UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET



Dušan Milovančević

# O NEKIM ODNOSIMA KLASA PROSTORA SA UOPŠTENIM SVOJSTVOM KOMPAKTNOSTI

- DOKTORSKA DISERTACIJA -



BEOGRAD, 1982. GOD.

# S A D R Ž A J

# P R E D G O V O R

U topologiji pojam kompaktnosti star je koliko i pojam prostora. Inače, ovaj pojam, u celokupnoj matematičkoj literaturi i svim disciplinama koje koriste matematiku, zauzima vidno mesto. Pod kompaktnim prostorom podrazumeva se prostor X koji ima svojstvo da se svaki otvoren pokrivač od X reducira na konačan (videti [3]). Pošto se u početku razvoja topologije uglavnom radilo sa metričkim prostorima, pre 1929. godine kompaktni prostori karakterisani su sledećim svojstvom: prostor X je kompaktan ako svaki beskonačan podskup od X ima tačku nagomilavanja u X. U metričkom prostoru ova dva uslova su ekvivalentna. Medjutim, uopšte u topološkim prostorima ne moraju biti ekvivalentni. Tako, na primer, dobro je poznato, da uredjen prostor $[0, \omega_1)$ svih rednih brojeva $0 \leq \alpha \leq \omega_1$ ima otvoren pokrivač koji se ne može reducirati na konačan, a da svaki beskonačan podskup od $[0, \omega_1)$ ima tačku nagomilavanja u $[0, \omega_1)$. Prostori koji su okarakterisani uslovom da sadrže tačku nagomilavanja svakog svog beskonačnog podskupa, u literaturi, poznati su kao prebrojivo kompaktni. Takodje, poznato je, da je svojstvo prebrojive kompaktnosti izvedeno iz kompaktnosti, pa je klasa prebrojivo kompaktnih prostora šira od klase kompaktnih prostora. Na osnovu toga, kaže se, da se svojstvom prebrojive kompaktnosti uopštava kompaktnost. Pored prebrojive kompaktnosti postoji još niz svojstava koja su izvedena iz kompaktnosti, kao što su: slaba kompaktnost, pseudokompaktnost, realna kompaktnost, parakompaktnost i svojstvo Lindelöf-a. Razume se, svako navedeno svojstvo karakteriše odgovarajuću klasu prostora. U [32] dat je šematski prikaz medjusobnog odnosa ovih svojstava kao i odnos odgovarajućih klasa prostora koje su okarakterisane ovim svojstvima. Pored navedenih, postoje i svojstva prostora koja nisu posledice komapktnosti, ali su po pojmu bliska kompaktnosti. Na primer, sekvencijalna kompaktnost je neuporediva sa kompaktnošću, tj.klasa kompaktnih prostora nije uporediva sa klasom sekvencijalno kompaktnih prostora. Medjutim, sekvencijalna kompaktnost implicira prebrojivu kompaktnost. Šta više, klasa kompaktnih prostora i klasa sekvencijalno kompaktnih prostora sadržane su u klasama prebrojivo kompaktnih slabo kompaktnih i pesudo-kompaktnih prostora.

Kratko rečeno, u tezi, proučavaju se sledeći zadaci:

(a) Svojstvima koja su izvedena iz kompaktnosti uvode se nove klase prostora koje sadrže klasu kompaktnih prostora i na taj način se uopštava kompaktnost. Glavne klase prostora koje su u tezi uvedene su: L-prostori, L'-prostori, R-prostori, U-prostori i hiper prebrojivo kompaktni prostori. Takodje, uvodi se i klasa strogo sekvencijalno kompaktnih prostora (svojstvom strogo sekvencijalna kompaktnost) koja je sadržana u klasi sekvencijalno kompaktnih prostora ali nije uporediva sa klasom kompaktnih prostora.

(b) Proučava se medjusobni odnos uvedenih klasa prostora (bilo da su to klase koje sadrže klasu kompaktnih prostora ili su sa njom neuporedive) kao i odnos tih klasa prostora sa drugim poznatim klasama prostora koje sadrže ili su neuporedive sa klasom kompaktnih prostora.

(c) Neka je klasa $K$ okarakterisana svojstvom S. Za svaku uvedenu klasu prostora rešavaju se i sledeća pitanja:

1. Heraditarnost (naslednost) svojstva S u odnosu na zatvorene podprostore.

2. Prenošenje svojstva S na topološki proizvod i direktnu sumu familije prostora iz $K$.

3. Prenošenje svojstva S na hiper prostor datog prostora.

4. Invarijantnost svojstva S u odnosu na neprekidna preslikavanja.

Sva uvedena svojstva su topološke invarijante.

Ceo rad podeljen je u četiri glave, koje su numerisane arapskim ciframa. Glave sadrže paragrafe, a ovi su obeleženi dvema ciframa, od kojih prva označava broj glave, a druga broj paragrafa u toj glavi. Svi iskazi, bilo da su to definicije, propozicije, leme, teoreme, primeri ili posledice, označeni su sa tri cifre (izuzev druge glave koja se sastoji od jednog paragrafa), od kojih je prva broj glave, druga broj paragrafa, a treća broj po redu iskaza u tom paragrafu.

Na početku svake glave (ponekad i paragrafa) dat je, kratko, radi bolje preglednosti, njen sadržaj.

Kraj dokaza svakog tvrdjenja označen je sa //.

Pri pozivanju na stavove iz same teze, navodi se samo njihov broj.

Brojevi u uglastim zagradama označavaju redne brojeve iz popisa literature.

Usvojena je standardna terminologija, kao što je, na primer, u [10], [13], [25], [27], [50].

Samostalan doprinos je uglavnom sadržan u glavama 2, 3 i 4. U ovoj tezi, pored novih nepublikovanih rezultata, uključeni su i rezultati radova [38] i [39].

Mada je na početku svake glave dat pregled njenog sadržaja, ipak opišimo u najkraćim crtama svaku od navedenih glava

*PRVA GLAVA* sadrži uvodna izlaganja i činjenice koje su potrebne u daljem radu.

*DRUGA GLAVA* odnosi se na U-sisteme i U-prostore.

Niz $\mathcal{U} = (U_n;\ n \in N)$ nepraznih otvorenih podskupova prostora X je U-sistem u X, ako je:

$$cl(U_j)_X \cap cl(\cup\{U_n : n \in N - \{j\}\})_X = \emptyset, \quad \text{za svako} \quad j \in N.$$

Topološki prostor X je U-prostor, ako svaki U-sistem u X ima tačku nagomilavanja.

Izvesni rezultati vezani za U-sisteme i U-prostore objavljeni su 1977. godine. (Rad pod rednim brojem [38] u spisku literature).

Klasa U-prostora predstavlja interpolaciju izmedju klasa slabo kompaktnih prostora i pseudokompaktnih prostora. Svaki slabo kompaktan prostor je U-prostor, a svaki U-prostor je pseudokompaktan. U regularnim prostorima ekvivalentna su svojstva U-prostora i slabe kompaktnosti, a u klasi kompletno regularnih prostora ekvivalentna su sva tri svojstva.

*TREĆA GLAVA* posvećena je uopštenjima kompaktnosti preko trojke $\{\mathcal{P}, cl, \mathcal{O}\}$, gde je:

1. $\mathcal{P}$ - familija svih prebrojivih podskupova datog prostora ili familija svih podprostora od X datog svojstva S.

2. cl - operator adherencije primenjen na svaki član iz $\mathcal{P}$.

3 $\mathcal{O}$ - topološko svojstvo koje ima svaki podprostor cl(P) za svako $P \in \mathcal{P}$.

(a) Prostor X je L-prostor ako je adherencija svakog prebrojivog podskupa od X, Lindelöf-ov podprostor u X.

(b) Prostor X je R-prostor ako je adherencija svakog prebrojivog podskupa od X realno kompaktan podprostor u X.

(c) Prostor X je L'-prostor, ako je adherencija svakog Lindelöf-ovog podprostora od X takodje Lindelöf-ov.

U ovoj glavi daju se medjusobni odnosi ove tri klase prostora kao i odnosi ovih klasa prostora sa ostalim klasama prostora kojima se uopštava kompaktnost.

Neki rezultati ove glave nalaze se u štampi (Matematički vesnik, Beograd).

*ČETVRTA GLAVA* teze, po mom mišljenju, sadrži značajnije rezultate, a odnosi se na klasu hiper-prebrojivo kompaktnih prostora, kao i njihov odnos sa drugim klasama prostora (na primer, sa strogo-prebrojivo kompaktnim). Uveo sam sledeću definiciju:

Prostor X je hiper-prebrojivo kompaktan ako je zatvorenje unije svake prebrojive familije kompaktnih skupova, kompaktan skup.

Navodim neke rezultate ove glave:

1. Prostor X je hiper-prebrojivo kompaktan ako i samo ako je C(X) strogo prebrojivo kompaktan.

Prostor X je strogo prebrojivo kompaktan ako je zatvorenje svakog prebrojivog skupa u X kompaktan podskup od X (Keesling, 1971.). Sa C(X) je označen hiper-prostor kompaktnih skupova u X.

2. Daje se konstruktivan primer prostora koji je strogo prebrojivo kompaktan, a nije hiper-prebrojivo kompaktan.

3. Dokazuje se da u prostorima sa prvom aksiomom prebrojivosti pojmovi hiper-prebrojiva kompaktnost i strogo prebrojiva kompaktnost se poklapaju.

4. Ispituju se svojstva hiper-prebrojivo kompaktnih prostora. Tako se pokazuje da se svojstvo hiper-prebrojive kompaktnosti prenosi na proizvod a da nije neprekidna invarijanta.

5. Uvodjenjem pojma strogo sekvencijalnog prostora (prostor X je strogo sekvencijalno kompaktan ako je C(X) sekvencijalno kompaktno), dobija se klasa prostora koja je sadržana u klasi hiper-prebrojivo kompaktnih prostora. Ova klasa prostora je neuporediva sa klasom kompaktnih prostora. Postoji još niz rezultata koji se odnose na ovu problematiku.

Materijal samostalnog doprinosa iznosi oko 53 stranice teze.

Pretpostavke o separacionim svojstvima prostora se uvek ističu, a ako to nije slučaj, tada se ne smatra da prostor ima unapred neko separaciono svojstvo, ma da su prostori skoro uvek bar $T_2$-prostori.

Neki simboli i skraćenice dati su na početku teze.

Indeks korišćenih i uvedenih pojmova dat je na kraju teze.

*Posebno mi je zadovoljstvo da se zahvalim profesoru M.Marjanoviću, pod čijim je rukovodstvom radjena ova teza, koji mi je pružio veliku pomoć svojim savetima i sugestijama i pravilno usmeravao u toku rada.*

*Takodje se zahvaljujem profesoru M. Stanojeviću na svesrdnoj pomoći u svim fazama izrade teze i na velikom zalaganju da teza bude na zavidnom nivou.*

*A u t o r*

# SIMBOLI I SKRAĆENICE

| | |
|---|---|
| $x \in X$ | - x je element skupa X, |
| $A \subseteq B$ | - A je podskup skupa B (B je nadskup skupa A), |
| $\cup$ | - unija, |
| $\cap$ | - presek, |
| $\times$ | - Kartezijev proizvod, |
| $X-A = CA$ | - komplement skupa A u odnosu na X, |
| $\Longrightarrow$ | - implikacija, dovoljnost, |
| $\Longleftarrow$ | - implikacija, potrebnost, |
| $(X,\tau_X)$ | - topološki prostor X sa topologijom $\tau_X$, |
| $cl(A)_X$ | - zatvorenje (adherencija) skupa A u odnosu na prostor X, |
| $\Sigma\{X_a : a\in a\}$ | - topološka suma prostora $X_a$, $a\in A$, |
| $cX$ | - kompaktifikacija prostora X, |
| $\beta X$ | - Stone-Čech-ova kompaktifikacija prostora X, |
| $X^* = X \cup \{\infty\}$ | - kompaktifikacija jednom tačkom prostora X, |
| $P(X)$ | - partitivni skup skupa X, |
| $exp(X)$ | - skup svih zatvorenih podskupova od X, |
| $C(X)$ | - skup svih kompaktnih podskupova od X, |
| $C^s(X)$ | - skup svih separabilnih kompaktnih podskupova od X, |
| $\emptyset$ | - prazan skup, |
| // | - kraj dokaza (ovim je dokaz završen). |

# GLAVA 1

## NEKE KLASE PROSTORA KOJE UOPŠTAVAJU KOMPAKTNOST I NJIHOVA OSNOVNA SVOJSTVA

Poznato je da je topološki prostor X kompaktan ako zadovoljava svojstvo da se svaki otvoreni pokrivač od X reducira na konačan. Kod nekih autora (kao na primer, kod Engelking-a) zahteva se da je X $T_2$-prostor, a kod nekih ne (na primer, kod Kelley-a) ovo se ne zahteva. Ova glava odnosi se na neke klase prostora kojima se uopštava kompaktnost kao što su: Lindelöf-ovi prostori, prebrojivo kompaktni prostori, sekvencijalno kompaktni prostori, realno kompaktni prostori i pseudokompaktni prostori. Izuzev sekvencijalno kompaktnih prostora preostale navedene klase prostora sadrže u sebi klasu kompaktnih prostora. Ovde se daje pregled osnovnih pojmova i rezultata koji se odnose na navedene klase prostora, a koji će se koristiti u docnijim glavama. Na početku glave daje se pojam kompaktifikacije prostora sa pojmom uredjenja u familiji svih kompaktifikacija datog prostora X. Takodje se daju osnovne karakterizacije Stone-Čech-ove kompaktifikacije kao i kompaktifikacije jednom tačkom.

## 1.1. KOMPAKTIFIKACIJA PROSTORA

1.1.1. DEFINICIJA [27]. *Par $(Y, c)$ gde je $Y$ kompaktan prostor, a $c:X \to Y$ homeomorfno utapanje $X$ u $Y$, tako da je $cl(cX)_Y = Y$ je kompaktifikacija prostora $X$ i označava se sa $cX$.*

1.1.2. TEOREMA [13]. *Prostor $X$ ima $T_2$ kompaktifikaciju $cX$ onda i samo onda ako je $X$ prostor Tychonoff-a.*

1.1.3. DEFINICIJA [27]. *Kompaktifikacije $c_1X$ i $c_2X$ prostora $X$ su ekvivalentne ako postoji homeomorfizam $h:c_1X \to c_2X$, tako da dijagram*

$$\begin{tikzcd} c_1X \arrow[r, "h"] & c_2X \\ X \arrow[u, "c_1"] \arrow[r, "id(X)"'] & X \arrow[u, "c_2"'] \end{tikzcd}$$

*komutira.*

Neka je sa $\mathcal{K}(X)$ označena familija svih kompaktifikacija prostora $X$. Prethodnom definicijom uvedena je jedna relacija ekvivalencije u $\mathcal{K}(X)$ kojom se familija $\mathcal{K}(X)$ razbija na medjusobno disjunktne podfamilije, pri čemu svaka od ovih podfamilija sadrži sve medjusobno ekvivalentne kompaktifikacije od $X$.

1.1.4. DEFINICIJA [13]. *Neka su $c_1X$ i $c_2X$ dve neekvivalentne kompaktifikacije prostora $X$. Kompaktifikacija $c_1X$ je manja od kompaktifikacije $c_2X$ (simbolički $c_1X \leq c_2X$) ako postoji neprekidno preslikavanje $f:c_2X \to c_1X$, tako da je $f \circ c_2 = c_1$.*

Ovom definicijom uvedena je jedna relacija poretka (koja ima simbolički znak $\leq$ ) na $\mathcal{K}(X)$.

1.1.5. TEOREMA [13]. *Svaka neprazna podfamilija $K_0 \subset \mathcal{K}(X)$ ima najmanje gornje ograničenje u odnosu na uredjenje $\leq$ u $\mathcal{K}(X)$.*

1.1.6. POSLEDICA [13]. *Neka je X prostor Tychonoff-a. Tada postoji maksimalni element u odnosu na uredjenje $\leq$ u $K(X)$.*

1.1.7. DEFINICIJA. *Maksimalni element u odnosu na uredjenje $\leq$ u $K(X)$ zove se Stone-Čech-ova kompaktifikacija prostora X i označava se sa $\beta X$.*

U [13], [20], [27] i [50] date su konstrukcije Stone-Čech-ove kompaktifikacije. Sledeća teorema odnosi se na medjusobno ekvivalentna svojstva kojima se karakteriše Stone-Čech-ova kompaktifikacija.

1.1.8. TEOREMA [20]. *Svaki prostor Tychonoff-a ima Stone-Čech-ovu kompaktifikaciju $\beta X$ sa sledećim ekvivalentnim svojstvima:*

(a) (*Stone*). *Svako neprekidno preslikavanje $\tau$ sa X u proizvoljan kompaktan prostor Y ima neprekidno proširenje $\tau : \beta X \to \beta Y$.*

(b) (*Stone-Čech*). *Svaka realna neprekidna i ograničena funkcija na X ima neprekidno proširenje na $\beta X$.*

(c) (*Čech*). *Bilo koja dva disjunktna z-skupa u X imaju disjunktna zatvorenja u $\beta X$.*

(d) *Različiti z-ultra filtri na X imaju različite granice u $\beta X$.*

*Svaka druga kompaktifikacija cX od X koja ima bilo koje od navedenih svojstava homeomorfna je sa $\beta X$, tj. kompaktifikacija $\beta X$ je jedinstvena.*

1.1.9. DEFINICIJA [13]. *Neka je cX kompaktifikacija prostora X i neka je* $\mathrm{card}(cX - X) = 1$, *tada je cX kompaktifikacija jednom tačkom od X i označava se sa $X^*$ ili $\omega X$.*

1.1.10. NAPOMENA. Dobro je poznata konstrukcija kompaktifikacije jednom tačkom za nekompaktne Hausdorff-ove prostore. Naime, za nekompaktan Hausdorff-ov prostor X, formira se prostor $X^* = X \cup \{p\}$ gde tačka $p \notin X$, a topologija na X ostaje nepromenjena dok su okoline tačke $P \in X^*$ komplementi kompaktnih podskupova od X. Razume se, tačka $P \in X^*$ je adherentna tačka za X i svaki otvoreni pokrivač od $X^*$ reducira se na konačan, jer u svakom otvorenom pokrivaču za $X^*$ mora postojati bar jedan član koji sadrži komplement kompaktnog podskupa od $X$.

1.1.11. TEOREMA [27]. *Svaki nekompaktan Haudorff-ov prostor* $X$ *ima kompaktifikaciju* $X^*$ *(kompaktifikaciju jednom tačkom) sa sledećim svojstvima:*

(a) *Prostor* $X^*$ *je Hausdorff-ov onda i samo onda ako je prostor* $X$ *lokalno kompaktan.*

(b) *Kompaktifikacija* $X$ *je minimalni element u odnosu na uredjenje* $\leq$ *u* $K(X)$.

Na kraju, može se zaključiti da je $K(X)$ mreža u odnosu na uredjenje $\leq$.

## 1.2. LINDELÖF-OVI PROSTORI

1.2.1. DEFINICIJA [27]. *Prostor X je Lindelöf-ov ako se svaki otvoren pokrivač od X reducira na prebrojiv.*

1.2.2. PROPOZICIJA [13]. *Svaki prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti je Lindelöf-ov i svaki prebrojiv prostor je Lindelöf-ov.*

1.2.3. TEOREMA [27]. *Svaki regularan Lindelöf-ov prostor je normalan.*

1.2.4. TEOREMA [13]. *Svaki zatvoren podprostor od Lindelöf-ovog prostora je takodje Lindelöf-ov.*

1.2.5. TEOREMA [10]. *Neka je $f: X \to Y$ neprekidno preslikavanje sa Lindelöf-ovog prostora X na Y. Tada je prostor Y takodje Lindelöf-ov.*

1.2.6. TEOREMA [10]. *Disjunktna topološka suma prebrojive familije prostora Lindelöf-a takodje je prostor Lindelöf-a.*

1.2.7. TEOREMA [10]. *Svaka dva zatvorena Lindelöf-ova podskupa u regularnom prostoru imaju disjunktne otvorene okoline.*

1.2.8. TEOREMA [13]. *Topološki proizvod kompaktnog i Lindelöf-ovog prostora je prostor Lindelöf-a.*

1.2.9. TEOREMA [13]. *Neka je $f: X \to Y$ zatvoreno preslikavanje definisano na regularnom prostoru X i neka $f^{-1}(y)$ ima svojstvo Lindelöf-a za svako $y \in Y$. Tada za svaki podprostor $Z \subset Y$ koji ima svojstvo Lindelöf-a i $f^{-1}(Z)$ ima svojstvo Lindelöf-a.*

1.2.10. TEOREMA [13]. *Svaki otvoren pokrivač regularnog Lindelöf-ovog prostora X ima lokalno konačno otvoreno rafiniranje.*

## 1.3. PREBROJIVO KOMPAKTNI PROSTORI

1.3.1. DEFINICIJA [27]. *Hausdorff-ov prostor X je prebrojivo kompaktan ako se svaki prebrojiv otvoren pokrivač od X reducira na konačan.*

1.3.2. TEOREMA [13]. *Prostor X je kompaktan onda i samo onda ako je Lindelöf-ov i prebrojivo kompaktan.*

1.3.3. TEOREMA [13]. *Neka je prostor X Hausdorff-ov. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(a) *Prostor X je prebrojivo kompaktan.*

(b) *Svaka lokalna konačna familija od nepraznih podskupova od X je konačna.*

(c) *Svaka lokalno konačna familija od jednotačkovnih podskupova od X je konačna.*

(d) *Svaki beskonačan podskup od X ima tačku nagomilavanja.*

(e) *Svaki prebrojiv beskonačan podskup od X ima tačku nagomilavanja.*

1.3.4. TEOREMA [13]. *Svaki zatvoren podprostor od prebrojivog kompaktnog prostora X je prebrojivo kompaktan.*

1.3.5. TEOREMA [13]. *Neka je prostor Y neprekidna slika prebrojivo kompaktnog prostora X, tada je Y prebrojivo kompaktan.*

1.3.6. TEOREMA [20]. *Svaka realna i neprekidna funkcija definisana na prebrojivo kompaktnom prostoru je ograničena.*

1.3.7. TEOREMA [13]. *Topološki proizvod kompaktnog i prebrojivo kompaktnog prostora je prebrojivo kompaktan.*

## 1,4, PSEUDOKOMPAKTNI PROSTORI

1.4.1. DEFINICIJA [33]. *Prostor X je pseudokompaktan ako je svaka realna neprekidna funkcija definisana na X ograničena.*

1.4.2. PROPOZICIJA [33]. *Svaki prebrojivo kompaktan prostor je pseudokompaktan.*

1.4.3. TEOREMA [6]. *Svaki pseudokompaktan normalan prostor je prebrojivo kompaktan.*

1.4.4. TEOREMA [13]. *Neka je X prostor Tychonoff-a, tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(a) *Prostor X je pseudokompaktan.*

(b) *Svaka lokalno konačna familija od nepraznih otvorenih podskupova je konačna.*

(c) *Svaki lokalno konačan otvoren pokrivač od X je konačan.*

(d) *Svaki lokalno konačan otvoren pokrivač od X reducira se na konačan.*

(e) *Za svaku prebrojivu familiju* $\{V_m : n \in N\}$ *otvorenih podskupova od X koja ima svojstvo konačnog presecanja;* $\bigcap \{cl(V_m)_X : n \in N\} \neq \emptyset$.

1.4.5. TEOREMA [13]. *Neprekidna slika pseudokompaktnog prostora je pseudokompaktna.*

1.4.6. TEOREMA [13]. *Topološki proizvod pseudokompaktnog prostora X i kompaktnog prostora Y je pseudokompaktan.*

Na kraju treba istaći da se pseudokompaktnost ne prenosi na zatvorene podprostore. Na primer, neka je $X = [0,\omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, \omega_0)\}$ - ravan Tychonoff-a. Prostor X je pseudokompaktan, a podprostor $Y = \{(\omega_1,n) : n \in N\}$ je zatvoren u X ali nije pseudokompaktan jer je Y homeomorfan sa N.

## 1.5. SEKVENCIJALNO KOMPAKTNI PROSTORI

1.5.1. DEFINICIJA [27]. *Prostor X je sekvencijalno kompaktan ako svaki niz tačaka iz X sadrži konvergentan podniz.*

1.5.2. DEFINICIJA [15]. *Podskup U od topološkog prostora X je sekvencijalno otvoren ako je svaki niz iz X koji konvergira tački iz U sadržan u U sa izuzetkom konačno mnogo tačaka.*

1.5.3. DEFINICIJA [15]. *Prostor X je sekvencijalan ako je svaki sekvencijalno otvoren podskup od X i otvoren u X.*

Jasno, svaki prostor prve prebrojivosti, svaki metrički prostor i svaki diskretan prostor je sekvencijalan prostor.

1.5.4. TEOREMA [13]. *Svaki sekvencijalno kompaktan prostor je prebrojivo kompaktan.*

1.5.5. TEOREMA [13]. *Neka je prostor X sekvencijalan (prve prebrojivosti), tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(a) *Prostor X je prebrojivo kompaktan.*

(b) *Prostor X je sekvencijalno kompaktan.*

1.5.6. TEOREMA [10]. *Svaki zatvoren podprostor od sekvencijalnog kompaktnog prostora je sekvencijalno kompaktan.*

1.5.7. TEOREMA [13]. *Neprekidna slika sekvencijalnog kompaktnog prostora X je sekvencijalno kompaktna.*

1.5.8. TEOREMA [13]. *Topološki proizvod od prebrojivo mnogo sekvencijalno kompaktnih prostora je sekvencijalno kompaktan.*

Na kraju treba istaći da postoje primeri kompaktnih prostora koji nisu sekvencijalno kompaktni. Na primer, prostor $\beta N$ je kompaktan ali nije sekvencijalno kompaktan jer sadrži niz $1,2,\dots,n,\dots$ koji ne sadrži nijedan konvergentan podniz. Naime, ako bi $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ bio konvergentan podniz od ovog niza, takvi bi bili i $A = \{K_1, K_3, K_5, \ldots K_{2n+1}, \ldots\}$ i $B = \{K_2, K_4, \ldots, K_{2n}, \ldots\}$. Medjutim, ova dva skupa imaju disjunktna zatvorenja u $\beta N$, pa ne mogu konvergirati istoj tački kojoj konvergira niz $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$

1.5.9. DEFINICIJA [25]. *Prostor* X *je strogo prebrojivo kompaktan ako je zatvorenje svakog prebrojivog podskupa od* X *kompaktan podskup u* X.

O strogo prebrojivo kompaktnim prostorima biće više reči u četvrtoj glavi.

## 1.6. REALNO-KOMPAKTNI PROSTORI

1.6.1. DEFINICIJA [13]. *Topološki prostor X je realno kompaktan ako je X prostor Tychonoff-a i ako ne postoji Tychonoff-ljev prostor $\hat{X}$ koji ima sledeća dva svojstva:*

(a) *Postoji homeomorfno utapanje* $r : X \to \hat{X}$ *tako da je* $r(X) \neq cl(r(X))_{\hat{X}} = \hat{X}$.

(b) *Za svaku realnu neprekidnu funkciju* $f : \hat{X} \to R$ *postoji neprekidna funkcija* $\hat{f} : X \to R$ *takva da je* $\hat{f} \cdot r = f$.

1.6.2. TEOREMA [13]. *Topološki prostor je realno kompaktan onda i samo onda ako je homeomorfan sa zatvorenim podprostorom od Kartezijevog proizvoda kopija realne linije.*

1.6.3. TEOREMA [20]. *Svaki Lindelöf-ov prostor je realno kompaktan.*

1.6.4. TEOREMA [13]. *Topološki prostor je kompaktan onda i samo onda ako je pseudokompaktan i realno kompaktan.*

1.6.5. TEOREMA [13]. *Svaki zatvoren podprostor od realnog kompaktnog podprostora je realno kompaktan.*

1.6.6. TEOREMA [13]. *Neka je X topološki proizvod familije prostora* $X_a$, $a \in A$. *Prostor X je realno kompaktan onda i samo onda ako je svaki* $X_y$, $a \in A$ *realno kompaktan.*

1.6.7. POSLEDICA [13]. *Inverzni limes familije realno kompaktnog prostora je realno kompaktan.*

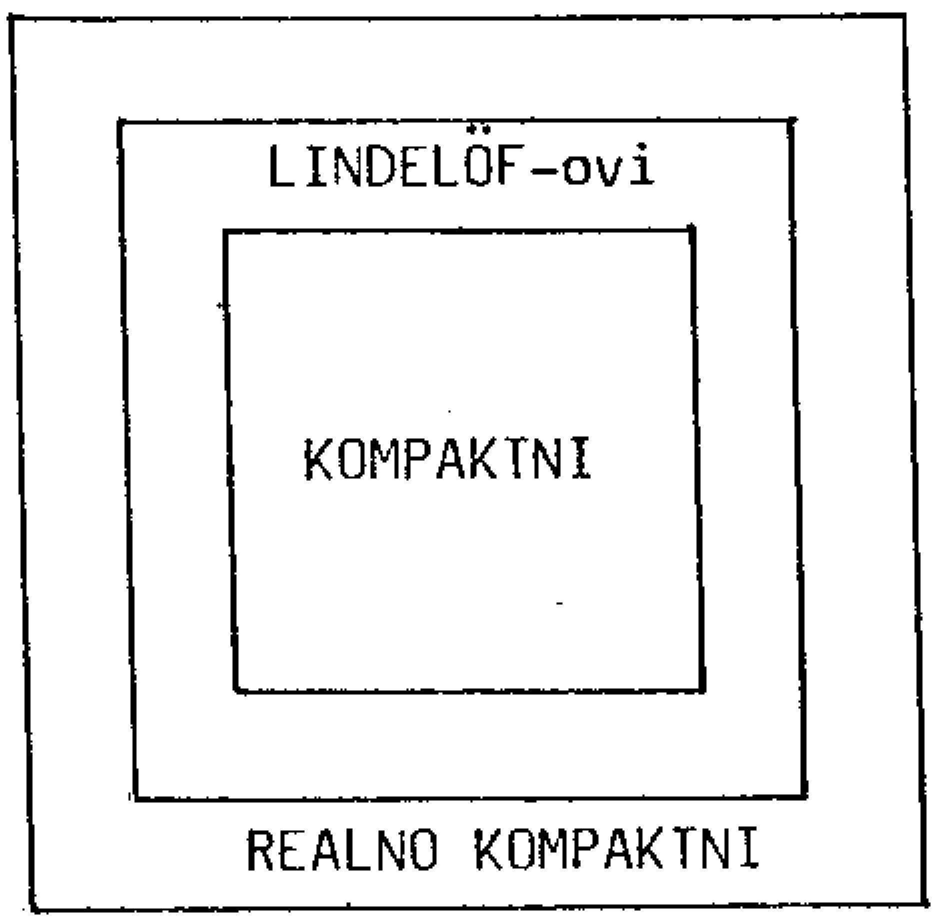
1.6.8. TEOREMA [13]. *Tychonoff-ljev prostor X je realno kompaktan onda i samo onda ako za svaku tačku* $x_0 \in \beta X - X$ *postoji funkcija* $h : \beta X \to I$ *tako da je* $h(x_0) = 0$ *i* $h(x) > 0$ *za svako* $x \in X$.

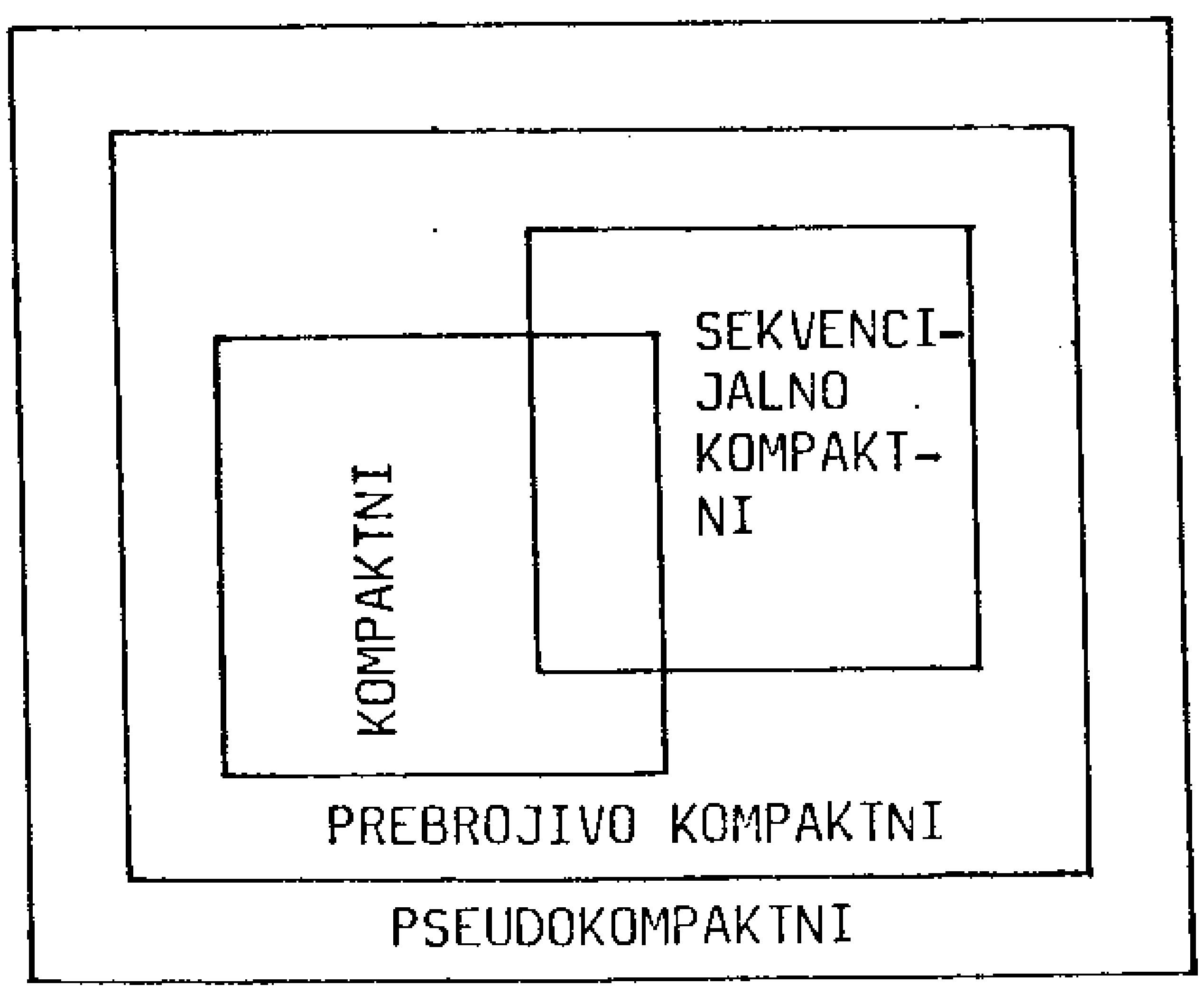
1.6.9. DEFINICIJA [13]. *Prostor X je parakompaktan ako je regula-*

## 1.7. ODNOSI IZMEDJU NAVEDENIH KLASA PROSTORA

Navedeni rezultati iz paragrafa 1.2 do 1.6, a koji će se koristiti u docnijim glavama mogu se šematski istaći na sledeći način:

$$\begin{tikzcd} & \text{KOMPAKTNOST} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{LINDELOF-OVOST} \arrow[d, Rightarrow] \\ \text{SEKVENCIJALNA KOMPAKTNOST} \arrow[r, Rightarrow] & \text{PREBROJIVU KOMPAKTNOST} \arrow[d, Rightarrow] & \text{REALNU KOMPAKTNOST} \\ & \text{PSEUDO-KOMPAKTNOST} & \end{tikzcd}$$



# GLAVA 2

## U-SISTEMI I U-PROSTORI

U ovoj glavi govori se o jednom uopštenju pojma slabe kompaktnosti prema [6] i [33], kao i o karakterizaciji pseudokompaktnosti preko klasa prebrojivih familija otvorenih podskupova (U-sistemi) koje su u datom prostoru rasporedjene uz korišćenje operatora zatvorenja i uslova disjunktnosti (definicija 2.4). U daljem tekstu koriste se pojmovi tačke nagomilavanja familije skupova prema [33] kao i pojam lokalno konačne familije prema |6|. Deo rezultata ove glave objavljen je 1977. godine (videti |38|).

2.1. DEFINICIJA [33]. *Neka je U familija podskupova topološkog prostora X. Tačka* $a_0 \in X$ *je tačka nagomilavanja familije U ako svaka okolina od* $a_0$ *ima neprazan presek sa beskonačno mnogo članova familije U.*

2.2. DEFINICIJA [33]. *Familija D podskupova topološkog prostora X je lokalno konačna ako svaka tačka iz X ima okolinu koja preseca samo konačno mnogo članova iz D, ili, ekvivalentno, ako familija D nema nijedne tačke nagomilavanja u X.*

2.3. TEOREMA [6]. *Neka je X topološki prostor. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(a) *X je slabo kompaktan.*

(b) *Svaka prebrojiva lokalno konačna disjunktna familija od otvorenih skupova od X je konačna.*

(c) *Neka je U prebrojiv otvoren pokrivač od X i A beskonačan podskup od X, tada adherencija nekog člana od U sadrži beskonačno mnogo tačaka od A.*

(d) *Ako je U prebrojiv otvoren pokrivač od X, tada postoji konačna podfamilija od U čija adherencija pokriva X.*

2.4. DEFINICIJA. *Niz* $\mathcal{U} = (U_n;\ n \in N)$ *nepraznih otvorenih podskupova od X je U-sistem u X ako je*

$$cl(U_j)_X \cap cl(\cup \{U_n : n \in N - \{j\}\})_X = \emptyset$$

*Za svako* $j \in N$.

2.5. DEFINICIJA. *Topološki prostor X je U-prostor ako svaki U-sistem u X ima tačku nagomilavanja.*

2.6. PROPOZICIJA. *Neka je X U-prostor i Y otvoren podprostor od X. Tada je* $cl(Y)_X$ *U-prostor.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U} = (U_n;\ n \in N)$ U-sistem u $cl(Y)_X$, i neka je dalje $\mathcal{B} = (U_n \cap Y;\ n \in N)$. Neposredno se može proveriti da je $\mathcal{B}$ U-sistem u X. Pošto je X U-prostor, postoji tačka $x \in X$ koja je tačka nagomilavanja za $\mathcal{B}$. Medjutim, kako je $cl(U_n \cap Y)_{cl(Y)_X} = cl(U_n \cap Y)_X$ to je $x$ tačka nadgomilavanja od $\mathcal{U}$ u $cl(Y)_X$. //.

2.7. PROPOZICIJA. *Neprekidna slika U-prostora je U-prostor.*

Dokaz. Neka je X U-prostor i $f: X \to Y$ neprekidno preslikavanje sa X na Y. Neka je dalje $\mathcal{B} = (V_n;\ n \in N)$ U-sistem u Y i $U_n = f^{-1}(V_n), n \in N$, odnosno $\mathcal{U} = (U_n;\ n \in N)$.

Za svako $j \in N$ je $cl(U_j)_X \cap cl(\cup \{U_n : n \in N - \{j\}\})_X = cl(f^{-1}(V_j))_X \cap$ $cl(\cup \{f^{-1}(V_n) : n \in N - \{j\}\})_X \subset f^{-1}(cl(V_j)_Y \cap cl(\cup \{V_n : n \in N - \{j\}\})_Y) =$ $= f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Dakle, $\mathcal{U}$ je U-sistem u X. Pošto je X U-prostor postoji tačka $x \in X$ koja je tačka nagomilavanja za $\mathcal{U}$ i pošto je preslikavanje f neprekidno, to je $f(x) \in Y$ tačka nagomilavanja za $\mathcal{B}$ pa je prostor Y U-prostor. //.

2.8. POSLEDICA. *Neka je X topološki proizvod prostora $X_a$, $a \in A$. Ako je X U-prostor, tada je svaki $X_a$, $a \in A$, U-prostor.*

2.9. PROPOZICIJA. *Svaki U-prostor je pseudokompaktan.*

Dokaz. Neka je X U-prostor koji nije pseudokompaktan. Tada postoji neprekidna funkcija $f : X \to R$ koja nije ograničena na X. Takodje postoji niz $(x_n;\ n \in N)$ u X tako da je $f(x_n) \geq n$, za svako $n \in N$. Šta više, može se pretpostaviti da je $f(x_{n+1}) > f(x_n)$, za svako $n \in N$. Za svako $j \in N$ može se izabrati okolina $V_j$ od $f(x_j)$, tako da je $a \in cl(V_i)_R$ i $b \in (V_{i+1})_R$ tada je $a < b$. Neka je $U_n = f^{-1}(V_n)$. Razume se, $(U_n : n \in N)$ je U sistem u X, i pošto je X U-prostor, ima tačku nagomilavanja x. Pošto je $f : X \to R$ neprekidno, f(x) je tačka nagomilavanja od $(V_n;\ n \in N)$. Medjutim, ovo je nemoguće prema konstrukciji niza $(V_n;\ n \in N)$. Dakle prostor X je pseudokompaktan. //.

2.10. LEMA. *Svaki slabo kompaktan prostor je U-prostor.*

Dokaz. Neka je prostor X slabo kompaktan i $\mathcal{U}$ U-sistem u X. Razume se, $\mathcal{U}$ je prebrojiva familija od nepraznih, otvorenih, medjusobno disjunktnih podskupova od X. Ako bi familija $\mathcal{U}$ bila lokalno konačna, prema 2.3,(b) bila bi konačna, što je nemoguće jer je U-sistem isključivo beskonačna (prebrojiva) familija koja zadovoljava uslove definicije 2.4. Dakle, U-sistem $\mathcal{U}$ ima tačku nagomilavanja u X. //.

2.11. PRIMEDBA. U [6] dokazano je da je svaki prebrojivo kompaktan prostor slabo kompaktan. Takodje je dat primer prostora koji je slabo kompaktan a nije prebrojivo kompaktan. Na osnovu ovog, jasno je da je svaki prebrojivo kompaktan prostor U-prostor.

Tvrdjenje inverzno tvrdjenju 2.8, ne mora biti tačno. Naime u [20] (videti primer 9.15) dat je primer prebrojivo kompaktnog prostora G (G je podprostor od $\beta N$ koji naravno nije kompaktan) sa svojstvom da $G \times G$ nije pseudokompaktan. Dakle, G je U-prostor jer je prebrojivo kompaktan, a $G \times G$ nije U-prostor. Ako bi $G \times G$ bio U-prostor, prema 2.9, bio bi pseudokompaktan, a to je kontradikcija. Prema ovome jasno je da proizvod U-prostora ne mora biti U-prostor.

2.12. PRIMEDBA. U [6] (na stranici 502 posle teoreme 4) dat je primer prostora koji je pseudokompaktan a nije slabo kompaktan. Medjutim, neposredno se vidi da je ovaj primer i primer prostora koji je pseudokompaktan a nije U-prostor. Naime,

$$X = \{x_{ij} : i,j \in N\} \cup (\cup\{Y_{ij} : i,j \in N\})$$

gde je $x_{ij}$ tačka, a $Y_{ij}$ beskonačan skup za svako $i,j \in N$. Topologija na X definisana je preko baznih okolina tačaka u X na sledeći način: Okoline tačaka $x_{ij}$ sastoje se od $x_{ij}$ plus sve izuzev konačno mnogo tačaka skupova $Y_{kj}$, $(k \geq i)$ i $Y_{ik}$, $(k \geq j)$. Za okoline tačaka u $Y_{ij}$ uzimaju se komplementi (u odnosu na $Y_{ij}$) konačnih podskupova. X nije slabo kompaktan jer postoji pokrivač $\mathcal{U}$ od X

$$\mathcal{U} = \{\{x_{ij} : x,j \in N\} \cup (\cup\{Y_{kj} : k \geq i\}) \cup (\cup\{Y_{ik} : k \geq j\})$$

takav da svaki $cl(U_{ij})_X$, za $U_{ij} \in \mathcal{U}$ sadrži samo konačno mnogo tačaka skupa $\{x_{ii} : i \in N\}$. Dakle, prema teoremi 2.3,(c) prostor X nije slabo kompaktan. Prostor X je pseudokompaktan jer ima sledeća svojstva: Za svaki prebrojiv otvoren pokrivač $\mathcal{U} = \{U_n : n \in N\}$, pokrivač $\overline{\mathcal{U}} = \{cl(U_n)_X : n \in N\}$, sadrži pravi podpokrivač. Dobro je poznato da ovo svojstvo indicira pseudokompaktnost i služi kao algoritam (konkretno u datom primeru)za konstrukciju prostora koji su pseudokompaktni a nemaju druga svojstva jača od pseudokompaktnosti.

Prostor X nije U-prostor jer sadrži U-sistem $(x_{ij};\ i,j \in N)$ koji nema nijednu tačku nagomilavanja u X.

2.13. TEOREMA [6]. *Kompletno regularan prostor je slabo kompaktan onda i samo onda ako je pseudokompaktan.*

2.14. TEOREMA. *Kompletno regularan prostor je U-prostor onda i samo onda ako je pseudokompaktan.*

Dokaz. Ova teorema je direktna posledica prethodne teoreme kao i propozicije 2.9, odnosno Leme 2.10.

2.15. TEOREMA. *Regularan prostor X je slabo kompaktan onda i samo onda ako je U-prostor.*

Dokaz. Neka je prostor X slabo kompaktan. Prema 2.10, je U-prostor.

Obrnuto, neka je X U-prostor. Može se pretpostaviti da X nije slabo kompaktan. U tom slučaju, prema 2.3,(b) postoji beskonačna lokalno konačna familija $A = (A_n : n \in N)$ od nepraznih otvorenih podskupova od X. Prema ovim pretpostavkama, jasno je, da postoji tačka $x_1 \in A_1$ i otvorena okolina $O_1$ od $x_1$ koja je sadržana u $A_1$ ali takva da je skup

$$I_1 = \{j \in N : O_1 \cap A_j \neq \emptyset\}$$

konačan. Pošto je prostor X regularan, postoji otvorena okolina $U_1$ od $x_1$ takva da je $cl(U_1)_X \subset O$ . Neka je $A_1 = \{A_j \in A : j \in N - I_1\}$. Familija $A_1$ je beskonačna i svaki član iz $A_1$ je disjunktan sa $O_1$. Neka je $j_2 = \min(N-I_1)$, $x_2 \in A_{j_2}$, $A_{j_2} \in A_1$, $O_2$ otvorena okolina od $x_2$ sadržana u $A_{j_2}$ takva da je skup

$$I_2 = \{j \in N : (O_1 \cup O_2) \cap A_j \neq \emptyset \}$$

konačan. Neka je $U_2$ otvorena okolina od $X_2$ takva da je $cl(U_2)_X \subset O_2$. Familija $A_2 = \{A_j \in A_1 : j \in N-I_2\}$ je beskonačna i svaki član iz $A_2$ ima prazan presek sa $O_1 \cup O_2$. Ako se ovaj postupak neprekidno nastavi dobiće se strogo rastući niz $(j_i : i \in N)$ u N i nizovi nepraznih otvorenih podskupova od X, $(U_i : i \in N)$ i $(O_i : i \in N)$, takvi da su zadovoljena sledeća svojstva:

(a) $cl(U_i)_X \subset O_i \subset A_{j_i}$ .

(b) $I_i = \{j \in N : (\cup\{O_k : k \in |1,i|\}) \cap A_j \neq 0\}$ je konačan.

(c) $j_i := \min (N-I_{i-1})$.

Tada je za svako $j \in N$ $cl(U_j) \subset O_j$ i $cl(\cup\{U_n : n \in N-\{j\}\})_X \subset X - O_j$. Dakle, $\mathcal{U} = (U_n : n \in N)$ je U-sistem u X. Pošto je X, U-prostor postoji tačka $x \in X$ koja je tačka nagomilavanja za $\mathcal{U}$. Medjutim, pošto je $\mathcal{U}$ jedno rafiniranje za A, x je tim pre tačka nagomilavanja za A, a ovo je kontradikcija. Dakle, prostor X je slabo kompaktan. //.

# GLAVA 3

## NEKA UOPŠTENJA KOMPAKTNOSTI PREKO OPERATORA ZATVORENJA

U ovoj glavi se razmatraju neka uopštenja kompaktnosti koja su rezultat dejstva trojke $\mathcal{K} = \{\mathcal{P}, \mathrm{cl}, \mathcal{O}\}$, gde je:

$\mathcal{P}$ – familija svih prebrojivih podskupova datog prostora X ili familija svih podprostora od X datog svojstva S;

cl – operator adherencije u prostoru X primenjen na svaki član familije $\mathcal{P}$;

$\mathcal{O}$ – topološko svojstvo koje ima $\mathrm{cl}(P)_X$ za svako P iz $\mathcal{P}$. (Misli se na $\mathrm{cl}(P)_X$ kao podprostor od X.

Svojstva koja se ovde koriste su respektivno: Lindelöf-ovost, parakompaktnost i realna kompaktnost. Motivacija za ovakvo razmatranje uopštenja kompaktnosti potiče iz rezultata Keesling-a (videti [25]). U [25] se daje pojam strogo prebrojivog kompaktnog prostora X zahtevanjem da je adherencija od svakog prebrojivog skupa kompaktan skup u X (videti definiciju 4.1.1).

Glava je podeljena na tri paragrafa. Prvi paragraf je posvećen L-prostorima koji su nastali uopštenjem kompaktnosti posredstvom trojke

{P, cl, O} pri čemu je P familija svih prebrojivih podskupova od X, a O svojstvo Lindelöf-a.

Drugi paragraf odnosi se na R-prostore koji su uvedeni zahtevanjem da u trojci {P, cl, O}, P i dalje ostane familija svih prebrojivih podskupova prostora X, a da O bude svojstvo realne kompaktnosti.

U trećem paragrafu govori se o L´-prostorima. Ovi prostori nastali su isto posredstvom trojke {P, cl, O}, ali je sada P familija svih Lindelöf-ovih podprostora od X, a O je svojstvo Lindelöf-a.

## 3.1. L-PROSTORI

3.1.1. DEFINICIJA. *Prostor* $X$ *je* L-*prostor ako je adherencija svakog prebrojivog podskupa od* $X$ *Lindelöf-ov podprostor od* $X$.

Sledećom lemom, koja se neposredno dokazuje, daje se jedan ekvivalentan oblik pojma L-prostora, a koji može korisno poslužiti u raznim drugim dokazima u toku sledećeg izlaganja.

3.1.2. LEMA. *Prostor* $X$ *je* L-*prostor onda i samo onda ako je svaki zatvoren separabilan podprostor od* $X$ *Lindelöf-ov*.

Jasno da je svaki Lindelöf-ov prostor L-prostor, svaki kompaktan prostor je L-prostor, svaki strogo prebrojivo kompaktan prostor je L-prostor. Takodje, diskretan prostor je L-prostor. Prema 3.1.1. svaki separabilan L-prostor je Lindelöf-ov. Svaki prostor koji je separabilan a nije Lindelöf-ov nije L-prostor.

3.1.3. PRIMER. Neka je $X$ skup realnih brojeva sa uobičajenom topologijom. Za svaku iracionalnu tačku $x \in X$ može se izabrati niz racionalnih tačaka $\{x_n \in Q : n \in N\}$ ($Q$ je skup racionalnih brojeva) koji konvergira $x$ u postojećoj topologiji. Skup $X$ može se topologizirati topologijom $\tau$ na sledeći način. Svaka racionalna tačka iz $X$ je singleton u $X$. Skupovi $U_n(x) = \{x_i : i \in [n, \infty]\} \cup \{x\}$ čine bazu svake iracionalne tačke $x \in X$. Prostor $(X,\tau)$ ima sledeća svojstva:

(a) $X$ je prve prebrojivosti.

(b) $X$ je separabilan jer je skup $Q$ svuda gust u $X$.

(c) $X$ nije Lindelöf-ov jer je $X-Q$ neprebrojiv diskretan podprostor od $X$.

3.1.4. PROPOZICIJA. *Hausdorff-ov prostor od* $X$ *je* L-*prostor onda i samo onda ako za svaki niz* $\{F_n : n \in N\}$ *nepraznih zatvorenih podskupova od* $X$

*postoji zatvoren Lindelöf-ov prostor* $L \subset X$ *takav da je* $L \cap F_n \neq \emptyset$, *za svako* $n \in N$.

Dokaz. Neka je X L-prostor i neka je $\{F_n : n \in N\}$ niz nepraznih zatvorenih podskupova od X. Prema aksiomi izbora postoji prebrojiv podskup $Y = \{x_n : n \in N\}$ takav da je $x_n \in F_n$, za svako $n \in N$. Pošto je X L-prostor to je $L = cl(Y)_X$ Lindelöf-ov i $L \cap F_n \neq \emptyset$ za svako $n \in N$, pa je $L = cl(Y)_X$ traženi podprostor.

Obrnuto. Neka je $Y = \{x_n : n \in N\}$ prebrojiv podprostor od X. Jasno, svaki singleton $\{x_n\}$, $n \in N$, je zatvoren podprostor u X. Po pretpostavci za niz $\{\{x_n\} : n \in N\}$ zatvorenih podskupova od X postoji zatvoren Lindelöf-ov podprostor L, takav da je $\{x_n\} \cap L \neq \emptyset$, za svako $n \in N$. Dakle, $Y \subset L$ jer je $\{x_n\} \subset L$, za svako $n \in N$. Pošto je L zatvoren u X, to je $cl(Y)_L = cl(Y)_X$, a pošto je L Lindelöf-ov, $cl(Y)_X$ je Lindelöf-ov i X je L-prostor. //.

3.1.5. LEMA [13]. *Ako parakompaktan prostor* X *sadrži gust Lindelöf-ov podprostor tada je* X *Lindelöf-ov.*

3.1.6. POSLEDICA [13]. *Svaki parakompaktan separabilan prostor je Lindelöf-ov.*

3.1.7. PROPOZICIJA. *Svaki parakompaktan (metrizabilan) prostor je* L-*prostor.*

Dokaz. Neka je $Y = \{y_n : n \in N\}$ prebrojiv podprostor od parakompaktnog prostora X. Jasno, $cl(Y)_X$ je zatvoren parakompaktan podprostor od X (parakompaktnost se prenosi na zatvorene podprostore). Šta više, $cl(Y)_X$ je separabilan pa je prema 3.1.6. Lindelöf-ov. Dakle, X je L-prostor. //.

3.1.8. PROPOZICIJA. *Zatvoren podprostor od* L-*prostora je* L-*prostor.*

Dokaz. Neka je Y zatvoren podprostor od L-prostora X i neka je $A = \{a_n : n \in N\}$ proizvoljan prebrojiv podprostor od Y. Pošto je Y zatvoren u $X$ to je $cl(A)_X = cl(A)_Y$ i kako je $cl(A)_X$ Lindelöf-ov jer je $X$ L-prostor, to je $cl(A)_Y$ Lindelöf-ov, pa je $Y$ L-prostor. //.

3.1.9. PROPOZICIJA. *Disjunktna topološka suma* L-*prostora je* L-*prostor.*

Dokaz. Neka je $X = \Sigma\{X_a : a \in A\}$ topološka suma familije prostora $X_a$, $a \in A$, gde je $X_a \cap X_b = \emptyset$, za svako $a \neq b$ i neka je $Y = \{x_n : n \in N\}$ prebrojiv podprostor od $X$. Jasno, $Y$ može imati prebrojiv trag kod najviše prebrojivo mnogo prostora $X_a$, pa je $Y = \Sigma\{Y \cap X_{a_n} : n \in N\}$, a $cl(Y)_X = \Sigma\{cl(Y \cap X_{a_n})_{X_{a_n}} : n \in N\}$. Pošto je $cl(Y \cap X_{a_n})_{X_{a_n}}$ Lindelöf-ov (svaki $X_a$ $a \in A$ je L-prostor) za svako $n \in N$, prema 1.2.6. i $cl(Y)_X = \Sigma\{cl(Y \cap X_{a_n})_{X_{a_n}} : n \in N\}$ je Lindelöf-ov. //.

3.1.10. PROPOZICIJA. *Neka je $X$ regularan* L-*prostor, tada svaka dva zatvorena disjunktna separabilna podskupa imaju disjunktne i otvorene okoline.*

Dokaz. Neka su $A$ i $B$ dva zatvorena disjunktna i separabilna podskupa od L-prostora $X$. Prema 3.1.1, skupovi $A$ i $B$ su L-prostori, a pošto su separabilni oni su Lindelöf-ovi pa prema 1.2.7. imaju otvorene disjunktne okoline $U$ i $V$ gde je $A \subset U$ i $B \subset V$, a $U \cap V = \emptyset$. //.

3.1.11. PROPOZICIJA. *Neprekidna i zatvorena slika* L-*prostora je* L-*prostor.*

Dokaz. Neka je $f : X \to Y$ neprekidno i zatvoreno preslikavanje sa L-prostora $X$ na $Y$ i neka je $B = \{y_n : n \in N\}$ prebrojiv podprostor od $Y$, a $A = \{x_n : n \in N\}$ prebrojiv podprostor od $X$, takav da je $f(x_n) = y_n$ za svako $n \in N$, drugim rečima, $f(A) = B$. Pošto je $f : X \to Y$ neprekidno zatvoreno preslikavanje onda je za svako $A \subseteq X$, $f(cl(A)_X) = cl(f(A))_Y$. Za $B = f(A)$ je $cl(B)_Y = f(cl(A)_X)$ pa je $cl(B)_Y$ Lindelöf-ov. //.

3.1.12. PRIMEDBA. Neprekidna slika L-prostora ne mora biti L-prostor. Na primer, neka je $X$ prostor realnih brojeva sa diskretnom topologijom, a $Y$ isto prostor na skupu realnih brojeva sa topologijom iz primera 3.1.3, i neka je $f:X\to Y$ identično preslikavanje sa $X$ na $Y$. Jasno, $f$ je neprekidno preslikavanje, ali $f(X) = Y$ je prostor iz primera 3.1.3, koji nije L-prostor.

3.1.13. LEMA [13]. (Ponomarev). *Svaki prostor prve prebrojivosti je neprekidna i otvorena slika metričkog prostora.*

3.1.14. PRIMEDBA. Prema 3.1.13, prostor iz primera 3.1.3. je neprekidna i otvorena slika nekog metričkog prostora, ali kao što je poznato, nije L-prostor. Medjutim, prema 3.1.7, svaki metrički prostor je L-prostor, što znači da neprekidna i otvorena slika L-prostora ne mora biti L-prostor.

3.1.15. PROPOZICIJA. *Topološki proizvod L-prostora i strogo prebrojivog kompaktnog prostora je L-prostor.*

Dokaz. Neka je $Z = X \times Y$ gde je $X$ L-prostor, a $Y$ strogo prebrojivo kompaktan i neka je dalje $A = \{(x_n, y_n) : x_n \in X,\ y_n \in Y\}$ prebrojiv podprostor od $Z$. Projekcije $p_X(A)$ i $p_Y(A)$ su sledeći prebrojivi podskupovi od $X$ i $Y$; $p_X(A) = \{x_n : n \in N\} \subset X$, $p_Y(A) = \{y_n : n \in N\} \subset Y$. Šta više $cl(p_X(A))$ je Lindelöf-ov podprostor od $X$, jer je $X$ L-prostor. $cl(p_Y(A))_Y$ je kompaktan podprostor od $Y$, jer je $Y$ strogo prebrojivo kompaktan.
$cl(p_X(A))_X \times cl(p_Y(A))_Y$ je zatvoren Lindelöf-ov prostor od $Z$ (proizvod Lindelöf-ovog i kompaktnog prostora je Lindelöf-ov, 1.2.8), pri čemu je:

$$A \subset cl(p_X(A))_X \times cl(p_Y(A))_Y$$

pa je i:

$$cl(A)_Z \subset cl(p_X(A))_X \times cl(p_Y(A))_Y \subset Z$$

Dakle, $cl(A)_Z$ je zatvoren podprostor od Lindelöf-ovog prostora, pa je, prema 1.2.8, Lindelöf-ov. //.

3.1.16. POSLEDICA. *Topološki proizvod L-prostora i kompaktnog prostora je L-prostor.*

3.1.17. PRIMEDBA. Proizvod dva L-prostora ne mora biti L-prostor. Takav primer dat je u paragrafu 3.2. (videti 3.2.7).

## 3.2. R-PROSTORI

Ako u trojci $\mathcal{K} = \{P, cl, O\}$ preko koje se uopštava kompaktnost $P$ i dalje bude familija svih prebrojivih podskupova od datog prostora $X$, cl-operator zatvorenja primenjen na svaki član familije $P$, a $O$ svojstvo realne kompaktnosti koju ima svaki član $cl(P)_X$ za svako $P \in P$, onda se takav prostor X može nazvati R-prostorom. Pošto je svojstvo $O$-realna kompaktnost, najpre se daju osnovna svojstva realne kompaktnosti.

3.2.1. DEFINICIJA [13]. *Tychonoff-ljev prostor X je realno kompaktan ako ne postoji Tychonoff-ljev prostor $\hat{X}$ sa sledećim svojstvima:*

(a) *Postoji homeomorfno utapanje $r: X \to \hat{X}$ tako da je $r(X) \neq$ $\neq cl(r(X))_{\hat{X}} = \hat{X}$.*

(b) *Za svaku neprekidnu realnu funkciju $f: \hat{X} \to R$ postoji neprekidna funkcija $\hat{f}: \hat{X} \to R$ tako da je $\hat{f} \cdot r = f$.*

3.2.2. PROPOZICIJA [13]. *Prostor je realno kompaktan onda i samo onda ako je homeomorfan sa zatvorenim podprostorom od Kartezijevog proizvoda kopija realne linije.*

3.2.3. PROPOZICIJA [13]. *Svaki Lindelöf-ov prostor je realno kompaktan.*

3.2.4. PROPOZICIJA [13]. *Prostor X je kompaktan onda i samo onda ako je realno kompaktan i pseudokompaktan.*

3.2.5. DEFINICIJA. *Prostor X je R-prostor ako je zatvorenje (adherencija) svakog prebrojivog podskupa od X realno kompaktan podprostor od datog prostora X.*

3.2.6. LEMA. *Prostor X je R-prostor onda i samo onda ako je svaki zatvoren separabilan podprostor od X realno kompaktan.*

Jasno, svaki kompaktan, strogo prebrojivo kompaktan, realno kompaktan, Lindelőf prostor je R-prostor. Prema 4.3. svaki L-prostor je R-prostor. Svaki separabilan R-prostor je realno kompaktan. Ako je neki prostor separabilan, a nije realno kompaktan, onda taj prostor nije R-prostor. Na primer, ravan $E_2 = R \times R$ gde je R prostor realnih brojeva sa uobičajenom topologijom realno kompaktan prostor koji je separabilan. Medjutim, u $E_2$ može se konstruisati mnogo primera, separabilnih, pravih, podprostora, koji nisu realno kompaktni. Svaki od ovih primera je tip prostora koji nije R-prostor.

3.2.7. PRIMEDBA. Pošto je svaki Lindelőf-ov prostor realno kompaktan, prema 3.2.5. svaki L-prostor je R-prostor. Obrnuto, ne mora biti tačno. Na primer, prostor P na skupu realnih brojeva sa topologijom poluotvorenih intervala ima sledeća svojstva:

(a) Prostor P je Lindelőf-ov $\}$ $\Longrightarrow$ Normalan $\Longrightarrow$ Tychonoff-ljev
(b) Prostor P je regularan

(c) Prostor P je separabilan.

Medjutim, prostor $X = P \times P$ je separabilan ali nije Lindelőf-ov pa nije L-prostor. Prostor X je Tychonoff-ljev i realno kompaktan jer je P normalan i realno kompaktan, a pošto se realna kompaktnost prenosi na proizvod to je X realno kompaktan, a samim tim je i R-prostor. Ovim primerom dokazano je da je klasa R-prostora šira od klase L-prostora.

3.2.8. PROPOZICIJA. *Prostor* X *je* R-*prostor onda i samo onda ako za svaki niz* $\{F_n : n \in N\}$ *zatvorenih podskupova od* X *postoji realno kompaktan podskup* $R \subset X$ *takav da je* $R \cap F_n \neq \emptyset$, *za svako* $n \in N$.

Dokaz. Neka je X R-prostor i $\{F_n : n \in N\}$ niz zatvorenih podskupova od X. Po aksiomi izbora postoji niz $Y = \{x_n : n \in N\}$ takav da je za svako $n \in N$, $x_n \in F_n$. Pošto je $cl(Y)_X$ realno kompaktan u X i $cl(Y)_X \cap F_n \neq \emptyset$, za svako $n \in N$, pa je $cl(Y)_X = R$ i $R \cap F_n \neq \emptyset$, za svako $n \in N$.

Obrnuto. Neka je $Y = \{x_n : n \in N\}$ prebrojiv podskup od $X$, a $\{\{x_n\} : n \in N\}$ niz zatvorenih singletona od $X$. Po pretpostavci postoji realno kompaktan zatvoren podskup $R \subset X$ takav da je $R \cap \{x_n\} \neq \emptyset$ za svako $n \in N$. Iz ovoga sledi da $x_n \in R$, za svako $n \in N$, tj. $Y \subset R$. Pošto je $R$ zatvoren, to je $cl(Y)_R = cl(Y)_X$, a kako je $cl(Y)_X$ realno kompaktan (realna kompaktnost se prenosi na zatvorene podprostore), prema 3.2.5, $X$ je R-prostor. //.

3.2.9. PROPOZICIJA. *Svaki zatvoren podprostor od R-prostora je R-prostor.*

Dokaz. Neka je $X$ R-prostor, $Y$ zatvoren podprostor od $X$, i $A = \{a_n : n \in N\}$ prebrojiv podskup od $Y$. $cl(A)_X = cl(A)_Y$, jer je $Y$ zatvoren u $X$, a pošto je $cl(A)_X$ realno kompaktan, to je $cl(A)_Y$ realno kompaktan i ovo važi za svaki prebrojiv podskup $A \subset Y$, prostor $Y$ je R-prostor. //.

3.2.10. PROPOZICIJA. *Neka je $X$ topološki proizvod familije $\{X_s : s \in S\}$ prostora $X_s$ gde $s \in S$. $X$ je R-prostor, ako je svaki $X_s$, $s \in S$* R-prostor.

Dokaz. Neka je $A = \{a_n : n \in N\}$ prebrojiv podskup u $X$ i neka je $p_s(A) = \{a_n^s \in X_s : n \in N\}$ projekcija od $A$ na $X_s$, za svako $s \in S$. Pošto je $X_s$, $s \in S$, R-prostor, to je $cl(p_s(A))_{X_s}$ realno kompaktan za svako $s \in S$, pa je $\times\{cl(p_s(A))_{X_s} : s \in S\}$ realno kompaktan i zatvoren podprostor od $X$ (realna kompaktnost se obostrano prenosi na proizvod familije realno kompaktnih prostora), pri čemu je $A \subset \times\{cl(p_s(A))_{X_s} : s \in S\}$. Pošto se realna kompaktnost prenosi na zatvorene podprostore, to je $cl(A)_X \subseteq \times\{cl(p_s(A))_{X_s} : s \in S\}$ realno kompaktan i $X$ je R-prostor. //.

3.2.11. POSLEDICA. *Inverzni limes familije R-prostora u klasi $T_2$ prostora je R-prostor.*

Dokaz. Inverzni limes je zatvoren podprostor u proizvodu familije prostora. Pošto je, prema 3.2.10. proizvod R-prostora, takodje R-prostor, to je, prema 3.2.9. i inverzni limes takodje R-prostor. //.

3.2.12. POSLEDICA. *Neka je* X *topološki prostor i* $\{A_s : s \in S\}$ *familija zatvorenih podprostora od* $\equiv$. *Ako je svaki* $A_s$, $s \in S$, R-*prostor, tada je* $\cap\{A_s : s \in S\}$ *takodje* R-*prostor*.

Dokaz. Prostor $\cap\{A_s : s \in S\}$ je homeomorfan sa zatvorenim podprostorom od $\times\{A_s : s \in S\}$, a kako je prema 3.2.10. $\times\{A_s : s \in S\}$ R-prostor, to je $\cap\{A_s : s \in S\}$ R-prostor. //.

3.2.13. PRIMEDBA. (Ponomarev 1959., Frolik 1961.). Dokazano je da ako postoji perfektno otvoreno preslikavanje $f$ sa realno kompaktnog prostora X na Tychonoff-ljev prostor Y tada je Y realno kompaktan. Ovim je istaknuto da se realna kompaktnost ne prenosi neprekidnim, odnosno perfektnim preslikavanjima, već specijalnim (otvorenim) perfektnim preslikavanjem. Potpuno isti zaključak važi i za R-prostore.

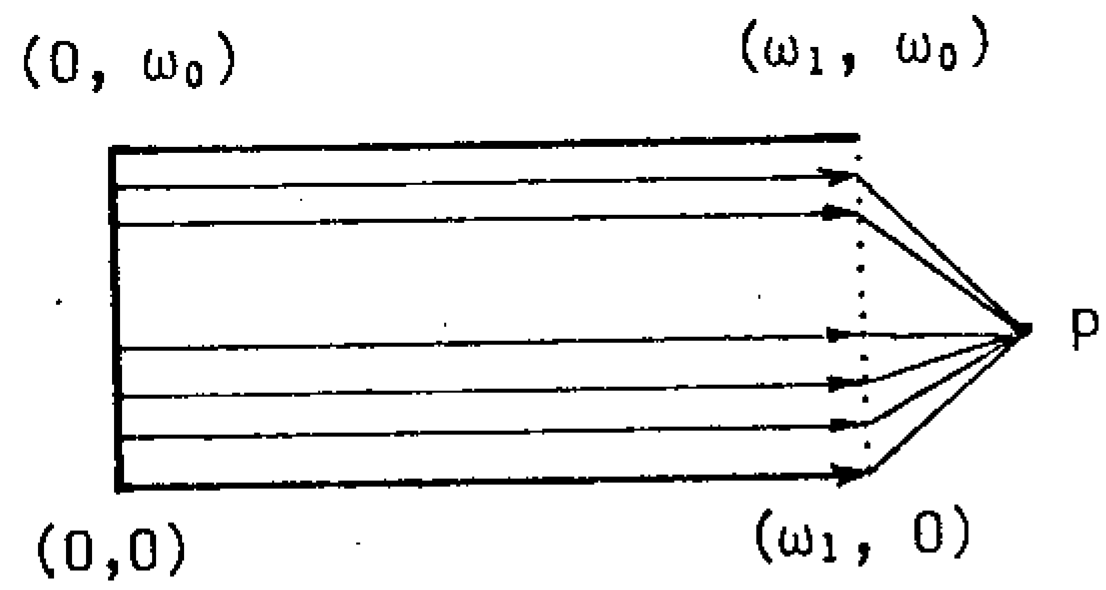
## 3.3. L′-PROSTORI

Klasa L′ prostora nastala je uopštavanjem kompaktnosti preko trojke {$P$, cl, $O$} gde je $P$ familija svih Lindelöf-ovih podprostora datog prostora X, cl-operator zatvorenja i $O$ svojstvo Lindelöf-a.

3.3.1. DEFINICIJA. *Prostor* X *je* L′*-prostor, ako je zatvorenje svakog Lindelöf-ovog podprostora od* X *takodje Lindelöf-ov podprostor od* X.

Prema ovoj definiciji, svaki L′-prostor je L-prostor. Obrnuto ne mora biti tačno, što dokazuje sledeći primer.

3.3.2. PRIMER. Neka je $[0, \omega_1]$ uredjen prostor svih rednih brojeva $\alpha \le \omega_1$, a $[0, \omega_0]$ svih $\alpha \le \omega_0$. Neka je dalje $X = [0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, n) : n = 0,1,2,\ldots\}$.




Prostor X može se gusto utopiti u prostor $Y = X \cup \{p\}$ gde su okoline tačke p komplementi kompaktnih podskupova od X (videti napomenu 1.1.10).

Prostor $Z = Y - \{(\omega_1, \omega_0)\}$ (inače podprostor od Y) ima sledeća svojstva:

(a) Prostor Z nije kompaktan jer sadrži zatvoren nekompaktan podprostor $[0, \omega_1) \times \{\omega_0\}$.

(b) Svaki prebrojiv podskup od Z ima kompaktno zatvorenje u Z. Dakle, prostor Z je L-prostor (razume se, Z je prebrojivo kom-

(c) Postoji Lindelőf-ov podprostor L od Z, za koji $cl(L)_Z$ nije Lindelőf-ov podprostor od Z. Zaista, neka je $L = \bigcup \{([0, \omega_1) \times \{k\}) \cup \{p\} : k = 0,1,2,3,\ldots\}$. $cl(L)_Z = Z$. Medjutim, prostor Z nije Lindelőf-ov. Naime, ako bi Z bio Lindelőf-ov, pošto je prebrojivo kompaktan, bio bi kompaktan, a to je kontradikcija. Dakle, prostor Z je primer L-prostora koji nije L'-prostor.

Svaki diskretan neprebrojiv prostor X je primer L'-prostora koji nije Lindelőf-ov. Takodje, prostor $[0, \omega_1)$ svih rednih brojeva $\alpha < \omega_1$ je primer L'-prostora koji nije Lindelőf-ov. Jasno, svaki Lindelőf-ov prostor je L'-prostor. Svaki prostor X koji nije Lindelőf-ov, a sadrži svuda gust Lindelőf-ov podprostor je primer prostora koji nije L'-prostor. Razume se, da svaki separabilan prostor koji nije Lindelőf-ov nije L-prostor ni L'-prostor. Takodje je jasno da je L-prostor i L'-prostor u klasi prostora u kojima su Lindelőf-ovi nekompaktni podprostori jedino prebrojivi podskupovi.

3.3.3. PROPOZICIJA. *Svaki zatvoren podprostor od L'-prostora je L'-prostor.*

Dokaz. Neka je Y zatvoren podprostor od L'-prostora X i Z Lindelőf-ov podprostor od Y. Pošto je Y zatvoren u X, to je $cl(Z)_Y = cl(Z)_X$, a pošto je Z Lindelőf-ov podprostor od Y, u relativnoj topologiji, tim pre je Lindelőf-ov i u X. Kako je X, L'-prostor, to je $cl(Z)_X$ Lindelőf-ov i zatvoren podprostor od X koji je sadržan u zatvorenom podprostoru Y, pa je $cl(Z)_Y = cl(Z)_X$ Lindelőf-ov podprostor od Y. //.

3.3.4. LEMA. *Neka je X disjunktna topološka suma prebrojive familije prostora $X_n$, $n \in N$, i Y podprostor od X. Podprostor Y je Lindelőf-ov onda i samo onda ako je $Y \cap X_n$ Lindelőf-ov za svako $n \in N$.*

Dokaz. Pošto je $X = \Sigma \{X_n : n \in N\}$ gde je $X_n \cap X_k = \emptyset$, za svako $n, k \in N$, $n \neq k$, $Y = \Sigma \{Y \cap X_n : n \in N\}$ i ako je $Y \cap X_n$ Lindelőf-ov, za svako $n \in N$, prema 1.2.6. Y je Lindelőf-ov jer je disjunktna prebrojiva unija Lindelőf-ovih podprostora.

Obrnuto, neka je podprostor Y Lindelöf-ov. Jasno, Y je disjunktna topološka suma prebrojive familije prostora $Y \cap X_n$, $n \in N$. Svaki podprostor $Y \cap X_n$, $n \in N$ je otvoreno zatvoren podprostor od Y, pa je Lindelöf-ov jer se svojstvo Lindelöf-a prenosi na zatvorene podprostore. //.

3.3.5. PROPOZICIJA. *Neka je X disjunktna topološka suma familije L′-prostora* $X_n$, $n \in N$. *Tada je X L′-prostor.*

Dokaz. Neka je Y proizvoljan Lindelöf-ov podprostor od $X = \Sigma\{X_n : n \in N\}$. Prema 3.3.4, $Y \cap X_n$ je Lindelöf-ov podprostor od $X_n$, za svako $n \in N$. Pošto je $X_n$, L′-prostor, za svako $n \in N$, to je $cl(Y \cap X_n)_{X_n}$ Lindelöf-ov podprostor od $X_n$, za svako $n \in N$. Kako je $cl(Y)_X = \Sigma\{cl(Y \cap X_n)_{X_n} : n \in N\}$ i $cl(Y \cap X_n)_{X_n}$ je Lindelöf-ov, za svako $n \in N$, podprostor $cl(Y)_X$ je Lindelöf-ov za svaki Lindelöf-ov podprostor Y od X, pa je prostor X, L′-prostor. //.

3.3.6. PROPOZICIJA. *Proizvod L′-prostora X i kompaktnog prostora Y je L′-prostor.*

Dokaz. Neka je $Z = X \times Y$ topološki proizvod L′-prostora X i kompaktnog prostora Y. Neka je dalje A proizvoljan Lindelöf-ov podprostor od Z. Prema 1.2.8. jasno je da su projekcije $p_X(A)$ i $p_Y(A)$ Lindelöf-ovi podprostori od X i Y. Pošto je X L′-prostor, to je $cl(p_X(A))_X$ Lindelöf-ov podprostor od X, a pošto je Y kompaktan, $cl(p_Y(A))_Y$ je kompaktan podprostor od Y. Prema 1.2.8. proizvod $cl(p_X(A)_X \times cl(p_Y(A))_Y$ je zatvoren Lindelöf-ov podprostor od Z koji sadrži Lindelöf-ov podprostor A. Jasno $cl(A)_Z \subset cl(p_X(A))_X \times cl(p_Y(A))_Y$, pa je $cl(A)_Z$ Lindelöf-ov podprostor od Z. Dakle, prostor Z je L′-prostor. //.

3.3.7. PRIMEDBA. Proizvod dva L′-prostora ne mora biti L′-prostor. Na primer, neka je X prostor na skupu realnih brojeva sa topologijom poluotvorenih intervala. X je separabilan i Lindelöf-ov, pa je, dakle, L′-prostor. Medjutim, $X \times X$ je separabilan ali nije Lindelöf-ov, pa nije L′-prostor.

3.3.8. LEMA [13]. *Neka je* $f : X \to Y$ *zatvoreno preslikavanje sa regularnog prostora* $X$ *na* $Y$ *i neka je* $f^{-1}(y)$ *Lindelöf-ov podprostor od* $X$ *za svako* $y \in Y$, *tada je* $f^{-1}(Z)$ *Lindelöf-ov podprostor od* $X$ *za svaki Lindelöf-ov podprostor* $Z$ *od* $Y$.

3.3.9. PROPOZICIJA. *Neka je prostor* $Y$ *neprekidna i zatvorena slika regularnog* $L'$*-prostora pri preslikavanju* $f$ *tako da je* $f^{-1}(y)$ *Lindelöf-ov podprostor od* $X$ *za svako* $y \in Y$, *tada je* $Y$ $L'$*-prostor.*

Dokaz. Neka je $Z \subset Y$, Lindelöf-ov podprostor od $Y$ i neka je $Z' = f^{-1}(Z)$. Prema 3.3.8, $Z'$ je Lindelöf-ov podprostor od $X$ pa je $cl(Z')_X$ takodje Lindelöf-ov jer je $X$ $L'$-prostor. Pošto se Lindelöf-ovo svojstvo čuva pri neprekidnim preslikavanjima $f(cl(Z')_X)$ je zatvoren Lindelöf-ov podprostor od $Y$. Šta više, $cl(Z)_Y \subset f(cl(Z')_X$ pa je $cl(Z)_Y$ - Lindelöf-ov podprostor od $Y$ jer se svojstvo Lindelöf-a prenosi na zatvorene podprostore. Prema tome, prostor $Y$ je $L'$-prostor. //.

3.3.10. PROPOZICIJA. *Svaki parakompaktan prostor je* $L'$*-prostor.*

Dokaz. Neka je prostor $X$ parakompaktan i $Y$ proizvoljan Lindelöf-ov podprostor od $X$ $cl(Y)_X$ je parakompaktan podprostor od $X$ (parakompaktnost se prenosi na zatvorene podprostore) koji sadrži gust Lindelöf-ov podprostor od $Y$, pa je prema 3.1.5, Lindelöf-ov. Dakle prostor $X$ je $L'$-prostor. //.

3.3.11. POSLEDICA. *Svaki metrizabilan prostor je* $L'$*-prostor.*

3.3.12. PRIMEDBA. U klasi prostora koji su diskretni, ili metrizabilni ili parakompaktni, svojstva $L$ i $L'$ su medjusobno ekvivalentna.

# GLAVA 4

## HIPER - PREBROJIVO KOMPAKTNI PROSTORI

Ova glava odnosi se na uopštenja kompaktnosti pojmovima *strogo prebrojiva kompaktnost* prema [25] i *hiper-prebrojiva kompaktnost.* Glava se sastoji od šest delova (paragrafa). U prvom delu daju se definicije ova dva pojma, kao i neki njihovi ekvivalentni uslovi. Ovde se koriste neka svojstva *hiperprostora* po kojima je i nastao naziv "hiperprebrojiva kompaktnost". U drugom paragrafu, karakterišu se strogo prebrojivo kompaktni i hiperprebrojivo kompaktni prostori preko nedostiživih tačaka (videti definiciju P-tačke i prebrojivo nedostižive tačke). Takodje se daje primer prostora koji je strogo prebrojivo kompaktan a nije hiper-prebrojivo kompaktan. Treći paragraf odnosi se na neka svojstva nedostiživih tačaka kao i na izvesne uslove egzistencije ovih tačaka. U četvrtom delu daju se neka svojstva strogo prebrojivo kompaktnih i hiper-prebrojivo kompaktnih prostora. Peti paragraf odnosi se na karakterizaciju nekih klasa prostora u kojima su ekvivalentni pojmovi strogo prebrojiva kompaktnost i hiper-prebrojiva kompaktnost. U ovom delu dati su i primeri prostora preko kojih se razjašnjava odnos pojmova strogo prebrojive kompaktnosti i hiper-prebrojive kompaktnosti sa pojmom prebrojive kompaktnosti. Poslednji (šesti) paragraf ove glave odnosi se na strogo sekvencijalno kompaktne prostore koji su okarakterisani uslovom da je za svaki prostor $X$ (iz klase strogo sekvencijalno kompaktnih prostora) $C(X)$ sekvencijalno kompaktan. $C(X)$ je hiper-prostor na svim kompaktnim podskupovima od $X$.

## 4.1. DEFINICIJE I NEKI EKVIVALENTNI USLOVI

Neka je $(X, T)$ topološki $T_2$ prostor. Sa $\exp(X)$ označava se prostor čiji su elementi svi neprazni, zatvoreni skupovi sa bazom oblika:

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \{A \in \exp(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ A \cap U_i \neq \emptyset,$$

$$i = 1,2,\ldots,n\}$$

gde su $U_i \in T$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Topologija na $\exp(X)$ sa gore navedenom bazom je dobro poznata Vietoris-ova ili eksponencijalna (konačna) topologija, a prostor $\exp(X)$ naziva se eksponencijalni prostor ili hiperprostor prostora X. Detaljnije o hiperprostorima videti, na primer, [30], [37], [34].

Sa $C(X)$ označava se podprostor od $\exp(X)$ čiji su elementi kompaktni podskupovi od X.

U navedenim oznakama usvojićemo sledeća obeležavanja:

$$\exp^{(2)}(X) = \exp(\exp(X)) ,\ldots, \exp^{(n)}(X) = \exp(\exp^{(n-1)}(X))$$

i

$$C^{(2)}(X) = C(C(X)) ,\ldots, C^{(n)}(X) = C(C^{(n-1)}(X)) , \quad (n \in N).$$

4.1.1. DEFINICIJA [25]. *Prostor X je strogo prebrojivo kompaktan ako je adherencija svakog prebrojivog podskupa od X kompaktan podskup od X.*

Paralelno sa pojmom strogo prebrojive kompaktnosti daje se i pojam hiper-prebrojive kompaktnosti sledećom definicijom.

4.1.2. DEFINICIJA. *Prostor X je hiper-prebrojivo kompaktan ako za svaku prebrojivu familiju kompaktnih podskupova od X postoji kompaktan skup $K \subset X$ koji je nadskup svakog člana ove familije.*

4.1.3. DEFINICIJA [31]. *Parcijalno uredjen i usmeren skup* $(S, \leq)$ *je* $\aleph_0$*-usmeren ako za svaki prebrojiv podskup* $S_0 = \{s_i \in S : i \in N\}$ *postoji* $s \in S$ *tako da je* $s_i \leq s$, *za svako* $i \in N$.

Nakon ove definicije, jasno je da se hiper-prebrojiva kompaktnost može okarakterisati uslovom da je familija $C(X)$ $\aleph_0$-usmerena u odnosu na inkluziju.

3.1.4. PRIMER [32]. Neka je $X = [0, \omega_1)$ skup svih rednih brojeva koji su manji od prvog neprebrojivog rednog broja $\omega_1$ i neka je dalje $X$, prostor sa uredjajnom topologijom $\tau$ na $X$. Poznato je da svaki prebrojiv podskup $A = \{x_n \in X : n \in N\}$ ima svoj supremum $a < \omega_1$, tj. $a \in X$. Pošto je $[0, a] \subset X$ kompaktan i zatvoren, a inače je $A \subset [0, a]$, to je $cl(A)_{[0,a]} = cl(A)_X$, pa je prostor $X$ strogo prebrojivo kompaktan. Pošto je, prema [32], svaki kompaktan podskup od $X$ prebrojiv, lako se vidi da je familija $C([0, \omega_1))$ $\aleph_0$-usmerena, tj. da je prostor $X$ hiper-prebrojivo kompaktan.

4.1.5. TEOREMA. *Neka je prostor* $X$ *Hausdorff-ov. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(a) *Prostor* $X$ *je strogo prebrojivo kompaktan.*

(b) *Svaki zatvoren separabilan podprostor od* $X$ *je kompaktan.*

(c) *Za svaku prebrojivu familiju* $\{K_n \in C(X) : n \in N\}$ *postoji* $K \in C(X)$ *tako da je* $K_n \cap K \neq \emptyset$, *za svako* $n \in N$.

(d) *Familija* $C^s(X)$ (*svih separabilnih kompaktnih podskupova od* $X$) *je* $\aleph_0$*-usmerena.*

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b) je trivijalno.

(a) $\Rightarrow$ (c) : Neka je $\{K_n \in C(X) : n \in N\}$ prebrojiva familija kompaktnih podskupova od $X$, a $\{x_n \in K_n : n \in N\}$ prebrojiv podskup od $X$ takav da je, za svako $n \in N$, $x_n \in K_n$. Ako je prostor $X$ strogo prebrojivo kompaktan $cl(\{x_n \in K_n : n \in N\})_X = K \in C(X)$ i $K_n \cap K \neq \emptyset$, za svako $n \in N$.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Neka je $A = \{x_n \in X : n \in N\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od $X$, a $\{\{x_n\} \in C(X) : n \in N\}$ prebrojiva familija singletona od $X$. Ako prostor $X$ ima svojstvo (c) postoji $K \in C(X)$ tako da je $\{x_n\} \cap K \neq \emptyset$, za svako $n \in N$. To znači da je $\{x_n\} \subset K$, za svako $n \in N$, tj. $A \subset K$. Dakle, $cl(A)_K = cl(A)_X \subset K$ i $cl(A)_X \in C(X)$ pa je prostor $X$ strogo prebrojivo kompaktan.

(a) $\Rightarrow$ (d) : Neka je $\{K_n \in C^s(X) : n \in N\}$, a $\{S_n \subset X : n \in N\}$ prebrojiva familija prebrojivih podskupova od $X$ takvih da je $cl(S_n)_X = K_n$, za svako $n \in N$. Neka je dalje $S = \cup \{S_n : n \in N\}$. $S$ je prebrojiv podskup od $X$, a pošto je $X$ strogo prebrojivo kompaktan, to je $cl(S)_X \in C^s(X)$ i $K_n \subset cl(S)_X$, za svako $n \in N$, pa je familija $C^s(X)$ $\aleph_0$ - usmerena.

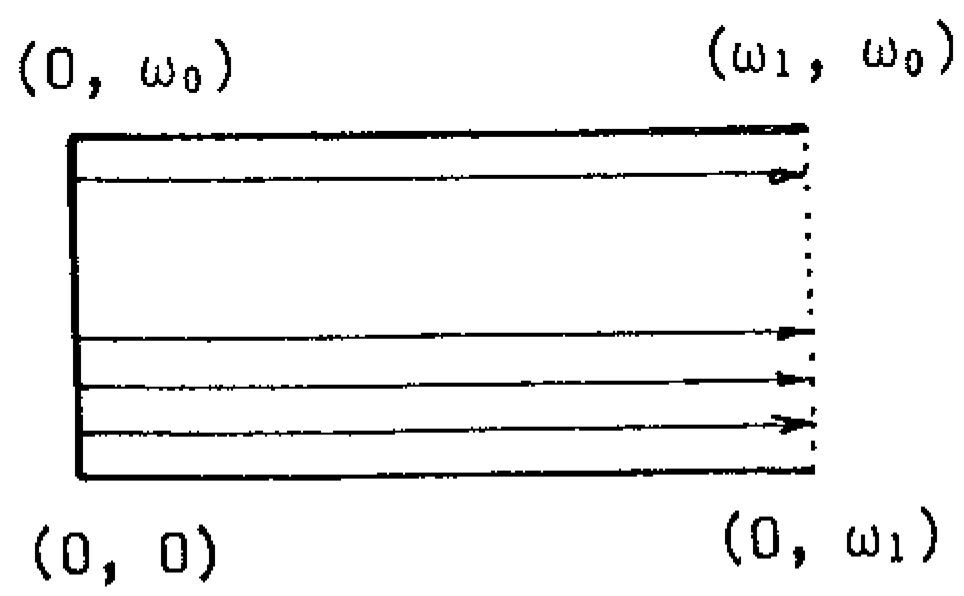
(d) $\Rightarrow$ (a) : Neka je familija $C^s(X)$ $\aleph_0$ - usmerena i $\{x_n \in X : n \in N\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od $X$. Prebrojiva familija $\{\{x_n\} \in C^s(X) : n \in N\} \subset C^s(X)$ pa postoji $K \in C^s(X)$ tako da je $\{x_n\} \subset K$, za svako $n \in N$. To znači da je $A \subset K$, pa je $cl(A)_X = cl(A)_K \in C^s(X)$, što dokazuje da je prostor $X$ strogo prebrojivo kompaktan.

4.1.6. POSLEDICA. *Svaki hiper-prebrojivo kompaktan prostor je strogo prebrojivo kompaktan.*

Da obrnuto tvrdjenje ne mora da važi, pokazuje sledeći primer.

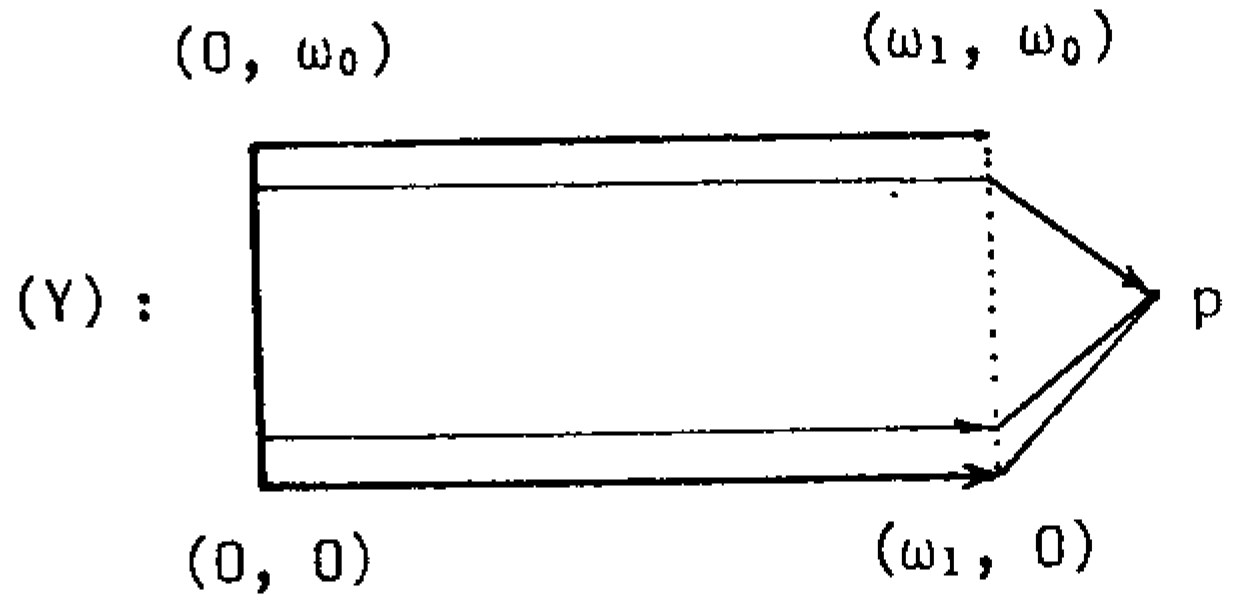
4.1.7. PRIMER. Neka je $[0, \omega_1]$ uredjen prostor svih rednih brojeva $\alpha \leq \omega_1$, a $[0, \omega_0]$ svih $\alpha \leq \omega_0$. Neka je dalje $X = [0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, n) : n \in N \cup \{0\}\}$.

(X) :



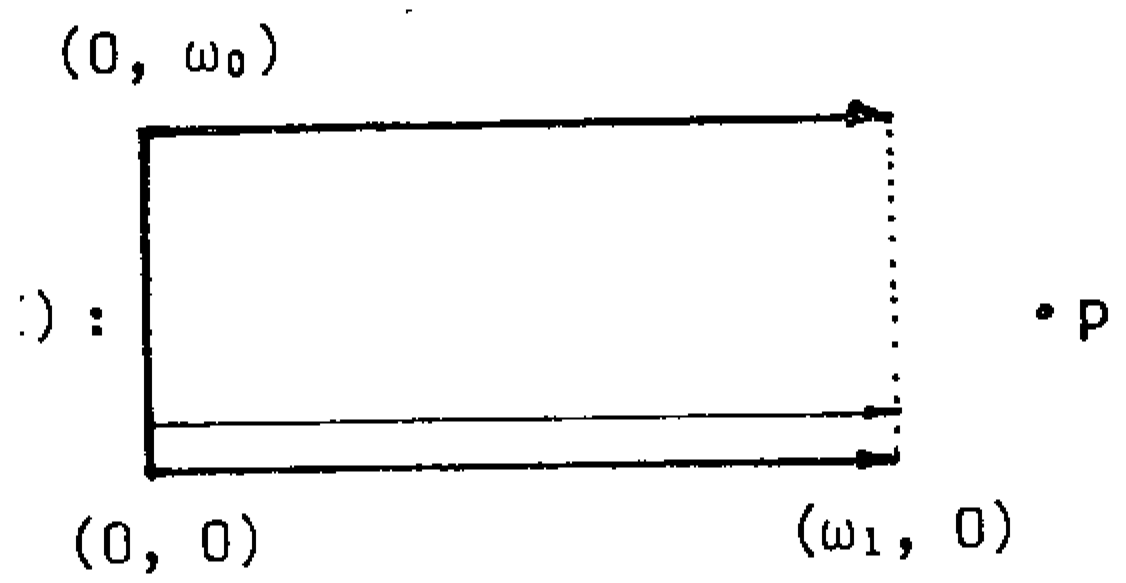
Prostor X je normalan i hiper-prebrojivo kompaktan ali nije kompaktan.

Neka je $Y = X \cup \{p\}$ gde su okoline tačke $p \in Y$ komplementi kompaktnih podskupova od X. (Videti napomenu 1.1.10).




Prostor Y je kompaktan $T_1$ prostor koji nije $T_2$ jer se tačke $(\omega_1, \omega_0)$ i p ne mogu razdvojiti disjunktnim okolinama.

Prostor $Z = Y - \{(\omega_1, \omega_0)\}$ nije kompaktan jer sadrži nekompaktan zatvoren podprostor $[0, \omega_1) \times \{\omega_0\}$.




Lako se vidi da je prostor Z strogo prebrojivo kompaktan i $T_2$, medjutim, Z nije hiper-prebrojivo kompaktan.

Naime, postoji prebrojiva familija kompaktnih podskupova $\{K_n \in C(Z) : n \in N \cup \{0\}$ gde je $K_n = ([0, \omega_1) \times \{n\}) \cup \{p\}$, takvih da je $cl(\cup\{K_n : n \in N \cup \{0\}\})_Z = Z$. Pošto Z nije kompaktan, razume se da za ovu familiju nije zadovoljen uslov 4.1.2., pa Z nije prebrojivo kompaktan.

Naredna teorema odnosi se na ekvivalentnost hiper-prebrojive kompaktnosti prostora X i strogo prebrojive kompaktnosti podprostora $C(X) \subset \exp(X)$, što na neki način opravdava naziv "hiper-prebrojiva kompaktnost".

4.1.8. TEOREMA. *Prostor* $X$ *je hiper-prebrojivo kompaktan onda i samo onda ako je* $C(X)$ *strogo prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Neka je prostor $X$ hiper-prebrojivo kompaktan i $\{K_n \in C(X) : n \in N\}$ prebrojiv podskup od $C(X)$. Pošto je $X$ hiper-prebrojivo kompaktan postoji $K \in C(X)$ tako da je $K_n \subseteq K$, za svako $n \in N$. Prema [37] $\exp(K)$ je kompaktan zatvoren podprostor od $C(X)$ koji sadrži $\{K_n \in C(X) : n \in N\}$ pa je $cl(\{K_n \in C(X) : n \in N\})_{C(X)} \in C(C(X))$.

Obrnuto, neka je $C(X)$ strogo prebrojivo kompaktan, a $K_n \in C(X) : n \in N$ prebrojiv podskup od $C(X)$. Jasno, $cl(\{K_n \in C(X) : n \in N\})_{C(X)} = \mathcal{K} \in C(C(X))$. Prema [37] $|\mathcal{K}| = \cup\{K : K \in \mathcal{K}\} \in C(X)$. Šta više, $K_n \in |\mathcal{K}|$, za svako $n \in N$, pa je prostor $X$ hiper-prebrojivo kompaktan. //.

4.1.9. TEOREMA. *Neka je prostor* $X$ *Hausdorff-ov. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) *Prostor* $X$ *je hiper-prebrojivo kompaktan.*

(b) *Za svaku familiju* $\{K_n \in C(X) : n \in N\}$, $cl(\cup\{K_n \in C(X) : n \in N\})_X \in C(X)$.

(c) *Prostor* $C(X)$ *je hiper-prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. (a) $\Leftrightarrow$ (b) je trivijalno.

(a) $\Rightarrow$ (c) : Neka je prostor $X$ hiper-prebrojivo kompaktan i $\{\mathcal{K}_n \in C(C(X)) : n \in N\}$ prebrojiva familija kompaktnih podskupova od $C(X)$. Jasno $|\mathcal{K}_n| = \cup\{K : K \in \mathcal{K}_n\} \in C(X)$, za svako $n \in N$. Pošto je $X$ hiper-prebrojivo kompaktan za familiju $\{|\mathcal{K}_n| \in C(X) : n \in N\}$ postoji $K \in C(X)$ tako da je $|\mathcal{K}_n| \subseteq K$, za svako $n \in N$. Razume se, $\exp(K)$ je kompaktan zatvoren podskup od $C(X)$ pri čemu je $\mathcal{K}_n \subset \exp(K)$, za svako $n \in N$. Dakle, podprostor $C(X)$ je hiper-prebrojivo kompaktan.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Neka je podprostor $C(X)$ hiper-prebrojivo kompaktan. Jasno, prema 4.1.6, $C(X)$ je strogo prebrojivo kompaktan, pa je prema prethodnoj teoremi prostor $X$ hiper-prebrojivo kompaktan. //.

4.1.10. POSLEDICA. *Podprostor* $C(X)$ *je hiper-prebrojivo kompaktan onda i samo onda ako je strogo prebrojivo kompaktan.*

4.1.11. POSLEDICA. *Prostor* $X$ *je hiper-prebrojivo kompaktan* $\Leftrightarrow$ $C(X)$ *hiper-prebrojivo kompaktan* $\Leftrightarrow$ $C(C(X)) = C^2(X)$ *hiper-prebrojivo kompaktan* $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$ $C^{\omega}(X)$ *hiper-prebrojivo kompaktan.*

Pošto su na $C(X)$ svojstva hiper-prebrojiva kompaktnost i strogo prebrojiva kompaktnost ravnopravna (ekvivalentna) interesantno je videti kakva je situacija sa podprostorima od $C(X)$ ili još lepše, sa zatvorenim podprostorima od $C(X)$. Jedan odgovor na ovo pitanje daje sledeća propozicija.

3.1.12. PROPOZICIJA. *Neka je* $A$ *zatvoren strogo prebrojivo kompaktan podprostor od* $C(X)$ *i neka za svaku kompaktnu familiju* $\mathcal{K} \subset A$ $|\mathcal{K}| = \cup\{K : K \in \mathcal{K}\} \in A$. *Tada je podprostor* $A$ *hiper-prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\{\mathcal{K}_n \subset A : n \in N\}$ prebrojiva familija kompaktnih podskupova od $A$. Kako po pretpostavci $|\mathcal{K}_n| \in A$, za svako $n \in N$, to je $\{|\mathcal{K}_n| \in A : n \in N\}$ prebrojiv podskup od $A$. Pošto je $A$ strogo prebrojivo kompaktan, $cl(\{|\mathcal{K}_n| \in A : n \in N\})_A \in C(A)$. Šta više, $\mathcal{K}_n \subseteq \exp(cl(\{|\mathcal{K}_n| \in A : n \in N\})_A)$ za svako $n \in N$, pa je $A$ hiper-prebrojivo kompaktan podprostor od $C(X)$. //.

4.1.13. NAPOMENA. Strogo prebrojivo kompaktan podprostor $A$ se pod navedenim uslovima ne mora poklapati sa $C(X)$. Na primer, neka je $X = R$ i $(X, \tau)$ prostor realnih brojeva sa uobičajenom topologijom. Neka je dalje $A = \exp [0, 1]$. Razume se, $A$ ima svoje uslove prethodne propozicije ali $A \neq C(X)$ jer $[2, 3] \in C(X)$ ali $[2, 3] \notin A$.

## 4.2. KARAKTERIZACIJA HIPER - PREBROJIVO KOMPAKTNIH I STROGO PREBROJIVO KOMPAKTNIH PROSTORA PREKO NEDOSTIŽIVIH TAČAKA

Ovaj paragraf odnosi se na neizolovane tačke prostora X koje nisu granične tačke nijednog prebrojivog podskupa datog prostora X i na neizolovane P-tačke prema [20], [29] i [44]. Posredstvom ovih tačsks karakterišu se strogo prebrojiva kompaktnost i hiperprebrojiva kompaktnost, a daje se i primer prostora koji je strogo prebrojivo kompaktan, a nije hiper-prebrojivo kompaktan. Takodje se govori o odnosu prebrojivo nedostiživih i P - tačaka.

4.2.1. DEFINICIJA. *Neizolovana tačka* p *prostora* X *je prebrojivo nedostiživa ako za svaki prebrojiv podskup* $A \subset X$ *koji ne sadrži tačku* p *i* $cl(A)_X$ *takodje ne sadrži tačku* p.

4.2.2. PROPOZICIJA. *Neka je Hausdorf-ov prostor* X *kompaktan i* $A \subset X$ *skup svih prebrojivo nedostiživih tačaka u* X, *tada podprostor* $X-A$ *je strogo prebrojivo kompaktan.*

Neka je M prebrojiv podskup od $X-A$. $cl(M)_X \cap A \neq \emptyset$, jer je A skup svih prebrojivo nedostiživih tačaka u X. Dakle, $cl(M)_X \subset X-A$. Pošto je $cl(M)_{X-A} = cl(M)_X \cap (X-A)$, $cl(M)_{X-A} \in C(X-A)$ pa je podprostor $X-A$ strogo prebrojivo kompaktan. //.

4.2.3. DEFINICIJA [29]. *Tačka* p *prostora* X *je* P-*tačka ako je presek svake prebrojive familije okolina tačke* p, *takodje okolina tačke* p.

Prema ovoj definiciji svaka izolovana tačka topološkog prostora je P-tačka. Medjutim, ovde se radi isključivo sa neizolovanim P-tačkama.

4.2.4. DEFINICIJA. *Neizolovana tačka* p *prostora* X *je prebrojivo nedostiživa zatvorenim podskupovima od* X, *ako za svaku prebrojivu familiju* $\{F_n \in \exp(X) : n \in N\}$, *pri čemu* $p \notin F_n$, za svako $n \in N$, $cl(\bigcup\{F_n \in \exp(X) : n \in N\})_X$ *takodje ne sadrži tačku* p.

4.2.5. LEMA. *Neizolovana tačka prostora* $X$ *je* P-*tačka onda i samo onda ako je prebrojivo nedostiživa zatvorenim podskupovima od* $X$.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ neizolovana P-tačka i $\{F_n \in \exp(X) : n \in N\}$ proizvoljna prebrojiva familija zatovrenih podskupova od kojih nijedan ne sadrži tačku $x_0$. Kako je $\cup\{F_n : n \in N\} = \cap\{X - F_n : n \in N\}$, prema definiciji P-tačke, tačka $x_0 \in \mathrm{int}(\cap\{X - F_n : n \in N\})$ i pošto $x_0$ nije izolovana to $x_0 \neq \mathrm{int}(\cap\{X - F_n : n \in N\})$ pa je $\mathrm{cl}(\cup\{F_n : n \in N\})_X \subset X\text{-int}(\cap\{X - F_n : n \in N\})$. Dakle, tačka $x_0 \notin \mathrm{cl}(\cup\{F_n : n \in N\})_X$ pa je prebrojivo nedostiživa zatvorenim podskupovima od $X$.

Obrnuto, neka je tačka $x_0 \in X$ prebrojivo nedostiživa zatvorenim podskupovima od $X$ i neka je $\{U_n \subset X : n \in N\}$ proizvoljna prebrojiva familija otvorenih okolina tačke $x_0$. Jasno, $\cap\{U_n : n \in N\} = \cup\{X - U_n : n \in N\}$, a pošto je $x_0$ prebrojivo nedostiživa zatvorenim podskupovima od $X$, $\mathrm{cl}(\cup\{X - U_n : n \in N\})_X$ ne sadrži tačku $x_0$, već $x_0 \in X - \mathrm{cl}(\cup\{X - U_n : n \in N\})_X$. Šta više, $X - \mathrm{cl}(\cup\{X - U_n : n \in N\}) \subset \cap\{U_n : n \in N\}$, što znači da je tačka $x_0$ P-tačka. //.

4.2.6. POSLEDICA. *Svaka neizolovana* P-*tačka* $T_1$ *prostora* $X$ *je prebrojivo nedostiživa.*

Obrnuto tvrdjenje ne mora biti tačno što dokazuje sledeći primer.

4.2.7. PRIMER. Neka je $X$ skup realnih brojeva i $\tau_1$ obična topologija na $X$, a $\tau_2$ topologija čiju bazu čine komplementi svih prebrojivih podskupova od $X$. Neka je $\tau$ minimalna topologija generisana preko $\tau_1 \cup \tau_2$. Razume se, da je svaka tačka prostora $(X, \tau)$ prebrojivo nedostiživa zbog $\tau_2$, a nijedna tačka nije P-tačka zbog $\tau_1$.

4.2.8. PRIMER. Neka je $X$ skup celih brojeva, a topologija na $X$ definisana na sledeći način: Za svaku tačku $p \in X$ jedna okolina (i to najmanja) tačke $p$ je skup $V_{(p)} = \{x \in X : x \leq p\}$. Skup svih $V_{(p)}$, $p \in X$ zajedno sa praznim skupom i čitavim $X$ je upravo topologija $\tau$ na $X$.

Prostor $(X, \tau)$ je klase $T_0$ ali nije klase $T_1$. Lako se vidi da svaka tačka $p \in X$ je P-tačka. Medjutim, nijedna tačka nije prebrojivo nedostiživa, jer za svaku tačku $p \in C$ je prebrojiv skup $A$ svih tačaka strogo ispred tačke $p$ takav da $cl(A)_X$ sadrži tačku $p$.

4.2.9. PROPOZICIJA. *Neka je Hausdorf-ov prostor X lokalno kompaktan u tački $x_0 \in X$. Tačka $x_0$ je P-tačka onda i samo onda ako je prebrojivo nedostiživa kompaktnim podskupovima od X.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ prebrojivo nedostiživa kompaktnim podskupovima od X i neka je dalje $\{F_n \subset X : n \in N\}$ proizvoljna prebrojiva familija zatvorenih podskupova od X pri čemu $x_0 \notin F_n$, za svako $n \in N$. Zbog lokalne kompaktnosti u tački $x_0$ postoji kompaktan skup $K$ takav da je $x_0 \in int(K)$ i $x_0 \neq int(K)$. Neka je $K_n = F_n \cap K$, $n \in N$. Pošto je $x_0$ prebrojivo nedostiživa kompaktnim podskupovima od X to $x_0 \notin cl(\cup \{K_n : n \in N\})_X$ tj.. $x_0 \notin cl(\cup \{F_n \cap K : n \in N\})_X$ za svaku familiju $\{F_n \in exp(X) : n \in N\}$. Ako se pretpostavi da je tačka $x_0$ dostiživa preko familije $\{F_n \in exp(X) : n \in N\}$, to znači da svaka okolina $V(x_0)$ tačke $x_0$ ima neprazan presek $\cup \{F_n \in exp(X) : n \in N\}$. Neka je $int(K) = U(x_0)$. Dakle, $V(x_0) \cap U(x_0) \cap (\cup \{F_n \in exp(X) : n \in N\}) \neq \emptyset$. Takodje je $V(x_0) \cap U(x_0) \cap (\cup \{F_n \in exp(X) : n \in N\}) = V(x_0) \cap (\cup \{U(x_0) \cap F_n : n \in N\}) \subseteq V(x_0) \cap (\{K \cap F_n \in C(X) : n \in N\})$, što znači da $x_0 \in cl(\cup \{K \cap F_n \in C(X) : n \in N\})_X$, a to je kontradikcija.

Obrnuto, ako je $x_0$ neizolovana P-tačka, prema prethodnoj propoziciji je prebrojivo nedostiživa zatvorenim podskupovima pa je prebrojivo nedostiživa i kompaktnim podskupovima jer je za $T_2$ prostore $C(X) \subset exp(X)$. //.

4.2.10. PRIMEDBA. Prethodna propozicija ne mora biti tačna u slučaju kada prostor X nije lokalno kompaktan u tački $x_0$. Na primer, neka je X skup realnih brojeva i $x_0 = 0$ je istaknuta tačka u X. Može se definisati topologija $\tau_1$ na X proglašavanjem za otvorene sve one podskupove od X čiji je komplement prebrojiv ili sadrži tačku $x_0$. Neka je $\tau = \tau_1 \cup \mathcal{U}(x_0)$, gde je

$\mathcal{U}(x_0)$ skup svih okolina tačke $x_0$ u Euklidskoj topologiji. Prostor $(X, \tau)$ ima sledeće osobine:

(a) $(X, \tau)$ je kompletno normalan.

(b) Tačka $x_0$ je prebrojivo nedostiživa kompaktnim podskupovima od $X$ (kompaktni podskupovi od $X$ su samo konačni), a nije P-tačka.

(c) Prostor $X$, ima Stone-Čech-ovu kompaktifikaciju $\beta X$ i $x_0$ je prebrojivo nedostiživa u $X \subset \beta X$ ali nije prebrojivo nedostiživa u $\beta X$ jer svaka okolina tačke $x_0$ u $\beta X$ ima neprazan presek sa prebrojivim podskupom $A = \{x_n \in X : x_n \neq x_0,\ n \in N\} \cup \{y_n \in \beta X - X : n \in N\}$.

4.2.11. LEMA. *Neka je* $A_p$ *skup svih neizolovanih* P-*tačaka kompaktnog Hausdorff-ovog prostora* $X$. *Podprostor* $X - A_p$ *je hiperprebrojivo kompaktan u* $X$.

Dokaz. Neka je $\{K_n \in C(X - A_p) : n \in N\}$ proizvoljna prebrojiva familija kompaktnih podskupova od $X - A_p$. Pošto je svaka tačka iz $A_p$ P-tačka, to je, prema prethodnoj propoziciji $cl(\cup\{K_n \in C(X - A_p) : n \in N\})_X \cap A_p \neq \emptyset$, pa je $cl(\cup\{K_n \in C(X - A_p) : n \in N\})_X \subset X - A_p$. Medjutim, kako je $cl(\cup\{K_n \in C(X - A_p) : n \in N\})_{X-A_p} = X - A_p \cap cl(\cup\{K_n \in C(X - A_p) : n \in N\})_X$, to je $cl(\cup\{K_n \in C(X - A_p) : n \in N\})_{X-A_p} = cl(\cup\{K_n \in C(X - A_p) : n \in N\})_X \in C(X - A_p)$ pa je podprostor $X - A_p$ hiper-prebrojivo kompaktan. //.

4.2.12. PROPOZICIJA. *Neka prostor* $X$ *ima* $T_2$ *kompaktifikaciju jednom tačkom* $Y = X \cup \{p\}$. *Prostor* $X$ *je strogo prebrojivo kompaktan onda i samo onda ako je tačka* $p$ *prebrojivo nedostiživa u* $Y$.

Dokaz. Neka je $Y = X \cup \{p\}$ $T_2$ kompaktifikacija jednom tačkom strogo prebrojivo kompaktnog prostora $X$ i neka je dalje $A = \{x_n \in X : n \in N\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od $X$. Pošto je $X$ strogo prebrojivo kompaktan, $cl(A)_X \in C(X) \subset C(Y)$ pa je $cl(A)_X = cl(A)_Y$ i $cl(A)_Y \subset X$ pa $p \notin cl(A)_Y$, što znači da je tačka $p$ prebrojivo nedostiživa u $Y$.

Obrnuto, neka je tačka p prebrojivo nedostiživa u Y. To znači da nije izolovana u Y i za svaki prebrojiv podskup $A \subset X$ $cl(A)_Y$ ne sadrži p. Dakle, $cl(A)_Y \in C(Y)$ i $cl(A)_Y \subset X$, pa je $cl(A)_Y = cl(A)_X \in C(X)$. Ovim je dokazano da je prostor X strogo prebrojivo kompaktan. //.

4.2.13. PROPOZICIJA. *Neka prostor* X *ima* $T_2$ *kompaktifikaciju jednom tačkom* $Y = X \cup \{y\}$. *Prostor* X *je hiperprebrojivo kompaktan onda i samo onda ako je tačka* y P-*tačka u* Y.

Dokaz. Neka je y P-tačka u $Y = X \cup \{y\}$ i $\{K_n \in C(X) : n \in N\}$ prebrojiv podskup od C(X). Neka je dalje $A = \bigcup \{K_n \in C(X) : n \in N\}$. Jasno, $X - A = \bigcap \{X - K_n : K_n \in C(X)\ , n \in N\}$. Prema poznatoj konstrukciji kompaktifikacije jednom tačkom, skupovi $U_n = X - K_n$ su otvorene okoline tačke u Y, za svako $n \in N$. Pošto je y P-tačka, postoji otvorena okolina V(y) tačke y takva da je $V(y) \quad \bigcap \{U_n : n \in N\} = \quad \{X - K_n : K_n \in C(X),\ n \in N\}$. Iz ove relacije je $A = X - (X - A) = \bigcup \{X - (X - K_n) : K_n \in C(X),\ n \in N\} = \bigcup \{K_n \in C(X) : n \in N\} \subseteq X - V(y)$. Kako $X - V(y) \in C(X)$, prostor X je hiper-prebrojivo kompaktan.

Obrnuto, neka je prostor X hiper-prebrojivo kompaktan, a $Y = X \cup \{y\}$ kompaktifikacija jednom tačkom od X i neka je dalje, $\{U_n(y) \subset Y : n \in N\}$ proizvoljna prebrojiva familija otvorenih okolina tačke y. Razume se, po konstrukciji Y, $X - U_n(y) \in C(X) \subset C(Y)$, za svako $n \in N$. $\bigcap \{U_n(y) \subset Y : n \in N\} = \bigcup \{X - U_n(y) \in C(X) : n \in N\} \subset K \in C(X)$, jer je prostor X hiper-prebrojivo kompaktan. Dakle, $U(y) = X - K \subset Y$ i $X - K \subset X - (\bigcup \{X - U_n(y) \in C(X) : n \in N\} = \bigcap \{U_n(y) \subset Y : n \in N\}$. Što znači da je tačka y P-tačka. //.

4.2.14. TEOREMA. *Neka kompaktan Hausdorff-ov prostor* X *sadrži neizolovanu tačku* p. *Tada podprostor* $X - \{p\}$ *nije kompaktan i ima sledeća svojstva:*

(a) *Ako je* p *prebrojivo nedostiživa, podprostor* $X - \{p\}$ *je strogo prebrojivo kompaktan i obrnuto, ako je podprostor* $X - \{p\}$ *strogo prebrojivo* *kompaktan, tačka* p *je prebrojivo nedostiživa u* X.

(b) *Ako je* p P-*tačka, u* X, *podprostor* $X-\{p\}$ *je hiper-prebrojivo kompaktan i obrnuto ako je* $X-\{p\}$ *hiper-prebrojivo kompaktan, tačka* p *je* P-*tačka u* X.

(c) *Ako je* p *prebrojivo nedostiživa, a nije* P-*ta ka tada je podprostor* $X-\{p\}$ *strogo prebrojivo kompaktan, a nije hiper-prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Ako bi podprostor $X-\{p\}$ bio kompaktan, pošto je X Hausdorff-ov bio bi i zatvoren u X pa bi $\{p\}$, tj. komplement od $X-\{p\}$ bio otvoren u X što je u suprotnosti sa činjenicom da je tačka p neizolovana u X.

Tvrdjenja pod (a) i (b) su direktne posledice prethodne dve propozicije.

(c) Ako je $p \in X$ prebrojivo nedostiživa, $X-\{p\}$ je strogo prebrojivo kompaktan prema (a). Ako bi $X-\{p\}$ bio hiperprebrojivo kompaktan tačka p, prema (b), bila bi P-tačka, što je kontradikcija. //.

Prema ovoj teoremi, ako Hausdorff-ov prostor X sadrži prebrojivo nedostiživu tačku p koja nije P-tačka, tada je podprostor $X-\{p\}$ primer prostora koji je strogo prebrojivo kompaktan, a nije hiper-prebrojivo kompaktan. Pitanje egzistencije tačaka koje pripadaju kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru i koje su prebrojivo nedostižive ali nisu P-tačke rešeno je u [44] 1971. godine. Naime u [44] M.E. Rudin, primenom (CH) (kontinuum hipoteza) dokazala je da u kompaktnom prostoru $N^* = \beta N - N$ postoje prebrojivo nedostižive tačke koje nisu P-tačke. Godine 1979. na IV TIRASPOLJSKOM SIMPOZIJUMU ZA TOPOLOGIJU I NJENE PRIMENE, A.A. Grizlov, takodje primenom (CH), dokazuje da kompaktan Hausdorff-ov prostor $N^* = \beta N - N$ sadrži $2^c$ prebrojivo nedostiživih tačaka koje nisu P-tačke. U [29] 0.2. TEOREMA (MA) (primenom Aksiome Martina) dokazano je da kompaktan prostor $N^* = \beta N - N$ sadrži tačku $x_0$ koja nije P-tačka i koja nije granična tačka nijednog prebrojivog podskupa od X.

4.2.15. MARTINS AKSIOM [44]. *Ako je* X *kompaktan prostor u kome je svaka familija disjunktnih otvorenih podskupova prebrojiva, tada* X *nije unija manje nego* $2^{\omega_0}$ *nigde gustih podskupova.*

4.2.16. TEOREMA [29]. *Postoji tačka* $x_0 \in N^* = \beta N - N$ *koja nije P-tačka i koja nije granična tačka nijednog podskupa od* $N^*$ *kardinalnosti manje od* c.

4.2.17. PRIMER. Neka je $x_0 \in N^* = \beta N - N$, prema 4.2.16. prebrojivo nedostiživa tačka koja nije P-tačka. Razume se, prema teoremi 4.2.14., prostor $X = N^* - \{x_0\}$ je strogo prebrojivo kompaktan, a nije hiper-prebrojivo kompaktan.

Ovim primerom se dokazuje da u Hausdorff-ovim prostorima klasa strogo prebrojivo kompaktnih prostora je šira od klase hiper-prebrojivo kompaktnih prostora.

Primerom 4.1.7. takodje se dokazuje da je u Hausdorff-ovim prostorima klasa strogo prebrojivo-kompaktnih prostora šira od klase hiper-prebrojivo kompaktnih prostora.

Naime, u prostoru $X = [0, \omega_1] \times [0,\omega_0] - \{(\omega_1, n) : n \in N\}$ tačka $(\omega_1, \omega_0)$ je prebrojivo nedostiživa, a nije P-tačka. Ranije je konstatovano da je prostor X normalan i hiper-prebrojivo kompaktan. U prostoru $Y = X \cup \{p\}$ gde su okoline tačke $p \in Y$ komplementi kompaktnih podskupova od X, tačka $(\omega_1, \omega_0)$ takodje je prebrojivo nedostiživa, ali nije P-tačka. Medjutim, prostor Y je klase $T_1$, a nije klase $T_2$ jer se tačke $(\omega_1, \omega_0)$ i P ne mogu razdvojiti disjunktnim okolinama. Na kraju treba istaći da je prostor $Y - \{(\omega_1, \omega_0)\}$ klase $T_2$ koji je strogo prebrojivo kompaktan, a nije hiper-prebrojivo kompaktan. Teorema 4.2.14, može se dokazati i pod slabijim uslovima. Naime, može se dokazati pod uslovima koje ima primer 4.1.7.

## 4.3. EGZISTENCIJA NEDOSTIŽIVIH TAČAKA I JOŠ NEKA NJIHOVA SVOJSTVA

4.3.1. PROPOZICIJA. *Neka Hausdorff-ov prostor* $X$ *sadrži* $\sigma$*-kompaktan podprostor* $Y$. *Podprostor* $cl(Y)_X \subset X$ *ne sadrži nijednu* P*-tačku koja pripada razlici* $cl(Y)_X - Y$.

Dokaz. Može se pretpostaviti suprotno. Neka je $p \in cl(Y)_X - Y$, P-tačka u $cl(Y)_X$ gde je $Y = \cup \{K_n \in C(X) : n \in N\}$. Pošto je prostor $X$ Hausdorff-ov, to za svako $n \in N$, postoji par otvorenih skupova $(U_n, V_n)$, takvih da je $K_n \subset U_n$, a $p \in V_n$ i $U_n \cap V_n = \emptyset$. Pošto je $p$ P-tačka, postoji otvoren skup $V$, takav da je $p \in V \subseteq \cap \{V_n \ni p : n \in N\}$. Neka je $U = \cup\{U_n : n \in N\}$. Pošto je $U_n \subset X - V$, za svako $n \in N$, to je $\cup \{U_n : n \in N\} \subseteq X - V$, pa je $cl(\cup\{U_n : n \in N\})_X \subseteq cl(X - V)_X = X - V$. Kako je $K_n \subset U_n$, za svako $n \in N$, to je $Y = \cup \{K_n \in C(X) : n \in N\} \subset U$, pa je $cl(Y)_X \subseteq cl(U)_X \subseteq X - V$. Ovo je kontradikcija jer tačka $p$ pripada adherenciji od $Y$ u $X$. //.

4.3.2. POSLEDICA. *Neka* $\sigma$*-kompaktan prostor* $X$ *ima* $T_2$ *kompaktifikaciju* $cX$. *Prostor* $cX$ *ne sadrži nijednu* P*-tačku koja pripada razlici* $cX-X$.

4.3.3. PRIMER. Neka je $X = N$ i $cX = \beta N$. Prostor $\beta N$ ne sadrži nijednu P-tačku koja pripada razlici $\beta N - N$, medjutim, u [50] primenom (CH) (kontinuum hipoteze) dokazano je da prostor $Y = \beta N - N$ (koji je inače zatvoren podprostor od $\beta N$) sadrži $2^c$ P-tačaka.

4.3.4. PROPOZICIJA. *Neka* $\sigma$*-kompaktan prostor* $X$ *ima* $T_2$ *kompaktifikaciju* $cX$. *Ako je* $card(cX - X) \leq \aleph_0$, *tada prostor* $cX$ *ne sadrži nijednu prebrojivo nedostižívu tačku koja pripada razlici* $cX - X$.

Dokaz. Ova propozicija je direktna posledica teoreme 4.2.14, i dobro poznate činjenice da je svaki prebrojivo kompaktan plus $\sigma$-kompaktan prostor uvek kompaktan.

4.3.5. PRIMEDBE. Neposredno se uočava da su tačne sledeće činjenice.

(a) Ako je prostor X prebrojivo kompaktan (pa dakle i kompaktan), onda ne može svaka neizolovana tačka od X biti prebrojivo nedostiživa.

(b) Ako je prostor separabilan, onda nijedna neizolovana tačka nije prebrojivo nedostiživa.

(c) Ako prostor X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, onda nema prebrojivo nedostiživih tačaka.

4.3.6. PROPOZICIJA. *Neka tačka* $x_0$ *nije izolovana u prostoru* X *i neka je* Y *podprostor od* X *koji sadrži tačku* $x_0$. *Ako je tačka* $x_0$ *prebrojivo nedostiživa* (P-*tačka*) *u* X, *onda je prebrojivo nedostiživa* (P-*tačka*) *i u* Y.

Dokaz. Neka je $A \subset Y$ proizvoljan prebrojiv podskup od Y koji ne sadrži tačku $x_0$. Kako je $cl(A)_Y = cl(A)_X \cap Y$ to je $cl(A)_Y \subset cl(A)_X$. Pošto $x_0 \notin cl(A)_X$, razume se, $x_0 \notin cl(A)_Y$, pa je prebrojivo nedostiživa u Y.

Neka je $\{U_n(x_0) \subset Y : n \in N\}$ proizvoljna prebrojiva familija okolina tačke $x_0$ u Y. Jasno je, da za svako $n \in N$, postoji $V_n(x_0) \subset X$ tako da je $U_n(x_0) = V_n(x_0) \cap Y$. Ako je $x_0$ P-tačka u X postoji otvorena okolina $V \subset X$ takva da je $V \subset \cap \{V_n(x_0) \subset X : n \in N\}$. Dakle, u podprostoru Y postoji otvorena okolina $U = V \cap Y \subset (\cap \{V_n(x_0) \subset X : n \in N\}) \cap Y =$ $= \cap\{Y \cap V_n(x_0) \subset Y : n \in N\} = \cap\{U_n(x_0) \subset Y : n \in N\}$ što znači da je $x_0$, P-tačka u Y. //.

4.3.7. PRIMEDBA. Tvrdjenje inverzno datom ne mora biti tačno. Na primer, ako je $X = \beta N$, a $Y = \beta N - N$. Prostor X, kao što je dokazano, ne sadrži P-tačke odnosno prebrojivo nedostižive jer je separabilan. Medjutim, podprostor Y sadrži $2^c$ P-tačaka, odnosno, sadrži $2^c$ prebrojivo nedostiživih tačaka koje nisu P-tačke.

4.3.8. PROPOZICIJA. *Neka je tačka* $x_0 \in Y \quad X$ *neizolovana i* Y *otvoren podprostor od* X. *Ako je* $x_0$ P-*tačka u* Y, *tada je* $x_0$ P-*tačka u* X.

Dokaz. Ovo tvrdjenje je direktna posledica činjenice da je svaki otvoren podskup u Y istovremeno otvoren i u X.

4.3.9. PRIMEDBA. Svojstvo prebrojivo nedostižive odnosno neizolovane P-tačke ne mora se prenositi neprekidnim preslivanjima. Na primer,ova dva svojstva se ne prenose pri konstantnim preslikavanjima.

4.3.10. PROPOZICIJA. *Neka je* $x_0$ *neizolovana* P-*tačka u* X, *tada je* $\{x_0\} \in \exp(X)$ *neizolovana* P-*tačka u* exp(X).

Dokaz. Prema [37] $X \approx \hat{X} \subset C(X) \subset \exp(X)$. Pošto je $x_0$ neizolovana u X, to je $\{x_0\}$ neizolovana u exp(X). Isto prema [37] bazna okolina tačke $\{x_0\} \in \exp(X)$ je oblika U gde je U bazna okolina tačke $x_0$ u X. Neka je $\mathcal{U}$ familija svih baznih okolina tačke $x_0$ u X, a $\mathcal{U} = \{ U \subset \exp(X) : U \in \mathcal{U}\}$ familija svih baznih okolina tačke $\{x_0\}$ u exp(X). Neka je dalje $A = \cap \{U_n \in \mathcal{U} : n \in N\}$, a $A = \cap \{ U_n \in \mathcal{U} : n \in N\}$. Pošto je $x_0$ P-tačka u X, postoji otvorena okolina V tačke $x_0$ u X takva da je $x_0 \in V \subset A$. Kako iz $A \subset B$ je $A \subset B$ to je $V \subset U_n$, za svako $n \in N$, pa je $V \subset A$. Dakle, V je okolina tačke $\{x_0\}$ u exp(X) koja je sadržana u preseku proizvoljne prebrojive familije baznih okolina tačke $\{x_0\}$. Prema tome $\{x_0\}$ je P-tačka u exp(X). //.

4.3.11. POSLEDICA. *Neka kompaktan prostor* X *sadrži neizolovanu* P-*tačku* $x_0$. *Tada je podprostor* $\exp(X) - \{x_0\} \subset \exp(X)$, hiper-prebrojivo kompaktan.

4.3.12. PRIMER. Neka je $X = [0, \omega_1]$, $\omega_1$ je P-tačka u X, a $\{\omega_1\}$ je P-tačka u $\exp([0, \omega_1])$. Podprostor $\exp([0, \omega_1]) - \{\omega_1\}$ je hiper-prebrojivo kompaktan u $\exp([0, \omega_1])$.

## 4.4. NEKA SVOJSTVA HIPER-PREBROJIVE I STROGO PREBROJIVE KOMPAKTNOSTI PROSTORA

Ovaj paragraf odnosi se na ispitivanja osnovnih svojstava hiper-prebrojivo kompaktnih i strogo prebrojivo kompaktnih prostora.

U [25] i [26] pored pojma strogo prebrojivo kompaktnog prostora navedena su sledeća svojstva:

(a) Svaki zatvoren podprostor od strogo prebrojivo kompaktnog prostora takodje je strogo prebrojivo kompaktan.

(b) Svaki prostor koji je neprekidna slika strogo prebrojivo kompaktnog prostora, takodje je strogo prebrojivo kompaktan.

(c) Neka je $X = X\,\{X_a : a \in A\}$ topološki proizvod familije prostora $A_a$, $a \in A$. Prostor $X$ je strogo prebrojivo kompaktan onda i samo onda ako je svaki $X_a$, $a \in A$, strogo prebrojivo kompaktan.

(d) Neka je prostor $X$ normalan i strogo prebrojivo kompaktan. Tada je $\exp(X)$ strogo prebrojivo kompaktan.

(e) Neka je prostor $X$ strogo prebrojivo kompaktan. Tada je $\exp(X)$ pseudokompaktan.

Pored ovih, strogo prebrojivo kompaktni prostori imaju i druga svojstva od kojih će neka, zbog svog interesa, ovde biti istaknuta.

4.4.1. PROPOZICIJA. *Neka je Hausdorff-ov prostor $X$ prve prebrojivosti i $Y$ strogo prebrojivo kompaktan podprostor od $X$. Tada je $Y$ zatvoren u $X$.*

Dokaz. Neka je $y_0$ tačka nagomilavanja za $Y$. Pošto je $X$ prve prebrojivosti postoji prebrojiv podskup $A \subset Y$ koji konvergira tački $y_0$. Skup $A \cup \{y_0\}$ je kompaktan i zatvoren u $X$. Medjutim, $cl(A)_Y \in C(Y) \subset C(X)$, a pošto je $X$ Hausdorff-ov, to je $cl(A)_Y = cl(A)_X = \acute{A} \cup \{y_0\}$, pa je $y_0 \in Y$.

Kako se ovo odnosi na svaku tačku nagomilavanja od $Y$, podprostor $Y$ je zatvoren u $X$. //.

4.4.2. PROPOZICIJA. *Neka je prostor $X$ sa prvom aksiomom prebrojivosti i $Y$ podprostor od $X$ takav da je $cl(Y)_X = X$. Ako za svaki prebrojiv podskup $A \subset Y$, $cl(A)_X \in C(X)$, prostor $X$ je strogo prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Neka je $A = \{x_n \in X : n \in N\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od $X$. Kako je $X$ sa prvom aksiomom prebrojivosti i $Y$ je gust u $X$, to za svako $x_k \in A = \{x_n \in X : n \in N\}$ postoji prebrojiv podskup $\{y_i^k \in Y : i \in N\}$ takav da je $cl(\{y_i^k \in Y : i \in N\})_X \in C(X)$ i $x_k \in cl(\{y_i^k \in Y : i \in N\})_X$. Skup $B = \{y_i^k \in Y : i \in N, k \in N\}$ je prebrojiv u $Y$ i po pretpostavci je $cl(B)_X \subset C(X)$. Šta više, $A \subset cl(B)_X$ pa je $cl(A)_X \subseteq cl(B)_X$, pa je $cl(A)_X \in C(X)$. Dakle, prostor $X$ je strogo prebrojivo kompaktan. //.

4.4.3. PRIMEDBA. Poznato je da svaki prostor $X$ koji sadrži gust prebrojivo kompaktan podprostor $Y$ je pseudokompaktan. U [36] dat je primer pseudokompaktnog prostora koji ne sadrži nijedan gust prebrojivo kompaktan podprostor. Neka prostor $X$ sadrži svuda gust hiper-prebrojivo (strogo prebrojivo) kompaktan podprostor $Y$. Tada $X$ ne mora biti strogo prebrojivo (prebrojivo) kompaktan. Na primer, neka je

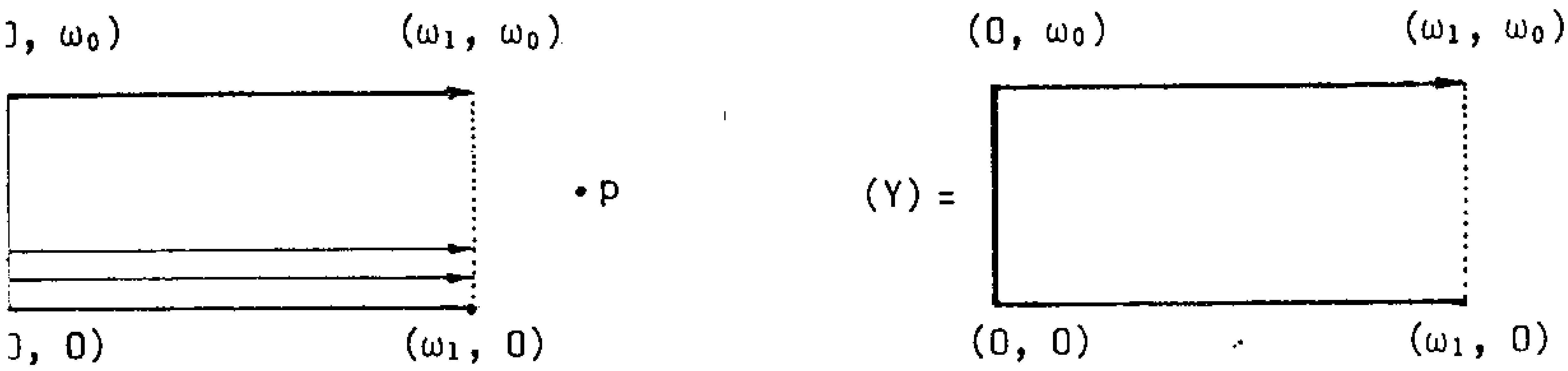
$$X = [0, 1] \times [0, \omega_1] - \{(x, \omega_1) : \tfrac{1}{3} \leq x \leq \tfrac{2}{3}\},$$

$$Y = [0, 1] \times [0, \omega_1) .$$

Lako se vidi da je $Y$ podprostor od $X$ koji je hiper-prebrojivo kompaktan, pa dakle i strogo prebrojivo kompaktan. $X$ nije prebrojivo kompaktan, pa dakle ni strogo prebrojivo kompaktan jer prebrojivi podskupovi $A = \{(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}, \omega_1) : n \in N\}$ i $B = \{(\frac{2}{3} + \frac{1}{n}, \omega_1) : n \in N\}$ su bez tačaka nagomilavanja u $X$.

Neka je prostor $X$ strogo prebrojivo kompaktan koji sadrži gust hiper-prebrojivo kompaktan podprostor $Y$. Tada prostor $X$ ne mora biti hiper-

prebrojivo kompaktan. Na primer, neka je X prostor iz primera 4.1.7, tj.
$X = (([0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, n) : n \in N\}) \cup \{p\}) - \{(\omega_1, \omega_0)\}$, a
$Y = ([0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, n)\} : n \in N\}) - \{(\omega_1, \omega_0)\}$




Y je hiperprebrojivo kompaktan (inače normalan) svuda gust podprostor od X. Medjutim X je $T_2$, strogo prebrojivo kompaktan prostor koji nije hiper-prebrojivo kompaktan.

4.4.4. PROPOZICIJA. *Disjunktna topološka suma prostora* $X_a$, $a \in A$ *je strogo prebrojivo kompaktna onda i samo onda ako je svaki* $X_a$, $a \in A$, *strogo prebrojivo kompaktan i* A *je konačan.*

Dokaz. Neka je $X = \Sigma\{X_a : a \in A\}$ strogo prebrojivo kompaktan i neka je $D_a = \{x_n^a \in X_a : n \in N\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od $X_a$. Pošto je $cl(D_a)_{X_a} = cl(D_a)_X \in C(X)$, $cl(D_a)_{X_a} \in C(X_a)$, pa je prostor $X_a$ strogo prebrojivo kompaktan, za svako $a \in A$.

Obrnuto, neka je $D = \{x_n \in X : n \in N\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od X. Skup D ima prebrojiv trag u najviše prebrojivo mnogo prostora $X_{a_n}$, $n \in N$. Neka je $D_{a_k}$ trag od D u $X_{a_k}$. Pošto je svaki $X_a$, $a \in A$, strogo prebrojivo kompaktan, $cl(D)_X = \Sigma\{cl(D_{a_k})_{X_a} : k \in N\}$ i $cl(D)_X$ je $\sigma$-kompaktan zatvoren u X. Ako je A konačan $cl(D)_X$ je kompaktan pa je X strogo prebrojivo kompaktan. //.

4.4.5. PROPOZICIJA. *Zatvoren podprostor hiper-prebrojivo kompaktnog prostora je hiper-prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Neka je prostor X hiper-prebrojivo kompaktan i Y zatvoren podprostor od X. Razume se, $C(Y) \subset C(X)$ i pošto je familija $C(X)$ $\aleph_0$ - usmerena (X je prebrojivo kompaktan), to je i $C(Y)$ $\aleph_0$ - usmerena relativno $C(X)$, Neka je dalje $\{K_n \in C(Y) : n \in N\} \subset C(Y) \subset C(X)$. Pošto je $C(X)$ $\aleph_0$- usmerena postoji $K \in C(X)$ tako da je $K_n \subseteq K$, za svako $n \in N$. Takodje $K_n = K_n \cap Y \subseteq K \cap Y \in C(Y)$, za svako $n \in N$, pa je familija $C(Y)$ $\aleph_0$ - usmerena, tj. prostor Y je hiper-prebrojivo kompaktan. //.

4.4.6. PROPOZICIJA. *Neka je prostor X prve prebrojivosti i Y hiper-prebrojivo kompaktan podprostor od X. Tada je Y zatvoren u X.*

Dokaz. Pošto je svaki hiper-prebrojivo kompaktan prostor strogo prebrojivo kompaktan, ovo tvrdjenje je direktna posledica propozicije 4.4.1.

4.4.7. PROPOZICIJA. *Disjunktna topološka suma prostora* $X_a$, $a \in A$, *je hiper-prebrojivo kompaktna onda i samo onda ako je svaki* $X_a$, $a \in A$, *hiper-prebrojivo kompaktan, a skup A konačan.*

Dokaz. Neka je $X = \Sigma\ \{X_a : a \in A\}$ topološka suma familije $X_a$, $a \in A$. Razume se, $C(X_a) \subset C(X)$, za svako $a \in A$. Kako je još, za svako $K \in C(X)$, $k \cap X_a \in C(X_a)$ svaki $X_a$, $a \in A$, je hiper-prebrojivo kompaktan ako je X hiper-prebrojivo kompaktan. Ako je skup A konačan, važi i obrnuto tvrdjenje i dokazuje se potpuno isto kao i 4.4.4. //.

4.4.8. PROPOZICIJA. *Neka je prostor X topološki proizvod familije prostora* $X_a$, $a \in A$. *Prostor X je hiper-prebrojivo kompaktan onda i samo onda ako je svaki* $X_a$, $a \in A$, *hiper-prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Neka je $X = X\ \{X_a : n \in N\}$ i $\{K_n \in C(X) : n \in N\} \subset C(X)$. Neka je dalje $\pi_a(\{K_n \in C(X) : n \in N\}) = \{K_n^a \in C(X_a) : n \in N\}$ projekcija familije $\{K_n \in C(X) : n \in N\}$ sa X na $X_a$, za svako $a \in A$. Ako je svaki $X_a$, $a \in A$, hiper-prebrojivo kompaktan, postoji $K_a \in C(X_a)$, tako da je $\cup\{K_n^a \in C(X_a) : n \in N\} \subseteq K_a$, $a \in A$. Dakle, $X\{K_n^a \in C(X_a) : a \in A\} \subseteq X\{K_a \in C(X_a) : n \in N\}$, za svako $n \in N$. Šta više, skupovi $X\{K_n^a \in C(X_a) : a \in A\}$ i $X\{K_a \in C(X_a) : a \in A\}$ su članovi od $C(X)$ pri čemu je $K_n \quad X\{K_n^a \in C(X_a) : a \in A\} \quad X\{K_a \in C(X_a) : a \in A\} \in C(X)$, za svako $n \in N$, pa je familija $C(X)$ $\aleph_0$ - usmerena, tj. prostor $X$ je hiperprebrojivo kompaktan.

Obrnuto, neka je prostor $X = X\{X_a : a \in A\}$ hiper-prebrojivo kompaktan i $\{K_n^a \in C(X_a) : n \in N\} \quad C(X_a)$, $a \in A$. $K_n^a \times (X\{\{x_b^o\} \in C(X_b) : b \in A - \{a\}\}) = K_n \in C(X)$, za svako $n \in N$. Šta više, postoji $K \in C(X)$, tako da je $K_n \quad K$, za svako $n \in N$. Dakle $\pi_a(K_n) \quad \pi_a(K) = K_a \in C(X_a)$, $n \in N$, a pošto je $\pi_a(K_n) = K_n^a$, to je $K_n^a \cdot K_a \in C(X_a)$, za svako $n \in N$, pa je prostor $X_a$ hiper-prebrojivo kompaktan, za svako $a \in A$. //.

4.4.9. POSLEDICA. *Proizvod kompaktnog i hiper-prebrojivo kompaktnog prostora je hiper-prebrojivo kompaktan.*

4.4.10. POSLEDICA. *U klasi Hausdorff-ovih prostora inverzni limes familije hiper-prebrojivo komapktnih prostora je hiper-prebrojivo kompaktan.*

4.4.11. NAPONEMA. Lako se vidi da su sledeća tvrdjenja direktne posledice 4.4,(b) i 4.4,(d).

(a) Neprekidna slika hiper-prebrojivo kompaktnog prostora je strogo prebrojivo kompaktna.

(b) Neka je prostor $X$ normalan i hiper-prebrojivo kompaktan. Tada je $\exp(X)$ strogo prebrojivo kompaktan.

4.4.12. PRIMEDBA. Neprekidna slika hiper-prebrojivo kompaktnog prostora ne mora biti hiper-prebrojivo kompaktna. Neka je $Y$ prostor iz primera 4.1.7, tj. $Y = (([0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{\omega_1, n) : n \in N\} \cup \{o\}) \cup \{p\} - \{(\omega_1, \omega_0)\}$, a $X = (([0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, n) : n \in N\} \cup \{o\}) - \{(\omega_1, \omega_0)\} \cup \{q\}$, gde je $q$ izolovana tačka za $([0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, n) : n \in N \cup \{o\} - \{(\omega_1, \omega_0)\}$. Preslikavanje $f$ definisano na sledeći način:

$$f(x) = \begin{cases} \text{identiteta (i) za } x \in ([0,\omega_1] \times [0,\omega_0] - \{(\omega_1,n)\ n \in N\}) - \{(\omega_1,\omega_0)\} \\ p \quad \text{za} \quad x = q \end{cases}$$

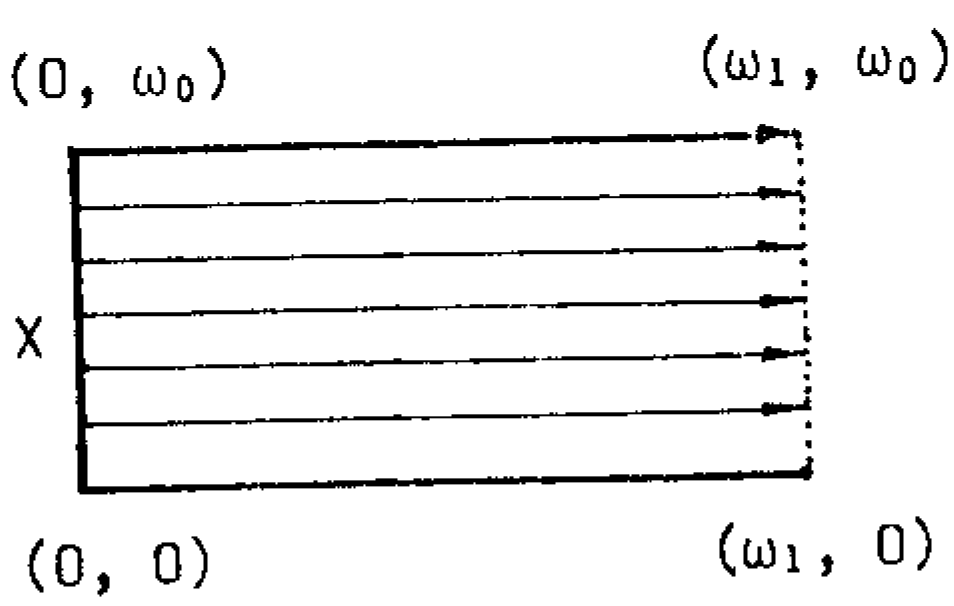
je neprekidno sa X na Y. Prostor X je hiper-prebrojivo kompaktan, a prostor Y je strogo prebrojivo kompaktan.

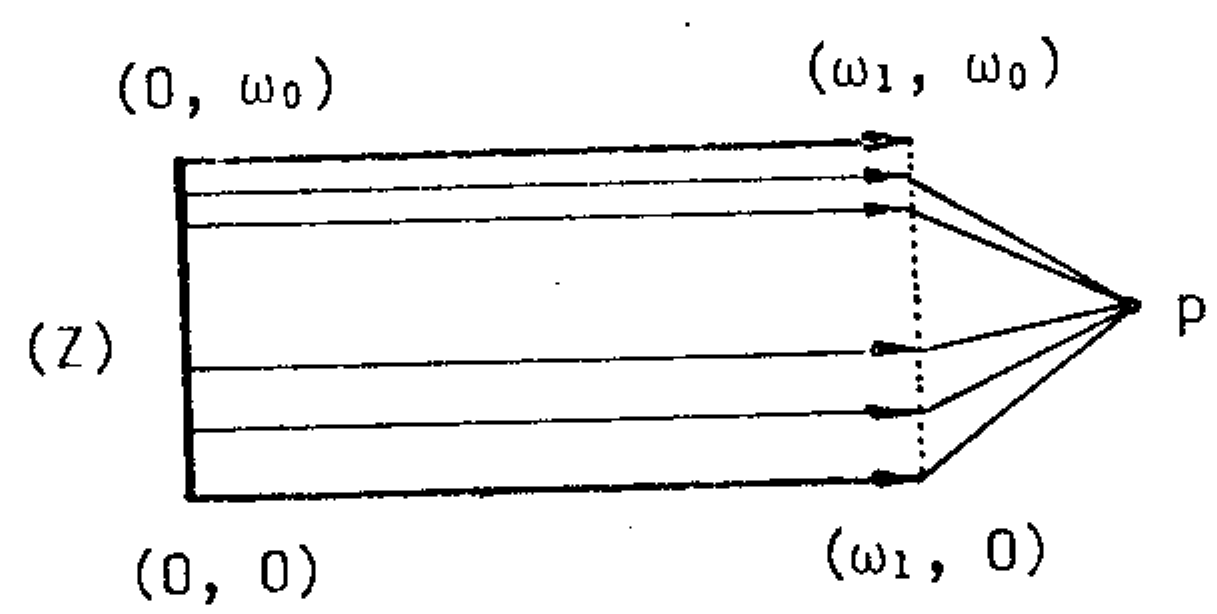
Na osnovu ovog primera jasno je da svojstvo hiper-prebrojive kompaktnosti nije invarijantno u odnosu na neprekidna preslikavanja.

Može se konstruisati primer neprekidne slike hiper-prebrojivo kompaktnog prostora koja nije hiper-prebrojivo kompaktna i bez korišćenja izlovanih tačaka. Neka je $X = [0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, x) : x \in [1, \omega_0]\}$, a $Y = ([0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, x) : x \in N \cup \{o\}\}) \cup \{p\}$, gde su okoline tačke $p$ komplementi kompaktnih podskupova od $[0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, x) : x \in N \cup \{o\}\}$. Neka je dalje $Z = Y - \{(\omega_1, \omega_0)\}$. Ranije je dokazano da je prostor X hiper-prebrojivo kompaktan, a prostor Z strogo prebrojivo kompaktan koji nije hiper-prebrojivo kompaktan. Preslikavanje $f$ definisano na sledeći način

$$f(x) = \begin{cases} \text{identiteta za } x \in [0,\omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1,x) : x \in [0, \omega_0]\} \\ p \quad \text{za} \quad x = (\omega_0, 0) \end{cases}$$

neprekidno je sa X na Z.




4.4.13. DEFINICIJA [4]. *Neprekidno preslikavanje* $f$ *sa prostora* X *na prostor* Y *je kompaktno pokrivajuće ako za svako* $Q \in C(Y)$ *postoji* $K \in C(X)$ *tako da je* $f(K) = Q$.

4.4.14. DEFINICIJA [5]. *Preslikavanje* f *sa prostora* X *na prostor* Y *je* k-*preslikavanje ako je* $f(K) \in C(Y)$ *i* $f^{-1}(K') \in C(X)$, *za svako* $K \in C(X)$ *i* $K' \in C(Y)$.

4.4.15. PROPOZICIJA. *Neka je preslikavanje* f *sa hiper-prebrojivo kompaktnog prostora* X *na prostor* Y *kompaktno pokrivajuće, tada je prostor* Y *hiper-prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\{Q_n \in C(Y) : n \in N\} \subset C(Y)$. Pošto je f kompaktno pokrivajuće postoji $\{K_n \in C(X) : n \in N\} \subset C(X)$ tako da je $f(K_n) = Q_n$, za svako $n \in N$. Šta više, pošto je X hiper-prebrojivo kompaktan, postoji $K \in C(X)$, tako da je $K_n \subset K$, za svako $n \in N$. Medjutim, pošto je f neprekidno, to je $Q_n = f(K_n) \subset f(K) = Q \in C(Y)$, za svako $n \in N$, pa je prema 4.1.5, prostor Y hiper-prebrojivo kompaktan. //.

4.4.16. PROPOZICIJA. *Neka je preslikavanje* f *sa hiper-prebrojivo kompaktnog prostora* X *na prostor* Y *neprekidno* k-*preslikavanje. Tada je prostor* Y *hiper-prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Prema definiciji 4.4.12, svako neprekidno k-preslikavanje je kompaktno pokrivajuće, pa je ova propozicija direktna posledica prethodne.

## 4.5. USLOVI EKVIVALENCIJE STROGO PREBROJIVE I HIPER-PREBROJIVE KOMPAKTNOSTI

U ovom paragrafu najpre se daju neki slučajevi koincidencije strogo prebrojive kompaktnosti i kompaktnosti. Pored teorema o ekvivalenciji strogo prebrojive i hiper-prebrojive kompaktnosti ovde se daju i primeri prostora koji su prebrojivo kompaktni a nisu strogo prebrojivo kompaktni.

Neposredno se zaključuje da su tačna sledeća tvrdjenja:

(a) Svaki separabilan strogo prebrojivo kompaktan prostor je kompaktan.

(b) Svaki Lindelöf-ov strogo prebrojivo kompaktan prostor je kompaktan.

(c) Svaki strogo prebrojivo kompaktan prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti je kompaktan.

(d) Svaki $\sigma$ - kompaktan strogo prebrojivo kompaktan prostor je kompaktan.

(e) Svaki parakompaktan strogo prebrojivo kompaktan prostor je kompaktan.

(f) Svaki realno kompaktan strogo prebrojivo kompaktan prostor je kompaktan.

U prethodnoj glavi date su karakterizacije još dve klase prostora (L-prostori i L'-prostori) sa svojstvom da je u prvoj klasi (L-prostori) prebrojiva kompaktnost ekvivalentna sa strogo prebrojivom kompaktnošću, a u drugoj (L'-prostori) je isto prebrojiva kompaktnost ekvivalentna sa hiper-prebrojivom kompaktnošću.

(g) Neka je za prostor X, $C^s(X) = C(X)$, tada su ekvivalentni sledeći uslovi:

$1^o$ X je strogo prebrojivo kompaktan.

$2^o$ X je hiper-prebrojivo kompaktan.

Ovakva situacija je, na primer, kod prostora $[0, \omega_1)$. Naime, poznato je da su svi kompaktni podskupovi kod ovog prostora, u kardinalnom smislu konačni ili prebrojivi. Prethodno tvrdjenje, u izvesnom smislu, može se smatrati generalizacijom ovog svojstva prostora $[0, \omega_1)$.

4.5.1. TEOREMA. *Neka je prostor X prve prebrojivosti i strogo prebrojivo kompaktan. Tada je X hiper-prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Pošto je X prve prebrojivosti, prema [37], $C(X)$ je prve prebrojivosti. Podprostor $C^s(X)$ je svuda gust u $C(X)$. Neka je $\{A_n \in C^s(X) : n \in N\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od $C^s(X)$. Postoji familija $\{S_n \subset X : n \in N\}$ prebrojivih podskupova od X takvih da je $cl(S_n)_X = K_n$, za svako $n \in N$. Podskup $S = \bigcup \{S_n : n \in N\}$ je prebrojiv i $cl(S)_X = K \in C(X)$, (prostor X je strogo prebrojivo kompaktan). $\exp(K)$ je kompaktan zatvoren podskup od $C(X)$ i $\{A_n \in C^s(X) : n \in N\} \subset \exp(K)$. Šta više, $sl(\{A_n \in C^s(X): n \in N\})_{\exp(K)} = cl(\{A_n \in C^s(X) : n \in N\})_{C(X)} \in C(C(X))$. Neka je $\{K_n \in C(X): n \in N\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od $C(X)$. Pošto je $C(X)$ prve prebrojivosti, a $C^s(X)$ gust u $C(X)$, to za svako $K_n$ postoji prebrojiv podskup $\{A_i^k \in C^s(X) : i \in N\}$ takav da je $cl(\{A_i^k \in C^s(X) : i \in N\})_{C(X)} \in C(C(X))$ i $K_n \in cl(\{A_i^n \in C^s(X) : i \in N\})_{C(X)}$. $cl(\{K_n \in C(X) : n \in N\})_{C(X)} \subset cl(\{A_i^n \in C^s(X) : i , n \in N\})_{C(X)} \in C(C(X))$. Pa je $cl(\{K_n \in C(X):n \in N\})_{C(X)} \in C(C(X))$. Ovim je dokazano da je $C(X)$ strogo prebrojivo kompaktan. Medjutim, u prvom paragrafu (videti 4.1.8) je dokazano da su uslovi: hiper-prebrojive kompaktnosti prostora X i stroge prebrojive kompaktnosti $C(X)$ ekvivalentni pa je prostor X hiper-prebrojivo kompaktan. //.

4.5.2. TEOREMA. *Neka je prostor X L-prostor. X je strogo prebrojivo kompaktan onda i samo onda ako je prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Neka je L-prostor X prebrojivo kompaktan i neka je $A = \{x_n : n \in N\}$ prebrojiv predprostor od X. $cl(A)_X$ je Lindelöf-ov jer je X L-prostor. $cl(A)_X$ je prebrojivo kompaktan, jer se prebrojiva kompaktnost čuva u odnosu na zatvorene podprostore. Dakle, $cl(A)_X$ je prebrojivo kompaktan Lindelöf-ov podprostor od X, pa je prema 1.3.2. kompaktan. Ovim je dokazano da je prostor strogo prebrojivo kompaktan.

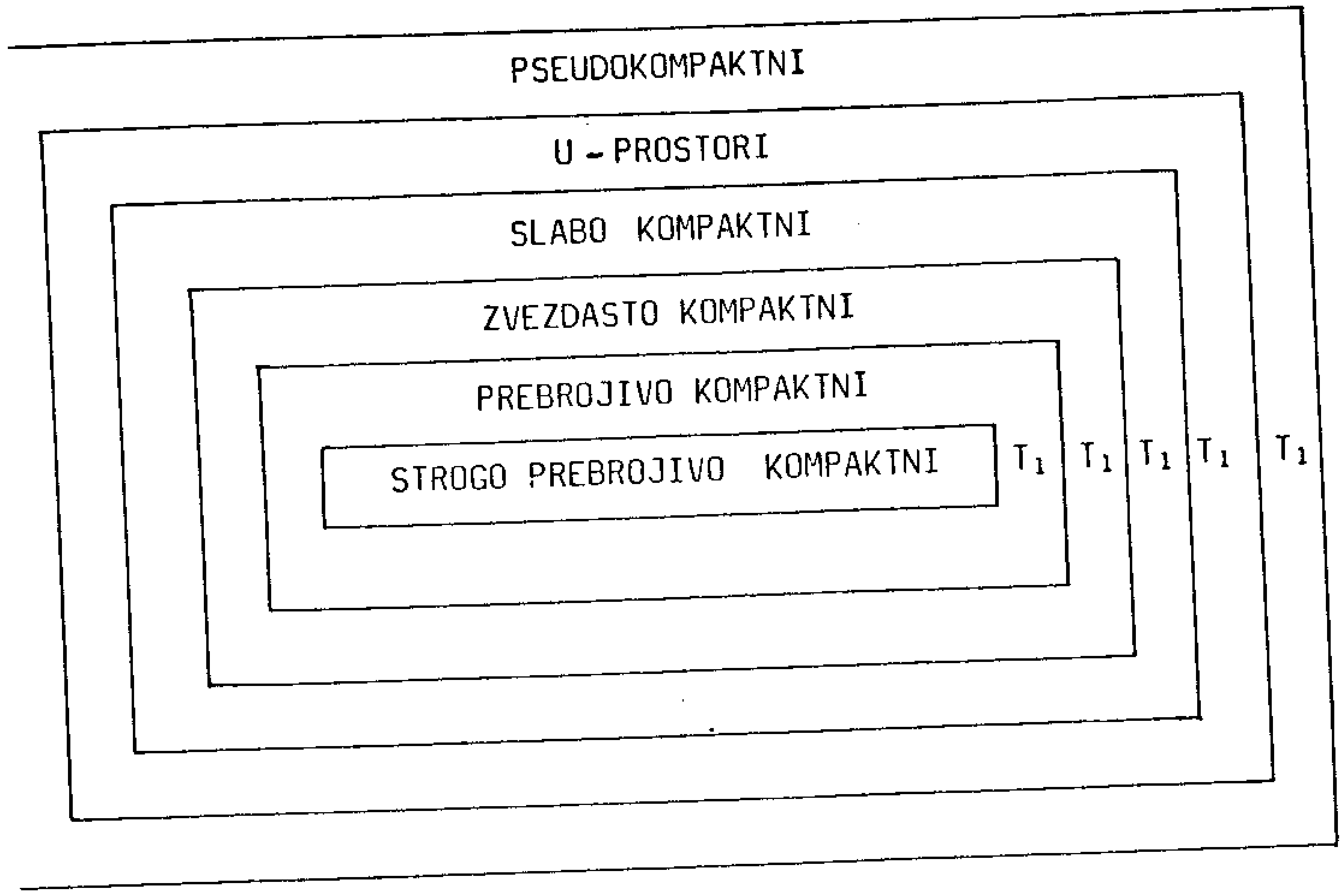
Obrnuto. Ako je prostor X strogo prebrojivo kompaktan prema [25] (str. 763), istovremeno je prebrojivo kompaktan jer se lako može utvrditi da svaki prebrojiv podskup od X ima bar jednu tačku nagomilavanja. //.

4.5.3. TEOREMA. R-*prostor* X *je strogo prebrojivo kompaktan onda i samo onda ako je prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Ako je prostor X strogo prebrojivo kompaktan, prema [25] je prebrojivo kompaktan.

Obrnuto. Ako je prostor X prebrojivo kompaktan prema [25] svaki njegov zatvoren podprostor takodje je prebrojivo kompaktan, pa je svaki zatvoren separabilan podprostor prebrojivo kompaktan. Prebrojiva kompaktnost implicira pseudokompaktnost, pa je u R-prostoru X svaki zatvoren separabilan podprostor pseudokompaktan i realno kompaktan. Prema propoziciji 3.2.4, je kompaktan. Dakle, prostor X je strogo prebrojivo kompaktan. //.

U [38] i [32] dat je sledeći šematski prikaz odnosa klasa prostora kojima se uopštava kompaktnost:




Ova šema pokazuje da u lancu implikacija izmedju navedenih uopštenja kompaktnosti, najstariji član je strogo prebrojiva kompaktnost, a najslabiji pseudokompaktnost. U-sistemi i U-prostori dati su u [38]. U separacionom smislu šema važi za $T_1$ prostore.

4.5.4. TEOREMA. *Neka je u R-prostoru X svaki prebrojiv podskup otvoren. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(a) *Prostor X je strogo prebrojivo kompaktan.*

(b) *Prostor X je prebrojivo kompaktan.*

(c) *Prostor X je zvezdasto kompaktan.*

(d) *Prostor X je slabo kompaktan.*

(e) *Prostor X je U-prostor.*

Dokaz. Poznato je da (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e), ostaje da se dokaže da (e) $\Rightarrow$ (a). Pošto je svaki prebrojiv podskup $P \subset X$, otvoren, prema 2.6, $cl(P)_X$ je U-prostor i $cl(P)_X$ je realno kompaktan. Kako je prema [38], svaki U-prostor pseudokompaktan, to je prema 3.2.4, $cl(P)_X$ kompaktan, za svaki prebrojiv podskup $P \quad X$ pa je prostor $X$ strogo prebrojivo kompaktan. Pošto (e) $\Rightarrow$ (a) svi iskazi su medjusobno ekvivalentni. //.

4.5.5. TEOREMA. *Neka je prostor $X$ $L'$-prostor. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(a) *Prostor $X$ je prebrojivo kompaktan.*

(b) *Prostor $X$ je hiper-prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b) : Neka je $\{K_n \in C(X) : n \in N\}$ proizvoljna prebrojiva podfamilija od $C(X)$ i $Y = \cup\{K_n \in C(X) : n \in N\}$ podprostor od $X$. Jasno, $Y$ je $\sigma$-kompaktan, pa i Lindelöf-ov podprostor od $X$. Pošto je $X$ $L'$-prostor, $cl(Y)_X$ je takodje Lindelöf-ov, a i prebrojivo kompaktan, pa je, dakle, kompaktan. To znači da je $K_n \subseteq cl(Y)_X \in C(X)$, za svako $n \in N$, pa je prostor $X$ hiper-prebrojivo kompaktan.

(b) $\Rightarrow$ (a) je trivijalno jer je svaki hiper-prebrojivo kompaktan prostor istovremeno i prebrojivo kompaktan.

4.5.6. POSLEDICA. *Neka je prostor $X$ $L'$-prostor. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(a) *Prostor $X$ je prebrojivo kompaktan.*

(b) *Prostor $X$ je strogo prebrojivo kompaktan.*

(c) *Prostor $X$ je hiper-prebrojivo kompaktan.*

4.5.7. PRIMEDBA. Postoje mnogi primeri prostora koji su prebrojivo kompaktni, a nisu strogo prebrojivo kompaktni. Ovo je još jasnije ako se zna da se prebrojiva kompaktnost ne prenosi na proizvod prostora, dok se strogo prebrojiva kompaktnost prenosi. U [19] dokazano je da za svaki pozitivan broj $n$ postoji prostor $X$ takav da je $X^n$ prebrojivo kompaktan, a $X^{n+1}$ nije prebrojivo kompaktan. U [20] dat je podprostor $G$ od $\beta N$ koji je prebrojivo kompaktan, a $G \times G$ nije prebrojivo kompaktan (prostor Novaka - J.Novak, poljski matematičar).

## 4.6. STROGO SEKVENCIJALNO KOMPAKTNI PROSTORI

Ovaj deo odnosi se na prostore koji su više nego sekvencijalno kompaktni, a pripadaju klasi hiper-prebrojivo kompaktnih prostora.

4.6.1. DEFINICIJA. *Prostor* X *je strogo sekvencijalno kompaktan ako je* $C(X) \subset \exp(X)$ *sekvencijalno kompaktan.*

4.6.2. PROPOZICIJA. *Svaki strogo sekvencijalno kompaktan prostor je sekvencijalno kompaktan.*

Dokaz. Neka je prostor X strogo sekvencijalno kompaktan. To znači da je C(X) sekvencijalno kompaktan, a samim tim i $\hat{X}$ (kao zatovren podprostor od C(X), videti 1.5.6). Medjutim, kako je $\hat{X}$ homeomorfno sa X, to je i X sekvencijalno kompaktan. //.

Obrnuto tvrdjenje ne mora biti tačno. Naime, postoje primeri prostora koji su sekvencijalno kompaktni ali nisu strogo sekvencijalno kompaktni.

To će biti ilustrovano na primeru koji će biti dat nakon sledeće Leme. Ova Lema služi razjašnjivanju konstrukcije primera prostora koji je sekvencijalno kompaktan, a nije strogo sekvencijalno kompaktan.

4.6.3. LEMA [13]. *Neka je kompaktan prostor* Y *neprekidna slika razlike* $cX - X$ *kompaktifikacija* $cX$ *lokalno kompaktnog prostora* X. *Tada prostor* X *ima kompaktifikaciju* $\gamma X \leq cX$ *takvu da je* $\gamma X - X$ *homeomorfno sa* Y.

Franklin i Rajagopalan u [16] primenom transfinitivne indukcije definisali su transfinitivni niz $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_\alpha \subset \ldots$ $\alpha < \omega_1$ od otvorenja zatvorenih podskupova od $N^* = \beta N - N$ takvih da je $U_\alpha \neq U_\beta$ ako je $\beta < \alpha$ i da formula:

$$f(x) = \begin{cases} \omega_1 & \text{za } x \in (\beta N - N) - (\cup\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}) \\ \inf\{\alpha : x \in U_\alpha\} & \text{za } x \in (\cup\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}) \end{cases}$$

definiše neprekidno preslikavanje sa $\beta N - N$ na $[0, \omega_1]$.

Prema prethodnoj Lemi postoji kompaktifikacija $\gamma N$ prostora N takva da je $\gamma N - N$ homeomorfno sa $[0, \omega_1]$, tj. postoji homeomorfizam h sa $[0, \omega_1]$ na $\gamma N - N = N^*$.

Podprostor $\gamma N - \{h(\omega_1)\}$ ima sledeća svojstva:

(a) Separabilan.

(b) Normalan.

(c) Lokalno kompaktan.

(d) Sekvencijalno kompaktan.

Razume se, da $\gamma N - \{h(\omega_1)\}$ nije kompaktan, jer je podprostor od kompaktnog prostora $\gamma N$ kome je oduzeta tačka nagomilavanja $\{h(\omega_1)\}$.

Pošto je separabilan, a nije kompaktan, jasno je, da nije strogo prebrojivo kompaktan, a samim tim ni heperprebrojivo kompaktan.

4.6.4. PRIMEDBA. Prostor $\gamma N - \{h(\omega_1)\}$ nije strogo sekvencijalno kompaktan jer bi u tom slučaju bio hiper prebrojivo kompaktan. Ovaj primer pokazuje da obrnuto tvrdjenje od 3.6.2, ne mora biti tačno.

Što se tiče odnosa sekvencijalne kompaktnosti i strogo prebrojive kompaktnosti odnosno hiper-prebrojive kompaktnosti, situacija je sledeća:

(a) Prostor $X = \beta N \times [0, \omega_1)$ je hiper-prebrojivo kompaktan, a nije sekvencijalno kompaktan. (Ako bi X bio sekvencijalno kompaktan takav bi bio i $\beta N \times \{x_0\}$ gde je $x_0$ proizvoljna tačka iz $[0, \omega_1)$. Medjutim, kako je $\beta N \times \{x_0\}$ homeomorfno $\beta N$, a $\beta N$ nije sekvencijalno kompaktan, to ni $\beta N \times [0, \omega_1)$ nije sekvencijalno kompaktan).

(b) Prostor $Y = \beta N \times (N^* - \{x_0\})$ je strogo prebrojivo kompaktan, a nije sekvencijalno kompaktan ($x_0$ je tačka iz $N^* = \beta N - N$ koja je prebrojivo nedostiživa, a nije P-tačka).

4.6.5. LEMA. *Prostor X je hiper-prebrojivo kompaktan onda i samo onda ako za svaku prebrojivu familiju $A = \{K_n \in C(X) : n \in N\}$ postoji familija $A' = \{K'_n \in C(X) : n \in N\}$ rastuća po inkluziji takva da je $K_n \quad K'_n$, za svako $n \in N$, za koju postoji $K \in C(X)$ sa svojstvom da je $K'_n \subset K$, za svako $n \in N$.*

Dokaz. Neka je $A = \{K_n \in C(X) : n \in N\}$ proizvoljna prebrojiva familija kompaktnih podskupova od X i neka postoji familija $A' = \{K'_n \in C(X) : n \in N$ sa svojstvom da postoji $K \in C(X)$ tako da je $K_n \in K'$, za svako $n \in N$, i da je $K_n \subset K'_n$, takodje, za svako $n \in N$. Prema 4.1.8, prostor X je hiper-prebrojivo kompaktan.

Obrnuto, neka je prostor X hiperprebrojivo kompaktan i $A = \{K_n \in C(X) : n \in N\}$ proizvoljna prebrojiva familija kompaktnih podskupova od X. Jasno, postoji $K \in C(X)$ tako da je $K_n \quad K$, za svako $n \in N$. Medjutim, postoji i familija $A' = \{K'_n \in C(X) : n \in N\}$ gde je $K'_n = \cup \{K_i : i \in [1, n]\}$ pa je $K_n \subset K'_n \subset \cup \{K_n \in C(X) : K_n \in A\} \subset K$, za svako $n \in N$. //.

4.6.6. TEOREMA. *Svaki strogo sekvencijalno kompaktan prostor je hiper-prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Neka je za prostor X, C(X) sekvencijalno kompaktan i $A = \{K_n \in C(X) : n \in N\}$ proizvoljna prebrojiva familija kompaktnih podskupova od X. Jasno, postoji familija $A' = \{K'_n \in C(X) : n \in N\}$ takva da je $K'_n = \cup \{K_i : i \in [1, n]\}$ za svako $n \in N$. Razume se $A'$ je niz u C(X) i pošto je C(X) sekvencijalno kompaktan, postoji podniz $B \subset A'$ $B = \{K' \in A' : i \in N\}$ koji konvergira nekom $K \in C(X)$. $B \cup \{K\}$ je prebrojiv kompaktan podskup u C(X). Šta više, $|B \cup \{K\}| \in C(X)$ i $K'_i \quad |B \cup \{K\}|$, za svako $i \in N$. Medjutim, kako je familija $A'$ rastuća po inkliziji, to za svako $n \in N$, postoji $i > n$, $i \in N$, tako da je $K'_n \subset K'_i$, pa je za svako $n \in N$, $K'_n \quad |B \cup \{K\}|$. Dakle prema prethodnoj Lemi, prostor X je hiper-prebrojivo

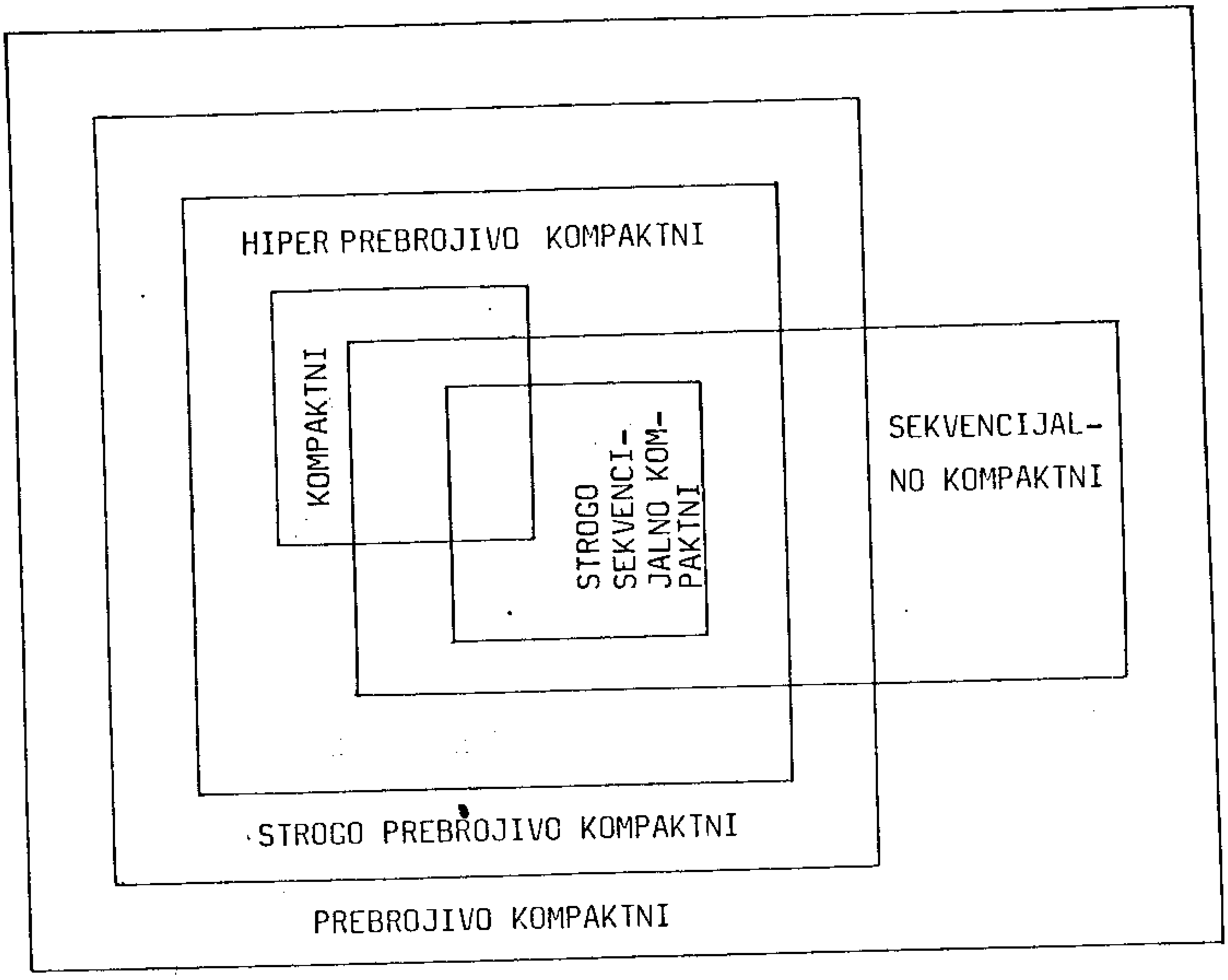
4.6.7. PRIMEDBA. Obrnuto tvrdjenje ne mora biti tačno, na primer, poznato je da su prostori $I^I$ ili $\beta N$ kompaktni ali nisu sekvencijalno kompaktni. Neka je dalje, $X = \beta N \times [0, \omega_1)$. Prema 4.4.9, prostor X je hiper-prebrojivo kompaktan ali nije sekvencijalno kompaktan jer $\beta N$ nije sekvencijalno kompaktan. Ako bi podprostor C(X) bio sekvencijalno kompaktan, takav bi bio i $\hat{X} \subset C(X)$ jer je $\hat{X}$ zatvoren u C(X) i $X \approx X$, (poznato je da se sekvencijalna kompaktnost prenosi na zatvorene podprostore). Medjutim, pošto $\hat{X}$ nije sekvencijalno kompaktan, nije ni C(X).

4.6.8. PROPOZICIJA. *Neka je prostor* X *prve prebrojivosti i* $C(X) \subset \exp(X)$ *prebrojivo kompaktan. Tada je* X *strogo sekvencijalno kompaktan.*

Dokaz. Neka je X prve prebrojivosti. Prema [37] i C(X) je prve prebrojivosti, pa prema 1.5.4, prostor C(X) je sekvencijalno kompaktan jer je prebrojivo kompaktan i prve prebrojivosti. Dakle, prostor X je strogo sekvencijalno kompaktan.

4.6.9. PRIMEDBA. Prema prethodnoj propoziciji prostor $X = [0, \omega_1)$ je strogo sekvencijalno kompaktan koji nije kompaktan. Prostor $[0, \omega_1]$ je kompaktan i strogo sekvencijalno kompaktan. Prostori $\beta N$ i $I^I$ su kompaktni koji nisu strogo sekvencijalno kompaktni jer niz sekvencijalno kompaktni.

Na osnovu svega, do sada što je izneto, može se primetiti da ima smisla sledeći šematski prikaz:




4.6.10. PROPOZICIJA. *Neka je prostor* X *podprostor* $C(X) \subset \exp(X)$ *prebrojivo kompaktan i sekvencijalan. Tada je* X *strogo sekvencijalno kompaktan.*

Dokaz. Ova propozicija je neposredna posledica teoreme 1.5.4, iz uvodne glave.

4.6.11. DEFINICIJA [7]. *Prostor* X *je disperzivan ako ne sadrži perfektan podskup.*

4.6.12. PROPOZICIJA [7]. *Disperzivan, regularan, prebrojivo kompaktan prostor je sekvencijalno kompaktan.*

4.6.13. PROPOZICIJA. *Neka je prostor* X *regularan, a* $C(X) \subset \exp(X)$ *disperzivan prebrojivo kompaktan. Tada je* X *strogo sekvencijalno kompaktan.*

Dokaz. Prema [37] $C(X)$ je regularan pošto je $X$ regularan. Medjutim, $C(X)$ je disperzivan i prebrojivo kompaktan pa je prema 4.6.12, sekvencijalno kompaktan. Dakle, prostor $X$ je strogo sekvencijalno kompaktan. //.

4.6.14. TEOREMA. *Svaki zatvoren podprostor sekvencijalno kompaktnog prostora je strogo sekvencijalno kompaktan.*

Dokaz. Neka je prostor $X$ strogo sekvencijalno kompaktan i $Y$ zatvoren podprostor od $X$. Razume se $C(Y) = \exp(Y) \cap C(X)$. Prema [37] $\exp(Y)$ je zatvoren podprostor od $\exp(X)$, pa je $C(Y)$ zatvoren podprostor od $C(X)$. Medjutim, kako je $C(X)$ sekvencijalno kompaktan, to je i $C(Y)$ sekvencijalno kompaktan. Prema 4.6.1, podprostor $Y$ je strogo sekvencijalno kompaktan. //.

Neka je prostor $Y$ neprekidna slika prostora $X$ pri preslikavanju $f$. Može se dobro definisati prirodno preslikavanje $F : C(X) \to C(Y)$ (ne mora biti preslikavanje na), na sledeći način: $F(K) = f(K)$, za svako $K \in C(X)$. Lako se vidi da je svako definisano preslikavanje $F$ neprekidno. Neka je $F(C(X)) = S(Y) \subseteq C(Y)$. Slika $S(Y)$ ima sledeća svojstva:

$1^0$ $\hat{Y} \subset S(Y)$, gde je $\hat{Y} = \{\{y\} \in C(Y) : y \in Y\}$.

$2^0$ $F_n(Y) \subset S(Y)$, gde je $F_n(Y) = \{B \subset Y : \mathrm{card}(B) \leq n\}$.

$3^0$ $F_c(Y) \subset S(Y)$, $F_c(Y)$ - familija svih konačnih podskupova od $Y$.

$4^0$ $\mathrm{cl}(S(Y))_{C(Y)} = C(Y)$.

$5^0$ Neka je $B \in S(Y)$. Tada je $\exp(B) \subset S(Y)$.

Dokaz - $5^0$. Neka je $B \in S(Y)$. Jasno, postoji $A \in C(X)$, tako da je $f(A) = F(A) = B$. Neka je $B_1 \in \exp(B)$ ($B_1$ je proizvoljan član iz $\exp(B)$).

Razume se, $B_1 \subset B$ i $B_1$ je kompaktan, tj. $B \in C(X)$. $F^{-1}(B_1) = \{K \in C(X) : F(K) = B_1\}$. Restrikcija od $f$ sa $X$ na $A$ preslikava $A$ na $B$ ($f/A : A \xrightarrow{na} B$). Dalje, za svako $B^* \subset B$, $f^{-1}_{(A)}(B^*) \subset A$ pa je $f^{-1}/A\,(B_1) = A_1$. Dakle, $f(A_1) = B_1$. //.

$6^o$ Neka je. $q = \{Q : Q \in S(Y)\}$   $S(Y)$. Tada je $\hat{q} = \cup\{C(Q) : Q \in q\}$   $S(Y)$.

$7^o$ Neka je $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\} \in S(Y)$. Tada je $\{C(Q_1)\} \cup \{C(Q_2)\} \cup \ldots \cup \{C(Q_n)\}$   $S(Y)$.

$8^o$ Neka je $\{Q_1, Q_2\}$   $S(Y)$. Tada je $Q_1$   $Q_2 \in S(Y)$.

$9^o$ Neka je $q$   $S(Y)$. Tada za svako $Q \in q$ postoji $Kq \in C(X)$, tako da je $F(Kq) = f(Kq) = Q$. Šta više $|q| = \cup\{Q : Q \in q\} = \cup\{F(Kq) : Kq \in Kq\} = f(\cup\{Kq : Kq \in Kq\}) = f(|Kq|)$.

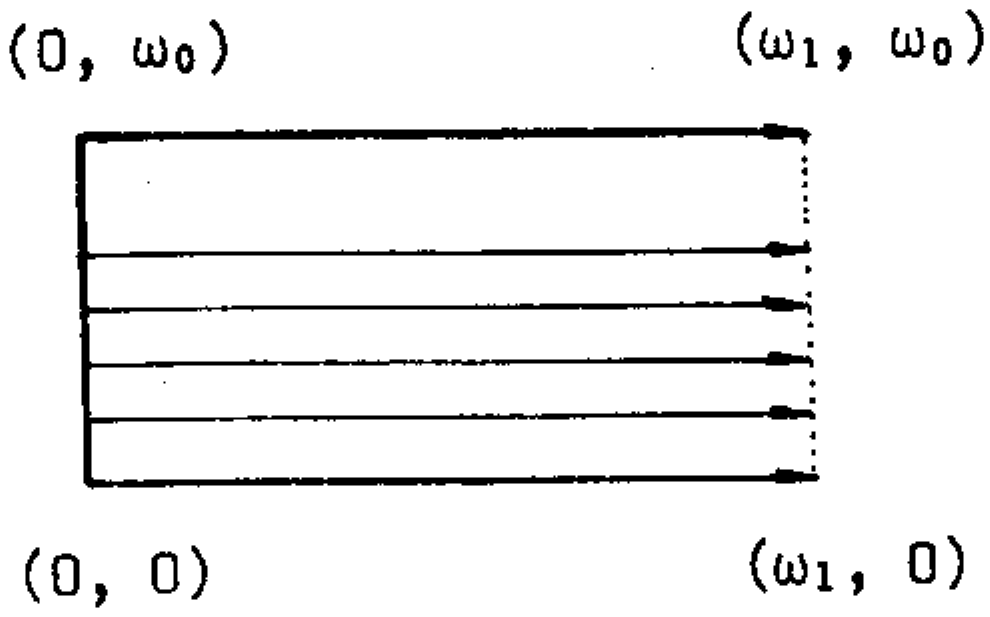
Na osnovu svega iznetog može se primetiti da je $S(Y) = C(Y)$, ako je preslikavanje $f$ sa $X$ na $Y$ kompaktno pokrivajuće.

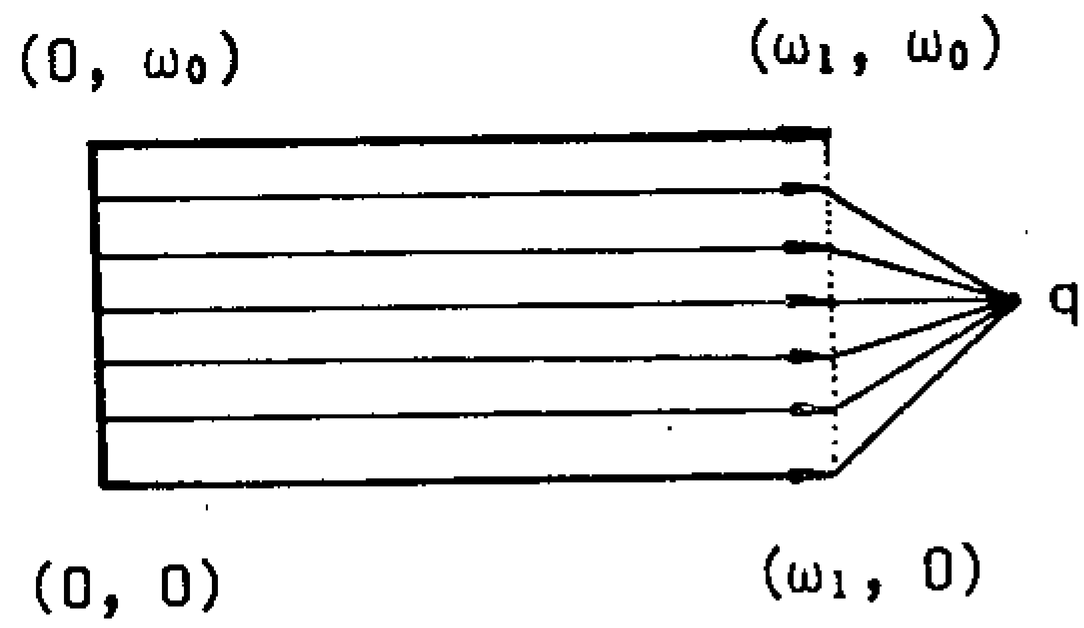
Pošto je $S(Y)$ gusto u $C(Y)$, $S(Y) = C(Y)$ i u slučaju kada je preslikavanje $F : C(X) \to C(Y)$ zatvoreno. Medjutim, nije teško primetiti da je ovaj uslov ekvivalentan sa uslovom da je preslikavanje $f : X \xrightarrow{na} Y$ kompaktno pokrivajuće.

4.6.15. PROPOZICIJA. *Neka je preslikavanje f sa strogo sekvencijalno kompaktnost prostora X na prostor Y kompaktno pokrivajuće. Tada je prostor Y strogo sekvencijalno kompaktan.*

Dokaz. Neka je prostor $X$ strogo sekvencijalno kompaktan i $f$ kompaktno pokrivajuće preslikavanje, sa $X$ na $Y$. Preslikavanje $F : C(X) \to C(Y)$ definisano uslovom $F(K) = f(K)$, za svako $K \in C(X)$ je neprekidno sa $C(X)$ na $C(Y)$. Medjutim, kako je $C(X)$ sekvencijalno kompaktan, to je prema 1.5.4, i $C(Y)$ sekvencijalno kompaktan pa je prostor $Y$ strogo sekvencijalno kompaktan.

4.6.16. PRIMEDBA. Neprekidna slika strogo sekvencijalno kompaktnog prostora ne mora biti strogo sekvencijalno kompaktna. Na primer, neka je




$X = ([0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, x) : x \in [0, \omega_0]\}) \cup \{p\}$, gde je $p$ izolovana tačka, a $Y = ([0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, x) : x \in [0, \omega_0]\}) \cup \{q\}$ gde su okoline tačke $q$ komplementi kompaktnih podskupova od $[0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, x) : x \in [0, \omega_0]\}$.

Lako se vidi da prostor X ima sledeća svojstva:

(a) X je normalan.

(b) X je prve prebrojivosti.

(c) X je hiper-prebrojivo kompaktan.

Iz (b) i (c) sledi da je prostor X strogo sekvencijalno kompaktan.

Još u prvom paragrafu ove glave utvrdjeno je da prostor Y ima sledeća svojstva:

1. Y je strogo prebrojivo kompaktan $T_2$-prostor.

2. Y nije hiperprebrojivo kompaktan.

Postoji neprekidno preslikavanje $f$ sa X na Y definisano na sledeći način:

$$f(x) = \begin{cases} q & \text{ako je } x = p \\ x & \text{za } x \in [0, \omega_1] \times [0, \omega_0] - \{(\omega_1, n) : n \in [0, \omega_0]\} \end{cases}$$

3. Prostor $Y$ je sekvencijalno kompaktan, a nije strogo sekvencijalno kompaktan. (Ranije je dokazano da je svaki strogo sekvencijalno kompaktan prostor hiper-prebrojivo kompaktan).

# I N D E K S

## A



## H



## K



## L



## P



## R



## S



## U

# L I T E R A T U R A


[1] АЛЕКСАНДРОВ П.С; Введение в обшую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.

[2] АЛЕКСАНДРОВ П.С; Введение в обшую теорию и обшую топологию, Москва, 1977.

[3] АЛЕКСАНДРОВ П.С; УРЫСОН П.С; Мемуар о компактных топологических пространствах, Москва, 1971.

[4] АРХАНГЕЛЬСКИЙ А.В; Бикомпактные множества и топология пространствах, Труди Москов математ. обшества, Том 13, 1965.

[5] АРХАНГЕЛЬСКИЙ А.В; ПОНОМАРЕВ В.И; Основы обшей топологий в задачах и упражнениях, Москва, 1974.

[6] BAGLEY R.W, CONNEL E.H, McKNIGHT J.D; On properties characterizing pseudocompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 9/1958/, 500-506.

[7] BAKER J.W; Ordinal subspaces of topological spaces, Gen. Topol. and its Applications 3/1973/, 85-91.

[8] BASHKIROV A.I; On continuous maps of Isbell spaces and strong Odimensionality, Bull. de l Academie Polonaise des Scien. Vol XXVII, No 7-8, /1979/, 605-610.

[9] BASHKIROV A.I; On Stone-Čech compactifications of Isbell spaces, Bull.de l Academie Polonaise des Scien.vol XXVII, No 7-8, /1979/, 613-619.

[10] БУРБАКИ Н; Общая топология (основные структуры), Москва, 1968.

[11] COMFORT W.W; A nonpseudocompact product space Whose finite subproducts are pseudocompact, Math. Ann. 170 /1967/, 41-44.

[12] DEVI K.M, MEYER P.R, RAJAGOPLAN M; When does countable compactness imply sequential compactness? General Topology and its Applications 6, /1976/, 279-289.

[13] ENGELKING R; General Topology, Warszawa, 1977.

[14] FRANKLIN S.P; Spaces in which sequences suffice, Fund. Math. 57, /1965/, 107-115.

[15] FRANKLIN S.P; Spaces in which sequences suffice II, Fund. Math. 61 /1967/, 51-56.

[16] FRANKLIN S.P, RAJAGOPALAN M; Some examples in topology, Trans.Amer. Math. Soc. 155 /1971/, 305-314.

[17] FROLIK Z; The topological product of countably compact spaces, Czech.Math. Journal, 10/85/, /1960/, 329-338.

[18] FROLIK Z; An example concerning countably compact, Czech.Math. Journal, /10/, /1960/, 255-257.

[19] FROLIK Z; Sums of ultrafilteres, Bull. Amer. Math. Soc. 73 /1967/, 83-91.

[20] GILLMAN L. and JERISON M; Rings of continuous functions, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1960.

[21] GLICKSBERG I; Stone-Čech compactifications of products, Trans. Amer. Math. Soc. 90 /1959/, 369-382.

[22] ISEKI K. and KASAHARA S; On pseudocompact and countably compact spaces, Proc. Japan. Acad. Vol. 33 /1957/, 100-102.

[23] JOSEPH J.E; Pseudocompactness and closed subsets of products, Proc. Amer. Math. Soc. 74 No 2, /1979/, 338-342.

[24] JUHASZ I; Cardinal functions in topology, Math.Centre Tracts No 34 /1971/.

[25] KEESLING J; Normality and properties related to compactness in hyperspaces, Proc. Amer. Math. Soc. 24 /1970/, 760-766.

[26] KEESLING J; On the equivalence of normality and compactness in hyperspaces, Pacif. Journal of Math. vol. 33 No 3, /1970/, 657-667.

[27] KELLEY J.L; General Topology, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1955.

[28] KELLEY J.L; The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, Fund.Math. 37 /1950/,75-76.

[29] KUNEN K; Some points in $\beta N - N$, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 80 No 3. /1976/, 385-398.

[30] KURATOWSI K; Topology, I, II, 1966.and 1968., Warszawa.

[31] KUREPA DJ; Teorija Skupova, Zagreb, 1951.

[32] LYNN A.S., ARTHUR J., SEEBACH J.R; Counterexamples in topology, Springer-Verlag, 1978.

[33] MARDEŠIĆ S., PAPIĆ P; Sur les espaces dont toute transformation reelle continue est bornee, Glasnik Mat. Fiz. Ast. 10 /1955/, 225-232.

[34] MARJANOVIĆ M; Topologies on collections of closed subsets, Publ. Inst. Math. /N.S/ /1966/, 125-130.

[35] MARJANOVIĆ M; Topologizing the hypersets, Publ. Inst. Math., 11 /25/, /1971/, 123-134.

[36] MARJANOVIĆ M; A pseudocompact space having no dense countably compact subspace, Glasnik Math. Ser. III 6 /1971/, 149-151.

[37] MICHAEL E; Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71 /1951/, 152-182.

[38] MILOVANČEVIĆ D; A characterization of compactness and pseudocompactness, Glasnik Mat. 12/32, /1977/, 157-160.

|39| MILOVANČEVIĆ D; Nekoliko uopštenja kompaktnosti, Mat. Ves. /U štampi/.

[40] MROWKA S; On completely regular spaces, Fund. Math. 41 /1954/, 105-106.

[41] NOBLE N; Countably compact and pseudocompact, Czecz. Mat. Jour. 19 /1969/, 390-397.

[42] NOVAK J; On the Cartesion product of two compact spaces, Fund. Math. 40 /1952/, 106-112.

[43] PORTER J.R; Lattices of H-closed extensions, Bull. De L'Acad. Pol. des sciences, Vol. XXII, No 8, /1974/, 831-837.

[44] RUDIN M.E; Partial orders on the types of $\beta N$, Trans. Amer. Math. Soc. 155 /1971/, 353-362.

[45] RUDIN W; Homogeneity problems in the theory of Čech, compactifications, Duke. Math. J. 23 /1956/, 409-419.

[46] SCARBOROUGH C.T., STONE A.H; Products of nearly compact spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 124 /1966/, 131-147.

[47] STANOJEVIĆ M.S; On two mappings associated with multivalued and pointvalued mappings, Topology and its Appl., Budva, 1972.

[48] STANOJEVIĆ M.S; O nekim klasama višeznačnih neprekidnih preslikavanja, Doktorska disertacija, Beograd, 1975.

[49] STONE A.H; Heraditarily compact spaces, Amer.J.Math. 82 /1960/, 900-914.

[50] WALKER R.C; The Stone-Čech compactification, Springer, Berlin, 1974.