ORGANIZACIJA I EKONOMIKA PODUZEĆA | broj 7-8-9

Biblioteku uređuje

prof. dr. MIJO NOVAK

LINEARNO PROGRAMIRANJE

Teorija i upotreba u privredi

Prof. dr. Alojzij Vadnal

»INFORMATOR«, IZDAVAČKA KUĆA, ZAGREB, MASARYKOVA 1

1972

Organizacija i ekonomika poduzeća
ČASOPIS ZA PITANJA EKONOMIKE I ORGANIZACIJE

BROJ 7-8-9 1972 • GODINA XIV

PREDGOVOR

Svako ekonomsko istraživanje u kojem se služimo metodama linearnog programiranja sastoji se od triju faza. Prva faza istraživanja obuhvaća proučavanje ekonomske situacije, izbor pretpostavki ili hipoteza i određivanje numeričkih vrednota svih parametara što nastupaju. Uspješnost istraživanja ovisna je u prvom redu o dobro obavljenom poslu u toj fazi. Sa stajališta ekonomske analize ta je faza istraživanja najznačajnija i sadržajno najbogatija. Poznavanje i pravilna upotreba ekonomske teorije prvi je uvjet za djelotvoran rad u toj fazi. Proučavanje te faze prelazi namjenu ove knjige pa je zato općenito ne obrađujemo.

Druga faza istraživanja obuhvaća matematičku formulaciju i numeričko rješavanje odgovarajućeg linearnog programa. Ova faza ima formalni značaj; matematička formulacija problema posljedica je u prvoj fazi prihvaćenih hipoteza i rezultata određivanja vrijednosti parametara, numeričko rješavanje linearnog programa je pak sasvim tehnički i determinirani računski rad. Knjiga obrađuje uglavnom tu fazu istraživanja; podijeljena je na četiri dijela. Prvi dio obrađuje značenje linearnog programiranja u ekonomskim analizama na elementarno rješivim primjerima. Drugi dio obuhvaća matematička sredstva koja su pri linearnom programiranju prijeko potrebna. Treći dio daje matematičku teoriju linearnog programiranja i numeričku tehniku rješavanja linearnih programa. Četvrti i najopsežniji dio obrađuje upotrebu linearnog programiranja u privredi; taj dio ima četiri poglavlja.

U XII. poglavlju obrađuju se primjeri linearnih programa uz jednostavnu upotrebu simpleks-metode, i to primjer o prehrani, u kojem je sadržajno obrazložena simpleks-metoda, proizvodni problem, uz koji je obrazložena analiza elektronski izračunanih rezultata, i problem iz analize tržišta. U XIII. poglavlju sistematski se obrađuju dvofazni i mnogofazni ekonomski procesi. XIV. poglavlje obrađuje transportne metode linearnog programiranja. Posljednje, XV. poglavlje bavi se teorijom bilinearnog programiranja.

Treća faza istraživanja obuhvaća ekonomsku analizu izračunanih rezultata. I ta faza prelazi namjene ove knjige i kao i prva spada u ekonomsku teoriju.

Za numeričko rješavanje linearnih programa upotrebljavamo elektronska računala. Računski centri u nas raspolažu elektronskom računskom tehnikom priličnog kapaciteta i odgovarajućim programima za računanje. Stoga se u knjizi ne obrađuje posebno elektronsko rješavanje linearnih programa, dok su numerički primjeri naravno riješeni elektronskim računalom. Vježbe u knjizi izabrane su i priređene tako da se mogu riješiti bez elektronskog računala.

Osobito sam zahvalan prof. dr. Ljubomiru Martiću, koji je ljubazno preuzeo recenziju hrvatskog izdanja ove knjige. Zahvaljujem i asistentu Francu Lebedincu, koji je nadasve brižljivo pregledao rukopis i upozorio me na greške u njemu. Mnogo zahvaljujem i prevodiocu Mirjani Jenčič, koja je prevela rukopis napisan na slovenskom jeziku, kao i lektoru hrvatskog teksta prof. Branki Burić.

Zahvaljujem i INFORMATORU, koji je bio spreman da izda tako opsežan rad s područja primijenjene matematike.

Alojzij Vadnal

SADRŽAJ

PRVI DIO — UVOD U LINEARNO PROGRAMIRANJE

DRUGI DIO — LINEARNA ALGEBRA

Strana

Strana

Ovaj rad posvećujem svojoj ženi

Angelci

u znak zahvalnosti na njezinom trudu i razumijevanju

Prvi dio

UVOD U LINEARNO PROGRAMIRANJE

I. UVOD

1. Operativno istraživanje

U značajne osobitosti razvitka moderne znanosti možemo ubrojiti činjenicu da se i u neegzaktnim znanostima sve više i uspješnije upotrebljavaju kvantitativne metode istraživanja i da se i te znanosti pokušavaju u sve većoj mjeri matematizirati. Poznato je da su se davno već matematizirale znanosti koje proučavaju neživu prirodu; u tim je znanostima djelotvornost matematičkih metoda neosporna, što treba pripisati osobito činjenici da su pojave i odnosi koje te znanosti proučavaju razmjerno dosta jednostavni, pa se mogu adekvatno obrađivati poznatim matematičkim sredstvima.

Djelotvornost matematičkih metoda u prirodnim znanostima potakla je interes za njihovu upotrebu u društvenim znanostima, a među njima možda najprije u ekonomskoj znanosti. Želju za uvođenjem matematičkih metoda u ekonomsku znanost sprečavale su brojne okolnosti. Još je, bez sumnje, sporno da li je u ekonomskoj znanosti uopće moguć toliki stupanj matematizacije kakav je uspio u prirodnim znanostima; pojave i odnosi u privredi su naime tako kompleksni i isprepleteni da se vjerojatno ne mogu opisati jednostavnim matematičkim formulama koje bi bile adekvatne opisivanim pojavama i odnosima. Na drugoj strani pak i matematika sama još je premalo razvijena a da bi dovoljno točno mogla proučavati kompleksnije privredne pojave. Teoretska matematika je doduše razvila odlične metode za proučavanje prirodnih pojava, no te metode nisu dovoljne za proučavanje ekonomskih pojava.

Prvi značajniji pokusi uvođenja matematičkih metoda u ekonomsku znanost sežu unatrag u sredinu prošlog stoljeća. Klasici matematičke ekonomije Walras, Jevons, Pareto i drugi pokušali su matematizirati teoretsku ekonomiju po uzorku kakav je tako lijepo uspio u nebeskoj mehanici. U matematičkoj formulaciji ekonomskih pojava i odnosa postignuti su doduše znatni formalni uspjesi, ali su, na žalost, njihove matematičke formulacije ostale nekvantificirane. Zbog nemogućnosti kvantifikacije matematički formuliranih ekonomskih odnosa na tadašnjem stupnju razvitka matematike i ekonomije, upotreba matematičkih metoda u privredi ušla je u slijepu ulicu i izrodila se u sadržajno dosta siromašan formalizam. No unatoč početnim neuspjesima nikad nije nestala želja za matematizacijom ekonomske znanosti; posljednjih desetljeća čak je jako oživjela ali ne toliko radi gajenja teorije koliko iz praktičnih privrednih razloga. Za uspješan razvoj matematizacije ekonomske znanosti osobito za potrebe poduzeća bili su tako stvoreni u matematici kao i u ekonomiji novi i povoljniji uvjeti. Matematika je razvila nove grane koje su za proučavanje društvenih odnosa prikladnije od klasičnih; te su grane osobito račun vjerojatnosti kao osnova za statistiku, teorija strateških igara, koja pokušava ovladati konfliktnim situacijama, kibernetika itd. Neke modernije grane matematike razvijaju se u smjerovima koji su klasičnim strani; te grane zapravo zanemaruju brojeve i bave se u prvom redu samo nekvantitativnim kategorijama. Takve su matematičke grane osobito matematička logika, teorija skupova, topologija itd.

Na drugoj strani, zbog zahtjeva za što većom racionalizacijom u privredi, posljednjih godina razvile su se neke nove grane ekonomske znanosti, kao npr. psihologija rada, teorija organizacije, operativno istraživanje itd. U tim su granama matematičke metode istraživanja našle izvanredno plodno tlo.

Velika je zapreka uspješnom prodoru matematičkih metoda u ekonomiju i kompleksnost te znanosti. Pojave što ih proučava ekonomija mnogo su zamršenije od prirodnih pojava. U njima se osim kvantitativnih isprepleću i brojne nekvantitativne kategorije kojima je matematičkim metodama teško adekvatno ovladati. Takva priroda ekonomske znanosti postavlja upotrebi matematičkih metoda određene granice, izvan kojih matematičke metode nisu više ni uspješne ni svrsishodne.

U modernom privrednom sistemu ekonomske pojave i odnosi postaju iz dana u dan sve kompleksniji i međusobno isprepleteni. Taj se proces odrazuje na bezbroj načina u različitim oblicima kooperacije i koprodukcije, u integraciji privrednih poduzeća i udruživanju većih privrednih regija, u problemima međunarodne podjele rada itd. Prihvaćati dobre ekonomske odluke ili voditi dobru privrednu politiku danas je teže nego ikada prije. Zbog kompleksnosti i isprepletenosti privrede u određenoj su privrednoj situaciji moguće bezbrojne odluke između kojih privrednik mora napraviti izbor. Prihvaćena odluka može imati za privredu dalekosežne posljedice, što ovisi o važnosti odluke i svrsishodnosti njezina izbora. Što je privreda po svom ustrojstvu i po svojoj razgranatosti zapletenija, to bolje treba poznavati ekonomske odnose da bi se mogle prihvatiti ispravne odluke. Stoga se u privrednim krugovima učvršćuje uvjerenje da privredne odluke treba temeljiti na nanstvenim osnovama.

Iz želje da se prihvaćanje privrednih odluka znanstveno utemelji, potekla je metodološki nova grana ekonomske znanosti, operativno istraživanje. Operativno istraživanje kao znanstvena metoda pojavilo se pod tim nazivom za vrijeme drugoga svjetskog rata u vojnoj strategiji. Zbog svoje praktične primjenljivosti ono se poslije rata brzo proširilo i na druga područja, pa i na područje ekonomije.

Operativno istraživanje posebna je metodološka i normativna djelatnost koja se ne može definirati u klasičnom smislu definicije. Stoga ćemo pokušati da je samo na neki način opišemo. Operativno istraživanje u ekonomiji ima značaj normativne grane ekonomske znanosti u kojoj se intenzivno i sistematski upotrebljavaju kvantitativne matematičke i statističke metode. Predmet operativnog istraživanja u privredi je proučavanje konkretnog privrednog položaja i mogućih privrednih odluka s namjenom da se izvršni organi opskrbljuju potrebnim kvantitativnim analizama koje treba da pridonose prihvaćanju optimalnih privrednih odluka.

Po svom sadržaju operativno istraživanje u privredi zapravo je toliko staro koliko i privreda sama. U privredi su se naime uvijek javljale situacije u kojima je čovjek morao odabirati između postojećih mogućnosti. Odgovarajuće odluke ljudi su u prvo vrijeme prihvaćali po osjećaju ili na osnovi nekih primitivnih prosuđivanja. Formalno se o operativnom istraživanju moglo govoriti tek kada su ta prosuđivanja dosegla takav stupanj egzaktnosti da su pri tom bile upotrijebljene matematičke ili statističke ili neke druge kvantitativne metode. U prve pokušaje upotrebe metoda operativnog istraživanja možemo ubrojiti istraživanje F. W. Taylora, koji je god. 1895. proučavao kako bi velikom lopatom trebao raditi radnik da bi njegov učinak u propisanom vremenu bio najveći. Slični primjeri operativnih istraživanja. dakako pod drugim nazivom, počeli su se redati na različitim privrednim područjima'

Osobito povoljno razdoblje za razvoj operativnog istraživanja počelo je nakon drugoga svjetskog rata. U privredno razvijenijim zemljama nastala je povoljna atmosfera za razvoj operativnog istraživanja i za njegovu primjenu u privrednim organizacijama. Toj su atmosferi pogodovali izvanredni tehnološki napredak, moderna organizacija rada itd., što možemo pripisati revolucionarnom razvitku teorije organizacije, elektronike, automatizacije i eletkronske računske tehnike. Uz takav je razvoj u svjetskoj privredi postavljen na prvo mjesto zahtjev za što većom produktivnošću rada. Uvođenje modernih organizacionih struktura i proizvodnih sredstava s namjenom povećavanja produktivnosti rada prisiljavalo je privrednike da najracionalnije iskorištavaju raspoloživa sredstva. To je pak širom otvorilo vrata operativnom istraživanju u privrednim organizacijama. Metode operativnog istraživanja ubrzo su se potvrdile na bezbrojnim privrednim područjima.

Upotreba matematičkih i statističkih metoda karakteristična je za operativno istraživanje. S obzirom na upotrebu matematičkih sredstava operativno istraživanje postavlja velike zahtjeve, nema gotovo nijedne grane matematike koja se ne bi mogla upotrijebiti u operativnom istraživanju. Determinističke metode matematičke analize i algebre u operativnom su istraživanju prijeko potrebne, ali ipak nedovoljne; treba posegnuti još i za nedeterminističkim metodama računa vjerojatnosti, teorijom igara i teoretskom statistikom. Jednake zahtjeve postavlja operativno istraživanje i s obzirom na numeričko računanje. Rješavanje privredno značajnih problema koje obrađujemo metodama operativnog istraživanja zahtijeva toliko numeričkog računanja da se to u većini slučajeva može obaviti jedino elektronskim računalom. Stoga je elektronska računska tehnika prvi uvjet za razvoj i uspješnu upotrebu operativnog istraživanja.

U matematičkom proučavanju nekog privrednog problema stvaramo model kao formalni odraz izvornog problema. Privredno značajni problemi kojima se bavi operativno istraživanje većinom su tako kompleksni i sadržajno bogati da se matematičkim sredstvima ne mogu ovladati u svom izvornom opsegu. Takve probleme najprije sužavamo nekim unaprijed prihvaćenim ograničenjima i hipotezama. Tako dobivamo model što odgovara izvornom problemu, koji proučavamo umjesto izvornog. Pri konstrukciji modela moramo biti veoma oprezni; moramo paziti da izvorni problem ograničenjima ne osiromašimo u tolikoj mjeri da on više nije adekvatan izvornom. Model mora svakako zadovoljavajuće aproksimirati obrađivanu privrednu situaciju.

Za kvantitativno istraživanje privrednog problema potrebni su nam početni podaci, različiti pokazatelji, koeficijenti i parametri. To su različiti empirički ili statistički podaci koji su dani ili neposredno ili su rezultat posrednih mjerenja ili statističkih akcija. Statistički podaci sadrže uvijek neki stupanj netočnosti, što moramo pri operativnim istraživanjima uzeti u obzir.

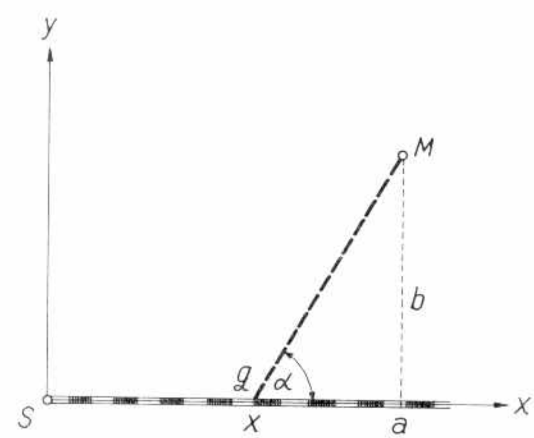
Istraživački rad pomoću metoda operativnog istraživanja specifičan je način rada u kojem je nužna suradnja matematičara, statističara i stručnjaka s onog područja koje istražujemo.

Pri problemima koje proučavamo metodama operativnog istraživanja postoje dva tipa kategorija. Prvi tip tvore kategorije koje su dane objektivno i na koje ne možemo djelovati našim subjektivnim zahvatima; tome tipu pripadaju različiti tehnološki koeficijenti, ograničenja s obzirom na raspoloživa sredstva, tržišne cijene itd. Drugi tip tvore kategorije koje nisu dane objektivno i na koje možemo djelovati subjektivnim zahvatima; tome tipu pripadaju u proizvodnji struktura proizvodnje, pri transportu struktura transporta itd. U taj tip ulazi i namjena koju želimo postići operativnim istraživanjem; kako je u operativnom istraživanju obično riječ o nekom problemu optimalnosti, to unaprijed izabiremo neki kriterij optimalnosti.

Pri pokušaju klasifikacije problema operativnog istraživanja moramo uzimati u obzir dva klasifikaciona kriterija. Prema prvom kriteriju dobivamo klasifikaciju koja se ravna po upotrijebljenim metodama. Prema tom kriteriju razlikujemo slijedeće tipove problema: probleme linearnog programiranja, probleme nelinearnog programiranja, probleme mrežnog programiranja, probleme koje obrađujemo metodom Monte Carlo itd. Prema drugom kriteriju dobivamo klasifikaciju koja se ravna po sadržaju problema. Prema tom kriteriju razlikujemo slijedeće tipove problema: proizvodne probleme, transportne probleme, probleme zaliha, probleme redova čekanja itd.

U operativnom istraživanju obrađujemo većinom neke probleme optimalnosti. Uz dane uvjete želimo npr. odrediti najmanje troškove, najveći dohodak, najmanje potrebno vrijeme, najbolju alokaciju raspoloživih sredstava itd. U nastavku ćemo razmotriti nekoliko takvih problema.

Upadni kut. Kao što vidimo na sl. 1, iz privrednog središta S vodi ravna prometna žila. U točki M, koja je odmaknuta od prometne žile, leži roba što je treba prevesti u središte S. Robu prevezemo najprije direktno do prometne žile a zatim po njoj do središta S. Troškovi za prijevoz robe na jednoj jedinici puta do prometne žile iznose p_1 novčanih jedinica; ovi su troškovi veći od troškova za prijevoz robe na jedinici puta po prometnoj žili, koji iznose p_2 novčanih jedinica. Robu želimo prevesti do središta S tako da ukupni prijevozni troškovi budu najmanji.



Sl. 1. Upadni kut

Riješimo zadatak metodama infinitezimalnog računa. U tu svrhu uzmimo kartezijski koordinatni sistem; njegovo ishodište položimo u središte S, a apscisu na prometnu žilu. Roba leži u točki M (a, b). Od točke M prevezemo robu najprije ravno do točke Q (x, 0) na prometnoj žili i odavde dalje prometnom žilom do središta S (0, 0). Put do prometne žile je dug $\sqrt{(b^2 + (a - x)^2)}$, a put po prometnoj žili je dug x dužinskih jedinica. Zbog toga ukupni prijevozni troškovi iznose:

$$S(x) = p_1 \sqrt{(b^2 + (a - x)^2)} + p_2 x$$

Ovi su troškovi funkcija varijable x i toj varijabli treba odrediti vrijednost kod koje ova funkcija ima minimum.

Deriviranjem ove funkcije dobivamo prvu derivaciju:

$$\frac{dS}{dx} = -p_1 \frac{a - x}{\sqrt{(b^2 + (a - x)^2)}} + p_2$$

i drugu derivaciju:

$$\frac{d^2S}{dx^2} = p_1 \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 + (a - x)^2)^3}}$$

Kako je druga derivacija pozitivna, ekstrem funkcije je minimum. Ako prvu derivaciju izjednačimo sa 0, nakon uređenja dobivamo jednadžbu:

$$\frac{a - x}{\sqrt{(b^2 + (a - x)^2)}} = \frac{p_2}{p_1}$$

Iz ove jednadžbe možemo izračunati apscisu x točke Q. Radi uopćenja zadataka uvodimo kut α, koji tvore upadna zraka MQ na prometnu žilu i prometna žila; taj kut zovemo upadni kut. Kako je po sl. 1:

$$\cos \alpha = \frac{a - x}{\sqrt{(b^2 + (a - x)^2)}}$$

dobivamo iz prijašnje jednadžbe da upadni kut pri najjeftinijem prijevozu zadovoljava jednadžbu:

$$\cos \alpha = \frac{p_2}{p_1}$$

Iz te jednadžbe vidimo da upadni kut nije ovisan o položaju točke M i da je ovisan samo o omjeru prijevoznih cijena. Kod najjeftinijeg prijevoza se dakle roba preveze do prometne žile po upadnoj zraci koja s njom tvori upadni kut α.

Razmještaj strojeva. Radnik upravlja sa N^2 strojeva kvadratnog oblika koji su razmješteni na pravokutnoj plohi tako da su prolazi između pojedinih strojeva jednako široki. Zbog manjih kvarova radnik mora intervenirati sad kod ovoga sad kod onoga stroja. Odredimo oblik pravokutne plohe tako da uklanjajući kvarove radnik obavlja što manji put.

Riješimo zadatak metodama računa vjerojatnosti i infinitezimalnog računa. U tu svrhu riješimo prvo ovaj pomoćni zadatak: radnik upravlja sa n jednakih strojeva koji stoje u ravnoj liniji u razmacima po d dužinskih jedinica. Izračunajmo srednju dužinu puta koji radnik mora prijeći za slučaj svakoga kvara uz uvjet da je vjerojatnost slijedećega kvara na svim strojevima jednaka. Uzmimo da je radnik baš otklonio kvar na p-tom stroju i izračunajmo srednju dužinu puta do stroja sa slijedećim kvarom. Ako se kvar dogodi na prvom, drugom, ..., p-tom, ..., n-tom stroju, radnik koji stoji kod p-tog stroja mora prijeći slijedeće putove:

$$(p-1)\,d,\ (p-2)\,d,\ \ldots,\ d,\ 0,\ d,\ \ldots,\ (n-p)\,d$$

Vjerojatnost za svaki od ovih putova jednaka je $1/n$ jer smo pretpostavili da je vjerojatnost kvara za sve strojeve jednaka. Srednja dužina puta koji radnik mora prijeći od p-tog stroja sa slijedećim kvarom jednaka je sumi produkta tih vrijednosti i odgovarajućih vjerojatnosti:

$$E_1(p) = \frac{d}{n}((p-1) + (p-2) + \ldots + 1 + 0 + 1 + \ldots + (n-p))$$

$$E_1(p) = \frac{d}{2n}(n^2 + n - 2pn + 2p^2 - 2p)$$

Prije slijedećeg kvara radnik može stajati pri bilo kojem stroju, i to s vjerojatnošću koja je za sve strojeve jednaka. Ako stoji pri prvom, drugom, ..., i posljednjem stroju, srednje dužine puta do stroja sa slijedećim kvarom jednake su:

$$E_1(1),\ E_1(2),\ \ldots,\ E_1(n)$$

Zbog pretpostavke o jednakoj vjerojatnosti i svim ovim vrijednostima odgovara vjerojatnost $1/n$. Stoga je kod n strojeva srednja dužina puta do stroja sa slijedećim kvarom jednaka sumi produkata tih vrijednosti s odgovarajućim vjerojatnostima:

$$E(n) = \frac{1}{n}(E_1(1) + E_1(2) + \ldots + E_1(n))$$

$$E(n) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n}\frac{d}{2n}(n^2 + n - 2pn + 2p^2 - 2p)$$

$$E(n) = \frac{d}{2n^2}\left(n^3 + n^2 - 2n\sum_{p=1}^{p=n} p + 2\sum_{p=1}^{p=n} p^2 - 2\sum_{p=1}^{p=n} p\right)$$

$$E(n) = \frac{n^2-1}{3n}\,d$$

Time smo riješili pomoćni zadatak.

Pretpostavimo da smo razmjestili N^2 strojeva u m redova po n strojeva. Po pravilu o srednjoj vrijednosti suma dviju slučajnih varijabli, srednja dužina puta koji radnik mora prijeći do stroja sa slijedećim kvarom jednaka je sumi srednje vrijednosti dužine puta u pravcu reda strojeva i srednje vrijednosti dužine puta u pravcu koji s prijašnjim pravcem tvori pravi kut. Po prijašnjem je obrascu ova srednja dužina jednaka:

$$E(n) + E(m) = \left(\frac{n^2-1}{3n} + \frac{m^2-1}{3m}\right) d$$

Sad možemo riješiti prvobitni zadatak. Pretpostavimo da smo N^2 strojeva razmjestili na pravokutnu površinu tako da dobivamo m redova po x strojeva; zbog toga je $m = N^2/x$. Po posljednjem obrascu srednja je dužina puta do stroja sa slijedećim kvarom ova funkcija varijable x:

$$E(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{3x} + \frac{N^4/x^2 - 1}{3N^2/x)} \right) d$$

$$E(x) = \frac{d(N^2 - 1)(x^2 + N^2)}{3N^2 x}$$

Ova funkcija ima prvu derivaciju:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d(N^2 - 1)(x^2 - N^2)}{3N^2 x^2}$$

i drugu derivaciju:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = \frac{2d(N^2 - 1)}{3x^3}$$

Ako izjednačimo prvu derivaciju sa 0, dobijemo jednadžbu iz koje izračunamo:

$$x = N$$

Funkcija E (x) ima dakle ekstrem u točki $x = N$; kako je u toj točki druga derivacija funkcije pozitivna, ekstrem je minimum. Budući da je $m = N^2/x$, slijedi da je za ovu vrijednost varijable $m = N$. Najpovoljniji razmještaj strojeva je razmještaj u n redova po n strojeva; za takav razmještaj upotrebljavamo plohu kvadratnog oblika.

Vezani ekstremi. Neki se problemi optimalnosti matematički formuliraju kao vezani ekstremi. Opći problem vezanog ekstrema formuliramo ovako: odrediti treba ekstrem funkcije više neovisnih varijabla:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n)$$

tako da neovisne varijable zadovoljavaju uvjetne jednadžbe:

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Vezane ekstreme ovoga tipa rješavamo metodama infinitezimalnog računa obično poznatom Lagrangeovom metodom multiplikatora.

Primjer. Od žice duge 2s dužinskih jedinica izradimo trokutni okvir najveće površine; treba odrediti oblik okvira. Pretpostavimo da trokutni okvir ima stranice x, y i z; stoga je $x + y + z = 2s$. Po Heronovom obrascu:

$$p^2 = s(s - x)(s - y)(s - z)$$

izrazimo površinu koju okružuje okvir kao funkciju varijabla x, y i z. Prema tome dobivamo ovaj problem vezanog ekstrema: Treba odrediti maksimum funkcije:

$$s(s - x)(s - y)(s - z)$$

uz uvjet:

$$x + y + z = 2s$$

Po Lagrangeovoj metodi dobivamo:

$$x = y = z = 2s/3$$

Okvir najveće površine ima dakle oblik istostraničnog trokuta.

Među problemima vezanog ekstrema osobito su značajni problemi u kojima je funkcija čiji ekstrem određujemo linearna s obzirom na sve varijable i u kojima varijable koje mogu imati samo nenegativne vrijednosti, zadovoljavaju jednadžbe ili nejednadžbe što su također linearne s obzirom na sve varijable. Probleme vezanog ekstrema toga tipa rješavamo algebarskim metodama; ti su problemi predmet linearnog programiranja.

2. Linearno programiranje

Prema ranije spomenutom, linearno je programiranje posebna matematička metoda koju upotrebljavamo u operativnom istraživanju pri obradi problema vezanog ekstrema s linearnom funkcijom cilja, s linearnim uvjetnim nejednadžbama ili jednadžbama i s dodatnim zahtjevom da varijable imaju samo nenegativne vrijednosti. Po svom historijskom razvitku linearno je programiranje razmjerno mlada grana primijenjene matematike, njegovi počeci sežu u vrijeme neposredno pred drugi svjetski rat. Prve formulacije problema linearnog programiranja i prve metode rješavanja susrećemo god. 1939. u knjizi ruskog matematičara L. V. Kantorovića[1] o organizaciji i planiranju proizvodnje. Neovisno o ruskim matematičarima linearno su programiranje razvijali na zapadu osobito američki naučenjaci. Kao prvi među njima je F. L. Hitchcock[2] god. 1941. objavio studiju o nekom transportnom problemu linearnog programiranja. Godine 1947. je G. B. Dantzig otkrio opću algebarsku metodu za rješavanje linearnih programa nazvanu simplex-metoda; pomoću te metode numerički se može riješiti svaki problem linearnog programiranja. Linearno programiranje se razvijalo usporedo i u tijesnoj povezanosti s dvije druge naučne grane, s međusektorskom analizom i teorijom strateških igara. Po svom sadržaju se doduše sve ove tri grane bitno razlikuju, ali sa stajališta upotrijebljenih matematičkih sredstava veoma su slične, pa se stoga i metodološki međusobno jako isprepleću. Matematičku osnovu svih triju grana tvori linearna algebra. Privredno značajni za praksu važni problemi linearnog programiranja moraju uzimati u obzir brojne okolnosti i stoga pri numeričkom rješavanju traže toliko računanja da ga praktički možemo obaviti jedino elektronskim računalom. Stoga nije slučajno da se linearno programiranje u privrednu praksu uvelo tek onda kad su se za numeričko računanje mogla koristiti elektronska računala. Zato u razvitku linearnog programiranja godinu 1952. smatramo važnom prekretnicom jer je tada prvi put bio izrađen program za elektronsko rješavanje problema linearnog programiranja po simpleks-metodi.

S matematičkog stanovišta problemi linearnog programiranja ne zadaju više nikakvih teškoća. Matematičku osnovu linearnog programiranja tvore teorija linearnih nejednadžbi i jednadžbi i teorija konveksnih poliedara, dakle dvije grane teoretske matematike koje su za potrebe linearnog programiranja dovoljno razvijene.

[1] L. V. Kantorovič: Matematičeskie metodi organizacii i planirovanija proizvodstva, Leningrad, 1939.

[2] F. L. Hitchcock: The Distribution of a product from Several Sources to Numerous Localities. Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institut of Technology, 1941, vol. 20, no. 3.

Probleme linearnog programiranja rješavamo općenito algebarskim metodama. Matematička sredstva kojima se pri tom koristimo ovise o tome koliko se varijabla pojavljuje i o broju uvjetnih nejednadžbi ili jednadžbi. Opsegom vrlo skromne probleme linearnog programiranja možemo riješiti grafičkim ili pak nekim elementarnim aritmetičkim metodama; takve ćemo probleme obrađivati u slijedećem poglavlju.

U problemima koje rješavamo metodama linearnog programiranja obično je riječ o optimalnom korištenju ili alokaciji bilo kakvih sredstava koja su raspoloživa samo u ograničenim količinama. Kako su mnogi problemi s kojima se susrećemo u privredi baš takve vrste, to se praktična upotrebljivost linearnog programiranja vrlo brzo iskazala na mnogim privrednim područjima, osobito onim što se tiču poduzeća.

Bitno je za linearno programiranje da je funkcija cilja linearna i da su i sve uvjetne nejednadžbe ili jednadžbe linearne. S matematičkog stanovišta takva jednostavnost problema linearnog programiranja pridonijela je da se za razmjerno kratko vrijeme izradi dobra i potpuno odgovarajuća teorija. S ekonomskog i sadržajnog stanovišta pak upravo su u linearnosti skrivene mnoge opasnosti. Stoga kad stvaramo odgovarajući model linearnog programiranja za ma koji privredni problem, treba brižljivo odvagnuti da li su prilike takve da su hipoteze o linearnosti opravdane.

II. ELEMENTARNO RJEŠIVI PROBLEMI LINEARNOG PROGRAMIRANJA

1. Transportni problem s dva ishodišta i odredišta

Neka roba dolazi iz dva ishodišta A i B; ishodišta mogu biti npr. dvije tvornice, dva nalazišta ili dva proizvoljna proizvodna središta. Od tih se ishodišta roba preveze do dva odredišta P i Q; odredišta mogu biti dva potrošna centra ili dva proizvoljna mjesta u kojima se roba potroši. Ponuda izvora A je 4 jedinice robe, što znači da iz tog ishodišta u promatranom vremenu dolaze četiri jedinice robe; ponuda ishodišta B je pak 3 jedinice robe. Pri prevozu robe od ishodišta do odredišta nastaju prijevozni troškovi; oni su upravno proporcionalni količini prevezene robe i cijeni prijevoza. Prijevoz jedinice robe od ishodišta A do odredišta P stoji 3 novčane jedinice, a do odredišta Q 2 novčane jedinice; prijevoz jedinice robe od ishodišta B do odredišta P stoji 1 novčanu jedinicu, a do odredišta Q 3 novčane jedinice. Iz oba ishodišta zajedno dolazi 7 jedinica robe; tu robu treba prevesti do odredišta tako da odredište P dobije 2 jedinice, a odredište Q 5 jedinica robe. Uz ove podatke rješavamo ovaj problem optimalnosti: Kako da usmjerimo prijevoz robe od ishodišta do odredišta da bi ukupni troškovi prijevoza bili najmanji. Podaci su za ovaj transportni problem pregledno sakupljeni u tabeli 1.

TABELA 1. PODACI I OPTIMALNO RJEŠENJE TRANSPORTNOG PROBLEMA

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Odredišta</td><td>Ponuda</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>P</td><td>Q</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ishodišta</td><td>A</td><td>3
0</td><td>2
4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>B</td><td>1
2</td><td>3
1</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Potražnja</td><td>2</td><td>5</td><td>7</td></tr>
</table>

Rješavajući ovaj problem, treba izračunati koliko robe treba usmjeriti od svakog ishodišta prema svakom odredištu; moramo dakle izračunati 4 nepoznanice. Ako pak uzmemo u obzir da su ponude obaju ishodišta i potražnje odredišta određene, možemo broj nepoznanica sniziti na svega jednu. Pretpostavimo da od ishodišta A do odredišta P prevezemo x jedinica robe. Kako iz ishodišta A dolaze 4 jedinice robe, možemo u odredište Q prevesti svega još $4 - x$ jedinica. Budući da u odredište P dolaze 2 jedinice robe, možemo u to odredište dovesti samo još $2 - x$ jednica. Kako potražnja odredišta Q iznosi 5 jedinica a ponuda ishodišta B iznosi 3 jedinice robe, možemo od B u Q prevesti $x + 1$ jedinicu robe.

Sad možemo problem formulirati matematički. Nijedna količina prevezene robe ne može biti negativna; stoga nepoznanica x odgovara nejednadžbama:

$$x \geqq 0, \quad 4 - x \geqq 0, \quad 2 - x \geqq 0, \quad x + 1 \geqq 0$$

Četvrta je od tih nejednadžbi ispunjena čim je ispunjena prva; i druga je nejednadžba ispunjena čim je ispunjena treća. Prema tome nepoznanica x zadovoljava nejednadžbe:

$$0 \leqq x \leqq 2$$

To znači da moguće vrijednosti varijable x leže u intervalu [0, 2].

Ako uzmemo u obzir cijene prijevoza, možemo izračunati ukupne troškove prijevoza S (x) pri prijevoznoj strukturi kad prevezemo od A do P x jedinica robe:

$$S(x) = 3x + 2(4 - x) + 1(2 - x) + 3(x + 1)$$

$$S(x) = 13 + 3x$$

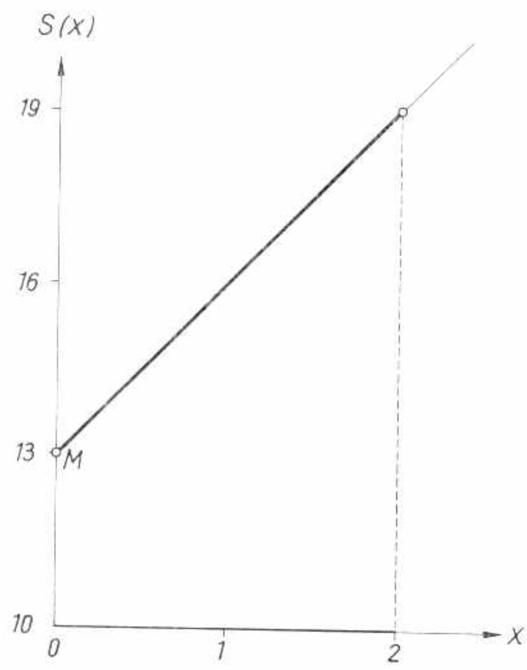
Ukupni troškovi prijevoza su linearna funkcija varijable x. Ta je funkcija predočena na slici 2. pravcem. Tako za promatrani transportni problem dobivamo slijedeću matematičku formulaciju:

Treba odrediti minimum funkcije cilja:

$$S(x) = 13 + 3x$$

uz uvjet da varijabla x odgovara nejednadžbama:

$$0 \leqq x \leqq 2$$



Sl. 2. Funkcija troškova

Iz funkcije cilja, i njezine slike također, vidimo da ta funkcija na intervalu [0, 2] ima najmanju vrijednost na lijevom kraju intervala $x = 0$. Po prijašnjim promatranjima najjeftiniji prijevoz ima strukturu: $x = 0$, $4 - x = 4$, $2x - 2 = 2$, $x + 1 = 1$; kod te strukture prijevoza ukupni su troškovi prijevoza najmanji i oznose $S(0) = 13$ novčanih jedinica. Ova optimalna struktura prijevoza također je upisana u tabelu 1.

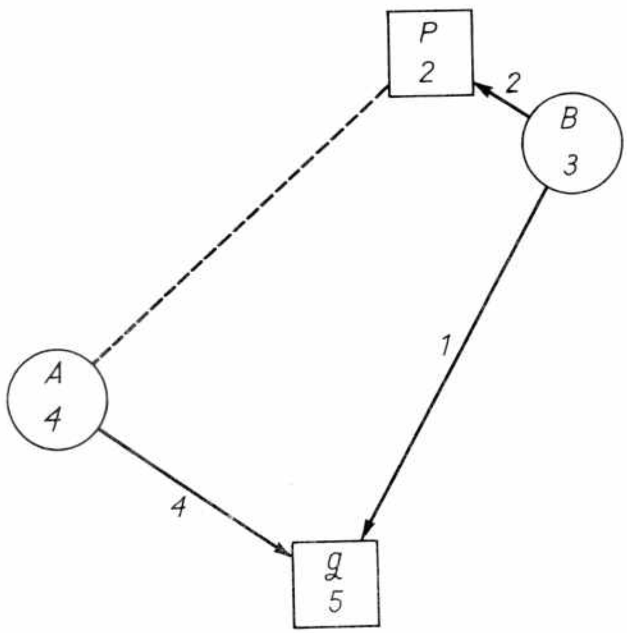
Pri najjeftinijem prijevozu usmjerimo robu tako da dostavi

ishodište A odredištu Q 4 jedinice

ishodište B odredištu P 2 jedinice i

ishodište B odredištu Q 1 jedinicu

robe; pri tom saobraćajna relacija od A do P ostaje neiskorištena. U takvoj organizaciji transporta ukupni su troškovi prijevoza najmanji i iznose 21 novčanu jedinicu. Ovu optimalnu strukturu prijevoza prikazuje sl. 3.



Sl. 3. Optimalna struktura prijevoza

Vježbe

1. Dvije tvornice isporučuju robu za dvije trgovine. Prva tvornica isporuči 22, a druga 28 jedinica robe; tvornice isporuče prvoj trgovini 20, drugoj pak 30 jedinica robe. Troškovi prijevoza za jedinicu robe iznose: od prve tvornice do prve trgovine 35, a do druge trgovine 30 novčanih jedinica; od druge tvornice do prve trgovine 25, do druge trgovine pak 22 novčane jedinice. Sastavi tabelu za taj transportni problem! Kako da tvornice isporuče robu da bi ukupni troškovi prijevoza bili najmanji?

(0, 22, 20, 8; 1336)

2. Riješi problem transporta dviju tvornica A i B i dviju trgovina P i Q koji je dan u tabeli:

	P	Q	
A	2	3	8
B	4	7	5
	4	9	13

(0, 8, 4, 1; 47)

3. Riješi problem transporta koji je dan u tabeli:

	P	Q	
A	6	4	15
B	5	8	20
	25	10	35

(5, 10, 20, 0; 170)

4. Riješi problem transporta koji je dan u tabeli:

1	2	9
3	4	16
6	19	25

(Sve moguće strukture su optimalne; 76)

2. Degeneracija u problemu transporta

Dva ishodišta A i B opskrbljuju robom dva odredišta P i Q. Ponudu i potražnju i cijene prijevoza za jedinicu robe na pojedinim relacijama daje tabela 1.

TABELA 1. PODACI I OPTIMALNO RJEŠENJE PROBLEMA TRANSPORTA

		Odredišta		Ponuda
		P	Q	
Ishodišta	A	6 0	3 6	6
	B	2 8	5 0	8
Potražnja		8	6	14

Označimo sa x količinu robe koja se preveze od A do P; zbog toga se od A do Q preveze $6 - x$, od B do P $8 - x$ i od B do Q x jedinica robe. Pri takvom prijevozu ukupni troškovi prijevoza iznose:

$$S(x) = 6x + 3(6 - x) + 2(8 - x) + 5x$$
$$S(x) = 34 + 6x$$

Kako ni na jednoj relaciji transporta količina prevezene robe ne može biti negativna, varijabla x odgovara nejednadžbama:

$$x \geqq 0, \; 6 - x \geqq 0, \; 8 - x \geqq 0$$

Ove su nejednadžbe ekvivalentne nejednadžbama:

$$0 \leqq x \leqq 6$$

Tako za promatrani problem transporta dobivamo ovu matematičku formulaciju:

Treba odrediti minimum funkcije cilja:

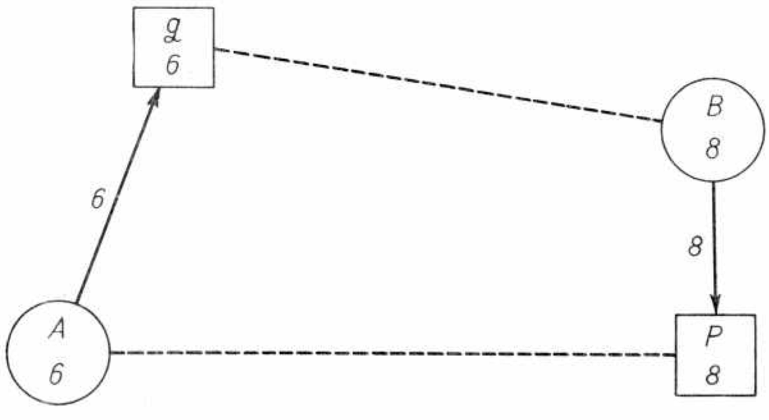
$$S(x) = 34 + 6x$$

uz uvjet da varijabla x odgovara nejednadžbama:

$$0 \leqq x \leqq 6$$

Na intervalu [0, 6], koji je područje mogućih vrijednosti varijable x, funkcija cilja ima najmanju vrijednost 34 na donjoj granici intervala $x = 0$. Pri najjeftinijoj strukturi prijevoza ne prevozimo robu iz ishodišta A u odredište P, niti je vozimo od ishodišta B u odredište Q. Iz ishodišta A prevezemo svih 6 jedinica robe u odredište Q i iz ishodišta B svih 8 jedinica robe u odredište P. Pri takvoj strukturi prijevoza ukupni su troškovi prijevoza najmanji i iznose 34 novčane jedinice. Optimalna struktura prijevoza također je upisana u tabelu 1.

Optimalnu prijevoznu strukturu pokazuje sl. 4. U tom primjeru transportni sistem dijeli se na dva zasebna sistema, gdje svako ishodište u cijelosti opskrbljuje odgovarajuće odredište neovisno o drugom ishodištu. U tom primjeru transportni sistem degenerira u dva zasebna sistema. Ta se pojava koju često susrećemo u transportnim problemima linearnog programiranja naziva degeneracijom.



Sl. 4. Degenerirani transportni sistem

Vježbe

1. Ishodište A ima ponudu 9 i ishodište B ponudu 16 jedinica robe. Odredište P ima potražnju 9, a odredište Q 16 jedinica robe. Prijevozni troškovi za jedinicu robe od ishodišta A do odredišta P iznose 2, a do odredišta Q 5 novčanih jedinica; od ishodišta B do odredišta P iznose 4 i do odredišta Q 3 novčane jedinice. Kako da prevezemo robu od ishodišta do odredišta da bi ukupni prijevozni troškovi bili najmanji? Nacrtaj funkciju prijevoznih troškova, prikaži geometrijski optimalnu strukturu prijevoza!

(9, 0, 0, 16; 66)

2. Riješi transportni problem koji je dan u tabeli:

	P	Q	
A	1	8	4
B	9	2	6
	4	6	10

(4, 0, 0, 6; 16)

3. Transportni problem s dva ishodišta i tri odredišta

Dva ishodišta A i B opskrbljuju robom tri odredišta P, Q i R. Ishodište A ima ponudu 7 a ishodište B 8 jedinica robe, odredište P ima potražnju 6 a odredište Q 5 i odredište R 4 jedinice robe. Prijevozni troškovi po jedinici robe od ishodišta A do odredišta P iznose 9, do Q 7 i do R 16 novčanih jedinica, od ishodišta B do odredišta P 11, do Q 13 i do R 10 novčanih jedinica. Uz ove podatke rješavamo slijedeći problem: Kako da uzmjerimo prijevoz robe od ishodišta do odredišta da bi ukupni prijevozni troškovi bili najmanji. Podaci su za taj transportni problem pregledno sakupljeni u tabeli 1.

TABELA 1. PODACI I OPTIMALNO RJEŠENJE TRANSPORTNOG PROBLEMA

		Odredišta			Ponuda ishodišta
		P	Q	R	
Ishodišta	A	9	7	16	
		2	5	0	7
	B	11	13	10	
		4	0	4	8
Potražnja odredišta		6	5	4	15

Treba izračunati koliko robe da prevezemo od svakog ishodišta do svakog odredišta, kako postoji šest prijevoznih relacija, u problemu nastupa šest varijabla. Ako pak uzmemo u obzir ponudu ishodišta i potražnju odredišta, možemo broj nepoznanica smanjiti na dvije. U tu svrhu pretpostavimo da prevezemo od A do P x i od A do Q y jedinica robe; budući da je ponuda i potražnja ishodišta i odredišta poznata, slijedi da od A do R prevezemo $7 - x - y$, od B do P $6 - x$, od B do Q $5 - y$ i od B do R $x + y - 3$ jedinice robe.

Kako nijedna količina prevezene robe ne može biti negativna, varijable x i y odgovaraju nejednadžbama:

$$\begin{aligned} x &\geqq 0 \\ y &\geqq 0 \\ 7 - x - y &\geqq 0 \\ 6 - x &\geqq 0 \\ 5 - y &\geqq 0 \\ x + y - 3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Ako uzmemo u obzir cijene prijevoza, možemo izračunati ukupne prijevozne troškove $S(x, y)$ pri strukturi prijevoza kad od A do P prevezemo x i od A do Q y jedinica robe:

$$S(x,y) = 9x + 7y + 16(7 - x - y) + 11(6 - x) + 13(5 - y) + 10(x + y - 3)$$

$$S(x,y) = 213 - 4(2x + 3y)$$

Ukupni prijevozni troškovi linearna su funkcija varijabla x i y. Ova funkcija ima minimum kod onih vrijednosti varijabla za koje pomoćna funkcija

$$f(x,y) = 2x + 3y$$

ima maksimum. Za razmatrani transportni problem nakon preuređenja gornjih nejednadžbi dobivamo slijedeću matematičku formulaciju:

Treba odrediti maksimum funkcije cilja:

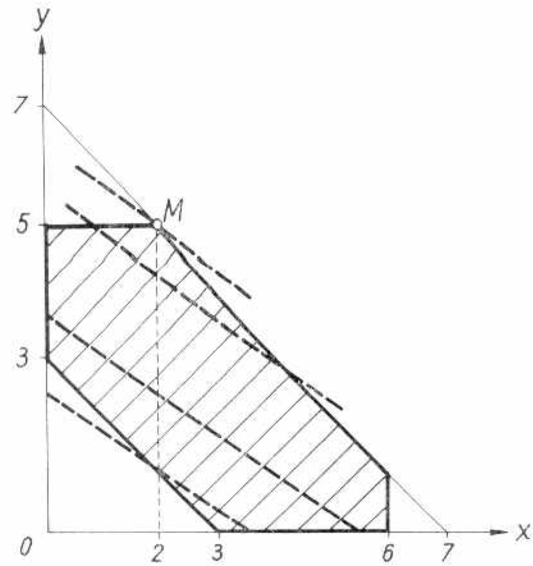
$$f(x,y) = 2x + 3y$$

uz uvjet da varijable x i y zadovoljavaju nejednadžbe:

$$\begin{gathered} 0 \leqq x \leqq 6 \\ 0 \leqq y \leqq 5 \\ x + y \leqq 7 \\ x + y \geqq 3 \end{gathered}$$

Kao što vidimo na sl. 5, problem možemo riješiti grafički u kartezijskom koordinatnom sistemu $x0y$ u ravnini. U tom koordinatnom sistemu proizvoljna točka $A(x,y)$ predstavlja transportnu strukturu kad od A do P prevezemo x i od A do Q y jedinica robe. Svakoj ovakvoj točki ili transportnoj strukturi odgovara određena vrijednost funkcije cilja $f(x,y) = 2x + 3y$ ili određeni ukupni prijevozni troškovi $S(x,y) = 213 - 4(2x + 3y)$. Istražimo prvo koje su točke ili transportne strukture moguće. Koordinate mogućih točaka odgovaraju gornjem sistemu nejednadžbi. Nejednadžbe $0 \leqq x \leqq 6$ znače da moguće točke leže između ordinate i pravca s jednadžbom $x = 6$; nejednadžbe $0 \leqq y \leqq 5$ znače da moguće točke leže između apscise i pravca s jednadžbom $y = 5$; nejednadžba $x + y \leqq 7$ znači da moguće točke leže na onoj strani pravca s jednadžbom $x + y = 7$ gdje leži i koordinatno ishodište; nejednadžba $x + y \geqq 3$ znači da moguće točke leže na suprotnoj strani pravca s jednadžbom $x + y = 3$ od koordinatnog ishodišta.

Točke kojih koordinate odgovaraju svim nejednadžbama leže na iscrtkanom konveksnom šesterokutu. Koordinate svake točke toga šesterokuta su moguća rješenja problema.



Sl. 5. Grafičko rješavanje transportnog problema

Iz slike vidimo da ima bezbroj mogućih rješenja; svakom od mogućih rješenja odgovara određena vrijednost funkcije cilja. Među mogućim rješenjima želimo potražiti ono za koje funkcija cilja ima najveću vrijednost. U tu svrhu promatrajmo vrijednosti funkcije cilja. Točke u kojima funkcija cilja ima istu vrijednost k, leže na pravcu s jednadžbom:

$$2x + 3y = k$$

Ovu jednadžbu prikazuje skup paralelnih pravaca koji imaju koeficijent pravca $-2/3$; nekoliko tih pravaca na slici je povučeno crtkano. Za pojedine vrijednosti parametra k dobivamo pojedine pravce toga skupa; što je veća vrijednost parametra k, to više je pravac udaljen od ishodišta koordinatnog sistema. Najveću vrijednost funkcije cilja, dobivamo tako da pravac pomičemo od ishodišta koordinatnog sistema dok ne izađe iz šesterokuta mogućih rješenja. To će se dogoditi u uglu M (2,5); ova točka prikazuje moguće rješenje za koje funkcija cilja ima najveću vrijednost; stoga ta točka prikazuje najjeftiniju strukturu prijevoza. Matematički formuliran problem ima, dakle, ovo optimalno moguće rješenje:

$$x = 2, \; y = 5,$$

kojem odgovara najveća vrijednost funkcije cilja:

$$f(2,5) = 19$$

Ovom rješenju odgovaraju najmanji ukupni prijevozni troškovi

$$S(2,5) = 137$$

novčanih jedinica. Optimalno moguće rješenje transportnog problema također je upisano u tabelu 1.

Pri najjeftinijoj prijevoznoj strukturi iz A u P prevezemo 2, iz A u Q 5, iz B u P 4 i iz B u R 4 jedinice robe; prijevozne relacije od A do R i od B do Q ostaju neiskorištene. U tako usmjerenom prijevozu ukupni su prijevozni troškovi najmanji i prijevoz stoji 137 novčanih jedinica.

Vježbe

1. Ishodišta A i B s ponudom 7 i 6 jedinica robe opskrbljuju robom tri odredišta P, Q i R s potražnjama 4, 6 i 3 jedinice robe. Prijevozni troškovi za jedinicu robe od A do P iznose 5, do Q 3 i do R 6, od B do P 4, do Q 3 i do R 2 novčane jedinice. Odredi grafički optimalno moguće rješenje transportnog problema.

(1, 6, 0, 3, 0, 3; 41)

2. Ishodišta A i B opskrbljuju robom tri odredišta P, Q i R. Riješi grafički transportni problem koji je dan u tabeli:

	P	Q	R	
A	3	5	4	9
B	5	2	6	6
	4	6	5	15

(4, 0, 5, 0, 6, 0; 44)

3. Ishodišta A i B opskrbljuju robom odredišta P, Q i R. Riješi grafički transportni problem koji je dan u tabeli:

	P	Q	R	
A	2	2	2	6
B	3	3	3	7
	6	4	3	13

(sve strukture su optimalne; 33)

4. Tri ishodišta A, B i C opskrbljuju robom dva odredišta P i Q. Riješi grafički transportni problem koji je dan u tabeli:

	P	Q	
A	10	8	2
B	11	8	10
C	9	12	8
	7	13	20

(0, 2, 0, 10, 7, 1; 171)

4. Transportni problem s viškom ponude

Roba se nalazi u dva skladišta A i B; u prvom je ima 8 a u drugom 10 jedinica. Iz skladišta treba robu prevesti u dvije trgovine P i Q, i to u prvu 5 a u drugu 7 jedinica. Ukupna ponuda od 18 jedinica obaju skladišta je 6 jedinica veća od ukupne potražnje 12 obiju trgovina. Prijevozni troškovi za jedinicu robe su u prijevozu od A do P 4 i do Q 5, od B do P 3 i Q 6 novčanih jedinica. Uz ove podatke rješavamo slijedeći transportni problem: Kako da prevezemo robu ih skladišta u trgovine da bi ukupni prijevozni troškovi bili najmanji.

U ovom je primjeru ponuda ishodišta za 6 jedinica veća od potražnje odredišta; stoga će nakon odvoza ostati u skladištima još 6 jedinica robe. Da bismo ovaj problem preveli u transportni problem s izjednačenim ponudama i potražnjama, uvodimo dodatno prividno odredište R kojemu namijenimo višak ponude ishodišta. Praktički odredište R znači da njemu namijenjenu robu ostavimo u skladištima. Stoga pretpostavimo da je prijevoz robe od skladišta do tog odredišta besplatan. Nakon promjene transportnog problema uvođenjem dodatnog odredišta R dobivamo transportni problem s dva ishodišta A i B i tri odredišta P, Q i R; podaci za taj problem pregledno su sakupljeni u tabeli 1.

TABELA 1. PODACI I OPTIMALNO RJEŠENJE TRANSPORTNOG PROBLEMA

		Odredišta			Ponuda ishodišta
		P	Q	R	
Ishodišta	A	4 0	5 7	0 1	8
	B	3 5	6 0	0 5	10
Potražnja odredišta		5	7	6	18

Ovaj transportni problem rješavamo grafički onako kao što smo sličan problem riješili u prijašnjoj točki. Pretpostavimo da od A do P prevezemo x i od A do Q y jedinica robe; zbog poznatog viška ponude od A do R prevezemo $8 - x - y$, od B do P $5 - x$, od B do Q $7 - y$ i od B do R $x + y - 2$ jedinice robe. Kako nijedna od navedenih količina prevezene robe ne može biti negativna, dobivamo iz toga za varijable x i y šest nejednadžbi. Ako uzmemo u obzir cijene prijevoza, izračunamo ukupne prijevozne troškove i dobivamo:

$$S(x,y) = 4x + 5y + 0(8 - x - y) + 3(5 - x) + 6(7 - y) + 0(x + y - 2)$$

$$S(x, y) = 57 + x - y$$

Nakon preuređenja nejednadžbi dobivamo slijedeću matematičku formulaciju transportnog problema:

Treba odrediti minimum funkcije cilja:

$$S(x,y) = 57 + x - y$$

uz uvjet da varijable x i y odgovaraju nejednadžbama:

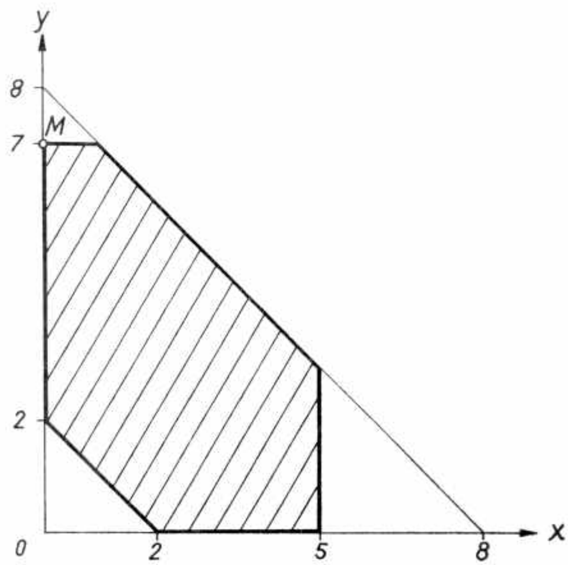
$$0 \leqq x \leqq 5$$

$$0 \leqq y \leqq 7$$

$$x + y \leqq 8$$

$$x + y \geqq 2$$

Problem rješavamo, kao što vidimo iz slike 6, u kartezijskom koordinatnom sistemu x 0 y u ravnini. Točke kojih koordinate odgovaraju propisanim nejednadžbama tvore iscrtkani konveksni šesterokut. Te točke prikazuju sva moguća



Sl. 6. Grafičko rješavanje transportnog problema

rješenja transportnog problema. Među točkama treba potražiti onu za koju je vrijednost funkcije cilja $S(x,y) = 57 + x - y$ najmanja. Iz te funkcije vidimo da je njezina vrijednost najmanja onda kada je vrijednost varijable x najmanja, dakle 0, i kad je vrijednost varijable y najveća, dakle 7. Stoga točka M (0,7) prikazuje optimalno moguće rješenje:

$$x = 0, \quad y = 7,$$

kojemu odgovaraju najmanji ukupni troškovi prijevoza:

$$S(0,7) = 50$$

novčanih jedinica. Optimalno moguće rješenje također je upisano u tabeli 1. Pri najjeftinijem prijevozu iz skladišta A prevezemo 7 jedinica robe u trgovinu Q, a 1 jedinicu zadržimo u skladištu, iz skladišta B prevezemo u trgovinu P 5 jedinica robe, a 5 jedinica zadržimo u skladištu.

Vježbe

1. Ishodišta A i B s ponudom 7 i 6 jedinica robe opskrbljuju dva odredišta P i Q s potražnjom 4 i 6 jedinica robe. Prijevozni troškovi za jedinicu robe od A do P iznose 5 i do Q 3, od B do P 4 i do Q 6 novčanih jedinica. Odredi grafički optimalno moguće rješenje transportnog problema.

(0, 6, 1, 4, 0, 2; 34)

2. Ishodišta A i B opskrbljuju robom odredišta P i Q. Riješi grafički transportni problem koji je dan u tabeli:

	P	Q	
A	1	2	9
B	3	4	7
	6	8	

(u B zadržimo 2 jedinice robe; onda su sve transportne strukture optimalne; 32)

5. Problem asignacije

Radnici su različito osposobljeni za rad na različitim radnim mjestima, pa stupanj produktivnosti koji neki radnik postiže na nekom radnom mjestu može biti vrlo različit s obzirom na njegovu osposobljenost za rad na tom radnom mjestu. U radnim kolektivima u kojima treba rasporediti radnu snagu na radna mjesta javlja se pitanje kako razmjestiti radnike po radnim mjestima da bi stupanj produktivnosti čitavog kolektiva bio najveći. No na takve probleme asignacije ne nailazimo samo u radnim organizacijama već i drugdje. Kapetan sportske momčadi, na primjer, prije svakoga nastupa muku muči kako da najbolje razmjesti svoju momčad.

Pri kvantitativnoj obradi problema asignacije obično se susrećemo s teškoćom kako da mjerimo ili ocjenjujemo osposobljenost, djelotvornost ili produktivnost, koje je u praksi teško odrediti s dovoljnom točnošću. U nastavku se tim pitanjem nećemo baviti, pa ćemo pretpostaviti da su svi odgovarajući kvantitativni podaci već poznati.

a) *Asignacija dvaju radnika*

Dva radnika A i B mogu raditi na dva radna mjesta M i N. U jedinici vremena prvi radnik na radnom mjestu M stvori 3, a na radnom mjestu N 5 novčanih jedinica, dok drugi radnik na radnom mjestu M stvara 6, na radnom mjestu N pak 4 novčane jedinice dohotka. Kako da se radnici rasporede na radna mjesta da bi ukupni dohodak obaju u jedinici vremena bio najveći?

Podaci za ovaj problem pregledno su sakupljeni u tabeli 1, koja podsjeća na slične tabele pri transportnim problemima.

TABELA 1. ASIGNACIJA RADNIKA

	M	N	Broj radnika
A	3 x	5 1 − x	1
B	6 1 − x	4 x	1
Broj radnika	1	1	2

Pri matematičkoj obradi problema uvodimo varijablu x, koju upišemo u tabeli 1, u ono polje koje odgovara radniku A i radnom mjestu M. Ova varijabla znači broj radnika i može imati samo vrijednosti 0 i 1: ako radnik A dođe na radno mjesto M, njezina je vrijednost 1, a ako radnik A ne dođe na radno mjesto M, onda je njezina vrijednost 0. Kako je samo jedan radnik A, upišemo zbog gornjeg $1 - x$ u polje koje odgovara radniku A i radnom mjestu N. Budući da je samo jedno radno mjesto M, upišemo prema gornjem $1 - x$ u polje koje odgovara radniku B i radnom mjestu M. Konačno zbog graničnih uvjeta zapišemo još varijablu x u polje koje odgovara radniku B i radnom mjestu N.

Kako količine x i $1 - x$ ne mogu biti negativne, varijabla x odgovara nejednadžbama:

$$0 \leqq x \leqq 1$$

Kako pak varijabla x može imati samo vrijednosti 0 i 1, za nju dolaze u obzir samo vrijednosti:

$$x = 0 \quad \text{i} \quad x = 1$$

Izračunajmo ukupni dohodak D (x) obaju radnika kao funkciju varijable x; iz tabele 1. dobivamo:

$$D(x) = 3x + 5(1 - x) + 6(1 - x) + 4x$$
$$D(x) = 11 - 4x$$

novčanih jedinica.

Nakon svega ovog dobivamo slijedeću matematičku formulaciju problema asignacije:

Treba odrediti vrijednost varijable x, koja može imati samo vrijednosti 0 i 1, tako da bi ukupni dohotak:

$$D(x) = 11 - 4x$$

bio najveći.

Ukupni dohodak D (x) je linearna funkcija varijable x i doseže najveću vrijednost kad varijabla x zauzme najmanju moguću vrijednost $x = 0$. Toj vrijednosti varijable x odgovara najveći ukupni dohodak $D(0) = 11$ novčanih jedinica.

Pri optimalnoj asignaciji radnik A zauzme radno mjesto N, a radnik B radno mjesto M; tako se postiže najveći ukupni dohodak, koji u jedinici vremena iznosi 11 novčanih jedinica.

b) *Postava šahovske momčadi*

Kapetan domaće šahovske momčadi vodi 3 međusobno izjednačena velemajstora i 5 također međusobno izjednačenih majstora; kapetan suprotne momčadi pak vodi 4 međusobno izjednačena velemajstora i 4 također međusobno izjednačena majstora. Ako domaći velemajstor igra s tuđim velemajstorom, može očekivati u prosjeku po 0,4 točke, ako pak igra s tuđim majstorom, može očekivati u prosjeku 0,6 točaka; ako domaći majstor igra s tuđim velemajstorom, može očekivati u prosjeku 0,3 točke, ako pak igra s tuđim majstorom, može očekivati u prosjeku 0,8 točaka. Kapetan domaće momčadi zna da će suprotni kapetan svoju momčad razmjestiti na daske prema snazi, i to na prve daske velemajstore a na posljednje daske majstore. Kako da domaći kapetan postavi momčad da bi srednja vrijednost očekivanih točaka bila najveća?

Podatke za taj problem daje tabela 2, koja podsjeća na probleme slične transportnim.

TABELA 2. POSTAVA ŠAHOVSKE MOMČADI

		Tuđa momčad		Broj igrača
		velemajstori	majstori	
Domaća momčad	vele-majstori	0,4 x	0,6 3 − x	3
	majstori	0,3 4 − x	0,8 x + 1	5
Broj igrača		4	4	8

U matematičkoj obradi toga problema upisat ćemo u tabeli 2. u polje jednih i drugih velemajstora varijablu x; ta varijabla znači broj domaćih velemajstora koje kapetan postavlja protiv tuđih velemajstora. Da bismo uzeli u obzir granične uvjete, upisat ćemo u daljnja polja još količine $3 - x$, $4 - x$ i $x + 1$.

Budući da nijedna od tih u sredini polja upisanih količina ne može biti negativna, varijabla x odgovara nejednadžbama:

$$0 \leqq x \leqq 3$$

Kako varijabla x znači broj igrača, jasno je da ona može imati samo vrijednosti cijelih brojeva.

Izračunajmo po tabeli 2. srednju vrijednost S (x) točaka koje domaća momčad pri takvoj postavi očekuje kao funkciju varijable x:

$$S(x) = 0{,}4\,x + 0{,}6\,(3 - x) + 0{,}3\,(4 - x) + 0{,}8\,(x + 1)$$

$$S(x) = 3{,}8 + 0{,}3x$$

točaka.

Tako dobivamo matematičku formulaciju problema:

Treba odrediti vrijednost cijelih brojeva varijable x koja odgovara nejednadžbama:

$$0 \leqq x \leqq 3$$

tako da funkcija cilja:

$$S(x) = 3{,}8 + 0{,}3x$$

ima najveću vrijednost.

Funkcija cilja S (x) ima najveću vrijednost kad varijabla x zauzme najveću moguću vrijednost cijelih brojeva $x = 3$; za tu vrijednost funkcija cilja ima vrijednost $S(3) = 4{,}7$.

Pri optimalnoj postavi kapetan će postaviti domaću momčad tako da će 3 domaća velemajstora igrati s tri tuđa velemajstora, jedan domaći majstor igrat će sa suprotnim velemajstorom i 4 domaća majstora igraju sa 4 majstora protivnika; kapetan dakle ne da nijednom domaćem velemajstoru da igra sa suprotnim majstorom. Pri takvoj postavi srednja je vrijednost očekivanih točaka najveća i iznosi 4,7 točaka.

Uz takvu postavu domaća se momčad može nadati pobjedi. Pogledajmo još kakva bi bila najnepovoljnija postava. Namjenska funkcija $S(x) = 3{,}8 + 0{,}3x$ ima kod najmanje moguće vrijednosti varijable $x = 0$ najmanju vrijednost $S(0) = 3{,}8$. Pri takvoj postavi momčadi tri domaća velemajstora igraju sa tri majstora protivnika, 4 domaća majstora igraju sa 4 suprotna velemajstora i 1 domaći majstor igra sa suprotnim majstorom. Pri toj najnepovoljnijoj postavi srednja vrijednost za domaću momčad dobivenih točaka iznosi jedva 3,8 i domaća momčad može očekivati poraz.

Vježbe

1. Dva radnika rasporedimo na dva radna mjesta. Produktivnost prvog iznosi na prvom 4 a na drugom 2 jedinice; produktivnost drugog iznosi na prvom 3 a na drugom 5 jedinica. Izračunaj raspored za koji je ukupna produktivnost najveća.

$$\left(\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}; 9\right)$$

2. Radnu grupu tvori 200 poljoprivrednih radnika i 100 zidara. Za rad na polju potrebno je 170, za zidarske pak radove 130 radnika. Poljoprivredni radnik stvori na polju 100, a na gradilištu 70 jedinica dohotka; zidar stvori na polju 80, na gradilištu pak 110 jedinica hodotka. Odredi razmještaj radnika za koji je ukupni dohodak grupe najveći.

$$\left(\begin{matrix}170 & 30\\ 0 & 100\end{matrix}; 30\ \ 100\right)$$

3. U šahovskom natjecanju na 10 dasaka domaća momčad ima 3 jednako vrijedna velemajstora i 7 jednako vrijednih majstora, a protivnik ima 6 jednako vrijednih velemajstora i 4 jednako vrijedna majstora. Ako domaći velemajstor igra s velemajstorom, očekuje u prosjeku 0,4, a ako igra s majstorom, očekuje u prosjeku 0,9 točaka; ako domaći majstor igra s velemajstorom, očekuje u prosjeku 0,1, a ako igra s majstorom, očekuje prosječno 0,5 točaka. Protivnik je postavio velemajstore na prve a majstore na posljednje daske. Odredi najpovoljniju i najnepovoljniju postavu domaće momčadi.

$$\left(\begin{matrix}0 & 3\\ 6 & 1\end{matrix}, 3, 8; \begin{matrix}3 & 0\\ 3 & 4\end{matrix}, 3, 5\right)$$

6. Optimalna raspodjela investicija

Proizvodno poduzeće ima dva odjela koji proizvode s različitim stupnjevima dobiti, prvi odjel proizvodi sa 3%, a drugi sa 6% dobiti. Poduzeće može u oba odjela investirati najviše 8 novčanih jedinica iz sredstava za investicije. Za raspodjelu investicionih sredstava propisani su slijedeći uvjeti: prvi odjel neka dobije najmanje 2, a drugi najmanje 1 novčanu jedinicu i prvi odjel neka ne dobije manje investicionih sredstava od drugoga. Investiciona sredstva neka se razdijele među oba odjela tako da poduzeće postigne najveću ukupnu dobit.

Označimo sa x dio investicionih sredstava koji dobiva prvi odjel i sa y onaj dio koji dobiva drugi. Gore tražene uvjete raspodjele investicionih sredstava među oba odjela izražavamo matematički pomoću slijedeće 4 nejednadžbe:

$$\begin{aligned} x + y &\leqq 8 \\ x \qquad &\geqq 2 \\ y &\geqq 1 \\ x - y &\geqq 0 \end{aligned}$$

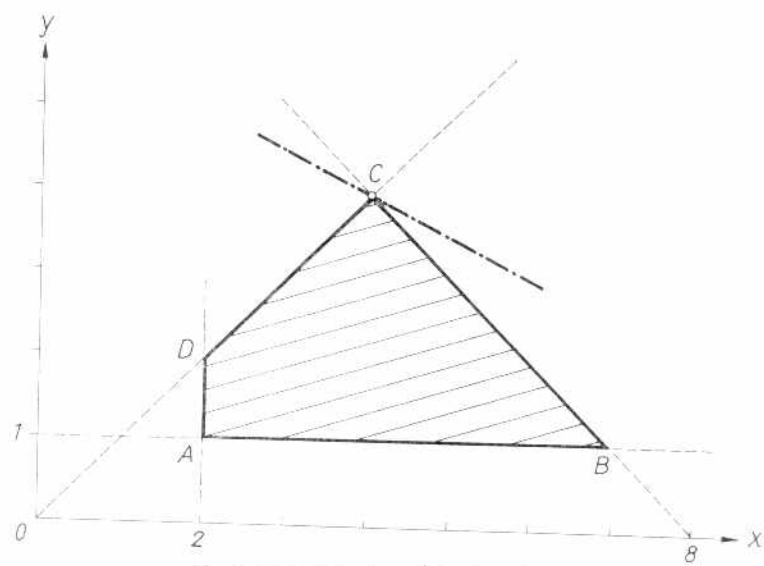
Pri takvoj raspodjeli investicionih sredstava ukupna dobit obaju odjela iznosi:

$$f(x,y) = \frac{3x + 6y}{100}$$

Time dobivamo slijedeći problem linearnog programiranja:

Treba odrediti maksimum ukupne dobiti f (x, y) kao funkcije cilja uz uvjet da varijable x i y odgovaraju svim četirma gore navedenim linearnim nejednadžbama.

Problem možemo riješiti grafički jer u njemu nastupaju samo dvije varijable. U tu svrhu pretpostavimo, kao što vidimo na sl. 7, kartezijski koordinatni sistem



Sl. 7. Raspodjela investicionih sredstava

x 0 y. Točka (x,y) toga koordinatnog sistema prikazuje strukturu raspodjele investicionih sredstava kod koje prvi odjel dobiva x, a drugi y novčanih jedinica. Strukture raspodjele koje zadovoljavaju sve četiri uvjetne linearne jednadžbe prikazuju točke iscrtkanog četverokuta ABCD. Funkcija cilja ima najveću vrijednost kad pomoćna funkcija:

$$x + 2y$$

ima najveću vrijednost. Na iscrtkanom četverokutu ta funkcija ima najveću vrijednost u točki C (4,4). Stoga prvobitni linearni program ima optimalno moguće rješenje:

$$x = 4, \quad y = 4,$$

kojem odgovara najveća dobit 0,36 novčanih jedinica.

Zato pri optimalnoj distribuciji prvi odjel dobiva 4 a drugi također 4 novčane jedinice investicionih sredstava; takvom raspodjelom poduzeće postiže najveću ukupnu dobit 0,36 novčanih jedinica.

Vježbe

1. U poduzeću s dva odjela prvi odjel posluje sa stupnjem dobiti od 15%, a drugi sa stupnjem dobiti od 25%. Investiciona sredstva, koja iznose najviše 10 novčanih jedinica, raspodijelimo među oba odjela tako da prvi ne dobije manje od 3, a drugi ne manje od 2 novčane jedinice i tako da poduzeće postigne najveću ukupnu dobit. Riješi problem raspodjele grafički.

(3, 7; 2, 2)

2. U proizvodnom poduzeću s dva odjela prvi odjel radi sa stupnjem dobiti od 30%, a drugi sa stupnjem dobiti od 20%. Ukupna investiciona sredstva, koja nisu veća od 20 novčanih jedinica, raspodijelimo na oba odjela tako da drugi odjel ne dobije manje od 2 novčane jedinice i tako da poduzeće postiže najveću ukupnu dobit. Riješi problem raspodjele grafički.

(18, 2; 5, 8)

3. U poduzeću s tri odjela prvi odjel radi sa 30%, drugi sa 10% i treći sa 40% dobiti. Ukupna investiciona sredstva, koja iznose 40 novčanih jedinica, raspodijelimo u cijelosti među sva tri odjela tako da prvi ne dobije manje od 8 novčanih jedinica, drugi ne manje od 10 novčanih jedinica i da treći ne dobije više od drugoga; raspodjela neka bude takva da ukupna dobit bude najveća. Riješi problem raspodjele grafički.

(20, 10, 10; 11)

7. Propusnost saobraćajne mreže

Mreža je svaki sistem čvorova ili raskršća povezanih granama ili žilama koji ima slijedeće osobine:

a) svaka grana povezuje dva čvora,

b) svaki je čvor povezan sa svakim drugim čvorom barem jednim lancem uzastopnih grana, tako da se granama može doći od svakoga čvora do svakoga drugog čvora.

Mrežom teče saobraćaj bilo koje vrste, npr. prijevoz putnika ili robe, prijenos električne energije, pretok plina itd. U nastavku pretpostavimo da je riječ o saobraćajnoj mreži po kojoj se prevozi roba.

S obzirom na grane mreže pretpostavimo u nastavku slijedeće osobine:

a) svaka grana ima određenu propusnost, koja određuje najveću moguću količinu prijevoza po njoj u jedinici vremena.

b) sve su grane jednosmjerne.

S obzirom na čvorove mreže pretpostavljamo u nastavku slijedeće osobine:

a) roba ulazi u mrežu samo u jednom čvoru, koji nazivamo ishodištem; u njemu nema nikakvog tranzitnog saobraćaja,

b) roba napušta mrežu samo u jednom čvoru, koji nazivamo odredištem; u njemu također nema nikakvog tranzitnog saobraćaja,

c) svi drugi čvorovi su međučvorovi i u njima teče samo tranzitni saobraćaj; stoga je u svakom međučvoru količina dovoza jednaka količini odvoza,

d) čvorovi imaju neograničenu propusnost.

Sl. 8a. pokazuje shemu takve mreže sa 7 čvorova i 12 grana.

Kod saobraćajne mreže interesira nas problem njezine najveće propusnosti; obradivat ćemo pitanje kako treba usmjeriti saobraćaj od ishodišta do odredišta da bi mrežom u jedinici vremena prolazilo što više robe.

Uzmimo mrežu koju pokazuje sl. 8a. Mreža ima 7 čvorova, koje označimo brojevima 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6; čvor 0 je ishodište, a čvor 6 odredište. Mreža ima 12 jednosmjernih grana, koje povezuju po dva čvora, početni i konačni; usmjerenje svake grane na slici je označeno odgovarajućom strelicom. Svaku granu označimo uređenim parom brojeva, od kojih prvi znači početni, a drugi konačni čvor grane. Tako uređen par brojeva (0,1) označuje granu što ide od ishodišta 0 do čvora 1. Svaka grana ima određenu propusnost; na slici je propusnost svake grane upisana pri odgovarajućoj strelici. Prema tome obrađivana mreža ima slijedeće grane s odgovarajućim propusnostima:

$$
\begin{array}{llllll}
(0,1), & 12; & (0,2), & 20; & & \\
(1,2), & 4; & (1,3), & 8; & (1,4), & 3; \\
(2,4), & 5; & (2,5), & 10; & & \\
(3,4), & 2; & (3,6), & 7; & & \\
(4,6), & 11; & & & & \\
(5,4), & 3; & (5,6), & 9. & &
\end{array}
$$

Po opisanoj mreži roba se prevozi od ishodišta 0 do odredišta 6; pri tom želimo usmjeriti prijevoz tako da u jedinici vremena mrežom prođe što više robe. Izrazimo taj problem u matematičkom obliku. Označimo u tu svrhu količine robe koje prevozimo po pojedinim granama uzastopno varijablama.

$$
\begin{array}{lll}
x_{01}, & x_{02}, & \\
x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, \\
x_{24}, & x_{25}, & \\
x_{34}, & x_{36}, & \\
x_{46}, & & \\
x_{54}, & x_{56}. &
\end{array}
$$

Pri tom prvi indeks označuje početni, a drugi indeks konačni čvor grane.

Nijedna od ovih varijabli ne može biti negativna jer svaka znači neku količinu robe; zbog ograničenih propusnosti je i svaka od ovih varijabli prema gore ograničena propusnošću odgovarajuće grane. Stoga varijable zadovoljavaju nejednadžbe:

$$
\begin{array}{ll}
0 \leqq x_{01} \leqq 12 & 0 \leqq x_{25} \leqq 10 \\
0 \leqq x_{02} \leqq 20 & 0 \leqq x_{34} \leqq 2 \\
0 \leqq x_{12} \leqq 4 & 0 \leqq x_{36} \leqq 7 \\
0 \leqq x_{13} \leqq 8 & 0 \leqq x_{46} \leqq 11 \\
0 \leqq x_{14} \leqq 3 & 0 \leqq x_{54} \leqq 3 \\
0 \leqq x_{24} \leqq 5 & 0 \leqq x_{56} \leqq 9
\end{array}
$$

Označimo količinu robe što dotječe u čvor negativnim, a količinu robe što od čvora otječe pozitivnim predznakom. Kako je za svaki međučvor količina robe što dolazi jednaka količini robe što odlazi, za pojedine međučvorove vrijede jednadžbe:

$$
\begin{array}{ll}
\text{za čvor 1:} & -x_{01} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 0 \\
\text{za čvor 2:} & -x_{02} - x_{12} + x_{24} + x_{25} = 0 \\
\text{za čvor 3:} & -x_{13} + x_{34} + x_{36} = 0 \\
\text{za čvor 4:} & -x_{14} - x_{24} - x_{34} - x_{54} + x_{46} = 0 \\
\text{za čvor 5:} & -x_{25} + x_{54} + x_{56} = 0
\end{array}
$$

Količina robe $x_{01} + x_{02}$ koja odlazi u mrežu iz ishodišta 0 jednaka je količini robe $x_{36} + x_{46} + x_{56}$ koja dolazi iz mreže u odredište 6; te dvije količine određuju protok robe mrežom. Protok mrežom je prema tome jednak:

$$P = x_{01} + x_{02} = x_{36} + x_{46} + x_{56}$$

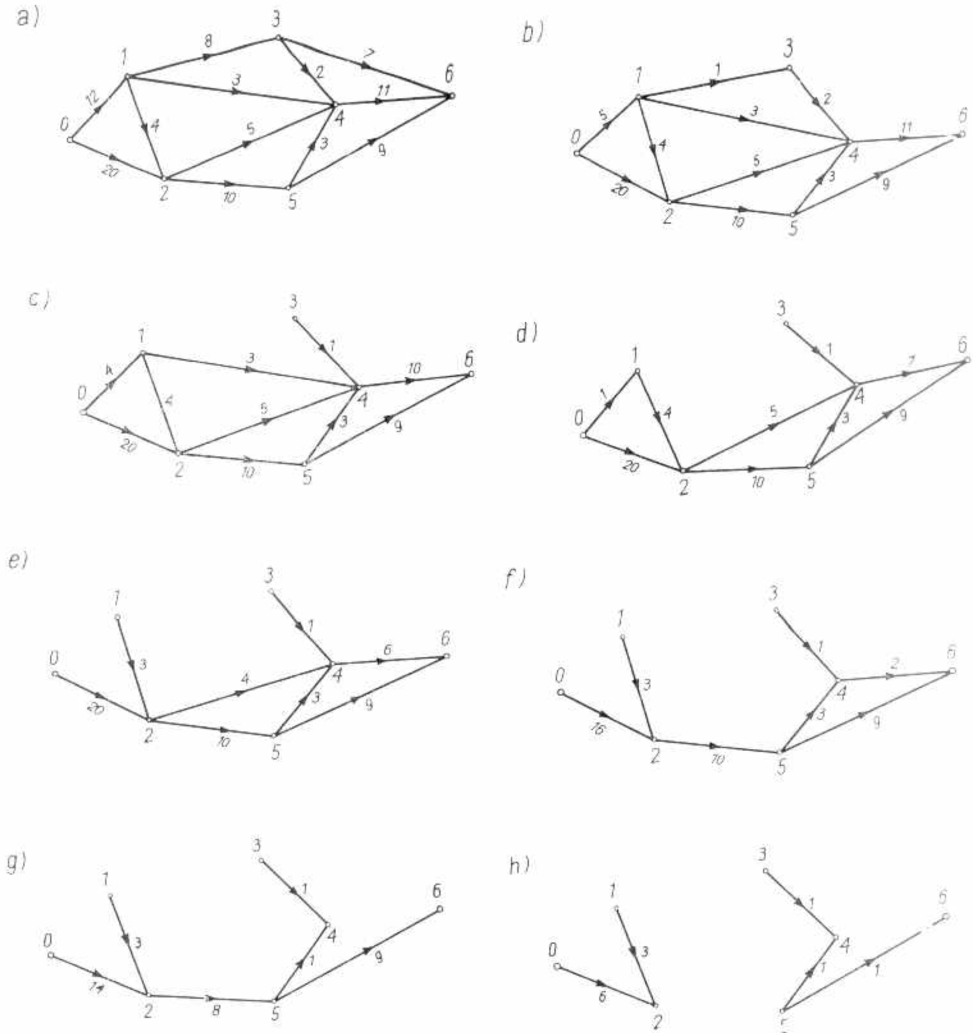
Prema tome dobivamo slijedeći problem o propusnosti mreže: Treba odrediti vrijednosti svih 12 varijabla koje odgovaraju gornjim nejednadžbama i jednadžbama tako da je protok robe kroz mrežu najveći. Kako varijable zadovoljavaju uvjet nenegativnosti i same linearne nejednadžbe i jednadžbe i kako je protok robe kroz mrežu kao funkcija cilja linearna funkcija varijabli, riječ je o problemu linearnog programiranja.

Problem se može riješiti prilično jednostavno na način koji ilustrira slika 8.

Nazovimo *lanac* svaki put koji vodi po usmjerenim granama od ishodišta 0 do odredišta 6.

U prvoj mreži na sl. 8a. potražimo lanac koji ide krajnjim gornjim rubom mreže; to je lanac što vodi od ishodišta 0 preko međučvorova 1 i 3 do odredišta 6. Sa stanovišta propusnosti u tom je lancu najslabija grana (3,6) s propusnošću 7; stoga po ovom lancu možemo prevesti 7 jedinica robe. Po ovom lancu usmjerimo najveću moguću količinu 7 jedinica robe. Nakon toga prijevoza ostaju od prvobitne mreže za daljnje prijevoze raspoloživi još saobraćajni kapaciteti mreže na sl. 8b.

U ovoj, drugoj, mreži uzmemo na krajnjem gornjem rubu lanac što prolazi kroz međučvorove 1, 3 i 4. U tom je lancu najslabija grana (1,3) s propusnošću 1. Stoga usmjerimo po tom lancu najveću moguću količinu, tj. jednu jedinicu robe. Nakon toga prijevoza ostaju od druge mreže za daljnje prijevoze raspoloživi još prometni kapaciteti mreže na sl. 8c.



Sl. 8. Određivanje propusnosti mreže

U toj, trećoj, mreži teče gornjim krajnjim rubom mreže lanac kroz međučvorove 1 i 4; u njemu je najslabija grana (1,4) s propusnošću 3. Po tom lancu usmjerimo najveću moguću količinu robe 3 jedinice. Nakon toga prijevoza ostaju od treće mreže za daljnje prijevoze raspoloživi još saobraćajni kapaciteti mreže na sl. 8d.

U toj, četvrtoj, mreži teče krajnjim gornjim rubom lanac kroz čvorove 1, 2 i 4; u njemu je najslabija grana (0,1) s propusnošću 1. Po tom lancu usmjerimo 1 jedinicu robe. Nakon toga prijevoza ostaju od mreže za daljnje prijevoze raspoloživi još saobraćajni kapaciteti mreže na sl. 8e.

U toj, petoj, mreži ima gornji krajnji lanac kroz čvorove 2 i 4 najslabiji lanac (2,4) propusnosti 4. Po tom lancu usmjerimo najveću moguću količinu 4 jedinice robe. Nakon prijevoza te robe ostaju od mreže raspoloživi još saobraćajni kapaciteti mreže na sl. 8f.

U toj, šestoj, mreži ima gornji krajnji lanac kroz čvorove 2, 5 i 4 najslabiju granu propusnosti 2. Po toj grani usmjerimo 2 jedinice robe, nakon čega od mreže ostaju još saobraćajni kapaciteti mreže na sl. 8g.

U toj, sedmoj, mreži ima jedini još mogući lanac kroz čvorove 2 i 5 najslabiju granu (2,5) propusnosti 8. Po njoj usmjerimo 8 jedinica robe, nakon čega ostaju od mreže samo još saobraćajni kapaciteti mreže na sl. 8h.

Posljednja je mreža već toliko okrnjena da u njoj nema više nijednog lanca koji bi povezivao ishodište s odredištem. Stoga je svaki daljnji prijevoz robe od ishodišta do odredišta nemoguć i postupak je zaključen. Ako sakupimo gore izračunane prijevoze po saobraćajnim granama i sredimo rezultate, dobivamo ovo optimalno rješenje problema:

Najveća moguća količina u jedinici vremena prevezene robe od ishodišta do odredišta iznosi:

$$7 + 1 + 3 + 1 + 4 + 2 + 8 = 26$$

jedinica robe; taj optimalni prijevoz dobivamo ako usmjerimo robu po granama, tako da je:

$$\begin{array}{lll} x_{01} = 12 & x_{14} = 3 & x_{36} = 7 \\ x_{02} = 14 & x_{24} = 5 & x_{46} = 11 \\ x_{12} = 1 & x_{25} = 10 & x_{54} = 2 \\ x_{13} = 8 & x_{34} = 1 & x_{56} = 8 \end{array}$$

Vježbe

1. Saobraćajna mreža ima 6 čvorova 0, 1, 2, 3, 4 i 5 i 8 jednosmjernih grana s propisanim propusnostima:

(0,1), 3; (0,2), 6; (1,2), 4; (1,4), 5;
(2,3), 3; (3,5), 8; (4,3), 6; (4,5), 2.

Nacrtaj shemu mreže i odredi najveći mogući protok od ishodišta 0 do odredišta 5!

(6)

2. Za saobraćajnu mrežu vrijede isti podaci kao i u prijašnjoj vježbi, samo s razlikom da su saobraćajne grane dvosmjerne. Odredi najveći mogući protok od ishodišta do odredišta!

(8)

3. Saobraćajna mreža ima 8 čvorova: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7 i 12 usmjerenih grana s propisanim propusnostima:

(0,1), 8; (0,2), 19; (0,3), 15; (1,3), 3;
(1,4), 5; (2,5), 12; (3,6), 22; (3,5), 4;
(4,6), 3; (4,7), 6; (5,7), 9; (6,7), 20.

Nacrtaj shemu mreže i odredi najveći mogući protok od ishodišta 0 do odredišta 7!

(32)

4. Za saobraćajnu mrežu vrijede isti podaci kao i u prijašnjoj vježbi, samo s razlikom da su saobraćajne grane dvosmjerne. Odredi najveći mogući protok od ishodišta do odredišta! (35)

8. Problemi smjese

Ljudima i životinjama potrebne su za prehranu određene količine biokemijskih sastojaka: bjelančevina, masnoća, ugljikohidrata, vitamina itd. Te sastojke dobivaju u različitim živežnim namirnicama ili u krmi. Svaka živežna namirnica i svaka vrsta krmiva ima određenu cijenu. Problem što nastaje pri prehrani je u tome kako da izaberemo ili miješamo živežne namirnice ili krmiva da bismo na najracionalniji način zadovoljili potrebe za biokemijskim sastojcima.

Problemi te vrste dovode nas pri matematičkoj obradi na rješavanje linearnih programa. Kao svakom problemu lineranog programiranja možemo i problemima smjese pristupiti na dva načina. Ili kao primarnim ili kao njima odgovarajućim dualnim linearnim programima; to ovisi o izboru funkcije cilja. Kod primarnog linearnog programa smjese postavimo zahtjev da ukupni troškovi za nabavu živežnih namirnica ili krmiva trebaju biti najmanji; kod njemu odgovarajućeg dualnog linearnog programa, međutim, tražimo da vrijednost nabavljenih biokemijskih sastojaka treba biti najveća. Kod oba načina rješavanja dobivamo iste rezultate. U nastavku ćemo obrađivati problem smjese, i to prvo kao primarni i zatim kao dualni problem linearnog programiranja.

a) *Primarni problem*

Dva tipa vitamina A i B možemo kupiti u dva tipa tableta P i Q. Tableta P sadrži 4 jedinice vitamina A i 3 jedinice vitamina B; a tableta Q sadrži jednu jedinicu vitamina A i 4 jedinice vitamina B. Tableta P stoji 17, a tableta Q 14 novčanih jedinica. Kupnjom tableta želimo dobiti najmanje 7 jedinica vitamina A i 15 jedinica vitamina B. Koliko tableta svakoga tipa trebamo kupiti da bismo zadovoljili zahtjev za vitaminima i da bi troškovi kupnje bili najmanji?

Podatke za ovaj problem smjese daje tabela 1. U njoj x znači broj tableta tipa P, a y broj tableta tipa Q.

TABELA 1. PRIMARNI PROBLEM SMJESE

		Tablete		Potrebe
		P	Q	
Vitamini	A	4	1	7
	B	3	4	15
Cijene		17	14	
Količine		x	y	

Izrazimo problem u matematičkom obliku.

Kako varijable x i y znače količinu tableta, ne mogu imati negativne vrijednosti; stoga važe nejednadžbe:

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

Ako kupimo x tableta tipa P i y tableta tipa Q, dobivamo u njima $4x + y$ vitamina A; budući da ta količina ne smije biti manja od 7 jedinica, varijable odgovaraju nejednadžbi:

$$4x + y \geqq 7$$

Kupnjom x tableta tipa P i y tableta tipa Q dobivamo $3x + 4y$ jedinica vitamina B; budući da ova količina ne smije biti manja od 15 jedinica, varijable odgovaraju nejednadžbi:

$$3x + 4y \geqq 15$$

Ako kupimo x tableta tipa P i y tableta tipa Q, plaćamo $17x + 14y$ novčanih jedinica; želimo da ti troškovi budu najmanji.

Prema tome dobivamo ovaj matematički oblik problema:

Treba odrediti vrijednosti varijabla x i y koje odgovaraju nejednadžbama:

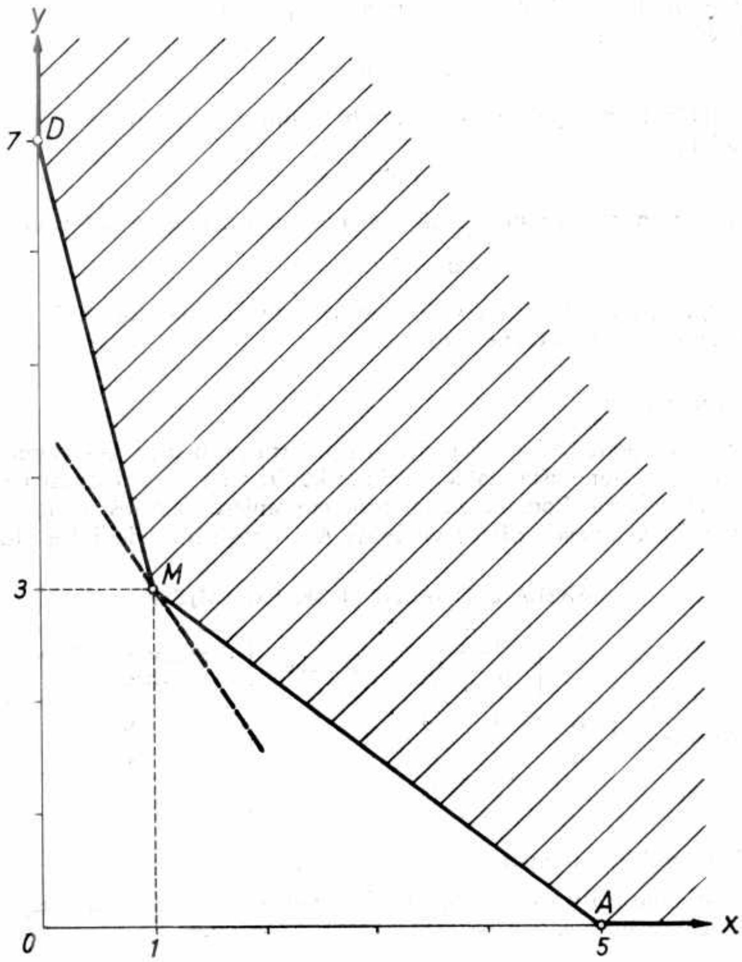
$$\begin{aligned} x \geqq 0,\quad y &\geqq 0 \\ 4x + y &\geqq 7 \\ 3x + 4y &\geqq 15 \end{aligned}$$

tako da je vrijednost funkcije cilja:

$$f(x,y) = 17x + 14y$$

najmanja.

Kako su sve nejednadžbe linearne i kako je i funkcija cilja linearna funkcija varijabla, riječ je o problemu linearnog programiranja. Kao što vidimo na slici 9,



Sl. 9. Primarni problem smjese

problem možemo riješiti grafički u kartezijskom koordinatnom sistemu x0y u ravnini. U tom koordinatnom sistemu svaka točka T (x,y) predstavlja nabavu x tableta tipa P i y tableta tipa Q; toj nabavi ili toj točki odgovara vrijednost funkcije cilja $17x + 14y$.

Nabave što odgovaraju svim uvjetnim nejednadžbama prikazuju na slici točke iscrtkanog polja. Na tom polju funkcija cilja ima najmanju vrijednost u točki M (1,3). Stoga linearni program ima slijedeće optimalno moguće rješenje:

$$x = 1, \quad y = 3,$$

kojem odgovara najmanja vrijednost 59 funkcije cilja.

Potrebne vitamine nabavit ćemo najjeftinije ako kupimo jednu tabletu tipa P i 3 tablete tipa Q, što stoji 59 novčanih jedinica; takvom kupnjom dobivamo točno 7 jedinica vitamina A i 15 jedinica vitamina B.

Pogledamo još koliko pri toj najpovoljnijoj kupnji vrijede jedinice vitamina A i B. Označimo u tu svrhu vrijednost 1 jedinice vitamina A sa u i vrijednost 1 jedinice vitamina B sa v. Kako tableta tipa P stoji 17 novčanih jedinica, vrijednosti u i v odgovaraju jednadžbi:

$$4u + 3v = 17$$

Budući da tableta tipa Q stoji 14 novčanih jedinica, vrijednosti u i v odgovaraju još i jednadžbi:

$$u + 4v = 14$$

Ako riješimo sistem ovih dviju jednadžbi s nepoznanicama u i v, dobivamo rješenje:

$$u = 2, \quad v = 3$$

Pri najpovoljnijoj nabavi tableta vrijednost je jedinice vitamina A 2, a vrijednost jedinice vitamina B 3 novčane jedinice.

b) *Dualni problem*

Uzmimo iste podatke kao za prijašnji primarni problem i rješavajmo problem smjese s drukčijeg stanovišta: tablete želimo kupiti tako da vrijednost nabavljenih vitamina bude najveća. Podatke za taj problem smjese daje još jednom tabela 2. U njoj u znači vrijednost jedinice vitamina A i v vrijednost jedinice vitamina B.

TABELA 2. DUALNI PROBLEM SMJESE

		Tablete		Potrebe	Vrijednost jedinice vitamina
		P	Q		
Vitamini	A	4	1	7	u
	B	3	4	15	v
Cijene		17	14		

Izrazimo problem u matematičkom obliku.

Kako varijable u i v znače vrijednosti vitamina, ne mogu imati negativne vrijednosti; stoga važe nejednadžbe:

$$u \geqq 0, \quad v \geqq 0$$

Vrijednost vitamina u tableti tipa P iznosi $4u + 3v$ novčanih jedinica i nije veća od cijene te tablete, koja iznosi 17 novčanih jedinica; stoga varijable u i v odgovaraju nejednadžbi:

$$4u + 3v \leqq 17$$

Vrijednost vitamina u tableti tipa Q iznosi $u + 4v$ novčanih jedinica i nije veća od cijene te tablete 14 novčanih jedinica; stoga varijable odgovaraju još i nejednadžbi:

$$u + 4v \leqq 14$$

Ako kupimo 7 jedinica vitamina A i 15 jedinica vitamina Q, vrijednost nabavljenih vitamina je

$$7u + 15v$$

novčanih jedinica. Želimo da ta vrijednost bude najveća. Prema tome dobivamo slijedeći matematički oblik dualnog problema:

Treba odrediti vrijednosti varijabla u i v koje odgovaraju nejednadžbama:

$$\begin{aligned} u \geqq 0,\ v &\geqq 0 \\ 4u + 3v &\leqq 17 \\ u + 4v &\leqq 14 \end{aligned}$$

tako da vrijednost funkcije cilja:

$$g(u,v) = 7u + 15v$$

bude najveća.

Kako su sve nejednadžbe linearne i kako je i funkcija cilja linearna funkcija varijabla u i v, to je i dualni problem problem linearnog programiranja. Kao što vidimo na sl. 10, rješavamo ga u kartezijskom koordinatnom sistemu u 0 v u ravnini. U njemu proizvoljna točka T (u,v) predstavlja sistem vrijednosti u vitamina A i vrijednosti v vitamina B; toj točki ili tom sistemu vrijednosti odgovara vrijednost $7u + 15v$ nabavljenih vitamina.

Parove vrijednosti u i v, koje odgovaraju svim uvjetnim nejednadžbama, prikazuju točke iscrtkanog četverokuta OAMB. Funkcija cilja g (u,v) ima najveću vrijednost u točki M (2,3). Stoga dualni problem ima optimalno moguće rješenje:

$$u = 2, \quad v = 3,$$

kojem odgovara najveća vrijednost 59 funkcije cilja. Taj se rezultat slaže s rezultatom koji smo dobili nakon rješenja primarnog problema.

Pri najpovoljnijoj kupnji vrijednost je 1 jedinice vitamina A 2 i 1 jedinice vitamina B 3 novčane jedinice; ukupna je vrijednost nabavljenih vitamina 59 novčanih jedinica.

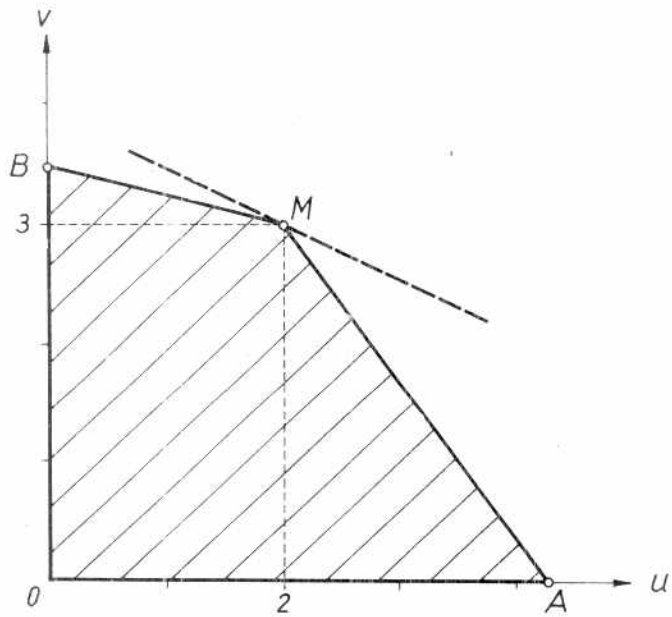
Pogledajmo koliko ćemo tableta kupiti kod takve najpovoljnije nabave. Kao prije neka x znači broj tableta tipa P i y broj tableta tipa Q. Ako kupimo x tableta tipa P i y tableta tipa Q, dobivamo $4x + y$ jedinica vitamina A i $3x + 4y$ jedinica vitamina B; kako smo kupili 7 jedinica vitamina A i 15 jedinica vitamina B, varijable x i y odgovaraju sistemu dviju jednadžbi:

$$\begin{aligned} 4x + y &= 7 \\ 3x + 4y &= 15 \end{aligned}$$

Iz tog sistema jednadžbi izračunamo:

$$x = 1, \quad y = 3$$

Pri najpovoljnijoj kupnji nabavljamo 1 tabletu tipa P i 3 tablete tipa Q, što stoji 59 novčanih jedinica. Tako smo dobiti isti rezultat kao u primarnom programu.



Sl. 10. Dualni problem smjese

Vježbe

1. Prva namirnica sadrži 3 jedinice prvog i 1 jedinicu drugog sastojka, druga namirnica sadrži 1 jedinicu prvog i 4 jedinice drugog sastojka. Cijena prve namirnice je 2, a druge 1 novčana jedinica. Kupnjom namirnica želimo dobiti najmanje 6 jedinica prve i najmanje 13 jedinica drugog sastojka. Koliko od svake namirnice treba kupiti da zadovoljimo zahtjeve i da utrošimo najmanje novca? Riješi zadatak kao primarni i kao dualni problem!

(Primarni: 1, 3; 5. Dualni: 7/11, 1/11; 5)

2. 1 kg kruha stoji 6 novčanih jedinica i sadrži 2000 kalorija i 50 g bjelančevina; 1 kg sira stoji 21 novčanu jedinicu i sadrži 4000 kalorija i 200 g bjelančevina. Koliko kruha i koliko sira treba kupiti da bi u obje namirnice zajedno bilo najmanje 3000 kalorija i najmanje 100 g bjelančevina i da bismo potrošili najmanje novca?

1 kg, 0,25; 11,25)

3. Meso sadrži 20% bjelančevina i 2% ugljikohidrata, a krumpir 1% bjelančevina i 20% ugljikohidrata. 1 kg mesa stoji 25 novčanih jedinica, a krumpira 1,5 novčanih jedinica. Koliko mesa i krumpira treba kupiti da bismo dobili najmanje 4,6 dkg bjelančevina i najmanje 40,26 dkg ugljikohidrata te da bismo potrošili najmanje novaca?

(13, 200; 6,25)

9. Proizvodni problemi

Proizvodni problemi pripadaju najznačajnijem tipu problema linearnog programiranja. Kod njih se radi i o iskorištenju ograničenih proizvodnih faktora s namjerom da se postigne najveći gospodarski efekt.

Obradimo slijedeći proizvodni problem: Proizvodno poduzeće ima na raspolaganju tri vrste sirovina; od prve sirovine A ima na raspolaganju 21 jedinicu, od druge sirovine B ima 24 jedinice a od treće sirovine C 16 jedinica. Od tih se sirovina izrađuju dvije vrste proizvoda: proizvodi tipa P i proizvodi tipa Q. U proizvodnji jedne jedinice proizvoda P potroši se 1 jedinica sirovine A, 2 jedinice sirovine B i 2 jedinice sirovine C; u proizvodnji 1 jedinice proizvoda Q potroši se 3 jedinice sirovine A, 3 jedinice sirovine B i 1 jedinica sirovine C. Poduzeće te proizvode prodaje i dobiva za 1 jedinicu proizvoda P 5, a za 1 jedinicu proizvoda Q 4 novčane jedinice. Kako da poduzeće programira proizvodnju da bi od prodanih proizvoda imalo najveći prihod?

Podaci su za taj problem sakupljeni u tabeli 1. U njoj x znači broj jedinica proizvoda P a y broj jedinica proizvoda Q.

TABELA 2. PROIZVODNI PROBLEM

		Proizvodi		Zaliha sirovina
		P	Q	
Sirovine	A	1	3	21
	B	2	3	24
	C	2	1	16
Cijene		5	4	
Količine proizvoda		x	y	

Izrazimo problem u matematičkom obliku. Kako varijable x i y znače količine proizvoda, ne mogu imati negativne vrijednosti i odgovaraju nejednadžbama:

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

Ako poduzeće izradi x jedinica proizvoda P i y jedinica proizvoda Q, potroši $x + 3y$ jedinica sirovine A; kako te sirovine ima na raspolaganju najviše 21 jedinicu, varijable odgovaraju nejednadžbi:

$$x + 3\,y \leqq 21$$

Za takvu proizvodnju poduzeće potroši još $2x + 3y$ jedinica sirovine B; kako te sirovine nema na raspolaganju više od 24 jedinice, varijable odgovaraju nejednadžbi:

$$2x + 3y \leqq 24$$

Medutim poduzeće potroši još $2x + y$ jedinica sirovine C; kako te sirovine može potrošiti najviše 16 jedinica, to odgovaraju varijable još i nejednadžbi:

$$2x + y \leqq 16$$

Ako poduzeće proda x jedinica proizvoda P i y jedinica proizvoda Q, dobiva prihod od $5x + 4y$ novčanih jedinica i taj prihod treba da bude najveći.

Prema tome dobivamo slijedeći matematički oblik problema:

Treba odrediti vrijednosti varijabla x i y koje odgovaraju nejednadžbama:

$$\begin{aligned} x \geqq 0,\quad y &\geqq 0 \\ x + 3y &\leqq 21 \\ 2x + 3y &\leqq 24 \\ 2x + y &\leqq 16 \end{aligned}$$

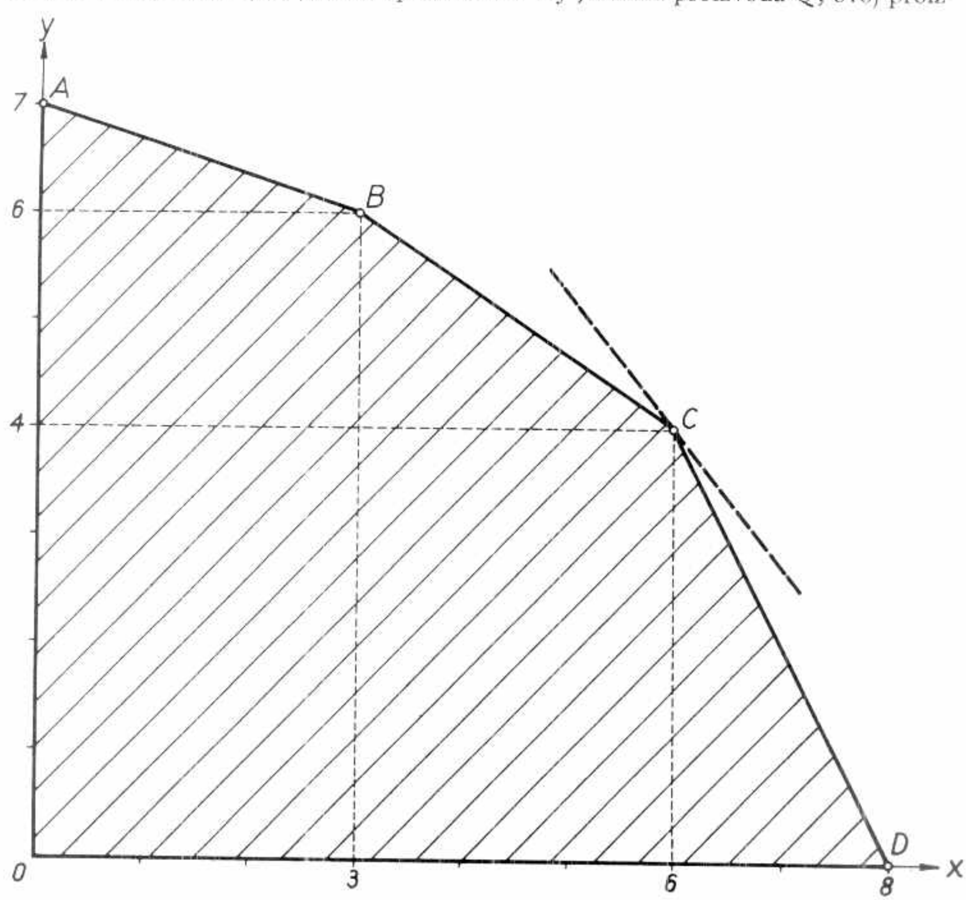
tako da funkcija cilja:

$$f(x,y) = 5x + 4y$$

ima najveću vrijednost.

Kako su sve nejednadžbe linearne i kako je i funkcija cilja linearna funkcija varijabla x i y, riječ je o problemu linearnog programiranja.

Kako vidimo na slici 11, problem rješavamo grafički u kartezijskom koordinatnom sistemu x 0 y. Svaka točka T (x,y) predstavlja proizvodnu strukturu u kojoj poduzeće izrađuje x jedinica proizvoda P i y jedinica proizvoda Q; ovoj proiz-



Sl. 11. Proizvodni problem

vodnoj strukturi odgovara prihod od $5x + 4y$ novčanih jedinica. Proizvodne strukture koje odgovaraju svim uvjetnim nejednadžbama prikazuju točke iscrtkanog peterokuta OABCD. Na tom peterokutu funkcija cilja ima najveću vrijednost 46 u točki C (6,4). Stoga proizvodni problem ima optimalno moguće rješenje:

$$x = 6, \quad y = 4$$

kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja 46 novčanih jedinica.

Prema tome, poduzeće dobiva najveći prihod od 46 novčanih jedinica ako izradi 6 jedinica proizvoda P i 4 jedinice proizvoda Q.

Pogledajmo kako poduzeće iskorištava raspoložive količine sirovina po tom optimalnom proizvodnom programu. Ako izradi 6 jedinica proizvoda P i 4 jedinice proizvoda Q, potroši

$$6.1 + 4.3 = 18$$

jedinica sirovine A,

$$6.2 + 4.3 = 24$$

jedinice sirovine B i

$$6.2 + 4.1 = 16$$

jedinica sirovine C. Pri optimalnom proizvodnom programu poduzeća iskoristi sve raspoložive količine sirovina B i C, a od raspoložive 24 jedinice sirovine A iskoristi svega 18 jedinica.

Riješimo još pitanje kako se mijenja optimalni proizvodni program ako se mijenja struktura cijena proizvoda. Uzmimo u tu svrhu da je cijena proizvoda P jednaka p i da je cijena proizvoda Q jednaka q novčanih jedinica.

Uz to ostaju sve prijašnje uvjetne nejednadžbe linearnog programa nepromijenjene stoga točke iscrtkanog peterokuta na sl. 11. prikazuju moguća rješenja. Osim apscise i ordinate taj peterokut omeđuju još i slijedeći pravci:

a) pravac kroz uglove A i B s jednadžbom $x + 3y = 24$ i s koeficijentom pravca $-1/3$,

b) pravac kroz uglove B i C s jednadžbom $2x + 3y = 24$ i s koeficijentom pravca $-2/3$,

c) pravac kroz uglove C i D s jednadžbom $2x + y = 16$ i s koeficijentom pravca -2.

Peterokut mogućih rješenja ima pored koordinatnog ishodišta još i uglove:

$$A\,(0,7), \quad B\,(3,6), \quad C\,(6,4), \quad D\,(8,0)$$

Kod promjenljivih cijena p i q funkcija cilja ima oblik:

$$f\,(x,y) = px + qy$$

i koeficijent pravca $-p/q$.

Pogledajmo optimalna moguća rješenja linearnog programa uz različite strukture cijena proizvoda. Pri promjeni strukture cijena razlikujemo s obzirom na optimalna rješenja slijedećih 7 mogućnosti:

1. *mogućnost*. Proizvod Q je više od 3 puta skuplji od proizvoda P, tako da omjer njihovih cijena odgovara nejednadžbi:

$$0 \leqq p/q < 1/3$$

Pri toj mogućnosti koeficijent pravca funkcije cilja veći je od koeficijenta pravca kroz točke A i B. Stoga linearni program ima svega jedno optimalno moguće rješenje u točki A (0,7). Poduzeće izradi 7 jedinica proizvoda Q i obustavlja proizvodnju proizvoda P.

2. *mogućnost*. Proizvod Q je točno 3 puta skuplji od proizvoda P, tako da omjer njihovih cijena odgovara jednadžbi:

$$p/q = 1/3$$

Pri toj mogućnosti koeficijent pravca funkcije cilja jednak je koeficijentu pravca kroz točke A i B. Stoga linearni program ima bezbroj optimalnih mogućih rješenja, i to u točkama A (0,7) i B (3,6) i svim točkama njihove spojnice.

3. *mogućnost*. Omjer cijena proizvoda odgovara nejednadžbi:

$$1/3 < p/q < 2/3$$

Koeficijent pravca funkcije cilja manji je od koeficijenta pravca kroz točke A i B i veći od koeficijenta pravca kroz točke B i C. Stoga linearni program ima svega jedno optimalno moguće rješenje u točki B (3,6).

4. *mogućnost*. Omjer cijena proizvoda odgovara jednadžbi:

$$p/q = 2/3$$

Koeficijent pravca funkcije cilja jednak je koeficijentu pravca kroz točke B i C. Stoga linearni program ima beskonačno mnogo optimalnih rješenja, i to u točkama B (3,6) i C (6,4), te u svim točkama njihove spojnice.

5. *mogućnost*. Omjer cijena proizvoda odgovara nejednadžbi:

$$2/3 < p/q < 2$$

Koeficijent pravca funkcije cilja manji je od koeficijenta pravca kroz točke B i C i veći od koeficijenta pravca kroz točke C i D. Stoga linearni program ima svega jedno optimalno rješenje u točki C (6,4).

6. *mogućnost*. Proizvod P točno je dva puta skuplji od proizvoda Q, tako da omjer njihovih cijena odgovara jednadžbi:

$$p/q = 2$$

Koeficijent pravca funkcije cilja jednak je koeficijentu pravca kroz točke C i D. Stoga linearni program ima beskonačno mnogo rješenja, i to u točkama C (6,4) i D (8,0), te u svim točkama njihove spojnice.

7. *mogućnost*. Proizvod P više je od dva puta skuplji od proizvoda Q, tako omjer njihovih cijena odgovara nejednadžbi:

$$p/q > 2$$

Koeficijent pravca funkcije cilja manji je od koeficijenta pravca kroz točke C i D. Stoga linearni program ima svega jedno optimalno rješenje u točki D (8,0). Poduzeće obustavlja proizvodnju proizvoda Q i izradi 8 jedinica proizvoda P.

Vježbe

1. Proizvodni odjel sa 2 različita stroja obrađuje 2 tipa komadnih proizvoda. Komad prvog proizvoda obrađuje na oba stroja po 2 jedinice vremena; komad drugoga proizvoda obrađuje na prvom stroju 3, a na drugom stroju 1 jedinicu vremena. Odjel ima na raspolaganju prvi stroj 8, a drugi 4 jedinice vremena. Vrijednost prvoga proizvoda je 4, a drugoga 3 novčane jedinice. Kako da odjel programira obradu da bi proizveo najveću vrijednost?

(1, 2; 10)

2. Poduzeće izrađuje 2 tipa proizvoda od 3 sirovine. Od prve sirovine ima na raspolaganju 15, od druge 7 i od treće 5 jedinica. Pri izradi jedinice prvoga proizvoda potroši po 1 jedinicu svake sirovine; pri izradi jedinice drugoga proizvoda potroši 3 jedinice prve i 1 jedinicu druge sirovine. Prodajna cijena prvoga proizvoda je 2, a drugoga 1 novčanu jedinicu. Kako da poduzeće programira proizvodnju da bi utržak od prodaje proizvoda bio najveći?

(5, 2; 12)

3. Poduzeće sa 4 proizvodna faktora proizvodi 2 tipa proizvoda. Kod proizvodne jedinice prvoga proizvoda potroši uzastopce po 5, 19, 31 i 21 jedinicu sirovina, kod proizvodne jedinice drugoga proizvoda potroši uzastopce po 16, 26, 22 i 5 jedinica sirovina. Poduzeće ima na raspolaganju sirovina uzastopce po 1296, 2454, 3942 i 1785 jedinica. Jedinicu prvoga proizvoda poduzeće prodaje po 6, jedinicu drugoga proizvoda po 2 novčane jedinice. Kako da poduzeće programira proizvodnju da bi imalo najveći prihod od prodane robe?

(80, 21; 521)

Drugi dio

LINEARNA ALGEBRA

III. DETERMINANTE

1. Determinante drugoga i trećega reda

Determinante drugoga reda. Determinanta drugoga reda sastoji se od četiri broja, koji su raspoređeni u dva retka i dva stupca; pišemo je i definiramo ovako:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinantu drugoga reda izračunamo tako da od produkta brojeva na glavnoj dijagonali odbijemo produkt brojeva na sporednoj dijagonali.

Primjer:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 3 - (-2) \cdot 4 = -1.$$

Determinante drugoga reda upotrebljavamo pri rješavanju sistema dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Uzmimo sistem dviju uređenih linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice, koje radi preglednosti napišemo s indeksima ovako:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Koeficijenti nepoznanica imaju po dva indeksa; prvi indeks pokazuje kojoj nepoznanici pripada koeficijent, a drugi indeks u kojoj se jednadžbi pojavljuje. Ako riješimo taj sistem jednadžbi, dobivamo:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Brojnici i nazivnici u ova dva razlomka imaju jednak sastav; sva četiri izraza su diferencije produkata koji imaju po dva faktora. Stoga možemo napisati oba korijena sistema jednadžbi s determinantama ovako:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$$

Determinantu:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

nazivamo *determinantom sistema jednadžbi*; tu determinantu tvore sva četiri koeficijenta na lijevoj strani jednadžbi. Da bi sistem jednadžbi bio rješiv, mora biti $D \neq 0$. Determinantu D_1 dobivamo tako da u determinanti D nadomjestimo oba elementa u prvom stupcu s oba poznata člana na desnoj strani jednadžbi. Determinantu D_2 dobivamo tako da u determinanti D nadomjestimo oba elementa u drugom stupcu poznatim članovima jednadžbi.

Primjer. Riješimo pomoću determinanata sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} -3x + 4y &= 11 \\ 2x - 5y &= -12 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ -12 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{11(-5) - 4(-12)}{(-3)(-5) - 2.4} = \frac{-7}{7} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 2 & -12 \end{vmatrix}}{7} = \frac{(-3)(-12) - 2.11}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

Determinante trećega reda. Determinanta trećega reda računska je operacija sa 9 brojeva, koji su uređeni u tri retka i u tri stupca; pišemo je i definiramo ovako:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

Praktički izračunamo determinantu trećeg reda po slijedećoj uputi: determinantu produžimo udesno tako da joj pripišemo prvi i drugi stupac i sastavimo po dijagonalama produkte po tri broja; produkti brojeva koji leže na padajućim dijagonalama su pozitivni, a produkti brojeva koji leže na rastućim dijagonalama su negativni. Računanje po toj uputi predočimo shemom:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

Primjer:

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right. = 1.1.2 + 2.2.4 + 5.3.3 - 4.1.5 - 3.2.1 - 2.3.2 = 25$$

Determinante trećega reda upotrebljavamo pri rješavanju sistema triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice. Uzmimo uređen sistem triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Ako riješimo taj sistem jednadžbi, dobivamo za prvu nepoznanicu izraz:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{13}b_2a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 - a_{13}a_{22}b_2 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

Brojnik i nazivnik ovog razlomka možemo napisati u obliku determinanti pa dobivamo:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Determinantu D nazivamo *determinantom sistema jednadžbi*; ona je sastavljena od svih devet koeficijenata s lijeve strane jednadžbi. Da bi sistem jednadžbi bio rješiv, mora biti $D \neq 0$. Slično dobivamo još i za druge dvije nepoznanice:

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Determinantu D_1 dobivamo tako da u determinanti D nadomjestimo prvi stupac poznatim članovima s desne strane jednadžbi; determinantu D_2 dobivamo tako da u determinanti D nadomjestimo drugi stupac poznatim članovima, a determinantu D_3 dobivamo iz determinante D tako da u njoj treći stupac nadomjestimo poznatim članovima.

Primjer. Riješimo sistem triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$5x - 6y + 4z = 3$$
$$3x - 3y + 2z = 2$$
$$4x - 5y + 2z = 1$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Vježbe

1. Izračunaj determinante drugoga reda:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ (-8)

b) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 14 \end{vmatrix}$ (43)

c) $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ x & 1 \end{vmatrix}$ (0)

2. Riješi pomoću determinanti sisteme dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

a) $4x + 3y = 17$ i $5x - y = 7$; $(x = 2,\ y = 3)$
b) $4x + 7y = -5$ i $3x - 2y = -7$; $(x = -3,\ y = 1)$
c) $3x + 4y = 8$ i $2x - y = 5$ $(x = 28/11,\ y = 1/11)$

3. Odredi pomoću determinanti sjecište pravaca koji imaju jednadžbe:

a) $2x + 3y = 5$ i $4x + y = 5$; $(P\,(1,1))$
b) $7x + 8y = 23$ i $6x - 5y = 16$; $(P\,(1,2))$
c) $4x + 3y = 25$ i $x - y = 7$. $(P\,(4,3))$

4. Odredi u ravninskom koordinatnom sistemu skup točaka koje zadovoljavaju nejednadžbe:

a) $0 \leqq x \leqq 4,\quad 0 \leqq y \leqq 6,\quad x + y \leqq 6,\quad x + y \geqq 3$;
b) $x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad x + y \geqq 3,\quad x + y \leqq 5$;
c) $0 \leqq x \leqq 5,\quad y \geqq 0,\quad x + 3y \leqq 15,\quad x + y \leqq 7$.

5. Izračunaj determinante trećega reda:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \end{vmatrix}$ (100)

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ (0)

c) $\begin{vmatrix} 1 - x & x & x \\ x & 1 + x & x \\ x & x & 1 + x \end{vmatrix}$ $(3x + 1)$

6) Riješi sisteme triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y + 3z &= 7 \\ 2x - 3y - z &= 0, \end{aligned}$$
$(x = 1,\ y = 0,\ z = 2)$

b) $2x + 3y + z = 22$
$x + 2y + z = 16$
$x + y + 3z = 24.$ $(x = 2,\ y = 4,\ z = 6)$

7) Izračunaj u prostornom kartezijskom koordinatnom sistemu sjecište ravnina s jednadžbama: $x + y + z = 6$, $2x + y + z = 7$ i $x + 2y + 3z = 14$.

(P (1,2,3))

2. Definicija determinante

Permutacije. Uzmimo n različitih elemenata koje označimo uzastopce brojkama 1, 2, ..., n. Između dva elementa viši je onaj koji je označen većom brojkom. Kompleksije u kojima nastupaju svi ti elementi samo jedanput i koje se razlikuju samo po rasporedu elemenata nazivamo permutacijama. Iz svake permutacije možemo dobiti svaku drugu permutaciju odgovarajućim premještanjem elemenata. Između dvije permutacije viša je ona u kojoj idući slijeva udesno prije naiđemo na viši element.

Broj različitih permutacija n elemenata izračunamo po obrascu:

$$P_n = 1,\ 2,\ \ldots,\ n = n!$$

koji možemo dokazati matematičkom indukcijom.

Pojavu da u permutaciji viši element nastupa ispred nižega, nazivamo inverzijom. Permutacija:

$$5 \quad 1 \quad 4 \quad 3 \quad 2$$

ima 7 inverzija jer 5 stoji ispred 1, 5 ispred 4, 5 ispred 3, 5 ispred 2, 4 ispred 3, 4 ispred 2 i 3 ispred 2. Permutacije dijelimo u dva razreda, u parne i neparne. Permutacija je *parna* ako ima parni broj inverzija, a *neparna* ako ima neparni broj inverzija.

Ispred svake permutacije:

$$i_1\, i_2 \ldots,\, i_n$$

elemenata 1, 2, ..., n pišemo broj:

$$\delta\,(i_1\, i_2 \ldots i_n)$$

Taj je broj jednak $+1$ ako je permutacija parna, a -1 ako je permutacija neparna.

Primjer. Od dva elementa 1 i 2 sastavimo

$$P_2 = 1.2 = 2! = 2$$

permutacije; permutacije uređene po visini s odgovarajućim brojevima δ jesu:

$$1 \quad 2 \quad \delta\,(12) = +1 \text{ parna}$$
$$2 \quad 1 \quad \delta\,(21) = -1 \text{ neparna}$$

Primjer. Od tri elementa 1, 2 i 3 sastavimo

$$P_3 = 1.2.3 = 3! = 6$$

permutacija; permutacije uređene po visini s odgovarajućim brojevima δ jesu:

1 2 3	$\delta(123) = +1$	parna
1 3 2	$\delta(132) = -1$	neparna
2 1 3	$\delta(213) = -1$	neparna
2 3 1	$\delta(231) = +1$	parna
3 1 2	$\delta(312) = +1$	parna
3 2 1	$\delta(321) = -1$	neparna

Zamjena dvaju susjednih elemenata u permutaciji nazivamo *transpozicijom*. Svaka transpozicija pretvara parnu permutaciju u neparnu i obrnuto neparnu u parnu jer se transpozicijom broj inverzija promijeni za 1.

Zamjena dviju proizvoljnih elemenata u permutaciji također pretvara parnu permutaciju u neparnu i neparnu u parnu. To možemo uvidjeti ovako: uzmimo permutaciju:

$$\ldots a \ldots b \ldots,$$

u kojoj između elemenata a i b ima r elemenata. Elemente a i b zamijenimo tako da prvo tjeramo element a samim transpozicijama preko r međuelemenata pred element b. Za to je potrebno r transpozicija. Nakon toga tjeramo samim transpozicijama element b preko elementa a i preko r međuelemenata na mjesto gdje je prije bio element a; za to je potrebno $r + 1$ transpozicija. Za zamjenu elemenata a i b ukupno je potrebno $2r + 1$ transpozicija; stoga pri zamjeni parna permutacija prelazi u neparnu a neparna u parnu.

Definicija determinante. Determinanta reda n sastoji se od n^2 brojeva koji su uređeni u n redaka i u n stupaca; pišemo je ovako:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}| \quad (i,j = 1, 2, \ldots, n)$$

Pri tom prvi indeksi označuju redak, a drugi indeksi stupac u koji spada element.

Vrijednost determinante izračunamo na način da najprije sastavimo sve moguće produkte po n faktora, tako da u svaki produkt dođe po jedan element iz svakoga retka i po jedan element iz svakoga stupca, potom svakom produktu dademo odgovarajući predznak i konačno sve produkte zbrojimo ili odbijemo. Po toj uputi možemo vrijednost determinante izračunati na dva načina.

Po prvom načinu računanja počinjemo s recima. Kako u svaki produkt dolazi po jedan element iz svakoga retka, uredimo faktore tako da prvi indeksi faktora rastu od 1 do n; zato sve produkte s uređenim prvim indeksima pišemo ovako:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Budući da u svaki produkt dolazi po jedan element iz svakoga stupca, to su u svakom produktu indeksi na drugom mjestu različiti; svaki od brojeva 1, 2, ..., n, dolazi u svakom produktu u određenoj permutaciji po jedanput na drugo mjesto. Stoga produkte pišemo u obliku:

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

Ovdje su drugi indeksi različiti. Sve moguće produkte dobivamo tako da na mjesta drugih indeksa postavljamo sve moguće permutacije brojeva 1, 2, ..., n. Kako tih permutacija ima n!, dobivamo ukupno n! produkata. Zatim produktima odredimo predznake po uvoj uputi: produktu damo pozitivan predznak ako je permutacija drugih indeksa parna, a negativan ako je permutacija neparna; predznakom opremljene produkte napišemo brojem δ ovako:

$$\delta(j_1 j_2 \ldots j_n)\, a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

Konačno zbrojimo sve ove predznacima opremljene produkte. U skladu s tom računskom uputom determinantu reda n dobivamo ovako:

$$D = \sum \delta(j_1 j_2 \ldots j_n)\, a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

Pri tom zbrajamo tako da zahvatimo sve permutacije drugih indeksa.

Po drugom načinu računanja determinante počinjemo sa stupcima. Budući da u svaki produkt dolazi po jedan element iz svakoga stupca, uredimo faktore tako da njihovi drugi indeksi rastu od 1 do n; stoga pišemo sve produkte s uređenim drugim indeksima ovako:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Kako u svaki produkt dolazi po jedan element iz svakoga retka, to su u svakom produktu indeksi na prvom mjestu različiti; svaki od brojeva 1, 2, ..., n dolazi u svakom produktu u određenoj permutaciji po jedanput na prvo mjesto. Stoga pišemo produkte u obliku:

$$a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n},$$

gdje su prvi indeksi različiti. Kao i prije, i ovih produkata ima n!. Nakon toga odredimo produktima predznake po uputi: produktu damo pozitivan predznak ako je permutacija prvih indeksa parna, a negativan ako je permutacija neparna. Konačno zbrojimo sve ove predznacima označene produkte. U skladu s tom računskom uputom determinantu reda n definiramo ovako:

$$D = \sum \delta(i_1 i_2 \ldots i_n)\, a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}$$

Pri tom zbrajamo tako da zahvatimo sve permutacije prvih indeksa.

Po oba načina računanja dobivamo istu vrijednost determinante, što možemo vidjeti iz slijedećeg: u oba slučaja dobivamo po n! produkata, koji su s obzirom na apsolutne vrijednosti po parovima jednaki. Treba samo još dokazati da svaki produkt ima po oba načina računanja isti predznak. Uzmimo neki produkt koji po prvom načinu ima oblik:

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

a po drugom načinu oblik:

$$a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}$$

Iz prvoga produkta dobivamo drugi po određenom broju transpozicija faktora. Iz permutacije $j_1\, j_2 \ldots j_n$ drugih indeksa prvoga produkta dobivamo po određenom broju transpozicija najnižu permutaciju $1\,2 \ldots n$; uz to dobivamo iz najniže permutacije $1\; 2 \ldots n$ prvih indeksa nakon istoga broja transpozicija permutaciju $i_1\, i_2 \ldots i_n$.

Stoga je:

$$\delta\,(j_1\, j_2 \ldots j_n) = \delta\,(i_1\, i_2 \ldots i_n)$$

Iz obiju definicija determinante slijedi izreka:

Vrijednost determinante se ne mijenja ako u njoj zamijenimo retke stupcima i obrnuto ili ako determinantu zaokrenemo oko glavne dijagonale.

Iz te izreke slijedi neposredno:

Svaka izreka o determinanti koja vrijedi za retke vrijedi istovremeno i za stupce i obrnuto.

Vježbe

1. Odredi razred permutacije: 6 1 4 3 2 5. (parna)

2. Odredi:

a) δ (12345) (+1)
b) δ (316254) (+1)
c) δ (52134) (−1)

3. Izračunaj determinantu drugoga reda:

$$D = |a_{ij}| \qquad (i, j = 1,2)$$

na oba načina prema općoj definiciji determinante.

4. Izračunaj determinantu trećega reda:

$$D = |a_{ij}| \quad (i, j = 1,2,3)$$

na oba načina prema općoj definiciji determinante.

5. Sastavi od elemenata 1, 2, 3 i 4 sve po visini uređene permutacije i odredi svakoj permutaciji broj δ.

6. Upotrijebi rezultate prijašnjeg zadatka i izračunaj determinantu četvrtoga reda:

$$D = |a_{ij}| \quad (i, j = 1,2,3,4)$$

prema općoj definiciji determinante.

3. Osobine determinante

Kako svaka izreka o determinantama vrijedi za njezine retke i automatski i za njezine stupce i obrnuto, mi ćemo izreke o determinantama izražavati ili samo za retke ili samo za stupce, a vrijede svakako za oboje.

Ako su svi elementi nekoga retka jednaki 0, vrijednost determinante jednaka je 0.

Izreka je jasna jer se u definiciji determinante nalazi u svakom produktu po jedan faktor iz svakoga retka; stoga svaki produkt ima po jedan faktor koji je jednak 0; zato su svi produkti jednaki 0, a i njihova je suma jednaka 0.

Ako u determinanti zamijenimo dva retka, promijeni se predznak determinante, ali se ne mijenja njezina apsolutna vrijednost.

Svaku zamjenu dvaju redaka možemo naime postići neparnim brojem transpozicija u dva susjedna retka. Svaka transpozicija susjednih redaka prouzrokuje u definiciji determinante po jednu transpoziciju faktora u svakom produktu; zbog toga svaki produkt mijenja samo svoj predznak a i svota produkata mijenja isto tako samo svoj predznak.

Ako determinanta ima dva jednaka retka, njezina je vrijednost jednaka 0.

Izreka je posljedica prijašnje izreke. Pretpostavimo da je vrijednost prvobitne determinante jednaka D; ako u njoj zamijenimo oba jednaka retka, determinanta dobiva suprotnu vrijednost $-$ D. Kako je riječ o jednakosti redaka, njihovom zamjenom vrijednost determinante se ne mijenja, vrijedi jednadžba $D = -D$; to je međutim moguće samo ako je $D = 0$.

Ako sve elemente nekoga retka pomnožimo proizvoljnim brojem, vrijednost determinante pomnoži se tim brojem.

Izreka je jasna; u definiciji determinante u svakom produktu nastupa po jedan faktor koji je pomnožen spomenutim brojem; taj zajednički faktor pak možemo u sumi produkata izlučiti, pa dobivamo spomenutim brojem pomnoženu vrijednost determinante.

Iz netom dokazane izreke slijedi obrnuta izreka:

Ako svi elementi nekoga retka imaju neki zajednički faktor, možemo taj faktor izlučiti.

Ako su svi elementi nekoga retka izravno proporcionalni homolognim elementima nekoga drugog retka, onda je vrijednost determinante jednaka 0.

Po prijašnjoj izreci možemo izlučiti zajednički faktor proporcionalnosti pa dobivamo determinantu s dva jednaka retka; ova je determinanta jednaka 0.

Ako su, uza sve druge jednake stupce, svi elementi nekog stupca sume po dvaju sumanda, možemo determinantu raščlaniti u sumu dviju determinanti po obrascu:

$$\begin{vmatrix} \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \dots & a_{nj} + b_{nj} & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & a_{1j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{nj} & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{vmatrix}$$

Valjanost izreke slijedi iz toga što se u definiciji determinante razdjeljuje svak produkt tipa:

$$\dots (a_{ij} + b_{ij}) \dots$$

zbog distributivnosti u sumu dvaju produkata:

$$\dots a_{ij} \dots + \dots b_{ij} \dots,$$

a da se pri tom ne mijenja permutacija indeksa u produktima. Valjanost izreke možemo uopćiti na proizvoljno veći broj sumanda.

Vrijednost determinante se ne mijenja ako neki stupac pomnožimo proizvoljnim brojem i pribrojimo ga nekom drugom stupcu:

$$\begin{vmatrix} \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} + ka_{1i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} + ka_{ni} & \dots \end{vmatrix}$$

Dokaz. Ako determinantu na desnoj strani izrazimo kao sumu dviju determinanti:

$$\begin{vmatrix} \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \dots & a_{1i} & \dots & a_{1i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots \end{vmatrix}$$

prvi je sumand jednak prvobitnoj determinanti, a drugi je sumand jednak 0 jer su u njemu dva stupca jednaka, i izreka je time dokazana.

Ovom se osobinom determinante služimo pri transformiranju determinante s namjerom da dobijemo u njoj elemente koji su prikladniji za numeričko računanje.

Primjer. Izračunajmo determinantu:

$$\begin{vmatrix} 17 & 18 & 2 \\ 14 & 24 & 1 \\ 22 & 35 & 2 \end{vmatrix}$$

Determinantu najprije transformiramo tako da pomnožimo posljednji stupac sa -8 te da ga pribrojimo prvome i još da pomnožimo posljednji stupac sa -9 te da ga pribrojimo drugome; tako dobivamo determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 15 & 1 \\ 6 & 17 & 2 \end{vmatrix}$$

U toj determinanti odbijemo drugi redak od trećega pa dobivamo determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 15 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

U toj determinanti odbijemo treći redak od drugoga pa dobivamo determinantu koju izračunamo po poznatom pravilu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 13 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 6 & 13 \\ 0 & 2 \end{matrix} = 13 + 24 = 37$$

Vježbe

1. Ustanovi zašto imaju slijedeće determinante vrijednost 0:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 17 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 13 & 4 \\ 5 & 15 & 5 \\ 4 & 18 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & 13 & 7 \\ 8 & 4 & 5 \\ 7 & 13 & 7 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 18 & 3 \\ 2 & 23 & 6 \\ 3 & 26 & 9 \end{vmatrix}$

2. Izračunaj slijedeće determinante tako da ih prije na odgovarajući način transformiraš:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 25 \end{vmatrix}$ (−1)

b) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 33 & 42 \end{vmatrix}$ (3)

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 2 & 9 & 17 \\ 3 & 13 & 27 \end{vmatrix}$ (−3)

d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 21 & 14 & 11 \\ 29 & 20 & 16 \end{vmatrix}$ (−7)

4. Razvijanje determinanata

Skalarni produkt. Uzmimo dva retka brojeva:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

s jednakim brojem elemenata. Izraz:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_ib_i$$

nazivamo skalarnim produktom tih dvaju redaka.

Primjer. U determinanti:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

skalarni je produkt prvoga i trećega retka jednak:

$$3.5 + 2.2 + 5.1 = 24$$

Tip mjesta u determinanti. Mjesto u determinanti $D = |a_{ij}|$ koje zauzima neki element može biti parno ili neparno; mjesto je parno ako je suma obaju indeksa parna, a neparno ako je ta suma neparna.

Praktički određujemo parnost ili neparnost nekoga mjesta u determinanti na slijedeći način: počevši s krajnjim lijevim gornjim elementom, gdje počinjemo brojiti sa 0, brojimo po 1 idući od elementa do elementa putem koji teče samo po horizontalama ili vertikalama dok ne dođemo u brojenju do izabranog elementa; ako tom elementu odgovara parni broj, onda je njegovo mjesto parno, a ako mu odgovara neparni broj, mjesto je neparno.

Primjer. Odredimo u determinanti prijašnjeg primjera na kojem je mjestu element 6. Brojimo na primjer po putu:

$$3 \to 2 \to 4 \to 6$$

ovako:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3$$

Kako elementu 6 odgovara neparni broj 3, to element zauzima neparno mjesto.

Kofaktor. Uz svaki element a_{ij} determinante egzistira kofaktor A_{ij}, koji definiramo i izračunamo na slijedeći način: iz prvobitne determinante najprije izostavimo onaj redak i onaj stupac koji imaju element a_{ij}; tako dobivamo novu determinantu za jedan nižega reda. Potom odredimo tip mjesta koje u determinanti zauzima element a_{ij}; to je mjesto parno ako je potencija $(-1)^{i+j}$ jednaka $+1$, odnosno neparno ako je ta potencija jednaka -1. Kofaktor A_{ij} elementa a_{ij} jednak je produktu potencije $(-1)^{i+j}$ i poddeterminante koju dobivamo iz prvobitne determinante nakon crtanja i-tog retka i j-tog stupca.

Primjer. Elementi determinante prijašnjeg primjera imaju slijedeće kofaktore:

element	tip mjesta	kofaktor
$a_{11}=3$	parno	$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 6\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-8$
$a_{12}=2$	neparno	$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 6\\ 5 & 1\end{vmatrix}=29$
$a_{13}=5$	parno	$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-18$
$a_{21}=1$	neparno	$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=8$
$a_{22}=4$	parno	$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-22$
$a_{23}=6$	neparno	$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 2\end{vmatrix}=4$
$a_{31}=5$	parno	$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-8$
$a_{32}=2$	neparno	$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-13$
$a_{33}=1$	parno	$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=10$

Uzmimo determinantu $D = \| a_{ij} \|$ proizvoljnog reda n; za nju vrijedi izreka o razvijanju determinante:

Determinanta je jednaka skalarnom produktu elemenata proizvoljnog retka i kofaktora elemenata istoga retka:

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Radi lakšeg razumijevanja dokaza za ovu izreku, pokažimo njezinu valjanost za determinantu trećega reda:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinantu razvijemo po drugom retku i nakon preuređenja i povezivanja odgovarajućih produkata:

$$D = a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) =$$

$$= a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

Dokaz izreke o razvoju determinante. Determinanta reda n je suma n! produkata. Svaki element i-tog retka s određenim indeksom na drugom mjestu nastupa u toliko produkata koliko ima permutacija preostalih n-1 indeksa na drugom mjestu, dakle u $(n - 1)!$ produkata. Ako iz pojedinih skupina po $(n - 1)!$ produkata uzastopno ispostavimo elemente i-tog retka, determinanta se izrazi ovako:

$$D = a_{i1}B_{i1} + a_{i2}B_{i2} + \ldots + a_{in}B_{in}$$

Izreka će biti dokazana ako za sve parove indeksa dokažemo da je B_{ij} jednak kofaktoru A_{ij}.

Dokažimo najprije za par indeksa $i = 1$ i $j = 1$ da je $B_{11} = A_{11}$. Ako u definiciji determinante:

$$D = \sum \delta(j_1 j_2 \ldots j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

uzmemo u obzir samo one produkte u kojima nastupa element a_{11} i taj element ispostavimo, dobivamo:

$$a_{11}B_{11} = a_{11}\left(\sum \delta(j_2 \ldots j_n)\, a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}\right)$$

Suma produkata u ovom je izrazu jednaka poddeterminanti koju dobivamo ako u prvobitnoj determinanti izostavimo prvi redak i prvi stupac; kako je ta poddeterminanta jednaka kofaktoru A_{11}, slijedi iz posljednje jednadžbe da je $B_{11} = A_{11}$.

Taj dokaz možemo uopćiti za proizvoljan par indeksa i i j te dokazati da vrijedi općenito $B_{ij} = A_{ij}$. U tu svrhu promijenimo prvobitnu determinantu D tako da u njoj zamijenimo prvi i i-ti redak kao i prvi i j-ti stupac. Tom promjenom dolazi element a_{ij} u prvi redak i u prvi stupac, a u definiciji determinante se pri tom svaki produkt pomnoži faktorom $(-1)^{i+j}$. U toj transformiranoj determinanti je izraz B_{ij} jednak poddeterminanti koju dobivamo ako u njoj izostavimo prvi redak i prvi stupac; ta poddeterminanta je pak jednaka poddeterminanti pomnoženoj faktorom $(-1)^{i+j}$, koju dobivamo iz prvobitne determinante nakon crtanja i-tog retka i j-tog stupca, dakle kofaktoru A_{ij}; tako je izreka dokazana.

Ako determinantu izrazimo kao skalarni produkt elemenata nekoga retka i kofaktora elemenata istoga retka, onda je razvijemo po tom retku. Pri razvoju determinante izrazimo determinantu samim determinantama za jedan nižega reda. Stoga u numeričkom računanju vrijednosti determinante primjenjujemo izreku o razvijanju determinante. Determinantu višega reda računamo postupnim transformiranjem i razvijanjem.

Primjer. Izračunajmo determinantu petoga reda:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinantu najprije transformiramo tako da prvi stupac pomnožimo faktorom (-2) i da ga pribrojimo drugomu; tako dobivamo determinantu:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

koja u drugom stupcu ima samo jedan od 0 različit element. Stoga razvijemo determinantu po drugom stupcu i dobivamo:

$$D = 2\,(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

U toj determinanti pomnožimo posljednji redak faktorom (-3) i pribrojimo ga k prvom; tako dobivamo:

$$D = -2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ovu determinantu razvijemo po prvom retku i dobivamo determinantu trećega reda:

$$D = -2.2\,(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Tu determinantu izračunamo neposredno:

$$D = 4\,(48 + 30 + 18 - 18 - 60 - 24) = -24$$

Za determinante vrijedi još izreka:

Skalarni produkt elemenata proizvoljnog retka i kofaktora elemenata nekoga drugog retka jednak je 0:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad (i \neq j)$$

Dokaz. Kako su A_{js}, gdje je $s = 1, 2, \ldots, n$ kofaktori j-tog retka, možemo taj produkt pisati u obliku determinante u kojoj ispišemo samo i-ti i j-ti redak:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \longrightarrow \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \quad \ldots \quad a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \quad \ldots \quad a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

U pravilnost ovog načina izražavanja možemo se uvjeriti ako tu determinantu razvijemo po j-tom retku, koji je ispisan dolje. Kako ta determinanta ima dva jednaka retka, to je njezina vrijednost jednaka 0.

Vježbe

1. Izračunaj kofaktore svih četiriju elemenata u determinantama:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$ (6, −8, −3, 2)

b) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ (−2, −4, 5, 3)

2. Izračunaj kofaktore trećega stupca u determinanti:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ (11, −8, 1)

3. Izračunaj kofaktor elementa $a_{23} = 6$ determinante:

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ (0)

4. Izračunaj determinantu četvrtoga reda tako da je razviješ po drugom retku.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (44)$$

5. Uvjeri se za svaki redak i za svaki stupac determinante iz primjera na strani 57:

a) da vrijedi izreka o razvijanju determinante,

b) da je skalarni produkt elemenata svakoga retka ili stupca i kofaktora elemenata kakvoga drugog retka ili kakvoga drugog stupca jednak 0.

6. Izračunaj determinante:

a) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \qquad (21)$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 22 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad (816)$$

IV. MATRIČNA ALGEBRA

1. Osnovne računske operacije s matricama

Pravokutnu strukturu mn brojeva koji su uređeni u m redaka i n stupaca nazivamo matricom; označujemo je i pišemo ovako:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \| a_{ij} \| \qquad (i = 1, 2, \dots, m; \ j = 1, 2, \dots, n)$$

Svaki element matrice ima dva indeksa; prvi određuje redak, a drugi stupac u koji spada element. Matrica koja ima m redaka i n stupaca ima red $m \times n$.

Primjer. Obradimo mjesečnu potrošnju triju kućanstava s obzirom na potrošnju mesa, mlijeka, graha i krumpira. Prvo kućanstvo potroši mjesečno 10 kg mesa, 40 l mlijeka, 10 kg graha i 50 kg krumpira; drugo kućanstvo potroši 15 kg mesa, 60 l mlijeka, 20 kg graha i 30 kg krumpira; treće kućanstvo potroši 30 kg mesa, 30 l mlijeka i 20 kg krumpira. Strukturu potrošnje svih triju kućanstava možemo izraziti matricom reda 3×4:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 10 & 40 & 10 & 50 \\ 15 & 60 & 20 & 30 \\ 30 & 30 & 0 & 20 \end{Vmatrix}$$

Pri tom prvi redak određuje potrošnju prvoga, drugi redak potrošnju drugoga, a treći redak potrošnju trećega kućanstva; prvi stupac određuje potrošnju mesa, drugi potrošnju mlijeka, treći potrošnju graha i četvrti potrošnju krumpira.

Primjer. Razmotrimo biokemijsku strukturu mesa, mlijeka, graha i krumpira s obzirom na sadržaj bjelančevina, masnoća i ugljikohidrata. 1 kg mesa sadrži 167 g bjelančevina, 66 g masnoća i 5 g ugljikohidrata; odgovarajući podaci za mlijeko su 34 g, 32 g i 48 g, za grah 237 g, 17 g i 473 g, za krumpir 17 g, 1 g i 162 g. Biokemijsku strukturu tih namirnica možemo izraziti matricom reda 4×3.

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 167 & 66 & 5 \\ 34 & 32 & 48 \\ 237 & 17 & 473 \\ 17 & 1 & 162 \end{Vmatrix}$$

Ovdje prvi redak određuje biokemijsku strukturu mesa, drugi redak mlijeka, treći redak graha i četvrti redak krumpira; prvi stupac određuje količine bjelančevina, drugi stupac masnoća i treći stupac ugljikohidrata.

Matrica je *pravokutna* ako se broj njezinih redaka razlikuje od broja stupaca, odnosno ako je: $m \neq n$. Matrica je *kvadratna* ako ima toliko stupaca koliko i redaka, ili ako je $m = n$; broj redaka ili stupaca nazivamo *redom* kvadratne matrice.

Ako je $m = 1$, matrica ima samo jedan redak, pa je nazivamo *vektor redak*; pišemo ga ovako:

$$\mathbf{A} = \| a_1 \ a_2 \ldots a_n \| = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Ako je $n = 1$, matrica ima samo jedan stupac, pa je nazivamo *vektor stupac*; pišemo ga ovako:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a^m \end{Vmatrix} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

Nulmatricom nazivamo matricu **0** koja ima sve elemente jednake 0. Postoji bezbroj matrica **0** koje se međusobno razlikuju po redu.

Kvadratna matrica je *dijagonalna* ako su svi njezini elementi na glavnoj dijagonali različiti od 0 i ako su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki 0. Dijagonalna matrica je *skalarna* ako su svi njezini elementi na glavnoj dijagonali jednaki. *Jedinična matrica* je skalarna matrica koja ima na glavnoj dijagonali sve elemente jednake 1. Ima bezbroj jediničnih matrica koje se međusobno razlikuju po redu. Tako su npr. matrice:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{E}_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

jedinične matrice drugoga i trećega reda.

Ako je $m = n = 1$, onda matrica ima samo jedan element:

$$\mathbf{A} = \| a \| = a$$

pa je nazivamo skalarom. Za skalare vrijede računska pravila elementarne algebre.

Kvadratna matrica je simetrična ako su jednaka po dva i dva elementa što s obzirom na glavnu dijagonalu leže simetrično, tj. ako elementi zadovoljavaju jednadžbe:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Kvadratna matrica je koso simetrična ako stoje ove jednakosti:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

U koso simetričnoj matrici suprotna su po dva i dva elementa što s obzirom na glavnu dijagonalu leže simetrično, dok su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 0 jer jednakost $a_{ii} = -a_{ii}$ vrijedi samo kad je $a_{ii} = 0$.

Usporedbe matrica definiramo samo za matrice istoga reda. Ako su matrice:

$$\mathbf{A} = \| a_{ij} \| \text{ i } \mathbf{B} = \| b_{ij} \|$$

istoga reda, definiramo slijedeće odnose usporedbe:

a) Matrica **A** jednaka je matrici **B**, što izražavamo jednakošću matrice:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B},$$

ako je svaki element matrice **A** jednak homolognom elementu matrice **B**, tj. ako za sve parove indeksa važe jednadžbe:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Za jednakost matrica vrijedi

zakon refleksivnosti: $\mathbf{A} = \mathbf{A}$

zakon komutativnosti: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}$

i zakon tranzitivnosti: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \,\&\, \mathbf{B} = \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}$

b) Matrica **A** veća je od matrice **B**, što izražavamo matričnom nejednakošću:

$$\mathbf{A} > \mathbf{B},$$

ako je svaki element matrice **A** veći od homolognog elementa matrice **B**, tj. ako za sve parove indeksa važe nejednadžbe:

$$a_{ij} > b_{ij}$$

Za taj odnos vrijedi zakon tranzitivnosti: $\mathbf{A} > \mathbf{B} \,\&\, \mathbf{B} > \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A} > \mathbf{C}$. Slično je definiran i odnos:

$$\mathbf{A} \geqq \mathbf{B}.$$

koji važi, ako za sve parove indeksa važe nejednadžbe:

$$a_{ij} \geqq b_{ij}$$

c) Matrica **A** manja je od matrice **B**, što napišemo kao matričnu nejednadžbu:

$$\mathbf{A} < \mathbf{B},$$

ako je svaki element matrice **A** manji od homolognog elementa matrice **B**, odnosno ako za sve parove indeksa važe nejednadžbe:

$$a_{ij} < b_{ij}$$

Za taj odnos vrijedi zakon tranzitivnosti: $\mathbf{A} < \mathbf{B} \,\&\, \mathbf{B} < \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A} < \mathbf{C}$. Slično je definiran i odnos:

$$\mathbf{A} \leqq \mathbf{B},$$

koji vrijedi ako za sve parove indeksa važe nejednadžbe:

$$a_{ij} \leqq b_{ij}$$

Zbrajanje matrica definirano je samo za matrice istoga reda na slijedeći način: Dvije matrice istoga reda zbrajamo tako da zbrajamo homologne elemente. Suma matrica:

$$\mathbf{A} = \| a_{ij} \| \text{ i } \mathbf{B} = \| b_{ij} \|$$

jednaka je matrici:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \| c_{ij} \|$$

Tu za sve parove indeksa vrijedi:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Primjer:

$$\begin{Vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Definiciju zbrajanja dviju matrica možemo uopćiti na zbrajanje proizvoljnog broja matrica istoga reda; matrice istoga reda zbrojimo tako da zbrojimo homologne elemente. Za zbrajanje matrica vrijedi zakon komutativnosti:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

jer za sve parove indeksa važi:

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij},$$

i zakon asocijativnosti:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C},$$

jer za sve parove indeksa važi:

$$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Matrica $\mathbf{0}$ ima s obzirom na zbrajanje sličnu osobinu kao i broj 0 u zbrajanju brojeva:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Množenje matrice brojem definirano je ovako: Matricu pomnožimo brojem tako da pomnožimo svaki njezin element tim brojem; prema tome je produkt matrice $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ s brojem p jednak matrici $\mathbf{B} = \| b_{ij} \|$, gdje za sve parove indeksa važi:

$$b_{ij} = pa_{ij}.$$

Primjer:

$$3 \begin{Vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 & 18 & 15 \\ -6 & 0 & 9 \end{Vmatrix}$$

Za produkt matrice s brojem vrijedi zakon asocijativnosti:

$$p\,(q\mathbf{A}) = (pq)\,\mathbf{A},$$

jer za sve parove indeksa važe jednadžbe:

$$p\,(qa_{ij}) = (pq)\,a_{ij}$$

i dva zakona distributivnosti:

$$(p + q)\,\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A} \quad \text{odnosno} \quad p\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = p\mathbf{A} + p\mathbf{B},$$

jer za sve parove indeksa važe jednadžbe:

$$(p + q)\, a_{ij} = pa_{ij} + qa_{ij} \quad \text{odnosno} \quad p\,(a_{ij} + b_{ij}) = pa_{ij} + pb_{ij}.$$

Matrice **A** i **−A** jedna su drugoj *suprotne*; suma dviju suprotnih matrica jednaka je matrici **0**.

Množenje matrica. Množenje matrice matricom definirano je samo za primjer kad multiplikand ima toliko stupaca koliko multiplikator ima redaka. Uzmimo kao multiplikand matricu:

$$\mathbf{A} = \|a_{ij}\| \; (i = 1, 2, \ldots, m;\; j = 1, 2, \ldots, n)$$

sa n stupaca, a kao multiplikator matricu:

$$\mathbf{B} = \|b_{jk}\| \; (j = 1, 2, \ldots, n;\; k = 1, 2, \ldots, p)$$

sa n redaka. Produkt tih dviju matrica je matrica:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \|c_{ik}\| \; (i = 1, 2, \ldots, m;\; k = 1, 2, \ldots, p).$$

Njezine elemente izračunamo po pravilu: Opći element c_{ik} produkta jednak je skalarnom produktu elemenata i-tog retka multiplikanda i elemenata k-tog stupca multiplikatora:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$$

Primjer:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3.5 + 2.1 & 3.2 + 2.3 \\ 4.5 + 1.1 & 4.2 + 1.3 \\ 5.5 + 3.1 & 5.2 + 3.3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 17 & 12 \\ 21 & 11 \\ 28 & 19 \end{Vmatrix}$$

Za množenje matrica zakon komutativnosti ne vrijedi. S obzirom na zamjenu faktora u produktu **AB** razlikujemo više mogućnosti:

a) ako je multiplikand **A** reda $m \times n$ i multiplikator **B** reda $n \times p$, gdje je $m \neq p$, produkt **AB** ima red $m \times p$; produkt **BA** uopće ne egzistira,

b) ako multiplikand **A** ima red $m \times n$ i multiplikator **B** red $n \times p$, gdje je $m = p$, onda produkt **AB** ima red $m \times m$, a produkt **BA** egzistira i ima red $n \times n$,

c) ako su matrice **A** i **B** kvadratne i istoga reda, onda su produkti **AB** i **BA** također kvadratne matrice istoga reda, no ipak općenito nisu jednake, osim u nekim izuzetnim slučajevima.

Budući da množenje matrica nije komutativno, to razlikujemo dva načina množenja: matricu **A** *postmultipliciramo* matricom **B** ako računamo produkt **AB**, u kojem je **A** multiplikand, a **B** multiplikator, matricu **A** *premultipliciramo* matricom **B**, ako računamo produkt **BA**, u kojem je **B** multiplikand i **A** multiplikator.

Uz uvjet da je množenje izvedivo, za množenje jediničnom matricom vrijede obrasci:

$$\mathbf{EA} = \mathbf{A} \quad \text{i} \quad \mathbf{AE} = \mathbf{A}$$

O njihovoj se valjanosti možemo uvjeriti neposredno množenjem.

Uz uvjet da je množenje izvedivo, vrijede za množenje nulmatricama obrasci:

$$\mathbf{0A} = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad \mathbf{A0} = \mathbf{0}$$

O njihovoj valjanosti možemo se taokđer uvjeriti neposredno množenjem.

Za množenje matrice sumom matrica vrijedi distributivni zakon:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$

Taj zakon ovako dokazujemo. Uzmimo matrice koje su izabrane tako da su izvedive sve računske operacije što dolaze u obzir:

$$\mathbf{A} = \| a_{ij} \| \; (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\mathbf{B} = \| b_{jk} \| \; (k = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\mathbf{C} = \| c_{jk} \|$$

Opći element matrice $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ jednak je:

$$\sum_{s=1}^{s=n} a_{is} (b_{sk} + c_{sk})$$

Opći element matrice $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ je međutim jednak:

$$\sum_{s=1}^{s=n} a_{is} b_{sk} + \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} c_{sk}$$

Iz jednakosti općih elemenata slijedi valjanost distributivnog zakona.

Slično se dokazuje i distributivni zakon za množenje sume matrica matricom:

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}.$$

Definiciju množenja matrica možemo uopćiti na množenje proizvoljnog broja matrica, uz uvjet da su sva množenja što dolaze u obzir izvediva. Za množenje triju matrica vrijedi zakon asocijacije:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

Taj zakon ovako dokazujemo. Uzmimo matrice koje su izabrane tako da su izvedive sve računske operacije što dolaze u obzir:

$$\mathbf{A} = \| a_{ij} \| \; (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\mathbf{B} = \| b_{jk} \| \; (k = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\mathbf{C} = \| c_{k\nu} \| \; (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

Izračunajmo najprije opći element matrice $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$. Produkt matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ je matrica:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{D} = \| d_{ik} \|$$

Tu je:

$$d_{ik} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} b_{sk}$$

Produkt matrice **D** i matrice **C** je matrica:

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{DC} = \mathbf{F} = \|f_{iv}\|$$

Tu je:

$$f_{iv} = \sum_{t=1}^{t=p} d_{it}\, c_{tv} = \sum_{t=1}^{t=p} \left(\sum_{s=1}^{s=n} a_{is}\, b_{st} \right) c_{tv}$$

opći element matrice $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

Izračunajmo još opći element matrice $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Produkt matrica **B** i **C** je matrica:

$$\mathbf{BC} = \mathbf{G} = \|g_{jv}\|$$

Tu je:

$$g_{vj} = \sum_{t=1}^{t=p} b_{jt}\, c_{tv}$$

Produkt matrice **A** i matrice **G** je matrica:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{AG} = \mathbf{H} = \|h_{iv}\|$$

Tu je:

$$h_{iv} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is}\, g_{sv} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is} \left(\sum_{t=1}^{t=p} b_{st}\, c_{tv} \right)$$

Opći element matrice $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Iz jednakosti općih elemenata slijedi da asocijativni zakon vrijedi.

Potencije kvadratne matrice s prirodnim brojevima kao potencionim eksponentima definiramo ovako:

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA},$$
$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{AAA},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Za potencije jediničnih matrica vrijedi jednakost:

$$\mathbf{E}^n = \mathbf{E},$$

koju možemo dokazati matematičkom indukcijom.

Transpozicija matrice. Ako u matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \|a_{ij}\|$$

reda m $\times$ n zamijenimo retke stupcima, dobivamo matricu:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \| a_{ji} \|$$

reda n $\times$ m; ta se matrica naziva *transponirana.*

Primjer. Matrici

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

odgovara transponirana matrica:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{Vmatrix}$$

Za transponirane matrice vrijede izreke o valjanosti kojih se možemo uvjeriti neposredno:

Transpozicija jedinične matrice jednaka je jediničnoj matrici:

$$\mathbf{E}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}.$$

Transpozicija vektor-retka jednaka je vektor-stupcu:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)^{\mathrm{T}} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

i obrnuto, transpozicija vektor-stupca jednaka je vektor-retku. Transpozicija transponirane matrice jednaka je originalnoj matrici:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}.$$

Transpozicija matrične sume jednaka je sumi transponiranih sumanda:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}.$$

Za produkt dviju matrica vrijedi obrazac:

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Taj se obrazac može uopćiti na proizvoljan broj faktora; za tri faktora važi npr.:

$$(\mathbf{ABC})^{\mathrm{T}} = ((\mathbf{AB})\,\mathbf{C})^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Primjer:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{FG})^{\mathrm{T}} = \\ &= (\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}\mathbf{C})^{\mathrm{T}} + (\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{FG})^{\mathrm{T}} = \\ &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{BA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}. \end{aligned}$$

Za transpoziciju matrične potencije vrijedi obrazac:

$$(\mathbf{A}^n)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^n,$$

koji slijedi neposredno iz obrasca za transpoziciju produkata.

Particija matrice. Matricu možemo podijeliti na više parcijalnih matrica tako da te parcijalne matrice postaju elementi matrice. Ako npr. podijelimo matricu:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array} \right\|$$

tako kako to pokazuju crtkane linije, onda je možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{matrix} \right\|$$

gdje su:

$$\mathbf{A}_{11} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| \qquad \mathbf{A}_{12} = \left\| \begin{matrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{matrix} \right\|$$

$$\mathbf{A}_{21} = \left\| \begin{matrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{matrix} \right\| \qquad \mathbf{A}_{22} = \left\| \begin{matrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{matrix} \right\|$$

odgovarajuće parcijalne matrice.

Računska pravila koja vrijede za množenje nepodijeljenih matrica vrijede i za množenje podijeljenih matrica, uz ograničenje da moraju biti izvedive sve računske operacije što dolaze u obzir.

Primjer. Promatrajmo množenje matrice:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right\| = \| \mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \|$$

matricom:

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ \hdashline b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{matrix} \right\|$$

produkt tih dviju matrica izračunamo particijom matrica ovako:

$$\mathbf{AB} = \| \mathbf{A}_1 \, \mathbf{A}_2 \| \left\| \begin{matrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{matrix} \right\| = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 =$$

$$= \left\| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix} \right\| \, \| b_{11} \quad b_{12} \| + \left\| \begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right\| \, \left\| \begin{matrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} \end{matrix} \right\|.$$

Vježbe

1. Napiši matrice:

a) jediničnu matricu $\mathbf{E}_1$, $\left(\left\| 1 \right\|\right)$

b) jediničnu matricu $\mathbf{E}_4$, $\left(\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|\right)$

c) nulmatricu reda 2 x 4. $\left(\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|\right)$

d) simetričnu matricu trećega reda koja ima elemente:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2,\ a_{12} = 1,\ a_{23} = 3 \text{ i } a_{13} = 0, \qquad \left(\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}\right\|\right)$$

e) simetričnu matricu trećeg reda koja ima opći element

$$a_{ij} = i^2 + j^2, \qquad \left(\left\|\begin{matrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \\ 10 & 13 & 18 \end{matrix}\right\|\right)$$

f) koso simetričnu matricu trećega reda koja ima elemente

$$a_{12} = a_{23} = 1 \text{ i } a_{13} = 2, \qquad \left(\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{matrix}\right\|\right)$$

g) koso simetričnu matricu trećega reda koja ima za $i < j$ opći element

$$a_{ij} = (-2)^{i+j}, \qquad \left(\left\|\begin{matrix} 0 & -8 & 16 \\ 8 & 0 & -32 \\ -16 & 32 & 0 \end{matrix}\right\|\right)$$

h) skalarnu matricu trećega reda s dijagonalnim elementom 2.

$$\left(\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right\|\right)$$

2. Odredi što za elemente matrice $\mathbf{A}$ znače nejednadžbe:

a) $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ (svi su elementi pozitivni)
b) $\mathbf{A} \geqq \mathbf{0}$ (nijedan element nije negativan)
c) $\mathbf{A} < \mathbf{0}$ (svi su elementi negativni)
d) $\mathbf{A} \leqq \mathbf{0}$ (nijedan element nije pozitivan)

3. Izračunaj:

a) $$2\left\|\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{matrix}\right\| + 3\left\|\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{matrix}\right\| - 4\left\|\begin{matrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{matrix}\right\| + 2\mathbf{E}_2 \qquad \left(\left\|\begin{matrix} 19 & 1 \\ 14 & 12 \end{matrix}\right\|\right)$$

b) $$2\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{matrix}\right\| + 4\mathbf{E}_3 - 3\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| \qquad \left(\left\|\begin{matrix} 3 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 7 \\ -7 & 3 & 6 \end{matrix}\right\|\right)$$

4. Zadane su matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

Razriješi matrične jednadžbe:

a) $3\mathbf{A} + \mathbf{X} - 2\mathbf{E} = 4\mathbf{B}$ $\left(\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} 12 & -1 \\ -12 & 11 \end{Vmatrix}\right)$

b) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{X} = \mathbf{E}$ $\left(\mathbf{X} = -2\begin{Vmatrix} 15 & 12 \\ 8 & 10 \end{Vmatrix}\right)$

5. Zadane su matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Izračunaj produkte:

a) **AB**. $\left(\begin{Vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}\right)$

b) **BA**. $\left(\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\right)$

c) $(1,1)\,\mathbf{AB}\,\{1,1\}$. (12)

d) $(1,1,1)\,\mathbf{BA}\,\{1,1,1\}$. (30)

6. Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$ Izračunaj produkte:

a) $(1,1,1)\,\mathbf{A}$. $(\| 10 \quad 3 \quad 8 \|)$

b) $\mathbf{A}\,\{1,1,1\}$. $(\{6,9,6\})$

c) $(0,1,0)\mathbf{A}$ $(\| 4 \quad 0 \quad 5 \|)$

d) $\mathbf{A}\,\{0,1,0\}$. $(\{2,0,1\})$

e) $\| 0 \ 0 \ 0 \|\,\mathbf{A}$. $(\| 0 \quad 0 \quad 0 \|)$

7. Zadane su matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Izračunaj:

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B})$. $\left(-\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}\right)$

b) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$. $\left(-\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}\right)$

c) $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3$. $(7\mathbf{A})$

d) $\mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^3$. $\left(\begin{Vmatrix} 21 & 18 \\ 18 & 21 \end{Vmatrix}\right)$

8. Izračunaj $(1,1,1,1)\,\mathbf{A}\,\{1,1,1,1\}$, gdje je **A** koso simetrična matrica koja ima za $i < j$ opći element $a_{ij} = (-2)^{i+j}$. (0)

9. Odredi uz matricu $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}$ matricu $\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{Vmatrix}$, tako da važi obrazac:

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}).$$

$(x = 2,\ y = 3)$

10. Izrazi na način kako se pišu matrice:

a) skalarni produkt: $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$,

$((x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T)$

b) sumu kvadrata: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$,

$((x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T)$

c) bilinearnu formu:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1y_1 + \ldots + a_{1n}x_1y_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{m1}x_my_1 + \ldots + a_{mn}x_my_n. \end{array}$$

$$\left(\begin{Vmatrix} x_1 \ldots x_m \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}\right)$$

d) sistem linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array}$$

$$\left(\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}\right)$$

e) linearnu transformaciju:

$$\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n, \end{array}$$

$$\left(\begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}\right)$$

11. Pomnoži rascijepljene matrice:

a) $$\left\Vert\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 5 \end{array}\right\Vert \left\Vert\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right\Vert \qquad \left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 32 \end{Vmatrix}\right)$$

b) $$\left\Vert\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right\Vert \left\Vert\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert \qquad \left(\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right)$$

2. Inverzna matrica

Uzmimo kvadratnu matricu reda n:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} = \| a_{ij} \|$$

Toj matrici odgovara determinanta reda n s istim elementima:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = | a_{ij} |$$

Kvadratna matrica je *singularna* ako je njoj odgovarajuća determinanta jednaka 0, a *nesingularna* ako determinanta nije jednaka 0.

Uzmimo da kvadratna matrica **A** nije singularna; stoga njoj odgovarajuća determinanta A nije jednaka nuli. Uz svaki element a_{ij} determinante A možemo izračunati odgovarajući kofaktor A_{ij}. Od kofaktora elemenata determinante A sastavimo novu matricu:

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix} = \| A_{ij} \|$$

Ako tu matricu najprije transponiramo a zatim dijelimo vrijednošću determinante A, dobivamo matricu koja je prvobitnoj matrici **A** inverzna. Prema tome definiramo i pišemo matrici **A** inverznu matricu ovako:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{A} \begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix} = \frac{1}{A} \| A_{ji} \|$$

Primjer. Matrica

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{Vmatrix}$$

je nesingularna jer joj odgovara od 0 različita determinanta

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 7$$

Kofaktori elemenata determinante A sastavljaju matricu

$$\begin{Vmatrix} -5 & -2 \\ -4 & -3 \end{Vmatrix}$$

Stoga prvobitnoj matrici **A** odgovara inverzna matrica

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{Vmatrix} -5 & -4 \\ -2 & -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5/7 & -4/7 \\ -2/7 & -3/7 \end{Vmatrix}$$

Primjer. Matrica

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{Vmatrix}$$

je nesingularna jer joj odgovara od 0 različita determinanta

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Kofaktori elemenata te determinante sastavljaju matricu

$$\begin{Vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

Stoga prvobitnoj matrici **A** odgovara inverzna matrica

$$\mathbf{A} = \frac{1}{-4} \begin{Vmatrix} 4 & -8 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -3/4 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica ima u matričnoj algebri slične osobine kao recipročna vrijednost brojeva u elementarnoj algebri. U elementarnoj algebri važi za svaki od 0 različit broj i za svaku njegovu recipročnu vrijednost obrazac:

$$aa^{-1} = 1$$

Sličan obrazac važi u matričnoj algebri za nesingularnu kvadratnu matricu **A** i njoj inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

Obrazac dokazujemo množenjem ovako:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \frac{1}{A} \begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{A} \begin{Vmatrix} A & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & A \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = \mathbf{E}$$

Slično se dokazuje i obrazac:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Za inverznu matricu vrijede izreke:

Za svaku nesingularnu kvadratnu matricu postoji samo jedna inverzna matrica.

Treba dokazati da matrične jednadžbe

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E} \quad \text{i} \quad \mathbf{XA} = \mathbf{E}$$

imaju samo jedno rješenje, i to inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$. Pretpostavimo da bi prvoj jednadžbi odgovarala još neka druga matrica $\mathbf{X} = \mathbf{B}$; u tom bi slučaju važila jednadžba:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}$$

Iz toga bi slijedilo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}\,(\mathbf{AB}) = (\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A})\,\mathbf{B} = \mathbf{EB} = \mathbf{B}$$

A to znači da je druga matrica jednaka inverznoj matrici $\mathbf{A}^{-1}$. Uzmimo još, slično kao prije, da bi drugoj jednadžbi odgovarala još neka druga matrica $\mathbf{B}$; u tom bi primjeru važila jednadžba:

$$\mathbf{BA} = \mathbf{E}$$

Iz toga bi slijedilo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{EA}^{-1} = (\mathbf{BA})\,\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{B}\,(\mathbf{AA}^{-1}) = \mathbf{BE} = \mathbf{B}$$

A to opet znači da je druga matrica $\mathbf{B}$ jednaka inverznoj matrici $\mathbf{A}^{-1}$. Tako je izreka dokazana.

Inverzna matrica inverzne matrice jednaka je prvobitnoj matrici:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

Dokaz:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{E}\,(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = (\mathbf{AA}^{-1})\,(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}\,((\mathbf{A}^{-1})\,(\mathbf{A}^{-1})^{-1}) = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$$

Za inverznu matricu produkta dviju matrica vrijedi obrazac:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{E}\,(\mathbf{AB})^{-1} = (\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{B})\,(\mathbf{AB})^{-1} = (\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{EB})\,(\mathbf{AB}^{-1} = \\ &= \mathbf{B}^{-1}\,(\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A})\,(\mathbf{B}\,(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}\,((\mathbf{AB})\,(\mathbf{AB})^{-1}) = \\ &= \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{E} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}\end{aligned}$$

Dokazani obrazac možemo uopćiti na proizvoljno mnogo faktora:

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_{s-1}\,\mathbf{A}_s)^{-1} = (\mathbf{A}_s)^{-1}\,(\mathbf{A}_{s-1})^{-1} \ldots (\mathbf{A}_2)^{-1}\,(\mathbf{A}_1)^{-1}$$

Inverzna matrica transponirane matrice jednaka je transponiranoj matrici inverzne matrice:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

Dokaz: Započinjemo s matričnom jednadžbom:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\\
\mathbf{E}^{\mathrm{T}} &= (\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A})^{\mathrm{T}}\\
\mathbf{E} &= \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\\
(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\,\mathbf{E} &= (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\;\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\\
(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} &= \mathbf{E}\,(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

a iz toga slijedi obrazac koji smo htjeli dokazati.

Inverzna matrica jedinične matrice jednaka je toj jediničnoj matrici:

$$\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Izreku dokazujemo tako da izračunamo jediničnoj matrici $\mathbf{E}$ inverznu matricu $\mathbf{E}^{-1}$.

Primjer. Izračunajmo nepoznatu matricu $\mathbf{X}$ iz matrične jednadžbe:

$$\mathbf{A\,X\,B} = \mathbf{C}.$$

Ovdje tražimo da su sve potrebne matrične računske operacije izvedive. Ako obje strane jednadžbe najprije premultipliciramo sa $\mathbf{A}^{-1}$ a zatim postmultipliciramo sa $\mathbf{B}^{-1}$, dobivamo:

$$(\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A})\,\mathbf{X}\,(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}^{-1}.$$

Vježbe

1. Izračunaj inverzne matrice slijedećim matricama:

a) $\begin{Vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$ $\qquad \left(\begin{Vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}\right)$

b) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$ $\qquad \left(\begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{Vmatrix}\right)$

c) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$ $\qquad \left(\begin{Vmatrix} -4/25 & 11/25 & -1/25 \\ 2/25 & -18/25 & 13/25 \\ 1/5 & 1/5 & -1/5 \end{Vmatrix}\right)$

d) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{Vmatrix}$ $\qquad \left(\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 7/4 & -3/4 & -1/2 \\ 5/4 & -1/4 & -1/2 \end{Vmatrix}\right)$

e) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$ $\qquad \left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{Vmatrix}\right)$

2. Zadane su matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Izračunaj izraze:

a) $\mathbf{A}^{-1}$ $\left(\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}\right)$

b) $\mathbf{B}^{-1}$ $\left(\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}\right)$

c) $\mathbf{AB}$ $\left(\begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{Vmatrix}\right)$

d) $(\mathbf{AB})^{-1}$ $\left(\begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -12 & 5 \end{Vmatrix}\right)$

e) $\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}$ $\left(\begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -12 & 5 \end{Vmatrix}\right)$

f) $\mathbf{BA}$ $\left(\begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}\right)$

g) $(\mathbf{BA})^{-1}$ $\left(\begin{Vmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{Vmatrix}\right)$

h) $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}^{-1}$ $\left(\begin{Vmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{Vmatrix}\right)$

i) $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$ $\left(\begin{Vmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{Vmatrix}\right)$

j) $\mathbf{AB}^{-1}$ $\left(\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{Vmatrix}\right)$

3. Izračunaj nepoznatu matricu $\mathbf{X}$ iz matričnih jednadžbi:

a) $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, ako je

$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{Vmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ $\quad \mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$ $\quad \left(\begin{Vmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 11/3 & -4/3 \end{Vmatrix}\right)$

b) $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$, ako je

$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$ $\quad \left(\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}\right)$

c) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, ako je:

$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$ $\quad \left(\begin{Vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{Vmatrix}\right)$

d) $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, ako je:

$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 7 \end{Vmatrix}$ $\quad \left(\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}\right)$

e) $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = 0$, ako je:

$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$ $\quad \left(\begin{Vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}\right)$

f) $\mathbf{AXA}^{-1} = \mathbf{E}$ $\quad (\mathbf{E})$

3. Ekvivalencija matrica

Elementarne matrice. Jediničnu matricu $\mathbf{E}$ i iz nje izvedene matrice $\mathbf{E}_{ij}$, $\mathbf{K}_i(k)$ i $\mathbf{H}_{ij}(n)$ nazivamo elementarnim matricama.

Matricu $\mathbf{E}_{ij}$ dobivamo ako u jediničnoj matrici $\mathbf{E}$ zamijenimo i-ti i j-ti redak ili i-ti ili j-ti stupac.

Matricu $\mathbf{K}_i(k)$ dobivamo ako u jediničnoj matrici $\mathbf{E}$ zamijenimo element 1 na i-tom dijagonalnom mjestu elementom k.

Matricu $\mathbf{H}_{ij}(h)$ dobivamo ako u jediničnoj matrici $\mathbf{E}$ zamijenimo element 0 u i-tom retku i u j-tom stupcu elementom h.

Primjer. Ako je jedinična matrica $\mathbf{E}$ trećega reda, onda je:

$$\mathbf{E}_{23} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{K}_2(4) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{H}_{23}(5) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Matricu *elementarno transformiramo* ako je pomnožimo nekom od elementarnih matrica. Za elementarne transformacije matrica vrijede slijedeće izreke, o valjanosti kojih se možemo uvjeriti neposredno množenjem:

1. ako matricu premultipliciramo sa $\mathbf{E}_{ij}$, onda se u njoj zamjenjuju i-ti i j-ti redak,
2. ako matricu postmultipliciramo sa $\mathbf{E}_{ij}$, onda se u njoj zamjenjuju i-ti i j-ti stupac.
3. ako matricu premultipliciramo sa $\mathbf{K}_i(k)$, onda se njezin i-ti redak pomnoži sa k,
4. ako matricu postmultipliciramo sa $\mathbf{K}_i(k)$, onda se njezin i-ti stupac pomnoži sa k,
5. ako matricu premultipliciramo sa $\mathbf{H}_{ij}(h)$, onda se njezinom i-tom retku pribroji j-ti redak pomnožen sa h,
6. ako matricu postmultipliciramo sa $\mathbf{H}_{ij}(h)$, onda se njezinom j-tom stupcu pribroji i-ti stupac pomnožen sa h.

Primjer. Uzmimo matricu:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Izračunajmo ove produkte:

$$\mathbf{E}_{23}\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{A}\mathbf{E}_{23} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1(3)\,\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{A}\mathbf{K}_1(3) = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{13}(2)\,\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{A}\mathbf{H}_{13}(2) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Za sve elementarne matrice vrijedi da su i njima odgovarajuće inverzne matrice isto tako elementarne. Za inverzne matrice elementarnih matrica vrijede obrasci:

$$(\mathbf{E}_{ij})^{-1} = \mathbf{E}_{ij}.$$

Dokaz. Ako postmultipliciramo matričnu jednadžbu:

$$(\mathbf{E}_{ij})^{-1}\,\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}$$

matricom $\mathbf{E}_{ij}$, dobivamo:

$$(\mathbf{E}_{ij})^{-1}\,(\mathbf{E}_{ij}\,\mathbf{E}_{ij}) = \mathbf{E}\mathbf{E}_{ij}.$$

Produkt $(\mathbf{E}_{ij}\,\mathbf{E}_{ij})$ jednak je jediničnoj matrici $\mathbf{E}$ jer se pri tom u jediničnoj matrici radi o dvokratnoj zamjeni i-tog i j-tog retka. Stoga iz posljednje jednadžbe slijedi obrazac koji je trebalo dokazati.

$$(\mathbf{K}_i\,(k))^{-1} = \mathbf{K}_i\,(1/k)$$

Dokaz. Ako postmultipliciramo matričnu jednadžbu:

$$(\mathbf{K}_i\,(k))^{-1}\,\mathbf{K}_i\,(k) = \mathbf{E}$$

matricom $\mathbf{K}_i\,(1/k)$, dobivamo:

$$(\mathbf{K}_i\,(k))^{-1}\,(\mathbf{K}_i\,(k)\,\mathbf{K}_i\,(1/k)) = \mathbf{E}\mathbf{K}_i\,(1/k).$$

Produkt $\mathbf{K}_i\,(k)\,\mathbf{K}_i\,(1/k)$ s lijeve strane jednadžbe jednak je jediničnoj matrici jer se pri tom u jediničnoj matrici radi o uzastopnom množenju i-tog retka najprije faktorom k a zatim još faktorom 1/k. Stoga iz posljednje jednadžbe slijedi obrazac koji je trebalo dokazati.

$$(\mathbf{H}_{ij}\,(h))^{-1} = \mathbf{H}_{ij}\,(-h)$$

Dokaz. Ako postmultipliciramo matričnu jednadžbu:

$$(\mathbf{H}_{ij}\,(h))^{-1}\,\mathbf{H}_{ij}\,(h) = \mathbf{E}$$

matricom $\mathbf{H}_{ij}\,(-h)$. dobivamo:

$$(\mathbf{H}_{ij}\,(h))^{-1}\,(\mathbf{H}_{ij}\,(h)\,\mathbf{H}_{ij}\,(-h)) = \mathbf{E}\mathbf{H}_{ij}\,(-h)$$

Produkt u zagradi na lijevoj strani jednadžbe jednak je jediničnoj matrici $\mathbf{E}$ jer se pri tom u jediničnoj matrici radi o pribrajanju i odbijanju sa h pomnoženog j-tog retka i-tom retku. Stoga iz posljednje jednadžbe slijedi obrazac koji je trebalo dokazati.

U matrici možemo napraviti redom više elementarnih transformacija između redaka, što možemo postići odgovarajućim premultiplikacijama elementarnim matricama. Ako $\mathbf{P}$ znači produkt svih u obzir uzetih elementarnih matrica, onda $\mathbf{PA}$ znači matricu koju dobivamo iz prvobitne matrice $\mathbf{A}$ nakon svih transformacija između redaka.

Primjer. Produkt:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{H}_{23}\,(5)\,\mathbf{K}_4\,(7)\,\mathbf{E}_{13}\,\mathbf{A}$$

izračunamo ako matricu $\mathbf{A}$ transformiramo ovako: najprije zamijenimo prvi i treći redak, nakon toga pomnožimo četvrti redak sa 7 i konačno pribrojimo drugom s 5 pomnoženi treći redak.

Slično vrijedi i za elementarne transformacije između stupaca. Ako $\mathbf{Q}$ znači produkt svih u obzir uzetih elementarnih matrica, onda produkt $\mathbf{AQ}$ znači matricu koju dobivamo iz matrice $\mathbf{A}$ nakon svih transformacija između stupaca.

Primjer. Produkt:

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{AH}_{23}(2)\,\mathbf{K}_2(5)\,\mathbf{E}_{12}\,\mathbf{H}_{23}(6)$$

izračunamo ako matricu $\mathbf{A}$ transformiramo ovako: najprije trećem stupcu pribrojimo s 2 pomnoženi drugi stupac, zatim pomnožimo drugi stupac s 5, nakon toga zamijenimo prvi i drugi stupac i konačno trećem stupcu pribrojimo sa 6 pomnoženi drugi stupac.

Ekvivalencija matrica. Za matrice istoga reda definiramo odnos ekvivalencije ovako: Matrica $\mathbf{A}$ je ekvivalentna matrici $\mathbf{B}$, to pišemo ovako:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$$

ako se matrica $\mathbf{A}$ može samim elementarnim transformacijama transformirati u matricu $\mathbf{B}$. Ako je matrica $\mathbf{A}$ ekvivalentna matrici $\mathbf{B}$, možemo matricu $\mathbf{B}$ izraziti ovako:

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}.$$

Ovdje su faktori $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ produkti nekih elementarnih matrica.

Ekvivalencija je refleksivan, komutativan i tranzitivan odnos. Refleksivnost ekvivalencije:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$$

možemo uočiti neposredno iz definicije ekvivalencije. Komutativnost ekvivalencije:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \sim \mathbf{A}$$

dokazujemo ovako: kako je $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, to matricu $\mathbf{B}$ možemo izraziti kao:

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}.$$

Ovdje su faktori $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ produkti nekih elementarnih matrica. Ako tu jednadžbu premultipliciramo sa $\mathbf{P}^{-1}$ i postmultipliciramo sa $\mathbf{Q}^{-1}$, dobivamo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{BQ}^{-1}$$

Ovdje su matrice $\mathbf{P}^{-1}$ i $\mathbf{Q}^{-1}$ produkti inverznih elementarnih matrica, koje su opet elementarne matrice. Stoga se matrica $\mathbf{B}$ može transformirati u matricu $\mathbf{A}$ samo elementarnim transformacijama. To znači da je matrica $\mathbf{B}$ ekvivalentna matrici $\mathbf{A}$ i da za ekvivalenciju matrica vrijedi zakon komutativnosti. Tranzitivnost ekvivalencije:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \,\&\, \mathbf{B} \sim \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{C}$$

dokazujemo ovako: iz ekvivalencije $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ slijedi jednadžba:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_a\mathbf{AQ}_a$$

Ovdje su matrice $\mathbf{P}_a$ i $\mathbf{Q}_a$ produkti nekih elementarnih matrica; iz ekvivalencije $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$ slijedi jednadžba:

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}_b\mathbf{BQ}_b$$

I ovdje su matrice $\mathbf{P}_b$ i $\mathbf{Q}_b$ produkti nekih elementarnih matrica. Stoga slijedi:

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}_b\mathbf{B}\mathbf{Q}_b = \mathbf{P}_b\mathbf{P}_a\mathbf{A}\mathbf{Q}_a\mathbf{Q}_b = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}$$

Ovdje su matrice $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ produkti nekih elementarnih matrica. Iz toga slijedi ekvivalencija $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$ i tako je dokazana tranzitivnost ekvivalencije.

Normalan oblik matrice. U matričnoj algebri osobito su značajne matrice jednostavnog tipa; one na prvim gornjim mjestima prve padajuće dijagonale imaju elemente 1, a na svim drugim mjestima elemente 0. Te matrice imaju *normalan oblik*. Takva je npr. matrica reda 4×5 s tri elementa 1:

$$\mathbf{A_N} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Za matrice vrijedi izreka: *Svaku matricu koja nije nulmatrica možemo transformirati u njoj ekvivalentnu matricu normalnog oblika pomoću samih elementarnih transformacija.*

Dokaz. U matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \neq \mathbf{0}$$

izaberemo proizvoljan element a_{ij}, koji nije jednak 0. Najprije u matrici zamijenimo prvi i i-ti redak, što postižemo premultiplikacijom matrice sa $\mathbf{E}_{1i}$; zatim zamijenimo još prvi i j-ti stupac, što postižemo postmultiplikacijom sa $\mathbf{E}_{1j}$. Tako prenosimo izabrani element a_{ij} na prvo mjesto prvoga retka. Sada dijelimo prvi redak elementom a_{ij}, što postižemo premultiplikacijom sa $\mathbf{K}_1\,(1/a_{ij})$; time dobivamo na prvom mjestu prvoga retka element 1. Pretpostavimo da tako transformirana matrica ima u prvom retku uzastopno elemente:

$$1, a'_{12}, a'_{13}, \dots, a'_{1n}.$$

Prvi stupac pomnožimo uzastopno sa $-a'_{12}, -a'_{13}, \dots, -a'_{1n}$ pa ga svaki put pribrojimo uzastopno drugom, trećem, ... i posljednjem stupcu. Na taj način u prvom retku iza prvog elementa 1 dobivamo same nule. Te transformacije možemo izvesti tako da matricu postmultipliciramo uzastopno elementarnim matricama:

$$\mathbf{H}_{12}\,(-a'_{12}),\ \mathbf{H}_{13}\,(-a'_{13}),\ \dots,\ \mathbf{H}_{1n}\,(-a'_{1n}).$$

Slično pomnožimo prvi redak uzastopno sa $-a'_{21}$, $-a_{31}\,(a)'$, ..., $-a'_{m1}$ pa ga svaki put pribrojimo uzastopno drugom, trećem, ... i posljednjem retku. Ove transformacije možemo izvesti tako da matricu premultipliciramo uzastopno elementarnim matricama:

$$\mathbf{H}_{21}\,(-a'_{21}),\ \mathbf{H}_{31}\,(-a'_{31}),\ \dots,\ \mathbf{H}_{m1}\,(-a'_{m1}).$$

Time dobivamo u prvom stupcu ispod prvog elementa 1 same nule. Nakon svih tih transformacija prvobitna matrica dobiva oblik:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix}$$

Ta je matrica ekvivalentna prvobitnoj matrici $\mathbf{A}$. Njezinu reduciranu matricu:

$$\begin{Vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix}$$

transformiramo najprije slično kao što smo transformirali prvobitnu matricu. Transformiranje nastavljamo dok na kraju ne dobijemo matricu normalnog oblika koja je ekvivalentna prvobitnoj matrici.

Primjer. Transformirajmo matricu:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

u normalan oblik. Elementarnim transformacijama ili množenjem elementarnim matricama transformiramo je ovako:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_{13}\,\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} = \mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_1\,\mathbf{E}_{13} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}_2 \sim \mathbf{A}_2\,\mathbf{K}_1\,(1/2) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} = \mathbf{A}_3 \sim \mathbf{A}_3\,\mathbf{E}_{23} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}_4 \sim \mathbf{A}_4\mathbf{H}_{23}\,(-2) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} = \mathbf{A}_5 \sim \mathbf{A}_5\,\mathbf{H}_{24}\,(-1) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}_6 \sim \mathbf{A}_6\,\mathbf{H}_{34}\,(-2) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \mathbf{A}_N$$

$\mathbf{A}_N$ je matrica normalnog oblika. Prvobitnom matricom $\mathbf{A}$ izražavamo matricu $\mathbf{A}_N$ ovako:

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{E}_{13}\mathbf{A}\mathbf{E}_{13}\mathbf{K}_1\,(1/2)\,\mathbf{E}_{23}\mathbf{H}_{23}\,(-2)\,\mathbf{H}_{24}\,(-1)\,\mathbf{H}_{34}\,(-2).$$

Rang matrice. Uzmimo proizvoljnu matricu koja se razlikuje od 0-matrice i promatrajmo njezine parcijalne kvadratne matrice i njima odgovarajuće determinante. Parcijalne kvadratne matrice mogu biti singularne ako su odgovarajuće determinante jednake 0, ili nesingularne ako odgovarajuće determinante nisu jednake 0. Singularnost i nesingularnost kvadratnih matrica sačuva se pri svakoj elementarnoj transformaciji; množenjem sa $\mathbf{E}_{ij}$, naime determinantama, mijenjaju se samo predznaci, množenjem sa $\mathbf{K}_i(k)$ množe se determinante brojem k, koji je različit od 0, množenjem sa $\mathbf{H}_{ij}(h)$, međutim, ne mijenja se vrijednost determinanti. Pretpostavimo da izabrana matrica ima slijedeću osobinu: u njoj egzistira barem jedna nesingularna kvadratna parcijalna matrica reda r, a svaka je kvadratna parcijalna matrica višega reda singularna. Takva matrica ima rang r. Ako takvu matricu elementarno transformiramo u normalan oblik, dobivamo matricu sa r elemenata 1. U skladu s tim možemo rang matrice definirati na dva načina:

Rang matrice jednak je redu njezine nesingularne kvadratne parcijalne matrice najvišega reda.

Rang matrice jednak je broju elemenata 1 njezinog normalnog oblika.

Primjer. Odredimo rang matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$$

Elementarnim transformacijama dobivamo normalan oblik matrice ovako:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}_N = \mathbf{H}_{31}(-1)\,\mathbf{A}\mathbf{K}_1(1/2)\,\mathbf{K}_2(1/3)\,\mathbf{K}_3(1/4)\,\mathbf{K}_4(1/9)\,\mathbf{H}_{13}(-1)\,\mathbf{H}_{24}(-1) =$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Matrica $\mathbf{A}$ ima rang $r = 2$. To znači da je u njoj neka parcijalna kvadratna matrica drugoga reda nesingularna te da su sve parcijalne kvadratne matrice trećega reda singularne.

Vježbe

1. Napiši elementarne matrice trećega reda:

a) $\mathbf{E}_{13}$ $\left(\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right)$

b) $\mathbf{K}_1(6)$ $\left(\begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\right)$

c) $\mathbf{H}_{32}(5)$ $\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{Vmatrix}\right)$

2. Zadana je matrica:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{matrix} \right\|$$

Izračunaj produkte:

a) $\mathbf{E}_{12}\,\mathbf{A}$ $\quad \left(\left\| \begin{matrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\| \right)$

b) $\mathbf{A}\mathbf{E}_{13}$ $\quad \left(\left\| \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| \right)$

c) $\mathbf{K}_2\,(2)\,\mathbf{A}$ $\quad \left(\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 8 \end{matrix} \right\| \right)$

d) $\mathbf{A}\mathbf{K}_2\,(2)$ $\quad \left(\left\| \begin{matrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{matrix} \right\| \right)$

e) $\mathbf{H}_{12}\,(2)\,\mathbf{A}$ $\quad \left(\left\| \begin{matrix} 7 & 2 & 11 \\ 3 & 0 & 4 \end{matrix} \right\| \right)$

f) $\mathbf{A}\mathbf{H}_{12}\,(2)$ $\quad \left(\left\| \begin{matrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{matrix} \right\| \right)$

g) $\mathbf{E}_{12}\,\mathbf{H}_{21}\,(3)\,\mathbf{K}_1\,(4)\,\mathbf{A}\mathbf{E}_{13}\,\mathbf{K}_2\,(2)\,\mathbf{H}_{23}\,(5)$ $\quad \left(\left\| \begin{matrix} 40 & 48 & 255 \\ 12 & 16 & 84 \end{matrix} \right\| \right)$

3. Odredi rang matrica:

a) $\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{matrix} \right\|$ $\quad (r = 3)$

b) $\left\| \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{matrix} \right\|$ $\quad (r = 3)$

V. SISTEMI LINEARNIH JEDNADŽBI

1. Cramerov sistem

Uzmimo sistem n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{ni}x_i + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Nakon uvođenja matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

napišemo taj sistem jednadžbi u obliku matrice ovako:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

Pretpostavimo da je matrica **A** nesingularna i da stoga odgovarajuća determinanta sistema jednadžbi:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nije jednaka nuli. Takav sistem linearnih jednadžbi nazivamo *Cramerovim sistemom.* On je uvijek rješiv, pa ga možemo rješavati na više načina. Iz elementarne algebre poznati su nam npr. način zamjene ili način suprotnih koeficijenata; ova dva načina upotrebljiva su praktički samo ako je broj jednadžbi razmjerno malen. Ako je broj jednadžbi veći, upotrebljavamo druge metode, koje su podesnije za računanje elektronskim računalima.

Obrađujemo najprije metodu rješavanja sistema linearnih jednadžbi pomoću determinanti. Pretpostavimo da želimo iz prvobitnog sistema n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica izračunati nepoznanicu x_i; pri tom je $i = 1, 2, \dots, n$. Jednadžbe sistema uzastopno pomnožimo kofaktorima $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni}$ elemenata $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ i-tog stupca determinante A, pa ih tako pomnožene zbrojimo. Zbrajanjem suma se na lijevoj strani prilično pojednostavi zato što otpadaju sve nepoznanice osim nepoznanice x_i; nepoznanica x_i ima koeficijent A jer je taj jednak skalarnom produktu elemenata i-tog stupca i kofaktora elemenata istog stupca, a koeficijent svake druge nepoznanice jednak je 0 jer je skalarni produkt kofaktora i-tog stupca i elemenata nekog drugog stupca. Nakon zbrajanja jednadžbi dobivamo:

$$Ax_i = \sum_{s=1}^{s=n} b_s A_{si}$$

Izraz na desnoj strani ove jednadžbe možemo pisati u obliku determinante:

$$A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

U pravilnost takvog načina pisanja možemo se uvjeriti ako determinantu razvijemo po i-tom stupcu. Tu determinantu dobivamo tako da u prvobitnoj determinanti A sistema jednadžbi nadomjestimo elemente i-tog stupca elementima na desnoj strani jednadžbi. Stoga iz posljednje jednadžbe slijedi:

$$x_i = \frac{A_i}{A}$$

Primjer. Uzmimo sistem četiriju linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 3x + y + 2u &= 13 \\ x + 2y + 3z &= 14 \\ x + 2z + 5u &= 27 \\ 2y + z + 3u &= 19 \end{aligned}$$

Sistem jednadžbi je Cramerov jer njegova determinanta

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 104$$

nije jednaka 0. Po gornjem obrascu izračunamo nepoznanice ovako:

$$x = \frac{A_1}{A} = \frac{1}{104} \begin{vmatrix} 13 & 1 & 0 & 2 \\ 14 & 2 & 3 & 0 \\ 27 & 0 & 2 & 5 \\ 19 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$y = \frac{A_2}{A} = \frac{1}{104} \begin{vmatrix} 3 & 13 & 0 & 2 \\ 1 & 14 & 3 & 0 \\ 1 & 27 & 2 & 5 \\ 0 & 19 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$z = \frac{A_3}{A} = \frac{1}{104} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 13 & 2 \\ 1 & 2 & 14 & 0 \\ 1 & 0 & 27 & 5 \\ 0 & 2 & 19 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$u = \frac{A_4}{A} = \frac{1}{104} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 0 & 2 & 27 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \end{vmatrix} = 4$$

Pogledajmo još kako rješavamo sistem jednadžbi s matricama. U matričnom obliku napisani sistem jednadžbi premultipliciramo inverznom matricom $\mathbf{A}^{-1}$ te dobivamo:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

i iz toga:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

U rješavanju po ovoj metodi treba najprije izračunati matrici $\mathbf{A}$ inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$.

Primjer. Riješimo pomoću matrica sistem linearnih jednadžbi ranijeg primjera. Sistemu jednadžbi odgovara matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

Ta matrica nije singularna jer je odgovarajuća determinanta A = 104 različita od 0. Toj matrici izračuunamo inverznu matricu:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{104} \begin{Vmatrix} 32 & 7 & 1 & -23 \\ 8 & 5 & -29 & 43 \\ -16 & 29 & 19 & -21 \\ 0 & -13 & 13 & 13 \end{Vmatrix}$$

Stoga je:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B} = \frac{1}{104} \begin{Vmatrix} 32 & 7 & 1 & -23 \\ 8 & 5 & -29 & 43 \\ -16 & 29 & 19 & -21 \\ 0 & -13 & 13 & 13 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 13 \\ 14 \\ 27 \\ 19 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Vmatrix}$$

Iz toga dobivamo rješenje sistema jednadžbi:

$$x = 1,\ y = 2,\ z = 3,\ u = 4.$$

Ako kod Cramerovog sistema jednadžbi ne treba izračunati sve nepoznanice nego samo neke, olakšat ćemo sebi računanje podjelom matrice koja odgovara sistemu. Pretpostavimo da iz sistema jednadžbi:

$$\begin{array}{l} a_{11}\quad x_1 + \dots + a_{1k}\quad x_k + a_{1,k+1}\quad x_{k+1} + \dots + a_{1n}\quad x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}\quad x_1 + \dots + a_{kk}\quad x_k + a_{k,k+1}\quad x_{k+1} + \dots + a_{kn}\quad x_n = b_k \\ a_{k+1,1}\, x_1 + \dots + a_{k+1,k}\, x_k + a_{k+1,k+1}\, x_{k+1} + \dots + a_{k+1,n}\, x_n = b_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\quad x_1 + \dots + a_{nk}\quad x_k + a_{n,k+1}\quad x_{k+1} + \dots + a_{nn}\quad x_n = b_n \end{array}$$

treba izračunati samo nepoznanice $x_1, x_2, \dots, x_k$. Sistem jednadžbi podijelimo ovako:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{Vmatrix}$$

Tu je:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{Vmatrix} \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{Vmatrix} a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{Vmatrix} a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{Vmatrix} \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{Vmatrix} a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{Vmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{Vmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{Vmatrix} \quad \mathbf{B}_2 \begin{Vmatrix} b_{k+1} \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

Jednadžbu podijelimo u dvije matrične jednadžbe:

$$\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{X}_2 = \mathbf{B}_1$$
$$\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{X}_2 = \mathbf{B}_2$$

Iz tih dviju matričnih jednadžbi eliminiramo nepoznatu matricu $\mathbf{X}_2$; iz druge jednadžbe dobivamo:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}_{22}^{-1}\,(\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{X}_1)$$

Ako to uvrstimo u prvu jednadžbu, dobivamo za nepoznatu matricu $\mathbf{X}_1$ jednadžbu:

$$\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,(\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{X}_1) = \mathbf{B}_1$$

Iz toga izračunamo:

$$\mathbf{X}_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21})^{-1}\,(\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{B}_2)$$

Očito je da je računanje po ovoj metodi olakšano. Ako bismo naime rješavali sistem jednadžbi u cjelini, morali bismo izračunati matrici sistema jednadžbi inverznu matricu; ta je matrica reda n. U obrađenom rješavanju treba međutim izračunati matricama nižega reda inverzne matrice, i to matrici $\mathbf{A}_{22}$, koja je reda $n - k$, i matrici $\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}$, koja je reda k.

Primjer. Izračunajmo iz sistema jednadžbi prijašnjih dvaju primjera samo nepoznanice x i y. Nakon uvedbe matrica:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{Vmatrix} z \\ u \end{Vmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{Vmatrix} 13 \\ 14 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{Vmatrix} 27 \\ 19 \end{Vmatrix}$$

izračunamo matrice:

$$\mathbf{A}_{22}^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{A}_{21})^{-1} = \frac{1}{104}\begin{Vmatrix} 32 & 7 \\ 8 & 5 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{B}_2 = \begin{Vmatrix} -9 \\ 56 \end{Vmatrix}$$

i dobijemo po posljednjem obrascu:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \frac{1}{104}\begin{Vmatrix} 32 & 7 \\ 8 & 5 \end{Vmatrix}\;\begin{Vmatrix} -9 \\ 56 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$$

Iz toga slijedi $x = 1$ i $y = 2$.

Vježbe

1. Izračunaj nepoznanicu z iz sistema linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z + 5u + 2v &= 22 \\ -4y + z + 2u + 5v &= -8 \\ 3z + u + 2v &= 7 \\ -2z + 3v &= -4 \\ 4z + 5u - v &= 13 \end{aligned}$$

$(z = 2)$

2. Zadan je sistem četiriju linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 10 \\ 2x + y + z + 3u &= 19 \\ x + 2y + 3z + u &= 18 \\ 3x + 4y + z + u &= 18 \end{aligned}$$

a) napiši sistem jednadžbi u matričnom obliku,

b) izračunaj inverznu matricu matrici sistema jednadžbi:

$$\left(\mathbf{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 13 & -3 & -3 & -1 \\ -9 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1/2 & -1/2 \\ -7 & 2 & 3/2 & 1/2 \end{Vmatrix}\right)$$

c) izračunaj pomoću determinanti nepoznanicu z,

$(z = 3)$

d) riješi sistem jednadžbi pomoću matrica,

$(x = 1,\ y = 2,\ z = 3,\ u = 4)$

e) izračunaj pomoću diobe matrica samo nepoznanice x i y,

$x = 1,\ y = 2)$

f) povećaj sve brojeve na desnoj strani jednadžbi za 1 i riješi novi sistem jednadžbi pomoću matrica.

$(x = 7,\ y = -2,\ z = 5,\ u = 1)$

2. Sistemi nehomogenih linearnih jednadžbi

Uzmimo općeniti nehomogeni sistem m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica:

$$
\begin{array}{l}
f_1 \quad = a_{11} \quad x_1 + \ldots + a_{1k} \quad x_k + a_{1,k+1} \quad x_{k+1} + \ldots + a_{1n} \quad x_n = b_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_k \quad = a_{k1} \quad x_1 + \ldots + a_{kk} \quad x_k + a_{k,k+1} \quad x_{k+1} + \ldots + a_{kn} \quad x_n = b_k \\
f_{k+1} = a_{k+1,1}\, x_1 + \ldots + a_{k+1,k}\, x_k + a_{k+1,k+1}\, x_{k+1} + \ldots + a_{k+1,n}\, x_n = b_{k+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_m \quad = a_{m1} \quad x_1 + \ldots + a_{mk} \quad x_k + a_{m,k+1} \quad x_{k+1} + \ldots + a_{mn} \quad x_n = b_m
\end{array}
$$

Budući da jednadžbe sastavljaju nehomogeni sistem, svi koeficijenti na desnoj strani jednadžbi nisu jednaki 0. Lijeve strane jednadžbi funkcije su nepoznanica x_1, x_2, ..., x_n, pa smo ih stoga označili uzastopce sa f_1, f_2, ..., f_m. Sistemu jednadžbi odgovara matrica:

$$
\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix}
a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \ldots & a_{kn} \\
a_{k+1,1} & \ldots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \ldots & a_{mk} & a_{m,k+1} & \ldots & a_{mn}
\end{matrix} \right\|
$$

Pretpostavimo da ta matrica ima rang k; to znači da u njoj egzistira barem jedna nesingularna kvadratna parcijalna matrica reda k te da je svaka kvadratna parcijalna matrica višega reda singularna. Premještajem jednadžbi i nepoznanica možemo uvijek postići da je nesingularna parcijalna kvadratna matrica reda k u prvobitnoj matrici na lijevoj strani gore; u skladu s tim tako je i napisan gornji sistem jednadžbi. Nesingularnoj parcijalnoj kvadratnoj matrici:

$$
\mathbf{D} = \left\| \begin{matrix}
a_{11} & \ldots & a_{1k} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \ldots & a_{kk}
\end{matrix} \right\|
$$

odgovara od 0 različita determinanta D, koju sastavljaju isti elementi kao i matricu.

Uz nesingularnu parcijalnu kvadratnu matricu **D** definiramo slijedeće obrubljene matrice:

$$
\mathbf{A}_s = \left\| \begin{matrix}
a_{11} & \ldots & a_{1k} & b_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & \ldots & a_{kk} & b_k \\
a_{k+s,1} & \ldots & a_{k+s,k} & b_{k+s}
\end{matrix} \right\|
$$

Tu indeks s može zauzeti vrijednosti 1, 2, ... m-k; stoga ima m-k takvih obrubljenih matrica; samo ako je rang k matrice **A** jednak broju jednadžbi m, ne postoji nijedna obrubljena matrica. Svaku obrubljenu matricu dobivamo tako da nesingularnoj kvadratnoj matrici **D** s desne strane dodamo stupac s elementima s desne strane jednadžbi, a dolje redak s koeficijentima $(k + s)$-te jednadžbe. Sve obrubljene matrice opet su kvadratne i imaju red $k+1$. Svakoj obrubljenoj matrici $\mathbf{A}_s$ odgovara determinanta A_s, koja je sastavljena od istih elemenata kao i matrica. Svakoj obrubljenoj matrici $\mathbf{A}_s$ priredimo matricu:

$$\mathbf{A}_{s,\mathbf{f}} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & f_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & f_k \\ a_{k+s,1} & \dots & a_{k+s,k} & f_{k+s} \end{matrix} \right\|$$

Ovu matricu dobivamo iz obrubljene matrice $\mathbf{A}_s$ tako da u njoj elemente posljednjeg stupca nadomjestimo linearnim funkcijama $f_1, \dots, f_k, f_{k+s}$. Toj kvadratnoj matrici odgovara determinanta $A_{s,f}$, koja je sastavljena od istih elemenata kao i matrica.

Možemo se uvjeriti da su sve matrice $\mathbf{A}_{s,f}$ singularne ili da su sve odgovarajuće determinante $A_{s,f}$ jednake 0. Ako naime napišemo determinantu $A_{s,f}$ u proširenu obliku:

$$A_{s,\mathbf{f}} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{11}+x_1 + \dots + a_{1n} & x_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k1} \quad x_1 + \dots + a_{kn} & x_n \\ a_{k+s,1} & \dots & a_{k+s,k} & a_{k+s,1}\, x_1 + \dots + a_{k+s,n} & x_n \end{vmatrix}$$

onda je možemo izraziti kao sumu:

$$A_{s,f} = \sum_{i=0}^{i=n} x_i \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{ki} \\ a_{k+s,1} & \dots & a_{k+s,k} & a_{k+s,i} \end{vmatrix}$$

Ova je suma jednaka 0 jer su determinante u svim sumandima jednake 0. Ako je naime $i \leqq k$, onda su u determinanti dva stupca jednaka, pa je stoga determinanta jednaka 0, a ako je $i > k$, onda je determinanti odgovarajuća matrica reda $k+1$, koja je parcijalna kvadratna matrica matrice sistema jednadžbi $\mathbf{A}$; a svaka je takva matrica singularna i njoj odgovarajuća determinanta je 0.

Sastavimo još matricu:

$$\mathbf{A}_{s,b-f} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & b_1 & -f_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & b_k & -f_k \\ a_{k+s,1} & \dots & a_{k+s,k} & b_{k+s} & -f_{k+s} \end{matrix} \right\|$$

Toj matrici odgovara determinanta $A_{s,b-f}$, koja je sastavljena od istih elemenata kao i matrica. Broj tih matrica i determinanata također je $m-k$. Možemo se uvjeriti da za determinantu $A_{s,b-f}$ važi jednadžba:

$$A_{s,\mathbf{b}-\mathbf{f}} = A_s.$$

Ako naime uzmemo u obzir da se u posljednjem stupcu nalaze diferencije po dvaju brojeva, možemo determinantu $A_{s,b-f}$ raščlaniti u diferenciju determinanti A_s i $A_{s,f}$, od kojih je posljednja jednaka 0.

Za obrađivani sistem m nehomogenih linearnih jednadžbi sa n nepoznanica vrijedi izreka:

Ako sistem jednadžbi nije protuslovan i ima neko rješenje:

$$x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$$

onda su sve obrubljene matrice $\mathbf{A}_s$ *singularne, a sve obrubljene determinante* A_s *jednake 0.*

Dokaz. Obrubljena determinanta A_s je prema prijašnjem jednaka determinanti $A_{s,b-f}$. Ako u posljednjem stupcu determinante $A_{s,b-f}$ uvrstimo u funkcije $f_1, \ldots, f_k, f_{k+s}$ za nepoznanice varijable $x_1, \ldots, x_n$ rješenja $a_1, \ldots, a_n$, onda funkcije zauzimaju uzastopno vrijednosti $b_1, \ldots, b_k, b_{k+s}$. Stoga su svi elementi posljednjeg stupca jednaki 0 i determinanta $A_{s,b-f}$ jednaka je 0; zato je i determinanta A_s jednaka 0 i izreka je dokazana.

Prvih k jednadžbi sistema ima barem jedno rješenje.

Dokaz. Napišimo prvih k jednadžbi sistema nakon prijenosa članova u obliku:

$$\begin{array}{c}
a_{11} x_1 + \ldots + a_{1k} x_k = b_1 - a_{1,k+1} x_{k+1} - \ldots - a_{1n} x_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{k1} x_1 + \ldots + a_{kk} x_k = b_k - a_{k\,k+1} x_{k+1} - \ldots - a_{kn} x_n
\end{array}$$

Rang k matrice $\mathbf{A}$ nikako ne može biti veći od broja varijabli n. Ako je $k = n$, riječ je o Cramerovom sistemu, koji ima jedno rješenje. Pogledajmo još kako je s rješenjima kad je $k < n$. U tom primjeru za nepoznanice na desnoj strani izaberemo proizvoljne vrijednosti:

$$x_{k+1} = a_{k+1}, \ldots, x_n = a_n$$

Ove vrijednosti uvrstimo u sistem jednadžbi i dobivamo opet Cramerov sistem k linearnih jednadžbi sa k nepoznanica; taj ima rješenje:

$$x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k;$$

stoga gornje jednadžbe imaju rješenje:

$$x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k, x_{k+1} = a_{k+1}, \ldots, x_n = a_n,$$

pa je izreka dokazana.

Ako su sve obrubljene matrice $\mathbf{A}_s$ *singularne ili ako su sve obrubljene determinante* A_s *jednake 0, sistem jednadžbi nije protuslovan i ima barem jedno rješenje.*

Dokaz. Determinantu $A_{s,b-f}$, koja je jednaka determinanti A_s, razvijemo po posljednjem stupcu i dobivamo:

$$A_{s,b-f} = (b_1 - f_1) A_{1s} + \ldots + (b_k - f_k) A_{ks} + (b_{k+s} - f_{k+s}) A_{k+1,s}$$

Budući da je ta determinanta jednaka determinanti $A_s = 0$ i kako je kofaktor $A_{k+1,s}$ jednak determinanti D, dobivamo dalje:

$$(b_1 - f_1) A_{1s} + \ldots + (b_k - f_k) A_{ks} + (b_{k+s} - f_{k+s}) D = 0$$

Stoga što indeks s zauzima vrijednosti 1, 2, ... , m — k, ovdje je zapravo napisano m — k jednadžbi. Po prijašnjoj izreci prvih k linearnih jednadžbi ima barem jedno rješenje koje uvijek možemo izračunati. Ako takvo rješenje sistema prvih k jednadžbi uvrstimo u gornju jednadžbu, onda prvih k članova na lijevoj strani postaje jednako 0; budući da determinanta D nije jednaka 0, iz gornje jednadžbe slijedi jednadžba:

$$b_{k+s} - f_{k+s} = 0$$

To pak znači da rješenje prvih k jednadžbi zadovoljava i s-tu jednadžbu. Kako s može zauzeti vrijednosti 1, 2, ... , m — k, to rješenje sistema prvih k jednadžbi zadovoljava i sve druge jednadžbe. Time je izreka dokazana.

Pri rješavanju neprotuslovnih sistema m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica u kojih je rang matrice sistema jednak k postoje slijedeće mogućnosti:

1. $k = m = n$. Tu je riječ o Cramerovom sistemu jednadžbi koji ima samo jedno rješenje. Za pojedine vrijednosti za brojeve k, m i n dobivamo ova zanimljiva geometrijska tumačenja: a) ako je $k = m = n = 2$, onda svaku od ovih jednadžbi možemo prikazati pravcem u ravninskom kartezijskom koordinatnom sistemu; pravci nisu paralelni, a koordinate sjecišta su rješenje sistema jednadžbi; b) ako je $k = m = n = 3$, onda svaku od ovih triju jednadžbi možemo prikazati jednom ravninom u prostornom kartezijskom koordinatnom sistemu. Sve tri ravnine sijeku se u jednoj točki, a koordinate sjecišta su rješenje sistema jednadžbi.

2. $k = m < n$. Pri toj mogućnosti broj jednadžbi manji je od broja nepoznanica, dok je rang matrice sistema jednak broju jednadžbi. Pri rješavanju sistema jednadžbi zadržimo prvih $k = m$ nepoznanica na lijevoj strani, a sve druge nepoznanice prenesemo na desnu stranu. Sistem jednadžbi onda rješavamo kao Cramerov sistem; u rješenju je prvih k nepoznanica izraženo nepoznanicama prenesenim na desnu stranu. Kako prenesenim nepoznanicama možemo odrediti proizvoljne vrijednosti, dobivamo beskonačno mnogo rješenja. Za pojedine vrijednosti brojeva k, m i n dobivamo slijedeće interesantne geometrijske prikaze: a) ako je $k = m = 1$ i $n = 2$, onda imamo samo jedan pravac; koordinate svake točke toga pravca su rješenja jednadžbe; b) ako je $k = m = 1$ i $n = 3$, onda imamo samo jednu ravninu; koordinate svake točke te ravnine su rješenja jednadžbe; c) ako je $k = m = 2$ i $n = 3$, imamo dvije ravnine koje nisu paralelne; koordinate svake točke na presječnici tih dviju ravnina su rješenja sistema jednadžbi.

Primjer. Riješimo sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 7 \\ 5x + 3y + z &= 14 \end{aligned}$$

Tu je $m = 2$, $n = 3$ i $k = 2$ jer je nesingularna kvadratna matrica drugoga reda:

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{Vmatrix}$$

Nakon prijenosa nepoznanice z na desnu stranu jednadžbi dobivamo za nepoznanice x i y Cramerov sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 - 3z \\ 5x + 3y &= 14 - z \end{aligned}$$

Taj sistem jednadžbi ima rješenje:

$$x = 7 - 8z, \ y = -7 + 13z$$

u kojem za nepoznanicu z možemo uzeti proizvoljne vrijednosti.

3. $k < m = n$. Pri toj mogućnosti broj jednadžbi jednak je broju nepoznanica, dok je rang matrice sistema jednadžbi manji od tih dvaju brojeva. Sve obrubljene matrice jednake su 0. Stoga rješavamo samo sistem prvih k jednadžbi jer rješenje odgovara i svim ostalim jednadžbama. Kako je k manji od n, dobivamo, kao i u prijašnjoj mogućnosti, bezbroj rješenja. Kod pojedinih vrijednosti za brojeve k, m i n dobivamo slijedeće zanimljive geometrijske prikaze: a) ako je $k = 1$ i $m = n = 2$, onda su obje jednadžbe prikazane istim pravcem; koordinate svake točke su rješenje sistema jednadžbi; b) ako je $k = 1$ i $m = n = 3$, onda su sve tri jednadžbe prikazane istom ravninom; koordinate svake točke te ravnine su rješenje sistema jednadžbi; c) ako je $k = 2$ i $m = n = 3$, onda su jednadžbe prikazane snopom triju ravnina koje imaju isti presječni pravac; koordinate svake točke te presječnice su rješenje sistema jednadžbi.

Primjer. Riješimo sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 13 \\ 5x + 4y + 9z &= 40 \\ x + 2y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

Ovdje je $m = n = 3$ i $k = 2$ jer je matrica sistema jednadžbi singularna i jer je matrica:

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}$$

nesingularna. Egzistira samo jedna obrubljena matrica:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 13 \\ 5 & 4 & 40 \\ 1 & 2 & 14 \end{Vmatrix}$$

koja je singularna, pa zato sistem jednadžbi nije protuslovan. Pri rješavanju sistema jednadžbi uzimamo u obzir samo prve dvije jednadžbe. U njima oba člana s nepoznanicom z prenesemo na desnu stranu, pa za nepoznanice x i y dobivamo Cramerov sistem:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 13 - 3z \\ 5x + 4y &= 40 - 9z \end{aligned}$$

taj sistem ima rješenje:

$$x = 4 - z, \ y = 5 - z,$$

u kojemu nepoznanica z može zauzeti proizvoljnu vrijednost.

4. $k < m < n$. Po toj mogućnosti broj jednadžbi manji je od broja nepoznanica, dok je rang sistemu jednadžbi odgovarajuće matrice manji od oba ova broja. Najprije riješimo k prvih jednadžbi tako da zadržimo k prvih nepoznanica na lijevoj, a sve druge nepoznanice prenesemo na desnu stranu. Tako za prvih k ne-

poznanica dobivamo Cramerov sistem. U rješenju je prvih k nepoznanica izraženo drugim $n - k$ nepoznanicama; stoga dobivamo beskonačno mnogo rješenja. U pogledu geometrijskog prikaza treba spomenuti samo mogućnost kad je $k = 1$, $m = 2$ i $n = 3$. U tom slučaju obje su jednadžbe prikazane samo jednom ravninom. Koordinate svake točke te ravnine su rješenje sistema jednadžbi.

Primjer. Riješimo sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 14 \\ 2x + 4y + 6z &= 28 \end{aligned}$$

Kako su sve tri moguće kvadratne matrice drugoga reda singularne, matrica sistema jednadžbi ima rang $k = 1$. Za nesingularnu kvadratnu matricu prvoga reda izaberimo koeficijent 1 kod nepoznanice x u prvoj jednadžbi:

$$\mathbf{D} = \| 1 \|$$

Egzistira samo jedna obrubljena matrica:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 28 \end{Vmatrix}$$

Ta je matrica singularna. Iz prve jednadžbe dobivamo rješenje:

$$x = 14 - 2y - 3z$$

u kojem možemo za nepoznanice y i z izabrati bilo koje vrijednosti.

5. $k = n < m$. Sistem jednadžbi ima više jednadžbi nego nepoznanica, a rang matrice sistema jednak je broju nepoznanica. Sve obrubljene matrice su singularne. Rješavamo samo sistem prvih k jednadžbi, koji je Cramerov sistem. Rješenje zadovoljava i ostale jednadžbe jer su sve obrubljene matrice singularne. Za pojedine vrijednosti brojeva k, m i n dobivamo slijedeće zanimljive geometrijske prikaze: a) ako je $k = n = 2$ i $m > 2$, onda je m jednadžbi prikazano snopom pravaca koji prolaze kroz zajedničko sjecište; koordinate toga sjecišta su rješenje sistema jednadžbi; b) ako je $k = n = 3$ i $m > 3$, onda je m jednadžbi prikazano snopom ravnina koje se sijeku u zajedničkom sjecištu; koordinate toga sjecišta su rješenje sistema jednadžbi.

Primjer. Riješimo sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 5x + 3y &= 11 \\ 7x + 4y &= 15 \\ 3x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

Tu je $m = 4$, $n = 2$ i $k = 2$ jer je matrica koeficijenata prvih dviju jednadžbi:

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{Vmatrix}$$

nesingularna. Egzistiraju dvije singularne obrubljene matrice

$$\mathbf{A}_3 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 11 \\ 7 & 4 & 15 \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 7 \end{Vmatrix}$$

Riješimo sistem samo prvih dviju jednadžbi pa dobivamo rješenje:

$$x = 1, \; y = 2$$

koje zadovoljava i treću i četvrtu jednadžbu.

6. $k < n < m$. Sistem ima više jednadžbi od nepoznanica, dok je rang matrice sistema jednadžbi manji od broja nepoznanica. Sve obrubljene matrice su singularne. Riješimo samo prvih k jednadžbi, u njima na lijevoj strani zadržimo prvih k nepoznanica, a članove sa svim ostalim nepoznanicama prenesemo na desnu stranu. Tako za prvih k nepoznanica dobivamo Cramerov sistem. U rješenju je prvih k nepoznanica izraženo drugim n-k nepoznanicama, kojima možemo pripisati proizvoljne vrijednosti. Iz tog razloga sistem jednadžbi ima beskonačno mnogo rješenja. Za pojedine vrijednosti brojeva k, m i n dobivamo slijedeće zanimljive geometrijske prikaze: a) ako je $k = 1$, $n = 2$ i $m > 2$, onda je m jednadžbi prikazano istim pravcem; koordinate svake točke toga pravca su rješenje sistema jednadžbi; b) ako je $k = 1$, $n = 3$ i $m > 3$, onda je m jednadžbi prikazano samo jednom ravninom; koordinate svake točke te ravnine su rješenje sistema jednadžbi; c) ako je $k = 2$, $n = 3$ i $m > 3$, onda je m jednadžbi prikazano snopom ravnina koje se sijeku na istoj presječnici; koordinate svake točke te presječnice su rješenje sistema jednadžbi.

Primjer. Riješimo sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 7 \\ 5x + 3y + 4z &= 23 \\ 7x + 4y + 5z &= 30 \\ 3x + 2y + 3z &= 16 \end{aligned}$$

Tu je $m = 4$, $n = 3$ i $k = 2$ jer je matrica:

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{Vmatrix}$$

nesingularna i jer su sve četiri parcijalne kvadratne matrice trećega reda singularne. Egzistiraju dvije singularne obrubljene matrice:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 23 \\ 7 & 4 & 30 \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 23 \\ 3 & 2 & 16 \end{Vmatrix}$$

Pri rješavanju sistema uzimamo u obzir samo prve dvije jednadžbe. U njima oba člana s nepoznanicom z prenesemo na desnu stranu i dobivamo za nepoznanice x i y Cramerov sistem:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 - z \\ 5x + 3y &= 23 - 4z. \end{aligned}$$

Taj sistem ima rješenje:

$$x = -2 + z, \quad y = 11 - 3z,$$

u kojemu nepoznanica z može zauzimati proizvoljne vrijednosti.

Sistem m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica i s matricom ranga k je protuslovan i nema nijednog rješenja ako je barem jedna od obrubljenih matrica nesingularna. Takav je npr. sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + y &= 6 \\ 4x + 6y &= 10 \end{aligned}$$

Sistemu jednadžbi odgovara matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{Vmatrix}$$

ranga $k = 2$. Nesingularnoj kvadratnoj parcijalnoj matrici drugoga reda:

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}$$

odgovara samo jedna obrubljena matrica:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 6 \\ 4 & 6 & 10 \end{Vmatrix}$$

Ta je matrica nesingularna jer njoj odgovarajuća determinanta A_3 ima vrijednost 60. Stoga je ovaj sistem protuslovan i nema nijednog rješenja. U geometrijskom prikazu svaku jednadžbu prikazuje po jedan pravac; ti pravci međutim nemaju zajedničko sjecište.

Vježbe

1. Riješi sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 4x + y &= 6 \\ 3x + 5y &= 13 \\ 8x + 2y &= 12 \\ 11x + 7y &= 25 \\ 9x + 15y &= 39 \end{aligned}$$

Prikaži jednadžbe geometrijski pomoću pravaca u ravnini.

$(x = 1, \ y = 2)$

2. Riješi sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 13 \\ 3x + y + 5z &= 16 \\ 5x + 4y + 6z &= 29 \end{aligned}$$

$(x = 5 - 2z, \ y = 1 + z)$

3. Zadan je sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ x + 4y &= 6 \\ 2x + 3y &= 7 \\ x + 5y &= 7 \end{aligned}$$

Ustanovi zašto je sistem protuslovan i nema nijednog rješenja; prikaži jednadžbe pomoću pravaca.

3. Sistemi homogenih linearnih jednadžbi

Sistem m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

jest homogen jer su desne strane svih jednadžbi jednake 0. Svaki takav sistem ima trivijalno rješenje:

$$x_1 = 0, \quad \ldots, x_n = 0$$

Kod homogenih sistema linearnih jednadžbi nas interesira da li sistem osim trivijalnog ima još i neko drugo rješenje.

Obrađujmo najprije mogućnost kad sistem ima toliko jednadžbi koliko i nepoznanica, tj. kad je $m = n$. Ako kvadratna matrica sistema jednadžbi **A** nije singularna, radi se o Cramerovom sistemu, u kojem su međutim sve modificirane determinante jednake 0 jer su desne strane svih jednadžbi jednake 0. Pri toj mogućnosti egzistira samo trivijalno rješenje.

Ako je međutim matrica sistema jednadžbi singularna, onda sistem jednadžbi osim trivijalnog ima još neka druga rješenja. Uzmimo da je rang sistema jednadžbi $k < n$ i da lijevi gornji elementi sastavljaju nesingularnu matricu:

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{Vmatrix}$$

U sistemu uzimamo u obzir samo prvih k jednadžbi; u njima na lijevoj strani zadržimo članove s prvih k nepoznanica, dok članove s drugim nepoznanicama prenesemo na desnu stranu. Tako za prvih k nepoznanica dobivamo Cramerov sistem. U rješenju je prvih k nepoznanica izraženo s drugih n-k nepoznanica; stoga sistem jednadžbi osim trivijalnog ima još beskonačno mnogo rješenja.

Primjer. Riješimo sistem triju homogenih linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 3x + y + 4z &= 0 \\ 2x + 4y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

Matrica sistema jednadžbi:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{Vmatrix}$$

je singularna i ima rang $k = 2$; njezina parcijalna kvadratna matrica:

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

u lijevom gornjem uglu je nesingularna. Sistem jednadžbi osim trivijalnog ima još druga rješenja, koja dobivamo iz sistema prvih dviju jednadžbi nakon prijenosa članova s nepoznanicom z:

$$\begin{aligned} x + 2y &= -3z \\ 3x + y &= -4z \end{aligned}$$

Taj sistem ima rješenje:

$$x = -z, \quad y = -z,$$

u kojem za z možemo uzeti proizvoljne vrijednosti.

Obrađujmo još opći primjer sistema homogenih jednadžbi u kojem broj jednadžbi nije jednak broju nepoznanica. Uzmimo da matrica **A** sistema jednadžbi ima red mxn i rang k. S obzirom na vrijednosti tih brojeva razlučujemo slijedeće mogućnosti:

1. Ako je $m < n$, rang matrice ne može biti veći od broja jednadžbi m. Pri rješavanju uzimamo u obzir samo prvih k jednadžbi; u njima zadržimo prvih k nepoznanica na lijevoj strani, a sve druge nepoznanice prenesemo na desnu stranu. Tako za prvih k nepoznanica dobivamo Cramerov sistem. U rješenju toga sistema jednadžbi prvih k nepoznanica izraženo je s drugih n-k nepoznanica. Stoga ovaj sistem jednadžbi pored trivijalnog ima i beskonačno mnogo rješenja.

Primjer. Riješimo sistem dviju jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - 11u &= 0 \\ x - 2y - 2z + 6u &= 0 \end{aligned}$$

Matrica sistema jednadžbi ima rang $k = 2$. U jednadžbama prenesemo članove s nepoznanicama z i u na desnu stranu, pa za nepoznanice x i y dobivamo Cramerov sistem:

$$\begin{aligned} 2x - y &= -3z + 11u \\ x - 2y &= 2z - 6u \end{aligned}$$

On ima rješenje:

$$x = \frac{-8z + 28u}{3}, \quad y = \frac{-7z + 23u}{3}$$

u kojem za nepoznanice z i u možemo uzeti proizvoljne vrijednosti.

2. Ako je $m > n$, onda rang matrice sistema jednadžbi ne može biti veći od broja nepoznanica n. U tom primjeru razlikujemo dvije mogućnosti:

a) ako je $k = n$, onda prvih k jednadžbi sastavlja sistem homogenih linearnih jednadžbi koji ima samo trivijalno rješenje,

b) ako je $k < n$, uzimamo samo prvih k jednadžbi; u njima prvih k nepoznanica zadržimo na lijevoj strani, dok sve druge nepoznanice prenesemo na desnu stranu. Tako za prvih k nepoznanica dobivamo Cramerov sistem, koji ima beskonačno mnogo rješenja. Ta rješenja odgovaraju i svim ostalim jednadžbama ako su sve obrubljene matrice singularne. Ako samo jedna od obrubljenih matrica nije singularna, onda sistem ima samo trivijalno rješenje.

Primjer. Riješimo sistem četiriju homogenih linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 4x - 3y - 6z &= 0 \\ x + y - 5z &= 0 \\ 5x - 2y - 11z &= 0 \\ 3x - 4y - z &= 0 \end{aligned}$$

Kako matrica sistema jednadžbi ima rang $k = 2$, prenesemo članove s nepoznanicom z na desnu stranu i dobivamo sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 6z \\ x + y &= 5z \\ 5x - 2y &= 11z \\ 3x - 4y &= z \end{aligned}$$

Budući da matrica sistema jednadžbi ima rang $k = 2$, to uzimamo samo prve dvije jednadžbe koje za nepoznanice x i y tvore Cramerov sistem. On ima rješenje:

$$x = 3z, \quad y = 2z$$

u kojem za z možemo uzeti proizvoljne vrijednosti. To je istovremeno i rješenje prvobitnog sistema četiriju jednadžbi jer su obje obrubljene matrice:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{Vmatrix} 4 & -3 & 6z \\ 1 & 1 & 5z \\ 5 & -2 & 11z \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{Vmatrix} 4 & -3 & 6z \\ 1 & 1 & 5z \\ 3 & -4 & z \end{Vmatrix}$$

singularne. Među dobivena rješenja spada i trivijalno rješenje, koje dobivamo ako postavimo u rješenje $z = 0$.

Vježbe

1. Riješi sistem homogenih linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 4x + y - 19z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

$(x = 4z, \ y = 3z)$

2. Riješi sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} x - 4y + 4z - 10u &= 0 \\ 2x + y - z - 2u &= 0 \end{aligned}$$

$(x = 2u,\ y = z - 2u)$

3. Riješi sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + y + z - 14u &= 0 \\ -x + 2y + z - 7u &= 0 \\ -x - y + 2z - 7u &= 0 \\ x + 3y + 2z - 21u &= 0 \end{aligned}$$

$(x = 3u,\ y = 2u,\ z = 6u)$

VI. VEKTORSKA ALGEBRA

1. Vektorski prostor

Vektorsku algebru možemo smatrati posebnim užim slučajem matrične algebre; stoga za nju vrijede slična računska pravila kao za matričnu algebru.

Uzmimo uređenih m realnih brojeva $x_1, \dots, x_m$ i od njih sastavimo matricu reda $m \times 1$ ili vektor stupac:

$$\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{Vmatrix} = \{x_1, \dots, x_m\}$$

Skup svih takvih m realnih brojeva nazivamo m-dimenzionalnim vektorskim prostorom V^m, pojedine m nazivamo vektorima ili točkama toga prostora, a same realne brojeve nazivamo komponentama vektora ili koordinatama točaka.

Kako je vektorska algebra samo poseban primjer matrične algebre, vrijede i u njoj slična računska pravila kao u matričnoj algebri.

Jednakost vektora. Vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ su jednaki ako imaju jednake homologne komponente. Jednakost vektora je refleksivna, komutativna i tranzitivna relacija. Svaka se vektorska jednadžba može rastaviti u onoliko običnih jednadžbi koliko imaju komponenata vektori koji u njoj nastupaju.

Zbrajanje vektora. Vektore $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ i $\mathbf{y} = \{y_1, \dots . y_m\}$ zbrajamo tako da zbrojimo homologne komponente:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m\}$$

Za zbrajanje vektora vrijede zakoni komutativnosti i asocijativnosti. Za vektor $\mathbf{0} = \{0, \dots, 0\}$ važi:

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$$

Množenje vektora brojem. Vektor $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ pomnožimo brojem k tako da svaku njegovu komponentu pomnožimo tim brojem:

$$k\,\mathbf{x} = \{kx_1, \dots, kx_m\}$$

Za množenje vektora brojem važe dva zakona distributivnosti:

$$k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}$$
$$(k_1 + k_2)\mathbf{x} = k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{x}$$

Za broj 1 važi:

$$1.\ \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Svakom vektoru $\mathbf{x}$ odgovara suprotni vektor $-\mathbf{x} = \{-x_1, \dots, -x_m\}$ tako da važi jednadžba:

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Među vektorima m-dimenzionalnog vektorskog prostora značajni su vektori:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \{1,0, \dots, 0\} \\ \mathbf{e}^2 &= \{0,1, \dots, 0\} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}^m &= \{0,0, \dots, 1\} \end{aligned}$$

Te vektore nazivamo osnovnim jediničnim vektorima.

Primjer. Uzmimo sistem dviju vektorskih jednadžbi s četvorodimenzionalnim vektorima:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} &= \{3, 2, 1, 0\} \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} &= \{1, 0, 2, 4\} \end{aligned}$$

Tu je $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ i $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Taj se sistem razlaže u četiri sistema po dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{array}{llll} 2x_1 + 3y_1 = 3 & 2x_2 + 3y_2 = 2 & 2x_3 + 3y_3 = 1 & 2x_4 + 3y_4 = 0 \\ x_1 - y_1 = 1 & x_2 - y_2 = 0 & x_3 - y_3 = 2 & x_4 - y_4 = 4 \end{array}$$

Ovi sistemi jednadžbi imaju uzastopna rješenja:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 6/5 & x_2 = 2/5 & x_3 = 7/5 & x_4 = 12/5 \\ y_1 = 1/5 & y_2 = 2/5 & y_3 = -3/5 & y_4 = -8/5 \end{array}$$

Stoga sistem vektorskih jednadžbi ima rješenje:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{5}\{6, 2, 7, 12\}, \qquad \mathbf{y} = \frac{1}{5}\{1, 2, -3, -8\}$$

Sistem tih dviju vektorskih jednadžbi možemo riješiti i neposredno a da ga ne razlažemo na četiri sistema običnih jednadžbi. Rješavamo ga kao obični sistem dviju jednadžbi s dvije nepoznanice $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ npr. po metodi suprotnih koeficijenata. Ako prvoj jednadžbi pribrojimo sa 3 pomnoženu drugu jednadžbu, dobivamo

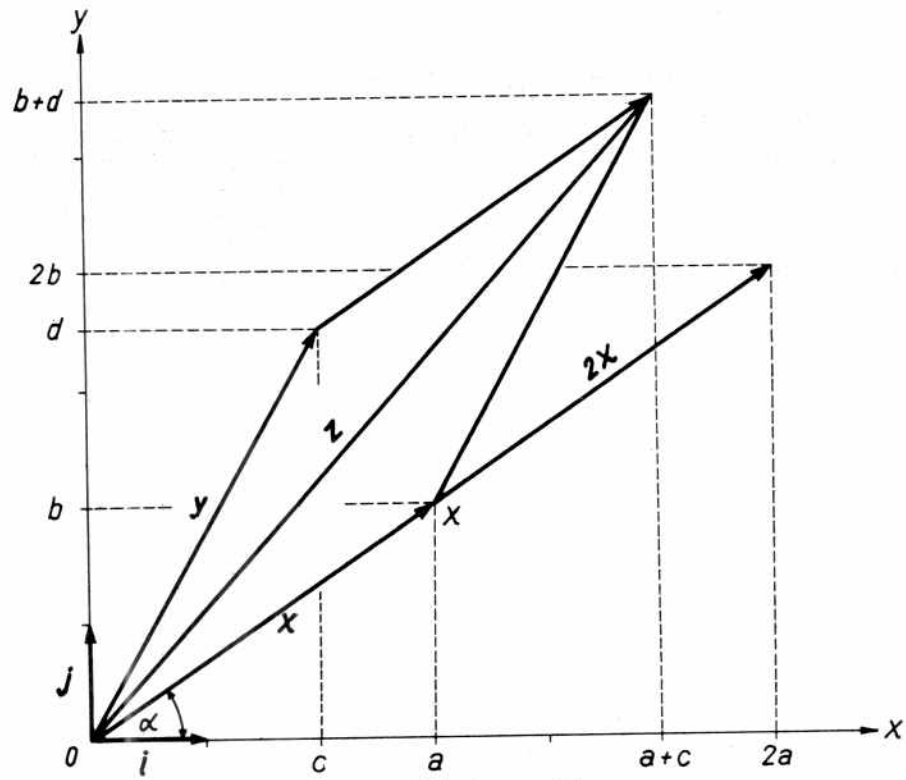
$$5\mathbf{x} = \{6, 2, 7, 12\}$$

i iz toga za $\mathbf{x}$ isti vektor kao i gore. Ako pak od prve jednadžbe odbijemo sa 2 pomnoženu drugu jednadžbu, dobivamo:

$$5\mathbf{y} = \{1, 2, -3, -8\}$$

i iz toga isti vektor $\mathbf{y}$ kao i gore.

Primjer. Ako je m = 2, onda je vektorski prostor dvodimenzionalan. Vektore toga prostora možemo predočiti pomoću usmjerenih pravaca ili strelica u ravninskom kartezijskom koordinatnom sistemu. Vektor $\mathbf{x} = \{a, b\}$ na slici 12. prikazuje strelica koja ima početak u središtu koordinatnog sistema a kraj u točki X(a, b);



Sl. 12. Vektori u ravnini

prikazuje ga međutim i svaka druga jednako dugačka strelica koja je s ovom paralelna i koja ima početak u bilo kojoj točki ravnine. Dvodimenzionalni vektorski prostor ima dva osnovna jedinična vektora:

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{i} = \{1, 0\} \text{ i } \mathbf{e}^2 = \mathbf{j} = \{0, 1\}$$

Kao što vidimo na istoj slici, ta dva jedinična vektora prikazuju strelice na apscisnoj i ordinatnoj osi koje su duge po jednu jedinicu dužine. Sumu:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = \{a + c,\ b + d\}$$

dvaju vektora $\mathbf{x} = \{a, b\}$ i $\mathbf{y} = \{c, d\}$ dobivamo, kao što vidimo na istoj slici, pomoću paralelograma vektora. Produkt:

$$\mathbf{u} = k\mathbf{x} = \{ka,\ kb\}$$

vektora **x** s brojem k dobivamo tako da dužinu strelice **x** pomnožimo brojem k; na slici je prikazan produkt 2**x**. Za vektore koje na taj način geometrijski prikazujemo uvodimo slijedeće metrijske veličine: vektor $\mathbf{x} = \{a, b\}$ ima dužinu:

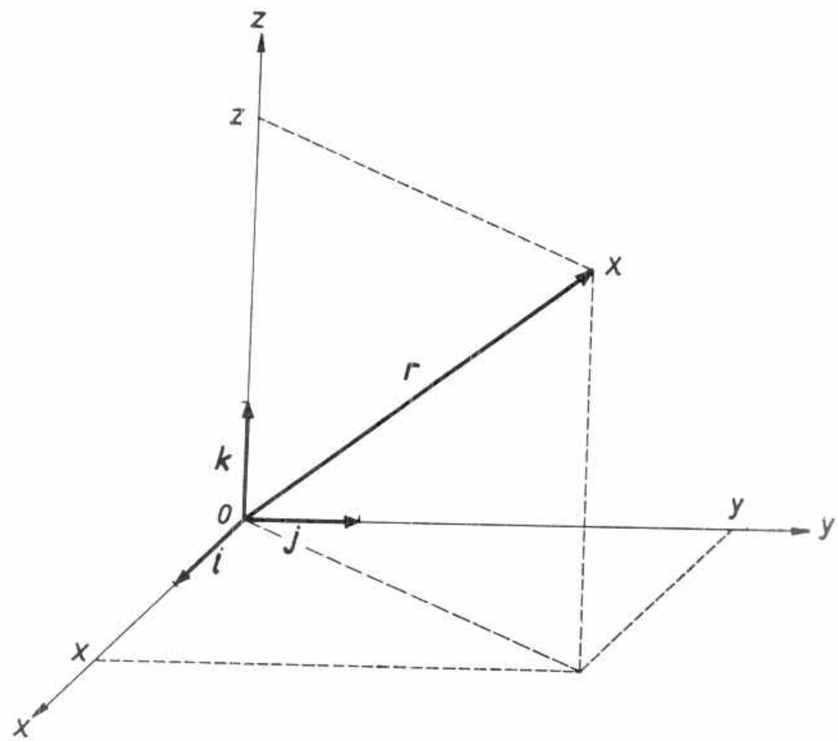
$$\mathbf{x} = |\mathbf{x}| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

i smjerni koeficijent:

$$\operatorname{tg} \alpha = b/a$$

Tu je α kut koji vektor **x** tvori s pozitivnim pravcem apscisne osi.

Primjer. Ako je $m = 3$, onda je vektorski prostor trodimenzionalan. Vektore takvog prostora prikazujemo pomoću usmjerenih pravaca ili strelica u trodimenzionalnom kartezijskom koordinatnom sistemu. Vektor $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ na slici 13 prikazuje strelica koja ima početak u središtu koordinatnog sistema a kraj u točki $X(x, y, z)$; prikazuje ga međutim i svaka druga strelica jednake dužine koja je s ovom paralelna i koja ima početak u bilo kojoj točki prostora.



Sl. 13. Vektori u trodimenzionalnom prostoru

Trodimenzionalni vektorski prostor ima 3 osnovna jedinična vektora:

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{i} = \{1, 0, 0\}, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{j} = \{0, 1, 0\}, \quad \mathbf{e}^3 = \mathbf{k} = \{0, 0, 1\},$$

koje na istoj slici prikazuju po jednu jedinicu dužine dugačke strelice na apscisnoj, koordinatnoj i aplikatnoj osi. Za vektore koje na taj način prikazujemo geometrijski uvodimo neke metrijske veličine. Dužina projekcije vektora **r** = {x, y, z} na apscisnoj osi je x, na ordinatnoj osi y i na aplikatnoj osi z. Vektor **r** ima dužinu:

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Kosinusi nagiba vektora su:

$$\cos\alpha = x/r, \quad \cos\beta = y/r, \quad \cos\gamma = z/r$$

Ovdje vektor **r** tvori s apscisom kut α, s ordinatom kut β i s aplikatom kut γ.

Vježbe

1. Zadani su vektori **a** = {2,1}, **b** = {1,1} i **c** = {1,3}. Konstruiraj vektore:

a) 2**a** d) 2**a** + 3**c**
b) **a** + **b** e) **a** + 2**b** − 2**c**
c) **a** − **b** f) $\frac{1}{2}$ **a** + 2**b** − $\frac{1}{2}$ **c**

2. Izračunaj dužinu i kosinuse nagiba vektora **a** = {1,2,2}.

(3; 1/3, 2/3, 2/3)

3. Zadani su vektori **a** = {1,3,2}, **b** = {2,0,4} i **c** = {3,4,0}. Izračunaj vektore:

a) 2**a** ({2,6,4})
b) **a** + **c** ({4,7,2})
c) 2**a** + 3**b** ({8,6,16})
d) 4**a** + 2**b** + 3**c** ({17,24,16})
e) 3**a** − 2**b** − **c** ({−4,5,−2})

4. Zadani su vektori **a** = {1,3,0,2}, **b** = {2,0,4,3} i **c** = {0,6,4,2}. Izračunaj vektore:

a) 3**b** ({6,0,12,9})
b) $\frac{1}{2}$**c** ({0,3,2,1})
c) **a** + **b** ({3,3,4,5})
d) 2**a** + 3**b** − 2**c** ({8,−6,4,9})

5. Zadani su vektori **a** = {1,4,2,5} i **b** = {5,0,3,2}.

a) Riješi vektorsku jednadžbu:

4**a** + 2**x** = 3**b** ({9,2,−8,1/2,−7})

b) Riješi sistem vektorskih jednadžbi:

x + **y** = **a**
x − **y** = **b** **x** = {3,2,5/2,7/2}, **y** = {−2,2,−1/2,3/2}

2. Linearni sastavi vektora

Uzmimo u m-dimenzionalnom vektorskom prostoru V^m n vektora:

$$\mathbf{x}^1 = \{x_1^1, \ldots, x_m^1\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{x}^n = \{x_1^n, \ldots, x_m^n\}$$

i isto toliko realnih brojeva:

$$a_1, \dots, a_n$$

Izraz:

$$a_1 \mathbf{x}^1 + \dots + a_n \mathbf{x}^n$$

nazivamo linearnim sastavom tih vektora, a realne brojeve koeficijentima linearnog sastava. Svaki linearni sastav vektora iste dimenzije je vektor iste dimenzije.

Svaki vektor $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ možemo izraziti kao linearni sastav osnovnih jediničnih vektora s njegovim komponentama kao koeficijentima.

Dokaz.

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = x_1 \{1, 0, \dots, 0\} + x_2 \{0, 1, \dots, 0\} + \dots + x_m \{0, 0, \dots, 1\} =$$
$$= x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + \dots + x_m \mathbf{e}^m$$

Primjer. Svaki vektor $\mathbf{r} = \{x, y\}$ dvodimenzionalnog vektorskog prostora V^2 možemo izraziti kao linearni sastav obaju osnovnih jediničnih vektora na slijedeći način:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Svaki vektor $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ trodimenzionalnog vektorskog prostora V^3 možemo izraziti linearno pomoću osnovnih jediničnih vektora ovako:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Uzmimo n od $\mathbf{0}$ različitih vektora $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n$ m-dimenzionalnog vektorskog prostora i skupinu isto tolikog broja realnih koeficijenata $a_1, \dots, a_n$; možemo izabrati bezbroj takvih skupina realnih koeficijenata. S ovim vektorima i ovakvom skupinom koeficijenata sastavimo linearni sastav:

$$a_1 \mathbf{x}^1 + \dots a_n \mathbf{x}^n$$

Promatrajmo sve moguće linearne sastave koje dobivamo kod različitih skupina koeficijenata. Ako su svi koeficijenti jednaki 0, onda je linearni sastav jednak vektoru **O**, bez obzira na to kakvi su vektori u sastavu. Ako pak nisu svi koeficijenti jednaki 0, onda razlikujemo dvije mogućnosti:

a) linearni sastav ne može biti jedank **0** ni kod jedne skupine koeficijenata; pri toj mogućnosti vektori sastavljaju sistem linearno nezavisnih vektora;

b) postoji barem jedna skupina koeficijenata za koju je linearni sastav jednak **0**; pri toj mogućnosti vektori sastavljaju sistem linearno zavisnih vektora.

U skladu s tim linearnu nezavisnost i linearnu zavisnost vektora definiramo ovako:

Vektori $\mathbf{x}^1 \dots, \mathbf{x}^n$ *su linearno nezavisni ako nije moguća relacija:*

$$a_1 \mathbf{x}^1 + \dots + a_n \mathbf{x}^n = \mathbf{0},$$

u kojoj svi koeficijenti linearnog sastava ne bi bili jednaki 0.

Vektori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n$ *su linearno zavisni ako je moguća relacija:*

$$a_1 \mathbf{x}^1 + \ldots + a_n \mathbf{x}^n = \mathbf{0},$$

pri barem jednoj skupini koeficijenata linearnog sastava u kojoj međutim nisu svi koeficijenti jednaki 0.

Uzmimo n od $\mathbf{0}$ različitih vektora m-dimenzionalnog vektorskog prostora:

$$\mathbf{x}^1 = \{x_1^1, \ldots, x_m^1\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{x}^n = \{x_1^n, \ldots, x_m^n\}$$

Broj vektora n neka pri tom bude veći od dimenzije m vektorskog prostora. Iz komponenata tih vektora sastavimo matricu:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^k & x_1^{k+1} & \ldots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_k^1 & \ldots & x_k^k & x_k^{k+1} & \ldots & x_k^n \\ x_{k+1}^1 & \ldots & x_{k+1}^k & x_{k+1}^{k+1} & \ldots & x_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m^1 & \ldots & x_m^k & x_m^{k+1} & \ldots & x_m^n \end{Vmatrix}$$

U toj matrici stupci su sastavljeni od komponenata pojedinih vektora. Pretpostavimo da matrica $\mathbf{A}$ ima rang k i da smo vektore već tako uredili da je parcijalna kvadratna matrica $\mathbf{D}$ reda k lijevo gore nesingularna; stoga je odgovarajuća determinanta D različita od 0.

Dokažimo najprije izreku: *Vektori* $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ *sastavljaju sistem linearno nezavisnih vektora.*

Dokaz. Postavimo se na suprotno stajalište, da ovi vektori čine sistem linearno zavisnih vektora. Ako bi to bilo tako, onda bi postojala barem jedna jednadžba:

$$c_1 \mathbf{x}^1 + \ldots + c_k \mathbf{x}^k = \mathbf{0},$$

u kojoj svi koeficijenti linearnog sastava na lijevoj strani ne bi bili jednaki 0. Ova se vektorska jednadžba rastavlja u m običnih linearnih jednadžbi s nepoznanicama $c_1, \ldots, c_k$:

$$\begin{array}{l} c_1 x_1^1 \;\; + \ldots + c_k x_1^k \;\;\; = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 x_k^1 \;\; + \ldots + c_k x_k^k \;\;\; = 0 \\ c_1 x_{k+1}^1 + \ldots + c_k x_{k+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 x_m^1 \;\; + \ldots + c_k x_m^k \;\;\; = 0 \end{array}$$

U ovom sistemu jednadžbi obrađujmo samo prvih k jednadžbi. One sastavljaju sistem k homogenih linearnih jednadžbi sa k nepoznanica u kojem je međutim determinanta D sistema različita od 0. Stoga taj sistem ima samo trivijalno rješenje:

$$c_1 = 0, \ldots c_k = 0$$

Tako je dokazano da vektori sastavljaju sistem linearno nezavisnih vektora.

Dokažimo još izreku: *Vektore* $\mathbf{x}^{k+1}, \ldots, \mathbf{x}^{n}$ *možemo izraziti kao linearne sastave prvih k vektora* $\mathbf{x}^{1}, \ldots, \mathbf{x}^{k}$.

Dokaz. Dokažimo izreku samo za vektor:

$$\mathbf{x}^{k+s} = \{x_1^{k+s}, \ldots, x_k^{k+s}, x_{k+1}^{k+s}, \ldots, x_m^{k+s}\}$$

Tu s može biti koji god broj od 1, 2, ..., n-k. Sastavimo obrubljenu determinantu:

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^k & x_1^{k+s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_k^1 & \ldots & x_k^k & x_k^{k+s} \\ x_t^1 & \ldots & x_t^k & x_t^{k+s} \end{vmatrix}$$

U toj determinanti možemo za indeks t uzeti koji god od brojeva 1, ..., m. Desni donji element x_t^{k+s} znači t-tu komponentu vektora $\mathbf{x}^{k+s}$. Ta obrubljena determinanta jednaka je 0 za sve indekse t, što možemo zaključiti iz slijedećeg: ako je $t \leqq k$, onda determinanta ima dva jednaka retka, pa je jednaka 0. Ako je pak $t > k$, onda je determinanta također jednaka 0 jer je njoj odgovarajuća kvadratna matrica reda $k + 1$ parcijalna matrica prvobitne matrice **A**, koja ima rang k. Ako razvijemo gornju obrubljenu determinantu po posljednjem retku i uzmemo u obzir da je determinanta jednaka 0, dobivamo jednadžbu:

$$x_t^1 D_1 + \ldots + x_t^k D_k + x_t^{k+s} D = 0$$

Ovdje su $D_1, \ldots, D_k$ i D kofaktori uzastopnih elemenata posljednjeg retka; prema prijašnjem D je determinanta koja odgovara nesingularnoj kvadratnoj parcijalnoj matrici **D** prvobitne matrice **A**, pa zbog toga determinanta D nije jednaka 0. Kako D nije jednako 0, možemo izraziti t-tu komponentu vektora $\mathbf{x}^{k+s}$ iz poslednje jednadžbe ovako:

$$x_t^{k+s} = -\frac{D_1}{D} x_t^1 - \ldots - \frac{D_k}{D} x_t^k$$

Kako je pri tom t neki proizvoljni broj između 1 i m, dobivamo sličan izraz za sve komponente vektora $\mathbf{x}^{k+s}$; iz toga pak slijedi da vektor $\mathbf{x}^{k+s}$ možemo izraziti kao linearni sastav vektora $\mathbf{x}^{1}, \ldots, \mathbf{x}^{k}$ ovako:

$$\mathbf{x}^{k+s} = -\frac{D_1}{D} \mathbf{x}^1 - \ldots - \frac{D_k}{D} \mathbf{x}^k$$

Budući da indeks s može biti koji god broj između 1 i n-k, to je i izreka dokazana.

Matrica **A**, koju sastavljaju komponente vektora $\mathbf{x}^{1}, \ldots, \mathbf{x}^{n}$, ima red $m \times n$ i rang k; pri tom smo pretpostavili da je $m < n$. Prema prijašnjem među vektorima egzistira barem jedan sistem k linearno nezavisnih vektora. Kako rang k matrice **A** ne može biti veći od broja vektorskih komponenata, to svaki sistem linearno nezavisnih vektora ima najviše po m vektora, a svaki drugi vektor možemo izraziti kao linearni sastav istih. Ako je $k = m$, onda među vektorima egzistira barem jedan sistem m linearno nezavisnih vektora.

Iz prijašnjih izreka slijedi praktički upotrebljiv kriterij za određivanje linearne nezavisnosti i linearne zavisnosti vektora. Uzmimo sistem m vektora m-dimenzionalnog vektorskog prostora:

$$\mathbf{x}^1 = \{x_1^1, \ldots, x_m^1\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{x}^m = \{x_1^m, \ldots, x_m^m\}$$

Ovom sistemu odgovara matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^m & \ldots & x_m^m \end{Vmatrix}$$

i determinanta A s istim elementima. Za takav sistem vektora vrijede po prijašnjem izreke:

Vektori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m$ *linearno su nezavisni ako je matrica* **A** *nesingularna ili ako determinanta A nije jednaka 0.*

Vektori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m$ *linearno su zavisni ako je matrica* **A** *singularna ili ako je determinanta A jednaka 0.*

Primjer. U dvodimenzionalnom vektorskom prostoru su vektori $\mathbf{x} = \{3, 1\}$ i $\mathbf{y} = \{2, 4\}$ linearno nezavisni jer je odgovarajuća matrica:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}$$

nesingularna; vektorska jednadžba:

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

moguća je samo ako su oba koeficijenta linearnog sastava a i b jednaka 0; u geometrijskom prikazu vidimo da vektori nisu paralelni. Vektori $\mathbf{u} = \{2, 3\}$ i $\mathbf{v} = \{4, 6\}$ su linearno zavisni jer je odgovarajuća matrica:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}$$

singularna; vektorska jednadžba:

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

moguća je npr. za vrijednosti koeficijenata linearnog sastava $a = -2$ i $b = +1$; u geometrijskom prikazu vidimo da su vektori paralelni.

Primjer. Osnovni jedinični vektori $\mathbf{i} = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{j} = \{0, 1, 0\}$ i $\mathbf{k} = \{0, 0, 1\}$ trodimenzionalnog vektorskog prostora sastavljaju sistem triju linearno nezavisnih vektora jer je odgovarajuća matrica:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

nesingularna.

Za sisteme linearno zavisnih vektora vrijede izreke:

Ako sistemu od $\mathbf{0}$ *različitih linearno zavisnih vektora* $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r$ *dodamo još neki vektor, onda dobivamo opet sistem linearno zavisnih vektora.*

Dokaz. Kako su prvobitni vektori linearno zavisni, važi jednadžba:

$$a_1 \mathbf{x}^1 + \dots + a_r \mathbf{x}^r = \mathbf{0},$$

u kojoj međutim nisu svi koeficijenti linearnog sastava na lijevoj strani jednaki 0. Uzmimo jednadžbu:

$$a_1 \mathbf{x}^1 + \dots + a_r \mathbf{x}^r + 0\mathbf{x}^{r+1} = \mathbf{0},$$

u kojoj smo dopisali još dodani vektor $\mathbf{x}^{r+1}$, i to s koeficijentom 0. Budući da važi prijašnja jednadžba, to važi i posljednja iako svi koeficijenti linearnog sastava nisu jednaki 0. To znači da vektori $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r, \mathbf{x}^{r+1}$ sastavljaju sistem linearnog zavisnih vektora, što je trebalo dokazati.

Zbog toga svaki sistem linearno zavisnih vektora ostaje linearno zavisan ako mu dodamo koliko god vektora iste dimenzije.

Ako su od $\mathbf{0}$ *različiti vektori* $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r$ *linearno zavisni, možemo barem jednog od njih izraziti kao linearni sastav drugih.*

Dokaz. Kako su vektori linearno zavisni, to važi jednadžba

$$a_1 \mathbf{x}^1 + \dots + a_i \mathbf{x}^i + \dots + a_r \mathbf{x}^r = \mathbf{0}$$

a da u njoj nisu svi koeficijenti linearnog sastava na lijevoj strani jednaki 0. Uzmimo da koeficijent a_i nije jednak 0; stoga vektor $\mathbf{x}^i$ možemo izraziti kao linearni sastav drugih vektora ovako:

$$\mathbf{x}^i = -\frac{a_1}{a_i}\mathbf{x}^1 - \dots - \frac{a_r}{a_i}\mathbf{x}^r$$

U izrazu na desnoj strani nema člana s vektorom $\mathbf{x}^i$, koji smo prenijeli na lijevu stranu. Izreka je tako dokazana.

Ako barem jedan od vektora $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r$, *koji su različiti od* $\mathbf{0}$, *možemo izraziti kao linearni sastav drugih, onda vektori sastavljaju sistem linearno zavisnih vektora.*

Dokaz. Pretpostavimo da je moguće vektor $\mathbf{x}^i$ izraziti kao linearni sastav drugih vektora:

$$\mathbf{x}^i = a_1 \mathbf{x}^1 + \dots + a_r \mathbf{x}^r$$

U linearnom sastavu na desnoj strani nema vektora $\mathbf{x}^i$, a osim toga nisu svi koeficijenti linearnog sastava jednaki 0. Ako u toj jednadžbi prenesemo sve članove na jednu stranu, dobivamo jednadžbu:

$$a_1 \mathbf{x}^1 + \dots + (-1)\mathbf{x}^i + \dots + a_r \mathbf{x}^r = \mathbf{0}$$

U toj jednadžbi nisu svi koeficijenti linearnog sastava na lijevoj strani jednaki 0; a to znači da su vektori linearno zavisni, pa je time izreka dokazana.

Vježbe

1. Izrazi vektor $\mathbf{z} = 4{,}5$ kao linearni sastav vektora $\mathbf{x} = \{2{,}1\}$ i $\mathbf{y} = \{1{,}2\}$. Prikaži vektore geometrijski.

($\mathbf{z} = \mathbf{x} + 2\mathbf{y}$)

2. Zadani su vektori $\mathbf{x} = \{2{,}3\}$, $\mathbf{y} = \{4{,}1\}$, $\mathbf{z} = \{4{,}6\}$ i $\mathbf{u} = \{8{,}2\}$. Prikaži vektore geometrijski. Odredi sve parove:

a) linearno zavisnih vektora,

($\mathbf{x}$ & $\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$ & $\mathbf{u}$)

b) linearno nezavisnih vektora.

($\mathbf{x}$ & $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ & $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ & $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}$ & $\mathbf{u}$)

3. Izrazi vektor $\mathbf{u} = \{16{,}23{,}18\}$ kao linearni sastav vektora $\mathbf{x} = \{1{,}2{,}3\}$, $\mathbf{y} = \{3{,}4{,}2\}$ i $\mathbf{z}\ \{1{,}1{,}1\}$.

($\mathbf{u} = 3\mathbf{x} + 4\mathbf{y} + \mathbf{z}$)

4. Izrazi vektor $\{\mathbf{x} = 0{,}1{,}37{,}20\}$ kao linearni sastav vektora $\mathbf{a} = \{0{,}0{,}0{,}2\}$, $\mathbf{b} = \{3{,}5{,}6{,}1\}$, $\mathbf{c} = \{-2{,}1{,}3{,}4\}$ i $\mathbf{d} = \{0,-3{,}4{,}1\}$.

($\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} + 4\mathbf{d}$)

5. Odredi prvu komponentu vektora $\{x,-3{,}4{,}1\}$ tako da s vektorima $\{0{,}0{,}0{,}2\}$, $\{3{,}5{,}6{,}1\}$ i $\{-2{,}1{,}3{,}4\}$ sastavlja sistem linearno zavisnih vektora.

($x = -115/9$)

3. Baza vektorskoga prostora

Uzmimo u vektorskom prostoru sistem n linearno zavisnih vektora:

$$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$$

Ovaj sistem neka ima osobinu da se svaki vektor vektorskog prostora može izraziti kao linearni sastav tih vektora. Kako su vektori linearno zavisni, moguće je barem jedan izraziti kao linearni sastav drugih vektora; uzmimo da smo vektore označili tako da to važi i za prvi. Za vektore vektorskog prostora vrijedi izreka:

Ako se neki vektor $\mathbf{y}$ *vektorskog prostora može izraziti kao linearni sastav vektora* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ *i ako se vektor* $\mathbf{x}^1$ *može izraziti kao linearni sastav vektora* $\mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$, *onda se i vektor* $\mathbf{y}$ *može izraziti kao linearni sastav vektora* $\mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$.

Dokaz. Zbog prvog uvjeta vektor $\mathbf{y}$ možemo izraziti kao linearni sastav:

$$\mathbf{y} = a_1 \mathbf{x}^1 + a_2 \mathbf{x}^2 + \dots + a_n \mathbf{x}^n$$

Zbog drugog uvjeta vektor $\mathbf{x}^1$ možemo izraziti kao linerani sastav:

$$x^1 = b_2 \mathbf{x}^2 + \dots + b_n \mathbf{x}^n$$

Ako ovaj izraz za vektor $\mathbf{x}^1$ uvrstimo u izraz za vektor $\mathbf{y}$ i taj izraz uredimo, onda za vektor $\mathbf{y}$ dobivamo linearni sastav:

$$\mathbf{y} = (a_1 b_2 + a_2)\,\mathbf{x}_2 + \dots + (a_1 b_n + a_n)\,\mathbf{x}^n$$

i izreka je dokazana.

U vektorskom prostoru pošli smo sistemom n linearno zavisnih vektora $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n$; ovim vektorima možemo linearno izraziti svaki drugi vektor vektorskog prostora. Ako iz toga sistema vektora izostavimo neki vektor koji se može linearno izraziti drugim vektorima, dobivamo nov sistem vektora koji ima jedan vektor manje, a po prijašnjoj izreci može se i ovim vektorima linearno izraziti svaki vektor vektorskoga prostora. Ako u novom sistemu ima još neki vektor koji se može linearno izraziti drugima, izostavimo i njega. Takvo izostavljanje vektora nastavljamo dotle dok na kraju dobivamo sistem vektora u kojem se nijedan vektor ne može više linearno izraziti drugima; tako smo dobili sistem linearno nezavisnih vektora sa sačuvanom osobinom da se njima može linearno izraziti svaki vektor vektorskog prostora. Takav sistem vektora naziva se baza vektorskog prostora; prema tome bazu vektorskog prostora definiramo ovako:

Vektori $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m$ *sastavljaju bazu vektorskog prostora ako su linearno nezavisni i ako se svaki vektor vektorskoga prostora može izraziti kao njihov linearni sastav.*

Primjer. U m-dimenzionalnom vektorskom prostoru sastavljaju bazu osnovni jedinični vektori $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^m$. Ovaj sistem vektora ima naime obje osobine koje se traže od baze. Vektori su linearno nezavisni jer je odgovarajuća matrica:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

nesingularna. Svaki vektor $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ vektorskoga prostora možemo jediničnim vektorima izraziti ovako:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}^1 + \dots + x_m \mathbf{e}^m$$

Za baze vektorskoga prostora vrijede izreke:

Svaki vektor vektorskoga prostora može se samo na jedan način izraziti kao linearni sastav baričnih vektora.

Dokaz. Uzmimo da je moguće da se neki vektor $\mathbf{y}$ na dva različita načina izrazi kao linearni sastav baričnih vektora $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m$; po prvom načinu ovako:

$$\mathbf{y} = a_1 \mathbf{x}^1 + \dots + a_m \mathbf{x}^m$$

i po drugom načinu ovako:

$$\mathbf{y} = b_1 \mathbf{x}^1 + \dots + a_m \mathbf{x}^m$$

Ako drugu jednadžbu odbijemo od prve, dobivamo jednadžbu:

$$(b_1 - a_1)\,\mathbf{x}^1 + \dots + (b_m - a_m)\,\mathbf{x}^m = \mathbf{0}$$

Kako su bazični vektori linearno nezavisni, ova je jednadžba moguća samo ako su svi koeficijenti linearnog sastava na lijevoj strani jednaki 0. Stoga važe jednadžbe:

$$a_1 = b_1, \dots , a_m = b_m$$

Postoji dakle samo jedan način izražavanja, a to je i trebalo dokazati.

Ako su vektori $\mathbf{y}^1, \dots , \mathbf{y}^r$ *linearno nezavisni i još nisu baza vektorskoga prostora, onda ih možemo nadopuniti još drugim vektorima tako da svi zajedno sastavljaju bazu vektorskoga prostora.*

Dokaz. Uzmimo neku bazu vektorskoga prostora koju sastavljaju vektori $\mathbf{x}^1, \dots , \mathbf{x}^m$; ovi su vektori linearno nezavisni i njima se može linearno izraziti svaki vektor vektorskoga prostora. Promatrajmo sistem vektora:

$$\mathbf{y}^1, \dots , \mathbf{y}^r, \mathbf{x}^1, \dots , \mathbf{x}^m$$

Ovim je vektorima isto tako moguće linearno izraziti svaki vektor vektorskoga prostora. Kako su vektori $\mathbf{x}^1, \dots , \mathbf{x}^m$ baza, to njima možemo linearno izraziti i svaki od vektora $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^r$. Stoga gore napisani sistem vektora sastavlja sistem linearno zavisnih vektora. Budući da su vektori $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^r$ linearno nezavisni, to po gore opisanom postupku izostavimo nekoliko vektora iz skupine $\mathbf{x}^1, \dots , \mathbf{x}^m$ da bismo dobili sistem linearno nezavisnih vektora. Prvobitni vektori $\mathbf{y}^1, \dots , \mathbf{y}^r$ sa sačuvanim vektorima iz skupine $\mathbf{x}^1, \dots , \mathbf{x}^m$ sastavljaju bazu vektorskoga prostora, pa je izreka tako dokazana.

Sve baze vektorskoga prostora imaju jednak broj vektora.

Dokaz. Uzmimo u vektorskom prostoru dvije baze. Prva baza neka ima p vektora:

$$\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots , \mathbf{a}^p;$$

ovi su vektori linearno nezavisni i njima možemo linearno izraziti svaki vektor vektorskoga prostora. Druga baza neka ima q vektora:

$$\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots , \mathbf{b}^q;$$

i ovi su vektori linearno nezavisni i njima možemo linearno izraziti svaki vektor vektorskoga prostora. Treba dokazati jednakost $p = q$; to dokažemo tako da isključimo mogućnost nejednadžbi $p < q$ i $p > q$. Najprije dokažimo da ne može važiti jednadžba $p < q$. U tu svrhu prvu bazu dopunimo vektorom $\mathbf{b}^1$, pa dobivamo sistem vektora:

$$\mathbf{b}^1, \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots , \mathbf{a}^p$$

Ovi su vektori linearno zavisni jer vektor $\mathbf{b}^1$ možemo linearno izraziti vektorima prve baze. Zbog toga je moguće barem jedan od vektora prve baze linearno izraziti vektorom $\mathbf{b}^1$ i preostalim vektorima prve baze. Pretpostavimo da je takav odmah prvi vektor $\mathbf{a}^1$; odgovarajućim označavanjem vektora možemo to naime uvijek postići. Ako izostavimo vektor $\mathbf{a}^1$, dobivamo novi sistem vektora:

$$\mathbf{b}^1, \mathbf{a}^2, \dots , \mathbf{a}^p$$

Ovi su vektori nova baza vektorskoga prostora. Opisano nadomještanje vektora nastavljamo dotle dok u bazu privučemo sve vektore $\mathbf{b}^1, \dots , \mathbf{b}^q$. U posljednjoj bazi pored vektora $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^q$ dobivamo možda još neke vektore iz skupine $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^p$. To znači da ne može važiti nejednadžba $p < q$. Slično se dokazuje i to da nije moguća nejednadžba $p > q$; pri tom dokazivanju zamjenjujemo, slično kao i prije u početnoj bazi $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^q$, ove vektore vektorima prve baze.

Sve baze m-dimenzionalnog vektorskoga prostora imaju po m vektora.

Dokaz. Prema prijašnjoj izreci sve baze imaju isti broj vektora. Pri obradi posljednjeg primjera vidjeli smo da m osnovnih jediničnih vektora sastavlja bazu m-dimenzionalnog vektorskoga prostora. Zato svaka baza vektorskoga prostora ima onoliko vektora koliko ima osnovnih jediničnih vektora, pa je tako izreka dokazana.

Svaki sistem vektora m-dimenzionalnog vektorskog prostora koji ima više od m vektora linearno je zavisan.

Dokaz. Kako svaka baza m-dimenzionalnog vektorskog prostora ima točno m vektora, to možemo svaki drugi vektor vektorskoga prostora linearno izraziti baznim vektorima. Među vektorima vektorskoga prostora može stoga biti najviše po m linearno nezavisnih vektora, pa je izreka tako dokazana.

Vježbe

1. Vektori $\mathbf{a} = \{2,3\}$ i $\mathbf{b} = \{4,1\}$ su baza dvodimenzionalnoga vektorskog prostora. Izrazi osnovne jedinične vektore kao njihov linearni sastav. Prikaži rezultate geometrijski.

$$\left(\mathbf{i} = -\frac{1}{10}\mathbf{a} + \frac{3}{10}\mathbf{b},\ \mathbf{j} = \frac{2}{5}\mathbf{a} - \frac{1}{5}\mathbf{b}\right)$$

2. Vektori $\mathbf{a} = \{2,3\}$ i $\mathbf{b} = \{4,1\}$ su baza dvodimenzionalnoga vektorskog prostora. Vektor $\mathbf{x}$ njima se linearno izražava ovako: $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$. Zamijeni bazični vektor $\mathbf{b}$ vektorom $\mathbf{c} = \{3,1\}$ i izrazi vektor $\mathbf{x}$ linearno vektorima nove baze. Prikaži rezultate geometrijski.

$$\left(\mathbf{x} = \frac{13}{7}\mathbf{a} + \frac{24}{7}\mathbf{c}\right)$$

3. Vektori $\mathbf{x} = \{1,2,3\}$, $\mathbf{y} = \{3,4,2\}$ i $\mathbf{z} = \{1,1,1\}$ su baza trodimenzionalnoga vektorskog prostora. Vektor $\mathbf{u}$ izražava se kao njihov linearni sastav ovako: $\mathbf{u} = 3\mathbf{x} + 4\mathbf{y} + \mathbf{z}$. Zamijeni u bazi vektor $\mathbf{z}$ vektorom $\mathbf{v} = \{0,2,0\}$ i izrazi vektor $\mathbf{u}$ vektorima nove baze.

$$\left(\mathbf{u} = \frac{22}{7}\mathbf{x} + \frac{30}{7}\mathbf{y} - \frac{3}{14}\mathbf{v}\right)$$

4. U trodimenzionalnom vektorskom prostoru zadani su linearno nezavisni vektori $\mathbf{a} = \{2,3,0\}$ i $\mathbf{b} = \{5,1,0\}$. Vektorima dodaj jedan od osnovnih jediničnih vektora tako da sva tri vektora sastavljaju bazu vektorskoga prostora.

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{k})$

4. Skalarni produkt

Skalarni produkt dvaju vektora m-dimenzionalnog vektorskog prostora:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_m\} \text{ i } \mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$$

pišemo i definiramo ovako:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$$

Iz definicije slijede neposredno ove osobine skalarnog produkta:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$$

$$a(\mathbf{x}^T \mathbf{y}) = (a\mathbf{x}^T)\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{z}$$

Vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ su po definiciji pravokutni ako je njihov skalarni produkt jednak 0.

Primjer. Ako je vektorski prostor trodimenzionalan, onda možemo vektore prikazati pomoću strelica u trodimenzionalnom kartezijskom koordinatnom sistemu. Skalarni produkt dvaju vektora:

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \text{ i } \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

jednak je:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Dužinu vektora $\mathbf{a}$ možemo izraziti skalarnim produktom ovako:

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = \sqrt{(\mathbf{a}^T \mathbf{a})}$$

Vektoru $\mathbf{a}$ paralelni jedinični vektor $\mathbf{a}_e$ dobivamo tako da vektor $\mathbf{a}$ dijelimo njegovom dužinom a; stoga je:

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}/a$$

Za skalarni produkt dvaju vektora vrijedi izreka: Skalarni produkt dvaju vektora jednak je produktu dužina obaju vektora i kosinusa kuta koji tvore ta dva vektora. Stoga za vektore $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ važi obrazac:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = ab \cos \delta,$$

u kojem je δ kut koji tvore vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Dokaz. Najprije dokažemo pomoćnu izreku: Skalarni produkt dvaju jediničnih vektora jednak je kosinusu kuta koji tvore ta dva vektora. U tu svrhu uzmimo dva jedinična vektora:

$$\mathbf{r}^1 = \{x_1, y_1, z_1\} \text{ i } \mathbf{r}^2 = \{x_2, y_2, z_2\},$$

koji imaju zajednički početak u koordinatnom ishodištu 0 i krajeve u točki $A_1(x_1, y_1, z_1)$ i u točki $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Jedinični vektori neka tvore kut δ. Za njihove dužine važi:

$$r^1 = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} = 1 \text{ i } r^2 = \sqrt{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)} = 1$$

Uzmimo vektor $\mathbf{d}$, koji ima početak u točki A_1 i kraj u točki A_2.

$$\mathbf{d} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

Za njegovu dužinu važi obrazac:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Točke 0, A_1 i A_2 su uglovi trokuta s kutom δ na vrhu 0 i sa stranicama dugim r^1, r^2 i d. Po kosinusovom poučku dobivamo:

$$d^2 = (r^1)^2 + (r^2)^2 - r^1 r^2 \cos\delta$$

Ako u tu jednadžbu uvrstimo izraze za d, r^1 i r^2 i ako uzmemo u obzir da je dužina obaju jediničnih vektora jednaka 1, onda nakon uređenja dobivamo jednadžbu:

$$\cos\delta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = (\mathbf{r}^1)^T \mathbf{r}^2$$

i tako je pomoćna izreka dokazana. Sada vektorima **a** i **b** priredimo odgovarajuće jedinične vektore:

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}/a \text{ i } \mathbf{b}_e = \mathbf{b}/b$$

Prema pomoćnoj izreci za njih važi obrazac:

$$(\mathbf{a}_e)^T \mathbf{b}_e = \cos\delta$$

a iz toga dobivamo obrazac:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = ab \cos\delta,$$

koji je trebalo dokazati.

Ako su vektori a i b pravokutni, onda je $\delta = 90°$ i $\cos\delta = 0$, njihov je skalarni produkt stoga jednak 0.

Ravnina. Uzmimo u m-dimenzionalnom vektorskom prostoru konstantni vektor $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_m\}$, promjenljivi vektor $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ i realnu konstantu c. Skup vektora ili točaka x koje odgovaraju jednadžbi:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = c$$

nazivamo ravninom, a samu jednadžbu jednadžbom te ravnine.

Ako je vektorski prostor dvodimenzionalan, onda je ta ravnina zapravo pravac koji ima jednadžbu:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = c$$

Ako je vektorski prostor trodimenzionalan, onda se tu radi o ravnini u prvobitnom značenju riječi; ta ravnina ima jednadžbu:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c$$

Ako vektorski prostor ima više od tri dimenzije, onda takvu ravninu više ne možemo zorno predstaviti; ravnine u takvim prostorima zovu se hiperravnine.

Ravnina s jednadžbom:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = c$$

dijeli vektorski prostor u dva poluprostora. U prvi poluprostor spadaju vektori ili točke koje zadovoljavaju nejednadžbu:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} > c$$

dok u drugi poluprostor spadaju vektori ili točke koje odgovaraju nejednadžbi:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} < c$$

Ravnina razgraničuje oba poluprostora.

Primjer. Na ravnini s kartezijskim koordinatnim sistemom x 0 y je, kao što vidimo na slici 14, pravac p prikazan jednadžbom:

$$x + 2y = 4$$

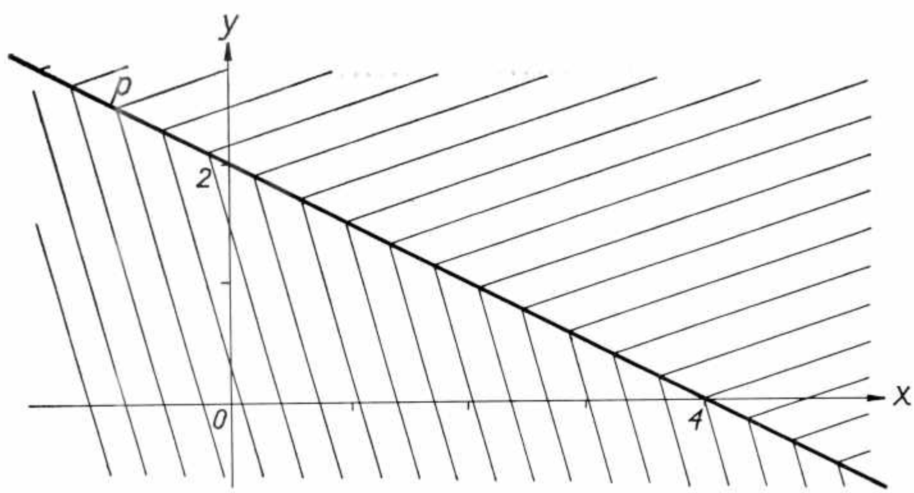
Pravac dijeli čitavu ravninu na dvije poluravnine. U prvu poluravninu spadaju točke kojih koordinate odgovaraju nejednadžbi:

$$x + 2y > 4$$

Ovoj nejednadžbi odgovaraju sve one točke koje leže na onoj strani pravca koja je suprotna koordinatnom ishodištu. U drugu poluravninu spadaju točke koje odgovaraju nejednadžbi:

$$x + 2y < 4$$

Ovoj nejednadžbi odgovaraju sve one točke koje leže na istoj strani pravca kao i koordinatno ishodište.



Sl. 14. Pravac u ravnini

Vježbe

1. Prikaži u dvodimenzionalnom kartezijskom koordinatnom sistemu jednadžbe i nejednadžbe:

a) $2x + 3y \gtreqless 6$
b) $3x + 4y \gtreqless 0$
c) $2x - 3y \gtreqless 6$

2. Prikaži u trodimenzionalnom kartezijskom koordinatnom sistemu jednadžbe i nejednadžbe:

a) $2x + 3y + 4z \gtreqless 12$
b) $2x + 3y + 4z \gtreqless 0$

3. Izračunaj kut koji tvore vektori $\{1,1,-4\}$ i $\{1,-2,2\}$

(135^0)

4. Odredi drugu komponentu vektora $\{3,y,7\}$ tako da bude pravokutan na vektoru $\{9,15,21\}$.

($y = -174/15$)

5. U četvorodimenzionalnom prostoru zadane su točke $\mathbf{a} = \{2,2,-1,1\}$, $\mathbf{b} = \{4,3,-1,2\}$, $\mathbf{c} = \{8,5,-3,4\}$ i $\mathbf{d} = \{3,3,-2,2\}$. Odredi točku $\mathbf{x} = \{x,y,z,u\}$ koja leži na hiperravninama s jednadžbama: $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 4$, $\mathbf{b}^T\mathbf{x} = 6$, $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = 12$ i $\mathbf{d}^T\mathbf{x} = 6$.

($\mathbf{x} = \{1,1,-1,-1\}$)

6. Odredi vektoru $\{3,2,5,6,x\}$ posljednju komponentu tako da je pravokuta na vektoru $\{2,-1,4,3,1\}$.

($x = -42$)

5. Linearne transformacije

Neka $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ bude vektor n-dimenzionalnog vektorskog prostora $V(\mathbf{x})$, a $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ vektor m-dimenzionalnog vektorskog prostora $V(\mathbf{y})$. Linearna transformacija:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \end{aligned}$$

transformira ili preslika vektor $\mathbf{x}$ u vektor $\mathbf{y}$. Nakon uvođenja transformacijske matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

napišemo linearnu transformaciju u matričnom obliku ovako:

$$\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Linearna transformacija priređuje svakom vektoru $\mathbf{x}$ vektorskog prostora $V(\mathbf{x})$ neki vektor $\mathbf{y}$ vektorskog prostora $V(\mathbf{y})$. U vezi s takvim preslikanjem vektor $\mathbf{x}$ zove se original, a vektor $\mathbf{y}$ njegova slika. Pogledajmo nekoliko osobina linearne transformacije.

Nul-vektor $\mathbf{0} = \{0, \ldots, 0\}$ vektorskog prostora $V(\mathbf{x})$ preslika se u nul-vektor vektorskog prostora $V(\mathbf{y})$, stoga je:

$$L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Dokaz. Ako u linearnu transformaciju uvrstimo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dobivamo $\mathbf{y} = \mathbf{A0} = \mathbf{0}$.

Osnovne jedinične vektore $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ vektorskog prostora $V(\mathbf{x})$ linearna transformacija preslikava u uzastopne stupce transformacijske matrice $\mathbf{A}$.

Dokaz. Uzmimo i-ti osnovni jedinični vektor $\mathbf{e}^i = \{0, \dots, 1, \dots, 0\}$; kao njegovu sliku dobivamo:

$$L(\mathbf{e}^i) = \mathbf{A}\mathbf{e}^i = \{a_{1i}, \dots, a_{mi}\}$$

Linearna transformacija ima ove osobine aditivnosti:

a) Ako je c proizvoljan realan broj, onda važi jednadžba:

$$L(c\mathbf{x}) = cL(\mathbf{x})$$

To znači: ako original pomnožimo nekim brojem, onda se njegova slika pomnoži istim brojem.

Dokaz. Iz linearne transformacije u matričnom obliku dobivamo:

$$L(c\mathbf{x}) = \mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c(\mathbf{A}\mathbf{x}) = cL(\mathbf{x})$$

b) Za sumu dvaju vektora $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ važi obrazac:

$$L(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = L(\mathbf{x}^1) + L(\mathbf{x}^2)$$

To znači: ako zbrojimo dva originala, onda se zbroje i njihove slike.

Dokaz. Iz linearne transformacije u matričnom obliku dobivamo:

$$L(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = \mathbf{A}\mathbf{x}^1 + \mathbf{A}\mathbf{x}^2 = L(\mathbf{x}^1) + L(\mathbf{x}^2)$$

c) Ako su $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ vektori vektorskog prostora $V(\mathbf{x})$ i $c_1, \dots, c_k$ proizvoljni realni brojevi, onda važi obrazac:

$$L(c_1\mathbf{x}^1 + \dots + c_k\mathbf{x}^k) = c_1 L(\mathbf{x}^1) + \dots + c_k L(\mathbf{x}^k)$$

To znači: svaki linearni sastav originala preslika se u linearni sastav njihovih slika, i to s istim koeficijentima linearnog sastava.

Dokaz. Iz prijašnjih dviju izreka dobivamo:

$$L(c_1\mathbf{x}^1 + \dots + c_k\mathbf{x}^k) = L(c_1\mathbf{x}^1) + \dots + L(c_k x^k) = c_1 L(\mathbf{x}^1) + \dots + c_k L(\mathbf{x}^k)$$

Produkt linearnih transformacija. Neka $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ bude vektor n-dimenzionalnog vektorskog prostora $V(\mathbf{x})$, $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_m\}$ neka bude vektor m-dimenzionalnog vektorskog prostora $V(\mathbf{y})$ i $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_p\}$ neka bude vektor p-dimenzionalnog vektorskog prostora $V(\mathbf{z})$. Linearna transformacija:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

preslika vektore prostora $V(\mathbf{x})$ u vektore prostora $V(\mathbf{y})$ i linearna transformacija:

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{y}$$

preslika vektore prostora $V(\mathbf{y})$ u vektore prostora $V(\mathbf{z})$. Stoga je

$$\mathbf{z} = (\mathbf{B}\mathbf{A})\,\mathbf{x}$$

linearna transformacija koja neposredno preslika vektore prostora $V(\mathbf{x})$ u vektore prostora $V(\mathbf{z})$. Kako je transformacijska matrica te linearne transformacije jednaka produktu transformacijskih matrica **B** i **A**, to se ova linearna transformacija zove produkt prvih dviju linearnih transformacija. Produkt linearnih transformacija može se uopćiti na produkte proizvoljnog broja linearnih transformacija.

Vježbe

1. Linearna transformacija s transformacijskom matricom:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}$$

preslika ravninu s kartezijskim koordinatnim sistemom $x_1 0 x_2$ u ravninu s kartezijskim koordinatnim sistemom $y_1 0 y_2$. Odredi slike točaka:

a) $\{1,0\}$ — $(\{2,1\})$
b) $\{0,1\}$ — $(\{3,4\})$
c) $\{0,0\}$ — $(\{0,0\})$
d) $\{1,1\}$ — $(\{5,5\})$
e) $\{-1,0\}$ — $(\{-2,-1\})$
f) $\{3,2\}$ — $(\{12,11\})$

2. Linerna transformacija s transformacijskom matricom:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

preslika trodimenzionalni prostor s kartezijskim koordinatama x_1, x_2, x_3 u ravninu s kartezijskim koordinatnim sistemom $y_1 0 y_2$. Odredi slike točaka:

a) $\{0,0,0\}$ — $(\{0,0\})$
b) $\{1,0,0\}$ — $(\{2,1\})$
c) $\{0,1,0\}$ — $(\{3,2\})$
d) $\{0,0,1\}$ — $(\{4,1\})$
e) $\{1,1,1\}$ — $(\{9,4\})$
f) $\{2,1,3\}$ — $(\{19,7\})$

3. Točke petorodimenzionalnog prostora preslikaju se u točke trodimenzionalnog prostora s linearnom transformacijom kojoj odgovara transformacijska matrica:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$$

Odredi slike točaka:

a) $\{1,0,0,0,0\}$ — $(\{2,4,1\})$
b) $\{0,0,1,0,0\}$ — $(\{3,1,2\})$
c) $\{0,0,0,0,1\}$ — $(\{1,5,3\})$
d) $\{1,1,1,1,1\}$ — $(\{9,15,12\})$

4. Vektorski prostor $V(\mathbf{x})$ transformira se u vektorski prostor $V(\mathbf{y})$ s transformacijskom matricom:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

a vektorski prostor V (**y**) transformira se u vektorski prostor V (**z**) s transformacijskom matricom:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Odredi u vektorskom prostoru V (**z**) slike slijedećih točaka vektorskog prostora V (**x**):

a) $\{1,0\}$ ($\{10,5,5\}$)
b) $\{0,1\}$ ($\{15,10,5\}$)
c) $\{0,0\}$ ($\{0,0,0\}$)
d) $\{1,1\}$ ($\{25,15,10\}$)
e) $\{1,-1\}$ ($\{-5,-5,0\}$)

5. Od sirovina S_1 i S_2 izrađujemo međuprodukte F_1, F_2 i F_3 a nakon toga od tih međuprodukata konačne produkte P_1 i P_2. Potrošnju sirovina u proizvodnji međuprodukata određuje matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

Potrošnju međuprodukata u proizvodnji konačnih proizvoda određuje matrica:

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 7 \end{Vmatrix}$$

a) Izrazi linearnom transformacijom potrošnju sirovina $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ u proizvodnji međuprodukata $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$.

($\mathbf{x} = \mathbf{Ay}$)

b) Izrazi linearnom transformacijom potrošnju međuprodukata u proizvodnji konačnih proizvoda $\mathbf{z} = \{z_1 z_2\}$.

($\mathbf{y} = \mathbf{Cz}$)

c) Odredi transformacijsku matricu linearne transformacije koja određuje potrošnju sirovina u proizvodnji finalnih produkata.

$$\left(\mathbf{AC} = \begin{Vmatrix} 37 & 52 \\ 29 & 29 \end{Vmatrix}\right)$$

d) Izračunaj koliko se sirovina potroši u proizvodnji 2 jedinice proizvoda P_1 i 3 jedinice proizvoda P_2.

($\{230,145\}$)

VII. KONVEKSNI SKUPOVI

1. Konveksni linearni sastavi točaka

Uzmimo, kao što vidimo na sl. 15, dva vektora ili dvije točke $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ vektorskog prostora proizvoljne dimenzije. Odredimo skup svih točaka $\mathbf{x}$ koje leže na pravcu kroz te dvije točke. Diferencija $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1$ je vektor čiji početak leži u točki $\mathbf{x}^1$ a kraj u točki $\mathbf{x}^2$; ovaj vektor leži na pravcu kroz zadane točke. Proizvoljnu točku $\mathbf{x}$ toga pravca dobivamo tako da vektoru $\mathbf{x}^1$ pribrojimo vektor $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1$ pomnožen proizvoljnim realnim brojem p; stoga je:

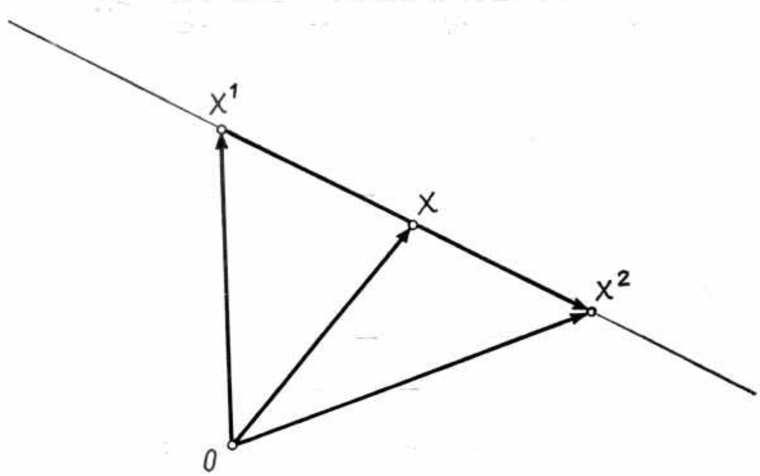
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathrm{p}\,(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)$$

$$\mathbf{x} = (1 - \mathrm{p})\,\mathbf{x}^1 + \mathrm{p}\mathbf{x}^2$$

proizvoljna točka pravca kroz točke $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$. Točka $\mathbf{x}$ je linearni sastav točaka $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ u kojem je p proizvoljan realan broj. Ako je $\mathrm{p} = 0$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1$; ako je $\mathrm{p} = 1$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{x}^2$; ako je $0 < \mathrm{p} < 1$, onda točka $\mathbf{x}$ leži na spojnici točaka $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$; ako je $\mathrm{p} < 0$, onda točka $\mathbf{x}$ leži na produžetku te spojnice preko točke $\mathbf{x}^1$; ako je pak $\mathrm{p} > 1$, onda točka $\mathbf{x}$ leži na produžetku spojnice preko točke $\mathbf{x}^2$.

Posebno nas zanima mogućnost kad broj p zadovoljava nejednadžbe:

$$0 \leqq \mathrm{p} \leqq 1$$



Sl. 15. Pravac kroz dvije točke

U tom primjeru točka $\mathbf{x}$ leži na spojnici točaka $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$. Takav se linearni sastav:

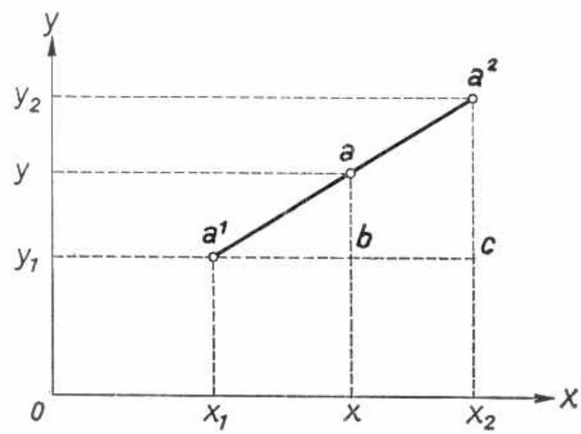
$$\mathbf{x} = (1 - p)\,\mathbf{x}^1 + p\mathbf{x}^2$$

naziva *konveksni linearni sastav* ili konveksna linearna kombinacija dviju točaka. Iz definicije i geometrijskog prikaza konveksnog linearnog sastava dviju točaka slijedi izreka:

Svaka točka koja je konveksni linearni sastav dviju točaka leži na spojnici tih dviju točaka i obrnuto, svaku točku na spojnici dviju točaka možemo izraziti kao konveksni linearni sastav tih dviju točaka.

Primjer: Uzmimo, kao što vidimo na sl. 16, u ravnini s kartezijskim koordinatnim sistemom x0y dvije točke $\mathbf{a}^1 = \{x_1, y_1\}$ i $\mathbf{a}^2 = \{x_2, y_2\}$. Na spojnici tih dviju točaka izaberimo proizvoljnu točku $\mathbf{a} = \{x, y\}$ koja dijeli spojnicu u razmjeru $p : (1 - p)$. Točka $\mathbf{a}$ pada u točku $\mathbf{a}^1$ ako je $p = 0$, a u točku $\mathbf{a}^2$ ako je $p = 1$; stoga raspravljamo samo mogućnost da varijabla p odgovara nejednadžbama:

$$0 < p < 1$$



Sl. 16. Razdioba spojnice dviju točaka

Iz sličnih trokuta $\mathbf{a}^1\mathbf{ba}$ i $\mathbf{a}^1\mathbf{ca}^2$ dobivamo za apscisu x točke $\mathbf{a}$:

$$(x - x_1) : (x_2 - x_1) = p : 1$$

$$x = (1 - p)\,x_1 + px_2$$

i za ordinatu y točke a:

$$(y - y_1) : (y_2 - y_1) = p : 1$$

$$y = (1 - p)\,y_1 + py_2$$

Stoga je točka $\mathbf{a}$ konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{a}^1$ i $\mathbf{a}^2$:

$$\mathbf{a} = (1 - p)\,\mathbf{a}^1 + p\mathbf{a}^2$$

Definiciju konveksnog linearnog sastava dviju točaka možemo uopćiti na ma koji veći broj točaka. Uzmimo u vektorskom prostoru n točaka:

$$\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n$$

i isto toliko realnih varijabla:

$$p_1, \dots, p_n$$

Ove varijable odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq p_i \leqq 1 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

i jednadžbi:

$$p_1 + \dots + p_n = 1$$

Izraz:

$$p_1 \mathbf{x}^1 + \dots + p_n \mathbf{x}^n$$

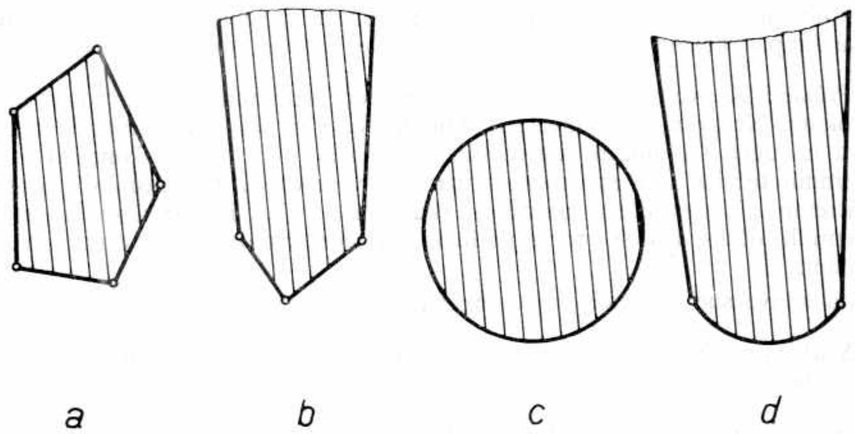
zove se *konveksni linearni sastav* točaka $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n$.

Konveksni skupovi točaka. Skup točaka vektorskog prostora je konveksan kada ima slijedeću osobinu: ako su $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ proizvoljne točke skupa, onda je i svaki konveksni linearni sastav:

$$p\mathbf{x}^1 + (1 - p)\mathbf{x}^2 \qquad (0 \leqq p \leqq 1)$$

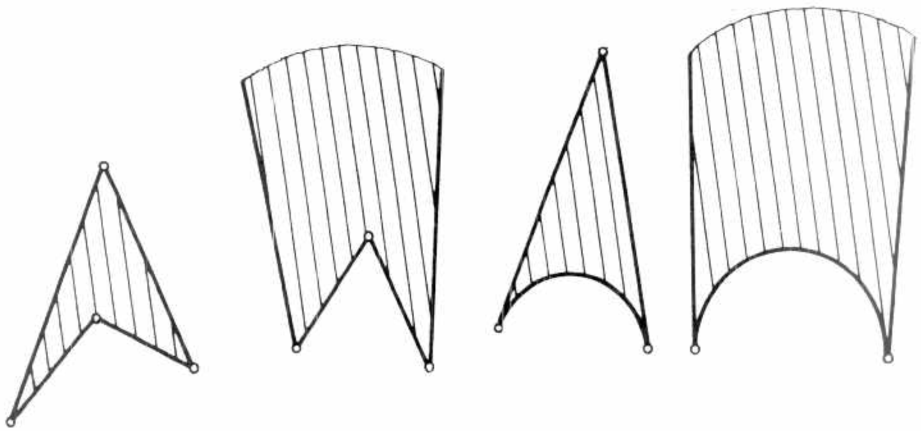
točka toga skupa. Ovu osobinu možemo zornije prikazati geometrijski ovako: ako su $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ proizvoljne točke skupa, onda u skup spada i svaka točka spojnice tih dviju točaka.

Trokut, pravokutnik, kocka, pravilna prizma, pravilna piramida, valjak, stožac, kugla itd. primjeri su konveksnih skupova točaka. Točke unutar i na rubu oštroga kuta ili ugla nekoga tijela sastavljaju konveksne skupove. Na sl. 17. vidimo nacrtano četiri primjera konveksnih skupova točaka u ravnini.



Sl. 17. Konveksni skupovi

Skup točaka u unutrašnjosti i na rubu izbočenoga kuta nije konveksan, niti su konveksni skupovi točaka kolobara, svitka itd. Na sl. 18. vidimo nacrtana četiri primjera nekonveksnih skupova točaka u ravnini.



a b c d

Sl. 18. Nekonveksni skupovi

Skupovi točaka su ograničeni i neograničeni. Točke valjka sastavljaju ograničeni skup, a točke koje ograničuje neograničena cilindrična ploha sastavljaju neograničeni skup. Skupovi a i c na sl. 17. i 18. su ograničeni, dok su skupovi b i e neograničeni.

Točke konveksnog skupa dijelimo u dva tipa. Prvom tipu pripada svaka točka koju možemo izraziti kao konveksni linearni sastav barem dviju drugih točaka skupa ili svaka točka koja leži na spojnici barem dviju drugih točaka skupa. Takvu točku nazivamo *neekstremnom točkom.*

Drugom tipu pripada svaka točka koja se ne može izraziti kao konveksni linearni sastav nijednog para točaka skupa ili koja ne leži ni na jednoj spojnici nekih dviju točaka skupa. Takvu točku zovemo *ekstremnom točkom* konveksnog skupa.

Primjeri. Konveksni skup na sl. 17a. ima pet ekstremnih točaka, i to sve uglove peterokuta. Neograničeni konveksni skup na sl. 17b. ima tri ekstremne točke, i to sva tri ugla. Ograničeni konveksni skup na sl. 17c. ima beskonačno mnogo ekstremnih točaka, i to sve točke kružnice; sve točke u unutrašnjosti kruga su neekstremne. Neograničeni konveksni skup na sl. 17d. ima beskonačno mnogo ekstremnih točaka, i to sve točke na luku kružnice; sve druge točke skupa su neekstremne.

Za konveksne skupove vrijedi izreka:

Svaki konveksni linearni sastav proizvoljnog broja točaka konveksnog skupa pripada tom skupu.

Dokaz. Valjanost izreke za konveksne linearne sastave dviju točaka slijedi neposredno iz definicije konveksnog skupa. Izreku dokažemo najprije za konveksne linearne sastave triju točaka. Uzmimo konveksni linearni sastav triju točaka $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ i $\mathbf{x}^3$:

$$\mathbf{x} = p_1 \mathbf{x}^1 + p_2 \mathbf{x}^2 + p_3 \mathbf{x}^3$$

Za koeficijente p_1, p_2 i p_3 konveksnog linearnog sastava važe nejednadžbe:

$$0 \leqq p_1 \leqq 1,\ 0 \leqq p_2 \leqq 1,\ 0 \leqq p_3 \leqq 1$$

i jednadžba:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Ako je $p_1 + p_2 = 0$, je $p_3 = 1$ i točka $x = x^3$ je konveksni linearni sastav svih triju točaka. Ako je $p_1 + p_2 \neq 0$ uzmemo dva nova koeficijenta:

$$q_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \quad \text{i} \quad q_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_2}$$

Zbog prijašnjeg i ova dva koeficijenta odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq q_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq q_2 \leqq 1$$

i jednadžbi:

$$q_1 + q_2 = 1$$

Stoga koeficijenti q_1 i q_2 mogu biti koeficijenti konveksnog linearnog sastava dviju točaka. Prvobitni konveksni linearni sastav triju točaka napišemo u obliku:

$$\mathbf{x} = (p_1 + p_2) \frac{p_1}{p_1 + p_2} \mathbf{x}^1 + (p_1 + p_2) \frac{p_2}{p_1 + p_2} \mathbf{x}^2 + p_3 \mathbf{x}^3$$

$$\mathbf{x} = (p_1 + p_2)(q_1 \mathbf{x}^1 + q_2 \mathbf{x}^2) + p_3 \mathbf{x}^3$$

Izraz u drugoj zagradi je konveksni linearni sastav dviju točaka $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ konveksnog skupa, pa je stoga i član toga skupa; označimo ga sa $\mathbf{x}^4$, te dobivamo:

$$\mathbf{x} = (p_1 + p_2) \mathbf{x}^4 + p_3 \mathbf{x}^3$$

Točka $\mathbf{x}$ opet je konveksni linearni sastav dviju točaka $\mathbf{x}^3$ i $\mathbf{x}^4$ konveksnog skupa, pa je stoga i član toga skupa. Tako je izreka dokazana za tri točke. Za veći broj točaka dokaz je sličan i riječ je samo o ponavljanju opisanog dokaznog postupka. Za četiri točke npr. prevedemo konveksni linearni sastav:

$$\mathbf{x} = p_1 \mathbf{x}^1 + p_2 \mathbf{x}^2 + p_3 \mathbf{x}^3 + p_4 \mathbf{x}^4$$

nakon uvođenja novih koeficijenata:

$$q_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \quad \text{i} \quad q_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_2}$$

u konveksni linearni sastav triju točaka:

$$\mathbf{x} = (p_1 + p_2)(q_1 \mathbf{x}^1 + q_2 \mathbf{x}^2) + p_3 \mathbf{x}^3 + p^4 \mathbf{x}^4$$

Ovaj konveksni linearni sastav triju točaka skupa je prema onom što je prije kazano također točka toga skupa.

Vježbe

1. Prikaži geometrijski konveksne skupove koji imaju ekstremne točke:

a) A (1,2), B (3,5)
b) A (1,1), B (4,2), C (5,6), D (2,7)
c) A (1,2,2), B (3,5,4)
d) A (1,1,1), B (3,0,0), C (0,4,0), D (0,0,5)

2. Prikaži geometrijski konveksne skupove točaka kojih koordinate odgovaraju nejednadžbama:

a) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \geqq 3,\ x + y \leqq 7$
b) $1 \leqq x \leqq 4,\ 2 \leqq y \leqq 5,\ x \leqq y$
c) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ 2x + 3y + 4z \leqq 12$

3. Izrazi točku $\mathbf{x} = \{2,4,6,4,4\}$ kao konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{a} = \{1,2,3,2,2\}$ i $\mathbf{b} = \{3,6,9,6,6\}$

$$\left(\mathbf{x} = \frac{1}{2}\,\mathbf{a} + \frac{1}{2}\,\mathbf{b}\right)$$

2. Konveksni poliedar

Uzmimo u vektorskom prostoru proizvoljan konačni broj točaka:

$$\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n$$

sve moguće konveksne linearne sastave tih točaka:

$$p_1\,\mathbf{x}^1 + \ldots + p_n\,\mathbf{x}^n$$

Kako su ti linearni sastavi konveksni, to koeficijenti $p_1, \ldots, p_n$ odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq p_i \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

i jednadžbi:

$$p_1 + \ldots + p_n = 1$$

Svi ti linearni sastavi prema prijašnjem izlaganju sastavljaju konveksni skup točaka. Budući da smo u linearnim sastavima uzeli samo konačni broj točaka, nazivamo taj skup *konveksni poliedar*. Točke toga konveksnog poliedra su prema tome svi konveksni linearni sastavi konačnog broja točaka $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n$; ove točke same su dakako isto točke poliedra. Među navedenim točkama nalazi se možda neka koja se može izraziti kao konveksni linearni sastav drugih. Pretpostavimo da je već $\mathbf{x}^1$ takva točka. Za nju vrijedi izreka:

Ako je točka $\mathbf{x}$ *konveksnog poliedra konveksni linearni sastav točaka* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots \mathbf{x}^n$ *i ako je točka* $\mathbf{x}^1$ *konveksni linearni sastav točaka* $\mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$, *onda je točka* $\mathbf{x}$ *također konveksni linearni sastav točaka* $\mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$.

Dokaz. Zbog prvog uvjeta točka $\mathbf{x}$ konveksni je linearni sastav točaka $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$, pa za nju važi jednadžba:

$$\mathbf{x} = p_1\,\mathbf{x}^1 + p_2\,\mathbf{x}^2 + \ldots + p_n\,\mathbf{x}^n$$

U toj jednadžbi koeficijenti linearnog sastava odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq p_i \leqq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

i jednadžbi:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Zbog drugog uvjeta točka $\mathbf{x}^1$ konveksni je linearni sastav točaka $\mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$, pa za nju važi jednadžba:

$$\mathbf{x}^1 = q_2 \mathbf{x}^2 + \ldots + q_n \mathbf{x}^n$$

U ovoj jednadžbi koeficijenti linearnog sastava zadovoljavaju nejednadžbe:

$$0 \leqq q_j \leqq 1 \quad (j = 2, \ldots, n)$$

i jednadžbu:

$$q_2 + \ldots + q_n = 1$$

Ako izraz za $\mathbf{x}^1$ uvrstimo u izraz za $\mathbf{x}$, dobivamo:

$$\mathbf{x} = p_1 (q_2 \mathbf{x}^2 + \ldots + q_n \mathbf{x}^n) + p_2 \mathbf{x}^2 + \ldots + p_n \mathbf{x}^n$$

$$\mathbf{x} = (p_1 q_2 + p_2) \mathbf{x}^2 + \ldots + (p_1 q_n + p_n) \mathbf{x}^n$$

Ovaj je izraz konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ jer koeficijenti linearnog sastava odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq p_1 q_j + p_j \leqq 1 \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

i jednadžbi:

$$(p_1 q_2 + p_2) + \ldots + (p_1 q_n + p_n) = p_1 (q_2 + \ldots + q_n) + p_2 + \ldots + p_n =$$

$$= p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Tako je izreka dokazana.

Pomoću sistema točaka $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ definiramo konveksni poliedar kao skup svih konveksnih linearnih sastava tih točaka. Ako iz sistema točaka izostavimo jednu točku, npr. točku $\mathbf{x}^1$ koja je konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$, nismo smanjili bogatstvo točaka poliedra jer svaku njegovu točku koju dobivamo kao konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$, dobivamo prema prijašnjoj izreci isto kao konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{x}^2, \ldots, x^n$. Stoga iz prvobitnog sistema točaka možemo izostaviti sve one točke koje su konveksni linearni sastavi preostalih točaka; izostavljanjem takvih točaka ne mijenja se prvobitno definirani konveksni poliedar. Pošto se izostave sve takve suvišne točke, u sistemu ostaju samo još ekstremne točke konveksnog poliedra. Pomoću ekstremnih točaka možemo izraziti sve druge točke poliedra kao konveksne linearne sastave tih ekstremnih točaka. Iz toga slijedi izreka:

Ako su $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^r$ ekstremne točke konveksnog poliedra, sve njegove točke možemo izraziti kao konveksne linearne sastave tih točaka.

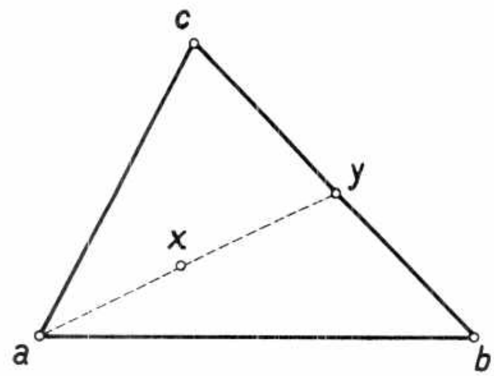
Iz toga slijedi još i druga definicija konveksnog poliedra:

Konveksni poliedar je ograničen konveksni skup točaka s konačnim brojem ekstremnih točaka.

Za konveksni poliedar sa zadanim ekstremnim točkama kažemo da je *napet* na te ekstremne točke.

Primjeri konveksnih poliedara jesu: pravac napet na obje krajnje točke; trokut napet na sva tri ugla; kvadar napet na svih osam uglova itd.

Primjer. Svaku točku trokuta napetog na ekstremne točke **a**, **b** i **c** možemo izraziti kao konveksni linearni sastav njegovih ekstremnih točaka. U tu svrhu uzmimo u trokutu na sl. 19. proizvoljnu točku **x** pa je izrazimo kao konveksni linearni sastav točaka **a**, **b** i **c**.



Sl. 19. Trokut kao konveksni poliedar

Kroz točke **a** i **x** položimo pravac; on siječe stranicu što leži nasuprot točki **a**, u točki **y**. Točka **y** leži na spojnici točaka **b** i **c**, pa je stoga konveksni linearni sastav tih dviju točaka:

$$\mathbf{y} = (1 - q)\,\mathbf{b} + q\mathbf{c},$$

gdje je $0 \leqq q \leqq 1$. Točka **x** leži na spojnici točaka **a** i **y**, pa je stoga konveksni linearni sastav tih dviju točaka:

$$\mathbf{x} = (1 - p)\,\mathbf{a} + p\mathbf{y},$$

gdje je $0 \leqq p \leqq 1$. Ako izraz za **y** uvrstimo u izraz **x**, dobivamo:

$$\mathbf{x} = (1 - p)\,\mathbf{a} + p\,(1 - q)\,\mathbf{b} + q\mathbf{c})$$

$$\mathbf{x} = (1 - p)\,\mathbf{a} + p\,(1 - q)\,\mathbf{b} + pq\mathbf{c}$$

Ovaj je izraz konveksni linearni sastav točaka **a**, **b** i **c** jer koeficijenti linearnog sastava odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq 1 - p \leqq 1, \quad 0 \leqq p\,(1 - q) \leqq 1, \quad 0 \leqq pq \leqq 1$$

i jednadžbi:

$$(1 - p) + p\,(1 - q) + pq = 1$$

Za različite vrijednosti varijabla p i q razlikujemo slijedeće značajne mogućnosti za točku **x**:

ako je $p = 0$ & $q = 0$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{a}$,
ako je $p = 0$ & $q = 1$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{a}$,
ako je $p = 1$ & $q = 0$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{b}$,
ako je $p = 1$ & $q = 1$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{c}$,
ako je $p = 0$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{a}$,
ako je $p = 1$, onda **x** leži na stranici nasuprot **a**,
ako je $q = 1$, onda **x** leži na stranici nasuprot **b**,
ako je $q = 0$, onda **x** leži na stranici nasuprot **c** i
ako je $0 < p < 1$ & $0 < q < 1$, onda je **x** unutrašnja točka trokuta.

Vježbe

1. Izrazi vektor $\mathbf{x} = \{7,9\}$ kao konveksni linearni sastav vektora $\mathbf{a} = \{4,6\}$ i $\mathbf{b} = \{8,10\}$. Prikaži vektore i rješavanje geometrijski.

$$\left(\mathbf{x} = \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}\right)$$

2. Izrazi vektor $\mathbf{x} = \{5,6\}$ kao konveksni linearni sastav vektora $\mathbf{a} = \{2,4\}$, $\mathbf{b} = \{6,9\}$ i $\mathbf{c} = \{12,6\}$. Prikaži vektore i način rješavanja geometrijski.

$$\left(\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{6}\mathbf{c}\right)$$

3. Konveksni poliedar skup je svih konveksnih linearnih sastava točaka $\mathbf{a} = \{2,3,4\}$, $\mathbf{b} = \{5,6,8\}$, $\mathbf{c} = \{2,3,8\}$ i $\mathbf{d} = \{3,4,22/3\}$. Točka **d** je konveksni linearni sastav prvih triju točaka. Izrazi točku:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{7}\mathbf{a} + \frac{2}{7}\mathbf{b} + \frac{3}{7}\mathbf{c} + \frac{1}{7}\mathbf{d}$$

kao konveksni linearni sastav točaka **a**, **b** i **c**.

$$\left(\mathbf{x} = \frac{1}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}\right)$$

4. Točka x je konveksni linearni sastav točaka

$$\mathbf{a} = \{2,3,4\},\ \mathbf{b} = \{5,6,8\},\ \mathbf{c} = \{2,3,8\} \text{ i } \mathbf{d} = \{3,4,22/3\}.$$

Prva tri koeficijenta konveksnog linearnog sastava su 1/8, 1/4 i 3/8. Točka **d** je konveksni linearni sastav prvih triju točaka. Izrazi točku **x** kao konveksni linearni sastav točaka **a**, **b** i **c**.

$$\left(\mathbf{x} = \frac{1}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}\right)$$

5. Konveksni poliedar ima ekstremne točke $\mathbf{a} = \{2,3,4\}$, $\mathbf{b} = \{5,6,8\}$ i $\mathbf{c} = \{2,3,8\}$. Točka $\mathbf{d} = \{3,4,22/3\}$ njegova je neekstremna točka. Točka **x** je konveksni linearni sastav tih četiriju točaka:

$$\mathbf{x} = \frac{2}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{10}\mathbf{b} + \frac{1}{5}\mathbf{c} + \frac{1}{10}\mathbf{d}$$

Izrazi točku **x** kao konveksni linearni sastav točaka **a**, **b** i **c**.

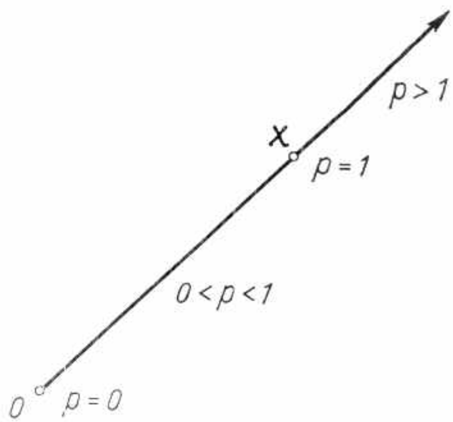
$$\left(\mathbf{x} = \frac{5}{12}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{c}\right)$$

3. Poliedarski stožac

Zraka. Uzmimo u vektorskom prostoru vektor ili točku **x** i realnu varijablu p, koja može zauzeti sve pozitivne vrijednosti pa i vrijednost 0. Skup točaka:

$$p\mathbf{x},$$

koji dobivamo za sve vrijednosti varijable p, nazivamo zrakom kroz točku x. Ako je vektorski prostor dvo- ili trodimenzionalan, zraku možemo prikazati polutrakom koja ima početak u ishodištu koordinatnog sistema i koja prolazi kroz točku **x**. Kako vidimo na sl. 20, zraka izvire u točki **0** i prolazi kroz točku **x**. Ako je $p = 0$, onda je odgovarajuća točka zrake identična točki **0**; ako je $p = 1$, onda je točka zrake identična točki **x**; ako je $0 < p < 1$, onda točka zrake leži između točaka **0** i **x**; ako je pak $p > 1$, onda točka zrake leži izvan točaka spojnice **0** i **x**.

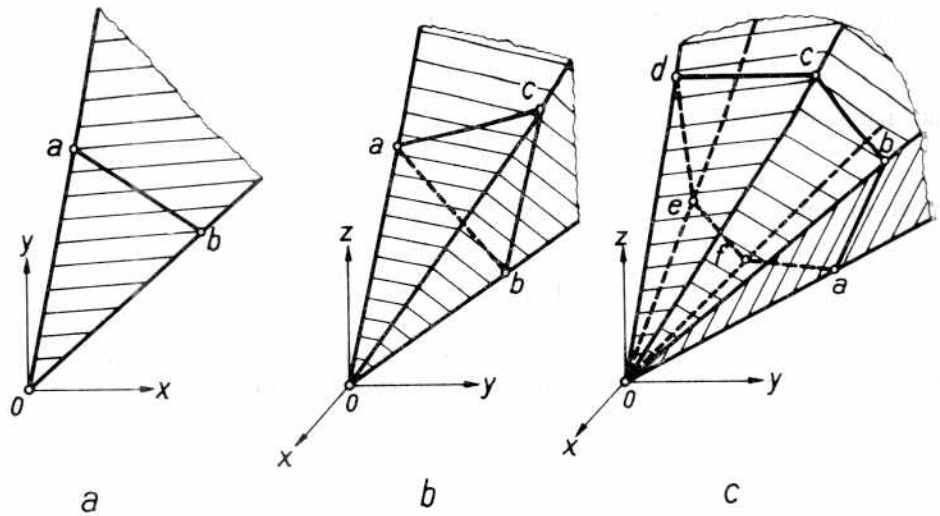


Sl. 20. Zraka

Konveksni stožac je konveksni skup točaka vektorskog prostora koji ima slijedeću osobinu: ako je točka **x** član skupa, onda skupu pripadaju i sve točke na zraci kroz točku **x**. Svakom konveksnom skupu točaka odgovara konveksni stožac u kojem leže sve zrake što prolaze kroz točke toga konveksnog skupa. Ako je vektorski prostor dvo- ili trodimenzionalan, onda konveksni stožac možemo prikazati kutom ili stošcem s vrhom u ishodištu koordinatnog sistema.

Slika 21a. prikazuje ravninski konveksni stožac koji odgovara konveksnom skupu, i to spojnici točaka **a** i **b**. Slika 21b. prikazuje u trodimenzionalnom prostoru konveksni stožac koji odgovara konveksnom skupu, i to trokutu s uglovima **a**, **b** i **c**. Slika 21c. prikazuje u trodimenzionalnom prostoru konveksni stožac koji odgovara konveksnom poligonu s uglovima **a, b, c, d, e** i **f.**

Svakom konveksnom poliedru odgovara konveksni stožac u kojem leže sve zrake što prolaze kroz točke konveksnog poliedra; takav se poliedarski stožac naziva *konveksni poliedarski stožac*. Sva su tri stošca na sl. 21. konveksni poliedarski stošci.



Sl. 21. Poliedarski stošci

Uzmimo konveksni poliedarski stožac S, koji je određen konveksnim poliedrom K; konveksni poliedar ima ekstemne točke:

$$\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r$$

Svaku točku $\mathbf{x}^K$ konveksnog poliedra možemo izraziti kao konveksni linearni sastav njegovih ekstremnih točaka:

$$\mathbf{x}^K = p_1 \mathbf{x}^1 + \dots + p_r \mathbf{x}^r$$

Kako je ovaj linearni sastav konveksan, to njegovi koeficijenti zadovoljavaju nejednadžbe:

$$0 \leqq p_i \leqq 1 \qquad (i = 1, \dots, r)$$

i jednadžbu:

$$p_1 + \dots + p_r = 1$$

Svaka točka $\mathbf{x}^S$ zrake $p\mathbf{x}^K$ je točka poliedarskog stošca S; pri tom je $p \geqq 0$. Izrazimo točku $\mathbf{x}^S$ kao linearni sastav ekstremnih točaka poliedra:

$$\mathbf{x}^S = p\mathbf{x}^K = pp_1 \mathbf{x}^1 + \dots + pp_r \mathbf{x}^r$$

Koeficijenti ovog linearnog sastava su pozitivni ili najviše jednaki 0. Iz toga slijedi izreka:

Svaka točka koja je nenegativni linearni sastav ekstremnih točaka konveksnog poliedra jest točka odgovarajućeg konveksnog poliedarskog stošca.

Dokažimo još izreku: *Svaka točka konveksnog poliedarskog stošca leži na zraci kroz neku točku odgovarajućeg konveksnog poliedra.*

Dokaz. Svaku točku $\mathbf{x}^s$ konveksnog poliedarskog stošca možemo prema prijašnjoj izreci izraziti kao nenegativni linearni sastav ekstremnih točaka konveksnog poliedra:

$$\mathbf{x}^S = b_1 \mathbf{x}^1 + \dots + b_r \mathbf{x}^r$$

Koeficijenti ovog linearnog sastava zadovoljavaju nejednadžbe:

$$b_i \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, r)$$

ako napišemo:

$$b = b_1 + \ldots + b_r$$

možemo linearni sastav za točku $\mathbf{x}^S$ pretvoriti u oblik:

$$\mathbf{x}^S = b\left(\frac{b_1}{b}\mathbf{x}^1 + \ldots + \frac{b_r}{b}\mathbf{x}^r\right)$$

Izraz u zagradi konveksni je linearni sastav ekstremnih točaka konveksnog poliedra jer koeficijenti linearnog sastava zadovoljavaju nejednadžbe:

$$0 \leqq \frac{b_i}{b} \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

i jer je suma svih koeficijenata jednaka 1. Stoga je izraz u zagradi točka konveksnog poliedra; točka $\mathbf{x}^s$ leži na zraci kroz tu točku, pa je izreka tako dokazana.

Primjer. U četverodimenzionalnom vektorskom prostoru s kartezijskim koordinatama x_1, x_2, x_3 i x_4 konveksni je poliedar napet na osnovne jedinične vektore $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ i $\mathbf{e}^4$. Konveksni poliedar leži na hiperravnini s jednadžbom:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

Odredimo točku $\mathbf{x}$ u kojoj konveksni poliedar probode zraka kroz točku $\mathbf{b} = \{2, 1, 2, 3\}$. Točku $\mathbf{b}$ izrazimo najprije kao pozitivni linearni sastav osnovnih jediničnih vektora:

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^3 + 3\mathbf{e}^4$$

Ovaj linearni sastav podijelimo sumom koeficijenata 8, pa dobivamo:

$$\mathbf{x} = \frac{2}{8}\mathbf{e}^1 + \frac{1}{8}\mathbf{e}^2 + \frac{2}{8}\mathbf{e}^3 + \frac{3}{8}\mathbf{e}^4$$

Vježbe

1. Odredi u konveksnom poliedru napetom na točkama $\{1,2\}$ i $\{2,1\}$ točku $\mathbf{x}$ koja leži na zraci kroz točku $\{2,2\}$. Prikaži vježbu geometrijski.

($\mathbf{x} = \{3/2,\ 3/2\}$)

2. Odredi sjecište P dužine s krajevima A (1,0) i B (0,1) i zrake kroz točku C (2,3).

(P (2/5,3/5))

3. Odredi u konveksnom poliedru napetom na osnovnim jediničnim vektorima trodimenzionalnog prostora točku $\mathbf{x}$ koja leži na zraci kroz točku $\mathbf{a} = \{2,3,2\}$.

($\mathbf{x} = \{2/7,3/7,2/7\}$)

4. Odredi u peterodimenzionalnom vektorskom prostoru točku $\mathbf{x}$ u kojoj zraka kroz točku $\{1,3,2,1,2\}$ probode konveksni poliedar što je napet na svih pet osnovnih jediničnih vektora.

($\mathbf{x} = \{1/9,3/9,2/9,1/9,2/9\}$)

4. Linearne transformacije konveksnih skupova

Uzmimo linearnu transformaciju u proširenom obliku:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku:

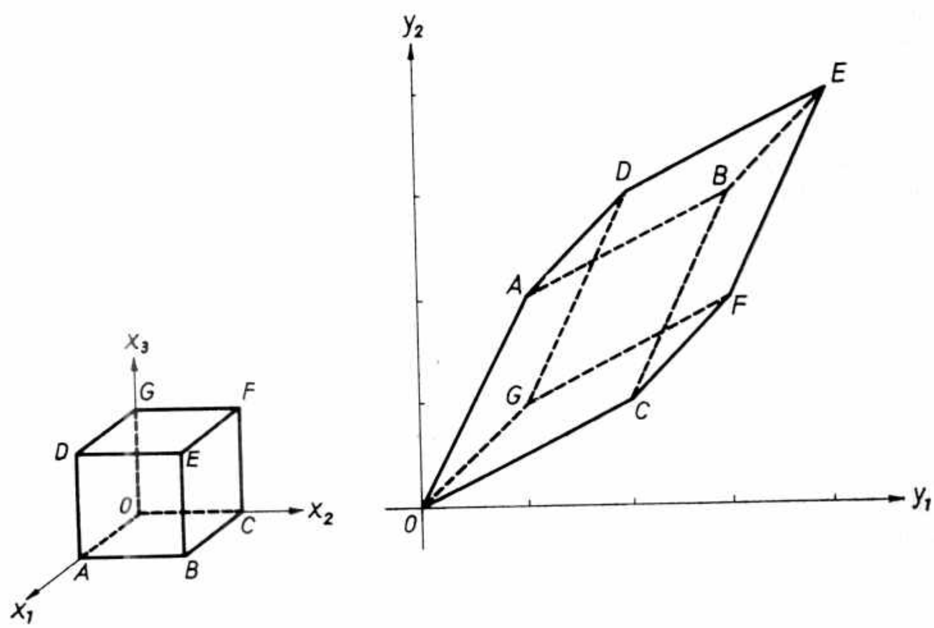
$$\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Ova transformacija preslikava n-dimenzionalni vektorski prostor $V(\mathbf{x})$ u m-dimenzionalni vektorski prostor $V(\mathbf{y})$ i svaki skup prostora $V(\mathbf{x})$ u njegovu sliku u prostoru $V(\mathbf{y})$. Uzmimo dalje da je dimenzija prostora $V(\mathbf{y})$ manja od dimenzije prostora $V(\mathbf{x})$ i da važi nejednadžba $m < n$. Zbog toga se više točaka prostora $V(\mathbf{x})$ može preslikati u jednu samu točku prostora $V(\mathbf{y})$.

Primjer. Linearna transformacija:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

preslikava trodimenzionalni prostor s kartezijskim koordinatama x_1, x_2 i x_3 u dvodimenzionalni prostor s kartezijskim koordinatama y_1 i y_2. Kao što vidimo na sl. 22, dobivamo slike što odgovaraju pojedinim originalima. Slike točaka označene



Sl. 22. Linearna transformacija

su jednako kao originalne točke. Originalni konveksni poliedar, koji je kocka, preslikava se u konveksni šesterokut. Ekstremne točke O, A, C, D, E i F originalnog poliedra preslikavaju se u ekstremne točke šesterokuta, a estremne točke B i G poliedra preslikavaju se u neekstremne točke šesterokuta.

Promatrajmo kako linearna transformacija transformira konveksne skupove prostora $V(\mathbf{x})$. Za takva preslikavanja vrijede izreke:

Linearna transformacija $\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ *preslikava svaki konveksni skup vektorskog prostora* $V(\mathbf{x})$ *u konveksni skup vektorskog prostora* $V(\mathbf{y})$.

Dokaz. Uzmimo u vektorskom prostoru $V(\mathbf{x})$ neki konveksni skup M i dvije njegove proizvoljne točke $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$; svaki konveksni linearni sastav:

$$(1-p)\,\mathbf{x}^1 + p\mathbf{x}^2 \qquad (0 \leqq p \leqq 1)$$

tih dviju točaka spada u taj skup. Linearna transformacija

$$\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$$

preslikava konveksni skup M u njegovu sliku L(M), točku $\mathbf{x}^1$ u njezinu sliku $L(\mathbf{x}^1)$ i točku $\mathbf{x}^2$ u njezinu sliku $L(\mathbf{x}^2)$. Treba dokazati da je slika gornjeg konveksnog linearnog sastava točaka $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ konveksni linearni sastav njihovih slika $L(\mathbf{x}^1)$ i $L(\mathbf{x}^2)$. Za sliku ovog konveksnog linearnog sastava zbog aditivnosti linearne transformacije važi:

$$L\left((1-p)\,\mathbf{x}^1 + p\mathbf{x}^2\right) = (1-p)\,L(\mathbf{x}^1) + pL(\mathbf{x}^2)$$

Slika konveksnog linearnog sastava obaju originala $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ je konveksni linearni sastav njihovih slika, i to s istim koeficijentima linearnog sastava; tako je izreka dokazana.

Pri linearnoj transformaciji koeficijenti konveksnih linearnih sastava ostaju nepromijenjeni.

Dokaz. Uzmimo u vektorskom prostoru $V(\mathbf{x})$ točku $\mathbf{x}$ koja je konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^t$:

$$\mathbf{x} = p_1\,\mathbf{x}^1 + \ldots + p_t\,\mathbf{x}^t$$

Ovdje koeficijenti linearnog sastava zadovoljavaju nejednadžbe:

$$0 \leqq p_i \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

i jednadžbu:

$$p_1 + \ldots + p_t = 1$$

Linearna transformacija $\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ preslikava točke $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^t$ u njihove slike $L(\mathbf{x}^1), \ldots, L(\mathbf{x}^t)$ i točku $\mathbf{x}$ u njezinu sliku $L(\mathbf{x})$. Zbog aditivnosti linearne transformacije važi:

$$L(\mathbf{x}) = L(p_1\,\mathbf{x}^1 + \ldots + p_t\,\mathbf{x}^t) = p_1\,L(\mathbf{x}^1) + \ldots + p_t\,L(\mathbf{x}^t)$$

pa je izreka dokazana.

Budući da pri linearnoj transformaciji koeficijenti konveksnih linearnih sastava ostaju nepromijenjeni, to slijede neke zanimljive osobine. Pri linearnoj transformaciji konveksnog poliedra s određenim brojem ekstremnih točaka poliedar se transformira u neki konveksni skup koji, međutim, ne može imati više ekstremnih točaka nego ih ima originalni poliedar. Stoga je slika konveksnog poliedra konveksni skup s konačnim brojem ekstremnih točaka, dakle opet konveksni poliedar. Linearna transformacija preslikava svaki konveksni poliedar vektorskog prostora $V(\mathbf{x})$ u konveksni poliedar vektorskog prostora $V(\mathbf{y})$.

Za linearne transformacije konveksnih poliedara vrijedi još izreka: *Svaka ekstremna točka slike* $L(K)$ *originalnog konveksnog poliedra* K *je slika barem jedne ekstremne točke konveksnog poliedra* K.

Dokaz. Uzmimo u vektorskom prostoru $V(\mathbf{x})$ konveksni poliedar K s ekstremnim točkama $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^t$; svaku njegovu točku $\mathbf{x}$ možemo izraziti kao konveksni linearni sastav ekstremnih točaka. Linearna transformacija

$$\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

preslikava originalni konveksni poliedar K u konveksni poliedar $L(K)$, a ekstremne točke u njihove slike:

$$\mathbf{y}^1 = L(\mathbf{x}^1), \ldots, \mathbf{y}^t = L(\mathbf{x}^t)$$

Ove su slike točke konveksnog poliedra $L(K)$. Svaku točku konveksnog poliedra $L(K)$ možemo izraziti kao konveksni linearni sastav tih slika. Točka $\mathbf{u}$ neka bude neka točka konveksnog poliedra $L(K)$; stoga je možemo izraziti kao konveksni linearni sastav ovih slika ovako:

$$\mathbf{u} = p_1 \mathbf{y}^1 + \ldots + p_t \mathbf{y}^t$$

Ovdje koeficijenti linearnog sastava odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq p_i \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

i jednadžbi:

$$p_1 + \ldots + p_t = 1$$

Ako je $\mathbf{u}$ ekstremna točka konveksnog poliedra $L(K)$, onda je samo jedan od koeficijenata $p_1, \ldots, p_t$ jednak 1, a svi drugi jednaki su 0. Uzmimo da je koeficijent p_s jednak 1; u tom slučaju za ekstremnu točku $\mathbf{u}$ dobivamo izraz:

$$\mathbf{u} = p_s \mathbf{y}^s = \mathbf{y}^s = L(\mathbf{x}^s)$$

Ekstremna točka $\mathbf{y}^s$ konveksnog poliedra $L(K)$ je prema tome slika ekstremne točke $\mathbf{x}^s$ originalnog konveksnog poliedra K, pa je izreka dokazana.

Iz dokazanih izreka slijede još ove značajne osobine linearne transformacije konveksnih poliedara. Kako je svaka ekstremna točka slike konveksnog poliedra slika barem jedne ekstremne točke poliedra, to je slika konveksnog poliedra samog opet konveksni poliedar, koji međutim nema više ekstremnih točaka od originalnog poliedra. Ali slika ekstremne točke originalnog konveksnog poliedra nije uvijek ekstremna točka slike poliedra. U prije obrađivanom primjeru transformacije kocke u šesterokut vidimo da su slike ekstremnih točaka O, A, C, D, E i F originalnog poliedra ekstremne točke njegove slike, dok ekstremne točke B i G originalnog poliedra nisu ekstremne točke njegove slike. Iz toga za linearne transformacije slijedi uopćena izreka:

Linearna transformacija $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ s transformacijskom matricom reda $m \times n$, gje je $m < n$, transformira svaki konveksni poliedar vektorskog prostora $V(\mathbf{x})$ u konveksni poliedar vektorskog prostora $V(\mathbf{y})$; no taj poliedar nema više ekstremnih točaka od originalnog.

Vježbe

1. Linearna transformacija:

$$z = x + 2y$$

preslikava ravninu s kartezijskim koordinatama x i y u pravac s kartezijskom koordinatom z. Odredi i predoči geometrijski:

a) slike točaka:

A (1,1)	(A (3))
B (3,0)	(B (3))
C (2,3)	(C (8))
D (0,2)	(D (4))

b) slike dužina:

AB	(A)
BC	([3,8])
CD	([8,4])
AD	([3,4])

c) slike konveksnih likova:

ABC	([3,8])
ACD	([3,8])
ABD	([3,4])
BCD	([3,8])
ABCD	([3,8])

2. Linearna transformacija y = x projicira ravninu s kartezijskim koordinatama x i y na pravac s kartezijskom koordinatom z. Odredi i prikaži geometrijski sliku konveksnog četverokuta s uglovima A (1,1), B (3,0), C (2,3) i D (0,2).

([0,3])

3. Linearna transformacija:

$$u = x + 2y + 2z$$

$$v = 2x + y + z$$

preslikava trodimenzionalni prostor s kartezijskim koordinatama x, y i z u ravninu s kartezijskim koordinatama u i v. Odredi i predoči geometrijski:

a) slike točaka:

O (0,0,0)	(O (0,0))
A (1,1,1)	(A (5,4))
B (3,1,2)	(B (9,9))
C (1,2,3)	(C (11,7))

b) slike dužina:

AB	(AB)
AC	(AC)
BC	(BC)

c) slike trokuta:

OAB	(OAB)
OAC	(OAC)
ABC	(ABC)

d) sliku konveksnog poliedra:

OABC	(OBC)

Treći dio

TEORIJA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

VIII. FORMULACIJE PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

1. Formulacije problema linearnog programiranja s algebarskim jednadžbama i nejednadžbama

Opći problem linearnog programiranja možemo izraziti u matematičkom obliku na slijedeći način:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $x_1, \dots, x_s$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \dots, x_s \geqq 0$$

i linearnim jednadžbama i nejednadžbama:

$$\begin{array}{c} a_{11} x_1 + \dots + a_{1s} x_s \gtreqqless b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{ms} x_s \gtreqqless b_m \end{array}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \dots, x_s) = c_1 x_1 + \dots + c_s x_s$$

ima ekstrem, tj. minimum ili maksimum.

Pri tom su m i s proizvoljni prirodni brojevi; koeficijenti a_{ij} i c_j kod varijabla u uvjetnim jednadžbama ili nejednadžbama i u funkciji cilja su proizvoljni realni brojevi; brojevi b_i na desnoj strani uvjetnih jednadžbi ili nejednadžbi su proizvoljni nenegativni brojevi. Uvjetne jednadžbe ili nejednadžbe sastavljaju sistem neovisnih i neprotuslovnih jednadžbi ili nejednadžbi.

Ovaj problem možemo geometrijski obrazložiti u s-dimenzionalnom vektorskom prostoru V^s, koji je skup svih vektora $(x_1, \dots, x_s)$. Svakom uvjetu nenegativnosti u ovom vektorskom prostoru odgovara poluprostor u kojem je odgovarajuća varijabla nenegativna. Svakoj uvjetnoj jednadžbi u ovom vektorskom prostoru odgovara po jedna hiperravnina. Svakoj uvjetnoj nejednadžbi međutim odgovara poluprostor koji je omeđen hiperravninom priređenom odgovarajućoj jednadžbi. Skup svih vektora $(x_1, \dots, x_s)$ koji odgovaraju svim ovim uvjetima jest presjek svih spomenutih poluprostora ili hiperravnina. Kod takvog geometrijskog prikaza funkciji cilja priredimo familiju jednoparametarskih hiperravnina jednadžbom:

$$c_1 x_1 + \dots + c_s x_s = k$$

Tu je parametar k proizvoljan realan broj.

Pri linearnom programiranju računamo ekstrem funkcije cilja, nekad miminimum a nekad maksimum. S obzirom na te dvije mogućnosti nema bitnih razlika jer problem za maksimum možemo uvijek pretvoriti u odgovarajući problem za minimum funkcije cilja i obrnuto. U primjeru kad tražimo maksimum funkcije cilja $f(x_1, \ldots, x_s)$, možemo dobiti odgovarajući problem za minimum ako tražimo minimum negativne funkcije cilja $-f(x_1, \ldots, x_s)$.

1. *primjer*. Uzmimo slijedeći problem linearnog programiranja: Treba odrediti vrijednosti varijabla x i y koje odgovaraju uvjetima negativnosti:

$$x \geqq 0, \; y \geqq 0$$

i linearnim nejednadžbama:

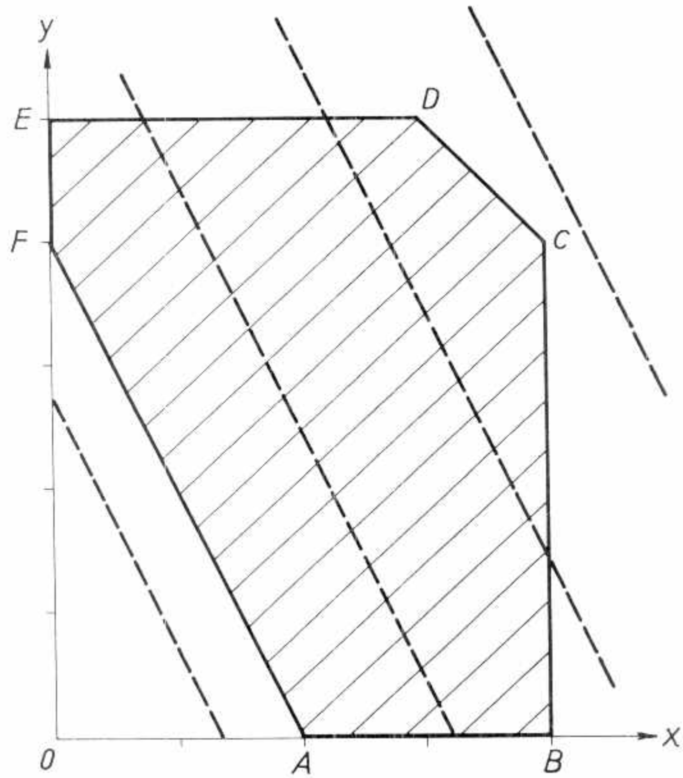
$$x \leqq 4, \; y \leqq 5$$
$$x + y \leqq 8$$
$$2x + y \geqq 4$$

tako da funkcija cil a:

$$f(x, y) = 2x + y + 8$$

ima ekstrem.

Budući da u ovom problemu nastupaju samo dvije varijable, to ga možemo geometrijski predočiti u dvodimenzionalnom vektorskom prostoru V^2, u kojem uzmemo, kao što vidimo na slici 23, pravokutni kartezijski koordinatni sistem x0y.



Sl. 23. Geometrijski prikaz linearnog programa

U ovom koordinatnom sistemu svakom paru brojeva (x, y) odgovara po jedna točka. Točke kojih koordinate odgovaraju svim uvjetnim nejednadžbama leže na iscrtkanom konveksnom šesterokutu s uglovima:

$$A(2, 0),\ B(4, 0),\ C(4, 4),\ D(3, 5),\ E(0, 5),\ F(0, 4)$$

Na ovoj slici funkciju cilja prikazuje familija crtkanih pravaca s jednadžbom:

$$2x + y + 8 = k$$

Ako među uvjetima u linearnom programu nastupa neka jednadžba, onda broj uvjeta i broj varijabla možemo smanjiti za jedan. U toj jednadžbi, naime, možemo proizvoljnu varijablu što u njoj nastupa izraziti drugim varijablama i zatim izvršiti odgovarajuću supstituciju u svim ostalim uvjetima i u funkciji cilja. Nakon supstitucije ova jednadžba otpada, a broj varijabla smanjuje se za jedan.

2. *primjer*. Uzmimo slijedeći linearni program: Treba odrediti vrijednosti varijabla x,y i z koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \leqq 0,$$

jednadžbi:

$$x + y + z = 8$$

i nejednadžbama:

$$x \leqq 4,\ y \leqq 5,\ z \leqq 6$$
$$2x + 3y + 4z \leqq 28$$

tako da ima ekstrem funkcija cilja:

$$f(x, y, z) = 3x + 2y + z$$

Budući da kod ovog problema među uvjetima nastupa jedna jednadžba, varijablu z možemo izraziti varijablama x i y:

$$z = 8 - x - y$$

Nakon supstitucije uvjet nenegativnosti $z \geqq 0$ prelazi u nejednadžbu:

$$x + y \leqq 8$$

Uvjet $z \leqq 6$ prelazi u nejednadžbu:

$$x + y \geqq 2$$

Posljednja uvjetna nejednadžba prelazi u nejednadžbu:

$$2x + y \geqq 4$$

Funkcija cilja $f(x, y, z)$ prelazi u funkciju cilja:

$$f(x, y) = 2x + y + 8$$

Uvjetnu nejednadžbu $x + y \geqq 2$ možemo zanemariti jer je ispunjena čim je ispunjena nejednadžba $2x + y \geqq 4$. Pošto smo izostavili ovu nejednadžbu, dobivamo linearni program koji smo razmotrili u 1. primjeru.

Uvjetne nejednadžbe što nastupaju među uvjetima u linearnom programu možemo pretvoriti u jednadžbe ako uvedemo *dopunske varijable.* Uzmimo da i-ta nejednadžba ima oblik:

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{is} x_s \geqq b_i$$

U tu nejednadžbu uvedemo dopunsku varijablu x_{s+i}, koja je nenegativna, tako da ovu varijablu odbijemo od lijeve strane nejednadžbe; na taj način dobivamo jednadžbu:

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{is} x_s - x_{s+i} = b_i$$

Uzmimo još da i-ta nejednadžba ima oblik:

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{is} x_s \leqq b_i$$

U tu nejednadžbu uvedemo nenegativnu varijablu x_{s+i} tako da ovu varijablu pribrojimo lijevoj strani nejednadžbe; na taj način dobivamo jednadžbu:

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{is} x_s + x_{s+i} = b_i$$

Funkciju cilja dopunimo ovom varijablom x_{s+i} tako da joj dodamo član $c_{s+i} x_{s+i}$, gdje je $c_{s+i} = 0$. Stoga se funkcija cilja mijenja samo prividno, a u stvari ostaje nepromijenjena.

Ako u sve uvjetne nejednadžbe uvedemo dopunske varijable, u linearnom programu osim uvjeta nenegativnosti dobivamo samo još uvjete koji su linearne jednadžbe.

Prema tome u nastavku ćemo razmotriti ovaj manje uopćeni problem linearnog programiranja: Treba odrediti vrijednosti varijabla $x_1, \dots, x_s$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0 \dots, x_s \geqq 0$$

i linearnim nejednadžbama:

$$\begin{gathered} a_{11} x_1 + \dots + a_{1s} x_s \geqq b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{ms} x_s \geqq b_m \end{gathered}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \dots, x_s) = c_1 x_1 + \dots + c_s x_s$$

ima minimum.

Pri tome su m i s proizvoljni prirodni brojevi, koeficijenti a_{ij} i c_j su proizvoljni realni brojevi, dok su brojevi b_i na desnoj strani uvjetnih jednadžbi proizvoljni nenegativni brojevi.[1]

Obrada dukčijih tipova linearnih programa ne zadaje nikakve teškoće jer se daljnja teorija može prilagoditi i upotrijebiti i za njih.

---

[1] Linearni program ovog tipa obrađujemo iscrpno u 1. točki XII. poglavlja u problemu o prehrani. Taj problem obrađujemo uglavnom s namjerom da na njemu prikažemo sadržaj i tehniku simpleks metode. Stoga preporučujemo čitaocu da daljnju teoriju prati na tom problemu.

Pošto smo uveli dopunske varijable $x_{s+1}, \dots, x_{s+m}$, iz gornjeg dobivamo slijedeći linearni program: Treba odrediti vrijednosti varijabla:

$$x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+m},$$

koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \dots, x_s \geqq 0, x_{s+1} \geqq 0, \dots, x_{s+m} \geqq 0$$

i linearnim jednadžbama:

$$\begin{array}{c} a_{11} x_1 + \dots + a_{1s} x_s - x_{s+1} = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{ms} x_s - x_{s+m} = b_m \end{array}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \dots, x_{s+m}) = c_1 x_1 + \dots + c_s x_s + c_{s+1} x_{s+1} + \dots + c_{s+m} x_{s+m}$$

ima minimum.

U funkciji cilja je:

$$c_{s+1} = 0, \dots, c_{s+m} = 0$$

Ovaj linearni program, upotpunjen dopunskim varijablama, još nije takav da bi se moglo početi s numeričkim rješavanjem. U tu svrhu ubacimo u svaku jednadžbu još po jednu varijablu; ove varijable zovemo *umjetnim varijablama.* U i-tu jednadžbu ubacimo umjetnu varijablu x_{s+m+i} koja je nenegativna, pa tako dobivamo jednadžbu:

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{is} x_s - x_{s+i} + x_{s+m+i} = b_i$$

Ovoj umjetnoj varijabli u funkciji cilja odredimo neki dovoljno velik koeficijent $c_{s+m+i} = M$; izaberemo tako velik da ova varijabla u optimalno mogućem rješenju može zauzeti jedino vrijednost 0.

Pošto smo uveli dopunske i umjetne varijable, dobivamo iz prvobitnog slijedeći linearni program:

Treba odrediti vrijednosti varijabla:

$$x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+m}, x_{s+m+1}, \dots, x_{s+2m} = x_n,$$

koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \dots, x_n \geqq 0$$

i linearnim jednadžbama:

$$\begin{array}{c} a_{11} x_1 + \dots + a_{1s} x_s - x_{s+1} + x_{s+m+1} = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{ms} x_s - x_{s+m} + x_{s+2m} = b_m \end{array}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_s x_s + c_{s+1} x_{s+1} + \dots + c_{s+m} + \\ + c_{s+m+1} x_{s+m+1} + \dots + c_n x_n$$

ima minimum.

Prema prijašnjem, koeficijenti u funkciji cilja su jednaki:

$$c_{s+1} = 0, \dots, c_{s+m} = 0, c_{s+m+1} = M, \dots, c_{s+2m} = c_n = M$$

Ovaj problem možemo predočiti geometrijski. Svaki uvjet nenegativnosti određuje poluprostor n-dimenzionalnog vektorskog prostora V^n u kojem odgovarajuća komponenta nije negativna; svaka uvjetna jednadžba u ovom vektorskom prostoru određuje po jednu hiperravninu. Skup svih n-toro brojeva $(x_1, \dots, x_n)$ koji odgovaraju svim uvjetima nenegativnosti i jednadžbama jest presjek svih tih poluprostora ili hiperravnina. Funkcija cilja određuje jednoparametarsku familiju hiperravnina s jednadžbom:

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = k$$

Tu je parametar k ma koji realan broj.

Iz linearnog programa vidimo da n-toro brojeva:

$$x_1 = 0, \dots, x_s = 0, x_{s+1} = 0, \dots, x_{s+m} = 0, x_{s+m+1} = \\ = b_1, \dots, x_{s+2m} = b_m$$

odgovara svim uvjetima nenegativnosti i svim propisanim linearnim jednadžbama; za te brojeve funkcija cilja ima vrijednost:

$$M(b_1 + \dots + b_m)$$

2. Formulacije problema linearnog programiranja u vektorskom i matričnom obliku

Uzmimo linearni program kao što smo ga formulirali u prijašnjoj točki: Treba odrediti vrijednosti varijabla $x_1, \dots, x_s$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \dots, x_s \geqq 0 \tag{1a}$$

i linearnim nejednadžbama:

$$\begin{array}{c} a_{11} x_1 + \dots + a_{1s} x_s \geqq b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{ms} x_s \geqq b_m \end{array} \tag{1b}$$

tako da funkcija cilja

$$f(x_1, \dots, x_s) = c_1 x_1 + \dots + c_s x_s \tag{1c}$$

ima minimum.

Ovaj linearni program izraziti ćemo još u nekoliko drugih oblika. Uzmimo vektore koji kao komponente imaju homologne koeficijente u uzastopnim uvjetnim nejednadžbama:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{Vmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{Vmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{P}^s = \begin{Vmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{P}^0 = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}$$

Ovi su vektori vektori m-dimenzionalnog vektorskog prostora V^m. Nakon uvođenja tih vektora za prijašnji linearni program dobivamo slijedeći vektorski oblik:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $x_1, \dots, x_s$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \dots, x_s \geqq 0 \tag{2a}$$

i vektorskoj nejednadžbi:

$$x_1 \mathbf{P}^1 + \dots + x_s \mathbf{P}^s \geqq \mathbf{P}^0 \tag{2b}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \dots, x_s) = c_1 x_1 + \dots + c_s x_s \tag{2c}$$

ima minimum.

Izraz na lijevoj strani uvjetne vektorske nejednadžbe je nenegativni linearni sastav vektora $\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^s$ jer nijedna od varijabla nemože biti negativna.

Da bismo linearni program izrazili u matričnom obliku, uvodimo slijedeće matrice i vektore:

$$\mathbf{A}^1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} \end{Vmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{Vmatrix} \quad \mathbf{b} = \mathbf{P}^0 = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \| c_1 \dots c_s \|$$

Nakon uvođenja ovih matrica i vektora linearni program izrazimo u matričnom obliku na ovaj način: Treba odrediti matricu ili vektor $\mathbf{x}$ koji odgovara uvjetu nenegativnosti:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{O} \tag{3a}$$

i matričnoj nejednadžbi:

$$\mathbf{A}^1 \mathbf{x} \geqq \mathbf{b} \tag{3b}$$

tako da funkcija cilja

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} \tag{3c}$$

ima minimum.

Pošto smo uveli dopunske varijable $x_{s+1}, \dots, x_{s+m}$ i umjetne varijable $x_{s+m+1}, \dots, x_{s+2m} = x_n$, u prijašnjoj smo točki iz prvobitnog dobili slijedeći linearni program:

Treba odrediti varijable $x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+m}, x_{s+m+1}, \dots, x_{s+2m} = x_n$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \dots, x_n \geqq 0 \tag{4a}$$

i linearnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + \ldots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4b}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1\,x_1 + \ldots + c_n\,x_n \tag{4c}$$

ima minimum.

U naprijed navedenom sve smo koeficijente na lijevoj strani uvjetnih jednadžbi kao i u funkciji cilja izrazili na isti način. Stoga za koeficijente kod prvobitnih varijabla važi:

$$a_{ij} = a_{ij} \quad (j \leqq s)$$

Za koeficijente kod dopunskih varijabla važi:

$$\begin{aligned} a_{i,s+i} &= -1 \\ a_{i,s+k} &= 0 \qquad (k \neq i) \end{aligned}$$

Za koeficijente kod umjetnih varijabla važi:

$$\begin{aligned} a_{i,s+m+i} &= 1 \\ a_{i,s+m+k} &= 0 \quad (k \neq i) \end{aligned}$$

Za koeficijente u funkciji cilja važi:

$$\begin{aligned} c_j &= c_j && (j \leqq s) \\ c_j &= 0 && (s + 1 \leqq j \leqq s + m) \\ c_j &= M && (s + m + 1 \leqq j \leqq n) \end{aligned}$$

Da bismo ovaj linearni program izrazili u vektorskom obliku, uvodimo vektore koji kao komponente imaju homologne koeficijente u uvjetnim jednadžbama:

$$\mathbf{P}^1 = \left\| \begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix} \right\| = \{a_{11}, \ldots, a_{m1}\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{P}^n = \left\| \begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix} \right\| = \{a_{1n}, \ldots, a_{mn}\}$$

$$\mathbf{P}^0 = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right\| = \{b_1, \ldots, b_m\}$$

Vektori $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^s$ su strukturni vektori koje smo susreli kod prvobitnog linearnog programa. Vektori $\mathbf{P}^{s+1}, \ldots, \mathbf{P}^{s+m}$ su dopunski vektori, koji su jednaki uzastopnim negativnim jediničnim vektorima. Vektori $\mathbf{P}^{s+m+1}, \ldots, \mathbf{P}^{s+2m} = \mathbf{P}^n$

su umjetni vektori; ovi su vektori jednaki uzastopnim jediničnim vektorima. Svi ovi vektori spadaju u m-dimenzionalni vektorski prostor V^m, dok umjetni vektori sastavljaju jednu od njegovih baza.

Nakon uvođenja ovih vektora umjesto prijašnjeg dobivamo slijedeći linearni program u vektorskom obliku: Treba odrediti varijable $x_1, \dots, x_n$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \dots, x_n \geqq 0 \tag{5a}$$

i vektorskoj jednadžbi:

$$x_1 \mathbf{P}^1 + \dots + x_n \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^0 \tag{5b}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \tag{5c}$$

ima minimum.

Svi n brojevi $(x_1, \dots, x_n)$ sastavljaju n-dimenzionalni vektorski prostor V^n, vektori $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}^n$ i $\mathbf{P}^0$ su međutim vektori m-dimenzionalnog vektorskog prostora V^m. Stoga linearni program možemo izraziti i u slijedećem obliku: U n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V^n treba odrediti vektore $\{x_1, \dots, x_n\}$ s nenegativnim komponentama tako da je odgovarajući nenegativni linearni sastav vektora:

$$x_1 \mathbf{P}^1 + \dots + x_n \mathbf{P}^n$$

jednak vektoru $\mathbf{P}^0$ i tako da funkcija cilja ima minimum.

Da bismo linearni program izrazili u matričnom obliku, uvodimo matrice i vektore:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1s} & -1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{A} = \| \mathbf{A}^1 \mid -E \mid E \|$$

$$\mathbf{x} = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\| = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{P}^0 = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right\| = \{b_1, \dots, b_m\}$$

$$\mathbf{c} = \| c_1 \dots c_n \|$$

Nakon uvođenja ovih matrica i vektora dobivamo prijašnji linearni program u matričnom obliku:

Treba odrediti vektor $\mathbf{x}$ koji odgovara uvjetu nenegativnosti:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \tag{6a}$$

i matričnoj jednadžbi:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{6b}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x} \tag{6c}$$

ima minimum.

Na osnovi vektorskog i matričnog zapisa dobivamo za linearni program tabelu 1; ona služi kao ishodište numeričkog rješavanja linearnog programa.

TABELA 1. PODACI ZA LINEARNI PROGRAM

	$c_1 \ \dots \ c_s$ $x_1 \ \dots \ x_s$	$c_{s+1} \ \dots \ c_{s+m}$ $x_{s+1} \ \dots \ x_{s+m}$	$c_{s+m+1} \ \dots \ c_n$ $x_{s+m+1} \ \dots \ x_n$
	Strukturni vektori	Dopunski vektori	Umjetni vektori
$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1 \ \dots \ \mathbf{P}^s$	$\mathbf{P}^{s+1} \ \dots \ \mathbf{P}^{s+m}$	$\mathbf{P}^{s+m+1} \ \dots \ \mathbf{P}^n$
b_1	$a_{11} \ \dots \ a_{1s}$	$a_{1,s+1} \ \dots \ a_{1,s+m}$	$a_{1,s+m+1} \ \dots \ a_{1n}$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$
b_i	$a_{i1} \ \dots \ a_{is}$	$a_{i,s+1} \ \dots \ a_{i,s+m}$	$a_{i,s+m+1} \ \dots \ a_{in}$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$
b_m	$a_{m1} \ \dots \ a_{ms}$	$a_{m\,s+1} \ \dots \ a_{m,s+m}$	$a_{m,s+m+1} \ \dots \ a_{mn}$

U tabeli 1. komponente dopunskih vektora sastavljaju negativnu jediničnu matricu reda m, dok komponente umjetnih vektora sastavljaju jediničnu matricu reda m. Umjetni vektori sastavljaju bazu m-dimenzionalnog vektorskog prostora V^m.

Primjer. Vratimo se prvom primjeru točke 1. ovog poglavlja. U nejednadžbu $x + y \leqq 8$ uvodimo dopunsku varijablu u, koju pribrojimo lijevoj strani nejednadžbe da bismo dobili jednadžbu; u nejednadžbu $2x + y \geqq 4$ uvodimo dopunsku varijablu v, koju odbijemo od lijeve strane nejednadžbe da bismo dobili jednadžbu; Nakon toga u dobivenu jednadžbu uvodimo još i umjetnu varijablu w, koju pribrojimo njezinoj lijevoj strani. Nakon uvođenja tih varijabla dobivamo slijedeći linearni program:

Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabli x, y, u, v i w koje odgovaraju jednadžbama:

$$\begin{aligned} x + y + u \qquad\qquad &= 8 \\ 2x + y \qquad -v + w &= 4 \end{aligned}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x, y, u, v, w) = 2x + y + Mw + 8$$

ima minimum.

Ovom problemu odgovara tabela 2.

TABELA 2. PODACI ZA LINEARNI PROGRAM

c_j	2	1	0	0	M
	x	y	u	v	w
$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$	$\mathbf{P}^2$	$\mathbf{P}^3$	$\mathbf{P}^4$	$\mathbf{P}^5$
8	1	1	1	0	0
4	2	1	0	-1	1

Iz tabele 2. vidimo da vektori $\mathbf{P}^3$ i $\mathbf{P}^5$ sastavljaju bazu odgovarajućeg dvodimenzionalnog vektorskog prostora V^2. Kako je dopunski vektor P^3 istovremeno i vektor te baze, to u prvoj nejednadžbi pored dopunske varijable nije trebalo uvoditi još i umjetnu. Pet brojeva (0, 0, 8, 0, 4) zadovoljava sve uvjete linearnog programa; njima odgovara vrijednost funkcije cilja $4M + 8$.

Vježbe

1. Uzmi problem smjese koji smo obrađivali i grafički riješili u točki 8. II. poglavlja.

a) Izrazi problem u vektorskom i u matričnom obliku.

b) Uvedi dopunske i umjetne varijable te izrazi tako upotpunjeni problem u vektorskom i matričnom obliku.

c) Sastavi odgovarajuću tabelu.

d) Odredi tabeli odgovarajuću bazu vektorskog prostora.

2. Uzmi proizvodni problem koji smo obrađivali i grafički riješili u točki 9. II. poglavlja.

a) Izrazi problem u vektorskom i matričnom obliku.

b) Uvedi dopunske varijable i izrazi tako nadopunjeni problem u vektorskom i matričnom obliku.

c) Sastavi odgovarajuću tabelu.

d) Odredi tabeli odgovarajuću bazu vektorskog prostora.

e) Protumači zašto u ovom primjeru ne treba uvoditi umjetne varijable.

IX. MOGUĆA RJEŠENJA LINEARNOG PROGRAMA

1. Tipovi mogućih rješenja

U skladu s formulacijama prijašnjeg poglavlja uzmimo problem linearnog programiranja za minimum funkcije cilja, koji nakon uvođenja dopunskih i umjetnih varijabla napišemo ovako:

$$\text{LP:}\quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{O},\quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b};\quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$$

Linearnom programu odgovaraju matrice i vektori:

$$\mathbf{A} = \left\|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{matrix}\right\| = \|\,\mathbf{P}^1 \dots \mathbf{P}^n\,\|$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{P}^0 = \left\|\begin{matrix} b^1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right\| \quad \mathbf{P}^1 = \left\|\begin{matrix} a^{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}\right\| \quad \dots\ \mathbf{P}^n = \left\|\begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}\right\|$$

$$\mathbf{x} = \left\|\begin{matrix} x^1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right\| = \{x_1, \dots, x_n\} \qquad \mathbf{c} = \|\,c_1 \dots c_n\,\| = (c_1, \dots, c_n)$$

Vektori $\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^n$ su vektori m-dimenzionalnog vektorskog prostora V^m; među njima su posljednji vektori $\mathbf{P}^{s+m+1}, \dots, \mathbf{P}^n$ jedinični vektori i sastavljaju bazu toga vektorskog prostora. Pomoću ovih vektora baze možemo linearno izraziti sve vektore ovoga prostora; gore navedene vektore izrazimo ovako:

$$\mathbf{P}^0 = b_1\,\mathbf{P}^{s+m+1} + \dots + b_m\,\mathbf{P}^n$$

$$\mathbf{P}^j = a_{1j}\,\mathbf{P}^{s+m+1} + \dots + a_{mj}\,\mathbf{P}^n \qquad (j = 1, \dots, n)$$

Vektor $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ je *moguće rješenje* linearnog programa ako odgovara uvjetu nenegativnosti i uvjetnoj jednadžbi $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, bez obzira na vrijednost koju ima funkcija cilja. Kako u linearnom programu nastupa n varijabla, to svako moguće rješenje ima po n komponenata. Uvjetna matrična jednadžba $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dijeli se na m običnih linearnih jednadžbi; za ove jednadžbe tražimo da su neprotuslovne i nezavisne. Broj ovih nezavisnih jednadžbi u teoriji linearnog programiranja ima osobito značajnu ulogu.

Svako moguće rješenje ima po n komponenata; kako smo dodali m dopunskih i m umjetnih varijabla, to je ukupni broj $n = s + 2m$ komponenata veći od broja m nezavisnih uvjetnih jednadžbi. Neke od ovih komponenata mogućeg rješenja mogu biti i jednake 0, dok neke od njih mogu biti pozitivne. S obzirom na broj pozitivnih komponenata razlučujemo slijedeća moguća rješenja:

Moguće rješenje je *nebazično* ako ima više od m pozitivnih komponenata, i *bazično* ako nema više od m pozitivnih komponenata. Bazično moguće rješenje je *nedegenerirano* ako ima točno m pozitivnih komponenata, a *degenerirano* ako ima manje od m pozitivnih komponenata.

Moguće rješenje x je *optimalno* ako odgovara uvjetu nenegativnosti i uvjetnoj jednadžbi $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i ako funkcija cilja ima minimum. Kao u drugim mogućim rješenjima tako i u optimalnim mogućim rješenjima razlučujemo nebazična, bazična, nedegenerirana i degenerirana optimalna moguća rješenja.

Moguće rješenje $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je točka ili vektor n-dimenzionalnog vektorskog prostora V^n. Kao što smo vidjeli već u prethodnom poglavlju, uvjet nenegativnosti određuje n poluprostora, dok uvjetna jednadžba $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ određuje m hiperravnina ovoga vektorskog prostora; u tom prostoru funkciji cilja odgovara jednoparametarska familija hiperravnina. Na tom se geometrijskom prikazu temelje poznate grafičke metode za rješavanje linearnih programa. Te su metode međutim praktički upotrebljive samo u linearnim programima s dvije varijable; u takvim primjerima možemo konstruirati optimalno moguće rješenje u odgovarajućem dvodimenzionalnom kartezijskom koordinatnom sistemu.

2. Osobine mogućih rješenja

Moguća rješenja linearnog programa odlikuju se nekim posebnim osobinama koje omogućuju povezivanje linearnog programiranja s teorijom konveksnih poliedara. Za moguća rješenja vrijede izreke:

1. izreka. Skup K *svih mogućih rješenja linearnog programa je konveksan.*

Izreku dokazujemo tako da dokažemo slijedeću, njoj ekvivalentnu, izreku: Ako su $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ moguća rješenja, onda je moguće rješenje linearnog programa i svaki njihov konveksni linearni sastav:

$$\mathbf{x} = q\mathbf{x}^1 + (1 - q)\,\mathbf{x}^2 \quad (0 \leqq q \leqq 1)$$

Kako su $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ moguća rješenja, to odgovaraju uvjetu nenegativnosti; stoga ovom uvjetu odgovara i svaki njihov konveksni linearni sastav jer su oba koeficijenta q i $1 - q$ linearnog sastava nenegativna. Kako su $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ moguća rješenja, to odgovaraju i uvjetnoj jednadžbi:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}^1 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x}^2 = \mathbf{b}$$

Iz toga za njihov konveksni linearni sastav slijedi:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\,(q\mathbf{x}^1 + (1 - q)\mathbf{x}^2) = q\,\mathbf{A}\mathbf{x}^1 + (1 - q)\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}^2 =$$
$$= q\mathbf{b} + (1 - q)\,\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Stoga konveksni linearni sastav odgovara i uvjetnoj jednadžbi. Konveksni linearni sastav odgovara uvjetu nenegativnosti i uvjetnoj jednadžbi, pa je zato moguće rješenje linearnog programa, a to je trebalo dokazati.

Konveksni skup K svih mogućih rješenja linearnog programa je prema geometrijskom prikazu u prijašnjem poglavlju presjek n poluprostora i m hiperravnina vektorskog prostora V^n. S obzirom na te skupove razlikujemo tri različite mogućnosti.

a) K je prazan skup. U tom primjeru linearni program nema mogućeg rješenja; to bi značilo da uvjetne jednadžbe sastavljaju sistem protuslovnih jednadžbi. Ta mogućnost ne dolazi u obzir jer smo već na početku postavili zahtjev da uvjetne jednadžbe sastavljaju sistem m neprotuslovnih jednadžbi.

b) K je neograničen skup. U tom primjeru možemo po volji povećavati apsolutnu vrijednost namjenske funkcije. Kod praktički značajnih problema linearnog programiranja ta mogućnost iz ekonomskih razloga nema pravog smisla. Stoga tu mogućnost u daljnjem ne uzimamo u obzir.

c) K je neprazan i ograničen konveksni skup. U praktički značajnim problemima linearnog programiranja susrećemo se s tom mogućnošću, pa ćemo stoga nadalje samo nju uzimati u obzir. Pretpostavimo da je konveksni skup K svih mogućih rješenja linearnog programa neprazan i ograničen. Kako je taj skup presjek n poluprostora i m hiperravnina, to ga ograničuje neki konačni broj hiperravnina; stoga je taj skup *konveksni poliedar* koji ima samo konačno mnogo ekstremnih točaka.

Uzmimo da konveksni poliedar K mogućih rješenja linearnog programa ima ekstremne točke:

$$\mathbf{E}^1, \ldots, \mathbf{E}^t$$

Iz teorije konveksnih poliedara znamo da svaku točku $\mathbf{x}$ toga poliedra možemo izraziti kao konveksni linearni sastav njegovih ekstremnih točaka:

$$\mathbf{x} = q_1 \mathbf{E}^1 + \ldots + q_t \mathbf{E}^t \quad (0 \leqq q_i \leqq 1;\ i = 1, \ldots, t;\ q_1 + \ldots + q_t = 1)$$

Među mogućim rješenjima linearnog programa koja sastavljaju konveksni poliedar K značajna su osobito ona koja odgovraju nekoj ekstremnoj točki toga poliedra.

2. *izreka. Među ekstremnim točkama konveksnog poliedra K mogućih rješenja linearnog programa egzistira barem jedna u kojoj funkcija cilja ima minimum.*

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija cilja $f(\mathbf{x})$ ima minimum m u nekoj točki $\mathbf{x}^0$; stoga sve točke $\mathbf{x}$ poliedra K odgovaraju nejednadžbi:

$$m = f(\mathbf{x}^0) \leqq f(\mathbf{x})$$

Moramo dokazati da je $\mathbf{x}^0$ jedna od ekstremnih točaka poliedra K. Kako svaku točku poliedra možemo izraziti kao konveksni linearni sastav njegovih ekstremnih točaka, to točku $\mathbf{x}^0$ izrazimo ovako:

$$\mathbf{x}^0 = p_1 \mathbf{E}^1 + \ldots + p_t \mathbf{E}^t \quad (0 \leqq p_k \leqq 1;\ k = 1, \ldots, t;\ p_1 + \ldots + p_t = 1)$$

Zbog aditivnosti linearne funkcije cilja dobivamo:

$$m = f(\mathbf{x}^0) = f(p_1 \mathbf{E}^1 + \ldots + p_t \mathbf{E}^t) = p_1 f(\mathbf{E}^1) + \ldots + p_t f(\mathbf{E}^t)$$

Ako u posljednjem izrazu članove $f(\mathbf{E}^k)$ nadomjestimo onim članom koji ima najmanju vrijednost — uzmimo da najmanju vrijednost ima član $f(\mathbf{E}^w)$ — dobivamo:

$$m = f(\mathbf{x}^0) \geqq (p_1 + \dots + p_t) f(\mathbf{E}^W) = f(\mathbf{E}^W)$$

Iz toga dobivamo nejednadžbu $f(\mathbf{x}^0) \geqq f(\mathbf{E}^w)$. Na početku dokaza imali smo pak nejednadžbu $f(\mathbf{x}^0) \leqq f(\mathbf{x})$. Iz tih dviju nejednadžbi slijedi jednadžba $f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{E}^W)$; zbog toga egzistira barem jedna ekstremna točka $\mathbf{E}^W$ konveksnog poliedra K u kojoj funkcija cilja ima minimum, pa je izreka dokazana.

Iz dokazane izreke slijedi da od mogućih rješenja linearnog programa možemo uzeti u obzir samo ona koja odgovaraju ekstremnim točkama poliedra mogućih rješenja, jer funkcija cilja ima minimum u nekoj od tih točaka. Ako funkcija cilja ima minimum samo u jednoj točki poliedra, onda je ta točka neka njegova ekstremna točka. Ako međutim funkcija cilja ima minimum u više točaka poliedra, onda ima minimum u više ekstremnih točaka, pa i u nekim neekstremnim točkama.

3. *izreka. Ako funkcija cilja ima minimum u više ekstremnih točaka konveksnog poliedra K, onda ima minimum i u svim točkama poliedra koje su konveksni linearni sastavi tih ekstremnih točaka.*

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija cilja $f(\mathbf{x})$ ima minimum m u ekstremnim točkama $\mathbf{E}^1, \dots, \mathbf{E}^h$ poliedra K tako da važe jednadžbe:

$$m = f(\mathbf{E}^1) = \dots = f(\mathbf{E}^h)$$

Točka $\mathbf{y}$ neka bude proizvoljni konveksni linearni sastav tih ekstremnih točaka:

$$\mathbf{y} = q_1 \mathbf{E}^1 + \dots + q_h \mathbf{E}^h \quad (0 \leqq q_k \leqq 1;\ k = 1, \dots, h;\ q_1 + \dots + q_h = 1)$$

Točki $\mathbf{y}$ odgovara slijedeća vrijednost funkcije cilja:

$$f(\mathbf{y}) = f(q_1 \mathbf{E}^1 + \dots + q_h \mathbf{E}^h) = q_1 f(\mathbf{E}^1) + \dots + q_h f(\mathbf{E}^h) =$$
$$= (q_1 + \dots + q_h) m = m$$

To znači da funkcija cilja ima minimum m i u točki $\mathbf{y}$, pa je izreka dokazana.

3. Bazična moguća rješenja

U skladu s formulacijama prijašnjeg poglavlja uzmimo problem linearnog programiranja u vektorskom obliku: Treba odrediti nenegativne vrijednosti varijabla $x_1, \dots, x_n$ koje odgovaraju vektorskoj jednadžbi:

$$x_1 \mathbf{P}^1 + \dots + x_n \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^0$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

ima minimum.

Vektori $\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^n$ vektori su m-dimenzionalnog vektorskog prostora V^m. Među njima je najviše po m linearno nezavisnih, a svaka skupina po više od m vektora sastavlja sistem linearno zavisnih vektora. Svaka skupina po m linearno nezavisnih vektora baza je toga vektorskog prostora. Pomoću vektora baze možemo na jednoličan način linearno izraziti sve druge vektore toga vektorskog prostora.

Uzmimo neko bazično moguće rješenje linearnog programa; ono ima najviše m pozitivnih komponenata. Odgovarajućom numeracijom i premještanjem varijabla možemo linearni program tako preurediti, da u bazičnom mogućem rješenju dolaze na prva mjesta pozitivne komponente, a iza njih na posljednja mjesta same nule. Kod tako preuređenog linearnog programa odabrano bazično moguće rješenje napišemo ovako:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0\} \qquad (k \leqq m)$$

Za bazična moguća rješenja vrijede izreke:

1. izreka. Ako egzistira $k \leqq m$ *linearno nezavisnih vetktora* $\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^k$, *tako da važi vektorska jednadžba:*

$$x_1 \mathbf{P}^1 + \dots + x_k \mathbf{P}^k = \mathbf{P}^0,$$

onda je odgovarajuće bazično moguće rješenje:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0\}$$

ekstremna točka konveksnog poliedra mogućih rješenja.

Dokaz. Uzmimo suprotnu pretpostavku da moguće rješenje $\mathbf{x}$ nije ekstremna točka konveksnog poliedra K. Ako bi bilo tako, onda bismo točku $\mathbf{x}$ mogli izraziti kao konveksni linearni sastav barem dviju drugih točaka $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ poliedra ovako:

$$\mathbf{x} = q\mathbf{x}^1 + (1 - q)\,\mathbf{x}^2 \qquad (0 < q < 1)$$

Budući da su sve komponente $x_1, \dots, x_k$ kao i oba koeficijenta q i $1-q$ pozitivni brojevi, to točke $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ imaju strukturu:

$$\mathbf{x}^1 = \{x_1^1, \dots, x_k^1, 0, \dots, 0\}$$

$$\mathbf{x}^2 = \{x_1^2, \dots, x_k^2, 0, \dots, 0\}$$

Kako su točke $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ moguća rješenja linearnog programa, to odgovaraju jednadžbama:

$$x_1^1 \mathbf{P}^1 + \dots + x_k^1 \mathbf{P}^k = \mathbf{P}^0$$

$$x_1^2 \mathbf{P}^1 + \dots + x_k^2 \mathbf{P}^k = \mathbf{P}^0$$

Budući da su vektori $\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^k$ linearno nezavisni, to se njima vektor $\mathbf{P}^0$ može linearno izraziti samo na jedan način; stoga važe za sve komponente jednadžbe:

$$x_i^1 = x_i^2 \qquad (i = 1, \dots, k)$$

pa tako i jednadžba $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2$. Bazično moguće rješenje $\mathbf{x}$ ne možemo dakle izraziti kao konveksni linearni sastav nekih drugih mogućih rješenja, pa je zbog toga ekstremna točka poliedra K, što je i trebalo dokazati. Vidjet ćemo dalje da vrijedi i obrnuta izreka.

2. *izreka. Vektori* $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^k$ $(k \leqq m)$ *koji odgovaraju nekom baznom mogućem rješenju ili nekoj ekstremnoj točki konveksnog poliedra* K *linearno su nezavisni.*

Dokaz. Uzmimo bazično moguće rješenje:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0\} \qquad (k \leqq m)$$

Ovom rješenju odgovaraju vektori $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^k$ tako da važi vektorska jednadžba:

$$x_1 \mathbf{P}^1 + \ldots + x_k \mathbf{P}^k = \mathbf{P}^0$$

Treba dokazati da su ovi vektori linearno nezavisni. Kad bi ovi vektori bili linearno zavisni, onda bi važila vektorska jednadžba:

$$a_1 \mathbf{P}^1 + \ldots + a_k \mathbf{P}^k = \mathbf{0},$$

u kojoj međutim ne bi svi koeficijenti linearnog sastava na lijevoj strani bili jednaki 0. Uzmimo neki pozitivni broj a i s njime pomnožimo posljednju jednadžbu. Ako tako pomnoženu jednadžbu pribrojimo pretposljednjoj, dobivamo jednadžbu:

$$(x_1 + aa_1)\mathbf{P}^1 + \ldots + (x_k + aa_k)\mathbf{P}^k = \mathbf{P}^0$$

ako ju pak odbijemo, dobivamo jednadžbu:

$$(x_1 - aa_1)\mathbf{P}^1 + \ldots + (x_k - aa_k)\mathbf{P}^k = \mathbf{P}^0$$

Tako prvobitna vektorska jednadžba ima dva rješenja:

$$\mathbf{x}^1 = \{x_1 + aa_1, \ldots, x_k + aa_k, 0, \ldots, 0\}$$

$$\mathbf{x}^2 = \{x_1 - aa_1, \ldots, x_k - aa_k, 0, \ldots, 0\}$$

Ova dva rješenja općenito nisu i rješenja linearnog programa jer njihove komponente mogu biti i negativne. Kako su brojevi $x_1 \ldots, x_k$ pozitivni, to uvijek možemo broj a odabrati tako malen, da će sve prve komponente vektora $\mathbf{x}^1$ i $\mathbf{x}^2$ biti pozitivne te da ova dva vektora postaju moguća rješenja linearnog programa. Ova dva moguća rješenja su različita jer nisu svi koeficijenti a_i $(i = 1, \ldots, k)$ jednaki 0. Oba su rješenja bazična. S ova dva bazična rješenja možemo prvobitno bazično rješenje izraziti ovako:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^1}{2} + \frac{\mathbf{x}^2}{2}$$

To je protuslovlje jer je $\mathbf{x}$ ekstremna točka konveksnog poliedra pa ne može biti neki konveksni linearni sastav nekih njegovih točaka. Stoga su vektori $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^k$ linearno nezavisni, što je trebalo i dokazati.

Kako među vektorima $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^n$ ima najviše po m međusobno linearno nezavisnih, to zbog gore dokazane izreke svakom bazičnom mogućem rješenju ili svakoj ekstremnoj točki konveksnog poliedra K odgovara najviše po m linearno nezavisnih vektora. Ako je $k = m$, to odgovara točno m linearno nezavisnih vektora koji sastavljaju bazu vektorskog prostora. Ako je međutim $k < m$, to bazičnom mogućem rješenju ili ekstremnoj točki konveksnog poliedra K odgovara k linearno nezavisnih vektora $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^k$ koji međutim još ne sastavljaju bazu vektorskog prostora; u tom primjeru možemo sistem ovih vektora upotpuniti dodatnim vektorima $\mathbf{P}^{k+1}, \ldots, \mathbf{P}^m$ tako da svi vektori zajedno sastavljaju bazu vektorskog prostora. Taj prošireni sistem vektora:

$$\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^k, \mathbf{P}^{k+1}, \ldots, \mathbf{P}^m$$

odgovara zadanom baziénom mogućem rješenju problema linearnog programiranja. Tako dobivamo još jednu izreku.

3. *izreka. Svakom baziénom mogućem rješenju linearnog programa ili svakoj ekstremnoj točki konveksnog poliedra mogućih rješenja možemo među vektorima* $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^n$ *prirediti točno po m linearno nezavisnih vektora koji sastavljaju bazu vektorskog prostora* V^m.

4. Osjetljivost optimalnog mogućeg rješenja linearnog programa na promjene koeficijenata u funkciji cilja

U skladu s formulacijama u prijašnjem poglavlju uzmimo problem linearnog programiranja za minimum funkcije cilja, koji nakon uvođenja dopunskih i umjetnih varijabla napišemo u matričnom obliku ovako:

$$\text{LP:} \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$$

Moguća rješenja linearnog programa su točke $\mathbf{x}$ n-dimenzionalnog vektorskog prostora V^n i sastavljaju konveksni poliedar K s ekstremnim točkama:

$$\mathbf{E}^1, \ldots, \mathbf{E}^t$$

Optimalno moguće rješenje linearnog programa ovisno je o komponentama matrice **A**, vektora **b** i vektora **c**. Nadalje nas interesira kako je optimalno moguće rješenje linearnog programa ovisno o vektoru **c** ili koeficijentima u funkciji cilja.

Koeficijenti $c_1, \ldots c_n$ u funkciji cilja su komponente vektora **c** n-dimenzionalnog vektorskog prostora C^n. Za svaki vektor ovoga vektorskog prostora ili za svaku funkciju cilja dobivamo poseban linearni program i, ako ga riješimo, njegovo optimalno moguće rješenje. U svakom je primjeru optimalno moguće rješenje linearnog programa neka ekstremna točka ili neki konveksni linearni sastav ekstremnih točaka konveksnog poliedra mogućih rješenja K.

Nakon izbora određenog vektora $\mathbf{c}^k$ vektorskog prostora C^n ili nakon izbora odgovarajuće funkcije cilja, dobivamo linearni program za minimum funkcije cilja:

$$\text{LP:} \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^k\,\mathbf{x}$$

Taj linearni program treba imati optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}^h$ konveksnog poliedra K.

Ako je za neki vektor $\mathbf{c}^k$ optimalno moguće rješenje odgovarajućeg linearnog programa ekstremna točka $\mathbf{E}^h$, kažemo da vektor $\mathbf{c}^k$ gravitira prema ekstremnoj točki $\mathbf{E}^h$ ili da vektor $\mathbf{c}^k$ leži u *gravitacionom polju* ekstremne točke $\mathbf{E}^h$. Kod takvog značenja riječi gravitirati definiramo gravitaciono polje ekstremne točke $\mathbf{E}^h$ ovako:

Gravitaciono polje $G(\mathbf{E}^h)$ *ekstremne točke* $\mathbf{E}^h$ *konveksnog poliedra* K *skup je svih onih vektora* $\mathbf{c}$ *vektorskog prostora* C^n *za koje odgovarajući linearni program:*

$$\text{LP}: \ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}^h$.

Za svaki vektor $\mathbf{c}$ vektorskog prostora C^n ili za svaku funkciju cilja dobivamo odgovarajući linearni program i, ako ga riješimo, optimalno moguće rješenje u nekoj ekstremnoj točki konveksnog poliedra K. Zbog toga svaki vektor $\mathbf{c}$ spada u gravitaciono polje barem jedne ekstremne točke toga poliedra. Kako su točke:

$$\mathbf{E}^1, \ldots, \mathbf{E}^t$$

sve ekstremne točke konveksnog poliedra K i kako njima odgovaraju uzastopno gravitaciona polja:

$$G(\mathbf{E}^1), \ldots, G(\mathbf{E}^t),$$

to je vektorski prostor C^n suma tih gravitacionih polja. Pri tom nije isključena mogućnost da je neko gravitaciono polje prazan skup; to bi značilo da odgovarajuća ekstremna točka ne može biti optimalno moguće rješenje linearnog programa ni kod jedne funkcije cilja. Za gravitaciona polja ekstremnih točaka konveksnog poliedra K dokazat ćemo u nastavku nekoliko izreka.

1. izreka. Ako vektor $\mathbf{c}$ *spada u gravitaciono polje* $G(\mathbf{E})$ *ekstremne točke* $\mathbf{E}$, *spada u to polje i zraka* $k\,\mathbf{c}$; tu je $k \geqq 0$. To znači da je gravitaciono polje stožac s vrhom u koordinatnom ishodištu.

Dokaz. U gravitaciono polje $G(\mathbf{E})$ spadaju svi oni vektori $\mathbf{c}$ za koje linearni program:

$$\text{LP}: \ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x} \tag{1}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}$; u toj točki funkcija cilja ima najmanju vrijednost $f(\mathbf{E}) = \mathbf{c}\,\mathbf{E}$. Moramo dokazati da i linearni program:

$$\text{LP}: \ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad f(\mathbf{x}) = (k\mathbf{c})\,\mathbf{x} \tag{2}$$

ima optimalno moguće rješenje u istoj ekstremnoj točki $\mathbf{E}$; u toj točki funkcija cilja ima vrijednost $f(\mathbf{E}) = (k\mathbf{c})\mathbf{E}$. Pretpostavimo da linearni program (2) ima neko bolje optimalno moguće rješenje $\mathbf{z}$ za koje funkcija cilja ima neku manju vrijednost. U tom bi primjeru važila nejednadžba:

$$(k\mathbf{c})\mathbf{z} < (k\mathbf{c})\mathbf{E}$$

a stoga i nejednadžba:

$$\mathbf{c}\,\mathbf{z} < \mathbf{c}\,\mathbf{E}$$

To je međutim protuslovlje jer je $\mathbf{c}\,\mathbf{E}$ najmanja vrijednost funkcije cilja kod linearnog programa (1). Stoga ima i linearni program (2) optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}$, pa je izreka dokazana.

2. *izreka. Svako gravitaciono polje konveksni je skup.* To znači, ako uzmemo u obzir još i prijašnju izreku, da je svako gravitaciono polje konveksan stožac s vrhom u koordinatnom ishodištu.

Dokaz. Izreku dokažemo tako da dokažemo slijedeću ekvivalentnu izreku: Ako vektori $\mathbf{c}^1$ i $\mathbf{c}^2$ spadaju u gravitaciono polje G($\mathbf{E}$) ekstremne točke $\mathbf{E}$, u to polje spada i svaki njihov konveksni linearni sastav:

$$\mathbf{c} = p\mathbf{c}^1 + (1 - p)\,\mathbf{c}^2 \quad (0 \leqq p \leqq 1)$$

Činjenica da $\mathbf{c}^1$ spada u gravitaciono polje G($\mathbf{E}$), znači da linearni program:

$$\text{LP: } \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^1\,\mathbf{x} \tag{1}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}$; u toj točki funkcija cilja ima najmanju vrijednost $f(\mathbf{E}) = \mathbf{c}^1\mathbf{E}$. Činjenica da $\mathbf{c}^2$ spada u gravitaciono polje G($\mathbf{E}$), znači da linearni program:

$$\text{LP: } \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^2\,\mathbf{x} \tag{2}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točci $\mathbf{E}$: u toj točki funkcija cilja ima najmanju vrijednost $f(\mathbf{E}) = \mathbf{c}^2\mathbf{E}$. Činjenica da konveksni linearni sastav $\mathbf{c} = p\mathbf{c}^1 + (1 - p)\,\mathbf{c}^2$ spada u gravitaciono polje G($\mathbf{E}$), znači da linearni program:

$$\text{LP: } \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad f(\mathbf{x}) = (p\mathbf{c}^1 + (1 - p)\,\mathbf{c}^2)\,\mathbf{x} \tag{3}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}$; u toj točki funkcija cilja ima najmanju vrijednost $f(\mathbf{E}) = (p\mathbf{c}^1 + (1 - p)\mathbf{c}^2)\,\mathbf{E}$.

Pretpostavimo da bi linearni program (3) imao neko bolje optimalno moguće rješenje $\mathbf{z}$ za koje bi funkcija cilja imala neku manju vrijednost; u tom bi primjeru važila nejednadžba:

$$(p\mathbf{c}^1 + (1 - p)\,\mathbf{c}^2)\,\mathbf{z} < (p\mathbf{c}^1 + (1 - p)\,\mathbf{c}^2)\,\mathbf{E}$$

ili nejednadžba:

$$p\mathbf{c}^1\,\mathbf{z} + (1 - p)\,\mathbf{c}^2\,\mathbf{z} < p\mathbf{c}^1\,\mathbf{E} + (1 - p)\,\mathbf{c}^2\,\mathbf{E}$$

Ova bi nejednadžba mogla biti ispunjena samo onda kad bi važila barem jedna od nejednadžbi:

$$\mathbf{c}^1\,\mathbf{z} < \mathbf{c}^1\,\mathbf{E} \quad \text{ili} \quad \mathbf{c}^2\,\mathbf{z} < \mathbf{c}^2\,\mathbf{E}$$

To međutim nije moguće jer je $\mathbf{E}$ optimalno moguće rješenje i linearnog programa (1) kao i linearnog programa (2). Stoga linearni program (3) ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točci $\mathbf{E}$, a to je trebalo dokazati.

3. *izreka. Dva gravitaciona polja mogu imati zajedničke samo granične točke, a u ostalom se ne pokrivaju.*

Dokaz. Izreku dokažemo za gravitaciona polja G ($\mathbf{E}^i$) i G ($\mathbf{E}^j$) dviju proizvoljnih ekstremnih točaka $\mathbf{E}^i$ i $\mathbf{E}^j$. Dokažemo tako da dokažemo ekvivalentnu izreku: Ako $\mathbf{c}^1$ spada u gravitaciono polje G($\mathbf{E}^i$) i $\mathbf{c}^2$ u gravitaciono polje G($\mathbf{E}^j$), onda na pravcu kroz $\mathbf{c}^1$ i $\mathbf{c}^2$ egzistira najviše jedna točka $\mathbf{c}$ tako da spada u oba gravitaciona polja. To znači da među konveksnim linearnim sastavima:

$$\mathbf{c} = p\mathbf{c}^1 + (1 - p)\,\mathbf{c}^2 \qquad (0 \leqq p \leqq 1)$$

egzistira najviše jedan takav sastav koji spada u oba gravitaciona polja.

Činjenica da $\mathbf{c}^1$ spada u gravitaciono polje $G(\mathbf{E}^i)$, znači da linearni program:

$$\mathrm{LP}:\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b};\quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^1\mathbf{x} \tag{1}$$

ima optimalno moguće rješenje u točki $\mathbf{E}^i$; u njoj funkcija cilja ima najmanju vrijednost $\mathbf{c}^1\,\mathbf{E}^i$. Činjenica da $\mathbf{c}^2$ spada u gravitaciono polje $G\,(\mathbf{E}^j)$, znači da linearni program:

$$\mathrm{LP}:\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b};\quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^2\mathbf{x} \tag{2}$$

ima optimalno moguće rješenje u točki $\mathbf{E}^j$; u njoj funkcija cilja ima najmanju vrijednost $\mathbf{c}^2\,\mathbf{E}^j$.

Uzmimo gore navedeni konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{c}^1$ i $\mathbf{c}^2$; treba dokazati da egzistira najviše jedan vektor $\mathbf{c}$ ili najviše jedan koeficijent p linearnog sastava tako da sastav spada u oba gravitaciona polja.

Činjenica da $\mathbf{c}$ spada u gravitaciono polje $G(\mathbf{E}^i)$, znači da linearni program:

$$\mathrm{LP}:\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b};\quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x} \tag{3}$$

ima optimalno moguće rješenje u točki $\mathbf{E}^i$; u njoj funkcija cilja ima najmanju vrijednost $\mathbf{c}\mathbf{E}^i$. Činjenica da $\mathbf{c}$ spada u gravitaciono polje $G(\mathbf{E}^j)$, znači da taj linearni program (3) ima optimalno moguće rješenje u točki $\mathbf{E}^j$; u njoj funkcija cilja ima najmanju vrijednost $\mathbf{c}\mathbf{E}^j$.

Ako $\mathbf{c}$ spada u oba gravitaciona polja, linearni program (3) ima optimalno moguće rješenje u točki $\mathbf{E}^i$ i u točki $\mathbf{E}^j$; u tom su primjeru odgovarajuće najmanje vrijednosti funkcije cilja jednake. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\mathbf{c}\,\mathbf{E}^i = \mathbf{c}\,\mathbf{E}^j$$

i, ako u nju uvrstimo gornji linearni izraz za $\mathbf{c}$, jednadžbu:

$$(\mathrm{p}\mathbf{c}^1 + (1 - \mathrm{p})\,\mathbf{c}^2)\,\mathbf{E}^i = (\mathrm{p}\mathbf{c}^1 + (1 - \mathrm{p})\,\mathbf{c}^2)\,\mathbf{E}^j$$

Ova jednadžba obična je linearna jednadžba s nepoznanicom p i kako je linearna, ima samo jedno rješenje. Istovremeno nepoznanica p odgovara još i uvjetu

$$0 \leqq \mathrm{p} \leqq 1$$

Ako jednadžba kod ovog uvjeta nema rješenja, na pravcu kroz točke $\mathbf{c}^1$ i $\mathbf{c}^2$ nema nijedne točke koja bi bila zajednička za oba gravitaciona polja. Ako međutim jednadžba kod ovog uvjeta ima neko rješenje, onda ima samo jedno; u tom primjeru na pravcu kroz točke $\mathbf{c}^1$ i $\mathbf{c}^2$ egzistira samo jedna točka $\mathbf{c}$ koja spada u oba gravitaciona polja. Tako je izreka dokazana.

Iz dokazanih izreka slijedi da su gravitaciona polja pojedinih ekstremnih točaka konveksnog poliedra K konveksni stošci sa zajedničkim vrhom u koordinatnom ishodištu; ovi stošci nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka, ali mogu imati neke zajedničke granične točke. Pogledajmo skup točaka koji je zajednički za dva gravitaciona polja.

4. izreka. Ako točka $\mathbf{c}$ *leži na zajedničkoj granici dvaju gravitacionih polja, onda i zraka* k$\mathbf{c}$ (k $\geqq$ 0) *leži na zajedničkoj granici tih dvaju polja.* To znači da je zajednička granica dvaju gravitacionih polja stožac s vrhom u koordinatnom ishodištu.

Dokaz. Izreku dokažemo za gravitaciona polja $G(\mathbf{E}^i)$ i $G(\mathbf{E}^j)$ dviju proizvoljnih ekstremnih točaka $\mathbf{E}^i$ i $\mathbf{E}^j$. Gravitaciono polje $G(\mathbf{E}^i)$ je konveksni stožac; ako u njega spada $\mathbf{c}$, onda u njega spada i zraka $k\mathbf{c}$. Također je i gravitaciono polje $G(\mathbf{E}^j)$ konveksni stožac; ako u njega spada $\mathbf{c}$, onda u njega spada i zraka $k\mathbf{c}$. Ako dakle $\mathbf{c}$ spada u oba gravitaciona polja, onda u njih spada i čitava zraka $k\mathbf{c}$, pa je izreka tako dokazana.

5. *izreka*. *Skup točaka na zajedničkoj granici dvaju gravitacionih polja je konveksan.* To znači, ako uzmemo u obzir još i prijašnju izreku, da je zajednička granica dvaju gravitacionih polja konveksan stožac s vrhom u koordinatnom ishodištu.

Dokaz. Izreku dokažemo tako da za dva proizvoljna gravitaciona polja dokažemo slijedeću ekvivalentnu izreku: Ako su točke $\mathbf{c}^1$ i $\mathbf{c}^2$ na zajedničkoj granici gravitacionih polja $G(\mathbf{E}^i)$ i $G(\mathbf{E}^j)$ dviju proizvoljnih ekstremnih točaka $\mathbf{E}^i$ i $\mathbf{E}^j$, onda je na toj zajedničkoj granici i svaki njihov konveksni linearni sastav:

$$\mathbf{c} = p\mathbf{c}^1 + (1 - p)\,\mathbf{c}^2 \quad (0 \leqq p \leqq 1)$$

Ako $\mathbf{c}^1$ leži na zajedničkoj granici obaju gravitacionih polja, onda spada u polje $G(\mathbf{E}^i)$ i u polje $G(\mathbf{E}^j)$. Slično vrijedi i za točku $\mathbf{c}^2$. Ako $\mathbf{c}^2$ leži na zajedničkoj granici obaju gravitacionih polja, onda spada u polje $G(\mathbf{E}^i)$ i u polje $G(\mathbf{E}^j)$. Polje $G(\mathbf{E}^i)$ je konveksno; kako u njega spadaju $\mathbf{c}^1$ i $\mathbf{c}^2$, to u njega spada i svaki njihov konveksni linearni sastav. Polje $G(\mathbf{E}^j)$ također je konveksno; kako u njega spadaju $\mathbf{c}^1$ i $\mathbf{c}^2$, to spada u njega i svaki njihov konveksni linearni sastav. Budući da točke $\mathbf{c}^1$ i $\mathbf{c}^2$ spadaju u oba gravitaciona polja, to u njih spada i svaki njihov konveksni linearni sastav, pa je izreka dokazana.

Rezimirajmo dobivene rezultate. Uvjeti u linearnom programu za minimum funkcije cilja

$$\text{LP:}\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$$

određuju konveksan poliedar mogućih rješenja K; on ima ekstremne točke:

$$\mathbf{E}^1, \ldots, \mathbf{E}^t$$

Ovim ekstremnim točkama odgovaraju gravitaciona polja:

$$G(\mathbf{E}^1), \ldots, G(\mathbf{E}^t)$$

Ova gravitaciona polja sastavljaju cjelovit n-dimenzionalni vektorski prostor C^n. Sva su gravitaciona polja konveksni stošci sa zajedničkim vrhom u koordinatnom ishodištu. Gravitaciona polja se međusobno ne pokrivaju i mogu imati po parovima zajedničke samo granične točke. Zajedničke granice po dva gravitaciona polja također su konveksni stošci sa zajedničkim vrhom u koordinatnom ishodištu.

Kad imamo na takav način podijeljen vektorski prostor C^n na gravitaciona polja ekstremnih točaka konveksnog poliedra K, možemo prosuđivati kako na optimalno moguće rješenje linearnog programa djeluju promjene koeficijenata u funkciji cilja. Ako se koeficijenti u funkciji cilja promijene samo toliko da odgovarajući vektor $\mathbf{c}$ ostane u istom gravitacionom polju, onda se optimalno moguće rješenje ne mijenja; stoga je optimalno moguće rješenje invarijantno za sve one promjene vektora $\mathbf{c}$ koje ga zadržavaju u istom gravitacionom polju. Optimalno moguće rješenje mijenja se tek onda kad vektor **c** dođe u neko drugo gravitaciono polje. Pri kontinuiranom mijenjanju vektora **c** optimalno moguće rješenje mijenja se samo na prijelazima s prvoga u drugo gravitaciono polje.

Osjetljivost optimalnog mogućeg rješenja linearnog programa na promjene koeficijenata u funkciji cilja proučili smo elementarnim metodama u proizvodnom problemu koji smo obrađivali i riješili u 9. točki II. poglavlja.

Primjer. Uzmimo slijedeći problem linearnog programiranja: Treba odrediti vrijednosti varijabla x i y koje odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq x \leqq 4$$
$$0 \leqq y \leqq 5$$
$$x + y \leqq 8$$
$$2x + y \geqq 4$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x, y) = c_1 x + c_2 y$$

ima minimum.

Tu su koeficijenti c_1 i c_2 u funkciji cilja proizvoljni realni brojevi. Linearni program s istim uvjetnim nejednadžbama obrađivali smo već u prvom primjeru 1. točke VIII. poglavlja.

Skup mogućih rješenja (x, y) linearnog programa prikazuju, kao što vidimo na slici 24, u ravninskom kartezijskom koordinatnom sistemu x0y točke iscrtkanog konveksnog šesterokuta s uglovima:

$$A\,(2, 0),\ B\,(4, 0),\ C\,(4, 4),\ D\,(3,5),\ E\,(0,5),\ F\,(0,4)$$

stranice BC i EF toga šesterokuta paralelne su s ordinatnom osi, stranice AB i DE paralelne su s apscisnom osi, stranica AF ima smjerni koeficijent -2, a stranica CD ima smjerni koeficijent -1.

Parove koeficijenata (c_1, c_2) u funkciji cilja prikazuju, kao što vidimo na sl. 25, točke na ravnini s kartezijskim koordinatnim sistemom $c_1 O c_2$. Za svaki par vrijednosti tih koeficijenata dobivamo poseban linearni program s odgovarajućom funkcijom cilja. Funkcija cilja ima smjerni koeficijent:

$$m = -\frac{c_1}{c_2}$$

Odredimo na toj ravnini gravitaciona polja uglova konveksnog šesterokuta.

I. Uzmimo najprije da je $c_1 \geqq 0$ i $c_2 \geqq 0$; u tom primjeru točka (c_1, c_2) leži u prvom kvadrantu koordinatnog sistema. Pravci koji odgovaraju funkciji cilja su padajući i paralelni s pravcem tipa I. na sl. 24. Manje vrijednosti funkcije cilja dobivamo ako pravac pomičemo paralelno u smjeru koji pokazuju strelice. Najmanju vrijednost funkcije cilja dobivamo u točki ili u točkama, ako ih ima više, u kojima pravac što se pomiče napušta šesterokut mogućih rješenja. S obzirom na smjerni koeficijent funkcije cilja za optimalno moguće rješenje linearnog programa postoje mogućnosti navedene u nastavku koje dobivamo usporedbom odgovarajućih smjernih koeficijenata. Optimalno moguće rješenje je:

a) u točkama stranice EF ako je $c_2 = 0$ ili ako točka (c_1, c_2) leži na polutraci p_{EF};

b) u točki F ako je $2c_2 < c_1$;

c) u točkama stranice AF ako je $2c_2 = c_1$ ili ako točka (c_1, c_2) leži na polutraci p_{AF};

d) u točki A, ako je $2c_2 > c_1$;

e) u točkama stranice AB ako je $c_1 = 0$ ili ako točka (c_1, c_2) leži na polutraci p_{AB}.

II. Pretpostavimo da je $c_1 \leqq 0$ i $c_2 \geqq 0$; u tom primjeru točka (c_1, c_2) leži u drugom kvadrantu koordinatnog sistema. Pravci što odgovaraju funkciji cilja su rastući i paralelni s pravcem tipa II. Manje vrijednosti funkcije cilja dobivamo ako pravac pomičemo paralelno u smjeru naznačenih strelica. Optimalno moguće rješenje linearnog programa je:

a) u točkama stranice AB ako je $c_1 = 0$ ili ako točka (c_1, c_2) leži na polutraci p_{AB};

b) u točki B za sve parove (c_1, c_2);

c) u točkama pravca BC ako je $c_2 = 0$, ili ako točka (c_1, c_2) leži na polutraci p_{BC}.

III. Uzmimo da je $c_1 \leqq 0$ i $c_2 \leqq 0$; u tom primjeru točka (c_1, c_2) leži u trećem kvadrantu koordinatnog sistema. Pravci što odgovaraju funkciji cilja su padajući i paralelni s pravcem tipa III. na sl. 24. Manje vrijednosti funkcije cilja dobivamo ako pravac pomičemo paralelno u smjeru naznačenih strelica. Optimalno moguće rješenje linearnog programa je:

a) u točkama stranice BC ako je $c_2 = 0$ ili ako točka (c_1, c_2) leži na polutraci p_{BC};

b) u točki C ako je $c_1 < c_2$;

c) u točkama stranice CD ako je $c_1 = c_2$ ili točka (c_1, c_2) leži na polutraci p_{CD};

d) u točki D ako je $c_1 > c_2$;

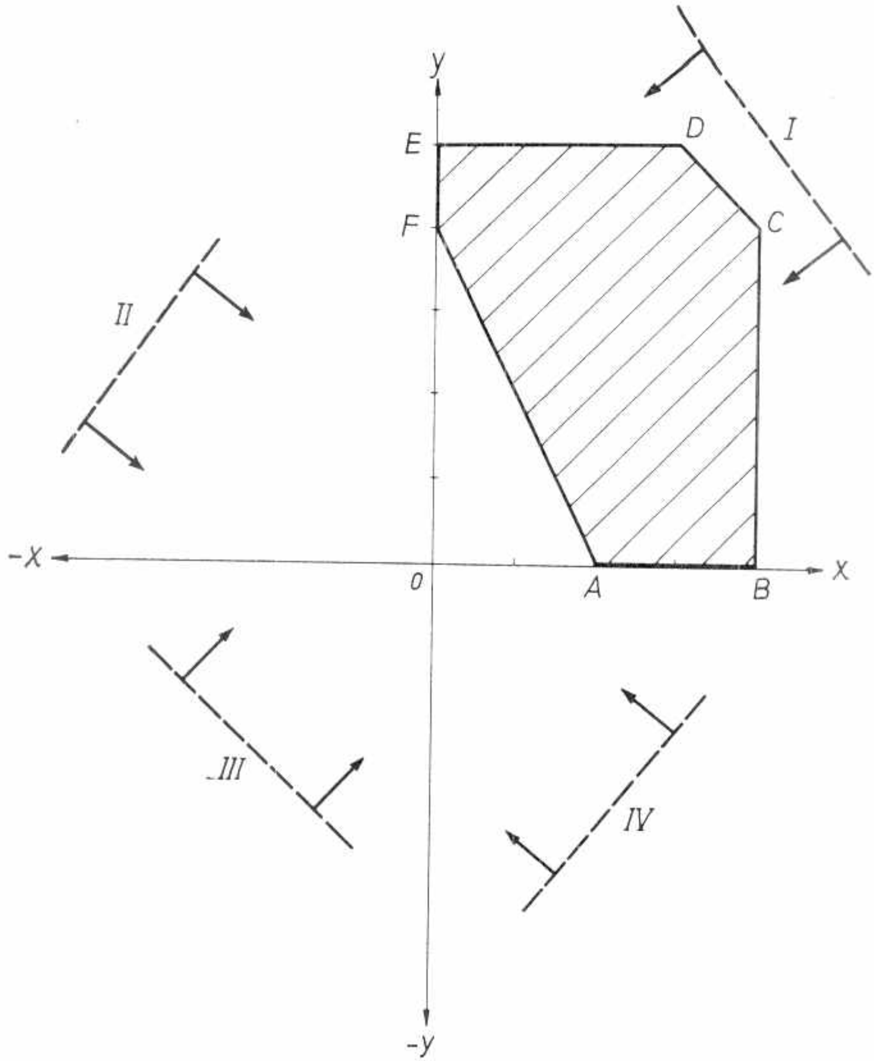
e) u točkama stranice DE ako je $c_1 = 0$ ili ako točka $(c_1\ c_2)$ leži na polutraci p_{DE}.

IV. Uzmimo konačno još da je $c_1 \geqq 0$ i $c_2 \leqq 0$; u tom primjeru točka $(c_1\ c_2)$ leži u četvrtom kvadrantu koordinatnog sistema. Pravci što odgovaraju funkciji cilja su rastući i paralelni s pravcem tipa IV. Manje vrijednosti funkcije cilja dobivamo ako pravac pomičemo paralelno u smjeru naznačenih strelica. Optimalno moguće rješenje linearnog programa je:

a) u točkama stranice DE ako je $c_1 = 0$ ili ako točka (c_1, c_2) leži na polutraci p_{DE};

b) u točki E za sve parove (c_1, c_2);

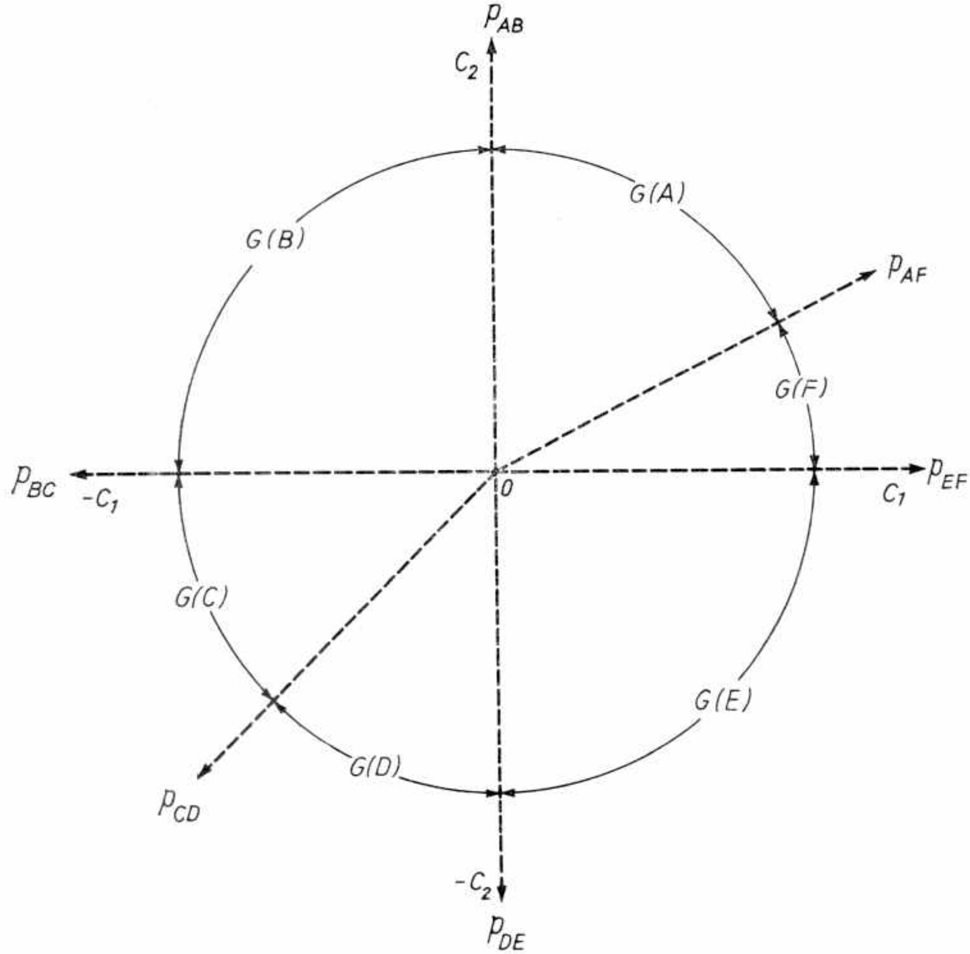
c) u točkama stranice EF ako je $c_2 = 0$ ili ako točka (c_1, c_2) leži na polutraci p_{EF}.



Sl. 24. Poligon mogućih rješenja

Iz toga slijedi, kao što vidimo na sl. 25, da uglovi ili ekstremne točke konveksnog šesterokuta mogućih rješenja linearnog programa imaju slijedeća gravitaciona polja:

a) ugao A ima kut među polutrakama p_{AF} i p_{AB}
b) ugao B ima kut među polutrakama p_{AB} i p_{BC}
c) ugao C ima kut među polutrakama p_{BC} i p_{CD}
d) ugao D ima kut među polutrakama p_{CD} i p_{DE}
e) ugao E ima kut među polutrakama p_{DE} i p_{EF}
f) ugao F ima kut među polutrakama p_{EF} i p_{AF}.



Sl. 25. Gravitaciona polja uglova

X. SIMPLEKS-METODA

1. Zamjena baze

Uzmimo slijedeći problem linearnog programiranja, koji smo nakon uvođenja dopunskih i umjetnih varijabla u 2. točki VIII. poglavlja izrazili obrascima (5. a, b, c) ovako: Treba odrediti varijable $x_1, \dots, x_n$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_j \geqq 0 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

i vektorskoj jednadžbi:

$$x_1 \mathbf{P}^1 + \dots + x_n \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^0$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

ima minimum. Podaci za ovaj linearni program dani su pregledno u tabeli 1. u istoj točki istoga poglavlja.

Pretpostavimo da nam je jedno bazično i nedegenerirano moguće rješenje ovog linearnog programa već poznato. Kako je ovo rješenje bazično i nedegenerirano, to ima točno m pozitivnih komponenata, dok su sve druge komponente jednake 0. Zbog jednostavnosti, a da pri tom problem nikako ne ograničujemo, pretpostavimo da je pozitivnih prvih m komponenata mogućeg rješenja; to možemo uvijek postići ako na odgovarajući način promijenimo nazive varijabla. Nakon takve promjene naziva varijabla neka bude

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0\}$$

poznato bazično i nedegenerirano moguće rješenje linearnog programa. Tom mogućem rješenju prema razmatranjima u prijašnjem poglavlju odgovara određena ekstremna točka poliedra mogućih rješenja, kao i određen sistem m linearno nezavisnih vektora:

$$\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^m$$

Ovi vektori sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m; vektorima ove baze možemo jednoznačno linearno izraziti svaki vektor toga vektorskog prostora. Ovom mogućem rješenju odgovara gornji dio tabele 1.

Razmislimo najprije kako bismo iz zadanog bazičnog i nedegeneriranog mogućeg rješenja mogli dobiti neko drugo bazično moguće rješenje. Poznatom mogućem rješenju odgovara određena ekstremna točka konveksnog poliedra mogućih rješenja, kao i određen sistem m linearno nezavisnih vektora:

$$\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^r, \ldots, \mathbf{P}^m,$$

koji sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m. Svakom drugom baznom mogućem rješenju isto tako odgovara neka ekstremna točka poliedra mogućih rješenja, kao i njoj odgovarajući sistem m linearno nezavisnih vektora, koji isto tako sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m. Ako iz prvobitne baze $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^r, \ldots, \mathbf{P}^m$ izostavimo jedan vektor, npr. vektor $\mathbf{P}^r$, i nadomjestimo ga nekim drugim vektorom $\mathbf{P}^k$ koji ne nastupa u prvobitnoj bazi, onda dobivamo nov sistem linearno nezavisnih vektora $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^k, \ldots, \mathbf{P}^m$; ovom sistemu odgovara neka druga ekstremna točka poliedra mogućih rješenja linearnog programa i neko drugo bazično moguće rješenje. U skladu s tim, iz poznatog bazičnog i nedegeneriranog mogućeg rješenja linearnog programa dobivamo novo bazično moguće rješenje ovako:

Poznatom bazičnom mogućem rješenju odredimo m linearno nezavisnih vektora:

$$\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^r, \ldots, \mathbf{P}^m,$$

koji sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m; u toj bazi neki vektor $\mathbf{P}^r$ nadomjestimo nekim vektorom $\mathbf{P}^k$ kojega u bazi još nema i koji s preostalim vektorima sastavlja novu bazu vektorskog prostora V^m

$$\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^k, \ldots, \mathbf{P}^m$$

Nakon toga odredimo ovoj bazi odgovarajuće bazično moguće rješenje.

U nastavku pogledajmo takav prijelaz od prvobitne baze do druge i od prvobitnog bazičnog mogućeg rješenja do drugog.

Poznatom bazičnom i nedegeneriranom mogućem rješenju:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0, \ldots, 0\}$$

odgovara m linearno nezavisnih vektora:

$$\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^r, \ldots, \mathbf{P}^m$$

koji sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m. U toj bazi vektor $\mathbf{P}^r$ nadomjestimo vektorom $\mathbf{P}^k$ kojega još nema u bazi, pa dobivamo novu bazu vektorskog prostora $\mathbf{V}^m$:

$$\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^k, \ldots, \mathbf{P}^m$$

Ovoj bazi odgovara novo bazično moguće rješenje:

$$\mathbf{x}^1 = \{x'_1, \ldots, x'_{r-1}, 0, x'_{r+1}, 0, \ldots, x'_k, \ldots, 0\}$$

Toj novoj bazi i tom novom mogućem rješenju odgovara donji dio tabele 1.

Pogledajmo kako se pri takvoj zamjeni baze transformiraju koeficijenti a_{ij} gornjeg dijela tabele 1. u koeficijente a'_{ij} donjega dijela te tabele. Radi jednoobraznosti načina pisanja i obrazaca u tabeli 1. označimo komponente b_i vektora $\mathbf{P}^0$ sa a_{i0}, tako da je:

$$b_i \equiv a_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

TABELA 1. ZAMJENA BAZE

Baza	$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$ ...	$\mathbf{P}^r$ ...	$\mathbf{P}^m$ ...	$\mathbf{P}^k$ ...	$\mathbf{P}^n$
$\mathbf{P}^1$	a_{10}	a_{11} ...	a_{1r} ...	a_{1m} ...	a_{1r} ...	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\leftarrow\mathbf{P}^r$	a_{r0}	a_{r1} ...	a_{rr} ...	a_{rm} ...	a_{rk} ...	a_{rn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{P}^m$	a_{m0}	a_{m1} ...	a_{mr} ...	a_{mm} ...	a_{mk} ...	a_{mn}
$\mathbf{P}^1$	a'_{10}	a'_{11} ...	a'_{1r} ...	a'_{1m} ...	a'_{1k} ...	a'_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\rightarrow\mathbf{P}^k$	a'_{r0}	a'_{r1} ...	a'_{rr} ...	a'_{rm} ...	a'_{rk} ...	a'_{rn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{P}^m$	a'_{m0}	a'_{m1} ...	a'_{mr} ...	a'_{mm} ...	a'_{mk} ...	a'_{mn}

Poznatom baričnom nedegeneriranom mogućem rješenju:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m, 0, \dots, x_k = 0, \dots, 0\} =$$
$$= \{a_{10}, \dots, a_{r-1,0}\ a_{r0}, a_{r+1,0}, \dots, a_{m,0}, 0, \dots, a_{k0} = 0, \dots, 0\}$$

odgovara sistem m linearno nezavisnih vektora:

$$\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^r, \dots, \mathbf{P}^m,$$

koji sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m. Kako je $\mathbf{x}$ moguće rješenje linearnog programa, to važi jednadžba:

$$\mathbf{P}^0 = x_1\,\mathbf{P}^1 + \dots + x_r\,\mathbf{P}^r + \dots + x_m\,\mathbf{P}^m = \tag{1}$$
$$= a_{10}\,\mathbf{P}^1 + \dots + a_{r0}\mathbf{P}^r + \dots + a_{m0}\,\mathbf{P}^m$$

Budući da vektori $\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^r, \dots, \mathbf{P}^m$ sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m, to sve vektore $\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^n$ možemo izraziti kao njihove linearne sastave:

$$\mathbf{P}^j = a_{1j}\,\mathbf{P}^1 + \dots + a_{rj}\,\mathbf{P}^r + \dots + a_{mj}\,\mathbf{P}^m \quad (j = 1, \dots, n) \tag{2}$$

Stoga vektor $\mathbf{P}^k$ izrazimo vektorima baze ovako:

$$\mathbf{P}^k = a_{1k}\,\mathbf{P}^1 + \dots + a_{rk}\,\mathbf{P}^r + \dots + a_{mk}\,\mathbf{P}^m \tag{3}$$

Ako ovu jednadžbu pomnožimo nekim pozitivnim brojem Θ i odbrojimo je od jednadžbe (1), onda dobivamo jednadžbu:

$$\mathbf{P}^0 = (x_1 - \Theta\,a_{1k})\,\mathbf{P}^1 + \dots + (x_r - \Theta\,a_{rk})\,\mathbf{P}^r + \dots + (x_m - \Theta\,a_{mk})\,\mathbf{P}^m + \Theta\,\mathbf{P}^k$$

Iz te vektorske jednadžbe vidimo da je

$$\bar{\mathbf{x}} = \{x_1 - \Theta\,a_{1k}, \dots, x_r - \Theta\,a_{rk}, \dots, x_m - \Theta\,a_{mk}, 0, \dots, \Theta, \dots, 0\}$$

isto tako moguće rješenje linearnog programa. Ovo rješenje općenito nije bazično jer ima m + 1 od 0 različitih komponenata.

Pozitivni broj Θ nije sasvim proizvoljan; zbog zahtjeva za nenegativnošću komponenata mogućeg rješenja, broj Θ mora odgovarati nejednadžbama:

$$x_i - \Theta a_{ik} \geqq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

Iz ovoga slijedi da broj Θ odgovara nejednadžbama:

$$0 < \Theta \leqq \frac{x_i}{a_{ik}} \qquad (i = 1, \dots, m)$$

Već smo ustanovili da novo moguće rješenje $\mathbf{x}$ kod proizvoljno odabranog broja Θ nije bazično jer općenito ima m + 1 pozitivnih komponenata. Odgovarajućim izborom broja Θ možemo postići da novo moguće rješenje postane bazično; broj Θ možemo naime odabrati tako da jedna pozitivna komponenta mogućeg rješenja $\bar{\mathbf{x}}$ postane jednaka 0. U tu svrhu za broj Θ odaberemo najmanji od razlomaka:

$$\frac{x_1}{a_{1k}}, \dots, \frac{x_r}{a_{rk}}, \dots, \frac{x_m}{a_{mk}}$$

Uzmimo da je među ovim razlomcima najmanji onaj koji odgovara indeksu r. Uzmimo dalje još da egzistira samo jedan najmanji razlomak; mogućnost da ima više najmanjih razlomaka obrađivat ćemo kasnije kod pojave degeneracije. Pri takvom izboru uzimamo:

$$\Theta = \frac{x_r}{a_{rk}}$$

Pri ovom izboru broja Θ u mogućem rješenju $\bar{\mathbf{x}}$ pozitivna komponenta na r-tom mjestu postaje jednaka 0, a sve druge pozitivne komponente ostaju pozitivne. Tako dobivamo novo bazično i nedegenerirano moguće rješenje:

$$\mathbf{x}' = \{x_1 - \Theta a_{1k}, \dots, 0, \dots, x_m - \Theta a_{mk}, 0, \dots, \Theta, \dots, 0\}$$

U tom mogućem rješenju r-ta komponenta jednaka je 0, a k-ta komponenta jednaka je Θ. Tom bazičnom i nedegeneriranom mogućem rješenju linearnog programa odgovara sistem m linearno nezavisnih vektora:

$$\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^{r-1}, \mathbf{P}^{r+1}, \dots, \mathbf{P}^m, \mathbf{P}^k$$

koji sastavljaju novu bazu vektorskog prostora V^m.

Izrazimo vektore $\mathbf{P}^j$ (j = 0, 1, ..., n) pomoću vektora ove nove baze! U tu svrhu iz jednadžbe (3) izrazimo najprije vektor $\mathbf{P}^r$ i dobivamo:

$$\mathbf{P}^r = \frac{1}{a_{rk}}(\mathbf{P}^k - a_{1k}\mathbf{P}^1 - \dots - a_{r-1}\mathbf{P}^{r-1} - \dots - a_{r+1,k}\mathbf{P}^{r+1} - \dots - a_{mk}\mathbf{P}^m)$$

Ako taj izraz za vektor $\mathbf{P}^r$ uvrstimo u obrazac (2) dobivamo:

$$\mathbf{P}^j = a_{1j}\,\mathbf{P}^1 + \ldots + a_{r-1,j}\,\mathbf{P}^{r-1} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,a_{1k}\,\mathbf{P}^1 - \ldots - \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,a_{r-1,k}\,\mathbf{P}^{r-1} -$$

$$- \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,a_{r+1,k}\,\mathbf{P}^{r+1} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,a_{mk}\,\mathbf{P}^m + \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,\mathbf{P}^k + a_{r+1,j}\,\mathbf{P}^{r+1} + \ldots + a_{mj}\,\mathbf{P}^m =$$

$$= \left(a_{1j} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,a_{1k}\right)\mathbf{P}^1 + \ldots + \left(a_{r-1,j} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,a_{r-1,k}\right)\mathbf{P}^{r-1} +$$

$$+ \left(a_{r+1,j} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,a_{r+1,j}\right)\mathbf{P}^{r+1} + \ldots + \left(a_{mj} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,a_{mj}\right)\mathbf{P}^m + \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,\mathbf{P}^k$$

Ako koeficijente kod vektora u ovom izrazu označimo tako kao što smo ih označili u donjem dijelu tabele 1, onda dobivamo:

$$\mathbf{P}^j = a'_{1j}\,\mathbf{P}^1 + \ldots + a'_{r-1,j}\,\mathbf{P}^{r-1} + a'_{r+1,j}\,\mathbf{P}^{r+1} + \ldots + a'_{mj}\,\mathbf{P}^m + a'_{kj}\,\mathbf{P}^k$$

Ako usporedimo posljednja dva izraza za vektor $\mathbf{P}^j$, onda dobivamo slijedeću uputu za transformaciju koeficijenata u tabeli 1:

Ako iz prvobitne baze $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^r, \ldots, \mathbf{P}^m$ odstranimo vektor $\mathbf{P}^r$ i nadomjestimo ga vektorom $\mathbf{P}^k$, onda se koeficijenti a_{ij} gornjega dijela tabele 1. transformiraju u homologne koeficijente a'_{ij} donjega dijela tabele ovako:

a) koeficijente a_{rj} r-tog retka transformiramo po zakonu:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \tag{4a}$$

b) koeficijente a_{ij} proizvoljnog drugog retka međutim transformiramo po zakonu:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\,a_{ik} \qquad (i \neq r) \tag{4b}$$

Novoj bazi odgovara slijedeće bazično i nedegenerirano moguće rješenje linearnog programa:

$$\mathbf{x}' = \{x'_1, \ldots, x'_{r-1}, 0, x'_{r+1}, \ldots, x'_m, 0, \ldots, 0, x'_k, 0, \ldots, 0\} =$$
$$= \{a'_{10}, \ldots, a'_{r-1,0}, 0, a'_{r+1,0}, \ldots, a'_{m,0}\, 0, \ldots, 0, a'_{k,0}, 0, \ldots, 0\}$$

Transformaciju (4a, b) možemo izvršiti matričnom multiplikacijom. Koeficijenti gornjega dijela tabele 1. sastavljaju matricu:

$$\mathbf{M} = \|\,a_{ij}\,\| \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

Ova je matrica pravokutna i ima red m x n. Slično koeficijenti donjeg dijela iste tabele sastavljaju matricu:

$$\mathbf{M}' = \|\,a'_{ij}\,\|$$

Uzmimo jediničnu matricu reda m u kojoj r-ti redak i r-ti stupac napišemo:

$$\mathbf{E} = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

U jediničnoj matrici popravimo r-ti stupac ovako: umjesto broja 1 u r-tom retku napišemo $1/a_{rk}$; umjesto 0 u svim ostalim recima ovoga stupca napišemo uzastopno brojeve:

$$-\frac{a_{1k}}{a_{rk}}, \dots, -\frac{a_{r-1,k}}{a_{rk}}, -\frac{a_{r+1,k}}{a_{rk}}, \dots, -\frac{a_{mk}}{a_{rk}}$$

i tako dobivamo slijedeću kvadratnu matricu reda m:

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 & -\dfrac{a_{1k}}{a_{rk}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\dfrac{a_{r-1,k}}{a_{rk}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dfrac{1}{a_{rk}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\dfrac{a_{r+1,k}}{a_{rk}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\dfrac{a_{mk}}{a_{rk}} & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

Početnu matricu **M** transformiramo u novu matricu **M′** tako da je premultipliciramo transformacijskom matricom **T**:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{T}\,\mathbf{M} \tag{4c}$$

Možemo se lako uvjeriti da je ova transformacija početne matrice pomoću matrične premultiplikacije identična transformaciji prema obrascima (4a, b); to uvidamo ovako:

a) za elemente r-tog retka:

$$a'_{rj} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & \dfrac{1}{a_{rk}} & \dots & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{Vmatrix} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$$

b) za elemente svakoga drugog retka:

$$a'_{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & -\dfrac{a_{ik}}{a_{rk}} & \dots & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{Vmatrix} = a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{ik}$$

2. Poboljšanje mogućeg rješenja

U prijašnjoj točki saznali smo kako zamjenom baze vektorskog prostora V^m od poznatog mogućeg rješenja dobivamo novo moguće rješenje linearnog programa; pri tom smo uzimali u obzir samo promjene uvjetnih jednadžbi, a nismo se obazirali na promjene vrijednosti funkcije cilja. Za svako moguće rješenje funkcija cilja ima određenu vrijednost; pri prijelazu od prvog na drugo moguće rješenje ova se vrijednost može povećati, smanjiti ili pak ostati nepromijenjena. Budući da se radi o linearnom programu za minimum funkcije cilja, želimo pri prijelazu od prvoga na drugo moguće rješenje što više smanjiti vrijednost funkcije cilja. U ovoj točki obrađivat ćemo prijelaz od prvoga na drugo moguće rješenje pri kojem će se vrijednost funkcije cilja najviše smanjiti.[1]

Uzmimo, kao u prijašnjoj točki, poznato bazično i nedegenerirano moguće rješenje:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r, \dots, x_m, 0, \dots, 0\}$$

Ovom rješenju odgovara sistem m linearno nezavisnih vektora

$$\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^r \dots, \mathbf{P}^m,$$

koji sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m; njima možemo na jednoznačan način linearno izraziti sve vektore $\mathbf{P}^j$ ovako:

$$\mathbf{P}^j = a_{1j}\mathbf{P}^1 + \dots + a_{rj}\mathbf{P}^r + \dots + a_{mj}\mathbf{P}^m \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

Ako u ovoj vektorskoj jednadžbi postavimo $j = 0$ i ako ponovo pišemo $x_i = a_{i0}$ to za vektor $\mathbf{P}^0$ dobivamo izraz:

$$\mathbf{P}^0 = x_1\mathbf{P}^1 + \dots + x_r\mathbf{P}^r + \dots + x_m\mathbf{P}^m =$$
$$= a_{10}\mathbf{P}^1 + \dots + a_{r0}\mathbf{P}^r + \dots + a_{m0}\mathbf{P}^m$$

Ako uzmemo sve to u obzir, onda možemo sastaviti tabelu 1, čiji je jedan dio analogan tabeli 1. iz prijašnje točke.

Definirajmo nove količine:

$$z_j = a_{1j}c_1 + \dots + a_{rj}c_r + \dots + a_{mj}c_m \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

[1] Vidi napomenu na str. 150. Takve prijelaze obrađujemo iscrpno u 1. točki XII. poglavlja u problemu prehrane.

i pogledajmo njihovo značenje za pojedine vrijednosti indeksa j! Ako je $j = 0$, onda dobivamo:

$$z_0 = a_{10}\,c_1 + \ldots + a_{r0}\,c_r + \ldots + a_{m0}\,c_m =$$
$$= c_1\,x_1 + \ldots + c_r\,x_r + \ldots + c_m\,x_m$$

z_0 znači dakle vrijednost funkcije cilja, koja odgovara poznatom mogućem rješenju linearnog programa. Slično znači z_j vrijednost vektora $\mathbf{P}^j$ izraženog vektorima prvobitne baze.

TABELA 1. POBOLJŠANJE MOGUĆEG RJEŠENJA PO SIMPLEKS-METODI

c_j			c_1	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
			x_1	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
	Baza	$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$	$\cdots$	$\mathbf{P}^m$	$\cdots$	$\mathbf{P}^j$	$\cdots$	$\mathbf{P}^k$	$\cdots$	$\mathbf{P}^n$
c_1	$\mathbf{P}^1$	a_{10}	a_{11}	$\cdots$	a_{1m}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1k}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_r	$\mathbf{P}^r$	a_{r0}	a_{r1}	$\cdots$	a_{rm}	$\cdots$	a_{rj}	$\cdots$	a_{rk}	$\cdots$	a_{rn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	$\mathbf{P}^m$	a_{m0}	a_{m1}	$\cdots$	a_{mm}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mk}	$\cdots$	a_{mn}
$z_j - c_j =$ $= a_{m+1,j}$		z_0	$z_1 - c_1$	$\cdots$	$z_m - c_m$	$\cdots$	$z_j - c_j$	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$z_n - c_n$
c_1	$\mathbf{P}^1$	a'_{10}	a'_{11}	$\cdots$	a'_{1m}	$\cdots$	a'_{1j}	$\cdots$	a'_{1k}	$\cdots$	a'_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_k	$\mathbf{P}^k$	a'_{r0}	a'_{r1}	$\cdots$	a'_{rm}	$\cdots$	a'_{rj}	$\cdots$	a'_{rk}	$\cdots$	a'_{rn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	$\mathbf{P}^m$	a'_{m0}	a'_{m1}	$\cdots$	a'_{mm}	$\cdots$	a'_{mj}	$\cdots$	a'_{mk}	$\cdots$	a'_{mn}
$z'_j - c_j =$ $= a'_{m+1,j}$		z'_0	$z'_1 - c_1$	$\cdots$	$z'_m - c_m$	$\cdots$	$z'_j - c_j$	$\cdots$	$z'_k - c_k$	$\cdots$	$z'_n - c_n$

Definirajmo još količine

$$z_j - c_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

i objasnimo njihovo značenje za pojedine vrijednosti indeksa j. Ako je $j = 0$, onda

$$z_0 - c_0 = z_0$$

znači vrijednost funkcije cilja koja odgovara poznatom mogućem rješenju linearnog programa. Ako je $j = r$, gdje je $1 \leqq r \leqq m$, dobivamo:

$$z_r - c_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

Bazični vektor $\mathbf{P}^r$ ima naime r-tu komponentu jednaku 1, dok su sve druge komponente jednake 0; stoga je:

$$z_r - c_r = 0.c_1 + \ldots + 1.c_r + \ldots + 0.c_m - c_r = 0$$

Zbog toga su količine $z_j - c_j$ za sve bazične vektore jednake 0. Ako je $j > m$, onda vektor $\mathbf{P}^j$ ne spada u bazu; u tom primjeru prema prijašnjem izlaganju z_j znači vrijednost toga vektora izraženog bazičnim vektorima, dok c_j znači ovom vektoru odgovarajući koeficijent u funkciji cilja ili njegovu pravu vrijednost; stoga diferencija $z_j - c_j$ znači za vektor $\mathbf{P}^j$ razliku između vrijednosti vektora izraženog bazom i njegove prave vrijednosti. Diferencije $z_j - c_j$ napisane su u posljednjem retku gornjega dijela tabele 1.

Radi jednoobraznosti pišemo ove diferencije kao elemente u dodatnom retku ovako:

$$z_j - c_j = a_{m+1,j} \qquad (j = 0, 1, \dots, n)$$

U daljnjem raspravljanju prijelaza od poznatog mogućeg rješenja k nekom boljem mogućem rješenju najprije zanemarimo različite izuzetne mogućnosti, koje ćemo kasnije posebno raspraviti. Za početak raspravimo mogućnost za koju važe slijedeće pretpostavke:

a) Funkcija cilja ima donju granicu za sva moguća rješenja.

b) Barem jedna od diferencija $z_j - c_j$, gdje je $j = m + 1, \dots, n$, jest pozitivna; uzmimo da je pozitivna diferencija $z_k - c_k$. Toj diferenciji odgovara vektor $\mathbf{P}^k$ koji ne spada u prvobitnu bazu.

c) Među komponentama vektora $\mathbf{P}^k$ s pozitivnom diferencijom $z_k - c_k$ barem jedna je pozitivna; uzmimo da je pozitivna njegova r-ta komponenta a_{rk}.

d) U skupini razlomaka:

$$\frac{x_1}{a_{1k}}, \dots, \frac{x_r}{a_{rk}}, \dots, \frac{x^m}{a_{mk}}$$

među pozitivnim razlomcima samo je jedan najmanji; uzmimo da je među pozitivnim razlomcima najmanji onaj koji odgovara indeksu r, tj. x_r/a_{rk}.

Ako važe ove pretpostavke, onda možemo poznato bazično moguće rješenje poboljšati i dobiti od njega novo bazično moguće rješenje za koje funkcija cilja ima manju vrijednost.

Uzmimo poznato bazično i nedegenerirano moguće rješenje linearnog programa:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r, \dots, x_m, 0, \dots, 0, \dots, 0\} = \tag{1}$$

$$= \{a_{10}, \dots, a_{r0}, \dots, a_{m0}, 0, \dots, 0, \dots, 0\}$$

Funkcija cilja ima vrijednost:

$$z_0 = c_1 x_1 + \dots + c_r x_r + \dots + c_m x_m \tag{2}$$

Ovom rješenju odgovara sistem m linearno nezavisnih vektora:

$$\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^r, \dots, \mathbf{P}^m,$$

koji sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m. Pomoću ovih vektora možemo linearno izraziti sve vektore $\mathbf{P}^j$, gdje je $j = 0, 1, \dots, n$. Tako za vektor $\mathbf{P}^0$ dobivamo izraz:

$$\mathbf{P}^0 = x_1 \mathbf{P}^1 + \dots + x_r \mathbf{P}^r + \dots + x_m \mathbf{P}^m \tag{3}$$

Slično za vektor $\mathbf{P}^k$ dobivamo izraz:

$$\mathbf{P}^k = a_{1k}\,\mathbf{P}^1 + \ldots + a_{rk}\,\mathbf{P}^r + \ldots + a_{mk}\,\mathbf{P}^m \tag{4}$$

Vektoru $\mathbf{P}^k$ izraženom tako pomoću bazičnih vektora odgovara vrijednost:

$$z_k = a_{1k}\,c_1 + \ldots + a_{rk}\,c_r + \ldots + a_{mk}\,c_m \tag{5}$$

i diferencija $z_k - c_k$, koja je prema pretpostavci (c) pozitivna.

Slično kao u prijašnjoj točki odstranimo iz prvobitne baze vektor $\mathbf{P}^r$ i nadomjestimo ga vektorom $\mathbf{P}^k$ koji ne spada u prvobitnu bazu. Jednadžbu (4) pomnožimo pozitivnim brojem Θ i odbijemo je od jednadžbe (3), pa dobivamo jednadžbu:

$$\mathbf{P}^0 = (x_1 - \Theta a_{1k})\,\mathbf{P}^1 + \ldots + (x_r - \Theta a_{rk})\,\mathbf{P}^r + \ldots + (x_m - \Theta a_{mk})\,\mathbf{P}^m + \Theta\,\mathbf{P}^k$$

Iz toga dobivamo novo moguće rješenje:

$$\mathbf{x}' = \{x_1 - \Theta a_{1k}, \ldots, x_r - \Theta\,a_{rk}, \ldots x_m, \ldots - \Theta a_{mk}, 0, \ldots, \Theta, \ldots 0\}$$

To moguće rješenje na k-tom mjestu ima komponentu Θ i općenito nije bazično jer ima $m + 1$ pozitivnih komponenata.

Po pretpostavci d) u skupini razlomaka:

$$\frac{x_1}{a_{1k}}, \ldots, \frac{x_r}{a_{rk}}, \ldots, \frac{x_m}{a_{mk}}$$

od pozitivnih razlomaka samo je jedan najmanji. Mogućnost da ova pretpostavka ne važi, raspravit ćemo kasnije. Uzmimo da je među ovim razlomcima najmanje onaj koji odgovara indeksu r.

Ako za broj Θ izaberemo najmanji od ovih razlomaka, onda dobivamo novo bazično i nedegenerirano moguće rješenje linearnog programa. U skladu s pretpostavkom (c) ovaj najmanji razlomak je pozitivan jer važe nejednadžbe $x_r > 0$ i $a_{rk} > 0$. Prema tome dobivamo novo bazično i nedegenerirano moguće rješenje ako broj Θ izaberemo ovako:

$$\Theta = \frac{x_r}{a_{rk}} \tag{6}$$

Kod tako izabranog broja Θ iz prvobitne baze odstranimo vektor $\mathbf{P}^r$ i nadomjestimo ga vektorom $\mathbf{P}^k$.

Prvobitnom bazičnom mogućem rješenju $\mathbf{x}$ odgovara vrijednost z_0 funkcije cilja koja je izražena jednadžbom (2). Novu vrijednost z'_0 funkcije cilja, koja odgovara novom mogućem rješenju $\mathbf{x}'$, izračunamo ovako:

$$z'_0 = c_1\,(x_1 - \Theta\,a_{1k}) + \ldots + c_m\,(x_m - \Theta a_{mk}) + \Theta c_k$$

$$z'_0 = c_1\,x_1 + \ldots + c_m\,x_m - \Theta\,(c_1\,a_{1k} + \ldots + c_m\,a_{mk}) + \Theta\,c_k$$

Prema obrascima (2) i (5) dobivamo nakon preuređenja članova:

$$z'_0 = z_0 - \Theta\,(z_k - c_k) \tag{7}$$

Kako je broj Θ pozitivan i kako je prema pretpostavci (c) i diferencija $z_k - c_k$ pozitivna, to vidimo da je nova vrijednost funkcije cilja manja od prvobitne vrijednosti. Stoga prvobitno moguće rješenje poboljšamo tako da u prvobitnoj bazi vektor $\mathbf{P}^r$ nadomjestimo vektorom $\mathbf{P}^k$. Pri takvoj zamjeni baze brojevi u dodatnom $(m+1)$ retku gornjega dijela tabele 1. transformiraju se po zakonu transformacije (1; 4b):

$$(z_j - c_j)' = a'_{m+1,j} = a_{m+1,j} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{m+1,k} \tag{8}$$

Ovaj transformacijski zakon dokažemo ovako: za $j = 0$, dobivamo iz jednadžbe (7), ako uzmemo u obzir jednadžbu (6):

$$(z_0 - c_0)' = a'_{m+1,0} = a_{m+1,0} - \frac{a_{r0}}{a_{rk}} a_{m+1,k}$$

Za sve druge vrijednosti indeksa j dobivamo transformacijski zakon kako slijedi u nastavku.

Prije transformacije je:

$$z_j - c_j = a_{m+1,j} = a_{1j}\, c_1 + \ldots + a_{rj}\, c_j + \ldots + a_{mj}\, c_m - c_j$$

Nakon transformacije dobivamo:

$$(z_j - c_j)' = z'_j - c_j = a'_{m+1,j} = a'_{1j}\, c_1 + \ldots + a'_{rj}\, c_r + \ldots + a'_{mj}\, c_m - c_j$$

Ako u ovom izrazu koeficijente c'_{ij} izrazimo po transformacijskom zakonu (1; 4a, b), onda dobivamo:

$$(z_j - c_j)' = z'_j - c_j = a'_{m+1,j} = \left(a_{1j} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{1k}\right) c_1 + \ldots + \frac{a_{rj}}{a_{rk}} c_k +$$

$$+ \ldots + \left(a_{mj} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{mk}\right) c_m - c_j$$

Ako u ovom izrazu pribrojimo i odbijemo član $a_{rj}\, c_r$, onda nakon uređenja dobivamo:

$$a'_{m+1,j} = (a_{1j}\, c_1 + \ldots + a_{rj}\, c_r + \ldots + a_{mj}\, c_m) - a_{rj}\, c_r -$$

$$- \frac{a_{rj}}{a_{rk}} (a_{1k}\, c_1 + \ldots + a_{rk}\, c_r + \ldots + a_{mk}\, c_m) + a_{rj}\, c_r + \frac{a_{rj}}{a_{rk}} c_k - c_j$$

Prema obrascu (5) dobivamo nakon preuređenja članova transformacijski zakon (8).

Pri transformaciji s dodatnim $(m+1)$ retkom dopunjenog dijela tabele 1. matričnom premultiplikacijom red transformacijske matrice T povećava se od 1 na $m+1$; struktura transformacijske matrice ostaje sačuvana.

3. Analiza pretpostavki

U prijašnjoj smo točki pri poboljšavanju mogućeg rješenja simpleks-metodom uzeli četiri pretpostavke; zaustavimo se na tim pretpostavkama i analizirajmo njihovo značenje.

Prema prvoj pretpostavci (a) funkcija cilja ima donju granicu za sva moguća rješenja; ova je pretpostavka opravdana kod svih praktički značajnih problema linearnog programiranja. U problemima za koje ova pretpostavka ne vrijedi, mogli bismo apsolutnu vrijednost funkcije cilja povećavati preko svih granica. Takvi problemi nemaju nikakvog praktičkog značenja, pa ih stoga ne razmatramo.

Prema drugoj pretpostavci (b) barem jedna od diferencija $z_j - c_j$ jest pozitivna. U primjeru gdje ova pretpostavka ne važi moguće je poboljšanje poznatog mogućeg rješenja. U primjerima gdje ova pretpostavka ne važi, važi naime izreka:

Ako je za bazično i nedegenerirano moguće rješenje:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0\}$$

ispunjeno:

$$z_j - c_j \leqq 0$$

bez iznimke za sve vrijednosti j, *onda je moguće rješenje optimalno a funkcija cilja za to rješenje ima minimum.*

Dokaz. Danom bazičnom i nedegeneriranom mogućem rješenju odgovaraju vektori:

$$\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^m,$$

koji sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m; pomoću ovih vektora možemo na jednoznačan način linearno izraziti vektor $\mathbf{P}^0$ ovako:

$$\mathbf{P}^0 = x_1 \mathbf{P}^1 + \dots + x_m \mathbf{P}^m \tag{1}$$

a sve druge vektore $\mathbf{P}^j$ ovako:

$$\mathbf{P}^j = a_{1j} \mathbf{P}^1 + \dots + a_{mj} \mathbf{P}^m \quad (j = 1, \dots, n) \tag{2}$$

Ovom mogućem rješenju odgovara vrijednost funkcije cilja

$$z_0 = c_1 x_1 + \dots + c_m x_m \tag{3}$$

Kako raspravljena pretpostavka (b) ne važi, to za ovo moguće rješenje važe nejednadžbe:

$$z_j \leqq c_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

Treba dokazati da funcija cilja za ovo moguće rješenje ima minimum te da ni kod jednog drugog mogućeg rješenja nema manju vrijednost. Uzmimo neko drugo proizvoljno moguće rješenje:

$$\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_m, \dots, y_n\}$$

Za ovo rješenje važi jednadžba:

$$\mathbf{P}^0 = y_1 \mathbf{P}^1 + \dots + y_n \mathbf{P}^n \tag{4}$$

a funkcija cilja za nju ima vrijednost:

$$z = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \tag{5}$$

Ako u ovoj jednadžbi svaki koeficijent c_j nadomjestimo odgovarajućim brojem z_j, onda dobivamo nejednadžbu:

$$z \geqq z_1 y_1 + \ldots + z_n y_n \tag{6}$$

Ako vektore $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^n$ izrazimo baričnim vektorima prema jednadžbi (2), onda dobivamo iz jednadžbe (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^0 = {} & y_1 (a_{11} \mathbf{P}^1 + \ldots + a_{m1} \mathbf{P}^m) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + y_n (a_{1n} \mathbf{P}^1 + \ldots + a_{mn} \mathbf{P}^m) \end{aligned}$$

Iz toga nakon preuređenja članova dobivamo jednadžbu:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^0 = {} & (a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n) \mathbf{P}^1 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{m1} y_1 + \ldots + a_{mn} y_n) \mathbf{P}^m \end{aligned} \tag{7}$$

Kako vektori $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^m$ sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m, to njima možemo linearno izraziti vektor $\mathbf{P}^0$ samo na jedan način; zbog toga su u obrascima (1) i (7) homologni koeficijenti jednaki, pa za njih dobivamo jednadžbe:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= a_{m1} y_1 + \ldots + a_{mn} y_n \end{aligned} \tag{8}$$

Prema definiciji brojevi z_j su jednaki:

$$z_j = a_{1j} c_j + \ldots + a_{mj} c_m \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo u nejednadžbu (6), onda dobivamo nejednadžbu:

$$\begin{aligned} z \geqq {} & y_1 (a_{11} c_1 + \ldots + a_{m1} c_m) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + y_n (a_{1n} c_1 + \ldots + a_{mn} c_m) \end{aligned}$$

Iz toga nakon preuređenja članova dobivamo nejednadžbu:

$$\begin{aligned} z \geqq {} & c_1 (a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + c_m (a_{m1} y_1 + \ldots + a_{mn} y_n) \end{aligned}$$

Ako uzmemo u obzir jednadžbe (8) i jednadžbu (3) dobivamo:

$$z \geqq c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m = z_0$$

a to je trebalo dokazati.

Prema trećoj pretpostavci (c) među komponentama vektora koji uvodimo u novu bazu barem jedna je pozitivna. Uzmimo da u novu bazu uvodimo vektor $\mathbf{P}^k$; za njega prema drugoj pretpostavci (b) važi nejednadžba:

$$z_k - c_k \geqq 0$$

Uzmimo još da za komponente ovog vektora ne važi pretpostavka (c) i da nijedna njegova komponenta nije pozitivna; stoga za sve njegove komponente važe nejednadžbe:

$$a_{ik} \leqq 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Iz poznatog baznog i nedegeneriranog mogućeg rješenja:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0\}$$

dobivamo po već raspravljenom postupku novo moguće rješenje:

$$\{x_1 - \Theta\, a_{1k}, \ldots, x_m - \Theta\, a_{mk}, 0, \ldots, \Theta, \ldots, 0\}$$

Kako su u ovom mogućem rješenju sve komponente pozitivne bez obzira na vrijednost izabranog pozitivnog broja Θ, to broj Θ nema nikakve gornje granice, pa za njega možemo izabrati proizvoljno velik pozitivan broj. Novo rješenje nije bazično jer ima $m + 1$ komponenata; njemu odgovara vrijednost funkcije cilja:

$$z = z_0 - \Theta\,(z_k - c_k)$$

Ako broj Θ proizvoljno povećavamo, onda možemo vrijednost funkcije cilja smanjiti ispod svake granice. Ovu smo mogućnost međutim isključili prvom pretpostavkom (a).

Prema četvrtoj pretpostavci (d) među pozitivnim razlomcima iz skupine:

$$\frac{x_1}{a_{1k}}, \ldots, \frac{x_r}{a_{rk}}, \ldots, \frac{x_m}{a_{mk}}$$

samo jedan je najmanji. Ako je u toj skupini više najmanjih pozitivnih razlomaka, onda je riječ o degeneraciji mogućeg rješenja. Pojavu degeneracije raspravit ćemo posebno u 6. točki ovoga poglavlja.

4. Početno i optimalno moguće rješenje

Uzmimo problem linearnog programiranja za minimum funkcije cilja koji je u skladu s formulacijama VIII. poglavlja nakon uvođenja dopunskih i umjetnih varijabla određen ovako:

$$\text{LP:} \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{P}^0; \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$$

Rješavanje linearnog programa po simpleks-metodi počinjemo s prvim mogućim rješenjem:

$$\mathbf{x}^1 = \{0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m\}$$

Ovom rješenju odgovara matrica $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_1$ reda m x n. Članovi u uzastopnim stupcima ove matrice komponente su vektora $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^n$. Posljednjim m stupcima matrice odgovaraju uzastopno jedinični vektori $\mathbf{P}^{s+m+1}, \ldots, \mathbf{P}^n$, koji sastavljaju početnu bazu vektorskog prostora V^m. Pri svakoj iteraciji simpleks-metodom matricu što pripada poznatom mogućem rješenju premultipliciramo odgovarajućom transformacijskom matricom $\mathbf{T}$. Nakon posljednje iteracije dobivamo optimalno moguće rješenje; njemu odgovara sistem m baznih vektora. Radi preglednosti uzmimo da mu odgovara prvih m vektora $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^m$; to možemo naime uvijek postići ako na odgovarajući način rasporedimo vektore i promijenimo im nazive. Pri takvom rasporedu vektora početnu matricu $\mathbf{A}$ možemo rascijepiti u tri bloka ovako:

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_1 = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \ldots & a_{1,n-m} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \ldots & a_{m,n-m} & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\|$$

Ako prvi blok označimo sa $\mathbf{B}$ a treći sa $\mathbf{E}$, onda za matricu $\mathbf{A}$ dobivamo rascjepljenje:

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_1 = \| \mathbf{B} \mid \ldots \mid \mathbf{E} \| \tag{1}$$

Pri tom je $\mathbf{B}$ kvadratna matrica a $\mathbf{E}$ jedinična matrica reda m.

Iz prvog dobivamo drugo moguće rješenje nakon prve iteracije, pri kojoj početnu matricu $\mathbf{A}_1$ premultipliciramo pripadajućom transformacijskom matricom $\mathbf{T}_1$. Stoga drugom mogućem rješenju odgovara matrica:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{T}_1 \mathbf{A}_1$$

Iz drugog dobivamo treće moguće rješenje nakon druge iteracije, pri kojoj matricu $\mathbf{A}_2$ premultipliciramo pripadajućom transformacijskom matricom $\mathbf{T}_2$. Stoga trećem mogućem rješenju odgovara matrica:

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{A}_1$$

Taj postupak nastavljamo sve dok ne dobijemo optimalno moguće rješenje. Uzmimo da optimalno moguće rješenje dobijemo nakon $v - 1$ iteracija. Nakon posljednje iteracije dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0\},$$

kojemu odgovara matrica $\mathbf{A}_0$; ovu matricu dobivamo prema prijašnjem iz prvobitne matrice premultiplikacijama uzastopnim transformacijskim matricama ovako:

$$\mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A}_v = (\mathbf{T}_{v-1} \mathbf{T}_{v-2} \ldots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1) \mathbf{A}_1$$

Kako su sve transformacijske matrice kvadratne, to je i njihov produkt kvadratna matrica; ovu novu matricu definiramo i pišemo kao produkt transformacijskih matrica ovako:

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{T}_{v-1} \mathbf{T}_{v-2} \ldots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \tag{2}$$

Pogledajmo kako se početna matrica $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_1$ transformira u prijelazu do optimalnog mogućeg rješenja. Matricu $\mathbf{A}_0$ što odgovara optimalnom mogućem rješenju dobivamo tako da početnu matricu premultipliciramo matricom $\mathbf{B}^{-1}$. Prva parcijalna matrica $\mathbf{B}$ matrice $\mathbf{A}$ prelazi pri tom u jediničnu matricu $\mathbf{E}$ reda m jer vektori $\mathbf{P}^1, \ldots, \mathbf{P}^m$ prelaze u uzastopne jedinične vektore. Iz osobina inverzne matrice slijedi da iz matrice $\mathbf{B}$ dobivamo jediničnu matricu $\mathbf{E}$ nakon premultiplikacije odgovarajućom inverznom matricom $\mathbf{B}^{-1}$. Stoga je gore obrascem (2) definirana matrica $\mathbf{B}^{-1}$ inverzna matrici $\mathbf{B}$. Treća parcijalna matrica $\mathbf{E}$ matrice $\mathbf{A}$ prelazi nakon premultiplikacije matricom $\mathbf{B}^{-1}$ u matricu $\mathbf{B}^{-1}$. Stoga možemo matricu koja odgovara optimalnom mogućem rješenju rascijepiti ovako:

$$\mathbf{A}_0 = \| \mathbf{E} \mid \ldots \mid \mathbf{B}^{-1} \| \tag{3}$$

Uslijed toga možemo konačnu matricu $\mathbf{A}_0$ izraziti početnom matricom $\mathbf{A}$ ovako:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \tag{4}$$

i obrnuto, početnu matricu konačnom ovako:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A}_0 \tag{5}$$

U prijelazu od početnog do optimalnog mogućeg rješenja vektor $\mathbf{P}^j$ prelazi u vektor $\mathbf{P}^j{}_0$; pri tom indeks j može zauzeti vrijednosti 1, 2, ..., n. Iz posljednjih dvaju obrazaca vidimo da se konačni vektor $\mathbf{P}^j{}_0$ izražava početnim vektorom $\mathbf{P}^j$ ovako:

$$\mathbf{P}_0^j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}^j \tag{6}$$

i obrnuto, početni vektor konačnim ovako:

$$\mathbf{P}^j = \mathbf{B}\mathbf{P}_0^j \tag{7}$$

U prijelazu od početnog do optimalnog mogućeg rješenja početni vektor $\mathbf{P}^0$ prelazi u konačni vektor $\mathbf{P}_0^0$. Kako se komponente ovoga vektora transformiraju isto tako kao i komponente svih drugih vektora, to se konačni vektor $\mathbf{P}_0^0$ izražava početnim vektorom $\mathbf{P}^0$ ovako:

$$\mathbf{P}_0^0 = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{P}^0 \tag{8}$$

i obrnuto, početni vektor konačnim ovako:

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{B}\mathbf{P}_0^0 \tag{9}$$

Optimalno moguće rješenje $\mathbf{x}^0$ ima pozitivnih samo prvih m komponenata; ovim komponentama u funkciji cilja odgovaraju koeficijenti koji sastavljaju matricu:

$$\mathbf{c}^0 = \| c_1 \ldots c_m \|$$

Stoga optimalnom mogućem rješenju odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja:

$$\mathbf{z}_0^0 - \mathbf{c}_0 = \mathbf{z}_0^0 = \mathbf{c}\,\mathbf{x}^0 = \mathbf{c}^0\,\mathbf{P}_0^0 \tag{10}$$

Početnom mogućem rješenju $\mathbf{x}^1$ u dodatnom retku odgovaraju diferencije $z_j - c_j$, gdje indeksi zauzimaju vrijednosti 1, 2, ..., n. Slično optimalnom mogućem rješenju u dodatnom retku odgovaraju diferencije koje sastavljaju matricu:

$$\mathbf{z}^0 - \mathbf{c} = \| z_1^0 - c_1 \ldots z_n^0 - c_n \|$$

Prema prijašnjem izlaganju ovu matricu izrazimo matricom $\mathbf{A}_0$ ovako:

$$\mathbf{z}^0 - \mathbf{c} = \mathbf{c}^0\,\mathbf{A}_0 - \mathbf{c} \tag{11}$$

i vektorima $\mathbf{P}_0^j$ ovako:

$$\mathbf{z}^0 - \mathbf{c} = \| \mathbf{c}^0\,\mathbf{P}_0^1 - c_1 \ldots \mathbf{c}^0\,\mathbf{P}_0^n - c_n \| \tag{12}$$

Kako je $\mathbf{x}^0$ optimalno moguće rješenje, to nijedna komponenta ove matrice nije pozitivna, pa stoga važi matrična nejednadžba:

$$\mathbf{c}^0\,\mathbf{A}_0 - \mathbf{c} \leqq \mathbf{0} \tag{13}$$

5. Dispozicija rješavanja linearnih programa simpleks-metodom

Pošto smo raspravili o teoretskim osnovama simpleks-metode, u ovoj točki dajemo preglednu dispoziciju računanja pri rješavanju linearnih programa tom metodom. U tu svrhu uzimamo, kao u 1. točki VIII. poglavlja, problem linearnog programiranja u njegovoj najopćenitijoj formulaciji:

Treba odrediti vrijednost varijabla $x_1, \ldots, x_s$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_s \geqq 0$$

i uvjetnim linearnim nejednadžbama ili jednadžbama:

$$\begin{array}{c} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1s} x_s \lesseqqgtr b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{ms} x_s \lesseqqgtr b_m \end{array}$$

tako da linearna funkcija cilja:

$$f(x_1, \ldots, x_s) = c_1 x_1 + \ldots + c_s x_s$$

ima ekstrem tj. minimum ili maksimum.

Na ovaj način matematički formulirani problem linearnog programiranja rješavamo simpleks-metodom prema slijedećoj dispoziciji:

1. Uvedemo dopunske varijable i njima nejednadžbe promijenimo u jednadžbe. Ako nastupa nejednadžba sa znakom »$\leqq$«, onda odgovarajuću dopunsku varijablu pribrojimo; ako pak nastupa nejednadžba sa znakom »$\geqq$«, onda odgovarajuću dopunsku varijablu odbijemo. Svi koeficijenti koji u funkciji cilja odgovaraju dopunskim varijablama jednaki su 0.

2. Uvedemo umjetne varijable. U odgovarajućim jednadžbama i nejednadžbama te varijable pribrojimo. Umjetne varijable ne uvodimo samo u onim jednadžbama koje smo dobili iz nejednadžbi sa znakom »$\leqq$«. U funkciji cilja svim umjetnim varijablama propišemo dovoljno velike koeficijente M.

3. Sastavimo tabelu prema uzorku tabele 1. u 1. točki ovoga poglavlja.

4. Ustanovimo bazu vektorskog prostora. U bazu spadaju jedinični vektori koji odgovaraju pribrojenim dopunskim i svim umjetnim varijablama.

5. Tabeli dopišemo dodatni redak diferencija $z_j - c_j$, gdje indeks j zauzima vrijednosti 0, 1, 2, ..., n. Kako je $c_0 = 0$, to je $z_0 - c_0 = z_0$; ova je vrijednost jednaka skalarnom produktu komponenata vektora $\mathbf{P}^0$ i koeficijenata c_i koji odgovaraju baza̧ičnim vektorima. Za vrijednost indeksa $j = 1, 2, \ldots, n$ je diferencija $z_j - c_j$ jednaka za c_j smanjenom skalarnom produktu komponenata a_{ij} vektora $\mathbf{P}^j$ i koeficijenata c_i koji odgovaraju baza̧ičnim vektorima.

6. Odredimo vektor $\mathbf{P}^k$, koji uvedemo u novu bazu.

a) Pri računanju minimuma funkcije cilja, u dodatnom retku odredimo najveću pozitivnu diferenciju prema obrascu:

$$z_k - c_k = \max_j (z_j - c_j)$$

Ovoj najvećoj diferenciji odgovara vektor $\mathbf{P}^k$, koji uvedemo u novu bazu.

b) Pri računanju maksimuma funkcije cilja u dodatnom retku odredimo sličnim obrascem po apsolutnoj vrijednosti najveći negativni broj; tom broju odgovara vektor koji uvedemo u novu bazu.

7. Odredimo vektor $\mathbf{P}^r$, koji odstranimo iz prvobitne baze. Svaku komponentu vektora $\mathbf{P}^0$ dijelimo homolognom komponentom vektora $\mathbf{P}^k$, koji uvedemo u bazu; pri tom uzimamo u obzir samo pozitivne komponente vektora $\mathbf{P}^k$. Među ovim razlomcima odredimo najmanji prema obrascu:

$$\Theta = \frac{x_r}{a_{rk}} = \min_i \frac{x_i}{a_{ik}} \qquad (a_{ik} > 0)$$

Najmanjemu od ovih razlomaka odgovara vektor $\mathbf{P}^r$, koji odstranimo iz prvobitne baze.

8. Transformiramo koeficijente u prvobitnoj tabeli; tako dobivamo novu tabelu i njoj odgovarajuće novo moguće rješenje. Prvobitnu tabelu transformiramo po slijedećem transformacijskom zakonu:

a) Brojeve u retku koji odgovara odstranjenom vektoru $\mathbf{P}^r$ dijelimo ključnim elementom a_{rk}, pa ih stoga transformiramo prema obrascu:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$$

b) Brojeve u svim drugim recima transformiramo po obrascu:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{ik} \qquad (i \neq r)$$

Ovaj transformacijski obrazac možemo prikazati shemom u tabeli 1.

TABELA 1. TRANSFORMACIJSKA SHEMA

	$\mathbf{P}^j$	$\mathbf{P}^k$
← $\mathbf{P}^r$	a_{rj}	$\mathbf{a}_{rk}$
	a_{ij}	a_{ik}
	X	
$z_j - c_j$		
→ $\mathbf{P}^k$	a'_{rj} ↓	1
	a'_{ij}	0

c) Tabelu možemo transformirati i tako da njoj odgovarajuću matricu premultipliciramo transformacijskom matricom $\mathbf{T}_{rk}$ koju dobivamo iz jedinične matrice reda $m + 1$ ovako:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 & -\frac{a_{1k}}{a_{rk}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{r-1,k}}{a_{rk}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_{rk}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{r+1,k}}{a_{rk}} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{mk}}{a_{rk}} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{m+1,k}}{a_{rk}} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

9. Nakon transformacije dobivamo novu tabelu i njoj odgovarajuće novo moguće rješenje.

10. Ustanovimo da li se novo moguće rješenje može još poboljšati. Poboljšanje je moguće:

a) ako je u primjeru računanja minimuma funkcije cilja još neka diferencija $z_j - c_j$ u posljednjem retku pozitivna;

b) ako je u primjeru računanja maksimuma funkcije cilja još neka diferencija $z_j - c_j$ u posljednjem retku negativna.

11. Ako je poboljšanje izračunanog mogućeg rješenja moguće, ponavljamo iteraciju i počinjemo računanje po ovoj dispoziciji s točkom 6. Ako poboljšanje nije moguće, onda je izračunano moguće rješenje optimalno i račun je završen.

Prema ovoj dispoziciji u nastavku ćemo riješiti numerički dva problema linearnog programiranja, prvi za minimum a drugi za maksimum funkcije cilja.

1. *primjer*. Uzmimo problem smjese koji smo razmatrali i grafički riješili u 8. točki II. poglavlja. Podatke za taj problem daje tabela 2. Dobili smo slijedeću matematičku formulaciju:

TABELA 2. PODACI ZA PROBLEM SMJESE

Minimum troškova		Tablete		Potrebe
		P	Q	
Vitamini	A	4	1	7
	B	3	4	15
Cijene		17	14	
Količine		x	y	

Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabla x i y koje odgovaraju nejednadžbama:

$$4x + y \geqq 7$$
$$3x + 4y \geqq 15$$

tako da funkcija cilja

$$f(x, y) = 17x + 14y$$

ima minimum.

Linearni program prema točkama gornje dispozicije riješimo ovako:

1. Od lijeve strane prve nejednadžbe oduzmemo nenegativnu dopunsku varijablu, t, a od lijeve strane druge nenegativnu dopunsku varijablu u; tako od nejednadžbi dobivamo jednadžbe:

$$4x + y - t = 7$$
$$3x + 4y - u = 15$$

Pri tom funkcija cilja:

$$f(x, y, t, u) = 17x + 14y + 0t + 0u$$

ostaje u stvari nepromijenjena.

2. Lijevoj strani prve jednadžbe pribrojimo nenegativnu umjetnu varijablu v, a lijevoj strani druge nenegativnu umjetnu varijablu z; tako iz prijašnjih jednadžbi dobivamo:

$$4x + y - t + v = 7$$
$$3x + 4y - u + z = 15$$

U funkciji cilja objema umjetnim varijablama propišemo dovoljno velik koeficijent M = 100. Tako dobivamo funkciju cilja:

$$f(x, y, t, u, v, z) = 17x + 14y + 0t + 0u + 100v + 100z$$

Nakon uvođenja umjetnih varijabla dobivamo prvo moguće rješenje linearnog programa:

$$x = 0,\ y = 0,\ t = 0,\ u = 0,\ v = 7,\ z = 15,$$

kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja:

$$100.7 + 100.15 = 2\,200$$

3. Sastavimo prvi dio tabele 3. U daljnjim se dijelovima ove tabele vidi kako se rješava linearni program simpleks-metodom.

4. Vektori $\mathbf{P}^5$ i $\mathbf{P}^6$, koji odgovaraju umjetnim varijablama v i z, sastavljaju bazu dvodimenzionalnog vektorskog prostora V^2.

5. Prvom dijelu tabele dopišemo dodatni redak diferencije $z_j - c_j$. Broj $z_0 - c_0 = z_0$ izračunamo ovako:

$$100.7 - 100.15 = 2\,200$$

Broj $z_1 - c_1$ izračunamo ovako:

$$100.4 + 100.3 - 17 = 683$$

Slično izračunamo i sve ostale brojeve ovoga retka.

6. Odredimo vektor koji uvodimo u novu bazu. U dodatnom retku diferencija $z_j - c_j$ je najveći pozitivni broj 683, koji odgovara vektoru $\mathbf{P}^1$. Stoga uvedemo u novu bazu vektor $\mathbf{P}^1$.

TABELA 3. RJEŠAVANJE LINEARNOG PROGRAMA ZA MINIMUM FUNKCIJE CILJA PO SIMPLEKS-METODI

Minimum			c_j		17	14			100	100
					x	y	t	u	v	z
T			c_i	$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$	$\mathbf{P}^2$	$\mathbf{P}^3$	$\mathbf{P}^4$	$\mathbf{P}^5$	$\mathbf{P}^6$
1/4			100 ← $\mathbf{P}^5$	7	**4**	1	−1		1	
−3/4	1		100 $\mathbf{P}^6$	15	3	4		−1		1
−683/4		1	$z_j - c_j$	2200	**683**	486	−100	−100		
1	−1/13		17 → $\mathbf{P}^1$	7/4	1	1/4	−1/4		1/4	
	4/13		100 ← $\mathbf{P}^6$	39/4		**13/4**	3/4	−1	−3/4	1
	−1261/13	1	$z_j - c_j$	4019/4		**1261/4**	283/4	−100	−683/4	
			17 $\mathbf{P}^1$	1	1		−4/13	1/13	4/13	−1/13
			14 → $\mathbf{P}^2$	3		1	3/13	−4/13	−3/13	4/13
			$z_j - c_j$	59			−2	−3	−98	−97

7. Odredimo vektor koji odstranjujemo iz prvobitne baze. U tu svrhu uspoređujemo kvocijente:

$$7 : 4 \text{ i } 15 : 3$$

Kako je prvi kvocijent manji, to iz baze odstranimo njemu odgovarajući vektor $\mathbf{P}^5$.

8. Prvi dio tabele transformiramo prema propisanom transformacijskom zakonu. Brojeve u prvom retku dijelimo ključnim koeficijentom $a_{11} = 4$. Broj $a_{02} = 15$ u drugom retku transformiramo ovako:

$$a'_{02} = 15 - \frac{7}{4} \cdot 3 = \frac{39}{4}$$

Slično transformiramo još sve druge brojeve drugoga retka i sve brojeve u trećem dodatnom retku. Tabelu možemo transformirati i tako da njoj odgovarajuću matricu premultipliciramo transformacijskom matricom:

$$\mathbf{T}_{11} = \left\| \begin{array}{rrr} 1/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 \\ -683/4 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Ta je matrica upisana na lijevoj strani prvoga dijela tabele.

9. Nakon transformacije dobivamo drugi dio tabele i njemu odgovarajuće drugo moguće rješenje:

$$x = 7/4,\ y = 0,\ t = 0,\ u = 0,\ v = 0,\ z = 39/4$$

kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja:

$$17 \cdot \frac{7}{4} - 100 \cdot \frac{39}{4} = \frac{4019}{4}$$

10. Izračunano drugo moguće rješenje može se još poboljšati jer u dodatnom retku diferencija $z_j - c_j$ ima još pozitivnih brojeva.

11. Računanje nastavljamo počevši sa 6. točkom dispozicije. Računanje daje tabela 3. Nakon druge iteracije dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$x = 1,\ y = 3,\ t = 0,\ u = 0,\ v = 0,\ z = 0,$$

kojemu odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja:

$$17.1 + 14.3 = 59$$

Pogledajmo još vezu između prvog i optimalnog mogućeg rješenja linearnog programa. Prvom mogućem rješenju odgovaraju vektori:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}^2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}^3 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}^4 = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}^5 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}^6 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

i matrica:

$$\mathbf{A} = \| \mathbf{P}^1\, \mathbf{P}^2\, \mathbf{P}^3\, \mathbf{P}^4\, \mathbf{P}^5\, \mathbf{P}^6 \| = \| \mathbf{B} \;\; -\mathbf{E} \;\; \mathbf{E} \| = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Pri tom je:

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

Vektori $\mathbf{P}^5$ i $\mathbf{P}^6$ sastavljaju početnu bazu vektorskog prostora. Optimalnom mogućem rješenju odgovaraju vektori:

$$\mathbf{P}_0^1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}_0^2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}_0^3 = \begin{Vmatrix} -4/13 \\ 3/13 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}_0^4 = \begin{Vmatrix} 1/13 \\ -4/13 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}_0^5 = \begin{Vmatrix} 4/13 \\ -3/13 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}_0^6 = \begin{Vmatrix} -1/13 \\ 4/13 \end{Vmatrix}$$

i matrica:

$$\mathbf{A}_0 = \| \mathbf{P}_0^1\, \mathbf{P}_0^2\, \mathbf{P}_0^3\, \mathbf{P}_0^4\, \mathbf{P}_0^5\, \mathbf{P}_0^6 \| = \| \mathbf{E} \;\; -\mathbf{B}^{-1} \;\; \mathbf{B}^{-1} \| =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -4/13 & 1/13 & 4/13 & -1/13 \\ 0 & 1 & 3/13 & -4/13 & -3/13 & 4/13 \end{Vmatrix}$$

Pri tom je:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{Vmatrix} 4/13 & -1/13 \\ -3/13 & 4/13 \end{Vmatrix}$$

Vektori $\mathbf{P}^1$ i $\mathbf{P}^2$ sastavljaju konačnu bazu vektorskog prostora.

Na ovom se primjeru lako možemo uvjeriti da važe obrasci (4), (5), (6), (7), (8) i (9) prijašnje točke ovoga poglavlja. Da važi obrazac (5), možemo se uvjeriti npr. ovako:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}_0 = \begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -4/13 & 1/13 & 4/13 & -1/13 \\ 0 & 1 & 3/13 & -4/13 & -3/13 & 4/13 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \mathbf{A}$$

2. *primjer*. Uzmimo proizvodni problem linearnog programirnja koji smo razmatrali i grafički riješili u 9. točki II. poglavlja. Podatke za taj problem daje tabela 4.

TABELA 4. PODACI ZA PROIZVODNI PROBLEM

Maksimum dohotka		Proizvodi		Raspoložive količine
		P	Q	
Sirovine	A	1	3	21
	B	2	3	24
	C	2	1	16
Cijene		5	4	
Količine		x	y	

Za taj smo problem dobili slijedeću matematičku formulaciju: Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabla x i y koje odgovaraju nejednadžbama:

$$\begin{aligned} x + 3y &\leqq 21 \\ 2x + 3y &\leqq 24 \\ 2x + y &\leqq 16 \end{aligned}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x, y) = 5x + 4y$$

ima minimum.

Linearni program prema točkama gornje dispozicije riješimo ovako:

1. Lijevoj strani prve nejednadžbe pribrojimo nenegativnu dopunsku varijablu t, lijevoj strani druge nenegativnu dopunsku varijablu u, a lijevoj strani treće nenegativnu varijablu v; tako iz nejednadžbi dobivamo jednadžbe:

$$\begin{aligned} x + 3y + t \qquad\qquad &= 21 \\ 2x + 3y \qquad + u \qquad &= 24 \\ 2x + y \qquad\qquad + v &= 16 \end{aligned}$$

Pri tom funkcija cilja:

$$f(x, y, t, u, v) = 5x + 4y + 0\,t + 0\,u + 0\,v$$

ostaje u stavri nepromijenjena.

2. U ovom primjeru nije potrebno uvoditi umjetne varijable jer prvo moguće rješenje dobivamo već nakon uvođenja dopunskih varijabla. Stoga linearni program ima prvo moguće rješenje:

$$x = 0,\ y = 0,\ t = 21,\ u = 24,\ v = 16$$

kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja:

$$5.0 + 4.0 + 0.21 + 0.24 + 0.16 = 0$$

3. Sastavimo prvi dio tabele 5. U daljnjim se dijelovima ove tabele vidi kako se rješava linearni program simpleks-metodom.

4. Jedinični vektori $\mathbf{P}^3$, $\mathbf{P}^4$ i $\mathbf{P}^5$, koji odgovaraju dopunskim varijablama, sastavljaju bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora V^3.

5. Prvom dijelu tabele dopišemo dodatni redak diferencija $z_j - c_j$. Broj $z_0 - c_0 = z_0$ izračunamo ovako:

$$0.21 + 0.24 + 0.16 = 0$$

Broj $z_1 - c_1$ izračunamo ovako:

$$0.1 + 0.2 + 0.2 - 5 = -5$$

Slično izračunamo i sve druge brojeve toga retka.

6. Odredimo vektor koji uvodimo u novu bazu. U dodatnom je retku najmanji negativni broj -5, koji odgovara vektoru $\mathbf{P}^1$. Stoga u novu bazu uvodimo vektor $\mathbf{P}^1$.

7. Odredimo vektor koji odstranjujemo iz prvobitne baze. U tu svrhu uspoređujemo kvocijente:

$$21 : 1,\ 24 : 2 \text{ i } 16 : 2$$

Kako je treći kvocijent najmanji, to u novu bazu uvodimo vektor $\mathbf{P}^5$.

8. Prvi dio tabele transformiramo prema propisanom transformacijskom zakonu. Možemo je transformirati i tako da matricu koja joj odgovara premultipliciramo transformacijskom matricom:

$$\mathbf{T}_{31} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Ova je matrica upisana na lijevoj strani prvoga dijela tabele.

9. Nakon transformacije dobivamo drugi dio tabele i njemu odgovarajuće drugo moguće rješenje:

$$x = 8,\ y = 0,\ t = 13,\ u = 8,\ v = 0,$$

kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja:

$$5.8 + 4.0 + 0.13 + 0.8 + 0.0 = 40$$

TABELA 5. RJEŠAVANJE LINEARNOG PROGRAMA ZA MAKSIMUM FUNKCIJE CILJA PO SIMPLEKS-METODI

Maksimum		c_j		5	4			
				x	y	t	u	v
T	c_i		$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$	$\mathbf{P}^2$	$\mathbf{P}^3$	$\mathbf{P}^4$	$\mathbf{P}^5$
1 −1/2	0	$\mathbf{P}^3$	21	1	3	1		
1 −1	0	$\mathbf{P}^4$	24	2	3		1	
1/2	0	$\leftarrow\mathbf{P}^5$	16	**2**	1			1
5/2 1	z_j	$-c_j$	0	−**5**	−4			
1 −5/4	0	$\mathbf{P}^3$	13		5/2	1		−1/2
1	0	$\leftarrow\mathbf{P}^4$	8		**2**		1	−1
−1/4 1	5	$\rightarrow\mathbf{P}^1$	8	1	1/2			1/2
5/2 1	z_j	$-c_j$	40		−**3/2**			3/4
	0	$\mathbf{P}^3$	3			1	−5/4	3/4
	4	$\rightarrow\mathbf{P}^2$	4		1		1/2	−1/2
	5	$\mathbf{P}^1$	6	1			−1/4	3/4
	z_j	$-c_j$	46				3/4	7/4

10. Izračunano moguće rješenje može se još poboljšati jer je u dodatnom retku još jedan negativan broj.

11. Rješavanje nastavljamo počevši sa 6. točkom dispozicije. Računanje daje tabela 5. Nakon druge iteracije dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$x = 6,\ y = 4,\ t = 3,\ u = 0,\ v = 0,$$

kojemu odgovara najveća vrijednost funkcije cilja:

$$5.6 + 4.4 + 0.3 + 0.0 + 0.0 = 46$$

Pogledajmo još u ovom primjeru vezu između prvog i optimalnog mogućeg rješenja linearnog programa. Prvom mogućem rješenju odgovaraju vektori:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}^2 = \begin{Vmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}^3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}^4 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}^5 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

i matrica:

$$\mathbf{A} = \| \mathbf{P}^1\, \mathbf{P}^2\, \mathbf{P}^3\, \mathbf{P}^4\, \mathbf{P}^5 \| = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Vektori $\mathbf{P}^3$, $\mathbf{P}^4$ i $\mathbf{P}^5$ sastavljaju početnu bazu vektorskog prostora. Kako u konačnoj bazi vektori $\mathbf{P}^3_0$, $\mathbf{P}^2_0$ i $\mathbf{P}^1_0$ sastavljaju jediničnu matricu, to je:

$$\mathbf{B} = \| \mathbf{P}^3\, \mathbf{P}^2\, \mathbf{P}^1 \| = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Optimalnom mogućem rješenju odgovaraju vektori:

$$\mathbf{P}_0^1 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}_0^2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}_0^3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}_0^4 = \begin{Vmatrix} -5/4 \\ 1/2 \\ -1/4 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{P}_0^5 = \begin{Vmatrix} 3/4 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{Vmatrix}$$

i matrica:

$$\mathbf{A}_0 = \| \mathbf{P}_0^1 \, \mathbf{P}_0^2 \, \mathbf{P}_0^3 \, \mathbf{P}_0^4 \, \mathbf{P}_0^5 \| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 \end{Vmatrix}$$

Kako u prvobitnoj bazi vektori $\mathbf{P}^3$, $\mathbf{P}^4$ i $\mathbf{P}^5$ sastavljaju jediničnu matricu, to je:

$$\mathbf{B}^{-1} = \| \mathbf{P}_0^3 \, \mathbf{P}_0^4 \, \mathbf{P}_0^5 \| = \begin{Vmatrix} 1 & -5/4 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \end{Vmatrix}$$

I u ovom se primjeru možemo uvjeriti da važe obrasci (4), (5), (6), (7), (8) i (9) prijašnje točke ovoga poglavlja.

Vježbe

1. Riješi pomoću simpleks-metode ovaj problem smjese: Tri tipa vitamina A, B, i C možemo kupiti u četiri tipa tableta P, Q, R i S. Prva tableta sadrži 4 jedinice prvog i 2 jedinice drugog vitamina; druga sadrži 1 jedinicu prvog, 5 jedinica drugog i 2 jedinice trećeg vitamina; treća sadrži 2 jedinice prvog i 4 jedinice trećeg vitamina; četvrta sadrži 2 jedinice prvog, 4 jedinice drugog i 1 jedinicu trećeg vitamina. Prva tableta stoji 2, druga 6, treća 8 i četvrta 5 novčanih jedinica. Želimo nabaviti najmanje 80 jedinica prvog, 40 jedinica drugog i 120 jedinica trećeg vitamina. Koliko tableta svakoga tipa moramo kupiti da bismo zadovoljili zahtjev za vitaminima i da bi troškovi nabave bili najmanji?

(3 iteracije; 5, 6, 27, 0; 262)

2. Riješi pomoću simpleks-metode slijedeći proizvodni problem: Proizvodno poduzeće raspolaže sa 3 vrste sirovina; od prve ima 120, od druge 80 i od treće 240 jedinica. Sirovine koristi u proizvodnji 5 vrsta proizvoda. Pri izradi jedinice prvog proizvoda potroši jednu jedinicu prve, dvije jedinice druge i četiri jedinice treće sirovine; pri izradi drugog treba 5 jedinica druge i 1 jedinica treće sirovine; pri izradi trećeg proizvoda potrebne su 4 jedinice prve, 2 jedinice druge i 5 jedinica treće sirovine; pri izradi četvrtog proizvoda trebaju 2 jedinice prve i 1 jedinica druge sirovine; pri izradi jedinice petog proizvoda potroše se 4 jedinice prve i 4 jedinice treće sirovine. Jedinicu prvog proizvoda poduzeće prodaje po 20, drugog po 10, trećeg po 40, četvrtog po 20 i petog po 15 novčanih jedinica. Kako poduzeće treba planirati proizvodnju da bi od prodaje imalo najveći prihod?

(2 iteracije: 40/3, 0, 80/3, 0; 4000/3 i alternativno 3 iteracije; 40/3, 0, 0, 160/3; 4000/3)

6. Degeneracija

U drugoj smo točki ovoga poglavlja pri poboljšanju mogućeg rješenja linearnog programa sa m nezavisnih uvjetnih jednadžbi polazili od poznatog nedegeneriranog baznog mogućeg rješenja:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0, \ldots, 0\}$$

Kako je ovo rješenje bazično i nedegenerirano, to ima točno m pozitivnih komponenata. Nakon uvođenja pozitivnog broja Θ iz ovog smo dobili novo moguće rješenje:

$$\mathbf{x}' = \{x_1 - \Theta\, a_{1k}, \ldots, x_r - \Theta\, a_{rk}, \ldots, x_m - \Theta\, a_{mk}, 0 \ldots, \Theta, \ldots, 0\}$$

Ovo rješenje općenito nije bazično jer ima m + 1 pozitivnih komponenata. Iz njega dobivamo bazično rješenje ako pozitivni broj Θ odaberemo tako da jedna od prvih m komponenata postane jednaka 0. U tu svrhu uzeli smo četvrtu pretpostavku (d), da je među pozitivnim razlomcima skupine:

$$\frac{x_1}{a_{1k}}, \ldots, \frac{x_r}{a_{rk}}, \ldots, \frac{x_m}{a_{mk}}$$

samo jedan najmanji; ovaj najmanji razlomak određuje broj Θ.

U ovoj točki raspravit ćemo mogućnost kad četvrta pretpostavka (d) ne važi i kad su među navedenim razlomcima barem dva najmanja. Ako ima takvih najmanjih razlomaka više, onda dobivamo novo bazično moguće rješenje, koje međutim ima manje od m pozitivnih komponenata, pa je stoga degenerirano. U takvom primjeru nije jednoznačno određen vektor $\mathbf{P}^r$ koji odstranimo iz prvobitne baze. Ovu teškoću pri određivanju vektora $\mathbf{P}^r$ u slučaju degeneracije možemo premostiti infinitezimalno malom promjenom linearnog programa.

Uzmimo linearni program s uvjetnom vektorskom jednadžbom:

$$x_1\, \mathbf{P}^1 + \ldots + x_n\, \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^0$$

i s funkcijom cilja:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1\, x_1 + \ldots + c_n\, x_n$$

Ovaj linearni program promijenimo tako da umjesto vektora $\mathbf{P}^0$ uzmemo vektor:

$$\mathbf{P}(\varepsilon) = \mathbf{P}^0 + \varepsilon\, \mathbf{P}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{P}^2 + \ldots + \varepsilon^n \mathbf{P}^n \tag{1}$$

Pri tom je ε proizvoljno malen pozitivan broj. Stoga se vektor $\mathbf{P}(\varepsilon)$ proizvoljno malo razlikuje od vektora $\mathbf{P}^0$ i konvergira prema njemu ako ε konvergira prema 0. Nakon te promjene dobivamo novi linearni program s uvjetnom vektorskom jednadžbom:

$$x_1\, \mathbf{P}^1 + \ldots + x_n\, \mathbf{P}^n = \mathbf{P}(\varepsilon)$$

i s nepromijenjenom funkcijom cilja.

Uzmimo poznato bazično i nedegenerirano moguće rješenje prvobitnog linearnog programa:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0\}$$

U ovom je rješenju prvih m komponenata pozitivnih, a sve druge jednake su 0; za ovo rješenje važi jednadžba:

$$x_1\, \mathbf{P}^1 + x_2\, \mathbf{P}^2 + \ldots + x_m\, \mathbf{P}^m = \mathbf{P}^0$$

Ako lijevoj i desnoj strani ove jednadžbe pribrojimo izraz:

$$\varepsilon\, \mathbf{P}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{P}^2 + \ldots + + \varepsilon^n \mathbf{P}^n$$

dobivamo jednadžbu:

$$x_1 \mathbf{P}^1 + x_2 \mathbf{P}^2 + \dots + x_m \mathbf{P}^m + \varepsilon \mathbf{P}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{P}^2 + \dots + \varepsilon^n \mathbf{P}^n = \mathbf{P}(\varepsilon)$$

U ovoj jednadžbi sve vektore $\mathbf{P}^j$ izrazimo pomoću baznih vektora prema obrascima:

$$\mathbf{P}^j = a_{1j} \mathbf{P}^1 + a_{2j} \mathbf{P}^2 + \dots + a_{mj} \mathbf{P}^m \quad (j = 1, 2, \dots n)$$

pa dobivamo jednadžbu:

$$\begin{aligned} x_1 \mathbf{P}^1 + x_2 \mathbf{P}^2 + \dots + x_m \mathbf{P}^m + \varepsilon (a_{11} \mathbf{P}^1 + a_{21} \mathbf{P}^2 + \dots + \\ + a_{m1} \mathbf{P}^m) + \varepsilon^2 (a_{12} \mathbf{P}^1 + a_{22} \mathbf{P}^2 + \dots + a_{m2} \mathbf{P}^m) + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \varepsilon^n (a_{1n} \mathbf{P}^1 + a_{2n} \mathbf{P}^2 + \dots + a_{mn} \mathbf{P}^m) = \mathbf{P}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Nakon preuređenja članova dobivamo jednadžbu:

$$\begin{aligned} (x_1 + \varepsilon a_{11} + \varepsilon^2 a_{12} + \dots + \varepsilon^n a_{1n}) \mathbf{P}^1 + (x_2 + \varepsilon a_{21} + \varepsilon^2 a_{22} + \dots - \varepsilon^n a_{2n}) \mathbf{P}^2 + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + (x_m + \varepsilon a_{m1} + \varepsilon^2 a_{m2} + \dots + \varepsilon^n a_{mn}) \mathbf{P}^m = \mathbf{P}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Ako napišemo:

$$y_i = x_i + \varepsilon a_{i1} + \varepsilon^2 a_{i2} + \dots + \varepsilon^n a_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{2}$$

onda iz prijašnje dobivamo jednadžbu:

$$y_1 \mathbf{P}^1 + y_2 \mathbf{P}^2 + \dots + y_m \mathbf{P}^m = \mathbf{P}(\varepsilon) \tag{3}$$

Otuda slijedi da promijenjeni linearni program ima moguće rješenje:

$$\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m, 0, \dots, 0\} \tag{4}$$

Ovo je rješenje bazično i nedegenerirano, što možemo uvidjeti ovako: svakoj pozitivnoj komponenti x_i mogućeg rješenja prvobitnog linearnog programa odgovara homologna komponenta y_i mogućeg rješenja promijenjenog linearnog programa; kako je međutim ε proizvoljno malen pozitivni broj, možemo ga odabrati uvijek tako da je ovo moguće rješenje nedegenerirano.

Promijenjeni linearni program je tako povezan s prvobitnim da iz njega dobivamo prvobitni kad ε teži prema 0. Promijenjeni linearni program iskoristimo da u slučaju degeneracije jednoznačno odredimo vektor koji odstranimo iz baze.

Bazično i nedegenerirano moguće rješenje (4) promijenjenog linearnog programa odgovara vektorskoj jednadžbi (3). Vektor $\mathbf{P}^k$ koji uvedemo u novu bazu izrazimo kao linearni sastav baznih vektora ovako:

$$\mathbf{P}^k = a_{1k} \mathbf{P}^1 + \dots + a_{rk} \mathbf{P}^r + \dots + a_{mk} \mathbf{P}^m$$

Ako ovu jednadžbu pomnožimo pozitivnim brojem Θ_i oduzmemo je od jednadžbe (3), dobivamo jednadžbu:

$$(y_1 - \Theta a_{1k}) \mathbf{P}^1 + \dots + (y_r - \Theta a_{rk}) \mathbf{P}^r + \dots + (y_m - \Theta a_{mk}) \mathbf{P}^m + \Theta \mathbf{P}^k = \mathbf{P}(\varepsilon)$$

Iz toga možemo jednoznačno odrediti vektor koji odstranimo iz baze. Kao u prvobitnom linearnom programu tako i u promijenjenom odredimo pozitivni broj Θ tako da samo jedna od diferencija

$$y_i - \Theta a_{ik}$$

postane jednaka 0; pri tom uzimamo u obzir samo one diferencije u kojima je $a_{ik} > 0$. Broj Θ određuje najmanji od razlomaka

$$\frac{y_i}{a_{ik}} \quad (i = 1, \ldots, m \ \& \ a_{ik} > 0)$$

Dokažimo da je među ovim razlomcima samo jedan najmanji. U tu je svrhu dovoljno ako dokažemo da su svi ti razlomci različiti. Uzmimo takav proizvoljan razlomak i napišimo ga u proširenom obliku ovako:

$$\frac{y_i}{a_{ik}} = \frac{x_i + \varepsilon a_{i1} + \varepsilon^2 a_{i2} + \ldots + \varepsilon^k a_{ik} + \ldots + \varepsilon^n a_{in}}{a_{ik}}$$

$$\frac{y_i}{a_{ik}} = \frac{x_i}{a_{ik}} + \varepsilon \frac{a_{i1}}{a_{ik}} + \varepsilon^2 \frac{a_{i2}}{a_{ik}} + \ldots + \varepsilon^k + \ldots + \varepsilon^n \frac{a_{in}}{a_{ik}}$$

U uzastopnim razlomcima nastupaju uzastopne potencije broja ε; zbog toga su ovi razlomci različiti.

Pogledajmo još kako određujemo vektor $\mathbf{P}^r$ koji odstranjujemo iz baze. Uzmimo da pri numeričkom rješavanju linearnog programa dođemo do degeneracije i to stoga što su barem dva od spomenutih razlomaka u prvobitnom linearnom programu najmanja. Uzmimo da su najmanji i jednaki razlomci:

$$\frac{x_r}{a_{rk}} \quad \text{i} \quad \frac{x_s}{a_{sk}}$$

U ovom primjeru linearni program promijenimo prema opisanom postupku; u promijenjenom linearnom programu dolazimo do uspoređivanja ovih dvaju razlomaka:

$$\frac{y_r}{a_{rk}} = \frac{x_r + \varepsilon a_{r1} + \varepsilon^2 a_{r2} + \ldots + \varepsilon^n a_{rn}}{a_{rk}}$$

$$\frac{y_s}{a_{sk}} = \frac{x_s + \varepsilon a_{s1} + \varepsilon^2 a_{s2} + \ldots + \varepsilon^n a_{sn}}{a_{sk}}$$

Ova su dva razlomka po prijašnjem različita i jedan je od njih sigurno manji; odredimo ga tako da pri uspoređivanju privlačimo sve više članova brojnika, sve dok ne dođemo do razlike koja pokazuje koji je od razlomaka manji.

Ako u brojnicima uzimamo u obzir samo prvi član, onda ne dobivamo odluku jer su zbog degeneracije razlomci:

$$\frac{x_r}{a_{rk}} \quad \text{i} \quad \frac{x_s}{a_{sk}}$$

jednaki. Nakon toga uspoređujemo druga dva razlomka:

$$\frac{a_{r1}}{a_{rk}} \quad \text{i} \quad \frac{a_{s1}}{a_{sk}}$$

Među njima izaberemo onaj koji je manji; ako su pak i ova dva razlomka jednaka, onda uspoređujemo slijedeća dva razlomka:

$$\frac{a_{r2}}{a_{rk}} \quad \text{i} \quad \frac{a_{s2}}{a_{sk}}$$

Među njima izaberemo onaj koji je manji. Ako još nema odluke, nastavljamo uspoređivanje daljnjih parova razlomaka sve dok ne dođemo do odluke.

Uzmimo da opisanim uspoređivanjem ustanovimo da je od razlomaka:

$$\frac{y_r}{a_{rk}} \quad \text{i} \quad \frac{y_s}{a_{sk}}$$

manji prvi, kojemu odgovara indeks r; u tom primjeru indeks r jednoznačno određuje vektor $\mathbf{P}^r$ koji odstranimo iz baze.

Time što smo odredili vektor $\mathbf{P}^r$ promijenjeni je linearni program odslužio i računanje nastavljamo pri prvobitnom linearnom programu.

Primjer. Poduzeće od 3 proizvodna faktora S_1, S_2 i S_3 proizvodi 3 tipa proizvoda P_1, P_2 i P_3. U proizvodnji 1 jedinice prvog proizvoda potroši 4 jedinice prvog, 2 jedinice drugog i 1 jedinicu trećeg proizvodnog faktora; u proizvodnji 1 jedinice drugog proizvoda potroši 6 jedinica prvog, 2 jedinice drugog i 1 jedinicu trećeg proizvodnog faktora; u proizvodnji jedne jedinice trećeg proizvoda potroši 2 jedinice prvog, 1 jedinicu drugog i 2 jedinice trećeg proizvodnog faktora. Od prvog proizvodnog faktora poduzeće raspolaže sa 40, drugog 20 i od trećeg sa 60 jedinica. Poduzeće prodaje jedinicu prvog proizvoda po 5, drugog po 3 i trećeg po 6 novčanih jedinica. Kako da poduzeće planira proizvodnju da bi od prodanih proizvoda imalo najveći prihod?

Podatke za taj proizvodni problem daje tabela 1.

TABELA 1. PODACI ZA PROIZVODNI PROBLEM

		Proizvodi			Raspoložive količine
		P_1	P_2	P_3	
Proizvodni faktori	S_1	4	6	2	40
	S_2	2	2	1	20
	S_3	1	1	2	60
Cijene		5	3	6	
Količine		x	y	z	

Za problem dobivamo slijedeću matematičku formulaciju: Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabla x, y i z koje odgovaraju nejednadžbama:

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 2z &\leqq 40 \\ 2x + 2y + z &\leqq 20 \\ x + y + 2z &\leqq 60 \end{aligned}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x, y, z) = 5x + 3y + 6z$$

ima maksimum.

Linearni program riješimo numerički simpleks-metodom prema dispoziciji iz prijašnje točke.

1. Lijevoj strani nejednadžbi pribrojimo uzastopno nenegativne dopunske varijable t, u i v, pa iz nejednadžbi dobivamo jednadžbe:

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 2z + t \qquad\qquad &= 40 \\ 2x + 2y + z \quad + u \qquad &= 20 \\ x + y + 2z \qquad\qquad + v &= 60 \end{aligned}$$

Pri tom funkcija cilja:

$$f(x, y, z, t, u, v) = 5x + 3y + 6z + 0.t + 0.u + 0.v$$

ostaje u stvari nepromijenjena.

2. Nije potrebno uvoditi umjetne varijable jer prvo moguće rješenje:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ t = 40,\ u = 20,\ v = 60$$

dobivamo već nakon uvođenja dopunskih varijabla. Ovom rješenju odgovara vrijednost funkcije cilja:

$$5.0 + 3.0 + 6.0 + 0.40 + 0.20 + 0.60 = 0$$

3. Sastavimo prvi dio tabele 2. U daljnjem ova tabela daje rješavanje linearnog programa po simpleks-metodi.

4. Jedinični vektori $\mathbf{P}^4$, $\mathbf{P}^5$ i $\mathbf{P}^6$, koji odgovaraju dopunskim varijablama, sastavljaju bazu vektorskog prostora V^3.

5. Prvom dijelu tabele dopišemo dodatni redak diferencija $z_j - c_j$.

6. Odredimo vektor $\mathbf{P}^k$ koji uvedemo u novu bazu. U dodatnom retku najmanji je negativni broj -6, koji odgovara vektoru $\mathbf{P}^3$; zbog toga ovaj vektor uvedemo u bazu.

7. Odredimo vektor $\mathbf{P}^r$ koji odstranimo iz prvobitne baze. U tu svrhu uspoređujemo kvocijente:

$$40 : 2 = 20,\ 20 : 1 = 20,\ 60 : 2 = 30,$$

koje sastavljaju homologne komponente vektora $\mathbf{P}^0$ i vektora $\mathbf{P}^3$. Kako su prva dva koeficijenta najmanja i jednaka, to ne možemo odrediti odstranjeni vektor. Za njegovo određivanje uspoređujemo najprije kvocijente:

$$4 : 2 = 2 \text{ i } 2 : 1 = 2,$$

koje sastavljaju homologne komponente vektora $\mathbf{P}^1$ i $\mathbf{P}^3$. Kako su i ova dva razlomka jednaka, to još ne možemo odrediti odstranjeni vektor. Određivanje nastavljamo tako da uspoređujemo kvocijente:

$$6 : 2 = 3 \text{ i } 2 : 1 = 2,$$

koje sastavljaju homologne komponente vektora $\mathbf{P}^2$ i $\mathbf{P}^3$. Budući da je od ovih kvocijenata drugi manji, to iz baze odstranimo vektor $\mathbf{P}^5$.

TABELA 2. RJEŠAVANJE LINEARNOG PROGRAMA SIMPLEKS-METODOM

Maksimum	c_j			5	3	6			
				x	y	z	t	u	v
T	c_i		$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$	$\mathbf{P}^2$	$\mathbf{P}^3$	$\mathbf{P}^4$	$\mathbf{P}^5$	$\mathbf{P}^6$
1 −2	0	$\mathbf{P}^4$	40	4	6	2	1		
1	0	← $\mathbf{P}^5$	20	2	2	**1**		1	
−1 1	0	$\mathbf{P}^6$	60	1	1	2			1
3 1	z_j	$-c_j$	0	−5	−3	**−6**			
	0	$\mathbf{P}^4$	0		2		1	−2	
	6	→ $\mathbf{P}^3$	20	2	2	1		1	
	0	$\mathbf{P}^6$	20	−3	−3			−2	1
	z_j	$-c_j$	120	7	9			6	

8. Prvi dio tabele transformiramo po propisanom transformacijskom zakonu. Možemo ga transformirati i tako da njemu odgovarajuću matricu premultipliciramo transformacijskom matricom **T** koja je upisana na lijevoj strani prvoga dijela tabele.

9. Nakon transformacije dobivamo drugi dio tabele i njemu odgovarajuće moguće rješenje:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 20,\ t = 0,\ u = 0,\ v = 20,$$

kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja:

$$5.0 + 3.0 + 6.20 + 0.0 + 0.0 + 0.20 = 120$$

10. Kako u dodatnom posljednjem retku diferencija $z_j - c_j$ nema više nijednog negativnog broja, to je izračunano moguće rješenje optimalno.

Vježbe

1. Riješi po simpleks-metodi problem smjese:

Tri tipa vitamina A, B i C možemo kupiti u četiri tipa tableta P,Q, R i S. Prva tableta sadrži po 1 jedinicu prvog i trećeg vitamina; druga sadrži 1 jedinicu drugog i 2 jedinice trećeg vitamina; treća sadrži 1 jedinicu prvog i 2 jedinice drugog vitamina; četvrta sadrži 1 jedinicu prvog, 2 jedinice drugog i 1 jedinicu trećeg vitamina. Prva tableta stoji 1, druga 3, treća 4 i četvrta 6 novčanih jedinica. Želimo nabaviti najmanje 2 jedinice prvog, 5 jedinica drugog i 4 jedinice trećeg vitamina. Koliko tableta svakoga tipa moramo nabaviti da bismo zadovoljili potrebe za vitaminima i da bi troškovi nabave bili najmanji?

(4 iteracije: 0, 1, 0, 2; 15)

7. Numeričko obrađivanje linearnih programa elektronskim računalima

Postupak za numeričko računanje optimalnog mogućeg rješenja linearnog programa po simpleks-metodi je nakon uzastopnih iteracija sasvim determiniran, pa ga stoga možemo obaviti pomoću elektronskog računala prema odgovarajućem programu. U tu svrhu elektronski računski centri raspolažu već izrađenim programima za numeričko rješavanje linearnih programa po simpleks-metodi. Raspoloživi programi za elektronsku obradu obično ne daju samo optimalno moguće rješenje, već pored toga još i neke druge pokazatelje koji omogućuju da se obrađivani problem ekonomski iscrpnije analizira.

Neki strojni programi priređeni su tako da stroj ispiše samo optimalno moguće rješenje i možda još neke druge značajnije pokazatelje; drugi su međutim priređeni tako da stroj ispiše i moguća međurješenja. U takvim je programima moguće uspoređivati uzastopna moguća rješenja i u ekonomskoj analizi pored optimalnog uzimati u obzir još i neka suboptimalna moguća rješenja. Neki strojni programi su tako priređeni da daju različite informacije o stabilnosti optimalnog mogućeg rješenja te o osjetljivosti optimalnog mogućeg rješenja na promjene vrijednosti nekih parametra. Takvu analizu strojno izračunanih rezultata susrest ćemo pri obradi proizvodnog problema u 2. točki XII. poglavlja.

Gospodarski značajni problemi linearnog programiranja su s gledišta količine numeričkog računanja tako opsežni da se ne mogu riješiti bez elektronskog računala. Pri tom se troškovi računanja pojavljuju kao izvanredno važna okolnost u cjelokupnom istraživanju. Te troškove ne smijemo ni kod jednog istraživanja zanemariti jer se inače može dogoditi da je čitavo istraživanje preskupo, pa stoga i ekonomski besmisleno.

Budući da su kod nas u upotrebi brojni tipovi elektronskih računala i da brzo nastaju nove i nove generacije elektronskih računala, riskantno je davati neke konkretne sugestije o troškovima elektronskog računanja na duže vrijeme. Ovdje preporučujemo veliku brižljivost s obzirom na zahtjeve pri računanju i opreznost u izboru računskog centra. Za slučaj kad su linearni programi numerički vrlo ambiciozni, preporučljivo je zatražiti ponude od nekoliko računskih centara.

XI. DUALNOST

1. Matrične igre

Igre dijelimo u dva bitno različita tipa, u igre na sreću i strateške igre. *Igra na sreću* ili *hazardna igra* jest svaka igra čiji je ishod slučajan i u kojoj igrač svojim individualnim sposobnostima ne može utjecati na njezin krajnji rezultat. Kockanje, lutrija, tombola, ruleta itd. primjeri su takvih igara. Matematički obrađujemo hazardne igre metodama računa vjerojatnosti. *Strateška igra* svaka je igra u kojoj na ishod igre utječe individualna sposobnost igrača. U nekim strateškim igrama na rezultat igre može utjecati i sreća. Tipičan primjer strateške igre u kojoj na ishod utječu gotovo isključivo samo subjektivne kvalitete igrača jest šah. Neke igre kartama, kao što su npr. tarok, bridge, poker itd. primjeri su strateških igara u kojima ishod ne zavisi samo o sposobnosti sudionika nego i o raspodjeli karata, koja je slučajna. Strateške igre proučavamo matematički naročito algebarskim metodama, a djelomice i metodama računa vjerojatnosti. Granu primijenjene matematike koja se bavi strateškim igrama nazivamo teorijom strateških igara ili ukratko *teorijom igara*.

Teorija igara razvila se tek posljednjih desetljeća. Iz prijašnjih vremena spomena su vrijedna istraživanja E. Borela[1] i J. von Neumanna[2]. Općenito, malo je bilo učinjeno na području teorije igara dok nije god. 1944. izašlo opsežno djelo J. von Neumanna i O. Morgensterna[3], u kojem su autori postavili temelje teorije igara i upozorili na mogućnosti njezine upotrebe u privredi. Teorija igara nije upotrebljiva samo za proučavanje različitih strateških igara što se igraju za zabavu, već dolazi u obzir kao uspješno sredstvo istraživanja i na drugim ozbiljnijim područjima čovjekova djelovanja. Primjenjujemo je pri istraživanju konfliktnih situacija koje izviru iz suprotstavljanja ili iz suprotnih interesa antagonističkih sudionika od kojih svaki za sebe nastoji postići što veću korist ili ugodnost. Takvo je područje na primjer i privreda; u njoj nastupa mnoštvo osoba i organizacija s vrlo različitim a i suprotnim interesima; stoga je privreda po svojoj strukturi slična strateškoj igri s ogromnim brojem sudionika.

U teoriji igara upotrebljavamo riječ igra u dva značenja. U širem značenju riječi igra je skupina igraćih rekvizita i mnoštvo svih uputa ili pravila što reguliraju njezin tok. Svatko koji igra igru mora poznavati njezina pravila, a mora ih se i pridržavati. U užem smislu riječi igra je jednokratna praktična izvedba igre u širem

[1] E. Borel: Sur les systems de formes lineaires a déterminant symetrique gauche et la théorie général du jeu, C. R. de l'Academie des Sciences, No. 184, 1927.

[2] J. von Neumann: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math. Annalen, No. 100, 1928.

[3] J. von Neumann, O. Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton N. Y., 1944.

smislu riječi; u ovom značenju riječi upotrebljavamo umjesto riječi igra i riječi partija, utakmica, match itd. U igri može sudjelovati različit broj igrača. Pri tom igrača shvaćamo više općenito; pod igračem nekad razumijevamo fizičku osobu, a nekad i koaliciju igrača koji tvore jedan team sa zajedničkim namjenama. Pod brojem igrača razumijevamo zapravo broj suprotnih strana. U igri s jednim igračem nastupa samo jedan igrač ili samo jedan team; tu npr. spada patience. Igrama s jednim igračem nećemo se baviti; bavit ćemo se međutim igrama s dva igrača, u kojima nastupaju dva igrača ili dva teama sa suprotnim namjenama; tu npr. ubrajamo šah iako je konzultacijski. Pri takvom značenju riječi, bridge je igra dvaju igrača pa makar ga igrala četvorica. Osim igara s dva igrača poznajemo igre s proizvoljnim brojem igrača, no o njima nećemo raspravljati.

Igra u užem smislu riječi sastoji se od *poteza* koje prave pojedini igrači. Što je potez u šahu, svakome je jasno; u igri bridge potez je za vrijeme licitacije svaka izjava kao npr. 2 pik, pass, 3 srce itd., a za vrijeme igre svako izigravanje karte. Igre se međusobno razlikuju po broju poteza. U nekim je igrama broj poteza unaprijed određen, a u drugima taj broj nije određen. Stoga razlikujemo igre s jednim potezom, s dva poteza itd., i igre u kojima broj poteza nije propisan. Šah je npr. igra u kojoj broj poteza nije određen. Igrač koji je na potezu ima za svoj potez više mogućnosti ili *alternativa*, među kojima izabire jednu. U šahu npr. igrač na potezu ima više alternativa ili mogućih poteza, među kojima izabire onaj koji mu se čini najbolji. Broj alternativa koje ima igrač na potezu nekad može biti konačan, a nekad i beskonačan. Ovdje ćemo se baviti samo igrama u kojima je broj poteza konačan i u kojima pri svakom potezu ima samo konačno mnogo alternativa; takve igre zovemo *konačnim*.

Igrač na potezu udubljuje se u nastalu situaciju, ocjenjuje svoje i protivnikove alternative, jednom riječi prosuđuje sve moguće kombinacije, pa se onda odlučuje za izabranu alternativu. Teoretski možemo zamisliti da igrač već u početku igre prosudi sve moguće situacije u kojima bi se mogao naći i da se već unaprijed odlučuje kako će igrati u pojedinim situacijama. Po toj teoretskoj hipotezi igrač ima unaprijed razrađen nacrt kako će igrati; u tom slučaju igrač ima već od početka na raspolaganju različite strategije, među kojima odabire onu koja mu se čini najboljom. Prema tome je *strategija* redoslijed svih odluka koje može do kraja igre da napravi igrač u pojedinim situacijama. Unaprijed odrediti sve moguće strategije praktički je izvedivo samo kod nekih naročito jednostavnih igara; ako je međutim igra donekle zapletena, onda određivanje svih mogućih strategija prelazi ljudske sposobnosti. Kod šaha je npr. broj svih mogućih strategija golem, da ih nitko ne može unaprijed predvidjeti i ocijeniti. Igre se razlikuju i po tome kako su igrači informirani o prijašnjem toku igre. Ako je svaki igrač uvijek i sasvim informiran o prijašnjem toku igre, govorimo o *igri s potpunom informacijom*. Takva je igra npr. šah. Nekad su igrači informirani o prijašnjem toku igre samo djelomično ili uopće nisu informirani; stoga možemo govoriti o igrama s različitim načinima i stupnjevima informiranosti igrača.

Svaka igra završava određenim ishodom, koji se izražava nekim dobicima, priznanjima, ocjenama ili na neki drugi način. Partija šaha npr. može završiti na tri načina: igrač dobiva jednu točku ako pobjeđuje, 0 točaka ako gubi i 1/2 točke ako igra remis. U nastavku ćemo rezultate igara izražavati brojevima koje ćemo nazivati dobicima, bez obzira na to da li su oni pozitivni ili negativni i bez obzira na to kakva je priroda dobitaka. Ako u igri dobitke izražavamo novčano, onda igrači koji izgube plaćaju igračima koji dobivaju iznose što su određeni pravilima igre.

U svakom takvom primjeru suma svih primanja jednaka je sumi svih plaćanja, a da se pri tom ukupni imetak igrača nije promijenio. Ako iznose koje pojedini igrači prime od drugih označimo pozitivnim predznakom, a one koje izgube negativnim predznakom, onda je suma svih dobitaka na kraju igre jednaka 0. Takve igre zovemo igre sa *sumom 0* ili *antagonističke igre*. Osim ovih ništa manje nisu značajne igre u kojima suma dobitaka nije jednaka 0; zovemo ih *neantagonističke igre*. U nastavku ćemo se baviti samo antagonističkim igrama ili igrama sa sumom nula.

Uzmimo dosta jednostavnu antagonističku igru koju igraju samo dva igrača A i B i u kojoj svaki igrač napravi samo po jedan potez. Igrač A na potezu ima na raspolaganju m alternativa koje označimo uzastopno brojevima:

$$1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

Igrač B na potezu ima na izboru n alternativa koje označimo brojevima:

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Za igru vrijede slijedeća pravila: Pri izboru svoje alternative nijedan igrač nije informiran o tome koju je alternativu odabrao ili koju će odabrati protivnik. Svaki igrač izabire alternativu tako da napiše odgovarajući broj. O dobicima pravila igre određuju slijedeće: Ako igrač A odabere alternativu s brojem i, a igrač B alternativu s brojem j, onda igra završava tako da igrač B plaća igraču A iznos a_{ij}. Kako igrač A ima na izbor m, a igrač B n alternativa, pravila određuju ukupno $m \times n$ mogućih dobitaka. Igru s ovakvim pravilima daje tabela 1. Iznosi koje igrač B

TABELA 1. PODACI ZA MATRIČNU ANTAGONISTIČKU IGRU

		Igrač B			
	Alternativa	1	2	...	n
Igrač A	1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
	⋮	⋮	⋮		⋮
	m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

mora plaćati igraču A pri svim mogućim ishodima igara sastavljaju *matricu igre*:

$$\mathbf{M} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| = \| a_{ij} \|$$

Brojevi u matrici igre mogu biti pozitivni, negativni ili jednaki 0; ako je broj pozitivan, A dobiva i B plaća, ako je broj negativan B dobiva i A plaća, a ako je broj jednak 0, onda svaki igrač ostaje pri svome. Kako matrica igre potpuno određuje igru i kako se dobici obaju igrača kompenziraju, to takvu igru zovemo *matričnom* *igrom sa sumom 0* ili *antagonističkom matričnom igrom.* U nastavku ćemo se baviti samo takvim igrama.

Uzmimo antagonističku matričnu igru koju igraju igrači A i B i koju određuje matrica igre reda 3×4:

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} 6 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

U igri A napiše jedan od brojeva 1, 2 ili 3, a igrač B jedan od brojeva 1, 2, 3 ili 4, a da ne zna što je zapisao A. Pošto su brojevi napisani, igrač B plaća igraču A iznos koji je određen odgovarajućim elementom matrice igre. Pri zapisivanju broja A ima na izbor 3 alternative; kako je na potezu samo jedanput, to ove alternative predstavljaju njegove tri moguće strategije. Označimo te strategije uzastopno sa A_1, A_2 i A_3. Slično vrijedi za igrača B, koji ima na izbor četiri strategije B_1, B_2, B_3 i B_4. Ako odigra strategiju A_1, A može dobiti 6, 2, 4 ili 7 novčanih jedinica s obzirom na to koju strategiju odigra B; sigurno međutim dobiva najmanje 2 novčane jedinice. Ako odigra strategiju A_2, A može dobiti 3, 7, 5 ili 6, ali ne može dobiti manje od 3 novčane jedinice. Ako pak odigra strategiju A_3, A može dobiti 2, 2, 1 ili 3, s tim da ne može dobiti manje od 1 novčane jedinice. Slično možemo ustanoviti za igrača B. Ako odigra strategiju B_1, B može izgubiti 6, 3 ili 2 novčane jedinice, ali sigurno neće izgubiti više od 6 novčanih jedinica. Ako odigra strategiju B_2, B može izgubiti 2, 7 ili 2, ali ne može izgubiti više od 7 novčanih jedinica. Ako odigra strategiju B_3, B može izgubiti 4, 5 ili 1, ali ne može izgubiti više od 5 novčanih jedinica. Ako odigra strategiju B_4, B može izgubiti 7, 6 ili 3, ali ne više od 7 novčanih jedinica.

Uspoređujmo kod igrača A njegove strategije A_1 i A_3. Ako u matrici igre uspoređujemo brojeve prvoga i trećega retka, primjećujemo da nijedan broj trećega retka nije veći od homolognog broja prvoga retka. To onda znači da strategija A_3 za igrača A nije povoljnija od strategije A_1; u takvom slučaju kažemo da strategija A_1 *dominira* nad strategijom A_3. Kako strategija nad kojom dominira neka druga strategija za igrača nije povoljna, to je pri daljnjem proučavanju igre možemo zanemariti. Nešto slično primjećujemo i kad uspoređujemo strategije B_3 i B_4 igrača B. Kako su u matrici igre svi brojevi četvrtoga stupca veći od homolognih brojeva trećega stupca, to strategija B_3 dominira nad B_4. Budući da zbog toga igrač B neće nikad izabrati strategiju B_4, to je možemo u daljnjem proučavanju igre zanemariti. Ako zanemarimo sve strategije nad kojima dominira neka strategija, možemo igru znatno pojednostavniti jer za nju dobivamo matricu igre manjega reda. Ako u proučavanju igre zanemarimo strategiju A_3 nad kojom dominira A_1, i strategiju B_4 nad kojom dominira B_3, onda dobivamo matricu igre manjega reda:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{Vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{Vmatrix}$$

U proučavanju antagonističkih matričnih igara praktički nas razlozi prisiljavaju da najprije zanemarimo sve strategije nad kojima dominira neka druga strategija. Time snižavamo red matrice igre i nekad znatno olakšavamo proučavanje igre.

2. Matrične igre sa sedlom

Obradimo antagonističku matričnu igru dvaju igrača A i B pomoću matrice igre **M** reda $m \times n$; daje ju tabela 1. Svaki igrač izabire takvu strategiju da ishod igre bude za njega najpovoljniji. Igrač A je odabire tako da što više dobije, a igrač B tako da što manje izgubi.

TABELA 1. ANTAGONISTIČKA MATRIČNA IGRA

			Igrač B					
Strategije			B_1	$\cdots$	B_{j_0}	$\cdots$	B_n	$\min\limits_j a_{ij}$
		Alternative	1	$\cdots$	j_0	$\cdots$	n	
Igrač A	A_1	1	a_{11}	$\cdots$	a_{1j_0}	$\cdots$	a_{1n}	a_1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	A_{i_0}	i_0	a_{i_01}	$\cdots$	$a_{i_0j_0}$	$\cdots$	a_{i_0n}	a_{i_0}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	A_m	m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj_0}	$\cdots$	a_{mn}	a_m
$\max\limits_i a_{ij}$			b_1	$\cdots$	b_{j_0}	$\cdots$	b_n	

Pregledajmo najprije strategije igrača A. Ako odabere strategiju A_i time da zapiše broj i, onda dobiva jedan od dobitaka:

$$a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}$$

ovisno o tome koju strategiju odabere B. U najnepovoljnijem slučaju A dobiva najmanje najmanji od tih dobitaka; taj je jednak:

$$\min_j a_{ij} = a_i$$

Ovi najmanji dobici su za uzastopne vrijednosti indeksa i upisani u posljednjem desnom stupcu tabele. Za igrača A je najpovoljnija ona strategija kojoj odgovara najveći od tih dobitaka; taj je jednak:

$$\max_i a_i = \max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0}$$

Redak s indeksom i_0 zove se *maksimum-redak*; ako izabere strategiju A_{i0}, koja odgovara maksimum-retku, igrač A time osigurava da neće dobiti manje od A_{i0} novčanih jedinica.

Pogledajmo još strategije igrača B. Ako izabere strategiju B_j time da zapiše broj j, plaća jedan od iznosa:

$$a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}$$

ovisno o tome koju je strategiju izabrao A. U najnepovoljnijem primjeru B plaća najveći od tih iznosa; taj je jednak:

$$\max_i a_{ij} = b_j$$

Ove najveće isplate su za uzastopne vrijednosti indeksa j napisane u donjem dijelu tabele. Za igrača B najpovoljnija je ona strategija kojoj odgovara najmanja od tih isplata; ta je jednaka:

$$\min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = b_{j_0}$$

Stupac isplata s indeksom j_0 zove se *minimum-stupac*; ako odabere strategiju B_j, koja odgovara minimum-stupcu, igrač B time sebi osigurava da ne plaća više od b_{j_0}.

Za strategije obaju igrača vrijedi izreka: *Ako igrač* A *kod najpovoljnije strategije dobiva najmanje iznos:*

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

i ako igrač B *kod strategije koja je za njega najnepovoljnija plaća najviše iznos:*

$$\min_j \max_i a_{ij},$$

onda za oba iznosa važi nejednadžba:

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqq \min_j \max_i a_{ij}$$

Dokaz. Za sve retke u matrici igre važe nejednadžbe:

$$\min_j a_{ij} \leqq a_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

i za sve stupce važe nejednadžbe:

$$\max_i a_{ij} \geqq a_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Stoga važe sve jednadžbe:

$$\min_j a_{ij} \leqq a_{ij} \leqq \max_i a_{ij}$$

i nejednadžbe:

$$\min_j a_{ij} \leqq \max_i a_{ij}$$

Takva nejednadžba važi i za maksimum-redak na lijevoj strani i za minimum-stupac na desnoj strani; iz toga slijedi nejednadžba koju je trebalo dokazati.

Među antagonističkim matričnim igrama jednostavnošću se odlikuje igra za koju važi jednadžba:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i_0 j_0} = v$$

U takvoj je igri u matrici igre najmanji element maksimum-retka jednak najvećem elementu minimum-stupca; taj matrični element naziva se *sedlo*, a njegova vrijednost *vrijednost matrične igre.*

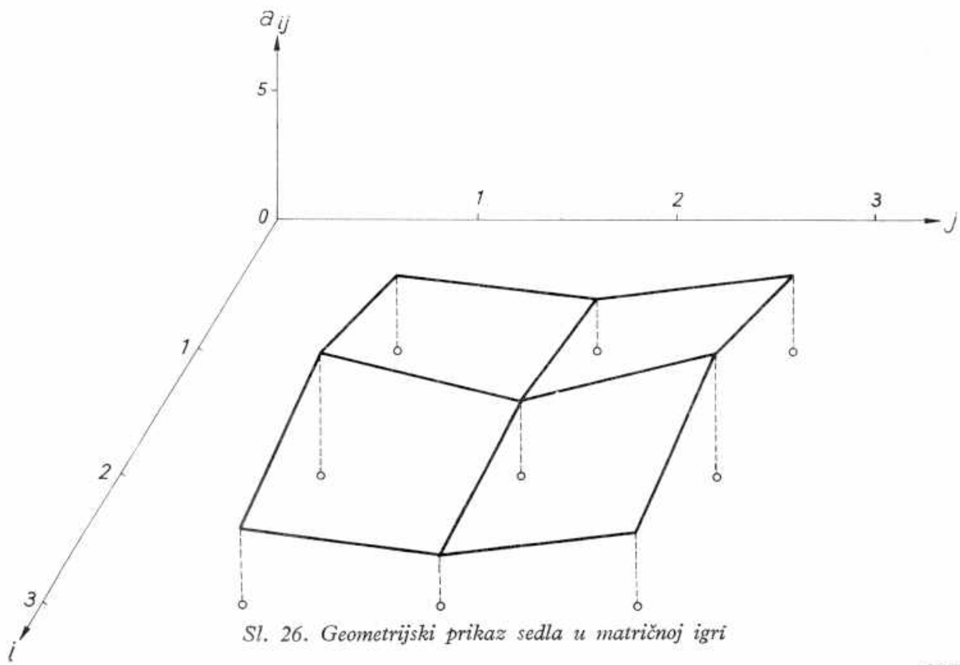
Matrična igra dvaju igrača koju daje tabela 1. ima sedlo $a_{i_0 j_0}$ u križanju maksimum-retka s indeksom i_0 i minimum-stupca j_0; stoga je vrijednost matrične igre jednaka $v = a_{i_0 j_0}$. U igri je za igrača A najpovoljnije da igra strategiju A_{i_0} jer njome osigurava sebi najmanje dobitak $a_{i_0 j_0}$, dok je za igrača B najpovoljnija strategija B_{j_0}, jer njome osigurava, da ne plaća više od $a_{i_0 j_0}$.

Primjer. Uzmimo antagonističku igru dvaju igrača koju daje tabela 2. Za igrača A je najpovoljnija strategija A_2, koja odgovara maksimum- (drugom) retku; njome sebi u svakom slučaju osigurava najmanje 3 novčane jedinice. Za igrača B je najpovoljnija strategija B_2, koja odgovara minimum- (drugom) stupcu; njome u svakom slučaju osigurava da neće plaćati više od 3 novčane jedinice. Kako su najmanji element maksimum-retka i najveći element minimum-stupca u križanju drugog retka i drugog stupca, to matrična igra ima u tom križanju sedlo i vrijednost igre jednaka je vrijednosti elementa 3 na sedlu.

TABELA 2. MATRIČNA IGRA SA SEDLOM

			Igrač B			min
Strategije			B_1	B_2	B_3	
		Alternative	1	2	3	
Igrač A	A_1	1	3	2	3	2
	A_2	2	5	**3**	5	**3**
	A_3	3	3	2	3	2
		max	5	**3**	5	

Riječ sedlo utemeljena je geometrijskim prikazom dobitaka u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu na sl. 26. Na apscisu nanesemo alternative 1, 2 i 3 igrača A, a na ordinatu alternative 1, 2 i 3 igrača B; svakom paru alternativa u



Sl. 26. Geometrijski prikaz sedla u matričnoj igri

odgovarajućem dobitku odgovara određena vrijednost matričnog elementa, koju mjerimo na aplikatnoj osi. Sedlo i vrijednost razmatrane matrične igre prikazuje na slici točka S (2,2,3).

Vježbe

1. Odredi optimalne strategije i vrijednost igre u antagonističkoj igri sa sedlom koju određuje matrica igre:

a) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}$ (2, 2; 3)

b) $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$ (2, 2; 3)

c) $\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$ (2, 3; 4)

3. Matrične igre bez sedla

U prijašnjoj smo točki obrađivali antagonističke matrične igre sa sedlom; u takvim je igrama veoma lako odrediti optimalne strategije igrača kao i vrijednost igre. No ako igra nema sedla, onda je njezino rješavanje teže. Razmotrimo opću antagonističku matričnu igru dvaju igrača A i B; igrač A na potezu ima na izbor alternative 1, 2, ..., m, dok igrač B na potezu ima alternative 1, 2, ..., n; dobitke određuje matrica igre:

$$\mathbf{M} = \| a_{ij} \|$$

reda $m \times n$; pretpostavljamo da igra nema sedla. Podatke za igru daje tabela 1.

TABELA 1. ANTAGONISTIČKA MATRIČNA IGRA

			Igrač B				
Vjerojatnosti			y_1	...	y_j	...	y_n
		Alternative	1	...	j	...	n
Igrač A	x_1	1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
	x_i	i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
	x_m	m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Kako za svaku matričnu igru važi nejednadžba ili jednadžba:

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqq \min_j \max_i a_{ij}$$

i kako za igre sa sedlom važi jednadžba:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij},$$

to za igre bez sedla važi nejednadžba:

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$$

Pretpostavimo da igrači odigraju više partija. S obzirom na izbore alternativa u pojedinim partijama, kod igrača A razlikujemo ove dvije mogućnosti:

1) igrač se uvijek odlučuje za i-tu alternativu, a da se nikad ne odlučuje za neku drugu,

2) igrač se odlučuje za različite alternative, i to za svaku s određenom vjerojatnosti. Označimo sa

$$x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m$$

vjerojatnosti koje odgovaraju njegovim uzastopnim alternativama. Ove vjerojatnosti odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq x_i \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

i jednadžbi:

$$x_1 + \ldots + x_m = 1$$

m tih vjerojatnosti:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_m\}$$

nazivamo strategijom igrača A; možemo je zamisliti kao vektor m-dimenzionalnog vektorskog prostora V^m. Strategija je *čista* ako je jedna od tih vjerojatnosti jednaka 1 a sve druge jednake 0, i *miješana* ako su barem dvije od tih vjerojatnosti pozitivne.

Slično vrijedi i za igrača B; i kod njega razlikujemo dvije mogućnosti:

1) igrač se neprekidno odlučuje za j-tu alternativu, a da se ne odlučuje za neku drugu. U tom je slučaju njegova strategija čista, a određuje ju vektor:

$$\mathbf{y}_j = \{0, \ldots, 1, \ldots 0\}$$

2) igrač se odlučuje za različite alternative, i to za svaku s određenom vjerojatnosti; u tom je slučaju njegova strategija miješana. Ako vjerojatnosti njegovih uzastopnih alternativa označimo sa

$$y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n,$$

onda njegovu strategiju izražava vektor:

$$\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

n-dimenzionalnog vektorskog prostora V^n. Komponente toga vektora odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq y_j \leqq 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

i jednadžbi:

$$y_1 + \ldots + y_n = 1$$

Za obrađivanu matričnu igru želimo izračunati optimalnu strategiju $\mathbf{x}_0$ igrača A i optimalnu strategiju $\mathbf{y}_0$ igrača B.

Izračunajmo u tu svrhu najprije srednju vrijednost dobitka igrača A u primjeru da sam izabere strategiju $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, a protivnik strategiju $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Igrač A dobiva dobit a_{ij} ako sam izabere alternativu i, a protivnik alternativu j; vjerojatnost da sam izabere alternativu i, jednaka je x_i, vjerojatnost da protivnik izabere alternativu j, jednaka je y_j. Stoga je vjerojatnost da igrač A dobije dobit a_{ij}, jednaka $x_i y_j$. Zato je srednja vrijednost dobitka igrača A jednaka:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y}$$

Ovu srednju vrijednost igrač A želi izborom strategije što više uvećati, dok je igrač B želi što više smanjiti.

Pretpostavimo da igrač A izabere svoju optimalnu strategiju $\mathbf{x}_0$; kako za njega kod koje god strategije igrača B nijedna druga strategija nije povoljnija, to za optimalnu strategiju važi nejednadžba:

$$E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \geqq E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Uzmimo još da igrač B odabere svoju optimalnu strategiju $\mathbf{y}_0$; kako za njega kod koje god strategije igrača A nijedna druga strategija nije povoljnija, to za optimalnu strategiju važi nejednadžba:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \leqq E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Ako igrač A izabere svoju optimalnu strategiju $\mathbf{x}_0$ a istovremeno igrač B svoju optimalnu strategiju $\mathbf{y}_0$, onda za srednje vrijednosti važe nejednadžbe:

$$E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \geqq E(\mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0) \geqq E(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$$

Dvije optimalne strategije $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ obaju protivnika nazivaju se *rješenje* ili *strateško sedlo igre*, a njoj odgovarajuća srednja vrijednost dobitka:

$$E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_{i,0} y_{j,0} = (\mathbf{x}_0)^T \mathbf{M} \mathbf{y}_0 = w$$

naziva se *vrijednost igre*. Iz posljednjih nejednadžbi vidimo da igrač A izborom optimalne strategije osigurava da dobije najmanje vrijednost igre w, i da igrač B izborom svoje optimalne strategije osigurava da neće izgubiti više od vrijednosti igre w.

Zadatak je pri antagonističkoj matričnoj igri izračunati njezino rješenje ili strateško sedlo te njezinu vrijednost. U tu svrhu nalazimo u teoriji strateških igara različite direktne metode rješavanja, kojima se međutim nećemo baviti. U nastavku ćemo obrađivati neko indirektno rješavanje metodama linearnog programiranja. Vidjet ćemo da se rješavanje svake antagonističke matrične igre može prevesti u rješavanje odgovarajućeg linearnog programa.

Uzmimo antagonističku matričnu igru koju daje tabela 1. Pretpostavimo, da je vrijednost w te igre pozitivna; to možemo uvijek postići bez štete za općenitost problema ako jednako povećamo sve elemente matrice igre, a nakon toga u rješenju jednako smanjimo vrijednost promijenjene igre.

Izračunajmo najprije optimalnu strategiju igrača A; radi jednostavnosti označimo je bez posebnog indeksa ovako:

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_m\}$$

Ova se strategija odlikuje osobinom da igrač A njome dobiva najmanje vrijednost igre w bez obzira na to koju strategiju odabere B. Ako B igra čistu strategiju

$$\mathbf{y}_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}$$

a A optimalnu strategiju $\mathbf{x}$, onda je srednja vrijednost dobitka igrača A jednaka:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) = a_{11} x_1 + \ldots + a_{m1} x_m$$

Kako ova srednja vrijednost ne može biti manja od vrijednosti igre w, to važi nejednadžba:

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{m1} x_m \geqq w$$

Slično dobivamo za čistu strategiju $\mathbf{y}_2 = \{0, 1, \ldots, 0\}$ igrača B nejednadžbu:

$$a_{12} x_1 + \ldots + a_{m2} x_m \geqq w$$

Slične nejednadžbe dobivamo za sve druge čiste strategije igrača B; za posljednju njegovu čistu strategiju $\mathbf{y}_n = \{0, 0, \ldots, 1\}$ dobivamo nejednadžbu:

$$a_{1n} x_1 + \ldots + a_{mn} x_m \geqq w$$

Pri tom su sve komponente optimalne strategije igrača A nenegativne i zadovoljavaju jednadžbu:

$$x_1 + \ldots + x_m = 1 \tag{1}$$

Ako sve napisane nejednadžbe podijelimo s vrijednošću igre w i ako pišemo:

$$u_i = \frac{x_i}{w} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

dobivamo nejednadžbe:

$$\begin{array}{c} a_{11} u_1 + \ldots + a_{m1} u_m \geqq 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} u_1 + \ldots + a_{mn} u_m \geqq 1 \end{array}$$

Pri tom se uvjeti nenegativnosti sačuvaju:

$$u_i \geqq 0$$

a jednadžba (1) prelazi u jednadžbu:

$$u_1 + \ldots + u_m = \frac{1}{w} \tag{3}$$

Igrač A nastoji da svojom strategijom što više poveća vrijednost igre w ili da što više smanji njezinu recipročnu vrijednost 1/w. Prema prijašnjem izlaganju dobivamo za njega slijedeći problem linearnog programiranja:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $u_1, \ldots, u_m$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$u_1 \geqq 0, \ \ldots, \ u_m \geqq 0$$

i uvjetnim nejednadžbama:

$$\begin{gathered} a_{11} u_1 + \ldots + a_{m1} u_m \geqq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} u_1 + \ldots + a_{mn} u_m \geqq 1 \end{gathered}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(u_1, \ldots, u_m) = u_1 + \ldots + u_m$$

ima minimum.

Ako riješimo ovaj linearni program, onda za varijable $u_1, \ldots, u_m$ dobivamo optimalno moguće rješenje, a nakon toga prema jednadžbama (2) komponente optimalne strategije igrača A; a iz jednadžbe (3) izračunamo još vrijednost igre w.

Izračunajmo još optimalnu strategiju igrača B, koju pišemo ovako:

$$\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

Ova se strategija odlikuje osobinom da igrač B njome gubi najviše vrijednost igre w bez obzira na to koju strategiju odabere A. Ako B odabere strategiju $\mathbf{y}$ i ako A izabere čistu strategiju:

$$\mathbf{x}_1 = \{1, 0, \ldots, 0\},$$

onda je srednja vrijednost gubitka igrača B jednaka:

$$E(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) = a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n$$

Kako ova srednja vrijednost ne prelazi vrijednost igre w, to važi nejednadžba:

$$a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n \leqq w$$

Slično dobivamo odgovarajuće nejednadžbe i za sve druge čiste strategije igrača A; za njegovu posljednju čistu strategiju $\mathbf{x}_m = \{0, 0, \ldots, 1\}$ dobivamo nejednadžbu:

$$a_{m1} y_1 + \ldots + a_{mn} y_n \leqq w$$

Pri tom su komponente optimalne strategije igrača B nenegativne i odgovaraju jednadžbi:

$$y_1 + \ldots + y_n = 1 \tag{4}$$

Ako napisane nejednadžbe podijelimo s vrijednoću igre w i pišemo:

$$v_j = \frac{y_j}{w}, \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

dobivamo nejednadžbe:

$$\begin{gathered} a_{11} v_1 + \ldots + a_{1n} v_n \leqq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} v_1 + \ldots + a_{mn} v_n \leqq 1 \end{gathered}$$

Pri tom se uvjeti nenegativnosti sačuvaju:

$$v_j \geqq 0,$$

a jednadžba (4) prelazi u jednadžbu:

$$v_1 + \ldots + v_n = \frac{1}{w}$$

Igrač B nastoji da svojom strategijom što više smanji vrijednost igre w ili da što više poveća njezinu recipročnu vrijednost 1/w. Stoga prema prijašnjem izlaganju dobivamo za njega slijedeći problem linearnog programiranja:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $v_1, \ldots, v_n$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$v_1 \geqq 0, \ \ldots, \ v_n \geqq 0$$

i uvjetnim nejednadžbama:

$$\begin{gathered} a_{11} v_1 + \ldots + a_{1n} v_n \leqq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} v_1 + \ldots + a_{mn} v_n \leqq 1 \end{gathered}$$

tako da funkcija cilja:

$$g(v_1, \ \ldots, \ v_n) = v_1 + \ldots + v_n$$

ima maksimum.

Ako riješimo taj linearni program, dobivamo za varijable $v_1, \ldots, v_n$ optimalno moguće rješenje i nakon toga prema jednadžbama (5) komponente optimalne strategije igrača B; a iz jednadžbe (6) izračunamo još vrijednost igre w.

Oba linearna programa koja upotrebljavamo za izračunavanje optimalnih strategija dvaju antagonističkih igrača međusobno su tijesno povezana i jedan drugome su dualni. Zbog toga ih možemo napisati tako kao što to vidimo u tabeli 2. U ta dva linearna programa minimum prve funkcije cilja jednak je maksimumu druge. Povezivanje takvih linearnih programa obrađivat ćemo u slijedećoj točki.

TABELA 2. MATRIČNOJ IGRI PRIREĐENI LINEARNI PROGRAMI

		max Σv_j	Igrač B			Ograni-čenja
	Vjerojatnosti		y_1	$\cdots$	y_n	
		Pomoćne varijable	v_1	$\cdots$	v_n	
min Σu_i	x_1	u_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	$\leqq 1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
igrač A	x_m	u_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	$\leqq 1$
		Ograničenja	$\geqq 1$	$\cdots$	$\geqq 1$	

Primjer. Riješimo antagonističku matričnu igru dvaju igrača A i B koju u novčanim jedinicama određuje kvadratna matrica igre drugoga reda:

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}$$

Kako igra nema sedla, to je riješimo s dva linearna programa koje zajedno daje tabela 3.

TABELA 3. PRIMJER POVEZIVANJA MATRIČNE IGRE S DVA LINEARNA PROGRAMA

Komponente strategija			Igrač B y_1	Igrač B y_2	Ograničenja
		Pomoćne varijable	v_1	v_2	
Igrač A	x_1	u_1	2	3	$\leqq 1$
	x_2	u_2	4	1	$\leqq 1$
		Ograničenja	$\geqq 1$	$\geqq 1$	

Iz tabele 3. dobivamo za pomoćne nenegativne varijable u_1 i u_2 linearni program:

$$\text{LP: } 2u_1 + 4u_2 \geqq 1 \ \& \ 3u_1 + u_2 \geqq 1; \ \min\ (f = u_1 + u_2)$$

Linearni program možemo riješiti nekom poznatom metodom; kako u njemu nastupaju samo dvije varijable, to ga možemo riješiti grafički kao što vidimo na sl. 27. Linearni program ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki F (3/10, 1/10) konveksnog skupa mogućih rješenja. Stoga linearni program ima optimalno moguće rješenje:

$$u_1 = \frac{3}{10} \quad \text{i} \quad u_2 = \frac{1}{10}$$

Ovom rješenju odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja:

$$\frac{1}{w} = f\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{5}$$

i stoga vrijednost matrične igre $w = 5/2$. Iz optimalnog mogućeg rješenja linearnog programa izračunamo komponente optimalne strategije igrača A ovako:

$$x_1 = wu_1 = \frac{3}{4} \quad \text{i} \quad x_2 = wu_2 = \frac{1}{4}$$

Iz ovih rezultata vidimo da je za igrača A najpovoljnija miješana strategija:

$$\mathbf{x} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\},$$

koja mu osigurava da u prosjeku u igri ne dobiva manje od $w = 5/2$ novčanih jedinica.

Slično iz tabele 3. za pomoćne nenegativne varijable v_1 i v_2 dobivamo linearni program:

$$\text{LP: } 2v_1 + 3v_2 \leqq 1 \;\&\; 4v_1 + v_2 \leqq 1;\; \max (g = v_1 + v_2)$$

I ovaj linearni program možemo, kao što vidimo na sl. 27, riješiti grafički. Linearni program ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki G (1/5 1/5) konveksnog skupa mogućih rješenja. Stoga linearni program ima optimalno moguće rješenje:

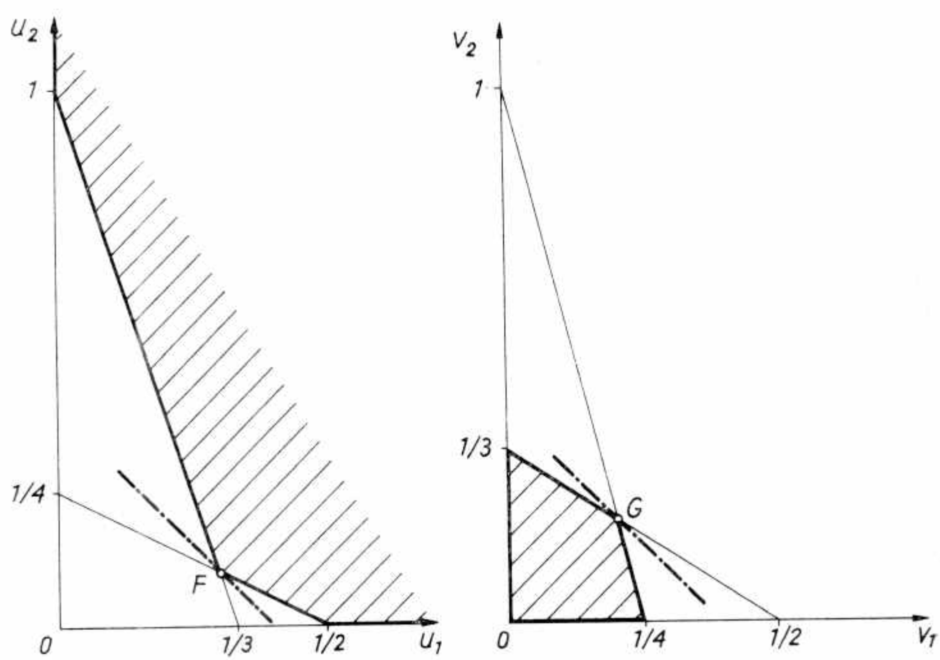
$$v_1 = \frac{1}{5} \quad \text{i} \quad v_2 = \frac{1}{5}$$

Tom rješenju odgovara najveća vrijednost funkcije cilja

$$\frac{1}{w} = g\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

Iz toga dobivamo istu vrijednost igre kao i prije $w = 5/2$. Iz optimalnog mogućeg rješenja linearnog programa izračunamo komponente optimalne strategije igrača B kako slijedi:

$$y_1 = wv_1 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad y_2 = wv_2 = \frac{1}{2}$$



Sl. 27. Grafičko rješavanje matrične igre

Ovi rezultati pokazuju da je za igrača B najpovoljnija miješana strategija:

$$\mathbf{y} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\},$$

koja mu osigura da u igri u prosjeku ne plaća više od $w = 5/2$ novčanih jedinica.

Vježbe

1. Odredi grafički optimalne strategije obaju igrača i vrijednost antagonističke matrične igre s matricom igre

$$\begin{Vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix}$$

($\mathbf{x} = \{7/11, 4/11\}$, $\mathbf{y} = \{5/11, 6/11\}$, $w = 46/11$)

2. Izračunaj simpleks-metodom optimalne strategije protivnika i vrijednost antagonističke matrične igre s matricom igre

$$\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{Vmatrix}$$

Analiziraj rješenja odgovarajućih linearnih programa.

($\mathbf{x} = \{5/7, 2/7\}$, $\mathbf{y} = \{3/7, 2/7\}$, $w = 29/7$)

3. Odredi grafički optimalne strategije igrača i vrijednost antagonističke matrične igre s matricom igre

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}$$

Analiziraj rezultate s obzirom na činjenicu da matrica igre ima sedlo.

($\mathbf{x} = \{0, 1\}$, $\mathbf{y} = \{0, 1\}$, $w = 4$)

4. Primarni i dualni linearni program

Svakom linearnom programu možemo pridružiti određeni drugi linearni program; oba su međusobno tako povezana da imaju jednake vrijednosti funkcija cilja i da optimalno moguće rješenje prvoga možemo dobiti čim saznamo za optimalno moguće rješenje drugoga. Prvobitni linearni program zove se *primarni*, a njemu pridruženi *dualni*. U toj točki obrađivat ćemo povezivanje tako pridruženih parova linearnih programa, dok ćemo njihovo povezivanje s antagonističkim matričnim igrama s dva igrača raspraviti u 7. točki.

Pretpostavimo da je primaran linearni program za minimum funkcije cilja koji smo već formulirali u prvoj točki VIII. poglavlja; nakon uvođenja dopunskih i umjetnih varijabla taj program izgleda ovako:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $x_1, \ldots, x_n$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti i uvjetnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

tako da linearna funkcija cilja:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

ima minimum.

U skladu s četvrtom točkom X. poglavlja uvodimo slijedeće matrice i vektore:

$$\mathbf{A} = \| \mathbf{B} \mid \ldots \mid \mathbf{E} \| = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \ldots & a_{1,n-m} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \ldots & a_{m,n-m} & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{b} = \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right\| \qquad \mathbf{P}^1 = \left\| \begin{array}{c} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} \right\| \quad \ldots \quad \mathbf{P}^n = \left\| \begin{array}{c} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{x} = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\| = \{x_1, \ldots, x_n\} \qquad \mathbf{c} = \| c_1 \ldots c_n \|$$

Pri tom parcijalnu matricu **B** sastavljaju komponente vektora koji sastavljaju bazu vektorskog prostora V^m, a koji odgovara optimalnom mogućem rješenju. Nakon uvođenja ovih matrica i vektora dobivamo slijedeću formulaciju linearnog programa:

Treba odrediti vektor **x** koji odgovara uvjetu nenegativnosti i uvjetnoj jednadžbi:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{P}^0 \equiv \mathbf{b}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$$

ima minimum.

Uzmimo, kao što smo učinili već u 4. točki X. poglavlja, da rješavanje linearnog programa simpleks-metodom počinjemo s prvim mogućim rješenjem:

$$\mathbf{x}^1 = \{0, \ldots, 0,\ b_1, \ldots, b_m\}$$

te da na kraju računanja dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0\},$$

kojemu odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja:

$$f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{c}\,\mathbf{x}^0 = \mathbf{c}^0\,\mathbf{x}^0 = z_0^0 = \mathbf{c}^0\,\mathbf{P}_0^0$$

pri tom je:

$$\mathbf{c}^0 = \| c_1 \ldots c_m \|$$

Optimalnom mogućem rješenju odgovaraju bazični vektori:

$$\mathbf{P}_0^1, \ldots, \mathbf{P}_0^m$$

i matrica:

$$\mathbf{A}_0 = \| \mathbf{E} \mid \ldots \mid \mathbf{B}^{-1} \|$$

Pri obrađivanju veze između početnog i optimalnog mogućeg rješenja izveli smo slijedeće obrasce:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}_0 \tag{1a, b}$$

$$\mathbf{P}_0^0 = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{P}^0 \qquad \mathbf{P}^0 = \mathbf{B}\,\mathbf{P}_0^0 \tag{2a, b}$$

$$\mathbf{P}_0^j = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{P}^j \qquad \mathbf{P}^j = \mathbf{B}\,\mathbf{P}_0^j \tag{3a, b}$$

$$\mathbf{c}^0\,\mathbf{A}_0 - \mathbf{c} \leqq \mathbf{0}$$

Ovom linearnom programu priredimo odgovarajući dualni linearni program. U tu svrhu uvedemo m varijabla $y_1, \ldots, y_m$, koje sastavljaju vektor:

$$\mathbf{y} = \| y_1 \ldots y_m \| = (y_1, \ldots, y_m)$$

m-dimenzionalnog vektorskog prostora. Broj ovih varijabla jednak je broju nezavisnih uvjetnih jednadžbi primarnog linearnog programa. Priređeni dualni linearni program formuliramo ovako:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $y_1, \ldots, y_m$ koje odgovaraju n uvjetnih linearnih jednadžbi:

$$\begin{gathered} a_{11}\,y_1 + \ldots + a_{m1}\,y_m \leqq c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\,y_1 + \ldots + a_{mn}\,y_m \leqq c_n \end{gathered}$$

tako da linearna funkcija cilja:

$$g\,(y_1, \ldots\, y_m) = b_1\,y_1 + \ldots + b_m\,y_m$$

ima maksimum.

Upozoravamo da u dualnom programu za varijable nisu propisani uvjeti nenegativnosti, pa stoga varijable mogu biti i negativne. U matričnom obliku formuliramo dualni linearni program ovako:

Treba odrediti vektor **y** koji odgovara nejednadžbi:

$$\mathbf{y}\,\mathbf{A} \leqq \mathbf{c}$$

tako da funkcija cilja:

$$g\,(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\,\mathbf{P}^0 = \mathbf{y}\,\mathbf{b}$$

ima maksimum.

Pretpostavimo da nam je optimalno moguće rješenje dualnog linearnog programa:

$$\mathbf{y}^0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)$$

već poznato; njemu odgovara najveća vrijednost funkcije cilja:

$$g\,(\mathbf{y}^0) = \mathbf{y}^0\,\mathbf{P}^0$$

Kako u primarnom i u dualnom linearnom programu nastupaju isti parametri, to oba programa možemo pregledno dati u istoj tabeli. Tabela 1. daje oba programa.

TABELA 1. PRIMARNI I DUALNI PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

		Varijable primarnog programa	Ograničenja primarnog ili koeficijenti funkcije cilja dualnog programa	Optimalno moguće rješenje dualnog programa
		$x_1 \cdots x_j \cdots x_n$		
Varijable dualnog programa	y_1	$a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n}$	b_1	y_1^0
	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	y_i	$a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{in}$	b_i	y_i^0
	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	y_m	$a_{m1} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn}$	b_m	y_m^0
Koeficijenti funkcije cilja primarnog ili ograničenja dualnog programa		$c_1 \cdots c_j \cdots c_n$		
Optimalna moguća rješenja primarnog programa		$x_1^0 \cdots x_j^0 \cdots x_n^0$		

Za primarni i njemu priređeni dualni problem linearnog programiranja vrijedi izreka:

Ako primarni linearni program ima optimalno moguće rješenje s konačnom vrijednošću funkcije cilja, onda i dualni program ima optimalno moguće rješenje s konačnom vrijednošću funkcije cilja, a ekstremne vrijednosti obiju funkcija cilja su jednake.

Dokaz. Uzmimo vektor:

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{c}^0 \mathbf{B}^{-1} \tag{5}$$

Za taj vektor dokazat ćemo slijedeće:

a) da je moguće rješenje dualnog linearnog programa,

b) da je za taj vektor vrijednost funkcije cilja dualnog linearnog programa jednaka najmanjoj vrijednosti funkcije cilja primarnog linearnog programa i

c) da je optimalno moguće rješenje dualnog linearnog programa.

a) Dokažimo najprije da je vektor $\mathbf{y}^0$ moguće rješenje dualnog linearnog programa. U tu svrhu promatrajmo diferenciju:

$$\mathbf{y}^0 \mathbf{A} - \mathbf{c},$$

koja je po gornjoj definiciji vektora $\mathbf{y}^0$ jednaka:

$$\mathbf{c}^0 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c},$$

a zbog obrasca (1a) je jednaka:

$$\mathbf{c}^0 \mathbf{A}_0 - \mathbf{c}$$

Zbog obrasca (4) ova diferencija nije pozitivna, pa zato nije pozitivna ni prvobitna diferencija; stoga vektor $\mathbf{y}^0$ odgovara nejednadžbi:

$$\mathbf{y}^0 \mathbf{A} \leqq \mathbf{c}$$

To znači da je vektor $\mathbf{y}^0$ moguće rješenje dualnog linearnog programa.

b) Dokažimo još da je za vektor $\mathbf{y}^0$ vrijednost funkcije cilja dualnog programa jednaka najmanjoj vrijednosti funkcije cilja primarnog programa. U tu svrhu izračunamo vrijednost funkcije cilja koja odgovara tom vektoru:

$$g(\mathbf{y}^0) = \mathbf{y}^0 \mathbf{P}^0 = \mathbf{c}^0 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}^0$$

Ova je vrijednost zbog obrasca (2a) jednaka:

$$g(\mathbf{y}^0) = \mathbf{c}^0 \mathbf{P}_0^0 = f(\mathbf{x}^0),$$

pa je tako tvrdnja dokazana.

c) Napokon još dokažimo da je vektor $\mathbf{y}^0$ optimalno moguće rješenje dualnog linearnog programa. U tu svrhu uzmimo proizvoljno moguće rješenje $\mathbf{x}$ primarnog linearnog programa; svako takvo rješenje odgovara uvjetima:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \quad \& \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{P}^0$$

Za svako moguće rješenje $\mathbf{y}$ dualnog linearnog programa važi nejednadžba:

$$\mathbf{y}\,\mathbf{A} \leqq \mathbf{c}$$

Ako premultipliciramo jednadžbu kojoj odgovara vektor $\mathbf{x}$ vektorom $\mathbf{y}$, dobivamo jednadžbu:

$$\mathbf{y}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y}\,\mathbf{P}^0 = g(\mathbf{y})$$

Ako pak postmultipliciramo nejednadžbu kojoj odgovara vektor $\mathbf{y}$ vektorom $\mathbf{x}$, dobivamo:

$$\mathbf{y}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leqq \mathbf{c}\,\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$$

Iz toga za vrijednosti funkcije cilja slijedi nejednadžba:

$$g(\mathbf{y}) \leqq f(\mathbf{x})$$

Ova nejednadžba važi za svako moguće rješenje $\mathbf{y}$ dualnog i za svako moguće rješenje $\mathbf{x}$ primarnog linearnog programa. Stoga važi i za svako moguće rješenje $\mathbf{y}$ dualnog i za optimalno moguće rješenje $\mathbf{x}^0$ primarnog linearnog programa nejednadžba:

$$g(\mathbf{y}) \leqq f(\mathbf{x}^0)$$

Kako po prijašnjem izlaganju važi jednadžba:

$$g(\mathbf{y}^0) = f(\mathbf{x}^0),$$

slijedi da je $\mathbf{y}^0$ optimalno moguće rješenje dualnog linearnog programa.

Budući da je za optimalno moguće rješenje $\mathbf{x}^0$ vrijednost $f(\mathbf{x}^0)$ funkcije cilja primarnog linearnog programa konačna, konačna je i njoj jednaka vrijednost $g(\mathbf{y}^0)$ funkcije cilja dualnog linearnog programa, koja odgovara optimalnom mogućem rješenju $\mathbf{y}^0$. Tako je izreka u cijelosti dokazana.

Slično se dokazuje i obrnuta izreka:

Ako dualni linearni program ima optimalno moguće rješenje s konačnom vrijednošću funkcije cilja, onda i primarni linearni program ima optimalno moguće rješenje s konačnom vrijednošću funkcije cilja, a ekstremne vrijednosti obiju funkcija cilja su jednake.

Obje izreke možemo spojiti u jednu:

Ako bilo koji od oba linearna programa ima optimalno moguće rješenje s konačnom vrijednošću funkcije cilja, onda ga ima i drugi, a ekstremne vrijednosti obiju funkcija cilja su jednake.

Za oba linearna programa vrijedi još izreka:

Ako jedan od linearnih programa nema konačnog optimalnog rješenja, onda je drugi protuslovan i nema nikakvog mogućeg rješenja.

Dokaz. Uzmimo najprije da primarni linearni program nema konačnog optimalnog rješenja te da je

$$\min f(\mathbf{x}) = -\infty$$

U tom bi primjeru za sva moguća rješenja dualnog linearnog programa važilo

$$g(\mathbf{y}) \leqq -\infty$$

To međutim nema smisla, pa je stoga dualni program protuslovan. Slično dokažemo i protuslovnost primarnog linearnog programa ako dualni program nema konačnog optimalnog mogućeg rješenja, tj. ako je:

$$\max g(\mathbf{y}) = \infty$$

Pri dosad obrađivanom problemu dualnosti ograničili smo se na mogućnost da vektor $\mathbf{x}$ primarnog linearnog programa odgovara jednadžbi $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{P}^0$, a ne nejednadžbi $\mathbf{A}\,\mathbf{x} \geqq \mathbf{P}^0$; pri tom smo kod dualnog linearnog programa ustanovili da za vektor $\mathbf{y}$ ne postoji zahtjev za nenegativnošću. U nastavku ćemo raspraviti još i mogućnost da vektor $\mathbf{x}$ odgovara spomenutoj nejednadžbi. U tom primjeru oba linearna programa formuliramo ovako:

Primarni linearni program: Treba odrediti vektor $\mathbf{x}$ koji odgovara uvjetima:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \;\;\&\;\; \mathbf{A}\,\mathbf{x} \geqq \mathbf{P}^0$$

tako da funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$$

ima minimum.

Dualni linearni program: Treba odrediti vektor $\mathbf{y}$ koji odgovara uvjetima:

$$\mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \;\;\&\;\; \mathbf{y}\,\mathbf{A} \leqq \mathbf{c}$$

tako da funkcija cilja:

$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\,\mathbf{P}^0$$

ima maksimum.

U tabeli 1. oba ova linearna programa napisana su zajedno. Za njih vrijedi izreka:

Ako jedan od obaju linearnih programa ima konačno optimalno moguće rješenje, tada ga ima i drugi, a ekstremne vrijednosti obiju funkcija cilja su jednake. Ako među-tim jedan od linearnih programa nema konačnog optimalnog rješenja, onda je drugi protuslovan i nema nikakvog mogućeg rješenja.

Dokaz. U dokazivanju izreke prevedemo oba linearna programa u takva dva programa za koja smo izreku već dokazali. Uzmimo primarni linearni program; u njemu nejednadžbu $\mathbf{A}\,\mathbf{x} \geqq \mathbf{P}^0$ upotpunimo u jednadžbu, tako da dodamo dopunske varijable $d_1, \ldots, d_m$ koje sastavljaju vektor:

$$\mathbf{d} = \left\| \begin{matrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{matrix} \right\| = \{d_1, \ldots, d_m\}$$

Ovim varijablama u funkciji cilja propišemo koeficijente koji su svi jednaki 0. Nakon preuzimanja tih varijabla prvobitni vektor $\mathbf{x}$ produžuje se u rascijepljeni vektor:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{d} \end{matrix} \right\|$$

a vektor $\mathbf{c}$ produžuje se u rascijepljeni vektor:

$$\| \mathbf{c} \mid \mathbf{0} \|$$

dok matrica $\mathbf{A}$ prelazi u rascijepljenu matricu:

$$\| \mathbf{A} \mid -\mathbf{E} \|$$

Nakon preuzimanja dopunskih varijabla primarni linearni program glasi ovako:

Treba odrediti vektor:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{d} \end{matrix} \right\|$$

koji odgovara uvjetima:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \;\&\; \mathbf{d} \geqq \mathbf{0} \;\&\; \| \mathbf{A} \mid -\mathbf{E} \| \left\| \begin{matrix} \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{d} \end{matrix} \right\| = \mathbf{P}^0$$

tako da funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \| \mathbf{c} \mid \mathbf{0} \| \left\| \begin{matrix} \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{d} \end{matrix} \right\|$$

ima minimum.

Ovom programu odgovarajući dualni program glasi:

Treba odrediti vektor **y** koji odgovara uvjetu:

$$\mathbf{y} \,\| \mathbf{A} \mid -\mathbf{E} \| \leqq \| \mathbf{c} \mid \mathbf{0} \|$$

tako da funkcija cilja:

$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\, \mathbf{P}^0$$

imaima ima maksimum.

Uvjet kojemu odgovara vektor **y** u dualnom programu rascijepimo u dva uvjeta:

$$\mathbf{y}\,\mathbf{A} \leqq \mathbf{c} \;\&\; \mathbf{y}(-\mathbf{E}) \leqq \mathbf{0}$$

Drugi od ovih uvjeta predstavlja zahtjev za nenegativnošću vektora **y**:

$$\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$$

Za ovaj par linearnih programa izreku smo već dokazali, stoga izreka vrijedi i za prvobitni par linearnih programa.

Primarni i dualni linearni program međusobno su tako tijesno povezani da možemo očitati optimalno moguće rješenje jednoga čim nam je poznato optimalno moguće rješenje drugoga. Pretpostavimo da nam je poznato optimalno moguće rješenje primarnog linearnog programa, koji smo riješili simpleks-metodom. Stoga nam je poznato:

a) Optimalno moguće rješenje $\mathbf{x}^0$.

b) Najmanja vrijednost $f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{c}\,\mathbf{x}^0$ funkcije cilja.

c) Matrica **B**; ovu u početnoj tabeli sastavljaju elementi koji odgovaraju bazičnim uzastopnim jediničnim vektorima konačne tabele.

d) Inverzna matrica $\mathbf{B}^{-1}$; ovu u konačnoj tabeli sastavljaju elementi koji odgovaraju bazičnim uzastopnim jediničnim vektorima početne tabele.

e) Vektor $\mathbf{c}^0$, koji sastavljaju oni elementi vektora **c** koji odgovaraju pozitivnim elementima optimalnog mogućeg rješenja.

f) Vektor $\mathbf{z}^0 - \mathbf{c}$, koji sastavljaju elementi posljednjeg dodatnog retka konačne tabele.

g) Vektor $\mathbf{z}^0$; njega dobivamo tako da prijašnjem vektoru $\mathbf{z}^0 - \mathbf{c}$ pribrojimo vektor **c**. Komponente ovog vektora potpišemo pod konačnu tabelu.

Iz toga možemo očitati optimalno moguće rješenje dualnog linearnog programa kao i sve odgovarajuće količine na slijedeći način:

a) Optimalno moguće rješenje izračunamo po obrascu (5):

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{c}^0\,\mathbf{B}^{-1}$$

Komponente optimalnog mogućeg rješenja nalazimo u posljednjem potpisanom retku tabele kojim smo riješili primarni linearni program; njegove uzastopne komponente jednake su elementima toga retka koji odgovaraju bazičnim uzastopnim jediničnim vektorima početne tabele.

b) Najveća vrijednost $g(\mathbf{y}^0)$ funkcije cilja jednaka je najmanjoj vrijednosti funkcije cilja primarnog programa:

$$g(\mathbf{y}^0) = f(\mathbf{x}^0)$$

Slično očitamo rješenje primarnog linearnog programa čim smo riješili dualni.

Vezu između primarnog i dualnog linearnog programa možemo iskoristiti pri numeričkom rješavanju linearnih programa simpleks-metodom. Pri toj su metodi opsežnost računanja i broj iteracija ovisni o broju varijabla i osobito broju nezavisnih uvjetnih nejednadžbi ili jednadžbi; ako ovih ima m, onda broj potrebnih iteracija leži obično između m i 2 m. Pogledajmo opsežnost računanja po simpleks-metodi za ovaj par linearnih programa:

Primarni LP: $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ & $\mathbf{A}\,\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}$; min $(f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\,\mathbf{x})$

Dualni LP: $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ & $\mathbf{y}\,\mathbf{A} \leqq \mathbf{c}$; max $(g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\,\mathbf{b})$

Matrica **A** neka bude redak m x n; pri tom neka broj redaka m bude prilično veći od broja stupaca n. Za rješenje primarnog programa imamo dvije mogućnosti:

a) možemo ga riješiti direktno simpleks-metodom; u tom je slučaju potrebno nekih m do 2 m iteracija;

b) možemo ga riješiti posredno, tako da riješimo najprije odgovarajući dualni linearni program, a potom očitamo njegovo rješenje; u tom je slučaju potrebno nekih n do 2 n iteracija.

Kako smo pretpostavili da je broj m prilično veći od n, to je drugi put kraći. Stoga riješimo linearni program u kojem je broj uvjeta dosta veći od broja varijabla, tako da najprije simpleks-metodom riješimo njemu odgovarajući dualni program, a nakon toga očitamo rješenje prvobitnog linearnog programa.

5. Dualnost u proizvodnom problemu

Formulacije primarnog i dualnog proizvodnog problema. Raspravimo plan proizvodnje poduzeća koje izrađuje dva tipa proizvoda P_1 i P_2 uz upotrebu četiriju proizvodnih faktora F_1, F_2, F_3 i F_4. Kako su raspoložive količine tih proizvodnih faktora ograničene, poduzeće može potrošiti najviše 18 jedinica prvog, 22 jedinice drugog, 13 jedinica trećeg i 18 jedinica četvrtog proizvodnog faktora. Pri proizvodnji jedne jedinice proizvoda P_1 poduzeće potroši 1 jedinicu prvog, 3 jedinice drugog, 2 jedinice trećeg i 3 jedinice četvrtog proizvodnog faktora, u proizvodnji jedne jedinice proizvoda P_2 potroši 2 jedinice prvog, 2 jedinice drugog, 1 jedinicu trećeg i 1 jedinicu četvrtog proizvodnog faktora. Na tržištu prvi proizvod ima cijenu 3, drugi pak 4 novčane jedinice. Pri angažiranju proizvodnih faktora poduzeće ima troškove, a od prodaje proizvoda ima prihode. U nastavku ćemo obrađivati problem kako da poduzeće najracionalnije programira proizvodnju uzimajući u obzir sve dane prilike. Problem optimalnog programiranja možemo obrađivati na dva načina:

a) kao primarni problem linearnog programiranja, koliko proizvoda svakog tipa treba da izradi poduzeće a da bi od njihove prodaje imalo najveći dohodak;

b) kao dualni problem linearnog programiranja, kako da poduzeće angažira raspoložive proizvodne faktore, a da bi pri tom imalo najmanje troškove.

Podatke za oba linearna programa i njihova optimalna rješenja daje tabela 1. U tabeli varijable: x_1 i x_2 znače broj proizvedenih jedinica proizvoda P_1 ili P_2, a y_1, y_2, y_3 i y_4 troškove prilikom angažiranja jedne jedinice proizvodnog faktora F_1, F_2, F_3 i F_4.

TABELA 1. PODACI I OPTIMALNO RJEŠENJE PROIZVODNOG PROBLEMA

		Proizvodi		Ograničenja primarnog programa Koeficijenti funkcije cilja dualnog programa	Optimalna moguća rješenja dualnog programa	Varijable dualnog programa
		P_1	P_2			
Proizvodni faktori	F_1	1	2	18	3/2	y_1
	F_2	3	2	22	1/2	y_2
	F_3	2	1	13	0	y_3
	F_4	3	1	18	0	y_4
Koeficijenti funkcije cilja primarnog programa Ograničenja dualnog programa		3	4			
Optimalno moguće rješenje primarnog programa		2	8		38	
Varijable primarnog programa		x_1	x_2			

Prema podacima tabele 1. možemo matematički formulirati oba linearna programa.

a) *Primarni linearni program.* Uvjetnu nejednadžbu koja odgovara prvom proizvodnom faktoru F_1 dobivamo ovako: ako poduzeće izradi x_1 jedinica prvog i x_2 jedinica drugog proizvoda, onda potroši $x_1 + 2x_2$ jedinica proizvodnog faktora F_1; kako od ovoga ima na raspolaganju najviše 18 jedinica, to varijable x_1 i x_2 odgovaraju nejednadžbi:

$$x_1 + 2x_2 \leqq 18$$

Na sličan način dobivamo još nejednadžbe koje odgovaraju drugom, trećem i četvrtom proizvodnom faktoru. Funkciju cilja dobivamo ovako: ako poduzeće proda x_1 jedinica prvog i x_2 jedinica drugog proizvoda, dobiva dohodak $3x_1 + 4x_2$; taj dohodak treba da bude najveći. Ovakvim zaključivanjem dobivamo slijedeću matematičku formulaciju primarnog linearnog programa:

Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabla x_1 i x_2 koje odgovaraju nejednadžbama:

$$x_1 + 2x_2 \leqq 18$$
$$3x_1 + 2x_2 \leqq 22$$
$$2x_1 + x_2 \leqq 13$$
$$3x_1 + x_2 \leqq 18$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$$

ima maksimum.

b) *Dualni linearni program.* Uvjetnu nejednadžbu koja odgovara prvom tipu proizvoda dobivamo ovako: ako poduzeće pri angažiranju 1 jedinice prvog proizvodnog faktora ima y_1, drugog proizvodnog faktora y_2, trećeg proizvodnog faktora y_3 i četvrtog proizvodnog faktora y_4 novčanih jedinica troškova, onda pri proizvodnji 1 jedinice proizvoda P_1 ima

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4$$

novčanih jedinica troškova; kako ovi troškovi ne mogu biti manji od cijene prvog proizvoda, dobivamo nejednadžbu:

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 \geqq 3$$

Na sličan način dobivamo i nejednadžbu koja odgovara drugom proizvodu. Funkciju cilja dobivamo ovako: ukupni troškovi za angažiranje raspoloživih proizvodnih faktora jednaki su:

$$18y_1 + 22y_2 + 13y_3 + 18y_4$$

novčanih jedinica; ovi troškovi neka budu što manji. Po ovom zaključivanju dobivamo slijedeću matematičku formulaciju dualnog linearnog programa:

Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabla y_1, y_2, y_3 i y_4 koje odgovaraju nejednadžbama:

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 \geqq 3$$
$$2y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geqq 4$$

tako da funkcija cilja

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = 18y_1 + 22y_2 + 13y_3 + 18y_4$$

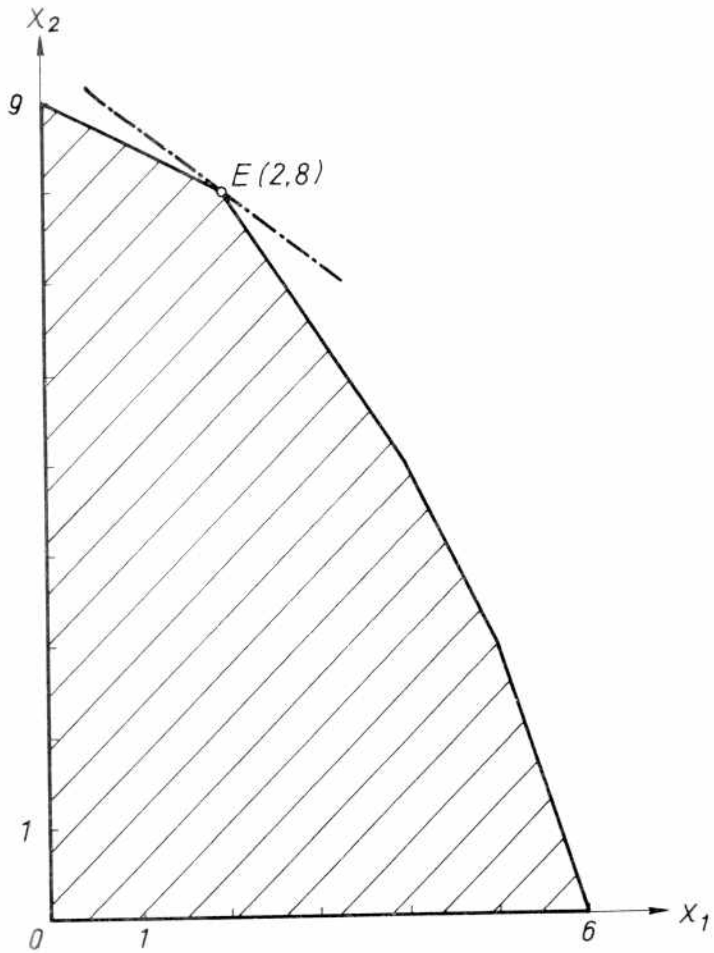
ima minimum.

Rješavanje linearnih programa

1. *Grafička metoda.* Kako u primarnom programu nastupaju samo dvije varijable, grafički ga možemo riješiti tako kako pokazuje sl. 28, pa dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$x_1^0 = 2 \text{ i } x_2^0 = 8,$$

kojemu odgovara najveća vrijednost funkcije cilja 38 novčanih jedinica.



Sl. 28. Grafičko rješavanje primarnog programa

Grafička metoda za rješavanje dualnog programa ne dolazi u obzir jer u njemu nastupaju 4 varijable.

2. *Simpleks-metoda.* Pri rješavanju primarnog programa simpleks-metodom uvedemo dopunske varijable x_3, x_4, x_5 i x_6; rješavanje daje tabela 2. Nakon dvije iteracije dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$x_1^0 = 2,\ x_2^0 = 8,\ x_3^0 = 0,\ x_4^0 = 0,\ x_5^0 = 1,\ x_6^0 = 4,$$

kojemu odgovara najveća vrijednost funkcije cilja 38 novčanih jedinica. Po optimalnom planu proizvodnje poduzeće izradi 2 jedinice prvog i 8 jedinica drugog proizvoda; pri tom potroši sve raspoložive količine prvog i drugog proizvodnog faktora, a neiskorištena ostaje jedna jedinica trećeg i 4 jedinice četvrtog proizvodnog faktora.

TABELA 2. RJEŠAVANJE PRIMARNOG PROGRAMA SIMPLEKS-METODOM

Maksimum	c_j		3	4				
	c_i	$\mathbf{P}^0$	x_1 $\mathbf{P}^1$	x_2 $\mathbf{P}^2$	x_3 $\mathbf{P}^3$	x_4 $\mathbf{P}^4$	x_5 $\mathbf{P}^5$	x_6 $\mathbf{P}^6$
	$\leftarrow \mathbf{P}^3$	18	1	**2**	1			
	$\mathbf{P}^4$	22	3	2		1		
	$\mathbf{P}^5$	13	2	1			1	
	$\mathbf{P}^6$	18	3	1				1
$z_j - c_j$		0	-3	-4				
4	$\rightarrow \mathbf{P}^2$	9	1/2	1	1/2			
	$\leftarrow \mathbf{P}^4$	4	**2**		-1	1		
	$\mathbf{P}^5$	4	3/2		$-1/2$		1	
	$\mathbf{P}^6$	9	5/2		$-1/2$			1
$z_j - c_j$		36	-1		2			
4	$\mathbf{P}^2$	8		1	3/4	$-1/4$		
3	$\rightarrow \mathbf{P}^1$	2	1		$-1/2$	1/2		
	$\mathbf{P}^5$	1			1/4	$-3/4$	1	
	$\mathbf{P}^6$	4			3/4	$-5/4$		1
$z_j - c_j$		38			3/2	1/2		
Optimalno rješenje dualnog programa	z_j	38			3/2	1/2	0	0
Varijable dualnog programa					y_1	y_2	y_3	y_4

Pri rješavanju dualnog programa simpleks-metodom uvodimo dopunske varijable y_5 i y_6 te umjetne varijable y_7 i y_8; rješavanje daje tabela 3. Nakon dvije iteracije dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$y_1 = 3/2, \; y_2 = 1/2, \; y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = y_8 = 0,$$

kojemu odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja 38 novčanih jedinica.

3. *Dualna simpleks-metoda.* Ovom metodom riješimo primarni program tako da simpleks-metodom riješimo njemu odgovarajući dualni program i nakon toga očitamo optimalno moguće rješenje primarnog. Tabela 3. daje rješavanje dualnog programa simpleks-metodom. Iz posljednjeg retka brojeva z_j; očitamo optimalno moguće rješenje primarnog problema:

$$x_1^0 = 2 \text{ i } x_2^0 = 8,$$

kojemu odgovara najveća vrijednost funkcije cilja 38 novčanih jedinica. Takav način izračunavanja optimalnog mogućeg rješenja slijedi iz teorije u prijašnjoj točki

TABELA 3. RJEŠAVANJE DUALNOG PROGRAMA SIMPLEKS-METODOM

Minimum c_j		18	22	13	18			100	100
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
c_i	$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$	$\mathbf{P}^2$	$\mathbf{P}^3$	$\mathbf{P}^4$	$\mathbf{P}^5$	$\mathbf{P}^6$	$\mathbf{P}^7$	$\mathbf{P}^8$
100 $\leftarrow \mathbf{P}^7$	3	1	**3**	2	3	-1		1	
100 $\mathbf{P}^8$	4	2	2	1	1		-1		1
$z_j - c_j$	700	282	478	287	382	-100	-100		
22 $\rightarrow \mathbf{P}^2$	1	1/3	1	2/3	1	$-1/3$		1/3	
100 $\leftarrow \mathbf{P}^8$	2	**4/3**		$-1/3$	-1	2/3	-1	$-2/3$	1
$z_j - c_j$	222	368/3		$-95/3$	-96	178/3	-100	$-478/3$	
22 $\mathbf{P}^2$	1/2		1	3/4	5/4	$-1/2$	1/4	1/2	$-1/4$
18 $\rightarrow \mathbf{P}^1$	3/2	1		$-1/4$	$-3/4$	1/2	$-3/4$	$-1/2$	3/4
$z_j - c_j$	38			-1	-4	-2	-8	-98	-92
Optimalno rješenje primarnog programa z_j	38							2	8
Varijable primarnog programa								x_1	x_2

ovako: Budući da vektori $\mathbf{P}^2$ i $\mathbf{P}^1$ sastavljaju uzastopne jedinične vektore baze u konačnoj tabeli, to je:

$$\mathbf{B} = \| \mathbf{P}^2\, \mathbf{P}^1 \| = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

Iz istog je razloga:

$$\mathbf{c}^0 = \| 22 \quad 18 \|$$

Kako su vektori $\mathbf{P}^7$ i $\mathbf{P}^8$ uzastopni jedinični vektori baze u početnoj tabeli, to je:

$$\mathbf{B}^{-1} = \| \mathbf{P}^7_0\, \mathbf{P}^8_0 \| = \begin{Vmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{Vmatrix}$$

Otuda dobivamo optimalno moguće rješenje primarnog programa:

$$\| x_1^0\, x_2^0 \| = \mathbf{c}^0\, \mathbf{B}^{-1} = \| 22 \ \ 18 \| \begin{Vmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{Vmatrix} = \| 2 \ \ 8 \|$$

Po dualnoj simpleks-metodi riješimo dualni program tako da prvo riješimo njemu odgovarajući primarni program simleks-metodom, a nakon toga očitamo optimalno moguće rješenje dualnog. Tabela 2. daje rješavanje primarnog programa simpleks-metodom. Iz posljednjeg retka brojeva z_j očitamo optimalno moguće rješenje dualnog programa:

$$y_1^0 = 3/2,\ y_2^0 = 1/2,\ y_3^0 = 0,\ y_4^0 = 0,$$

kojemu odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja 38 novčanih jedinica. Takav način izračunavanja optimalnog mogućeg rješenja slijedi iz teorije prijašnje točke ovako: Kako su vektori $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^5$ i $\mathbf{P}^6$ uzastopni jedinični vektori baze u konačnoj tabeli, to je:

$$\mathbf{B} = \|\mathbf{P}^2\ \mathbf{P}^1\ \mathbf{P}^5\ \mathbf{P}^6\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Iz istog je razloga:

$$\mathbf{c}^0 = \|4\ 3\ 0\ 0\|$$

Kako su vektori $\mathbf{P}^3$, $\mathbf{P}^4$, $\mathbf{P}^5$, $\mathbf{P}^6$ uzastopni jedinični vektori baze u početnoj tabeli, to je:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{Vmatrix} 3/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & -3/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Otuda dobivamo optimalno moguće rješenje dualnog programa:

$$\|y_1^0\ y_2^0\ y_3^0\ y_4^0\| = \mathbf{c}^0\,\mathbf{B}^{-1} =$$

$$= \|4\ 3\ 0\ 0\| \begin{Vmatrix} 3/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & -3/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \|3/2\ 1/2\ 0\ 0\|$$

Vježbe

1. Riješi simpleks-metodom i dualnom simpleks-metodom proizvodni problem: Proizvodni odjel obrađuje na dva stroja A i B dva tipa proizvoda P i Q. Prvi stroj ima na raspolaganju 18, a drugi 24 vremenske jedinice. Proizvod tipa P obrađuje se na prvom stroju 4 i na drugom također 4 vremenske jedinice; proizvod Q obrađuje se na prvom stroju 3, a na drugom 6 vremenskih jedinica. Za obradu 1 jedinice tipa P odjel dobiva 5, a za obradu 1 jedinice tipa Q 4 novčane jedinice. Kako da odjel programira obradu da bi postigao najveći dohodak?

(Primarni: 3, 2; 23. Dualni: 14/12, 1/12; 23)

2. Riješi simpleks-metodom i dualnom simpleks-metodom proizvodni problem: Poduzeće od 3 sirovine A, B i C izrađuje 2 tipa proizvoda P i Q. Pri izradi jedinice prvog proizvoda potroši 1 jedinicu prve, 3 jedinice druge i 4 jedinice treće sirovine; a pri izradi jedinice drugog proizvoda potroši 3 jedinice prve, 1 jedinicu druge i 1 jedinicu treće sirovine. Poduzeće ima na raspolaganju najviše 24 jedinice prve, 16 jedinica druge i 20 jedinica treće sirovine. Prvi proizvod ima cijenu 3, a drugi 4 novčane jedinice. Kako da poduzeće programira proizvodnju da bi od prodaje proizvoda imalo najveći dohodak?

(Primarni: 3, 7; 37. Dualni: 9/8, 5/8, 0; 37)

6. Dualnost u problemu smjese

Formulacije primarnog i dualnog problema smjese. Obradimo slijedeći problem smjese: Tableta prvog tipa T_1 ima 2 jedinice vitamina A_1, 1 jedinicu vitamina A_2 2 jedinice vitamina A_3 i 1 jedinicu vitamina A_4; tableta drugog tipa T_2 ima 1 jedinicu vitamina A_1, 1 jedinicu vitamina A_2, 3 jedinice vitamina A_3 i 3 jedinice vitamina A_4. Tableta prvog tipa stoji 3, a drugog tipa 4 novčane jedinice. Hoćemo da nabavimo najmanje 6 jedinica vitamina A_1, 5 jedinica vitamina A_2, 13 jedinica vitamina A_3 i 8 jedinica vitamina A_4, pa nastaje problem kako da optimalno programiramo nabavu tableta. Taj problem možemo obrađivati na dva načina:

a) kao primarni problem linearnog programiranja, koliko tableta svakog tipa da kupimo da bi troškovi nabave bili najmanji;

b) kao dualni problem linearnog programiranja, kako da kupimo tablete da bi vrijednost nabavljenih vitamina bila što veća.

Podatke za oba linearna programa i njihova optimalna moguća rješenja daje tabela 1. U tabeli varijable x_1 i x_2 znače broj tableta tipa T_1 i T_2, a y_1, y_2, y_3 i y_4 vrijednosti jedne jedinice vitamina A_1, A_2, A_3 i A_4.

Prema podacima u tabeli 1. dobivamo matematičku formulaciju obaju linearnih programa.

TABELA 1. PODACI I OPTIMALNO RJEŠENJE MIJEŠANOG PROBLEMA

		Tablete		Ograničenja primarnog programa Koeficijenti funkcije cilja dualnog programa	Optimalno moguće rješenje dualnog programa	Varijable dualnog programa
		T_1	T_2			
Vitamini	A_1	2	1	6	0	y_1
	A_2	1	1	5	1	y_2
	A_3	2	3	13	1	y_3
	A_4	1	3	8	0	y_4
Koeficijenti funkcije cilja primarnog programa Ograničenja dualnog programa		3	4			
Optimalno moguće rješenje primarnog programa		2	3		18	
Varijable primarnog programa		x_1	x_2			

a) *Primarni linearni program.* Uvjetnu nejednadžbu koja odgovara vitaminima A_1 dobivamo ovako: ako kupimo x_1 tableta prvog i x_2 tableta drugog tipa, onda dobivamo $2x_1 + x_2$ jedinica vitamina A_1; kako ovoga ne smije biti manje od 6 jedinica, to za varijable x_1 i x_2 dobivamo nejednadžbu:

$$2x_1 + x_2 \geqq 6$$

Na sličan način dobivamo i nejednadžbe za ostala tri vitamina. Funkciju cilja dobivamo ovako: ako kupimo x_1 tableta prvog i x_2 tableta drugog tipa, izdamo $3x_1 + 4x_2$ novčanih jedinica; ovaj trošak treba da bude najmanji. Iz toga dobivamo slijedeću matematičku formulaciju primarnog programa:

Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabla x_1 i x_2 koje odgovaraju nejednadžbama:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqq 6 \\ x_1 + x_2 &\geqq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geqq 13 \\ x_1 + 3x_2 &\geqq 8 \end{aligned}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$$

ima minimum.

b) *Dualni linearni program.* Uvjetnu nejednadžbu koja odgovara tableti tipa T_1 dobivamo ovako: ako su y_1, y_2, y_3 i y_4 vrijednosti jedinice vitamina A_1, A_2, A_3 i A_4, onda jedna tableta tipa T_1 vrijedi:

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4$$

novčanih jedinica; kako ova vrijednost ne može biti veća od cijene tablete, dobivamo nejednadžbu:

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \leqq 3$$

Na sličan način dobivamo i nejednadžbu za tabletu tipa T_2. Funkciju cilja dobivamo ovako: ukupna vrijednost traženih količina vitamina jednaka je:

$$6y_1 + 5y_2 + 13y_3 + 8y_4$$

novčanih jedinica; ova vrijednost treba da bude što veća. Iz toga dobivamo slijedeću matematičku formulaciju dualnog programa:

Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabla y_1, y_2, y_3 i y_4 koje odgovaraju nejednadžbama:

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 &\leqq 3 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 + 3y_4 &\leqq 4 \end{aligned}$$

tako da funkcija cilja:

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = 6y_1 + 5y_2 + 13y_3 + 8y_4$$

ima maksimum.

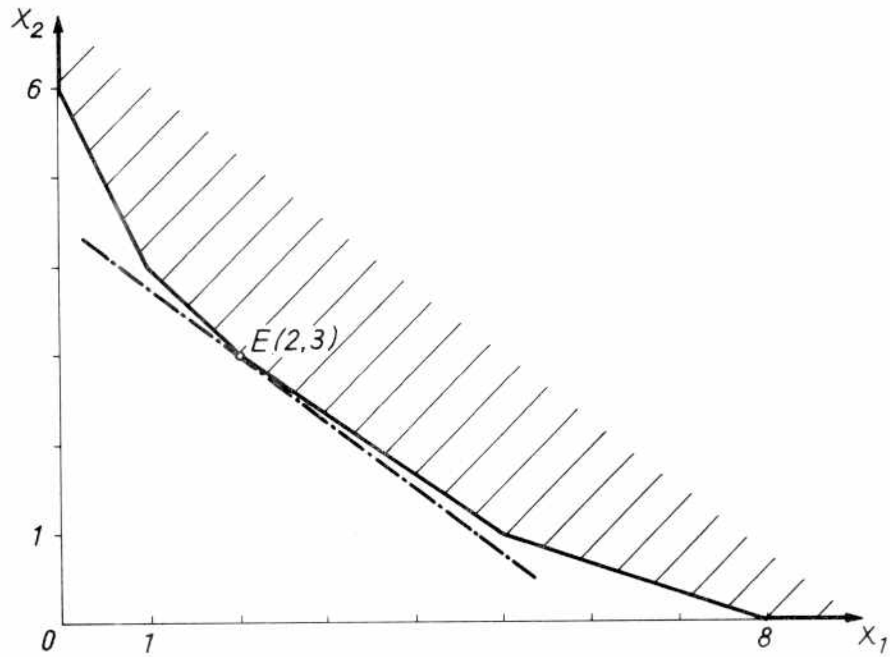
Rješavanje linearnih programa.

1. *Grafička metoda.* Budući da u primarnom programu nastupaju samo dvije varijable, možemo ga riješiti grafički tako kao što vidimo na sl. 29, pa dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$x_1^0 = 2 \text{ i } x_2^0 = 3,$$

kojemu odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja 18 novčanih jedinica.

Grafička metoda ne dolazi u obzir za rješavanje dualnog programa jer u njemu nastupaju 4 varijable.



Sl. 29. Grafičko rješavanje primarnog programa

2. *Simpleks-metoda.* Pri rješavanju primarnog programa simpleks-metodom uvodimo dopunske varijable x_3, x_4, x_5, x_6 i umjetne varijable x_7, x_8, x_9 x_{10}; rješavanje daje tabela 2, u kojoj su međutim upisane samo polazna i konačna tabela. Nakon 5 iteracija dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1,\ x_4 = x_5 = 0,\ x_6 = 1,\ x_7 = x_8 =$$
$$= x_9 = x_{10} = 0,$$

kojemu odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja 18 novčanih jedinica.

Pri rješavanju dualnog programa simpleks-metodom uvodimo dopunske varijable y_5 i y_6; rješavanje daje tabela 3. Nakon 3 iteracije dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ y_3 = 1,\ y_4 = y_5 = y_6 = 0,$$

kojemu odgovara najveća vrijednost funkcije cilja 18 novčanih jedinica.

TABELA 2. RJEŠAVANJE PRIMARNOG PROGRAMA SIMPLEKS-METODOM

Minimum	c_j		3	4					100	100	100	100
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
	c_i	$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$	$\mathbf{P}^2$	$\mathbf{P}^3$	$\mathbf{P}^4$	$\mathbf{P}^5$	$\mathbf{P}^6$	$\mathbf{P}^7$	$\mathbf{P}^8$	$\mathbf{P}^9$	$\mathbf{P}^{10}$
I	100 $\mathbf{P}^7$	6	2	1	−1				1			
	100 $\mathbf{P}^8$	5	1	1		−1				1		
	100 $\mathbf{P}^9$	13	2	3			−1				1	
	100 → $\mathbf{P}^{10}$	8	1	**3**				−1				1
	$z_j - c_j$	3200	597	796	−100	−100	−100	−100				
VI	3 $\mathbf{P}^1$	2	1			−3	1			3	−1	
	$\mathbf{P}^3$	1			1	−4	1		−1	4	−1	
	→ $\mathbf{P}^6$	3				3	−2	1		−3	2	−1
	4 $\mathbf{P}^2$	3		1		2	−1			−2	1	
	$z_j - c_j$	18				−1	−1		−100	−99	−99	−100
Optimalno rješenje dualnog programa	z_j	18							0	1	1	0
Varijable dualnog programa									y_1	y_2	y_3	y_4

3. *Dualna simpleks-metoda.* Primarni program riješimo tako da najprije simpleks-metodom riješimo dualni i nakon toga očitamo optimalno moguće rješenje primarnog. Iz posljednjeg retka brojeva z_j očitamo u tabeli 3. optimalno moguće rješenje primarnog programa:

$$x_1^0 = 2 \text{ i } x_2^0 = 3,$$

kojemu odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja 18 novčanih jedinica. Računanje optimalnog mogućeg rješenja po ovoj metodi možemo temeljiti na teoriji iz 4. točke ovako: Kako su vektori $\mathbf{P}^2$ i $\mathbf{P}^3$ uzastopni jedinični vektori baze u konačnoj tabeli, to je:

$$\mathbf{B} = \|\mathbf{P}^2\ \mathbf{P}^3\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

Iz istog je razloga:

$$\mathbf{c}^0 = \|5 \quad 13\|$$

Kako su vektori $\mathbf{P}^5$ i $\mathbf{P}^6$ uzastopni jedinični vektori baze u početnoj tabeli, to je:

$$\mathbf{B}^{-1} = \|\mathbf{P}_0^5\ \mathbf{P}_0^6\| = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

TABELA 3. RAČUNANJE DUALNOG PROGRAMA SIMPELKS-METODOM

Maksimum c_j			6	5	13	8		
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
c_i		$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$	$\mathbf{P}^2$	$\mathbf{P}^3$	$\mathbf{P}^4$	$\mathbf{P}^5$	$\mathbf{P}^6$
	$\mathbf{P}^5$	3	2	1	2	1	1	
	$\leftarrow \mathbf{P}^6$	4	1	1	**3**	3		1
$z_j - c_j$			-6	-5	-13	-8		
	$\mathbf{P}^5$	1/3	**4/3**	1/3		-1	1	$-2/3$
13	$\rightarrow \mathbf{P}^3$	4/3	1/3	1/3	1	1		1/3
$z_j - c_j$		52/3	$-5/3$	$-2/3$		5		13/3
6	$\rightleftarrows \mathbf{P}^1$	1/4	1	**1/4**		$-3/4$	3/4	$-1/2$
13	$\mathbf{P}^3$	5/4		1/4	1	5/4	$-1/4$	1/2
$z_j - c_j$		71/4		$-1/4$		15/4	5/4	7/2
5	$\rightarrow \mathbf{P}^2$	1	4	1		-3	3	-2
13	$\mathbf{P}^3$	1	-1		1	2	-1	1
$z_j - c_j$		18	1			3	2	3
Optimalno rješenje primarnog programa	z_j	18					2	3
Varijable primarnog programa							x_1	x_2

Iz toga dobivamo optimalno moguće rješenje primarnog programa:

$$\| x_1^0 \ x_2^0 \| = \mathbf{c}^0 \mathbf{B}^{-1} = \| 5 \quad 13 \| \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} = \| 2 \quad 3 \|$$

Dualnom simpleks-metodom riješimo dualni program tako da najprije simpleks-metodom riješimo primarni i zatim očitamo optimalno moguće rješenje dualnog. Iz posljednjeg retka brojeva z_j očitamo u tabeli 2. optimalno moguće rješenje dualnog programa:

$$y_1^0 = 0, \ y_2^0 = 1, \ y_3^0 = 1, \ y_4^0 = 0,$$

kojemu odgovara najveća vrijednost funkcije cilja 18 novčanih jedinica. Računanje optimalnog mogućeg rješenja po ovoj metodi možemo temeljiti na teoriji iz točke 4. ovako: Kako su vektori $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^3$, $\mathbf{P}^6$ i $\mathbf{P}^2$ uzastopni jedinični vektori baze u konačnoj tabeli, to je:

$$\mathbf{B} = \| \mathbf{P}^1 \ \mathbf{P}^3 \ \mathbf{P}^6 \ \mathbf{P}^2 \| = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$$

Iz istog je razloga:

$$\mathbf{c}^0 = \| 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \|$$

Kako su vektori $\mathbf{P}^7$, $\mathbf{P}^8$, $\mathbf{P}^9$ i $\mathbf{P}^{10}$ uzastopni jedinični vektori baze u početnoj tabeli, to je:

$$\mathbf{B}^{-1} = \| \mathbf{P}_0^7 \, \mathbf{P}_0^8 \, \mathbf{P}_0^9 \, \mathbf{P}_0^{10} \| = \begin{Vmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Iz toga dobivamo optimalno moguće rješenje dualnog programa:

$$\| y_1^0 \, y_2^0 \, y_3^0 \, y_4^0 \| = \mathbf{c}^0 \, \mathbf{B}^{-1} = \| 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \| \begin{Vmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \| 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \|$$

Vježbe

1. Riješi simpleks-metodom i dualnom simpleks-metodom prehrambeni problem: Prva namirnica ima 2 jedinice prvog, 1 jedinicu drugog i 1 jedinicu trećeg biokemijskog sastojka, druga namirnica ima pak 1 jedinicu prvog, 1 jedinicu drugog i 3 jedinice trećeg sastojka. Cijena prve namirnice je 3, druge 2 novčene jedinice. Koliko da kupimo svake namirnice da bismo dobili najmanje 5 jedinica prvog, 4 jedinice drugog i 6 jedinica trećeg biokemijskog sastojka a da bi troškovi nabave bili najmanji?

(Primarni: 1,3; 9. Dualni: 1,1,0; 9)

2. Riješi simpleks-metodom i dualnom simpleks-metodom problem smjese: Dva tipa vitamina možemo dobiti u dva tipa tableta. Prva tableta ima 1 jedinicu prvog i 4 jedinice drugog vitamina i stoji 24 novčane jedinice; druga tableta ima 5 jedinica prvog i 1 jedinicu drugog vitamina i stoji 25 novčanih jedinica. Koliko tableta svakog tipa trebamo kupiti da bismo dobili najmanje 17 jedinica prvog i 11 jedinica drugog vitamina a da bi troškovi nabave bili najmanji?

(Primarni: 2,3; 123. Dualni: 4,5; 123)

7. Linearno programiranje i teorija matričnih igara

U točki 3. ovog poglavlja obrađivali samo matrične igre dvaju antagonističkih igrača A i B, od kojih svaki želi izabrati za sebe najpovoljniju strategiju; zbog toga je matrične igre trebalo obrađivati s dva gledišta, i to s gledišta koristi prvog igrača i s gledišta koristi njegovog protivnika. Pri takvom smo obrađivanju matrične igre ustanovili da se rješavanje svake antagonističke matrične igre može prevesti na rješavanje dvaju linearnih programa koji su jedan drugome dualni. Pri tom smo upoznali jednu od veza što postoji između teorije matričnih igara i linearnog programiranja.

Zatim smo u točki 4. ovoga poglavlja obrađivali vezu između primarnog i njemu odgovarajućeg dualnog linearnog programa. Pri tom smo saznali da zapravo oba programa obrađuju isti problem optimalnosti, ali s dva različita gledišta; jedanput s gledišta maksimuma određene funkcije cilja, a jedanput s gledišta minimuma njoj odgovarajuće druge funkcije cilja. Takvo obrađivanje linearnog programa omogućuje da se linearno programiranje poveže s teorijom antagonističkih matričnih igara; vidjet ćemo naime da se svaki problem linearnog programiranja može prevesti u odgovarajući problem antagonističke matrične igre.

U ovoj točki obradit ćemo obostranu vezu linearnog programiranja i teorije matričnih igara. Pri tom ćemo se osloniti na razmatranja iz točke 3. i 4. ovoga poglavlja. S obzirom na tu vezu proučit ćemo:

a) prevođenje problema antagonističke matrične igre u problem linearnog programiranja. To smo već obrađivali u točki 3. ovoga poglavlja; ovdje ćemo prevođenje s obzirom na simboliku i na način raspravljanja prilagoditi cjelokupnoj problematici povezivanja;

b) prevođenje problema linearnog programiranja na problem antagonističke matrične igre.

Pri obrađivanju obostrane povezanosti između linearnog programiranja i teorije matričnih igara proučit ćemo problematiku paralelno s gledišta primarnog i dualnog programa i s gledišta prvog i drugog igrača.

a) *Prevođenje problema matrične igre u problem linearnog programiranja.* Uzmimo opću antagonističku matričnu igru dvaju igrača A i B; igrač A na potezu ima na izbor alternative $1, \ldots, m$, dok igrač B na potezu ima alternative $1, \ldots, n$; igrač A ima na izbor strategije $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, dok igrač B ima strategije $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$; dobitke određuje matrica igre $\| a_{ij} \|$ reda $m \times n$; vrijednost igre označimo sa w. Podatke za igru i njoj odgovarajuća rješenja daje tabela 1. Problem matrične igre prevedemo u problem linearnog programiranja ovako:

Kod uzastopnih čistih strategija igrača B dobivamo za strategije igrača A nejednadžbe:

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{m1} x_m \geqq w$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n} x_1 + \ldots + a_{mn} x_m \geqq w$$

Pri tom komponente strategije igrača A odgovaraju jednadžbi:

$$x_1 + \ldots + x_m = 1$$

Nakon supstitucije:

$$x_i = wu_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

dobivamo za igrača A primarni linearni program:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $u_1, \ldots, u_m$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$u_1 \geqq 0, \ldots, u_m \geqq 0$$

i uvjetnim nejednadžbama:

$$a_{11} u_1 + \ldots + a_{m1} u_m \geqq 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n} u_1 + \ldots + a_{mn} u_m \geqq 1$$

Kod uzastopnih čistih strategija igrača A dobivamo za strategije igrača B nejednadžbe:

$$a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n \leqq w$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} y_1 + \ldots + a_{mn} y_n \leqq w$$

Pri tom komponente strategije igrača B odgovaraju jednadžbi:

$$y_1 + \ldots + y_n = 1$$

Nakon supstitucije:

$$y_j = wv_j \ (j = 1, \ldots, n)$$

dobivamo za igrača B dualni linearni program:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $v_1, \ldots, v_n$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$v_1 \geqq 0, \ldots, v_n \geqq 0$$

i uvjetnim nejednadžbama:

$$a_{11} v_1 + \ldots + a_{1n} v_n \leqq 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} v_1 + \ldots + a_{mn} v_n \leqq 1$$

tako da funkcija cilja:

$$\frac{1}{w} = f(u_1, \ldots, u_m) = u_1 + \ldots + u_m$$

ima minimum.

Ako riješimo ovaj primarni linearni program, dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$u_1^0, \ldots, u_m^0$$

i iz toga obrnutom supstitucijom optimalnu strategiju igrača A:

$$\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, \ldots, x_m^0\},$$

kojoj odgovara vrijednost igre w.

tako da funkcija cilja:

$$\frac{1}{w} = g(v_1, \ldots, v_n) = v_1 + \ldots + v_n$$

ima maksimum.

Ako riješimo ovaj dualni linearni program, dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$v_1^0, \ldots, v_n^0$$

i iz toga obrnutom supstitucijom optimalnu strategiju igrača B:

$$\mathbf{y}^0 = \{y_1^0, \ldots, y_n^0\},$$

kojoj odgovara vrijednost igre w.

Linearni programi koje smo dobili pri ovoj igri u istom su odnosu kao primarni i dualni program; stoga ih možemo napisati zajedno, kao što vidimo u tabeli 1. Ova tabela daje prevođenje problema matrične igre u problem linearnog programiranja.

TABELA 1. PREVOĐENJE PROBLEMA MATRIČNE IGRE U PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

<table>
<tr><td colspan="4" rowspan="4">$y_j = wv_j$

$x_i = wu_i$</td><td>Komponente strategije igrača B</td><td rowspan="4">Ograničenja primarnog programa

Koeficijenti funkcije cilja dualnog programa</td><td rowspan="4">Optimalno moguće rješenje primarnog programa</td><td rowspan="4">Komponente optimalne strategije igrača A</td></tr>
<tr><td>$y_1 \cdots y_n$</td></tr>
<tr><td>Varijable dualnog programa</td></tr>
<tr><td>$v_1 \cdots v_n$</td></tr>
<tr><td>Komponente strategije igrača A</td><td>x_1
⋮
x_m</td><td>Varijable primarnog programa</td><td>u_1
⋮
u_m</td><td>$a_{11} \cdots a_{1n}$
⋮ ⋮
$a_{m1} \cdots a_{mn}$</td><td>1
⋮
1</td><td>u_1^0
⋮
u_m^0</td><td>x_1^0
⋮
x_m^0</td></tr>
<tr><td colspan="4">Koeficijenti funkcije cilja primarnog programa
Ograničenja dualnog programa</td><td>$1 \cdots 1$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Optimalno moguće rješenje dualnog programa</td><td>$v_1^0 \cdots v_n^0$</td><td></td><td>$\frac{1}{w}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Komponente optimalne trategije igrača B</td><td>$y_1^0 \cdots y_n^0$</td><td></td><td></td><td>w</td></tr>
</table>

b) *Prevođenje problema linearnog programiranja u problem matrične igre.* Obradimo opći problem linearnog programiranja koji možemo riješiti ili kao primarni ili kao dualni program. Podatke za linearni program daje 1. tabela 4. točke ovog poglavlja.

Uzmimo problem linearnog programiranja kao primarni problem:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $x_1, \ldots, x_n$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$$

i uvjetnim nejednadžbama:

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} n_n \geqq b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \geqq b_m$$

tako da funkcija cilja:

$$\frac{1}{w} = f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

ima minimum. Pri tom želimo odrediti najveću vrijednost varijable w.

Uzmimo da linearni program ima optimalno moguće rješenje:

$$x_1^0, \ldots, x_n^0 n,$$

kojemu odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja $1/w^0$.

Ako uvjetne nejednadžbe uzastopno podijelimo brojevima $b_1, \ldots, b_m$ te ako ih sve pomnožimo sa w, dobivamo nove uvjetne nejednadžbe:

$$\frac{a_{11}}{b_1} wx_1 + \ldots + \frac{a_{1n}}{b_1} wx_n \geqq w$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{a_{m1}}{b_m} wx_1 + \ldots + \frac{a_{mn}}{b_m} wx_n \geqq w$$

Ako pak funkciju cilja pomnožimo sa w, dobivamo novu funkciju u obliku:

$$wf(x_1, \ldots, x_n) = wc_1 x_1 + \ldots + wc_n x_n = 1$$

Uzmimo problem linearnog programiranja kao dualni problem:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $y_1, \ldots, y_m$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$y_1 \geqq 0, \ldots y_m \geqq 0$$

i uvjetnim nejednadžbama:

$$a_{11} y_1 + \ldots + a_{m1} y_m \leqq c_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n} y_1 + \ldots + a_{mn} y_n \leqq c_n$$

tako da funkcija cilja:

$$\frac{1}{w} = g(y_1, \ldots, y_m) = b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m$$

ima maksimum. Pri tom želimo odrediti najmanju vrijednost varijable w.

Uzmimo da linearni program ima optimalno moguće rješenje:

$$y_1^0, \ldots, y_m^0,$$

kojemu odgovara najveća vrijednost funkcije cilja $1/w^0$

Ako uvjetne nejednadžbe uzastopno podijelimo brojevima $c_1, \ldots, c_n$ i ako ih sve pomnožimo sa w, dobivamo nove uvjetne nejednadžbe:

$$\frac{a_{11}}{c_1} wy_1 + \ldots + \frac{a_{m1}}{c_1} wy_m \leqq w$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{a_{1n}}{c_n} wy_1 + \ldots + \frac{a_{mn}}{c_n} wy_m \leqq w$$

Ako pak funkciju cilja pomnožimo sa w, dobivamo novu funkciju u obliku:

$$wg(y_1, \ldots, y_m) = wb_1 y_1 + \ldots + wb_m y_m = 1$$

Nakon supstitucije:

$$x_j = \frac{u_j}{w\,c_j}$$

dobivamo uvjetne nejednadžbe:

$$\frac{a_{11}}{b_1\,c_1}\,u_1 + \ldots + \frac{a_{1n}}{b_1\,c_n}\,u_n \geqq w$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_{m1}}{b_m\,c_1}\,u_1 + \ldots + \frac{a_{mn}}{b_m\,c_n}\,u_n \geqq w$$

i funkciju cilja:

$$f(u_1, \ldots, u_n) = u_1 + \ldots + u_n = 1$$

Nakon supstitucije:

$$y_i = \frac{v_i}{wb_i}$$

dobivamo uvjetne nejednadžbe:

$$\frac{a_{11}}{b_1\,c_1}\,v_1 + \ldots + \frac{a_{m1}}{b_m\,c_1}\,v_m \leqq w$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_{1n}}{b_1\,c_n}\,v_1 + \ldots + \frac{a_{mn}}{b_m\,c_n}\,v_m \leqq w$$

i funkciju cilja:

$$g(v_1, \ldots, v_n) = v_1 + \ldots + v_m = 1$$

Prema gore obrađenom prevođenju problema matrične igre u problem linearnog programiranja, taj linearni program odgovara matričnoj igri koju daje tabela 2. Ova tabela prema tome daje prevođenje obrađenog problema linearnog programiranja u problem matrične igre.

TABELA 2. PREVOĐENJE PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U PROBLEM MATRIČNE IGRE

<table>
<tr><td colspan="4" rowspan="4">$x_j = \frac{u_j}{wc_j}$
$y_i = \frac{v_i}{wb_i}$</td><td>Varijable primarnog programa</td></tr>
<tr><td>$x_1 \cdot \cdot \cdot x_n$</td></tr>
<tr><td>Komponente strategije igrača A</td></tr>
<tr><td>$u_1 \cdot \cdot \cdot u_n$</td></tr>
<tr><td>Varijable dualnog programa</td><td>y_1
.
.
.
y_m</td><td>Komponente strategije igrača B</td><td>v_1
.
.
.
v_m</td><td>$\frac{a_{11}}{b_1c_1} \cdot \cdot \cdot \frac{a_{1n}}{b_1c_n}$
.
.
.
$\frac{a_{m1}}{b_mc_1} \cdot \cdot \cdot \frac{a_{mn}}{b_mc_n}$</td></tr>
</table>

Četvrti dio

UPOTREBA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

XII. UPOTREBA SIMPLEKS-METODE

1. Problem prehrane

Čovjeku su za život potrebne određene količine biokemijskih sastojaka: bjelančevina, masnoća, ugljikohidrata, vitamina itd. Te sastojke dobiva u hrani, koju sastavljaju različite namirnice: mast, ulje, brašno, meso, povrće itd. Svaka namirnica ima na tržištu određenu cijenu. Pri tom nastaje problem kako da čovjek nabavlja namirnice da bi zadovoljio svoje fiziološke potrebe, a da bi što manje platio za nabavljene namirnice. U ovoj točki obrađujemo neki razmjerno prilično pojednostavnjen problem prehrane. Od biokemijskih sastojaka uzimamo u obzir samo četiri, i to životinjske bjelančevine, biljne bjelančevine, masnoće i ugljikohidrate. Od namirnica uzimamo u obzir samo 9, i to mast, ulje, meso, mlijeko, šećer, rižu, brašno, grah i krumpir. Sve potrebne podatke daje tabela 1.

U tabeli 1. nabrojene su namirnice označene uzastopnim brojevima. Sve su težine izražene u kg, a cijene su u novčanim jedinicama. Iz tabele vidimo npr.:

da 1 kg brašna sadrži 0,72 kg ugljikohidrata,

da 1 kg brašna stoji 52 novčane jedinice,

da čovjeku treba dnevno po 0,424 kg ugljikohidrata,

da brašno ima broj 7 i

da kupac kupuje x_7 kg brašna.

TABELA 1. BIOKEMIJSKA STRUKTURA NAMIRNICA, CIJENE I KOLIČINE NAMIRNICA I DNEVNE FIZIOLOŠKE POTREBE

Br.	Namirnica	Bjelančevine		Masnoće	Ugljikohidrati	Cijene	Količine
		životinjske	biljne				
1	Mast			1		327	x_1
2	Ulje			1		335	x_2
3	Meso	0,20		0,08		251	x_3
4	Mlijeko	0,03		0,04	0,05	31	x_4
5	Šećer				1	145	x_5
5	Riža		0,08	0,02	0,76	238	x_6
7	Brašno		0,12	0,02	0,72	52	x_7
8	Grah		0,24	0,02	0,47	71	x_8
9	Krumpir		0,02		0,19	15	x_9
Potrebe		0,028	0,037	0,1	0,424		

Problem linearnog programiranja koji želimo riješiti na ovom primjeru jest: Kakve količine u tabeli 1. navedenih 9 namirnica treba da kupac nabavi da bi zadovoljio navedene fiziološke potrebe, a da bi za nabavu namirnica imao najmanje troškove.

Izrazimo ovaj problem u matematičkom obliku. Kako količine namirnica ne mogu biti negativne, to sve varijable odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_j \geqq 0 \quad (j = 1, \dots, 9)$$

Ako kupac nabavi x_3 kg mesa i x_4 kg mlijeka, onda u obje namirnice dobiva $0{,}2\,x_3 + 0{,}03\,x_4$ kg životinjskih bjelančevina; kako tih bjelančevina mora dobiti najmanje 0,028 kg, to otuda dobivamo nejednadžbu:

$$0{,}2\,x_3 + 0{,}03\,x_4 \geqq 0{,}028$$

Slično dobivamo nejednadžbu za biljne bjelančevine:

$$0{,}08\,x_6 + 0{,}12\,x_7 + 0{,}24\,x_8 + 0{,}02\,x_9 \geqq 0{,}037$$

Za masnoće dobivamo nejednadžbu:

$$x_1 + x_2 + 0{,}08\,x_3 + 0{,}04\,x_4 + 0{,}02\,x_6 + 0{,}02\,x_7 + 0{,}02\,x_8 \geqq 0{,}1$$

Za ugljikohidrate pak dobivamo nejednadžbu:

$$0{,}05\,x_4 + x_5 + 0{,}76\,x_6 + 0{,}72\,x_7 + 0{,}47\,x_8 + 0{,}19\,x_9 \geqq 0{,}424$$

Ukupne kupčeve troškove u vezi s nabavom namirnica izračunamo tako da zbrojimo produkte količina i cijena svih namirnica.

Nakon svega toga dobivamo slijedeći linearni program:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $x_1, \dots, x_9$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, , \dots, 9)$$

i gore napisanim nejednadžbama za životinjske bjelančevine, biljne bjelančevine, masnoće i ugljikohidrate tako da funkcija cilja:

$$327\,x_1 + 335\,x_2 + 251\,x_3 + 31\,x_4 + 145\,x_5 + 238\,x_6 + 52\,x_7 + 71\,x_8 + 15\,x_9$$

ima minimum.

Linearni program u ovom obliku još nije podesan za rješavanje simpleks-metodom. U tu svrhu najprije sve četiri uvjetne nejednadžbe promijenimo u jednadžbe. Prema nejednadžbi koja važi za životinjske bjelančevine, kupac mora dobiti najmanje 0,028 kg životinjskih bjelančevina; može ih dobiti točno toliko, a može ih dobiti i nešto više. Ako od lijeve strane ove nejednadžbe odbijemo suvišne životinjske bjelančevine, onda nejednadžba prelazi u odgovarajuću jednadžbu. Ove suvišne životinjske bjelančevine za kupca su beznačajne, pa im zato propisujemo cijenu 0 novčanih jedinica. Stoga uvedemo neku novu namirnicu, i to čiste životinjske bjelančevine, koje imaju cijenu 0 novčanih jedinica; količinu tih namirnica označimo sa x_{10}. Ako tu količinu životinjskih bjelančevina odbijemo od lijeve strane nejednadžbe za životinjske bjelančevine, onda nejednadžba prelazi u jednadžbu:

$$0{,}2\,x_3 + 0{,}03\,x_4 - x_{10} = 0{,}028$$

Očigledno i dopunska varijabla x_{10} odgovara uvjetu nenegativnosti. Slično upotpunimo u jednadžbe i drugu, treću i četvrtu nejednadžbu. U nejednadžbi za biljne bjelančevine odbijemo od lijeve strane $x_{11} \geqq 0$ nanovo uvedenih dopunskih biljnih bjelančevina, koje imaju isto cijenu 0 novčanih jedinica. U nejednadžbi za masnoće odbijemo od lijeve strane $x_{12} \geqq 0$ nanovo uvedenih čistih dopunskih masnoća, koje isto tako imaju cijenu 0 novčanih jedinica. U nejednadžbi za ugljikohidrate odbijemo od lijeve strane $x_{13} \geqq 0$ nanovo uvedenih čistih dopunskih ugljikohidrata, koji također imaju cijenu 0 novčanih jedinica. Uvođenjem ovih četiriju dopunskih varijabla funkcija cilja u stvari se ne mijenja jer u njoj članovi s ovim varijablama dobivaju koeficijente koji su svi jednaki 0.

Time što smo uvjetne nejednadžbe nadopunili u jednadžbe, još ne možemo početi računanje simpleks-metodom, jer još nemamo nijednog mogućeg rješenja linearnog programa. U tu svrhu uvodimo još četiri umjetne varijable.

U jednadžbi za životinjske bjelančevine pribrojimo na lijevoj strani $x_{14} \geqq 0$ nanovo uvedenih čistih umjetnih životinjskih bjelančevina, pa dobivamo jednadžbu:

$$0{,}2\, x_3 + 0{,}03\, x_4 - x_{10} + x_{14} = 0{,}028$$

Cijenu ovim umjetnim životinjskim bjelančevinama podignemo tako visoko da u konačnom rješenju zasigurno ispadaju i neće doći u obzir za nabavu jer su preskupe. Ako pregledamo cijene namirnica, vidimo da je cijena 10 000 novčanih jedinica već dovoljno velika. Stoga ovim umjetnim životinjskim bjelančevinama propišemo cijenu 10 000 novčanih jedinica. Slično uvedemo umjetne varijable još u drugu, treću i posljednju uvjetnu jednadžbu. U jednadžbi za biljne bjelančevine pribrojimo na lijevoj strani $x_{15} \geqq 0$ čistih umjetnih biljnih bjelančevina, kojima isto tako propišemo cijenu 10 000 novčanih jedinica. U jednadžbi za masnoće pribrojimo na lijevoj strani $x_{16} \geqq 0$ čistih umjetnih masnoća, kojima također propišemo cijenu 10 000 novčanih jedinica. Konačno pribrojimo u jednadžbi za ugljikohidrate na lijevoj strani $x_{17} \geqq 0$ čistih umjetnih ugljikohidrata te i njima propišemo dovoljno visoku cijenu 10 000 novčanih jedinica. Uvođenjem umjetnih varijabla funkcija cilja dobiva četiri člana s uzastopnim umjetnim varijablama; te varijable u funkciji cilja nastupaju s koeficijentima koji su svi jednaki 10 000.

Napomena: U ovom primjeru ne bi trebalo uvoditi umjetne masnoće i umjetne ugljikohidrate jer čiste masnoće imamo već u masti ili ulju, a čiste ugljikohidrate u šećeru. Ove umjetne namirnice uvodimo samo zato da prikaz metode bude potpun. Nakon ovih nadopuna dobivamo slijedeći linearni program:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $x_1, \ldots, x_{17}$ koje odgovaraju uvjetima nenegativnosti:

$$x_j \geqq 0 \quad (j = 1, \ldots, 17)$$

i linearnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}
&0{,}20\, x_3 + 0{,}03\, x_4 - x_{10} + x_{14} = 0{,}028 \\
&0{,}08\, x_6 + 0{,}12\, x_7 + 0{,}24\, x_8 + 0{,}02\, x_9 - x_{11} + x_{15} = 0{,}037 \\
&x_1 + x_2 + 0{,}08\, x_3 + 0{,}04\, x_4 + 0{,}02\, x_6 + 0{,}02\, x_7 + 0{,}02\, x_8 - x_{12} + x_{16} = 0{,}100 \\
&0{,}05 x_4 + x_5 + 0{,}76\, x_6 + 0{,}72\, x_7 + 0{,}47\, x_8 + 0{,}19\, x_9 - x_{13} + x_{17} = 0{,}424
\end{aligned}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x_1, \dots, x_{17}) =$$

$$= 327\,x_1 + 335\,x_2 + 251\,x_3 + 31\,x_4 + 145\,x_5 + 238\,x_6 + 52\,x_7 +$$
$$+ 71\,x_8 + 15\,x_9 + 10\,000\,x_{14} + 10\,000\,x_{15} + 10\,000\,x_{16} + 10\,000\,x_{17}$$

ima minimum.

Podatke za ovaj linearni program daje tabela 2. U gornjem retku tabele redom su napisane cijene prvobitnih, dopunskih i umjetnih namirnica, u drugom su retku napisane količine tih namirnica. Svakoj od tih namirnica priredimo vektor čije komponente izražavaju biokemijsku strukturu te namirnice; ovi vektori upisani su u trećem retku. Mlijeku odgovara npr. vektor:

$$\mathbf{P}^4 = \left\| \begin{matrix} 0{,}03 \\ 0 \\ 0{,}04 \\ 0{,}05 \end{matrix} \right\|$$

Ovom vektoru odgovara cijena 31 novčana jedinica. Fiziološke potrebe izražava vektor:

$$\mathbf{P}^0 = \left\| \begin{matrix} 0{,}028 \\ 0{,}037 \\ 0{,}100 \\ 0{,}424 \end{matrix} \right\|$$

Vektori $\mathbf{P}^0$, $\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^{17}$ su vektori četverodimenzionalnog vektorskog prostora V^4. Jedinični vektori $\mathbf{P}^{14}$, $\mathbf{P}^{15}$, $\mathbf{P}^{16}$ i $\mathbf{P}^{17}$ sastavljaju bazu toga prostora; stoga se ovim jediničnim vektorima može linearno izraziti svaki vektor toga vektorskog prostora. Vektor $\mathbf{P}^4$ izrazimo npr. tim bazičnim vektorima ovako:

$$\mathbf{P}^4 = 0{,}03\,\mathbf{P}^{14} + 0.\mathbf{P}^{15} + 0{,}04\,\mathbf{P}^{16} + 0{,}05\,\mathbf{P}^{17}$$

Iz tabele 2. vidimo kako su vektori $\mathbf{P}^0$, $\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^{17}$ ovim jediničnim vektorima izraženi kao njihovi linearni sastavi. U tu svrhu ovi su jedinični vektori još jedanput napisani u drugom stupcu tabele.

Iz tabele 2. možemo odmah očitati početno moguće rješenje linearnog programa. To rješenje izvučemo iz komponenata vektora $\mathbf{P}^0$, koji je bazičnim jediničnim vektorima izražen ovako:

$$\mathbf{P}^0 = 0{,}028\,\mathbf{P}^{14} + 0{,}037\,\mathbf{P}^{15} + 0{,}100\,\mathbf{P}^{16} + 0{,}424\,\mathbf{P}^{17}$$

Zbog toga je

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = x_{11} = x_{12} = x_{13} = 0$$

$$x_{14} = 0{,}028,\ x_{15} = 0{,}037,\ x_{16} = 0{,}1,\ x_{17} = 0{,}424$$

TABELA 2. PODACI ZA PREHRAMBENI PROBLEM

			327	335	251	31	145	238	52	71	15					10000	10000	10000	1000
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}
		$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$	$\mathbf{P}^2$	$\mathbf{P}^3$	$\mathbf{P}^4$	$\mathbf{P}^5$	$\mathbf{P}^6$	$\mathbf{P}^7$	$\mathbf{P}^8$	$\mathbf{P}^9$	$\mathbf{P}^{10}$	$\mathbf{P}^{11}$	$\mathbf{P}^{12}$	$\mathbf{P}^{13}$	$\mathbf{P}^{14}$	$\mathbf{P}^{15}$	$\mathbf{P}^{16}$	$\mathbf{P}^{17}$
10 000	$\mathbf{P}^{14}$	0,028			0,20	0,03						-1				1			
10 000	$\mathbf{P}^{15}$	0,037						0,08	0,12	0,24	0,02		-1				1		
10 000	$\mathbf{P}^{16}$	0,100	1	1	0,08	0,04		0,02	0,02	0,02				-1				1	
10 000	$\mathbf{P}^{17}$	0,424				0,05	1	0,76	0,72	0,47	0,19				-1				1

početno bazično moguće rješenje linearnog programa; ovom mogućem rješenju odgovara vrijednost funkcije cilja:

$$10\,000\,(0{,}028 + 0{,}037 + 0{,}100 + 0{,}424) = 5\,890$$

novčanih jedinica.

U tabeli 2. vidimo još dvije činjenice koje omogućuju da odmah i bez svakoga daljnjeg računanja poboljšamo poznato moguće rješenje. Vektori $\mathbf{P}^1$ i $\mathbf{P}^{16}$ su po strukturi jednaki a odgovaraju im različite cijene; zbog toga možemo bez daljnjega iz baze odstraniti vektor $\mathbf{P}^{16}$ i nadomjestiti ga vektorom $\mathbf{P}^1$. Isto su tako po strukturi jednaki vektori $\mathbf{P}^5$ i $\mathbf{P}^{17}$, ali im odgovaraju različite cijene; zbog toga možemo bez daljnjega iz baze odstraniti i vektor $\mathbf{P}^{17}$ i nadomjestiti ga vektorom $\mathbf{P}^5$. Nakon te izmjene bazičnih vektora umjesto tabele 2. dobivamo gornji dio tabele 3.

Iz te tabele očitamo poboljšano bazično moguće rješenje:

$$x_1 = 0{,}1,\ x_2 = x_3 = x_4 = 0,\ x_5 = 0{,}424,\ x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} =$$
$$x_{11} = x_{12} = x_{13} = 0,\ x_{14} = 0{,}028,\ x_{15} = 0{,}037,\ x_{16} = x_{17} = 0$$

Ovom mogućem rješenju odgovara vrijednost funkcije cilja:

$$10\,000 \cdot 0{,}028 + 10\,000 \cdot 0{,}037 + 327 \cdot 0{,}1 + 145 \cdot 0{,}424 = \sim 744$$

novčanih jedinica. Ovo moguće rješenje uzimamo kao ishodište računanja simpleks-metodom.

Prva iteracija. I. dio tabele 3. nadopunimo dodatnim retkom diferencija $z_j - c_j$. Za vrijednost indeksa $j = 0$ već smo izračunali da je:

$$z_0 - c_0 = z_0 = \sim 744$$

novčane jedinice vrijednost funkcije cilja ili kupnje koja odgovara prvom mogućem rješenju.

Za sve druge vrijednosti indeksa j izračunamo diferenciju $z_j - c_j$ tako da skalarno pomnožimo cijene bazičnih vektora ili namirnica komponentama vektora $\mathbf{P}^j$ te od dobivenog produkta odbijemo cijenu c_j odgovarajuće namirnice. Broj z_8 izračunamo npr. ovako:

$$10\,000.0 + 10\,000.0{,}24 + 327.0{,}02 + 145.0{,}47 = 2\,475$$

novčanih jedinica; taj broj znači vrijednost sastojaka jednog kg graha ako bismo te sastojke nabavili u biljnim bjelančevinama, masti i šećeru. Zbog toga diferencija:

$$z_8 - c_8 = 2\,475 - 71 = 2\,404$$

novčane jedinice znači uštedu koju dobivamo ako nabavimo grah na tržištu neposredno umjesto da njegove sastojke nabavimo u obliku bazičnih namirnica.

Vidimo da u dodatnom retku ima nekoliko pozitivnih brojeva, pa stoga prvo moguće rješenje nije optimalno. Dalje vidimo da možemo postići najveću uštedu od 2 404 novčane jedinice ako u novu bazu uvedemo grah ili njemu odgovarajući

TABELA 3. RJEŠAVANJE LINEARNOG PROGRAMA SIMPLEKS-METODOM

		c_j		327	335	251	31	145	238	52	71	15					10000	10000	10000	10000
	c_i	Baza		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}
			$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^1$	$\mathbf{P}^2$	$\mathbf{P}^3$	$\mathbf{P}^4$	$\mathbf{P}^5$	$\mathbf{P}^6$	$\mathbf{P}^7$	$\mathbf{P}^8$	$\mathbf{P}^9$	$\mathbf{P}^{10}$	$\mathbf{P}^{11}$	$\mathbf{P}^{12}$	$\mathbf{P}^{13}$	$\mathbf{P}^{14}$	$\mathbf{P}^{15}$	$\mathbf{P}^{16}$	$\mathbf{P}^{17}$
I	10 000	$\mathbf{P}^{14}$	0,028			0,20	0,03						−1				1			
	10 000	$\leftarrow\mathbf{P}^{15}$	0,037						0,08	0,12	**0,24**	0,02		−1				1		
	327	$\mathbf{P}^1$	0,100	1	1	0,08	0,04		0,02	0,02	0,02				−1				1	
	145	$\mathbf{P}^5$	0,424				0,05	1	0,76	0,72	0,47	0,19				−1				1
	z_j-c_j		744		−8	1775	289		697	1259	2404	213	−10000	−10000	−327	−145			−9673	−9855
II	10 000	$\leftarrow\mathbf{P}^{14}$	0,028			0,2	**0,03**						−1				1			
	71	$\rightarrow\mathbf{P}^8$	0,154						0,33	0,50	1	0,08		−4,17				4,17		
	327	$\mathbf{P}^1$	0,097	1	1	0,08	0,04		0,01	0,01		−0,00		0,08	−1			−0,08	1	
	145	$\mathbf{P}^5$	0,352				0,05	1	0,60	0,49		0,15		1,96		−1		−1,96		1
	z_j-c_j		374		−8	1775	289		−104	58		12	−10000	15	−327	−145		−10015	−9673	−9855
III	31	$\rightarrow\mathbf{P}^4$	0,933			6,67	1						−33,3							
	71	$\leftarrow\mathbf{P}^8$	0,154						0,33	**0,50**	1	0,08		−4,17						
	327	$\mathbf{P}^1$	0,060	1	1	−0,19			0,01	0,01		−0,00	1,33	0,08	−1					
	145	$\mathbf{P}^5$	0,305			−0,33		1	0,60	0,49		0,15	1,67	1,96		−1				
	z_j-c_j		104		−8	−154			−104	58		12	−356	15	−327	−145				
IV	31	$\mathbf{P}^4$	0,933			6,67	1						−33,3							
	52	$\rightarrow\mathbf{P}^7$	0,308						0,67	1	2	0,17		−8,33						
	327	$\mathbf{P}^1$	0,057	1	1	−0,19			0,01		−0,02	−0,00	1,33	0,17	−1					
	145	$\leftarrow\mathbf{P}^5$	0,155			−0,33		1	0,28		−0,97	0,07	1,67	**6,00**		−1				
	z_j-c_j		86		−8	−154			−142		−114	2,77	−356	491	−327	−145				
V	31	$\mathbf{P}^4$	0,933			6,67	1						−33,3							
	52	$\mathbf{P}^7$	0,524			−0,46		1,39	1,06	1	0,65	0,26	2,32			−1,39				
	327	$\mathbf{P}^1$	0,052	1	1	−0,18		−0,03	−0,00		0,01	−0,01	1,29		−1	0,03				
		$\rightarrow\mathbf{P}^{11}$	0,026			−0,05		0,17	0,05		−0,16	0,01	0,28	1		−0,17				
	z_j-c_j		73		−8	−126		−82	−167		−35	−3	−492		−327	−63				
	z_j			327	327	125	31	63	71	52	36	12	492		327	63				

vektor $\mathbf{P}^8$. Odredimo još namirnicu ili njoj odgovarajući vektor koji odstranimo iz baze. U tu svrhu podijelimo komponente vektora $\mathbf{P}^0$ homolognim pozitivnim komponentama vektora $\mathbf{P}^8$, pa dobivamo kvocijente:

$$\begin{array}{ll} \text{u drugom retku:} & 0{,}037 : 0{,}24 = \sim 0{,}1 \\ \text{u trećem retku:} & 0{,}100 : 0{,}02 = 50 \\ \text{u četvrtom retku:} & 0{,}424 : 0{,}47 = \sim 0{,}9 \end{array}$$

Kako je kvocijent u drugom retku najmanji, to iz baze odstranimo vektor $\mathbf{P}^{15}$ ili njemu odgovarajuće umjetne biljne bjelančevine. Kako je odstranjeni vektor u drugom retku, to je ključni koeficijent $a_{28} = 0{,}24$.

I. dio tabele transformiramo prema propisanom transformacijskom zakonu ili pak tabeli odgovarajuću matricu premultipliciramo transformacijskom matricom:

$$\mathbf{T}_{28} = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{0{,}24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{0{,}02}{0{,}24} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{0{,}47}{0{,}24} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2404}{0{,}24} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Nakon transformacije dobivamo II. dio tabele 3. Njemu odgovara drugo moguće rješenje, koje ima od 0 različite samo komponente:

$$x_1 = 0{,}097, \; x_5 = 0{,}352, \; x_8 = 0{,}154, \; x_{14} = 0{,}028$$

Njemu odgovarajuća vrijednost funkcije cilja jest 374 novčane jedinice. Ovo rješenje još nije optimalno jer u dodatnom retku ima još nekoliko pozitivnih brojeva; ti brojevi pak znače da su uštede još moguće.

Druga iteracija. U dodatnom retku II. dijela tabele najveći je pozitivni broj 1 775, koji odgovara mesu ili vektoru $\mathbf{P}^3$. Kod te iteracije mogli bismo zbog toga dobiti najveću uštedu ako bismo u novu bazu uveli meso ili vektor $\mathbf{P}^3$. Radi skraćenja računskog postupka međutim razmislimo ovo: slijedeći najveći pozitivni broj u dodatnom retku je 289, koji odgovara mlijeku ili vektoru $\mathbf{P}^4$. Ako uspoređujemo biokemijske strukture i cijene mesa i mlijeka, a to su odlučujuće namirnice osobito s obzirom na zadovoljenje potreba za životinjskim bjelančevinama, onda vidimo da su te strukture mnogo jeftinije u mlijeku nego u mesu bez obzira na to što mlijeko ima više drugih sastojaka. Stoga u novu bazu uvedemo radije mlijeko ili vektor $\mathbf{P}^4$ negoli meso ili vektor $\mathbf{P}^3$. Ako bismo naime u ovoj iteraciji uveli u bazu meso, onda bismo ga morali u nekoj budućoj iteraciji odstraniti iz baze i nadomjestiti mlijekom. Tako uštеđujemo barem jednu iteraciju.

U drugoj iteraciji u novu bazu uvedemo mlijeko ili vektor $\mathbf{P}^4$. Da bismo odredili vektor koji odstranjujemo iz baze, uspoređujemo kvocijente:

u prvom retku: $0{,}028 : 0{,}03 = \sim 1$
u trećem retku: $0{,}097 : 0{,}04 = \sim 2$
u četvrtom retku: $0{,}352 : 0{,}05 = \sim 7$

Kako je kvocijent u prvom retku najmanji, to iz baze odstranimo vektor $\mathbf{P}^{14}$ ili njemu odgovarajuće umjetne životinjske bjelančevine. Budući da je odstranjeni vektor u prvom retku, to je ključni koeficijent $a_{14} = 0{,}03$.

II. dio tabele transformiramo prema propisanom transformacijskom zakonu ili pak tako da tabeli odgovarajuću matricu premultipliciramo transformacijskom matricom:

$$\mathbf{T}_{14} = \left\| \begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{0{,}03} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{0{,}04}{0{,}03} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{0{,}05}{0{,}03} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{289}{0{,}03} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Nakon transformacije dobivamo III. dio tabele 3. Njemu odgovara treće moguće rješenje, koje ima od 0 različite samo komponente:

$$x_1 = 0{,}060,\ x_4 = 0{,}933,\ x_5 = 0{,}305,\ x_8 = 0{,}154$$

Njemu odgovarajuća vrijednost funkcije cilja jest 104 novčane jedinice. Ovo rješenje nije optimalno jer u dodatnom retku ima još nekoliko pozitivnih brojeva.

Nakon druge iteracije iz baze smo odstranili sve umjetne vektore koji su svoju ulogu odigrali. Stoga nam više nisu potrebni, pa ih u daljnjem računanju više ne uzimamo u obzir.

Treća iteracija. U dodatnom retku najveći je pozitivni broj 58, koji odgovara brašnu ili vektoru $\mathbf{P}^7$; stoga u novu bazu uvedemo vektor $\mathbf{P}^7$. Da bismo odredili vektor koji odstranimo iz baze, uspoređujemo kvocijente:

u drugom retku: $0{,}154 : 0{,}50 = \sim 0{,}3$
u trećem retku: $0{,}060 : 0{,}01 = \quad 6$
u četvrtom retku: $0{,}305 : 0{,}49 = \sim 0{,}6$

Kako je kvocijent u drugom retku najmanji, to iz baze odstranimo vektor $\mathbf{P}^8$ odnosno njemu odgovarajuću namirnicu grah. Budući da je odstranjeni vektor u drugom retku, to je ključni koeficijent $a_{27} = 0{,}50$.

III. dio tabele 3. transformiramo prema propisanom transformacijskom zakonu ili pak tako da tabeli odgovarajuću matricu premultipliciramo transformacijskom matricom:

$$\mathbf{T}_{27} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{0,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{0,01}{0,5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{0,49}{0,5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{58}{0,5} & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Nakon transformacije dobivamo četvrti dio tabele 3. Njemu odgovara četvrto moguće rješenje, koje ima od 0 različite samo komponente:

$$x_1 = 0{,}057, \; x_4 = 0{,}933, \; x_5 = 0{,}155, \; x_7 = 0{,}308$$

Njemu odgovara vrijednost funkcije cilja 86 novčanih jedinica. Ovo rješenje još nije optimalno jer su u dodatnom retku još dva pozitivna broja.

Četvrta iteracija. U dodatnom retku od dva pozitivna broja veći je broj 491, koji odgovara $\mathbf{P}^{11}$ ili njemu odgovarajućim dopunskim biljnim bjelančevinama; zato u novu bazu uvodimo vektor $\mathbf{P}^{11}$. Pri određivanju vektora koji odstranjujemo iz baze uspoređujemo kvocijente:

$$\begin{aligned} &\text{u trećem retku:} \quad 0{,}057 : 0{,}17 = \sim 0{,}3 \\ &\text{u četvrtom retku:} \; 0{,}155 : 6{,}00 = \sim 0{,}03 \end{aligned}$$

Kako je kvocijent u četvrtom retku manji, to iz baze odstranimo vektor $\mathbf{P}^5$ ili šećer. Budući da je odstranjeni vektor u četvrtom retku, to je ključni koeficijent $a_{4,11} = 6$.

IV. dio tabele 3. transformiramo po propisanom transformacijskom zakonu ili pak tako da tabeli odgovarajuću matricu premultipliciramo transformacijskom matricom:

$$\mathbf{T}_{4,11} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{8,33}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{0,17}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{491}{6} & 1 \end{Vmatrix}$$

Nakon transformacije dobivamo V. dio tabele 3. Kako u dodatnom retku nema više nijednog pozitivnog broja, to je izračunano peto moguće rješenje optimalno. Ovo rješenje ima samo slijedeće od 0 različite komponente:

$$x_1 = 0{,}052, \; x_4 = 0{,}933, \; x_7 = 0{,}524, \; x_{11} = 0{,}026$$

Ovom optimalnom mogućem rješenju odgovara najmanja vrijednost funkcije cilja 73 novčane jedinice.

Analiza rezultata. Prema izračunanom optimalnom mogućem rješenju kupac će zadovoljiti svoje fiziološke potrebe ako kupi:

0,052 kg masti,
0,933 l mlijeka i
0,524 kg brašna;

takvom kupnjom dobiva 0,026 kg biljnih bjelančevina više nego što mu treba; za takvu kupnju plaća

73 novčane jedinice.

Pogledajmo točnije optimalno moguće rješenje s gledišta biokemijske strukture kupljenih namirnica. Iz tabele 4. vidimo pregledno koliko životinjskih bjelančevina, biljnih bjelančevina, masnoća i ugljikohidrata dobiva kupac u nabavljenoj masti, mlijeku i brašnu.

TABELA 4. STRUKTURA OPTIMALNE KUPNJE

Namirnica	Nabavljene količine	Životinjske bjelančevine	Biljne bjelančevine	Masnoće	Ugljikohidrati
$\mathbf{P}^1$ mast	0,052	0	0	0,052	0
$\mathbf{P}^4$ mlijeko	0,933	0,028	0	0,037	0,047
$\mathbf{P}^7$ brašno	0,524	0	0,063	0,011	0,377
Ukupno		0,028	0,063	0,100	0,424
Odbitak dopunskih biljnih bjelančevina		—	0,026	—	—
Potrebe		0,028	0,037	0,100	0,424

Pogledajmo još dodatni redak diferencija $z_j - c_j$ u V. dijelu tabele 3. Za vrijednost indeksa $j = 0$ znači:

$$z_0 - c_0 = z_0 = 73$$

novčane jedinice troškova koje kupac ima pri optimalnoj kupnji namirnica.

Značenje tih diferencija za sve druge vrijednosti j objasnit ćemo na primjeru mesa, kojemu odgovara vektor $\mathbf{P}^3$. Diferencija:

$$z_3 - c_3 = -126$$

novčanih jedinica je negativna i stoga znači uštedu koju dobivamo ako sastojke mesa kupimo posredno u obliku bazičnih namirnica, umjesto da ih kupimo direktno na tržištu u mesu.

Kako je $c_3 = 251$ novčana jedinica, to je:

$$z_3 = 251 - 126 = 125$$

novčanih jedinica. Broj z_3 znači vrijednost mesa ako njegove sastojke kupimo posredno u bazičnim namirnicama; prema tome 1 kg mesa stvarno vrijedi samo 125 novčanih jedinica. Ova se vrijednost naziva *dosuđena cijena*. Na sličan način izračunamo dosuđene cijene još svim ostalim namirnicama; te su cijene upisane u posljednjem retku tabele 3.

Dosuđena cijena svake namirnice koja dolazi u obzir u optimalnoj kupnji jednaka je njezinoj tržišnoj cijeni. Namirnica pak koja ne dolazi u obzir u optimalnoj kupnji ima dosuđenu cijenu koja nije veća od njezine tržišne cijene; takva je namirnica na tržištu preskupa da bi došla u obzir pri najjeftinijoj kupnji. Tabela 5. daje pregled tržišnih i dosuđenih cijena za sve namirnice što su uzete u obzir.

TABELA 5. PREGLED TRŽIŠNIH I DOSUĐENIH CIJENA

Namirnice	Tržišne cijene c_j	Dosuđene cijene z_j
P¹ mast	327	327
P² ulje	335	327
P³ meso	251	125
P⁴ mlijeko	31	31
P⁵ šećer	145	63
P⁶ riža	238	71
P⁷ brašno	52	52
P⁸ grah	71	36
P⁹ krumpir	15	12
P¹⁰ životinjske bjelančevine		492
P¹¹ biljne bjelančevine		0
P¹² masnoće		327
P¹³ ugljikohidrati		63

Slično značenje imaju dosuđene cijene dopunskih namirnica; te su cijene upisane u donjem dijelu tabele 5. Pri najjeftinijoj kupnji 1 kg životinjskih bjelančevina stoji 492, 1 kg biljnih bjelančevina 0, 1 kg masnoća 327 i 1 kg ugljikohidrata 63 novčane jedinice. Pri optimalnoj kupnji kupac biljne bjelančevine dobiva zapravo badava i u većoj količini nego što mu treba. To znači da svoje potrebe za biljnim bjelančevinama pokriva čim pokrije potrebe za preostalim trima biokemijskim sastojcima.

2. Proizvodni problem

Razmotrimo opći proizvodni problem linearnog programiranja pri kojem proizvodno poduzeće uz utrošak novčanih sredstava i određenih elemenata proizvodnog procesa izrađuje nekoliko tipova proizvoda. Pretpostavimo, da poduzeće proizvodi n tipova proizvoda $P_1, \dots, P_j, \dots, P_n$; od proizvodnih troškova ne uzimamo u obzir stalne troškove nego samo promjenljive troškove za nabavu elemenata proizvodnog procesa i za financiranje samog proizvodnog procesa. Ukupnih novčanih sredstava poduzeće ima na raspolaganju k novčanih jedinica. U proizvodnji poduzeće treba m tipova elemenata proizvodnog procesa $S_1, \dots, S_i, \dots S_m$, kojih ima na raspolaganju uzastopno najviše po $s_1, \dots, s_i, \dots s_m$ jedinica; ove elemente proizvodnog procesa može nabaviti uzastopce po cijenama $u_1, \dots, u_i, \dots, u_m$ novčanih jedinica. U proizvodnji jedne jedinice proizvoda P_j poduzeće potroši k_j jedinica novčanih sredstava, te uzastopce po $a_{1j}, \dots, a_{ij}, \dots a_{mj}$ jedinica elemenata proizvodnog procesa; pri tom je $j = 1, \dots, n$. Zbog prilika u poduzeću i na tržištu količine proizvedenih proizvoda ograničene su prema dolje i prema gore, i to tako da poduzeće treba izraditi ne manje od m_j jedinica i ne više od M_j jedinica proizvoda P_j. Poduzeće prodaje proizvode uzastopce po cijeni od $c_1, \dots, c_j, \dots, c_n$ novčanih jedinica. Problem koji se pojavljuje u poduzeću pri proizvodnji jest kako da poduzeće programira u datim prilikama proizvodnju da bi postiglo najveći prihod za pokriće; pri tom je prihod za pokriće jednak diferenciji prihoda od prodaje proizvoda i varijabilnih troškova proizvodnje. Podatke za taj proizvodni problem daje pregledno tabela 1.

TABELA 1. PODACI ZA PROIZVODNI PROBLEM

		Proizvodi $P_1 \dots P_j \dots P_n$	Raspoložive količine	Nabavne cijene
Novčana sredstva		$k_1 \dots k_j \dots k_n$	k	
Elementi proizvodnog procesa	S_1	$a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n}$	s_1	u_1
	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	S_i	$a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{in}$	s_i	u_i
	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	S_m	$a_{m1} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn}$	s_m	u_m
Prodajne cijene		$c_1 \cdots c_j \cdots c_n$		
Količinska ograničenja	donje	$m_1 \cdots m_j \cdots m_n$		
	gornje	$M_1 \cdots M_j \cdots M_n$		
Optimalno moguće rješenje		$x_1^0 \cdots x_j^0 \cdots x_n^0$	f_{max}	

Formulirajmo problem matematički! U tu svrhu najprije odredimo uvjete kojima odgovaraju varijable. Zbog propisanih količinskih ograničenja varijable odgovaraju nejednadžbama:

$$m_j \leqq x_j \leqq M_j \quad (j = 1, \dots, n) \tag{1}$$

Zbog ograničenih raspoloživih količina elemenata proizvodnog procesa varijable zadovoljavaju m nejednadžbe:

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n &\leqq s_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n &\leqq s_m
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Poduzeće pri nabavi elemenata proizvodnog procesa ima

$$
\begin{aligned}
& u_1 (a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n) + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + u_m (a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n)
\end{aligned}
$$

novčanih jedinica troškova, a pri proizvodnji proizvoda ima još troškove

$$k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n$$

novčanih jedinica; kako ukupni troškovi ne mogu biti veći od raspoložive količine novčanih sredstava, to varijable zadovoljavaju nejednadžbu:

$$
\begin{aligned}
& (k_1 + a_{11} u_1 + \ldots + a_{m1} u_m) x_1 + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (k_n + a_{1n} u_1 + \ldots + a_{mn} u_m) x_n \leqq k
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Odredimo još funkciju cilja. Prihod za pokriće jednak je diferenciji prihoda od prodaje proizvoda i varijabilnih troškova; prihod od prodaje proizvoda jednak je

$$c_1 x_1 + \ldots c_n x_n$$

novčanh jedinica; varijabilne smo troškove već gore izračunali; stoga dobivamo funkciju cilja ovako:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n - \\
&- (k_1 + a_{11} u_1 + \ldots + a_{m1} u_m) x_1 - \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&- (k_n + a_{1n} u_1 + \ldots + a_{mn} u_m) x_n
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Nakon preuređenja članova dobivamo:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) = & (c_1 - k_1 - a_{11} u_1 - \ldots - a_{m1} u_m) x_1 + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (c_n - k_n - a_{1n} u_1 - \ldots - a_{mn} u_m) x_n
\end{aligned}
$$

Nakon svaga ovog za razmatrani problem proizvodnje dobivamo slijedeći problem optimalnosti:

Treba odrediti vrijednosti varijabla $x_1, \ldots, x_n$ koje odgovaraju nejednadžbama (1) i uvjetnim nejednadžbama (2 & 3), tako da funkcija cilja (4) ima maksimum.

Problem možemo izraziti u matričnom obliku ako uvedemo slijedeće matrice ili vektore:

$$\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{Vmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{Vmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{Vmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{Vmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{Vmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \| k_1 \dots k_n \| \quad \mathbf{c} = \| c_1 \dots c_n \| \quad \mathbf{u} = \| u_1 \dots u_m \|$$

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Nakon uvođenja ovih matrica i vektora razmatrani problem proizvodnje formuliramo ovako:

Treba odrediti vektor $\mathbf{x}$ koji zadovoljava nejednadžbe:

$$\mathbf{m} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{M} \tag{1a}$$

i uvjetne nejednadžbe:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leqq \mathbf{s} \tag{2a}$$

$$(\mathbf{k} + \mathbf{u}\,\mathbf{A})\,\mathbf{x} \leqq \mathbf{k} \tag{3a}$$

tako da ima funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{c} - \mathbf{k} - \mathbf{u}\,\mathbf{A})\,\mathbf{x} \tag{4a}$$

minimum.

Kako su sve uvjetne nejednadžbe linearne i kako je linearna i funkcija cilja, to je riječ o problemu linearnog programiranja; možemo ga riješiti simpleks-metodom.

Primjer. Proizvodno poduzeće izrađuje četiri tipa proizvoda P_1, P_2, P_3 i P_4; u proizvodnji troši novčana sredstva i tri tipa sirovina S_1, S_2 i S_3. Pri proizvodnji 1 jedinice prvog proizvoda ima 32, 1 jedinice drugog proizvoda 15, 1 jedinice trećeg proizvoda 24 i 1 jedinice četvrtog proizvoda 18 novčanih jedinica direktnih troškova. Za nabavu 1 jedinice prve sirovine izdaje 2, 1 jedinice druge 3 i 1 jedinice treće 1 novčanu jedinicu. Za financiranje proizvodnje poduzeće ima na raspolaganju 6 500 novčanih jedinica. Pri proizvodnji 1 jedinice prvog proizvoda potroši 6 jedinica prve, 8 jedinica druge i 4 jedinice treće sirovine; pri proizvodnji 1 jedinice drugog proizvoda potroši 7 jedinica prve, 5 jedinica druge i 2 jedinice treće sirovine, pri proizvodnji 1 jedinice trećeg proizvoda potroši 3 jedinice prve i 5 jednica treće sirovine; pri proizvodnji 1 jedinice četvrtog proizvoda potroši 9 jedinica prve i 6 jedinica druge sirovine. Raspoložive količine sirovina su ograničene, tako da poduzeće može potrošiti najviše 720 jedinica prve, 650 druge i 530 jedinica treće sirovine. Poduzeće ne smije izraditi manje od 12 jedinica prvog, 8 jedinica drugog, 20 jedinica trećeg i 10 jedinica četvrtog proizvoda; proizvodnja je ograničena i prema gore, tako da poduzeće ne smije izraditi više od 36 jedinica prvog, 50 jedinica drugog, 70 jedinica trećeg i 40 jedinica četvrtog proizvoda. Poduzeće prodaje prvi proizvod po cijeni od 95, drugi po cijeni od 60, treći po cijeni od 50 i četvrti po cijeni od 70 novčanih jedinica. Kako da poduzeće uz te podatke programira proizvodnju da bi postiglo najveći prihod za pokriće?

TABELA 2. PODACI ZA PRIMJER PROBLEMA PROIZVODNJE

		Proizvodi				Raspoložive količine	Nabavne cijene	Potrošene količine
		P_1	P_2	P_3	P_4			
Novčana sredstva		32	15	24	18	6 500		6 500
Sirovine	S_1	6	7	3	9	720	2	657
	S_2	8	5	0	6	650	3	448
	S_3	4	2	5	0	530	1	530
Prodajne cijene		95	60	50	70			
Varijable		u	v	x	y			
Donje granice		12	8	20	10			
Gornje granice		36	50	70	40			
Optimalno moguće rješenje		36	18	70	11,67	2 316,67		

Podatke za promatrani problem proizvodnje daje tabela 2. U njoj varijable u, v, x i y znače količine izrađenih jedinica prvog, drugog, trećeg i četvrtog proizvoda. U tabeli je upisano i optimalno moguće rješenje.

Formulirajmo problem matematički. Zbog količinskih ograničenja izrade proizvoda, količine izrađenih proizvoda u, v, x i y odgovaraju graničnim nejednadžbama:

$$\begin{aligned} 12 &\leqq u \leqq 36 \\ 8 &\leqq v \leqq 50 \\ 20 &\leqq x \leqq 70 \\ 10 &\leqq y \leqq 40 \end{aligned} \tag{1}$$

Zbog ograničenosti raspoloživih količina sirovina varijable zadovoljavaju nejednadžbe:

$$\begin{aligned} 6u + 7v + 3x + 9y &\leqq 720 \\ 8u + 5v + \phantom{3x +{}} 6y &\leqq 650 \\ 4u + 2v + 5x \phantom{{}+ 9y} &\leqq 530 \end{aligned} \tag{2}$$

Poduzeće troši novčana sredstva za nabavu sirovina i za pokriće varijabilnih troškova proizvodnje. Za nabavu sirovina potroši:

$$\begin{aligned} &2\,(6u + 7v + 3x + 9y) + \\ + &3\,(8u + 5v + \phantom{3x +{}} 6y) + \\ + &1\,(4u + 2v + 5x \phantom{{}+ 9y}) \end{aligned}$$

novčanih jedinica, dok za pokriće varijabilnih troškova potroši:

$$32u + 15v + 24x + 18y$$

novčanih jedinica; ukupno pri izradi proizvoda potroši

$$72u + 46v + 35x + 54y$$

novčanih jedinica. Kako su raspoloživa novčana sredstva ograničena, to varijable zadovoljavaju još i nejednadžbu:

$$72u + 46v + 35x + 54y \leqq 6\,500 \tag{3}$$

Odredimo još funkciju cilja. Budući da je prihod za pokriće jednak diferenciji prihoda od prodaje proizvoda i varijabilnih proizvodnih troškova, to je on jednak:

$$\begin{aligned} &95u + 60v + 50x + 70y - \\ &- 72u - 46v - 35x - 54y = \\ &= 23u + 14v + 15x + 16y \end{aligned}$$

novčanih jedinica. Stoga promatrani problem proizvodnje ima funkciju cilja:

$$f(u, y, x, y) = 23u + 14v + 15x + 16y \tag{4}$$

Tako za problem proizvodnje dobivamo slijedeću matematičku formulaciju: Treba odrediti vrijednosti varijabla u, v, x i y koje zadovoljavaju granične nejednadžbe (1) i uvjetne nejednadžbe (2 & 3), tako da funkcija cilja (4) ima maksimum.

Kako su sve nejednadžbe linearne i kako je linearna i funkcija cilja, to se radi o problemu linearnog programiranja. Riješimo ga numerički simpleks-metodom pomoću elektronskog računala.

Pri optimalnom programu proizvodnje poduzeće izradi uzastopce:

$$u = 36, \ v = 18, \ x = 70, \ y = 11{,}667$$

jedinica proizvoda P_1, P_2, P_3 i P_4 te realizira najveći prihod za pokriće 2 316,67 novčanih jedinica.

Strojni programi koji su izrađeni za računanje po simpleks-metodi obično su tako prilagođeni da osim optimalnog mogućeg rješenja daju još neke druge pokazatelje značajne za ekonomsku analizu.

S obzirom na potrošene količine novčanih sredstava i sirovina strojnim računanjem dobivamo pored optimalnog mogućeg rješenja još i ove rezultate: pri optimalnom proizvodnom programu poduzeće potroši sva raspoloživa novčana sredstva i svu raspoloživu količinu sirovine S_3; od 720 jedinica raspoložive količine sirovine S_1 potroši samo 657 jedinica, dok od raspoložive količine 650 jedinica sirovine S_2 potroši svega 448 jedinica. Stoga za poduzeće predstavljaju usko grlo, koje sprečava povećanje proizvodnje, novčana sredstva i sirovine S_3.

Dalje, strojnim računanjem dobivamo još slijedeće rezultate koji određuju područje stabilnosti optimalnog mogućeg rješenja: izračunano optimalno moguće rješenje programa proizvodnje se ne mijenja, dok prodajne cijene proizvoda odgovaraju nejednadžbama:

$$\begin{aligned} &94 \leqq c_1 \\ &59{,}63 \leqq c_2 \leqq 60{,}46 \\ &46{,}30 \leqq c_3 \\ &67{,}45 \leqq c_4 \leqq 70{,}43 \end{aligned}$$

3. Problem tržišta

Trgovačko poduzeće šalje robu na različita tržišta a s njih dobiva drugu robu; u poslovanju uzima u obzir sve potrebne okolnosti, uzance, trgovinske dogovore i propise, prilike na tržištima itd. Svrha poslovanja je postići najveću dobit; pri donošenju odluke o tržišnom poslovanju u poduzeću se postavlja problem optimalnosti na koja tržišta da šalje robu i s kojih da dobiva drugu robu, a da bi s obzirom na sve okolnosti postiglo najveću dobit. Uz određene pretpostavke probleme optimalnosti te vrste možemo promatrati pomoću metoda linearnog programiranja. U nastavku ćemo obraditi jedan ovakav tržišni problem.

Trgovačko poduzeće ima na domaćem tržištu za kupnju na raspolaganju $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_r$ jedinica r vrsta robe $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_r$ uzastopce po cijenama $c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_r$ novčanih jedinica. Nabavljenu robu šalje na n tržišta $T_1, \ldots, T_j, \ldots T_n$, i proda je uz slijedeće uvjete: na tržištu T_j može prodati najviše p_{ij} jedinica robe A_i; nakon odbitka svih troškova poduzeće za jedinicu robe A_i na tržištu T_j prodane robe dobiva c_{ij} novčanih jedinica; na tržištu T_j poduzeće je prodalo x_{ij} jedinica robe A_i. Novčanim sredstvima koje je dobilo od prodaje robe poduzeće na istim tržištima nabavi s vrsta robe $B_1, \ldots, B_s$ uz slijedeće uvjete: nakon odbitka svih troškova plaća za jedinicu na tržištu T_j nabavljene robe B_k d_{kj} novčanih jedinica; na tržištu T_j može kupiti najviše q_{kj} jedinica robe B_k; na tržištu T_j kupi y_{kj} jedinica robe B_k. Nabavljenu robu proda na domaćem tržištu uz slijedeće uvjete: na domaćem tržištu ne može prodati više od b_k robe B_k; jedinicu robe B_k proda po d_k novčanih jedinica.

TABELA 1. PODACI ZA PROBLEM TRŽIŠTA

		Roba	Roba
		$A_1 \cdots A_r$	$B_1 \cdots B_s$
	Količinska ograničenja	$a_1 \cdots a_r$	$b_1 \cdots b_s$
	Tržišne cijene na domaćem tržištu	$c_1 \cdots c_r$	$d_1 \cdots d_s$
Tržište T_1	Tržišne cijene	$c_{11} \cdots c_{r1}$	$d_{11} \cdots d_{s1}$
	Količine	$x_{11} \cdots x_{r1}$	$y_{11} \cdots y_{s1}$
	Količinska ograničenja	$p_{11} \cdots p_{r1}$	$q_{11} \cdots q_{s1}$
....	....	....	....
Tržište T_n	Tržišne cijene	$c_{1n} \cdots c_{rn}$	$d_{1n} \cdots d_{sn}$
	Količine	$x_{1n} \cdots x_{rn}$	$y_{1n} \cdots y_{sn}$
	Količinska ograničenja	$p_{1n} \cdots p_{rn}$	$q_{1n} \cdots q_{sn}$

Podaci su za taj problem tržišta sakupljeni u tabeli 1. Uz te podatke za trgovačko poduzeće nastaje problem optimalnosti, kolike količine pojedinih vrsta robe da proda i kupi na tržištima da bi u datim prilikama postiglo najveću dobit.

Formulirajmo problem matematički. U tu svrhu najprije odredimo uvjetne nejednadžbe ili jednadžbe kojima odgovaraju varijable. U problemu nastupaju dvije skupine varijabla; varijabla

$$x_{ij} \quad (i = 1, \ldots r;\; j = 1, \ldots, n)$$

prve skupine znači količinu na tržištu T_j prodane robe A_i; varijabla

$$y_{kj} \quad (k = 1, \ldots, s;\; j = 1, \ldots, n)$$

druge skupine znači količinu na tržištu T_j kupljene robe B_k.

Zbog zahtjeva nenegativnosti i zbog ograničenih mogućnosti prodaje i kupnje robe na tuđim tržištima varijable zadovoljavaju nejednadžbe:

$$0 \leqq x_{ij} \leqq p_{ij} \tag{1}$$

$$0 \leqq y_{kj} \leqq q_{kj} \tag{2}$$

Zbog ograničenih mogućnosti kupnje robe na domaćem tržištu varijable x_{ij} odgovaraju r nejednadžbama:

$$x_{i1} + \ldots + x_{in} \leqq a_i \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{3}$$

Zbog ograničenih mogućnosti prodaje robe na domaćem tržištu varijable y_{kj} zadovoljavaju s nejednadžbi:

$$y_{k1} + \ldots + y_{kn} \leqq b_k \quad (k = 1, \ldots, s) \tag{4}$$

Za kupnju robe na tuđim tržištima poduzeće ne može izdati više novčanih sredstava nego što ih je dobilo prodajom robe; stoga varijable odgovaraju još i nejednadžbi:

$$\begin{aligned} & c_{11} x_{11} + \ldots + c_{1n} x_{1n} + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & c_{r1} x_{r1} + \ldots + c_{rn} x_{rn} \qquad \geqq d_{11} y_{11} + \ldots + d_{1n} y_{1n} + \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + d_{s1} y_{s1} + \ldots + d_{sn} y_{sn} \end{aligned}$$

Ovu nejednadžbu napišemo kraće ovako:

$$\sum_{i=1}^{i=r} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij} - \sum_{k=1}^{k=s} \sum_{j=1}^{j=n} d_{kj} y_{kj} \geqq 0 \tag{5}$$

Odredimo još funkciju cilja. Za robu koja je nabavljena na domaćem tržištu poduzeće plaća:

$$\begin{aligned} & c_1 (x_{11} + \ldots + x_{1n}) + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + c_r (x_{r1} + \ldots + x_{rn}) \qquad = \sum_{i=1}^{i=r} \sum_{j=1}^{j=n} c_i x_{ij} \end{aligned}$$

novčanih jedinica; za robu koja je prodana na domaćem tržištu dobiva

$$\begin{aligned} & d_1 (y_{11} + \ldots + y_{1n}) + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + d_s (y_{s1} + \ldots + y_{sn}) \qquad = \sum_{k=1}^{k=s} \sum_{j=1}^{j=n} d_k y_{kj} \end{aligned}$$

novčanih jedinica. Iz toga izračunamo dobit poduzeća ili funkciju cilja:

$$f(x_{ij}, y_{kj}) = \sum_{k=1}^{k=s} \sum_{j=1}^{j=n} d_k y_{kj} - \sum_{i=1}^{i=r} \sum_{j=1}^{j=n} c_i x_{ij} \tag{6}$$

Poslije ovoga za promatrani problem tržišta dobivamo slijedeći problem linearnog programiranja:

Treba odrediti vrijednosti varijabla:

$$x_{ij} \;\&\; y_{kj} \quad (i = 1, \ldots, r;\; k = 1, \ldots, s;\; j = 1, \ldots, n)$$

koje zadovoljavaju ogradne nejednadžbe (1 & 2) i uvjetne nejednadžbe (3 & 4 & 5) tako da funkcija cilja (6) ima maksimum.

Kako su sve nejednadžbe kojima odgovaraju varijable linearne i kako je linearna i funkcija cilja, to je riječ o problemu linearnog programiranja. Optimalno moguće rješenje izračunamo simpleks-metodom.

Primjer. Trgovačko poduzeće ima na domaćem tržištu na raspolaganju 6 jedinica robe A po cijeni 4 i 12 jedinica robe B po cijeni 4 novčane jedinice. Nabavljenu robu proda na dva tržišta T_1 i T_2 uz ove uvjete: na prvom tržištu može prodati najviše 6 jedinica robe A po cijeni 6 i najviše 8 jedinica robe B po cijeni 7 novčanih jedinica; na drugom tržištu može prodati najviše 6 jedinica robe A po cijeni 5 i najviše 8 jedinica robe B po cijeni 6 novčanih jedinica. Na istim tržištima poduzeće sredstvima koje je dobilo od prodaje obiju vrsta robe kupi robu C uz slijedeće uvjete: na prvom tržištu može te robe kupiti najviše 10 jedinica po 3, a na drugom tržištu najviše 10 jedinica po 2 novčane jedinice. Kupljenu robu C proda na domaćem tržištu po cijeni 5 novčanih jedinica, ali te robe ne može prodati više od 20 jedinica. Podatke za taj primjer daje tabela 2; u njoj t i u znače količine na prvom i drugom tržištu prodane robe A, v i x količine na prvom i drugom tržištu prodane robe B,

TABELA 2. PODACI ZA PRIMJER PROBLEMA TRŽIŠTA

		Roba		
		A	B	C
Domaće tržište	Količinska ograničenja	6	12	20
	Tržišne cijene	4	4	5
Tržište T_1	Količinska ograničenja	6	8	10
	Tržišne cijene	6	7	3
	Količine	t	v	y
Tržište T_2	Količinska ograničenja	6	8	10
	Tržišne cijene	5	6	1
	Količine	u	x	z

y i z količine na domaćem tržištu prodane robe C koja je nabavljena na prvom i drugom tržištu. Pri tom se postavlja slijedeći problem optimalnosti: Koliko robe A i B da poduzeće proda na tržištima T_1 i T_2, a koliko robe C da nabavi na tim tržištima da bi postiglo najveću dobit?

Problem formulirajmo matematički. Najprije odredimo nejednadžbe kojima odgovaraju varijable. Ako uzimamo u obzir uvjete nenegativnosti i ograničene mogućnosti kupnje i prodaje robe na tržištima T_1 i T_2, onda dobivamo za varijable ogradne nejednadžbe:

$$\begin{aligned} 0 \leqq t \leqq 6 \\ 0 \leqq u \leqq 6 \\ 0 \leqq v \leqq 8 \\ 0 \leqq x \leqq 8 \\ 0 \leqq y \leqq 10 \\ 0 \leqq z \leqq 10 \end{aligned} \tag{1}$$

Zbog ograničenih mogućnosti nabave i prodaje robe na domaćem tržištu varijable odgovaraju nejednadžbama:

$$\begin{aligned} t + u \leqq 6 \\ v + x \leqq 12 \\ y + z \leqq 20 \end{aligned} \tag{2}$$

Kako poduzeće za nabavu robe na tuđim tržištima ne može izdati više novčanih sredstava nego što ih dobije od prodaje robe, to varijable zadovoljavaju još i nejednadžbu:

$$6t + 5u + 7v + 6x - 3y - 2z \geqq 0 \tag{3}$$

Odredimo još funkciju cilja. Za robu nabavljenu na domaćem tržištu poduzeće izda

$$4t + 4u + 4v + 4x$$

novčanih jedinica, a za robu prodanu na domaćem tržištu dobiva

$$5y + 5z$$

novčanih jedinica; kako je dobit jednaka diferenciji ovih dvaju iznosa, to dobivamo funkciju cilja:

$$f(t, u, v, x, y, z) = 5y + 5z - 4t - 4u - 4v - 4x \tag{4}$$

Tako za promatrani problem tržišta dobivamo slijedeći problem linearnog programiranja: Treba odrediti vrijednosti varijabla t, u, v, x, y i z koje zadovoljavaju ogradnim nejednadžbama (1) i uvjetnim nejednadžbama (2) i (3) tako da funkcija cilja (4) ima maksimum.

Linearni program riješimo simpleks-metodom pomoću elektronskog računala.

Problem tržišta ima slijedeće optimalno moguće rješenje:

$$t = 0, \; u = 0, \; v = 7{,}142, \; x = 0, \; y = 10, \; z = 10.$$

Optimalnom rješenju odgovara vrijednost funkcije cilja 71,43 novčane jedinice.

Pri optimalnom poslovanju poduzeće nabavi na domaćem tržištu 7,142 jedinice robe B, za što izda 28,57 novčanih jedinica. Za tu robu dobiva na prvom tržištu 50 novčanih jedinica. Ovim novčanim sredstvima nabavi na oba tržišta po 10 jedinica robe C i za nju na domaćem tržištu dobiva 100 novčanih jedinica. Takvim poslovanjem poduzeće postiže 71,43 novčane jedinice dobiti.

XIII. PROGRAMIRANJE FAZNIH PROCESA

1. Fazni procesi

Privredni procesi mogu biti jednofazni, dvofazni i mnogofazni. Jednofazan je proces koji zahvatimo u cjelini i koji ne raščlanjujemo na pojedine faze. Jednofazni su npr. proizvodni procesi u kojima od sirovina neposredno izrađujemo finalne proizvode. Dvofazni i mnogofazni su međutim procesi koje možemo raščlaniti na dvije ili više faza i u kojima rezultati prethodnih faza mogu djelovati na kasnije faze. Primjer za dvofazni proizvodni proces je poljoprivredna proizvodnja, koja se odvija u dvije faze: u prvoj fazi poljoprivredno gospodarstvo na obrađivanim površinama uzgaja krmne biljke, koje u drugoj proizvodnoj fazi potroši za uzgoj goveda. Dalji je primjer dvofazne proizvodnje industrijska proizvodnja, u kojoj poduzeće u prvoj fazi prvo od sirovina proizvodi međuproizvode, a nakon toga od njih u drugoj fazi finalne proizvode.

No dvofazni i mnogofazni nisu samo proizvodni procesi već i razni procesi drukčije prirode. Dvofazan je npr. transportni proces, u kojem poduzeće u prvoj fazi prevozi robu najprije do glavnih skladišta a nakon toga iz ovih u drugoj fazi do potrošača. Dvofazan je npr. i proces raspodjele financijskih sredstava, gdje centrala u prvoj fazi financijska sredstva prvo podijeli pojedinim odjelima, koji ih potom u drugoj fazi raspodijele namjenski.

Mnogofazni proces možemo raščlaniti u više faza ili točnije u redoslijed jednofaznih procesa. Raščlanjenje procesa obično je uvjetovano objektivnim okolnostima, kao što je npr. u proizvodnji tehnološki proces; nekad raščlanjenje može biti posljedica subjektivnih odluka, tako da cjelokupni proces možemo prema izboru raščlaniti na veći ili manji broj jednofaznih procesa.

Prilikom programiranja mnogofaznog procesa nastaje problem kako da provedemo cjelokupni proces po pojedinim fazama tako da s odabranog gledišta optimalnosti postignemo najveći privredni uspjeh.

U ovom se poglavlju ograničujemo na programiranje samo takvih dvofaznih i mnogofaznih procesa koje možemo matematički obraditi metodama linearnog programiranja.

2. Dvofazni proizvodni proces

Razmotrimo dvofazni proizvodni proces u kojem poduzeće u prvoj fazi od sirovina S_1 i S_2 proizvodi fazne proizvode F_1, F_2 i F_3 a nakon toga od ovih u drugoj fazi finalne proizvode P_1 i P_2. Poduzeće raspolaže s najviše 230 jedinica sirovine S_1 i 145 jedinica sirovine S_2. U prvoj fazi za proizvodnju jedne jedinice faznog proizvoda F_1 potroši 1 jedinicu sirovine S_1 i 3 jedinice S_2, za proizvodnju 1 jedinice faznog proizvoda F_2 potroši 4 jedinice sirovine S_1 i 1 jedinicu sirovine S_2, pri proizvodnji 1 jedinice faznog proizvoda F_3 potroši 6 jedinica sirovine S_1 i 3 jedinice sirovine S_2. U drugoj fazi za proizvodnju 1 jedinice finalnog proizvoda P_1 potroši 5 jedinica faznog proizvoda F_1, 2 jedinice faznog proizvoda F_2 i 4 jedinice faznog proizvoda F_3, pri proizvodnji 1 jedinice finalnog proizvoda P_2 međutim potroši 2 jedinice faznog proizvoda F_1, 2 jedinice faznog proizvoda F_2 i 7 jedinica faznog proizvoda F_3. Poduzeće prodajom dobiva za jednu jedinicu finalnog proizvoda P_1 3, a za 1 jedinicu finalnog proizvoda P_2 4 novčane jedinice.

Problem koji uz ove podatke želimo riješiti jest: Kako da poduzeće programira proizvodnju u obje faze da bi prihod od prodanih finalnih proizvoda bio najveći. Ako količine proizvedenih jedinica međuproizvoda F_1, F_2 i F_3 označimo sa u, v i w, a količine proizvedenih jedinica finalnih proizvoda P_1 i P_2 sa x i y, onda dobivamo slijedeći problem: Treba odrediti vrijednosti varijabla u, v, w i x, y tako da prihod od prodanih finalnih proizvoda bude najveći.

Podatke za ovaj proizvodni problem daje tabela 1.

TABELA 1. PODACI ZA DVOFAZNI PROIZVODNI PROCES

			Fazni proizvodi			Raspolo-žive količine
			F_1	F_2	F_3	
Prva faza	Sirovine	S_1	1	4	6	230
		S_2	3	1	3	145
	Količine		u	v	w	
			Finalni proizvodi			
			P_1	P_2		
Druga faza	Fazni proizvodi	F_1	5	2		u
		F_2	2	2		v
		F_3	4	7		w
	Cijene		3	4		
	Količine		x	y		

Iz tabele 1. slijedi ovaj matematički oblik problema:

Za prvu fazu proizvodnje treba odrediti varijable u, v i w koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$u \geqq 0, \ v \geqq 0, \ w \geqq 0$$

i linearne nejednadžbe:

$$\begin{aligned} u + 4v + 6w &\leqq 230 \\ 3u + v + 3w &\leqq 145 \end{aligned}$$

Za drugu fazu treba odrediti varijable x i y koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$x \geqq 0, \ y \geqq 0$$

i linearne nejednadžbe:

$$\begin{aligned} 5x + 2y &\leqq u \\ 2x + 2y &\leqq v \\ 4x + 7y &\leqq w \end{aligned}$$

tako da prihod od prodanih finalnih proizvoda:

$$D = f(x, y) = 3x + 4y$$

bude najveći.

Nakon uvođenja matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{Vmatrix} u \\ v \\ w \end{Vmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{Vmatrix} 230 \\ 145 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

možemo problem izraziti u matričnom obliku ovako:

Treba odrediti matrice **X** i **Y** koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}$$

i matrične nejednadžbe:

$$\mathbf{A\,X} \leqq \mathbf{Q}, \ \mathbf{C\,Y} \leqq \mathbf{X}$$

tako da prihod:

$$D = \mathbf{W\,Y}$$

bude najveći.

Kako su sve uvjetne nejednadžbe linearne i kako je i funkcija cilja linearna, to se radi o problemu linearnog programiranja. Optimalno moguće rješenje možemo izračunati po simpleks-metodi; pri računanju počnemo s tabelom 2.

TABELA 2. ISHODIŠTE ZA RAČUNANJE SIMPLEKS-METODOM

					3	4
	P^0	u	v	w	x	y
S_1	230	1	4	6		
S_2	145	3	1	3		
F_1	0	−1			5	2
F_2	0		−1		2	2
F_3	0			−1	4	7

Simpleks-metodom, nakon 6 iteracija dobivamo ovo optimalno moguće rješenje:

$$u = 16, \ v = 10, \ w = 29$$

$$x = 2, \ y = 3$$

$$D = 18$$

Numeričko računanje simpleks-metodom u razmatranom primjeru znatno ćemo pojednostavniti ako problem prevedemo u problem linearnog programiranja koji se može riješiti grafički.

Pojednostavnjenje postižemo ovakvim zaključivanjem: za proizvodnju $\mathbf{Y}$ finalnih proizvoda poduzeće potroši $\mathbf{C\,Y}$ faznih proizvoda; za proizvodnju $\mathbf{X} = \mathbf{C\,Y}$ faznih proizvoda potroši $\mathbf{A\,X} = \mathbf{A\,C\,Y}$ sirovina. Kako ima na raspolaganju najviše $\mathbf{Q}$ sirovina, to važi nejednadžba:

$$\mathbf{A\,C\,Y} \leqq \mathbf{Q}$$

Na taj način možemo prijašnju formulaciju problema prevesti u slijedeći kraći matrični oblik:

Treba odrediti matricu $\mathbf{Y}$ koja zadovoljava uvjet nenegativnosti:

$$\mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}$$

i matričnu jednadžbu:

$$\mathbf{A\,C\,Y} \leqq \mathbf{Q}$$

tako da linearna funkcija:

$$D = \mathbf{W\,Y}$$

ima maksimum.

Kako je:

$$\mathbf{A\,C} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 37 & 52 \\ 29 & 29 \end{Vmatrix}$$

to iz toga dobivamo problem:

Treba odrediti varijable x i y koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$x \geqq 0, \; y \geqq 0$$

i linearne nejednadžbe:

$$\begin{aligned} 37\,x + 52\,y &\leqq 230 \\ 29\,x + 29\,y &\leqq 145 \end{aligned}$$

tako da linearna funkcija:

$$D = 3\,x + 4\,y$$

ima maksimum.

Kao što vidimo na slici 30, ovaj problem linearnog programiranja rješavamo grafički. Grafičkim rješenjem dobivamo najprije optimalno moguće rješenje:

$$x = 2, \; y = 3; \; D = 18$$

Iz jednadžbe:

$$\mathbf{X} = \mathbf{C\,Y}$$

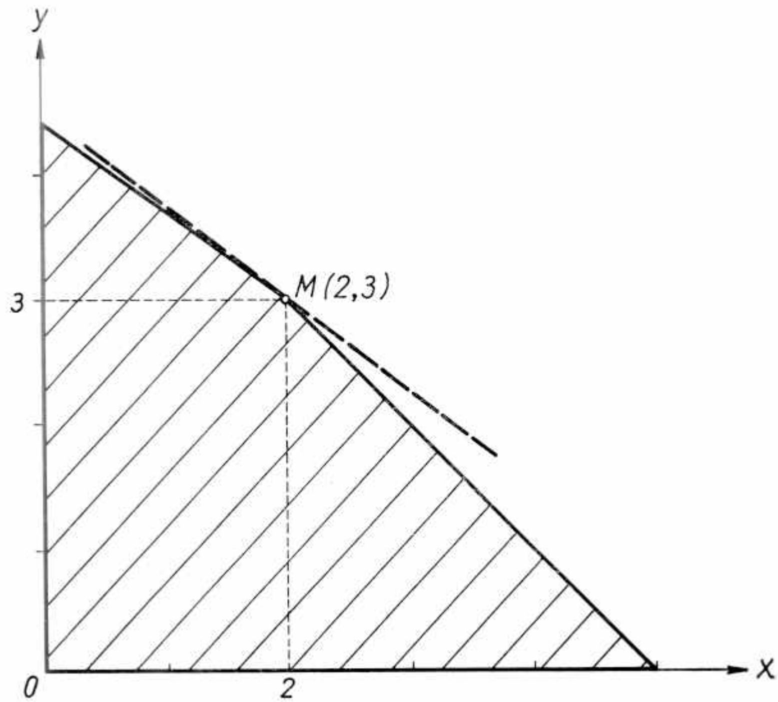
izračunamo još količine potrebnih faznih proizvoda:

$$\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 7 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 16 \\ 10 \\ 29 \end{Vmatrix}$$

Tako još dobivamo:

$$u = 16, \; v = 10, \; w = 29$$

Razmislimo također zašto je u ovom primjeru takvo pojednostavnjenje linearnog programa moguće. Uzrok za pojednostavnjenje je u tome što međuproizvodi igraju ulogu samo u tehnologiji proizvodnje, a nemaju nikakvog izričitog ekonomskog značenja. Međuproizvode poduzeće niti prodaje niti ih upotrebljava na neki drugi način, već ih u cijelosti koristi samo za proizvodnju finalnih proizvoda. Koristi ih samo kao sredstvo da bi od sirovine došlo do finalnih proizvoda. Stoga je za poduzeće važno samo kako da dođe do sirovina i finalnih proizvoda, a međuproizvodi služe tek kao pomoć u tehnologiji proizvodnje.



Sl. 30. Grafičko određivanje optimalnog rješenja

Vježbe

1. Poduzeće u prvoj fazi od dvije sirovine proizvodi 2 vrste međuproizvoda, a nakon toga od njih u drugoj fazi 2 vrste finalnih proizvoda. Od obiju sirovina ima na raspolaganju po 88 jedinica. Za jedinicu prvog međuproizvoda potroši 3 jedinice prve i 6 jedinica druge sirovine, dok za jedinicu drugog potroši 5 jedinica prve i 2 jedinice druge sirovine; za jedinicu prvog finalnog proizvoda potroši 4 jedinice prvog i 1 jedinicu drugog međuproizvoda, a za jedinicu drugog 1 jedinicu prvog i 3 jedinice drugog međuproizvoda. Prvi finalni proizvod proda po 8, a drugi po 4 novčane jedinice. Kako da poduzeće programira proizvodnju da bi prihod od prodanih fi-

nalnih proizvoda bio što veći? Izrazi problem tabelarno. Izrazi ga matematički u običnom i matričnom obliku. Riješi ga simpleks-metodom i grafički.

(međuproizvoda: 11, 11; finalnih: 2, 3; prihod: 28)

2. Poduzeće u prvoj fazi od dvije sirovine izrađuje 3 vrste faznih proizvoda, a u drugoj fazi 2 vrste finalnih proizvoda. Od prve sirovine ima na raspolaganju 16 480 jedinica, a od druge 3 580 jedinica. Za jedinicu prvog međuproizvoda potroši 5 jedinica prve i 1 jedinicu druge sirovine, za jedinicu drugog 2 jedinice prve i 1 jedinicu druge sirovine, a za jedinicu trećeg 4 jedinice prve i 1 jedinicu druge sirovine; za jedinicu prvog finalnog proizvoda potroši 64 jedinice prvog, 12 jedinica drugog i 50 jedinica trećeg međuproizvoda, za jedinicu drugog finalnog proizvoda potroši 2 000 jedinica prvog, 120 jedinica drugog i 200 jedinica trećeg međuproizvoda. Finalne proizvode proda: prvi po 4 000, a drugi po 80 000 novčanih jedinica. Kako da poduzeće programira proizvodnju da bi od prodanih finalnih proizvoda imalo najveći prihod? Izrazi problem tabelarno. Izrazi ga matematički u običnom i u matričnom obliku. Riješi ga grafički.

(međuproizvoda: 2 640, 240, 700; finalnih: 10, 1; prihod: 120 000)

3. Trofazni proizvodni proces

Razmotrimo trofazni proizvodni proces u kojem tvornica započinje proizvodnju s dvije vrste sirovina A i B; u prvoj fazi izradi 3 vrste faznih proizvoda prvog stupnja P, Q i R; u drugoj fazi izradi 4 vrste faznih proizvoda drugog stupnja T, U, V i Z; u trećoj fazi izradi 2 vrste finalnih proizvoda X i Y. Za proizvodnju tvornica ima na raspolaganju 2 350 jedinica sirovine A i 1 591 jedinicu sirovine B. S raspoloživim sirovinama počinje prvu proizvodnu fazu; za 1 jedinicu faznog proizvoda P potroši 1 jedinicu sirovine A i 4 jedinice sirovine B; za 1 jedinicu faznog proizvoda Q potroši 3 jedinice sirovine A i 1 jedinicu sirovine B, za 1 jedinicu faznog proizvoda R potroši 5 jedinica sirovine A i 1 jedinicu sirovine B; pretpostavimo da tvornica izradi p, q i r jedinica faznih proizvoda prvog stupnja P, Q i R. S preostalim sirovinama i s faznim proizvodima izrađenim u prvoj fazi tvornica počinje drugu fazu; za 1 jedinicu faznog proizvoda T potroši 2 jedinice sirovine B, 3 jedinice faznog proizvoda P, 2 jedinice faznog proizvoda Q i 1 jedinicu faznog proizvoda R; za 1 jedinicu faznog proizvoda U potroši 1 jedinicu sirovine A, 1 jedinicu sirovine B, 4 jedinice faznog proizvoda P, 1 jedinicu faznog proizvoda Q i 5 jedinica faznog proizvoda R; za 1 jedinicu faznog proizvoda V potroši 2 jedinice sirovine A, 1 jedinicu faznog proizvoda P, 3 jedinice faznog proizvoda Q i 3 jedinice faznog proizvoda R; za 1 jedinicu faznog proizvoda Z potroši 3 jedinice sirovine A, 1 jedinicu sirovine B, 2 jedinice faznog proizvoda P, 2 jedinice faznog proizvoda Q i 1 jedinicu faznog proizvoda R; uzmimo da tvornica u drugoj fazi izradi t, u, v i z jedinica faznih proizvoda drugog stupnja T, U, V i Z. S preostalim sirovinama s preostalim faznim proizvodima prvog stupnja i s faznim proizvodima izrađenim u drugoj fazi tvornica počinje treću proizvodnu fazu, u kojoj izradi finalne proizvode; za 1 jedinicu finalnog proizvoda X potroši 3 jedinice sirovine B, 1 jedinicu faznog proizvoda P, 3 jedinice faznog proizvoda Q, 2 jedinice faznog proizvoda R, 2 jedinice faznog proizvoda T, 8 jedinica faznog proizvoda U, 6 jedinica faznog proizvoda V i 1 jedinicu faznog proizvoda Z; za 1 jedinicu finalnog proizvoda Y potroši 2 jedinice sirovine A, 1 jedinicu sirovine B, 2 jedinice faznog proizvoda P, 1 jedinicu faznog proizvoda R, 5 jedinica faznog proizvoda T, 3 jedinice faznog proizvoda V i 1 jedinicu faznog proizvoda Z; pretpostavimo da tvornica u trećoj fazi izradi x i y jedinica finalnih proizvoda X i Y. Cijena finalnog proizvoda X je 25, finalnog proizvoda Y pak 10 novčanih jedinica. Sve te podatke pregledno daje tabela 1.

TABELA 1. PODACI ZA TROFAZNI PROIZVODNI PROBLEM

			Fazni proizvodi prvog stupnja				Raspoložive količine
			P	Q	R		
Prva faza	Sirovine	A	1	3	5		2 350
		B	4	1	1		1 591
	Količine		p	q	r		
Druga faza			Fazni proizvodi drugog stupnja				
			T	U	V	Z	
	Sirovine	A	0	1	2	3	ostatak
		B	2	1	0	1	ostatak
	Fazni proizvodi prvog stupnja	P	3	4	1	2	p
		Q	2	1	3	2	q
		R	1	5	3	1	r
	Količine		t	u	v	z	
Treća faza			Finalni proizvodi				
			X	Y			
	Sirovine	A	0	2			ostatak
		B	3	1			ostatak
	Fazni proizvodi prvog stupnja	P	1	2			ostatak
		Q	3	0			ostatak
		R	2	1			ostatak
	Fazni proizvodi drugog stupnja	T	2	5			t
		U	8	0			u
		V	6	3			v
		Z	1	1			z
	Količine		x	y			
	Cijene		25	10			

Kod ovih podataka postavimo pitanje kako da tvornica programira proizvodnju u svim trim fazama da bi prihod od prodanih finalnih proizvoda bio najveći. Želimo dakle uz dane podatke odrediti vrijednosti varijabla p, q, r, t, u, v, z, x i y tako da prihod bude najveći.

Problem izrazimo u matematičkom obliku. U prvoj fazi tvornica izradi p, q i r jedinica faznih proizvoda prvog stupnja P, Q i R te potroši: $p + 3q + 5r$ jedinica sirovine A i $4p + q + r$ jedinica sirovne B. Kako tvornica raspolaže samo ograničenim količinama sirovina, to nenegativne varijable zadovoljavaju nejednadžbe:

$$p + 3q + 5r = 2\,350 \tag{1}$$
$$4p + q + r = 1\,591 \tag{2}$$

Nakon završetka prve faze tvornici ostaje na raspolaganju još $2\,350 - p - 3q - 5r$ jedinica sirovine A i $1\,591 - 4p - q - r$ jedinica sirovine B.

U drugoj fazi tvornica izradi t, u, v i z jedinica faznih proizvoda drugog stupnja T, U, V i Z te potroši:

$u + 2v + 3z$	jedinica sirovine A,
$2t + u + z$	jedinica sirovine B,
$3t + 4u + v + 2z$	jedinica faznih proizvoda P,
$2t + u + 3v + 2z$	jedinica faznih proizvoda Q i
$t + 5u + 3v + z$	jedinica faznih proizvoda R.

Kako tvornica raspolaže samo još ostacima sirovina i ograničenim količinama proizvoda prvog stupnja, to nenegativne varijable t, u, v i z zadovoljavaju nejednadžbe:

$$u + 2v + 3z \leqq 2\,350 - p - 3q - 5r \tag{3}$$

$$2t + u + z \leqq 1\,591 - 4p - q - r \tag{4}$$

$$3t + 4u + v + 2z \leqq p \tag{5}$$

$$2t + u + 3v + 2z \leqq q \tag{6}$$

$$t + 5u + 3v + z \leqq r \tag{7}$$

Čim važi nejednadžba (3), važi i nejednadžba (1); isto tako važi nejednadžba (2) čim važi nejednadžba (4). Stoga u nastavku možemo zanemariti nejednadžbe (1) i (2). Nakon završetka druge faze, tvornici ostaje na raspolaganju još:

$2\,350 - p - 3q - 5r - u - 2v - 3z$	jedinica sirovine A,
$1\,591 - 4p - q - r - 2t - u - z$	jedinica sirovine B,
$p - 3t - 4u - v - 2z$	jedinica faznih proizvoda P,
$q - 2t - u - 3v - 2z$	jedinica faznih proizvoda Q i
$r - t - 5u - 3v - z$	jedinica faznih proizvoda R.

U trećoj fazi tvornica izradi x i y jedinica finalnih proizvoda X i Y te potroši:

$2y$	jedinica sirovine A,
$3x + y$	jedinica sirovine B,
$x + 2y$	jedinica faznih proizvoda P,
$3x$	jedinica faznih proizvoda Q,
$2x + y$	jedinica faznih proizvoda R,
$2x + 5y$	jedinica faznih proizvoda T,
$8x$	jedinica faznih proizvoda U,
$6x + 3y$	jedinica faznih proizvoda V i
$x + y$	jedinica faznih proizvoda Z.

Kako tvornica raspolaže samo još ostacima sirovina, ostacima faznih proizvoda prvog stupnja i ograničenom količinom izrađenih faznih proizvoda drugog stupnja, to nenegativne varijable x i y zadovoljavaju nejednadžbe:

$$
\begin{aligned}
2y &\leqq 2\,350 - p - 3q - 5r - u - 2v - 3z && (8)\\
3x + y &\leqq 1\,591 - 4p - q - r - 2t - u - z && (9)\\
x + 2y &\leqq p - 3t - 4u - v - 2z && (10)\\
3x &\leqq q - 2t - u - 3v - 2z && (11)\\
2y + y &\leqq r - t - 5u - 3v - z && (12)\\
2x + 5y &\leqq t && (13)\\
8x &\leqq u && (14)\\
6x + 3y &\leqq v && (15)\\
x + y &\leqq z && (16)
\end{aligned}
$$

Čim važi nejednadžba (8), važi i nejednadžba (3); slično važi i za parove nejednadžbi (9) i (4), (10) i (5), (11) i (6), (12) i (7). Stoga u nastavku smijemo zanemariti nejednadžbe (3), (4), (5), (6) i (7).

Kako tvornica izradi x jedinica finalnog proizvoda X, koji proda po cijeni od 25 novčanih jedinica, te y jedinica finalnog proizvoda Y, koji proda po cijeni od 10 novčanih jedinica, to od prodaje finalnih proizvoda ima prihod:

$$25x + 10y \qquad (17)$$

novčanih jedinica.

Prema tome dobivamo slijedeći matematički oblik razmatranog problema: Treba odrediti one nenegativne vrijednosti varijabla p, q, r, t, u, v, z, x i y koje zadovoljavaju nejednadžbe: (8) do (16) i za koje je prihod (17) najveći.

Nakon preuređenja nejednadžbi dobivamo slijedeći oblik problema, koji je pregledniji i prilagođen za računanje simpleks-metodom:

Treba odrediti vrijednosti varijabla p, q, r, t, u, v, z, x i y koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $r \geqq 0$, $t \geqq 0$, $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $z \geqq 0$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ i nejednadžbe:

$$
\begin{aligned}
p + 3q + 5r + u + 2v + 3z + 2y &\leqq 2\,350\\
4p + q + r + 2t + u + z + 3x + y &\leqq 1\,591\\
-p + 3t + 4u + v + 2z + x + 2y &\leqq 0\\
-q + 2t + u + 3v + 2z + 3x &\leqq 0\\
-r + t + 5u + 3v + z + 2x + y &\leqq 0\\
-t + 2x + 5y &\leqq 0\\
-u + 8x &\leqq 0\\
-v + 6x + 3y &\leqq 0\\
-z + x + y &\leqq 0
\end{aligned}
$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x, y) = 25x + 10\,y$$

ima maksimum.

Kako su sve nejednadžbe linearne i kako je i funkcija cilja linearna funkcija varijabla, to je riječ o problemu linearnog programiranja. Ako problem riješimo simpleks-metodom, dobivamo optimalno moguće rješenje:

$$p = 251, \quad q = 210, \quad r = 269,$$

$$t = 31, \quad u = 24, \quad u = 33, \quad z = 8,$$

$$x = 3, \quad y = 5,$$

kojemu odgovara najveća vrijednost funkcije cilja:

$$f(3{,}5) = 125$$

Numeričko računanje simpleks-metodom možemo u ovom primjeru nadomjestiti grafičkom metodom. U tu svrhu uvedemo neke matrice.

Matrica:

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} 2\,350 \\ 1\,591 \end{Vmatrix}$$

određuje prvobitno raspoložive količine sirovina. Matrica:

$$\mathbf{A}^1 = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

određuje potrošnju sirovina u prvoj fazi. Matrica:

$$\mathbf{R} = \begin{Vmatrix} p \\ q \\ r \end{Vmatrix}$$

određuje količine izrađenih faznih proizvoda prvog stupnja.

Matrica:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

određuje potrošnju sirovina u drugoj fazi. Matrica:

$$\mathbf{A}^{12} = \begin{Vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

određuje potrošnju faznih proizvoda prvog stupnja u drugoj proizvodnoj fazi.

Matrica:

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} t \\ u \\ v \\ z \end{Vmatrix}$$

određuje količine izrađenih faznih proizvoda drugog stupnja.

Matrica:

$$\mathbf{A}^3 = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

određuje potrošnju sirovina u trećoj fazi. Matrica:

$$\mathbf{A}^{13} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

određuje potrošnju faznih proizvoda prvog stupnja u trećoj fazi proizvodnje. Matrica:

$$\mathbf{A}^{23} = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 0 \\ 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

određuje potrošnju faznih proizvoda drugog stupnja u trećoj fazi. Matrica:

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$$

određuje količine finalnih proizvoda. Matrica:

$$\mathbf{W} = \begin{Vmatrix} 25 & 10 \end{Vmatrix}$$

određuje tržišne cijene finalnih proizvoda.

Pomoću ovih matrica izračunajmo potrošnju sirovina ako tvornica izradi $\mathbf{Y}$ finalnih proizvoda. Pri proizvodnji $\mathbf{Y}$ finalnih proizvoda potroši:

a) $\mathbf{A}^3\, \mathbf{Y}$ sirovina,

b) $\mathbf{A}^{13}\, \mathbf{Y}$ faznih proizvoda prog stupnja, za što potroši: $\mathbf{A}^1\, \mathbf{A}^{13}\, \mathbf{Y}$ sirovina.

c) $\mathbf{A}^{23}\, \mathbf{Y}$ faznih proizvoda drugog stupnja, za što potroši $\mathbf{A}^2\, \mathbf{A}^{23}\, \mathbf{Y}$ sirovina i $\mathbf{A}^{12}\, \mathbf{A}^{23}\, \mathbf{Y}$ faznih proizvoda prvog stupnja; za ove posljednje potroši $\mathbf{A}^1 \mathbf{A}^{12} \mathbf{A}^{23}\, \mathbf{Y}$ sirovina. Za izradu $\mathbf{Y}$ finalnih proizvoda tvornica potroši ukupno:

$$\mathbf{A}^3\, \mathbf{Y} + \mathbf{A}^1\, \mathbf{A}^{13}\, \mathbf{Y} + \mathbf{A}^2\, \mathbf{A}^{23}\, \mathbf{Y} + \mathbf{A}^1\, \mathbf{A}^{12}\, \mathbf{A}^{23}\, \mathbf{Y}$$

sirovina. Kako tvornica raspolaže sa S sirovina, to važi nejednadžba:

$$(\mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^1\, \mathbf{A}^{13} + \mathbf{A}^2\, \mathbf{A}^{23} + \mathbf{A}^1\, \mathbf{A}^{12}\, \mathbf{A}^{23})\, \mathbf{Y} \leqq \mathbf{S} \tag{18}$$

Prodajom $\mathbf{Y}$ finalnih proizvoda tvornica ima prihode:

$$\mathbf{W}\, \mathbf{Y} \tag{19}$$

Prema tome dobivamo slijedeći problem linearnog programiranja u matričnom obliku:

Treba odrediti nenegativnu matricu **Y** koja zadovoljava nejednadžbu (18) tako da funkcija cilja (19) ima maksimum.

Ako u nejednadžbu (18) i u funkciju cilja (19) uvrstimo numeričke vrijednosti na temelju gore definiranih matrica, to dobivamo slijedeći problem linearnog programiranja:

Treba odrediti vrijednosti varijabla x i y koje zadovoljavaju nejednadžbe:

$$x \geqq 0, \; y \geqq 0$$
$$490x + 176y \leqq 2\,350$$
$$302x + 137y \leqq 1\,591$$

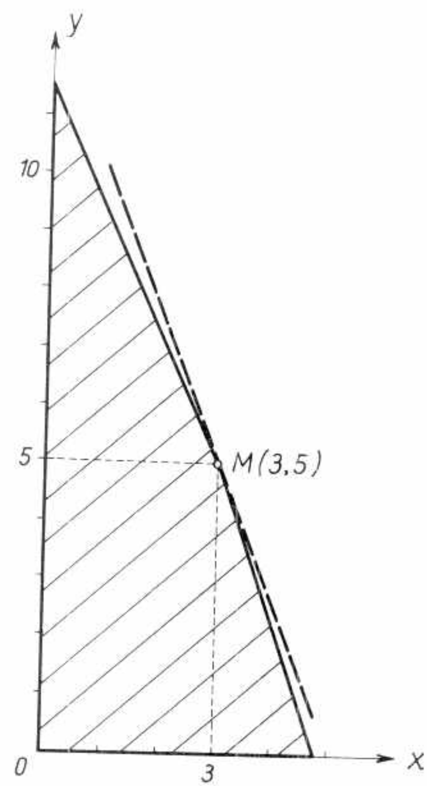
tako da funkcija cilja:

$$f(x, y) = 25x + 10y$$

ima maksimum.

Kako vidimo na sl. 31, ovaj linearni program riješimo grafički u ravninskom kartezijskom koordinatnom sistemu x 0 y. Točka M (3, 5) prikazuje optimalno moguće rješenje:

$$x = 3, \; y = 5,$$



Sl. 31. Grafičko određivanje optimalnog rješenja

kojemu odgovara najveća vrijednost funkcije cilja:

$$f(3,5) = 125$$

Izračunajmo još ovom optimalnom mogućem rješenju odgovarajuće količine faznih proizvoda prvog i drugog stupnja. Pri proizvodnji:

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 5 \end{Vmatrix}$$

finalnih proizvoda tvornica potroši:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{23}\,\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 0 \\ 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 31 \\ 24 \\ 33 \\ 8 \end{Vmatrix}$$

faznih proizvoda drugog stupnja; stoga je:

$$t = 31, \; u = 24, \; v = 33, \; z = 8$$

Pri proizvodnji:

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 5 \end{Vmatrix} \text{ finalnih proizvoda i } \mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} 31 \\ 24 \\ 33 \\ 8 \end{Vmatrix}$$

faznih proizvoda drugog stupnja tvornica potroši:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^{13}\,\mathbf{Y} + \mathbf{A}^{12}\,\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ 5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 31 \\ 24 \\ 33 \\ 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 251 \\ 210 \\ 269 \end{Vmatrix}$$

faznih proizvoda prvog stupnja: stoga je:

$$p = 251, \; q = 210, \; r = 269$$

Grafičkom metodom dobiveni rezultati poklapaju se s rezultatima koje smo izračunali simpleks-metodom.

Vježbe

1. Poduzeće od sirovina A i B u prvoj fazi izrađuje fazne proizvode P i Q, u drugoj fazi fazne proizvode T i U i u trećoj fazi finalne proizvode X i Y. Od sirovine A ima na raspolaganju 488, a sirovine B 754 jedinice. Za jedinicu proizvoda P potroši 2 jedinice sirovine A i 1 jedinicu sirovine B; za jedinicu proizvoda Q potroši 1 jedinicu sirovine A i 3 jedinice sirovine B. Za jedinicu proizvoda T potroši 4 jedinice proizvoda P i 3 jedinice proizvoda Q; za jedinicu proizvoda U potroši 3 jedinice proizvoda P i 6 jedinica proizvoda Q. Za jedinicu proizvoda X potroši 5 jedinica proizvoda T i 4 jedinice proizvoda U; za jedinicu proizvoda Y potroši 2 jedinice proizvoda T i 6 jedinica proizvoda U. Sve finalne proizvode proda po istoj cijeni od 3 novčane jedinice. Kako da poduzeće programira proizvodnju da bi od prodanih finalnih proizvoda imalo najveći prihod?

(142, 204; 16, 26; $x = 2$, $y = 3$; 15)

2. Poduzeće od sirovina A i B izrađuje u prvoj fazi proizvode P i Q, a od njih u drugoj fazi proizvode T i U te konačno od ovih u trećoj fazi finalne proizvode X i Y. Poduzeće raspolaže sa 214 jedinica sirovine A i 218 jedinica sirovine B. Potrošnju sirovina u prvoj fazi određuje matrica:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Ista matrica određuje potrošnju faznih proizvoda u drugoj proizvodnoj fazi, pa i potrošnju faznih proizvoda u trećoj fazi. Sve finalne proizvode poduzeće proda po istoj cijeni od 8 novčanih jedinica. Kako da poduzeće programira proizvodnju da bi od prodanih finalnih proizvoda imalo najveći prihod?

(70, 74; 22, 26; $x = 6$, $y = 10$; 128)

4. Analiza dvofaznih procesa

Opće dvofazne procese analizirat ćemo u nastavku na primjeru dvofaznih proizvodnih procesa. Za takvo razmatranje imamo dva razloga. Prvo je što su u privredi dvofazni proizvodni procesi vrlo česti i osobito značajni, a drugi je razlog terminološkog značaja: na taj način želimo previše uopćen način izražavanja pojednostavniti i učiniti zornijim. Dok obrnuto nema osobitih teškoća da se dvofazni proizvodni procesi uopće na proizvoljne općenitije dvofazne procese.

Svaki dvofazni proizvodni proces najprije podijelimo na dvije proizvodne faze. U prvoj fazi novčanim sredstvima i raznim elementima proizvodnog procesa izrađujemo fazne proizvode, a nakon toga u drugoj fazi finalne proizvode. Za bolju analizu proizvodnog procesa međutim podjela na dvije faze premalo je točna; stoga ćemo u nastavku proizvodni proces raščlaniti podrobnije i analizirati ga tako da budu uključene sve različite mogućnosti što pri tom procesu mogu nastupiti.

Raščlanjenje dvofaznog proizvodnog procesa pokazuje sl. 32. Prema toj slici u nastavku ćemo kvalitativno i kvantitativno analizirati pojedine članove u lancu čitavog dvofaznog proizvodnog procesa.

Odluka D_1. Za provedbu čitavog dvofaznog procesa potrebna su novčana sredstva. S obzirom na količine raspoloživih novčanih sredstava moramo prosuditi i odlučiti koja od ovih alternativa postoji: ili alternativa a_1, gdje su novčana sredstva neograničena, ili pak alternativa b_1, gdje su novčana sredstva ograničena.

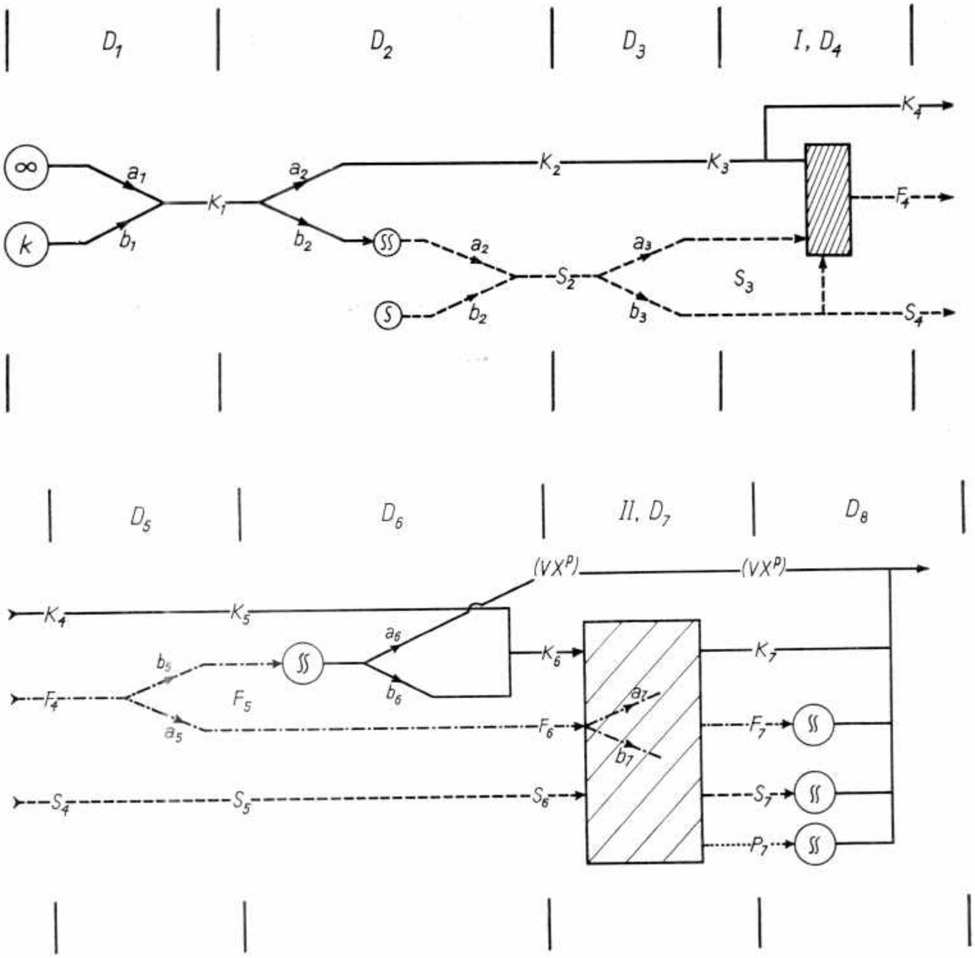
Alternativa a_1. Pri toj su alternativi raspoloživa novčana sredstva neograničena, što praktički znači da ih imamo toliko koliko je potrebno za bilo kakvu izvedbu proizvodnog procesa. Kako pri toj alternativi s obzirom na novčana sredstva nema nikakvih ograničenja, uzimamo kao da ih imamo na raspolaganju:

$$K_1 = \infty$$

U toj se alternativi radi o čisto tehničkoj proizvodnji, u kojoj proizvodne troškove uopće ne uzimamo u obzir; tako proizvodnju određuju samo materijalni i tehnički kapaciteti. Kako se pri toj alternativi i u čitavom daljnjem procesu ne treba obazirati na troškove, to u funkciji cilja uzimamo u obzir samo prihode od prodanih proizvoda.

Alternativa b_1. Po toj su alternativi novčana sredstva koja nam stoje na raspolaganju za financiranje proizvodnog procesa ograničena i u odgovarajućim novčanim jedinicama iznose:

$$K_1 = k$$



Sl. 32. Raščlanjenje dvofaznog proizvodnog procesa

Pri toj je alternativi proizvodnja zavisna od količine uloženih novčanih sredstava ali i od materijalnih i tehničkih kapaciteta. Kako pri toj alternativi u čitavom daljnjem proizvodnom procesu moramo uzimati u obzir otjecanje i dotjecanje novčanih sredstava, to u funkciji cilja moramo uzimati u obzir konačni saldo novčanih sredstava.

Na slici 32. odluci D_1 i alternativama a_1 i b_1 odgovara prvi odsjek lijevo gore. Nakon odluke D_1 imamo u proizvodnom procesu uključena novčana sredstva K_1.

Odluka D_2. U proizvodni proces ulažemo razne elemente proizvodnog procesa kao što su npr. razne sirovine, strojevi, različito osposobljena radna snaga itd. Elemente proizvodnog procesa koji sudjeluju u proizvodnom procesu označavamo uzastopce sa:

$$Q_1, \ldots, Q_i, \ldots, Q_s$$

Elemenata proizvodnog procesa imamo na raspolaganju samo ograničene količine. Te raspoložive količine u odgovarajućim jedinicama određuje matrica:

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_s \end{Vmatrix}$$

Elementi proizvodnog procesa imaju nabavne cijene koje određuje matrica:

$$\mathbf{U} = \| u_1 \dots u_i \dots u_s \|$$

U proizvodni proces ulažemo neke količine elemenata proizvodnog procesa; te količine određuje matrica:

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_s \end{Vmatrix} = \mathbf{S}_2$$

Kako su količine elemenata proizvodnog procesa ograničene, to uložene količine odgovaraju nejednadžbi:

$$\mathbf{S}_2 \leqq \mathbf{S} \tag{2,S}$$

U vezi s nabavom elemenata proizvodnog procesa treba prosuditi i odlučiti da li važi alternativa a_2, gdje su elementi proizvodnog procesa bez daljnjeg već raspoloživi, ili pak važi alternativa b_2, gdje ih moramo tek nabaviti.

Odluka automatski uključuje i odgovarajuću odluku o ulaganju novčanih sredstava za nabavu elemenata proizvodnog procesa. Ako elemente proizvodnog procesa nije potrebno nabavljati, to za njih ne treba izdavati novčana sredstva; takva situacija nastupa u alternativi a_2. Ako je međutim elemente proizvodnog procesa potrebno nabaviti, onda za njih potrošimo nešto od novčanih sredstava; takva situacija nastupa u alternativi b_2.

Alternativa a_2. Pri toj su alternativi elementi proizodnog procesa raspoloživi, pa ih ne treba tek nabavljati. Stoga uzimamo formalno, kao da je nabavna cijena elemenata proizvodnog procesa jednaka 0, da je:

$$\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

Budući da pri tom ne izdajemo nikakva novčana sredstva, ona prihvaćanjem te alternative iznose:

$$K_2 = K_1$$

Količine elemenata proizvodnog procesa koje u toj alternativi ulažemo u proizvodnju prema ranijem su jednake:

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{Z}$$

Alternativa b_2. Po toj alternativi elemente proizvodnog procesa moramo nabaviti po nabavnim cijenama koje su veće od $\mathbf{0}$; stoga važi:

$$\mathbf{U} > \mathbf{0}$$

Za nabavu $\mathbf{S}_2 = \mathbf{Z}$ elemenata proizvodnog procesa potrošimo:

$$\mathbf{U}\,\mathbf{S}_2 = u_1 s_1 + \ldots + u_i s_i + \ldots + u_s s_s$$

novčanih sredstava, tako da nakon te alternative ostaje još

$$K_2 = K_1 - \mathbf{U}\,\mathbf{S}_2$$

raspoloživih novčanih sredstava. Kako ostatak novčanih sredstava ne može biti negativan, to se može nabaviti samo toliko elemenata proizvodnog procesa da važi nejednadžba:

$$K_1 - \mathbf{U}\ \mathbf{S}_2 \geqq \mathbf{0} \tag{2, K}$$

Na sl. 32. odluci D_2 i alternativama a_2 i b_2 odgovara drugi odsjek gore. Nakon odluke D_2 imamo u proizvodni proces uključenih K_2 novčanih sredstava i $\mathbf{S}_2$ elemenata proizvodnog procesa.

Odluka D_3. U pogledu termina ulaganja elemenata proizvodnog procesa u proizvodnju moramo prosuditi i odlučiti da li važi alternativa a_3, gdje ulažemo sve raspoložive količine elemenata proizvodnog procesa već u prvu fazu, ili pak važi alternativa b_3, gdje ih ulažemo djelomično u prvu fazu, a djelomično ih pohranimo za drugu fazu.

Alternativa a_3. Pri toj alternativi sve raspoložive količine elemenata proizvodnog procesa ulažemo u cijelosti u prvu proizvodnu fazu, pa nam u drugoj fazi više nisu potrebne. Pri toj je alternativi jednaka $\mathbf{0}$ neka matrica koju označimo slovom $\mathbf{B}$, a koju ćemo definirati kasnije. Kako se u toj alternativi radi samo o rasporedu elemenata proizvodnog procesa, to se ne mijenjaju ni količina raspoloživih novčanih sredstava ni količine elemenata proizvodnog procesa. Zbog toga je količina novčanih sredstava K_3, koja ostaje raspoloživa nakon prihvaćanja te alternative, jednaka količini prije toga raspoloživih novčanih sredstava K_2, važi dakle:

$$K_3 = K_2$$

Iz istih razloga količine raspoloživih elemenata proizvodnog procesa $\mathbf{S}_3$ odgovaraju jednadžbi:

$$\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_2$$

Alternativa b_3. Ako prihvatimo tu alternativu, ulažemo elemente proizvodnog procesa djelomično u prvu proizvodnu fazu, a djelomično ih prohranimo za drugu. Gore spomenuta matrica $\mathbf{B}$ pri toj alternativi nije negativna. Kako se i u toj alternativi radi samo o rasporedu elemenata proizvodnog procesa, a da se pri tom ne mijenjaju već u proizvodni proces uključene količine, to važe jednadžbe:

$$K_3 = K_2$$

$$\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_2$$

Na slici 32. odluci D_3 i alternativama a_3 i b_3 odgovara treći odsjek gore. Nakon odluke D_3 imamo u proizvodni proces uključenih K_3 novčanih sredstava i $\mathbf{S}_3$ elemenata proizvodnog procesa.

I. *faza* (*odluka* D_4). U prvoj proizvodnoj fazi raspoloživim novčanim sredstvima i elementima proizvodnog procesa izrađujemo fazne proizvode f tipova koje uzastopce označimo ovako:

$$F_1, \ldots, F_j, \ldots, F_f$$

Za izradu 1 jedinice faznog proizvoda F_j potrošimo

$$k_j$$

novčanih sredstava kao direktnih troškova i

$$a_{ij}$$

jedinica elemenata proizvodnog procesa Q_i; pri tom indeks i ide od 1 do s, a indeks j od 1 do f. U prvoj fazi izradimo

$$x_j + x_j^p$$

jedinica faznih proizvoda F_j; ovu količinu napišemo u obliku sume iz razloga koji ćemo kasnije objasniti. Fazni proizvodi F_j imaju prodajnu cijenu

$$v_j$$

novčanih jedinica. Sve te podatke za prvu fazu pregledno daje tabela 1.

TABELA 1. PRVA FAZA

		Fazni proizvodi					Ograničenja
		F_1	$\cdots$	F_j	$\cdots$	F_f	
Novčana sredstva		k_1	$\cdots$	k_j	$\cdots$	k_f	K_3
Elementi proizvodnog procesa	Q_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1f}	z_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	Q_i	a_{i1}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{if}	z_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	Q_s	a_{s1}	$\cdots$	a_{sj}	$\cdots$	a_{sf}	z_s
Količine		$x_1+x_1^p$	$\cdots$	$x_j+x_j^p$	$\cdots$	$x_f+x_f^p$	
Cijene		v_1	$\cdots$	v_j	$\cdots$	v_f	

Prema tabeli 1, koja određuje podatke prve proizvodne faze, uvedemo neke matrice. Matrica:

$$\mathbf{K} = \| k_1 \ldots k_j \ldots k_f \|$$

određuje potrošnju novčanih sredstava. Matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1f} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{if} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sf} \end{Vmatrix}$$

određuje potrošnju elemenata proizvodnog procesa.

Suma matrica:

$$\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_f \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{X}^p = \begin{Vmatrix} x_1^p \\ \vdots \\ x_j^p \\ \vdots \\ x_f^p \end{Vmatrix}$$

određuje količine izrađenih faznih proizvoda. Konačno matrica:

$$V = \| v_1 \dots v_j \dots v_f \|$$

određuje prodajne cijene faznih proizvoda.

U prvoj fazi potrošimo:

$$\mathbf{K}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p)$$

novčanih sredstava; zbog toga nakon konačne faze ostaje još

$$K_4 = K_3 - \mathbf{K}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p)$$

novčanih sredstava. Kako ta količina ne može biti negativna, to za novčana sredstva slijedi nejednadžba:

$$K_3 - \mathbf{K}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) \geqq 0 \tag{4, K}$$

Budući da nakon prihvaćanja alternative a_2 kod odluke D_2 važi jednadžba:

$$K_3 = K_2 = K_1 - \mathbf{U}\,\mathbf{S}_2,$$

to iz nejednadžbe (4,K) dobivamo nejednadžbu:

$$K_1 - \mathbf{U}\,\mathbf{S}_2 - \mathbf{K}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) \geqq 0$$

Kako je nejednadžba (2, K) ispunjena čim je ispunjena ova nejednadžba, to je možemo zanemariti.

U prvoj proizvodnoj fazi potrošimo

$$\mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p)$$

elemenata proizvodnog procesa, tako da ih nakon završene faze ostaje još

$$\mathbf{S}_4 = \mathbf{S}_3 - \mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p)$$

Budući da je u svakom primjeru $\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_2$, to zbog zahtjeva za nenegativnošću za elemente proizvodnog procesa dobivamo nejednadžbu:

$$\mathbf{S}_2 - \mathbf{A}\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) \geqq \mathbf{0} \tag{4,S}$$

Ustanovimo također da nakon završene prve faze raspolažemo još sa

$$\mathbf{F}_4 = \mathbf{X} + \mathbf{X}^p$$

faznih proizvoda.

Prvu proizvodnu fazu radi jedinstvenosti matematičke simbolike nazivamo i odlukom D_4; na sl. 32. odgovara joj posljednji odsjek desno gore. Nakon završene prve faze u proizvodni proces imamo uključenih K_4 novčanih sredstava, $\mathbf{S}_4$ elemenata proizvodnog procesa i $\mathbf{F}_4$ faznih proizvoda.

Odluka D_5. U pogledu raspolaganja izrađenim faznim proizvodima moramo prosuditi i odlučiti da li važi alternativa a_5, gdje ćemo fazne proizvode u cijelosti potrošiti u dugoj proizvodnoj fazi, ili pak važi alternativa b_5, gdje ćemo ih djelomično potrošiti u drugoj fazi, a djelomično prodati, pa ih tako isključiti iz daljnjeg proizvodnog procesa. Količine faznih proizvoda koje zadržavamo za drugu fazu već smo gore označili matricom $\mathbf{X}$, dok smo količine koje prodajemo označili sa $\mathbf{X}^p$. drugu proizvodnu fazu i uopće ih ne prodajemo.

Alternativa a_5. Pri toj alternativi zadržimo sve izradene fazne proizvode za drugu proizvodnu fazu i uopće ih ne prodajemo. Zbog toga za ovu alternativu važi jednadžba:

$$\mathbf{X}^p = \mathbf{0}$$

U tom je primjeru količina u prvoj fazi izrađenih proizvoda jednaka $\mathbf{X}$. Kako se prihvaćanjem ove alternative ne mijenjaju ni količina raspoloživih novčanih sredstava ni količine elemenata proizvodnog proecsa, to važe jednadžbe:

$$K_5 = K_4$$
$$\mathbf{S}_5 = \mathbf{S}_4$$

Za količine faznih proizvoda prema gornjem po ovoj alternativi važi:

$$\mathbf{F}_5 = \mathbf{F}_4 = \mathbf{X}$$

Alternativa b_5. Po ovoj alternativi jedan dio faznih proizvoda zadržavamo za drugu proizvodnu fazu, a preostali dio prodajemo; pri tom zadržavamo za drugu fazu $\mathbf{X}$, a prodamo ih $\mathbf{X}^p$.

Zbog prodaje faznih proizvoda raspoloživa novčana sredstva povećaju se za

$$\mathbf{V}\,\mathbf{X}^p$$

novčanih jedinica na:

$$K_5 = K_4 + \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p$$

Kako pri ovoj alternativi količine raspoloživih elemenata proizvodnog procesa ostaju nepromijenjene, to važi jednadžba:

$$\mathbf{S}_5 = \mathbf{S}_4$$

Zbog prodaje $\mathbf{X}^p$ faznih proizvoda ostaje ih u proizvodnom procesu još:

$$\mathbf{F}_5 = \mathbf{X}$$

Na sl. 32. odluci D_5 i alternativama a_5 i b_5 odgovara prvi odsjek lijevo dolje. Nakon te odluke u proizvodni proces imamo uključenih K_5 novčanih sredstava, $\mathbf{S}_5$ elemenata proizvodnog procesa i $\mathbf{F}_5$ faznih proizvoda.

Odluka D_6. U pogledu načina upotrebe novčanih sredstava koje dobivamo prodajom faznih proizvoda moramo prosuditi i odlučiti da li važi alternativa a_6, prema kojoj ta sredstva ne potrošimo u drugoj fazi, ili pak važi alternativa b_6, prema kojoj ta sredstva potrošimo za financiranje druge faze.

Alternativa a_6. Pri ovoj alternativi u drugoj fazi ne koristimo novčana sredstva koja smo dobili prodajom faznih proizvoda. Zbog toga dobivena novčana sredstva izlučimo iz daljnjeg proizvodnog procesa i uzimamo ih u obzir tek na kraju pri zaključku bilance. Kako ova sredstva u nastavku nećemo uzimati u obzir u proizvodnom procesu, moramo za toliko smanjiti raspoloživa novčana sredstva. Stoga su po ovoj alternativi raspoloživa novčana sredstva jednaka:

$$K_6 = K_5 - \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p = K_4$$

novčanih sredstava.

Kako se prema ovoj alternativi ne mijenjaju ni količine elemenata proizvodnog procesa ni količine raspoloživih faznih proizvoda, to važe jednadžbe:

$$\mathbf{S}_6 = \mathbf{S}_5$$
$$\mathbf{F}_6 = \mathbf{F}_5 = \mathbf{X}$$

Alternativa b_6. Pri ovoj alternativi novčana sredstva dobivena za prodane fazne proizvode uključimo u postojeća pa ih nakon toga zajedno potrošimo za financiranje proizvodnje u drugoj fazi. Kako se zbog toga raspoloživa novčana sredstava ne mijenjaju, to su ona nakon prihvaćanja ove alternative jednaka:

$$K_6 = K_5 = K_4 + \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p$$

Budući da se po ovoj alternativi ne mijenjaju ni raspoložive količine elemenata proizvodnog procesa ni faznih proizvoda, to važe jednadžbe:

$$\mathbf{S}_6 = \mathbf{S}_5$$
$$\mathbf{F}_6 = \mathbf{F}_5 = \mathbf{X}$$

Na sl. 32. odluci D_6 i alternativama a_6 i b_6 odgovara drugi odsjek dole. Nakon ove odluke imamo u proizvodni proces uključenih K_6 novčanih sredstava, $\mathbf{S}_6$ elemenata proizvodnog procesa i $\mathbf{F}_6$ faznih proizvoda.

II. faza i odluka D_7. U drugoj proizvodnoj fazi raspoloživim novčanim sredstvima, elementima proizvodnog procesa i faznim proizvodima izrađujemo finalne proizvode p tipova koje označujemo ovako:

$$P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_p$$

U pogledu na način potrošnje faznih proizvoda kao produkcionih faktora razlikujemo dvije alternative a_7 i b_7. Pri alternativi a_7 fazni proizvodi za vrijeme proizvodnje finalnih proizvoda nestaju i određenim tehnološkim postupkom preoblikuju se u finalne proizvode; o takvoj se alternativi radi npr. u dvofaznoj poljoprivrednoj proizvodnji, gdje u prvoj fazi proizvodimo krmivo, koje nakon toga u drugoj fazi potrošimo za stoku kao finalni proizvod. Po alternativi b_7 fazni se proizvodi za vrijeme proizvodnje u drugoj fazi habaju i time smanjuju svoju vrijednost; o takvoj je alternativi riječ npr. u industrijskoj proizvodnji, gdje u prvoj fazi izradimo strojeve za obradu kao međuproizvode, a nakon toga njima u drugoj fazi izrađujemo finalne proizvode.

U drugoj proizvodnoj fazi nastupa odluka D_7 kad moramo prosuditi i odlučiti da li važi alternativa a_7, pri kojoj međuproizvodi nestaju, ili pak važi alternativa b_7, pri kojoj fazni proizvodi habaju. Na sl. 32. odluci D_7 i alternativama a_7 i b_7 odgovara treći odsjek dolje.

Alternativa a_7. Prema ovoj alternativi fazni proizvodi u proizvodnom procesu druge faze nestaju i na neki se način preoblikuju u finalne proizvode. Za izradu jedne jedinice finalnog proizvoda P_k potrošimo.

$$h_k$$

novčanih jedinica kao direktnih troškova,

$$b_{ik}$$

jedinica elemenata proizvodnog procesa Q_i i

$$c_{jk}$$

jedinica faznog proizvoda F_k; pri tom indeks i ide od 1 do s, indeks j od 1 do f i indeks k od 1 do p. U drugoj fazi izradimo

$$y_k$$

jedinica finalnog proizvoda P_k. Finalni proizvod P_k ima cijenu

$$w_k$$

novčanih jedinica.

Sve te podatke za drugu proizvodnu fazu pregledno daje tabela 2; u njoj su navedeni još i koeficijenti r_j i d_j, koji međutim u ovoj alternativi ne dolaze u obzir.

Po tabeli 2, koja određuje podatke za drugu proizvodnu fazu, uvedemo neke matrice. Matrica:

$$\mathbf{H} = \| h_1 \ldots h_k \ldots h_p \|$$

određuje potrošnju novčanih sredstava. Matrica:

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{matrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} & \ldots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \ldots & b_{ik} & \ldots & b_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \ldots & b_{sk} & \ldots & b_{sp} \end{matrix} \right\|$$

TABELA 2. DRUGA FAZA

		Finalni proizvodi					Ograničenja	Smanjenje vrijednosti	Obrada
		P_1	...	P_k	...	P_p			
Novčana sredstva		h_1	...	h_k	...	h_p	K_6		
Elementi proizvodnog procesa	Q_1	b_{11}	...	b_{1k}	...	b_{1p}			
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
	Q_i	b_{i1}	...	b_{ik}	...	b_{ip}	$\mathbf{S}_6$		
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
	Q_s	b_{s1}	...	b_{sk}	...	b_{sp}			
Fazni proizvodi	F_1	c_{11}	...	c_{1k}	...	c_{1p}	x_1	r_1	d_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	F_j	c_{j1}	...	c_{jk}	...	c_{jp}	x_j	r_j	d_j
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	F_f	c_{f1}	...	c_{fk}	...	c_{fp}	x_f	r_f	d_f
Količine		y_1	...	y_k	...	y_p			
Cijene		w_1	...	w_k	...	w_p			

određuje potrošak elemenata proizvodnog procesa. Ovu smo matricu već spomenuli pri razmatranju odluke D_3; u alternativi a_3 ova je matrica $\mathbf{0}$, a u alternativi b_3 je nenegativna. Matrica:

$$\mathbf{C} = \left\| \begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{jk} & \cdots & c_{jp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{f1} & \cdots & c_{fk} & \cdots & c_{fp} \end{matrix} \right\|$$

određuje potrošnju faznih proizvoda. Matrica:

$$\mathbf{Y} = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_p \end{matrix} \right\|$$

izražava količine finalnih proizvoda. Konačno, matrica:

$$\mathbf{W} = \| w_1 \ldots w_k \ldots w_p \|$$

određuje prodajne cijene finalnih proizvoda.

U proizvodnji $\mathbf{Y}$ finalnih proizvoda potrošimo

$$\mathbf{H}\,\mathbf{Y}$$

jedinica novčanih sredstava, pa ih stoga na kraju druge faze ostaje na raspolaganju još

$$K_7 = K_6 - \mathbf{H\,Y}$$

Zbog zahtjeva za nenegativnošću iz toga dobivamo nejednadžbu:

$$K_6 - \mathbf{H\,Y} \geqq 0 \qquad (7, K, a)$$

U proizvodnji $\mathbf{Y}$ finalnih proizvoda potrošimo

$$\mathbf{B\,Y}$$

elemenata proizvodnog procesa, pa ih stoga na kraju druge faze ostaje još

$$\mathbf{S}_7 = \mathbf{S}_6 - \mathbf{B\,Y}$$

Zbog zahtjeva za nenegativnošću iz toga dobivamo nejednadžbu:

$$\mathbf{S}_6 - \mathbf{B\,Y} \geqq 0 \qquad (7,S)$$

U proizvodnji $\mathbf{Y}$ finalnih proizvoda potrošimo

$$\mathbf{C\,Y}$$

faznih proizvoda, pa ih stoga na kraju druge faze ostaje još

$$\mathbf{F}_7 = \mathbf{F}_6 - \mathbf{C\,Y}$$

Zbog zahtjeva za nenegativnošću iz toga dobivamo nejednadžbu:

$$\mathbf{F}_6 - \mathbf{C\,Y} \geqq 0 \qquad (7, F, a)$$

Drugom proizvodnom fazom proces se završava; odredimo količine i vrijednosti koje imamo na kraju procesa. Od novčanih sredstava K_6, koje smo uložili za financiranje druge faze, ostaje još K_7 novčanih jedinica; pri tom međutim ne smijemo zaboraviti na one eventualne $\mathbf{V\,X}^p$ jedinice koje smo izlučili iz proizvodnog procesa ako smo prihvatili alternative b_5 i a_6, tj. ako smo dio faznih proizvoda prodali i dobivena novčana sredstva izlučili iz proizvodnog procesa. Ako smo prihvatili ove dvije alternative, onda su ukupna raspoloživa novčana sredstva jednaka

$$K_7 + \mathbf{V\,X}^p$$

novčanih jedinica. Od elemenata proizvodnog procesa na kraju druge faze ostaje još $\mathbf{S}_7$; njihova je vrijednost jednaka:

$$\mathbf{U\,S}_7$$

novčanih jedinica. Od faznih proizvoda ostaje još F_7; njihova je vrijednost jednaka:

$$\mathbf{V\,F}_7$$

novčanih jedinica. Finalnih proizvoda izradimo u drugoj fazi $\mathbf{Y}$; njihova je vrijednost jednaka

$$\mathbf{W\,Y}$$

novčanih jedinica.

Alternativa b_7. Pri toj alternativi fazni se proizvodi za vrijeme proizvodnog procesa habaju i stoga smanjuju svoju vrijednost. O takvom se procesu na primjer radi kad su fazni proizvodi strojevi za obradu kojima u drugoj fazi obrađujemo finalne proizvode. Stoga ćemo radi kraćeg izražavanja u ovoj alternativi fazne proizvode nazivati ukratko strojevima. Sve podatke za drugu fazu pregledno daje tabela 2; značenje nekih koeficijenata u tabeli pri ovoj se alternativi razlikuje od njihovog značenja u alternativi a_7.

Kao prema prijašnjoj alternativi za proizvodnju 1 jedinice finalnog proizvoda P_k potrošimo

$$h_k$$

novčanih jedinica direktnih troškova; u te troškove međutim nisu uključeni troškovi obrade na strojevima, koje ćemo uzeti u obzir kasnije. Isto tako kao u prijašnjoj alternativi za proizvodnju 1 jedinice finalnog proizvoda P_k potrošimo

$$b_{ik}$$

jedinica elemenata proizvodnog procesa Q_i. Pri obradi 1 jedinice finalnog proizvoda P_k na stroju F_j potrošimo

$$c_{jk}$$

vremenskih jedinica. Ako stroj F_j radi 1 vremensku jedinicu, nastaje

$$d_j$$

novčanih jedinica direktnih troškova. Ako stroj za obradu F_j radi jednu vremensku jedinicu, onda se njegova vrijednost smanjuje za

$$r_j$$

novčanih jedinica; u nastavku pretpostavimo da je ukupno smanjenje vrijednosti stroja direktno proporcionalno vremenu pogona stroja. U drugoj fazi izradimo

$$y_k$$

jedinica finalnog proizvoda P_k. Finalni proizvod P_k ima cijenu

$$w_k$$

novčanih jedinica.

Po tabeli 2, koja daje podatke za drugu fazu, uvedemo osim matrica **H**, **B**, **C**, **Y** i **W** uvedenih već u prijašnju alternativu još dvije matrice. Matrica:

$$\mathbf{D} = \| d_1 \ldots d_j \ldots d_f \|$$

određuje direktne troškove obrade na strojevima, a matrica:

$$\mathbf{R} = \| r_1 \ldots r_j \ldots r_f \|$$

određuje smanjenje vrijednosti strojeva.

Izračunajmo količine novčanih sredstava, elemenata proizvodnog procesa faznih proizvoda koje potrošimo u drugoj fazi.

Novčani troškovi što nastaju za vrijeme druge faze sastoje se u ovoj alternativi od dva dijela. Prvi dio obuhvaća direktne troškove, koje određuje matrica **H**; za proizvodnju **Y** finalnih proizvoda ovi su troškovi jednaki:

$$\mathbf{H\,Y}$$

novčanih jedinica. Drugi dio obuhvaća direktne troškove koji nastaju zbog pogona strojeva za obradu i koje određuju matrice **C** i **D**; ovi su troškovi u proizvodnji jedne jedinice finalnog proizvoda P_k jednaki:

$$d_1\,c_{1k} + \ldots + d_j\,c_{jk} + \ldots + d_f\,c_{fk}$$

novčanih jedinica; stoga su ukupni direktni troškovi pri proizvodnji **Y** finalnih proizvoda jednaki:

$$\mathbf{D\,C\,Y}$$

novčanih jedinca. Ako zbrojimo i jedne i druge troškove, dobivamo za drugu fazu ukupne troškove:

$$(\mathbf{H} + \mathbf{D\,C})\,\mathbf{Y}$$

novčanih jedinica. Raspoloživa novčana sredstva što ostanu na kraju druge faze stoga su jednaka:

$$K_7 = K_6 - (\mathbf{H} + \mathbf{D\,C})\,\mathbf{Y}$$

novčanih jedinica. Zbog zahtjeva za nenegativnošću iz toga za novčana sredstva dobivamo nejednadžbu:

$$K_6 - (\mathbf{H} + \mathbf{D\,C})\,\mathbf{Y} \geqq 0 \qquad (7, K, b)$$

Pri proizvodnji **Y** finalnih proizvoda potrošimo u drugoj fazi

$$\mathbf{B\,Y}$$

elemenata proizvodnog procesa, tako da ih na kraju druge faze ostane još

$$\mathbf{S}_7 = \mathbf{S}_6 - \mathbf{B\,Y}$$

Kako ova količina ne može biti negativna, to za elemente proizvodnog procesa slijedi nejednadžba:

$$\mathbf{S}_6 - \mathbf{B\,Y} \geqq \mathbf{0} \qquad (7, S)$$

Fazni se proizvodi tipova:

$$F_1, \ldots, F_j, \ldots, F_f$$

kao strojevi za obradu u drugoj fazi habaju i gube u vrijednosti. Fazni je proizvod dotrajao kad njegova smanjena vrijednost postane jednaka 0. Kako fazni proizvodi pojedinih tipova imaju uzastopce početne vrijednosti:

$$v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_f$$

i kako su njihovi koeficijenti smanjivanja vrijednosti uzastopce jednaki:

$$r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_f,$$

to fazni proizvodi traju uzastopce po

$$t_1 = \frac{v_1}{r_1}, \ldots, t_j = \frac{v_j}{r_j}, \ldots, t_f = \frac{v_f}{r_f}$$

vremenskih jedinica. Od ovih brojeva koji izražavaju trajanje pojedinih faznih proizvoda sastavimo dijagonalnu matricu:

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} t_1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & t_j & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & t_f \end{Vmatrix}$$

Faznih proizvoda kao strojeva za obradu pojedinih tipova imamo u drugoj fazi na raspolaganju uzastopce po

$$x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_f$$

jedinica. Radi toga imamo za svaki tip strojeva za obradu u svrhu obrade finalnih proizvoda na raspolaganju uzastopce po

$$t_1 x_1, \ldots, t_j x_j, \ldots, t_f x_f$$

vremenskih jedinica. Ova raspoloživa vremena jednaka su uzastopnim komponentama matričnog produkta

$$\mathbf{T}\,\mathbf{X}$$

Za obradu $\mathbf{Y}$ finalnih proizvoda potrošimo

$$\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

vremenskih jedinica pogona strojeva za obradu; kako vrijeme potrebno za obradu ne može biti duže od raspoloživog vremena, to za fazne proizvode slijedi nejednadžba:

$$\mathbf{C}\,\mathbf{Y} \leqq \mathbf{T}\,\mathbf{X} \qquad (7, F, b)$$

S drugom fazom proizvodni se proces završava; odredimo količine i vrijednosti kojima raspolažemo pri kraju procesa.

Od novčanih sredstava K_6 koje smo uložili za financiranje druge faze ostaje još K_7 novčanih jedinica. Pri tom ne smijemo zaboraviti onih $\mathbf{V}\,\mathbf{X}^p$ jedinica koje smo izlučili iz proizvodnog procesa prihvaćanjem alternativa b_5 i a_6; ako smo prihvatili ove dvije alternative, onda su ukupna novčana sredstva jednaka

$$K_7 + \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p$$

novčanih jedinica.

Od elemenata proizvodnog procesa ostaje na kraju druge faze $\mathbf{S}_7$; njihova je vrijednost jednaka:

$$\mathbf{U}\,\mathbf{S}_7$$

novčanih jedinica.

Fazni proizvodi kao strojevi za obradu u drugoj fazi gube u vrijednosti; njihova je ukupna preostala vrijednost jednaka:

$$\mathbf{V\,X - R\,C\,Y}$$

novčanih jedinica; izračunamo je ovako:

Najprije izračunajmo vrijeme pogona strojeva za obradu. U drugoj fazi izradimo y_k jedinica finalnih proizvoda P_k; te proizvode obradimo među ostalim i na x_j strojeva tipa F_j. Radi toga svaki stroj tipa F_j obradi y_k/x_j jedinica proizvoda tipa P_k. Ove brojeve za sve finalne proizvode i za sve strojeve daje tabela 3.

TABELA 3. BROJ FINALNIH PROIZVODA ISTOGA TIPA KOJE OBRAĐUJE NEKI STROJ

		Finalni proizvodi				
		P_1	$\cdots$	P_k	$\cdots$	P_p
Strojevi za obradu	F_1	$\frac{y_1}{x_1}$	$\cdots$	$\frac{y_k}{x_1}$	$\cdots$	$\frac{y_p}{x_1}$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	F_j	$\frac{y_1}{x_j}$	$\cdots$	$\frac{y_k}{x_j}$	$\cdots$	$\frac{y_p}{x_j}$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	F_f	$\frac{y_1}{x_f}$	$\cdots$	$\frac{y_k}{x_f}$	$\cdots$	$\frac{y_p}{x_f}$

Iz tabele 3. vidimo da svaki stroj tipa F_j obradi po

$$\frac{y_1}{x_j},\ \ldots,\ \frac{y_k}{x_j},\ \ldots,\ \frac{y_p}{x_j}$$

proizvoda tipa:

$$P_1,\ \ldots,\ P_k,\ \ldots,\ P_p$$

Da bi obavio taj posao stroj F_j, mora biti u pogonu

$$c_{j1}\frac{y_1}{x_j} + \ldots + c_{jk}\frac{y_k}{x_j} + \ldots + c_{jp}\frac{y_p}{x_j}$$

vremenskih jedinica. Kako ovom stroju odgovara koeficijent smanjenja vrijednosti r_j, to se vrijednost stroja smanjuje za

$$\frac{r_j}{x_j}(c_{j1}\,y_1 + \ldots + c_{jk}\,y_k + \ldots + c_{jp}\,y_p)$$

novčanih jedinica, tako da je konačna preostala vrijednost stroja jednaka:

$$\mathbf{v_j} - \frac{\mathbf{r_j}}{x_j}(c_{j1}\,y_1 + \ldots + c_{jk}\,y_k + \ldots + c_{jp}\,y_p)$$

novčanih jedinica. Zbog toga je preostala vrijednost svih x_j strojeva tipa F_j jednaka:

$$v_j x_j - r_j (c_{j1} y_1 + \dots + c_{jk} y_k + \dots + c_{jp} y_p)$$

novčanih jedinica. Ako zbrojimo preostale vrijednosti svih strojeva svih tipova, dobivamo njihovu vrijednost na kraju druge faze; ta je vrijednost jednaka:

$$\mathbf{V X - R C Y}$$

To je i trebalo izračunati.

Izračunana vrijednost zbog smanjenja vrijednosti faznih proizvoda ili strojeva nije negativna. To možemo uvidjeti ovako: nejednadžbu (7, F, b) premultipliciramo matricom **R** i dobivamo nejednadžbu:

$$\mathbf{R T X - R C Y \geqq 0}$$

Kako je $\mathbf{R T = V}$, to iz posljednje nejednadžbe slijedi nejednadžba:

$$\mathbf{V X - R C Y \geqq 0}$$

što je trebalo dokazati.

U drugoj fazi izradimo Y finalnih proizvoda; njihova je vrijednost jednaka:

$$\mathbf{W Y}$$

novčanih jedinica.

Funkcija cilja (odluka D_8). Pošto je dvofazni proizvodni proces završen, moramo još izabrati funkciju cilja. Taj je izbor doduše proizvoljan, no ipak mora odgovarati cilju proizvodnje. Po zaključku proizvodnje moramo prosuditi i odlučiti koju funkciju cilja da uzmemo. Pri razmatranoj proizvodnji izaberemo među raznim mogućnostima koje imaju ekonomski smisao za funkciju cilja konačni novčani saldo.

Konačni novčani saldo sastavljen je od četiri dijela: od raspoloživih novčanih sredstava, od vrijednosti preostalih elemenata proizvodnog procesa, od vrijednosti preostalih faznih proizvoda i od vrijednosti finalnih proizvoda. Sve te količine već smo izračunali prilikom razmatranja druge proizvodne faze.

Raspoloživa novčana sredstva zavise od alternativa koje smo izabrali kod odluka D_5 i D_6. Nakon prihvaćanja alternativa b_5 i b_6, gdje sredstva dobivena prodajom faznih proizvoda upotrijebimo za financiranje druge faze, ta su sredstva jednaka:

$$K_8 = K_7$$

Nakon prihvaćanja alternativa b_5 i a_6, gdje sredstva dobivena prodajom faznih proizvoda isključimo iz proizvodnog procesa, ona su jednaka:

$$K_8 = K_7 + \mathbf{V X}^p$$

Vrijednost preostalih elemenata proizvodnog procesa jednaka je:

$$\mathbf{U S}_7$$

Vrijednost je ostalih faznih proizvoda ako se prihvati alternativa a_7, jednaka:

$$\mathbf{V F}_7$$

a prihvaćanjem alternative b_7 jednaka je:

$$\mathbf{V\,X - R\,C\,Y}$$

Vrijednost izrađenih finalnih proizvoda jednaka je:

$$\mathbf{W\,Y}$$

novčanih jedinica.

Određivanju funkcije cilja ili odluci D_8 na sl. 32. odgovara posljednji odsjek desno dolje.

Ako zbrojimo sve vrijednosti kojima raspolažemo prema alternativi a_7 nakon vrednovanja elemenata proizvodnog procesa faznih proizvoda i finalnih proizvoda, dobivamo slijedeću funkciju cilja:

$$f_a(\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{X}^p, \mathbf{Y}) = K_8 + \mathbf{U\,S}_7 + \mathbf{V\,F}_7 + \mathbf{W\,Y} \tag{8, a}$$

Pri alternativi b_7 dobivamo međutim slijedeću funkciju cilja:

$$f_b(\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{X}^p, \mathbf{Y}) = K_8 + \mathbf{U\,S}_7 + (\mathbf{V\,X} - \mathbf{R\,C\,Y}) + \mathbf{W\,Y} \tag{8, b}$$

Želimo izračunati najveću vrijednost funkcije cilja u odgovarajućim uvjetima koje smo dobili prilikom analize dvofaznog proizvodnog procesa. Pri tom dobivamo dva problema u matematičkom obliku, jedan za alternativu a_7 i drugi za alternativu b_7.

Pri alternativi a_7, gdje fazni proizvodi u drugoj fazi nestaju, dobivamo problem

Treba odrediti matrice $\mathbf{Z}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^p$ i $\mathbf{Y}$ koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$\mathbf{Z} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{X} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{X}^p \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}$$

i nejednadžbe:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} - \mathbf{Z} &\geqq \mathbf{0} && (2, S)\\ K_3 - \mathbf{K}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) &\geqq \mathbf{0} && (4, K)\\ \mathbf{Z} - \mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) &\geqq \mathbf{0} && (4, S)\\ K_6 - \mathbf{H\,Y} &\geqq 0 && (7, K, a)\\ \mathbf{S}_6 - \mathbf{B\,Y} &\geqq \mathbf{0} && (7, S)\\ \mathbf{F}_6 - \mathbf{C\,Y} &\geqq \mathbf{0} && (7, F, a) \end{aligned}$$

tako da funkcija cilja:

$$f_a(\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{X}^p, \mathbf{Y}) = K_8 + \mathbf{U\,S}_7 + \mathbf{V\,F}_7 + \mathbf{W\,Y} \tag{8, a}$$

ima maksimum.

Prema alternativi b_7, gdje se smanjuje vrijednost faznih proizvoda u drugoj fazi, dobivamo problem:

Treba odrediti matrice $\mathbf{Z}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^p$ i $\mathbf{Y}$ koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$\mathbf{Z} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{X} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}^p \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}$$

i linearne nejednadžbe:

$$\mathbf{S} - \mathbf{Z} \geqq \mathbf{0} \tag{2, S}$$

$$\mathrm{K}_3 - \mathbf{K}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) \geqq 0 \tag{4, K}$$

$$\mathbf{Z} - \mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) \geqq \mathbf{0} \tag{4, S}$$

$$\mathrm{K}_6 - (\mathbf{H} + \mathbf{D}\,\mathbf{C})\,\mathbf{Y} \geqq \mathbf{0} \tag{7, K, b}$$

$$\mathbf{S}_6 - \mathbf{B}\,\mathbf{Y} \geqq \mathbf{0} \tag{7, S}$$

$$\mathbf{T}\,\mathbf{X} - \mathbf{C}\,\mathbf{Y} \geqq \mathbf{0} \tag{7, F, b}$$

tako da funkcija cilja:

$$f_b(\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{X}^p, \mathbf{Y}) = \mathrm{K}_8 + \mathbf{U}\,\mathbf{S}_7 + (\mathbf{V}\,\mathbf{X} - \mathbf{R}\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}) + \mathbf{W}\,\mathbf{Y} \tag{8, b}$$

ima maksimum.

TABELA 4. PREGLED REZULTATA ANALIZE DVOFAZNIH PROCESA

D	Alternative a	Uvjeti	Alternative b	Uvjeti
1	$\mathrm{K}_1 = \infty$		$\mathrm{K}_1 = k$	
2	$\mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_1$ $\mathbf{S}, \mathbf{U} = \mathbf{0}, \mathbf{S}_2 = \mathbf{Z}$	$\mathbf{S} \geqq \mathbf{Z}$	$\mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_1 - \mathbf{U}\,\mathbf{S}_2$ $\mathbf{S}, \mathbf{U} > \mathbf{0}, \mathbf{S}_2 = \mathbf{Z}$	$\mathrm{K}_2 \geqq 0$ $\mathbf{S} \geqq \mathbf{Z}$
3	$\mathrm{K}_3 = \mathrm{K}_2$ $\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_2$		kao u alternativi a	
I, 4	$\mathrm{K}_4 = \mathrm{K}_3 - \mathbf{K}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p)$ $\mathbf{S}_4 = \mathbf{S}_3 - \mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p)$ $\mathbf{F}_4 = \mathbf{X} + \mathbf{X}^p$	$\mathrm{K}_4 \geqq 0$ $\mathbf{S}_4 \geqq \mathbf{0}$	kao u alternativi a	
5	$\mathbf{X}^p = \mathbf{0}$ $\mathrm{K}_5 = \mathrm{K}_4$ $\mathbf{S}_5 = \mathbf{S}_4$ $\mathbf{F}_5 = \mathbf{F}_4 = \mathbf{X}$		$\mathbf{X}^p \geqq \mathbf{0}$ $\mathrm{K}_5 = \mathrm{K}_4 + \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p$ $\mathbf{S}_5 = \mathbf{S}_4$ $\mathbf{F}_5 = \mathbf{X}$	
6	$\mathrm{K}_6 = \mathrm{K}_5 - \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p = \mathrm{K}_4$ $\mathbf{S}_6 = \mathbf{S}_5$ $\mathbf{F}_6 = \mathbf{F}_5$		$\mathrm{K}_6 = \mathrm{K}_5$ $\mathbf{S}_6 = \mathbf{S}_5$ $\mathbf{F}_6 = \mathbf{F}_5$	
II, 7	$\mathrm{K}_7 = \mathrm{K}_6 - \mathbf{H}\,\mathbf{Y}$ $\mathbf{S}_7 = \mathbf{S}_6 - \mathbf{B}\,\mathbf{Y}$ $\mathbf{F}_7 = \mathbf{F}_6 - \mathbf{C}\,\mathbf{Y}$ $\mathbf{P}_7 = \mathbf{Y}$	$\mathrm{K}_7 \geqq 0$ $\mathbf{S}_7 \geqq \mathbf{0}$ $\mathbf{F}_7 \geqq \mathbf{0}$	$\mathrm{K}_7 = \mathrm{K}_6 - (\mathbf{H} + \mathbf{D}\,\mathbf{C})\,\mathbf{Y}$ $\mathbf{S}_7 = \mathbf{S}_6 - \mathbf{B}\,\mathbf{Y}$ $\mathbf{F}_7$ $\mathbf{P}_7 = \mathbf{Y}$	$\mathrm{K}_7 \geqq 0$ $\mathbf{S}_7 \geqq \mathbf{0}$ $\mathbf{TX} - \mathbf{CY} \geqq$ $\geqq \mathbf{0}$
8	$\mathrm{K}_8 = \mathrm{K}_7 + \begin{matrix} 0 & (b_5 \,\&\, b_6) \\ \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p & (b_5 \,\&\, a_6) \end{matrix}$ $f_a = \mathrm{K}_8 + \mathbf{U}\,\mathbf{S}_7 + \mathbf{V}\,\mathbf{F}_7 + \mathbf{W}\,\mathbf{Y}$		$\mathrm{K}_8 = \mathrm{K}_7 + \begin{matrix} 0 & (b_5 \,\&\, b_6) \\ \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p & (b_5 \,\&\, a_6) \end{matrix}$ $f_b = \mathrm{K}_8 + \mathbf{U}\,\mathbf{S}_7 + (\mathbf{VX} - \mathbf{RCY}) + \mathbf{WY}$	

Kako su u oba problema uvjetne nejednadžbe linearne i kako su i funkcije cilja linearne funkcije varijabla, to je riječ o problemima linearnog programiranja.

Svakom dvofaznom procesu za koji vrijedi gornja analiza i za koji su nam pri svim odlukama poznate odgovarajuće alternative, pridružimo neku *karakteristiku*. Karakteristika se sastoji od šest simbola, koji određuju pojedine alternative. Tako npr. karakteristiku:

$$(b_1, b_2, a_3, a_5, a_6, a_7)$$

ima dvofazni proces kojemu odgovaraju alternative b_1, b_2, a_3, a_5, a_6 i a_7.

Prilikom proučavanja nekoga dvofaznog procesa dovoljno je da odredimo njegovu karakteristiku; čim smo je odredili, možemo izraziti odgovarajući linearni program bez nekoga daljnjeg računanja, ako iskoristimo već obavljene račune. Pri oblikovanju linearnog programa služimo se tabelom 4, koja daje pregledno rezultate obavljene analize.

Kako u karakteristici ima 6 mjesta sa po dvije alternative, to bi teoretski bile moguće $2^6 = 64$ različite karakteristike. Neke od tih karakteristika međutim praktički ne dolaze u obzir jer bi njima odgovarajući dvofazni procesi bili s gledišta ekonomike beznačajni ili čak besmisleni. Bez smisla je npr. karakteristika tipa $(\ldots, a_5, b_6, \ldots)$; ako naime prema alternativi a_5 ne prodamo fazne proizvode, onda ne možemo po alternativi b_6 dobivenim novčanim sredstvima financirati drugu fazu. Stoga ima znatno manje karakteristika koje karakteriziraju realno značajne dvofazne procese.

Vježbe

1. Odredi karakteristiku dvofaznog proizvodnog procesa iz druge točke ovog poglavlja. Koristi se tabelom 4. i sastavi procesu odgovarajući linearni program.

$((a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7))$

2. Opiši dvofazni proizvodni proces koji ima karakteristiku:

$$(b_1, b_2, a_3, a_5, a_6, a_7)$$

3. Opiši dvofazni proizvodni proces koji ima karakteristiku:

$$(b_1, a_2, b_3, b_5, b_6,, b_7)$$

4. Dvofazni proizvodni proces određuju u prvoj fazi matrice:

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} 230 \\ 145 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{Vmatrix} 5 & 4 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{Vmatrix} 4 & 6 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{Vmatrix} 25 & 35 & 50 \end{Vmatrix}$$

a u drugoj matrice:

$$\mathbf{H} = \begin{Vmatrix} 20 & 30 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 7 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{Vmatrix} 450 & 550 \end{Vmatrix}$$

Sastavi tabelu koja odgovara ovom proizvodnom procesu.

5. Razmatraj pomoću podataka iz prijašnje vježbe dvofazni proizvodni problem s karakteristikom:

$$(a_1, b_2, a_3, a_5, a_6, a_7)$$

Izrazi linearni program ako je funkcija cilja konačni novčani saldo

(Linearni program: $\mathbf{AX} \leq \mathbf{S}$, $\mathbf{CY} \leq \mathbf{X}$; $f_a = \mathbf{WY}$. Rješenje: 230, 145; 16,10, 29; 2, 3; 2 550, —)

6. Pomoću podataka iz četvrte vježbe razmatraj dvofazni proizvodni problem s karakteristikom:

$$(a_1, b_2, a_3, b_5, a_6, a_7)$$

Izrazi linearni program ako je funkcija cilja konačni novčani saldo.

(Linearni program: $\mathbf{A}(\mathbf{X}+\mathbf{X}^p) \leqq \mathbf{S}$, $\mathbf{CY} \leqq \mathbf{X}$, $f_a = \mathbf{V}\mathbf{X}^p + \mathbf{W}\mathbf{Y}$. Rješenje: 250, 145; 0, 16,25, 0; 22,15, 8,86, 17,72; 4,43, 0; 2 572, –)

7. Pomoću podataka iz četvrte vježbe razmatraj dvofazni proizvodni problem s karakteristikom:

$$(b_1, b_2, a_3, a_5, a_6, a_7)$$

Izrazi linearni program ako je funkcija cilja konačni novčani saldo i ako je: $K_1 = k = 1\,700,-$ novčanih jedinica.

(Linearni program:

$$\mathbf{Z} \leqq \mathbf{S},\ \mathbf{U}\,\mathbf{Z} + \mathbf{K}\,\mathbf{X} + \mathbf{H}\,\mathbf{Y} \leqq k,\ \mathbf{A}\,\mathbf{X} \leqq \mathbf{Z},\ \mathbf{C}\,\mathbf{Y} \leqq \mathbf{X},\ f_a = k - (\mathbf{K} + \mathbf{U}\,\mathbf{A})\,\mathbf{X} + (\mathbf{W} - \mathbf{H})\,\mathbf{Y}.$$

Rješenje: 200,91, 112,05; 7,73, 7,73, 27,05; 0, 3,86; 2 123,–)

8. Pomoću podataka iz četvrte vježbe razmatraj dvofazni proizvodni problem s karakteristikom:

$$(b_1, b_2, a_3, b_5, a_6, a_7)$$

Izrazi odgovarajući linearni program ako je funkcija cilja konačni novčani saldo i ako je $K_1 = k = 1\,700,-$ novčanih jedinica.

(Linearni program:

$$\mathbf{Z} \leqq \mathbf{S},\ \mathbf{U}\ \mathbf{Z} + \mathbf{K}\ (\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) + \mathbf{H}\,\mathbf{Y} \leqq k$$

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) \leqq \mathbf{Z},\ \mathbf{C}\,\mathbf{Y} \leqq \mathbf{X},$$

$$f_a = k + (\mathbf{V} - \mathbf{K} - \mathbf{U}\,\mathbf{A})\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) + (\mathbf{W} - \mathbf{H} - \mathbf{V}\,\mathbf{C})\,\mathbf{Y}.$$

Rješenje: 200,91, 112,05; 0, 0, 0; 7/73, 7/73, 27,05; 0, 3,86; 2 123,–)

9. Pomoću podataka iz četvrte vježbe razmatraj dvofazni proizvodni problem s karakteristikom:

$$(b_1, b_2, a_3, b_5, b_6, a_7)$$

Izrazi odgovarajući linearni program ako je funkcija cilja konačni novčani saldo i ako je $K_1 = k = 1700,-$ novčanih jedinica.

(Linearni program:

$$\mathbf{Z} \leqq \mathbf{S}, \mathbf{U}\,\mathbf{Z} + \mathbf{K}\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) \leqq k,$$

$$\mathbf{U}\,\mathbf{Z} + \mathbf{K}\,\mathbf{X} - (\mathbf{V} - \mathbf{K})\,\mathbf{X}^p + \mathbf{H}\,\mathbf{Y} \leqq k,$$

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) \leqq \mathbf{Z},\ \mathbf{C}\,\mathbf{Y} \leqq \mathbf{X},$$

$$f_a = k + (\mathbf{V} - \mathbf{K} - \mathbf{U}\,\mathbf{A})\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) + (\mathbf{W} - \mathbf{H} - \mathbf{V}\,\mathbf{C})\,\mathbf{Y}.$$

Rješenje: 207,81, 127,34; 4,69, 0, 0; 7,81, 7,81, 27,34; 0, 3,91; 2 148,–)

5. Problem u industriji papira

Razmatrajmo problem dvofaznog proizvodnog procesa tvornice koja izrađuje papir u dvije faze; u prvoj od sirovina izrađuje različite vrste celuloze kao fazne proizvode, a zatim u drugoj fazi različite vrste papira kao finalne proizvode. U pogledu alternativa pri ovom poroblemu uzimamo slijedeće pretpostavke:

Alternativa b_1. Novčana sredstva što ih tvornica može investirati u proizvodni proces ograničena su i jednaka:

$$K_1 = k = 5\,000\,000 \text{ d}$$

Alternativa b_2. Elementi proizvodnog procesa su sirovine koje tvornica mora nabaviti; tvornica nabavi 3 vrste sirovina:

Q_1: celulozno drvo; ima ga na raspolaganju najviše

$$20\,000 \text{ m}^3 \text{ po cijeni od } 60 \text{ d za m}^3,$$

Q_2: pirit; ima ga na raspolaganju najviše 1 500 000 kg po cijeni od 0,1 d za kg,

Q_3: alaun; ima ga na raspolaganju najviše 150 000 kg po cijeni od 5 d za kg.

Alternativa b_3. Sirovine tvornica treba djelomično u prvoj a djelomično u drugoj fazi; celulozno drvo i pirit treba samo u prvoj, dok alaun treba samo u drugoj fazi.

Prva faza. U prvoj fazi tvornica izrađuje samo 2 tipa faznih proizvoda:

F_1: smrekova bijeljena celuloza; njezina je cijena 1 600 d za tonu.

F_2: smrekova nebijeljena celuloza; njezina je cijena 1 300 d za tonu.

Podatke za prvu fazu daje tabela 1.

TABELA 1. PODACI ZA PRVU FAZU

		Finalni proizvodi		Ograničenja
		F_1	F_2	
Novčana sredstva		1 100	900	5 000 000 d
Sirovine	Q_1	6	4	20 000 m^3
	Q_2	250	250	1 500 000 kg
	Q_3	0	0	150 000 kg
Količine		$x_1 + x_1^p$	$x_2 + x_2^p$	
Cijene		1 600	1 300	

Nakon tih podataka uvedemo matrice:

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} 20\,000 \\ 1\,500\,000 \\ 150\,000 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{Vmatrix} 60 & 0{,}1 & 5 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{Vmatrix} 1\,100 & 900 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{X}^p = \begin{Vmatrix} x_1^p \\ x_2^p \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 6 & 4 \\ 250 & 250 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{Vmatrix} 1\,600 & 1\,300 \end{Vmatrix}$$

Alternativa b_5. Pri kraju prve faze možemo fazne proizvode djelomično prodati a djelomice upotrijebiti u drugoj fazi.

Alternativa b_6. Utržak koji dobivamo od prodaje faznih proizvoda uključimo u postojeća raspoloživa novčana sredstva, pa njima onda financiramo drugu fazu.

Kako alaun (Q_3) ne trebamo u prvoj već tek u drugoj fazi, to pretpostavimo da ćemo ga nabaviti neposredno prije početka druge faze.

Alternativa a_7. Alaun i fazni proizvodi koje upotrijebimo u drugoj fazi nestaju.

Druga faza. U drugoj fazi ograničimo se na proizvodnju samo dviju vrsta papira kao finalnih proizvoda, i to:

P_1: roto-papir; njegova je cijena 1 000 d za tonu,

P_2: srednje fini papir; njegova je cijena 1 500 d za tonu.

Podatke za proizvodni proces u drugoj fazi daje tabela 2.

TABELA 2. PODACI ZA DRUGU FAZU

		Finalni proizvodi		Ograničenja
		P_1	P_2	
Novčana sredstva		100	400	K_4
Sirovine	Q_3	10	9	150 000 kg
Fazni proizvodi	F_1	0,01	0,40	x_1
	F_2	0,30	0,10	x_2
Količine		y_1	y_2	
Cijene		1 000	1 500	

Drugoj fazi odgovaraju matrice:

$$\mathbf{H} = \begin{Vmatrix} 100 & 400 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10 & 9 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0{,}01 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}10 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{Vmatrix} 1\,000 & 1\,500 \end{Vmatrix}$$

Uza sve spomenute pretpostavke i podatke želimo odrediti optimalni proizvodni program u obje faze, tako da konačni saldo novčanih sredstava bude najveći.

Iz pretpostavki vidimo da razmatrani proizvodni proces ima karakteristiku:

$$(b_1, b_2, b_3, b_5, b_6, a_7)$$

Pri određivanju uvjeta što vrijede za novčana sredstva moramo uzeti u obzir da sirovinu Q_3 nabavljamo tek neposredno pred početak druge faze; u matematičkoj formulaciji problema prema tabeli 4. iz prijašnje točke moramo ovu okolnost uzeti u obzir.

Nabavljene količine sirovina zadovoljavaju nejednadžbu:

$$\mathbf{Z} \leq \mathbf{S} \tag{1}$$

Količine u prvoj i drugoj fazi potrošenih sirovina zadovoljavaju nejednadžbu:

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) + \mathbf{B}\,\mathbf{Y} \leqq \mathbf{Z} \tag{2}$$

Količine faznih proizvoda koje potrošimo u drugoj fazi zadovoljavaju nejednadžbu:

$$\mathbf{C}\,\mathbf{Y} \leqq \mathbf{X} \tag{3}$$

Novčana sredstva koja potrošimo na početku procesa za nabavu sirovina Q_1 i Q_2 i za financiranje prve faze zadovoljavaju nejednadžbu:

$$\mathbf{U}\,\mathbf{Z} - u_3\,z_3 + \mathbf{K}\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) \leqq k \tag{4}$$

Nakon prve faze prodamo $\mathbf{X}^p$ faznih proizvoda; stoga se raspoloživa novčana sredstva povećaju za $\mathbf{V}\,\mathbf{X}^p$. Ovim sredstvima nabavimo sirovinu Q_3 i financiramo drugu fazu; stoga novčana sredstva zadovoljavaju još nejednadžbu:

$$u_3\,z_3 + \mathbf{H}\,\mathbf{Y} \leqq k - \mathbf{U}\,\mathbf{Z} + u_3\,z_3 - \mathbf{K}\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) + \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p$$

Iz ove slijedi nejednadžba:

$$\mathbf{U}\,\mathbf{Z} + \mathbf{K}\,(\mathbf{X} + \mathbf{K}^p) + \mathbf{H}\,\mathbf{Y} - \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p \leqq k \tag{5}$$

Odredimo još funkciju cilja. Konačni novčani saldo je suma vrijednosti:

a) novčana sredstva koja preostaju pri kraju druge faze:

$$k - \mathbf{U}\,\mathbf{Z} - \mathbf{K}\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) + \mathbf{V}\,\mathbf{X}^p - \mathbf{H}\,\mathbf{Y}$$

b) vrijednost nabavljenih sirovina koje su preostale pri kraju druge faze:

$$\mathbf{U}\,(\mathbf{Z} - \mathbf{A}\,(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) - \mathbf{B}\,\mathbf{Y})$$

c) vrijednost faznih proizvoda koji preostaju pri kraju druge faze:

$$\mathbf{V}\,(\mathbf{X} - \mathbf{C}\,\mathbf{Y})$$

d) vrijednost finalnih proizvoda:

$$\mathbf{W}\,\mathbf{Y}$$

Ako Zbrojimo sva ta četiri iznosa, dobivamo konačni saldo i funkciju cilja:

$$f_a = k - (\mathbf{K} + \mathbf{U}\,\mathbf{A} - \mathbf{V})\,(\mathbf{X} + \mathbf{K}^p) - (\mathbf{H} + \mathbf{U}\,\mathbf{B} + \mathbf{V}\,\mathbf{C} - \mathbf{W})\,\mathbf{Y} \tag{6}$$

Nakon svega ovog dobivamo slijedeći problem linearnog programiranja:

Treba odrediti matrice $\mathbf{Z}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^p$ i $\mathbf{Y}$ koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti i nejednadžbe (1), (2), (3), (4) i (5) tako da funkcija cilja (6) ima maksimum. Ako u ovaj linearni program uvrstimo dane numeričke podatke i ako ga riješimo simpleks-metodom pomoću elektronskog računala, dobivamo slijedeće rješenje:

$$z_1 = 17\,257{,}7 \quad z_2 = 1\,066\,077{,}5 \quad z_3 = 100\,246$$

$$x_1 = 100{,}25 \quad x_2 = 3\,007{,}4$$

$$x_1^p = 0 \quad x_2^p = 1\,156{,}7$$

$$y_1 = 10\,024{,}6 \quad y_2 = 0$$

$$f_{max} = 10\,024\,598{,}49$$

Prema izračunanom optimalnom mogućem rješenju pri najboljoj odluci proizvodni proces u obje faze odvija se kako slijedi.

Najprije tvornica nabavi $z_1 = 17\,257,7$ m^3 celuloznog drva (Q_1) i $z_2 = 1\,066\,077,05$ kg pirita (Q_2), što stoji

$$1\,035\,464 + 106\,607 = 1\,142\,071$$

dinara. Kako je ovih sirovina na raspolaganju više nego što ih trebamo, to one ne predstavljaju usko grlo proizvodnje.

U prvoj fazi tvornica izradi $x_1 = 100,25$ t smrekove bijeljene celuloze (F_1) i $x_2 + x_2^p = 4\,164,1$ t smrekove nebijeljene celuloze (F_2), što stoji

$$\mathbf{K}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^p) = 3\,857\,929 \text{ d.}$$

Tvornica do kraja prve faze potroši ukupno

$$1\,142\,071 + 3\,857\,929 = 5\,000\,000$$

dinara; time je iscrpla sva novčana sredstva kojima je raspolagala. Novčana su sredstva prema tome usko grlo.

Na kraju prve faze tvornica proda $x_2^p = 1\,156,7$ t smrekove nebijeljene celuloze (Q_2), za koje dobije

$$1\,503\,690 \text{ d.}$$

Ovim nanovo dobivenim novčanim sredstvima nabavi najprije $z_3 = 100\,246$ kg alauna (Q_3), što stoji 501 230 d i još financira drugu fazu, za što potroši

$$\mathbf{H}\,\mathbf{Y} = 1\,002\,460$$

dinara. Ukupno dakle tvornica ulaže u drugu fazu

$$501\,230 + 1\,002\,460 = 1\,503\,690$$

dinara, tj. toliko koliko je dobila prodajom smrekove nebijeljene celuloze. U drugoj fazi napušta proizvodnju srednje finog papira (P_2) i izradi samo

$$y_1 = 10\,024,6 \text{ t}$$

roto-papira (P_1). Na kraju cjelokupnog proizvodnog procesa tvornica raspolaže samo još izrađenim roto-papirom čija je vrijednost jednaka 10 024 598,49 d.

6. Problem raspodjele financijskih sredstava

Analizu dvofaznih proizvodnih procesa možemo upotrijebiti i prilikom promatranja drukčijih privrednih procesa koji se mogu raščlaniti na dvije faze. U nastavku ćemo razmatrati problem optimalne alokacije financijskih sredstava.

Uzmimo poduzeće s četiri međusobno nezavisna proizvodna odjela:

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

Poduzeće ima na raspolaganju određena, ipak ograničena novčana sredstva koja na neki način raspodjeljuje među ta četiri odjela radi financiranja njihove proizvodnje.

Pretpostavimo da odjeli pri proizvodnji imaju samo tri različita tipa troškova; to su:

X_1: troškovi za uvozni materijal

X_2: troškovi za domaći materijal

X_3: troškovi za osobne dohotke

Proizvodni odjeli međusobno se razlikuju, i to po tome koliko troškova pojedinih tipova imaju da bi stvorili jednu novčanu jedinicu neto-produkta. Ovu strukturu potrošnje daje u novčanim jedinicama tabela 1.

TABELA 1. POTROŠNJA FINANCIJSKIH SREDSTAVA ZA OSTVARENJE 1 JEDINICE NETO-PRODUKTA

		Odjel			
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Vrsta troškova	X_1	0,4	0,3	0,2	0,7
	X_2	0,5	1,0	0,5	0,5
	X_3	1,1	0,2	1,1	0,3
Ukupni troškovi		2,0	1,5	1,8	1,5
neto-produkt		1	1	1	1

Iz tabele 1. vidimo da odjel Y_1 da bi stvorio 1 novčanu jedinicu neto-produkta, potroši 0,4 novčane jedinice za nabavu uvoznog materijala, 0,5 novčanih jedinica za nabavu domaćeg materijala i 1,1 novčanu jedinicu za osobne dohotke, ukupno dakle 2,0 novčanih jedinica financijskih sredstava.

Uzmimo da poduzeće raspolaže samo ograničenim novčanim sredstvima koja su jednaka:

$$k = 1\,000$$

novčanih jedinica; isto tako neka budu ograničena i novčana sredstva koja poduzeće smije potrošiti za nabavu uvoznog materijala; ta su sredstva jednaka:

$$k_1 = 200$$

novčanih jedinica.

U ovim okolnostima u poduzeću se postavlja slijedeći problem optimalnosti: Kako da uprava poduzeća raspodijeli raspoloživa financijska sredstva na pojedine proizvodne odjele da bi postigla najveći ukupni neto-produkt.

Kako poduzeće ne može riskirati da neki njegov odjel prestane raditi, što bi se dogodilo ako mu se ne bi dodijelila nikakva financijska sredstva, to pretpostavimo da svaki odjel mora dobiti barem neku najmanju količinu novčanih sredstava; uzmimo da ova donja granica iznosi 90 novčanih jedinica. Na drugoj strani pretpostavimo još da uprava poduzeća mora ograničiti novčana sredstva koja može dodijeliti nekom odjelu i prema gore, i to zbog njegovog proizvodnog kapaciteta ili zbog nekih drugih okolnosti; pretpostavimo da nijedan odjel ne može dobiti više od 360 novčanih jedinica financijskih sredstava.

Ovakvu raspodjelu financijskih sredstava možemo razmatrati kao dvofazni proces u kojem u prvoj fazi najprije raspodijelimo ukupna novčana sredstva na pojedine vrste troškova, a potom u drugoj fazi te troškove na proizvodne odjele.

U prvoj fazi raspodijelimo ukupna raspoloživa financijska sredstva na pojedine vrste troškova. Označimo sa x_1, x_2, i x_3 uzastopce ukupne troškove za uvozni materijal X_1, za domaći materijal X_2 i troškove za osobne dohotke X_3. Zbog ograničenosti ukupnih financijskih sredstava važi nejednadžba:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqq 1\,000 \tag{1}$$

Zbog ograničenosti ukupnih novčanih sredstava koja izdvojimo za nabavu uvoznog materijala važi nejednadžba:

$$x_1 \leqq 200 \tag{2}$$

Označimo sa

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

neto-produkte koje pojedini odjeli ostvaruju dobivenim financijskim sredstvima. Da bi dostigli te neto-produkte, odjeli prema tabeli 1. moraju dobiti uzastopce po

$$2{,}0y_1,\ 1{,}5y_2,\ 1{,}8y_3,\ 1{,}5y_4$$

jedinica novčanih sredstava. Kako su prema našim pretpostavkama ova sredstva ograničena prema dolje donjim granicama i prema gore gornjim granicama, to za neto-produkte dobivamo nejednadžbe:

$$45 \leqq y_1 \leqq 180 \tag{3,1}$$
$$60 \leqq y_2 \leqq 240 \tag{3,2}$$
$$50 \leqq y_3 \leqq 200 \tag{3,3}$$
$$60 \leqq y_4 \leqq 240 \tag{3,4}$$

Za pojedine vrste troškova dobivamo iz tabele 1. još nejednadžbe:

$$0{,}4\,y_1 + 0{,}3\,y_2 + 0{,}2\,y_3 + 0{,}7\,y_4 \leqq x_1 \tag{4}$$
$$0{,}5\,y_1 + 1{,}0\,y_2 + 0{,}5\,y_3 + 0{,}5\,y_4 \leqq x_2 \tag{5}$$
$$1{,}1\,y_1 + 0{,}2\,y_2 + 1{,}1\,y_3 + 0{,}3\,y_4 \leqq x_3 \tag{6}$$

Kako u razmatranom primjeru želimo postići najveći neto-produkt, to tražimo maksimum slijedeće funkcije cilja:

$$f = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \tag{7}$$

Za naš problem alokacije dobili smo tako ovaj problem:

Treba odrediti varijable:

$$x_1, x_2, x_3;\ \ y_1, y_2, y_3, y_4$$

koje nisu negativne i koje zadovoljavaju nejednadžbe (1), (2), (3), (4), (5) i (6), tako da funkcija cilja (7) ima maksimum.

Budući da su sve nejednadžbe linearne i budući da je i funkcija cilja linearna, to se radi o problemu linearnog programiranja. Tabela 2. daje ga pregledno kao dvofazni proces.

TABELA 2. RASPODJELA SREDSTAVA KAO DVOFAZNI PROCES

							Ograničenja
Prva faza			Vrsta troškova				
			X_1	X_2	X_3		
	Novčana sredstva		1	1	1		$k = 1\,000$ $k_1 = 200$
	Količine		x_1	x_2	x_3		
Druga faza			Proizvodni odjel				
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	
	Vrsta troškova	X_1	0,4	0,3	0,2	0,7	x_1
		X_2	0,5	1,0	0,5	0,5	x_2
		X_3	1,1	0,2	1,1	0,3	x_3
	Neto-produkti		y_1	y_2	y_3	y_4	
	Jedinica neto-produkta		1	1	1	1	
Ograničenja			45–180 60–240		50–200 60–240		

U skladu s općom analizom dvofaznih procesa ovom problemu odgovaraju matrice:

u prvoj fazi:

$$\mathbf{K} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$

u drugoj fazi:

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 1{,}0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}1 & 0{,}2 & 1{,}1 & 0{,}3 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{Vmatrix} 45 \\ 60 \\ 50 \\ 60 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{Vmatrix} 180 \\ 240 \\ 200 \\ 240 \end{Vmatrix}$$

Ovaj problem alokacije ima karakteristiku:

$$(b_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7)$$

i odgovara mu ovaj linearni program:

Treba odrediti matrice **X** i **Y** koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti

$$\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}$$

i nejednadžbe

$$\mathbf{K}\,\mathbf{X} \leqq 1\,000, \quad x_1 \leqq 200,$$

$$\mathbf{C}\,\mathbf{Y} \leqq \mathbf{X}$$

$$\mathbf{m} \leqq \mathbf{Y} \leqq \mathbf{M}$$

tako da funkcija cilja:

$$f = \mathbf{W}\,\mathbf{Y}$$

ima maksimum.

Gornje nejednadžbe možemo pojednostaviti ako uvedemo supstituciju:

$$\begin{aligned} y_1 &= 45 + z_1 \\ y_2 &= 60 + z_2 \\ y_3 &= 50 + z_3 \\ y_4 &= 60 + z_4 \end{aligned}$$

Njoj odgovara obrnuta supstitucija:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - 45 \\ z_2 &= y_2 - 60 \\ z_3 &= y_3 - 50 \\ z_4 &= y_4 - 60 \end{aligned}$$

Nakon te supstitucije dobivamo slijedeći linearni program:

Treba odrediti vrijednost varijabla:

$$x_1, x_2, x_3; \quad z_1, z_2, z_3, z_4,$$

koje nisu negativne i koje zadovoljavaju nejednadžbe:

$$\begin{array}{lllllllll} x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & & \leqq & 1\,000 \\ x_1 & & & & & & & \leqq & 200 \\ & & & z_1 & & & & \leqq & 135 \\ & & & & z_2 & & & \leqq & 180 \\ & & & & & z_3 & & \leqq & 150 \\ & & & & & & z_4 & \leqq & 180 \end{array}$$

$$
\begin{array}{llllll}
-10x_1 & & & +\ 4z_1 + \ 3z_2 + \ 2z_3 + 7z_4 & \leqq & -\ 880 \\
 & -10x_2 & & +\ 5z_1 + 10z_2 + \ 5z_3 + 5z_4 & \leqq & -1\,375 \\
 & & -10x_3 & +11z_1 + \ 2z_2 + 11z_3 + 3z_4 & \leqq & -1\,345
\end{array}
$$

tako da funkcija cilja:

$$f = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + 215$$

ima maksimum.

Ovaj problem linearnog programiranja riješimo pomoću elektronskog računala simpleks-metodom i nakon provedbe obrnute supstitucije za prvobitni problem dobivamo slijedeće optimalno moguće rješenje s vrijednostima, na odgovarajući način, zaokruženim:

$$x_1 = 200,\ x_2 = 417{,}94,\ x_3 = 382{,}06$$

$$y_1 = 70{,}38,\ y_2 = 240,\ y_3 = 200,\ y_4 = 85{,}5$$

$$f_{max} = 595{,}88$$

Iz izračunanog optimalnog mogućeg rješenja sastavimo tabelu 3. Ona daje optimalnu raspodjelu financijskih sredstava raščlanjeno po vrstama troškova i po proizvodnim odjelima.

TABELA 3. OPTIMALNA RASPODJELA FINANCIJSKIH SREDSTAVA

		Odjeli				Neisko-rišteno	Ukupno
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4		
Vrsta troškova	X_1	28,15	72	40	59,85	—	200
	X_2	35,19	240	100	42,75	—	417,94
	X_3	77,42	48	220	25,65	10,99	382,06
Ukupno		140,76	360	360	128,25	10,99	1 000
Propisana ograničenja		90 — 360	90 — 360	90 — 360	90 — 360	—	—
Neto-produkti		70,38	240	200	85,50	—	595,88

Iz tabele 3. možemo za optimalnu raspodjelu financijskih sredstava izvući ove činjenice:

Od ukupno raspoloživih financijskih sredstava, koja iznose 1 000 novčanih jedinica uprava poduzeća odredi 200 za nabavu uvoznog materjala, 417,94 za nabavu domaćeg materijala i 371,06 za osobne dohotke; pri tom ostaje neiskorištenih 10,99 novčanih jedinica, koje se ne mogu iskoristiti jer se ne mogu povećati troškovi za uvozni materijal. Novčana sredstva određena za uvozni materijal su premalena da bi poduzeće u cijelosti moglo iskoristiti sva raspoloživa financijska sredstva.

Uprava poduzeća odjelima Y_2 i Y_3 dodjeljuje što je moguće više financijskih sredstava, tj. 360 novčanih jedinica u skladu s ograničenjem nagore; odjeli Y_1 i Y_4 moraju se zadovoljiti znatno manjim sredstvima, koja međutim ipak prelaze propisano ograničenje nadolje od 90 novčanih jedinica.

Uz takvu alokaciju financijskih sredstava poduzeće postiže najveći neto-produkt od 595,88 novčanih jedinica.

7. Višefazni procesi

Analizu koja vrijedi za dvofazne procese možemo bez osobitih teškoća uopćiti na slične procese koji se odvijaju u više faza. U trećoj točki ovoga poglavlja na takav smo način razmatrali primjer trofaznog proizvodnog procesa kao uopćenje u drugoj točki razmatranog dvofaznog proizvodnog procesa. Kao pri dosadašnjoj analizi mi ćemo se i nadalje radi zornosti ograničiti na analizu višefazinh proizvodnih procesa; analizu takvih procesa možemo naime bez teškoća prilagoditi procesima drukčije prirode.

Mnogofazni proizvodni proces počinjemo s novčanim sredstvima u visini

$$K$$

novčanih jedinica te sa s tipova elemenata proizvodnog procesa:

$$Q_1, \ldots, Q_s$$

Na raspolaganju imamo elemenata proizvodnog procesa

$$s_1, \ldots, s_s$$

po cijenama:
$$u_1, \ldots, u_s$$

Raspoloživim novčanim sredstvima i elementima proizvodnog procesa u prvoj fazi izradimo f_1 tipova faznih proizvoda prvog stupnja:

$$F_1^1, \ldots, F_{f_1}^1$$

Tih izradimo:
$$x_1^1 + x_1^{p1}, \ldots, x_{f_1}^1 + x_{f_1}^{p1}$$

i možemo ih prodati po cijenama:

$$v_1^1, \ldots, v_{f_1}^1$$

Podatke za prvu fazu daje tabela 1.

TABELA 1. PODACI ZA PRVU FAZU

		Elementi proizvodnog procesa $Q_1 \cdots Q_s$	Ograni-čenja	Matrice
Raspoložive količine		$s_1 \cdots s_s$		$\mathbf{S}$
Količine		$z_1 \cdots z_s$		$\mathbf{Z}$
Cijene		$u_1 \cdots u_s$		$\mathbf{U}$
		Fazni proizvodi prvoga reda $F_1^1 \cdots F_{f_1}^1$		
Novčana sredstva		$k_1^1 \cdots k_{f_1}^1$	$K - \mathbf{UZ}$	$\mathbf{K}^1$
Elementi proizvodnog procesa	Q_1	$a_{11}^1 \cdots a_{1f_1}^1$	z_1	$\mathbf{A}^1$
	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$	
	Q_s	$a_{s1}^1 \cdots a_{sf_1}^1$	z_s	
Količine		$x_1^1 + x_1^{p1} \cdots x_{f_1}^1 + x_{f_1}^{p1}$		$\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^{p1}$
Cijene		$v_1^1 \cdots v_{f_1}^1$		$\mathbf{V}^1$

S preostalim novčanim sredstvima, elementima proizvodnog procesa i faznim proizvodima prvoga stupnja počinjemo nakon prve faze drugu, u kojoj izradimo f_2 tipova faznih proizvoda drugoga stupnja:

$$F_1^2, \ldots, F_{f_2}^2$$

Ovih izradimo:

$$x_1^2 + x_1^{p^2}, \ldots, x_{f_2}^2 + x_{f_2}^{p^2}$$

i možemo ih prodati po cijenama:

$$v_1^2, \ldots, v_{f_2}^2$$

Podatke za drugu fazu daje tabela 2.

TABELA 2. PODACI ZA DRUGU FAZU

		Fazni proizvodi drugoga reda	Smanjenje vrijednosti	Obrada	Matrice
		$F_1^2 \cdots F_{f_2}^2$			
Novčana sredstva		$k_1^2 \cdots k_{f_2}^2$			$\mathbf{K}^2$
Elementi proizvodnoga procesa	Q_1 ⋮ Q_s	$a_{11}^2 \cdots a_{1f_2}^2$ ⋮ $a_{s_1}^2 \cdots a_{sf_2}^2$			$\mathbf{A}^2$
Fazni proizvodi prvoga reda	F_1^1 ⋮ $F_{f_1}^1$	$c_{11}^{12} \cdots c_{1f_1}^{12}$ ⋮ $c_{f_1 1}^{12} \cdots c_{f_1 f_2}^{12}$	r_1^{12} ⋮ $r_{f_1}^{12}$	d_1^{12} ⋮ $d_{f_1}^{12}$	$\mathbf{C}^{12}$, $\mathbf{R}^{12}$, $\mathbf{D}^{12}$
Količine		$x_1^2 + x_1^{p2} \cdots x_{f_2}^2 + x_{f_2}^{p2}$			$\mathbf{X}^2$, $\mathbf{X}^{p2}$
Cijene		$v_1^2 \cdots v_{f_2}^2$			$\mathbf{V}^2$

Slično nastavljamo proizvodnju u daljnjim fazama; uzmimo da proizvodni proces ima **n** faza. U pretposljednjoj fazi izrađujemo preostalim novčanim sredstvima, elementima proizvodnog procesa i faznim proizvodima f_{n-1} tipova faznih proizvoda stepena $n - 1$:

$$F_1^{n-1}, \ldots, F_{f_{n-1}}^{n-1}$$

Ovih izradimo:

$$x_1^{n-1} + x_1^{p,n-1}, \ldots, x_{f_{n-1}}^{n-1} + x_{f_{n-1}}^{p,n-1}$$

i možemo ih prodati po cijenama:

$$v_1^{n-1}, \ldots, v_{f_{n-1}}^{n-1}$$

U posljednjoj, n-toj fazi preostalim novčanim sredstvima, elementima proizvodnog procesa i faznim proizvodima svih stupnjeva izrađujemo p tipova finalnih proizvoda:

$$P_1, \ldots, P_p$$

Ovih izradimo:

$$y_1, \ldots, y_p$$

Njihove su cijene:

$$w_1, \ldots, w_p$$

Podatke za posljednju fazu daje tabela 3.

TABELA 3. PODACI ZA POSLJEDNJU FAZU

		Finalni proizvodi			Smanjenje vrijednosti	Obrada	Matrice
		P_1	$\ldots$	P_p			
Novčana sredstva		K_1^n	$\ldots$	k_p^n			$\mathbf{K}^n$
Elementi proizvodnoga procesa	Q_1 $\vdots$ Q_s	a_{11}^n $\vdots$ a_{s1}^n	$\ldots$ $\ldots$	a_{1p}^n $\vdots$ a_{sp}^n			$\mathbf{A}^n$
Fazni proizvodi prvoga reda	F_1^1 $\vdots$ $F_{f_1}^1$	c_{11}^{1n} $\vdots$ $c_{f_1 1}^{1n}$	$\ldots$ $\ldots$	c_{1p}^{1n} $\vdots$ $c_{f_1 p}^{1n}$	r_1^{1n} $\vdots$ $r_{f_1}^{1n}$	d_1^{1n} $\vdots$ $d_{f_1}^{1n}$	$\mathbf{C}^{1n}$, $\mathbf{R}^{1n}$, $\mathbf{D}^{1n}$
. . . . .	. . .	. . . . .	. . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Fazni proizvodi reda $n-1$	F_1^{n-1} $\vdots$ $F_{f_{n-1}}^{n-1}$	$c_{11}^{n-1,n}$ $\vdots$ $c_{f_{n-1}}^{n-1,n}$	$\ldots$ $\ldots$	$c_{1p}^{n-1,n}$ $\vdots$ $c_{f_{n-p}}^{n-1,n}$	$r_1^{n-1,n}$ $\vdots$ $r_{f_{n-1}}^{n-1,n}$	$d_1^{n-1,n}$ $\vdots$ $d_{f_{n-1}}^{n-1,n}$	$\mathbf{C}^{n-1,n}$, $\mathbf{R}^{n-1,n}$, $\mathbf{D}^{n-1,n}$
Količine		y_1	$\ldots$	y_p			$\mathbf{Y}$
Cijene		w_1	$\ldots$	w_p			$\mathbf{W}$

Koeficijente koji određuju potrošnju produkcionih faktora opremimo po određenom redu s više indeksa.

Slovom k označimo direktne troškove proizvodnje; dodamo mu dva indeksa: gornji određuje fazu, a donji proizvod uz koji ti troškovi nastaju.

Potrošnju elemenata proizvodnog procesa označimo slovom a s tri indeksa: gornji određuje fazu, prvi dolje određuje element proizvodnog procesa koji trošimo, drugi dolje označuje proizvod za koji trošimo element proizvodnog procesa.

Potrošnju faznih proizvoda označimo slovom c s četiri indeksa: prvi indeksi gore i dolje određuju fazni proizvod koji trošimo, drugi gore određuje fazu, a drugi dolje određuje proizvod za koji trošimo fazni proizvod.

Koeficijenti smanjenja vrijednosti r i koeficijenti obrade d imaju po tri indeksa: prvi indeksi gore i dolje određuju fazni proizvod na kojem se novi proizvod obrađuje, a drugi gore određuje fazu.

Radi preglednosti u tabelama 1, 2. i 3. navodimo još i sve odgovarajuće matrice.

Matrica $\mathbf{K}^i$ određuje direktne proizvodne troškove u i-toj fazi; pri tom indeks i ide od 1 do n.

Matrica $\mathbf{A}^i$ određuje potrošnju elemenata proizvodnog procesa u i-toj fazi; pri tom indeks i ide od 1 do n. Ako u nekoj fazi ne trošimo elemente proizvodnog procesa, onda je ta matrica jednaka $\mathbf{0}$.

Matrica $\mathbf{C}^{ij}$ određuje potrošnju faznog proizvoda stupnja j u proizvodnoj fazi i; pri tom indeks j ide od 1 do n — 1, dok indeks i ide do 2 do n. Ako u nekoj fazi ne trošimo fazne proizvode određenog stupnja, onda je odgovarajuća matrica jednaka $\mathbf{0}$.

Matrice $\mathbf{R}^{ji}$ i $\mathbf{D}^{ji}$ određuju u i-toj fazi smanjenje vrijednosti i troškove obrade faznih proizvoda stupnja j; pri tom indeks j ide od 1 do n-1, a indeks i od 2 do n. Ove matrice ne uzimamo u obzir kad fazni proizvodi za vrijeme prerade nestaju.

Značenje ostalih matrica slijedi iz gore navedenog, pa ih stoga nije potrebno objašnjavati.

Sada kad poznajemo strukturu i sve podatke mnogofaznog proizvodnog procesa, moramo odabrati još funkciju cilja. Među mnogim mogućim ciljevima proizvodnje uzmimo, kao pri dvofaznom procesu, da proizvodnjom želimo postići najveći konačni novčani saldo.

Nakon svega toga dobivamo slijedeći proizvodni problem: Kako da uz dane podatke i uvjete programiramo čitav mnogofazni proizvodni proces po pojedinim fazama a da bi konačni novčani saldo bio najveći.

S danim podacima i danom funkcijom cilja sastavimo linearni program koji odgovara ovom proizvodnom problemu. Pri tom odlučujemo, analiziramo, zaključujemo i računamo točno tako kao pri proizvodnom procesu u 4. točki ovoga poglavlja. Mnogofazni proces najprije rasčlanimo na pojedine faze i za njih odredimo eventualne uzastopne odluke i alternative.

Prije svake odluke ili alternative poznajemo iz prijašnje analize raspoložive količine produkcionih faktora: novčanih sredstava, elemenata proizvodnog procesa i faznih proizvoda iz prijašnjih faza. Za razmatranu odluku ili alternativu izračunamo potrošnju tih produkcionih faktora. Kako potrošnja ne može biti veća od raspoloživih količina, to iz toga dobivamo odgovarajuće nejednadžbe. Nakon te odluke ili alternative odredimo preostale količine produkcionih faktora.

Tako nastavljamo od faze do faze, od odluke do odluke i od alternative do alternative, sve dok ne dođemo do kraja procesa. Pri tom dobivamo sve nejednadžbe linearnog programa.

Nakon određivanja uvjetnih nejednadžbi moramo odrediti još funkciju cilja. Na kraju procesa raspolažemo preostalim novčanim sredstvima, elementima proizvodnog procesa, faznim proizvodima raznih stupnjeva i finalnim proizvodima. Funkciju cilja dobivamo tako da raspoloživim novčanim sredstvima pribrojimo vrijednosti preostalih elemenata proizvodnog procesa, faznih proizvoda i finalnih proizvoda.

Određivanje uvjetnih nejednadžbi za prvu i drugu fazu u svemu je jednako određivanju koje smo upoznali pri dvofaznom procesu u četvrtoj točki ovoga poglavlja. Određivanje uvjetnih nejednadžbi za više faze i funkcije cilja međutim također je veoma slično njihovu određivanju pri dvofaznom procesu. Stoga to ne ponavljamo.

Rješenjem dobivenog linearnog programa dobivamo optimalno moguće rješenje proizvodnog problema i njemu odgovarajuću najveću vrijednost funkcije cilja.

XIV. TRANSPORTNE METODE

1. Opći transportni problem linearnog programiranja

U razmatranju transportnih problema linearnog programiranja ograničit ćemo se na proučavanje prijevoza samo jedne vrste robe. Robu dobivamo ili izrađujemo na određenim mjestima koje nazivamo ishodištima. Iz svakog ishodišta u vremenskoj jedinici izvire određena količina robe; ovu količinu nazivamo ponudom ili kapacitetom ishodišta. U ishodištima dobivenu robu prevozimo u određena mjesta koja nazivamo odredištima; u svako odredište u vremenskoj jedinici dovezemo određenu količinu robe; ovu količinu nazivamo potražnjom odredišta.

Uzmimo da roba izlazi iz m ishodišta $I_1, \dots, I_m$ koja u vremenskoj jedinici imaju ponudu $a_1, \dots, a_m$; ukupna ponuda svih ishodišta u vremenskoj jedinici jednaka je sumi ponuda pojedinih ishodišta, pa je stoga jednaka:

$$a = a_1 + \dots + a_m$$

Robu prevezemo od ishodišta do n odredišta $P_1, \dots, P_n$ koja u vremenskoj jedinici imaju uzastopce potražnje $b_1, \dots, b_n$; ukupna potražnja svih odredišta u vremenskoj jedinici jednaka je sumi potražnja svih odredišta, pa je zato jednaka:

$$b = b_1 + \dots + b_n$$

Pretpostavimo da su prijevozni troškovi na svakom putu jednaki produktu količine prevezene robe i prijevozne tarife koja vrijedi na tom putu. Prijevozna tarifa za prijevoz jedinice robe na putu (i, j), tj. na putu od ishodišta I_i do odredišta P_j, jednaka je c_{ij} novčanih jedinica.

Uzmimo dalje da je ukupna ponuda svih ishodišta jednaka ukupnoj potražnji svih odredišta te da stoga važi jednadžba:

$$a = b$$

U tom primjeru prevezemo svu robu koja izlazi iz ishodišta do odredišta, tako da posljednja potroše svu prevezenu robu.

Ova pretpostavka bitno ne ograđuje općenitost transportnog problema jer joj u svakom primjeru možemo udovoljiti. Ako naime ukupna ponuda ishodišta premašuje ukupnu potražnju odredišta, onda od ishodišta do odredišta dolazi previše robe. Izjednačenje između ponude i potražnje postižemo ovako: postojećim stvarnim odredištima dodamo još jedno pomoćno odredište s potražnjom koja je jednaka diferenciji između ukupne ponude ishodišta i ukupne potražnje odredišta; na putovima koji vode od ishodišta do ovog odredišta propišemo prijevozne tarife 0.

Tako dobivamo transportni problem s uravnoteženom ponudom ishodišta i potražnjom odredišta. Stoga u nastavku možemo uzeti da je ukupna ponuda ishodišta jednaka ukupnoj potražnji odredišta.

U dostavi robe nastaje problem kako da usmjerimo prijevoz od ishodišta do odredišta a da bi ukupni prijevozni troškovi bili najmanji.

Podatke za ovaj transportni problem daje tabela 1. U tabeli su prijevozne tarife za svaki put upisane u odgovarajućem polju u gornjem desnom uglu. U tabeli su u poljima na sredini upisane nepoznate količine x_{ij} robe koja se prevozi putem (i, j) od ishodišta I_i do odredišta P_j.

TABELA 1. PODACI ZA OPĆI TRANSPORTNI PROBLEM

		Odredišta			Ponude ishodišta
		P_1	...	P_n	
Ishodišta	I_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	I_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Potražnje odredišta		b_1	...	b_n	$b = a$

Izrazimo transportni problem u matematičkom obliku:

Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabla:

$$x_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

koje za ishodišta zadovoljavaju jednadžbe:

$$\begin{aligned} x_{11} + \ldots + x_{1n} &= a_1 \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ x_{m1} + \ldots + x_{mn} &= a_m \end{aligned}$$

a za odredišta jednadžbe:

$$\begin{aligned} x_{11} \quad + \ldots + x_{m1} \quad &= b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ x_{1,n-1} + \ldots + x_{m,n-1} &= b_{n-1} \\ x_{1n} \quad + \ldots + x_{mn} \quad &= b_n \end{aligned}$$

tako da funkcija cilja:

$$\begin{aligned} &c_{11}\, x_{11} + \ldots + c_{1n}\, x_{1n} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ c_{m1}\, x_{m1} + \ldots + c_{mn}\, x_{mn} \end{aligned}$$

ima minimum.

Kako su uvjetne jednadžbe linearne, a kako je i funkcija cilja linearna s obzirom na sve varijable, to je riječ o problemu linearnog programiranja. Zbog izjednačenosti ponuda svih ishodišta i potražnja svih odredišta uvjetne jednadžbe sastavljaju sistem zavisnih linearnih jednadžbi. Nakon ove konstatacije vidimo da posljednju jednadžbu dobivamo tako da od sume uvjetnih jednadžbi za ishodišta odbijemo sumu prvih n-1 uvjetnih jednadžbi za odredišta. Stoga posljednju uvjetnu jednadžbu za odredište P_n možemo zanemariti, tako da od svega ostaje $m + n - 1$ nezavisnih uvjetnih jednadžbi. Svako moguće rješenje transportnog problema ima po mn komponenata; moguće rješenje je bazično i nedegenerirano ako ima točno $m + n - 1$ pozitivnih komponenata, a ako bazično moguće rješenje ima manje od $m + n - 1$ pozitivnih komponenata, onda je degenerirano.

Transportni problem možemo riješiti simpleks-metodom tako da računanje započnemo s tabelom 2.

TABELA 2. POČETNA TABELA ZA RJEŠAVANJE TRANSPORTNOG PROBLEMA

	$c_{11} \cdots c_{1n}$	$c_{21} \cdots c_{2n}$	$\cdots$	$c_{m1} \cdots c_{mn}$	$M \cdot \cdot M$
x	$x_{11} \cdots x_{1n}$	$x_{21} \cdots x_{2n}$	$\cdots$	$x_{m1} \cdots x_{mn}$	$x_1 \cdots x_{n-1}$
$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^{11} \ldots \mathbf{P}^{1n}$	$\mathbf{P}^{21} \ldots \mathbf{P}^{2n}$	$\cdots$	$\mathbf{P}^{m1} \ldots \mathbf{P}^{mn}$	$\mathbf{P}^1 \ldots \mathbf{P}^{n-1}$
a_1	$1 \quad \cdots 1$				
a_2		$1 \quad \cdots 1$			
$\vdots$					
a_m				$1 \quad \cdots 1$	
b_1	1	1		1	1
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$		$\ddots$	$\ddots$
b_{n+1}					1

Kako među uvjetima za ishodišta i odredišta nastupaju samo jednadžbe a ne nejednadžbe, dodavanje dopunskih varijabla nije potrebno. Iz tabele 2. vidimo da su vektori $\mathbf{P}^{1n}$, $\mathbf{P}^{2n}$, ..., $\mathbf{P}^{mn}$ jedinični vektori, pa stoga samo u posljednjih $n - 1$ jednadžbi uvedemo umjetne vektore $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^2$, ... $\mathbf{P}^{n-1}$; ovim vektorima odgovaraju umjetne varijable x_1, x_2, ... x_{n-1} i dovoljno velike prijevozne tarife M novčanih jedinica.

Simpleks-metoda je za rješavanje transportnih problema dosta dugotrajna, pa je možemo zamijeniti nekim kraćim metodama.

Primjer. Riješimo simpleks-metodom transportni problem s dva ishodišta i dva odredišta koji smo razmatrali i geometrijski riješili u 1. točki II. poglavlja; podaci za ovaj problem sakupljeni su u tabeli 3.

TABELA 3. PODACI ZA TRANSPORTNI PROBLEM

		Odredišta		Ponude ishodišta
		P_1	P_2	
Ishodišta	I_1	3 x_{11}	2 x_{12}	4
	I_2	1 x_{21}	4 x_{22}	3
Potražnja odredišta		2	5	7

U tabeli su u sredini polja upisane nepoznate količine na pojedinim putovima prevezene robe. Pri matematičkom zapisu problema dobivamo tri uvjetne linearne jednadžbe; u trećoj jednadžbi dodamo umjetnu varijablu x_1, kojoj odgovara jedinični vektor $\mathbf{P}^1$. Uz ovu varijablu propišemo dovoljno veliku prijevoznu tarifu 8, koja je dvaput veća od najskuplje. Nakon uvođenja pomoćne umjetne varijable dobivamo slijedeći problem linearnog programiranja:

Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabla:

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{22},\ x_1,$$

koje zadovoljavaju uvjetne jednadžbe:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} \qquad\qquad\qquad &= 4 \\ x_{21} + x_{22} \quad &= 3 \\ x_{11} + \qquad x_{21} + \qquad + x_1 &= 2 \end{aligned}$$

tako da funkcija cilja:

$$3x_{11} + 2x_{12} + x_{21} + 4x_{22} + 8x_1$$

ima minimum.

TABELA 4. RJEŠAVANJE TRANSPORTNOG PROBLEMA SIMPLEKS-METODOM

C			3	2	1	4	8
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_1
		$\mathbf{P}^0$	$\mathbf{P}^{11}$	$\mathbf{P}^{12}$	$\mathbf{P}^{21}$	$\mathbf{P}^{22}$	$\mathbf{P}^1$
2	$\mathbf{P}^{12}$	4	1	1			
3	$\mathbf{P}^{22}$	3			1	1	
8	$\leftarrow\mathbf{P}^1$	2	1		**1**		1
$z_j - c_j$		33	7		10		
2	$\mathbf{P}^{12}$	4	1	1			
3	$\mathbf{P}^{22}$	1	−1			1	−1
1	$\rightarrow\mathbf{P}^{21}$	2	1		1		1
$z_j - c_j$		13	−3				−10

Tabela 4. prikazuje rješavanje problema po simpleks-metodi. Nakon određivanja prvog mogućeg rješenja:

$$x_{11} = 0,\ x_{12} = 4,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 3,\ x_1 = 2,$$

kojem odgovara vrijednost funkcije cilja 33, uvedemo u bazu vektor $\mathbf{P}^{21}$, a iz nje odstranimo umjetni vektor $\mathbf{P}^1$. Tako dobivamo drugo moguće rješenje, koje je optimalno. Prema tabeli dobivamo stoga slijedeće optimalno moguće rješenje:

$$x_{11} = 0,\ x_{12} = 4,\ x_{21} = 2,\ x_{22} = 1,$$

kojemu odgovaraju najniži transportni troškovi 13 novčanih jedinica. Izračunano optimalno moguće rješenje je bazično i nedegenerirano jer ima $2 + 2 - 1 = 3$ pozitivne komponente.

Vježbe

1. Riješi simpleks-metodom

   a) 3. vježbu

   b) 4. vježbu iz prve točke II. poglavlja.

2. Riješi simpleks-metodom transportni problem koji smo razmatrali i geometrijski riješili u 2. točki II. poglavlja.

3. Riješi simpleks-metodom transportni problem koji smo razmatrali i geometrijski riješili u 3. točki II. poglavlja.

4. Riješi simpleks-metodom transportni problem s prevelikom ponudom ishodišta koji smo razmatrali i geometrijski riješili u 4. točki II. poglavlja.

2. Metoda skakanja s kamena na kamen

Za numeričko rješavanje transportnih problema linearnog programiranja poznajemo jednu dosta jednostavnu metodu koja je naročito upotrebiva ako broj ishodišta i odredišta nije prevelik. Metodu su izradili A. Charnes i W. W. Cooper i nazvali je »Stepping stone method«. Ovu metodu nazivamo metodom skakanja s kamena na kamen, a objasnit ćemo je na primjeru transportnog problema s tri ishodišta i tri odredišta.

Neka se roba proizvodi na tri proizvodna mjesta I_1, I_2 i I_3; na tim se mjestima u vremenskoj jedinici izradi uzastopce 160, 250 i 90, dakle ukupno 500 jedinica robe. Izrađenu robu razvozimo na tri mjesta potrošnje P_1, P_2 i P_3; ova mjesta u vremenskoj jedinici troše 190, 100 i 200, dakle ukupno 490 jedinica robe. Na svim mogućim putovima transportne su tarife za jedinicu robe poznate. Prijevoz jedinice robe od mjesta I_1 do mjesta P_1 stoji 15, do mjesta P_2 40 a do mjesta P_3 40 novčanih jedinica; prijevoz jedinice robe od mjesta I_2 do mjesta P_1 stoji 9, do mjesta P_2 15 a do mjesta P_3 15 novčanih jedinica; prijevoz jedinice robe od mjesta I_3 do mjesta P_1 stoji 23, do mjesta P_2 42 i do mjesta P_3 42 novčane jedinice. Uz te uvjete želimo prijevoz robe od proizvodnih do potrošnih mjesta usmjeriti tako da ukupni prijevozni troškovi budu najmanji.

Iz podataka vidimo da proizvodna mjesta izrađuju za 10 jedinica više robe nego što je troše potrošna mjesta. Da bismo kapacitete proizvodnih mjesta izjednačili s potrebama potrošnih mjesta, uvodimo pomoćno dodatno potrošno mjesto P_4, kojemu propišemo potrošnju 10 jedinica robe u jedinici vremena; uzmemo da su sve transportne tarife od sva tri proizvodna mjesta do ovog potrošnog mjesta jednake 0.

Podatke za ovaj proizvodni problem, nadopunjen ovim dodatnim potrošnim mjestom, daje tabela 1.

Pri matematičkom zapisu ovog problema dobivamo $3 + 4 - 1 = 6$ nezavisnih uvjetnih jednadžbi. Stoga svako bazično i nedegenerirano moguće rješenje ima po 6 pozitivnih komponenata, dok je $12 - 6 = 6$ njegovih komponenata jednakih 0.

Metoda skakanja s kamena na kamen po svojoj je biti iterativna. Najprije potražimo neko bazično moguće rješenje, a zatim iz njega iteracijama dobivamo sve bolja i bolja rješenja, sve dok ne dođemo do optimalnog mogućeg rješenja. Prvo i polazno moguće rješenje možemo, među ostalim, dobiti po pravilu sjeverozapadnog kornera, kao što to vidimo na tabeli 1. Po ovom pravilu u krajnja gornja lijeva polja tabele upisujemo što veće količine robe prevezene njima odgovarajućim pu-

TABELA 1. PODACI ZA TRANSPORTNI PROBLEM I PRVO MOGUĆE RJEŠENJE

		Mjesta potrošnje				Kapaciteti ishodišta
		P_1	P_2	P_3	P_4	
Mjesta proizvodnje	I_1	15 **160**	40 *19*	40 *19*	0 *21*	160
	I_2	9 **30**	15 **100**	15 **120**	0 *27*	250
	I_3	23 *−13*	42 *0*	42 **80**	0 **10**	90
Potrebe odredišta		190	100	200	10	500

tovima. U polje (1,1) napišemo u skladu s uvjetima najveći mogući broj 160; kako smo time iscrpli kapacitet prvoga proizvodnog mjesta, to u polja (1,2), (1,3) i (1,4) dolaze same nule.

U polje (2,1) zapišemo najveći mogući broj 30; kako smo time zadovoljili potrebe prvoga mjesta potrošnje, to u polje (3,1) dolazi nula. U polje (2,2) zapišemo što je moguće veći broj, stoga zapišemo 100; kako smo time zadovoljili potrebe drugoga mjesta potrošnje, to u polje (3,2) dolazi nula. U polje (2,3) zapišemo najveći mogući broj 120; kako smo time iscrpli kapacitet drugoga mjesta proizvodnje, to u polje (2,4) dolazi nula. U polje (3,3) zapišemo najveći mogući broj 80; budući da još nismo iscrpli kapacitet trećega mjesta proizvodnje, to u polje (3,4) zapišemo još 10. Tako smo dobili prvo moguće rješenje transportnog problema, kako pokazuje tabela 1. i za koje su ukupni prijevozni troškovi jednaki:

$$160.15 + 30.9 + 100.15 + 120.15 + 80.42 + 10.0 = 9\,330$$

novčanih jedinica.

Pogledajmo da li se dobiveno moguće rješenje može poboljšati. U tu svrhu ocijenimo sva prazna polja po metodi skakanja s kamena na kamen.

Najprije ocijenimo prazno polje (1,2) tako da u njega zapišemo broj 1; to znači da putem (1,2) koji odgovara ovom polju prevezemo od ishodišta I_1 do odredišta P_2 1 jedinicu robe. Da ne bismo prekršili uvjete što vrijede za proizvodna i potrošna mjesta, moramo promijeniti brojeve još i u nekim drugim poljima. U tu svrhu potražimo zatvoren poligonalni put koji ide od ocjenjivanog polja (1,2), slično kao što se pomiče top u šahu, preko zaposjednutih polja natrag u prvobitno polje (1,2). Taj put ide:

$$(1,2) \to (2,2) \to (2,1) \to (1,1) \to (1,2)$$

Uvjete nećemo prekršiti, ako u ocjenjivano polje upišemo broj 1, ako u polju (2,2) odbijemo 1, ako u polju (2,1) pribrojimo 1 i ako u polju (1,1) odbijemo 1. Pri takvoj promjeni strukture prijevoza ukupni se prijevozni troškovi povećaju za:

$$40 - 15 + 9 - 15 = 19$$

novčanih jedinica. Praznom polju (1,2) damo ocjenu 19, koju zapišemo u njegovom donjem lijevom uglu. Ova ocjena znači da se ukupni prijevozni troškovi povećaju za 19 novčanih jedinica ako putem (1,2) od prvoga proizvodnog do drugoga potrošnog mjesta usmjerimo 1 jedinicu robe.

Slično ocijenimo i sva ostala prazna polja.

Prazno polje (1,3) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(1,3) \to (2,3) \to (2,1) \to (1,1) \to (1,3)$$

Uvjete nećemo prekršiti ako u polje (1,3) upišemo 1, u polju (2,3) smanjimo broj za 1, broj u polju (2,1) povećamo za 1, a broj u polju (1,1) smanjimo za 1. Pri takvoj promjeni strukture prijevoza ukupni se prijevozni troškovi povećaju za:

$$40 - 15 + 9 - 15 = 19$$

novčanih jedinica; ovim brojem ocijenimo prazno polje (1,3).

Prazno polje (1,4) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(1,4) \to (3,4) \to (3,3) \to (2,3) \to (2,1) \to (1,1) \to (1,4)$$

i dobivamo ocjenu:

$$0 - 0 + 42 - 15 + 9 - 15 = 21$$

Prazno polje (2,4) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(2,4) \to (3,4) \to (3,3) \to (2,3) \to (2,4)$$

i dobivamo ocjenu:

$$0 - 0 + 42 - 15 = 27$$

Prazno polje (3,1) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(3,1) \to (2,1) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,1)$$

i dobivamo ocjenu:

$$23 - 9 + 15 - 42 = -13$$

Činjenica da je ocjena ovog polja negativna, znači da se ukupni troškovi transporta smanjuju ako putem (3,1) od trećega proizvodnog do prvoga potrošnog mjesta usmjerimo nešto robe.

Prazno polje (3,2) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(3,2) \to (2,2) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,2)$$

i dobivamo ocjenu:

$$42 - 15 + 15 - 42 = 0$$

Činjenica da je ova ocjena jednaka 0, znači da se ukupni troškovi transporta ne mijenjaju ako po putu (3,2) od trećega proizvodnog do drugoga potrošnog mjesta usmjerimo nešto robe.

Tako smo završili s ocjenjivanjem praznih polja; ocjene su u tabeli 1. upisane u odgovarajućim praznim poljima u lijevom donjem uglu.

Prazno polje može imati pozitivnu ili negativnu ocjenu, a može imati i ocjenu 0. Kad je ocjena pozitivna, onda se ukupni troškovi transporta povećaju ako putem koji odgovara polju usmjerimo nešto robe. Ako je ocjena negativna, onda se ukupni troškovi transporta smanjuju ako putem koji odgovara polju usmjerimo nešto robe. Kad je ocjena jednaka 0, ukupni se troškovi ne mijenjaju ako putem koji odgovara usmjerimo nešto robe. Najveće smanjenje ukupnih troškova transporta postižemo ako što veću količinu robe usmjerimo na put koji odgovara polju što po apsolutnoj vrijednosti ima najveću negativnu ocjenu.

Iz tabele 1. vidimo da negativnu ocjenu ima samo polje (3,1) s ocjenom -13. To znači da se ukupni troškovi transporta mogu smanjiti i da prema tome poznato prvo moguće rješenje još nije optimalno. Da bismo stoga pri ovom mogućem rješenju ukupne troškove transporta što više smanjili, usmjerimo na put koji odgovara negativno ocijenjenom polju (3,1) najveću moguću količinu robe, a odredimo je ovako:

Prazno polje (3,1) smo ocjenjivali po zatvorenom putu:

$$(3,1) \to (2,1) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,1)$$

Na ovom zatvorenom putu nađemo polje s najmanjom količinom robe; to je polje (2,1) s brojem 30. Stoga u polje (3,1) možemo prenijeti najviše 30 jedinica robe. No da ne bismo prekršili uvjete, moramo odgovarajuće promijeniti brojeve u svim poljima na ovom putu. Strukturu prijevoza promijenimo ovako: u prazno polje (3,1) stavimo 30; u polju (2,1) oduzmemo 30, tako da ostane prazno; u polju (2,3) dodamo 30, tako da u njemu dobijemo 150; u polju (3,3) oduzmemo 30, tako da u njemu ostane 50. Takvom promjenom strukture transporta ukupni se troškovi transporta smanjuju za

$$-30.23 + 30.9 - 30.15 + 30.42 = 390$$

novčanih jedinica. Nakon takve promjene strukture transporta dobivamo drugo moguće rješenje, koje daje tabela 2. Za ovo moguće rješenje ukupni su troškovi transporta jednaki:

$$160.15 + 100.15 + 150.15 + 30.23 + 50.42 + 10.0 = 8940$$

novčanih jedinica.

Pogledajmo da li se drugo moguće rješenje može poboljšati; u tu svrhu ocijenimo po metodi skakanja s kamena na kamen sva prazna polja u tabeli 2.

Prazno polje (1,2) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(1,2) \to (2,2) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,1) \to (1,1) \to (1,2)$$

i dobivamo ocjenu:

$$40 - 15 + 15 - 42 + 23 - 15 = 6$$

Prazno polje (1,3) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(1,3) \to (3,3) \to (3,1) \to (1,1) \to (1,3)$$

i dobivamo ocjenu:

$$40 - 42 + 23 - 15 = 6$$

TABELA 2. DRUGO I OPTIMALNO MOGUĆE RJEŠENJE

		Mjesta potrošnje				Kapaciteti ishodišta
		P_1	P_2	P_3	P_4	
Mjesta proizvodnje	I_1	15 **160**	40 *6*	40 *6*	0 *8*	160
	I_2	9 *13*	15 **100**	15 **150**	0 *27*	250
	I_3	23 **30**	42 *0*	42 **50**	0 **10**	90
Potrebe odredišta		190	100	200	10	500

Prazno polje (1,4) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(1,4) \to (3,4) \to (3,1) \to (1,1) \to (1,4)$$

i dobivamo ocjenu:

$$0 - 0 + 23 - 15 = 8$$

Prazno polje (2,1) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(2,1) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,1) \to (2,1)$$

i dobivamo ocjenu:

$$9 - 15 + 42 - 23 = 13$$

Prazno polje (2,4) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(2,4) \to (3,4) \to (3,3) \to (2,3) \to (2,4)$$

i dobivamo ocjenu:

$$0 - 0 + 42 - 15 = 27$$

Prazno polje (3,2) ocijenimo po zatvorenom putu:

$$(3,2) \to (2,2) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,2)$$

i dobivamo ocjenu:

$$42 - 15 + 15 - 42 = 0$$

Tako smo završili ocjenjivanje praznih polja; izračunate su ocjene u tabeli 2. upisane u odgovarajućim praznim poljima u lijevom donjem uglu. Kako nijedno polje nema negativnu ocjenu, to ukupne troškove transporta ne možemo više smanjiti, pa je stoga dobiveno drugo moguće rješenje optimalno.

Skup optimalnih mogućih rješenja. U skladu s tabelom 2. možemo izračunano optimalno moguće rješenje napisati u matričnom obliku ovako:

$$\mathbf{X}^1 = \begin{Vmatrix} 160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 150 & 0 \\ 30 & 0 & 50 & 10 \end{Vmatrix}$$

Ovo je rješenje bazično i nedegenerirano jer ima egzaktno 6 pozitivnih komponenata; za ovo su rješenje ukupni troškovi transporta najmanji i jednaki 8 940 novčanih jedinica.

Pogledajmo ocjene praznih polja u tabeli 2. Kad bi sve ocjene bile pozitivne, onda bi izračunano optimalno moguće rješenje bilo jedino; kako je međutim polje (3,2) ocijenjeno sa 0, to postoje još druga optimalna moguća rješenja. Budući da polje (3,2) ima ocjenu 0, to možemo putem koji odgovara ovom polju usmjeriti nešto robe, a da se pri tom ukupni troškovi transporta ne mijenjaju. Novo bazično optimalno moguće rješenje dobivamo ako na put koji odgovara ovom polju usmjerimo najveću moguću količinu robe. Ovu količinu odredimo ovako:

Prazno polje (3,2) ocijenili smo po zatvorenom putu:

$$(3,2) \to (2,2) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,2)$$

Na ovom putu nalazimo najmanji broj 50; stoga u polje (3,2) možemo prenijeti najviše 50. Da ne bismo prekršili uvjete, moramo stoga odgovarajuće promijeniti brojeve u poljima na tom putu. Strukturu transporta promijenimo ovako: u prazno polje (3,2) postavimo 50; iz polja (2,2) uzmemo 50, tako da u njemu ostaje još 50; u polje (2,3) dodamo 50, tako da u njemu dobivamo 200; iz polja (3,3) oduzmemo 50, tako da ostaje prazno. Nakon takve promjene strukture transporta dobivamo novo optimalno moguće rješenje koje je određeno matricom:

$$\mathbf{X}^2 = \begin{Vmatrix} 160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 200 & 0 \\ 30 & 50 & 0 & 10 \end{Vmatrix}$$

Ovo je rješenje bazično i nedegenerirano jer ima točno 6 pozitivnih komponenata; za ovo su rješenje ukupni troškovi transporta najmanji i jednaki 8 940 novčanih jedinica.

Razmatrani problem transporta ima dva optimalna bazična i nedegenerirana moguća rješenja koja su određena matricama $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$. Svaki konveksni linearni sastav:

$$\mathbf{X} = p\,\mathbf{X}^1 + (1 - p)\,\mathbf{X}^2 \qquad (0 \leqq p \leqq 1)$$

ovih dvaju rješenja jest i optimalno moguće rješenje. Stoga matrica:

$$\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} 160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 + 50p & 200 - 50p & 0 \\ 30 & 50 - 50p & 50p & 10 \end{Vmatrix}$$

određuje za sve moguće vrijednosti koeficijenta p skup svih optimalnih mogućih rješenja problema transporta. Za $p = 0$ dobivamo bazično i nedegenerirano optimalno moguće rješenje $\mathbf{X}^2$; za $p = 1$ dobivamo bazično i nedegenerirano optimalno moguće rješenje $\mathbf{X}^1$; za sve vrijednosti koeficijenta p koje zadovoljavaju nejednadžbe $0 < p < 1$ dobivamo međutim nebazična optimalna moguća rješenja jer u ovim primjerima svako moguće rješenje ima više od 6 pozitivnih komponenata.

Vježbe

1. Riješi metodom skakanja s kamena na kamen:

a) problem transporta s dva ishodišta i dva odredišta koji smo razmatrali u 1. točki II. poglavlja;

b) 4. vježbu u 1. točki II. poglavlja;

c) problem transporta s dva ishodišta i dva odredišta koji smo razmatrali u trećoj točki II. poglavlja;

d) 3. vježbu u 3. točki II. poglavlja;

e) problem transporta s viškom ponude koji smo razmatrali u 4. točki II. poglavlja;

f) 2. vježbu u 4. točki II. poglavlja.

2. Iz tri nalazišta, u kojima ima uzastopce 6, 10 i 9 jedinica robe, razvozimo robu u 4 mjesta, koja uzastopce troše 4, 6, 7 i 8 jedinica robe. Transportne su tarife za jedinicu robe: od prvog nalazišta 20, 26, 46 i 36, od drugog nalazišta 22, 48, 32 i 38, od trećeg nalazišta 50, 28, 30 i 40 novčanih jedinica. Kako da usmjerimo transport robe a da bi ukupni troškovi transporta bili najmanji?

((3,3,0,0; 0,3,7,0; 1,0,0,8; 758) i (0,3,0,3; 0,3,7,0; 4,0,0,5; 758))

3. Iz tri ishodišta s ponudama 20, 12 i 50 vozimo robu u tri odredišta s potražnjom od 23, 19 i 40. Transportne su tarife za jedinicu robe: Od prvog ishodišta 54, 60 i 61, od drugog ishodišta 56, 62 i 63 i od trećeg ishodišta 60, 66 i 69 novčanih jedinica. Kako da organiziramo prijevoz a da bi ukupni troškovi transporta bili najmanji?

(0,0,20; 0,0,12; 23,19,8; 5 162)

3. Metoda MODI

Metodom skakanja s kamena na kamen, ocjenjivanje praznih polja može iziskivati dosta vremena i postati nepregledno osobito ako problem transporta ima veći broj ishodišta i odredišta. U tom je slučaju teško naći poligonalni put kroz zauzeta polja po kojem ocjenjujemo prazno polje. Ocjenjivanje olakšavamo do izvjesne mjere sistematiziranom i modificiranom metodom koja se naziva metoda MODI. Ovu ćemo metodu razmatrati na primjeru problema transporta s pet mjesta proizvodnje i 4 mjesta potrošnje. Podatke za ovaj problem transporta, i to kapacitete mjesta proizvodnje, potrebe mjesta potrošnje i transportne tarife daje u odgovarajućim jedinicama tabela 1. Na temelju tih podataka želimo riješiti problem kako da prevezemo robu od proizvodnih mjesta do mjesta potrošnje da bi ukupni troškovi transporta bili najmanji.

Kod matematičkog zapisa ovog problema transporta dobivamo 5 jednadžbi za mjesta proizvodnje i 4 jednadžbe za mjesta potrošnje; kako je ukupni kapacitet svih mjesta proizvodnje jednak ukupnim potrebama svih mjesta potrošnje, to jedna

TABELA 1. PODACI ZA PROBLEM TRANSPORTA

		Mjesta potrošnje				Kapaciteti mjesta proizvodnje
		P_1	P_2	P_3	P_4	
Mjesta proizvodnje	I_1	62	51	86	84	524
	I_2	23	32	41	54	293
	I_3	31	73	44	72	775
	I_4	64	22	52	34	322
	I_5	85	63	53	61	306
Potrebe mjesta potrošnje		446	503	737	534	2 220

jednadžba otpada i dobivamo problem sa $5 + 4 - 1 = 8$ nezavisnih linearnih jednadžbi. Stoga svako nedegenerirano bazično moguće rješenje problema ima po 8 pozitivnih komponenata.

Kao po metodi skakanja s kamena na kamen tako i po metodi MODI problem počinjemo rješavati tako da u skladu s uvjetima odredimo prvo moguće rješenje; to rješenje dobivamo po pravilu sjeverozapadnog kornera, kao što vidimo na tabeli 2. Po tom pravilu u lijeva gornja polja upisujemo što veće brojeve, koji izražavaju količine na odgovarajućim putovima prevezene robe.

U polje (1,1) zapišemo najveći mogući broj 446; kako smo time zadovoljili potrebe prvoga mjesta potrošnje, to polja (2,1), (3,1), (4,1) i (5,1) ostaju prazna. Potom u polje (1,2) zapišemo najveći mogući broj 78; kako smo time iscrpli kapacitete prvoga mjesta proizvodnje, to polja (1,3) i (1,4) ostaju prazna. Nakon toga u polje (2,2) zapišemo najveći mogući broj 293; kako smo time iscrpli kapacitete drugoga mjesta proizvodnje, to polja (2,3) i (2,4) ostaju prazna. Zatim u polje (3,2) zapišemo najveći mogući broj 132; kako smo time zadovoljili potrebe drugoga mjesta potrošnje, to polja (4,2) i (5,2) ostaju prazna. Tada u polje (3,3) zapišemo najveći mogući broj 643; kako smo time iscrpli kapacitete trećega mjesta proizvodnje, to polje (3,4) ostaje prazno. Potom u polje (4,3) zapišemo najveći mogući broj 94; kako smo time zadovoljili potrebe trećega mjesta potrošnje, to polje (5,3) ostaje prazno. Zatim u polje (4,4) zapišemo najveći mogući broj 228 i njime iscrpemo kapacitete četvrtoga mjesta proizvodnje. Napokon u polje (5,4) zapišemo najveći mogući broj 306 i njime iscrpemo kapacitete petoga mjesta proizvodnje i zadovoljimo potrebe četvrtoga mjesta potrošnje.

Na taj smo način dobili prvo moguće rješenje; to je rješenje bazično i nedegenerirano jer ima točno 8 pozitivnih komponenata. Pri tom rješenju ukupni su troškovi transporta jednaki:

$$S_1 = 446.62 + 78.51 + 293.32 + 132.73 + 643.44 + 94.52 +$$
$$+ 228.34 + 306.61 = 110\,240$$

novčanih jedinica.

Da bismo ustanovili da li se dobiveno moguće rješenje može poboljšati, ocijenimo sva prazna polja. Umjesto da prazna polja ocjenjujemo po već poznatoj metodi skakanja s kamena na kamen, ocijenit ćemo ih metodom MODI.

TABELA 2. PRVO MOGUĆE RJEŠENJE

$S_1 = 110\,240$		Kapaciteti mjesta proizvodnje				Mjesta potrošnje	v_i
		P_1	P_2	P_3	P_4		
Mjesta proizvodnje	I_1	62 **446**	51 **78**	86 *64*	84 *80*	524	*0*
	I_2	23 *−20*	32 **293**	41 *38*	54 *69*	293	*−19*
	I_3	31 *−53*	73 **132**	44 **643**	72 *46*	775	*22*
	I_4	64 *−28*	22 *−59*	52 **94**	34 **228**	322	*30*
	I_5	85 *−34*	63 *−45*	53 *−26*	61 **306**	306	*57*
Potrebe mjesta potrošnje		446	503	737	534	2 220	
s_j		*62*	*51*	*22*	*4*		

Prema toj metodi, u tabeli 2. svakom retku i svakom stupcu damo neku ocjenu. Označimo v_i ocjenu i-tog retka i s_j ocjenu j-tog stupca. Polju (i,j) odgovara transportna tarifa c_{ij}. Retke i stupce ocijenimo po slijedećoj uputi:

Zauzetom polju (i, j) odgovarajuća transportna tarifa c_{ij} neka bude jednaka sumi ocjene i-tog retka v_i i ocjene j-tog stupca s_j:

$$c_{ij} = v_i + s_j$$

Po toj uputi odredimo ocjene svih redaka i stupaca po tabeli 2. ovako:

Zauzetom polju (1,1) odgovara transportna tarifa $c_{11} = 62$; kod prvog retka propišemo svojevoljno ocjenu $v_1 = 0$, stoga prvi stupac moramo ocijeniti ocjenom $s_1 = 62$. Zauzetom polju (1,2) odgovara transportna tarifa $c_{12} = 51$; kako već prvi redak ima ocjenu $v_1 = 0$, to drugi stupac dobiva ocjenu $s_2 = 51$. Zauzetom polju (2,2) odgovara transportna tarifa $c_{22} = 32$; kako drugi stupac već ima ocjenu $s_2 = 51$, to drugi redak dobiva ocjenu $v_2 = -19$. Zauzetom polju (3,2) odgovara transportna tarifa $c_{32} = 73$; kako drugi stupac već ima ocjenu $s_2 = 51$, to treći redak dobiva ocjenu $v_3 = 22$. Zauzetom polju (3,3) odgovara transportna tarifa $c_{33} = 44$; kako treći redak ima ocjenu $v_3 = 22$, to treći stupac dobiva ocjenu $s_3 = 22$. Zauzetom polju (4,3) odgovara transportna tarifa $c_{43} = 52$; kako treći stupac već ima ocjenu $s_3 = 22$, to četvrti redak dobiva ocjenu $v_4 = 30$. Zauzetom polju (4,4) odgovara transportna tarifa $c_{44} = 34$; kako četvrti redak već ima ocjenu

$v_4 = 30$, to četvrti stupac dobiva ocjenu $s_4 = 4$. Zauzetom polju (5,4) odgovara transportna tarifa $c_{54} = 61$; kako četvrti stupac već ima ocjenu $s_4 = 4$, to peti redak dobiva ocjenu $v_5 = 57$. Tako smo odredili ocjene svih redaka i stupaca. U tabeli su ocjene redaka zapisane na desnom rubu, a ocjene stupaca na donjem rubu.

Sada kad su nam poznate ocjene svih redaka i stupaca, možemo ocijeniti sva prazna polja po slijedećoj uputi:

Ocjenu svakoga praznog polja (i, j) dobivamo tako da od njemu odgovarajuće transportne tarife c_{ij} odbijemo ocjenu i-tog retka i ocjenu j-tog stupca; stoga je ocjena praznog polja (i, j) jednaka:

$$c_{ij} - v_i - s_j.$$

Izračunajmo po toj uputi ocjene svih praznih polja:

polje (1,3) ima ocjenu $86 - 0 - 22 = 64$;
polje (1,4) ima ocjenu $84 - 0 - 4 = 80$;
polje (2,1) ima ocjenu $23 + 19 - 62 = -20$;
polje (2,3) ima ocjenu $41 + 19 - 22 = 38$;
polje (2,4) ima ocjenu $54 + 19 - 4 = 69$;
polje (3,1) ima ocjenu $31 - 22 - 62 = -53$;
polje (3,4) ima ocjenu $72 - 22 - 4 = 46$;
polje (4,1) ima ocjenu $64 - 30 - 62 = -28$;
polje (4,2) ima ocjenu $22 - 30 - 51 = -59$;
polje (5,1) ima ocjenu $85 - 57 - 62 = -34$;
polje (5,2) ima ocjenu $63 - 57 - 51 = -45$;
polje (5,3) ima ocjenu $53 - 57 - 22 = -26$.

Izračunane ocjene upisane su u tabeli 2. po praznim poljima u lijevom donjem uglu.

Metodom MODI za prazna polja dobivamo iste ocjene kao metodom skakanja s kamena na kamen jer se u objema metodama radi samo o dva različita načina računanja, koji međutim vode do istih rezultata. Uspoređujmo na primjer oba načina računanja ocjena za prazno polje (2,4). Po metodi MODI dobivamo ocjenu:

$$c_{24} - v_2 - s_4$$

Po metodi skakanja s kamena na kamen ocjenjujemo prazno polje (2,4) po zatvorenom poligonalnom putu:

$$(2,4) \to (4,4) \to (4,3) \to (3,3) \to (3,2) \to (2,2) \to (2,4)$$

i dobivamo ocjenu:

$$c_{24} - c_{44} + c_{43} - c_{33} + c_{32} - c_{22}$$

Kako je transportna tarifa koja odgovara svakom zauzetom polju jednaka sumi ocjene odgovarajućeg retka i ocjene odgovarajućeg stupca, to gornja ocjena dobiva oblik:

$$c_{24} - (v_4 + s_4) + v_4 + s_3) - (v_3 + s_3) + (v_3 + s_2) - (v_2 + s_2)$$

Iz toga nakon uništenja članova dobivamo ocjenu:

$$c_{24} - v_2 - s_4,$$

kakvu smo dobili i metodom MODI.

TABELA 3. DRUGO MOGUĆE RJEŠENJE

$S_2 = 104\,694$		Mjesta potrošnje				Kapaciteti mjesta proiz-vodnje	v_i
		P_1	P_2	P_3	P_4		
Mjesta proiz-vodnje	I_1	62 **446**	51 **78**	86 *64*	84 *21*	524	*0*
	I_2	23 *−20*	32 **293**	41 *38*	54 *10*	293	*−19*
	I_3	31 *−53*	73 **38**	44 **737**	72 *−13*	775	*22*
	I_4	64 *31*	22 **94**	52 *59*	34 **228**	322	*−29*
	I_5	85 *25*	63 *14*	53 *38*	61 **306**	306	*−2*
Potrebe mjesta potrošnje		446	503	737	534	2 220	
s_j		*62*	*51*	*22*	*63*		

Nakon izračunavanja ocjena praznih polja vidimo da prvo moguće rješenje u tabeli 2. možemo poboljšati jer su neke od tih ocjena negativne. Budući da moguće rješenje želimo što više poboljšati, to među praznim poljima potražimo ono koje je ocijenjeno po apsolutnoj vrijednosti najvećim negativnim brojem. Takvo je polje (4,2), koje ima ocjenu — 59. Na put koji odgovara ovom polju usmjerimo što veću količinu robe. Ovu količinu odredimo na slijedeći način: najprije potražimo zatvoreni poligonalni put po kojem ocijenimo prazno polje (4,2) metodom skakanja s kamena na kamen; ocijenimo ga po putu:

$$(4,2) \to (3,2) \to (3,3) \to (4,3) \to (4,2)$$

Zatim na ovom putu potražimo polje koje je zauzeto najmanjim brojem; takvo je polje (4,3) s brojem 94. Ovaj broj određuje količinu robe koju usmjerimo putem koji odgovara praznom polju (4,2)[1].

[1] Pri takvom određivanju polja možemo se ograničiti da uzimamo u obzir samo ona polja od kojih oduzimamo robu.

U prazno polje (4,2) postavimo broj 94 i u skladu s uvjetima odgovarajuće promijenimo brojeve u poljima gornjeg poligonalnog puta; broj 132 u polju (3,2) smanjimo za 94 na 38, broj 643 u polju (3,3) povećamo za 94 na 737 i broj 94 u polju (4,3) smanjimo za 94, tako da to polje ostane prazno.

Nakon takve promjene strukture transporta dobivamo drugo moguće rješenje, koje je dano u tabeli 3. Ovo moguće rješenje je bazično i nedegenerirano jer ima točno 8 pozitivnih komponenata. Po ovom mogućem rješenju ukupni troškovi transporta jednaki su:

$$S_2 = 446.62 + 78.51 + 293.32 + 38.73 +$$
$$+ 737.44 + 94.22 + 228.34 + 306.61 = 104\,694$$

novčanih jedinica.

Da bismo ustanovili da li drugo moguće rješenje možemo još poboljšati, ocijenimo sva prazna polja u tabeli 3. metodom MODI. U tu svrhu odredimo najprije ocjene redaka i stupaca. Počinjemo kod zauzetog polja (1,1), kojemu odgovara transportna tarifa $c_{11} = 62$; prvom retku propišemo svojevoljno ocjenu $v_1 = 0$. Zbog toga prvi stupac dobiva ocjenu $s_1 = 62$. Na taj način nastavljamo ocjenjivanje redaka i stupaca po već opisanom postupku. Izračunane ocjene upisane su u tabeli 3. na njezinom desnom i donjem rubu.

Sada kad su nam poznate ocjene redaka i stupaca, ocijenimo svako prazno polje tako da od njemu odgovarajuće transportne tarife odbijemo ocjenu odgovarajućeg retka i ocjenu odgovarajućeg stupca. Započinjemo s praznim poljem (1,3), koje dobiva ocjenu $86 - 0 - 22 = 64$. Na taj način nastavljamo ocjenjivanje praznih polja po već poznatoj uputi. Izračunane ocjene upisane su u tabeli 3. u praznim poljima u lijevom donjem uglu.

Nakon izračunavanja ocjena praznih polja vidimo da drugo moguće rješenje možemo poboljšati jer su neke od tih ocjena negativne. Kako želimo moguće rješenje što više poboljšati, to među poljima potražimo ono koje ima po apsolutnoj vrijednosti najveću negativnu ocjenu. Takvo je polje (3,1), koje ima ocjenu -53. Za ovo prazno polje potražimo zatvoreni poligonalni put po kojem ga ocijenimo metodom skakanja s kamena na kamen; ocijenimo ga po putu:

$$(3,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,2) \rightarrow (3,2) \rightarrow (3,1)$$

Na tom putu potražimo polje zauzeto najmanjim brojem. Takvo je polje (3,2) s brojem 38. U prazno polje (3,1) postavimo broj 38 i u skladu s uvjetima promijenimo brojeve u poljima na gornjem poligonalnom putu. Broj 446 u polju (1,1) smanjimo za 38 na 408, broj 78 u polju (1,2) povećamo za 38 na 116 i broj 38 u polju (3,2) smanjimo za 38, tako da polje ostaje prazno.

Nakon ovih promjena strukture prijevoza dobivamo treće moguće rješenje, koje daje tabela 4. Ovo moguće rješenje je bazično i nedegenerirano jer ima točno 8 pozitivnih komponenata. Prema ovom mogućem rješenju ukupni troškovi transporta jednaki su:

$$S_3 = 408.62 + 116.51 + 293.32 + 38.31 +$$
$$+ 737.44 + 94.22 + 228.34 + 306.61 = 102\,680$$

novčanih jedinica.

TABELA 4. TREĆE MOGUĆE RJEŠENJE

$S_3 = 102\,680$		Mjesta potrošnje P_1	P_2	P_3	P_4	Kapaciteti mjesta proiz- vodnje	v_i
Mjesta proiz- vodnje	I_1	62 **408**	51 **116**	86 *11*	84 *21*	524	*0*
	I_2	23 *−20*	32 **293**	41 *−15*	54 *10*	293	*−19*
	I_3	31 **38**	73 *53*	44 **737**	72 *40*	775	*−31*
	I_4	64 *31*	22 **94**	52 *6*	34 **228**	322	*−29*
	I_5	85 *25*	63 *14*	53 *−20*	61 **306**	306	*− 2*
Potrebe mjesta potrošnje		446	503	737	534	2 220	
s_j		*62*	*51*	*75*	*63*		

Da bismo ustanovili da li treće moguće rješenje možemo poboljšati, ocijenimo sva prazna polja u tabeli 4. metodom MODI. U tu svrhu odredimo najprije ocjene redaka i stupaca. Započinjemo pri zauzetom polju (1,1), kojemu odgovara transportna tarifa $c_{11} = 62$; prvom retku propišemo svojevoljno ocjenu $v_1 = 0$, stoga prvi stupac dobiva ocjenu $s_1 = 62$. Na taj način nastavljamo ocjenjivanje redaka i stupaca po već poznatom postupku. Izračunane ocjene upisane su u tabeli 4. na njezinom desnom i donjem rubu.

Sada kad su nam poznate ocjene redaka i stupaca, ocijenimo svako prazno polje tako da od njemu odgovarajuće transportne tarife odbijemo ocjenu odgovarajućeg retka i ocjenu odgovarajućeg stupca. Započinjemo s praznim poljem (1,3), koje dobiva ocjenu $86 - 0 - 75 = 11$. Na taj način nastavljamo ocjenjivanje praznih polja po već poznatoj uputi. Izračunane ocjene upisane su u tabeli 4. u praznim poljima u lijevom donjem uglu.

Treće moguće rješenje u tabeli 4. možemo još poboljšati jer neka prazna polja imaju negativne ocjene. Da bismo ovo rješenje što više poboljšali, tražimo najprije polje koje po apsolutnoj vrijednosti ima najveću negativnu ocjenu; takva su polja (2,1) i (5,3), koja imaju ocjenu -20. U daljnjem postupku svojevoljno se odlučujemo za polje (2,1). Potom odredimo zatvoreni poligonalni put po kojem ovo polje ocijenimo metodom skakanja s kamena na kamen; ocijenimo ga po putu:

$$(2,1) \to (1,1) \to (1,2) \to (2,2) \to (2,1)$$

TABELA 5. ČETVRTO MOGUĆE RJEŠENJE

$S_4 = 96\,820$		Mjesta potrošnje				Kapaciteti mjesta proiz-vodnje	v_i
		P_1	P_2	P_3	P_4		
Mjesta proiz-vodnje	I_1	62 **115**	51 **409**	86 *11*	84 *21*	524	*0*
	I_2	23 **293**	32 *20*	41 *5*	54 *30*	293	*−39*
	I_3	31 **38**	73 *53*	44 **737**	72 *40*	775	*−31*
	I_4	64 *31*	22 **94**	52 *6*	34 **228**	322	*−29*
	I_5	85 *25*	63 *14*	53 *−20*	61 **306**	306	*−2*
Potrebe mjesta potrošnje		446	503	737	534	2 220	
s_j		*62*	*51*	*75*	*63*		

Među zauzetim poljima na ovom putu najmanji broj 116 ima polje (1,2). Kako međutim najveće sniženje ukupnih troškova transporta postižemo ako broj 293 iz polja (2,2) prenesemo u polje (2,1), to se radi skraćenja računanja odlučimo za taj prijenos. Pri tom u skladu s uvjetima promijenimo brojeve u poljima na gornjem zatvorenom putu. Broj 408 u polju (1,1) smanjimo za 293 na 115, broj 116 u polju (1,2) povećamo za 293 na 409 i broj 293 u polju (2,2) smanjimo za 293, tako da ovo polje ostane prazno.

Nakon takve promjene strukture transporta dobivamo četvrto moguće rješenje, koje daje tabela 5. Ovo moguće rješenje je bazično i nedegenerirano jer ima točno 8 pozitivnih komponenata. Prema ovom mogućem rješenju ukupni troškovi transporta jednaki su:

$$S_4 = 115.62 + 409.51 + 293.23 + 38.51 +$$
$$+ 737.44 + 94.22 + 228.34 + 306.61 = 96\,820$$

novčanih jedinica.

Da bismo ustanovili da li četvrto moguće rješenje možemo poboljšati, ocijenimo sva prazna polja u tabeli 5. metodom MODI. U tu svrhu najprije odredimo ocjene redaka i stupaca. Počinjemo pri zauzetom polju (1,1), kojemu odgovara transportna tarifa $c_{11} = 62$; u prvom retku propišemo svojevoljno ocjenu $v_1 = 0$, stoga prvi stupac dobiva ocjenu $s_1 = 62$. Na taj način nastavljamo ocjenjivanje redaka i stupaca po već poznatoj uputi. Izračunane ocjene upisane su u tabeli 5. uz njezin desni i donji rub.

Sada kad su nam poznate ocjene redaka i stupaca, ocijenimo svako prazno polje tako da od njemu odgovarajuće transportne tarife odbijemo ocjenu odgovarajućeg retka i ocjenu odgovarajućeg stupca. Počinjemo s praznim poljem (1,3), koje dobiva ocjenu $86 - 0 - 75 = 11$. Na taj način nastavljamo ocjenjivanje praznih polja po već poznatoj uputi. Izračunane ocjene upisane su u tabeli 5. u praznim poljima u lijevom donjem uglu.

Četvrto moguće rješenje možemo poboljšati jer u njemu još jedno polje ima negativnu ocjenu, i to polje (5,3) s ocjenom -20. Za to polje odredimo zatvoreni poligonalni put po kojem ga ocijenimo metodom skakanja s kamena na kamen; ocijenimo ga po putu:

$$(5,3) \to (5,4) \to (4,4) \to (4,2) \to (1,2) \to (1,1) \to (3,1) \to (3,3) \to (5,3)$$

Među zauzetim poljima na ovom putu najmanji broj 38 ima polje (3,1). Kako međutim postižemo veće sniženje ukupnih troškova transporta ako broj 94 iz polja (4,2) prenesemo u prazno polje (5,3), odlučimo se za taj prijenos. Pri tom u skladu s uvjetima promijenimo brojeve u poljima na gornjem zatvorenom putu. U prazno polje (5,3) upišemo 94, broj 306 u polju (5,4) smanjimo za 94 na 212, broj 228 u polju (4,4) povećamo za 94 na 322, broj 94 u polju (4,2) smanjimo za 94 i polje ostaje prazno, broj 409 u polju (1,2) povećamo za 94 na 503, broj 115 u polju (1,1) smanjimo za 94 na 21, broj 38 u polju (3,1) povećamo za 94 na 132 i konačno broj 737 u polju (3,3) smanjimo za 94 na 643.

Nakon takve promjene strukture transporta dobivamo peto moguće rješenje, koje je dano u tabeli 6. Ovo moguće rješenje je bazično i nedegenerirano jer ima točno 8 pozitivnih komponenata. Pri tom mogućem rješenju ukupni troškovi transporta jednaki su:

$$S_5 = 21.62 + 503.51 + 293.23 + 132.31 +$$
$$+ 643.44 + 322.34 + 94.53 + 212.61 = 94\,940$$

novčanih jedinica.

Da bismo ustanovili da li peto moguće rješenje možemo poboljšati, ocijenimo sva prazna polja u tabeli 6. metodom MODI. Najprije odredimo ocjene redaka i stupaca. Počinjemo pri zauzetom polju (1,1), kojemu odgovara transportna tarifa $c_{11} = 62$; prvom retku propišemo svojevoljno ocjenu $v_1 = 0$, stoga prvi stupac dobiva ocjenu $s_1 = 62$. Ocjenjivanje nastavljamo po već poznatoj uputi. Izračunane ocjene upisane su u tabeli 6. uz njezin desni i donji rub.

Sada kad smo izračunali ocjene redaka i stupaca, ocijenimo po već poznatoj uputi pojedina prazna polja. Počinjemo s poljem (1,3), koje dobiva ocjenu $86 - 0 - 75 = 11$. Računanje nastavljamo do posljednjeg praznog polja. Izračunane ocjene upisane su u tabeli 6. u praznim poljima u lijevom donjem uglu.

Kako nijedno prazno polje nema negativnu ocjenu, to peto moguće rješenje ne možemo više poboljšati. Stoga je peto moguće rješenje, koje je dano u tabeli 6, optimalno i s njim je rješavanje problema transporta završeno. Budući da nijedno polje nema ocjenu 0, to nema ni alternativnih optimalnih mogućih rješenja.

TABELA 6. PETO I OPTIMALNO MOGUĆE RJEŠENJE

$S_5 = 94\,940$		Mjesta potrošnje				Kapaciteti mjesta proiz-vodnje	v_i
		P_1	P_2	P_3	P_4		
Mjesta proiz-vodnje	I_1	62 **21**	51 **503**	86 *11*	84 *1*	524	*0*
	I_2	23 **293**	32 *20*	41 *5*	54 *10*	293	*−39*
	I_3	31 **132**	73 *53*	44 **643**	72 *20*	775	*−31*
	I_4	64 *51*	22 *20*	52 *26*	34 **322**	322	*−49*
	I_5	85 *45*	63 *34*	53 **94**	61 **212**	306	*−22*
Potrebe mjesta potrošnje		446	503	737	534	2 220	
s_j		*62*	*51*	*75*	*83*		

U skladu s upravo riješenim numeričkim primjerom navodimo za rješavanje transportnih problema linearnog programiranja s jednom vrstom robe slijedeći

raspored za računanje metodom MODI

1. Podatke problema transporta tabeliramo; u tabelu upišemo ponude ishodišta, potražnje odredišta i transportne tarife.

2. Izaberemo neko poznato nedegenerirano moguće rješenje. Obično ga sastavimo po pravilu sjeverozapadnog kornera. Po tom pravilu počinjemo tako da u krajnje lijevo gornje polje (1,1) upišemo najveći mogući broj. Za ovo moguće rješenje izračunamo ukupne troškove transporta.

3. Odredimo ocjene redaka v_i i ocjene stupaca s_j tako da za sva zauzeta polja važi jednadžba:

$$c_{ij} = v_i + s_j$$

Počinjemo u prvom retku pri prvom lijevom zauzetom polju (1,j), kojemu odgovara transportna tarifa c_{1j}; prvom retku propišemo svojevoljno ocjenu $v_1 = 0$, stoga j-ti stupac dobiva $s_j = c_{1j}$. Izračunane ocjene upišemo uz desni i donji rub tabele.

4. Odredimo ocjene svih praznih polja; prazno polje (i,j) dobiva ocjenu:

$$c_{ij} - v_i - s_j$$

Izračunate ocjene upišemo u tabelu u prazna polja u lijevi donji ugao.

5. a. Ako nijedno prazno polje nema negativnu ocjenu, to je poznato moguće rješenje optimalno i računanje je završeno.

5 b. Ako barem jedno prazno polje ima negativnu ocjenu, poznato moguće rješenje može se još poboljšati.

6. Potražimo prazno polje koje je ocijenjeno po apsolutnoj vrijednosti najvećom negativnom ocjenom.

7. Za ovo polje pronalazimo u tabeli zatvoreni poligonalni put koji ide samo po kamenima, tj. po zauzetim poljima i koji se na ovim kamenima lomi.

8. Na ovom putu potražimo polje zauzeto s najmanjim brojem.

9. Taj broj prenesemo u prazno polje i u skladu s uvjetima promijenimo sve brojeve u poljima na zatvorenom putu.

10. Tako dobivamo novo moguće rješenje i za njega sastavimo novu tabelu. Za ovo novo moguće rješenje izračunamo ukupne troškove transporta.

11. S novom tabelom vraćamo se k trećoj točki rasporeda.

Ove su upute upotrebljive samo u primjerima kad ni kod jedne iteracije ne dobivamo degenerirano moguće rješenje; čim naiđemo na neko degenerirano moguće rješenje, otakazuju i metoda skakanja s kamena na kamen i na njoj utemeljena metoda MODI. Ovu teškoću odstranit ćemo u slijedećoj točki.

Vježbe

1. Riješi metodom MODI transportni problem s tri ishodišta i tri odredišta koji smo razmatrali i riješili po metodi skakanja s kamena na kamen u drugoj točki ovog poglavlja.

2. Riješi metodom MODI transportni problem

a) druge vježbe prijašnje točke.

b) treće vježbe prijašnje točke.

3. Riješi metodom MODI transportni problem koji daje tabela:

		Odredišta				Kapaciteti ishodišta
		P_1	P_2	P_3	P_4	
Ishodišta	I_1	2	9	15	18	6
	I_2	3	8	14	17	15
	I_3	5	7	12	15	5
	I_4	16	11	17	7	19
Potrebe odredišta		15	10	7	13	45

(6,0,0,0; 9,6,0,0; 0,0,5,0; 0,4,2,13; 316
6,0,0,0; 9,4,2,0; 0,0,5,0; 0,6,0,13; 316)

4. Degeneracija u problemu transporta

Nastup degeneracije pri problemu transporta linearnog programiranja prouzrokuje raspad transportnog sistema na najmanje dva međusobno odvojena i nepovezana transportna sistema; u svakom od tih sistema jedno ili više ishodišta opskrbljuje robom jedno ili više odredišta. Stoga degeneracija može nastupiti samo u primjerima kad je neka parcijalna suma ponuda ishodišta jednaka nekoj parcijalnoj sumi potražnji odredišta. U primjeru koji smo razmatrali i riješili u 2. točki II. poglavlja ponuda prvog ishodišta jednaka je potražnji drugog odredišta i ponuda drugog ishodišta jednaka je potražnji prvog odredišta; stoga se može dogoditi da prvo ishodište samo i u cijelosti opskrbljuje drugo odredište i da drugo ishodište samo i u cijelosti opskrbljuje prvo odredište; uz prijevozne tarife tamo pretpostavljene to se u stvari i događa, pa se sistem transporta raspada u dva odvojena sistema.

U primjeru degeneracije, bazično moguće rješenje transportnog problema ima manje pozitivnih komponenata od broja nezavisnih uvjetnih jednadžbi. Zbog premalog broja pozitivnih komponenata mogućih rješenja ili zauzetih polja u tabeli odnosno kamena, otkazuju i metoda skakanja s kamena na kamen i metoda MODI. Po metodi skakanja s kamena na kamen ne možemo ocijeniti sva prazna polja jer za sva prazna polja ne možemo naći odgovarajuće zatvorene poligonalne putove po kojima bismo ta polja mogli ocijeniti. Po metodi MODI međutim ne možemo odrediti ocjene svih redaka i stupaca.

U primjeru degeneracije pri ocjenjivanju praznih polja metodom skakanja s kamena na kamen ili pri ocjenjivanju redaka i stupaca metodom MODI pomoći će nam promjena ε transportnog problema. Pri tom je ε proizvoljno malen pozitivan broj. Primjer degeneracije i promjene ε razmatrat ćemo na ovom problemu transporta:

Tri ishodišta I_1, I_2 i I_3 s ponudama 6, 9 i 10 jedinica opskrbljuju robom tri odredišta P_1, P_2 i P_3, koja imaju uzatopce potražnje 5, 9 i 11 jedinica. Transportne tarife od prvog su ishodišta uzastopce 7, 9 i 5, od drugog ishodišta 4, 2 i 6, a od trećeg ishodišta 3, 8 i 5 novčanih jedinica. Promet želimo usmjeriti od ishodišta do odredišta tako da ukupni troškovi transporta budu najmanji.

Kako u ovom problemu nastupaju 3 ishodišta i tri odredišta s izjednačenim ukupnim ponudama i potražnjama, to pri matematičkom zapisu problema dobivamo $3 + 3 - 1 = 5$ nezavisnih uvjetnih jednadžbi. Stoga svako nedegenerirano bazično moguće rješenje ima po pet pozitivnih komponenata; ako ih neko rješenje ima manje, onda je degenerirano. Pri rješavanju ovog transportnog problema metodom skakanja s kamena na kamen ili metodom MODI moramo ustanoviti da je već drugo moguće rješenje degenerirano. Degeneracija može nastupiti zato što drugo ishodište može samo i u cijelosti opskrbiti drugo odredište.

Da bismo već unaprijed izbjegli eventualnu degeneraciju za vrijeme računanja, prvobitni transportni problem postupkom ε promijenimo tako da nijedna parcijalna suma ponuda ishodišta ne može biti jednaka nekoj parcijalnoj sumi potražnji odredišta. To možemo postići na više načina. U nastavku to postižemo tako da ponudi svakog ishodišta pribrojimo ε jedinica robe, potražnji trećeg odredišta međutim pribrojimo $3\,\varepsilon$ jedinica robe. Podatke za tako promijenjen problem transporta daje tabela 1; u njoj je upisano i prvo moguće rješenje, koje dobivamo po metodi sjeverozapadnog kornera. Ovom mogućem rješenju odgovaraju ukupni troškovi transporta:

$$S_1 = 7.5 + 9(1+\varepsilon) + 2(8-\varepsilon) + 6(1+2\varepsilon) + 5(10+\varepsilon) = 116 + 24\varepsilon$$

novčanih jedinica.

TABELA 1. PRVO MOGUĆE RJEŠENJE

$S_1 = 116 + 24\varepsilon$		Odredišta P_1	P_2	P_3	Ponude ishodišta	v_i
Ishodišta	I_1	7 5	9 $1+\varepsilon$	5 -8	$6+\varepsilon$	7
	I_2	4 *4*	2 $8-\varepsilon$	6 $1+2\varepsilon$	$9+\varepsilon$	0
	I_3	3 *4*	8 7	5 $10+\varepsilon$	$10+\varepsilon$	-1
Potražnja odredišta		5	9	$11+3\varepsilon$	$25+3\varepsilon$	
s_j		0	2	6		

Transportni problem riješimo metodom MODI.

Najprije odredimo ocjene redaka i stupaca. Počinjemo sa zauzetim poljem (1,1), kojemu odgovara transportna tarifa $c_{11} = 7$; prvom retku dosudimo ocjenu $v_1 = 7$, stoga prvi stupac dobiva ocjenu $s_1 = 0$ itd. Potom odredimo ocjene praznih polja. Počinjemo s poljem (1,3), koje dobiva ocjenu $5 - 7 - 6 = -8$ itd. Kako jedno polje ima negativnu ocjenu, prvo moguće rješenje možemo poboljšati. U negativno ocijenjeno polje (1,3) prenesemo najveći mogući broj; u tu svrhu odredimo zatvoreni put po kojem ovo polje ocijenimo metodom skakanja s kamena na kamen:

$$(1,3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (2,2) \rightarrow (1,2) \rightarrow (1,3)$$

Na ovom putu najmanji je broj $1 + \varepsilon$, zato ga prenesemo u polje (1,3). U skladu s uvjetima smanjimo broj u polju (2,3) na ε, broj u polju (2,2) na 9, a polje (1,2) ostaje prazno.

Tako dobivamo drugo moguće rješenje, koje je bazično i nedegenerirano; daje ga tabela 2. Njoj odgovarajući ukupni troškovi transporta jednaki su:

$$S_2 = 7.5 + 5(1+\varepsilon) + 2.9 + 6\varepsilon + 5(10+\varepsilon) = 108 + 16\varepsilon$$

novčanih jedinica.

TABELA 2. DRUGO MOGUĆE RJEŠENJE

$S_2 = 108 + 16\varepsilon$		Odredišta			Ponude ishodišta	v_i
		P_1	P_2	P_3		
Ishodišta	I_1	7 5	9 8	5 $1+\varepsilon$	$6+\varepsilon$	7
	I_2	4 -4	2 9	6 ε	$9+\varepsilon$	8
	I_3	3 -4	8 7	5 $10+\varepsilon$	$10+\varepsilon$	7
Potražnja odredišta		5	9	$11+3\varepsilon$	$25+3\varepsilon$	
s_j		0	-6	-2		

Za drugo moguće rješenje najprije odredimo ocjene redaka i stupaca. Počinjemo sa zauzetim poljem (1,1), kojemu odgovara transportna tarifa $c_{11} = 7$; prvom retku damo ocjenu $v_1 = 7$, stoga prvi stupac dobiva ocjenu $s_1 = 0$ itd. Potom odredimo ocjene praznih polja. Počinjemo s poljem (1,2), koje dobiva ocjenu $9 - 7 - (-6) = 8$ itd. Kako su dva prazna polja ocijenjena negativno, drugo moguće rješenje može se još poboljšati. U polje (3,1), koje ima po apsolutnoj vrijednosti najveću negativnu ocjenu, prenesemo najveći mogući broj. Taj broj nađemo na zatvorenom putu:

$$(3,1) \to (1,1) \to (1,3) \to (3,3) \to (3,1)$$

U prazno polje (3,1) možemo prenijeti broj 5; stoga polje (1,1) ostaje prazno; u polju (1,3) dobivamo $6 + \varepsilon$, a u polju (3,3) dobivamo $5 + \varepsilon$. Tako dobivamo treće moguće rješenje, koje je bazično i nedegenerirano; daje ga tabela 3. Njemu odgovarajući ukupni troškovi transporta jednaki su:

$$S_3 = 5\,(6 + \varepsilon) + 2.9 + 6\,\varepsilon + 3.5 + 5\,(5 + \varepsilon) = 88 + 16\,\varepsilon$$

novčanih jedinica.

Za treće moguće rješenje najprije odredimo ocjene redaka i stupaca. Počinjemo sa zauzetim poljem (1,3), kojemu odgovara transportna tarifa $c_{13} = 5$; prvom retku damo ocjenu $v_1 = 5$; stoga treći stupac dobiva ocjenu $s_3 = 0$ itd. Zatim odredimo ocjene praznih polja. Počinjemo s poljem (1,1), koje dobiva ocjenu $7 - 5 - (-2) = 4$ itd. Kako nijedno prazno polje nema negativnu ocjenu, to je treće moguće rješenje optimalno.

Osim ovog optimalnog rješenja postoji međutim još jedno alternativno optimalno moguće rješenje jer polje (2,1) ima ocjenu 0. U to polje prenesemo najveći mogući broj koji dobivamo na zatvorenom putu:

$$(2,1) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,1) \to (2,1)$$

TABELA 3. TREĆE MOGUĆE I PRVO ALTERNATIVNO OPTIMALNO RJEŠENJE

$S_3 = 88 + 16\varepsilon$		Odredišta			Ponude ishodišta	v_i
		P_1	P_2	P_3		
Ishodište	I_1	7 4	9 8	5 $6 + \varepsilon$	$6 + \varepsilon$	5
	I_2	4 0	2 9	6 ε	$9 + \varepsilon$	6
	I_3	3 5	8 7	5 $5 + \varepsilon$	$10 + \varepsilon$	5
Potražnja odredišta		5	9	$11 + 3\varepsilon$	$25 + 3\varepsilon$	
s_j		-2	-4	0		

U polje (2,1) prenesemo broj ε, stoga polje (2,3) ostaje prazno, u polju (3,3) dobivamo $5 + 2\,\varepsilon$, a u polju (3,1) broj $5 - \varepsilon$.

Tako dobivamo četvrto moguće rješenje koje je istovremeno i alternativno optimalno moguće rješenje. I ovo je rješenje bazično i nedegenerirano. Njemu odgovaraju ukupni troškovi transporta:

$$S_4 = 5\,(6 + \varepsilon) + 4\,\varepsilon + 2.9 + 3\,(5 - \varepsilon) + 5\,(5 + 2\,\varepsilon) = 88 + 16\,\varepsilon$$

novčanih jedinica.

TABELA 4. ČETVRTO MOGUĆE I DRUGO ALTERNATIVNO OPTIMALNO RJEŠENJE

$S_4 = 88 + 16\varepsilon$		Ooredišta			Ponude ishodišta	v_i
		P_1	P_2	P_3		
Ishodišta	I_1	7 4	9 8	5 $6 + \varepsilon$	$6 + \varepsilon$	5
	I_2	4 ε	2 9	6 0	$9 + \varepsilon$	6
	I_3	3 $5 - \varepsilon$	8 7	5 $5 + 2\varepsilon$	$10 + \varepsilon$	5
Potražnja odredišta		5	9	$11 + 3\varepsilon$	$25 + 3\varepsilon$	
s_j		-2	-4	0		

Tako smo riješili pomoćni, postupkom ε promijenjeni transportni problem; dobili smo dva bazična i nedegenerirana alternativna optimalna rješenja. Iz ovih rješenja dobivamo optimalno rješenje prvobitnog transportnog problema tako da ε približavamo 0. Ako postavimo $\varepsilon = 0$, iz trećeg i četvrtog mogućeg rješenja pomoćnog problema dobivamo samo jedno optimalno moguće rješenje prvobitnog problema; u matričnom obliku dobivamo rješenje:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$$

Ovom rješenju odgovaraju najmanji ukupni troškovi transporta 88 novčanih jedinica.

Ovo optimalno moguće rješenje je degenerirano jer ima samo 4 pozitivne komponente. Stoga se transportni sistem raspada u dva odvojena i nepovezana transportna sistema, gdje prvo i treće ishodište sama i u cijelosti opskrbljuju prvo i treće odredište i gdje drugo ishodište samo i u cijelosti opskrbljuje drugo odredište.

Vježbe

1. Transportni problem s pet ishodiša i sedam odredišta daje tabela:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	Ponude ishodišta
I_1	26	60	164	184	250	91	155	2 000
I_2	139	74	30	53	116	227	69	2 200
I_3	209	148	100	37	40	297	139	700
I_4	115	60	130	153	216	200	40	300
I_5	122	102	165	188	251	113	74	800
Potražnje odredišta	800	1 500	1 400	800	400	500	600	6 000

Riješi problem metodom MODI i izračunaj transportne troškove koji odgovaraju optimalnom mogućem rješenju.
(301300)

2. Transportni problem s pet ishodišta i osam odredišta daje tabela:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	Ponude ishodišta
I_1	5	8	8	8	6	3	12	13	5
I_2	8	11	15	6	5	7	4	14	9
I_3	6	6	11	4	10	9	5	6	12
I_4	8	4	5	9	14	11	13	4	14
I_5	6	6	4	9	9	6	13	11	20
Potražnje odredišta	3	4	6	7	8	9	11	12	60

Riješi problem metodom MODI i izračunaj transportne troškove koji odgovaraju optimalnom mogućem rješenju.
(286)

5. Dvofazni transportni problem s više vrsta robe

Pri transportnim problemima linearnog programiranja koje smo dosad razmatrali ograničavali smo se na prijevoze samo jedne vrste robe i na direktne prijevoze od ishodišta do odredišta. U nastavku ćemo razmatrati transportne probleme koji su u dva vida uopćenja običnog transportnog problema linearnog programiranja. Prvo se uopćenje odnosi na broj vrsta robe; obični transportni problem uzima u obzir samo jednu vrstu robe, dok ćemo pri razmatranim problemima u nastavku uzimati u obzir proizvoljno mnogo vrsta robe. Drugo je uopćenje u tome što su razmatrani transportni problemi dvofazni, roba se od ishodišta do odredišta može prevesti bilo direktno bilo preko međuskladišta.

Razmatrajmo slijedeći dvofazni transportni problem s više vrsta robe:

Od ishodišta do odredišta treba prevesti m vrsta robe:

$$A_i \qquad (i = 1, \dots, m)$$

Sve vrste robe dolaze iz t ishodišta:

$$I_j \qquad (j = 1, \dots, t)$$

Pri svakom je ishodištu skladište, koje označimo tako kao i samo ishodište. Pored ovih skladišta postoji međutim još $(n - t)$ međuskladišta, tako da ima ukupno n skladišta:

$$I_j \qquad (j = 1, \dots, t, \dots n)$$

To su skladišta:

$$I_1, \dots, I_t, I_{t+1}, \dots, I_n$$

Roba se preveze od ishodišta do r odredišta

$$P_k \qquad (k = 1, \dots, r)$$

Svako ishodište ima s obzirom na svaku vrstu robe u jedinici vremena određen kapacitet; neka bude:

$$a_{ij} \qquad (i = 1, \dots m;\ j = 1, \dots, t)$$

kapacitet ishodišta I_j s obzirom na vrstu robe A_i.

Svako odredište ima u jedinici vremena određene potrebe za pojedinim vrstama robe; neka budu:

$$b_{ik} \qquad (i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, r)$$

potrebe odredišta P_k za vrstom robe A_i.

U prijevozu robe od ishodišta do odredišta nastaju transportni troškovi, koji su određeni transportnim tarifama. Ako u prijevozu preko međuskladišta robu treba pretovarivati, onda troškove pretovara ne uzimamo u obzir posebno već ih uzimamo u obzir u odgovarajućim prijevoznim tarifama. Neka bude:

$$c_{ijks}$$

transportna tarifa za prijevoz jedinice robe A_i od ishodišta I_j do odredišta P_k ako se roba vozi preko međuskladišta I_s. U prijevozu robe mogu postojati neka ograničenja s obzirom na propusnost pojedinih transportnih relacija i kapaciteta međuskladišta. Neka bude:

$$p_{js} \qquad (j \neq s;\ j = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, n)$$

za jedinicu vremena određena propusnost transportne relacije od ishodišta ili skladišta I_j do skladišta I_s.

Nadalje neka bude:

$$q_{sk} \qquad (s = 1, \ldots, n;\ \ k = 1, \ldots, r)$$

za jedinicu vremena određena propusnost transportne relacije od skladišta I_s do odredišta P_k.

Konačno neka bude:

$$p_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

za jedinicu vremena određeni kapacitet skladišta I_s.

Problem optimalnosti koji želimo kod danog transportnog sistema riješiti jest: Kako da usmjerimo prijevoz robe uz propisane uvjete od ishodišta do odredišta da bi ukupni troškovi transporta bili najmanji.

Strukturu podataka za ovaj transportni problem daju tabele 1. i 2. Tabela 1. daje kapacitete ishodišta, potrebe odredišta i transportne tarife; ispod pojedinih odredišta u tabeli su upisana skladišta preko kojih se roba prevozi. Tabela 2. daje propusnost skladišta i transportnih relacija; propusnosti skladišta upisane su u dijagonalnim poljima lijevoga dijela tabele.

Pri ovom transportnom problemu pretpostavimo za svaku vrstu robe da je ukupni kapacitet ishodišta jednak ukupnim potrebama odredišta, pa da stoga važe jednadžbe:

$$\sum_{j=1}^{j=t} a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=r} b_{ik} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

To izjednačenje možemo uvijek postići preuzimanjem pomoćnog odredišta u koje usmjerimo eventualne viškove ukupnih kapaciteta ishodišta iznad ukupnih potreba odredišta.

Zapišimo problem u matematičkom obliku; varijabla:

$$x_{ijks}$$

neka znači količinu robe A_i koja se na transportnoj relaciji preveze od ishodišta I_j do odredišta P_k ako se roba prevozi preko međuskladišta I_s. U primjeru gdje je $j = s$, radi se o direktnom prijevozu od ishodišta I_j do odredišta P_k bez korištenja nekog međuskladišta. Sve te varijable zadovoljavaju uvjet nenegativnosti:

$$x_{ijks} \geqq 0 \tag{1}$$

TABELA 1. KAPACITETI ISHODIŠTA, POTREBE ODREDIŠTA I TRANSPORTNE TARIFE PRI DVOFAZNOM TRANSPORTNOM PROBLEMU S VIŠE VRSTA ROBE

		P_1			—	P_r			
		I_1	—	I_n	—	I_1	—	I_n	a_{ij}
A_1	I_1	c_{1111}	—	c_{111n}	—	c_{11r1}	—	c_{11rn}	a_{11}
	⋮	⋮	—	⋮	—	⋮	—	⋮	⋮
	I_t	c_{1t11}	—	c_{1t1n}	—	c_{1tr1}	—	c_{1trn}	a_{1t}
	b_{1k}	b_{11}			—	b_{1r}			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	I_1	c_{m111}	—	c_{m11n}	—	c_{m1r1}	—	c_{m1rn}	a_{m1}
	⋮	⋮	—	⋮	—	⋮	—	⋮	⋮
	I_t	c_{mt11}	—	c_{mt1n}	—	c_{mtr1}	—	c_{mtrn}	a_{mt}
	b_{mr}	b_{m1}			—	b_{mr}			

TABELA 2. PROPUSNOSTI SKLADIŠTA I TRANSPORTNIH RELACIJA PRI DVOFAZNOM TRANSPORTNOM PROBLEMU S VIŠE VRSTA ROBE

	I_1	—	I_n	P_1	—	P_r
I_1	p_1	—	p_{1n}	q_{11}	—	q_{1r}
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
I_n	p_{n1}		p_n	q_{n1}		q_{nr}

Zbog ograničenih kapaciteta ishodišta varijable za sve parove indeksa i i j zadovoljavaju sistem mt jednadžbi:

$$\sum_{k=1}^{k=r} \sum_{s=1}^{s=n} x_{ijks} = a_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, t) \tag{2}$$

Zbog propisanih potreba odredišta varijable za sve parove indeksa i i k zadovoljavaju sistem mr jednadžbi:

$$\sum_{j=1}^{j=t} \sum_{s=1}^{s=n} x_{ijks} = b_{ik}$$

Budući da smo pretpostavili da je za svaku vrstu robe ukupni kapacitet ishodišta jednak ukupnim potrebama odredišta, to ove jednadžbe sastavljaju sistem zavisnih jednadžbi. Odgovarajući sistem nezavisnih jednadžbi dobivamo tako da iz sistema posljednjih jednadžbi izostavimo za svaku vrstu robe po jednu jednadžbu Ako izostavimo one jednadžbe koje odgovaraju posljednjem odredištu koje ima indeks $k = r$, onda preostane još sistem $m(r - 1)$ nezavisnih jednadžbi:

$$\sum_{j=1}^{j=t} \sum_{s=1}^{s=n} x_{ijks} = b_{ik} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r - 1) \tag{3}$$

Uzmimo da se roba prevozi preko najviše jednog međuskladišta. Zbog ograničenih propusnosti transportnih relacija od ishodišta do skladišta i između skladišta, varijable za sve parove indeksa j i s — pri tom je $j \neq s$ — zadovoljavaju sistem $t(n - 1)$ jednadžbi:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=1}^{k=r} x_{ijks} \leqq p_{js} \qquad (j \neq s;\ j = 1, \ldots, t;\ s = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

Zbog ograničene propusnosti transportnih relacija od ishodišta ili skladišta do odredišta varijable za sve parove indeksa s i k zadovoljavaju sistem nr jednadžbi:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=t} x_{ijks} \leqq q_{sk} \qquad (s = 1, \ldots, n;\ \ k = 1, \ldots, r) \tag{5}$$

Zbog ograničenih kapaciteta skladišta varijable za sve vrijednosti indeksa s zadovoljavaju sistemu n jednadžbi:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=t} \sum_{k=1}^{k=r} x_{ijks} \leqq p_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

Ukupni troškovi transporta koji su za problem transporta funkcija cilja jednaki su:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=t} \sum_{k=1}^{k=r} \sum_{s=1}^{s=n} c_{ijks}\, x_{ijks} \tag{7}$$

Problem optimalnosti što nastaje pri ovom uopćenom dvofaznom transportnom sistemu je slijedeći: Treba odrediti minimum ukupnih troškova transporta (7) kod uvjeta da varijable odgovaraju jednadžbama i nejednadžbama (1), (2), (3), (4), (5) i (6). Kako je funkcija cilja linearna i kako su i svi uvjeti linearne jednadžbe i nejednadžbe, to je riječ o problemu linearnog programiranja.

Tehnika rješavanja ovog problema u primjeru kad s obzirom na propusnosti transportnih relacija i skladišta nema nikakvih ograničenja, bitno se razlikuje od tehnike rješavanja gdje postoje neka ograničenja s obzirom na propusnosti.

a) Najprije razmatrajmo mogućnost kad nema nikakvih ograničenja s obzirom na propusnosti transportnih relacija i skladišta; pri toj mogućnosti ne moramo uzimati u obzir koeficijente p_{js}, q_{sk}, p_s, pa dobivamo slijedeći prilično jednostavni transportni problem:

Treba odrediti minimum ukupnih troškova transporta (7) kod uvjeta da varijable zadovoljavaju uvjete nenegativnosti (1) i linearne jednadžbe (2) i (3).

Kako prema ovoj mogućnosti nema nikakvih ograničenja s obzirom na propusnosti, to robu usmjerimo od određenog ishodišta do određenog odredišta po najjeftinijem putu; transportna tarifa za robu A_i po najjeftinijem putu od ishodišta I_j do odredišta P_k jednaka je:

$$c_{ijk} = \min_{s} c_{ijks}$$

U skladu s tim ovim najjeftinijim putem prevezemo x_{ijk} jedinica robe A_i. Prvobitni transportni problem time se pojednostavni, pa dobivamo slijedeći problem:

Treba odrediti minimum ukupnih troškova transporta:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=t} \sum_{k=1}^{k=r} c_{ijk}\, x_{ijk} \tag{7a}$$

kod uvjeta da varijable x_{ijk} zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$x_{ijk} \geqq 0 \tag{1a}$$

i linearnim jednadžbama:

$$\sum_{k=1}^{k=r} x_{ijk} = a_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, t) \tag{2a}$$

$$\sum_{j=1}^{j=t} x_{ijk} = b_{ik} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r-1) \tag{3a}$$

Iz strukture ovog problema vidimo da se cjelokupni transportni problem raspada u m transportnih problema, i to za svaku vrstu robe po jedan. Stoga ukupni transportni problem riješimo tako da odgovarajući transportni problem riješimo za svaku vrstu robe posebno; ove parcijalne transportne probleme možemo riješiti nekom poznatom metodom, simpleks-metodom, metodom MODI ili nekom drugom. Ukupne troškove transporta dobivamo ako zbrojimo troškove transporta za sve vrste robe.

b) Prema drugoj mogućnosti, gdje postoje neka ograničenja s obzirom na propusnosti, takvo rascjepljenje problema nije moguće, pa stoga transportni problem treba riješiti u cijelosti, npr. simpleks-metodom.

Primjer. Dvije vrste robe A_1 i A_2 prevoze se od dva ishodišta I_1 i I_2 do tri odredišta P_1, P_1 i P_3. Pri ishodištu jednako su označena skladišta a pored njih postoji još treće skladište I_3. Kapacitete ishodišta, potrebe odredišta i transportne tarife daje tabela 3; ograničenja s obzirom na propusnosti transportnih relacija i skladišta daje tabela 4.

TABELA 3. PODACI ZA KAPACITETE ISHODIŠTA, POTREBE ODREDIŠTA I TRANSPORTNE TARIFE. OPTIMALNO MOGUĆE RJEŠENJE AKO POSTOJE OGRANIČENJA PROPUSNOSTI

		P_1			P_2			P_3			a_{ij}
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	
A_1	I_1	5	16	11 **20**	11 **45**	14	9	15	10	11 **5**	70
	I_2	7	14	10	13	12	8	17	8 **55**	10 **25**	80
	b_{1k}	20			45			85			150
A_2	I_1	4 **30**	17	13	10 **25**	15	11	14 **5**	11	13	60
	I_2	9	12 **15**	10	15	10	8	19	6 **25**	10	40
	b_{2k}	45			25			30			100

TABELA 4. PODACI O PROPUSNOSTI SKLADIŠTA I TRANSPORTNIH RELACIJA

	I_1	I_2	I_3	P_1	P_2	P_3
I_1	–	–	–	30	–	–
I_2	–	–	–	–	–	90
I_3	–	–	50	–	40	–

a) Razmatrajmo najprije dvofazni transportni problem kad nema nikakvih ograničenja s obzirom na propusnosti transportnih relacija i skladišta; podatke za taj problem daje tabela 3. U ovom primjeru vozimo robu od ishodišta do odredišta uvijek najjeftinijim putem. Stoga vozimo prvu robu od prvog ishodišta direktno do prvog odredišta po transportnoj tarifi 5, do drugog odredišta preko trećeg skladišta po transportnoj tarifi 9 i do trećeg odredišta preko drugog skladišta po transportnoj tarifi 10; prvu robu vozimo od drugog ishodišta direktno do prvog odredišta po transportnoj tarfi 7, do drugog odredišta preko trećeg skladišta po transportnoj tarifi 8 i do trećeg odredišta preko drugog skladišta po transportnoj tarifi 8. Drugu robu vozimo od prvog ishodišta do prvog odredišta direktno po transportnoj tarifi 4, do drugog odredišta preko prvog skladišta po transportnoj tarifi 10 i do trećeg odredišta preko drugog skladišta po transportnoj tarifi 11; drugu robu vozimo od drugog ishodišta do prvog odredišta direktno po transportnoj tarifi 9, do drugog odredišta preko trećeg skladišta po transportnoj tarifi 8 i do trećeg odredišta preko drugog skladišta po transportnoj tarifi 6. Podatke za taj transportni problem daje tabela 5.

TABELA 5. PODACI I OPTIMALNO MOGUĆE RJEŠENJE DVOFAZNOG TRANSPORTNOG PROBLEMA BEZ OGRANIČENJA PROPUSNOSTI

		P_1	P_2	P_3	a_{ij}
A_1	I_1	5 **20**	9 **45**	10 **5**	70
	I_2	7	8	8 **80**	80
	b_{1k}	20	45	85	150
A_2	I_1	4 **45**	10 **15**	11	60
	I_2	9	8 **10**	6 **30**	40
	b_{2k}	45	25	30	100

Transportni se problem raspada u dva odvojena obična transportna problema, i to za svaku vrste robe po jedan; svaki od ovih problema rješavamo posebno. Optimalno moguće rješenje, koje možemo dobiti grafički ili metodom MODI, upisano je u tabeli 5. Najmanji troškovi za prijevoz prve robe jednaki su 1 195, a za prijevoz druge robe jednaki su 590 novčanih jedinica; stoga optimalnom mogućem rješenju odgovaraju ukupni najmanji troškovi transporta 1785 novčanih jedinica. Optimalnu strukturu transporta prikazuje sl. 33; u njoj su količine prve robe upisane nepodvučeno, a količine druge robe podvučeno.

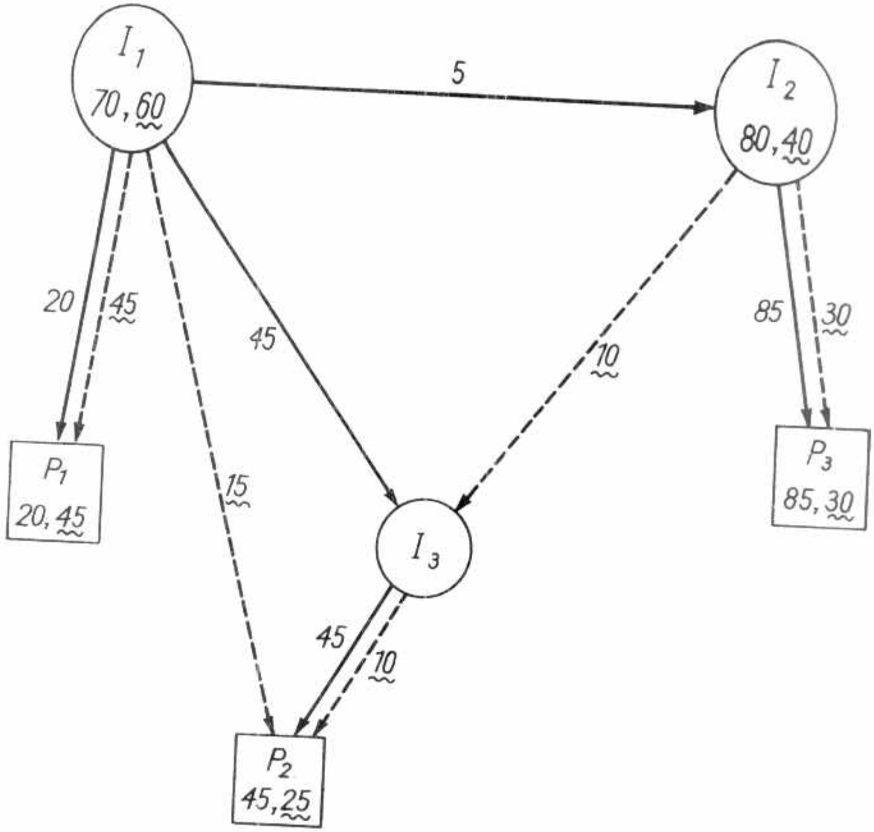
b) Razmatrajmo još transportni problem pri kojem postoje ograničenja s obzirom na propusnosti transportnih relacija i skladišta. Podatke za kapacitete ishodišta, potrebe odredišta i transportne tarife za ovaj transportni problem daje tabela 3, dok tabela 4. daje ograničenja propusnosti. Po ovoj tabeli postoje slijedeća ograničenja propusnosti:

za transportnu relaciju od I_1 do P_1: $q_{11} = 30$,
za transportnu relaciju od I_2 do P_3: $q_{23} = 90$,
za transportnu relaciju od I_3 do P_2: $q_{32} = 40$
i za skladište I_3: $p_3 = 50$.

Iz tabela 3. i 4, koje daju podatke za taj dvofazni transportni problem, dobivamo sve uvjetne jednadžbe i nejednadžbe.

Uvjeti nenegativnosti su:

$$x_{ijks} \geqq 0 \quad (i = 1,2;\ j = 1,2;\ k = 1,\ 2,\ 3;\ s = 1,2,3)$$



Sl. 33. Optimalna struktura transporta pri problemu bez ograničenja propusnosti

Jednadžbe koje dobivamo zbog propisanih kapaciteta ishodišta:

$$\sum_{k=1}^{k=3} \sum_{s=1}^{s=3} x_{11ks} = 70$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \sum_{s=1}^{s=3} x_{12ks} = 80$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \sum_{s=1}^{s=3} x_{21ks} = 60$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \sum_{s=1}^{s=3} x_{22ks} = 40$$

Jednadžbe koje dobivamo zbog propisanih potreba odredišta:

$$\sum_{j=1}^{j=2} \sum_{s=1}^{s=3} x_{1j1s} = 20$$

$$\sum_{j=1}^{j=2} \sum_{s=1}^{s=3} x_{1j2s} = 45$$

$$\sum_{j=1}^{j=2} \sum_{s=1}^{s=3} x_{2j1s} = 45$$

$$\sum_{j=1}^{j=2} \sum_{s=1}^{s=3} x_{2j2s} = 25$$

Nejednadžbe koje dobivamo zbog ograničenja propusnosti:

$$\sum_{i=1}^{i=2} \sum_{i=3}^{j=2} x_{ij11} \leqq 30$$

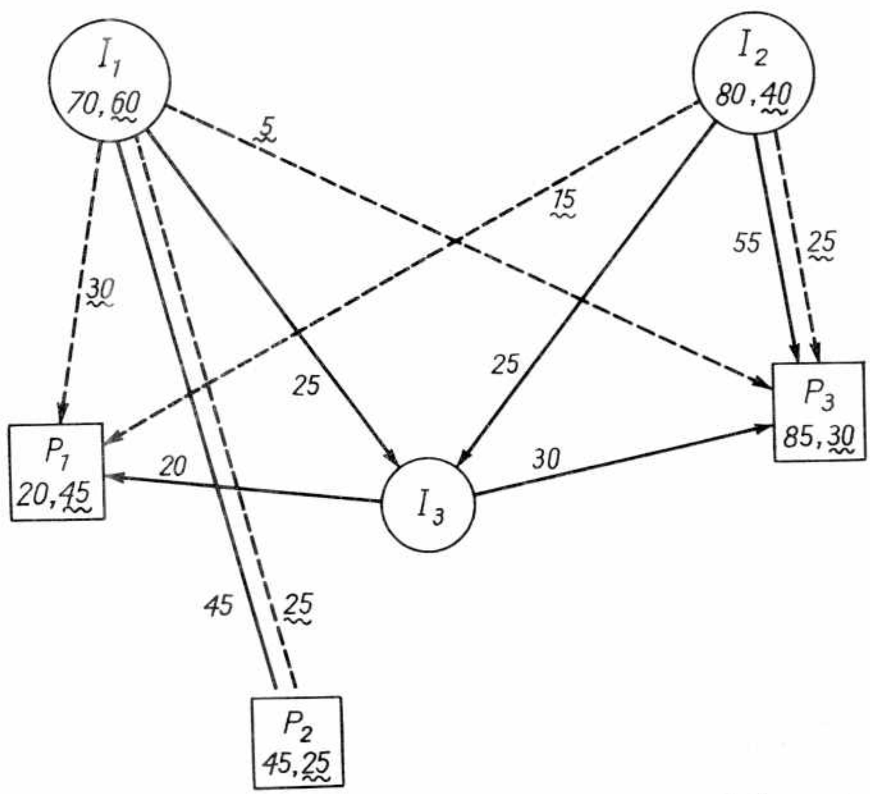
$$\sum_{i=1}^{i=2} \sum_{j=1}^{j=2} x_{ij32} \leqq 90$$

$$\sum_{i=1}^{i=2} \sum_{j=1}^{j=2} x_{ij23} \leqq 40$$

$$\sum_{i=1}^{i=2} \sum_{j=1}^{j=2} \sum_{k=1}^{k=3} x_{ijk3} \leqq 50$$

Funkcija cilja određena je sa 36 koeficijenata, koji su upisani u tabeli 3. u poljima u gornjem desnom uglu.

Problem riješimo simpleks-metodom pomoću elektronskog računala. Optimalno moguće rješenje upisano je u tabeli 3. Optimalnu moguću strukturu prikazuje sl. 34; u njoj su upisane količine prve robe nepodvučenim, a količine druge robe podvučenim brojkama. Prema ovom rješenju ukupni su troškovi transporta najmanji i jednaki 2 230 novčanih jedinica.



Sl. 34. Optimalna struktura prijevoza pri transportnom problemu s ograničenjima propusnosti

6. Primjer o isporuci sezonske robe

Proizvođač sezonske robe sklopi s naručiocem ugovor da će mu u toku četiri mjeseca isporučivati mjesečno određene količine robe. Prvi mjesec mora isporučiti $b_1 = 70$, drugi mjesec $b_2 = 85$, treći mjesec $b_3 = 95$ i četvrti mjesec $b_4 = 60$ jedinica robe. Proizvođač počinje robu izrađivati u mjesecu prije prvog roka isporuke, pa onda izrađuje robu još drugi, treći i četvrti mjesec. Robu može izrađivati u redovnom i u prekovremenom radnom vremenu. U redovnom radnom vremenu može izraditi u uzastopnim mjesecima najviše $a_{1r} = 30$, $a_{2r} = 50$, $a_{3r} = 60$ i $a_{4r} = 40$ jedinica robe u prekovremenom radnom vremenu međutim može izraditi u uzastopnim mjesecima najviše $a_{1n} = 80$, $a_{2n} = 40$, $a_{3n} = 30$ i $a_{4n} = 10$ jedinica robe. Proizvodnja 1 jedinice u redovnom radnom vremenu izrađene robe stoji po mjesecima $c_{1r} = 6$, $c_{2r} = 5$, $c_{3r} = 7$ i $c_{4r} = 4$ novčane jedinice; proizvodnja jedne jedinice robe u prekovremenom radnom vremenu stoji međutim po mjesecima $c_{1n} = 9$, $c_{2n} = 7$, $c_{3n} = 8$ i $c_{4n} = 6$ novčanih jedinica. Proizvođač ima mogućnost da izrađenu robu uskladišti tako da je ne mora isporučivati odmah u neposrednom roku isporuke, već je može isporučiti i kasnije; za skladištenje robe ima za 1 jedinicu robe za svaki mjesec 1 novčanu jedinicu troškova. Kako da proizvođač planira proizvodnju robe da bi pri izradi i eventualnom skladištenju robe imao najmanje troškove?

Podaci su za ovaj problem sakupljeni u gornjem dijelu tabele 1.

Izrazimo problem u matematičkom obliku. U tu svrhu označimo, kao što vidimo na tabeli 1, sa x_1, x_2, x_3 i x_4 količine po mjesecima u redovnom radnom vremenu izrađene robe, sa y_1, y_2, y_3 i y_4 količine po mjesecima u prekovremenom radnom vremenu izrađene robe i sa s_2, s_3 i s_4 količine u drugom, trećem i četvrtom mjesecu uskladištene robe.

Zbog uvjeta nenegativnosti i zbog ograničenih kapaciteta proizvođača varijable odgovaraju nejednadžbama:

$$0 \leqq x_1 \leqq 30, \quad 0 \leqq x_2 \leqq 50, \quad 0 \leqq x_3 \leqq 60, \quad 0 \leqq x_4 \leqq 40, \tag{1}$$

$$0 \leqq y_1 \leqq 80, \quad 0 \leqq y_2 \leqq 40, \quad 0 \leqq y_3 \leqq 30, \quad 0 \leqq y_4 \leqq 10 \tag{2}$$

Količina s_2 u drugom mjesecu uskladištene robe jednaka je:

$$s_2 = x_1 + y_1 - 70$$

Količina s_3 u trećem mjesecu uskladištene robe jednaka je:

$$s_3 = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - 70 - 85$$

Količina s_4 u četvrtom mjesecu uskladištene robe jednaka je:

$$s_4 = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 - 70 - 85 - 95$$

Troškovi proizvođača sastoje se od dva dijela; od troškova proizvodnje i od troškova skladištenja. Proizvodni su troškovi jednaki:

$$6x_1 + 9y_1 + 5x_2 + 7y_2 + 7x_3 + 8y_3 + 4x_4 + 6y_4$$

TABELA 1. PODACI I OPTIMALNO MOGUĆE RJEŠENJE PRIMJERA O ISPORUCI ROBE

		1. mjesec	2. mjesec	3. mjesec	4. mjesec
	Isporučene količine b_j	70	85	95	60
Podaci	Kapaciteti u redovnom radnom vremenu a_{jr}	30	50	60	40
	Kapaciteti u prekovremenom radnom vremenu a_{jn}	80	40	30	10
	Proizvodni troškovi za jedinicu robe u redovnom radnom vremenu c_{jr}	6	5	7	4
	Proizvodni troškovi za jedinicu robe u prekovremenom radnom vremenu c_{jn}	9	7	8	6
	Mjesečni troškovi skladištenja jedinice robe	—	1	1	1
	Količine robe proizvedene u redovnom radnom vremenu x_j	x_1	x_2	x_3	x_4
Varijable	Količine robe proizvedene u prekovremenom radnom vremenu y_j	y_1	y_2	y_3	y_4
	Stanje zaliha s_j	0	s_2	s_3	s_4
Optimalno moguće rješenje	Količine robe proizvedene u redovnom radnom vremenu	30	50	60	40
	Količine robe proizvedene u prekovremenom radnom vremenu	50	40	30	10
	Stanje zaliha	—	10	15	10

novčanih jedinica. Kako skladištenje jedne jedinice robe stoji svaki mjesec po 1 novčanu jedinicu, to su ukupni troškovi skladištenja jednaki:

$$s_2 + s_3 + s_4$$

Ako za pojedinačne sumande u ovoj sumi uvrstimo gore izračunate izraze, dobivamo ukupne troškove skladištenja:

$$3x_1 + 3y_1 + 2x_2 + 2y_2 + x_3 + y_3 - 475$$

novčanih jedinica. Ako zbrojimo jedne i druge troškove, dobivamo ukupne troškove proizvođača:

$$S = 9x_1 + 12y_1 + 7x_2 + 9y_2 + 8x_3 + 9y_3 + 4x_4 + 6y_4 - 475 \tag{3}$$

novčanih jedinica. Tako dobivamo slijedeći problem optimalnosti:

Treba odrediti vrijednosti varijabla x_1, x_2, x_3, x_4 i y_1, y_2, y_3, y_4 koje zadovoljavaju nejednadžbe (1) i (2) tako da funkcija cilja (3) ima minimum. Kako su svi uvjeti linearne nejednadžbe i kako je funkcija cilja linearna, radi se o problemu linearnog programiranja. Problem možemo riješiti simpleks-metodom pomoću elektronskog računala. Optimalno moguće rješenje upisano je u donjem dijelu tabele 1; njoj odgovaraju najmanji troškovi dobavljača 2 075 novčanih jedinica.

Ovaj se problem može riješiti i na drugi način; formalno ga možemo prevesti u obični transportni problem linearnog programiranja, pa ga potom riješiti poznatim transportnim metodama. Problem prevedemo formalno u transportni problem koji daje tabela 2.

Ustanovimo najprije što treba da znače ishodišta pri transportnom problemu. Ovaj transportni problem ima 8 ishodišta:

$$I_{1r},\ I_{1n},\ I_{2r},\ I_{2n},\ I_{3r},\ I_{2n},\ I_{4n},\ I_{4n}$$

Kod njih prvi indeks znači mjesec u kojem proizvođač izradi robu, dok drugi indeks određuje da li je roba izrađena u redovnom ili prekovremenom radnom vremenu. Tako na primjer I_{3r} znači ishodište robe koja je izrađena u trećem mjesecu u redovnom radnom vremenu. Kapaciteti a_i ovih ishodišta jednaki su kapacitetima proizvođača po mjesecima u redovnom i prekovremenom radnom vremenu.

Ustanovimo još što treba da znače odredišta pri ovom transportnom problemu. Ovaj transportni problem ima 4 odredišta:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$$

Kod njih indeks znači mjesec u kojem proizvođač dobavi robu. Tako na primjer odredište P_3 znači isporuku robe b_3 na kraju trećeg mjeseca. Potražnje odredišta b_j jednake su količinama po mjesecima isporučne robe. Ukupni kapacitet svih ishodišta jednak je 340 jedinica robe i veći je za 30 jedinica od ukupne potražnje odredišta, koja je jednaka 310 jedinica. Stoga, da bismo izjednačili ove dvije količine, uvodimo dodatno odredište P_5, kojemu propišemo potražnju 30 jedinica robe.

Ustanovimo još konačno što treba da znače transportne tarife pri ovom transportnom problemu. Transportne tarife odgovaraju troškovima koje ima dobavljač za neku jedinicu robe. Ako dobavljač robu isporuči u istom mjesecu u kojem ju

TABELA 2. PODACI I PRVO MOGUĆE RJEŠENJE PROBLEMA ISPORUKE ROBE KAO TRANSPORTNOG PROBLEMA

$S_1 = 2\,295$		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	a_i	v_i
Prvi mjesec	I_{1r}	6 30	7 0	8 0	9 0	0 −5	30	6
	I_{1n}	9 40	10 40	11 0	12 0	0 −8	80	9
Drugi mjesec	I_{2r}		5 45	6 5	7 0	0 −3	50	4
	I_{2n}		7 0	8 40	9 0	0 −5	40	6
Treći mjesec	I_{3r}			7 50	8 10	0 −4	60	5
	I_{3n}			8 0	9 30	0 −5	30	6
Četvrti mjesec	I_{4r}				4 20	0 20	40	1
	I_{4n}				6 2	0 10	10	1
	b_j	70	85	95	60	30	340	
	s_j	0	1	2	3	−1		

je izradio, onda za nju ima samo proizvodne troškove. Ako dobavljač isporuči robu nakon jednog mjeseca od kako ju je izradio, onda ima za nju troškove koji su jednaki sumi proizvodnih troškova i troškova za jednomjesečno uskladištenje. Ako dobavljač isporuči robu nakon dva mjeseca od kako ju je izradio, onda ima za nju troškove koji su jednaki sumi proizvodnih troškova i dvokratnih troškova za jednomjesečno uskladištenje itd. Ako dobavljač izradi npr. 1 jedinicu robe u prvom mjesecu u redovnom radnom vremenu i isporuči je još istoga mjeseca, onda ima za nju 6 novčanih jedinica troškova; ako je isporuči u drugom mjesecu, onda ima za nju $6 + 1 = 7$ novčanih jedinica troškova; ako je isporuči u trećem mjesecu, onda ima za nju $6 + 2 = 8$ novčanih jedinica troškova; ako je isporuči u četvrtom mjesecu, onda ima za nju $6 + 3 = 9$ novčanih jedinica troškova; ovi brojevi odgovaraju transportnim tarifama u prvom retku tabele 2. Slično dobivamo i sve druge transportne tarife. Transportne tarife od proizvoljnog ishodišta do dodatnog odredišta P_5 sve su jednake 0.

Tako smo problem isporuke robe preveli u obični transportni problem linearnog programiranja, koji daje tabela 2. Tabela je na lijevoj strani dolje nepotpuna jer dobavljač ne može isporučiti robu prije nego što ju je izradio. Transportni problem riješimo metodom MODI u 5 iteracija.

Prvo moguće rješenje u tabeli 2. dobivamo po metodi sjeverozapadnog kornera. Ovom rješenju odgovaraju ukupni troškovi $S_1 = 2\,295$ novčanih jedinica. Po ocjeni redaka, stupaca i praznih polja vidimo da je polje (2,5) ocijenjeno najmanjim negativnim brojem -8. U to polje prenesemo broj 5 i u skladu s uvjetima promijenimo brojeve u zauzetim poljima na zatvorenom poligonalnom putu:

$$(2,5) \to (7,5) \to (7,4) \to (5,4) \to (5,3) \to (3,3) \to (3,2) \to (2,2) \to (2,5)$$

Tako dobivamo drugo moguće rješenje, koje je dano u tabeli 3. Ovom rješenju odgovaraju ukupni troškovi $S_2 = 2\,255$ novčanih jedinica. Nakon ocjene redaka, stupaca i praznih polja vidimo da polje (4,2) ima najmanju negativnu ocjenu. U ovo polje prenesemo broj 5 i u skladu s uvjetima promijenimo brojeve u zauzetim poljima na zatvorenom poligonalnom putu:

$$(4,2) \to (2,2) \to (2,5) \to (7,5) \to (7,4) \to (5,4) \to (5,3) \to (4,3) \to (4,2)$$

TABELA 3. DRUGO MOGUĆE RJEŠENJE

$S_2 = 2\,255$		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	a_i	v_i
Prvi mjesec	I_{1r}	6 30	7 0	8 8	9 8	0 3	30	6
	I_{1n}	9 40	10 35	11 8	12 8	0 5	80	9
Drugi mjesec	I_{2r}		5 50	6 8	7 8	0 5	50	4
	I_{2n}		7 -8	8 40	9 0	0 -5	40	14
Treći mjesec	I_{3r}			7 55	8 5	0 -4	60	13
	I_{3n}			8 0	9 30	0 -5	30	14
Četvrti mjesec	I_{4r}				4 25	0 15	40	9
	I_{4n}				6 2	0 10	10	9
	b_j	70	85	95	60	30	340	
	s_j	0	1	-6	-5	-9		

Tako dobivamo treće moguće rješenje, koje daje tabela 4. Ovom rješenju odgovaraju ukupni troškovi $S_3 = 2\,215$ novčanih jedinica. Nakon ocjene redaka, stupaca i praznih polja vidimo da polje (6,3) ima najmanju negativnu ocjenu. U to polje prenesemo broj 10 i u skladu s uvjetima promijenimo brojeve u zauzetim poljima na zatvorenom poligonalnom putu:

$$(6,3) \to (4,3) \to (4,2) \to (2,2) \to (2,5) \to (7,5) \to (7,4) \to (6,4) \to (6,3)$$

TABELA 4. TREĆE MOGUĆE RJEŠENJE

$S_3 = 2\,215$		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	a_i	v_i
Prvi mjesec	I_{1r}	30 (6)	0 (7)	0 (8)	8 (9)	3 (0)	30	6
	I_{1n}	40 (9)	30 (10)	0 (11)	8 (12)	10 (0)	80	9
Drugi mjesec	I_{2r}		50 (5)	0 (6)	8 (7)	5 (0)	50	4
	I_{2n}		5 (7)	35 (8)	8 (9)	3 (0)	40	6
Treći mjesec	I_{3r}			60 (7)	8 (8)	4 (0)	60	5
	I_{3n}			−8 (8)	30 (9)	−5 (0)	30	14
Četvrti mjesec	I_{4r}				30 (4)	10 (0)	40	9
	I_{4n}				2 (6)	10 (0)	10	9
	b_j	70	85	95	60	30	340	
	s_j	0	1	2	−5	−9		

Tako dobivamo četvrto moguće rješenje, koje daje tabela 5. Ovom rješenju odgovaraju ukupni troškovi $S_4 = 2\,135$ novčanih jedinica. Nakon ocjene redaka, stupaca i praznih polja vidimo da prazno polje (8,4) ima najmanju negativnu ocjenu. U to polje prenesemo broj 10 i u skladu s uvjetima promijenimo brojeve u zauzetim poljima na zatvorenom poligonalnom putu:

$$(8,4) \to (6,4) \to (6,3) \to (4,3) \to (4,2) \to (2,2) \to (2,5) \to (8,5) \to (8,4)$$

TABELA 5. ČETVRTO MOGUĆE RJEŠENJE

$S_4 = 2\,135$		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	a_i	v_i
Prvi mjesec	I_{1r}	30 (6)	0 (7)	0 (8)	0 (9)	3 (0)	30	6
	I_{1n}	40 (9)	20 (10)	0 (11)	0 (12)	20 (0)	80	9
Drugi mjesec	I_{2r}		50 (5)	0 (6)	0 (7)	5 (0)	50	4
	I_{2n}		15 (7)	25 (8)	0 (9)	3 (0)	40	6
Treći mjesec	I_{3r}			60 (7)	0 (8)	4 (0)	60	5
	I_{3n}			10 (8)	20 (9)	3 (0)	30	6
Četvrti mjesec	I_{4r}				40 (4)	8 (0)	40	1
	I_{4n}				−6 (6)	10 (0)	10	9
	b_j	70	85	95	60	30	340	
	s_j	0	1	2	3	−9		

Tako dobivamo peto moguće rješenje, koje je dano u tabeli 6. Ovom rješenju odgovaraju ukupni troškovi $S_5 = 2\,075$ novčanih jedinica. Nakon ocjene redaka, stupaca i praznih polja vidimo da nijedno prazno polje nema negativnu ocjenu. Stoga je ovo rješenje optimalno. Kako neka prazna polja imaju ocjene 0, to pored ovog postoje još neka druga optimalna rješenja.

Iz izračunanog optimalnog mogućeg rješenja transportnog problema dobivamo slijedeće optimalno moguće rješenje prvobitnog problema, a za dobavljača slijedeći optimalni plan:

U prvom mjesecu dobavljač izradi u redovnom radnom vremenu 30, a u prekovremenom radnom vremenu 50 jedinica robe; time ne iskorištava mogućnost da u prekovremenom radnom vremenu izradi još 30 jedinica robe; na kraju mjeseca isporuči 70 jedinica robe a 10 jedinica uskladišti. U drugom mjesecu iskoristi sve svoje kapacitete i izradi u redovnom radnom vremenu 50, a u prekovremenom radnom vremenu 40 jedinica robe; na kraju mjeseca isporuči 85 jedinica robe, a uskladišti 15 jedinica. U trećem mjesecu isto tako iskorištava sve svoje kapacitete i u redovnom radnom vremenu izradi 60 a prekovremenom 30 jedinica robe;

TABELA 6. PETO I OPTIMALNO MOGUĆE RJEŠENJE

$S_5 = 2\,075$		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	a_i	v_i
Prvi mjesec	I_{1r}	(6) 30	(7) 0	(8) 0	(9) 0	(0) 3	30	6
	I_{1n}	(9) 40	(10) 10	(11) 0	(12) 0	(0) 30	80	9
Drugi mjesec	I_{2r}		(5) 50	(6) 0	(7) 0	(0) 5	50	4
	I_{2n}		(7) 25	(8) 15	(9) 0	(0) 3	40	6
Treći mjesec	I_{3r}			(7) 60	(8) 0	(0) 4	60	5
	I_{3n}			(8) 20	(9) 10	(0) 3	30	6
Četvrti mjesec	I_{4r}				(4) 40	(0) 8	40	1
	I_{4n}				(6) 10	(0) 6	10	3
	b_j	70	85	95	60	30	340	
	s_j	0	1	2	3	−9		

na kraju meseca isporuči 95 jedinica robe, a uskladišti 10 jedinica. U četvrtom mjesecu iskoristi sve sveje kapacitete i izradi u redovnom radnom vremenu 40 a u prekovremenom 10 jedinica robe; na kraju mjeseca isporuči 60 jedinica robe i time iscrpe svu svoju zalihu. Donji dio tabele 2. daje ovaj za dobavljača optimalni plan; pri takvom programu dobavljač ima najmanje troškove 2 075 novčanih jedinica.

XV. BILINEARNO PROGRAMIRANJE

1. Opći problem bilinearnog programiranja

Neki ekonomski značajni problemi određivanja optimuma u matematičkom razmatranju dovode do nekog osobitog tipa nelinearnog programiranja. U tim problemima nastupaju dvije međusobno nezavisne grupe varijabla; te varijable zadovoljavaju linearne nejednadžbe ili jednadžbe, a funkcija cilja je bilinearna forma tih varijabla. Rješavanje takvih nelinearnih programa može se prevesti na uzastopno rješavanje odgovarajućih linearnih programa.

O problemu bilinearnog programiranja radi se npr. u transportnim problemima nekoga posebnog tipa. Uzmimo da želimo određenu količinu robe prevesti iz jednoga kraja u drugi. Put između oba kraja možemo podijeliti na nekoliko odsjeka; pri tom nam razdioba nije poznata, pa su zato dužine pojedinih odsjeka varijable. Te varijable odgovaraju nekim propisanim uvjetima. Za prijevoz robe imamo na raspolaganju različita vozila koja možemo upotrijebiti na pojedinim odsjecima puta; za svako od tih vozila i za svaki odsjek puta poznate su nam transportne tarife. Količine ovim vozilima na pojedinim odsjecima prevezene robe čine drugu grupu varijabla. I te varijable zadovoljavaju neke propisane uvjete. S obzirom na transportne troškove na pojedinim odsjecima puta pretpostavimo da su direktno proporcionalni produktu dužine puta i količine prevezene robe i da su ukupni transportni troškovi jednaki sumi transportnih troškova na pojedinim odsjecima. Prema toj pretpostavci, ukupni transportni troškovi bilinearna su forma varijabla koje izražavaju dužine odsjeka puta i količine na tim odsjecima prevezene robe. Prijevoz iz kraja u kraj želimo organizirati tako da uz propisane uvjete ukupni transportni troškovi budu najmanji. Uz propisane uvjete kojima mora odgovarati svaka od obiju grupa varijabli i uz dane funkcije cilja dobivamo problem bilinearnog programiranja.

Na problem bilinearnog programiranja nailazimo npr. i u nekom posebnom proizvodnom problemu s područja poljoprivrede. Uzmimo da imamo na izbor određene poljoprivredne površine za proizvodnju različitih poljoprivrednih kultura. Te poljoprivredne površine međusobno se razlikuju s obzirom na pogodnost za uzgoj pojedinih kultura. Pri proizvodnom problemu uzimamo u obzir dva tipa troškova: troškove za kupnju poljoprivrednih površina i troškove za uzgoj kultura na nabavljenim površinama. Veličine nabavljenih površina na kojima uzgajamo pojedine kulture nisu poznate i sastavljaju prvu grupu varijabla; te varijable zadovoljavaju neke propisane uvjete. Troškovi za uzgoj kultura nastaju zbog potrošnje različitih produkcionih faktora kao što su npr. radna snaga, gnojiva itd., jednom riječi radi intenzifikacije privređivanja. Količine u obzir uzetih produkcionih faktora čine drugu skupinu varijabla; i te varijable zadovoljavaju neke propisane uvjete. Pretpostavimo da je vrijednost uroda direktno proporcionalna produktu veličine poljoprivredne površine i stupnja intenzivnosti privređivanja. U danim uvjetima želimo programirati poljoprivrednu proizvodnju tako da vrijednost ukupnog uroda bude najveća. Uz propisane uvjete koje varijable zadovoljavaju i uz dane funkcije cilja dobivamo problem bilinearnog programiranja.

Opći problem nelinearnog programiranja s bilinearnom funkcijom cilja izrazit ćemo za primjer maksimuma u matematičkom obliku na slijedeći način:

Treba odrediti maksimum bilinearne funkcije cilja:

$$\begin{array}{l} c_{11} x_1 y_1 + \ldots + c_{1v} x_1 y_v + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c_{u1} x y_1 + \ldots + c_{uv} x_u y_v \end{array}$$

uz uvjet da varijable:

$$x_1, \ldots, x_u \text{ i } y_1, \ldots, y_v$$

zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \ldots x_u \geqq 0, \quad y_1 \geqq 0, \ldots y_v \geqq 0$$

i linearne nejednadžbe:

$$\begin{array}{ll} a_{11} x_1 + \ldots - a_{1u} x_u \leqq p_1 & b_{11} y_1 + \ldots + b_{1v} y_v \leqq q_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} x_1 + \ldots + a_{ru} x_u \leqq p_r & b_{s1} y_1 + \ldots + b_{sv} y_v \leqq q_s \end{array}$$

Pri tom su indeksi proizvoljni naravni brojevi, a svi koeficijenti proizvoljni su realni brojevi.

Slično možemo izraziti odgovarajući problem bilinearnog programiranja za minimum funkcije cilja. U nastavku ćemo razmatrati samo problem za maksimum; slično razmatranje za minimum prepuštamo čitaocu.

U postavljenom problemu nastupaju dvije nezavisne grupe varijabla koje međusobno nisu povezane nikakvim zajedničkim uvjetom. Varijable obiju grupa zadovoljavaju uvjete nenegativnosti i svaka grupa varijabli zadovoljava svoje nejednadžbe ili jednadžbe. Funkcija cilja je bilinearna forma tih varijabla.

Kao što je to u linearnom programiranju običaj, najprije promijenimo uvjetne nejednadžbe u jednadžbe tako da uvedemo dopunske varijable. Nakon uvođenja dviju skupina dopunskih varijabla:

$$x_{u+1}, \ldots, x_{u+r} = x_m \text{ i } y_{v+1}, \ldots, y_{v+r} = y_n$$

dobivamo slijedeći problem bilinearnog programiranja:

Treba odrediti maksimum bilinearne funkcije cilja:

$$\begin{array}{l} c_{11} x_1 y_1 + \ldots + c_{1n} x_1 y_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c_{m1} x_m y_1 + \ldots + c_{mn} x_m y_n \end{array}$$

uz uvjet da varijable:

$$x_1, \ldots, x_m \text{ i } y_1, \ldots, y_n$$

zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$x_1 \geqq 0, \ldots x_m \geqq 0, \quad y_1 \geqq 0, \ldots y_n \geqq 0$$

i linearne jednadžbe:

$$\begin{array}{ll} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1m} x_m = p_1 & b_{11} y_1 + \ldots + b_{1n} y_n = q_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1} x_1 + \ldots + a_{rm} x_m = p_r & b_{s1} y_1 + \ldots + b_{sn} y_n = q_s \end{array}$$

Da bismo problem izrazili kraće u matričnom obliku, uvedemo neke matrice. Matrica:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1u} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{ru} & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|$$

ima red r x m i određuje koeficijente varijabla u prvoj grupi jednadžbi. Matrica:

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{matrix} b_{11} & \ldots & b_{1v} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \ldots & b_{sv} & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|$$

ima red s x n i određuje koeficijente varijabla u drugoj grupi uvjetnih jednadžbi. Matrica:

$$\mathbf{C} = \left\| \begin{matrix} c_{11} & \ldots & c_{1v} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{u1} & \ldots & c_{uv} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|$$

ima red m x n i određuje koeficijente u funkciji cilja. Matrica reda r x 1:

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{matrix} \right\| = \{p_1, \ldots, p_r\}$$

određuje desne strane prve grupe jednadžbi. Matrica reda s x 1:

$$\mathbf{Q} = \left\| \begin{matrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{matrix} \right\| = \{q_1, \ldots, q_s\}$$

određuje desne strane druge grupe jednadžbi. Matrica reda m x 1:

$$\mathbf{X} = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} \right\| = \{x_1, \ldots, x_m\}$$

određuje prvu grupu varijabla, dok matrica reda n x 1:

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix} = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

određuje drugu grupu varijabla.

Nakon uvođenja tih matrica problem bilinearnog programiranja možemo izraziti ovako:

Treba odrediti maksimum bilinearne funkcije cilja:

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^T \mathbf{C}\, \mathbf{Y}$$

uz uvjet da matrice ili vektori **X** i **Y** zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}$$

i matrične jednadžbe:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q}$$

Ovako izraženi problem bilinearnog programiranja u kojem nastupaju dvije odvojene grupe varijabla koje nisu ni u kakvoj međusobnoj zavisnosti prevedemo u neki problem bilinearnog programiranja u kojem obje grupe varijabla udružimo u jednu samu; tako dobivamo problem samo s jednim sistemom uvjetnih jednadžbi U matričnom obliku dobivamo nakon udruženja samo jednu uvjetnu matričnu jednadžbu.

Skup svih gore opredijeljenih matrica ili vektora **X** sastavlja vektorski prostor P (**X**), a skup svih matrica ili vektora **Y** sastavlja vektorski prostor P (**Y**). Vektorski prostor P (**X**) ima m dimenzija, dok ih vektorski prostor P (**Y**) ima n. Kartezijski produkt vektorskih prostora P (**X**) i P (**Y**) je vektorski prostor P (**Z**); njega sastavlja skup svih matrica ili vektora **Z** sa strukturom:

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Vmatrix}$$

Vektorski prostor P (**Z**) ima m + n dimenzija.

Svaki vektor **X** vektorskog prostora P (**X**) možemo izraziti odgovarajućim vektorom **Z** vektorskog prostora P (**Z**) ovako:

$$\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}\ \mathbf{0} \end{Vmatrix} \mathbf{Z}$$

Pri tom jedinična matrica **E** ima red m, dok nulmatrica **0** ima red m x n.

Slično možemo izraziti i svaki vektor **Y** vektorskog prostora P (**Y**) odgovarajućim vektorom **Z** vektorskog prostora P (**Z**) ovako:

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0}\ \mathbf{E} \end{Vmatrix} \mathbf{Z}$$

Pri tom je nulmatrica reda n x m, dok je jedinična matrica **E** reda n.

Uvedimo još neke matrice. Matrica:

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rm} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{s1} & \dots & b_{sn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{Vmatrix}$$

ima red $(r + s) \times (m + n)$. Matrica:

$$\mathbf{R} = \begin{Vmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{Vmatrix} = \{p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s\}$$

je vektor stupac koji ima $r + s$ komponenata. Matrica:

$$\mathbf{F} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{m1} & \dots & c_{mn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

ima red $(m + n) \times (m + n)$.

Nakon uvođenja ovih matrica prvobitni se uvjeti nenegativnosti $\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}$ i $\mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}$ udružuju u samo jedan uvjet nenegativnosti $\mathbf{Z} \geqq \mathbf{0}$; matrične jednadžbe $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{P}$ i $\mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q}$ udružuju se u svega jednu matričnu jednadžbu $\mathbf{D}\,\mathbf{Z} = \mathbf{R}$, dok bilinearna funkcija cilja dobiva oblik $f(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{T}\,\mathbf{F}\,\mathbf{Z}$. Tako prvobitni problem bilinearnog programiranja s odvojenim uvjetnim jednadžbama prevedemo u slijedeći bilinearni program s udruženim uvjetnim jednadžbama:

Treba odrediti maksimum bilinearne funkcije cilja:

$$f(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{T}\,\mathbf{F}\,\mathbf{Z}$$

kod uvjeta da matrica ili vektor $\mathbf{Z}$ zadovoljava uvjet nenegativnosti

$$\mathbf{Z} \geqq \mathbf{0}$$

i jednadžbi:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{Z} = \mathbf{R}$$

2. Osobine mogućih rješenja

U prijašnjoj smo točki opći problem bilinearnog programiranja za maksimum funkcije cilja izrazili na dva ekvivalentna načina. Prvobitni bilinearni program s dvije odvojene grupe uvjeta izrazili smo ukratko ovako:

$$\mathrm{BP}: \mathbf{X} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q}; \quad f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^{T}\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

Nakon opisanog udruživanja međutim bilinearni program sa svega jednom grupom uvjeta izrazili smo ukratko ovako:

$$\mathrm{BP}: \mathbf{Z} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{D\,Z} = \mathbf{R};\ f(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}\,\mathbf{Z}$$

Dva vektora ili dvije točke $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ nazivamo mogućim rješenjem bilinearnog programa ako $\mathbf{X}$ zadovoljava uvjet nenegativnosti i jednadžbu $\mathbf{A\,X} = \mathbf{P}$ i ako $\mathbf{Y}$ zadovoljava uvjet nenegativnosti i jednadžbu $\mathbf{B\,Y} = \mathbf{Q}$. Isto tako vektor ili točku $\mathbf{Z}$ nazivamo mogućim rješenjem bilinearnog programa ako zadovoljava uvjet nenegativnosti i jednadžbu $\mathbf{D\,Z} = \mathbf{R}$. Moguće rješenje bilinearnog programa je optimalno ako funkcija cilja ima maksimum.

Uvjeti koje zadovoljava vektor ili točka $\mathbf{X}$ su takvi kakve smo susreli pri linearnom programiranju. Stoga je u ekonomski značajnim problemima skup svih točaka $\mathbf{X}$ koje zadovoljavaju ove uvjete konveksan poliedar. Taj poliedar označimo sa K_x, on je dio vektorskog prostora $P(\mathbf{X})$ i ima ekstremne točke

$$\mathbf{E}_y^1,\ \ldots,\ \mathbf{E}_x^u$$

Iz istih je razloga skup točaka $\mathbf{Y}$ koje zadovoljavaju dane uvjete također konveksan poliedar. Taj poliedar označimo sa K_y, on je dio vektorskog prostora $P(\mathbf{Y})$ i ima ekstremne točke:

$$\mathbf{E}_y^1,\ \ldots,\ \mathbf{E}_y^v$$

Također je i skup točaka $\mathbf{Z}$ koje zadovoljavaju dane uvjete konveksan poliedar K_z u vektorskom prostoru $P(\mathbf{Z})$.

Za moguća rješenja prvobitnog bilinearnog programa s odvojenim uvjetima i drugog programa s udruženim uvjetima vrijede slijedeće dvije izreke:

1. *izreka. Kartezijski produkt točaka* $\mathbf{X}$ *i* $\mathbf{Y}$ *koje sastavljaju moguće rješenje prvobitnog bilinearnog programa je moguće rješenje* $\mathbf{Z}$ *drugog programa.*

Dokaz. Budući da točke $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ sastavljaju moguće rješenje prvobitnog bilinearnog programa, to one odgovaraju uvjetima nenegativnosti; njihov kartezijski produkt:

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Vmatrix}$$

zbog toga također zadovoljava uvjet nenegativnosti. Kako točke $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ sastavljaju dalje i moguće rješenje prvobitnog programa, to odgovaraju jednadžbama $\mathbf{A\,X} = \mathbf{P}$ i $\mathbf{B\,Y} = \mathbf{Q}$; stoga njihov kartezijski produkt zadovoljava jednadžbu:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{Vmatrix}$$

Iz toga slijedi da njihov kartezijski produkt $\mathbf{Z}$ zadovoljava jednadžbu $\mathbf{D\,Z} = \mathbf{R}$. Točka $\mathbf{Z}$ je dakle moguće rješenje novog bilinearnog programa s udruženim uvjetima. To je i trebalo dokazati.

Iz ove izreke slijedi da je kartezijski produkt proizvoljne točke $\mathbf{X}$ konveksnog poliedra K_x i proizvoljne točke $\mathbf{Y}$ konveksnog poliedra K_y neka točka $\mathbf{Z}$ konveksnog poliedra K_z.

2. *izreka. Svako moguće rješenje* **Z** *novog bilinearnog programa s udruženim uvjetima je kartezijski produkt nekih dviju točaka* **X** i **Y** *koje sastavljaju moguće, rješenje prvobitnog programa s odvojenim uvjetima.*

Dokaz. Kako je točka **Z** moguće rješenje drugog programa, to zadovoljava uvjet nenegativnosti; kako je točka **Z** kartezijski produkt točaka **X** i **Y**, to i točke **X** i **Y** zadovoljavaju uvjet nenegativnosti. Budući da je **D Z** = **R**, to važi jednadžba:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{Vmatrix}$$

Iz toga pak slijedi da točke **X** i **Y** zadovoljavaju jednadžbe **A X** = **P** i **B Y** = **Q**. Točke **X** i **Y** sastavljaju zbog toga moguće rješenje prvobitnog bilinearnog programa, a to je i trebalo dokazati.

Iz dokazane izreke slijedi da je svaka točka **Z** konveksnog poliedra K_z kartezijski produkt neke točke **X** konveksnog poliedra K_x i neke točke **Y** konveksnog poliedra K_y.

Za točke **X**, **Y** i **Z** konveksnih poliedara K_x, K_y i K_z vrijede slijedeće izreke:

1. *izreka. Kartezijski produkt dviju neekstremnih točaka* **X** i **Y** *konveksnih poliedara* K_x i K_y *je neekstremna točka* **Z** *konveksnog poliedra* K_z.

Dokaz. Kako je **X** točka konveksnog poliedra K_x, to je možemo izraziti kao konveksni linearni sastav ekstremnih točaka poliedra na slijedeći način:

$$\mathbf{X} = p_1 \mathbf{E}_x^1 + \ldots + p_u \mathbf{E}_x^u$$

Pri tom je:

$$0 \leqq p_1 \leqq 1, \ldots, 0, \leqq p_u \leqq 1; \; p_1 + \ldots + p_u = 1$$

Kako **X** nije ekstremna točka poliedra, to su od koeficijenata konveksnog linearnog sastava pozitivna najmanje dva. Budući da je i **Y** točka konveksnog poliedra K_y, to je možemo izraziti kao konveksni linearni sastav ekstremnih točaka poliedra na slijedeći način:

$$\mathbf{Y} = q_1 \mathbf{E}_y^1 + \ldots + q_v \mathbf{E}_y^v$$

Pri tom je:

$$0 \leqq q_1 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq q_v \leqq 1; q_1 + \ldots + q_v = 1$$

Budući da **Y** nije ekstremna točka ovog poliedra, to su među koeficijentima konveksnog linearnog sastava pozitivna najmanje dva.

Ako uzmemo u obzir oba gornja zapisa točaka **X** i **Y**, njihov kartezijski produkt možemo pisati ovako:

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} p_1 \mathbf{E}_x^1 + \ldots + p_u \mathbf{E}_x^u \\ q_1 \mathbf{E}_y^1 + \ldots + q_v \mathbf{E}_y^v \end{Vmatrix} = \sum_{i=1}^{i=u} \sum_{v=1}^{j=v} p_i q_j \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_x^i \\ \mathbf{E}_y^j \end{Vmatrix}$$

Kako je za sve parove indeksa

$$0 \leqq p_i q_j \leqq 1$$

i kako je:

$$\sum_{i=1}^{i=u} \sum_{j=1}^{j=v} p_i q_j = 1$$

to je kartezijski produkt točaka **X** i **Y** konveksni linearni sastav ekstremnih točaka konveksnog poliedra K_z. Budući da su u tom konveksnom linearnom sastavu pozitivna najmanje četiri koeficijenta, to je kartezijski produkt točaka **X** i **Y** konveksni linearni sastav najmanje četiriju ekstremnih točaka konveksnog poliedra K_z. Stoga taj kartezijski produkt nije ekstremna točka poliedra K_z, što je i trebalo dokazati.

2. *izreka. Kartezijski produkt neekstremne točke* **X** *poliedra* K_x *i ekstremne točke* $\mathbf{E}_y^j$ *poliedra* K_y *je neekstremna točka poliedra* K_z.

Dokaz. Neekstremnu točku **X** poliedra K_x možemo izraziti kao konveksni linearni sastav ekstremnih točaka poliedra na slijedeći način:

$$\mathbf{X} = p_1 \mathbf{E}_x^1 + \dots + p_u \mathbf{E}_x^u$$

U ovom linearnom sastavu pozitivna su najmanje dva koeficijenta. Kartezijski produkt točaka **X** i $\mathbf{E}_y^j$ možemo napisati i ovako:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{E}_y^j \end{matrix} \right\| = p_1 \left\| \begin{matrix} \mathbf{E}_x^1 \\ \mathbf{E}_y^j \end{matrix} \right\| + \dots + p^u \left\| \begin{matrix} \mathbf{E}_x^u \\ \mathbf{E}_y^j \end{matrix} \right\|$$

Kako su u ovom konveksnom linearnom sastavu ekstremnih točaka poliedra K_z pozitivna najmanje dva koeficijenta, to kartezijski produkt nije ekstremna točka poliedra K_z, a to je i trebalo dokazati. Na sličan način dokažemo:

3. *izreka: Kartezijski produkt ekstremne točke* $\mathbf{E}_x^i$ *poliedra* K_x *i neekstremne točke* **Y** *poliedra* K_y *je neekstremna točka poliedra* K_z.

4. *izreka: Kartezijski produkt ekstremne točke* $\mathbf{E}_x^i$ *poliedra* K_x *i ekstremne točke* $\mathbf{E}_y^j$ *poliedra* K_y *je ekstremna točka poliedra* K_z.

Dokaz. Uzmimo da kartezijski produkt:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{E}_x^i \\ \mathbf{E}_y^j \end{matrix} \right\|$$

nije ekstremna točka poliedra K_z. U tom primjeru postojale bi u poliedru K_z barem dvije točke:

$$\mathbf{Z}^1 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{X}^1 \\ \mathbf{Y}^1 \end{matrix} \right\| \quad \text{i} \quad \mathbf{Z}^2 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{X}^2 \\ \mathbf{Y}^2 \end{matrix} \right\|$$

tako da bi gornji kartezijski produkt bio njihov konveksni linearni sastav. Bila bi ispunjena jednadžba:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{E}_x^i \\ \mathbf{E}_y^j \end{matrix} \right\| = p \left\| \begin{matrix} \mathbf{X}^1 \\ \mathbf{Y}^1 \end{matrix} \right\| + q \left\| \begin{matrix} \mathbf{X}^2 \\ \mathbf{Y}^2 \end{matrix} \right\|$$

kod uvjeta:

$$0 < p < 1, \ 0 < q < 1, \ p + q = 1$$

Iz te bi jednadžbe slijedile jednadžbe:

$$\mathbf{E}_x^1 = p\,\mathbf{X}^1 + q\,\mathbf{X}^2 \text{ i } \mathbf{E}_y^j = p\,\mathbf{Y}^1 + q\,\mathbf{Y}^2$$

Ekstremne točke $\mathbf{E}_x^1$ i $\mathbf{E}_y^j$ bi dakle bile konveksni linearni sastavi po dvije druge točke. To je međutim protuslovje i izreka je dokazana.

5. *izreka. Svaka ekstremna točka* $\mathbf{E}_z$ *konveksnog poliedra* K_z *je kartezijski produkt neke ekstremne točke* $\mathbf{E}_x$ *poliedra* K_x *i neke ekstremne točke* $\mathbf{E}_y$ *poliedra* K_y.

Dokaz. Ako izreka ne bi važila, onda bi za ekstremnu točku $\mathbf{E}_z$ poliedra K_z postojala jedna od ovih triju jednadžbi:

$$\mathbf{E}_z = \begin{Vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{E}_y \end{Vmatrix} \text{ ili } \mathbf{E}_z = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{Y} \end{Vmatrix} \text{ ili } \mathbf{E}_z = \begin{Vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Vmatrix}$$

Pri tome bi $\mathbf{X}$ bila neka neekstremna točka poliedra K_x i $\mathbf{Y}$ neka neekstremna točka K_y. Da prva jednadžba ne može važiti, vidimo iz slijedećeg: kako je $\mathbf{X}$ neekstremna točka K_x, to je možemo napisati kao konveksni linearni sastav ekstremnih točaka poliedra:

$$\mathbf{X} = p_1\,\mathbf{E}_x^1 + \ldots + p_u\,\mathbf{E}_x^u$$

U ovom su linearnom sastavu barem dva koeficijenta pozitivna. Po prvoj jednadžbi točka $\mathbf{E}_z$ mogla bi se izraziti ovako:

$$\mathbf{E}_z = p_1 \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_x^1 \\ \mathbf{E}_y \end{Vmatrix} + \ldots + p_u \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_x^u \\ \mathbf{E}_y \end{Vmatrix}$$

I u ovom konveksnom linearnom sastavu pozitivna su najmanje dva koeficijenta. Ekstremnu točku $\mathbf{E}_z$ bilo bi moguće izraziti kao konveksni linearni sastav barem dviju drugih točaka. To je međutim protuslovje. Slično dokažemo još da ne važi ni druga ni treća jednadžba, pa je tako izreka dokazana.

Iz dokazanih izreka slijedi da je konveksni poliedar K_z kartezijski produkt konveksnih poliedara K_x i K_y; njegove ekstremne točke su svi mogući kartezijski produkti po jedne ekstremne točke poliedra K_x i po jedne ekstremne točke poliedra K_x. Zato konveksni poliedar K_z ima slijedeće ekstremne točke:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}_z^{11} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_x^1 \\ \mathbf{E}_y^1 \end{Vmatrix} & \ldots & \mathbf{E}_z^{1v} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_x^1 \\ \mathbf{E}_y^v \end{Vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{E}_z^{u1} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_x^u \\ \mathbf{E}_y^1 \end{Vmatrix} & \ldots & \mathbf{E}_z^{uv} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_x^u \\ \mathbf{E}_y^v \end{Vmatrix} \end{array}$$

3. Lokalna optimalna moguća rješenja

Kao što je kod iteracionih metoda uobičajeno, tako i numeričko rješavanje problema bilinearnog programiranja započinjemo s nekim poznatim mogućim rješenjem; iz njega onda uzastopnim iteracijama izračunavamo sve bolja rješenja dok ne dođemo do optimalnog mogućeg rješenja.

Uzmimo problem bilinearnog programiranja za maksimum funkcije cilja kao što smo ga u prvoj točki ovog poglavlja izrazili u dva oblika, i to s odvojenim uvjetima:

$$\text{BP}: \mathbf{X} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{P},\ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q};\ f(\mathbf{XY}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

i s udruženim uvjetima:

$$\text{BP}: \mathbf{Z} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{D}\,\mathbf{Z} = \mathbf{R};\ f(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}\mathbf{Z}$$

Pretpostavimo da nam je već poznato prvo moguće od **0** različito rješenje bilinearnog programa:

$$\mathbf{Z}^{11} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{X}^{1} \\ \mathbf{Y}^{1} \end{matrix} \right\|$$

Kako je ovo moguće rješenje, to su ispunjeni uvjeti nenegativnosti:

$$\mathbf{X}^{1} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{Y}^{1} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{Z}^{11} \geqq \mathbf{0}$$

a ispunjene su i uvjetne jednadžbe:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X}^{1} = \mathbf{P},\ \mathbf{B}\,\mathbf{Y}^{1} = \mathbf{Q},\ \mathbf{D}\,\mathbf{Z}^{11} = \mathbf{R}$$

Za ovo moguće rješenje bilinearna funkcija cilja ima vrijednost:

$$f(\mathbf{X}^{1}, \mathbf{Y}^{1}) = (\mathbf{X}^{1})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}^{1} = f(\mathbf{Z}^{11}) = (\mathbf{Z}^{11})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}\,\mathbf{Z}^{11}$$

Iz ovog mogućeg rješenja izračunamo drugo moguće rješenje bilinearnog programa na slijedeći način:

U konveksnom poliedru K_x uzmemo točku $\mathbf{X}^1$ koja sastavlja prvo moguće rješenje. Ovu točku uvrstimo u bilinearnu funkciju cilja $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ i dobivamo novu funkciju $f(\mathbf{X}^1, \mathbf{Y})$, koja je linearna s obzirom na koordinate točke $\mathbf{Y}$ kao varijable: ovoj funkciji izračunamo maksimum. Pri tom se radi o rješavanju slijedećeg linearnog programa:

$$\text{LP}: \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q};\ f(\mathbf{X}^{1}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{X}^{1})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

Ovaj linearni program riješimo nekom poznatom metodom. Optimalno moguće rješenje $\mathbf{Y}^2$ ovog linearnog programa je neka ekstremna točka konveksnog poliedra K_y, a odgovarajuća najveća vrijednost funkcije cilja jednaka je $f(\mathbf{X}^1, \mathbf{Y}^2)$. Kako je to optimalno moguće rješenje linearnog programa, to važi nejednadžba:

$$f(\mathbf{X}^{1}, \mathbf{Y}^{1}) \leqq f(\mathbf{X}^{1}, \mathbf{Y}^{2})$$

Ovaj račun ponovimo na sličan način, no ipak tako da u konveksnom poliedru K_y uzmemo baš izračunanu točku $\mathbf{Y}^2$. Tu točku uvrstimo u bilinearnu funkciju cilja $f(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, pa dobivamo novu funkciju $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}^2)$ koja je linearna s obzirom na koordinate točke $\mathbf{X}$ kao varijable. Toj funkciji izračunamo maksimum. Pri tom se radi o rješavanju slijedećeg linearnog programa:

$$\text{LP}: \mathbf{X} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{P};\ f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}^{2}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}^{2}$$

Linearni program riješimo nekom metodom. Optimalno moguće rješenje $\mathbf{X}^2$ ovog linearnog programa je neka ekstremna točka konveksnog poliedra K_x, a odgovarajuća najveća vrijednost funkcije cilja jednaka je $f(\mathbf{X}^2, \mathbf{Y}^2)$. Budući da je to optimalno moguće rješenje linearnog programa, važi nejednadžba:

$$f(\mathbf{X}^1, \mathbf{Y}^2) \leqq f(\mathbf{X}^2, \mathbf{Y}^2)$$

Tako smo završili prvu iteraciju i izračunali drugo moguće rješenje:

$$\mathbf{Z}^{22} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{X}^2 \\ \mathbf{Y}^2 \end{matrix} \right\|$$

Za to rješenje bilinearna funkcija cilja ima vrijednost:

$$f(\mathbf{X}^2, \mathbf{Y}^2) = (\mathbf{X}^2)^T \mathbf{C}\, \mathbf{Y}^2 = f(\mathbf{Z}^{22}) = (\mathbf{Z}^{22})^T \mathbf{F}\, \mathbf{Z}^{22}$$

Budući da zbog gornjih dviju jednadžbi za prva dva moguća rješenja važi nejednadžba:

$$f(\mathbf{X}^1, \mathbf{Y}^1) \leqq f(\mathbf{X}^2, \mathbf{Y}^2),$$

to je drugo moguće rješenje bolje od prvog ili mu je barem jednako.

Kako je $\mathbf{X}^2$ ekstremna točka poliedra K_x, a $\mathbf{Y}^2$ ekstremna točka poliedra K_y, to je $\mathbf{Z}^{22}$ ekstremna točka poliedra K_z. Iz toga slijedi da je drugo moguće rješenje bilinearnog programa ekstremna točka poliedra K_z.

Slično kao što smo započeli prvu iteraciju s prvim mogućim rješenjem $\mathbf{Z}^{11}$, počinjemo drugu iteraciju s drugim mogućim rješenjem $\mathbf{Z}^{22}$. U bilinearnu funkciju cilja uvrstimo točku $\mathbf{X}^2$ i dobivamo za $\mathbf{Y}$ linearni program:

$$\text{LP:}\ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q};\ f(\mathbf{X}^2, \mathbf{Y}) = (\mathbf{X}^2)^T \mathbf{C}\, \mathbf{Y}$$

Za optimalno moguće rješenje $\mathbf{Y}^3$ ovog linearnog programa bilinearna funkcija ima vrijednost $f(\mathbf{X}^2, \mathbf{Y}^3)$, koja nije manja od već izračunane vrijednosti $f(\mathbf{X}^2, \mathbf{Y}^2)$. Izračunano rješenje $\mathbf{Y}^3$ uvrstimo u bilinearnu funkciju cilja pa dobivamo za $\mathbf{X}$ linearni program:

$$\text{LP:}\ \mathbf{X} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{P};\ f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}^3) = \mathbf{X}^T \mathbf{C}\, \mathbf{Y}^3$$

Za optimalno moguće rješenje $\mathbf{X}^3$ ovog linearnog programa bilinearna funkcija ima vrijednost $f(\mathbf{X}^3, \mathbf{Y}^3)$, koja nije manja od prije izračunane vrijednosti $f(\mathbf{X}^2, \mathbf{Y}^3)$. Nakon završene druge iteracije dobivamo treće moguće rješenje bilinearnog programa:

$$\mathbf{Z}^{33} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{X}^3 \\ \mathbf{Y}^3 \end{matrix} \right\|$$

Za ovo rješenje bilinearna funkcija cilja ima vrijednost:

$$f(\mathbf{X}^3, \mathbf{Y}^3) = (\mathbf{X}^3)^T \mathbf{C}\, \mathbf{Y}^3 = f(\mathbf{Z}^{33}) = (\mathbf{Z}^{33})^T \mathbf{F}\, \mathbf{Z}^{33}$$

Izračunana moguća rješenja bilinearnog programa zadovoljavaju nejednadžbe:

$$f(\mathbf{Z}^{11}) \leqq f(\mathbf{Z}^{22}) \leqq f(\mathbf{Z}^{33})$$

Ponavljanjem iteracija dobivamo sve bolja moguća rješenja koja su, od uključivo drugog, ekstremne točke konveksnog poliedra K_z. Računanje je završeno čim se neko moguće rješenje ponavlja jer se onda više ne može poznato moguće rješenje još poboljšati. Ako je:

$$\mathbf{Z}^{nn} = \mathbf{Z}^{n-1,\, n-1}$$

onda se računanje završava nakon n iteracija. Kako je broj ekstremnih točaka poliedra K_z konačan, to prije ili kasnije dolazi do ponavljanja mogućeg rješenja i do završetka računanja opisanom metodom iteracija.

Bilinearna funkcija cilja ima maksimum u nekoj ekstremnoj točki poliedra K_z. Funkcija pak može imati u nekim primjerima maksimume u više ekstremnih točaka toga poliedra; u takvim se primjerima radi o lokalnim maksimumima, koji mogu biti različiti. Svakom početnom mogućem rješenju odgovara optimalno moguće rješenje s određenim lokalnim maksimumima funkcije cilja. Ako je problem takve vrste da bilinearna funkcija cilja ima maksimum u samo jednoj ekstremnoj točki poliedra K_z, onda ga dobivamo po opisanoj iterativnoj metodi bez obzira na to s kojim mogućim rješenjem počinjemo računanje. Ako je pak problem takve vrste da bilinearna funkcija cilja ima više lokalnih maksimuma, onda je maksimum koji izračunamo ovom metodom ovisan o izboru početnog mogućeg rješenja.

Opisanom metodom iteracija u takvom primjeru izračunamo samo jedan od maksimuma bilinearne funkcije, koji međutim nije nužno najveći. Unatoč tome opisana je metoda praktički upotrebljiva zbog toga što uz svako poznato moguće rješenje koje još nije optimalno možemo izračunati bolje moguće rješenje. U problemima takve vrste počinjemo s nekim mogućim rješenjem koje već poznajemo ili koje nam se čini dobro; opisanom metodom iteracija potom ga poboljšavamo do odgovarajućeg optimalnog mogućeg rješenja.

Opisanom metodom iteracija rješavamo uzastopne linearne programe; u njima neizmjence nastupaju matrični argumenti $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$. Rezultate svakoga prethodnog linearnog programa koristimo pri sastavljanju njemu neposredno slijedećeg linearnog programa. Te linearne programe rješavamo nekom poznatom metodom npr. simpleks-metodom. Ako u rješavanju linearnih programa upotrijebimo simpleks-metodu, onda cjelokupni bilinearni program riješimo takozvanom alternativnom simpleks-metodom. Program za elektronsko računanje po toj je metodi izražen i raspoloživ.[1]

Primjer: Uzmimo slijedeći problem bilinearnog programiranja: Treba odrediti vrijednosti varijabla x, y i z koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti:

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0, \qquad z \geqq 0$$

i linearne nejednadžbe:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leqq 12 \qquad & z \leqq 6 \\ 4x + y &\leqq 20 & \end{aligned}$$

tako da bilinearna funkcija cilja:

$$f(x, y, z) = 2xz + 3yz$$

ima maksimum.

[1] I. Kovačić, A. Vadnal: Program za elektronsko računanje problema bilinearnog programiranja u jeziku ALGOL. Ekonomska revija, št. 3, XIX – 1968, str. 325 – 329.

Kartoteka programa. Računski center Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko Unizerze v Ljubljani.

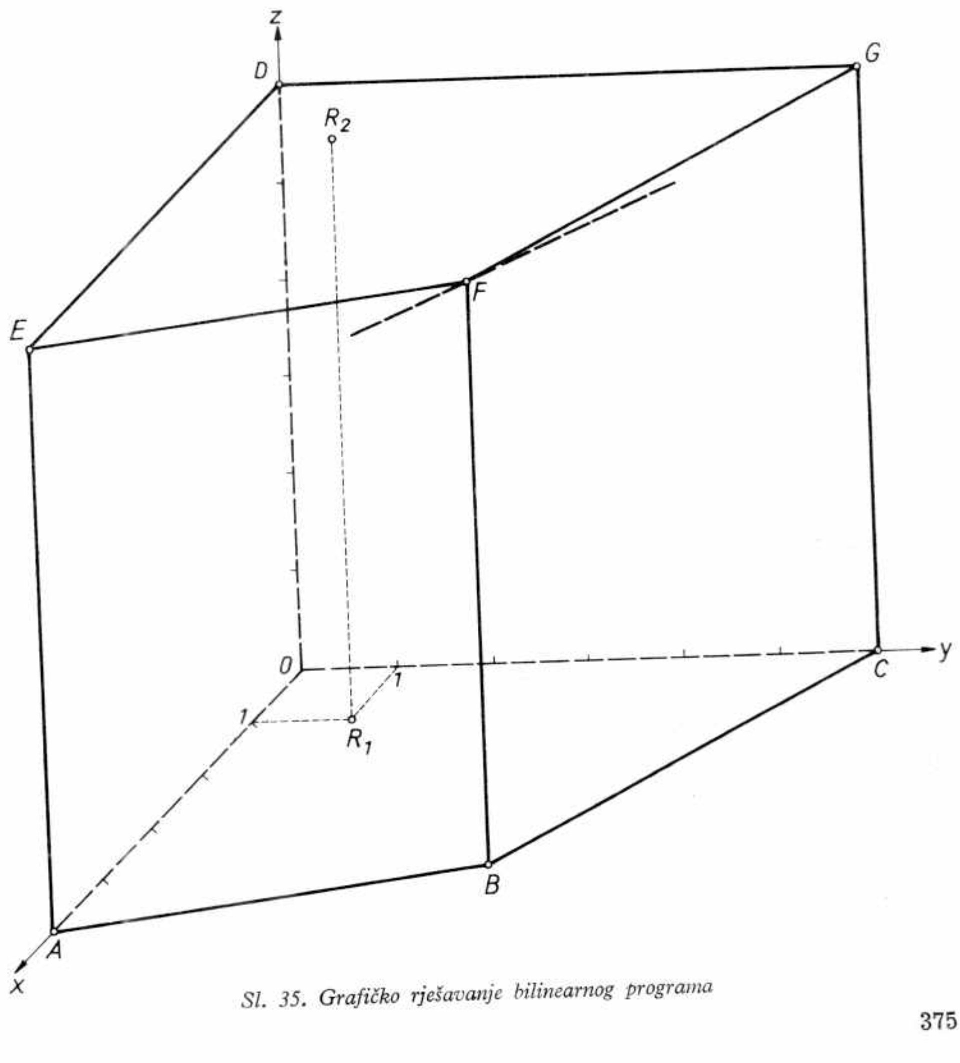
Riješimo problem metodom iteracija tako da započinjemo s parcijalnim mogućim rješenjem $x = 1$, $y = 1$.

Rješavanje problema prikažemo geometrijski u trodimenzionalnom kartezijskom koordinatnom sistemu na sl. 35. Parove vrijednosti varijabla x i y koje zadovoljavaju propisane nejednadžbe prikazuju na ravnini (x, y) točke konveksnog četverokuta ili poliedra K_x, s uglovima ili ekstremnim točkama:

$$O\,(0,0,0),\ A\,(5,0,0),\ B\,(4,4,0),\ C\,(0,6,0)$$

Vrijednosti varijable z koje zadovoljavaju propisane nejednadžbe prikazuju točke dužine ili konveksnog poliedra K_z s krajnjim točkama ili ekstremnim točkama O (0,0,0) i D (0,0,6). Kartezijski produkt poliedra K_x i poliedra K_y je konveksna četverostranična prizma ili poliedar K_z sa 8 uglova ili ekstremnih točaka:

$$O\,(0,0,0),\quad A\,(5,0,0),\quad B\,(4,4,0),\quad C\,(0,6,0)$$
$$D\,(0,0,6),\quad E\,(5,0,6),\quad F\,(4,4,6),\quad G\,(0,6,6)$$



Sl. 35. Grafičko rješavanje bilinearnog programa

U poliedru K_z treba odrediti onu točku u kojoj bilinearna funkcija cilja ima maksimum. Program riješimo metodom iteracija.

1. iteracija. Poznato parcijalno moguće rješenje $x = 1$, $y = 1$ uvrstimo u bilinearnu funkciju cilja, pa za varijablu z dobivamo linearni program:

$$LP: 0 \leqq z \leqq 6; \; f(z) = 5z$$

Taj linearni program ima optimalno moguće rješenje $z = 6$; za to je rješenje vrijednost bilinearne funkcije cilja jednaka $f(1,1,6) = 30$.

U geometrijskom prikazu među točkama s apscisom $x = 1$ i ordinatom $y = 1$ potražimo točku poliedra K u kojoj funkcija $f(z) = 5z$ ima najveću vrijednost; ta točka ima aplikatu $z = 6$. Od početne točke R_1 (1,1,0), kojoj odgovara vrijednost bilinearne funkcije cilja $f(1,1,0) = 0$, prva nas je iteracija dovela do točke R_2 (1,1,6), u kojoj ova funkcija ima vrijednost $f(1,1,6) = 30$.

2. iteracija. Izračunano parcijalno moguće rješenje $z = 6$ uvrstimo u bilinearnu funkciju cilja, pa za varijable x i y dobivamo linearni program:

$$LP: x \geqq 0, \; y \geqq 0, \; x + 2y \leqq 12, \; 4x + y \leqq 20;$$

$$f(x,y) = 12x + 18y$$

Taj linearni program riješimo grafički. Skup njegovih mogućih rješenja prikazuju točke konveksnog četverokuta DEFG.

Linearni program ima optimalno moguće rješenje $x = 4$, $y = 4$; za to je rješenje vrijednost bilinearne funkcije jednaka $f(4,4,6) = 120$. Od točke R_2 (1,1,6), kojoj odgovara vrijednost bilinearne funkcije cilja $f(1,1,6) = 30$, drugom smo iteracijom dobili točku F (4,4,6), u kojoj ova funkcija ima vrijednost 120.

3. iteracija. Izračunano parcijalno moguće rješenje $x = 4$, $y = 4$ uvrstimo u bilinearnu funkciju cilja pa za varijablu z dobivamo linearni program:

$$LP: 0 \leqq z \leqq 6; \; f(z) = 20z$$

Taj linearni program ima optimalno moguće rješenje $z = 6$, kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja $f(4,4,6) = 120$.

U geometrijskom prikazu kod ove iteracije među točkama s apscisom $x = 4$ i ordinatom $y = 4$ potražimo točku poliedra K u kojoj funkcija $f(z) = 20z$ ima najveću vrijednost; ta točka ima aplikatu $z = 6$. Tako dobivamo točku F (4,4,6), u kojoj bilinearna funkcija cilja ima vrijednost $f(4,4,6) = 120$.

Kako se pri trećoj iteraciji vrijednost $z = 6$ ponovila, to smo računanje završili. Početnom parcijalnom mogućem rješenju $x = 1$, $y = 1$ odgovara optimalno moguće rješenje bilinearnog programa:

$$x = 4, \; y = 4, \; z = 6$$

a bilinearna funkcija cilja za ovo rješenje ima najveću vrijednost:

$$f(4,4,6) = 120$$

Vježbe

1. Uzmi slijedeći problem bilinearnog programiranja: Treba odrediti vrijednosti varijabla:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ i } y_1, y_2, y_3, y_4,$$

koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti i linearne nejednadžbe:

$$\begin{array}{llll} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 180 & & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leqq 40 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad \leqq 100 & & y_1 + \qquad y_3 \qquad \leqq 30 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 \leqq 120 & & \qquad y_2 + \qquad y_4 \leqq 20 \end{array}$$

tako da bilinearna funkcija cilja:

$$10x_1y_1 + 8x_2y_2 + 5x_3y_3 + 6x_4y_4$$

ima maksimum. Riješi problem alternativnom simpleks-metodom tako da prvu iteraciju počneš s parcijalnim mogućim rješenjem:

$$x_1 = 90,\ x_2 = 10,\ x_3 = 10,\ x_4 = 70$$

(Rješavanje:
(90, 10, 10, 70)
LP: uvjeti; $900y_1 + 80y_2 + 50y_3 + 420y_4$
Dvije iteracije.
(30, 0, 0, 10)
LP: uvjeti; $300x_1 + 60x_4$
Dvije iteracije.
(100, 0, 0, 80)
LP: uvjeti; $1\,000y_1 + 480y_4$
Dvije iteracije.
(30, 0, 0, 10)
(100, 0, 0, 80; 30, 0, 0, 10; 34 800))

2. Uzmi bilinearni program. Treba odrediti vrijednosti varijabla x, y i u, v koje zadovoljavaju uvjete nenegativnosti i nejednadžbe:

$$\begin{array}{rl} x + 2y \leqq 10 & \qquad u + 3v \leqq 24 \\ x + \ \ y \leqq \ 6 & \qquad u + 2v \leqq 17 \\ 2x + \ \ y \leqq 10 & \qquad 5u + 2v \leqq 45 \end{array}$$

tako da bilinearna funkcija cilja:

$$f(x,y,u,v) = 2xu + 9xv + 8yu + 3yv$$

ima maksimum. Riješi bilinearni program alternativnom simpleks-metodom tako da prvu iteraciju započneš sa slijedećim parcijalnim mogućim rješenjem:

a) $x = 0, \quad y = 5$ (0,5; 9,0; 360. 2 iteracije)

b) $x = 2, \quad y = 4$ (2,4; 7,5; 402. 2 iteracije)

c) $x = 4, \quad y = 2$ (4,2; 7,5; 402. 3 iteracije)

d) $x = 5, \quad y = 0$ (5,0; 0,8; 360. 2 iteracije)

4. Gravitaciona polja poliedara

U općem problemu bilinearnog programiranja za maksimum funkcije cilja koji smo razmatrali u prijašnjim točkama konveksni poliedar K_x parcijalnih mogućih rješenja ima ekstremne točke:

$$\mathbf{E}_x^1, \ldots, \mathbf{E}_y^u$$

dok konveksni poliedar K_y parcijalnih mogućih rješenja ima ekstremne točke:

$$\mathbf{E}_y^1, \ldots, \mathbf{E}_y^v$$

Ako u poliedru K_x izaberemo neku točku $\mathbf{X}$ i uvrstimo je u bilinearnu funkciju cilja, onda za $\mathbf{Y}$ dobivamo linearni program:

$$\text{LP:}\ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q};\ f(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

Taj linearni program ima optimalno moguće rješenje u nekoj ekstremnoj točki poliedra K_y; uzmimo da ga ima u točki $\mathbf{E}_y^h$.

$G_x(\mathbf{E}_y^h)$ neka bude skup svih onih točaka $\mathbf{X}$ poliedra K_x za koje gornji linearni program ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^h$ poliedra K_y. Točka $\mathbf{X}$, za koju taj linearni program ima optimalno rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^h$, gravitira prema toj ekstremnoj točki. Kod takvog značenja riječi gravitirati je $G_x(\mathbf{E}_y^h)$ skup svih onih točaka $\mathbf{X}$ poliedra K_x koje gravitiraju prema ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^h$ poliedra K_y. Po toj se terminologiji skup $G_x(\mathbf{E}_y^h)$ koji je dio poliedra K_x naziva *gravitaciono polje* ekstremne točke $\mathbf{E}_y^h$ poliedra K_y. Stoga ovo gravitaciono polje definiramo ovako:

Gravitaciono polje ekstremne točke $\mathbf{E}_y^h$ poliedra K_y je skup $G_x(\mathbf{E}_y^h)$ svih onih točaka $\mathbf{X}$ poliedra K_x za koje odgovarajući linearni program:

$$\text{LP:}\ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q};\ f(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}^r\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^h$.

Ekstremnim točkama:

$$\mathbf{E}_y^1, \ldots, \mathbf{E}_y^v$$

poliedra K_y u poliedru K_x odgovaraju slijedeća gravitaciona polja:

$$G_x(\mathbf{E}_y^1, \ldots, G_x(\mathbf{E}_y^v)$$

Na sličan način odredimo i gravitaciona polja u poliedru K_y. Ako u poliedru K_y izaberemo neku točku $\mathbf{Y}$ i uvrstimo je u bilinearnu funkciju cilja, onda za $\mathbf{X}$ dobivamo slijedeći linearni program:

$$\text{LP:}\ \mathbf{X} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{P};\ f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

Ovaj linearni program ima optimalno moguće rješenje u nekoj ekstremnoj točki poliedra K_x; uzmimo da ga ima u točki $\mathbf{E}_x^g$.

$G_y(\mathbf{E}_x^g$ neka bude skup svih onih točaka $\mathbf{Y}$ poliedra K_y za koje taj linearni program ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_x^g$; taj skup točaka poliedra K_y je gravitaciono polje ekstremne točke $\mathbf{E}_x^g$ poliedra K_x.

Ekstremnim točkama:

$$\mathbf{E}_x^1, \ldots, \mathbf{E}_x^u$$

poliedra K_x u poliedru K_y odgovaraju uzastopce slijedeća gravitaciona polja:

$$G_y(\mathbf{E}_x^1), \ \ldots, \ G_y(\mathbf{E}_x^v)$$

Za gravitaciona polja u oba poliedra možemo dokazati nekoliko izreka.

1. *izreka. Svako gravitaciono polje konveksni je skup.*

Dokaz. Izreku dokažemo za proizvoljno gravitaciono polje $G_x(\mathbf{E}_y^h)$ koje je dio poliedra K_x; dokaz za gravitaciona polja u poliedru K_y je sličan, pa ga stoga ostavljamo čitaocu. Prema definiciji gravitacionog polja u skup $G_x(\mathbf{E}_y^h)$ spadaju sve one točke $\mathbf{X}$ poliedra K_x za koje linearni program:

$$\text{LP:} \ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q}; \ f(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}^T \mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^h$ poliedra K_y. Zbog definicije konveksnog skupa izreka je ekvivalentna slijedećoj izreci:

Ako točke $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$ spadaju u gravitaciono polje $G_x(\mathbf{E}_y^h)$, onda u to polje spada i svaki njihov konveksni linearni sastav:

$$p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2 \quad (0 \leqq p \leqq 1)$$

Stoga je dovoljno ako dokažemo tu izreku. Uvjet da točka $\mathbf{X}^1$ spada u ovo gravitaciono polje, znači da linearni program:

$$\text{LP:} \ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q}; \ f(\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}^1)^T \mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^h$; u njoj funkcija cilja ima najveću vrijednost:

$$(\mathbf{X}^1)^T \mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^h$$

Uvjet da i točka $\mathbf{X}^2$ spada u ovo gravitaciono polje, znači da linearni program:

$$\text{LP:} \ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q}; \ f(\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}^2)^T \mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^h$; u njoj funkcija cilja ima najveću vrijednost:

$$(\mathbf{X}^2)^T \mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^h$$

Uvjet da konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$ spada u isto gravitaciono polje, znači da linearni program:

$$\text{LP:} \ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q}; \ f(\mathbf{Y}) = (p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T \mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^h$; u njoj funkcija cilja ima vrijednost:

$$(p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T \mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^h$$

Uzmimo da bi posljednji linearni program imao optimalno moguće rješenje u nekoj drugoj točki $\mathbf{Y}$ poliedra K_y a ne u točki $\mathbf{E}_y^h$. U tom primjeru važila bi nejednadžba:

$$(p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y} > (p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^h$$

Iz te nejednadžbe po zakonu distributivnosti za matrice dobivamo nejednadžbu:

$$p\,(\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y} + (1-p)\,(\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y} > p\,(\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^h + (1-p)\,(\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^h$$

Ta je jednadžba ispunjena ako je ispunjena barem jedna od slijedećih dviju nejednadžbi:

$$(\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y} > (\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^h$$
$$(\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y} > (\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^h$$

To međutim nije moguće jer nijedna od ovih dviju nejednadžbi ne važi; ekstremna točka $\mathbf{E}_y^h$ je naime optimalno moguće rješenje kako prvog tako i drugog od gore navedenih linearnih programa. Tako je izreka dokazana.

Gravitaciona polja u poliedru K_x imaju tu osobinu da se međusobno ne pokrivaju osim možda u točkama koje leže na zajedničkoj granici gravitacionih polja. Stoga nijedna unutrašnja točka nekoga gravitacionog polja ne može istovremeno biti i unutrašnja točka nekoga drugog gravitacionog polja. Isto vrijedi i za gravitaciona polja u poliedru K_y. Ova je osobina posljedica slijedeće izreke koja važi za dva određena gravitaciona polja; može se i uopćiti na proizvoljne parove gravitacionih polja.

2. *izreka. Ako točka* $\mathbf{X}^1$ *spada u gravitaciono polje* $G_x(\mathbf{E}_y^1)$ *i ako točka* $\mathbf{X}^2$ *spada u gravitaciono polje* $G_x(\mathbf{E}_y^2)$, *gdje su* $\mathbf{E}_y^1$ i $\mathbf{E}_y^2$ *dvije različite ekstremne točke poliedra* K_y, *onda na pravcu koji spaja točke* $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$ *egzistira najviše jedna točka* $\mathbf{X}$ *tako da spada u oba gravitaciona polja.* To znači da među konveksnim linearnim sastavima točaka $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$:

$$\mathbf{X} = p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2 \quad (0 \leqq p \leqq 1)$$

egzistira najviše jedan takav koji spada u oba gravitaciona polja.

Dokaz. Uvjet da točka $\mathbf{X}^1$ spada u gravitaciono polje $G_x(\mathbf{E}_y^1)$, znači da linearni program:

$$LP: \ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q}: \ f(\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^1$; u njoj funkcija cilja ima najveću vrijednost:

$$(\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^1$$

Uvjet da točka $\mathbf{X}^2$ spada u gravitaciono polje $G_x(\mathbf{E}_y^1)$, znači da linearni program:

$$LP: \ \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q}; \ f(\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}^2$; u njoj funkcija cilja ima najveću vrijednost:

$$(\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^2$$

Uzmimo konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$; to smo napisali već gore. Za određenu vrijednost koeficijenta p konveksni linearni sastav predstavlja točka na pravcu koji spaja točke $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$. Moramo dokazati da egzistira najviše jedna vrijednost koeficijenta p ili najviše jedna točka $\mathbf{X}$ koja spada u oba gravitaciona polja.

Uvjet da konveksni linearni sastav $\mathbf{X}$ točaka $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$ spada u gravitaciono polje $G_x(\mathbf{E}_y^1)$, znači da linearni program:

$$\text{LP: } \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q};\ f(\mathbf{Y}) = (p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^1$; u njoj funkcija cilja ima najveću vrijednost:

$$p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^1$$

Uvjet da konveksni linearni sastav $\mathbf{X}$ točaka $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$ spada u gravitaciono polje $G_x(\mathbf{E}_y^2)$, znači da linearni program:

$$\text{LP: } \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q};\ f(\mathbf{Y}) = (p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^2$; u njoj funkcija cilja ima najveću vrijednost:

$$p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^2$$

Za konveksne linearne sastave koji spadaju istovremeno u oba gravitaciona polja spomenute dvije najmanje vrijednosti funkcije cilja su jednake. Svi takvi konveksni linearni sastavi stoga odgovaraju jednadžbi:

$$(p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^1 = (p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^2$$

Ova je jednadžba obična linearna jednadžba s nepoznanicom p i ima, jer je linearna, samo jedno rješenje. Istovremeno međutim zadovoljava p još i uvjet $0 \leqq p \leqq 1$. Ako jednadžba kod ovog uvjeta nema nijednog rješenja, onda na spojnici točaka $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$ nema nijedne točke koja bi bila zajednička za oba gravitaciona polja. Ako međutim jednadžba kod ovog uvjeta ima neko rješenje, onda ima samo jedno; u tom primjeru na spojnici točaka $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$ egzistira samo jedna točka $\mathbf{X}$ koja spada u oba gravitaciona polja. Izreka je tako dokazana.

3. *izreka. Skup točaka na zajedničkoj granici dviju gravitacionih polja je konveksan.*

Dokaz. Umjesto ove izreke dokazat ćemo ekvivalentnu izreku: Ako točke $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$ leže na zajedničkoj granici dviju gravitacionih polja $G_x(\mathbf{E}_y^1)$ i $G_x(\mathbf{E}_y^2)$, onda i svaki njihov konveksni linearni sastav:

$$\mathbf{X} = p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2 \quad (0 \leqq p \leqq 1)$$

leži na zajedničkoj granici tih dvaju polja.

Ako točka $\mathbf{X}^1$ leži na granici obaju gravitacionih polja, onda ona spada i u prvo i u drugo polje. Njoj odgovarajući linearni program:

$$\text{LP: } \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q};\ f(\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

ima dva optimalna moguća rješenja, prvo u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^1$ i drugo u ekstremnoj točki $\mathbf{E}_y^2$; u njima su vrijednosti funkcije cilja jednake:

$$(\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^1 = (\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^2$$

Slično vrijedi i za točku $\mathbf{X}^2$. Ako točka $\mathbf{X}^2$ leži na zajedničkoj granici tih dvaju gravitacionih polja, onda njoj odgovarajući linearni program ima također dva optimalna moguća rješenja u kojima su i najveće vrijednosti funkcije cilja jednake.

Promatrajmo gore napisani konveksni linearni sastav točaka $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$. Kako točka $\mathbf{X}^1$ spada u gravitaciono polje $G_x(\mathbf{E}_y^1)$ i kako u to polje spada i točka $\mathbf{X}^2$, to u njega spada i svaki konveksni linearni sastav tih dviju točaka; to vrijedi stoga što je gravitaciono polje konveksno. Slično vrijedi i za drugo gravitaciono polje $G_x(\mathbf{E}_y^2)$. Kako točke $\mathbf{X}^1$ i $\mathbf{X}^2$ spadaju u to gravitaciono polje, to u njega spada i svaki njihov konveksni linearni sastav. Stoga njihov konveksni linearni sastav leži na zajedničkoj granici obaju gravitacionih polja.
Izreka je tako dokazana.

Možemo još dokazati da ovom konveksnom linearnom sastavu odgovarajući linearni program:

$$\text{LP: } \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q};\ f(\mathbf{Y}) = (p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y}$$

u oba optimalna moguća rješenja $\mathbf{E}_y^1$ i $\mathbf{E}_y^2$ ima jednake najveće vrijednosti funkcije cilja. U tu svrhu treba dokazati valjanost jednadžbe:

$$(p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^1 = (p\mathbf{X}^1 + (1-p)\,\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^2$$

a ova jednadžba važi, jer važe jednadžbe:

$$(\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^1 = (\mathbf{X}^1)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^2$$

$$(\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^1 = (\mathbf{X}^2)^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{E}_y^2$$

Iz dokazanih izreka slijedi da se poliedar K_x raspada na pojedina gravitaciona polja; ta su polja konveksna i po parovima se ne pokrivaju, osim možda u graničnim točkama. Sve zajedničke granične točke po dvaju gravitacionih polja sastavljaju i konveksni skup. Točke koje se nalaze na zajedničkoj granici dvaju gravitacionih polja leže na hiperravnini koja razgraničuje ova dva polja. Kako je svako gravitaciono polje presjek konveksnog poliedra K_x i poluprostora koje ove hiperravnine određuju, to je i svako gravitaciono polje konveksni poliedar. Stoga se konveksni poliedar K_x raspada na gravitaciona polja:

$$G_x(\mathbf{E}_y^1),\ \ldots,\ G_x(\mathbf{E}_y^v)$$

Ta su polja konveksni poliedri i međusobno se ne pokrivaju osim možda u zajedničkim graničnim točkama.

Slično vrijedi i za gravitaciona polja poliedra K_y. Konveksni poliedar K_x raspada se na gravitaciona polja:

$$G_y(\mathbf{E}_x^1),\ \ldots,\ G_y(\mathbf{E}_x^u)$$

I ta su polja konveksni poliedri i međusobno se ne pokrivaju osim možda u zajedničnim graničnim točkama.

Neka od tih gravitacionih polja mogu biti prazni skupovi.

Ako smo konveksne poliedre K_x i K_y na opisan način podijelili na gravitaciona polja i ako su nam ta polja poznata, onda bilinearni program možemo riješiti a da dalje i ne računamo. Računanje nadomjestimo utvrđivanjem kojem gravitacionom polju pripada neka točka. Cjelokupni postupak temelji se na metodi iteracija, koju smo razmatrali već u prijašnjoj točki.

Za ishodište iteracija uzmemo poznato prvo moguće rješenje:

$$\mathbf{Z}^{11} = \begin{Vmatrix} \mathbf{X}^1 \\ \mathbf{Y}^1 \end{Vmatrix}$$

Ovom rješenju odgovara vrijednost bilinearne funkcije cilja:

$$f(\mathbf{Z}^{11}) = f(\mathbf{X}^1, \mathbf{Y}^1)$$

$\mathbf{X}^1$ je točka poliedra K_x; ustanovimo kojem gravitacionom polju pripada ta točka. Uzmimo da pripada gravitacionom polju $G_x(\mathbf{Y}^2)$. Točka $\mathbf{Y}^2$ spada u poliedar K_y; ustanovimo u koje gravitaciono polje spada ta točka. Uzmimo da spada u gravitaciono polje $G_y(\mathbf{X}^2)$. Tako dobivamo drugo moguće rješenje:

$$\mathbf{Z}^{22} = \begin{Vmatrix} \mathbf{X}^2 \\ \mathbf{Y}^2 \end{Vmatrix}$$

Ovom rješenju odgovara vrijednost bilinearne funkcije cilja:

$$f(\mathbf{Z}^{22}) = f(\mathbf{X}^2, \mathbf{Y}^2)$$

Postupak ponovimo. Za točku $\mathbf{X}^2$ ustanovimo da pripada gravitacionom polju $G_x(\mathbf{Y}^3)$, a za točku $\mathbf{Y}^3$ ustanovimo da pripada gravitacionom polju $G_y(\mathbf{X}^3)$. Tako dobivamo treće moguće rješenje:

$$\mathbf{Z}^{33} = \begin{Vmatrix} \mathbf{X}^3 \\ \mathbf{Y}^3 \end{Vmatrix}$$

Ovom rješenju odgovara vrijednost bilinearne funkcije cilja:

$$f(\mathbf{Z}^{33}) = f(\mathbf{X}^3, \mathbf{Y}^3)$$

Postupak ponavljamo dotle dok se neko moguće rješenje ne ponovi.

Primjer. Razmatrajmo poseban problem bilinearnog programiranja u kojem su konveksni poliedri K_x i K_y konveksni ravninski poligoni. Uzmimo slijedeći problem bilinearnog programiranja:

Treba odrediti maksimum bilinearne funkcije cilja:

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 9x_1y_2 + 8x_2y_1 + 3x_2y_2$$

uz uvjet da varijable zadovoljavaju zahtjev za nenegativnošću:

$$x_1 \geqq 0, \; x_2 \geqq 0 \quad y_1 \geqq 0, \; y_2 \geqq 0$$

i linearne nejednadžbe:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqq 10 & y_1 + 3y_2 &\leqq 24 \\ x_1 + x_2 &\leqq 6 & y_1 + 2y_2 &\leqq 17 \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 10 & 5y_1 + 2y_2 &\leqq 45 \end{aligned}$$

Točke koje prikazuju parove vrijednosti varijabla x_1 i x_2 sastavljaju konveksni poligon na slici 36. gore. Taj poligon ima uglove ili ekstremne točke:

$$O\,(0{,}0),\ E_x^1\,(0{,}5{,})\ E_x^2\,(2{,}4),\ E_x^3\,(4{,}2),\ E_x^4\,(5{,}0)$$

Smjerni koeficijenti kosih stranica ovog poligona su uzastopce jednaki:

$$E_x^1\,E_x^2\colon\quad -1/2$$
$$E_x^2\,E_x^3\colon\quad -1$$
$$E_x^3\,E_x^4\colon\quad -2$$

Točke koje prikazuju parove vrijednosti varijabla y_1 i y_2 sastavljaju konveksni poligon K_y na sl. 36. dolje. Taj poligon ima uglove ili ekttremne točke:

$$O\,(0{,}0),\ E_y^1\,(0{,}8),\ E_y^2\,(3{,}7),\ E_y^3\,(7{,}5),\ E_y^4\,(9{,}0)$$

Smjerni koeficijenti kosih stranica ovog poligona uzastopce su jednaki:

$$E_y^1\,E_y^2\colon\quad -1/3$$
$$E_y^2\,E_y^3\colon\quad -1/2$$
$$E_y^3\,E_y^4\colon\quad -5/2$$

Konveksni poligon K_x podijelimo na gravitaciona polja ovako: na poligonu K_x izaberemo proizvoljnu točku s koordinatama x_1 i x_2. Ako ove dvije vrijednosti uvrstimo u bilinearnu funkciju cilja, onda dobivamo za varijable y_1 i y_2 linearni program s nepromijenjenim uvjetnim nejednadžbama i sa slijedećom funkcijom cilja:

$$f_y\,(y_1,y_2) = (2x_1 + 8x_2)\,y_1 + (9x_1 + 3x_2)\,y_2$$

Ova je funkcija s obzirom na varijable y_1 i y_2 linearna i ima smjerni koeficijent:

$$m_y = -\frac{2x_1 + 8x_2}{9x_1 + 3x_2}$$

Linearni program ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki E_y^1 za one parove vrijednosti varijabla x_1 i x_2 za koje ovaj smjerni koeficijent odgovara nejednadžbi:

$$m_y \geqq -1/3$$

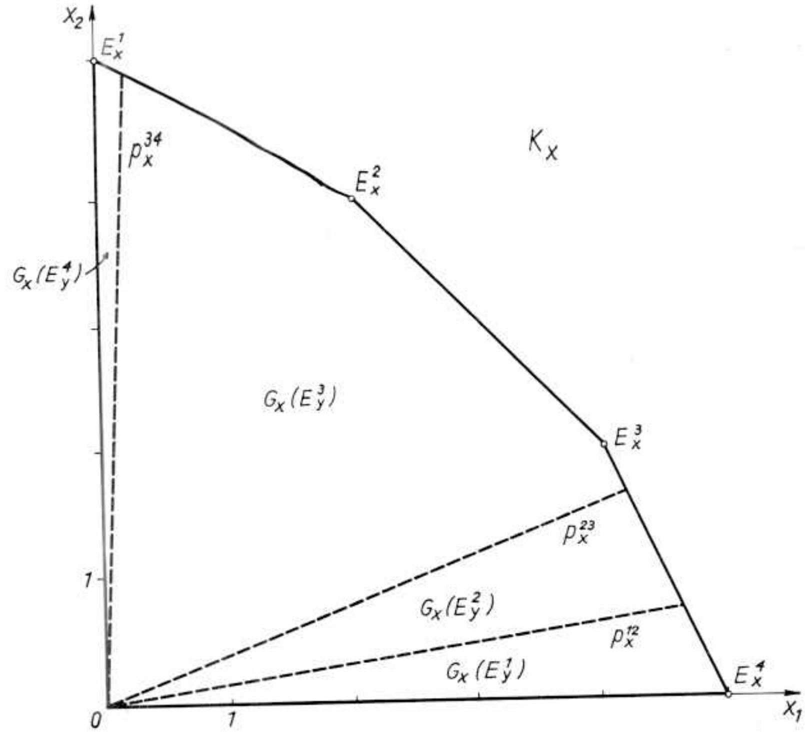
Nakon rješenja jednadžbe:

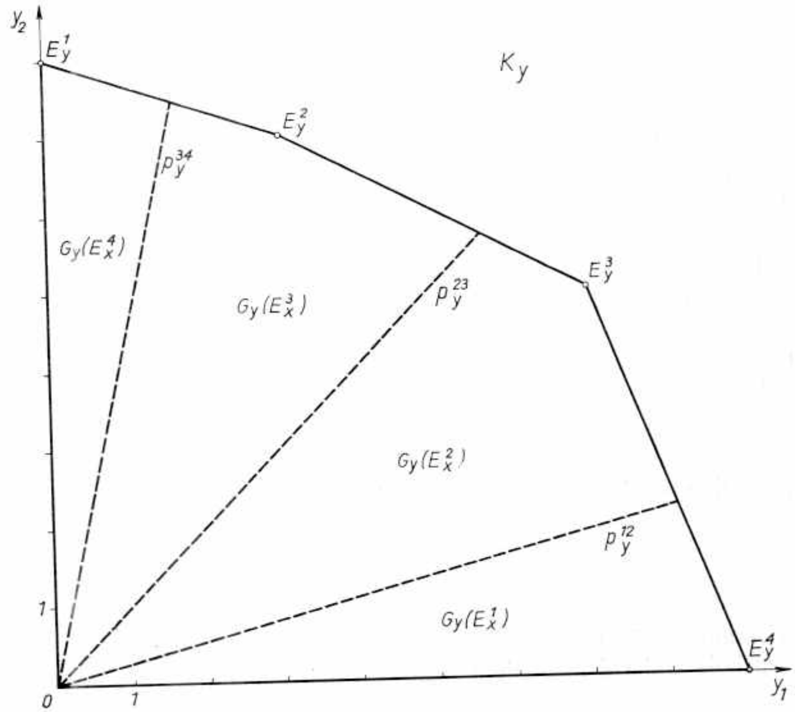
$$\frac{2x_1 + 8x_2}{9x_1 + 3x_2} = \frac{1}{3}$$

ustanovimo da su ovi parovi koordinate točaka koje leže na poligonu K_x između apscise i pravca P_y^{12} s jednadžbom:

$$x_1 - 7x_2 = 0$$

Zbog toga je gravitaciono polje $G_x\,(E_y^1)$ ekstremne točke E_y^1 dio poligona K_y koji leži između apscise i pravca p_y^{12}.





Sl. 36. Gravitaciona polja poligona

Linearni program ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki E_y^2 za one parove vrijednosti varijabla x_1 i x_2 za koje smjerni koeficijent m_y odgovara nejednadžbama:

$$-1/3 \geqq m_y \geqq -1/2$$

Isto kao prije izračunamo da su ovi parovi koordinate točaka koje leže na poligonu K_x između pravca p_y^{12} i pravca p_y^{23} s jednadžbom:

$$5x_1 - 13x_2 = 0$$

Zbog toga je gravitaciono polje $G_x(E_y^2)$ ekstremne točke E_y^2 dio poligona K_x koji leži među pravcima p_x^{12} i p_x^{23}.

Linearni program ima optimalno moguće rješenje u ekstremnoj točki E_y^3 za one parove vrijednosti varijabla x_1 i x_2 za koje smjerni koeficijent m_y odgovara nejednadžbama:

$$-1/2 \geqq m_y \geqq -5/2$$

Točke kojih koordinate zadovoljavaju ovaj uvjet leže na poligonu K_x između pravca p_x^{23} i pravca p_x^{34} s jednadžbom:

$$41x_1 - x_2 = 0$$

Zbog toga je gravitaciono polje $G_x(E_y^3)$ ekstremne točke E_y^3 dio poligona K_x koji leži između pravaca p_y^{23} i p_x^{34}.

Linearni program ima optimalno moguće ješenje u ekstremnoj točki E_y^2 za one parove vrijednosti varijabla x_1 i x_2 za koje smjerni koeficijent m_y odgovara nejednadžbi:

$$m_y \leqq -5/2$$

Točke kojih koordinate zadovoljavaju ovaj uvjet leže na poligonu K_x između pravca p_x^{34} i ordinate. Zbog toga je gravitaciono polje $G_x(E_y^4)$ ekstremne točke E_y^4 onaj dio poligona K_x koji leži između pravca p_x^{43} i ordinate.

Tako smo završili parcelaciju poligona K_x na gravitaciona polja ekstremnih točaka poligona K_y. Slično podijelimo na gravitaciona polja još i poligon K_y.

Na poligonu K_y izaberemo proizvoljnu točku s koordinatama y_1 i y_2. Ako ove dvije vrijednosti uvrstimo u bilinearnu funkciju cilja, onda za varijable x_1 i x_2 dobivamo linearni program s nepromijenjenim uvjetnim nejednadžbama i sa slijedećom funkcijom cilja:

$$f_x(x_1, x_2) = (2y_1 + 9y_2)\,x_1 + (8y_1 + 3y_2)\,x_2$$

Ova je funkcija s obzirom na varijable x_1 i x_2 linearna i ima smjerni koeficijent:

$$m_x = -\frac{2y_1 + 9y_2}{8y_1 + 3y_2}$$

Gravitaciono polje $G_y(E_x^1)$ ekstremne točke E_x^1 sastavljaju one točke poliedra K_y za koje smjerni koeficijent odgovara nejednadžbi:

$$m_x \geqq -1/2$$

Nakon rješenja jednadžbe:

$$-\frac{2y_1 + 9y_2}{8y_1 + 3y_2} = -\frac{1}{2}$$

ustanovimo da je to gravitaciono polje dio poliedra K_y koji leži između apscise i pravca p_y^{12} s jednadžbom:

$$4y_1 - 15y_2 = 0$$

Gravitaciono polje $G_y(E_x^2)$ ekstremne točke E_x^2 sastavljaju one točke poliedra K_y za koje smjerni koeficijent m_x odgovara nejednadžbama:

$$-1/2 \geqq m_x \geqq -1$$

To je gravitaciono polje dio poligona K_y koji leži između pravca p_y^{12} i pravca p_y^{23} s jednadžbom:

$$y_1 - y_2 = 0$$

Gravitaciono polje $G_y(E_x^3)$ ekstremne točke E_x^3 sastavljaju one točke poliedra K_y za koje smjerni koeficijent m_x odgovara nejednadžbama:

$$-1 \geqq m_x \geqq -2$$

To gravitaciono polje dio je poligona K_y koji leži među pravcem p_y^{23} i pravcem p_y^{34} s jednadžbom:

$$14y_1 - 3y_2 = 0$$

Gravitaciono polje $G_y(E_x^4)$ ekstremne točke E_x^4 sastavljaju one točke poliedra K_y za koje smjerni koeficijent m_x odgovara nejednadžbi:

$$m_x \leqq -2$$

To gravitaciono polje dio je poligona K_y koji leži između pravca p_y^{34} i ordinate.

Tako smo završili parcelaciju poligona K_y na gravitaciona polja ekstremnih točaka poligona K_x.

Raspodjelu konveksnih poligona K_x i K_y na gravitaciona polja prikazuje slika 36.

Sada kad poznajemo raspodjelu obaju konveksnih poligona na gravitaciona polja, bilinearni program možemo rješavati bez računanja, samo utvrđivanjem na kojem gravitacionom polju leži neka točka. Kako svi pomoćni linearni međuprogrami imaju optimalno moguće rješenje u nekoj ekstremnoj točki, to ćemo u nastavku pri rješavanju bilinearnog programa uzeti kao početak odmah neku ekstremnu točku. Bilinearni program riješit ćemo četiri puta, svaki put s drugom ekstremnom točkom kao ishodištem. U tome će nam pomoći sl. 36.

1. Rješavanje počinjemo s parcijalnim mogućim rješenjem $y_1 = 0$ & $y_2 = 8$ koje je prikazano ekstremnom točkom E_y^1 (0,8).

E_y^1 leži na gravitacionom polju točke E_x^4.

E_x^4 (5,0) leži na gravitacionom polju točke E_y^1 (0,8). Zbog ponavljanja točke E_y^1 bilinearni program ima lokalno optimalno rješenje:

$$x_1 = 5,\ x_2 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 8,$$

kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja 360.

2. Rješavanje počinjemo s parcijalnim mogućim rješenjem $y_1 = 3$ & $y_2 = 7$ koje je prikazano ekstremnom točkom E_y^2 (3,7).

E_y^2 leži na gravitacionom polju točke E_x^3.

E_x^3 leži na gravitacionom polju točke E_y^3.

E_y^3 leži na gravitacionom polju točke E_x^2.

E_x^2 (2,4) leži na gravitacionom polju točke E_y^3 (7,5).

Zbog ponavljanja točke E_y^3 bilinearni program ima lokalno optimalno rješenje:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ y_1 = 7,\ y_2 = 5,$$

kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja 402.

3. Rješavanje počinjemo s parcijalnim mogućim rješenjem $y_1 = 7$ & $y_2 = 5$ koje je prikazano ekstremnom točkom E_y^3 (7,5).

E_y^3 leži na gravitacionom polju točke E_x^2.

E_x^2 (2,4) leži na gravitacionom polju točke E_y^3 (7,5).

Zbog ponavljanja točke E_y^3 bilinearni program ima lokalno optimalno moguće rješenje:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ y_1 = 7,\ y_2 = 5,$$

kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja 402. S tom točkom kao početnom dobili smo isto optimalno moguće rješenje kao što smo ga dobili kad smo započeli s točkom E_y^2.

4. Rješavanje počinjemo s parcijalnim mogućim rješenjem $y_1 = 9$ & $y_2 = 0$ koje je prikazano ekstremnom točkom E_y^4 (9,0).

E_y^4 leži na gravitacionom polju točke E_x^1.

E_x^1 (0,5) leži na gravitacionom polju točke E_y^4 (9,0).

Zbog ponavljanja točke E_y^4 bilinearni program ima lokalno optimalno moguće rješenje:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ y_y = 9,\ y_1 = 0,$$

kojemu odgovara vrijednost funkcije cilja 360.

Vježbe

1. Uzmi slijedeći problem bilinearnog programiranja: Treba odrediti vrijednosti nenegativnih varijabla x, y i u, v koje zadovoljavaju nejednadžbe:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 12 \qquad\qquad u + v \leq 3 \\ 4x + y &\leq 20 \end{aligned}$$

tako da funkcija cilja:

$$f(x,y;\ u,v) = 7xu + 3xv + 5yu + 8yv$$

ima maksimum. U ovom bilinearnom programu riješi slijedeće zadatke:

a) nacrtaj oba poligona parcijalnih mogućih rješenja;

b) podijeli oba poligona na gravitaciona polja;

c) bilinearni program riješi alternativnom simpleks-metodom tako da započneš s parcijalnim mogućim rješenjem $x = 1$ i $y = 3$;

(0,6; 0,3; 144)

d) bilinearni program riješi s gravitacionim poljima tako da započneš s parcijalnim mogućim rješenjem $x = 1$ i $y = 3$;

(0,6; 0,3; 144)

c) bilinearni program riješi alternativnom simpleks-metodom tako da započneš s parcijalnim mogućim rješenjem $u = 1$ i $v = 1$;

(4,4; 3,0; 144)

f) bilinearni program riješi s gravitacionim poljima tako da započneš s parcijalnim mogućim rješenjem $u = 1$ i $v = 1$.

(4,4; 3,0; 144)

2. U drugoj vježbi prijašnje točke bilinearni se program poklapa s bilinearnim programom koji smo razmatrali kao primjer u toj točki.

a) Riješi zadatke a, b, c, i d druge vježbe prijašnje točke s gravitacionim poljima na sl. 36.

b) U primjeru u toj točki bilinearni smo program riješili četiri puta. Izračunaj sva četiri lokalna optimalna moguća rješenja alternativnom simpleks-metodom.

LITERATURA

Literatura s područja linearnog programiranja na stranim jezicima toliko se posljednjih godina povećala da se već teško može pregledati; na ovom su području osobito brojni različiti elaborati više-manje internog značenja. Čitaocu koji želi upoznati linearno programiranje na stranom jeziku neće biti teško pronaći odgovarajuću literaturu u našim stručnim bibliotekama, osobito ekonomskim i tehničkim. Iz tih razloga nismo u popis uključili stranu literaturu.

U popisu smo naveli samo domaću literaturu. Time smo željeli prikazati razvitak linearnog programiranja u nas. Podatke smo crpli iz biblioteka i iz revijalnog tiska. Bojimo se međutim da popis literature unatoč velikom trudu i točnosti u radu nije potpun. Popis domaće literature uređen je po godinama do kraja god. 1970, kad je završen rukopis za ovu knjigu.

Pri sakupljanju i uređivanju popisa literature pomagali su mi Zarjan Fabjančič, asistent Ekonomskog fakulteta u Ljubljani, i Nada Verbič, dokumentalist Centralne ekonomske biblioteke u Ljubljani; na njihovu strpljivom i nadasve savjesnom radu iskreno im zahvaljujem.

POPIS DOMAĆE LITERATURE

1956.

VADNAL, A.: Linearno programiranje. Obzornik za matematiko in fiziko. V. 1956—57: 3, str. 101—106.

1961.

ILIČIĆ, J.: Jedan metod utvrđivanja optimalne strukture proizvodnje. Ekonomika preduzeća, Beograd, IX. 1961: 12, str. 816—818.

KAMENECKI, F. i L. Martić: Linearno programiranje u poljoprivredi. Zagreb, Ekonomski institut NR Hrvatske, 1961.

VADNAL, A.: Lastnosti rešitev problemov linearnega programiranja. Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana, VIII. 1961: 2, str. 65—71.

VADNAL, A.: Linearno programiranje. Avtomatika, Ljubljana, II. 1961: 2, str. 19—23.

VADNAL, A.: Linearno programiranje. Ljubljana, Ekonomska fakulteta, 1961.

VADNAL, A.: Metode razreševanja transportnih problemov linearnega programiranja. Naše gospodarstvo, Maribor, VII. 1961: 7—8, str. 145—154; 1961: 9, str. 177—189.

VADNAL, A.: Primer uporabe linearnega programiranja pri optimalnem izkoriščanju tujih trgov. Ekonomska revija, Ljubljana, XII. 1961: 4, str. 289—307.

VADNAL, A.: Rješavanje šematizovanog transportnog problema pomoću linearnog programiranja po metodi šahovskog stupa (stepping stone method). Produktivnost, Beograd, III. 1961: 4, str. 285—292.

VADNAL, A.: Uporaba linearnega programiranja v ekonomiji. Ekonomska revija, Ljubljana, XII. 1961: 4, str 185—298.

1962.

KORAĆ, J.: Ekonomika preduzeća i matematika. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XII. 1962: 9, str. 1807—1812.

MATEJIĆ, Vl.: Metode operacionih istraživanja. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XII. 1962: 7, str. 1403—1413.

VADNAL, A.: Grafične metode razreševanja problemov linearnega programiranja. Ekonomska revija, Ljubljana, XII. 1962: 4, str. 461–479.

VADNAL, A.: Optimalna zasedba delovnih mest. Naše gospodarstvo, Maribor, VIII. 1962: 10, str. 276–282.

VADNAL, A.: Optimalno izkoriščanje obdelovalnih strojev. Naše gospodarstvo, Maribor, VII. 1962: 7–8, str. 205–213.

1963.

KOŠMELJ, B.: Uporaba linearnega programiranja pri določanju optimalne velikosti anticipativnih zalog. Automatika, Zagreb, IV. 1963: 5–6, str. 314–322.

Linearno programiranje i primena u operativnom istraživanju. Beograd, Institut za naučno-tehničku dokumentaciju, 1963.

MARTIĆ, L.: Matematičke metode za ekonomske analize. I. d. Zagreb, Narodne novine, 1963.

MASTILOVIĆ, V. i M. Gavrilović: Primena linearnog programiranja u planiranju razvoja elektroprivrednih sistema. Elektroprivreda, Beograd, XVI. 1963: 11–12, str. 535–545.

MIRKOVIĆ, Dr.: Osnovi linearnog programiranja. Sarajevo, Zavod za produktivnost rada, 1963.

OSTOJIĆ, B.: Smernice za tehnološko projektiranje avtomatiziranih proizvajalnih trakov. Automatika, Zagreb, IV. 1963: 5–6, str. 343–345.

PETROVIĆ, R.: Računski aspekt linearnog programiranja. Automatika, Zagreb, IV. 1963: 5–6, str. 353–357.

STANOJEVIĆ, R.: Utvrđivanje programa proizvodnje metodama linearnog programiranja. Ekonomika preduzeća, Beograd, XI, 1963: 11, str. 769–780.

STANOJEVIĆ, R.: Utvrđivanje stepena optimalnog korišćenja kapaciteta oruđa za rad metodama linearnog programiranja. Produktivnost, Beograd, V. 1963: 6, str. 459–472.

TARABAR, K.: Primer uporabe linearnega programiranja v železarstvu. Automatika, Zagreb, IV. 1963: 5–6, str. 311–314.

VADNAL, A.: Dvodimenzionalno matematično programiranje z bilinearno funkcijo ekonomskega cilja. Ekonomska revija, Ljubljana, XIV. 1963: 4, str. 323–335.

VADNAL, A.: Elementarni uvod v linearno programiranje. Ljubljana, Državna založba Slovenije, 1963.

VADNAL, A.: Pomen linearnega programiranja za razvoj našega gospodarstva. Automatika, Zagreb, IV. 1963: 5–6, str. 299–301.

VADNAL. A. in V. Rupnik: Proizvodni problem kot problem nelinearnega programiranja. VII. sastanak Jugoslovenskog statističkog društva, Ohrid, 19–22. septembra 1963.

VADNAL, A.: Razreševanje transportnega problema po metodi šahovskega stolpa. Automatika, Zagreb, IV. 1963: 5–6, str. 335–342.

VADNAL, A.: Teoretične osnove metode simpleksov. Automatika, Zagreb, IV. 1963: 5–6, str. 302–307.

VIRANT, J.: Realizacija funkcij algebre logike pri upoštevanju tehničnih in ekonomskih aspektov. Automatika, Zagreb, IV. 1963: 5–6, str. 323–327.

ŽELEZNIKAR, A. in L. Čatar: Reševanje problemov linearnega programiranja s simpleksnim postopkom in z digitalnim računalnikom. Automatika, Zagreb, IV. 1963: 5–6, str. 328–334.

ŽIVOTIĆ, P.: Simpleks metod kao mogućnost za optimizaciju sastava legura. Produktivnost, Beograd, V. 1963: 4, str. 295–299.

1964.

BINGULAC, St. in V. Mastilović: Uporaba analize občutljivosti pri reševanju problemov linearnega programiranja na analognih računskih strojih. Automatika, Zagreb, V. 1964: 2, str. 105–111.

DEŽELAK, B.: Matematično programiranje v analizi tržišča. Naše gospodarstvo, Maribor, X. 1964: 3, str. 72–84.

GRIČAR, J.: Račun optimalne razmestitve študentov po študentskih domovih v Ljubljani. Simpozij: Mehanografija in operacijsko raziskovanje, Ljubljana, aprila 1964, str. 335–340.

KLADNIK ČRV, N.: Analiza transporta sladkorja v Jugoslaviji z metodo linearnega programiranja. Simpozij: Mehanografija in operacijsko raziskovanje, Ljubljana, aprila 1964, str. 427–450.

KOŠMELJ, B.: Uporaba linearnega programiranja pri določanju optimalne velikosti anticipativnih zalog. Simpozij: Mehanografija in operacijsko raziskovanje, Ljubljana, aprila 1964, str. 349–358.

Mehanografija in operacijsko raziskovanje. Gradivo sa simpozija koje su priredili Društvo ekonomistov i Gospodarska zbornica ljubljanskega okraja u Ljubljani u aprilu 1964. Ljubljana, Cankarjeva založba, 1964.

MILOVANOVIĆ, V.: Metode operacionih istraživanja. Tehnika. Opšti deo, Beograd, XIX. 1964: 8, str. 1390–93; 1964: 9, str. 1576–78.

OBRADOVIĆ, S.: Primena matematike u ekonomskoj analizi. Ekonomika preduzeća. Beograd, XII. 1964: 9, str. 711–718.

RUPNIK, V. in A. Vadnal: Optimalno kompleksno planiranje agrarne proizvodnje po metodi bilinearnega programiranja. Simpozij: Mehanografija in operacijsko raziskovanje, Ljubljana, aprila 1964, str. 411–418.

TARABAR, K.: Optimalna struktura vsipa visokih peči v Zenici glede na maksimalni dohodek. Simpozij: Mehanografija in operacijsko raziskovanje, Ljubljana, aprila 1964, str. 387–410.

TOMIĆ, St.: Simpleks-metod linearnog programiranja i njegova primena. Produktivnost, Beograd, VI. 1964: str. 431–443.

VADNAL, A.: Operacijsko raziskovanje in mehanografija v sedanji fazi našega gospodarskega razvoja. Simpozij: Mehanografija in operacijsko raziskovanje, Ljubljana, aprila 1964, str. 9–23.

VADNAL, A.: Programiranje proizvodnje v fazah. Simpozij: Mehanografija in operacijsko raziskovanje, Ljubljana, aprila 1964, str. 451–473.

VADNAL, A.: Operaciono istraživanje u sadašnjoj fazi našeg privrednog razvitka. Informator, Zagreb, XII, br. 1067, 1964, str. 7–6.

1965.

DOBRENIĆ, S.: Analiza centara snabdevanja pomoću linearnog programiranja s obzirom na transportne troškove. Produktivnost, Beograd, VII. 1965: 2, str. 110–113.

NOVAKOVIĆ, V.: Osnovni metod za rešavanje transportnog problema linearnog programiranja. Ekonomika preduzeća, Beograd, XIII. 1965.: 5, str. 303–313.

NOVAKOVIĆ, V.: Specifični metodi linearnog programiranja za rešavanje transportnog problema. Ekonomika preduzeća, Beograd, XIII. 1965: 8, str. 543–552.

STANOJEVIĆ, R.: Primena linearnog programiranja u privrednim organizacijama. Tehnika. Opšti deo, Beograd, XX. 1965: 4, str. 626–634.

STOJŠIĆ, A.: Jedan primer primene simpleks metode u rudarstvu. Tehnika. Rudarstvo, geologija i metalurgija, Beograd, XVI. 1965: 4, str. 677–683.

VADNAL, A.: Nonlinear programming with bilinear objective function. Econometric Society. First World Congress, Rome, 1965.

VADNAL, A.: Občutljivost optimalne rešitve linearnega programa na spremembo koeficientov funkcije cilja. IV. kongres matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, Sarajevo, 4–9. oktobra 1965. Saopštenja: Matematika.

VADNAL, A.: Odvisnost produkcijskih programov od tržnih cen. Posvetovanje »Podjetniško planiranje v pogojih samoupravljanja«. Društvo ekonomistov, Maribor, junij 1965.

VADNAL, A., L. Kuhar in R. Vavpetič: Optimalna alokacija finančnih sredstev v podjetju ISKRA, Kranj. Simpozij: »O sodobnih metodah v stroškovnem računovodstvu, Bled, 1965.

VADNAL, A., I. Ban, L. Kuhar in L. Pfajfar: Optimalni problemi produkcije v dveh etapah. Automatika, Zagreb, VI. 1965: 1, str. 53–58.

VUKADINOVIĆ, Sv.: Primena savremenih matematičkih metoda u planiranju prevoženja. Tehnika. Saobraćaj, Beograd, XII. 1965: 11, str. 2191–95.

1966.

BULAT, V.: Metodologija podizanja nivoa optimalnosti proizvodnog programa preduzeća. Tehnika. Organizacija rada, XVI. 1966: 12, str. 2191–96.

DOBRENIĆ, S.: Linearno programiranje i njegova primjena u privrednoj organizaciji. Zagreb, Informator, 1966 (Organizacija i ekonomika poduzeća, 5).

KREKO, B.: Linearno programiranje. Preveo s mađarskog Bela Kovač. Beograd, Savremena administracija, Biblioteka stručnih izdanja, 1966.

MARTIĆ, L.: Matematičke metode za ekonomske analize. 2. izd. 1. sv., Zagreb, Narodne novine, 1966 (Biblioteka udžbenici, 20)

NOVAKOVIĆ, V.: Primena transportnog problema linearnog programiranja. Produktivnost, Beograd, XII. 1966: 12, str. 809–819.

POPOVIĆ, B.: Proračun optimalnih faktora obrade metodom linearnog programiranja primenom digitalnih elektronskih računara. Tehnika. Mašinstvo, Beograd, XV. 1966: 3, str. 453–460.

RADOSAVLJEVIĆ S.: Primena metoda linearnog programiranja za optimiziranje proizvodnje sirovog čelika. Tehnika. Rudarstvo, geologija i metalurgija, Beograd, XVII. 1966: 12, str. 2085–89.

SILVESTER, S.: Poskus uporabe linearnega programiranja v planiranju gospodarskega razvoja. Ekonomska revija, Ljubljana, XVII. 1966: 1, str. 78–90.

STANOJEVIĆ, R.: Linearno programiranje. Beograd, Institut za ekonomiku industrije, 1966.

STOJAN, T. N.: Planiranje proizvodnje sa aspekta minimizacije troškova skladištenja. Produktivnost, Beograd, VIII. 1966: 9, str. 596–600.

VADNAL, A.: Nekaj izsledkov v teoriji linearnega in bilinearnega programiranja. Ekonomski zbornik, Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta, 1966. VII, str. 1–32.

VADNAL, A.: Nonlinear programming with bilinear objective function. Econometrica. New Haven. 34. 1966: 5. Supplementary issue, str. 93–95.

VELIČKOVIĆ, S.: Optimalni izbor proizvodnih zadataka mašinske industrije Niš. Ekonomika preduzeća, Beograd, XIV. 1966: 10, str. 687–692.

1967.

BAN, I.: Programiranje proizvodnje v dveh fazah v papirni industriji. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled 1967.

ČEPON, S. in Konjar M.: Uporaba metod linearnega programiranja pri optimalizaciji krmnih mešanic in krmnih obrokov. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled 1967.

DJURIŠIĆ, L.: Skraćeni prikaz primera iz primene linearnog programiranja — simpleks metode. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled 1967.

HRIBAR, A.: Analiza letnega plana proizvodnje za leto 1966 farmacevtskoga obrata v Tovarni farmacevtskih in kemičnih izdelkov »LEK«, Ljubljana. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled 1967.

KOŠMELJ, B.: O določanju optimalne velikosti zalog. Naše gospodarstvo, Maribor, XIII. 1967: 4, str. 209–221.

LALIĆ, D.: Primjena elektronskog računala i linearnog programiranja u rješavanju ekonomsko-tehnoloških problema integriranog poduzeća. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XVII. 1967: 2, str. 361–368.

MARTIĆ, L.: Problem trgovačkog putnika i neke industrijske primjene. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

MEŠKO, I.: Transportni problem. Naše gospodarstvo, Maribor, XIII. 1967: 7, str. 423–429.

MEŠKO, I.: O alternativi »proizvajati — ne proizvajati« v luči optimalnih zalog. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

PANTELIĆ, M.: Matematičke metode i programiranje proizvodnje u preduzeću. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XVII. 1967: 2, str. 359–360.

PETRIĆ, J.: Primena metoda linearnog i konveksnog programiranja u tehnici mrežnog planiranja i upravljanja. Ekonomist, Zagreb, XX. 1967: 3, str. 431–452.

PETRIĆ, J.: Primena metoda linearnog i konveksnog programiranja u tehnici mrežnog planiranja i upravljanja. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

PFAJFAR, L.: Planiranje kmetijske proizvodnje v dveh fazah. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

POLŠAK, P.: O ekonomiki izračunavanja optimalnega asortimana v pogojih spremenljivih prodajnih cen. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji. Bled, Društvo ekonomistov, Ljubljana, 1967.

PROKIĆ, D.: Primena linearnog programiranja na spoljašni transport goriva za termoelektrane i toplane. Tehnika. Opšti deo, Beograd, XXI. 1967: 9, str. 1502–09.

RUPNIK, V.: Mešalni problemi. Ljubljana, Ekonomska fakulteta, 1967.

SEŠINA, F.: Kratki osvrt na pokušaje primjene linearnog programiranja u poduzeću »Rade Končar«, Zagreb. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

SIMONOVIĆ, V.: O nekim problemima optimizacije. Tehnika. Opšti deo, Beograd, XXII. 1967: 4, str. 561–563.

SLEPČEVIĆ, D.: Priprema simpleks metode u planiranju proizvodnje. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

STANIŠIĆ, D.: Matematičko programiranje kao instrument planiranja u privrednim organizacijama. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XVII. 1967: 11, str. 20–26.

STANOJEVIĆ, R.: Rešavanje dinamičkih lokacionih modela metodama linearnog programiranja (hipotetički primer). Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

TODIĆ, R.: Racionizirani postupak simplex-metode i njegova praktična primena u rešavanju problema programiranja proizvodnje sa min-max realizacijom. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

VADNAL, A.: Linearna algebra za ekonomiste. Ljubljana, Ekonomska fakulteta, 1967.

VADNAL, A.: Model bilinearnega programa v kmetijstvu. Posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

VADNAL, A.: Odvisnost dvofaznega proizvodnega programa od poslovnih odločitev. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

VADNAL, A.: Prikaz referatov na posvetovanju o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji. Naše gospodarstvo, Maribor, XIII. 1967: 5, str. 285–294.

VADNAL, A.: Programiranje faznih gospodarskih procesov. Ljubljana, Univerza, Ekonomska fakulteta-Inštitut za statistiko in operacijsko raziskovanje, 1967.

VADNAL, A.: Zavisnost dvofaznog proizvodnog programa od poslovnih odluka. Ekonomist, Zagreb, XX. 1967: 3, str. 419–429.

VELIČKOVIĆ, S.: Optimalni program proizvodnje preduzeća metaloprerađivačke industrije. Tehnika. Mašinstvo, XVI. 1967: 8, str. 1388–95.

VUJIČIĆ, L.: Modificirani rasporedni metod linearnog programiranja. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XVII. 1967: 7, str. 1278–83.

VUJIČIĆ, L.: Primena rasporednih metoda kod raspoređivanja složenijih prevoza. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XVII. 1967: 10, str. 1839–44.

VUJIČIĆ, L.: Rasporedni metodi linearnog programiranja, Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XVII. 1967: 4, str. 718–726.

ŽIVKOVIĆ, M.: Modeli transporta nafte i derivata u Jugoslaviji. Posvetovanje o uporabi metod operacijskih raziskav v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1967.

1968.

BLAZINA, Št.: Izračun optimalnih zalog v tovarni »Lek«, Ljubljana. Ekonomska analiza, Beograd, II. 1968: 3–4, str. 366–369.

DUTINA, J.: Jedna primjena linearnog programiranja pri proračunu kapaciteta pogona motora. Zbornik radova sa prve konferencije za upravljanje poslovnim sistemom, Vrnjačka Banja, 1968, str. 599–619.

GJENERO, I.: Stohastičko linearno programiranje. Neki pristupi i primjene. Ekonomska analiza, Beograd, II. 1968: 1–2, str. 76–93.

LALIĆ, D.: Optimalni program transporta naftinih derivata. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XVIII. 1968: 11, str. 1998–2002.

LALIĆ, D.: Optimizacija prerada u rafinerijama nafte. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XVIII. 1968: 8, str. 1434–41.

MARTIĆ, L.: Programiranje sa razlomljeno linearnim funkcionalima. Ekonomska analiza, Beograd, II. 1968: 3–4, str. 317–335.

MEŠKO, I.: Proizvodni problemi u industriji papira. Zagreb, Informator, 1968, str. 70–81. (Operativno istraživanje).

Operativno istraživanje. Redaktori: Lj. Martić i A. Vadnal. Zagreb, Informator, 1968 (Kvantitativne metode ekonomike).

PETRIĆ, J.: Matematičke metode planiranja i upravljanja u radnim organizacijama, Zagreb, Informator, 1968.

RUPNIK, V.: O nekem principu optimalne prodajne strategije v integriranem poslovnem sistemu. Zbornik radova s prve konferencije za upravljanje poslovnim sistemom, Vrnjačka Banja 1968, str. 555–566.

RUPNIK V.: On a bilinear multistage transportation problem. Meeting on statistics, Econometrics and Management sciences. IMS, TIMS, ES and IASPS. Amsterdam, 2–7, IX. 1968.

RUPNIK, V.: Proširenje Hitchcoock-Koopmansove metode na probleme internog transporta. Zagreb, Informator, 1968, str. 90–99 (Operativno istraživanje).

SELEŠ, Z.: Problemi optimalnog rasporeda. Ekonomika preduzeća. Beograd, XVI. 1968: 3, str. 160–164.

STANIŠIĆ, D.: Planiranje transporta kao faktor sniženja troškova preduzeća (primer industrije uglja). Zagreb, Informator, 1968, str. 83–89 (Operativno istraživanje).

STOJANOVIĆ, D.: Matematične metode u ekonomiji preduzeća. Beograd, Rad, 1968.

STANOJEVIĆ, R.: Model za pronalaženje optimalnog programa proizvodnje metalnih prahova u preduzeću »Prvi partizan« u Titovu Užicu. Zagreb, Informator, 1968, str. 56–63 (Operativno istraživanje).

TOURKI-PANTELIĆ, M.: Model optimalnog programa ulaganja deviznih sredstava u uvoz repromaterijala. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XVII. 1968: 5, str. 906–909.

VADNAL, A.: On the application of bilinear programming in agricultural production. European Meeting on Statistics, Econometrics and Management Sciences. IMS, TIMS, ES and IASPS. Amsterdam, 2–7. IX. 1968.

VADNAL, A.: Programiranje ekstenzivnih i intenzivnih investicija u poljoprivrednoj proizvodnji. Zagreb, Informator, 1968, str. 127–138 (Operativno istraživanje).

VADNAL, A.: Operativno istraživanje. Zagreb, Informator 1968, str. 1–14.

VADNAL, A.: Simpleks metoda. Zagreb, Informator, 1968, str. 15–39 (Operativno istraživanje).

VADNAL, A.: Programming multi-stage processes. Ekonomska analiza, Beograd, II. 1968: 1–2, str. 22–49.

VADNAL, A. in Kovačič I.: Program za elektronsko računanje problemov bilinearnega programiranja v jeziku ALGOL. Ekonomska revija, Ljubljana, XIX. 1968: 3, str. 325–329.

VARNAY-KNEŽEVIĆ, M.: Optimalizacija programa proizvodnje u poduzeću tekstilne industrije. Zagreb, Informator, 1968, str. 64–69 (Operativno istraživanje).

VELIČKOVIĆ, S.: Optimalni izbor proizvodnih zadataka Mašinske industrije Niš. Zagreb, Informator, 1968, str. 41–55 (Operativno istraživanje).

VELIČKOVIĆ, S.: Korišćenje metoda linearnog programiranja u prvoj fazi pripremanja materijala za obradu. Tehnika. Mašinstvo, XVII. 1968: 4, str. 621–627.

VUJIČIĆ, L.: Primena rasporednih metoda kod raspoređivanja složenijih prevoza kada zalihe robe na stovarištima isporučioca premašuju potrebe kupaca. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XVIII. 1968: 3, str. 526–530.

ZDUNIĆ, St.: Analiza smještajnih prednosti u granskom prostornom modelu pomoću duala transportnog problema linearnog programiranja. Ekonomska analiza, Beograd, II. 1968: 1–2, str. 107–120.

1969.

ČEPON, S.: Neki rezultati primene operacionih istraživanja u poljoprivrednim preduzećima kod kompleksnog programiranja. Zbornik radova. Druga konferencija za upravljanje poslovnim sistemom, Vrnjačka Banja, 1969, 2. knj., str. 54–69.

MALENOVIĆ, N.: Primena »transportnog modela« u optimalizaciji unutrašnjeg transporta. Ekonomika preduzeća, Beograd, XVII. 1969: 1, str. 11–17.

MARTIĆ, L.: Intervalni linearni programi. Ekonomska analiza, Beograd, III. 1969: 1–2, str. 80–83.

MEŠKO, I.: Linearne neenačbe in linearno programiranje. Naše gospodarstvo, Maribor, XV. 1969: 6, str. 354–364.

PETROVIĆ, Br.: Optimalno iskorišćavanje raspoloživih kapaciteta sa aspekta maksimiranja dohotka — na primeru jednog preduzeća. Ekonomska analiza, Beograd, III. 1969: 3–4, str. 289–302.

PETROVIĆ, R.: Optimizacija upravljanja složenim sistemom putem mehanizma cena. Zbornik radova. Laboratorija za automatiku. Institut »Mihailo Pupin«, Beograd, 1969, str. 23–29.

RUPNIK, V.: Linearno programiranje proizvodnog procesa. Ljubljana, Raziskovalni center Ekonomske fakultete 1969.

SLOVIĆ, D.: Problem optimalne lokacije asfaltnih baza sa aspekta minimiziranja troškova poslovanja. Produktivnost, Beograd, XI. 1969: 5, str. 357–361.

SUVOROV, P.: Nekatere aplikativne možnosti kombinacije input-output tabel in linearnega programiranja. Ljubljana, Inštitut za ekonomska raziskovanja, 1969.

VARNAY-KNEŽEVIĆ, M.: Primjena modela u planiranju u poduzeću. Tehnika. Organizacija rada, Beograd, XIX. 1969: 7, str. 1120–27.

VUJIČIĆ, L.: Primena rasporednih metoda pri izboru mesta za podizanje preduzeća za preradu drveta. Produktivnost, Beograd, XI. 1969: 4, str. 258–268.

VUJKOVIĆ, T.: Optimaliziranje ekonomske propagande pomoću matematičkih metoda. Ekonomist, Zagreb, XXII. 1969: 3, str. 649–655.

1970.

BALŽALORSKY, V.: Primer optimalnega programiranja proizvodnega asortimana v pogojih spremenljivega povpraševanja. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 9–17.

BAN, I.: Aproksimativna rešitev problema optimalnega proizvodnega programa v pogojih težko opredeljivega asortimana. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 18–25.

BOSNER, R.: Matematično programiranje. Knj. 1: Linearno programiranje (Uvod. Elementarne metode. Metoda simpleksov). Knj. 2: Linearno programiranje (Metode distribucije. Metoda organizacije). Maribor, Visoka ekonomsko komercialna šola, 1970. (Kvantitativne metode pri poslovnih odločitvah).

BUNJEVAC, D.: Model linearnih programa rezanja limova transformatora sa standardiziranim širinama paketa jezgri za digitalni računar. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 42–68.

ČEPON, S.: Programiranje proizvodnje v kmetijski organizaciji. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 69–79.

ČEPON, S.: Racionalizacija kmetijskih transportov s pomočjo linearnega programiranja. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 81–87.

ČRV-KLADNIK, N.: Optimalizacija faznega proizvodnega programa v tekstilni industriji. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 88–94.

DROLC, M.: Optimalna struktura surovin za proizvodnjo jekla. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 95–105.

HRIBAR, A.: Optimalizacija proizvodnega programa podjetja, ki gospodari v zelo hudih konkurenčnih pogojih. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 106–114.

JANKOVIĆ, B.: Problem optimalne godišnje proizvodnje ciglane »Ćele kula« Niš za 1970. godinu. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 115–120.

KOLAR, P.: Primena matematičkog modela. Izbor lokacije za preradu nafte u Jugoslaviji. Produktivnost, Beograd, XII. 1970: 2, str. 125–129.

MANFREDA, J.: Optimalna razporeditev osebja v podjetju »Vozila Gorica« Šempeter pri Novi Gorici. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 129–145.

MARTIĆ, L.: Optimalizacija koeficijenta ekonomičnosti kao problem razlomljeno linearnog programiranja. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 146–152.

MARTIĆ, L.: Primjena linearnog programiranja u regresionoj analizi. Ekonomska analiza, Beograd, IV. 1970: 1–2, str. 79–86.

PETROVIĆ, M.: Primena linearnog programiranja pri određivanju zasipa kupolne peći. Produktivnost, Beograd, XII. 1970: 1, str. 41–43.

POLŠAK, P.: Optimizacija fizične produktivnosti v podjetju na osnovi kombinacije produkcijskih faktorjev. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 182–196.

PRELEC, M.: Optimalizacija proizvodnje v mesno-predelovalni industriji. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 208–219.

ROZMAN, L.: Optimalizacija proizvodnega programa v valjarni tanke pločevine. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 220–227.

ROZMAN, L. in Rozman R.: Optimalizacija programa proizvodnje v obratu za valjanje debele pločevine v Železarni Jesenice. Ekonomska analiza, Beograd, IV. 1970: 1–2, str. 113–117.

ROZMAN, R.: Analiza zasipa plavža. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 228–246.

ROZMAN, R.: Analiza proizvodnega programa v jeklo-vleku v Železarni Jesenice. Ekonomska analiza, Beograd, IV. 1970: 1–2, str. 301–307.

ROZMAN, R.: Optimalizacija proizvodnega programa v jeklovleku. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 247–255.

RUPNIK, V.: Nekateri uporabnostni defekti linearnega in bilinearnega programiranja. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 268–279.

STANOJEVIĆ, R.: Analiza optimalnog rešenja. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 280–303.

Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled 8. do 10. aprila 1970. Ljubljana, Društvo ekonomistov in Gospodarska zbornica SR Slovenije 1970. 1. dio 356 str., 2. dio 72 str.

Uporaba linearnega programiranja v kmetijstvu. Ljubljana, Biro za operacijske in tržne raziskave, 1970.

VADNAL, A.: Razvojne smernice operativnih istraživanja u našoj privredi. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Bled, 1970. Dodatno gradivo. Str. 1–6.

VADNAL, A.: Bilinear programming. Ekonomska analiza, Beograd, IV. 1970: 1–2, str. 21–41.

VADNAL, A.: Izbrana poglavja iz linearnega programiranja, Ljubljana, Ekonomska fakulteta, 1970.

VADNAL, A.: Uvod v matematiko za ekonomiste, Ljubljana, Državna založba Slovenije, 1970.

VELIČKOVIĆ, S.: Primena linearnog programiranja kod izbora najpovoljnijih varijanti pri krojenju materijala za izradu. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 304–315.

VULIĆ-ŠMALC, E.: Optimalizacija plana kadrova pomoću linearnog programiranja. Tretje posvetovanje o uporabi metod operacijskega raziskovanja v delovnih organizacijah v Jugoslaviji, Ljubljana, 1970, str. 322–331.

STVARNO KAZALO

Za izdavača direktor
NIKOLA ŠARANOVIĆ

Grafički urednik
BORIS VEBER

Ilustrator
ZLATKO STIPANIČIĆ

Oprema korica
MARIJAN JEVŠOVAR

Tisak
GRAFIČKI ZAVOD HRVATSKE — Zagreb — Frankopanska 26