathcal{U} (M = \min A \,\&\, \forall n \in A \neg \exists D \subseteq T(n)((D$ *je* M*–gust skup u stablu* $T) \,\&\, \forall \vec{y} \in D^M \cap tip^M(\vec{x}, T) \exists \vec{z} \in (T(n))^{\omega \setminus m} (f(\vec{y} {}^\frown \vec{z}) = l)))$.

U slučaju da važi (12) *stav se dokazuje neposredno.U slučaju da važi* (13) *konstruišemo sekvenciju* $\langle M, A, S, F, K, B, H\rangle$ *koja zadovoljava sledeće uslove :*

(14) $M \in \omega \setminus (mUnivo(\vec{x}, \vec{T}))$;

(15) $A \in \mathcal{U} \,\&\, M = \min A$;

(16) S *je* ω*–stablo* ;

(17) S *je na dole zatvoreno podstablo stabla* T ;

(18) $\bigcup_{n \in MUA} S(n) \in str^{\omega}(T)$;

(19) $F : tip^M(\vec{x}, T) \cap (\bigcup_{n \in MUA} S(n)) \to 2$;

(20) $\forall n \in MUA \forall \vec{y} \in (S(n))^M \cap tip^M(\vec{x}, \vec{T})(F(\vec{y}) = 0 \leftrightarrow \exists \vec{z} \in (T(n))^{\omega \setminus M} (f(\vec{y} {}^\frown \vec{z}) = l))$;

(21) $\forall n \in A \neg \exists D \subseteq S(n)((D$ *je* M*– gust skup u stablu* $\bigcup_{j \in MUA} S(j)) \,\&\, \forall y \in D^M \cap tip^M(\vec{x}, T)(F(\vec{y}) = 0))$;

(22) $K=|S(M)|$ & $S(M)=\{s_i : i \in K\}$;

(23) $B=\{\beta : \beta \in K^M$ & $<s_{\beta(i)} : i \in M> \in tip^M(\vec{x},T)\}$;

(24) $H : \bigotimes_{i\in K}^{MUA} S\ [s_i] \to 2^{|B|}$;

(25) $\forall n \in M \forall \vec{x} \in \prod_{i\in K} S\ [s_i]\ (H(\vec{x})=<0 : \beta \in B>)$;

(26) $\forall n \in A\ \forall \vec{x} \in \prod_{i\in K} S\ [s_i]\ (H(\vec{x})=<F(<x_{\beta(i)} : i \in M>) : \beta \in B>)$.

Postoje $C,<R_i : i\in K>$ *i* $<n_\beta : \beta \in B>$ *koji zadovoljavaju sledeće uslove* :

(27) $C \subseteq A$ & $C \in \mathcal{U}$;

(28) $\forall i \in K$ (R_i *je* ω*–stablo*) ;

(29) $\forall i \in K$ (R_i *je na dole zatvoreno podstablo stabla* $S\,[s_i]$) ;

(30) $<\underset{j\in C}{UR_i}(j) : i\in K> \in str^\omega(<\underset{j\in MUA}{US}[s_i]\ (j) : i\in K>)$;

(31) $H'' \bigotimes_{i\in K}^{C} R_i = \{<n_\beta : \beta \in B>\}$;

(32) $\exists \beta \in B\ (n_\beta=1)$.

Neka su $\beta \in B$ *i* $\vec{r}=<r_i : i\in K>$ *takvi da važi* :

(33) $n_\beta=1$;

(34) $\vec{r} \in \prod_{i\in K} R_i\ (minC)$.

Tada definišemo :

(35) $R=\underset{i\in K}{UR_i}$;

(36) $\vec{y}=<r_{\beta(i)} : i\in M>$.

Funkcija f *preslikava* $tip^\omega(\vec{y},\underset{j\in MUC}{UR(j)})$ *u* l. $\square$

§ 5. *Primena forcing–a u dokazu HL*

Stav 5.1. $\forall\ d \in \omega \setminus 1\ \forall k \in Cn\setminus\omega\ ((exp_{d-1}(k))^+ \to (k^+)^d_k)$. $\square$

Korolar 5.1. $\forall\ d \in \omega \setminus 1\ \forall k \in C_n \setminus \omega\ \forall f\!: ((exp_{d-1}(k))^+)^d \to k\ \exists <K_i \subseteq (exp_{d-1}(k))^+ :$
$i \in d>(\forall i \in d\,(|K_i|)=k)$ & $\forall i \in d\ \forall j \in d\ \forall x \in K_i \forall y \in K_j\,(i<j \to x<y)|\ f''\prod_{i\in d} K_i|=1)$.

Dokaz.Izaberimo proizvoljno $<d \in \omega\setminus 1\ k \in C_n\setminus\omega,\ f\!: ((exp_{d-1}(k))^+)^d \to k>$.

Definišemo funkciju g: $[(exp_{d-1}(k))^{+}]^{d} \to k$ *tako da zadovoljava sledeći uslov* :

(1) $\forall < \lambda_i \in (exp_{d-1}(k))^{+} : i \in d > (\forall i \in d\ \forall j \in d\ (\lambda_i < \lambda_j) \to g(\{ \lambda_i : i \in d\}) = f(\vec{\lambda}))$.

Postoji podskup $K \subseteq (exp_{d-1}(k))^{+}$ *koji zadovoljava uslov* :

(2) $<K, \in> \cong <k^{+}, \in> \& |\ g''\ [K]^{d}| = 1$.

Na kraju obrazujemo sekvenciju $<K_i : i \in d>$ *koja zadovoljava sledeće uslove* :

(3) $\forall i \in d\ (K_i \subseteq K\ \& <K_i, \in> \cong <k, \in>)$;

(4) $\forall i \in d\ \forall j \in d\ \forall x \in K_i \forall y \in K_j (i<j \to x<y)$.

Iz toga sledi :

(5) $|f''\prod_{i \in d} K_i| = 1$. □

Definicija 5.1. *Za beskonačni kardinal* k *uvodimo sledeće pojmove* :

(1) $\forall p \in (2^{<\omega})^{k} (supt(p) = \{\alpha : \alpha \in k\ \& p(\alpha) \neq 0\})$;

(2) $<P_k, 1_k, \leq_k> = <\{p : p \in (2^{<\omega})^{k} \& |supt(p)| < \omega\ \&\ \forall \alpha \in supt(p)\ \forall \beta \in supt(p) (|p(\alpha)| = |p(\beta)|)\}, <0 : \alpha \in k>, \{<p,q> : <p,q> \in P_k^2\ \&\ \forall \alpha \in k\ (q(\alpha) \subseteq p(\alpha))\}>$;

(3) $\forall p \in P_k (\sigma(p) = sup\ \{|p(\alpha)| : \alpha \in k\}\ \&\ \Sigma(p) = |supt(p)| \cdot \sigma(p))$;

(4) $\forall G\ \forall \alpha \in k (G$ *je* P_k*–generik* $\to r(\alpha) = \bigcup_{p \in G} p(\alpha)\ \&\ 1_k \Vdash \mathfrak{r}(\alpha) = \bigcup_{x \in \Gamma} x(\alpha))$. □

Lema 5.1. *Neka su* :

(1) $n \in \omega\ \&\ m \in \omega\ \&\ m = 2^{n} + 1$;

(2) k *beskonačni kardinal* ;

(3) $A \subseteq P_k\ \& |A| = m$;

(4) $\forall a \in A (\Sigma(a) = n)$.

Tada važi :

(5) $\exists a_1 \in A\ \exists a_2 \in A (a_1 \neq a_2\ \&\ \neg (a_1 \perp a_2))$.

Dokaz. *Svaki element iz* P_k *reprezentuje zatvorenu oblast u topološkom prostoru* $(2^{\omega})^{k}$ *sa topologijom Tihonova i proizvod merom* μ.*Pri tome inkompatibilnim elementima iz* P_k *odgovaraju disjunktni skupovi topološkog prostora.Za svaki element* $a \in A$ *je* $\mu(a) = 2^{-n}$. *Zbog toga postoje bar dva kompatibilna elementa u skupu* A. □

Lema 5.2 *Neka su n i m prirodni brojevi , a k beskonačni kardinal. Tada postoji prirodni broj $M(n,m,1)>m$ takav da* $\forall A\subseteq P_k\ \exists B\subseteq A(|A|=M(n,m,1)\ \&\ \forall a\in A(\Sigma(a)=n)\rightarrow|B|=m\ \&\ \forall b_1\in B\ \forall b_2\in B\ (\neg\, b_1\perp b_2))$.

Dokaz. *Neka je* $m_0=max(m,2^n+1)$. *Prema konačnoj verziji Ramsey-ove teoreme postoji prirodan broj* $M>m_0$ *takav da važi* $M\rightarrow(m_0)^2_2$. *Neka je* A *skup za koji važi* $A\subseteq P_k\ \&|A|=M\ \&\ \forall a\in A(\Sigma(a)=n)$. *Tada je* $A=\{a_i: i\in M\}$. *Definišemo funkciju* $f:[M]^2\rightarrow 2$ *tako da za svako* $i\in M$ *i* $j\in M$, $i\neq j$, *važi* :

$$(1)\quad f(\{i,j\})=\begin{cases}0 & \neg\, a_i\perp a_j\\ 1 & a_i\perp a_j\ .\end{cases}$$

Postoji podskup Mo *od* M *sa* m_0 *elemenata takav da je* $|f''[Mo]^2|=\{1\}$. *Na osnovu leme* 5.1. *sledi da je* $f''[Mo]^2=\{0\}$. *Na kraju definišemo* $B=\{a_i: i\in M_0\}$. □

Lema 5.3 *Neka su* :

(1) $n\in\omega\ \&\ m\in\omega\ \&\ d\in\omega\setminus 1$;

(2) k *beskonačni kardinal.*

Tada postoji prirodan broj $M(n,m,d)>m$ *za koji važi* :

(3) $\forall A\subseteq P_k\,\forall f{:}M(n,m,d)^d \Vdash\!\!\twoheadrightarrow A\ \exists<M_i\subseteq M(n,m,d)\ :\ i\in d>\forall<x_i\in M_i:i\in d>\forall<y_i\in M_i:i\in d>(\forall a\in A(\Sigma(a)=n)\rightarrow\forall i\in d\ (|M_i|=m)\ \&\ \neg\,(f(\vec{x})\perp f(\vec{y})))$.

Dokaz. *Sprovodi se indukcijom po* d. *Za* $d=1$ *dobijamo tvrđenje leme* 5.2. *Neka su* :

(4) $N=m^d\cdot n$;

(5) $K=M(N,m,1)$;

(6) $m_0=m$;

(7) $\forall l\in K(m_{l+1}=M(n,m_l,d))$;

(8) $A\subseteq P_k$ *za koje važi* $\forall a\in A(\Sigma(a)=n)$;

(9) $f:m_k^{d+1}\Vdash\!\!\twoheadrightarrow A$.

Indukcijom po $l\in K+1$ *formiramo sekvenciju* $<<M_{il}: i\in d>:l\in K+1>$ *uz sledeće uslove* :

(10) $\forall i\in d\,(M_{i0}=m_k)$;

(11) $\forall i\in d\ \forall l\in K(M_{il+1}\subseteq M_{il})$;

(12) $\forall i\in d\ \forall l\in K+1(|M_{il}|==m_{k-l})$;

(13) $\forall l\in K\,\forall<x_i\in M_{il+1}:i\in d>\forall<y_i\in M_{il+1}:i\in d>\neg\,(f(\vec{x}^\frown<l>)\perp f(\vec{y}^\frown<l>)$

Definišemo sekvenciju $<M_i : i\in d> = <M_{ik} : i\in d>$, *za koju važi* :

(14) $\forall i\in d(M_i \subseteq m_k \,\&\, |M_i| = m)$;

(15) $\forall l\in K\, \forall <x_i \in M_i : i\in d> \forall <y_i\in M_i : i\in d> \neg (f(\vec{x}^\frown <l>) \perp f(\vec{y}^\frown <l>))$.

Definišemo skup $B = \{b_l : l\in K\}$ *za koji važi* :

(16) $\forall l\in K\, \forall <x_i \in M_i : i\in d> (b_l \leq f(\vec{x}^\frown <l>) \,\&\, \Sigma(b_l) = m^d\cdot n \,\&\, b_l \in P_k)$.

Prema lemi 5.2. *postoji skup* $M_d \subseteq K$ *sa* m *elemenata takav da su svi elementi skupa* $\{b_l : l\in M_d\}$ *kompatibilni.Prema tome, možemo definisati* $M(n, m, d+1) = m_k$. □

Stav 5.2. *Neka su ispunjeni sledeći uslovi* :

(1) $d\in \omega\setminus 1$;

(2) $A\subseteq \omega \,\&\, 0\in A \,\&\, |A| = \omega$;

(3) $\forall i\in d$ (T_i *je* ω*–stablo*);

(4) $\forall i\in d\, (T_i \subseteq 2^{<\omega})$;

(5) $\forall i\in d\, \forall t\in T_i\, \forall s\subseteq t (s\in T_i)$;

(6) $<S_i : i\in d> = <\bigcup_{n\in A} T_i(n) : i\in d>$;

(7) $f : \bigotimes_{i\in d} S_i \to 2$.

Tada važi sledeća alternativa :

(8) $\forall n\in\omega\, \exists m\in\omega\, \exists <R_i \subseteq S_i(m) : i\in d> (m\geq n \,\&\, \forall i\in d(R_i$ *je* n*–gust skup u stablu* $S_i) \,\&\, f'' \prod_{i\in d} R_i = 1)$ *ili*

(9) $\exists <s_i : i\in d> \in \bigotimes_{i\in d} S_i\, \forall n\in\omega\, \exists m\in\omega\, \exists <R_i\subseteq S_i[s_i](m) : i\in d> (m\geq n \,\&$ $\forall i\in d(R_i$ *je* n*–gust skup u stablu* $S_i[s_i]) \,\&\, f'' \prod_{i\in d} R_i = \{1\})$.

Dokaz. *Neka uz uslove* (1)–(7) *važe i sledeći uslovi* :

(10) $B = 1\cup \{2^{n-1} : n\in A\setminus 1\}$;

(11) $k = (exp_{d-1}(\omega))^+$;

(12) $P_{kd} = \{\vec{p} : \vec{p}\in (P_k)^d \,\&\, \exists n\in\omega \forall i\in d(p_i \in (S_i(0)\cup S_i(n))^k)\}$;

(13) $\vec{1}_{kd} = <1_k : i\in d>$;

(14) $\forall \vec{p}\in P_{kd}\, \forall \vec{q}\in P_{kd} (\vec{p} \leq_{kd} \vec{q} \leftrightarrow \forall i\in d(p_i \leq_k q_i))$;

(15) $\forall \vec{p}\in P_{kd}(\sigma(\vec{p}) = \sigma(p_0))$;

(16) $\vec{1}_{kd} \Vdash$ " $\mathcal{U}$ je neglavni ultrafilter nad ω & $B \in \mathcal{U}$ " ;

(17) $\forall <\alpha_i \in k \ : i \in d >$

$$g(\vec{\alpha})= \begin{cases} \vec{1}_{kd} & \vec{1}_{kd} \Vdash \{n \ : \ n \in B \ \& \ f(<S_i(\alpha_i) \restriction n \ : i \in d >)=0 \} \in \mathcal{U}; \\ \vec{q} & \vec{q} \in P_{kd} \ \& \ \forall i \in d\,(\alpha_i \in supt(q_i)) \ \& \ \vec{q} \Vdash \{n \ : \ n \in B \ \& f(< \\ & S_i(\alpha_i) \restriction n \ : i \in d >)=1\} \in \mathcal{U}; \end{cases}$$

(18) $\forall <\alpha_i \in k \ : i \in d >(h(\vec{\alpha})=<< \Sigma\,((g(\vec{\alpha}))_i),\ \sigma\,(g(\vec{\alpha})), (g(\vec{\alpha}))\ i\ \ (\alpha_i)> \ :$
$i \in d \ >)$

(19) $j \ : \ \omega \to B$;

(20) $\forall n \in \omega \ \forall \ s \in S_0\,(n)(|s|=j(n))$.

Iz korolara 5.1. *proizlazi* :

(21) $\exists <K_i \subseteq k \ : i \in d > \exists << k_i, k, s_i > \ : i \in d >(\forall i \in d \ (<K_i, \in > \cong < \omega, \in >)$
$\& \ h'' \prod_{i \in d} K_i = \{<< k_i, k, s_i > \ : i \in d \ >\})$.

Izdvojimo sekvenciju $<K_i : i \in d>$ *i sekvenciju* $<< k_i, k, s_i > \ : i \in d >$, *čije su egzistencije utvrdene u* (21).
Neka su l, n, N *i* M *prirodni brojevi za koje važi* :

(22) $<s_i : i \in d > \ \in \prod_{i \in d} S_i\,(l)$;

(23) $l \leq n$;

(24) $N = |\prod_{i \in d} S_i\,[s_i](n)|$;

(25) $M = M(\sum_{i \in d} k_i, N, d)$.

Pošto je $\forall i \in d\ (|K_i|>M)$, *prema lemi* 5.3. *postoji sekvencija* $<A_i \ : i \in d >$ *za koju važi* :

(26) $\forall i \in d\ (A_i \subseteq K_i \ \& \ |A_i| = N)$;

(27) $\forall \vec{\alpha} \in \prod_{i \in d} A_i \ \forall\ \vec{\beta} \in \prod_{i \in d} A_i \ \neg\,(g(\vec{\alpha}) \perp g(\vec{\beta}))$

Izaberemo element $\vec{p} \in P_{kd}$, *koji ispunjava uslove* :

(28) $\forall\ \vec{q} \in g'' \prod_{i \in d} A_i\,(\vec{p} \leq \vec{q})$;

(29) $\{<p_i\,(\alpha_i) \ : i \in d > \ : \ \vec{\alpha} \in \prod_{i \in d} A_i\} = \prod_{i \in d} S_i\,[\,s_i\,]\,(n)$.

U slučaju da je $l=0$ *važi* :

$$(30)\quad \vec{p} \Vdash \bigcap_{\vec{\alpha}\in\prod_{i\in d} A_i} \{n : n\in B \,\&\, f(\langle \varrho_i(\alpha_i)\restriction n : i\in d\rangle)=0\}\in\mathcal{U},$$

a u slučaju da je $l>0$ *važi* :

$$(31)\quad \vec{p} \Vdash \bigcap_{\vec{\alpha}\in\prod_{i\in d} A_i} \{n : n\in B \,\&\, f(\langle \varrho_i(\alpha_i)\restriction n : i\in d\rangle)=1\}\in\mathcal{U}.$$

Neka su $\vec{q}\in P_{kd}$ *i* $m\in\omega$ *elementi za koje važi* :

$$(32)\quad \vec{q}\leq\vec{p} \,\&\, \sigma(\vec{q})\geqq j(m) \;;$$

$$(33)\quad m\geqq n \;;$$

$$(34)\quad \forall \vec{\alpha}\in\prod_{i\in d} A_i((l=0\to\vec{q}\Vdash f(\langle \varrho_i(\alpha_i)\restriction j(m) : i\in d\rangle)=0) \,\&\, (l>0\to\vec{q}\Vdash f(\langle \varrho_i(\alpha_i)\restriction j(m) : i\in d\rangle)=1)).$$

Na kraju formiramo sekvenciju $\langle R_i : i\in d\rangle=\langle\{q_i(\alpha_i)\restriction j(m) : \alpha_i\in A_i\}: i\in d\rangle$, *koja za* $l=0$ *ispunjava uslove* :

$$(35)\quad \forall i\in d\,(R_i\subseteq S_i(m) \,\&\, (R_i \text{ je } n\text{-gust skup u stablu } S_i)) \;;$$

$$(36)\quad f''\prod_{i\in d} R_i=1 \;;$$

a za $l>0$ *ispunjava uslove* :

$$(37)\quad \forall i\in d\,(R_i\subseteq S_i[s_i](m) \,\&\, (R_i \text{ je } n\text{-gust skup u stablu } S_i[s_i])) \;;$$

$$(38)\quad f''\prod_{i\in d} R_i=\{1\}. \;\square$$

Korolar 5.2. Neka su :

(1) $d\in\omega\setminus 1$;

(2) $\langle T_i : i\in d\rangle$ *sekvencija* $(\omega,<\omega)$*-stabala* ;

(3) $f\colon \bigotimes_{i\in d} T_i\to 2$.

Tada važi sledeća alternativa :

(4) $\forall n\in\omega\,\exists m\in\omega\,\exists\langle S_i\subseteq T_i(m) : i\in d\rangle(m\geqq n \,\&\, \forall i\in d\,(S_i$ *je* n*-gust skup u stablu* $T_i) \,\&\, f''\prod_{i\in d} S_i=1)$ *ili*

(5) $\exists\langle t_i : i\in d\rangle\in\bigotimes_{i\in d} T_i\,\forall n\in\omega\,\exists m\in\omega\,\exists\langle S_i\subseteq T_i[t_i](m) : i\in d\rangle(m\geqq n \,\&\, \forall i\in d\,(S_i$ *je* n*-gust skup u stablu* $T_i[t_i]) \,\&\, f''\prod_{i\in d} S_i=\{1\})$.

§ 6. HL i Sacksov forcing

Definicija 6.1. $\mathcal{S} = <S, 1_{\mathcal{S}}, \leqq_{\mathcal{S}}>$ *je delimično uređenje koje zadovoljava sledeće uslove :*

(1) $S = \{ s : s \subseteq 2^{\omega}$ & (*s je neprazan zatvoren skup u topološkom prostoru* 2^{ω} *bez izolovanih tačaka*)$\}$;

(2) $1_{\mathcal{S}} = 2^{\omega}$;

(3) $\forall x \in S \forall y \in S < x \leqq_{\mathcal{S}} y \leftrightarrow x \subseteq y)$.

Za svaki element s iz S definisano je stablo $\mathcal{T}(s)$ *koje zadovoljava sledeće uslove :*

(4) $\mathcal{T}(s) = <T(s), \subseteq>$;

(5) $T(s) = \{t : t \in 2^{<\omega}$ & $\exists x \in s \exists n \in \omega (t = x \upharpoonright n)\}$.

Ako je M tranzitivni prebrojivi model za ZFC u kojem je definisan $\mathcal{S}$, *tada je* $\sigma \in M^{\mathcal{S}}$ *ime za Sacksov realni broj ako ispunjava uslov :*

(6) $1_{\mathcal{S}} \Vdash_{\mathcal{S}} \sigma \in \cap \Gamma$.

$\mathcal{S}$*-generik G nad M se naziva Sacksov generik,* $M[G]$ *se naziva Sacksov generički model za ZFC, a jedinstveni element* $s \in \cap G$ *se naziva Sacksov realni broj.* □

Definicija 6.2. *Za nenulti kardinal k uređena trojka* $\mathcal{S}_k = <S_k, 1_{\mathcal{S}_k}, \leqq_{\mathcal{S}_k}>$ *je delimično uređenje koje zadovoljava sledeće uslove :*

(1) $S_k = S^k$;

(2) $1_{\mathcal{S}_k} = <1_{\mathcal{S}} : \alpha \in K>$;

(3) $\forall x \in S_k \forall y \in S_k < x \leqq_{\mathcal{S}_k} y \leftrightarrow \alpha \in K (x(\alpha) \subseteq y(\alpha)))$.

Za svaki element s iz S_k *definisani su supt(s) i* $\vec{\mathcal{T}}(s)$ *tako da važi :*

(4) $supt(s) = \{\alpha : \alpha \in K$ & $s(\alpha) \neq 1_{\mathcal{S}}\}$;

(5) $\vec{\mathcal{T}}(s) = < \mathcal{T}(s(\alpha)) : \alpha \in K>$.

Ako je M tranzitivni prebrojivi model za ZFC u kojem je definisan $\mathcal{S}_k$, *tada je* $\sigma_k \in M^{\mathcal{S}_k}$ *ime za k–sekvenciju Sacksovih realnih brojeva ako ispunjava uslov :*

(6) $1_{\mathcal{S}_k} \Vdash_{\mathcal{S}_k} (\sigma_k$ *je funkcija sa domenom k*) & $\forall \alpha \in K (\sigma_k(\alpha) \in \bigcap_{x \in \Gamma} x(\alpha))$.

$\mathcal{S}_k$*–generik G nad M se naziva k–lateralni Sacksov generički model za ZFC ,* $a < \bigcap_{x \in G} x(\alpha) : \alpha \in K >$ *se naziva k–sekvencija Sacksovih realnih brojeva.* □

Definicija 6.3. Za neprebrojivi kardinal k sekvencija $\mathcal{S}_k^\omega=<S_k^\omega, 1_{\mathcal{S}_k^\omega}, \leq_{\mathcal{S}_k^\omega}>$ je delimično uređenje koje zadovoljava sledeće uslove :

(1) $S_k^\omega = \{s \; : \; s \in S_k \;\&\; |supt(s)| \leq \omega\}$;

(2) $1_{\mathcal{S}_k^\omega} = 1_{\mathcal{S}_k}$;

(3) $\leq_{\mathcal{S}_k^\omega} = \leq_{\mathcal{S}_k} \cap (S_k^\omega)^2$.

Ako je M tranzitivni prebrojivi model za ZFC u kojem je definisan $\mathcal{S}_k^\omega$, tada je $\sigma_k^\omega \in M^{\mathcal{S}_k^\omega}$ ime za k–sekvenciju Sacksovih realnih brojeva ako ispunjava uslov :

(4) $1_{\mathcal{S}_k^\omega} \Vdash_{\mathcal{S}_k^\omega} (\sigma_k^\omega$ *je funkcija sa domenom* $k) \;\&\; \forall \alpha \in K\; (\sigma_k(\alpha) = \bigcap_{x \in \Gamma} x(\alpha))$.

$\mathcal{S}_k^\omega$–generik G nad M se naziva k–lateralni Sacksov generik sa prebrojivom podrškom, $M[G]$ se naziva k–lateralni Sacksov generički model za ZFC sa prebrojivom podrškom, a $< \bigcap_{x \in G} x(\alpha) \; : \alpha \in K >$ se naziva k–sekvencija Sacksovih realnih brojeva. $\square$

Stav 6.1. *Sledeća dva tvrđenja su ekvivalentna za $k \in (\omega+1) \setminus 1$.*

(1) *Za svaki k–lateralni Sacksov generički model $M[G]$ i za svaki podskup B od ω u $M[G]$ postoji beskonačan podskup A od ω u M, takav da je ili $A \subseteq B$ ili $A \cap B = 0$*

(2) HL_k.

Dokaz. HL_k *je ekvivalentan sa sledećim tvrđenjima, u zavisnosti od toga da li je $k \in \omega$ ili $k=\omega$.*

(3) $k \in \omega$:
$\forall l \in \omega \setminus 1 \,\forall f \; : \bigotimes_{i \in k} 2^{<\omega} \to l \;\exists <S_i \subseteq 2^{<\omega} : \; i \in k > \exists A \subseteq \omega \;\exists k \in l\; (\forall i \in k\; (S_i$ *je na dole zatvoreno perfektno podstablo stabla* $2^{<\omega}$) $\& |A| = \omega \;\&\; f'' \bigotimes_{i \in k}^{A} S_i = \{k\}$).

(4) $k = \omega$:
$\exists <T_i = \{t \; : \; t \in 2^{<\omega} \;\&\; \forall j \in i \; (t(j)=0)\} : \; i \in k \,\forall l \in \omega \setminus 1 \,\forall f\!: \; \bigotimes_{i \in k} T_i \; \to l \;\exists < S_i \subseteq T_i \; : \; i \in k > \;\exists A \subseteq \omega \;\exists k \in l\, (\forall i \in k\; (S_i$ *je na dole zatvoreno perfektno podstablo stabla* T_i $) \& |A| = \omega \;\&\; f'' \bigotimes_{i \in k}^{A} S_i = \{k\}$).

1^o (1) $\to$(2). *Pretpostavimo da je* $f \; : \bigotimes_{i \in \omega} T_i \; \to 2$, *pri čemu je* $\forall i \in \omega \; (T_i = \{t \; : \; t \in 2^{<\omega} \;\&\; \forall j \in i \; (t(j)=0)\}$).
Označimo sa p element S_ω , takav da je $\vec{\mathfrak{I}}(p) = << T_i, \subseteq > \; : \; i \in \omega >$. Neka je $\tau \in M^{\mathcal{S}_\omega}$ ime za koje važi

(5) $1_{\mathcal{S}_\omega} \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} \tau = \{n \; : \; f(< \sigma_\omega(\alpha) \restriction n \; : \alpha \in \omega >) = 1\}$

Postoje $q \leq_{\mathcal{S}_\omega} p$ i beskonačan podskup A od ω u M, takvi da važi :

(6) $q \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} A \subseteq \tau$

ili

(7) $q \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} A \cap \tau = 0.$

Pretpostavimo da važi (6) *i da* $\vec{s} \in \prod_{i\in\omega} T(q(i))(n)$ *za* $n \in A$. *Tada* $<q(i) \cap [s_i] : i\in\omega> \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} n \in \tau$, *što znači da je* $f(\vec{s})=1$. *Pretpostavimo da važi* (7) *i da* $\vec{s} \in \prod_{i\in\omega} T(q(i))(n)$ *za* $n \in A$. *Tada* $<q(i) \cap [s_i] : i\in\omega> \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} n \notin \tau$ *što znači da je* $f(\vec{s})=0$. *Dakle,* $f'' \bigotimes_{i\in\omega}^{A} T(q(i)) = \{k\}$, *pri čemu* $k \in 2$.

2^o (2)$\rightarrow$(1). *Neka je* $\tau \in M^{\mathcal{S}_\omega}$ *takav da je* $\tau_G = B$ *i neka je* $p \in G$ *takav da* $p \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} \tau \subseteq \omega$. *Izaberimo proizvoljan* $q \in \mathcal{S}_\omega$ *tako da je* $q \leqq_{\mathcal{S}_\omega} p$. *Za svako* $n\in\omega$ *i* $\vec{s} \in \prod_{i\in\omega} T_i(n)$ *definišemo* $q_{\vec{s}} \in \mathcal{S}_\omega$ *tako da su ispunjeni sledeći uslovi* :

(8) $q_{\vec{0}} \leqq_{\mathcal{S}_\omega} q$;

(9) $q_{\vec{s}} \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} n \in \tau$ *ili* $q_{\vec{s}} \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} n \notin \tau$;

(10) $<q_{\vec{s}} : \vec{s} \in \bigotimes_{i\in\omega} T_i>$ *je fuziona sekvencija.*

Sad definišemo funkciju $f : \bigotimes_{i\in\omega} T_i \rightarrow 2$, *tako da za svako* $n\in\omega$ *i* $\vec{s} \in \prod_{i\in\omega} T_i(n)$ *važi* :

(11) $f(\vec{s}) = \begin{cases} 0 & q_{\vec{s}} \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} n \notin \tau \\ 1 & q_{\vec{s}} \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} n \in \tau \end{cases}$.

Na osnovu (4) *postoje* $<S_i \subseteq T_i : i \in d>$, $A \subseteq \omega$ *i* $k \in 2$, *takvi da važi* :

(12) $\forall i\in\omega$ (S_i *je na dole zatvoreno perfektno podstablo stabla* T_i) ;

(13) $|A| = \omega$;

(14) $f'' \bigotimes_{i\in\omega}^{A} S_i = \{k\}$.

Možemo definisati $r(q) = < \bigcap_{n\in A} \bigcup_{\vec{s} \in \prod_{i\in\omega} Si(n)} q_{\vec{s}}(i) : i\in\omega > \leqq_{\mathcal{S}_\omega} q$ *pri čemu* :

(15) $r(q) \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} A \subseteq \tau$

ili

(16) $r(q) \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} A \cap \tau = 0.$

Skup $D = \{r(q) : q \in S\omega \ \& \ q \leqq_{\mathcal{S}_\omega} p\}$ *je gust ispod* p.
Zato postoje $q \in S_\omega$ *i* $A \subseteq \omega$ *koji ispunjavaju sledeće uslove* :

(17) $r(q) \in G \ \& |A| = \omega$;

(18) $r(q) \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} A \subseteq \tau$ *ili* $r(q) \Vdash_{\mathcal{S}_\omega} A \cap \tau = 0.$

Iz toga sledi da je $A \subseteq B$ *ili* $A \cap B = 0$. $\square$

Korolar 6.1. *Neka su* $k \in (\omega+1)\setminus 1$, $M[G]$ *k–lateralni Sacksov generički model,* $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω *u* M *i* B *podskup od* ω *u* $M[G]$*. Tada postoji* $A\in\mathcal{U}$ *takav da je* $A\subseteq B$ *ili* $A\cap B=0$. □

Stav 6.2. *Neka su* $k\in(\omega+1)\setminus 1$, $M[G]$ *k–lateralni Sacksov generički model i* $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω *u* M*. Tada je* $\mathcal{V}=\{v : \exists u\in\mathcal{U}\,(u\subseteq v)\}$ *selektivni ultrafilter nad* ω *u* $M[G]$.

Dokaz. Očito je da je $\mathcal{V}$ filter. Neka je $B\subseteq\omega$. Tada postoji $A\in\mathcal{U}$, takav da je $A\subseteq B$ ili $A\cap B=0$. Zbog toga ili $B\in\mathcal{V}$ ili $B^{c}\in\mathcal{V}$. Time smo pokazali da je $\mathcal{V}$ ultrafilter. Pretpostavimo da je $k=\omega$. Za svaki element $p\in S\omega$ pri zadatoj ω–sekvenciji $<V_n : n\in\omega>\in M[G]$ elemenata ultrafiltera $\mathcal{V}$, moguće je konstruisati fuzionu sekvenciju $<p_{\vec{s}} : \vec{s}\in\bigotimes_{i\in\omega}T_i>$ koja ispunjava sledeće uslove :

$$(1)\ p_{\vec{0}}\leqq p\ ;$$

$$(2)\ \forall n\in\omega\ \forall\vec{s}\in\prod_{i\in\omega}T_i(n)(p_{\vec{s}}\Vdash_{\mathcal{S}_\omega}U_n\subseteq V_n)\ ,$$

gde je $<U_n : n\in\omega>\in M$ ω–sekvencija elemenata ultrafiltera $\mathcal{U}$. Fuzija $q=<\bigcap_{n\in\omega}\ \bigcup_{\vec{s}\in\prod_{i\in\omega}Ti(n)}p_{\vec{s}}(i) : i\in d>\leqq p$ ispunjava sledeći uslov :

$$(3)\ \forall n\in\omega\,(q\Vdash_{\mathcal{S}_\omega}U_n\subseteq V_n).$$

Pošto je $\mathcal{U}$ selektivan ultrafilter nad ω, postoji $U\in\mathcal{U}$ takav da $\forall n\in\omega\,(U\setminus n\subseteq U_n)$. Zato važi :

$$(4)\ \forall n\in\omega\,(q\Vdash_{\mathcal{S}_\omega}U\setminus n\subseteq V_n).$$

Time smo dokazali selektivnost ultrafiltera $\mathcal{V}$. □

Stav 6.3. *Neka je* $M[G]$ *k–lateralni Sacksov generički model sa prebrojivom podrškom i neka je* $B\in M[G]$ *podskup od* ω*. Tada u* M *postoji beskonačan podskup* A *od* ω *takav da je* $A\subseteq B$ *ili* $A\cap B=0$.

Dokaz. Neka $\tau\in M^{\mathcal{S}_k^\omega}$ zadovoljava uslove :

$$(1)\ 1_{\mathcal{S}_k^\omega}\Vdash_{\mathcal{S}_k^\omega}\tau\subseteq\omega;$$

$$(2)\ \tau_G=B.$$

Izaberimo proizvoljan element $p\in S_k^\omega$ i konstruišemo sekvenciju $<<p_k,n_k>: k\in\omega>$ koja zadovoljava uslove :

$$(3)\ \forall k\in\omega\,(p_k\in S_k^\omega\ \&\ n_k\in\omega)\ ;$$

$$(4)\ \forall k\in\omega\,(p_{k+1}\leqq_{\mathcal{S}_k^\omega}p_k\ \&\ n_k<n_{k+1})\ ;$$

$$(5)\ |supt(p_0)|=\omega\ \&\ supt(p_0)=\{\lambda_{0j} : j\in\omega\};$$

$$(6)\ \forall k\in\omega\,(|supt(p_{k+1})\setminus supt\ (p_k)|=\omega)\ ;$$

$$(7)\ \forall k\in\omega\,(\ supt(p_{k+1})\setminus supt\ (p_k)=\{\lambda_{k+1j} : j\in\omega\})\ ;$$

(8) $\forall k\in\omega\ \forall i\in k+1\ \forall j\in\omega\,(T(p_k(\lambda_{ij}))(n_k)=T(p_{k+1}(\lambda_{ij}))(n_k))$;

(9) $\forall k\in\omega\ \forall i\in k+1\ \forall j\in k+1\ (i+j\in k+1 \rightarrow \langle T(p_{k+1}(\lambda_{ij})),n_{k+1}\rangle \leqq \langle T(p_k(\lambda_{ij})),n_k\rangle)$;

(10) $\forall k\in\omega\ \forall i\in k+1\ \forall j\in\omega\ (|\,T(p_k(\lambda_{ij})).(n_k)\,|=2^{k-(i+j)})$;

(11) *Za svako* $k\in\omega$, *za svaku sekvenciju* $\langle s\langle i,j)\in T(p_k(\lambda_{ij})).(n_k) : i\in k+1\ \&\ j\in\omega\rangle$, *za svako* $r=\langle r(\lambda) : \lambda\in k\rangle$, *pri čemu je*

$$r(\lambda)=\begin{cases} p_k(\lambda)\cap[s(i,j)]\, i\in k+1\ \&\ j\in\omega\ \&\ \lambda=\lambda_{ij} \\ p_k(\lambda), \end{cases}$$

važi $r \Vdash_{\mathcal{S}_k^\omega} k\in\tau$ *ili* $r\Vdash_{\mathcal{S}_k^\omega} k\notin\tau$

Neka su $\bigcup_{k\in\omega} supt(p_k)=\{\lambda_i : i\in\omega\rangle$ *i* $q=\langle\bigcap_{k\in\omega} p_k(\lambda) : \lambda\in k\rangle$. *Tada postoji funkcija* $f : \bigotimes_{i\in\omega}^{C} T(q(\lambda_i))\rightarrow 2$, *za* $C=\{n_k : k\in\omega\}$,*takva da važi* :

(12) $q\Vdash_{\mathcal{S}_k^\omega} \tau=\{k : f(\langle\sigma_k^\omega(\lambda_i)\upharpoonright n_k : i\in\omega\rangle)=1\}$.

Na osnovu HLω,*postoje beskonačan skup* $A\subseteq\omega$,*beskonačan skup* $D=\{n_k : k\in A\}$, *perfektna na dole zatvorena podstabla* S_i *stabala* $T(q(\lambda_i))$ *za svako* $i\in\omega$ *i prirodan broj* $l\in 2$, *takvi da je* $f''\bigotimes_{i\in\omega}^{D} S_i=\{l\}$. *Zbog toga postoji* $r\in S_k^\omega$,$r\leqq_{\mathcal{S}_k^\omega} q$, *takav da za* $l=0$ *važi* :

(13) $r\Vdash_{\mathcal{S}_k^\omega} A\cap\tau=0$,

a za $l=1$ *važi* :

(14) $r\Vdash_{\mathcal{S}_k^\omega} A\subseteq\tau$. □

Korolar 6.2. Neka su $M[G]$ *k–lateralni Sacksov generički model sa prebrojivom podrškom,* $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω *u* M *i* $B\in M[G]$ *podskup od* ω .*Tada postoji* $A\in\mathcal{U}$,*takav da je ili* $A\subseteq B$ *ili* $A\cap B=0$. □

Stav 6.4. Neka su $M[G]$ *k–lateralni Sacksov generički model sa prebrojivom podrškom i* $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω *u* M. *Tada je* $\mathcal{V}=\{v : \exists u\in\mathcal{U}\,(u\subseteq v)\}$ *selektivni ultrafilter nad* ω *u* $M[G]$. □

Stav 6.5. Neka su M *prebrojivi tranzitivni model za* $ZFC+GCH$, α *ordinal u* M , *a* $M[G]$ $\omega_{\alpha+2}$ *–lateralni Sacksov generički model sa prebrojivom podrškom.Tada su u* $M[G]$ *očuvani svi kardinali i* $2^\omega=\omega_{\alpha+2}$.

Dokaz. $|S_{\omega_{\alpha+2}}^\omega|=\omega_{\alpha+2}$. *Neka je* $\langle p_\beta : \beta\in\omega_2\rangle$ *sekvencija elemenata iz* $S_{\omega_{\alpha+2}}^\omega$.*Prema* Δ*–sistem lemi,moguće je izdvojiti podsekvenciju* $\langle q_\beta : \beta\in\omega_2\rangle$ *sekvencije* $\langle p_\beta : \beta\in\omega_2\rangle$, *takvu da* $\{supt(q_\beta) : \beta\in\omega_2\}$ *formira* Δ*–sistem. Pošto koren ovog* Δ*–sistema ima prebrojivu moć i pošto perfektnih podskupova topološkog prostora* 2^ω *ima* ω_1 ,*u sekvenciji* $\langle q_\beta : \beta\in\omega_2\rangle$ *ima* ω_2 *kompatibilnih elemenata, a time i u sekvenciji* $\langle p_\beta : \beta\in\omega_2\rangle$.

Dakle, delimični poredak $\mathcal{S}_{\omega_{\alpha+2}}^\omega$ *je* ω_2*–c.c. , zbog čega se održavaju svi* kardinali $\geq \omega_2$ .Pretpostavimo da $\lambda=(\omega_1)^M$ kolabira u $M[G]$.Tada postoje $q \in G$ i $\varphi \in M^{\mathcal{S}\omega^{\omega}_{\alpha+2}}$ takvi da važi :

(1) $q \Vdash_{\mathcal{S}\omega^{\omega}_{\alpha+2}}$ "φ je bijekcija sa ω na λ ".

Za svako $p \Vdash_{\mathcal{S}\omega^{\omega}_{\alpha+2}}$, $p \leq q$, moguće je konstruisati sekvenciju $<<p_k, n_k, A_k> : k \in \omega>$ koja zadovoljava uslove (3)–(10) iz stava 6.3. za $K=\omega_{\alpha+2}$ i uslove :

(2) $\forall k \in \omega\ (A_k \subseteq \omega\ \&\ |A_k| < \omega)$;

(3) Za svako $k \in \omega$,za svaku sekvenciju $<s(i,j) \in T(p_k(\lambda_{ij}))(n_k) : i \in k+1\ \&\ j \in \omega>$, za svako $r=<r(\lambda) : \lambda \in \omega_{\alpha+2}>$ pri čemu je :

$$r(\lambda)=\begin{cases} p_k(\lambda) \cap [s(i,j)] & i \in k+1\ \&\ j \in \omega\ \&\ \lambda=\lambda_{ij} \\ p_k(\lambda) , & \end{cases}$$

važi $r \Vdash_{\mathcal{S}\omega^{\omega}_{\alpha+2}} \varphi(k) \subseteq A_k$.

Neka je $r=<\bigcap_{k\in\omega} p_k(\lambda) : \lambda \in \omega_{\alpha+2}>$.Tada važi :

(4) $r \Vdash_{\mathcal{S}\omega^{\omega}_{\alpha+2}} ran\ (\varphi) \subseteq \bigcup_{k\in\omega} A_k$;

(5) $r \Vdash_{\mathcal{S}\omega^{\omega}_{\alpha+2}}$ "φ je bijekcija sa ω na λ ".

Iz toga proizlazi :

(6) $\omega_1 \subseteq \bigcup_{k\in\omega} A_k$

što je kontradikcija.Znači u $M[G]$ su očuvani svi kardinali.Pošto su svi Sacksovi realni brojevi u sekvenciji $<s(\beta) \in \bigcap_{p\in G} p(\beta) : \beta \in \omega_{\alpha+2}>$ međusobno različiti, znači da je $\omega_{\alpha+2} \leq 2^{\omega}$. Sa druge strane,lepih imena za podskupove od ω u $M^{\mathcal{S}\omega^{\omega}_{\alpha+2}}$ ima $(\omega_{\alpha+2}^{\omega_1})^{\omega} = \omega_{\alpha+2}$ i za to je $2^{\omega} \leq \omega_{\alpha+2}$ u $M[G]$. $\square$

Korolar 6.3. *$Con(ZFC+2^{\omega}=\omega_{\alpha+2})$, za svaki ordinal α. ZFC je konzistentan sa*

$$\binom{2^{\omega}}{\omega} \rightarrow \binom{2^{\omega}}{\omega\ u\ L}^{1,1}_{2} .$$

Dokaz. Neka su M prebrojivi tranzitivni model za $ZFC+V=L$, $\mathcal{U}$ selektivni ultrafilter nad ω u M i $M[G]$ ω_2–lateralni Sacksov generički model sa prebrojivom podrškom.Tada je $\mathcal{V}=\{v : v \subseteq \omega\ \&\ \exists u \in \mathcal{U}(u \subseteq v)\}$ selektivni ultrafilter nad ω u $M[G]$sa ω_1 generatora, a moći ω_2. Neka je $f: 2^{\omega}\times\omega \to 2$. Za svako $\alpha \in 2^{\omega}$ postoji $k \in 2$ i $u \in \mathcal{U}$, tako da je $f''\{\alpha\}\times u=\{k\}$. To znači da postoji skup $A \subseteq 2^{\omega}$, $|A|=\omega_2$, da postoji skup $u \in \mathcal{U}$ i da postoji prirodan broj $k \in 2$, takvi da je $f''A\times u=\{k\}$. $\square$

§ 7. *Blassova teorema*

Definicija 7.1. *Za svaki pozitivan prirodni broj* n *definisani su skup* $[2^\omega]^n = \{X : X \subseteq 2^\omega \,\&\, |X| = n\}$ *i preslikavanje* $f : [2^\omega]^n$, *koje svakom* $X \in [2^\omega]^n$ *pridružuje strogo rastuću sekvenciju* $<x_i : i \in n> \in (2^\omega)^n$ *elemenata iz skupa* X *s obzirom na leksikografsko uređenje. Preslikavanje* f *indukuje topologiju u skupu* $[2^\omega]^n$ *na bazi topologije prostora* $(2^\omega)^n$. □

Stav 7.1. Neka su P *perfektan podskup od* 2^ω, $n \in \omega \setminus 1$ *i* M *mršavi podskup u topološkom prostoru* $[P]^n$. *Tada postoji perfektan podskup* Q *od* P *, takav da je* $[Q]^n \cap M = 0$.

Dokaz. Neka je $<F_k : k \in \omega>$ *monotono rastuća sekvencija zatvorenih nigde gustih podskupova od* $[P]^n$ *, takvih da je* $M = \bigcup_{k\in\omega} F_k$. *Indukcijom po* k *konstruišemo sekvenciju* $<P_k, T_k, m_k : k \in \omega>$ *koja zadovoljava sledeće uslove :*

(1) $\forall k \in \omega (m_k \in \omega)$;

(2) $\forall k \in \omega (m_k < m_{k+1})$;

(3) $\forall k \in \omega (P_k$ *je perfektan podskup od* 2^ω) ;

(4) $P_0 \subseteq P$;

(5) $\forall k \in \omega (P_{k+1} \subseteq P_k)$;

(6) $\forall k \in \omega (T_k = \{t : t \in 2^{<\omega} \,\&\, [t] \cap P_k \neq 0\})$;

(7) $\forall k \in \omega (<T_k, m_k> \geqq <T_{k+1}, m_{k+1}>)$;

(8) $\forall k \in \omega \, \forall (t_i \in T_k(m_k) : i \in n > (\forall i+1 < n (t_i <_{lex} t_{i+1}) \rightarrow \prod_{i\in n} (P_k \cap [t_i]) \cap F_k = 0)$.

Na kraju definišemo $Q = \bigcap_{k\in\omega} P_k$. *Jasno je da je* Q *perfektan podskup od* P *i da je* $M \cap [Q]^n = 0$. □

<u>Primedba</u>. Pošto se u tekstu koji sledi posmatraju samo na dole zatvorena podstabla od $2^{<\omega}$ *sa beskonačnim granama, pojam grane se identifikuje sa unijom njenih elemenata.* □

Definicija 7.2. *Neka je* T *na dole zatvoreno podstablo stabla* $< 2^{<\omega}, \subseteq >$ *sa beskonačnim granama. Tada je moguće definisati funkciju* $\Delta : (T)^2 \rightarrow \omega + 1$, *koja zadovoljava uslov* $\forall \alpha \in (T) \, \forall \beta \in (T) (\Delta(\alpha, \beta) = \sup\{n : \alpha \upharpoonright n = \beta \upharpoonright n\})$. □

Definicija 7.3. *Neka su :*

(1) T *prosto perfektno podstablo stabla* $2^{<\omega}$;

(2) $n \in \omega$;

(3) $A = \{\alpha_i : i \in n+1 \,\&\, \forall i \in n \, (\alpha_i <_{lex} \alpha_{i+1})\} \in [(T)]^{n+1}$.

Tada je model $\mathfrak{g}(A, T)$ *skupa* A *u stablu* T *definisan na sledeći način :*

(4) 0 *za* $n=0$;

(5) *identična permutacija na skupu* n *za* $n=1$;

(6) *permutacija* ϱ *na skupu* n *za koju je* $\forall i\in n\ \forall j\in n\ (i<j \rightarrow \Delta(\alpha_{\varrho(i)},\alpha_{\varrho(i)+1})<\Delta(\alpha_{\varrho(j)},\alpha_{\varrho(j)+1}))$ *za* $n>1$. $\square$

Definicija 7.4. *Neka je* $<T_i : i\in d>=\vec{T}$ *sekvencija prostih perfektnih na dole zatvorenih podstabala stabla* $2^{<\omega}$ *za* $2\leq d<\omega$. *Sa* $\vec{n}$ *označavamo jednu od sekvencija* $<n_i : i\in d>$ *elemenata iz skupa* $\omega\setminus 1$, *za koju je* $\sum_{i\in d} n_i=n$. $\vec{\sigma}=<\sigma_i : i\in d>$ *je* $\vec{n}$*–sekvencija u* $\vec{T}$, *ako je za svako* $i\in d$ *skup* $\sigma_i\in[(T_i)]^{n_i}$. *Model* $\varrho(\vec{\sigma},\vec{T})$ $\vec{n}$*–sekvencije* $\vec{\sigma}$ *u* $\vec{T}$ *se odreduje na sledeći način. Za svako* $i\in d$ *definiše se stablo* $S_i=\{s : \exists t\in T_i(s=s_i{}^\frown t) \vee s\subseteq s_i\}$, *pri čemu* $s_i\in 2^{d-1}$ & $\forall j\in i\,(s_i(j)=1)$ & $\forall j\in(d-1)\setminus i(s_i(j)=0)$, *a zatim se formiraju stablo* $S=\bigcup_{i\in d} S_i$ *i skup* $A=\{\alpha : \alpha\in 2^{\omega}$ & $\exists i\in d\ \exists\beta\in\sigma_i\,(\alpha=s_i{}^\frown\beta)\}$. *Tada je* $\varrho(\vec{\sigma},\vec{T})=\varrho(A,S)$. *Baza* $\vec{n}$ *–sekvencije* $\vec{\sigma}$ *u* $\vec{T}$ *se označava sa baza* $(\vec{\sigma},\vec{T})$ *i odreduje na sledeći način. Ako je za svako* $i\in d$ *prirodni broj* $n_i=1$, *onda je baza* $(\vec{\sigma},\vec{T})=<0 : i\in d>$. *Pretpostavimo da* $\exists i\in d\ (n_i>1)$. *Neka je* $m=max\{k : \forall i\in d\,\forall\alpha\in\sigma_i\ \forall\beta\in\sigma_i\,(\alpha\neq\beta\rightarrow\alpha\upharpoonright k=\beta\upharpoonright k)\}$. *Tada je baza* $(\vec{\sigma},\vec{T})=<\alpha_i\upharpoonright m : i\in d>$, *pri čemu* $\forall i\in d\ (\alpha_i\in\sigma_i)$. $\square$

Definicija 7.5. *Neka su* :

(1) $d\in\omega\setminus 1$;

(2) $\vec{T}=<T_i : i\in d>$ *sekvencija prostih perfektnih stabala, takva da je* $\forall i\in d\,(T_i$ *je na dole zatvoreno podstablo stabla* $2^{<\omega}$) ;

(3) $\vec{n}=<n_i : i\in d>$ *sekvencija elemenata iz* $\omega\setminus 1$, *takva da je* $n=\sum_{i\in d} n_i$;

(4) f *funkcija sa* $\vec{n}$*–sekvencija u* $\vec{T}$ *u skup* $k\in\omega\setminus 1$;

(5) $\vec{t}\in\bigotimes_{i\in d} T_i$ *i* $|nsled(t_j,T_j)|=2$ *za* $j\in d$;

(6) $\vec{\sigma}=<\{\alpha_{il} : l\in n_i\} : i\in d>$ $\vec{n}$ *–sekvencija u* $\vec{T}$, *takva da je baza* $(\vec{\sigma},\vec{T})=\vec{t}$;

(7) ϱ *permutacija skupa* $n-1$, *takva da je* $\varrho(\vec{\sigma},\vec{T})=\varrho$.

Tada je :

(8) $\vec{T}-\vec{t}=<\{u : \exists v\in nsled(t_i,T_i)\exists w\in T_i\,(v^\frown u=w)\} : i\in j, \{u : \exists w\in T_j\,(t_j{}^\frown<0>^\frown u=w)\}, \{u : \exists w\in T_j\,(t_j{}^\frown<1>^\frown u=w)\}, \{u : \exists v\in nsled(t_i,T_i)\exists w\in T_i\,(v^\frown u=w)\} : i\in d\setminus(j+1)>$;

(9) $\vec{\sigma}-\vec{t}=<\{\alpha : \exists\beta\in\sigma_i\forall n\in\omega\,(\alpha(n)=\beta(|t_i|+n+1))\} : i\in j, \{\alpha : \exists\beta\in\sigma_j\ \forall n\in\omega(\beta(|t_j|)=0$ & $\alpha(n)=\beta(|t_j|+n+1))\}, \{\alpha : \exists\beta\in\sigma_j\forall n\in\omega\,(\beta(|t_j|)$

$=1$ & $\alpha(n)=\beta(|t_j|+n+1))\}, \{\alpha: \exists\beta\in\sigma_i\forall n\in\omega(\alpha(n)=\beta(|t_i|+n+1))\}$ $: i\in d\setminus(j+1)>$;

(10) $\vec{n}-\vec{t}=<|(\vec{\sigma}-\vec{t})_i| : i\in d+1>$;

(11) $\vartheta-\vec{t}=\vartheta(\vec{\sigma}-\vec{t}, \vec{T}-\vec{t})$;

(12) $f-\vec{t}(\vec{\sigma}-\vec{t})=f(\vec{\sigma})$. □

Definicija 7.6. *Neka su* :

(1) $d\in\omega\setminus 1$;

(2) $\vec{T}=<T_i : i\in d>$ *sekvencija prostih perfektnih stabala, takva da je* $\forall i\in d$ (T_i *je na dole zatvoreno podstablo stabla* $2^{<\omega}$) ;

(3) $\vec{t}\in\bigotimes_{i\in d}T_i$ *i* $|nsled(t_j, T_j)|=2$ *za* $j\in d$;

(4) $\vec{S}=<S_i : i\in d+1>$ *je sekvencija prostih perfektnih stabala, takva da je* $\forall i\in d$ (S_i *je na dole zatvoreno podstablo stabla* $(\vec{T}-\vec{t})_i$) ;

(5) $\vec{n}=<n_i : i\in d+1>$ *sekvencija elemenata iz* $\omega\setminus 1$, *takva da je* $n=\sum_{i\in d+1}n_i$;

(6) $\vec{\sigma}=<\{\alpha_{il} : l\in n_i\} : i\in d+1>$ $\vec{n}$*–sekvencija u* $\vec{S}$;

(7) ϑ *permutacija skupa* $n-1$, *takva da je* $\vartheta(\vec{\sigma},\vec{S})=\vartheta$.

Tada je :

(8) $\vec{T}-\vec{t}+\vec{S}=<T_i\setminus sled^*(t_i,T_i)\cup\{u:\exists v\in nsled(t_i,T_i)\exists w\in S_i(u=v^\frown w)\} : i\in j, T_j\setminus sled^*(t_j,T_j)\cup\{u:\exists v\in S_j(u=t_j{}^\frown<0>^\frown v)\vee\exists v\in S_{j+1}(u=t_j{}^\frown<1>^\frown v)\}, T_i\setminus sled^*(t_i,T_i)\cup\{u:\exists v\in nsled(t_i,T_i)\exists w\in S_{i+1}(u=v^\frown w)\} : i\in d\setminus(j+1)>$;

(9) $\vec{\sigma}+\vec{t}=<\{\alpha: \exists\beta\in\sigma_i\forall n\in\omega(\alpha\restriction(|t_i|+1)\in nsled(t_i,T_i)$ & $\alpha(|t_i|+n+1)=\beta(n))\} : i\in j, \{\alpha:\exists\beta\in\sigma_j\forall n\in\omega(\alpha\restriction|t_j|+1)=t_j{}^\frown<0>$ & $\alpha(|t_j|+n+1)=\beta(n))\vee\exists\beta\in\sigma_{j+1}\forall n\in\omega(\alpha\restriction(|t_j|+1)=t_j{}^\frown<1>$ & $\alpha(|t_j|+n+1)=\beta(n))\}, \{\alpha:\exists\beta\in\sigma_{i+1}\forall n\in\omega(\alpha\restriction(|t_i|+1)\in nsled(t_i,T_i)$ & $\alpha(|t_i|+n+1)=\beta(n))\} : i\in d\setminus(j+1)>$;

(10) $\vec{n}+\vec{t}=<|(\vec{\sigma}+\vec{t})_i| : i\in d>$;

(11) $\vartheta+\vec{t}=\vartheta(\vec{\sigma}+\vec{t}, \vec{T}-\vec{t}+\vec{S})$. □

Stav 7.2. (*Polarizaciona teorema*). *Neka su* :

(1) $\{d,k\} \subseteq \omega \setminus 1$;

(2) $\vec{T}=\langle T_i : i\in d\rangle$ sekvencija prostih perfektnih stabala, takva da je $\forall i\in d$ (T_i je na dole zatvoreno podstablo stabla $2^{<\omega}$) ;

(3) $\vec{n}=\langle n_i : i\in d\rangle$ sekvencija elemenata iz $\omega\setminus 1$, takva da je $n=\sum_{i\in d} n_i$;

(4) ϱ permutacija skupa $n-1$;

(5) f neprekidna funkcija sa skupa $\vec{n}$–sekvencija u $\vec{T}$ u skup k.

Tada postoje $\vec{S}=\langle S_i : i\in d\rangle$ i l za koje važi :

(6) $\vec{S}=\langle S_i : i\in d\rangle$ je sekvencija prostih perfektnih stabala ;

(7) $\forall i\in d$ (S_i je na dole zatvoreno podstablo stabla T_i) ;

(8) $\forall\vec{\sigma}$ (($\vec{\sigma}$ je $\vec{n}$–sekvencija u $\vec{S}$ modela ϱ) $\rightarrow f(\vec{\sigma})=l$).

Dokaz. Sprovodi se silaznom indukcijom po $d\in\omega\setminus 1$.
1^o $d=n$. Tada je $\forall i\in d\,(n_i=1)$. Neka je $\vec{\sigma}=\langle\{\alpha_i\} : i\in d\rangle$ $\vec{n}$–sekvencija u $\vec{T}$. Zbog neprekidnosti funkcije f postoje $m\in\omega$ i $\alpha\in k$, takvi da važi $f''\prod_{i\in d}[\alpha_i \restriction m]=\{l\}$. Za svako $i\in d$ definišemo stablo $Si=Ti[\alpha_i\restriction m]$.

2^o $d<n$. Bez gubitka na opštosti, možemo pretpostaviti da važi :

(9) $\forall\vec{\sigma}\,\forall\vec{s}\in\bigotimes_{i\in d}T_i$(($\vec{\sigma}$ je $\vec{n}$–sekvencija u $\vec{T}$ modela ϱ) & baza $(\vec{\sigma},\vec{T})=\vec{s}\rightarrow|nsled(s_o,T_o)|=2$).

Neka je $To=\{t_{oj} : j\in\omega\}$. Indukcijom po n konstruišemo sekvenciju $\langle\langle S_{in} : i\in d\rangle, s_n, m_n, B_n, b_n : n\in\omega\rangle$, tako da budu zadovoljeni sledeći uslovi :

(10) $\forall i\in d\,(S_{i0}=T_i)$;

(11) $\forall i\in d\,\forall n\in\omega$ (S_{in+1} je na dole zatvoreno perfektno podstablo stabla S_{in}) ;

(12) $\forall i\in d\,\forall n\in\omega\,(\bigcup_{j\leq m_n} S_{in+1}(j)=\bigcup_{j\leq m_n} S_{in}(j))$;

(13) $\forall n\in\omega$($\bigcup_{m_n\leq j\leq m_{n+1}} S_{on+1}(j)$ sadrži tačno jedan čvor s_{in+1} sa dva neposredna sledbenika) ;

(14) $s_o=0$;

(15) $\forall n\in\omega\,(s_{n+1}\geq t_{ob_n})$;

(16) $m_o=0$;

(17) $\forall n\in\omega\,(m_n\in\omega\ \&\ m_n<m_{n+1})$;

(18) $B_0 = \omega$;

(19) $\forall n \in \omega \, (B_{n+1} = \{ j \; : \; t_{oj} \in S_{on+1} \} \cap B_n \setminus \{ b_n \})$;

(20) $\forall n \in \omega \, (b_n = minB_n)$;

(21) $\forall m \in \omega \setminus 1 \; \forall \vec{t} \in \bigotimes_{i \in d} S_{im} \; \forall \vec{\sigma_1} \forall \vec{\sigma_2} \, (\vec{\sigma_1}$ *je* $\vec{n}$*–sekvencija u* $<S_{im} : i \in d>$ *modela* $\mathfrak{A}$ $)$ & $(\vec{\sigma_2}$ *je* $\vec{n}$*–sekvencija u* $<S_{im} : i \in d>$ *modela* $\mathfrak{A}$ $)$ & $baza(\vec{\sigma_1} , <S_{im} : i \in d>) = baza(\vec{\sigma_2} , <S_{im} : i \in d>) = \vec{t}$ & $t0 = s_m$ $\rightarrow f(\vec{\sigma_1}) = f(\vec{\sigma_2})$.

(a) $<<S_{io} : i \in d>, s_0, m_0, B_0, b_0>$ *se definiše na osnovu* (10), (14), (16), (18) *i* (20).
(b) $<<S_{ip} : i \in d> , s_p, m_p, B_p, b_p>$ *je definisano za* $p \in \omega$.
(c) *Izaberemo prirodan broj* m *i element* s_{p+1} *stabla* Sop*, tako da budu zadovoljeni sledeći uslovi :*

(22) $m_p < m$;

(23) $s_{p+1} \in S_{op}(m)$;

(24) $t_{ob_p} \leqq s_{p+1}$;

(25) $|nsled(s_{p+1}, S_{op})| = 2$;

(26) $\forall i \in d \setminus 1 \; \forall t \in S_{ip} \, (m_p) \, \exists \, u \in S_{ip} \, (m) \, \exists v \in S_{ip} \, (m) (t \leqq u$ & $t \leqq v$ & $u \neq v)$.

Možemo definisati $m_{p+1} = m+1$*.Neka je* $J \in \omega \setminus 1$ *takav da je :*

(27) $\{ \vec{u} \; : \; \vec{u} \in \prod_{i \in d} S_{ip}(m)$ & $u_0 = s_{p+1} \} = \{ \vec{u_j} \; : \; 1 \leqq j \leqq J \}$.

Indukcijom po $j \in J+1$ *konstruišemo sekvenciju* $<<S_{ipj} : i \in d> : j \in J+1>$*, tako da budu zadovoljeni sledeći uslovi :*

(28) S_{opo} *je stablo dobijeno od stabla* S_{op} *uklanjanjem cepanja na svim čvorovima koji se cepaju iz skupa* $\bigcup_{m_p \leqq j \leqq m_{p+1}} S_{op}(j) \setminus \{ s_{p+1} \}$;

(29) $\forall i \in d \setminus 1 (S_{iop} = S_{ip})$;

(30) $\forall i \in d \; \forall j \in J \, (S_{ipj+1}$ *je na dole zatvoreno perfektno podstablo stabla* $S_{ipj})$;

(31) $\forall i \in d \; \forall j \in J (\bigcup_{m \leqq m_{p+1}} S_{ipj} \, (m) = \bigcup_{m \leqq m_{p+1}} S_{ipj+1} \, (m))$.

(ca) $<S_{ipo} : i \in d>$ *se definiše na osnovu* (28) *i* (29).
(cb) $<S_{ipj} : i \in d>$ *je definisano za* $j \in J$.
(cc) *Induktivnu pretpostavku primenimo na funkciju* $f - \vec{u}_{j+1}$ *sa* $(\vec{n} - \vec{u}_{j+1})$ *–sekvencija u* $<S_{ipj} : i \in d> - \vec{u}_{j+1}$ *u skup* k *i model* $\mathfrak{A} - \vec{u}_{j+1}$.
Pri tome dobijamo sekvenciju $<R_i : i \in d+1>$ *koja zadovoljava uslove :*

(32) $\forall i \in d+1(R_i$ *je na dole zatvoreno perfektno podstablo stabla* $(<S_{ipj} : i \in d > - \vec{u}_{j+1})_i)$;

(33) $\forall \vec{\sigma}_1 \forall \vec{\sigma}_2 ((\vec{\sigma}_1$ *je* $(\vec{n}-\vec{u}_{j+1})$*–sekvencija u* $<R_i : i \in d+1>$ *modela* $\varrho - \vec{u}_{j+1}) \,\&\, (\vec{\sigma}_2$ *je* $(\vec{n}-\vec{u}_{j+1})$*–sekvencija u* $<R_i : i \in d+1>$ *modela* $\varrho - \vec{u}_{j+1}) \rightarrow f-\vec{u}_{j+1}(\vec{\sigma}_1) = f-\vec{u}_{j+1}(\vec{\sigma}_2)$.

Sada možemo definisati :

(34) $<S_{ip+1} : i \in d> = <S_{ip} : i \in d> - \vec{u}_{j+1} + <R_i : i \in d+1>$;

(35) $B_{p+1} = \{j : t_{oj} \in S_{op+1}\} \cap B_p \setminus \{b_p\}$;

(36) $b_{p+1} = min B_{p+1}$.

Time je završena konstrukcija sekvencije $<<S_{in} : i \in d>, s_n, m_n, B_n, b_n : n \in \omega>$. *Postoje sekvencija* $<S_i^* : i \in d>$ *i funkcija g,koji zadovoljavaju sledeće uslove :*

(37) $<S_i^* : i \in d> = <\bigcap_{n\in\omega} S_{in} : i \in d>$;

(38) $g : \bigotimes_{i\in d} S_i^* \rightarrow k$;

(39) $\forall \vec{t} \in \bigotimes_{i\in d} S_i^* (\exists n \in \omega \setminus 1 (t_o = s_n) \rightarrow \forall l \in k (g(\vec{t}) = l \leftrightarrow \exists \vec{\sigma} ((\vec{\sigma}$ *je* $\vec{n}$*–sekvencija u* $<S_i^* : i \in d>$ *modela* ϱ) & *baza* $(\vec{\sigma}, <S_i^* : i \in d>) = \vec{t}$ & $f(\vec{\sigma}) = l)))$;

(40) $\forall \vec{t} \in \bigotimes_{i\in d} S_i^* (g(\vec{t}) = g(\Pi_{do}(\vec{t})))$.

Prema stavu 4.7. postoje $\vec{S} = <S_i : i \in d>$ *i l, koji zadovoljavaju sledeće uslove :*

(41) $\vec{S}$ *je d–sekvencija prostih perfektnih stabala* ;

(42) $\forall i \in d (S_i$ *je na dole zatvoreno podstablo stabla* $S_i^*)$;

(43) $\forall \vec{t} \in \bigotimes_{i\in d} S_i (|nsled(t_o, T_o)| = 2 \rightarrow g(\vec{t}) = l)$.

Time je završen dokaz stava. □

Korolar 7.1. *Neka su :*

(1) $\{d,k\} \subseteq \omega \setminus 1$;

(2) $\vec{T} = <T_i : i \in d>$ *sekvencija perfektnih stabala, takva da je* $\forall i \in d (T_i$ *je na dole zatvoreno podstablo stabla* $2^{<\omega})$;

(3) $\vec{n} = <n_i : i \in d>$ *sekvencija elemenata iz* $\omega \setminus 1$, *takva da je* $n = \sum_{i\in d} n_i$;

(4) *f neprekidna funkcija sa skupa* $\vec{n}$*–sekvencija u* $\vec{T}$ *u skup k.*

Tada postoji $\vec{S}=<S_i : i\in d>$ *za koji važi* :

(5) $\vec{S}=<S_i : i\in d>$ *je sekvencija prostih perfektnih stabala* ;

(6) $\forall i\in d$ (S_i *je na dole zatvoreno podstablo stabla* T_i) ;

(7) $| f' \prod_{i\in d}[(S_i)]^{n_i}| \leq \prod_{i\in d}(n_i-1)!$.

Dokaz. Sledi neposredno iz stava 1.4. *i stava* 7.2. $\square$

Korolar 7.2. Neka su :

(1) $\{n,k\}\subseteq \omega \setminus 1$;

(2) T *perfektno na dole zatvoreno podstablo stabla* $2^{<\omega}$;

(3) $f : [(T)]^n \to k$ *neprekidna funkcija.*

Tada postoji S *za koji važi* :

(4) S *je perfektno na dole zatvoreno podstablo stabla* T ;

(5) $| f' [(S)]^n| \leq (n-1)!$. $\square$

Stav 7.3. Svaki perfektan podskup skupa realnih brojeva obuhvata perfektan skup homeomorfan sa 2^ω, *pri čemu homeomorfizam čuva poredak.*

Dokaz: Neka je P *perfektan podskup skupa realnih brojeva.Konstruišemo familiju* $\{Q_s : s\in 2^{<\omega}\}$ *koja zadovoljava sledeće uslove* :

(1) $\forall s\in 2^{<\omega}$ (Q_s *je zatvoren interval pozitivne dužine* $\leq 2^{-|s|}$;

(2) $\forall s\in 2^{<\omega} \forall t\in 2^{<\omega} (s\subseteq t \to Q_t\subseteq Q_s)$;

(3) $\forall n\in\omega\ \forall s\in 2^n \forall t\in 2^{n+1} (s\subseteq t \to inf(Q_s)<inf(Q_t)\ \&\ sup(Q_t)<sup(Q_s))$;

(4) $\forall n\in\omega\ \forall s\in 2^n \forall t\in 2^n\ \forall x\in Q_s\ \forall y\in Q_t (s<_{lex} t \to x<y)$;

(5) $\forall s\in 2^{<\omega}$($Q_s\cap P$ *je zatvoren interval u* P *neprazne unutrašnjosti*).

(a) *Neka su* $a<x<b$ *tačke u skupu* P, *takve da je* $b-a \leq 1$.*Tada je* $Q_0=[inf(P\cap(a,b)), sup(P\cap(a,b))]$.
(b) *Neka je definisan skup* $\{Q_s : s\in 2^n\}$.
(c) *Izaberemo proizvoljan* $s\in 2^n$ *i tačke* $a<x<b<c<y<d$ *u skupu* $Q_s\cap P\setminus\{inf(Q_s), sup(Q_s)\}$, *pri čemu je* $max(b-a,d-c)\leq 2^{-(|s|+1)}$. *Tada je* $Q_{s^\frown<0>}=[inf(P\cap(a,b)),sup(P\cap(a,b))]$ *i* $Q_{s^\frown<1>}=[inf(P\cap(c,d)),sup(P\cap(c,d))]$. *Na taj način je definisan skup* $\{Q_s : s\in 2^{n+1}\}$.
Na kraju induktivne procedure definišemo perfektan skup Q *i funkciju* $g : 2^\omega\to Q$, *koji zadovoljavaju uslove* :

(6) $Q=\bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in 2^n} Q_s$;

(7) $\forall x \in 2^{\omega}(g(x) \in \bigcap_{n\in\omega} Q_{x \restriction n})$.

Jasno je da je Q perfektan podskup od P i da je g homeomorfizam između 2^{ω} i Q, koji čuva poredak. □

Stav 7.4. Neka su $n\in\omega\setminus 1$ i $M\subseteq[R]^n$ mere nula. Tada postoji perfektan podskup $P\subseteq R$ za koji je $[P]^n\cap M=0$. □

Stav 7.5. (Teorema Blassa). Neka su :

(1) $\{n,k\}\subseteq \omega\setminus 1$;

(2) $f : [R]^n \to k$ *Baireova ili merljiva funkcija.*

Tada postoji perfektan podskup P od R, takav da je $|f''[P]^n| \leqq (n-1)!$.

Dokaz. (a) *f je Baireova funkcija. Neka je M mršavi skup, takav da je $f\restriction[R]^n\setminus M$ neprekidna funkcija. Dakle prema stavu 7.3. i stavu 7.1. postoji perfektan podskup P od R, takav da je $f\restriction[P]^n$ neprekidna funkcija i da je P homeomorfan sa 2^{ω}. Iz korolara 7.2. sledi da postoji perfektan podskup Q od P , takav da je $|f''[Q]^n| \leqq (n-1)!$.*
(b) *f je merljiva funkcija. Neka je $M\subseteq[R]^n$ skup mere nula, takav da $\forall i\in k(f^{-1}(\{i\})\cap([R]^n\setminus M)$ je $G\delta$ skup u $[R]^n\setminus M)$. Prema stavu 7.4. i stavu 7.3. postoji perfektan podskup P od R, homeomorfan sa 2^{ω},takav da je $[P]^n\cap M=0$. Argumentujući dalje kao pod (a), nalazimo da postoji perfektan podskup Q od P, takav da je $|f''[Q]^n| \leqq (n-1)!$.* □

§ 8. HL i familije $F=\{f_n : n\in\omega\}$ funkcija sa $[0,1]^d$ u $[0,1]$ za $d\in(\omega+1)\setminus 1$

Stav 8.1. Neka je $\{f_n : n\in\omega\}$ familija merljivih funkcija sa $[0,1]^d$ u $[0,1]$ za $d\in(\omega+1)\setminus 1$. Tada za svako $\varepsilon>0$ postoji zatvoreni skup $A\subseteq[0,1]^d$, takav da je mera skupa $A\geqq 1-\varepsilon$ i da je za svako $n\in\omega$ funkcija $f_n\restriction A$ neprekidna.

Dokaz. Izaberemo $\varepsilon>0$. Za svako $n\in\omega$ postoji zatvoreni skup A_n, čija je mera $\geqq 1-\varepsilon/2^{n+1}$, tako da je funkcija $f_n\restriction A_n$ neprekidna. Tada skup $A=\bigcap_{n\in\omega} A_n$ zadovoljava tvrdenje stava. □

Stav 8.2. Neka je X kompaktan metrički prostor sa Borelovom merom λ, koja ispunjava sledeća dva uslova :

(1) *Za svaku nepraznu oblast G je $\lambda(G)>0$;*

(2) $\lambda(x)=1$.

Označimo sa ν proizvod meru na $[0,1]\times X$. Tada za svaki skup $M\subseteq[0,1]\times X$ sa $\nu(M)>0$ i za svako $\varepsilon>0$ postoji perfektan skup $P\subseteq[0,1]$ i merljivi skup $N\subseteq X$ sa $\lambda(N)\geqq\lambda(M)-\varepsilon$, tako da je $P\times N\subseteq M$. □

Korolar 8.1. *Neka su :*

(1) $d \in (\omega+1) \setminus \omega$;

(2) μ *proizvod mera na* $[0,1]^d$;

(3) W *zatvoreni podskup od* $[0,1]^d$;

(4) $\mu(W)>0$.

Tada postoji sekvencija $<P_i : i \in d>$ *perfektnih podskupova od* $[0,1]$, *takva da je* $\prod_{i \in d} P_i \subseteq W$.

Dokaz. *Sprovodimo za* $d=\omega$. *Indukcijom konstruišemo sekvenciju* $<P_i : i \in \omega>$ *perfektnih podskupova od* $[0,1]$ *i sekvenciju* $<W_i : i \in \omega>$, *tako da su zadovoljeni sledeći uslovi :*

(5) $W_0 = W$

(6) $\forall i \in \omega \, (W_i \subseteq [0,1]^{\omega \setminus i}$ & W_i *je zatvoren skup* & $\mu(W_i)>0$;

(7) $\forall i \in \omega (P_i \times W_{i+1} \subseteq W_i)$.

Induktivni korak omogućava stav 8.2. *Ostalo je da se dokaže da* $\prod_{i \in \omega} P_i \subseteq W$.

Neka je $\vec{p} \in \prod_{i \in \omega} P_i$ *i* $\{\vec{W}_n : n \in \omega\}$ *familija tačaka, takva da* $\forall n \in \omega \, (\vec{W}_n \in W_n)$.

Tada niz $\{\vec{p} \upharpoonright n \frown \vec{W}_n : n \in \omega\}$ *tačaka iz* W *konvergira prema tački* $\vec{p}$, *koja zbog zatvorenosti skupa* W, *pripada tom skupu.* $\square$

Stav 8.3. *Neka su* X *kompaktan metrički prostor i* $\{f_n : n \in \omega\}$ *familija neprekidnih funkcija sa* X *u* $[0,1]$ *koja je monotona na celom* X. *Tada je funkcija* $g(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ *definisana za svako* $x \in X$ *i ima osobinu Bairea.*

Dokaz. *Pretpostavimo da je* $\{f_n : n \in \omega\}$ *monotono rastuća familija neprekidnih funkcija sa* X *u* $[0,1]$. *Jasno je da je za svako* $x \in X$ *definisana vrednost* $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = g(x)$. *Neka su* a *i* b *racionalni brojevi iz intervala* $[0,1]$, *takvi da je* $a<b$ *i neka je* $I=(a,b]$ *poluotvoren interval. Tada je* $g^{-1}(I) = \bigcup_{n \in \omega} \bigcap_{m \in \omega \setminus n} f_m^{-1}(I)$.

(a) $x \in g^{-1}(I)$. *Tada je* $g(x) \in I$ *i postoji* $n \in \omega$ *takav da* $f_n(x) \in I$, *što znači da za svako* $m \geq n$ $f_m(x) \in I$. *Dakle,* $x \in \bigcap_{m \in \omega \setminus n} f_m^{-1}(I)$ *i zato* $x \in \bigcup_{n \in \omega} \bigcap_{m \in \omega \setminus n} f_m^{-1}(I)$.

(b) $x \in \bigcup_{n \in \omega} \bigcap_{m \in \omega \setminus n} f_m^{-1}(I)$. *Tada postoji* $n \in \omega$ *takav da* $x \in \bigcap_{m \in \omega \setminus n} f_m^{-1}(I)$, *odnosno za svako* $m \geq n$ $f_m(x) \in I$. *Zbog toga* $g(x) \in I$ *ili* $x \in g^{-1}(I)$.

Time smo dokazali da je $g^{-1}(I)$ *Borelov skup. Pošto je svaki otvoreni interval sa racionalnim brojevima unija prebrojivo mnogo poluotvorenih intervala sa racionalnim krajevima, sledi da je preslika otvorenog intervala sa racionalnim krajevima po funkciji* g *Borelov skup. Time smo dokazali da funkcija* g *ima osobinu Bairea.* $\square$

Stav 8.4. *Neka je X kompaktan metrički prostor i neka $f: X \to [0,1]$ Baireova funkcija . Tada postoji mršavi podskup M od X, takav da je $f \restriction X \setminus M$ neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je $B=\{B_i : i\in\omega\}$ skup svih otvorenih intervala sa racionalnim brojevima u $[0,1]$. Tada za svako $i\in\omega$ postoji otvoren skup A_i u X, takav da je $A_i \triangle f^{-1}(B_i)$ mršav skup u X. Definišemo $M=\bigcup_{i\in\omega}(A_i) \triangle f^{-1}(B_i))$. □

Stav 8.5. *Neka je X kompaktan metrički prostor i neka je $\{f_n : n\in\omega\}$ familija neprekidnih funkcija sa X u $[0,1]$ koja konvergira prema funkciji f. Ako je familija $\{f_n : n\in\omega\}$ monotona i funkcija f neprekidna, onda je konvergencija uniformna.* □

Stav 8.6. *Neka su :*

(1) $d\in(\omega+1)\setminus 1$;

(2) $<P_i : i\in d>$ *sekvencija perfektnih podskupova topološkog prostora* 2^ω;

(3) M *mršavi podskup od* $\prod_{i\in d} P_i$.

Tada postoji sekvencija $<Q_i : i\in d>$ *perfektnih podskupova topološkog prostora* 2^ω *koja ispunjava uslove :*

(4) $\forall i\in d\,(Q_i \subseteq P_i)$;

(5) $\prod_{i\in d} Q_i \cap M=0$.

Dokaz. Sprovodimo za $d=\omega$. Neka je $<F_n : n\in\omega>$ monotono rastuća sekvencija nigde gustih zatvorenih podskupova od $\prod_{i\in\omega} P_i$ takva da je $M=\bigcup_{n\in\omega} F_n$ i neka je $\forall i\in\omega\,(T_i=\{t : t\in 2^{<\omega} \,\&\, \forall j\in i\,(t(j)\neq 1)\})$. Za svako $n\in\omega$ i za svako $s\in T_n$ definišemo Q_{ns} tako da budu zadovoljeni sledeći uslovi :

(6) $\forall n\in\omega\,(Q_{n0} \subsetneq P_n)$;

(7) $\forall n\in\omega\,\forall s\in T_n(Q_{ns}$ je zatvorena oblast u skupu $P_n)$;

(8) $\forall \vec{s}\in \bigotimes_{i\in\omega} T_i\,(\prod_{i\in\omega} Q_{is_i}$ je zatvorena oblast u skupu $\prod_{i\in\omega} P_i)$;

(9) $\forall n\in\omega\,\forall s\in T_n \forall t\in T_n\,(s\subseteq t \to Q_{nt} \subsetneq Q_{ns})$;

(10) $\forall n\in\omega\forall k\in\omega\forall s\in T_n(k)\,\forall t\in T_n(k)\,(s\neq t \to Q_{ns} \cap Q_{nt}=0)$;

(11) $\forall k\in\omega\forall \vec{s}\in \prod_{n\in\omega} T_n(k)(\prod_{n\in\omega} Q_{ns_n}\cap F_n=0)$.

Na kraju definišemo :

(12) $<Q_i : i\in\omega>=<\bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in T_i(n)} Q_{is} : i\in\omega>$

tako da zadovoljava uslov (5). □

Stav 8.7. *Neka su :*

(1) $d \in (\omega+1)\setminus 1$;

(2) $<P_i : i\in d>$ *sekvencija perfektnih podskupova od* 2^{ω};

(3) $F=\{f_n : n\in\omega\}$ *familija neprekidnih funkcija sa* $\prod_{i\in d} P_i$ *u* $[0,1]$;

(4) f *neprekidna funkcija sa* $\prod_{i\in d} P_i$ *u* $[0,1]$.

Tada postoje beskonačan podskup A *od* ω , *sekvencija* $<Q_i : i\in d>$ *perfektnih podskupova od* 2^{ω}, *tako da je* $\forall i\in d\,(Q_i\subseteq P_i)$ *i* $R\in\{<,=,>\}$ *koji zadovoljavaju uslov* :

(5) $\forall n\in A\,\forall q\in\prod_{i\in d} Q_i\,(f_n(q)Rf(q))$.

Dokaz. Sprovodimo za $d=\omega$. *Neka je* $\forall i\in\omega\,(T_i=\{t : t\in 2^{<\omega}\ \&\ \forall j\in i\,(t(j)\neq 1)\})$. *Za svako* $n\in\omega$ *i za svako* $s\in T_n$ *definišemo* Q_{ns}, *tako da su zadovoljeni uslovi* (6) – (10) *iz stava* 8.6. *i uslov* :

(11) $\forall k\in\omega\,\forall\vec{s}\in\prod_{n\in\omega} T_n(k)\,\exists R\in\{<,=,>\}\,\forall q\in\prod_{n\in\omega} Q_{ns_n}(f_k(q)R\,f(q))$.

Sad definišemo funkciju $h : \bigotimes_{i\in\omega} T_i \to 3$ *na sledeći način. Za svako* $k\in\omega$ *i za svako* $\vec{s}\in\prod_{i\in\omega} T_i\,(k)$ *važi* :

$$h(\vec{s})=\begin{cases} 0 & \forall q\in\prod_{i\in\omega} Q_{is_i}(f_k(q)<f(q)) \\ 1 & \forall q\in\prod_{i\in\omega} Q_{is_i}(f_k(q)=f(q)) \\ 2 & \forall q\in\prod_{i\in\omega} Q_{is_i}(f_k(q)>f(q)). \end{cases}$$

Tada postoje sekvencija $<S_i : i\in\omega>$ *perfektnih stabala, tako da je* $\forall i\in\omega$ (S_i *je na dole zatvoreno podstablo stabla* T_i), *beskonačan podskup* A *od* ω *i prirodan broj* $l\in 3$, *pri čemu važi* $h''\bigotimes_{i\in\omega}^{A} S_i=\{l\}$. *Na kraju definišemo* :

(12) $<Q_i : i\in\omega>=<\bigcap_{n\in A}\ \bigcup_{s\in S_i(n)} Q_{ns} : i\in\omega>$. $\square$

Stav 8.8. *Neka su* :

(1) $d\in(\omega+1)\setminus 1$;

(2) $<P_i : i\in d>$ *sekvencija perfektnih podskupova od* 2^{ω};

(3) $F=\{f_n : n\in\omega\}$ *familija neprekidnih funkcija sa* $\prod_{i\in d} P_i$ *u* $[0,1]$;

Tada postoje sekvencija $<Q_i : i\in d>$ *perfektnih podskupova od* 2^{ω} *i beskonačan podskup* A *od* ω , *tako da važi* :

(4) $\forall i\in d\,(Q_i\subseteq P_i)$;

(5) $F_A=\{f_n\restriction\prod_{i\in d} Q_i : n\in A\}$ *je monotona uniformno konvergentna familija neprekidnih funkcija.*

Dokaz. Sprovodimo za $d=\omega$. Neka je $\forall i\in\omega\,(T_i=\{t\ :\ t\in 2^{<\omega}\ \&\ \forall j\in i\,(t(j)\neq 1)\})$. Konstruišemo sekvenciju $<<<Q_{is}\ :\ s\in T_i(n)>\ :\ i\in\omega\ >,\ A_n,\ a_n,\ :\ n\in\omega\ >$ koja zadovoljava uslove (6) – (10) iz stava 8.6. i sledeće uslove :

(11) $\forall n\in\omega\,(A_n\subseteq\omega\ \&\ |A_n|=\omega)$;

(12) $\forall n\in\omega\,(A_{n+1}\subseteq A_n)$;

(13) $\forall n\in\omega\,(a_n=min\,A_n)$;

(14) $a_0=0$;

(15) $\forall n\in\omega\,(a_n<a_{n+1})$;

(16) $\forall n\in\omega\forall\vec{s}\in\prod_{i\in\omega}T_i\,(n)\,\exists\,R\in\{<,=,>\}\,\forall\,k\in A_n\setminus\{a_n\}\forall\,q\in\prod_{i\in\omega}Q_{is_i}(f_{a_n}(q)R\ f_k\,(q))$.

Induktivna procedura se realiyuje uz pomoć stava 8.7. Zatim definišemo funkciju $h\ :\ \bigotimes_{i\in\omega}T_i\rightarrow 3$, tako da je za svako $k\in\omega$ i za svako $\vec{s}\in\prod_{i\in\omega}T_i\,(n)$:

$$h(\vec{s})=\begin{cases}0 & \forall q\in\prod_{i\in\omega}Q_{is_i}(f_{a_n}(q)<f_{a_{n+1}}(q))\\ 1 & \forall q\in\prod_{i\in\omega}Q_{is_i}(f_{a_n}(q)=f_{a_{n+1}}(q))\\ 2 & \forall q\in\prod_{i\in\omega}Q_{is_i}(f_{a_n}(q)>f_{a_{n+1}}(q)).\end{cases}$$

Postoje sekvencija $<S_i:i\in\omega>$ perfektnih stabala, tako da je $\forall i\in\omega\,(S_i$ je na dole zatvoreno podstablo stabla $T_i)$, beskonačan podskup B od ω i prirodan broj $l\in 3$, pri čemu važi $h''\bigotimes_{i\in\omega}^{B}S_i=\{l\}$. Na osnovu toga možemo definisati :

(17) $<Q_i^*\ :\ i\in\omega\ >=<\bigcap_{n\in B}\ \bigcup_{s\in S_i(n)}\ Q_{is}\ :\ i\in\omega>$;

(18) $A=\{a_n\ :\ n\in B\}$.

Familija $\{f_n\restriction\prod_{i\in\omega}Q_i^*\ :\ n\in A\}$ je monotona familija neprekidnih funkcija. Prema stavu 8.3. funkcija $f=\lim_{A\ni n\rightarrow\infty}f_n$ ima osobinu Bairea. Prema stavu 8.4. i stavu 8.6. postoje perfektni podskupovi Q_i od Q_i^* , za svako $i\in\omega$, takvi da je $f\restriction\prod_{i\in\omega}Q_i$ neprekidna funkcija. Prema stavu 8.5. familija $F_A=\{\,f_n\restriction\prod_{i\in\omega}Q_i\ :\ n\in A\,\}$ konvergira uniformno prema funkciji $f\restriction\prod_{i\in\omega}Q_i$. □

Stav **8.9.** Neka su :

(1) $d\in(\omega+1)\setminus 1$;

(2) $F=\{f_n\ :\ n\in\omega\}$ familija Baireovih ili familija merljivih funkcija sa $[0,1]^d$ u $[0,1]$.

Tada postoje sekvencija $<P_i\ :\ i\in d>$ perfektnih podskupova od $[0,1]$ i bes–

konačan podskup A *od* ω, *takvi da familija* $F_A = \{f_n \restriction \prod_{i\in d} P_i : n \in$ *tono i uniformno konvergira.*

Dokaz. (a) F *je familija Baireovih funkcija. Tada postoji sekvencija* $\langle Q_i : i \in d \rangle$ *perfektnih podskupova od* $[0,1]$, *homeomorfnih sa* 2^ω, *tako da je* $F^* = \{f_n \restriction \prod_{i\in d} Q_i : n \in \omega\}$ *familija neprekidnih funkcija. Dalje se primeni stav* 8.8.

(b) F *je familija merljivih funkcija. Prema stavu* 8.1. *i korolaru* 8.1. *postoji sekvencija* $\langle Q_i : i \in d \rangle$ *perfektnih podskupova od* $[0,1]$, *homeomorfnih sa* 2^ω, *tako da je* $F^* = \{f_n \restriction \prod_{i\in d} Q_i : n \in \omega\}$ *familija neprekidnih funkcija. Zatim se primeni stav* 8.8. □

Stav **8.9.** *Neka su* :

(1) $d \in (\omega+1) \setminus 1$;

(2) $F = \{f_n : n \in \omega\}$ *familija neprekidnih funkcija sa* $[0,1]^d$ *u* $[0,1]$.

Tada postoje perfektan podskup P *od* $[0,1]$ *i beskonačan podskup* A *od* , *tako da familija* $F_A = \{f_n \restriction P^d : n \in A\}$ *konvergira.*

Dokaz. Prvo izaberemo perfektan podskup Q *od* $[0,1]$ *homeomorfan sa* 2^ω. *Tada se familija* $\{f_n \restriction Q^d : n \in \omega\}$ *može posmatrati kao familija neprekidnih funkcija sa* $(2^\omega)^d$ *u* $[0,1]$. *Neka je* $\{\sigma_j : j \in d^d\}$ *skup svih funkcija sa* d *u* d. *Za svako* $n \in \omega$ *i za svako* $j \in d^d$ *označićemo sa* f_{nj} *funkciju sa* $(2^\omega)^d$ *u* $[0,1]$ *za koju važi* :

(3) $\forall \vec{x} \in (2^\omega)^d \, (f_{nj}(\vec{x}) = f_n(\langle x_{\sigma_j(i)} : i \in d \rangle))$.

Tako je za svako $j \in d^d$ *definisana familija* $F_j = \{f_{nj} : n \in \omega\}$ *neprekidnih funkcija sa* $(2^\omega)^d$ *u* $[0,1]$. *Sada induktivno konstruišemo sekvenciju* $\langle Q_n, A_n : n \in d^d \rangle$ *koja ispunjava sledeće uslove* :

(4) $\forall k \in d^d$ (Q_k *je perfektan podskup od* 2^ω) ;

(5) $\forall k+1 \in d^d \, (Q_{k+1} \subseteq Q_k)$;

(6) $\forall k \in d^d \, (A_k \subseteq \omega \;\&\; |A_k| = \omega)$;

(7) $\forall k+1 \in d^d \, (A_{k+1} \subseteq A_k)$;

(8) $\forall k \in d^d$ ($\{f_{mk} : m \in A_k\}$ *je familija neprekidnih i uniformno konvergentnih funkcija na skupu* $\{q \in (Q_k)^d$ & (q *je strogo monotono rastuća s obzirom na leksikografski poredak d–sekvencija*) $\}$).

Pretpostavimo da je sekvencija $\langle\langle Q_k, A_k\rangle : k < n \in d^d\rangle$ *već formirana. Induktivno konstruišemo sekvenciju* $\langle Q_{nm}, A_{nm}, l_m : m \in \omega\rangle$ *koja ispunjava sledeće uslove* :

(9) $Q_{n0} \subseteq Q_{n-1}$ ($Q_{00} \subseteq 2^\omega$) ;

(10) $\forall m \in \omega \, (Q_{nm+1} \subseteq Q_{nm})$;

(11) $\forall m \in \omega (Q_{nm}$ *je perfektan skup u* $2^{\omega})$;

(12) $\forall m \in \omega (<T(Q_{nm+1}), l_{m+1}> \leqq <T(Q_{nm}), l_m>)$;

(13) $\forall m \in \omega \, \forall \vec{q} \in (T(Q_{nm})(l_m))^d$ ((q *je strogo monotono rastuća s obzirom na leksikografski poredak d–sekvencija*) $\rightarrow$ ($\{f_{jn} : j \in A_{nm}\}$ *monotono uniformno konvergira na skupu* $\prod_{i \in d} (Q_{nm} \cap [q_i])$))) ;

(14) $A_{no} \subseteq A_{n-1}$ $(A_{00} \subseteq \omega)$;

(15) $\forall m \in \omega \, (A_{nm} \subseteq \omega \;\&\; |A_{nm}| = \omega)$;

(16) $\forall m \in \omega \, (A_{nm+1} \subseteq A_{nm})$;

(17) $\forall m \in \omega \, (\min A_{nm} < \min A_{nm+1})$;

(18) $\forall m \in \omega \, (l_m \in \omega \;\&\; l_m < l_{m+1})$;

(19) $|T(Q_{no})(l_o)| \geqq d$.

Indukcija se realizuje pomoću stava 8.8. *Zatim definišemo* $<Q_n, A_n> = <\bigcap_{m \in \omega} Q_{nm}, \{\min A_{nm} : m \in \omega\}>$. *Na taj način je formirana sekvencija* $<<Q_k, A_k> : k \leqq n>$. *Na kraju definišemo* $P = \bigcap_{n \in d^d} Q_n$ *i* $A = \bigcap_{n \in d^d} A_n$. ☐

Primer. Neka je $F = \{f_n : n \in \omega\}$ *familija neprekidnih funkcija sa* $[0,1]^{\omega}$ *u* $[0,1]$, *pri čemu važi* :

(1) $\forall n \in \omega \, \forall \vec{x} \in [0,1]^{\omega} (f_n(\vec{x}) = x_n)$.

Izaberimo proizvoljan perfektan skup $P \subseteq [0,1]$ *i proizvoljan beskonačan skup* $A \subseteq \omega$. *Neka je* :

(2) $A = B \cup C$;

(3) $B \cap C = 0$;

(4) $|B| = |C| = \omega$;

(5) $x \in P \;\&\; y \in P \;\&\; x \neq y$;

(6) $\vec{z} = <z_n : n \in \omega>$;

(7) $\forall n \in B (z_n = x) \;\&\; \forall n \in C (z_n = y)$.

Tada familija $F_A = \{f_n : n \in A\}$ *ne konvergira na* $\vec{z}$.
Ovaj primer pokazuje da stav 8.9. *ne važi za* $d = \omega$. ☐

§ 9. *HL i particionisanje* $\eta^d \rightarrow k$

Definicija 9.1. *Neka je* $\Phi(x)$ *iskaz teorije skupova sa ili bez parametara, među čijim slobodnim varijablama je* x. *Tada sa* $\overset{\infty}{\forall} x \in X \Phi(x)$ *označavamo formulu* $\exists Y (Y \subseteq X \;\&\; |X \setminus Y| < \omega \;\&\; \forall y \in Y \Phi(y))$. ☐

Stav 9.1. *Pretpostavimo da je* :

(1) $d \in \omega \setminus 1$;

(2) $\vec{T} = \langle T_i : i \in d \rangle$ *d–sekvencija* $(\omega, <\omega)$*–stabala* ;

(3) $\Phi(\vec{x} = \langle x_i : i \in d \rangle)$ *formira teorije skupova* , *takva je* $\{x_i : i \in d\}$ *skup njenih slobodnih varijabli* ;

(4) $\tilde{\forall} y_0 \in T_0 \ldots \tilde{\forall} y_{d-1} \in T_{d-1} \Phi(\vec{x})$ *istinito uvek kada je* $\{y_i : i \in d\} = \{x_i : i \in d\}$.

Tada postoji $\vec{S} = \langle S_i : i \in d \rangle$ *za koji važi* :

(5) $\vec{S} \in \underline{str}^{\omega}(\vec{T})$;

(6) $\forall x_0 \in S_0 \ . \ . \ . \ \forall x_{d-1} \in S_{d-1} \Phi(\vec{x})$.

Dokaz. *Sprovodi se indukcijom po d. Za* $d=1$ *tvrdenje je očigledno. Pretpostavimo da je stav istinit za d, a odatle ćemo dokazati njegovu istinitost za* $d+1$. *Induktivno konstruišemo sekvenciju* $\langle\langle R_{ij} : i \in d+1 \rangle : j \in d+1 \rangle$ *tako da važi* :

(7) $\langle R_{i0} : i \in d+1 \rangle \in \underline{str}^{\omega}(\langle T_i : i \in d+1 \rangle)$;

(8) $\forall j \in d(\langle R_{ij+1} : i \in d+1 \rangle \in \underline{str}^{\omega}(\langle R_{ij} : i \in d+1 \rangle))$;

(9) $\forall j \in d+1 \, \forall x_0 \in R_{0j} \ . \ . \ . \ \forall x_{j-1} \in R_{j-1\,j} \forall x_{j+1} \in R_{j+1\,j} \ . \ . \ . \forall x_d \in R_{dj} \tilde{\forall} x_j \in R_{jj} \Phi(\vec{x})$.

Na kraju ove induktivne procedure definišemo $\langle R_i : i \in d+1 \rangle = \langle R_{id} : i \in d+1 \rangle$. *Pri tome je* :

(10) $\forall j \in d+1 \, \forall x_0 \in R_0 \ . \ . \ . \ \forall x_{j-1} \in R_{j-1} \forall x_{j+1} \in R_{j+1} \ . \ . \ . \forall x_d \in R_d \tilde{\forall} x_j \in R_j \Phi(\vec{x})$;

(11) $\langle R_i : i \in d+1 \rangle \in \underline{str}^{\omega}(\vec{T})$.

Zatim induktivnom procedurom definišemo sekvenciju $\langle\langle S_i(n) : i \in d+1 \rangle : n \in \omega \rangle$ *tako da važi* :

(12) $\forall n \in \omega \, \forall \vec{x} \in \prod_{i \in d+1} (\bigcup_{j \in n+1} S_i(j)) \, \Phi(\vec{x})$;

(13) $\langle \bigcup_{n \in \omega} S_i(n) : i \in d+1 \rangle \in \underline{str}^{\omega}(\langle R_i : i \in d+1 \rangle)$.

Na kraju definišemo $\langle S_i : i \in d+1 \rangle = \langle \bigcup_{n \in \omega} S_i(n) : i \in d+1 \rangle$ *tako da su zadovoljeni uslovi* (5) *i* (6). $\square$

Lema 9.1. *Pretpostavimo da je* :

(1) $\{k, l\} \subseteq \omega \setminus 1$;

(2) $\forall i \in k \forall j \in l(|A_{ij}| \geq \omega)$;

(3) $\forall i \in k \, (B_i = \bigcup_{j \in l} A_{ij})$;

(4) $\forall j : k \to l \, \tilde{\forall} \langle a_i \in A_{ij(i)} : i \in k \rangle \, \Phi(\vec{a})$.

Tada važi :

(5) $\tilde{\forall} \vec{b} \in \vec{B} \, \Phi(\vec{b})$.

Dokaz. Sprovodi se indukcijom po k. □
Stav 9.2. Neka su :

(1) $\{d,k\} \subseteq \omega \setminus 1$;

(2) $\vec{T} = \langle T_i : i \in d \rangle$ *sekvencija* $(\omega,2)$*–stabala* ;

(3) $f : \prod_{i \in d} T_i \to k$.

Tada postoje $\vec{S} = \langle S_i : i \in d \rangle$ *i* l *za kojr važi* :

(4) $\vec{S} \in \underline{str}^{\omega}(\vec{T})$;

(5) $\tilde{\forall} \vec{s} \in \prod_{i \in d} S_i \, (f(\vec{s}) = l)$.

Dokaz. Sprovodi se indukcijom po d. Za d=1 tvrđenje je očigledno. Pretpostavimo da je stav istinit za d i dokazujemo njegovu istinitost za d+1 . Indukcijom po n konstruišemo sekvenciju $\langle\langle S_{in} : 1 \leq i \leq d \rangle : n \in \omega \rangle$ *koja zadovoljava uslove* :

(6) $\langle S_{i0} : 1 \leq i \leq d \rangle \in \underline{str}^{\omega}(\langle T_i : 1 \leq i \leq d \rangle)$;

(7) $\forall n \in \omega \, (\langle S_{in+1} : 1 \leq i \leq d \rangle \in \underline{str}^{\omega}(\langle S_{in} : 1 \leq i \leq d \rangle))$;

(8) $\forall n \in \omega \, \forall i (1 \leq i \leq d)(\bigcup_{m \in n+1} S_{in}(m) = \bigcup_{m \in n+1} S_{in+1}(m))$;

(9) $\forall n \in \omega \, \forall \vec{t} \in T_0(n) \times \prod_{1 \leq i \leq d} S_{in}(n) \, \exists l \in k (\tilde{\forall} s_1 \in sled(t_1, S_{in}) \ldots \tilde{\forall} s_d \in sled(t_d, S_{dn})(f(\langle t_0 \rangle ^\frown \vec{s}) = l))$.

Zatim definišemo $\vec{R} = \langle R_i : i \in d+1 \rangle$ *i* g, *tako da važi* :

(10) $R_0 = T_0$;

(11) $\forall i (1 \leq i \leq d)(R_i = \bigcap_{n \in \omega} S_{in})$;

(12) $g : \bigotimes_{i \in d+1} R_i \to k$;

(13) $\forall \vec{t} \in \bigotimes_{i \in d+1} R_i \, (\tilde{\forall} s_1 \in sled(t_1, R_1) \ldots \tilde{\forall} s_d \in sled(t_d, R_d)(f(\langle t_0 \rangle ^\frown \vec{s}) = g(\vec{t})))$.

Postoje $S = \langle S_i : i \in d+1 \rangle$ *i* l, *za koje važi* :

(14) $\vec{S} \in str^{\omega}(\vec{R})$;

(15) $g : \bigotimes_{i\in d+1} S_i = \{l\}$.

Zato $\vec{S}$ *i* l *zadovoljavaju uslove* (4) *i* (5). *Time je indukcija po* d *završena i stav dokazan.* □

Stav 9.3. *Neka su* :

(1) $\{d,k\} \subseteq \omega \setminus 1$;

(2) $\vec{T} = \langle T_i : i\in d\rangle$ *sekvencija* $(\omega,2)$*–stabala* ;

(3) $f : \prod_{i\in d} T_i \to k$.

Tada postoji $\vec{S} = \langle S_i : i\in d\rangle$ *za koji važi* :

(4) $\vec{S} \in \underline{str}^{\omega}(\vec{T})$;

(5) $|f'' \prod_{i\in d} S_i| \leq d!$.

Dokaz. *Neka je* $\{\sigma_i : i\in d!\}$ *skup permutacija na* d. *Konstruišemo sekvenciju* $\langle\langle S_{in} : i\in d\rangle, l_n : n\in d!\rangle$ *koja zadovoljava sledeće uslove* :

(6) $\langle S_{i0} : i\in d\rangle \in \underline{str}^{\omega}(\vec{T})$;

(7) $\forall n+1\in d!(\langle S_{in+1} : i\in d\rangle \in \underline{str}^{\omega}(S_{in} : i\in d\rangle))$;

(8) $\forall n\in d!\, \forall s_{\sigma_n(0)} \in S_{\sigma_n(0)n} \ldots \forall s_{\sigma_n(d-1)} \in S_{\sigma_n(d-1)n} (f(\vec{s}) = l_n)$.

Zatim definišemo $\vec{S} = \langle S_i : i\in d\rangle = \langle \bigcap_{n\in d!} S_{in} : i\in d\rangle$ *i primenimo stav* 9.1. *na* $\vec{S}$ *i formulu* $\Phi(\vec{x}) = \bigvee_{n\in d!} f(\vec{x}) = l_n$. *Pri tome dobijamo* $\vec{R} = \langle R_i : i\in d\rangle$ *za koje važi* :

(9) $\vec{R} \in \underline{str}^{\omega}(\vec{S})$;

(10) $|f'' \prod_{i\in d} R_i| \leq d!$. □

Korolar 9.1. *Neka su* :

(1) $\{d,k\} \subseteq \omega \setminus 1$;

(2) $\vec{Q} = \langle Q_i : i\in d\rangle$ *sekvencija linearno uređenih skupova u tipu* η;

(3) $f : \prod_{i\in d} Q_i \to k$.

Tada postoji sekvencija $\vec{R} = \langle R_i : i\in d\rangle$ *linearno uređenih skupova u tipu* η *za koju važi* :

(4) $\forall i\in d\, (R_i \subseteq Q_i$ & (*linearno uređenje na* R_i *je indukovano linearnim uređenjem na* Q_i)) ;

(5) $|f'' \prod_{i\in d} R_i| \leq d!$. □

Stav 9.4. *Neka je* :

(1) $k \in \omega \setminus 1$;

(2) $\vec{T} = < T_i : i \in \omega >$ *sekvencija* $(\omega, \leqq 2)$*–stabala* ;

(3) $\forall i \in \omega\, (\forall j \in i\, \forall t \in T_i(j)(|nsled(t, T_i)| = 1)\ \&\ \forall j \in \omega \setminus i\, \forall t \in T_i(j)(|nsled(t, T_i) = 2))$;

(4) $f : \prod_{i \in \omega} T_i \to k$.

Tada postoje $\vec{S} = < S_i : i \in \omega >$, $\vec{s} = < \vec{s_i} : i \in \omega >$ *i* l, *takvi da važi* :

(5) $\vec{S} = < S_i : i \in \omega >$ *je sekvencija* $(\omega, \leqq 2)$ *–stabala* ;

(6) $\forall i \in \omega\, (< S_i, \leqq_i > \cong < T_i, \leqq_i >)$;

(7) $\exists \vec{R} \exists A\, (< \bigcup_{n \in A} R_i(n) : i \in \omega > = < S_i : i \in \omega >\ \&\ \alpha(\bigotimes_{i \in \omega}^{A} R_i, \bigotimes_{i \in \omega} T_i))$;

(8) $\forall i \in \omega (\vec{s_i} \in \prod_{j \in \omega \setminus i} S_j)$;

(9) $\forall d \in \omega\, \tilde{\forall} t_{d-1} \in S_{d-1} \ldots \tilde{\forall} t_0 \in S_0\, (f(\vec{t} \frown \vec{s_d}) = l)$.

Dokaz. Induktivno konstruišemo sekvenciju $<< S_{ij} : i \in \omega > : j \in \omega >$, *tako da su ispunjeni sledeći uslovi* :

(10) $< S_{i0} : i \in \omega > = < T_i : i \in \omega >$;

(11) $\forall n \in \omega (< S_{i n+1} : i \in \omega > \in \underline{str}^{\omega} (< S_{in} : i \in \omega >))$;

(12) $\forall i \in \omega\, \forall n \in i+1 (S_{i0} = S_{in})$

(13) $\forall i \in \omega \forall n \in \omega\, (\bigcup_{m \in n+1} S_{in}(m) = \bigcup_{m \in n+1} S_{i n+1}(m))$

(14) $\forall n \in \omega\, \forall \vec{s} \in \prod_{i \in \omega} S_{in}(n) \exists\, l \in k\, (\tilde{\forall} t_{n-1} \in sled(s_{n-1}, S_{n-1 n}) \ldots \tilde{\forall} t_0 \in sled$

$(t_0, S_{0 n-1})(f(\vec{t} \frown < s_i : i \in \omega \setminus n >) = l))$.

Zatim definišemo $\vec{R} = < R_i : i \in \omega >$ *i* g, *za koje važi* :

(15) $\vec{R} = < \bigcap_{n \in \omega} S_{in} : i \in \omega >$

(16) $g : \bigotimes_{i \in \omega} R_i \to k$;

(17) $\forall n \in \omega\, \forall \vec{s} \in \prod_{i \in \omega} R_i(n)\, (\tilde{\forall} t_{n-1} \in sled(s_{n-1}, R_{n-1}) \ldots \tilde{\forall} t_0 \in sled\, (s_0, R_0)$

$(f(\vec{t} \frown < s_i : i \in \omega \setminus n >) = g(\vec{s})))$.

Postoje $\vec{S} = < S_i : i \in \omega >$ *i* l *za koje važi* (6), (7) *i*

(18) $g'' \bigotimes_{i \in \omega} S_i = \{ l \}$.

Time je dokaz završen. $\square$

Korolar 9.2. Neka su :

(1) $k\in\omega\setminus 1$;

(2) $\vec{Q}=\langle Q_i : i\in d\rangle$ *sekvencija linearno uredenih skupova u tipu* η;

(3) $f : \prod_{i\in\omega} Q_i \to k$.

Tada postoje $\vec{R}=\langle R_i : i\in\omega\rangle$, $\vec{r}=\langle \vec{r_i} : i\in\omega\rangle$ *i* l, *takvi da važi :*

(4) $\forall i\in\omega\ (R_i\subseteq Q_i$ & *(linearno uredenje na* R_i *je indukovano linearnim uredenjem na* Q_i) & $\exists S_i\in[R_i]^i((R_i\setminus S_i)$ *je linearno ureden skup u tipu* η)) ;

(5) $\forall i\in\omega\ (\vec{r_i}\in\prod_{j\in\omega\setminus i} R_j)$;

(6) $\forall d\in\omega\ \tilde{\forall} s_{d-1}\in R_{d-1}\ldots\tilde{\forall} s_0\in R_0(f(\vec{s}^\frown\vec{r}_d)=l)$. □

§ 10. Ekvivalentne formulacije HL

Stav 10.1. Sledeća tvrdenja su ekvivalentna .
(α) *Neka su :*

(1) $d\in(\omega+1)\setminus 1$;

(2) $k\in\omega\setminus 1$;

(3) $\vec{T}=\langle T_i : i\in d\rangle$ *sekvencija* $(\omega,<\omega)$*–stabala sa osobinom* $|\bigotimes_{i\in d} T_i|=\omega$;

(4) $f : \bigotimes_{i\in d} T_i \to k$.

Tada važi sledeća alternativa :

(5) $\forall m\in\omega\ \exists n\in\omega\ \exists\langle S_i\subseteq T_i(n) : i\in d\rangle(m\leq n$ & $\forall i\in d$ (S_i *je* m*–gust skup u stablu* T_i) & $f''\prod_{i\in d} S_i=1)$

ili

(6) $\exists\vec{t}\in\prod_{i\in d} T_i\ \forall m\in\omega\ \exists n\in\omega\ \exists\langle S_i\subseteq T_i[t_i](n) : i\in d\rangle(m\leq n$ & $\forall i\in d$ (S_i *je* m*–gust skup u stablu* $T_i[t_i]$) & $f''\prod_{i\in d} S_i\subseteq k\setminus 1$).

(β) *Neka su :*

(7) $d\in(\omega+1)\setminus 1$;

(8) $k\in\omega\setminus 1$;

(9) $\mathcal{U}$ *neglavni ultrafilter nad* ω;

(10) $\vec{T}=<T_i : i\in d>$ *sekvencija* $(\omega,<\omega)$–*stabala sa osobinom* $|\bigotimes_{i\in d} T_i|=\omega$;

(11) $g : \bigotimes_{i\in d} T_i \to k$.

Tada važi sledeća alternativa :

(12) $\forall m\in\omega\, \exists A\in\mathcal{U}\, \forall n\in A\, \exists <S_i\subseteq T_i(n) : i\in d>(\forall i\in d$ (S_i *je m–gust skup u stablu* T_i) & $g''\prod_{i\in d} S_i=1$)

ili

(13) $\exists \vec{t}\in\prod_{i\in d} T_i\, \forall m\in\omega\, \exists A\in\mathcal{U}\, \forall n\in A\, \exists <S_i\subseteq T_i[t_i](n) : i\in d>(\forall i\in d$ (S_i *je m–gust skup u stablu* $T_i[t_i]$) & $g''\prod_{i\in d} S_i\subseteq k\setminus 1$).

Dokaz. $(\alpha)\to(\beta)$ *je očigledno. Zbog toga ćemo dokazivati* $(\alpha)\to(\beta)$. *Pretpostavimo da važi* (α) *i uslovi* (7) – (11). *Definišemo sekvenciju* $<<\tau_{ij} : i\in d> : j\in\omega>$ *i sekvenciju* $<\tau_j : j\in\omega>$ *tako važi* :

(14) $\forall i\in d\, \forall j\in\omega(\tau_{ij} : T_i \to T_i(j))$;

(15) $\forall i\in d\, \forall j\in\omega\, \forall t\in T_i\, (t\leqq\tau_{ij}(t)\vee\tau_{ij}(t)\leqq t)$;

(16) $\forall j\in\omega\, (\tau_j : \bigotimes_{i\in d} T_i \to \prod_{i\in d} T_i(j))$;

(17) $\forall j\in\omega\, \forall\vec{t}\in\bigotimes_{i\in d} T_i\, (\tau_j(\vec{t})=<\tau_{ij}(t_i) : i\in d>)$.

Neka je $\bigotimes_{i\in d} T_i=\{\vec{t_n} : n\in\omega\}$. *Zatim definišemo sekvenciju* $<A_n, k_n : n\in\omega>$ *tako da važi* :

(18) $\forall n\in\omega\, (A_n\in\mathcal{U})$;

(19) $\forall n\in\omega\, (A_{n+1}\subseteq A_n)$;

(20) $\forall n\in\omega\, \forall j\in A_n\, (nivo(\vec{t_n},\vec{T})\leqq j)$;

(21) $\forall n\in\omega\, \forall j\in A_n\, (g(\tau_j(\vec{t_n}))=k_n)$.

Na kraju definišemo funkciju $f : \bigotimes_{i\in d} T_i \to k$ *tako da važi* :

(22) $\forall n\in\omega\, (f(\vec{t_n})=k_n)$.

Tada iz (5) *sledi* (12), *a iz* (6) *sledi* (13). □

Definicija 10.1. *Za svako* $B\subseteq\omega^\omega$ *je definisana operacija Hausdorfa* H_B *sa bazom B, koja zadovoljava uslov* :

(1) $\forall A\neq 0\, \forall F : \omega\to A(H_B(F)=\bigcup_{\varphi\in B}\bigcap_{n\in\omega} F(\varphi(n)))$. □

Definicija 10.2. *Neka su* :

(1) $\{k,d\}\subseteq\omega\setminus 1$;

(2) $\mathcal{U}$ *neglavni ultrafilter nad* ω;

(3) $f:(2^{\omega})^{d}\rightarrow k$.

Funkcija f *se naziva* $(F,\mathcal{U})$*–particijom skupa* $(2^{\omega})^{d}$ *ako postoje* A, B *i* $<F_l : l\in k>$ *tako da važi* :

(4) $A=\{<x_i\restriction n : i\in d> : \vec{x}\in(2^{\omega})^{d} \,\&\, n\in\omega\}$;

(5) $B=\{\varphi : \varphi\in\omega^{\omega} \,\&\, rau(\varphi)\in\mathcal{U}\}$;

(6) $F : A\rightarrow k$;

(7) $\forall l\in k(F_l : \omega\rightarrow\mathcal{P}((2^{\omega})^{d}))$;

(8) $\forall l\in k\,\forall n\in\omega\,(F_l(n)=\{\vec{x} ; \vec{x}\in(2^{\omega})^{d} \,\&\, F(<x_i\restriction n : i\in d>)=l\})$;

(9) $\forall l\in k\,\forall\vec{x}\in(2^{\omega})^{d}\,(f(\vec{x})=l \leftrightarrow \vec{x}\in H_B(F_l))$.

Funkcija f *se naziva* $\mathcal{U}$*–particijom skupa* $(2^{\omega})^{d}$ *ako važi* :

(10) $\exists F(f$ *je* $(F,\mathcal{U})$*–particija skupa* $(2^{\omega})^{d})$. □

Definicija 10.3. *Neka su* :

(1) $k\in\omega\setminus 1$;

(2) $\mathcal{U}$ *neglavni ultrafilter nad* ω;

(3) $f:(2^{\omega})^{\omega}\rightarrow k$.

Funkcija f *se naziva* $(F,\mathcal{U})$*–particijom skupa* $(2^{\omega})^{\omega}$ *ako postoje* A, B *i* $<F_l : l\in k>$ *tako da važi* :

(4) $A=\{<x_m\restriction(n-m) : m\in\omega> : \vec{x}\in(2^{\omega})^{\omega} \,\&\, n\in\omega\}$;

(5) $B=\{\varphi : \varphi\in\omega^{\omega} \,\&\, ran(\varphi)\in\mathcal{U}\}$;

(6) $F : A\rightarrow k$;

(7) $\forall l\in k(F_l : \omega\rightarrow\mathcal{P}((2^{\omega})^{\omega}))$;

(8) $\forall l\in k\,\forall n\in\omega\,(F_l(n)=\{\vec{x} ; \vec{x}\in(2^{\omega})^{\omega} \,\&\, F(<x_m\restriction(n-m) : m\in\omega>)=l\})$;

(9) $\forall l\in k\,\forall\vec{x}\in(2^{\omega})^{\omega}\,(f(\vec{x})=l \leftrightarrow \vec{x}\in H_B(F_l))$.

Funkcija f *se naziva* $\mathcal{U}$*–particijom skupa* $(2^{\omega})^{\omega}$ *ako važi* :

(10) $\exists F(f$ *je* $(F,\mathcal{U})$*–particija skupa* $(2^{\omega})^{\omega})$. □

Stav 10.2. Sledeća tvrdenja su ekvivalentna :

(α) *Neka su* :

(1) $d \in (\omega+1) \setminus 1$;

(2) $k \in \omega \setminus 1$;

(3) $\vec{T} = <T_i : i \in d>$ *sekvencija perfektnih* $(\omega, <\omega)$*–stabala* ;

(4) $g : \bigotimes_{i \in d} T_i \to k$.

(5) $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω.

Tada postoje $\vec{S} = <S_i : i \in d>$, A *i* l *za koji važi* :

(6) $\vec{S} = <S_i : i \in d>$ *sekvencija perfektnih* $(\omega, <\omega)$*–stabala* ;

(7) $\forall i \in d\,(S_i$ *je na dole zatvoreno podstablo stabla* T_i) ;

(8) $A \in \mathcal{U}$;

(9) $g'' \bigotimes_{i \in d}^{A} S_i = \{l\}$.

(β) *Neka su* :

(10) $d \in (\omega+1) \setminus 1$;

(11) $k \in \omega \setminus 1$;

(12) $\mathcal{U}$ *selektivni ultrafilter nad* ω.

(13) $f : (2^{\omega})^d \to k$ *jedna* $\mathcal{U}$*–particija skupa* $(2^{\omega})^d$.

Tada postoje $\vec{P} = <P_i : i \in d>$, *i* l *za koji važi* :

(14) $\forall i \in d\,(P_i$ *je perfektan podskup od* $2^{\omega})$;

(15) $f'' \prod_{i \in d} P_i = \{l\}$.

Dokaz. Sprovodimo za $d = \omega$.
1° $(\alpha) \to (\beta)$ *Pretpostavimo da važi* (α) *i uslovi* (10) – (13). *Za* f *ćemo pretpostaviti da je* $(F, \mathcal{U})$*– particija skupa* $(2^{\omega})^{\omega}$. *Sad možemo definisati* :

(16) $\forall i \in \omega\ (T_i = \{t\ :\ t \in 2^{<\omega} \,\&\, \forall j \in i\ (t(j) \neq 1)\})$;

(17) $\forall k \in \omega\ \vec{t} \in \prod_{m \in \omega} T_m(k) (g(\vec{t}) = F(<t_m \restriction (k \setminus m)\ :\ m \in \omega>))$.

Primenimo (α) *na funkciju* g: $\bigotimes_{i \in d} T_i \to$. *Postoje* $\vec{S} = <S_i : i \in \omega>$,A *i* l *za koje važi* :

(18) $\forall i \in \omega\,(S_i$ *je na dole zatvoreno perfektno podstabla stabla* T_i) ;

(19) $A \in \mathcal{U}$;

(20) $g'' \bigotimes_{i \in \omega}^{A} S_i = \{l\}$.

Definišemo $\vec{R}=<R_i : i\in\omega>$ *na sledeći način* :

(21) $\forall i\in\omega\,(R_i = \{t \; : \; t\in 2^{<\omega} \,\&\, \exists\, s\in S_i\,(t=s\restriction(|\,s\,|\setminus i))\})$.

Tada važi :

(22) $f''\prod_{i\in\omega}(R_i)=\{\,l\,\}$.

2° (β) $\rightarrow$(α) *Za svaku sekvenciju* $\vec{T}=<T_i : i\in\omega>$ *perfektnih* $(\omega, <\omega)$*–stabala postoje sekvencija* $\vec{S}=<S_i : i\in\omega>$ *perfektnih* $(\omega, <\omega)$*–stabala i skup* $A\in\mathcal{U}$, *tako da važi* :

(23) $\forall i\in\omega(S_i$ *je na dole zatvoreno podstablo stabla* T_i) ;

(24) $\forall i\in\omega\,(<\bigcup_{n\in A} S_i(n), \leqq_i> \cong <\{t \; : \; t\in 2^{<\omega} \,\&\, \forall j\in i\,(t(j)=0)\}, \subsetneq>)$.

Dakle, ako važi (β) *i uslovi* (1) – (5), *bez gubitaka na opštosti možemo pretpostaviti da važi i* (16). *Definišemo* F *i* f, *tako da je* f *jedna* $(F,\mathcal{U})$*–particija skupa* $(2^{\omega})^{\omega}$, *pomoću uslova* (17). *Na osnovu* (β) *postoje* $\vec{P}=<P_i : i\in\omega>$ *i* l *za koje važi* :

(25) $\forall i\in\omega(P_i$ *je perfektan podskup od* 2^{ω}) ;

(26) $f''\prod_{i\in\omega}(R_i)=\{\,l\,\}$.

Definišemo sekvenciju $\vec{S}=<S_i : i\in\omega>$ *perfektnih stabala na sledeći način* :

(27) $\forall i\in\omega(S_i$ *je na dole zatvoreno podstablo stabla* T_i) ;

(28) $\forall i\in\omega\,((S_i)=\{x \; : \; x\in 2^{\omega} \,\&\, \forall j\in i\,(x(j)=0) \,\&\, \exists\, y\in P_i \forall j\in\omega\,(x(i+j)=y(j))\})$.

Na osnovu (26) *važi* :

(29) $\forall m\in\omega\setminus 1\; \exists A\in\mathcal{U}\, \forall n\in A\, \exists <B_i\subseteq S_i(n) : i\in\omega>(\forall i\in m(B_i$ *je* m*–gust skup u stablu* S_i) $\&\; \forall i\in\omega\setminus m(|\,B_i| =1) \;\&\, g''\prod_{i\in\omega} B_i =\{\,l\,\})$.

Zato postoje $\vec{R}=<R_i : i\in\omega>$ *i* A *za koje važi* :

(30) $\forall i\in\omega\,(R_i$ *je na dole zatvoreno perfektno podstabla stabla* S_i) ;

(31) $A\in\mathcal{U}$;

(32) $g''\bigotimes_{i\in\omega}^{A} R_i = \{\,l\,\}$. $\square$

Literatura

1. *K. Kunen*
   Set Theory
   An Introduction to Independence Proofs.

2. *K. Kuratowski and A. Mostowski*
   Set Theory

3. *J. Barwise* (*ed.*)
   Haudbook of Mathematical Logic.

4. *S. Todorčević and J. Farah*
   Some Applications of the Method of Forcing
   Toronto (1993.)

5. *A. Blass*
   A Partition Theorem for Perfect sets
   Proc. A. M. S. 82 (1981.)

6. *R. Laver*
   Products of Infinitely Many Perfect Trees
   J. London Math. Soc. 29(2)(1984.)

7. *J. D. Halpern and H. Läuchli*
   A Partition Theorem
   Trans. Amer. Math. Soc. 124(1966.)

8. *K. Milliken*
   A Ramsey Theorem for Trees
   J. Com. Th. A 26 (1979.)

9. *D. Pincus and J. D. Halpern*
   Partitions of Products
   Trans A. M. S. 267(1981.)