MATEMATIČKI FAKULTET
Univerzitet u Beogradu

MASTER TEZA

TEMA: Permutacije sa malom varijacijom suma k uzastopnih članova

Student: Milan Stefanović
Broj indeksa: 1038/07

Sadržaj

Predgovor

Za permutaciju $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ skupa $\{1,2,\dots,n\}$ čiji su elementi ispisani po krugu postoji n suma po k uzastopnih članova permutacije (u daljem tekstu k-suma), $1 \le k \le n$. Kažemo da je k-*varijacija* permutacije π razlika ekstremne i prosečne k-sume. Problem koji se ovde rešava je pronalaženje permutacija π reda n sa najmanjom varijacijom, odnosno permutacija sa najmanjom maksimalnom k-sumom, za $3 \le k \le 10$ i što veće vrednosti n. Prolem datira još iz 1985. godine kada ga je u prvom obliku Dean Clark predstavio kao problem permutacija brojeva na časovniku u časopisu *American Mathematical Monthly.* Ovaj problem je široj javnosti predstavio Martin Gardner u svojoj kolumni u časopisu *Isaac Asimov's Science Fiction Magazine* gde je problem glasio:

Poređati 12 brojeva na časovniku tako da nijedna trojka uzastopnih brojeva u zbiru ne prelazi 21.

Kasnije je Timothy Rolfe napravio algoritam [1], koji za bilo koje n pronalazi permutaciju u kojoj nijedna trojka uzastopnih elemenata u zbiru ne prelazi minimalnu maksimalnu sumu za to n.

U drugom poglavlju prikazan je pregled poznatih rezultata. Teoreme iz rada [2] pokazuju da minimalna k-varijacija nikada nije veća od $k+6$ za bilo koju vrednost n. U slučaju kad je $q = \gcd(n,k) > 1$, pokazuje se da je minimalna k-varijacija manja ili jednaka od $7/2$, dok se za $q = 1$ pokazuje da je između $k/2$ i $k/2 + 9$ za bilo koju vrednost n. U ovom poglavlju je izložen i algoritam iz članka [1] za pronalaženje permutacije sa najmanjom maksimalnom 3-sumom.

U trećem poglavlju je prikazan algoritam koji za fiksirane n i k na osnovu poznatih rezultata pronalaze (teorijske) granice unutar kojih se nalaze vrednosti minimalne k-varijacije, odnosno najmanje maksimalne k-sume. Korišćenjem algoritma pretrage prikazanog u četvrtom poglavlju ove vrednosti su izračunate, kad je to bilo moguće.

Na osnovu dobijenih vrednosti u petom poglavlju su formulisana i dokazana neka uopštenja. Konstruisani su primeri permutacija koje popravalju do sada poznate teorijske granice. Neki rezultati su objavljeni na Interaktivnoj enciklopediji celobrojnih nizova (*OEIS – On-line encyclopedia of Integer Sequences*).

Ključne reči: permutacija, k-varijacija permutacije, k-suma, pretraga

1. Formulacija problema

Neka je S_n skup permutacija skupa $\{1,2,\dots,n\}$. Neka su elementi permutacije $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \in S_n$ ispisani po krugu i neka je dat broj k, $1 \le k \le n$. Posmatrajmo n suma po k uzastopnih članova permutacije (ili kraće: k-suma); prosečna vrednost ovih suma je $Avg(n,k) = \frac{kn(n+1)}{2n} = \frac{k(n+1)}{2}$.

Definicija 1. k-varijacija permutacije π je

$$disc(\pi,k) = \max_{1\le i\le n} \left| \left(\sum_{j=1}^{k} \pi_{i+j} \right) - \frac{k(n+1)}{2} \right|$$

pri čemu se indeksi članova permutacije svode na kongruentne po modulu n vrednosti iz intervala $[1,n]$.

Drugim rečima, k-varijacija je jednaka najvećem odstupanju neke k-sume od prosečne vrednosti k-suma. Ako se ne ograničava odstupanje k-suma od proseka sa donje strane, tada je prirodno posmatrati maksimalnu vrednost ovih suma.

Definicija 2. Maksimalna k-suma permutacije π je

$$msum(\pi,k) = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{k} \pi_{i+j}$$

Neka je $msum'(\pi,k) = msum(\pi,k) - Avg(\pi,k)$.

Neposredna posledica definicija je nejednakost

$$msum'(\pi,k) \le disc(\pi,k).$$

Postavlja se pitanje pronalaženja permutacija iz S_n sa minimalnim vrednostima k-varijacije (simetričan problem), odnosno maksimalne k-sume (asimetričan problem).

Definicija 3. Minimalnu vrednost k-varijacije permutacija iz S_n označićemo sa $disc(n,k)$, odnosno imamo da je $disc(n,k) = \min_{\pi\in S_n} disc(\pi,k)$. Slično, minimalnu vrednost maksimalne k-sume[1] permutacija iz S_n označićemo sa $msum(n,k)$, tj. imamo da je $msum(n,k) = \min_{\pi\in S_n} msum(\pi,k)$.

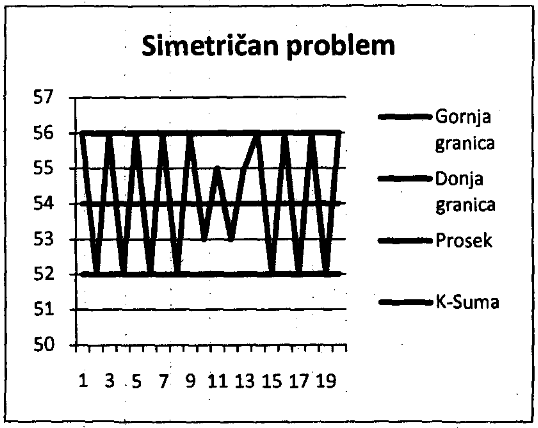
Pored toga, neka je $msum'(n,k) = msum(n,k) - Avg(n,k)$. Posledica prethodne nejednakosti je nejednakost

$$msum'(n,k) \le disc(n,k).$$

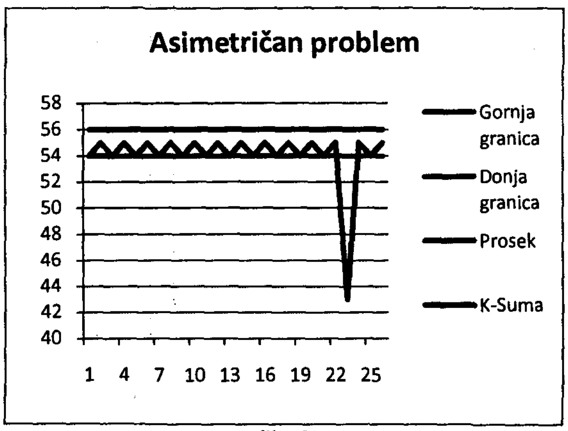
Kao ilustracija ovih pojmova prikazani su grafici, koji ilustruju kretanje vrednosti k-suma u permutaciji sa minimalnom k-varijacijom, odnosno ekstremnom k-sumom.

---

[1] U daljem tekstu: ekstremna k-suma



Slika 1



Slika 2

Na Slici 1 prikazan je primer permutacije $\pi_1 \in S_{26}$ za koju se dostiže minimum 4-varijacije, $disc(\pi_1, 4) = disc(26{,}4) = 2$. Na Slici 2 prikazan je primer permutacije $\pi_2 \in S_{26}$ koja ima veću 4-varijaciju nego π_1, ali zato ima manju vrednost $msum(\pi_2, 4) = msum(26{,}4) = 55$. Ovaj primer pokazuje da nejednakost $msum'(n, k) \leq disc(n, k)$ može biti stroga.

2. Pregled poznatih rezultata

Autori članka [2] su godine 2002. proučavali granice u kojima se, za odabrano n i k, nalaze vrednosti minimalne k-varijacije. Kroz svoje Teoreme su za različite slučajeve odnosa n i k postavili donje i gornje granice koje su značajno smanjile skup vrednosti koje treba istražiti (ponekad je taj skup vrednosti sveden na samo jedan broj) i samim tim ubrzali postupak pretrage.

U ovom poglavlju ćemo prikazati te rezultate. Permutaciji $\pi \in S_n$ pridružićemo n-torku

$$\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

gde je

$$d_i = (\pi_{i+1} + \dots + \pi_{i+k}) - (\pi_i + \dots + \pi_{i+k-1}) = \pi_{i+k} - \pi_i$$

Neka je najveći zajednički delilac za n i k jednak $\gcd(n,k) = q$. Tada se π razlaže na q disjunktnih delova dužine n/q gde se indeksi elemenata svode na kongruentne po modulu n vrednosti iz intervala $[1, n]$:

$$loop(i) = \left(\pi_i, \pi_{i+k}, \dots, \pi_{i+\left(\frac{n}{q}-1\right)k}\right), \qquad 1 \le i \le q.$$

U nastavku navodimo pregled rezultata o k-varijacijama permutacija iz rada [2]. U dokazima Teorema koristićemo uvedene pojmove $loop(i)$ i n-torka $\boldsymbol{d}$.

U sledećoj Teoremi je dato ograničenje za k-varijaciju permutacije π u funkciji od n-torke $\boldsymbol{d}$:

Teorema 1. Važi nejednakost:

$$\frac{1}{2}\max_{s,t}\sum_{j=s}^{t} d_j \le disc(\pi, k) < \max_{s,t}\sum_{j=s}^{t} d_j .$$

Dokaz. Uočava se da je $\sum_{j=s}^{t} d_j = \sum_{i=1}^{k} \pi_{t+i} - \sum_{i=0}^{k-1} \pi_{s+i}$ razlika između dve k-sume. Prva nejednakost sledi iz toga što je, prosečna vrednost k-suma, $k(n+1)/2$, u najboljem slučaju tačno između.

Razlika između najveće i najmanje k-sume je suma sa desne strane, obzirom da je ta suma najveća po s i t. Prosečna vrednost k-suma se nalazi strogo između minimuma i maksimuma, što dovodi do stroge nejednakosti. ■

Iz činjenice da u nizu $\boldsymbol{d}$ mora da postoji bar jedan pozitivan član sledi da je uvek $disc(n,k) > 0$.

Sledeće dve Teoreme rešavaju specijalne slučajeve kada je $\boldsymbol{n = 2k}$ odnosno $\boldsymbol{n = 3k}$.

Teorema 2. Neka je k neparan. Tada je $disc(2k, k) = \frac{1}{2}$ i $disc(3k, k) = 1$.

Dokaz. U ovom slučaju je $q = k$. Najpre ćemo razmotriti slučaj kada je $n = 2k$. Definisaćemo k delova $loop(i), 1 \le i \le k$ koji će prema parnosti broja i, biti:

$$loop(2j-1) = (2j-1, 2j), \quad loop(2j) = (2k-2j+2, 2k-2j+1), \quad 1 \le 2j-1, 2j \le k$$

Na ovaj način je jednoznačno određena permutacija

$$\pi = (1, 2k, 3, 2k-2, \dots, k-2, k+3, k, 2, 2k-1, 4, 2k-3, \dots, k-1, k+2, k+1).$$

Za ovu permutaciju je $\boldsymbol{d} = (1, -1, 1, -1, 1, \dots, -1)$, te je $max_{s,t} \sum_{j=s}^{t} d_j = 1$. Prema Teoremi 1 je $disc(\pi, k) = \frac{1}{2}$, te je $disc(2k, k) = \frac{1}{2}$.

U slučaju kada je $n = 3k$, ponovo definišemo k delova, pri čemu će prema parnosti broja i biti

$$loop(2j-1) = (3j-2, 3j-1, 3j), \qquad 2j-1 \le k,$$

$$loop(2j) = (3k-3j+3, 3k-3j+2, 3k-3j+1), \qquad 2j \le k.$$

Ponovo uočavamo da je ovim delovima jednoznačno određena permutacija koja zadovoljava da je $\boldsymbol{d} = \left((1,-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, 1, (1,-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, 1, (-2,2)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, -2\right)$, te je $\max_{s,t} \sum_{j=s}^{t} d_j = 2$ i, kao i gore, $disc(\pi, k) = 1$. Pošto je n neparan, $disc(3k, k)$ je celobrojna vrednost, te je prema Teoremi 1, $disc(3k, k) = 1$. ∎

Teorema 3. Za $n \ge 3, disc(n, 2) = 1$.

Dokaz. Analizu ćemo podeliti u tri slučaja:

<u>*Slučaj* $n = 2t + 1$.</u> Razmotrimo permutaciju $\pi = (1, 2t, 3, 2t-2, 5, 2t-4, \dots, 2, 2t+1)$. Za nju je $\boldsymbol{d} = \left((2,-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}, 2, -1, -1\right)$, pa je $disc(n, 2) = 1$.

<u>*Slučaj* $n = 4t$.</u> Definišimo dva dela na sledeći način:

$$loop(1) = (1, 3, 5, 7, \dots, 2t-1, 2t, 2t-2, \dots, 4, 2),$$

$$loop(2) = (4t-1, 4t-3, 4t-5, 4t-7, \dots, 2t+1, 2t+2, 2t+4, \dots, 4t-2, 4t).$$

Ovim delovima je određenja permutacija π, a samim tim i n – torka $\boldsymbol{d} = \left((2,-2)^{\frac{n}{4}-1}, 1, 1, (-2,2)^{\frac{n}{4}-1}, -1, -1\right)$, te opet dobijamo da je $disc(n, 2) = 1$.

<u>*Slučaj* $n = 4t + 2$.</u> Definišimo dva dela na sledeći način:

$$loop(1) = (1, 3, 5, 7, \dots, 2t-1, 2t, 2t-2, \dots, 4, 2),$$

$$loop(2) = (4t+1, 4t-1, 4t-3, 4t-5, \dots, 2t+3, 2t+2, 2t+4, 2t+6, \dots, 4t, 4t+2).$$

Tada je $\boldsymbol{d} = \left((2,-2)^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1}, 2, -1, -1, (2,-2)^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1}, 2, -1, -1\right)$, pa je i $disc(n, 2) = 1$ ∎

Sledeća Teorema rešava skoro sve slučajeve za $\boldsymbol{k = 3}$.

Teorema 4. Neka je $n \ge 6$. Tada je $disc(n, 3) \le 2$.

Dokaz. Najpre ćemo razmotriti slučaj kada je $\gcd(n,3)=1$. U slučaju kada su n i k uzajamno prosti, razmotrimo permutaciju iz jednog dela

$$loop = (1,4,7,\dots,n,n-1,n-2,n-4,\dots,3,2) \text{ za } n \equiv 1(mod\ 3),$$

odnosno

$$loop = (1,4,7,\dots,n-1,n,n-2,n-3,\dots,3,2) \text{ za } n \equiv 2\ (mod\ 3).$$

Pošto izračunamo $\boldsymbol{d}$, dobijamo četiri slučaja:

$$n \equiv 1(mod\ 6):\ \pi = \left(1,\frac{n-1}{2},n-1,\dots\right): \boldsymbol{d} = \left((3,-1,-1,3,-2,-2)^{\frac{n-7}{6}},3,-1,-1,3,-1,-2,-1\right),$$

$$n \equiv 2(mod\ 6):\ \pi = \left(1,n,\frac{n}{2}-1,\dots\right): \boldsymbol{d} = \left((3,-2,-1)^{\frac{n-5}{3}},3,-1,-1,1,-2\right),$$

$$n \equiv 4(mod\ 6):\ \pi = \left(1,\frac{n}{2},n-1,\dots\right): \boldsymbol{d} = \left((3,-2,-1,3,-1,-2)^{\frac{n-4}{6}},3,-1,-1,-1\right),$$

$$n \equiv 5(mod\ 6):\ \pi = \left(1,n,\frac{n-1}{2},\dots\right): \boldsymbol{d} = \left((3,-2,-2,3,-1,-1)^{\frac{n-5}{6}},3,-2,-1,1,-1\right),$$

Neposredno se proverava da je za parno n, $disc(n,3) \le 3/2$, a da je za neparno n, $disc(n,3) \le 2$.

Preostaje slučaj $n \equiv 0(mod 3)$. Analizu ćemo podeliti u šest slučajeva po modulu 18. U svakom slučaju se određuju tri dela $loop(i) = \sigma^{(i)}$, gde su $\sigma^{(i)} = \left(\sigma_1^{(i)},\sigma_2^{(i)},\dots\right)$ redom napravljeni iz skupova $\left\{1,2,\dots,\frac{n}{3}\right\},\left\{\frac{n}{3}+1,\frac{n}{3}+2,\dots,\frac{2n}{3}\right\},\left\{\frac{2n}{3}+1,\frac{2n}{3}+2,\dots,n\right\}$ za $1 \le i \le 3$. Neka je vektorska funkcija f zadata jednakošću $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = (x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_1-x_n)$. Delovi koji određuju permutaciju će biti prikazani korišćenjem funkcije f.

<u>*Slučaj* $n = 18p$.</u> Definišimo delove na sledeći način:

$$f\big(loop(1)\big) = (3^{2p-1},2,(-1,-2)^{2p-1},-1,-1),$$

$$f\big(loop(2)\big) = ((-2,-1)^{p-1},-2,1,3^{2p-1},1,(-2,-1)^{p-1},-2,-1),$$

$$f\big(loop(3)\big) = ((-1,-2)^{2p-1},-1,2,3^{2p-1},-1).$$

Dobija se da je
$\boldsymbol{d} = ((3,-2,-1,3,-1,-2)^{p-1},3,-2,-1,2,1,-2,-1,(3,-1,-2,3,-2,-1)^{p-1},3,-1,-2,1,2,-1,$

$-2,(3,-2,-1,3,-1,-2)^{p-1},3,(-1)^3)$ i može se proveriti da je $disc(\pi,3) = \frac{3}{2}$.

<u>*Slučaj* $n = 18p+3$.</u> Definišimo delove na sledeći način:

$$f\big(loop(1)\big) = (3^{2p},-1,(-1,-2)^{2p-1},-1,-1),$$

$$f(loop(2)) = ((-1,-2)^{p-1},-1,-1,3^{2p},-1,(-1,-2)^{p}),$$

$$f(loop(3)) = ((-1,-2)^{2p-1},-1,-1,3^{2p},-1).$$

Dobija se da je

$$\boldsymbol{d} = ((3,-1,-1,3,-2,-2)^{p-1},3,-1,-1,3,-1,-2,-1,(3,-1,-1,3,-2,-2)^{p-1},3,-1,-1,3,-1,2$$
$$-1,3,-1,-1,(3,-2,-2,3,-1,-1)^{p-1},3,-1,-2,-1)$$

pa kada se proveri, dobija se da je $disc(\pi,3) = 2$.

Slučaj $n = 18p + 6$. Definišimo delove na sledeći način:

$$f(loop(1)) = (3^{2p},1,(-2,-1)^{2p},-1),$$

$$f(loop(2)) = ((-2,-1)^{p},2,3^{2p-1},2,(-1,-2)^{p},-1),$$

$$f(loop(3)) = ((-1,-2)^{2p},1,3^{2p},-1).$$

Dobija se da je

$\boldsymbol{d} = ((3,-2,-1,3,-1,-2)^{p},1,2,-1,-2,(3,-2,-1,3,-1,-2)^{p-1},3,-2,-1,2,1,-2,$

$-1,(3,-1,-2,3,-2,-1)^{p-1},3,-1,-2,3,(-1)^{3})$ odnosno, $disc(\pi,3) = \frac{3}{2}$.

Slučaj $n = 18p + 9$. Definišimo delove na sledeći način:

$$f(loop(1)) = (3^{2p},2,(-1,-2)^{2p},-1,-1),$$

$$f(loop(2)) = ((-1,-2)^{p},1,3^{2p},1,(-2,-1)^{p},-2),$$

$$f(loop(3)) = ((-1,-2)^{2p},-1,3^{2p},2,-1).$$

Dobija se da je

$\boldsymbol{d} = ((3,-1,-1,3,-2,-2)^{p},2,1,-1,-1,(3,-2,-2,3,-1,-1)^{p},1,$

$2,(-2,-2,3,-1,-1,3)^{p},-1,-2,-1)$ odnosno, $disc(\pi,3) = 2$.

Slučaj $n = 18p + 12$. Definišimo delove na sledeći način:

$$f(loop(1)) = (3^{2p+1},-1,(-1,-2)^{2p},-1,-1),$$

$$f(loop(2)) = ((-2,-1)^{p},1,3^{2p+1},-1,(-1,-2)^{p},-1),$$

$$f(loop(3)) = ((-1,-2)^{2p},-1,-1,3^{2p+1},-1).$$

Dobija se da je

$\boldsymbol{d} = ((3,-2,-1,3,-1,-2)^p, 3,-1,-1,-1, (3,-2,-1,3,-1,-2)^p, 3,-1,-1,-1,$

$(3,-2,-1,3,-1,-2)^p, 3, (-1)^3)$ i proverom se dobija da je $disc(\pi, 3) = \frac{3}{2}$.

Slučaj $n = 18p + 15$. Definišimo delove na sledeći način:

$$f(loop(1)) = (3^{2p+1}, 1, (-2,-1)^{2p+1}, -1),$$

$$f(loop(2)) = (-1, (-2,-1)^p, 2, 3^{2p}, 2, (-1,-2)^{p+1}),$$

$$f(loop(3)) = ((-1,-2)^{2p+1}, 1, 3^{2p+1}, -1).$$

Dobija se da je

$\boldsymbol{d} = ((3,-1,-1,3,-2,-2)^p, 3,-1,-1,1,2,-2,-2, (3,-1,-1,3,-2,-2)^p, 2,1,-1,-1,$

$(3,-2,-2,3,-1,-1)^p, 3,-1,-2,-1)$ i proverom se dobija da je $disc(\pi, 3) = 2$. ■

Teorema 4 daje veoma nisku gornju granicu – $\boldsymbol{disc(n,3) \leq 2}$. Ukoliko je $\boldsymbol{n}$ parno, pokazuje se da je varijacija ili $\boldsymbol{1/2}$ ili $\boldsymbol{3/2}$, a pošto se pokazuje da za $\boldsymbol{n \geq 8}$ varijacija ne može biti $\boldsymbol{1/2}$, ova Teorema rešava sve slučajeve u kojima je $\boldsymbol{n}$ parno.

Sledeći stav daje gornju granicu kada se k može zapisati kao proizvod dva broja p i q:

Teorema 5. $disc(n, pq) \leq p \cdot disc(n, q)$.

Dokaz. Za permutaciju π u kojoj je $disc(\pi, q) = t$, važi da je $disc(\pi, pq) \leq pt$. ■

Kao posledicu imamo:

Posledica 6. Za parno k, $disc(n,k) \leq \frac{k}{2}$. ■

Sledeće dve Teoreme i jedna Lema daju gornju granicu kada $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{k}$ imaju zajednički delilac različit od 1.

Teorema 7. Ukoliko je k parno, $disc(mk,k) = 1$, a ukoliko je k neparno, $disc(mk,k) \leq 2$.

Dokaz. Konstruisaćemo permutaciju π od k delova.

Neka je k parno. Neka su $\sigma(1), \sigma(2)$ delovi $loop(1), loop(2)$ iz konstrukcije u Teoremi 3, pri čemu ćemo n zameniti sa $2m$, prema parnosti broja m. Dalje, neka $\sigma(1)$ koristi brojeve $1, 2, \ldots, m$, dok $\sigma(2)$ koristi brojeve $m+1, m+2, \ldots, 2m$. Korišćenjem notacije $\vec{1} = (1)^m$, definisanćemo:

$$loop(1) = \sigma(1), \qquad loop(2) = \sigma(2),$$

$$loop(3) = (4m+1) \cdot \vec{1} - \sigma(2), \qquad loop(4) = 2m \cdot \vec{1} + \sigma(2),$$

$$loop(5) = (6m+1) \cdot \vec{1} - \sigma(2), \qquad loop(6) = 4m \cdot \vec{1} + \sigma(2), \ldots$$

Neka je i^* niz od $k-1$ elemenata definisan kao $(i,-i,i,-i,\dots,i) = \left(i,(-i,i)^{\frac{k}{2}-1}\right)$. U rezultujućoj permutaciji π, za parno m dobija se da je

$$\boldsymbol{d} = ((2,-2^*)^{\frac{m}{2}-1},1,1^*,(-2,2^*)^{\frac{m}{2}-1},-1,-1^*).$$

Za neparno m se dobija

$$\boldsymbol{d} = ((2,-2^*)^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1},2,-1^*,-1,2^*,(-2,2^*)^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1},-1,-1^*).$$

Sa ovako dobijenim nizovima $\boldsymbol{d}$ moguće je proveriti da je $disc(mk,k) = 1$.

Neka je k neparno. Neka je $n = 3m$. Dalje, neka su $\sigma(i), 1 \le i \le 3$, tri dela iz konstrukcije u Teoremi 4 za slučajeve kada 3 deli n. Specijalno, $\sigma(3)$ sadrži elemente $2m+1, 2m+2, \dots, 3m$. Dalje, definišimo ostale delove (za $k > 3$):

$$loop(4) = (5m+1)\cdot\vec{1} - \sigma(3), \qquad loop(5) = 2m\cdot\vec{1} + \sigma(3),$$

$$loop(6) = (7m+1)\cdot\vec{1} - \sigma(3), \qquad loop(7) = 4m\cdot\vec{1} + \sigma(3), \dots$$

Kao i ranije, može se proveriti da je varijacija ograničena prema tvrđenju Teoreme. ■

Prethodna Teorema daje jako dobru ocenu gornje granice, ali samo kada je $n = mk$. Naredna Teorema će dati opšte gornje ograničenje za $\gcd(n,k) > 1$. Za dokaz ove Teoreme, biće nam potrebna sledeća Lema koju navodimo bez dokaza:

Lema 8. Neka su a, b celi brojevi gde je a paran, b neparan, i $\gcd(a,b) = 1$. Neka je konstruisan niz $s = (s_1, s_2, \dots s_a)$ gde je $s_i = -\frac{1}{2}$ ukoliko je $i \equiv e \cdot b (mod\ a)$ za $1 \le e \le \frac{a}{2}$ i $s_i = \frac{1}{2}$ ukoliko je $i \equiv e \cdot b (mod\ a)$ za $\frac{a}{2}+1 \le e \le \frac{a}{2}$. Tada važi da $\sum_{j=t}^{t+b-1} s_j \in \left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ za bilo koje t čiji su indeksi uzeti po modulu a. ■

Teorema 9. Neka je $q = \gcd(n,k)$ i neka je $q > 1$. Tada je $disc(n,k) \le 2$ za q parno i $disc(n,k) \le \frac{7}{2}$ za q neparno.

Dokaz. Da bismo definisali permutaciju π, potrebno je definisati q delova $loop(1), loop(2), \dots, loop(q)$. Karakteristična permutacija $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\frac{n}{q}})$ koja zadovoljava da je

$$\sigma_{i+1} - \sigma_i \in \{-2,-1,1,2\}$$

može biti definisana za parno n/q kao:

$$\sigma = (1,3,5,\dots,\frac{n}{q}-1,\frac{n}{q},\frac{n}{q}-2,\frac{n}{q}-4,\dots,2)$$

a za neparno n/q kao:

$$\sigma = (1, 3, 5, \ldots, \frac{n}{q}, \frac{n}{q} - 1, \frac{n}{q} - 3, \frac{n}{q} - 5, \ldots, 2).$$

Slučaj q je parno (pa je i k parno). Kreiramo permutaciju π postavljajući $\sigma + \left(\frac{ln}{q}\right) \cdot \vec{1}$ u deo $loop(1 + 2l)$ i postavljajući $(n + 1) \cdot \vec{1} - \left(\sigma + \left(\frac{ln}{q}\right) \cdot \vec{1}\right)$ u deo $loop(2 + 2l)$, za $0 \leq 2l \leq q - 2$. Možemo primetiti da ovako formirana permutacija π zaista sadrži sve brojeve $1, 2, \ldots, n$ i za neparno $i, \pi_i + \pi_{i+1} = n + 1$. Stoga, za svako t važi da je $\sum_{j=1}^{k} \pi_{2t+j} = \frac{k(n+1)}{2}$. Sada su elementi d_i dobijeni iz uzastopnih razlika za dati deo, te je prema konstrukciji $d_i \in \{-2, -1, 1, 2\}$, pa je $|d_i| \leq 2$. Zaključujemo da je $disc(\pi, k) \leq 2$.

Slučaj q je neparno. Počinjemo slično kao u Slučaju 1, kreirajući permutaciju π postavljajući $\sigma + \left(\frac{ln}{q}\right) \cdot \vec{1}$ u deo $loop(1 + 2l)$ i $(n + 1) \cdot \vec{1} - \left(\sigma + \left(\frac{ln}{q}\right) \cdot \vec{1}\right)$ u deo $loop(2 + 2l)$, za $0 \leq 2l \leq q - 3$. Kao i u gornjem slučaju važi da je $\pi_{qs+i} + \pi_{qs+i+1} = n + 1$ za neparno i, i $i \leq q - 4$ i bilo koje s. Treba još da definišemo $\frac{3n}{q}$ brojeva j za koje važi $\frac{q-3}{2} \cdot \frac{n}{q} < j \leq \frac{q+3}{2} \cdot \frac{n}{q}$ u tri dela $loop(q - 2), loop(q - 1), loop(q)$. Za ovo koristimo specijalnu shemu za $k = 3$. Za neparne n/q gde je $\frac{3n}{q} = 6p + 3$ definišemo sledeće:

$\sigma(1) =$	$3p + 1$	$3p - 2$	$3p - 5$	...	1	2	5	...	$3p - 1$,
$\sigma(2) =$	3	9	15	...	$6p + 3$	$6p$	$6p - 6$	...	6,
$\sigma(3) =$	$6p + 2$	$6p - 1$	$6p - 5$	...	$3p + 2$	$3p + 4$	$3p + 7$	...	$6p + 1$,

a za parne $\frac{n}{q}$ gde je $\frac{3n}{q} = 6p$ definišemo:

$\sigma(1) =$	$3p - 1$	$3p - 4$	$3p - 7$	...	2	1	4	...	$3p - 2$,
$\sigma(2) =$	3	9	15	...	$6p - 3$	$6p$	$6p - 6$	...	6,
$\sigma(3) =$	$6p - 1$	$6p - 4$	$6p - 7$	...	$3p + 2$	$3p + 1$	$3p + 4$	...	$6p - 2$.

Postavljamo $\sigma(i) + \frac{q-3}{2} \cdot \left(\frac{n}{q}\right) \cdot \vec{1}$ u deo $loop(q - 3 + i)$ za $1 \leq i \leq 3$.

Za neparno $\frac{n}{q}$ proveravamo da je $\pi_{qs+q-2} + \pi_{qs+q-1} + \pi_{qs+q} = \frac{3(n+1)}{2}$, pa je $\pi_{qs+1} + \pi_{qs+2} + \pi_{qs+3} + \cdots + \pi_{qs+q} = \frac{q(n+1)}{2}$. Zbog toga je k-suma koja počinje sa π_{qs+1} jednaka $k(n + 1)/2$. Znajući da je $d_{qs+2l+1} + d_{qs+2l+2} = 0$ za $0 \leq 2l \leq q - 3$ i da je $|d_{qs+i}| \leq 2$ za $1 \leq i \leq q - 3$, i da su $|d_{qs+q-2}| \leq 3$ i $|d_{qs+q-2} + d_{qs+q-1}| \leq 3$, zaključujemo da je $disc(\pi, k) \leq 3$.

Za parno $\frac{n}{q}$ izračunavamo da je $\pi_{qs+q-2} + \pi_{qs+q-1} + \pi_{qs+q} = \frac{3(n+1)}{2} - \frac{1}{2}$ za $0 \leq s \leq p - 1$ i $\pi_{qs+q-2} + \pi_{qs+q-1} + \pi_{qs+q} = \frac{3(n+1)}{2} + \frac{1}{2}$ za $p \leq s \leq 2p - 1$. Koristeći Lemu 8 sa vrednostima $a = \frac{n}{q}$ i $b = \frac{k}{q}$ dolazimo do zaključka da za bilo koje s, $\sum_{j=1}^{k} \pi_{qs+j}$ je ili $\frac{k(n+1)}{2} + \frac{1}{2}$ ili $\frac{k(n+1)}{2} - \frac{1}{2}$. Znajući da je $d_{qs+2l+1} +$

$d_{qs+2l+2} = 0$ i da je $|d_{qs+2l+1}| = 2$ za $0 \leq 2l \leq q-3$, i pošto je $|d_{qs+q+2}| \leq 3$ i $|d_{qs+q-2} + d_{qs+q-1}| \leq 3$, zaključujemo da je $disc(\pi, k) \leq \frac{7}{2}$. ∎

Sledeća Teorema pokazuje da su moguća poboljšanja Teoreme 9 u slučajevima kada je $disc\left(\frac{n}{q}, \frac{k}{q}\right) < 2$.

Teorema 10. Neka je su n i k dati tako da je $q = \gcd(n,k) > 1$ neparno. Tada važi da je:

$$disc(n,k) \leq disc(\frac{n}{q}, \frac{k}{q})$$

Dokaz. Da bismo konstruisali permutaciju $\pi \in S_n$ koja zadovoljava uslov da je $disc(\pi, k) \leq disc(\frac{n}{q}, \frac{k}{q})$ počećemo sa permutacijom $\tau \in S_{n/q}$ gde je $disc(\tau, k/q) = disc(\frac{n}{q}, \frac{k}{q})$. Izračunaćemo vektor $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_{n/q})$ gde je $e_i = \tau_{i+k/q} - \tau_i$ (i gde su indeksi uzeti po modulu n/q). Neka je $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n/q})$ gde je $\sigma_i = \tau_{1+(i-1)k/q}$. Tada je σ deo koji generiše τ. Definišimo π kroz q delova na sledeći način:

$$loop(1) = \sigma, \qquad loop(2) = \left(\frac{2n}{q} + 1\right) \cdot \vec{1} - \sigma, \qquad loop(3) = \frac{2n}{q} \cdot \vec{1} + \sigma,$$

$$loop(4) = \left(\frac{4n}{q} + 1\right) \cdot \vec{1} - \sigma, \quad loop(5) = \frac{4n}{q} \cdot \vec{1} + \sigma, \dots .$$

Ukoliko sa a^* obeležimo vektor $(a, -a, a, -a, \dots, a)$ dužine q, a zatim proverimo da $\boldsymbol{d}$ koje je izračunato za permutaciju π ima oblik $\boldsymbol{d} = \left(e_1^*, e_2^*, \dots, e_{\frac{n}{q}}^*\right)$, tada važi da je $disc(\pi, k) = disc(\tau, \frac{k}{q})$. ∎

Naredna Teorema daje netrivijalnu donju granicu kada su n i k uzajamno prosti brojevi.

Teorema 11. Neka su n, k dati tako da je $\gcd(n,k) = 1, n > 2k$. Neka je $n = ak + r$, gde je $1 \leq r \leq k-1$, i neka je s najmanji pozitivan ceo broj takav da je $rs = \pm 1 \ (mod\ k)$. Tada je

$$disc(n,k) \geq \frac{k}{2s}.$$

Dokaz. Neka za neko $b \geq 0$ imamo da je $rs = bk \pm 1$. Odavde je $sn = ask + rs = (as+b)k \pm 1$. Tražimo donju granicu za $disc(n,k)$ tražeći donju granicu za $\sum_{j=s}^{t} d_j$. Neka je permutacija π takva da je $\pi_1 = 1$ i pretpostavimo da je $\pi_{1+pk} = n$. Pošto je $(as+b)k \equiv \mp 1 (mod\ n)$, $p+1$ elemenata $\pi_1, \pi_{1+k}, \pi_{1+2k}, \dots, \pi_{1+pk} = n$ će biti u $as+b$ odvojenih skupova uzastopnih pozicija u π. Zaključujemo da iz $\sum_{j=0}^{p-1} d_{1+jk} = n-1$ za jedan od ovih skupova uzastopnih elemenata, recimo $\pi_s, \pi_{s+1}, \dots, \pi_t$ imamo da je:

$$\sum_{j=s}^{t} d_j \geq \frac{n-1}{as+b} = \frac{k(n-1)}{sn \mp 1} = \frac{k}{s} - \frac{1}{s}\left(\frac{k(s \mp 1)}{sn \mp 1}\right) = \frac{k}{s} - \frac{1}{s}\left(\frac{s \mp 1}{as+b}\right).$$

Primetimo da za $n > 2k$, imamo da je $a \geq 2$. Tamo gde je $rs \equiv 1(mod\ k)$, imamo da je $\frac{s-1}{as+b} \leq \frac{s-1}{2s} < 1$, a gde je $rs = bk - 1$, imamo da je $b \geq 1$ i $\frac{s+1}{as+b} \leq \frac{s+1}{2s+1} < 1$. U svakom slučaju, važi da je $\frac{k}{s} - \frac{1}{s}\left(\frac{s\mp1}{as+b}\right) > \frac{k-1}{s}$. Pošto je $\sum_{j=s}^{t} d_j$ celobrojna vrednost, imamo da je $\sum_{j=s}^{t} d_j \geq \frac{k}{s}$ odnosno, $\sum_{j=s}^{t} d_j \geq \left\lceil \frac{k}{s} \right\rceil$. Stoga je $disc(\pi, k) \geq \frac{k}{2s}$ koristeći se granicom postavljenom u Teoremi 1. ■

Posledica 12. Neka su n i k dati tako da je k parno i $n \equiv \pm 1(mod\ k)$. Tada je $disc(n, k) = k/2$.

Dokaz. Koristimo Teoremu 11 zajedno za Posledicom 6. ■

Naredna Teorema za uzajamno proste $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{k}$ daje gornju granicu koja je veoma visoka, ali koja pokazuje da varijacija ne raste neograničeno sa povećanjem broja $\boldsymbol{n}$. Navodimo Teoremu bez dokaza:

Teorema 13. Neka je k neparno i $\gcd(n, k) = 1$. Tada je

$$disc(n, k) \leq k + 6.$$

Važi i više, za fiksirano k, pokazuje se da za $n > n_0(k)$ važi

$$disc(n, k) \leq \frac{k}{2} + 9. \blacksquare$$

U radu [3] objavljene su vrednosti ekstremnih 3-suma za $n \leq 20$:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$msum(n, 3)$	6	9	10	11	14	15	16	18	20	21	23	24	25	27	29	30	32	33

Tabela 1 – Vrednosti ekstremnih 3-suma iz rada [3]

Za izračunavanje ovih vrednosti korišćen je algoritam pretrage ***Permute*** [1] dizajniran isključivo za izračunavanje vrednosti za problem $msum(n, 3)$. Algoritam u drvetu odlučivanja rano prepoznaje da deo permutacije neće zadovoljiti dati uslov i tu granu drveta odseca, čime se vreme potrebno za pronalaženje rešenja problema znatno smanjuje.

Kao priprema za izvršavanje rekurzivne funkcije ***Permute()***, uređuju se početna tri elementa permutacije tako da je njihova suma manja od zadate gornje granice $MaxSum$.

```
for all {a, b, c} in SP do (SP je početna permutacija)
begin
    if (a < c) and (eliminacija simetrije)
     (b = n) and (fiksiranje jednog elementa)
     (a + b + c ≤ MaxSum) then (provera uslova za MaxSum)
    begin
        (X[0], X[1], X[2]) := (a, b, c); (dodela vrednosti za tri člana permutacije X)
        unused := n(n+1)/2 − (a + b + c); (izračunavanje zbira preostalih elemenata)
        Permute(X, 3, n); (poziv funkcije Permute za uređivanje preostalih elemenata)
    end
end
```

Bez smanjenja opštosti mogu se razmatrati samo permutacije kod kojih je drugi element n. Pored toga može se zahtevati da prvi element bude manji od trećeg; time se pretraga za određivanje $msum(n,3)$ uprošćava za faktor 2. Vrednosti $MaxSum$ i $unused$ su globalne promenljive koje čuvaju, redom, vrednost $msum(n,3)$ za koju se trenutno vrši pretraga u skupu S_n, i vrednost zbira elemenata koji još uvek nisu uređeni algoritmom.

Ulazni argumenti funkcije ***Permute()*** su niz X i brojevi Lim, n. Elementi niza X sa indeksima od 0 do $Lim - 1$ fiksirani su u tekućoj permutaciji, a preostali (neuređeni) elementi permutacije nalaze se na pozicijama od Lim do $n-1$. Korišćene su sledeće pomoćne funkcije:

- $Check(X,n)$ koja proverava da li sume elemenata sa indeksima $(n-2, n-1, 0)$ i $(n-1, 0, 1)$ zadovoljavaju uslov da su manje od $MaxSum$.
- $Process(X)$ koja ispisuje permutaciju sa ekstremnom k-sumom manjom od $MaxSum$.
- $TheRestSmallEnough(X, Lim, n)$ koja proverava da li je prosečna vrednost preostalih k-suma manja ili jednaka od vrednosti $MaxSum$, odnosno da li je $unused/(n - Lim) \leq MaxSum$.

```
Algoritam Permute(X, Lim, n)
Ulaz:  X (tekuća permutacija koja se uređuje)
       Lim (indeks elementa koga treba varirati)
       n (veličina permutacije)
Izlaz: (spisak permutacija koja zadovljavaju zadate uslove)
begin
       if Lim = n − 1 then
       (provera graničnih slučajeva)
             if Check(X, n) then
                   Process(X);
       else
       X' := X;
       PairSum := X[Lim − 2] + X[Lim − 1];
       if PairSum < MaxSum then
             for j := Lim to n − 1
                   Swap(j, Lim, X);
                   if X[Lim] + PairSum > MaxSum then
                         continue;
                   else
                         (Provera da li je preostala suma dovoljno mala)
                         unused := unused − X[Lim];
                         if TheRestSmallEnough(X, Lim, n) then
                               Permute(X, Lim + 1, n);
                         unused := unused + X[Lim];
       X := X'; (regeneracija niza X)
end
```

Činjenica da se za $Lim = n - 1$ ne proverava trojka $(n-2, n-1, 1)$ ne utiče na tačnost rezultata.

3. Konkretne vrednosti granica za pojedine (n,k)

Korišćenjem rezultata iz rada [2] izračunate su konkretne teorijske granice za minimalne k-varijacije permutacija iz S_n za $2 \leq k \leq 10, 3 \leq n \leq 100$. U funkciji ***BoundariesGenerator()*** su implementirana tvrđenja teorema navedenih u poglavlju 2. Funkcija kao ulazne argumente ima veličinu permutacije – n, broj elemenata u sumi – k i matricu gornjih granica za $disc(n,k)$ koja je ulazno-izlazni argument. Izračunate vrednosti gornjih granica se upisuju u ovu matricu, dok se ova matrica, rekurzivno, koristi u implementaciji Teoreme 5 i Teoreme 10 (videti poglavlje 2).

Za zadati par (n,k) se primenom više teorema dobija više gornjih granica za $disc(n,k)$, od kojih se uzima najmanja i upisuje na odgovarajuće mesto u matrici gornjih granica.

Prikazaćemo funkciju koja izračunava donju teorijsku granicu – ***LowerBound_Calculate()*** i funkciju koja izračunava gornju teorijsku granicu – ***UpperBound_Calculate()***. Takođe, prikazaćemo i poziv ove dve funkcije koji se odvija u dvostrukoj petlji, po n i k.

U prikazima ovih funkcija koriste se sledeće pomoćne funkcije

- $AddNewElement(int[], int)$ koja ubacuje novi element na kraj prosleđenog niza
- $Min(int[])$ koja određuje minimum prosleđenog niza

```
Algoritam LowerBound_Calculate(n, k)
Ulaz:  n (veličina permutacije)
       k (dužina k − sume)
Izlaz: lowerBound (donja teorijska granica)
begin
       AvK := k(n + 1)/2;
       (Za donju granicu se proveravaju uslovi Teoreme 11)
       q = (n,k);   (q je najveći zajednički delilac)
       if n > 2k AND q = 1 then
             r := n mod k;
             for j := 1 to n − 1 do
                   if (j · r)mod k = 1 OR (j · r)mod k = k − 1 then
                         s := j; break; (pronađeno je s)
             lowerBound := ⌈AvK + k/2s⌉;
       else (Ukoliko nisu ispunjeni uslovi, donja granica je prosečna suma
zaokružena na veću vrednost ili povećana za 1 ukoliko je celobrojna)
       if (2 · AvK)mod 2 = 0 then
             lowerBound := AvK + 1;
       else
             lowerBound := ⌈AvK⌉;
end
```

```
Algoritam UpperBound_Calculate(n, k)
Ulaz: n (veličina permutacije)
      k (dužina k − sume)
      upperBoundsMatrix [][](matrica gornjih teorijskih granica)
Izlaz: upperBoundsMatrix[][](matrica gornjih teorijskih granica)
begin
    AvK := k(n + 1)/2;
    if k = 1 then
    (Upisuje se n u niz UpperBounds koji
     sadrži sve gornje granice dobijene korišćenjem Teorema-Slučaj k=1 i k=2 se koriste
    redom u ispitivanju granica po Teoremi 10 i Teoremi 5)
        AddNewElement(UpperBounds, n);
    else
    (Ispituju se uslovi preostalih Teorema)
        (Teorema 2)
        if k mod 2 <> 0 then
            if n = 2k then
                AddNewElement(UpperBounds, ⌊AvK + 0.5⌋);
            else if n = 3k then
                AddNewElement(UpperBounds, ⌊AvK + 1⌋);
        (Teorema 3)
        if k = 2 AND n > 3 then
            AddNewElement(UpperBounds, ⌊AvK + 1⌋);
        (Teorema 4)
        if k = 3 AND n ≥ 6 then
            AddNewElement(UpperBounds, ⌊AvK + 2⌋);
        (Teorema 5)
        minUpperBound := 100 · AvK;
        for all {p, q} in Factors(k) do (Factors(k) su svi parovi delilaca broja k)
        (za sve parove p i q traži se najmanja gornja granica u matrici gornjih granica)
            if p(upperBoundsMatrix[q − 1][n − 1] − q(n+1)/2) <
                    minUpperBound − AvK then
                minUpperBound :=
            AvK + p(upperBoundsMatrix[q − 1][n − 1] − q(n+1)/2);
        AddNewElement(UpperBounds, minUpperBound);
        (Posledica 6)
        if k mod 2 = 0 then
            AddNewElement(UpperBounds, ⌊AvK + k/2⌋);
        (Teorema 7)
        if n mod k = 0 then
            if k mod 2 = 0 then
                AddNewElement(UpperBounds, ⌊AvK + 1⌋);
            else
                AddNewElement(UpperBounds, ⌊AvK + 2⌋);
```

(Teorema 9)

if $q > 1$ **then**

  if $q\ mod\ 2 = 0$ **then**

    $AddNewElement(UpperBounds, \lfloor AverageKSum + 2 \rfloor);$

  else

    $AddNewElement(UpperBounds, \lfloor AverageKSum + 3.5 \rfloor);$

(Teorema 10)

if $q\ mod\ 2 = 1\ AND\ q > 1$**then**

$$AddNewElement\left(\begin{array}{c} UpperBounds, \\ \left\lfloor upperBoundsMatrix\left[\frac{k}{q} - 1\right]\left[\frac{n}{q} - 1\right] - \frac{k}{q} * \frac{\left(\frac{n}{q}+1\right)}{2} \right\rfloor \end{array} \right);$$

(Teorema 13)

if $k\ mod\ 2 <> 0\ AND\ q = 1$**then**

  $AddNewElement(UpperBounds, \lfloor AverageKSum + k + 6 \rfloor);$

(Rezultat se upisuje na odgovarajuće mesto u matrici)

$AddNewElement(upperBoundsMatrix[k - 1], Min(UpperBounds));$

end

Obzirom da se već dobijene vrednosti koriste za dalje izračunavanje vrednosti teorijskih granica, neophodno je, zbog korišćenja Teoreme 5 i Teoreme 10, izračunati i vrednosti za $k = 1{,}2$.

Dobijeni su sledeći rezultati, prikazani u obliku odstupanja donje (DG) i gornje (GG) granice za $disc(n, k)$, kao i razlika Diff=GG-DG.

k	3			4			5			6			7			8			9			10		
n	DG	GG	Diff	DG	GG	Diff	DG	GG	Diff	DG	GG	Diff	DG	GG	Diff	DG	GG	Diff	DG	GG	Diff	DG	GG	Diff
4	0.5	8.5	8.0																					
5	1.0	9.0	8.0	1.0	2.0	1.0																		
6	0.5	0.5	0.0	1.0	2.0	1.0	0.5	10.5	10.0															
7	2.0	2.0	0.0	1.0	2.0	1.0	1.0	11.0	10.0	1.0	3.0	2.0												
8	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	0.5	10.5	10.0	1.0	2.0	1.0	0.5	12.5	12.0									
9	1.0	1.0	0.0	2.0	2.0	0.0	1.0	11.0	10.0	1.0	1.0	0.0	1.0	13.0	12.0	1.0	4.0	3.0						
10	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	0.5	0.5	0.0	1.0	2.0	1.0	0.5	12.5	12.0	1.0	2.0	1.0	0.5	4.5	4.0			
11	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	1.0	3.0	2.0	1.0	13.0	12.0	1.0	4.0	3.0	1.0	6.0	5.0	1.0	5.0	4.0
12	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	1.5	10.5	9.0	1.0	1.0	0.0	0.5	12.5	12.0	1.0	2.0	1.0	0.5	3.5	3.0	1.0	2.0	1.0
13	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	1.0	13.0	12.0	1.0	4.0	3.0	1.0	6.0	5.0	1.0	5.0	4.0
14	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	0.5	0.5	0.0	1.0	2.0	1.0	0.5	4.5	4.0	1.0	2.0	1.0
15	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	1.0	1.0	0.0	1.0	1.0	0.0	4.0	13.0	9.0	1.0	4.0	3.0	1.0	3.0	2.0	1.0	1.0	0.0
16	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	1.5	12.5	11.0	1.0	1.0	0.0	0.5	4.5	4.0	1.0	2.0	1.0
17	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	1.0	6.0	5.0	1.0	5.0	4.0
18	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	1.5	10.5	9.0	1.0	1.0	0.0	2.5	12.5	10.0	1.0	2.0	1.0	0.5	0.5	0.0	1.0	2.0	1.0
19	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	2.0	4.0	2.0	5.0	6.0	1.0	1.0	5.0	4.0
20	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	3.5	12.5	9.0	1.0	2.0	1.0	1.5	4.5	3.0	1.0	1.0	0.0
21	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	1.0	1.0	0.0	1.0	1.0	0.0	2.0	4.0	2.0	1.0	2.0	1.0	5.0	5.0	0.0
22	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	3.5	12.5	9.0	1.0	2.0	1.0	2.5	4.5	2.0	1.0	2.0	1.0
23	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	3.0	6.0	3.0	2.0	5.0	3.0
24	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	2.5	10.5	8.0	1.0	1.0	0.0	2.5	12.5	10.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0
25	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	1.0	2.0	1.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	2.0	6.0	4.0	1.0	1.0	0.0

26	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	1.5	12.5	11.0	1.0	2.0	1.0	4.5	4.5	0.0	1.0	2.0	1.0
27	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	1.0	1.0	0.0	4.0	13.0	9.0	2.0	4.0	2.0	1.0	1.0	0.0	2.0	5.0	3.0
28	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	4.5	4.5	0.0	1.0	2.0	1.0
29	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	4.0	13.0	9.0	2.0	4.0	2.0	2.0	6.0	4.0	5.0	5.0	0.0
30	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	1.5	12.5	11.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0
31	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	3.0	6.0	3.0	5.0	5.0	0.0
32	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	2.5	12.5	10.0	1.0	1.0	0.0	2.5	4.5	2.0	1.0	2.0	1.0
33	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	1.0	1.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	1.0	2.0	1.0	2.0	5.0	3.0
34	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	3.5	12.5	9.0	1.0	2.0	1.0	1.5	4.5	3.0	1.0	2.0	1.0
35	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	1.0	2.0	1.0	3.0	3.0	0.0	1.0	2.0	1.0	2.0	4.0	2.0	5.0	6.0	1.0	1.0	1.0	0.0
36	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	2.5	10.5	8.0	1.0	1.0	0.0	3.5	12.5	9.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0
37	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	2.0	4.0	2.0	5.0	6.0	1.0	2.0	5.0	3.0
38	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	2.5	12.5	10.0	1.0	2.0	1.0	1.5	4.5	3.0	1.0	2.0	1.0
39	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	1.0	1.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	1.0	2.0	1.0	5.0	5.0	0.0
40	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	1.5	12.5	11.0	1.0	1.0	0.0	2.5	4.5	2.0	1.0	1.0	0.0
41	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	4.0	13.0	9.0	4.0	4.0	0.0	3.0	6.0	3.0	5.0	5.0	0.0
42	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	1.5	10.5	9.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0
43	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	4.0	13.0	9.0	2.0	4.0	2.0	2.0	6.0	4.0	2.0	5.0	3.0
44	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	1.5	12.5	11.0	1.0	2.0	1.0	4.5	4.5	0.0	1.0	2.0	1.0
45	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	0.0	2.0	13.0	11.0	2.0	4.0	2.0	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	0.0
46	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	2.5	12.5	10.0	1.0	2.0	1.0	4.5	4.5	0.0	1.0	2.0	1.0
47	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	2.0	6.0	4.0	2.0	5.0	3.0
48	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	1.5	10.5	9.0	1.0	1.0	0.0	3.5	12.5	9.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0
49	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	1.0	2.0	1.0	4.0	4.0	0.0	3.0	6.0	3.0	5.0	5.0	0.0
50	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	3.5	12.5	9.0	1.0	2.0	1.0	2.5	4.5	2.0	1.0	1.0	0.0
51	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	1.0	1.0	0.0	2.0	13.0	11.0	2.0	4.0	2.0	1.0	2.0	1.0	5.0	5.0	0.0
52	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	2.5	12.5	10.0	1.0	2.0	1.0	1.5	4.5	3.0	1.0	2.0	1.0
53	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	2.0	4.0	2.0	5.0	6.0	1.0	2.0	5.0	3.0
54	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	2.5	10.5	8.0	1.0	1.0	0.0	1.5	12.5	11.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0
55	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	1.0	2.0	1.0	3.0	3.0	0.0	4.0	13.0	9.0	4.0	4.0	0.0	5.0	6.0	1.0	1.0	1.0	0.0
56	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	1.5	4.5	3.0	1.0	2.0	1.0
57	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	1.0	1.0	0.0	4.0	13.0	9.0	4.0	4.0	0.0	1.0	2.0	1.0	2.0	5.0	3.0
58	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	1.5	12.5	11.0	1.0	2.0	1.0	2.5	4.5	2.0	1.0	2.0	1.0
59	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	2.0	4.0	2.0	3.0	6.0	3.0	5.0	5.0	0.0
60	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	2.5	12.5	10.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0
61	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	2.0	4.0	2.0	2.0	6.0	4.0	5.0	5.0	0.0
62	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	3.5	12.5	9.0	1.0	2.0	1.0	4.5	4.5	0.0	1.0	2.0	1.0
63	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	1.0	1.0	0.0	1.0	2.0	1.0	4.0	4.0	0.0	1.0	2.0	1.0	2.0	5.0	3.0
64	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	3.5	12.5	9.0	1.0	1.0	0.0	4.5	4.5	0.0	1.0	2.0	1.0
65	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	1.0	2.0	1.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	2.0	6.0	4.0	1.0	1.0	0.0
66	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	2.5	10.5	8.0	1.0	1.0	0.0	2.5	12.5	10.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0
67	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	2.0	4.0	2.0	3.0	6.0	3.0	2.0	5.0	3.0
68	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	1.5	12.5	11.0	1.0	2.0	1.0	2.5	4.5	2.0	1.0	2.0	1.0
69	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	1.0	1.0	0.0	4.0	13.0	9.0	2.0	4.0	2.0	1.0	2.0	1.0	5.0	5.0	0.0
70	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	1.5	4.5	3.0	1.0	1.0	0.0
71	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	4.0	13.0	9.0	4.0	4.0	0.0	5.0	6.0	1.0	5.0	5.0	0.0
72	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	1.5	10.5	9.0	1.0	1.0	0.0	1.5	12.5	11.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0
73	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	5.0	6.0	1.0	2.0	5.0	3.0
74	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	2.5	12.5	10.0	1.0	2.0	1.0	1.5	4.5	3.0	1.0	2.0	1.0
75	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	0.0	2.0	13.0	11.0	2.0	4.0	2.0	1.0	2.0	1.0	1.0	1.0	0.0
76	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	3.5	12.5	9.0	1.0	2.0	1.0	2.5	4.5	2.0	1.0	2.0	1.0
77	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	1.0	2.0	1.0	2.0	4.0	2.0	3.0	6.0	3.0	2.0	5.0	3.0
78	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	1.5	10.5	9.0	1.0	1.0	0.0	3.5	12.5	9.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0
79	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	2.0	6.0	4.0	5.0	5.0	0.0

80	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	2.5	12.5	10.0	1.0	1.0	0.0	4.5	4.5	0.0	1.0	1.0	0.0
81	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	1.0	1.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	1.0	2.0	1.0	5.0	5.0	0.0
82	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	1.5	12.5	11.0	1.0	2.0	1.0	4.5	4.5	0.0	1.0	2.0	1.0
83	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	4.0	13.0	9.0	2.0	4.0	2.0	2.0	6.0	4.0	2.0	5.0	3.0
84	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	2.5	10.5	8.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0
85	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	1.0	2.0	1.0	3.0	3.0	0.0	4.0	13.0	9.0	2.0	4.0	2.0	3.0	6.0	3.0	1.0	1.0	0.0
86	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	1.5	12.5	11.0	1.0	2.0	1.0	2.5	4.5	2.0	1.0	2.0	1.0
87	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	1.0	1.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	1.0	2.0	1.0	2.0	5.0	3.0
88	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	2.5	12.5	10.0	1.0	1.0	0.0	1.5	4.5	3.0	1.0	2.0	1.0
89	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	5.0	6.0	1.0	5.0	5.0	0.0
90	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	3.5	12.5	9.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0
91	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	3.0	3.0	0.0	1.0	2.0	1.0	2.0	4.0	2.0	5.0	6.0	1.0	5.0	5.0	0.0
92	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	3.5	12.5	9.0	1.0	2.0	1.0	1.5	4.5	3.0	1.0	2.0	1.0
93	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	1.0	1.0	0.0	2.0	13.0	11.0	2.0	4.0	2.0	1.0	2.0	1.0	2.0	5.0	3.0
94	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	2.5	10.5	8.0	1.0	2.0	1.0	2.5	12.5	10.0	1.0	2.0	1.0	2.5	4.5	2.0	1.0	2.0	1.0
95	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	1.0	2.0	1.0	3.0	3.0	0.0	2.0	13.0	11.0	4.0	4.0	0.0	3.0	6.0	3.0	1.0	1.0	0.0
96	0.5	1.5	1.0	1.0	1.0	0.0	2.5	10.5	8.0	1.0	1.0	0.0	1.5	12.5	11.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0
97	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	2.0	11.0	9.0	3.0	3.0	0.0	4.0	13.0	9.0	4.0	4.0	0.0	2.0	6.0	4.0	2.0	5.0	3.0
98	1.5	1.5	0.0	1.0	2.0	1.0	1.5	10.5	9.0	1.0	2.0	1.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	4.5	4.5	0.0	1.0	2.0	1.0
99	1.0	2.0	1.0	2.0	2.0	0.0	3.0	11.0	8.0	1.0	1.0	0.0	4.0	13.0	9.0	2.0	4.0	2.0	1.0	2.0	1.0	5.0	5.0	0.0
100	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	0.0	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.0	1.5	12.5	11.0	1.0	2.0	1.0	4.5	4.5	0.0	1.0	1.0	0.0

Tabela 2 – Izračunate vrednosti $disc(n,k)$

4. Algoritam pretrage

Prethodna tabela pokazuje da za neke parove (n, k) rezultati iz rada [2] ne određuju tačnu vrednost minimalne k-varijacije permutacija iz S_n. Preostaje da se za što više parova (n, k) iz ove tabele odrede tačne vrednosti $disc(n, k)$ i $msum(n, k)$. Zbog toga su urađene tri dorade osnovne verzije algoritma iz rada [3]:

- pronalaženje dobre početne permutacije na osnovu konstrukcija iz rada [2];

- modifikacija potrebna da bi se mogao rešavati problem za proizvoljno k.

- modifikacija potrebna da bi se mogao rešavati i simetrični problem, tj. određivanje $disc(n, k)$;

1. <u>Pronalaženje „najpovoljnije" početne permutacije</u>
   Brzina izvršavanja algoritma zavisi, pored ostalog, i od permutacije od koje se počinje pretraga. Teoreme iz rada [2] u svojim dokazima daju konstrukcije početne permutacije u zavisnosti od reda permutacije n i veličine k. Neke od ovih konstrukcija implementira funkcija *StartPermutation()*. Ukoliko su n i k uzajamno prosti brojevi, početna permutacija se kreira iz jednog dela tako što i-ti element iz uređenog skupa $\{1,2,3, \ldots, n\}$ u početnoj permutaciji dobija indeks $(k \cdot i) mod\ n$. Za ovakvu konstrukciju je korišćena pomoćna funkcija $OneCyclePermutation(n, k)$. Ukoliko n i k nisu uzajamno prosti brojevi, a najveći zajednički delilac je paran broj, početna permutacija se kreira prema konstrukciji iz dokaza Teoreme 9 uz pomoć funkcije $PermutationWithQ\_Even(n, k)$. U ostalim slučajevima korišćena je prosta početna permutacija dobijena funkcijom $SimplePermutation(n, k)$.

```
Algoritam StartPermutation(n, k, X)
Ulaz:  n (veličina permutacije)
       k (broj elemenata k- sume)
Izlaz: X (početna permutacija)
begin
       q = (n, k);   (q je najveći zajednički delilac)
       if q = 1 then (q je NZD za N i K)
             X := OneCyclePermutation(n, k);
       else
             if (q mod 2 = 0) then
                   X := PermutationWithQ_Even(n, k);
             else
                   X := SimplePermutation(n, k);
end
```

Pomoćne funkcije $OneCyclePermutation(n,k)$, $PermutationWithQ\_Even(n,k)$ i $SimplePermutation(n,k)$ su prikazane sledećim pseudo kodovima:

Algoritam **OneCyclePermutation(n,k)**
Ulaz: $\boldsymbol{n}$ *(veličina permutacije)*
$\boldsymbol{k}$ *(broj elemenata k- sume)*
Izlaz: $\boldsymbol{X}$ *(početna permutacija)*
begin
$index := 0;$
for $i := 1$ **to** n **do**
$X[index] := i;$
$index := (index + k) mod\ n;$
end

Algoritam **PermutationWithQ_Even(n,k)**
Ulaz: $\boldsymbol{n}$ *(veličina permutacije)*
$\boldsymbol{k}$ *(broj elemenata k- sume)*
Izlaz: $\boldsymbol{X}$ *(početna permutacija)*
begin
$q := (n,k);$
if $\frac{n}{q} mod\ 2 = 0$ **then**
$Sigma := \left(1,3,5,\dots,\frac{n}{q}-1,\frac{n}{q},\frac{n}{q}-2,\frac{n}{q}-4,\dots,2\right);$
else
$Sigma := \left(1,3,5,\dots,\frac{n}{q},\frac{n}{q}-1,\frac{n}{q}-3,\frac{n}{q}-5,\dots,2\right);$

(popunjavaju se delovi 1+2l i 2+2l)
for $l := 0$ **to** $(q-2)/2$ **do**
for $i := 0$ **to** $\frac{n}{q}-1$ **do**
$X[iq+2l] := Sigma[i] + ln/q;$
$X[iq+1+2l] := (n+1) - (Sigma[i] + \frac{ln}{q});$
end

Algoritam **SimplePermutation(n,k)**
Ulaz: $\boldsymbol{n}$ *(veličina permutacije)*
$\boldsymbol{k}$ *(broj elemenata k- sume)*
Izlaz: $\boldsymbol{X}$ *(početna permutacija)*
begin
for $i := 0$ **to** $n-1$ **do**
$X[i] := n - i;$
(zamena elemenata na pozicijama 0 i 1 niza X)
$Swap(0,1,X);$
end

2. Izračunavanje vrednosti za proizvoljno k

Ovo je bila najveća modifikacija algoritma, neophodna da bi se mogli obrađivati parovi (n, k), $k > 3$. Uz permutaciju elemenata početne $(k-1)$-sume, uopšten je uslov iz rada [1] za rano prepoznavanje da neka grana pretrage ne vodi prihvatljivoj permutaciji, uopšten je uslov provere graničnog slučaja (na kraju permutacije), kao i uslov za eliminaciju simetrije. Zato su urađene sledeće promene:

2.1. U osnovnoj verziji algoritma, kao priprema za poziv funkcije *Permute()*, dovoljno je uređivanje prva tri elementa – jedan je fiksiran, a preostala dva se biraju tako da je nulti uvek manji od drugog čime se eliminiše pretraga simetričnih slučajeva. Kao uopštenje, u modifikovanom algoritmu se najpre izdvajaju sve kombinacije elementata dužine k iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koje zadovoljavaju uslov da im je suma manja od vrednosti $MaxSum$. U definiciji rekurzivne funkcije ***ExtractStartElements()*** koja realizuje ovo izdvajanje kombinacija, korišćene su sledeće pomoćne funkcije:

- $Length(X)$ koja vraća broj elemenata u listi X
- $Sum(X)$ koja vraća sumu svih elemenata u listi X
- $AddNewElement(X, a)$ koja u listu X dodaje element a na kraj liste
- $RemoveElement(X, a)$ koja iz liste X briše element a
- $InsertInCollection(AllX, X)$ koja u kolekciju lista dodaje novu listu na početak

```
Algoritam ExtractStartElements( X, n, k, currentStartElements, currentXElement)
Ulaz: X (permutacija)
      n (veličina permutacije)
      k (broj elemenata k − sume)
      currentStartElements (pomoćni niz elemenata permutacije)
      currentXElement (indeks tekućeg elementa niza X)
Izlaz: AllStartElements (kolekcija svih kombinacija početnih elemenata za permutacije)
begin
      if Length(currentStartElements) = k − 1 then(odabrano je k-1 elemenata)
            if (Sum(currentStartElements) + X[0] ≤ MaxSum) and
                        (Sum(currentStartElements) + X[0] ≥ MinSum) then
            (ukoliko je suma tekuće k-torke unutar intervala [MinSum,MaxSum],
            k-torka postaje kandidat za početak početne premutacije)
                  InsertInCollection(AllStartElements, currentStartElements)
            else
                  return;
      else
      (uzima se sledeći element iz niza X)
      for i := currentXElement + 1 to n − 1
            AddNewElement(currentStartElements, X[i]);
            ExtractStartElements(X, n, k, currentStartElements, i);
            RemoveElement(currentStartElements, X[i]);
      return;
end
```

2.2. Funkcija *ExtractStartElements()* se završava pošto su sve kombinacije koje zadovoljavaju odgovarajuće uslove smeštene u kolekciju *AllStartElements* i to tako da se na poslednjem mestu ove kolekcije nalazi kombinacija sa nizom elemenata čiji raspored odgovara rasporedu elemenata u permutaciji X za $i = 1,2, \ldots k - 1$. Svaka permutacija svake od kombinacija iz kolekcije *AllStartElements* se može koristiti kao koren stabla pretrage. Pretraga počinje upravo od poslednje po indeksu kombinacije iz kolekcije *AllStartElements* i to sa permutacijom ove kombinacije čiji raspored elemenata odgovara permutaciji X za $i = 1,2, \ldots k - 1$. Na taj način, zapravo, pretraga započinje od početne permutacije X koja je kreirana u koraku 1.

Ova i naredne permutacije se kreiraju pozivom funkcije *PermuteStart()* koja uređuje prvih k elemenata izuzev fiksiranog. U ovom postupku se uočava sličnost sa osnovnim algoritmom i delom gde se vrši priprema za poziv funkcije *Permute()*. Kao ulazni argumenti u funkciju *PermuteStart()* prosleđuju se n, k, tekuća početna permutacija X u kojoj su na prvih k pozicija postavljeni elementi tekuće kombinacije iz *AllStartElements* kolekcije, vrednost za promenljivu $current$ sa početnom vrednošću 1 čime se fiksira prvi element.

```
Algoritam PermuteStart( X, n, k, current)
Ulaz:  X (permutacija)
       n (veličina permutacije)
       k (broj elemenata k-sume)
       current (pomoćna promenljiva - brojač)
begin
       if current = k − 2 then
       (početni deo permutacije spreman – postavljeno je prvih k-1
       elemenata na svoje mesto, može se nastaviti dalje)
       PermuteRest(X, k, n);
       else
             for j := current to k − 2
                    Swap(j, current, X);
                    PermuteStart(X, n, k, current + 1);
                    Swap(j, current, X);
       return;
end
```

Poziv funkcija $ExtractStartElements()$ i $PermuteStart()$ je implementiran u funkciji $Permute()$ koju predstavljamo sledećim pseudo kodom:

```
Algoritam Permute(X, n, k)
Ulaz: X (permutacija)
      n (veličina permutacije)
      k (broj elemenata k-sume)
begin
      (Izvršava se funkcija ExtractStartElements gde je X niz koji predstavlja početnu
      permutaciju, a currentStartElements u početku prazan niz u koji će tokom izvršenja ove
      funkcije biti smeštano k-1 elemenata)
      AllStartElements := ExtractStartElements(X, n, k, currentStartElements, 0);
      for i := Length(AllStartElements) down to 1
      (Prvih k-1 elemenata niza X postaju elementi iz tekuće kombinacije skupa
      AllStartElements zamenom mesta odgovarajućih elemenata u nizu X)
            for j := 0 to k − 1
                  Swap(j + 1, IndexOf(AllStartElements[i][j], X), X);
            PermuteStart(X, n, k, 1);
end
```

Nakon postavljanja prvih $k-1$ elemenata na odgovarajuće mesto, poziva se funkcija *PermuteRest()* koja je slična funkciji *Permute()* iz osnovne verzije algoritma. Razlika postoji u uslovu u kojoj se eliminiše simetrija gde se, umesto upoređivanja elemenata $X[0]$ i $X[2]$, upoređuju elementi $X[1]$ i $X[k-1]$, dok je element $X[0]$ fiksiran. Takođe, uopšten je i uslov za rano prepoznavanje da se od tekućeg čvora u stablu pretrage ne može dobiti dobra permutacija. Uopšteni uslov u funkciji *PermuteRest()* opisan je sledećim pseudo kodom:

```
unused := unused − X[Lim]; (Lim je indeks poslednjeg uređenog elementa
u postupku dobijanja tražene permutacije)
if (n − Lim + (k − 2)) · MaxSum ≥
k · unused + ∑_{i=1}^{k−1}(i · X[Lim − (k − (i + 1))] + (k − i) · X[i − 1]) then
      PermuteRest(X, Lim + 1, n);
unused = unused + X[Lim];
```

Na sličan način je uopšten i uslov koji se koristi u funkciji koja proverava granične slučajeve za $k > 3$.

3. <u>Izračunavanje vrednosti $disc(n, k)$ - simetrični problem</u>

   Kako bi isti algoritam služio i za izračunavanje vrednosti $\underline{disc(n, k)}$ za simetrični problem, koristi se još jedna globalna promenljiva – $MinSum$. Ne sme postojati k-suma čija je vrednost manja od vrednosti $MinSum$. Tako, ukoliko je $MinSum = 0$, rešava se asimetrični problem, a ukoliko je $MinSum = AverageSum - (MaxSum - AverageSum)$, rešava se simetrični problem.

5. Rezultati dobijeni pretragom i njhova uopštenja

Primenom modifikovanog algoritma pretrage izračunate su vrednosti minimalne k-varijacije $disc(n,k)$, odnosno ekstremalne vrednosti k-suma $msum(n,k)$ za $3 \leq k \leq 10$, i što je moguće veće n. Prilikom pretrage su korišćene teorijske granice iz Tabele 2 i to tako što se za vrednosti počevši od donje granice proverava da li postoji permutacija sa zadatom k-varijacijom, odnosno ekstremnom k-sumom.

Od izvršavanja algoritma za $n' = n + 1$ se odustaje ukoliko je izvršavanje algoritma za tekuće n imalo više od 10^{11} premeštanja elemenata (10^{12} premeštanja na procesoru Intel CPU T2050 na 1.6GHz je približno 48 sati izvršavanja) ili ukoliko je razlika u vremenu izračunavanja $disc(n-2,k)$ i $disc(n-1,k)$ veća od 10 sati.

U nastavku će za $k = 3,4,\ldots,10$ najpre biti tabelom i dijagramom prikazane dobijene vrednosti $disc(n,k)$ i $msum'(n,k)$ (na dijagramima se prikazuju i teorijske granice). Dobijeni rezultati se analiziraju; u nekim slučajevima se postavljaju hipoteze o tačnim vrednostima $disc(n,k)$, $msum'(n,k)$, i zatim dokazuju te hipoteze. Sve Teoreme i Hipoteze sa rednim brojem većim od 25 su navedene u poglavlju 5.2.

Slučajevi u kojima je $msum'(n,k) < disc(n,k)$ su označeni bojenjem veće vrednosti $disc(n,k)$ crvenom bojom.

5.1. *Rezultati dobijeni pretragom*

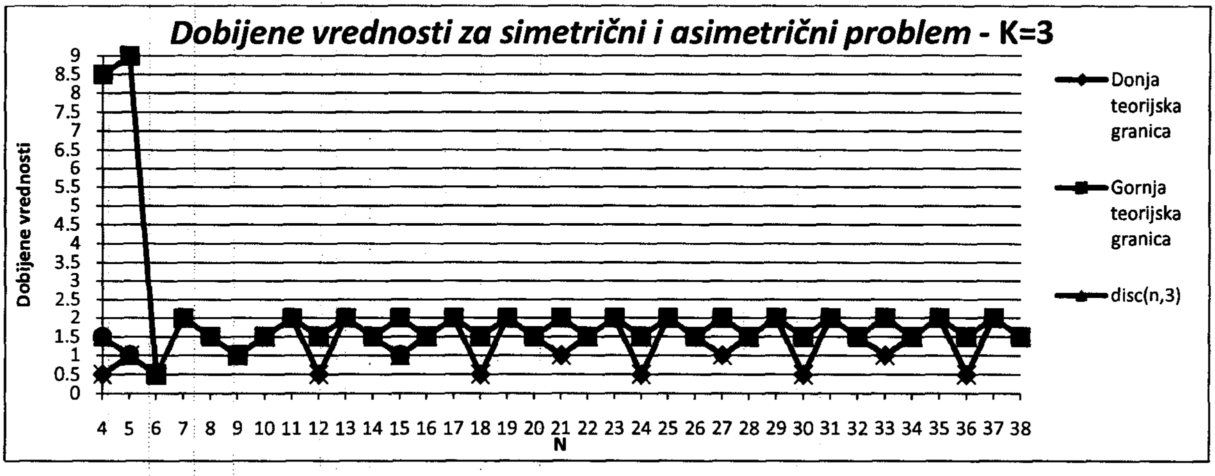
U ovom odeljku navode se rezultati dobijeni pretragom i teorijski rezultati koji ih uopštavaju, a jednostavna su posledica teorema iz rada [2].

<u>Vrednosti za $k = 3$</u>

Dobijene vrednosti su prikazane u sledećoj tabeli i na grafiku:

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$disc(n,3)$	1.5	1	0.5	2	1.5	1	1.5	2	1.5	2	1.5	1	1.5	2	1.5	2	1.5	2	1.5	2	1.5	2	1.5	2	1.5	2	1.5
n	31	32	33	34	35	36	37	38																			
$disc(n,3)$	2	1.5	2	1.5	2	1.5	2	1.5																			

Tabela 3. Dobijene vrednosti $msum'(n,3) = disc(n,3),\ 4 \le n \le 38$



Slika 3. Dobijene vrednosti $msum'(n,3) = disc(n,3),\ 4 \le n \le 38$

Za dobijene vrednosti važi da je $msum'(n,3) = disc(n,3), 4 \le n \le 38$. U tabeli i na grafiku su prikazane vrednosti za $4 \le n \le 38$ zato što su to vrednosti n za koje je izračunato $msum'(n,3)$[2]. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 27, za vrednosti $disc(3m+1,3)$, $disc(3m+2,3)$ i $disc(6m,3)$, $m \ge 2$ imamo da je:

$$disc(n,3) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1(mod\ 2) \\ 1.5, & n \equiv 0(mod\ 2) \end{cases}, \quad n > 6, n \ne 6m+3$$

Vrednosti $disc(6m+3,3), m > 0$ su dobijene pretragom do $n = 33$. Na osnovu dobijenih rezultata postavljena je Hipoteza 28 prema kojoj je $disc(6m+3,3) = 2$.

Vrednosti $disc(n,3), n \le 6$ za $(n,3) = 1$ su dobijene pretragom.

Specijalno, za $n = 15$ dobijena vrednost se ne nalazi na gornjoj granici koju postavlja tvrđenje Teoreme 4. Jedino je u slučaju $n = 15$ moguće napraviti permutaciju π u kojoj je $disc(\pi,3) = 1$. Razlog ove

---

[2] Ove vrednosti su objavljene na Interaktivnoj enciklopeciji celobrojnih brojeva (OEIS). http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html?q=A066385&language=english

specifičnosti se nalazi u odabiru permutacije kakav, prema tvrđenju i dokazu Teoreme 4 nije moguće napraviti za slučajeve $n > 15$. Odabirom da je

$$\boldsymbol{d} = ((1,-2,2,-2,1)^3)$$

dobija se da sve 3-sume uzimaju vrednosti iz skupa $\{x-1, x, x+1\}$. Zato je $disc(15,3) = 1$.

Sa druge strane, korišćenjem tvrđenja Teoreme 29 imamo da je $msum'(2m,3) = 3/2, m \geq 3$.

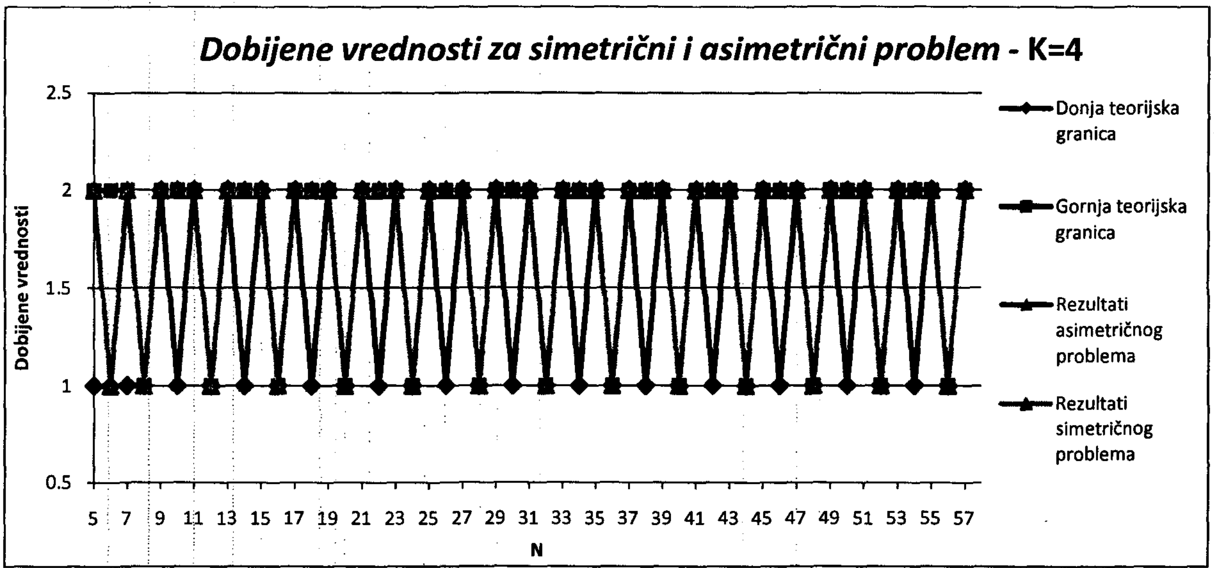
Vrednosti $msum'(2m+1,3)$ su dobijene pretragom do $n = 37$. Prema dobijenim vrednostima postavljena je Hipoteza 30 prema kojoj je $msum'(2m+1,3) = 2$.

Vrednosti $disc(n,4)$ i $msum'(n,4)$

Dobijene vrednosti su prikazane u sledećoj tabeli i na grafiku:

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$disc(n,4)$	2	1	2	1	2		2	1	2		2	1	2		2	1	2	2	2	1	2	2	2	1
$msum'(n,4)$	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1										
n	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
$disc(n,4)$	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1
n	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
$disc(n,4)$	2	2	2	1	2																			

Tabela 4 – Dobijene vrednosti za $disc(n,4), 5 \leq n \leq 57$ i vrednosti za $msum'(n,4), 5 \leq n \leq 18$



Slika 4 – Dobijene vrednosti za $disc(n,4), 5 \leq n \leq 57$ i vrednosti za $msum'(n,4), 5 \leq n \leq 18$

Najpre ćemo razmotriti vrednosti $disc(n,4)$.

Teorema 14. Neka je $n = 4m, m \geq 1$. Tada je $disc(n,4) = 1$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 7 imamo da je $disc(4m,4) = 1$. ∎

Teorema 15. Neka je $n = 2m + 1, m \geq 4$. Tada je $disc(n,4) = 2$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Posledice 12 imamo da je $disc(2m + 1, 4) = 2$.

Vrednosti za $disc(4m + 2{,}4)$ su dobijene pretragom do $n = 54$. Prema dobijenim vrednostima postavljena je Hipoteza 31 prema kojoj je $disc(4m + 2{,}4) = 2$.

Dalje ćemo razmotriti vrednosti $msum'(n,4)$.

Teorema 16. Neka je $n = 4m, m \geq 1$. Tada je $msum'(n,4) = 1$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 7, za $n = 4m$ imamo da je $msum'(n,4) \leq disc(n,4) = 1$, te je $msum'(n,4) = 1$. ∎

Vrednosti $msum'(2m+1{,}4), m \geq 2$ su dobijene pretragom do $2m+1 \leq 17$ i prema dobijenim vrednostima imamo da je $msum'(2m+1) = 2, 2m+1 \leq 17$.

Korišćenjem tvrđenja Teoreme 32 imamo da je $msum'(4m+2,4) = 1, m > 1$.

Dobijene vrednosti za $msum'(n,4)$ se mogu prikazati i sledećim izrazom:

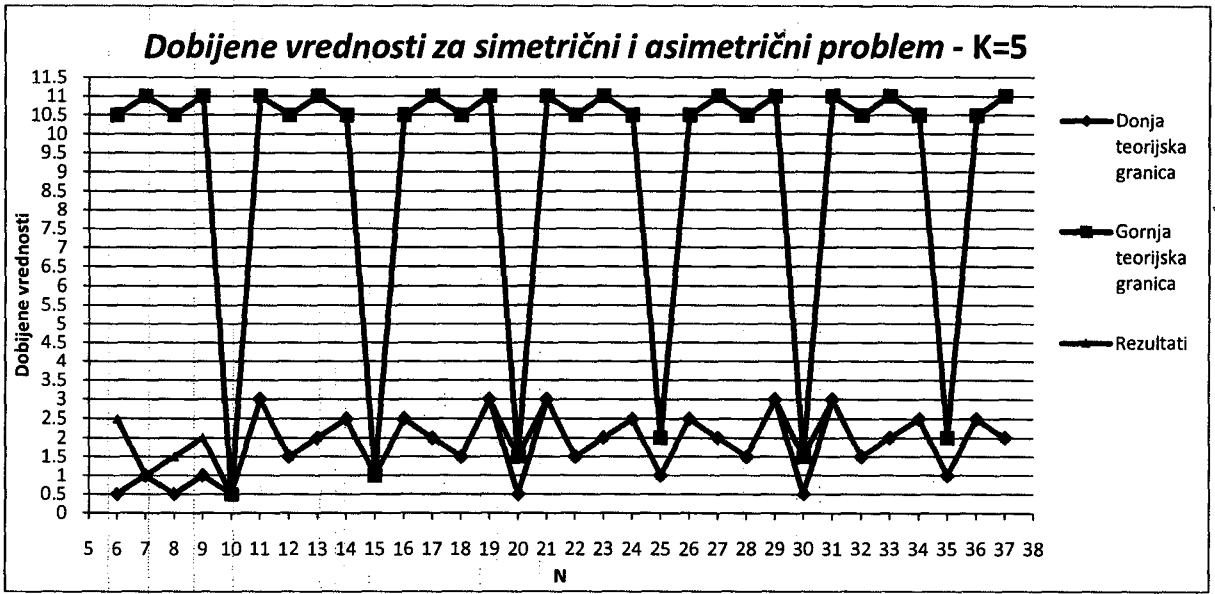
$$msum'(n,4) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1 (mod\ 2) \\ 1, & n \equiv 0 (mod\ 2) \end{cases}, \quad n \leq 18$$

Vrednosti $disc(n,5)$ i $msum'(n,5)$

Dobijene vrednosti su prikazane u sledećoj tabeli i na grafiku:

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$disc(n,5)$	2.5	1	1.5	2	0.5	3	1.5	2	2.5	1	2.5	2	1.5	3	1.5	3	1.5	2	2.5	1	2.5	2	1.5
$msum'(n,5)$	2.5	1	1.5	2	0.5	3	1.5	2	2.5	1	2.5	2	1.5										
n	29	30	31	32	33	34	35	36	37														
$disc(n,5)$	3	1.5	3	1.5	2	2.5	1	2.5	2														

Tabela 5 – Dobijene vrednosti za $disc(n,5), 6 \leq n \leq 37$ i vrednosti za $msum'(n,5), 5 \leq n \leq 18$



Slika 5 – Dobijene vrednosti za $disc(n,5), 6 \leq n \leq 37$ i vrednosti za $msum'(n,5), 5 \leq n \leq 18$

Primećujemo da je $disc(n,5) = msum'(n,5),\ 6 \leq n \leq 18$.

Posmatraćemo samo vrednosti $disc(n,5)$.

Vrednosti za $n \in \{6,8,9\}$ su dobijene pretragom dok nam vrednost za slučaj $n = 10$ daje Teorema 2.

Ostale vrednosti koje su dobijene pretragom do $n = 37$ se mogu svrstati u 5 grupa:

$$disc(n,5) = \begin{cases} 3, & n = 5(2m+1) \pm 4 \\ 1.5, & n = 5(2m+1) \pm 3 \\ 2, & n = 5(2m+1) \pm 2 \\ 2.5, & n = 5(2m+1) \pm 1 \\ 1, & n = 5(2m+1) \end{cases}, m > 0$$

Dakle, u slučajevima kada je $(n,5) = 1$ vrednosti se nalaze na donjoj granici koju postavlja Teorema 11 dok se u slučaju $n = 5(2m+1), m > 0$ vrednosti nalaze na donjoj granici koju predstavlja prosečna 5-suma uvećana za 1.

Korišćenjem tvrđenja Teoreme 33 imamo da je $disc(10m,5) = msum'(10m,5) = \frac{3}{2}, m > 1$.

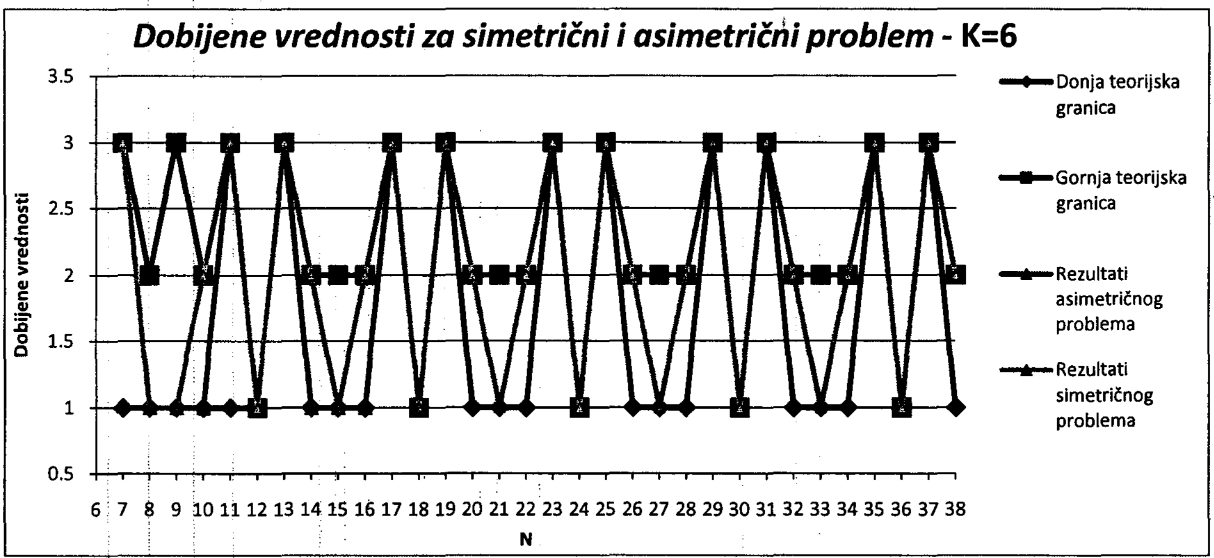
Za slučaj $k = 5$ može se primetiti i veoma varijabilna brzina izračunavanja vrednosti u zavisnosti od reda permutacije. Obzirom da se dobijena vrednost gotovo uvek nalazila na donjoj granici, brzina izračunavanja je u jakoj sprezi sa „blizinom" početne permutacije od permutacije koja predstavlja konačni rezultat. Tako, na primer, za $n = 36$ u 36 premeštanja je izračunavanje završeno, dok za $n = 37$ tražena vrednost je pronađena tek nakon 10^{12} premeštanja elemenata.

<u>Vrednosti $disc(n,6)$ i $msum'(n,6)$</u>

Dobijene vrednosti su prikazane u sledećoj tabeli i na grafiku:

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$disc(n,6)$	3	1	1		3	1	3		1		3	1	3	2	1	2	3	1	3	2	1	2
$msum'(n,6)$	3	1	1	1	3	1	3	1	1	1	3	1										
n	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39											
$disc(n,6)$	3	1	3	2	1	2	3	1	3	2	1											

Tabela 6 – Dobijene vrednosti za $disc(n,6), 7 \leq n \leq 39$ i vrednosti za $msum'(n,6), 7 \leq n \leq 18$ i $k = 6$



Slika 6 – Dobijene vrednosti za $disc(n,6), 7 \leq n \leq 39$ i vrednosti za $msum'(n,6), 7 \leq n \leq 18$ i $k = 6$

Najpre ćemo razmotriti vrednosti $disc(n,6)$.

Teorema 17. Neka je $n = 6m, m \geq 1$. Tada je $disc(n,6) = 1$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 7 imamo da je $disc(n,6) = 1$. ∎

Teorema 18. Neka je $n = 6m + 1$ ili $n = 6m + 5, n > 12$. Tada je $disc(n,6) = 3$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Posledice 12 imamo da je $disc(n,6) = \frac{6}{2} = 3$.

Za slučaj $n = 6m + 3, m > 0$, tvrđenje Teoreme 34 pokazuje da je $disc(n,6) = 1$.

Ostale vrednosti za $disc(n,6)$ su dobijene pretragom do $n = 39$.

Dalje ćemo razmotriti vrednosti $msum'(n,6)$.

Teorema 19. Neka je $n = 6m, m \geq 1$. Tada je $msum'(n,6) = 1$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 7 imamo da je $msum'(n,6) \leq disc(n,6) = 1$, te je $msum'(n,6) = 1$ ∎

Za slučajeve $n = 6m + 2$ i $n = 6m + 4, n \geq 10$, prema tvrđenju Teoreme 35 imamo da je $msum'(n, 6) = 1$.

Prema tvrđenju Posledice 36 imamo da je $msum'(6m + 3,6) = 1, m > 0$.

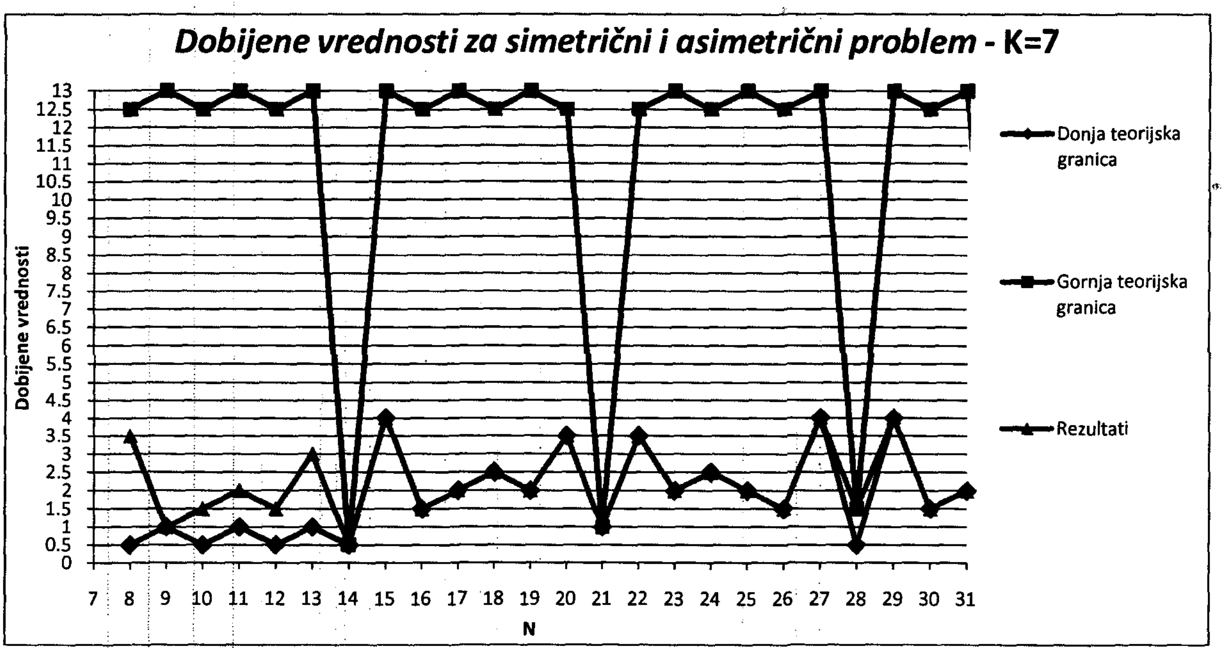
Za preostala dva slučaja, $n = 6m + 1$ i $n = 6m + 5$, vrednosti su dobijene pretragom do $n = 17$.

Vrednosti $disc(n,7)$ i $msum'(n,7)$

Dobijene vrednosti su prikazane u sledećoj tabeli i na grafiku:

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$disc(n,7)$	3.5	1	1.5	2	1.5	3	0.5	4	1.5	2	2.5	2	3.5	1	3.5	2	2.5	2	1.5	4	3.5
$msum'(n,7)$	3.5	1	1.5	2	1.5	3	0.5	4	1.5	2											
n	29	30	31																		
$disc(n,7)$	4	1.5	2																		

Tabela 7 – Dobijene vrednosti za $disc(n,7), 8 \leq n \leq 31$ i vrednosti za $msum'(n,7), 8 \leq n \leq 17$ i $k = 7$



Slika 7 – Dobijene vrednosti za $disc(n,7), 8 \leq n \leq 31$ i vrednosti za $msum'(n,7), 8 \leq n \leq 17$ i $k = 7$

Primećujemo da je $disc(n,7) = msum'(n,7),\ 8 \leq n \leq 17$.

Posmatraćemo samo vrednosti $disc(n,7)$.

Korišćenjem tvrđenja Teoreme 37 imamo da je $disc(14m,7) = msum'(14m,7) = \frac{3}{2}, m > 1$.

Vrednosti za preostale slučajeve su dobijene pretragom do $n = 31$.

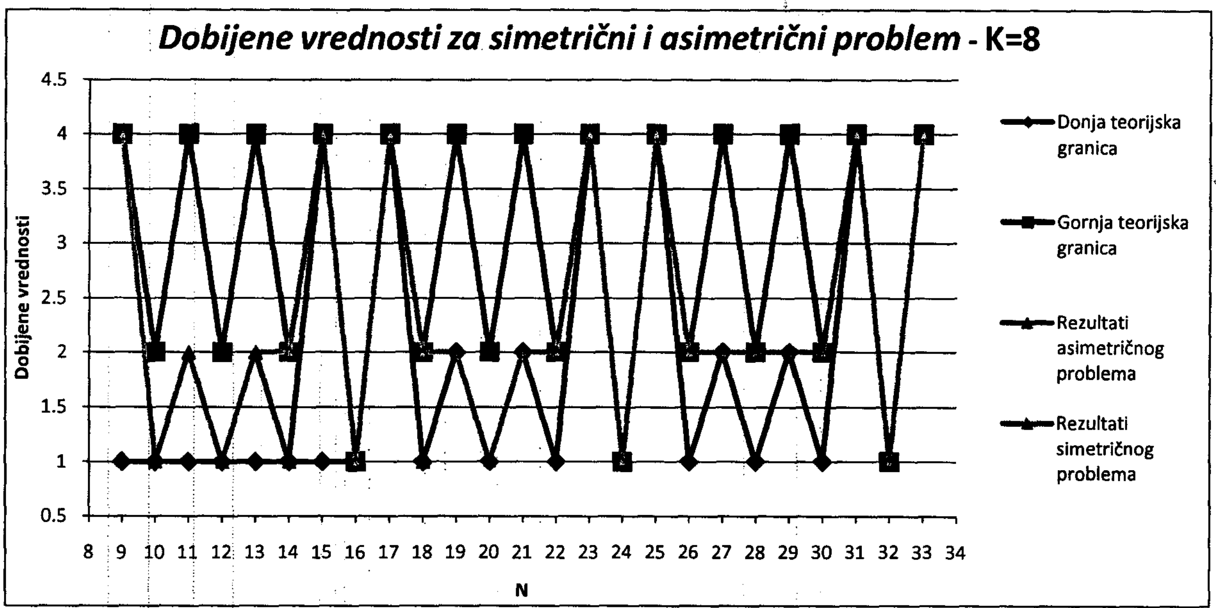
U slučajevima za $n > 14$, kada se za postavljanje donje teorijske granice koristi tvrđenje Teoreme 11, dobijene vrednosti su uvek jednake donjoj teorijskoj granici. Nasuprot tome, vrednosti su znatno manje od gornje teorijske granice koju postavlja tvrđenje Teoreme 13.

Vredností $disc(n,8)$ i $msum'(n,8)$

Dobijene vrednosti su prikazane u sledećoj tabeli i na grafiku:

n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$disc(n,8)$	4	1	2	1	2		4	1	4		2	1	2	2	4	1	4	2	2	2
$msum'(n,8)$	4	1	2	1	2	1	4	1	4	1										
n	29	30	31	32	33															
$disc(n,8)$	2	2	4	1	4															

Tabela 8 – Dobijene vrednosti za $disc(n,8), 9 \leq n \leq 33$ i vrednosti za $msum'(n,8), 9 \leq n \leq 18$ i $k = 8$



Slika 8 - Dobijene vrednosti za $disc(n,8), 9 \leq n \leq 33$ i vrednosti za $msum'(n,8), 9 \leq n \leq 18$ i $k = 8$

Najpre ćemo razmotriti vrednosti $disc(n,8)$.

Teorema 20. Neka je $n = 8m, m \geq 1$. Tada je $disc(n,8) = 1$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 7 imamo da je $disc(n,8) = 1$. ■

Teorema 21. Neka je $n = 8m + 1$ ili $n = 8m + 7, n > 16$. Tada je $disc(n,8) = 4$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Posledice 12 imamo da je $disc(n,8) = \frac{8}{2} = 4$.

Za preostale slučajeve vrednosti su dobijene pretragom do $n = 33$. Specijalno, prema dobijenim vrednostima za slučajeve $n = 8m + 3$ i $n = 8m + 5, n > 16$ koje se nalaze na granici koju nam daje Teorema 11 ($disc(n,8) = 2$), formirana je Hipoteza 38.

Dalje ćemo razmotriti vrednosti $msum'(n,8)$.

Teorema 22. Neka je $n = 8m, m \geq 1$. Tada je $msum'(n,8) = 1$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 7 imamo da je $msum'(n,8) \leq disc(n,8) = 1$, te je $msum'(n,8) = 1$ ■

Za slučajeve $n = 8m + 2$ i $n = 8m + 6$, $m > 0$ prema tvrđenju Teoreme 39 imamo da je $msum'(n,8) = 1$.

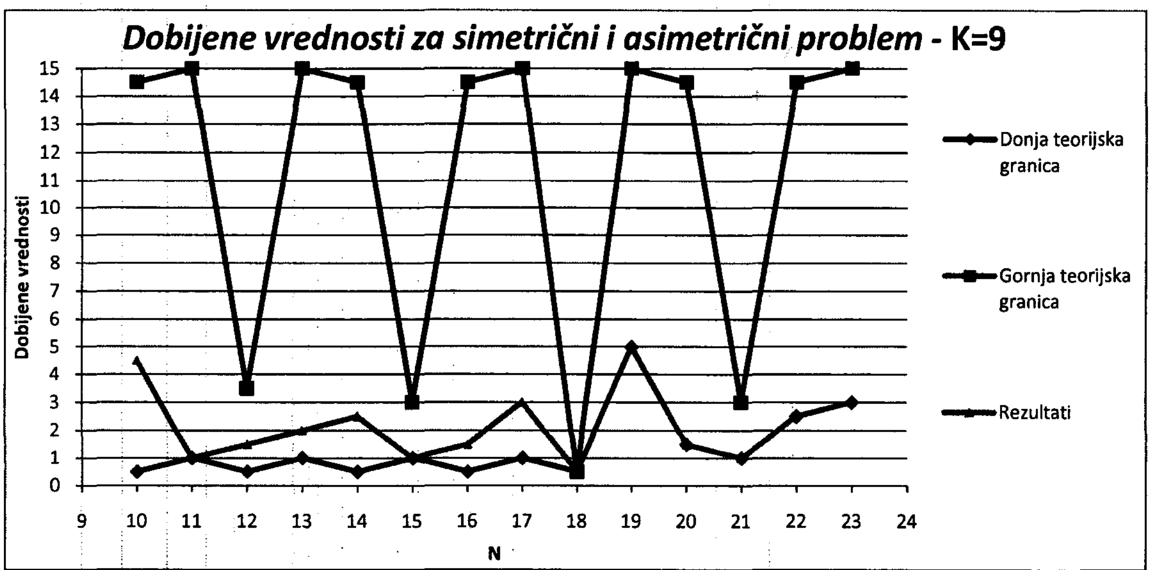
Vrednosti za ostale slučajeve su dobijene pretragom do $n = 18$.

Vrednosti $disc(n, 9)$ i $msum'(n, 9)$

Dobijene vrednosti su prikazane u sledećoj tabeli i na grafiku:

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$disc(n, 9)$	4.5	1	1.5	2	2.5	1	1.5	3	0.5	5	1.5	1	2.5	3
$msum'(n, 9)$	4.5	1	1.5	2	2.5	1	1.5	3	0.5					

Tabela 9 – Dobijene vrednosti za $disc(n, 9), 10 \leq n \leq 23$ i vrednosti za $msum'(n, 9), 10 \leq n \leq 18$ i $k = 9$



Slika 9 – Dobijene vrednosti za $disc(n, 9), 10 \leq n \leq 23$ i vrednosti za $msum'(n, 9), 10 \leq n \leq 18$ i $k = 9$

Primećujemo da je $disc(n, 9) = msum'(n, 9),\ 10 \leq n \leq 18$.

Posmatraćemo samo vrednosti $disc(n, 9)$.

Korišćenjem tvrđenja Teoreme 40 imamo da je $disc(18m, 9) = msum'(18m, 9) = \frac{3}{2}, m > 1$.

Vrednosti za preostale slučajeve su dobijene pretragom do $n = 23$ za simetričan problem i do $n = 18$ za asimetričan problem.

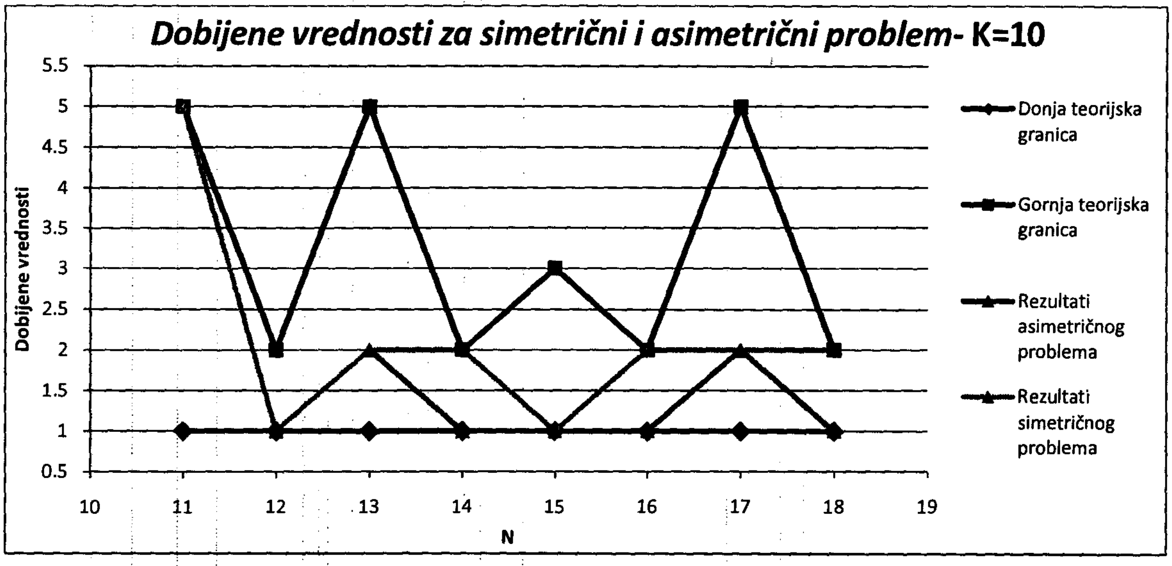
U slučajevima za $n > 18$, kada se za postavljanje donje teorijske granice koristi tvrđenje Teoreme 11, dobijene vrednosti za $disc(n, 9)$ su uvek jednake donjoj teorijskoj granici. Nasuprot tome, vrednosti su znatno manje od gornje teorijske granice koju postavlja tvrđenje Teoreme 13.

Vrednosti $disc(n, 10)$ i $msum'(n, 10)$

Dobijene vrednosti su prikazane u sledećoj tabeli i na grafiku:

n	11	12	13	14	15	16	17	18
$disc(n, 10)$	5	1	2		1		2	
$msum'(n, 10)$	5	1	2	1	1	1	2	1

Tabela 10 – Dobijene vrednosti za $disc(n, 10), 11 \leq n \leq 18$ i vrednosti za $msum'(n, 10), 11 \leq n \leq 18$



Slika 10 - Dobijene vrednosti za $disc(n, 10), 11 \leq n \leq 18$ i vrednosti za $msum'(n, 10), 11 \leq n \leq 18$

Najpre ćemo razmotriti vrednosti $disc(n, 10)$.

Teorema 23. Neka je $n = 10m, m \geq 1$. Tada je $disc(n, 10) = 1$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 7 imamo da je $disc(n, 10) = 1$. ■

Teorema 24. Neka je $n = 10m + 1$ ili $n = 10m + 9, n > 20$. Tada je $disc(n, 10) = 5$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Posledice 12 imamo da je $disc(n, 10) = \frac{10}{2} = 5$.

Dalje ćemo razmotriti vrednosti koje su dobijene za problem $msum'(n, 10)$.

Teorema 25. Neka je $n = 10m, m \geq 1$. Tada je $msum'(n, 10) = 1$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 7 imamo da je $msum'(n, 10) \leq disc(n, 10) = 1$, te je $msum'(n, 10) = 1$ ■

Za preostale slučajeve vrednosti su dobijene pretragom do $n = 18$ za oba problema.

Mali broj dobijenih vrednost je posledica velikog broja premeštanja elemenata već za slučaj $n = 19$ gde tražena vrednosti nije dobiena ni u 10^{12} premeštanja.

5.2. *Nove donje i gornje granice*

Rezultati iz prethodnog odeljka sugerišu neka moguća uopštenja. Neka od tih tvrđenja dokazuju se u ovom odeljku. Neka od preostalih formulisana su kao hipoteze.

Teorema 26. Za $n > 2k$ je $disc(n,k) \geq msum'(n,k) > \frac{1}{2}$.

Dokaz. Ukoliko je $\underline{k = 2m, m \geq 1}$, onda je i $Avg(n,k)$ ceo broj. Tada je $msum'(n,2m) \geq 1$, te za ovaj slučaj broja k važi tvrđenje Teoreme.

Razmotrimo dalje slučaj $\underline{k = 2m-1, m \geq 1}$. Pretpostavimo da postoji permutacija π koja zadovoljava da je $msum'(\pi,k) = \frac{1}{2}$. Pretpostavimo da je k-suma permutacije π jednaka:

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{k-1} = Avg(n,k) + \frac{1}{2}$$

Naredne uzastopne k-sume uzimaju naizmenično vrednosti iz skupa $\left\{Avg(n,k) - \frac{1}{2}, Avg(n,k) + \frac{1}{2}\right\}$. Zbog toga, neophodno je da raspored elemenata u permutaciji π započinje na sledeći način:

$$\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{k-1}, \pi_0 - 1, \pi_1 + 1, \pi_2 - 1, \dots, \pi_{k-2} + 1, \pi_{k-1} - 1$$

Ukoliko iskoristimo činjenicu da permutacija nema ponavljanja elemenata, ovde dolazimo do kontradikcije, jer bi naredni element morao da bude $\pi_0 - 1 + 1 = \pi_0$ što je nemoguće. Odatle važi tvrđenje Teoreme. ■

Teorema 27. Neka je $n \neq 6m+3$ i $n > 6$. Tada važi:

$$disc(n,3) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1(mod\ 2) \\ 1.5, & n \equiv 0(mod\ 2) \end{cases}$$

Dokaz. Analizu ćemo podeliti u tri slučaja.

Slučaj $\underline{n = 6m, m \geq 2.}$ Korišćenjem tvrđenja Teoreme 26 pokazujemo da je $disc(n,3) \geq \frac{3}{2}$. Sa druge strane, korišćenjem tvrđenja Teoreme 4 imamo da je $disc(n,3) \leq 2$, a pošto za n parno važi da $disc(n,3)$ ne može biti celobrojna vrednost, važi da je $disc(n,3) = \frac{3}{2}$.

Slučaj $\underline{n = 6m+1 \text{ i } n = 6m+5, m \geq 1.}$ U ovom slučaju n je neparno i važi da je $\gcd(n,k) = 1$. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 4 i Teoreme 11 imamo da je $\frac{3}{2} \leq disc(n,3) \leq 2$. Kada je n neparno, prosečna suma je celobrojna te je $disc(n,3) = 2$.

Slučaj $\underline{n = 6m+2 \text{ i } n = 6m+4, m \geq 1.}$ U ovom slučaju n je parno i važi da je $\gcd(n,k) = 1$. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 4 i Teoreme 11 imamo da je $\frac{3}{2} \leq disc(n,3) \leq 2$. Kada je n parno, prosečna suma nije celobrojna te je $disc(n,3) = \frac{3}{2}$.

Analizom prethodnih slučajeva dokazana je Teorema. ■

Hipoteza 28. Neka je $n = 6m + 3, m > 2$. Tada je $disc(n, 3) = 2$.

Teorema 29. Neka je $n = 2m, m > 3$. Tada je $msum'(n, 3) = 3/2$.

Dokaz. Koristeći tvrđenje Teoreme 26 u sprezi sa tvrđenjem Teoreme 27, imamo da je $\frac{1}{2} < msum'(2m, 3) \leq disc(2m, 3) = \frac{3}{2}, m \geq 3$, odakle sledi tvrđenje Teoreme. ∎

Hipoteza 30. Neka je $n = 2m + 1, n > 15$. Tada je $msum'(n, 3) = 2$.

Hipoteza 31. Neka je $n = 4m + 2, m \geq 2$. Tada je $disc(n, 4) = 2$.

Teorema 32. Neka je $n = 4m + 2, m > 1$. Važi da je $msum'(n, 4) = 1$.

Dokaz. Odabirom da je

$$\boldsymbol{d} = ((1, -1)^{2m-1}, -2m, 2m, -1, 1)$$

dobija se da je, ukoliko je $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = x$, niz k-suma sledeći:

$$(x, (x + 1, x)^{2m-1}, x - 2m, x, x + 1)$$

Ukoliko se ovako dobijene k-sume saberu, i to izjednači sa $4n(n + 1)/2$ dobija se da je

$$4x + 1 - 2m + (2m - 1)(2x + 1) = 2(4m + 2)(4m + 3)$$

Odavde je $x = 8m + 6$ što je prosečna vrednost k-suma za permutaciju reda $4m + 2$, te je i $msum(n, 4) = Avg(n, 4) + 1$. ∎

Teorema 33. Neka je $n = 10m, m > 1$. Tada važi da je $disc(n, 5) = msum'(n, 5) = \frac{3}{2}$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 26 u sprezi sa tvrđenjem Teoreme 7 imamo da je $\frac{1}{2} < msum'(n, 5) \leq disc(n, 5) \leq 2$. Za n parno imamo da $disc(n, 5)$ i $msum'(n, 5)$ ne može biti ceo broj te je $disc(n, 5) = msum'(n, 5) = \frac{3}{2}$. ∎

Teorema 34. Neka je $n = 6m + 3, m > 0$. Tada važi da je $disc(n, 6) = 1$.

Dokaz. Odabirom da je

$$\boldsymbol{d} = ((-2, 2)^{3m-3}, (-1, 1, -1)^2, 2, -2, 2)$$

dobija se da je, ukoliko je $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = x$, niz k-suma sledeći:

$$(x, (x - 2, x)^{3m-3}, x - 1, x, x - 1, x - 2, x - 1, x - 2, x, x - 2)$$

Ukoliko se ovako dobijene k-sume saberu, i to izjednači sa $6n(n + 1)/2$ dobija se da je

$$9x - 9 + (3m - 3)(2x - 2) = 3(6m + 3)(6m + 4)$$

Odavde je $x - 1 = 3(6m + 4)$ što je prosečna vrednost k-suma za permutaciju reda $6m + 3$, pa je i $disc(n, 6) = 1$. ■

Teorema 35. Neka je $n = 6m + 2$ ili $n = 6m + 4$ i neka je $n \geq 10$. Tada je $msum'(n, 6) = 1$.

Dokaz. Dokaz ćemo podeliti u dva dela. U oba slučaja imamo da je $\gcd(n, 6) = 2$, te traženu permutaciju možemo konstruisati od 2 dela ($loop(i), i = 1,2$).

Pretpostavimo da je $n = 6m + 2$. Uzmimo da je:

$$f\big(loop(1)\big) = ((-m, -m, 2m + 1)^m, -m),$$

$$f\big(loop(2)\big) = \big((m, m, -(2m + 1)\big)^m, m)$$

Ukoliko fiksiramo prvi element prvog dela permutacije bude π_0, a prvi element drugog dela bude π_1 imamo da je:

$$loop(1) = \big(\pi_0, \pi_0 - m, \pi_0 - 2m, \pi_0 + 1, \pi_0 + 1 - m, \dots, \pi_0 + m\big),$$

$$loop(2) = (\pi_1, \pi_1 + m, \pi_1 + 2m, \pi_1 - 1, \pi_1 - 1 + m, \dots, \pi_1 - m)$$

Ukoliko dalje posmatramo vektor $\boldsymbol{d}$ koristeći elemente iz dva dobijena dela, imamo:

$$\boldsymbol{d} = ((1, -1)^{3m}, -3m, 3m)$$

Odakle važi da je $msum'(6m + 2, 6) = 1$, te je prvi deo Teoreme dokazan.

Pretpostavimo, dalje, da je $n = 6m + 4$. Uzmimo da je:

$$f\big(loop(1)\big) = ((m + 1, m + 1, -(2m + 1))^m, m + 1, -(2m + 1)),$$

$$f\big(loop(2)\big) = ((-(m + 1), -(m + 1), 2m + 1)^m, -(m + 1), 2m + 1)$$

Ukoliko fiksiramo prvi element prvog dela permutacije bude π_0, a prvi element drugog dela bude π_1 imamo da je:

$$loop(1) = \big(\pi_0, \pi_0 + m + 1, \pi_0 + 2(m + 1), \pi_0 + 1, \pi_0 + 1 + m + 1, \dots, \pi_0 + m, \pi_0 + 2m + 1\big),$$

$$loop(2) = (\pi_1, \pi_1 - (m + 1), \pi_1 - 2(m + 1), \pi_1 - 1, \pi_1 - 1 - (m + 1), \dots, \pi_1 - m, \pi_1 - 2m - 1)$$

Ukoliko dalje posmatramo vektor $\boldsymbol{d}$ koristeći elemente iz dva dobijena dela, imamo:

$$\boldsymbol{d} = ((1, -1)^{3(m-1)}, 1, -1, 1, -1, -3m - 1, 3m + 1, 1, -1, 1, -1)$$

Odakle važi da je $msum'(6m + 4, 6) = 1$, te je i drugi deo Teoreme dokazan.■

Imamo posledicu Teoreme 34, prema kojoj imamo rešen slučaj $n = 6m + 3, m > 0$ za asimetričan problem. Tvrđenje posledice dajemo bez dokaza.

Posledica 36. Neka je $n = 6m + 3, m > 0$ i $Avg(n, k)$ prosečna vrednost k-suma u permutaciji π reda n. Važi da je $msum'(n, 6) = 1$. ■

Teorema 37. Neka je $n = 14m, m > 1$. Tada važi da je $disc(n, 7) = msum'(n, 7) = \frac{3}{2}$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 26 u sprezi sa tvrđenjem Teoreme 7 imamo da je $\frac{1}{2} < msum'(n, 7) \leq disc(n, 7) \leq 2$. Za n parno imamo da $disc(n, 7)$ i $msum'(n, 7)$ ne može biti ceo broj te je $disc(n, 7) = msum'(n, 7) = \frac{3}{2}$. ■

Hipoteza 38. Neka je $n = 8m + 3$ ili $n = 8m + 5, n > 16$. Tada važi da je $disc(n, 8) = 2$.

Teorema 39. Neka je $n = 8m + 2$ ili $n = 8m + 6$ za $m > 0$. Tada važi da je $msum'(n, 8) = 1$.

Dokaz. Dokaz ćemo podeliti u dva dela. U oba slučaja imamo da je $\gcd(n, 8) = 2$, te traženu permutaciju možemo konstruisati od 2 dela ($loop(i), i = 1{,}2$).

Pretpostavimo da je $n = 8m + 2$. Uzmimo da je:

$$f(loop(1)) = ((3m + 1, -m, -m, -m)^m, -m),$$

$$f(loop(2)) = ((-(3m + 1), m, m, m)^m, m)$$

Iz odabranih $f(loop(i)), i = 1{,}2$ jednoznačno se mogu razviti delovi $loop(1)$ i $loop(2)$. Tada dobijamo vektor $\boldsymbol{d}$ u sledećem obliku:

$$\boldsymbol{d} = ((1, -1)^{4(m-1)+1}, -4m, 4m, (1, -1)^3)$$

Odakle važi da je $msum'(8m + 2, 8) = 1$, te je prvi deo Teoreme dokazan.

Pretpostavimo, dalje, da je $n = 8m + 6$. Uzmimo da je:

$$f(loop(1)) = ((m + 1, m + 1, m + 1, -(3m + 2))^m, m + 1, m + 1, -(3m + 2)),$$

$$f(loop(2)) = ((-(m + 1), -(m + 1), -(m + 1), 3m + 2)^m, -(m + 1), -(m + 1), 3m + 2)$$

Dobijamo da je vektor $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{d} = ((1, -1)^{4(m-1)+3}, -4m, 4m, (1, -1)^3)$$

Odakle važi da je $msum'(8m + 6, 8) = 1$, te je i drugi deo Teoreme dokazan.■

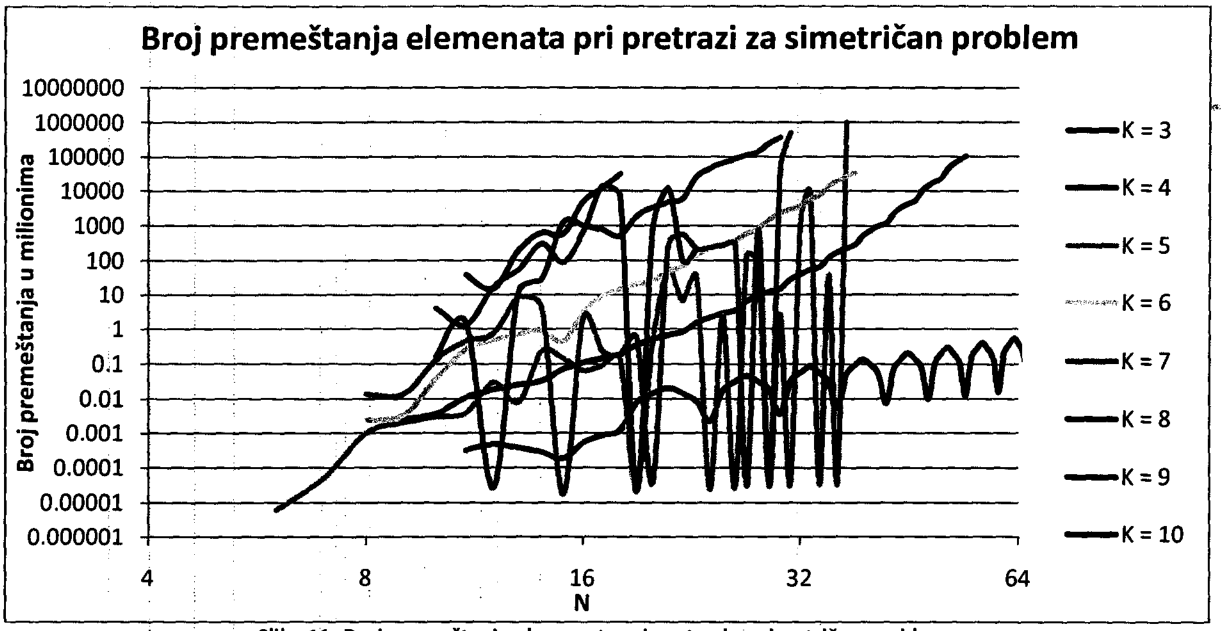
Teorema 40. Neka je $n = 18m, m > 1$. Tada važi da je $disc(n, 9) = msum'(n, 9) = \frac{3}{2}$.

Dokaz. Korišćenjem tvrđenja Teoreme 26 u sprezi sa tvrđenjem Teoreme 7 imamo da je $\frac{1}{2} < msum'(n, 9) \leq disc(n, 9) \leq 2$. Za n parno imamo da $disc(n, 9)$ i $msum'(n, 9)$ ne može biti ceo broj te je $disc(n, 9) = msum'(n, 9) = \frac{3}{2}$. ■

5.3. Vreme izvršavanja pretrage

Osnovni i modifikovani algoritam su eksponencijalne složenosti. Osnova eksponencijalne složenosti zavisi od više činilaca. Na nju utiče veličina broja k, međusobni odnos brojeva n i k, različite su osnove složenosti pri pretrazi za vrednostima simetričnog i asimetričnog problema, a brzina izračunavanja zavisi i od odabira početne permutacije.

Tokom pretrage, beleženi su podaci o broju premeštanja elemenata početne perumutacije potrebnih da bi se pronašla permutacija koja zadovoljava zadate kriterijume. Vreme koje je potrebno za izračunavanje vrednosti oba problema je uglavnom eksponencijalno raslo u odnosu na red permutacije. Kao ilustracija ovog rasta prikazan je grafik koji na logaritamskoj skali prikazuje broj premeštanja elemenata u funkciji od reda permutacije za izračunavanje vrednosti za simetričan problem.



Slika 11- Broj premeštanja elemenata pri pretrazi za simetričan problem

Dakle, na grafiku se može uočiti da za slučaj $k = 3$ imamo ekponencijalni rast funkcije sa malom osnovom, dok za $k = 5$ i $k = 7$ vidimo da postoje slučajevi u kojima je pretraga veoma kratko trajala.

Pri pretrazi za permutacijama koje zadovoljavaju kriterijume asimetričnog problema, u slučajevima kada je $(n,k) = 1$, trebalo je potražiti i permutacije koje zadovoljavaju uslov da je $Avg(n,k) < msum(n,k) < k/2s$, odnosno da je ekstremna suma ispod donje granice koju nam daje Teorema 11. Tako, bez izuzetka, u pretragama za asimetričan problem imamo eksponencijalni rast funkcije broja premeštanja elemenata i, kao posledicu, relativno mali broj dobijenih vrednosti.

6. Zaključak

Modifikacijom osnovnog algoritma pretrage, razvijen je algoritam pretrage za permutacijama koje zadovoljavaju kriterijume simetričnog i asimetričnog problema za slučajeve $k > 3$. Još jednom dajemo prikaz Teorema iz rada [2] na osnovu kojih smo dobili teorijske granice korišćene u algoritmu pretrage.

Neki specijalni slučajevi	
Teorema 2	Neka je k neparan. Tada je $disc(2k,k) = \frac{1}{2}$ i $disc(3k,k) = 1$.
Teorema 3	Za $n \geq 3, disc(n,2) = 1$.
Teorema 4	Neka je $n \geq 6$. Tada je $disc(n,3) \leq 2$.
Stav 5	$disc(n,pq) \leq p \cdot disc(n,q)$.
Posledica 6	Za parno k, $disc(n,k) \leq \frac{k}{2}$.
$\gcd(n,k) > 1$	
Teorema 7	Ukoliko je k parno, $disc(mk,k) = 1$, a ukoliko je k neparno, $disc(mk,k) \leq 2$.
Teorema 9	Neka je $q = \gcd(n,k)$ i neka je $q > 1$. Tada je $disc(n,k) \leq 2$ za q parno i $disc(n,k) \leq \frac{7}{2}$ za q neparno.
Teorema 10	Neka je su n i k dati tako da je $q = \gcd(n,k) > 1$ neparno. Tada važi da je: $$disc(n,k) \leq disc(\frac{n}{q},\frac{k}{q})$$
$\gcd(n,k) = 1$	
Teorema 11	Neka su n,k dati tako da je $\gcd(n,k) = 1, n > 2k$. Neka je $n = ak + r$, gde je $1 \leq r \leq k-1$, i neka je s najmanji pozitivan ceo broj takav da je $rs = \pm 1\ (mod\ k)$. Tada je: $$disc(n,k) \geq \frac{k}{2s}$$
Posledica 12	Neka su n i k dati tako da je k parno i $n \equiv \pm 1 (mod\ k)$. Tada je $disc(n,k) = k/2$.
Teorema 13	Neka je k neparno i $\gcd(n,k) = 1$. Tada je: $$disc(n,k) \leq k + 6.$$ Važi i više, za fiksirano k, pokazuje se da za $n > n_0(k)$ važi $$disc(n,k) \leq \frac{k}{2} + 9$$

Tabela 11 – Prikaz Teorema iz rada [2]

Dobijene permutacije zajedno sa rezultatima iz rada [2] su iskorišćene za konstrukcije permutacija koje kompletno rešavaju pojedine slučajeve vrednosti n.

U narednoj tabeli će biti prikazane Teoreme koje rešavaju pojedine slučajeve vrednosti n:

$disc(n,k)$			
k	n	Vrednost	Teorema
3	$3m+1, m \geq 2$	2	**Teorema 27.** Neka je $n \neq 6m+3$ i $n > 6$. Tada važi: $disc(n,3) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1(mod\ 2) \\ 1.5, & n \equiv 0(mod\ 2) \end{cases}$
	$3m+2, m \geq 2$	1.5	
	$6m, m \geq 3$	2	
4	$4m, m \geq 1$	1	**Teorema 14.** Neka je $n = 4m, m \geq 1$. Tada je $disc(n,4) = 1$.
	$2m+1, m \geq 4$	2	**Teorema 15.** Neka je $n = 2m+1, m \geq 4$. Tada je $disc(n,4) = 2$.
5	$10m, m > 1$	1.5	**Teorema 33.** Neka je $n = 10m, m > 1$. Tada važi da je $disc(n,5) = msum'(n,5) = \frac{3}{2}$.
6	$6m, m \geq 1$	1	**Teorema 17.** Neka je $n = 6m, m \geq 1$. Tada je $disc(n,6) = 1$.
	$6m+1, n > 12$	3	**Teorema 18.** Neka je $n = 6m+1$ ili $n = 6m+5, n > 12$. Tada je $disc(n,6) = 3$.
	$6m+5, n > 12$		
	$6m+3, m > 0$	1	**Teorema 34.** Neka je $n = 6m+3, m > 0$. Tada važi da je $disc(n,6) = 1$.
7	$14m, m > 1$	1.5	**Teorema 37.** Neka je $n = 14m, m > 1$. Tada važi da je $disc(n,7) = msum'(n,7) = \frac{3}{2}$.
8	$8m, m \geq 1$	1	**Teorema 20.** Neka je $n = 8m, m \geq 1$. Tada je $disc(n,8) = 1$.
	$8m+1, n > 16$	4	**Teorema 21.** Neka je $n = 8m+1$ ili $n = 8m+7, n > 16$. Tada je $disc(n,8) = 4$.
	$8m+7, n > 16$		
9	$18m, m > 1$	1.5	**Teorema 40.** Neka je $n = 18m, m > 1$. Tada važi da je $disc(n,9) = msum'(n,9) = \frac{3}{2}$.
10	$10m, m \geq 1$	1	**Teorema 23.** Neka je $n = 10m, m \geq 1$. Tada je $disc(n,10) = 1$.
	$10m+1, n > 20$	5	**Teorema 24.** Neka je $n = 10m+1$ ili $n = 10m+9, n > 20$. Tada je $disc(n,10) = 5$
	$10m+9, n > 20$		

$msum'(n,k)$			
k	n	Vrednost	Teorema
3	$2m, m \geq 3$	1.5	**Teorema 29.** Neka je $n = 2m, m \geq 3$. Tada je $msum'(n,3) = 3/2$.
4	$4m, m \geq 1$	1	**Teorema 16.** Neka je $n = 4m, m \geq 1$. Tada je $msum'(n,4) = 1$.
	$4m+2, m > 1$	1	**Teorema 32.** Neka je $n = 4m+2, m > 1$. Važi da je $msum'(n,4) = 1$.
5	$10m, m > 1$	1.5	**Teorema 33.** Neka je $n = 10m, m > 1$. Tada važi da je $disc(n,5) = msum'(n,5) = \frac{3}{2}$.
6	$6m, m \geq 1$	1	**Teorema 19.** Neka je $n = 6m, m \geq 1$. Tada je $msum'(n,6) = 1$.
	$6m+2, n \geq 10$	1	**Teorema 35.** Neka je $n = 6m+2$ ili $n = 6m+4$ i neka je $n \geq 10$. Tada je $msum'(n,6) = 1$.
	$6m+4, n \geq 10$		
	$6m+3, m > 0$	1	**Posledica 36.** Neka je $n = 6m+3, m > 0$ i $Avg(n,k)$ prosečna vrednost k-suma u permutaciji π reda n. Važi da je $msum'(n,6) = 1$.
7	$14m, m > 1$	1.5	**Teorema 37.** Neka je $n = 14m, m > 1$. Tada važi da je $disc(n,7) = msum'(n,7) = \frac{3}{2}$.
8	$8m, m \geq 1$	1	**Teorema 22.** Neka je $n = 8m, m \geq 1$. Tada je $msum'(n,8) = 1$.
	$8m+2, m > 0$	1	**Teorema 39.** Neka je $n = 8m+2$ ili $n = 8m+6$ za $m > 0$. Tada važi da

	$8m + 6, m > 0$		je $msum'(n, 8) = 1$.
9	$18m, m > 1$	1.5	**Teorema 40.** Neka je $n = 18m, m > 1$. Tada važi da je $disc(n, 9) = msum'(n, 9) = \frac{3}{2}$.
10	$10m, m \geq 1$		**Teorema 25.** Neka je $n = 10m, m \geq 1$. Tada je $msum'(n, 10) = 1$

Tabela 11 – Prikaz rešenih problema $disc(n, k)$ i $msum(n, k)$ za pojedine slučajeve vrednosti n i k

Tabelarno će biti prikazani i slučajevi n i k za koje su vrednosti dobijene pretragom i gde je za pojedine, na osnovu izračunatih rezultata postavljena i Hipoteza koja je data u tabeli.

k	n	Izračunato do n	$disc(n, k)$ Hipoteza
3	$6m + 3, m > 3$	33	**Hipoteza 28.** Neka je $n = 6m + 3, m > 2$. Tada je $disc(n, 3) = 2$.
4	$4m + 2, m \geq 2$	54	**Hipoteza 31.** Neka je $n = 4m + 2, m \geq 2$. Tada je $disc(n, 4) = 2$.
5	$5(2m + 1) \pm 4$	37	
	$5(2m + 1) \pm 3$		
	$5(2m + 1) \pm 2$		
	$5(2m + 1) \pm 1$		
	$5(2m + 1)$		
6	$6m + 2$	39	
	$6m + 4$		
7	$\neq 14m$	31	
8	$8m + 3$	33	**Hipoteza 38.** Neka je $n = 8m + 3$ ili $n = 8m + 5, n > 16$. Tada važi da je $disc(n, 8) = 2$.
	$8m + 5$		
	$8m + 2$	33	
	$8m + 4$		
	$8m + 6$		
9	$\neq 18m$	23	
10	$\neq 10m, 10m \pm 1$	18	
k	**n**	**Izračunato do n**	**$msum'(n, k)$ Hipoteza**
3	$2m + 1, n > 15$	37	**Hipoteza 30.** Neka je $n = 2m + 1, n > 15$. Tada je $msum'(n, 3) = 2$.
4	$2m + 1, m \geq 2$	17	
5	$5(2m + 1) \pm 4$	37	
	$5(2m + 1) \pm 3$		
	$5(2m + 1) \pm 2$		
	$5(2m + 1) \pm 1$		

	$5(2m+1)$		
6	$n = 6m+1$	17	
	$n = 6m+5$		
7	$\neq 14m$	31	
8	$8m+1$	18	
	$8m+3$		
	$8m+4$		
	$8m+5$		
	$8m+7$		
9	$\neq 18m$	18	
10	$\neq 10m$	18	

Prema dobijenim vrednostima možemo zaključiti da su se one, kada je gornja granica definisana tvrđenjem Teoreme 13, nalazile daleko ispod granice.

Sa druge strane, dobijene vrednosti za $disc(n,k)$ su se, kada je donja granica definisana tvrđenjem Teoreme 11, nalazile tačno na toj granici ili neposredno iznad nje. Takođe, ovo isto važi i za odgovarajuće vrednosti $msum(n,k)$ koje su dobijene pretragom. Ukoliko bi se dokazalo da Teorema 11 može da se primeni i na $msum(n,k)$, pretraga ovih vrednosti bi trajala znatno kraće, čime bi se niz dobijenih vrednosti znatno povećao.

Korišćenjem algoritma pretrage, pomoćnih metoda i rezultata dobijenih u ovom radu, moguće je dalje sprovesti izračunavanja, za veće n i k. Pronalaženjem novih permutacija i uočavanjem određenih pravilnosti u njihovoj konstrukciji, sužava se broj opcija po kojima vektor $\boldsymbol{d}$ može da se konstruiše, a time raste izvesnost da se još neki slučajevi reše u potpunosti.

Literatura

[1] T.J. Rolfe, *Backtracking Algorithms, Dr. Dobb's Journal*, Vol. 29, No. 5, pp. 48, 50-51, 2004

[2] R. Anstee, R. Ferguson, J.R. Griggs, *Permutations with Low Discrepancy Consecutive k-sums, Journal of Combinatorial Theory*, Elsevier Science, 2002

[3] T.J. Rolfe, P.W.Purdom, An Alternative Problem for Backtracking and Bounding, inroads (bulletin of the ACM SIG on Computer Science Education), Vol. 36, No. 4 (December 2004), pp. 83-84.