Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Master rad

PARADOKSI U MATEMATICI, ISTORIJSKI OSVRT I NJIHOV ZNAČAJ U NASTAVI MATEMATIKE

mentor: Miljan Knežević

Beograd, jun 2015.

SADRŽAJ:

Predgovor

Kroz istoriju matematike, od antičkih vremena do danas, pojavljivali su se brojni problemi, kontradikcije i paradoksi, koji su doveli do preispitivanja tada preovladavajućih teorija, potsticali traženje novih rešenja, te zaokupljajući misli tadašnjih matematičara ostavili svoj trag u istoriji matematike. Neki od njih su samo logički trikovi, neki su matematički tačne tvrdnje koje se intuitivno čine pogrešnima, a neki su ukazali na nepotpunosti u samim temeljima matematičkih teorija, zahtevajući vrlo kreativno razmišljanje.

Teorija skupova bila je stvorena radovima matematičara XIX veka koji su hteli da razrade osnovne matematičke analize, i prvi radovi iz te oblasti su bili posvećeni skupovima brojeva i skupovima funkcija. Za oca teorije skupova se smatra Georg Cantor.

Cantorova teorija o beskonačnim skupovima predstavljala je fascinantan materijal i početak velikih problema za logičare. Reakcije Cantorovih savremenika su bile snazne. “Niko nas neće prognati iz raja koji je Cantor za nas stvorio”, govorio je Hilbert.

Mnogi su se divili Cantorovoj apstrakciji, ali da li je to matematika i da li objekti o kojima se govori zaista postoje? Ispostavilo se da iz teorije skupova mogu da se izvedu zaključci koji su očigledno netačni. Počeli su da se pojavljuju paradoksi. Najpoznatiji paradoks otkrio je engleski filozof Bertrand Russell.

Te paradokse Gedel je kasnio opisao rečima “neverovatna je činjenica da je naša logička intuicija sama po sebi protivrečna”.

Otkrivanje paradoksa u teoriji skupova krajem XIX veka dovelo je do naglog razvoja matematičke logike, što je svakako uticalo kako na modernu matematiku, tako i na logiku kao filozofsku disciplinu.

Uopšte paradoksom nazivamo tvrdnju ili grupu tvrdnji koje vode do kontradikcije ili situacije koja je u suprotnosti sa intuicijom.

Uvodni deo ovog master rada obuhvata nastanak paradoksa, definicije i najstarije paradokse.

Prvi deo sadrži paradokse u teoriji skupova: Cantorova otkrića, Russellov paradoks, Richardov paradoks, Grellingov paradoks, Curryjev paradoks.

Drugi deo sadrži izbegavanje paradoksa.

Treći deo sadrži izraze sa nejasnim granicama.: paradoksgomile.

Četrvrti deo predstavlja aksiomatsko zasnivanje teorije skupova.

Peti deo predstavlja "nacrtane" paradokse; Mauritz Comeille Escher bio je jedan od najvećih holandskih umetnika i grafičara. Poznat je po svojim, najčešće matematikom inspirisanim bakropisima, drvorezima i drugim tehnikama gde se bavio oslikavanjem realno nemogućih konstrukcija, istraživanjem beskonačnosti i nedogleda, arhitekturom.

Na kraju naveden je zaključak i literatura koja je korišćena.

Zahvalna sam asist. M.Kneževiću koji se brinuo oko izrade ovog rada, ujedno i predsedniku komisije, kao i prof. M.Božiću i M. Obradoviću.

Milica Radojević Beograd, jun 2015.

"Ne postoji grana matematike, koliko god bila apstraktna, da jednog dana ne bi mogla biti primenjena u praksi"

Nikolaj Ivanovič Lobačevski

Uvod

Kada u običnom govoru kažemo da je nešto paradoksalno, podrazumevamo da je to “nešto” neostvarivo ili da je nemoguće.

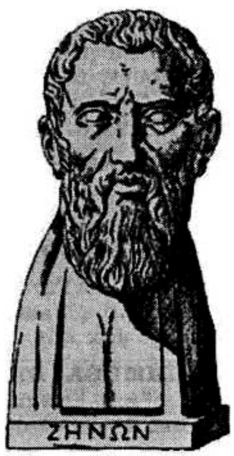
Paradoks predstavlja rasuđivanje koje nas obavezno dovodi do protivrečnosti, bez obzira koliko nam polazne pretpostavke izgledale tačne, a pravila rasuđivanja ispravna.

Učenja antičke filozofije su i danas inspirativna jer se u njima postavljaju pitanja koja se kasnije povlače kroz čitavu istoriju filozofije do današnjih dana. Grci najpre stvaraju nauku o prirodi. Grčki svet je rano postao dovoljno bogat da se u njemu rode prve filozofije.

Grčki filozofi pokazuju jednu zajedničku sklonost koju danas možemo opisati kao sklonost ka metafizici. Između Heraklitovog sveta u stalnoj promeni i pitagorejskog nepromenljivog sveta brojeva, koji se spoznaje, oni kao model biraju ono što je manje promenljivo jer im se čini da samo o njemu možemo imati pouzdana i trajna saznanja.

Filozofi Elejske škole, koju je osnovao Parmenid, pretvorili su ovu sklonost u precizan filozofski program. Parmenid kaže da postoje dva puta saznanja: put uma i put čulnog iskustva. Put čula kazuje nam o svetu u kome ima puno različitih stvari, koje se stalno menjaju i kreću, ali je sve ono što možemo da vidimo po Parmenidu lažno, prividno i ne govori nam ništa o onome što stvamo i bitno postoji.

Jedan njegov učenik je uzeo sebi zadatak da argumentima potkrepi ove Parmenidove tvrdnje o prividnosti promena, kretanja i mnoštva.



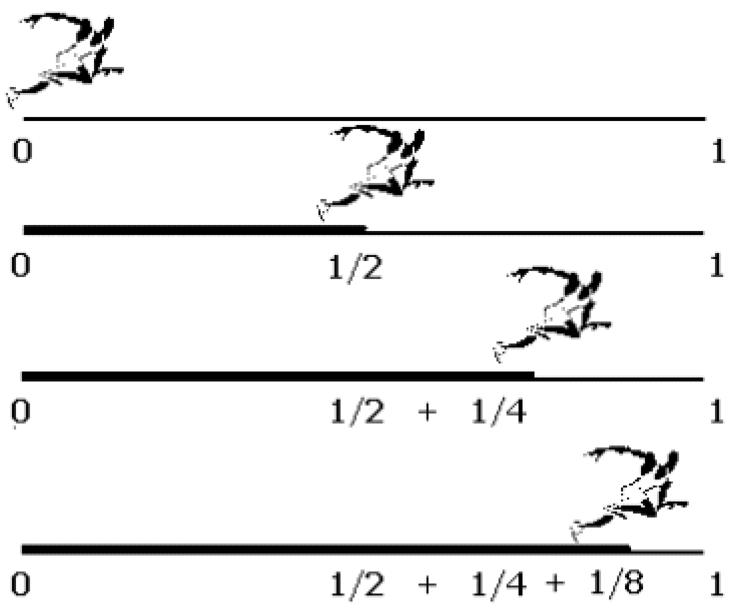
Slika br.1

Zenon je živeo oko 490-430 p.n.e, prvi je ukazao na paradoks koji ruši sam temelj logike našeg uma. Zenon je smišljao paradokse koji su govorili da su pojmovi koje smo formulisali opisujući čulni svet u sebi protivrečni i relativni.

Najpoznatiji Zenonovi paradoksi:

Dihotomija: Kretanje je nemoguće jer "ono što je u pokretu mora prvo preći pola puta pre nego što stigne do cilja". Zamislite stvar koja treba da ide od tačke A do tačke B. Da bi došla do tačke B stvar prvo mora doći do srednje tačke B1 koja je između tačka A i B. Ali, pre nego što se ovo dogodi stvar mora doći do tačke B2 koja je između A i Bl. Slično, pre nego što može i to uraditi, mora prvo doći do tačke B3 koja je između A i B2, i tako dalje. Prema tome kretanje nikada ne može početi.

A---------B3--------B2-------------------B1------------------------------B



Slika br.2

Ahil i kornjača: U njemu on pokazuje da u nekoj trci između brzonogog Ahila i jedva pokretne konjače, koja ima malu prednost na startu, Ahil nikada ne može stvarno da prestigne kornjaču. Kada Ahil dostigne polaznu tačku sa koje je krenula kornjača, ona je već prešla na drugu tačku. Rastojanje između Ahila i kornjače će se neprestano smanjivati, ali da ono nikada neće biti poništeno jer će kornjača uvek biti ispred Ahila za onoliko koliko je u međuvremenu prešla od staze, i tako u nedogled.

Paradoks strele: Dokazuje da strela koja leti u svakom pojedinačnom trenutku zauzima određeni položaj u prostoru, što znači da miruje, a nije razumno misliti da zbir mirovanja može da bude kretanje. Što znači da je to privid čula, i da kretanje zapravo ne postoji.

Stadion: Ukazivao je na relativnost kretanja koja je i danas činjenica nauke. U njemu čoveku koji je na kočiji koja se mimoilazi sa drugom kočijom njeno kretanje izgleda sporije nego što izgleda gledaocu sa tribina.

Predložena rešenja za *Ahila i kornjače*

Zamislimo da Ahil trči protiv kornjače. Ahil se nalazi u tački A, a komjača u tački K, na određenom rastojanju ispred njega. Ahil trči x puta brže, ali kada on stigne do tačke K, kornjača će se za neko rastojanje pomeriti u tačku Kl. Kada Ahil stigne u tačku Kl, kornjača će se odmaći od njega u neku tačku K2, itd. Odatle je zaključak da će kornjača uvek imati prednost nad Ahilom, nebitno koliko mala ona bila, to jest da Ahil nikada neće stiči kornjaču.

A_______K______K1____K2___K3

Objašnjenje za ovaj paradoks dao je Arhimed, 212. godine p. n. e, korišćenjem beskonačnog geometrijskog niza.

Beskonačni geometrijski niz konvergira ako i samo ako je apsolutna vrednost količnika njegovih susednih članova manja od 1. U tom slučaju se može izračunati suma tog niza i ona ima konačnu vrednost:

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

gde je **a** početni član niza, a **q** količnik ($0 < q < 1$).U slučaju da ova suma ne počinje od nule, nego od nekog broja m, formula dobija sledeći oblik:

$$\sum_{k=m}^{\infty} aq^k = \frac{aq^m}{1-q}$$

Objašnjenja za Zenonove paradokse su sledeća:

1. *Dihotomija.* Potrebno je primetiti da kao što se udaljenost smanjuje, vreme potrebno da se predje ta udaljenost, takodje se smanjuje. Takav pristup rešavanju paradoksa dovodi do demanta tvrdjenja da je potrebno beskonačno mnogo vremena da se predje konačna udaljenost. Arhimed je razvio metod da izvede konačni odgovor za beskonačno mnogo članova koji postaju progresivno manji. Ove metode dozvoljavaju konstrukciju rešenja koje kažu da (pod normalnim uslovima) ako se udaljenosti stalno smanjuju, vreme je konačno. Ta rešenja su u stvari geometrijski nizovi.

2. *Ahil i kornjača.*U slučaju Ahila i kornjače zamislimo da kornjača koja se kreće

konstantnom brzinom **v,** ima prednost od **d** metara. Ahil trči brzinom xv i da bi došao do tačke K1 treba mu **d/xv** vremena, dok kornjača za to vreme prelazi **d/x.** Da bi dostigao kornjaču, Ahilu je potrebno :

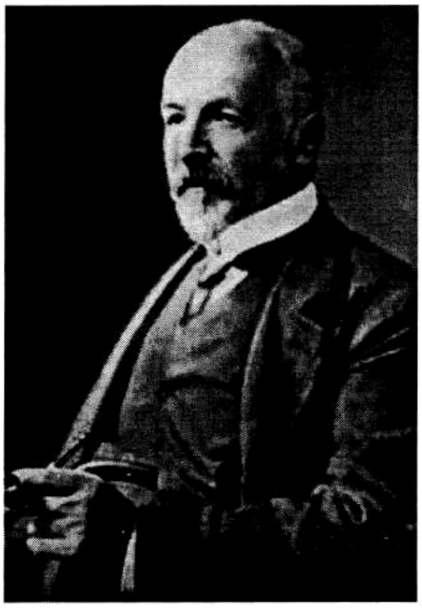
$$\frac{d}{v}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{n} = \frac{d}{v(x-1)}$$

Kako je ova konačna vrednost, zaključujemo da će Ahil dostići konjaču.

1. Paradoksi u teoriji skupova

Teorija skupova bila je stvorena radovima matematičara XIX veka koji su hteli da razrade osnovne matematičke analize, i prvi radovi iz te oblasti su bili posvećeni skupovima brojeva i skupovima funkcija. Za oca teorije skupova se smatra Georg Cantor.

Georg Cantor rođen je u Petrogradu, Rusija, 3. marta 1845, ali se sa 11 godina seli sa porodicom u Frankfurt. Otac odlučuje da njegov sin mora postati "blistava zvezda na tehničkom nebu", a Cantor je želeo da studira matematiku. Umro je u Haleu, Nemačka, 6. januara 1918.



Slika br.3

Bio je izuzetan nemački matematičar, utemeljivač teorije skupova. Smatra se da je on otac apstraktne teorije skupova, jer je prvi počeo razmatrati skupove sa proizvoljnim elementima.

Naknadnom analizom je zaključeno da je Cantor sve rezultate izveo oslanjajući se na tri aksiome, koje nigde nije jasno formulisao i precizirao. To su:

Aksioma jednakosti:

Dva skupa su jednaka ako i samo ako imaju iste elemente.

Aksioma apstrakcije:

Za svako svojstvo S, postoji skup X čiji su elementi upravo oni koji imaju svojstvo S.

Aksioma izbora:

Za svaku familiju {Xi: i ϵ I } nepraznih skupova, postoji bar jedna funkcija izbora , to jest funkcija x : i → UiϵI Xi, takva da za svako i ϵI važi x(i) ϵXi.

Cantorova otkrića iz tzv. Apstraktne teorije skupova u početku su se suočavala sa nepoverenjem i čak sa otvorenim protivljenjem većine matematičara, dok su filozofi uglavnom bili nezainteresovani. Tek se početkom devedesetih godina teorija skupova počinje naglo i široko primenjivati u analizi i geometriji. 1896 Cantor sreće prvi paradoks u svojoj teoriji, ali ga ne publikuje. Godinu dana kasnije Burali-Forti ponovo otkriva taj paradoks, publikuje ga i danas je on poznat pod imenom Burali-Fortijev[1] paradoks.

1.1. Burali-Fortijev paradoks (1897)

Po jednoj teoremi, dobro uređen skup W svih ordinala ima veći ordinal od svih elemenata od W. No, to bi značilo da je W veći od svih ordinala, pa i od samog sebe.
Dve godine kasnije Cantor otkriva sličan paradoks u teoriji kardinala (publikuje ga tek 1932).

1.2. Cantorov paradoks

Skup svih skupova nema strogo više podskupova nego članova.
Cantorov paradok dobio je ime po matematičaru Georgu Ferdinandu Ludvvigu Phillipu Cantoru (1845. - 1918.), koji je najviše poznat kao tvorac Teorije skupova. Rasprave o paradoksima, koji imaju svoje osnove u Teoriji skupova, pojavile su se krajem 19. veka. Cantorov paradoks nastao je 1899. godine kao posledica Cantorovog razmišljanja: „Šta je kardinalni broj skupa svih skupova?". Jasno je bilo da to mora biti najveći mogući kardinalni broj. Jedno od najčešćih stanovišta među matematičarima tog vremena jeste da takvi paradoksi, uključujući i Russellov, pokazuju da nije moguć "naivni" ili neaksiomatski pristup teoriji skupova bez pojavljivanja kontradikcija, a sigurno je da su upravo takvi paradoksi bili jedan od motiva nastanka aksiomatske teorije skupova (Zermelo). Nadalje, hrišćanski su teolozi, naprimer, videli Cantorov rad kao izazov za jedinstvenost apsolutne beskonačnosti Božje

[1] Cesare Burali-Forti, italijanski matematičar (1861-1931)

prirode.

Kardinalni broj

Postoje dve osnovne metode prebrojavanja skupova. Jednu smo naučili još kao mala deca - da bismo prebrojili objekte u nekom skupu, svakom objektu pridružimo naziv jednog prirodnog broja (jedna kuglica, dve kuglice, tri kuglice,...). Druga i verovatno starija metoda uključuje direktno upoređivanje članova dva skupa. Ako svaki objekt prvog skupa možemo pridružiti tačno jednom objektu drugog skupa, skupovi imaju jednak broj elemenata. Jasno nam je da ovim metodama možemo odrediti broj elemenata konačnih skupova. Cantor je otišao korak dalje i iskoristio drugu metodu za upoređivanje beskonačnih skupova, a veličinu skupa nazvao je *kardinalni broj.*

Kažemo da su dva skupa A i B ekvipotentni (istobrojni) ili bijektivni ako među njima postoji bijekcija.

Svakom skupu pridružujemo kardinalni broj card A, tako da svi ekvipotentni skupovi imaju isti kardinalni broj.

Naprimer, skup prirodnih brojeva i skup parnih brojeva imaju jednak kardinalni broj jer možemo uspostaviti bijekciju: $n \to 2n$ za svaki prirodni broj n. No, nisu svi beskonačni skupovi ekvipotentni.

Posmatrajmo partitivni skup, skup svih podskupova nekog skupa. Za skup

$$\{1,2\}$$

partitivni skup je

$$\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}.$$

Lako se možemo uveriti da za skup od n elemenata partitivni skup ima 2*n* elemenata (svaki element se ili nalazi ili ne nalazi u nekom podskupu, što nam daje *2n* različitih podskupova). Cantor je pokazao da za bilo koji skup *A* njegov partitivni skup ima veći kardinalni broj od *A*.

Cantorova teorema

Za bilo koji skup A, partitivni skup od A ima uvek veći kardinalni broj od samog A.

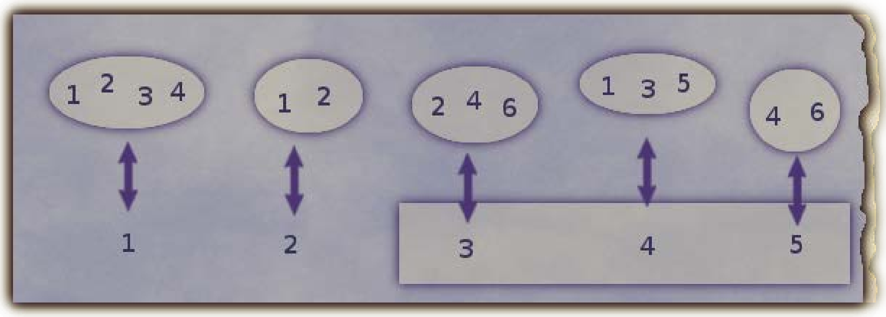
Dokaz.

Posmatrajmo skup A. Postoji bar jedan skup podskupova od A iste kardinalnosti kao A. To može biti skup koji sadržava sve takve skupove da je u svakom od njih tačno jedan element iz*A*.

Na primer, za skup {1, 2, 3} to je skup {{1},{2},{3}}. Neka je *S* partitivni skup od *A*.

Budući da pravila koja vrede za konačne skupove ne moraju vredeti za beskonačne, pretpostavimo da *S* ima isti kardinalni broj kao *A*. Pokazaćemo da je postojanje bijekcije između *A* i *S* u kontradikciji s definicijom skupa *S* kao partitivnog skupa od *A*. Zasad pretpostavimo da su obe tvrdnje istinite.

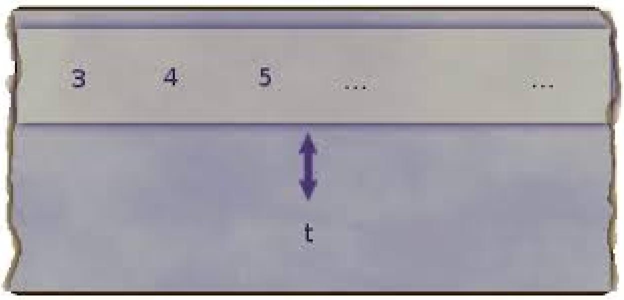
Tada svakom elementu iz *S* možemo pridružiti jedan element iz *A*. Neka je *Q* neki element iz *S*, to jest, podskup od *A*. Skupu *Q* pridružili smo neki element iz *A*. Taj element može se i sam nalaziti u *Q*, ali i ne mora.



Slika br.4

Primer: Brojevi 3, 4 i 5 pridruženi su skupovima u kojima se sami ne nalaze.

Neka je *a* element iz *A* koji je pridružen nekom skupu iz *S* tako da se sam *a* ne nalazi u njemu pridruženom skupu. Neka je T skup svih takvih elemenata iz *A*. Skup *T* očigledno je podskup od *A*. No, tada po definiciji skupa *S*, skup *T* mora biti element od *S*, te mu zato mora biti pridružen neki element iz *A*, nazovimo ga *t*. Nalazi li se *t* u skupu T ili ne?



Slika br,5

Primer: Skupu koji sadrži sve brojeve koji su pridruženi skupovima u kojima se sami ne nalaze pridružili smo broj *t*.

Po definiciji *T*, ako je *t* iz *A* pridružen skupu *T*, onda se sam ne sme nalaziti u *T*. Ali, ako *t* nije u *T,* onda sam mora biti element skupa kojem je pridružen. Došli smo do kontradikcije. Zaključujemo da ne postoji bijekcija između *A* i partitivnog skupa od *A.*

Paradoks

Cantor je u svojoj teoriji sam otkrio paradoks koji je, iako ga nije objavio Cantor, postao poznat kao Cantorov paradoks.

Pokazali smo da za svaki skup partitivni skup sadrži više elemenata od početnog skupa. Vredi li to i za skup svih skupova? Budući da skup svih skupova sadrži sve skupove, svaki njegov podskup mora biti i njegov član. Dakle, skup svih skupova ne može imati više podskupova nego što ima članova.

Paradoks je izazvao razne pokušaje revizije teorije skupova ne bi li se zaobišao. U danas najviše prihvaćenoj, aksiomatskoj teoriji skupova paradoks nije moguć jer "skup svih skupova" nije legitimna definicija skupa.

1.3. Russellov paradoks (1903)

Russelov paradoks još je jedan primer koji nam pokazuje da Cantorova teorija skupova sadrži kontradikcije. Izmislio ga je Bertrand Russell (1872. - 1970.), britanski filozof, logičar, matematičar, istoričar, sociolog, pacifist i društveni kritičar. Do otkrića je došao radeći na svojim *Principles of Mathematics,* gde je diskusiji te kontradikcije posvetio celo poglavlje. Iako postoje dokazi da su drugi matematičari, među kojima su i Zermelo i Hilbert, bili već svesni tog paradoksa, Russell je prvi detaljno opisao kontradikciju, pokušao formulisati rešenja i prvi je potpuno cenio njegovu važnost.

Najpoznatija verzija paradoksa je priča o brijaču koju je sam Russell iskoristio kao ilustraciju problema.

Pretpostavimo da postoji grad i u njemu samo jedan muški brijač; te da su svi muškarci u gradu redovno obrijani. Neki se briju sami, a neki dolaze brijaču. Razumno je zamisliti sledeće pravilo: Brijač brije sve i isključivo one muškarce koji se ne briju sami. U ovako zadanim uslovima možemo postaviti pitanje: Brije li brijač sebe?

No, sad vidimo da je zadana situacija nemoguća.

- Ako se brijač ne brije sam, prema pravilu se mora obrijati, jer je on taj koji brije muškarce koji se sami ne briju.

- Ako se brije, prema pravilu, mora prestati, jer ne spada u skup ljudi koje sme brijati.

Iskažimo paradoks u jeziku teorije skupova.

Često se susrećemo sa skupovima koji nisu sami svoji članovi, na primer skup svih gradova u Europi, skup svih studenata matematike, skup svih celih brojeva. Ali, na primer, skup svih skupova koji imaju više od jednog člana, sadržava sebe kao element jer je i sam skup s više članova.

Posmatrajmo sad skup svih skupova koji ne sadrže sebe kao element. Posmatrajmo skup $S=\{ X: X \neq X\}$ tj. skup svih skupova koji nisu elementi samog sebe. Da li je S element od S ili nije? Odgovor na to pitanje je kontradiktoran, jer po definiciji skupa S, S element od S <=>S nije element od S. *Pitanje je - sadrži li taj skup sebe kao element?*

Ako sadrži, tada nije ispunjen uslov da sadrži sve skupove koji ne sadrže sebe kao element, no, ako ne sadrži, onda ne sadrži *sve* skupove koji ne sadrže sebe kao element jer ne sadrži samog sebe. Došli smo do kontradikcije.

Russell je paradoks otkrio 1901.godine,obaveštava Fregea[2] pismom o svom otkriću, i publikuje paradoks 1903. godine. Istovremeno a nezavisno od Russella, taj isti paradoks razmatra grupa matematičara, sa Zermelom[3] na čelu, u Gettingenu. Russell i sam priznaje da je tad pokušavao pronaći grešku u Cantorovom dokazu da ne postoji najveći kardinalni broj. Godine 1908. bila su predložena dva rešenja paradoksa - Russellova Teorija tipova i Zermelova Aksiomatska teorija skupova.

Russellov paradoks je bio pravi šok za one matematičare koji su u to vreme bili okupirani problemima fundamenata. Tako, Dedekindov esej (1888) o prirodi i smislu brojeva bazira teoriju brojeva na relaciji pripadanja i koristi pojam skupa u Cantorovom smislu. Zbog Russellovog paradoksa Dedekind[4] je zaustavio neko vreme publikovanje svog eseja. Još neprijatnije se iznenadio Frege. On je tada baš bio stavio poslednje crte na svoj glavni rad o formalnim sistemima, kada mu je Russell pisao o svom otkriću. U prvim rečenicama apendiksa Frege priznaje da je Russellov paradoks poljuljao fundamente njegovog rada. Takođe, vodeći matematičar tog vremena, Poincare[5], koji je u početku propagirao primenu teorije skupova,

[2] Gottlob Frege, nemački matematičar (1848-1925)

[3] Ernst Fridrich Ferdinand Zermelo, nemački matematičar (1871-1953)

[4] Julius Wilhelm Richard Dedekind,, nemački matematičar (1831-1916)

[5] Jules Henri Poincare, francuski matematičar (1854-1912)

posle Russellovog otkrića se jednostavno okrenuo protiv te teorije.

Iako nije mogao da reši Russellov paradoks, sam Cantor nije ni za trenutak izgubio veru u svoju teoriju. Činjenica, da se i dalje češće govori o paradoksima a ne o kontradikcijama, pokazuje da većina matematičara, ipak, “ne želi da bude izgnana iz raja u koji nas je Cantor uveo”.

Otkrivanje paradoksa u teoriji skupova krajem XIX veka dovelo je do naglog razvoja matematičke logike, što je svakako uticalo kako na modernu matematiku, tako i na logiku kao filozofsku disciplinu. Da pokažem kako i zašto je Russellov paradoks toliko uzdrmao osnove matematike i logike, navedimo nekoliko paradoksa, koji imaju analognu strukturu kao Russellov paradoks, a formulisani su u veoma jednostavnim terminima.

Paradoks lažova :

Ovaj paradoks izveden je iz poznate konstrukcije kritskog filozofa Epimenida[6].

“ Ja sam Krićanin, a svi Krićani lažu.”

Očigledna je kontradiktornost gornje izjave. Naime, ako ja jesam Krićanin onda zbog njihove “lažljivosti” ja nisam Krićanin. Ovaj se paradoks može iskazati i na razne druge načine, npr.

“Ja lažem sada.” ili “Ova izjava je lažna.”

Prema nekim istoričarima, ovaj paradoks je prvi formulisao Eubulid iz Mileta (4.v.p.n.e.), koji ga je dao u obliku:

“Čovek kaže da laže. Da li je to što govori istinito ili lažno?”

Kad neko kaže “Ja lažem” (i ništa drugo), govori li on istinu ili laže? Ako pretpostavimo da govori istinu, to znači da laže (jer to njegov istiniti sud tvrdi), a ako pretpostavimo da laže, znači li to da govori istinu (jer ako laže da laže znači da ne laže). Izlazi da laže ako govori istinu, a da govori istinu ako laže. Drugim rečima, obe pretpostavke, i ona da govori istinu, i ona da laže, dovode do kontradikcije.

Da li je moguće da isti sud bude istovremeno istinit i neistinit?

Da li je moguće pokazati da je navedeni sud ipak samo istinit ili samo neistinit?

Nad ovim i sličnim pitanjima razbijali su glavu mnogi antički i srednjovekovni logičari, a jedan grčki logičar, kako piše na njegovom nadgrobnom spomeniku, čak je i umro uzalud pokušavajući da reši problem Lažova (“Putniče, ja sam Filipes, ubio me je argument onaj Lažljivi, i duboko noćno razmišljanje”).

[6]Epimanides, grčki filozof (VI/VII v.p.n.e.)

1.4. Richardov paradoks (1905)

Richardov paradoks je, u stvari, karikatura Cantorovog dijagonalnog postupka. Naime, posmatrajmo one realne brojeve između 0 i 1 koji se mogu okarakterisati rečenicom konačne dužine. Jasno, ovakvih brojeva ima prebrojivo mnogo. Poređajmo ih nekako u niz i neka je r broj sa osobinom “Na i-tom decimalnom mestu u zapisu broja r stoji 1, ako i-ti broj u tom nizu na i-tom decimalnom mestu ima cifru različitu od 1; inače, (ako i-ti broj u tom nizu na i-tom decimalnom mestu ima cifru 1) neka r na istom decimalnom mestu ima cifru 2.” Tada r istovremeno i mora biti na spisku a i ne može biti na tom spisku.

1.5. Grellingov paradoks (1908)

U ovom paradoksu razmatra se tzv. “samoprimenjivost” reči. Primetimo, naime, da neke reči imaju istu osobinu koju označavaju. Na primer, reč “srpski” je srpska reč, “višesložno” je višesložna reč, “apstraktno” je apstraktna reč, itd. Neke druge reči, pak, nemaju tu osobinu, na primer: “plavo”, “daleko”,...Nazovimo te reči *heterogene*. Pitanje je, da li je reč “heterogeno” heterogena ili ne?

Šta su zajedničke osobine svih ovih paradoksa? To je pre svega neka vrsta “samopozivanja’; dalje ključni pojam se definiše pomoću neke totalnosti kome i on sam pripada i u svim paradoksima imamo neko kruženje u argumentaciji.

1.6. Curryjev paradoks

Curryjev paradoks dobio je ime po američkom matematičaru Haskellu Brooksu Curryju, koji je osim po kombinatornoj logici poznat i po tome što su i dva programska jezika dobila po njemu ime - Haskell i Curry.

Ako je ova rečenica istinita, sve rečenice su istinite.

Curryjev paradoks pojavljuje se u naivnoj teoriji skupova i logici, a dopušta izvod proizvoljne rečenice iz rečenice koja se poziva na samu sebe.

Za primer uzmimo rečenicu:

Ako je ova rečenica istinita, mačke znaju da pričaju.

Znaju li mačke da pričaju? Pa, ako je gornja rečenica istinita, onda znaju. Iako možda ne verujemo da mačke pričaju ili da je gornja rečenica istinita, možemo se složiti da je izjava -ako je ova rečenica istinita, onda mačke znaju da pričaju - istina.

No, onda gornja rečenica *jeste* istinita, dakle, mačke znaju da pričaju. Nadalje, tvrdnju da mačke pričaju možemo zameniti bilo kojom tvrdnjom.

Kako bismo do zaključka došli formalno, označimo sa X tvrdnju da Y sledi iz istinitosti X. To možemo zapisati kao $X=(X\to Y)$. Dokaz sledi:

1. $X\to X$,
2. $X\to (X\to Y)$ *supstitucija desne strane u 1, jer je* $X=(X\to Y)$,
3. $X\to Y$ *iz 2, kontrakcijom,*
4. X *supstitucijom iz 3, jer* $X=(X\to Y)$,
5. Y *iz 4 i 3, modus ponens.*

Do rezultata možemo doći i u naivnoj teoriji skupova. Neka je $X=\{x|(x\in x)\to Y\}$. Primetimo da tada vredi: $x\in X\Leftrightarrow((x\in x)\to Y)$.

1. $X\in X\Leftrightarrow((X\in X)\to Y)$ definicija X,
2. $(X\in X)\to((X\in X)\to Y)$ iz 1,
3. $(X\in X)\to Y$ iz 2, kontrakcijom,
4. $((X\in X)\to Y)\to(X\in X)$ iz 1,
5. $X\in X$ iz 3 i 4, modus ponens,
6. Y iz 3 i 5, modus ponens.

Na ovaj način, bilo koja tvrdnja, bez obzira je li tačna ili nije, može biti dokazana. Matematička logika uopšteno ne dopušta rečenice koje se pozivaju na same sebe, no paradoks se pojavljuje u gotovo svim prirodnim jezicima. Rešenje Curryjeva paradoksa je trajni problem jer su rešenja (osim onih trivijalnih koja direktno ne dopuštaju *X)* komplikovana i neintuitivna. Logičari nisu odlučni oko toga jesu li takve rečenice nedopustive (i ako da, kako ih zabraniti), ili su beznačajne, ili su tačne i otkrivaju probleme u samom konceptu istine (i ako da, treba li koncept istine odbaciti ili promeniti).

1.7. Bertrandov paradoks

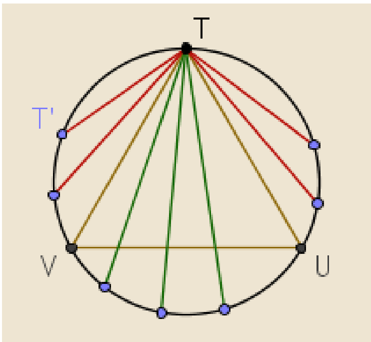
Bertrandov paradoks je problem iz verovatnće, koji je francuski matematičar Joseph Bertrand (1822. - 1900.) predstavio u svom delu *Calcul des probabilites* (1888.) kao primer koji pokazuje da verovatnoće ne moraju biti dobro određene ako metoda kojom generišemo slučajnu varijablu nije jasno zadana.

Paradoks glasi:

Kolika je verovatnoća da dužina slučajno odabrane tetive kruga bude veća od stranice u krugu upisanog jednakostraničnog trougla?

Prvo rešenje - slučajne krajnje tačke.

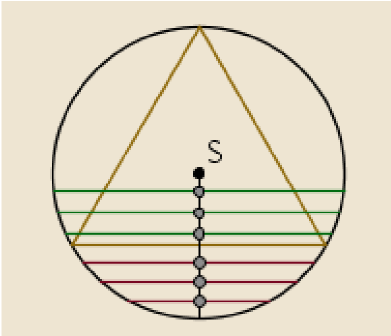
Izaberemo tačku ***T*** na kružnici i upišemo u krug jednakostraničan trougao **Δ*TUV*** sa vrhom u ***T***.Nakon toga izaberemo drugu tačku ***T'*** na kružnici i povučemo tetivu ***TT'***. Zatačke ***T'*** takve da ***TT'*** seče stranicu ***UV*** tetiva je duža od stranice trougla.
Budući da je dužina luka ***UV*** jednaka jednoj trećini obima kružnice, verovatnoća da je slučajno odabrana tetiva duža od stranice upisanog trougla je 1/3.



Slika br.6

Drugo rešenje - slučajna udaljenost od središta.

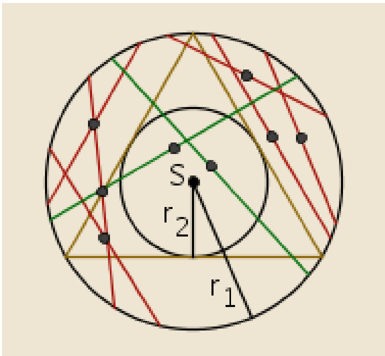
Izaberemo neki radijus i rotiramo trougao tako da je jedna stranica normalna na radijus. Izaberemo tačku na radijusu i konstruišemo tetivu čija je polovina odabrana tačka. Dužina tetive veća ja od dužine stranice trougla ako je udaljenost tetive od središta manja od polovine radijusa, pa je tražena verovatnoća 1/2.



Slika br.7

Treće rešenje - slučajno odabrana polovina tetive.

Izaberemo bilo koju tačku unutar kruga kao polovinu tetive. Ako tačka pada unutar trougla upisane kružnice, dužina tetive je duža od stranice trougla. Budući da je radijus upisane kružnice r_2 jednak polovini radijusa opisane kružnice, r_1 , površina upisane kružnice, $P= r_2^2 \cdot \pi$, jednaka je četvrtini površine zadanog kruga. Dakle, tražena verovatnoća je 1/4**.**



Slika br.8

Iako smo dobili tri različita rezultata, ni u jednom rešenju ne možemo pronaći grešku. Takođe, možemo napraviti tri različita fizička eksperimenta za svaku od navedenih situacija i potvrditi dobijene rezultate.

1. Dva puta zavrtimo kazaljku i označimo tačke na kojima se zaustavi.
2. Iz daljine bacamo slamke na mali krug.
3. Nasumice gađamo krug strelicama i tako odredimo polovinu tetiva.

Ne postoji jedinstvena metoda biranja slučajnih tački, pa ne možemo imati ni jedinstveno rešenje. Problem je u suštini potpuno zadat tek kad znamo metodu slučajnog izbora tački i tada ima dobro definisano rešenje.

Bertrandov paradoks - kratka analiza

- za isti problem dobili smo tri različita rešenja - ni u jednom pristupu nemožemo naći grešku,
- rešenje Bertrandovog problema zavisi od metode slučajnog izbora tetive zadate kružnice - budući ne postoji jedinstvena metoda slučajnog izbora tetive, niti rešenje nije jedinstveno,
- bez dodatnih informacija o metodi slučajnog odabira tetive nemamo razloga preferirati niti jedno od tri dobijena rešenja,
- jednoznačno zadana metoda slučajnog odabira tetive ⇒ jedinstveno rešenje Bertrandovog problema.

1.8. Paradoks Montyja Halla

Problem Montyja Halla je zagonetka verovatnoće koja se temelji na igri u okviru američkog show programa „Let's Make a Deal". Paradoks Montyja Halla dobio je ime po domaćinu showa, Montyju Hallu.

Zamislimo da u TV igri na sreću biramo jedna od tri zatvorenih vrata. Iza samo jednih nalazi se nagrada. Nakon što izaberemo vrata, voditelj otvori jedna od ostalih vrata, pokaže da iza njih nema nagrade, te nas pita želimo li promeniti izbor. Imamo li veće šanse za pobedu ako promenimo izbor?

Budući da igrač ne zna koja od preostalih vrata kriju nagradu, većina će pretpostaviti da je svejedno koja od zatvorenih vrata izaberemo, te da nema razloga menjati izbor. U suštini, u uobičajenoj interpretaciji problema (voditelj zna iza kojih vrata je nagrada i neće je pokazati), igrač bi trebao promeniti izbor jer time šansu za pobedu povećava sa 1/3 na 2/3**.**

Problem je u suštini zabuna pri računanju verovatnoće otvaranja vrata s nagradom u datim uslovima. Ovde smo ga uvrstili zbog njegove popularnosti i činjenice da je čak i neke poznate matematičare bilo teško uveriti u tačnost rešenja.

Kad je 1990. godine rešenje objavljeno u časopisu *Parade,* hiljade čitalaca poslali su žalbe tvrdeći da je objavljeni rezultat netačan. U odgovoru, autor članka pozvao je sve nastavnike matematike u školama da sa učenicima naprave sličan eksperiment sa šoljama i novčićem. Trebali su 200 puta da odigraju situaciju pogađanja bez promene nakon otkrivene prazne šolje, a zatim 200 puta s promenom izbora.

Jedan način kako tačno rešenje može postati više intuitivno je zamisliti isti slučaj sa 100 vrata, gde nakon što izaberemo jedna, voditelj otvori još 98 i pokaže da iza njih nije nagrada. Sad se nekako čini da su ipak šanse da smo prvi put izabrali jedna od pogrešnih vrata (verovatnoća za to je 99%) i da je dobra ideja promeniti odluku.

Pogledajmo jedno matematičko rešenje tog problema.

Rešenje uz pomoć Bayesove formule

Zadatak: Zadana su vrata označena brojevima 1, 2 i 3. Iza jednih je nagrada. Pretpostavimo da smo izabrali vrata broj 1. Voditelj, koji zna gdje je nagrada i neće otvoriti ta vrata, otvori druga vrata. Tada nam ponudi da promenimo prvi izbor. Hoće li u ovom trenutku promena izbora povećati verovatnoću pobede?

Rešenje. Označimo događaje da je nagrada iza danih vrata **s** A_1, A_2 i A_3. Tada je $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da smo već izabrali prva vrata. Označimo događaje da je voditelj otvorio jedna od zatvorenih vrata sa B_1, B_2 i B_3. Voditelj neće otvoriti vrata koja smo već izabrali, pa je $P(B_1)=0$. Bez prethodnog znanja o mestu nagrade, svakom od događaja B_2 i B_3 pridruži ćemo verovatnoću

50%: $P(B_2)=1/2$ i $P(B_3)= 1/2$.

- Ako je nagrada iza vrata broj 1, voditelj slučajno bira između vrata 2 i 3: $P(B_2|A_1)= 1/2$ i $P(B_3|A_1)= 1/2$.
- Ako je nagrada iza vrata broj 2, voditelj mora otvoriti vrata broj 3: $P(B_2|A_2)=0$ i $P(B_3|A_2)=1$.
- Ako je nagrada iza vrata broj 3, voditelj mora otvoriti vrata broj 2: $P(B_2|A_3)=1$ i $P(B_3|A_3)=0$.

Dakle, ako je voditelj izabrao vrata broj 2, po Bayesovoj formuli imamo:

$$P(A_1|B_2)=P(B_2|A_1)P(A_1) / P(B_2)=(1/2\cdot 1/3):1/2=1/3,$$

$$P(A_2|B_3)= P(B_2|A_2)P(A_2) / P(B_2)=0$$

$$P(A_3|B_2)= P(B_2|A_3)P(A_3) / P(B_2)=(1\cdot 1/3):1/2=2/3$$

Analogno dobijemo rešenje za B_3.

Vidimo kako je, ako voditelj otvori vrata broj 2, verovatnoća da ćemo nagradu naći iza vrata 3, dvostruko veća od verovatnoće da ćemo je dobiti ako ostanemo pri starom izboru.

1.9. Braessov paradoks

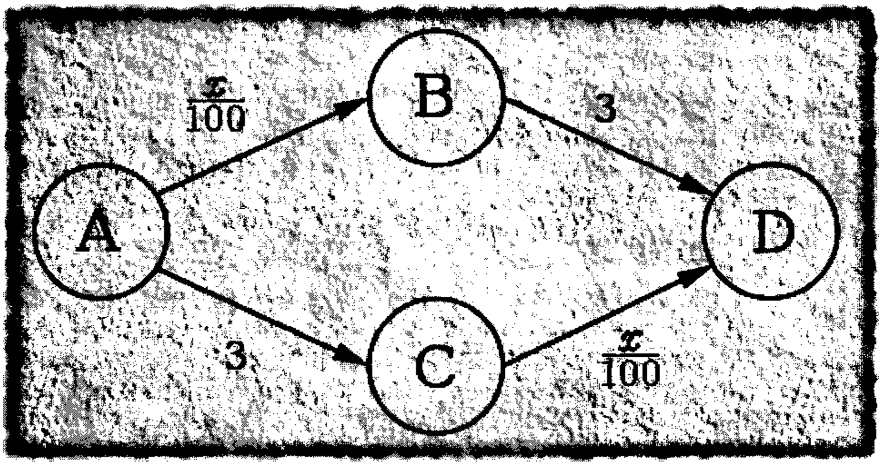
Braessov paradoks dobio je ime po svom tvorcu - matematičaru Dietrichu Braessu. 1968. godine Braess je predstavio primer problema stvaranja ravnoteže koji daje na oko paradoksalan rezultat. Odnosi se na iznenađujuće smanjenje (u smislu pogoršanja) u izradi nekih mreža kao rezultat dodavanja kapaciteta. Pojava ovog smanjenja proučavana je kao matematički model uravnoteženog toka u putnom (železničkom) saobraćaju,računarskim mrežama, telefonskim mrežama, sistemima za napajanje vodom, električnim krugovima i slično.

Braessov paradoks tvrdi da dodavanje kapaciteta mreži, u slučaju kad krećući entiteti sebično biraju put, u nekim slučajevima smanjuje ukupnu performansu.

Primeri iz stvarnog života:

- 1990. godine, 42. ulica u New Yorku bila je zatvorena, ali usprkos predviđenog zastoja, promet se poboljšao.
- Nakon što je 1969.godine u Stuttgartu konstruisan novi put, protok saobraćaja pogoršao se i postao je bolji tek nakon što je novoizgrađeni put bio zatvoren.

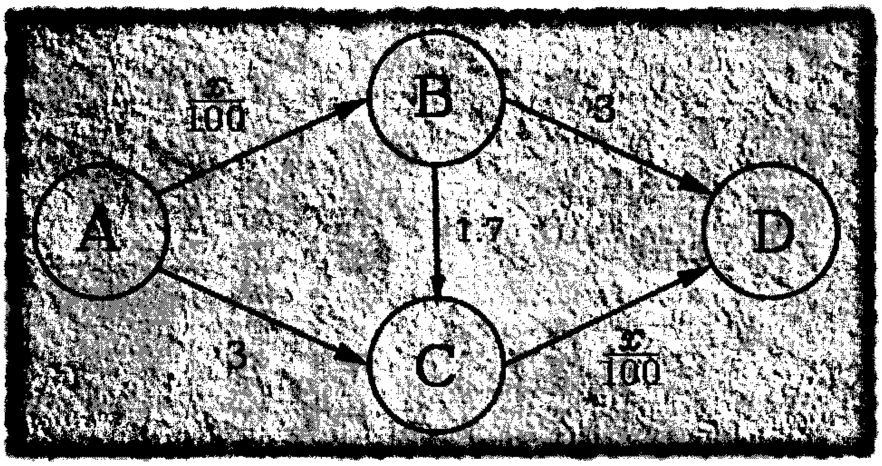
Pretpostavimo da 100 automobila putuje iz *A* u D, te da mogu voziti putem *ABD* ili putem *ACD,* kao na sl. 9. Cena svakog puta je vreme potrebno da se pređe put. Trajanje puta od *A* do *B* je x/100**,** gdje *je x* broj automobila na putu *AB.* Cena puta *BD* je 3, cena puta *AC* je isto 3, a cena puta *CD* je x/100**.**



Slika br.9

Pretpostavimo da će vozači na temelju iskustva izabrati put koji je za njih optimalan. Kad oba puta imaju jednak protok, mreža je u stanju ravnoteže. Ni jednom vozaču nije u interesu promeniti put jer bi time sebi povećao trajanje putovanja. U našem primeru to je slučaj za x = 50. Tada je cena puta za pojedini automobil jednaka 3.5.

Pogledajmo šta će se dogoditi ako izgradimo novi put *BC* cene 1.7 (sl. 10).



Slika br.10

Sad će vozač koji stigne u *B* nastaviti putem *BCD* jer je taj put i u najgorem slučaju (za x = 100) brži od BD. Put *BCD* ima najveću cenu 2.7.

Ali, ako svi krenu putem *ABCD*, vreme potrebno za dolazak iz *A* u *D* će postati 3.7, što je više nego pre izgradnje novog puta. Pojedini vozač ni sad nema razloga da izabere drugi put jer bi time povećao trajanje puta.

Vidimo da i pored toga što je svaki vozač izabrao najpovoljniji put za sebe, ni jedan od njih ne postiže vrednost koju bi mogli postići pri optimalnom protoku. Dodavanje puta postojećoj putnoj mreži dovelo je do sporijeg prolaska.

2. Izbegavanje paradoksa ili podele među matematičarima

Analiza paradoksa u naivnoj teoriji skupova je dovela početkom XX veka do različitih planova za njihovo odstranjivanje. Napomenimo, da u to vreme nije bilo jasno, šta bi mogla biti baza za eliminaciju Russellovog paradoksa. Osetila se potreba za skretanjem od uobičajenog mišljenja kako u logici tako i u matematici, ali nije bilo jasno gde učiniti to skretanje.

Suštinski se u modemoj matematici razlikuju tri matematička pravca: formalizam, intuicionizam i logicizam.

2.1. Formalizam

U najkraćem, formalizam teži zasnivanju potpunih aksiomatskih sistema. Tendencija potiče još od Euklida, a osnivač modernog pravca je Hilbert[7].

Ugao posmatranja matematičkih problema je sledeći: postoje *sintaksa* i *sematika*. Jedan formalista se ne bavi mnogo pitanjem sadržaja i istinosti u logičkom i filozofskom smislu.Hilbert je nameravao da stvori precizan i detaljan matematički jezik koji će omogućiti formalizaciju čak i samog čina matematičkog dokazivanja. Hilbert je zaključio da mogu postojati dokazi o egzistenciji nekog objekta koji se ne mogu sprovesti u konačnom broju koraka. Međutim, ukoliko bi takav dokaz narušio konvencije matematičkog izvođenja i dokazivanja, takvu grešku bismo mogli pronaći na sasvim konačan i izvodljiv način.Zaključuje se po *principu isključenja trećeg* (tj. stav ili jeste tačan ili nije tačan, formalno: p ili ne p) da su navedeni dokazi korektni jer nisu nekorektni. Iz ovakvog pristupa onda imamo (čit. **Novija Filozofija Matematike).**

“...Moramo ispitivati ne tvrdnje, već metode dokazivanja. Klasičnu matematiku moramo gledati kao kombinatornu igru osnovnim simbolima i moramo finitnim kombinatornim sredstvima ustanoviti do kojih nas kombinacija osnovnih simbola dovode metode konstrukcije ili “dokazi”.“

Još jedna važna crta formalizma jeste da pravi razliku između pojmova istinito i smisleno. Ovo je na neki način distinkcija između logičkog i formalnog jer npr. i 1+1-2 i 1+1=1 jesu (formalno) smisleni iskazi, gde je prvi tačan, a drugi nije, dok 1++1= ili =+1+1 nisu smisleni, pa se ne može ni govoriti o istinosti tih iskaza, odnosno formalnih zapisa.

[7]David Hilbert, nemački matematičar (1862-1943)

2.2. Intuicizam

Zajednička odlika svih do sada navedenih načina rešavanja problema zasnivanja matematike jeste nastojanje da se paradoksi izbegnu sa “što manje bola” i da se sačuvaju svi postojeći rezultati Cantorove teorije skupova. Za razliku od toga, intuicionistički pristup uklanja paradokse tako što radikalno menja logiku i time dovodi u pitanje čitave grane klasične matematike. Ideje intuicionizma prvi put su glasno izrekli Kronecker i njegovi saradnici (1870-1880). Kronecker je išao čak dotle da tu teoriju (a na žalost i samog Cantora) smatra “ludom” i ‘suviše divljom”, jednom reču, zaista neprimerenom matematici. Nov podstrek su dobili 1904. godine, kada je dokazana teorema o dobrom uređenju, tako da je 1907. Brouwer[8] eksplicitno definisao teze intuicionizma, dok Heyting [9] daje aksiome te teorije 1930. godine.Osnovna odlika intuicionista jeste što oni ne priznaju univerzalni karakter nekih osnovnih zakona logike i tvrde da se postojanje u matematici poklapa se konstruktibilnošću. Na primer, po intuicionističkom rezonu, zakon o isključenju trećeg (P ili ne P) doduše važi za konačne skupove, ali nema nikakvog opravdanja preneti ga na beskonačne skupove. Takođe, intuicionisti ne priznaju tzv. indirektne dokaze: tvrđenje “nije istina da za svako x važi P(x)” ne dokazuje postojanje objekta x sa osobinom ¬P(x). Ovakvo rezonovanje, po njima, može biti samo povod za traženje konstruitivnog dokaza. Drugim rečima, intuicionisti će priznati postojanje dotičnog objekta x samo ako imamo način za njegovu konstrukciju.

2.3. Logicizam

Logicisti su smatrali da je matematika deo logike i da za “popravljanje” osnova matematike pre svega treba intervenisati u logici.

U okviru logističkog pristupa izdvojimo Russellovu opštu teoriju klasa (tzv. teorija tipova). U toj teoriji Russell je ograničavao formule koje koristimo: naime, svakom objektu je dodelio nenegativan ceo broj (“tip” objekta) i formula xeY ima smisla samo ako je tip od Y za jedan veći od tipa x. U tako dobijenoj teoriji se zaista ne javljaju uočeni paradoksi, no, strogim prihvatanjem teorije tipova mnogi rezultati teorije skupova postaju nepotrebno složeni. Ta teorija skupova se kasnije nazvala New Foundation (NF), ali zbog svojih čudnih osobina (na primer nesaglasnosti sa Aksiomom izbora), ta teorija nikad nije postala opšte prihvaćena.

[8] Luitzen Egbertus Jan Brouvver, holandski matematičar (1881-1966)

[9] Arend Heyting, holandski logičar i matematičar (1898-1980)

3. Izrazi sa nejasnim granicama: paradoks gomile

3.1. “Sorites” paradoks: uvod

Zamislimo dva čoveka, od kojih je jedan za 1 mm viši od drugog. Prirodna pretpostavka je da su obojica visoki. Ako je jedan od njih recimo 195 cm, a drugi niži od njega za l mm, tada su obojica visoki. Ako je jedan od njih 155 cm, a drugi za 1 milimetar niži od njega, tada su obojica niski u prvom primeru. Prividno sasvim neškodljiva i nedvosmislena pretpostavka međutim dovodi do paradoksalne konkluzije, da su svi visoki ili niski u drugom primeru. Posmatrajmo seriju smanjenja visine koja kreće od 195 cm, gde je susedni član uvek 1mm niži. Jedan čovek od 195 cm je jasno visok. Prema našoj pretpostavci, visokim se smatra i svaka osoba koja je 194,9 cm visoka, tada su visoki i oni koji su od njih 1 mm niži. Tok razmišljanja se može nastaviti, i uskoro ćemo stići do apsurdne tvrdnje, da su i ljudi od 155 cm visoki - znači stvamo su svi visoki, što nije u skladu sa početnom pretpostavkom.

Drugi sličan primer:

Osoba koja ima 1000 dlaka kose, nije ćelava.

Ako osoba koja ima 1000 dlaka kose nije ćelava, onda nije ni ta osoba koja ima 999 dlaka.

Ovaj tok razmišljanja se može nastaviti i stićićemo do apsurdne izjave da osoba koja ima 1 dlaku kose takođe nije ćelava.

Jedan sličan tok razmišljanja su poznavali već i stari Grci, takve vrste paradoksa nazivamo na osnovu grčke reči soros (gomila) sorites paradoksi.

Originalni Sorites je sledeći:

Ako od jedne gomile peska oduzmemo jedno zmo peska, tada to što ostaje, još uvek sa pravom možemo smatrati gomilom peska, jer u suštini oduzimanje jednog jedinog zrna peska ne menja gomilu. Ako je u dve grupe zrna peska odstupanje među zrnima samo jedno, tada su obe ili nijedna gomile. Ova na privid potpuno neškodljiva i u svemu neprotivurečna pretpostavka dovodi do paradoksa, da je bilo koja ukupnost gomila, čak i ona koja se sastoji od jednog zrna.

Ključni pojam u oba slučaja je malo “nejasan”, drugačije rečeno nema jasne granice; takvi su “visoki”, “ćelavi” i “gomila”. Kod reči takve vrste će uvek postojati granični slučajevi, kod kojih nismo sigumi u to, da li se ta reč može koristiti, čak ni ako su nam na raspolaganju sve informacije, koje bi inače bile dovoljne za raščišćavanje stvari.

Može se desiti, da smo sa nečijom visinom u milimetre upoznati - ipak ne možemo da odlučimo da li je dotična osoba visoka.

Možemo posmatrati ukupnost zrna peska, može se desiti čak i to da tačno znamo broj zrna peska - ali to da li je gomila ili nije ipak ne možemo reći.

Danas smo svedoci pojavljivanja altemativnog aspekta, prema kojem je postojanje pojmova sa nejasnim granicama specijalni oblik neznanja. Prema ovom aspektu, epistemološkoj teoriji i u graničnim slučajevima ima činjenica, čak i ako će činjenice pred nama ostati zauvek nepoznate.

Ako se oslanjamo na stanovište epistemološke teorije (prema kojoj "nejasnoća" znači nedostatak u našem znanju) ili na stanovište klasične semantike (prema kojoj "nejasnoća" znači nedostatak jasnih granica), naš predmet moramo svakako da razlikujemo od relativnosti i dvosmislenosti, i do kraja moramo imati pred očima, da je reč o opštoj pojavi, koja se često javlja.

3.2. Sorites-paradoksi: izbori

U ovoj tački ćemo izbliza posmatrati specijalni oblik sorites- argumentacije, a na kraju analize pokušaćemo da se snalazimo među mogućim rešenjima.

Posmatrajmo na jednom primeru, kako se u argumentaciji tipa sorites pojavljuje "tolerancija" u izrazima sa nejasnim granicama.

1. Jedna ukupnost od 10 000 zrna je gomila
2. Ako je ukupnost koja se sastoji od l0000 zrna gomila tada je ista od 9 999 zrna isto gomila
3. Ako je ukupnost od 9 999 zrna gomila, tada je ona od 9 998 takođe gomila.

Ako je ukupnost od 2 zma gomila, tada je gomila i ona od 1 zrna.

Nastavljajući tok razmišljanja stižemo do toga, da je ukupnost od jednog ili pak 0 zrna takođe gomila, a to već ne možemo prihvatiti.

Odbacivanje premisa: epistemološka teorija

Prema epistemološkoj teoriji među gomilama i ne-gomilama granična linija je jasna, tako postoji manji n broj, da gomila koja broji n zrna više nije gomila, usled čega je tačno, ako je ukupnost koja se sastoji od n zrna gomila, onda je i ona gomila koja se sastoji od n-1 zrna.

Kako bi mogli imati jasne granice izrazi kao što su "gomila", odnosno "visok". Ako te granice postoje, gde se povlače, ako je sasvim jasno da to nije moguće. 10 000 pozitivnih ekstenzija zrna je istina za ove gomile jedna moguća gomila - jačanje „gomile“: dimenzija linije nije istinita, a iznad pozitiva nije ni neistinita negativna ekstenzija. Negativna ekstenzija 0 zrna na to je „gomila“ neistinita.

Odbacivanje argumentacije: stepeni istine

Sažetak ispitivanja. Od mogućih rešenja paradoksa lažljivca (sorites paradoks) u obzir smo uzeli tri: prihvatamo kranji zahtev paradoksa, odbacivanje argumentacije, nekih argumenata.

Odbacivanje premise

Pretpostavimo da gomila zrna peska počinju da se smatraju graničnim slučajevima "gomile" kod oko l00 zrna. Pogledajmo dole navedeni kondicionalni:

Ako je ovaj skup koji se sastoji od 95 zrna peska, tada je isti koji se sastoji od 94 zrna peska takođe gomila.

Ancetedent:

Ovaj skup koji se sastoji od 95 zrna peska je gomila.

Konsekvent:

Ovaj skup koji se sastoji od 94 zrna peska je gomila.

Moramo dati objašnjenje za to, kako možemo sa približno tačnim premisama da dođemo do sasvim lažne konkluzije.

Prema teoriji stepena istinitosti, ako je zaključak konkluzije oblika p^(p=>q) => q može imati manji sadržaj istine od sadržaja istine oba premisa. Kondicioniranje koje se odnosi na gore raspravljane gomile koje se sastoje od 95, odnosno 94 zma veoma blizu istini, stepen istinitosti se može utvrditi kao 0.99. Kažemo da je stepen istinitosti antecedenta 0.96, a konsekventa 0.95 tj. manji od antecedenta, kao kod stepena istinitosti kondicioniranja, a od njih se dobija primenom modusa ponensa. Ako dozvolimo samo "čiste" osećaje istinitosti, tada je važnost modusa ponensa nesumnjiv, naosnovu premisa sa 1 vrednošću ne možemo dobiti konkluziju manje vrednosti istinitosti, međutim ako istina može imati i unutrašnje stepene, tada modus ponens može rezultirati "isparavanjem" istine.

Jedan jedini takav korak ne znači veliki gubitak, međutim, ako to često koristimo - a u slučaju soritesovog paradoksa to radimo - "rezervoar se može čak i isprazniti." Modus ponens je samo tada važeća formula zaključivanja, ako se ne primeni suviše mnogo puta jedan za drugim.

3.3. Logika rasplinutih skupova

Logika nejasnih skupova (na engleskom jeziku: fuzzy logic) je jedna od logičkih semantika sa više vrednosti. U suštini pod nazivom fuzzy logika govorimo o celoj porodici teorija, koje imaju mnogostruku primenu, prvenstveno u informatici, ali nalazi svoju primenu i u semantici nauke o jezicima i logike, u matematičnoj logici i u teoriji verovatnoće.

3.4. Fuzzy krug razmišljanja

Filozofski fuzzy krug razmišljanja se vraća do stoika. Oni su bili ti, koji su prvi ukazali na to, da se ne mogu jasno odrediti granice sadržaja istinitosti naših prirodnih pojmova. Njihov klasičan primer je bila gomila, ili soritesov paradoks.

Nejasne granice oblasti istinitosti naših pojmova je sa matematičkog aspekta prvo ispitivao Lotfi A. Zadeh, profesor računarske tehnike na Berkley (SAD) univerzitetu, i to 1965. godine. On je dao i izraz fiizzy logika (engleski: fuzzy= rasplinuto, nejasno). On je to tako modelisao, da je uz svaku logičnu izjavu na neki način dodelio vrednost koja spada u jedan [0,1] zatvoreni interval. Prvobitno je definisao samo pojam fuzzy skupova, odnosno njegovih karakterističnih funkcija, pojam fuzzy funkcija. Napominjemo, da fuzzy logika ne dotiče pitanja baze matematike, pošto su propozicionalni i predikatne logike fuzzy modela takođe na tlu teorije o skupovima, kao i sistem teorije modela odnosno semantički sistem algebre. S druge strane i aspekti su jedna vrsta modeliranja nejasnosti pojmova, povrh toga još i sa realističkog (platonskog) aspekta. Naime na razumljiv način pretpostavlja, da je nejasna definicija pojmova prirodno svojstvo pojmova, i njihova srazmera je jasno određena.

Primene

Primena fuzzy logike se može naći u tehnici automatizacije, u pogonima, u lekarskoj tehnici, u zabavnoj elektronici, u industriji automobila itd. Fuzzy logika je najčešće tada korisna, ako ne stoji na raspolaganje mogućnost opisivanja određenog matematičkog problema, odnosno isti se ne bi ili bi mogao izraditi jedino uz ogroman trošak, ali je data svakodnevna verbalna, tekstualna formulacija. U takvim slučajevima na tekućem jeziku, odnosno u normalnom ljudskom razgovoru, od formulisanih rečenica i pravila uz pomoć fuzzy logike možemo dobiti takvu matematičku formulaciju, opis, koji se kasnije može primenjivati i na računarima.

4. Aksiomatsko zasnivanje teorije skupova

Pojam skupa predstavlja jedinstveni osnovni pojam kojim se gradi cela matematika.Za ovaj poduhvat dovoljan je prazan skup-ništa-vakum-ništavilo kao polazni gradivni element kao i neka fundamentalna svojstva - aksiome teorije skupova. Usredsređenost na ispitivanje beskonačnosti i bogatstvo u rezultatima već na samom početku (kraj XIX veka) izdvajaju ovu oblast u posebnu matematičku teoriju. Rešavanje nekih dosta elementarnih početnih pitanja dovelo je do velikih otkrića od najvećeg značaja za matematiku i matematičku logiku.

Problem beskonačnosti, odnos dela i celine, malog i velikog, privlači pažnju najranijih mislilaca i prisutan je u najstarijim sačuvanim tekstovima iz tog vremena.Posebno je interesantna detaljna rasprava između Parmenida, Zenona i Sokrata zabeležena u Platonovom dijalogu Parmenid. Nedugo zatim Euklid sastavlja čuvene Elemente[10], u kojima aksiomatski izlaže geometriju svoga doba. Implicitno se kod Euklida kao primitivni pojmovi javljaju pripadnost, presek, unija, komplement, kretanje i neprekidnost.Tako je tačka "ono čiji je deo ništa", tj.atom odnosno osnovni gradivni objekat, a složeniji geometrijski objekti se sastoje od tačaka, tj. predstavljaju skupove tačaka. Skupovni univerzum je sledeća apstrakcija geometrijskog univerzuma - prostora. Presek kao geometrijski koncept se javlja npr. kod preseka krugova, unija kod nadovezivanja duži, komplement kod dopunjavanja uglova do pravog ili opruženog ugla itd. Skupovi i operacije sa skupovima dobijaju u geometriji smisao koji je sasvim blizak i usklađen sa konceptima moderne teorije skupova.

Ne bez razloga, unutrašnji prostor uma u kome matematičari vide - razmišljaju, uobičajeno se poistovećuje sa nekom vrstom apstraktnijeg, svesadržavajućeg geometrijskog prostora, u čijim se dubinama, nakon raspakivanja kumulativnih definicija pomalja sveobuhvatni skupovni univerzum i sa njim velika dilema. Da li matematički sadržaji = svet matematičkih ideja postoji nekako nezavisno od nas i ovog sveta privida, što se uobličuje u matematički Platonizam, ili takav svet ne postoji, i matematičkim sadržajima, idejama i svojstvima pripada samo "postojanje" u našim umovima da ih mislimo i zapisima gde fizički postoje. Drugo stanovište deluje znatno "realnije", pragmatičnije, jednostavnije i po prinicpu minimuma obavezujuće prihvatljivije, i u tom slučaju matematičke konstrukcije i dokazi postoje samo kada su negde zapisani.

[10]više od 1700 izdanja do 1900. godine

S druge strane, sama praksa Evropskog racionalizma, sa opšte impregniranom matematikom u rasponima od submikro fizike do dinamike celokupnog kosmosa, od Turingovih kinematičkih mašina u molekularnoj biologiji, do modela složenih sistema kao što su komponente - podsistemi koje istražuju neurolozi, embriolozi ili populacioni genetičari, itd. ukazuje veoma sugestivno na neophodnost prisustva višeg reda u pojavnom svetu i to mnogo pre pojave čoveka i prvih teorema, milijarde godina ranije. Matematika te prakse se može zameniti samo nekom drugom matematikom i ne može se odstraniti već se mora prihvatiti kao princip koji zrači osnovu za uvođenje organizacije i reda koji se tu posle i dese.

Imamo jednu analogiju koja je tu od neke koristi, muzika. Osnovni atom muzike je pojedinačni zvuk/ton. Komad ili muzičko delo ima svoju algebarsko–kombinatornu strukturu, celina je nesvodljiva na svoje delove ili atome i nosilac je estetskog intenziteta. Kada u vremenu slušamo neko dobro delo, onda tek kad ono završi zaokružujemo percepciju njegovog delovanja i stižemo do ocene celine - lepo. Uvid u muzičko delo stičemo u vremenskoj struji koja ga nosi i zaokružujemo nakon njegovog završetka, pa se da zaključiti da je estetska mera muzičkog dela, naravno najvažnija karakteristika dela, transvremenska. Pitanje kada i gde postoji jedno muzičko delo liči na naša polazna pitanja. Pre Platona, ima navoda o Pitagorinom uvidu u jedinstveno rešenje.

Interesantno u vezi ovakve diskusije imamo invarijantu: bez obzira na eventualno opredeljenje po gornjoj dilemi ili potpuno neopredeljenje, svaki rezultat individualnog matematičara dopunjava veliko bogatstvo uz iskrice sreće. Centralno mesto u ovom rasuđivanju pripada matematičkom dokazu. Najvažnije u matematičkom dokazu je da isti bude korektno izveden korak po korak, tj. da se u individualnom koraku ispravno obavi elementarno zaključivanje verodostojnim operacijama nad polaznim istinama. Onda ispravnost celog dokaza dolazi po snažnom uverenju, da ako smo u pojedinačnim koracima obezbedili očuvanje istinitosti, da se onda ona očuvala do kraja. Prema nekim pouzdanim svedocima, kod Gödela se na kraju pojavio strah da mali zločesti liliputanci idu po knjigama i prepravljaju – kvare dokaze. Ako bi matematika postojala samo kao kulturna baština, poštedom preostalog drveća i prelaskom na elektronske medije, razlozi za Gödelov strah bi se ozbiljno umnožili, a pitanje dinamičkih zakonistosti u matematičkom delu Virtuelnog sveta dobija na aktuelnosti: da li je moguća neka sintaksna Esherova pletenica, preko lokalno konsistentnog do globalno nekonsistentnog.

U moderno vreme, kojim dominira aksioma praktičnosti i pragmatičnosti, ne bez razloga, postavlja se pitanje smisla istraživanja u teoriji skupova kao i same teorije skupova u celini. Teorija skupova je verovatno prva matematička teorija za koju se to pitanje postavlja. Tu imamo možda malo čudnu situaciju. S jedne strane, istraživanja u teoriji skupova omogućila su rešavanje i karakterizaciju teških i značajnih matematičkih problema. S druge strane, neka od tih rešenja predstavljaju kumulus višedecenijskih napora i dosta su složena i nepodobna za kratke prezentacije, pa se zato već duže vremena nameće pitanje koliko je to sve uopšte potrebno radnoj matematici, i tu imamo analognu situaciju odnosa između matematike s jedne strane i primenjenih istraživanja, pre svega fizike i tehnike, s druge strane. Primeni nisu potrebni složeni postupci i konstrukcije u dokazima matematičkih teorema kao ni moderna uopštavanja, već pre svega gotove formule I poneki algoritam koji se koriste u praksi. Ako teorija skupova i nije u mogućnosti da se pravda pred ovakvim zahtevima, može se reći da je njen estetski značaj markantan i da se u tom aspektu nazire i opipljivije rešenje pitanja kojima su se bavili sveti Anselmo, sveti Toma, Descartes i drugi mislioci.

Savremena teorija skupova nije nastala odjednom, već postepeno tokom više od pola veka, nalazeći svoje korene u velikoj reformi matematike iz XIX veka. Cauchy koristi do tada neviđenu strogost i preciznost u izlaganju, čime počinje formalizacija analize, proces u kome su učestvovali mnogi slavni matematičari poput Weierstrassa, Dedekinda, Dirichleta, Cantora, Peana i drugih. Tako u analizi, umesto isključivo izrazovskih funkcija, polako počinju da se razmatraju sve realne i kompleksne funkcije: Weierstrass konstruiše primer neprekidne realne funkcije koja ni u jednoj tački nije diferencijabilna, Dirichlet navodi karakterističnu funkciju skupa racionalnih brojeva kao primer realne funkcije koja nije neprekidna ni u jednoj tački, Peano konstruiše neprekidnu bijekciju segmenta [0, 1] na kvadrat [0, 1]×[0, 1] itd. Takođe se uvode i operacije sa familijama skupova - tipičan primer je Boltzano-Weierstrassova teorema po kojoj svaki ograničen niz realnih brojeva ima tačku nagomilavanja, gde se u dokazu koristi metoda polovljenja intervala.

Otkriće geometrije Lobačevskog iz 1829. godine, koje postaje široko poznato tek nakon posthumnog objavljivanja Gaussovih pisama (šezdesete godine XIX veka), zajedno sa Booleovom algebrom logike iz 1848. godine dovodi do ozbiljnog preispitivanja logičkih osnova na kojima je počivala dotadašnja matematika. Pojam formalne teorije I kvantifikatorski račun uvodi Gottlob Frege 1879.godine. Hilbertovi “Osnovi geometrije” iz 1899.godine predstavljaju paradigmu savremenog izlaganja jedne aksiomatske teorije. Nastavljajući

Fregeov rad, David Hilbert definitivno logiku uspostavlja kao matematičku disciplinu i formuliše osnovna pitanja vezana za formalni sistem poput potpunosti i neprotivrečnosti.

Sam početak teorije skupova vezuje se za decembar 1873.godine kada je Georg Cantor dokazao da realnih brojeva ima više od prirodnih, tj. da nijedno preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva nije na.Osim samog rezultata, kojim je pokazano da beskonačnost nije jedinstvena, i način dokaza je izuzetno važan. Naime, tada je prvi put upotrebljena tehnika koju zovemo Cantorov dijagonalni argument. Ubrzo Cantor dokazuje da je

$$|X| < |P(X)|$$

za svaki skup X, odakle sledi da, ukoliko za svaki skup X postoji njegov partitivni skup P(X), onda ne samo da beskonačnost nije jedinstvena, već imamo pravo raslojavanje različito brojnih beskonačnosti. Nastavljajući svoja istraživanja beskonačnih podskupova skupa realnih brojeva, Cantor uvodi transfinitne brojeve: ordinale kao tipove uređenja i kardinale kao tipove bijektivne korespondentnosti. Ordinalni broj (tip) skupa X Cantor je označavao sa $\bar{X}$, a kardinalni broj sa $\bar{\bar{X}}$.

Sa metodološke strane, posebno je važna Cantorova karakterizacija uređenja racionalnih brojeva, po kojoj se svako prebrojivo linearno uređenje može utopiti u uređenje racionalnih brojeva. Konstrukciju utapanja Cantor izvodi tehnikom koju danas zovemo Cantorov “back and forth” (nazad–napred) argument.

U prvoj polovini XX veka Cantorovu teoriju skupova nastavljaju da razvijaju Zermelo, Fraenkel, Hartogs, Hausdorff, von Neumann, Tarski, Banach, Kuratowski, Skolem, Zorn, Kurepa i drugi. Već na samom početku javljaju se pitanja - problemi koji u mnogome određuju dalji razvoj teorije skupova. Ovde izdvajamo četiri najznačajnija.

Aksioma izbora

Prvo formalno zasnivanje matematike bazirano na teoriji skupova predložio je Gottlob Frege. Njegov sistem se bazirao na dve aksiome:

- Aksioma ekstenzionalnosti : dva skupa su jednaka ako i samo ako imaju iste elemente;

• Shema sveobuhvatnosti: za svako svojstvo (formulu) ϕ postoji skup čiji su elementi tačno oni skupovi koji zadovoljavaju ϕ

Protivrečnost Fregeovog sistema (tačnije sheme sveobuhvatnosti) dokazao je Russell 1903.sledećim čuvenim paradoksom: po shemi komprehensije postoji skup S takav da za svaki skup X važi

$$X \in S \text{ ako i samo ako } X \notin X$$

Odavde sledi da $S \in S$ ako i samo ako $S \notin S$: kontradikcija.

Bez obzira na otkriće raznih paradoksa u Cantorovoj teoriji skupova (Cantor 1895., Burali-Forti 1896. itd) i kritika intuicionista (Brouwer, Weyl) i konstruktivista, preovladalo je uverenje da za formalni okvir izgradnje matematike treba uzeti neku neprotivrečnu modifikaciju naivne teorije skupova. Hilbertov odgovor na kritike Cantorove teorije skupova je odlučan:

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können

ili u prevodu: "Niko nas ne može isterati iz raja koji je za nas Cantor sazdao".

Russell i Whitehead su, pokušavajući da reš eproblem antinomija u Cantorovoj teoriji skupova, uveli teoriju tipova i u svojoj knjizi "Principia Mathematica" iz 1910. izložili izgradnju matematike na logičkim osnovama. U novije vreme teorija tipova nalazi primene u teorijskom računarstvu.

Prekretnicu u aksiomatizaciji nauke o skupovima predstavlja Zermelova aksioma izbora, formulisana 1908. godine:

Za svaku familiju X nepraznih skupova postoji funkcija izbora $f : X \to \bigcup X$ takva da za svaki $x \in X$ važi $f(x) \in x$.

Pomoću nje Zermelo dokazuje da se svaki skup može dobro urediti. Generativne aksiome, posebno aksioma partitivnog skupa, inspirišu Zermela u formulaciji kumulativne hijerarhije skupova. Definitivan oblik kumulativna hijerarhija dobija nakon Mirimanovljeve askiome regularnosti iz 1917., von Neumannove kanonske reprezentacije ordinala i definicije uređenog para Kuratowskog.

Zermelo i Fraenkel su formulisali aksiome teorije skupova na jeziku drugog reda.

Napomenimo da je jedina Frankelova aksioma shema zamene, koju on uvodi 1923. godine. Odgovarajuće formulacije u okviru predikatskog računa prvog reda dao je Skolem. Navedimo osnovne sisteme proistekle iz ove aksiomatizacije:

• ZFC se sastoji od ksioma praznog skupa, ekstenzionalnosti, para, unije, partitivnog skupa, beskonačnosti, regularnosti i izbora, kao i shema separacije i zamene, od kojih svaka ima prebrojivo mnogo instanci;

• ZF se dobija izostavljanjem aksiome izbora iz ZFC;

• ZF – P se dobija izostavljanjem aksiome partitivnog skupa izZF;

• ZFC− se dobija izostavljanjem aksiome regularnosti iz ZFC;

• ZF− – P – Inf se dobija izostavljanjem aksioma regularnosti, partitivnog skupa i beskonačnosti iz ZF.

Aksioma izbora je svakako najpoznatija aksioma teorije skupova, iz prostog razloga što su veoma brojni njeni važni ekvivalenti i posledice koje se javljaju u ostalim matematičkim disciplinama. Navedimo neke od njih:

Ekvivalenti

• Zermelova teorema. Svaki skup se može dobro urediti.

• Zornova lema. Ako svaki lanac u nekom parcijalnom uređenju ima majorantu, onda to uređenje ima maksimalni element.

• Hausdorffov stav maksimalnosti. Svaki lanac u proizvoljnom parcijalnom uređenju se može produžiti do maksimalnog lanca.

• Tihonovljeva teorema o proizvodu. Proizvod kompaktnih topoloških prostora je kompaktan.

• Donja Löwenheim-Skolem-Tarski teorema. Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$ koja ima beskonačne modele. Tada za svaki beskonačan model $\mathcal{M}$ teorije T i svaki X $\subseteq \mathcal{M}$, postoji elementarni podmodel $\mathcal{H}$ modela $\mathcal{M}$ takav da je X $\subseteq \mathcal{M}$ i

$$|\mathcal{H}| = \max\{\aleph 0, |X|, |For\ \mathcal{L}|\}.$$

Značajne posledice koje sadrže veliki deo AC:

- Hahn-Banachova teorema.

- Svaki vektorski prostor ima bazu.

- **Teorema o ultrafilteru**. Svaki filter proizvoljne Booleove algebre sadržan je u nekom ultrafilteru te algebre.

- **Stav kompaktnosti**. Ako svaka konačna podteorija neke teorije prvog reda ima model, onda i sama ta teorija ima model.

Protivnici AC uglavnom zameraju njenu nekonstruktivnost, inkompatibilnost sa aksiomom determinacije i inkompatibilnost sa totalnošću Lebesgueove mere. O interakciji aksiome izbora i Lebesgueove mere ćemo sa nešto više detalja govoriti nešto kasnije.

Relativnu konsistentnost aksiome izbora sa ostalim aksiomama teorije skupova dokazao je Gödel 1939. godine metodom unutrašnjih modela, a nezavisnost je dokazao Paul Cohen 1963. godine, kombinujući metode forsinga i unutrašnjih modela.

Od slabijih oblika aksiome izbora (tvrđenja koja su posledice aksiome izbora ali nisu njeni ekvivalenti) za teoriju skupova je posebno važna aksioma zavisnog izbora DC:

Ako je A neprazan skup i ako je R binarna relacija na skupu A takva da za svako a ∈ A postoji b ∈ A tako da bRa, onda postoji niz elemenata $\langle a_n | n \epsilon \mathbb{N} \rangle$ skupa A takav da

$$a_{n+1} R a_n$$

za svako n ∈ℕ.

Aksioma zavisnog izbora je posebno značajna u kombinaciji sa aksiomom determinacije AD, koja je protivrečna sa punom aksiomom izbora. Mnoge važne rezultate teorije ZF+DC+AD dali su Solovay, Woodin i drugi.

Kontinuum problem

Svakako, najvažniji problem teorije skupova je kontinuum problem. Njegovo rešavanje, koje i dalje traje, dovelo je do izuzetnih otkrića poput konstruktibilnog univerzuma, metode forsinga, pcf teorije, Ω-logike itd.

Apstrahujući ideju brojanja kao uspostavljanje bijektivne korespodencije između dva skupa, Frege uvodi kardinalne brojeve kao klase međusobno istobrojnih skupova. Tako skupovi ℕ, ℤ i ℚ imaju isti kardinalni broj, skupovi [0, 1] i ℝ imaju isti kardinalni broj, a skup ℕ ima manji kardinalni broj od skupa ℝ. Ovo poslednje Cantor dokazuje na sledeći način: ako je $\langle a_n | n \epsilon \mathbb{N} \rangle$ proizvoljan niz realnih brojeva, onda realan broj a $\in \mathbb{R} \setminus \{ a_n \mid n \in N\}$ definišemo na sledeći način:

• ceo deo broja a je 0;

• n-ta decimala broja a jednaka je 1 ukoliko je n-ta decimala broja a_n različita od 1, a inače je 0.

Dakle, niti jedan niz $\langle a_n | n \epsilon \mathbb{N} \rangle$ realnih brojeva ne iscrpljuje ℝ. Cantorova kontinuum hipoteza CH doslovno glasi: između kardinalnih brojeva skupova ℕ i ℝ nema drugih kardinalnih brojeva. Njena savremena reformulacija glasi

$$2^{\aleph_0}=\aleph_1,$$

pri čemu je ℵ0,ℵ1,ℵ2, . . . transfinitni niz alefa, tj. kanonskih predstavnika kardinalnih brojeva. Prvi rezultat vezan sa kontinuum hipotezu dokazao je upravo Cantor: ako je X zatvoreni beskonačan pod skup skupa realnih brojeva, onda je ili |X| = | ℕ|, ili je |X| = | ℝ| = 𝔠. Suslin dokazuje da kontinuum hipoteza važi za Borelove i analitičke skupove, tj. da za beskonačan analitički skup X važi |X| =| ℕ| ili |X| = 𝔠 . Njegovi radovi predstavljaju početak deskriptivne teorije skupova. Kontinuum hipoteza posebno dobija na značaju posle čuvenog Hilbertovog predavanja na svetskom kongresu matematičara 1900. godine, gde je kao prva uvrštena u spisak problema koje XIX vek ostavlja XX veku. Od tada je kontinuum hipoteza poznata i kao prvi Hilbertov problem.

Cantorova teorema, po kojoj je |X| < |P(X)| za svaki skup X, nameće i potrebu da se generalno odrede vrednosti kardinalne funkcije |X| ↦ |P(X)|. Bez aksiome izbora, već na samom početku nailazimo na teškoću:

$$|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$$

nalazi se van alef linije, koja predstavlja najbolju skalu za odmeravanje veličine beskonačnih skupova. Uz aksiomu izbora svaki beskonačan skup postaje dobro uređen, pa se za svaki skup X, |X| i |P(X)| smeštaju na alef pravu i zadatak se može zapisati kao određivanje funkcija F i f datih u identitetu

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{F(\alpha)} = \aleph_{\alpha+f(\alpha)}.$$

Navedimo samo poznatije rezultate vezane za kontinuum problem:

• **Gödel** Ako je teorija ZF neprotivrečna, onda je i teorija ZFC + GCH neprotivrečna;

• **Cohen** Ako je teorija ZF neprotivrečna, onda je i teorija ZFC + ¬CH neprotivrečna;

• **Easton** Na regularnim kardinalima kontinuum funkcija može imati maksimalnu moguću slobodu. Jedina ograničenja proističu iz Cantorove teoreme i Königove leme: $2^\kappa > \kappa \; i \; cf 2^\kappa > \kappa$;

• **Silver** Ako je κ singularan kardinal neprebrojive kofinalnosti i ako je $2^\lambda = \lambda^+$ za skoro sve (stacionarno mnogo) kardinala $\lambda < \kappa$ onda je i $2^\kappa = \kappa^+$;

• **Shelah** Ako je $\aleph_\omega$ jako granični kardinal, onda je $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega 4}$.

S jedne strane, kontinuum hipoteza važi za mnoge važne klase skupova, poput zatvorenih, Borelovih i analitičkih.Posebno je interesantna Kuekerova teorema, po kojoj CH važi i za grupu automorfizama prebrojivog modela prebrojivog jezika.

S druge strane, posebno je interesantan sledeći poznati ekvivalent negacije kontinuum hipoteze:

(∗) Neka je $[\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ familija svih najviše prebrojivih podskupova skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada za svaku funkciju $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$, postoje $x, y \in \mathbb{R}$ tako da

$$x \notin f(y) \text{ i } y \notin f(x).$$

Intuitivno, ukoliko slučajno biramo x i y tako da oni budu međusobno nezavisni, onda je verovatnoća da $x \notin f(y)$ i $y \notin f(x)$ jednaka 1, jer su f(x) i f(y) najviše prebrojivi skupovi.

(∗) ekvivalentno možemo reformulisati na sledeći način:

(∗∗) Za proizvoljan $A \subseteq [0,1]^2$ i $r \in [0,1]$ neka je

$$A^T = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in A\} \text{ I } A_r = \{y \in [0,1] \mid \langle r, y\rangle \in A\}.$$

Tada, za svaki skup $A \subseteq [0,1]^2$ takav da je A_r najviše prebrojiv za svako $r \in [0, 1]$, važi

$$A \cup A^T \subsetneq [0,1]^2.$$

Pokažimo da ovaj princip važi za Lebesgue merljive skupove. Zaista, neka je A Lebesgue-merljiv podskup od $[0,1]^2$ koji zadovoljava uslove principa (∗∗). Na osnovu Fubinijeve teoreme za Lebesgueov integral

imamo sledeće:

$$m(A)=m(A^T)=\iint_{[0,1]^2_{\mathbb{R}}} \chi(A)\,dm$$

$$=\int_0^1 \left(\int_0^1 \chi(A)|(x,y)dy\right) dx$$

$$=\int_0^1 0 \cdot dx = 0$$

gde je χ(A) karakteristična funkcija skupa A. Kako je $m\left([0,1]^2_{\mathbb{R}}\right) = 1$ mora biti i

$$A \cup A^{\mathrm{T}} \subsetneq [0,1]^2_{\mathbb{R}}$$

Suslinov problem

Suslinov problem je vezan za karakterizaciju uređenja realnih brojeva. Naime, Cantor je pokazao da je uređenje realnih brojeva do na izomorfizam jedinstveno gusto linearno uređenje bez krajeva koje je povezano u topologiji uređenja i separabilno. Suslin je postavio pitanje da li se uslov separabilnosti može zameniti uslovom c.c.c.[11] i da tako dobijeno uređenje ostane

[11]Countable Chain Condition.U ovom kontekstu u pitanju je prebrojiva celularnost, tj.uslov da nema neprebrojivo

izomorfno uređenju realnih brojeva. Ukoliko je odgovor negativan, tako dobijeno uređenje se naziva Suslinovom linijom. Suslinova hipoteza SH doslovno glasi:

Ne postoji Suslinova linija.

Prve rezultate vezane za Suslinov problem dao je naš matematičar Đuro Kurepa, koji je definisao pojmove Aronszajnovog, Suslinovog I Kurepinog drveta i dokazao da postoji Suslinova linija ako i samo ako postoji Suslinovo drvo.Preciziranje ovih pojmova zahteva sledeće definicije.

Pod drvetom podrazumevamo parcijalno uređen skup $\langle T, \leq \rangle$takav da je za svako x ∈ T skup {y ∈ T | y ≤x} dobro uređen. Za proizvoljan ordinal (kanonsko dobro uređenje) α definišemo α -ti sloj lev(α, T) drveta T kao skup svih x ∈ T takvih da je

$$\langle \{y \mid y \leq x\}, \leq \rangle \cong \langle \alpha, \epsilon \rangle.$$

Visina ht(T) je najmanji ordinal α takav da je lev(α, T) = $\emptyset$. Skup A ⊆ T je antilanac ako su svaka dva međusobno različita elementa skupa A neuporediva. Maksimalne lance u drvetu zovemo i granama. Neka je κ beskonačan kardinal. Drvo T je κ drvo ako je ht(T) = κ i ako je |lev(α, T)| <κ za svako α<κ.

Sada možemo definisati pojmove Aronszajnovog, Suslinovog i Kurepinog drveta:

• κ-Aronszajnovo drvo je κ drvo u kome nema lanaca dužine κ.
Posebno, Aronszajnovo drvo je ω_1-Aronszajnovo drvo;

• κ-Suslinovo drvo je κ drvo u kome nema ni lanaca ni antilanac dužine κ. Posebno, Suslinovo drvo je ω_1-Suslinovo drvo, a Suslinova hipoteza SH je ekvivalentna rečenici

Ne postoji Suslinovo drvo;

• κ-Kurepino drvo je κ-drvo koje ima bar κ^+ grana. Posebno, Kurepino drvo je ω_1-Kurepino drvo, a Kurepina hipoteza KH glasi

---

mnogo međ̄usobno disjunktnih otvorenihintervala.

Postoji Kurepino drvo.

Aronszajn je dokazao egzistenciju Aronszajnovog drveta.Jech i Tennenbaum su metodom forsinga dokazali da iz konsistentnosti teorijeZFC sledi konsistentnost teorije ZFC + $\neg$ SH, a Solovay i Tennenbaumsu metodom iteriranog forsinga dokazali da iz konsistentnosti teorije ZFC sledi konsistentnost teorije ZFC + SH.

Što se tiče Kurepine hipoteze, Levy je metodom forsinga dokazao da iz konsistentnosti teorije ZFC sledi konsistentnost teorije ZFC + KH, a Silver je metodom iteriranog forsinga dokazao da iz konsistentosti teorije ZFC + “postoji jako nedostiživ kardinal” sledi konsistentnost teorije ZFC + $\neg$ KH.

Problem mere

Kada je Lebesgue uveo pojam mere skupa, što u stvari predstavlja apstrakciju dužine za skupove na realnoj pravoj, sigurno da niko nije razmišljao da može biti nemerljivih skupova. Bez aksiome izbora i nema problema mere. Uz pomoć aksiome izbora Vitali je 1908. godine konstruisao primer Lebesgue nemerljivog skupa. Navedimo Vitalijevu konstrukciju.

Na [0, 1] definišimo binarnu relaciju $\sim$ sa

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Lako se proverava da je $\sim$ relacija ekvivalencije, kao i da je klasa ekvivalencije svakog $x \in \mathbb{Q}$ prebrojiva. Na osnovu aksiome izbora postoji skup A takav da za svako $x \in [0, 1]$ važi

$$|A \cap \{y \mid y \sim x\}| = 1.$$

Tada je skup A Lebesgue nemerljiv. Zaista, u suprotnom bi svaki od skupova

$$q + A = \{x + q \mid x \in A\}, -1 \leq q \leq 1 \wedge q \in \mathbb{Q},$$

imao istu meru kao i skup A (translatorna invarijantnost Lebesguove mere), a kako su skupovi q + A međusobno disjunktni i kako je

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (q + A) \subseteq [-1,2],$$

zbog σ aditivnosti Lebesgueove mere mora biti i

$$\mu([0,1]) = 1 \leq \mu\left(\bigcup_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (\mathrm{q} + \mathrm{A})\right) = \sum_{n-0}^{\infty} \mu(\mathrm{A}) \leq \mu([-1,2]) = 3$$

što je nemoguće, jer iz

$$1 \leq \sum_{n-0}^{\infty} \mu(\mathrm{A}) \text{ sledi } \mu(\mathrm{A}) > 0, a\ iz\ \sum_{n-0}^{\infty} \mu(\mathrm{A}) \leq 3 \text{ sledi } \mu(\mathrm{A}) = 0.$$

Ovaj Vitalijev primer je možda bio i prvi veliki razlog za odbacivanje aksiome izbora od strane samog Lebesguea i drugih velikana toga doba. Ipak, aksioma izbora, koja najlepše (dobro) uređuje moći skupova i unosi dosta reda u skupovni univerzum V opstala je kao princip koji se nikako ne može poništiti, a sa njom i nemerljivi skupovi tamo gde ona važi. Posebno za verovatnoću na realnim brojevima, to znači da obavezno postoje događaji bez verovatnoće kao i npr. da se svaki događaj može umetnuti između dva događaja bez verovatnoće. Da li i koje to posledice može eventualno da ima u naukama koje se bave realnim svetom, verovatno da niko još nije razmatrao.

Dakle, mera na ℝ koja je totalna, σ-aditivna i translatorno invarijantna ne može da postoji uz aksiomu izbora. Pošto je opstala snažna želja da se sve nekako premeri, to se skupilo u tzv.problem mere. Prvo je još dvadesetih godina prošlog veka Banach dokazao da postoji mera koja širi Lebesgueovu meru na sve skupove realnih brojeva (tj. na ceo P(ℝ)), ali da je ta totalna mera na Lebesgue nemerljivim skupovima samo konačno aditivna. Znači, slabljenjem σ-aditivnosti, dobijena je totalna mera koja širi Lebesgueovu meru i koja je saglasna sa aksiomom izbora. Ulam i Banach su 1930. dobili jedan neobičan rezultat. Uz ispuštanje translatorne invarijantnosti (dva skupa koji se translacijom dovode do poklapanja imaju istu meru), dokazali su da za totalnu σ-aditivnu meru μ na X mora da važi dihotomija

(i) |X| ≤c i μ je bezatomična, a |X| i kontinuum su veći ili jednaki od

prvog slabo nedostižnog kardinala, ili

(ii) |X| > c i μ je atomična - ultrafilter i |X| je veći ili jednak od prvog

jako nedostiživog kardinala.

Pitanje egzistencije ovakvih mera je ostalo otvoreno još blizu 40 godina. Prvo je prikupljena evidencija o stvarnoj veličini skupa nosača binarne σ -aditivne netrivijalne mere u slučaju (ii), što je povezano sa izuzetno jakim aksiomama beskonačnosti. Potom je Robert Solovay došao do sledećih otkrića. Dokazao je da ako je teorija ZF neprotivrečna, onda je neprotivrečna i teorija ZF + DC + "svaki skup realnih brojeva je Lebesgue merljiv". Time je tačno određen stepen konflikta aksiome izbora i želje da Lebesguova mera bude totalna. S druge strane, Solovay je dokazao ekvikonsistenciju sledećih teorija

1. ZFC + "postoji totalna _-aditivna mera koja širi Lebesguevou meru" i

2. ZFC + "postoji merljiv kardinal",

čime je problem mere doveden u direktnu vezu sa vrlo jakom aksiomom beskonačnosti. Posledično, (i) i (ii) iz Ulam-Banach teoreme su ekvikonsistetni do na ZFC.

Solovayev metod je omogućio i rešenje preko pedeset godina otvorenog problema metrizacije topoloških prostora (Kunen, Nykos, Fleissner 80/84). Napomenimo da u modelu za 1. nastupa veliko nadimanje realnog kontinuuma ℝ, da tamo važi

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \cdots\cdots = 2^{\lambda}$$

za svaki kardinal $\lambda < \mathfrak{c}$, da između $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$ ima $\mathfrak{c}$ mnogo različitih beskonačnosti i da je kontinuum veći ili jednak od prvog slabo nedostiživog kardinala. Kao što neko reče, sve je povezano.

Banach Tarski paradoks

Izuzetno lep primer interakcije aksiome izbora i Lebesgueove mere je sledeći rezultat Banacha i Tarskog iz 1924.godine, poznatiji kao Banach Tarski paradoks:

Jedinična lopta B = $\{\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ se može razložiti na 11 delova, od kojih se izometrijskim transformacijama mogu sastaviti dve disjunktne jedinične lopte.

U jačoj formi Banach Tarski paradoks ima sledeću formulaciju:

Svaka dva ograničena lika u $\mathbb{R}^3$ sa nepraznim interiorom su razloživo jednaka, tj. postoji dekompozicija jednog od njih na konačno mnogo delova, od kojih se

izometrijskim transformacijama dobija dekompozicija onog drugog.

Naravno, paradkosalna dekompozicija je nemoguća sa Lebesgue merljivim delovima, odakle sledi da se aksioma izbora ne može ispustiti u dokazima ovih tvrđenja. Prvi korak učinio je Hausdorff 1914. Godine dokažavši da grupa rotacija jedinične sfere

$$S = \{\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

čije ose sadrže koordinatni početak ima slobodnu podgrupu G sa dva generatora, recimo a i b. Koristeći ovo, Hausdorff pokazuje sledeći rezultat, tzv. Hausdorffov paradoks: Postoji E ⊆ S takav da važi:

1. Četiri kopije skupa E pokrivaju sferu S;

2. S sadrži prebrojivo ($\aleph_0$) mnogo disjunktnih kopija skupa S. Dokažimo ovo. Neka je G pomenuta slobodna grupa sa generatorima a i b. Na S definišimo relaciju ∼sa

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists g \in G) y = g(x).$$

Očigledno je ∼ relacija ekvivalencije.Kako je grupa G prebrojiva, svaka klasa ekvivalencije relacije ∼ je takođe prebrojiva. Neka je A unija svih klasa koje sadrže bar jednu fiksnu tačku neke neidentičke rotacije iz G. Svaka rotacija ima tačno dve fiksne tačke (presečne tačke ose rotacije sa sferom S), pa kako je $|G| = \aleph_0$, i skup A je prebrojiv kao prebrojiva unija prebrojivih skupova.

Na osnovu aksiome izbora, postoji B ⊆ S takav da je za svako x ∈ S,

$$|x_\sim \cap B| = 1$$

(ovde je $x_\sim = \{y \in S \mid x \sim y\}$). Neka x ∈ S \ A. Tada x nije fiksna tačka nijedne od rotacija iz G, pa $x \notin x_\sim \cap B$. Ako je $\{y\} = x_\sim \cap B$, onda je prema prethodnom $x \neq y$ i $x \sim y$, pa postoji $g_x \in G$ tako da je $x = g_x(y)$. Neka je

$$C = \{a^k f \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \wedge f \in G\}$$

(npr. $a^2 f = a \circ a \circ f$) i neka je

$$E = \{x \in S \setminus A \mid g_x \in C\}.$$

Za m ≠ n su skupovi b^m [E] i b^n [E] disjunktni. Zaista, pretpostavimo da postoji x ∈ E tako da je

$$b^m(x) = b^n(x).$$

Tada je

$$b^m b^{-n}(x) = x,$$

tj. x je fiksna tačka neidentičke rotacije $b^m b^{-n}$ iz G (b je slobodni generator), što je u suprotnosti sa definicijom skupa E.

Preostaje da pokažemo da četiri kopije skupa E pokrivaju sferu S. S jedne strane, C ∪ aC = G (aC = {ag | g ∈ C}), odakle sledi da je S \ A ⊆ E ∪ a[E]. S druge strane, A je prebrojiv, a kako je grupa rotacija sfere S čiji centri sadrže koordinatni početak neprebrojiva, postoji rotacija r iz te grupe takva da je

$$A \cap r[A] = \emptyset.$$

Odavde je r[A] ⊆ E ∪ a[E], tj. A ⊆r^{-1} [E] ∪ r^{-1}a[E], a time i

$$S \subseteq E \cup a[E] \cup r^{-1}[E] \cup r^{-1}a[E],$$

čime je Hausdorffov paradoks dokazan.

Da bismo dokazali Banach Tarski paradoks, dodatno precizirajmo razloživu jednakost. Kažemo da su skupovi A,B ⊆$\mathbb{R}^3$ razloživo jednaki sa n delova, u oznaci A $\sim_n$B, ukoliko postoje međusobno disjunktni neprazni podskupovi $A_1, \ldots, A_n$ skupa A i izometrije $f_1, \ldots, f_n$ prostora $\mathbb{R}^3$ takvi da je:

- A = $A_1 \cup \cdots \cup A_n$;

- B = $f_1[A_1] \cup \cdots \cup f_n[A_n]$;

- $f_i[A_i] \cap f_j[A_j] = \emptyset$ za i≠ j.

Neposredna posledica Cantor-Bernstajnove teoreme je sledeće tvrđenje (u $\mathbb{R}^3$): ako je X ⊆ A, Y ⊆ B, A $\sim_m$ Y i X $\sim_n$ B, onda je

$$A \sim_{m+n} B.$$

Paradoksalnu dekompoziciju jedinične lopte vršimo na sledeći način. Dodatno notaciji iz Hausdorffovog paradoksa, neka je

$$E^* = \bigcup \{xE | 0 < x \leq 1\}$$

i neka je t translacija prostora $\mathbb{R}^3$ takva da koordinatni početak pripada skupu t[E^*]. Primetimo da je tada

$$B \subseteq E^* \cup aE^* \cup r^{-1} [E^*] \cup r^{-1} a[E^*] \cup t[E^*].$$

Neka je X_1,...,X_5 particija jedinične lopte određena prethodnim pokrivanjem i neka je B′ jedinična lopta disjunktna sa loptom B. Kako se dve disjunktnie kopije skupa E mogu rasporediti na sferi S, to se dve disjunktne kopije skupa E^* translacijama i rotacijama mogu smestiti u loptu B. Ako u svaku od te dve kopije rasporedimo redom kopije X'_1,...,X'_5,X''_1,…,X''_5 skupova X_1,...,X_5 dobijamo pokrivanje skupa B ∪ B′. Dakle,

$$X'_1 \cup \cdots \cup X'_5 \cup X''_1 \cup \cdots X''_5 \sim_{10} B \cup B',$$

B $\sim_1$ B, B ⊆ B ∪ B′ i $X'_1 \cup \cdots \cup X'_5 \cup X''_1 \cup \cdots X''_5 \subseteq$ B, pa je na osnovu pomenute posledice B $\sim_{11}$ B ∪ B′.

5. Mauritz Corneille Escher i paradoksi

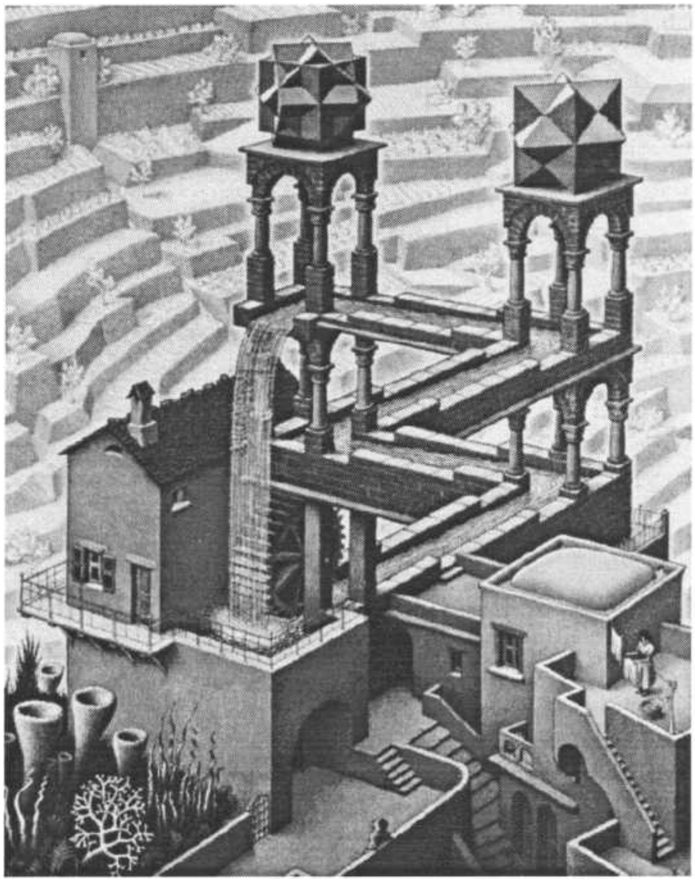
M. C. Escher, rođen je u Leuvardenu 1898.godine. Svoja prva saznanja o crtanju dobio je u srednjoj školi od F. V. van der Hagena, koji ga je naučio tehnici rezanja linoleuma. Od 1919. do 1922.godine studirao je grafičku tehniku kod S. Jeserun de Meskita, čija je snažna ličnost uticala na Escherov dalji umetnički razvoj. Escher je tokom svog života, napravio 448 litografija, drvoreza i preko 2000 crteža.Pored toga što je grafički umetnik Escher je ilustrovao mnoge knjige, dizajnirao tapiserije, poštanske marke. 1922. je otišao u Italiju i 1924. se nastanio u Rimu. Tokom svog desetogodišnjeg boravka u Italiji bio je na više studijskih putovanja. Italiju napušta 1934., provodi dve godine u Švajcarskoj i pet u Briselu, a zatim se nastanjuje u Barnu (Holandija), gde umire 27. marta 1972. godine.

Slika br.11

Escher je bio jedan od najvećih holandskih umetnika, grafičara. Poznat je po svojim, najčešće matematikom inspirisanim bakropisima, drvorezima i drugim tehnikama gde se bavio oslikavanjem realno nemogućih konstrukcija, istraživanjem beskonačnosti i nedogleda, arhitekturom ...

Ono što je on radio, danas, uz pomoć raznih pomagala, kompjuterskih efekata i sličnih trikova, ne bi bilo toliko impozantno, ali u njegovo vreme, je zaista bilo nešto prvi put viđeno.

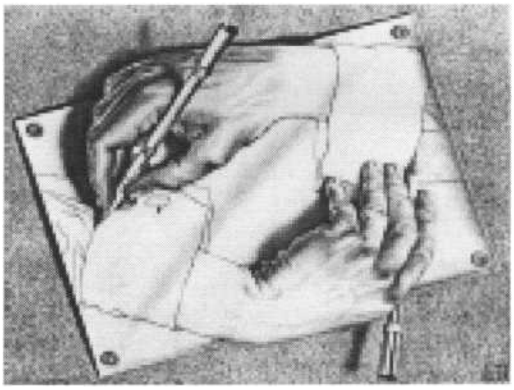
Vodopad (1961)



Slika br.12

Sastavljen je od kvadratnih greda koje se oslanjaju jedna na drugu pod pravim uglom. Ukoliko sledimo različite delove ove konstrukcije, jedan po jedan, nismo u stanju da otkrijemo nikakve greške na njoj. Ipak celina je nemoguća, jer se iznenada pojavljuju promene u tumačenju rastojanja između i oko objekta. Nemogući trougao je tri puta uklopljen u ovu sliku. Voda koja pada održava mlinski točak u pokretu i posledično teče duž iskošenog kanala, između dve kule, krivudajući nadole ka tački gde vodopad iznova započinje svoj tok. Vodeničar jednostavno treba da doda puno vedro vode s vremena na vreme da bi nadoknadio gubitak usled isparavanja. Dve kule su iste visine a ipak je ona desno za sprat niža od leve.

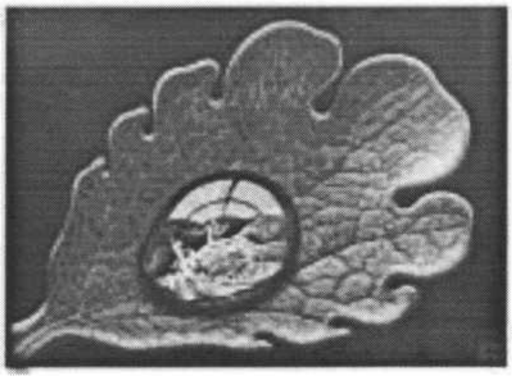
Ruke koje crtaju (1948) - litografija –



Slika br.13

List papira za osnovu pričvršćen je špenadlama za crtanje. Desna ruka je zauzeta skiciranjem manžetne košulje. U toj tački rad je nedovršen, ali je malo dalje udesno već iscrtana leva ruka, koja se pojavljuje iz rukava tako detaljna da upravo napušta ravnu površinu i u svom obrtu skicira manžetu iz koje se pojavljuje desna ruka, potpuno oživljena.

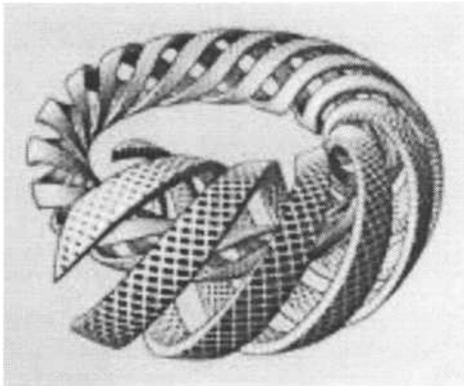
Kap rose



Slika br.14

Ovaj list sočne biljke bio je u stvari dugačak oko jednog inča. Na njemu leži kapljica rose koja prikazuje odsjaj prozora i istovremeno služi kao sočivo koje uveličava strukturu žila lista. Staromodno oblikovana vazdušna rupa beličastog odsjaja uhvaćena je u zamku između lista i kapljice rose.

Spirale



Slika br.15

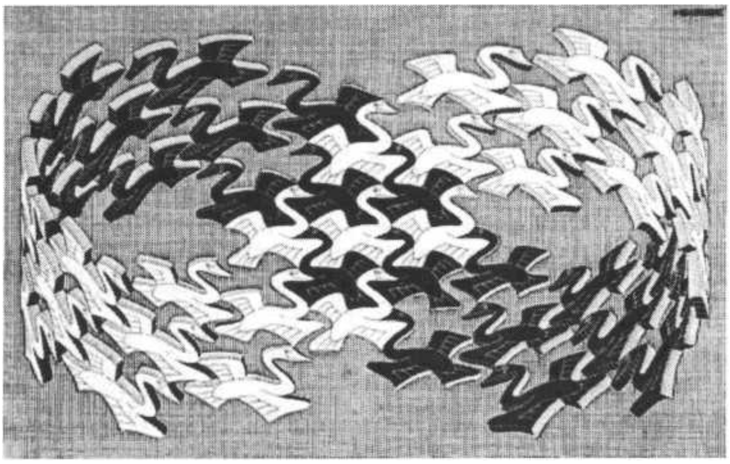
Četiri spiralne trake spajaju se u formu zakrivljenog creva koji se kao torus koji se sužava vraća gde je i započelo, prodire u sebe i počinje svoj drugi krug.

Sunce i mesec

Slika br.16

Tema ovog duboreza je kontrast između dana i noći. Dan je kada sunce sija u centru, kada sunce isijava žute i crvene zrake. Nasuprot ovoj pozadini stoji četmaest tamno plavih ptica. Kada ih oslobodimo funkcije objekata i smatramo ih za pozadinu, onda se pojavljuje četrnaest svetlo obojenih ptica nasuprot noćnom nebu, sa mladim mesecom u centru i sa zvezdama, planeta i kometom.

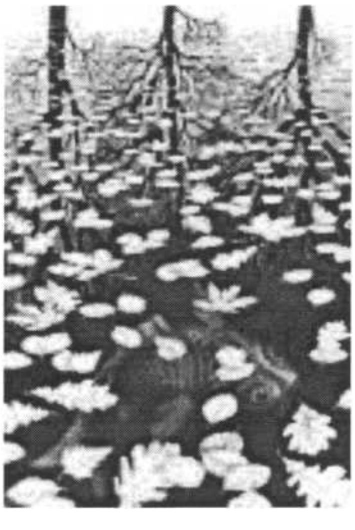
Labudovi (1956)- graviranje drveta –



Slika br.17

Klizaće refleksije leže u zatvorenom krugu koji je oblikovan kao položeni ležeći broj osam.

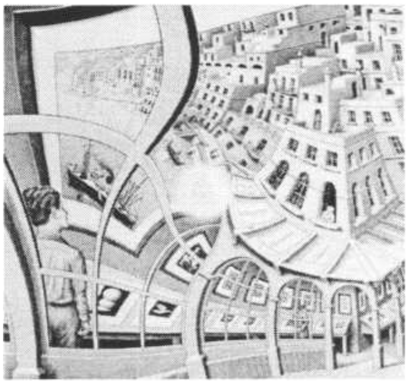
Tri sveta (1955) - litografija –



Slika br.18

Slika jezera u šumi čine tri elementa: jesenje lišće koje ukazuje na površinu vode koja se povlači, odsjaj tri drveta u pozadini i u prvom planu riba vidljiva kroz bistru vodu.

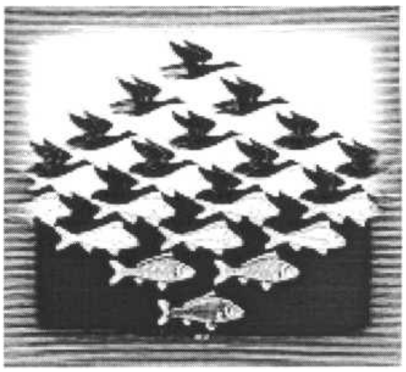
Grafička galerija (1956) - litografija



Slika br.19

Kao varijacija na temu grafike Balkon, odnosno na temu uvećanja samog centra, imamo širenje koje se u smeru kazaljke na satu, zakrivljuje oko praznog centra. Prolazimo kroz vrata dole desno ka izložbenoj galeriji gde su gravure na zidovima. Najpre prolazimo kraj posmatrača, čije su ruke na leđima, i onda u donjem levom uglu srećemo mladića koji je četiri puta veći od njega. Ćak je i njegova glava uvećana u odnosu na ruke. On posmatra poslednju gravura u seriji na zidu zagledajući njene detalje, brod, vodu i kuće u pozadini. Zatim se njegovo oko kreće dalje sa leva na desno ka još širim blokovima kuća. Žena kroz otvoreni prozor posmatra kosi krov koji pokriva izložbenu galeriju. Ovo nas vraća tamo gde smo započeli naš krug. Dečak vidi sve ove stvari kao dvodimenzionalne detalje grafike koju proučava. Ukoliko njegovo oko istraži površinu u većoj meri videće sebe kao deo gravure.

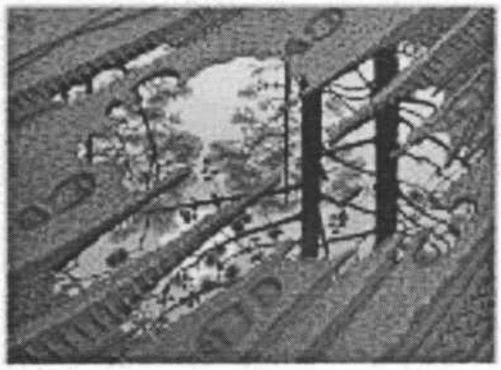
Nebo i voda (1938)



Slika br.20

U centralnoj horizontalnoj traci nalaze se ptice i ribe koje odgovaraju jedne drugima. Letenje nas asocira na nebo i stoga je za svaku od crnih ptica nebo na kome leti oblikovano od četiri bele ribe koje je okružuju. Slično, plivanje nas podeseća na vodu i zato četiri cme ptice koje okružuju ribu postaju voda u kojoj ona pliva.

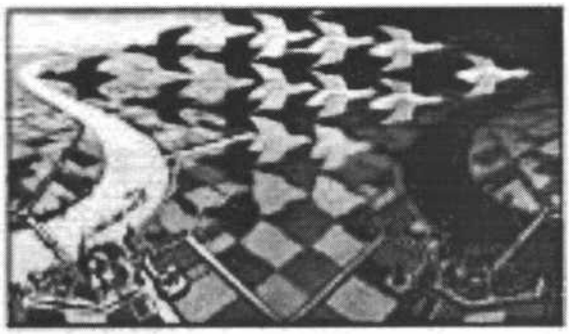
Bara (1952) - drvorez-



Slika br.21

Večernje nebo bez oblaka reflektuje se u bari koju je nedavni pljusak načinio na šumskoj stazi. Tragovi motornih kola, dva bicikla i dva pešaka utisnuti su na vlažnom tlu.

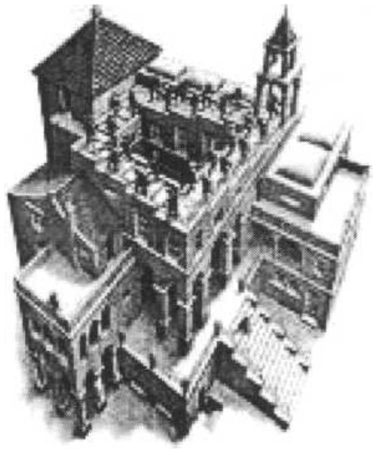
Noć i dan (1938) - drvorez-



Slika br.22

Siva pravougaona polja razvijaju se nagore u siluete belih i crnih ptica, crne lete ulevo a bele udesno, u dve suprotne grupe. Na levoj strani ptice lete zajedno i stapaju se oblikujući nebo i pejzaž. Na desnoj strani crne ptice se utapaju u noć. Noćni i dnevni pejzaž su slike u ogledalu jedan drugoga, spojene uz pomoć sivih polja iz kojih, još jednom, izranjaju ptice.

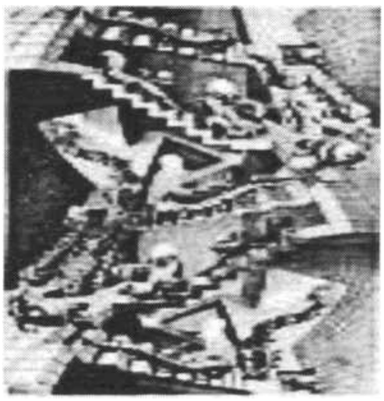
Penjanje i silaženje (1960) - litografija –



Slika br.23

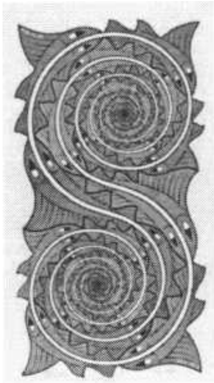
Beskrajne stepenice su glavni motiv ove slike. Unutrašnje pravougaono dvorište oivičeno je zgradom koja je pokrivena beskrajnim stepeništem. Stanovnici ovog kvarta se pojavljuju kao sveštenici, pripadnici neke nepoznate sekte. Možda je njihova ritualna dužnost da se svakog dana po nekoliko sati penju ovim stepenicama. Izgleda im je dozvoljeno da kad se umore idu nadole umesto nagore. Ipak oba pravca jednako su beskorisna. Dva neposlušna pojedinca odbijaju da učestvuju u vežbi.

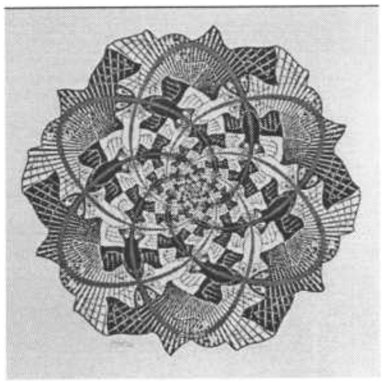
Kuća stepenica



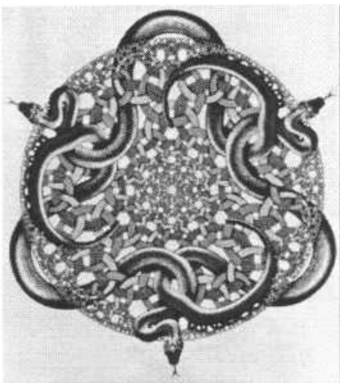
Slika br.24

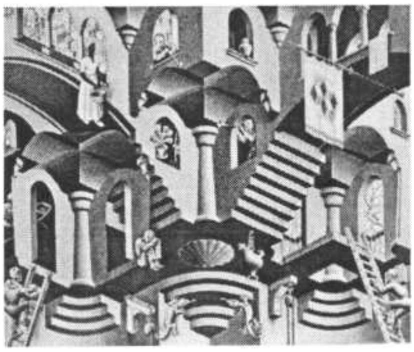
Sada se dalje razvija koncept relativiteta. Uveden je zabavan element, koji se pojavljuje u vezi sa razmatranjem pravilnog deljenja površina. Cela gornja polovina grafike je slika u ogledalu donje. Najviši krak stepenica, po kome smotuljak puzi na dole, sa leva na desno je oslikan još dva puta, jednom u sredini i zatim ponovo u donjem delu. Na stepenicama u gornjem desnom uglu, razlika između silaznog i uzlaznog je uklonjena, jer se dva reda životinja kreću uporedo ali ipak jedan ide nagore a drugi nadole.





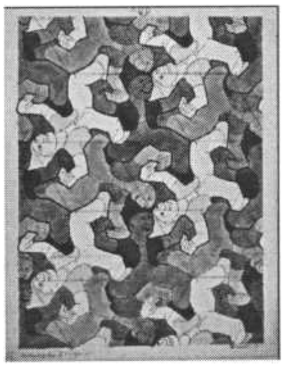
Slika br.25 - Staza (1957) Slika br.26 - Životni cilj (1966) -drvorez





Slika br.27 - Zmije (1969) Slika br.28 - Konveksni i nekonveksni(1955)

Galerija slika „Simetrija“



Slika br.29 Slika br.30

Zaključak

Tema paradoksa u matematici je veoma zanimljiva i može se na pogodan način uključiti u nastavu matematike u osnovnoj i srednjoj školi, jer pokazuje lepotu matematike.Podstiče razvoj logičkog mišljenja i sposobnost rešavanja problema, jer u velikoj meri doprinosi misaonoj aktivizaciji učenika. Budi interesovanje učenika prema predmetu matematike, jer primena ovakvih paradoksa zadovoljava didaktički princip zanimljivosti u nastavi matematike.

Literatura

1. R.M. Sainsbury, Paradoxonok, Typotex Kiado, Budapest, 2002.
2. Michael Clark, Paradoxes from A to Z, Routledge, London, 2002.
3. S.G. Simpson, Mathematical Logic, The Pensilvania State University,2005.
4. Z. Šilić, Novija filozofija matematike, Nolit, Beograd,1987.
5. M.Vuković, Matematička logika 1., Sveučilište u Zagrebu, Zagreb,2006.
6. Stephen F. Barker, Filozofija matematike, Nolit, Beograd, 1973.
7. N.Okičić, Teorija skupova-skripta, Univerzitet u Tuzli, Tuzla, 2010.
8. http://www.mcescher.com
9. http://en.wikipedia.org