UNIVERZITET U BEOGRADU
Matematički fakultet
Grupa za matematiku

Branko J. Malešević

GRUPNA FUNKCIONALNA JEDNAČINA

– Magistarska teza –

BEOGRAD 1998.

PREDGOVOR

Predmet ovog magistarskog rada je tzv. grupna funkcionalna jednačina. Za neprazan skup S neka bijekcije $\theta_1, \ldots, \theta_n : S \longrightarrow S$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ obrazuju grupu $\mathbb{G} = (G, \circ)$. Za zadano polje $\mathbb{K}$ označimo sa $\mathcal{F} = \{f : S \longrightarrow K\}$ skup svih funkcija koje preslikavaju skup S u polje $\mathbb{K}$. Pod *grupnom funkcionalnom jednačinom* podrazumevamo funkcionalnu jednačinu:

$$a_1(x) \cdot f(\theta_1(x)) + a_2(x) \cdot f(\theta_2(x)) + \ldots + a_n(x) \cdot f(\theta_n(x)) = h(x),$$

po nepoznatoj funkciji $f \in \mathcal{F}$ za zadane funkcije $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{F}$ i $h \in \mathcal{F}$. Grupnu funkcionalnu jednačinu određujemo kao *nehomogenu* ako je $h(x) \not\equiv 0$, odnosno kao *homogenu* ako je $h(x) \equiv 0$. Ako su zadane funkcije $a_1, \ldots, a_n$ konstantne onda je reč o grupnoj funkcionalnoj jednačini sa *konstantnim koeficijentima.* Opštu grupnu funkcionalnu jednačinu uveo je i rešio S. Prešić [SP2], [SP6]. Pri tom se kao osnovni matematički aparat za određivanje opšteg rešenja javljaju uopšteni inverzi matrica.

U skladu sa tom činjenicom magistarski rad je podeljen u dve celine. Prva celina jesu uopšteni inverzi matrica, druga celina jeste razmatranje grupne funkcionalne jednačine.

UOPŠTENI INVERZI MATRICA. Istorijski posmatrano prvi je E. Moore 1920. godine definisao i proučio uopštene inverze matrica. Do ponovnog uvodjenja i proučavanja uopštenih inverza nezavisno su došli A. Bjerhammar 1951. godine i R. Penrose 1955. godine. S. Prešić, u cilju određivanja opšteg rešenja homogene grupne funkcionalne jednačine, nezavisno od navedenih autora 1963. godine, uveo je i koristio u današnjim oznakama uopšteni $\{1\}$-inverz matrice. Oblast uopštenih inverza matrica uspešno se prenela sa matrica na razna područija matematike i danas se intezivno proučava. Prema podacima sa AMS diskova u periodu od 1940. godine do 1995. godine za pojam generalisanih-uopštenih inverza matrica[0] vezano je 2368 referenci.

U prvoj celini, ovog rada, u okviru pet delova, uvodi se teorija uopštenih inverza matrica koja se upotrebljava za razmatranje opšteg rešenja grupne funkcionalne jednačine.

Prvi deo je uvodnog karaktera i u njemu se razmatra rešen oblik jednačine i pojam reproduktivnost. Takođe, navode se osnovne osobine u vezi sa inverznom matricom i Kroneckerovim–tenzorskim proizvodom matrica.

[0] [((GENERALISED or GENERALIZED) and (INVERSE<S>)) or (PSEUDOINVERSE<S>)] and [MATRIX or MATRICES]

Drugi deo odnosi se na osnovne osobine uopštenih inverza matrica. Poseban značaj dat je uopštenim inverzima u obliku blok matrica. Kao doprinos, pomoću blok matrica, dat je direktan dokaz URQUHARTove teoreme u obliku *Teoreme* 2.5.6.

Treći deo odnosi se na uopštene inverze i linearne sisteme. Kao doprinos data je dopunjena formulacija PENROSEove teoreme u obliku *Teoreme* 3.1.1. Dopuna je data u odnosu na pojam reproduktivnosti. U trećem delu delu kao doprinos dat je *paragraf* 3.4. sa naslovom *Opšti* $\{1\}$*-inverz kao afini prostor*, gde je dyta *Teorema* 3.4.1. o dimenziji tako određenih afinih prostora i *paragraf* 3.5. sa naslovom *Rešavanje sistema linearnih jednačina pomoću specijalnih izbora* $\{1\}$*-inverza matrica.*

Četvrti deo odnosi se na određivanje tenzorske veze između koeficijenata linearnog sistema. Kao doprinos data je *Teorema* 4.3.

Peti deo odnosi se na grupni i DRAZINEov uopšteni inverz matrica. U petom delu poseban značaj daje sg grupnom inverzu koji se koristi u rešavanju grupne funkcionalne jednačine. Kao doprinos data je *Teorema* 5.2.4. gde se daje još jedna formula za grupni inverz u obliku blok matrice.

GRUPNA FUNKCIONALNA JEDNAČINA. R literaturi se najpre pojavio slučaj cikličnih grupnih funkcionalnih jednačina u radovima M. GHERMĂNESCUa, J. ACZÉLa i M. HOSSZÚa [MG1], [JA-MG-MH]. Neki pravci daljeg razvoja cikličnih funkcionalnih jednačina dati su u [DM-JP] i [SP-AI]. Opštu grupnu funkcionalnu jednačinu uveo je i rešio S. PREŠIĆ u radovima [SP2], [SP6]. Metod S. PREŠIĆa prikazan je[1] u monografiji M. KUCZMA [MK2]. Tkmatika grupne funkcionalne jednačine dalje se samostalno razvijala u radovima [BZ], [JK1,5] i [SN1-3].

U drugoj celini, ovog rada, u okviru pet delova, razmatra se opšte rešenje grupne funkcionalne jednačine.

Prvi deo pod nazivom homogena grupna funkcionalna jednačina sastoji se od uvođena pojma saglasnosti matrice sa grupom i izlaganja PREŠIĆevog matričnog metoda i metoda minimalnog polinoma.

Drugi deo odnosi se na grupnu homogenu funkcionalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima. Izlaže se standardan PREŠIĆev matrični metod. Uvodi se nop PREŠIĆev Λ-matrični metod. Takođe izlalu se metod minimalnog polinoma i metod eliminacionog polinoma. Kao doprinos date su *Teorema* 2.2.1, *Teorema* 2.2.2, *Teorema* 2.2.6 i nov drkaz *Teoreme* 2.2.5.

Treći deo odnosi se na partikularne slučajeve grupnih funkcionalnih jednačina za grupe reda $n = 2, 3, 2$. Kao doprinos dati su *kanonski oblici rešenja* za slučaj

[1] KAO: ELEGANT METHOD GIVEN BY S. PREŠIĆ ... M. KUCZMA [MK2] (STR. 262)

Kleinove grupne funkcionalne jednačine sa *Teoremom* 3.2.1. Takođe, kao doprinos dat je *paragraf* 5.3. sa naslovom *Računarsko rešenje partikularnih slučajeva uz pomoću programa* `DERIVE`.

Četvrti deo odnosi se na nehomogenu grupnu funkcionalnu jednačinu i Prešićevu matričnu metodu rešavanja.

Peti deo odnosi se na uopštenje grupne funkcionalne jednačine na semigrupnu funkcionalnu jednačinu. Kao doprinos dato je *proširenje* Λ-*matričnog metoda* na homogenu semigrupnu funkcionalnu jednačinu, sa konstantnim koeficijentima. Navedeni doprinos dat je sa *Teoremom* 5.1.1. Takođe, razmatraju se partikularni primeri homogenih semigrupnih funkcionalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Kao doprinos jedinstvenim postupkom data su rešenja funkcionalnih jednačina koje su razmatrali S. Prešić, J. Kečkić, D. Mitrinović, P. Vasić i M. Kuczma.

Zahvaljujem se profesoru dr Slaviši Prešiću na upućivanju u problematiku grupne funkcionalne jednačine i na nesebičnom pomaganju pri proučavanju navedene tematike. Takođe zahvaljujem se profesorima dr Žarku Mijajloviću, dr Aleksandru Krapežu i dr Milanu Merkleu na stručnim savetima i korisnim sugestijama pri izradi ovog rada. Na kraju želim da se zahvalim svoj porodici na razumevanju i bezrezervnoj podršci.

SADRŽAJ

Predgovor i

Sadržaj v

I. UOPŠTENI INVERZI MATRICA 1

1. Uvod 3

1.1. Rešen oblik jednačine. Reproduktivnost 3

1.2. Inverzna matrica. Kronecker-ov proizvod 7

2. Osnovne osobine uopštenih inverza matrica 9

2.1. Moore – Penrose-ov inverz 9

2.2. Faktorizacija punog ranga matrice 10

2.3. Mac – Duffee-jeva formula za $A^\dagger$ 11

2.4. $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ – inverzi u obliku blok matrica 12

2.5. Neke primene $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ – inverza u obliku blok matrica 17

3. Uopšteni inverzi i linearni sistemi 20

3.1. $\{1\}$-inverz i linearni sistemi 20

3.2. Formule rešenja nekih matričnih jednačina 23

3.3. Srednje kvadratno rešenje i rešenje minimalne norme sistema linearnih jednačina 26

3.4. Opšti $\{1\}$-inverz kao afini prostor 30

3.5. Rešavanje sistema linearnih jednačina pomoću specijalnih izbora $\{1\}$-inverza matrice 31

4. Tenzorska veza između koeficijenata linearnog sistema 35

5. Grupni i Drazine–ov uopšteni inverz matrica 46

5.1. Spektralni uopšteni inverzi. Indeks matrice 46

5.2. Grupni uopšteni inverz matrice 48

5.3. Drazine-ov uopšteni inverz matrice 52

II. GRUPNA FUNKCIONALNA JEDNAČINA 53

1. Homogena grupna funkcionalna jednačina 55
1.1. Saglasnost matrice sa grupom 55
1.2. Prešićev matrični metod 60
1.3. Metod minimalnog polinoma 65
2. Grupna homogena funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima 67
2.1. Prešićev matrični metod 67
2.2. Prešićev Λ—matrični metod 68
2.3. Metod minimalnog polinoma 74
2.4. Metod eliminacionog polinoma 74
3. Partikularni slučajevi grupnih funkcionalnih jednačina (n = 2, 3, 4) 76
3.1. Ciklične grupne funkcionalne jednačine 77
3.2. Klein-ova grupna funkcionalna jednačina 81
3.3. Računarsko rešenje partikularnih slučajeva uz pomoć programa DERIVE 91
4. Nehomogena grupna funkcionalna jednačina 95
5. Semigrupna funkcionalna jednačina 100
5.1. Homogena semigrupna funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima 100
5.2. Partikularni primeri semigrupnih funkcionalnih jednačina 104
Oznake 123
Literatura 125

I. UOPŠTENI INVERZI MATRICA

1. Uvod

1.1. Rešen oblik jednačine. Reproduktivnost

U uvodu dajemo neke osnovne pojmove u vezi sa rešenim oblikom jednačine i pojmom reproduktivnosti. *Jednakosna formula-jednakost* jeste formula u kojoj su dva izraza t_1 i t_2 vezana relacijskim znakom jednakosti $(=)$. *Jednačina* je jednakosna formula $J(x)$ koja sadrži i promenljive koje su naznačene kao nepoznate sa vrednostima u nekom nepraznom skupu S. *Rešenje jednačine* $J(x)$, po x, je takav elemenat $x_0 \in S$ za koji je $\mathcal{T}(J(x_0)) = \top$ (gde smo sa $\mathcal{T}$ označili istinitosnu vrednost). Tako ako se radi o matričnoj jednačini rešenje je matrica (određenog formata), ako se radi o funkcionalnoj jednačini rešenje je funkcija (odgovarajućeg domena i kodomena).

Ukoliko važi: $(\exists x \in S)\, J(x)$, kažemo da je jednačina $J(x)$ *neprotivurečna–moguća po x u skupu S*. Označimo sa $R = R(J)$ skup svih elemenata $x \in S$ koji zadovoljavaju jednačinu $\mathcal{T}(J(x)) = \top$, tada se $R \subseteq S$ naziva *skup rešenja date jednačine.* U narednom razmatramo samo moguće jednačine $J(x)$, tj. takve jednačine $J(x)$ da je ispunjeno $R(J) \neq \emptyset$. Za funkciju Φ, domena S koja uzima vrednosti u S, formula $x = \Phi(\lambda)$ $(\lambda \in S)$, određuje *generalno-opšte rešenje* jednačine $J(x)$ ako i samo ako važe sledeće dve implikacije:

$$(\forall x \in S)(\forall \lambda \in S)(x = \Phi(\lambda) \Longrightarrow J(x)), \tag{1}$$

$$(\forall x \in S)(J(x) \Longrightarrow (\exists \lambda \in S)\, x = \Phi(\lambda)). \tag{2}$$

Implikacija (1) označava da formula $x = \Phi(\lambda)$, za svako $\lambda \in S$, daje rešenja jednačine $J(x)$. Odatle funkcija ima Φ za kodomen skup rešenja $R = R(J) \subseteq S$. U daljem razmatranju smatramo da je funkcija Φ sa domenom S i kodomenom R. Implikacija (2) označava da je svako rešenje jednačine $J(x)$ oblika $x = \Phi(\lambda)$, za neko $\lambda \in S$. Odatle je funkcija $\Phi : S \longrightarrow R$ surjektivna–„na" funkcija. Posebnim izborom $\lambda_0 \in S$, sa $x_0 = \Phi(\lambda_0)$ dobijamo *partikularno-posebno rešenje jednačine* $J(x)$. Nije teško pokazati da se konjukcija formula (1) i (2), koja određuje formulu opšteg rešenja, može zameniti sa jednom formulom:

$$(\forall x \in S)(J(x) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in S)\, x = \Phi(\lambda)). \tag{3}$$

Odatle *rešeni oblik jednačine* $J(x)$ jeste jednačina $J'(x)$ koja je data sledećom formulom: $(\exists \lambda \in S)\ x = \Phi(\lambda)$ [SP-MP]. Na taj način važi $(\forall x \in S)\,(\, J(x) \Longleftrightarrow J'(x)\,)$. Pri tom rešenja jednačine $J(x)$ mogu se direktno pročitati tzv. *funkcijom rešenja* $x = \Phi(\lambda) : S \longrightarrow R$.

Primer 1.1. *Naći opšte rešenje sledeće funkcionalne jednačine*:

$$f(x) = f(-x),$$

u skupu funkcija $\mathcal{F} = \{f : R \longrightarrow R\}$.

Rešenje. Proverimo da za funkciju $\Phi = \Phi(\varphi) = \varphi(x) + \varphi(-x) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ važi ekvivalencija

$$f(x) = f(-x) \iff (\exists \Pi \in \mathcal{F})\, f(x) = \Phi(\Pi)(x) = \Pi(x) + \Pi(-x),$$

za ma koje $f \in \mathcal{F}$. Sa jedne strane imamo

$$\begin{array}{ll} & f(x) = f(-x) \\ \Longrightarrow & f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) \\ \Longrightarrow & (\exists \Pi = \frac{1}{2}f \in \mathcal{F}) f(x) = \Phi(\Pi)(x) = \Pi(x) + \Pi(-x). \end{array}$$

Sa druge strane, za ma koje $\Pi \in \mathcal{F}$ funkcija

$$f(x) = \Phi(\Pi)(x) = \Pi(x) + \Pi(-x)$$

ispunjava funkcionalnu jednačinu

$$f(x) = f(-x).$$

Odatle je formulom $f(x) = \Phi(\Pi)(x) = \Pi(x) + \Pi(-x)$, za ma koje $\Pi \in \mathcal{F}$, dato opšte rešenje. Napomenimo da funkcija $\Phi = \Phi(\Pi)$ može uzimati i druge oblike.

Među jednačinama rešenog oblika bitan značaj imaju *reproduktivne jednačine.* Pojam reproduktivnosti uveo je L. Löwenheim za Booleove jednačine 1908. godine (prema [SR]). S. Prešić, u radu [SP4] iz 1968. godine, pojam reproduktivnosti proširio je na proizvoljne jednačine. Konkretno, to su jednačine $J(x)$ koje se mogu zadati u obliku

$$x = \varphi(x),$$

gde je $\varphi : S \longrightarrow S$ dato preslikavanje nepraznog skupa S, pri čemu funkcija φ zadovoljava *uslov reproduktivnosti*:

$$(\forall x)\; \varphi \circ \varphi(x) = \varphi(x). \tag{4}$$

Navodimo osnovnu osobinu reproduktivnih jednačina datu narednim tvrđenjem.

Teorema 1.2. (Prešić) [SP4]. *Ako je jednačina* $J(x)$ *ekvivalentna sa jednačinom*:

$$x = \varphi(x), \tag{5}$$

gde je $\varphi : S \longrightarrow S$ *funkcija koja zadovoljava uslov reproduktivnosti* $\varphi^2 = \varphi$, *tada je opšte rešenje jednačine* $J(x)$ *dato formulom*:

$$x = \varphi(\lambda), \tag{6}$$

za ma koju vrednost $\lambda \in S$.

Dokaz. Proverimo da je formulom $x = \varphi(\lambda)$, za proizvoljno $\lambda \in S$, dato rešenje jednačine (5). Zaista, za svako $x, \lambda \in S$ važi

$$x = \varphi(\lambda) \implies \varphi(x) = \varphi \circ \varphi(\lambda) \implies \varphi(x) = \varphi(\lambda) = x.$$

Sa druge strane, proverimo da svako rešenje x jednačine (5) jeste oblika $x = \varphi(\lambda)$, za neko $\lambda \in S$. Zaista, za $\lambda \in S$ dovoljno je izabrati x. Sveukupno, dokazano je da opšte rešenje jednačine (5) jeste dato formulom (6). ■

Napomena 1. *Primetimo da za jednačinu* (5)*, reproduktivne formule* (6) *zadržavaju-reprodukuju rešenja*: $\varphi(\lambda)|_{\lambda=x} = \varphi(x) = x$.

Napomena 2. *Ako je neka formula* $x = \varphi(\lambda)$ *rešenje jednačine* $J(x)$ *i pri tom je i reproduktivna formula, tada ona predstavlja opšte rešenje posmatrane funkcionalne jednačine.*

Primer 1.3. *Naći opšte reproduktivno rešenje sledeće funkcionalne jednačine*:

$$f(x) = f(-x),$$

u skupu funkcija $\mathcal{F} = \{f : R \longrightarrow R\}$.

Rešenje. Za funkciju $\varphi(\Pi) = \frac{1}{2} \cdot \Pi(x) + \frac{1}{2} \cdot \Pi(-x) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ važi ekvivalencija:

$$(*) \qquad f(x) = f(-x) \iff f(x) = \varphi(f(x)) = \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot f(-x).$$

Proverimo da φ ispunjava uslov reproduktivnosti

$$\varphi \circ \varphi(\Pi(x)) = \varphi\left(\frac{\Pi(x)+\Pi(-x)}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi(x)+\Pi(-x)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi(-x)+\Pi(x)}{2} = \frac{\Pi(x)+\Pi(-x)}{2} = \varphi(\Pi(x)).$$

Na osnovu ekvivalencije $(*)$, primenom teoreme 1.2. (napomena 2), zaključujemo da je opšte reproduktivno rešenje dato sa

$$f(x) = \varphi(\Pi)(x) = \frac{1}{2} \cdot \Pi(x) + \frac{1}{2} \cdot \Pi(-x),$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Navodimo još dva reproduktivna oblika funkcije φ, prema [SP-BA], koje daju opšta reproduktivna rešenja u drugoj formi

$$f(x) = \varphi(\Pi)(x) = \min\{\Pi(x), \Pi(-x)\} \qquad \text{i} \qquad f(x) = \varphi(\Pi)(x) = \max\{\Pi(x), \Pi(-x)\}.$$

Ako je jednačina $J(x)$ zadana kao reproduktivna jednačina $x = \varphi(x)$, tada se opšte rešenje nalazi jednostavno primenom teoreme 1.2. Sledeće tvrđenje odnosi se na egzistenciju reproduktivne jednačine.

Teorema 1.4. (Prešić) [SP4]. *Za svaku moguću jednačinu* $J(x)$ *oblika* $x = g(x)$, *gde je* $g : S \longrightarrow S$ *zadana funkcija, postoji bar jedna ekvivalentna reproduktivna jednačina* $x = \varphi(x)$, *gde je* $\varphi : S \longrightarrow S$ *neka reproduktivna funkcija.*

Dokaz. Ako je R skup rešenja moguće jednačine $x = g(x)$, tada je $\emptyset \neq R \subseteq S$ i važi ekvivalencija:

$$(7) \qquad x \in R \iff x = g(x).$$

Neka je $h : S \backslash R \longrightarrow R$ ma koja funkcija. Uvedimo funkciju

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & : \quad x \in R, \\ h(x) & : \quad x \in S \backslash R. \end{cases}$$

Nije teško proveriti da funkcija φ jeste reproduktivna. Sa druge strane važi ekvivalencija:

$$x \in R \iff x = \varphi(x), \tag{8}$$

jer je $h(x) \neq x$. Prema teoremi 1.2. (napomena 2) formula $x = \varphi(\lambda)$, za svako $\lambda \in S$, jeste formula opšteg reproduktivnog rešenja. Na osnovu (7) i (8) jednačine $x = \varphi(x)$ i $x = g(x)$ međusobno su ekvivalentne. ■

U vezi sa prethodnom teoremom izložićemo jedan postupak za „pravljenje" reproduktivnih opštih rešenja iz nereproduktivnih opštih rešenja $x = \Phi(\lambda) : S \longrightarrow R$ jednačine $J(x)$. Implikacija:

$$(\forall x)(\exists \lambda)(J(x) \Longrightarrow x = \Phi(\lambda)), \tag{9}$$

jeste ekvivalentna sa implikacijom (2). Dalje, *skolemizacijom* (npr. [EM], [ŽM]), prethodna formula je ekvivalentna sa formulom:

$$(\forall x)(J(x) \Longrightarrow x = \Phi(H(x))), \tag{10}$$

za neku funkciju $H : S \longrightarrow S$, takvu da $\lambda = H(x)$. Sa druge strane, po pretpostavci, sa $x = \Phi(\lambda)$, za svako $\lambda \in S$, data je neka formula rešenja $J(x)$. Birajući $\lambda = H(x)$, za Skolemovu funkciju $H : S \longrightarrow S$, dobijamo formulu:

$$(\forall x)(x = \Phi(H(x)) \Longrightarrow J(x)). \tag{11}$$

Sveukupno, iz (10) i (11), sleduje ekvivalencija:

$$(\forall x)(J(x) \iff \underbrace{x = \Phi \circ H(x)}_{J'(x)}). \tag{12}$$

Proverimo da je funkcija $\varphi = \Phi \circ H : S \longrightarrow R$ reproduktivna. Primetimo da važi

$$\varphi(x) = \Phi \circ H(x) = \begin{cases} x & : \quad x \in R, \\ h(x) & : \quad x \in S \backslash R, \end{cases}$$

gde je restrikcija $h(x) = (\Phi \circ H)|_{S \backslash R}(x)$ rešenje polazne jednačine $J(x)$. Odatle $\varphi^2 = \varphi$. U slučajevima kada je moguće efektivno odrediti funkciju $H : S \longrightarrow S$ koja vrši skolemizaciju formule (9), iz nereproduktivnog opšteg rešenja $x = \Phi(\lambda)$ $(\lambda \in S)$ određujemo reproduktivno opšte rešenje formulom $x = \varphi(\lambda) = \Phi \circ H(\lambda)$ $(\lambda \in S)$. Sam prelaz na reproduktivno rešenje nazivamo i „*ureproduktivljavanjem*". Konkretno navedeni postupak razmatran je u [MH1] i [MH2] za slučaju nekih matričnih jednačina. U ovom radu navedeni postupak razmotrićemo u trećem delu prve celine. Napomenimo da primena pojma reproduktivnosti u analizi razmatrana je od strane J. Kečkića u radovma [JK2], [JK3] i knjizi [DM-JK2].

Na kraju razmatranja reproduktivnosti navodimo primer određivanja reproduktivnih rešenja CAUCHYjeve funkcionalne jednačine.

Primer 1.5. *Odrediti reproduktivno rešenje* CAUCHY*jeve funkcionalne jednačine*:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in R, \tag{13}$$

gde je $f : R \longrightarrow R$ *neprekidna funkcija.*

Rešenje. Poznato je, npr. [JA], [MK2], da je formula svih neprekidnih rešenja CAUCHYjeve funkcionalne jednačine data sa:

$$f(x) = ax \qquad x \in R, \tag{14}$$

gde je a ma koji realan broj. Proverom uslova reproduktivnosti $f^2 = f$ opšte neprekidno rešenje dato sa formulom (14) jeste reproduktivno ako i samo ako $a = f(1)$ uzima vrednost bilo 0, bilo 1. Sa druge strane, formulu svih neprekidnih reproduktivnih rešenja, prema [SP-AK], možemo dati i sa formulom:

$$f(x) = \Pi(1)\, x \qquad x \in R, \tag{15}$$

gde je $\Pi : R \longrightarrow R$, ma koja neprekidna funkcija takva da $a = \Pi(1) = f(1)$ uzima vrednost 0 ili 1. Primetimo da formula (15) zadržava-reprodukuje rešenja: $\big(\Pi(1)\, x\big)|_{\Pi = f} = f(1)\, x = f(x)$.

1.2. Inverzna matrica. Kronecker-ov proizvod

U celom radu razmatraćemo matrice nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Označimo sa $\mathbb{C}^{m\times n}$ skup matrica formata $m \times n$ nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ i sa $\mathbb{C}_r^{m\times n}$ skup matrica formata $m \times n$ nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ ranga r. Kvadratna matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ formata $n \times n$ nad poljem kompleksnih brojeva jeste *regularna matrica* ako i samo ako postoji matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da $AX = XA = I$, gde je $I \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jedinična matrica formata $n \times n$. U tom slučaju matrica X zove se *inverzna matrica* matrice A i označava sa A^{-1}. Za datu matricu, ako postoji inverzna matrica ona je jedinstveno određena.

Navodimo bez dokaza neke poznate osobine i metode izračunavanja inverzne matrice. Pretpostavljamo da su odgovarajuće matrice koje se u narednom javljaju kvadratne i dodatno matrice, čiji se inverzi u narednom javljaju, jesu regularne. Važi:

(*i*) $(A^{-1})^{-1} = A$;
(*ii*) $A^{-1} = \frac{Adj\,(A)}{Det\,(A)}$;
(*iii* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(iv) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, *gde je* A^* *konjugovano-transponovana matrica;*

(v) $A^{-1} = L_r L_{r-1} \cdots L_2 L_1$, *gde su* L_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ *matrice elementarnih transformacija na vrstama matrice* A*, tako da* $Q\,A = (L_k L_{k-1} \cdots L_2 L_1)\,A = I$;

(vi) $A^{-1} = P\,Q$, *pri čemu su* $Q = L_r L_{r-1} \cdots L_2 L_1$ *i* $P = R_s R_{s-1} \cdots R_2 R_1$ *redom proizvodi matrica* L_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ *i* R_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ *elementarnih transformacija na vrstama i kolonama matrice* A*, tako da* $QAP = I$;

(vii) $A^{-1} = -\frac{1}{b_0}(A^{m-1} + b_{m-1}A^{m-2} + \ldots + b_1 A)$, *pri čemu matrica* A *ima minimalni polinom oblika :* $\mu(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0$ $(b_0 \neq 0)$;

$(viii)$ *Ako je data blok matrica* A :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

gde su A_{11} *i* A_{22} *regularne matrice, tada je inverzna matrica data sa :*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

redom za matrice : $X_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$, $X_{12} = -X_{11}A_{12}A_{22}^{-1}$, $X_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}X_{11}$ i $X_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}X_{12}$.

Dokazi navedenih osobina mogu se naći u [AL], [VP1] i [SK].

Kronecker*ov–tenzorski proizvod* matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{p\times q}$ jeste matrica:

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mp\times nq},$$

koja se dobija iz matrice A kada se svaki njen elemenat a_{ij} zameni sa odgovarajućom blok matricom $a_{ij}B$.

Navodimo bez dokaza neke poznate osobine tenzorskog proizvoda matrica. U narednim jednakostima gde se javlja inverz matrice, pretpostavljamo da su odgovarajuće matrice kvadratne i regularne. Važi:

(ix) $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$;

(x) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$;

(xi) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$;

(xii) $rank(A \otimes B) = rank(A) \cdot rank(B)$;

$(xiii)$ $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$, *za matrice* B *i* C *istog formata;*

(xiv) $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$, *za matrice* A *i* B *istog formata;*

(xv) $Det(A \otimes B) = Det(A)^m Det(B)^p$ *za kvadratne matrice* $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *i* $B \in \mathbb{C}^{p\times p}$;

(xvi) $AXB = D \Longleftrightarrow (A \otimes B^T)\vec{X} = \vec{D}$, *gde je sa* $\vec{Z}$ *označen vektor dobijen iz matrice* Z *zapisivanjem redom vrsta matrice u vektor.*

Dokazi navedenih osobina mogu se naći u [DC], [PD] i [XИ].

2. Osnovne osobine uopštenih inverza matrica

2.1. Moore – Penrose-ov inverz

Definicija 2.1.1. Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ jeste Moore-Penrose*ov inverz* matrice A, ako ispunjava sistem od sledeće četiri Penroseove jednačine:

$$AXA = A, \tag{1}$$

$$XAX = X, \tag{2}$$

$$(AX)^* = AX, \tag{3}$$

$$(XA)^* = XA. \tag{4}$$

Moore–Penroseov inverz matrice A označavamo sa $A^\dagger$ [RP1].

Za brojeve $i,\dots,k \in \{1,2,3,4\}$ ma koje rešenje Penroseovih jednačina $(i),\dots,(k)$ označavamo sa $A^{(i,\dots,k)}$. Skup svih rešenja označavamo sa $A\{i,\dots,k\}$. Napomenimo da u slučaju regularne kvadratne matrice A, Moore – Penroseov inverz $A^\dagger$ podudara se sa inverzom A^{-1} posmatrane matrice.

Pokazaćemo da sistem Penroseovih jednačina (1) – (4) ima najviše jedno rešenje. U narednim paragrafima ovog dela pokazaćemo da postoji bar jedno rešenje posmatranog sistema. Važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.1.2. (Penrose). *Ako sistem* Penrose*ovih jednačina* (1) – (4) *ima rešenje, ono je jedinstveno.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dve matrice X i Y kao rešenje sistema Penroseovih jednačina (1) – (4). Tada važi:

$$\begin{array}{rcll} X &=& X(AX) & (2)\\ &=& X(AX)^* & (3)\\ &=& XX^*A^* & (*)\\ &=& XX^*(AYA)^* & (1)\\ &=& XX^*A^*Y^*A^* & (*)\\ &=& X(AX)^*(AY)^* & (*)\\ &=& X(AX)(AY) & (3)\\ &=& XAY & (1) \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} Y &=& (YA)Y & (2)\\ &=& (YA)^*Y & (4)\\ &=& A^*Y^*Y & (*)\\ &=& (AXA)^*Y^*Y & (1)\\ &=& A^*X^*A^*Y^*Y & (*)\\ &=& (XA)^*(YA)^*Y & (*)\\ &=& (XA)(YA)Y & (4)\\ &=& XAY & (1) \end{array}$$

Odatle $X = Y$, tj. rešenje Penroseovog sistema (1) – (4) jeste jedinstveno. ∎

Napomena. *U slučaju nula matrice* $A = 0 \in \mathbb{C}_0^{m\times n}$ *(nultog ranga), na osnovu matrične jednačine* (2)*, svako rešenje je nula matrica* $A^\dagger = 0 \in \mathbb{C}_0^{n\times m}$.

2.2. Faktorizacija punog ranga matrice

U ovom paragrafu pokazaćemo da se jedan način dokazivanja postojanja rešenja PENROSEovog sistema (1) – (4) sastoji u korišćenju činjenice da za svaku matricu A postoji *faktorizacija punog ranga.* Navedeno je dato u narednom tvrđenju.

Teorema 2.2.1. *Neka je data nenula matrica* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$. *Tada postoje matrice* $C \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ *i* $D \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$, *takve da važi faktorizacija punog ranga*:

$$A = C \cdot D. \tag{5}$$

Dokaz. Posmatrajmo matricu A zapisanu po kolonama $A = [\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}]$. Iz matrice A formirajmo podmatricu linearno nezavisnih kolona

$$C = [\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r] = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1m} & \dots & c_{rm} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_r^{m\times r}.$$

Svaku kolonu $\vec{A}^{(j)}$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju linearno nezavisnih kolona

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(j)} &= d_{j1} \cdot \vec{c}_1 + \dots + d_{jr} \cdot \vec{c}_r = d_{j1} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1m} \end{bmatrix} + \dots + d_{jr} \cdot \begin{bmatrix} c_{r1} \\ \vdots \\ c_{rm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1m} & \dots & c_{rm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{j1} \\ \vdots \\ d_{jr} \end{bmatrix} = C \cdot \vec{d}_j \qquad (j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Dalje, formirajmo matricu $D \in \mathbb{C}^{r\times n}$ redom od vektora $d_1, \dots, d_n$ u obliku

$$D = [\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_n] = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{1r} & \dots & d_{nr} \end{bmatrix}.$$

Na osnovu $\vec{A}^{(j)} = C \cdot \vec{d}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ i prethodno formirane matrice D važi

$$A = C \cdot D.$$

Primetimo da za matricu D, sa jedne strane važi $rank(D) \le r$ i sa druge strane važi $r = rank(A) = rank(C \cdot D) \le \min\{rank(C), rank(D)\} \le rank(D)$. Sveukupno, ispunjen je i uslov $D \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$. ■

Napomena. *U dokazu prethodne teoreme za matricu* D *možemo uzeti podmatricu linearno nezavisnih vrsta i u tom slučaju možemo formirati matricu* C *kao matricu odgovarajućih koeficjenata u faktorizaciji* (5).

2.3. Mac – Duffee-jeva formula za $A^\dagger$

Polazeći od faktorizacije punog ranga matrice MAC-DUFFEE je dao eksplicitnu formulu za MOORE-PENROSEov inverz $A^\dagger$ matrice A. Važi naredno tvrđenje.

Teorema 2.3.1. *Neka je data matrica $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ ranga $0 < r \le \min\{m, n\}$ sa faktorizacijom punog ranga $A = C \cdot D$, gde je $C \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ i $D \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$. Jedinstveno rešenje* PENROSE*ovog sistema* $(1) - (4)$ *dato je formulom:*

$$A^\dagger = D^*(C^*AD^*)^{-1}C^*. \tag{6}$$

Dokaz. Dokažimo da je kvadratna matrica $C^*AD^* = C^*C \cdot DD^*$ regularna. Dovoljno je dokazati da su kvadratne matrice C^*C i DD^*, reda r, regularne. Poznato je da za proizvoljnu matricu $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi $rank(B) = rank(B^*) = rank(B^*B) = rank(BB^*)$ [ABI-TG]. Samim tim $C^*C \in \mathbb{C}_r^{r\times r}$ i $DD^* \in \mathbb{C}_r^{r\times r}$. Odatle, zaključujemo da postoji inverz $(C^*AD^*)^{-1} = (C^*C \cdot DD^*)^{-1} = (DD^*)^{-1} \cdot (C^*C)^{-1}$. Dalje, dokažimo da matrica $X = D^*(C^*AD^*)^{-1}C^* = D^*(DD^*)^{-1} \cdot (C^*C)^{-1}C^*$ ispunjava PENROSEove jednačine $(1) - (4)$. Proveravamo:
(i) $AXA = CD \cdot D^*(DD^*)^{-1}(C^*C)^{-1}C^* \cdot CD = CD = A$.
(ii) $XAX = X$ - analogno.
(iii) $(AX)^* = (CD \cdot D^*(DD^*)^{-1}(C^*C)^{-1}C^*)^* = (C(C^*C)^{-1}C^*)^* = C(C^*C)^{-1}C^* = AX$.
(iv) $(XA)^* = XA$ - analogno.
Sveukupno matrica X jeste rešenje PENROSEovog sistema $(1) - (4)$. Na osnovu teoreme 2.1.2. rešenje je jedinstveno. Odatle zaključujemo $X = A^\dagger$. ■

Posledica. *Ma koji podsistem* PENROSE*ovog sistema* $(1)-(4)$ *jeste moguć sistem jednačina čije je jedno rešenje* MOORE-PERNOSE*ov inverz.*

U slučaju nula matrice $A = 0$ $(r = 0)$, prema napomeni uz teoremu 2.1.2., važi $A^\dagger = 0$. Navodimo bez dokaza neke osnovne osobine MOORE-PENROSEovog inverza.

Teorema 2.3.2. *Za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi:*

$$(A^\dagger)^\dagger = A, \quad (A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*, \tag{a}$$

$$A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger. \tag{b}$$

Napomena. *Formula navedena u teoremi 2.3.2, pod (b), omogućava da se* MOORE-PENROSE*ov inverz nekvadratnih matrica računa pomoću* MOORE-PENROSE*ovog inverza kvadratnih matrica manjeg formata* [TS], [BV].

2.4. {1}, {2}, {3}, {4} – inverzi u obliku blok matrica

Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ primenom elementarnih transformacija na vrstama i kolonama, prema razmatranju u paragrafu 1.2., proširena matrica može se transformisati u ekvivaletnu matricu sledećeg oblika:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline I_m & \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{c|c} E_r & Q \\ \hline P & \end{array}\right], \tag{7}$$

gde je $E_r \in \mathbb{C}_r^{n\times m}$ matrica sa r jedinica na prvih r mesta glavne dijagonale i na svim ostalim mestima sa nula elementima [VP1]. Podmatrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, određene u prethodnom zapisu, jesu regularne jer su dobijene elementarnim transformacijama iz odgovarajućih jediničnih matrica. Pri tome važi:

$$Q\,A\,P = E_r\,. \tag{8}$$

Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ opisaćemo u narednih pet tvrđenja, prema članku V. Perića [VP2], redom {1}, {2}, {3}, {4} – inverze i More-Penroseov {1, 2, 3, 4} – inverz u obliku blok matrica:

$$X = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot Q \in \mathbb{C}^{n\times m}, \tag{9}$$

gde su $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ odgovarjuće podmatrice. Jasno je da se svaki od razmatranih inverza može predstaviti u obliku blok matrice (9).

Teorema 2.4.1. (opšti {1}-inverz) *Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi* (8). *Matrica oblika* (9) *ispunjava matričnu jednačinu* (1) *ako i samo ako važi:*

$$X = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot Q, \tag{10}$$

gde su $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ proizvoljne podmatrice.

Dokaz. Rešenje matrične jednačine (1) tražimo u obliku (9) gde su $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ odgovarjuće podmatrice. Zamenom matrice X, oblika (9), u matričnu jednačinu (1), matrica X jeste rešenje matrične jednačine $AXA = A$ akko važi

$$Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] P^{-1} \cdot P \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q \cdot Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] P = Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] P^{-1},$$

odatle je $X_0 = I_r$. Za X_1, X_2 i X_3 možemo uzeti proizvoljne matrice. Obratno, svaka matrica oblika (10) jeste rešenje matrične jednačine (1). ∎

Teorema 2.4.2. (OPŠTI $\{2\}$-INVERZ) *Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi* (8). *Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ oblika* (9) *ispunjava matričnu jednačinu* (2) *ako i samo ako matrice $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ ispunjavaju matrične jednačine*:

(11) $$X_0^2 = X_0 \ \wedge\ X_0X_1 = X_1 \ \wedge\ X_2X_0 = X_2 \ \wedge\ X_3 = X_2X_1.$$

Dokaz. Rešenje matrične jednačine (2) tražimo u obliku (9) gde su $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ odgovarjuće podmatrice matrice X. Zamenom matrice X u matričnu jednačinu (2), matrica X jeste rešenje matrične jednačine $XAX = X$ akko važi

$$P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q\cdot Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] P^{-1}\cdot P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q = P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q,$$

odatle važe matrične jednačine (11). Obratno, svaka matrica oblika (9), za koju podmatrice X_0, X_1, X_2, X_3 ispunjavaju matrične jednačine (11) jeste rešenje matrične jednačine (2). ■

Posledica. (OPŠTI $\{1,2\}$-INVERZ) *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi* (8). *Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ oblika* (9) *ispunjava matrične jednačine* (1) *i* (2) *ako i samo ako važi*:

(12) $$X = P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2\cdot X_1 \end{array}\right]\cdot Q,$$

gde su $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$ i $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ proizvoljne podmatrice.

Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ elementarnim transormacijama iz (7). Formirajmo blok matrice:

(13) $$Q\cdot Q^* = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right]\ (S_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}) \quad \text{i} \quad P^*\cdot P = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right]\ (T_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}).$$

Neposredno se proverava da su matrice $Q\cdot Q^* \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P^*\cdot P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitske. Odatle dobijamo redom jednakosti

$$S_1^* = S_1,\ \ S_2^* = S_3,\ \ S_4^* = S_4,\ \ T_1^* = T_1,\ \ T_2^* = T_3 \ \text{ i } \ T_4^* = T_4.$$

Samim tim su i podmatrice S_1, S_4, T_1 i T_4 hermitske. Dalje, koristimo tvrđenje da ako je $\mathcal{A}$ regularna linearna transformacija unitarnog prostora $\mathbb{C}^k$, tada su i linearne transformacije $\mathcal{A}^*\circ\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^*$ pozitivno definitne [VP1] (str. 311). Samim tim, na osnovu regularnosti matrica Q i P, sleduje pozitivna definitnost matrica $Q^*\cdot Q$ i $P\cdot P^*$. Odatle sleduje i pozitivna definitnost podmatrica S_4 i T_4 [VP2]. U daljem razmatranju koristimo samo posledicu pozitivne definitnosti da su kvadratne matrice S_4 i T_4 regularne.

Teorema 2.4.3. (OPŠTI $\{3\}$-INVERZ) *Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi* (8) *i neka je određena matrica $Q \cdot Q^*$ u vidu blok matrice* (13). *Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ oblika* (9) *ispunjava matričnu jednačinu* (3) *ako i samo ako matrice $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$ ispunjavaju matrične jednačine*:

$$(S_1 - S_2S_4^{-1}S_2^*)X_0^* = X_0(S_1 - S_2S_4^{-1}S_2^*) \;\wedge\; X_1 = -X_0S_2S_4^{-1}, \tag{14}$$

za proizvoljne podmatrice $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$.

Dokaz. Rešenje matrične jednačine (3) tražimo u obliku (9) gde su $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ odgovarjuće podmatrice matrice X. Zamenom matrice X u matričnu jednačinu (3), matrica X jeste rešenje matrične jednačine $(AX)^* = X^*A^* = AX$ akko važi

$$\left(P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]Q\right)^* \cdot \left(Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]P^{-1}\right)^* = Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]P^{-1}\cdot P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]Q,$$

što se računom može dovesti do ekvivaletnog oblika

$$QQ^* \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0^* & X_2^* \\ \hline X_1^* & X_3^* \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot QQ^*.$$

Odatle, na osnovu (13), važe matrične jednačine (14). Obratno, svaka matrica oblika (9), za koju podmatrice X_0, X_1 ispunjavaju matrične jednačine (14), jeste rešenje matrične jednačine (3). ■

Posledica. (OPŠTI $\{1,3\}$-INVERZ) *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi* (8) *i neka je određena matrica $Q \cdot Q^*$ u vidu blok matrice* (13). *Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ oblika* (9) *ispunjava matrične jednačine* (1) *i* (3) *ako i samo ako važi*:

$$X = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot Q, \tag{15}$$

gde su $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ proizvoljne podmatrice.

Teorema 2.4.4. (OPŠTI $\{4\}$-INVERZ) *Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi* (8) *i neka je određena matrica $P^* \cdot P$ u vidu blok matrice* (13). *Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ oblika* (9) *ispunjava matričnu jednačinu* (4) *ako i samo ako matrice $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ ispunjavaju matrične jednačine*:

$$X_0^*(T_1 - T_2T_4^{-1}T_2^*) = (T_1 - T_2T_4^{-1}T_2^*)X_0 \ \wedge \ X_2 = -T_4^{-1}T_3X_0, \tag{16}$$

za proizvoljne podmatrice $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ i $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$.

Dokaz. Rešenje matrične jednačine (4) tražimo u obliku (9) gde su $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ odgovarjuće podmatrice. Zamenom matrice X u matričnu jednačinu (4), matrica X jeste rešenje matrične jednačine $(XA)^* = A^*X^* = XA$ akko važi

$$\left(Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right]P^{-1}\right)^* \cdot \left(P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3\end{array}\right]Q\right)^* = P\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3\end{array}\right]Q\cdot Q^{-1}\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right]P^{-1},$$

što se računom može dovesti do ekvivaletnog oblika

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} X_0^* & X_2^* \\ \hline X_1^* & X_3^*\end{array}\right]\cdot P^*P = P^*P\cdot\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right],$$

Odatle, na osnovu (13), važe matrične jednačine (16). Obratno, svaka matrica oblika (9), za koju podmatrice X_0, X_2 ispunjavaju matrične jednačine (16) jeste rešenje matrične jednačine (4). ■

Posledica. (OPŠTI $\{1,4\}$-INVERZ) *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi* (8) *i neka je određena matrica $Q \cdot Q^*$ u vidu blok matrice* (13). *Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ oblika* (9) *ispunjava matrične jednačine* (1) *i* (4) *ako i samo ako važi*:

$$X = P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & X_3\end{array}\right]\cdot Q. \tag{17}$$

za proizvoljne podmatrice $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$.

Teorema 2.4.5. (MOORE-PENROSE-OV INVERZ) *Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi* (8) *i neka su odredjene matrice $Q \cdot Q^*$ i $P^* \cdot P$ u vidu blok matrice* (13). *Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ oblika* (9) *ispunjava sistem* PENROSE*ovih jednačina* (1) – (4) *ako i samo ako je oblika*:

$$X = A^\dagger = P\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & T_4^{-1}T_3S_2S_4^{-1}\end{array}\right]\cdot Q \tag{18}$$

Dokaz. Direktno na osnovu posledica prethodne tri teoreme. ■

Prema V. PERIĆu [VP2] metod predstavljanja uopštenih inverza u obliku blok matrica potiče[3] od C. ROHDEa [CR]. Napomenimo na kraju ovog paragrafa da matrica (10) predstavlja *opšti* $\{1\}$-*inverz* jer svaki $\{1\}$-inverz može se prikazati u navedenom obliku. U tom smislu možemo reći da matrica (12) predstavlja *opšti* $\{1,2\}$-*inverz*, odnosno matrica (15) predstavlja *opšti* $\{1,3\}$-*inverz* i matrica (17) predstavlja *opšti* $\{1,4\}$-*inverz*. U literaturi se javljaju i drugi oblici „*opštih inverza*". Navodimo „opšte inverze" koji se dobijaju iz *singularno vrednosne dekompozicije* (SDV) realne matrice

$$A = U \left[\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] V^T,$$

pri čemu su U, V odgovarajuće unitarne matrice i Σ dijagonalna podmatrica sa realnim singularnim vrednostima $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \ldots \geq \sigma_r(A) > 0$. Tada, prema [ABI-RB], *opšti* $\{1\}$-*inverz* je dat u obliku blok matrice

$$X = V \left[\begin{array}{c|c} \Sigma^{-1} & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] U^T,$$

gde su $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ proizvoljne matrice. Specijalno ako je $X_3 = X_1 \Sigma X_2$ matrica X je *opšti* $\{1,2\}$-*inverz*; ako je $X_1 = 0$ matrica X je *opšti* $\{1,3\}$-*inverz*; ako je $X_2 = 0$ matrica X je *opšti* $\{1,4\}$-*inverz* i ako je $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ matrica X je MOORE-PENROSEov inverz. Jedan pregled „*opštih uopštenih inverza*" dat je u disertaciji [PS]. Napomenimo da je pregled novih blokovskih reprezentacija MOORE-PENROSEovog inverza dat je u radu [GM-PS2].

Primer 2.4.6. *Naći* MOORE-PENROSE*ov inverz matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Rešenje. I. Način. Odredimo faktorizaciju punog ranga. Primetimo da je $rank(A) = 2$. Samim tim, za matricu linearo nezavisnih kolona možemo izabrati sledeću matricu

$$C = [\vec{c}_1, \vec{c}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Za kolone $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ matrice A, odredimo kolone koeficijenata zavisnosti u faktorizaciji punog ranga

$$\begin{array}{lclclcl} \vec{c}_1 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & = & C \cdot \vec{d}_1, \\ \vec{c}_2 & = & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & = & C \cdot \vec{d}_2, \\ \vec{c}_3 & = & \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} & = & C \cdot \vec{d}_3. \end{array}$$

Odatle je matrica kolona koeficijenata zavisnosti data sa $D = [\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Primenom MAC-DUFFEEeve formule MOORE-PENROSEov inverz je dat sa:

$$A^\dagger = D^*(DD^*)^{-1}(C^*C)^{-1}C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{bmatrix}.$$

[3] TAKODJE, U RADU S. PREŠIĆ-A [SP2] $\{1\}$-INVERZ PRESDTAVLJEN JE U OBLIKU BLOK MATRICE

II. Način. Primenimo teoremu 2.4.5. Elementarnim transformacijama na vrstama i kolonama proširene matrice možemo odrediti regularne matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{4}{3} & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad Q = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

takve da važi $QAP = E_2$. Dalje, na osnovu blokovskog razbijanja matrica

$$P^*P = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{61}{9} & -2 & -19 \\ -2 & 1 & 6 \\ \hline -19 & 6 & 54 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad QQ^* = \left[\begin{array}{cc|c} 29 & -12 & 9 \\ -12 & 5 & -4 \\ \hline 9 & -4 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}$$

određujemo matrice $X_0 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X_1 = -S_2 S_4^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $X_2 = -T_4^{-1}T_3 = [\frac{19}{54} \ \frac{-1}{9}]$ i $X_3 = X_2X_1 = [\frac{65}{108}]$. Moore-Penroseov inverz $A^\dagger = P \begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} Q$ dat je matricom:

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{4}{3} & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{19}{54} & \frac{-1}{9} & \frac{-65}{108} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-23}{36} & \frac{-1}{6} & \frac{11}{36} \\ \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{36} \end{bmatrix}.$$

2.5. Neke primene {1}, {2}, {3}, {4} – inverza u obliku blok matrica

Navodimo dokaze nekih poznatih tvrđenja korišćenjem {1}, {2}, {3}, {4} – inverza u obliku blok matrica. Kao *doprinos dokazi su jednostavniji* od dokaza navedenih u monografijama [ABI-TG] i [SC-CM]. Važi pomoćno tvrđenje.

Lema 2.5.1. *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Tada važi:*

$$A^{(1)}A = P \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline X_2 & 0 \end{array}\right]_{n\times n} P^{-1} \quad i \quad AA^{(1)} = Q^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]_{m\times m} Q, \tag{19}$$

gde su X_1 i X_2 ma koje matrice odgovarajućeg formata.

Dokaz. Neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Tada je $A = Q^{-1}E_rP^{-1} = Q^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] P^{-1}$. Prema teoremi 2.4.1. ma koji {1}-inverz matrice A možemo odrediti u obliku $A^{(1)} = P \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q$, gde su X_1, X_2 i X_3 proizvoljne matrice odgovarajućeg formata. Direktno, blokovskim množenjem matrica A i $A^{(1)}$ sleduju navedene formule (19). ■

Na osnovu formula (19), prethodne leme, dobijamo da važe sledeća dva tvrđenja.

Teorema 2.5.2. *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ važi:*

$$rank(A^{(1)}A) = rank(AA^{(1)}) = rank(A). \tag{20}$$

Teorema 2.5.3.[4] *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ važe ekvivalencije:*

$$A^{(1)}A = I_n \Longleftrightarrow r = n, \tag{21}$$

[4] TVRĐENJE O LEVOM I DESNOM INVERZU

$$AA^{(1)} = I_m \Longleftrightarrow r = m. \tag{22}$$

Dalje, dokazujemo tvrđenja.

Teorema 2.5.4. *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ ako su matrice X, Y $\{1\}$-inverzi tada je matrica:*

$$Z = XAY \tag{23}$$

jedan $\{1,2\}$-inverz. Obratno, svaki $\{1,2\}$-inverz Z matrice A može se prikazati u obliku (23) *za neke $\{1\}$-inverze X, Y.*

Dokaz. Neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Matrice X i Y, prema teoremi 2.4.1., predstavimo u obliku

$$X = P\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q \quad \text{i} \quad Y = P\left[\begin{array}{c|c} I_r & Y_1 \\ \hline Y_2 & Y_3 \end{array}\right] Q,$$

za proizvoljne podmatrice X_1, X_2, X_3 i Y_1, Y_2, Y_3 respektivno. Blokovskim množenjem matrica dobijamo

$$Z = XAY = P\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I_r & Y_1 \\ \hline Y_2 & Y_3 \end{array}\right] Q = P\left[\begin{array}{c|c} I_r & Y_1 \\ \hline X_2 & X_2Y_1 \end{array}\right] Q.$$

Prema posledici teoreme 4.2. matrica Z jeste {1,2}-inverz. Obratno, ako je matrica Z ma koji {1,2}-inverz matrice A, tada matricu Z možemo zapisati u obliku (23) uzimajući $X = Y = Z$. ■

Teorema 2.5.5. (Bjerahmmar) *Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ bilo koja dva od uslova*

$$(i)\;\; X \in A\{1\}, \qquad (ii)\;\; X \in A\{2\}, \qquad (iii)\;\; rank(X) = rank(A),$$

ima za posledicu treći uslov.

Dokaz. $(i) \wedge (ii) \Longrightarrow (iii)$ Za matricu $X = A^{(1,2)}$ neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Prema posledici teoreme 2.4.2. važi $A^{(1,2)} = P\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2X_1 \end{array}\right] Q$, za ma koje matrice X_1 i X_2 odgovarajućeg formata. Direktno računamo rang matrice $A^{(1,2)}$

$$rank\Big(P\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2X_1 \end{array}\right] Q\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_2X_1 \end{array}\right]\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\Big) = r.$$

Samim tim za matricu $A^{(1,2)} = X$ važi $rank(X) = rank(A)$, tj. ispunjen je uslov (iii).

$(ii) \wedge (iii) \Longrightarrow (i)$ Za matricu $X = A^{(2)}$ pretpostavimo da je $rank(X) = rank(A) = r$. Neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Prema teoremi 2.4.2. važi $A^{(2)} = P \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q$, pri čemu su matrice X_0, X_1, X_2 i X_3 ma koja rešenja sistema matričnih jednačina (11). Pretpostavka $rank(A) = rank(A^{(2)}) = r$ ekvivaletna je sa jednakošću

$$rank\Big(P \left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} X_0^2 & X_0X_1 \\ \hline X_2X_0 & X_2X_0^2X_1 \end{array}\right]\Big) = r,$$

što je ekvivaletno sa

$$rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} X_0^2 & X_0X_1 \\ \hline X_2X_0 - X_2X_0^3 & 0 \end{array}\right]\Big) \underset{(11)}{=} rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} X_0 & X_0X_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} X_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\Big) = r.$$

Na osnovu $rank(X_0) = r$ matrica X_0 je regularna i na osnovu matrične jednačine $X_0^2 = X_0$ važi $X_0 = I_r$. Samim tim, prema teoremi 2.4.1., važi $A^{(2)} = X \in A\{1\}$, tj. ispunjen je uslov (i).

<u>$(iii) \wedge (i) \Longrightarrow (ii)$</u> Za matricu $X = A^{(1)}$ pretpostavimo da je $rank(X) = rank(A) = r$. Neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Prema teoremi 2.4.1. važi $A^{(1)} = P \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q$, za ma koje matrice X_1, X_2 i X_3 odgovarajućeg formata. Pretpostavka $rank(A^{(1)}) = rank(A) = r$ ekvivaletna je sa jednakošću

$$rank\Big(P \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] Q\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]\Big) = rank\Big(\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline 0 & X_3 - X_2X_1 \end{array}\right]\Big) = r,$$

na osnovu koje ustanovljavamo $X_3 = X_2X_1$. Odatle, prema teoremi 2.4.2., važi $A^{(1)} = X \in A\{2\}$, tj. ispunjen je uslov (ii). ■

Teorema 2.5.5. predstavlja odgovarajuću teoremu 2 monografije [ABI-TG] (str. 12). Kao *doprinos*, dokaz je izveden prema metodi iz članka [VP2]. Takođe, kao *doprinos*, dajemo direktan dokaz odgovarajuće teoreme 4 monografije [ABI-TG] (str. 21). Napomenimo da u ovom radu, navedena teorema, koristi se u paragrafu 3.3.

<u>Teorema 2.5.6.</u> <u>(Urquhart)</u> *Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi:*

$$A^{\dagger} = A^{(1,4)} A\, A^{(1,3)}. \tag{24}$$

<u>Dokaz.</u> Neka su određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. Pri tom neka su matrice PP^* i Q^*Q predstavljene u obliku blok matrica (13). Zapisujući matricu $A^{(1,4)}$ u obliku (17) i matricu $A^{(1,3)}$ u obliku (15), blokovskim množenjem dobijamo

$$\begin{aligned} A^{(1,4)} \cdot A \cdot A^{(1,3)} &= P \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1' \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & X_3' \end{array}\right] Q \cdot A \cdot P \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline X_2'' & X_3'' \end{array}\right] Q \\ &= P \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1' \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & X_3' \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline X_2'' & X_3'' \end{array}\right] Q \\ &= P \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & T_4^{-1}T_3S_2S_4^{-1} \end{array}\right] Q. \end{aligned}$$

Rezultat je Moore-Penroseov inverz $A^{\dagger}$ dat u obliku formule (18). Navedeno dokazuje da važi formula (24). ■

3. Uopšteni inverzi i linearni sistemi

3.1. {1}-inverz i linearni sistemi

Navodimo osnovno tvrđenje kojim se povezuju {1}-inverzi i linearni sistemi.

Teorema 3.1.1. (Penrose) *Za matrice* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$ *i* $D \in \mathbb{C}^{m\times q}$ *matrična jednačina*:

$$A\,X\,B = D \tag{1}$$

jeste moguća ako i samo ako za ma koje {1}*-inverze* $A^{(1)}$ *i* $B^{(1)}$ *važi uslov*:

$$A\,A^{(1)}D\,B^{(1)}B = D. \tag{2}$$

Ako je matrica $X_0 \in \mathbb{C}^{n\times p}$ *neko posebno rešenje matrične jednačine* (1)*, tada je opšte rešenje matrične jednačine* (1) *dato u obliku*:

$$X = f(Y) = X_0 + Y - A^{(1)}A\,Y\,B\,B^{(1)}, \tag{3}$$

gde je $Y \in \mathbb{C}^{n\times p}$ *proizvoljna matrica. Opšte rešenje* (3) *matrične jednačine* (1) *jeste reproduktivno ako i samo ako je* $X_0 = A^{(1)}D\,B^{(1)}$.

Dokaz. Neka je matrična jednačina (1) moguća i neka je X_0 jedno njeno rešenje. Tada važi $D = A\,X_0B = A\,A^{(1)}\,(\,A\,X_0B\,)\,B^{(1)}B = A\,A^{(1)}D\,B^{(1)}B$, tj. ispunjen je uslov (2). Obratno, neka važi uslov (2) tada je evidetno da je jedno rešenje matrične jednačine (1) dato sa $X_0 = A^{(1)}D\,B^{(1)}$. Samim tim matrična jednačina (1) jeste moguća. Dalje dokazujemo da je sa (3) dato opšte rešenje matrične jednačine (1). Direktno se proverava da je sa (3) dato rešenje matrične jednačine. Obratno, neka je $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ ma koje rešenje matrične jednačine (1), tada važi

$$\begin{array}{rcl} X &=& X - A^{(1)}D\,B^{(1)} + A^{(1)}D\,B^{(1)} \\ &=& X - A^{(1)}AXB\,B^{(1)} + A^{(1)}AX_0B\,B^{(1)} \\ &=& X - A^{(1)}A\,(X - X_0)\,B\,B^{(1)} \\ &=& X_0 + (X - X_0) - A^{(1)}A\,(X - X_0)\,B\,B^{(1)} \\ &=& X_0 + Y - A^{(1)}A\,Y\,B\,B^{(1)} = f(Y), \end{array}$$

za matricu $Y = X - X_0$. Samim tim svako rešenje $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ matrične jednačine (1) može se predstaviti u obliku (3). Na osnovu $f^2(Y) = f(Y) + (X_0 - A^{(1)}DB^{(1)})$, zaključujemo da je formula opšteg rešenja (3) matrične jednačine (1) reproduktivna ako i samo ako je $X_0 = A^{(1)}D\,B^{(1)}$. ■

Napomena 1. R. Penrose *u članku* [RP1] *iz* 1955. *godine dao je opšte rešenje u reproduktivnom obliku*:

$$X = f(Y) = A^{(1)} D\, B^{(1)} + Y - A^{(1)} A\, Y\, B\, B^{(1)} \quad (Y \in \mathbb{C}^{n \times p}), \tag{4}$$

Kao doprinos navedena formulacija prethodne teoreme je šira u odnosu na originalnu formulaciju iz članka [RP1] *jer obuhvata kako reproduktivna rešenja, tako i ostala rešenja.*

Napomena 2. *Opšte rešenje matrične jednačine* (1), *pre* Penrose*a, razmatrao je i* Bjerahmmar *u članku iz* 1951. *godine* [AB2] (*kao i u knjizi* [AB1]). *Opšte rešenje je dato u funkciji od dve matrice*:

$$X = \Phi(Y, Z) = A^{(1)} D\, B^{(1)} + (I - A^{(1)} A) Y + Z(I - B B^{(1)}) \quad (Y, Z \in \mathbb{C}^{n \times p}). \tag{5}$$

Napomenimo da je veza između formula (4) *i* (5) *data sa*: $f(Y) = \Phi(Y, Y B B^{(1)})$.

Kao neposrednu posledicu teoreme 3.1.1. dobijamo da za linearne sisteme važi naredno tvrđenje.

Teorema 3.1.2. *Za matricu* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ *i vektor* $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ *linearan sistem*:

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{6}$$

je moguć po vektoru $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ *ako i samo ako za ma koji* $\{1\}$*-inverz* $A^{(1)}$ *važi uslov*:

$$A A^{(1)} \vec{b} = \vec{b}. \tag{7}$$

Ako je vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ *neko posebno rešenje linearnog sistema* (6), *tada je opšte rešenje dato u obliku*:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y} - A^{(1)} A\, \vec{y} \quad (\vec{y} \in \mathbb{C}^n). \tag{8}$$

Opšte reproduktivno rešenje linearnog sistema (6) *je dato u obliku*:

$$\vec{x} = A^{(1)} \vec{b} + \vec{y} - A^{(1)} A\, \vec{y} \quad (\vec{y} \in \mathbb{C}^n). \tag{9}$$

Primer 3.1.3. *Za matricu i vektor*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad i \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

naći opšte rešenje linearnog sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

Rešenje. U formuli (9) za jedan $\{1\}$-inverz možemo odabrati upravo MOORE-PENROSEov inverz $A^\dagger$ matrice A, koji je određen u primeru 2.4.6. sa

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{-23}{36} & \frac{-1}{6} & \frac{11}{36} \\ \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{36} \end{bmatrix}.$$

Samim tim, jedno opšte reproduktivno rešenje je dato sa

$$\vec{x} = A^\dagger\vec{b} + (I - AA^\dagger)\vec{y} = \ldots = \begin{bmatrix} (\frac{u}{6} - \frac{v}{3} + \frac{w}{6} - \frac{1}{18}) \\ (-\frac{u}{3} + \frac{2v}{3} - \frac{w}{3} + \frac{1}{9}) \\ (\frac{u}{6} - \frac{v}{3} + \frac{w}{6} + \frac{5}{18}) \end{bmatrix},$$

za proizvoljni vektor $\vec{y} = [\ u\ \ v\ \ w\ ]^T \in \mathbb{C}^3$.

Primer 3.1.4. *Za matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

odrediti opšti oblik vektora $\vec{b} \in \mathbb{C}^3$ za koji je linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ moguć.

Rešenje. Koristeći lemu 2.5.1., na osnovu određenih regularnih matrica Q i P iz primera 2.4.6., za opšti $\{1\}$-inverz $A^{(1)}$ možemo odrediti matricu $AA^{(1)}$ u obliku proizvoda

$$AA^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

za proizvoljne $x, y \in \mathbb{C}$. Uslov mogućnosti (7), posmatranog sistema, po nepoznatom vektoru $\vec{b} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^3$ dovodi do ekvivalencija

$$AA^{(1)} \cdot \vec{b} = \vec{b} \iff \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \big((p-2q+r)x + 2(p-2q+r)y + p\big) \\ \big(2(p-2q+r)x + 5(p-2q+r)y + q\big) \\ \big(3(p-2q+r)x + 8(p-2q+r)y + 2q - p\big) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

Odatle zaključujemo da važi $r = 2q - p$. Znači ako je linearni sistem moguć za vektor $\vec{b}$ on je sledećeg oblika $\vec{b} = \begin{bmatrix} p & q & 2q-p \end{bmatrix}^T$ $(p, q \in \mathbb{C})$. Obratno, lako se proverava da je za vektore navedenog oblika sistem moguć. Specijalno i vektor prethodnog primera jeste navedenog oblika.

Preko pojma „linearan sistem je moguć" možemo dati i karakterizaciju skupa $\{1\}$-inverza. Naime, važi naredno tvrđenje.

Teorema 3.1.5. (ROHDE) *Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi: matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ jeste $\{1\}$-inverz ako i samo ako za svaki vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$, za koji je linearan sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ moguć, sa vektorom $\vec{z} = X\vec{b}$ dato je jedno rešenje linearnog sistema.*

Dokaz. Neka je $X = A^{(1)}$ ma koji $\{1\}$-inverz matrice A. Tada, za svaki vektor $\vec{b}$ za koji je sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ moguć, na osnovu uslova $AA^{(1)}\vec{b} = \vec{b}$, zaključujemo da je vektor $\vec{z} = A^{(1)}\vec{b} = X\vec{b}$ jedno njegovo rešenje. Obratno, birajmo vektor $\vec{b}_j = \vec{A}^{(j)}$ kao j-tu kolonu matrice A $(j = 1, \ldots, n)$. Tada je sistem $A\vec{x} = \vec{b}_j$ moguć za $\vec{x} = \vec{e}_j$ i neka je vektor $\vec{z}_j = X\vec{b}_j$ rešenje posmatranog sistema. Samim tim iz $A\vec{z}_j = \vec{b}_j$ zaključujemo $AX\vec{A}^{(j)} = \vec{A}^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Odatle je $AXA = A$, što dokazuje da je X $\{1\}$-inverz. ■

3.2. Formule rešenja nekih matričnih jednačina

U prethodnom paragrafu pokazali smo na koji način, pomoću $\{1\}$-inverza, nalazimo opšte rešenje mogućih linearnih sistema. U ovom paragrafu pokazaćemo da se na osnovu teoreme 3.1.1. može naći rešenje nekih matričnih jednačina, kao i da je moguće dati karakterizaciju nekih klasa uopštenih inverza.

S. Prešić je 1963. godine dokazao sledeće tvrđenje.

Teorema 3.2.1. [SP3] *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i matricu $B \in A\{1\}$ važe ekvivalencije*:

(i) $AX = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = Y - BAY,$

(ii) $XA = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = Y - YBA,$

(iii) $AXA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = B + Y - BAYAB,$

(iv) $AX = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = I + Y - BAY,$

(v) $XA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = I + Y - YBA.$

S. Prešić, u radu [SP4] iz 1968. godine, pojam reproduktivnosti proširio je na proizvoljne jednačine i uveo je postupak „ureproduktivljavanja" nereproduktivnih rešenja. Tako na primer, opšta rešenja $(iii) - (v)$ prethodne teoreme jesu nereproduktivna. Navedena rešenja dobijaju se direktno prema proširenoj Penroseovoj teoremi[5] 3.1.1. M. Haverić, u tezi [MH1], razmatrala je navedeni postupak „ureproduktivljavanja". Tako, sva reproduktivna opšta rešenja matričnih jednačina prethodne teoreme data su narednim tvrđenjem.

Teorema 3.2.2. [MH2] *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i matricu $B \in A\{1\}$ važe ekvivalencije*:

(i) $AX = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = Y - BAY,$

(ii) $XA = 0 \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = Y - YBA,$

[5] napomenimo da dobijena rešenja ne slede direktno iz originalne Penrose-ove formulacije iz 1955. godine

(iii) $AXA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = BAB + Y - BAYAB,$

(iv) $AX = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = BA + Y - BAY,$

(v) $XA = A \iff (\exists Y \in \mathbb{C}^{n\times n})\ X = AB + Y - YBA.$

Dokaz. Dovoljno je u rešenjima $(iii) - (v)$, teoreme 3.2.1., zameniti matricu Y redom sa matricama $(Y - B)$, $(Y + BA - I)$ i $(Y + AB - I)$. ■

Prethodna teorema je takođe i posledica PENROSEove teoreme 3.1.1. (birajući reproduktivna rešenja). Kao neposrednu posledicu prethodne dve teoreme dobijamo karakterizaciju $\{1\}$-inverza u obliku skupova:

(10) $$A\{1\} = \{B + Y - BAYAB \mid Y \in \mathbb{C}^{n\times n}\},$$

(11) $$A\{1\} = \{BAB + Y - BAYAB \mid Y \in \mathbb{C}^{n\times n}\},$$

gde je B ma koji $\{1\}$-inverz matrice A.

U daljem razmatranju navodimo niz teorema kojima dajemo karakterizacije nekih klasa uopštenih inverza. Naredne dve teoreme koriste se u paragrafu 3.3.

Teorema 3.2.3. *Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ skup $A\{1,3\}$ sastoji se od svih rešenja $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ jednačine*:

(12) $$AX = AA^{(1,3)},$$

gde je $A^{(1,3)}$ bilo koji element iz $A\{1,3\}$.

Dokaz. Neka je $X \in A\{1,3\}$, dokazujemo da matrica X ispunjava matričnu jednačinu (12). Zaista

$$\begin{aligned} AA^{(1,3)} &= AXAA^{(1,3)} = (AX)(AA^{(1,3)}) = (AX)^*(AA^{(1,3)})^* \\ &= X^*A^*(A^{(1,3)})^*A^* = X^*(AA^{(1,3)}A)^* = X^*A^* = (AX)^* = AX. \end{aligned}$$

Obratno, neka je matrica X rešenje matrične jednačine (12). Tada važi $AXA = AA^{(1,3)}A = A$, tj. $X \in A\{1\}$. Sa druge strane iz $AX = AA^{(1,3)}$ sleduje $(AX)^* = (AA^{(1,3)})^* = AA^{(1,3)} = AX$, tj. $X \in A\{3\}$. Sveukupno zaključujemo da $X \in A\{1,3\}$. ■

Kao posledicu teoreme 3.1.1.i prethodne teoreme dobijamo karakterizaciju $\{1,3\}$-inverza u obliku skupa:

(13) $$A\{1,3\} = \{A^{(1,3)} + (I - A^{(1,3)}A)Y \mid Y \in \mathbb{C}^{n\times m}\}.$$

Teorema 3.2.4. *Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ skup $A\{1,4\}$ sastoji se od svih rešenja $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ jednačine*:

(14) $$AX = A^{(1,4)}A,$$

gde je $A^{(1,4)}$ bilo koji element iz $A\{1,4\}$.

Dokaz. Neka je $X \in A\{1,4\}$, dokazujemo da matrica X ispunjava matričnu jednačinu (14). Zaista

$$\begin{aligned} A^{(1,4)}A &= A^{(1,4)}AXA = (A^{(1,4)}A)(XA) = (A^{(1,4)}A)^*(XA)^* \\ &= A^*(A^{(1,4)})^*A^*X^* = (AA^{(1,4)}A)^*X^* = A^*X^* = (XA)^* = XA. \end{aligned}$$

Obratno, neka je matrica X rešenje matrične jednačine (14). Tada važi $AXA = AA^{(1,4)}A = A$, tj. $X \in A\{1\}$. Sa druge strane iz $XA = A^{(1,4)}A$ sleduje $(XA)^* = (A^{(1,4)}A)^* = A^{(1,4)}A = XA$, tj. $X \in A\{4\}$. Sveukupno zaključujemo da $X \in A\{1,4\}$. ■

Kao posledicu teoreme 3.1.1.i prethodne teoreme dobijamo karakterizaciju $\{1,4\}$-inverza u obliku skupa:

$$A\{1,4\} = \{A^{(1,4)} + Y(I - A^{(1,4)}A) \mid Y \in \mathbb{C}^{n\times m}\}. \tag{15}$$

Neka je $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ matrica ranga $r > 1$. Za prirodan broj $0 < s < r$ označimo sa $A\{1,\dots,k\}_s$ *skup svih* $\{i,\dots,k\}$*-inverza ranga* s. Tada važi naredno tvrđenje.

Teorema 3.2.5. (Stewart) *Za matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *ranga* $r > 1$ *i prirodan broj* $0 < s < r$ *važi*:

$$A\{2\}_s = \{X \mid (\exists Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s})(\exists Z \in \mathbb{C}_s^{s\times m})\ X = YZ \ \wedge\ ZAY = I_s\}. \tag{16}$$

Dokaz. Neka je $X \in A\{2\}_s$ proizvoljna matrica ranga s. Koristeći faktorizaciju punog ranga postoje matrice $Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s}$ i $Z \in \mathbb{C}_s^{s\times m}$ takve da je tačno $X = YZ$. Prema teoremi 2.5.3. važi $Y^{(1)}Y = I_s$ i $ZZ^{(1)} = I_s$. Primetimo da je uslov $XAX = X$ ekvivalentan sa $YZAYZ = YZ$. Množeći prethodnu jednakost sa leve strane sa $Y^{(1)}$ i sa desne strane sa $Z^{(1)}$ dobijamo da važi i drugi uslov $ZAY = I_s$. Obratno, neka je $X = YZ$ i $ZAY = I_s$, za neke matrice $Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s}$ i $Z \in \mathbb{C}_s^{s\times m}$. Proverimo da je X $\{2\}$-inverz ranga s. Zaista $XAX = YZAYZ = YI_sZ = YZ = X$. Dalje iz $ZAY = I_s$, množeći sa leve strane sa Y, dobijamo jednakosti $YZAY = XAY = Y$, na osnovu koje zaključujemo $s = rank(Y) \le rank(X)$. Sa druge strane iz jednakosti $X = YZ$ zaključujemo $rank(X) \le rank(Y) = s$. Sveukupno matrica X je ranga s. ■

Kao posledicu teoreme Bjerhmmara 2.5.5. i prethodne teoreme Stewarta 3.2.5. dobijamo karakterizaciju $\{1,2\}$-inverza u obliku skupa:

$$A\{1,2\} = A\{2\}_r = \{X \mid (\exists Y \in \mathbb{C}_r^{n\times r})(\exists Z \in \mathbb{C}_r^{r\times m})\ X = YZ \ \wedge\ ZAY = I_r\}. \tag{17}$$

Na kraju ovog paragrafa navodimo, bez dokaza, tvrđenje koje je dokazala M. Haverić u [MH3].

Teorema 3.2.6. *Za matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *ranga* $r > 1$ *i prirodan broj* $0 < s < r$ *važi*:

$$A\{2,3\}_s = \{X \mid (\exists Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s})\ X = Y(AY)^{(1,3)} \ \wedge\ AY \in \mathbb{C}_s^{m\times s}\}, \tag{18}$$

$$A\{2,4\}_s = \{X \mid (\exists Y \in \mathbb{C}_s^{n\times s})\ X = (AY)^{(1,4)}Y \ \wedge\ YA \in \mathbb{C}_s^{s\times n}\}. \tag{19}$$

Navedeno tvrđenje predstavlja proširenje teoreme 6 monografije [ABI-TG] (str. 47.), gde umesto $\{1,3\}$, odnosno $\{1,4\}$ inverza stoji MOORE-PENROSEov inverz. Pri tom u [MH3] je izneta i *korekcija dokaza* navedene teoreme u monografiji [ABI-TG]. Na osnovu prethodnih tvrđenja imamo sledeće karakterizacije $\{1,2,3\}$-inverza:

(20a) $$A\{1,2,3\} = \{A^{(1,2,3)} + (I - A^{(1,2,3)}A)YA^{(1,2,3)} \mid Y \in \mathbb{C}^{n\times m}\},$$

(20b) $$A\{1,2,3\} = \{Y(AY)^{(1,3)} \mid AY \in \mathbb{C}_r^{m\times r}\};$$

kao i karakterizacije $\{1,2,4\}$-inverza:

(21a) $$A\{1,2,4\} = \{A^{(1,2,4)} + A^{(1,2,4)}(I - A^{(1,2,3)}A) \mid Y \in \mathbb{C}^{n\times m}\},$$

(21b) $$A\{1,2,4\} = \{(YA)^{(1,4)}Y \mid YA \in \mathbb{C}_r^{m\times r}\}.$$

3.3. Srednje kvadratno rešenje i rešenje minimalne norme sistema linearnih jednačina

Za zadanu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ neka je sistem linearnih jednačina dat u obliku matrične jednačine:

(22) $$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Ako je $A^{(1)}$ ma koji $\{1\}$-inverz matrice A, tada je prema teoremi 3.1.2. (posledici PENROSEove teoreme 3.1.1.), uslov $AA^{(1)}\vec{b} = \vec{b}$ potreban i dovoljan uslov da matrična jednačina (22) jeste moguća. U slučaju da uslov mogućnosti $AA^{(1)}\vec{b} = \vec{b}$ nije ispunjen, tada posmatrana matrična jednačina (22) nema rešenja. R. PENROSE, u radu [RP2], razmatrao je matričnu jednačinu (22) i kada uslov mogućnosti $AA^{(1)}\vec{b} = \vec{b}$ nije ispunjen. U tom slučaju, umesto tačnog rešenja matrične jednačine (22), R. PENROSE uveo je pojam „*najboljeg aproksimativnog rešenja*”.

U ovom radu razmotrićemo srednje kvadratno rešenje i rešenje minimalne norme sistema linearnih jednačina kao oblike „najboljih” približnih rešenja linearnih sistema (prema monografiji [ABI-TG]). Za vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ kažemo da je <u>*srednje kvadratno rešenje*</u> matrične jednačine (22) ako je zbir kvadrata odstupanja:

(23) $$\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 = (A\vec{x} - \vec{b})^* \cdot (A\vec{x} - \vec{b})$$

minimalan. U terminima norme, srednje kvadratno rešenje $\vec{x_0}$ ispunjava uslov:

(24) $$(\forall \vec{x})\, \|A\vec{x}_0 - \vec{b}\| \leq \|A\vec{x} - \vec{b}\|.$$

Ako je uslov mogućnosti $AA^{(1)}\vec{b} = \vec{b}$ ispunjen, tada vektor $\vec{x}_0$ rešenje matrične jednačine (22) jeste sa minimalnim (nultim) zbirom kvadrata odstupanja.

U razmatranju srednje kvadratnih rešenja nemogućih linearnih sistema (22) polazna tačka je sledeće pomoćno tvrđenje.

Lema 3.3.1. *Neka je data matrica* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i vektor* $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$. *Tada za proizvoljni vektor* $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ *važi jednakost*:

$$\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 = \|A\vec{x} - AA^{(1,3)}\vec{b}\|^2 + \|\vec{b} - AA^{(1,3)}\vec{b}\|^2. \tag{25}$$

Dokaz. Primetimo da važe sledeće jednakosti

$$A = AA^{(1,3)}A \quad \wedge \quad (AA^{(1,3)})^* = AA^{(1,3)}.$$

Odatle dobijamo da važe sledeće dve jednakosti:

$$(I_m - AA^{(1,3)})^*A = (I_m - AA^{(1,3)})A = A - AA^{(1,3)}A = 0, \tag{26}$$

$$A^*(I_m - AA^{(1,3)}) = A^*(I_m - AA^{(1,3)})^* = ((I_m - AA^{(1,3)})A)^* = 0, \tag{27}$$

koje ćemo koristiti u računanju vrednost izraza $\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 = \Big((A\vec{x} - \vec{b})^* \cdot (A\vec{x} - \vec{b})\Big)$. Na osnovu prethodnog zaključujemo

$$\begin{aligned}
\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 &= \Big(A\vec{x} - \vec{b}\Big)^* \cdot \Big(A\vec{x} - \vec{b}\Big) \\
&= \Big((\vec{x} - A^{(1,3)}\vec{b})^*A^* - \vec{b}^*(I_m - AA^{(1,3)})^*\Big) \\
&\cdot \Big((A\vec{x} - AA^{(1,3)}\vec{b}) - (I_m - AA^{(1,3)})\vec{b}\Big) \\
&= \Big((A\vec{x} - AA^{(1,3)}\vec{b})^* \cdot (A\vec{x} - AA^{(1,3)}\vec{b})\Big) \\
&- \Big((\vec{x} - A^{(1,3)}\vec{b})^* \cdot \underbrace{A^*(I_m - AA^{(1,3)})}_{=0} \cdot \vec{b}\Big) \qquad \text{(anulira se prema (27))} \\
&- \Big(\vec{b}^* \cdot \underbrace{(I_m - AA^{(1,3)})^*A}_{=0} \cdot (\vec{x} - A^{(1,3)}\vec{b})\Big) \qquad \text{(anulira se prema (26))} \\
&+ \Big((\vec{b} - AA^{(1,3)}\vec{b})^* \cdot (\vec{b} - AA^{(1,3}\vec{b})\Big) \\
&= \|A\vec{x} - AA^{(1,3)}\vec{b}\|^2 + \|\vec{b} - AA^{(1,3)}\vec{b}\|^2.
\end{aligned}$$

Sveukupno, dokazana je jednakost (25). ■

Dokazujemo dva tvrđenja koje karakterišu srednje kvadratna rešenja sistema linearnih jednačina (22).

Teorema 3.3.2. *Neka je data matrica* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i vektor* $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$. *Vektor* $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ *jeste srednje kvadratno rešenje sistema linearnih jednačina* (22) *ako i samo ako je vektor* $\vec{x}$ *rešenje matrične jednačine*:

$$A\vec{x} = (AA^{(1,3)}) \cdot \vec{b}. \tag{28}$$

Specijalno vektor:

$$\vec{x} = A^{(1,3)}\vec{b} \tag{29}$$

jeste srednje kvadratno rešenje sistema linearnih jednačina (22).

Dokaz. Za sistem (22) uslov mogućnosti dat je u obliku $(AA^{(1)}) \cdot \vec{b} = \vec{b}$. Za sistem (28) uslov mogućnosti uvek je ispunjen jer važi $(AA^{(1)}) \cdot (AA^{(1,3)}\vec{b}) = (AA^{(1,3)}\vec{b}) \Longleftrightarrow (AA^{(1,3)})\vec{b} = (AA^{(1,3)})\vec{b}$. Neka je $\vec{x}$ rešenje sistema $A\vec{x} = (AA^{(1,3)}) \cdot \vec{b}$, tada na osnovu jednakosti (25) važi $\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{b} - AA^{(1,3)}\vec{b}\|^2$. Dakle, za vektor $\vec{x}$ zbir kvadrata odstupanja je minimalan, pa vektor $\vec{x}$ jeste srednje kvadratno rešenje sistema (22). Obratno, ako je vektor $\vec{x}$ srednje kvadratno rešenje sistema (22), tada na osnovu jednakosti (25) posmatrani vektor je rešenje i sistema (28). ■

Teorema 3.3.3. *Neka je data matrica $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Ako je $M \in \mathbb{C}^{n\times m}$ takva matrica da za svako $\vec{b} \in \mathbb{C}^n$ vektor:*

$$\vec{x} = M\vec{b} \tag{30}$$

predstavlja srednje kvadratno rešenje sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, tada je matrica M jedan $\{1,3\}$-inverz matrice A.

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi vektor $\vec{x}$ jeste rešenje matrične jednačine (28), tj. važi

$$A \cdot \vec{x} = (AA^{(1,3)}) \cdot \vec{b} \Longleftrightarrow AM\vec{b} = AA^{(1,3)}\vec{b} \Longleftrightarrow (AM - AA^{(1,3)})\vec{b} = \vec{0}.$$

Budući da je vektor $\vec{b}$ proizvoljan važi jednakost $AM = AA^{(1,3)}$. Samim tim prema teoremi 3.2.3. matrica M jeste $\{1,3\}$-inverz. ■

Vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ zove se <u>*rešenje minimalne norme*</u>, za sistem $A\vec{x} = \vec{b}$, ako je ispunjen uslov:

$$(\forall \vec{x})\Big((\vec{x} \neq \vec{x}_0 \wedge \|A\vec{x} - \vec{b}\| = \|A\vec{x}_0 - \vec{b}\|) \implies \|\vec{x}_0\| < \|\vec{x}\|\Big). \tag{31}$$

Navodimo, bez dokaza, dva tvrđenja iz monografije [ABI-TG] koja karakterišu rešenja minimalne norme sistema linearnih jednačina (22).

Teorema 3.3.4. *Neka je data matrica $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$. Vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ jeste rešenje sa minimalnom normom sistema linearnih jednačina* (22) *ako i samo ako je vektor $\vec{x}$ rešenje matrične jednačine:*

$$A\vec{x} = (AA^{(1,4)}) \cdot \vec{b}. \tag{32}$$

Specijalno vektor:

$$\vec{x} = A^{(1,4)}\vec{b} \tag{33}$$

jeste rešenje minimalne norme sistema linearnih jednačina (22).

Teorema 3.3.5. *Neka je data matrica $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Ako je $M \in \mathbb{C}^{n\times m}$ takva matrica da za svako $\vec{b} \in \mathbb{C}^n$ vektor:*

$$\vec{x} = M\vec{b} \tag{34}$$

predstavlja rešenje minimalne norme sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, tada je matrica M jedan $\{1,4\}$-inverz matrice A.

R. Penrose, u radu [RP2], uveo je <u>*najbolje aproksimativno rešenje*</u> sistema (22), kao onaj vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ za koji je ispunjen uslov:

$$(35) \qquad (\forall \vec{x}) \Big(\|A\vec{x}_0 - \vec{b}\| < \|A\vec{x} - \vec{b}\| \veebar (\|A\vec{x} - \vec{b}\| = \|A\vec{x}_0 - \vec{b}\| \wedge \|\vec{x}_0\| \leq \|\vec{x}\|) \Big).$$

A. Ben-Israel i T. Greville, u monografiji [ABI-TG], definišu vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ kao <u>*srednje kvadratno rešenje minimalne norme*</u> za sistem (22), ako ispunjava uslov:

$$(36) \quad (\forall \vec{x}) \Big(\|A\vec{x}_0 - \vec{b}\| \leq \|A\vec{x} - \vec{b}\| \wedge ((\vec{x} \neq \vec{x}_0 \wedge \|A\vec{x} - \vec{b}\| = \|A\vec{x}_0 - \vec{b}\|) \Longrightarrow \|\vec{x}_0\| < \|\vec{x}\|) \Big).$$

Nije teško proveriti da su uslovi (35) i (36), za vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, međusobno ekvivaletni. Samim tim, najbolje aproksimativno rešenje se podudara sa srednjim kvadratnim rešenjem minimalne norme.

Na kraju ovog paragrafa dokazujemo tvrđenje kojim dajemo odgovor na pitanje[5] *Kakav odgovor daje vektor* $A^{\dagger}\vec{b}$?

<u>Teorema 3.3.6. (Penrose).</u> *Neka je data matrica* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ *i vektor* $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$. *Vektor* $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ *jeste srednje kvadratno rešenje minimalne norme matrične jednačine* $A\vec{x} = \vec{b}$ *ako i samo ako je vektor* $\vec{x}$ *rešenje matrične jednačine* $A\vec{x} = AA^{\dagger}\vec{b}$. *Prethodna jednačina je uvek moguća sa rešenjem*:

$$(37) \qquad \vec{x} = A^{\dagger}\vec{b}$$

koje predstavlja jedinstveno određeno srednje kvadratno rešenje minimalne norme sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

<u>Dokaz.</u> Prema teoremi 3.3.2. srednje kvadratna rešenja sistema linearnih jednačina $A\vec{x} = \vec{b}$ podudaraju se sa rešenjima sistema $A\vec{x} = (AA^{(1,3)})\vec{b}$. Prema teoremi 3.3.4. rešenja sa minimalnom normom sistema $A\vec{x} = (AA^{(1,3)}\vec{b})$ podudaraju se sa rešenjima sistema $A\vec{x} = (AA^{(1,4)}) \cdot (AA^{(1,3)}\vec{b})$. Saglasno Urquhartovoj teoremi 2.5.6. važi sledeća jednakost $A\vec{x} = A\,(A^{(1,4)}AA^{(1,3)})\,\vec{b} = AA^{\dagger}\vec{b}$. Odatle sleduje tvrđenje prvog dela teoreme. Prethodna jednačina je uvek moguća jer vektor $x = A^{\dagger}\vec{b}$ predstavlja jedno njeno rešenje. Neka je vektor $\vec{x}$ ma koje rešenje matrične jednačine $A\vec{x} = AA^{\dagger}\vec{b}$. Drugi deo teoreme sleduje na osnovu jednakosti[6] $\|x\|^2 = \|A^{\dagger}\vec{b}\|^2 + \|x - A^{\dagger}\vec{b}\|^2$. ■

Napomenimo da Moore-Penroseov inverz ima značajne primene u matematičkoj statistici. Tako na primer Moore-Penroseov inverz se koristi u regresionoj analizi [SC-CM] i ocenjivanju parametara u linearnim modelima [SS-DC].

[5] naslov paragrafa 2.1. u [SC-CM]
[6] videti dokaz u [SS-DC] , [SC-CM]

3.4. Opšti $\{1\}$-inverz kao afini potprostor

U ovom paragrafu proučavamo neke osobine opšteg $\{1\}$-inverza polazeći od forme opšteg oblika $\{1\}$-inverza datog u teoremi 2.4.1. Neka je data *nenula matrica* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, tada postoje regularne matrice $Q \in \mathbb{C}_m^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ takve da važi:

$$QAP = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{38}$$

Prema teoremi 2.4.1. *opšti oblik* $\{1\}$*-inverza* dat je u obliku blok matrice:

$$A^{(1)} = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot Q, \tag{39}$$

za matrice $X_1 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$ čiji su elementi medjusobno nezavisne promenljive. Označimo sa t_i $(i = 1,\dots,k)$ promenljive redom po vrstama prvo iz matrice X_1, potom iz matrice X_2 i na kraju iz matrice X_3. Na taj način opšti $\{1\}$-inverz matrice javlja se sa najviše $k = m\cdot n - r^2$ nezavisnih promenljivih $t_1, t_2, \dots, t_k$. U tom smislu, opšti oblik $\{1\}$-inverza možemo razmatrati kao funkciju svojih k nezavisnih argumenata:

$$A^{(1)} = A^{(1)}(t_1, t_2, \dots, t_k) : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times n}. \tag{40}$$

Na osnovu (39) primetimo da je element u preseku i-te vrste i j-te kolone matrice $A^{(1)} = [\alpha_{ij}]$ dat u obliku afine hiper-ravni:

$$\alpha_{ij} = \gamma_{ij} + \beta_{ij}^{(1)} t_1 + \dots + \beta_{ij}^{(k)} t_k, \tag{41}$$

za neke konstante $\gamma_{ij}, \beta_{ij}^{(1)}, \dots, \beta_{ij}^{(k)} \in \mathbb{C}$ $(i = 1,\dots,m \wedge j = 1,\dots,n)$. Samim tim, postoje konstantne matrice $C = [\gamma_{ij}]$, $B_1 = [\beta_{ij}^{(1)}], \dots, B_k = [\beta_{ij}^{(k)}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ takve da važi matrična jednakost:

$$A^{(1)}(t_1,\dots,t_k) = C + B_1\cdot t_1 + \dots + B_k \cdot t_k. \tag{42}$$

Na osnovu prethodnog razmatranja, u vektorskom prostoru matrica $\mathbb{C}^{m\times n}$, opšti $\{1\}$-inverz $A^{(1)}$ može se razmatrati kao *afini potprostor*. Linearna kombinacija $D = D(t_1,\dots,t_k) = \sum_{i=1}^{k} B_i \cdot t_i$ predstavlja *direktrisu* afinog potprostora za koju važi:

$$D = A^{(1)} - C = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} 0 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot Q. \tag{43}$$

Označimo sa E_i matricu koja ima jedinicu na poziciji promenljive t_i i sa nulama na ostalim pozicijama u matrici direktrise D $(i = 1,\dots,k)$. U vektorskom prostoru matrica $\mathbb{C}^{m\times n}$ matrce $E_1,\dots,E_k$ jesu linearno nezavisne. Odatle dobijamo linearnu nezavisnost matrica $P\cdot E_1,\dots,P\cdot E_k$, kao i matrica $B_1 = P\cdot E_1\cdot Q,\dots,B_k = P\cdot E_k\cdot Q$. Znači matrice B_i $(i = 1,\dots,k)$ jesu baza za direktrisu D. Sa druge strane, budući da je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ nenula matrica, tada je i $\{1\}$-inverz $C = A^{(1)}(0,\dots,0) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ nenula matrica. Odatle zaključujemo da se direktrisa D ne podudara sa afinim prostorom $A^{(1)}$. Sveukupno, kao *doprinos*, zaključujemo da važi tvrđenje.

Teorema 3.4.1. *Za svaku nenula matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *opšti* $\{1\}$*-inverz* $A^{(1)} = A^{(1)}(t_1,\dots,t_k)$, *dat sa formulom* (40), *jeste afini prostor dimenzije* $k = m\cdot n - r^2$ *vektorskog prostora matrica* $\mathbb{C}^{m\times n}$. *Pri tom direktrisa D, data formulom* (43), *ne podudara se sa afinim prostorom opšteg* $\{1\}$*-inverza* $A^{(1)}$.

Primer 3.4.2. *Za matricu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ *odrediti opšti* $\{1\}$*-inverz u obliku afinog potprostora.*

Rešenje. Na osnovu primera 2.4.6. opšti $\{1\}$-inverz je dat u sledećem obliku

$$\mathrm{A}^{(1)} = \mathrm{P}\cdot\left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right]\cdot\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{4}{3} & 0 & -3 \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ \hline t_3 & t_4 & t_5 \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \dots =$$

$$= \begin{bmatrix} (t_1 - 15t_3 + 6t_4 - 3t_5 + 5) & (-2t_1 + 6t_3 - 3t_4 + 6t_5 - 2) & (t_1 - 3t_5) \\ (-2t_1 + t_2 + 30t_3 - 12t_4 + 6t_5 - 12) & (4t_1 - 2t_2 - 12t_3 + 6t_4 - 12t_5 + 5) & (-2t_1 + t_2 + 6t_5) \\ (\frac{4}{3}t_1 - 15t_3 + 6t_4 - 3t_5 + \frac{20}{3}) & (-\frac{8}{3}t_1 + 6t_3 - 3t_4 + 6t_5 - \frac{8}{3}) & (\frac{4}{3}t_1 - 3t_5) \end{bmatrix},$$

pri čemu u prethodnom zapisu učestvuje $k = 3\cdot 3 - 2^2 = 5$ nezavisnih parametara t_i. Odatle dobijamo dekompoziciju $\{1\}$-inverza u obliku afinog prostora

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -12 & 5 & 0 \\ -\frac{20}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}\cdot t_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot t_2 \\
&+ \begin{bmatrix} -15 & 6 & 0 \\ 30 & -12 & 0 \\ -15 & 6 & 0 \end{bmatrix}\cdot t_3 + \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -12 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot t_4 + \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}\cdot t_5 \\
&= \mathrm{C} + \mathrm{B}_1\cdot t_1 + \mathrm{B}_2\cdot t_2 + \mathrm{B}_3\cdot t_3 + \mathrm{B}_4\cdot t_4 + \mathrm{B}_5\cdot t_5.
\end{aligned}$$

Pri tome, direktrisa $D(t_1,\dots,t_5) = B_1t_1 + B_2t_2 + B_3t_3 + B_4t_4 + B_5t_5$ jeste 5-dimenzionalni potprostor 9-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^{3\times 3}$, koji se ne podudara sa afinim prostorom $A^{(1)}$.

3.5. Rešavanje sistema linearnih jednačina pomoću specijalnih izbora {1}-inverza matrice

Neka su dati matrica $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ tako da je sa njima određen moguć nehomogen sistem linearnih jednačina:

$$A\cdot\vec{x} = \vec{b}. \tag{44}$$

Za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ postoje regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da je $QAP = E_r$. U paragrafu 3.4. pokazali smo da je opšti oblik $\{1\}$-inverza $A^{(1)}$ dat sa:

$$A^{(1)} = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot Q, \tag{45}$$

gde su $X_1 = [x_{ij}]$, $X_2 = [y_{ij}]$ i $X_3 = [z_{ij}]$ matrice u kojima učestvuje ukupno $k = m\cdot n - r^2$ međusobno nezavisnih promenljivih. Afini prostor rešenja sistema (44) jeste $(n-r)$-dimenzionalni afini potprostor n-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$ npr. [AL], [PT-AΦ]. U ovom paragrafu dajemo jedan postupak za određivanje promenljivih iz X_1, X_2 i X_3 tako da je *opšte rešenje* sistema (44) dato formulom:

$$\vec{x} = A^{(1)}\vec{b}. \tag{46}$$

Primetimo da je formulom (46), za ma koji $\{1\}$-inverz $A^{(1)}$, uvek dato jedno rešenje mogućeg sistema (44). Da bi odgovorili na postavljeni *problem* odredimo minimalni broj nezavisnih promenljivih tako da se dimenzija afinog prostora rešenja datog formulom (46) podudara sa dimenzijom afinog prostora rešenja sistema (44). Iz $QAP = E_r$ zaključujemo da je matrica $Q \cdot A$ sa poslednjih $m-r$ nula vrsta, jer je rang po vrstama matrice A jednak r. Dokažimo da je vektor $\vec{b'} = Q \cdot \vec{b}$ sa poslednjih $m-r$ nula koordinata. Primetimo da važi:

$$rank([A]) = rank([QA]) \quad \text{i} \quad rank([A|\vec{b}]) = rank([QA|\vec{b'}]). \tag{47}$$

Samim tim, ukoliko bi vektor $\vec{b'}$ imao nenula koordinatu među poslednjih $m-r$ koordinata, tada koristeći se sa jednakostima (47), rang po vrstama matrice sistema $[A]$ bio bi manji od ranga po vrstama proširene matrice sistema $[A|\vec{b}]$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je sistem (44) moguć. Samim tim:

$$\vec{x} = \underbrace{\mathrm{P} \cdot \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Q}}_{A^{(1)}} \cdot \vec{b} \;=\; \mathrm{P} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{1\,1} & \cdots & x_{1\,m-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{2\,1} & \cdots & x_{2\,m-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{r\,1} & \cdots & x_{r\,m-r} \\ y_{1\,1} & y_{1\,2} & \cdots & y_{1\,r} & z_{1\,1} & \cdots & z_{1\,m-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n-r\,1} & y_{n-r\,2} & \cdots & y_{n-r\,r} & z_{n-r\,1} & \cdots & z_{n-r\,m-r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{P} \cdot \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_r \\ \sum_{i=1}^{r} b'_i y_{1\,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{r} b'_i y_{n-r\,i} \end{bmatrix} = \mathrm{P} \cdot \vec{v}(y_{1\,1}, \ldots, y_{n-r\,r}) \;=\; \vec{w}(y_{1\,1}, \ldots, y_{n-r\,r}).$$

Znači da u formuli (46) figuriše najviše $r \cdot (n-r) = r \cdot n - r^2$ nezavisnih promenljivih $y_{i\,j}$. Promenljive $x_{i\,j}$ i $z_{i\,j}$ ne figurišu i njima možemo dodeliti vrednost 0. Primetimo da broj promenljivih y_{ij} u vektorima $\vec{v}$ i $P \cdot \vec{v}$ isti. Ako među brojevima $b_1^{'}, \ldots, b_r^{'}$ ima s nula, tada broj $y_{i\,j}$ promenljivih u vektoru $\vec{x}$ je dat sa:

$$q = (r - s) \cdot (n - r). \tag{48}$$

U razmatranju koje sleduje pokazaćemo kako je moguće dobiti $(n-r)$-dimenzionalni afini prostor rešenja pomoću formule (46). Primetimo da važi

$$\vec{x} = \mathrm{P}\cdot \begin{bmatrix} b_1^{'} \\ \vdots \\ b_r^{'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{P}\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{r} b_i^{'} y_{1\,i} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \mathrm{P}\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{r} b_i^{'} y_{n-r\,i} \end{bmatrix} = \mathrm{P}\cdot \begin{bmatrix} b_1^{'} \\ \vdots \\ b_r^{'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{P}\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \tau_1 + \ldots + \mathrm{P}\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \tau_{n-r},$$

za $n-r$ zavisnih promenljivih $\tau_1 = \sum_{i=1}^{r} b_i^{'} y_{1\,i}, \ldots, \tau_{n-r} = \sum_{i=1}^{r} b_i^{'} y_{n-r\,i}$ iskazanih preko nezavisnih promenljivih y_{ij}. Budući da se radi o nehomogenom sistemu postoji bar jedna nenulta koordinata $b_j^{'} \neq 0$ vektora $\vec{b}^{'} = Q\vec{b}$. Za prethodno određenu j-tu koordinatu izborom matrica:

$$\mathrm{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & y_{1j}/b_j^{'} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & y_{n-r\,j}/b_j^{'} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

dobijamo $\tau_1 = y_{1j}, \ldots, \tau_{n-r} = y_{n-r\,j}$ kao linearno nezavisne promenljive. Za tako određeno rešenje, pomoću formule (46), dobijamo $(n-r)$-dimenzionalni potprostor afinog prostora rešenja[7]. Samim tim, za specijalan izbor blok matrica (49) formulom (46) dobijamo ceo afini prostor rešenja sistema (44). Na osnovu prethodnog razmatranja sleduje naredno tvrđenje.

Teorema 3.5.1. *Neka su dati matrica $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ tako da je sa njima određen moguć nehomogen sistem linearnih jednačina* (44) *i neka su $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regularne matrice takve da je $QAP = E_r$. Neka je formulom* (45) *dat opšti oblik $\{1\}$-inverza $A^{(1)}$, gde su podmatrice X_1, X_2 i X_3 po koordinatama date sa međusobno nezavisnim promenljivima. Formula* (46) *određuje opšte rešenje sistema* (44) *sa najviše $r \cdot n - r^2$ nezavisnih promenljivih. Tačan broj promenljivih je dat brojem $q = (r-s)\cdot(n-r)$, gde je sa s označen broj nula koje se javljaju u među prvih r koordinata vektora $\vec{b}^{'} = Q \cdot \vec{b}$. Izborom podmatrica X_1, X_2 i X_3 u obliku* (49) *dobijamo opšte rešenje sistema* (44) *sa minimalnim brojem nezavisnih promenljivih.*

[7] KOJI JE ISTE DIMENZIJE KAO I PROSTOR REŠENJA

Primer 3.5.2. *Odrediti opšte rešenje linearnog sitema:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Rešenje. Označimo sa A matricu sistema. Elementarnim transformacijama po vrstama i kolonama na proširenoj matrici sistema određujemo regularne matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} & -\frac{9}{4} \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

takve da važi $QAP = E_2$. Matrica $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ je ranga 2. Dalje, neka su $\vec{b}_1 = [\,1\ 2\ 3\ 4\,]^T$ i $\vec{b}_2 = [\,1\ 5\ 9\ 13\,]^T$ odgovarajuće kolone slobodnih članova. Potražimo opšta rešenja u obliku formule (46), za odgovarajući izbor matrica

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je $\vec{b}_1' = Q \cdot \vec{b}_1 = [\,-\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ 0\ 0\,]^T$. Samim tim, u ovom primeru vektor $\vec{x}$ opšteg rešenja je sa $q = (2-0)\cdot(4-2) = 4$ nezavisna parametra. Zaista, direktnim računom nalazimo

$$\begin{aligned} \vec{x} = A^{(1)}\vec{b} \;&=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{21} & x_{22} \\ \hline y_{11} & y_{12} & z_{11} & z_{12} \\ y_{21} & y_{22} & z_{21} & z_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} & -\frac{9}{4} \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &=\; \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2y_{21} - 3y_{22} \\ 3y_{12} - 2y_{11} \\ 4y_{11} - 6y_{12} - 6y_{21} + 9y_{22} \\ -2y_{11} + 3y_{12} + 4y_{21} - 6y_{22} + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Birajući matricu X_2 sa nezavisnim parametrima y_{11}, y_{21} i $y_{12} = y_{22} = 0$ anuliranim parametrima, prema prethodnom razmatranju, dobijamo opšte rešenje u obliku formule (45) sa minimalnim brojem međusobno nezavisnih parametara

$$\vec{x} = \frac{1}{4}\left[\; 2y_{21} \quad -2y_{11} \quad (4y_{11} - 6y_{21}) \quad (-2y_{11} + 4y_{21} + 1) \;\right]^T.$$

Napomenimo da Gaussovim postupkom rešavanja nalazimo vektor opšteg rešenja u obliku

$$\vec{x} = \frac{1}{4}\left[\; p \quad q \quad (-2q - 3p) \quad \tfrac{1}{4}(4q + 8p + 4) \;\right]^T,$$

za nezavisne parametre p i q. Veza između ova dva opšta rešenja je data u obliku

$$y_{11} = -\frac{1}{2}q \quad \text{i} \quad y_{21} = \frac{1}{2}p.$$

4. Tenzorska veza između koeficijenata linearnog sistema

Tenzorska veza. Neka je dat sistem m linearnih jednačina po n nepoznatih $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{J}_1 & \stackrel{def}{=} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0, \\ \mathcal{J}_2 & \stackrel{def}{=} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0, \\ & \vdots & \\ \mathcal{J}_m & \stackrel{def}{=} & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m = 0, \end{array} \right\}$$

gde su a_{ij} i b_i zadani elementi polja $\mathbb{C}$ ($i \in \mathbb{I}_m \stackrel{def}{=} \{1, \dots, m\} \wedge j \in \mathbb{I}_n$). U ovom delu, za proizvoljne elemente $t_i \in \mathbb{C}$ ($i \in \mathbb{I}_n$), određujemo pod kojim uslovima postoje rešenja prethodnog sistema u obliku:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \varphi_1(t_1, \dots, t_n) = t_1 - \sum\limits_{r=1}^{m} \lambda_{1r} \cdot \mathcal{J}_r = t_1 + \sum\limits_{r=1}^{m} \lambda_{1r} \cdot (\sum\limits_{s=1}^{n} b_r - a_{rs}t_s), \\ x_2 & = & \varphi_2(t_1, \dots, t_n) = t_2 - \sum\limits_{r=1}^{m} \lambda_{2r} \cdot \mathcal{J}_r = t_2 + \sum\limits_{r=1}^{m} \lambda_{2r} \cdot (\sum\limits_{s=1}^{n} b_r - a_{rs}t_s), \\ \vdots & & \\ x_n & = & \varphi_n(t_1, \dots, t_n) = t_n - \sum\limits_{r=1}^{m} \lambda_{nr} \cdot \mathcal{J}_r = t_n + \sum\limits_{r=1}^{m} \lambda_{nr} \cdot (\sum\limits_{s=1}^{n} b_r - a_{rs}t_s), \end{array} \right\}$$

gde su nepoznati parametri $\lambda_{ji} \in \mathbb{C}$ ($i \in \mathbb{I}_m \ \wedge \ j \in \mathbb{I}_n$).

Označimo sa $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matricu polaznog sistema. Polazni sistem (1) matrično zapisujemo u vidu:

$$(3) \qquad A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

gde je $\vec{x} = [\, x_1 \ \dots \ x_n \,]^T \in \mathbb{C}^n$ vektor potencijalnog rešenja. Za proizvoljni vektor $\vec{t} = [\, t_1 \ \dots \ t_n \,]^T \in \mathbb{C}^n$ formule (2) matrično zapisujemo u vidu:

$$(4) \qquad \vec{x} = \varphi(\vec{t}) = \vec{t} + \Lambda \cdot (\vec{b} - A\vec{t}),$$

gde je $\Lambda = [\lambda_{ji}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$ matrica nepoznatih parametara $\lambda_{ji} \in \mathbb{C}$ ($i \in \mathbb{I}_m \ \wedge \ j \in \mathbb{I}_n$).

Zamenimo vektor $\vec{x}$ iz (4) u matričnu jednačinu (3). Na taj način dobijamo ekvivalenciju

$$A\Big(\vec{t} + \Lambda(\vec{b} - A\vec{t})\Big) = \vec{b} \iff$$
$$(A - A\Lambda A)\vec{t} + (A\Lambda\vec{b} - \vec{b}) = \vec{0}.$$

Odatle, nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, matrica Λ ispunjava sistem jednačina:

$$A\Lambda A = A \quad \wedge \quad A\Lambda\vec{b} = \vec{b}. \tag{5}$$

Na osnovu prethodnog razmatranja i teoreme 3.1.2. sleduje naredno tvrđenje.

Teorema 4.1. *Neka je dat moguć linearni sistem* (3). *Ako je formulom* (4) *dato rešenje sistema* (3), *tada je matrica* Λ *jedan od* $\{1\}$*-inverza matrice* A. *Obratno, ako je matrica* Λ *ma koji* $\{1\}$*-inverz matrice* A, *tada je formulom* (4) *određeno jedno rešenje sistema* (3). *U tom slučaju formula* (4) *jeste opšte reproduktivno rešenje.*

Napomena. *Ako je linearni sistem* (3) *kvadratni i ima jedinstveno rešenje tada je matrica* Λ *jednka inverzu* A^{-1}.

Iz sistema jednačina (5) veza između koeficijenata λ_{ji} iskazuje se pomoću Kroneckerovog–tenzorskog proizvoda matrica. Ako označimo sa:

$$\vec{\Lambda} \;=\; [\; \lambda_{11} \;\; \cdots \;\; \lambda_{1k} \;\; \cdots\cdots \;\; \lambda_{nk} \;]^T \tag{6}$$

nepoznati vektor kolonu parametara dobijenu od matrice Λ zapisivanjem matrice u vektor po vrstama, prema osobini (xvi) paragrafa 1.2. uvodnog dela važe ekvivalencije:

$$A\Lambda A = A \quad \Longleftrightarrow \quad (A \otimes A^T) \cdot \vec{\Lambda} = \vec{A}, \tag{7}$$

$$A\Lambda\vec{b} = \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad (A \otimes \vec{b}^T) \cdot \vec{\Lambda} = \vec{b}. \tag{8}$$

Sistem sa desne strane ekvivalencije (7) nazivamo *kvadratni parametarski A-sistem* i sistem sa desne strane ekvivalencije (8) nazivamo *nekvadratni b-sistem*. Prethodne *tenzorsko-matrične veze* između parametara λ_{ji} mogu se direktno dokazati transformišući formule (5) do odgovarajućih linearnih sistema.

Ako je linearan sistem (3) moguć, tada je nekvadratni b-sistem uvek ispunjen za ma koji $\{1\}$-inverz Λ matrice A. U tom slučaju na osnovu kvadratnog parametarskog A-sistema postavljamo *problem* određivanja, u zavisnosti od formata i ranga matrice sistema, maksimalnog broj nezavisnih parametara λ_{ji} preko kojih se izražavaju svi ostali parametri. U cilju rešavanja prethodno postavljenog problema razmatramo slučajeve kvadratnih i nekvadratnih sistema.

Kvadratni sistemi. Neka je A kvadratna matrica reda n nad poljem $\mathbb{C}$. Pretpostavimo da je matrica A reda n i ranga $\rho \leq n$. Tada je i transponovana matrica A^T ranga $\rho \leq n$. Dalje, koristimo se osobinom (xii) paragrafa 1.2. Za parametarski A-sistem (7) rang matrice sistema $A \otimes A^T$ iznosi $\rho^2 \leq n^2$. Razlikujemo slučaj regularne matrice i komplementaran slučaj singularne matrice.

(i) Pretpostavimo da je matrica A regularna, tada je takva i matrica parametarskog A-sistema $A \otimes A^T$, na osnovu formule (xv) paragrafa 1.2. Dalje, koristimo se formulom (x) paragrafa 1.2.:

$$(A \otimes B)^{-1} \; = \; A^{-1} \otimes B^{-1}, \tag{9}$$

gde su A i B regularne kvadratne matrice. U tom slučaju iz (7) vektor parametara $\vec{\Lambda}$ jednoznačno je određen formulom:

$$\vec{\Lambda} = (A^{-1} \otimes (A^T)^{-1}) \cdot \vec{A}, \tag{10}$$

odnosno matrica parametara Λ određena je formulom:

$$\Lambda = A^{-1}. \tag{11}$$

U slučaju regularnih kvadratnih sistema formulama (10) i (11) određena su dva ekvivaletna matrična oblika veza za nepoznate koeficijente λ_{ji}. Pri tom, jedinstveno rešenje eksplicitno je dato formulom $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

Primer 4.3. *Rešiti jednačinu*:

$$J \; = \; a\,x \; + \; p = 0, \tag{12}$$

gde su a i p zadani realni brojevi takvi da je $a \neq 0$.

Rešenje. Rešenje tražimo u reproduktivnom vidu

$$x = \varphi(x) = x + \lambda \cdot (ax + p),$$

gde je λ nepoznati parametar. Zamenimo prethodnu vrednost x u jednačinu (12), tada dobijamo

$$\begin{aligned} ax + p = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a(x + \lambda \cdot (ax + p)) + p = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (1 + a\lambda) \cdot x + p(1 + a\lambda) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 + a\lambda = 0. \end{aligned}$$

Samim tim imamo tačnu vrednost $\lambda = -a^{-1}$. Odatle dobijamo dobro poznato rešenje

$$x = \varphi(x) = x - a^{-1} \cdot (ax + p) = -a^{-1} \cdot p.$$

Primer 4.4. *Rešiti sistem linearnih jednačina*:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 \; = \; a\,x \; + \; b\,y \; + \; p = 0, \\ J_2 \; = \; c\,x \; + \; d\,y \; + \; q = 0, \end{array} \right\} \tag{13}$$

gde su a, b, c, d, p i q zadani realni brojevi takvi da je $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Rešenje. Rešenje tražimo u reproduktivnom vidu

$$\begin{aligned} x = \varphi_1(x, y) = x + \lambda_1(ax + by + p) + \mu_1(cx + dy + q), \\ y = \varphi_2(x, y) = y + \lambda_2(ax + by + p) + \mu_2(cx + dy + q), \end{aligned}$$

gde su λ_1, λ_2, μ_1 i μ_2 nepoznati parametri. Odredimo vezu između parametara. Zamenimo prethodne jednakosti po x i y u jednačine (13). Tada dobijamo

$$\begin{aligned}
ax+by+p=0 \iff\ & ax+a\lambda_1(ax+by+p)+a\mu_1(cx+dy+q)+\\
& by+b\lambda_2(ax+by+p)+b\mu_2(cx+dy+q)+p=0\\
\iff\ & (a+a^2\lambda_1+ac\mu_1+ab\lambda_2+bc\mu_2)\cdot x+\\
& (b+ab\lambda_1+ad\mu_1+b^2\lambda_2+bd\mu_2)\cdot y+\\
& (p+ap\lambda_1+aq\mu_1+bp\lambda_2+bq\mu_2)=0
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
cx+dy+q=0 \iff\ & cx+c\lambda_1(ax+by+p)+c\mu_1(cx+dy+q)+\\
& dy+d\lambda_2(ax+by+p)+d\mu_2(cx+dy+q)+q=0\\
\iff\ & (c+ac\lambda_1+c^2\mu_1+ad\lambda_2+cd\mu_2)\cdot x+\\
& (d+bc\lambda_1+cd\mu_1+bd\lambda_2+d^2\mu_2)\cdot y+\\
& (q+pc\lambda_1+qc\mu_1+pd\lambda_2+qd\mu_2)=0.
\end{aligned}$$

Ako je sistem (13) moguć tada je moguć i sledeći sistem:

$$\text{(14)}\qquad \left\{\begin{array}{l}
a^2\lambda_1+ac\mu_1+ab\lambda_2+bc\mu_2=-a,\\
ab\lambda_1+ad\mu_1+b^2\lambda_2+bd\mu_2=-b,\\
ap\lambda_1+aq\mu_1+bp\lambda_2+bq\mu_2=-p,\\
ac\lambda_1+c^2\mu_1+ad\lambda_2+cd\mu_2=-c,\\
bc\lambda_1+cd\mu_1+bd\lambda_2+d^2\mu_2=-d,\\
pc\lambda_1+qc\mu_1+pd\lambda_2+qd\mu_2=-q.
\end{array}\right\}$$

Regularan kvadratni parametarski A-sistem sastoji se od prve, druge, četvrte i pete jednačine:

$$\text{(15)}\qquad \left\{\begin{array}{l}
a^2\lambda_1+ac\mu_1+ab\lambda_2+bc\mu_2=-a,\\
ab\lambda_1+ad\mu_1+b^2\lambda_2+bd\mu_2=-b,\\
ac\lambda_1+c^2\mu_1+ad\lambda_2+cd\mu_2=-c,\\
bc\lambda_1+cd\mu_1+bd\lambda_2+d^2\mu_2=-d.
\end{array}\right\}$$

Sistem (15) se može eksplicitno zapisati u matričnom obliku $B\cdot\vec{\Lambda}=-\vec{B}$, odnosno na sledeći način

$$\begin{bmatrix} a^2 & ac & ab & bc\\ ab & ad & b^2 & bd\\ ac & c^2 & ad & cd\\ bc & cd & bd & d^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\\ \lambda_2\\ \mu_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a\\ -b\\ -c\\ -d\end{bmatrix},$$

za matricu B formata 4×4 i $\vec{\Lambda}$, $\vec{B}$ vektore kolone formata 4×1 (određene prethodnom jednakošću). Vrednost determinante matrice B data je sa $|B|=(ad-bc)^4=\Delta^4\neq 0$. Samim tim, postoji jedinstveno rešenje sistema (15) po nepoznatom vektoru:

$$\text{(16)}\qquad \vec{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\\ \lambda_2\\ \mu_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2 & ac & ab & bc\\ ab & ad & b^2 & bd\\ ac & c^2 & ad & cd\\ bc & cd & bd & d^2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}-a\\ -b\\ -c\\ -d\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{bmatrix}-d\\ b\\ c\\ -a\end{bmatrix}.$$

Do istog rešenja po vektoru $\vec{\Lambda}$ mogli smo doći pomoću formule (xvi) paragrafa 1.2. Zaista, polazeći od regularne matrice

$$A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix},$$

na osnovu ekvivalencije $A\Lambda A+A=0 \iff (A\otimes A^T)\vec{\Lambda}=-\vec{A}$, dobijamo

$$\vec{\Lambda} = (A^{-1} \otimes (A^T)^{-1}) \cdot -\vec{A} = \left(\begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-c}{\Delta} \\ \frac{-b}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{bmatrix} =$$

$$(17) \quad = \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} d^2 & -cd & -bd & bc \\ -bd & ad & b^2 & -ba \\ -cd & c^2 & ad & -ac \\ bc & -ac & -ab & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} -\Delta d \\ \Delta b \\ \Delta c \\ -\Delta a \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} -d \\ b \\ c \\ -a \end{bmatrix}.$$

Na osnovu (16) i (17) dobijamo iste vrednosti nepoznatih koeficijenata

$$\left\{ \lambda_1 = -\frac{d}{\Delta}, \quad \mu_1 = \frac{b}{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{c}{\Delta}, \quad \mu_2 = -\frac{a}{\Delta}, \right\}$$

kao određene realne brojeve. Neposredno se proverava da su za tako određene vrednosti parametara λ_1, μ_1, λ_2 i μ_2 treća i šesta jednačina sistema (14) ($\flat$-sistem) ispunjene. Odatle, dobijamo rešenje

$$x = x + \frac{-d}{\Delta}(ax + by + p) + \frac{b}{\Delta}(cx + dy + q) = \frac{bq - dp}{ad - bc},$$

$$y = y + \frac{c}{\Delta}(ax + by + p) + \frac{-a}{\Delta}(cx + dy + q) = \frac{aq - cp}{ad - bc},$$

koje predstavlja dobro poznate KRAMER*ove formule* za posmatrani sistem.

(ii) Razmatrimo slučaj kada je matrica A polaznog sistema (3) singularna. Pretpostavimo da je matrica A ranga $\rho < n$. Polazni sitem (3) ima ρ linearno nezavisnih vrsta koje zovemo *glavnim vrstama* [MS]. Elementarnim transformacijama na vrstama iz sistema (3) možemo eliminisati $n - \rho$ neglavnih vrsta

$$[\,A\,|\,\vec{b}\,] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{c|c} C & \vec{d} \\ \mathbf{0} & \vec{0} \end{array} \right],$$

gde je $C = [c_{ij}]_{\rho \times n}$ nekvadratna matrica sa ρ linearno nezavisnih vrsta i $\vec{d}$ vektor dimenzije ρ. U tom slučaju polazni sistem (3) je ekvivalentan sa nekvadratnim sistemom:

$$(18) \qquad C \cdot \vec{x} = \vec{d},$$

formata $\rho \times n$. Rešenje, kao i ranije, tražimo u reproduktivnom vidu:

$$(19) \qquad \vec{x} = \psi(\vec{x}) = \vec{x} + \Gamma \cdot (\vec{d} - C\vec{x}),$$

gde je $\Gamma = [\gamma_{ji}]_{n \times \rho}$ matrica nepoznatih parametara γ_{ji} ($i \in I_\rho \ \wedge \ j \in I_n$). Zamenom formule (19) u sistem (18) dobijamo odgovarajući parametarski C-sistem:

$$(20) \qquad (C \otimes C^T) \cdot \vec{\Gamma} = \vec{C},$$

gde je $\vec{\Gamma}$ vektor kolona parametara dobijena od matrice Γ zapisivanjem matrice u vektor po vrstama. Primetimo da je parametarski C-sistem (20) sa $\rho \cdot n$ jednačina i $\rho \cdot n$ nepoznatih parametara γ_{ji}. Matrica sistema (20) je matrica $C \otimes C^T \in \mathbb{C}^{\rho n \times \rho n}$ ranga ρ^2. Tada postoji regularna kvadratna podmatrica M, reda ρ^2, matrice $C \otimes C^T$. Dalje, nazovimo *zavisnim parametrima* one parametre γ_{ji} koji se javljaju u sistemu (20) uz koeficijente regularne podmatrice M, ostale parametre nazovimo *nezavisnim parametrima*.

Zavisne parametre γ_{ji}, redom po vrstama sistema (20), zapišimo u vektor kolonu $\vec{\Gamma}'$ sa ρ^2 koordinata. Dobijeni vektor $\vec{\Gamma}'$ (sa ρ^2 koordinata) nazivamo *skraćenje vektora* $\vec{\Gamma}$ (sa $\rho \cdot n$ koordinata). Tada, po glavnim vrstama sistema (20) postoji $m = \rho \cdot n - \rho^2$ komplementarnih nezavisnih parametara. U tom slučaju vrste, koje određuju sistem (20) možemo transformisati tako da se na levoj strani sistema nalaze redom sabirci samo sa zavisnim parametarima γ_{ji}. Tako formiramo nove linearne jednačine koje određuju kvadratni sistem (sa matricom sistema M). Na taj način parametarski C-sistem je ekvivalentan sa sistemom:

$$M \cdot \vec{\Gamma}' = \vec{\tau}, \tag{21}$$

gde je M regularna kvadratna matrica formata ρ^2, $\vec{\Gamma}'$ skraćenje vektora $\vec{\Gamma}$ i $\vec{\tau}$ vektor dobijen prethodnim grupisanjem. Iz jednačine (21) nepoznati vektor $\vec{\Gamma}'$ odredjen je sa:

$$\vec{\Gamma}' = M^{-1} \cdot \vec{\tau}. \tag{22}$$

Iz prethodne formule zaključujemo da se koordinate vektora $\vec{\Gamma}'$ izražavaju kao linearne kombinacije u kojima učestvuju isključivo nezvisni parametri. Množenjem regularne matrice M^{-1} i vektora $\vec{\tau}$ dobijamo vektor $\vec{\Gamma}'$ sa tačno[8] $m = \rho \cdot n - \rho^2$ nezavisnih parametara. Sveukupno, na osnovu prethodnog razmatranja, zaključujemo da važi naredno tvrđenje.

Teorema 4.5. *Neka je dat moguć kvadratni sistem linearnih jednačina* (3) *reda n i ranga $\rho \leq n$. Opšte rešenje sistema oblika* (4) *dopušta da $m = \rho \cdot n - \rho^2$ parametara proglasimo za nezavisne parametre polja $\mathbb{C}$. Ostali parametri se izražavaju kao linearne kombinacije nad poljem $\mathbb{C}$ prethodnih nezavisnih parametara.*

Kao posledicu prethodnog tvrđenja dobijamo dobro poznatu činjenicu da moguć kvadratni sistem linearnih jednačina čiji se red i rang poklapaju, tj. regularan sistem, ima jedinstveno rešenje ($m = \rho \cdot n - \rho^2 = 0$).

Prethodno razmatranje ilustovaćemo sa dva primera.

Primer 4.6. *Rešiti sistem jednačina*:

$$\left\{ \begin{array}{l} a\,x \,+\, b\,y \,+\, p = 0, \\ c\,x \,+\, d\,y \,+\, q = 0, \end{array} \right\} \tag{23}$$

gde su a, b, c, d, p i q zadani realni brojevi takvi da je $b \neq 0$ i $ad - bc = 0$.

Rešenje. Razmatramo samo slučaj kada je sistem moguć. U tom slučaju sistem je ekvivalentan sa jednačinom:

---

[8] MNOŽENJEM REGULARNE MATRICE M^{-1} I VEKTORA $\vec{\tau}$ BROJ PARAMETARA γ_i OSTAJE ISTI. ZAISTA, NEKA JE RAZLOŽEN $\vec{\tau} = \vec{\tau}_0 + \vec{\tau}_1(\gamma_1) + \ldots + \vec{\tau}_m(\gamma_m)$ ZA $\vec{\tau}_i(\gamma_i) = \vec{\tau}_i \cdot \gamma_i$ TAKO DA $\vec{\tau}_i \neq 0$ I $\gamma_i \neq 0$. AKO $M^{-1}\vec{\tau}(\gamma_i) = \vec{0}$ TADA $\vec{\tau}(\gamma_i) = \vec{0}$ ŠTO JE KONTRADIKCIJA SA POLAZNIM RAZLAGANJEM

$$\text{(24)} \qquad \left\{ \; ax \;+\; by \;+\; p = 0. \; \right\}$$

Reproduktivno rešenje tražimo u vidu

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi_1(x,y) = x + \lambda(ax+by+p), \\ y = \varphi_2(x,y) = y + \mu(ax+by+p), \end{array} \right\}$$

gde su λ i μ nepoznati parametri. Zamenimo prethodne vrednosti x i y u jednačinu (24), tada dobijamo da važi

$$\begin{array}{rcl} ax+by+p=0 & \Longleftrightarrow & ax + a\lambda(ax+by+p) + by + b\mu(ax+by+p) + p = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (ax+by)\cdot(1+\lambda a+\mu b) + p\cdot(1+\lambda a+\mu b) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & 1+\lambda a+\mu b = 0. \end{array}$$

Odatle, opšte rešenje jednačine (24) je dato u vidu

$$x = \varphi_1(x,y) = x + \lambda(ax+by+p) = (1+\lambda a)x + \lambda by + \lambda p,$$

$$y = \varphi_2(x,y) = y + \mu(ax+by+p) = -\tfrac{a}{b}(1+\lambda a)x - \lambda ay - \tfrac{p}{b}(1+\lambda a) \quad (\lambda \in R).$$

Primetimo da je broj nezavisnih parametara $m = \rho\cdot n - \rho^2 = 1\cdot 2 - 1^2 = 1$ (λ - parametar).

Primer 4.7. *Rešiti sistem linearnih jednačina*:

$$\text{(25)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} J_1 \;=\; ax \;+\; by \;+\; cz \;+\; p = 0, \\ J_2 \;=\; dx \;+\; ey \;+\; fz \;+\; q = 0, \\ J_3 \;=\; gx \;+\; hy \;+\; iz \;+\; r = 0, \end{array} \right\}$$

gde su $a,b,c,\ldots,i,p,q,r \in R$ *zadani realni brojevi takvi da je*

$$(c \neq 0 \vee f \neq 0) \quad \wedge \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0 \quad \wedge \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0.$$

Rešenje. Razmatramo samo slučaj kada je sistem moguć. U tom slučaju sistem je ekvivalentan sa sistemom:

$$\text{(26)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} J_1 \;=\; ax \;+\; by \;+\; cz \;+\; p = 0, \\ J_2 \;=\; dx \;+\; ey \;+\; fz \;+\; q = 0. \end{array} \right\}$$

Reproduktivno rešenje tražimo u vidu

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi_1(x,y,z) = x + \lambda_1(ax+by+cz+p) + \mu_1(dx+ey+fz+q), \\ y = \varphi_2(x,y,z) = y + \lambda_2(ax+by+cz+p) + \mu_2(dx+ey+fz+q), \\ z = \varphi_3(x,y,z) = z + \lambda_3(ax+by+cz+p) + \mu_3(dx+ey+fz+q), \end{array} \right\}$$

gde su λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2 i μ_3 nepoznati parametri. Zamenimo prethodne vrednosti x, y i z u jednačine (26), tada dobijamo da važi

$$\begin{array}{rcl} ax+by+cz+p=0 & \Longleftrightarrow & ax + a\lambda_1(ax+by+cz+p) + a\mu_1(dx+ey+fz+q) + \\ & & by + b\lambda_2(ax+by+cz+p) + b\mu_2(dx+ey+fz+q) + \\ & & cz + c\lambda_3(ax+by+cz+p) + c\mu_3(dx+ey+fz+q) + p = 0 \\ & & \\ & \Longleftrightarrow & (a + a^2\lambda_1 + ad\mu_1 + ab\lambda_2 + bd\mu_2 + ac\lambda_3 + cd\mu_3)\cdot x + \\ & & (b + ab\lambda_1 + ae\mu_1 + b^2\lambda_2 + be\mu_2 + bc\lambda_3 + ec\mu_3)\cdot y + \\ & & (c + ac\lambda_1 + af\mu_1 + bc\lambda_2 + bf\mu_2 + c^2\lambda_3 + cf\mu_3)\cdot z \\ & & (p + ap\lambda_1 + aq\mu_1 + bp\lambda_2 + bq\mu_2 + cp\lambda_3 + cq\mu_3) = 0 \end{array}$$

i

$$
\begin{aligned}
dx+ey+fz+q=0 \Longleftrightarrow\;& dx+d\lambda_1(ax+by+cz+p)+d\mu_1(dx+ey+fz+q)+\\
& ey+e\lambda_2(ax+by+cz+p)+e\mu_2(dx+ey+fz+q)+\\
& fz+f\lambda_3(ax+by+cz+p)+f\mu_3(dx+ey+fz+q)+q=0\\[1ex]
\Longleftrightarrow\;& (d+ad\lambda_1+d^2\mu_1+ae\lambda_2+de\mu_2+af\lambda_3+df\mu_3)\cdot x+\\
& (e+bd\lambda_1+de\mu_1+be\lambda_2+e^2\mu_2+bf\lambda_3+ef\mu_3)\cdot y+\\
& (f+cd\lambda_1+df\mu_1+ce\lambda_2+ef\mu_2+cf\lambda_3+f^2\mu_3)\cdot z+\\
& (q+dp\lambda_1+dq\mu_1+ep\lambda_2+eq\mu_2+pf\lambda_3+qf\mu_3)=0.
\end{aligned}
$$

Na osnovu prethodnog, ako je sitem (26) moguć, tada je moguć i sledeći sistem:

$$
(27)\qquad \left\{
\begin{array}{c}
a^2\lambda_1+ad\mu_1+ab\lambda_2+bd\mu_2+ac\lambda_3+cd\mu_3=-a,\\
ab\lambda_1+ae\mu_1+b^2\lambda_2+be\mu_2+bc\lambda_3+ce\mu_3=-b,\\
ac\lambda_1+af\mu_1+bc\lambda_2+bf\mu_2+c^2\lambda_3+cf\mu_3=-c,\\
ap\lambda_1+aq\mu_1+bp\lambda_2+bq\mu_2+cp\lambda_3+cq\mu_3=-p,\\
ad\lambda_1+d^2\mu_1+ae\lambda_2+de\mu_2+af\lambda_3+df\mu_3=-d,\\
bd\lambda_1+de\mu_1+be\lambda_2+e^2\mu_2+bf\lambda_1+ef\mu_1=-e,\\
cd\lambda_1+df\mu_1+ce\lambda_2+ef\mu_2+cf\lambda_3+f^2\mu_3=-f,\\
dp\lambda_1+dq\mu_1+ep\lambda_2+eq\mu_2+pf\lambda_3+qf\mu_3=-q.
\end{array}
\right\}
$$

Prema početnim uslovima matrica C posmatranog sistema (26) je formata 2×3 i ranga 2. Tada je odgovarajući kvadratni parametarski C-sistem sastavljen od 1, 2, 3, 5, 6 i 7 jednačine sa kvadratnom matricom $C\otimes C^T$ reda 6 i ranga 4. Rešavamo nekvadratni sitem od 1, 2, 5 i 6 jednačine. Pokazaćemo da navedene vrste sadrže regularnu kvadratnu podmatricu reda 4. Izaberimo regularnu kvadratnu podmatricu M iz 1, 2, 5 i 6 vrste koja se sastoji od koeficijenata uz paramtre λ_1, μ_1, λ_2 i μ_2. Zapišimo posmatrani sistem u obliku regularnog kvadratnog sistema zadržavajući na levoj strani zavisne paramtre λ_1, μ_1, λ_2 i μ_2. Odgovarjući matrični zapis dat je sa

$$
M\cdot\vec{\Gamma}'=\vec{\tau}\quad\Longleftrightarrow\quad
\begin{bmatrix} a^2 & ad & ab & bd\\ ab & ae & b^2 & be\\ ad & d^2 & ae & de\\ bd & de & be & e^2\end{bmatrix}\cdot
\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\\ \lambda_2\\ \mu_2\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix} -a-ac\lambda_3-cd\mu_3\\ -b-bc\lambda_3-ce\mu_3\\ -d-af\lambda_3-df\mu_3\\ -e-bf\lambda_3-ef\mu_3\end{bmatrix}.
$$

Vrednost determinante matrice M je data sa $|M|=\Delta^4\neq 0$. Samim tim postoji jedinstveno rešenje sistema po nepoznatom vektoru zavisnih parametara

$$
\vec{\Gamma}'=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\\ \lambda_2\\ \mu_2\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix} a^2 & ad & ab & bd\\ ab & ae & b^2 & be\\ ad & d^2 & ae & de\\ bd & de & be & e^2\end{bmatrix}^{-1}\cdot
\begin{bmatrix} -a-ac\lambda_3-cd\mu_3\\ -b-bc\lambda_3-ce\mu_3\\ -d-af\lambda_3-df\mu_3\\ -e-bf\lambda_3-ef\mu_3\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\cdot
\begin{bmatrix}(bf-ce)\lambda_3-e\\ (bf-ce)\mu_3+b\\ (cd-af)\lambda_3+d\\ (cd-af)\mu_3-e\end{bmatrix}.
$$

Odatle imamo tačne vrednosti nepoznatih koeficijenata

$$
(28)\qquad \lambda_1=\frac{(bf-ce)\lambda_3-e}{ae-bd},\ \mu_1=\frac{(bf-ce)\mu_3+b}{ae-bd},\ \lambda_2=\frac{(cd-af)\lambda_3+d}{ae-bd},\ \mu_2=\frac{(cd-af)\mu_3-a}{ae-bd}.
$$

Pod pretpostavkom da je polazni sistem moguć, za prethodne vrednosti koeficijenata λ_1, μ_1, λ_2 i μ_2 redom 3 i 7 jednačina, kao i 4 i 8 jednačina ($\flat$-sistem), jesu ispunjene. Samim tim, dobijamo formule rešenja

$$\begin{array}{rclcl}
x = \varphi_1(x,y,z) & = & x + \frac{(bf-ec)\lambda_3 - e}{ae-bd}(ax+by+cz+p) & = \ldots = & \frac{bf-ec}{ae-bd}(a\lambda_3 + d\mu_3)\cdot x \\
& & +\frac{(bf-ce)\mu_3 + b}{ae-bd}(dx+ey+fz+q) & & +\frac{bf-ec}{ae-bd}(b\lambda_3 + e\mu_3)\cdot y \\
& & & & +\frac{bf-ec}{ae-bd}(c\lambda_3 + f\mu_3 + 1)\cdot z \\
& & & & +\frac{bf-ec}{ae-bd}(p\lambda_3 + q\mu_3) + \frac{qb-ep}{ae-bd}, \\
& & & & \\
y = \varphi_2(x,y,z) & = & y + \frac{(cd-af)\lambda_3 + d}{ae-bd}(ax+by+cz+p) & = \ldots = & \frac{cd-af}{ae-bd}(a\lambda_3 + d\mu_3)\cdot x \\
& & +\frac{(cd-af)\mu_3 - e}{ae-bd}(dx+ey+fz+q) & & +\frac{cd-af}{ae-bd}(b\lambda_3 + e\mu_3)\cdot y \\
& & & & +\frac{cd-af}{ae-bd}(c\lambda_3 + f\mu_3 + 1)\cdot z \\
& & & & +\frac{cd-af}{ae-bd}(p\lambda_3 + q\mu_3) + \frac{pd-aq}{ae-bd}, \\
& & & & \\
z = \varphi_3(x,y,z) & = & z + \lambda_3(ax+by+cz+p) & = \ldots = & (a\lambda_3 + d\mu_3)\cdot x \\
& & +\mu_3(dx+ey+fz+q) & & +(b\lambda_3 + e\mu_3)\cdot y \\
& & & & +(c\lambda_3 + f\mu_3 + 1)\cdot z \\
& & & & +(p\lambda_3 + q\mu_3).
\end{array}$$

Napomenimo da dobijene formule predstavljaju *uopštene* KRAMER*ove formule* za sistem (26). Broj nezavisnih parametara je $m = \rho \cdot n - \rho^2 = 2 \cdot 3 - 2^2 = 2$ (λ_3, μ_3-parametri) jer je $(bf - ec \neq 0)$ ili $(cd - af \neq 0)$. U suprotnom[9] ako je $bf = ec$ i $cd = af$ dolazimo do kontradikcije sa $\Delta \neq 0$.

Nekvadratni sistemi. Neka je A nekvadratna matrica formata $k \times n$ nad poljem $\mathbb{C}$ $(k \neq n)$. Pretpostavimo da je matrica A ranga $\rho \leq d = \max\{k, n\}$. Razlikujemo dva slučaja.

(i) Neka je $k < n$. Dopunimo sistem (3) sa $n - k$ nula jednačina do kvadratnog sistema. Na taj način ovaj slučaj sveo se na slučaj singularnog kvadratnog sistema formata $n \times n$.

(ii) Neka je $k > n$. Pod pretpostavkom da je sistem (3) moguć rang matrice sistema A jednak je rangu proširene matrice sistema $A\flat$ i manji je ili jednak od n. Samim tim postoji $k - n$ jednačina sistema koje se mogu eliminisati pomoću najviše n jednačina istog sistema. Na taj način ovaj slučaj svodimo na slučaj bilo regularnog bilo singularnog kvadratnog sistema formata $n \times n$.

Na osnovu prethodnog razmatranja i teoreme 4.5., kao *doprinos*, dobijamo da za linearne sisteme važi sledeće tvrđenje.

Teorema 4.8. *Neka je dat moguć sistem linearnih jednačina* (3) *formata* $k \times n$ *i ranga* $\rho \leq d = \max\{k, n\}$. *Opšte rešenje sistema oblika* (4) *dopušta da* $m = \rho \cdot n - \rho^2$ *parametara proglasimo za nezavisne parametre polja* $\mathbb{C}$. *Ostali parametri se izražavaju kao linearne kombinacije nad poljem* $\mathbb{C}$ *prethodnih nezavisnih parametara.*

Napomena. *Rešavanje grupne i semigrupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima* PREŠIĆ*evim* Λ*-matričnim metodom, u paragrafima* 2.2. *i* 5.1. *druge celine ovog rada, svodi se na rešavanje odgovarajućih linearnih sistema postupkom opisanim u ovom delu.*

[9] RAZLIKOVANJEM SLUČAJEVA $c, f \underset{(\neq)}{=} 0$

5. Grupni i Drazine–ov uopšteni inverz matrica

5.1. Spektralni uopšteni inverzi. Indeks matrice

Spektralni uopšteni inverzi. Pod pojmom spektralnih uopštenih inverza podrazumevamo uopštene inverze kvadratnih matrica, koji sem nekih od PENROSEovih jednačina:

$$AXA = A, \tag{1}$$

$$XAX = X, \tag{2}$$

$$(AX)^* = AX, \tag{3}$$

$$(XA)^* = XA, \tag{4}$$

ispunjavaju i neke dopunske jednačine oblika:

$$A^k XA = A^k, \tag{1^k}$$

$$AX = XA, \tag{5}$$

$$A^k X = XA^k, \tag{5^k}$$

za zadanu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i prirodan broj k. Spektralni uopšteni inverzi opisuju se pomoću pojma λ-vektora i λ-prostora kvadratnih matrica, koji će biti definisani u narednom razmatranju.

Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i prirodan broj p vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ naziva se *glavni vektor stepena p matrice A*, koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda \in \mathbb{C}$, ako važi:

$$(A-\lambda I)^{p-1}\cdot\vec{x} \neq \vec{0} \quad \text{i} \quad (A-\lambda I)^p\cdot\vec{x} = \vec{0}. \tag{6}$$

Glavni vektor stepena p matrice A koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ nazivamo i *λ-vektorom.* Za sopstvenu vrednost $\lambda \in \mathbb{C}$, kvadratne matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, niz vektorskih prostora $Ker((A-\lambda I)) \subseteq Ker((A-\lambda I)^2) \subseteq \ldots \subseteq Ker((A-\lambda I)^m) \subseteq \ldots$ jeste rastući niz potprostora u odnosu na inkluziju. Pri tom posmatrani niz vektorskih prostora je strogo rastući niz do nekog prirodnog broja m, a od prirodnog broja m jeste konstantan npr. [AK-ЮM], [AL]. Dakle, za fiksiranu sopstvenu vrednost $\lambda \in \mathbb{C}$ matrice A, glavni vektori matrice stepena p ispunjavaju uslov:

$$\vec{x} \in Ker((A-\lambda I)^p) \setminus Ker((A-\lambda I)^{p-1}). \tag{7}$$

Otuda, λ-vektori matrice A koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti $\lambda \in \mathbb{C}$, postoje za konačan skup vrednosti stepena $p \in \{1, 2, \dots, m\}$. Za sopstvenu vrednst $\lambda \in \mathbb{C}$, kvadratne matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, vektorski prostor generisan svim λ-vektorima određuje *λ-prostor matrice A*. Vektorski prostor generisan svim λ-vektorima za sve nenula sopstvene vrednosti razmatramo kao *glavni nenula prostor matrice A*, koji označavamo ga sa $\mathcal{R}_{A,\lambda}$ i nazivamo *Λ-prostor matrice A*. Specijalno ako je 0 sopstvena vrednost matrice A, tada možemo razmatrati vektorski prostor generisan svim 0-vektorima kao *glavni nula prostor matrice A*, koji označavamo sa $\mathcal{R}_{A,0}$ i nazivamo *0-prostor matrice A*.

Dve matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ su <u>*spektralno inverzne matrice*</u> ako važi:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A \in B\{1,2\} & \text{i} & B \in A\{1,2\}; \\ \mathcal{R}_{A,\lambda} = \mathcal{R}_{B,\lambda} & \text{i} & \mathcal{R}_{A,0} = \mathcal{R}_{B,0}. \end{array} \right\} \tag{8}$$

Definišemo <u>*uopšteni inverz skalara*</u> na sledeći način:

$$\lambda^{\dagger} = \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda^{-1} & : & \lambda \neq 0, \\ 0 & : & \lambda = 0. \end{array} \right\} \tag{9}$$

Tada za dve matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kažemo da su <u>*S-inverzne matrice*</u> ako je za svako $\lambda \in \mathbb{C}$ ispunjen uslov: vektor $\vec{x}$ jeste λ-vektor matrice A stepena p ako i samo ako vektor $\vec{x}$ jeste $\lambda^{\dagger}$-vektor matrice B stepena p. Posebno, dve matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ su <u>*S'-inverzne matrice*</u> ako za svako $\lambda \neq 0$ je ispunjen uslov: vektor $\vec{x}$ jeste λ-vektor matrice A stepena p ako i samo ako vektor $\vec{x}$ jeste λ-vektor matrice B stepena p, dok za $\lambda = 0$ stepeni 0-vektora matrica A i B nisu međusono isti.

Navodimo, bez dokaza, tvrđenje dato u [ABI-TG], kojim određujemo pod kojim uslovima su dve matrice S'-inverzne, odnosno S-inverzne.

<u>**Teorema 5.1.1.**</u> *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ neka postoji prirodan broj l i kvadratna matrica $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da je:*

$$B \cdot A^{l+1} = A^{l}. \tag{10}$$

Tada za svaki kompleksan broj $\lambda \neq 0$ svaki λ-vektor matrice A stepena p je istovremeno i λ^{-1}-vektor matrice B stepena p.

<u>**Indeks matrice.**</u> Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, najmanji nenegativan ceo broj k takav da je $rank(A^k) = rank(A^{k+1})$ naziva se <u>*indeks matrice A*</u> i označava se sa $Ind(A)$. Navodimo, bez dokaza, tvrđenje, dato u [SC-CM], kojim prethodnu definiciju indeksa možemo dati i sa jednim od ekvivaletnih iskaza datih u narednoj teoremi.

Teorema 5.1.2. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sledeći iskazi su međusobno ekvivaletni:*

(i) *k je najmanji nenegativan broj za koji važi $rank(A^k) = rank(A^{k+1})$.*

(ii) *k je najmanji nenegativan broj za koji važi $R(A^k) = R(A^{k+1})$.*

(iii) *k je najmanji nenegativan broj za koji matrica A ima 0-vektor stepena k, ali nema nijedan 0-vektor stepena većeg od k.*

(iv) *k je najmanji nenegativan broj za koji matrica A ima minimalni polinom oblika $\mu(x) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_k x^k$, za $c_k \neq 0$.*

Napomenimo da je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ indeksa $Ind(A) = 0$ regularna. U daljem razmatranju spektralnih inverza kvadratnih matrica, od posebnog interesa javlja se prikazivanje spektralnih inverza preko minimalnog polinoma i njime određenog q-polinoma. Naime, za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, indeksa $k = Ind(A)$, neka je dat minimalni polinom:

$$\mu(x) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_k x^k, \tag{11}$$

za $c_k \neq 0$. Definišimo <u>*q-polinom*</u>:

$$q(x) = -\frac{1}{c_k} \cdot (x^{m-k-1} + c_{m-1}x^{m-k-2} + \ldots + c_{k+1}). \tag{12}$$

Lako se proverava da važi sledeća veza između q i μ polinoma:

$$q(x) = \begin{cases} \frac{c_k x^k - \mu(x)}{c_k x^{k+1}} & : \ x \neq 0, \\ -\frac{c_{k+1}}{c_k} & : \ x = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Neposredna posledica formule (13) je sledeća veza $\mu(x) = c_k x^k (1 - x q(x))$.

<u>5.2. Grupni uopšteni inverz matrice</u>

Razmotrićemo detaljno grupni uopšteni inverz kvadratne matrice, zbog njegove primene u rešavanju grupne funkcionalne jednačine. Za matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, indeksa $Ind(A) \leq 1$, matrica $A^{\#} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ koja je $\{1,2,5\}$-inverz, naziva se <u>*grupni uopšteni inverz $A^{\#}$*</u>. U naredna tri tvrđenja dokazujemo korektnost prethodne definicije.

Teorema 5.2.1. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ako sistem jednačina* (1), (2) *i* (5) *ima rešenje, ono je jedinstveno i ispunjava uslov $Ind(A) \leq 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dve matrice X i Y kao rešenje sistema jednačina (1), (2) i (5). Formirajmo matrice $E = XA$ i $F = AY$. Tada važi

$$\begin{aligned} E &= XA & & & F &= AY \\ &= X(AYA) & (1) & & &= (AXA)Y & (1) \\ &= (XA)(YA) & & & &= (AX)(AY) \\ &= (XA)(AY) & (5) & & &= (XA)(AY) & (5) \\ &= EF, & & & &= EF. \end{aligned}$$

Odatle $E = XA = AX = AY = YA = F$. Samim tim, dobijamo traženi zaključak o jedinstvenosti

$$\begin{aligned} X &= XAX & (2) & & Y &= YAY & (2) \\ &= EX & & & &= YF \\ &= FX & & & &= YE \\ &= YAX, & & & &= YAX. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je matrica A indeksa $k = Ind(A) \geq 2$. Neka je minimalni polinom $\mu(x)$ matrice A, stepena m, dat formulom (11). Množeći matričnu jednačinu

$$\mu(A) = A^m + c_{m-1}A^{m-1} + \ldots + c_k A^k = 0,$$

grupnim inverzom $A^{\#}$, na osnovu jednačina (1) i (5), dobijamo, za $k \geq 2$, matričnu jednačinu nižeg stepena

$$\mu(A)A^{\#} = A^{m-1} + c_{m-1}A^{m-2} + \ldots + c_k A^{k-1} = 0,$$

na osnovu koje formula (11) ne određuje minimalni polinom stepena m. Svođenjem na apsurd, dokazano je tvrđenje teoreme. ∎

Teorema 5.2.2. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ indeksa 1 odgovarajući q-polinom matrice $q(A)$ jeste jedan $\{1\}$-inverz matrice A. Sistem jednačina* (1), (2) *i* (5) *ima rešenje rešenje iskazano preko q-polinoma u obliku formule*:

$$A^{\#} = A\Big(q(A)\Big)^2. \tag{14}$$

Dokaz. Neka je $\mu(x)$ minimalni polinom matrice A i $q(x)$ q-polinom matrice A. Iz veze $\mu(x) = c_1(x - x^2 q(x))$, gde na osnovu $Ind(A) = 1$ važi $c_1 \neq 0$, zaključujemo da važi polinomska jednačina $x\,q(x)\,x \;=\; x - \frac{1}{c_1}\mu(x)$. Odatle dobijamo da je $q(A)$ jedan $\{1\}$-inverz matrice A

$$A \cdot q(A) \cdot A = A.$$

Dalje, proverimo da je sa matricom $A^{\#}$, datom sa formulom (14), određen jedan $\{5\}$-inverz. Budući da je $x \cdot q(x) = q(x) \cdot x$ matrice A i $q(A)$ komutiraju. Otuda je

$$A \cdot A^{\#} = A^2 \cdot (q(A))^2 = A \cdot (q(A))^2 \cdot A = A^{\#} \cdot A.$$

Na osnovu činjenice da je $A^{\#}$ jedan $\{5\}$-inverz i na osnovu činjenice da A i $q(A)$ komutiraju dobijamo

$$A \cdot A^{\#} \cdot A = A^3(q(A))^2 = A^2 q(A) \cdot A q(A) = A \cdot A q(A) = A^2 q(A) = A.$$

Analogno proveravamo da je $A^{\#}$ jedan $\{2\}$-inverz

$$A^{\#} \cdot A \cdot A^{\#} = A^3(q(A))^4 = A^3(q(A))^2 \cdot (q(A))^2 = A \cdot (q(A))^2 = A^{\#}.$$

Sveukupno, dokazano je tvrđenje teoreme. ■

Sa sledećim tvrđenjem dajemo razne formule za grupni inverz matrice.

Teorema 5.2.3. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$, indeksa $Ind(A) = 1$, grupni inverz je dat sa formulama:*

(a)

$$A^{\#} = C \cdot (DC)^{-2} \cdot D, \tag{15}$$

gde je $A = CD$ faktorizcija punog ranga matrice A sa matricama $C \in \mathbb{C}_r^{n\times r}$ i $D \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$.

(b)

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} I_r \\ P \end{bmatrix} \cdot \Big(\begin{bmatrix} I_r + QP \end{bmatrix} A_{11} \begin{bmatrix} I_r + QP \end{bmatrix} \Big)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} I_r & Q \end{bmatrix}, \tag{16}$$

gde su $Q \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ i $P \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ matrice određene iz blokovske dekompozicije $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22}\end{array}\right]$ $(A_{11} \in \mathbb{C}_r^{r\times r})$ na sledeći način $P = A_{21}A_{11}^{-1}$ i $Q = A_{11}^{-1}A_{12}$.

(c)

$$A^{\#} = A \cdot \left(A^3\right)^{(1)} \cdot A. \tag{17}$$

Dokaz. ***(a)*** Neka je $A = C \cdot D$ faktorizacija punog ranga. Dokažimo da je matrica $D \cdot C$ regularna. Važi $rank(D \cdot C) \leq r$. Sa druge strane na osnovu jednakosti $rank(A) = rank(A^2)$, zaključujemo $r = rank(A) = rank(A^2) = rank(C \cdot (DC) \cdot D) \leq rank(D \cdot C)$. Sveukupno $D \cdot C \in \mathbb{C}_r^{r\times r}$. Jednačine (1), (2) i (5) se mogu direktno proveriti. Tako npr. važi

$$A \cdot A^{\#} \cdot A = CD \cdot \Big(C(DC)^{-2}D\Big) \cdot CD = C \cdot DC \cdot (DC)^{-2} \cdot DC \cdot D = CD = A.$$

(b) Dokaz dat u tezi [RS] na osnovu faktorizacije punog ranga i formule (15). Prema disertaciji [PS] navedena formula dovodiva je do oblika formule koju je dao G. Zielke [GZ1].

(c) Koristimo teoremu 5.2.1. po kojoj je grupni inverz jedinstven i teoremu 5.2.2. po kojoj je jedna njegova formula data sa $\widehat{A^{\#}} = A \cdot (q(A))^2$. Dokažimo da se formula (17) za grupni inverz $A^{\#}$ podudara sa prethodno navedenom formulom. Zaista

$$\begin{aligned} A^{\#} &= A(A^3)^{(1)}A = \widehat{A^{\#}}A^2 \cdot (A^3) \cdot A^2\widehat{A^{\#}} = \widehat{A^{\#}}(\widehat{A^{\#}}^2 A^4) \cdot (A^3)^{(1)} \cdot (A^4\widehat{A^{\#}}^2)\,\widehat{A^{\#}} \\ &= \widehat{A^{\#}}^3 A \cdot (A^3(A^3)^{(1)}A^3) \cdot A\widehat{A^{\#}}^3 = \widehat{A^{\#}}^3 \cdot A^5 \cdot \widehat{A^{\#}}^3 = (\widehat{A^{\#}}^2 A)^3 A^2 = \widehat{A^{\#}}^3 A^2 \\ &= \widehat{A^{\#}}^2 A = \widehat{A^{\#}}. \end{aligned}$$

■

Napomena. *U radu* [GM-PS1], *na osnovu faktorizacije punog ranga i formule* (15), *dato je više novih formula za grupni inverz u obliku blok matrica. Napomenimo da je u disertaciji* [PS], *između ostalog, dat pregled formula za grupni inverz koristeći reprezentacije sa determinatama, reprezentacie pomoću* Jordan*ove kanonske forme, racionalne kanonske forme i u obliku blok matrica.*

Kao *doprinos*, u analogiji sa teoremom 2.4.5., dokazujemo naredno tvrđenje koje daje jedan *dovoljan uslov* za postojanje grupnog inverza.

Teorema 5.2.4. *Za matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$, *neka su određene regularne matrice* $Q, P \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ *takve da je* $QAP = E_r$ *i pri tom neka važi blokovska dekompozicija*:

$$Q \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \\ \hline V_3 & V_4 \end{array}\right] \quad (V_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}). \tag{18}$$

Ako je $V_4 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ *regularna matrica, tada postoji grupni inverz u obliku blok matrice*:

$$A^{\#} = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -V_2V_4^{-1} \\ \hline -V_4^{-1}V_3 & V_4^{-1}V_3V_2V_4^{-1} \end{array}\right] \cdot Q. \tag{19}$$

Dokaz. Polazimo od opšteg oblika $\{1,2\}$-inverza u obliku blok matrice

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} \cdot Q,$$

gde su $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ i $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ proizvoljne matrice. Odredimo matrice X_1 i X_2 iz uslova da blok matrica X ispunjava matričnu jednačinu $XA = AX$. Važi

$$XA = AX \iff P \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} QQ^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} Q.$$

Odatle matrica $X \in A\{1,2\}$ ispunjava jednačinu (5) akko važi matrična jednačina

$$QP \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} QP.$$

Na osnovu blokovske dekompozicije (18) prethodna matrična jednačina može se zapisati u obliku

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & X_1 \\ X_2 & X_2X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix}.$$

Samim tim matrica $X \in A\{1,2\}$ ispunjava jednačinu (5) akko važi matrična jednačina

$$\begin{bmatrix} (V_1 + V_2X_2) & 0 \\ (V_3 + V_4X_2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V_1 + X_1V_3) & (V_2 + X_1V_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

koja se svodi na sistem

$$V_2X_2 = X_1V_3 \quad \wedge \quad V_4X_2 + V_3 = 0 \quad \wedge \quad X_1V_4 + V_2 = 0.$$

Saglasno pretpostavci o regularnosti matrice V_4 dobijamo formulu (19). Neposredno se proverava da matrica određena formulom (19) ispunjava jednačine (1), (2) i (5), tj. jeste grupni inverz. ■

Napomena. *Polazeći od opšteg* $\{1,2\}$*-inverza iskazanog preko* SVD*-singularno vrednosne dekompozicije matrice* (*paragraf* 2.4.)*, slično prethodnoj teoremi, može se dobiti odgovarajuća formula grupnog inverza, kao i odgovarajući dovoljan uslov za postojanje grupnog inverza.*

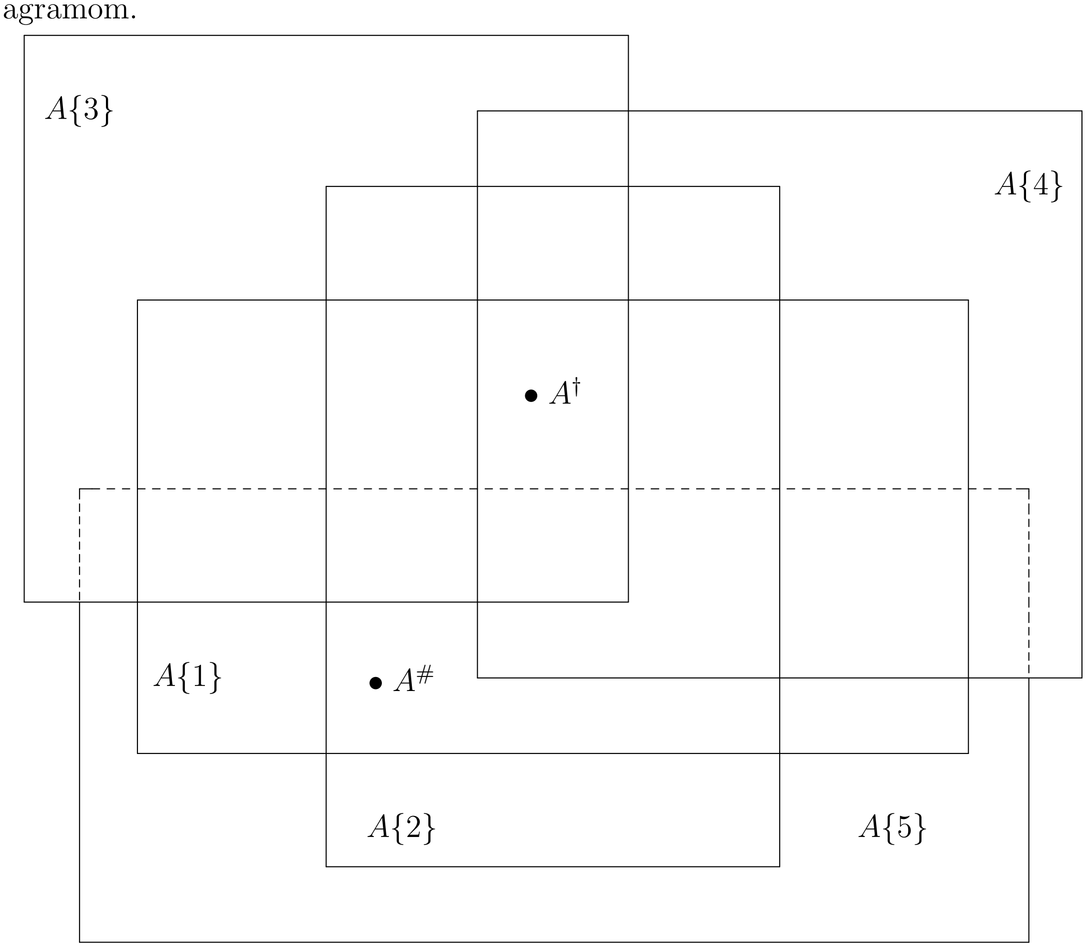
Navedimo bez dokaza dva osnovna tvrđenja kojima se daju spektralne osobine grupnog inverza [ABI-TG].

Teorema 5.2.5. *Neka je matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, indeksa* $Ind(A) = 1$*, slična dijagonalnoj matrici, tada je grupni inverz* $A^{\#}$ *jedini* S*-inverz matrice* A*.*

Teorema 5.2.6. *Neka je matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, indeksa* $Ind(A) = 1$*, tada je grupni inverz* $A^{\#}$ *jedini* S*-inverz matrice* A *u skupu matrica* $A\{1\} \cup A\{2\}$*.*

***EP*–matrice .** Zbog potpunosti razmatranja grupnog inverza uvodimo pojam *EP-matrice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kao one matrice za koju važi $A^{\#} = A^{\dagger}$. Drugim rečima, kvadratna matrica je EP-matrica ako i samo ako je Moore-Penroseov inverz komutativan sa samom matricom.

Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ međusobni položaj skupova[10] $A\{1\}$, $A\{2\}$, $A\{3\}$, $A\{4\}$, Moore-Penroseovog inverza $A^{\dagger}$ i grupnog inverza $A^{\#}$ (kad postoji) dat je sledećim dijagramom.



[10] skupovi $A\{1\}$, $A\{2\}$, $A\{3\}$ i $A\{4\}$ jesu skupovi sa *svojstvom konačnog preseka*

Navodimo bez dokaza dva osnovna tvrđenja u vezi EP-matrica.

Teorema 5.2.7. *Matrica $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ jeste EP-matrica ako i samo ako postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ i regularna matrica $C \in \mathbb{C}_r^{r\times r}$, tako da važi:*

$$A = U \cdot \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \cdot U^*. \tag{20}$$

Teorema 5.2.8. *Matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, indeksa $Ind(A) = 1$, jeste EP-matrica ako i samo ako važi $N(A) = N(A^*)$ i $R(A) = R(A^*)$.*

Primer 5.2.9. *Naći grupni inverz matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Matrica A ima minimalni polinom sledećeg oblika $\mu(x) = x^3 - 15x^2 - 18x$. Dakle, matrica A je indeksa $Ind(A) = 1$, pa postoji grupni inverz matrice. Odredićemo na tri načina grupni inverz. Na osnovu primera 2.4.6. dodatno zaključujemo da je matrica A jedna EP-matrica.

I. Način. Iz minimalnog polinoma $\mu(x)$ određujemo q-polinom eksplicitno u obliku polinoma $q(x) = \frac{1}{18}x - \frac{5}{6}$. Tada, prema teoremi 5.2.2. grupni inverz je dat eksplicitno u obliku matrice

$$A^\# = A \cdot \Big(q(A)\Big)^2 = \ldots = \begin{bmatrix} \frac{-23}{36} & \frac{-1}{6} & \frac{11}{36} \\ \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{36} \end{bmatrix}.$$

II. Način. U primeru 2.4.6. (I način) određena je faktorizacija punog ranga sa matricama

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primenom formule (15), date u teoremi 5.2.3. (a), dobijamo da je grupni inverz dat u obliku matrice

$$A^\# = C \cdot \big(DC\big)^{-2} \cdot D = \ldots = \begin{bmatrix} \frac{-23}{36} & \frac{-1}{6} & \frac{11}{36} \\ \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{36} \end{bmatrix}.$$

III. Način. U primeru 2.4.6. (II način) određene su regularne matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{4}{3} & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad Q = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

takve da važi $QAP = E_2$. Dalje, na osnovu blokovskog razbijanja matrice

$$Q \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \\ \hline V_3 & V_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 9 & -2 & -27 \\ -4 & 1 & 12 \\ \hline -\frac{19}{3} & -2 & -18 \end{array}\right]$$

određujemo podmatrice $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X_1 = -V_2V_4^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$, $X_2 = -V_4^{-1}V_3 = [19/54\ -1/9]$ i $X_3 = X_2X_1 = [65/108]$. Primenom formule (19), date u teoremi 5.2.4., dobijamo da je grupni inverz dat eksplicitno u obliku matrice

$$A^\# = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_2 & X_1 \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot Q = \ldots = \begin{bmatrix} \frac{-23}{36} & \frac{-1}{6} & \frac{11}{36} \\ \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & \frac{-7}{36} \end{bmatrix}.$$

5.3. Drazine-ov uopšteni inverz matrice

Kao uopštenje grupnog inverza matrice, čiji je indeks proizvoljan nenegativan ceo broj k, uvodi se DRAZINeov uopšteni inverz matrice. Matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ indeksa $Ind(A) = k$ koja je $\{1^k, 2, 5\}$-inverz naziva se DRAZIN*eov uopšteni inverz* A^D. Ako je $k = 0$ DRAZINEeov inverz svodi se običan inverz matrice A^{-1} i ako je $k = 1$ DRAZINeov inverz svodi se na grupni inverz $A^{\#}$.

DRAZINeov inverz, za indeks $Ind(A) > 1$, u principu, ne koristi se u rešavanju grupne funkcionalne jednačine. Iz tog razloga, navodimo, bez dokaza, samo neka osnovna tvrđenja u vezi sa DRAZINeovim inverzom, koja predstavljaju direktna uopštenja nekih od iznetih tvrđenja u vezi sa grupnim inverzom.

Teorema 5.3.1. *Za kvadratnu matricu* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*, indeksa* $Ind(A) = k > 1$*, ako sistem jednačina* (1^k)*,* (2) *i* (5) *ima rešenje ono je jedinstveno.*

Teorema 5.3.2. *Za kvadratnu matricu* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*, indeksa* $Ind(A) = k > 1$*, ako sistem jednačina* (1^k)*,* (2) *i* (5) *ima rešenje ono je iskazano preko* q*-polinoma u obliku sledeće formule*:

$$A^D = A^k \cdot \Big(q(A)\Big)^{k+1}. \tag{21}$$

Teorema 5.3.3. *Za kvadratnu matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{n \times n}$*, indeksa* $Ind(A) = k > 1$*,* DRAZIN*eov inverz je dat formulom*:

$$A^D = A^l \cdot \Big(A^{2l+1}\Big)^{(1)} \cdot A^l. \tag{22}$$

za ma koji prirodni broj $l \geq k$.

Teorema 5.3.4. *Za matricu* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*, indeksa* $Ind(A) = k > 1$*, svi nula vektori su stepena* k.

Teorema 5.3.5. *Neka je matrica* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*, indeksa* $Ind(A) = k > 1$*, tada je* DRAZIN*eov inverz* A^D *indeksa* $Ind(A^D) = 1$ *i pri tome su matrice* A *i* A^D *jedna drugoj* S'*-inverzne.*

Na osnovu PENROSEovog rada [RP1] iz 1955. godine M. DRAZIN je 1958. godine, u radu [MD], uveo pojam *pseudoinverza* za semigrupe, odnosno asocijativne prstene pomoću sitema uslova (1^k), (2) i (5) (prema [ABI-TG]). Dalje, R. CLINE 1968. godine, u radu [RC], razmatrao je DRAZINEov pseudoinverz za matrice. Kasnije, S. CARADUS 1974. godine proširio je pojam DRAZINEovog pseudoinverza na ograničene linearne operatore u BANACHovom prostoru. Primenu DRAZINEovog pseudoinverza na sisteme diferencijalnih jednačina razmatrali su S. L. CAMBELL i C. D. Meyer 1976. godine [SC-CM].

II. GRUPNA FUNKCIONALNA JEDNAČINA

1. Homogena grupna funkcionalna jednačina

1.1. Saglasnost matrice sa grupom

Uvod. Neka su $\theta_1, \ldots, \theta_n$ bijektivna preslikavanja nepraznog skupa S na samog sebe, tako da skup $G = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ u odnosu na kompoziciju funkcija $(\circ)$ obrazuje *prateću grupu* $\mathbb{G} = (G, \circ)$ reda n. Pretpostavimo da je θ_1 neutral posmatrane grupe $\mathbb{G}$. Za polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ neka je $\mathcal{F} = \{f : S \longrightarrow C\}$ skup svih funkcija koje preslikavaju skup S u polje $\mathbb{C}$.

Pod *homogenom grupnom funkcionalnom jednačinom* podrazumevamo funkcionalnu jednačinu:

$$a_1(x) \cdot f(\theta_1(x)) + a_2(x) \cdot f(\theta_2(x)) + \ldots + a_n(x) \cdot f(\theta_n(x)) = 0, \tag{1}$$

po nepoznatoj funkciji $f \in \mathcal{F}$ za zadane funkcije $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{F}$. Broj n nazvivamo *dimenzijom* funkcionalne jednačine (1). Izložićemo metodu rešavanja funkcionalne jednačine (1) datu prema radu S. Prešića [SP2] i odgovarajućem prikazu u monografiji M. Kuczma [MK1]. U drugoj celini, kao *doprinos*, primenom inverznih permutacija, daćemo jednostavnije dokaze nekih već poznatih rezultata, kao i neke nove rezultate.

Za skup $\mathbb{I}_n \stackrel{def}{=} \{1, 2, \ldots, n\}$ posmatrajmo n permutacija $p_1, \ldots, p_n : \mathbb{I}_n \longrightarrow \mathbb{I}_n$ definisanih sa:

$$p_{ij} \stackrel{def}{=} p_i(j) = m \quad \text{akko} \quad \theta_m = \theta_i \circ \theta_j, \tag{2}$$

gde $i, j, m \in \mathbb{I}_n$. Primetimo da se permutacije p_i $(i \in \mathbb{I}_n)$ definišu vrednostima permutacija indeksa pri kompoziciji bijekcija iz skupa G. Iz (2) sleduje:

$$\theta_i \circ \theta_j = \theta_{p_{ij}}, \tag{3}$$

za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Važi $\theta_j = \theta_1 \circ \theta_j = \theta_{p_{1j}}$ i $\theta_i = \theta_i \circ \theta_1 = \theta_{p_{i1}}$, za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Samim tim važi:

$$p_{1j} = j \quad \text{i} \quad p_{i1} = i, \tag{4}$$

za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Odatle je p_1 identička permutacija (jedinično preslikavanje). Takođe važi asocijativnost kompozicije u sledećem obliku:

$$p_{ijk} \stackrel{def}{=} p_{p_{ij}k} = p_{ip_{jk}}. \tag{5}$$

Na osnovu prethodnog sleduje da skup $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$, u odnosu na kompoziciju $(\circ)$, obrazuje *grupu p-permutacija* $\mathbb{P} = (P, \circ)$ reda n.

Za svaku permutaciju p_i postoji permutacija q_k takva da važi:

(6) $$\boldsymbol{q_{kj} \overset{def}{=} q_k(j) = i} \quad \text{akko} \quad \boldsymbol{p_{ik} \overset{def}{=} p_i(k) = j},$$

za $i, j, k \in \mathbb{I}_n$. Primetimo da iz vrednosti p-permutacije $p_{xy} = z$, cikličnim pomeranjem argumenata (x, y, z) sa desna na levo dobijamo vrednsoti q-permutacije $q_{yz} = x$. Obratno, iz vrednosti q-permutacije $q_{xy} = z$, cikličnim pomeranjem argumenata (x, y, z) sa leva na desno, dobijamo vrednost p-permutacije $p_{zx} = y$. Navedeno možemo zapisati i sa *pravilima izvođenja*:

(7) $$\frac{p_{xy} = z}{q_{yz} = x}\ \longleftarrow \quad \text{i} \quad \frac{q_{xy} = z}{p_{zx} = y}\ \longrightarrow.$$

Jednakost (3) u terminima q-permutacija je data u obliku

(8) $$\theta_i \circ \theta_j^{-1} = \theta_{q_{ji}},$$

za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Prema pravilima izvođenja (7) iz jednakosti (4) zaključujemo da važi:

(9) $$q_{1j} = j \quad \text{i} \quad q_{i1} = i,$$

za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Odatle je q_1 jedinično preslikavanje. Budući da je kompozicija funkcija asocijativna, nije teško proveriti da skup $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ obrazuje <u>*grupu q-permutacija*</u> $\mathbb{Q} = (Q, \circ)$ reda n.

U narednom pokazaćemo da su q-permutacije inverzne p-permutacijama[11].

<u>Lema 1.1.1.</u> *Za svaku permutaciju p_i odgovarajuća inverzna permutacija je q_i, za $i \in \mathbb{I}_n$. Grupa p-permutacija $\mathbb{P}$ je anti-automorfna sa grupom q-permutacija $\mathbb{Q}$.*

<u>Dokaz.</u> Na osnovu (3) i (8) sleduje da su skupovi permutacija indeksa bijekcija jednaki, tj. $Q = P$. Iz $p_{1i} = i$, primenom pravila izvođenja, zaključujemo $q_{ii} = 1$, za $i \in \mathbb{I}_n$. Na osnovu asocijativnosti kompozicije, za svako $j \in \mathbb{I}_n$, zaključujemo

$$(p_i \circ q_i)_j = p_{i q_{ij}} = p_{q_{ii} j} = p_{1j} = j = (p_1)_j \quad \Longrightarrow \quad p_i \circ q_i = p_1.$$

Znači permutacije p_i i q_i jesu međusobno inverzne. Funkcija $\Phi : P \longrightarrow Q$ definisana sa:

(10) $$\Phi(x) = x^{-1},$$

ostvaruje traženi anti-automorfizam. ■

Kao *doprinos*, dokazujemo tvrđenje.

<u>Lema 1.1.2.</u> *Za svako $i, j, k \in \mathbb{I}_n$ važe formule kompozicija p i q permutacija:*

(11a) $$q_{k p_{ik}} = i,$$

(11b) $$p_{q_{kj} k} = j,$$

(11c) $$q_{p_{ik} p_{jk}} = q_{ij}.$$

[11] PREMA [DK] INVERZNE PERMUTACIJE UVEO JE H. A. ROTE 1800. GODINE

Dokaz. $(\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{b})$ Jednakosti direktno sleduju iz ekvivalencije (6). $(\boldsymbol{c})$ Važi

$$\theta_{q_{p_{ik}p_{jk}}} = \theta_{p_{jk}} \circ \theta_{p_{ik}}^{-1} = (\theta_j \circ \theta_k) \circ (\theta_i \circ \theta_k)^{-1} = \theta_j \circ \theta_i^{-1} = \theta_{q_{ij}},$$

za svako $i,j,k \in \mathbb{I}_n$. Odatle sleduje jednakost (11c).

Prethodne formule mogu poslužiti za određivanje q-permutacije iz p-permutacija.

Primer 1.1.3. Neka je dat polazni niz permutacija $p_1 = (1,2,3)$, $p_2 = (2,3,1)$ i $p_3 = (3,1,2)$. Za $k=1$ relacija (11b) glasi $\boldsymbol{p_{q_{1j}1} = j}$ $(j=1,2,3)$. Samim tim $p_{q_{11}1} = 1 (= p_{11})$, $p_{q_{12}1} = 2 (= p_{21})$, $p_{q_{13}1} = 3(= p_{31})$. Odatle, očitavamo po prvoj koloni $q_{11}=1$, $q_{12}=2$ i $q_{13}=3$. Za $k=2$ relacija (11b) glasi $\boldsymbol{p_{q_{2j}2} = j}$ $(j=1,2,3)$. Samim tim $p_{q_{21}2} = 1(= p_{32})$, $p_{q_{22}2} = 2(= p_{12})$, $p_{q_{23}2} = 3(= p_{22})$. Odatle, očitavamo po drugoj koloni $q_{21}=3$, $q_{22}=1$ i $q_{23}=2$. Za $k=3$ relacija (11b) glasi $\boldsymbol{p_{q_{3j}3} = j}$ $(j=1,2,3)$. Samim tim $p_{q_{31}3} = 1(= p_{23})$, $p_{q_{32}3} = 2(= p_{33})$, $p_{q_{33}3} = 3(= p_{13})$. Odatle, očitavamo po trećoj koloni $q_{31}=2$, $q_{32}=3$ i $q_{33}=1$. Sveukupno određen je niz permutacija $q_1 = (1,2,3)$, $q_2=(3,1,2)$ i $q_3=(2,3,1)$ dobijen iz polaznog skupa permutacija zapisivanjem, u redosledu inverznih permutacija, po kolonama.

Definišimo kvadratne matrice $M_k = [\alpha_{ij}^k]$ reda n $(k \in \mathbb{I}_n)$ po koordinatama:

$$\alpha_{ij}^k = \begin{cases} 1 & : \quad j = p_{ik}, \\ \\ 0 & : \quad j \neq p_{ik}. \end{cases} \tag{12}$$

Primenom q-permutacija formula (12) prelazi u formulu:

$$\alpha_{ij}^k = \begin{cases} 1 & : \quad i = q_{kj}, \\ \\ 0 & : \quad i \neq q_{kj}. \end{cases} \tag{13}$$

Na osnovu formule (12) primetimo da je i-ta vrsta matrice M_k sa nulama na svim pozicijama, sem na poziciji p_{ik}. Na osnovu formule (13) primetimo da je j-ta kolona matrice M_k sa nulama na svim pozicijama sem na poziciji q_{kj}. Samim tim i-ta vrsta matrice M_k jednaka je p_{ik}-jediničnom vektoru $e_{p_{ik}}$ prostora R^n i j-ta kolona matrice M_k jednaka je q_{kj}-jediničnom vektoru $e_{q_{kj}}$ prostora R^n. Odatle, za $k = 1, \ldots, n$, dobijamo eksplicitan izraz za M_k matricu zapisanu po vrstama:

$$M_k = [e_{p_{1k}}\ e_{p_{2k}}\ \ldots\ e_{p_{nk}}]_{\rightarrow} \tag{14}$$

i eksplicitan izraz za M_k matricu zapisanu po kolonama:

$$M_k = [e_{q_{k1}}\ e_{q_{k2}}\ \ldots\ e_{q_{kn}}]_{\downarrow}. \tag{15}$$

Primetimo da za matricu $M_k = [e_{p_{1k}}\ e_{p_{2k}}\ \ldots\ e_{p_{nk}}]_{\rightarrow}$ i proizvoljni vektor kolonu $\vec{x}^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$ važi:

$$M_k \cdot \vec{x}^{\,T} = M_k \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{p_{1k}} & x_{p_{2k}} & \cdots & x_{p_{nk}} \end{bmatrix}^T. \tag{16}$$

Analogno, za matricu $M_k = [e_{q_{1k}}\ e_{q_{2k}}\ \ldots\ e_{q_{nk}}]_{\downarrow}$ i proizvoljni vektor vrstu $\vec{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$ važi:

$$(17) \qquad \vec{x}\cdot M_k = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}\cdot M_k = \begin{bmatrix} x_{q_{k1}} & x_{q_{k2}} & \cdots & x_{q_{kn}} \end{bmatrix}.$$

Proširenje jednakosti (16) i (17) za kvadratnu matricu $X = [x_{ij}]$, reda n, date su matričnim jednačinama:

$$(18) \qquad M_k \cdot X = M_k \cdot [x_{ij}] = [x_{p_{ik}j}], \qquad X \cdot M_k = [x_{ij}] \cdot M_k = [x_{iq_{jk}}].$$

Na osnovu prethodnih jednačina sleduju matrične jednačine:

$$(19) \qquad M_k^{-1}\cdot X = M_k^{-1}\cdot [x_{ij}] = [x_{q_{ki}j}], \qquad X \cdot M_k^{-1} = [x_{ij}] \cdot M_k^{-1} = [x_{ip_{jk}}].$$

Na kraju istaknimo da skup matrica $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ u odnosu na množenje matrica $(\cdot)$ formira <u>*grupu M-matrica*</u> $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \cdot)$ reda n.

<u>Primer 1.1.4.</u> Neka je data homogena grupna funkcionalnu jednačinu

$$a_1(x)\cdot f(\theta_1(x)) + a_2(x)\cdot f(\theta_2(x)) + a_3(x)\cdot f(\theta_3(x)) = 0$$

za zadane funkcije $a_1, a_2, a_3 : S \longrightarrow C$ i nepoznatu funkciju $f : S \longrightarrow C$. Odrediti redom grupe $\mathbb{G}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{M}$.

<u>Rešenje.</u> Na osnovu činjenice da postoji samo jedna grupa reda 3, tada bijekcije $\theta_1 = i : S \longrightarrow S$, $\theta_2 : S \longrightarrow S$ i $\theta_3 : S \longrightarrow S$ u odnosu na kompoziciju obrazuju cikličnu grupu $\mathbb{G} = (G, \circ)$. Odgovarajuća CAYLEYeva tablica je data sa

$\circ$	θ_1	θ_2	θ_3
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3
θ_2	θ_2	θ_3	θ_1
θ_3	θ_3	θ_1	θ_2

Indeksi u kompoziciji bijekcija θ_1, θ_2 i θ_3 određuju grupu $\mathbb{P} = (P, \circ)$ čiji su elementi p-permutacije date sa

$$p_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad p_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad p_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primetimo da su grupe $\mathbb{G} = (G, \circ)$ i $\mathbb{P} = (P, \circ)$ međusobno izomorfne. Dalje, na osnovu primera 1.1.3. iz p-permutacija možemo formirati odgovarajuće q-permutacije

$$q_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad q_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad q_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Saglasno lemi 1.1.1. primetimo da je $q_2 = \Phi(p_2) = p_2^{-1}$ i $q_3 = \Phi(p_3) = p_3^{-1}$. Grupa $\mathbb{Q} = (Q, \circ)$ anti-automorfna je grupi $\mathbb{P} = (P, \circ)$. Dalje, matrice M_1, M_2 i M_3 grupe $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \cdot)$ možemo zapisati po vrstama

$$M_1 = [e_{p_{11}}, e_{p_{21}}, e_{p_{31}}]_{\rightarrow} = [e_1, e_2, e_3]_{\rightarrow},$$

$$M_2 = [e_{p_{12}}, e_{p_{22}}, e_{p_{32}}]_{\rightarrow} = [e_2, e_3, e_1]_{\rightarrow},$$

$$M_3 = [e_{p_{13}}, e_{p_{23}}, e_{p_{33}}]_{\rightarrow} = [e_3, e_1, e_2]_{\rightarrow},$$

odnosno po kolonama

$$M_1 = [e_{q_{11}}, e_{q_{12}}, e_{q_{13}}]_{\downarrow} = [e_1, e_2, e_3]_{\downarrow},$$

$$M_2 = [e_{q_{21}}, e_{q_{22}}, e_{q_{23}}]_{\downarrow} = [e_3, e_1, e_2]_{\downarrow},$$

$$M_3 = [e_{q_{31}}, e_{q_{32}}, e_{q_{33}}]_{\downarrow} = [e_2, e_3, e_1]_{\downarrow},$$

gde su odgovarajuće vrste, odnosno kolone matrica jedinični vektori prostora R^3. Odatle

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da su grupe $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \cdot)$ i $\mathbb{P} = (P, \circ)$ međusobom izomorfne. Pri tom su grupe $\mathbb{G}$ i $\mathbb{P}$ i $\mathbb{M}$ međusobno izomorfne i anti-izomorfne sa grupom $\mathbb{Q}$. Navedeno važi i u opštem slučaju.

Teorema 1.1.5. *Grupe $\mathbb{G} = (G, \circ)$, $\mathbb{P} = (P, \circ)$ i $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \cdot)$ međusobno su izomorfne i anti-izomorfne sa grupom $\mathbb{Q} = (Q, \circ)$.*

Dokaz. Grupa bijekcija $\mathbb{G} = (G, \circ)$ i grupa permutacija indeksa odgovarajućih bijekcija $\mathbb{P} = (P, \circ)$ jesu izomorfne, jer je *bijekcija* $\varphi : G \longrightarrow P$ definisana sa $\varphi(\theta_k) = p_k$ izomorfizam. Zaista, uočimo $\varphi(\theta_i \circ \theta_j) = \varphi(\theta_{p_{ij}}) = p_{p_{ij}}$. Samim tim važi $(p_{p_{ij}})_s = p_{ijs} = p_{ip_{js}} = (p_i \circ p_j)_s$ za svako $s \in \mathbb{I}_n$. Odatle $p_{p_{ij}} = p_i \circ p_j$, na osnovu čega zaključujemo

$$\varphi(\theta_i \circ \theta_j) = p_{p_{ij}} = p_i \circ p_j = \varphi(\theta_i) \circ \varphi(\theta_j).$$

Dalje, posmatrajmo *bijekciju* $f : \mathcal{M} \longrightarrow P$ definisanu sa $f(M_k) = p_k$. Dokažimo da je f izomorfizam grupa $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \cdot)$ i $\mathbb{P} = (P, \circ)$. Za dve M-matrice M_i i M_j važi

$$M_i \cdot M_j = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{T}}_{p_{1i}} \\ e^{\mathrm{T}}_{p_{2i}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{p_{ri}}} \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}_{p_{ni}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{q_{j1}} & e_{q_{j2}} & \cdots & \boldsymbol{e_{q_{js}}} & \cdots & e_{q_{jn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{T}}_{(p_1 \circ p_i)_j} \\ e^{\mathrm{T}}_{(p_2 \circ p_i)_j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\underbrace{\boldsymbol{(p_r \circ p_i)_j}}_{\boldsymbol{s}}} \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}_{(p_n \circ p_i)_j} \end{bmatrix}.$$

Zaista, neka je za s proizvod $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{p_{ri}}} \cdot \boldsymbol{e_{q_{js}}}$ jednak je 1. Tada je $q_{js} = p_{ri}$. Odatle, po pravilima izvođenja, dobijamo vrednost $s = p_{p_{ri}j} = (p_r \circ p_i)_j$. Sa druge strane, neka je

$$M_i \cdot M_j = M_t = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{T}}_{p_{1t}} \\ e^{\mathrm{T}}_{p_{2t}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{p_{rt}}} \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}_{p_{rn}} \end{bmatrix},$$

za neko $t \in \mathbb{I}_n$. Iz prethodne dve jednakosti, za svako $r \in \mathbb{I}_n$, zaključujemo $(p_r \circ p_i)_j = p_{rt}$, što je ekvivaletno sa $p_{rp_{ij}} = p_{rt}$. Odatle sleduje $t = p_{ij}$, tj. dokazana je jednakost

$$M_i \cdot M_j = M_{p_{ij}}.$$

Samim tim $f(M_i \cdot M_j) = f(M_{p_{ij}}) = p_{p_{ij}} = p_i \circ p_j = f(M_i) \circ f(M_j)$.

Anti-izomorfizam grupa $\mathbb{G}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{M}$ sa grupom $\mathbb{Q}$ sleduje na osnovu leme 1.1.1. ■

Posledica. *Prethodno tvrđenje, ujedno predstavlja i dokaz opšte teoreme o predstavljanju grupa pomoću matrica u teoriji reprezentacija* [ĐK], [MM-DC].

<u>Saglasnost matrice sa grupom</u> S. Prešić, u radu [SP2], uveo je pojam saglasnosti matrice sa grupom. Kvadratna matrica $B(x) = [b_{ij}(x)]$, reda n, nad poljem $\mathbb{C}$ jeste *saglasna sa grupom* $\mathbb{G} = (G, \circ)$ ako za svaku zadanu funkciju $g \in \mathcal{F}$ matrična jednakost:

$$\begin{bmatrix} \varphi(\theta_1(x)) \\ \varphi(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ \varphi(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = B(x) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix} \qquad (x \in S) \tag{20}$$

jednoznačno definiše funkciju $\varphi \in \mathcal{F}$. Napomenimo da ako su kvadratne matrice $B(x)$ i $C(x)$ reda n saglasne sa grupom $\mathbb{G}$ to su takođe i matrice $B(x) \pm C(x)$, $B(x) \cdot C(x)$ i $\lambda C(x)$ $(\lambda \in C)$, kao i jedinična matrica I reda n.

<u>1.2. Prešićev matrični metod</u>

Izložićemo metod rešavanja homogene grupne funkcionalne jednačine (1) koji je dao S. Prešić u radu [SP2] iz 1963. godine. Kao *doprinos* Prešićev matrični metod izložićemo u terminima p i q permutacija. Polazimo od funkcionalne jednačine (1) i zamenimo redom x sa $\theta_k(x)$, za $k \in \mathbb{I}_n$, dobijamo n ekvivalentnih funkcionalnih jednačina:

$$a_1(\theta_k(x)) \cdot f(\theta_1(\theta_k(x))) + \ldots + a_n(\theta_k(x)) \cdot f(\theta_n(\theta_k(x))) = 0. \tag{21}$$

Otuda, važi

$$\begin{bmatrix} a_1(\theta_k(x)) & a_2(\theta_k(x)) & \cdots & a_n(\theta_k(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_{p_{1k}}(x)) \\ f(\theta_{p_{2k}}(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_{p_{nk}}(x)) \end{bmatrix} = 0,$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a_1(\theta_k(x)) & a_2(\theta_k(x)) & \cdots & a_n(\theta_k(x)) \end{bmatrix} \cdot M_k \cdot M_k^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_{p_{1k}}(x)) \\ f(\theta_{p_{2k}}(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_{p_{nk}}(x)) \end{bmatrix} = 0.$$

Saglasno formulama (18) i (19) iz prethodne jednakosti dobijamo

$$\begin{bmatrix} a_{q_{k1}}(\theta_k(x)) & a_{q_{k2}}(\theta_k(x)) & \cdots & a_{q_{kn}}(\theta_k(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = 0.$$

Za $i, j \in \mathbb{I}_n$ uvedimo:

$$a_{ij}(x) = a_{q_{ij}}(\theta_i(x)) \qquad (x \in S). \tag{22}$$

Nije teško proveriti da u tom slučaju za $i, j \in \mathbb{I}_n$ važi:

$$a_i(\theta_j(x)) = a_{jp_{ij}}(x) \qquad (x \in S). \tag{23}$$

Ako formiramo matricu $A(x) = [a_{ij}(x)]$, sistem jednačina (21) može se zapisati u odgovarajućem matričnom obliku:

$$A(x) \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \vec{0}. \tag{24}$$

Uvedimo oznaku $\vec{f}(x) = [f(\theta_1(x)), \ldots, f(\theta_n(x))]^T$, tada polazna funkcionalna jednačina (1) zapisuje se u obliku ekvivalentne matrično-funkcionalne jednačine:

$$A(x) \cdot \vec{f}(x) = \vec{0}. \tag{25}$$

Homogena linearna matrično-funkcionalna jednačina (24) uvek je moguća i njeno opšte rešenje po funkciji f S. Prešić je dao u matričnom obliku:

$$\vec{f}(x) = (I - B(x) \cdot A(x)) \cdot \vec{g}(x), \tag{26}$$

za odgovarajući vektor $\vec{g}(x) = [g(\theta_1(x)), \ldots, g(\theta_n(x))]^T$ i matricu $B(x)$ za koje važe uslovi:

1^0. Matrica $B(x)$, u odnosu na matricu $A(x)$, jeste jedan $\{1\}$-*inverz*.

2^0. Matrica $C(x) = I - B(x)\,A(x)$ *saglasna je sa grupom* $\mathbb{G}$ i pri tom vektor $\vec{g}(x) = [g(\theta_1(x)), \ldots, g(\theta_n(x))]^T$ zavisi od jedne proizvoljne funkcije $g \in \mathcal{F}$.

Primetimo ako bi koordinate vektora $\vec{f}(x)$ bile međusobno nezavisne prvi uslov[12] predstavlja jedan dovoljan uslov da formula (26) daje opšte rešenje matrične jednačine (25). Na osnovu činjenice da se iz svake koordinate vektora $\vec{f}(x)$ može dobiti ma koja druga koordinata odgovarajućim zamenama $x \mapsto \theta_k(x)$ $(k \in \mathbb{I}_n)$ drugi uslov je dovoljan da navedeno svojstvo zadrži vektor rešenja.

U narednim tvrđenjima razmatramo uslov saglasnosti matrice sa grupom.

<u>Teorema 1.2.1.</u> *Ako za kvadratnu matricu $B(x)$ reda n važi uslov:*

$$B(\theta_k(x)) = M_k \cdot B(x) \cdot M_k^{-1}, \tag{27}$$

gde $k \in \mathbb{I}_n$ i $x \in S$, tada je matrica $B(x)$ saglasna sa grupom $\mathbb{G}$.

[12] SAGLASNO TREĆEM DELU PRVE CELINE

Dokaz. Za kvadratnu matricu $B(x) = [b_{ij}(x)]$ reda n formirajmo funkciju:

(28) $$\varphi_1(x) = b_{11}(x) \cdot g(\theta_1(x)) + b_{12}(x) \cdot g(\theta_2(x)) + \ldots + b_{1n}(x) \cdot g(\theta_n(x)),$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Sa matricom $B(x)$ i funkcijom $g \in \mathcal{F}$, na osnovu matrične jednakosti:

(29) $$\begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix} = B(x) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix}$$

određene su redom funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}$ za koje dokazujemo vezu $\underline{\varphi_k = \varphi_1 \circ \theta_k}$ $(k \in \mathbb{I}_n)$. Za matricu M_k i vektor $\vec{x} = [x_1 \cdots x_n]^T$, na osnovu formule (16), po prvoj koordinati važi zaključak $M_k \cdot \vec{x} = [x_{p_{1k}} \cdots x_{p_{nk}}]^T = [x_k \cdot \cdots \cdot]^T$. Samim tim, množeći sa leve strane levu i desnu stranu jednakosti (29) sa matricom M_k po prvoj koordinati dobijamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varphi_k(x) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} &= M_k \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix} = M_k \cdot B(x) \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix} \\ &= (M_k \cdot B(x) \cdot M_k^{-1}) \cdot M_k \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix} \\ &\underset{(27)}{=} B(\theta_k(x)) \cdot M_k \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix} \\ &= B(\theta_k(x)) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_{p_{1k}}(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_{p_{nk}}(x)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sveukupno po prvoj koordinati dokazana je sledeća jednakost:

(30) $$\varphi_k(x) = b_{11}(\theta_k(x))g(\theta_{p_{1k}}(x)) + b_{12}(\theta_k(x))g(\theta_{p_{2k}}(x)) + \ldots + b_{1n}(\theta_k(x))g(\theta_{p_{nk}}(x)).$$

Ako u jednakosti (28) izvršimo zamenu $x \mapsto \theta_k(x)$, tada dobijamo

$$\varphi_1(\theta_k(x)) = \sum_{i=1}^{n} b_{1i}(\theta_k(x)) \cdot g(\theta_i(\theta_k(x)) = \sum_{i=1}^{n} b_{1i}(\theta_k(x)) \cdot g(\theta_{p_{ik}}(x)) = \varphi_k(x),$$

za svako $k \in \mathbb{I}_n$ i $x \in S$. Otuda, za ma koju funkciju $g \in \mathcal{F}$, odgovarajuće funkcije $\varphi_k \in \mathcal{F}$ jesu jednoznačno određene vezom $\varphi_k = \varphi_1 \circ \theta_k$ $(k \in \mathbb{I}_n)$. Prema definiciji, matrica $B(x)$ je saglasna sa grupom $\mathbb{G}$. ■

Teorema 1.2.2. *Matrica* $A(x) = [a_{ij}(x)] = [a_{q_{ji}}(x)]$ *saglasna je sa grupom* $\mathbb{G}$.

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi dovoljno je dokazati jednakost:

$$A(\theta_k(x)) = M_k A(x)\, M_k^{-1}, \tag{31}$$

za svako $k \in \mathbb{I}_n$ i $x \in S$. Sa jedne strane, prema formuli (22), dobijamo:

$$A(\theta_k(x)) = [a_{ij}(\theta_k(x))] = [a_{q_{ij}}(\theta_i \circ \theta_k(x))] = [a_{q_{ij}}(\theta_{p_{ik}}(x))].$$

Sa druge strane, prema formulama (18) i (19), dobijamo

$$M_k A(x)\, M_k^{-1} = M_k[a_{ij}(x)]\, M_k^{-1} = M_k[a_{ip_{jk}}(x)] = [a_{p_{ik}p_{jk}}(x)] = [a_{q_{p_{ik}p_{jk}}}(\theta_{p_{ik}}(x))].$$

Prema formuli (11c), leme 1.1.2., važi $[a_{q_{p_{ik}p_{jk}}}(\theta_{p_{ik}}(x))] = [a_{q_{ij}}(\theta_{p_{ik}}(x))]$. Odatle, na osnovu prethodne dve jednakosti, sleduje jednakost (31). ■

Teorema 1.2.3. *Za funkcionalnu jednačinu* (1) *kvadratna matrica*:

$$B(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k^{-1} A^{(1)}(\theta_k(x))\, M_k, \tag{32}$$

jeste $\{1\}$*-inverz matrice* $A(x)$ *koji je saglasan sa grupom* $\mathbb{G}$*, gde je* $A^{(1)}(x)$ *ma koji* $\{1\}$*-inverz matrice* $A(x)$.

Dokaz. Proverimo da je sa matricom $B(x)$ dat $\{1\}$-inverz matrice $A(x)$. U dokazu koristimo posledicu formule (31):

$$A(x) = M_k^{-1} A(\theta_k(x))\, M_k, \tag{$*$}$$

za $k \in \mathbb{I}_n$ i $x \in S$. Odatle:

$$\begin{aligned}
A(x)\, B(x)\, A(x) &= A(x)\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k^{-1} A^{(1)}(\theta_k(x))\, M_k\Big) A(x)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A(x)\, M_k^{-1} A^{(1)}(\theta_k(x))\, M_k A(x)\\
&\underset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(M_k^{-1} A(\theta_k(x))\, M_k)\, M_k^{-1} A^{(1)}(\theta_k(x))\, M_k (M_k^{-1} A(\theta_k(x))\, M_k)}{n}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k^{-1} A(\theta_k(x))\, A^{(1)}(\theta_k(x))\, A(\theta_k(x))\, M_k}{n}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k^{-1} A(\theta_k(x))\, M_k}{n} \underset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{A(x)}{n} = A(x).
\end{aligned}$$

Dalje, proverimo saglasnost matrice $B(x)$ sa grupom $\mathbb{G}$. Za $k \in \mathbb{I}_n$ i $x \in S$ važi

$$\begin{aligned}
B(\theta_k(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M_j^{-1} A^{(1)}(\theta_j \circ \theta_k(x))\, M_j\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M_k (M_j M_k)^{-1} A^{(1)}(\theta_{p_{jk}}(x))\, (M_j M_k) M_k^{-1}\\
&= M_k \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{(M_j M_k)^{-1} A^{(1)}(\theta_{p_{jk}}(x))\, (M_j M_k)}{n}\Big)\, M_k^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M_k\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{M_{p_{jk}}^{-1}A^{(1)}(\theta_{p_{jk}}(x))\,M_{p_{jk}}}{n}\Big)\,M_k^{-1}\\
&= M_k\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i^{-1}A^{(1)}(\theta_i(x))\,M_i}{n}\Big)\,M_k^{-1} = M_kB(x)\,M_k^{-1}.
\end{aligned}
$$

Sveukupno dokazana je formula:

$$B(\theta_k(x)) = M_kB(x)\,M_k^{-1}. \tag{33}$$

Samim tim, prema teoremi 1.2.1., tvrđenje je dokazano. ∎

U narednom tvrđenju dajemo formulu opšteg reproduktivnog rešenja homogene funkcionalne jednačine.

Teorema 1.2.4. *Za funkcionalnu jednačinu* (1) *neka je matrica* $B(x)$ *određena formulom*[13] (32). *Ako je* $g \in \mathcal{F}$ *proizvoljna funkcija, tada je opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine* (1) *dato matričnom formulom*:

$$
\begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = (I - B(x)A(x)) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix}, \tag{34}
$$

odnosno skalarnom formulom:

$$f(x) \;=\; g(x) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{1j}(x)a_{ij}(x)g(\theta_j(x)). \tag{35}$$

Dokaz. Dokazujemo da je matrica $C(x) = I - B(x)A(x)$ saglasna sa grupom $\mathbb{G}$. Zaista, prema formulama (31) i (33) dobijamo

$$
\begin{aligned}
C(\theta_k(x)) &= I - B(\theta_k(x)) \cdot A(\theta_k(x))\\
&= M_k\,M_k^{-1} - (M_kB(x)M_k^{-1}) \cdot (M_kA(x)\,M_k^{-1})\\
&= M_k(I - B(x) \cdot A(x))M_k^{-1} = M_kC(x)M_k^{-1},
\end{aligned}
$$

za $k \in \mathbb{I}_n$ i $x \in S$. Prema teoremi 1.2.1. matrica $C(x)$ saglasna je sa grupom $\mathbb{G}$. Uz uslove $\mathbf{1^0}$., $\mathbf{2^0}$ i $C(\theta_k(x)) = M_kC(x)M_k^{-1}$ $(k \in \mathbb{I}_n)$ formula (35) ekvivaletna je matričnoj formuli (34) kojom je dato rešenje matrično-funkcionalne jednačine (25). Otuda, koordinatnom formulom (35) dato je rešenje funkcionalne jednačine (1). Obratno, svako rešenje je predstavljivo u obliku formule (34), jer je posmatrana formula, prema teoremi 3.1.2. (prve celine), reproduktivna formula. Reproduktivnost formule $\vec{f}(\vec{g}) = (I - BA) \cdot \vec{g}$ možemo dokazati i direktno

$$
\begin{aligned}
\vec{f} \circ \vec{f}(\vec{g}) &= (I - BA) \cdot \Big(\,(I - BA) \cdot \vec{g}\,\Big)\\
&= (I - BA - BA + BABA)\vec{g}\\
&= (I - BA - BA + BA)\vec{g} = (I - BA)\vec{g} = \vec{f}(\vec{g})\;.
\end{aligned}
$$

[13] opštije kao jedan $\{1\}$-inverz matrice $A(x)$ koji je saglasan sa pratećom grupom

Saglasno napomeni 2 teoreme 1.2 (prve celine) matrična formula (34), odnosno koordinatna formula (35), zadržava-reprodukuje sva rešenja funkcionalne jednačine (1). ■

1.3. Metod minimalnog polinoma

U ovom paragrafu izlažemo metod rešavanja homogene grupne funkcionalne jednačine (1) pomoću minimalnog polinoma koji potiče od S. Prešića [SP2].

Teorema 1.3.1. *Za funkcionalnu jednačinu* (1) *neka matrica* $A(x) = [a_{ij}(x)]$ *ispunjava uslov*:

$$A^m(x) + \lambda_{m-1}A^{m-1}(x) + \ldots + \lambda_1 A(x) = 0, \tag{36}$$

za svako $x \in S$ *i njime određene koeficijente* $\lambda_{m-1}, \ldots, \lambda_1 \in C$ $(\lambda_1 \neq 0)$ *i prirodan broj* $m > 1$. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1) *dato je u obliku matrične formule*:

$$\begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1}(A^{m-1}(x) + \lambda_{m-1}A^{m-2}(x) + \ldots + \lambda_1 I) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix}, \tag{37}$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ *proizvoljna funkcija.*

Prema pretpostavci (36), prethodne teoreme, matrica $A(x)$ je indeksa $Ind(A(x)) = 1$ za sve vrednosti $x \in S$. Pod navedenom pretpostavkom postoji grupni inverz $A(x)^{\#}$ za sve vrednosti $x \in S$. Dokažimo tvrđenje koje daje formulu opšteg rešenja preko grupnog inverza. Važi naredno tvrđenje.

Teorema 1.3.2. *Za funkcionalnu jednačinu* (1) *neka matrica* $A(x) = [a_{ij}(x)]$ *ispunjava uslov* (36). *Neka je* $A(x)^{\#}$ *grupni inverz matrice* $A(x)$ *za sve vrednosti* $x \in S$. *Opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine* (1) *dato je matričnom formulom*:

$$\begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \Big(I - A(x)^{\#}A(x)\Big) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix}, \tag{38}$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ *proizvoljna funkcija. Pri tom su, za* $g \in \mathcal{F}$, *desne strane formula opšteg rešenja* (37) *i* (38) *jednake u svakoj tački* $x \in S$.

Dokaz. Primetimo da je formula (38) specijalni slučaj formule (26), pri čemu matrica $B(x) = A(x)^{\#}$ ispunjava uslove $\mathbf{1^0}$. $B(x)$ jeste $\{1\}$-inverz matrice $A(x)$ kao grupni inverz i $\mathbf{2^0}$. $B(x)$ jeste saglasna sa grupom $\mathbb{G}$ jer se izražava, prema teoremi 5.2.2. (prve celine), kao polinom po matrici $A(x)$. Otuda, formula (38) jeste formula opšteg reproduktivnog rešenja funkcionalne jednačine (1). Dokažimo da se za ma koje $g \in \mathcal{F}$ desne strane formula (37) i (38) podudaraju u svakoj tački $x \in S$. Polazeći od minimalnog polinoma $\mu(x) = x^m + \lambda_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \lambda_1 x$, formirajmo q-polinom $q(x) = -\frac{1}{\lambda_1}(x^{m-2} + \lambda_{m-1}x^{m-3} + \ldots + \lambda_2)$. Prema teoremi 5.2.2. (prve celine) matrica $q(A(x))$ jeste jedan $\{1\}$-inverz matrice $A(x)$, koji komutira sa matricom $A(x)$. Odatle važi

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\lambda_1}(A^{m-1}(x) + \lambda_{m-1}A^{m-2}(x) + \ldots + \lambda_1 I) &= I - A(x) \cdot q(A(x)) \\
&= I - A(x)\, q(A(x)) A(x) \cdot q(A(x)) \\
&= I - \Big(A(x)\, q(A(x))^2\Big) \cdot A(x) \\
&= I - A(x)^{\#} \cdot A(x),
\end{aligned}$$

za $x \in S$. Na osnovu prethodno dokazane jednakosti sleduje tvrđenje teoreme. ∎

Napomena. *Na osnovu dokazane jednakosti formula rešenja* (37) *i* (38) *imamo i dodatni zaključak da je i formula opšteg rešenja* (37) *reproduktivna.*

Primer 1.3.3. *Rešiti funkcionalnu jednačinu*

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_1, x_2) = 0$$

po nepoznatoj funkciji $f = f(x_1, x_2, x_3) : S^3 \longrightarrow C$.

Rešenje. Za $X = (x_1, x_2, x_3)$ označimo sa $\theta_1(X) = (x_1, x_2, x_3)$, $\theta_2(X) = (x_2, x_3, x_1)$ i $\theta_3(X) = (x_3, x_1, x_2)$ bijekcije koje u odnosu na kompoziciju obrazuju cikličnu grupu $\mathbb{G} = (G, \circ)$. Odgovarajuće grupe permutacija $\mathbb{P} = (P, \circ)$ i $\mathbb{Q} = (Q, \circ)$, kao i odgovarajuća grupa matrica $\mathbb{M} = (\mathcal{M}, \cdot)$, određene su u primeru 1.1.4. Formiramo odgovarajuću matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

na osnovu koje je posmatrana funkcionalna jednačina ekvivalentna sa matrično-funkcionalnom jednačinom

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ f(\theta_3(x)) \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Matrica A je sa minimalnim polinomom $\mu(x) = x^3 - 3x^2$, dakle indeksa $Ind(A) = 2$. Samim tim, u ovom slučaju, metod minimalnog polinoma je neupotrebljiv i upotrebićemo opštiji Prešićev matrični metod. Za matricu A, ranga $rank(A) = 1$, jedan njen $\{1\}$-inverz[14] je dat sa

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[14] dobijen iz opšteg $\{1\}$-inverza anulirajući sve slobodne parametre

Odatle, prema teoremi 1.2.3, jedan $\{1\}$-inverz koji se slaže sa grupom $\mathbb{G}$ dat je sa formulom

$$B = \frac{1}{3}\Big(M_1^{-1}A^{(1)}M_1 + M_2^{-1}A^{(1)}M_2 + M_3^{-1}A^{(1)}M_3\Big) = \frac{1}{3}I.$$

Prema teoremi 1.2.4. opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine dato je matričnom formulom

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ f(\theta_3(x)) \end{bmatrix} &= \Big(I - B(x)\cdot A(x) \Big) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ g(\theta_3(x)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ g(\theta_3(x)) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

odnosno, po prvoj koordinati, skalarnom formulom

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}\big(2g(x_1,x_2,x_3) - g(x_2,x_3,x_1) - g(x_3,x_1,x_2) \big),$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Ako u postupku rešavanja biramo opšti $\{1\}$-inverz, sa 8 medjusobno nezavisnih parametara, tada dolazimo do iste formule opšteg rešenja. Navedeno važi i u opštem slučaju za homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

2. Homogena grupna funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

Posmatrajmo homogenu grupnu funkcionalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima:

$$a_1 \cdot f(\theta_1(x)) + a_2 \cdot f(\theta_2(x)) + \ldots + a_n \cdot f(\theta_n(x)) = 0, \tag{1}$$

po nepoznatoj funkciji $f \in \mathcal{F}$ za zadane konstantne koeficijente $a_1, \ldots, a_n \in C$. Zadržaćemo oznake koje smo uveli u razmatranju opšte homogene grupne funkcionalne jednačine.

2.1. Prešićev matrični metod

Navodimo specifičnosti matričnog metoda rešavanja funkcionalne jednačine (1), prema radu S. Prešića [SP1], za slučaj konstantnih koeficijenata. Ako je $A = [a_{ij}]$ konstantna matrica, koja ne zavisi od $x \in S$, tada $\{1\}$-inverz $A^{(1)}$ takođe ne zavisi od $x \in S$. Za funkcionalnu jednačinu (1) kvadratna matrica $B = [b_{ij}]$ formirana na sledeći način:

$$B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i^{-1}A^{(1)}\,M_i, \tag{2}$$

jeste $\{1\}$-inverz matrice A koji je saglasan sa grupom $\mathbb{G}$ i ne zavisi od $x \in S$. U tom slučaju eksplicitna formula opšteg rešenja (35), navedena u prvom delu, data je u obliku:

$$f(x) \;=\; \Pi(x) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{1j}a_{ij}\Pi(\theta_j(x)), \tag{3}$$

za $x \in S$ i $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljnu funkciju.

2.2. Prešićev $\Lambda-$matrični metod

Navodimo drugi postupak rešavanja funkcionalne jednačine (1) sa konstantnim koeficijentima koji je predložio S. Prešić. Označimo redom $A_1 = f(\theta_1(x)), A_2 = f(\theta_2(x)), \ldots, A_n = f(\theta_n(x))$ nepoznate vrednosti funkcije f. Funkcionalnu jednačinu (1) možemo predstaviti kao linearnu jednačinu:

$$\mathcal{J}_1 = a_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot A_2 + \ldots + a_n \cdot A_n = 0, \tag{4}$$

po nepoznatim vrednostima $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Izvršimo zamenu x redom sa $\theta_1(x)$, $\theta_2(x), \ldots, \theta_n(x)$. Tada linearna jednačina (4) ekvivaletna je sa sistemom:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{J}_1 & \stackrel{def}{=} & a_1A_{p_{11}} + a_2A_{p_{21}} + \ldots + a_nA_{p_{n1}} = 0, \\ \mathcal{J}_2 & \stackrel{def}{=} & a_1A_{p_{12}} + a_2A_{p_{22}} + \ldots + a_nA_{p_{n2}} = 0, \\ & \vdots & \\ \mathcal{J}_n & \stackrel{def}{=} & a_1A_{p_{1n}} + a_2A_{p_{2n}} + \ldots + a_nA_{p_{nn}} = 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Za $i, j \in \mathbb{I}_n$ postoji $k = p_{ji} \in \mathbb{I}_n$ tako da je $A_{p_{ji}} = A_k$. Tada $a_jA_{p_{ji}}$ prelazi u $a_{q_{ik}}A_k$ $(i, k, j = q_{ik} \in \mathbb{I}_n)$. Odatle u terminima q-permutacija prethodni sistem zapisujemo u obliku:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{J}_1 & = & a_{q_{11}}A_1 + a_{q_{12}}A_2 + \ldots + a_{q_{1n}}A_n = 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & a_{q_{21}}A_1 + a_{q_{22}}A_2 + \ldots + a_{q_{2n}}A_n = 0, \\ & \vdots & \\ \mathcal{J}_n & = & a_{q_{n1}}A_n + a_{q_{n2}}A_n + \ldots + a_{q_{nn}}A_n = 0. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Uvedimo matrične oznake

$$\vec{\mathcal{J}} \;=\; [\;\; \mathcal{J}_1 \;\; \mathcal{J}_2 \;\; \ldots \;\; \mathcal{J}_n \;\;]^T \quad \text{i} \quad \vec{\mathcal{A}} \;=\; [\;\; A_1 \;\; A_2 \;\; \ldots \;\; A_n \;\;]^T.$$

Za matricu $\mathbf{A} = [a_{ij}] = [a_{q_{ij}}]$, sistem (6) zapisujemo u obliku homogene linearne matrične jednačine:

$$\vec{\mathcal{J}} = \mathbf{A} \cdot \vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathbf{0}}. \tag{7}$$

Prešić*eva Λ-matrična metoda* zasniva se u traženju rešenja, po A_1, u sledećem obliku[15]:

$$A_1 = A_1 - \lambda_1\mathcal{J}_1 - \lambda_2\mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_n\mathcal{J}_n, \tag{8}$$

gde su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in C$ nepoznati parametri.

[15] kao u četvrtom delu prve celine

Prelazimo na određivanje veze između parametara. Primetimo da ako u k-toj jednačini

$$\mathcal{J}_k = a_1 A_{p_{1k}} + a_2 A_{p_{2k}} + \ldots + a_n A_{p_{nk}}$$

izvršimo zamenu $x \mapsto \theta_r(x)$, tada $A_{p_{ik}} = f(\theta_{p_{ik}}(x))$ prelazi u $f(\theta_{p_{ik}} \circ \theta_r(x)) = f(\theta_{p_{p_{ik}r}}(x)) = f(\theta_{p_{ip_{kr}}}(x)) = A_{p_{ip_{kr}}}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$. Navedenom zamenom $x \mapsto \theta_r(x)$, cela k-ta jednačina $\mathcal{J}_k$ prelazi u p_{kr}-tu jednačinu $\mathcal{J}_{p_{kr}}$ datu sa

$$\mathcal{J}_k^{(r)} = \mathcal{J}_{p_{kr}} \stackrel{def}{=} a_1 A_{p_{1p_{kr}}} + a_2 A_{p_{2p_{kr}}} + \ldots + a_n A_{p_{np_{kr}}}.$$

Polazeći od formule (8) pomoću zamena $x \mapsto \theta_1(x), x \mapsto \theta_2(x), \ldots, x \mapsto \theta_n(x)$ formiramo sistem:

$$\text{(9)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} A_1 &=& A_1 - \lambda_1 \mathcal{J}_{p_{11}} - \lambda_2 \mathcal{J}_{p_{21}} - \ldots - \lambda_n \mathcal{J}_{p_{n1}}, \\ A_2 &=& A_2 - \lambda_1 \mathcal{J}_{p_{12}} - \lambda_2 \mathcal{J}_{p_{22}} - \ldots - \lambda_n \mathcal{J}_{p_{n2}}, \\ &\vdots& \\ A_n &=& A_n - \lambda_1 \mathcal{J}_{p_{1n}} - \lambda_2 \mathcal{J}_{p_{2n}} - \ldots - \lambda_n \mathcal{J}_{p_{nn}}. \end{array} \right\}$$

U terminima q-permutacija prethodni sistem zapisujemo u obliku:

$$\text{(10)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} A_1 &=& A_1 - \lambda_{q_{11}} \mathcal{J}_1 - \lambda_{q_{12}} \mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_{q_{1n}} \mathcal{J}_n, \\ A_2 &=& A_2 - \lambda_{q_{21}} \mathcal{J}_1 - \lambda_{q_{22}} \mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_{q_{2n}} \mathcal{J}_n, \\ &\vdots& \\ A_n &=& A_n - \lambda_{q_{n1}} \mathcal{J}_1 - \lambda_{q_{n2}} \mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_{q_{nn}} \mathcal{J}_n. \end{array} \right\}$$

Samim tim, odgovarajuće rešenja matrične jednačine (7) tražimo u obliku matrične formule:

$$\text{(11)} \qquad \vec{\mathcal{A}} = \varphi(\vec{\mathcal{A}}) = \vec{\mathcal{A}} - \Lambda \cdot \vec{\mathcal{J}} = (I - \Lambda\, \mathbf{A}) \cdot \vec{\mathcal{A}},$$

gde je Λ matrica nepoznatih parametara koji ispunjavaju dodatne jednakosti[16]:

$$\text{(12)} \qquad \Lambda = [\lambda_{ij}] = [\lambda_{q_{ij}}],$$

za $i, j \in \mathbb{I}_n$.

Iz (10) zamenom izraza za $A_1, A_2, \ldots, A_n$ u polaznu jednačinu (4) dobijamo:

$$\begin{aligned} & a_1(A_1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{q_{1j}} \mathcal{J}_j) + a_2(A_2 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{q_{2j}} \mathcal{J}_j) + \ldots + a_n(A_2 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{q_{nj}} \mathcal{J}_j) = 0 \\ \iff & a_1\big(A_1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{q_{j1}} \sum_{r=1}^{n} a_{q_{jr}} A_r\big) + a_2\big(A_2 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{q_{j2}} \sum_{r=1}^{n} a_{q_{jr}} A_r\big) + \ldots + \\ & a_k\big(A_k - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{q_{jk}} \sum_{r=1}^{n} a_{q_{jr}} A_r\big) + \ldots + a_n\big(A_n - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{q_{jn}} \sum_{r=1}^{n} a_{q_{jr}} A_r\big) = 0 \end{aligned}$$

[16] na osnovu kojih je Λ matrica odredjena q-permutacijama elemenata prve vrste

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\ & \Big(a_1 - a_1\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{1j}}a_{q_{j1}} - a_2\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{2j}}a_{q_{j1}} - \ldots - a_n\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{nj}}a_{q_{j1}}\Big)A_1 + \\
& \Big(a_2 - a_1\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{1j}}a_{q_{j2}} - a_2\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{2j}}a_{q_{j2}} - \ldots - a_n\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{nj}}a_{q_{j2}}\Big)A_2 + \\
& \vdots \\
& \Big(a_k - a_1\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{1j}}a_{q_{jk}} - a_2\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{2j}}a_{q_{j1}} - \ldots - a_n\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{nj}}a_{q_{jk}}\Big)A_k + \\
& \vdots \\
& \Big(a_n - a_1\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{1j}}a_{q_{jn}} - a_2\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{2j}}a_{q_{j1}} - \ldots - a_n\sum_{j=1}^{n}\lambda_{q_{nj}}a_{q_{jn}}\Big)A_n = 0.
\end{aligned}
$$

Odatle dobijamo $\underline{\Lambda\text{-}sistem}$ jednačina po parametrima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$
(13) \qquad \left\{
\begin{array}{rcl}
(\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{1s}1}})\lambda_1 + (\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{2s}1}})\lambda_2 + \ldots + (\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{ns}1}})\lambda_n & = & a_1, \\
(\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{1s}2}})\lambda_1 + (\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{2s}2}})\lambda_2 + \ldots + (\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{ns}2}})\lambda_n & = & a_2, \\
 & \vdots & \\
(\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{1s}k}})\lambda_1 + (\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{2s}k}})\lambda_2 + \ldots + (\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{ns}k}})\lambda_n & = & a_k, \\
 & \vdots & \\
(\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{1s}n}})\lambda_1 + (\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{2s}n}})\lambda_2 + \ldots + (\sum\limits_{s=1}^{n} a_s a_{q_{p_{ns}n}})\lambda_n & = & a_n.
\end{array}
\right\}
$$

Kao *doprinos* dokazujemo sledeća dva tvrđenja.

<u>Teorema 2.2.1</u> ***(i)*** *Matrica* $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ *jeste* $\{1\}$*-inverz matrice* $\mathbf{A}$ *koji je saglasan sa pratećom grupom.* ***(ii)*** *Ako postoji tačka* $x_0 \in S$*, takva da za svako* $i \in \mathbb{I}_n \backslash \{1\}$ *važi* $\theta_i(x_0) \neq x_0$*, tada je* Λ*-sistem* (13) *pridružen funkcionalnoj jednačini* (1) *uvek moguć i određen je sa prvih* n *jednačina sistema*:

$$
(14) \qquad \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.
$$

<u>Dokaz.</u> ***(i)*** Iz formule (11), saglasno teoremi 4.1. (prve celine), matrica Λ jeste $\{1\}$-inverz matrice $\mathbf{A}$. Na osnovu formula (18), (19) i leme 1.1.2. paragrafa 1.1., za svako $k \in \mathbb{I}_n$, važi:

$$
(15) \qquad M_k \Lambda M_k^{-1} = M_k[\lambda_{ij}]M_k^{-1} = [\lambda_{q_{p_{ij}p_{jk}}}] = [\lambda_{q_{ij}}] = [\lambda_{ij}] = \Lambda.
$$

Prema teoremi 1.2.1. sleduje da matrica Λ jeste $\{1\}$-inverz koji je saglasan sa grupom $\mathbb{G}$.

(ii) U radu [SN3] pokazano je da uslov, iz pretpostavke teoreme, jeste dovoljan za zaključak: jednakost (12) ekvivaletna je sa saglasnošću matrice Λ sa pratećom grupom. Prema prethodnom delu teoreme matrica Λ, u odnosu na matricu A, jeste jedan $\{1\}$-inverz. Iz $A\Lambda A = A$ primenom tenzorske veze između koeficijenata linearnog sistema dobijamo sistem (14). Dalje, iz prvih n jednačina sistema (14) koristeći jednakosti (12) ili ekvivaletno uslov saglasnosti matrice sa pratećom grupom, dobijamo Λ-sistem. Odatle svaki $\{1\}$-inverz saglasan sa pratećom grupom jeste rešenje Λ-sistema. Prema teoremi 1.2.3. skup takvih matrica jeste neprazan skup, na osnovu čega zaključujemo da je Λ-sistem uvek moguć. ■

Teorema 2.2.2. *Ako postoji tačka $x_0 \in S$, takva da za svako $i \in \mathbb{I}_n \backslash \{1\}$ važi $\theta_i(x_0) \neq x_0$, tada za matricu Λ određenu iz Λ-sistema formula opšteg reproduktivnog rešenja funkcionalne jednačine* (1) *data je sa*:

$$f(x) \;=\; \Pi(x) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ji} \Pi(\theta_i(x)), \tag{16}$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija.

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme Λ-sistem homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima (1) je moguć. Matrica $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ određena iz Λ-sistema jeste jedan $\{1\}$-inverz saglasan sa pratećom grupom. Za proizvoljnu funkciju $\Pi \in \mathcal{F}$ vratimo smene $A_1 = \Pi(\theta_1(x)), A_2 = \Pi(\theta_2(x)), \ldots, A_n = \Pi(\theta_n(x))$ u desnu stranu formule (11). Na taj način dobijamo jedno rešenje funkcionalne jednačine (1) u matričnom obliku. Na osnovu reproduktivnosti tako određene matrične formule rešenje je opšte. Odatle po prvoj koordinati opšte reproduktivno rešenje dato je u skalarnom obliku (16). ■

Kao *doprinos* dokazaćemo[17] korišćenu činjenicu u dokazu teoreme 2.2.1. (ii) da su jednakosti (12) ekvivaletne sa saglašnošću matrice Λ sa pratećom grupom. Dokaz je dat prema radu S. Nikčević [SN3] u terminima p i q permutacija.

Navodimo, bez dokaza, naredno pomoćno tvrđenje[18] za proizvoljne grupe [SN3].

Lema 2.2.3. *Ako postoji tačka $x_0 \in S$, takva da za svako $i \in \mathbb{I}_n \backslash \{1\}$ važi $\theta_i(x_0) \neq x_0$, tada za svaku funkciju $\varphi : S \longrightarrow C$ iz nekog vektorskog prostora funkcija V važi*:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\theta_i(x)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0, \tag{17}$$

za ma koji izbor skalara $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C$ i $x \in S$.

[17] u obliku teoreme 2.2.4.

[18] ranije dokazano za ciklične grupe u [BZ]

Teorema 2.2.4. *Ako postoji tačka $x_0 \in S$, takva da za svako $i \in \mathbb{I}_n \backslash \{1\}$ važi $\theta_i(x_0) \neq x_0$, tada matrica $B = [b_{ij}] \in K^{n \times n}$ jeste saglasna sa grupom $\mathbb{G}$ ako i samo ako je $b_{ij} = b_{q_{ij}}$ $(i, j \in \mathbb{I}_n)$.*

Dokaz. Dokaz navodimo prema radu [SN3]. Neka je matrica B saglasna sa grupom $\mathbb{G}$, tada matrična jednakost:

$$
\begin{bmatrix} \varphi(\theta_1(x)) \\ \varphi(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ \varphi(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = [b_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} \Pi(\theta_1(x)) \\ \Pi(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ \Pi(\theta_n(x)) \end{bmatrix} \tag{18}
$$

jednoznačno definiše funkciju $\varphi \in \mathcal{F}$ za ma koji izbor funkcije $\Pi \in \mathcal{F}$. Tada po prvoj koordinati dobijamo

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{1k} \Pi(\theta_k(x)).$$

Ako izvršimo zamenu $x \mapsto \theta_i(x)$ iz prethodne jednakosti dobijamo

$$\varphi(\theta_i(x)) = \sum_{k=1}^{n} b_{1k} \Pi(\theta_{p_{ki}}(x)),$$

odnosno u terminima q-permutacija:

$$\varphi(\theta_i(x)) = \sum_{j=1}^{n} b_{1q_{ij}} \Pi(\theta_j(x)). \tag{19}$$

Sa druge strane iz (18) po i-toj koordinati dobijamo:

$$\varphi(\theta_i(x)) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Pi(\theta_j(x)). \tag{20}$$

Sami tim iz (19) i (20) oduzimanjem važi:

$$\sum_{j=1}^{n} (b_{1q_{ij}} - b_{ij}) \Pi(\theta_j(x)) = 0, \tag{21}$$

što je prema lemi 2.2.3. dovoljno za zaključak $b_{ij} = b_{1q_{ij}} = b_{q_{ij}}$ $(i, j \in \mathbb{I}_n)$.

Obratno, pri pretpostavci $b_{ij} = b_{q_{ij}}$ $(i, j \in \mathbb{I}_n)$, matrica B ispunjava uslov teoreme 1.2.1. Navedeno se proverava istim postupkom kao u teoremi 1.2.3. Odatle sleduje zaključak da je matrica B saglasna sa grupom $\mathbb{G}$. ■

Narednim tvrđenjem dati su uslovi ekvivaletni pojmu saglasnosti matrice sa grupom.

Teorema 2.2.5. *Ako postoji tačka $x_0 \in S$, takva da za svako $i \in \mathbb{I}_n \backslash \{1\}$ važi $\theta_i(x_0) \neq x_0$, tada za matricu B sledeći uslovi su ekvivaletni:*

(i) *Matrica B je saglasna sa grupom $\mathbb{G}$.*

(ii) *Za elemente matrice $B = [b_{ij}]$ važi $b_{ij} = b_{q_{ji}}$ $(i, j \in \mathbb{I}_n)$.*

(iii) *Važi matrična jednakost $M_k B\, M_k^{-1} = B$ za svako $k \in \mathbb{I}_n$.*

Dokaz. ***(i)*** $\Longleftrightarrow$ ***(ii)*** Dokazano sa teoremom 2.2.4. ***(ii)*** $\Longrightarrow$ ***(iii)*** Analogno sa dokazom teoreme[19] 1.2.2. ***(iii)*** $\Longrightarrow$ ***(i)*** Dokazano sa teoremom 1.2.1. ■

Na kraju, kao *doprinos*, dokazujemo da za svaki izbor Λ matrice, formula opšteg reproduktivnog rešenja (16) funkcionalne jednačine (1) ima jednoznačno određene koeficijente uz sabirke $\Pi(\theta_i(x))$ $(i \in \mathbb{I}_n)$. Naime, važi naredno tvrđenje.

Teorema 2.2.6. *Neka postoji tačka $x_0 \in S$, takva da za svako $i \in \mathbb{I}_n \backslash \{1\}$ važi $\theta_i(x_0) \neq x_0$. Za ma koju matricu $\Lambda = [\lambda_{q_{ij}}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, koja je $\{1\}$-inverz matrice A saglasan sa grupom $\mathbb{G}$, skalari $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ji}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ jedinstveno su određeni.*

Dokaz. Neka su Λ' i Λ'' ma koja dva $\{1\}$-inverza matrice A saglasna sa pratećom grupom. Za matricu Λ' formirajmo skalare $\alpha_i' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i' a_{ji}$ $(i = 1, \ldots, n)$ i za matricu Λ'' formirajmo skalare $\alpha_i'' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i'' a_{ji}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Formirajmo dve formule rešenja

$$\Phi'(\Pi) = \Pi(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \Pi(\theta_i(x))$$

i

$$\Phi''(\Pi) = \Pi(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'' \Pi(\theta_i(x)),$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Oduzimanjem prethodnih funkcija dobijamo

$$\Phi'(\Pi) - \Phi''(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i' - \alpha_i''\right) \Pi(\theta_i(x)).$$

Uzimajući za Π ma koje rešenje f funkcionalne jednačine (1), na osnovu reproduktivnosti prethodnih formula rešenja, važi $\Phi'(f) - \Phi''(f) = f - f = 0$. Odatle, prema lemi 2.2.3. razmatrajući vektorski potprostor rešenja funkcionalne jednačine (1) zaključujemo $\alpha_i' = \alpha_i''$ za $i \in \mathbb{I}_n$. ■

Na kraju ovog paragrafa, pod pretpostavkom prethodne teoreme, za ma koji izbor Λ matrice kao $\{1\}$-inverza saglasnog sa pratećom grupom, formula opšteg reproduktivnog rešenja funkcionalne jednačine (1) data je u jedinstveno određenom *kanonskom obliku*:

$$f = \Phi(\Pi) \stackrel{def}{=} \Pi(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Pi(\theta_i(x)), \tag{22}$$

za jedinstveno određene skalare $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} a_{ij}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ i $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljnu funkciju. U trećem delu, ove celine, dajemo kanonske oblike homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima za dimenzije $n = 2, 3, 4$.

[19] uz korišćenje leme 1.1.2. i formula (18) i (19) paragrafa 1.1.

2.3. Metod minimalnog polinoma

Navodimo, bez dokaza, tvrđenja navedena u 1.3. koja se odnose na metod minimalnog polinoma u slučaju homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Teorema 2.3.1. *Za funkcionalnu jednačinu* (1) *neka matrica* $A = [a_{q_{ij}}]$ *ispunjava uslov*:

$$A^m + \lambda_{m-1}A^{m-1} + \ldots + \lambda_1 A = 0, \tag{23}$$

za određene koeficijente $\lambda_{m-1}, \ldots, \lambda_1 \in C$ $(\lambda_1 \neq 0)$ *i prirodan broj* $m > 1$. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1) *dato je matričnom formulom*:

$$\begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1}(A^{m-1} + \lambda_{m-1}A^{m-2} + \ldots + \lambda_1 I) \cdot \begin{bmatrix} \Pi(\theta_1(x)) \\ \Pi(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ \Pi(\theta_n(x)) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ *proizvoljna funkcija.*

Teorema 2.3.2. *Za funkcionalnu jednačinu* (1) *neka matrica* $A = [a_{q_{ij}}]$ *ispunjava uslov* (23). *Neka je* $A^{\#}$ *grupni inverz matrice* A. *Opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine* (1) *dato je formulom*:

$$\begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \Big(I - A^{\#}A\Big) \cdot \begin{bmatrix} \Pi(\theta_1(x)) \\ \Pi(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ \Pi(\theta_n(x)) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ *proizvoljna funkcija. Pri tom su za* $\Pi \in \mathcal{F}$ *desne strane formula opšteg rešenja* (24) *i* (25) *jednake u svakoj tački* $x \in S$.

2.4. Metod eliminacionog polinoma

P. Lancanster [PL] i J. Kečkić [JK5], [JK6] razmatrali su primenu tzv. *metode eliminacionog polinoma* na rešavanje nekih linearnih matričnih jednačina[20].

[20] S. Prešić [SP4] dao je, upotrebom tenzorskog proizvoda matrica, rešenje šire klase matričnih jednačina od klase koje su razmatrali P. Lancanster i J. Kečkić

J. KEČKIĆ u radu [JK5] primenio je metod eliminacionog polinoma na rešavanje homogene funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficjentima. Potpunosti radi izložićemo, bez navođenja dokaza, osnovne rezultate u vezi sa metodom eliminacionog polinoma.

Na skupu $\mathcal{F}$ definišimo funkciju $F = F(f) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ na sledeći način:

$$F(f)(x) = a_1 f(\theta_1(x)) + \ldots + a_n f(\theta_n(x)). \tag{26}$$

Tada funkciju $F^2(f) = F(F(f))$ možemo odrediti na sledeći način:

$$\begin{aligned} F\big(F(f)\big)(x) &= a_1 F\big(f(\theta_1(x))\big) + \ldots + a_n F\big(f(\theta_n(x))\big) \\ &= a_1\Big(a_1 f(\theta_1 \circ \theta_1(x)) + \ldots + a_n f(\theta_n \circ \theta_1(x))\Big) + \\ &\quad\vdots \\ &\quad + a_n\Big(a_1 f(\theta_1 \circ \theta_n(x)) + \ldots + a_n f(\theta_n \circ \theta_n(x))\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} a_i f(\theta_i \circ \theta_j(x)) = \sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_2} a_{i_1} f(\theta_{p_{i_1 i_2}}(x)) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} b_j^{(2)} f(\theta_j(x)), \end{aligned}$$

za odgovarajuće koeficijente $b_j^{(2)} \in C$ $(j \in \mathbb{I}_n)$. U opštem slučaju, za ma koji prirodan broj k, funkcija $F^k(f) = F(F^{k-1}(f))$ može se prikazati u obliku jednakosti:

$$F^k(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} b_j^{(k)} f(\theta_j(x)), \tag{$\mathfrak{f}_k$}$$

za odgovarajuće koeficijente $b_j^{(k)} \in C$ $(j \in \mathbb{I}_n)$. Primetimo da postoji prirodan broj $p \leq n$ takav da se iz spiska jednakosti $(\mathfrak{f}_1)$, ..., $(\mathfrak{f}_p)$ eliminacijom $f(\theta_i(x))$ $(i \in \mathbb{I}_n)$ dobija normalizovan polinom:

$$F^p + c_{p-1}F^{p-1} + \ldots + c_1 F + c_0 I = 0, \tag{27}$$

za određene koeficijente $c_0, c_1, \ldots, c_{p-1} \in C$. Pri tome je $I = I(x) = x$ identičko preslikavanje. Prethodno određen polinom nazivamo *eliminacioni polinom* homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima (1). Može se pokazati da ako je $c_0 \neq 0$, tada je opšte rešenje trivijalno $f(x) = 0$. Dalje, u analogiji sa teoremom 2.3.1., J. KEČKIĆ je dao tvrđenje na osnovu koga se primenjuje metod eliminacionog polinoma.

Teorema 2.4.1. *Neka za funkcionalnu jednačinu* (1) *funkcija* F *definisana sa jednakošću* (26) *ispunjava uslov*:

$$F^p + c_{p-1}F^{p-1} + \ldots + c_1 F = 0, \tag{28}$$

za određene koeficijente $c_{p-1}, \ldots, c_1 \in C$ $(c_1 \neq 0)$ *i prirodan broj* $p > 1$. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1) *je dato formulom*:

$$f(x) = \frac{1}{c_1}\Big(F^{p-1}(\Pi(x)) + c_{p-1}F^{p-2}(\Pi(x)) + \ldots + c_1\Pi(x)\Big) \tag{29}$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ *proizvoljna funkcija.*

S. NIKČEVIĆ je u tezi [SN1] i u radu [SN3] razmatrala vezu metoda minimalnog i eliminacionog polinoma. Pokazano je da pod uslovima leme 2.2.3. navedene dve metode daju jednake formule opšteg rešenja. Važi naredno tvrđenje.

Teorema 2.4.2. *Ako postoji tačka* $x_0 \in S$*, takva da za svako* $i \in \mathbb{I}_n \backslash \{1\}$ *važi* $\theta_i(x_0) \neq x_0$*, tada minimalni i eliminacioni funkcionalne jednačine* (1) *međusobno se podudaraju. Za* $\Pi \in \mathcal{F}$ *desne strane formula opšteg rešenja date u teoremama* 2.3.1 *i* 2.4.1 *jednake su u svakoj tački* $x \in S$.

Primetimo da je uslov jednakosti formula opšteg rešenja isti kao i u teoremi 2.2.6. kojom se utvrđuje jednakost formula opšteg rešenja PREŠIĆeve matrične metode i PREŠIĆeve Λ–matrične metode. Pri tome PREŠIĆeve matrične metode su opštije jer uvek daju rešenje, dok metode minimalnog, odnosno eliminacionog metoda su upotrebljive samo za matrice indeksa jednakog 1. S. NIKČEVIĆ u tezi [SN1] i radu [SN1] pokazala je da ako je grupa $\mathbb{G}$, homogene grupne funkcionalne jednačine (1) sa konstantnim koeficijentima, komutativna u samom redosledu primene zamena $x \mapsto \theta_1(x), \ldots, x \mapsto \theta_n(x)$ moguće je uneti izmene tako da na taj način formirana matrica $\widehat{A}$ jeste indeksa $Ind(\widehat{A}) \leq 1$. Međutim, u opštem slučaju, tako formirana matrica $\widehat{A}$ nije saglasna sa grupom $\mathbb{G}$. Odatle možemo zaključiti da su *polinomske metode suštinski uže od* PREŠIĆ*evih matričnih metoda*[21] za rešavanje homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

3. Partikularni slučajevi grupnih funkcionalnih jednačina (n = 2, 3, 4)

Prema PREŠIĆevom Λ-matričnom metodu možemo govoriti o kanonskim obliku opšteg reproduktivnog rešenja homogenih grupnih funkcionalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Razmotrićemo slučajeve homogene funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima za dimenzije $n = 2, 3, 4$. U navedenim slučajevima sve grupe su ciklične, sem u slučaju $n = 4$ kada se pored ciklične javlja i KLEINova diedarska grupa. Dajemo kanonske oblike opštih reproduktivnih rešenja jednačina koji se javljaju za posmatrane grupne funkcionalne jednačine. Kao *doprinos* dajemo kanonske oblike za KLEINovu funkcionalnu jednačinu. Navedeno ostvarujemo primenom PREŠIĆevog Λ-matričnog metoda.

[21] STANDARDNE MATRIČNE METODE I Λ-MATRIČNE METODE OPISANE U 2.1. I 2.2.

3.1. Ciklične grupne funkcionalne jednačine

Teorema 3.1.1. *Homogena grupna funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima drugog reda:*

$$a_0 f(x_1,x_2) + a_1 f(x_2,x_1) = 0, \tag{1}$$

po nepoznatoj funkciji $f = f(x,y) : S^2 \longrightarrow C$, *gde skup* S *ima bar dva različita elementa, u zavisnosti od koeficijenata* $a_{0,1} \in C$, *ima opšte reproduktivno rešenje dato sa formulama:*

1^0. *Ako važi uslov* $a_0 = a_1 = 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1,x_2) = \Pi(x_1,x_2). \tag{2}$$

2^0. *Ako važi uslov* $a_0 = -a_1 \neq 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2) + \Pi(x_2,x_1)). \tag{3}$$

3^0. *Ako važi uslov* $a_0 = a_1 \neq 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2) - \Pi(x_2,x_1)). \tag{4}$$

4^0. *Ako važi uslov* $a_0^2 \neq a_1^2$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1,x_2) = 0. \tag{5}$$

U prethodnom formulama $(2)-(5)$ *sa* $\Pi : S^2 \longrightarrow C$ *označena je proizvoljna funkcija.*

Dokaz. Za $X = (x_1,x_2)$ uvedimo bijekcije $i(X) = (x_1,x_2)$ i $\alpha(X) = (x_2,x_1)$. Skup $G = \{i,\alpha\}$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ obrazuje cikličnu grupu $\mathbb{G}$ datu tablicom:

$$\begin{array}{c|cc} \circ & i & \alpha \\ \hline i & i & \alpha \\ \alpha & \alpha & i \end{array}. \tag{6}$$

Označimo $A = f(X)$ i $B = f(\alpha X)$, tada funkcionalna jednačina (1) prelazi u jednačinu $\mathcal{J}_1 = a_0A + a_1B = 0$. Zamenama $X \mapsto i(X)$ i $X \mapsto \alpha(X)$ iz prethodne jednačine dobijamo sistem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_1 = a_0A + a_1B = 0, \\ \mathcal{J}_2 = a_0B + a_1A = 0, \end{array} \right\} \tag{7}$$

po nepoznatim A i B. Rešimo sistem (7). Rešenja tražimo u obliku formule:

$$A = \varphi_1(A,B) = A + \lambda\mathcal{J}_1 + \mu\mathcal{J}_2. \tag{8}$$

Ako u jednačini (8) uvedemo zamenu $X \mapsto \alpha(X)$, tada dobijamo jednačinu:

$$B = \varphi_2(A, B) = B + \lambda\mathcal{J}_2 + \mu\mathcal{J}_1. \tag{9}$$

Zamenimo izraze za A i B iz prethodne dve jednačine u sistem (7). Grupišući faktore uz A i B, dobijamo Λ-sistem po λ i μ:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_0^2 + a_1^2)\lambda + 2a_0a_1\mu = -a_0, \\ 2a_0a_1\lambda + (a_0^2 + a_1^2)\mu = -a_1. \end{array} \right\} \tag{10}$$

Matrica sistema (7) data je sa:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{array} \right]. \tag{11}$$

Matrica Λ-sistema (10) data je sa:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} a_0^2 + a_1^2 & 2a_0a_1 \\ 2a_0a_1 & a_0^2 + a_1^2 \end{array} \right]. \tag{12}$$

Λ-sistem (10), saglasno teoremi 2.2.2., dobija se iz prve dve jednačine odgovarajućeg tenzorskog sistema: $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}^T)\vec{\Lambda} = -\vec{\mathbf{A}}$. Determinanta sistema (10) je $|\mathbf{B}| = (a_0^2 - a_1^2)^2$. Razlikujemo slučajeve:

1^0. Ako važi $a_0 = a_1 = 0$, tada $\lambda, \mu \in C$ jesu proizvoljni elementi polja. Tada važi: $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 0$. Otuda je formula (8) data u obliku: $A = A + \lambda\mathcal{J}_1 + \mu\mathcal{J}_2 = A$, čime dobijamo opšte reproduktivno rešenje:

$$f(x_1, x_2) = \Pi(x_1, x_2). \tag{13}$$

2^2. Ako važi $a_0 = -a_1 \neq 0$, tada nalazimo vezu između $\lambda, \mu \in C$ u sledećem obliku: $\lambda - \mu = -\frac{1}{2a_0}$, odatle je $\lambda = t - \frac{1}{2a_0}$ i $\mu = t$, za $t \in C$. Otuda je formula (8) data u obliku: $A = A + (t - \frac{1}{2a_9})(a_0A - a_0B) + t(a_0B - a_0A) = A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}$, čime dobijamo opšte reproduktivno rešenje:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\Pi(x_1, x_2) + \Pi(x_2, x_1)}{1}. \tag{14}$$

3^0. Ako važi $a_0 = a_1 \neq 0$, tada nalazimo vezu između $\lambda, \mu \in C$ u sledećem obliku: $\lambda + \mu = -\frac{1}{2a_0}$, odakle je $\lambda = t - \frac{1}{2a_0}$ i $\mu = -t$, za $t \in C$. Otuda je formula (8) data u obliku: $A = A + (t - \frac{1}{2a_0})(a_0A + a_0B) - t(a_0B + a_0A) = A - \frac{B+A}{2} = \frac{A-B}{2}$, čime dobijamo opšte reproduktivno rešenje:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\Pi(x_1, x_2) - \Pi(x_2, x_1)}{2}. \tag{15}$$

4^0. Ako važi $a_0^2 \neq a_1^2$, tada nalazimo vrednosti: $\lambda = -\frac{a_0}{a_0^2 - a_1^2}$ i $\mu = \frac{a_1}{a_0^2 - a_1^2}$. Otuda je formula (8) data u obliku: $A = A - \frac{a_0}{a_0^2 - a_1^2} \cdot (a_0A + a_1B) + \frac{a_1}{a_0^2 - a_1^2} \cdot (a_0B + a_1A) = 0$, čime je opšte reproduktivno rešenje trivijalno:

$$f(x_1, x_2) = 0. \tag{16}$$

Sveukupno dokazano je tvrđenje. ■

Primenom Prešićevog Λ-matričnog metoda kanonske jednačine za dimenzije $n = 3, 4$ izvode se analogno sa prethodno razmotrenim slučajem za dimenziju $n = 2$. Navodimo, bez dokaza, odgovarajuća dva tvrđenja data u disertaciji [BZ].

Teorema 3.1.2. *Homogena grupna funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima trećeg reda:*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3) + a_1 f(x_2, x_3, x_1) + a_2 f(x_3, x_1, x_2) = 0, \tag{17}$$

po nepoznatoj funkciji $f = f(x, y, z) : S^3 \longrightarrow C$, *gde skup* S *ima bar dva različita elementa, u zavisnosti od koeficijenata* $a_{0,1,2} \in C$, *ima opšte reproduktivno rešenje dato sa formulama:*

1^0. *Ako važi uslov* $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Pi(x_1, x_2, x_3). \tag{18}$$

2^0. *Ako važi uslov* $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(\Pi(x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_2, x_3, x_1) + \Pi(x_3, x_1, x_2)). \tag{19}$$

3^0. *Ako važi uslov* $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(2\Pi(x_1, x_2, x_3) - \Pi(x_2, x_3, x_1) - \Pi(x_3, x_1, x_2)). \tag{20}$$

4^0. *Ako važi uslov* $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{21}$$

U prethodnom formulama (17) − (21) *sa* $\Pi : S^3 \longrightarrow C$ *označena je proizvoljna funkcija.*

Teorema 3.1.3. *Homogena grupna funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima četvrtog reda:*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_1) + a_2 f(x_3, x_4, x_1, x_2) + a_3 f(x_4, x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{22}$$

po nepoznatoj funkciji $f = f(x, y, z, w) : S^4 \longrightarrow C$, *gde skup* S *ima bar dva različita elementa, u zavisnosti od koeficijenata* $a_{0,1,2,3} \in C$, *ima opšte reproduktivno rešenje dato sa formulama:*

1^0. *Ako važi uslov* $a_1 = -a_0, a_2 = a_0, a_3 = -a_0, a_0 \neq 0$ *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku:*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \tfrac{3}{4}\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \tfrac{1}{4}\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) \\ &- \tfrac{1}{4}\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) + \tfrac{1}{4}\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{23}$$

2^0. *Ako važi uslov* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$ *i* $a_1 + a_3 = -(a_0 + a_2) \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku*:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) + \tfrac{1}{4}\Pi(x_2,x_3,x_4,x_1) \\
&+ \tfrac{1}{4}\Pi(x_3,x_4,x_1,x_2) + \tfrac{1}{4}\Pi(x_4,x_1,x_2,x_3).
\end{aligned} \tag{24}
$$

3^0. *Ako važi uslov* $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku*:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{3}{4}\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) - \tfrac{1}{4}\Pi(x_2,x_3,x_4,x_1) \\
&- \tfrac{1}{4}\Pi(x_3,x_4,x_1,x_2) - \tfrac{1}{4}\Pi(x_4,x_1,x_2,x_3).
\end{aligned} \tag{25}
$$

4^0. *Ako važi uslov* $a_0 + a_2 = a_1 + a_3 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku*:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) - \tfrac{1}{4}\Pi(x_2,x_3,x_4,x_1) \\
&+ \tfrac{1}{4}\Pi(x_3,x_4,x_1,x_2) - \tfrac{1}{4}\Pi(x_4,x_1,x_2,x_3).
\end{aligned} \tag{26}
$$

5^0. *Ako važi uslov* $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku*:

$$
f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Pi(x_1,x_2,x_3,x_4). \tag{27}
$$

6^0. *Ako važi uslov* $a_0 + a_2 = 0$ *i* $a_1 + a_3 = 0$ *i* $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku*:

$$
f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \tfrac{1}{2}\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) + \tfrac{1}{2}\Pi(x_3,x_4,x_1,x_2). \tag{28}
$$

7^0. *Ako važi uslov* $(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2 \neq 0$ *i* $a_0 = a_2$ *i* $a_1 \neq a_3$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku*:

$$
f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \tfrac{1}{2}\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) - \tfrac{1}{2}\Pi(x_3,x_4,x_1,x_2). \tag{29}
$$

8^0. *Ako važi uslov* $(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato u obliku*:

$$
f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0. \tag{30}
$$

U prethodnom formulama (22) – (30) *sa* $\Pi : S^4 \longrightarrow C$ *označena je proizvoljna funkcija.*

3.2. Klein-ova grupna funkcionalna jednačina

Odredimo sve kanonske oblike opštih reproduktivnih rešenja za KLEINovu homogenu grupnu funkcionalnu jednačinu, sa konstantnim koeficijentima:

$$a_0 f(x_1,x_2,x_3,x_4)+a_1 f(x_2,x_1,x_4,x_3)+a_2 f(x_3,x_4,x_1,x_2)+a_3 f(x_4,x_3,x_2,x_1)=0, \tag{31}$$

po nepoznatoj funkciji $f = f(x,y,z,w) : S^4 \longrightarrow C$, u zavisnosti od koeficijenata $a_{0,1,2,3} \in C$. Za $X = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ uvedimo bijekcije $\theta_1(X) = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\theta_2(X) = (x_2,x_1,x_4,x_3)$, $\theta_3(X) = (x_3,x_4,x_1,x_2)$ i $\theta_4(X) = (x_4,x_3,x_2,x_1)$. Tada KLEINovu funkcionalnu jednačinu (31) zapisujemo u obliku:

$$a_0\cdot f(\theta_1(X)) + a_1\cdot f(\theta_2(X)) + a_2\cdot f(\theta_3(X)) + a_3\cdot f(\theta_4(X)) = 0, \tag{32}$$

Skup bijekcija $G = \{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\}$ u odnosu na kompoziciju ($\circ$) obrazuje KLEINovu grupu reda 4:

$$\begin{array}{c|cccc} \circ & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ \hline \theta_1 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_1 & \theta_4 & \theta_3 \\ \theta_3 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_4 & \theta_4 & \theta_3 & \theta_2 & \theta_1 \end{array}. \tag{33}$$

Pri tome je θ_1 neutral KLEINove grupe $\mathbb{G} = (G,\circ)$. Ako označimo $A = f(\theta_1(X))$, $B = f(\theta_2(X))$, $C = f(\theta_3(X))$ i $D = f(\theta_4(X))$, tada funkcionalna jednačina (32) zamenama: $X \mapsto \theta_1(X)$, $X \mapsto \theta_2(X)$, $X \mapsto \theta_3(X)$ i $X \mapsto \theta_4(X)$ prelazi u sistem:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{J}_1 = a_0A + a_1B + a_2C + a_3D = 0, \\ \mathcal{J}_2 = a_0B + a_1A + a_2D + a_3C = 0, \\ \mathcal{J}_3 = a_0C + a_1D + a_2A + a_3B = 0, \\ \mathcal{J}_4 = a_0D + a_1C + a_2B + a_3A = 0, \end{array}\right\} \tag{34}$$

po nepoznatim A, B, C i D. Matrica sistema (34) je data sa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Determinanta matrice $\mathbf{A}$ je data sa:

$$\begin{array}{rcl} \Delta = |\mathbf{A}| & = & (a_0+a_1+a_2+a_3)\cdot(a_0+a_1-a_2+a_3)\cdot \\ & & (a_0+a_3-a_1-a_2)\cdot(a_0+a_2-a_1-a_3). \end{array} \tag{36}$$

Rešenja sistema (34) tražimo u obliku formule:

$$A = A + \lambda_1\mathcal{J}_1 + \lambda_2\mathcal{J}_2 + \lambda_3\mathcal{J}_3 + \lambda_4\mathcal{J}_4. \tag{37}$$

Ako u jednačini (37) uvedemo redom zamene $X \mapsto \theta_2(X)$, $X \mapsto \theta_3(X)$ i $X \mapsto \theta_4(X)$ tada dobijamo jednačine:

$$B = B + \lambda_1 \mathcal{J}_2 + \lambda_2 \mathcal{J}_1 + \lambda_3 \mathcal{J}_4 + \lambda_4 \mathcal{J}_3, \tag{38}$$

$$C = C + \lambda_1 \mathcal{J}_3 + \lambda_2 \mathcal{J}_4 + \lambda_3 \mathcal{J}_1 + \lambda_4 \mathcal{J}_2, \tag{39}$$

$$D = D + \lambda_1 \mathcal{J}_4 + \lambda_2 \mathcal{J}_3 + \lambda_3 \mathcal{J}_2 + \lambda_4 \mathcal{J}_1. \tag{40}$$

Zamenimo izraze za A, B, C i D iz prethodne četri jednačine u sistem (34). Tada, grupišući faktore uz A, B, C i D, dobijamo Λ-sistem po λ_1, λ_2, λ_3 i λ_4:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)\lambda_1 + 2(a_0a_1+a_2a_3)\lambda_2 + 2(a_0a_2+a_1a_3)\lambda_3 + 2(a_0a_3+a_1a_2)\lambda_4 = -a_0, \\ 2(a_0a_1+a_2a_3)\lambda_1 + (a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)\lambda_2 + 2(a_0a_3+a_1a_2)\lambda_3 + 2(a_0a_2+a_1a_3)\lambda_4 = -a_1, \\ 2(a_0a_2+a_1a_3)\lambda_1 + 2(a_0a_3+a_1a_2)\lambda_2 + (a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)\lambda_3 + 2(a_0a_1+a_2a_3)\lambda_4 = -a_2, \\ 2(a_0a_3+a_1a_2)\lambda_1 + 2(a_0a_3+a_1a_2)\lambda_2 + 2(a_0a_1+a_2a_3)\lambda_3 + (a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)\lambda_4 = -a_3. \end{array} \right\} \tag{41}$$

Matrica Λ-sistema je data sa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2) & 2(a_0a_1+a_2a_3) & 2(a_0a_2+a_1a_3) & 2(a_0a_3+a_1a_2) \\ 2(a_0a_1+a_2a_3) & (a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2) & 2(a_0a_3+a_1a_2) & 2(a_0a_2+a_1a_3) \\ 2(a_0a_2+a_1a_3) & 2(a_0a_3+a_1a_2) & (a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2) & 2(a_0a_1+a_2a_3) \\ 2(a_0a_3+a_1a_2) & 2(a_0a_3+a_1a_2) & 2(a_0a_1+a_2a_3) & (a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2) \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Λ-sistem (41), saglasno teoremi 2.2.2., dobija se iz prve četiri jednačine tenzorskog sistema: $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^T)\vec{\Lambda} = -\vec{\mathbf{A}}$. Determinanta sistema (41) je $|\mathbf{B}| = \Delta^2$.

Na osnovu prethodnog razmatranja kao *doprinos* u mogućnosti smo da dokažemo naredno tvrđenje.

Teorema 3.2.1. Klein*ova funkcionalna jednačina* (31) *po nepoznatoj funkciji* $f = f(x,y,z,w) : S^4 \longrightarrow C$*, gde skup* S *ima bar dva različita elementa, u zavisnosti od koeficijenata* $a_{0,1,2,3} \in C$*, ima opšte reproduktivno rešenje u jednim od narednih oblika* (43) – (58)*, pri čemu razlikujemo slučajeve*:

1^0. *Ako važi* $\Delta \neq 0$*, tada je opšte reproduktivno rešenje trivijalno*:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0. \tag{43}$$

2^0. *Ako važi* $a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$ *i* a_1+a_2, a_2+a_3, $a_3+a_1 \neq 0$*, tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) + \Pi(x_1,x_2,x_4,x_3) + \\ &\quad \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2) + \Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)). \end{aligned} \tag{44}$$

3^0. *Ako važi* $a_0 = -a_1 + a_2 + a_3$ *i* $-a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 - a_1 \neq 0$*, tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) + \Pi(x_1,x_2,x_4,x_3) - \\ &\quad \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2) - \Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)). \end{aligned} \tag{45}$$

4^0. *Ako važi* $a_0 = a_1+a_2-a_3$ *i* a_1+a_2, a_2-a_3, $-a_3+a_1 \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) - \Pi(x_1,x_2,x_4,x_3) - \\ &\quad \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2) + \Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)). \end{aligned} \tag{46}$$

5^0. *Ako važi* $a_0 = a_1-a_2+a_3$ *i* a_1-a_2, $-a_2+a_3$, $a_3+a_1 \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) - \Pi(x_1,x_2,x_4,x_3) + \\ &\quad \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2) - \Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)). \end{aligned} \tag{47}$$

6^0. *Ako važi* $a_0 = -a_3$, $a_1 = -a_2$ *i* $|a_1| \neq |a_3|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) + \Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)). \tag{48}$$

7^0. *Ako važi* $a_0 = -a_1$, $a_3 = -a_2$ *i* $|a_1| \neq |a_2|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) + \Pi(x_2,x_1,x_4,x_3)). \tag{49}$$

8^0. *Ako važi* $a_0 = -a_2$, $a_3 = -a_1$ *i* $|a_1| \neq |a_2|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) + \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2)). \tag{50}$$

9^0. *Ako važi* $a_0 = a_2$, $a_3 = a_1$ *i* $|a_1| \neq |a_2|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) - \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2)). \tag{51}$$

10^0. *Ako važi* $a_0 = a_3$, $a_1 = a_2$ *i* $|a_2| \neq |a_3|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) - \Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)). \tag{52}$$

11^0. *Ako važi* $a_0 = a_1$, $a_3 = a_2$ *i* $|a_1| \neq |a_2|$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) - \Pi(x_2,x_1,x_4,x_3)). \tag{53}$$

12^0. *Ako važi* $a_0 = a_1 = -a_2 = -a_3$ *i* $|a_3| \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}(3\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) - \Pi(x_1,x_2,x_4,x_3) + \\ &\quad \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2) + \Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)). \end{aligned} \tag{54}$$

13^0. *Ako važi* $a_0 = -a_1 = a_2 = -a_3$ *i* $|a_3| \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \tfrac{1}{4}(3\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4) + \Pi(x_1,x_2,x_4,x_3) - \\ &\quad \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2) + \Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)). \end{aligned} \tag{55}$$

14^0. *Ako važi* $a_0 = -a_1 = -a_2 = a_3$ *i* $|a_3| \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) \;=\; & \tfrac{1}{4}(3\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)+\Pi(x_1,x_2,x_4,x_3)+ \\
& \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2)-\Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)).
\end{aligned} \tag{56}
$$

15^0. *Ako važi* $a_0 = a_1 = a_2 = a_3$ *i* $|a_3| \neq 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) \;=\; & \tfrac{1}{4}(3\Pi(x_1,x_2,x_3,x_4)-\Pi(x_1,x_2,x_4,x_3)- \\
& \Pi(x_3,x_4,x_1,x_2)-\Pi(x_4,x_3,x_2,x_1)).
\end{aligned} \tag{57}
$$

16^0. *Ako važi* $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, *tada je opšte reproduktivno rešenje dato sa*:

$$
f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Pi(x_1,x_2,x_3,x_4). \tag{58}
$$

U prethodnim formulama (43) − (58) *sa* $\Pi : S^4 \longrightarrow \mathbb{C}$ *označena je proizvoljna funkcija.*

Dokaz. Ako je $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$ tada homogeni sistem (34) ima samo trivijalna rešenja i važi formula (43) koja se javlja u slučaju 1^0. Dalje, pretpostavimo da je $\boldsymbol{\Delta = 0}$. Prema formuli (36) mogući su sledeći slučajevi:

(i) $\boldsymbol{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0.}$ Pretpostavimo da je $a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$. Rešavajući odgovarajući sistem (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= t, \\
\lambda_2 &= t - \tfrac{2a_1+a_2+a_3}{4(a_1+a_2)(a_1+a_3)}, \\
\lambda_3 &= t - \tfrac{a_1+2a_2+a_3}{4(a_1+a_2)(a_2+a_3)}, \\
\lambda_4 &= t - \tfrac{a_1+a_2+2a_3}{4(a_1+a_3)(a_2+a_3)},
\end{aligned} \tag{59}
$$

pod dodatnim uslovom: $a_1 + a_2 \neq 0$ i $a_1 + a_3 \neq 0$ i $a_2 + a_3 \neq 0$ $(t \in \mathbb{C})$. Tako dolazimo do slučaja 2^0. Iz (37) i (59) nalazimo:

$$
A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(A + B + C + D).
$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (44). Komplementaran slučaj prethodnom je $a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$ i ($a_1 + a_2 = 0$ ili $a_1 + a_3 = 0$ ili $a_2 + a_3 = 0$), odnosno ($a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_1 + a_2 = 0$) ili ($a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_1 + a_3 = 0$) ili ($a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_2 + a_3 = 0$). Samim tim imamo mogućnosti:

a) ($a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_1 + a_2 = 0$), tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_3, a_1, -a_1, a_3)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= t_1, \\
\lambda_2 &= t_2, \\
\lambda_3 &= t_2 + \tfrac{a_1}{2(a_1^2-a_3^2)}, \\
\lambda_4 &= t_1 + \tfrac{a_3}{2(a_1^2-a_3^2)},
\end{aligned} \tag{60}
$$

pod dodatnim uslovom: $|a_1| \neq |a_3|$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{C})$. Tako dolazimo do slučaja 6^0. Iz (37) i (60) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{2}(A + D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (48). Ako je $a_1 = -a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, -a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$. Iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\begin{array}{rcl}\lambda_1 &=& t_1,\\ \lambda_2 &=& t_2,\\ \lambda_3 &=& t_3,\\ \lambda_4 &=& t_1 + t_2 - t_3 + \frac{1}{4a_1},\end{array} \tag{61}$$

za $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$. Tako dolazimo do slučaja 12^0. Iz (37) i (61) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(3A - B + C + D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (54). Ako je $a_1 = a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, -a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\begin{array}{rcl}\lambda_1 &=& t_1,\\ \lambda_2 &=& t_2,\\ \lambda_3 &=& t_3,\\ \lambda_4 &=& t_1 - t_2 + t_3 - \frac{1}{4a_1},\end{array} \tag{62}$$

za $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$. Tako dolazimo do slučaja 13^0. Iz (37) i (62) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(3A + B - C + D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (55). Ovim je kompletiran razmatrani slučaj.

b) $(a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_1 + a_3 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_2, a_1, a_2, -a_1)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\begin{array}{rcl}\lambda_1 &=& t_1,\\ \lambda_2 &=& t_2,\\ \lambda_3 &=& t_1 + \frac{a_2}{2(a_1^2 - a_2^2)},\\ \lambda_4 &=& t_2 + \frac{a_1}{2(a_1^2 - a_2^2)},\end{array} \tag{63}$$

pod dodatnim uslovom: $|a_1| \neq |a_2|$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{C})$. Tako dolazimo do slučaja 8^0. Iz (37) i (63) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{2}(A + C).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (50). Ako je $a_1 = -a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, -a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ tada odgovarajućeg sistema (41) ima rešenje u obliku formule (61). Tako dolazimo do slučaja 12^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (54). Ako je $a_1 = a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\begin{array}{lrcl} (64) & \lambda_1 & = & t_1, \\ & \lambda_2 & = & t_2, \\ & \lambda_3 & = & t_3, \\ & \lambda_4 & = & -t_1 + t_2 + t_3 + \frac{1}{4a_1}, \end{array}$$

za $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$. Tako dolazimo do slučaja 14^0. Iz (37) i (64) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(3A + B + C - D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (55). Ovim je kompletiran razmatrani slučaj.

<u>c)</u> ($a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_2 + a_3 = 0$), tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_2, -a_2)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\begin{array}{lrcl} (65) & \lambda_1 & = & t_1, \\ & \lambda_2 & = & t_1 - \frac{a_1}{2(a_1^2 - a_2^2)}, \\ & \lambda_2 & = & t_2, \\ & \lambda_4 & = & t_2 - \frac{a_2}{2(a_1^2 - a_2^2)}, \end{array}$$

pod dodatnim uslovom: $|a_1| \neq |a_2|$ ($t_1, t_2 \in \mathbb{C}$). Tako dolazimo do slučaja 7^0. Iz (37) i (65) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{2}(A + B).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (49). Ako je $a_1 = -a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, -a_1, a_1)$ ($a_1 \neq 0$) odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (62). Tako dolazimo do slučaja 13^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55). Ako je $a_1 = a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ ($a_1 \neq 0$) tada odgovarajućeg sistema (41) ima rešenje u obliku formule (64). Tako dolazimo do slučaja 14^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55). Ovim je kompletiran razmatrani slučaj.

U slučaju da je $a_0 = 0 \iff a_1 + a_2 + a_3 = 0$ razmatranje se vrši analogno sa prethodnim slučajevima $a) - c)$. Uvedimo zamenu $a_1 = -a_2 - a_3$. Na taj način važi: $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, a_1, a_2, a_3) = (0, -a_2 - a_3, a_2, a_3)$. Odgovarajući sistem (41) ima rešenja u obliku:

$$\begin{array}{lrcl} (66) & \lambda_1 & = & t, \\ & \lambda_2 & = & t + \frac{a_2 + a_3}{4a_2 a_3}, \\ & \lambda_3 & = & t + \frac{a_2}{4a_3(a_2 + a_3)}, \\ & \lambda_4 & = & t + \frac{a_3}{4a_2(a_2 + a_3)}, \end{array}$$

pod dodatnim uslovom: $a_2 \neq 0$ i $a_3 \neq 0$ i $a_2 + a_3 \neq 0$ ($t \in \mathbb{C}$). Tako dolazimo do slučaja 2^0. Komplemetarni uslov: $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, -a_3, 0, a_3)$ ($a_2 = 0$) predstavlja slučaj 8^0, odnosno $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, -a_2, a_2, 0)$ ($a_3 = 0$) predstavlja slučaj 6^0, odnosno $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, a_2, -a_2)$ ($a_2 + a_3 = 0$) predstavlja slučaj 7^0. Posebno $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ predstavlja slučaj 16^0. Samim tim, tako dobijeni slučajevi dovode do opštih reproduktivnih rešenja iz navedenog spiska $1^0. - 16^0$.

<u>***(ii)***</u> <u>$\boldsymbol{a_0 + a_1 - a_2 - a_3 = 0}$.</u> Pretpostavimo da je $a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$. Rešavajući odgovarajući sistem (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$\begin{array}{lrcl} (67) & \lambda_1 & = & t, \\ & \lambda_2 & = & t + \frac{-2a_1 + a_2 + a_3}{4(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \\ & \lambda_3 & = & -t - \frac{a_1 - 2a_2 - a_3}{4(a_1 - a_2)(a_2 + a_3)}, \\ & \lambda_4 & = & -t - \frac{a_1 - a_2 - 2a_3}{4(a_1 - a_3)(a_2 + a_3)}, \end{array}$$

pod dodatnim uslovom: $a_1 - a_2 \neq 0$ i $a_1 - a_3 \neq 0$ i $a_2 + a_3 \neq 0$ $(t \in \mathbb{C})$. Tako dolazimo do slučaja 3^0. Iz (37) i (59) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(A + B - C - D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (45). Komplementaran slučaj prethodnom je $a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $(a_1 - a_2 = 0$ ili $a_1 - a_3 = 0$ ili $a_2 + a_3 = 0)$, odnosno $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_2 = 0)$ ili $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_3 = 0)$ ili $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_2 + a_3 = 0)$. Samim tim imamo mogućnosti:

a) $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_2 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_3, a_1, a_1, a_3)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$(68)\qquad \begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& t_1, \\ \lambda_2 &=& t_2, \\ \lambda_3 &=& t_2 + \frac{a_1}{2(a_1^2 - a_3^2)}, \\ \lambda_4 &=& t_1 + \frac{a_3}{2(a_1^2 - a_3^2)}, \end{array}$$

pod dodatnim uslovom: $|a_1| \neq |a_3|$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{C})$. Tako dolazimo do slučaja 10^0. Iz (37) i (68) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{2}(A - D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (52). Ako je $a_1 = -a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (64). Tako dolazimo do slučaja 14^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55). Ako je $a_1 = a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$(69)\qquad \begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& t_1, \\ \lambda_2 &=& t_2, \\ \lambda_3 &=& t_3, \\ \lambda_4 &=& -t_1 - t_2 - t_3 - \frac{1}{4a_1}, \end{array}$$

za $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$. Tako dolazimo do slučaja 15^0. Iz (37) i (69) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(3A - B - C - D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (56). Ovim je kompletiran razmatrani slučaj.

b) $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_3 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_1, a_2, a_1)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$(70)\qquad \begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& t_1, \\ \lambda_2 &=& t_2, \\ \lambda_3 &=& -t_1 + \frac{a_2}{2(a_1^2 - a_2^2)}, \\ \lambda_4 &=& -t_2 - \frac{a_1}{2(a_1^2 - a_2^2)}, \end{array}$$

pod dodatnim uslovom: $|a_1| \neq |a_2|$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{C})$. Tako dolazimo do slučaja 9^0. Iz (37) i (70) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{2}(A - C).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (51). Ako je $a_2 = a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (69). Tako dolazimo do slučaja 15^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (56). Ako je $a_2 = -a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (64). Tako dolazimo do slučaja 14^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55). Ovim je kompletiran razmatrani slučaj.

<u>*c)*</u> $(a_0 = -a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_2 + a_3 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_2, -a_2)$ tada odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (65). Tako dolazimo do slučaja 7^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (49). Ovim je kompletiran razmatrani slučaj.

U slučaju da je $a_0 = 0$ razmatranje se vrši analogno sa prethodnim slučajevima $a) - b)$. Tako dobijeni slučajevi se intepretiraju sa odgovarajućim slučajevima iz navedenog spiska $1^0. - 16^0$.

<u>***(iii)***</u> <u>$\boldsymbol{a_0 - a_1 - a_2 + a_3 = 0}$.</u> Pretpostavimo da je $a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$. Rešavajući odgovarajući sistem (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda_1 & = & t, \\
\lambda_2 & = & -t + \frac{2a_1+a_2-a_3}{4(a_1+a_2)(a_3-a_1)}, \\
\lambda_3 & = & -t + \frac{a_1+2a_2-a_3}{4(a_1+a_2)(a_3-a_2)}, \\
\lambda_4 & = & t + \frac{a_1+a_2-2a_3}{4(a_3-a_1)(a_3-a_2)},
\end{array} \tag{71}
$$

pod dodatnim uslovom: $a_1 + a_2 \neq 0$ i $a_3 - a_2 \neq 0$ i $a_3 - a_1 \neq 0$ $(t \in \mathbb{C})$. Tako dolazimo do slučaja 4^0. Iz (37) i (71) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(A - B - C + D).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (46). Komplementaran slučaj prethodnom je $a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $(a_1 + a_2 = 0$ ili $a_3 - a_2 = 0$ ili $a_3 - a_2 = 0)$, odnosno $(a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_1 + a_2 = 0)$ ili $(a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_3 - a_2 = 0)$ ili $(a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_3 - a_1 = 0)$. Samim tim imamo mogućnosti:

<u>*a)*</u> $(a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_1 + a_2 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_3, a_1, -a_1, a_3)$ i $|a_1| \neq |a_3|$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (60). Tako dolazimo do slučaja 6^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (48). Ako je $a_1 = -a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (69). Tako dolazimo do slučaja 15^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (56). Ako je $a_1 = a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (64). Tako dolazimo do slučaja 14^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55).

<u>*b)*</u> $(a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_3 - a_1 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_3, a_3)$ iz odgovarajućeg sistema (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda_1 & = & t_1, \\
\lambda_2 & = & t_1 + \frac{a_1}{2(a_2^2 - a_1^2)}, \\
\lambda_3 & = & t_2, \\
\lambda_4 & = & t_2 - \frac{a_2}{2(a_2^2 - a_1^2)},
\end{array} \tag{72}
$$

pod dodatnim uslovom: $|a_1| \neq |a_2|$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{C})$. Tako dolazimo do slučaja 10^0. Iz (37) i (72) nalazimo:

$$A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{2}(A - B).$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (53). Ako je $a_2 = a_1$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, -a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (61). Tako dolazimo do slučaja 12^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (54). Ako je $a_2 = -a_1$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (69). Tako dolazimo do slučaja 15^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (56).

U slučaju da je $a_0 = 0$ i $a_i \neq 0$ za neko $i = 1, 2, 3$, razmatranje se vrši analogno sa prethodnim slučajevima $a)-b)$. Tako dobijeni slučajevi se intepretiraju sa odgovarajućim slučajem iz navedenog spiska 1^0. – 16^0.

<u>**c)**</u> $(a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_3 - a_1 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_1, a_2, a_1)$ i $|a_1| \neq |a_2|$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (70). Tako dolazimo do slučaja 9^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (51). Ako je $a_1 = a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (69). Tako dolazimo do slučaja 15^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (56). Ako je $a_1 = -a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (64). Tako dolazimo do slučaja 14^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55).

U slučaju da je $a_0 = 0$ razmatranje se vrši analogno sa prethodnim slučajevima $a) - b)$. Tako dobijeni slučajevi se intepretiraju sa odgovarajućim slučajevima iz navedenog spiska 1^0. – 16^0.

<u>***(iv)***</u> <u>$\boldsymbol{a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0}$.</u> Pretpostavimo da je $a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$. Rešavajući odgovarajući sistem (41) dobijamo rešenje u obliku:

$$
(73) \qquad \begin{array}{rcl}
\lambda_1 & = & t, \\
\lambda_2 & = & -t + \frac{2a_1 - a_2 + a_3}{4(a_2 - a_1)(a_1 + a_3)}, \\
\lambda_3 & = & t + \frac{a_1 - 2a_2 + a_3}{4(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}, \\
\lambda_4 & = & -t - \frac{a_1 - a_2 + 2a_3}{4(a_1 + a_3)(a_3 - a_2)},
\end{array}
$$

pod dodatnim uslovom: $a_1 - a_2 \neq 0$ i $-a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_3 + a_1 \neq 0$ $(t \in \mathbb{C})$. Tako dolazimo do slučaja 4^0. Iz (37) i (73) nalazimo:

$$
A = A + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 J_4 = \ldots = \frac{1}{4}(A - B + C - D).
$$

Odatle nalazimo opšte reproduktivno rešenje u obliku formule (47). Komplementaran slučaj prethodnom je $a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$ i $(a_1 - a_2 = 0$ ili $-a_2 + a_3 = 0$ ili $a_3 + a_1 \neq 0)$, odnosno $(a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_2 = 0)$ ili $(a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$ i $-a_2 + a_3 = 0)$ ili $(a_0 = a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$ i $a_3 + a_1 = 0)$. Samim tim imamo mogućnosti:

<u>**a)**</u> $(a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_1 - a_2 = 0)$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_3, a_1, a_1, a_3)$ i $|a_1| \neq |a_3|$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (68). Tako dolazimo do slučaja 10^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (52). Ako je $a_1 = a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (69). Tako dolazimo do slučaja 15^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (56). Ako je $a_1 = -a_3$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (64). Tako dolazimo do slučaja 14^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55).

<u>***b)***</u> ($a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $-a_2 + a_3 = 0$), tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_2, a_2)$ i $|a_1| \neq |a_2|$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (72). Tako dolazimo do slučaja 11^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (53). Ako je $a_1 = a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, a_1, a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (69). Tako dolazimo do slučaja 15^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (56). Ako je $a_1 = -a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, -a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (61). Tako dolazimo do slučaja 12^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (54).

<u>***c)***</u> ($a_0 = a_1 + a_2 - a_3 \neq 0$ i $a_3 + a_1 = 0$), tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_2, a_1, a_2, -a_1)$ i $|a_1| \neq |a_2|$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (63). Tako dolazimo do slučaja 8^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (50). Ako je $a_1 = a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a_1, a_1, a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (64). Tako dolazimo do slučaja 14^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (55). Ako je $a_1 = -a_2$, tada za $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_1, -a_1, -a_1)$ $(a_1 \neq 0)$ odgovarajući sistem (41) ima rešenje u obliku formule (61). Tako dolazimo do slučaja 12^0. i opšte reproduktivno rešenje je dato u obliku formule (54).

U slučaju da je $a_0 = 0$ razmatranje se vrši analogno sa prethodnim slučajevima $a) - b)$. Tako dobijeni slučajevi se intepretiraju sa odgovarajućim slučajevima iz navedenog spiska $1^0. - 16^0$.

Ako se istovremeno javljaju dva od prethodna četiri uslova ***(i) — (iv)***, tada se javljaju sledeći slučajevi:

<u>***(i)*** $\wedge$ ***(ii)***</u>	Tada	$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, a_1, 0, -a_0 - a_1)$	dovodi do slučaja 2^0.
<u>***(i)*** $\wedge$ ***(iii)***</u>	Tada	$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, a_1, -a_1, -a_0)$	dovodi do slučaja 6^0.
<u>***(i)*** $\wedge$ ***(iv)***</u>	Tada	$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, a_1, -a_0, -a_1)$	dovodi do slučaja 8^0.
<u>***(ii)*** $\wedge$ ***(iii)***</u>	Tada	$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, 0, a_1, a_1 - a_0)$	dovodi do slučaja 4^0.
<u>***(ii)*** $\wedge$ ***(iv)***</u>	Tada	$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, a_1, a_2, a_2 - a_1)$	dovodi do slučaja 5^0.
<u>***(iii)*** $\wedge$ ***(iv)***</u>	Tada	$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, a_0, a_1, a_1)$	dovodi do slučaja 11^0.

U prethodnim slučajevima pretpostavljamo da: $|a_0|$, $|a_1|$ i $|a_2|$ nisu jednaki međusobno i nisu jednaki nuli. U suprotnom slučaju razmatranje se vrši analogno sa prethodnim slučajevima ***(i) — (iv)***. Tako dobijeni slučajevi se intepretiraju sa odgovarajućim slučajevima iz navedenog spiska $1^0. - 16^0$.

Ako se istovremeno javljaju tri od prethodna četiri uslova ***(i) — (iv)***, tada se javljaju sledeći slučajevi:

<u>***(i)*** $\wedge$ ***(ii)*** $\wedge$ ***(iii)***</u>	Tada	$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, 0, 0, -a_0)$	dovodi do slučaja 6^0.
<u>***(i)*** $\wedge$ ***(ii)*** $\wedge$ ***(iv)***</u>	Tada	$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, a_1, 0, -a_1)$	dovodi do slučaja 8^0.
<u>***(i)*** $\wedge$ ***(iii)*** $\wedge$ ***(iv)***</u>	Tada	$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, a_0, -a_0, -a_0)$	dovodi do slučaja 12^0.
<u>***(ii)*** $\wedge$ ***(iii)*** $\wedge$ ***(iv)***</u>	Tada	$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, a_2, a_2)$	dovodi do slučaja 11^0.

U prethodnim slučajevima pretpostavljamo da: $|a_0|$, $|a_1|$ i $|a_2|$ nisu jednaki medjusobno i nisu jednaki nuli. U suprotnom slučaju razmatranje se vrši analogno sa prethodnim slučajevima ***(i) — (iv)***. Tako dobijeni slučajevi intepretiraju se sa odgovarajućim slučajevima iz navedenog spiska $1^0. - 16^0$.

Ako se istovremeno javljaju sva četiri uslova <u>***(i)*** $\wedge$ ***(ii)*** $\wedge$ ***(iii)*** $\wedge$ ***(iv)***</u> tada $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 0)$ dovodi do slučaja 16^0. ■

Napomena. *U zborniku* [DM-PV2] *postavljen je problem* 9.4.9.*: Proveriti da li je sa formulom* $f(x,y,z,t) = F(x,y,z,t) + F(t,z,y,x)$, *gde je* $F : R^4 \longrightarrow R$ *proizvoljna funkcija, određeno opšte rešenje funkcionalne jednačine* $f(x,y,z,t) - f(t,z,y,x) = 0$. *Prema slučaju* 6^0.*, prethodne teoreme, odgovor je potvrdan, pri tom navedena formula opšteg rešenja može se „ureproduktiviti" do formule* (49).

3.3. Računarsko rešenje partikularnih slučajeva uz pomoć programa DERIVE

Razmatraćemo nalaženje opštih reproduktivnih rešenje parikularnih slučajeva homogene grupne funkcionalne jednačine, sa konstantnim koeficijentima, za dimenzije $n = 2, 3, 4$. Koristimo program `DERIVE` (DOS verzija 2.58) koji omogućava simbolički račun sa algebarskim izrazima. Program `DERIVE` je napisan na programskom jeziku LISP. Istaknimo neke razaloge za izbor programa `DERIVE`. Pored male veličine programa i jednostavne upotrebe [AH], program `DERIVE` primenjiv je na svim `PC`-kompatibilnim računarima. Uporedna analiza sa drugim simboličkim „rešavačima" data u radu [LB] pokazala je da `DERIVE` daje bolje rezultate od mnogih drugih programa po pitanju raznih primera linearnih i nelinearnih sistema.

Navodimo procedure i funkcije programa `DERIVE`-a koje koristimo u rešavanju razmatranog problema u paragrafima 3.1. i 3.2. Matrica X zadaje se[22] kao vektor čiji su elementi vektori-kolone. Funkcija $\texttt{ELEMENT}(X, i, j)$ određuje element u i-toj vrsti i j-toj koloni zadane matrice X. Dalje, za zadan konačan i moguć sistem linearnih jednačina $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots$, procedura:

$$\texttt{SOLVE}([u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ \ldots],\ [\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots]) \tag{74}$$

određuje sva rešenja sistema sa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. U slučaju nemogućeg linearnog sistema prethodna procedura ne daje rezultat. U nalaženju opštih reprduktivnih rešenja homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima Λ-sistemi koji se javljaju uvek su mogući. Ako se u rešenju javljaju parametri $t_1, t_2, \ldots$, tada se oni redom označavaju sa: $@1, @2, \ldots$. Kao rezultat procedure (74), za moguće sisteme, dobijamo vektor rešenja u obliku:

$$[\lambda_1 = \varphi_1(@1, @2, \ldots),\ \lambda_2 = \varphi_2(@1, @2, \ldots),\ \ldots]. \tag{75}$$

Na kraju, za jednakost $p = q$ funkcija $\texttt{RHS}(p = q)$ određuje desnu stranu jednakosti, tj. izraz q.

Navodimo računarska rešenja grupnih funkcionalnih jednačina redom za dimenzije $n = 2, 3, 4$.

[22] pored zadavanja putem `MTH`-programa (*.mth) u matricu moguće je zadati u `DERIVE`-u „ručno" putem `DERIVE`-editora (vrsta po vrsta)

$\underline{\boldsymbol{n=2.}}$ Definišimo matricu sistema **A** sa naredbom:

$$\texttt{M1}(a,b) := [[a,b],[b,a]] \tag{76_1}$$

i matricu Λ-sistema **B** sa naredbom:

$$\texttt{M2}(a,b) := [[a^2+b^2, 2*a*b],[2*a*b, a^2+b^2]]. \tag{76_2}$$

Λ-sistem određujemo u sledećem obliku:

$$\texttt{LS}(a,b) := \texttt{M2}(a,b)*[[p],[q]]+[[a],[b]] \tag{76_3}$$

gde su p i q nepoznati λ-parametri. Opšte rešenje homogene grupne funkcionalne jednačine (1) sa konstantnim koeficijentima $a_0 = a$ i $a_1 = b$, određujemo sa sledećom procedurom:

$$\texttt{C2}(a,b) := \texttt{RHS(ELEMENT(}[[x]]+\texttt{SOLVE(LS}(a,b),[p,q])*\texttt{M1}(a,b)*[[x],[y]],1,1)) \tag{76_4}$$

gde su sa x i y označene nepoznate vrednosti $f(\theta_1(X)) = f(x_1,x_2)$ i $f(\theta_2(X)) = f(x_2,x_1)$.

Za zadane vrednosti koeficijenata $a_0 = \alpha_1$ i $a_1 = \alpha_2$ vrednost funkcije $\texttt{C2}(\alpha_1,\alpha_2)$ računar određuje u obliku:

$$\beta_1 x + \beta_2 y. \tag{77}$$

Iz prethodnog izraza opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) određeno je u kanonskom obliku:

$$f(X) = \beta_1\Pi(\theta_1(X)) + \beta_2\Pi(\theta_2(X)). \tag{78}$$

$\underline{\boldsymbol{n=3.}}$ Analogno slučaju $n=2$, sa sledećim `DERIVE` programom nalazimo sva rešenja homogene ciklične grupne funkcionalne jednačine (17) sa konstantnim koeficijentima $a_0 = a$, $a_1 = b$ i $a_2 = c$:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\texttt{M1}(a,b,c) & := & [[a,b,c],[b,c,a],[c,a,b]] \\
\texttt{M2}(a,b,c) & := & [[a^2+b^2+c^2, a*b+b*c+c*a, a*b+b*c+c*a], \\
 & & [a*b+b*c+c*a, a^2+b^2+c^2, a*b+b*c+c*a], \\
 & & [a*b+b*c+c*a, a*b+b*c+c*a, a^2+b^2+c^2]] \\
\texttt{LS}(a,b,c) & := & \texttt{M2}(a,b,c)*[[p],[q],[r]]+[[a],[b],[c]] \\
\texttt{C3}(a,b,c) & := & \texttt{RHS(ELEMENT(}[[x]]+\texttt{SOLVE(LS}(a,b,c),[p,q,r]) \\
 & & *\texttt{M1}(a,b,c)*[[x],[y],[z]],1,1))
\end{array}\right\} \tag{79}$$

gde su sa x, y i z označene nepoznate vrednosti $f(\theta_1(X)) = f(x_1,x_2,x_3)$, $f(\theta_2(X)) = f(x_2,x_3,x_1)$ i $f(\theta_3(X)) = f(x_3,x_1,x_2)$.

Za zadane vrednosti koeficijenata $a_0 = \alpha_1$, $a_1 = \alpha_2$ i $a_2 = \alpha_3$ vrednost funkcije $\texttt{C3}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ program određuje u obliku:

$$\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z. \tag{80}$$

Iz prethodnog izraza opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (17) određeno je u kanonskom obliku:

$$f(X) = \beta_1\Pi(\theta_1(X)) + \beta_2\Pi(\theta_2(X)) + \beta_3\Pi(\theta_3(X)). \tag{81}$$

<u>**$n = 4.$**</u> **(*i*)** Analogno slučaju $n = 2$, sa sledećim DERIVE programom nalazimo sva rešenja homogene ciklične grupne funkcionalne jednačine (22) sa konstantnim koeficijentima $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = c$ i $a_3 = d$:

$$(82)\quad \left\{ \begin{array}{lcl} \mathtt{M1}(a,b,c,d) & := & [[a,b,c,d],[b,c,d,a],[c,d,a,b],[d,a,b,c]] \\ \mathtt{M2}(a,b,c,d) & := & [[a^2+b^2+c^2+d^2,(a+c)*(b+d),2*(a*c+b*d),(a+c)*(b+d)], \\ & & [(a+c)*(b+d),2*(a*c+b*d),(a+c)*(b+d),a^2+b^2+c^2+d^2], \\ & & [2*(a*c+b*d),(a+c)*(b+d),a^2+b^2+c^2+d^2,(a+c)*(b+d)], \\ & & [(a+c)*(b+d),a^2+b^2+c^2+d^2,(a+c)*(b+d),2*(a*c+b*d)]] \\ \mathtt{LS}(a,b,c,d) & := & \mathtt{M2}(a,b,c,d)*[[p],[q],[r],[s]]+[[a],[b],[c],[d]] \\ \mathtt{C4}(a,b,c,d) & := & \mathtt{RHS}(\mathtt{ELEMENT}([[x]]+\mathtt{SOLVE}(\mathtt{LS}(a,b,c,d),[p,q,r,s]) \\ & & *\mathtt{M1}(a,b,c,d)*[[x],[y],[z],[w]],1,1)) \end{array} \right\}$$

gde su sa x, y, z i w označene nepoznate vrednosti $f(\theta_1(X)) = f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $f(\theta_2(X)) = f(x_2,x_3,x_4,x_1)$, $f(\theta_3(X)) = f(x_3,x_4,x_1,x_2)$ i $f(\theta_4(X)) = f(x_4,x_1,x_2,x_3)$.

Za zadane vrednosti koeficijenata $a_0 = \alpha_1$, $a_1 = \alpha_2$, $a_2 = \alpha_3$ i $a_3 = \alpha_4$ vrednost funkcije $\mathtt{C4}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ program određuje u obliku:

$$(83)\qquad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 w.$$

Iz prethodnog izraza opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (22) određeno je u kanonskom obliku:

$$(84)\qquad f(X) = \beta_1 \Pi(\theta_1(X)) + \beta_2 \Pi(\theta_2(X)) + \beta_3 \Pi(\theta_3(X)) + \beta_4 \Pi(\theta_4(X)).$$

<u>**$n = 4.$**</u> **(*ii*)** Analogno slučaju $n = 2$, sa sledećim DERIVE programom nalazimo sva rešenja homogene Kleinove grupne funkcionalne jednačine (32) konstantnim koeficijentima $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = c$ i $a_3 = d$:

$$(85)\quad \left\{ \begin{array}{lcl} \mathtt{M1}(a,b,c,d) & := & [[a,b,c,d],[b,a,d,c],[c,d,a,b],[d,c,b,a]] \\ \mathtt{M2}(a,b,c,d) & := & [[a^2+b^2+c^2+d^2,2(a*b+c*d),2(a*c+b*d),2(a*d+b*c)], \\ & & [2(a*b+c*d),a^2+b^2+c^2+d^2,2(a*d+b*c),2(a*c+b*d)], \\ & & [2(a*c+b*d),2(a*d+b*c),a^2+b^2+c^2+d^2,2(a*b+c*d)], \\ & & [2(a*d+b*c),2(a*c+b*d),2(a*b+c*d),a^2+b^2+c^2+d^2]] \\ \mathtt{LS}(a,b,c,d) & := & \mathtt{M2}(a,b,c,d)*[[p],[q],[r],[s]]+[[a],[b],[c],[d]] \\ \mathtt{K4}(a,b,c,d) & := & \mathtt{RHS}(\mathtt{ELEMENT}([[x]]+\mathtt{SOLVE}(\mathtt{LS}(a,b,c,d),[p,q,r,s]) \\ & & *\mathtt{M1}(a,b,c,d)*[[x],[y],[z],[w]],1,1)) \end{array} \right\}$$

gde su sa x, y, z i w označene nepoznate vrednosti $f(\theta_1(X)) = f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $f(\theta_2(X)) = f(x_2,x_1,x_4,x_3)$, $f(\theta_3(X)) = f(x_3,x_4,x_1,x_2)$ i $f(\theta_4(X)) = f(x_4,x_3,x_2,x_1)$.

Za zadane vrednosti koeficijenata $a_0 = \alpha_1$, $a_1 = \alpha_2$, $a_2 = \alpha_3$ i $a_3 = \alpha_4$ vrednost funkcije $\mathtt{K4}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ program određuje u obliku:

$$(86)\qquad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 w.$$

Iz prethodnog izraza opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (32) određeno je u kanonskom obliku:

$$f(X) = \beta_1\Pi(\theta_1(X)) + \beta_2\Pi(\theta_2(X)) + \beta_3\Pi(\theta_3(X)) + \beta_4\Pi(\theta_4(X)). \tag{87}$$

Proizvoljno *n*. Neka je zadana homogena grupna funkcionalna jednačina dimenzije n sa pratećom grupom $\mathbb{G}$. Iz prateće grupe $\mathbb{G}$, reda n, neka je određena grupa q-permutacija $\mathbb{Q}$. Za zadani niz koeficijenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ q-permutacijama formiramo matricu sistema:

$$\mathtt{M1} = \mathtt{M1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) := [a_{q_{ij}}]_{n\times n}. \tag{88}$$

Neka je određen tenzorski proizvod:

$$\mathtt{T2} = \mathtt{T2}(a_1, a_2, \ldots, a_n) := (\mathtt{M1} \otimes \mathtt{M1}^T). \tag{89}$$

kao i odgovarajuće vektore-kolone:

$$\vec{\mathtt{M1}} := [[a_{q_{11}}], \ldots, [a_{q_{1n}}], \ldots\ldots, [a_{q_{nn}}]] \tag{90}$$

i

$$\vec{\lambda} := [[\lambda_{q_{11}}], \ldots, [\lambda_{q_{1n}}], \ldots\ldots, [\lambda_{q_{nn}}]]. \tag{91}$$

Tada je Λ-sistem dat sa prvih n jednačina sistema:

$$\mathtt{LS}(a_1, a_2, \ldots, a_n) := (\mathtt{T2}\cdot\vec{\lambda} + \vec{\mathtt{M1}} = \vec{0})_n. \tag{92}$$

Matricu Λ-sistema u slučaju dimenzija $n = 2, 3, 4$ označavali smo sa `M2`. Procedura koja određuje rešenje homogene grupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima data je sa:

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{Gn}(a_1, a_2, \ldots, a_n) & := & \mathtt{RHS(ELEMENT(}[[x_1]] + \\ & & \mathtt{SOLVE(LS}(a_1, a_2, \ldots, a_n), [p_1, p_2, \ldots, p_n]) * \\ & & \mathtt{M1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) * [[x_1], [x_2], \ldots, [x_n]],\ 1,\ 1)). \end{array} \tag{93}$$

Za zadane vrednosti koeficijenata $a_0 = \alpha_1$, $a_1 = \alpha_2$, $\ldots$, $a_{n-1} = \alpha_n$ vrednost funkcije $\mathtt{Gn}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ računar određuje u obliku:

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n. \tag{94}$$

Iz prethodnog izraza opšte reproduktivno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine odredjeno je u kanonskom obliku:

$$\begin{array}{rcl} f(x_1, \ldots, x_n) & = & \beta_1\Pi(\theta_1(x_1, \ldots, x_n)) + \\ & & \beta_2\Pi(\theta_2(x_1, \ldots, x_n)) + \\ & & \vdots \\ & & \beta_n\Pi(\theta_n(x_1, \ldots, x_n)). \end{array} \tag{95}$$

Na kraju napomenimo da se navedene procedure (88) – (95) mogu lako isprogramirati pomoću i drugih matematičkih programskih „alata" kao što su `MAPLE`, `MATEMATICA`, `MATLAB`, `MATHCAD`, ... [MC-RJ-DM].

4. Nehomogena grupna funkcionalna jednačina

Neka su $\theta_1, \ldots, \theta_n$ bijektivna preslikavanja nepraznog skupa S na samog sebe, tako da skup $G = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ u odnosu na kompoziciju funkcija ($\circ$) obrazuje grupu reda n. Pretpostavimo da je θ_1 neutral posmatrane grupe $\mathbb{G} = (G, \circ)$. Za polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ neka je $\mathcal{F} = \{f : S \longrightarrow C\}$ skup svih funkcija koje preslikavaju skup S u polje $\mathbb{C}$. Koristićemo oznake i rezultate date u paragrafima 1.1. i 1.2.

Pod *nehomogenom grupnom funkcionalnom jednačinom* podrazumevamo funkcionalnu jednačinu:

$$a_1(x) \cdot f(\theta_1(x)) + a_2(x) \cdot f(\theta_2(x)) + \ldots + a_n(x) \cdot f(\theta_n(x)) = h(x), \tag{1}$$

po nepoznatoj funkciji $f \in \mathcal{F}$ za zadane funkcije $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{F}$ i $h \in \mathcal{F}$; pri čemu $h(x) \not\equiv 0$. Izložićemo matričnu metodu rešavanja funkcionalne jednačine (1) prema radu S. Prešića [SP6] iz 1969 godine.

Polazeći od funkcionalne jednačine (1) zamenjujući redom x sa $\theta_k(x)$, za $k \in \mathbb{I}_n$, dobijamo n ekvivalentnih funkcionalnih jednačina:

$$a_1(\theta_k(x)) \cdot f(\theta_1(\theta_k(x))) + \ldots + a_n(\theta_k(x)) \cdot f(\theta_n(\theta_k(x))) = h(\theta_k(x)). \tag{2}$$

Odatle nalazimo da je

$$\begin{bmatrix} a_1(\theta_k(x)) & a_2(\theta_k(x)) & \cdots & a_n(\theta_k(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_{p_{1k}}(x)) \\ f(\theta_{p_{2k}}(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_{p_{nk}}(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\theta_1(x)) \\ h(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ h(\theta_n(x)) \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a_1(\theta_k(x)) & a_2(\theta_k(x)) & \cdots & a_n(\theta_k(x)) \end{bmatrix} \cdot M_k \cdot M_k^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_{p_{1k}}(x)) \\ f(\theta_{p_{2k}}(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_{p_{nk}}(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\theta_1(x)) \\ h(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ h(\theta_n(x)) \end{bmatrix}.$$

Saglasno formulama (16) i (17), iz paragrafa 1.1., iz prethodne jednakosti dobijamo

$$\begin{bmatrix} a_{q_{k1}}(\theta_k(x)) & a_{q_{k2}}(\theta_k(x)) & \cdots & a_{q_{kn}}(\theta_k(x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\theta_1(x)) \\ h(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ h(\theta_n(x)) \end{bmatrix}.$$

Za $i, j \in \mathbb{I}_n$ označimo: $a_{ij}(x) = a_{q_{ij}}(\theta_i(x))$ i formirajmo matricu $A(x) = [a_{ij}(x)]$ za $x \in S$. Sistem jednačina (2) može se zapisati u odgovarajućem matričnom obliku:

$$(3) \qquad A(x) \cdot \begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\theta_1(x)) \\ h(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ h(\theta_n(x)) \end{bmatrix}.$$

Dalje, ako uvedemo vektorske oznake $\vec{f}(x) = [f(\theta_1(x)) \ \cdots \ f(\theta_n(x))]^T$ i $\vec{h}(x) = [h(\theta_1(x)) \ \cdots \ h(\theta_n(x))]^T$, tada se polazna funkcionalna jednačina (1) zapisuje u obliku ekvivalentne matrično-funkcionalne jednačine:

$$(4) \qquad A(x) \cdot \vec{f}(x) = \vec{h}(x).$$

Matrična metoda rešavanja S. PREŠIĆa data je narednim tvrđenjem.

Teorema 4.1. *Za funkcionalnu jednačinu* (1) *neka je matrica* $B(x)$ *jedan* $\{1\}$-*inverz koji je saglasan sa grupom* $\mathbb{G}$. *Funkcionalna jednačina* (1), *odnosno matrično-funkcionalna jednačina* (4) *jeste moguća ako i samo ako matrica* $B(x)$ *ispunjava uslov mogućnosti*:

$$(5) \qquad A(x)\, B(x)\, \vec{h}(x) = \vec{h}(x).$$

Ako je $g \in \mathcal{F}$ *proizvoljna funkcija, tada je opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine* (1) *dato matričnom formulom*:

$$(6) \qquad \begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = B(x) \cdot \begin{bmatrix} h(\theta_1(x)) \\ h(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ h(\theta_n(x)) \end{bmatrix} + (I - B(x)A(x)) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix},$$

odnosno skalarnom formulom:

$$(7) \qquad f(x) \ = \ \sum_{j=1}^{n} b_{1j}(x) h(\theta_j(x)) + g(x) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{1j}(x) a_{ji}(x) g(\theta_i(x)).$$

Dokaz. Prema PENROSEovoj teoremi 3.1.1. (prve celine) uslov (5) je potreban i dovoljan da bi jednačina (4) bila moguća. Matrica $C(x) = I - B(x)A(x)$ saglasna je sa pratećom grupom[23]. Odatle, ako je uslov mogućnosti (5) ispunjen, opšte reproduktivno rešenje matrično-funkcionalne jednačine (4) dato je u obliku formule:

$$(8) \qquad \vec{f}(x) = B(x) \cdot \vec{h} + (I - B(x) \cdot A(x)) \cdot \vec{g}(x).$$

[23] JER $M_k B(x) M_k^{-1} = B(x) \ \wedge \ M_k A(x) M_k^{-1} = A(x) \implies M_k C(x) M_k^{-1} = C(x) \ \ (k \in I_n, x \in S)$

Prethodna matrična formula rešenja predstavlja formulu (6). Primetimo da je formula (7) ekvivaletna matričnoj formuli (6), kojom je dato rešenje matrično-funkcionalne jednačine (4). Otuda, skalarnom formulom (7) dato je rešenje funkcionalne jednačine (1). Obratno, svako rešenje predstavljivo je u obliku formule (6), jer je posmatrana formula, saglasno teoremi 3.1.2. (prve celine), reproduktivna formula. Reproduktivnost formule $\vec{f}(\vec{g}) = B \cdot \vec{h} + (I - BA) \cdot \vec{g}$ možemo dokazati i direktno:

$$\begin{aligned} \vec{f} \circ \vec{f}(\vec{g}) &= B \cdot \vec{h} + (I - BA) \cdot \Big(B \cdot \vec{h} + (I - BA)\vec{g} \Big) \\ &= B \cdot \vec{h} + (B \cdot \vec{h} - B \cdot AB\vec{h}) + (I - BA)^2 \vec{g} \\ &= B \cdot \vec{h} + (I - BA) \cdot \vec{g} + B \cdot (\vec{h} - AB\vec{h}) \underset{(5)}{=} B \cdot \vec{h} + (I - BA) \cdot \vec{g} = \vec{f}(\vec{g}). \end{aligned}$$

Saglasno napomeni 2 teoreme 1.2. (prve celine) matrična formula (6), odnosno koordinatna formula (7), zadržava-reprodukuje sva rešenja funkcionalne jednačine (1). ∎

Napomena. *Dva osnovna postupka za određivanje* $\{1\}$*-inverza* $B(x)$*, koji su saglasni sa pratećom grupom, dati su sa teoremom* 1.2.3. *i teoremom*[24] 1.3.1. *Konkretno, prema teoremi* 1.2.3. *za matricu* $A(x)$ *formiramo odgovarajuću matricu* $B(x)$ *na sledeći način*:

$$B(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i^{-1} A^{(1)}(\theta_i(x))\, M_i, \tag{9}$$

gde je $A^{(1)}(x)$ *ma koji* $\{1\}$*-inverz matrice* $A(x)$ *za* $x \in S$*. Specijalno ako za matricu* $A(x)$ *važi* $Ind(A(x)) = 1$*, prema teoremi* 5.2.2. (*prve celine*)*, sledeća matrica*:

$$B(x) = q(A(x)), \tag{10}$$

jeste $\{1\}$*-inverz koji je, kao polinom po* $A(x)$*, saglasan sa pratećom grupom.*

Neka je nehomogena grupna funkcionalna jednačina (1) moguća i neka je dato ma koje posebno rešenje φ_0 posmatrane funkcionalne jednačine. U postupku rešavanja možemo koristiti Penroseovu teoremu 3.1.1. (prve celine) i to u opštem nereproduktivnom obliku. Formirajmo vektor rešenja $\vec{\varphi_0}(x) = [\varphi_0(\theta_1(x)) \ldots \varphi_0(\theta_n(x))]^T$. Matrično-funkcionalna jednačina (4) moguća je, jer vektor $\vec{\varphi_0}(x)$ predstavlja jedno njeno rešenje. Neka je određena matrica $B(x)$ kao ma koji $\{1\}$-inverz koji je saglasan sa pratećom grupom. Tada, prema Penroseovoj teoremi 3.1.1. (prve celine), imamo matričnu formulu opšteg rešenja:

$$\begin{bmatrix} f(\theta_1(x)) \\ f(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ f(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0(\theta_1(x)) \\ \varphi_0(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ \varphi_0(\theta_n(x)) \end{bmatrix} + (I - B(x)A(x)) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

[24] ako je matrica $A(x)$ indeksa $Ind(A(x)) = 1$ za svako $x \in S$

gde je $g \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Odatle formula opšteg rešenja data je skalarno po prvoj koordinati u obliku:

$$f(x) \;\; = \;\; \varphi_0(x) + g(x) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{1j}(x) a_{ij}(x) g(\theta_i(x)). \tag{12}$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Na osnovu prethodnog razmatranja možemo zaključiti da ako je φ_H opšte rešenje homogene grupne funkcionalne jednačine i ako je φ_0 ma koje posebno rešenje nehomogene grupne funkcionalne jednačine, tada je $\varphi = \varphi_0 + \varphi_H$ opšte rešenje nehomogene grupne funkcionalne jednačine. Istaknimo da svi kanonski oblici, dobijeni u klasifikaciji rešenja homogenih grupnih funkcionalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima za dimenzije $n = 2, 3, 4$, mogu se preneti na slučaj nehomogenih grupnih funkcionalnih jednačina, uz navođenje odgovarajućih uslova mogućnosti. Navedeno je ostvareno za ciklične funkcionalne jednačine za dimenzije $n = 2, 3, 4$ u disertaciji B. ZARIĆa [BZ]. Napomenimo da je navedeno ostvarivo[25] i za nehomogenu KLEINovu grupnu funkcionalnu jednačinu uz razlikovanje odgovarajućih slučajeva.

Primer 4.2. *Odrediti sve funkcije $h = h(x_1, x_2, x_3) : S^3 \longrightarrow C$ za koje je moguća sledeća funkcionalna jednačina:*

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_1, x_2) = h(x_1, x_2, x_3)$$

po nepoznatoj funkciji $f = f(x_1, x_2, x_3) : S^3 \longrightarrow C$. U slučaju kad je prethodna funkcionalna jednačina moguća naći opšte rešenje.

Rešenje. Koristimo oznake iz primera 1.3.3. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

i vektore $\vec{f} = [\ f(x_1, x_2, x_3)\,,\, f(x_2, x_3, x_1)\,,\, f(x_3, x_2, x_1)\ ]^T$ i $\vec{h} = [\ h(x_1, x_2, x_3)\,,\, h(x_2, x_3, x_1)\,,\, h(x_3, x_2, x_1)\ ]^T$ posmatrana funkcionalna jednačina ekvivaletna je sa sledećom matrično-funkcionalnom jednačinom

$$A\vec{f} = \vec{h}.$$

Za matricu A postoje regularne matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

takve da $QAP = E_1$. Prema teoremi 2.4.1. *opšti* $\{1\}$*-inverz matrice* A dat je u sledećem obliku

$$A^{(1)} = P \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & k \end{bmatrix} Q,$$

[25] KORISTEĆI TEOREMU 3.2.1.

za proizvoljne parametre $a, \dots, k \in C$. Dalje, prema teoremi 1.2.3. (opšti) $\{1\}$-inverz matrice A, koji se slaže sa pratećom cikličnom grupom reda 3, određen je u sledćem obliku

$$B = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} M_i^{-1}A^{(1)}M_i = \begin{bmatrix} \frac{-a-b-c+2d+e-g+h+1}{3} & \frac{a-d+e+f-g-2h}{3} & \frac{b+c-d-2e-f+2g+h}{3} \\ \frac{b+c-d-2e-f+2g+h}{3} & \frac{-a-b-c+2d+e-g+h+1}{3} & \frac{a-d+e+f-g-2h}{3} \\ \frac{a-d+e+f-g-2h}{3} & \frac{b+c-d-2e-f+2g+h}{3} & \frac{-a-b-c+2d+e-g+h+1}{3} \end{bmatrix}.$$

Neposredno se proverava da važi jednakost $AB = \frac{1}{3}A$. Odatle, uslov mogućnosti $AB\vec{h} = \vec{h}$ dat je u sledećem obliku $\frac{1}{3}A\vec{h} = \vec{h}$. Samim tim, potreban i dovoljan uslov da posmatrana funkcionalna jednačina jeste moguća, dat je u obliku jednakosti:

$$(*) \qquad h(x_1, x_2, x_3) = h(x_2, x_3, x_1)\ (\,= h(x_3, x_1, x_2)\,).$$

Na osnovu uslova $(*)$ opšte rešenje dato je u matričnom obliku koji ne zavisi od parametara $a, \dots, k \in C$ na sledeći način

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(x_1,x_2,x_3) \\ f(x_2,x_3,x_1) \\ f(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} &= B \begin{bmatrix} h(x_1,x_2,x_3) \\ h(x_2,x_3,x_1) \\ h(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} + \big(\, I - B \cdot A \,\big) \cdot \begin{bmatrix} g(x_1,x_2,x_3) \\ g(x_2,x_3,x_1) \\ g(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} h(x_1,x_2,x_3) \\ h(x_2,x_3,x_1) \\ h(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(x_1,x_2,x_3) \\ g(x_2,x_3,x_1) \\ g(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

odnosno, po prvoj koordinati, opšte rešenje dato je skalarnom funkcijom

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}h(x_1,x_2,x_3) + \frac{1}{3}\big(\,2g(x_1,x_2,x_3) - g(x_2,x_3,x_1) - g(x_3,x_1,x_2)\,\big),$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Ako je φ_0 ma koje rešenje posmatrane negomogene funkcionalne jednačine tada matrična formula opšteg rešenja data je u obliku

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(x_1,x_2,x_3) \\ f(x_2,x_3,x_1) \\ f(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1,x_2,x_3) \\ \varphi_0(x_2,x_3,x_1) \\ \varphi_0(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} + \big(\, I - B \cdot A \,\big) \cdot \begin{bmatrix} g(x_1,x_2,x_3) \\ g(x_2,x_3,x_1) \\ g(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1,x_2,x_3) \\ \varphi_0(x_2,x_3,x_1) \\ \varphi_0(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(x_1,x_2,x_3) \\ g(x_2,x_3,x_1) \\ g(x_3,x_1,x_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

odnosno, po prvoj koordinati, opšte rešenje dato je skalarnom funkcijom

$$f(x_1,x_2,x_3) = \varphi_0(x_1,x_2,x_3) + \frac{1}{3}\big(\,2g(x_1,x_2,x_3) - g(x_2,x_3,x_1) - g(x_3,x_1,x_2)\,\big),$$

gde je $g \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija.

5. Semigrupna funkcionalna jednačina

5.1. Homogena semigrupna funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

Neka su $\theta_1, \ldots, \theta_n$ proizvoljna preslikavanja nepraznog skupa S na samog sebe, tako da skup $G = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ u odnosu na kompoziciju funkcija $(\circ)$ obrazuje *prateću semigrupu* $\mathfrak{G} = (G, \circ)$ reda n. Pretpostavimo da je θ_1 neutral posmatrane semigrupe $\mathbb{G}$. Za polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ neka je $\mathcal{F} = \{f : S \longrightarrow C\}$ skup svih funkcija koje preslikavaju skup S u polje $\mathbb{C}$.

Pod *homogenom semigrupnom funkcionalnom jednačinom* podrazumevamo funkcionalu jednačinu:

$$a_1(x) \cdot f(\theta_1(x)) + a_2(x) \cdot f(\theta_2(x)) + \ldots + a_n(x) \cdot f(\theta_n(x)) = 0, \tag{1}$$

po nepoznatoj funkciji $f \in \mathcal{F}$ za zadane funkcije $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{F}$. U ovom delu razmatramo rešavanje homogene semigrupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima:

$$a_1 \cdot f(\theta_1(x)) + a_2 \cdot f(\theta_2(x)) + \ldots + a_n \cdot f(\theta_n(x)) = 0, \tag{2}$$

po nepoznatoj funkciji $f \in \mathcal{F}$ za zadane konstante $a_1, \ldots, a_n \in C$. Razmotrimo osnovne definicije i tvrđenja koja nisu vezana za „grupnost".

Za skup $\mathbb{I}_n \stackrel{def}{=} \{1, 2, \ldots, n\}$ posmatrajmo n varijacija[26] $p_1, \ldots, p_n : \mathbb{I}_n \longrightarrow \mathbb{I}_n$ definisanih sa:

$$p_{ij} \stackrel{def}{=} p_i(j) = m \quad \text{akko} \quad \theta_m = \theta_i \circ \theta_j, \tag{3}$$

gde $i, j, m \in \mathbb{I}_n$. Primetimo da se varijacije p_i $(i \in \mathbb{I}_n)$ definišu vrednostima varijacija indeksa pri kompoziciji funkcija iz skupa G. Iz (3) sleduje:

$$\theta_i \circ \theta_j = \theta_{p_{ij}}, \tag{4}$$

za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Važi $\theta_j = \theta_1 \circ \theta_j = \theta_{p_{1j}}$ i $\theta_i = \theta_i \circ \theta_1 = \theta_{p_{i1}}$, za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Samimi tim važi:

$$p_{1j} = j \quad \text{i} \quad p_{i1} = i, \tag{5}$$

za $i, j \in \mathbb{I}_n$. Odatle je p_1 identička varijacija (jedinično preslikavanje). Takođe važi asocijativnost kompozicije u sledećem obliku:

$$p_{ijk} \stackrel{def}{=} p_{p_{ij}k} = p_{ip_{jk}}. \tag{6}$$

[26] U OPŠTEM SLUČAJU REČ JE O VARIJACIJAMA SA PONAVLJANJEM

Na osnovu prethodnog sleduje da skup $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$, u odnosu na kompoziciju $(\circ)$, obrazuje <u>semigrupu p-varijacija</u> $\mathbb{P} = (P, \circ)$ reda n. Nije teško proveriti da skup $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ obrazuje semigrupu $\mathbb{P} = (P, \circ)$ reda n izomorfnu sa semigrupom $\mathfrak{G} = (G, \circ)$.

Iz p-varijacija možemo formirati skup:

$$\mathfrak{q}_{ij} = \{\ k \in \mathbb{I}_n \mid p_i(k) = j\ \}, \tag{7}$$

gde $i, j \in \mathbb{I}_n$. Primetimo da ako je $\mathfrak{G}$ grupa, tada je skup $\mathfrak{q}_{ij}$ jednočlan i određuje vrednost q-permutacije $k = q_{ij}$.

Navodimo postupak rešavanja funkcionalne jednačine (2) sa konstantnim koeficijentima koji je predložio S. Prešić, a predstavlja direktno proširenje Prešićevog Λ-matričnog metoda za grupnu funkcionalnu jednačinu. Označimo sa $A_1 = f(\theta_1(x))$, $A_2 = f(\theta_2(x)), \ldots, A_n = f(\theta_n(x))$ nepoznate vrednosti funkcije f. Tada funkcionalnu jednačinu (2) možemo shvatiti kao linearnu jednačinu:

$$\mathcal{J}_1 = a_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot A_2 + \ldots + a_n \cdot A_n = 0, \tag{8}$$

po nepoznatim $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Izvršimo zamenu x redom sa $\theta_k(x)$ za $k \in \mathbb{I}_n$. Tada linearna jednačina (8) ekvivaletna je sa sistemom:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{J}_1 & = & a_1 A_{p_{11}} + a_2 A_{p_{21}} + \ldots + a_n A_{p_{n1}} = 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & a_1 A_{p_{12}} + a_2 A_{p_{22}} + \ldots + a_n A_{p_{n2}} = 0, \\ & \vdots & \\ \mathcal{J}_n & = & a_1 A_{p_{1n}} + a_2 A_{p_{2n}} + \ldots + a_n A_{p_{nn}} = 0. \end{array} \right\} \tag{9}$$

Izračunavanjem koeficijenata uz odgovarajuće nepoznate A_j, u i-toj vrsti prethodnog sistema, dobijamo da sistem ima matricu sistema $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ sa elementima:

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{ccl} \displaystyle\sum_{k \in \mathfrak{q}_{ij}} a_k & : & \mathfrak{q}_{ij} \neq \emptyset, \\ & & \\ 0 & : & \mathfrak{q}_{ij} = \emptyset. \end{array} \right. \tag{10}$$

Za prethodno određenje koeficijente, sistem (9) zapisujemo u ekvivaletnom obliku:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{J}_1 & = & a_{11} A_1 + a_{12} A_2 + \ldots + a_{1n} A_n = 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & a_{21} A_1 + a_{22} A_2 + \ldots + a_{2n} A_n = 0, \\ & \vdots & \\ \mathcal{J}_n & = & a_{n1} A_n + a_{n2} A_n + \ldots + a_{nn} A_n = 0. \end{array} \right\} \tag{11}$$

Uvedimo matrične oznake:

$$\vec{\mathcal{J}} = [\ \mathcal{J}_1\ \ \mathcal{J}_2\ \ \ldots\ \ \mathcal{J}_n\ ]^T \quad \text{i} \quad \vec{\mathcal{A}} = [\ A_1\ \ A_2\ \ \ldots\ \ A_n\ ]^T. \tag{12}$$

Sistem (11) zapisujemo u obliku homogene linearne matrične jednačine:

$$\vec{\mathcal{J}} = \mathbf{A} \cdot \vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathbf{0}}. \tag{13}$$

Rešenje po A_1 tražimo u obliku:

$$A_1 = A_1 - \lambda_1 \mathcal{J}_1 - \lambda_2 \mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_n \mathcal{J}_n, \tag{14}$$

gde su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in C$ nepoznati parametri. Prelazimo na određivanje veze između parametara. Primetimo da ako u k-toj jednačini:

$$\mathcal{J}_k = a_1 A_{p_{1k}} + a_2 A_{p_{2k}} + \ldots + a_n A_{p_{nk}} \tag{15}$$

izvršimo zamenu $x \mapsto \theta_r(x)$, tada $A_{p_{ik}} = f(\theta_{p_{ik}}(x))$ prelazi u $f(\theta_{p_{ik}} \circ \theta_r(x)) = f(\theta_{p_{p_{ik}r}}(x)) = f(\theta_{p_{ip_{kr}}}(x)) = A_{p_{ip_{kr}}}$ $(i \in \mathbb{I}_n)$. Navedenom zamenom $x \mapsto \theta_r(x)$, cela k-ta jednačina $\mathcal{J}_k$ prelazi u p_{kr}-tu jednačinu $\mathcal{J}_{p_{kr}}$ datu sa:

$$\mathcal{J}_k^{(r)} = \mathcal{J}_{p_{kr}} \stackrel{def}{=} a_1 A_{p_{1p_{kr}}} + a_2 A_{p_{2p_{kr}}} + \ldots + a_n A_{p_{np_{kr}}}. \tag{16}$$

Polazeći od jednačine (14) pomoću zamena $x \mapsto \theta_1(x), x \mapsto \theta_2(x), \ldots, x \mapsto \theta_n(x)$ formiramo sistem:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_1 & = & A_1 - \lambda_1 \mathcal{J}_{p_{11}} - \lambda_2 \mathcal{J}_{p_{21}} - \ldots - \lambda_n \mathcal{J}_{p_{n1}}, \\ A_2 & = & A_2 - \lambda_1 \mathcal{J}_{p_{12}} - \lambda_2 \mathcal{J}_{p_{22}} - \ldots - \lambda_n \mathcal{J}_{p_{n2}}, \\ & \vdots & \\ A_n & = & A_n - \lambda_1 \mathcal{J}_{p_{1n}} - \lambda_2 \mathcal{J}_{p_{2n}} - \ldots - \lambda_n \mathcal{J}_{p_{nn}}. \end{array} \right\} \tag{17}$$

Označimo:

$$\lambda_{ij} = \left\{ \begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{k \in \mathfrak{q}_{ij}} \lambda_k & : & \mathfrak{q}_{ij} \neq \emptyset, \\ 0 & : & \mathfrak{q}_{ij} = \emptyset. \end{array} \right. \tag{18}$$

Pomoću prethodno definisanih λ_{ij}-parametara jednakosti (17) zapisujemo u obliku:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_1 & = & A_1 - \lambda_{11} \mathcal{J}_1 - \lambda_{12} \mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_{1n} \mathcal{J}_n, \\ A_2 & = & A_2 - \lambda_{21} \mathcal{J}_1 - \lambda_{22} \mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_{2n} \mathcal{J}_n, \\ & \vdots & \\ A_n & = & A_n - \lambda_{n1} \mathcal{J}_1 - \lambda_{n2} \mathcal{J}_2 - \ldots - \lambda_{nn} \mathcal{J}_n. \end{array} \right\} \tag{20}$$

Samim tim, odgovarajuće rešenje matrične jednačine (13) tražimo u obliku matrične formule:

$$\vec{\mathcal{A}} = \varphi(\vec{\mathcal{A}}) = \vec{\mathcal{A}} - \Lambda \cdot \vec{\mathcal{J}} = (I - \Lambda\, \mathbf{A}) \cdot \vec{\mathcal{A}}, \tag{21}$$

gde je $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ matrica nepoznatih parametara koji ispunjavaju dodatne jednakosti (18). Prema teoremi 4.1. prve celine ako matrica $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ postoji ona je jedan

$\{1\}$-inverz matrice $\mathbf{A}$. Ako je $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ ma koji $\{1\}$-inverz matrice $\mathbf{A}$, tada formula (21) određuje opšte rešenje matrične jednačine (13).

Zamenom jednakosti (20) u jednačinu (8), dobijamo odgovarajući Λ*-sistem* po λ_k parametrima ($k \in \mathbb{I}_n$). Ako je odgovarajući Λ-sistem moguć i ako se u formulu (21) vrate uvedene zamene, pitanje da li je sa tako određenom matričnom formulom određeno jedno rešenje funkcionalne jednačine (2) povezano je sa pojmom saglasnosti matrice sa semigrupom. S. Nikčević u [SN1] definisala je[27] *matrica* $B(x) = [b_{ij}(x)]$ *saglasna je sa semigrupom* $\mathfrak{G} = (G, \circ)$ ako matrična jednakost:

$$\begin{bmatrix} \varphi(\theta_1(x)) \\ \varphi(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ \varphi(\theta_n(x)) \end{bmatrix} = B(x) \cdot \begin{bmatrix} g(\theta_1(x)) \\ g(\theta_2(x)) \\ \vdots \\ g(\theta_n(x)) \end{bmatrix} \tag{22}$$

jednoznačno definiše funkciju $\varphi \in \mathcal{F}$ za ma koji izbor funkcije $g \in \mathcal{F}$. Ako su kvadratne matrice B i C, reda n, saglasne sa pratećom semigrupom to su takođe i matrice $B \pm C$, $B \cdot C$ i λC ($\lambda \in C$), kao i jedinična matrica I reda n. Direktno se proverava da je matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ saglasna sa pratećom semigrupom. Ako je Λ-sistem moguć, tada λ_k-parametri, na osnovu jednakosti (18), odredjuju matricu $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ kao jedan $\{1\}$-inverz. Na osnovu prethodnog razmatranja, kao uopštenje teoreme 2.2.2 važi naredno tvrđnje.

Teorema 5.1. *Ako je Λ-sistem homogene semigrupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima* (2) *moguć i ako je matrica $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ saglasna sa semigrupom $\mathfrak{G}$, tada za matricu Λ određenu iz Λ-sistema formula opšteg reproduktivnog rešenja funkcionalne jednačine* (2) *data je sa*:

$$f(x) \;=\; \Pi(x) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} a_{ij} \Pi(\theta_i(x)), \tag{23}$$

gde je $\Pi \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija.

Napomena. *Neka je Λ-sistem homogene semigrupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima* (2) *moguć. Ako reproduktivna matrična formula* (21) *ne određuje rešenje funkcionalne jednačine* (2) *tada matrica $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ nije saglasna sa semigrupom $\mathfrak{G}$.*

U vezi prethodne napomene postavlja se sledeći *problem*: ako funkcionalna jednačina (2) nije rešiva u pratećoj semigrupi, odrediti širu semigrupu u kojoj je posmatrana funkcionalna jednačina rešiva. Navedeni problem razmotrićemo za homogene semigrupne funkcionalne jednačine, sa konstantnim koeficijentima, koje su razmatrali Prešić, Kečkić, Mitrinović, Vasić i Kuczma.

[27] u cilju rešavanja funkcionalne jednačine (2) za matrica indeksa $Ind(\mathbf{A}) \leq 1$

5.2. Partikularni primeri semigrupnih funkcionalnih jednačina

U završnom paragrafu, kao *doprinos*, pokazujemo da se neki poznati rezultati[28] mogu dobiti *jedinstvenim postupkom primenom* PREŠIĆ*evog* Λ*–matričnog metoda* proširenog na homogene semigrupne funkcionalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Primer 1. *U klasifikaciji svih kanonskih oblika rešenja homogene semigrupne funkcionalne jednačine drugog reda, sa konstantnim koeficijentima, od posebnog interesa je rešiti sledeće dve funkcionalne jednačine*:

a) $f(x,x) = f(y,y)$,

b) $f(x,y) + f(y,x) - 2f(x,x) = 0$,

po nepoznatoj funkciji $f : R^2 \longrightarrow R$.

a) Za argument $X = (x,y) \in R^2$ definišimo funkcije $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma : R^2 \longrightarrow R^2$ redom sa $\varepsilon X = (x,y)$, $\alpha X = (y,x)$, $\beta X = (x,x)$ i $\gamma X = (y,y)$. Skup $S = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma\}$ u odnosu na kompoziciju ($\circ$) određuje semigrupu sa neutralom $\mathbb{S} = (S, \circ)$. CAYLEYeva tablica semigrupe data je sa:

$$
\begin{array}{c|cccc}
\circ & \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma \\
\hline
\varepsilon & \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma \\
\alpha & \alpha & \epsilon & \beta & \gamma \\
\beta & \beta & \gamma & \beta & \gamma \\
\gamma & \gamma & \beta & \beta & \gamma
\end{array}. \tag{1}
$$

Označimo sa $I = f(\varepsilon X) = f(X)$, $A = f(\alpha X)$, $B = f(\beta X)$ i $C = f(\gamma X)$ vrednosti nepoznate funkcije $f : R^2 \longrightarrow R$. Zamenama $X \mapsto \varepsilon X$, $X \mapsto \alpha X$, $X \mapsto \beta X$ i $X \mapsto \gamma X$ iz polazne jednačine:

$$
\mathcal{J}_1 = f(\beta X) - f(\alpha X) = B - C = 0 \tag{2}
$$

dobijamo homogen linearan sistem po I, A, B i C:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\mathcal{J}_1 & = & f(\beta X) - f(\gamma X) = B - C = 0, \\
\mathcal{J}_2 & = & f(\gamma X) - f(\beta X) = C - B = 0, \\
\mathcal{J}_3 & = & f(\beta X) - f(\beta X) = B - B \equiv 0, \\
\mathcal{J}_4 & = & f(\gamma X) - f(\gamma X) = C - C \equiv 0.
\end{array}
\right\}
$$

[28] KOJE RAZMATRAMO U NIZU PARTIKULARNIH-POSEBNIH PRIMERA KOJI SLEDE

Rešenje prethodnog sistema je dato u obliku

$$\left\{\begin{array}{l} I = I + \lambda \mathcal{J}_1, \\ B = B + \lambda \mathcal{J}_1^{'} = B + \lambda \mathcal{J}_3 = B, \\ C = C + \lambda \mathcal{J}_1^{''} = C + \lambda \mathcal{J}_4 = C, \end{array}\right\} \tag{3}$$

pri čemu su poslednje dve jednačine dobijene iz prve jednačine zamenama $X \mapsto \beta X$ i $X \mapsto \gamma X$. Ako se izvrši zamena prethodnih izraza za B i C u polaznu jednačinu $\mathcal{J}_1 = B - C = 0$, dobijamo istu jednačinu. Na taj način Λ-sistem po λ je oblika $0\lambda = 0$, tj. rešenje je ma koji parametar λ. Sad, iz formule $I = I + \lambda(B - C)$, potencijalno opšte reproduktivno rešenje je oblika

$$f(X) = \Pi(X) + \lambda(\Pi(\beta X) - \Pi(\gamma X)), \tag{4}$$

gde je $\Pi : R^2 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Formula (4) jeste rešenje posmatrane funkcionalne jednačine ako i samo ako je funkcija Π rešenje polazne funkcionalne jednačine. Dakle, formula (4) nije rešenje posmatrane funkcionalne jednačine. Navedeni primer pokazuje da *semigrupna funkcionalna jednačina ne mora imati rešenja u pratećoj semigrupi.* U narednom će mo pokazati kako je moguće dobiti opšte reproduktivno rešenje u široj semigri od prateće.

Neka je $k \in R$ proizvoljna konstanta. Tada je funkcionalna jednačina (1) ekvivalentna sa sledećom funkcionalnom jednačinom:

$$f(x, x) = f(k, k), \tag{5}$$

po nepoznatoj funkciji $f : R^2 \longrightarrow R$. Semigrupu funkcija $\mathbb{S}$ proširimo sa funkcijom $\delta : R^2 \longrightarrow R^2$, definisanom sa $\delta X = (k, k)$. Na taj način formiramo skup $Q = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ koji u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ određuje semigrupu sa neutralom $\mathbb{Q} = (Q, \circ)$. Cayleyeva tablica semigrupe je data sa:

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \alpha & \epsilon & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \beta & \gamma & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \gamma & \beta & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \delta & \delta & \delta & \delta & \delta \end{array}. \tag{6}$$

Označimo sa $I = f(\varepsilon X) = f(X)$, $A = f(\alpha X)$, $B = f(\beta X)$, $C = f(\gamma X)$ i $D = f(\delta X)$ vrednosti nepoznate funkcije $f : R^2 \longrightarrow R$. Dalje, zamenama $X \mapsto \varepsilon X$, $X \mapsto \alpha X$, $X \mapsto \beta X$, $X \mapsto \gamma X$ i $X \mapsto \delta X$ iz polazne jednačine:

$$\mathcal{J}_1 = f(\beta X) - f(\delta X) = B - D = 0 \tag{7}$$

dobijamo homogen linearan sistem po I, A, B, C i D:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{J}_1 & = & f(\beta X) - f(\delta X) = B - D = 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & f(\gamma X) - f(\delta X) = C - D = 0, \\ \mathcal{J}_3 & = & f(\beta X) - f(\delta X) = B - D \equiv 0, \\ \mathcal{J}_4 & = & f(\gamma X) - f(\delta X) = C - D \equiv 0, \\ \mathcal{J}_5 & = & f(\delta X) - f(\delta X) = D - D \equiv 0. \end{array}\right\}$$

Rešenje prethodnog sistema dato je sa:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
I = I + \lambda \mathcal{J}_1 + \mu \mathcal{J}_2, \\
B = B + \lambda \mathcal{J}_1 + \mu \mathcal{J}_1, \\
D = D,
\end{array}
\right\}
\tag{8}
$$

pri čemu su poslednje dve jednačine dobijene iz prve jednačine zamenama $X \mapsto \beta X$ i $X \mapsto \delta X$. Ako se izvrši zamena B i D u jednačanima (7) dobijamo:

$$
B - D = B + \lambda(B - D) + \mu(B - D) - D = (\lambda + \mu + 1)(B - D) = 0,
$$

na osnovu koje dobijamo Λ-sistem po λ i μ

$$
\{ \quad \lambda + \mu + 1 = 0. \quad \}
$$

Rešenje dato je u obliku

$$
\lambda = p \quad \wedge \quad \mu = -1 - p,
$$

gde je p realan parametar. Iz $I = I + \lambda \mathcal{J}_1 + \mu \mathcal{J}_2$, potencijalno opšte reproduktivno rešenje je oblika

$$
f(x, y) = \Pi(x, y) + p\Pi(x, x) - (1 + p)\Pi(y, y) + \Pi(k, k),
\tag{9}
$$

gde je $\Pi : R^2 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Neposredno se proverava da je sa (9) dato rešenje funkcionalne jednačine (5). Usled reproduktivnosti funkcije (9) rešenje je opšte. Specijalno, za $p = -1$, dobijamo opšte reproduktivno rešenje:

$$
f(x, y) = \Pi(x, y) - \Pi(x, x) + \Pi(k, k).
\tag{10}
$$

u obliku J. Kečkića [JK1].

b) Zadržimo oznake uvedene u prethodnom razmatranju za funkcionalnu jednačinu:

$$
f(x, y) + f(y, x) - 2f(x, x) = 0,
\tag{11}
$$

po nepoznatoj funkciji $f : R^2 \longrightarrow R$. Sasvim slično sa prvim delom prethodnog razmatranja proverava se da funkcionalna jednačina (11) nema rešenja u pratećoj semigrupi $\mathbb{S}$. Razmotrimo rešenja u široj semigrupi $\mathbb{Q}$. Primetimo da iz ekvivalencije

$$
f(x, y) + f(y, x) - 2f(x, x) = 0 \Longleftrightarrow f(x, y) = 2f(x, x) - f(y, x),
$$

zamenom $X \mapsto \alpha X$, dobijamo ekvivalenciju

$$
f(y, x) + f(x, y) - 2f(y, y) = 0 \Longleftrightarrow f(x, y) = 2f(y, y) - f(y, x).
$$

Na osnovu prethodne dve ekvivalencije dobijamo

$$
f(x, x) = f(y, y) = f(k, k),
$$

gde je $k \in R$ proizvoljna konstanta. Iz prethodne jednakosti polazna funkcionalna jednačina (11) je ekvivaletna sa funkcionalnom jednačinom:

$$
f(x, y) + f(y, x) - 2f(k, k) = 0.
\tag{12}
$$

Rešimo funkcionalnu jednačinu (12) u pratećoj semigrupi $\mathbb{Q}$. Polazeći od jednačine:

$$\mathcal{J}_1 = I + A - 2D = 0, \tag{13}$$

zamenama $X \mapsto \varepsilon X$, $X \mapsto \alpha X$, $X \mapsto \beta X$, $X \mapsto \gamma X$, $X \mapsto \delta X$ dobijamo homogen linearan sistem po I, A, B, C i D

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{J}_1 & = & I + A - 2D = 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & A + I - 2D = 0, \\ \mathcal{J}_3 & = & B + B - 2D = 0, \\ \mathcal{J}_4 & = & C + C - 2D = 0, \\ \mathcal{J}_5 & = & D + D - 2D \equiv 0. \end{array}\right\}$$

Rešenje prethodnog sistema dato je sa:

$$\left\{\begin{array}{lcl} I & = & I + \lambda_1(I + A - 2D) + \lambda_2(B - D) + \lambda_3(C - D), \\ A & = & A + \lambda_1(A + I - 2D) + \lambda_2(C - D) + \lambda_3(B - D), \\ D & \equiv & D, \end{array}\right\} \tag{14}$$

pri čemu su poslednje dve jednačine dobijene iz prve jednačine zamenama $X \mapsto \alpha X$ i $X \mapsto \delta X$. Ako se izvrši zamena I, A i D u (13) dobijamo jednačinu

$$I + A - 2D = (2\lambda_1 + 1)(I + A) + (\lambda_2 + \lambda_3)(B + C) - 2(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 1)D = 0,$$

na osnovu koje dobijamo Λ-sistem po λ_1, λ_2 i λ_3

$$\left\{\begin{array}{c} 2\lambda_1 + 1 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 1 = 0. \end{array}\right\}$$

Rešenje sistema dato je u obliku

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad \lambda_2 = t \quad \wedge \quad \lambda_3 = -t,$$

gde je t realan parametar. Samim tim iz

$$I = \frac{I}{2} - \frac{A}{2} + Bt - Ct + D$$

potencijalno opšte rešenje dato je u obliku:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\Pi(x, y) - \Pi(y, x)) + t(\Pi(x, x) - \Pi(y, y)) + \Pi(k, k), \tag{15}$$

gde je $\Pi : R^2 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Neposredno se proverava da je sa (15) dato rešenje funkcionalne jednačine (12). Usled reproduktivnosti funkcije (15) rešenje je opšte. Specijalno, za $t = 0$ dobijamo opšte reproduktivno rešenje:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\Pi(x, y) - \Pi(y, x)) + \Pi(k, k). \tag{16}$$

u obliku S. Prešića [SP2] i J. Kečkića [JK1].

Napomena. Funkcionalnu jednačinu (11) možemo rešavati i u široj semigrupi od $\mathbb{Q}$. Pored funkcija $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta : R^2 \longrightarrow R$ uvedimo funkcije $\eta, \theta, \mu, \sigma : R^2 \longrightarrow R$ definiasne redom sa $\eta X = (x,k)$, $\theta X = (k,x)$, $\mu X = (y,k)$ i $\sigma X = (k,y)$. Tada skup $Q_1 = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \theta, \mu, \sigma\}$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ formira semigrupu sa jedinicom $\mathbb{Q}_1 = (Q_1, \circ)$ datu sa Cayleyevom tablicom:

(17)

$\circ$	ε	α	β	γ	δ	η	θ	μ	σ
ε	ε	α	β	γ	δ	η	θ	μ	σ
α	α	ε	β	γ	δ	θ	η	σ	μ
β	β	γ	β	γ	δ	β	δ	γ	δ
γ	γ	β	β	γ	δ	δ	β	δ	γ
δ	δ	δ	δ	δ	δ	δ	δ	δ	δ
η	η	μ	η	μ	δ	η	δ	μ	δ
θ	θ	σ	θ	σ	δ	θ	δ	σ	δ
μ	μ	η	η	μ	δ	δ	η	δ	μ
σ	σ	θ	θ	σ	δ	δ	θ	δ	σ

Sasvim slično sa prethodnim postupkom dobijamo da je opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (11) dato u obliku:

$$
\begin{array}{rcl}
f(x,y) & = & \frac{1}{2}(\Pi(x,y) - \Pi(y,x)) + \Pi(k,k) \\
& - & 2(p+q)\Pi(x,x) \ + \ 2(p+q)\Pi(y,y) \\
& + & (q+r)\Pi(x,k) \ + \ (q+r)\Pi(k,x) \\
& - & (q+r)\Pi(y,k) \ - \ (q+r)\Pi(k,y),
\end{array}
\tag{18}
$$

gde su $p,\ q,\ r\ \in R$ proizvoljne konstante i $\Pi : R^2 \to R$ proizvoljna funkcija. Specijalno za $t = -2(p+q)$ i $r = -q$ iz formule (18) dobijamo formulu (15).

Primer 2. *Primenom* Prešićevog *Λ-matričnog metoda daćemo klasifikaciju*[29] *svih opštih reproduktivnih rešenja homogene semigrupne funkcionalne jednačine*:

$$a \cdot f(x,y) + b \cdot f(y,x) + c \cdot f(x,x) + d \cdot f(y,y) = 0, \tag{1}$$

gde su a, b, c i d realne konstante i $f = f(x,y) : R^2 \to R$ nepoznata funkcija.

Za argument $X = (x,y) \in R^2$ definišimo funkcije $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma : R^2 \longrightarrow R$ redom sa $\varepsilon X = (x,y), \alpha X = (y,x), \beta X = (x,x)$ i $\gamma X = (y,y)$. Skup $S = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma\}$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ određuje semigrupu sa neutralom $\mathbb{S} = (S, \circ)$. Cayleyeva tablica semigrupe data je sa:

(2)

$\circ$	ε	α	β	γ
ε	ε	α	β	γ
α	α	ϵ	β	γ
β	β	γ	β	γ
γ	γ	β	β	γ

.

[29] koju je dao J. Kečkić [JK1]

Označimo sa $A = f(\varepsilon X) = f(X)$, $B = f(\alpha X)$, $C = f(\beta X)$ i $D = f(\gamma X)$ vrednosti nepoznate funkcije $f : R^2 \longrightarrow R$. Zamenama $X \mapsto \varepsilon X$, $X \mapsto \alpha X$, $X \mapsto \beta X$ i $X \mapsto \gamma X$ iz polazne jednačine dobijamo homogen linearan sistem po A, B, C i D:

$$\mathcal{J}_1 = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C + d \cdot D = 0, \tag{3}$$

$$\mathcal{J}_2 = a \cdot B + b \cdot A + c \cdot D + d \cdot C = 0, \tag{4}$$

$$\mathcal{J}_3 = a \cdot C + b \cdot C + c \cdot C + d \cdot C = 0, \tag{5}$$

$$\mathcal{J}_4 = a \cdot D + b \cdot D + c \cdot D + d \cdot D = 0. \tag{6}$$

Primetimo da su rešenja sistema $(2) - (5)$ data u obliku

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} A & = & A & + & \lambda\mathcal{J}_1 & + & \mu\mathcal{J}_2, \\ B & = & B & + & \lambda\mathcal{J}_1^{'} & + & \mu\mathcal{J}_2^{'}, \\ C & = & C & + & \lambda\mathcal{J}_1^{''} & + & \mu\mathcal{J}_2^{''}, \\ D & = & D & + & \lambda\mathcal{J}_1^{'''} & + & \mu\mathcal{J}_2^{'''}, \end{array} \right\}$$

pri čemu su poslednje tri formule dobijene iz prve zamenama $X \mapsto \alpha X$, $X \mapsto \beta X$ i $X \mapsto \gamma X$. Važi : $\mathcal{J}_1^{'} = \mathcal{J}_2$ i $\mathcal{J}_2^{'} = \mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_1^{''} \equiv 0$ i $\mathcal{J}_2^{''} \equiv 0$, $\mathrm{J}_1^{'''} \equiv 0$ i $\mathcal{J}_2^{'''} \equiv 0$. Odatle rešenja sistema $(3) - (6)$ data su u obliku

$$\left\{ \begin{array}{lllll} A & = & A & + & \lambda\mathcal{J}_1 + \mu\mathcal{J}_2, \\ B & = & B & + & \lambda\mathcal{J}_2 + \mu\mathcal{J}_1, \\ C & = & C\,, & & \\ D & = & D\,. & & \end{array} \right\}$$

Zamenom izraza za A, B, C i D redom iz prethodnih formula u formulu (3), grupišući koeficijente uz A, B, C i D, dobijamo Λ-sistem po λ i μ:

$$(a^2 + b^2)\lambda + 2ab\mu = -a, \tag{7}$$

$$2ab\lambda + (a^2 + b^2)\mu = -b, \tag{8}$$

$$(ac + bd)\lambda + (ad + bc)\mu = -c, \tag{9}$$

$$(ad + bc)\lambda + (ac + bd)\mu = -d. \tag{10}$$

Neka je $\Pi : R^2 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Razlikujemo dva slučaja:

1) $a + b + c + d \neq 0$. Tada iz jednačina (4) i (5) zaključujemo da je $C = f(\beta X) \equiv 0$ i $D = f(\gamma X) \equiv 0$. Funkcionalna jednačina (1) je oblika $a \cdot f(x, y) + b \cdot f(y, x) = 0$. Razlikujemo dva podslučaja:

1.a) $a^2 + b^2 = 0$. Tada važi: $a = b = 0 \ \wedge \ c \neq -d$. Samim tim važi: $a \cdot f(x, y) + b \cdot f(y, x) \equiv 0$ i $f(x, y) = 0$. Opšte reproduktivno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine dato je sa:

$$f(x, y) = \Pi(x, y) - \Pi(x, x).$$

<u>**1.b) $a^2 + b^2 \neq 0$.**</u> U ovom podslučaju razlikujemo tri podpodslučaja:

1.b.i) $a^2 \neq b^2$. Opšte reproduktivno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine je trivijalno

$$f(x, y) = 0.$$

Napomenimo da pri uslovu $a + b + c + d \neq 0$ ovo je *najopštiji slučaj*.

1.b.ii) $a = b(\neq 0)$. Funkcionalna jednačina (1) jeste ciklična funkcionalna jednačina $f(x, y) + f(y, x) = 0$. Opšte reproduktivno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine dato je u vidu

$$f(x, y) = \frac{\Pi(x, y) - \Pi(y, x)}{2}.$$

1.b.iii) $a = -b(\neq 0)$. Funkcionalna jednačina (1) jeste ciklična funkcionalna jednačina $f(x, y) - f(y, x) = 0$. Opšte reproduktivno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine dato je u vidu

$$f(x, y) = \frac{\Pi(x, y) + \Pi(y, x)}{2}.$$

<u>**2) $a + b + c + d = 0$.**</u> Razlikujemo dva podslučaja:

<u>**2.a) $a^2 + b^2 = 0$.**</u> Tada važi $a = b = 0 \ \wedge \ c = -d$. Funkcionalna jednačina (1) je oblika $c \cdot f(x, x) - c \cdot f(y, y) = 0$. U ovom podslučaju razlikujemo dva podpodslučaja:

2.a.i) $c = -d = 0$. Opšte reproduktivno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine dato je proizvoljnom funkcijom

$$f(x, y) = \Pi(x, y).$$

2.a.ii) $c = -d \neq 0$. <u>*Prema primeru* 1 a)</u> opšte reproduktivno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine dato je sa

$$f(x, y) = \Pi(x, y) - \Pi(x, x) + \Pi(k, k),$$

<u>**2.b) $a^2 + b^2 \neq 0$.**</u> gde je k proizvpljna realna konstanta. U ovom podslučaju razlikujemo četiri podpodslučaja:

2.b.i) $a = b(\neq 0) \ \wedge \ a \neq -c$. Funkcionalna jednačina (1) je oblika

$$a \cdot f(x, y) + a \cdot f(y, x) + c \cdot f(x, x) - (2a + c) \cdot f(y, y) = 0.$$

Vršeći cikličnu zamenu $(x, y) \mapsto (y, x)$ iz prethodne funkcionalne jednačine dobijamo ekvivaletnu funkcionalnu jednačinu

$$a \cdot f(y, x) + a \cdot f(x, y) + c \cdot f(y, y) - (2a + c) \cdot f(x, x) = 0.$$

Iz prethodne dve jednačine zaključujemo $f(x, x) = f(y, y)$. Uz navedeni uslov prethodna funkcionalna jednačina ekvivaletna je sa funkcionalnom jednačinom

$$f(x, y) + f(x, y) - 2f(x, x) = 0.$$

Prema primeru 1 b), ako je k proizvoljna realna konstanta, opšte reproduktivno rešenje posmatrane funkcionalne jednačine dato je sa

$$f(x,y)=\frac{\Pi(x,y)-\Pi(y,x)}{2}+\Pi(k,k).$$

2.b.ii) $\boldsymbol{a=b \ \wedge \ a=-c(\neq 0)}$. Iz uslova $a+b+c+d=0$ zaključujemo da je $a=-d(\neq 0)$. Λ-sistem $(7)-(10)$ dovodi do veze $\lambda+\mu=-\frac{1}{2a}$. Zamenom rešenja $\lambda=-\mu-\frac{1}{2a} \ \wedge \ \mu\in R$ u jednačinu $A=A+\lambda\mathcal{J}_1+\mu\mathcal{J}_2$ dobijamo

$$A=A+(-\mu-\frac{1}{2a})(aA+aB-aC-aD)+\mu(aA+aB-aC-aD)=\frac{A-B+C+D}{2}.$$

Odatle proveravamo da je opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) dato u obliku

$$f(x,y)=\frac{\Pi(x,y)-\Pi(y,x)+\Pi(x,x)+\Pi(y,y)}{2}.$$

2.b.iii) $\boldsymbol{a=-b(\neq 0)}$. Iz uslova $a+b+c+d=0$ zaključujemo $c=-d(\neq 0)$. Λ-sistem $(7)-(10)$ dovodi do veze $\lambda-\mu=-\frac{1}{2a}$. Zamenom rešenja $\lambda=\mu-\frac{1}{2a} \ \wedge \ \mu\in R$ u jednačinu $A=A+\lambda\mathcal{J}_1+\mu\mathcal{J}_2$ dobijamo

$$\begin{aligned} A &= A+(\mu-\tfrac{1}{2a})(aA-aB+cC-cD)+\mu(aA-aB+cC-cD)\\ &= \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B-\tfrac{c}{2a}C+\tfrac{c}{2a}D+2\mu(aA-aB+cC-cD). \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da ako postoji opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) ono je oblika

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}\Pi(x,y)+\frac{1}{2}\Pi(y,x)-\frac{c}{2a}\Pi(x,x)+\frac{c}{2a}\Pi(y,y)\\ &+ 2\mu(a\Pi(x,y)-a\Pi(y,x)+c\Pi(x,x)-c\Pi(y,y)). \end{aligned}$$

Zamenom u polaznu jednačinu $a\ f(x,y)\ -\ a\ f(y,x)\ +\ c\ f(x,x)\ -\ c\ f(y,y)\ =\ 0$ nalazimo vrednost koeficijenta $\mu=0$ $(\lambda=-\frac{1}{2a})$. Samim tim, opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) dato je u vidu

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\Pi(x,y)+\frac{1}{2}\Pi(y,x)-\frac{c}{2a}\Pi(x,x)+\frac{c}{2a}\Pi(y,y).$$

2.b.iv) $\boldsymbol{a^2\neq b^2}$. Iz Λ-sistema $(7)-(10)$ nalazimo jedinstveno rešenje po parametrima

$$\lambda=-\frac{a}{a^2-b^2}\ \wedge\mu=\frac{b}{a^2-b^2}.$$

Zamenom vrednosti $\lambda=-\frac{a}{a^2-b^2}$ i $\mu=\frac{b}{a^2-b^2}$ u jednačinu $A=A+\lambda\mathcal{J}_1+\mu\mathcal{J}_2$ dobijamo da važi

$$A=A-\frac{a}{a^2-b^2}(aA+bB+cC+dD)+\frac{b}{a^2-b^2}(aB+bA+cD+dC).$$

Odatle zaključujemo da je opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) dato u vidu

$$f(x,y) = \frac{bd-ac}{a^2-b^2} \cdot \Pi(x,x) + \frac{bc-ad}{a^2-b^2} \cdot \Pi(y,y).$$

Napomenimo da je pri uslovu $a+b+c+d=0$ ovo *najopštiji slučaj.*

Klasifikacija svih rešenja funkcionalne jednačine (1) data je sa sledećom tablicom:

<table>
<tr><td colspan="4">$\Sigma = a+b+c+d$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\Sigma \neq 0$</td><td>$a^2+b^2=0$</td><td colspan="2">$f = \Pi_1 - \Pi_3$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a^2+b^2 \neq 0$</td><td>$a^2 \neq b^2$</td><td>$f = 0$</td></tr>
<tr><td>$a=b$</td><td>$f = \frac{1}{2}(\Pi_1 - \Pi_2)$</td></tr>
<tr><td>$a=-b$</td><td>$f = \frac{1}{2}(\Pi_1 + \Pi_2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$\Sigma = 0$</td><td rowspan="2">$a^2+b^2=0$</td><td>$c^2+d^2=0$</td><td>$f = \Pi_1$</td></tr>
<tr><td>$c+d \neq 0$</td><td>$f = \Pi_1 - \Pi_3 + \Pi(k,k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$a^2+b^2 \neq 0$</td><td>$a^2 \neq b^2$</td><td>$f = \frac{bd-ac}{a^2-b^2}\Pi_3 + \frac{bc-ad}{a^2-b^2}\Pi_4$</td></tr>
<tr><td>$a=b\neq -c$</td><td>$f = \frac{1}{2}(\Pi_1 - \Pi_2) + \Pi(k,k)$</td></tr>
<tr><td>$a=b=-c$</td><td>$f = \frac{1}{2}(\Pi_1 - \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4)$</td></tr>
<tr><td>$a=-b$</td><td>$f = \frac{1}{2}(\Pi_1 + \Pi_2 - \frac{c}{a}\Pi_3 + \frac{c}{a}\Pi_4)$</td></tr>
</table>

gde je k proizvoljna realna konstanta i gde je $\Pi_1 = \Pi(x,y)$, $\Pi_2 = \Pi(y,x)$, $\Pi_3 = \Pi(x,x)$ i $\Pi_4 = \Pi(y,y)$, za priozvoljnu funkciju $\Pi : R^2 \longrightarrow R$.

Primer 3. S. Prešić *je postavio problem rešiti funkcionalnu jednačinu:*

(1) $$F(z,x,z) = F(z,z,z),$$

po nepoznatoj funkciji $F : R^3 \longrightarrow R$.

Za argument $\mathcal{X} = (x,y,z) \in R^3$ definišimo funkcije $\varepsilon, \alpha, \beta : R^3 \longrightarrow R^3$ redom sa $\mathcal{X} = \varepsilon\mathcal{X} = (x,y,z)$, $\alpha\mathcal{X} = (z,x,z)$ i $\beta\mathcal{X} = (z,z,z)$. Skup $\mathcal{S} = \{\varepsilon, \alpha, \beta\}$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ određuje *prateću semigrupu* $\mathbb{S} = (\mathcal{S}, \circ)$ sa neutralom ε. Cayleyeva tablica semigrupe $\mathbb{S}$ data je sa:

(2)

$\circ$	ε	α	β
ε	ε	α	β
α	α	β	β
β	β	β	β

.

Označimo sa $\Xi = F(\mathcal{X})$, $T = F(\alpha\mathcal{X})$ i $Z = F(\beta\mathcal{X})$ nepoznate vrednosti funkcije $F : R^3 \longrightarrow R$. Zamenama $\mathcal{X} \mapsto \varepsilon\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \alpha\mathcal{X}$ i $\mathcal{X} \mapsto \beta\mathcal{X}$ iz polazne jednačine dobijamo sledeći homogen linearan sistem po Ξ, T i Z

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_1 = F(\alpha\mathcal{X}) - F(\beta\mathcal{X}) = T - Z = 0, \\ \mathcal{J}_2 = F(\alpha\alpha\mathcal{X}) - F(\beta\alpha\mathcal{X}) = Z - Z \equiv 0, \\ \mathcal{J}_3 = F(\alpha\beta\mathcal{X}) - F(\beta\beta\mathcal{X}) = Z - Z \equiv 0. \end{array} \right\}$$

Rešenje prethodnog sistema dato je sa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi = \Xi + \lambda\mathcal{J}_1, \\ T = T + \lambda\mathcal{J}_1^{'} = T, \\ Z = Z + \lambda\mathcal{J}_1^{''} = Z, \end{array} \right\}$$

pri čemu su poslednje dve jednačine dobijene iz prve jednačine zamenama $\mathcal{X} \mapsto \alpha\mathcal{X}$ i $\mathcal{X} \mapsto \beta\mathcal{X}$. Ako se izvrši zamena T i Z u jednačinu $\mathcal{J}_1 = T - Z = 0$, dobijamo istu jednačinu. Dakle Λ-sistem je oblika $0\lambda = 0$, tj. rešenje je ma koji parametar λ. Iz $\Xi = \Xi + \lambda\mathcal{J}_1$, potencijalno opšte reproduktivno rešenje je oblika:

$$F(\mathcal{X}) = \Pi(\mathcal{X}) + \lambda(\Pi(\alpha\mathcal{X}) - \Pi(\beta\mathcal{X})), \tag{3}$$

gde je $\Pi : R^3 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Formula (3) jeste rešenje ako i samo ako je funkcija Π rešenje polazne funkcionalne jednačine. Samim tim homogena semigrupna funkcionalna jednačina (1) nema rešenje u pratećoj semigrupi. Pokazaćemo da funkcionalna jednačina (1) ima rešenje u široj semigrupi.

Definišimo redom funkcije $\alpha_1, \ldots, \alpha_{27} : R^3 \longrightarrow R^3$ kao *varijacije sa ponavljanjem* od tri elementa:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1(\mathcal{X}) = (x,x,x), & \alpha_2(\mathcal{X}) = (x,x,y), & \alpha_3(\mathcal{X}) = (x,x,z),\\
\alpha_4(\mathcal{X}) = (x,y,x), & \alpha_5(\mathcal{X}) = (x,y,y), & \alpha_6(\mathcal{X}) = (x,y,z),\\
\alpha_7(\mathcal{X}) = (x,z,x), & \alpha_8(\mathcal{X}) = (x,z,y), & \alpha_9(\mathcal{X}) = (x,z,z),\\
\alpha_{10}(\mathcal{X}) = (y,x,x), & \alpha_{11}(\mathcal{X}) = (y,x,y), & \alpha_{12}(\mathcal{X}) = (y,x,z),\\
\alpha_{13}(\mathcal{X}) = (y,y,x), & \alpha_{14}(\mathcal{X}) = (y,y,y), & \alpha_{15}(\mathcal{X}) = (y,y,z),\\
\alpha_{16}(\mathcal{X}) = (y,z,x), & \alpha_{17}(\mathcal{X}) = (y,z,x), & \alpha_{18}(\mathcal{X}) = (y,z,z),\\
\alpha_{19}(\mathcal{X}) = (z,x,x), & \alpha_{20}(\mathcal{X}) = (z,x,y), & \alpha_{21}(\mathcal{X}) = (z,x,z),\\
\alpha_{22}(\mathcal{X}) = (z,y,x), & \alpha_{23}(\mathcal{X}) = (z,y,y), & \alpha_{24}(\mathcal{X}) = (z,y,z),\\
\alpha_{25}(\mathcal{X}) = (z,z,x), & \alpha_{26}(\mathcal{X}) = (z,z,y), & \alpha_{27}(\mathcal{X}) = (z,z,z).
\end{array}$$

Posmatrajmo skup funkcija $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{27}\}$ koji u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ obrazuje semigrupu funkcija $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \circ)$. CAYLEeva tablica semigrupe[29] $\mathbb{A}$ data je sa:

$\circ$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	$\alpha_7\alpha_8\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{16}\alpha_{17}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{20}\alpha_{21}$	$\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$
α_1	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_2	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_2\alpha_2\alpha_2$	$\alpha_3\alpha_3\alpha_3$	$\alpha_{13}\alpha_{13}\alpha_{13}$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{15}\alpha_{15}\alpha_{15}$	$\alpha_{25}\alpha_{25}\alpha_{25}$	$\alpha_{26}\alpha_{26}\alpha_{26}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_3	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$
α_4	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_4\alpha_4\alpha_4$	$\alpha_7\alpha_7\alpha_7$	$\alpha_{11}\alpha_{11}\alpha_{11}$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{17}\alpha_{17}\alpha_{17}$	$\alpha_{21}\alpha_{21}\alpha_{21}$	$\alpha_{24}\alpha_{24}\alpha_{24}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_5	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_5\alpha_5\alpha_5$	$\alpha_9\alpha_9\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{10}\alpha_{10}$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{18}\alpha_{18}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{19}\alpha_{19}$	$\alpha_{23}\alpha_{23}\alpha_{23}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_6	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	$\alpha_7\alpha_8\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{16}\alpha_{17}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{20}\alpha_{21}$	$\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$
α_7	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$
α_8	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_2\alpha_5\alpha_8$	$\alpha_3\alpha_6\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{13}\alpha_{16}$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{22}\alpha_{25}$	$\alpha_{20}\alpha_{23}\alpha_{26}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$
α_9	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$
α_{10}	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{10}\alpha_{10}\alpha_{10}$	$\alpha_{19}\alpha_{19}\alpha_{19}$	$\alpha_5\alpha_5\alpha_5$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{23}\alpha_{23}\alpha_{23}$	$\alpha_9\alpha_9\alpha_9$	$\alpha_{18}\alpha_{18}\alpha_{18}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_{11}	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{11}\alpha_{11}\alpha_{11}$	$\alpha_{21}\alpha_{21}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_4\alpha_4$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{24}\alpha_{24}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_7\alpha_7$	$\alpha_{17}\alpha_{17}\alpha_{17}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_{12}	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}$	$\alpha_{19}\alpha_{20}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_5\alpha_6$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_8\alpha_9$	$\alpha_{16}\alpha_{17}\alpha_{18}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$
α_{13}	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{13}\alpha_{13}\alpha_{13}$	$\alpha_{25}\alpha_{25}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_2\alpha_2$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{26}\alpha_{26}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_3\alpha_3$	$\alpha_{15}\alpha_{15}\alpha_{15}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_{14}	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_{14}\alpha_{14}\alpha_{14}$	$\alpha_{27}\alpha_{27}\alpha_{27}$
α_{15}	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}$	$\alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}$
α_{16}	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_{10}\alpha_{13}\alpha_{16}$	$\alpha_{19}\alpha_{22}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_5\alpha_8$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{20}\alpha_{23}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_6\alpha_9$	$\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{18}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$
α_{17}	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_4\alpha_7$	$\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{17}$	$\alpha_{21}\alpha_{24}\alpha_{27}$
α_{18}	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_5\alpha_9$	$\alpha_{10}\alpha_{14}\alpha_{18}$	$\alpha_{19}\alpha_{23}\alpha_{27}$
α_{19}	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$
α_{20}	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_2\alpha_{11}\alpha_{20}$	$\alpha_3\alpha_{12}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_{13}\alpha_{22}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_6\alpha_{15}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_{16}\alpha_{25}$	$\alpha_8\alpha_{17}\alpha_{26}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$
α_{21}	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$
α_{22}	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_4\alpha_{13}\alpha_{22}$	$\alpha_7\alpha_{16}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_{11}\alpha_{20}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_8\alpha_{17}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_{12}\alpha_{21}$	$\alpha_6\alpha_{15}\alpha_{24}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$
α_{23}	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{10}\alpha_{19}$	$\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{23}$	$\alpha_9\alpha_{18}\alpha_{27}$
α_{24}	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{11}\alpha_{21}$	$\alpha_4\alpha_{14}\alpha_{24}$	$\alpha_7\alpha_{17}\alpha_{27}$
α_{25}	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$
α_{26}	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{13}\alpha_{25}$	$\alpha_2\alpha_{14}\alpha_{26}$	$\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{27}$
α_{27}	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$	$\alpha_1\alpha_{14}\alpha_{27}$

[29] FORMIRANA RAČUNAROM POMOĆU ODGOVARAJUĆEG C-PROGRAMA

Uvedimo oznake vrednosti nepoznate funkcije

$$
\begin{array}{lll}
A = F(\alpha_1 \mathcal{X}), & B = F(\alpha_2 \mathcal{X}), & C = F(\alpha_3 \mathcal{X}), \\
D = F(\alpha_4 \mathcal{X}), & E = F(\alpha_5 \mathcal{X}), & \Xi = F(\alpha_6 \mathcal{X}), \\
F = F(\alpha_7 \mathcal{X}), & G = F(\alpha_8 \mathcal{X}), & H = F(\alpha_9 \mathcal{X}), \\
I = F(\alpha_{10} \mathcal{X}), & J = F(\alpha_{11} \mathcal{X}), & K = F(\alpha_{12} \mathcal{X}), \\
L = F(\alpha_{13} \mathcal{X}), & M = F(\alpha_{14} \mathcal{X}), & N = F(\alpha_{15} \mathcal{X}), \\
O = F(\alpha_{16} \mathcal{X}), & P = F(\alpha_{17} \mathcal{X}), & Q = F(\alpha_{18} \mathcal{X}), \\
R = F(\alpha_{19} \mathcal{X}), & S = F(\alpha_{20} \mathcal{X}), & T = F(\alpha_{21} \mathcal{X}), \\
U = F(\alpha_{22} \mathcal{X}), & V = F(\alpha_{23} \mathcal{X}), & W = F(\alpha_{24} \mathcal{X}), \\
X = F(\alpha_{25} \mathcal{X}), & Y = F(\alpha_{26} \mathcal{X}), & Z = F(\alpha_{27} \mathcal{X}).
\end{array}
$$

Koristeći se zamenama možemo uvesti *proizvod* u skupu $\mathcal{B} = \{A, \ldots, Z\}$ na sledeći način:

$$
F(\alpha_i \mathcal{X}) \cdot F(\alpha_j \mathcal{X}) = T_i F(\mathcal{X}) \cdot T_j F(\mathcal{X}) \stackrel{def}{=} T_{p_{ij}} F(\mathcal{X}) = F(\alpha_i \circ \alpha_j \mathcal{X}) \tag{4}
$$

za $i, j \in \mathbb{I}_{27}$. Odatle sleduje da struktura $\mathbb{B} = (\mathcal{B}, \cdot)$ jeste semigrupa izomorfna sa semigrupom $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \circ)$. CAYLEYeva tablica semigrupe $\mathbb{B}$ data je sa:

(5)

·	ABC	DEΞ	FGH	IJK	LMN	OPQ	RST	UVW	XYZ
A	AAA	AAA	AAA	MMM	MMM	MMM	ZZZ	ZZZ	ZZZ
B	AAA	BBB	CCC	LLL	MMM	NNN	XXX	YYY	ZZZ
C	ABC	ABC	ABC	LMN	LMN	LMN	XYZ	XYZ	XYZ
D	AAA	DDD	FFF	JJJ	MMM	PPP	TTT	WWW	ZZZ
E	AAA	EEE	HHH	III	MMM	QQQ	RRR	VVV	ZZZ
Ξ	ABC	DEΞ	FGH	IJK	LMN	OPQ	RST	UVW	XYZ
F	ADF	ADF	ADF	JMP	JMP	JMP	TWZ	TWZ	TWZ
G	ADF	BEG	CΞH	ILO	JMP	KNQ	RUX	SVY	TWZ
H	AEH	AEH	AEH	IMQ	IMQ	IMQ	RVZ	RVZ	RVZ
I	AAA	III	RRR	EEE	MMM	VVV	HHH	QQQ	ZZZ
J	AAA	JJJ	TTT	DDD	MMM	WWW	FFF	PPP	ZZZ
K	ABC	IJK	RST	DEΞ	LMN	UVW	FGH	OPQ	XYZ
L	AAA	LLL	XXX	BBB	MMM	YYY	CCC	NNN	ZZZ
M	AAA	MMM	ZZZ	AAA	MMM	ZZZ	AAA	MMM	ZZZ
N	ABC	LMN	XYZ	ABC	LMN	XYZ	ABC	LMN	XYZ
O	ADF	ILO	RUX	BEG	JMP	SVY	CΞH	KNQ	TWZ
P	ADF	JMP	TWZ	ADF	JMP	TWZ	ADF	JMP	TWZ
Q	AEH	IMQ	RVZ	AEH	IMQ	RVZ	AEH	IMQ	RVZ
R	AIR	AIR	AIR	EMV	EMV	EMV	HQZ	HQZ	HQZ
S	AIR	BJS	CKT	DLU	EMV	ΞNW	FOX	GPY	HQZ
T	AJT	AJT	AJT	DMW	DMW	DMW	FPZ	FPZ	FPZ
U	AIR	DLU	FOX	BJS	EMV	GPY	CKT	ΞNW	HQZ
V	AIR	EMV	HQZ	AIR	EMV	HQZ	AIR	EMV	HQZ
W	AJT	DMW	FPZ	AJT	DMW	FPZ	AJT	DMW	FPZ
X	ALX	ALX	ALX	BMY	BMY	BMY	CNZ	CNZ	CNZ
Y	ALX	BMY	CNZ	ALX	BMY	CNZ	ALX	BMY	CNZ
Z	AMZ	AMZ	AMZ	AMZ	AMZ	AMZ	AMZ	AMZ	AMZ

Primetimo da ako u izrazu $F(\alpha_i \mathcal{X}) + F(\alpha_j \mathcal{X})$ uvedemo zamenu $\mathcal{X} \mapsto \alpha_k \mathcal{X}$ dobijamo izraz

$$
F((\alpha_i \circ \alpha_k)\mathcal{X}) + F((\alpha_j \circ \alpha_k)\mathcal{X})
$$

koji je jednak sa izrazom

$$
F(\alpha_i) \cdot F(\alpha_k) + F(\alpha_j) \cdot F(\alpha_k).
$$

Samim tim, uvođenje zamene $\mathcal{X} \mapsto \alpha_k \mathcal{X}$ ekvivaletno je distributivnom $(\cdot)$-množenju sa desne strane jednačine sa $F(\alpha_k \mathcal{X}) \in \mathcal{B}$ $(k \in \mathbb{I}_{27})$.

Prema prethodnom razmatranju, funkcionalna jednačina (1) nije rešiva u semigrupi $\mathbb{S}$. Ispitajmo rešivost funkcionalne jednačine (1) u široj semigrupi $\mathbb{A}$ (odnosno $\mathbb{B}$). Polazna funkcionalna jednačina, prema prethodnim oznakama, može se zapisati u obliku:

$$F(\alpha_{21}X) - F(\alpha_{27}X) = 0, \tag{6}$$

odnosno u obliku:

$$\mathcal{J}_1 = T - Z = 0. \tag{7}$$

Izvršimo zamene $\mathcal{X} \mapsto \alpha_1\mathcal{X}, \ldots, \mathcal{X} \mapsto \alpha_{27}\mathcal{X}$ u jednačini (6). Prema tablici proizvoda (5) iz jednakosti (7), $(\cdot)$-množenjem sa desne strane, dobijamo redom sledeće *netrivijalne proizvode*:

$$\left\{\begin{array}{c} \mathcal{J}_1 = T - Z = 0, \\ \mathcal{J}_2 = J - M = 0, \\ \mathcal{J}_3 = D - A = 0, \\ \mathcal{J}_4 = W - Z = 0, \\ \mathcal{J}_5 = F - A = 0, \\ \mathcal{J}_6 = P - M = 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Ostali proizvodi su trivijalni, tj. dovode do izraza koji su indetički jednaki 0. Samim tim rešenje, po $\Xi = F(x, y, z)$, tražimo u obliku:

$$\Xi = \Xi + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \mathcal{J}_i, \tag{9}$$

za nepoznate realne parametre $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$. Jednačina (9) eksplicitno data je u obliku

$$\begin{array}{ccccccc} \Xi & = & \Xi & + & \lambda_1(T - Z) & + & \lambda_2(J - M) \\ & & & + & \lambda_3(D - A) & + & \lambda_4(W - Z) \\ & & & + & \lambda_5(F - A) & + & \lambda_6(P - M). \end{array}$$

Iz prethodne jednačine zamenom $\mathcal{X} \mapsto \alpha_{21}\mathcal{X}$, odnosno distributivnom $(\cdot)$-množenjem sa desna sa T, dobijamo jednačinu

$$\begin{array}{ccccccc} T & = & T & + & \lambda_1(Z - Z) & + & \lambda_2(F - A) \\ & & & + & \lambda_3(T - Z) & + & \lambda_4(T - Z) \\ & & & + & \lambda_5(Z - Z) & + & \lambda_6(F - A), \end{array}$$

odnosno jednačinu:

$$T = T + (\lambda_3 + \lambda_4)(T - Z) + (\lambda_2 + \lambda_6)(F - A). \tag{10}$$

Iz jednačine (9) zamenom $\mathcal{X} \mapsto \alpha_{27}\mathcal{X}$, odnosno distributivnim $(\cdot)$-množenjem sa desna sa Z, dobijamo jednačinu

$$\begin{array}{ccccccc} Z & = & Z & + & \lambda_1(Z - Z) & + & \lambda_2(Z - Z) \\ & & & + & \lambda_3(Z - Z) & + & \lambda_4(Z - Z) \\ & & & + & \lambda_5(Z - Z) & + & \lambda_6(Z - Z), \end{array}$$

odnosno trivijalnu jednačinu:

$$Z = Z. \tag{11}$$

Zamenom vrednosti za T i Z redom iz jednačina (10) i (11) u jednačinu (3) dobijamo

$$\begin{aligned} T - Z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & -(\lambda_2 + \lambda_6) \cdot A + (\lambda_2 + \lambda_6) \cdot F \\ & +(1 + \lambda_3 + \lambda_4) \cdot T - (1 + \lambda_3 + \lambda_4) \cdot Z = 0. \end{aligned}$$

Odatle dobijamo Λ-sistem:

(12) $$\left\{ \ \lambda_4 = -1 - \lambda_3 \qquad \wedge \qquad \lambda_6 = -\lambda_2 \ \right\}$$

Samim tim jednačina (9) može se predstaviti u obliku:

(13) $$\begin{array}{ccccccc} \Xi & = & \Xi & + & \lambda_1(T-Z) & + & \lambda_2(J-M) \\ & & & + & \lambda_3(D-A) & - & (1+\lambda_3)(W-Z) \\ & & & + & \lambda_5(F-A) & - & \lambda_2(P-M). \end{array}$$

Odatle opšte reproduktivno rešenje, ako postoji, ono je oblika:

(14) $$\begin{array}{ccccc} F(x,y,z) & = & \Pi(x,y,z) & + & \lambda_1(\Pi(z,x,z) - \Pi(z,z,z)) \\ & & & + & \lambda_2(\Pi(y,x,y) - \Pi(y,y,y)) \\ & & & + & \lambda_3(\Pi(x,y,x) - \Pi(x,x,x)) \\ & & & - & (1+\lambda_3)(\Pi(z,y,z) - \Pi(z,z,z)) \\ & & & + & \lambda_5(\Pi(x,z,x) - \Pi(x,x,x)) \\ & & & - & \lambda_2(\Pi(y,z,x) - \Pi(y,y,y)). \end{array}$$

Izvršimo zamenu prethodne funkcije u polaznu funkcionalnu jednačinu. Tada dobijamo jednakost

$$F(z,x,z) = \Pi(z,z,z) + \lambda_2 \cdot (\Pi(x,z,x) - \Pi(x,z,z)) = \Pi(z,z,z) = F(z,z,z)$$

koja je tačna akko važi dodatni uslov:

(15) $$\lambda_2 = 0.$$

Za proizvoljnu funkciju $\Pi : R^3 \longrightarrow R$ i proizvoljne realne parametre $\lambda_1 = p, \lambda_3 = q, \lambda_5 = r \in R$ opšte reproduktivno rešenje polazne funkcionalne jednačine (1) dato je u obliku:

(16) $$\left\{ \begin{array}{ccccc} F(x,y,z) & = & \Pi(x,y,z) & + & p(\Pi(z,x,z) - \Pi(z,z,z)) \\ & & & + & q(\Pi(x,y,x) - \Pi(x,x,x)) \\ & & & - & (1+q)(\Pi(z,y,z) - \Pi(z,z,z)) \\ & & & + & r(\Pi(x,z,x) - \Pi(x,x,x)). \end{array} \right\}$$

Primer 4. D. Mitrinović *i* P. Vasić [DM-PV1] *postavili su problem odrediti opšte rešenje funkcionalne jednačine*:

(1) $$f(x_1,x_2,x_3) - f(x_2,x_1,x_3) = f(x_1,x_1,x_3) + f(x_2,x_1,x_2),$$

po funkciji $f : E^3 \longrightarrow M$, *gde je* E *neprazan skup i* M *skup koji odredjuje* Abel*ovu grupu u kojoj jednačina* $2X = A$ $(X, A \in M)$ *ima jedinstveno rešenje po* X.

Rešenja postavljenog problema dali su M. KUCZMA [MK1] i P. VASIĆ [DM-PV2]. Pri tom P. VASIĆ dao je rešenje bez dodatne pretpostavke da jednačina $2X = A$ $(X, A \in M)$ ima jedinstveno rešenje po X.

Navodimo rešenje primenom PREŠIĆevog Λ–metoda. Iz funkcionalne jednačine (1) zaključujemo da je $f(x_1, x_1, x_1) = 0$ i $f(x_1, x_1, x_3) = 0$. Funkcionalna jednačina

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(x_2, x_1, x_3) = f(x_2, x_1, x_2), \tag{2}$$

koja se izvodi iz (1), uz dodatni uslov $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, ekvivaletna je sa polaznom funkcionalnom jednačinom (1). Opšte rešenje funkcionlne jednačine (2) tražimo uz pretpostavku[31] $x_1 \neq x_2$. Tako dobijeno rešenje dopunjujemo sa 0 kao rešenjem u slučaju $x_1 = x_2$.

Za $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ uvedimo funkcije $i, \alpha, \beta : R^3 \longrightarrow R^3$ na sledeći način $i\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\alpha\mathcal{X} = (x_2, x_1, x_3)$ i $\beta\mathcal{X} = (x_2, x_1, x_2)$. Skup $\{i, \alpha, \beta\}$ nije zatvoren za kompoziciju $(\circ)$. Dopunimo prethodni skup sa funkcijama $\gamma, \delta, \eta : R^3 \longrightarrow R^3$ definisanim redom sa $\gamma\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_2)$, $\delta\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_1)$ i $\eta\mathcal{X} = (x_2, x_1, x_1)$. Na taj način skup $S = \{i, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta\}$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ obrazuje semigrupu sa jedinicom $\mathbb{S} = (S, \circ)$. Odgovarajuća CAYLEYeva tablica semigrupe $\mathbb{S}$ data je sa:

(3)

$\circ$	i	α	β	γ	δ	η
i	i	α	β	γ	δ	η
α	α	i	δ	η	β	γ
β	β	γ	δ	η	β	γ
γ	γ	β	β	γ	δ	η
δ	δ	η	β	γ	δ	η
η	η	δ	δ	η	β	γ

Označimo sa $I = f(i\mathcal{X}), A = f(\alpha\mathcal{X}), B = f(\beta\mathcal{X}), C = f(\gamma\mathcal{X}), D = f(\delta\mathcal{X})$ i $E = f(\eta\mathcal{X})$ nepoznate vrednosti funkcije $f : R^3 \longrightarrow R$. Polazeći od jednačine (2) dobijamo linearnu jednačinu:

$$\mathcal{J}_1 = I - A - B = 0. \tag{4}$$

Uvedimo redom zamene: $\mathcal{X} \mapsto i\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \alpha\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \beta\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \gamma\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \delta\mathcal{X}$ i $\mathcal{X} \mapsto \eta\mathcal{X}$ tada prethodna jednačina ekvivaletna je sa linearnim sistemom:

$$\left\{\begin{array}{rcccl} \mathcal{J}_1 & = & I - A - B & = & 0, \\ \mathcal{J}_2 & = & A - I - C & = & 0, \\ \mathcal{J}_3 & = & B - 2\,D & = & 0, \\ \mathcal{J}_4 & = & C - 2\,E & = & 0, \\ \mathcal{J}_5 & = & D - 2\,B & = & 0, \\ \mathcal{J}_6 & = & E - 2\,C & = & 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

[31] IZ FUNKCIONALNE JEDNAČINE (2) ZAMENAMA NIJE IZVODIV USLOV $f(x_1, x_1, x_3) = 0$

Rešenje po I tražimo u obliku:

$$I = I + \lambda_1 \mathcal{J}_1 + \lambda_2 \mathcal{J}_2 + \lambda_3 \mathcal{J}_3 + \lambda_4 \mathcal{J}_4 + \lambda_5 \mathcal{J}_5 + \lambda_6 \mathcal{J}_6 \tag{6}$$

Izvršimo redom zamene $X \mapsto \alpha X$ i $X \mapsto \beta X$ u jednačini (6). Tada dobijamo:

$$A = A + \lambda_1 \mathcal{J}_2 + \lambda_2 \mathcal{J}_1 + \lambda_3 \mathcal{J}_4 + \lambda_4 \mathcal{J}_3 + \lambda_5 \mathcal{J}_6 + \lambda_6 \mathcal{J}_5 \tag{7}$$

i

$$B = B + \lambda_1 \mathcal{J}_3 + \lambda_2 \mathcal{J}_5 + \lambda_3 \mathcal{J}_5 + \lambda_4 \mathcal{J}_3 + \lambda_5 \mathcal{J}_3 + \lambda_6 \mathcal{J}_5. \tag{8}$$

Samim tim zamenom prethodnih izraza za I, A i B u jednačinu (4), dobijamo:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}_1 & = & (2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 1)\, I + \\ & & (2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 1)\, A + \\ & & (2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 + 2\lambda_4 + 3\lambda_5 - 4\lambda_6 + 1)\, B + \\ & & (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + 2\lambda_5 - 2\lambda_6)\, C + \\ & & (2\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 3\lambda_5 - 2\lambda_6)\, D + \\ & & (2\lambda_3 - 2\lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6)\, E = 0, \end{array}$$

odnosno dobijamo Λ-sistem:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 1 = 0, \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 1 = 0, \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 + 2\lambda_4 + 3\lambda_5 - 4\lambda_6 + 1 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + 2\lambda_5 - 2\lambda_6 = 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 3\lambda_5 - 2\lambda_6 = 0, \\ 2\lambda_3 - 2\lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 = 0. \end{array} \right\} \tag{9}$$

Rešenje Λ-sistema dato je u obliku:

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 = t, \quad \lambda_2 = t + \frac{1}{2}, \\ \lambda_3 = s, \quad \lambda_4 = s - \frac{1}{6}, \\ \lambda_5 = -t - s + \frac{1}{2}, \quad \lambda_6 = -t - s + \frac{1}{6}, \end{array} \right\} \tag{10}$$

gde su t, s proizvoljni parametri. Iz formule (6) nalazimo:

$$\begin{array}{rcl} I & = & \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} A + (3s + t - 1) B + \\ & & (3s + t - 1) C - \frac{1}{2}(6s + 2t - 1) D - \frac{1}{2}(6s + 2t - 1) E. \end{array}$$

Označimo $\tau = 3s + t - 1$, tada prethodna jednakost je data u obliku:

$$I = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} A + \tau B + \tau C - (\tau + \frac{1}{2}) D - (\tau + \frac{1}{2}) E. \tag{11}$$

Potencijalno opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1), ako postoji, dato je u obliku:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} \frac{1}{2}\Pi(x_1,x_2,x_3)+\frac{1}{2}\Pi(x_2,x_1,x_3)+ \\ \tau\Big(\Pi(x_2,x_1,x_2)+\Pi(x_1,x_2,x_2)\Big)- \\ (\tau+\frac{1}{2})\Big(\Pi(x_1,x_2,x_1)+\Pi(x_2,x_1,x_1)\Big) & : \; x_1\neq x_2, \\ \\ 0 & : \; x_1=x_2, \end{cases}$$

gde je $\tau\in R$. Zamenom prethodne funkcije u funkcionalnu jednačinu (2) nalazimo da samo za vrednost parametra $\tau=-\frac{1}{6}$ sa prethodnom funkcijom dato je rešenje funkcionalne jednačine (2). Samim tim opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (1) dato je u sledećem obliku:

$$(12)\qquad f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} \frac{1}{2}\Pi(x_1,x_2,x_3)+\frac{1}{2}\Pi(x_2,x_1,x_3)- \\ -\frac{1}{6}\Big(\Pi(x_2,x_1,x_2)+\Pi(x_1,x_2,x_2)\Big)- \\ -\frac{1}{3}\Big(\Pi(x_1,x_2,x_1)+\Pi(x_2,x_1,x_1)\Big) & : \; x_1\neq x_2, \\ \\ 0 & : \; x_1=x_2. \end{cases}$$

Navedimo opšte rešenje koje je dao M. Kuczma i P. Vasić. Za skup $E^3=E\times E\times E$ definišimo podskupove: $A=\{(x_1,x_2,x_3):x_1=x_2\}$, $B_0=\{(x_1,x_2):(x_2,x_1)\notin B_0\wedge x_1\neq x_2\}\subset E^2$, $B=B_0\times E$, $C=(E\times E\times E)\backslash(A\cup B)$, $D=\{(x_1,x_2,x_3):x_2=x_3\}\cap B$ i $F=\{(x_1,x_2,x_3):x_1=x_3\}\cap C$. M. Kuczma, u radu [MK1], dao je opšte rešenje u obliku funkcije:

$$(13)\qquad f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} g(x_1,x_2,x_3) & : \; (x_1,x_2,x_3)\in B\backslash D, \\ -2g(x_1,x_2,x_3)+a(x_1) & : \; (x_1,x_2,x_3)\in D, \\ g(x_2,x_1,x_3)+g(x_2,x_1,x_2)+a(x_1) & : \; (x_1,x_2,x_3)\in C\backslash F, \\ -g(x_2,x_1,x_2)+a(x_1)+a(x_2) & : \; (x_1,x_2,x_3)\in F, \\ a(x_1) & : \; (x_1,x_2,x_3)\in A, \end{cases}$$

za proizvoljne dve funkcije: $g:E^3\longrightarrow M$ i $a:E\longrightarrow M$, pri čemu funkcija a ispunjava $a(x)=-a(x)$. P. Vasić dao je opšte rešenje u obliku:

$$(14)\qquad f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} H(x_1,x_2,x_3)+H(x_2,x_1,x_3)+G(x_1,x_2) & : \; x_1\neq x_2\wedge x_1\neq x_3, \\ G(x_2,x_1)-G(x_1,x_2) & : \; x_1=x_3, \\ 0 & : \; x_1=x_2, \end{cases}$$

za proizvoljne dve funkcije $H:E^3\longrightarrow M$ i $G:E^2\longrightarrow M$.

Dobijeno opšte rešenje (12) jeste reproduktivno i ono zavisi od jedne funkcije. Sa formulom (12) pokazano je da za opšte rešenje nije neophodno uvesti proizvoljne funkcije različitih „arnosti” kao u slučaju formula (13) i (14).

Primer 5. D. Sincov (*prema* [DM-PV2]) *postavio je problem određivanja opšteg rešenja funkcionalne jednačine*:

$$(1)\qquad f(x_1,x_2)+f(x_2,x_3)=f(x_1,x_3),$$

po nepoznatoj funkciji $f:R^2\longrightarrow R$.

Neka je k proizvoljna realna konstanta. Funkcionalnu jednačinu (1) možemo razmatrati u širem „*upotpunjenom*" *obliku*:

$$\varphi(k,k,x_1,x_2)+\varphi(k,k,x_2,x_3)=\varphi(k,k,x_1,x_3), \tag{2}$$

po nepoznatoj funkciji $\varphi : R^4 \longrightarrow R$. Ako je $\varphi(k,x_1,x_2,x_3)$ opšte rešenje funkcionalne jednačine (2), tada je $f(x_1,x_2)=\varphi(k,k,x_1,x_2)$ opšte rešenje funkcionalne jednačine (1). Dalje, označimo sa $\mathcal{X}=(k,x_1,x_2,x_3)$ četvorku elemenata iz R^4 tako da su sa x_1,x_2,x_3 označene promenljive. Uvedimo funkcije i, α, β, γ, δ, η, ξ i κ na sledeći način: $i\mathcal{X}=(k,x_1,x_2,x_3)$, $\alpha\mathcal{X}=(k,k,x_1,x_2)$, $\beta\mathcal{X}=(k,k,x_2,x_3)$, $\gamma\mathcal{X}=(k,k,x_1,x_3)$, $\delta\mathcal{X}=(k,k,k,x_1)$, $\eta\mathcal{X}=(k,k,k,x_2)$, $\xi\mathcal{X}=(k,k,k,x_3)$ i $\kappa\mathcal{X}=(k,k,k,k)$. Skup $S=\{i,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta,\xi,\kappa\}$ u odnosu na kompoziciju $(\circ)$ obrazuje semigrupu sa jedinicom $\mathbb{S}=(S,\circ)$. Odgovarajuća CAYLEYeva tablica semigrupe data je sa:

(3)

$\circ$	i	α	β	γ	δ	η	ξ	κ
i	i	α	β	γ	δ	η	ξ	κ
α	α	δ	α	η	κ	δ	η	κ
β	β	η	β	ξ	κ	η	ξ	κ
γ	γ	δ	γ	ξ	κ	δ	ξ	κ
δ	δ	κ	δ	δ	κ	κ	δ	κ
η	η	κ	η	η	κ	κ	η	κ
ξ	ξ	κ	ξ	ξ	κ	κ	ξ	κ
κ	κ	κ	κ	κ	κ	κ	κ	κ

Dalje, označimo sa $I=\varphi(i\mathcal{X})$, $A=\varphi(\alpha\mathcal{X})$, $B=\varphi(\beta\mathcal{X})$, $C=\varphi(\gamma\mathcal{X})$, $D=\varphi(\delta\mathcal{X})$, $E=\varphi(\eta\mathcal{X})$, $F=\varphi(\xi)$ i $K=\varphi(\kappa\mathcal{X})$ nepoznate vrednosti funkcije $\varphi : R^4 \longrightarrow R$. Polazeći od jednačine:

$$\mathcal{J}_1 = A+B-C=0, \tag{4}$$

uvodeći redom zamene: $\mathcal{X}\mapsto i\mathcal{X}$, $\mathcal{X}\mapsto \alpha\mathcal{X}$, $\mathcal{X}\mapsto \beta\mathcal{X}$, $\mathcal{X}\mapsto \gamma\mathcal{X}$, $\mathcal{X}\mapsto \delta\mathcal{X}$, $\mathcal{X}\mapsto \eta\mathcal{X}$, $\mathcal{X}\mapsto \xi\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}\mapsto \kappa\mathcal{X}$ dobijamo sledeći linearan sistem:

$$\left\{\begin{array}{lclcl}
\mathcal{J}_1 &=& A+B-C &=& 0,\\
\mathcal{J}_2 &=& E &=& 0,\\
\mathcal{J}_3 &=& A+B-C &=& 0,\\
\mathcal{J}_4 &=& E &=& 0,\\
\mathcal{J}_5 &=& K &=& 0,\\
\mathcal{J}_6 &=& E &=& 0,\\
\mathcal{J}_7 &=& E &=& 0,\\
\mathcal{J}_8 &=& K &=& 0.
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Rešenje po I tražimo u obliku:

$$\begin{array}{rcl}
I &=& I+\lambda_1\mathcal{J}_1+\lambda_2\mathcal{J}_2+\lambda_3\mathcal{J}_3+\lambda_4\mathcal{J}_4+\lambda_5\mathcal{J}_5+\lambda_6\mathcal{J}_6+\lambda_7\mathcal{J}_7+\lambda_8\mathcal{J}_8\\
&=& I+\lambda_1\mathcal{J}_1+\lambda_2\mathcal{J}_2+\lambda_3\mathcal{J}_1+\lambda_4\mathcal{J}_2+\lambda_5\mathcal{J}_5+\lambda_6\mathcal{J}_2+\lambda_7\mathcal{J}_2+\lambda_8\mathcal{J}_5\\
&=& \lambda_1\mathcal{J}_1+(\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6+\lambda_7)\mathcal{J}_2+(\lambda_3+\lambda_8)\mathcal{J}_5.
\end{array} \tag{6}$$

Uvedimo oznake $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \lambda_7$ i $\tau = \lambda_3 + \lambda_8$, tada opšte rešenje tražimo u obliku:

$$I = I + \lambda \mathcal{J}_1 + \mu \mathcal{J}_2 + \tau \mathcal{J}_5. \tag{7}$$

Izvršimo redom zamene $\mathcal{X} \mapsto \alpha\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \beta\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \mapsto \gamma\mathcal{X}$ u jednačini (7), tada dobijamo:

$$A = A + \lambda \mathcal{J}_2 + \mu \mathcal{J}_3 + \tau \mathcal{J}_5, \tag{8}$$

$$B = B + \lambda \mathcal{J}_1 + \mu \mathcal{J}_2 + \tau \mathcal{J}_5 \tag{9}$$

i

$$C = C + \lambda \mathcal{J}_2 + \mu \mathcal{J}_2 + \tau \mathcal{J}_5. \tag{10}$$

Zamenom prethodnih izraza za A, B i C u jednačinu (4), dobijamo:

$$\mathcal{J}_1 = (\lambda + 1)A + (\lambda + 1)B - (\lambda + 1)C + (\mu + \tau)K = 0,$$

odnosno dobijamo Λ-sistem:

$$\left\{ \lambda + 1 = 0 \quad \wedge \quad \mu + \tau = 0 \right\} \tag{11}$$

Rešenje Λ-sistema linearnih jednačina dato je u obliku:

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda = -1 \\ \mu = -t \\ \tau = t \end{array} \right\} \tag{12}$$

gde je t realni parametar. Iz formule (7) nalazimo:

$$I = I - (A + B - C) + t(E - K)$$

Potencijalno opšte reproduktivno rešenje funkcionalne jednačine (2) dato je u obliku:

$$\begin{aligned} \varphi(k, x_1, x_2, x_3) \;=\; & \Phi(k, x_1, x_2, x_3) - \\ & (\Phi(k, k, x_1, x_2) + \Phi(k, k, x_2, x_3) - \Phi(k, k, x_1, x_3)) + \\ & t(\Phi(k, k, k, x_2) - \Phi(k, k, k, k)), \end{aligned} \tag{13}$$

gde je t realni parametar i gde je $\Phi : R^4 \longrightarrow R$ ma koja funkcija. Zamenom prethodne funkcije u funkcionalnu jednačinu (2) određujemo vrednost parametra $t = 0$. Odatle dobijamo opšte rešenje funkcionalne jednačine (1) u obliku:

$$f(x, y) = \varphi(k, k, x, y) = \Phi(k, k, k, y) - \Phi(k, k, k, x) = \Pi(y) - \Pi(x), \tag{14}$$

gde je $\Pi : R \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Navedenim postupkom „upotpunjavanja” zaključujemo da „nepotpune” semigrupne funkcionalne jednačine moguće je razmatrati u širem obliku semigrupnih funkcionalnih jednačina.

Napomena 1. Za funkcionalnu jednačinu (1) važi jednakost $f(x_1, x_1) = 0$. Ako stavimo $x_1 = x_3$ dobijamo jednakost $f(x_3, x_2) + f(x_2, x_3) = f(x_3, x_3) = 0$, odnosno $f(x_2, x_3) = -f(x_3, x_2)$. Samim tim funkcionalna jednačina (1) svodi se na funkcionalnu jednačinu:

$$f(x_1, x_2) + f(x_2, x_3) + f(x_3, x_1) = 0. \tag{15}$$

Obratno, analogno se dokazuje da se funkcionalna jednačina (15) svodi na funkcionalnu jednačinu (1). Primetimo da je funkcionalna jednačina (15) nepotpuna ciklična funkcionalna jednačina:

$$\sum_{k=0}^{n-1} C^k f(x_1, \ldots, x_m) = 0 \tag{16}$$

koju su razmatrali Aczel, Ghermanescu i Hosszu [JA-MG-MH] pri uslovu $m < n$. U navedenom radu pokazano je da u slučaju $(m <)2m - 1 \leq n$ opšte rešenje dato sa: $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Pi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) - \Pi(x_2, x_3, \ldots, x_m)$, gde je $\Pi : R^{m-1} \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija. Konkretno za funkcionalnu jednačinu (1) imamo vrednosti $m = 2$, $n = 3$ za koje ispunjeno $2m - 1 \leq n$. Primetimo da se rešenje dobijeno Prešićevom Λ–metodom podudara se sa rešenjem Aczel, Ghermanescu, Hosszu [JA-MG-MH].

Napomena 2. Na kraju napomenimo da za funkcionalnu jednačinu (1) vezan je jedan interesantan „paradoks" u teoriji funkcionalnih jednačina da, i ako znamo opšte rešenje jedne opštije funkcionalne jednačine, nismo u mogućnosti da dobijemo iz tog rešenja rešenje jedne specijalne jednačine [DM-PV2]. Funkcionalna jednačina (1) može se svesti na Cauchyevu funkcionalnu jednačinu:

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2), \tag{17}$$

po nepoznatoj funkciji $F : R \longrightarrow R$ (videti problem 6.1.15. zbornika [DM-PV2]). Samim tim zaključujemo da klasa „nepotpunih" semigrupnih funkcionalnih jednačina dovoljno široka da postoji funkcionalna jednačina (1) iz koja se može dobiti Cauchyeva funkcionalna jednačina (17). Medjutim, iz opšteg rešenja „nepotpune" semigrupne funkcionalne jednačine nismo u mogućnosti da dobijemo opšte rešenje Cauchyeve funkcionalne jednačine, jer se rešavanje Cauchyeve funkcionalne jednačine, na taj način, svodi se na rešavanje odgovarajuće Pexiderove funkcionalne jednačine.

$*$

OZNAKE

$\mathcal{T}$	istinitnosna vrednost
$\top$, $\perp$	tačno, netačno
$\emptyset$	prazan skup
$\mathbb{I}_n$	skup prvih n prirodnih brojeva $1, \dots, n$
$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	skupovi prirodnih, realnih, kompleksnih brojeva
$\mathbb{C}^{m\times n}$	skup kompleksnih matrica formata $m \times n$
$\mathbb{C}_r^{m\times n}$	skup kompleksnih matrica ranga r i formata $m \times n$
$Adj(A)$	adjungovana matrica A
$\lvert A\rvert$, $Det(A)$	determinanta kvadratne matrice A
A^{-1}	inverzna matrica ($A \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$)
I, I_n	jedinična matrica
$I = I(x)$	identičko preslikavanje
e_i	jedinični vektor $\quad [0 \dots 0\underset{(i)}{1}0 \dots 0]^{\mathrm{T}} \quad$ u prostoru $\mathbb{R}^n$
E_r	matrica sa r jedinica na prvih r mesta diajgonale i na ostalim mestima sa nula elementima ($E_r \in \mathbb{C}_r^{n\times m}$)
L_i	matrica elementarne transformacije na vrstama
R_j	matrica elementarne transformacije na kolonama
$\mathcal{A} : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$	linearna transformacija prostora $\mathbb{C}^k$
$R(A)$	prostor slike matrice A
$N(A)$, $Ker(A)$	nula prostor matrice A, jezgro matrice A
$rank(A)$	rang matrice A
$Ind(A)$	indeks matrice A
$\vec{A}$	vektor dobijen upisivanjem vrsta matrice A
$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]_{\rightarrow}$	matrica M zapisana po vrstama
$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]_{\downarrow}$	matrica M zapisana po vrstama
$\vec{A}^{(j)}$	j-ta kolona matrice A
A^T	transponovana matrica A
A^*	konjugovano-transponovana matrica A
$\otimes$	KRONECKERov ili tenzorski proizvod matrica
$A\{j\}$	skup j-inverza matrice A, ($j = 1, 1^k, 2, 3, 4, 5, 5^k$)
$A^{(j)}$	ma koji $A\{j\}$-inverz ($j = 1, 1^k, 2, 3, 4, 5, 5^k$)
$\lVert\vec{x}\rVert \overset{def}{=} \sqrt{\vec{x}^* \cdot \vec{x}}$	norma vektora $\lVert\vec{x}\rVert = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\vec{x} \in \mathbb{C}^n)$

$\lambda^{\dagger}$	uopšteni inverz skalara $\lambda^{\dagger} \overset{def}{=} \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda^{-1} & : & \lambda \neq 0 \\ 0 & : & \lambda = 0 \end{array} \right\}$
$A^{\dagger}$	MOORE-PENROSEov inverz
$A^{\#}$	grupni inverz matrica A
A^{D}	DRAZINeov inverz matrice A
$\lambda_i = \lambda_i(A)$	sopstvena (karakteristična) vrednost matrice A
$\sigma_i \overset{def}{=} \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$	singularna vrednost matrice A
$\mathcal{R}_{A,\lambda}$	Λ-prostor matrice A
$\mathcal{R}_{A,0}$	nula-prostor matrice A
$\mu(x)$	minimalni polinom matrice
$q(x)$	q-polinom matrice $q(x) \overset{def}{=} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{c_k x^k - \mu(x)}{c_k x^{k+1}} & : & x \neq 0 \\ -\frac{c_{k+1}}{c_k} & : & x = 0 \end{array} \right\}$
$\mathcal{F} = \{f : S \longrightarrow C\}$	skup funkcija $f : S \longrightarrow C$
$\Pi : S \longrightarrow C$	proizvoljna funkcija iz skupa $\mathcal{F}$
$a \mapsto b$	zamena izraza a sa izrazom b
$\theta_i : S \longrightarrow S$	bijekcije nepraznog skupa S na samog sebe
$\mathbb{G}$	prateća grupa
$p_{ik} = p_i(k)$	vrednost p-permutacije p_i za $k \in \mathbb{I}_n$
$\mathbb{P}$	grupa p-permutacija
$q_{kj} = q_k(j)$	vrednost q-permutacije q_k za $j \in \mathbb{I}_n$
$\mathbb{Q}$	grupa q-permutacija
$M_k = [\alpha_{ij}^k]$	M-matrice sa elementima $\alpha_{ij}^k = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & : & j = p_{ik} \\ 0 & : & j \neq p_{ik} \end{array} \right.$
$\mathbb{M}$	grupa M-matrica
$@k$	parametri u `DERIVE`-u za konačan skup $k = 1, 2, \ldots$
`RHS`	desna strana izraza u `DERIVE`-u
`ELEMENT`	element matrice u `DERIVE`-u
`SOLVE`	procedura za rešavanje linearnih sistema u `DERIVE`-u
$\mathfrak{S}$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$	prateće semigrupe
$\blacksquare$	kraj dokaza

LITERATURA

1. **[JA-MG-MH]** J. Aczél, M. Ghermanescu, M. Hosszú: *On cyclic equations*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 5 A, 215-221, Budampeast 1960.

2. **[JA]** J. Aczél: *Lectures on functional equations and their applications*, New York, London 1966.

3. **[AB1]** A. Bjerhammar: *Theory of errors and generalized matrix inverses*, Elsevier sci. publ. comp., New York 1973.

4. **[AB2]** A. Bjerhammar: *Applications of calculus of matrices to the method of least squares with special references to geodetic calculations*, Trans. R. Inst. Technol. 49. Stockholm 1951.

5. **[ABI-TG]** A. Ben-Israel, T. N. E. Greville: *Generalized Inverse, Theory and Applications*, John Wiley & Sons (Pure & applied mathematics–monographs), New York 1974.

6. **[ABI-RB]** A. Ben-Israel, R.B. Bapt: *Singular Values and Maximum Rank Minors of Generalized Inverses*, Reutcor Research Report 1995 (To appear in *Lin. and Multilin. Alg.*)

7. **[ABI]** A. Ben-Israel: *Generalized inverses of matrices*: *a perspective of the work of Penrose*, Math. Proc. Proc. Cambridge Philos. Soc. 100 (1986), 407-425.

8. **[LB]** L. Bernardin: *A Review of Symbolic Solvers*, preprint 1997, `http://www.inf.ethz.ch/personal/bernardi/solve/review_A4.ps`

9. **[SC-CM]** S. L. Campbell, C. D. Meyer: *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Dover books, New York 1992.

10. **[RC]** R. E. Cline: *Inverse of rank invariant powers of a matrix*, SIAM J. Numer. Anal. 5, 182 – 197, 1968.

11. **[DC]** D. Cvetković: *Kombinatorna teorija matrica*, Beograd 1980.

12. **[MC-RJ-DM]** M. Cvetković, R. Jančić, D. Mitraković: *Matematički programski alati*, Grifon, Beograd 1996.

13. **[PD]** P. J. Davis: *Circulant matrices*, John Wiley & Sons (Pure & applied mathematics–monographs), New York 1979.

14. **[MD]** M. P. Drazin: *Pseudo-inverses in associative rings and semigroups*, American Mathematical Monthly 65, 506-514, 1958.

15. **[MG1]** M. Ghermănescu: *Sur quelques equations foctionnelles lineaires*, Bull. Soc. Math. France 68 (1940), 109-128.

16. **[MG2]** M. Ghermănescu: *Ecuatii functionale*, Bucuresti 1960.

17. **[MH1]** M. Haverić: *Uopšteni inverz*, Magistarska teza, Beograd 1982.

18. **[MH2]** M. Haverić: *Formulae for general reproductive solutions of certain matrix equations*, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 42 (48) 1983.

19. **[MH3]** M. Haverić: *O jednom rezultatu A.B. Israela i T.N.E. Grevillea*, Radovi odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka, knjiga 24, Sarajevo 1985.

20. **[AH]** A. Heck: *Grand Tour of Derive*, CAN Expertise Center 1995, `http://www.can.nl/SystemsOverview/General/Derive/Derive.ps.gz`

21. **[ХИ]** Х. Д. Икрамов: *Задачник по линейной алгебре*, Наука, Москва 1975.

22. **[JK1]** J. Kečkić: *Four variations on a theme of S. B. Prešić concerning semigroup functional equations*, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 29 (43) 1981.

23. **[JK2]** J. Kečkić: *Reproductivity of some equations of analysis* I, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 31 (45) 1982.

24. **[JK3]** J. Kečkić: *Reproductivity of some equations of analysis* II, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 33 (47) 1983.

25. **[JK4]** J. Kečkić: *On general solutions of some functional equations*, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 35 (49) 1984.

26. **[JK5]** J. Kečkić: *Explicit solutions of some linear matrix equations*, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 35 (49) 1984.

27. **[JK6]** J. Kečkić: *The general linear equation on vector spaces*, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 37 (51) 1985.

28. **[AK-ЮM]** A. И. Кострикин, Ю. И. Манин: *Линейная алгебра и геометрия*, МГУ, Москва 1980.

29. **[MK1]** M. Kuczma: *Solution d'un probléme de D. S. Mitrinović concernant une équation fonctionnelle*, Publikacije ETF № 129, Beograd 1964.

30. **[MK2]** M. Kuczma: *A survey of the theory of functional equations*, Publikacije ETF № 130, Beograd 1964.

31. **[MK3]** M. Kuczma: *Functional equations in a single variable*, Warszawa 1968.

32. **[ĐK]** Đ. Kurepa: *Viša algebra* I/II, GK, Beograd 1979.

33. **[SK]** S. Kurepa: *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, SNL, Zagreb 1986.

34. **[DK]** D. E. Knuth: *The art of computer programming*, Addison-Wesley Publ. Comp., Massachusetts 1973.

35. **[PL]** P. Lancaster: *Explicit solutions of linear matrix equations*, SIAM Review 12, 1970.

36. **[AL]** A. Lipkovski: *Linearna algebra i analitička geometrija*, NK, Beograd 1992.

37. **[EM]** E. Mendelson: *Introduction to mathematical logic*, D. Van comp. inc., Princeton 1964.

38. **[ŽM]** Ž. Mijajlović: *An introduction to model theory*, Institute of Mathematics, Novi Sad 1987.

39. **[GM-PS1]** G. Milovanović, P. Stanimirović: *Block representation of the group inverse*, Proceedings of the II Math. Conference in Priština 1996.

40. **[GM-PS2]** G. Milovanović, P. Stanimirović: *Block representation of the* Moore-Penrose *inverse*, Publications de l'institut mathematique, Beograd Nouvele serie, tome 62 (76) 1997.

41. **[DM-JK1]** D.S. Mitrinović, J.D. Kečkić: *On a binomial functional equation and some related equations*, Publikacije ETF № 716 – 734, Beograd 1981.

42. **[DM-JK2]** D.S. Mitrinović, J.D. Kečkić: *Jednačine matematičke fizike*, NK, Beograd 1994.

43. **[DM-PV1]** D.S. Mitrinović, P.M. Vasić: *Problem* 1, Matematički vesnik 1 (16), Beograd 1964.

44. **[DM-PV2]** D.S. Mitrinović, P.M. Vasić: *Diferencijalne jednačine*, Novi zbornik problema 4 (Poglavlja 6 i 9 *Funkcionalne jednačine*), Beograd 1986.

45. **[DM-JP]** D.S. Mitrinović, D. E. Pečarić: *Ciklične nejednakosti i ciklične funkcionalne jednačine*, Matematički problemi i ekspozicije 19, NK, Beograd 1991.

46. **[DM-DĐ]** D.S. Mitrinović, D. Ž. Đoković: *Ciklične funkcionalne jednačine*, Matematička biblioteka 22, 5-23, Beograd 1962.

47. **[MM-DC]** M. Merkle: *Matrična reprezentacija grupa i neke njihove primene* poseban odeljak u knjizi D. Cvetković: *Kombinatorna teorija matrica*, Beograd 1980.

48. **[SN1]** S. Nikčević: *Reproduktivnost i funkcionalne jednačine*, Magistarska teza, Beograd 1987.

49. **[SN2]** S. Nikčević: *Linear group functional equations and existence of the group inverse of the correspodnding matrix*, Facta Universitatis, ser. Math. and Inform. 5, Niš 1990.

50. **[SN3]** S. Nikčević: *On a method for solving the linear group functional equation* Facta Universitatis, ser. Math. and Inform. 6, Niš 1991.

51. **[VP1]** V. Perić: *Algebra* I *i* II, Svjetlost Sarajevo 1980.

52. **[VP2]** V. Perić: *Generalizirana reciproka matrice*, Stručno metodički Časopis Matematika, Zagreb 1982.

53. **[RP1]** R. Penrose: *A generalized inverses for matrices*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955), pp. 406-413.

54. **[RP2]** R. Penrose: *On best approximate solution of linear matrix equations*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 (1956), pp. 17-19.

55. **[SP1]** S. B. Prešić: *Méthod de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. Sci., 257, Paris 1963.

56. **[SP2]** S. B. Prešić: *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, Publikacije ETF № 119, Beograd 1963.

57. **[SP3]** S. B. Prešić: *Certaines équations matricielles*, Publikacije ETF № 121, Beograd 1963.

58. **[SP4]** S. B. Prešić: *Une classe d'équations matricielles et l'équation fonctionnelle $f^2 = f$*, Publications de l'institut mathematique. t. 8 (30), Beograd 1968.

59. **[SP5]** S. B. Prešić: *A method for solving a class of cyclic functional equations*, Matematički vesnik 5 (20), 375-377, Beograd 1968.

60. **[SP6]** S. B. Prešić: *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires non homogénes*, Publikacije ETF № $247 - 273$, Beograd 1969.

61. **[SP7]** S. B. Prešić: *Opšta grupna funkcionalna jednačina*, Matematički vesnik 7 (22), Beograd 1969.

62. **[SP-BA]** S. B. Prešić, B. Alimpić: *Jedan način formiranja generalizacija polazeći od dokaza izvesne teoreme*, Matematička biblioteka 41, 143-156, Beograd 1969.

63. **[SP-AK]** S. B. Prešić, A. Krapež: *Development of Functional Equations in Serbia*, (to appear) Beograd 1997.

64. **[SP-MP]** S. B. Prešić, M. Prešić: *Rešavanje jednačina, nejednačina, formula*, Zagreb 1980.

65. **[SP-BZ]** S. B. Prešić, B. M. Zarić: *Sur un théoréme concernant le cas général d'équation fonctionnelle cyclique, linéire, homogéne a coefficients constants*, Publications de l'institut mathematique. t. 11 (25), Beograd 1971.

66. **[SR]** S. Rudeanu: *Boolean Functions and Equations*, North-Holland, Amsterdam-London-New York, 1974.

67. **[CR]** C. O. Rohde: *Generalized inverses of partitioned matrices*, J. Soc. Indust. Appl. Math. 13 № 4, 1033-1035, 1965.

68. **[PS1]** P. Stanimirović: *Programski paketi za izračunavanje generalisanih inverza*, Doktorska disertacija, Niš 1995.

69. **[PS2]** P. Stanimirović: *The* Moore-Penrose *and group inverse of square matrices and the* Jordan *canonical form*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Ser. II T. XLV (1996), pp. 233-255.

70. **[SS-DC]** S. Stanković: *Pseudoinverzna matrica i neke njene primene* poseban odeljak u knjizi D. Cvetković: *Kombinatorna teorija matrica*, Beograd 1980.

71. **[RS]** R. Stanojević: Drazin-*ov pseudoinverz sa primenama*, Magisatrska teza, Beograd 1988.

72. **[MS]** M. Stojaković: *Linearne jednačine*, Zavod za fiziku i matematiku, Novi Sad 1966.

73. **[ZS-DH]** Z. Stojaković, D. Herceg: *Linearna algebra i analitička geometrija*, Novi Sad 1992.

74. **[ZS-MS]** Z. Stojaković, M. Stojaković: *Vodič za* LaTeX, Novi Sad 1996.

75. **[TS]** T. Strohmer: *Irregular Sampling, Frames and Pseudoinverse*, Master thesis, Dept. of Math. Vienna 1991
`http://tyche.mat.univie.ac.at/papers/1991/str1191.html`

76. **[РТ-АФ]** Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко: *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, Вышэйшая Школа, Минск 1980.

77. **[BV]** B. Velez: *Smart Standard Collection*, CACM-1423, MIT Programing System Research Group
`http://paris.lcs.mit.edu/~bvelez/std-colls/`

78. **[BZ]** B. M. Zarić: *Prilozi teoriji linearnih cikličnih funkcionalnih jednačina*, Doktorska disertacija, Publikacije ETF № 542, 1-80, Beograd 1973.

79. **[GZ1]** G. Zielke: *Report on test matrices for generalized inverses*, Computing 36 (1986), 105-162.

80. **[GZ2]** G. Zielke: *Some Remarks on Matrix Norms, Condition Numbers, and Error Estimates for Linear Equations*, Linear Algebra Appl. 110 (1988), 29-41.