Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Master rad

Trougao u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi

Mentor:
Doc. dr Srdjan Vukmirović

Student:
Dragana Despotović 1048/2014

Beograd,
2015.

Sadržaj

Uvod

Matematika kao nauka i prvi matematički pojmovi razvijali su se i izgrađivali sa opštim razvojem civilizacije [14].
Prelaskom iz primitivne ljudske zajednice na organizovane forme, sa nomadskog načina života na život u stalnim naseljima, pojavila se potreba za izgradnjom objekata za život čoveka, pa samim tim i interes za geometriju. Ti su objekti rađeni u obliku određenih figura i za njihovu izgradnju bilo je neophodno poznavati takve figure i umeti meriti njihove elemente. Sve ovo bio je početak za dalji razvoj geometrije, posebno u vezi sa merenjem dužina i površina.

Prvi pisani tragovi, na osnovu kojih se pouzdano može govoriti o stepenu razvoja geometrije u određenom periodu, potiču iz vremena drevnih civilizacija Vavilona, Egipta i Kine iz vremena oko 2000. godine p.n.e. Bili su pisani na glinenim tablicama, papirusima ili na korama od drveta. Iz njih saznajemo da su stare civilizacije imale razvijene sisteme računanja i merenja sa osnovom 60, da su poznavali mnoge elemente astronomije, pravili tablice množenja i deljenja, znali su da rešavaju linearne i kvadratne jednačine i njihove sisteme, da računaju površine i zapremine mnogih geometrijskih figura, a u njihovim glinenim tablicama sreće se više primera Pitagorinih trojki brojeva, što znači da su bili upoznati sa osobinom pravouglih trouglova koja je kasnije sročena u Pitagorinoj teoremi.

Saznanja o trouglovima usavršavana su vekovima i primenjivana u praksi. Trougao susrećemo kod prvih civilizacija. Zadaci o trouglu se nalaze u papirusima iz Egipta, u indijskim knjigama, kao i drugim starim rukopisima. Egipćani su znali konstruisati prav ugao pomoću trougla čije su stranice sačinjene od užeta, dužine 3, 4 i 5. Taj posao su obavljali geometri, koji su se zvali *harpendonapti*, zatezači užeta. Egipćani su smatrali da trougao sa stranicama dužine 3, 4 i 5 ima tajnovitu moć, te su u hramovima i piramidama gradili prostorije tako da se njihova visina, širina i dužina odnose kao ti brojevi. Izračunavali su površinu trougla kao polovinu proizvoda osnovice i njene visine. Ovo pravilo je bilo poznato i Vaviloncima. Sva saznanja o trouglovima koja potiču od egipatske i vavilonske civilizacije su u funkciji praktičnih i konkretnih zadataka. Učenja o trouglu pojavila su se u Jonskoj školi u 7. veku p.n.e. čiji je osnivač Tales, a zatim kod Pitagore.

Grci su se veoma rano počeli zanimati za svojstva trougla kao što su, na primer, jednakost uglova na osnovici jednakokrakog trougla, zbir uglova u trouglu itd. Teorema o zbiru uglova u trouglu dugo se smatrala jednom od najvažnijih teorema. Ona se pripisuje Pitagori, iako neki istoričari geometrije tvrde da je bila poznata i Talesu, koji je boraveći u Egiptu upoznao metode za premeravanje zemljišta, usavršio ih i dao im oblik sistematskog teorijskog znanja.

Euklid je sistematizovao znanja o trouglu. Od njega potiče podela trouglova na jednakostranične, jednakokrake i raznostranične. Euklid deli trouglove i prema vrsti uglova na pravougle i kosougle, a kosougle na oštrougle i tupougle. Euklid je u *Elementima* izložio tri stava o podudarnosti trouglova, dok se četvrti stav pojavljuje tek u 18. veku kod matematičara Volfa. U prvoj knjizi *Elemenata* se po prvi put sistematski izlažu zadaci o osnovnim geometrijskim konstrukcijama.

Jedna od najpoznatijih teorema u istoriji matematike je Pitagorina teorema. Smatra se da je prvi dokaz ove teoreme dao Pitagora. Prema legendi on je u znak zahvalnosti što je dokazao teoremu bogovima prineo stotinu volova. Do danas su poznati mnogi njeni dokazi. Poznatiji dokazi ove teoreme potiču od arapskih matematičara Bhaskare i Omara Hajama. Interesantno je da jedan dokaz ove teoreme potiče i od američkog predsednika Jamesa Abrama Garfilda. Euklid prvu knjigu *Elemenata* završava dokazom Pitagorine teoreme.

Trougao zauzima značajno mesto u izučavanju u školi. Sa trouglom se učenici prvi put upoznaju na samom početku svog školovanja. Izučavanje trougla se na različitim nivoima nastavlja tokom celog školovanja. U radu su metodički prikazani osnovni pojmovi i osobine trougla sa posebnim osvrtom na postojeće planove i programe nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Zatim sam te osobine povezala sa drugim oblastima kao što su trigonometrija, podudarnost i sličnost. Sav sadržaj sam smestila u kontekst nastavnih planova i programa i istakla na kom se nivou koji sadržaj može obrađivati. U radu se bavim isključivo osobinama trougla, primerima iz života i škole, teoremama i njihovim dokazima. Prilikom pisanja, koristila sam se zvaničnim planovima Zavoda za unapređivanje obrazovanja i vaspitanja, kao i udžbenicima izdavačkih kuća Klett, Nova škola, Službeni glasnik, Eduka, Zavoda za udžbenike i pojedinim pristupačnim sajtovima koje sam navela u literaturi.
Zapažam da je gradivo u udžbenicima za osnovnu školu više bazirano na zadacima i ilustrativnim primerima, a manje na teoriji. Teorija se manje javlja i uglavnom je zastupljena u obliku definicija, objašnjenja, bitnih teorema, od kojih se samo pojedine dokazuju i to na nivou predviđenom za decu ovog uzrasta. Za razliku od osnovne škole, udžbenici za srednju školu su više bazirani na teoriji. Teoreme koje se navode se uglavnom dokazuju. Pojavljuje se i veliki broj, primera ali sa mnogo manje ilustracija nego u osnovnoj školi. U radu su obuhvaćene osnovne teme predviđene planom i programom, ali ima još puno zanimljivih dodatnih tema vezanih za trougao. One su dobre za dodatnu nastavu, takmičenja i specijalne srednje škole.

U prvoj glavi Osnovna škola izlažem teoriju i primere na temu trougla koji se radi u osnovnoj školi. Uvidom u programe vidimo da se trougao izučava u prvom, trećem, šestom, sedmom i osmom razredu, a odgovarajuće gradivo je opisano u poglavljima ove glave. Naopominjem da se geometrija trougla najviše radi u šestom razredu.

U drugoj glavi Srednja škola takođe izlažem teoriju i primere na temu trougla koji se radi u srednjoj školi. Uvidom u programe vidimo da se trougao radi u prvom, drugom i trećem razredu, a gradivo koje se obrađuje je opisano u poglavljima ove glave. Zapažam da je geometrija trougla mnogo manje zastupljena u srednjoj školi nego u osnovnoj školi. Najmanje se javlja u trećem razredu, gde se samo spominje, dok je najviše zastupljena u prvom razredu.

U glavi Zaključak prikazana su iskustva autora iz perspektive nastavnika u osnovnoj školi, kao i mišljenja drugih kolega.

Ovim radom želim izraziti veliku zahvalnost ljudima koji su omogućili da se on ostvari. Ogromnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima na stalnoj podršci, kako finansijskoj, tako i psihološkoj tokom izrade ovog rada.
Zahvaljujem se mentoru prof. dr Srđanu Vukmiroviću na predloženoj temi, na strpljenju i pomoći tokom njegove izrade.
Zahvaljujem se i članovima komisije prof. dr Miroslavi Antić i prof. dr Tijani Šukilović na korisnim savetima i sugestijama.

U pripremi teksta koristila sam software LaTeX i WinGCLC za izradu crteža.

1 Osnovna škola

1.1 Prvi razred

Program prvog razreda obuhvata predmete u prostoru i odnose među njima, geometrijske oblike, prirodne brojeve do 100, merenje i mere.

Oblast geometrijski oblici se odnosi na upoznavanje učenika sa osnovnim geometrijskim oblicima u ravni među koje spada i trougao. Učenici treba da znaju da imenuju geometrijske oblike u ravni i uočavaju odnose dva geometrijska oblika. U ovoj oblasti treba insistirati i na preciznosti i dobrom definisanju pojmova, ne u smislu učenja definicija napamet nego kompletnom razumevanju osnovnih pojmova, da bi se lakše usvojili pojmovi, koji se proučavaju u sledećim razredima.

Postoje različite metode pomoću kojih se deci ovog uzrasta može na vrlo interesantan način približiti pojam geometrijskih oblika. Istraživanja su pokazala da učenici ovog uzrasta najbolje uče da raspoznaju geometrijske oblike kroz učenje pesmica o određenom geometrijskom obliku, crtanje, bojenje, formiranje oblika od drvenih štapića, i tome slično. Uglavnom, sve to zavisi od samog nastavnika, njegove kreativnosti i domišljenosti. Sledeće pesmice koriste pojedini nastavnici u praksi kako bi učenici uspeli da prepoznaju geometrijski oblik trougla [12].

Svaki trougao ima stranice tri,
ima stranice tri, ima stranice tri,
Tu je jedna, druga, treća, zaista je tako,
prepoznati trougao meni baš je lako.

Trougao, trougao, ima stranice tri,
da je toliko i uglova to znaju baš svi.
Ako neko ne veruje, može sam da broji,
trougao se ne kotrlja, uvek mirno stoji.

Pored učenja i zajedničkog ponavljanja pesmica, osmišljeno je i nekoliko interesantnih igrica koje su korisne u procesu usvajanja pojma trougla kod dece. Grupa od troje dece se postavi da stoje tako da predstavljaju temena trougla. Prvom detetu se da klupko, dok drži kraj kanapa, ima za zadatak da zakotrlja klupko do drugog deteta, drugo do trećeg, a treće da vrati klupko na mesto odakle je igra počela. Kada je klupko u rukama prvog deteta, predočeno im je da su formirali trougao.

Neki nastavnici koriste i druge metode. Osnovni geometrijski objekti (trougao, krug, pravougaonik i kvadrat) napravljeni od kartona raznih boja stave se u kutiju i od dece se traži da pronađu trougao. Ovo je veoma koristan način kako da učenici razlikuju trougao od ostalih geometrijskih figura.

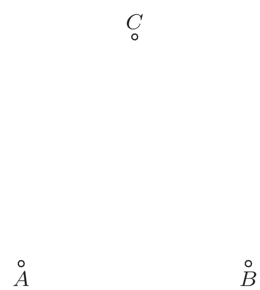
Nakon izučavanja geometrijskih figura u ovom uzrastu od učenika se očekuje da znaju da prepoznaju geometrijsku figuru, da znaju skoro definiciju te figure, prepoznaju druge objekte iste kategorije i prepoznaju karakeristike kategorija ovih objekata.

1.2 Treći razred

Program trećeg razreda obuhvata brojeve do 1000, mere i merenje i geometriju.

Trougao se u trećem razredu izučava u okviru geometrije. U vezi trougla pažnja se posvećuje vrstiama trouglova, crtanju trouglova i obimu. Priču treba početi podsećanjem učenika na trouglove, što se može lako uraditi kroz jednostavan zadatak koji se zadaje da samostalno rade.

Zadatak 1. Date su tri tačke u ravni A, B i C. Nacrtaj duži koje određuju te tačke. Kako se naziva nacrtana figura?



Rešenje. Učenici treba da dođu do zaključka da kada spoje tačake A, B i C dužima dobiće trougao.

Ovaj zadatak može da bude jako koristan prilikom uvođenja novih pojmova vezanih za trougao. Treba naglasiti da se tačke navedene u prethodnom zadatku nazivaju temena trougla, a duži stranice trougla. Osnovni cilj je da se savladaju svojstva geometrijske figure trougao i nauče šta su elementi trougla jer će im to trebati kao osnova za usvajanje novih pojmova. Veoma je bitno osposobiti učenike da pravilno crtaju trougao koristeći lenjir i šestar, a da se pri tome razvije preciznost, tačnost i urednost u crtanju. Crtanje trougla čije su stranice poznate može da bude dobar primer da se uvedu vrste trouglova u zavisnosti od stranica (raznostranični, jednakokraki i jednakostranični). Ono što je zanimljivo u udžbenicima za treći razred je zamena termina raznostranični trougao terminom nejednakostranični trougao. Nastavnik treba da ukaže učenicima na oba termina jer se dešava da različiti izdavači koriste različite nazive za ove vrste

trouglova.
U vezi trouglova radi se i njihov obim. Najpre treba objasniti šta predstavlja obim neke geometrijske figure. Dovoljno je reći da se obim trougla računa tako što se saberu dužine sve tri stranice. Lako je zaključiti da je obrazac za izračunavanje obima raznostraničnog trougla $O = a + b + c$, jednakokrakog $O = a + b + b$ i jednakostraničnog $O = a + a + a$.

Posle usvajanja gradiva o trouglovima može se staviti nekoliko primera koji obuhvataju proveru znanja stečenog u vezi trouglova. Sledeći primer je namenjen da utvrdi u kojoj meri su učenici savladali celokupno gradivo vezano za trouglove, i on se može zadati na kraju časa.

Zadatak 2. Nacrtaj trougao ABC čije su stranice $3cm$, $2cm$, $4cm$. Šta su temena i stranice ovog trougla? Izračunaj obim ovog trougla.
Rešenje. Da bi se izvršila konstrukcija potrebno je da učenici kod sebe imaju šestar i lenjir. Koristeći se priborom, najpre treba nacrtati jednu duž, npr. $AB = 3cm$. Postoje dve mogućnosti za izbor temena C a jedna od njih je u preseku kružnica sa centrom u tački A i poluprečnika $2cm$ i sa centrom u tački B i poluprečnika $4cm$.
Temena ovoga trougla su tačke A, B i C. Stranice ovo trougla su duži AB, BC, AC. Obim se dobija kada se saberu dužine sve tri stranice tj. $O = 3cm + 2cm + 4cm = 9cm$.

Interesantno je nakon ovog zadatka deci dati da nacrtaju trougao čije su stranice $6cm$, $2cm$, $3cm$. Naravno, pošto nejednakost trougla ne važi, to je nemoguće, što treba prodiskutovati sa učenicima.

1.3 Šesti razred

Program šestog razreda obuhvata cele brojeve, trougao, racionalne brojeve, četvorougao i površinu trougla i četvorougla.

Najveći broj novih pojmova o trouglu se uvodi u šestom razredu osnovne škole. Vezano za trougao radi se pojam, elementi i vrste trougla, unutrašnji i spoljašnji uglovi, podudarnost, uglovi i stranice, nejednakost trougla, konstrukcije, značajne tačke trougla i površina.

1.3.1 Pojam, elementi i vrste

Ovde se vrlo lako uočava koliko je važno da su učenici dobro savladali gradivo petog razreda. Ono što bih istakla vezano za ovaj deo gradiva jeste dobro upoznavanje sa pojmom, elementima i vrstama proučavanih trouglova i njihovih imena koji su delom radili u nižim razredima, jer se dešava da učenici u osmom razredu to ne znaju, a razlog tome je što su ovaj deo najverovatnije prebrzo prešli i tu, po meni, suštinu nisu dobro savladali. Akcenat treba staviti na primene onoga što je najbitnije, pa u zavisnosti od sposobnosti učenika ponaosob zahtevati i određene sitnice. Ne sme se dozvoliti da učenik ne savlada detalje koji bi mu trebali u daljem životu.

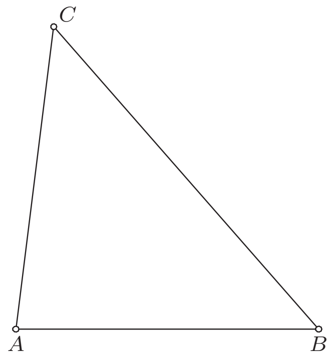
Judita Cofmanje [6] je uoči prilaza temi o uvođenju pojma trougla često zadavala učenicima kao zadatak da joj objasne šta podrazumevaju pod trouglom. Da bi individualna mišljenja svih učenika u razredu došla do izražaja, odgovore na postavljeni zadatak bi davali pismeno, da jedni druge ne ometaju svojim mišljenjima. Nakon toga učenici bi pročitali svoje odgovore, gde bi usledila detaljna diskusija. Na taj način bi učenici postepeno stvarali utisak o tome šta se podrazumeva pod matematičkom definicijom. Ovo je dobar primer pristupa temi trougla posle čega bi trebalo zahtevati da učenici daju preciznu definiciju.

Definicija 1 *Trougaona linija je zatvorena izlomljena linija određena sa tri nekolinearne tačke. Trougao je geometrijski objekat koga čine trougaona linija i njena unutrašnjost.*

Pojam unutrašnjosti, koja je već pomenuta u definiciji trougla je prilično jasana i obično se ne definiše. Strogo uvođenje ovog pojma je preteško za osnovnu školu. Ova definicija stvara detaljnu sliku o pojmu trougla, što olakšava uvođenje osnovnih elemenata trougla. Da bismo dokazali naredne teoreme, treba uvesti sledeće pojmove u vezi trougla:

- **Temena**;
- **Stranice**;
- **Uglove**;
- **Težišnu duž**;
- **Težišnu liniju**;
- **Visinu**;
- **Opisanu kružnicu**;
- **Upisanu kružnicu**.

Ono što je bitno pomenuti je to da su neki od ovih pojmova u prvom i trećem razredu osnovne škole bili korišćeni na intuitivnom nivou u nekoj meri, a sada će biti strogo definisanisani.
Neka je dat trougao $\triangle ABC$.



Trougao koji određuju nekolinearne tačke A, B i C obeležavamo sa $\triangle ABC$. Tačke A, B i C su **temena trougla**. Duži AB, BC, CA su **stranice** $\triangle ABC$. **Uglovi** $\triangle ABC$ su $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle BCA$. Ove uglove često nazivamo unutrašnji uglovi trougla. **Medijana (težišna duž)** trougla je duž koja spaja vrh sa sredinom suprotne stranice trougla. Prava koja sadrži medijanu naziva se **težišna linija trougla**. **Visina trougla** je duž čija je jedna krajnja tačka teme tog trougla, a druga podnožje normale iz tog temena na pravu na kojoj se nalazi naspramna stranica. **Opisana kružnica** oko trougla je kružnica kojoj pripadaju sva tri temena trougla. **Upisana kružnica** je kružnica koja dodiruje sve tri stranice trougla.

Od učenika se ne očekuje da prethodne definicije uče napamet. Dovoljno je da budu u stanju da kažu definiciju, pokazujući na slici, šta je šta i objašnjavajući.

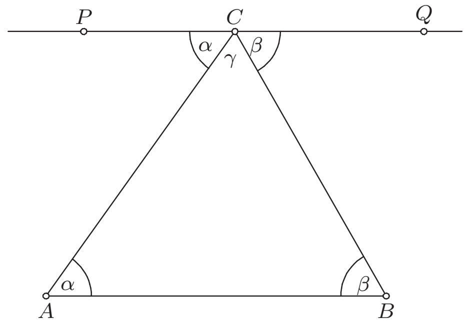
O označavanju trougla, ivica i uglova, poseban akcenat treba staviti na vrste trouglova u zavisnosti od jednakosti stranica (jednakokraki, jednakostranični i raznostranični) i veličine uglova (oštrougli, tupougli i pravougli). Često se dešava da veliki broj učenika osmog razreda pogreši u prepoznavanju vrsta trouglova. To bi trebalo da se stalno pominje učenicima kako bi što bolje savladali ovaj deo gradiva.

1.3.2 Unutrašnji i spoljašnji uglovi

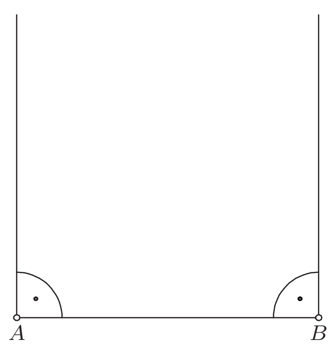
Samu činjenicu da je zbir unutrašnjih uglova u trouglu $180°$ i zbir spoljašnjih uglova u trouglu $360°$ učenici jako brzo usvoje, pa po mom mišljenju ne treba insistirati na dokazu, naravno treba dati kratak dokaz ali ne treba zahtevati od učenika da ga znaju.
Obavezno treba ponoviti pojam opruženog ugla i na osnovu njega lako izvoditi formule za zbir unutrašnjih i spoljašnjih uglova trougla.
Dokazi teorema u poglavlju za šesti razred mogu se naći u [3, 13].

Teorema 1 *Zbir unutrašnjih uglova bilo kog trougla jednak je* $180°$.

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao. Postoji jedinstvena prava p koja sadrži tačku C i paralelna je sa pravom određenom tačkama A i B. Označimo sa P i Q proizvoljne tačke prave p takve da važi raspored $P - C - Q$ (C je između P i Q). Tada je $\angle PCA = \alpha$ i $\angle BCQ = \beta$, jer je $p||AB$. Kako je $\angle PCA + \angle ACB + \angle BCQ = 180°$, zaključujemo da je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



Mnogo je bitno istaći dve jednostavne, ali značajne, posledice teoreme o zbiru uglova u trouglu.
Tvrđenje 1. Trougao može imati najviše jedan prav ugao.
Dokaz. Ako bi trougao imao dva prava ugla, onda bi zbir njegovih uglova bio veći od 180°, što je nemoguće. Na potpuno isti način se dolazi do istog zaključka u sledećem tvrđenju.



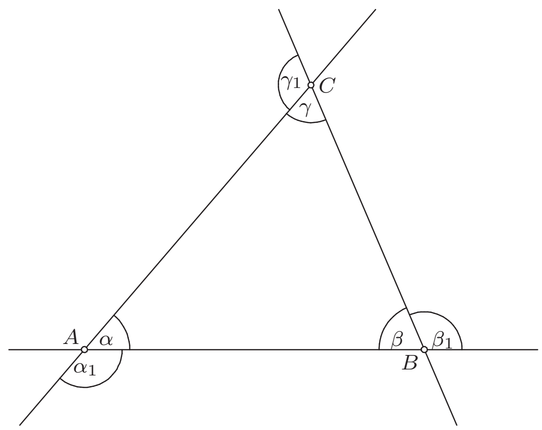
Tvrđenje 2. Trougao može imati najviše jedan tup ugao.
Dokaz. Dakle, ako bi trougao imao dva tupa ugla, onda bi zbir njegovih uglova bio veći od 180°, što je nemoguće.

Da bismo dokazali narednu teoremu, moramo najpre dati definiciju, na koju ćemo se pozivati prilikom dokaza. Takođe, da bi definicija bila upotpunosti razumljiva, treba obnoviti uporedne uglove, koje su učenici radili u petom razredu.

Definicija 2 *Spoljašnji ugao trougla je ugao uporedan sa nekim od uglova tog trougla.*

Teorema 2 *Spoljašnji ugao trougla jednak je zbiru dva njemu nesusedna unutrašnja ugla tog trougla.*

Dokaz. Pošto svakom uglu trougla odgovaraju dva uporedna ugla, biramo jedan od njih. Na slici sa α_1, β_1, γ_1 redom su označeni spoljašnji uglovi $\triangle ABC$ koji su uporedni uglovima α, β, γ ovog trougla.



Kako je $\alpha + \alpha_1 = 180°$, $\beta + \beta_1 = 180°$, $\gamma + \gamma_1 = 180°$, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, zaključujemo da su tačne i sledeće jednakosti: $\alpha_1 = 180° - \alpha = \beta + \gamma$, $\beta_1 = 180° - \beta = \alpha + \gamma$, $\gamma_1 = 180° - \gamma = \alpha + \beta$.

Teorema 3 *Zbir sva tri spoljašnja ugla u proizvoljnom trouglu jednak je* $360°$.

Dokaz. Dokaz je vrlo jednostavan i poziva se na prethodne dve teoreme. Ako su α, β, γ unutrašnji i α_1, β_1, γ_1 spoljašnji uglovi $\triangle ABC$, tada iz činjenice da je spoljašnji ugao jednak zbiru dva njemu nesusedna ugla i da je zbir uglova u trouglu jednak $180°$, zaključujemo da važi:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) + (\alpha + \beta) = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2 \cdot 180° = 360°.$$

1.3.3 Podudarnost

U okviru podudarnosti trouglova rade se stavovi podudarnosti. Ovaj deo geometrije gledano iz ugla učenika i nastavnika je vrlo težak učenicima za razumevanje, pa mu treba posvetiti više pažnje. Iskustvo sa učenicima je pokazalo da se problem javlja kod primene stavova podudarnosti, kada koji stav treba koristiti. Zbog toga treba raditi na tome da se prvenstveno dobro razumeju stavovi podudarnosti i kroz što više primera razvije osećaj kada koji stav treba primeniti.

Treba napomenuti da postoje četiri osnovna stava podudarnosti koja označavamo sa SSS, SUS, USU, SSU.
Stav (SSS) Dva trougla su podudarna ako i samo ako su stranice jednog trougla jednake stranicama drugog.
Stav (SUS) Dva trougla su podudarna ako i samo ako su dve stranice jednog trougla i ugao koje one obrazuju jednake odgovarajućim stranicama i uglu drugog trougla.
Stav (USU) Dva trougla su podudarna ako i samo ako imaju jednaku po jednu stranicu i oba ugla nalegla na tu stranicu.
Stav (SSU) Dva trougla su podudarna ako i samo ako imaju jednake dve stranice i jednake uglove naspram jedne od njih, a uglovi naspram drugog para stranica moraju biti oba oštra ili oba prava ili oba tupa.

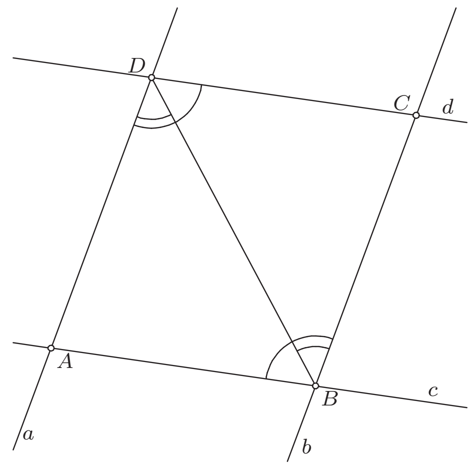
Važno je istaći da je uslov za par uglova naspram drugog para stranica u stavu (SSU) neophodan. O tome nam govori sledeći primer.

Zadatak 3. Neka je dat trougao ABC takav da je $AB = AC$ i neka je P proizvoljna tačka stranice BC. Proveriti da li su trouglovi APB i APC podudarni.
Rešenje. Kako je u zadatku dato da je $AB = AC$, dati trougao je jednakokrak, pa su mu uglovi kod temena B i C podudarni. Trouglovi APB i APC ispunjavaju uslov da imaju jednake dve stranice $AB = AC$ i $AP = AP$ i $\angle B = \angle C$ ali ne ispunjavaju uslov da su uglovi naspram para stranica AB i AC oba oštra ili oba prava ili oba tupa, pa trouglovi APB i APC nisu podudarni.

Stavovi podudarnosti trouglova nam omogućavaju ne samo da utvrđujemo podudarnosti nekih trouglova, već i da dokazujemo nova geometrijska tvrđenja. Svako matematičko tvrđenje drugačije se naziva teorema. Naravno, svaka teorema zahteva i dokaz. Navedimo primer teoreme u čijem dokazu se koristi jedan od stavova podudarnosti.

Teorema 4 *Ako jedan par paralelnih pravih a i b seče drugi par paralelnih pravih c i d u tačkama A, B, C i D: $a \cap c = \{A\}$, $b \cap c = \{B\}$, $a \cap d = \{D\}$, $b \cap d = \{C\}$, onda je $AB = CD$ i $BC = AD$.*

Dokaz.



Posmatramo $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$. Sa slike se vidi da važi:

$$BD = BD \text{ (zajednička stranica)},$$

$$\angle ABD = \angle BDC \text{ (uglovi na transvezali)},$$

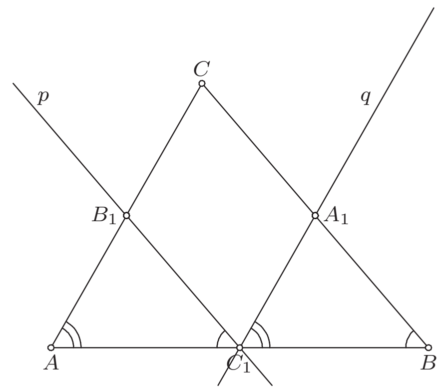
$$\angle ADB = \angle CBD \text{ (uglovi na transvezali)}.$$

Iz prethodne tri jednakosti na osnovu stava (USU) $\triangle ABD \cong \triangle BCD$. Iz podudarnosti ova dva trougla sledi da je $AB = CD$ i $AD = BC$.

Pre dokaza naredne teoreme treba uvesti pojam srednje linije trougla. **Srednja linija trougla** je duž koja spaja središta dve stranice trougla. Osobine srednje linije trougla su veoma bitne i treba insistirati da ih učenici trajno zapamte. O tome nam govori sledeća teorema koju treba ispričati učenicima, ako su pojedinci zainteresovani, nastavnik može ispričati sledeći dokaz koji je jednostavan i razumljiv za učenike tog uzrasta.

Teorema 5 *Srednja linija trougla je paralelna sa naspramnom stranicom i dva puta je kraća od nje.*

Dokaz. Neka je dat proizvoljan trougao ABC i neka je C_1 središte stranice AB. Kroz tačku C_1 konstruišemo prave p i q koje su paralelne sa stranicama BC i AC.



Primetimo da prema prethodnoj teoremi važe jednakosti $B_1C_1 = CA_1$ i $C_1A_1 = B_1C$, jer je $B_1C_1||CA_1$ i $C_1A_1||B_1C$.
Sa slike se vidi da važe sledeće jednakosti:

$$AC_1 = C_1B \text{ (} C_1 \text{ je središte duži } AB\text{)},$$

$$\angle B_1AC_1 = \angle A_1C_1B \text{ (uglovi na transvezali)},$$

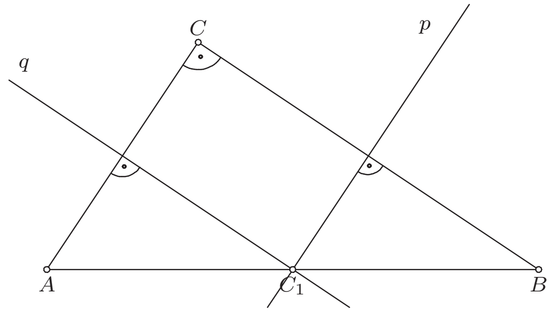
$$\angle AC_1B_1 = \angle C_1BA_1 \text{ (uglovi na transvezali)}.$$

Iz prethodne tri jednakosti na osnovu stava podudarnosti (USU) zaključujemo da su trouglovi $AC_1B_1 \cong C_1BA_1$ a iz njihove podudarnosti sledi da je $AB_1 = C_1A_1$ i $B_1C_1 = BA_1$.
Iz jednakosti $B_1C_1 = CA_1$ i $B_1C_1 = A_1B$ sledi da je tačka A_1 središte duži BC.
Takođe iz jednakosti $C_1A_1 = B_1C$ i $C_1A_1 = AB_1$ sledi da je tačka B_1 središte duži AC.
Dakle, duži B_1C_1 i C_1A_1 su srednje linije datog trougla i važe jednakosti $B_1C_1 = \dfrac{1}{2}CB$ i $C_1A_1 = \dfrac{1}{2}CA$.

Jedna od posledica teoreme o srednjoj liniji je sledeća teorema o pravouglom trouglu.

Teorema 6 *Simetrale kateta bilo kog pravouglog trougla seku se u središtu hipotenuze.*

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan pravougli trougao i neka je C_1 središte hipotenuze AB.



Prema teoremi o srednjoj liniji trougla, prava p koja sadrži središte hipotenuze i paralelna je kateti AC mora da sadrži središte katete BC. S druge strane, prava p je i normala na BC, jer je paralelna sa AC, a $\angle ACB = 90°$. Dakle, prava p je simetrala katete BC. Slično se dokazuje da je prava q, koja sadrži središte hipotenuze i paralelna je kateti BC, simetrala katete AC. Dakle, obe simetrale kateta sadrže središte hipotenuze i teorema je dokazana.

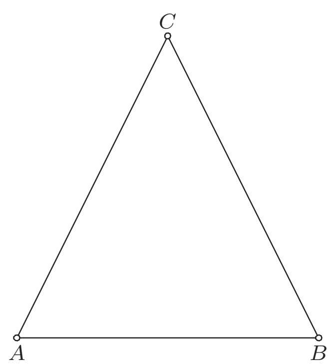
Za posledicu imamo da je kod pravouglog trougla središte hipotenuze centar opisanog kruga.

1.3.4 Uglovi i stranice

U šestom razredu se javlja veliki broj teorema. Neke se dokazuju u udžbenicima, a neke ne. Po mom mišljenju, učenicima treba dati dokaze teorema koje se odnose na zbir unutrašnjih i spoljašnjih uglova u trouglu, teoreme koje govore o odnosu uglova i stranica u trouglu i teoremu o nejednakosti trougla. Ove teoreme su veoma bitne u praktičnoj primeni na zadatke. Njihovi dokazi su lepi i pristupačni učenicima ovog uzrasta. Teoreme koje govore o jedinstvenosti značajnih tačaka trougla treba samo formulisati, a dokazi se mogu ispisati naprednijim učenicima.

Teorema 7 *Naspram jednakih stranica trougla nalaze se jednaki uglovi, i obrnuto, naspram jednakih uglova su jednake stranice.*

Dokaz. Dat je $\triangle ABC$. Vidi sliku.

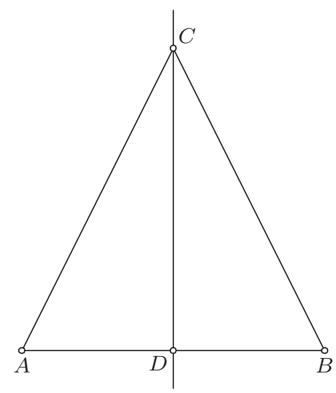


Neka je $AC = BC$. Tada je i $BC = AC$, pa kako je $AB = BA$ to iz stava podudarnosti (SSS) sledi $\triangle ABC \cong \triangle BAC$. Dakle $\angle ABC = \angle BAC$. Obrnuto, ako je $\angle ABC = \angle BAC$, tada prema stavu (USU) sledi podudarnost trouglova ABC i BAC a otuda i jednakost stranica AC i BC.

Sa pojmom jednakokrakog trougla učenici su se već upoznali. Ono što je bitno da znaju o ovoj vrsti trougla je da ima dve jednake stranice koje se nazivaju kraci, a treća stranica je osnovica. Na osnovu prethodne teoreme jednakokraki trougao ima jednake uglove na osnovici. Kod jednakostraničnog trougla, prema istoj teoremi, sva tri unutrašnja ugla su jednaka.

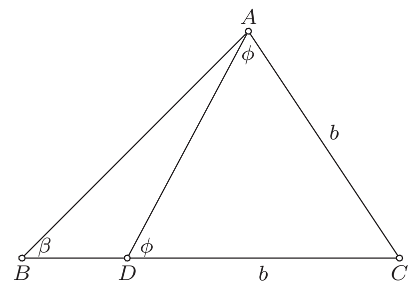
Teorema 8 *Težišna linija koja odgovara osnovici jednakokrakog trougla istovremeno predstavlja visinu na osnovicu i simetralu ugla pri vrhu.*

Dokaz. Neka je CD težišna linija jednakokrakog trougla ABC, gde je $AC = BC$ kao na slici. Po pretpostavci $AD = BD$ a svakako je $CD = CD$, pa su trouglovi ACD i BCD podudarni po stavu (SSS). Otuda je $\angle ACD = \angle BCD$, pa je prava CD simetrala ugla ACB. Kako je $\angle ADC = \angle BDC$ i njihov zbir iznosi $180°$, to znači da su oni pravi, pa je CD visina.



Teorema 9 *Naspram veće stranice trougla nalazi se veći ugao i obrnuto, naspram većeg ugla trougla nalazi se veća stranica.*

Dokaz. Neka je $a > b$, kao na slici ispod. Odredimo na stranici a tačku D, tako da je $CD = b$. Trougao ACD je jednakokrak, pa su uglovi CAD i CDA jednaki, recimo uglu ϕ. Tačka D je između B i C, pa je krak AD ugla CAD u uglu α, te je $\alpha > \phi$. Međutim, u trouglu ABD ugao ϕ je spoljašnji, pa je $\phi > \beta$. Iz toga $\alpha > \beta$.
Obrnuto, neka je $\alpha > \beta$. Tada ne može biti $a = b$, jer bi prema prethodnoj teoremi moralo biti $\alpha = \beta$, a ne može biti ni $a < b$, jer bi prema prethodnom dokazu moralo biti $\beta > \alpha$, što je suprotno sa pretpostavkom. Dakle jedino moguće je $a > b$.

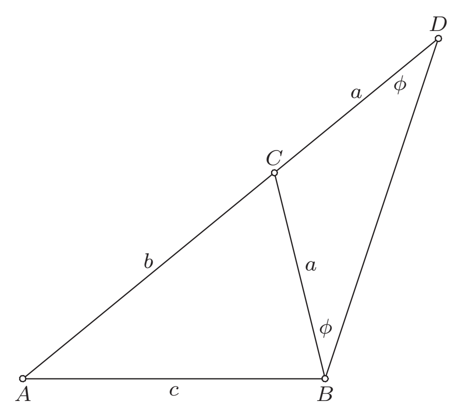


Primenjena na pravougli trougao, ova teorema kaže da je najveća stranica naspram pravog ugla. Ona se naziva hipotenuza. Ostale dve stranice, koje su međusobno normalne, nazivaju se katete pravouglog trougla.

1.3.5 Nejednakost trougla

Teorema 10 *(O nejednakosti trougla) Bilo koja stranica trougla manja je od zbira druge dve. Razlika dve stranice trougla uvek je manja od treće.*

Dokaz. Dat je trougao ABC. Vidi sliku.



Tačka D je na produžetku prave AC, sa strane C i $CD = CB = a$. Tada je $AD = b + a$. Trougao BCD je jednakokrak, pa je $\angle CBD = \angle CDB$, recimo ϕ. Uglovi u temenu B su susedni te je $\angle ABD > \phi$, pa u trouglu ABD imamo $\angle ABD > \angle ADB$, i na osnovu prethodne teoreme sledi $AD > AB$, tj. $b + a > c$. Slično se dokazuje da je $a + c > b$ i $b + c > a$.
Dalje, neka je, na primer, $c \geq b \geq a$. Tada iz dokazanih nejednakosti za zbir stranica, iz $a + b > c$ sledi $b > c - a$ i $a > c - b$, a iz $a + c > b$ sledi $c > b - a$.

Direktna posledica ove teoreme je da je duž AB najkraće rastojanje između tačaka A i B. Ako bi C bila tačka koja ne pripada pravoj AB, tada bi bilo $AC + CB > AB$, tj. put koji vodi preko tačke C je uvek duži od same duži AB.

1.3.6 Konstrukcije

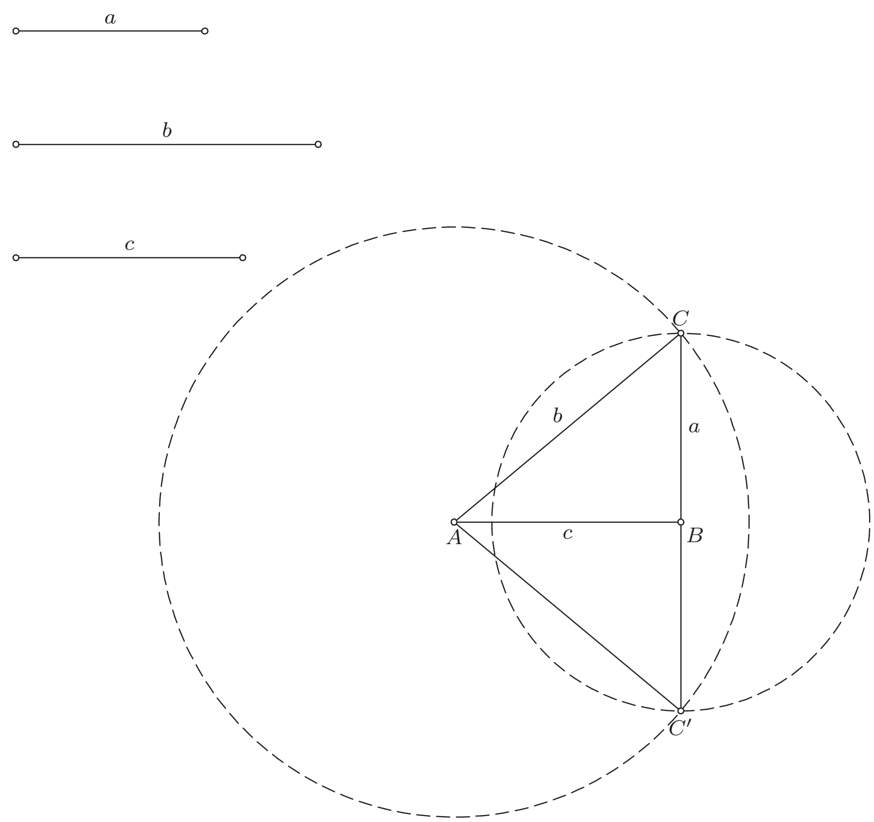
Priča o konstrukcijama u udžbeniku za šesti razred počinje pitanjem: ,,Šta je potrebno da znamo o nekom trouglu da bi on bio potpuno određen?" Odgovor na postavljeno pitanje daju stavovi podudarnosti trouglova. Dakle, da bismo konstruisali neki trougao, dovoljni su podaci o kojima govori neki od stavova podudarnosti. Rešavanje složenih konstruktivnih zadataka najbolje je podeliti na sledeće etape:
1. **Analiza zadatka -** traženje načina za rešavanje zadatka, ispituju se veze između tražene i date figure.
2. **Konstrukcija -** na temelju analize konstruišemo rešenje pomoću lenjira i šestara.
3. **Dokaz -** pokazuje se da dobijena figura zadovoljava sve uslove zadatka i da je svaki korak u konstrukciji moguć.
4. **Diskusija -** ispituje se broj različitih (nepodudarnih) rešenja.
Sada ćemo dati prikaz osnovnih geometrijskih konstrukcija trougla koje su predviđene da se rade sa učenicima ovog uzrasta [8]. Potrebno je na samom početku zahtevati od učenika da obnove osnovne geometrijske konstrukcije, prenošenje duži i prenošenje ugla, koji su ranije radili i koje su neophodne da bi se izvršila konstrukcija trougla.

Konstrukcija trougla (SSS). Date su tri duži a, b i c. Treba konstruisati trougao čije su dužine stranica jednake dužinama datih duži.

Ovde je bitno napraviti paralelu sa zadatkom 2 za treći razred. Pored same konstrukcije koja se izvodi već u trećem razredu, ono o čemu se sada mora dodatno voditi računa je da bude ispunjena nejednakost trougla:

$$a < b + c,\ b < a + c \text{ i } c < a + b.$$

Ukoliko su zadovoljeni prethodni uslovi, onda možemo da konstruišemo trougao na sledeći način:
1. Konstruišemo duž podudarnu datoj duži c i označimo je sa AB.
2. Konstruišemo kružnice $K(A, b)$ i $K(B, a)$ i jedan njihov presek označimo sa C.
3. Konstruisani trougao ABC je traženi trougao.
Za razliku od trećeg razreda u šestom razredu se i dodatno radi dokaz i diskusija o postojanju broja rešenja.
Kako tačka C pripada kružnici $K(A, b)$ ona se nalazi na rastojanju b od tačke A, a kako pripada kružnici $K(B, a)$ nalazi se na rastojanju a od tačke B, tj. $AC = b$ i $BC = a$. Prema konstrukciji je $AB = c$.

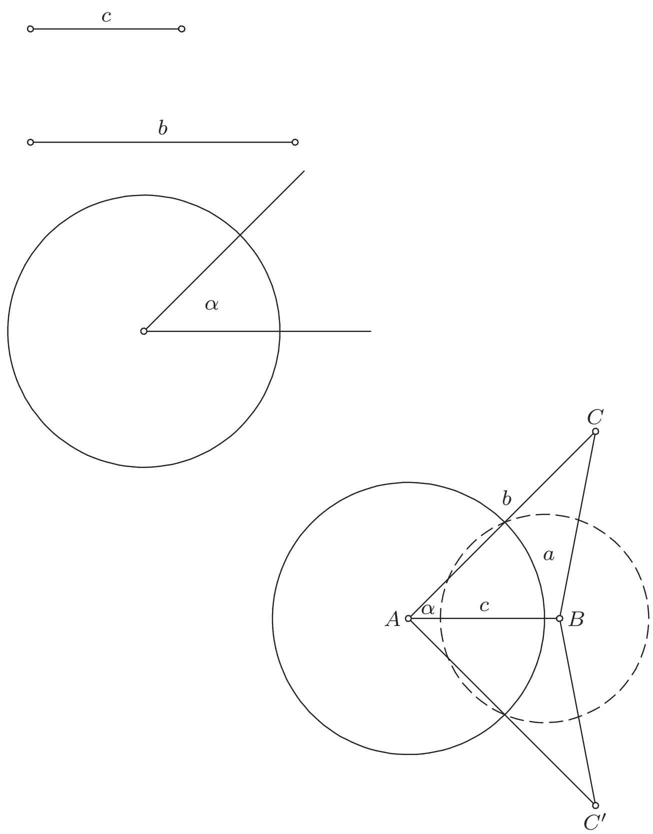


Kada se konstruisane kružnice seku u dve tačke za rešenje uzimamo jednu od njih, a ukoliko je presek prazan skup tada zadate duži ne zadovoljavaju nejednakost trougla pa tada rešenje ne postoji. Ako je presek jedna tačka, tada je $a + b = c$, pa trougao ne postoji. Naravno, konstrukcija je mogla da počne od bilo koje duži.

Konstrukcija trougla (SUS). Potrebno je konstruisati trougao ako su zadate dve njegove stranice i ugao koji one zaklapaju. Neka su, na primer, date stranice c i b i ugao koje one zaklapaju α.

Konstrukcija se sastoji od dve konstrukcije prenošenja duži i jedne konstrukcije prenošenja ugla i izgleda ovako:
1. Konstruišemo duž podudarnu duži c i označimo je sa AB.
2. Konstruiše se ugao α sa temenom u tački A, čiji je jedan krak prava određena tačkama A i B.
3. Konstruiše se duž AC podudarnu sa b tako da C pripada drugom kraku ugla koga smo konstruisali u prethodnom koraku.

Konstruisani trougao ABC je traženi trougao. Zaista $AB = c$ prema konstrukciji, $AC = b$ prema konstrukciji, tačka C pripada kraku ugla koji sa AB zaklapa ugao jednak α, dakle $\angle BAC = \alpha$.

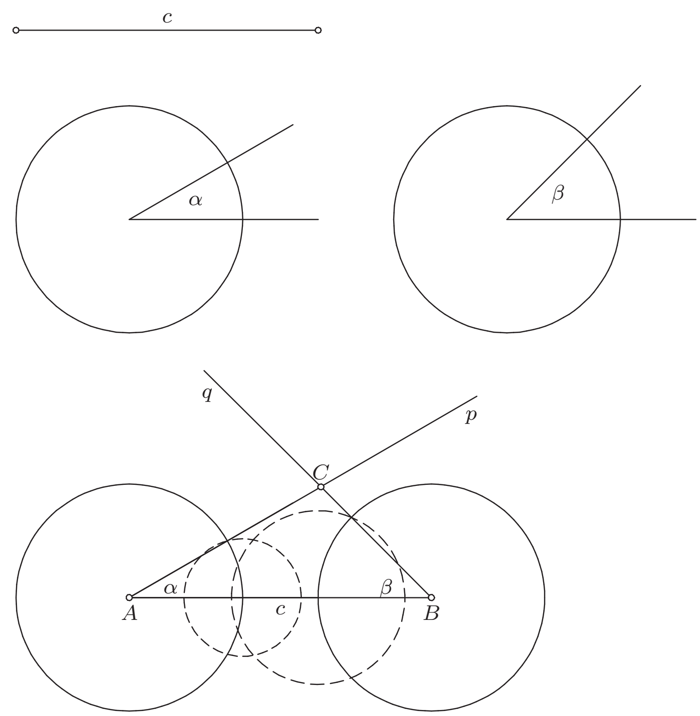


Konstrukcija trougla (USU). Konstruisati trougao ako su data stranica i dva na njoj nalegla ugla. Neka je na primer data stranica c i na njoj nalegli uglovi α i β.

Konstrukcija se sastoji od jedne konstrukcije prenošenja duži i dve konstrukcije prenošenja ugla:

1. Konstruišemo duž AB podudarnu duži c.
2. Konstruisemo ugao sa temenom A i krakom AB koji je podudaran uglu α i njegov drugi krak označimo sa p.
3. Konstruišemo ugao sa temenom B i krakom AB koji je podudaran datom uglu β i njegov drugi krak označimo sa q.
4. Presečnu tačku polupravih p i q označimo sa C.

Dobijeni trougao ABC je traženi trougao. Zaista, $AB = c$ (prema konstrukciji), a tačka C je takva da je $\angle BAC = \alpha$ i $\angle ABC = \beta$ (prema konstrukciji). Ono što je bitno kod ove konstrukcije je da uglovi α i β moraju da ispunjavaju uslov da je $\alpha + \beta < 180°$ da bi se poluprave p i q sekle, odnosno, da bi se mogao konstruisati $\triangle ABC$.



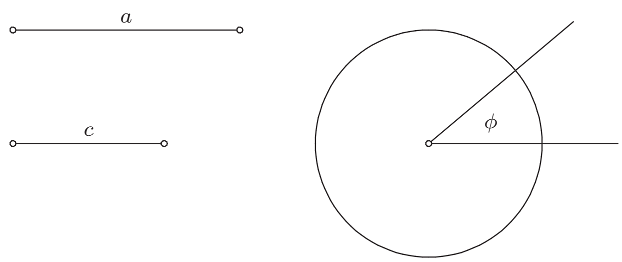
Konstrukcija trougla (SSU). Konstruisati trougao ako su date dve stranice a i c i ugao naspram veće stranice ϕ.
Pre nego što počnemo konstrukciju potrebno je prodiskutovati do kakvih situacija može doći u zadatku. Ovde je potrebna nešto detaljnija diskusija.
1. $a > c$
2. $c > a$
a) Za $\phi < 90°$ i $a > BK$, gde je K podnožje visine iz B, postoje dva rešenja $\triangle ABC$ i $\triangle ABC'$.
b) Za $\phi < 90°$ i $a = BK$ postoji samo jedno rešenje - pravougli trougao ABK.
c) Za $a < BK$ nema rešenja.
3. $c = a$. Za $\phi < 90°$ i $a > BK$ postoji tačno jedno rešenje, jednakokraki trougao.

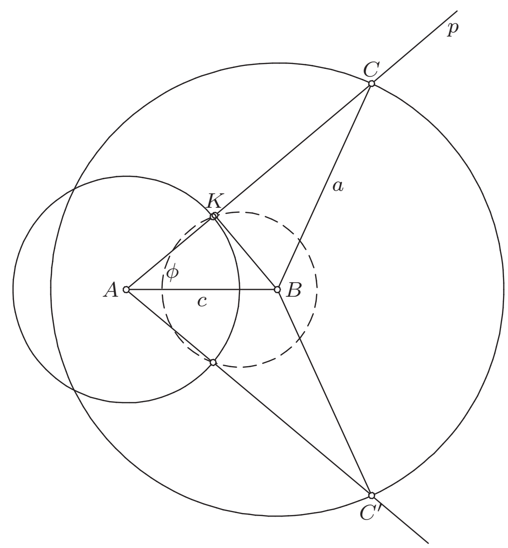
Drugim rečima:

Neka je $\phi < 90°$. Za $a \geq c$ i $c > a \geq BK$ postoji rešenje.

Neka je $\phi > 90°$. Za $a > c$ postoji tačno jedno rešenje.

Uzmimo slučaj kada je $a \geq c$ i opišimo konstrukciju:
1. Konstruišemo duž AB koja je podudarna sa c.
2. Konstruišemo ugao sa temenom A i krakom AB koji je podudaran datom uglu ϕ i njegov drugi krak označimo sa p.
3. Konstruišemo kružnicu $K(B, a)$ i njen presek sa krakom p označimo sa C.
Dobijeni ABC je traženi trougao. Zaista $AB = c$ (prema konstrukciji), tačka C je na kraku ugla ϕ, pa je $\angle BAC = \phi$, C je takođe na kružnici $K(B, a)$, što znači da je na rastojanju a od tačke B ($BC = a$).





Za rešenje se uzima jedan od trouglova ABC ili ABC'.

1.3.7 Značajne tačke trougla

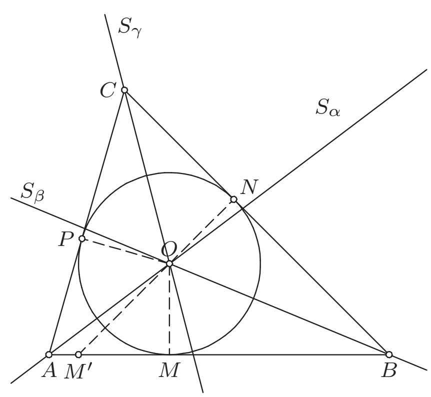
Pored temena, postoje još četiri značajne tačke trougla koje treba definisati učenicima:

- **Centar upisanog kruga trougla**;
- **Centar opisanog kruga trougla**;
- **Ortocentar**;
- **Težište**.

Centar upisanog kruga trougla nalazi se u preseku simetrala uglova. **Centar opisanog kruga trougla** nalazi se u preseku simetrala stranica. **Ortocentar** je presek visina. **Težište** je tačka u kojoj se seku težišne duži. Težište deli težišnu duž u odnosu 2:1 počev od vrha. U teoremama koje slede dokazujemo da ove četiri tačke postoje i da su jedinstvene.

Teorema 11 *(O centru upisanog kruga) Simetrale uglova trougla seku se u jednoj tački.*

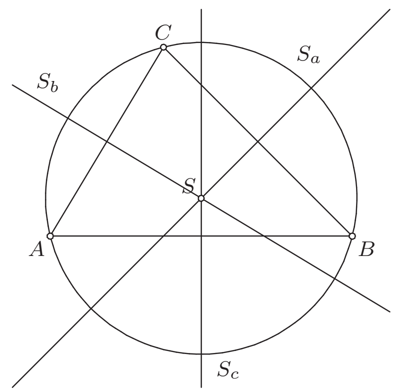
Dokaz. Neka je O presečna tačka simetrala OA i OB uglova α i β trougla ABC. Zatim, neka su OM, ON, OP normale iz O na stranice AB, BC, CA. Pravougli trouglovi AMO i APO su podudarni jer imaju zajedničku hipotenuzu i po jedan oštar ugao $\alpha/2$. Zato je $OP = OM$. Isto tako iz podudarnosti trouglova BMO i BNO sledi $OM = ON$. Iz $OP = OM$, $OM = ON$ sledi $OP = ON$. Dakle, podudarni su i trouglovi CNO i CPO, jer imaju zajedničku hipotenuzu CO. Otuda su jednaki uglovi BCO i ACO, što znači da je prava CO simetrala ugla γ i tačka O je zajednička tačka simetrala sva tri ugla.



Tada krug sa centrom O i poluprečnikom OM osim tačaka M, N i P nema drugih zajedničkih tačaka sa datim trouglom jer ako pretpostavimo da ovaj krug ima, na primer, sa stranicom AB zajedničku tačku M', različitu od M, tada bi trougao OMM' bio pravougli sa hipotenuzom OM'. Dakle, bilo bi $OM' > OM$, pa bi tačka M' bila van kruga. Nazivamo ga upisanim krugom trougla.

Teorema 12 *(O centru opisanog kruga) Simetrale stranica trougla seku se u jednoj tački.*

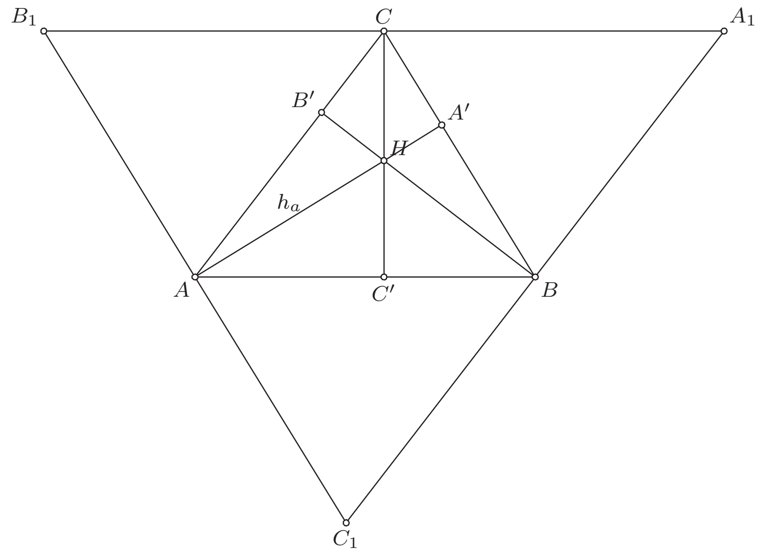
Dokaz.



Simetrale S_a, S_b, stranica BC i AC trougla ABC seku se u tački S. Lako je dokazati da je $BS = CS$, jer su trouglovi BSA_1 i CSA_1 podudarni, pri čemu je sa A_1 označeno središte stranice BC. Dalje iz $S \in s_b$ sledi $CS = AS$, pa i $AS = BS$. Dakle trougao ABS je jednakokraki pa tačka S pripada simetrali duži AB tj. s_c. Tada krug sa centrom u S i poluprečnikom SA sadrži i temena B i C i nazivamo ga opisanim krugom trougla.

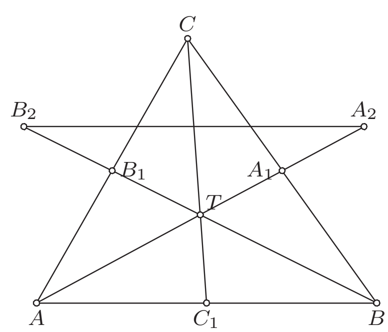
Teorema 13 *(O ortocentru) Prave koje sadrže visine trougla imaju jednu zajedničku tačku.*

Dokaz. U temenima A, B i C trougla ABC konstruišemo prave paralelne sa suprotnim stranicama BC, AC i AB. Te prave se seku i određuju trougao $A_1B_1C_1$. Svaki od spoljašnjih trouglova A_1CB, CB_1A i BAC_1 je podudaran sa trouglom ABC, jer imaju po jednu zajedničku stranicu i jednake uglove sa paralelnim kracima. Zato je $AC_1 = AB_1 = BC$, pa je tačka A središte duži B_1C_1, a visina h_a iz temena A trougla ABC pripada simetrali stranice B_1C_1 trougla $A_1B_1C_1$. Slično se dokazuje i za ostale visine trougla ABC da pripadaju, redom, simetralama stranica A_1B_1 i A_1C_1 trougla $A_1B_1C_1$. Prema prethodnoj teoremi, one se seku u jednoj tački, označenoj sa H, koju nazivamo ortocentar trougla ABC.



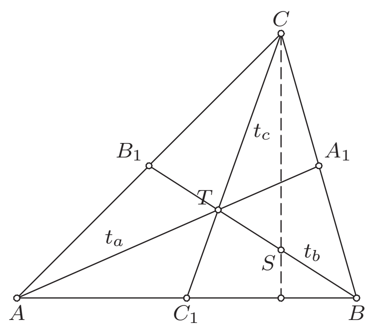
Teorema 14 *(O težištu) Težišne duži (medijane) trougla seku se u jednoj tački, težištu trougla. Dužina dela težišne duži od težišta do temena dva puta je veća od dužine dela duži od težišta do središta naspramne stranice.*

Dokaz.



Neka je ABC proizvoljan trougao. Označimo sa A_1 sredite stranice BC, sa B_1 središte stranice AC i sa T presek težišnih duži BB_1 i AA_1. Neka je B_2 tačka na pravoj određenoj tačkama B i B_1, takva da je $TB_1 = B_1B_2$. Neka je A_2 tačka na pravoj određenoj tačkama A i A_1, takva da je $TA_1 = A_1A_2$. Uočimo da je u trouglu ABC duž A_1B_1 srednja linija koja odgovara osnovici AB. Zato je njena dužina jednaka polovini dužine stranice AB, i ona je paralelna sa AB. Uočimo da je duž A_1B_1 srednja linija i u trouglu TB_2A_2. Zato je njena dužina jednaka polovini duzi B_2A_2, i ona je paralelna sa B_2A_2.

Posmatrajmo trouglove ABT i A_2B_2T. Stranice AB i A_2B_2 su podudarne i paralelne (na osnovu prethodna dva koraka), a iz njihove paralelnosti sledi jednakost uglova ABT i A_2B_2T, kao i uglova BAT i B_2A_2T, jer su to uglovi sa paralelnim kracima. Dakle, ovi trouglovi su podudarni. Iz podudarnosti ovih trouglova sledi da je duž BT podudarna duži TB_2. Kako je TB_1 jednaka polovini duzi TB_2, sledi da je TB1 jednaka polovini duži BT. Potpuno slično se izvodi da je duž TA_1 jednaka polovini duži AT. Dakle, tačka T deli duži BB_1 i AA_1 u odnosu 2:1, to jest deo težišnih duži BB_1 i AA_1 od temena do tačke T duplo veći od dela iste duži od T do središta naspramne stranice. Na isti način bismo dokazali i da tačka koja je presek težišne duži BB_1 i težišne duži koja odgovara temenu C deli BB_1 u odnosu 2:1, pa ta tačka mora da se poklapa sa tačkom koja već deli BB_1 u tom odnosu, tj. tačkom T. Ovim je teorema dokazana, jer se onda sve tri težišne duži seku u tački T.



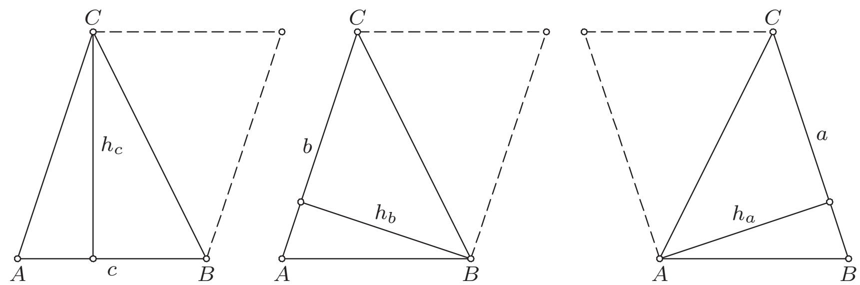
Neka je T zajednička tačka težišnih linija AA_1 i BB_1 trougla ABC, kao na prethodnoj slici. Treba dokazati da težišna linija CC_1 prolazi kroz T. Pretpostavimo suprotno da se CC_1 i BB_1 seku u tački S, različitoj od T. Tada je $BS = 2SB_1$, pa je $BS = \frac{2}{3}BB_1$. Isto tako je $BT = 2TB_1$, pa je $BT = \frac{2}{3}BB_1$. Što znači da je $BT = BS$. To je nemouće, jer su obe tačke S i T između tačaka B i B_1.

Mnogo je bitno pomenuti da se kod jednokrakog trougla sve četiri značajne tačke nalaze na simetrali osnovice, odnosno simetrali ugla pri vrhu. Kod jednakostraničnog trougla sve četiri značajne tačke se poklapaju. Drugim rečima, jedna tačka, takozvani centar jednakostraničnog trougla, predstavlja i centar opisane i upisane kružnice i ortocentar i težiste.

1.3.8 Površina trougla

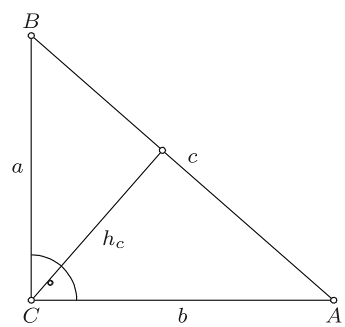
Površina trougla u šestom razredu se izvodi iz površine paralelograma. Površinu paralelorama dobijamo tako što odsecanjem jednog trougla i njegovim premeštanjem dobijamo od paralelograma pravougaonik, čija površina je intuitivno jasna. Dopunjavanjem trougla do paralelograma učenici mogu da naslute način kako se računa površina trougla. Kako se paralelogram može podeliti na dva podudarna trougla, treba da zaključe da je površina trougla jednaka polovini površine paralelograma. Sledeću teoremu treba zahtevati od učenika da nauče sa razumevanjem i da znaju da je primene na bilo koji zadatak u praksi.

Teorema 15 *Površina trougla jednaka je polovini proizvoda dužine jedne njegove stranice i visine koja joj odgovara* $P = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.



Na osnovu ove teoreme lako se izvodi površina bilo koga trougla. Pošto je svaka kateta pravouglog trougla ujedno i visina koja odgovara drugoj kateti tog trougla, površina pravouglog trougla jednaka je polovini proizvoda njegovih kateta.

Teorema 16 *Ako su* a *i* b *katete,* c *hipotenuza i* h_c *visina na hipotenuzu pravouglog trougla* ABC *onda je* $P = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.



Na samom kraju, kao provera znanja stečenog o površini trougla, samim tim i o vrstama trougla, može se dati učenicima kao zadatak da nađu formulu za izračunavanje površine jednakokrakog i jednakostraničnog trougla. Najpre treba zahtevati da nacrtaju ove dve vrste trougla i uoče njihove elemente, stranice i visine, a zatim na osnovu prethodnih teorema da dođu do zaključka kako se računaju njihove površine. Ovaj način učenja putem otkrivanja može da bude veoma koristan. Takođe im se može dati da izračunaju površinu trapeza koristeći površinu trougla.

1.4 Sedmi razred

Program sedmog razreda obuhvata realne brojeve, Pitagorinu teoremu, cele i racionalne algebarske izraze, mnogougao, zavisne veličine i njihovo grafičko predstavljanje, krug i sličnost trouglova.

U vezi trougla u sedmom razredu se radi Pitagorina teorema i sličnost trouglova.

1.4.1 Pitagorina teorema

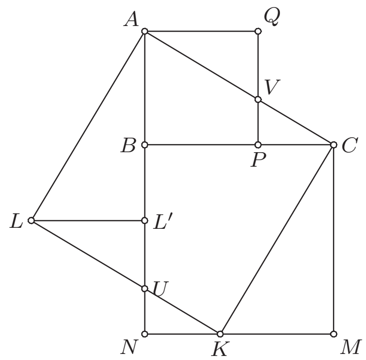
Pitagorina teorema je veoma značajna za upoznavanje učenika sa istorijom matematike, tj. sama priča o Pitagori može da bude od velikog značaja da što pre prihvate teoremu. Ne treba učenike zbunjivati sa previše informacija. Može se ispričati da je teorema dobila naziv po grčkom filozofu i matematičaru Pitagori koji je rođen na ostrvu Samos, jedan deo svog života je proveo putujući Egiptom i Persijom, da bi se, po povratku na rodni Samos, susreo sa tiranskom vladavinom Polikrata, što je bio razlog da se preseli u Kroton gde je osnovao čuvenu Pitagorejsku školu. Iako je teorema bila poznata još indijskim, grčkim, kineskim i vavilonskim matematičarima mnogo pre nego što je Pitagora živeo, prvi poznati dokaz Pitagorine teoreme može se naći u Euklidovim elementima.

Treba napomenuti dokaze Pitagorine teoreme koji nisu previše komplikovani učenicima tog uzrasta za razumevanje, a mogu da budu veoma zanimljivi. Naravno, ne treba insistirati na tome da učenici nauče dokaz, ali svakako uz laganu priču i crtanje slike dokaza i to što preciznije, moguće je, ne samo zainteresovati učenike, nego im i ispričati priču koju će da razumeju.

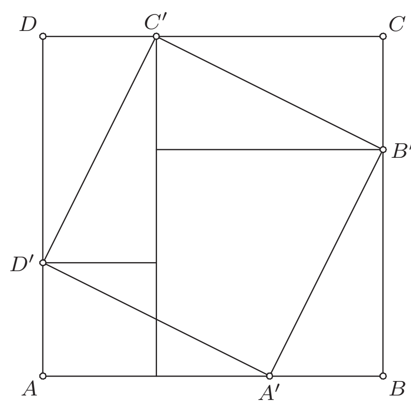
Teorema 17 *Pitagorina teorema: Površina kvadrata nad hipotenuzom pravouglog trougla jednaka je zbiru površina kvadrata nad katetama tog trougla.*

Izuzetno zanimljiva je i Pitagorina teorema u obliku pesmice: Pitagorinu teoremu, to zna svako dete, kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad obe katete.

Dokaz pomoću razložive jednakosti [7]: Ako je ABC trougao sa pravim uglom kod temena B, možemo pretpostaviti da je $AB \leq BC$. Ako su zatim, $ACKL$, $BCMN$ i $ABPQ$ kvadrati koji se redom nalaze sa onih strana pravih AC, BC i AB sa kojih su, redom, tačke B, K i C, tada, ako sa L' obeležimo podnožje upravne iz tačke L na pravoj AN, a sa U i V tačke u kojima se seku parovi pravih KL i BN, PQ i CA, biće trouglovi $AL'L$ i CMK, $LL'U$ i AQV , VPC i UNK, međusobno translatorno podudarni. Odatle sledi da je kvadratna površ ACKL-razloživo jednaka uniji kvadratnih površi $ABPQ$ i $BCMN$.



Dokaz pomoću dopunske jednakosti [7]: Neka je $ABCD$ kvadrat čije ivice su jednake zbiru kateta a i b pravouglog trougla kojem je hipotenuza c, a A', B', C', D' redom, tačke ivica AB, BC, CD, DA takve da je $A'B'C'D'$ kvadrat ivice c. Kvadratna površ $ABCD$ je unija kvadratne površi $A'B'C'D'$ i četiri trougaone površi kojima su ivice a, b, c. Međutim, površ $ABCD$ je unija dveju kvadratnih površi ivica a i b koje pripadaju duži AB i dveju pravougaonih površi kojima su dijagonale $B'C'$ i $C'D'$. Kako su te dve pravougaone površi unija četiri trougaone površi kojima su ivice a, b, c, kvadratna površ $A'B'C'D'$ ivice c dopunski je jednaka uniji kvadratnih površi kojima su ivice a i b.

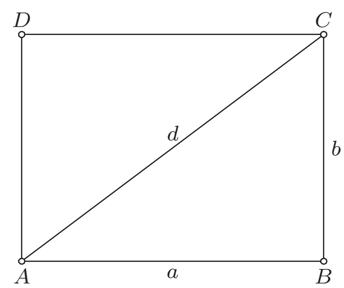


1.4.2 Primena Pitagorine teoreme

Poznata je primena Pitagorine teoreme na izračunavanje svih elemenata kod raznih vrsta trouglova, i ostalih geometrijskih figura: Kvadrata, pravougaonika, romba, trapeza tako što uočimo pravougli trougao u njima. To pojednostavljuje računanje obima i površine tih figura.
Sledeće primene mogu se naći u [4].
• *Primena na pravugaonik*

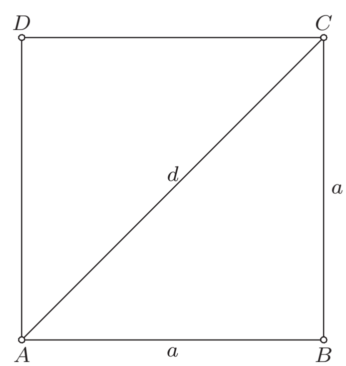
Svaki pravugaonik je dijagonalama podeljen na dva pravougla trougla, pa nam Pitagorina teorema daje vezu između stranica i dijagonale bilo kog pravougaonika. Ako je d dijagonala pravougaonika čije su stranice a i b, onda je:

$$d^2 = a^2 + b^2.$$



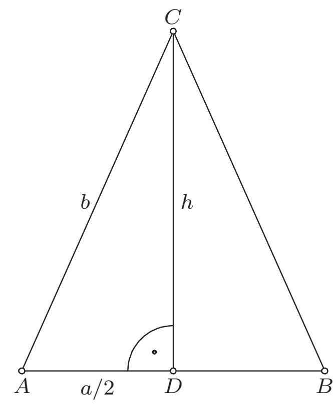
• *Primena na kvadrat*
Posmatrajmo kvadrat $ABCD$ stranice a. Trougao ABC je jednakokrako-pravougli, pa po Pitagorinoj teoremi $d^2 = a^2 + a^2$, to jest $d^2 = 2 \cdot a^2$. Odavde sledi da je:

$$d = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a}^2 = a\sqrt{2}, \text{ jer je } a > 0.$$



• *Primena na jednakokraki trougao*
Visina koja odgovara osnovici jednakokrakog trougla deli taj trougao na dva podudarna pravougla trougla. Pitagorina teorema nam daje vezu između dužine osnovice a, kraka b i visine h koja odgovara osnovici:

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2.$$



• *Primena na jednakostranični trougao*
Neka je D podnožje visine iz temena C na stranicu AB jednakostraničnog trougla ABC. Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ADC, dobijamo:

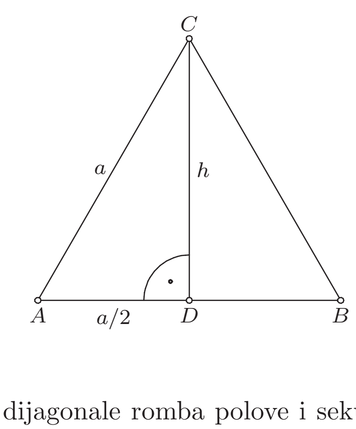
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2.$$

Iz ove formule može se dobiti formula za izračunavanje visine jednakostraničnog trougla ako je poznata njegova stranica.

Iz $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ sledi da je $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$, to jest $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$.

Ako je poznata stranica jednakostraničnog trougla, onda je visina potpuno određena, pa se i površina tog trougla može lako odrediti. Naime ako je a stranica jednakostraničnog trougla, tada je:

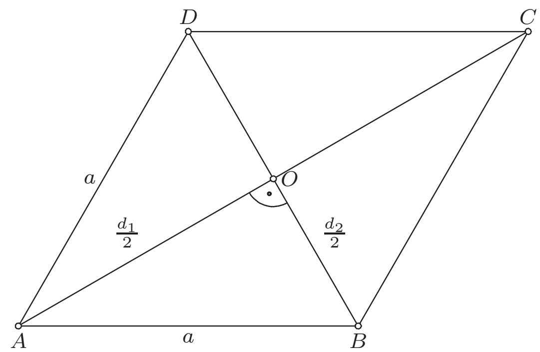
$$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



• *Primena na romb*
S obzirom na to da se dijagonale romba polove i seku pod pravim uglom, Pitagorinu teoremu možemo primeniti na trougao ABO, pri čemu je O presek

dijaonala romba $ABCD$. Tako se dobija zavisnost stranice romba i njegovih dijagonala:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2.$$

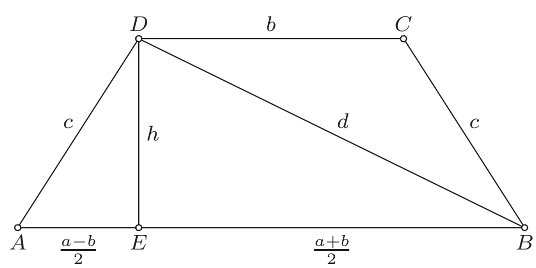


• *Primena na jednakokraki trapez*
Visina iz jednog temena kraće osnovice sa susednim krakom i delom duže osnovice obrazuju pravougli trougao. Tako, ako je h visina jednakokrakog trapeza, d dijagonala jednakokrakog trapeza čije su osnovice a i b i krak c, primenom Pitagorine teoreme dobijamo:

$$c^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2.$$

Pitagorina teorema povezuje dijaonalu jednakokrakog trapeza sa njegovom osnovicom i visinom:

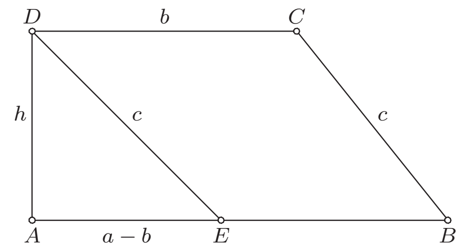
$$d^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2.$$



• *Primena na pravougli trapez*
Neka je $ABCD$ pravougli trapez sa pravim uglovima u temenima A i D. Ako

su a i b, $a > b$, osnovice tog trapeza, c njegov duži krak i h visina i istovremeno kraći krak, onda je:

$$c^2 = (a-b)^2 + h^2.$$



1.4.3 Sličnost trouglova

Sličnost je za učenike veoma zahtevna oblast, koju teško savladaju, a i kada je savladaju, veoma brzo je zaborave, pa iz tog razloga im treba davati što više poznatih primera da što bolje upamte osobine sličnosti. Sada ću dati definiciju sličnosti koja je prihvatljiva za učenike ovog uzrasta i par jednostavnih primera iz iskustva koji pomažu učenicima da što bolje savladaju ovu oblast, a da su njima bliski. Slični primeri se mogu naći u [4].
Pre uvođnja definicije sličnosti potrebno je upoznati učenike sa pojmom proporcionalnosti duži.

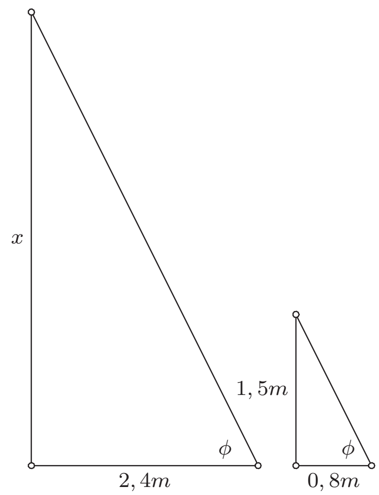
Definicija 3 *Ako su razmere dva para duži jednake, onda kažemo da je jedan par duži proporcionalan drugom paru.*

Definicija 4 *Trouglovi su slični ako imaju jednake uglove i proporcionalne odgovarajuće stranice.*

Učenici se zatim, bez dokaza, upoznaju sa sledećim stavom i njegovom posledicom.
Stav. Ako su uglovi dva trougla jednaki, onda su parovi odgovarajućih stranica međusobno proporcionalni.
Tvrđenje. Ako dva trougla imaju jednake uglove, onda su ti trouglovi slični.

Zadatak 4. Štap dužine $1,5m$, vertikalno postavljen u odnosu na tlo, baca senku dužine $0,8m$. Istovremeno, senka drveta dugačka je $2,4m$. Odrediti visinu drveta.
Rešenje. Koristeći se činjenicom da sunčevi zraci padaju paralelno na zemlju, to je ugao koji svaki zrak obrazuje sa tlom konstantan. Neka je ϕ mera tog ugla u trenutku kada su izmerene senke štapa i drveta. Tako, štap i drvo sa svojim senkama obrazuju dva pravougla trougla koji imaju iste oštre uglove. Dakle, ovi

pravougli trouglovi su slični, pa su im odgovarajuće stranice proporcionalne.

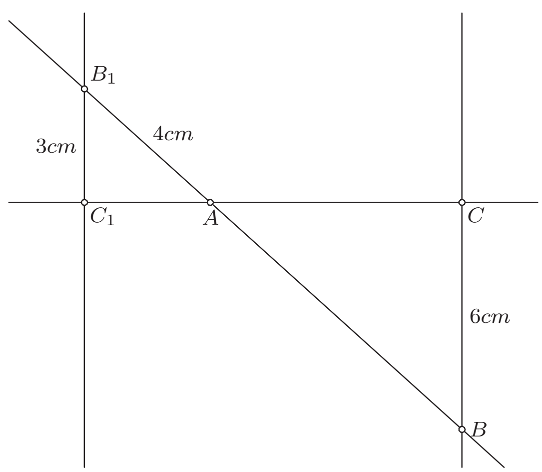


Iz jednakosti:

$$\frac{1,5}{0,8} = \frac{x}{2,4}$$

nalazimo da je $x = 4,5$, odnosno da je visina drveta $4,5m$.

Zadatak 5. Na osnovu podataka na datom crtežu, odrediti dužine duži AB i AC. (Uglovi kod temena C_1 i C su pravi).



Rešenje: Trougao AB_1C_1 je pravougli, pa na osnovu Pitagorine teoreme možemo odrediti stranicu AC_1:

$$AB_1^2 = AC_1^2 + B_1C_1^2,$$

$$AC_1^2 = AB_1^2 - B_1C_1^2,$$
$$AC_1^2 = 16 - 9,$$
$$AC_1^2 = 7,$$
$$AC_1 = \sqrt{7}cm.$$

Trouglovi AB_1C_1 i ABC su slični, pa su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$B_1C_1 : CB = AB_1 : AB = AC_1 : AC,$$
$$3 : 6 = 4 : AB = \sqrt{7} : AC,$$
$$AB = 8cm,$$
$$AC = 2\sqrt{7}cm.$$

1.5 Osmi razred

Program osmog razreda obuhvata sličnost trouglova, linearne jednačine i nejednačine sa jednom nepoznatom, tačka, prava i ravan, prizma, linearna funkcija, grafičko predstavljanje podataka, piramida, sistemi linearnih jednačina sa dve nepoznate, valjak, kupa i lopta.

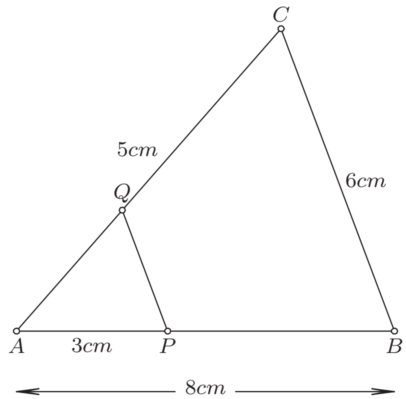
Trougao se u osmom razredu jedino javlja u oblasti sličnost trouglova koja se nadovezuje na gradivo iz sedmog razreda. Na samom početku radi se Talesova teorema. Priča o Talesu, koja treba da bude sažeta i zanimljiva može da bude korisna kako bi privukla pažnju učenika. Dovoljno je reći da je teorema dobila naziv po grčkom filozofu i matematičaru Talesu, koji je rođen u Miletu, u grčkoj koloniji na obali Male Azije. O značaju Talesa za Grčku, pa time i za svetsku kulturu govori činjenica da je svrstan u ,,sedam mudraca" - sedam utemeljivača grčke civilizacije zbog čega ga mnogi smatraju ocem grčke matematike.

Teorema 18 *Talesova teorema: Ako paralelne prave a i b, presecaju pravu p u tačkama A i B, a pravu q u tačkama A_1 i B_1, i ako je S zajednička tačka pravih p i q, tada važi:*

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{SA}{SB} = \frac{SA_1}{SB_1}.$$

Sledeći primer se odnosi na primenu Talesove teoreme na trougao i može se koristiti kao provera koliko su učenici razumeli teoremu. Primer je preuzet iz [5].

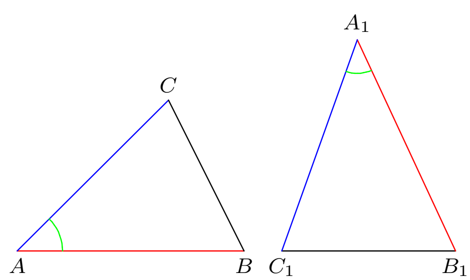
Zadatak 6. Neka je dat trougao ABC takav da je $AB = 8cm$, $BC = 6cm$ i $CA = 5cm$. Na stranici AB data je tačka P takva da je $AP = 3cm$. Kroz ovu tačku konstruisana je prava paralelna sa stranicom BC. Tačka Q je presek ove prave sa AC. Odrediti dužine duži AQ i PQ.
Rešenje. Najpre ćemo da vidimo šta nam je dato od podataka, a šta treba da nađemo. Posmatrajmo sledeću sliku.



Prema Talesovoj teoremi je $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$. Na osnovu datih podataka imamo da je $\frac{3}{8} = \frac{AQ}{5} = \frac{PQ}{6}$, odnosno $\frac{AQ}{5} = \frac{3}{8}$ i $\frac{PQ}{6} = \frac{3}{8}$. Iz poslednje dve jednakosti nalazimo nepoznate dužine $AQ = 1,875cm$ i $PQ = 2,25cm$.

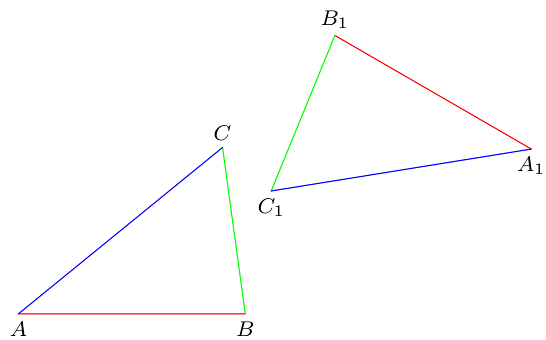
Rade se i stavovi sličnosti koji učenicima mogu da budu jako konfuzni i teško prihvatljivi. Zbog toga je najbolje ilustrovati stavove kroz primere koji mogu biti veoma korisni prilikom razumevanja ovog dela gradiva. Stavovi sličnosti koji se razmatraju odgovaraju stavovima podudarnosti SUS i SSS, pa se zato često zovu stavovi sličnosti.

Stav sličnosti SUS. Ako su dve stranice jednog trougla proporcionalne dvema stranicama drugog trougla i ugao koji zahvataju ove dve stranice u prvom trouglu jednak uglu koji zahvataju odgovarajuće stranice u drugom, tada su ti trouglovi slični.



Drugim rečima, iz pretpostavke $\angle A = \angle A_1$ i $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, zaključujemo da je $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ i $\frac{BC}{B_1C_1} = k$.

Stav sličnosti SSS. Ako su stranice jednog trougla proporcionalne stranicama drugog trougla tada su ti trouglovi slični.



Drugim rečima, iz $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ sledi da su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ slični.

Sledeći primer zahteva primenu jednog od stavova sličnosti i može se dati učenicima na kraju časa kao provera koliko su razumeli prethodne stavove. Primer je preuzet iz [5].

Zadatak 7. Dokazati da trougao čije su stranice $5cm$, $6cm$ i $7cm$ i trougao čije su stranice $5,25cm$, $4,5cm$, $3,75cm$ imaju jednake uglove.
Rešenje. Dovoljno je dokazati da su ovi trouglovi slični. Kako su nam date sve stranice, ispitaćemo njihovu proporcionalnost. Trouglovi će biti slični ukoliko je razmera najduže stranice jednog i najduže stranice drugog trougla jednaka razmeri stranica trouglova koje su srednje po veličini i obe ove razmere jednake razmeri najkraćih stranica. Tako se dobija da je:

$$\frac{7}{5,25} = \frac{4}{3} \text{ i } \frac{6}{4,5} = \frac{4}{3} \text{ i } \frac{5}{3,75} = \frac{4}{3}.$$

Kako su stranice ova dva trougla proporcionalne, na osnovu stava SSS sličnosti, ova dva trougla su slična, pa su im i odgovarajući uglovi jednaki. Ugao naspram stranice od $7cm$ jednak je uglu naspram stranice od $5,25cm$ i tako dalje.

2 Srednja škola

2.1 Prvi razred

Program prvog razreda obuhvata logiku i skupove, realne brojeve, proporcionalnost, uvod u geometriju, podudarnost, racionalne algebarske izraze, sličnost i trigonometriju pravouglog trougla.

Trougao se obrađuje u okviru tema podudarnost, sličnost i trigonometrije pravouglog trougla.
Obrada sadržaja iz podudarnosti treba da bude nastavak onoga što se učilo u osnovnoj školi. Oslanjajući se na prethodna znanja učenika taj pojam treba doraditi do nivoa neophodnog za efikasnu primenu.

2.1.1 Dokaz Pitagorine teoreme pomoću sličnosti

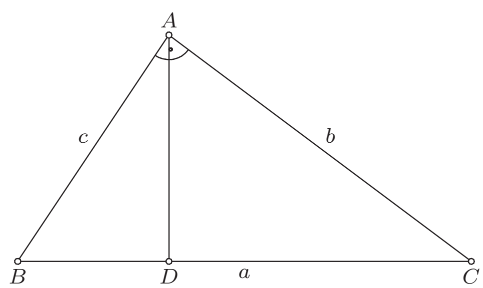
U okviru teme sličnosti pored produbljenog usvajanja Talesove teoreme (sa primenama) veoma je značajna primena sličnosti u dokazivanju Pitagorine teoreme.
Dokaz. Ovaj dokaz se izvodi na osnovu proporcionalnosti stranica, odnosno na osnovu definicije sličnosti:
Preslikavanje kojim se jedna figura F preslikava u drugu figuru F_1 naziva se sličnost ako je razmera proizvoljnih duži čija temena pripadaju domenu i njihove slike isti broj.
Neka su katete pravouglog trougla ABC obeležene sa AB i AC, a hipotenuza sa BC pravouglog trougla ABC. Iz uslova da je ugao kod temena A trougla ABC prav, sledi da je $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Sa D ćemo obeležiti podnožje visine iz temena A na pravu BC. Trougao ABC je sličan trouglu DBA , a sličan je i trouglu DAC, tako da su zadovoljene sledeće relacije:

$$AB : BC = BD : AB \text{ i } AC : BC = CD : AC, \text{ iz kojih sledi da je}$$

$$AB^2 = BC \cdot BD \text{ i } AC^2 = BC \cdot CD.$$

Na osnovu prethodne dve jednakosti važi sledeća jednakost:

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BD + BC \cdot CD = BC \cdot (BD + CD) = BC^2.$$

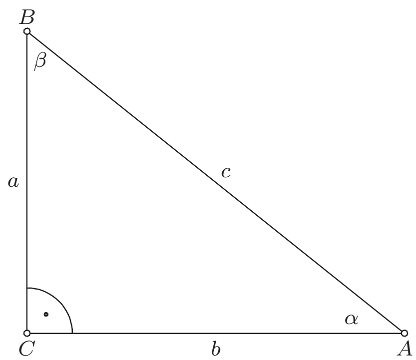


2.1.2 Trigonometrija pravouglog trougla

Kod trigonometrije pravouglog trougla radi se odnos između stranica i uglova pravouglog trougla (definicije trigonometrijskih funkcija oštrog ugla), njihove posledice i primene. Da bi priča bila malo zanimljivija, može se početi sa kratkom istorijom. Dakle, trigonometrija je grana matematike koja proučava odnose između stranica i uglova trougla. Trigonometrija se deli na tri oblasti:

Geometrijsku, alebarsku i funkcionalnu, ali ovde je predviđeno da se radi samo geometrijski deo. Stari Egipćani se nisu mnogo bavili trigonometrijom. Grci, su se oko 180. g.p.n. bavili tetivama kruga i analognim trigonometrijskim merenjima. Iz tog perioda, od helenističkih matematičara su nam poznati današnji trigonometrijski indentiteti. Značajan razvoj trigonometrije je zabeležen od indijskih matematičara 4. i 5. veka nove ere. Veruje se da su prve tablice sinusa i kosinusa uradili Indijci. Zatim su trigonometriju od 9. do 14. veka razvili Kinezi, a od 14. do 18. veka Evropljani. Trigonometrija ima ogromnu primenu u različitim disciplinama: Geodeziji, astronomiji, navigaciji, aeronautici i inženjerstvu uopšte.

Osnovne trigonometrijske funkcije definišemo na pravouglom trouglu [9].



• **Sinus** ugla u pravouglom trouglu jeste količnik naspramne katete i hipotenuze:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

• **Kosinus** ugla u pravouglom trouglu jeste količnik nalegle katete i hipotenuze:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

• **Tangens** ugla u pravouglom trouglu jeste količnik naspramne i nalegle katete:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}.$$

• **Kotangens** ugla u pravouglom trouglu jeste količnik nalegle i naspramne katete:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Posle uvođenja osnovnih trigonometrijskih funkcija, rade se i vrednosti trigonometrijskih funkcija za uglove od 30°, 45° i 60° kao i osnovni trigonometrijski identiteti. Oni su vrlo bitni jer se provlače u mnogim zadacima u starijim razredima i potrebno je da ih učenici sada trajno zapamte.

Osnovni trigonometrijski indetiteti:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$

Da bismo dokazali naredne identitete koristimo prethodne definicije trigonometrijskih funkcija i Pitagorinu teoremu [9]:

1)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

2)

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a\cdot c}{b\cdot c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

3)

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b\cdot c}{a\cdot c} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

4)

$$\tan\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1.$$

2.2 Drugi razred

Program drugog razreda obuhvata stepenovanje i korenovanje, kvadratnu jednačinu i kvadratnu funkciju, eksponencijalnu i logaritamsku funkciju, trigonometrijske funkcije.

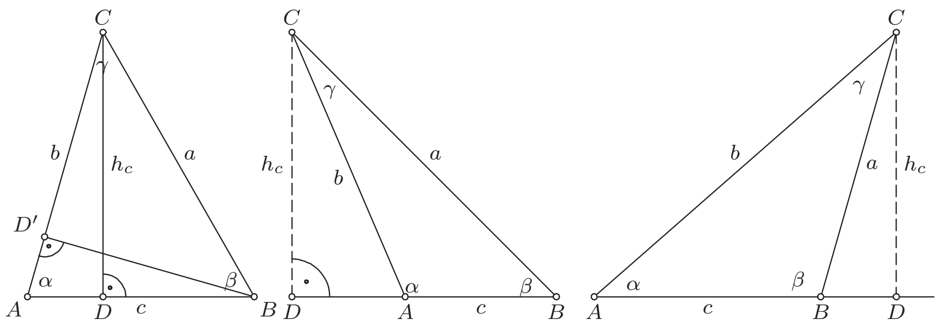
Trougao se pojavljuje u okviru teme trigonometrijske funkcije gde se radi sinusna i kosinusna teorema. Uvođenjem sinusne i kosinusne teoreme učenici treba da shvate da proširuju mogućnosti primene trigonometrije na rešavanje ma kojeg trougla. Klasična primena trigonometrije sastoji se u izračunavanju elemenata trougla. Ona u mnogome počiva na sinusnoj teoremi koja opisuje odnose između stranica i uglova trougla.

Dokazi teorema u poglavlju za drugi razred mogu se naći u [10].

Teorema 19 *Sinusna teorema: Neka je ABC proizvoljni trougao. Označimo sa a, b i c dužine njegovih stranica a sa α, β, γ njima odgovarajuće uglove trougla. Tada važi:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Dokaz. Označimo sa D projekciju tačke C na pravu AB. Moguća su tri rasporeda tačaka $A - D - B$, $D - A - B$ i $A - B - D$.



Na osnovu definicije sinusa u pravouglom trouglu, sa prve slike iz $\triangle DBC$, odnosno $\triangle ADC$ sledi da je:

$$h_c = a \cdot \sin\beta$$

i

$$h_c = b \cdot \sin\alpha.$$

Na osnovu prethodne dve jednakosti važi:

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha,$$

odakle sledi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0.$$

Prema drugoj slici iz $\triangle DAC$, odnosno $\triangle DBC$ dobijamo:

$$h_c = \sin(\pi - \alpha) \cdot b = b \cdot \sin\alpha,$$

$$h_c = a \cdot \sin\beta.$$

Iz prethodne dve jednakosti dobijamo:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}. \tag{1}$$

Isto tako, prema trećoj slici iz $\triangle ADC$, odnosno $\triangle BDC$ dobijamo sledeće jednakosti:

$$h_c = b \cdot \sin\alpha,$$

$$h_c = a \cdot \sin(\pi - \beta) = a \cdot \sin\beta.$$

Na osnovu prethodne dve jednakosti, opet dobijamo da važi relacija (1).
Na isti način kada koristimo visinu h_b, dobijamo $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, tako što iz $\triangle ABD'$, odnosno $\triangle BCD'$ sa prve slike važi:

$$h_b = a \cdot \sin\gamma,$$

$$h_b = c \cdot \sin\alpha.$$

Na osnovu prethodne dve jednakosti važi da je:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{2}$$

Na osnovu jednakosti (1) i (2) dobijamo:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

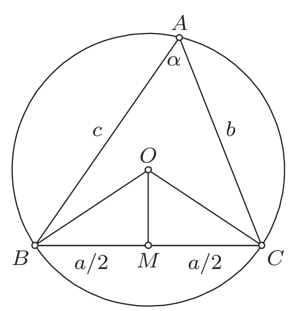
Sinusnu teoremu možemo dokazati i na drugi način, tj. dokazaćemo da je koeficijent proporcionalnosti odnosa stranice trougla prema sinusu naspramnog ugla jednak prečniku opisanog kruga trougla, odnosno dokazaćemo da važi:

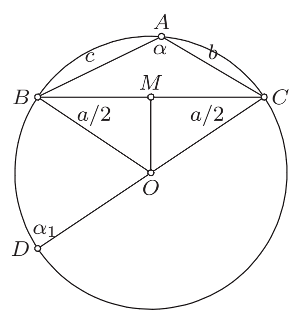
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot R.$$

U prethodnoj formuli R je poluprečnik opisanog kruga trougla.

Dokaz. Posmatrajmo $\triangle ABC$ kao na prvoj slici, neka je O centar opisanog kruga a R poluprečnik tog kruga. Ako na stranicu $BC = a$ povučemo normalu OM, onda je u pravouglom $\triangle BOM$:

$$\frac{a}{2} = R \cdot \sin(\angle BOM). \tag{3}$$





Ako je ugao α trougla ABC oštar kao na prvoj slici, onda je $\angle BOM = \alpha$ a ako je α tup ugao kao na drugoj slici onda je:

$\angle BOC = 2\cdot\pi - 2\cdot\alpha$, $\angle BOC = 2\cdot\angle BOM$, $2\cdot\angle BOM = 2\cdot\pi - 2\cdot\alpha$, $\angle BOM = \pi - \alpha$.

U oba slučaja je $\sin\angle BOM = \sin\alpha$. Na osnovu jednakosti (3) dobijamo da je:

$$a = 2\cdot R\cdot\sin\alpha \text{ ili } \frac{a}{\sin\alpha} = 2\cdot R.$$

Isto tako je:

$$b = 2\cdot R\cdot\sin\beta \text{ ili } \frac{b}{\sin\beta} = 2\cdot R,$$

$$c = 2\cdot R\cdot\sin\gamma \text{ ili } \frac{c}{\sin\gamma} = 2\cdot R.$$

Dokaz. (Da sinusna teorema važi i za tupougle trouglove):

Iz $\triangle CDB$ sledi:

$$BC = DC\cdot\sin\alpha_1,$$

$$a = 2\cdot R\cdot\sin\alpha_1. \tag{4}$$

Kako je četvorougao $ABCD$ tetivan važi sledeća jednakost:

$$\alpha + \alpha_1 = \pi.$$

Odatle je $\sin\alpha_1 = sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$. Na osnovu jednakosti (4) dobijamo:

$$a = 2\cdot R\cdot\sin\alpha.$$

Prema tome je:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\cdot R.$$

Sinusna teorema se primenjuje u dva slučaja:

1) Kada su data dva ugla i jedna stranica.
2) Kada se date dve stranice i ugao naspram jedne od tih stranica.

Sada ćemo pokazati kako možemo u školi da izvedemo novu formulu za površinu trougla, koristeći formulu za površinu koju su učenici ranije radili i sinusnu teoremu. Ova formula omogućava da se nađe površina trougla kada nije poznata visina.

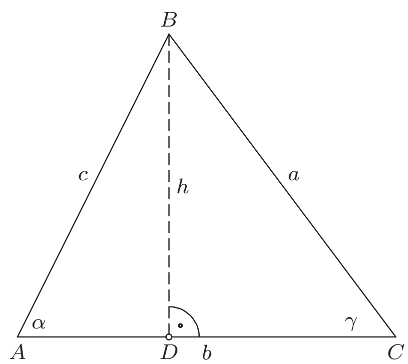
Teorema 20 *Neka su a, b, c dužine stranica i α, β i γ veličine odgovarajućih uglova trougla ABC. Tada je:*

$$P = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha,$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta,$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma.$$

Dokaz. U trouglu ABC, BD je visina iz temena B na AC. Označimo dužinu BD sa h. Takođe, označimo ugao kod temena A sa α.



Posmatrajmo formulu za površinu trougla:

$$P = \frac{b \cdot h}{2}. \tag{5}$$

Iz pravouglog trougla ABD imamo da je $\sin\alpha = \dfrac{h}{c}$, odakle sledi da je:

$$h = c \cdot \sin\alpha. \tag{6}$$

Na osnovu jednakosti (5) i (6) dobijamo formulu za površinu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha.$$

Možemo na sličan način izvesti sva tri oblika formule za površinu, bez obzira na ugao:

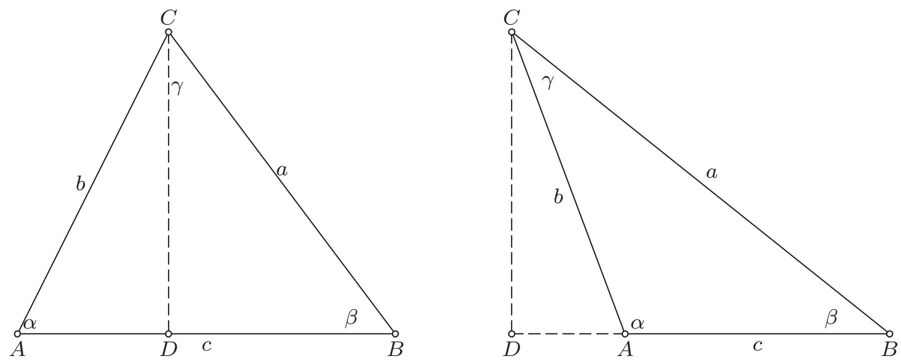
$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta,$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma.$$

Ova formula za površinu trougla zahteva poznavanje dužina dveju stranica i njima zahvaćenog ugla u trouglu. Kada su nam poznate ova tri elementa, možemo lako izračunati površinu proizvoljnog trougla.

Teorema 21 *Kosinusna teorema: Neka su a, b, c dužina stranica i α, β, γ veličine odgovarajućih unutršnjih uglova trougla ABC. Tada važi:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha.$$



Dokaz. Iz temena C spustimo na stranu AB visinu CD. Ako su dva ugla α i β oštra, tačka D će pasti između tačaka A i B kao na prvoj slici. Ako je jedan od njih, npr. α, tup onda će pasti na podnožje stranice AB kao na drugoj slici.
Po Pitagorinoj teoremi iz pravouglog trougla ADC iz prve slike sledi

$$CD^2 = b^2 - AD^2, \text{ a iz } \triangle DBC$$

$$CD^2 = a^2 - BD^2 = a^2 - (c - AD)^2 = a^2 - c^2 + 2c \cdot AD - AD^2,$$

$$a^2 - c^2 + 2c \cdot AD - AD^2 = b^2 - AD^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot AD.$$

Kako je $\cos\alpha = \dfrac{AD}{b}$ iz ovoga sledi da je $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$. Kod tupouglog trougla sa druge slike, iz trougla ACD sledi

$$CD^2 = b^2 - AD^2, \text{ a iz trougla BCD}$$

$$CD^2 = a^2 - BD^2 = a^2 - (c + AD)^2 = a^2 - c^2 - 2 \cdot c \cdot AD - AD^2,$$

$$a^2 - c^2 - 2 \cdot c \cdot AD - AD^2 = b^2 - AD^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot AD.$$

Kako je $\cos(\pi - \alpha) = \dfrac{AD}{b} = -\cos\alpha$, dobijamo $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$.
Kosinusnu teoremu za preostale dve stranice b i c ostaviti učenicima da ispišu za domaći i izvedu formule na isti način kao i prethodnu, cikličnom izmenom oznaka za stranice i uglove trougla.

Kosinusna teorema ili Karnotovav (Carnot) teorema, može se nazvati i uopštena Pitagorina teorema, zato što kada je jedan ugao u trouglu prav, kosinus tog ugla jednak je nuli, te dobijamo Pitagorinu teoremu kao specijalan slučaj kosinusne.

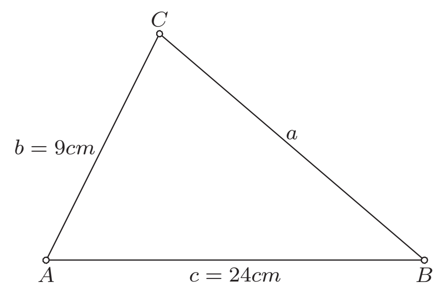
Kosinusna teorema se primenjuje u dva slučaja:

1) Kada su date dve stranice trougla i ugao između njih.
2) Kada su date sve tri stranice trougla.

Sledeći primer ilustruje primenu kosinusne teoreme i može se dati učenicima da ga samostalno rešavaju.

Zadatak 8. U trouglu ABC dato je $AB = 24cm$, $AC = 9cm$ i ugao $\alpha = 60°$. Odrediti dužinu stranice BC.

Rešenje. Označimo date podatke na slici.



Kako su nam date dve stranice trougla i ugao između njih, da bismo izračunali dužinu stranice BC koristimo kosinusnu teoremu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha,$$
$$a^2 = 9^2 + 24^2 - 2 \cdot 9 \cdot 24 \cdot cos60°,$$
$$a^2 = 81 + 576 - 2 \cdot 9 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2},$$
$$a^2 = 441,$$
$$a = \sqrt{441},$$
$$a = 21cm.$$

2.3 Treći razred

Program trećeg razreda obuhvata poliedre, obrtna tela, vektore, analitičku geometriju u ravni, matematičku indukciju i nizove, kompleksne brojeve.

U trećem razredu se trougao obrađuje iz oblasti analitičke geometrije gde se radi površina trougla preko koordinata temena i Heronova formula za površinu trougla.
Dokazi teorema u poglavlju za treći razred mogu se naći u [11].

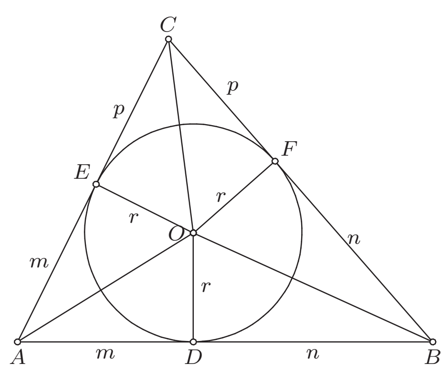
2.3.1 Heronova formula

Heronova formula. Ako su dužine stranica trougla a, b i c, tada se njegova površina izračunava po formuli:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ gde je s poluobim trougla, tj. } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Učenicima treba naopomeniti da je Heronova formula dobila naziv po čuvenom grčkom matematičaru Heronu iz Aleksandrije o čijem vremenu življenja nema tačnih podataka. Neki istoričari smatraju da je živeo u 2. veku p.n.e, a drugi da je to 1. vek n.e. Postoje pretpostavke da je za formulu znao i Arhimed, a da ju je Heron samo zabeležio. Treba naopomenuti da se Heronova formula koristi za izračunavanje površine trougla kada su date dužine njegovih stranica. Postoji više dokaza Heronove formule. Ovde ću navesti dokaz Heronove formule koji je prihvatljiv za učenike ovog uzrasta i koji zahteva poznavanje Pitagorine teoreme sa kojom su učenici upoznati u sedmom razredu osnovne škole.
Dokaz. Neka je O centar kružnice upisane u trougao ABC. Neka su D, E i F dodirne tačke, a mere duži $AD = AE = m$, $BD = BF = n$, $CF = CE = p$, tada je:

$$a = n + p,\ b = p + m,\ c = m + n,\ s = m + n + p. \tag{7}$$



Uočimo da je površina P trougla ABC jednaka zbiru površina trouglova BOC, COA i ABO. Sledi da je

$$P = \frac{n+p}{2} \cdot r + \frac{p+m}{2} \cdot r + \frac{m+n}{2} \cdot r = s \cdot r, \tag{8}$$

gde je r poluprečnik upisane kružnice u $\triangle ABC$. Iz $\triangle CEO$ imamo da je

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{\sqrt{p^2+r^2}}$$

i

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{p}{\sqrt{p^2+r^2}}.$$

Kada prethodne dve formule zamenimo u formulu za dvostruki ugao $\sin\gamma = \sin(2\cdot\frac{\gamma}{2}) = 2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$, dobijamo da je

$$\sin\gamma = \frac{2\cdot r\cdot p}{p^2+r^2}. \tag{9}$$

Sa druge strane površina trougla ABC je $P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$. Na osnovu formule za površinu i relacija (7) i (9) dobijamo novu formulu za površinu

$$P = \frac{(n+p)(m+p)rp}{p^2+r^2}. \tag{10}$$

Iz (8) i (10) sledi da je $\frac{(n+p)(m+p)rp}{p^2+r^2} = r\cdot s$, odnosno $p\cdot(n+p)(m+p) = s(p^2+r^2)$. Sređivanjem prethodne jednakosti dobijamo:

$$mnp = s\cdot r^2. \tag{11}$$

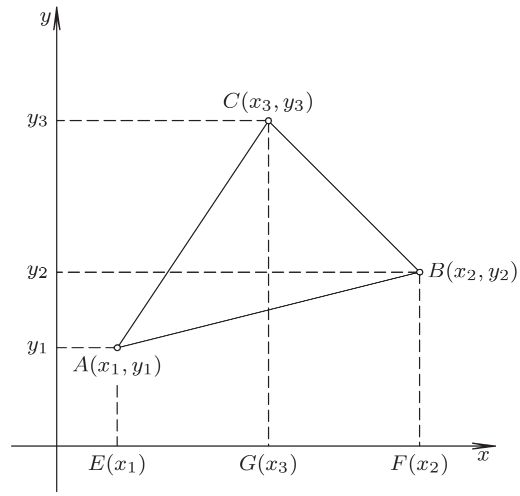
Posle množenja jednakosti (11) sa s dobijamo da je $smnp = s^2\cdot r^2$. Ostaje da eliminišemo veličine m, n i p: $m = s-a$, $n = s-b$, $p = s-c$. Dobijamo da je:

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = P^2, \text{ odnosno}$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ što je trebalo i dokazati.}$$

2.3.2 Površina trougla preko koordinata

Površina trougla preko koordinata temena se u srednjoj školi može uvesti na sledeći način. Posmatrajmo u koordinatnom sistemu trougao ABC čije su koordinate temena $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. Neka su date tačke $E(x_1,0)$, $F(x_2,0)$ i $G(x_3,0)$.



Primetimo da se površina trougla $P(ABC)$ može izračunati tako što se od zbira površina trapeza $P(EGCA)$ i $P(GFBC)$ oduzme površina trapeza $P(EFBA)$. Znamo da je površina trapeza jednaka proizvodu poluzbira osnovica (srednje linije trapeza) i visine. Dakle, imamo da je:

$$P = \left| \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot (x_2 - x_3) - \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) \right|,$$

odakle dobiijamo da je formula za površinu trougla:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|.$$

Na kraju ovog dokaza, zadati učenicima da provere, da li ovaj dokaz važi ako nije raspored tačaka $E - G - F$. Zahtevati od učenika da nacrtaju takav trougao i zaključe zašto dokaz i dalje važi.

3 Zaključak

Postoji još puno interesantnih oblasti koje nisu obrađene, a koje se mogu koristiti na takmičenjima u osnovnoj školi i u nekim matematički orijentisanim srednjim školama kao što je Matematička gimnazija. Neke od tih oblasti u osnovnoj školi su:

- Primena sličnosti i podudarnosti na razne praktične zadatke;
- Konstrukcije kroz nedostižne tačke;
- Primena Pitagorine teoreme na rešavanje konstriktivnih zadataka;
- Razni praktični zadaci u kojima se koriste formule za izračunavanje obima i površine trougla.

U srednjoj školi, to su:

- Izometrijske transformacije;
- Primena podudarnosti na trougao na višem nivou;
- Rešavanja konstruktivnih zadataka primenom izometrijskih transformacija i sličnosti;
- Površina sfernog trougla;
- Računanje površine trougla preko integrala.

Sve ove teme su zanimljive i korisne i mogu se raditi sa učenicima na dodatnoj nastavi. Sa ostalim učenicima treba obrađivati teme koje su predviđene planom i programom. Na osnovu svog radnog iskustva u školi, kao i iskustva starijih kolega, donosim zaključak da ne treba previše insistirati na dokazivanju i učenju dokaza u osnovnoj školi, jer to može biti previše zbunjujuće za učenike ovog uzrasta. Naravno, može se dati dokaz najbitnijih teorema i to na nivou pristupačnom za učenike ovog uzrasta. Većina mojih kolega daje samo formulacije teorema i po neki dokaz. Najbolje bi bilo uvesti nove pojmove korišćenjem što manje teksta. Treba se više bazirati na davanju praktičnih primera. Uglavnom udžbenici u osnovnoj školi su prožeti sa mnogo praktičnih i ilustrativnih primera, koji su po mom mišljenju veoma korisni za razumevanje gradiva. Teorija je prisutna u odgovarajućim granicama. Neke od teorema se dokazuju, dok su neke date samo u obliku formulacija, bez dokaza. Teoreme koje se ne dokazuju u osnovnoj školi predviđene su da se detaljnije obrađuju u starijim razredima. Program za srednju školu je značajno obimniji u odnosu na osnovnu školu. Udžbenici su prožeti sa velikom količinom teksta. Ima mnogo teorije i teoreme koje se navode se dokazuju. Uglavnom su zastupljeni primeri koji se odnose na direktnu primenu teorije. Po mom mišljenju, najveći nedostatak su praktični primeri koji se retko javljaju.
Moje iskustvo sa učenicima je pokazalo da se najbolje uči kroz jednostavne i zanimljive primere koji učenicima probude pažnju i maštu. Iz tog razloga želim

da kroz svoj radni vek što više pažnje posvetim temeljnom usvajanju osnovnih pojmova kroz primere, a složenije stvari nadogradim tek kada se savlada osnova. Potrudiću se da moji časovi budu što zanimljiviji i da se baziraju na velikom broju zadataka iz prakse, kako bih pridobila što veću pažnju učenika i poboljšala njihovu zainteresovanost za ovaj predmet.
Kroz rad sa decom, uočavam da će to biti veoma težak posao, jer veliki broj dece još pre početka osnovne škole usađuje sebi strah od matematike i time se stvara potpuna nezainteresovanost prema ovom predmetu. Zbog toga želim da što bolje prezentujem ono što radim i ako mogu nešto promenim na bolje.

Literatura

[1] Ćuk M., Jevtić Z., Marković B., Razigrana matematika za prvi razred osnovne škole, Nova škola, Beograd, 2011.

[2] Joksimović S., Vlahović B., Udžbenik za treći razred osnovne škole, Eduka, Beograd, 2007.

[3] Ikodinović N., Dimitrijević S., Udžbenik za šesti razred osnovne škole, Klett, Beograd, 2009.

[4] Ikodinović N., Dimitrijević S., Udžbenik za sedmi razred osnovne škole, Klett, Beograd, 2010.

[5] Ikodinović N., Dimitrijević S., Udžbenik za osmi razred osnovne škole, Klett, Beograd, 2010.

[6] J. Cofman, What to solve? Oxford University Press, Oxford, 1990.

[7] Z.Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, Preliminarna verzija, str. 43-45, Službeni glasnik, Beogra, 2009.

[8] Milenković M., Osnovne geometrijske konstrukcije pomoću The Geometer's SketchPad.

[9] Miličić P., Stojanović V., Kadelburg Z., Boričić B., Matematika za prvi razred srednje škole, Zavod za udžbenike, Beograd, 2009.

[10] Mićić V., Ivanović Ž., Ognjanović S., Matematika za drugi razred srednje škole, Zavod za udžbenike, Beograd, 2009.

[11] Vojvodić G., Paunić Đ., Tošić R., Matematika sa zbirkom zadataka za treći razred srednje škole, Zavod za udžbenike, Beograd, 2009.

[12] Manojlović B., Geometrijski pojam trougla, Učenje kroz igru i zanimljive testove, str. 27-30.

[13] https://sr.wikipedia.org/wiki/Trougao.

[14] B. Čekrlija, Vremeplovom kroz matematiku.

[15] Zvanični planovi su preuzeti iz Zavoda za unapredivanje obrazovanja i vaspitanja.