Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Master rad

Doprinos programskog paketa GeoGebra u nastavi analitičke geometrije u srednjoj školi

kandidat:
Željko R. Anđić

mentor:
Dr Miroslav Marić
komisija:
Dr Milan Božić
Dr Miljan Knežević

Beograd, 2015. godina

SADRŽAJ

Uvod

Baveći se poslom profesora matematike, a kao i što sam pretpostavljao prilikom odabira ovog poziva, video sam da se radi o veoma kreativnom poslu. Tu kreativnost treba pokazati u što boljem izlaganju i približavanju nastavnog plana učenicima i izazvanju veće pažnje i interesovanja učenika za dato gradivo, u ovom slučaju matematike. Danas nam uveliko u tome pomaže računarska grafika koja je postala sastavni deo svakodnevnog života i sa kojom se sreću kako deca predškolskog uzrasta tako i stariji učenici. Pomoću računarske grafike vizualizuju se podaci i objekti, čime oni postaju realističniji i lakši za shvatanje. Postala je sastavni deo kako aplikativnog softvera, tako i računarskih sistema uopšte. Jedan od softverskih paketa, kojim ćemo se baviti u ovom radu, koji se bavi računarskom grafikom i čijom primenom se znatno olakšava i postaje kvalitetnija nastava matematike, je GeoGebra.

U prvom poglavlju pokazano je gde se može u srednjoj školi koristiti GeoGebra, tj. kod kojih nastavnih jedinica sa akcentom na analitičku geometriju. Opisani su pedagoški aspekti korišćenja ovakvih softvera, kao i aktivno učenje i usavršavanje profesora. Na pisanju ovog rada me podstakao moj rad u srednjim školama u kojima mali broj profesora koristi savremene metode nastave matematike, prvenstveno GeoGebre. Ideja ovog rada je da se profesori upoznaju sa osnovama GeoGebre koju je, nadam se, posle relativno lako koristiti.

Drugo poglavlje je posvećeno načinu dolaska do GeoGebre i instalaciji ovog softvera, kao i osnovnim izgledom GeoGebre.

U trećem poglavlju su detaljno objašnjene osnovne konstrukcije koje se veoma često koriste, i sa upoznavanjem tih osnovnih konstrukcija već se ulazi u svet GeoGebra i vide se povoljnosti korišćenja ovog softvera.

U četvrtom, glavnom, poglavlju ovog rada pokazana je primena GeoGebre u nastavi analitičke geometrije kroz primere.

Kraj rada je standardno posvećen zaključku i literaturi na koju se pozivam i koju sam koristio prilikom izrade ovog rada.

1. Nastava matematike u trećem razredu srednje škole

U nastavnom planu i programu za treći razred srednjih škola analitička geometrija zauzima najveću oblast i veliki broj časova. Na svakom od tih časova GeoGebra bi pružila veliku pomoć u shvatanju i savladavanju nastavnih jedinica. Osim analitičke geometrije, tu su i druge nastavne oblasti gde bi ovaj paket bio od pomoći, kao npr. poliedri, obrtna tela i td. U tabeli 1. je dat prikaz nastavnih jedinica koje treba obraditi u trećem razredu gimnazije matematičkog smera, a markirane su one gde bi nam GeoGebra bila od velike pomoći.

Tabela. 1. Nastavne jedinice u trećem razredu gimnazije

Poliedri	***Obrtna tela***	***Vektori***	**Analitička geometrija u ravni**	Matematička indukcija. Nizovi	Kompleksni brojevi i polinomi
Rogalj, triedar	***Cilindrična i konusna površ, obrtna površ***	***Pravougli koordinatni sistem u prostoru***	**Rastojanje dve tačke**	Matematička indukcija i njene primene	Pojam i primeri algebarskih struktura (grupa, prsten, polje)
Poliedar, Ojlerova teorema, Pravilan poliedar	***Prav valjak, prava kupa i zarubljena prava kupa***	***Projekcije vektora***	**Podela duži u datoj razmeri. Površina trougla**	Elementarne teorija brojeva (deljivost, prosti brojevi, kongruencije)	Polje kompleksnih brojeva
Prizma i piramida, Ravni preseci prizme i piramide	***Površina i zapremina pravog kružnog valjka, prave kružne kupe i zarubljene kružne kupe***	***Koordinate vektora***	**Prava, razni oblici jednačine prave; ugao između dve prave; rastojanje između tačke i prave**	Osnovni pojmovi o nizovima (definicija, zadavanje, operacije)	Trigonometrijski oblik kompleksnog broja, Moavrova formula; Neke primene kompleksnih brojeva
Zapremina poliedara; Zapremina kvadrat, Kavaljerije princip	***Sfera i lopta, ravni preseci sfere i lopte***	***Skelareni, vektorski i mešoviti proizvod vektora***	**Sistemi linearnih jednačina, Gasov postupak**	Aritmetički niz; Geometrijski niz; primene	Polinomi nad poljem kompleksnih brojeva
Zapremina prizme, piramide i zarubljene kupe	***Površina lopte, sferne kalote i pojasa***	***Determinante drugog i trećeg reda***	**Sistemi linearnih nejednačina sa dve nepoznate i grafička interpretacija**	Jednostavnije diferentne jednačine	Osnovna teorema algebre i neke njene posledice, Vitove formule
	Zapremina lopte	***Neke primene vektora***	**Pojam linearnog programiranja**	Granične vrednost niza; broj e	Sistemi algebarskih jednačina
	Upisana i opisana sfera poliedar, pravog valjka i kupe		**Krive linije drugog reda: kružnica, elipsa, hiperbola parabola**		

2. Aktivno učenje

Budući da znanja sve više zastarevaju, tj. smenjuju se novim, potpunijim i tačnijim, na učenje nisu više upućeni isključivo mladi već i većina odraslih. Najkonciznije rečeno: naučno-tehnološka revolucija koja se sve više rasplamsava, izazivajući “vrtoglavo rastuće obrazovne potrebe”, zahteva i permanentno obrazovanje.

Obrazovanje se više ne može završavati završetkom školovanja, niti se može ostvarivati samo u školama ili kakvim drugim obrazovnim ustanovama (uključujući i škole i obrazovne ustanove koje okupljaju odrasle). I najrazgranatija i najrazvijenija mreža škola i drugih obrazovnih institucija može obuhvatiti (uz sve mlade) tek deo odraslih, pa i to tek povremeno. Jedino je samoobrazovanje u stanju da zbilja svima obezbedi blagovremeno informisanje o sve češćim i sve važnijim naučnim, tehničkim, tehnološkim i drugim inovacijama. Zato se permanentno obrazovanje mora realizovati prvenstveno u vidu neprekidnog samoobrazovanja. Institucializovano obrazovanje ima, naravno vrlo značajnu ulogu, ali najznačajnija uloga ipak pripada samoobrazovanju. Korisno je i neophodno da se i odrasli ljudi sve više uključuju u školski, organizovani obrazovni proces, no, uprkos tome, najosnovniji oblik permanentnog učenja jeste permanentno samoobrazovanje.

Glavna obaveza škole nije više to da snabde učenike što većim obimom znanja (kao onda kada su naučna znanja sporo zastarevala te su učenici mogli upoznati većinu znanja koja će im posle školovanja biti neophodna), već da ih trajno zainteresuje i temeljno osposobi za doživotno samostalno učenje.

Saznavanjem učenika rukovodi nastavnik, ali tako što ih podstiče na što potpuniju, svestraniju i samostalniju intelektualnu aktivnost i što im pomaže da to ostvare. Poučavanje se, dakle, ne eliminiše, nego se transformiše, postajući sve češće indirektno. Učenici su neprestano intelektualno angažovani: pitaju, saopštavaju i obrazlažu svoja zapažanja, ističu i proveravaju hipoteze, analiziraju činjenice, tragaju za uzročno-posledičnim vezama, dokazuju i sl.

Nastavnik kreira situacije koje pogoduju aktivnom učenju, u uverenju da se poučavanje više ne može svoditi na elokventno izlaganje sopstvenih znanja i da predavačko-ispitivačka nastava mora ustupiti mesto što aktivnijoj i što kreativnijoj nastavi.

Sticanje znanja vlastitim intelektualnim naporima zahteva više vremena od učenja u vidu usvajanja gotovih istina, tj. saopštavanje gotovih znanja vremenski je ekonomičnije od nastave zasnovane na saznavalačkoj aktivnosti samih učenika. Nesporno je da je brže saopštiti i obrazložiti učenicima neku naučnu istinu nego im omogućavati da do nje, posredstvom mnoštva odgovarajućih intelektualnih operacija, sami dođu (videti [6]).

2.1. Prepreke na putu aktivizacije učenika

U našoj nastavnoj praksi, na žalost, još nije otklonjena dominacija učenja usvajanjem gotovih znanja. Zato nam škole, u proseku, i ne postižu zadovoljavajuće obrazovne rezultate.

To što se nastava u kojoj se znanja dobijaju u gotovom vidu tako sporo zamenjuje nastavom u kojoj se znanja stiču vlastitim intelektualnim naporima, ne može se objasniti uticajem isključivo jednog faktora, već komplementarnim delovanjem mnogih činilaca.

Preopširnost nastavnog gradiva jeste jedna od prepreka. Preopširno nastavno gradivo obavezno se obrađuje izlaganjem gotovih naučnih istina, jer je to vremenski najekonomičnije, a u pogledu kvaliteta i trajnosti stečenih znanja najneefikasnije. Doduše, preopširnost nastavnog gradiva može predstavljati i posledicu, a ne samo uzrok, jer neki nastavnici proširuju, verovatno i nesvesno, obim nastavnog gradiva i zato da bi imali čime opravdati najjednostavniji i najlakši način obavljanja nastave.

2.2. Sticanje znanja rešavanjem problema

Od savremenih nastavnika traži se da u nastavi stvaraju problemske situacije, da kod učenika izazivaju interes za rešavanje uočenih problema i da pokreću, usmeravaju i kontrolišu to rešavanje, trudeći se pri tom da učenici budu što samostalniji. Posebno je važno umeti dovoditi učenike u problemske situacije koje ih same po sebi podstiču na rešavanje, a samim tim i na stvaralačko učenje. Zbilja nije preterivanje tvrditi da je stvaranje problemskih situacija jedan od osnovnih zadataka nastavnika.

Za najuspešniji način stvaranja problemskih situacija u nastavi smatra se izazivanje kod učenika konflikta između znanja kojima već raspolažu i zahteva proisteklih iz novog radnog zadatka. Postupci kojima se to može realizovati vrlo su raznovrsni. Jedan od njih je i postavljanje pitanja na koje se ne može odgovoriti na osnovu onoga što se već zna, pitanja koja provociraju mišljenje. Treba nastojati da učenici što češće i postavljaju, a ne samo rešavaju, problem, ali nastavnik to mora nenametljivo kanalisati.

2.3. Suština nastavne očiglednosti

Očiglednost u nastavi, koja treba da obezbedi povezanost mišljenja s čulnim iskustvom, ne može se svoditi na opažanje u toku nastavnog časa. Savremeno tretiran, princip očiglednosti predstavlja zahtev da se proces sticanja znanja u nastavi neposredno ili posredno zasniva na učeničkom čulnom iskustvu.

2.4. Očiglednost i očigledna sredstva

Nastava može biti očigledna i bez ikakvih očiglednih sredstava, a ne mora biti očigledna ni s mnoštvom (čak i najsavremenijih i najboljih) takvih sredstava. Sve zavisi od toga da li se proces sticanja znanja stvarno zasniva (neposredno ili posredno) na čulnom iskustvu učenika. To se ponekad postiže bez ijednog očiglednog sredstva pomoću predstava, sećanja i mašte i čulnog iskustva. Takva nastava je zbilja očigledna, za razliku od nastave u kojoj je mnogo očiglednih sredstava, ali necelishodno korištenih. Prisustvo očiglednih sredstava još ne garantuje stvarnu očiglednost nastave. Nastava u kojoj učenici mnogo posmatraju, ali se na to ne nadovezuje rasuđivanje, misaona obrada stečenih empirijskih podataka, uočavanje njihovih veza i odnosa na uopšteno objašnjavanje nastavnika – nije očigledna. Od nastavnika zavisi da li će korišćenje očiglednih (nastavnih) sredstava obezbediti autentičnu očiglednost i efikasnost nastave (videti [5]).

3. GeoGebra

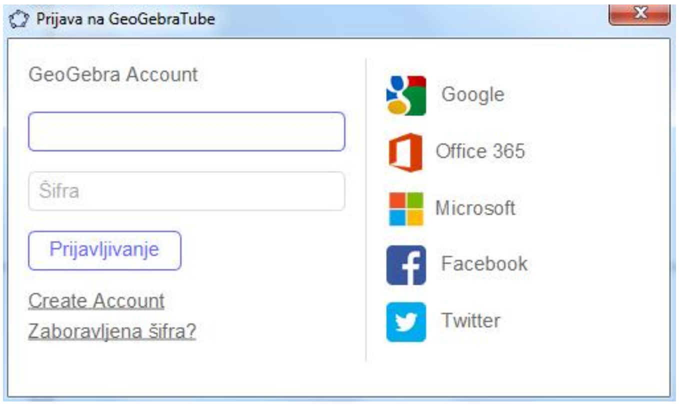
GeoGebra je besplatan matematički softver, koji uspešno povezuje algebru, geometriju, analizu i druge oblasti, pogodan za prikazivanje i lakše shvatanje matematičkog sadržaja. GeoGebra, programski paket, nastao je na univerzitetu u Salcburgu 2001. godine kao rad Markusa Hohenwartera. Njeno unapređenje je nastavljeno na univerzitetima Florida Atlantik, kao i na univerzitetu u Lincu gde se usavršava i dalje. Prva verzija GeoGebre, pod nazivom GeoGebra 1.0, pojavila se početkom 2002. godine. Razvoj je tekao preko više verzija, a u oktobru 2011. godine pojavila se i verzija GeoGebra 4.0, a GeoGebra 5.0 u kojoj je postignut znatan pomak u odnosu na prethodne verzije, jer ima mogućnost prikazivanja 3D objekata je aktuelna danas. GeoGebra je brzo postala popularna širom sveta, pa su se u njen razvoj uključili i programeri iz raznih zemalja, i danas je moguće njeno korišćenje na više jezika. Sa otvaranjem GeoGebra Centra u Beogradu i GeoGebra Instituta u Novom Sadu postala je dostupna i na srpskom jeziku, a i sve više postaje popularna u nastavi matematike kod nas.

GeoGebra je softver otvorenog koda i dostupan je na adresi http://www.geogebra.org/download i moguće ga je koristiti na svim popularnim operativnim sistemima, kao što su Windows, Linux i Mac. Moguće je instalirati i koristiti na tablet uređajima koji koriste: android, windows i mac operativni sistem. Na zvaničnom sajtu GeoGebre nalazi se informacija da je u pripremi GeoGebra za mobilne telefone. Instalacija je brza i jednostavna, a zavisi od toga da li imamo pristup internetu. Ako postoji pristup internetu, proces instalacije se vrši u sledećim koracima:

- da bi bila uspešna ova vrsta instalacije u računaru treba da bude instalirana aplikacija Java Web Start Launcher koja je dostupna na adresi www.java.com i lako se instalira,
- u neki od brauzera (Internet Explorer, Mozilla, Opera…) otvoriti sajt na adresi http://www.geogebra.org/download,
- odabere se operativni sistem koji se koristi,
- u sledećem koraku na dati upit odgovori se klikom na opciju *Run*,
- a na sve ostale upite do kraja instalacije odgovori potvrdno klikom na *Yes* I *Ok*.

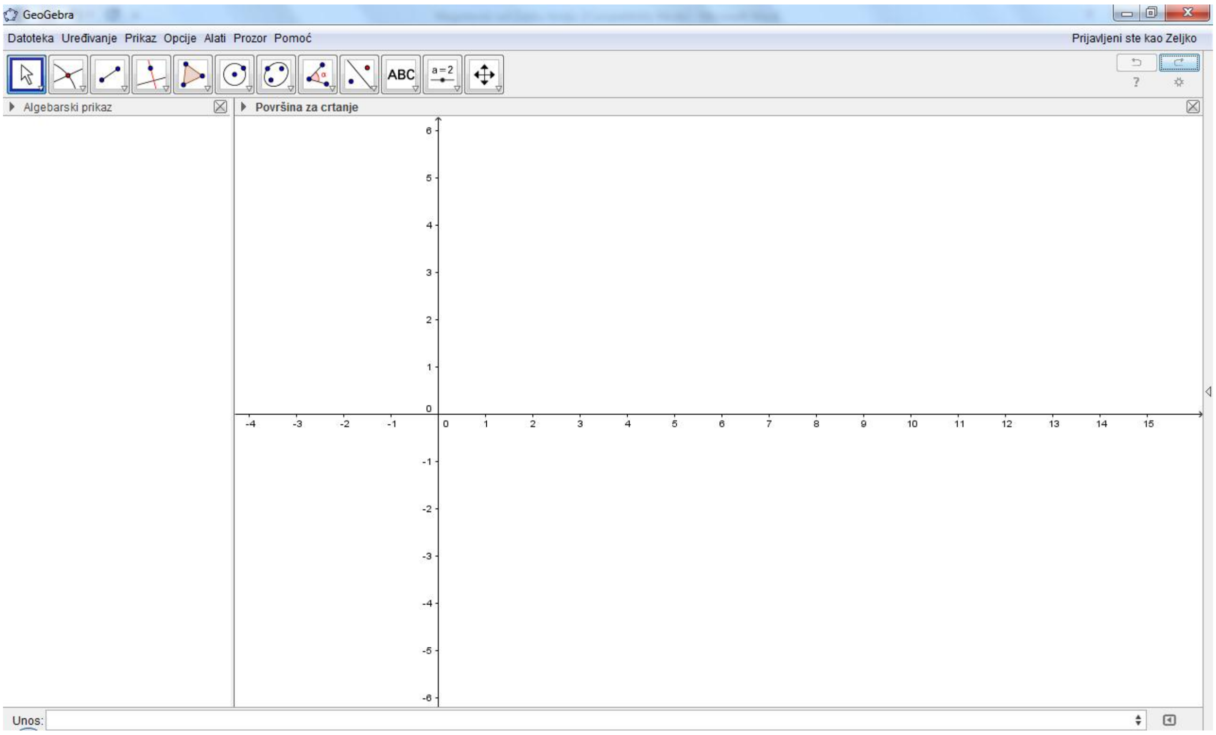
U slučaju da nema pristup internetu, instalacija se mora obaviti pomoću nekog prenosivog uređaja za skladištenje podataka (USB-a, CD-a, DVD-a…) na kom se nalazi instalacioni fajl najčešće naziva *GeoGebra_verzija.exe*. Duplim klikom na ovaj fajl započinje se instalacija koju treba dovršiti potvrdnim odgovorima, *Yes* I *Ok,* na zadate upite.

Pre nego sto se pojavio izgled ekrana, kao na slici 1, GeoGebra traži da se korisnik registruje na GeoGebra tube sajta. Ovaj korak se može preskočiti. Na njemu se mogu postavljati projekti i gledati projekti drugih. Na njemu se može ulogovati i preko nekih društvenih mreža (slika 1.).



Slika 1. Prijava na GeoGebra Tube

Posle završene instalacije se može pokrenuti GeoGebra i početi rad u njoj. Kada se pokrene uspešno instalirana GeoGebra, dobija se sledeći prozor (slika 2.):

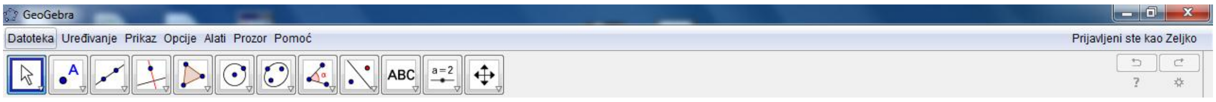


Slika 2. Početni prozor GeoGebre

Već je pomenuto da GeoGebra povezuje algebru, geometriju i analizu, pa prikazuje i objekte na tri načina:

- algebarski prikaz (prvi potprozor)
- geometrijski prikaz – površina za crtanje (drugi potprozor)
- tabelarni prikaz koji prilikom prvog pokretanja se ne pojavljuje već ga treba uključiti na sledeći način: GeoGebra –> Prikaz –>Tabelarni prikaz (videti [3]).

Grafički prikaz služi za crtanje objekata, tj. tačke i geometrijske likove. Za te konstrukcije se koriste alatke iz "Bara sa alatkama". Izgled bara sa alatkama dat je slikom 3.



Slika 3. Bar sa alatkama u GeoGebri

Kod svake alatke ima strelica u donjem desnom uglu. Klikom na tu strelicu otvara se skup alatki sličnih, ali ne iste funkcije, kao data alatka.

Upotrebom svake od alatki, tj. crtanjem mišom u delu za crtanje, dešavaju se promene u algebarskom prikazu. Svaki od nacrtanih objekata ima svoje ime i jednačinu, a tačka koordinate, u algebarskom prikazu (videti [2]).

.

4. Osnovne konstrukcije

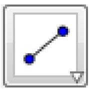
Pre početka konstrukcije, treba se upoznati sa osobinama onog (površi, tela ...) što se konstruiše.

Neka se početak sastoji iz konstrukcija nekih osnovnih površi, pa prema konkretnim primerima primene GeoGebre u analitičkoj geometriji.

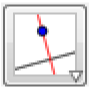
4.1. Kvadrat

Kvadrat ima osobine da su mu sve stranice jednake, paralelne i svi uglovi pravi, tj. 90°. Ima više načina kako konstruisati kvadrat, kao i načina konstrukcije u GeoGebri, a jedan od načina se sastoji iz sledećih koraka:

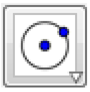
1) Konstrukcija počinje crtanjem, tj. unošenjem duži AB. Ona se unosi tako što se na baru sa alatkama klikne na strelicu za crtanje prave kroz dve tačke, a zatim odabirom crtanje duži (segmenta).



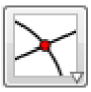
2) Zatim se konstruiše normala na duž AB, kroz jednu od tačaka A ili B, neka bude npr. A. To se dobije odabirom na baru sa alatkama alatke za konstrukciju normale. Zatim se klikne na tačku A, potom na duž AB. Tako dobijena prava je normalna na duž AB i prolazi kroz tačku A.



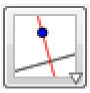
3) Konstruiše se krug čiji je centar u A i poluprečnik duž AB (tj. prolazi kroz tačku B). U baru sa alatkama se klikne na alatku za crtanje kruga sa centrom u datoj tački kroz drugu datu tačku.



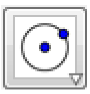
4) Konstruiše se presek normale iz koraka2 i kruga iz koraka 3 i dobiće se tačke C i D. To se uradi tako što u baru sa alatkama se klikne na strelicu alatke za konstrukciju tačke, a zatim na alatku za konstrukciju preseka dva objekta. Jedna od dobijenih tačaka C i D biće i teme kvadrata koji treba konstruisati.



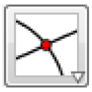
5) Konstruiše se normala na AB u tački B kao u koraku2.



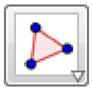
6) Konstruiše se krug sa centrom u tački B koji sadrži tačku A. Slično kao u koraku 3.

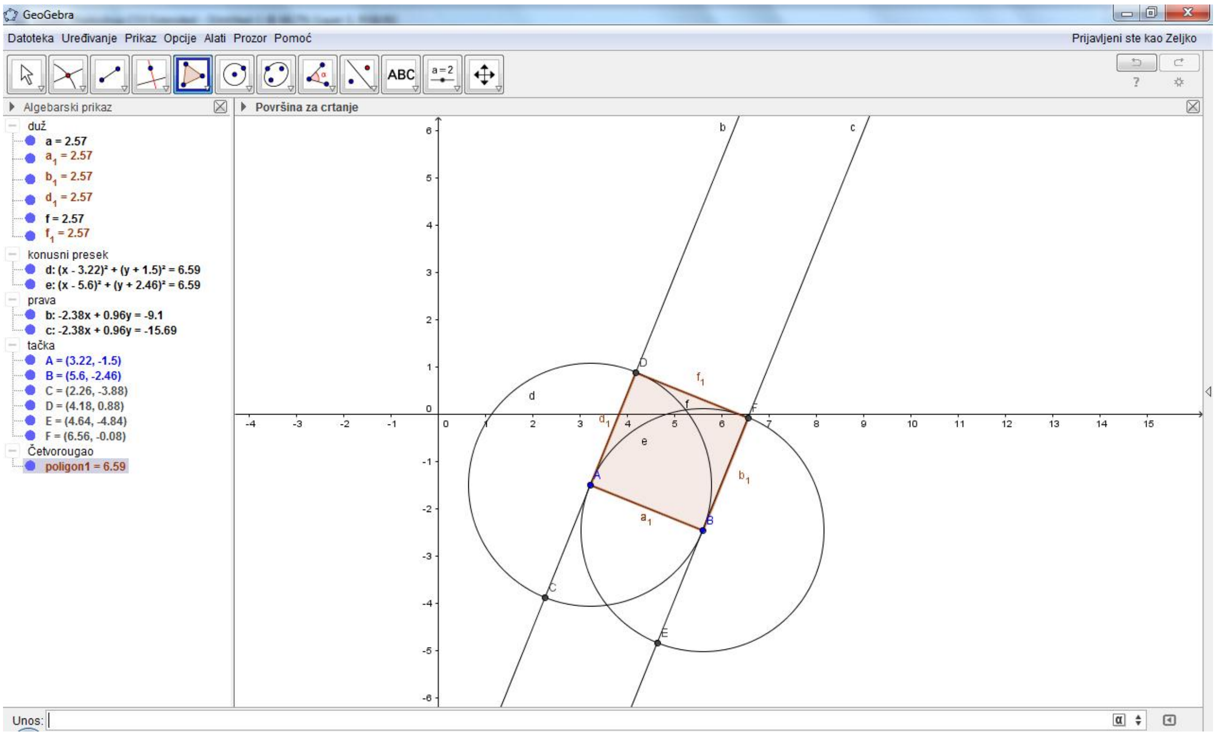


7) Zatim se konstruiše presek normale iz koraka 5 i kruga iz koraka 6. Dobijene su tačke E i F.



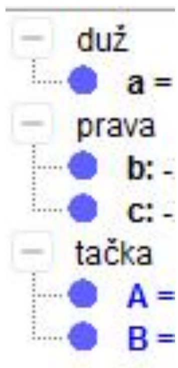
8) U poslednjem koraku treba konstruisati traženi poligon, tj. kvadrat. To se uradi klikom na alatku za konstrukciju poligona na baru sa alatkama, a zatim klikovima, u smeru kazaljke na satu, na sve tačke pojedinačno A, B, C i E, koje su dobijene kao temena kvadrata. Dobiće se osenčena površ koja je kvadrat, na slici 4.





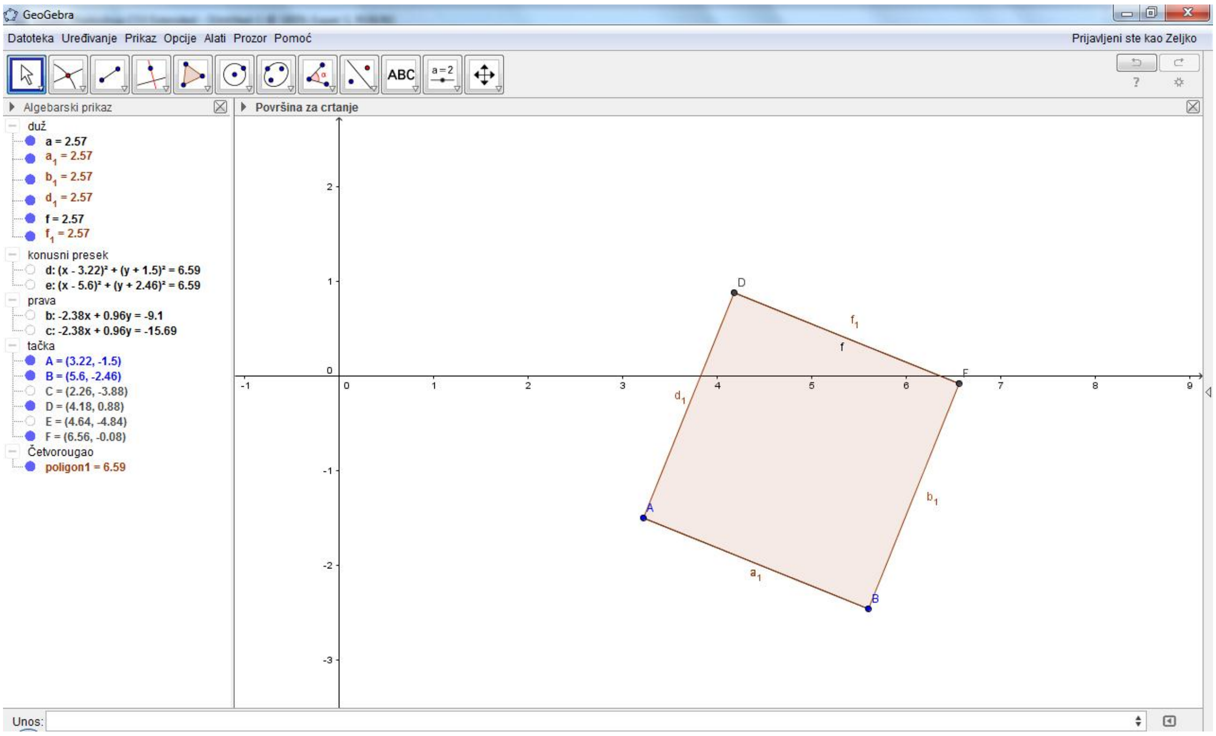
Slika 4. Kvadrat

Na algebarskom prikazu pojavila se svaka tačka (njene koordinate), prava (njena jednačina) i krug (njegova jednačina), a ispred svakog od njih plava tačka, slika 5.



Slika 5. Uključivanje i isključivanje vidljivosti objekta

Klikom na plave tačke mogu se skloniti svi objekti koji su bili od pomoći u konstrukciji, a više neće biti potrebni. I konstrukcija kvadrata na kraju, posle zumiranja, je data slikom 6.



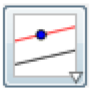
Slika 6. Kvadrat

4.2. Pravougaonik

U sledećim konstrukcijama neke alatke iz bara sa alatkama i njihove primene neće biti detaljno objašnjene, jer je već poznato kako se koriste iz prethodnih primera.

Pravougaonik je figura sa četiri prava ugla čiji su naspramne stranica jednake dužine i paralelne. Znajući ove osobine, može se konstruisati:

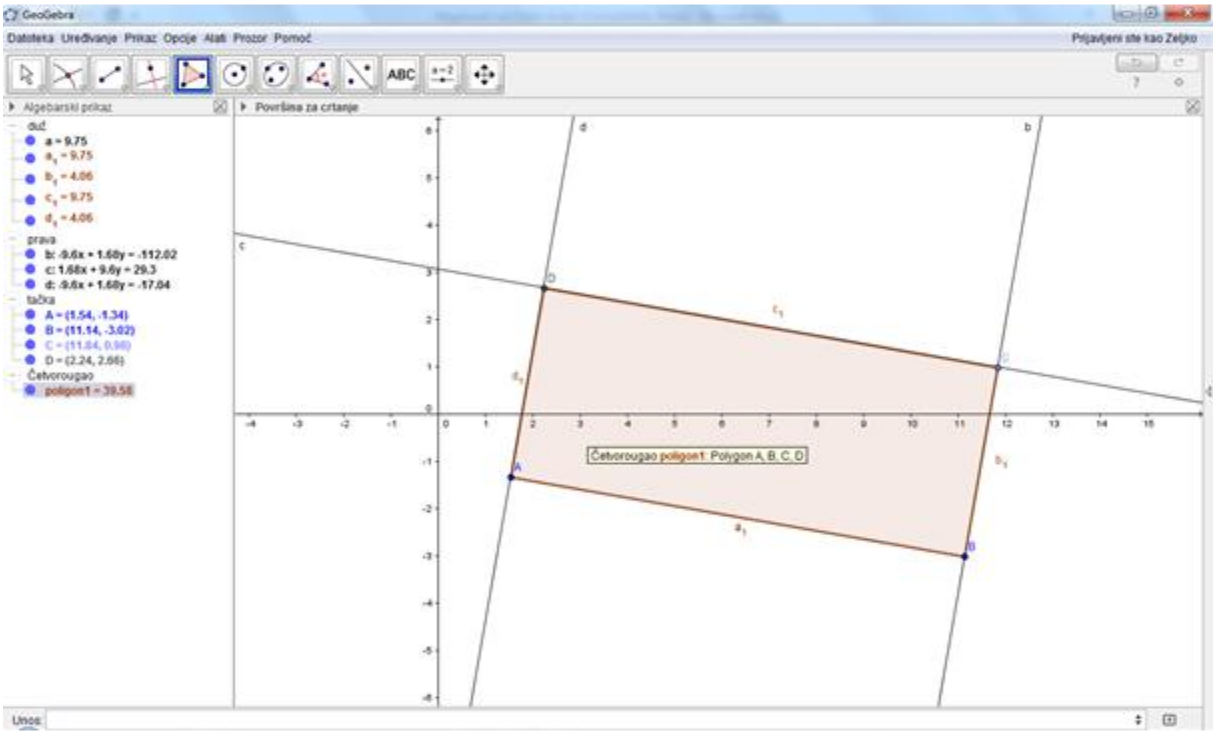
1) Konstruiše se duž AB.
2) Zatim se konstruiše, kroz tačku B, normala na duž AB.
3) Na pravoj dobijenoj u prethodnom koraku odabere se proizvoljna tačka. U baru sa alatkama klikne se na alatku za unošenje tačke. Dobijena je tačka C.
4) Kroz dobijenu tačku C, iz prethodnog koraka, konstruiše se prava paralelna sa duži AB. Za to postoji alatka koja se dobija klikom na strelicu, u baru sa alatkama za crtanje normale, a zatim klikom na alatku za konstruisanje paralelne prave. Kad se to završi, klikne se na tačku kroz koju će prolaziti prava (ovde tačka C), a zatim na pravu, tj. duž, sa kojom će biti paralelna (ovde duž AB). Dobijena je tražena prava.



5) Kroz tačku A konstruiše se normala na duž AB.
6) Tako je određena tačka D, koja se nalazi u preseku normale iz prethodnog koraka i prave iz koraka 4.

Da bude označena tačka D, koristi se već korišćena alatka. Posle odabira te alatke, klikne se na prave čiji presek je potreban. Tako je dobijena tačka D.

7) Poveže se poligon, kao u poslednjem koraku prethodnog primera, sa tačkama A,B,C i D. Dobijen je pravougaonik čija površina je osenčena, slika 7.



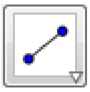
Slika 7. Pravougaonik

Mogu se ukloniti viškovi koji su pomogli u konstrukciji.

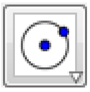
4.3. Jednakostraničan trougao

Jednakostraničan trougao je figura čije su tri stranice i svi uglovi jednaki (60°). Moguća konstrukcija je opisana sledećim koracima:

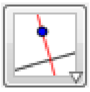
1) Konstruiše se duž AB**.**



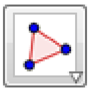
2) Konstruiše se krug sa centrom u A i poluprečnika AB (prolazi kroz tačku B). To se uradi korišćenjem alata, iz bara sa alatkama, za crtanje kruga sa centrom u jednoj tački kroz drugu tačku. Odabirom te alatke, klikne se na tačku A i kursor miša se vuče do tačke B na koju se klikne. Dobijen je krug koji je potreban.

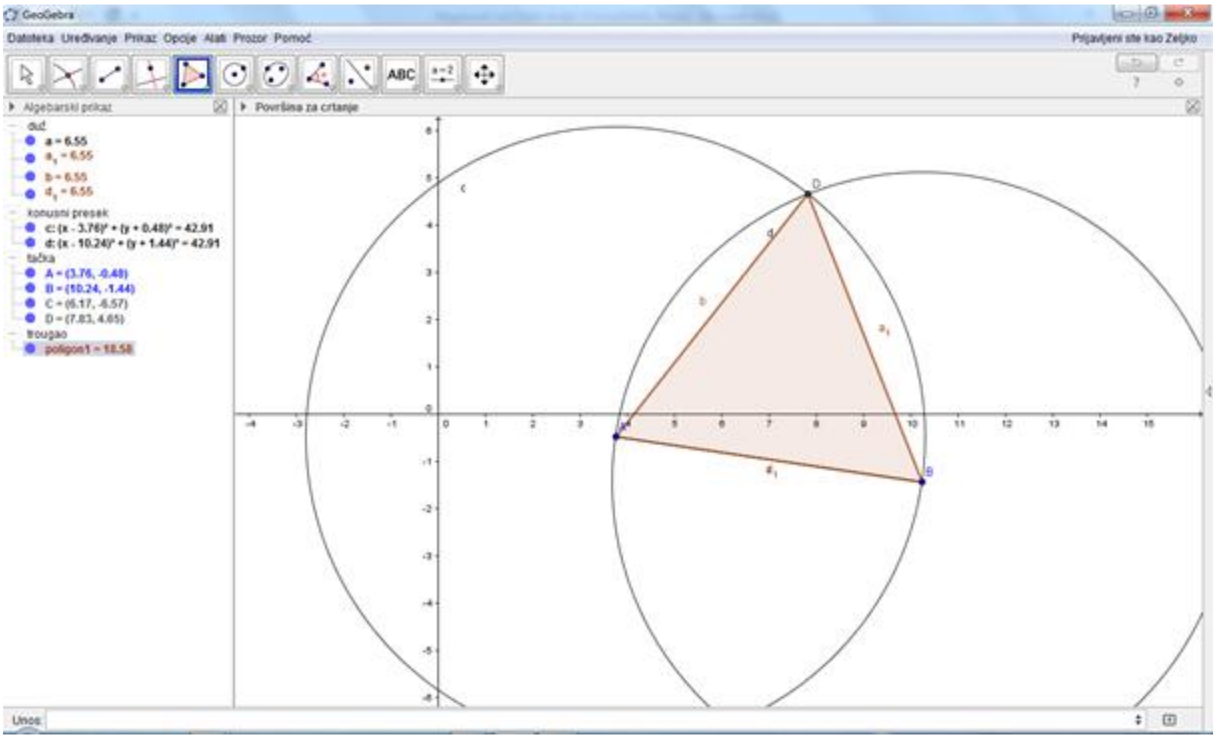


3) Ponovi se isto za tačku B, tj. nacrta se krug sa centrom u tački B koji prolazi kroz A (identično kao u prethodnom koraku).
4) Odabere se alatka, koja je već korišćena za presek dva objekta, a zatim se klikne na jedan, pa na drugi krug. Dobiće se tačke C i D, presečne tačke dva kruga.



5) Dobijene su tačke A, B, C i D koje određuju dva jednakostranična trougla (ABC i ABD). Spoje se date tačke da bi se dobio osenčeni poligon, kao u prethodnim primerima, slika 8.





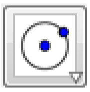
Slika 8. Trougao

Na kraju, sklone se svi viškovi koji su pomogli u konstrukciji (krugovi i slično) da bi se jednakostranični trougao jasnije video.

4.4. Pravilan šestougao

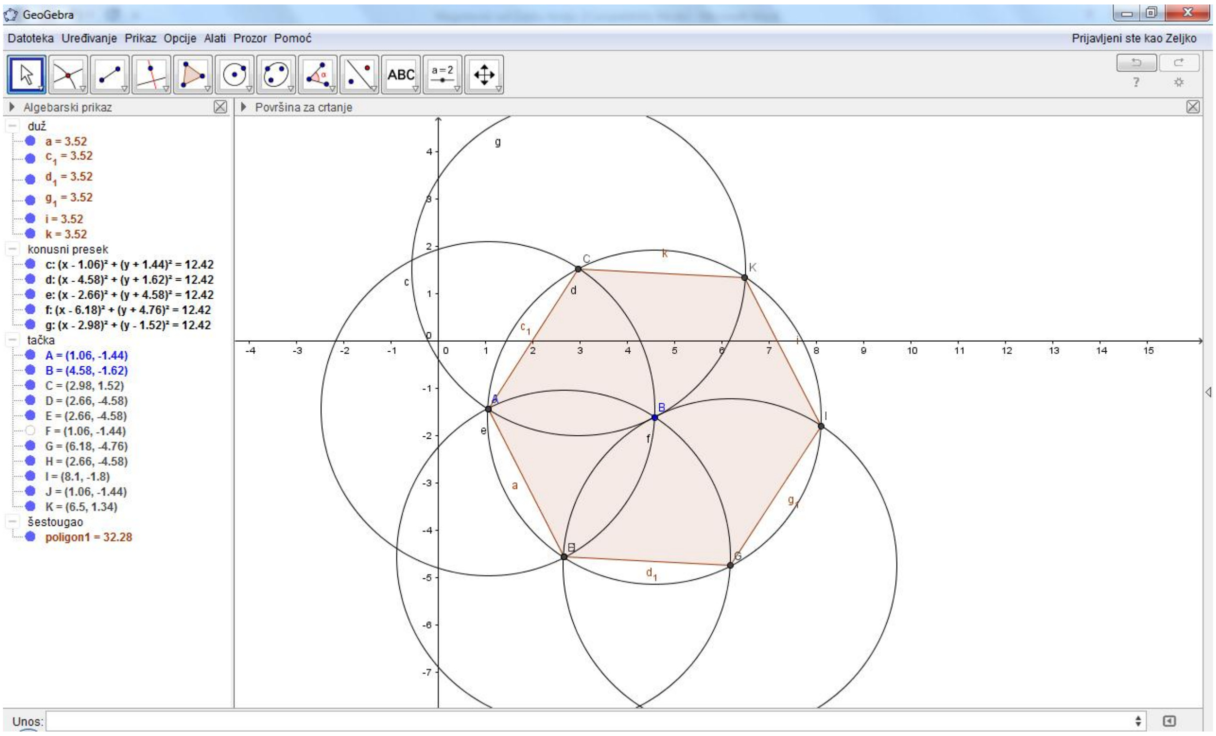
Pravilan šestougao ima sledeće osobine: sve stranice su jednake dužine, svi unutrašnji uglovi su jednaki (iznose 120°), u preseku dužih dijagonala nalazi se centar opisanog kruga oko šestougla (krug koji sadrži sva temena šestougla). Kada bi se počelo crtanje pravilnog šestougla crtanjem duži, tj. stranice AB, kao u prethodnim primerima, teško da bi našao odgovarajući sledeći korak. Konstrukcija se izvoditi na drugačiji način, a koraci bi bili sledeći:

1) Počne se od kruga. Konstruiše se krug sa centrom u tački A i proizvoljnim poluprečnikom. To se radi alatkom za crtanje kruga sa centrom kroz tačku. Dobije se krug sa centrom A i tačkom na kružnici B.



2) Zatim se konstruiše krug sa centrom u tački B kroz tačku A.

3) Upotrebom alatke, koja je već korišćena u prethodnim primerima, za presek dva objekta dobijaju se tačke C i D.
4) Zatim se konstruiše krug sa centrom u tački D kroz tačku A. Ova kružnica sadrži tačku B.
5) Kao u koraku 3 dobiju se još dve tačke E i F.
6) Zatim se konstruiše krug sa centrom u tački E kroz tačku A. Ova kružnica sadrži tačku D.
7) Kao u koraku 3 dobiće se još dve tačke G i H. Ova kružnica sadrži tačku B.
8) Konstruiše se krug sa centrom u tački G kroz tačku A. Ova kružnica sadrži tačku E.
9) Konstrukcijom preseka sa ovim krugom i polaznog kruga dobiće se tačke I i J.
10) Konstruiše se krug sa centrom u tački A kroz tačku A. Ova kružnica sadrži tačke G i C.
11) Sada povezivanjem tačaka B, C, D, E, I, G u poligon dobija se traženi pravilan šestougao, slika 9.



Slika 9. Šestougao

Sve objekte koji smetaju izgledu, a nisu potrebni, i tačke koje se poklapaju, uklone se već naučenim pravilom.

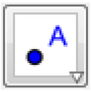
U ovom primeru se može uvideti koliko bi pomogla primena GeoGebre u nastavi, jer se poznato koliko vremena trebala da se sve ovo iscrta na tabli pomoću šestara, lenjira, krede....

4.5. Konstrukcija ortocentra

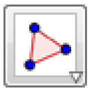
Konstrukcijom ortocentra prelazi se na malo zahtevniju konstrukciju, u kojoj će biti više detalja da bi rezultat bio vizuelno lepši i razumljiviji.

Visine bilo kog trougla seku se u jednoj tački, a tačka se naziva ortocentar. Konstrukciju ortocentra činili bi sledeći koraci:

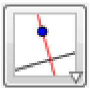
1) Konstruišu se tri tačke koje će biti temena trougla. Neka to budu tačke A, B i C.



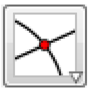
2) Od tačaka A, B i C napravi se poligon, upotrebom alatke



3) Konstruišu se normale na svakoj od stranica koje prolaze kroz naspramno teme trougla. Dobiće se prave a, b i c koje su visine trougla.

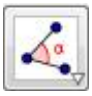


4) Visine trougla seku se u istoj tački koja se dobija upotrebom komande za presek dva objekta u baru sa alatkama. To je tražena tačka D, tj. ortocentar.



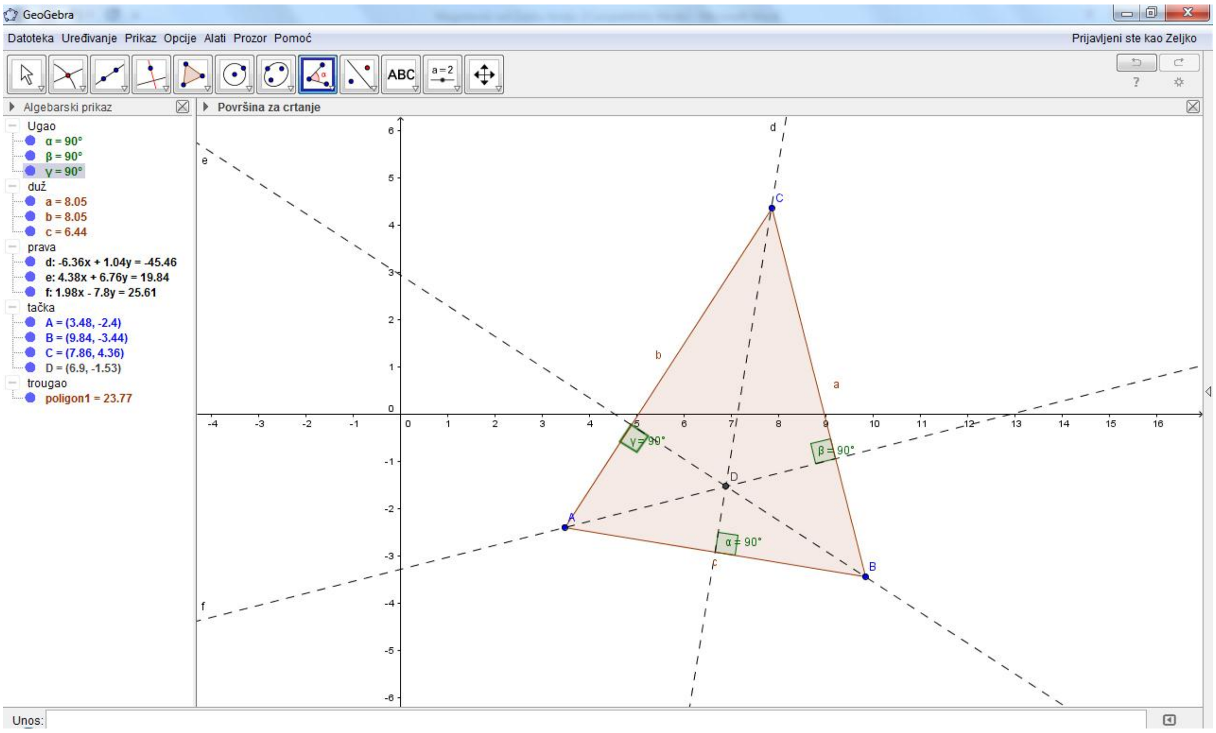
Da bi visine vizuelno izgledale preglednije, desnim klikom miša redom na po jednu od njih pojaviće se padajući bar, na kom treba izabrati opciju „osobine“. Klikom na boju može se menjati boja prave, ili klikom na osobine, način crtanja prave. Neka prava za visinu bude isprekidana. Tako se odradi za svaku visinu pojedinačno.

5) Upotrebom alatke, iz bara sa alatkama, za ugao



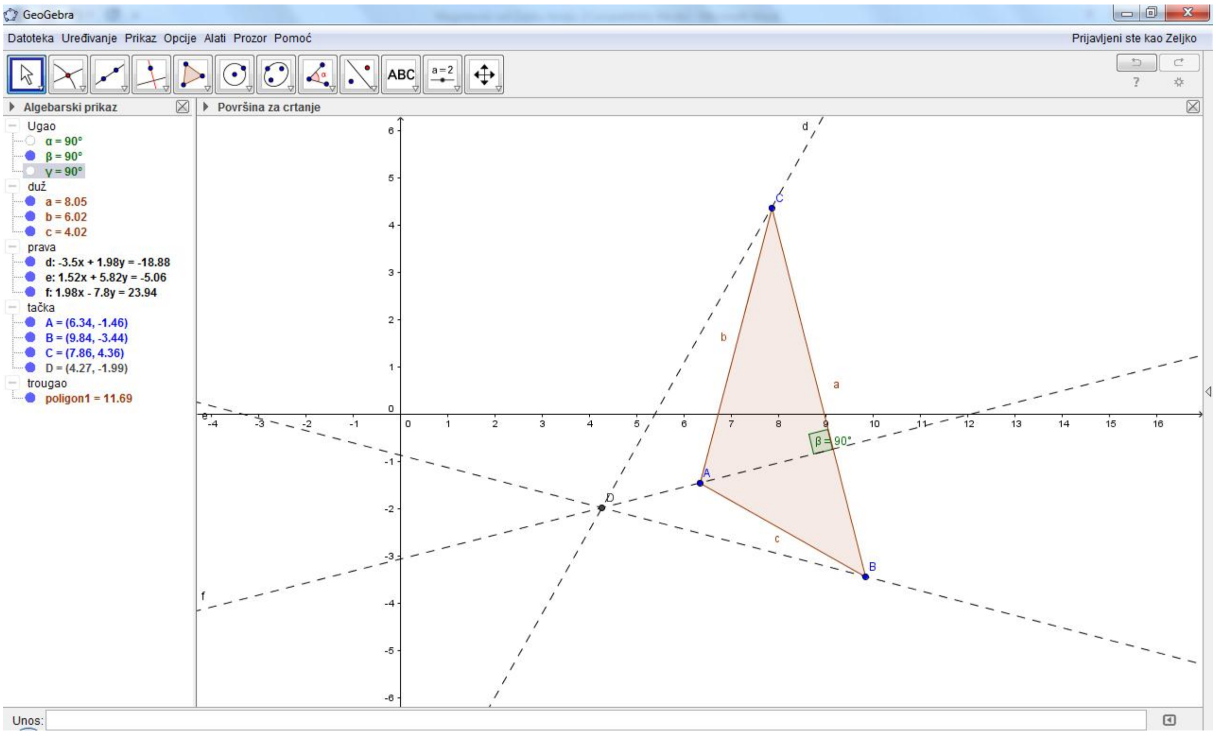
obeleži se svaki ugao između stranice i njegove visine. To se dobija klikom na alatku i klikom na stranicu pa odgovarajuću visinu.

Dobiće se rezultat sa slike 10.



Slika 10. Ortocentar

Konstruisani trougao ima sve oštre uglove. Pomeranjem (mišom) bilo koje tačke, koja je teme trougla, može se dobiti tupougli trougao i u svakom trenutku videti šta se dešava sa ortocentom. To je ilustrovano slikom 11.



Slika 11. Ortocentar

5. Algebarski prikaz

Manje korišćen, ali ništa manje važan prikaz od geometrijskog (površine za crtanje) je algebarski prikaz. Algebarski prikaz je već pomenut u osnovama GeoGebre. Prilikom crtanja objekata na površini za crtanje u algebarskom prikazu pojaviće se koordinata, tj. formula tog objekta. Ako se konstruiše tačka pojaviće se koordinata tačke, ako prava ili krug, odgovarajuća formula itd. Ovaj proces može se raditi i suprotno, unošenjem izraza u bar koji se naziva „Unos“ i nalazi se ispod površine za crtanje i algebarskog prikaza (slika 12.). Na površini za crtanje pojaviće se odgovarajući objekat (tačka, prava, krug...).

Slika 12. Bar “Unos”

Kada se unose algebarski izrazi u bar „Unos“ prvo se unosi ime objekta, a zatim njegova algebarska prezentacija. Evo nekih primera:

- **Tačka**: U GeoGebri se imena tačaka uvek pišu velikim slovima. Jednostavno upiše se ime (na primer, *A*, *P*) i znak jednakosti ispred koordinata. <u>Primeri</u>: C = (2, 4), P = (1; 180°),
- **Vektor**: Da bi se razlikovali od tačaka, imena vektora u GeoGebri moraju da se pišu malim slovima. Opet, upiše se ime (na primer, *v*, *u*) i znak jednakosti ispred koordinata vektora.
  <u>Primeri</u>: v = (1, 3), u = (3; 90°),
- **Prave, kružnice i konusni preseci**: Ovi objekti se imenuju upisivanjem imena i dvotačke ispred jednačina.
  <u>Primeri</u>: g: y = x + 3, c: (x-1)^2 + (y – 2)^2 = 4, hyp: x^2 – y^2 = 2
- **Funkcije**: Funkcije se mogu imenovati upisivanjem, na primer, f(x) = ili g(x) = ispred formule funkcije.
  <u>Primeri</u>: h(x) = 2 x + 4, q (x) = x^2, trig(x) = sin(x)

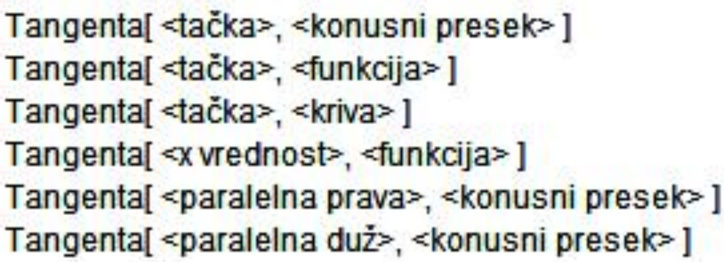
Osim ovog načina unosa mogu se koristiti i gotove funkcije „pomoć za unos“, kojih ima veliki broj u GeoGebri, a koje u velikoj meri olakšavaju korišćenje ovog softverskog paketa. Pozivaju se klikom na strelici koja se nalazi na desnoj strani bara „Unos“ (slika 13.).

Slika 13. Dugme za pozivanje pomoćnih funkcija

Prozor „pomoć za unos“ sa gotovim funkcijama izgleda kao na slici 13. Oblasti iz kojih postoje gotove funkcije date su na slici 14. Kao što se vidi postoji veliki broj funkcija iz oblasti: algebre, logike, statistike, vektora, matrica i drugih.

Slika 14. Oblasti gotovih funkcija

Klikom na znak **+** ispred oblasti otvaraju se funkcije obuhvaćene njom. Klikom na funkciju koja se želi koristiti u otvorenom prozoru, ispod prozora sa funkcijama, dobija se mogućnosti i pomoć za konstrukciju tog objekta, tj. šta je potrebno od podataka za njegovu konstrukciju. Na slici 15. je prikazano kako bi to izgledalo za konstrukciju tangente, a za ostale funkcije je slično. Kao što se vidi postoji veći broj načina, a odabira se onaj koji najviše odgovara i za čiju konstrukciju postoje traženi podaci.



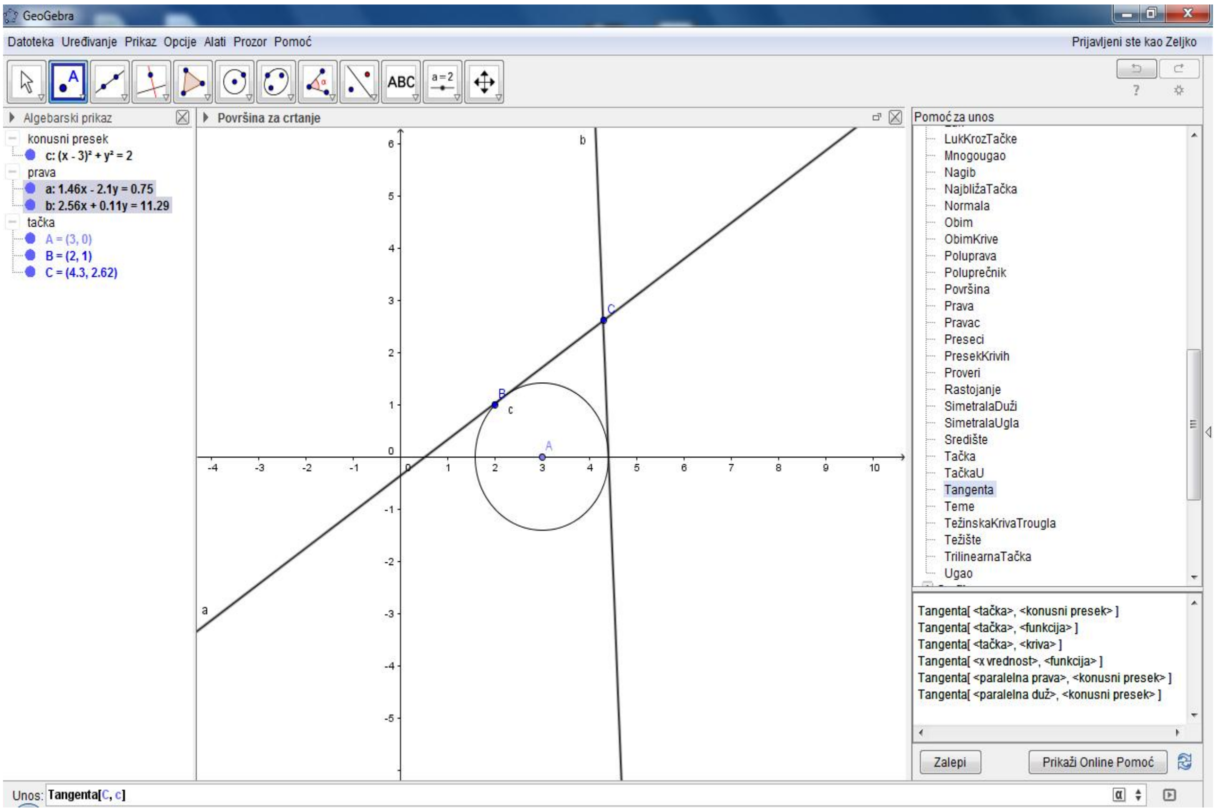
Slika 15. Primer gotove funkcije Tangenta

Znači:

- `Tangenta[tačka, konusni presek]`: Kreira (sve) tangente konusnog preseka kroz datu tačku

- `Tangenta[prava, konusni presek]`: Kreira (sve) tangente konusnog preseka paralelne sa datom pravom
- `Tangenta[broj a, funkcija]`: Kreira tangentu na funkciju u tački *x* = *a*
- `Tangenta[tačka A, funkcija]`: Kreira tangentu na funkciju u tački *x* = *x(A)*, (videti [4]).

Dvostrukim klikom na komandu tangenta u baru za „unos“, pojaviće se komanda za konstrukciju tangente. U uglaste zagrade ubacuju se podaci npr. tačka (kroz koju prolazi tangenta) i ime krive (koju dodiruje tangenta). Sve ovo navedeno: algebarski prikaz, prozor sa gotovim funkcijama (pomoć za unos), primer korišćenja funkcije dobijanja tangente i njegova formulacija u baru „ Unos“, može se videti na slici 16.



Slika 16. Tangenta

Na slici se vidi način kojim se kroz datu tačku C i na dati krug c, koristeći gotovu funkciju „Tangenta“ (Tangenta[C, c]), konstruišu tangente a i b. Kada se unesu potrebni podaci u uglastim zagradama, klikom na taster enter izvršiće se operacija.

Neke od osnovnih matematičkih funkcija dostupnih u GeoGebri date su tabelom 2.

Tabela 2.Osnovne matematičke funkcije u GeoGebra

Operacija	**Ulaz**
Sabiranje	+
Oduzimanje	−
Množenje	* ili *space* taster

Skalarni proizvod	`*` ili *space* taster
Deljenje	`/`
Stepen	`^` ili `2`
Faktorijel	`!`
Zagrada	`( )`
x-koordinata	`x( )`
y-koordinata	`y( )`
Apsolutna vrednost	`Abs( )`
Znak	`Sgn( )`
Kvadratni koren	`Sqrt( )`
Kubni koren	`cbrt( )`
Broj između 0 i 1	`random( )`
Eksponencijalna funkcija	`exp( )` ili e^x
Logaritam (prirodni, od *e*)	`ln( )` ili `log( )`
Logaritam od 2	`ld( )`
Logaritam od 10	`lg( )`
Kosinus	`cos( )`
Sinus	`sin( )`
Tangens	`tan( )`
Arkuskosinus	`acos( )`
Arkussinus	`asin( )`
Arkustangens	`atan( )`
Hiperbolični kosinus	`cosh( )`
Hiperbolični sinus	`sinh( )`
Hiperbolični tangens	`tanh( )`
Jednako	≟ ili ==
Nejednako	≠ ili !=
Manje od	<
Veće od	>
Manje ili jednako	≤ ili <=
Veće ili jednako	≥ ili >=
I	∧
Ili	∨
Negacija	¬ ili !
Paraleno	∥
Normalno	⊥

U ovom poglavlju je obrađen i pokazan relativno mali broj funkcija koje može GeoGebra da izvrši. Više o ovome može se pogledati na GeoGebra Tube, GeoGebra Forume, www.geogebra.org itd... Mada, sve je lako vidljivo i iz prethodnih primera, a uz GeoGebrine pomoći može se dosta toga lako uraditi.

6. Analitička geometrija u srednjoj školi i GeoGebra

Analitička geometrija predstavlja izučavanje geometrije korišćenjem algebre. Znači, geometrijski objekti se posmatraju u Dekartovom koordinatnom sistemu, bilo da je on dvodimenzionalni ili trodimenzionalni i predstavljaju se algebarskim jednačinama. Može se reći da analitička geometrija definiše geometrijske oblike na numerički način. U srednjim školama se izučava analitička geometrija u ravni, tj. u dvodimenzionalnom Dekartovom sistemu. Izvođenja u trodimenzionalnom Dekartovom sistemu su mnogo komplikovanija.

Već iz prethodnog se može pretpostaviti kako da GeoGebrom se unapredi nastava analitičke geometrije, znajući da sve potrebno postoji: algebarski i geometrijski prikaz i njihovu vezu. U grafičkom prikazu crtaju se objekti (figure), a u algebarskom se nalaze njihove koordinate i jednačine. I suprotno, u baru za „unos“ , unose se koordinate tačaka i jednačine figura, a u geometrijskom prikazu (površina za crtanje) vidi se njihov položaj i oblik.

U daljem tekstu, većinom kroz primere, biće objašnjeno korišćenje GeoGebre u nastavnim jedinicama o: tačkama, dužima, pravama, kružnici, krivima drugog reda, vektorima, njihovim uzajamnim odnosima i njihovim konstrukcijama.

6.1. Duž

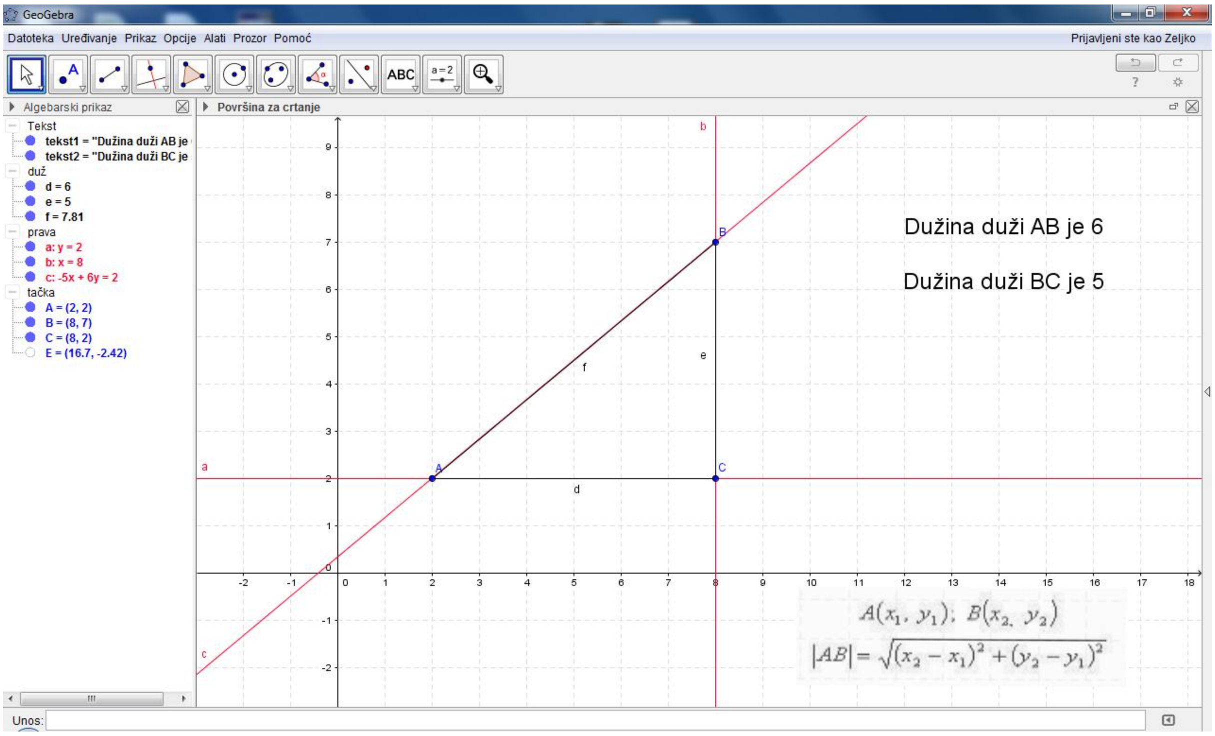
Duž AB definiše se kao skup svih tačaka između tačaka A i B, uključujući i tačke A i B.

U GeoGebri već postoje gotovi alati za crtanje duži. Alat „Duž“ koji je već korišćen, i alat „Duž fiksne dužine“ koji se koristi zadavanjem tačke (koju unosimo klikom na površinu za crtanje) i dužine duži, koja se unosi u prozorčić koji se pojavljuje posle zadavanja tačke.

Zbog preglednosti i lakše primene u ovoj oblasti sa koordinatama, poželjno je uključiti mrežu, koju ćemo videti na sledećim slikama, a ona se uključuje:
Prikaz –> Raspored –> Prilagođavanje površine za crtanje –> Prikaži mrežu.

Rastojanje između dve tačke

Evo još jednog primera u kom se vidi kako sa promenom rastojanja tačaka na apscisi i ordinati menja veličina duži (Slika 17.).



Slika 17. Duž

6.2. Prava

Pojam prave je jedan od osnovnih pojmova geometrije i kao takav se ne definiše. Negde se može sresti definicija pomoću pojmova tačka i između, ali ne u srednjoj školi.

Svake dve tačke, koje se ne poklapaju, određuju jednu pravu. Već su korišćeni alati za konstrukciju prave u prethodnim primerima. Od njih najčešće upotrebljavan je alat konstrukcija prave kroz dve tačke. Osim tog alata postoje i alati za konstrukciju poluprave, normale, paralelne prave, simetrale duži, simetrale ugla, tangente i td. Njihova primena je logična i relativno laka, tako da je neću objašnjavati.

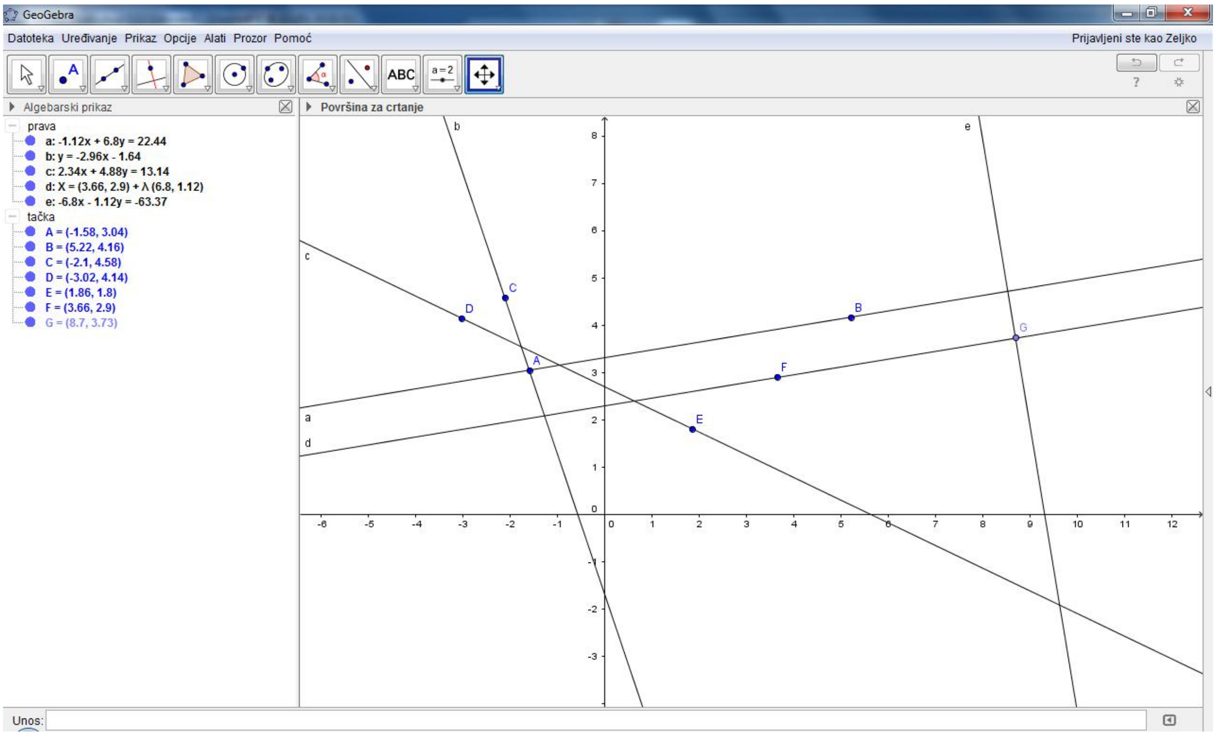
Prave se mogu unositi njihovim jednačinama, u baru "Unesi", i tako njihov položaj u Dekartovom koordinatnom sistemu videti u geometrijskom prikazu. Na slici 17. je dato nekoliko nacrtanih pravih i njihove jednačine. Kao što vidimo u algebarskom prikazu postoji više oblika jednačina pravih:

- ***a x + b y = c***, opšti oblik
- ***y = k x + d***, eksplicitni oblik
- ***normalni oblik,***
- ***parametarski oblik.***

Desnim klikom miša na jednačinu prave u algebarskom prikazu bira se oblik prave koji se želi koristiti.

Na ovom primeru najbolje je pokazati postojanje zavisnih i nezavisnih objekata. Ako se nacrta prava kroz dve tačke, alatom prava kroz dve tačke, ona je nezavisan objekat.

Međutim, ako se nacrta prava paralelna prethodnoj pravoj, ona je zavisan objekat. Slično važi za ostale objekte. Nezavisni objekti se mogu pomerati, zavisne ne.



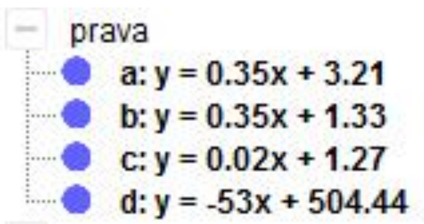
Slika 18. Prave

Konstruisanjem paralelnih i normalnih pravih (slika 18.), u površini za crtanje, može se pokazati da važi:

- dve prave su paralelne ako su im jednaki koeficijenti pravca, $k_1 = k_2$
- dve prave su normalne ako važi

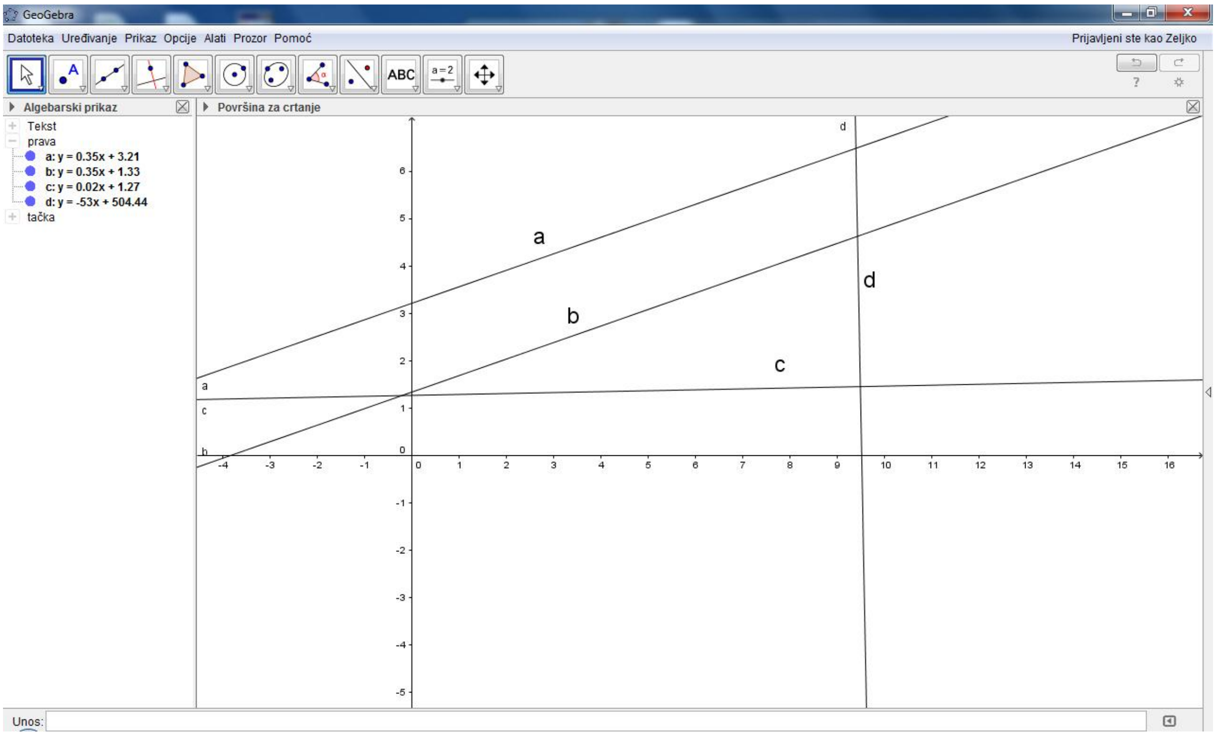
$$k_1 = -1 / k_2 .$$

U algebarskom prikazu prave prebaciti u eksplicitni oblik (***y = k x + d***) i uporediti koeficijente (slika 20.), (videti [1]).



Slika 19. Jednačina prave u algebarskom prikazu

Vidi se sa slike 19. da su koeficijenti pravca paralelnih pravih (a i b) jednaki tj. 0,35, a za normalne prave c i d važi 0,02 = - 1 / (- 53).



Slika 20. Paralelne i normalne prave

6.3. Kružnica

Kružnica ili kružna linija je skup tačaka u ravni jednako udaljene od jedne iste tačke, a tačka se naziva centar, a rastojanje poluprečnik.

Alatke u GeoGebri za crtanje kružnice su sledeće:

- *Kružnica određena centrom i jednom tačkom*. Rastojanje od te tačke do centra je poluprečnik.
- *Kružnica određena centrom i poluprečnikom.*
- *Šestar.*
- *Kružnica kroz tri tačke.*

Postoji alatka i za: polukrug, kružni luk, opisani kružni luk i kružne isečke.

Da bi se nacrtala kružnica, potreban je centar (neka to bude tačka C = (p, q)) i prečnik r > 0 (slika 20.). Treba izvesti sa tim podacima jednačinu kružne linije. Neka je M(x, y) neka tačka na kružnici. Tada primenom Pitagorine teoreme sa slike 21. vidi se da važi:

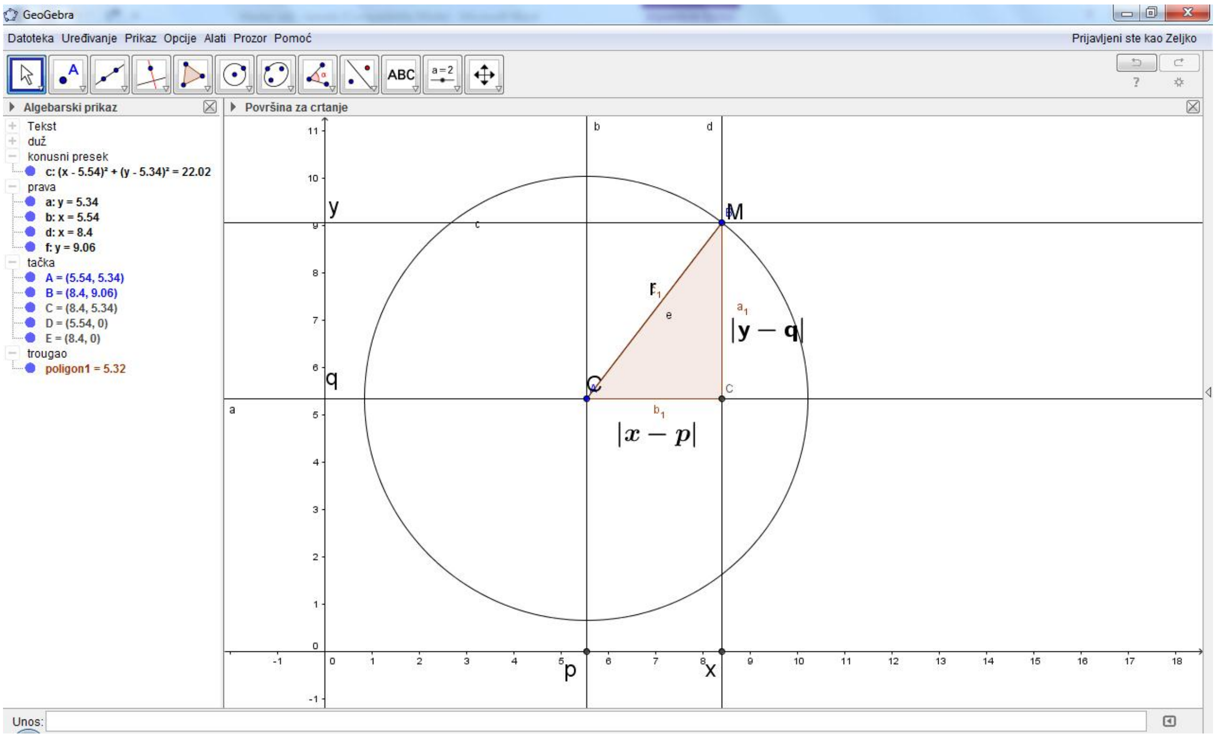
$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r$$

ili

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

posle kvadriranja, što je tražena jednačina kružne linije (videti [1]). Specijalno, ako je centar kružnice u koordinatnom početku, p i q su jednaki nuli, pa bi jednačina izgledala

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

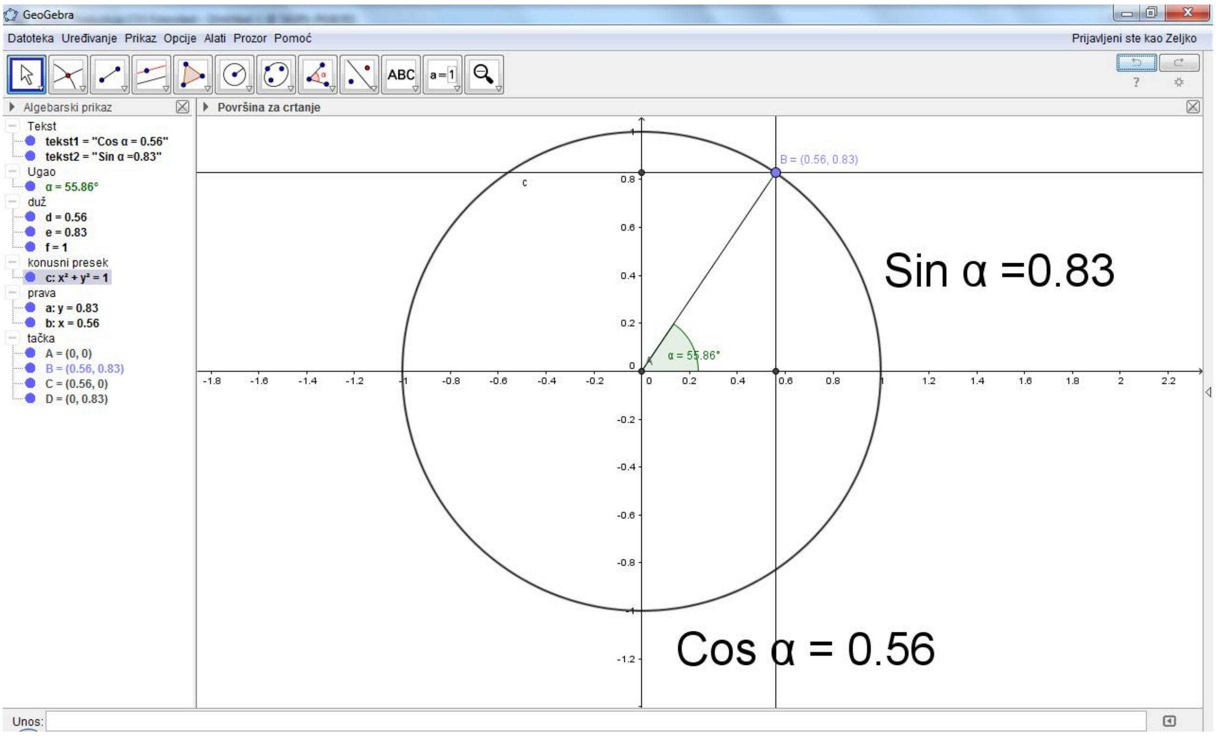


Slika 21. Kružnica

Jednačina jedinične kružnice, sa centrom u koordinatnom početku i prečnikom jedan, je oblika

$$x^2 + y^2 = 1$$

i često se koristi u trigonometriji, gde bi GeoGebra bila od velike pomoći u shvatanju pojmova trigonometrijskih funkcija (Slika 22.).



Slika 22. Jedinična kružnica

Pomeranjem tačke B po kružnici vidi se promena sinusa i kosinusa, kao i da se njihova vrednost kreće od -1 do 1.

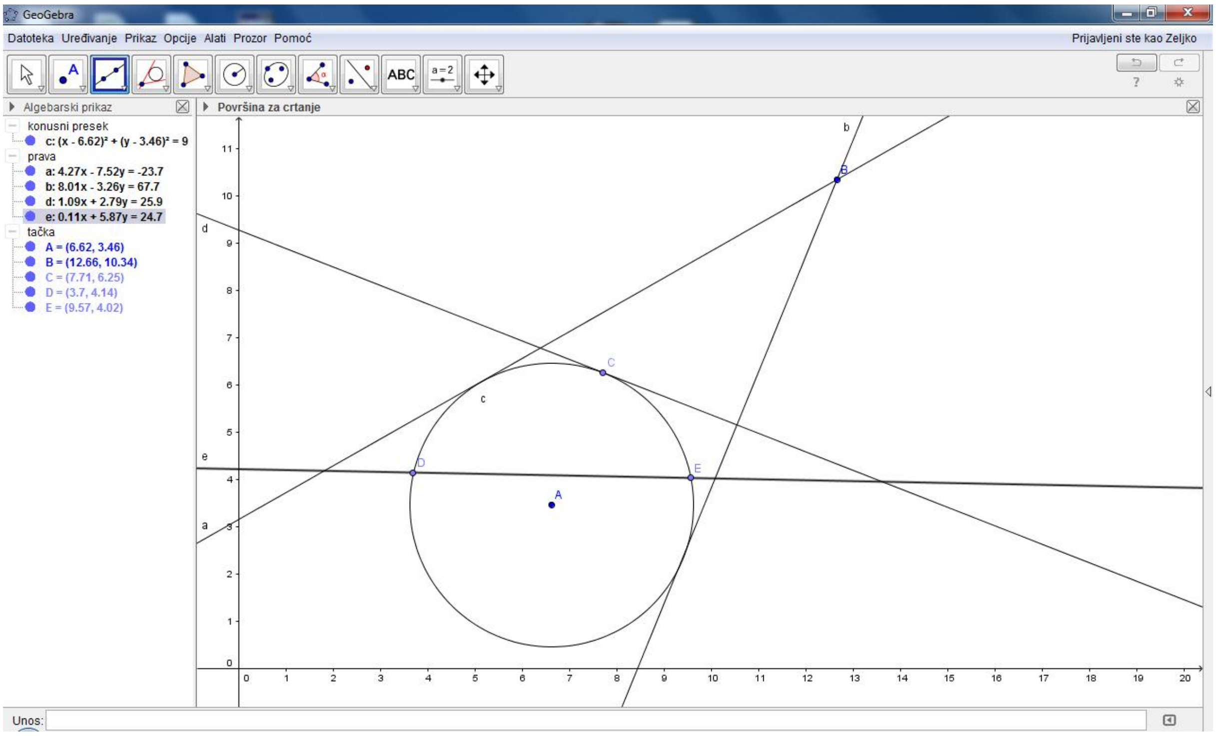
Konstrukcija se radi relativno lako, gledanjem slike i primenom do sada naučenih pravila.

6.4. Prava i kružnica

Prava i kružnica mogu imati tri uzajamna položaja (videti [1]), i to:

1. ne dodiruju se i nemaju zajedničkih tačaka. To je slučaj kada je rastojanje prave od centra kružnice veće od poluprečnika kružnice.
2. dodiruju se i imaju jednu zajedničku tačku. Slučaj kada je rastojanje centra kružnice od prave jednako njenom poluprečniku. To je slučaj kada je prava tangenta kružnice. U ovom slučaju GeoGebra ima odgovarajući alat za tu pravu, tj. tangentu, „Tangente kružnice“. Ovim alatom se konstruiše tangenta tačke dodira, kao i tangente iz tačke van kružne linije.
3. seku se i imaju dve zajedničke tačke kada je rastojanje centra od prave manje od poluprečnika kružnice.

   Na slici 23. su prikazani sva tri slučaja.



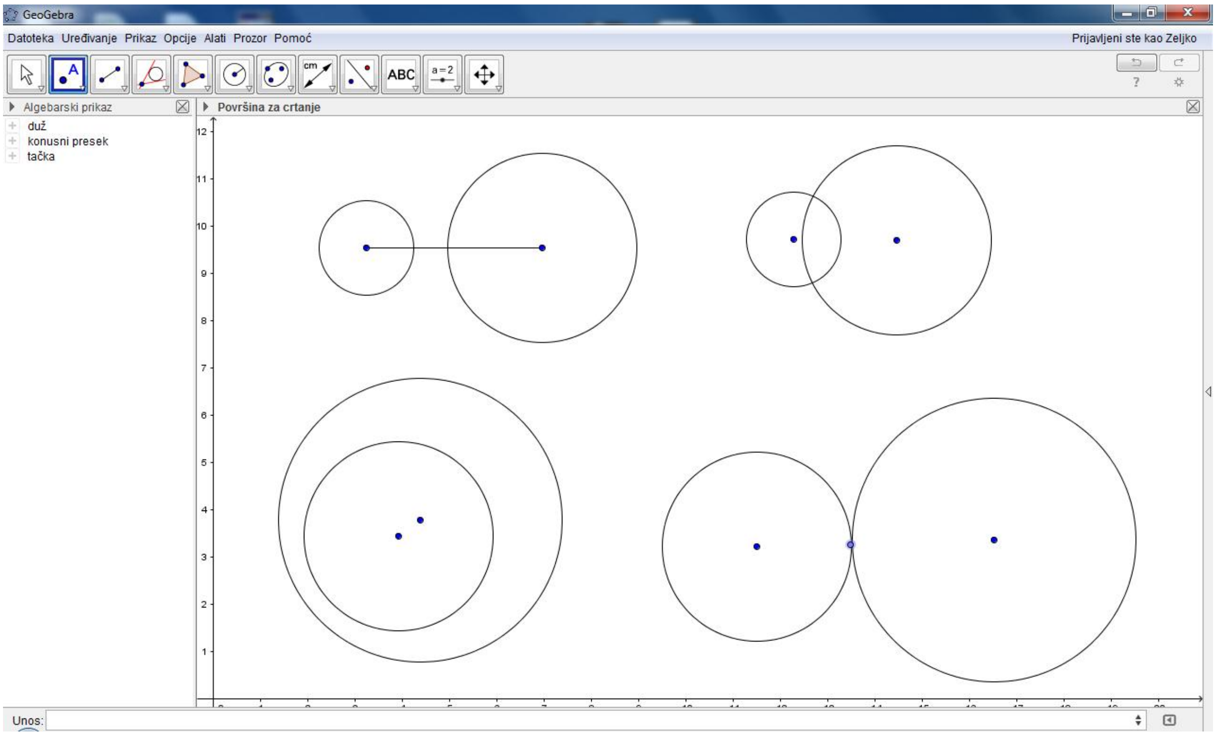
Slika 23. Prava i kružnica

Kao što se vidi sa slike 22., iz tačke B ima dve tangente, kroz tačku C jedna, pravu koja seče kružnicu u dvema tačkama i pravu koja nema zajedničkih tačaka sa njom.

6.5. Dve kružnice

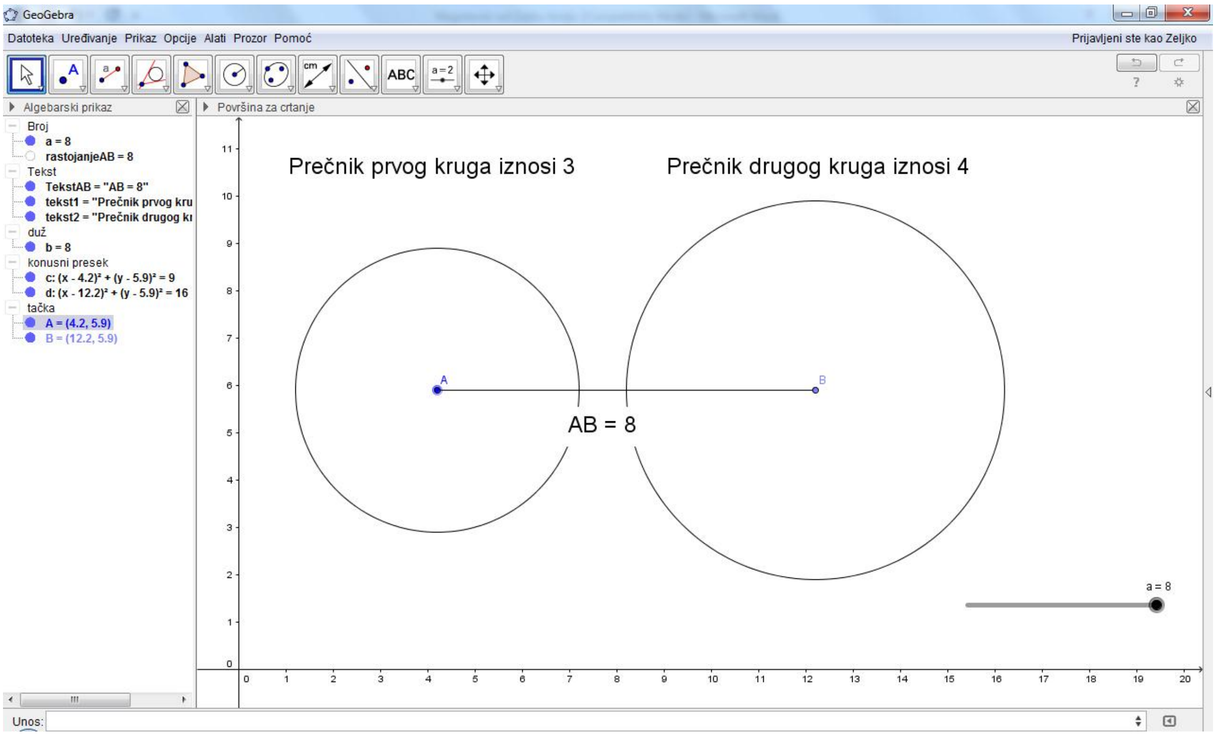
Dve kružnice mogu imati četiri uzajamna položaja, i to da:

1. nemaju zajedničkih tačaka, slučaj kada je rastojanje između centara kružnica veće od zbira njihovih poluprečnika.
2. nemaju zajedničkih tačaka, tj. rastojanje između centara kružnica manje od razlike dva poluprečnika, kada krug koji određuje jedna kružnica sadrži krug koji određuje druga kružnica.
3. dodiruju se kada je rastojanje između centara kružnica jednako zbiru njihovih poluprečnika.
4. imaju dve zajedničke tačke kada je rastojanje između centara veće od njihove razlike.



Slika 24. Međusobni položaji dve kružnice

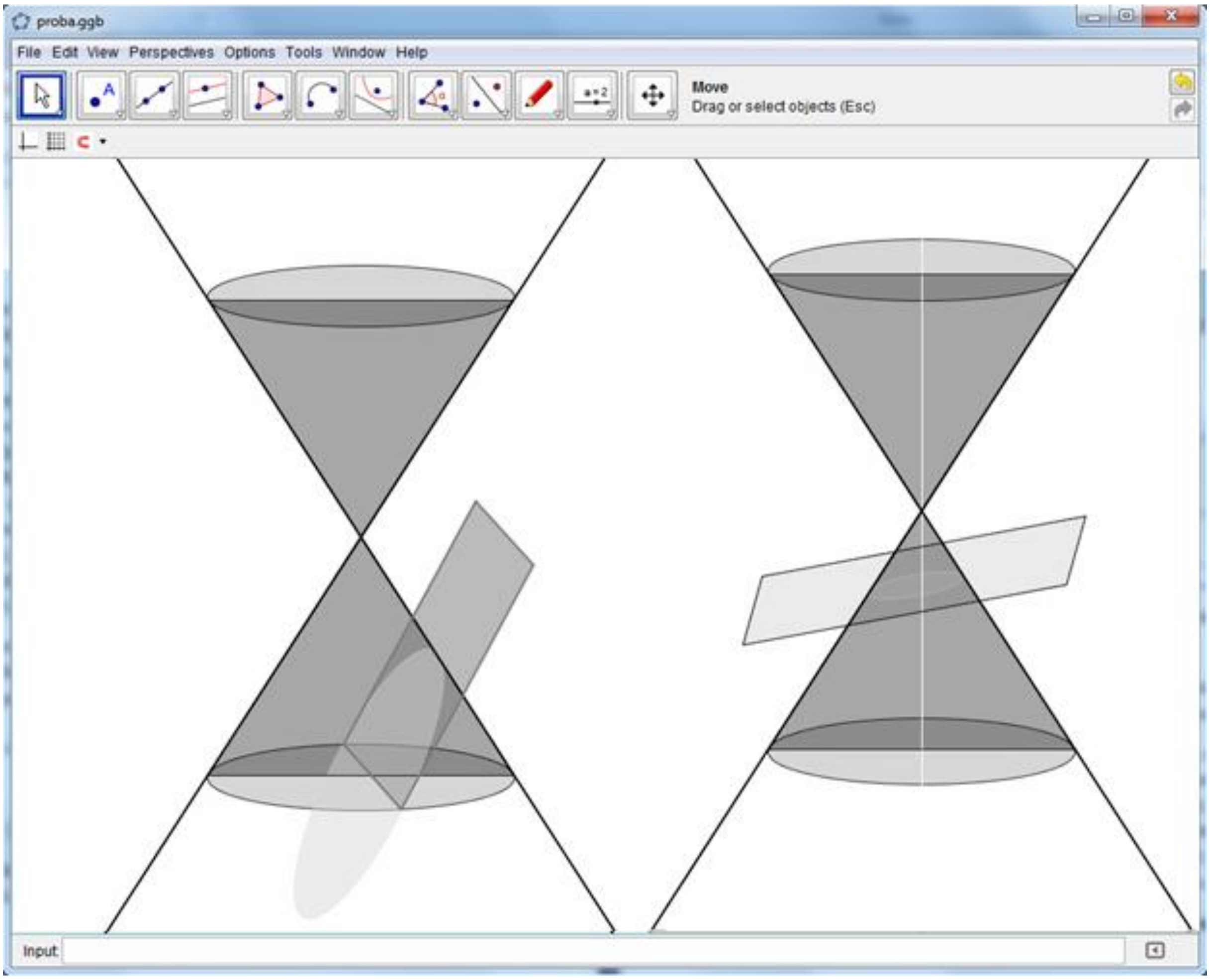
Svi slučajevi su na slici 24, a dobijaju se pomeranjem klizača koji povećava i smanjuje rastojanje između tačaka A i B, koje su centri krugova (Slika 25.).



Slika 25. Međusobni položaji dve kružnice pomoću klizača

6.6. Konusni preseci i krive drugog reda

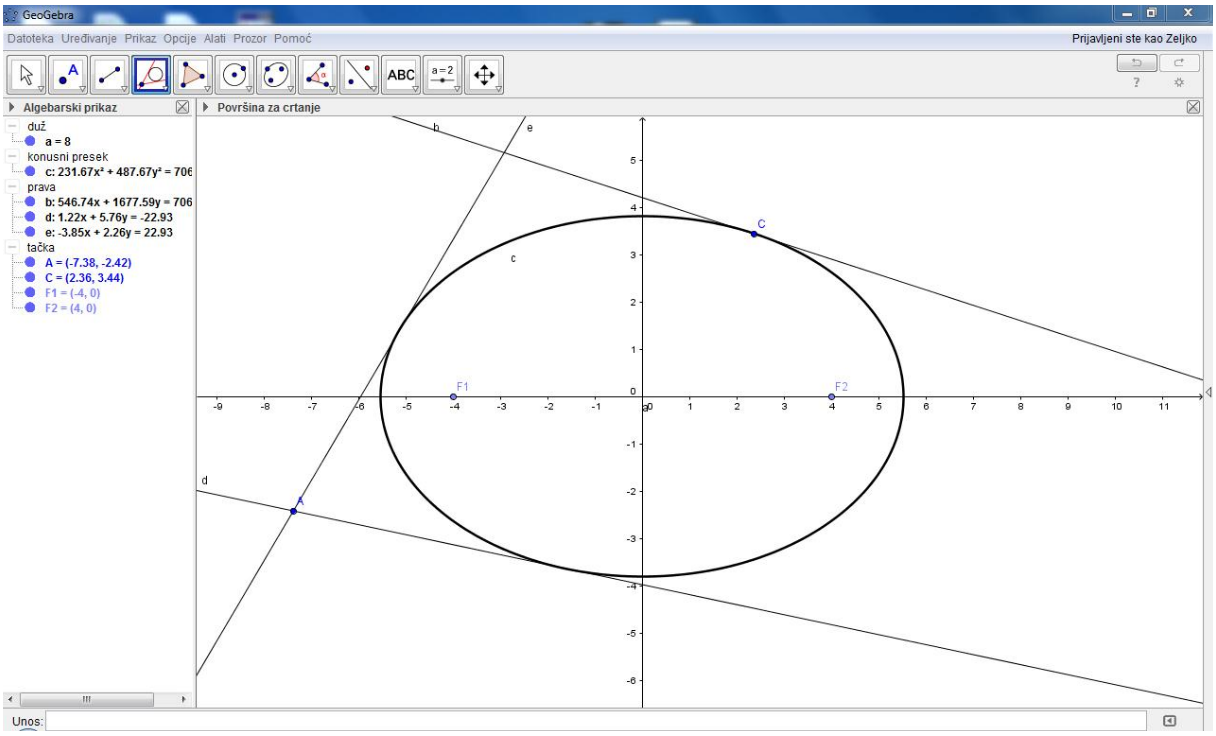
Konstrukcija konusnih preseka koji su trodimenzionalni objekti nije tema ovog rada, ali skica preseka konusne površi i ravni data je na slici 26.



Slika 26. Presek konusa i ravni

Presek konusne površi i ravni može biti:

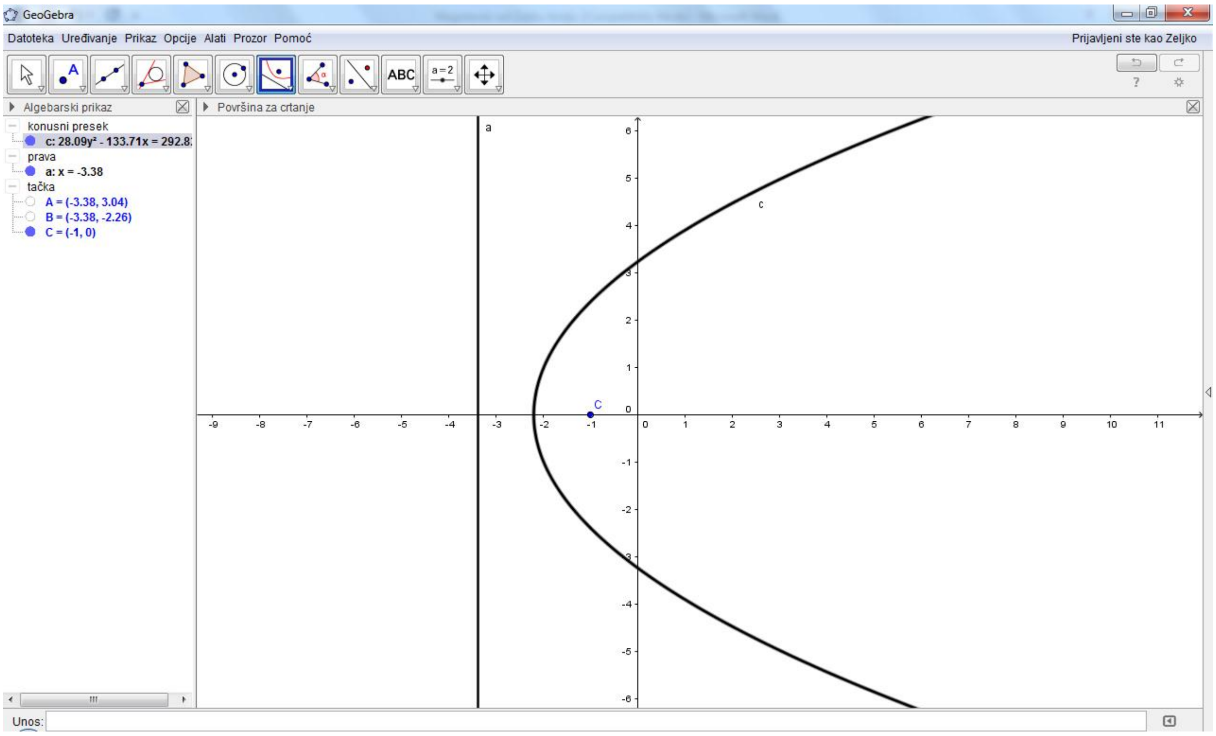
- elipsa, ako ravan seče sve izvodnice konusa i nije normalna na njegovu osu. Ako je ravan normalna na osu, presek je kružnica.



Slika 27. Elipsa i njene tangente

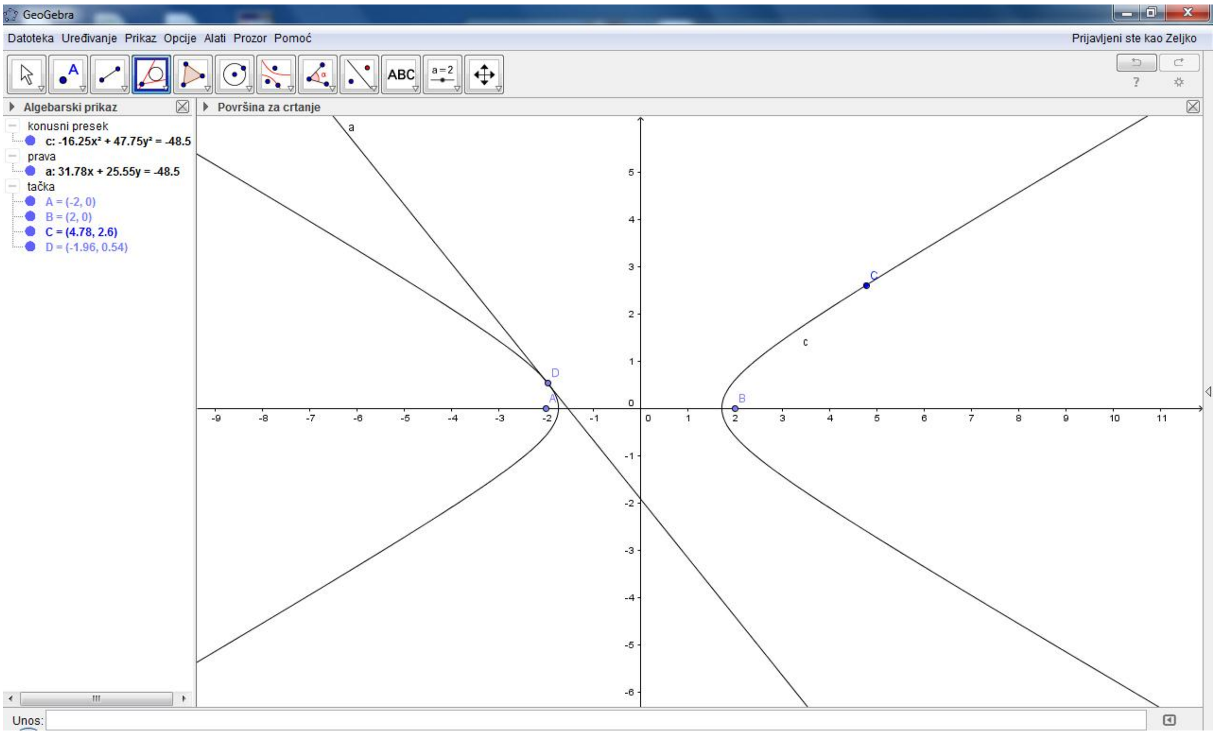
Na slici 27. je upotrebljena već poznata alatka "Tangenta" i vide se tangente kroz tačku van kružnice i kroz tačku na kružnici. Pomeranjem žiža F1 i F2 se vidi šta se dešava sa elipsom.

- parabola, ako je ravan paralelna sa izvodnicom konusa.



Slika 28. Parabola

- hiperbola, ako je ravan paralelna sa dve izvodnice konusa.



Slika 29. Hiperbola

Na slici je osim hiperbole prikazana i njena tangenta kroz tačku na njoj.

Za konstrukcije krivih drugog reda postoje alati u GeoGebri. Alati su: konusni presek kroz pet tačaka, elipsa, parabola i hiperbola. Za konstrukciju elipse i hiperbole unose se tri tačke: dve žiže i tačka na elipsi (Slika 27., 29.). Za konstrukciju parabole: prava i tačka (Slika 28.). Konstruiše se prava koja će biti direktrisa i klikom na radnu površinu pojaviće se parabola.

Pomerajući objekte koji se mogu pomerati (nezavisne objekte), vide se položaji ovih krivih.

7. Zaključak

Stvaranje atmosfere pogodne za rad i razmenu mišljenja, održavanje pronalazačkog duha i prave pomoći u pravo vreme, u mnogome bi pomoglo učenicima u savladavanju matematičkog gradiva. Treba promeniti položaj učenika u školi od uloge prijemnika znanja ka ulozi stvaraoca svog znanja.

Uvođenje GeoGebre je bitan proces u nastavi matematike. Uz pomoć ovog softvera monoton čas se pretvara u kreativan i zanimljiv čas. Mislim da bih korišćenje GeoGebre izazvalo interesovanje kod učenika i podstaklo na samostalan rad, a ujedno i sticanje novih znanja. Zadavanjem vežbe kroz koju bi samostalno nacrtali sliku povećao bi se broj zainteresovanih učenika. Najavljivanjem predstojećeg gradiva javilo bi se interesovanje za samostalan rad i pokazivanje dobijenog. Upotrebom GeoGebre dosta problema spontano i jednostavno bi bilo rešeno.

Analitička geometrija predstavlja izučavanje geometrije korišćenjem principa algebre. Značajan je doprinos u radu sa GeoGebrom u nastavi analitičke geometrije. Crtanjem dobijamo algebarske jednačine tih objekata, i suprotno, što je i suština algebarske geometrije. Ovaj softver nam pomaže da taj proces izgleda vidljiviji.

8. Literatura

[1] Jovan Kečkić*, Matematika sa zbirkom zadataka za 3. razred srednje škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.

[2] Markus Hohenwarter i Judith Preiner, *GeoGebra Pomoć*, Standardni priručnik 3.0, www.geogebra.org, 2007.

[3] Markus Hohenwarter i Judith Hohenwarter, GeoGebra Help, Official manual 3.2, www.geogebra.org, 2009.

[4] Judith Hohenwarter and Markus Hohenwarter, Introduction to GeoGebra4, www.geogebra.org, 2011.

[5] Dr Milan Bakovljev, *Didaktika*, Naučna knjiga, Beograd 1998.

[6] Radenko Krulj, Said Kačapor, Radivoje Kulić, *Pedagogija*, Svet knjige, Beograd 1998.

[7] Zvanični sajt GeoGebre: http://www.geogebra.org

[8] Materijali posvećeni GeoGebri: https://tube.geogebra.org

[9] GeoGebra Centar Beograd: http://www.geogebra.matf.bg.ac.rs