

МАСТЕР РАД

Методички проблеми у вези са квадратном
једначином у различитим програмима средње
Техничке школе

Студент: Драгана Ниновић 1075/2013

Професор: Александар Липковски

Београд,
2015.

1	Увод	1
2	Програми са 2 и 3 часа наставе математике недељно - примери у настави математике у II разреду средње школе	2
2.1	Наставна јединица: Појам квадратне једначине и квадратног тринома	3
2.2	Наставна јединица: Непотпуне квадратне једначине	7
2.3	Наставна јединица: Решавање потпуне квадратне једначине . .	9
2.3.1	Други начин решавања квадратне једначине	11
2.4	Наставна јединица: Дискриминанта и природа решења квадратне једначине	14
2.5	Наставна јединица: Растављање квадратног тринома на чиниоце	16
2.6	Наставна јединица: Вијетова правила	18
2.7	Наставна јединица: Систем квадратне и линеарне једначине . .	21
2.8	Задаци	23
3	Програми са 4 часа наставе математике недељно - примери у настави математике у II разреду средње школе	26
3.1	Наставна јединица: Појам квадратне једначине и квадратног тринома	27
3.2	Наставна јединица: Вијетове формуле. Налажење корена квадратне једначине	29
3.3	Наставна јединица: Дискриминанта. Дискусија решења квадратне једначине	35
3.4	Наставна јединица: Систем две квадратне једначине са две непознате	38
3.5	Наставна јединица: Проблеми другог степена са једном непознатом	42
3.6	Наставна јединица: Једначине које се свде на квадратне	46
3.7	Задаци	51
4	Методички проблеми	54
5	Закључак	58

Изабрала сам методику наставе математике за предмет из којег ћу бранити тему за мастер рад руководећи се сопственом жељом да учествујем у унапређењу наставе математике. Сматрам да је то могуће уколико изнесем своје виђење наставног часа математике и укажем на математичке проблеме.

Свима нам је добро познато да је ученике потребно заинтересовати за оно што изучавају, нарочито ако они сами томе прилазе са извесним убеђењем да се ради о тешком предмету. Како њихово интересовање за дати предмет битно зависи и од индивидуалних способности, научно - стручне и педагошке спреме, као и људских квалитета наставника, то, ми наставници, морамо бити активни учесници у настави. При томе не смемо заборавити да исто то захтевамо и од својих ученика.

Успешо извођење наставног часа и успешна интерпретација наставне теме (и уопште наставне целине) код ученика утиче на развијање свести о значају научног знања и доприноси трајнијем памћењу.

Циљ наставе математике је да ученици усвоје елементарне математичке компетенције (знања, вештине) које су потребне за разумевање појава и законитости у природи и друштву и које ће да оспособе ученике за примену усвојених математичких знања (у решавању разноврсних задатака из животне праксе), као и да допринесе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развоју личности ученика.

Мој задатак је да у овом раду изложим анализу наставних јединица везаних за **Квадратну једначину** која се, по плану и програму, обрађује у другом разреду средње школе. Треба решавати и једначине са непознатом у имениоцу разломка, које се свде на квадратне једначине, као и једноставније једначине са параметрима. Потребну пажњу треба посветити примени квадратних једначина у решавању разноврсних а једноставних проблема.

2 Програми са 2 и 3 часа наставе математике недељно - примери у настави математике у II разреду средње школе

Наставним планом и програмом за II разред средње Техничке школе (2 и 3 часа наставе математике недељно) предвиђена је обрада следећих наставних јединица везаних за квадратне једначине:

- Појам квадратне једначине и квадратног тринома
- Непотпуне квадратне једначине
- Решавање потпуне квадратне једначине
- Растављање квадратног тринома на чиниоце
- Дискриминанта и природа решења квадратне једначине
- Вијетова правила
- Систем квадратне и линеарне једначине

2.1 Наставна јединица: Појам квадратне једначине и квадратног тринома

У оквиру ове наставне јединице потребно је са ученицима обновити основне операције са полиномима.

Општи облик квадратне једначине је формула облика:

$$(1) \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

Коефицијенти a, b, c су елементи поља реалних или комплексних бројева и при томе је $a \neq 0$ (када би било $a = 0$, једначина (1) била би линеарна једначина облика $bx + c = 0$). Основни задатак за дату квадратну једначину (1) јесте одређивање њеног **корена** (или **решења**). Решење (или корен) квадратне једначине је таква бројна вредност α **непознате** x да када се уврсти тај број α уместо непознате x у једначину (1) добија се да је вредност леве стране једначине (1) једнака нули, тј. $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

Пример 1. Једно решење квадратне једначине $x^2 - 3x + 2 = 0$ је број 2. Заиста је $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$.

△

Лева страна једначине (1), тј. израз $ax^2 + bx + c$, има значајну улогу у налажењу решења квадратне једначине (1). Тај израз јесте полином другог степена и назива се **квадратни трином**, а означава се са:

$$(2) \quad P_2(x) = ax^2 + bx + c.$$

Сабирци ax^2 , bx и c зову се, редом, **квадратни члан**, **линеарни члан** и **слободни члан**. У случају када је један или оба од коефицијената b, c једнак нули, каже се да је квадратни трином **непотпун**.

Такође се сматра да је квадратна једначина и свака једначина која се може довести (алгебарским операцијама) на облик (1).

Пример 2. Код квадратног тринома $7x^2 + 5x - 6$ квадратни члан је $7x^2$, линеарни члан је $5x$, а слободни -6 .

△

Пример 3. Једначина $2x^2 - x - 8 = 0$ је квадратна једначина облика (1). Такође су и једначине $x^2 = -1$, $2x - x^2 = 5$, $x^2 = x$ квадратне јер се могу довести на облик (1). Тада оне гласе: $x^2 + 1 = 0$, $-x^2 + 2x - 5 = 0$, $x^2 - x = 0$.

Уз претпоставку да је $x - 2 \neq 0$, једначина:

$$(3) \quad x + 1 = \frac{3}{x - 2}$$

после множења са $x - 2$ постаје $(x + 1)(x - 2) = 3$, тј. $x^2 - x - 5 = 0$, па је и то квадратна једначина.

△

Неколико примера ће показати када су два полинома једнака, како се сабирају, одузимају и множе полиноми. Тако се каже да је квадратни трином $ax^2 + bx + c$ једнак квадратном триному $a_1x^2 + b_1x + c_1$ ако и само ако је $a = a_1$, $b = b_1$ и $c = c_1$.

Пример 4. а) Квадратни трином $2x^2 + 5x - 6$ једнак је полиному $5x - 6 + 2x^2$ јер су им једнаки коефицијенти уз исте степене непознате x . Заиста, ако полином $5x - 6 + 2x^2$ напишемо у сређеном облику, тј. по опадајућим степенима непознате x : $2x^2 + 5x - 6$, закључујемо да су ова два полинома једнака.

б) Збир квадратних тринома $2x^2 - 5x + 4i$ и $3x^2 + 4x - 4i + 1$ је трином $5x^2 - x + 1$ јер је:

$$\begin{aligned} & (2x^2 - 5x + 4i) + (3x^2 + 4x - 4i + 1) = \\ & = (2x^2 + 3x^2) + (-5x + 4x) + (4i - 4i + 1) = 5x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

в) Производ полинома $x - 1$ и $x^2 + x + 1$ јесте полином $x^3 - 1$ јер је:

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x - 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1.$$

△

Посматрајмо квадратни трином $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Нека је α неки број. Тада се број $P_2(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ добијен заменом непознате x са α у квадратном триному $P_2(x)$ назива **вредност квадратног тринома**.

Пример 5. Наћи вредност квадратног тринома $P_2(x) = 2x^2 - 5x + 3$ за $x = 1$, $x = -4$ и $x = 2i$. Биће:

$$P_2(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$$

$$P_2(-4) = 2 \cdot (-4)^2 - 5 \cdot (-4) + 3 = 55$$

$$P_2(2i) = 2 \cdot (2i)^2 - 5 \cdot 2i + 3 = 2 \cdot 4 \cdot i^2 - 10i + 3 = 8 \cdot (-1) - 10i + 3 = -5 - 10i = -5(1 + 2i).$$

△

Корен квадратног тринома $P_2(x)$ је таква вредност α непознате x за коју је $P_2(\alpha) = 0$. Дакле, корен квадратног тринома $ax^2 + bx + c$ је корен квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$. Основни проблем за сваку једначину, па и за квадратну, јесте одређивање скупа њених решења (корена).

Пример 6. а) Корени квадратне једначине $3x^2 + 4x - 7 = 0$ су бројеви 1 и $-\frac{7}{3}$, јер је:

$$P_2(x) = 3x^2 + 4x - 7 \quad \implies \quad P_2(1) = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 7 = 0$$

и

$$P_2\left(-\frac{7}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) - 7 = 0.$$

б) Корени квадратне једначине $x^2 + 1 = 0$ су бројеви i и $-i$, јер је:

$$P_2(x) = x^2 + 1 \quad \implies \quad P_2(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

и

$$P_2(-i) = (-i)^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

△

Наведимо један пример дељења полинома полиномом.

Пример 7. Поделити полином $2x^2 - 3x + 5$ полиномом $x - 2$. Биће:

$$\begin{array}{r} (2x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = 2x + 1 \\ \underline{-(2x^2 - 4x)} \\ x + 5 \\ \underline{-(x - 2)} \\ 7 \end{array}$$

Тако се дељењем $2x^2 - 3x + 5$ са $x - 2$ добија количник $2x + 1$ и остатак 7. Дакле, важи:

$$2x^2 - 3x + 5 = (2x + 1)(x - 2) + 7.$$

Δ

Ако се дели полином $ax^2 + bx + c$ полиномом $x - \alpha$, добија се као количник полином првог степена $ex + d$ и остатак r који је или нула или полином степена 0 (тј. број различит од нуле) па важи:

$$(3) \quad ax^2 + bx + c = (ex + d)(x - \alpha) + r.$$

При томе су количник $ex + d$ и остатак r јединствени. Уколико је остатак $r = 0$, каже се да је квадратни трином $ax^2 + bx + c$ **дељив** са $x - \alpha$.

Пример 8. Дељењем квадратног тринома $x^2 + 3x - 6$ полиномом $x - 2$ добија се количник $x + 5$ и остатак 4. До количника и остатка се може доћи методом названом **метода неодређених коефицијената**. Према формули (3) биће:

$$x^2 + 3x - 6 = (ex + d)(x - 2) + r.$$

Након множења и сређивања десне стране претходна формула ће бити:

$$x^2 + 3x - 6 = ex^2 + (-2e + d)x + r - 2d.$$

Изједначавањем коефицијената уз исте степене непознате x добија се:

$$1 = e, \quad 3 = -2e + d, \quad -6 = r - 2d,$$

односно,

$$e = 1, \quad d = 5, \quad r = 4.$$

Коначно је:

$$x^2 + 3x - 6 = (x + 5)(x - 2) + 4.$$

Δ

До остатака r може се доћи и без дељења. Како формула (3) важи за све x , то она важи и за $x = \alpha$. Тако је онда за $x = \alpha$:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = (e\alpha + d)(\alpha - \alpha) + r,$$

тј. $r = a\alpha^2 + b\alpha + c$. Дакле, остатак дељења полинома $ax^2 + bx + c$ са $x - \alpha$ једнак је вредности тог полинома за $x = \alpha$.

Пример 9. а) Остатак дељења квадратног тринома $2x^2 - 5x + 3$ са $x + 2$ је 21, јер је $2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 3 = 21$;

б) Остатак дељења квадратног тринома $2x^2 - 5x + 3$ са $x - 1$ је 0, јер је $2 \cdot (1)^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$.

△

Теорема 1. Број α је корен квадратног тринома ако и само ако је квадратни трином дељив са $x - \alpha$.

Пример 10. Полином $x^2 - 3x + 2$ је дељив са $x - 1$. Тада важи:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Дакле, један корен тринома $x^2 - 3x + 2$ је број 1.

Производ $(x - 1)(x - 2)$ је једнак нули ако и само ако је тачна бар једна од формула $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$. Из друге једначине добија се да је $x = 2$. Број 2 је такође корен квадратног тринома $x^2 - 3x + 2$, јер је $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$. Тако су бројеви 1 и 2 решења квадратне једначине $x^2 - 3x + 2 = 0$.

△

2.2 Наставна јединица: Непотпуне квадратне једначине

Да би се боље разумео појам и решавање квадратне једначине, наводимо један пример.

Наћи обим правоугаоника чија је површина 60 cm^2 , а једна његова страница је за 4 cm дужа од друге. Ако са x означимо краћу страницу правоугаоника, дужа страница износи $x + 4$, па је површина једнака $x \cdot (x + 4)$. Према услову задатка је:

$$x \cdot (x + 4) = 60,$$

тј.

$$(1) \quad x^2 + 4x - 60 = 0.$$

Дакле, да би се решио постављени проблем, треба решити једначину (1). Једначина (1) је пример квадратне једначине.

Решавање непотпуне квадратне једначине:

Ако је $b = 0$, квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$ гласи:

$$(2) \quad ax^2 + c = 0, (a \neq 0)$$

тј.

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Ова једначина има два решења: $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Ако су бројеви a и c различитог знака, онда је $-\frac{c}{a} > 0$ и решења су реална (једно позитивно $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и једно негативно $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$). Ако су бројеви a и c истог знака, тада је $-\frac{c}{a} < 0$ и решења су комплексна. Како је тада $\frac{c}{a} > 0$, решења гласе $\pm i\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Пример 11. Једначина $-2x^2 + 3 = 0$ има два реална решења: $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Δ

Пример 12. Једначина $2x^2 + 5 = 0$ има два комплексна решења: $\pm i\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Δ

Примећено је да постоје извесне потешкоће када су решења једначине комплексни бројеви. Рачунање квадратног корена из неког негативног броја код неких ученика изазива забуну.

Дакле, квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$ може да се реши када је $b = 0$, тј. када она добије облик (2). Међутим, једначина $ax^2 + bx + c = 0$ једноставно се решава и када је $c = 0$. Наиме, тада она постаје:

$$(3) \quad ax^2 + bx = 0$$

и може се представити у облику:

$$(4) \quad x(ax + b) = 0.$$

Подсетимо се сада следеће чињенице: ако је производ два броја једнак 0, онда је бар један од њих једнак 0, тј. тачна је еквиваленција

$$AB = 0 \iff A = 0 \vee B = 0.$$

Према томе, из (4) следи да је $x = 0$ или $ax + b = 0$, и добијају се два решења једначине (3): $x = 0$, $x = -\frac{b}{a}$.

Пример 13. Једначина:

$$(5) \quad x^2 + 3x = 0$$

може се представити у облику:

$$x(x + 3) = 0,$$

што је еквивалентно са:

$$x = 0 \vee x + 3 = 0,$$

и сва решења једначине (5) су 0 и -3 .

2.3 Наставна јединица: Решавање потпуне квадратне једначине

У овом одељку решавамо (тзв. потпуну) квадратну једначину:

$$(1) \quad ax^2 + bx + c = 0. (a \neq 0)$$

С обзиром да знамо да решимо (непотпуну) једначину облика:

$$(2) \quad ax^2 + c = 0,$$

покушаћемо да једначину (1) сведемо на облик (2). Пре него што пређемо на општи случај, урадићемо један пример.

Пример 14. Решити квадратну једначину из примера на страни 7, тј. једначину:

$$(3) \quad x^2 + 4x - 60 = 0.$$

Уводи се смена:

$$(4) \quad x = t + k,$$

где је t нова непозната, а k је константа коју ћемо накнадно одредити. Из (4) се добија:

$$(5) \quad x^2 = t^2 + 2kt + k^2,$$

па се, замењујући (4) и (5) у (3), добија:

$$t^2 + 2kt + k^2 + 4(t + k) - 60 = 0,$$

или, после сређивања,

$$(6) \quad t^2 + (2k + 4)t + k^2 + 4k - 60 = 0.$$

Према томе, ако узмемо да је:

$$(7) \quad 2k + 4 = 0, \quad \implies \quad k = -2,$$

једначина (6) биће облика (2), јер члан $(2k + 4)t$ нестаје. Заиста, за $k = -2$ једначина (6) постаје:

$$t^2 - 64 = 0, \quad \implies \quad t^2 = 64$$

и има решења: $t = \pm 8$. Међутим, на основу (4) и (7) види се да је $x = t - 2$. Дакле, решења једначине (3) су $x = \pm 8 - 2$, тј. $x = 6$ и $x = -10$.

△

Размотримо сада општу једначину (1). Ако се уведе смена (4), једначина (1) постаје:

$$a(t^2 + 2kt + k^2) + b(t + k) + c = 0,$$

тј. после сређивања:

$$(8) \quad at^2 + (2ak + b)t + ak^2 + bk + c = 0.$$

Константа k се бира тако да буде:

$$2ak + b = 0, \quad \implies \quad k = -\frac{b}{2a}.$$

Тада једначина (8) постаје:

$$at^2 + a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0,$$

тј.:

$$at^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0,$$

или:

$$at^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

односно:

$$at^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0,$$

тј.:

$$t^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ова последња једначина има решења $t = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, односно:

$$t = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Међутим, како је:

$$x = t + k, \quad k = -\frac{b}{2a},$$

биће:

$$x = -\frac{b}{2a} + t,$$

и добија се решење једначине (1): $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, тј.:

$$(9) \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Пример 15. Решити једначину $6x^2 - x - 1 = 0$. У овом случају је $a = 6$, $b = -1$, $c = -1$. Применом формуле (9) добија се:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12},$$

па се закључује да дата једначина има два реална решења: $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$.

△

Пример 16. За једначину $25x^2 - 30x + 9 = 0$ је $a = 25$, $b = -30$ и $c = 9$ и применом формуле (9) добија се:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4 \cdot 25 \cdot 9}}{2 \cdot 25} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}.$$

Ова једначина има, дакле, само једно реално решење: $\frac{3}{5}$.

△

Пример 17. За једначину $x^2 - 2x + 2 = 0$ је $a = 1$, $b = -2$ и $c = 2$ и њена решења су:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Према томе, ова једначина има два коњуговано - комплексна решења: $1 + i$ и $1 - i$.

△

Израгање ове методе за решавање квадратне једначине код ученика може изазвати извесну забуну, јер им је обично сам алгоритам решавања једначине компликован за разумевање. Из тог разлога, наводимо још једна начин решавања квадратне једначине.

2.3.1 Други начин решавања квадратне једначине

До формуле за решавање квадратне једначине:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

може се доћи и на други начин. Претходно ћемо урадити један пример.

Пример 18. Једначина:

$$(1) \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$

очигледно је еквивалентна са једначином:

$$(2) \quad x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0.$$

Међутим:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2,$$

а такође и:

$$6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6 - \frac{25}{4} = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2^2},$$

па се (2) може написати у облику:

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Последња једначина еквивалентна је са:

$$\left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

тј. са:

$$(3) \quad (x+2)(x+3) = 0.$$

Како из (3) важи:

$$x+2 = 0 \quad \vee \quad x+3 = 0,$$

тј.

$$x = -2 \quad \vee \quad x = -3.$$

закључује се да једначина (3), па стога и њој еквивалентна једначина (1), има тачно два решења: -2 и -3 .

△

Из претходног примера се види како се трином x^2+5x+6 раставља на линеарне факторе. При томе је кључно место у том поступку било додавање и одузимање броја $\left(\frac{5}{2}\right)^2$, чиме је израз x^2+5x допуњен до потпуног квадрата:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2.$$

Инспиришући се овом идејом и поступком, разматра се општи случај, тј. решавање једначине:

$$(4) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Када се једначина (4) подели са a , добија се еквивалентна једначина:

$$(5) \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Допуњује се сада израз $x^2 + \frac{b}{a}x$ до потпуног квадрата. Заиста, како је:

$$(6) \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

левој страни једначине (5) се додаје и одузима број $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, тј. једначина (5) је облика:

$$(7) \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Како је:

$$\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

и с обзиром на (6), једначина (7) добија облик:

$$(8) \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Облик (8) назива се *канонични облик* квадратне једначине (4).
односно:

$$(9) \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0,$$

што је еквивалентно са:

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0.$$

Одатле следи:

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0,$$

тј.

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

и, наравно, добија се исто решење као и раније:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2.4 Наставна јединица: Дискриминанта и природа решења квадратне једначине

Следећи појам који се уводи јесте - дискриминанта. Нека D означава дискриминанту једначине (4), тј. нека је:

$$D = b^2 - 4ac.$$

На основу претходне формуле могу се извести закључци о природи решења квадратне једначине (1). Она зависи од знака *дискриминанте*:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Разликују се три случаја:

- $D > 0$ - тада постоји реалан корен $\sqrt{b^2 - 4ac}$ и једначина (1) има два различита реална решења: $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$;
- $D = 0$ - формула (9) гласи $-\frac{b}{2a}$ и једначина (1) има само једно реално решење;
- $D < 0$ - у том случају је $\pm\sqrt{D} = \pm i\sqrt{-D}$ и $\sqrt{-D}$ је реалан број (јер је $-D > 0$). Решења квадратне једначине (1) су коњуговано - комплексни бројеви: $\frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}$, $\frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$.

Пример 19. Утврдити за које вредности броја a квадратна једначина

$$(10) \quad x^2 + ax + 1 = 0$$

- а) има једно решење;
- б) има два реална решења;
- в) има коњуговано-комплексна решења?

Дискриминанта дате једначине је $D = a^2 - 4$. Стога:

- а) једначина (10) има само једно решење ако је $D = 0$, тј. $a^2 - 4 = 0$, одакле се добија да је $a = \pm 2$;
- б) једначина (10) има два реална решења ако је $D > 0$, тј. $a^2 - 4 > 0$, одакле се добија $|a| > 2$, тј. $a > 2$ или $a < -2$;
- в) једначина (10) има коњуговано - комплексна решења ако је $D < 0$, тј. $a^2 - 4 < 0$, одакле се добија $|a| < 2$, тј. $-2 < a < 2$.

△

Решавање многих проблема, рецимо проблема алгебре, геометрије и физике, своди се на решавање квадратних једначина. Такав је био пример на страни 7, а наводимо још један.

Пример 20. Збир квадрата два суседна природна броја је за 57 већи од њиховог производа. Наћи те бројеве.

Ако се два суседна природна броја означе са x и $x + 1$, по услову задатка је:

$$x^2 + (x + 1)^2 = x(x + 1) + 57,$$

одакле се, после сређивања, добија квадратна једначина:

$$x^2 + x - 56 = 0,$$

чија су решења 7 и -8 . Како x мора да буде природан број, решење -8 не прихватамо. Тражени бројеви су, дакле, 7 и 8.

△

2.5 Наставна јединица: Растављање квадратног тринома на чиниоце

Квадратна једначина:

$$(1) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

решена је на тај начин што је прво подељена са a , а затим је доказано да је:

$$(2) \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right) \cdot \left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right), \quad (D = b^2 - 4ac).$$

Из (2) се добија:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right) \cdot \left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right).$$

Другим речима, ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине (1), квадратни трином:

$$(3) \quad ax^2 + bx + c$$

може се раставити на линеарне факторе, тј. биће:

$$(4) \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Према томе, види се да су проблеми:

- решити квадратну једначину (1);
- раставити трином (3) на линеарне факторе.

На основу особина решења квадратне једначине (1) може се закључити:

- ако је $b^2 - 4ac > 0$, трином (3) се може раставити на реалне линеарне факторе;
- ако је $b^2 - 4ac = 0$, трином (3) је потпун квадрат;
- ако је $b^2 - 4ac < 0$, трином (3) се не може раставити на реалне линеарне факторе, али може на комплексне.

Напомена. - Једнакост (4) се може написати у облику:

$$ax^2 + bx + c = (ax - ax_1)(x - x_2),$$

или:

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(ax - ax_2).$$

Пример 21. Квадратна једначина $6x^2 - 7x + 2 = 0$ има решења $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Стога, на основу једнакости (4) је:

$$6x^2 - 7x + 2 = 6 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right),$$

али се ова последња једнакост често пише у „лепшем” облику:

$$6x^2 - 7x + 2 = (3x - 2)(2x - 1).$$

Δ

Пример 22. За једначину $9x^2 - 30x + 25 = 0$ је $a = 9$, $b = -30$, $c = 25$. Дискриминанта $D = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 0$, па је трином $9x^2 - 30x + 25$ потпун квадрат. Квадратна једначина $9x^2 - 30x + 25 = 0$ има само једно решење: $\frac{5}{3}$, па је $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$.

Δ

Пример 23. За једначину $x^2 + 2x + 5 = 0$ је $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$. Дискриминанта $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$, па се трином $x^2 + 2x + 5$ не може раставити на реалне линеарне факторе. Међутим, једначина $x^2 + 2x + 5 = 0$ има решења $-1 \pm 2i$, па је тачна једнакост:

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1 - 2i)(x + 1 + 2i)$$

Δ

Једнакост (4) омогућава нам да се напише квадратна једначина чија су решења позната. Наиме, ако су дати бројеви x_1 и x_2 , биће:

$$(5) \quad a(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

где је $a \neq 0$ произвољно, општи облик квадратне једначине чија су решења x_1 и x_2 . Како су све једначине облика (5) међусобно еквивалентне, број a се обично узима тако да једначина буде што „лепша”. Шта се под тим подразумева, видећемо из следећег примера.

Пример 24. Квадратна једначина чија су решења 2 и -3 има облик:

$$a(x - 2)(x + 3) = 0,$$

тј.:

$$a(x^2 + x - 6) = 0.$$

Овде је најприродније узети $a = 1$.

Било која квадратна једначина чија су решења $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{7}$ гласи:

$$a \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{7} \right) = 0,$$

тј.:

$$a \left(x^2 - \frac{5}{14}x - \frac{1}{14} \right) = 0.$$

Овде се обично узима да је $a = 14$, па се добија „лепша” једначина:

$$14x^2 - 5x - 1 = 0.$$

Δ

2.6 Наставна јединица: Вијетова правила

Када се пође од једнакости (4) из претходне наставне јединице и измножи и среди њена десна страна, добија се:

$$(6) \quad ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Да би једнакост (6) била тачна за свако x , мора бити:

$$b = -a(x_1 + x_2), \quad c = ax_1x_2,$$

одакле следи:

$$(7) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Формуле (7) којима су изражене нове везе између решења и коефицијената квадратне једначине (1) називају се *Вијетове формуле*¹. Дакле, ако су x_1 и x_2 решења једначине (1), тада важе Вијетове формуле (7). Међутим, тачно је и обрнуто тврђење: ако су x_1 и x_2 бројеви за које важи једнакост (7), x_1 и x_2 су решења квадратне једначине (1). Заиста, из прве од једнакости (7) добија се:

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1,$$

па ако се то замени у другу од тих једнакости, добија се:

$$x_1 \left(-\frac{b}{a} - x_1 \right) = \frac{c}{a} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{b}{a}x_1 - x_1^2 = \frac{c}{a},$$

или, после сређивања и множења са a :

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0,$$

што значи да је x_1 решење једначине (1). Слично се показује и да је x_2 решење те једначине.

Приметимо да Вијетове формуле омогућавају да се на још један начин састави квадратна једначина чија су решења x_1 и x_2 . Једна таква једначина је:

$$(8) \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0,$$

а све остале су њој еквивалентне, јер се добијају множењем једначине (8) произвољним бројем који није 0.

Вијетове формуле су веома корисне, оне често омогућавају да се без решавања квадратне једначине, дође до података о њеним решењима.

¹*Viete* - (1540 – 1603), француски математичар

Пример 25. Саставити квадратну једначину чија су решења за 1 већа од решења једначине:

$$(9) \quad x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Решења једначине (9) су 1 и 2, па треба образовати једначину чија су решења 2 и 3. То је једначина:

$$(x - 2)(x - 3) = 0, \quad \implies \quad x^2 - 5x + 6 = 0.$$

△

Овде су решења једначине (9) била једноставна, па није било неопходно да се прибегне Вијетовим формулама. Међутим, ако треба да се реши исти задатак за једначину:

$$(10) \quad 29x^2 - 1056x - 628 = 0,$$

чија су решења:

$$\frac{1056 \pm \sqrt{1056^2 + 4 \cdot 29 \cdot 628}}{2 \cdot 29},$$

јасно је да то неће ићи тако лако. Због тога се поступа на следећи начин. Нека су x_1 и x_2 решења једначине (10). Тражи се једначина чија су решења α и β , где је:

$$\alpha = x_1 + 1, \quad \beta = x_2 + 1.$$

Стога је:

$$\alpha + \beta = x_1 + x_2 + 2 \quad \alpha\beta = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1.$$

Међутим, на основу Вијетових формула добија се:

$$x_1 + x_2 = \frac{1056}{29}, \quad x_1x_2 = -\frac{628}{29},$$

па је:

$$\alpha + \beta = \frac{1056}{29} + 2 = \frac{1114}{29}, \quad \alpha\beta = -\frac{628}{29} + \frac{1056}{29} + 1 = \frac{457}{29}.$$

Према томе, тражена једнакост гласи:

$$x^2 - \frac{1114}{29}x + \frac{457}{29} = 0,$$

тј.

$$29x^2 - 1114x + 457 = 0.$$

Пример 26. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине:

$$(11) \quad x^2 + px + q = 0,$$

разни изрази у којима учествују x_1 и x_2 могу се једноставно изразити помоћу коефицијената p и q , и то без решавања једначине (11), тј. не налазећи експлицитно колико је x_1 или x_2 .

Наводимо неколико примера:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q;$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = -p \left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right) = -p(p^2 - 3q) = 3pq - p^3;$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{p}{q};$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = \frac{p^2 - 2q}{q^2};$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{p^2 - 2q}{q}.$$

△

Пример 27. У случају када су решења једначине:

$$(12) \quad x^2 + (1 - a)x - (2 - a) = 0$$

реална, испитати за које вредности броја a ће она бити истог, а за које вредности различитог знака.

Дискриминанта дате једначине износи:

$$(1 - a)^2 + 4(2 - a) = 1 - 2a + a^2 + 8 - 4a = a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2 \geq 0,$$

па једначина (12) има реална решења за свако $a \in \mathbb{R}$. Означимо их са x_1 и x_2 . Како је:

$$x_1x_2 = -(2 - a),$$

закључује се да ће решења бити истог знака ако је $-(2 - a) > 0$, односно $2 - a < 0$, тј. $a > 2$. Шта више, у том случају је $x_1 + x_2 = a - 1 > 2 - 1 > 0$, па су оба решења позитивна.

Ако је $a < 2$, тада је $x_1x_2 = -(2 - a) = a - 2 < 0$, па су решења различитог знака.

Ако је $a = 2$, једначина (12) постаје $x^2 - x = 0$, има једно решење $x = 0$, па се не може говорити о знацима решења.

△

2.7 Наставна јединица: Систем квадратне и линеарне једначине

Одредити све парове бројева (x, y) за које су једнакости:

$$(1) \quad ax + by + c = 0$$

и:

$$(2) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

тачне. Овде су $a, b, c, A, B, C, D, E, F$ дати реални бројеви, при чему се претпоставља да нису истовремено a и b једнаки нули, нити су истовремено A, B, C једнаки нули. Те претпоставке обезбеђују да (1) буде линеарна једначина (са две непознате x, y) и да (2) буде квадратна једначина (са две непознате x, y), јер када би било $A = B = C = 0$, једначина (2) би такође била линеарна.

Постављени проблем краће исказујемо овако: Решити систем једначина:

$$(3) \quad ax + by + c = 0 \quad \wedge \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Систем (3) је, дакле, систем једне линеарне и једне квадратне једначине. Решење система (3) је сваки пар бројева (x, y) за који је конјукција (3) тачна, тј. за који су обе једнакости у (3) тачне.

Методe решавања

Нека је дат систем једначина:

$$(4) \quad ax + by + c = 0 \quad \wedge \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где су $a, b, c, A, B, C, D, E, F$ дати реални бројеви, такви да a и b нису истовремено једнаки нули, нити су A, B, C истовремено једнаки нули.

Како је бар један од бројева a и b различит од нуле, узећемо, на пример, да је $b \neq 0$. Тада је:

$$ax + by + c = 0 \quad \iff \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

па је систем (4) еквивалентан систему:

$$(5) \quad ax + by + c = 0 \quad \wedge \quad Ax^2 + Bx \left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + C \left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)^2 + Dx + E \left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + F = 0.$$

Друга једначина система (5) после сређивања постаје квадратна једначина по x која може имати највише два решења. Нека су то α и β . Тада је систем (5), па стога и систем (4), еквивалентан са:

$$ax + by + c = 0 \quad \wedge \quad (x = \alpha \vee x = \beta).$$

Остаје, дакле, да се реше системи:

$$(6) \quad ax + by + c = 0 \quad \wedge \quad x = \alpha$$

и:

$$(7) \quad ax + by + c = 0 \quad \wedge \quad x = \beta.$$

Наиме, систем (6) има само једно решење: $(x, y) = \left(\alpha, -\frac{a}{b}\alpha - \frac{c}{b}\right)$, а систем (7) има такође само једно решење: $(x, y) = \left(\beta, -\frac{a}{b}\beta - \frac{c}{b}\right)$. Решења система (6) и система (7) представљају сва решења задатог система (4).

Пример 28. Решити систем једначина:

$$x - y + 1 = 0 \quad \wedge \quad x^2 + xy + 2y^2 - 3x + y - 10 = 0.$$

Из прве једначине налазимо да је $y = x + 1$, па је почетни систем еквивалентан систему:

$$x - y + 1 = 0 \quad \wedge \quad x^2 + x(x + 1) + 2(x + 1)^2 - 3x + (x + 1) - 10 = 0,$$

тј. систему:

$$x - y + 1 = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 + 3x - 7 = 0.$$

Решења друге једначине овог система су 1 и $-\frac{7}{4}$, па је претходни систем еквивалентан са:

$$x - y + 1 = 0 \quad \wedge \quad \left(x = 1 \vee x = -\frac{7}{4}\right),$$

што значи да се добијају следећи системи:

$$x - y + 1 = 0 \quad \wedge \quad x = 1$$

и

$$x - y + 1 = 0 \quad \wedge \quad x = -\frac{7}{4},$$

чија су решења редом: $(1, 2)$, односно $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}\right)$. Према томе, почетни систем има два решења: $(1, 2)$ и $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.

△

2.8 Задачи

Важно је да наставник упуту ученике у начин решавања задатака, као и то да је сврха решавања задатака у ствари учење математике, односно савладавање одређеног програма. Сматрам да би ученицима било корисно и напоменути кроз које фазе у процесу решавања задатака треба да прођу како би боље разумели и лакше решили задатак. Треба нагласити да у решавању задатака не смеју да буду нестрпљиви и површни. Ако нису потпуно разумели задатак, шансе за успех у решавању су мале. С друге стране, не треба се исцрпљивати у идентификацији и означавању фаза, поготово што се тешко може прецизно одредити када престаје једна а почиње наредна фаза.

Прва фаза (разумевање) - Уводна фаза у процесу решавања треба да обухвати разумевање садржине појмова, термина и симбола који се налазе у задатку, као и њихове међусобне повезаности. Ако се у задатку тражи да се нешто одреди, потребно је ученике упутити на која питања посебно треба да обрате пажњу. Битно је нагласити да су важни одговори на питања, као што су: шта се тражи, шта је дато, шта није експлицитно наведено а реално се подразумева. Одговори на таква питања подразумевају обавезну идентификацију и обележавање задатих и тражених елемената.

Друга фаза (стварање плана) - Код једноставнијих задатака решење је на само корак до разумевања. Међутим, у сложенијим задацима стварање плана решавања је централна фаза. У овој фази су најзаступљенији мисаони поступци. У задацима одређивања, стварање плана подразумева проналажење оних веза између задатих и тражених елемената на основу којих се утврђује математички механизам за одређивање траженог. Проблем постаје тежи када неки елементи и везе нису експлицитно наведени у задатку.

Трћа фаза (реализација плана) - У овој фази више долазе до изражаја стечена математичка знања и вештине. У задацима одређивања, обично се решавају једначине или системи једначина, конкретизују формуле, трансформишу изрази, реализују алгоритми и сл. На крају ове фазе, можемо рећи да смо решили задатак само ако су испуњени следећи захтеви:

- решење је тачно, тј. задовољава задате услове;
- поступак решења је тачан, што подразумева, да не садржи материјалне или логичке грешке;
- решење је потпуно, што значи да не постоје тачна решења различита од добијених.

Четврта фаза (провера тачности и дискусија) - После завршеног процеса решавања треба извршити и његову проверу или контролу, по наведеним захтевима. Осим тога, треба анализирати евентуалне услове, који се или појаве у процесу решавања, или се у општем облику налазе у задатку, што се назива дискусијом.

Основни ниво:

1. У следећим примерима одредити које су једначине квадратне:

$$3x^2 - 5x + 1 = 0, \quad 1 - 12x = 0, \quad 48x^2 - x^3 - 9 = 0.$$

Запажања: Поједини ученици су рекли да је последња једначина квадратна јер садржи x^2 .

2. Наћи збир и разлику квадратних тринома:

(а) $x^2 - 5x + 6$ и $2x^2 - 7x - 3$;

(б) $x^2 - 2x - 7$ и $-3x^2 + x + 1$;

(ц) $2x^2 - ix + 2 - i$ и $x^2 + 3ix - 4i$.

3. (а) Подели $x^2 - 5x + 6$ са $x - 3$ и нађи остатак дељења.

(б) Подели $-2x^2 + 5x - 7$ са $2x + 1$ и нађи остатак дељења.

4. Реши квадратне једначине:

(а) $x^2 - 2x = 0$;

(б) $x^2 + 3x = 0$.

5. Реши једначине:

(а) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 - (x - 5)^2 = 17x + 24$;

(б) $(x + 5)^2 + (x - 2)^2 + (x - 7)(x + 7) = 11x + 30$.

Запажања: Поједини ученици су заборавили на знак „-“ испред заграде или нису „лепо“ пребацили све чланове квадратне једначине на леву страну, па нису добили тачан резултат.

6. Нађи суму и производ корена квадратне једначине:

(а) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

(б) $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

7. У једначини $x^2 + kx - 24 = 0$ одреди вредност за k ако се зна да је једна корен једначине -3 .

Запажања: Поједини ученици нису знали како да поставе задатак.

8. Не решавајући једначину, одреди природу решења датих једначина:

(а) $3x^2 + 7x + 4 = 0$;

(б) $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

9. Решити систем једначина:

$$x - 2y = 3 \quad \wedge \quad x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 6.$$

Средњи ниво:

1. Нека је $P_2(x) = x^2 + x + 1$. Одреди $P_2(0)$, $P_2(1)$, $P_2(i)$.

2. Одреди реалне бројеве a и b тако да полином $(a + b)x^2 + (a - b)x + 3$ буде једнак полиному $x^2 + x + 3$.

3. Реши квадратне једначине

(а) $\frac{5x^2 + 9}{6} - \frac{4x^2 - 9}{5} = 3;$

(б) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 2\frac{2}{3}$ ($x \neq -1, x \neq 1$).

4. Реши једначину

$$\frac{5x + 9}{4(2x - 3)} = \frac{3x^2 + 4x + 12}{4x^2 - 9}.$$

Запажања: Поједини ученици су на крају заборавили да провере да ли прихватају оба решења једначине која су добили.

5. Састави квадратну једначину чији су корени:

(а) 2;3; (б) 1;-2; (в) 3;4.

6. Нека су x_1 и x_2 корени једначине $x^2 - 5x + 6 = 0$. Не решавајући једначину, одреди:

(а) $x_1^2 + x_2^2;$

(б) $x_1^3 + x_2^3.$

7. За које вредности параметра $k \neq 0$ једначина

$$kx^2 - (k+1)x + (2k-1) = 0$$

има реална различита, реална двострука и коњуговано комплексна решења?

8. Решити систем једначина:

$$x - y = 4 \quad \wedge \quad \frac{3x-2}{y+5} + \frac{y}{x} = 2.$$

Напредни ниво:

- (а) Раставити полином $x^2 - 9x + 8$ знајући да му је један корен 1.
(б) Раставити полином $x^2 + 7x - 60$ знајући да му је један корен 5.

2. Решити једначине:

(а) $x^2 - 4\frac{1}{2}x + 4,5 = 0;$

(б) $x^2 + 3\frac{5}{12}x + 3 = 0.$

3. Реши једначину $(a^2 - b^2)x = ab(x^2 - 1)$.

Запажања: Поједини ученици су заборавили дискусију решења.

4. Саставити квадратну једначину чији су корени:

(а) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5};$

(б) $1 + \sqrt{2}$ и $1 - \sqrt{2}.$

5. Не решавајући једначину

$$x^2 + px + q = 0,$$

нађи суму кубова корена.

6. За које вредности параметра k су позитивна решења квадратне једначине $2x^2 - 3x + (k-1) = 0$?

7. Решити систем једначина:

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \wedge \quad 4x^2 + 9y^2 = 25.$$

3 Програми са 4 часа наставе математике недељно - примери у настави математике у II разреду средње школе

Наставним планом и програмом за II разред средње Техничке школе (4 часа наставе математике недељно) предвиђена је обрада следећих наставних јединица везаних за квадратне једначине:

- Појам квадратне једначине и квадратног тринома
- Вијетове формуле и налажење корена квадратне једначине
- Дискриминанта. Дискусија решења квадратне једначине
- Систем две квадратне једначине са две непознате
- Проблеми другог степена са једном непознатом
- Једначине које се свode на квадратне

3.1 Наставна јединица: Појам квадратне једначине и квадратног тринома

У програмима са 4 часа наставе математике недељно, такође се уводи појам квадратне једначине уз адекватне примере. Потребно је са ученицима поновити основна својства полинома и операције са њима. У овом делу ћемо доказати нека својства и теореме које су значајни за квадратне једначине и њихово решавање.

Ако се полином $ax^2 + bx + c = 0$ подели полиномом $x - \alpha$, добија се као количник полином првог степена $ex + d$ и остатак r који је или нила или полином степена нула (тј. број различит од нуле) па важи:

$$(1) \quad ax^2 + bx + c = (ex + d)(x - \alpha) + r.$$

При томе су количник $ex + d$ и остатак r јединствени.

Показаћемо да су количник и остатак јединствени. Претпоставимо да постоји још један количник $e_1x + d_1$ и још један остатак r_1 , тј. да важи:

$$ax^2 + bx + c = (e_1x + d_1)(x - \alpha) + r_1.$$

Из претходне формуле и формуле (1) добија се:

$$(ex + d)(x - \alpha) + r = (e_1x + d_1)(x - \alpha) + r_1,$$

односно,

$$(x - \alpha)((ex + d) - (e_1x + d_1)) = r_1 - r.$$

Ако би било $ex + d \neq e_1x + d_1$, са леве стране би се налазио полином чији је степен већи или једнак броју 1, а са десне стране полином степена 0 или број 0. Дакле, $ex + d = e_1x + d_1$, а тада и $r = r_1$.

До количника и остатка долази се аналогно дељењу са остатком два цела броја:

$$\begin{aligned} (ax^2 + bx + c) : (x - \alpha) &= ax + (\alpha a + b) \\ &\underline{-(ax^2 + a\alpha x)} \\ &\quad (\alpha a + b)x + c \\ &\quad \underline{-((\alpha a + b) + \alpha(\alpha a + b))} \\ &\quad \quad \alpha^2 a + \alpha b + c. \end{aligned}$$

Овде је количник $ax + \alpha a + b$, а остатак $r = a\alpha^2 + b\alpha + c$. Ако се стави $\alpha a + b = d$, добија се:

$$(2) \quad ax^2 + bx + c = (ax + d)(x - \alpha) + r$$

Теорема 2. Број α је корен квадратног тринома ако и само ако је квадратни трином дељив са $x - \alpha$.

Доказ. Нека је α корен квадратног тринома $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, тј. $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. Тада важи:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_2(x) - 0 = (ax^2 + bx + c) - (a\alpha^2 + b\alpha + c) = \\ &= a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) = (x - \alpha)(ax + a\alpha + b) = \end{aligned}$$

$$= (x - \alpha)(ax + d),$$

где је $d = a\alpha + b$. Дакле, $P_2(x)$ је дељив са $x - \alpha$. Нека је сада $P_2(x)$ дељив са $x - \alpha$. Тада је:

$$ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(ax + d),$$

за $x = \alpha$ горња формула даје:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = (\alpha - \alpha)(a \cdot \alpha + d),$$

тј.:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

Значи, α је корен полинома $ax^2 + bx + c$. □

Нека је сада α корен квадратног тринома $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Тада, како је $r = 0$, добија се из (2):

$$(3) \quad ax^2 + bx + c = a(x - \alpha) \left(x + \frac{d}{a} \right).$$

Како у сваком пољу, па и у пољу реалних бројева важи:

$$A \cdot B = 0 \iff A = 0 \vee B = 0,$$

добија се да је производ $a(x - \alpha) \left(x + \frac{d}{a} \right)$ једнак нули ако важи бар једна од формула $x - \alpha = 0$, $x + \frac{d}{a} = 0$. Решавајући линеарну једначину $x + \frac{d}{a} = 0$ долази се до још једног корена квадратног тринома и то $x = -\frac{d}{a}$. Ако се корен α означи са x_1 , а корен $-\frac{d}{a}$ са x_2 , закључује се да важи:

$$(4) \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

(Приметимо да је $x_2 = -\frac{d}{a} = -\frac{ax_1 + b}{a}$.) Показаћемо сада да квадратни трином $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ нема више од два корена x_1 и x_2 .

Претпоставимо да постоји још један корен x_3 различит од x_1 и x_2 . Тада важи $P_2(x_3) = ax_3^2 + bx_3 + c = 0$. Али према (4) биће и $ax_3^2 + bx_3 + c = a(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$. Тако се добија $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$. Овде је $x_3 - x_1 = 0$ или $x_3 - x_2 = 0$, па је $x_3 = x_1$ или $x_3 = x_2$, што је супротно нашој претпоставци.

3.2 Наставна јединица: Вијетове формуле. Налажење корена квадратне једначине

Пример 29. За трином $x^2 - 5x + 6$ чији су корени 2 и 3 важи:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Ако се $(x - 2)$ помножи са $(x - 3)$, добиће се $(x - 2)(x - 3) = x^2 - (2 + 3)x + 2 \cdot 3$. Тако је:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - (2 + 3)x + 2 \cdot 3.$$

Коефицијенти тринома $x^2 - 5x + 6$ могу се приказати преко збира и производа корена 2 и 3. ($-5 = -(2 + 3)$, $6 = 2 \cdot 3$).

△

Слично важи и у општем случају.

Нека је дат квадратни трином $ax^2 + bx + c$ и нека су дати његови корени x_1 и x_2 . Тада, важи:

$$(1) \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ако се сада помноже полиноми $x - x_1$, $x - x_2$ и a на десној страни претходне формуле, па се резултат среди по степенима променљиве x , добиће се:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= ax^2 - axx_1 - axx_2 + ax_1x_2 = \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2, \end{aligned}$$

односно:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Из једнакости ова два тринома добија се:

$$(2) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$(3) \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Формуле (2) и (3) су *Вијетове формуле*² и оне изражавају везу између коефицијената и корена једначине $ax^2 + bx + c = 0$.

Вијетове формуле су симетричне функције корена. За функцију са две променљиве каже се да је **симетрична** ако не мења своју вредност када променљиве међусобно замене места.

Пример 30. Нека су x_1 и x_2 корени квадратне једначине $2x^2 + 3x + 4 = 0$. Тада су $x_1^2 + x_2^2$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (овде су $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$) симетричне функције. Могу се изразити преко симетричних функција $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$. Тако је:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{3^2}{2^2} - 2 \cdot \frac{4}{2} = -\frac{7}{4},$$

а:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{4}{2}} = -\frac{3}{4}.$$

△

²Viete - (1540 – 1603), француски математичар

Применом Вијетових формула (2) и (3) одредиће се x_1 и x_2 .
Тако важи:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2},$$

тј.:

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2},$$

а одавде добијамо:

$$x_1 - x_2 = \frac{+\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \quad \vee \quad x_1 - x_2 = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$$

Нека је сада:

$$(4) \quad x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$$

Посматрајмо систем (2) и (4) две линеарне једначине са две непознате x_1, x_2 , тј.:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$$

Сабирањем једначина добија се:

$$2x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{a},$$

односно:

$$(5) \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

А одузимањем се добија:

$$(6) \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Заменом x_1 и x_2 у квадратну једначину $ax^2 + bx + c = 0$ добија се да су x_1 и x_2 решења те квадратне једначине. Дакле, (1) се може записати са:

$$(7) \quad ax^2 + bx + c = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right).$$

Напомена.-Уместо формуле (4) може се узети: $x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ и применити исти поступак. Опет би се добило решење квадратне једначине, и то:

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Пример 31. Применом формула (5) и (6) одредити решење квадратне једначине $3x^2 + 4x - 7 = 0$. У овом случају су $a = 3$, $b = 4$ и $c = -7$, па је:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 + \sqrt{100}}{6} = \frac{-4 + 10}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 - \sqrt{100}}{6} = \frac{-4 - 10}{6} = -\frac{7}{3}.$$

Дакле, решења су 1 и $-\frac{7}{3}$.

Δ

Пример 32. Решења квадратне једначине $9x^2 - 12x + 4 = 0$ су $x_1 = \frac{2}{3}$ и $x_2 = \frac{2}{3}$.

Решење је $\frac{2}{3}$.

Δ

Пример 33. Решења једначине $x^2 + 7x + 13 = 0$ су:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-7 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{-7 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Δ

Ако се лева и десна страна квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ подели са a , пошто је $a \neq 0$, добиће се једначина:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

или ако се стави да је $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, биће:

$$(8) \quad x^2 + px + q = 0.$$

Једначина (8) представља **нормални** облик квадратне једначине. Вијетове формуле у том случају гласе:

$$(9) \quad x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Једначина (8) гласи:

$$(10) \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0,$$

а њена решења су:

$$(11) \quad x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Пример 34. Решења једначине $x^2 - 10x + 24 = 0$ су:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{10 + \sqrt{10^2 - 4 \cdot 24}}{2} = 6,$$

$$x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{10 - \sqrt{10^2 - 4 \cdot 24}}{2} = 4.$$

△

Неколико следећих примера ће илустровати неке примене Вијетових формула.

Пример 35. Саставити квадратну једначину чија су решења $-\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{3}$. Како је $x_1 + x_2 = \frac{7}{3} - \frac{5}{6} = \frac{27}{18}$ и $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{35}{18}$, на основу формуле (10):

$$x^2 - \frac{27}{18}x - \frac{35}{18} = 0, \quad (18x^2 - 27x - 35 = 0),$$

јесте тражена једначина.

△

Пример 36. Збир два броја је $\frac{1}{20}$ а њихов производ је $-\frac{3}{5}$. Који су то бројеви? Означимо те бројеве са x_1 и x_2 . Видимо да су та два броја решења једначине:

$$x^2 - \frac{1}{20}x - \frac{3}{5} = 0.$$

Решења наведене једначине су $-\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{5}$, а то су и тражени бројеви.

△

Пример 37. У једначини $x^2 - 8x + q = 0$ одредити q тако да је једно решење једначине три пута веће од другог.

Нека су x_1 и x_2 решења дате једначине. Тада је $x_1 + x_2 = 8$, $x_1 \cdot x_2 = q$, а према услови задатка је $x_1 = 3x_2$. Из система $x_1 + x_2 = 8$ и $x_1 = 3x_2$ добија се да је $x_1 = 6$, $x_2 = 2$. Према томе је $q = x_1 \cdot x_2 = 6 \cdot 2 = 12$.

△

Пример 38. Ако једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има решења x_1 и x_2 (оба различита од нуле), саставити квадратну једначину чија су решења $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

Како је:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{b}{c}, \quad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{a}{c},$$

то је тражена једначина:

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0,$$

односно:

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

△

Непотпуне квадратне једначине (такве су на пример $x^2 = 0$, $3x^2 + 2x = 0$, $3x^2 + 12 = 0$) такође се могу решавати применом формула (5) и (6). Међутим, ове једначине се могу једноставније решавати растављањем на линеарне чиниоце:

- а) Уочимо непотпуну једначину $ax^2 = 0$. Она је еквивалентна једначини $x^2 = 0$, тј. обе имају исти скуп решења и исту променљиву. Како је $x^2 = 0 \iff x = 0 \vee x = 0$, то је $x_1 = x_2 = 0$ и скуп решења је једночлан: $\{0\}$.
- б) Непотпуна једначина $ax^2 + bx = 0$ своди се на $(ax + b) \cdot x = 0$, одакле се непосредно добијају решења $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.
- в) Решења непотпуне једначине $ax^2 + c = 0$ добијају се из $x^2 = -\frac{c}{a}$ и износе $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$; ако је $\frac{-c}{a} \geq 0$, односно $x_1 = i\sqrt{\frac{-c}{a}}$, $x_2 = -i\sqrt{\frac{-c}{a}}$ ако је $\frac{-c}{a} < 0$.

Пример 39. Решења једначине $3x^2 + 2x = 0$ добијају се непосредно решавањем еквивалентне једначине $x(3x + 2) = 0$ чији су корени $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$. Δ

Пример 40. Једначина $3x^2 + 12 = 0$ еквивалентна је једначини $3(x^2 + 4) = 0$, а ова следећој: $3(x + 2i)(x - 2i) = 0$. Решења су, дакле:

$$x_1 = 2i, \quad x_2 = -2i.$$

Δ

Поступак налажења решења квадратне једначине полазећи од Вијетових формула потиче од *Лагранжа*³ и представља посебан случај општег поступка за решавање једначина другог, трећег и четвртог степена који су потом развили *Абел*⁴ и *Галоа*⁵. Такође је доказано (тзв. теорија Галоа) да се корени једначине чији су степени већи од четири не могу изразити помоћу коначног броја сабирања, одузимања, множења, дељења, степеновања и кореновања коефицијената једначине, осим када су у питању неки специјални случајеви једначина вишег степена.

Овде ћемо описати један једноставан поступак решавања искључиво квадратне једначине. Тај поступак потиче од математичара *Баскара*⁶.

Нека је дата квадратна једначина:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Прво се подели са a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Затим се, додајући и одузимајући левој и десној страни претходне формуле израз $\frac{b^2}{4a^2}$ добија:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0,$$

³*Lagrange* - (1736 – 1813), италијанско-француски математичар и астроном

⁴*Abel* - (1802 – 1829), норвешки математичар

⁵*Galois* - (1811 – 1832), француски математичар

⁶*Bhaskar* - (1114 – 1185), индијски математичар и астроном

Односно:

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0.$$

Одавде је:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Ова разлика квадрата даје:

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

или

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.$$

Одатле се онда добијају познате формуле за решења квадратне једначине.

Напоменимо да су још математичари старе Грчке знали да реше неке квадратне једначине. Стари Грци су их решавали геометријски (Еуклид у *III* и Хипарх у *II* веку пре наше ере) и рачунски (Херон у *II* и Диофант у *IV* веку пре наше ере). Међутим, они су признавали за решења само рационалне бројеве.

3.3 Наставна јединица: Дискриминанта. Дискусија решења квадратне једначине

Посматрамо квадратну једначину:

$$(1) \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

чији коефицијенти $a \neq 0$, b , c јесу реални бројеви. Решења квадратне једначине (1) могу бити: различити реални бројеви, једнаки реални бројеви или пар коњугованих комплексних бројева. Какви ће бити корени, зависиће од вредности поткорене величине у формулама:

$$(2) \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Поткорена величина $b^2 - 4ac$ назива се **дискриминанта** и означава са D , тј.:

$$(3) \quad D = b^2 - 4ac.$$

Ако је $D > 0$, корени су различити реални бројеви. Решења једначине (1) су тада:

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Пример 41. Корени једначине $6x^2 + x - 15 = 0$ јесу различити реални бројеви јер је $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-15) = 361 > 0$. Тада су решења:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{361}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 + 19}{12} = \frac{3}{2},$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{361}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 - 19}{12} = -\frac{5}{3}.$$

Δ

У случају да је $D = 0$ решења су реални бројеви, и то оба једнака са $\frac{-b}{2a}$. Тада се каже још и да једначина има **двоструко** решење.

Пример 42. За једначину $4x^2 - 12x + 9 = 0$ дискриминанта $D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, па она има двоструко решење:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}.$$

Δ

И, на крају, ако је $D < 0$, решења квадратне једначине јесу коњуговано комплексни бројеви.

Пример 43. Једначина $x^2 + 3x + 15 = 0$ има корене који су коњуговано комплексни бројеви јер је $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -51 < 0$.

Δ

Често је потребно без решавања једначине (1) утврдити каквог су знака њена решења, тј. да ли су већа или мања од нуле.

Нека је сада за квадратну једначину (1) дискриминанта $D \geq 0$. Тада се на основу вредности коефицијената $a, b, c \in \mathbf{R}$ и Вијетових формула могу одредити знакови решења. Разликују се три случаја:

(I) ако је $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 > 0$, решења x_1 и x_2 су истог знака (оба већа или оба мања од нуле);

(Ia) ако је и $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 > 0$ оба решења су позитивна. Тако за једначину $x^2 - 3x + 2 = 0$ решења су позитивна јер је $\frac{c}{a} = \frac{2}{1} > 0$ и $-\frac{b}{a} = 3 > 0$;

(Iб) ако је $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 < 0$, оба решења су негативна;

(II) ако је $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 < 0$ решења су супротног знака, при чему:

(IIa) ако је $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 > 0$, позитивно решење има по апсолутној вредности већу вредност, а

(IIб) ако је $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 < 0$, негативно решење има по апсолутној вредности већу вредност. Тако за једначину $x^2 + x - 2 = 0$, чији су корени 1 и -2 , биће $\frac{c}{a} = -2 < 0$ и $-\frac{b}{a} = -1 < 0$, а $|-2| > 1$;

(IIв) ако је $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = 0$, решења имају супротне вредности;

(III) ако је $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = 0$, једно решење је једнако нули, а друго има вредност $-\frac{b}{a}$.

Пример 44. Одредити знаке решења једначине $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Из $\frac{c}{a} = -1 < 0$ следи да су решења супротни знакови, а из $-\frac{b}{a} = \frac{3}{2} > 0$ следи да је позитивно решење по апсолутној вредности веће од негативног. (Решења су 2 и $-\frac{1}{2}$.) Δ

Пример 45. За које вредности параметра k једначина $2x^2 - 3x + (k - 1) = 0$ има позитивне корене? У овом случају треба, дакле, да важи:

$$D \geq 0, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, \quad , -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 > 0.$$

Тада је:

$$\begin{array}{l} D \geq 0 \\ 9 - 4 \cdot 2(k - 1) \geq 0 \\ k \leq \frac{17}{8} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{k - 1}{2} > 0 \\ k > 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 > 0 \\ \frac{3}{2} > 0 \end{array}$$

Решење овог система једначина је:

$$1 < k \leq \frac{17}{8},$$

а уједно су то и вредности параметра k за које једначина $2x^2 - 3x + (k - 1) = 0$ има позитивна решења.

△

3.4 Наставна јединица: Систем две квадратне једначине са две непознате

Општи облик система две квадратне једначине са две непознате x и y и са коефицијентима $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2$ јесте:

$$(1) \quad \begin{aligned} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 &= 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 &= 0. \end{aligned}$$

У овом делу ћемо решавати ⁷ само неке посебне случајеве наведеног система.

Систем од једне линеарне и једне квадратне једначине са две непознате је систем облика:

$$(2) \quad \begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0, \\ mx + ny + p &= 0. \end{aligned}$$

Поступак решавања овог система биће приказан на неколико примера.

Пример 46. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Користићемо метод замене. Из прве једначине ћемо изразити x преко y :

$$x = 1 + y.$$

Ако се сада та вредност уврсти у другу једначину, добија се:

$$(1 + y)^2 - (1 + y)y + y^2 - 2(1 + y) + 3y - 2 = 0,$$

или:

$$y^2 + 2y - 3 = 0,$$

одакле је:

$$y_1 = 1 \quad y_2 = -3.$$

Сада се може из једначине $x = y + 1$ израчунати и одговарајуће вредности за x , и то за:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ x_1 &= 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

а за:

$$\begin{aligned} y_2 &= -3 \\ x_2 &= -3 + 1 = -2. \end{aligned}$$

Дакле, скуп решења је $\{(2, 1), (-2, -3)\}$.

Δ

⁷Уређена двојка (x_0, y_0) је решење система (1) ако су леве стране у формулама $a_1x_0^2 + b_1x_0y_0 + c_1y_0^2 + d_1x_0 + e_1y_0 + f_1 = 0$, $a_2x_0^2 + b_2x_0y_0 + c_2y_0^2 + d_2x_0 + e_2y_0 + f_2 = 0$ једнаке нули.

Пример 47. Решити систем једначина:

$$x + 2y = 7$$

$$xy = 6.$$

До решења ћемо доћи следећим поступком: из прве једначине прво се налази да је $x = 7 - 2y$, а затим се та израчуната вредност за x уврсти у другу једначину:

$$(7 - 2y) \cdot y = 6,$$

или:

$$2y^2 - 7y + 6 = 0,$$

одакле је:

$$y_1 = 2, \quad y_2 = \frac{3}{2}.$$

Ако се ове вредности сада замене у линеарној једначини $x = 7 - 2y$, добиће се:

$$y_1 = 2$$

$$x_1 = 7 - 2 \cdot 2 = 3,$$

а за:

$$y_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = 7 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 4.$$

Тражени парови решења су: $\left\{ (3, 2), \left(4, \frac{3}{2} \right) \right\}$.

△

Друга примена решавања система две квадратне једначине са две непознате користи се за одређивање квадратног корена комплексног броја, као и за решавање квадратних једначина с комплексним коефицијентима.

Често је израз $\sqrt{b^2 - 4ac}$ (у формулама за корене квадратне једначине) облика $\sqrt{u + iv}$ ($u, v \in \mathbf{R}$). Показаћемо да је $\sqrt{u + iv}$ комплексан број $x + iy$, где су $x, y \in \mathbf{R}$. претпоставимо да је:

$$(3) \quad \sqrt{u + iv} = x + iy.$$

Ако (3) квадрирамо, добија се:

$$u + iv = x^2 + 2ixy - y^2.$$

Изједначавањем посебно реалних и посебно имагинарних делова ова два комплексна броја добија се систем:

$$(4) \quad \begin{aligned} x^2 - y^2 &= u, \\ 2xy &= v. \end{aligned}$$

Ако се сада квадрирају те једначине па се саберу, долази се до:

$$(5) \quad (x^2 + y^2)^2 = u^2 + v^2.$$

Из формуле (5) долази се до:

$$(6) \quad x^2 + y^2 = +\sqrt{u^2 + v^2}.$$

(Како су $x, y \in \mathbf{R}$, не може бити $x^2 + y^2 = -\sqrt{u^2 + v^2}$.)
Посматрајмо сада систем од две једначине:

$$(7) \quad \begin{aligned} x^2 - y^2 &= u \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

(Прва једначина у систему (7) је прва једначина из система (4), а друга једначина је дата са (6).) Решавајући систем (7) као систем две линеарне једначине са две непознате x^2 и y^2 добија се:

$$x^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{u^2 + v^2} + u \right),$$

$$y^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{u^2 + v^2} - u \right),$$

односно:

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{u^2 + v^2} + u \right)},$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{u^2 + v^2} + u \right)},$$

$$y_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{u^2 + v^2} - u \right)},$$

$$y_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{u^2 + v^2} - u \right)}.$$

Од нађених вредности за x и y узимају се по две, и то оне које задовољавају једначину $2xy = v$ из система (4). Тако добијене вредности за x и y на крају се уврсте у (3).

Пример 48. Нека је дата квадратна једначина:

$$x^2 + ix + 1 - 3i = 0.$$

Израз $\sqrt{b^2 - 4ac}$ код ове једначине је $\sqrt{-5 + 12i}$. Показаћемо, као у претходном поступку, да је $\sqrt{-5 + 12i}$ комплексан број.

Претпоставимо да је:

$$\sqrt{-5 + 12i} = x + iy.$$

Ако претходни израз квадрирамо и изједначмо посебно реалне, а посебно имагинарне делове, добићемо систем:

$$x^2 - y^2 = -5$$

$$2xy = 12.$$

Квадрирањем и сабирањем ове две једначине, долази се до:

$$(x^2 + y^2)^2 = 169,$$

одакле је:

$$x^2 + y^2 = 13.$$

Посматрамо систем од две једначине:-

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 - y^2 = -5.$$

Решавањем овог система добијамо:

$$x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

и

$$y^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -3.$$

Дакле, $\sqrt{-5 + 12i}$ је комплексан број и важи да је $\sqrt{-5 + 12i} = \pm(2 + 3i)$, па су решења једначине:

$$x_1 = \frac{-i + (2 + 3i)}{2} = 1 + i,$$

$$x_2 = \frac{-i - (2 + 3i)}{2} = -1 - 2i.$$

△

3.5 Наставна јединица: Проблеми другог степена са једном непознатом

За проблем (задатак) се каже да је другог степена ако се своди на решавање квадратне једначине. Поступак решавања обично обухвата:

- избор променљиве (непознату величину),
- постављање једначине,
- решавање једначине,
- дискусију решења.

Дискусија решења се спроводи у циљу проверавања да ли она има смисла за постављени проблем, као и у случају да су задати подаци општи бројеви. Неколико примера ће илустровати поступак решавања проблема.

Пример 49. Производ два броја увећан за њихов збир даје број 999. Који су то бројеви ако се зна да је први за 15 већи од другог? Ако се мањи број означи са x , већи је $x + 15$, а одговарајућа једначина гласи:

$$x(x + 15) + x + (x + 15) = 999,$$

или:

$$x^2 + 17x - 984 = 0.$$

Решења ове једначине су 24 и -41 .

△

Пример 50. Наћи два броја када се зна да је њихова разлика 12, а њихов производ -35 .

Нека су x и y тражени бројеви, тј. $x - y = 12$ и $x \cdot y = -35$. Ако се сада стави да је $y' = -y$, претходни систем постаје:

$$x + y' = 12$$

$$x \cdot y' = 35,$$

а једначина чији су корени x и y' гласи $x^2 - 12x + 35 = 0$. Корени ове једначине су 5 и 7. Може се узети да је $x = 5$ и $y' = 7$, што онда даје $x = 5$ и $y = -7$, или $x = 7$ а $y' = 5$, што даје $x = 7$ и $y = -5$.

△

Пример 51. Суму од 48000 динара треба поделити одређеном броју лица. Ако се троје од њих одрекне свог дела, свака од преосталих особа добија 800 динара више. Колико је особа којима је требало поделити наведени износ новца?

Нека је са x означен број особа. Свака особа требало је да прими $\frac{48000}{x}$ динара. Ако се троје од њих одрекло свог дела, преостало је $x - 3$ особе које деле новац, па свако треба да добије $\frac{48000}{x - 3}$ динара. Дакле, биће:

$$\frac{48000}{x - 3} = \frac{48000}{x} + 800,$$

или:

$$\frac{60}{x - 3} = \frac{60}{x} + 1.$$

После множења са $x(x-3)$ и сређивања добија се једначина:

$$x^2 - 3x - 180 = 0.$$

Решења ове једначине су 15 и -12 . Задатак задовољава само позитивно решење. \triangle

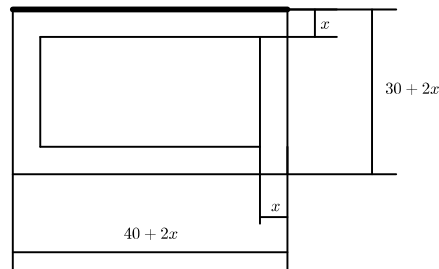
Пример 52. Око врта облика правоугаоника, чије су димензија 40 m и 30 m , треба поставити стазу која је свуда једнако широка, тако да њена површина буде 296 m^2 . Колика је ширина стазе?

Нека је са x означена ширина стазе. Тада се (слика) добија да је:

$$(40 + 2x)(30 + 2x) - 30 \cdot 40 = 296,$$

или:

$$x^2 + 35x - 74 = 0.$$



Решења горње једначине јесу 2 и -37 . Постављене услове задатка задовољава само позитивно решење. \triangle

Пример 53. Нека је дата дуж дужине 1. За њу се каже да је подељена у **златном односу** када се цела према свом већем делу односи као тај део према мањем. Колики су ти делови?

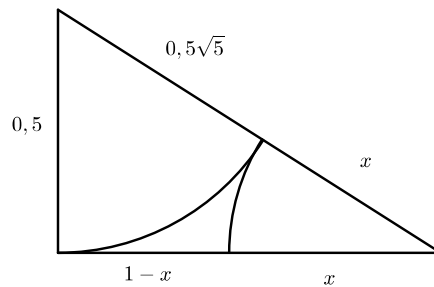
Означимо већи део са x . Тада је:

$$1 : x = x : (1 - x),$$

односно:

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Решење које задовољава услове задатка је $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. На основу тога може се и лењиром и шестаром конструисати тачка која дели задату дуж у златном односу. У правоуглом троуглу, чије су катете $\frac{1}{2}$ и 1, хипотенуза је $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Ако се од хипотенузе одузме катета $\frac{1}{2}$ (слика), остаје на хипотенузи остатак x који одређује на другој катети 1 тачку златног односа. Подела дужи у златном односу потиче из античке Грчке (Еуклид) и у вези је с важним конструкцијама правилних ликова у равни и тела у простору.



△

На следећем примеру ће бити илустрован процес решавања задатака кроз фазе:

- Прва фаза - разумевање;
- Друга фаза - стварање плана;
- Трећа фаза - реализација плана;
- Четврта фаза - провера тачности и дискусија.

Пример 54. Базен се пуни широм цеви за пет часова краће него ужом цеви. За које време се базен пуни широм, а за које ужом цеви, ако се са обе цеви истовремено напуни за шест часова?

Поступак решавања.

Прва фаза. Пошто смо разумели задатак, идентификујемо и обележавамо задате и тражене елементе:

x	време или број часова за које се базен напуни широм цеви,
$x + 5$	време или број часова за које се базен напуни ужом цеви,
6	време или број часова за које се базен напуни са обе цеви.

Друга фаза. Наведени елементи се тешко могу довести у везу ако не уведемо у разматрање и неке експлицитно присутне елементе:

$\frac{1}{x}$	део базена који се напуни широм цеви у току једног часа,
$\frac{1}{x + 5}$	део базена који се напуни са ужом цеви у току једног часа,
$\frac{1}{6}$	део базена који се напуни са обе цеви у току једног часа.

Овако дефинисани елементи се могу једноставно повезати, имајући у виду реално схватање сабирања, чиме добијамо једначину:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 5} = \frac{1}{6}.$$

Трећа фаза. Извршење плана своди се на конкретно решавање једначине одакле добијамо

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 10.$$

Решење $x_1 = -3$ не задовољава реални услов задатка, $x > 0$, те је коначно решење $x = 10$, тј. шира цев пуни базен за 10 часова, а ужа за 15 часова.

Четврта фаза. Провера

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

је једноставна.

Δ

3.6 Наставна јединица: Једначине које се свводе на квадратне

Једначине облика $\sqrt{x+6} = x$, $\sqrt{3-x} = \sqrt{x-5}$, $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5$ су примери тзв. **иррационалних једначина**.

При решавању таквих ирационалних једначина основну улогу има формула:

$$(1) \quad \sqrt{a} = b \iff a = b^2 \wedge b \geq 0,$$

која је тачна за $a, b \in \mathbf{R}$. Том формулом проблем налажења решења горњих (и сличних) ирационалних једначина своди се на тражење решења система од једне квадратне једначине са непознатом x и једне линеарне неједначине са истом непознатом. Поступак решавања биће илустрован са неколико примера.

Пример 55. Одредити решења једначине $\sqrt{x+6} = x$. Како важи:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} = x &\iff x+6 = x^2 \wedge x \geq 0 && \text{(примена формуле (1))} \\ &\iff x^2 - x - 6 = 0 \wedge x \geq 0 \\ &\iff (x = 3 \vee x = -2) \wedge x \geq 0 && \text{(решавање једначине } x^2 - x - 6 = 0) \\ &\iff (x = 3 \wedge x \geq 0) \vee (x = -2 \wedge x \geq 0) && \text{(користећи таутологију} \\ &&& p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \\ &\iff (x = 3 \wedge x \geq 0) && \text{(јер је } x = -2 \wedge x \geq 0 \iff \perp, \\ &&& p \vee \perp \iff p) \\ &\iff x = 3 && \text{(јер је } x = 3 \implies x \geq 0). \end{aligned}$$

Δ

Пример 56. Решити једначину $\sqrt{4x+1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+3}$. Квадрирањем леве и десне стране једначине, долази се до једначине $(4x+1) + 2\sqrt{4x+1} \cdot \sqrt{x+2} + (x+2) = (x+3)$, тј. $\sqrt{4x^2+9x+2} = -2x$. Одавде се добија следећи систем $4x^2+9x+2 = 4x^2$ и $x \leq 0$. Решење овог система је $x = -\frac{2}{9}$.

Δ

Још неке једначине које се свводе на квадратне:

Посматрајмо једначину са непознатом x облика:

$$a(f(x))^2 + b(f(x)) + c = 0.$$

Увођењем смене $f(x) = t$ добија се следећи систем, који је еквивалентан полазној једначини:

$$at^2 + bt + c = 0 \wedge t = f(x).$$

Ако су t_1 и t_2 решења квадратне једначине $at^2 + bt + c = 0$, биће:

$$t_1 = f(x) \wedge t_2 = f(x).$$

Из тих једначина добијамо решења.

Пример 57. Једначина:

$$(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$$

еквивалентна је са:

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \wedge x^2 - 3x = t.$$

Корени квадратне једначине $t - 2t - 8 = 0$ су $t_1 = 4$, $t_2 = -2$. Тако се добија:

$$(t - 4 = 0 \vee t + 2 = 0) \wedge x^2 - 3x = t,$$

а одавде:

$$x^2 - 3x = 4 \wedge x^2 - 3x = -2.$$

Прва од ових једначина има решења: 4 и -1, а друга 1 и 2. Дакле, полазна једначина има четири решења. То су бројеви: 4, -1, 1 и 2.

△

Специјално, ако је $f(x) = x^2$, онда је једначина $a(f(x))^2 + b(f(x)) + c = 0$ **би-квадратна једначина**.

Посматрамо следећу једначину:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0.$$

До решења те једначине долази се на следећи начин. Ако се x^2 означи са y (тј. $x^2 = y$), добија се једначина $ay^2 + by + c = 0$. Сада се налажење решења једначине $ax^4 + bx^2 + c = 0$ своди на налажење решења система:

$$ay^2 + by + c = 0$$

$$x^2 = y.$$

Нека су y_1 и y_2 решења прве једначине тог система. Из друге једначине следи: $x^2 = y_1$, и $x^2 = y_2$. Односно, $x_1 = \sqrt{y_1}$, $x_2 = -\sqrt{y_1}$, $x_3 = \sqrt{y_2}$, $x_4 = -\sqrt{y_2}$, што су и решења биквадратне једначине.

Пример 58. Решити следећу биквадратну једначину: $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$.

Ако се уведе смена $x^2 = y$, долази се до следећег система:

$$2y^2 + 5y - 3 = 0$$

$$y = x^2.$$

Решења прве једначине овог система су: $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = -3$. Из друге једначине тог система произилази $x^2 = \frac{1}{2}$ и $x^2 = -3$, а одавде се долази до решења биквадратне једначине, а то су:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = i\sqrt{3}, \quad x_4 = -i\sqrt{3}.$$

△

Симетрична једначина је једначина облика:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n, \quad (n \geq 2).$$

Код ње су коефицијенти уз x^{n-k} ; x^k , (за $k = 0, 1, 2, \dots, n$) једнаки. Тако следећа једначина је симетрична:

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0.$$

Непосредном провером може се показати да ако је α једно од решења неке симетричне једначине, онда је то и $\frac{1}{\alpha}$. У случају претходне једначине једно њено

решење је 2, па је $\frac{1}{2}$ такође њено решење.

Ако је n непаран природан број, једно од решења симетричне једначине је број -1 . Тако симетрична једначина:

$$6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0$$

има једно решење -1 .

За решавање симетричне једначине потребно је увести следећу смену:

$$x + \frac{1}{x} = t.$$

Решавање симетричне једначине биће илустровано на неколико примера.

Пример 59. Решити следећу симетричну једначину:

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0.$$

Како нула није корен симетричне једначине, дељењем са x^2 добија се:

$$6x^2 - 35x + 62 - 36\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} = 0$$

Груписањем чланова добија се:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

Увођењем смене:

$$x + \frac{1}{x} = t$$

добија се и:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = t^2,$$

односно:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Полазна једначина се сада своди на:

$$6(t^2 - 2) - 35 \cdot t + 62 = 0 \quad \wedge \quad x + \frac{1}{x} = t.$$

Како су решења квадратне једначине:

$$6t^2 - 35t + 50 = 0$$

бројеви $t_1 = \frac{5}{2}$, $t_2 = \frac{10}{3}$, то је полазна једначина еквивалентна са:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \vee \quad x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3},$$

односно са:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \vee \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Решења претходних квадратних једначина су:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = \frac{1}{3},$$

што су и решења полазне једначине.

Пример 60. Решити симетричну једначину непарног степена:

$$6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0.$$

Зна се да је $x = -1$ једно њено решење.

Количник полинома $6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6$ и $(x + 1)$ је $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$, па се полазна једначина може приказати у облику:

$$(x + 1)(6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6) = 0.$$

Дакле, симетрична једначина непарног степена своди се на симетричну једначину парног степена коју смо решили у претходном примеру. Решења полазне једначине су, дакле, бројеви: $-1; 2; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}$.

△

Биномне једначине су једначине облика:

$$Ax^n \pm B = 0 \quad (A > 0, B > 0).$$

Сменом:

$$x = t \sqrt[n]{\frac{B}{A}}$$

биномана једначина се своди на еквивалентну једначину:

$$t^n \pm 1 = 0.$$

Пример 61. Решити биномну једначину $16x^4 - 81 = 0$. Увођењем смене $x = t \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ добија се:

$$16 \cdot \left(t \cdot \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \right)^4 - 81 = 0$$

$$16 \cdot t^4 \cdot \frac{81}{16} - 81 = 0$$

$$t^4 - 1 = 0$$

$$(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1) = 0.$$

Одавде је:

$$t - 1 = 0$$

$$t + 1 = 0$$

$$t^2 + 1 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = -1$$

$$t_3 = i, \quad t_4 = -i$$

↓

↓

↓

$$x_1 = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2} \quad x_2 = -\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = -\frac{3}{2} \quad x_3 = i \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2}i, \quad x_4 = -i \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = -\frac{3}{2}i$$

△

Једначина облика:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

где су a, b, c реални бројеви (различити од нуле), назива се **триномна једначина**. Триномна једначина је еквивалентна једначини:

$$a(x^n)^2 + bx^n + c = 0,$$

па увођењем смене $t = x^n$, ова једначина постаје квадратна по непознатој t .

Пример 62. Решити триномне једначине

- а) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ Увођењем смене $t = x^3$ почетна једначина се своди на квадратну једначину

$$t^2 + 7t - 8 = 0$$

чија су решења $t_1 = 1$ и $t_2 = -8$. Одавде добијамо решења за x , односно $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$.

- б) $(2x^2 - 3x + 1)^2 = 22x^2 - 33x + 1$

Претходна једначина је еквивалентна једначини

$$(2x^2 - 3x + 1)^2 = 11(2x^2 - 3x + 1) - 11 + 1,$$

односно,

$$(2x^2 - 3x + 1)^2 = 11(2x^2 - 3x + 1) - 10.$$

Увођењем смене $t = 2x^2 - 3x + 1$ претходна једначина постаје квадратна једначина по непознатој t

$$t^2 - 11t + 10 = 0$$

одакле је $t_1 = 10$ и $t_2 = 1$.

Ако је $t_1 = 10$ тада је $x_1 = 3$ и $x_2 = -\frac{3}{2}$, а ако је $t_2 = 1$ тада је $x_3 = 0$ и $x_4 = \frac{3}{2}$.

Δ

3.7 Задачи

И у програмима са 4 часа наставе математике недељно, потребно је ученике упутити у начин решавања задатака и подсетити их кроз које фазе пролазе приликом решавања задатака.

Основни ниво:

1. Решити једначине:

(а) $x^2 - 8x + 15 = 0$;

(б) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$;

(ц) $x^2 - 6x + 15 = 0$.

Запажања: Поједини ученици нису знали како да реше задатак када је дискриминанта $D < 0$.

2. Решити једначине:

(а) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{x-1} - 2 = 0$;

(б) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5} + \frac{3x^2}{4(x-2)(x-5)} = 0$.

Запажања: Поједини ученици су заборавили да провере да ли добијена решења једначине прихватају или не.

3. За које вредности реалног параметра m су оба корена једначине $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ у интервалу $(-2, 4)$?

4. Написати једначину чији су корени:

(а) 3 и -10 ;

(б) $a + 1$ и $\frac{1}{a-1}$, $a \neq 1$;

(ц) $2 + i\sqrt{3}$ и $2 - i\sqrt{3}$.

5. Нека су x_1 и x_2 решења једначине $3x^2 + 2x - 7 = 0$.

Израчунати вредност израза:

(а) $3x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$;

(б) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^3 + x_2^3$;

(ц) $\frac{2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$.

6. Следеће триноме раставити на чиниоце:

(а) $a^2 - a - 6$;

(б) $x^3 - 2x^2 - 8x$.

7. Одреди вредност реалног параметра r у једначини $x^2 + (4 + 2r)x + 5 + 4r = 0$ тако да буде:

(а) $x_1 = x_2$;

(б) $x_1 = -x_2$.

8. Решити систем једначина
 $x^2 - y^2 = 16 \wedge x - y = 2$.

9. Решити једначине:

(а) $x^3 - 8 = 0$;

(б) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$.

Средњи ниво:

1. Решити једначине:

(а) $(x - 3)^2 + 2(x - 1)^2 = 4x + 3$;

(б) $ax^2 = 0, (a \in \mathbf{R})$.

2. Решити једначине ($a, b \in \mathbf{R}$):

(а) $x^2 - (a - b)x - ab = 0$;

(б) $x + \frac{1}{x} = 2 \cos a$.

3. Доказати да једначина

$(p^2 + q^2 + r^2)x^2 + 2(p + q + r)x + 3 = 0 \quad (p, q, r \in \mathbf{R})$ не може имати реалне и различите корене.

Забелешка: Уз малу помоћ већина ученика је успешно решила задатак.

4. Збир цифара двоцифреног броја је 7, а збир квадрата цифара је за 4 већи од самог броја. Који је то број?

Забелешка: Поједини ученици нису знали да наведени проблем „сведу” на проблем решавања квадратне једначине.5. Не решавајући једначину, формирати квадратну једначину чија су решења за 7 већа од решења једначине $5x^2 - 2x - 3 = 0$.6. Одредити вредност реалног параметра a тако да међу коренима једначине $x^2 - (a + 1)x + 2(a - 1) = 0$ важи једнакост:

(а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{6}$;

(б) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{5}{4}$.

7. Скратити разломке:

(а) $\frac{a^2 - a - 6}{a^2 - 4}, a \neq -2, a \neq 2$;

(б) $\frac{3x^2 + 2x - 8}{12x^2 - 7x - 12}, x \neq \frac{4}{3}, x \neq -\frac{3}{4}$.

8. У једначини $x^2 - (k + 3)x + 4k + 2 = 0$ одредити број k тако да један корен буде два пута већи од другог, а затим одредити оба корена.

9. Решити систем једначина

$2x^2 + 3y^2 = 12 \wedge 5x^2 - 2y^2 = 11$.

10. Решити једначине:

(а) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = 3$;

(б) $\sqrt{x+4} = x+2$.

Напредни ниво:

1. Решити једначину $abx^2 - (a^2 - b^2)x - ab = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Запажања: Поједини ученици су заборавили на дискусију решења.

2. Решити једначину $2(1+i)z^2 - 4(2-i)z - 5 - 3i = 0$.

3. Ако су решења једначине $x^2 + px + q = 0$, ($p, q \in \mathbf{R}$) реална, доказати да су за свако $a \in \mathbf{R}$ и решења једначина:

(а) $x^2 + (p+2a)x + q + ap = 0$ и

(б) $3x^2 + 2(p+a)x + q + ap = 0$ такође реална.

Запажања: У примеру под (б) ученици су имали протешкоћа у трансформацији израза дискриминанте да би доказали да су решења реална.

4. Дужине ивица квадра су $a = 9$ cm, $b = 7$ cm и $c = 10$ cm. За колико треба сваку од њих смањити да би се површина тела смањила за 98 cm²?

5. Формирати квадратну једначину, чији су корени једнаки реципрочној вредности са променљивим знаком, корена једначине $ax^2 + bx + c = 0$, ($ac \neq 0, a, b, c \in \mathbf{R}$).

6. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 + kx + 1 = 0$, наћи оне вредности k за које важи неједнакост $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 2$.

7. Ако су x_1 и x_2 корени једначине $x^2 + px + q = 0$, одреди p и q тако да $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ буду корени једначине $x^2 - p^2x + pq = 0$.

8. Решити систем једначина $x^2 + y^2 + x + y = 18 \wedge x^2 - y^2 + x - y = 6$.

9. Решити једначине:

(а) $3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 12,5\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$;

(б) $(x^2 - a^2 - 1)^2 - a(a^3 - 3a + 2)(x^2 - a^2 - 1) + 2a^3(a^2 - 3) = 0$;

(ц) $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$.

У наставку рада ће бити изложена критичка анализа, односно методички проблеми који се јављају приликом обраде ове наставне јединице, као и решења тих проблема.

Неки од методичких проблема са којима сам се сусрела у настави, а који су се јавили при обради квадратних једначина, су: циљ учења, односно до ког нивоа ученици треба да науче, садржаји учења, садржаји усклађени са постављеним циљевима, начин организовања наставе, избор наставне методе, мотивација, како ученику „приблизити” материју, каква је структура ученика, њихове интелектуалне способности, предзнање, како применити оно што је научено.

Приликом планирања у настави (одабир наставне методе, начин организовања наставе,...) треба водити рачуна о претходним знањима ученика, њиховим могућностима.

У току часа одвијају се различите етапе наставног процеса. У односу на то која етапа преовлађује бирамо **тип часа**.

Уводни час (час чији је главни задатак увођење у нову област наставе) служи за упознавање ученика са новом наставном темом, циљевима и задацима, структуром и садржајем. У уводном часу ученицима је најављена наставна тема којом ће се бавити у наредном периоду, које ћемо наставне јединице обрађивати, на шта ће моћи да примене научено градиво. Уз помоћ примера, уведен је појам квадратне једначине, дефинисано је шта представљају коефицијенти a, b, c у једначини, који су чланови једначине.

Обрада новог градива подразумева наставне часове на коме се обрађују нови наставни садржаји и стичу нова знања. Састоји се из следећих елемената:

- Обнављања раније ученог градива чије разумевање је основ за усвајање нових знања. Поновљена су основна својства полинома, како се полиноми множе, деле, сабирају, одузимају, како се рачуна вредност полинома, шта значи да је полином $ax^2 + bx + c$ дељив са $x - \alpha$, када су два полинома једнака. Такође, приликом обраде сваке нове наставне јединице, потребно је обновити већ пређено градиво.
- Упознавање са чињеничким материјалом путем усменог излагања наставника. На пример, извођење формуле за налажење решења квадратне једначине, дискусија решења квадратне једначине, извођење Вијетових формула, који су праћени адекватним примерима који демонстрирају примену градива које је наставник излагао.
- Понављања усвојених знања. Са ученицима је укратко понавља оно што је учено на часу.
- Домаћих задатака, тј. задавање задатака за самостални рад који су слични задацима и примерима рађеним на часу.

Вежбање - часови вежбања подразумевају увежбавање сензорних, моторичких, практичних, вербалних и интелектуалних активности. Наставник у првом делу часа даје инструкције, односно активности које ученици треба да ураде. Наредна етапа је само процес вежбања и увежбавања. Ако се активност обавља с циљем да се оформе способности или навике ради се о часовима вежбања, а ако насупрот томе доминира примена стечених знања са циљем њиховог даљег развијања и усавршавања, онда се ради о часовима примене.

Данас се сматра да је основна слабост савремене наставе у недовољном увежбавању. Посебно ученици који имају 2, па и 3 часа наставе математике недељно немају довољно времена (часова) да увежбају градиво.

Понављање, утврђивање и систематизација градива су типови часова који за циљ имају остваривање функција наставе које се односе на сигурност и трајност стечених знања. На часовима понављања инсистира се на запамћивању и усвајању битних чињеница. На часовима систематизације нова знања се упоређују са раније усвојеним.

Проверавање и оцењивање су типови часова који имају основни задатак да утврде да ли су и колико ученици усвојили неопходна знања. Зависно од карактера примене, може се вршити фронтално, групно или индивидуално проверавање. Проверавања могу бити усмена, писмена, практична или комбинована.

Као методички проблем јавља се и проблем одабира **облика рада у настави**, односно како предавати, како ученицима „приближити” градиво. Најчешће се помињу фронтални, индивидуални, групни рад, рад у паровима, тимска настава.

Фронтални рад је заједнички рад свих ученика под руководством наставника. Овај облик рада сам примењивала при излагању примера за ново градиво. Усмеравам свој рад на цео разред. Тако сви ученици раде исте задатке и сви су углавном усредсређени на наставника (мене). Тада се најчешће не успостављају међусобни односи међу ученицима. Фронтални рад је најрационалнији облик рада у погледу улагања времена и труда наставника. Овај облик рада омогућује да ученик постиже оно што постижу многи, али не води довољно рачуна о различитом нивоу сазнајних могућности ученика, о различитом темпу њиховог рада и учења и слично.

Индивидуални рад је организациони облик у коме сваки ученик ради на одређеном задатку сам, као појединац, без размене информација са својим друговима. Индивидуални рад сам примењивала, на пример, на часовима утврђивања градива. Задајем три задатка, по један за основни, средњи и напредни ниво. Након тога ученик сам бира који ће задатак да ради. Значај индивидуалног рада је што ученик сам решава задатак, што мени као наставнику омогућава стварну процену његовог рада. Овај облик рада захтева веће улагање времена.

Групни рад се заснива на заједничком извршавању задатака у групама. Овај облик рада се може примењивати и у примеру наведеном за индивидуални рад, с том разликом што ученик не ради сам задатак, већ ученици који су одабрали задатак за основни ниво раде заједно. Исто тако и ученици који су изабрали задатак за средњи или напредни ниво. Ученицима се предлаже да размотре постављени задатак, да нађу пут за његово решавање, да приђу решавању и на крају да саопште резултате до којих су дошли. Овај облик рада сам користила приликом извођења формула за решавање квадратне једначине. Ученици су били подељени у три групе. Прва група, која је мало слабија, решава пример једначине где је $c = 0$. Затим друга, мало боља група, решава пример када је $b = 0$. И на крају, трећа група решава пример потпуне квадратне једначине допуњавањем до потпуног квадрата. Након урађених примера, ученици свих група, уз помоћ наставника, изводе формуле за решавање једначина са општим бројевима. Затим следи увежбавање свих формула где учествују све три групе.

Као један од методичких проблема, јавља се и проблем избора **наставне методе**. Један од битних проблема рада наставника је да одабере и примени адекватне поступке који ће подстицати одређење процесе сазнања у настави. Наставне методе подразумевају начин управљања радом ученика у процесу наставе, који омогућава стицање знања и вештина и њихову примену у пракси а исто тако доприноси развијању њихових сазнајних способности и интересовања, фомирање погледа на свет и припремање за живот.

Избор наставних метода обавља се на основу неколико мерила. Приликом избора наставних метода треба водити рачуна о следећим критеријумима:

- општем циљу васпитања и образовања,
- дидактичком циљу наставног часа,
- природи, саджају и специфичности наставне материје,
- узрастним особеностима ученика,
- величини, обиму разреда,
- стручна припремљеност и личност наставника.

Приликом обраде ових наставних јединица примењиване су методе излагања, приповедања (излагање у облику описивања речима, који се примењује када ученике треба упознати конкретним чињеницама), предавања (карактерише га систематичност градива, интензивно ангажовање пажње и памћења, дуже временско излагање), методе засноване на речима (монолошка и дијалогска метода). Монолошка метода је облик вербалног излагања у коме наставник сам излаже наставно градиво ученицима. Позната је још и као метода усменог излагања и стицања знања. На овај начин градиво се може изложити систематично, прегледно и логички повезано. Дијалогска метода спада у методе заједничког рада наставника и ученика. Заснива се на питањима и одговорима, разговору наставника са ученицима и у томе је њена основна карактеристика. Разговор омогућава наставнику да подстакне мишљење и мисаоне активности ученика. Не предвиђају се само питања која ће бити постављена ученицима, већ такође и њихова реаговања и могући одговори, као и проблеми који се могу појавити током разговора. Битно је што више укључити ученика у разговор.

Дидактички принципи су основна, општа и обавезна начела којима се руководи наставник при планирању, организовању, извођењу и вредновању наставног процеса. Сматрам да је један од важних захтева у настави да ученици упознају суштинске, битне ознаке и појмове, и то не одмах у потпуности, већ зависно од узрастних и психолошких могућности ученика. Битно је узети у обзир индивидуалне разлике ученика у погледу интелектуалних могућности, мотивација за сазнавање и учење, радне способности, здравствени услови, темпо напредовања... Ученици у свом раду често не достижу свој максимум. Из тог разлога сматрам да је задатак наставника и наставе да ученике учини активним захтевајући максималне напоре за њихово даље учење и развој а при том константно уважавати разлике у темпу рада и обиму претходно стечених знања. Ученици уче и раде различитим темпом и ако се од њих захтева да се „укалупе” у исти темпо и начин рада, онда највише трпе слаби и даровити ученици. Битно је да сваки елемент наставног садржаја буде повезан са другим, који се ослања на претходни и доводи до нових знања. Како увођење неког појма код ученика не би изазвало забуну, било би корисно кренути од онога што је ученику ближе, познатије, лакше, једноставније па прећи

на оно што је даље, теже, сложеније. Тако наставник стално може да прати процес и резултате усвајања знања од стране ученика, како би они могли да упознају и схвате ново градиво, а затим да проширују своја знања и вештине. Неопходно је створити такве услове у настави у којима ће ученици имати иницијативу да самостално раде, решавају различите задатке. Наставу треба организовати тако да ученици разумеју оно што уче. Понављање претходно обрађеног градива може се започети тек када се утврди да су ученици то градиво схватили. Упознавање ученика са новим садржајима треба организовати тако да ученици у том процесу могу што активније учествовати, а број и учесталост вежбања прилагодити индивидуалним могућностима и темпу рада ученика.

Ова наставна тема је од изузетног значаја. Поменула бих хоризонталну и вертикалну корелацију ове теме. Хоризонтална корелација подразумева повезаност теме са градивом у оквиру истог разреда, било да је реч о самој математици или корелацији са другим предметима. Након обраде квадратне једначине, функције и неједначине следе ирационалне, експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске једначине, функције и неједначине. У највећем броју случајева не можемо их решити уколико није добро савладана поменута тема. Приментна је и њена велика примена у стручним предметима друге године средње стручне школе, подручје рада машинство и обрада метала. Конкретно, мислим на предмете основе електротехнике и електронике, механика, технологија обраде. Верикална корелација подразумева повезаност ове теме са градивом трећег и четвртог разреда. Моје искуство у раду са ученицима средње стручне школе показује да треба поштовати различите могућности и интересовања деце. Као најефикаснији начин у савладавању градива показала се диференцирана настава, коју углавном примењујем на часовима утврђивања и систематизације, чак и у одељењима са два часа недељно, иако то подразумева много веће ангажовање наставника, више времена за одабир задатака и писање припрема. Моје уверење је да сваки ученик, који је мотивисан на прави начин, може научити нешто. Посебну дозу самопоуздања им даје чињеница да временом могу напредовати у виши ниво. Овај облик рада никако не значи дискриминацију деце, јер сваком ученику су понуђени задаци свих нивоа и они сами врше избор. Предност овог начина рада је и што су сви ученици активни, учење на часу, могућност праћења напредовања ученика.

У овом раду сам настојала да истакнем методичке проблеме који се могу јавити приликом решавања квадратних једначина у различитим програмима средње Техничке школе. То сам реализовала на примерима извођења одређених наставних јединица.

У првом и другом делу дата је анализа наставних јединица које се изводе у програмима са 2 и 3, односно 4 часа наставе математике недељно. На крају сваког дела приказани су задаци који покривају сва три нивоа знања: основни, средњи и напредни ниво, а који треба да омогуће ученицима лакше усвајање градива.

У трећем делу су описани методички проблеми који се могу јавити приликом обраде ове наставне теме.

Литература

- [1] Кечкић Ј., Стојковић О., Кечкић С., Математика за *II* разред средње школе, Програми са два часа наставе математике недељно, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2003.
- [2] Војводић Г., Деспотовић Р., Петровић В., Тошић Р., Шешеља Б., Збирка задатака из математике за *II* разред средње школе, Програми са два и три часа наставе математике недељно, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2006.
- [3] Војводић Г., Петровић В., Деспотовић Р., Шешеља Б., Математика за *II* разред средње школе, Програми са четири часа наставе математике недељно, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2004.
- [4] Мићић В., Ивановић Ж., Огњановић С., Збирка задатака из математике за *II* разред средње школе, За гимназије и све стручне школе са четири и пет часова недељне наставе, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2006.
- [5] Богославов В., Збирка решених задатака из математике 2, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2010.
- [6] <http://www.matematiranje.in.rs>, приступљено 02.04.2014.