Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Elektronske lekcije o izabranim temama iz planimetrije za više razrede osnovne škole, kreirane korišćenjem programskog paketa GeoGebra

-master rad-

Mentor:
prof. dr Miroslav Marić

Student:
Emina Hukić
1073/2014

Beograd, 2016.

Članovi komisije:
prof. dr Miroslav Marić, mentor
prof. dr Milan Božić
prof. dr Srđan Vukmirović

Sadržaj

Uvod

Razvoj nauke, tehnologije i znanja savremenog društva uslovili su i uslovljavaju promene u konceptu obrazovanja, nastavnim sadržajima, tehnologiji nastave kao i odnosima između profesora i učenika. Dijapazon primene računara u nastavi praktično je neograničen. Računari su efikasna nastavna sredstva koja omogućavaju kontrolu, regulisanje i vođenje nastave, upravljanje procesom učenja putem stalne povratne informacije koja ima ogromnu motivacionu moć. U nastavi gde su zastupljene informacione tehnologije aktivacija učenika i njegov samostalni rad je neizostavan.

Svrha rada je da unese dinamiku u proces interakcije između učenika i nastavnika, učenika međusobno; da planimetriju učini zanimljivijom i jasnijom; omogući lakšu vizuelizaciju planimetrije i pritom poboljša kvalitet nastave. Jedan od dobrih primera kako je programski paket GeoGebra korišćen kao nastavno sredstvo može na naći u [1].

Rad je podeljen na osam poglavlja, u kojima nije namera konzistentno izlaganje euklidske geometrije, već geometrije vezane za izabrane primere obrađene u sledećim poglavljima. U prvom se govori o uvođenju inovacija u nastavu matematike. U drugom poglavlju definisani su osnovni geometrijski objekti. U GeoGebri su vizuelizovani njihovi međusobni položaji. U trećem poglavlju definisani su pojam ugla i vrste uglova. U četvrtom poglavlju definisan je pojam trougla. Vrste, značajne tačke, nejednakosti i odnos uglova i stranica trougla vizuelizovani su u GeoGebri. U petom poglavlju definisan je pojam četvorougla. Vrste, osobine četvorougla, kao i računanje površine vizuelizovani su u GeoGebri. U šestom poglavlju definisan je krug. Postupak izračunavanja površine kruga, dužine kružnog luka, površine isečka vizuelizovani su u GeoGebri. U sedmom poglavlju predstavljena je Pitagorina teorema, njena primena na izračunavanje nepoznatih elemenata trougla, četvorougla kao i pri konstrukciji tačaka koje odgovaraju iracionalnim brojevima. Ilustracija dokaza Pitagorine teoreme predstavljena je u GeoGebra apletu. U osmom poglavlju predstavljena je Talesova teorema. U GeoGebri je vizuelizovana konstrukcija četvrte proporcionale kao i podela duži.

Ovaj materijal namenjen je učenicima, kao i profesorima matematike i javno je dostupan na adresi http://alas.matf.bg.ac.rs/∼ml10175/MRad/index.html.

Ovom prilikom se zahvaljujem svom mentoru, profesoru dr Miroslavu Mariću najpre zato što je prihvatio mentorstvo, a onda predstavio programski paket GeoGebra objasnivši njegove mogućnosti i dao mi ideju kako da svoju zamisao realizujem u master rad. Naravno, zahvaljujem se na savetima, sugestijama i predlozima koje sam imala prilikom izrade rada.

Zahvaljujem se porodici na razumevanju, strpljenju i podršci koju mi pružaju sve vreme.

1 Uvođenje inovacija u nastavu matematke

Pojam inovacija je dosta relativan, najčešće nejedinstven i višedimenzionalan. Obično se pod tim pojmom misli na promenu, modifikaciju, poboljšanje postojećeg ili pronalaženje novih rešenja. Inovacija ne mora pretendovati na nešto novo ili sasvim novo ali je nešto bolje, efikasnije. Važno je da novina doprinosi većoj racionalizaciji, ekonomičnosti i nastavnoj efikasnosti.

Kao pojam najčešće se odnosi na uvođenje i primenu novih metoda, postupaka, načina nastavnog rada, modela, sredstava i novih nastavnih mera. Pojam se dosta uklapa u pojam modernizacije ili osavremenjivanja vaspitno-obrazovnog rada. Još više u pojam racionalizacije nastave. Racionalizacija, slično proverenim i verifikovanim inovacijama, znači i stalno poboljšavanje i usavršavanje organizacije nastave, upravljanje i vođenje učenja, svrsishodnost standarda, mera, postupaka i metoda, racionalno angažovanje nastavničke i učeničke energije, ekonomično angažovanje upotrebljivih nastavnih sredstava, raspoloživog vremena.

U svakodnevnoj komunikaciji bogatstvo pojma inovacije različito se interpretira. U svakom slučaju to je ideja koja je za pojedinca nova, različita od postojećih, a za izvođenje nastave racionalnija i efikasnija od prethodne. To su ipak pojave stvaralačkog nemira, stvaralačke aktivnosti koje teže poboljšanju, napretku, racionalizaciji i intenzifikaciji nastave. One nisu inovativne niti jednake za sve i za uvek. Ako se masovno i često upotrebljavaju postaju rutina, kliše, model, ustaljeni obrazac.

Danas se ne može zamisliti preobražaj vaspitanja i obrazovanja, pa ni nastave matematike, bez unošenja različitih inovacija bilo da su one sistematskog ili praktično-metodičkog karaktera. Gotovo čitav svet, naročito razvijene zemlje, danas izdvajaju ogromna sredstva, ljude i napore za istraživanje novog, za traženje neotkrivenog i nepronađenog.

Inovacije nezadrživo izrastaju u presudnu prednost svake zemlje, a one u obrazovanju predstavljaju osnov za ekonomsku dobit. Zajedno sa tehnološkom pismenošću, predstavljaju sredstvo i cilj razvoja. One su suštinski pokretač stalnog unapređivanja vaspitno-obrazovnog, a posebno nastavnog procesa [4]. Prihvatanje i uvođenje inovacija u obrazovnu delatnost, što znači i u nastavu matematike, je ujedno i reakcija na tradicionalni sistem obrazovanja, odnosno kritika i negacija tradicionalnog izvođenja nastave matematike. Zato nije pogrešno ako nastavnici i u nastavi matematike svoje stručne napore usmeravaju na inovaciju programskih sadržaja, traže načine kako da rade bolje, uspešnije, racionalnije i efikasnije. Još je manja greška ako se napuštaju okoštali, tradicionalni modeli obrazovanja i ustaljeni recepti nastavnih sadržaja, a da se pritom ne traže nova, intenzivnija i uspešnija rešenja.

Čitav svet, bez izuzetka, danas razmišlja o metodama i načinima modernizacije i osavremenjavanja obrazovanja, osavremenjavanja svakog nastavnog predmeta pa i nastave matematike. Međutim, iako se preobražaj vaspitanja i obrazovanja, a i programski sadržaji svakog predmeta, ne može ni zamisliti bez unošenja naučno potvrđenih i u praksi dokazanih inovacija, određena istraživanja ukazuju, a svakodnevna praksa potvrđuje, da je obrazovanje najmanje pretrpelo unutrašnju strukturnu promenu (ili se sporo dešava) i da je vrlo otporno na prihvatanje inovativnog rada. Druge delatnosti ljudskog rada znatno ih brže prihvataju, pronalaze i primenjuju efikasnije načine rada. Promene u nauci ne prate promene u obrazovanju pa je sve veći broj onih koji kritikuju današnju školu, nastavnike, njenu organizaciju i efikasnost [3]. Sve je to dovelo i nastavu matematike do stereotipije, ustaljenih šablona, ponavljanja poznatih metodičko-didaktičkih modela i nesavremenog izvođenja programskih sadržaja. Nastavnici su i dalje poklanjali pažnju verbalno-receptivnim modelima što je za ovu nastavu svojevrsna opasnost. Zato, škola u celini, a nastava matematike posebno, trebala bi postati nastava specijalizovanih učionica, računara, videa, individualizacije nastave, programiranih materijala, kontinuiranih objektivnih ispitivanja, nastave različitih nivoa složenosti, diferencirane nastave, problemskog rada, grupnog oblika rada, rada u parovima, aktivnog i interaktivnog učenja itd.

Bez upotrebe inovacija i modernije obrazovne tehnologije u nastavi uopšte, pa i matematike i dalje ćemo razvijati umesto aktivnosti učenika aktivnost nastavnika. Novija saznanja govore o tome da je najtemeljnije ono znanje do koga se došlo putem rada, putem eksperimenta, kroz sopstveno delovanje, a najpovršnije ono koje se stiče u poziciji pasivnog receptora. Na ovaj način se ne negira nastavnik, već njegova uloga kao isključivog izvora znanja, posrednika između nauke i učenika. Uloga nastavnika jeste da usmeri učenika, podstakne, da ga uči učenju. Znanje treba zarađivati. Sticanje znanja, učenja i veština je veliki i vlastiti napor. Samostalan napor. U matematici je taj rad specifičan, to je rad mislima, apstraktan rad.

Umesto pamćenja beskonačnog niza činjenica i podataka, u nastavi je potrebno ovladati metodama i tehnikama učenja, koristiti savremenu nastavnu tehnologiju, inovativne oblike kako bi aktivnost učenika, njihov stvaralački rad bili u prvom planu. Inovacije u nastavi matematike nisu prihvatane i upotrebljavane bar u onoj meri u kojoj zaslužuju. Prihvatanje, uvođenje i primena inovativnih nastavno efikasnih načina rada u nastavi matematike značilo bi ne samo osavremenjivati nastavni proces i podizati njen kvalitet, već i sledeće:

- znatnije ugrađivanje tehnike u nastavni proces, tehnološke, pedagoške i metodičko-didaktičke novine;
- sadržaje i metode rada prilagođavati individualnim mogućnostima učenika;
- umanjiti stereotipnost i zastarelu organizaciju nastavnog procesa;
- predominantnu ulogu nastavnika smanjiti na manju meru, aktivnost nastavnika pomerati na aktivnost učenika;
- da nastavnik oslobađa učenike frustracija i sputanosti kako bi njihov umni, socijalni i emocionalni razvoj brže došao do izražaja;
- da učenika više osposobljavamo za samoobrazovanje, samoučenje i samoedukaciju itd.

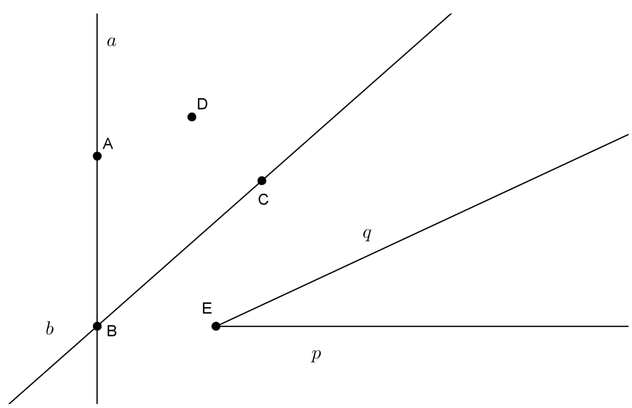
Bez obzira na mnoge pogodnosti koje inovacije pružaju, ili mogu da pruže one ne mogu rešiti sve probleme današnje nastave. U promene treba ulaziti hrabro, bez oklevanja.

2 Osnovni geometrijski objekti

Sadržaj obrađen u poglavlju Osnovni geometrijski objekti realizuje se u nastavnom programu za 5. i 8. razred osnovne škole. U 5. razredu, nakon obrade pojma skupova geometrijski objekti se predstavljaju kao razni skupovi tačaka. Posebno su izdvojeni tačka, prava i ravan koji se ne definišu. Dok se u 8. razredu znanje proširuje i produbljuje. U ovom poglavlju predstavljeni su osnovni geometrijski objekti i njihovi međusobni položaji.

Osnovni geometrijski pojmovi su tačka, prava i ravan. Tačke se obeležavaju velikim slovima latinice $(A, B, C, ...)$, prave malim slovima latinice $(a, b, c, ...)$, a poluprave znakom početne tačke i malim slovom latinice koje je oznaka neograničene prave linije $(Ap, Aq, Br, ...)$. Ravni se obeležavaju slovima grčkog alfabeta (α, β, γ,...).

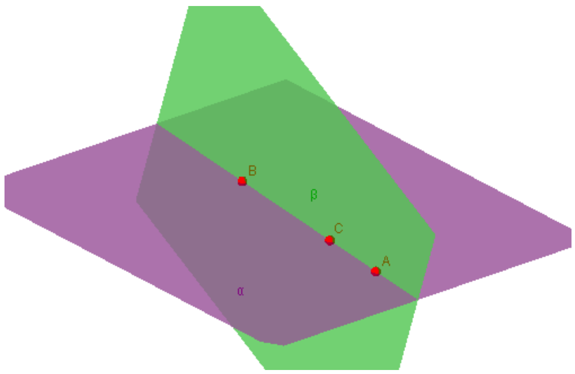
U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *osnovni geometrijski objekti* korišćenjem GeoGebre pritiskanjem dugmeta *grafički prikaz nekih tačaka* prikazuju se tačke A, B, C, D i E. Svaka prava je određena sa dve tačke. Na primer prava a, koja se pojavljuje pritiskanjem dugmeta a, je jedinstveno određena tačkama A i B, što se veoma jednostavno može zaključiti pomoću ovog apleta. Naime, menjanjem položaja tačke A u apletu, menja se i položaj prave a. Prava b je određena tačkama B i C, pritiskanjem dugmeta b pojavljuje se prava b. Na slici 1 prikazan je pomenuti aplet. U apletu je pomeranjem datih tačaka moguće posmatrati položaje u kojima se mogu naći tačke, prave i poluprave.



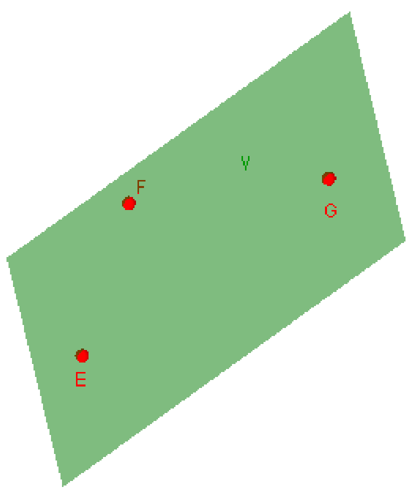
Slika 1: Aplet u kom su prikazani osnovni geometrijski objekti

Ravan je određena sa tri tačke. Recimo, ako se knjiga podupre u dvema tačkama sa dve olovke neće ostati u horizontalnom položaju. Obrnuće se oko prave koju određuju te tačke, pri čemu će menjajući položaj odrediti još mnogo ravni. Neophodna je još jedna tačka kako bi ravan bila u ravnoteži. Dakle, ravan je određena sa tri nekolinearne tačke. U apletima kreiranim za elektronsku lekciju *osnovni geometrijski objekti* korišćenjem GeoGebre prikazane su ravni α

i β koje sadrže kolinearne tačke A, B i C i nekolinearne E, F i G koje određuju ravan γ. Ravan određena tačkama A, B i C nije jedinstveno određena kao u slučaju ravni γ kada cu tačke E, F i G nekolinearne. Ravni α, β i γ se u apletima mogu posmatrati iz različitih uglova. Opisani apleti predstavljeni su na slikama 2 i 3.



Slika 2: Aplet koji predstavlja kolinearne tačke i ravni koje određuju



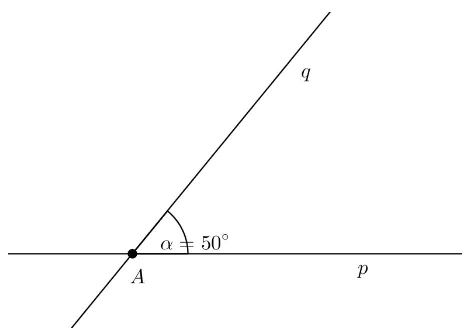
Slika 3: Aplet koji predstavlja nekolinearne tačke i ravan koju određuju

Više o osnovnim geometrijskim objektima može se naći u knjigama [5], [6] i [11] popisa literature.

2.1 Odnos dve prave

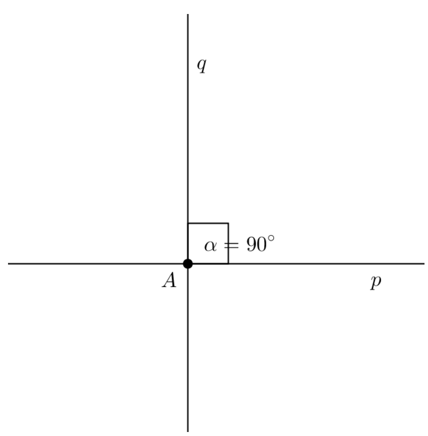
Dve prave mogu da se seku, da budu paralelne i da se mimoilaze. U apletima kreiranim za elektronsku lekciju *odnos dve prave* korišćenjem GeoGebre moguće je posmatrati različite položaje u kojima se mogu naći dve prave. Posebno, različiti uglovi koje zaklapaju kada se seku, paralelne prave, kao i kvadar čije ivice predstavljaju delove mimoilaznih pravih koji se može posmatrati iz različitih uglova.

Ako se dve prave seku, njihov presek je tačno jedna tačka (slika 4). Dve prave koje se seku zaklapaju određen ugao. Za različite položaje pravih, taj ugao je različit.



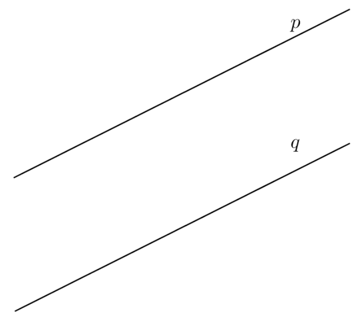
Slika 4: Prave p i q koje se seku pod oštrim uglom

Specijalno, kada je mera tog ugla 90°, za prave p i q se kaže da su normalne. Prave p i q prikazane na slici 5 su normalne.



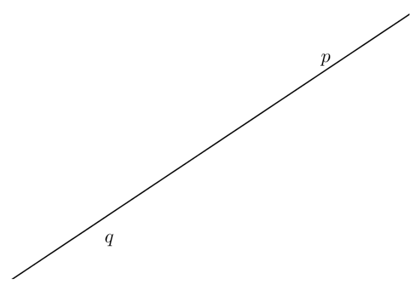
Slika 5: Normalne prave p i q

Ako se dve prave p i q koje pripadaju jednoj ravni ne seku, kaže se da su paralelne i zapisuje se $p||q$ (slika 6).



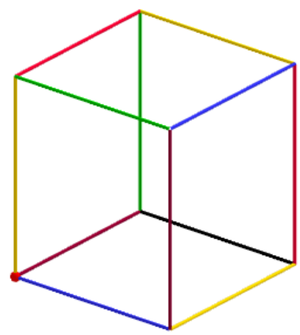
Slika 6: Paralelne prave p i q

Ako se prave poklapaju sve tačke su im zajedničke, njihov grafički prikaz je isti (slika 7). Prave koje se poklapaju su poseban slučaj paralelnih pravih.



Slika 7: Prave p i q koje se poklapaju

Ako dve prave u prostoru nemaju zajedničkih tačaka, to ne znači da su paralelne, već da mogu biti i mimoilazne. Razlika u ova dva slučaja je u tome što za dve paralelne prave postoji ravan koja ih sadrži, dok za mimoilazne prave to nije slučaj.



Slika 8: Kvadar

Na slici 8 predstavljen je kvadar iz pomenutog apleta, prave određene ivicama kvadra obojene istom bojom predstavljaju mimoilazne prave. Put i nadvožnjak u realnom prostoru predstavljaju primer mimoilaznih pravih (slika 9). Na primer u avio saobraćaju koridori (linije kretanja) aviona projektuju se tako da predstavljaju mimoilazne pravce. Na taj način izbegava se svaka mogućnost sudara dva aviona.

Slika 9: Put i nadvožnjak

2.2 Odnos prave i ravni

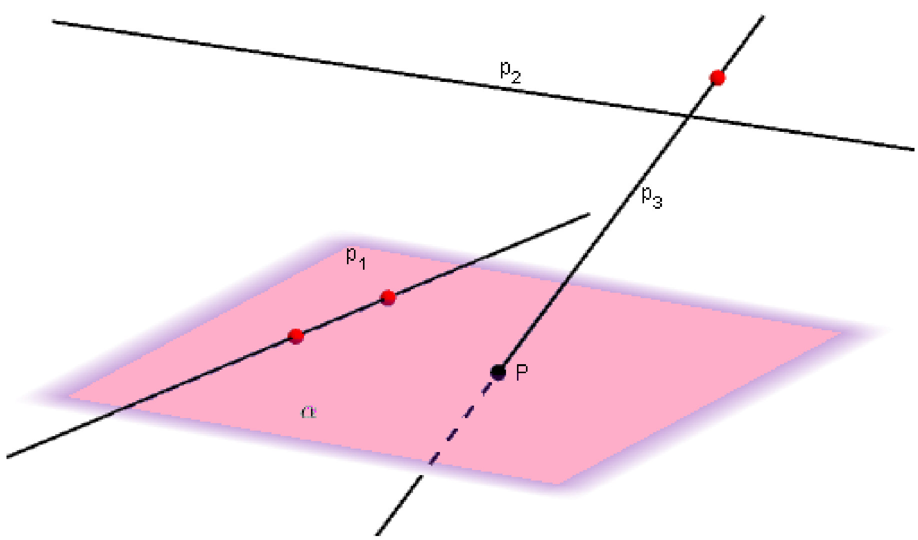
Prava i ravan istog trodimenzionalnog prostora mogu se naći u nekom od sledeća tri međusobna položaja, kao što se može videti na slici 10:

a) prava pripada ravni-ako ta prava leži u ravni. Prava p_1 leži u ravni α. Primer iz života: autoput u ravnici;

b) prava je paralelna ravni-ako postoji ravan u kojoj leži ta prava paralelna sa ravni koja se posmatra. Prava p_2 paralelna je sa ravni α. Primer iz života: žica za sušenje veša prema površini zemlje;

c) prava prodire ravan-tada postoji tačno jedna tačka koja pripada ravni i pravoj. Prava p_3 prodire ravan α u tački P. Primer iz života: koplje na sportskom takmičenju zabodeno u zemlju.

Aplet kreiran za elektronsku lekciju *odnos prave i ravni* korišćenjem GeoGebre omogućava vizuelizaciju međusobnih položaja pravih i ravni, čime se znatno olakšava proces učenja. Prava p_1 može menjati svoj položaj u ravni α. Takođe, prava p_3 može menjati svoj položaj, dok je tačka P u kojoj prodire ravan fiksirana.

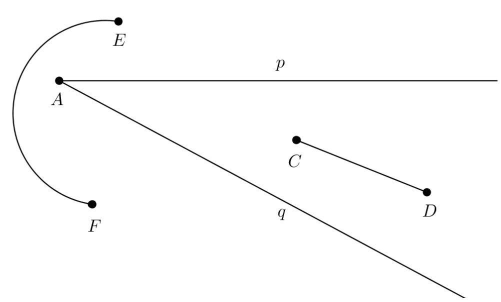


Slika 10: Aplet u kom je predstavljen odnos prave i ravni

3 Ugao

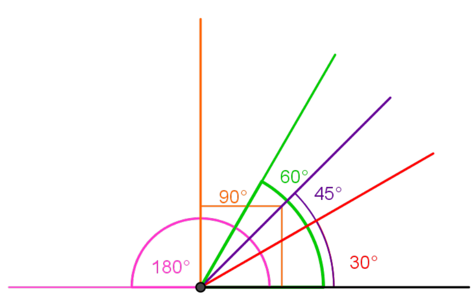
Sadržaj obrađen u poglavlju Ugao realizuje se u nastavnom programu za 5. razred osnovne škole. Nakon upoznavanja pojmova poluprava, skupovnih operacija definišu se pojam ugla, vrste uglova. Obrađuje se sabiranje, oduzimanje uglova. U ovom poglavlju predstavljen je pojam ugla i njegove vrste.

Neka je data tačka A, linija koju čine dve poluprave A_p i A_q sa zajedničkom početnom tačkom A naziva se ugaona linija i označava se $\angle pAq$. Tačka A se naziva temenom ugaone linije. Za dve tačke C i D se kaže da se nalaze sa iste strane ugaone linije ako linija koja ih spaja nema zajedničkih tačaka sa tom ugaonom linijom. Tačke C i D se nalaze sa jedne, a tačke E i F sa druge strane ugaone linije (slika 11). Skup tačaka sa iste strane ugaone linije naziva se oblast. U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *pojam ugla* korišćenjem GeoGebre vizuelizovan je pojam ugla.



Slika 11: Ugaona linija, ugao

Ugaona linija deli ravan u kojoj se nalazi na dve oblasti. Ugaona linija, zajedno sa jednom od oblasti na koje je podelila ravan, naziva se ugao. Ugao određen sa $\angle pAq$ označava se sa $\measuredangle pAq$. Poluprave A_p i A_q su kraci ugla pAq.

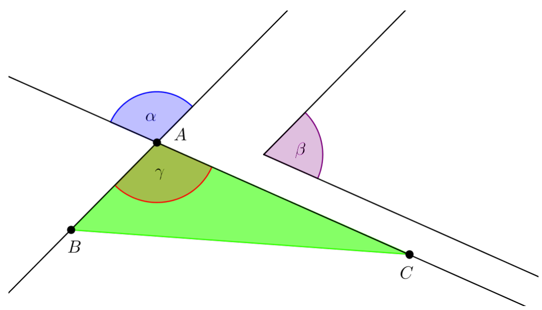


Slika 12: Razni uglovi

U ovom poglavlju će biti prikazani neki od karakterističnih zadataka za razumevanje pojma ugla.

Zadatak 1. *Nacrtaj proizvoljan trougao ABC, i uglove α, β i γ tako da je $\alpha \cap \triangle ABC =$ tačka, $\beta \cap \triangle ABC = \varnothing$ i $\gamma \cap \triangle ABC =$ trougao.*

Rešenje. Na slici 13 prikazano je rešenje zadatka.



Slika 13: Aplet u kom je prikazano rešenje zadatka 1

$\alpha \cap \triangle ABC = A$, $\beta \cap \triangle ABC = \varnothing$ i $\gamma \cap \triangle ABC = \triangle ABC$. △

Rešenje ovog zadatka prikazano je u apletu kreiranom za elektronsku lekciju *pojam ugla* korišćenjem GeoGebre. Predstavljeni aplet ilustruje rešenja ovog zadatka za bilo koji trougao ABC, zato što je u apletu omogućena tranformacija trougla pomeranjem njegovih temena. Dakle, rešenje predstavljeno na slici 13 nije jedino rešenje. Takođe, tačka A u kojoj se dodiruju ugao α i trougao ABC nije jedino rešenje, oni se mogu dodirivati u bilo kojoj tački koja pripada stranicama trougla.

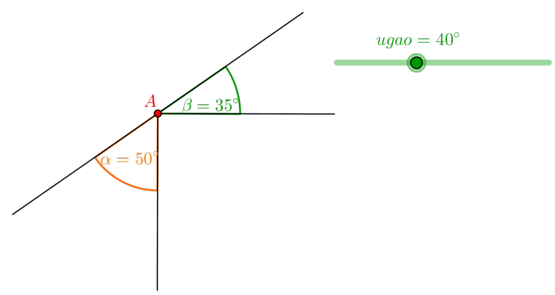
Zadatak 2. *Nacrtaj dva ugla čiji je zbir $90°$, tako da im presek bude:*

a) tačka;

b) trougao.

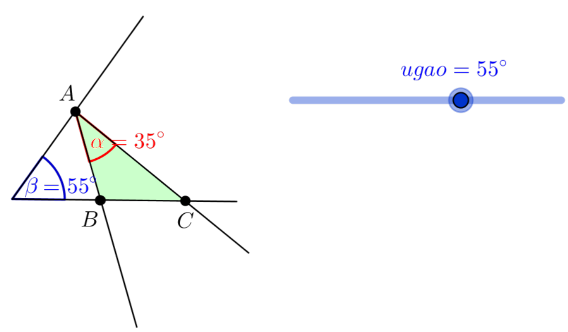
Rešenje. Na slikama 14 i 15 prikazano je rešenje zadatka.

a) $\alpha \cap \beta = A$;



Slika 14: Aplet u kom je prikazano rešenje zadatka 2 pod a

b) $\alpha \cap \beta = \triangle ABC$.



Slika 15: Aplet u kom je prikazano rešenje zadatka 2 pod b

$\triangle$

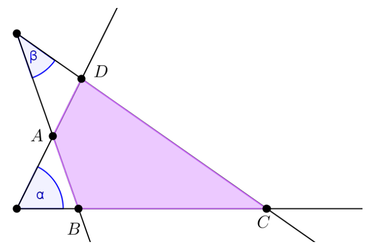
Rešenja koja su prikazana na prethodnim slikama nisu jedina, iz dva razloga. Prvo, u zadatku je dato da zbir uglova mora biti $90°$, što se može postići na mnogo načina. Zato u apletima u kojima su predstavljena rešenja postoje slajderi pomoću kojih se mogu menjati vrednosti uglova α i β, a da pritom njihov zbir ostaje $90°$. Drugo, u delu zadatka pod a, uglovi se mogu dodirivati u bilo kojoj tački koja pripada kracima ta dva ugla. Dok u delu pod b, trougao ABC nije jedinstven, odnosno, temena A, B i C mogu menjati svoje položaje na kracima uglova α i β.

3.1 Oštri i tupi uglovi

U apletima kreiranim za elektronsku lekciju *oštri i tupi uglovi* korišćenjem GeoGebre prikazani su oštri uglovi u poređenju sa pravim, kao i tupi u poređenju sa opruženim uglom, pri čemu se mogu menjati njihove vrednosti.

Zadatak 3. *Nacrtaj dva ugla manja od pravog, tako da im presek bude četvorougao.*

Rešenje. Presek uglova α i β je četvorougao $ABCD$ (slika 16).

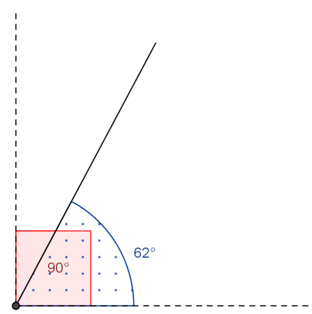


Slika 16: Rešenje zadatka 3

△

Definicija 1. *Ugao koji je manji od pravog ugla naziva se oštar ugao.*

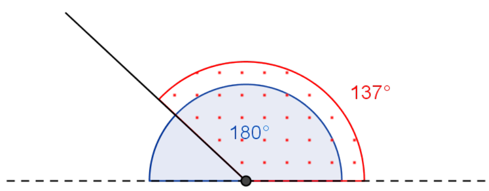
Na slici 17 predstavljen je aplet koji vizuelizuje oštre uglove. Pritiskanjem na dugme *ugao* aplet se pokreće, pri čemu se menjaju vrednosti oštrih uglova. Prav ugao je fiksiran i ima zajednički krak sa oštrim uglovima, što omogućava njihovo konstantno upoređivanje.



Slika 17: Aplet u kom su prikazani oštri uglovi

Definicija 2. *Ugao koji je veći od pravog, a manji od opruženog ugla naziva se tup ugao.*

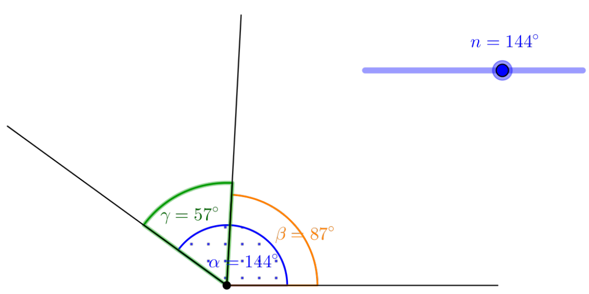
Na slici 18 predstavljen je aplet koji vizuelizuje tupe uglove. Pritiskanjem na dugme *ugao* aplet se pokreće, pri čemu se menjaju vrednosti tupih uglova. Opružen ugao je fiksiran i ima zajednički krak sa tupim uglovima, što omogućava njihovo konstantno upoređivanje.



Slika 18: Aplet u kom su prikazani tupi uglovi

Zadatak 4. *Nacrtaj tup ugao, a zatim ga predstavi kao zbir dva oštra ugla.*

Rešenje. Na slici 19 prikazano je rešenje zadatka.



Slika 19: Aplet u kom je prikazano rešenje zadatka 4

$\alpha = \beta + \gamma$, pri čemu su uglovi β i γ oštri. △

Rešenje ovog zadatka prikazano je u GeoGebra apletu. Na slici 19 predstavljeno je jedno od mogućih rešenja ovog zadatka. Ugao α može imati razne vrednosti, može se i na razne načine predstaviti kao zbir dva ugla manja od 90°. Prevlačenjem miša preko slajdera n u apletu se prikazuju i druga rešenja ovog zadatka.

3.2 Komplementni i suplementni uglovi

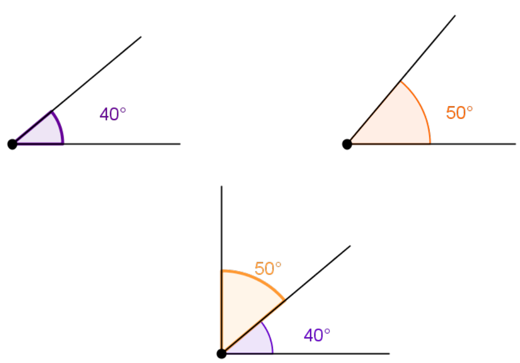
U apletima kreiranim za elektronsku lekciju *komplementni i suplementni uglovi* korišćenjem GeoGebre moguće je posmatrati razne vrednosti uglova koji su komplementni, njihov konstrukcijski zbir. Takođe, suplementne uglove i njihov zbir.

Zadatak 5. *Odredi meru uglova α i β ako je $\alpha + \beta = 90^\circ$ i $\alpha - \beta = 20^\circ$.*

Rešenje. Sabiranjem dve date jednakosti se dobija $2\alpha = 110^\circ$, dakle $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$. △

Definicija 3. *Dva ugla čiji je zbir prav ugao nazivaju se komplementnim uglovima.*

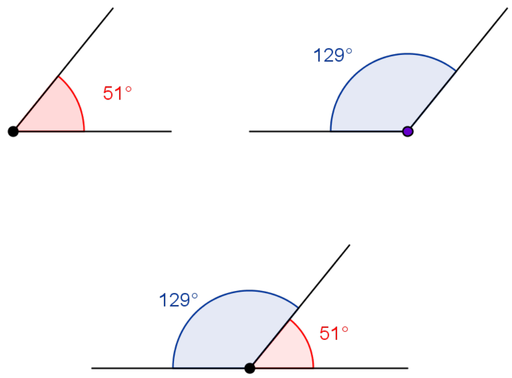
Na slici 20 predstavljen je aplet koji vizuelizuje komplementne uglove. Pritiskanjem dugmeta *pokreni aplikaciju* prikazuju se razni komplementni uglovi kao i njihov konstrukcijski zbir.



Slika 20: Aplet u kom su prikazani komplementni uglovi

Definicija 4. *Dva ugla čiji je zbir opružen ugao nazivaju se suplementnim uglovima.*

Na slici 21 predstavljen je aplet koji vizuelizuje suplementne uglove. Pritiskanjem dugmeta *pokreni aplikaciju* prikazuju se razni suplementni uglovi kao i njihov konstrukcijski zbir.



Slika 21: Aplet u kom su prikazani suplementni uglovi

Zadatak 6. *Pokaži da važe navedena tvrđenja:*

a) Ugao komplementan komplementu nekog ugla jednak je tom uglu.

b) Ugao suplementan suplementu nekog ugla jednak je tom uglu.

Rešenje.

a) Neka je α ugao koji se posmatra, komplement ugla α je ugao $90° - \alpha$, komplement komplementa ugla α je ugao $90° - (90° - \alpha) = 90° - 90° + \alpha = \alpha$.

b) Neka je β ugao koji se posmatra, suplement ugla β je ugao $180° - \beta$, suplement suplementa ugla β je ugao $180° - (180° - \beta) = 180° - 180° + \beta = \beta$.

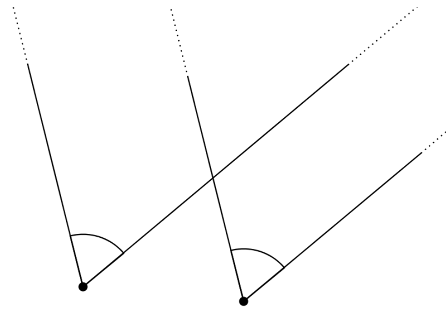
△

3.3 Uglovi sa paralelnim kracima

U apletima kreiranim za elektronsku lekciju *uglovi sa paralelnim kracima* prikazani su uglovi sa paralelnim kracima za njihove različite vrednosti i položaje koji se mogu menjati pritiskanjem na dugmad *oštra*, *tupa* i *pokreni aplikaciju*.

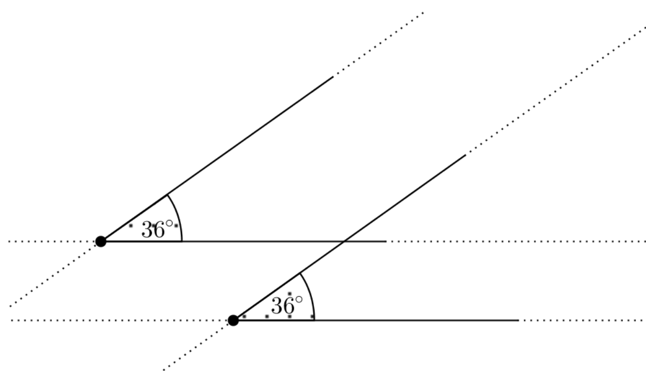
Definicija 5. *Ako su kraci jednog ugla paralelni sa kracima drugog ugla, kaže se da su to uglovi sa paralelnim kracima.*

Na slici 22 predstavljen je aplet koji vizuelizuje uglove sa paralelnim kracima. Uglovi predstavljeni u apletu su jednaki. Međutm, to ne mora biti slučaj. Važno je uočiti sledeće slučajeve:



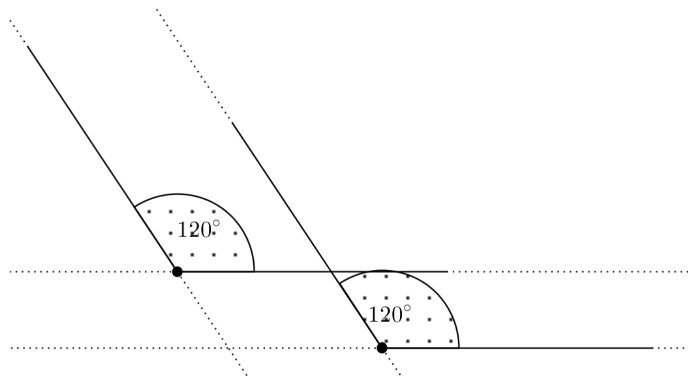
Slika 22: Aplet u kom su prikazani uglovi sa paralelnim kracima

Ako su dva konveksna ugla sa paralelnim kracima i pri čemu su oba oštra, tada su oni jednaki. Na slici 23 predstavljen je aplet koji vizuelizuje opisani slučaj. Pritiskanjem dugmeta *oštra* u apletu se prikazuju različite vrednosti jednakih oštrih uglova sa paralelnim kracima.



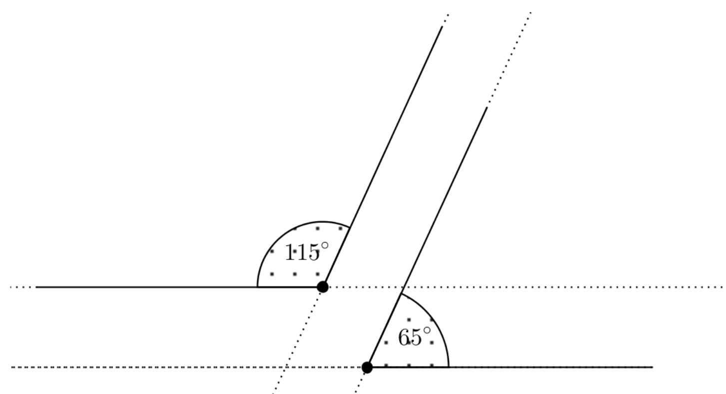
Slika 23: Aplet u kom su prikazani podudarni oštri uglovi sa paralelnim kracima

Ako su dva konveksna ugla sa paralelnim kracima i pri čemu su oba tupa, tada su oni jednaki. Na slici 24 predstavljen je aplet koji vizuelizuje opisani slučaj. Pritiskanjem dugmeta *tupa* u apletu se prikazuju različite vrednosti jednakih tupih uglova sa paralelnim kracima.



Slika 24: Aplet u kom su prikazani podudarni tupi uglovi sa paralelnim kracima

Ako su dva konveksna ugla sa paralelnim kracima i pri čemu je jedan oštar, a drugi tup, tada su oni suplementni. Na slici 25 predstavljen je aplet koji vizuelizuje opisani slučaj. Pritiskanjem dugmeta *pokreni aplet* u apletu se prikazuju različite vrednosti suplementnih uglova sa paralelnim kracima.



Slika 25: Aplet u kom su prikazani suplementni uglovi sa paralelnim kracima

Zadatak 7. *Odredi zbir dva različita konveksna ugla sa paralelnim kracima.*

Rešenje. Uglovi sa paralelnim kracima su jednaki ili suplementni. U zadatku je dato da su različiti, dakle suplementni su, njihov zbir je 180°. △

Zadatak 8. *Objasni zašto nije tačno nijedno od sledećih tvrđenja:*

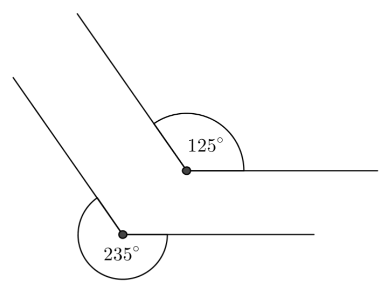
a) Dva konveksna ugla sa paralelnim kracima su jednaka.

b) Dva različita ugla sa paralelnim kracima su suplementna.

Rešenje.

a) Mogu biti i suplementni.

b) Tačno je samo ako su konveksni.



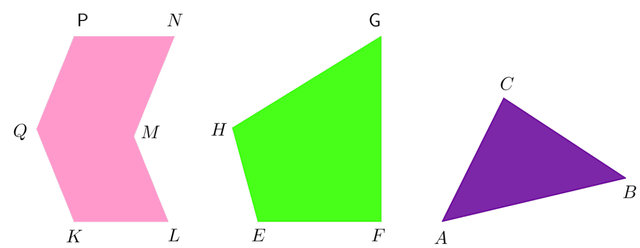
Slika 26: Rešenje zadatka 8 pod b

Na slici 26 prikazan je primer uglova sa paralelnim kracima koji nisu suplementni, a različiti su. △

4 Trougao

Sadržaj obrađen u poglavlju Trougao realizuje se u nastavnom programu za 6. razred osnovne škole. U ovom poglavlju predstavljen je pojam trougla, njegove vrste, značajne tačke, odnos stranica i uglova kao i nejednakosti trougla.

Zatvorena izlomljena linija koja nema tačaka samopresecanja i koju obrazuju tri duži naziva se trougaona linija. Ona određuje najjednostavniji mnogougao.



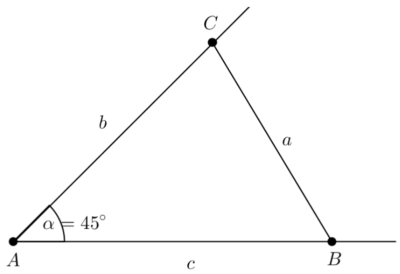
Slika 27: Mnogouglovi

Definicija 6. *Unija trougaone linije i njene unutrašnje oblasti naziva se trougao.*

Na slici 27 dat je trougao označen sa ABC. Duži AB, BC i CA su stranice tog trougla. Tačke A, B i C su temena trougla ABC. Temena trougla su nekolinearne tačke (ne pripadaju istoj pravoj).

Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke. Trougao čija su temena A, B i C potpuno je određen temenima, što se u apletu kreiranom u elektronskoj lekciji *pojam trougla* korišćenjem GeoGebre može jednostavno zaključiti. Naime, menjanjem položaja nekog od temena trougla menja se i sam trougao. Stranice AB, BC i CA čine trougaonu liniju. Svake dve stranice određuju jedan ugao, čije je teme zajednička tačka ovih stranica. Na primer, ugao α je određen temenom A i polupravama koje određuju stranice AB i AC. Promenom položaja temena menjaju se i vrednosti uglova, čime se utvrđuje njihova određenost. Slično su određeni uglovi β sa temenom B i γ sa temenom C. Na slici 28 prikazan je prethodno opisani aplet.

Za teme A kaže se da je naspram stranice BC, ali i za stranicu BC kaže se da je naspram temena A. U vezi s tim, stranica BC označava se malim slovom a. Slično važi i za ostala temena i stranice trougla, pa se označavaju $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Osim toga, kaže se i da je stranica AB, odnosno stranica c, naspram ugla γ, kao i da je ugao γ naspram stranice AB. Stranice i unutrašnji uglovi su osnovni elementi trougla.

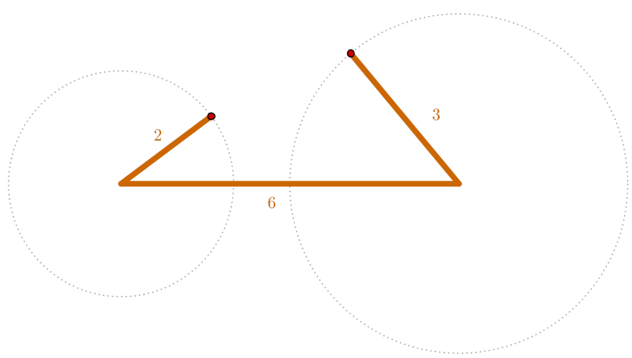


Slika 28: Aplet u kom su prikazani osnovni elementi trougla ABC

4.1 Nejednakosti trougla

Trougaona linija se ne može sačiniti od bilo koje tri duži. U apletima kreiranim za elektronsku lekciju *nejednakosti trougla* korišćenjem GeoGebre predstavljeno je nekoliko jednostavnih ogleda koji vizuelizuju odnos stranica u trouglu.

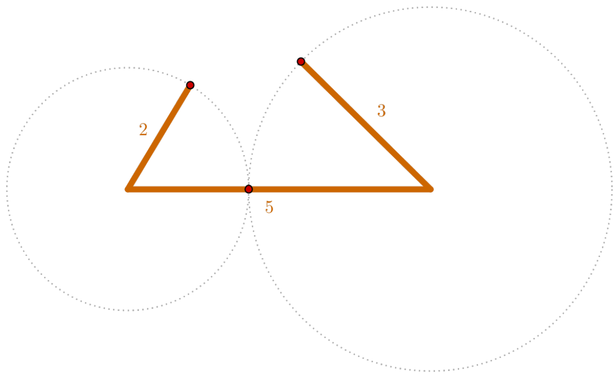
1. U apletu su dati jedan štapić dužine $6cm$ i štapići od $2cm$ i $3cm$ koji su naslonjeni na krajeve najdužeg štapića. Ogled se sastoji od pokušaja da se u apletu spoje krajevi kraćih štapića, koji su na slici 29 označeni crvenim tačkama, tako da se dobije trougao.



Slika 29: Aplet u kom je prikazan prvi ogled

Može se zaključiti da ne postoji trougao sa stranicama dužina $2cm$, $3cm$ i $6cm$.

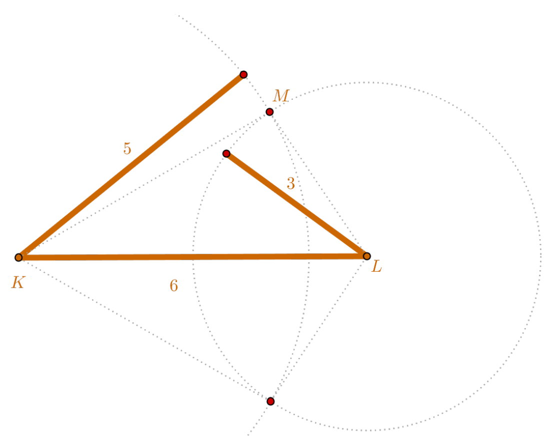
2. Razlika između prvog i drugog ogleda jeste u zameni štapića dužine $6cm$ stapićem dužine $5cm$.



Slika 30: Aplet u kom je prikazan drugi ogled

Uočava se da se krajevi kraćih štapića mogu spojiti, ali u crvenoj tački koja se nalazi na najdužem štapiću (slika 30). Dakle, ne postoji ni trougao čije su dužine stranica $2cm$, $3cm$ i $5cm$.

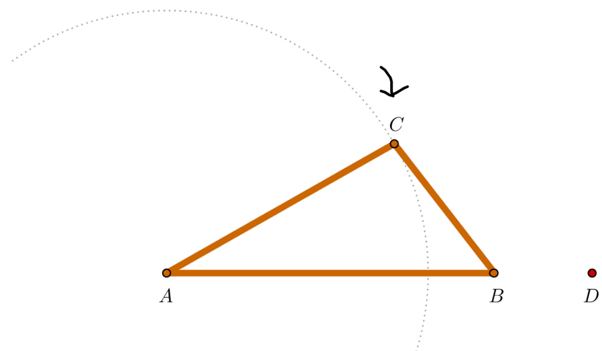
3. Razlika između prvog i trećeg ogleda jeste u zameni štapića dužine $2cm$ štapićem dužine $5cm$.



Slika 31: Aplet u kom je prikazan treći ogled

U apletu je moguće sačiniti trougao čije su ovo dužine stranica. Jedan od mogućih je trougao KLM.

4. U apletu predstavljenom na slici 32 dat je trougao ABC.



Slika 32: Aplet u kom je prikazan četvrti ogled

Pomeranjem temena C tako da se izlomljena linija ABC ispravi i nalegne na stranicu AB, uočava se tačka D takva da važi da je dužina AD jednaka zbiru dužina AC i CB. Na osnovu ogleda može se konstatovati da je duž AD veća od stranice AB trougla ABC, tj.

$$AD > AB.$$

Kako se duž AD može predstaviti kao zbir duži AC i CB, zaključuje se da je:

$$AC + CB > AB.$$

Iz prethodnog razmatranja sledi naredno tvrđenje.

Tvrđenje 1. *U svakom trouglu zbir dve stranice veći je od treće stranice.*

Prema tome, u bilo kom trouglu ABC važi da je:

$$\begin{gathered} BC + AC > AB \\ AC + AB > BC \\ AB + BC > AC. \end{gathered}$$

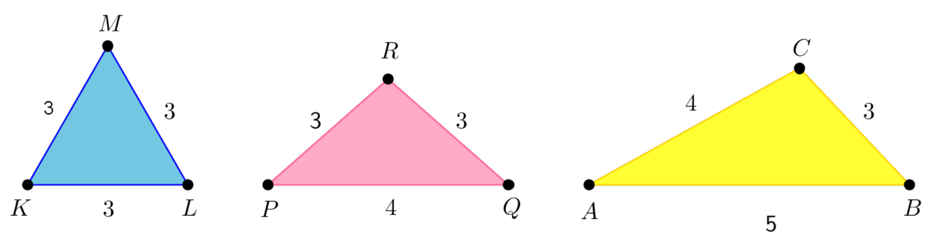
Ako su dužine stranica trougla označene sa a, b i c, onda ove nejednakosti glase:

$$\begin{gathered} a + b > c \\ b + c > a \\ c + a > b. \end{gathered}$$

Ove nejednakosti nazivaju se nejednakosti trougla. Tri duži a, b i c za koje ne važe ove nejednakosti ne mogu obrazovati trougao.

4.2 Vrste trouglova

Dužine stranica i mere uglova određuju vrstu trougla. U zavisnosti od broja jednakih stranica, razlikuju se tri vrste trouglova.



Slika 33: Vrste trouglova prema dužini stranica

Definicija 7. *Trougao koji ima sve tri stranice jednakih dužina naziva se jednakostranični trougao.*

Definicija 8. *Trougao koji ima dve stranice jednakih dužina naziva se jednakokraki trougao.*

Dve jednake stranice jednakokrakog trougla se nazivaju kraci, dok se stranica nad kojom se kraci nalaze naziva osnovica.

Definicija 9. *Trougao kome su sve tri stranice različitih dužina naziva se raznostranim trouglom.*

Na slici 33 predstavljeni su trouglovi sa naznačenim dužinama stranica. Trougao KLM koji je jednakostranični, PQR koji je jednakokraki i trougao ABC koji ima sve tri stranice različitih dužina.

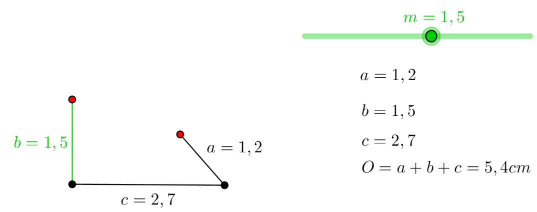
Zadatak 9. *Obim trougla je* $5,4cm$. *Može li neka od njegovih stranica imati dužinu:*

a) $2,7cm$;

b) $4,5cm$?

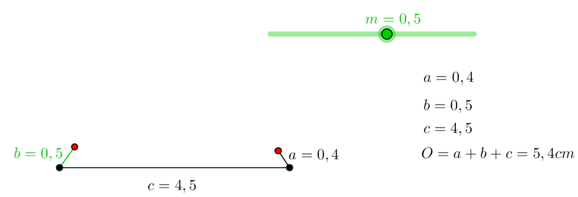
Rešenje.

a) Neka je stranica $c = 2,7cm$ (slika 34). Kako je obim trougla $5,4cm$, važi da je $a + b = 5,4 - 2,7 = 2,7cm$. Prevlačenjem miša preko slajdera m u apletu kreiranom u elektronskoj lekciji *vrste trouglova* korišćenjem GeoGebre, menjaju se vrednosti koje mogu imati dužine stranica a i b. Međutim, pomeranjem crvenih tačaka koje predstavljaju krajeve duži a i b nije moguće sklopiti trougao čije su stranice a, b i c. Do ovog zaključka moglo se doći i uočavanjem činjenice da zbir dve kraće stranice nije veći od najduže stranice. Te dve vrednosti uvek su jednake $a + b = c$. Dakle, trougao obima $5,4cm$ ne može imati stranicu dužine $2,7cm$.



Slika 34: Aplet u kom je prikazano rešenje zadatka 9 pod a

b) Neka je stranica $c = 4,5cm$ (slika 35). Kako je obim trougla $5,4cm$, važi da je $a+b = 5,4-4,5 = 0,9cm$. Prevlačenjem miša preko slajdera m u apletu u kom je predstavljeno rešenje, menjaju se vrednosti koje mogu imati dužine stranica a i b. Međutim, pomeranjem crvenih tačaka koje predstavljaju krajeve duži a i b nije moguće sklopiti trougao čije su stranice a, b i c. Do ovog zaključka moglo se doći i uočavanjem činjenice da zbir dve kraće stranice nije veći od najduže stranice $(0,9 < 4,5)$. Dakle, trougao obima $5,4cm$ ne može imati stranicu dužine $4,5cm$.



Slika 35: Aplet u kom je prikazano rešenje zadatka 9 pod b

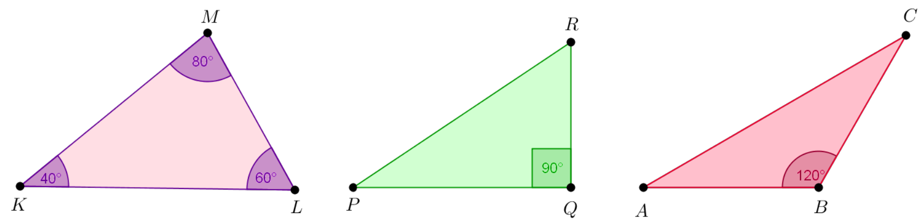
$\triangle$

Trouglovi se razlikuju i po uglovima.

Definicija 10. *Trougao koji ima tri oštra unutrašnja ugla naziva se oštrougli trougao.*

Definicija 11. *Trougao koji ima jedan prav unutrašnji ugao naziva se pravougli trougao.*

Stranica naspram pravog ugla naziva se hipotenuza, dok se preostale dve stranice nazivaju katete. Katete ne moraju biti jednakih dužina, ali u slučaju kad jesu takav trougao se naziva pravougli jednakokraki.



Slika 36: Vrste trouglova prema uglovima

Definicija 12. *Trougao koji ima jedan tup unutrašnji ugao naziva se tupougli trougao.*

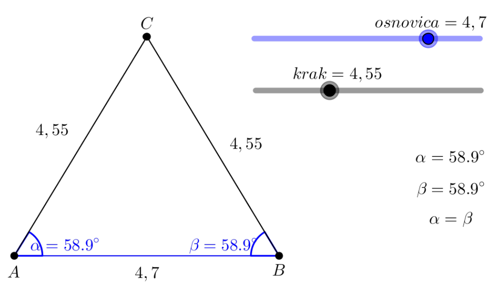
U apletu predstavljenom na slici 36 trougao KLM je oštrougli za bilo koje dužine njegovih stranica koje se mogu menjati u apletu. Trougao PQR je pravougli, ABC tupougli za bilo koje dužine stranica.

4.3 Odnos uglova i stranica trougla

Nakon utvrđivanja veza između stranica trougla, biće utvrđen odnos stranica i uglova u trouglu. Za početak se može uočiti sledeći zadatak.

Zadatak 10. *Nacrtaj proizvoljan jednakokraki trougao ABC ($AC = BC$) i uporedi uglove α i β.*

Rešenje. Na slici 37 prikazano je rešenje zadatka. Uglovi α i β su jednaki.



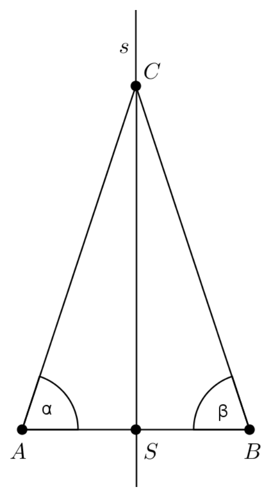
Slika 37: Aplet u kom je prikazano rešenje zadatka 10

△

U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *odnos stranica i uglova trougla* korišćenjem GeoGebre prikazano je rešenje zadatka. U apletu je moguće upoređivati uglove α i β za razne jednakokrake trouglove. Početni trougao se transformiše u drugi menjanjem dužine kraka i osnovice pomoću slajdera koji se nalaze u apletu. Za svaki jednakokraki trougao iz apleta važi da su uglovi α i β jednaki. Ovaj zadatak navodi na zaključak da važi naredno tvrđenje.

Tvrđenje 2. *U trouglu naspram jednakih stranica jednaki su uglovi.*

Dokaz. Neka je dat trougao ABC u kome je $AC = BC$ (slika 38). Neka je s simetrala ugla ACB, S tačka preseka prave s i duži AB. Simetrijom u odnosu na s tačke C i S preslikavaju se u sebe same.



Slika 38: Odnos uglova i stranica trougla

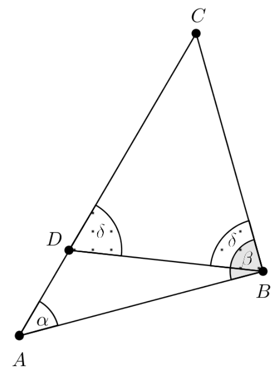
Krak CA preslikava se u krak CB, pa kako je $CA = CB$, zaključuje se da će se tačka A preslikati u tačku B. Pri pomenutom preslikavanju, uočava se da se $\measuredangle CAS$ preslikava u $\measuredangle CBS$. Uglovi α i β su simetrični, pa je $\alpha = \beta$. Dakle, u trouglu ABC važi ako je $AC = BC$, onda je $\alpha = \beta$. $\square$

Takođe, važi i naredno tvrđenje.

Tvrđenje 3. *U trouglu naspram veće stranice veći je i ugao.*

Dokaz. Neka je dat trougao ABC kod koga je $AC > BC$ (slika 39). Treba dokazati da je $\beta > \alpha$.

Kako je $AC > BC$, to se na duži AC može uočiti tačka D, takva da je $CD = CB$. Trougao BCD je jednakokraki, pa su uglovi kod B i D jednaki. Označeni su sa δ. Budući da je krak BD, ugla CBD unutar ugla β, to je $\beta > \delta$. Dalje, $\measuredangle BDC = \delta$ je spoljašnji ugao trougla ABD, pa je veći od nesusednog unutrašnjeg ugla, tj. $\delta > \alpha$. Sada iz $\beta > \delta$ i $\delta > \alpha$ sledi da je $\beta > \alpha$. $\square$



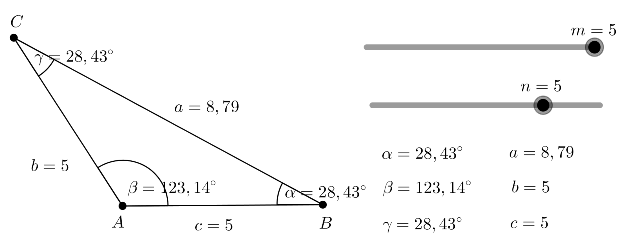
Slika 39: Odnos uglova i stranica trougla

Iz prethodnog se može zaključiti da važe i sledeća tvrđenja.

Tvrđenje 4. *Naspram jednakih uglova u trouglu jednake su i stranice.*

Tvrđenje 5. *Naspram većeg ugla u trouglu veća je i stranica.*

Pored izvođenja dokaza prethodnih tvrđenja kreiran je još jedan aplet u elektronskoj lekciji *odnos stranica u uglova* korišćenjem GeoGebre koji ilustruje prethodna tvrđenja za konkretne vrednosti uglova i stranica. U apletu je moguće menjati vrednosti dužina stranica menjanjem vrednosti slajdera m i n, kao i vrednosti uglova pomeranjem temena datog trougla. Na slici 40 može se videti jedan primer iz opisanog apleta.



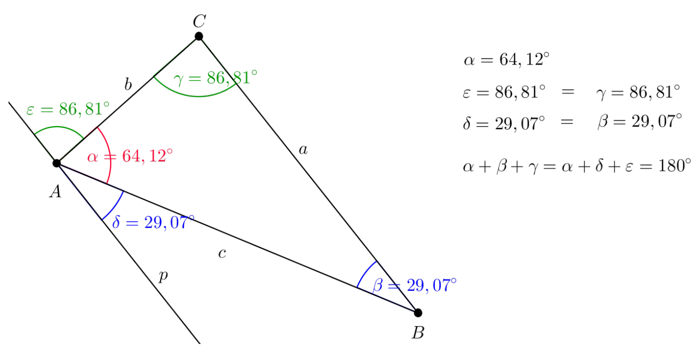
Slika 40: Aplet u kom su prikazani odnosi uglova i stranica trougla ABC

4.4 Zbir uglova u trouglu. Obim i površina trougla

U prethodnim delovima ovog poglavlja predstavljeni su osnovni elementi trougla i njihovi međusobni odnosi. Sada će biti predstavljena jedna od najvažnijih osobina uglova trougla.

Tvrđenje 6. *Zbir unutrašnjih uglova u trouglu je* $180°$.

U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *zbir unutrašnjih uglova, obim i površina trougla* korišćenjem GeoGebre prikazan je proizvoljan trougao ABC sa istaknutim uglovima. U apletu je konstruisana prava p kroz tačku A, paralelna duži BC. Uglovi β i δ su uglovi sa paralelnim kracima, i s obzirom da su istog tipa, oni su jednaki $\beta = \delta$. Analogno, $\gamma = \varepsilon$. Uglovi α, ε i δ su nadovezani uglovi čija je unija opružen ugao, odnosno važi da je $\alpha + \varepsilon + \delta = 180°$. Dakle, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. U predstavljenom apletu moguće je pomerati temena trougla pri čemu se menjaju i vrednosti pomenutih uglova ali zbir ostaje konstantan. Na slici 41 prikazan je opisani aplet.



Slika 41: Aplet u kom je predstavljen zbir uglova trougla ABC

Važno je uočiti sledeće važne činjenice. U pravouglom trouglu najviše jedan ugao može biti prav i on je najveći ugao u tom trouglu. U suprotnom bi zbir uglova bio veći od $180°$, što nije moguće. Uglovi jednakostraničnog trougla su jednaki. Ovo se može zaključiti na osnovu tvrđenja da su naspram jednakih stranica jednaki uglovi i da je zbir uglova u trouglu $180°$.

Obim trougla računa se po formuli:

$$O = a + b + c.$$

Površina trougla računa se po formuli:

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Izvođenje ove formule predstavljeno je u narednom poglavlju. Površina trougla može se izračunati i pomoću Heronovog obrasca:

$$P = \sqrt{S \cdot (S-a) \cdot (S-b) \cdot (S-b)},$$

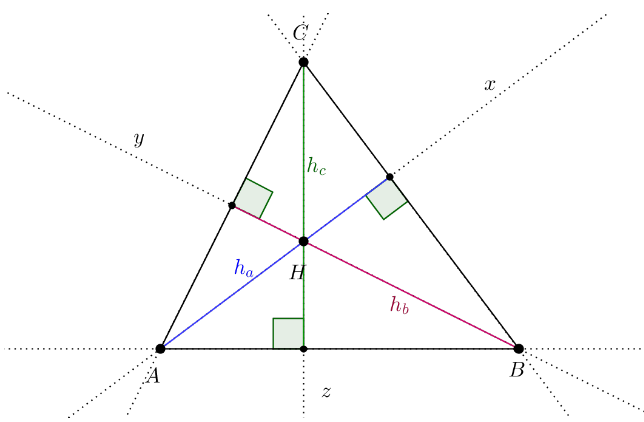
gde je S poluobim trougla, odnosno $S = \frac{a+b+c}{2}$.

4.5 Visine trougla i ortocentar

Ortocentar je jedna od četiri značajne tačke trougla. Pre definisanja ortocentra neophodno je definisati visinu trougla.

Definicija 13. *Visina trougla je duž čiji jedan kraj predstavlja teme trougla, a drugi podnožje normale na naspramnoj stranici ili na njenom produžetku.*

Trougao ima tri temena i tri stranice, dakle trougao ima i tri visine. Označavaju se malim latiničnim slovom h, a u indeksu je oznaka odgovarajućeg temena ili odgovarajuće stranice (h_A ili h_a). Sve tri visine seku se u jednoj tački. Ta tačka se naziva ortocentar. Ortocentar se označava velikim latiničnim slovom H (slika 42).



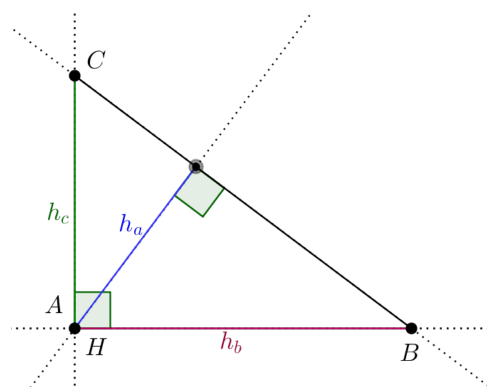
Slika 42: Aplet u kom je prikazan ortocentar oštrouglog trougla

Dovoljno je konstruisati dve visine kako bi se odredio ortocentar. Visina se konstruiše tako što se konstruiše normala iz temena na naspramnu stranicu.
U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *visine trougla i ortocentar* korišćenjem GeoGebre može se posmatrati položaj ortocentra H za različite vrste trouglova. Početni trougao se transformiše u neki drugi pomeranjem temena A, B i C.

Važno je uočiti sledeće:

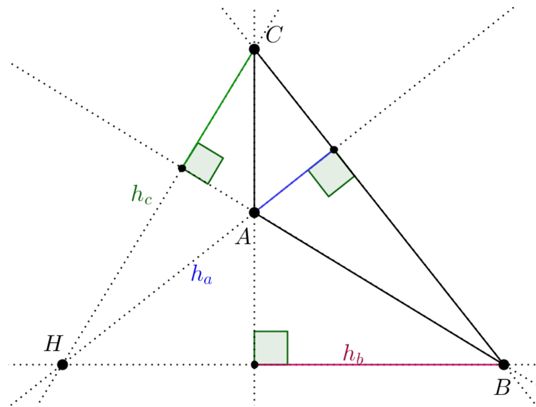
- ortocentar oštrouglog trougla nalazi se unutar trougla. U pomenutom apletu prikazanom na slici 42, pritiskanjem dugmeta *ortocentar oštrouglog trougla*, trougao ABC se transformiše u oštrougli, pri čemu se može uočiti položaj ortocentra;

- ortocentar pravouglog trougla poklapa se sa temenom pravog ugla trougla. U ovom slučaju dve visine se nalaze na kracima pravog ugla. U apletu prikazanom na slici 43, pritiskanjem dugmeta *ortocentar pravouglog trougla*, trougao ABC se transformiše u pravougli, pri čemu se može uočiti položaj ortocentra;



Slika 43: Aplet u kom je prikazan ortocentar pravouglog trougla

- ortocentar tupouglog trougla nalazi se van trougla. U apletu prikazanom na slici 44, pritiskanjem dugmeta *ortocentar tupouglog trougla*, trougao ABC se transformiše u tupougli, pri čemu se može uočiti položaj ortocentra.



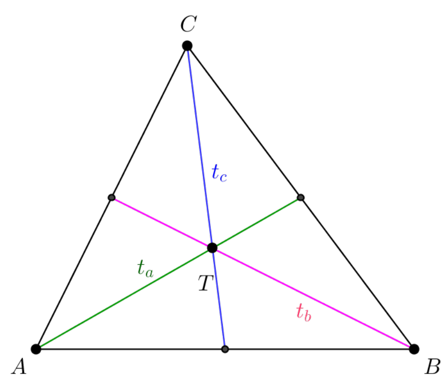
Slika 44: Aplet u kom je prikazan ortocentar tupouglog trougla

4.6 Težišne duži i težište trougla

Druga značajna tačka trougla je težište. Težište predstavlja centar mase trougla. Ako se trougao stavi na vrh igle, tako da vrh dodiruje težište, trougao će stajati u ravnoteži.

Definicija 14. *Težišna duž trougla je duž koja spaja teme trougla sa središtem naspramne stranice.*

Trougao ima tri temena i tri stranice, dakle trougao ima i tri težišne duži. Označavaju se malim latiničnim slovom t, a u indeksu je oznaka odgovarajuće stranice (t_A ili t_a). Sve tri težišne duži trougla seku se u jednoj tački. Ta tačka se naziva težište i označava se velikim latiničnim slovom T (slika 45).



Slika 45: Težište trougla

Dovoljno je konstruisati dve težišne duži kako bi se odredilo težište. Težišna duž se konstruiše tako što se konstruiše simetrala stranice, na taj način je određeno središte stranice i preostaje još da se to središte spoji sa naspramnim temenom.

Za razliku od ortocentra trougla, težište se uvek nalazi unutar trougla. U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *težište trougla* korišćenjem GeoGebre moguće je pomerati temena trougla ABC, pri čemu se može uočiti navedena osobina težišta. Težište trougla ima još jednu važnu osobinu. Težište deli težišne duži u odnosu $2:1$, tj. rastojanje od težišta do temena dva puta je veće od rastojanja težišta do središta odgovarajuće stranice. Dokaz ove osobine može se naći u knjizi [8] popisa literature.

4.7 Opisana kružnica trougla

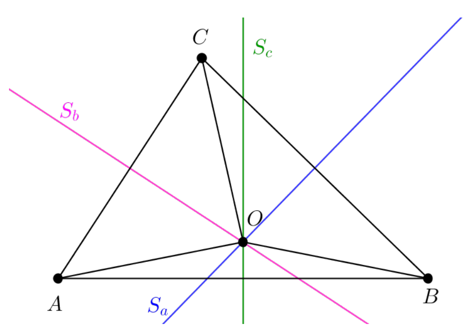
Treća značajna tačka trougla je centar opisane kružnice. Analiziranjem zadataka 11 i 12 dolazi se do položaja tačke koja je jednako udaljena od temena trougla, odnosno do položaja centra opisane kružnice trougla.

Zadatak 11. *Da li postoji kružnica koja sadrži tri unapred odabrane tačke?*

U slučaju kada su to tačke jedne prave, odgovor je negativan. Ako su tačke nekolinearne (nisu na jednoj pravoj), onda one određuju trougao. Tada se može preformulisati prethodni zadatak.

Zadatak 12. *Da li za svaki trougao postoji kružnica koja prolazi kroz sva tri temena trougla?*

Do rešenja se lako dolazi ako se utvrdi da li postoji tačka koja je jednako udaljena od svih temena trougla. Ako takva tačka postoji i može da se odredi, zadatak će imati pozitivan odgovor. Neka je ABC izabrani trougao, dat na slici 46. Sve tačke sa simetrale duži jednako su udaljene od krajeva te duži. Budući da je centar kružnice koja prolazi kroz temena A i B izabranog trougla jednako udaljen od A i B, može se zaključiti da centar takve kružnice pripada simetrali duži AB.



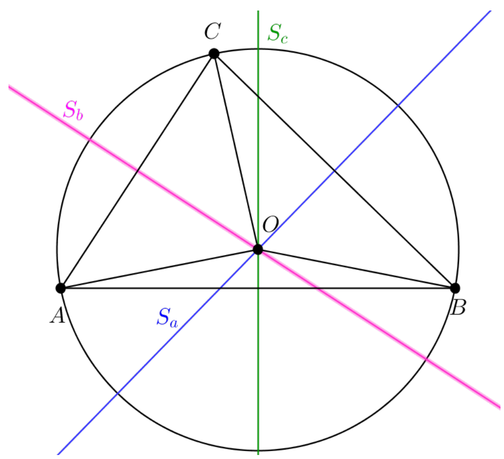
Slika 46: Simetrale stranica trougla

Analogno, zaključuje se da se nalazi istovremeno i na simetrali duži BC. Presek simetrala označen je sa O. Tačka O je na simetrali duži AB, pa je $OA = OB$. Ali tačka O je i na simetrali duži BC, pa je $OB = OC$. Dakle,

$$OA = OB = OC.$$

Prema tome, tačka O je jednako udaljena od tačaka A, B i C, pa ona predstavlja centar kružnice koja prolazi kroz A, B i C. Poluprečnik te kružnice je duž $OA = OB = OC$. Iz ovog razmatranja sledi dokaz narednog tvrđenja.

Tvrđenje 7. *U svakom trouglu simetrale stranica seku se u jednoj tački. Ta tačka je centar kružnice opisane oko trougla.*

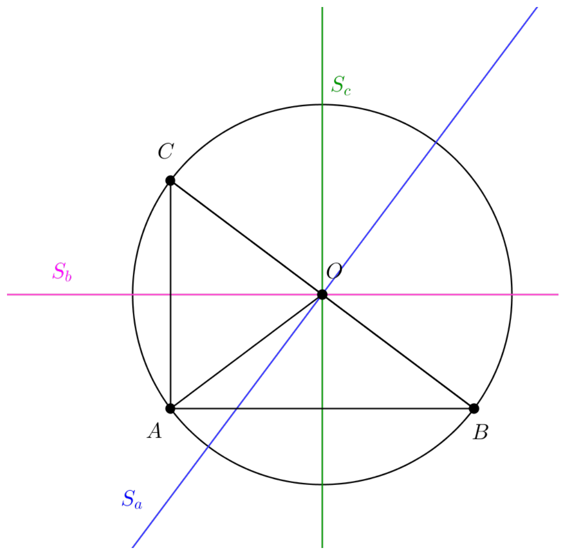


Slika 47: Aplet u kom je prikazana kružnica opisana oko trougla

Svaki trougao ima svoju opisanu kružnicu. Važno je uočiti sledeće:

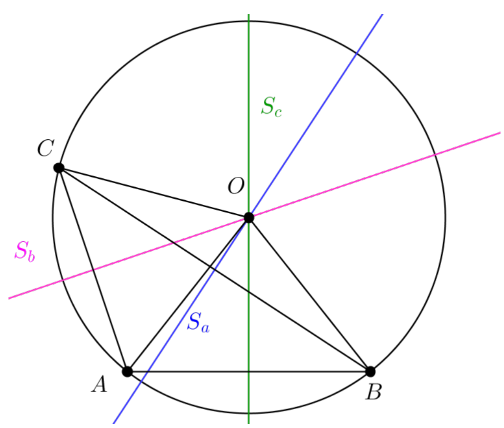
- centar opisanog kruga oštrouglog trougla nalazi se unutar trougla.
  U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *opisana kružnica trougla* korišćenjem GeoGebre prikazanom na slici 47, pritiskanjem dugmeta *centar opisanog kruga oštrouglog trougla*, trougao ABC se transformiše u oštrougli pri čemu se može uočiti položaj centra opisane kružnice;

- centar opisanog kruga pravouglog trougla nalazi se na hipotenuzi trougla.
  U pomenutom apletu prikazanom na slici 48, pritiskanjem dugmeta *centar opisanog kruga pravouglog trougla*, trougao ABC se transformiše u pravougli pri čemu se može uočiti položaj centra opisane kružnice;



Slika 48: Aplet u kom je prikazana kružnica opisana oko pravouglog trougla

- centar opisanog kruga tupouglog trougla nalazi se van trougla. U pomenutom apletu prikazanom na slici 49, pritiskanjem dugmeta *centar opisanog kruga tupouglog trougla*, trougao ABC se transformiše u tupougli pri čemu se može uočiti položaj centra opisane kružnice;



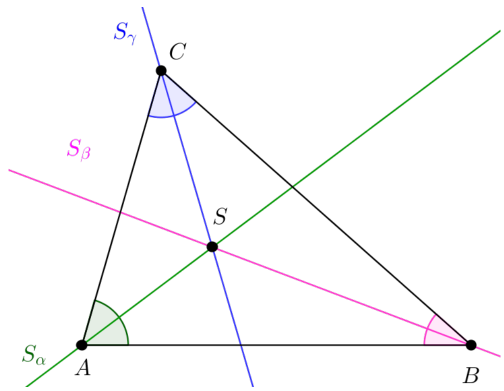
Slika 49: Aplet u kom je prikazana kružnica opisana oko tupouglog trougla

U pomenutom apletu moguće je posmatrati postupak opisivanja kružnice za razne trouglove, gde je transformacija početnog trougla omogućena pomeranjem temena trougla ABC.

4.8 Upisana kružnica trougla

Četvrta značajna tačka trougla je centar upisane kružnice. U ovom delu rada biće prikazana tvrđenja koja ilustruju svojstva centra upisane kružnice.

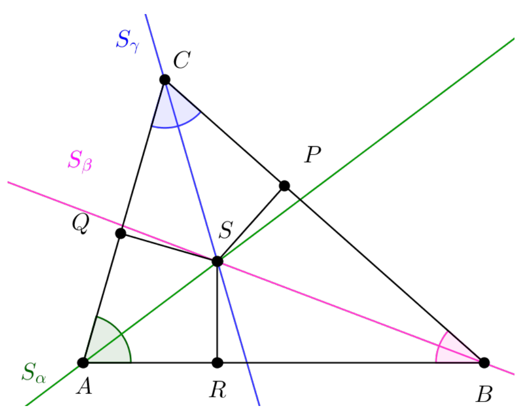
Na slici 50 dat je proizvoljan trougao ABC. Neka su S_α, S_β i S_γ simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC. Može se uočiti da simetrale prolaze kroz jednu tačku.



Slika 50: Simetrale unutrašnjih uglova trougla

Tvrđenje 8. *U svakom trouglu simetrale unutrašnjih uglova seku se u jednoj tački.*

Dokaz. Ako je S tačka preseka simetrala S_α i S_β, neka su P, Q i R redom podnožja normala iz tačke S na stranice a, b i c trougla ABC (slika 51).



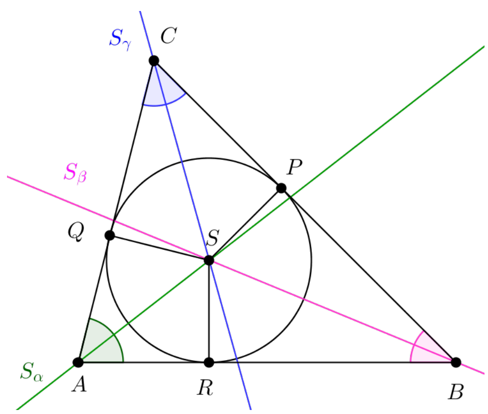
Slika 51: Centar upisane kružnice trougla

Tačka S je na simetrali S_α, pa je jednako udaljena od krakova ugla, tj. $SR = SQ$. Kako je S i na simetrali S_β, slično se zaključuje da je $SP = SQ$. Dakle,

$$SP = SQ = SR.$$

Ostaje još da se dokaže da i simetrala ugla γ prolazi kroz tačku S. Pravougli trouglovi CSP i CSQ imaju zajedničku hipotenuzu $CS = CS$ i jednaku katetu $SP = SQ$, pa su podudarni po stavu SSU. Iz ove podudarnosti sledi da je $\measuredangle PCS = \measuredangle QCS$, što znači da je CS simetrala ugla γ, tj. S_γ sadrži tačku S. Time je tvrđenje dokazano. □

Iz uslova $SP = SQ = SR$ sledi da tačke P, Q i R pripadaju kružnici sa centrom u S. Kako su uglovi kod P, Q i R pravi zaključuje se da stranice trougla dodiruju ovu kružnicu. Za takvu kružnicu se kaže da je upisana u trougao ABC (slika 52).



Slika 52: Kružnica upisana u trougao

Tvrđenje 9. *U svaki trougao može se upisati jedna kružnica. Centar upisane kružnice je zajednička tačka simetrala unutrašnjih uglova.*

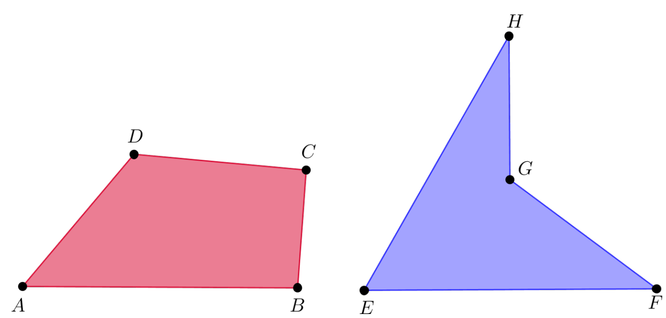
U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *upisana kružnica* korišćenjem GeoGebre moguće je posmatrati postupak upisivanja kružnice za razne trouglove, gde je transformacija početnog trougla omogućena pomeranjem temena trougla ABC.

5 Četvorougao

Sadržaj obrađen u poglavlju Četvorougao realizuje se u nastavnom programu za 6. razred osnovne škole. U ovom poglavlju predstavljen je pojam četvorougla, uglovi, konveksnost, njegove vrste, osobine i površina četvorougla.

Mnogougaona linija koju čine četiri nadovezane duži naziva se četvorougaona linija.

Definicija 15. *Deo ravni koji čine četvorougaona linija zajedno sa unutrašnjom oblasti koju ona određuje naziva se četvorougao.*



Slika 53: Četvorouglovi

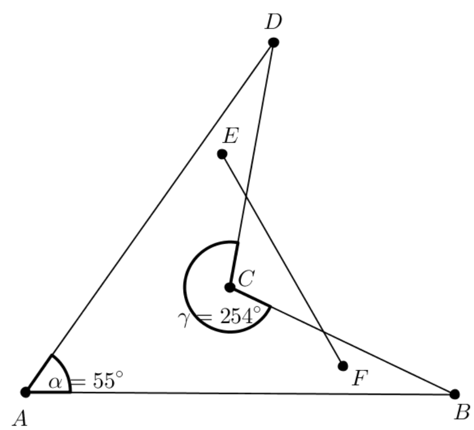
Duži koje čine četvorougaonu liniju nazivaju se stranice četvorougla. Stranice četvorougla $ABCD$ prikazanog na slici 53 su AB, BC, CD i DA. Zajedničke tačke susednih duži nazivaju se temenima četvorougla. Temena četvorougla su susedna temena ako su ona krajnje tačke iste stranice. Temena koja nisu susedna nazivaju se naspramnim temenima. Stranice četvorougla su susedne stranice ako imaju zajedničku krajnju tačku. Stranice koje nisu susedne nazivaju se naspramnim stranicama. U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *pojam četvorougla* korišćenjem GeoGebre prikazana su dva četvorougla koja se mogu transformisati u druge četvorouglove pomeranjem njihovih temena, što olakšava vizuelizaciju pojma četvorougla.

5.1 Konveksnost četvorougla

Jedan od načina da se proveri konveksnost mnogougla u ravni je da se njegova kontura posmatra kao put. Ukoliko se zamišljeni objekat kreće po tom putu i pritom menja pravac svog kretanja samo na levo ili samo na desno, mnogougao je konveksan. Sada će biti predstavljena formalna definicija konveksnosti.

Definicija 16. *Geometrijski objekat je konveksan ako sa svake svoje dve tačke sadrži i duž koja je njima određena.*

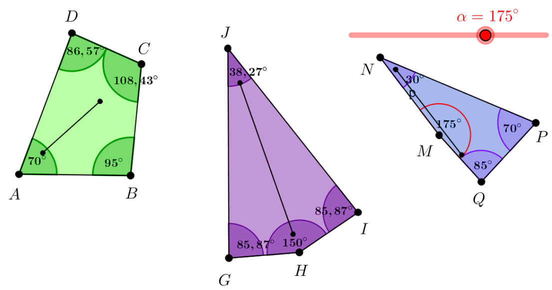
Četvorougao $ABCD$ predstavljen na slici 54 nije konveksan. Za odabrane tačke E i F koje pripadaju četvorouglu, duž čije su to krajnje tačke nije sadržana u tom četvorouglu. Pritiskanjem dugmeta *primeri* u apletu kreiranom za elektronsku lekciju *konveksnost i dijagonale* korišćenjem GeoGebre prikazuju se još neki primeri četvorouglova koji nisu konveksni.



Slika 54: Nekonveksan četvorougao

U drugom apletu kreiranom za elektronsku lekciju *konveksnost i dijagonale* korišćenjem GeoGebre predstavljena su tri konveksna četvorougla (slika 55). Posmatranjem njihovih uglova može se zaključiti da su svi manji od opruženog. Pomeranjem njihovih temena neki od unutrašnjih uglova se mogu promeniti, ali će i dalje svi biti manji od opruženog (svi će biti konveksni). Međutim, menjanjem vrednosti slajdera α jedan od uglova četvorougla $MNPQ$ menja svoju vrednost. Može se uočiti da za vrednosti veće od $180°$ četvorougao postaje nekonveksan, odnosno duž p izlazi iz unutrašnjosti četvorougla.

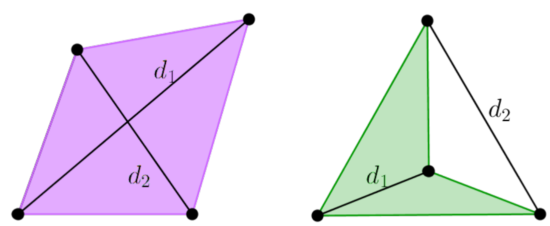
Dakle, važi ako su svi unutrašnji uglovi četvorougla manji od opruženog ugla, četvorougao je konveksan. Ako je neki od unutrašnjih uglova veći od opruženog ugla, četvorougao nije konveksan.



Slika 55: Aplet u kom su prikazani konveksni četvorouglovi

Definicija 17. *Duži čije su krajnje tačke dva naspramna temena nazivaju se dijagonale četvorougla.*

Dijagonale se označavaju malim latiničnim slovom d, a u indeksu je obično oznaka broja dijagonale (d_1 ili d_3). Na slici 56 prikazane su dijagonale konveksnog i nekonveksnog četvorougla.

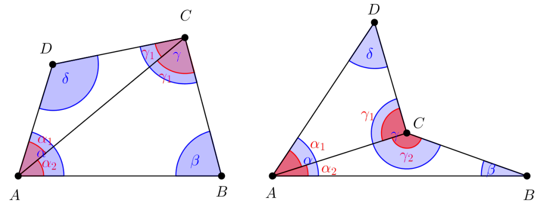


Slika 56: Dijagonale četvorougla

5.2 Uglovi četvorougla

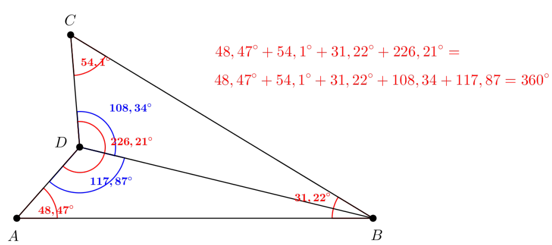
Svaki četvorougao, bez obzira da li je konveksan ili ne, dijagonalom se može podeliti na dva trougla. Na slici 57 dijagonalnom AC su podeljeni po jedan konveksan i jedan nekonveksan na trouglove ABC i ACD, kako je zbir uglova trougla $180°$, važi da je:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta = (\alpha_1 + \delta + \gamma_1) + (\alpha_2 + \beta + \gamma_2) = 180° + 180° = 360°.$$



Slika 57: Uglovi četvorougla

U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *uglovi četvorougla* korišćenjem GeoGebre prikazan je proizvoljan četvorougao. Pritiskanjem dugmeta *dijagonalom* četvorougao se deli dijagonalom na dva trougla, u apletu je moguće pomerati temena četvorougla čime se menjaju vednosti uglova, dok njihov zbir uvek ostaje isti.



Slika 58: Aplet u kom su prikazani uglovi četvorougla

5.3 Vrste četvorouglova

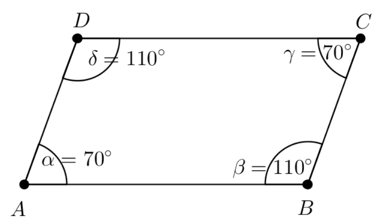
Prema paralelnosti stranica izdvajaju se posebne vrste četvorouglova-paralelogrami i trapezi, prema jednakosti stranica deltoidi.

Definicija 18. *Četvorougao čije su svake dve naspramne stranice paralelne naziva se paralelogram.*

Direktna posledica paralelnih stranica jeste da su naspramni uglovi paralelograma jednaki, a susedni suplementni. Odnosno, važi:

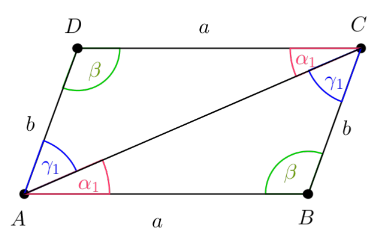
$$\alpha = \gamma,\ \beta = \delta,\ \alpha + \beta = 180°,\ \beta + \gamma = 180°,\ \gamma + \delta = 180°,\ \delta + \alpha = 180°.$$

Na slici 59 prikazan je paralelogram $ABCD$ sa vrednostima uglova.



Slika 59: Paralelogram

Naspramne stranice paralelograma su jednake. To sledi iz sledećeg razmatranja. Paralelogram se dijagonalom podeli na dva podudarna trougla (slika 60). Kako je $ABC \cong ACD$ (USU) tada je $|AB|$=$|CD|$ i $|BC|$=$|DA|$, odnosno naspramne stranice paralelograma su jednake.

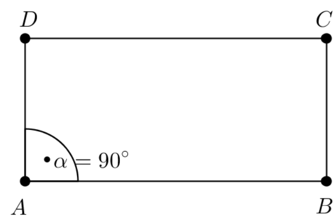


Slika 60: Naspramne stranice paralelograma su jednake

Izdvajaju se posebne vrste paralelograma, pravougaonici, kvadrati i rombovi.

Definicija 19. *Paralelogram čiji su svi uglovi pravi naziva se pravougaonik.*

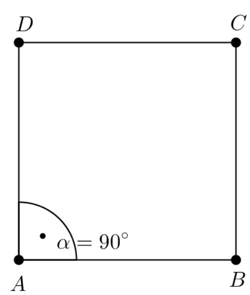
Na slici 61 prikazan je pravougaonik $ABCD$.



Slika 61: Pravougaonik

Definicija 20. *Pravougaonik čije su sve stranice jednakih dužina naziva se kvadrat.*

Na slici 62 prikazan je kvadrat $ABCD$.

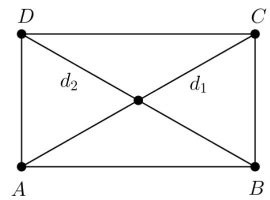


Slika 62: Kvadrat

Iz prethodnih definicija se može uočiti da važi:

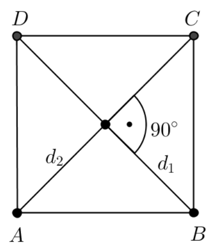
Paralelogram čije su sve stranice jednakih dužina i svi uglovi pravi naziva se kvadrat.

Dijagonale pravougaonika su jednake, dok su dijagonale kvadrata i jednake i seku se pod pravim uglom. U elektronskoj lekciji *vrste četvorouglova* kreirani su apleti koji ilustruju navedena svojstva. Prikazani su na slikama 63 i 64.



$d_2 = 3,94 = d_1 = 3,94$

Slika 63: Aplet u kom su prikazane dijagonale pravougaonika koje se polove



$d_1 = 3,33 = d_2 = 3,3$

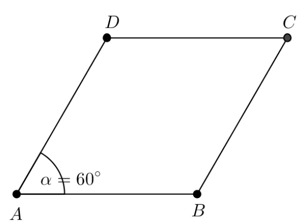
$d_1 \perp d_2$

Slika 64: Aplet u kom su prikazane normalne dijagonale kvadrata koje se polove

Još jedna vrsta paralelograma je romb, definiše se na sledeći način.

Definicija 21. *Paralelogram čije su stranice jednakih dužina naziva se romb.*

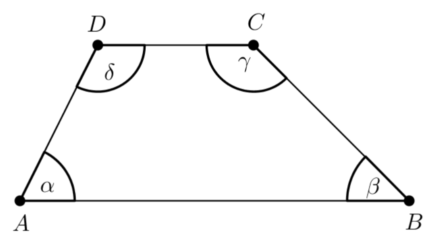
Na slici 65 prikazan je romb $ABCD$.



Slika 65: Romb

Definicija 22. *Četvorougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica naziva se trapez.*

Paralelne stranice trapeza nazivaju se osnovicama, a stranice koje nisu paralelne kracima trapeza. Uglovi nalegli na krak trapeza su suplementni. Ovo sledi iz sledećeg razmatranja. Uglovi α i δ, kao i β i γ trapeza $ABCD$ prikazanog na slici 66, su uglovi sa paralelnim kracima, od kojih je jedan oštar, a drugi tup (mogu biti oba prava), te je $\alpha + \delta = 180°$ i $\beta + \gamma = 180°$.

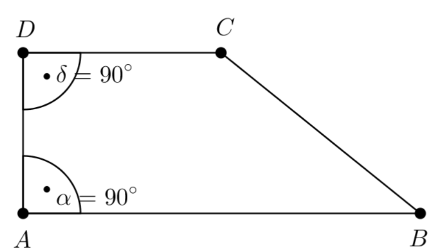


Slika 66: Trapez

Izdvajaju se posebne vrste trapeza, pravougli i jednakokraki trapez. Definisani su na sledeći način.

Definicija 23. *Trapez čiji su unutrašnji uglovi kod temena jednog kraka pravi naziva se pravougli trapez.*

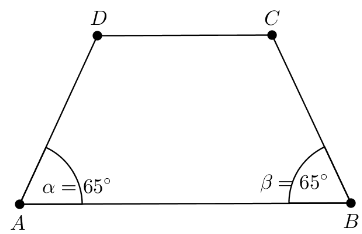
Na slici 67 prikazan je pravougli trapez, pravi uglovi su nalegli na krak AD.



Slika 67: Pravougli trapez

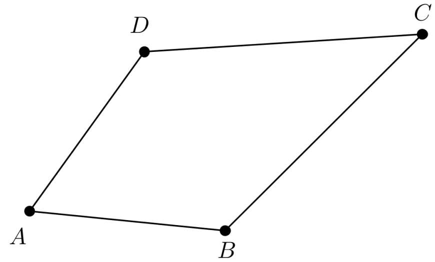
Definicija 24. *Trapez čiji su kraci jednakih dužina naziva se jednakokraki trapez.*

Na slici 68 prikazan je jednakokraki trapez, kraci AD i BC su jednaki. Uglovi na osnovici su jednaki $\alpha = \beta$. Dokaz ove osobine može se pogledati u knjizi [8].



Slika 68: Jednakokraki trapez

Definicija 25. *Četvorougao koji ima dva para susednih stranica jednakih dužina, naziva se deltoid.*



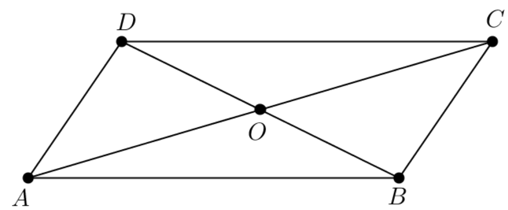
Slika 69: Deltoid

Zajedničko teme jednog para naspramno je zajedničkom temenu drugog para jednakih stranica deltoida. U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *vrste četvorouglova* korišćenjem GeoGebre moguće je pomerati temena deltoida $ABCD$, čime se prikazuju razni deltoidi i olakšava se vizuelizacija pojma deltoid. Takođe, u pomenutoj elektronskoj lekciji može se posmatrati transformacija paralelograma i trapeza u njihove posebne vrste pravougaonik, kvadrat, romb, jednakostranični i pravougli trapez.

5.4 Osobine četvorouglova

U ovom poglavlju su predstavljene neke od bitnih osobina četvorouglova. Više o osobinama četvorouglova može se naći u knjizi [8] popisa literature.

Tvrđenje 10. *Dijagonale paralelograma se polove.*



Slika 70: Dijagonale paralelograma

Dokaz. Neka je tačka O presek dijagonala paralelograma $ABCD$. Na osnovu stava podudarnosti trouglova USU, sledi da je

$$\triangle AOD \cong \triangle COB$$
$$|BC| = |DA| \text{ (naspramne stranice)}$$
$$\measuredangle DAO = \measuredangle BCO \text{ (paralelni kraci)}$$
$$\measuredangle ADO = \measuredangle CBO \text{ (paralelni kraci).}$$

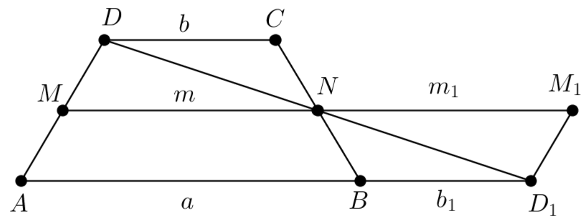
Iz prethodnog sledi da je $|AO| = |OC|$ i $|DO| = |OB|$, odnosno tačka preseka dijagonala deli svaku dijagonalu na dva dela. □

Definicija 26. *Duž čije su krajnje tačke središta krakova trapeza naziva se srednja linija trapeza.*

Tvrđenje 11. *Srednja linija trapeza paralelna je sa osnovicama i njena dužina jednaka je njihovom poluzbiru.*

Dokaz. Neka je M središte kraka AD, a N središte kraka BC, trapeza $ABCD$. Neka su tačke M_1 i D_1 centralnosimetrične sa M i D u odnosu na tačku N, redom (slika 71).

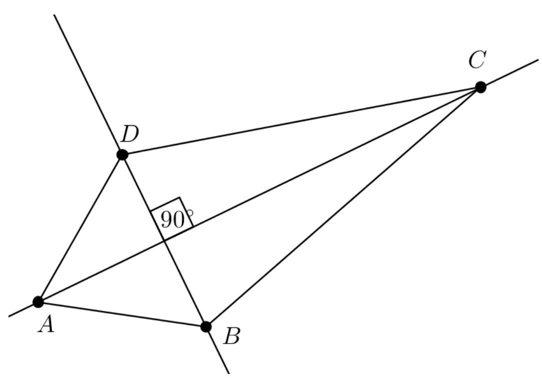
Treba dokazati da je srednja linija trapeza paralelna osnovicama. Duži DC i D_1B su centralnosimetrične u odnosu na tačku N, te je $DC||D_1B$ i $|DC| = |D_1B|$. Kako je $AB||DC$, a duži AB i BD_1 imaju zajedničku krajnju tačku, sledi da su tačke A, B i D_1 kolinearne. Duži DM i D_1M_1 su centralno simetrične, te je $DM||D_1M_1$ i $|DM| = |D_1M_1|$. Kako je $|AM| = |MD|$, tada su AM i D_1M_1 jednake i paralelne, te je četvorougao AD_1M_1M paralelogram, odakle sledi da je srednja linija trapeza paralelna njegovim osnovicama.



Slika 71: Srednja linija trapeza

Ostaje još da se dokaže da je srednja linija trapeza jednaka poluzbiru osnovica. Četvorougao AD_1M_1M je paralelogram, te je $m + m_1 = a + b_1$. Kako je $m = m_1$ i $b = b_1$, dobija se da je $2m = a + b$, odnosno $m = \frac{a+b}{2}$. □

Tvrđenje 12. *Dijagonale konveksnog deltoida uzajamno su normalne i jedna od njih polovi drugu.*

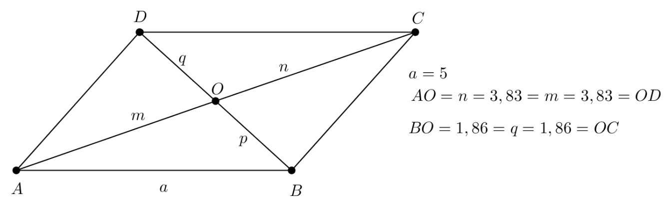


Slika 72: Dijagonale deltoida

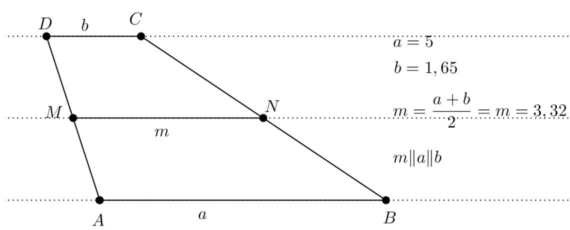
Dokaz. Prema definiciji deltoida, tačke A i C su jednako udaljene od temena B i D, te pripadaju simetrali duži BD (slika 72). Dakle, dijagonala AC sadržana je u simetrali S_{AC} duži BD, pa su dijagonale AC i BD, uzajamno normalne i pri tom dijagonala AC polovi dijagonalu BD. □

Tvrđenje 13. *Prave određene dijagonalama nekonveksnog deltoida uzajamno su normalne i jedna od njih polovi drugu dijagonalu.*

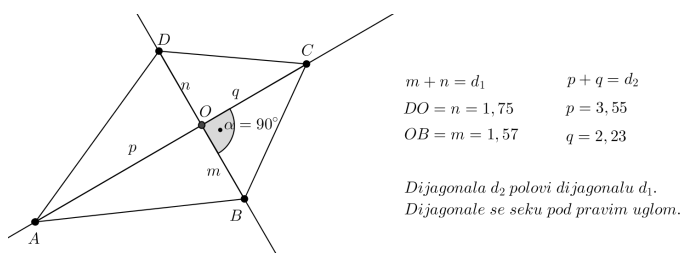
U apletima kreiranim za elektronsku lekciju *osobine četvorouglova* korišćenjem GeoGebre mogu se posmatrati navedena svojstva za četvorouglove sa prikazanim dužinama odgovarajućih stranica. Transformacija četvorouglova u apletu se vrši pomeranjem njihovih temena. Recimo, pomeranjem temena deltoida konveksan deltoid se može transformisati u nekonveksan pri čemu se dijagonale i dalje seku pod pravim uglom. Takođe su prikazane dužine dijagonala i dužine delova na koje su podeljene dijagonale. Na slikama 73, 74 i 75 prikazani su opisani apleti.



Slika 73: Aplet u kom su prikazane dijagonale paralelograma koje se polove



Slika 74: Aplet u kom je prikazana srednja linija trapeza i njena dužina



Slika 75: Aplet u kom su prikazane dužine dijagonala deltoida i ugao pod kojim se seku

5.5 Površina četvorougla

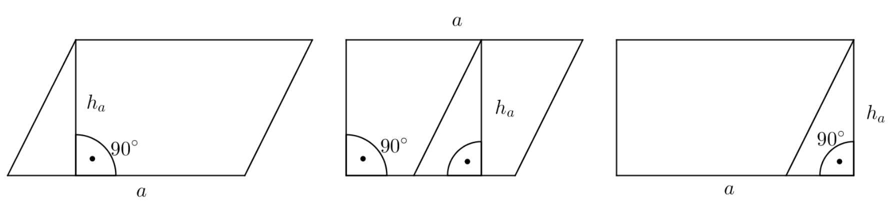
Mera (veličina) figure se naziva površinom te figure. Površina figure se meri drugom figurom koja se naziva jedinica mere. Površine parcela određivane su u Staroj Grčkoj, Egiptu i Mesopotamiji. Najpre su merene parcele oblika pravougaonika. Parcele drugih oblika poređene su sa parcelama oblika pravougaonika kako bi njihova veličina bila približno određena.

5.5.1 Površina paralelograma

Površina paralelograma jednaka je proizvodu dužine stranice paralelograma i dužine njoj odgovarajuće visine.

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$

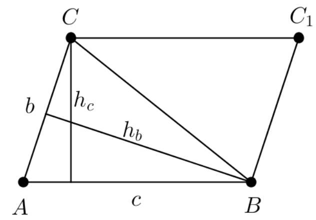
Pritiskanjem dugmeta *površina* u apletu kreiranom za elektronsku lekciju *površina četvorougla* korišćenjem GeoGebre ilustruje se transformacija paralelograma u pravougaonik prikazana na slici 76. Kako je površina dobijenog pravougaonika $a \cdot h_a$, formula za izračunavanje površine paralelograma je očigledna.



Slika 76: Površina paralelograma

Sada će biti predstavljeno izvođenje formula za površinu trougla, trapeza i deltoida.

Svaki trougao se, njemu podudarnim trouglom može dopuniti do paralelograma. Trougao ABC dopunjen je podudarnim trouglom CC_1B do paralelograma $ABCC_1$ (slika 77).



Slika 77: Površina trougla

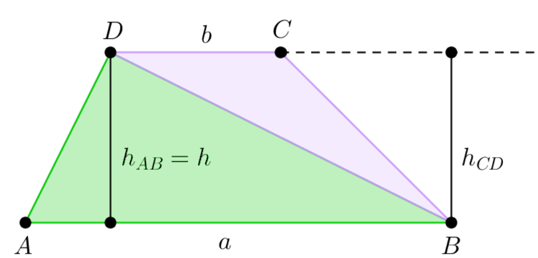
Stranice b i c trougla ABC ujedno su i stranice paralelograma $ABCC_1$. Visine trouglova su h_b i h_c koje odgovaraju ovim stranicama ujedno su i visine paralelograma. Kako je $\triangle ABC \cong \triangle C_1CB$, površina svakog od ovih trouglova jednaka je polovini površine paralelograma $ABCC_1$, odnosno:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}.$$

5.5.2 Površina trapeza

Svaki trapez se dijagonalom može podeliti na dva trougla. Trapez $ABCD$ prikazan na slici 78 dijagonalom BD je podeljen na dva trougla, $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$. Duž h_{AB} je zajednička visina trapeza i trougla ABD. Duž h_{CD} je visina trougla BCD. Dužine visina h_{AB} i h_{CD} su jednake, jer predstavljaju rastojanje paralelnih pravih koje su određene paralelnim stranicama trapeza, i pri tome su jednake visini h.

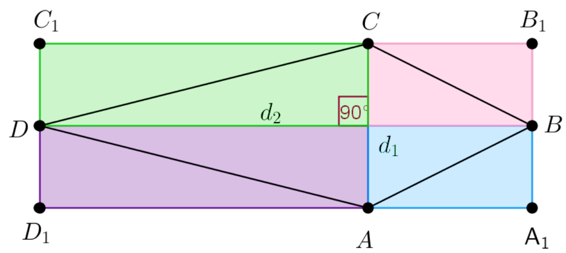
$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{a \cdot h_{AB}}{2} = \frac{b \cdot h_{CD}}{2} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(a+b)h}{2} = mh.$$



Slika 78: Površina trapeza

5.5.3 Površina deltoida

Dijagonale konveksnog deltoida, kao i prave određene dijagonalama nekonveksnog deltoida, uzajamno su normalne. Formula za površinu četvorouglova čije su dijagonale ili prave određene dijagonalama uzajamno normalne izvodi se na sledeći način. Četvorougao čije su dijagonale d_1 i d_2 uzajamno normalne može se dopuniti, odgovarajućim podudarnim trouglovima do pravougaonika (slika 79). Dužine stranica pravougaonika jednake su dužinama dijagonala, odnosno



Slika 79: Površina deltoida

važi da je $|A_1B_1| = d_1$ i $|B_1C_1| = d_2$, pa je površina polaznog četvorougla jednaka polovini površine dobijenog pravougaonika.

$$P_{ABCD} = \frac{P_{A_1B_1C_1D_1}}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Izvođenje formule za nekonveksan deltoid može se naći u knjizi [7] popisa literature.

6 Krug

Sadržaj obrađen u poglavlju Krug realizuje se u nastavnom programu za 5. i 7. razred osnovne škole. U 5. razredu, nakon upoznavanja sa pojmom skupa definišu se krug i njegovi osnovni elementi. U 7. razredu se znanje proširuje. Definišu se centralni, periferijski uglovi kruga, obrađuje se obim i površina kruga i njegovih delova. Učenici se upoznaju sa brojem π.

Iracionalan broj Pi ili π poznat je više od 5 000 godina. Arhimed (287-212. g.p.n.e.) je za broj π uzimao vrednost $\frac{22}{7}$. Holandski matematičar Ludolf van Ceulen (1538-1610) izračunao je broj π sa tačnošću od 35 decimala:

$$\pi = 3,14159265358979...$$

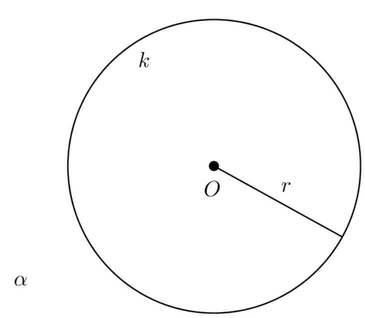
Zato se π često naziva Arhimedov ili Ludolfov broj. Definiše se kao odnos obima i prečnika kruga. U ovom poglavlju predstavljen je krug, njegovi osnovni elementi, obim i površina kruga i njegovih delova.

Definicija 27. *Kružnu liniju (kružnicu) čine sve tačke jedne ravni jednako udaljene od jedne tačke te ravni, koja se naziva centar kružnice i najčešće se obeležava slovom O.*

U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *kružnica i krug* korišćenjem GeoGebre data ja tačka O i duž čija je ona krajnja tačka, prevlačenjem miša preko druge krajnje tačke u apletu se iscrtavaju tragovi svih tačaka koje su na rastojanju dužine date duži od tačke O i nalaze se u ravni α. Aplet je moguće pokrenuti pritiskanjem na dugme *sve tačke*, ali je cilj da učenik sam zaključi gde će se nalaziti ostale tačke.

Definicija 28. *Duž čija je jedna krajnja tačka centar kružnice, a druga krajnja tačka bilo koja tačka na kružnici naziva se poluprečnik te kružnice i najčešće se označava sa r.*

Na slici 80 prikazana je kružnica sa osnovnim elementima.



Slika 80: Kružnica $k(O, r)$

Kružnica čiji je centar O, a poluprečnik r označava se sa $k(O, r)$ ili samo k. Kružnica k je podelila ravan α u kojoj se nalazi na dve oblasti, unutrašnju i spoljašnju oblast.

Definicija 29. *Deo ravni koji čine unutrašnja oblast određena kružnicom, zajedno sa tačkama te kružnice naziva se krug sa centrom u tački O i poluprečnikom r.*

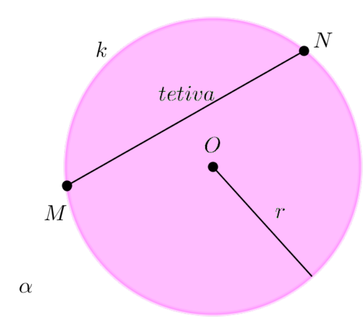
Krug se označava sa $K(O, r)$ ili samo K.

Definicija 30. *Duž određena dvema tačkama kružnice naziva se tetiva.*

Pritiskanjem dugmeta *k* označava se krug K, dok se pritiskanjem dugmeta *duž* u apletu kreiranom za elektronsku lekciju *kružnica i krug* korišćenjem GeoGebre iscrtava jedna tetiva MN. Može se uočiti da tetiva MN sadrži tačku O, međutim to ne mora biti slučaj. Tačka M može menjati svoj položaj na kružnici pri čemu se menja dužina tetive MN. Posebno, tetiva koja sadrži centar kružnice definiše se na sledeći način.

Definicija 31. *Duž koja sadrži centar kružnice, a čije su krajnje tačke na toj kružnici naziva se prečnik kruga.*

Tačka N je fiksirana u apletu, pomeranjem tačke M može se zaključiti da je prečnik kruga najduža tetiva kruga. Na slici 81 prikazan je opisani aplet.



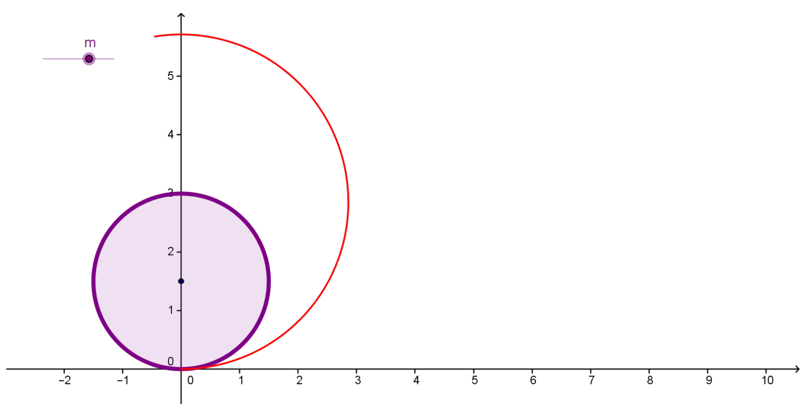
Slika 81: Aplet u kom je prikazan krug $K(O, r)$ sa tetivom MN

6.1 Obim i površina kruga

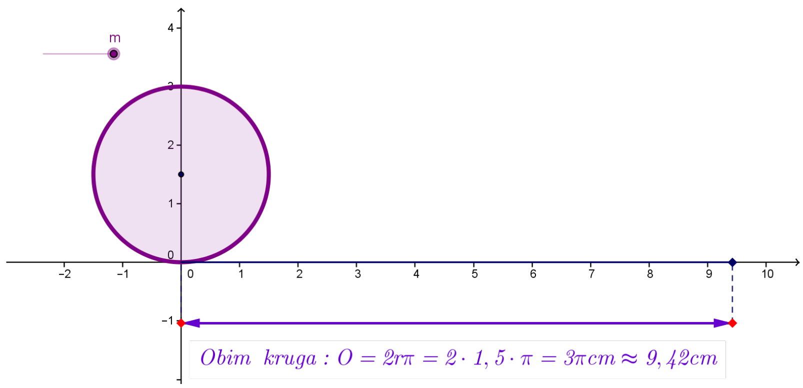
Model kruga se javlja na raznim predmetima (novac, čaša, točak, predmeti valjkastog oblika i drugo). Postavlja se pitanje kako izmeriti dužinu (obim) neke kružnice. Prilikom izvođenja eksperimenta u kom se koncem i metrom meri dužina kružnica, zatim dužina prečnika i onda se upoređuje količnik $O : 2r$ zapaža se da je taj broj nešto veći od tri. Na ovaj način se dolazi do pomenutog broja π. Dakle, obim kruga jednak je proizvodu njegovog prečnika i broja π.

$$O = 2r\pi.$$

U drugom apletu kreiranom za elektronsku lekciju *kružnica i krug* prikazan je postupak računanja obima obmotavanjem trake oko kruga i računanjem njene dužine. Postupak odmotavanja se vrši prevlačenjem miša preko slajdera m. Kada slajder dostigne maksimalnu vrednost u apletu se pojavljuje tekstualno polje sa izračunatim obimom za konkretan krug. Za približnu vrednost broja π uzeta je vrednost $3,14$. Aplet je moguće zumirati pri čemu se na osi može posmatrati tačnost dobijenog rezultata. Na slikama 82 i 83 prikazan je opisani aplet.

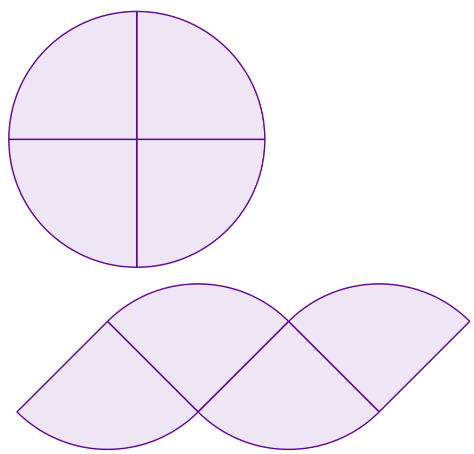


Slika 82: Aplet u kom je prikazan postupak računanja obima kruga



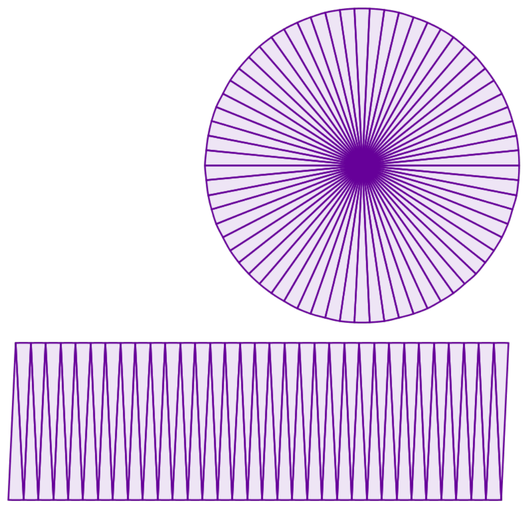
Slika 83: Aplet u kom je prikazan postupak računanja obima kruga

Površina pravilnog mnogougla se računa tako što se mnogougao razloži na trouglove pa se zatim površina mnogougla računa kao zbir površina tih trouglova. Sličan postupak može se primeniti i prilikom računanja površine kruga. Krug dat na slici 84 podeljen je na četiri jednaka dela i oni su poređani na prikazani način.



Slika 84: Aplet koji ilustruje računanje površine kruga

Ako se krug dalje deli, što je u apletu kreiranom za elektronsku lekciju *obim i površina kruga* korišćenjem GeoGebre moguće prevlačenjem miša preko slajdera n, dobiće se figura koja sve više liči na pravougaonik čije su stranice polovina obima kruga $r\pi$ i njegov poluprečnik r (slika 85).



Slika 85: Aplet koji ilustruje računanje površine kruga

Dakle, površina kruga jednaka je proizvodu kvadrata poluprečnika r i broja π.

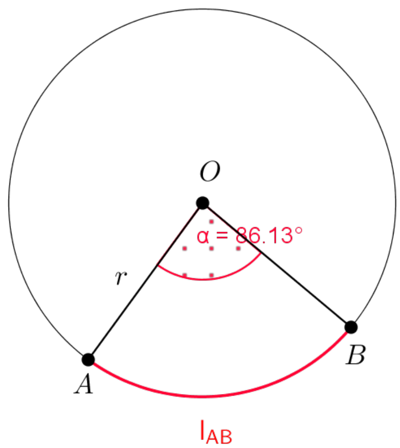
$$P = r^2\pi.$$

6.2 Kružni luk, kružni isečak

Važni delovi kruga su kružni luk i kružni isečak.

Definicija 32. *Kružni luk je deo kružnice određen dvema tačkama i centralnim uglom.*

Na slici 86 prikazan je kružni luk AB (l_{AB}), određen tačkama A, B i centralnim uglom α.



Slika 86: Kružni luk l_{AB}

Formula za dužinu kružnog luka izvodi se iz sledećeg odnosa:

$$l_{AB} : O_{k(O,r)} = \alpha : 360^\circ$$

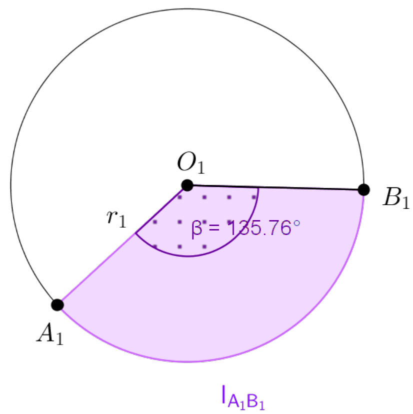
$$l_{AB} \cdot 360^\circ = \alpha \cdot 2r\pi$$

$$l_{AB} = \frac{r\pi}{180^\circ} \cdot \alpha.$$

U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *kružni luk, kružni isečak* korišćenjem GeoGebre moguće je pomerati tačke A, B i O, što omogućava bolju vizuelizaciju pojma kružni luk, kao i uočavanje veze između dužine luka, poluprečnika i centralnog ugla.

Definicija 33. *Deo kruga koji je ograničen poluprečnicima OA_1, OB_1 i lukom $l_{A_1B_1}$ se naziva kružni isečak.*

Na slici 87 prikazan je kružni isečak OA_1B_1.



Slika 87: Kružni isečak

Formula za površinu kružnog isečka se izvodi iz sledećeg odnosa:

$$P_i : P_{k(O_1,r_1)} = \beta : 360^\circ$$

$$P_i \cdot 360^\circ = \beta \cdot r^2\pi$$

$$P_i = \frac{r^2\pi}{360^\circ} \cdot \beta.$$

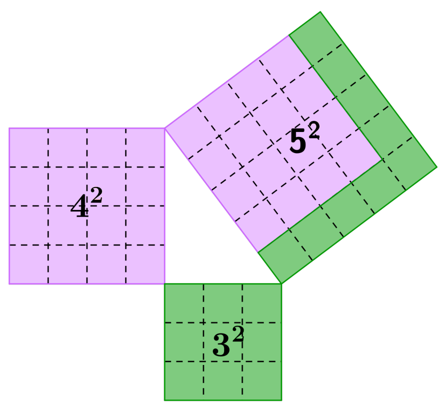
U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *kružni luk, kružni isečak* korišćenjem GeoGebre moguće je pomerati tačke A_1, B_1 i O_1, što omogućava bolju vizuelizaciju pojma kružni isečak, kao i uočavanje veze između površine isečka, poluprečnika i centralnog ugla.

7 Pitagorina teorema

Pitagorina teorema je dubok i višesmislen stav geometrije koji do nas dopire iz daleke prošlosti. Njen značaj umnogome prevazilazi uske geometrijske okvire. Još od antičkih vremena ona je osnov pre svega geometrijskog i opštematematičkog, a potom i svakog drugog obrazovanja. Pitagora je živeo u šestom veku pre nove ere (oko 580-500. g.p.n.e.). Bio je grčki filozof i matematičar. Rođen je na Samosu, živeo je u Kortonu (južna Italija). Najvažnije Pitagorino otkriće je dokaz teoreme u kojoj je data zavisnost između hipotenuze i kateta pravouglog trougla, koja je poznata kao Pitagorina teorema.

Sadržaj obrađen u poglavlju Pitagorina teorema realizuje se u nastavnom programu za 7. razred osnovne škole. U ovom poglavlju predstavljena je Pitagorina teorema, njen dokaz kao i njena primena.

Teorema 1. (Pitagorina teorema) *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravouglog trougla jednaka je zbiru površina kvadrata nad katetama tog trougla.*



Slika 88: Pitagorina trojka (3, 4, 5)

Ako se nad svakom stranicom pravouglog trougla datog na slici 88 konstruiše kvadrat, onda će površine tih kvadrata biti 3^2, 4^2 i 5^2. Primećuje se da je $3^2 + 4^2 = 5^2$. Tj. zbir površina kvadrata konstruisanih nad katetama jednak je površini kvadrata nad hipotenuzom. Navedeni odnos stranica važi za svaki pravougli trougao.

Dokaz. Neka je dat pravougli trougao ABC čije su katete a i b, hipotenuza c (slika 89). Konstruisana su dva podudarna kvadrata $CDFH$ i $C_1D_1F_1H_1$, čije su stranice $CD = C_1D_1 = a + b$. Trouglovi ACB, BDE, EFG, GHA, redom obeleženi sa $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ su podudarni pravougli trouglovi (stav-SUS). Četvorougao $ABEG$ je kvadrat-kvadrat nad hipotenuzom c, jer je:

$$AB = BE = EG = GA = C \text{ (hipotenuza pravouglog trougla } ABC\text{)},$$

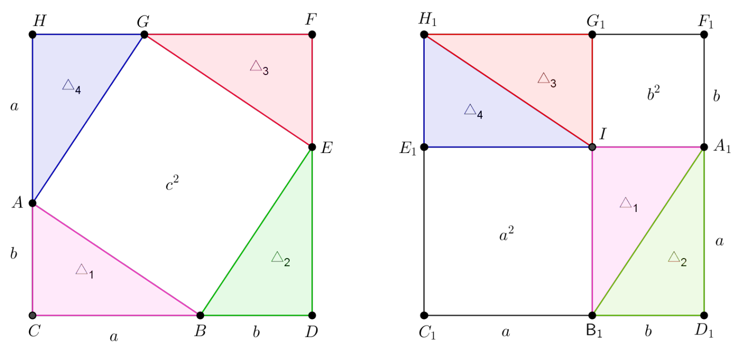
$$\measuredangle EBD + \measuredangle EBA + \measuredangle ABC = 180^\circ$$

$\measuredangle EBD + \measuredangle ABC = 90^\circ$ (komplementni uglovi, njihov zbir je 90°, što se zaključuje iz podudarnosti trouglova $\triangle_1$ i $\triangle_2$ i činjenice da je zbir uglova u trouglu 180°), onda je i $\measuredangle EBA = 90^\circ$.

Ako se podudarni trouglovi rasporede kao u kvadratu $CDFH$, onda je preostali deo c^2. Ako se isti trouglovi rasporede kao u kvadratu $C_1D_1F_1H_1$ onda je preostala površina jednaka $a^2 + b^2$, tj.

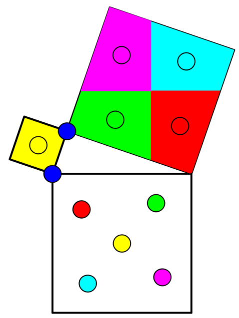
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

čime je teorema dokazana. □

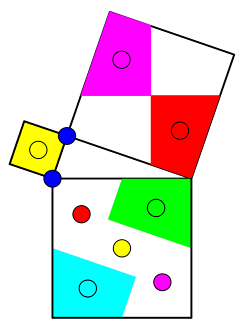


Slika 89: Dokaz Pitagorine teoreme

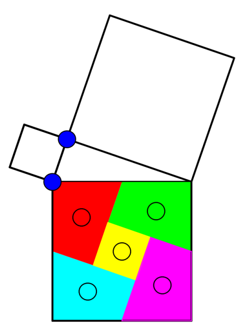
Klasičan način izvođenja dokaza većini učenika neće privući pažnju. Stoga je kreiran aplet za elektronsku lekciju *teorema i dokaz* korišćenjem GeoGebre koji ilustruje Pitagorinu teoremu. U apletu je moguća transformacija pravouglog trougla sa kracima različitih dužina do jednakokrakog pravouglog. Prevlačenjem krugova istih boja jedan preko drugog sa kvadrata nad katetama u kvadrat nad hipotenuzom dokaz teoreme postaje očigledan. Na slikama 90, 91 i 92 predstavljen je opisani aplet.



Slika 90: Dokaz Pitagorine teoreme pomoću GeoGebra apleta



Slika 91: Dokaz Pitagorine teoreme pomoću GeoGebra apleta



Slika 92: Dokaz Pitagorine teoreme pomoću GeoGebra apleta

7.1 Primena Pitagorine teoreme

Trojka (x, y, z) pozitivnih celih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

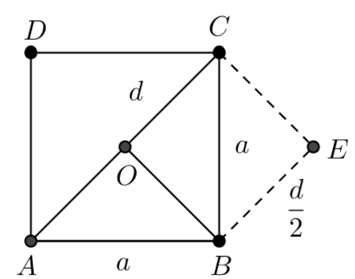
$$x^2 + y^2 = z^2$$

naziva se Pitagorina trojka. Brojne trojke su bile poznate u starim civilizacijama. Najčešće oblik osnova megalitskih građevina nije bio kružan ili eliptičan, vec nepravilan, jajast ili u obliku zaravnjenog kruga. Ako je suditi prema rekonstrukciji A. Toma, osnovni trougao kojim je započinjana konstrukcija osnove najčešće je bio Pitagorin trougao $(3, 4, 5)$. Korišćene su i druge trojke. U Kineskoj zbirci matematičkih problema *Devet poglavlja iz matematičke umetnosti* nastaloj u vreme dinastije Han postoji sačuvan niz Pitagorinih trojki. Takođe, u drevnim indijskim uputstvima sačuvane su mnoge Pitagorine trojke [2].

U ovom radu je predstavljena primena Pitagorine teoreme na izračunavanje nepoznatih elemenata trouglova, četvorouglova kao i pri konstrukciji tačaka na brojevnoj pravoj koje odgovaraju nekim iracionalnim brojevima. Više o primeni može se naći u knjizi [10] popisa literature.

7.1.1 Primena na kvadrat

Dat je kvadrat $ABCD$ (slika 93). Trougao ABC je pravougli jednakokraki pa je:



Slika 93: Primena Pitagorine teoreme na kvadrat

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2},$$

čime je dijagonala kvadrata izražena u zavisnosti od stranice kvadrata. Moguć je i suprotan postupak, odnosno, stranica a se može izraziti preko dijagonale d. Posmatranjem kvadrata čija je dijagonala $BC = a$, stranica $BE = \frac{d}{2}$, na osnovu prethodnog izvedenog sledi:

$$a = \frac{d}{2}\sqrt{2}.$$

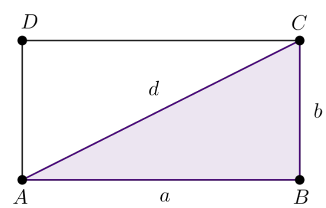
Do ove formule može se doći i na drugi način. Na osnovu Pitagorine teoreme je:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$a^2 = \frac{1}{2}d^2$$
$$a = \frac{d}{2}\sqrt{2}.$$

7.1.2 Primena na pravougaonik

Dat je pravougaonik $ABCD$ sa stranicama a i b (slika 94). Dijagonala AC, označena sa d, deli pravougaonik na dva podudarna trougla. Dijagonala d može se izračunati na sledeći način: posmatranjem pravouglog trougla ABC, na osnovu Pitagorine teoreme je:

$$d^2 = a^2 + b^2$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Slika 94: Primena Pitagorine teoreme na pravougaonik

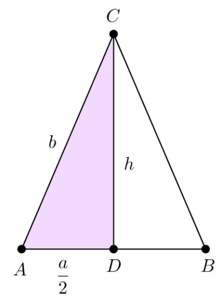
Na ovaj način je dobijena formula za izračunavanje dijagonale pravougaonika. Ako su poznate jedna stranica, npr. a i dijagonala d, druga stranica se može izračunati na sledeći način: posmatranjem pravouglog trougla ABC, na osnovu Pitagorine teoreme je:

$$b^2 = d^2 - a^2$$
$$b = \sqrt{d^2 - a^2}.$$

7.1.3 Primena na jednakokraki trougao

Dat je jednakokraki trougao ABC (slika 95). Ako je tačka D podnožje normale iz temena C na osnovicu AB, trougao ADC je pravougli. Katete tog pravouglog trougla su $\frac{a}{2}$ i h, hipotenuza je krak b, na osnovu Pitagorine teoreme je:

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2.$$



Slika 95: Primena Pitagorine teoreme na jednakokraki trougao

Na ovaj način su povezani osnovica, krak i visina jednakokrakog trougla. Ako su poznate dve veličine, treća se može odrediti pomoću prethodne veze.

7.1.4 Primena na jednakostranični trougao

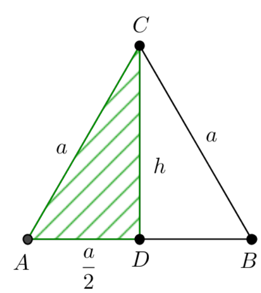
Dat je jednakostranični trougao ABC (slika 96). Ako je tačka D podnožje normale iz temena C na stranicu AB, trougao ADC je pravougli. Katete tog pravouglog trougla su $\frac{a}{2}$ i h, hipotenuza je stranica a, na osnovu Pitagorine teoreme je:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{3}$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$



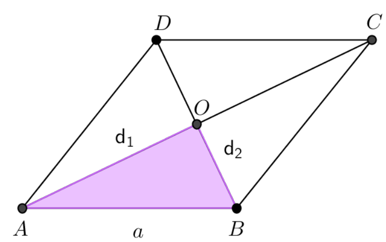
Slika 96: Primena Pitagorine teoreme na jednakostranični trougao

Na ovaj način je visina h izražena preko stranice trougla a. Moguć je i suprotan postupak, odnosno, stranica a se može izraziti preko visine h.

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$
$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$
$$a^2 = \frac{4h^2}{3}$$
$$a = \sqrt{\frac{4h^2}{3}}$$
$$a = \frac{2h}{3}\sqrt{3}.$$

7.1.5 Primena na romb

Posmatranjem romba $ABCD$, datog na slici 97, može se uočiti pravougli trougao AOB čije su katete $\frac{d_1}{2}$ i $\frac{d_2}{2}$, hipotenuza je stranica a. Na osnovu Pitagorine teoreme je:



Slika 97: Primena Pitagorine teoreme na romb

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2.$$

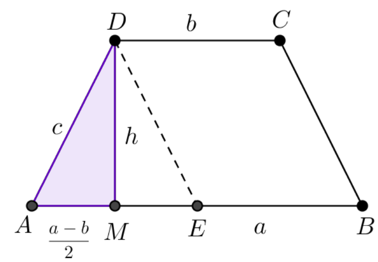
Na ovaj način su povezane dijagonale d_1 i d_2 romba sa stranicom a. Iz izvedene formule može se odrediti nepoznata veličina, ako su poznate preostale dve.

7.1.6 Primena na trapez

Posmatranjem jednakokrakog trapeza $ABCD$, datog na slici 98, može se uočiti duž DE takva da je $DE \parallel CB$. Trougao ADE je jednakokraki. Takođe, važi da je:

$$AE = AB - EB$$

$$AE = a - b.$$



Slika 98: Primena Pitagorine teoreme na trapez

Osnovica jednakokrakog trougla ADE je $AE = a - b$. Kako visina iz temena D deli osnovicu AE na dve podudarne duži $AM = ME = \frac{a-b}{2}$, iz pravouglog trougla AMD, na osnovu Pitagorine teoreme je:

$$c^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2.$$

Na ovaj način su povezane četiri nepoznate veličine. Pomoću ove jednakosti može se izračunati vrednost četvrte nepoznate ako su poznate preostale tri. Analogno važi i ako se posmatra pravougli trapez $MBCD$.

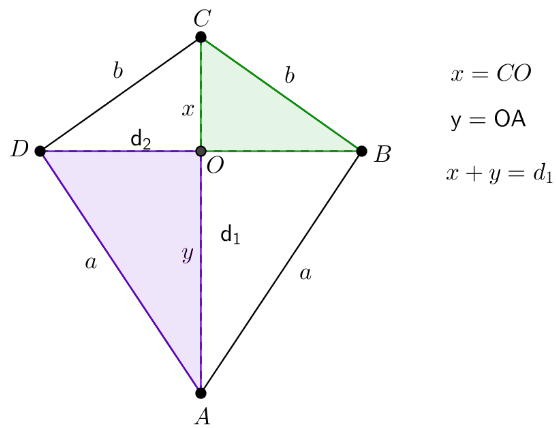
7.1.7 Primena na deltoid

Posmatranjem deltoida $ABCD$, datog na slici 99, sa stranicama a i b i dijagonalama d_1 i d_2 mogu se uočiti pravougli trouglovi COB i AOD.

Iz prvog, na osnovu Pitagorine teoreme sledi:

$$b^2 = x^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2.$$

Gde je x kraći deo dijagonale d_1.



Slika 99: Primena Pitagorine teoreme na deltoid

Iz drugog, na osnovu Pitagorine teoreme sledi:

$$a^2 = y^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2.$$

Gde je y duži deo dijagonale d_1. Na ovaj način je povezano pet nepoznatih veličina.

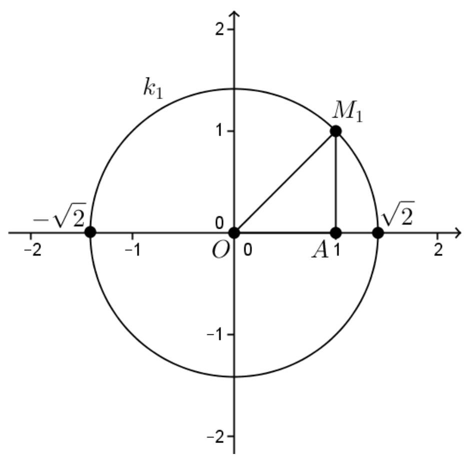
7.1.8 Konstrukcija tačaka na brojevnoj pravoj koje odgovaraju brojevima $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{c}$....

Svakom realnom broju odgovara tačno jedna tačka brojevne prave, i obrnuto. Prema tome, između realnih brojeva i tačaka brojevne prave postoji obostrano jednoznačno pridruživanje [9]. U radu je prikazana mogućnost konstrukcijskog određivanja tačaka brojevne prave kojima se pridružuju neki iracionalni brojevi kao što su $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{c}$.....

1. Tačka brojevne prave koja se pridružuje broju $\sqrt{2}$, odnosno $\sqrt{3}$ može se konstruisati na sledeći način: najpre se konstruiše pravougli trougao OAM_1, čije su katete jedinične duži. Na osnovu Pitagorine teoreme dužina hipotenuze trougla je:

$$|OM_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Kružnica k_1, sa centrom O i poluprečnikom $r_1 = |OM_1|$, seče brojevnu pravu Ox u tačkama kojima se jednoznačno pridružuje broj $\sqrt{2}$, odnosno $-\sqrt{2}$ (slika 100).

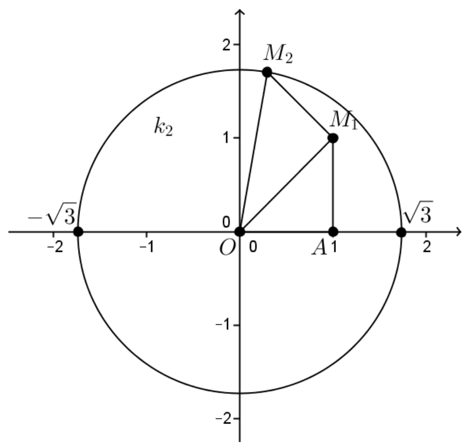


Slika 100: Konstrukcija tačke koja ima vrednost $\sqrt{2}$

Ako se duž OM_1 uzme za jednu katetu, a za drugu duž M_1M_2, kod koje je $|M_1M_2| = 1$, onda se dobija pravougli trougao OM_1M_2 (slika 101). Na osnovu Pitagorine teoreme je:

$$|OM_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Kružnica k_2, sa centrom O i poluprečnikom $r_2 = |OM_2|$, seče brojevnu pravu Ox u tačkama kojima se jednoznačno pridružuje broj $\sqrt{3}$, odnosno $-\sqrt{3}$.

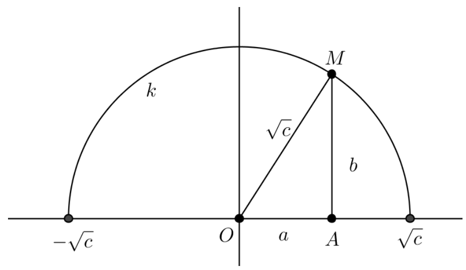


Slika 101: Konstrukcija tačke koja ima vrednost $\sqrt{3}$

U apletu kreiranom za elektronsku lekciju *konstrukcija tačaka na brojevnoj pravoj koje odgovaraju brojevima* $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{c}$ korišćenjem GeoGebre prikazana je konstrukcija tačaka koje odgovaraju brojevima $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.

2. Uopšte, za broj $\sqrt{c}$, ako je $c = a^2 + b^2$, gde su a i b realni brojevi, prvo se konstruiše pravougli trougao čije su katete $|OA| = a$ i $|AM| = b$ (slika 102). Prema Pitagorinoj teoremi, hipotenuza tog pravouglog trougla je:

$$|OM| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c}.$$



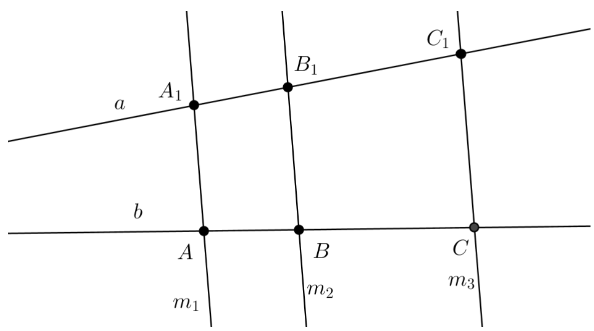
Slika 102: Konstrukcija tačke koja ima vrednost $\sqrt{c}$

8 Talesova teorema

Sadržaj obrađen u poglavlju Talesova teorema realizuje se u nastavnom programu za 7. i 8. razred osnovne škole. U 7. razredu se obrađuje pojam sličnosti trouglova i njena primena, dok se u 8. posvećuje više pažnje ovoj oblasti. Obnavlja se pojam sličnosti, obrađuje se Talesova teorema i njena primena. U ovom poglavlju je predstavljena Talesova teorema, primena na konstrukciju četvrte proporcionale i podelu duži.

Tales iz Mileta živeo je u sedmom i šestom veku pre nove ere (oko 624-548. g.p.n.e.). Bio je jedan od sedmorice legendarnih helenskih mudraca, matematičar, astronom, filozof, državnik. Putovao je po Egiptu i divio se veličanstvenoj i grandioznoj Keopsovoj piramidi. Koristeći svoja geometrijska znanja umeo je da izračuna visinu piramida.

Teorema 2. (Talesova teorema) *Tri paralelne prave odsecaju na dvema datim pravim proporcionalne odsečke.*



Slika 103: Talesova teorema

Na slici 103 tri paralelne prave m_1, m_2 i m_3 seku dve date prave a i b. Tada su odgovarajući odsečci proporcionalni, tj. važi:

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB}{BC}.$$

Takođe, važi i

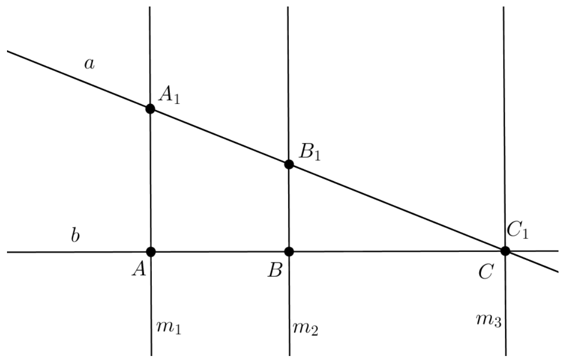
$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_1B_1 + B_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} + \frac{B_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} + 1 = \frac{AB}{BC} + 1 =$$

$$\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{BC} = \frac{AB + BC}{BC} = \frac{AC}{BC}.$$

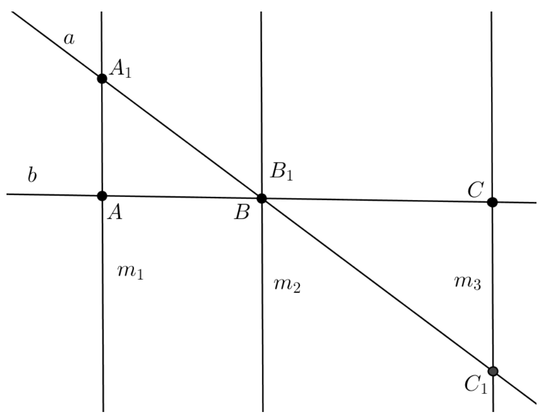
Talesova teorema se može primeniti i u specijalnim slučajevima.

Za specijalan položaj pravih a i b, kada se seku u tački C, na osnovu Talesove teoreme važi: $\frac{BA}{CA} = \frac{B_1A_1}{CA_1}$ (slika 104).



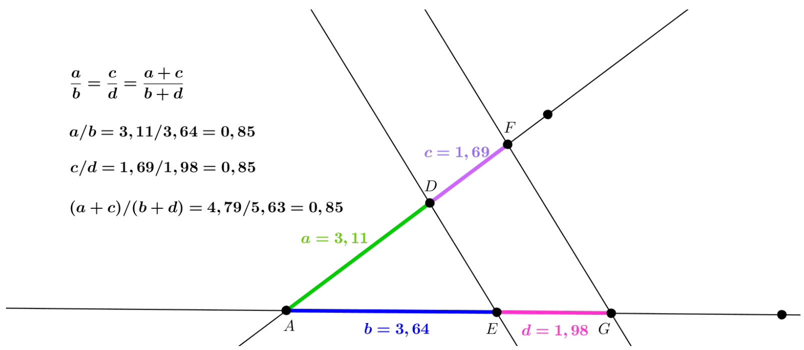
Slika 104: Specijalan položaj pravih a i b u Talesovoj teoremi

Za specijalan položaj pravih a i b, kada se seku u tački B, na osnovu Talesove teoreme važi: $\frac{BA}{CA} = \frac{B_1A_1}{C_1A_1}$ (slika 105).



Slika 105: Specijalan položaj pravih a i b u Talesovoj teoremi

U praksi tradicionalne nastave se pokazalo da princip izlaganja od konkretnih primera ka matematičkim apstrakcijama daje dobre rezultate. Zato, umesto izvođenja dokaza Talesove teoreme kreiran je aplet u elektronskoj lekciji *Talesova teorema* korišćenjem GeoGebre u kom su date konkretne dužine duži a, b, c i d koje se mogu menjati pomeranjem tačaka datih u apletu pri čemu se mogu posmatrati i upoređivati odnosi dužina koji se pojavljuju u teoremi. Na slici 106 može se videti jedan konkretan primer iz prethodno opisanog apleta.



Slika 106: Aplet u kom je prikazana Talesova teorema

8.1 Primena Talesove teoreme

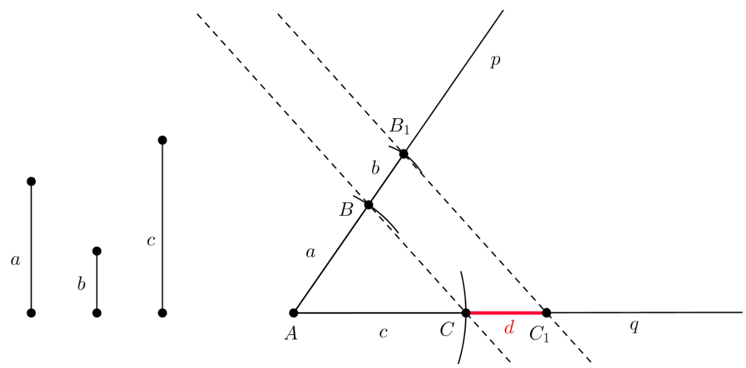
Hijeronim, Aristotelov učenik priča da je Tales izmerio visinu piramida po njihovoj senci, posmatrajući trenutak kada je naša senka iste dužine kao naše telo [2]. Prema predanju Tales se bavio još jednim praktičnim problemom. To je problem merenja udaljenosti broda na moru od nekog mesta na obali. To ukazuje da je Tales poznavao sličnost trouglova, jer je rešavanje ovog problema poznavanjem podudarnosti trouglova znatno složenije.

8.1.1 Četvrta proporcionala

Talesova teorema može se iskoristiti za konstrukciju četvrte geometrijske proporcionale.

Definicija 34. *Duž d je četvrta geometrijska proporcionala za duži a, b i c ako važi: $a : b = c : d$.*

Konstrukcija četvrte proporcionale može se pratiti korak po korak pokretanjem apleta kreiranog za elektronsku lekciju *četvrta proporcionala* korišćenjem GeoGebre. Date su tri proizvoljne duži a, b i c čije se dužine mogu menjati u apletu, konstrukcija četvrte proporcionale vrši se na sledeći način. Konstruiše se proizvoljan ugao pAq, na kraku Ap se odrede tačke B i B_1 takve da važi da je $AB = a$ i $BB_1 = b$, na kraku Aq se odredi tačka C, takva da je $AC = c$. Sada se konstruiše prava koja sadrži tačku B_1 i paralelna je duži BC. Ta prava seče krak Aq u tački C_1. Tražena duž d jednaka je duži CC_1. Na osnovu Talesove teoreme je $a : b = c : d$. Na slici 107 je prikazan poslednji korak konstrukcije četvrte proporcionale.



Slika 107: Četvrta proporcionala

8.1.2 Podela duži

Talesova teorema može se primeniti i pri podeli duži na više jednakih delova. Konstruisanjem simetrala duži duž se ne može podeliti na neparan broj jednakih delova. Rešenje ovog problema daje Talesova teorema.

Za početak, proizvoljna duž AB može se podeliti na 5 jednakih delova na sledeći način: konstruiše se poluprava sa početkom u tački A, na njoj se odrede tačke M_1, M_2, M_3, M_4 i M_5, tako da je:

$$AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5.$$

Konstruiše se prava M_5B, zatim prave p_1, p_2, p_3 i p_4 takve da su paralelne duži BM_5 i da sadrže tačke M_4, M_3, M_2 i M_1. One seku duž AB redom u tačkama C_4, C_3, C_2 i C_1 tako da je:

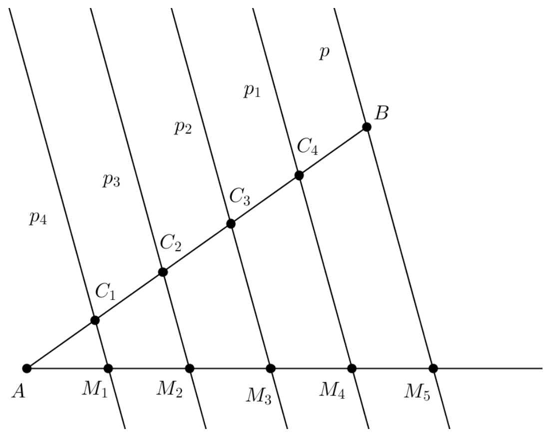
$$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4B.$$

Ovo sledi iz Talesove teoreme, jer je:

$$\frac{AC_1}{AM_1} = \frac{C_1C_2}{M_1M_2} = \frac{C_2C_3}{M_2M_3} = \frac{C_3C_4}{M_3M_4} = \frac{C_4B}{M_4M_5},$$

a duži AM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4 i M_4M_5 su jednake, pa su i duži AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4 i C_4B jednake.

U prvom apletu kreiranom za elektronsku lekciju *podela duži* korišćenjem GeoGebre prikazana je navedena konstrukcija, pri čemu se dužina duži AB može menjati, ali se uvek deli na 5 delova. Na slici 108 prikazana duž AB podeljena je na pet jednakih delova. Analogno, duž se može podeliti na n jednakih delova.

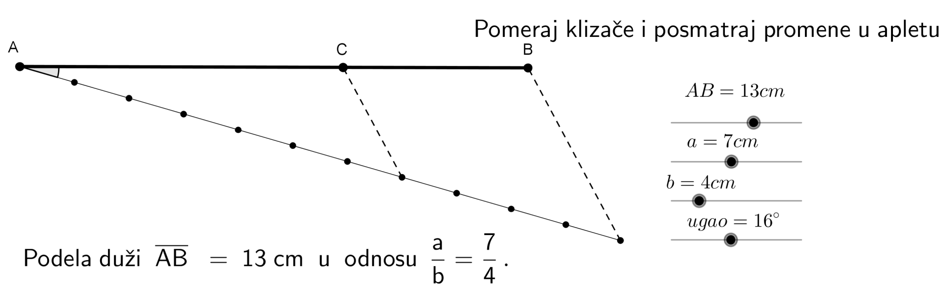


Slika 108: Podela duži

Jedan od karakterističnih zadataka koji se može javiti u ovoj oblasti jeste sledeći zadatak.

Zadatak 13. *Duž* $AB = 13cm$ *podeli tačkom* C*, tako da važi* $AC : CB = 7 : 4$.

Rešenje. Važno je uočiti da je duž AB potrebno podeliti na $7 + 4 = 11$ delova. Tačka C će se nalaziti na sedmom podeoku. Na slici 109 prikazano je rešenje zadatka.



Slika 109: Aplet u kom je prikazana podela duži u odnosu $a : b$

△

Rešenje ovog zadatka je prikazano u drugom apletu kreiranom za elektronsku lekciju *podela duži.* Takođe, pomenuti aplet ilustruje i rešenja drugih zadataka. Početni zadatak se tranformiše u drugi menjanjem dužine duži AB, odnosa u kom se deli zadata duž, odnosno menjanjem parametara a i b.

Zaključak

U ovom radu prikazan je jedan način izvođenja nastave uz pomoć računara, tj. programskog paketa GeoGebra. Prirodno je da savremena nastava matematike prati razvoj tehnologije, pa se nastoji da se u obrazovni proces uvedu nova nastavna sredstva. Kao što je bio slučaj sa grafoskopima, magnetofonima, danas računari i softveri kreirani u te svrhe postaju sastavni deo nastave.

Ovakav vid nastave iziskuje motivisanog nastavnika da se konstantno usavršava, da ide u korak sa tehnologijom. Takođe, očekuje se da ovakav vid nastave motiviše učenika na samostalno istraživanje i rešavanje zadataka uz pomoć GeoGebre.

GeoGebra je pre svega matematički softver koji je jednostavan za upotrebu. Što veća upotreba ovog softvera bila bi od koristi jer čini matematiku opipljivom, pravi vezu između geometrije i algebre na potpuno nov, vuzuelan način. Matematiku čini dinamičnom, interaktivnom, pristupačnom i dostupnom. Omogućava nastavnicima da bolje planiraju i izvode nastavu. Što rezultuje učenicima koji su motivisani i koji imaju bolje rezultate.

Literatura

[1] Slaviša Radović, Aleksandra Stevanović, Marija Radojičić, Miroslav Marić, Programski paket GeoGebra kao interaktivni alat za izučavanje površine geometrijskih figura, Inovacije u nastavi, Vol. 26, Facs. 3, pp. 135-145, 2013.: http://alas.matf.bg.ac.rs/ ml06125, pristupljeno 11.01.2016.

[2] Zoran Lučić, ,,Ogledi iz istorije antičke geometrije", Službeni glasnik, Beograd, 2009.

[3] Petar Mandić, Ivica Radovanović, Danimir Mandić, ,,Uvod u opštu i informatičku pedagogiju", Učiteljski fakultet, Beograd, 2000.

[4] Svetozar Milijević, ,,Interaktivna nastava matematike", Društvo pedagoga republike Srpske, Banja Luka, 2003.

[5] Vladimir Stanojević, ,,Matematika za peti razred osnovne škole", Matematiskop, Beograd, 2012.

[6] Siniša Ješić, Dragica Mišić, Marko Ignjatović, ,,Matematika za peti razred osnovne škole", Gerundijum, Beograd, 2008.

[7] Vladimir Stanojević, ,,Matematika za šesti razred osnovne škole", Matematiskop, Beograd, 2012.

[8] Siniša Ješić, Dragica Mišić, Marko Ignjatović, ,,Matematika za šesti razred osnovne škole", Gerundijum, Beograd, 2012.

[9] Branko Jevremović, Svetozar Milić, Jovan Đuković, ,,Matematika za sedmi razred osnovne škole", Škola plus, Beograd, 2012.

[10] Siniša Ješić, Dragica Mišić, Marko Ignjatović, Nataša Babačev, ,,Matematika za sedmi razred osnovne škole", Gerundijum, Beograd, 2009.

[11] Vladimir Stojanović, ,,Matematika za osmi razred osnovne škole", Matematiskop, Beograd, 2012.