УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Мастер рад

Анализа ризика у животном осигурању

Ментор:

др Павле Младеновић

Студент:

Марија Радичевић, 1019/2014

Београд, октобар 2015.

Садржај

1 Увод

Осигурање је праведан пренос ризика од губитка са једне особе на другу уз новчану надокнаду. Оно представља механизам који омогућава појединицима и организацијама да се заштите од могућих економских губитака.

Несрећни случајеви се често дешавају и узрок су великих опасности за човека. Због тога је још у првобитној људској заједници уочена потреба за заштитом чланова, као и имовине. "Осигурање представља удруживање оних који су изложени истим опасностима са циљем да заједнички покрију штету која ће задесити неке од њих."[4]

Да би постојало осигурање мора да постоји присуство ризика. Ако постоји ризик, онда постоји и економска потреба да се он покрије путем осигурања. Ризик се дефинише као неизвесност у погледу остваривања неког будућег догађаја. Неизвесност представља одсуство сигурности, убеђености, и то је субјективна категорија. Са друге стране, ризик је објективна категорија јер готово све што се дешава носи неки ризик. Ризици чије је остваривање извесно или чије је остваривање немогуће предвидети се не осигуравају. Због тога, потенцијални ризик мора карактерисати извесна вероватноћа наступања, израчуната на основу података о реализацији посматраног догађаја у прошлости.[3]

Осигурањем се на посредан начин чува имовина надокнађивањем штете или исплаћује осигурана сума када наступи осигурани случај. Оно не спречава да се догоди штетни догађај, већ обезбеђује заштиту ако до догађаја дође. Дакле, примарни задатак осигурања је да када наступи осигурани случај исплати осигуранику или некој трећој особи накнаду или уговорену суму. Због тога, осигуравачи на основу теорије вероватноће треба да одреде цену ризика како би из наплаћених премија могли да покрију насталу штету и унапред створе средства за то.

Околности које доводе до економског губитка имају случајан карактер, односно не може се предвидети када и на који начин ће доћи до њих. Појам осигурања није везан само за осигурање живота или имовине. Он обухвата осигурање од могућег ризика у различитим сферама људске делатности.[6] Због тога постоје бројни типови осигурања. Осигурање се може поделити према природи ризика, предмету осигурања, начину настанка осигурања, начину организовања, броју осигураника и начину изравњања ризика. Најважнија подела за овај рад је према предмету осигурања и тада се осигурање дели на:

- животно осигурање,
- неживотно осигурање.

Животно осигурање је најзначајнији облик осигурања у развијеним земљама, јер средства осигурања омогућавају дугорочне инвестиције и на тај начин поспешују привредни развој земље. С обзиром да се уплате и исплате код овог типа осигурања временски не подударају то омогућава стварање финансијске резерве. Та средства се најчешће улажу у акције, обвезнице и друге вредносне папире,чиме осигуравајуће компаније постају један од најзначајнијих учесника на финансијском тржишту.[4]

У овом раду ће бити речи првенствено о животном осигурању. Прво ће бити уведени основни појмови осигурања и објашњен појам ризика. Након тога ће бити објашњено животно осигурање и његови основни облици. Пошто ризик првенствено утиче на величину премије осигурања, биће објашњено како се рачуна премија у зависности од врсте животног осигурања.

2 Основни појмови у осигурању

У овом поглављу ће бити речи о осигурању, његовој дефиницији, основним појмовима који се користе у осигурању, лицима који се појављују у осигурању, као и документацији. Детаљније су о овоме писали Кочовић, Шулејић, Ракоњац-Антић[3].

Осигурање у најширем смислу представља заштиту имовинских интереса физичких и правних лица приликом реализације ризика, односно наступања осигураног случаја, на рачун фондова осигурања формираних наплатом премија од тих лица.

Зависно од начина на који се посматра, осигурање се може дефинисати на више начина. Са правног аспекта осигурање се бави правима и обавезама уговорних страна. Са економског аспекта осигурање је посао на основу кога се осигуравач обавезује да за одређени износ осигуранику исплати накнаду штете када наступи осигурани случај. А са техничког аспекта, осигурање је математичко-статистичка категорија којом се ризик распоређује на мноштво осигураника тако што се групише према различитим опасностима, при томе је различита вероватноћа наступања штетног догађаја код различитих осигураних објеката и лица.

Дакле, модерно осигурање има научну основу. Актуарска математика представља примену математике и статистике у процени ризика у осигурању, финансијама и другим областима. Актуар је особа која је квалификована у овој области путем учења и искуства. Актуарска математика укључује многе науке као што су вероватноћа, статистика, финансије, економија, програмирање и слично. Развој актуарске математике је поспешен развојем и доступношћу рачунара, јер су уз помоћ њих многи значајни проблеми нумеричких прорачуна олакшани. Самим тим, разматрања се не морају односити само на очекиване вредности већ се могу проширити на дисперзију чиме се процењује ризик у правом смислу. Актуарска математика се дели на актуарску математику личног осигурања и актуарску математику имовинског осигурања.

2.1 Осигурани случај

Осигурани случај је догађај који представља остваривање ризика који је обухваћен осигурањем. Док ризик представља опасност да ће се десити неки штетан догађај али не и тај догађај, осигурани случај је реализација ризика. Не постоји јединствени осигурани случај за све врсте осигурања. Као и ризик и осигурани случај је различит за сваку врсту осигурања. Због тога се осигурани случај одређује у полиси осигурања или у општим условима осигурања.

Условима осигурања мора се унапред предвидети осигурани случај. Он мора да се деси у одређено време, односно у време трајања осигурања. Осигуравач сноси последице догађаја који је почео да се остварује у време трајања осигурања све док догађај траје, без обзира да ли је у међувремену осигурање истекло. За осигурани случај битно је и место остваривања догађаја и оно се предвиђа у уговору.

Приликом реализовања неког ризика који је покривен осигурањем може доћи до многих последица. Међутим, нису све последице осигурани догађаји и неће за све њих бити исплаћена накнада. Накнада се исплаћује само за последице које су предвиђене уговором.

Када дође до осигураног догађаја осигураник је обавезан да пријави штету и да покуша да је умањи.

2.2 Основна лица у осигурању

Осигуравач је особа или компанија која продаје осигурање. Односно, то је страна у уговору која за одређену цену преузима обавезу заштите осигураника од ризика и у случају остваривања ризика има обавезу да исплати накнаду из осигурања. Осигуравачи су специјализоване организације. Оне акумулирају уплаћене премије, обезбеђују резерве у виду фондова и исплаћују надокнаду приликом остваривања осигураног случаја.

Осигураник је особа која купује полису осигурања. Односно, он се обавезује да ће плаћати одређену цену, а за узврат ће добити накнаду из осигурања ако дође до осигураног случаја.

Уговарач осигурања је особа која закључује уговор о осигурању у корист трећег лица и обавезује се да плаћа премију.

Корисник осигурања је особа која добија накнаду ако дође до осигураног случаја, а притом није закључила уговор о осигурању и не плаћа премију.

Осигурано лице је она особа у чијем животу треба да дође до осигураног случаја да би се исплатила накнада из осигурања

2.3 Премија осигурања

Премија осигурања представља цену услуге коју осигуравач пружа осигуранику. Она је битан елемент осигурања и представља новчана средства за обнову оштећене имовине или исплату осигуране суме. Висина премије пре свега зависи од трошкова осигурања које има осигуравач. Најважније трошкове осигурања представљају надокнаде уништених вредности. Осигуравајућа компанија сваке године треба да покрије одређени број штета које су настале на осигураним објектима или да исплати одређени број осигураних сума. Средства за то се добијају из уплата премија од стране осигураника. По правилу, премија се плаћа унапред како би осигуравач био у стању да без одлагања обезбеди средства потребна за обнову имовине.

Са становишта осигураника премија је сума новца коју он уплаћује као цену осигурања. Док је са становишта осигуравача премија износ који се добија као накнада за услуге осигурања и састоји се из нето премије и режијског дела. Нето премију чине техничка премија и додатак за превентиву. Техничка премија служи за покривање штете код неживотног осигурања, односно исплату осигуране суме код животног осигурања. Додатак за превентиву служи за образовање фонда који служи за спречавање или смањење штете. Режијски додатак служи да покрије трошкове пословања осигуравајуће компаније.

Код животног осигурања, техничка премија се дели на ризико премију и штедну премију. Ризик је све већи како године осигураника расту и због тога би са порастом година требала да расте и премија осигурања. Међутим, премија се формулише тако да се плаћа просечна вредност. У првим годинама премија је већа него што би требала да буде, а наплаћена разлика се користи да се покрије ризик у будућим годинама. Тако настаје штедна премија и она служи за исплату осигуране суме у годинама које следе.

Премија постоји само код премијског осигурања и оно се по томе разликује од других врста осигурања. На пример, код узајамног осигурања доприноси чланова заједнице осигурања се одређују када је познат износ штете за сваког члана заједнице.

2.4 Најважнија документа у осигурању

Полиса осигурања је писмена исправа која је у вези са осигурањем и она одређује дужности и обавезе учесника. У неким случајевима полиса представља облик уговора о осигурању, а када то није, онда је писани доказ о склапању осигурања пошто садржи све основне податке о закљученом уговору. Уговор о осигурању ствара обавезе за обе уговорне стране, јер се осигураник обавезује да плаћа премију осигурања, а осигуравач да сноси последице остварења ризика. Основни елементи полисе осигурања су: предмет осигурања, уговорне стране, ризик обухваћен осигурањем, трајање осигурања и време покрића, датум издавања полисе, као и потписи уговорних страна.

Лист покрића је писмена исправа која се издаје када нема довољно елемената да се изда полиса. У том случају осигураник добија заштиту из осигурања и пре издавања полисе, а осигуравач добија премије такође пре издавања полисе.

Цертификат осигурања је скраћени облик полисе осигурања који садржи основне податке о условима осигурања.

Потврда о склапању уговора је писмени доказ којим се потврђује да је уговор о осигурању склопљен.

3 Ризик

Као што је раније речено, ризик је неизвесност у погледу остваривања неког будућег догађаја. Ризик постоји увек када постоји могућност варирања исхода неке акције. Реч ризик има више значења, у зависности са ког аспекта се посматра. Када се ради о спровођењу неке акције представља постојање околности које имају негативан утицај на постизање циљева или реализацију активности. Дакле, он представља само опасност да ће наступити неки штетан догађај, а не и сам тај догађај. Са аспекта науке, ризик представља вероватноћу наступања неког штетног догађаја и он постоји ако је вероватноћа тог догађаја између 0 и 1.

Узроци ризика се могу поделити на физичке и моралне. Физички узроци ризика су, на пример, нежељене природне појаве, док су морални узроци ризика намерна изазивања несрећних догађаја.[6] Уколико учесници у осигурању намерно проузрокују реализацију ризика, онда ризик престаје да буде обавеза осигуравача. Међутим, немогуће је у потпуности уклонити утицај човека на реализацију ризика. Због тога се захтева да не сме постојати узрочна веза између корисника осигурања и настале штете.

У теорији вероватноће, статистици и теорији инвестирања се ризик често користи као показатељ одступања исхода неког догађаја од његове очекиване вредности и тада се као његова мера користи дисперзија. У осталим случајевима, ризик је очекивана вредност неког исхода.

Да би ризик могао да се осигура он мора да задовољи следеће услове[6,3]:

- мора постојати могућност настанка догађаја, односно реализације ризика;
- мора да постоји неизвесност настанка догађаја, не може се осигурати сигуран догађај или догађај чије је остваривање у току;
- мора да постоји довољно велика и хомогена група осигураника за сличан тип ризика у прошлости како би била могућа статистичка анализа;
- разлози који доводе до ризика морају бити случајни и не смеју доводити до губитака код великог броја осигураника одједном;
- ризик треба да буде такав да доводи до довољно великог губитка, како би имало смисла да се осигура;
- вероватноћа да дође до реализације штетног догађаја треба да буде довољно мала.

За теорију ризика веома је битан интензитет или степен ризика. Догађај са већом вероватноћом губитка је ризичнији. Ако два исхода имају исту вероватноћу ризичнији је онај чији је потенцијални губитак већи. Осигуравајуће компаније на основу вероватноће реализовања одређених догађаја у прошлости и могућих одступања стварних губитака у односу на те вероватноће, користећи статистичке расподеле, утврђују интервал поверења у којем ће се кретати број неповољних исхода.

Ризик се може посматрати са становишта осигураника или са становишта осигуравача. Када се посматра са становишта осигураника, пре свега се посматра заштита од остварења ризика. Са становишта осигуравача, говори се о самој делатности осигурања. Када постоји велики број ризика, долази се до питања да ли осигуравач може да покрије штету ако настане осигурани случај. Због тога су развијене различите методе процене ризика и заштите од њега.[11]

Актуар има задатак да на основу анализе података из прошлости развије моделе и процени постојећи ризик за будуће догађаје. Обрачун премије је основни задатак актуара. Премија се обрачунава тако да обезбеди: покриће очекиваних одштета и осигураних сума у току периода осигурања, формирање адекватних резерви, покриће трошкова спровођења осигурања и одређени ниво профита. Актуарски ризици су следећи[11]:

- ризик непоузданости модела и података: обухвата ризик да ће услед погрешно изабране статистичке расподеле која апроксимира ток штета очекивана вредност штета бити погрешно утврђена;
- ризик катастрофалних догађаја: негативно утиче на реалност премије осигурања, ове штете су обично мале фреквенције и високог интензитета и могу значајно деформисати расподелу штета на основу које се врши обрачун премије осигурања;
- ризик промене законских прописа;
- ризик одобравања неоправданих попуста на премију: представља ризик да ће запослени у осигуравајућој компанији, да би задржали клијенте, одобрити високе попусте који смањују премију.

Да би се путем премије обезбедила средства за покривање свих трошкова осигуравача, неопходна је тачност актуарских прорачуна.

Дакле, премија директно зависи од величине ризика. Са друге стране, величина ризика зависи од многих чинилаца, као што су: врста опасности, предмет осигурања, вредност предмета осигурања, дужина трајања осигурања, место на коме се налази предмет осигурања. Све претходно наведено има улогу у одређивању премије осигурања, па што је већи ризик то је већа и премија осигурања.

У наставку ће бити речи искључиво о животном осигурању и рачунању премије осигурања у зависности од врсте животног осигурања.

4 Животно осигурање

Животно осигурање је свако осигурање код кога је осигуравач обавезан да исплати осигуранику или неком трећем лицу суму осигурања или ренту у случају смрти осигураника или у случају доживљења одређеног броја година. За узврат осигураник је дужан да уплаћује премије.

Главне карактеристике животног осигурања, самим тим и карактеристике које га разликују од неживотног осигурања, су[3]:

- ризик обухваћен осигурањем се остварује на осигураном лицу и не може се изразити кроз материјалну вредност, па се ни штета не може изразити на тај начин;
- циљ животног осигурања није накнада штете проузроковане осигураним случајем, већ исплата осигуране суме;
- код овог типа осигурања не постоји материјални интерес.

Већ је речено да је циљ животног осигурања исплата осигуране суме, самим тим осигурана сума је важан појам код овог типа осигурања. Сума осигурања је новчани износ који се исплаћује осигуранику ако наступи осигурани случај. Њена вредност се уноси у полису осигурања или се уговором о осигурању предвиђа начин њеног утврђивања када наступи осигурани случај. Код животног осигурања чешће се користи израз осигурана сума, а има исто значење као сума осигурања код неживотног осигурања. Осигурана сума одређује обим осигуравачеве обавезе и на њу немају утицаја појединости као што су: висина штете, вредност предмета осигурања и слично. Због свега наведеног, висина премије се одређује само на основу осигуране суме. Осигураник није у обавези да докаже штету или њену висину када наступи осигурани случај да би му била исплаћена осигурана сума. Дакле, можемо закључити да се код животног осигурања губици не могу реално надокнадити, али се могу ублажити последице наступања осигураног случаја исплатом материјалне надокнаде.

Код животног осигурања, осигуравач није у обавези да исплати осигурану суму ако смрт осигураника наступи услед: ратних догађаја, извршења смртне казне под судском пресудом, извршења кривичног дела за које је предвиђена затворска казна или тежа казна, као и када је осигураникова смрт намерно проузрокована од стране корисника осигурања.[4]

Животно осигурање се може поделити на основу следећих критеријума (Кочовић, 2010):

I према начину закључивања уговора:

- са лекарским прегледом
- без лекарског прегледа

II према броју лица који су обухваћени уговором:

- индивидуална
- групна

III према ризику обухваћеном осигурањем:

- за случај смрти
- за случај доживљења
- мешовито осигурање

IV према начину исплате осигуране суме:

- осигурање капитала
- осигурање ренте

V према томе кога обезбеђује осигураник:

- лично
- осигурање у корист трећег лица

Најзначајнија је подела према ризику обухваћеном осигурањем. Осигурања за случај смрти се могу поделити према томе да ли се сума осигурања исплаћује на крају године смрти[1] или одмах након смрти. У пракси се чешће врши исплата одмах након смрти, али је вредност премије знатно лакше израчунати за осигурања која се исплаћују на крају године смрти.

Претходне поделе се пре свега односе на осигурања која имају фиксну осигурану суму. Са друге стране, постоје осигурања код којих осигурана сума није фиксирана већ се мења. Код њих се најчешће примењују другачије поделе. Она се пре свега деле на растућа и опадајућа, али се могу поделити и према томе када се врши исплата, односно да ли се осигурана сума исплаћује на крају године смрти или одмах након смрти. Прорачуни код промењљивих осигурања су знатно компликованији.

Дакле, пошто се ризик у овом случају не може изразити материјалним вредностима, већ се исплаћује фиксирана осигурана сума, ризик осигуравача представља надокнада те суме у случају реализације ризика. Због тога је битно да осигуравач обезбеди средства за исплату осигуране суме. Та средства се обезбеђују наплатом премије. Може се закључити да када се говори о ризику животног осигурања најзначајније је одређивање премије јер она осликава ризик. О различитим врстама осигурања, како са фиксном тако и са промењљивом осигураном сумом, и рачунању премија ће бити речи у следећим поглављима.

[1]Под крајем године смрти се подразумева годишњица потписивања уговора у години у којој је смрт наступила.

5 Техничка основа животног осигурања

Актуарска математика је у тесној вези са многим наукама, пре свега са финансијском математиком и вероватноћом. Са финансијском математиком јој је заједничко то што се обе заснивају на рачунању вредности новца. Принцип еквиваленције, односно једнакост садашњих вредности свих уплата и свих исплата, је важан принцип у обе наведене области математике. Разлика између финансијске и актуарске математике личног осигурања је у томе што су прорачуни финансијске математике независни од живота и старости лица, док прорачуни актуарске математике личног осигурања зависе од старости лица.

Код прорачуна животног осигурања јавља се непозната величина која представља тренутак смрти осигураника и значајно их компликује. Међутим, закон великих бројева[2] упрошћава рад са овом непознатом величином. Захваљујући њему, што је број осигурања већи и трајање осигурања дуже то је остваривање одређеног случаја равномерније и ближе очекиваном. Због тога, када постоји велики број осигураних лица, већа је могућност тачног одређивања осигураних случајева као и потребних средстава за њихово покривање. Да би се прецизно одредила премија осигурања још је само потребно одредити вероватноћу наступања штетних догађаја код различитих осигураних лица. То се ради на основу искуства из прошлости, уз незнатна кориговања да би се добила боља процена. Већ је раније речено да што је вероватноћа наступања штетног догађаја већа то је и премија већа, а што је вероватноћа мања то је и премија мања.

У наставку ће бити изложени основни појмови у вези са финансијком математиком (Јанковић, 2015.) који су битни за животно осигурање, као модел који се користи за процену преостале дужине живота и други начини за израчунавање преостале дужине живота (Слијепчевић, 2012.).

5.1 Каматне стопе и плаћање дуга

Произвољан скуп финансијских трансакција, уговора или планова се назива ток новца. Токове новца чине уређени парови реалних бројева где је први члан време, а други износ. Зависно од знака вредности која представља износ, разликују се уплате и исплате. Случајни ток новца је низ дводимензионих случајних вектора дефинисаних на истом простору вероватноћа.

Камата је накнада коју једна особа плаћа другој особи као надокнаду за коришћење капитала и изражава временску промену вредности новца[9]. Камаћење се најчешће врши у дискретним временским тренуцима. За основну временску јединицу се обично узима година. Камата се исплаћује на крају фиксираног периода.

Разликујемо дискретно и непрекидно обрачунавање камате. Дискретно

[2]Видети детаљније у: Павле Младеновић; *Вероватноћа и статистика*; Математички факултет, Београд 2008.; 171-174.

камаћење се може поделити на просто и сложено. Код простог камаћења новац уложен на одређени период, различит од годину дана, накупи камату која је пропорционална времену трајања инвестирања. Односно, ако је уложено A јединица при каматној стопи i, онда после интервала времена дужине t (мереног у годинама) на рачуну се налази $A(1+ti)$ јединица. Код сложеног камаћења које се обрачунава годишње, после прве године се зарађена камата додаје главници и на основу тог износа се добија главница за следећу годину. После t година износ A ће нарасти до $A(1+i)^t$, где је i годишња каматна стопа. Просту каматну стопу која би произвела исти резултат као и сложена камата на годину дана називамо ефективном каматном стопом, а основну каматну стопу називамо номиналном каматном стопом.

Сложена каматна стопа може имати произвољан период обрачунавања. Најчешће се година подели на m једнаких периода, а за сваки појединачни период је камата $\frac{i^{(m)}}{m}$, где је $i^{(m)}$ годишња каматна стопа. У том случају се ефективна каматна стопа i може добити из једначине

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m. \tag{1}$$

Ако се година подели на велики број периода, односно ако је m велико, онда се одговарајуће камаћење назива непрекидно камаћење. Тада се ефективна каматна стопа i добија из израза

$$1+i=\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m=e^r, \tag{2}$$

где је $r=\lim\limits_{m\to+\infty} i^{(m)}$. На основу претходног могу се наћи каматне стопе за интервал произвољне дужине t (мерено у годинама). Подели се година на m периода дужине $\frac{1}{m}$ и нека је $t\approx\frac{k}{m}$, за неко k. Када је m довољно велико постиже се задовољавајућа тачност. Из опште формуле за сложено обрачунавање камате добија се:

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^k=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}\to e^{rt},\ \text{кад}\ m\to+\infty. \tag{3}$$

Претходни начини обрачунавања камате претпостављају да је она фиксирана. Претпоставимо да каматна стопа, која се непрекидно обрачунава, може да се мења током времена. Нека је $r(t), t\geq 0$, тренутна каматна стопа у тренутку t и нека је $G(t)$ сума која ће се накупити на рачуну у тренутку t ако се уложи једна јединица у тренутку 0. Тада важи

$$G(s+h)\approx G(s)(1+hr(s)), \tag{4}$$

где је h довољно мало, односно

$$\frac{G(s+h)-G(s)}{h}\approx G(s)r(s). \tag{5}$$

Када се пређе на лимес када $h \to 0$ и интеграли на интервалу $[0, t]$, добија се

$$\int_0^t \frac{G'(s)}{G(s)} ds = \int_0^t r(s) ds. \tag{6}$$

Пошто је $G(0) = 1$, решавањем последње једначине добија се

$$G(t) = e^{\int_0^t r(s) ds}. \tag{7}$$

Дакле, $G(t)$ је сума која се накупи на рачуну у тренутку t ако се у тренутку 0 уложи једна јединица.

До сада је рачуната вредност појединачних токова новца у будућности. Може се израчунати вредност појединачног тока новца у почетном тренутку ако се зна коју ће он вредност имати у будућности. Ако се зна да ће се кроз годину дана добити износ A, при важећој каматној стопи i, онда је његова садашња вредност $\frac{A}{1+i}$. Дакле, садашња вредност будуће суме је мања од те будуће суме и каже се да се будућа сума дисконтује или умањује да би се добила садашња вредност. Фактор за који се будућа сума умањује назива се дисконтни фактор или каматна стопа унапред. Дискотни фактор за једну годину је

$$v = \frac{1}{1+i}, \tag{8}$$

где је i годишња каматна стопа. Ако је у питању сложена камата која се обрачунава m пута годишње онда је дисконтни фактор за један период

$$v^{(m)} = \frac{1}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}. \tag{9}$$

Код сложеног непрекидног камаћења дисконтни фактор је

$$v = e^{-r}, \tag{10}$$

где је r дефинисано као у формули (2), а код променљивих каматних стопа

$$v = e^{-\int_0^t r(s) ds}. \tag{11}$$

Сва претходна разматрања се могу пренети и на токове новца који имају више елемената. Размотримо ток новца $(x_0, x_1, ..., x_n)$, где x_i-ови могу бити позитивни, негативни или нула. При каматној стопи i за сваки од n периода, укупна вредност тока новца после n периода је:

$$FV = \sum_{k=0}^{n} x_k (1+i)^{n-k}. \tag{12}$$

Садашња вредност овог тока новца ће бити:

$$PV = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=0}^{n} x_k \upsilon^k. \tag{13}$$

Ако се сложено камаћење врши m пута годишње са годишњом каматном стопом $i^{(m)}$, онда ће будућа и садашња вредност претходног тока бити

$$FV = \sum_{k=0}^{n} x_k \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{n-k}, \tag{14}$$

$$PV = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^k} = \sum_{k=0}^{n} x_k \left(\upsilon^{(m)}\right)^k. \tag{15}$$

Ако се каматна стопа обрачунава непрекидно, онда су формуле за будућу и садашњу вредност за ток $(x(t_0), x(t_1), ..., x(t_n))$ једнаке

$$FV = \sum_{k=0}^{n} x_{t_k} e^{r(t_n - t_k)}, \tag{16}$$

$$PV = \sum_{k=0}^{n} x_{t_k} e^{-rt_k} = \sum_{k=0}^{n} x_{t_k} \upsilon^{t_k}. \tag{17}$$

Два тока новца имају исту вредност ако су им садашње вредности једнаке и сматрамо их еквивалентним[3]. Ток новца се може трансформисати на разне начине, али тако да му садашња вредност остане иста.

Посматрајмо ток новца $(x_1, x_2, ..., x_n)$ који чине и уплате и исплате у тренуцима $\tau_k, k = 1, 2, ..., n$. За такав ток новца, унутрашња стопа добити је она вредност за каматну стопу за коју је садашња вредност тока једнака нули, односно ако постоји решење r_0 израза

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-r\tau_k} x_k = 0 \tag{18}$$

онда се вредност $i = e^{r_0} - 1$ назива унутрашња стопа добити. Дакле, унутрашња стопа добити је одређена само новчаним током.

Нека је S вредност дуга у почетном тренутку који се отплаћује на крају година $k = 1, 2, ..., n$ износима $s_1, s_2, ..., s_n$. Тада је S садашња вредност уплата

$$S = vs_1 + v^2 s_2 + \ldots + v^n s_n. \tag{19}$$

Нека је S_k износ који је преостао да се плати након уплате s_k, тада важи

$$S_k = (1+i)S_{k-1} - s_k, k = 1, \cdots, n. \tag{20}$$

[3]Видети детаљније у: Слободанка Јанковић; *Елементи финансијске математике*; Београд, 2015.

Вредност уплате у тренутку k је дакле

$$s_k = iS_{k-1} + (S_{k-1} - S_k), \tag{21}$$

односно састоји се из камате на текући дуг и смањење главнице. Из претходног се добија да важи

$$S_k = (1+i)^k S - \sum_{h=1}^{k} (1+i)^{k-h} s_h. \tag{22}$$

На сличан начин се може добити и формула

$$S_k = vs_{k+1} + v^2 s_{k+2} + \cdots + v^{n-k} s_n. \tag{23}$$

Из претходног видимо да се дуг може отплатити на различите начине. На пример, могу се уплаћивати константни износи или се може отплаћивати само камата а на крају да се отплати главница. Треба само водити рачуна да садашња вредност тока остане непромењена.

Напомена. Сва претходна разматрања се односе на идеалну банку која даје исте камате на улоге и позајмице и не наплаћује трошкове трансакција.

5.2 Модел преостале дужине живота

Основни проблем код животног осигурања је одређивање полисе осигурања. Ако бисмо знали када ће особа умрети, полиса би могла да се одреди на основу резултата финансијске математике. Међутим, пошто је број преосталих година живота непознат, величина полисе се мора одредити уз помоћ теорије вероватноће. О времену смрти једне особе не можемо рећи ништа одређено, али ако посматрамо велику групу људи исте старости онда се трајање живота може посматрати као случајна величина. У том случају може се одредити вероватноћа смрти или доживљења у посматраној групи људи.

Претпоставимо да је особа која жели да уплати осигурање у животном добу x, односно у садашњем тренутку она има x година, што се означава са (x). Дужина трајања живота случајно одабране особе се посматра као непрекидна случајна величина са вредностима $[0, +\infty)$. Нека је $T = T(x)$ преостала дужина живота те особе. Тада је T случајна величина са функцијом расподеле:

$$F(t) = P\{T \leq t\}, t \geq 0. \tag{24}$$

У актуарству се користе нешто другачије ознаке него у теорији вероватноће. Па се претходна вероватноћа, односно вероватноћа да ће особа која има x година умрети за највише t година, где је t фиксирано, означава са

$$_tq_x = F(t), \tag{25}$$

Поред функције $F(t)$ значајна је и функција доживљења која се рачуна на следећи начин:

$$\bar{F}(t) = P\{T > t\} = 1 - F(t) = {}_tp_x, t \geq 0, \tag{26}$$

и представља вероватноћу да ће особа живети бар још t година. Пошто је T непрекидна случајна величина, следи да има густину: $f(t) = F'(t) = -\bar{F}'(t)$. Тада је

$$f(t)dt = P\{t < T < t + dt\}, \tag{27}$$

вероватноћа да ће смрт наступити у довољно малом интервалу од t до $t+dt$, односно да ће за особу која има x година смрт наступити када буде имала између $x+t$ и $x+t+dt$ година.

Јасно је да важи

$$_{s|t}q_x = P\{s < T < s + t\} = F(s+t) - F(s) = {_{s+t}q_x} - {_sq_x}, \tag{28}$$

односно да се на основу претходне једначине добија вероватноћа да ће особа која има x година преживети s година и умрети пре него што прође још t година. Ако је $t = 1$, обично се изоставља у ознакама и пише се q_x, p_x, односно $_{s|}q_x$.

Једначине које се често користе су

$$_tp_{x+s} = P\{T > s + t | T > s\} = \frac{1 - F(s+t)}{1 - F(s)}, \tag{29}$$

$$_tq_{x+s} = P\{T \leq s + t | T > s\} = \frac{F(s+t) - F(s)}{1 - F(s)}, \tag{30}$$

$$_{s+t}p_x = 1 - F(s+t) = [1 - F(s)]\frac{1 - F(s+t)}{1 - F(s)} = {_sp_x}{_tp_{x+s}}, \tag{31}$$

$$_{s|t}q_x = F(s+t) - F(s) = [1 - F(s)]\frac{F(s+t) - F(s)}{1 - F(s)} = {_sp_x}{_tq_{x+s}}. \tag{32}$$

Очекивано преостало време живота особе која има x године у садашњем тренутку, $E(T)$, се означава са $\mathring{e}_x$ и важи да је:

$$\mathring{e}_x = \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt = \int_0^{+\infty} {_tp_x}dt. \tag{33}$$

Уведимо појам интензитета смртности у тренутку $x+t$ особе која има x година у садашњем тренутку. Он је дефинисан са:

$$\mu_{x+t} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = -\frac{d}{dt}\ln(\bar{F}(t)) = -\frac{d}{dt}\ln({_tp_x}). \tag{34}$$

Интеграљењем претходне једначине добија се:

$$_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}, \tag{35}$$

односно,

$$f(t) = \mu_{x+t}\bar{F}(t) = \mu_{x+t}e^{-\int\limits_0^t \mu_{x+s}ds}. \tag{36}$$

Сада вероватноћу да ће смрт наступити у довољно малом интервалу од t до $t + dt$ можемо добити на следећи начин:

$$P\{t < T < t + dt\} = {}_tp_x\mu_{x+t}dt. \tag{37}$$

Док се очекивано преостало време живота особе која у садашњем тренутку има x година може израчунати на следећи начин:

$$\mathring{e}_x = \int\limits_0^{+\infty} t_tp_x\mu_{x+t}dt. \tag{38}$$

За довољно мало s може се користити апроксимација:

$${}_sq_{x+t} \approx \mu_{x+t}s. \tag{39}$$

Често је корисно наћи аналитички израз за функцију расподеле F, јер се тада расподела може одредити уз помоћ процене малог броја параметара. Неки примери аналитичких функција су дати у наставку и сви носе имена по научницима који су их смислили:

- **Де Моавреов** *(Abraham de Moivre)* **закон (1724)**: Претпоставља се да је ω максималан број година за људска бића, а да је T униформно расподељена случајна величина на интервалу $(0, \omega - x)$, па је $f(t) = \frac{1}{\omega - x}$ за $0 < t < \omega - x$. Интензитет смртности је тада:

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}, 0 < t < \omega - x, \tag{40}$$

  што је растућа функција од t.

- **Гомперцов** *(Benjamin Gompertz)* **закон (1824)**: Претпоставља се да интензитет смртности расте експоненцијално, односно

$$\mu_{x+t} = Bc^{x+t}, t > 0. \tag{41}$$

- **Мејкхемов** *(William Matthews Makeham)* **закон (1860)**: Представља генерализацију (41) и важи да је

$$\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}, t > 0. \tag{42}$$

  Ако се уведе ознака $m = \frac{B}{\ln c}$, добија се да је

$${}_tp_x = \exp\left(-At - mc^x(c^t - 1)\right). \tag{43}$$

- **Вејбулов** *(Ernst Hjalmar Waloddi Weibull)* **закон (1939)**: Претпоставља се да је интензитет смртности

$$\mu_{x+t} = k(x+t)^n, \tag{44}$$

са фиксним параметрима $k > 0$ и $n > 0$. Па важи да је

$${}_tp_x = \exp\left(-\frac{k}{n+1}\left[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}\right]\right). \tag{45}$$

Ако је $n = 0$, расподела вероватноћа постаје експоненцијална расподела. Међутим, ова расподела не осликава људску смртност на реалан начин.

- **Мејкхемов** II **закон (1889)**: Претпоставља се да је интензитет смртности

$$\mu_{x+t} = A + H(x+t) + Bc^{x+t}, t > 0. \tag{46}$$

Како се многи токови новца одвијају у дискретним временским тренуцима понекад је корисно дужину живота представити као дискретну случајну величину. Због тога се уводи случајна величина $K = K(x)$ која се дефинише као: $K = [T]$, односно број завршених будућих година живота или целобројна преостала дужина живота особе која у садашњем тренутку има x година. На пример, ако T има експоненцијалну $\varepsilon(\lambda)$ расподелу, онда K има геометријску расподелу са параметром $1-e^{-\lambda}$. Расподела вероватноћа случајне промењљиве K дата је са:

$$P\{K = k\} = P\{k \leq T < k+1\} = {}_kp_xq_{x+k} \tag{47}$$

за $k = 0, 1, ...$ Очекивана вредност од K је:

$$e_x = \sum_{k=1}^{+\infty} kP\{K = k\} = \sum_{k=1}^{+\infty} k{}_kp_xq_{x+k} \tag{48}$$

или

$$e_x = \sum_{k=1}^{+\infty} P\{K \geq k\} = \sum_{k=1}^{+\infty} {}_kp_x. \tag{49}$$

Може се увести још једна случајна величина, S, која представља фракцију (преостали део) године током које је особа, која у почетном тренутку има x година, жива у години смрти, односно: $T = K + S$. Очигледно је да је S непрекидна случајна величина и да узима вредности из интервала $[0, 1)$. Често се њено очекивање апроксимира са $\frac{1}{2}$, па се добија да је

$$\mathring{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}, \tag{50}$$

што преставља очекивану преосталу дужину живота особе која у почетном тренутку има x година и често се користи у пракси.

Претпоставимо да су K и S независне случајне величине. Тада условна расподела од S, при услову $K = k$, не зависи од K, према томе

$$P\{S \leq u | K = k\} = \frac{{}_u q_{x+k}}{q_{x+k}} \tag{51}$$

не зависи од аргумента k, па се може писати

$${}_u q_{x+k} = H(u) q_{x+k} \tag{52}$$

за $k = 0, 1, ..., 0 \leq u < 1$ и неку функцију $H(u)$.

За позитивне целе бројеве m дефинише се и случајна променљива $S^{(m)}$ која се добија из променљиве S на следећи начин:

$$S^{(m)} = \frac{1}{m}[mS + 1]. \tag{53}$$

Расподела од $S^{(m)}$ узима вредности $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, ..., 1$.

5.3 Таблице смртности

Ако се поседује довољно квалитетних емпиријских података о закону смртности, онда параметарски модел није неопходан. Тада се закон расподеле може изразити уз помоћ таблица смртности. Таблице смртности, између осталог, показују вероватноћу да особа одређених година умре пре њеног или његовог следећег рођендана[4]. То су, у ствари, таблице са вероватноћама смрти q_x за једну годину. Поред ове вероватноће, таблице садрже и вероватноћу доживљења, број живих и број умрлих у оквиру одређеног скупа, као и кумулативне вредности које служе за израчунавање нето премија у животном осигурању.

Таблице смртности постоје још од давнина. Постоје подаци да је у старом Риму, у трећем веку пре нове ере, држава скупљала и сређивала статистике у вези са животом и смрти користећи шему сличну таблицама смртности. Међутим, први научни подаци о таблицама смртности потичу од Гранта[5] и астронома Халиа[6]. Данас, постоје таблице смртности за различите државе и регионе, као и таблице са циљем да олакшају рад актуара у осигуравајућим компанијама и пензионим фондовима.

Два основна типа таблица смртности су периодичне таблице смртности и кохорт таблице смртности[7]. Периодичне таблице смртности приказују смртност целе популације кроз одређени кратак период времена, најчешће од једне

[4]Поред времена од једног до другог рођендана, за јединицу времена код одређивања вероватноће смрти може се узети период од дана када је осигурање закључено па до истог датума следеће године или се може узети календарска година.

[5]John Graunt, "Natural and political observations made up on the bills of mortality", 1662

[6]Edmond Halley, "An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind", 1693

[7]У литератури се још називају и таблицама конструисаним по индиректној и директној методи.

до три године. Кохорт (генерацијске) таблице смртности приказују смртност групе људи који су рођени у релативно кратком периоду времена (најчешће година дана) кроз цео животни век. Други тип таблица је редак, јер је потребно праћење података кроз дуг период времена. Помоћу њих се најчешће праве таблице дечије смртности. Због тога ћемо се у наставку бавити периодичним таблицама смртности.

Да би се формирала таблица смртности треба одредити вероватноћу смрти за сваку класу старости. Посматра се велика група људи одређене старости x и сваки њен члан током једне године, како би се утврдило колико чланова групе је у тој години умрло а колико преживело. Може се посматрати целокупно становништво једне земље или само осигурана лица у тој земљи, чиме настају опште таблице и таблице смртности осигураних лица. Вероватноће смрти се добијају као однос броја умрлих лица исте старости током посматране године и укупног броја лица који чине посматрану групу.

Поред година које се посматрају и вероватноће смрти, таблице смртности најчешће садрже и[4]:

- l_x број лица у популацији која су жива са x година,
- $d_x = l_x - l_{x+1}$ број лица која су умрла током $(x+1)-$ве године, односно број лица која су доживела $x-$ту годину али нису доживела $(x+1)-$ву,
- $D_x = v^x l_x$ број дисконтованих живих лица старих x година,
- $N_x = D_x + D_{x+1} + ... + D_\omega$ збир бројева дисконтованих живих лица почевши од лица старих x година до лица старих ω година,
- $S_x = N_x + N_{x+1} + ... + N_\omega$ збир збирова дисконтованих живих лица почев од старости x до старости ω коју доживи посматрана група лица,
- $C_x = v^{x+1} d_x$ број дисконтованих умрлих лица у току $(x+1)-$ве године,
- $M_x = C_x + C_{x+1} + ... + C_{\omega-1}$ збир бројева дисконтованих умрлих лица почевши од лица која су умрла током $(x+1)-$ве године,
- $R_x = M_x + M_{x+1} + ... + M_\omega$ збир збирова дисконтованих умрлих лица почев од оних који су умрли у $x+1$ година старости.

Дакле, из таблица се на једноставан начин могу добити следеће вероватноће[8]:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x}, \quad {}_k q_x = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x}, \quad {}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

5.3.1 Таблице смртности са одабиром

Таблице смртности се најчешће праве посебно за мушкарце и жене због различите стопе смртности, али се и друге карактеристике такође могу узети у обзир, као што су статус, занимање, социоекономска класа, као и почетне године x. Почетне године x имају значајан утицај у овим таблицама. На пример, нека x означава године када је особа купила животно осигурање. Осигурање се нуди особама доброг здравља, некада је чак и неопходно да особа прође медицинско испитивање. Тада је разумно очекивати да особа која је управо купила полису осигурања има боље здравље него особа која је купила полису пре неколико година, када су остали фактори једнаки. Ово се узима у обзир код таблица смртности са одабиром. Код њих су вероватноће нешто другачије него код обичних таблица смртности. Вероватноћа $q_{[x]+t}$ је вероватноћа да ће особа која сада има $x+t$ година умрети у следећих годину дана ако је полису купила када је имала x година и важе неједнакости:

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \dots \tag{54}$$

Након неког периода времена овакве особе имају исту вероватноћу смртности као и остатак популације. Означимо тај период са $r, r \in N$, и он се назива период одабира. Након периода r, користе се таблице које се називају крајњим или коначним таблицама смртности. Тада важи

$$q_{[x]+t} = q_{x+t}, t \geq r. \tag{55}$$

Таблице смртности које зависе само од година x, а не и популације, називају се групне (агрегиране) таблице смрности. Код њих су једногодишње вероватноће смрти за одређене године обично пондерисане средине одговарајућих вероватноћа у таблицама смртности са одабиром и коначним таблицама смртности.

5.3.2 Вероватноћа смрти у деловима године

Расподела случајне величине $K = [T]$ и вероватноће везане за ту случајну величину се могу одредити из таблица смртности. Таблице смртности дају дужине живота само у годинама, па се, на пример, може применити следећа једначина:

$${}_kp_x = p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+k-1}, k = 1, 2, 3, \dots. \tag{56}$$

Међутим, из таблица смртности се не може директно одредити расподела случајне величине T. Да би се одредила расподела те случајне величине уз помоћ таблица смртности може се применити интерполација уз неке додатне претпоставке везане за вероватноћу смртности, ${}_uq_x$, или интензитет смртности, μ_{x+u}, за $u \in (0, 1)$ (x је цео број). Најчешће претпоставке су:

а) Функција ${}_uq_x$ је линеарна функција од u, односно важи да је

$${}_uq_x = uq_x. \tag{57}$$

Одатле следи да је

$$\mu_{x+u} = \frac{q_x}{1 - uq_x}. \tag{58}$$

Односно K и S су независне, а S има униформну $U(0, 1)$ расподелу.

б) Интензитет смтности μ_{x+u} је константан и једнак $\mu_{x+\frac{1}{2}}$. Тада важи

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = -\ln p_x, \tag{59}$$

$$_u p_x = e^{-u\mu_{x+\frac{1}{2}}} = (p_x)^u, \tag{60}$$

а S, при услову $K = k$, има засечену експоненцијалну расподелу и та расподела зависи од k:

$$P\{S \leq u | K = k\} = \frac{1 - p_{x+k}^u}{1 - p_{x+k}}. \tag{61}$$

Дакле, S и K нису независне у овом случају.

ц) Функција $_{1-u}q_{x+u}$ је линеарна (Балдучи (*Gaetano Balducci*) претпоставка), односно

$$_{1-u}q_{x+u} = (1-u)q_x. \tag{62}$$

Одатле следи

$$_u p_x = \frac{p_x}{_{1-u}p_{x+u}} = \frac{1 - q_x}{1 - (1-u)q_x}, \tag{63}$$

и

$$\mu_{x+u} = \frac{q_x}{1 - (1-u)q_x}. \tag{64}$$

У овом случају је условна расподела од S, при услову $K = k$, дата са

$$P\{S \leq u | K = k\} = \frac{u}{1 - (1-u)q_{x+k}}. \tag{65}$$

Одатле се види да S и K нису независне случајне величине.

Ниједна од ове три претпоставке није у потпуности реалистична, јер интензитет смртности у сва три случаја има скокове. Занимљиво је да у последњем случају интензитет смртности опада између узастопних целобројних вредности.

Код формирања таблица смртности проблем је што промена броја чланова групе која се посматра не мора бити само услед смрти. Фактори који утичу на то су још и миграције (с обзиром да се таблице смртности најчешће праве за одређену државу), као и престанак осигуравања неког лица или почетак осигуравања неког лица (ако се таблице праве само за осигурана лица). Највећи степен слагања стварне смртности и смрности која се добија рачунским путем се добија када се узимају најскорије таблице и када су посматрана популација и популација на основу које је таблица прављења сличне.

У пракси осигуравачи, да би се заштитили од грешака у прорачунима, при закључивању уговора о осигурању за случај смрти користе старије таблице са већом смртношћу, чиме се повећава премија. Са друге стране, када се склапа уговор о осигурању за случај доживљења користе се новије таблице, јер ранија смрт осигураника и већа смртност нису штетне за осигуравача.

6 Основни типови животног осигурање

У следећа два поглавља ће бити речи о основним типовима животног осигурања и рачунању различитих врста премија код тих осигурања. Овом темом се посебно бавио Ханс У. Гербер чије је дело *"Life insurance Mathematics"*[2] намењено пре свега читаоцима који воле примењену математику и желе да се упознају са основним концептом животног осигурања. Детаљније о овој теми се може наћи и у заједничком делу Борерса, Гербера, Хикмана, Џоунса и Несбита[5], као и раду хрватског професора Слијепчевића[9].

Осигурана сума наведена у уговору о животном осигурању представља основу за обрачун премије. Време и сума која се уплаћује појединачним премијама могу бити функције случајне променљиве T, а такође и саме могу бити случајне променљиве.

Приликом обрачуна премије користи се принцип еквиваленције, односно изједначавају се садашње вредности обавезе осигураника и осигуравача. Означимо са Z садашњу вредност исплате осигуравача која се рачуна на основу фиксне камате i. Очекивана вредност исплате, $E(Z)$, одговара једнократној нето премији. Међутим, очекивање садашње вредности свих уплата не описује довољно добро ризик осигурања. Због тога је потребно боље познавати расподелу случајне величине Z. Ризик се најчешће мери преко дисперзије, али се значајне информације могу добити и посматрањем неких функција од Z.

Садашња вредност свих уплата зависи од врсте осигурања. Због тога ће у овом поглављу бити речи о основним типовима животног осигурања и њиховим основним карактеристикама: величини осигуране суме и једнократној нето премији. Премија не мора бити исплаћена као једнократна нето премија. Међутим, једнократна нето премија се најлакше рачуна од свих премија, па се она најчешће узима за приказ основних карактеристика.

Приликом прорачуна сматра се да је осигурана сума једнака 1, пошто је она фиксирана уговором. Да би се добили прорачуни за друге вредности осигуране суме потребно је добијене вредности помножити датом вредношћу.

6.1 Осигурање са исплатом осигуране суме на годишњицу закључивања уговора

6.1.1 Осигурање за случај смрти

Код осигурања за случај смрти наступање осигураног случаја везује се за моменат смрти осигураног лица. Може се уговорити на два начина: смрт представља осигурани случај у ма које време се остварио и тада је у питању доживотно осигурање или смрт представља осигурани случај само ако се догоди у одређеном периоду и тада је у питању привремено осигурање. У првом случају корисници осигурања ће добити исплату осигуране суме након смрти осигураног лица, док у другом случају осигурана сума се исплаћује само ако је смрт наступила у одређеном периоду, у супротном осигуравач није дужан да исплати осигурану суму а задржава уплаћене премије.

Доживотно осигурање предвиђа исплату кориснику осигурања одређене суме на крају године смрти, односно на годишњицу закључивања уговора у години смрти. Осигурана сума, односно сума која ће бити исплаћена, је фиксирана, док је време исплате $(K+1)$ случајно. Садашња вредност исплате је

$$Z = \upsilon^{K+1}. \tag{66}$$

Расподела случајне променљиве Z је у том случају

$$P\{Z = \upsilon^{k+1}\} = P\{K = k\} = P\{k \leq T < k+1\} = {}_kp_x q_{x+k}, k = 0, 1, 2, ... \tag{67}$$

док је једнократна нето премија

$$A_x = E(Z) = E\left(\upsilon^{K+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^{k+1}{}_kp_x q_{x+k}. \tag{68}$$

Величина A_x се може изразити преко величина које се јављају у таблицама смртности на следећи начин:

$$A_x = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^{x+k+1} d_{x+k}}{\upsilon^x l_x} =: \frac{M_x}{D_x}. \tag{69}$$

С обзиром да су вредности M_x и D_x често дате у таблицама, лако је израчунати једнократну нето премију у овом случају.

Дисперзија од Z се може израчунати на следећи начин

$$D(Z) = E(Z^2) - A_x^2, \tag{70}$$

где је

$$E(Z^2) = E\left(\upsilon^{2(K+1)}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^{2(k+1)}{}_kp_x q_{x+k}, \tag{71}$$

односно исти израз као у A_x само са двоструким интензитетом камате. Дакле, дисперзију није теже израчунати од једнократне нето премије.

Привремено осигурање са периодом од n година се још назива и осигурањем за случај смрти са дурацијом од n година. Исплата се врши на крају године смрти ако је смрт наступила унутар периода од n година. У овом случају важи:

$$Z = \begin{cases} \upsilon^{K+1}, & \text{за } K = 0, 1, ..., n-1; \\ 0, & \text{за } K = n, n+1, n+2, ... \end{cases} = \upsilon^{K+1} I\{K < n\}, \tag{72}$$

а једнократна нето премија је

$$A^1_{x:\overline{n}|} = E(Z) = E(\upsilon^{K+1} I\{K < n\}) = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^{k+1}{}_kp_x q_{x+k}. \tag{73}$$

Једнократна нето премија изражена уз помоћ вредности из таблице смртности добија се слично као у претходном случају и износи

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \tag{74}$$

Дисперзија случајне величине Z је

$$D(Z) = E(Z^2) - A_x^2, \tag{75}$$

где је

$$E(Z^2) = E\left(\upsilon^{2(K+1)} I\{K < n\}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^{2(k+1)} {}_kp_x q_{x+k}. \tag{76}$$

6.1.2 Осигурања за случај доживљења

Код осигурања за случај доживљења осигурани случај настаје када осигураник доживи одређени број година. Ако осигураник доживи унапред предвиђен број година, осигуравач је дужан да исплати осигурану суму. Овим се осигураник обезбеђује за старост. У случају да осигураник не доживи наведени број година, осигуравач није дужан да исплати осигурану суму, али је најчешће обезбеђен повраћај уложених средстава, односно уплаћених премија.

Размотримо осигурање за случај доживљења са дурацијом n година код којег се осигурана сума исплаћује на крају $n-$те године ако је осигураник и даље жив. Садашња вредност исплате је

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{за } K = 0, 1, ..., n-1; \\ \upsilon^n, & \text{за } K = n, n+1, n+2... \end{cases} = \upsilon^n I\{K \geq n\}. \tag{77}$$

Једнократна нето премија је тада

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = E(Z) = E(\upsilon^n I\{K \geq n\}) = \upsilon^n P\{K \geq n\} = \upsilon^n {}_np_x \tag{78}$$

или у функцији вредности из таблице смртности

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{\upsilon^n l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{79}$$

Дисперзија се у овом случају добија преко дисперзије Бернулијеве случајне променљиве, пошто се она јавља у изразу за Z, и износи:

$$D(Z) = \upsilon^{2n} {}_np_{xn} q_x. \tag{80}$$

6.1.3 Мешовито осигурање

Мешовито осигурање представља спој привременог осигурања и осигурања за случај доживљења. Сума осигурања се исплаћује без обзира да ли је осигураник умро или не. Уколико осигураник умре пре истека n година онда се осигурана сума исплаћује корисницима осигурања, у супротном, ако је осигураник жив након n година, осигурана сума се исплаћује њему. Ово је најповољнији вид осигурања за осигураника. Тада важи:

$$Z = \begin{cases} \upsilon^{K+1}, & \text{за } K = 0, 1, ..., n-1; \\ \upsilon^n, & \text{за } K = n, n+1, n+2, ... \end{cases} = \upsilon^{K+1} I\{K < n\} + \upsilon^n I\{K \geq n\} =: Z_1 + Z_2. \tag{81}$$

Једнократна нето премија за овакво осигурање је

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}} = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + \upsilon^n {}_n p_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{82}$$

Дисперзија случајне величине Z се може добити на следећи начин:

$$D(Z) = D(Z_1) + 2cov(Z_1, Z_2) + D(Z_2). \tag{83}$$

Производ $Z_1 Z_2$ је увек нула, па следи

$$cov(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = -A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}. \tag{84}$$

Дисперзија од Z је дата са

$$D(Z) = D(Z_1) + D(Z_2) - 2A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}. \tag{85}$$

Дакле, добијено је да је ризик продаје полисе мешовитог осигурања, мерен преко дисперзије, мањи у односу на ризик две одвојене полисе.

6.1.4 Одложено осигурање

Одложено доживотно осигурање је осигурање чија исплата почиње након m година. Уколико смрт наступи пре почетка предвиђеног времена исплате, односно за мање од m година од закључивања уговора, осигурана сума се не исплаћује. Садашња вредност исплате је

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{за } K = 0, 1, ..., m-1; \\ \upsilon^{K+1}, & \text{за } K = m, m+1, m+2, ... \end{cases} = \upsilon^{K+1} I\{K \geq m\}. \tag{86}$$

Једнократна нето премија је:

$${}_{m|}A_x = E(Z) = {}_m p_x \upsilon^m A_{x+m} = A_x - A^1_{x:\overline{m}|}. \tag{87}$$

Последњи израз следи из једнакости: $\upsilon^{K+1} I\{K \geq m\} = \upsilon^{K+1} - \upsilon^{K+1} I\{K < m\}$.

Дисперзија промењливе Z је

$$D(Z) = E(Z^2) - {}_{m|}A_x{}^2, \tag{88}$$

где је

$$Z^2 = v^{2(K+1)} I\{K \geq m\}. \tag{89}$$

По аналогији са доживотним осигурањем, могу се добити формуле и за друге типове одложеног осигурања.

6.2 Осигурање са исплатом осигуране суме у тренутку смрти

Ако се претпостави да се осигурана сума исплаћује на крају године смрти, онда потребне вредности могу да се директно процене из таблица смтности и таква осигурања се често називају дискретна. Међутим, у пракси се осигурана сума најчешће исплаћује у тренутку смрти осигураника (наравно, потребно је да протекне неко време због припреме документације), односно у време T и таква осигурања се често називају непрекидна. Тада је садашња вредност осигуране суме доживотног осигурања исплаћене у тренутку смрти једнака:

$$Z = v^T. \tag{90}$$

Једнократна нето премија се добија коришћењем расподеле случајне величине T и износи:

$$\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^{+\infty} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt. \tag{91}$$

Ова вредност се не може одредити директно из таблица без додатних претпоставки. Претпоставке које се најчешће користе су претпоставке из поглавља 5.3.2.

Претпоставимо да је случајна променљива T подељена на цео део и на разломљени део:

$$T = K + S = (K+1) - (1-S) \tag{92}$$

и да су K и S независне случајне величине, при чему S има униформну расподелу на интервалу $[0,1)$ (то је у ствари претпоставка а) из поглавља 5.3.2), тада:

$$E(v^{S-1}) = E\left((1+i)^{1-S}\right) = \int_0^1 (1+i)^u du = \frac{i}{\ln(i+1)} = \frac{i}{r}, \tag{93}$$

па због независности важи:

$$\bar{A}_x = E\left(v^{K+1}\right) E\left((1+i)^{1-S}\right) = \frac{i}{r} A_x. \tag{94}$$

Ако се користе исте претпоставке као у претходном случају, могу се добити сличне формуле које важе за привремено и мешовито осигурање са трајањем n година, као и одложено осигурање:

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{r} A^1_{x:\overline{n}|}, \tag{95}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{i}{r} A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = A_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{i}{r} - 1\right) A^1_{x:\overline{n}|}, \tag{96}$$

$$_{m|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|} = \frac{i}{r}(A_x - A^1_{x:\overline{m}|}). \tag{97}$$

Уместо случајне величине S можемо узети случајну величину $S^{(m)}$, односно можемо претпоставити да је особа умрла на крају $m-$тог дела године у којој је смрт наступила. Тада је $T = K + S^{(m)}$, а садашња вредност доживотног осигурања је:

$$Z = \upsilon^{K+S^{(m)}}. \tag{98}$$

Користећи претпоставке као у претходним случајевима добија се:

$$A_x^{(m)} = E\left(\upsilon^{K+1}\right) E\left((1+i)^{1-S^{(m)}}\right) = \frac{i}{i^{(m)}} A_x. \tag{99}$$

Ако се пусти да m тежи бесконачно, добија се једначина (94). Аналогне формуле важе за привремено, мешовито и одложено осигурање.

6.3 Променљиво животно осигурање

Код претходно поменутих врста осигурања претпостављено је да је осигурана сума фиксирана током трајања осигурања. Код променљивог типа животног осигурања осигурана сума се мења из године у годину. Поново се могу разликовати осигурања у зависности од тога да ли се осигурана сума исплаћује на крају године смрти или одмах након смрти.

6.3.1 Променљиво животно осигурање са исплатом осигуране суме на годишњицу закључивања уговора

Размотримо променљиво животно осигурање код којег се сума осигурања исплаћује на крају године смрти. Нека је $c_j \geq 0$ осигурана сума у $j-$тој години од почетка осигурања. У општем случају садашња вредност полисе је

$$Z = c_{K+1}\upsilon^{K+1}. \tag{100}$$

Моменти случајне величине Z се рачунају из формуле

$$E(Z^h) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+1}^h \upsilon^{h(k+1)} {}_kp_x q_{x+k}. \tag{101}$$

Овај тип осигурања може се представити као комбинација одложених доживотних осигурања са константним осигураним сумама. У том случају важи:

$$E(Z) = c_1 A_x + (c_2 - c_1)_{1|}A_x + (c_3 - c_2)_{2|}A_x + \cdots . \tag{102}$$

Ако осигурање покрива само n година, односно $c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = 0$, онда се може користити комбинација привремених осигурања за случај смрти која почињу одмах:

$$E(Z) = c_n A^1_{x:\overline{n}|} + (c_{n-1} - c_n) A^1_{x:\overline{n-1}|} + (c_{n-2} - c_{n-1}) A^1_{x:\overline{n-2}|} + \cdots . \qquad (103)$$

Изрази (102) и (103) су корисни за рачунање једнокране нето премије.

Размотримо основне подтипове овог осигурања:

- **Стандардно растуће осигурање за случај смрти:**
  Размотримо доживотно осигурање код кога је $c_j = j$. Садашња вредност полисе је
  $$Z = (K+1)v^{K+1}, \qquad (104)$$
  а једнократна нето премија је
  $$(IA)_x = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}. \qquad (105)$$
  Одговарајуће привремено осигурање са дурацијом n година има садашњу вредност
  $$Z = \begin{cases} (K+1)v^{K+1}, & \text{за } K = 0, 1, ..., n-1; \\ 0, & \text{за } K = n, n+1, n+2, ... \end{cases} = (K+1)v^{K+1} I\{K < n\}. \qquad (106)$$
  Њена једнократна нето премија се добија из (105) узимањем парцијалне суме првих n чланова. Из општих формула за очекивање код промењљивог осигурања добија се:
  $$\begin{aligned}(IA)^1_{x:\overline{n}|} &= A_x + {}_{1|}A_x + \cdots + {}_{n-1|}A_x - n\,{}_{n|}A_x \\ &= nA^1_{x:\overline{n}|} - A^1_{x:\overline{n-1}|} - A^1_{x:\overline{n-2}|} - \cdots - A^1_{x:\overline{1}|}.\end{aligned} \qquad (107)$$

- **Стандардно опадајуће привремено осигурање:**
  Стандардно опадајуће привремено осигурање са дурацијом n опада линеарно од n до 0, а садашња вредност полисе је:
  $$Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1}, & \text{за } K = 0, 1, ..., n-1; \\ 0, & \text{за } K = n, n+1, n+2, ... \end{cases} = (n-K)v^{K+1} I\{K < n\}. \qquad (108)$$
  Једнократна нето премија је
  $$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = A^1_{x:\overline{n}|} + A^1_{x:\overline{n-1}|} + A^1_{x:\overline{n-2}|} + \cdots + A^1_{x:\overline{1}|}. \qquad (109)$$
  Ово осигурање се најчешће користи код отплате дуга, јер неплаћени дуг такође опада линеарно.

6.3.2 Променљиво животно осигурање са исплатом осигуране суме у тренутку смрти

Ако се осигурана сума плаћа одмах након смрти, онда је сума осигурања задата произвољном функцијом $c : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Садашња вредност полисе је

$$Z = c(T)v^T, \tag{110}$$

а једнократна нето премија је

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} c(t)v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt. \tag{111}$$

Ако се случајна променљива T растави на збир целог дела и разломљеног дела године, добија се

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(Z|K=k\right) P\{K=k\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(c(k+S)v^{k+S}|K=k\right) P\{K=k\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(c(k+S)(1+i)^{1-S}|K=k\right) v^{k+1} P\{K=k\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}, \end{aligned} \tag{112}$$

где је

$$c_{k+1} = E\left(c(k+S)(1+i)^{1-S}|K=k\right). \tag{113}$$

За даље рачунање очекиване вредности потребне су додатне претпоставке.

На пример, претпоставља а) из поглавља 5.3.2 даје функцију

$$c_{k+1} = \int_0^1 c(k+u)(1+i)^{1-u} du, \tag{114}$$

а претпоставка б) из истог поглавља даје

$$c_{k+1} = \int_0^1 c(k+u)(1+i)^{1-u} \frac{\mu_{x+k+\frac{1}{2}} p_{x+k}^u}{1 - p_{x+k}} du. \tag{115}$$

Размотримо основне подтипове ове врсте осигурања (претпоставља се важење претпоставке а) из поглавља 5.3.2):

- **Стандардно растуће доживотно осигурање:**
Ако осигурана сума расте на годишњем нивоу, онда је $c(t) = [t+1]$. Садашња вредност полисе је
$$Z = (K+1)v^T. \tag{116}$$
Једнократна нето премија је
$$(I\bar{A})_x = E(Z) = E\left((K+1)v^{K+1}(1+i)^{1-S}\right) = \frac{i}{r}(IA)_x, \tag{117}$$
при чему је коришћена формула (93).

- **Стандардно растуће осигурање код кога сума осигурања расте m пута годишње:**
Претпоставимо да се осигурана сума повећава $m-$пута годишње за вредност $\frac{1}{m}$ код доживотног осигурања. Тада је садашња вредност полисе:
$$Z = (K+S^{(m)})v^T = (K+1)v^T - v^T + S^{(m)}(1+i)^{1-S}v^{K+1}. \tag{118}$$
Да би се одредила једнократна нето премија користи се независност и једначина:
$$E[S^{(m)}(1+i)^{1-S}] = \frac{i-d^{(m)}}{d^{(m)}r}, \tag{119}$$
где је $d^{(m)} = i^{(m)}v^{(m)}$. Па је једнократна нето премија:
$$(I^{(m)}\bar{A})_x = (I\bar{A})_x - \bar{A}_x + \frac{i-d^{(m)}}{d^{(m)}r}A_x = \frac{i}{r}(IA)_x - \frac{i}{r}A_x + \frac{i-d^{(m)}}{d^{(m)}r}A_x. \tag{120}$$

- **Осигурање са непрекидном растућом осигураном сумом:**
Размотримо доживотно осигурање код кога је $c(t) = t$. Садашња вредност полисе је:
$$Z = Tv^T \tag{121}$$
а једнократна нето премија
$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{r}(IA)_x - \frac{i}{r}A_x + \frac{i-r}{r^2}A_x. \tag{122}$$
Једнократна нето премија је добијена из претходне врсте осигурања стављајући да $m \to +\infty$.

- **Стандардно опадајуће привремено осигурање код кога сума опада m пута годишње:**
Код ове врсте осигурања почетна осигурана сума је n. Садашња вредност полисе је:
$$Z = \begin{cases} \left(n + \frac{1}{m} - K - S^{(m)}\right)v^T, & \text{за } T \le n; \\ 0, & \text{за } T > n. \end{cases} \tag{123}$$

Једнократна нето премија је

$$(D^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \left(n + \frac{1}{m}\right) \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (I^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}. \tag{124}$$

- **Стандардно опадајуће привремено осигурање:**
Код ове врсте осигурања осигурана сума опада од n до 0. Садашња вредност полисе је:

$$Z = \begin{cases} \upsilon^T(n-K), & \text{за } T \le n; \\ 0, & \text{за } T > n. \end{cases} \tag{125}$$

Једнократна нето премија се добија из претходне врсте осигурања када се пусти да $m \to +\infty$ и износи

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = n\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}. \tag{126}$$

6.4 Осигурање ренте

Рента представља ток новца којег чине периодичне исплате одређене суме током трајања живота особе. Разликују се доживотне ренте и ренте ограниченог трајања. Износи који се исплаћују су унапред одређени. Међутим, код доживотних ренти број исплата је случајан и зависи од променљиве T, односно преосталог животног века особе. Због тога је садашња вредност ренте случајна променљива. Очекивање садашње вредности ренте се сматра фер ценом и поново се назива једнократном нето премијом.

На животне ренте се може гледати на два начина. Са једне стране, то је добит полисе осигурања која представља комбинацију осигурања за случај доживљења. Са друге стране, то су периодичне исплате и имају супротан знак у односу на први случај.

Могу се разликовати лична рента, коју осигураник сам прима, и рента наджвљења или рента у корист трећег лица, којом осигураник обезбеђује корисника ренте. Према дужини трајања рента може бити привремена, ако плаћање ренте траје одређени период, или доживотна, ако њено плаћање траје до смрти осигураног лица. Ренте се могу поделити и према томе када почиње њихова исплата, односно ако исплате почињу одмах по закључивању уговора онда је у питању непосредна рента, а ако постоји одређени период до почетка исплата онда је у питању одложена рента. И непосредне и одложене ренте се могу поделити на ренте код којих се исплата врши на почетку године, ренте плативе унапред, и ренте код којих се исплата врши на крају године у којој се исплата врши, ренте плативе накнадно.

У свим случајевима претпостављамо да особа има x година када закључује уговор о ренти.

6.4.1 Осигурање сталне годишње личне ренте

- **Непосредна доживотна лична рента платива унапред:**
Размотримо доживотну личну ренту коју осигураник прима од тренутка закључивања уговора све док је жив, а коју је уплатио путем једнократне нето премије. Исплате се врше у тренуцима $0, 1, ..., K$. Садашња вредност тока исплата је:

$$Y = 1 + \upsilon + \upsilon^2 + \cdots + \upsilon^K = \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, \tag{127}$$

па је њена расподела дата са

$$P\{Y = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\} = P\{K = k\} = {}_kp_x q_{x+k}, k = 0, 1, 2, ... \tag{128}$$

Једнократна нето премија је

$$\ddot{a}_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} {}_kp_x q_{x+k}. \tag{129}$$

Ако се (127) напише као

$$Y = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^k I\{K \geq k\}, \tag{130}$$

онда је очекивање

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^k {}_kp_x = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^k \frac{l_{x+k}}{l_x} =: \frac{N_x}{D_x}, \tag{131}$$

где су N_x и D_x вредности из таблице смртности. У (131) се животна рента посматра као серија осигурања за случај доживљења.
Коришћењем формуле за коначну суму, садашња вредност тока исплата се може записати преко доживотног осигурања

$$Y = \frac{1 - \upsilon^{K+1}}{1 - \upsilon} = \frac{1 - Z}{d}. \tag{132}$$

Тада се и очекивана вредност може добити преко очекиване вредности доживотног осигурања

$$\ddot{a}_x = E(Y) = E\left(\frac{1 - Z}{d}\right) = \frac{1 - A_x}{d}. \tag{133}$$

Дакле, једнократна нето премија се може добити на два начина: преко једнократне нето премије доживотног осигурања или преко нето премије серије осигурања за случај доживљења.

Дисперзија од Y се такође добија преко дисперзије садашње вредности уплата Z доживотног осигурања[8], односно

$$D(Y) = \frac{D(Z)}{d^2}. \tag{134}$$

- **Непосредна лична рента ограниченог трајања платива унапред:** Размотримо животну ренту са дурацијом n година која се исплаћује унапред и чије исплате почињу одмах након закључивања уговора, под условом да је осигураник жив током тих n година. Његова садашња вредност је

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{за } K = 0, 1, ..., n-1; \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{за } K = n, n+1, n+2, ... \end{cases} = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} I\{K < n\} + \ddot{a}_{\overline{n}|} I\{K \geq n\}. \tag{135}$$

Једнократна нето премија је:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|\, k}p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|\, n}p_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^k{}_k p_x = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. \end{aligned} \tag{136}$$

Претпоследња једнакост следи из $Y = \frac{1-Z}{d}$, где је Z садашња вредност исплате одговарајућег мешовитог осигурања.

- **Непосредна доживотна лична рента платива накнадно:** Претпоставимо да непосредна доживнотна лична рента предвиђа исплате у тренуцима $1, 2, ..., K$. Тада је садашња вредност тока исплата

$$Y = \upsilon + \upsilon^2 + \cdots + \upsilon^K = a_{\overline{K}|}. \tag{137}$$

Дакле, у односу на (127) разликује се у томе што нема вредност 1 на почетку сумирања. Због тога се и њихове једнократне нето премије могу довести у везу и важи

$$a_x = E(Y) = \ddot{a}_x - 1 = \frac{1 - A_x}{d} - 1. \tag{138}$$

- **Непосредна лична рента ограниченог трајања платива накнадно:** Претпоставимо да непосредна лична рента ограниченог трајања предвиђа исплате у тренуцима $1, 2, ..., n$. Тада је садашња вредност исплата

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{K}|}, & \text{за } K = 0, 1, ..., n-1; \\ a_{\overline{n}|}, & \text{за } K = n, n+1, n+2, ... \end{cases} = a_{\overline{K}|} I\{K < n\} + a_{\overline{n}|} I\{K \geq n\}, \tag{139}$$

[8] И код осталих типова животних рента се дисперзија одређује на сличан начин преко одговарајућих осигурања, па неће бити експлицитно наведене формуле.

а једнократна нето премија

$$a_{x:\overline{n}|} = E(Y) = \sum_{k=1}^{n-1} \upsilon^k {}_kp_x = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} - 1. \tag{140}$$

- **Одложена доживотна лична рента платива унапред:**
Код ове врсте ренте осигураник уплаћује једнократну премију приликом закључивања уговора, а почиње да прима ренту тек након одређеног броја година. Размотримо ренту која је одложена m година, њена садашња вредност је:

$$\begin{aligned} Y &= \begin{cases} 0, & \text{за } K = 0,1,...,m-1; \\ \upsilon^m + \upsilon^{m+1} + \cdots + \upsilon^K, & \text{за } K = m, m+1, ... \end{cases} \\ &= (\upsilon^m + \upsilon^{m+1} + \cdots + \upsilon^K) I\{K \geq m\}. \end{aligned} \tag{141}$$

Једнократна нето премија је у том случају

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{+\infty} \upsilon^k {}_kp_x = {}_mp_x \upsilon^m \ddot{a}_{x+m} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{A_{x:\overline{m}|} - A_x}{d}. \tag{142}$$

- **Одложена доживотна лична рента платива накнадно:**
Код ове врсте ренте осигураник уплаћује једнократну премију приликом закључивања уговора, а почиње да прима ренту тек након одређеног броја година. Размотримо ренту која је одложена m година и код које се прва рента прима на крају $m-$те године, њена садашња вредност је:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{за } K = 0,1,...,m-1; \\ \upsilon^{m+1} + \upsilon^{m+2} + \cdots + \upsilon^K, & \text{за } K = m, m+1, ... \end{cases} \tag{143}$$

Једнократна нето премија је у том случају

$$_{m|}a_x = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \upsilon^k {}_kp_x = {}_mp_x \upsilon^m a_{x+m} = a_x - a_{x:\overline{m}|}. \tag{144}$$

6.4.2 Осигурање сталне личне ренте која се исплаћује више пута годишње

- **Непосредна доживотна лична рента платива унапред:**
Претпоставимо да се уплате у износу $1/m, m \in N$, плаћају више пута годишње у једнаким временским размацима, односно исплате се врше у тренуцима $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, ...$ све док је корисник ренте жив. Садашња вредност тока исплата је:

$$Y = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{m} \upsilon^{\frac{t}{m}} I\left\{T > \frac{t}{m}\right\} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{T}|}. \tag{145}$$

Једнократна нето премија се добија слично као и (133) и износи:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = E(Y) = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{+\infty} \upsilon^{\frac{t}{m}} {}_{\frac{t}{m}}p_x = \frac{1-A_x^{(m)}}{d^{(m)}}. \tag{146}$$

Да би се добила веза са рентом која се плаћа годишње потребно је користити додатне претпоставке. Ако претпоставимо да важи а) из поглавља 5.3.2 добија се

$$A_x^{(m)} = E\left(\upsilon^{K+S^{(m)}}\right) = A_x\frac{i}{i^{(m)}}. \tag{147}$$

Заменом у једначини (146) и сређивањем добија се

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{i-i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}}, \tag{148}$$

где је $d = i\upsilon, d^{(m)} = i^{(m)}\upsilon^{(m)}$. Увођењем смена $\alpha(m) = \frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}}$ и $\beta(m) = \frac{i-i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}}$, добија се једноставнији израз

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m). \tag{149}$$

У пракси се најчешће користи $\alpha(m) \approx 1, \beta(m) \approx \frac{m-1}{2m}$, што се добија Тејлоровим развојем у околини нуле.

- **Непосредна лична рента ограниченог трајања платива унапред:** Претпоставимо да се уплате у износу $1/m, m \in N$, плаћају више пута годишње у једнаким временским размацима, односно уплате се врше у тренуцима $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots$ током n година. Садашња вредност тока исплата је:

$$Y = \sum_{t=0}^{n-1/m} \frac{1}{m}\upsilon^{\frac{t}{m}} I\{T > n\} + \ddot{a}_{\overline{T|}}^{(m)} I\{T \le n\} = \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} I\{T > n\} + \ddot{a}_{\overline{T|}}^{(m)} I\{T \le n\}. \tag{150}$$

Њена једнократна нето премија се добија из једнократне премије непосредне доживотне личне ренте која се плаћа унапред и важи

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_np_x\upsilon^n\ddot{a}_{x+n}^{(m)} \\ &= \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) - {}_np_x\upsilon^n(\alpha(m)\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)) \\ &= \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \beta(m)(1 - {}_np_x\upsilon^n). \end{aligned} \tag{151}$$

- **Непосредна доживотна лична рента платива накнадно:** Претпоставимо да се уплате у износу $1/m, m \in N$, плаћају више пута годишње у једнаким временским размацима, односно уплате се врше у тренуцима $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots$ све док је корисник ренте жив. Садашња вредност тока исплата је:

$$Y = \sum_{t=1/m}^{+\infty} \frac{1}{m}\upsilon^{\frac{t}{m}} I\left\{T \ge \frac{t}{m}\right\} = a_{\overline{T|}}^{(m)}. \tag{152}$$

Њена једнократна нето премија се може изразити преко одговарајуће животне ренте која се плаћа унапред:

$$a_x^{(m)} = E(Y) = \frac{1}{m} \sum_{t=\frac{1}{m}}^{+\infty} \upsilon^{\frac{t}{m}} {}_{\frac{t}{m}}p_x = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m}. \tag{153}$$

- **Непосредна лична рента ограниченог трајања платива накнадно:** Претпоставимо да се уплате у износу $1/m, m \in N$, плаћају више пута годишње у једнаким временским размацима, односно уплате се врше у тренуцима $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots$ током n година. Садашња вредност тока исплата је:

$$Y = \sum_{t=1/m}^{n} \frac{1}{m} \upsilon^{\frac{t}{m}} I\{T > n\} + a_{\overline{T}|}^{(m)} I\{T \leq n\} = a_{\overline{n}|}^{(m)} I\{T > n\} + a_{\overline{T}|}^{(m)} I\{T \leq n\}. \tag{154}$$

Њена једнократна нето премија се добија из једнократне нето премије одговарајуће привремене ренте плативе унапред

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} - \frac{1}{m}(1 - {}_np_x \upsilon^n). \tag{155}$$

6.4.3 Осигурање непрекидне личне ренте

Када је број исплата током године велик, односно кратак је период између две исплате, онда се говори о непрекидној личној ренти. Подтипови ове ренте се дефинишу на сличан начин као у претходним случајевима.

- **Доживотна лична рента:** Садашња вредност тока исплата је:

$$Y = \int_0^T \upsilon^t dt = \bar{a}_{\overline{T}|}, \tag{156}$$

а једнократна нето премија:

$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} \upsilon^t {}_tp_x dt. \tag{157}$$

- **Лична рента ограниченог трајања:** Садашња вредност тока исплата је:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & \text{за } 0 \leq T < n; \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & \text{за } T \geq n. \end{cases} \tag{158}$$

а једнократна нето премија:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \upsilon^t {}_tp_x dt. \tag{159}$$

- **Одложена доживотна лична рента:**
  Садашња вредност тока исплата је:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{за } 0 \leq T < n; \\ \bar{a}_{\overline{T|}} - \bar{a}_{\overline{n|}}, & \text{за } T \geq n. \end{cases} \tag{160}$$

а једнократна нето премија:

$$_{n|}\bar{a}_x = \int_n^{+\infty} \upsilon^t {}_tp_x dt. \tag{161}$$

6.4.4 Осигурање променљиве ренте

Посматрајно животну ренту којом се исплаћују суме $s_0, s_1, s_2, ...$ у тренуцима $0, 1, ..., K$. Садашња вредност овакве ренте је:

$$Y = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^k s_k I\{K \geq k\}, \tag{162}$$

а једнократна нето премија

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^k s_k {}_kp_x. \tag{163}$$

Ако су познате величине исплата, ове вредности се могу лако израчунати.

Претпоставимо да се исплате врше више пута годишње. Односно, посматрајмо животну ренту са исплатама $z_0, z_{\frac{1}{m}}, z_{\frac{2}{m}}, ...$ у тренуцима $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, ..., K + S^{(m)} - \frac{1}{m}$. Рачунамо величину која има исту садашњу вредност као m исплата годишње:

$$s_k = \sum_{j=0}^{m-1} \upsilon^{\frac{j}{m}} z_{k+\frac{j}{m}}, k = 0, 1, 2, ... \tag{164}$$

У години смрти се јавља корективни фактор који представља садашњу вредност исплата које неће бити исплаћене током те године, односно

$$c(k+u) = \sum_{j \in J} \upsilon^{\frac{j}{m}-u} z_{k+\frac{j}{m}}, 0 < u < 1, \tag{165}$$

где је $J = J(u)$ низ оних $j \in \{1, 2, ..., m-1\}$ за које важи $\frac{j}{m} > u$.

Једнократна нето премија опште променљиве животне ренте са m исплата годишње је

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^k s_k {}_kp_x - \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+1} \upsilon^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}. \tag{166}$$

Да би се одредила вредност c_k потребне су додатне претпоставке. Ако се, на пример, искористи претпоставка а) из поглавља 5.3.2 добија се израз

$$c_{k+1} = \int_0^1 \sum_J (1+\imath)^{1-\frac{j}{m}} z_{k+\frac{j}{m}} du = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} j(1+\imath)^{1-\frac{j}{m}} z_{k+\frac{j}{m}}. \tag{167}$$

Код променљивих ренти када се пусти да $m \to +\infty$ добија се рента која се непрекидно исплаћује. Ако је износ исплате у тренутку t једнак $s(t)$, садашња вредност ренте је

$$Y = \int_0^T \upsilon^t s(t) dt. \tag{168}$$

Једнократна нето премија

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} \upsilon^t s(t)_t p_x dt \tag{169}$$

се може проценити из (166) ако се узму вредности

$$s_k = \int_0^1 \upsilon^u s(k+u) du, \tag{170}$$

$$c_{k+1} = \int_0^1 u(1+\imath)^{1-u} s(k+u) du. \tag{171}$$

Најчешћи облици променљивих животних ренти су:

- **Променљива животна рента са годишњом исплатом износа $s_k = k+1$:** Садашња вредност овог тока исплата је:

$$Y = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^k (k+1) I\{K \geq k\}, \tag{172}$$

а његова једнократна нето премија је

$$(I\ddot{a})_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^k (k+1)_k p_x. \tag{173}$$

Могу се на једноставан начин повезати променљиво животно осигурање и променљиве ренте преко њихових једнократних нето премија:

$$\ddot{a}_x = d(I\ddot{a})_x + (IA)_x. \tag{174}$$

- **Промењљива животна рента са исплатом m пута годишње износа $z_{k+\frac{j}{m}} = \frac{k+1}{m}, j = 0, 1, ..., m-1$:**
  Садашња вредност тока исплата је

$$Y = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \upsilon^{k+\frac{j}{m}} \frac{k+1}{m} I\{K \geq k\}. \tag{175}$$

Једнократна нето премија ове животне ренте се може добити тако што се она представи као сума одложених ренти. Коришћењем једнакости (149) добија се

$$\begin{aligned}(I\ddot{a})_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} {}_kp_x \upsilon^k \ddot{a}_{x+k}^{(m)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} {}_kp_x \upsilon^k (\alpha(m)\ddot{a}_{x+k} - \beta(m)) \\ &= \alpha(m)\sum_{k=0}^{+\infty} {}_kp_x \upsilon^k \ddot{a}_{x+k} - \beta(m)\sum_{k=0}^{+\infty} {}_kp_x \upsilon^k \\ &= \alpha(m)(I\ddot{a})_x - \beta(m)\ddot{a}_x,\end{aligned} \tag{176}$$

- **Промењљива непрекидна животна рента са стопом исплате $s(t) = [t+1]$:**
  Овај тип ренте се добија из претходног типа када се пусти да $m \to +\infty$. Садашња вредност тока исплата је

$$Y = \int_0^T \upsilon^t [t+1] dt, \tag{177}$$

а његова једнократна премија је

$$(I\bar{a})_x = \int_0^{+\infty} [t+1]\upsilon^t {}_tp_x dt = \alpha(\infty)(I\ddot{a})_x - \beta(\infty)\ddot{a}_x. \tag{178}$$

- **Промењљива непрекидна животна рента са стопом исплате $s(t) = t$:**
  Садашња вредност ове ренте је

$$Y = \int_0^T t\upsilon^t dt, \tag{179}$$

а његова једнокранта нето премија

$$(\bar{I}\bar{a})_x = \frac{\bar{a}_x - (\bar{I}\bar{A})_x}{r}, \tag{180}$$

где се $(\bar{I}\bar{A})_x$ добија из једначине (120) када је $m = +\infty$.

7 Премије

Као што је раније речено, премија осигурања представља цену услуга које осигуравач пружа осигуранику. Неке главне карактеристике премије су описане у поглављу 2. У овом поглављу ће бити детаљно објашњена премија осигурања.

Разликују се три форме плаћања премије:

1. Једнократне премије,
2. Периодичне премије са константним износом или константне премије,
3. Периодичне премије са променљивим износом.

Код периодичних премија дурација и учесталост плаћања премије морају бити урачунате у износ премије. У претходном поглављу је коришћена једнократна нето премија која се плаћа унапред и одједном, али у пракси је најчешћа периодична премија са константним износом која се плаћа унапред. Једнократна премија је непрактична са стране осигураника јер он не располаже великим новчаним средствима па му је боље да расподели уплате на више година.

Означимо са L губитак осигуравача. Он представља разлику између садашње вредности исплата и садашње вредности уплаћених премија и може узети и позитивне и негативне вредности. Премија се назива нето премијом ако задовољава

$$E[L] = 0, \tag{181}$$

односно ако је очекивани губитак једнак нули. Премија која је коришћена у претходном поглављу је задовољавала овај услов. Када је у питању периодична премија са константним износом, онда је она јединствено одређена овим условом. Међутим, код премија са променљивим износом овај услов није довољан да би се она јединствено одредила.

Додавањем трошкова на нето премију добија се бруто премија. Тиме се, поред плаћања осигуране суме, премијом обезбеђује и покривање трошкова спровођења осигурања и остваривања добити осигуравача.

Приликом рачунања нето премије потребно је користити одређену каматну стопу. Каматна стопа која ће се примењивати у будућим годинама је непозната, па је логично размишљање да би каматну стопу требало моделовати стохастичким процесом. Међутим, непрактично је користити такав модел, пре свега зато што не постоји одговарајући стохастички процес за дугорочна предвиђања. Ако се претпостави да је каматна стопа фиксирана, губици осигуравача у различитим полисама су независне случајне променљиве. Самим тим, дисперзија накупљених губитака је сума дисперзија за сваку полису појединачно. Дакле, коришћењем фиксне каматне стопе неће се много изгубити у прорачунима. За фиксну каматну стопу се не узима актуелна каматна стопа јер се она периодично мења, већ се користи нешто нижа каматна стопа у посматраној земљи.

У свим прорачунима се претпоставља да је износ осигуране суме једнак једној јединици одређене валуте ради лакшег рада.

7.1 Нето премија осигурања са исплатом осигуране суме на годишњицу закључивања уговора

7.1.1 Осигурање за случај смрти

Претпоставимо да је у питању доживотно осигурање и да се сума осигурања исплаћује на годишњицу закључивања уговора, а да се премија плаћа годишње унапред. Циљ је одредити износ нето премије P_x. Губитак осигуравача је једнак разлици садашње вредности исплате доживотног осигурања, која је дата у формули (66), и садашње вредности доживотне личне ренте у вредности нето премије, односно

$$L = \upsilon^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1|}}. \tag{182}$$

Из услова (181) следи

$$0 = E(\upsilon^{K+1}) - P_x E(\ddot{a}_{\overline{K+1|}}), \tag{183}$$

односно

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}. \tag{184}$$

Са друге стране, губитак осигуравача се може написати као

$$L = \upsilon^{K+1} - P_x(1 + \upsilon + ... + \upsilon^K) = \upsilon^{K+1} - P_x \frac{1 - \upsilon^{K+1}}{1 - \upsilon} = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right) \upsilon^{K+1} - \frac{P_x}{d}. \tag{185}$$

Па се може одредити дисперзија као

$$D(L) = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)^2 D(\upsilon^{K+1}). \tag{186}$$

Дакле, ризик осигуравача, одређен преко дисперзије, је већи ако је премија константна годишња, него када се плаћа једнократно.

Из једначина (133) и (184) добија се идентитет

$$\frac{1}{\ddot{a}_x} = d + P_x. \tag{187}$$

Односно, дуг се може амортизовати[9] годишњим плаћењем премије унапред у износу од $1/\ddot{a}_x$ или се може годишње плаћати камата у износу d а у време $K+1$ платити износ главнице, годишња нето премија за одговарајуће животно

[9]Амортизација је процес замене почетне исплате периодичним исплатама.

осигурање је P_x [10]. Једначина (187) показује да су укупне годишње уплате једнаке у оба случаја.

Заменом $\ddot{a}_x$ са $(1-A_x)/d$ у (184), добија се

$$P_x = \frac{dA_x}{1-A_x}, \tag{188}$$

односно

$$P_x = dA_x + P_x A_x, \tag{189}$$

што значи да се дуг може финансирати годишњим уплатама у износу P_x. Са друге стране, може се позајмити износ A_x да би се платила једнократна нето премија и враћати се камата на тај дуг који ће бити исплаћен на крају године смрти. Годишња премија одговарајућег осигурања је тада $P_x A_x$. Претходни идентитет показује да ова два случаја имају једнаке годишње уплате.

Дакле, нето премије се могу уплаћивати на различите начине, а да при том садашња вредност уплата остане непромењена.

Код привременог осигурања са дурацијом n губитак осигуравача је

$$\begin{aligned} L &= \begin{cases} v^{K+1} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{за } K = 0,1,...,n-1; \\ -P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{за } K = n, n+1, n+2, ... \end{cases} \\ &= -P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n}|} + (1 + P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n\text{-}K\text{-}1}|})v^{K+1} I\{K < n\}. \end{aligned} \tag{190}$$

Годишња нето премија се добија на основу услова (181):

$$0 = E(v^{K+1} I\{K<n\}) - P^1_{x:\overline{n}|}(E(\ddot{a}_{\overline{K+1}|} I\{K<n\}) + E(\ddot{a}_{\overline{n}|} I\{K \geq k\})), \tag{191}$$

па важи

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{192}$$

Најчешће је вероватноћа смрти у току трајања уговора привременог осигурања мала, па је и премија ове врсте осигурања мала.

7.1.2 Осигурање за случај доживљења

Размотримо осигурање за случај доживљења са дурацијом осигурања једнаком n година. Губитак осигуравача је

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{за } K = 0,1,...,n-1; \\ v^n - P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{за } K = n, n+1, n+2, ... \end{cases} \tag{193}$$

а годишња нето премија, на основу услова (181),

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{194}$$

[10] Претпоставља се да се главница обезбеђује тако што се уплати животно осигурање са одговарајућом годишњом нето премијом и одговарајућом дурацијом.

7.1.3 Мешовито осигурање

Губитак осигуравача је сума губитака (190) и (198). Па је годишња нето премија

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{195}$$

Као што су добијене једначине (187) и (189), добијају се и једначине

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = d + P_{x:\overline{n}|}, \tag{196}$$

$$P_{x:\overline{n}|} = dA_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}. \tag{197}$$

7.1.4 Одложена животна рента

Размотримо одложену животну ренту која је одложена n година. Губитак осигуравача је:

$$L = \begin{cases} -P({}_{n|}\ddot{a}_x)\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{за } K = 0, 1, ..., n-1; \\ \upsilon^n \ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} - P({}_{n|}\ddot{a}_x)\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{за } K = n, n+1, n+2, ... \end{cases} \tag{198}$$

Годишња нето премија са почетком у тренутку n је:

$$P({}_n\ddot{a}_x) = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{x+n}. \tag{199}$$

7.1.5 Премија која се плаћа m пута годишње

Претпоставимо да се нето премије плаћају m пута годишње и да су износи који се плаћају једнаки. Годишње нето премије су

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}, \qquad (P^1_{x:\overline{n}|})^{(m)} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}, \qquad (P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})^{(m)} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}, \qquad P^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}, \tag{200}$$

а добијене су једноставном заменом $\ddot{a}_x$ са $\ddot{a}_x^{(m)}$, односно $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ са $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, у имениоцу једначина (184), (192), (194), (214).

Желимо да упоредимо величину премије која се плаћа годишње са величином премије која се уплаћује m пута годишње. Упоредимо прво премије које одговарају мешовитом осигурању, односно вредности $P^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ и $P_{x:\overline{n}|}$. Заменом вредности

$$A_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \tag{201}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)A^1_{x:\overline{n}|} \tag{202}$$

у претходно наведену одговарајућу једнакост, добија се

$$P^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{P_{x:\overline{n}|}}{\alpha(m) - \beta(m)P^1_{x:\overline{n}|}}. \tag{203}$$

Сређивањем овог израза добија се

$$P_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)P^{(m)}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)P^{(m)}_{x:\overline{n}|}P^{1}_{x:\overline{n}|}, \tag{204}$$

односно важи релација $P_{x:\overline{n}|} < P^{(m)}_{x:\overline{n}|}$.

На сличан начин се могу добити једнакости за друге врсте осигурања:

$$P_x = \alpha(m)P^{(m)}_x - \beta(m)P^{(m)}_x P_x, \tag{205}$$

$$P^{1}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)(P^{1}_{x:\overline{n}|})^{(m)} - \beta(m)(P^{1}_{x:\overline{n}|})^{(m)}P^{1}_{x:\overline{n}|}, \tag{206}$$

$$P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \alpha(m)(P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1})^{(m)} - \beta(m)(P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1})^{(m)}P^{1}_{x:\overline{n}|}. \tag{207}$$

7.2 Нето премија осигурања са исплатом осигуране суме у тренутку смрти

Претходно поменуте врсте нето премија су такозване апсолутно дискретне нето премије, односно премије за осигурања код којих се осигурана сума исплаћује на крају године смрти. Апсолутно непрекидне нето премије, односно нето премије осигурања код којих се осигурана сума исплаћује одмах након смрти, се добијају на сличан начин. У наставку ће бити изложене функције губитака за одређене типове осигурања са исплатом осигуране суме одмах након смрти и одговарајуће апсолутно непрекидне нето премије, које се добијају из услова (181).

7.2.1 Осигурање за случај смрти

Доживотно осигурање са исплатом осигуране суме у тренутку смрти има функцију губитака:

$$L = \upsilon^T - \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{T}|}. \tag{208}$$

Па је на основу услова (181) годишња нето премија

$$\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}. \tag{209}$$

Код привременог осигурања са исплатом осигуране суме у тренутку смрти функција губитака је:

$$L = \begin{cases} \upsilon^T - \bar{P}^{1}_{x:\overline{n}|}\bar{a}_{\overline{T}|}, & \text{за } T \le n; \\ -\bar{P}^{1}_{x:\overline{n}|}\bar{a}_{\overline{n}|}, & \text{за } T > n. \end{cases} \tag{210}$$

Па је на основу услова (181) годишња нето премија

$$\bar{P}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{211}$$

7.2.2 Осигурање за случај доживљења

Размотримо осигурање за случај доживљења са дурацијом једнаком n година. Губитак осигуравача је

$$L = \begin{cases} -\bar{P}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\bar{a}_{\overline{T}|}, & \text{за } T \leq n; \\ \upsilon^n - P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\bar{a}_{\overline{n}|}, & \text{за } T > n. \end{cases} \tag{212}$$

а годишња нето премија, на основу услова (181),

$$\bar{P}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{213}$$

7.2.3 Мешовито осигурање

Код мешовитог осигурања губитак осигуравача је сума губитака (210) и (212). Па је годишња нето премија

$$\bar{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{214}$$

7.2.4 Одложена животна рента

Размотримо одложену животну ренту која је одложена n година. Губитак осигуравача је:

$$L = \begin{cases} -\bar{P}({}_{n|}\bar{a}_x)\bar{a}_{\overline{T}|}, & \text{за } T \leq n; \\ \upsilon^n \bar{a}_{\overline{T-n}|} - \bar{P}({}_{n|}\bar{a}_x)\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{за } T > n. \end{cases} \tag{215}$$

Годишња нето премија са почетком у тренутку n је:

$$\bar{P}({}_{n|}\bar{a}_x) = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \bar{P}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\bar{a}_{x+n}. \tag{216}$$

7.3 Нето премија осигурања са променљивим износом

Нека је c_j сума осигурања у $j-$тој години од издавања полисе код осигурања са исплатом осигуране суме на крају године смрти. Означимо са $\Pi_0, \Pi_1, ..., \Pi_k$ годишње нето премије. Губитак осигуравача је дат са

$$L = c_{K+1}\upsilon^{K+1} - \sum_{k=0}^{K} \Pi_k \upsilon^k. \tag{217}$$

Ако премије задовољавају услов

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+1}\upsilon^{k+1}{}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Pi_k \upsilon^k{}_k p_x, \tag{218}$$

онда је у питању нето премија. Овим је добијен општи модел, који, ако се дозволи негативна вредност за $\Pi_j, j = 0, 1, ..., k$, обухвата и осигурање за случај доживљења, као и животне ренте.

Код осигурања са исплатом осигуране суме одмах након смрти, осигурана сума је дата произвољном функцијом $c : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Ако су апсолутно непрекидне нето премије $\pi(t), t \in (0, T)$, онда је губитак осигуравача

$$L = c(T)\upsilon^T - \int_0^T \pi(t)\upsilon^t dt, \tag{219}$$

а нето премија се добија из услова:

$$\int_0^{+\infty} c(t)\upsilon^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \pi(t)\upsilon^t {}_tp_x dt. \tag{220}$$

У реалним ситуацијама постоји велики број могућих случајева и непрактично је одређивати експлицитно нето премије за сваки од њих. Због тога се прво одређује губитак осигуравача L, а затим се примени услов (181).

7.4 Бруто премија

Нето премије не укључују све трошкове које има осигуравајућа компанија. Ако би се премије наплаћивале преко раније израчунатих нето премија, компаније би пословале са губитком. Нето премија увећана за трошкове осигуравајуће компаније се назива бруто премија. Трошкови осигуравајуће компаније су: трошкови прибављања осигурања (аквизициони трошкови), трошкови наплате премије (инкасо трошкови) и административни трошкови. Аквизициони трошкови представљају трошкове прибављања нових осигураника. Људи ретко самостално одлазе у осигуравајуће компаније и зато је неопходно ангажовање аквизиционара који убеђују људе да се осигуравају, за узврат они добијају провизију (најчешће) у виду процената од осигуране суме. Трошкови наплате премије такође представљају износ који се уплаћује запосленом у осигуравајућој компанији који се брине о наплати доспелих премија. У административне трошкове спадају организациони и оснивачки трошкови, инвентар, плате запослених, порез, канцеларијски трошкови и слично.

Дакле, неки трошкови су везани само за време склапања уговора, а неки се појављују редовно уз премије. Наравно, постоје и трошкови који се јављају тек након наступања осигураног случаја. Све ове трошкове плаћа осигураник кроз повећану нето премију. То повећање не сме да буде случајно, већ мора да се прецизно израчуна. Претерано повећање премије може да одбије осигураника, док премало повећање премије може довести осигуравача до финансијских губитака.

Бруто премије се конструишу на основу нето премија уз помоћ искуства.

Дакле, величина трошкова зависи од стручне процене осигуравајуће компаније. У наставку ће бити изложени општи модели за рачунање једнократне и годишње бруто премије (Кочовић, 2006.). Осигуравајућа компанија може своје трошкове рачунати и на другачије начине.

7.4.1 Једнократна бруто премија

Једнократна бруто премија се састоји од нето премије и додатка за трошкове. Код ње се аквизициони и инкасо трошкови рачунају од саме премије, а административни трошкови се рачунају од осигуране суме и остају стални за све време трајања осигурања.

Нека је A_x једнократна нето премија. Ако са α означимо аквизиционе и инкасо трошкове, који су једнократни и рачунају се од бруто премије, онда ће они износити $A'\alpha$, где је A' бруто премија. Ако са γ означимо годишње административне трошкове, онда је садашња вредност свих административних трошкова за n година једнака $\gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Па је једнократна бруто премија

$$A' = A_x + A'\alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \tag{221}$$

Тада је једнократна бруто премија

$$A' = \frac{A_x + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{1-\alpha}. \tag{222}$$

Ако се сви трошкови рачунају од премије, онда се ова формула додатно упрошћава.

7.4.2 Годишња бруто премија

Пошто се сви трошкови осигуравајуће компаније рачунају као проценат одговарајућег износа на годишњем нивоу, целокупни трошкови се рачуна као проценат од целокупног одговарајућег износа. Односно, целокупни аквизициони трошкови ће се рачунати као проценат од осигуране суме, целокупни трошкови наплате се рачунају као проценат премије, а целокупни административни трошкови се рачунају као проценат од осигуране суме и сразмерни су њеном износу и трајању осигурања.

Бруто годишња премија P' се састоји из годишње нето премије P, додатка за покриће једног дела аквизиционих трошкова α, додатка за покриће инкасо трошкова за једну годину β и додатка за покриће административних трошкова γ. Садашња вредност m годишњих бруто премија је

$$P'\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = A + \alpha + \beta P'\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \tag{223}$$

где је A садашња вредност осигуране суме. Дакле, бруто годишња премија је

$$P' = \frac{P}{1-\beta} + \frac{\alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}(1-\beta)}. \tag{224}$$

Ако се сви трошкови рачунају од премије, онда се ова формула додатно упрошћава.

8 Примери

Основним математичким моделима преостале дужине живота, једнократним и периодичним премијама, математичким резервама и слично су се кроз практичне примере бавили Фалин Г. И. и Фалин А. И. у свом делу *"Актуарная математика в задачах"*. У наставку ће бити размотрени неки од примера из наведеног дела.

Пример 1. *Осигуравајућа компанија склапа трогодишњи уговор о животном осигурању по коме се накнада за осигурање плаћа на крају године смрти. Ако осигураник умре током прве године од потписивања уговора онда се исплаћује 300000, ако умре током друге 350000, а ако умре током треће године од потписивања уговора исплаћује се 400000. Ако се користи каматна стопа* $i = 6\%$ *и претпоставља се да вероватноћа смрти у* $k-$*тој години од потписивања уговора,* $q_{x+k}, k = 0, 1, 2$*, има облик*

$$q_{x+k} = 0.02(k + 1),$$

чему је једнака садашња вредност осигуравачевих обавеза?

Решење. Нека је T преостала дужина живота осигураника, $K = [T]$ целобројна вредност преостале дужине живота, $v = \frac{1}{1+i} \approx 0.9434$ дисконтни фактор и Z вредност накнаде осигурања у тренутку закључивања уговора. Тада је

$$Z = \begin{cases} 300000v, & \text{ако је } K = 0; \\ 350000v^2, & \text{ако је } K = 1; \\ 400000v^3, & \text{ако је } K = 2. \end{cases}$$

Па је

$$\begin{aligned} E(Z) &= 300000vP\{K = 0\} + 350000v^2P\{K = 1\} + 400000v^3P\{K = 2\} \\ &= 300000vP\{T < 1\} + 350000v^2P\{1 < T < 2\} + 400000v^3P\{2 < T < 3\} \\ &= 300000vq_x + 350000v^2p_xq_{x+1} + 400000v^3p_xp_{x+1}q_{x+2} \\ &\approx 300000 \cdot 0.9434 \cdot 0.02 + 350000 \cdot 0.9434^2 \cdot 0.98 \cdot 0.04 + 400000 \cdot 0.9434^3 \cdot 0.98 \cdot 0.96 \cdot 0.06 \\ &\approx 36829.41 \end{aligned}$$

Пример 2. *Осигуравајућа компанија је склопила велики број уговора животног осигурања исте врсте на две године са осигураном сумом 100000 која се исплаћује на крају године смрти. Једна трећина осигураника су пушачи, а две трећине нису. Преостала дужина живота је описана законом расподеле*

$${}_tp_x = exp\left(-\left(\frac{t}{\theta}\right)^2\right),$$

где је $\theta = 1.5$ *ако је особа пушач, а* $\theta = 2$ *ако особа није пушач. Компанија је одлучила да одреди јединствену премију за све осигуранике. Одредити премију ако је* $i = 5\%$ *(број осигурања се не узима у обзир).*

Решење. Једнократна нето премија је:

$$P = 100000 A^1_{x:\overline{2}|} = 100000(\upsilon P\{T<1\} + \upsilon^2 P\{1<T<2\}) = 100000(\upsilon q_x + \upsilon^2(p_x - {}_2p_x))$$

За пушаче важи: $q_x \approx 0.3588, p_x \approx 0.6412, {}_2p_x \approx 0.1692$, а за непушаче: $q_x \approx 0.2212, p_x \approx 0.7788, {}_2p_x = 0.3679$. Дакле, нето премија је

$$P = 100000 \frac{0.9524 \cdot 0.3588 + 0.9524^2(0.6412 - 0.1692) + 2(0.9524 \cdot 0.2212 + 0.9524^2(0.7788 - 0.3679))}{3}$$
$$\approx 64554.15$$

Пример 3. *Једнократна нето премија двадесетогодишњег животног осигурања за лице које има 40 година и где се у случају смрти током $k-$те године од потписивања уговора на крају године усплаћује сума $21-k$, износи 13. Осигуравајућа компанија користи каматну стопу $i = 6\%$ и вероватноћу смртности $q_{40} = 0.2$. Одредити нето премију по овом уговору, ако се q_{40} смањи на $q^*_{40} = 0.1$.*

Решење. На основу релације (109) следи да једнократна нето премија, $(DA)^1_{40:\overline{20}|}$, задовољава

$$(DA)^1_{40:\overline{20}|} = \upsilon q_{40} \cdot 20 + \upsilon p_{40} (DA)^1_{41:\overline{19}|}.$$

Како је вредност $(DA)^1_{41:\overline{19}|}$ одређена само вредностима $q_{41}, ..., q_{59}$, за једнократну нето премију важи:

$$\begin{aligned}
(DA^*)^1_{40:\overline{20}|} &= \upsilon q^*_{40} \cdot 20 + \upsilon p^*_{40} (DA)^1_{41:\overline{19}|} \\
&= \upsilon q^*_{40} \cdot 20 + \upsilon p^*_{40} \frac{(DA)^1_{40:\overline{20}|} - \upsilon q_{40} \cdot 20}{\upsilon p_{40}} \\
&= 20\upsilon q^*_{40} - 20\upsilon q_{40} \frac{p^*_{40}}{p_{40}} + \frac{p^*_{40}}{p_{40}} (DA)^1_{40:\overline{20}|} \\
&= 20\upsilon \frac{q^*_{40} - q_{40}}{p_{40}} + \frac{p^*_{40}}{p_{40}} (DA)^1_{40:\overline{20}|} \approx 12.2665
\end{aligned}$$

Пример 4. *Израчунати једнократну нето премију за трогодишње мешовито животно осигурање за особу старости 25 година са осигураном сумом 100. Приликом рачунања се користи таблица смртности 1 са равномерном расподелом тренутка смрти у последњој години живота и каматном стопом $i = 25\%$.*

Таблица смртности 1

x	q_x	l_x	d_x	L_x	$\mathring{e}$
20	*0.001268*	*97813*	*124*	*97750.97*	*59.67*
21	*0.001321*	*97689*	*129*	*97624.47*	*58.75*
22	*0.001374*	*97560*	*134*	*97492.97*	*57.82*
23	*0.001437*	*97426*	*140*	*97355.97*	*56.90*
24	*0.001501*	*97286*	*146*	*97212.96*	*55.98*
25	*0.001565*	*97140*	*151*	*97062.96*	*55.07*
26	*0.001639*	*96988*	*159*	*96908.46*	*54.15*
27	*0.001714*	*96829*	*166*	*96745.95*	*53.24*
28	*0.001800*	*96663*	*174*	*96575.95*	*52.33*
29	*0.001886*	*96489*	*182*	*96397.94*	*51.42*

Решење. Из формуле (97) добија се:

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{25:\overline{3}|} &= \frac{i}{r}A^{1}_{25:\overline{3}|} + A_{25:\overset{1}{\overline{3}|}} \\
&= \frac{i}{r}\frac{M_{25}-M_{28}}{D_{25}} + \frac{D_{28}}{D_{25}} \\
&= \frac{i}{r}\frac{vd_{25}+v^2d_{26}+v^3d_{27}}{l_{25}} + \frac{v^3 l_{28}}{l_{25}} \\
&= \frac{0.25}{\ln(1+0.25)}\frac{0.8\cdot 152+0.64\cdot 159+0.512\cdot 166}{97140} + \frac{0.512\cdot 96663}{97140} = 0.5128.
\end{aligned}
\tag{225}
$$

Добијени резултат одговара осигураној суми од 1. Једнократна нето премија у овом примеру је: 51.28.

Пример 5. *Осигураваjућа команија користи таблицу смртности 2 са одабиром, дурацијом 3 године и каматном стопом* $i = 3\%$.

Таблица смртности 2

$[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	$x+3$
60	*0.09*	*0.11*	*0.13*	*0.15*	*63*
61	*0.10*	*0.12*	*0.14*	*0.16*	*64*
62	*0.11*	*0.13*	*0.15*	*0.17*	*65*
63	*0.12*	*0.14*	*0.16*	*0.18*	*66*
64	*0.13*	*0.15*	*0.17*	*0.19*	*67*

Човек узраста 60 година склапа уговор о двогодишњем одложеном на 2 године осигурању које се исплаћује на крају године смрти. Израчунати једнократну нето премију.

Решење.

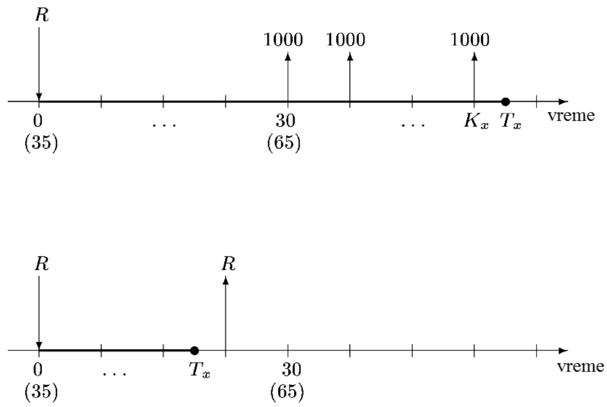
$$
\begin{aligned}
{}_{2|2}A_{[60]} &= v^3 P\{2 < T < 3\} + v^4 P\{3 < T < 4\} \\
&= v^3 p_{[60]}p_{[60]+1}q_{[60]+2} + v^4 p_{[60]}p_{[60]+1}p_{[60]+2}q_{63} \\
&\approx 0.19026
\end{aligned}
$$

Пример 6. *Човек који има* $x = 35$ *година купује доживотну ренту која ће почети да се исплаћује када буде имао* 65 *година. Вредност ренте је* 1000 *годишње. Накнаду за ренту* R *уплаћује у виду једнократне премије у време закључивања уговора.*

а) У случају смрти пре $65-te$ *године износ* R *се враћа наследницима на крају године смрти.*

б) У случају смрти пре $65-te$ *године износ* R *са обрачунатом каматом се враћа наследницима на крају године смрти.*

Одредити премију R.



Слика 1: Могуће реализације догађаја

Решење. а) Две могуће ситуације су приказане на слици 1. Осигураник треба да плати износ R у тренутку склапања уговора. Са друге стране, осигуравајућа компанија исплаћује доживотну ренту $m = 30$ година од потписивања уговора или животно осигурања R у дискретном тренутку (не већем од $m = 30$ година од потписивања уговора). Садашња вредност трошкова у тренутку склапања уговора је: $1000{}_{30|}\ddot{a}_{35} + R \cdot A^1_{35:\overline{30|}}$.
Принцип еквивалентности обавеза даје: $R = 1000{}_{30|}\ddot{a}_{35} + R \cdot A^1_{35:\overline{30|}}$, односно

$$R = 1000\frac{{}_{30|}\ddot{a}_{35}}{1 - A^1_{35:\overline{30|}}}.$$

Ако би биле дате таблице смтности могле би да се израчунају конкретне вредности.

б) Трошкови осигураника остају исти као у претходном случају, док се трошкови осигуравача мењају. Ако особа умре са $35 + k$ година, где је $k = 0, 1, ..., 29$, осигуравајућа компанија је дужна да плати износ $R(1 + i)^{k+1}$ у тренутку $35 + k + 1$. Садашња вредност трошкова осигуравајуће компаније је:

$$\sum_{k=0}^{29} R(1+i)^{k+1}\upsilon^{k+1}P\{K = k\} = R\sum_{k=0}^{29} P\{K = k\} = R \cdot P\{K \leq 29\} = R \cdot P\{T < 30\}.$$

Принцип еквиваленције даје: $R = 1000{}_{30|}\ddot{a}_{35} + R \cdot P\{T < 30\}$, односно

$$R = 1000\frac{{}_{30|}\ddot{a}_{30}}{1 - P\{T < 35\}} = 1000\frac{\upsilon^{30}P\{T \geq 30\}\ddot{a}_{65}}{1 - P\{T \geq 30\}} = 1000\upsilon^{30}\ddot{a}_{65}.$$

Пример 7. *Особа стара x година купује доживотну ренту.*

1. *Премија P се плаћа на годишњицу закључивања уговора прве три године.*

2. *У случају смрти осигураника у току ове три године осигурање није наплативо.*

3. *Рента почиње да се исплачује након 3 године од закључивања уговора и плаћа се годишње на годишњицу закључивања уговора.*

4. *Прва исплата је* 1000, *а свака следећа је већа за* 4% *од претходне.*

Одредити нето премију P, *ако је каматна стопа* $i = 4\%$, *очекивани преостали животни век осигураника,* e_x, 11.05, *вероватноћа да ће живети бар једну годину је 0.99, а бар две године је 0.98.*

Решење. У тренутку склапања уговора вредност осигураникових обавеза је:

$$\begin{aligned} a_C &= P\ddot{a}_{x:\overline{3}|} \\ &= P \cdot (1 + vP\{T > 1\} + v^2 P\{T > 2\}) \\ &= P \cdot \left(1 + 0.99\frac{1}{1+0.04} + 0.98\frac{1}{1+0.04}\right) \\ &\approx 2.8580P \end{aligned}$$

Садашња вредност обавеза осигуравача је:

$$a_B = \sum_{n=3}^{+\infty} 1000 \cdot 1.04^{n-3} v^n P\{T > n\} = 1000v^3 \sum_{n=3}^{+\infty} P\{T \geq n\}.$$

Према формули (49) важи:

$$e_x = \sum_{k=1}^{+\infty} P\{T > k\},$$

следи да је

$$\sum_{n=3}^{+\infty} P\{T \geq n\} = e_x - P\{T > 1\} - P\{T > 2\} = 11.05 - 0.99 - 0.98 = 9.08.$$

Дакле, $a_B = 1000\frac{1}{1+0.04^3}9.08 \approx 8072.0869$, па је, према принципу еквивалентности, нето премије: $P = 2824.38$.

Пример 8. *Осигуравајућа компанија је продала женској особи полису трогодишњег животног осигурања са осигураном сумом 1000 која се исплаћује на крају године смрти. Премија је израчуната на основу принципа еквиваленције и плаћа се годишње. У време склапања уговора, особа је изјавила да има 30 година. Након две године осигуравајућа компанија је сазнала да је дотична особа у време склапања уговора имала 31. годину. Због тога је осигуравајућа компанија одлучила да смањи величину осигуране суме тако да и даље одговара уплаћеним премијама по принципу еквиваленције али са стварним годинама. Одредити нову осигурану суму, ако је познато да је:* $i = 4\%, q_{30} = 1\%, q_{31} = 2\%, q_{32} = 3\%, q_{33} = 4\%$.

Решење. Пре свега треба одредити годишњу премију P коју је уплаћивала особа. Пошто је осигуравајућа компанија претпоставила да она има 30 година, премија је рачуната на следећи начин:

- обавеза осигуравајуће компаније је да исплати суму 1000 на крају године смрти, а садашња вредност те обавезе је:

$$
\begin{aligned}
1000A^{1}_{30:\overline{3}|} &= 1000(\upsilon q_{30} + \upsilon^2 p_{30} q_{31} + \upsilon^3 p_{30} p_{31} q_{32}) \\
&= 1000\left(\frac{1}{1+0.04}0.01 + \left(\frac{1}{1+0.04}\right)^2 0.99\cdot 0.02 + \left(\frac{1}{1+0.04}\right)^3 0.99\cdot 0.98\cdot 0.03\right) \\
&\approx 53.796725
\end{aligned}
$$

- обавеза осигураника је плаћање трогодишње премије, садашња вредност ових обавеза је:

$$
\begin{aligned}
P\ddot{a}_{30:\overline{3}|} &= P(1 + \upsilon p_{30} + \upsilon^2 p_{30} p_{31}) \\
&= P\left(1 + \frac{1}{1+0.04}0.99 + \left(\frac{1}{1+0.04}\right)^2 0.99\cdot 0.98\right) \approx 2.848927P.
\end{aligned}
$$

На основу принципа еквиваленције, добија се: $P \approx \frac{53.796725}{2.848927} = 18.883153$.

Прави трошкови су:

- обавеза осигуравајуће компаније је да исплати суму 1000 особи која у тренутку закључивања уговора има 31.годину ако смрт наступи у току прве две године или смањену осигурану суму SA ако смрт наступи у току треће године од потписивања уговора;
- обавеза осигураника је плаћање трогодишње премије обрачунате за особу која има 31.годину, а не 30.година.

Губитак компаније у тренутку закључивања уговора је:

$$1000(\upsilon q_{31} + \upsilon^2 p_{31} q_{32}) + SA\upsilon^3 p_{31} p_{32} q_{33} - P\ddot{a}_{31:\overline{3}|}.$$

Према принципу еквиваленције, претходна вредност треба да буде 0, па је износ осигурања у трећој години:

$$
\begin{aligned}
SA &= \frac{P\ddot{a}_{31:\overline{3}|} - 1000(\upsilon q_{31} + \upsilon^2 p_{31} q_{32})}{\upsilon^3 p_{31} p_{32} q_{33}} \\
&\approx \frac{18.883153\cdot(1 + \frac{1}{1+0.04}0.98 + (\frac{1}{1+0.04})^2 0.98\cdot 0.97) - 1000(\frac{1}{1+0.04}0.02 + (\frac{1}{1+0.04})^2 0.98\cdot 0.03)}{(\frac{1}{1+0.04})^3 0.98\cdot 0.97\cdot 0.04} \\
&= 202.95.
\end{aligned}
$$

Пример 9. *Одредити годишњу нето премију следећег животног осигурања:*

1. *старост осигураника је 30 година,*
2. *осигурана сума је 1 за првих 20 година уговора и 5 након тога,*
3. *период плаћања премије не прелази 35 година,*
4. *током првих 20 година годишња премија је једнака* $\frac{1}{5}$ *годишње премије у наредних 15 година,*
5. $i = 0.06, A^1_{30:\overline{20|}} = 0.02933, A_{30} = 0.1024835, A_{30:\overline{20|}} = 0.32307, \ddot{a}_{30:\overline{35|}} = 14.835.$

Решење. Обавеза осигуравача у време склапања уговора је

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & \text{ако је } T < 20; \\ 5v^{K+1}, & \text{ако је } T > 20. \end{cases} = 5v^{K+1} - 4Z^1_{30:\overline{20|}}$$

где је

$$Z^1_{30:\overline{20|}} = \begin{cases} v^{K+1}, & \text{ако је } T < 20; \\ 0, & \text{ако је } T > 20. \end{cases}$$

Па је очекивана вредност његових обавеза: $a_B = 5A_{30} - 4A^1_{30}Z^1_{30:\overline{20|}} = 0.39508$.

Садашња вредност осигураникових обавеза је: $a_C = 5P\ddot{a}_{30:\overline{35|}} - 4P\ddot{a}_{30:\overline{20|}}$, где је P премија за првих 20 година од потписивања уговора. Величина $\ddot{a}_{30:\overline{20|}}$ се може добити на следећи начин:

$$\ddot{a}_{30:\overline{20|}} = \frac{A_{30:\overline{20|}}}{1-v} \approx 11.959097.$$

Дакле, $a_c = 26.338612P$. Па је према принципу еквиваленције премија: $P \approx 0.015$.

Пример 10. *Особа са* $x = 80$ *година жели да закључи уговор о животном осигурању са сумом* 1000 *и апсолутно непрекидном премијом са константним интензитетом* $\bar{P}_x$*. Претпоставља се да је стопа смртности ове особе у преосталом животном веку* $\mu = 0.15$*. Међутим, због нестабилности економске ситуације, актуар не зна коју каматну стопу да користи, па је одлучио да одреди зависност* $\bar{P}_x$ *од* i*. Наћи ту зависност.*

Решење. Очекивање садашње вредности осигуравачевих обавеза у тренутку закључивања уговора је:

$$\bar{A}_x = E(1000v^T) = \int_0^{+\infty} 1000v^t \mu_{x+t\,t}p_x dt = \frac{1000\mu}{r+\mu},$$

док је садашња вредност осигураникових обавеза једнака

$$\bar{P}_x\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} \bar{P}_x v^t {}_tp_x dt = \frac{\bar{P}_x}{r+\mu}.$$

Из принципа еквивалентности добија се $\bar{P}_x = 1000\mu = 150$, односно $\bar{P}_x$ не зависи од i.

Пример 11. *Осигуравајућа компанија је потписала трогодишњи уговор привременог животног осигурања са особом која има $x = 25$ година, у износу од 1000. Уплата премије се врши на почетку сваке године током трајања уговора. Трошкови дефинисани у уговору су:*

1. *агент: 20% од прве премије и 5% од сваке следеће премије;*
2. *припрема докумената: 15 новчаних јединица у тренутку склапања уговора (односно од прве премије) и 5 новчаних јединица од сваке следеће премије, 50 новчаних јединица у време исплате осигуране суме;*
3. *порез: 5% од премије;*
4. *остали трошкови: компанија повећава премију за 2% за покривање административних трошкова.*

Под претпоставком да се користи таблица смртности 1 са равномерном расподелом тренутка смрти у последњој години живота и каматном стопом $i = 25\%$, израчунати износ премије узимајући у обзир наведене трошкове.

Решење. Означимо са P тражену премију.

Обавезе осигуравајуће компаније се, пре свега, састоје у исплати 1000 рубаља по уговору привременог осигурања након 3 године. Садашња вредност ове обавезе је: $1000\bar{A}^1_{25:\overline{3}|}$.

Плаћање агента може бити предсављено као комбинација једнократне исплате износа $0.15P$ у време закључивања уговора и трогодишње привремене ренте са вредношћу $0.05P$ годишње. Дакле, садашња вредност ових обавеза је: $0.15P + 0.05P\ddot{a}_{25:\overline{3}|}$.

Трошкови припреме докумената се могу посматрати као комбинација једнократне исплате у износу од 10 јединица у време закључивања уговора, трогодишње привремене животне ренте са вредношћу од 5 јединица годишње и трогодишњег привременог животног осигурања са вредношћу од 50 рубаља. Садашња вредност ових обавеза је: $10 + 5\ddot{a}_{25:\overline{3}|} + 50\bar{A}^1_{25:\overline{3}|}$.

Порез и 2% административних трошкова се могу посматрати као трогодишња привремена рента са вредношћу $0.05P + 0.02 \cdot 1000 = 20 + 0.05P$. Садашња вредност ове обавеза је $(20 + 0.05P)\ddot{a}_{25:\overline{3}|}$.

Дакле, садашња вредност у моменту закључивања уговора свих обавеза осигуравајуће компаније је:

$$10 + 0.15P + 1050\bar{A}^1_{25:\overline{3}|} + (25 + 0.1P)\ddot{a}_{25:\overline{3}|}$$

Са друге стране, обавеза осигураника је да 3 године плаћа привремену ренту величине P. Садашња вредност у тренутку склапања уговора је $P\ddot{a}_{25:\overline{3}|}$.

На основу принципа еквиваленције следи:

$$P\ddot{a}_{25:\overline{3}|} = 10 + 0.15P + 1050\bar{A}^1_{25:\overline{3}|} + (25 + 0.1P)\ddot{a}_{25:\overline{3}|},$$

па следи:

$$P = \frac{10 + 1050\bar{A}^{1}_{25:\overline{3}|} + 25\ddot{a}_{25:\overline{3}|}}{0.9\ddot{a}_{25:\overline{3}|} - 0.15}.$$

На основу таблица смртности добијају се потребне вредности:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{25:\overline{3}|} &= \frac{1}{l_{25}}(l_{25} + \upsilon l_{26} + \upsilon^2 l_{27}) \\
&= \frac{1}{97140}\left(97140 + 96988 \cdot \frac{1}{1+0.25} + 96829 \cdot \left(\frac{1}{1+0.25}\right)^2\right) \\
&= 2.436693
\end{aligned}$$

$$\bar{A}^{1}_{25:\overline{3}|} = \frac{i}{r}A^{1}_{25:\overline{3}|} = \frac{i}{r}A^{1}_{25:\overline{3}|} = \frac{0.25}{\ln(1+0.25)}\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{1+0.25}\right)^{k+1}\frac{l_{x+k}}{l_x}\frac{d_{x+k}}{l_x} = 0.003551$$

Дакле, премија је:

$$P = \frac{10 + 1050 \cdot 0.003551 + 25 \cdot 2.436693}{0.9 \cdot 2.436693 - 0.15} \approx 36.54.$$

9 Закључак

Главни циљ животног осигурања је да се финансијски покрију ризици живота. Свим ризицима је заједничко то што се осигуранику у случају наступања осигураног случаја исплаћује осигурана сума. Са друге стране постоје и ризици осигуравача, који значајно утичу на његов финансијски положај. Обе врсте ризика су изражене кроз премију осигурања. Премија осигурања зависи од осигураника, односно његове старости и пола, од осигуране суме, периода трајања осигурања и здравственог упитника[11] и формира се на неки од начина наведених у раду. Када се формира премија на основу претходних параметара, онда се врши њена процена. Уколико осигуравајућа компанија сматра осигураника ризичним, може кориговати висину осигуране суме или рату премије осигурања. Начин на који се одређује да ли је корисник ризичан или не и величина корекције (уколико је има) зависе од саме осигуравајуће компаније као и од конкретног случаја. Када се изврши корекција (ако је потребна), формира се полиса осигурања.

Циљ овог рада је био да се прикаже ризик осигурања преко рачунања премије осигурања, пошто су они у директној вези. Приказани су основни типови животног осигурања. Код ових типова осигурања осигуравајућа компанија прихвата ризик од настанка осигураног случаја, али и инвестира своја средства и резерве на финансијско тржиште чиме сноси одређени ризик од инвестирања. У новије време развија се све већи број различитих врста животног осигурања као комбинација основних, али се развијају и такозвани *unit-linked* уговори животног осигурања. Код ових уговора осигуравајућа компанија сноси само ризик од настанка осигураног случаја, док је ризик од инвестирања средстава пребачен на самог осигураника.

Ниво развијености животног осигурања у некој држави зависи од висине националног дохотка и стабилности валуте. Ако је виши ниво националног дохотка, онда ће и животни стандард становништва бити на вишем нивоу и постоји већа потреба за животним осигурањем. Са друге стране, у неразвијеним земљама са ниским националним дохотком, нижи је животни стандард па становништво једва покрива и свакодневне потребе и не може да одвоји део који ће да покрије животно осигурање.

У нашој земљи животно осигурање је веома мало заступљено и оно чини мање од 1% укупног осигурања. Да би се овај вид осигурања развио потребан је велики број различитих врста животног осигурања, као и едукација грађања у вези са значајем животног осигурања и њихове користи од њега као вида штедње.[4]

[11]Наведени су основни параметри који утичу на премију. Зависно од осигуравајуће компаније могу бити урачунати и други параметри.

Литература

[1] Фалин Г. И., Фалин А. И.; *Актуарная математика в задачах*; Физматлит, 2003.

[2] Hans U. Gerber; *Life Insurance Mathematics*; Springer, 1997.

[3] Јелена Кочовић, Предраг Шулејић, Татјана Ракоњац-Антић; *Осигурање*; Центар за издавачку делатност Економског факултета у Београду, Београд 2010.

[4] Јелена Кочовић; *Актуарске основе формирања тарифа у осигурању лица*; Центар за издаваћку делатност Економског факултета у Београду, Београд 2006.

[5] N. L. Borers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, C. J. Nesbitt; *Actuarial mathematics*; The Society of Actuaries, 1997.

[6] Павле Младеновић; *Елементи актуарске математике*; Математички факултет, Београд 2014.

[7] Павле Младеновић; *Вероватноћа и статистика*; Математички факултет, Београд 2008.; 171-174.

[8] Ragnar Norberg; *Basic Life Insurance Mathematics*; 2002.; elektronsko izdanje

[9] Синиша Слијепчевић; *Увод у актуарску математику*; Загреб 2012.; електронско издање

[10] Слободанка Јанковић; *Елементи финансијске математике*; Београд 2015.; електронско издање

[11] Владимир Чоловић; *Контрола ризика и осигурање*; Бања Лука 2012.; електронско издање