

Математички факултет
Универзитет у Београду



Системи једначина у школи са освртом на
проблемске задатке
мастер рад

Ментор :
Др. Александар Липковски

Студент:
Биљана Бранковић
1108/2012

Београд,
2015.

1 УВОД

У првом поглављу рада се налази историјски део, тј. начин решавања система две линеарне једначине с две непознате у прошлости. У оквиру овог дела могу се видети начини решавања, метод једне и метод две лажне претпоставке који се налазе у најстаријој кинеској математичкој збирци задатака "Математика у девет књига", непознатог аутора.

У другом поглављу у оквиру рада су заступљени системи једначина у основној школи. Системи једначина су тема која се први пут спомиње тек у осмом разреду основне школе. Раније, када се појаве две једначине са две непознате, тада се то води као непознат задатак и ученици су се морали сналазити да на неки други начин добију решења. У осмом разреду, раде се системи линеарних једначина, и то је наставна тема која је заступљена у другом полугодишту. Од 136 часова у осмом разреду, 15 часова је посвећено системима линеарних једначина, 6 часова обраде и 9 часова утврђивања. Распоред је такав да се онда системи појављују на трећем и четвртном писменом задатку да не би цела наставна област била на једном писменом задатку. Осим класичног решавања система, битно је што се неколико часова посвећује примени система на текстуалне задатке што је добро не само за математику, већ и за примену у другим наукама. Што се тиче овог поглавља, осим примене система која је претпоследња тема, на самом почетку је појам линеарне једначине с две непознате, еквивалентност система једначина, а затим и три методе за решавање, свака посебно обрађена, на школски начин, графичка метода, метода замене и метода супротних коефицијената. На крају поглавља о основној школи се налази анкета која је урађена међу ученицима основне школе "Милан Муњас" са Уба који су осми разред завршили школске 2014/15 године. На основу те анкете и њених резултата се може видети какво је мишљење ученика о системима линеарних једначина, њиховој примени, која им је метода најлакша за решавање, итд.

Што се тиче средње школе, у овом случају је акценат на математици у гимназији општег смера и средњим стручним школама са 4 часа недељно математике док су у гимназијама природног смера са 5 часова недељно системи заступљени са пар часова више и мало сложенијим задацима. Системи једначина су заступљени у све четири године учења математике. У првом разреду гимназије системи су заступљени 14 часова од планираних 148, и тада долази до повећавања броја једначина и непознатих у односу на основну школу. Системи се тада решавају Гаусовим поступком што је и приказано у раду. У другој години средње школе се изучавају системи од једне линеарне и једне квадратне или само од квадратних једначина које се на неколико начина применом градива друге године своде на раније познато решавање система што се може видети у петом поглављу. Такође, осим тих, имамо и решавање система логаритамских једначина чије примере можемо видети у проблемским задацима. У трећој години

уводи се решавање система једначина преко детерминанти другог и трећег реда примењујући особине детерминанти. На крају овог поглавља се могу видети које су то типичне грешке из ове области које на писменом задатку праве ученици трећег разреда гимназије „Бранислав Петронијевић”. У четвртом разреду средње школе системи се раде користећи раније научене методе.

У последњем поглављу се налазе проблемски задаци. Први део је избор задатака из система једначина из издања Друштва математичара Србије - Тангента 10 (1995-2005. године) поводом 10 година излажења часописа „Тангента”. Часопис „Тангента” је веома користан за ученике средњих школа јер осим што имају избор задатака за писмене задатке, ту се налазе и сложенији задаци који служе као припрема за такмичења у нашој земљи. У прилог томе говори и чињеница да од школске 2005/2006. године на сваком нивоу такмичења долази бар један задатак из неког издања часописа. Такође, ту се могу наћи разне занимљивости из области математике и информатике. Други део су такмичарски задаци са средњошколских такмичења у периоду 2004-2014. године где се налазе изабрани задаци са свих нивоа такмичења у Србији, од општинског до републичког такмичења, дати са решењима.

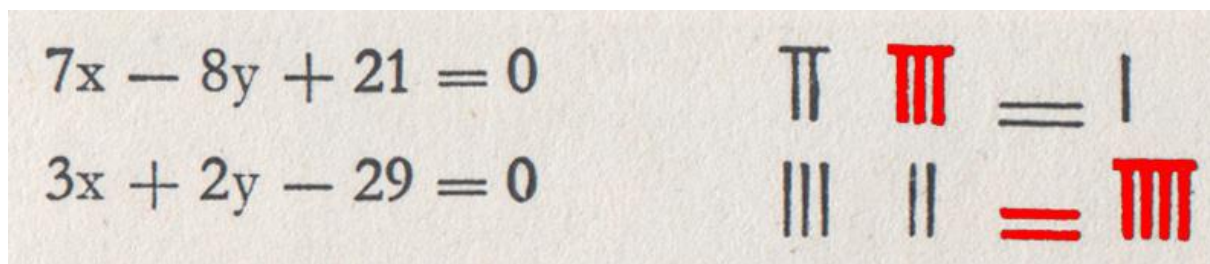
2 ИСТОРИЈСКИ ДЕО

2.1. Системи линеарних једначина са две непознате и његово решавање у прошлости

Задатке, који се своде на састављање и решавање система једначина са две или више непознатих, сусрећемо како у вавилонским и египатским текстовима из II миленијума пре н.е., тако и у радовима старогрчких, индијских и кинеских математичара.

Најпознатија старокинеска збирка задатака је збирка „Девет поглавља вештине рачунања.“ Аутор ове најпознатије збирке задатака је непознат. Књига је настала у време Хан династије (од 206. п.н.е. до 220. н.е) и садржи 246 задатака који су подељени у девет области. Иначе, број 9 је сматран за мистичан, па су многе књиге које су касније штампане такође у својим насловима имале број 9. Као што је и у наслову књиге речено, њу чини девет одвојених целина, чије садржаје укратко можемо овако превести: 1. Површине геометријских фигура, разломци; 2. Проценци и пропорције, мерне јединице; 3. Аритметичка и геометријска прогресија; 4. Квадратни и кубни корен, странице на основу површине; 5. Запремина тела; 6. Расподела пореза; 7. „Премало и превише“; 8. Системи линеарних једначина; 9. Особине правоуглих троуглова. У оквиру сваке области су постављани проблеми, а онда би било дато решење. Као што се види, осма област је тема о којој се овде говори.

Системе линеарних једначина су решавали шематски, а поступак је развијен полазећи од кинеске табле за рачунање. У збиркама се тачно знало како се који од коефицијената уз непознате назива и упутства су била тако и формулисана. Задатке су решавали и рачунањем детерминанте система и детерминанти које одговарају непознатим, а то значи да су познавали оно што данас називамо Крамеровим правилом. Други начин који су примењивали је оно што се у „нашој“ математици назива Гаусова метода елиминације. Карактеристично је да су у тим почетним збиркама системи једначина увек били са једнаким бројем једначина и непознатих. У почетку срећемо углавном системе са две или три једначине, а касније и системе са више једначина.



Ево једног задатка из најстарије кинеске математичке збирке задатака – („Математика у девет књига”, XXVII век пре н. е.) .

Задатак 1. У кавезу се налазе фазани и зечеви ; све те животиње имају укупно 35 глава и 94 ноге. Треба наћи број фазана и број зечева .

Ако би у кавезу били само фазани (лажна претпоставка), онда би број ногу износио 70, а не 94. Према томе, овај вишак од 24 ноге припада зечевима – по два свакоме. Тада је јасно да је зечева било $24 : 2 = 12$, а фазана $35 - 12 = 23$.

У старокинеском делу *Математика у девет књига* (или „Девет поглавља о вештини рачунања”) разматрају се (VII и VIII књига) системи једначина и дају кратка правила за њихово решавање , при чему се све излаже речима . Коефицијенти једначине постављени су на „рачунску даску” (посебна врста *абакуса*) у виду таблице . При поновљеним операцијама на тој рачунаљци , јасно се види да са коефицијентима треба поступати по истом правилу (рецепту) да би се нашло решење система једначина .

У VII књизи тог дела , које носи назив *Вишак – мањак* , изложена су два начина (метода) за решавање задатака , који се свode на систем две линеарне једначине са две непознате.

2. 1. 1. Први начин решавања система једначина

Илустроваћемо га следећим задатком из VII књиге поменутог трактата *Математика у девет књига* :

Задатак 2. Неколико трговаца хоће заједнички да купе робу . Ако сваки да 9 јуана (новчана јединица), преостаће им 11 јуана ; ако би, пак, сваки дао по 6 јуана , недостајало би им још 16 јуана . Колико је било трговаца и колика је цена робе?

Означимо са x број трговаца , а са y цену робе , и лако састављамо систем једначина :

$$\begin{aligned} 9x - y &= 11 \\ 6x - y &= -16 \end{aligned} \tag{1}$$

У овом систему лако добијамо $(x, y) = (9, 70)$.

Како се, пак, поступа у поменутом старокинеском делу?

Поступак (начин), који се тамо кратко излаже, у савременој симболици своди се на следеће :

Ако имамо систем :

$$\begin{aligned} a_1x - y &= c_1 \\ a_2x - y &= c_2 \end{aligned} \quad (2)$$

У то треба саставити таблицу (*таблица 1*) облика :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

помоћу које се тражене непознате добијају тако што се узме :

$$\begin{aligned} x &= (c_2 - c_1) / (a_2 - a_1) \\ y &= (a_1c_2 - a_2c_1) / (a_2 - a_1) \end{aligned} \quad (3)$$

Проверимо то у наведеном примеру . Упоредјујући (1) и (2) имамо :
 $a_1 = 9$, $a_2 = 6$, $c_1 = 11$, $c_2 = -16$; *таблица 1* има облик :

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 11 & -16 \end{pmatrix}$$

па ће решење , сагласно (3) , бити :

$$\begin{aligned} x &= \frac{-16 - 11}{6 - 9} = \frac{-27}{-3} = 9 \\ y &= \frac{9 \cdot (-16) - 6 \cdot 11}{6 - 9} = \frac{-210}{-3} = 70 . \end{aligned}$$

Одговор : Било је 9 трговаца , а цена робе је била 70 јуана .

Напомена : *Таблица 1* може се записати и у облику :

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} .$$

Упоредимо овај начин са данашњим начином решавања система од две линеарне једначине са две непознате (помоћу детерминанти , односно по готовим формулама) :

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ x &= (c_1b_2 - c_2b_1) / (a_1b_2 - a_2b_1) \\ y &= (a_1c_2 - a_2c_1) / (a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

Слично се решава и задатак :

Задатак 3. Неколико породица у селу хоће заједнички да купе вола . Ако сваких 7 породица да по 190 јуана, мањак ће бити (тј. недостајаће) 330 јуана . Ако пак, сваких 9 породица да по 270 јуана, вишак ће бити (тј. преостаће) 30 јуана. Колико је било породица и колико је коштао во ?

На исти начин, добијамо решење система : имамо 126 породица и 3750 јуана.

2. 1. 2 Други начин решавања система једначина

Други начин за решавање проблема, који се своди на систем од две линеарне једначине са две непознате, познат је под називом *метода две лажне претпоставке* (правило двеју грешака) и примењивана је нарочито у средњем веку, па све до XVIII века.

По тој методи, за разлику од знатно једноставније *методе једне лажне претпоставке*, непознатој x се дају редом две вредности (x_1 и x_2), по правилу различите од праве вредности , па се онда прави линеарна интерполација да би се нашло право решење.

Навешћемо један задатак из VII књиге *Математике у девет књига*, који се решава методом две лажне претпоставке (ознаке су прилагођене савременој нотацији) :

Задатак 4. Имамо 9 једнаких легура злата и 11 једнаких легура сребра. Када су стављене на тасове теразија, теразије су биле у равнотежи. Међутим, када су на тасовима међусобно заменили једну легуру злата и једну легуру сребра, онда је маса на првом тасу – оном са 9 легура (8 злата и 1 сребра) била мања за 16 лана. Поставља се питање колико је маса сваке легуре посебно.

У данашњим ознакама, ако масу једну легуре злата означимо са x , а масу једне легуре сребра са y , задатак ће се свести на решавање система линеарних једначина :

$$\begin{aligned} 9x &= 11y \\ 8x + y + 16 &= 10y + x \end{aligned} \tag{4}$$

или :

$$\begin{aligned} 9x - 11y &= 0 \\ 7x - 9y &= -16 \end{aligned} \tag{5}$$

Одатле се добија : $x = 44$ (лана) и $y = 36$ (лана).

Рачунање се врши на специјалној дасци за рачунање и излаже се правило из којег се може закључити у чему је суштина његовог начина решавања.

Први пут ћемо претпоставити (прва лажна претпоставка) да је маса легуре злата $x_1 = 55$ (лана) . Тада ће маса легуре сребра бити $y_1 = \frac{9x_1}{11} = 9 \cdot \frac{55}{11} = 45$ (лана).

Према услову задатка, морали бисмо имати једнакост :

$$8x_1 + y_1 + 16 = 10x_1 + y_1 .$$

Међутим, лева страна је једнака :

$$8 \cdot 55 + 45 + 16 = 501 ,$$

а десна страна :

$$10 \cdot 45 + 55 = 505 ,$$

тј. левој страни недостаје 4 лана. Број $k_1 = 4$ назива се „мањак леве стране” („вишак десне стране”) .

Други пут ћемо претпоставити (друга лажна претпоставка) да је маса легуре злата $x_2 = 22$ (лана) . Тада је $y_2 = \frac{9x_2}{11} = 9 \cdot \frac{22}{11} = 18$ (лана) . И овог пута једнакост $8x_2 + y_2 + 16 = 10y_2 + x_2$, која би морала важити према услову задатка, није тачна, јер је лева страна једнака :

$$8 \cdot 22 + 18 + 16 = 210 ,$$

а десна :

$$10 \cdot 18 + 22 = 202 ,$$

тј. лева страна је већа од десне за 8 лана. Број $k_2 = 8$ се назива ”вишак леве стране” (”мањак десне стране”) .

Даље се саставља таблица

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

и речима наводи следеће правило за одређивање праве (стварне) вредности за x , која се (у данашњој симболици) изражава овако :

$$x = (k_1x_2 + k_2x_1)/(k_1 + k_2) . \quad (6)$$

У датом примеру добијамо :

$$x = \frac{4 \cdot 22 + 8 \cdot 55}{4 + 8} = \frac{88 + 440}{12} = \frac{528}{12} = 44 \text{ (лана)} .$$

Правна вредност за x налази се између обе ”норме”, тј. $x_2 < x < x_1$. Затим се одређује маса легуре сребра :

$$y = \frac{9x}{11} = 9 \cdot \frac{44}{11} = 36 \text{ (лана) .}$$

Напомена : У старокинеском тексту одговор се саопштава на следећи начин : “маса легуре злата је 2 цзина 12 лана, а маса легуре сребра је 2 цзина 4 лана” (треба имати у виду да је 1 цзин = 16 лана) .

У арапску математичку литературу алгоритам лажне (прет)поставке доспео је под називом “правило две грешке” . Ево како, на пример, Muhamed ibn Musa из Ногезма (код нас познат под именом Alhvarizmi) почетком IX века решава један задатак из своје *Аритметике* :

Задатак 5. Наћи број, ако се зна да ће се, одузимањем његове трећине и четвртине, добити број 8.

Ако би тражени број био 12 (прва претпоставка), тада би остатак био једнак $12 - \frac{1}{3} \cdot 12 - \frac{1}{4} \cdot 12 = 5$, тј. за 3 мање од 8. Ако би тражени број био 24 (друга претпоставка), онда би остатак био једнак $24 - \frac{1}{3} \cdot 24 - \frac{1}{4} \cdot 24 = 10$, тј. за 2 веће од 8. Сагласно правилу две лажне претпоставке (6), добија се права вредност непознате

$$x = \frac{3 \cdot 24 + 2 \cdot 12}{3 + 2} = 19\frac{1}{5}$$

О правилу две лажне претпоставке писана су на арапском језику и посебна дела у којима су разматрани и они случајеви, када се стварна вредност непознате x не налази између “норми” x_1 и x_2 , тј. разматрани су случајеви, када обе претпоставке доводе до “вишкова” или обе доводе до “мањкова”. У таквим случајевима у напред наведеној формули (6) треба, водећи рачуна о знацима, у бројиоцу узимати не збир, већ разлику наведених производа, а у имениоцу разлику “вишкова” или “мањкова”.

У XII веку техника лажних претпоставки пренета је из арапске у европску математичку литературу, где се, под латинским називом *regula duorum falsorum* – правило двеју грешака, користила све до XVIII века.

Леонардо Фибоначи из Пизе (око 1180–1250 год.) посветио му је читаво поглавље у свом делу *Књига Абака* (Liber Abaci, 1202. год.), где се први пут сусрећу речи “минус” и “плус”, али не у смислу операција одузимања и сабирања, већ у смислу “мањка” и “вишка”. Поред вербалног доказа формуле (6), Фибоначи, који није користио негативне бројеве, доказује правило и за случај две грешке са “вишком” и две грешке са “мањком”.

Ево једног задатка из Фибоначијеве књиге :

Задатак 6. Решити систем једначина :

$$\begin{aligned}x + y &= 10 \\ \frac{x}{y} &= 2\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Одговор : $x = 7$, $y = 3$.

Под називом „лажно правило“ овај начин решавања се сусреће и у старим руским уџбеницима, рецимо у Аритметици, L. F. Magnickog (1669–1739).

Навешћемо један задатак те врсте и његово решење.

Задатак 7. Неко је упитао учитеља колико ученика учи код њега, јер жели да доведе сина на учење. Учитељ је одговорио : „ Ако би имао још толико ученика колико их сада има и још половину и четвртину од тога и твог сина, било би тачно 100 ученика“. Колико је тај учитељ имао ученика?

Данас тај задатак преводимо на решавање једначине :

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100.$$

Међутим, Магницики га решава помоћу „правила две претпоставке“.

Прва лажна претпоставка : $x_1 = 24$, тј. претпоставимо да је било 24 ученика. Тада бисмо, према услову задатка, имали $24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67$, тј. $k_1 = 100 - 67 = 33$ мање од стварног броја (прва грешка – мањак).

Друга лажна претпоставка : $x_2 = 32$, тј. претпоставимо да је било 32 ученика. Тада бисмо имали $32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89$, тј. за $k_2 = 100 - 89 = 11$ мање од стварног броја (друга грешка – мањак).

После тога Магницики даје готов начин за налажење траженог броја x :

$$x = \frac{33 \cdot 32 - 11 \cdot 24}{33 - 11} = 36,$$

што одговара формули :

$$x = (k_1 x_2 - k_2 x_1) / (k_1 - k_2) \quad (7)$$

Формулу (7) треба користити и у случају када се за обе лажне претпоставке добијају бројеви, који су већи од праве (дате) вредности. Ово тврђење можемо проверити користећи претпоставке $x_1 = 52$ и $x_2 = 40$.

Ако се при једној претпоставци добија више, а при другој мање од наведеног у задатку (овде 100), тада у обрасцу (7) по коме се одређује x , у бројиоцу и имениоцу, треба ставити знак "плус" уместо ознаке "минус", тј. користити формулу (6). На пример, ако је $x_1 = 60$ (прва претпоставка), онда $60 + 60 + 30 + 15 + 1 = 166$, па је $k_1 = 166 - 100 = 66$ (вишак); ако је, пак, $x_2 = 20$ (друга

претпоставка), онда је $20 + 20 + 10 + 5 + 1 = 56$, па то је $k_2 = 100 - 56 = 44$ (мањак). Стога је $x = \frac{60 \cdot 20 + 44 \cdot 60}{66 + 44} = 36$.

Правило две лажне претпоставке може се објаснити и алгебарски доказати.

Ако се пажљиво размотри решавање задатака методом лажних претпоставки, може се запазити да се при томе увек тражи неки непознати број. Ако у задатку има и других непознатих, оне се према условима задатка могу изразити помоћу тог јединственог броја. Тај непознати број, који ћемо означити са x , увек задовољава једначину $ax + b = c$ где су a , b , и c неки бројеви. Број c је познат, док се бројеви a и b , уопште узев, могу израчунати (одредити) према услови задатка. Они (обично) нису дати у услови, али су у њему представљени помоћу неког низа операција (може се видети у задацима 4. и 6.). Због тога ће се сматрати непознатим.

Ако узмемо неки број x_1 (прва претпоставка) и обавимо с њим тражене операције, добићемо неки број c_1 , тј. $ax_1 + b = c_1$. Затим, ако узмемо други број x_2 (друга претпоставка) и ако са њим поновимо исте операције, добићемо нови број c_2 , тј. $ax_2 + b = c_2$.

Како сад, знајући x_1 , x_2 , c_1 , c_2 наћи решење задатка, тј. непознати број x ?

Ако треба решити једначину

$$ax + b = c, \quad (8)$$

лажне претпоставке дају

$$ax_1 + b = c_1 \quad (9)$$

$$ax_2 + b = c_2 \quad (10)$$

Одузимајући (9) и (10) од (8), добићемо:

$$a \cdot (x - x_1) = c - c_1 = k_1 \quad (11)$$

$$a \cdot (x - x_2) = c - c_2 = k_2 \quad (12)$$

где су k_1 и k_2 одговарајуће грешке (вишак, мањак). Поделивши (11) са (12), добићемо:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = k_1 / k_2, \quad (13)$$

а решавање те једначине по x доведиће нас до формуле (7), тј.

$$x = \frac{(k_1 x_2 - k_2 x_1)}{(k_1 - k_2)}.$$

Ова формула може се примењивати у свим случајевима о којима се унапред говорило :

- 1) $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, тј. у случају оба вишка ($c_1 > c$ и $c_2 > c$);
- 2) $k_1 < 0$ и $k_2 < 0$, тј. у случају оба мањка ($c_1 < c$ и $c_2 < c$);
- 3) $k_1 < 0$ и $k_2 > 0$, тј. у случају вишка при једној и мањка при другој претпоставци ($c_1 > c$ и $c_2 < c$).

Данас се једначина (8) решава веома просто чак и у основној школи. При томе се оперише, како са позитивним, тако и са негативним бројевима.

3 СИСТЕМИ ЈЕДНАЧИНА У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

У основној школи, системи једначина се помињу тек у осмом разреду основне школе, најчешће по плану у другом делу другог полугодишта. Прво се изучава линеарна функција и њен график, а затим се прелази на појам система линеарних једначина и на крају следе начини решавања система. Редослед обраде начина решавања система је различит, могу се прво обрадити метода замене и метода супротних коефицијената, а на крају графичка метода, али боља опција је да се прво обради графичка метода јер је график линеарне функције раније обрађен, затим метода замене и на крају метода супротних коефицијената. Осим класичног решавања система линеарних једначина, битан део је и примена система у текстуалним задацима.

3.1. Системи линеарних једначина у основној школи

Ове године време је послужило воћаре и њихов труд се исплатио. Кајсије су родиле 20% боље него прошле. Заправо, принос по стаблу је порастао за 6 kg.

Можемо ли на основу ових података да закључимо колики је принос по стаблу био прошле, а колики је ове године ?

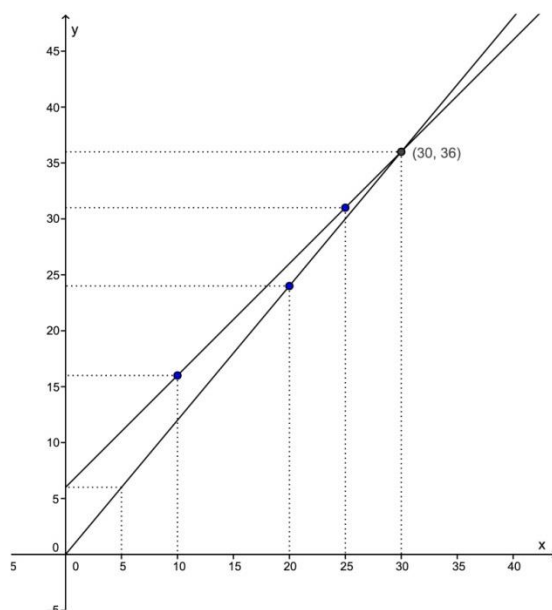
Обележимо са x принос по стаблу (у килограмима) прошле године, а са y принос по стаблу (у килограмима) ове године. Дати подаци нам дају две линеарне везе међу величинама x и y , односно на основу њих долазимо до следеће две једначине са две непознате, уз услов $x \geq 0$, јер принос не може бити негативан.

$$y = 1,2x$$

$$y = x + 6$$

Две линеарне једначине са две непознате заједно називају се

системом те две једначине .



Једнакости

$$y = 1,2x \quad \text{и} \quad y = x + 6$$

можемо посматрати и као две линеарне функције. Графици ових функција се секу. Апсциса пресечне тачке је решење линеарне једначине

$$1,2x = x + 6$$

Када решимо прво једначину по x , а затим нађемо y , добијамо :

$$x = 30 \quad \text{и} \quad y = 36$$

Уређени пар $(30, 36)$ је решење посматраног система, тј. он је решење обе једначине тог система. Овај уређени пар уједно представља координате пресечне тачке посматраних графика линеарних функција

$$y = 1,2x \quad \text{и} \quad y = x + 6 .$$

У оквиру ове теме бавићемо се решавањем сличних система линеарних једначина. Сваком од система се увек може придружити одговарајући графички приказ. Он нам може помоћи да, и пре одређивања решења система, уочимо да ли систем има решење, као и колико их има.

3.2. Линеарна једначина са две непознате

Линеарна једначина са две непознате x и y је свака једначина еквивалентна једначини облика $ax + by + c = 0$, где су a, b, c реални бројеви, а коефицијенти a и b не могу истовремено бити једнаки 0 ($a \neq 0$ или $b \neq 0$).

Из практичних разлога у горњој дефиницији је дозвољено да коефицијенти уз непознате могу бити 0, мада је тада реч о линеарној једначини са једном непознатом. На пример, једначине

$$3x + 2y - 1 = 0, \quad -x + y - 2 = 0, \quad 11x - 7y - 4 = 0$$

јесу линеарне једначине са две непознате.

Пример 1. Наведи три линеарне једначине са две непознате.

Дату линеарну једначину са две непознате трансформишемо у њој еквивалентну применом истих правила (замене, о додавању, о множењу) као и у случају једначина са једном непознатом.

Решење линеарне једначине са две непознате $ax + by + c = 0$ је сваки уређен пар (x_0, y_0) који заменом x са x_0 и y са y_0 ту једначину преводи у тачну бројевну једнакост.

$3x + 2y - 1 = 0$, јер јесте

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) - 1 = 0.$$

А уређени парови $(0, 0)$ и $(-5, 3)$ нису решења једначине

$3x + 2y - 1 = 0$, јер јесте

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 \neq 0 \quad \text{и} \quad 3 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 - 1 \neq 0.$$

Пример 2. Проверити да ли је неки од уређених парова $(0, 0)$, $(1, 5)$, $(-4, -8)$, $(-\frac{2}{7}, 1)$, $(-11, 0)$, $(-2, -3)$ решење једначине:

$$\text{а) } 3x - y + 2 = 0; \quad \text{б) } -2x + y = 0; \quad \text{в) } 7x - 3y + 5 = 0.$$

Пример 3. Колико решења има једначина $5x - y - 2 = 0$?

Провером се лако утврђује да уређени парови $(0, -2)$, $(\frac{2}{5}, 0)$, $(1, 3)$, $(-1, -7)$ јесу решења дате једначине. Међутим, она има још (бесконачно много) решења. За свако x важи

$$y = 5x - 2,$$

па је сваки уређен пар облика $(x, 5x - 2)$ решење дате једначине.

Сваку линеарну једначину с две непознате $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ или $b \neq 0$) можемо тумачити и као имплицитно задату линеарну функцију. Зато свакој таквој једначини придружујемо праву у координатном систему. Уређени пар координата сваке тачке те праве је једно од решења одговарајуће једначине.

Једначина $ax + by + c = 0$, за $a \neq 0$ и $b \neq 0$, има бесконачно много решења, тј. има онолико решења колико права $ax + by + c = 0$, где је $a \neq 0$ и $b \neq 0$, има тачака.

3.3. Систем од две линеарне једначине с две непознате

Пример 4. Отац је имао 30 година када се родио његов син Марко. Колико година сада има Марко ако знамо да је тренутно отац три пута старији од Марка?

Обележимо са x Маркове, а са y године његовог оца.

Онда прва реченица даје једну линеарну везу међу непознатим величинама x и y .



$y = x + 30$

Друга реченица даје још једну линеарну везу међу тим величинама.



$y = 3x$

Дакле, описаној ситуацији одговара систем од две линеарне једначине с две непознате.



$y = x + 30$

$y = 3x$

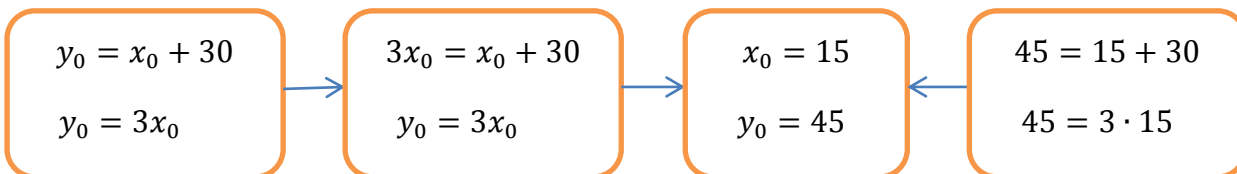
Општи облик система од две линеарне једначине с две непознате x и y је

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

где су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ дати реални бројеви.

Одредимо уређени пар бројева (x_0, y_0) који је решење обе једначине уоченог система.



Дакле, Марко сада има 15, а његов отац 45 година.

Решење система од две линеарне једначине с две непознате x и y је сваки уређени пар реалних бројева (x_0, y_0) који је решење обе једначине тог система.

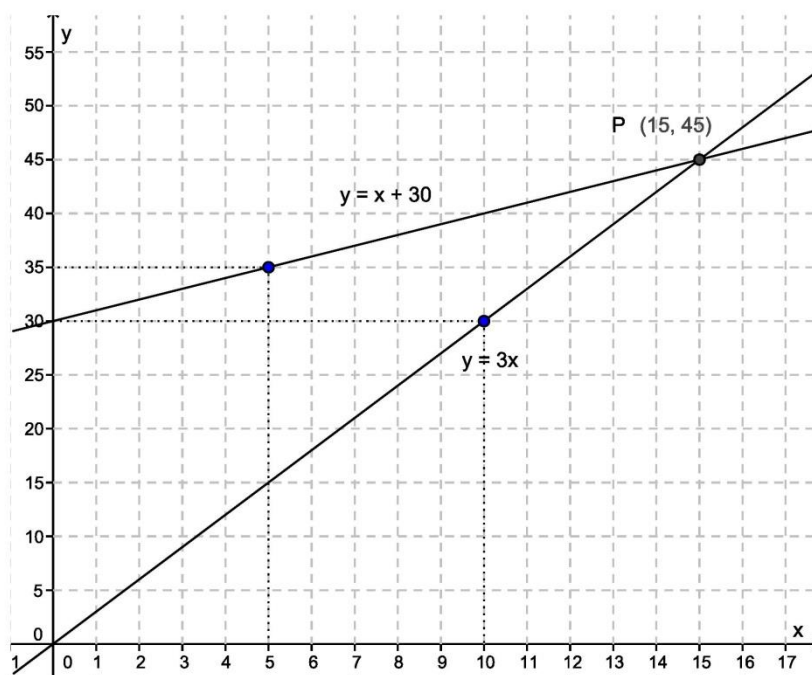
3.3.1. Графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате

Свакој од једначина система

$$x - y = -30$$

$$3x - y = 0$$

одговара права у координатном систему. Уређени парови координата сваке од тачака праве $y = x + 30$ су решења прве, а уређени парови координата сваке од тачака праве $y = 3x$ су решења друге једначине. Онда је уређени пар $(15, 45)$ координата пресечне тачке P решење посматраног система.



Графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате x и y је

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

чине две праве које су графици линеарних функција

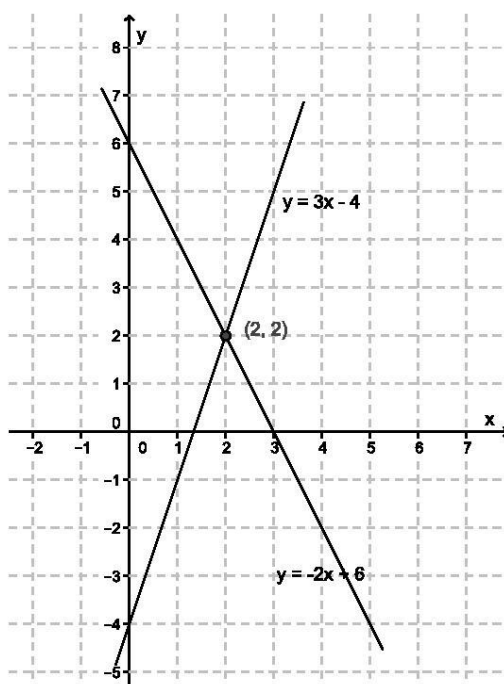
$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ и } a_2x + b_2y = c_2$$

Две праве једне равни могу се наћи у једном од три различита међусобна односа:

1. Праве се секу, тј. имају једну заједничку тачку.
2. Праве су паралелне, али се не поклапају, тј. немају заједничких тачака.
3. Праве се поклапају, тј. имају бесконачно много заједничких тачака.

Пример 5. Нацртати графички приказ система

$$\begin{aligned} 3x - y &= 4 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$



Праве које одговарају једначинама

$$3x - y = 4 \quad (y = 3x - 4)$$

и

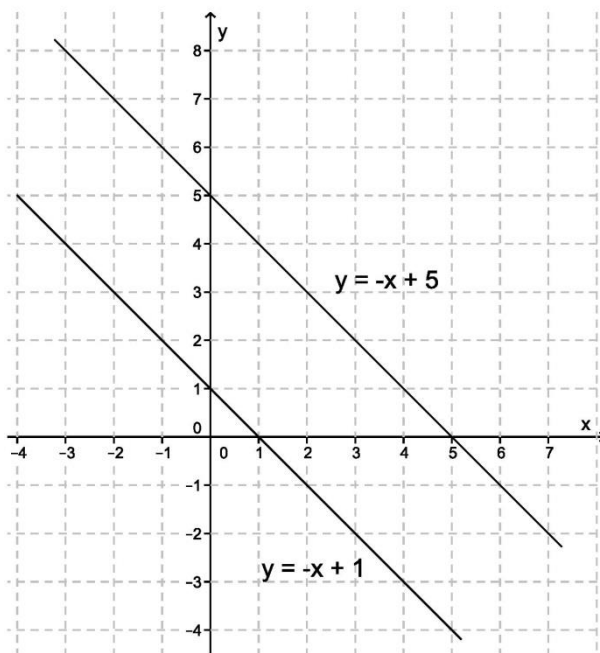
$$2x + y = 6 \quad (y = -2x + 6)$$

секу се, тј. имају једну заједничку тачку $(2, 2)$. Дакле, постоји само један уређени пар $(2, 2)$ који је решење обе од датих једначина, па закључујемо да посматрани систем има јединствено решење $(2, 2)$, тј. $x = 2$, $y = 2$.

Ако графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате чине две праве које се секу, тада тај систем има јединствено решење.

Пример 6. Нацртати графички приказ система

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x + y &= 5\end{aligned}$$



Праве које одговарају једначинама

$$x + y = 1 \quad (y = -x + 1)$$

и

$$x + y = 5 \quad (y = -x + 5)$$

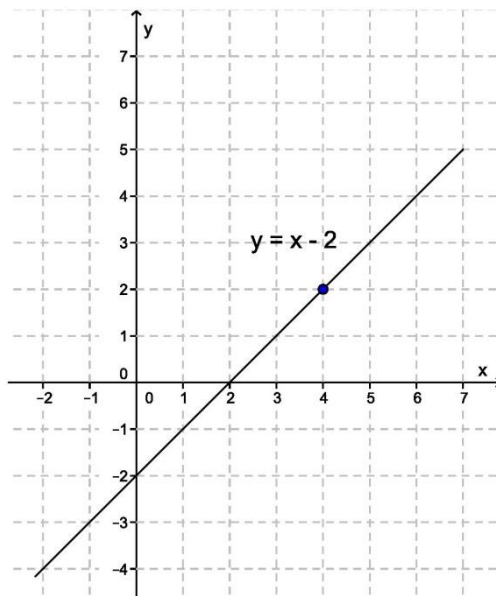
паралелне су и немају заједничких тачака.

Дакле, не постоји уређени пар бројева који је решење обе од тих једначина, па закључујемо да посматрани систем нема решење.

Ако графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате чине две паралелне праве које се не поклапају, тада тај систем нема решење.

Пример 7. Нацртати графички приказ система

$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\ 2x - 2y &= 4\end{aligned}$$



Једначине

$$x - y = 2 \text{ и } 2x - 2y = 4$$

су еквивалентне (друга се добија множењем обе стране прве једначине са 2), па се поклапају графици који им одговарају ($y = x - 2$). То значи да сваки пар координата тачака тог графика јесте решење посматраног система. Дакле, овај систем има бесконачно много решења.

Ако графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате чине две праве које се поклапају, тада тај систем има бесконачно много решења.

За систем од две линеарне једначине с две непознате постоје три могућности :

1. Систем има једно решење ;
2. Систем нема решење ;
3. Систем има бесконачно много решења .

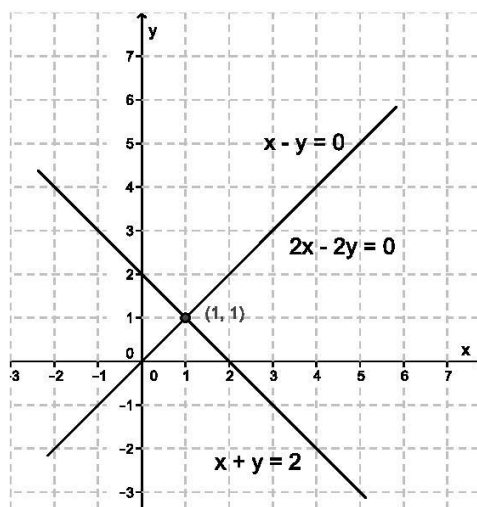
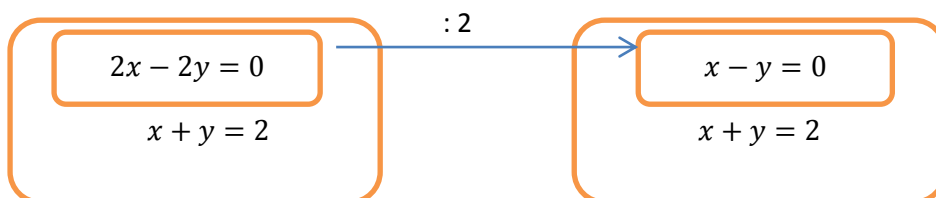
3.3.2. Еквивалентност система линеарних једначина

Када су две једначине еквивалентне? Као и у једначинама, слично важи и за системе.

Два система једначина су еквивалентна ако је свако решење једног од њих уједно решење и другог, или ако оба система немају решење.

Једначине се решавају применом три правила : правила замене, правила о додавању и правила о множењу. Слично је и у случају система једначина.

Пример 8. Посматрамо следећа два система једначина :



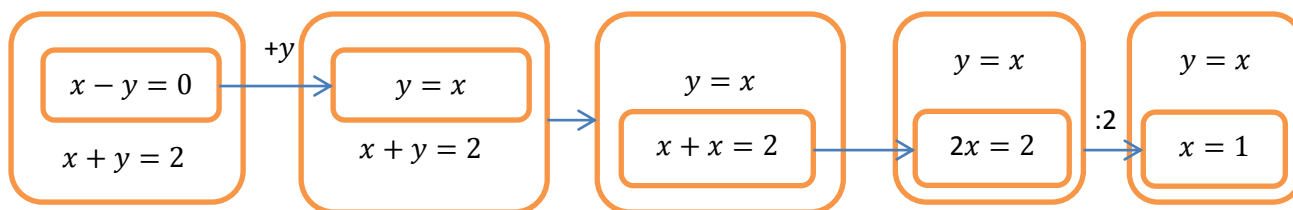
Прве једначине ових система су еквивалентне и њима одговара права $y = x$. Друга једначина им је заједничка и њој одговара права $y = -x + 2$. Дакле, оба система имају исти графички приказ. Закључујемо да су посматрани системи еквивалентни и да је њихово једино решење уређени пар $(1, 1)$.

Провера. $2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$
 $1 + 1 = 2$

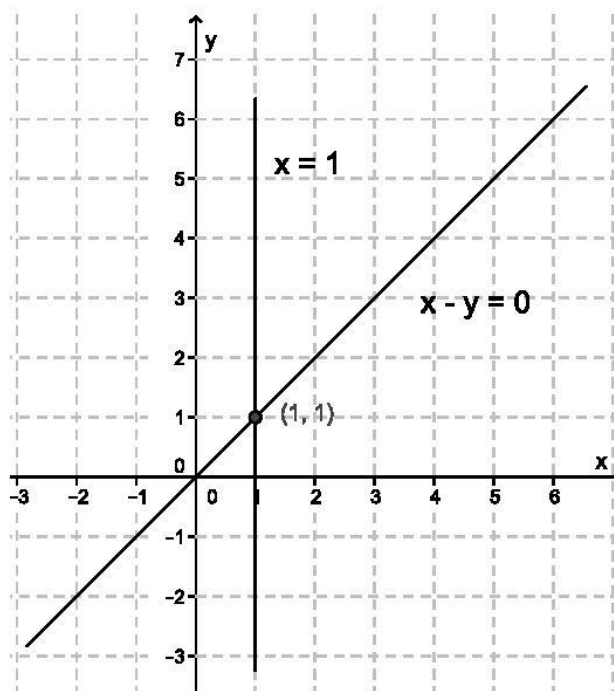
$1 - 1 = 0$
 $1 + 1 = 2$

Ако једначину система заменимо њој еквивалентном, добијамо нови систем еквивалентан полазном.

Пример 9. Посматрати начин на који добијамо следећи низ система једначина :



Други систем добијамо из првог замењујући прву једначину њој еквивалентном. На основу претходног правила, ова два система су еквивалентна. Потом израз y у другој једначини замењујемо изразом x , јер су они на основу прве једначине ($y = x$) једнаки. Затим другу једначину замењујемо њој еквивалентним једначинама и тако долазимо до последњег система. На основу графичких приказа првог и другог система (примера) видимо да оба имају исто решење. Једино решење оба система је уређени пар $(1, 1)$.

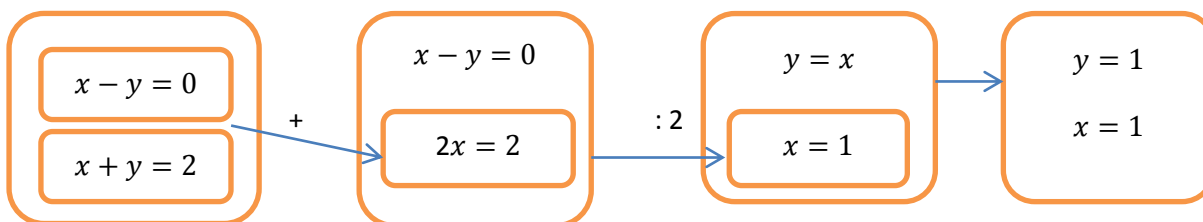


Провера. $1 - 1 = 0$
 $1 + 1 = 2$

$1 = 1$
 $1 = 1$

Ако у једначини датог система заменимо једну од непознатих изразом који је једнак тој непознатој на основу друге једначине, добијамо нови систем који је еквивалентан полазном систему.

Пример 10. Користићемо трансформације помоћу којих добијамо следећи низ система.



Други систем добијамо из првог замењујући другу једначину једначином која представља збир једначина првог система. Затим на основу претходна два правила добијамо следећа два система. Последњи систем је најједноставнијег облика, то је систем из кога директно читамо решење – уређени пар $(1, 1)$. Сви системи у горњем низу су међусобно еквивалентни и њихово једино решење је $(1, 1)$.

Ако једну једначину датог система заменимо једначином која је збир или разлика једначина датог система, добијамо нови систем који је еквивалентан полазном систему.

3.3.3. Решавање система линеарних једначина методом замене

Решити систем једначина значи одредити решење (решења) тог система или утврдити да тај систем нема решење. При решавању система циљ нам је да применом правила, датих у претходном делу, добијемо еквивалентан систем најједноставнијег облика.

Пример 11. Следећи систем решићемо **методом замене**. Уобичајено је да се сваки новодобијени еквивалентни систем одвоји хоризонталном линијом.

$$x + 2y = 8$$

$$\underline{2x - y = 1}$$

$$x = 8 - 2y$$

$$\underline{2x - y = 1}$$

$$x = 8 - 2y$$

$$\underline{2(8 - 2y) - y = 1}$$

$$x = 8 - 2y$$

$$\underline{16 - 4y - y = 1}$$

Непознату x изражавамо преко непознате y на основу прве једначине.

Непознату x у другој једначини замењујемо изразом $8 - 2y$ добијеним из прве једначине.

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о замени $(2(8 - 2y) = 16 - 4y)$

$$\begin{aligned} x &= 8 - 2y \\ -5y &= -15 \end{aligned}$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о додавању и правила о замени ($-4y - y = -5y$)

$$\begin{aligned} x &= 8 - 2y \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о множењу (обе стране делимо са -5)

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Непознату у првој једначини замењујемо са 3.

$$\begin{aligned} \text{Провера. } 2 + 2 \cdot 3 &= 8 \\ 2 \cdot 2 - 3 &= 1 \end{aligned}$$

Увек је корисно, сигурности ради, урадити проверу.

Суштина ове методе је да једну непознату изразимо преко друге (x преко y или y преко x) на основу једне од једначина система, а затим у другој једначини заменимо ту непознату претходно добијеним изразом.

Тада друга једначина постаје линеарна једначина с једном непознатом, а њих од пре знамо да решавамо. Избор о томе коју променљиву изразити преко друге зависи у потпуности од нас, па бирамо шта нам је у датом случају погодније. Методу замене је најзгодније примењивати када је бар један коефицијент уз неку од непознатих једнак 1 или -1 , јер се тада применом правила о додавању једна непозната лако изражава преко друге.

У претходном примеру смо на основу прве једначине изразили x преко y. Могли смо изразити и y преко x (на основу друге једначине). Решавањем система и на тај начин, добијамо исто решење.

Пример 12. Методом замене решити следећи систем једначина :

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 5 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

Непознату y изражавамо преко непознате x на основу друге једначине.

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 5 \\ y &= -2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x + 2(-2x + 1) &= 5 \\ y &= -2x + 1 \end{aligned}$$

Непознату y у првој једначини замењујемо изразом $-2x + 1$.

$$\begin{aligned} 4x - 4x + 2 &= 5 \\ y &= -2x + 1 \end{aligned}$$

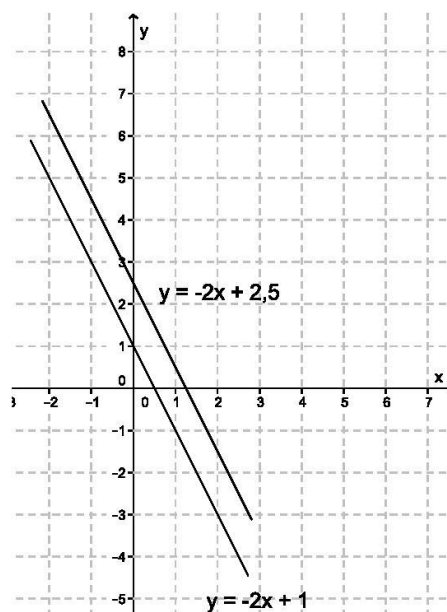
Прву једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила замене.

$$0 \cdot x + 2 = 5$$

$$\underline{y = -2x + 1}$$

Прву једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила замене.

Једначина $0 \cdot x + 2 = 5$ нема решење, па га нема ни дати систем. То врло лако може да се закључи и на основу графичког приказа овог система јер добијамо две паралелне праве које се не поклапају.



Систем еквивалентан систему чија бар једна једначина нема решење, такође нема решење.

Пример 13. Методом замене решити следећи систем једначина :

$$x + 2y = 5$$

$$\underline{5x + 10y = 25}$$

$$x = 5 - 2y$$

$$\underline{5(5 - 2y) + 10y = 25}$$

Прву једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о додавању и непознату x у другој једначини замењујемо изразом $5 - 2y$.

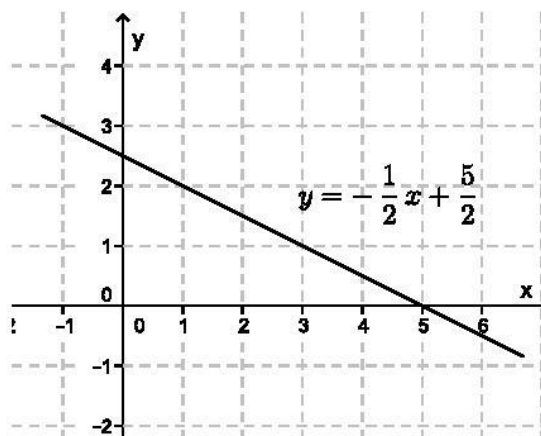
$$x = 5 - 2y$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила замене и правила о додавању.

$$0 \cdot y = 0$$



Једначина $0 \cdot y = 0$ је идентитет (сваки реалан број је решење ове једначине), па су решења датог система у ствари решења његове прве једначине. Дакле, овај систем има бесконачно много решења и то су уређени парови $(5 - 2a, a)$, где $a \in \mathbb{R}$. До овог закључка се такође долази ако се нацрта графички приказ посматраног система.



Систем има бесконачно много решења ако је еквивалентан систему чија је једна једначина идентитет, а друга има решење.

Задатак 1. Нацртај графички приказ система и одреди његово решење методом замене :

а) $3x - y = 1$
 $-3x + 2y = 1$

б) $2x - 3y = -2$
 $x - 5y = 6$

в) $x + y = 6$
 $5x + 2y = 6$

Задатак 2. Одреди скуп решења система :

а) $3x - y = 1$
 $-3x + y = -1$

б) $3x - y = 1$
 $-3x + y = 1$

3.3.4. Решавање система једначина методом супротних коефицијената

За методу супротних коефицијената кључна је примена правила које гласи : ако једну од једначина система заменимо збиром или разликом једначина тог система, добијамо систем еквивалентан полазном систему.

Пример 14. Решити следећи систем једначина методом супротних коефицијената

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 9 \\ 2x - 2y &= 1 \end{aligned}$$



Саберемо једначине система и тако добијамо једначину у којој више не учествује непозната y ($3x + 2y + 2x - 2y = 5x$ и $9 + 1 = 10$). Овом једначином замењујемо прву једначину система.

$$\begin{aligned} 5x &= 10 \\ 2x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Прву једначину замењујемо њој еквивалентом применом правила о множењу (обе стране једначине делимо са 5).

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ 2x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Непознату x у другој једначини замењујемо са 2.

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ 4 - 2y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ -2y &= -3 \end{aligned}$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о додавању (од обе стране једнакости одузмемо 4)

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о множењу (обе стране једначине делимо са -2)

Провера.

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 9$$

$$2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 1$$

Увек је корисно, сигурности ради, урадити проверу.

Методу супротних коефицијената је најзгодније примењивати када су коефицијенти уз исту непознату у две једначине система међусобно супротни бројеви, као у претходном примеру (коефицијенти уз y су 2 и -2), или међусобно једнаки бројеви. Када су одговарајући коефицијенти међусобно супротни бројеви, једначине система сабирамо (као у претходном примеру), а када су одговарајући коефицијенти међусобно једнаки бројеви, онда једначине система одузимамо једну од друге.

Пример 15. Следећи систем једначина ћемо решити и методом замене и методом супротних коефицијената, а према томе се може одлучити како убудуће решавати сличне системе (системе код којих су сви коефицијенти уз променљиве различити од 1 и -1, а парови одговарајућих коефицијената нису ни међусобно супротни ни једнаки).

Метода замене

$$\begin{array}{l} 5x + 4y = 11 \\ 2x + 3y = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x + 4y = 11 \\ 2x = 10 - 3y \quad / :2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x + 4y = 11 \\ x = \frac{10-3y}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 \cdot \frac{10-3y}{2} + 4y = 11 \quad / \cdot 2 \\ x = \frac{10-3y}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5(10 - 3y) + 8y = 22 \\ x = \frac{10-3y}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 50 - 15y + 8y = 22 \quad / -50 \\ x = \frac{10-3y}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -7y = -28 \quad / : (-7) \\ x = \frac{10-3y}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y = 4 \\ x = \frac{10-3 \cdot 4}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y = 4 \\ x = -1 \end{array}$$

Метода супротних коефицијената

$$\begin{array}{l} 5x + 4y = 11 \quad / \cdot 2 \\ 2x + 3y = 10 \quad / \cdot 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10x + 8y = 22 \\ 10x + 15y = 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10x + 8y = 22 \\ (10x + 15y) - (10x + 8y) = 50 - 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10x + 8y = 22 \\ 7y = 28 \quad / : 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10x + 8y = 22 \\ y = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10x + 8 \cdot 4 = 22 \\ y = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \end{array}$$

Провера :

$$5 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 = 11$$

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 10$$

3.4. Примена система линеарних једначина

Као и у случају линеарних једначина, системи линеарних једначина се јављају при решавању различитих проблема. Показаћемо неколико примера који то илуструју.

Пример 16. Збир два броја је за 1 већи од троструке вредности мањег од та два броја, а петострука вредност мањег је једнака двострукој вредности већег. О којим бројевима је реч ?

Нека је x мањи од два тражена броја, а y већи од њих. Дакле, треба да решимо систем :

$$x + y = 3x + 1$$

$$5x = 2y$$

С обзиром да имамо коефицијент 1 уз непознате x и y , погодно је применити методу замене. На основу прве једначине изразићемо y преко x , и тај израз ($y = 2x + 1$) уврстићемо у другу једначину и добити :

$$5x = 2(2x + 1)$$

Из ове линеарне једначине добијамо да је $x = 2$, и када то заменимо у другу једначину, добијамо да је $y = 5$.

Дакле, тражени бројеви су 2 и 5.

Пример 17. Јована је отишла у књижару јер је желела да купи 5 свезака и 2 маркера. Понела је 200 динара. Међутим, продавачица јој је рекла да јој недостаје 3 динара за ту куповину, али и да може да купи једну свеску мање и да добије кусур од 22 динара. Да ли су ове информације довољне да одредимо појединачне цене свеске и маркера ?

Обележимо са x цену свеске, а са y цену маркера. Тада на основу датих података, записујемо следеће две једначине :

$$5x + 2y = 200 + 3$$

$$4x + 2y = 200 - 22$$

Овај систем се врло лако може решити применом методе супротних коефицијената, нпр. тако што ћемо одузети другу једначину од прве јер имамо исте коефицијенте уз y . Тада добијамо да је $x = 25$ и заменом у једну од једначина добијамо да је $y = 39$.

Дакле, цена свеске је 25 динара, а цена маркера 39 динара.

Пример 18. Сава је имао уштеђевину од 1100 динара и од родитеља је сваке недеље добијао цепарац од 300 динара. Он је сваке недеље од тог новца куповао један часопис по цени од 150 динара и један стрип по цени од 200 динара. Његов млађи брат Јован није имао уштеђевину, а добијао је исти цепарац и од њега сваке недеље куповао стрип по цени од 75 динара. После колико недеља ће браћа имати исту количину новца?

Нека је t број недеља после којих ће оба брата имати исту суму новца, коју ћемо означити са s . Тада на основу датих података записујемо следеће две једначине :

$$\begin{aligned}s &= 1100 + (300 - 200 - 150)t \\ s &= (300 - 75)t.\end{aligned}$$

Овај систем ћемо решити методом замене.

Непознату s у првој једначини замењујемо изразом $225t$ који смо добили из друге једначине. Тада је :

$$225t = 1100 - 50t,$$

односно

$$t = 4.$$

$$s = (300 - 75) \cdot 4 = 225 \cdot 4 = 900$$

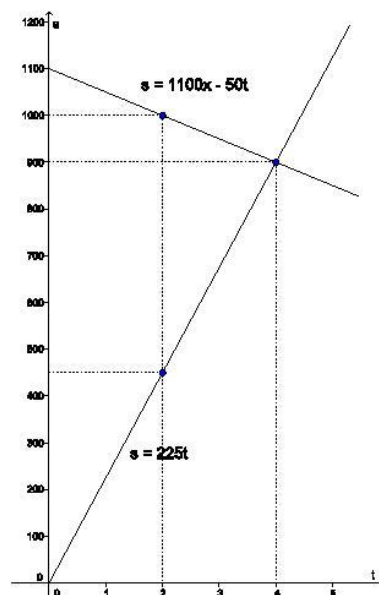
Браћа ће после 4 недеље имати по 900 динара.

Посматрану ситуацију можемо приказати и графички. Количину Савиног новца (у односу на време) описује опадајућа линеарна функција

$$s = 1100 - 50t$$

а количину Јовановог новца описује растућа линеарна функција

$$s = 225t.$$



Графици ове две функције се секу у тачки $(4, 900)$, чије координате представљају решење уоченог система.

Пример 19. Ако дужину правоугаоника повећамо за 3cm, а ширину за 2cm, добијамо правоугаоник чија је површина за 25cm^2 већа од површине првобитног правоугаоника. А ако дужину повећамо за 2cm, а ширину за 3cm, добијамо правоугаоник чија је површина за 27cm^2 већа од површине првобитног правоугаоника. Колике су димензије првобитног правоугаоника?

Нека је a дужина, а b ширина првобитног правоугаоника изражена у центиметрима. Тада овом проблему одговара систем

$$(a + 3) \cdot (b + 2) = ab + 25$$

$$(a + 2) \cdot (b + 3) = ab + 27$$

Применом правила замене (извршимо назначено множење), добијамо систем

$$ab + 2a + 3b + 6 = ab + 25$$

$$ab + 3a + 2b + 6 = ab + 27$$

Овај систем је еквивалентан претходном.

Затим, применом правила о додавању на обе једначине (на обе стране тих једначина додајемо израз $-ab - 6$), добијамо систем од две линеарне једначине с две непознате

$$2a + 3b = 19$$

$$3a + 2b = 21$$

који је еквивалентан претходном.

Овај систем најлакше можемо решити методом супротних коефицијената.

Нпр. , прву једначину помножимо са -2 , а другу једначину са 3 . У следећем кораку добијамо да је $a = 5$, а затим да је $b = 3$.

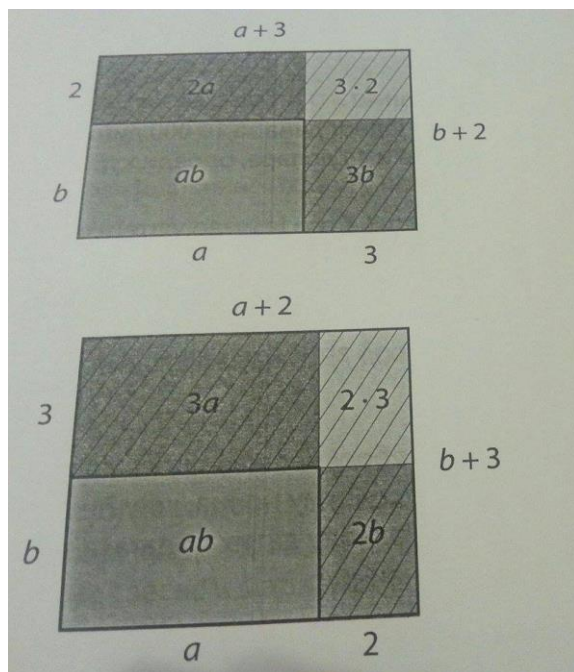
Дакле, димензије првобитног правоугаоника су $a = 5$ и $b = 3$.

Пример 20. Кружну бицикличку стазу бициклиста је први пут обишао за 5 минута, а други пут за 6 минута. Колика је дужина стазе, ако је средња брзина бициклисте (за оба круга) $36 \frac{km}{h}$?

Први део задатка је да израчунамо брзине (довољно је да израчунамо и само једну од њих) којима се кретао бициклиста у првом и другом кругу, па у другом делу да израчунамо дужину стазе.

Означимо са v_1 брзину бициклисте у првом кругу, а са v_2 брзину бициклисте у другом кругу. Тада на основу датих података, записујемо следећи систем :

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \frac{5}{60} &= v_2 \cdot \frac{6}{60} \\ v_1 \cdot \frac{5}{60} + v_2 \cdot \frac{6}{60} &= \left(\frac{5}{60} + \frac{6}{60} \right) \cdot 36 \end{aligned}$$



При решавању овог система, најбоље је да израз $v_2 \cdot \frac{6}{60}$ у другој једначини заменимо изразом $v_1 \cdot \frac{5}{60}$ из прве једначине. Тако добијамо једначину

$$v_1 \cdot \frac{5}{60} + v_1 \cdot \frac{5}{60} = \left(\frac{5}{60} + \frac{6}{60} \right) \cdot 36,$$

чије је решење

$$v_1 = \frac{11}{60} \cdot 36 \cdot \frac{60}{10} = 39,6 \frac{km}{h}.$$

Из шестог разреда знамо да је пређени пут $s = v \cdot t$.

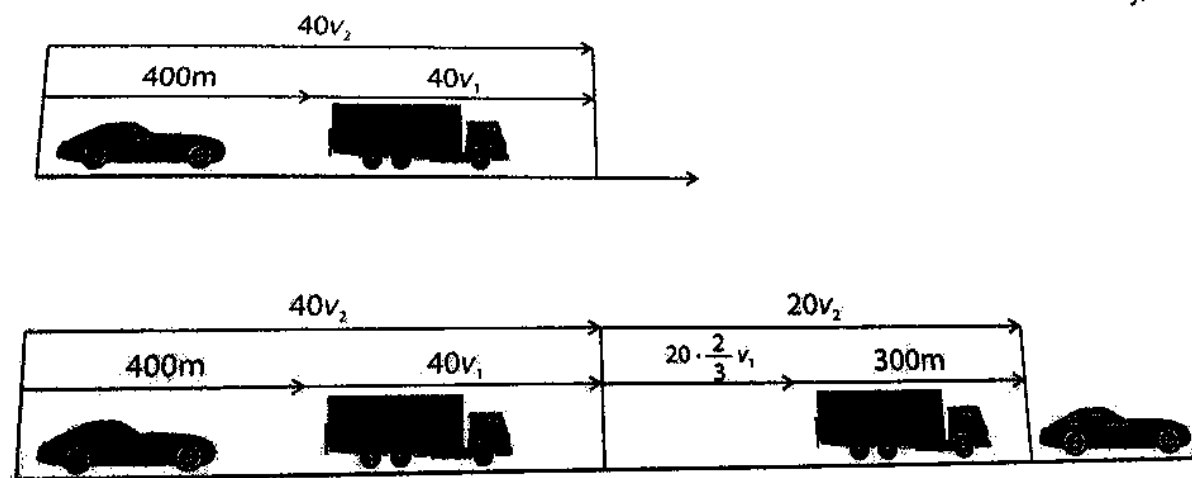
Дакле, један круг стазе је дугачак $s = 39,6 \cdot \frac{5}{60} = 3,3 km = 3300 m$.

Пошто смо нашли v_1 , у следећем кораку наћи ћемо v_2 и добијамо да је

$v_2 = 33 \frac{km}{h}$. Са брзином v_2 лако проверавамо тачност добијеног резултата што се тиче пређеног пута s .

Пример 21. Дуж истог пута равномерно се крећу, у истом смеру, камион и иза њега аутомобил. У једном тренутку растојање између ова два возила је $400 m$, а након 40 секунди аутомобил је стигао камион. Тада је камион смањио брзину за трећину и након 20 секунди растојање између возила је било $300 m$, али је сада аутомобил био испред камиона. Одреди којим брзинама су се кретала возила на почетку.

Нека су v_1 и v_2 брзине (тим редом) којима су се кретали камион и аутомобил на почетку.



На основу датих података и илустрације изнад добијамо следећи систем једначина

$$\begin{aligned} 40v_1 + 400 &= 40v_2 \\ 20 \cdot \frac{2}{3}v_1 + 300 &= 20v_2 \end{aligned}$$

Овај систем најлакше можемо решити методом супротних коефицијената и на тај начин добити тражене брзине v_1 и v_2 .

3.5. Системи линеарних једначина с две непознате - задаци за вежбање

1. Провери да ли је уређени пар $(-2, 5)$ решење једначине с две непознате :

а) $-3x + y = -17$; б) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y = 0$; в) $\frac{y+2}{4} + \frac{x-5}{3} = 0$.

2. Одреди вредност променљиве a у једначинама тако да уређени пар $(-5, -2)$ буде решење једначине :

а) $4x - (3 - a)y = -14$; б) $\frac{2x-1}{3} + 2y = -7 - a$; в) $\frac{5x-2}{3} + \frac{ay+18}{7} = -11$

3. Који од уређених парова $(1, \frac{1}{2})$, $(-2, 3)$ и $(\frac{7}{6}, -\frac{11}{5})$ је решење система једначина :

а) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y - 2x = 7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 6y = 8 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x - 5y = 18 \\ x + \frac{6}{5} = \frac{1}{6} - y \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{3x-4}{2} + y = \frac{x-1}{2} \\ x = y + \frac{1}{2} \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x - 3y + 6 = -4x - 5y \\ \frac{3x-2}{4} - \frac{2y-1}{5} = -3 \end{cases}$

4. Нацртај график сваке функције система, а затим на основу нацртаних графика утврди да ли систем има решења и колико :

а) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 1 = y \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ y = -\frac{x}{2} + 1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x - 2 = 3y \end{cases}$

5. Графичком методом решити системе једначина :

а) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y + 2x = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{3} = 1 \end{cases}$

6. Методом замене решити системе једначина :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 2y = x - 1 \\ 3x - 2y = 7 + 2y \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} -11y + 24x = -189 \\ x + 13y = -129 \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} 18x + 3y = 8 \\ x + 6y = -\frac{3}{2} \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} \frac{3x}{2} - \frac{6y}{5} = 18 \\ -\frac{x}{4} + y = -11 \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} \frac{2x-5}{3} + \frac{4-3y}{2} = 4 \\ 9y - 4x = 22 \end{cases} \end{array}$$

7. Методом замене решити системе једначина :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2y - 0,5x = -1,5 \\ 0,3x - y = 1,1 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \frac{4x+3y-1}{2} = \frac{7x-5y+8}{4} \\ \frac{5x-3y+5}{3} = \frac{2x+3y+4}{5} - 2 \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x + y = 5 \\ y^2 - x^2 = 35 \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{7+8y}{9} = 1 + y \\ (x-1)^2 + y = x^2 - 3 \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} (x-4)(x+4) + y^2 = (y-2)^2 + x^2 \\ \frac{x-3}{2} + 1 = y - 2 \end{cases} \end{array}$$

8. Решити следеће системе једначина методом супротних коефицијената :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 7x - 8y = 150 \\ -3x + 5y = -80 \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 9 \\ 2x + y = 4 \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} \frac{5}{3}x - \frac{2}{5}y = \frac{1}{30} \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 1\frac{11}{24} \end{cases} & \text{ђ)} \begin{cases} 0,35x + 1,6y = 3,55 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{7} = -\frac{5}{42} \end{cases} \end{array}$$

9. Решити следеће системе једначина погодном методом :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2(4x + 21) + x = y - 3(2x - y) \\ 2(3x - 1) - 7y = -3x + 4(y + 2) - 61 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \frac{12x-6y-3}{7} = -1 \\ \frac{9y-10x+6}{8} = 1 \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} \frac{x+3}{2} + y = 3 \\ x + \frac{2y+4}{8} = 0 \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} \frac{x-5}{3} + \frac{y-5}{4} = -4 \\ \frac{3x-5}{2} - \frac{2y-4}{5} = -2 \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{2x+3}{2} + \frac{y-2}{4} = -2 \end{cases} \end{array}$$

10. Решити следеће системе једначина погодном методом :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 2(x + 2y) + 1 = -\frac{y+2}{11} - \frac{11}{20} \\ \frac{10-5x}{2} + 3 = \frac{5x+2}{2} - \frac{2y-3}{6} + \frac{5}{4} \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} (3x - 5) : (2y + 2) = 1 : 3 \\ 3x - 8y = 2 \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} (x - 2)(y - 3) = (x + 2)(y + 7) \\ (x + 6)(y + 3) = (x + 5)(y + 5) \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x(x + 2y) = (2x + 3)(y + 4) + x^2 \\ \frac{x+2}{x+5} = \frac{y+8}{y+14} \end{cases} \end{array}$$

$$\text{д) } \begin{cases} (x-1)^2 + (-y+2)^2 = x^2 + (y-2)^2 \\ x = -y \end{cases}$$

11. Одреди вредности променљивих a и b тако да уређени пар $(x, y) = (-4, 2)$ буде решење система једначина :

$$\text{а) } \begin{cases} ax + by = -20 \\ bx + 5y = 2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{ax-2}{3} + by = -2 \\ 7x + \frac{3-ay}{5} = -29 \end{cases}$$

12. Два друга треба да поделе 271 динар, тако да један добије 55 динара више од другог. Колико новца ће добити понаособ ?
13. Петар је број 504 раставио на два сабирка тако да је један сабирак :
- а) три пута већи од другог ; б) за 54 већи од другог .
- Које бројеве је Петар замислио ?
14. Збир две суседне странице правоугаоника је 34 cm, а њихова разлика је 14 cm . Израчунати површину тог правоугаоника.
15. Разлика спољашњег и одговарајућег унутрашњег угла троугла је 81° .
- Одреди те углове.
16. Израчунати основице трапеза ако је дужина средње линије трапеза 21,5cm, а разлика основица 9cm.
17. $\frac{3}{4}$ првог броја је за 24 мање од $\frac{5}{6}$ другог броја. Одреди те бројеве ако је први број за 14 мањи од другог броја.
18. Маја је 8 година старија од свог брата. За 5 година Маја ће бити 2 пута старија од брата. Колико сада имају година Маја и њен брат?
19. У једној легури олово и цинк су заступљени у односу 4 : 7 . Ако је маса легуре 583g , одреди колико има олова, а колико цинка у легури.
20. Баба Цака има 13 крава и 12 оваца. Свакога дана она сакупи 101 литар млека. Колико у просеку даје једна крава, а колико једна овца ако се од краве добија 2 литра млека више?

21. Однос два броја која се пишу истим цифрама у обрнутом редоследу је $5 : 17$. Одреди те бројеве ако је њихов збир 66.
22. Марина је замислила двоцифрени број чији је збир цифара 9. Ако цифре замене места, добиће се број за 45 већи од полазног. Који је број Марина замислила?
23. Ако двоцифрени број поделимо са бројем који се добија када цифре јединица и десетица полазног броја замене места, добија се количник 4 и остатак 3. Одреди полазни број ако је његова цифра десетица за 6 већа од цифре јединица.
24. Ако бројилац једног разломака умањимо за 3, а именилац увећамо за 1, добијамо разломак једнак разломку $\frac{1}{2}$. Ако именилац умањимо за 3, а бројилац увећамо за 3, добијамо разломак једнак са 1. Одреди тај разломак.
25. Разлика две суседне странице правоугаоника је 9cm. Ако краћу страницу правоугаоника повећамо за 1cm, а дужу страницу скратимо за 3cm, површина новог правоугаоника је за 2cm^2 мања од површине полазног правоугаоника. Одредити дужине страница правоугаоника.
26. Једна катета правоуглог троугла једнака је са $\frac{2}{3}$ друге катете. Ако дужу катету смањимо за 3cm, а краћу катету повећамо за 4cm, површина троугла се неће променити. Одредити хипотенузу тог троугла.
27. Површина кружног прстена је $2\pi\text{cm}^2$. Израчунати полупречнике кружница које формирају прстен ако је њихова разлика 1cm.

3. 6. Анкета

1. Наставна тема – системи линеарних једначина су једна од најбитнијих тема у градиву осмог разреда :
а) У потпуности се слажем ; б) Слажем се ; в) Нити се слажем нити се не слажем ; г) Не слажем се ; д) Апсолутно се не слажем .
2. Колико сам упућен / а о свим могућностима за решавање система линеарних једначина :
а) У потпуности сам упућен / а ; б) Упућен / а сам преко уџбеника ; в) Упућен / а сам делимично ; г) Нисам упућен / а .
3. Која метода вам је најједноставнија за решавање система?
а) Метода супротних коефицијената ; б) Графичка метода ; в) Метода замене
4. Ваш став о решавању система методом супротних коефицијената ?
а) Веома позитивно ; б) Позитивно ; в) Негативно ; г) Веома негативно ; д) Немам став
5. Да ли сматрате да је коришћење рачунара (одређених програма за цртање) погодно за рад система преко графичке методе ?
а) Да ; б) Не ; в) Можда .
6. Колико је примена система линеарних једначина применљива на све науке, уопште у свакодневном животу ?
а) Често ; б) Понекад ; в) Ретко ; г) Никад .
7. Да ли вам је примена система линеарних једначина најтежи део из те области ?
а) Да ; б) Не ; в) Можда .
8. Да ли сматрате да је у примени система линеарних једначина најтеже из текста записати једначине, а да наставак задатка није компликован ?
а) У потпуности се слажем ; б) Слажем се ; в) Нити се слажем нити се не слажем ; г) Не слажем се ; д) Апсолутно се не слажем .
9. Како процењујете ваше досадашње знање из система линеарних једначина ?
а) Квалитетно ; б) Може и боље ; в) Добро ; г) Неквалитетно .
10. Да ли сматрате да ће вам знање из система линеарних једначина бити неопходно за средњу школу ?
а) Да ; б) Не ; в) Можда .
11. Колико често примењујете математику у свакодневном животу ?
а) Свакодневно ; б) Често ; в) Понекад ; г) Ретко ; д) Никад .

У овој анкети су учествовали ученици осмог разреда основне школе "Милан Муњас" са Уба. Анкета је ученицима дата почетком маја 2015. године кад су ученици завршили целу наставну област – системе једначина. Анкета је замишљена тако да се по њеним резултатима (обради података) може видети какво је мишљење ученика, уопште о системима једначина, методама за њено решавање, примени система, процени досадашњег знања из њиховог угла. Такође, поставља се и питање (можда и најбитније) колико често примењују математику у свакодневном животу и колико ће им системи требати у даљем школовању.

Анкета је урађена у два одељења са укупно 60 ученика.

3.6.1. Резултати анкете у броју заокружених одговора

Број питања	а)	б)	в)	г)	д)
1.	11 ученика	15 ученика	24 ученика	5 ученика	5 ученика
2.	27 ученика	8 ученика	16 ученика	9 ученика	не постоји
3.	30 ученика	16 ученика	14 ученика	не постоји	не постоји
4.	11 ученика	32 ученика	3 ученика	/	14 ученика
5.	21 ученик	5 ученика	34 ученика	не постоји	не постоји
6.	11 ученика	22 ученика	22 ученика	5 ученика	не постоји
7.	12 ученика	33 ученика	15 ученика	не постоји	не постоји
8.	5 ученика	25 ученика	18 ученика	8 ученика	4 ученика
9.	22 ученика	26 ученика	9 ученика	3 ученика	не постоји
10.	29 ученика	6 ученика	25 ученика	не постоји	не постоји
11.	21 ученик	18 ученика	11 ученика	6 ученика	4 ученика

3. 6. 2. Резултати анкете у процентима

Број питања	а)	б)	в)	г)	д)
1.	18,33 %	25 %	40 %	8,33 %	8,33 %
2.	45 %	13,33 %	26,67 %	15 %	не постоји
3.	50 %	26,67 %	23,33 %	не постоји	не постоји
4.	18,33 %	53,33 %	5 %	/	23,33 %
5.	35 %	8,33 %	56,67 %	не постоји	не постоји
6.	18,33 %	36,67 %	36,67 %	8,33 %	не постоји
7.	20 %	55 %	25 %	не постоји	не постоји
8.	8,33 %	41,67 %	30 %	13,33 %	6,67 %
9.	36,67 %	43,33 %	15 %	5 %	не постоји
10.	48,33 %	10 %	41,67 %	не постоји	не постоји
11.	35 %	30 %	18,33 %	10 %	6,67 %

3. 6. 3. Закључак анкете

1. Скоро половина ученика се потпуно или углавном слаже да су системи битни, док друга половина нема мишљење, што је можда и разумљиво јер већина тих ученика сад у основној школи и не може најбоље да закључи шта је за њих најбитније. Половина ученика која је одговорила потврдно, свакако спада у боље ученике који сматрају да је то битно. Свакако, овакав одговор ученика је очекиван.
2. Већи део ученика, око 70 % је упућено и то је добар податак. Већи део учбеника је квалитетан и то ученици користе јер ту могу наћи доста битних информација и занимљивих задатака.
3. Оно што је и очекивано, пола ученика сматра да је најједноставнија метода супротних коефицијената док њих 23,33 % сматра да је најтежа метода замене.
4. Сходно одговорима на претходно питање, ученици имају позитиван став о методи супротних коефицијената, њих 53,33 %, док њих 23,33 % нема став, што се може протумачити да им је свеједно коју ће методу одабрати и да то зависи од задатка.
5. Скоро сви ученици сматрају да је погодно користити рачунаре за рад са графичком методом. Свакако, у данашње време, може се рећи да је веома мали број ученика који кући немају рачунаре и то се углавном односи на децу са сеоских подручја, мада се и ту ситуација поправља. Уопште, ученици много користе рачунаре у свакакве сврхе, тако да је добро и да у овом делу искористе све могућности. У седмом и осмом разреду на часовима информатике заступљен је програм Геогebra и ту се могло видети да се ученицима тај начин рада свиђа и да су заинтересовани да науче много нових ствари, што ће им свакако бити од користи у средњој школи.
6. У одговорима ученика се види да је њихово мишљење, њих 55 %, да је примена система линеарних једначина применљива на друге науке и мислим да је то позитивна ствар јер је врло битно да ученици знају да размишљају и искористе знање из система за неке друге области. У усменом разговору са њима, могла сам закључити да сад кад су у осмом разреду научили системе, сматрају да им је израда неких задатака много једноставнија него у седмом кад су системи за њих били непозната област.

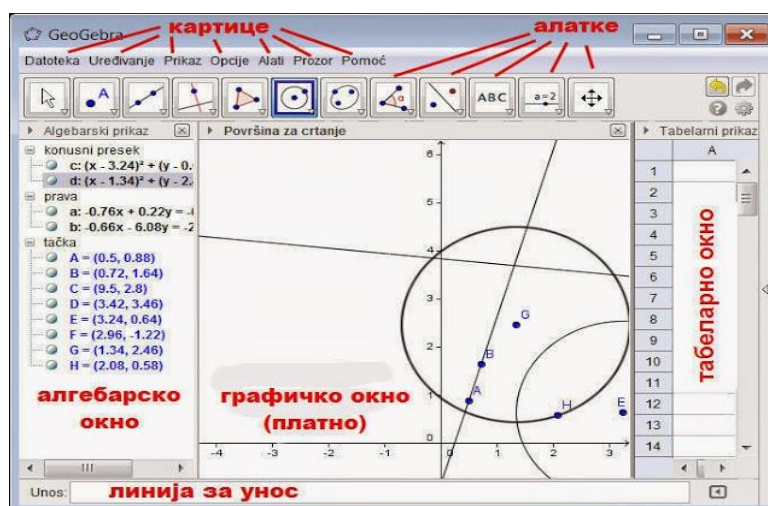
7. На ово питање само 20 % ученика сматра да је примена система најтежи део ове области, док 55 % ученика мисли да примена није тешка и $\frac{1}{4}$ ученика да то зависи од задатка до задатка. То је добар одговор јер задаци са применом система спадају у мало теже задатке и стиче се закључак да одређени број ученика одустаје од рада и пре него што прочита задатак, мислећи да је то компликовано.
8. Ово питање се надовезује на претходно и види се да су ученици подељени, да половина сматра да није тешко разумети текст и од њега написати систем, док друга половина сматра да је то највећи проблем. Свакако, сви се слажу да је када се систем постави, најлакше доћи до решења. Овај податак и не треба да чуди јер се то све надовезује и од нижих разреда, када одређеном броју ученика највећи проблем представљају, управо, текстуални задаци и онда се то наставља у вишим разредима.
9. С' обзиром да је анкета рађена у два одељења, у једном веома добром и другом солидном, резултати су добри и може се рећи да ученици имају добру основу за наставак рада са системима у средњој школи.
10. На основу приче професора шта све очекује ученике у средњој школи што се тиче ове области, 90 % ученика сматра да ће им досадашње знање користити у наредним годинама, не само у математици него и у другим природним наукама.
11. Подаци показују да 83 % ученика често или понекад користи математику док 17 % ученика ретко примењује знање из математике.

3.7. Пример теста за ученике осмог разреда – системи линеарних једначина

1. Једно од решења једначине $2x - 5y = 7$ је:
а) $(-1, -1)$; б) $(-1, 1)$; в) $(1, -1)$; г) $(1, 1)$.
2. Ако је $15x + 45y = 75$, онда је:
а) $x = 3y - 15$; б) $x = 3y + 5$; в) $x = -5y + 5$; г) $x = -3y + 5$.
3. Који од наведених система једначина нема решења :
а) $\begin{cases} 3x = 3y - 15 \\ 6x = 6y - 30 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 15x + 45y = 75 \\ 15x + y = 75 \end{cases}$
в) $\begin{cases} 15x + 45y = 75 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 4y = 5 \end{cases} ?$
4. Решење система једначина $x = y - 1$ и $5x + 3y = 75$ је :
а) $x = 0$ и $y = 1$; б) $x = 8$ и $y = 9$;
в) $x = 9$ и $y = 10$; г) $x = 15$ и $y = 0$.
5. За коју вредност параметра a систем једначина
$$\begin{cases} 3x + 10y = 14 \\ 15x + 2ay = 70 \end{cases}$$
има бесконачно много решења?
а) $a = 25$; б) $a = 50$;
в) $a = 5$; г) $a = 20$;
6. Ако је (a, b) решење система једначина $x + 4y + 1 = 0$ и $3x + 5y = 4$, онда је $a \cdot b + 2$ једнако :
а) 3; б) -1 ; в) 6; г) -3 .
7. Збир два броја је 10, а трећина првог броја је за 2 већа од другог броја. Производ тих бројева је :
а) -6 ; б) -4 ; в) 8; г) 9.
8. Разлика два комплементна угла је 10° . Збир петине већег од њих и четвртине мањег од њих је :
а) 10° ; б) 20° ; в) 30° ; г) 40° .

4 ГЕОГЕБРА

Програм који сам користила у овом раду за импортовање слика је **Геогейбра**. Ради се о програму за израду динамичких, „живих цртежа“ и веома је користан код учења математике. Програм обједињује геометрију (**geometry**) и алгебру (**algebra**). Елегантан је и врло једноставан за коришћење. Аутор програма је аустријски математичар Маркус Хохенвартер (Markus Hohenwarter) са групом програмера. **Геогейбра** је писан на језику Јава. Неопходно за рад у овом програму је претходна инсталација Јаве (јер без тог програма нећете моћи да отворите динамичке моделе – аплете.). У програму **Геогейбра** се врши интерактивна сарадња геометрије, алгебре и аритметике. Можете да правите конструкције помоћу тачака, вектора, линија, конусних исечака, математичких функција, а затим да их динамички мењате помоћу миша. Омогућен је директан унос једначина и манипулације с координатама. Све је урађено с математичком тачношћу и геометријском прецизношћу. **Геогейбра** омогућава двојни приказ објеката: сваки алгебарски израз, приказан у алгебарском окну, може да се представи геометријски у геометријском (графичком) окну и обрнуто. Постоји и трећи начин - приказ може бити дат и у облику табеле.



Слика: Прозор Геогейбре

Програм Геогейбра је добио више међународних награда и може постати прави помоћник наставницима математике и физике, како у основним, тако и у средњим и вишим школама. Програм се може користити код сваке теме, у којој постоје конструкције или где се може демонстрирати графички метод решавања задатака. Такође, овај програм се може користити за решавање задатака на интерактивној табли, као и у дигиталној учионици, где деца могу да реше задатак на рачунару и да га преко е-поште пошаљу наставнику или објаве у мрежи (локалној или глобалној).

Што се тиче ове области, овај програм је веома користан за графичку методу система једначина, не само за основну школу већ и за средњу школу. Веома једноставно, у линији за унос, унесу се дате једначине, тј. функције и у делу за

геометријски приказ ће се приказати пресечне тачке, тј. решење система једначина. На овај начин можемо проверити тачност решења задатка алгебарским начином, одређеном методом и графичком методом користећи Геогебру.

Користећи дигиталну учионицу, интерактивну таблу, програм Геогебра, на разне начине се могу осмислити занимљиви часови, нпр. угледни часови и на тај начин показати савремене приступе математици.

5 СИСТЕМИ ЈЕДНАЧИНА У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Системи једначина се, наравно, много више изучавају у средњој школи него у основној и при томе се највише мисли на гимназије и техничке школе где је математика заступљена са 4 или 5 часова недељно. У првом разреду средње школе се проширује тема из основне школе тако што се уводи више непознатих, највише 3 или 4, а уводе се и непознати параметри где на основу њих уз обавезну дискусију добијамо решење система. У другом разреду када се уче квадратне једначине, тригонометријске једначине, експоненцијалне и логаритамске једначине, такође имамо системе који су у мало мањем обиму заступљени од система једначина у првој и трећој години. У трећем разреду средње школе се такође изучавају системи, и то у мањој мери Гаусов поступак, већ се много више користи Крамерово правило и израда система користећи детерминанте. Управо због тога, у овом делу система из средње школе, један део је посвећен и детерминантама и њиховим особинама. Осим начина решавања и примера који прате све то, овде се могу видети које су то најчешће грешке које ученици праве приликом израде задатака.

5.1. Системи линеарних једначина у I разреду средње школе

Под системом од две линеарне једначине са две непознате x и y , подразумева се конјункција двеју једначина облика

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

као и конјункција једначина које се еквивалентним трансформацијама могу довести на тај облик. Овде су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ дати реални бројеви. Решење таквог система је сваки уређени пар реалних бројева (x_0, y_0) за који важи $a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$ и $a_2x_0 + b_2y_0 = c_2$.

Постоји више метода за решавање система линеарних једначина. Из основне школе су познате метода замене и метода супротних коефицијената. Овде истичемо један метод који лако можемо уопштити на случај система са више непознатих. Ради се о Гаусовом поступку за решавање линеарних система.

За почетак, претпоставимо да је у систему (1) бар један од коефицијената уз непознате, дакле бар један од бројева a_1, b_1, a_2, b_2 различит од нуле. Нека је то, на пример, број a_1 (ако би то био неки други од поменутих бројева, даљи поступак био би сличан). Ако се помножи прва једначина система бројем $-\frac{a_2}{a_1}$ и тако добијена једначина дода другој једначини система, добија се систем

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ (b_2 - \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}) \cdot y = c_2 - \frac{a_2 \cdot c_1}{a_1} \end{cases} \quad (2)$$

Лако доказујемо да је систем (2) еквивалентан полазном систему (1).

Означимо $\Delta = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$. Из друге једначине из система (2) можемо извући $\frac{1}{a_1}$ и тада систем (2) можемо преписати у облику

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ \Delta \cdot y = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \end{cases} \quad (3)$$

Из система (3) се види да треба да посматрамо неколико случајева.

1) $\Delta \neq 0$.

У овом случају у другој једначини система имамо јединствено решење $y = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{\Delta}$. Ако овај израз заменимо у прву једначину, онда можемо решити добијену једначину по x . Тада ћемо добити да је $x = \frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{\Delta}$.

Дакле, у овом случају дати систем има јединствено решење (x, y) , где је

$$x = \frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{\Delta}, \quad y = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{\Delta}. \quad (4)$$

2) $\Delta = 0$ и $a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \neq 0$

У овом случају друга једначина система нема решења, а чим немамо решења у другој једначини, онда ни сам систем неће имати решења.

3) $\Delta = 0$ и $a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 = 0$

У овом случају решење у другој једначини система може бити било који произвољан реалан број y . Из прве једначине (имамо претпоставку да је $a_1 \neq 0$) добија се да мора бити да је $x = \frac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1}$. Дакле, због чињенице да y може бити произвољан реалан број, дати систем једначина има бесконачно много решења, при чему су она облика

$$\left(\frac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1}, y\right) \text{ за } y \in \mathbb{R}.$$

Као што је већ речено, аналоган поступак може се спровести и када је различит од нуле било који други од коефицијената уз непознате. На пример, ако је $b_1 \neq 0$, систем се може трансформисати у

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ -\Delta \cdot x = b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{cases}$$

Одатле такође добијамо да за $\Delta \neq 0$ систем има решење (4), за $\Delta = 0$ и $b_1 c_2 - b_2 c_1 \neq 0$ нема решења, а за $\Delta = b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$ има за решење сваки пар облика

$$\left(x, \frac{c_1 - a_1 \cdot x}{b_1}\right) \text{ за } x \in \mathbb{R}.$$

Треба још размотрити случај када су сви бројеви a_1 , b_1 , a_2 и b_2 једнаки нули (тада је, наравно, и $\Delta = 0$). Тада систем има облик

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_2 \end{cases}$$

Одавде је јасно да :

- 1) Ако је бар један од бројева c_1 , c_2 различит од нуле, дати систем нема решења;
- 2) Ако је $c_1 = c_2 = 0$, онда дати систем има бесконачно много решења, и то је сваки пар

$$(x, y) \quad \text{за } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

решење система.

Закључак

Теорема 1. Нека је (1) систем једначина са непознатим x и y , где су a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 дати реални бројеви и $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Тада :

- 1) Ако је $\Delta \neq 0$, систем има јединствено решење (x, y) , где је

$$x = \frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{\Delta}, \quad y = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{\Delta}$$

- 2) Ако је $\Delta = 0$ и бар један од бројева $c_1 b_2 - c_2 b_1$ и $a_1 c_2 - a_2 c_1$ је различит од нуле и онда систем (1) нема решења;
- 3) Ако је $\Delta = c_1 b_2 - c_2 b_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$ могући су следећи случајеви :

а) Ако је бар један од бројева a_1 , b_1 , a_2 , b_2 различит од нуле, тада систем (1) има бесконачно много решења. На пример, ако је $a_1 \neq 0$, решења су сви парови облика $\left(\frac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1}, y\right)$ за $y \in \mathbb{R}$;

б) Ако је $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ и бар један од бројева c_1, c_2 је различит од нуле, тада систем (1) нема решења;

в) Ако је $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$, тада систем (1) има бесконачно много решења и то је сваки пар (x, y) , $x, y \in R$, његово решење.

5.2. Системи са више непознатих

5.2.1. Гаусов поступак решавања система једначина

У многим применама појављују се системи линеарних са више од две непознате. При томе, број једначина у систему не мора бити једнак броју непознатих. Може се, на пример, посматрати систем од три једначине са четири непознате или систем од четири једначине са две непознате и слично.

У општем случају, под системом линеарних једначина подразумевамо систем од m једначина са n непознатих.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

У систему су $x_1, x_2, \dots, x_n$ непознате величине, док су a_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, задати коефицијенти, а b_i , $1 \leq i \leq m$ задати слободни чланови. При томе број једначина m и број непознатих n могу бити у било ком односу $m < n$, $m = n$ или $m > n$.

Под решењем систем линеарних једначина подразумевамо било који скуп од n бројева $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ који за $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ идентички задовољавају систем.

Гаусов поступак (метода) *елиминације* је поступак којим се може решавати било који систем једначина $m < n, m = n, m > n$. У Гаусовом поступку претпоставља се да је $a_{11} \neq 0$. Наиме, ако у конкретном систему у првој једначини коефицијент уз x_1 не би био различит од нуле у систему мора постојати бар једна једначина у којој је коефицијент уз x_1 различит од нуле, и онда се та једначина и прва једначина замене, чиме се добија еквивалентан систем у коме је $a_{11} \neq 0$.

Ако се сада прва једначина подели са a_{11} добија се еквивалентан систем :

$$\begin{aligned}
x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n &= \frac{b_1}{a_{11}} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Ако се сада прва једначина овог система помножи са $-a_{21}$ и дода другој једначини, а затим помножи са $-a_{31}$ и дода трећој једначини и тако редом, добија се нови еквивалентни систем :

$$\begin{aligned}
x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n &= \frac{b_1}{a_{11}} \\
\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}\right)x_3 + \cdots + \left(a_{2n} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{21}\right)x_n &= b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21} \\
&\vdots \\
\left(a_{m2} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{m1}\right)x_2 + \left(a_{m3} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{m1}\right)x_3 + \cdots + \left(a_{mn} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{m1}\right)x_n &= b_m - \frac{b_1}{a_{11}}a_{m1}
\end{aligned}$$

односно, ако уведемо нове ознаке

$$\begin{aligned}
\frac{a_{1j}}{a_{11}} &= a'_{1j} \quad j = 2, \dots, n & \frac{b_1}{a_{11}} &= b'_1 \\
a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}}a_{i1} &= a'_{ij} \quad i = 2, \dots, m \quad j = 2, \dots, n \\
b_i - \frac{b_1}{a_{11}}a_{i1} &= b'_i \quad i = 2, \dots, m
\end{aligned}$$

добивамо систем

$$\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
&\vdots \\
a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \cdots + a'_{mn}x_n &= b'_m
\end{aligned}$$

у коме је само у првој једначини коефицијент уз x_1 различит од нуле. Другим речима, непозната x_1 елиминисана је из свих једначина почев од друге па надаље.

Ми можемо даље претпоставити да је $a'_{22} \neq 0$. Ако то не би био случај, онда се, као и у претходном кораку, тражи једначина у којој је коефицијент уз x_2 различит од нуле. Потом се заменом места те једначине и друге једначине постиже да буде $a'_{22} \neq 0$. Може се, међутим, десити и да сви коефицијенти уз x_2 буду једнаки 0, односно да важи $a'_{i2} = 0$, $i = 2, \dots, m$. У том случају проверава се да ли постоји бар један коефицијент $a'_{ij} \neq 0$, $j \in \{3, \dots, n\}$, $i \in \{2, \dots, m\}$, односно да ли постоји коефицијент уз неку променљиву x_j за $j > 2$, у некој, i —једначини ($i \geq 2$), који је различит од 0, у ком случају сада променљиве x_2 и x_j могу заменити места тако да опет буде $a'_{22} \neq 0$. У овом случају долази

до ренумерације променљивих, тј. замена места колона. Оно што је битно, решења система остају иста, само долази до замене места решења. Последња могућност је да су сви коефицијенти a'_{ij} , $i = 2, \dots, m$, $j = 2, \dots, n$ једнака нули, односно да се систем свео на :

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ 0 &= b'_2 \\ &\vdots \\ 0 &= b'_m \end{aligned}$$

У овом, последњем случају Гаусов поступак се завршава. Из овако добијеног система јасно је да он може бити сагласан ако и само ако су сви слободни коефицијенти $b'_i = 0$, $i = 2, \dots, m$. У том случају систем се практично своди на једну једначину са n непознатих, што значи да добијени систем, па самим тим и њему еквивалентан полазни систем, представља систем са бесконачно много решења. При томе је $n - 1$ непознатих слободно, а једна непозната је везана. Ако је, пак, бар један од слободних коефицијената $b'_i \neq 0$, добијени систем, а тиме и полазни, је немогућ.

Вратимо се сада на претпоставку да је $a'_{22} \neq 0$. У том случају дељењем друге једначине са a'_{22} добија се еквивалентан систем

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 + \dots + \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}x_n &= \frac{b'_2}{a'_{22}} \\ &\vdots \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \dots + a'_{mn}x_n &= b'_m \end{aligned}$$

Даље, ако се друга једначина множи редом са $-a'_{i2}$ и додаје i -тој једначини, $i = 3, \dots, m$, добија се еквивалентан систем :

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 + \dots + \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}x_n &= \frac{b'_2}{a'_{22}} \\ \left(a'_{33} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}}a'_{32}\right)x_3 + \dots + \left(a'_{3n} - \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}a'_{32}\right)x_n &= b'_3 - \frac{b'_2}{a'_{22}}a'_{32} \\ &\vdots \\ \left(a'_{m3} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}}a'_{m2}\right)x_3 + \dots + \left(a'_{mn} - \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}a'_{m2}\right)x_n &= b'_m - \frac{b'_2}{a'_{22}}a'_{m2} \end{aligned}$$

односно ако се уведу нове ознаке

$$\begin{aligned} \frac{a'_{2j}}{a'_{22}} &= a''_{2j} \quad j = 3, \dots, n & \frac{b'_2}{a'_{22}} &= b''_2 \\ a'_{ij} - \frac{a'_{2j}}{a'_{22}}a'_{i2} &= a''_{ij} \quad i = 3, \dots, m \quad j = 3, \dots, n \\ b'_i - \frac{b'_2}{a'_{22}}a'_{i2} &= b''_i \quad i = 3, \dots, m \end{aligned}$$

добива се систем

$$\begin{aligned}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\x_2 + a''_{23}x_3 + \dots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\&\vdots \\a''_{m3}x_3 + \dots + a''_{mn}x_n &= b''_m\end{aligned}$$

Овај систем еквивалентан је са полазним системом, а у њему је сада променљива x_2 елиминисана из свих једначина почев од треће једначине па надаље. Даљим спровођењем аналогног поступка елиминације непознатих $x_3, x_4, \dots$ поступак ће се завршити на еквивалентном систему који има облик

$$\begin{aligned}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1k}x_k + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\x_2 + a''_{23}x_3 + \dots + a''_{2k}x_k + \dots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\x_3 + \dots + a'''_{3k}x_k + \dots + a'''_{3n}x_n &= b'''_3 \\&\vdots \\x_m + \dots + a^{(m)}_{mn}x_n &= b^{(m)}_m\end{aligned}$$

који је увек сагласан, или на систему чији је облик

$$\begin{aligned}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1k}x_k + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\x_2 + a''_{23}x_3 + \dots + a''_{2k}x_k + \dots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\x_3 + \dots + a'''_{3k}x_k + \dots + a'''_{3n}x_n &= b'''_3 \\&\vdots \\x_k + \dots + a^{(k)}_{kn}x_n &= b^{(k)}_k \\0 &= b^{(k)}_{k+1} \\&\vdots \\0 &= b^{(k)}_m\end{aligned}$$

при чему је $k < m$, а који је сагласан ако и само ако је $b_i^{(k)} = 0$ за све вредности $i = k + 1, \dots, m$ док је у противном немогућ. У случају када је овај систем сагласан, он има практично исти облик као и претходни, па ћемо надаље разматрати само овај претходни.

Ако се ради о сагласном систему и ако је при томе $m = n$ (односно $k = n$), у ком случају се последња једначина своди на

$$x_n = b_n^{(n)}$$

онда систем има *јединствено решење*. Вредности које чине ово решење се добијају тако што се вредност за x_n добије из последње једначине, а затим уврсти у претпоследњу једначину, па се одатле израчуна вредност за x_{n-1} . Поступак се наставља аналогно све до прве једначине у којој се израчунава x_1 на основу већ израчунатих вредности $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2$.

Ако је систем сагласан а при томе је $m < n$ (односно $k < n$), онда систем има бесконачно много решења. Све непознате $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ су слободне, односно могу имати произвољне вредности, док су непознате $x_1, x_2, \dots, x_m$ везане, односно изражавају се у функцији слободних непознатих.

Гаусовом методом се, према томе :

1. утврђује да ли је систем сагласан или немогућ и
2. у случају сагласног система добијају се решења система.

5.2.1.1. Примери решавања система са 3 једначине Гаусовим поступком

-Постепено ћемо елиминисати променљиве из система тако да са датог система пређемо на простији систем који има иста решења као и дати систем.

1. Нека је дат систем линеарних једначина

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases} \quad (5)$$

Ако прву једначину овог система помножимо бројем 2 и од ње одузмемо другу једначину, добијамо:

$$3y + z = 9. \quad (6)$$

Ако од прве једначине одузмемо трећу једначину, добијамо:

$$3y - z = 3. \quad (7)$$

Дакле, ако у полазном систему (5) прву једначину оставимо, а другу и трећу једначимо заменимо новим једначинама (6) и (7), добијамо систем :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y + z = 9 \\ 3y - z = 3 \end{cases} \quad (8)$$

који је еквивалентан са (5).

Ако се сада од друге једначине система (8) одузме трећа једначина, добија се:

$$2z = 6 \quad (9)$$

па ако у систему (8) прве две једначине оставимо, а трећу заменимо новом једначином (9), долазимо до система једначина:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y + z = 9 \\ 2z = 6 \end{cases} \quad (10)$$

који је еквивалентан систему (8), па стога и систему (5).

Дакле, системи (5) и (10) су еквивалентни, тј. имају иста решења. Међутим, систем (10) одликује се тиме што трећа једначина садржи само променљиву z , друга једначина садржи две променљиве y и z , док прва једначина садржи све три променљиве. Због тога се систем (10) једноставно решава.

Заиста, из треће једначине система (10) одмах се добија $z = 3$, па кад се добијена вредност за z замени у другој једначини, добија се $3y + 3 = 9$, тј. $3y = 6$, односно $y = 2$. Заменимо сада добијене вредности за y и z у првој једначини система; добијамо $x + 2 + 3 = 6$, тј. $x = 1$.

На тај начин дошли смо до решења (1, 2, 3) система (5).

2. Нека је дат систем линеарних једначина

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 5x - 4y + 7z = 1 \\ 7x - 3y + 6z = 8 \end{cases} \quad (11)$$

Од прве једначине, помножене бројем 5, одузмемо другу једначину помножену бројем 2, а од прве једначине помножене бројем 7 одузмемо трећу једначину помножену бројем 2. Када заменимо другу и трећу једначину датог система (11) тако добијеним једначинама, добијамо следећи систем:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 13y - 19z = 33 \\ 13y - 19z = 33 \end{cases} \quad (12)$$

Ако сада из друге и треће једначине система елиминишемо y , добијамо систем:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 13y - 19z = 33 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Јасно је да, у ствари, имамо систем од две једначине са три непознате. То такође добро видимо и у систему (12) јер нам се последње две једначине поклапају.

Из друге једначине система (13) добијамо да је $y = \frac{19z+33}{13}$, па кад ову вредност за y заменимо у првој једначини, добијамо:

$$2x + \frac{19z + 33}{13} - z = 7,$$

тј.
$$x = \frac{29-3z}{13},$$

при чему је z произвољно. Дакле, сва решења система једначина (11) дата су са :

$$x = \frac{29-3t}{13}, \quad y = \frac{19t+33}{13}, \quad z = t \quad (t \text{ произвољно}).$$

3. Нека је дат систем једначина

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 7 \end{cases} \quad (14)$$

Ако од прве једначине помножене са два одузмемо другу једначину, а од прве једначине помножене са 3 трећу, добијамо еквивалентан систем:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 5y = 5 \\ 5y = 2 \end{cases} \quad (15)$$

Одмах видимо да је дати систем противречан, јер не постоји број y такав да је истовремено $5y = 5$ и $5y = 2$. Међутим, ради доследности довршимо поступак, тј. применимо Гаусов метод на систем (15), па од друге једначине система (15) одузмемо трећу једначину; у наставку добијамо еквивалентан систем:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 5y = 5 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

где нам последња једначина јасно указује на противречност система (14) што значи да у овом систему једначина немамо решења.

Гаусов поступак у решавању система једначина можемо применити и на системе са више једначина и непознатих, при чему број једначина не мора да буде једнак броју непознатих.

Задаци

1. Удаљеност градова М I N је 600 километара. Два воза крећу истовремено из ових градова у сусрет један другом. Први стиже три часа раније од другог и пређе 250 *km*, док други воз за исто време пређе 200 *km*. Наћи брзине ова два воза.

Решење: $\frac{600}{x} + 3 = \frac{600}{y}$ и $\frac{250}{x} = \frac{200}{y}$; увешћемо смену да је $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$.

Добијамо систем:
$$\begin{cases} 600u - 600v = -3 \\ 250u - 200v = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v = \frac{1}{40} \\ u = \frac{1}{50} \end{cases}$$

Одатле следи да је $x = 50 \frac{km}{h}$, $y = 40 \frac{km}{h}$.

2. Збир три броја је 80. Ако се подели први број другим, добија се количник 3, а остатак је 3, а ако се подели трећи првим, добије се исти количник, а остатак је исти. Одредити бројеве.

Решење: x – први број, y – други број, z – трећи број

Имамо систем једначина:
$$\begin{cases} x + y + z = 80 \\ \frac{x}{y} = 3 + \frac{3}{y} \\ \frac{z}{x} = 3 + \frac{3}{x} \end{cases}$$

Када средимо другу и трећу једначину система, добијамо
$$\begin{cases} x + y + z = 80 \\ x - 3y = 3 \\ -3x + z = 3 \end{cases}$$

Када систем решимо Гаусовим поступком, добићемо да је решење (18, 5, 57).

Тражени бројеви су $x = 18$, $y = 5$, $z = 57$.

3. Збир цифара троцифреног броја је 16. Ако измене места цифра десетица и јединица, добија се број за 72 мањи од другог, а ако се подели дати број са цифром десетица, добија се количник 76, а остатак је 7. Одредити троцифрен број са овим особинама.

Решење: x – цифра стотина, y – цифра десетица, z – цифра јединица

Имамо систем једначина:
$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ 100x + 10y + z - (100x + 10z + y) = 72 \\ \frac{100x + 10y + z}{y} = 76 + \frac{7}{y} \end{cases}$$

Када средимо другу и трећу једначину система, добијамо
$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ 9y - 9z = 72 \\ 100x - 66y + z = 7 \end{cases}$$

Када систем решимо Гаусовим поступком, добићемо да је решење (6, 9, 1).

Тражени троцифрен број са овим особинама је 691.

4. Два радника могу заједно да заврше неки посао за 10 дана. После 7 дана заједничког рада, први радник се разболео, а други је наставио да ради и завршио посао за још 9 дана. За колико дана може сваки од њих сам да заврши тај посао?

Решење. Нека први радник може да заврши посао за x дана, а други за y дана. Тада за један дан први радник уради $\frac{1}{x}$ -ти део посла, а други $\frac{1}{y}$ -ти део посла. По условима задатка је $10(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = 1$ и $7(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) + \frac{9}{y} = 1$.

Добијамо систем једначина и у њему можемо означити $\frac{1}{x} = u$ и $\frac{1}{y} = v$. Добијени услови се могу записати у облику новог система једначина

$$\begin{cases} 10u + 10v = 1 \\ 7u + 16v = 1 \end{cases}$$

Решавањем тог система применом жељене методе добија се да је

$$u = \frac{1}{15}, \quad v = \frac{1}{30}, \quad \text{тј. } x = 15, \quad y = 30.$$

5. 2. 2. Примери задатака за самостално решавање

1. Решити систем једначина :

$$\text{а) } \begin{cases} 5 \cdot (x - 2y + 1) - 2 \cdot (2x + 3y - 2) = x - 16y + 9 \\ 3 \cdot (2x - y + 3) + 4 \cdot (-x + y - 1) = 2x + y + 5 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4(x + 1)^2 + 9(y - 2)^2 = (2x - 3)^2 + (3y - 5)^2 - 20 \\ (x + 2)^2 - (y + 3)^2 = (x + 1)^2 - (y - 2)^2 - 14 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{8x-5y+1}{12} - \frac{4x-7y+5}{6} = \frac{6y-5x-4}{9} \\ \frac{3x-y}{2} - \frac{8x+y+1}{3} = \frac{2x-y+1}{6} \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} + \frac{1}{x-y+1} = 1 \\ \frac{18}{x+y-1} - \frac{2.5}{x-y+1} = 1 \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \frac{1}{x+\frac{10}{4x-5y}} = \frac{1}{x+\frac{8}{6x-11y}} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{5y} + \frac{1}{xy} \end{cases}$$

$$\text{ђ) } \begin{cases} \frac{5}{x^2+5xy} + \frac{7}{xy+5y^2} - \frac{2}{xy} = \frac{10}{x^2y+5xy^2} \\ \frac{2x-y-10}{2} = \frac{3x+y-15}{3} \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} |x + 1| + |y - 1| = 5 \\ |x + 1| = 4y - 4 \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1 \\ y = 5 + |x - 1| \end{cases}$$

2. Применом Гаусовог алгоритма решити следеће системе линеарних једначина по x , y , z :

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + y - 4z = -45 \\ 2x - 3y + z = -27 \\ 3x + 2y + 3z = 22 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{12} \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = \frac{19}{24} \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} - \frac{6}{z} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{y+z}{5} - \frac{6z+x}{2} = 2 \\ \frac{y-2x}{3} + \frac{6z+5x}{4} = 0 \\ \frac{y+6}{7} - \frac{x-2}{21} = \frac{2-z}{3} \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{1}{x+2y} + \frac{4}{y+z} = \frac{11}{10} \\ \frac{5}{x+2y} - \frac{6}{x-z} = -\frac{3}{2} \\ \frac{8}{y+z} - \frac{3}{x-z} = 1 \end{cases}$$

$$\text{д) } x + y + z + u = 0 \wedge 2x + y + 2z - u = 9 \wedge 3x - y - 3z + u = -2 \wedge 4x - y - z - u = 10$$

$$\text{ђ) } x + y + z = 39 \wedge y + z + u = 45 \wedge z + u + x = 43 \wedge u + x + y = 41$$

3. Одредити вредност параметра k тако да систем

$$ax - y = 2 \wedge 2x - y = 2 \wedge 3x + y = 3$$

има решења.

4. За пуњење базена истовремено су отворене три цеви. После $1\frac{1}{2}h$, када су $\frac{3}{8}$ базена биле напуњене, прва цев се запушила, па је базен наставио да се пуни кроз преостале две цеви. Три часа касније запушила се и друга цев; у том тренутку било је пуно $\frac{19}{24}$ базена. За наредних $2\frac{1}{2}h$ трећа цев је сама напунила базен. Одредити колико је времена потребно свакој цеви да сама напуни базен.

5.3. Системи квадратних једначина са две непознате

II разред средње школе

5.3.1. Систем од једне квадратне и једне линеарне једначине са две непознате

Линеарна једначина са две непознате је облика :

$ax + by = c$, $a, b, c \in R$ где је бар један од коефицијената a, b различит од нуле.

Квадратна једначина са две непознате је облика :

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, $A, B, C, D, E, F \in R$ где је бар један од коефицијената A, B, C различит од нуле.

Систем од једне линеарне и једне квадратне једначине са две непознате се решава тако што из линеарне једначине изразимо x или y , потом у квадратној једначини заменимо свако појављивање изражене променљиве изразом који смо добили. На тај начин добијамо квадратну једначину са једном непознатом. Када решимо ову једначину враћамо се на линеарну и добијамо коначно решење. Овакви системи имају два решења које пишемо као уређене парове $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Пример 1. Решити систем :
$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 3x - 2 &= 0 \\ x - 2y &= -2 \end{aligned}$$

$$2x^2 + 2y^2 + 3x - 2 = 0$$

$x - 2y = -2$, одавде изразимо x (лакше) и заменимо у горњу једначину

$$\begin{aligned} x &= 2y - 2 \\ 2(2y - 2)^2 + 2y^2 + 6y - 6 - 2 &= 0 \\ 2(4y^2 - 8y + 4) + 2y^2 + 6y - 6 - 2 &= 0 \\ 8y^2 - 16y + 8 + 2y^2 + 6y - 8 &= 0 \\ 10y^2 - 10y &= 0 \\ y^2 - y &= 0 \\ y(y - 1) &= 0 \\ y_1 = 0 \quad \vee \quad y_2 = 1 \end{aligned}$$

Из тога следи да је $x_1 = 2 \cdot 0 - 2 = -2$, а $x_2 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

Решења су : $(x_1, y_1) = (-2, 0)$ и $(x_2, y_2) = (0, 1)$.

5.3.2. Систем од две квадратне једначине које садрже само ax^2 и ay^2 и слободне чланове

Овај систем је облика:

$$\begin{aligned} a_1x^2 + b_1y^2 &= c_1 \\ a_2x^2 + b_2y^2 &= c_2 \end{aligned}$$

Систем оваквог облика је најлакше решити методом супротних коефицијената. Оно што је различито у односу на системе линеарних једначина је што у овом случају имамо решавање квадратних једначина и наравно, више решења.

Пример 2. Решити систем:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 6y^2 &= 11 \\ 7x^2 + 3y^2 &= 714. \end{aligned}$$

У овом систему другу једначину можемо помножити са -2 и на тај начин ћемо елиминисати променљиву y . У следећем кораку добијамо квадратну једначину по x и имамо два решења за x , $x_1 = 9$, $x_2 = -9$ и свако од тих решења убацимо у једну од две једначине. Тиме добијамо два решења за y , тј. $y_1 = 7$, $y_2 = -7$.

На крају, решења система су "комбинације", тј. $(9, 7), (9, -7), (-9, 7), (-9, -7)$.

Пре него што се упознамо са новим типом система, треба научити шта су то **ХОМОГЕНЕ** једначине.

Њен општи облик :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

Њу можемо најлакше решити сменом $x = yz$ тј. $z = \frac{x}{y}$.

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 &= 0 \\ y^2 \left(A \frac{x^2}{y^2} + B \frac{xy}{y^2} + C \frac{y^2}{y^2} \right) &= 0 \\ y^2 \left(A \left(\frac{x}{y} \right)^2 + B \left(\frac{x}{y} \right) + C \right) &= 0 \\ y^2 (Az^2 + Bz + C) &= 0 \\ y = 0 \quad \vee \quad Az^2 + Bz + C &= 0 \text{ (нама ово треба)} \\ z_{1,2} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ z_1 &= \dots \\ z_2 &= \dots \end{aligned}$$

Вратимо се на старе непознате...

$$x = z_1y \quad \text{и} \quad x = z_2y$$

5.3.3. Систем од две квадратне једначине од којих је једна хомогена

Тај систем је облика: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$
 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ry + f = 0$

Из прве једначине (хомогене) дођемо до две линеарне једначине па сваку од њих укомбинујемо са другом једначином система тако да добијемо два нова система једначина.

Пример 3. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned}x^2 - 3xy + 2y^2 &= 0 \\x^2 - 3x - y + 3 &= 0\end{aligned}$$

Прво ћемо решити прву једначину јер је она хомогена.

$$\begin{aligned}x^2 - 3xy + 2y^2 &= 0 \\y^2 \left(\frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y} + 2 \right) &= 0 \quad \frac{x}{y} = z \text{ смена } x = zy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^2 - 3z + 2 &= 0 & z_1 &= 2 \\z_{1,2} &= \frac{3 \pm 1}{2} & z_2 &= 1\end{aligned}$$

Вратимо се у смену:

За $z_1 = 2$, следи да је $x = 2y$
 За $z_2 = 1$, следи да је $x = y$

Сад ово заменимо у другу једначину $x^2 - 3x - y + 3 = 0$

$$\begin{aligned}x^2 - 3x - y + 3 &= 0 & x^2 - 3x - y + 3 &= 0 \\(2y)^2 - 3 \cdot 2y - y + 3 &= 0 & x^2 - 3x - x + 3 &= 0 \\4y^2 - 6y - y + 3 &= 0 & x^2 - 4x + 3 &= 0 \\4y^2 - 7y + 3 &= 0 & x_{1,2} &= \frac{4 \pm 2}{2} \\y_{1,2} &= \frac{7 \pm 1}{8} & x_1 &= 3 \\y_1 &= 1 & x_2 &= 1 \\y_2 &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4} & y_1 &= 3, y_2 = 1 \\x_1 &= 2 \cdot 1 = 2, \quad x_2 = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Дакле, решења су: $(2, 1)$, $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$, $(3, 3)$, $(1, 1)$.

5.3.4. Системи који се свODE на хомогене једначине

Општи облик овог система је:

$$\begin{aligned}a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 &= d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 &= d_2\end{aligned}$$

Идеја је да се методом супротних коефицијената униште d_1 и d_2 и да се добије хомогена једначина. Када се она реши, формирају се два нова система и та два нова система се најчешће решавају методом замене. Једино што у овом облику система јесте незгодно што у задатку има више корака да би се дошло до коначног решења што понекад није погодно за ученике јер је већа вероватноћа да негде у задатку могу погрешити у рачуну и тако добити нетачно решење.

5.3.5. Решавање сложенијих случајева

Код система који не припадају ниједним од проучених типова, тражимо начин да елиминишемо једну непознату, сређујемо једначине да уведемо смену, правимо да једна једначина буде производ једнак нули...

Овде не постоји неки „добар“ савет, искуство је одлучујуће, дакле што више задатака урадите, то ћете више „трика“ научити!!!

5.3.6. Графичко решавање система $y = ax^2 + bx + c$ и $y = mx + n$

Ограничићемо се на решавање система облика :

$$\begin{aligned}y &= mx + n \\ y &= ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

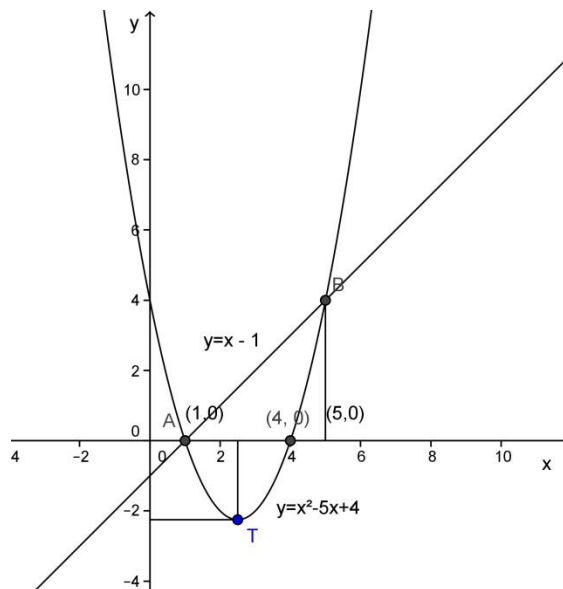
У истом координатном систему прикажу се оба графика датог система. Ако графици имају заједничке тачке (секу се), онда координате тих тачака представљају реална решења система (1), а ако пак графици немају заједничких тачака, онда дати систем (1) нема решења.

Пример 4. Решење система :

$$\begin{aligned}y &= x - 1 \\ y &= x^2 - 5x + 4\end{aligned}$$

је $\{(1,0), (5,4)\}$. Рачунским начином, методом замене из прве једначине у другу једначину, на једноставан начин добијамо ова решења.

Што се тиче графичке методе, график функције $y = x - 1$ је права, а график функције $y = x^2 - 5x + 4$ је парабола (слика 1).



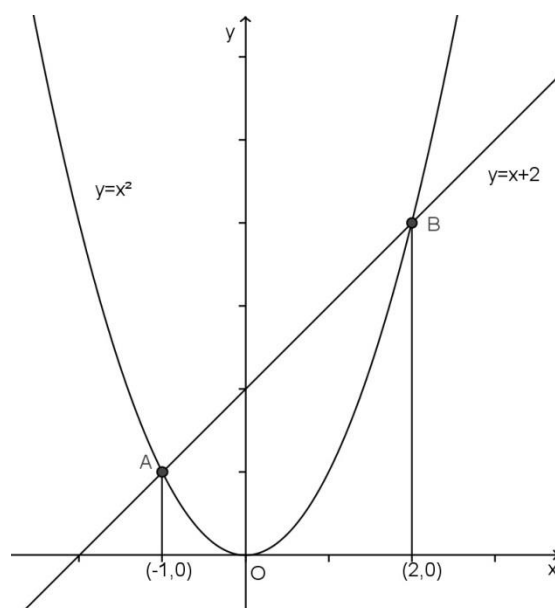
(слика 1)

Координате заједничких тачака A и B за оба графика су тражена решења. Често квадратну једначину $ax^2 + bx + c$ решавамо графички. За налажење решења (корена) полазимо од једначине

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a} \quad \text{која је еквивалентна полазној.}$$

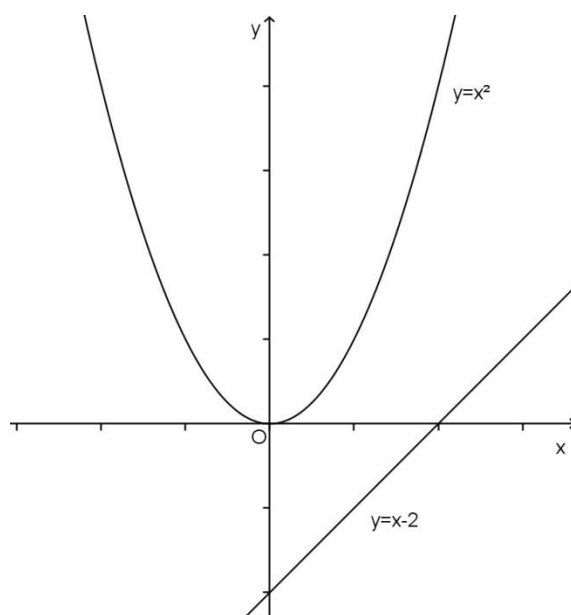
Да би нашли решење, конструишемо графике функција $y = x^2$ и $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ у истом координатном систему. Апсцисе заједничких тачака параболое и праве (уколико постоје) су реални корени полазне квадратне једначине.

Пример 5. Реални корени квадратне једначине $x^2 - x - 2 = 0$ су $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. До њих долазимо ако посматрамо еквивалентну једначину $x^2 = x + 2$. Затим скицирамо графике за квадратну функцију $y = x^2$ и линеарну функцију $y = x + 2$, те одредимо заједничке тачке графика. (слика 2).



(слика 2)

Пример 6. Једначина $x^2 - x + 2 = 0$ нема реалних решења јер графици за $y = x^2$ и за $y = x - 2$ немају заједничких тачака. (слика 3.)



(слика 3.)

5.4. Детерминанте реда два и три - системи линеарних једначина

III разред средње школе

Систем две једначине са две непознате

Размотримо систем две линеарне једначине по непознатим x, y :

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \wedge \quad a_2x + b_2y = c_2, \quad (16)$$

где су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ дати реални бројеви, при чему претпостављамо да је бар један од бројева a_1, b_1, a_2, b_2 различит од нуле јер случај $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ није од интереса.

Напомена: Заиста, ако је $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, систем (16) постаје:

$$0 = c_1 \quad \wedge \quad 0 = c_2$$

и нема решења ако је бар један од бројева c_1, c_2 различит од нуле, док је произвољан пар реалних бројева (x, y) решење тог система у случају да је $c_1 = c_2 = 0$.

За такав систем једначина (16) доказали смо у I разреду следеће резултате :

а) Ако је $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, систем (16) има јединствено решење (x, y) , где је :

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1};$$

б) Ако је $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ и ако је бар један од бројева $c_1b_2 - c_2b_1, a_1c_2 - a_2c_1$ различит од нуле, систем (16) нема решења;

в) Ако је $a_1b_2 - a_2b_1 = c_1b_2 - c_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, систем (16) има бесконачно много решења.

Ови резултати се прегледније записују (па стога и памте) ако се уведе појам **детерминанте**.

Наиме, за четири броја a, b, c, d дефинишемо израз :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad (17)$$

који се назива **детерминанта реда два**. Елементи детерминанте (17) су бројеви a, b, c, d ; њену **прву врсту** сачињавају бројеви a, b ; **другу врсту** бројеви c, d ; **прву колону** бројеви a, c ; **другу колону** бројеви b, d .

Напишимо систем једначина (16) у облику:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (18)$$

Од коефицијената уз x и y , и то тако како стоје у систему (18), формирамо детерминанту D (тзв. детерминанту система (18)):

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ако прву колону ове детерминанте (а то су коефицијенти уз x , наиме a_1 и a_2) заменимо слободним члановима c_1 , c_2 , добијамо детерминанту:

$$D(x) = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

а ако другу колону детерминанте D , тј. елементе b_1 , b_2 (а то су коефицијенти уз y) заменимо слободним члановима c_1 , c_2 , добијамо детерминанту:

$$D(y) = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Сада се познати резултати за систем једначина (18) могу овако формулисати:

а) Ако је $D \neq 0$, систем (18) има тачно једно решење, дато са:

$$x = \frac{D(x)}{D}, \quad y = \frac{D(y)}{D}.$$

Другим речима, $(\frac{D(x)}{D}, \frac{D(y)}{D})$ је јединствено решење система једначина (18);

б) Ако је $D=0$, систем (18) може имати бесконачно много решења, а може бити противречан (тј. без решења).

Пример 7. За систем једначина:

$$x + 2y = 5 \quad \wedge \quad 2x + y = 4$$

имамо:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad D(x) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad D(y) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6,$$

па тај систем има тачно једно решење: $(x, y) = (1, 2)$.

Пример 8. Имамо два система једначина:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \quad \wedge \quad 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \quad \wedge \quad 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

За оба система имамо да је $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$.

За први систем имаћемо да је $D(x) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$ и $D(y) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$.

Систем ће имати бесконачно много решења, и то: $(x, y) = (3 - 2t, t)$, где је t произвољно.

За други систем имаћемо да је $D(x) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$ и $D(y) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$.

Овај систем нема ниједно решење.

Пример 9. За разне вредности реалног броја a (тзв. параметра a) решићемо систем једначина:

$$ax + y = 1 \quad \wedge \quad x + ay = 1. \quad (19)$$

Детерминанта овог система је:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1;$$

такође је:

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1, \quad D(y) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1.$$

Дакле, ако је $D \neq 0$, тј. $a^2 \neq 1$, односно $a \neq \pm 1$, онда систем (19) има једно и само једно решење:

$$\left(\frac{a-1}{a^2-1}, \frac{a-1}{a^2-1} \right), \quad \text{тј.} \quad \left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1} \right).$$

Остаје нам да испитамо случајеве $a = 1$ и $a = -1$.

Ако је $a = 1$, систем (19) гласи:

$$x + y = 1 \quad \wedge \quad x + y = 1 \quad (20)$$

што је, у ствари, само једна једначина са две непознате. Систем (20) задовољавају сви бројеви x, y облика $(x, y) = (t, 1 - t)$, где је t произвољно. Тај систем има, дакле, бесконачно много решења.

Најзад, ако је $a = -1$, систем (19) постаје:

$$-x + y = 1 \quad \wedge \quad x - y = 1, \quad (21)$$

одакле се, после сабирања, добија $0=2$, што је немогуће. То значи да је систем (21) противречан, тј. нема решења.

Да резимирамо:

а) Ако је $a^2 \neq 1$, систем (19) има тачно једно решење: $\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1} \right)$

б) Ако је $a = 1$, систем (19) има бесконачно много решења, која су дата са $(t, 1 - t)$, где је t произвољно ;

в) Ако је $a = -1$, систем (19) нема решења.

5. 4. 1. Особине детерминаната другог реда

Наводимо нека важна својства детерминаната другог реда.

S.1 Вредност детерминанте се не мења ако врсте и колоне замене места (тј. ако прва врста постане колона, а друга врста постане друга колона). Заиста, обе детерминанте :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

имају исту вредност, наиме $ad - bc$.

S.2 Ако две врсте (или две колоне) замене места, детерминанта мења знак. Тако, на пример, имамо :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc), \quad \text{тј.} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad), \quad \text{тј.} \quad \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

S.3 Ако се једна врста (или једна колона) помножи бројем k , тада је вредност детерминанте такође помножена бројем k . На пример:

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \text{тј.} \quad \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \text{тј.} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

S.4 Ако су две врсте (или две колоне) детерминанте пропорционалне, вредност детерминанте је нула. На пример:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = kab - kab = k(ab - ab) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = kab - kab = k(ab - ab) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

S.5 Вредност детерминанте се не мења ако се елементима једне врсте (колоне) додају одговарајући елементи друге врсте (колоне), претходно помножени неким бројем. На пример:

$$\begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \text{ итд.}$$

Докажимо ове једнакости. Имамо :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix} &= (a+kb)d - b(c+kd) = ad + kbd - bc - bkd = ad - bc + k(bd - bd) \\ &= ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} &= (a+kc)d - c(b+kd) = ad + kcd - bc - ckd = ad - bc + \\ &+ k(cd - cd) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Наведена својства користе се приликом израчунавања детерминаната чији су елементи релативно велики бројеви, јер се тако може избећи множење великих бројева.

Пример 10. Израчунати $\begin{vmatrix} 57 & 29 \\ 54 & 28 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 57 & 29 \\ 54 & 28 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 19 & 29 \\ 18 & 28 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1+1 \cdot 18 & 1+1 \cdot 28 \\ 18 & 28 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 18 & 28 \end{vmatrix} = 3(28 - 18) = 30.$$

Пример 11. Израчунати $\begin{vmatrix} 101 & 119 \\ 50 & 59 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 101 & 119 \\ 50 & 59 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 101-2 \cdot 50 & 119-2 \cdot 59 \\ 50 & 59 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 50 & 59 \end{vmatrix} = 59 - 50 = 9$$

Пример 12. Израчунати $\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 38 & 17 \\ 27 & 18 \end{vmatrix}$.

5.4.2. Детерминанте реда три

5.4.2.1 Дефиниција и израчунавање детерминанти

Детерминанта реда три дефинише се помоћу једнакости

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Треба да обратимо пажњу на то како добијамо детерминанте реда два на десној страни дефиниционе једнакости (22). Прва од њих добијена је тако што су одбачене прва врста и прва колона полазне детерминанте реда три (а то су врста и колона којима припада елемент a_1). Слично, друга детерминанта добија се тако што се у полазној детерминанти (реда три) одбаци прва врста и друга колона (тј. врста и колона којима припада елемент b_1), а трећа тако што се одбаци прва врста и трећа колона полазне детерминанте (тј. врста и колона којима припада елемент c_1). Такође треба приметити да знаци алтернирају (мењају се): полази се од +, онда долази -, па опет +.

Ако израчунамо детерминанте реда два које се појављују у (22), добијамо:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 = \\ &= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Овај последњи израз за детерминанту реда три омогућује израчунавање према следећем, тзв. *Сарусовом правилу*. Наиме, допишимо поред детерминанте њену прву и другу колону:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Полазимо из горњег левог угла (тј. елемента a_1) и množимо бројеве по дијагоналама, ($a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$, $b_1 \cdot c_2 \cdot a_3$, $c_1 \cdot a_2 \cdot b_3$) и испред њих ставимо знак +; затим полазимо из десног горњег угла детерминанте (тј. елемента c_1) и množимо бројеве по дијагоналама ($c_1 \cdot b_2 \cdot a_3$, $a_1 \cdot c_2 \cdot b_3$, $b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$), стављајући испред знак -.

Пример 13. Израчунати детерминанту $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ на два начина, по дефиницији и применом Сарусовог правила. Имамо:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 5(6 - 2) - 6(8 - 14) + 7(4 - 21) \\ = 20 + 36 - 119 = -63$$

Применом Сарусовог правила добијамо:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \cdot 7 + 7 \cdot 4 \cdot 1 - 7 \cdot 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot 4 \cdot 2 = \\ = 30 + 84 + 28 - 147 - 10 - 48 = -63.$$

Напомена 1. Приликом примене Сарусовог правила нисмо буквално дописали прву и другу колону детерминанте, већ смо то учинили “у мислима”.

Десну страну једнакости (23) можемо написати у облику:

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1),$$

па је:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (24)$$

Једнакост (24) назива се *развој детерминанте по првој колони*, јер се детерминанте реда два на десној страни те једнакости множе бројевима a_1 , a_2 , a_3 , тј. елементима прве колоне. Из истог разлога једнакост (22) назива се *развој детерминанте по првој врсти*.

Приметимо да се детерминанте на десној једнакости (24) формирају по истом принципу као и детерминанте на десној страни једнакости (22). Рецимо, уз елемент a_2 налази се детерминанта $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, која се добија из полазне детерминанте на тај начин што се одбаце она врста и она колона којој припада елемент a_2 (то је друга врста и прва колона).

Напомена 2. Детерминанта се може развити по било којој врсти или колони.

Рецимо, развој по другој врсти гласи:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 14. Написати развој детерминанте:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

а) по другој колони; б) по трећој колони; в) по трећој врсти.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + \\ + b_2(a_1c_3 - c_1a_3) - b_3(a_1c_2 - c_1a_2);$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1(a_2b_3 - b_2a_3) - \\ - c_2(a_1b_3 - b_1a_3) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2);$$

$$\text{в)) } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ = a_3(b_1c_2 - c_1b_2) - b_3(a_1c_2 - c_1a_2) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2).$$

Пример 15. Доказати следеће једнакости :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} ax & x & a \\ by & y & b \\ cz & z & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bcx & cay & abz \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

5.4.2.2. Особине детерминаната трећег реда

Основна својства **S.1 – S.5** детерминаната реда два која смо доказали раније су својства која имају и детерминанте реда три.

Својство S.1. Вредност детерминанте се не мења ако врсте и колоне замене места.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (25)$$

Ово својство ћемо најједноставније доказати тако што ћемо детерминанту на левој страни развити по првој врсти, а детерминанту на десној страни развити по првој колони, а затим применити својство **S.1** на добијене детерминанте другог реда.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Пошто смо развили детерминанту са леве стране по првој врсти, применимо својство **S.1** и добијамо :

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Овим смо доказали својство **S.1**.

Својство S.2. Ако две врсте (или две колоне) замене места, детерминанта мења знак.

Нпр. можемо заменити места другој и трећој колони детерминанте.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 = \\ &= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 . \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} &= a_1 c_2 b_3 + c_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 c_3 - a_1 b_2 c_3 - b_1 c_2 a_3 - c_1 a_2 b_3 \\ &= -(a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3) = \\ &= - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} , \text{ итд.} \end{aligned}$$

Као што се види, својство се доказује директним проверавањем.

Својство S.3 Ако се једна врста (или једна колона) помножи бројем k , тада је вредност детерминанте такође помножена бројем k .

Да би илустровали својство **S.3**, докажимо једнакост :

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (26)$$

Детерминанту са леве стране ћемо развити по првој колони и добијамо :

$$\begin{aligned} ka_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - ka_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + ka_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} &= \\ &= k(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}) \end{aligned}$$

Израз у загради је једнак развоју детерминанте по првој колони са десне стране једнакости (26).

Својство S.4 Ако су две врсте (или две колоне) детерминанте пропорционалне, вредност детерминанте је нула.

Нека је D вредност детерминанте чије су две врсте (колоне) пропорционалне. На првом месту константа пропорционалности k може се “извући испред детерминанте”, па је $D = k\Delta$, где је Δ детерминанта која има две врсте (колоне) идентичне. Ако те две врсте (колоне) замене места, вредност детерминанте се неће променити јер су оне идентичне. Са друге стране, када применимо својство S. 2, детерминанта ће променити знак. Онда ћемо добити да је $\Delta = -\Delta$, тј. $\Delta = 0$, па је и $D = k\Delta = 0$. Тиме смо добили да је вредност детерминанте једнака нули.

Својство S.5 Вредност детерминанте се не мења ако се елементима једне врсте (колоне) додају одговарајући елементи друге врсте (колоне), претходно помножени неким бројем.

Доказаћемо један случај који нам илуструје својство S.5.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + kb_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + kb_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (27)$$

Ако развијемо детерминанту на левој страни по првој колони, добијамо :

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 + kb_2 \\ b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 + kb_1 \\ b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 + kb_1 \\ b_2 & c_2 + kb_2 \end{vmatrix}.$$

Сада на развој ове детерминанте можемо применити својство S.5 које важи за детерминанте реда два и добијамо:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Овим кораком смо добили десну страну једнакости (27), а то је оно што смо и хтели да покажемо.

Пример 16. Израчунати вредност детерминанте :

$$D = \begin{vmatrix} 87 & 42 & 3 \\ 45 & 18 & 7 \\ 59 & 28 & 3 \end{vmatrix}$$

Како су елементи ове детерминанте релативно „велики” бројеви, треба се потрудити да дату детерминанту трансформишемо у подеснији облик. Најбоље је направити што више нула у једној врсти или колони. Имамо :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 42 & 3 \\ 9 & 18 & 7 \\ 3 & 28 & 3 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{првој колони додата је} \\ \text{друга, помножена са } -2 \end{array} \right);$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 0 & 42 & 3 \\ 2 & 18 & 7 \\ 0 & 28 & 3 \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l} \text{првој колони додата је} \\ \text{трећа, помножена са } -1 \end{array} \right); \\
&= -2 \begin{vmatrix} 42 & 3 \\ 28 & 3 \end{vmatrix} && (\text{развој по првој колони}); \\
&= -12 \begin{vmatrix} 21 & 1 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l} \text{из прве колоне извучен} \\ \text{фактор 2, а из друге фактор 3} \end{array} \right); \\
&= -12(21 - 14) = -12 \cdot 7 = -84.
\end{aligned}$$

Пример 17. Доказати да је

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a-c \\ b-a & 0 & b-c \\ c-a & c-b & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ако од прве врсте одузмемо другу, а од друге трећу, добијамо :

$$D = \begin{vmatrix} a-b & a-b & a-b \\ b-c & b-c & b-c \\ c-a & c-b & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ c-a & c-b & 0 \end{vmatrix},$$

а ова последња детерминанта је 0 јер има две једнаке врсте.

Пример 18. Доказати једнакост :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a(a+1)(a-1)^3.$$

Ако од друге колоне одузмемо прву, а и од треће колоне такође одузмемо прву, добијамо:

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & a^2-1 \\ 1 & a^2-1 & a^4-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 \\ a^2-1 & a^4-1 \end{vmatrix} = (a-1)(a^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & a^2+1 \end{vmatrix} \\
&= (a-1)(a^2-1)(a^2+1-a-1) = (a-1)^2(a+1)(a^2-a) = a(a+1)(a+1)^3
\end{aligned}$$

Напомена. Директно израчунавање детерминанте D , по дефиницији или по Сарусовом правилу, доводи до резултата $D = a^5 - 2a^4 + 2a^2 - 1$, а факторизовани облик $D = a(a+1)(a-1)^3$ често може да буде подеснији.

Примери за вежбу

1. Израчунати следеће детерминанте :

$$\begin{array}{lll}
\text{а)} \begin{vmatrix} 96 & 47 & 23 \\ 97 & 43 & 21 \\ 98 & 49 & 25 \end{vmatrix}; & \text{б)} \begin{vmatrix} 17 & 46 & 7 \\ 20 & 49 & 8 \\ 23 & 52 & 9 \end{vmatrix}; & \text{в)} \begin{vmatrix} 1001 & 17 & 2 \\ 1002 & 18 & 4 \\ 1003 & 19 & 7 \end{vmatrix}.
\end{array}$$

2. Не израчунавајући их, доказати да следеће детерминанте имају вредност 0 :

$$\text{а) } \begin{vmatrix} b-c & c-a & a-b \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} (x-1)^2 & x^2+1 & x \\ (y-1)^2 & y^2+1 & y \\ (z-1)^2 & z^2+1 & z \end{vmatrix}.$$

5.5. Решавање система са три једначине са три непознате преко детерминанти

Размотримо сада систем линеарних једначина по непознатим x, y, z :

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \quad (28)$$

где су a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) дати реални бројеви. Од коефицијената уз x, y, z формирајмо детерминанту D система (28):

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

а уведемо и ознаке:

$$D(x) = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D(y) = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D(z) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

аналогно ознакама које смо користили код система две једначине са две непознате.

Сада ћемо помножити прву непознату x , са детерминантом система и добијамо:

$$\begin{aligned} xD &= \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y & b_3 & c_3 \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l} \text{елементима прве колоне додати} \\ \text{су одговарајући елементи друге} \\ \text{колоне, помножени са } y \end{array} \right) \\ &= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l} \text{елементима прве колоне додати} \\ \text{су одговарајући елементи треће} \\ \text{колоне, помножени са } z \end{array} \right) \\ &= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} && (\text{на основу датог система (28)}) \end{aligned}$$

$$= D(x).$$

На сличан начин доказују се једнакости: $yD = D(y)$, $zD = D(z)$.

Према томе, из (28) излази:

$$xD = D(x), \quad yD = D(y), \quad zD = D(z),$$

па уз претпоставку да је $D \neq 0$, добијамо јединствено решење система једначина (28):

$$x = \frac{D(x)}{D}, \quad y = \frac{D(y)}{D}, \quad z = \frac{D(z)}{D}$$

Ако је $D = 0$, онда систем (28) нема јединствено решење и тада могу наступити два случаја: систем има бесконачно много решења, или систем нема ниједно решење.

Пример 19. Решити систем једначина:

$$x + y + z = 6 \quad \wedge \quad 2x - y + z = 3 \quad \wedge \quad x - 2y + 2z = 3 \quad (29)$$

Као и у објашњењу, прво ћемо наћи D , а затим $D(x)$, $D(y)$, $D(z)$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad D(x) = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$D(y) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12, \quad D(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -18.$$

па како је $D \neq 0$, јединствено решење система (29) гласи:

$$(x, y, z) = \left(\frac{D(x)}{D}, \frac{D(y)}{D}, \frac{D(z)}{D} \right) = \left(\frac{-6}{-6}, \frac{-12}{-6}, \frac{-18}{-6} \right) = (1, 2, 3).$$

Пример 20. Решити систем једначина:

$$2x + y - z = 7 \quad \wedge \quad 5x - 4y + 7z = 1 \quad \wedge \quad 7x - 3y + 6z = 8 \quad (30)$$

Детерминанта система ће бити:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 7 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

јер се елементи треће врсте добијају сабирањем одговарајућих елемената прве и друге врсте. Међутим, и трећа једначина система добија се сабирањем прве две, па у ствари немамо три једначине, већ само две једначине са три непознате:

$$2x + y - z = 7 \quad \wedge \quad 5x - 4y + 7z = 1. \quad (31)$$

Стаavimo да је $z = t$, где је t произвољно. Систем (31) тада постаје:

$$2x + y = 7 + t \quad \wedge \quad 5x - 4y = 1 - 7t,$$

и овај систем има јединствено решење :

$$(x, y) = \left(\frac{29-3t}{13}, \frac{33+19t}{13} \right)$$

Према томе, сва решења система једначина (30) дата су са :

$$x = \frac{29-3t}{13}, \quad y = \frac{33+19t}{13}, \quad z = t \quad (t \text{ произвољно}),$$

па је јасно да их има бесконачно много.

Пример 21. Решити систем једначина :

$$x + y + z = 3 \quad \wedge \quad 2x - 3y + 2z = 1 \quad \wedge \quad 3x - 2y + 3z = 7 \quad (32)$$

Детерминанта система ће бити :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

јер су прва и трећа колона идентичне. Ако саберемо прве две једначине тог система, добијамо :

$$3x - 2y + 3z = 4$$

Ако од ове последње једначине одузмемо трећу једначину система, добијамо $0 = -3$, што је немогуће. Дакле, систем (32) нема решења, противречан је.

Пример 22. Решити систем једначина :

$$ax + y + z = 1 \quad \wedge \quad x + ay + z = 2 \quad \wedge \quad x + y + az = -3 \quad (33)$$

где је a реалан број, тзв. параметар.

Детерминанта овог система гласи :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = \\ &= a(a^2 - 1) - 1(a - 1) + 1(1 - a) = \\ &= a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2(a + 2). \end{aligned}$$

Сада ћемо наћи детерминанте $D(x)$, $D(y)$, $D(z)$.

$$\begin{aligned} D(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ -3 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = \\ &= a^2 + a - 2 = (a + 2)(a - 1); \end{aligned}$$

$$D(y) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & a \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2a^2 + 2a - 4 = 2(a+2)(a-1);$$

$$D(z) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(a^2 + a - 2) = -3(a+2)(a-1);$$

Према томе, ако је $a \neq 1$ и $a \neq -2$, онда је $D \neq 0$ и систем (33) има јединствено решење. Оно је дато са :

$$x = \frac{1}{a-1}, \quad y = \frac{2}{a-1}, \quad z = \frac{-3}{a-1}.$$

Ако је $a = 1$, систем нема решења јер су, на пример, прве две једначине противречене. Оне гласе $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$, одакле излази $1=2$.

Ако је $a = -2$, систем (33) постаје :

$$-2x + y + z = 1 \quad \wedge \quad x - 2y + z = 2 \quad \wedge \quad x + y - 2z = -3$$

и он је еквивалентан систему који сачињавају само прве две једначине, јер се трећа добија сабирањем прве две и множењем са -1. Дакле, у овом случају систем (33) има бесконачно много решења. Она су обухваћена формулама :

$$x = t - \frac{4}{3}, \quad y = t - \frac{5}{3}, \quad z = t$$

где је t произвољан реалан број.

Напомена. Систем линеарних једначина :

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad \wedge \quad a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad \wedge \quad a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad (34)$$

где су сви слободни чланови једнаки 0, назива се хомоген систем. Тај систем никада није противречан јер увек има бар једно, тзв. тривијално решење : $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Дакле, за систем (34) имамо следећу алтернативу.

Ако је $D \neq 0$, систем (34) има тачно једно, и то тривијално решење, и ако је $D = 0$, онда систем (34) има бесконачно много решења. Наравно, D означава детерминанту система.

Корисна је следећа формулација наведеног закључка : да би систем (34) имао (пored тривијалног) и нетривијална решења, потребно је и довољно да буде $D = 0$.

5.6. Грешке ученика при изради задатка на писменом – решавање система једначина користећи начин преко детерминанти

У трећем разреду гимназије “Бранислав Петронијевић” на Убу (општи смер гимназије) изучавају се системи једначина и највише се раде системи користећи начин израде преко детерминанти, (Крамеровог правила). У зависности од годишњег плана, ови системи се раде у првом полугодишту (у месецу децембру) или почетком другог полугодишта и у зависности од тога, такав задатак се појављује на другом или трећем писменом задатку. Ове школске године, тј. 2014/2015, системи су били заступљени на другом писменом задатку. С’ обзиром да у гимназији има два одељења трећег разреда, било је могуће прегледати око 60 вежбанки и видети у којим корацима ученици највише греше и шта им представља проблем приликом решавања задатака.

У обе групе је био један задатак из система где у зависности од параметра a (p) треба дискутовати систем једначина.

Задаци : одељење III- a

$$\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ \text{I група : } x + 2y - pz = 1 \\ 2x + py - 2z = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + pz = 1 \\ \text{II група : } 2x - y - 2z = 1 \\ px + y + z = 2 \end{array}$$

Одељење III- b

$$\begin{array}{l} ax - 2y + 2z = 4 \\ \text{I група : } x + y + z = 3 \\ 2x - ay + z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y + az = 2 \\ \text{II група : } 2x + ay + z = 1 \\ x + 2y - 2z = -1 \end{array}$$

Одељења III- a и III- b (у оба одељења је по 27 ученика радило писмени задатак, грешке су скоро исте што значи да ученици греше на истим местима, у процентима је јако мала разлика па ћемо те резултате приказати на основу једног одељења.)

Резултати : Од 27 ученика, 8 ученика је потпуно тачно урадило задатак, 6 ученика није радило задатак док су преосталих 13 ученика половично урадили. Неки су направили грешке у старту задатка приликом израчунавања детерминанте система, док су остали, већина од тих 13 ученика, правили грешке приликом дискусије система, тј. у деловима где систем нема или има бесконачно много решења.

Грешке : Један од тринаест ученика је започео задатак Гаусовим поступком и већ у старту направио грешку. Четири ученика су направили грешке приликом рачунања D_s, D_x, D_y, D_z , углавном су то грешке у рачуну што ћемо касније и видети на слици. Један ученик је израчунао добро D_s, D_x , а затим при рачунању D_y, D_z стављао да је вредност тачно израчунате детерминанте једнака нули и тако добијао вредност параметра p што повлачи већ нетачно решење у првом делу задатка. 7/13 ученика тј. 53,84 % је направило врло сличне грешке што показује да им највећи проблем представља дискусија система, и то највише трећи случај, тј. кад систем има бесконачно много решења. (узимање неке нове променљиве). Случај када систем нема решења углавном су добро решавали, добили су да је једна од $D_x, D_y, D_z \neq 0$ уз $D_s = 0$ закључили да систем нема ниједно решење.

Када је реч о најчешћим грешкама, управо је то трећи случај (може бити и други, у зависности која се прво вредност параметра узме) када систем има бесконачно много решења. За дату вредност параметра ученици треба да реше систем, и то сви раде Гаусовим поступком, и када добију две исте једначине и треба да узму нову променљиву и да све изразе преко те променљиве, ту долази до грешака. Неки ученици напишу да су све D_x, D_y, D_z једнаке нули и да је систем неодређен, што не мора да значи, док други решавају систем и једној променљивој дају неку вредност α , а затим не врате у систем да и остале променљиве изразе преко α и тиме немају решење у том случају. Такође, два ученика су решавајући тај систем, добили да је $x = y = z = 0$ и на основу тога записали да систем има бесконачно много решења.

Оно што је карактеристично за рад система користећи детерминанте, скоро сви ученици су решавали детерминанте без додавања прве две колоне, а нису ни писали развој преко детерминанте реда два, већ су одмах добијали решење.

Такође, једна од честих грешака јесте растављање полинома који се добија при решавању детерминанте; у овим задацима се појављује полином другог степена и то у једној групи знак — испред највећег степена полинома. Ученици добро раставе полином и на крају забораве знак — и касније им решење не буде тачно само због тог знака.

(Вежбанке добијене на увид од професора математике из гимназије “Бранислав Петронијевић”)

5.6.1. Грешке у задацима – примери из вежбанки ученика

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & p & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 3p - 4 - p - 12 = 3p - 6 = 3(p-2)$$

2. случај
1. $D_0 \neq 0$
 $p \neq 2 \vee p \neq 2$
 $x = \frac{D_x}{D_0} = \frac{2(p-3)(p+2)}{3(p-3)(p+2)} = \frac{2}{3}$
 $y = \frac{D_y}{D_0} = \frac{-2(p-5)}{3(p-3)(p+2)} = -\frac{2}{3(p+2)}$
 $z = \frac{D_z}{D_0} = \frac{2(p-3)}{3(p-3)(p+2)} = \frac{2}{3(p+2)}$
 $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3(p+2)}, \frac{2}{3(p+2)})$ ✓

3. за $p=0$
 $D_0 = 0$
 $p=3 \quad p \neq 0$
нема $p=4$ ✓

3. за $p=3$
 $D_0 = 0$
 $D_x = 0 \quad D_y = 0 \quad D_z = 0$
 $x + y + z = 3/1 = 3$
 $x + 2y - 3z = 1$
 $2x + 3y - 2z = 4$
 $x + y + z = 3$
 $y - 4z = 2/1$
 $y - 4z = 2$
 $y = 0$
 $z = 0$
 $x = 0$
Бескон. решења

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & p & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 3p - 4 - p - 12 = 3p - 6 = 3(p-2)$$

2. случај
1. $D_0 \neq 0$
 $p \neq 2 \vee p \neq 2$
 $x = \frac{D_x}{D_0} = \frac{2(p-3)(p+2)}{3(p-3)(p+2)} = \frac{2}{3}$
 $y = \frac{D_y}{D_0} = \frac{-2(p-5)}{3(p-3)(p+2)} = -\frac{2}{3(p+2)}$
 $z = \frac{D_z}{D_0} = \frac{2(p-3)}{3(p-3)(p+2)} = \frac{2}{3(p+2)}$
 $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3(p+2)}, \frac{2}{3(p+2)})$ ✓

3. за $p=0$
 $D_0 = 0$
 $p=3 \quad p \neq 0$
нема $p=4$ ✓

3. за $p=3$
 $D_0 = 0$
 $D_x = 0 \quad D_y = 0 \quad D_z = 0$
 $x + y + z = 3/1 = 3$
 $x + 2y - 3z = 1$
 $2x + 3y - 2z = 4$
 $x + y + z = 3$
 $y - 4z = 2/1$
 $y - 4z = 2$
 $y = 0$
 $z = 0$
 $x = 0$
Бескон. решења

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & p & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 3p - 4 - p - 12 = 3p - 6 = 3(p-2)$$

2. случај
1. $D_0 \neq 0$
 $p \neq 2 \vee p \neq 2$
 $x = \frac{D_x}{D_0} = \frac{2(p-3)(p+2)}{3(p-3)(p+2)} = \frac{2}{3}$
 $y = \frac{D_y}{D_0} = \frac{-2(p-5)}{3(p-3)(p+2)} = -\frac{2}{3(p+2)}$
 $z = \frac{D_z}{D_0} = \frac{2(p-3)}{3(p-3)(p+2)} = \frac{2}{3(p+2)}$
 $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3(p+2)}, \frac{2}{3(p+2)})$ ✓

3. за $p=0$
 $D_0 = 0$
 $p=3 \quad p \neq 0$
нема $p=4$ ✓

3. за $p=3$
 $D_0 = 0$
 $D_x = 0 \quad D_y = 0 \quad D_z = 0$
 $x + y + z = 3/1 = 3$
 $x + 2y - 3z = 1$
 $2x + 3y - 2z = 4$
 $x + y + z = 3$
 $y - 4z = 2/1$
 $y - 4z = 2$
 $y = 0$
 $z = 0$
 $x = 0$
Бескон. решења

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & p & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 3p - 4 - p - 12 = 3p - 6 = 3(p-2)$$

2. случај
1. $D_0 \neq 0$
 $p \neq 2 \vee p \neq 2$
 $x = \frac{D_x}{D_0} = \frac{2(p-3)(p+2)}{3(p-3)(p+2)} = \frac{2}{3}$
 $y = \frac{D_y}{D_0} = \frac{-2(p-5)}{3(p-3)(p+2)} = -\frac{2}{3(p+2)}$
 $z = \frac{D_z}{D_0} = \frac{2(p-3)}{3(p-3)(p+2)} = \frac{2}{3(p+2)}$
 $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3(p+2)}, \frac{2}{3(p+2)})$ ✓

3. за $p=0$
 $D_0 = 0$
 $p=3 \quad p \neq 0$
нема $p=4$ ✓

3. за $p=3$
 $D_0 = 0$
 $D_x = 0 \quad D_y = 0 \quad D_z = 0$
 $x + y + z = 3/1 = 3$
 $x + 2y - 3z = 1$
 $2x + 3y - 2z = 4$
 $x + y + z = 3$
 $y - 4z = 2/1$
 $y - 4z = 2$
 $y = 0$
 $z = 0$
 $x = 0$
Бескон. решења

6 ПРОБЛЕМСКИ ЗАДАЦИ

Последњи део рада је део који је битан за ученике који желе више да се баве математиком, предвиђен за додатну наставу и за припреме за такмичења из система једначина. Часопис Тангента је домаћи часопис намењен средњошколцима, који обрађује теме из математике и информатике. У првом делу овог поглавља се налази неколико задатака из Тангенте 10, а у наредном задаци са средњошколских такмичења у периоду 2004-2014. године. Размишљајући о математичким проблемима и њиховом решавању, веома је важно и за ученике и за њихове наставнике да схвате да иза коначних решења која се дају стоје гомиле одбаченог папира и многи неуспешни покушаји. Зато је важно рвати се са проблемом самостално пре него што се упознате са готовим решењем. Само на тај начин може се стећи представа о суштини проблема, развити извесна сопствена идеја решења и схватити у чему се крију тешкоће. Из искуства које стичемо решавањем проблема рађа се разумевање мотивације у избору одређеног приступа, који води задовољавајућем решењу проблема. Сви задаци у овом поглављу су дати са решењима.

6.1. Избор сложенијих задатака из збирке задатака објављених у рубрици "задаци из математике" часописа Тангента 1995-2005

1. Решити систем у зависности од реалног параметра a :

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2y - 3\arcsin z = 7 \\ 2^x - y - \arcsin z = -6 \\ 5 \cdot 2^x - y + \arcsin z = 6a + 2 \end{cases}$$

2. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} (x + y)^3 = z \\ (y + z)^3 = x \\ (z + x)^3 = y \end{cases}$$

3. Решити у скупу реалних бројева систем:

$$\begin{aligned} (x_3 + x_4 + x_5)^5 &= 3x_1 \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 &= 3x_2 \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 &= 3x_3 \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 &= 3x_4 \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 &= 3x_5 \end{aligned}$$

4. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 59 \\ xy + yz + zx + 2(x + y + z) = 44 \end{cases}$$

5. Решити у скупу позитивних реалних бројева систем једначина:

$$\begin{aligned} xyz &= \frac{y^3 + z^3 + t^3}{3} \\ yzt &= \frac{z^3 + t^3 + x^3}{3} \\ xyt &= \frac{t^3 + x^3 + y^3}{3} \\ yzt &= \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \end{aligned}$$

6. Решити систем једначина

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

7. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} ||x - y| + x + y - 2z| + |x - y| + x + y + 2z &= 16 \\ 2x + y + z - |y - z| - |2x - y - z + |y - z|| &= 8 \\ |x| + |y| + |z| &= 9 \end{aligned}$$

8. Ако су a, b, c реални бројеви такви да је $(b - 1)^2 - 4ac < 0$, доказати да систем једначина

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ ay^2 + by + c = z \\ az^2 + bz + c = x \end{cases}$$

нема реалних решења.

9. Решити систем једначина :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &= 50 \\ x^2 - y^2 + z^2 - t^2 &= -40 \\ xy - zt &= 0 \\ x - y + z + t &= 0 \end{aligned}$$

6. 1. 1. Избор сложенијих задатака из збирке задатака објављених у рубрици “задаци из математике часописа Тангента 1995-2005 – решења

1. У овом систему једначина уведемо смену $X = 2^x$, $Y = y$, $Z = \arcsin z$. Овај нови систем постаје линеаран по X , Y , Z :

$$\begin{cases} 3X + 2Y - 3Z = 7 \\ X - Y - Z = -6 \\ 5X - Y + Z = 6a + 2 \end{cases}$$

Нови систем можемо решити помоћу Крамерових формула и у том случају добијамо :

$X = a + 1$, $Y = 5$, $Z = a + 2$, па је због смена полазни систем еквивалентан са

$$2^x = a + 1, \quad y = 5, \quad \arcsin z = a + 2.$$

Следи, ако је $a \in (-\infty, -1] \cup \left(\frac{\pi}{2} - 2, +\infty\right)$, систем нема решења, а ако је

$a \in (-1, \frac{\pi}{2} - 2]$, онда постоји јединствено решење :

$$x = \log_2(a + 1), \quad y = 5, \quad z = \sin(a + 2).$$

2. Систем је симетричан, па без утицаја на општост можемо узети да је $x \geq y \geq z$. Следи :

$$(y + z)^3 = x \geq y = (z + x)^3, \quad \text{односно} \quad (y + z)^3 \geq (z + x)^3.$$

То даље повлачи $y + z \geq z + x$ и $y \geq x$.

$$(z + x)^3 = y \geq z = (x + y)^3, \quad \text{односно} \quad (z + x)^3 \geq (x + y)^3.$$

То даље повлачи $z + x \geq x + y$ и $z \geq y$.

С обзиром на претпоставку $x \geq y \geq z$ и претходно, добијамо да је

$$x = y = z$$

Тада се систем своди на једначину $8x^3 = x$

$$8x^3 - x = 0 \quad \text{односно} \quad x(2\sqrt{2}x - 1)(2\sqrt{2}x + 1) = 0$$

Решења ове једначине су $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Дакле, решења датог система једначина су

$$(0, 0, 0), \quad \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

3. Постоји неколико суштински различитих случајева које треба посматрати (остали се на њих могу свести цикличним пермутовањем и обртањем редоследа непознатих). То су:

1° $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$; из прве и друге једначине, због $x_1 \leq x_2$ добијамо $x_3 + x_4 + x_5 \leq x_4 + x_5 + x_1$, тј. $x_3 \leq x_1$. Слично, из треће

и четврте једначине добијамо $x_5 \leq x_3$. Значи, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

2° $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_5 \leq x_4$; из прве и друге једначине имамо $x_3 \leq x_1$, а

из друге и треће $x_4 \leq x_2$, па поново $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

3° $x_1 \leq x_2 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_3$; из прве и друге једначине је $x_3 \geq x_1$, и опет

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

4° $x_1 \leq x_3 \leq x_5 \leq x_2 \leq x_4$; из четврте и пете једначине је $x_4 \leq x_1$, па

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

Према томе, све непознате у систему морају бити једнаке, па се систем своди

на $(3x)^5 = 3x$. Једно решење је $x = 0$, а за $x \neq 0$, дељењем са $3x$ сводимо

на $(3x)^4 = 1$. У том случају добијамо:

$$3x = 1 \quad \text{или} \quad 3x = -1$$

Дакле, сва решења система су $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$.

4. Применићемо метод који се може користити кад су све једначине симетричне по x , y и z , тј. кад се не мењају заменом места променљивих. Ако уведемо ознаке:

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{и} \quad c = xyz.$$

Тада из овог система добијамо да је $a = 9$, $b = 26$, $c = 24$.

На основу Виетових формула добијамо да су x , y , z нуле полинома

$$x^3 - ax^2 + bx - c = x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)(x - 3)(x - 4),$$

па су решења система :

$$(2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2).$$

5. Да би решили овај задатак, требаће нам неједнакост између аритметичке и геометријске средине. Користећи више пута неједнакост, добијамо :

$$\begin{aligned}xyz &= \frac{y^3 + z^3 + t^3}{3} \geq yzt = \frac{z^3 + t^3 + x^3}{3} \geq ztx \\&= \frac{t^3 + x^3 + y^3}{3} \geq txy = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz\end{aligned}$$

Да би то било могуће, уместо свих знакова неједнакости мора стајати једнакост, а то је еквивалентно са $x = y = z = t$.

Лако се проверава да свака таква четворка задовољава овај систем.

6. Сабирањем све три једначине добијамо :

$$(x - 2)^3 + (y - 2)^3 + (z - 2)^3 = 0.$$

Лако се уочава да је једно решење система тројка $(2, 2, 2)$. Остаје још да покажемо да нема других решења. Како је квадратна функција

$$f(a) = 6a^2 - 12a + 8 = 6(a - 1)^2 + 2$$

позитивна за свако реално a , закључујемо да су x, y, z позитивни бројеви.

Претпоставка $x > 2$ и трећа једначина доводе до закључка $z > 2$, док $z > 2$

и друга једначина имплицирају $y > 2$. Како за $x, y, z \in (2, +\infty)$ важи

$(x - 2)^3 + (y - 2)^3 + (z - 2)^3 > 0$ закључујемо да се решења још, евентуално, могу наћи у области $(0, 2) \times (0, 2) \times (0, 2)$.

Међутим, слично претходном, претпоставка $0 < x < 2$, доводи до

$$(x - 2)^3 + (y - 2)^3 + (z - 2)^3 < 0$$

па ни у овој области нема решења.

7. Како је $x + y + |x - y| = 2 \max\{x, y\}$ и $x + y - |x - y| = 2 \min\{x, y\}$ имамо

$$\begin{aligned}&||x - y| + x + y - 2z| + |x - y| + x + y + 2z \\&= |2 \max\{x, y\} - 2z| + 2 \max\{x, y\} + 2z\end{aligned}$$

$$= 2 \max\{2 \max\{x, y\}, 2z\} = 4 \max\{x, y, z\},$$

као и

$$\begin{aligned} & 2x + y + z - |y - z| - |2x - y - z + |y - z|| \\ &= 2x + 2 \min\{y, z\} - |2x - 2 \min\{y, z\}| \\ &= 2 \min\{2 \min\{y, z\}, 2x\} = 4 \min\{x, y, z\}, \end{aligned}$$

па је дати систем еквивалентан са

$$\max\{x, y, z\} = 4, \quad \min\{x, y, z\} = 2, \quad |x| + |y| + |z| = 9.$$

Сада се лако види да су решења датог система пермутације скупа $\{2, 3, 4\}$.

8. Дати систем је еквивалентан са системом

$$\begin{cases} ax^2 + (b-1)x + c = y - x \\ ay^2 + (b-1)y + c = z - y \\ az^2 + (b-1)z + c = x - z \end{cases}$$

Ако саберемо одговарајуће леве и десне стране добијамо

$$[ax^2 + (b-1)x + c] + [ay^2 + (b-1)y + c] + [az^2 + (b-1)z + c] = 0.$$

Како је због $(b-1)^2 - 4ac < 0$ сваки од три квадратна тринома за свако x , односно y, z , различит од нуле, онда претходна једнакост не може бити тачна.

Дакле, дати систем нема реалних решења.

9. На основу последње једначине у систему закључујемо да је :

$$xy = zt = 0 \quad \text{или} \quad xy = zt \neq 0.$$

Прва једнакост је еквивалентна са $(x = 0 \vee y = 0) \wedge (z = 0 \vee t = 0)$, па треба да проверимо да ли систем има решења у четири могућа случаја, што се испоставља нетачним. Дакле, $xy = zt \neq 0$, односно $t = kx$, $y = kz$, где је k неки реалан број различит од нуле. Сада имамо

$$\begin{cases} x^2 + k^2 z^2 + z^2 + k^2 x^2 = 50 \\ x^2 - k^2 z^2 + z^2 - k^2 x^2 = -40 \\ x - kz + z + kx = 0, \end{cases}$$

односно

$$(1 + k^2)(x^2 + z^2) = 50, \quad (1 - k^2)(x^2 + z^2) = -40, \quad (1 + k)x + (1 - k)z = 0$$

Поделићемо другу једначину са првом једначином и добијамо :

$$\frac{1 - k^2}{1 + k^2} = -\frac{4}{5}$$

Одатле је $k_1 = -3$, $k_2 = 3$, што нас доводи до скупа решења

$$(x, y, z, t) \in \{ (1, 6, 2, 3), (-1, 6, -2, -3), (2, -3, 1, -6), (-2, 3, -1, 6) \}.$$

6.2. Задаци са такмичења средњошколаца у периоду 2004. – 2014. године

У овом делу је направљен избор задатака са системима једначина који су се појављивали у претходних десет година у организацији Друштва математичара Србије. Оно што се може закључити, на такмичењима се најчешће системи појављују у трећој и четвртој години. Задаци са такмичења Б категорије су задаци за ученике из гимназије општег смера, док је А категорија за ученике из природног смера гимназије.

1. (трећи разред, Б категорија, општинско такмичење 2004. године)

Решити систем једначина у скупу реалних бројева :

$$\begin{cases} x^3 y^3 z^4 = 1 \\ x^2 y^4 z^4 = 2 \\ x^2 y^3 z^5 = 3 \end{cases}$$

2. (четврти разред, Б категорија, општинско такмичење 2004. године

Наћи реална решења система једначина :

$$\frac{1}{1+(x-y)^2} = z + 4, \quad \sqrt{z+3} + 2x = 8.$$

3. (четврти разред, А категорија, општинско такмичење 2004. године)

Одредити услов који треба да задовоље реални бројеви a и b тако да систем :

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \end{aligned}$$

има јединствено реално решење. У којим случајевима систем нема решење ?

4. (трећи разред, Б категорија, окружно такмичење 2004. године)

Систем једначина

$$\begin{aligned}bx + ay &= c \\ cx + az &= b \\ cy + bz &= a\end{aligned}$$

има јединствено решење. Доказати да је тада $abc \neq 0$ и наћи то решење.

5. (трећи разред, А категорија, републичко такмичење 2004. године)
У скупу реалних бројева наћи сва решење система једначина :

$$x = 1 + \sqrt{y}, \quad y = 1 + \sqrt{z}, \quad z = 1 + \sqrt{x}.$$

6. (трећи разред, Б категорија, републичко такмичење 2004. године)
У зависности од реалног параметра a решити систем једначина :

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2\end{aligned}$$

7. (четврти разред, Б категорија, републичко такмичење 2004. године)

Нека је $n \in \mathbb{N}$. Решити систем једначина :

$$\begin{aligned}x_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= 1 \\ x_2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= 3 \\ x_3(x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= 5 \\ &\vdots \\ x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= 2n - 1.\end{aligned}$$

8. (трећи разред, Б категорија, окружно такмичење 2005. године)
У зависности од реалних параметара a и b решити систем :

$$\begin{aligned}x + y + bz &= a + 2b \\ x + ay + z &= a^2 + b + 1 \\ x + y + 2bz &= a + 3b\end{aligned}$$

9. (трећи разред, Б категорија, општинско такмичење 2006. године)
Решити систем једначина :

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2.\end{aligned}$$

10. (други разред, Б категорија, окружно такмичење 2006. године)
Ако су a, b, c реални бројеви такви да је $(b - 1)^2 - 4ac < 0$, доказати да систем једначина

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= y \\ ay^2 + by + c &= z \\ az^2 + bz + c &= x\end{aligned}$$

нема реалних решења.

11. (први разред, Б категорија, општинско такмичење 2007. године)
Решити систем једначина ($[x]$ је цео део реалног броја x)

$$\begin{aligned}x - y &= 2005 \\ [x] + [y] &= 2007 .\end{aligned}$$

12. (трећи разред, Б категорија, општинско такмичење 2007. године)
Решити систем једначина :

$$\begin{aligned}2x + y + z + u &= 1 \\ x + 2y + z + u &= 1 \\ x + y + 2z + u &= 1 \\ x + y + z + 2u &= 1\end{aligned}$$

13. (четврти разред, А категорија, окружно такмичење 2007. године)
За дати природан број n , у скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина :

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ x_1^1 + x_2^2 + \dots + x_n^n &= n .\end{aligned}$$

14. (четврти разред, А категорија, окружно такмичење 2007. године)
У скупу реалних бројева решити систем једначина :

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\ (x^4 + y^2)(x^2 + y^4) &= 85 .\end{aligned}$$

15. (трећи разред, Б категорија, окружно такмичење 2007. године)
Решити систем једначина :

$$a_1 + b_1 = 23 \quad a_1 + d + b_1q = 21 \quad a_1 + 2d + b_1q^2 = 22 \quad a_1 + 3d + b_1q^3 = 29$$

где су a_1 , b_1 , d и q непознати реални бројеви .

16. (трећи разред, А категорија, општинско такмичење 2008. године)
Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем :

$$\begin{aligned}x + y + (1 - a)z &= a \\ (1 - a)x - y + z &= -1 \\ x + (a - 1)y - z &= 0\end{aligned}$$

17. (трећи разред, Б категорија, општинско такмичење 2008. године)
У скупу реалних бројева решити систем

$$\log_{|x-y|} \frac{xy}{2} = 2$$
$$x + y = xy + 1.$$

18. (четврти разред, Б категорија, општинско такмичење 2009. године)
Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -1 \\ -4x - 2y + az &= a \\ (a - 1)x + y + z &= 2. \end{aligned}$$

19. (трећи разред, Б категорија, општинско такмичење 2011. године)
Одредити све вредности реалног параметра m за које систем једначина

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z + 3t &= 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t &= 0 \\ 2x + 2y + 3z + 3t &= 0 \\ 3x + 3y + 2z + mt &= 0 \end{aligned}$$

има бесконачно много решења у скупу реалних бројева.

20. (трећи разред, Б категорија, општинско такмичење 2012. године)
Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} 3x + ay - z &= a - 1 \\ -x + y + az &= 1 \\ x + 4y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

21. (трећи разред, Б категорија, општинско такмичење 2013. године)
У зависности од реалних параметара a и b у скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -x - 2y - 2z &= a \\ 3x + 2y + bz &= 4. \end{aligned}$$

22. (трећи разред, Б категорија, општинско такмичење 2014. године)
За које вредности реалног параметра a систем једначина

$$\begin{aligned} 2x - y + z + t &= 0 \\ x + 2y - z + 4t &= 2 \\ x + 7y - 4z + 11t &= a \end{aligned}$$

има решења у скупу реалних бројева ?

23. (трећи разред, Б категорија, републичко такмичење 2014. године)
Нека је n природан број. Одредити најмањи природан број a за који систем једначина

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_n &= a \\x_1^{2014} + x_2^{2014} + \dots + x_n^{2014} &= a\end{aligned}$$

нема целобројних решења?

6.2.1. Решења задатака са такмичења од 2004.-2014. године

- Када поделимо прву и другу једначину, из тога добијамо да је $y = 2x$, док кад поделимо прву и трећу једначину, добијамо да је $z = 3x$. Када све то убацимо у прву једначину, тад добијамо да је $648x^{10} = 1$, па су решења датог система :

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt[10]{648}}, \frac{2}{\sqrt[10]{648}}, \frac{3}{\sqrt[10]{648}} \right) \text{ и } (x, y, z) = \left(\frac{-1}{\sqrt[10]{648}}, \frac{-2}{\sqrt[10]{648}}, \frac{-3}{\sqrt[10]{648}} \right).$$

Други начин да урадимо овај задатак је да логаритмујемо једначине и тада ћемо имати систем линеарних једначина којим се добија исто решење.

- Како је $(x - y)^2 \geq 0$ из прве једначине добијамо $z + 4 = \frac{1}{1 + (x - y)^2} \leq 1$, а одатле добијамо да је $z \leq -3$. Али, из друге једначине је $z \geq -3$ (да би корен био дефинисан), па добијамо да је $z = -3$. Из друге једначине онда добијамо да је $2x = 8$, тј. $x = 4$, а из прве $y = 4$. Значи, систем има јединствено решење $(x, y, z) = (4, 4, -3)$.

- Решење 1. Свакако имамо да решимо систем једначина, али ако мало боље приметимо, прва једначина представља једначину равни, док друга једначина система представља једначину сфере са средиштем у тачки $(0, 0, 0)$, полупречника $|b|$. Узимајући то у обзир, тада добијамо да за $|a| = |b|\sqrt{3}$ систем има јединствено решење. Систем нема решења ако је $|a| > |b|\sqrt{3}$.

Решење 2. Када прву једначину решимо по $x = a - y - z$, и то решење убацимо у другу једначину, тада добијамо квадратну једначину (по y) $2y^2 + (2z - 2a)y + 2z^2 - 2az + a^2 - b^2 = 0$. Дискриминанта ове једначине је $D_y = 4(-3z^2 + 2az + 2b^2 - a^2)$, и да би једначина имала јединствено решење мора бити $D_y = 0$. $D_y = 0$ има јединствено решење (по z) уколико је њена дискриминанта $D_z = 128(3b^2 - a^2) = 0$, а то је испуњено за $a^2 = 3b^2$, тј. $|a| = |b|\sqrt{3}$.

Систем нема решења уколико је $D_y < 0$, што важи за свако z уколико је $D_z < 0$ (јер нам је коефицијент уз z^2 једнак $-12 < 0$). $D_z < 0$ када је $a^2 > 3b^2$, тј. $|a| > |b|\sqrt{3}$.

4. Детерминанта овог система једначина мора бити $\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc \neq 0$ да би систем имао јединствено решење. Тада се добија решење :

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

5. Вредност корена је увек ненегативна па тада добијамо да је $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$.

Нека је, даље, $x \geq y$ и $x \geq z$. Тада је:

$$y = (x - 1)^2, \quad z = (y - 1)^2, \quad x = (z - 1)^2,$$

па из $x \geq y$ следи да је $(z - 1)^2 \geq (x - 1)^2$.

Дакле, $z \geq x$, тј. $z = x$. На сличан начин имамо да је $y = x$.

Пошто знамо да су све три вредности једнаке, заменом добијамо једначину :

$$x - \sqrt{x} - 1 = 0$$

Одатле добијамо да је $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. На крају имамо да је $x = y = z = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

6. Овај систем једначина ћемо решавати Крамеровим формулама.

Добија се да је $\Delta = (a + 3)(2 - a)$, $\Delta_x = (a + 3)(2 - a)$, $\Delta_y = 2 - a$ и $\Delta_z = 2 - a$, па за :

- 1° $a \neq 2, a \neq -3$, систем има решење $(x, y, z) = \left(1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right)$;
 2° $a = -3$, систем нема решења;
 3° $a = 2$, систем је еквивалентан систему

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

чија су решења $(x, y, z) = (5t, 1 - 4t, t)$, параметар t .

7. Сабирањем свих ових једначина добија се $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ па је $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \pm n$. Тада имамо два решења : $\left(\frac{1}{n}, \frac{3}{n}, \frac{5}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n}\right)$ и $\left(-\frac{1}{n}, -\frac{3}{n}, -\frac{5}{n}, \dots, -\frac{2n-1}{n}\right)$.

8. Вредности одговарајућих детерминанти су :

$$\Delta = b(a - 1), \quad \Delta_x = b^2(a - 1), \quad \Delta_y = ab(a - 1) \quad \text{и} \quad \Delta_z = b(a - 1).$$

- 1° За $a \neq 1, b \neq 0$ систем има јединствено решење $x = b, y = a, z = 1$.

У наредна два случаја су све детерминанте једнаке 0 и онда не знамо да ли систем има вишеструко решење или нема решења. То морамо установити Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{l} 2^\circ \text{ За } b = 0 \text{ добија се систем} \\ \begin{array}{rcl} x + y & = & a \\ x + ay + z & = & a^2 + 1 \\ x + y & = & a \end{array} \end{array}$$

који има вишеструко решење $x = t$, $y = a - t$, $z = at - t + 1$, $t \in R$.

$$\begin{array}{l} 3^\circ \text{ За } a = 3 \text{ добија се систем} \\ \begin{array}{rcl} x + y + bz & = & 1 + 2b \\ x + y + z & = & 2 + b \\ x + y + 2bz & = & 1 + 3b \end{array} \end{array}$$

који има вишеструко решење $x = t$, $y = b + 1 - t$, $z = 1$, $t \in R$.

Напомена: У 2° и 3° узели смо да је x слободна променљива и додељена јој је вредност параметра: $x = t$, $t \in R$. Могуће је и доделити и било којој другој променљивој вредност параметра и тад се добија исто решење, само мало другачије записано.

9. Због дефинисаности логаритма имамо $x, y, z > 0$. Дати систем једначина је еквивалентан са системом

$$\begin{array}{l} x\sqrt{yz} = 4 \\ y\sqrt{zx} = 9 \\ z\sqrt{xy} = 16 \end{array}$$

Множењем све три једнакости добијамо $(xyz)^2 = 24^2$ тј. $xyz = 24$. Одавде и из претходних једначина лако се добија да је $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{27}{8}$, $z = \frac{32}{3}$.

10. Дати систем је еквивалентан са системом

$$\begin{array}{l} ax^2 + (b - 1)x + c = y - x \\ ay^2 + (b - 1)y + c = z - y \\ az^2 + (b - 1)z + c = x - z \end{array}$$

Ако саберемо одговарајуће леве и десне стране, добијамо:

$$[ax^2 + (b - 1)x + c] + [ay^2 + (b - 1)y + c] + [az^2 + (b - 1)z + c] = 0$$

Како је због $(b - 1)^2 - 4ac < 0$ сваки од три квадратна тринoma за свако x , односно y, z , различит од нуле, онда последња једнакост не може бити тачна. Дакле, дати систем нема реалних решења.

11. Прву једначину датог система можемо записати и у облику:

$$[x] + \{x\} - [y] - \{y\} = 2005$$

одакле следи да $\{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$, тј. $\{x\} = \{y\}$, због $0 \leq \{x\}, \{y\} < 1$, па је

$$\begin{aligned} [x] - [y] &= 2005 \\ [x] + [y] &= 2007 \end{aligned}$$

тј. $[x] = 2006$, $[y] = 1$. Дакле, дати систем има бесконачно много решења и $R = \{(2006 + \omega, 1 + \omega) \mid 0 \leq \omega < 1\}$.

12. Сабирањем једначина добијамо $x + y + z + u = \frac{4}{5}$ и даље одузимањем одговарајућих једначина налази се да је решење система :

$$x = y = z = u = \frac{1}{5}.$$

13. Нека је $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ решење датог система. Одузимањем прве једначине од друге и груписањем сабирака, добијамо :

$$\sum_{i=2}^n (x_i^i - 1 - i(x_i - 1)) = 0. \quad (*)$$

Доказујемо да је сваки сабирак леве стране последње једначине ненегативан.

Први начин : Нека је $2 \leq i \leq n$. Коришћењем неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо :

$$\frac{x_i^{i+i-1}}{i} = \frac{x_i^{i+1+\dots+1}}{i} \geq \sqrt[i]{x_i^i \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = x_i.$$

Знак једнакости важи акко је $x_i^i = 1$, односно $x_i = 1$.

Други начин : Посматрајмо за фиксирано $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, полином $P_k(x) = x^k - 1 - k(x - 1)$. Како је $P_k'(x) = kx^{k-1} - k = k(x^{k-1} - 1)$ закључујемо да се на $[0, \infty)$ минимум функције $P_k(x)$ достиже за $x = 1$, при чему је $P_k(1) = 0$.

Овим смо доказали да су заиста сви сабирци леве стране у једначини (*) ненегативни, па како је њихов збир једнак нули, добијамо да и они морају бити једнаки нули. Ово је једино могуће у случају $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$. Сада лако налазимо да је и $x_1 = 1$ чиме смо доказали да систем има јединствено решење $(1, 1, 1, \dots, 1)$.

14. Нека је $xu = a$. Тада користећи $x + y = 1$ добијамо :

$$\begin{aligned} 85 &= (x^4 + y^2)(x^2 + y^4) = x^6 + y^6 + x^4y^4 + x^2y^2 = \\ &= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + x^4y^4 + x^2y^2 = \\ &= (x^2 + y^2)((x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2) + x^4y^4 + x^2y^2 \\ &= (1 - 2a)((1 - 2a)^2 - 3a^2) + a^4 + a^2 = a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 6a + 1, \end{aligned}$$

односно $a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 6a - 84 = 0$. Једно решење ове једначине је $a = -2$, одакле се лако добија $a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 6a - 84 = (a + 2)P(a)$, где је $P(a) = a^3 - 4a^2 + 18a - 42$. Како је $P'(a) = 3a^2 - 8a + 18 > 0$ за свако $a \in \mathbb{R}$, то је $P(a)$ растућа функција, па једначина $P(a) = 0$ има највише једно реално решење.

Како је $P(a)$ полином непарног степена, то он има бар једну реалну нулу. Дакле, једначина $P(a) = 0$ има тачно једно реално решење. Како је $P(1)P(4) < 0$, због непрекидности, закључујемо да је то решење из интервала $(1, 4)$. За ову вредност a важило би $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - 2a < -1$, што није могуће. Овим смо доказали да је једина могућност $a = -2$. Тада је лако установити да су решења полазног система уређени парови $(2, -1)$ и $(-1, 2)$.

15. Одузимањем прве од друге, друге од треће и треће од четврте једначине, добијамо еквивалентни систем :

$$a_1 + b_1 = 23 \quad d + b_1(q - 1) = -2 \quad d + b_1q(q - 1) = 1 \quad d + b_1q^2(q - 1) = 7.$$

Одузимањем друге од треће и треће од четврте једначине, добијамо еквивалентни систем :

$$a_1 + b_1 = 23 \quad d + b_1(q - 1) = -2 \quad b_1(q - 1)^2 = 3 \quad q = 2.$$

Решење последњег, а тиме и нашег система је

$$q = 2 \quad b_1 = 3 \quad d = -5 \quad a_1 = 20.$$

16. Како је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 4 = (a-2)^2(a+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & 1 & 1-a \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = a + 0 + (a-1)^2 - a(a-1) - 1 - 0 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + a - a^2 = -(a-2)(a+1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1-a & -1 & -1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -a^3 + 2a^2 + a - 2 = -(a-2)(a+1)(a-1),$$

за $a \neq \{-1, 2\}$ важи $\Delta \neq 0$, па систем за ове a има једно решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left(0, -\frac{1}{a-2}, -\frac{a-1}{a-2} \right).$$

За $a = 2$ прва једначина система гласи $x + y - z = 2$, а трећа $x + y - z = 0$, па у овом случају систем нема решења (што се могло закључити и из тога што је $a = 2$ двострука нула Δ , а једнострука Δ_y и Δ_z).

За $a = -1$ систем постаје

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + z &= -1 \\ x - 2y - z &= 0. \end{aligned}$$

Одузимањем прве једначине од треће, односно двоструке прве једначине од друге, добија се еквивалентан систем :

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= -1 \\ -3y - 3z &= 1 \\ -3y - 3z &= 1\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= -1 \\ -3y - 3z &= 1\end{aligned}$$

одакле је (за произвољно $z \in R$) $y = -z - \frac{1}{3}$ и $x = -1 - y - 2z = -1 + z + \frac{1}{3} - 2z = -z - \frac{2}{3}$, па у овом случају систем има бесконачно много решења

$$\left\{ \left(-z - \frac{2}{3}, -z - \frac{1}{3}, z \right) \mid z \in R \right\}$$

17. Једначине из задатка су дефинисане за $\frac{xy}{2} > 0$, $|x - y| > 0$ и $|x - y| \neq 1$.

Из друге једначине следи $(x - 1)(y - 1) = 0$, одакле је $x = 1$ или $y = 1$.

Ако је $y = 1$, из прве једначине следи $\frac{x}{2} = |x - 1|^2 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

одакле је $2x^2 - 5x + 2 = 0$, тј. $x \in \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$. Међутим, ако је $x = 2$, тада је $|x - y| = |2 - 1| = 1$, па ово није решење.

Како је систем симетричан по x и y , за $x = 1$ добија се решење $y = \frac{1}{2}$.

Дакле, реална решења система из задатка су $\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ и $\left(1, \frac{1}{2} \right)$.

18. Како је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & a \\ a-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ a & -2 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & a & a \\ a-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2a + 4 = (-2)(a-2)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & a \\ a-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3)$$

за $a \notin \{2, 3\}$ важи $\Delta \neq 0$, па за овакве a систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left(\frac{1}{a-3}, -\frac{2}{a-3}, 1 \right).$$

Ако је $a = 3$, тада је $\Delta_x \neq 0$ и $\Delta = 0$, па у овом случају систем нема решења.

Ако је $a = 2$ систем постаје

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -1 \\ -4x - 2y + 2z &= 2 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

Одузимањем двоструке треће једначине од прве, односно додавањем четвороструке треће другој, добија се еквивалентан систем

$$\begin{aligned} -y - 3z &= -5 \\ 2y + 6z &= 10 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

односно (како су прва и друга једначина еквивалентне)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ -y - 3z &= -5, \end{aligned}$$

одакле је (за произвољно $z \in R$) $y = 5 - 3z$ и $x = 2 - y - z = 2 - (5 - 3z) - z = 2z - 3$, па у овом случају систем има бесконачно много решења

$$\{(2z - 3, 5 - 3z, z) \mid z \in R\}.$$

19. Уколико прву једначину помножимо редом са $-\frac{3}{2}, -1$ и $-3/2$ и додамо другој, трећој и четвртој једначини, добијамо еквивалентан систем

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z + 3t &= 0 \\ -\frac{5}{2}y - \frac{5}{2}t &= 0 \\ -y + z &= 0 \\ -\frac{3}{2}y - z + \left(m - \frac{9}{2}\right)t &= 0. \end{aligned}$$

Уколико сада помножимо другу једначину редом са $-\frac{2}{5}$ и $-\frac{3}{5}$ и додамо трећој и четвртој једначини, добијамо еквивалентан систем

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z + 3t &= 0 \\ -\frac{5}{2}y - \frac{5}{2}t &= 0 \\ z + t &= 0 \\ -z + (m - 3)t &= 0. \end{aligned}$$

Уколико сада четвртој једначини додамо трећу, добијамо

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z + 3t &= 0 \\ -\frac{5}{2}y - \frac{5}{2}t &= 0 \\ z + t &= 0 \\ (m - 2)t &= 0. \end{aligned}$$

Уколико је $m \neq 2$, тада је $t = 0$, па из преосталих једначина добијамо $z = y = x = 0$, тј. систем има јединствено решење.

Уколико је $m = 2$, тада је $t = \alpha$, где је α произвољан реалан број. Из преосталих једначина добијамо $z = -\alpha$, $y = -\alpha$ и $x = \alpha$, па систем има бесконачно много решења.

Дакле, систем има бесконачно много решења ако и само ако је $m = 2$.

20. Уколико трећу једначину додамо другој, а затим трећу једначину помножену са -3 додамо првој добијамо еквивалентан систем једначина

$$(a - 12)y - 10z = a - 10$$

$$5y + (a + 3)z = 4$$

$$x + 4y + 3z = 3.$$

Уколико другу једначину новодобијеног система једначина помножимо са $-\frac{a-12}{5}$ и додамо првој, добијамо једначину

$$\frac{-a^2+9a-14}{5} \cdot z = \frac{a-2}{5}. \quad (*)$$

Како је $-a^2 + 9a - 14 = -(a - 2)(a - 7)$, размотрићемо следећа три случаја :

Први случај : $a \neq 2$, $a \neq 7$. Тада је из (*) $z = -\frac{1}{a-7}$, па је $y = \frac{a-5}{a-7}$ и $x = \frac{-a+2}{a-7}$.

Други случај : $a = 7$. Једначина (*) нема решења, па ни полазни систем нема решења.

Трећи случај : $a = 2$. Тада свако $z = t$ задовољава (*), па је $y = \frac{4}{5} - t$ и $x = t - \frac{1}{5}$.

Дакле, у овом случају решења система су $\left(t - \frac{1}{5}, \frac{4}{5} - t, t\right)$ за све $t \in \mathbb{R}$.

21. Детерминанте овог система су

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & b \end{vmatrix} = 2 - b, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -2 & -2 \\ 4 & 2 & b \end{vmatrix} = -ab + 2a - 2b + 4,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & -2 \\ 3 & 4 & b \end{vmatrix} = -ab - 3a + b - 2, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & a \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = a.$$

Размотримо зато следеће случајеве:

1° $\Delta = 0$, тј. $b = 2$. Тада је $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = -a$, $\Delta_z = a$, па имамо следећа два подслучаја.

1.1° $a \neq 0$. Једначина нема решења.

1.2° $a = 0$. У овом случају је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па систем решавамо Гаусовом методом елиминације. Полазни систем је еквивалентан са

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ -y - z &= 1 \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Дакле, z је слободна променљива, тј. $z = t$ за $t \in R$. Даље, из друге и прве једначине редом добијамо $y = -1 - t$ и $x = 2$. Скуп решења једначине у овом случају је $\{(2, -1 - t, t) \mid t \in R\}$.

2° $\Delta \neq 0$, тј. $b \neq 2$. У овом случају једначина има јединствено решење, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$, односно $(x, y, z) = \left(a + 2, \frac{ab - 3a + b - 2}{2 - b}, \frac{a}{2 - b}\right)$.

22. Додавањем друге једначине помножене са -1 трећој, и друге једначине помножене са -2 првој, добијамо следећи еквивалентни систем једначина

$$\begin{aligned}x + 2y - z + 4t &= 2 \\ 5y - 3z + 7t &= a - 2 \\ -5y + 3z - 7t &= -4.\end{aligned}$$

Додавањем друге једначине трећој, закључујемо да за $a \neq 6$ систем нема реалних решења. За $a = 6$ једно решење система је четворка $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0)$ па је $a = 6$ једино решење задатка.

23. Нека је $1 \leq a \leq n$. Тада је $x_1 = \dots = x_a = 1$ и $x_{a+1} = \dots = x_n = 0$ једно решење датог система. Дакле, за све $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ дати систем има решења. Докажимо да за $a = n + 1$ дати систем нема решења.

Претпоставимо супротно, тј. да је $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ једно решење датог система за $a = n + 1$. Из прве једначине система закључујемо да не могу сви x_i , $1 \leq i \leq n$, бити једнаки нула или један, јер је тада $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n$. Зато, за неко $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ важи $x_i \notin \{0, 1\}$. Приметимо да за сваки цео број x важи $x^{2014} \geq x$, при чему једнакост важи ако и само ако је $x \in \{0, 1\}$. Заиста, ово је тачно за $x \in \{-1, 0, 1\}$, док за $|x| > 1$ важи $x^{2014} = |x| \cdot |x|^{2013} > |x| \geq x$. Дакле, како нису сви x_i , $1 \leq i \leq n$, из скупа $\{0, 1\}$, то је

$$n + 1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n < x_1^{2014} + x_2^{2014} + \dots + x_n^{2014} = n + 1$$

што је контрадикција.

На основу претходног разматрања закључујемо да је најмањи природан број a за који дати систем нема решења једнак $n + 1$.

7 ЗАКЉУЧАК

У изради овог мастер рада ношена идејом да су системи једначина битна област не само у математици, већ и у другим наукама и примени система у многим областима, осврнула сам се на све делове школства где се појављују системи, у основној и средњој школи.

Трогодишње радно искуство, једногодишње у средњој школи и двогодишње у основној школи, и припрема својих ученика за завршни испит ме је навело да ово буде тема мог мастер рада, односно да на једном месту буде све што је битно за системе једначина у школи, начин обраде и многобројни примери који могу да се користе у редовној настави. Такође, битна је повезаност математике и информатике где ученици усвојена математичка знања могу применити кроз цртање графика у програму ГеоГебра који се изучава у основној школи. Осим тога, од прве године рада сам имала ученике за додатну наставу који су имали успеха и спремајући их за окружно и републичко такмичење, дошла је идеја да у раду буду заступљени задаци са такмичења из ове области како би допринели њиховој бољој припреми.

Идеја је да читав рад буде намењен ученицима и наставницима као наставно средство које нуди приказ како теоријског дела, тако и задатака које стручно методички припремљени наставници уз савремен приступ (у овом раду је то ГеоГебра) користе у настави.

Свакако, циљ је да кроз ову област система једначина, као и кроз друге области из математике, ученици стичу способност изражавања математичким језиком, јасноћу и прецизност изражавања у писменом и усменом облику. Такође, примена математике је јако битна за решавање разноврсних задатака из животне праксе и ученици кроз то морају схватити смисао учења и тежити да достигну постављене исходе и стекну математичке компетенције!

.

8 ЛИТЕРАТУРА

- [1] Јован Д. Кечкић, *Математика са збирком задатака за III разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2003.
- [2] Павле Миличић; Владимир Стојановић; Зоран Каделбург; Бранислав Боричић, *Математика за I разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2000.
- [3] Живорад Ивановић; Срђан Огњановић, *Математика 1 – збирка задатака за I разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд, 2010.
- [4] *Тангента 10, материјали за младе математичаре*, Свеска 45, Друштво математичара Србије, Београд, 2006.
- [5] Небојша Икодиновић; Слађана Димитријевић, *Математика за осми разред основне школе*, Klett, Београд 2012.
- [6] Владимир Балтић; Душан Ђукић; Ђорђе Кртинић; Иван Матић, *Припремни задаци за математичка такмичења средњошколаца у Србији*, Материјали за младе математичаре, Свеска 49, Друштво математичара Србије, Београд, 2008.
- [7] Живорад Ивановић; Срђан Огњановић, *Математика 3 – збирка задатака за III разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд, 2008.
- [8] Вене Богославов, *Збирка решених задатака из математике 1*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2005.
- [9] Богољуб Маринковић; Ђорђе Кадијевић, *Метода лажне претпоставке (у математици и информатици)*, Архимедесови материјали за младе математичаре, Свеска 78, Архимедес, Београд, 1991.
- [10] Градимир Војводић; Војислав Петровић; Радивоје Деспотовић; Бранимир Шешеља, *Математика за II разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2005.
- [11] Живорад Ивановић; Срђан Огњановић, *Математика 2 – збирка задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд, 2010.
- [12] <https://tajnisvijetmatematike.wordpress.com/2011/11/09/ukratko-o-geogebri/>
- [13] Материјали из гимназије "Бранислав Петронијевић" са Уба – задаци са средњошколских такмичења у периоду 2004.-2014. године
- [14] <http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/nm/229/nm511207.pdf>

САДРЖАЈ

1	Увод.....	2
2	Историјски део	4
2.1.	Системи линеарних једначина са две непознате и	4
	његово решавање у прошлости.....	4
2.1.1.	Први начин решавања система једначина.....	5
2.1.2.	Други начин решавања система једначина	7
3	Системи једначина у основној школи	12
3.1.	Системи линеарних једначина у основној школи	12
3.2.	Линеарна једначина са две непознате.....	14
3.3.	Систем од две линеарне једначине с две непознате	15
3.3.1.	Графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате	16
3.3.2.	Еквивалентност система линеарних једначина.....	20
3.3.3.	Решавање система линеарних једначина методом замене.....	22
3.3.4.	Решавање система једначина методом супротних коефицијената.....	25
3.4.	Примена система линеарних једначина	28
3.5.	Системи линеарних једначина с две непознате - задаци за вежбање.....	32
3.6.	Анкета	36
3.6.1.	Резултати анкете у броју заокружених одговора	37
3.6.2.	Резултати анкете у процентима	38
3.6.3.	Закључак анкете	39
3.7.	Пример теста за ученике осмог разреда – системи линеарних једначина	41
4	Геометрија.....	42
5	Системи једначина у средњој школи	43
5.1.	Системи линеарних једначина у I разреду средње школе	43
5.2.	Системи са више непознатих.....	46
5.2.1.	Гаусов поступак решавања система једначина	46
5.2.1.1.	Примери решавања система са 3 једначине Гаусовим поступком.....	50
5.2.2.	Примери задатака за самостално решавање	54
5.3.	Системи квадратних једначина са две непознате.....	56
II разред средње школе.....		56
5.3.1.	Систем од једне квадратне и једне линеарне једначине са две непознате	56

5.3.2. Систем од две квадратне једначине које садрже само ax^2 и ay^2 и слободне чланове	57
5.3.3. Систем од две квадратне једначине од којих је једна хомогена	58
5.3.4. Системи који се свде на хомогене једначине	59
5.3.5. Решавање сложенијих случајева	59
5.3.6. Графичко решавање система $y = ax^2 + bx + c$ и $y = mx + n$	59
5.4. Детерминанте реда два и три - системи линеарних једначина	62
III разред средње школе.....	62
5.4.1. Особине детерминаната другог реда.....	65
5.4.2. Детерминанте реда три.....	67
5.4.2.1 Дефиниција и израчунавање детерминанти.....	67
5.4.2.2. Особине детерминаната трећег реда	69
5.5. Решавање система са три једначине са три непознате преко детерминанти	73
5.6. Грешке ученика при изради задатка на писменом – решавање система једначина користећи начин преко детерминанти.....	77
5.6.1. Грешке у задацима – примери из вежбанки ученика.....	79
6 Проблемски задаци	80
6.1. Избор сложенијих задатака из збирке задатака објављених у рубрици “задаци из математике” часописа Тангента 1995-2005.....	80
6.1.1. Избор сложенијих задатака из збирке задатака објављених у рубрици “задаци из математике” часописа Тангента 1995-2005 – решења	82
6.2. Задаци са такмичења средњошколаца у периоду 2004. – 2014. године	86
6.2.1. Решења задатака са такмичења од 2004.-2014. године	90
7 Закључак	99
8 Литература.....	100
САДРЖАЈ	101

Биографија

Биљана Бранковић је рођена 9. децембра 1989. године у Ваљеву. Основну школу „Милан Муњас“ на Убу је завршила 2004. године као носилац Вукове дипломе, а гимназију „Бранислав Петронијевић“, такође на Убу, 2008. године као ђак генерације. Основне академске студије Математичког факултета Универзитета у Београду је уписала 2008. године. Дипломирала је 25. септембра 2012. године, са просечном оценом 8.33. Мастер академске студије Математичког факултета у Београду је уписала 2012. године.

Школске 2012/2013 била је запослена у Техничкој школи на Убу, а од септембра 2013. године је запослена у основној школи „Милан Муњас“ на Убу као професор математике.