Prirodno matematički fakultet u BEOGRADU

P O T A P A N J E U N I V E R Z A L N I H A L G E B R I

- Magistarski rad-

Gospava Đorđević

L e s k o v a c

SADRŽAJ

UVOD

Ovaj magistarski rad se sastoji iz tri dela.

U prvom delu uvode se neki pojmovi potrebni za izlaganje obuhvaćene materije, prema priloženoj literaturi na poslednjoj stranici ovog rada. Tako su na početku dati pojmovi: univerzalne algebre, podalgebre, homomorfizma, potapanja, kongruencije. Zatim, data je konstrukcija količnik-algebre, slobodne polugrupe, algebre reči nad Ω i Ω-izraza.
Prema [2], izlažu se ovi rezultati: potapanje polugrupe u grupu i grupoida u kvazigrupu. Dokaz drugog rezultata je nešto izmenjen. Posledica rezultata o potapanju polugrupe u grupu jeste potapanje komutativne polugrupe u komutativnu grupu (dato u [9]).

U drugom delu rada razmatra se problem potapanja univerzalnih algebri u polugrupu (poznato kao teorema Kon-Rebana), dat u knjizi [3]. Tu sam obrazložila da je odgovarajući term bezakonski, što u [3] nije bilo dokazano.
Zatim je izložen rezultat Marice Prešić ([10]) o potapanju univerzalnih algebri u entropični grupoid (teorema 13). Teoremu 14 sam dokazala na osnovu teoreme 13, tj. teorema 14 jeste posledica teoreme 13.
Na kraju drugog dela izlaže se zajednički rezultat Marice i Slaviše Prešić.

Treći deo magistarskog rada odnosi se na potapanje modela. Tu se navodi još neobjavljen rezultat Marice D. Prešić ([12]) o potapanju modela (relacijskih struktura). Na osnovu toga rešila sam problem:
Datu strukturu (S,β) potopiti u operacijsko-relacijsku strukturu jezika $\{\alpha,*\}$, gde je α relacijski simbol dužine 1 koji zadovoljava aksiomu

$$(*)\qquad (\forall x,y)(\alpha(x*y) \Longrightarrow \alpha(y*x)).$$

A zatim sam rešila problem opšteg slučaja:
Svaka relacijska struktura se može potopiti u operacijsko-relacijsku strukturu jezika $\{\alpha,*\}$, gde je α relacijski simbol dužine 1 koji zadovoljava aksiomu $(*)$.

U toku izrade magistarskog rada svesrdnu pomoć mi je pružala Dr Marica Prešić, na čemu joj dugujem veliku zahvalnost.

I DEO

1. NEKI OSNOVNI POJMOVI

Definicija 1 Pod univerzalnom algebrom $Q(\Omega)$ podrazumevamo uređeni par (Q,Ω) gde je Q nosilac algebre a Ω skup svih operacija definisanih na Q.

Definicija 2 Neka je $Q(\Omega)$ algebra, skup P je podskup skupa Q. $P(\Omega)$ je podalgebra algebre $Q(\Omega)$ akko je zadovoljen uslov:

(i) $(\forall b_1, b_2, \ldots, b_n \in P)(\exists b \in P)(b_1 b_2 \ldots b_n \omega_Q = b_1 b_2 \ldots b_n \omega_P = b)$, $(\omega \in \Omega_n,\ n=0,1,\ldots)$,

tj. akko je skup P zatvoren u odnosu na sve operacije algebre $Q(\Omega)$ i ω_P je restrikcija operacije ω_Q sa Q na P.

Teorema 1 Neka su $P_i(\Omega)$, $(i \in I)$, podalgebre algebre $Q(\Omega)$. Algebra $P(\Omega)$ je podalgebra algebre $Q(\Omega)$, pri čemu je $P = \bigcap(P_i \mid i \in I)$.

Dokaz. Neka su elementi $b_1, b_2, \ldots, b_n \in P$. Tada su elementi $b_1, b_2, \ldots, b_n \in P_i$ za svaki $i \in I$. Zato je za svako $\omega \in \Omega_n$ tačno ovo

$b_1 b_2 \ldots b_n \omega \in P_i$, odakle sleduje $b_1 b_2 \ldots b_n \omega \in P$,

tj. P je zatvoren u odnosu na sve operacije algebre $Q(\Omega)$. Ovim je dokazano da je $P(\Omega)$ podalgebra algebre $Q(\Omega)$.

Relacijska struktura je uređeni par (Q,R), gde je R skup relacija skupa Q.

Pod operacijsko-relacijskom strukturom podrazumevamo uređenu trojku (Q,Ω,R).

Neka su $P(\Omega)$ i $Q(\Omega)$ date algebre. Preslikavanje

$$\varphi : Q \to P$$

jeste homomorfizam iz algebre $Q(\Omega)$ u algebru $P(\Omega)$ akko zadovoljava ovaj uslov:

(ii) $(\forall \omega \in \Omega_n)(\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in Q)(\varphi(a_1 a_2 \ldots a_n \omega) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(a_3)\ldots\varphi(a_n)\,\omega)$,

Definicija 3 Homomorfizam φ jeste p o t a p a n j e algebre $Q(\Omega)$ u algebru $P(\Omega)$ akko φ jeste 1-1 preslikavanje skupa Q u skup P.

Algebra $P(\Omega)$ je homomorfna slika algebre $Q(\Omega)$ u odnosu na φ akko je φ na preslikavanje.

Algebre $Q(\Omega)$ i $P(\Omega)$ su izomorfne akko je $\varphi : Q \to P$ 1-1 i na preslikavanje i homomorfizam

Napomenimo još, homomorfizam 1-1 zovemo monomorfizam, na homomorfizam zovemo epimorfizam.

Neka je $Q(\Omega)$ algebra, α binarna relacija definisana na Q. α je relacija kongruencije na algebri $Q(\Omega)$ akko zadovoljava sledeća dva uslova:

(j) α je relacija ekvivalencije,

(jj) $(\forall \omega \in \Omega_n)(\forall a_i, b_i \in Q)(i=1,2,\dots,n)(a_i \equiv b_i(\alpha) \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n\omega \equiv b_1 b_2 \dots b_n \omega(\alpha))$.

Neka je α relacija kongruencije na algebri $Q(\Omega)$. Na količničkom skupu Q/α konstruišimo novu, takozvanu količnik (faktor) algebru $Q/\alpha(\Omega)$ na ovaj način: Za svaki $\omega \in \Omega_n$ definišimo operaciju $\bar{\omega}$

$(\forall \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \in Q/\alpha)(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n \bar{\omega} = \overline{a_1 a_2 \dots a_n \omega})$.

Dokazati da su operacije na Q/α dobro definisane, tj. ne zavise od predstavnika klasa ekvivalencije.

Neka je $b_1, b_2, \dots, b_n$ drugi predstavnik, tj.

$a_1 \equiv b_1 (\alpha)$, $a_2 \equiv b_2(\alpha), \dots, a_n \equiv b_n (\alpha)$.

Onda je tačna ova relacija

$a_1 a_2 \dots a_n \omega \equiv b_1 b_2 \dots b_n \omega(\alpha)$, $(\omega \in \Omega_n)$. Odavde zaključujemo

$\overline{a_1 a_2 \dots a_n \omega} = \overline{b_1 b_2 \dots b_n \omega}$.

<u>Teorema 2</u> Količnik algebra $Q/\alpha(\Omega)$ je homomorfna slika algebre $Q(\Omega)$.

<u>Dokaz</u>. Neka je $Q(\Omega)$ algebra, α relacija kongruencije na $Q(\Omega)$. Dokažimo da je prirodno preslikavanje

$$\varphi : Q \to Q/\alpha$$

epimorfizam.

Kako je zadovoljen uslov

$$(\exists a \in Q)(\forall \bar{a} \in Q/\alpha)(\varphi(a) = \bar{a})$$

to je preslikavanje φ na preslikavanje. Dokaz teoreme 2 je završen ako dokažemo da je φ homomorfizam.

Neka su elementi $a_1, a_2, \dots, a_n \in Q$, $\omega \in \Omega_n$. Tada važi ova relacija:

$$\varphi(a_1 a_2 \dots a_n \omega) = \overline{a_1 a_2 \dots a_n \omega} = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n \bar{\omega} = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n)\omega.$$

Ovim je teorema 2 dokazana.

Opišimo još jednu algebru- algebru reči nad Ω.

Neka je dat skup $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ i Ω je skup operacijskih simbola. Pod reči nad Ω podrazumevamo konačan niz elemenata iz $X \cup \Omega$, ($X \cap \Omega = \emptyset$). Na skup svih reči nad Ω, $W(\Omega, X)$, definišimo operaciju dopisivanje i ovako dobijenu algebru označimo sa $W(\Omega, X)$.

Definicija 4 Podalgebra algebre $W(\Omega, X)$ generisana skupom X jeste algebra Ω -izraza nad X. Algebru Ω -izraza označićemo sa $W_\Omega(X)$. Elementi algebre $W_\Omega(X)$ su izrazi nad Ω a skup X je alfabet.

Neka je $w = x_1 x_2 \dots x_m$, $(x_i \in X \cup \Omega)$, reč nad Ω. Dužina reči je $l(w) = m$. Valentnost reči w se definiše na ovaj način:

$$v(w) = \sum v(x_i),$$

gde je
$$v(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{za } x_i \in X, \\ 1-n, & \text{za } x_i \in \Omega_n \end{cases}$$

Koristeći uvedene pojmove dokazujemo sledeće tvrdenje.

Teorema 3 Reč w nad Ω je Ω -izraz akko za svaki levi odsečak $w_k = x_1 x_2 \dots x_k$ reči w važe uslovi:

(1) $v(w_k) > 0$, $(k = 1, 2, \dots, m)$,

(2) $v(w) = 1$.

Uslov (1) zahteva na svakom koraku dovoljan broj elemenata sa kojima se može vršiti operacija, a uslov (2), da konačan rezultat bude jedan element.

Dokaz. Dokaz teoreme 3 sprovodimo indukcijom po dužini izraza w.

Tvrdenje je očigledno za $l(w) = 1$. Pretpostavimo da je w Ω -izraz oblika

$$w = x_1 x_2 \dots x_n \omega, \quad (x_i \in W_\Omega(X), \omega \in \Omega_n).$$

Prema pretpostavci je tačno

$$v(x_i) = 1, \quad v(\omega) = 1-n.$$

odakle je

$$v(w)=\sum_{i=1}^{n} v(x_i)+v(\omega)= n+1-n= 1.$$

Svaki levi odsečak izraza x_i ima pozitivnu valentnost što se prenosi i na w. Ako je w niz od m Ω -izraza, ponovo je zadovoljen uslov (1) a valentnost $v(w)$ se dobija kao zbir valentnosti svakog izraza kojih ima m.

Neka je w element algebre reči nad Ω i w zadovoljava uslove:

(3) $v(w_k)>o$, $(k=1,\dots,m)$, (w_k je levi odsečak reči w),

(4) $v(w)=m$.

Ako je $l(w)=1$, onda je $v(w)=1$, pa je $w\in W\Omega(X)$, $(w\in XU\Omega_o)$. Pretpostavimo da je $l(w)=q$, $(q>1)$, i w je oblika $w=w'x$, $(x\in XU\Omega)$, i $v(w')=q'$. Dakle, w' je niz od q' Ω -izraza. Valentnost izraza w je:

$$v(w)= v(w') + v(x),\ \text{tj.}$$

$$v(x)= v(w) - v(w') = m-q'.$$

Na osnovu prethodnog možemo zaključiti:

za $m - q' = 1$, gde je $x\in W\Omega(X)$, i zato je w niz od $q'+ 1= m$ izraza, ili, $m - q' = 1 - q\leq o$, pa je x q-arni operator.

Kako iz jednakosti

$$m - q' = 1 - q \quad \text{sleduje} \quad q = q'- m + 1,\ \text{tj.}$$

$q = q'- (m -1)\leq q'$, što znači da se pomoću x i q' prethodnih izraza može konstruisati samo jedan novi Ω -izraz u obliku niza od $m = q'- q + 1$ Ω -izraza. Ovim je teorema 3 dokazana.

Posledica. Reč w nad Ω, koja zadovoljava uslove:

(5) $v(w_k)>o$, (w_k je proizvoljni levi odsečak od w),

(6) $v(w) = m$,

može biti zapisana u obliku niza od m Ω -izraza na jedinstven način, tj. u obliku

$$w = w_1 w_2 \dots w_m.$$

Neka je $Q(\Omega)$ algebra. Ako se svaka promenljiva u izrazu $w = w_1 w_2 \dots w_m$ zameni elementom algebre $Q(\Omega)$ dobija se jedinstven element algebre $Q(\Omega)$, Sledeća teorema govori o univerzalnom svojstvu algebre Ω -izraza.

Teorema 4 Neka je $Q(\Omega)$ proizvoljna algebra i X proizvoljni skup. Svako preslikavanje

$$\lambda : X \to Q$$

može se, na jedinstven način, produžiti do homomorfizma

$$\varphi : W_\Omega(X) \to Q(\Omega).$$

Dokaz. Neka je preslikavanje λ definisano. Svaki Ω -izraz w može se jednoznačno predstaviti u obliku

$$w = x_1 x_2 \ldots x_n \omega, \ (x_i \in X \cup \Omega, \ \omega \in \Omega_n).$$

Preslikavanje

$$\varphi : W_\Omega(X) \to Q(\Omega)$$

definišimo na ovaj način:

$$(\forall w \in W_\Omega(X))(\varphi(w) = x_1' x_2' \ldots x_n', \quad \text{gde je} \quad x_n' = \begin{cases} x, & \text{za} \quad x \in \Omega, \\ \lambda(x), & \text{za} \quad x \in X. \end{cases}$$

Dokažimo da je φ homomorfizam.

Neka je w Ω -izraz oblika

$$w = x_1 x_2 \ldots x_n \omega, \ (x_1, x_2, \ldots, x_n \in X, \ \omega \in \Omega_n).$$

Onda je

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \lambda(x_1)\lambda(x_2)\ldots\lambda(x_n)\lambda(\omega) \\ &= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\omega. \end{aligned}$$

Ovim je dokazano da je φ homomorfizam.

Neka je i φ_1 produženje preslikavanja λ do homomorfizma algebre $W_\Omega(X)$ u algebru $Q(\Omega)$. Preslikavanje φ_1 je definisano na isti način kao i φ, onda iz

$$\varphi(w) = x_1' x_2' \ldots x_n' \quad \text{i} \quad \varphi_1(w) = x_1' x_2' \ldots x_n', \quad \text{za} \quad x' = \begin{cases} x, & \text{za} \quad x \in \Omega \\ \lambda(x), & \text{za} \quad x \in X, \end{cases}$$

sleduje

$$\varphi = \varphi_1$$

Ovim je teorema dokazana.

Navodimo posledicu teoreme 4.

Teorema 5 Neka je $Q(\Omega)$ algebra sa generatorskim skupom X. Algebra

$Q(\Omega)$ se može predstaviti kao homomorfna slika algebre $W_\Omega(X)$.

Dokaz. Identično preslikavanje

$$i : X \to X$$

može se, prema teoremi 4, produžiti do homomorfizma

$$\varphi : W_\Omega(X) \to Q(\Omega).$$

Slika svakog Ω -izraza nad X, pri preslikavanju φ, jeste jedinstven element algebre $Q(\Omega)$. Kako je φ homomorfizam to je slika algebre $W_\Omega(X)$ podalgebra algebre $Q(\Omega)$. Skup X je generatorski za $Q(\Omega)$, pa je podalgebra sama algebra $Q(\Omega)$. Ovim je dokazano da je algebra $Q(\Omega)$ homomorfna slika algebre $W_\Omega(X)$.

Na kraju ovog dela, pomenimo i slobodnu algebru a nešto više rećićemo o slobodnoj polugrupi.

Definicija 5 (Birkhoff). Neka je K klasa algebri, neka je $Q(\Omega) \in K$ i skup $X = \{x_i \mid i \in I\}$ je generatorski skup algebre $Q(\Omega)$. Algebra $Q(\Omega)$ je slobodna algebra u klasi K, sa generatorskim skupom X akko za svaku algebru $P(\Omega) \in K$ i za svako preslikavanje

$$\lambda : I \to P$$

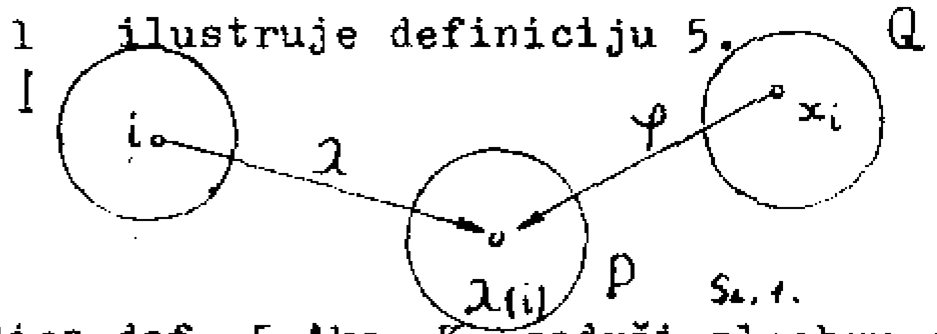
postoji homomorfizam

$$\varphi : Q(\Omega) \to P(\Omega),$$

takav da je

$$(\forall i \in I)(\lambda(i) = \varphi(x_i)).$$

Dijagram 1 ilustruje definiciju 5.



Sл. 1.

Posledica def. 5 Ako K sadrži algebru sa više od jednog elementa i $Q(\Omega)$ ima slobodno generatorski skup $X = \{x_i \mid i \in I\}$ nad K, onda

$$i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j, \text{ za sve elemente } i, j \in I.$$

Ako za $i, j \in I$, $i \neq j$ implicira $x_i \neq x_j$, onda se definicija 5 može kraće izreći na ovaj način:

Algebra $Q(\Omega)$ je slobodna u klasi svih algebri K tipa Ω sa generatorskim skupom X akko se svako preslikavanje $\lambda : x_i \to a_i$, ($P=\{a_i \mid i\in I\}$ generatorski skup algebre $P(\Omega)\in K$), može produžiti, na jedinstven način, do homomorfizma

$$\varphi : Q(\Omega) \to P(\Omega).$$

Opišimo konstrukciju slobodne polugrupe nad skupom $A \neq \emptyset$.

Neka je A neprazan skup. Skup svih konačin nizova

$$a_1 a_2 \ldots a_n, \ (a_i \in A),$$

označimo sa S. Za $n = 1$ sleduje $a_1 \in A$. Dva niza su jednaka akko su jednaka bukvalno, tj. akko su slova jednog niza jednaka po redu slovima drugog niza. Dakle,

$$a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_m \Leftrightarrow a_1 = b_1 , \ a_2 = b_2 , \ldots , \ a_n = b_n \wedge n = m.$$

U skupu S definisana je operacija o na sledeći način:

$$(\forall u,v\in S)(uov = a_1 a_2 \ldots a_n o \ b_1 b_2 \ldots b_m = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m).$$

(S,o) je slobodna polugrupa u klasi svih polugrupa sa slobodno generatorskim skupom A.

<u>Dokaz.</u> Neka su $u,v,w\in S$, tj.

$$u = a_1 a_2 \ldots a_n, \quad v = b_1 b_2 \ldots b_m, \quad w = c_1 c_2 \ldots c_k, \ (a_i , b_j , c_k \in A).$$

Prema definiciji operacije o imamo:

$$\begin{aligned}(uov)ow &= (a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m)ow = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m c_1 c_2 \ldots c_k \\ &= a_1 a_2 \ldots a_n o \ b_1 b_2 \ldots b_m c_1 c_2 \ldots c_k \\ &= a_1 a_2 \ldots a_n o(b_1 b_2 \ldots b_m o \ c_1 c_2 \ldots c_k) \\ &= uo(vow),\end{aligned}$$

tj. (S,o) je polugrupa.

Neka je $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ element skupa S, prema definiciji operacije o važi sledeća jednakost

$$u = a_1 o a_2 o \ldots o a_n,$$

odakle sleduje da je skup A generatorski skup polugrupe (S,o).

Dokažimo da se preslikavanje

$\lambda: A \to B,$

može proširiti do homomorfizma φ, skup B je generatorski polugrupe (P,o) koja pripada klasi svih polugrupa.

Neka je $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ element skupa S, $(a_i \in A)$. Preslikavanje λ ćemo proširiti na ovaj način:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \lambda(a_1), & \text{za } n=1, \\ \lambda(a_1)\ldots\lambda(a_n), & \text{za } n>1. \end{cases}$$

Dokažimo da je φ homomorfizam.

Neka su $u, v \in S$ onda je

$$\begin{aligned} \varphi(u o v) &= \varphi(a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m) = \lambda(a_1)\ldots\lambda(a_n)\lambda(b_1)\ldots\lambda(b_m) \\ &= (\lambda(a_1)\ldots\lambda(a_n)) o (\lambda(b_1)\ldots\lambda(b_m)) \\ &= \varphi(u) o \varphi(v). \end{aligned}$$

2. POTAPANJE POLUGRUPE U GRUPU

U ovoj tački razmatramo potrebne i dovoljne uslove Maljceva ([2]). za potapanje polugrupe u grupu, a zatim, potapanje komutativne polugrupe u komutativnu grupu ([9]).

Posmatraćemo polugrupu sa jedinicom, tj. algebru sa jednom asocijativnom operacijom i jednom nularnom operacijom 1.

Neka je skup S podskup skupa P. Skup S je potencijalno inverzibilan ako postoji monomorfizam polugrupe P u polugrupu sa skraćivanjem P', u kojoj svi elementi skupa S imaju inverzne elemente.

Polugrupa P ima grupu razlomaka akko je P potencijalno inverzibilan. Medutim, može se dokazati tvrđenje:

Lema 1 Polugrupa P ima grupu razlomaka ako je svaki element polugrupe P potencijalno inverzibilan.

Dokaz. Neka je skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ konačan podskup skupa P i, po pretpostavci, element $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ je potencijalno inverzibilan, tj. postoji monomorfizam $\varphi : x \to x'$ skupa $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ u polugrupu sa skraćivanjem, tako da je $x' = (x_1 \ldots x_n)'$ inverzibilan. Neka je

$$y_\nu = x'_{\nu+1} \ldots x'_n [(x_1 \ldots x_n)']^{-1} x'_1 \ldots x'_{\nu-1} .$$

Onda je

$$x'_\nu y_\nu = x'_\nu x'_{\nu+1} \ldots x'_n (x'_n)^{-1} \ldots (x'_1)^{-1} x'_1 \ldots x'_{\nu+1} = 1,$$

jer je $x'_n (x'_n)^{-1} = 1$.

Iz istih razloga je zadovoljena jednakost

$$y_\nu x'_\nu = 1, \text{ tj. } x'_\nu y_\nu = 1,$$

odakle sleduje: y_ν ima inverzni element.

Posmatraćemo potencijalno inverzibilne skupove. Postavlja se pitanje, hoće li podskup M polugrupe P biti potencijajno inverzibilan?
Svakom elementu $m \in M$ pridružimo u P nepoznati element m^- i tako dobijenu polugrupu označimo sa P(M). Svi parovi $(m^- m, 1)$ generišu kongruenciju α.

Količnik-polugrupa $P(M)/\alpha$ je sa inverznim elementima za skup M. Naći uslove da prirodno preslikavanje

$$f = nat_{\alpha} : P(M) \longrightarrow P(M)/\alpha$$

ograničeno na P, bude 1-1 preslikavanje. Ovo je, sa nekim izmenama, dato prema Maljcevu.

Opišimo polugrupu $P(M)$. Neka je data polugrupa P i M je podskup od P. Svakom elementu $m \in M$ pridružimo dva nova elementa m^- i m^+ i novu polugrupu označimo sa $P(M)$, tj. $P(M)$ je polugrupa dobijena pridruživanjem novih elemenata skupu P. Kongruenciju generisanu svim parovima $(m^- m, 1)$ i $(mm^+, 1)$ označimo sa α. Svaki element $m \in M$ ima inverzni u polugrupi $P(M)/\alpha$.

Neka su x, x^-, x^+ slike elemenata m, m^-, m^+ respektivno, pri preslikavanju $f = nat_{\alpha}$. Onda je

$$x^- x = xx^+ = 1, \quad (\text{ prema def. kongruencije } \alpha),$$

zatim, važi ova relacija

$$x^- = x^- x^+ = x^+.$$

Relaciju α možemo opisati na ovaj način. Transformacije: (,), [,] tumačimo na način;

(a) $\begin{cases} (: 1 \text{ se zamenjuje sa } m^- m; & [: 1 \text{ se zamenjuje sa } mm^+; \\ ) : m^- m \text{ se zamenjuje sa } 1; &] : mm^+ \text{ se zamenjuje sa } 1. \end{cases}$

Prema (a), očigledno da se transformacija [može primeniti u slučaju da element $u \in P(M)$ ima oblik $u = vv_1$. Odsečak vv_1 se transformacijom [prevodi u vmm^+v_1. Slično važi i za transformaciju (.

Transformacije) i] mogu se primeniti na one elemente iz $P(M)$ koji sadrže $m^- m$ i mm^+. Skup M će biti potencijalno inverzibilan akko različiti elementi polugrupe P pripadaju različitim klasama ekvivalencije. Dokažimo da će dva elementa polugrupe $P(M)$ pripadati istoj klasi samo onda kada su jednaki. Neka su $u, v \in P(M)$ i neka pripadaju istoj klasi ekvivalencije. Put od u do v dat je lancem

(1) $\quad u = w_0, \; w_1, \ldots, \; w_n = v,$

gde su dva susedna elementa w_i i w_{i+1} dobijena jedan iz drugog pomoću jedne od transformacija (a). Kako je element m^+ nepoznat, to se on uvodi nekom transformacijom. Zato možemo posmatrati svako pojavljivanje elementa m^- i analogno, svako pojavljivanje elementa m^+ od njegovog prvog pojavljivanja u lancu (1) do njegovog isčezavanja. Posmatramo element m^+. Pretpostavimo da su $u,v \in P$, to se element m^+ u lancu (1) ne može naći niti u u niti u v. Dakle, m^+ se uvodi nekom transformacijom, recimo i-tom transformacijom

$$i: \ w_{i-1} = ab, \quad w_i = amm^+b, \quad \text{za} \quad a,b \in P(M),$$

i, recimo da m^+ isčezava pri j-toj transformaciji

$$j: \ w_{j-1} = a'mm^+b', \quad w_j = a'b', \quad \text{za} \quad a',b' \in P(M).$$

Posmatrajući put od i-te do j-te transformacije, vidimo da se am prevodi u $a'm$. Element m^+ isčezava i onda važi

$$amm^+b \longrightarrow a'b, .$$

a onda, transformacije koje $a'b$ prevode u $a'b'$. Deo koji se nalazi levo od nekog pojavljivanja m^- i desno od m^+ je pasivni deo. Transformacije se vrše samo u aktivnoj oblasti i, u tom slučaju, elemente m^- i m^+ zovemo regularnim. Deo kojise nalazi desno od m^- i levo od m^+ jeste aktivni deo za elemente m^- i m^+.

Neka su elementi $u,v \in P$ vezani lancem (1). Dokazati da se put koji vezuje elemente u i v može zameniti putem u kome su sva pojavljivanja regularna.

Lema 2 Neka je dat lanac

(1) $u = w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n = v,$

koji vezuje elemente u i v polugrupe P. Postoji lanac iste dužine

$$u = w_0, w_1', \dots, w_{n-1}', w_n = v,$$

koji vezuje elemente u i v a u kome su sva pojavljivanja regularna.

Dokaz. Pretpostavimo da se element m^+ u lancu (1) pojavljuje neregularno pri i-toj transformaciji, ($w_{i-1} \to w_i$), a isčezava pri j-toj transformaciji. U tom slučaju, deo lanca od i-te do j-te transformacije ima oblik

$$ab, amm^+b, \dots, a'mm^+b, a'b',$$

i taj deo možemo zameniti lancem:

(2) $ab,\ amm^{+}b, \ldots,\ a'mm^{+}b,\ a'b, \ldots, a'b'$.

Lanac (2) je dužine n, a m^{+} ima regularno pojavljivanje. Primetimo da se broj neregularnih pojavljivanja smanjuje. Jer, ako se m^{-} pojavljuje neregularno u a, to je m^{-} neregularan od samog početka u lancu (1).

Ovim je dokazano da se dva elementa u i v iz P, ekvivalentna po modulu α mogu vezati lancem u kome su sva pojavljivanja regularna.

Pri prelazu od jednog člana lanca drugom, proizvoljne transformacije se vrše u aktivnoj oblasti i te izmene su date tablicom (b); R(*) je aktivna oblast do transformacije (*), L(*) je aktivna oblast posle transformacije (*):

(b)

*	(	)	[	]
R(*)	ab	mb'	cd	c'n
L(*)	mb	ab'	cn	c'd

Tablica (b) je dobijena dokazom prethodne leme. Ako transformacije u lancu, koji vezuje elemente u i v, označimo sa $r_1, r_2, \ldots, r_n$, onda važi ova relacija

(3) $L(r_1) = R(r_2),\ L(r_2) = R(r_3), \ldots,\ L(r_{n-1}) = R(r_n)$.

Dakle, aktivna oblast posle (i-1)-te transformacije jeste ista što i pre i-te transformacije. Na početku je aktivna oblast u i na kraju v. Prema tome, za mogućnost potapanja potrebno je da se ove oblasti poklapaju. Drugim rečima, da jednaki elementi pripadaju istoj klasi ekvivalencije, što je izraženo jednakošću

(4) $L(r_n) = R(r_1)$.

Nizu transformacija $r_1, r_2, \ldots, r_n$ pridružimo uslov $(3) \Longrightarrow (4)$. Ako su svi uslovi ispunjeni onda kongruencija α deli skup P, tj. $\alpha \cap P^2 = \Delta_P$, pa je potapanje moguće. Ovi uslovi su i potrebni i dovoljni za potapanje polugrupe P.

Primetimo da niz transformacija mora sadržati onoliko levih (i [koliko i desnih) i] zagrada.

Ako se u istom članu w_i nađu dva elementa m_k^{+}, to je element sa većim indeksom levo od drugog, jer se desno od poslednjeg nalazi pasivna oblast. Iz istih razloga element sa većim indeksom nora isčeznuti prvi. Pored toga, u proizvoljnom levom odsečku $r_1, r_2, \ldots, r_m$ mora se naći isti broj levih i desnih zagrada. Član (,) u datom nizu nalazi se u paru i nijedan ga drugi par ne razdvaja. Ovakav raspored zagrada je normalni raspored. Prethodno tumačenje se može primeniti i na [,] . Važi tvrdenje:

Teorema 6 Neka je P polugrupa i M podskup od P. Svakom konačnom nizu $r_1, r_2, \ldots, r_n$ takvih parova (,) i [,] , koji obrazuju normalni raspored zagrada pridružimo uslove

(5) $L(r_1)=R(r_2),\ L(r_2)=R(r_3), \ldots,\ L(r_{n-1})=R(r_n) \Longrightarrow L(r_n)=R(r_1)$,

gde su $a,b,b',c,d \in P$, $m,n \in M$. Uslov $(5)_1$ uzet za sve takve nizove transformacija, jeste potreban i dovoljan da skup M bude potencijalno inverzibilan.

Ako umesto M posmatramo celu polugrupu P ili generatorski skup polugrupe P dobijaju se potrebni i dovoljni uslovi da polugrupa P ima grupu razlomaka. Primera radi, uzmimo uslove koji odgovaraju nizu [,] .

Ovaj uslov podrazumeva ovakvu implikaciju

$cn=c'n \Longrightarrow c'd=cd$, ($c,d \in P$, $n \in M$),

tj. koja izražava mogućnost desnog deljenja. Analogno, nizu (,) odgovara levo skraćivanje, tj.

$mb=mb' \Longrightarrow ab'=ab$, $(a=1)$

je zakon levog skraćivanja.

Medutim, uslovi koji odgovaraju nizu transformacija [( ]), prema tablici (b), jesu:

(6) $cn=ab$, $mb=c'n$, $c'd=mb'$, $(a,b,c,d,b',c' \in P,\ m,n \in M)$.

Jednakost (6) trebada da jednakost

(7) $ab'=cd$.

Polugrupa generisana elementima a,b,c,d,b',c',m,n, i uslovima (6) je polugrupa sa skraćivanjem, ali uslov (7) nije posledica uslova (6).

Neka je zadovoljen uslov

$cn=ab$, odakle sleduje $n=b$, (za $c=a=1$),

$mb=c'n$, odakle sleduje $m=c'$, (jer je $b=n$),

$c'd=mb'$, odakle sleduje $d=b'$, (jer je $c'=m$).

Ovo je primer polugrupe koja se ne može potopiti u grupu. Uopšte, može se dokazati da je za potapanje polugrupe u grupu potreban i dovoljan beskonačan broj uslova oblika: iz datog sistema jednakosti sleduje data jednakost.

Dokazati da se komutativna polugrupa sa zakonom skraćivanja može (izomorfno) potopiti u komutativnu grupu.

Teorema 7 Svaka abelova polugrupa sa zakonom skraćivanja može se (izomorfno) potopiti u abelovu grupu.

Pre dokaza teoreme dajemo jedan pomoćni rezultat ([9]).

Lema 3 Neka je P abelova polugrupa, M potpolugrupa od P, takva da je u P ispunjen zakon skraćivanja sa elementima iz M, tj.

$$(\forall x\in M)(\forall a,b\in P)(\ ax = bx \Longrightarrow a=b).$$

Tada se polugrupa P može (izomorfno) potopiti u takvu abelovu polugrupu P' sa jedinicom i svaki element iz M ima inverzni element u P'.

Dokaz. Neka je $a\in P$, $x\in M$ i posmatrajmo skup svih razlomaka oblika $\frac{a}{x}$. Razlomci $\frac{a}{x}$ i $\frac{b}{y}$ su jednaki akko je $ay = bx$.

Jednakost razlomaka je relacija ekvivalencije, jer

Refleksivnost sleduje iz ekvivalencije

$$\frac{a}{x}=\frac{a}{x}\Longleftrightarrow ax = ax;$$

Simetričnost, prema ekvivalenciji

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}\Longleftrightarrow ay = bx \Longleftrightarrow bx = ay \Longleftrightarrow \frac{b}{y}=\frac{a}{x};$$

Tranzitivnost, prema ekvivalenciji

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}\wedge\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\Longleftrightarrow ay=bx\wedge bz=cy \Longleftrightarrow ayz=bxz \wedge bzx=cyx \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow ayz=cyx \Longleftrightarrow az=cx \Longleftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{c}{z}$$

Dakle, jednakost dva razlomka je relacija ekvivalencije u skupu svih razlomaka datog oblika. Skup-količnik je unija disjunktnih klasa ekvivalentnih (jednakih) razlomaka. Skup-količnik ćemo označiti sa P'.

Množenje u skupu svih razlomaka definisano je sa

(1') $(\forall a,b\in P)(\forall x,y\in M)(\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}=\frac{ab}{xy})$.

Prema definiciji (1) možemo definisati množenje u skup-količniku P'.
Neka su $\frac{a}{x}$ i $\frac{b}{y}$ iz skupa svih razlomaka i $\left(\frac{a}{x}\right)$ i $\left(\frac{b}{y}\right)$ odgovarajuće klase ekvivalencije. Množenje u P' uvodimo sa

(2') $\left(\frac{a}{x}\right)\cdot\left(\frac{b}{y}\right)=\left(\frac{ab}{xy}\right)$

Dokazati da je definicija (2') korektna. Koristeći jednakosti

$$\frac{a}{x}=\frac{a_1}{x_1},\quad \frac{b}{y}=\frac{b_1}{y_1} \qquad \text{tj. } \left(\frac{a}{x}\right)=\left(\frac{a_1}{x_1}\right),\ \left(\frac{b}{y}\right)=\left(\frac{b_1}{y_1}\right)$$

i defifiniciju (2'), važi ovakva jednakost

$$\left(\frac{a}{x}\right)\cdot\left(\frac{b}{y}\right)=\left(\frac{a_1}{x_1}\right)\cdot\left(\frac{b_1}{y_1}\right) \quad \text{odakle sleduje} \quad \left(\frac{ab}{xy}\right)=\left(\frac{a_1\cdot b_1}{x_1\cdot y_1}\right)$$

Kako je polugrupa P komutativna to jeproizvod u P' komutativna i asocijativna operacija. Dakle, P' je polugrupa u odnosu na množenje. Skup svih razlomaka oblika $\frac{z}{z}$ $(z\in M)$, čini jednu klasu ekvivalencije i ima ulogu jedinice u P', tj.

(3') $(\forall a\in P)(\forall x,z\in M)\left(\frac{a}{x}\cdot\frac{z}{z}=\frac{az}{xz}\Leftrightarrow\frac{a}{x}\cdot\frac{z}{z}=\frac{a}{x}\right)$.

Razlomci oblika $\frac{ax}{x}$ čine posebnu klasu ekvivalencije, tj. svi razlomci tog oblika su jednaki prema ovim relacijama:

$(\forall a,b\in P)(\exists x,y\in M)\left((ax)y=(ay)x\Longrightarrow \frac{ax}{x}=\frac{ay}{y}\right)$;

$(\forall a,b\in P)(\exists x,y\in M)\left(\frac{ax}{x}=\frac{by}{y}\Longleftrightarrow(ax)y=(bx)y\Longleftrightarrow(ax)y=(bx)y\Longleftrightarrow(ax=bx\Longleftrightarrow a=b)\right)$.

Definišimo preslikavanje $f\colon P\to P'$ na ovaj način:

$$(\forall a\in P)(\exists x\in M)\left(f(a)=\frac{ax}{x}\right).$$

Dokažimo da je f monomorfizam. Neka su $a,b\in P$, $x,y\in M$ tada važi implikacija

$$f(a)=f(b)\Rightarrow\frac{ax}{x}=\frac{by}{y}\Longrightarrow a=b,$$

tj. f je 1-1 preslikavanje. Neka su,,zatim, $a,b\in P$, $x,y\in M$, tada vredi ova relacija

$$f(ab)=\frac{(ab)\cdot(xy)}{xy}=\frac{xa}{x}\cdot\frac{by}{y}=f(a)f(b).$$

Razlomak $\frac{x}{y}$ $(x,y\in M)$, ima inverzni element u polugrupi P' oblika $\frac{y}{x}$.
Dakle,

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=\frac{xy}{xy}=\frac{z}{z},\quad (z\in M).$$

<u>Dokaz teoreme 7</u>. Prema prethodno dokazanom, za $P=M$ sledi da je P' grupa razlomaka polugrupe P. Preslikavanje $f\colon P\to P'$ jeste p o t a p a n j e polugrupe P u grupu P'.

Dat je skup Q. Skup svih preslikavanja $f: Q \to Q$, sa operacijom kompozicije označenom sa $\circ$, jeste polugrupa.

Preslikavanje skupa Q u sebe koje je 1-1 i na jeste permutacija skupa Q. Skup svih permutacija skupa Q sa operacijom $\circ$ čini grupu permutacija.

Ovde ćemo dati rešenje sledećeg problema ([2]):
Pri kakvim uslovima postoji skup Q^* sa grupom permutacija koji je proširenje skupa Q, sa polugrupom preslikavanja skupa Q u sebe?

Najpre uvodimo potrebne pojmove.

<u>Definicija 6</u> Familija skupova $\mathcal{A}=\{A_i \mid i\in I\}$ je usmerena akko su zadovoljeni uslovi:

(i) Relacija $\leq$ je preduređenje skupa I, tj. $\leq$ je refleksivna i tranzitivna relacija na skupu I;

(ii) Preslikavanja φ_{ij} za svako $i\leq j$, gde su $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$ takva da je zadovoljeno $(i\leq j\leq k)$

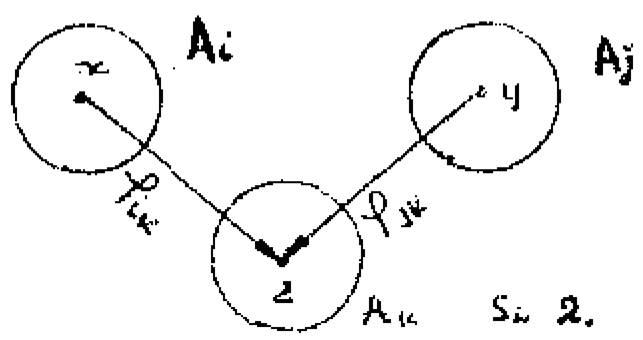
$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}, \quad \varphi_{ii} = 1,$$

gde je φ_{ii} identično preslikavanje.

Za usmerenu familiju $\mathcal{A}$ posmatramo skup $\cup(A_i \mid i\in I)$ i definišimo binarnu relaciju α na ovaj način:

$x\alpha y \Leftrightarrow (\exists i,j,k\in I)(x\in A_i,\ y\in A_j,\ z\in A_k,\ i\leq k,\ j\leq k)(\varphi_{ik}(x)=z,\ \varphi_{jk}(y)=z)$.

Ovo je ilustrovano dijagramom 2.



Sl. 2.

Prema definiciji relacije α, očigledno da je α refleksivna i simetrična. Dokažimo da je α i tranzitivna relacija.

Neka su $x\in A_i$, $y\in A_j$, $w\in A_l$ i $x\alpha y$, $y\alpha w$. Po definiciji relacije α, postoji $v\in A_n$, $j\leq n$, $l\leq n$, tako da važi:

$$\varphi_{jn}(y)=v, \quad \varphi_{ln}(w)=v.$$

Neka je $m=\max(k,n)$. Onda važi:

$$(1'')\quad \varphi_{im}(x)=(\varphi_{ik}\circ\varphi_{km})(x)=\varphi_{km}(\varphi_{ik}(x))=\varphi_{km}(z)$$
$$=\varphi_{nm}(\varphi_{jk}(y))=(\varphi_{jk}\circ\varphi_{nm})(y)=\varphi_{jm}(y);$$

$$(2'') \quad \varphi_{\ell m}(w)=(\varphi_{\ell n}\circ\varphi_{nm})(w)=\varphi_{nm}(\varphi_{\ell n}(w))=\varphi_{nm}(v)$$
$$=\varphi_{nm}(\varphi_{jn}(y))=(\varphi_{jn}\circ\varphi_{nm})(y)=\varphi_{jm}(y).$$

Prema $(1'')$ i $(2'')$ sleduje $x\alpha w$.

Relacija α je ekvivalencija na skupu $A=\cup(A_i \mid i\in I)$. Neka je $\bar{x}$ klasa ekvivalencije za $x\in A$. Skup svih klasa ekvivalencije označimo sa A_∞.

Definicija 7 A_∞ se zove direktna granica usmerene familije skupova $\mathcal{A}$, što ćemo označiti sa

$$A_\infty = \varinjlim \mathcal{A}$$

Na sličan se način može definisati usmerena familija algebri.

Definicija 8 Usmerena familija algebri $\mathcal{A}$ je definisana na ovaj način:

(j) Relacija $\leq$ je preduređenje na skupu I;

(jj) Algebre $A_i(\Omega)$, $(i\in I)$, su fiksiranog tipa;

(jjj) Homomorfizmi φ_{ij} algebre $A_i(\Omega)$ u $A_j(\Omega)$, za svaki $i\leq j$ su takvi da je zadovoljeno:

$$\varphi_{ij}\circ\varphi_{jk} = \varphi_{ik}\,, \quad \varphi_{ii}=1, \ (i\leq j\leq k).$$

Direktna granica skupova nosilaca algebri iz familije $\mathcal{A}$ čine usmerenu familiju skupova. Zato postoji direktna granica A_∞.

Na skupu A_∞ definišimo n-arnu operaciju ω na ovakav način:

Neka su $x_j\in A_{i_j}$, $o\leq j<n$, i neka je m gornja granica za i_j. Onda su x_j i $x'_j\in A_m$ u relaciji α, tj. $x_j\alpha x'_j$, gde je $x'_j=\varphi_{i_j m}(x)$. Definišimo ω na ovaj način:

$$(3'') \quad \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n\omega = x'_1x'_2\ldots x'_n\omega.$$

Definicija 9 Algebra $A_\infty(\Omega)$ jeste direktna granica usmerene familije algebri i označavamo je sa $\varinjlim\mathcal{A}$.

Preslikavanje

$$\varphi_{i\infty} : x\to\bar{x}, \quad \text{za } x\in A_i$$

je homomorfizam iz $A_i(\Omega)$ u $A_\infty(\Omega)$. Pored toga, za svaki $i\leq j$ važi

$$\varphi_{ij}\circ\varphi_{j\infty}=\varphi_{i\infty}$$

Prema izloženom, važi tvrđenje ([7]):

Tvrdenje 1 Ako su φ_{ij} 1-1 homomorfizmi, takvi su i homomorfizmi $\varphi_{i\omega}$.

Dokaz. Neka su $x, y \in A_i$ i pretpostavimo da je

$\varphi_{i\omega}(x) = \varphi_{i\omega}(y)$, tj. postoji $j \geq i$ takvo da je

$\varphi_{ij}(x) = \varphi_{ij}(y)$,

a kako su φ_{ij} 1-1 homomorfizmi, to je $x = y$. Ovim je dokazano tvrdenje.▲

Neka je data algebra $Q(\Omega)$ sa polugrupom monomorfizama algebre $Q(\Omega)$ u sebe. Dakle, posmatramo samo homomorfizme algebre $Q(\Omega)$ u $Q(\Omega)$ koji su 1-1. Nadalje, umesto homomorfizam jedne algebre u sebe govorićemo endomorfizam, a 1-1 i na endomorfizam zvaćemo automorfizam.

Definicija 10 Polugrupa Σ je usmerena u odnosu na deljivost s leva akko važi ovaj uslov:

(4') $(\forall \alpha, \beta \in \Sigma)(\exists \alpha', \beta' \in \Sigma)(\alpha \circ \beta' = \beta \circ \alpha')$.

Očigledno, svaka komutativna polugrupa je usmerena.

Neka je K klasa Ω-algebri i $Q(\Omega) \in K$. Polugrupa Σ dejstvuje na Q uzajamno jednoznačno akko za svaki element $\alpha \in \Sigma$ postoji 1-1 endomorfizam θ_α algebre $Q(\Omega)$, takav da su zadovoljene jednakosti:

(5') $$\theta_{\alpha \circ \beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta, \qquad \theta_{i \circ i} = 1,$$

gde je 1 identično preslikavanje na skupu Q.

Kratkoće radi, nadalje pišemo $x\alpha$ umesto $\theta_\alpha(x)$.

Na osnovu izloženog možemo dokazati ovaj rezultat ([21).

Teorema 8 Neka je $Q(\Omega)$ algebra iz klase K i neka polugrupa Σ dejstvuje na Q uzajamno jednoznačno. Ako je Σ usmerena polugrupa sa dvostranim skraćivanjem, onda postoji algebra $Q^*(\Omega) \in K$ sa osobinama:

(6') $Q(\Omega)$ je podalgebra algebre $Q^*(\Omega)$;

(7') Σ dejstvuje na Q^* automorfizmima;

(8') Svaki element algebre $Q^*(\Omega)$ ima oblik $\theta_\alpha^{-1}(a)$, za neko $a \in Q$ i $\alpha \in \Sigma$

Dokaz. Najpre, definišimo binarne relacije r i $\leq$.

(9') $(\forall \alpha, \beta \in \Sigma)(\exists \lambda \in \Sigma)(\alpha \, r \, \beta \Leftrightarrow \alpha \circ \lambda = \beta)$

(10') $(\forall \alpha, \beta \in \Sigma)(\exists \alpha', \beta' \in \Sigma)(\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \circ \beta' = \beta \circ \alpha' \wedge \beta'(Q) \subseteq \alpha'(Q))$.

Dokažimo da je relacija $\leq$ produženje relacije r.

Neka su $\alpha, \beta \in \Sigma$ i $\alpha r \beta$, tj. postoje elementi $\lambda, i \in \Sigma$ takvi da je

$$\alpha \circ \lambda = \beta \circ i \qquad i \qquad \lambda(Q) \subseteq Q,$$

gde je i identično preslikavanje. Odavde sleduje $\alpha \leq \beta$

Relacija $\leq$ je refleksivna i tranzitivna.

Refleksivnost relacije $\leq$ sleduje prema prethodno dokazanom, tranzitivnost ćemo dokazati.

Neka su elementi $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ i $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma$. Prema definiciji relacije $\leq$, postoje elementi $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \Sigma$ takvi da važi:

$$(11') \quad \alpha \circ \lambda = \beta \circ \mu, \qquad \lambda(Q) \subseteq \mu(Q),$$

$$\beta \circ \lambda' = \gamma \circ \mu', \qquad \lambda'(Q) \subseteq \mu'(Q).$$

Neka su μ, λ' u relaciji r sa $v \in \Sigma$,

tj. $\mu\, r v$ i $\lambda' r v$,

odakle sleduje jednakost

$$(12') \quad v = \mu o h' = \lambda' o h, \quad (h, h' \in \Sigma).$$

Na osnovu relacija (11') i jednakosti (12') sleduje:

$$\alpha o \lambda o h' = \beta o \mu o h' = \beta o v = \beta o \lambda' o h = \gamma o \mu' o h \quad i$$

$$(\lambda o h')(Q) \subseteq (\mu o h')(Q) = v(Q) \subseteq (\mu' o h)(Q).$$

Prema poslednjim relacijama, važi $\alpha \leq \gamma$, tj. relacija $\leq$ je tranzitivna, što je i trebalo dokazati.

Jedan važan rezultat formulišimo kao

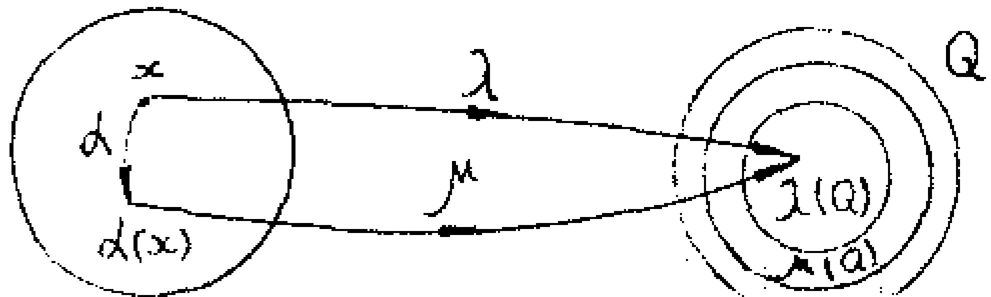
<u>Tvrdenje 2</u> Neka su $\lambda, \mu \in \Sigma$ takvi da je

$$(13') \quad \lambda(Q) \subseteq \mu(Q).$$

Onda postoji jedinstveno, potapanje α algebre $Q(\Omega)$ u sebe, definisano na sledeći način:

$$(14') \quad (\forall x \in Q)(\ (\alpha o \mu)(x) = \lambda(x)).$$

Ovo je ilustrovano slikom 3.



Sl. 3.

Dokaz. Prema (13'), svaki element $\lambda(x)$ možemo predstaviti u obliku $\mu(y)$ pri čemu je y jednoznačno odreden element. Ovo označavamo sa

$$\alpha = \lambda \circ \mu^{-1} \Leftrightarrow \alpha(x) = \mu^{-1}(\lambda(x)),$$

što je opravdano samo uz pretpostavku (13').

Neka je $v \in \Sigma$ proizvoljni element, koji primenom na (14') daje ovu relaciju:

(15') $(\forall x \in Q)(\alpha \circ \mu \circ v)(x) = (\lambda \circ v)(x))$.

Iz relacije (15') sleduje relacija (14'), jer je v 1-1 homomorfizam. Prema (15') važi sledeća jednakost:

(16') $(\alpha \circ (\mu \circ v))(x) = (\lambda \circ v)(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} v(\mu(\alpha(x))) = v(\lambda(x)),$

odakle je

$$\alpha(x) = \mu^{-1} v^{-1} v(\lambda(x)) = (v\mu)^{-1}(v(\lambda(x))), \text{ tj.}$$

$$\alpha = (\mu \circ v)^{-1}(\lambda \circ v)),$$

gde je α potapanje.

Neka je $\alpha \in \Sigma$, η_α izomorfizam algebre $Q(\Omega)$ u $Q_\alpha(\Omega)$. Algebru $Q(\Omega)$ potopićemo u $Q_\alpha(\Omega)$ pomoću f_α definisanog na način:

(17') $(\forall x \in Q)(f_\alpha(x) = (\alpha \circ \eta_\alpha)(x) = \eta_\alpha(\alpha(x))$. Ovo je ilustrovano slikom 4.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "f_\alpha"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Q_\alpha \\ & Q \arrow[ur, "\eta_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Sl. 4.

Tvrdenje 3 Preslikavanje f_α, definisano u (17'), jeste monomorfizam.

Dokaz. Neka su elementi $x, y \in Q$ i $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$. Prema definiciji preslikavanja f_α izvodimo ovakav zaključak

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(y) \Longleftrightarrow \eta_\alpha(\alpha(x)) = \eta_\alpha(\alpha(y)).$$

Kako je η_α izomorfizam, to je $\alpha(x) = \alpha(y)$, odakle je $x = y$.

Ovim je dokazano da je f_α 1-1 preslikavanje. Kako je $f_\alpha = (\alpha \circ \eta_\alpha)(x)$, tj. kompozicija dva homomorfizma, to je i f_α homomorfizam. Dakle, f_α je 1-1 homomorfizam. Ovim je dokaz tvrdenja 3 završen.

Neka su $\alpha, \beta \in \Sigma$ i $\alpha \leq \beta$. Definišimo monomorfizam

$$f_{\alpha \leq \beta} : Q_\alpha \to Q_\beta$$

na ovaj način.

Ako je $\alpha\circ\lambda=\beta\circ\mu$, $\lambda(Q)\subseteq\mu(Q)$, za $\lambda,\mu\in\Sigma$

onda je tačna ovakva relacija

(18') $(\forall x\in Q)(f_{\alpha\circ\beta}(x)=\eta_{\beta}(\mu^{-1}_{\lambda}\eta^{-1}_{\lambda})(x)$.

Dokazujemo da definicija (18') ne zavisi od izbora μ i λ.

Neka postoje elementi λ', $\mu'\in\Sigma$ takvi da važi relacija

$$\alpha\circ\lambda'=\beta\circ\mu' \quad \text{i} \quad \lambda'(Q)\subseteq\mu'(Q),$$

i neka je tačna jednakost

$$\mu\circ v'=\mu'\circ v.$$

Onda je

$$\alpha\circ\lambda\circ v'=\beta\circ\mu\circ v'=\beta\circ\mu'\circ v=\alpha\circ\lambda'\circ v,$$

skraćivanjem s desna sa α, sleduje jednakost

$$\alpha\circ v'=\lambda'\circ v,$$

onda, prema ekvivalenciji

$$(\lambda\circ v')(x)=(\lambda'\circ v)(x)\iff v'(\lambda(x))=v(\lambda'(x)),$$

sleduje

$$\lambda(x)=v'^{-1}v(\lambda'(x)) \quad \text{i} \quad \mu^{-1}(\lambda'(x))=(\mu^{-1}v'^{-1})(v(\lambda'(x)),\ \text{tj.}$$

$$\mu^{-1}\lambda(x)=(v'\mu)^{-1}(v(\lambda'(x))).$$

Prema poslednjoj relaciji sleduje

$$\lambda\circ\mu^{-1}=(\mu\circ v')^{-1}\circ(\lambda'\circ v)=(\mu'\circ v)^{-1}\circ(\lambda'\circ v)=\mu'^{-1}v^{-1}v\lambda'=\mu'^{-1}\lambda',\ \text{tj.}$$

$$\lambda\circ\mu^{-1}=\lambda'\circ\mu'^{-1}.$$

Uočimo da je dijagram 5 komutativan, tj.

$$\begin{tikzcd} Q_\alpha \arrow[rr, "f_{\alpha\circ\beta}"] & & Q_\beta \\ & Q \arrow[ul, "f_\alpha"] \arrow[ur, "f_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Sl. 5.

(19') $f_{\alpha\circ\beta}=f_{\alpha}^{-1}\circ f_{\beta}$

Prema tome, tačne su ove relacije:

$$f_{\alpha\circ\beta}\circ f_{\beta\circ\gamma}=f_{\alpha}^{-1}\circ f_{\beta}\circ f_{\beta}^{-1}\circ f_{\gamma}=f_{\alpha}^{-1}\circ f_{\gamma}=f_{\alpha\circ\gamma},\ (\alpha\leq\beta\leq\gamma),\quad f_{\alpha\alpha}=1.$$

Ovo dokazuje da (19') definiše usmeren sistem K algebri i monomorfizama. Neka je Q^* direktna granica tog sistema algebri. $Q^*(\Omega)$ je algebra sa monomorfizmima

(20') $f_\lambda : Q_\lambda\to Q^*$,

definisanim sa

(21') $f_\alpha = f_{\alpha\circ\beta}\circ f_\beta$, $(\alpha\le\beta)$, tj. sledeći dijagram je komutativan

$$\begin{tikzcd} Q_\alpha \arrow[rr, "f_\alpha"] \arrow[dr, "f_{\alpha\circ\beta}"'] & & Q^* \\ & Q_\beta \arrow[ur, "f_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Sl. 6.

Na osnovu (21') i (17') zaključujemo ovo:

$$f_\alpha = f_{\alpha,\alpha\circ\lambda}\circ f_{\alpha\circ\lambda} = \eta_\alpha^{-1}\circ\lambda\circ\eta_{\alpha\circ\lambda}\circ f_{\alpha\circ\lambda},$$

odakle sleduje jednakost

$$\eta_\alpha\circ f_\alpha = \lambda\circ\eta_{\alpha\circ\lambda}\circ f_{\alpha\circ\lambda},$$

Uvodimo ovakvu oznaku

$$\eta_\alpha\circ f_\alpha : Q\to Q^*, \text{ i}$$

$$\psi_\alpha = \eta_\alpha\circ f_\alpha .$$

Ovom smenom se poslednja jednakost transformiše u

$$\psi_\alpha = \lambda\circ\psi_{\alpha\circ\lambda} .$$

Iz prethodnog sleduje: za proizvoljne elemente $\alpha,\beta,\lambda\in\Sigma$, važi jednakost

(22') $\psi_\beta(\alpha(x)) = \psi_{\beta\circ\lambda}((\alpha\circ\lambda)(x))$.

Dokaz teoreme 8 ćemo okončati time što ispitamo dejstvo polugrupe Σ na Q^*.

Neka je $\alpha\in\Sigma$ i $x\in Q^*$, $(x=\psi_\beta(x)$, za $\beta\in\Sigma)$.

Uz pretpostavku $\alpha\circ\lambda=\beta\circ\mu$, za neke elemente $\lambda,\mu\in\Sigma$, definišimo ovo

(23') $\alpha(x) = \psi_\lambda(\mu(y))$.

Ako u isto vreme važi jednakost

$$\alpha\circ\lambda' = \beta\circ\mu', \quad \lambda',\mu'\in\Sigma,$$

to je $\mu\circ v' = \mu'\circ v$, za neke elemente $v,v'\in\Sigma$, odakle sleduje relacija

$$\alpha\circ\lambda'\circ v = \beta\circ\mu'\circ v = \beta\circ\mu\circ v' = \alpha\circ\lambda\circ v', \text{ tj.}$$

$$\lambda'\circ v = \lambda\circ v'.$$

Prema (23') i prethodnog, sleduje:

$$\psi_\lambda(\mu(y)) = \psi_{\lambda\circ v'}((\mu\circ v')(y)) = \psi_{\lambda'\circ v}((\mu'\circ v)(y)) = \psi_{\lambda'}(\mu'(y)).$$

Poslednja jednakost dokazuje da desna strana u (23') ne zavisi od izbora λ i μ.

Jednakost (23') definiše dejstvo Σ na Q^*, ako su $\alpha,\beta\in\Sigma$, i $x=\psi_\beta(y)$.

Neka je, zatim,

$$\gamma\circ\lambda = \alpha\circ\mu, \quad \mu\circ\rho = \beta\circ v.$$

Onda je tačna ovakva jednakost

$\gamma \circ \lambda \circ \rho = \alpha \circ \mu \circ \rho = \alpha \circ \beta \circ v,$

i prema tome, sleduje ovakva jednakost

$\beta(\alpha(x)) = \beta(\alpha(\Psi_{\mu}(y))) = \beta(\lambda(\Psi_{\mu}(y))) = \beta(\alpha(\Psi_{\mu}(y))) = (\alpha \circ \beta)(x),$

$x \circ 1 = \Psi_{\mu}(y) = x.$

Ako element x ima oblik $\Psi_1(y)$, to se (23') transformiše u jednakost

$\alpha(\Psi_1(y)) = \Psi_1(\alpha(y)).$

Prema tome, ako $Q(\Omega)$ potopimo u $Q^*(\Omega)$, identifikujući $x \in Q$ sa $\Psi_1(x)$, to se dejstvo polugrupe Σ na Q^*, ograničeno na Q, poklapa sa datim dejstvom ove polugrupe na Q. Kako je

$\alpha(\Psi_{\alpha}(x)) = \Psi_{\alpha}(\alpha(x)) = \Psi_1(x) = x,$

odatle sleduje da svakom elementu $x \in Q$ odgovara takav endomorfizam $\lambda \in \Sigma$ da je $\lambda(x) \in Q$, tj. svaki element algebre $Q^*(\Omega)$ ima oblik $\lambda^{-1}(a)$, za $a \in Q$. To pokazuje da je Ψ_{λ} inverzno preslikavanje za λ, koji je zato automorfizam.

3. POTAPANJE GRUPOIDA U KVAZIGRUPU

Grupoid G je kvazigrupa akko svaka od jednačina (po x, odnosno y)

$$xa = b, \quad ay = b$$

ima jedinstveno rešenje u G, tj. ima jedinstveno rešenje za sve elemente $a,b\in G$. Jasno da je u kvazigrupi G zadovoljen zakon levog i desnog skraćivanja. Prema tome, da bi se grupoid G mogao potopiti u kvazigrupu potrebno je da grupoid G zadovoljava zakone levog idesnog skraćivanja. Dokazaćemo da su ovi uslovi i dovoljni za potapanje grupoida u kvazigrupu.
U dokazu ćemo razlikovati posebno slučaj levog, odnosno desnog deljenja.
Grupoid G je desna kvazigrupa ako jednačina

(1) $\quad xa = b$

ima jedinstveno rešenje u G za $a,b\in G$. Očigledno, u svakoj desnoj kvazigrupi je zadovoljen zakon desnog skraćivanja, tj.

$$(\forall a,b,c\in G)(\, ac = bc \Longrightarrow a=b).$$

Dokazaćemo ovaj rezultat:

<u>Lema 4</u> Grupoid G sa zakonom desnog skraćivanja može se potopiti u desnu kvazigrupu G^*. Ako, pored toga, G zadovoljava zakon levog skraćivanja onda G^* takođe zadovoljava isti zakon.

<u>Dokaz.</u> Neka je G grupoid sa desnim skraćivanjem. Konstruisaćemo proširerenje G_1 grupoida G tako da jednačina (1) ima jedinstveno rešenje za sve elemente $a\in G$ i sve $b\in G_1$. Nad skupom $G\cup\{\mu,\rho\}$ konstruišemo slobodnu polugrupu F sa jedinicom (jedinica je prazan podniz), pretpostavljajući da je $G\cap\{\mu,\rho\}=\emptyset$.
Element $u\in F$ je svodljiv ako sadrži podniz oblika

(a) $\quad a\mu a\rho, \quad a\rho a\mu, \quad ab\mu, \quad cb\rho,$

gde su elementi $a,b,c\in G$ sa osobinom $ab\mu = c$.
U suprotnom, $u\in F$ je sveden. Skup svih svedenih elemenata označimo sa S. Smatrajući jednoelementne nizove za svedene elemente polugrupe F, očigledno da je $G\subset S$.

U slobodnoj polugrupi F definisaćemo binarne relacije $\vdash$, γ na način:

(i) $(\forall u,v\in F)(u\vdash v \Leftrightarrow w_1\ldots w_i a\mu a\varsigma w_{i+1}\ldots w_n \vdash w_1\ldots w_i w_{i+1}\ldots w_n,$

$$w_1\ldots w_i a\varsigma a\mu w_{i+1}\ldots w_n \vdash w_1\ldots w_i w_{i+1}\ldots w_n,$$

$$w_1\ldots w_i ab\mu w_{i+1}\ldots w_n \vdash w_1\ldots w_i w_{i+1}\ldots w_n,$$

$$w_1\ldots w_i cb\rho w_{i+1}\ldots w_n \vdash w_1\ldots w_i w_{i+1}\ldots w_n).$$

Relaciju $\vdash$ ćemo produžiti do relacije μ na ovaj način:

(ii) $u\mu v \Leftrightarrow u\vdash v \vee v\vdash u \vee u=v.$

Očigledno da je μ refleksivna i simetrična relacija.

Relaciju μ produžićemo do relacije α na ovaj način:

(iii) $u\alpha v \Leftrightarrow (\exists z_1,z_2,\ldots,z_p\in F)(u\mu z_1,\ z_1\mu z_2,\ldots,z_p\mu v).$

Dokazati da je α tranzitivno proširenje relacije μ .

Neka su elementi $u,v,w\in F$ u relaciji α , tj.

$u\alpha v\wedge v\alpha w \Leftrightarrow (\exists z_1,z_2,\ldots,z_p,\ t_1,t_2,\ldots,t_q\in F)(u\mu z_1,\ z_1\mu z_2,\ldots,z_p\mu v,\ v\mu t_1,$

$$t_1\mu t_2,\ldots,t_q\mu w).$$

Dakle, α je relacija ekvivalencije na F. Neka su elementi $u,v,u',v'\in F$ u relaciji α , tj.

$u\alpha v,\ u'\alpha v'$, odakle sleduje $uu'\alpha vv'$. Dakle, relacija α je kongruencija na polugrupi F. Označimo sa F' količnik polugrupu $F/_\alpha$. Prirodno preslikavanje $\varphi = nat_\alpha:\ x\to\bar{x}$ ($\bar{x}$ je klasa ekvivalencije za x u odnosu na α), jeste homomorfizam grupoida G na F', i ima ova svojstva:

$$\overline{ab} = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \bar{a}\bar{b},\ (a\in G, b\in G),$$

$$\overline{ua\varsigma a\mu} = \varphi(ua\varsigma a\mu) = \varphi(u)\varphi(a)\varphi(\varsigma)\varphi(a)\varphi(\mu) = \bar{u},\ (u\in F).$$

Ako μ i ρ interpretiramo kao množenje i desno deljenje, dobijamo potapanje grupoida G u F', ako dokažemo da je $\alpha\cap G^2 = \{(a,a)\mid a\in G\}$, i da su zadovoljeni zakoni levog i desnog skraćivanja.

Neka su elementi $u,v\in F$, $a,b,c\in G$ i $ab = c$. Posmatraćemo ovakve transformacije:

$$(\alpha')\begin{cases}(j') & ua\varsigma a\mu v \longrightarrow uv,\\ (jj') & ua\mu a\varsigma v \longrightarrow uv,\\ (jjj') & uab\mu v \longrightarrow ucv,\\ (jv') & ucb\varsigma v \longrightarrow uav.\end{cases}$$

Kako je zakon desnog skraćivanja zadovoljen u grupoidu G, to je element a jedinstven, odreden sa b i c. Očigledno, transformacije (a') skraćuju dužinu elemenata iz F. Jasno da se u konačnom broju koraka iz svodljivog elementa w dobija sveden element w'.

Neka su elementi w_1 i w_2 dobijeni iz jedne iste reči w, primenom transformacija (a'). Dokazaćemo da se daljom primenom transformacija (a') na elemente w_1 i w_2 dobija jedna te ista reč.

Neka je w oblika

$$w = ua\rho a\mu a\rho v.$$

Primenom transformacije (j') dobija se reč $w_1 = ua\rho v$, ili, primenom transformacije (jj'), dobija se reč $w_2 = ua\rho v$. Dakle, $w_1 = w_2$.

Pretpostavimo sada da je element w oblika

$$w = uab\mu b\rho v.$$

Primenom transformacije (jjj'), ili (j'), dobija se reč

$w_1 = ucb\rho v$, ili, $w_2 = uav$. Na w_1 primenimo transformaciju (jv'), dobija se reč $w_1' = uav$. Dakle, $w_1' = w_2$.

Najzad, pretpostavimo da je w oblika

$$w = ua\rho a\mu cb\rho v.$$

Primenom odgovarajućih transformacija (a'), dobija se $w_1 = ucb\rho v$, ili, $w_2 = ua\rho a\mu av$, odakle, daljom primenom transformacija (a'), (odgovarajućih), dolazimo do jednakosti $w_1' = w_2'$, jer je $w_1' = uav$, $w_2' = uav$.

Ovim je dokazano: presek svake klase ekvivalencije u odnosu na α, sa skupom svedenih elemenata S je tačno jedan element, i unija svih klasa ekvivalencije, koje seku S, jeste polugrupa F. Kako je skup $G \subset S$, to je G potopljen u F'. Potapanje je prirodno preslikavanje $\varphi = nat_\alpha$.

Neka je T podalgebra u F u odnosu na operatore μ i ρ, generisana grupoidom G. Slika od T pri preslikavanju $\varphi = nat_\alpha$ je T'. T' je grupoid koji sadrži G. U T' je moguće desno deljenje sa svim elementima iz G, tj. jednačina

$$xa = t, \ (t \ni T, \ a \in G),$$

ima rešenje u T'.

To rešenje je jedinstveno i izraženo sa

$$x = ta\rho .$$

Ovom prilikom smo elemente skupa G, μ i ρ identifikovali sa njihovim slikama pri preslikavanju φ . Preostaje, još, proveriti mogućnost desnog skraćivanja u T. Neka su elementi u,v,w$\in$T takvi da je zadovoljen uslov

(2) $uw\mu \equiv vw\mu (\mathrm{mod}\,\alpha)$.

Pretpostavimo da su u,v, i w svedeni elementi. Ako su obadve strane jednakosti (2) svedeni elementi, to oni moraju biti jednaki, tj. sledeća implikacija je tačna

$$uw = vw \Longrightarrow u = v,$$

jer je u G zadovoljeno desno skraćivanje.

Pretpostavimo da je jedna strana jednakosti (2) svodljiv element. Kako je T algebra $\{\mu, \rho\}$ -reči nad G, to je svaka podreč reči $uv\mu$ podreč elementa u ili elementa w. Proizvoljne transformacije (a') nad podreči reči $uw\mu$ vrše se samo u oblasti u ili w. Kako su u i w svedeni elementi to znači i $uw\mu$ mora biti sveden element, što je protivurečno. Dakle, prema (2), jednakost uv = vw je zadovoljena u G, i skraćivanjem u G, sledu je u = v.

Neka je u G zadovoljen zakon levog skraćivanja i neka je

(3) $uv\mu \equiv uw\mu(\mathrm{mod}\,\alpha)$,

pri čemu su, ponovo, elementi u,v i w svedeni u T.

Analognim rasudivanjem dolazimo do zaključka: ako je sa jedne strane u (3) svedeni element, to mora biti sveden i sa druge strane, odakle, u G je zadovoljena jednakost

$$uv = uw.$$

Prema poslednjoj jednakosti, zbog zakona levog skraćivanja u G, sleduje

$$v = w.$$

Ovim smo konstruisali grupoid T', koji sadrži G i u kome jednačina (1) ima jedinstveno rešenje za proizvoljni element a$\in$G i b$\in$T'. Ako G zadovoljava zakone levog i desnog skraćivanja, dokazali smo da su isti zadovoljeni i u T'. Grupoid T' uzimamo za G_1 i, ponavljajući prethodno nad G_1, dobija se niz grupoida

$$G \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$$

Svaki od grupoida zadovoljava zakon desnog skraćivanja.
Direktna granica G^* ovog rastućeg niza jeste grupoid sa desnim skraćivanjem. Jednačina (1) ima jedinstveno rešenje u G, jer za $a,b \in G_n$, jednačina (1) ima rešenje u G_{n+1}, i zato i u G^*. Zbog zakona desnog skraćivanja to rešenje je jedinstveno. Dakle, konstruisali smo desnu kvazigrupu G^* koja sadrži G. Ako pretpostavimo da G zadovoljava zakon levog skraćivanja, to isti zakon važi i u $G_1, G_2, \dots$, tj. u G^*.

Ako u prethodnom izlaganju, svuda reč "levo" zamenimo sa "desno", i obrnuto, definicijom leve kvazigrupe na odgovarajući način, prethodna lema je dokazana.

Najzad, uzimajući grupoid G sa obostranim skraćivanjem, to možemo G potopiti u desnu kvazigrupu sa levim skraćivanjem, a ovu pak u levu kvazigrupu sa desnim skraćivanjem, koju ćemo označiti sa Q. Proizvoljna jednačina

(4) $\quad xa = b \quad$ ili $\quad ay = b$,

gde su $a,b \in G$, ima rešenje u Q. Ponavljajući ovu konstrukciju, dobija se rastući niz

$$G \subseteq Q' \subseteq Q'' \subseteq \dots \quad (Q = Q').$$

Direktna granica ovog niza jeste kvazigrupa P koja sadrži G. Jednačine (4) imaju rešenje u P, jer za $a,b \in G^{(n)}$, jednačine (4) imaju rešenje u $G^{(n+1)}$, tj. u P.
Ovim smo dokazali ovakav rezultat ([2]):

<u>Teorema 9</u> Svaki grupoid sa dvostranim skraćivanjem može se potopiti u kvazigrupu.

II DEO

1. POTAPANJE UNIVERZALNE ALGEBRE U POLUGRUPU

Ovde će biti data teorema Kon-Rebana ([3]). Ovaj rezultat je dopunjen time što je dat dokaz da je odgovarajući term bezakonski.

Naš glavni cilj je da dokažemo da je proizvoljna algebra podalgebra polugrupe.

Teorema 1o. Neka je $Q(\Omega)$ proizvoljna algebra. Postoji polugrupa (P,o) koja zadovoljava ove uslove:

(1) Q je podskup skupa P;

(2) $(\forall\omega\in\Omega_n)(\exists c_\omega\in C)(\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in Q)(x_1x_2\ldots x_n\omega = c_\omega x_1x_2\ldots x_n)$.

Dokaz. Neka je $Q(\Omega)$ proizvoljna algebra. Svakom elementu $\omega\in\Omega$ pridružimo konstantu c_ω tako da različitim konstantama odgovaraju različiti elementi skupa Ω.

Skup svih tako izabranih konstanti označimo sa C, tj. $C=\{c_\omega|\omega\in\Omega\}$

Na skupu $C\cup Q$ konstruišemo slobodnu polugrupu F.

Element $u\in F$ je sveden ako ne sadrži podniz oblika

(a) $c_\omega x_1x_2\ldots x_n$; $(x_i\in Q,\ c_\omega\in C)$.

U suprotnom, element $u\in F$ je svodljiv.

Skup svih svedenih elemenata polugrupe F označimo sa P.

Element $v\in F\setminus P$ je po definiciji oblika

$v = v_1v_2\ldots v_i c_\omega x_1x_2\ldots x_n v_{i+n+1}\ldots v_k$, gde su v_i svedeni ili je neki od njih prazan podniz.

Jednoelementne nizove smatramo svedenim elementima polugrupe, pa je ispunjen ovaj uslov:

(b) $Q\cup C\subseteq P$, tj. $Q\subseteq P$.

Definisaćemo preslikavanje $\varphi : F\longrightarrow F$ na ovaj način:

(i) $(\forall u\in P)(\varphi(u)\overset{def}{=}u)$;

(ii) $(\forall u\in F\setminus P)(\varphi(u)\neq u)$ (definisano je induktivno); tj.

(iii) Za $u = c_\omega x_1x_2\ldots x_n$, $\varphi(u) = x$, gde je $x_1x_2\ldots x_n\omega = x$, ($x_1,x_2,\ldots,x_n,x\in Q$ i $\omega\in\Omega_n$).

(iv) Neka je $u = v_1 v_2 \ldots v_i c_\omega x_1 x_2 \ldots x_n v_{i+n+1} \ldots v_k$ (v_i su svedeni ili je neki od njih prazan podniz), onda je

$$\varphi(u) = v_1 v_2 \ldots v_i x v_{i+n+1} \ldots v_k .$$

Primenjujući φ uzastopno na svodljiv element polugrupe F, dobija se svedeni element, tj.

$$(\exists k \in N)(\forall u \in F \setminus P)(\varphi^k(u) \in P).$$

U tom slučaju važi ovakva jednakost

$$\varphi^{k+1}(u) = \varphi^k(u).$$

Ako svedeni element $\varphi^k(u)$ označimo sa $\Psi(u)$, time smo definisali preslikavanje $\Psi : F \to P$.

Dokazujemo da preslikavanje Ψ ima ove osobine:

(j) $(\forall u,v \in F)(\Psi(uv) = \Psi[\varphi(u)v] = \Psi[\Psi(u)v.]$

(jj) $(\forall u,v \in F)(\Psi(uv) = \Psi[u\Psi(v)]$.

Dokaz.

(j) **Za** $u,v \in P$ ovo je očigledno. Pretpostavimo da su $u \in F \setminus P$, $v \in P$, pri čemu ćemo koristiti ovakve jednakosti:

(1') $\Psi(u) = \varphi^p(u)$ (pretpostavka);

(2') $\Psi(uv) = \varphi^k(uv)$ (pretpostavka);

(3') $\varphi[\varphi(u)v] = \varphi^2(uv)$ (tačna prema definiciji preslikavanja φ).

Koristeći jednakosti (1'), (2') i (3') dokazujemo ove dve jednakosti:

(4') $\Psi(uv) \overset{def}{=} \varphi^k(uv) = \varphi^{k+1}(uv) = \varphi^k[\varphi(u)v] \overset{def}{=} \Psi[\varphi(u)v]$,

a zatim,

(5') $\Psi(uv) = \Psi[\varphi(u)v] = \Psi[\varphi\varphi(u)v)] = \Psi[\varphi^2(u)v] = \ldots = \Psi[\varphi^p(u)v] = \Psi[\Psi(u)v]$,

što je i trebalo dokazati.

(jj) Ovu osobinu ćemo dokazati koristeći (j) i hipotezu indukcije po dužini elementa v.

Za $u,v \in P$ tvrđenje je očigledno. Pretpostavimo da je element $v \in F \setminus P$. Ako je $v = c_\omega a_1 a_2 \ldots a_n$($a, a_1, a_2, \ldots, a_n \in Q$, $\omega \in \Omega_n$, $a = a_1 a_2 \ldots a_n \omega$), onda je

$$\Psi(v) = \varphi(v) = a, \text{ i}$$

$$(j')\ \Psi(uv) = \Psi[\Psi(u)v] = \Psi[\varphi(\Psi(u)v)] \stackrel{def}{=} \Psi[\varphi(\Psi(u)\varphi(v))] = \Psi[\Psi(u)\varphi(v)] =$$
$$= \Psi[\Psi(u)a] = \Psi[ua] = \Psi[u\Psi(v)] .$$

Neka su v_1 i v_2 svodljivi elementi i $v = v_1 v_2$. Onda je tačna jednakost

$$(jj')\ \Psi(uv) = \Psi[uv_1 v_2] = \Psi[\Psi(uv_1)v_2] = \Psi[\Psi(uv_1)\Psi(v_2)] = \Psi[\Psi[\Psi(uv_1)\Psi(v_2)]] =$$
$$= \Psi[\Psi(uv_1)\Psi(v_2)] = \Psi[u\Psi(v_1)\Psi(v_2)] = \Psi[u\Psi(v_1 v_2)] = \Psi[u\Psi(v)]$$

. Ovim je dokazana osobina (jj).

Na skupu P definišemo operaciju o na ovaj način:

Ako su $u,v\in P$, onda je

$$(jjj)\qquad (uov) \stackrel{def}{=} \Psi(uv).$$

Dokazaćemo da je o asocijativna operacija na P.

Neka su elementi $u,v,w\in P$, onda je tačna ovakva relacija

$$((uov)ow) \stackrel{def}{=} \Psi[\Psi(uv)w] = \Psi[uvw] = (uo(vow)).$$ Dakle, (P,o) je polugrupa.

Neka su $a_1,a_2,\ldots,a_n\in Q$, $\omega\in\Omega_n$. Onda je

$$(\ldots(c_\omega oa_1)o\ldots)oa_n) \stackrel{def}{=} \Psi(c_\omega a_1 a_2\ldots a_n) = a_1 a_2\ldots a_n\omega,$$

tj. svaki element algebre $Q(\Omega)$ može se predstaviti termom u polugrupi (P,o). Dokazaćemo da je term $T(x_1,x_2,\ldots,x_n,c_\omega) \stackrel{def}{=} c_\omega ox_1 o\ldots ox_n$ bezakonski. U dokazu ćemo iskoristiti Levievu lemu koja glasi ovako:

Neka su A,B,C i D reči nad $L = \{*,a,b,\ldots,(,)\}$. Onda je tačna ova ekvivalencija

$$AB = CD \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ A=C,\ B=D \text{ (ako je dužina reči A jednaka dužini reči C;} \\ 2.\ C=AX,\ B=XD \quad (dA<dC); \\ 3.\ A=CX,\ D=XB \quad (dA>dC), \text{ X je proizvoljna reč nad L.} \end{cases}$$

Odnosno,

$$AB = CD \Longleftrightarrow \begin{cases} (A=C \wedge B=D)\vee \\ (\exists X)(C=AX\wedge B=XD)\vee \\ (\exists X)(A=CX\wedge D=XB). \end{cases}$$

Za proizvoljnu asocijativnu operaciju o Levieva lema glasi ovako:

$$(AoB)=(CoD) \Longleftrightarrow \begin{cases} (A=C\wedge B=D)\vee \\ (\exists X)(C=AoX\wedge XoD=B)\vee \\ (\exists X)(A=CoX\wedge D=XoB). \end{cases}$$

Sada ćemo dati dva tvrđenja koja su nam potrebna pri dokazu postavljene osobine terma $T(x_1, x_2, \dots, x_n, c_\omega)$.

Tvrđenje 1. Ako se na izraz T dopiše proizvoljna reč X, dobijena reč TX nije izraz. Slično, i XT nije izraz.

Lema o jednoznačnosti prikazivanja izraza pomoću podizraza

Neka su A,B,C i D izrazi nad $L=\{x, a, b, \dots, (,)\}$. Onda vredi ekvivalencija

$$(A*B) = (C*D) \Longleftrightarrow A=C \wedge B=D.$$

Dokaz. $\Leftarrow$ deo: neposredno.

$\Rightarrow$ deo: pretpostavimo da je $(A*B) = (C*D)$.

Po Levievoj lemi ova jednakost je tačna u tri slučaja.

1. $(A*B) = (C*D) \Leftrightarrow A=C \wedge B=*D \Leftrightarrow A=C \wedge B=D$.

2. $C=AX$, za neku reč X, tj.

   izraz= nije izraz, što je kontradikcija.

3. $A=CX$, što se svodi na kontradikciju.

Neka su termi $T(x_1, x_2, \dots, x_n, c_\omega)$ i $T(y_1, y_2, \dots, y_m, c_\tau)$ jednaki, tj.

$$(\dots(c_\omega o x_1)o\dots)o x_n) = (\dots(c_\tau o y_1)o\dots)o y_m) \Leftrightarrow$$

$$(\dots(c_\omega o x_1)o\dots)o x_{n-1}) = (\dots(c_\tau o y_1)o\dots)y_{m-1}) \wedge x_n=y_m \Leftrightarrow$$

$$(\dots(c_\omega o x_1)o\dots)o x_{n-2}) = (\dots(c_\tau o y_1)o\dots)o y_{m-2}) \wedge x_{n-1}=y_{m-1} \wedge x_n=y_m \Leftrightarrow$$

– –

$$\Leftrightarrow \omega=\tau \wedge x_1=y_1 \wedge x_2=y_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}=y_{m-1} \wedge x_n=y_m \wedge n=m.$$

Druga dva slučaja Levieve leme otpadaju prema tvrđenju 2. Ovim je dokazano da je term $T(x_1, x_1, \dots, x_n, c_\omega)$ bezakonski.[1]

1) Ako je $(U*V)=(U'*V') \Longleftrightarrow U=U' \wedge V=V'$ (U, U', V i V' su izrazi nad L), onda je $*$ bezakonska operacija.

U daljem ćemo dati rezultat opštiji od teoreme Kon-Rebana ([5]).

Neka je X beskonačan prebrojiv skup, D je skup konstanti i $X \cap D = \emptyset$. Nad skupom $X \cup D$ definisana je slobodna polugrupa F. Uočimo u F elemente oblika

(1') $\quad d_1 x_1 d_2 x_2 \dots d_n x_n d_{n+1}$,

gde su $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ i $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n$, $d_1, d_2, \dots, d_{n+1} \in D$ (neki od d_ν može biti prazan podniz). Skup svih nizova oblika (1') označićemo sa F'.

Neka je P polugrupa, φ preslikavanje skupa D u P, definisano na ovaj način

$$(\forall d_\nu \in D)(\varphi(d_\nu) = d_\nu').$$

Svakom elementu $f \in F'$ pridružimo n-arnu operaciju ω' na P na ovakav način

(2') $\quad (\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in P)(d_\nu \in D)(x_1 x_2 \dots x_n f' = d_1' x_1 d_2' x_2 \dots d_n' x_n d_{n+1}')$, gde su d_ν' prazni podnizovi kad god su d_ν prazni podnizovi.

Algebra $Q(\Omega)$ je F'-podalgebra polugrupe P akko su ispunjeni ovi uslovi:

(i) $\quad Q \subseteq P$;

(ii) Postoji preslikavanje $\varphi : \Omega \to F'$, koje je 1-1 i na, (bijekcija), takvo da je $n_\omega = n_{f_\omega}$ i zadovoljava uslov

$$(\forall \omega \in \Omega_n)(\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in Q)(x_1 x_2 \dots x_n f' = x_1 x_2 \dots x_n \omega).$$

Najpre, dajemo jednu teoremu sa konstrukcijom dokaza, a onda drugu teoremu sa potpunim dokazom.

Teorema 11 Neka je $Q(\Omega)$ algebra, F' skup polugrupnih operacija oblika (2'), $\varphi : \Omega \to F'$ je 1-1 i na preslikavanje sa osobinom $n_\omega = n_{f'}$. Neka je T slobodna polugrupa nad $Q \cup D$ ($Q \cap D$ je samo od konstanti algebre $Q(\Omega)$). Neka je α minimalna kongruencija u T, takva da važi implikacija

$$(\forall \omega \in \Omega_n)(\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in Q)(a_1 a_2 \dots a_n \omega = a \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n f' \alpha\, a), \quad (a \in Q),$$

i neka je β restrikcija relacije α na skup Q. Onda su ispunjeni ovi uslovi:

(j) $\quad \beta$ je kongruencija u algebri $Q(\Omega)$ i količnik-algebra $Q/_\beta(\Omega)$ je F'-podalgebra polugrupe $P = T/_\alpha$.

(jj) Ako je Λ familija svih kongruencija r_i algebre $Q(\Omega)$ takvih da su odgovarajuće količnik-algebre $Q/_{r_i}(\Omega)$ F'-podalgebre polugrupe, onda je najmanji element familije β.

(jjj) Algebra $Q(\Omega)$ je F'-podalgebra neke polugrupe akko je ispunjen uslov

$$(\forall a,b\in Q)(a\,\mathcal{J}\,b \Longrightarrow a=b).$$

Dokaz Relaciju $\mathcal{J}$ ćemo opisati detaljnije.

Neka je $u\in T$ oblika

$u=c_1\ldots c_{i-1}ac_{i+1}\ldots c_K$ $(c_\nu\in Q\cup D,\ a\in Q,\ \omega\in\Omega_n$ i $a=a_1a_2\ldots a_n\omega)$.

Tada pišemo

$$u\vdash c_1\ldots c_{i-1}a_1a_2\ldots a_nf'c_{i+1}\ldots c_K.$$

Neka je γ refleksivno proširenje relacije $\vdash$, tj. γ je definisana na ovaj način:

$$(\forall u,v\in T)(u\gamma v\Longleftrightarrow u=v\vee u\vdash v\vee v\vdash u).$$

Relacija $\mathcal{J}$ je tranzitivno proširenje relacije γ, tj. $\mathcal{J}$ je definisana na ovaj način:

$(\forall u,v\in T)(u\,\mathcal{J}\,v\Longleftrightarrow(\exists w_1,w_2,\ldots,w_s\in T)(u\gamma w_1,\ w_1\gamma w_2,\ldots,w_s\gamma v))$.

Međutim, relacija $\mathcal{J}$ je minimalna kongruencija u polugrupi T.

Zatim, definišemo relaciju β na način:

$$(\forall a,b\in Q)(a\beta b\Longleftrightarrow a\,\mathcal{J}\,b).$$

Dokazati da je relacija β kongruencija na $Q(\Omega)$.

Neka je $a\,\mathcal{J}\,b$ $(a,b\in Q)$ i neka postoje elementi $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n\in Q$ takvi da je $a=a_1a_2\ldots a_n\omega$, $b=b_1b_2\ldots b_n\omega$. Onda je tačna ekvivalencija

$$a\,\mathcal{J}\,b\Longleftrightarrow a_1a_2\ldots a_n\omega\,\mathcal{J}\,b_1b_2\ldots b_n\omega\Longleftrightarrow a_1a_2\ldots a_n\omega\,\beta\,b_1b_2\ldots b_n\omega,$$

tj. relacija β je kongruencija u algebri $Q(\Omega)$.

Neka je $a\in Q$ i $[a]_{\mathcal{J}}$, $[a]_\beta$ su klase ekvivalencije za a u odnosu na $\mathcal{J}$ i β.

Definišemo preslikavanje

$$\Psi: Q/_\beta\longrightarrow T/_{\mathcal{J}}$$

na ovaj način $(\forall a\in Q)(\Psi([a]_\beta)=[a]_{\mathcal{J}})$.

Dokazaćemo da je Ψ monomorfizam.

Neka su $[a]_\beta$, $[b]_\beta\in Q/_\beta$, tada je $\Psi([a]_\beta)=[a]_{\mathcal{J}}$ i $\Psi([b]_\beta)=[b]_{\mathcal{J}}$.

Očigledno da je tačna sledeća ekvivalencija

$$[a]_{\alpha}' = [b]_{\alpha} \Leftrightarrow \Psi([a]_{\beta}) = \Psi([b]_{\beta}),$$

tj. $a=b$. Ovim je dokazano da je Ψ 1-1 preslikavanje.

Neka je, zatim, $a=a_1a_2\ldots a_n\omega$, ($a, a_1, a_2, \ldots, a_n \in Q$). Onda važi

$$[a]_{\beta} = [a_1]_{\beta}[a_2]_{\beta}\ldots[a_n]_{\beta} \quad \text{i} \quad [a]_{\alpha} = [a_1]_{\alpha}[a_2]_{\alpha}\ldots[a_n]_{\alpha},$$

odakle zaključujemo da je Ψ homomorfizam. Dakle, $\Psi : Q/_{\beta} \rightarrow T/_{\alpha}$ je monomorfizam.

Algebru $Q/_{\beta}(\Omega)$ možemo posmatrati kao podalgebru polugrupe $T/_{\alpha}(\Omega)$ uzimajući da je $[a]_{\beta} = [a]_{\alpha}$

Uvešćemo izvesne potrebne pojmove, a onda, dajemo jednu teoremu ([5]).

(a) Neka je $Q(\Omega)$ algebra i ω n-arna operacija na Q. Neka su, zatim, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k \in \Omega$ i $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ (n_v je dužina operacije ω_v).

Ako niz $i_1, i_2, \ldots, i_k$ nenegativnih celih brojeva zadovoljava uslov:

$$0 \leq i_v \leq i_{v+1} \leq n_1+\ldots+n_v$$

tada možemo definisati polinomnu operaciju ξ na ovaj način:

$$x_1x_2\ldots x_n\xi = x_1\ldots x_{i_1}\omega_1 \quad x_i\ldots x_{i_{k-1}}\omega_{k-1}\, x_{i_k}\ldots x_n\omega_k.$$

Skup svih tako definisanih polinomnih operacija označićemo sa $[\Omega]$. Očigledno da $[\Omega]$ ne zavisi od Q već od Ω, i $\Omega \subseteq [\Omega]$

Analogno, sa $[\Omega']$ označavamo skup svih polinomnih operacija dobijenih po modu (a) zamenjujući svaki element ω sa elementom f' (gde je $n_{\omega} = n_{f'}$).

Teorema 12 Neka je F' podskup od F čiji su elementi oblika (1') i neka su ispunjeni ovakvi uslovi:

(1) Ako su $z_1, \ldots, z_k \in X \cup D$, $f' \in F'$, $x_1, \ldots, x_n, x \in X$ i ako postoji $\eta' \in [F']$ takva operacija da je zadovoljena ova jednakost

$$z_1\ldots z_{j-1}\, x_1\ldots x_n f'\, z_j\ldots z_k = y_1\ldots y_{i-1}\, x_1\ldots x_n y_i\ldots y_m\eta' \quad (y_1, y_2, \ldots, y_m \in X)$$

onda postoji takva operacija $\xi' \in [F']$ da je zadovoljena jednakost

$$z_1\ldots z_{j-1}\, x z_j\ldots z_k = y_1\ldots y_{i-1}\, x y_{i+1}\ldots y_m\xi'.$$

Algebra $Q(\Omega)$ je F'-podalgebra polugrupe akko je svaka jednakost zadovoljena u $T(F')$ zadovoljena i u $Q(\Omega)$.

<u>Dokaz.</u> Neka je ispunjen uslov (I) i neka je svaka jednakost tačna u $T(F')$ tačna i u algebri $Q(\Omega)$. Kako je T slobodna polugrupa to je

$$a_1 a_2 \dots a_n \xi' = b_1 b_2 \dots b_m \eta'$$

zadovoljeno u T ($a_i, b_j \in Q, \xi', \eta' \in [F]$), pa je zato $m=n$, $a_i = b_i$. Zato je u svakoj polugrupi tačna ova jednakost

$$x_1 x_2 \dots x_n \xi' = x_1 x_2 \dots x_n \eta'.$$

Dokažimo da je algebra $Q(\Omega)$ F'-podalgebra polugrupe. Koristimo uslov (jjj) prethodne teoreme

$$(\forall a,b \in Q)(\ a \alpha b \iff a=b).$$

Na osnovu definicije relacije $\vdash$ postoji niz elemenata $u_1, u_2, \dots, u_k \in T$ takvih da je ispunjen ovaj uslov

(a') $\quad (\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in Q)(\exists a \in Q)(\ a \vdash u_1,\ u_1 \vdash u_2, \dots,\ u_{k-1} \vdash u_k\ )$

akko postoji operacija $\xi' \in [F]$, takva da je tačna ovakva jednakost

(a'') $\qquad u_k = a_1 a_2 \dots a_n \xi' u\ T, \quad a = a_1 \dots a_n \xi \quad u\ Q(\Omega).$

Prema (a) i (a') važi ovakva relacija

(a''') $\quad v = z_1 z_2 \dots z_{j-1}\, b z_j \dots z_s \vdash u_k = z_1 \dots z_{j-1}\, b_1 b_2 \dots b_m \xi' \dots z_s$,

pri čemu je jednakost $b = b_1 b_2 \dots b_m \omega$ zadovoljena u algebri $Q(\Omega)$ i $z_v \in Q \cup D$. Na osnovu relacija (a'') i (a'''), uz uslov (I) i koristeći da je T slobodna polugrupa, postoji operacija $\eta' \in [F']$, takva da je ovaj uslov ispunjen

(a^{IV}) $\quad v = c_1 c_2 \dots c_{i-1}\, b c_i \dots c_p \eta'$,

i u $T(F')$ je zadovoljena ovakva jednakost

(a^{V}) $\quad c_1 \dots c_{i-1}\, b_1 \dots b_m f' c_i \dots c_p \eta' = c_1 \dots c_{i-1}\, b_1 \dots b_m\, c_i \dots c_p \xi = u_k$, i

(a^{VI}) $a = c_1 \dots c_{i-1} b_1 \dots b_m c_i \dots c_p \xi$ zadovoljena u algebri $Q(\Omega)$. Na osnovu (a^{V}) i (a^{VI}) sleduje ovakva relacija

$$a = c_1 \dots c_{i-1}\, b_1 \dots b_m\, c_i \dots c_p \xi = c_1 \dots c_{i-1}\, b_1 \dots b_m \omega c_i \dots c_p \eta =$$
$$= c_1 \dots c_{i-1} b c_i \dots c_p \eta,$$

odakle, postoji niz elemenata $u_1, u_2, \dots, u_p \in T$ takvih da je ispunjen uslov

(a^{VII}) $\quad a \vdash u_1 \vdash u_2 \vdash \dots \vdash u_p = v.$

Na kraju, pretpostavimo da su $a,b \in Q$ i $a \alpha b$. Prema definiciji relacije α i prethodnog, sleduje da postoji niz elemenata $w_1, w_2, \ldots, w_\ell \in T$ takvih da je
$$a \vdash w_1 \vdash w_2 \vdash \ldots w_\ell \vdash b,$$
pri čemu postoje operacije $\xi', \eta' \in [F']$, takve da važi ovo
$$b_1 \ldots b_m \xi' = w_\ell = b_1 \ldots b_m \eta' \text{ i}$$
$$a = b_1 \ldots b_m \xi, \quad b = b_1 \ldots b_m \eta.$$
Prema poslednjim jednakostima zaključujemo da je $a=b$. Ovim je teorema dokazana.

Neka je element $u \in T$ oblika
$$u = d_1 x_1 d_2 \ldots d_n x_n d_{n+1}.$$
Ako su svi podnizovi d_v, $(v>1)$, prazni, onda se teorema 12 svodi na teoremu Kon-Rebana.

2. POTAPANJE UNIVERZALNIH ALGEBRI U GRUPOID ZAKONA

$XY*ZU** = XZ*YU**$

Ovde će biti dati potrebni i dovoljni uslovi za potapanje proizvoljne algebre u grupoid u kome važi entropični zakon

(Z) $\quad xy*zu** = xz*yu**$.

Glavnu ulogu u dokazu ima term $xa*ay**$ koji je nepromenljiv prema zakonu (Z). Navodimo rezultat M. D. Prešić ([11]).

Teorema 13 Neka je $Q(\Omega)$ proizvoljna algebra. Postoji entropični grupoid (G,o) koji ima ove osobine:

(1) Q je podskup skupa G;

(2) Ako je $\omega\in\Omega_n$ to postoji element $\bar{\omega}\in G$ takav da su zadovoljeni uslovi

(1') $(\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in Q)(x_1x_2\ldots x_n\omega = x_1x_2\ldots x_n o_\omega o_\omega\ldots o_\omega \; (n\geq 2)$,

(2') $\quad x\omega = x\bar{\omega}o_\omega \quad (n=1)$,

(3') $\quad \omega = \bar{\omega}\bar{\omega}o_\omega \; (n=o)$,

gde je

$$xyo_\omega \overset{def}{=} x\bar{\omega}o\bar{\omega}yoo.$$

Najpre, uvodimo potrebne pojmove i opisaćemo konstrukciju traženog grupoida.

Neka je G_1 minimalni skup koji zadovoljava uslove

(i) $Q\cup\Omega$ je podskup skupa G_1;

(ii) Ako su $u,v\in G_1$, to je i $uv\bullet\in G_1$.

Ovim je konstruisan grupoid $(G_1;o)$, gde je $uvo \overset{def}{=} uv\bullet$.

Neka je, zatim, O' minimalni podskup skupa G_1 sa osobinama:

(j) $Q\cup\Omega$ je podskup skupa O',

(jj) Ako je $\omega\in\Omega_n$, $u,v\in O'$, onda je $u\omega\bullet\omega v\bullet\bullet\in O'$.

Na skupu O' definisana je operacija ω' koja odgovara $\omega\in\Omega_n$.

tj. operacija ω' je definisana na ovaj način:

Za sve elemente $y_1, y_2, \dots, y_n \in O', \omega \in \Omega_n$

(1'') $y_1 y_2 \dots y_n \omega' \overset{def}{=} y_1 y_2 \dots y_n \underbrace{o_\omega o_\omega \dots o_\omega}_{(n-1)} \quad (n \geq 2),$

(2'') $\quad y\omega' \overset{def}{=} y\omega o_\omega, \quad (n=1),$

(3'') $\quad \omega' \overset{def}{=} \omega\omega o_\omega \quad (n=o),$

gde je

$$xyo_\omega \overset{def}{=} x\omega \bullet \omega y \bullet\bullet .$$

Na skupu G_1 definisana je binarna relacija $\vdash$, a zatim njeno proširenje $\sim$ do relacije ekvivalencije.

Definicija 11 Neka su $t_1, t_2 \in G_1$, onda je $t_1 \vdash t_2$ akko se term t_2 može dobiti iz terma t_1 zamenom jednog podterma α od t_1 termom β , gde α i β mogu biti:

I. $\alpha = uv \bullet u'_1 v_1 \bullet\bullet, \quad \beta = uu_1 \bullet vv_1 \bullet\bullet;$

II. $\alpha = x_1 x_2 \dots x_n \omega', \quad \beta = x_1 x_2 \dots x_n \omega (\beta \in Q);$

III. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ i $\alpha = x_1 x_2 \dots x_n \omega \; (\alpha \in Q)$, tada je β term (reč) $x_1 x_2 \dots x_n \omega'$.

Ovo ćemo označavati na tri različita načina

$$t_1 \underset{I}{\vdash} t_2, \quad t_1 \underset{II}{\vdash} t_2, \quad t_1 \underset{III}{\vdash} t_2 .$$

Relaciju $\vdash$ produžimo do relacije $\sim$ na ovaj način

$$(\forall t_1, t_2 \in G_1)(t_1 r t_2 \overset{def}{\iff} t_1 \vdash t_2 \vee t_2 \vdash t_1 \vee t_1 = t_2).$$

Zatim, pomoću relacije r definišemo relaciju $\sim$ ovako:

$$(\forall t_1, t_2 \in G_1)(t_1 \sim t_2 \overset{def}{\iff} (\exists y_1, y_2, \dots, y_n \in G_1)(t_1 r y_1, \; y_1 r y_2, \dots, \; y_n r \; t_2).$$

Tako dobijene relacije imaju ove osobine:

Relacija r je refleksivna i simetrična na skupu G_1;

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije.

Relacija r je refleksivna i simetrična, što je po definiciji očigledno. Relacija $\sim$ je, u stvari, tranzitivno proširenje relacije r, pa je zato i relacija ekvivalencije. Dakle, relacija $\sim$ je minimalno produženje relacije $\vdash$ do ekvivalencije na skupu G_1.

Dokažimo da je $\sim$ tranzitivno proširenje relacije r i da je $\sim$ kongruencija na (G_1,o).

Neka je $t_1 \sim t_2$ i $t_2 \sim t_3$, odakle je, prema definiciji relacije $\sim$ tačno ovo:

$$t_1 \sim t_2 \overset{def}{\iff} (\exists y_1, y_2, \dots, y_n \in G_1)(t_1 r y_1, \ y_1 r y_2, \dots, \ y_n r t_2),$$

$$t_2 \sim t_3 \overset{def}{\iff} (\exists y_1', y_2', \dots, y_p' \in G_1)(t_2 r y_1', \ y_1' r y_2', \dots, y_p' r \ t_3), \text{ tj.}$$

$$(\exists y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_p' \in G_1)(t_1 r y_1, y_1 r y_2, \dots, y_n r t_2, t_2 r y_1', \dots,$$
$$y_1' r y_2', \dots, y_p' r t_3 \overset{def}{\iff} t_1 \sim t_3).$$

Dakle, $\sim$ je minimalna ekvivalencija na (G_1,o). Zato je $G_1|\sim$ količnički skup. Na količničkom skupu $G_1|\sim$ definišemo operaciju „$*$" na ovaj način:

$(\forall \bar{t}_1, \bar{t}_2 \in G_1|\sim)(\bar{t}_1 * \bar{t}_2 \overset{def}{=} \overline{t_1 o t_2})$ ($\bar{t}_1$ i $\bar{t}_2$ su odgovarajuće klase ekvivalencije elemenata t_1 i $t_2 \in G_1$).

Neka su $t_1, t_2, t_1', t_2' \in G_1$ takvi da je zadovoljeno ovo:

$t_1 \sim t_2$, $t_1' \sim t_2'$, to je $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$, $\bar{t}_1' = \bar{t}_2'$, odakle sleduje

$$\bar{t}_1 * \bar{t}_1' = \bar{t}_2 * \bar{t}_2' \overset{def}{\iff} \overline{t_1 o t_1'} = \overline{t_2 o t_2'} \overset{def}{\iff} t_1 o t_1' \sim t_2 o t_2' .$$

Ovim smo dokazali da je $\sim$ minimalna relacija kongruencije na (G_1,o).

Zatim, dajemo jedan pomoćni rezultat potreban za dokaz postavljene teoreme.

<u>Lema 5</u> Ako je $u \in O'$ i $u \vdash v$, onda je i $v \in O'$.

U dokazu leme 5 razlikovaćemo tri slučaja

1. $u \underset{I}{\vdash} v$, 2. $u \underset{II}{\vdash} v$, 3. $u \underset{III}{\vdash} v$.

1. U ovom slučaju, najpre, dokažimo ovakvo tvrdenje

A. Ako je t element skupa O', onda je svaki podterm od t, oblika $uv{*}u_1v_1{*}{*}$, element skupa O', i zato zadovoljava uslov $v=u_1=\omega$, $\omega \in \Omega$

Da bi smo potvrdili A. poslužićemo se indukcijom po dužini elementa t.

Neka je dužina elementa t jednaka 1, tj. $\delta(t)=1$. Tvrdenje A. je očigledno. Pretpostavimo da A. važi u slučaju $\delta(t)=n$ $(n>1)$, i neka je element t oblika

$$t = t_1\omega{*}\omega t_2{*}{*}, \quad \delta(t)=n+1$$

i $\alpha = uv\bullet u_1 v_1 \bullet\bullet$ je podterm od t. Term α je podterm od t_1 ili od t_2, pa tvrđenje A. je tačno prema pretpostavci (jer je $\sigma(t_1) < n$), $\delta(t_2) < n$). Ako α nije podterm niti od t_1 niti od t_2, to element t mora biti α. Ovim je osobina A. dokazana.

Prema A. svaki podterm od $t \in O'$, oblika $uv\bullet u_1 v_1 \bullet\bullet$ je element skupa O'. Dakle, term koji može biti promenjen prema zakonu (Z) pripada skupu O', pa je zato nepromenljiv prema (Z). Dakle, zadovoljeni su ovi uslovi

(4) $u \vdash v \Rightarrow u = v, \quad u \in O'$.

Prema (4), iz $u \vdash v$ i $u \in O'$ zaključujemo da je i $v \in O'$.

U slučajevima $u \underset{u}{\vdash} v$ i $u \underset{w}{\vdash} v$, lako se dolazi do istog zaključka.

<u>Dokaz teoreme 13</u> Najpre, hoćemo dokazati da je preslikavanje

$f : Q \to Q|\sim$ definisano sa

$(\forall x \in Q)(\ f(x) = \bar{x})$ ($\bar{x}$ je odgovarajuća klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju $\sim$), p o t a p a n j e algebre $Q(\Omega)$ u grupoid zakona (Z).

Dokažimo da je f 1-1 preslikavanje.

Neka je

$$f(x) = \bar{x}, \quad f(y) = \bar{y} \quad (x,y \in Q), \text{ i } \bar{x} = \bar{y}.$$

To znači da važi ovo:

$(\exists u_1, u_2, \ldots, u_n \in G_1)(\ u_1 \vdash u_2,\ u_2 \vdash u_3, \ldots,\ u_{n-1} \vdash u_n;\quad x = u_1,\ y = u_n)$.

Kako je $Q \subseteq O'$, to su $x, y \in O'$ i, prema prethodnoj lemi, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in O'$.

Definisaćemo preslikavanje φ podskupa skupa O' u skup Q na ovaj način:

$(\forall x \in Q)(\ \varphi(x) \overset{def}{=} x)$,

$(\forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in G_1)(\ \varphi(t_1 t_2 \ldots t_n \omega') \overset{def}{=} \varphi(t_1)\varphi(t_2)\ldots\varphi(t_n)\omega)$, $\quad (\omega \in \Omega_n)$.

Tako definisanim preslikavanjem se niz elemenata

(5) $u_1, u_2, \ldots, u_n$

preslikava u niz

(6) $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$

elemenata algebre $Q(\Omega)$.

Elementi u_i imaju osobinu $u_i \vdash u_{i+1}$, odakle je, prema (4),

$u_i = u_{i+1}$, pa je zato i $\varphi(u_i) \overset{def}{=} \varphi(u_{i+1})$.

Iz relacija

$$u_1 \vdash u_2,\quad u_2 \vdash u_3, \ldots, u_{n-1} \vdash u_n,\quad x=u_1,\quad y=u_n$$

sleduje relacija

(7) $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \ldots = \varphi(u_n)$, a onda, prema definiciji,

(8) $\varphi(u_1) \overset{def}{=} x$, $\varphi(u_n) \overset{def}{=} y$, jer je $x = u_1$, $y = u_n$.

Prema relacijama (7) i (8) sleduje jednakost $x = y$. Ovim je dokazano da je f 1-1 preslikavanje.

Uvodimo, zatim, ovakve pojmove.

(9) $G \overset{def}{=} G_1|\sim$, $\overline{x}\overline{y}* \overset{def}{=} \overline{xyo}$.

Grupoid (G,o) je entropičan.

Neka je, zatim,

$$\bar{Q} \overset{def}{=} \{\bar{x} \mid x \in Q\},$$

i u $\bar{Q}$ ćemo definisati n-arnu operaciju ω'' i binarnu operaciju $*_{\omega'}$ na ovaj način:

(10) $(\forall \bar{x},\bar{y} \in \bar{Q})(\ \bar{x}\bar{y}*_{\omega'} \overset{def}{=} \overline{xy*\omega'}),$

$(\forall \bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n \in \bar{Q})(\ \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n\omega'' \overset{def}{=} \overline{x_1x_2\ldots x_n\omega'}).$

Prema definiciji operacije ω', (9) i (10) zaključujemo ovo:

(1''') $\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots x_n\omega'' \overset{def}{=} \overline{x_1x_2\ldots x_n\omega'} \overset{def}{=} x_1x_2\ldots x_n\underbrace{o_{\omega}o_{\omega}\ldots o_{\omega}}_{n-1} =$

$\overset{def}{=} \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n\underbrace{o_{\omega'}o_{\omega'}\ldots o_{\omega'}}_{n-1}$ $(n \geq 2)$,

(2''') $\bar{x}\omega'' \overset{def}{=} \overline{x\omega'} \overset{def}{=} \overline{x\omega o_{\omega}} \overset{def}{=} \bar{x}\bar{\omega}\, o_{\omega}$ $(n = 1)$,

(3''') $\omega'' \overset{def}{=} \overline{\omega\omega'} \overset{def}{=} \overline{\omega\omega o_{\omega'}}$ $(n=0)$.

Ovim je konstruisana algebra $\bar{Q}(\Omega)$. Preslikavanje $f : x \to \bar{x}$ je epimorfizam. Dakle, prirodno preslikavanje $f : Q \to \bar{Q}$ jeste 1-1 i na homomorfizam. Algebre $Q(\Omega)$ i $\bar{Q}(\Omega)$ su izomorfne.

Algebra $\bar{Q}(\Omega)$ je, po konstrukciji, sa traženim osobinama. Zato je preslikavanje f p o t a p a n j e algebre $Q(\Omega)$ u entropični grupoid (G,o). Time je teorema 13 u potpunosti dokazana.

Neposredna posledica teoreme 13 je sledeći rezultat.

Teorema 14 Ako grupoid zakona

(Z_1) $F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,x,y) = F_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,x,y)$

ima osobinu

B. Term $F_1(a,a,\ldots,a,x,y)$ (a je konstanta), je nepromenljiv prema (Z_1), što znači da se termi $F_2(a,a,\ldots,a,x,y)$ i $F_1(a,a,\ldots,a,x,y)$ poklapaju, onda za svaku algebru $Q(\Omega)$ postoji grupoid (G,o) u kome važi zakon (Z_1) i zadovoljava ova dva uslova:

(i) Q je podskup skupa G;

(ii) Ako je $\omega\in\Omega_n$ onda postoji $\bar\omega\in G$ tako da su zadovoljeni ovi uslovi

(j') $(\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in Q)(x_1x_2\ldots x_n\omega = x_1x_2\ldots x_n\underbrace{o_\omega o_\omega\ldots o_\omega}_{n-1}$ ($n\geq 2$),

(jj') $(\forall x\in Q)(x\omega = x\bar\omega o_\omega$ $(n=1)$,

(jjj') $\omega = \bar\omega\bar\omega o_\omega$ $(n=o)$,

gde je

$$xyo_\omega \overset{def}{=} F_1(\bar\omega,\bar\omega,\ldots,\bar\omega,x,y).$$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu teoreme 13, pa ćemo ga ukratko ilustrovati.

Neka je G_2 minimalni skup sa osobinama

$Q\cup\Omega$ je podskup skupa G_2;

Ako su $u,v\in G_2$, to je i $uv\bullet\in G_2$. (G_2,o) je grupoid, gde je $uvo\overset{def}{=}uv\bullet$.

Neka je, zatim, O'' minimalni podskup od G_2 sa osobinama

$Q\cup\Omega$ je podskup skupa O'';

Ako je $\omega\in\Omega_n$ i $u,v\in O''$ to je $F_1(\omega,\omega,\ldots,\omega,u,v)\in O''$. Pored toga, na skupu O'' definisana je operacija $\blacksquare$ na ovaj način:

$(\forall u_1,u_2,\ldots,u_n\in O'')(\forall\omega\in\Omega_n)$

(i') $u_1u_2\ldots u_n\blacksquare \overset{def}{=} u_1u_2\ldots u_n\underbrace{o_\omega o_\omega\ldots o_\omega}_{n-1}$ $(n\geq 2)$,

(ii') $u\blacksquare \overset{def}{=} u\omega o_\omega$ $(n=1)$,

(iii') $\blacksquare\overset{def}{=}\omega\omega o_\omega$ $(n=o)$,

gde je

$$uvo_\omega\overset{def}{=}F_1(\omega,\omega,\ldots,\omega,u,v).$$

Definisaćemo binarne relacije $\vdash$ i $\sim$ na G_2.

Definicija 12. Neka su $t_1,t_2,\in G_2$, onda je $t_1\vdash t_2$ akko se term t_2 može dobiti iz terma t_1 zamenom nekog podterma α od t_1 termom β, gde α i β mogu biti:

I. $\alpha = F_1(x_1,x_2,\dots,x_n,x,y)$, $\beta = F_2(x_1,x_2,\dots,x_n,x,y)$;

II. Ako je $\alpha = x_1x_2\dots x_n$■, onda je $\beta = x_1x_2\dots x_n\omega$ ($\beta \in Q$);

III. Neka su $x_1,x_2,\dots,x_n \in Q$, $\alpha = x_1x_2\dots x_n\omega$, β je term (reč) $x_1x_2\dots x_n$■.

Definisaćemo binarne relacije $\vdash$ i $\sim$ kao i u slučaju prethodne teoreme.

Lema 6 Ako je $u \in O''$ i $u \vdash v$, onda je i $v \in O''$.

U dokazu ove leme razlikujemo tri slučaja:

$$u \underset{I}{\vdash} v, \quad u \underset{II}{\vdash} v, \quad u \underset{III}{\vdash} v.$$

Neka je $u \vdash v$ i $u \in O''$. Dokažimo tvrđenje:

C. Ako je element $t \in O''$, onda svaki njegov podterm oblika $F_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u,v)$ jeste element skupa O'', i zato zadovoljava uslov

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \omega, \ \omega \in \Omega.$$

U dokazu tvrđenja C. koristimo indukciju po dužini elementa t.

Tvrđenje C. je očigledno u slučaju $\delta(t)=1$.

Pretpostavimo da je $\delta(t)=n$ $(n>1)$, i term t je oblika

$$t = F_1(\omega,\omega,\dots,\omega,t_1,t_2).$$

Jasno da smo time pretpostavili da je C. tačno za $\delta(t) < n$.

Podterm od t oblika $F_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u,v)$ je podterm od t_1 ili od t_2, pa je tvrđenje C. tačno. U suprotnom, t mora biti $F_1(\omega,\omega,\dots,\omega,u,v)$. Ovim je C. potvrđeno.

Dakle, prema C, zaključujemo ovo:

svaki podterm od t oblika $F_1(x_1,x_2,\dots,x_n,x,y)$ jeste element skupa O'', pa je s toga promenljiv prema (Z_1).

Dakle, za $u \in O''$ i $u \vdash v$ sleduje $u = v$, tj. $v \in O''$.

Nadalje je dokaz teoreme 14 istovetan sa dokazom teoreme 13.

Na osnovu prethodna dva rezultata može se dokazati mogućnost potapanja proizvoljne algebre $Q(\Omega)$ u grupoid u kome važi zakon:

(Z_2) $\quad xy{*}zu{*}{*} = xu{*}zy{*}{*}$;

(Z_3) $\quad xy{*}zu{*}{*} = uy{*}zx{*}{*}$;

pri čemu je odgovarajući term $xa{*}ya{*}{*}$, za slučaj zakona (Z_2), odnosno, $ay{*}xa{*}{*}$ u slučaju zakona (Z_3).

3. POTAPANJE UNIVERZALNIH ALGEBRI U GRUPOID U KOME VAŽI SKUP ZAKONA $\sum(*)$

Ovom prilikom biće navedeni potrebni i dovoljni uslovi za potapanje proizvoljne univerzalne algebre u grupoid u kome važi skup zakona $\sum(*)$. Taj uslov glasi:

Postoji term $t(x,y;*)$, formiran od dve promenljive x, y i operacijskog simbola $*$, takav da operacija $\bullet$ definisana sa (E)

(E) $\quad xy\bullet \overset{def}{=} t(x,y;*)$

ne zadovoljava nijedan algebarski zakon (osim $x=x$), dok $*$ zadovoljava sve zakone $\sum(*)$. Ovo su dali Marica i Slaviša Prešić ([13]).

Teorema 15 Neka je $Q(\Omega)$ proizvoljna algebra i $\sum(*)$ skup zakona koji zadovoljava uslov (E). Postoji grupoid $\mathcal{G}=(G,*)$ u kome važi skup zakona $\sum(*)$ i ima ove osobine:

(i) Q je podskup skupa G;

(ii) Za $\omega\in\Omega_n$ postoji element $\bar{\omega}\in G$ i term $t_\omega(x_1,x_2,\dots,x_n,\bar{\omega};\bullet)$, formiran od promenljivih $x_1,x_2,\dots,x_n$, konstantnog simbola $\bullet$, tako da su zadovoljeni ovi uslovi:

$$(\forall\omega\in\Omega(0))(\omega=\bar{\omega}),$$

$$(\forall x_1,x_2,\dots,x_n\in Q)(x_1x_2\dots x_n\omega=t_\omega(x_1,x_2,\dots,x_n,\bar{\omega},\bullet)),\ (\omega\in\Omega_n\ ,\ n\geq1),$$

gde je

$$xy\bullet \overset{def}{=} t(x,y;*).$$

Najpre, dajemo potrebne pojmove.

(a) Neka je G_1 minimalni skup sa osobinama

$Q\cup\Omega$ je podskup skupa G_1;

Za $u,v\in G_1$, važi $uv*\in G_1$.

Grupoid $\mathcal{G}=(G_1,*)$ konstruisaćemo kao algebru $*$-reči nad $Q\cup\Omega$.

(b) Skup $G_\bullet$ je minimalni podskup skupa G_1 sa osobinama:

$Q\cup\Omega$ je podskup skupa $G_\bullet$;

Ako su $u,v\in G_\bullet$, to je i $uv\bullet\in G_\bullet$, gde je $\bullet$ operacija definisana termom $t(x,y;*)$

(Def$\bullet$) $\qquad xy\bullet \overset{def}{=} t(x,y;*)$.

(c) Za svaki element $\omega \in \Omega_n$ definišemo operaciju ω' na ovaj način:

(DefΩ') $\quad (\forall x_1,x_2,\ldots,x_n \in G_1)(x_1x_2\ldots x_n\omega' = t_\omega(x_1,\ldots,x_n;\omega,\bullet)$, $(n\geq 1)$,

$$\omega' = \omega, \quad (n=o),$$

gde je $t_\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n,\omega,\bullet)$ term, formiran od promenljivih $x_1,x_2,\ldots,x_n$, konstantnog simbola ω i operacijskog simbola $\bullet$. Skup svih tako definisanih operacija ω' označićemo sa

$$\Omega' \overset{def}{=} \{\omega' \mid \omega \in \Omega_n\}.$$

(d) Uočimo minimalni podskup G_Ω od skupa $G_\bullet$, takav da ima osobine

$QU\Omega_{(c)}$ je podskup skupa G_Ω;

Ako su $v_1,v_2,\ldots,v_n \in G_\Omega$, $\omega \in \Omega_n$ $(n\geq 1)$, onda je $v_1v_2\ldots v_n\omega' \in G_\Omega$.

Prema ovoj definiciji, elementi u G_Ω su oni oni elementi (termi) iz G_1 koji se mogu predstaviti pomoću operacija iz Ω'.

(e) Minimalne relacije kongruencije generisane, redom, skupom algebarskih zakona $\Sigma(*)$, pozitivnim dijagramom algebre $TabQ(\Omega')$, definicijom operacije $\bullet$,(Def$\bullet$), definicijom skupa operacija Ω', (Def Ω'), označićemo ih sa: $\sim_\Sigma$, $\sim_Q$, $\sim_\bullet$, $\sim_\Omega$.

Drugim rečima, za sve elemente $u,v \in G_1$ pišemo:

$$u \sim_\Sigma v \overset{def}{=} \Sigma(*) \vdash u = v;$$
$$u \sim_Q v \overset{def}{=} TabQ(\Omega') \vdash u = v,$$
$$u \sim_\bullet v \overset{def}{=} Def(\bullet) \vdash u = v,$$
$$u \sim_\Omega v \overset{def}{=} Def(\Omega') \vdash u = v.$$

Šta ustvari, znači $u \sim_\Sigma v$? Elementi $u,v \in G_1$ su u relaciji $\sim_\Sigma$ akko na osnovu skupa algebarskih zakona $\Sigma(*)$ i aksioma jednakosti sleduje jednakost elemenata u i v. Podsetimo na definiciju algebarskog zakona.

Definicija 13 Zakon nad Ω u alfabeti X jeste par $(w_1,w_2) \in W_\Omega^2(X)$, ili jednakost $w_1 = w_2$.

Opišimo pozitivni dijagram algebre $Q(\Omega)$, tj. $TabQ(\Omega)$, a onda i $TabQ(\Omega')$. Pozitivni dijagram algebre $Q(\Omega)$ je $TabQ(\Omega)$ a to je skup svih jednakosti oblika

$$x_1x_2\ldots x_n\omega = x, \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n,x \in Q, \ \omega \in \Omega_n \quad , n \geq 1).$$

$TabQ(\Omega')$ se dobija kada se svaki element ω u prethodnoj jednakosti, zameni sa $\omega' \in \Omega'$.

(f) Minimalnu kongruenciju na G_1, generisanu sa $\sim_\varepsilon, \sim_Q, \sim_\bullet, \sim_\Omega$, označićemo sa $\sim$.

Na osnovu prethodno uvedenih pojmova dokazujemo ovakvo tvrđenje:

<u>Lema 7</u> Neka je α jedna od relacija $\sim_\varepsilon$, $\sim_\bullet$, $\sim_Q$, $\sim_\Omega$ i β jedna od relacija $\sim_\varepsilon$, $\sim_\bullet$, $\sim_\Omega$. Onda važi ovakva implikacija

$$(\forall u \in G_\Omega \wedge u\alpha v) \Rightarrow (\exists v' \in G_\Omega)(v\beta v').$$

<u>Dokaz.</u> Razlikovanje četiri slučaja

$$1.\ u \sim_\varepsilon v, \quad 2.\ u \sim_\bullet v, \quad 3.\ u \sim_Q v, \quad 4.\ u \sim_\Omega v.$$

1. U slučaju $u \sim_\varepsilon v$, term v' je baš u, jer (prema (E)), svaki term može biti predstavljen sa $\bullet$ (ako takva reprezentacija postoji), i odatle, na jedinstven način sa operacijama iz Ω' .

2. Neka su $x_1,x_2,\ldots,x_n \in Q$ i $u \in G_\Omega$ ima oblik

$$u = u(\ldots x_1x_2\ldots x_n\omega\ldots).$$

Ako podterm od od u: $x_1x_2\ldots x_n\omega$ zamenimo sa x, uz uslov $x_1x_2\ldots x_n\omega = x$, novodobijeni term je element iz G_Ω . Slično, ako u termu $u=u(\ldots x\ldots)$ podterm x zamenimo termom $x_1x_2\ldots x_n\omega$; to će term $u(\ldots x_1x_2\ldots x_n\omega\ldots)$ biti element u G_Ω. Kako se $\sim_Q$ može definisati u konačnom broju ovakvih zamena, to je tačna ova implikacija

$$(u \in G_\Omega \wedge u \sim_Q v) \Rightarrow v \in G_\Omega .$$

3. U slučaju $u \sim_\bullet v$,(prema definiciji operacije $\bullet$), zaključujemo da je v' jednako sa u. Isto važi i u slučaju $u \sim_\Omega v$.

(i) U slučajevima $u \sim_\varepsilon v$, $u \sim_\bullet v$, $u \sim_\Omega v$, (za $u \in G_\Omega$), jednoznačno određen element v' je baš u.

Dokaz teoreme 15. Najpre, dokazujemo da je prirodno preslikavanje

$$f : x \to \bar{x}$$

izomorfizam ($\bar{x}$ je odgovarajuća klasa ekvivalencije za $x \in Q$).

Neka je $\bar{x} = \bar{y}$ $(x,y \in Q)$ i $\bar{x},\bar{y}$ su klase u odnosu na relaciju $\sim$.
Prema definiciji relacije $\sim$ postoji prirodan broj n i elementi

$$u_1, u_2, \ldots, u_n; \quad u_1 = x, \quad y = u_n \quad (u_i \in G_1),$$

takvi da su tačne ovakve relacije:

$$u_i \sim_2 u_{i+1} \text{ ili } u_i \sim_Q u_{i+1} \text{ ili } u_i \sim_{\bullet} u_{i+1} \text{ ili } u_i \sim_{\Omega} u_{i+1}, \quad (i=1,2,\ldots,n-1).$$

Definišemo preslikavanje φ na ovaj način:

(j) $\varphi(x) \overset{def}{=} x$, $(x \in Q)$;

(jj) Ako je $\omega' \in \Omega'_{(0)}$, $\varphi(\omega') \overset{def}{=} \omega$,

(jjj) Ako je $\omega' \in \Omega'_n$ $(n=1,2,\ldots)$ i $t_1, t_2, \ldots, t_n \in D_\Omega$, onda

$$\varphi(t_1 t_2 \ldots t_n \omega') \overset{def}{=} \varphi(t_1)\varphi(t_2)\ldots\varphi(t_n)\,\omega,$$

(jV) Ako je $t \in D$ i postoji $t' \in D\Omega$ tako da Σ $(\ast)$, $Def(\bullet)$, $Def(\Omega') \vdash t = t'$,
onda je

$$\varphi(t) \overset{def}{=} \varphi(t').$$

Prema definiciji preslikavanja φ uslovi (j)-(jV) su uslovi homomorfizma.
Da je (jV) tačno sleduje prema (i').

Preslikavanjem φ niz elemenata $u_1, u_2, \ldots, u_n$ preslikava se u niz elemenata algebre $Q(\Omega)$:

(ii) $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$,

Ako važi jedan od uslova: $u_i \sim_2 u_{i+1}$, $u_i \sim_{\bullet} u_{i+1}$, $u_i \sim_Q u_{i+1}$, $u_i \sim_{\Omega} u_{i+1}$
onda (po lemi 7) tačna je ova jednakost

$$\varphi(u_i) = \varphi(u_{i+1}) \quad \text{u} \quad Q(\Omega).$$

Zaključak prethodnog je

$$x = \varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \ldots = \varphi(u_n) = y,$$

odakle sleduje $x = y$. Time je dokazano ovo

$$\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow x = y,$$

tj. preslikavanje $f : x \to \bar{x}$ jeste 1-1 preslikavanje.

Neka je

$$\tilde{G} = G_1|\sim \qquad \bar{x}\bar{y}\,\tilde{*} \overset{def}{=} \overline{xy*}\ .$$

Očigledno da je $\bar{\mathcal{G}} \overset{def}{=} (\bar{G}, \tilde{*})$ grupoid koji zadovoljava iste zakone Σ (*) što i $\mathcal{G} = (G_1; *)$.

Neka je $\bar{Q} \overset{def}{=} \{\bar{x} \mid x \in Q\}$

U skupu $\bar{Q}$ definisana je operacija $\bar{\omega}$ za svako $\omega \in \Omega_n$ na ovaj način:

$$\bar{\omega} = \omega' \qquad (\omega \in \Omega_0),$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n\bar{\omega} \overset{def}{=} \overline{x_1x_2\ldots x_n\omega'} \quad (\omega \in \Omega_n,\ n \geq 1)$$

Algebra $\bar{Q}(\Omega)$ je tražena algebra izomorfna sa $Q(\Omega)$. Izomorfizam je prirodno preslikavanje

$$f : Q \rightarrow \bar{Q}$$

Time je teorema u potpunosti dokazana.

III DEO

1. POTAPANJE OPERACIJSKO-RELACIJSKIH STRUKTURA

Navodimo sada jednu opštu teoremu Marice D. Prešić o potapanju modela, odnosno operacijsko-relacijskih struktura ([12]).

Teorema 16 Neka su L_1, L_2 jezici I reda i $\mathcal{F}$ izvestan neprotivurečan skup predikatskih formula jezika L_2. Svaki model $\mathcal{M}_1$ jezika L_1 može se potopiti u neki model $\mathcal{M}_2$ skupa formula $\mathcal{F}$ i to tako da su operacije i relacije iz $\mathcal{M}_1$ prikazane termima i formulama na jeziku L_2 pomoću ovog 1-1 i na preslikavanja:

$$f : \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \ldots & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \\ T_1 & T_2 \ldots & A_1 & A_2 \ldots \end{pmatrix}$$

($T_1, T_2, \ldots$ su termi odgovarajućih dužina jezika L_2 a $A_1, A_2, \ldots$ su formule istog jezika takođe odgovarajućih dužina),

ako i samo ako svaka formula F jezika L_2 koja je izraziva pomoću T_1, T_2, $\ldots$, $A_1, A_2, \ldots$ zadovoljava uslov:

$$\mathcal{F} \vdash F \rightarrow \models f^{-1}(F)$$

pri tome se $f^{-1}(F)$ dobija iz F zamenom terma $T_1, T_2, \ldots$ i formula $A_1, A_2, \ldots$ odgovarajućim operacijskim i relacijskim znacima na osnovu preslikavanja f, odnosno na osnovu f^{-1}.

Kako jedan slučaj te teoreme može se dokazati ovo:

Potopiti relacijsku strukturu (S, β), $S = \{a, b\}$,

β	a	b
a	T	T
b	⊥	T

u strukturu jezika $\{\alpha, *\}$, gde je α relacijski simbol dužine 1 koji zadovoljava aksiomu

$(*)$ $(\forall x, y)(\alpha(x*y) \Rightarrow \alpha(y*x))$.

Zatim, dajemo rešenje opšteg slučaja:

Svaka relacijska struktura se može potopiti u operacijsko-relacijsku strukturu jezika $\{\alpha, *\}$, gde je α relacijski simbol dužine 1 koji zadovoljava aksiomu $(*)$.

Najpre, dajemo rešenje postavljenog problema:

Relacijsku strukturu (S,β), u slučaju $S=\{a,b\}$

β	a	b
a	$\top$	$\top$
b	$\perp$	$\top$

potopiti u strukturu jezika $\{\alpha,*\}$ koja zadovoljava aksiomu

$(*)\quad (\forall x,y)(\ \alpha(x*y)\Rightarrow\alpha(y*x)).$

Rešenje

Relaciju β ćemo definisati pomoću relacije(unarne) α na ovaj način:

$(1)\quad \beta(x,y)\overset{def}{\Longleftrightarrow}\alpha(((\bar\beta*x)*y)*((\bar\beta*x)*y))\quad$ ($\bar\beta$ je pomoćni znak konstante).

Tada se aksioma $(*)$ prevodi na slučaj rešavanja, tj. traženja modela ovih iskaznih formula:

$$(2)\begin{cases}\alpha(a*a)\Rightarrow\alpha(a*a),\ \alpha(a*b)\Rightarrow\alpha(b*a),\ \alpha(a*(a*b))\Rightarrow\alpha((a*b)*a),\ldots,\ \alpha(a*t)\Rightarrow\alpha(t*a),\ldots\\ \alpha(b*a)\Rightarrow\alpha(a*b),\ \alpha(b*b)\Rightarrow\alpha(b*b),\ \alpha(b*(a*b))\Rightarrow\alpha((a*b)*b),\ldots,\ \alpha(b*t)\Rightarrow\alpha(t*b),\ldots\\ \alpha(\bar\beta*a)\Rightarrow\alpha(a*\bar\beta),\ \alpha(\bar\beta*b)\Rightarrow\alpha(b*\bar\beta),\ \alpha(\bar\beta*(a*b))\Rightarrow\alpha((a*b)*\bar\beta),\ldots,\alpha(\bar\beta*t)\Rightarrow\alpha(t*\bar\beta),\ldots\\ - \\ \alpha(((\bar\beta*a)*a)*a)\Rightarrow\alpha(a*((\bar\beta*a)*a)),\ldots,\alpha(((\bar\beta*a)*a)*((\bar\beta*a)*a))\Rightarrow\alpha(((\bar\beta*a)*a)*((\bar\beta*a)*a)),\ldots\end{cases}$$

\- -

Očigledno na dijagonali tog skupa iskaznih formula nalaze se formule oblika

$\alpha(t*t)\Rightarrow\alpha(t*t)$ koje su tautologije. Otuda sva iskazna slova:

$\alpha(a*a),\quad \alpha(b*b),\quad \alpha(((\bar\beta*a)*a)*((\bar\beta*a)*a)),\quad \alpha(((\bar\beta*a)*b)*((\bar\beta*a)*b)),\ \ldots\ldots,$

$\alpha(((\bar\beta*b)*a)*((\bar\beta*b)*a)),\quad \alpha(((\bar\beta*b)*b)*((\bar\beta*b)*b)),\ldots..$

Uopšte, slova oblika $\alpha(t*t)$ mogu imati proizvoljnu istinitosnu vrednost.

Međutim, slova

$\alpha(((\bar\beta*a)*a)*((\bar\beta*a)*a)),\quad \alpha(((\bar\beta*a)*b)*((\bar\beta*a)*b)),$

$\alpha(((\bar\beta*b)*a)*((\bar\beta*b)*a)),\quad \alpha(((\bar\beta*b)*b)*((\bar\beta*b)*b))$

su u saglasnosti sa relacijom β , tj. ta slova imaju ove istinitosne vred nosti:

$\tau\alpha(((\bar\beta*a)*a)*((\bar\beta*a)*a))\ =\top,\ \tau\alpha(((\bar\beta*a)*b)*((\bar\beta*a)*b))\ =\top,$

$\tau\alpha(((\bar\beta*b)*a)*((\bar\beta*b)*a))\ =\perp,\ \tau\alpha(((\bar\beta*b)*b)*((\bar\beta*b)*b))\ =\top.$

Istinitosne vrednosti ostalih slova: $\alpha(a*a),\ \ \alpha(a*b),\ \ \alpha(a*(a*a)),\ldots.$

dobijamo rešavanjem sistema (2), tj. određivanjem bar jednog modela tog sistema. Očigledno, jedna mogućnost je da sva ta slova imaju istinitosnu vrednost T, druga da imaju vrednost $\perp$, itd. Jedno rešenje je dato tablicom:

$\alpha(a*a)$	$\alpha(b*b)$	$\alpha(((\bar\beta*a)*a)*((\bar\beta*a)*a))$	$\alpha(((\bar\beta*a)*b)*((\bar\beta*a)*b))$
T	T	T	T

(nastavak) $\alpha(((\bar\beta*b)*a)*((\bar\beta*b)*a))$	$\alpha(((\bar\beta*b)*b)*((\bar\beta*b)*b))$.......	
$\perp$	T	sva ostala $\perp$

Tom iskaznom rešenju odgovara relacija α dužine 1 (na skupu svih terma obrazovanih od $a,b,\bar\beta,*$)

	$a*a$	$b*b$	$(((\bar\beta*a)*a)*((\bar\beta*a)*a))$	$(((\bar\beta*a)*b)*((\bar\beta*a)*b))$
α	T	T	T	T

(nastavak)	$(((\bar\beta*b)*a)*((\bar\beta*b)*a))$	$(((\bar\beta*b)*b)*((\bar\beta*b)*b))$	
	$\perp$	T	ostalo $\perp$

Na osnovu izloženog, ako se relacija β uvede definicijom (1), onda restrikcija te relacije na skup $\{a,b\}$ ima tablicu

β	a	b
a	T	T
b	$\perp$	T

što je i trebalo uraditi.

Međutim, proširivanjem skupa $S=\{a,b\}$ (dodavanjem proizvoljnog broja elemenata) i zadržavanjem ovih relacija

$\tau\alpha(((\bar\beta*a)*a)*((\bar\beta*a)*a)) = T,$

$\tau\alpha(((\bar\beta*a)*b)*((\bar\beta*a)*b)) = T,$

$\tau\alpha(((\bar\beta*b)*a)*((\bar\beta*b)*a)) = \perp,$

$\tau\alpha(((\bar\beta*b)*b)*((\bar\beta*b)*b)) = T,$

mogu se dobiti tročlani, četvoročlani,... modeli sistema iskaznih formula (2).

Ovde dajemo rešenje opšteg slučaja:

Dokazati da se svaka relacijska struktura može potopiti u operacijsko-relacijsku strukturu jezika $\{\alpha, *\}$, α zadovoljava aksiomu

$(*)\ (\forall x,y)(\alpha(x*y) \Rightarrow \alpha(y*x))$.

<u>Rešenje</u>

Neka je data relacijska struktura $(S; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ (β_i su relacijski simboli dužine n_i; S konačan skup).

Neka je, zatim, $S \subseteq T$ ($T; *, \alpha$) je operacijsko-relacijska struktura koja zadovoljava aksiomu $(*)$).

Uvodimo pomoćne simbole konstanata $\bar{\beta}_i$ za svaki relacijski simbol β_i.

Relacije β_i (i=1,2,...) uvodimo ovom definicijom

$$(1')\quad \beta_i(x_1, x_2, \dots, x_{n_i}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \alpha(\dots(\bar{\beta}_i * x_1) * x_2) * \dots * x_{n_i}) * (\dots(\bar{\beta}_i * x_1) * x_2) * \dots * x_{n_i})).$$

Aksioma $(*)$ se sada svodi na određivanje bar jednog modela ovog sistema iskaznih formula:

$$(2')\left\{\begin{array}{l}
\underline{\alpha(x_1 * x_1) \Rightarrow \alpha(x_1 * x_1)},\ \alpha(x_1 * x_2) \Rightarrow \alpha(x_2 * x_1), \dots, \alpha(x_1 * \bar{\beta}_1) \Rightarrow \alpha(\bar{\beta}_1 * x_1), \dots,\ \text{(nasta-}\\
\text{vak)}\ \alpha(x_1 * \bar{\beta}_2) \Rightarrow \alpha(\bar{\beta}_2 * x_1), \dots, \alpha(x_1 * t) \Rightarrow \alpha(t * x_1), \dots \\
\alpha(x_2 * x_1) \Rightarrow \alpha(x_1 * x_2),\ \underline{\alpha(x_2 * x_2) \Rightarrow \alpha(x_2 * x_2)}, \dots, \alpha(x_2 * \bar{\beta}_1) \Rightarrow \alpha(\bar{\beta}_1 * x_2), \dots \text{(nastavak)}. \\
\alpha(x_2 * \bar{\beta}_2) \Rightarrow \alpha(\bar{\beta}_2 * x_2), \dots, \alpha(x_2 * t) \Rightarrow \alpha(t * x_2), \dots \\
- \\
\alpha(\bar{\beta}_1 * x_1) \Rightarrow \alpha(x_1 * \bar{\beta}_1),\ \alpha(\bar{\beta}_1 * x_2) \Rightarrow \alpha(x_2 * \bar{\beta}_1), \dots, \alpha((\bar{\beta}_1 * x_1) * x_2) \Rightarrow \alpha(x_2 * (\bar{\beta}_1 * x_1)), \\
\dots,\ \underline{\alpha(\dots(\bar{\beta}_1 * x_1) * x_2) * \dots * x_{n_1}) * (\dots(\bar{\beta}_1 * x_1) * x_2) * \dots * x_{n_1}))}, \dots \\
- \\
\alpha(\bar{\beta}_m * x_1) \Rightarrow \alpha(x_1 * \bar{\beta}_m),\ \alpha(\bar{\beta}_m * x_2) \Rightarrow \alpha(x_2 * \bar{\beta}_m), \dots, \alpha((\bar{\beta}_m * x_1) * x_2) \Rightarrow \alpha(x_2 * (\bar{\beta}_m * x_1)), \\
\dots,\ \underline{\alpha(\dots(\bar{\beta}_m * x_1) * x_2) * \dots * x_{n_m}) * (\dots(\bar{\beta}_m * x_1) * x_2) * \dots * x_{n_m}))}, \dots
\end{array}\right.$$

Očigledno, na dijagonali sistema iskaznih formula (2') nalaze se formule (podvučene) oblika $\alpha(t*t) \Rightarrow \alpha(t*t)$ koje su tautologije (t je term obrazovan od $x_1, x_2, \dots, \bar{\beta}_i$, $*$).

Otuda iskazna slova oblika $\alpha(t*t)$ mogu imati proizvoljnu istinitosnu vrednost. Međutim, iskazna slova

$\alpha(\ldots(\bar\beta_1 * x_1) * x_2) * \ldots * x_{n_1}) * (\ldots(\bar\beta_1 * x_1) * x_2) * \ldots * x_{n_1})),$

$\alpha(\ldots(\bar\beta_2 * x_1) * x_2) * \ldots * x_{n_2}) * (\ldots(\bar\beta_2 * x_1) * x_2) * \ldots * x_{n_2})),$

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

$\alpha(\ldots(\bar\beta_m * x_1) * x_2) * \ldots * x_{n_m}) * (\ldots(\bar\beta_m * x_1) * x_2) * \ldots * x_{n_m}))$

su u saglasnosti sa relacijama β_i $(i=1,2,\ldots)$. Jedan iskazni model sistema iskaznih formula (2') prikazan je tablicom:

$\alpha(\ldots(\bar\beta_1 * x_1) * \ldots * x_{n_1}) * (\ldots(\bar\beta_1 * x_1) * \ldots * x_{n_1}))$	$\alpha(\ldots(\bar\beta_2 * x_1) * \ldots * x_{n_2}) * (\ldots(\bar\beta_2 * x_1) * \ldots * x_{n_2})$
$\tau\beta_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$	$\tau\beta_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2})$

(nastavak) $\alpha(\ldots(\bar\beta_m * x_1) * \ldots * x_{n_m}) * (\ldots(\bar\beta_m * x_1) * \ldots * x_{n_m}))$	....
.... $\tau\beta_m(x_1, x_2, \ldots, x_{n_m})$	ostalo $\perp$

Tom iskaznom modelu odgovara relacija α dužine 1 (nad skupom svih terma obrazovanih od $x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar\beta_1, \ldots, \bar\beta_m$ $*$)

	$(\ldots(\bar\beta_1 * x_1) * \ldots * x_{n_1}) * (\ldots(\bar\beta_1 * x_1) * \ldots * x_{n_1}))$	$(\ldots(\bar\beta_2 * x_1) * \ldots * x_{n_2}) * (\ldots(\bar\beta_2 * x_1) * \ldots * x_{n_2})$
α	$\tau\beta_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$	$\tau\beta_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2})$

(nastavak) $(\ldots(\bar\beta_m * x_1) * \ldots * x_{n_m}) * (\ldots(\bar\beta_m * x_1) * \ldots * x_{n_m}))$	....
... $\tau\beta_m(x_1, x_2, \ldots, x_{n_m})$	ostala $\perp$

Očigledno, ako se relacije β_i uvedu definicijom (1'), onda restrikcije tih relacija na skup S daju tablice relacija β_i.

Uvođenje pomoćnih konstanti $\bar\beta_i$ za svaki relacijski simbol β_i je neophodno.

Dokažimo to na ovakvom primeru:

Neka je data relacijska strukrura $(S; r, \mu)$, pri čemu je $S=\{a,b\}$, r relacijski simbol dužine 2, μ je relacijski simbol dužine 1, prikazane tablicama

r	a	b
a	T	$\perp$
b	T	$\perp$

	a	b
μ	T	T

Potopimo strukturu $(S; r, \mu)$ u operacijsko-relacijsku strukturu jezika $\{\alpha, *\}$ koja zadovoljava aksiomu $(\forall x,y)(\alpha(x*y)\Rightarrow\alpha(y*x))$.

Rešenje problema se svodi na određivanje modela ovog skupa iskaznih formula:

$\alpha(a*a)\Rightarrow\alpha(a*a)$, $\alpha(a*b)\Rightarrow\alpha(b*a)$, $\alpha((a*a)*b)\Rightarrow\alpha(b*(a*a))$, ..., $\alpha(a*t)\Rightarrow\alpha(t*a)$, ...

$\alpha(b*a)\Rightarrow\alpha(a*b)$, $\alpha(b*b)\Rightarrow\alpha(b*b)$, $\alpha((b*a)*a)\Rightarrow\alpha(a*(b*a))$, ..., $\alpha(b*t)\Rightarrow\alpha(t*b)$, ...

— —

$\alpha((a*(a*a))*((a*a)*a))\Rightarrow\alpha(((a*a)*a)*(a*(a*a)))$, ..., $\alpha((a*a)*(a*a))\Rightarrow\alpha((a*a)*(a*a))$, ..., $\alpha((a*b)*(a*b))\Rightarrow\alpha((a*b)*(a*b))$, $\alpha((b*a)*(b*a))\Rightarrow\alpha((b*a)*(b*a))$, ..., $\alpha((b*b)*(b*b))\Rightarrow\alpha((b*b)*(b*b))$, ...

Očigledno da su na dijagonali iskazne formule oblika $\alpha(t*t)\Rightarrow\alpha(t*t)$, koje su tautologije. Otuda sva iskazna slova oblika $\alpha(t*t)$ mogu imati proizvoljnu istinitosnu vrednost. Kako su slova: $\alpha((a*a)*(a*a))$, $\alpha((a*b)*(a*b))$, $\alpha((b*b)*(b*b))$,
u skladu sa relacijom r, odnosno μ, koje su uvedene (kao i u prethodnom slučaju) sa

$$r(x,y)\overset{def}{\Longleftrightarrow}\alpha((x*y)*(x*y)), \qquad \mu(x)\overset{def}{\Longleftrightarrow}\alpha((x*x)*(x*x)).$$

Kako je $\tau r(b*b)=\perp$, $\tau\mu(b)=\top$, to sada dolazi do mešanja tih relacija, jer je $\tau r(b*b)=\tau\alpha((b*b)*(b*b))=\tau\mu(b)$, tj. $\top=\perp$, što je kontradikcija. Time je dokazana neophodnost uvođenja pomoćnih (različitih) konstanata za svaki relacijski simbol.

Na strani 57 određen je jedan model iskaznih formula $(2')$. Taj se model može proširiti do modela sistema $(2')$ sa domenom $T\supseteq S$.

Najpre, dajemo definiciju proširenja jedne operacijsko-relacijske strukture.

<u>Definicija 14</u> Proširenje jednog modela (tj. matematičke strukture) M jeste druga struktura M' uz ove uslove:

a) Domen A' za M' jeste nadskup domena A za M;

b) Svaka relacija r strukture M jeste relacija i strukture M';

c) Svaka n-arna operacija strukture M jeste restrikcija odgovarajuće operacije strukture M' sa A' na A.

Zatim dajemo jedan rezultat ([8]):

Teorema 17 Neka je M' proširenje za M, ako M sadrži sve zatvorene univerzalne formule jezika $\{\alpha, *\}$ onda ih i M' sadrži.

Dakle, model sistema iskaznih formula $(2')$ možemo proširiti na ovaj način.

Uzimamo proizvoljni skup $T \supseteq S$, jezik $L \supseteq \{\alpha, *\}$. U novoj strukturi M' jezika L i domena T zadržimo i dalje ove relacije:

$$\tau\alpha((\ldots(\bar{\beta}_i * x_1) * \ldots * x_{n_i}) * (\ldots(\bar{\beta}_i * x_1) * \ldots * x_{n_i})) = \tau\beta_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}).$$

Ostala iskazna slova imaju proizvoljnu istinitosnu vrednost, recimo sva iskazna slova su T, odnosno $(\perp)$.

LITERATURA

[1] C.C. Chang, H. Keisler, Model Theory,North-Holland,Amsterdam,1973.

[2] P.M. Cohn, Universal Algebra (ruski prevod),Harper and Row,London,1965.

[3] G. Čupona, B. Trpenovski, Predavanja po algebra, knjiga II, Skopje, 1973.

[4] G. Čupona, Za asocijativnite kongruencii, Skopje, 1962.

[5] G. Čupona, Subalgebras of semigrups, Skopje, 1968.

[6] V. Devide, Matematička logika I, Mat. institut, Beograd, 1964.

[7] G. Gratzer, Universal Algebra, Van Nostrand, Princeton, 1968.

[8] G. Kreisel, J.L. Krivine, Elements of Mathematical Logic:Model Theory, Nort Holland, Amsterdam, 1967.

[9] A.G. Kuroš, Lekcii po obščej algebre, Moskva, 1962.

[10] E. Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, Van Nostrand, 1964.

[11] Marica D. Prešić, On the embedding of universal algebras in grupoids holding the law $xy{*}zu{*}{*} = xz{*}yu{*}{*}$,Mat, vesnik, 5(1968), 353-356.

[12] Marica D. Prešić, Potapanje modela (neobjavljeno).

[13] Marica i Slaviša Prešić, On the embedding of Ω-algebras in grupoids (comunicated august, 1975).

[14] Marica i Slaviša Prešić, Uvod u matematičku logiku (teorija i zadaci), Matematički institut, Beograd, 1979.

[15] Slaviša B. Prešić, Elementi matematičke logike, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1968.

[16] J. Shoenfield, Mathematical Logic, Addison-Wesley,Publishing Company, 1967.