Математички факултет
Универзитет у Београду

Хааров интеграл

Мастер рад

Студент: Данка Јанковић 1069/2014

Ментор: Бранислав Првуловић

Београд,
2015.

Садржај

Предговор

У овом раду биће описана једна класична математичка техника која је дала велики допринос у многим областима математике, а то је инваријантна интеграција на тополошким групама. Она је одиграла важну улогу у решавању Петог Хилбертовог проблема, бар кад су у питању компактне тополошке групе. Решавајући тај проблем, мађарско-амерички математичар и физичар Фон Нојман је увео инваријантну интеграцију на компактним тополошким групама.

Тај интеграл је, у ствари, интеграл по такозваној Хааровој мери на Бореловим скуповима коју је дефинисао Фон Нојманов сународник Хаар (по коме је и именован овај интеграл). Кључна особина овог интеграла је инваријантност у односу на леве и десне транслације. У апстрактној математичкој анализи, теорији група и теорији мере, Хаарова мера је начин да се дефинише инваријантна мера на компактним тополошким групама. Тим путем дефинише се појам интеграла на овим групама. У овом раду употребљен је Фон Нојманов приступ. Интеграл дефинишемо директно (без дефинисања мере), а главни извор на који се ослањамо је [4].

У првом поглављу *Тополошки простор,* мотивисани својствима отворених скупова у метричком простору, увели смо појам топологије и тополошког простора уз навођење разних примера. Наиме, сваки метрички простор јесте тополошки док обрнуто не мора да важи, што је и показано у примеру 2. У дефиницији 3 смо навели шта значи да тополошки простор задовољава другу аксиому пребројивости, што ће бити једна од битних претпоставки приликом дефинисања Хааровог интеграла на тополошким групама. Након тога, дефинисали смо непрекидност функције, као и компактност тополошког простора. На крају поглавља уведена је топологија на količничком скупу и на производу тополошких простора.

У поглављу *Тополошке групе,* поред дефиниције, описани су разни примери ових група, међу којима су скуп реалних бројева са операцијом сабирања, кружница S^1 са операцијом множења комплексних бројева, као и сфера S^3 са операцијом множења уређених четворки (кватерниона). Након тога, доказано је да је подгрупа тополошке групе такође тополошка група, као и чињеница да ако је дата нормална подгрупа H тополошке групе G, тада је количнички скуп G/H тополошка група. Слично као у првом поглављу, доказано је да је и производ тополошких група такође тополошка група, а затим су наведени примери група матрица за које се може показати да су тополошке групе. Детаљније о тополошким групама може се наћи у [4].

У поглављу *Инваријантна интеграција* смо, најпре, за сваку компактну тополошку групу која задовољава другу аксиому пребројивости и било коју реалну функцију на тој групи дефинисали појам леве и десне средине те функције. Наиме, за дату функцију лева и десна средина могу бити различите и не морају бити јединствене. Поставља се питање: шта се дешава са оним функцијама, дефинисаним на компактним тополошким групама, код којих су лева и десна средина јединствене и поклапају се? Такве функције назваћемо интеграбилним функцијама, а јединствену леву (десну) средину функције назваћемо Хааровим интегралом. Како знамо да је свака непрекидна функција интеграбилна док обрнуто не мора да важи, најпре ћемо разматрати само интеграбилне функције и њихова својства, а затим ћемо се бавити интегралом непрекидних функција.

Својства попут инваријантности и хомогености важе за сваку интеграбилну функцију и то је и показано у одељку *Интеграбилне функције.* У одељку *Интеграбилност непрекидних функција* смо, након неколико помоћних ставова и дефиниција за непрекидне функције, доказали једну важну теорему која нам казује да је свака непрекидна функција интеграбилна, односно да се лева и десна средина непрекидне функције постоје, да су јединствене и међусобно једнаке. Након тога следи теорема која нам даје основна својства Хааровог интеграла, међу којима су она која важе и за све интеграле као што су линеарност и монотоност, а затим нормирање и особина специфична само за Хааров интеграл а то је инваријантност. Да је Хааров интеграл једини који задовољава ова својства казује нам теорема 5 из овог одељка. Након проучавања Хааровог интеграла на компактној тополошкој групи биће речи о Хааровом интегралу на производу компактних тополошких група.

На крају одељка дати су примери интеграла, од којих су неки познати и раније, које можемо видети као специјалне случајеве Хааровог интеграла. Међу њима је криволинијски интеграл по јединичној кружници и интеграл периодичне функције на скупу реалних бројева.

1 Тополошки простор

Пре него што дефинишемо тополошки простор, подсетимо се да је *метрички простор* уређен пар (X,d) где је X непразан скуп а $d : X \times X \to [0,\infty)$ функција која за све $x,y,z \in X$ задовољава следеће услове:

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Дефиниција 1. Нека је X непразан скуп и τ фамилија подскупова од X тако да важи:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. ако $U, V \in \tau$, онда $U \cap V \in \tau$;
3. ако $\mathcal{U} \subseteq \tau$, онда $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Тада фамилију τ називамо **тополоијом на** X а пар (X,τ) називамо **тополошким простором.**
Елементе топологије τ називамо *отвореним скуповима*, а комплементе отворених скупова називамо *затвореним скуповима.* Када је јасно о којој топологији је реч, уобичајено је да тополошки простор обележавамо са X.

Ако посматрамо фамилију свих отворених скупова у метричком простору (X,d) можемо закључити да је то једна топологија на X која се назива *топологија индукована метриком* d.
Топологију индуковану еуклидском метриком d на $\mathbb{R}^n$, која је дефинисана са

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2},$$

где је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ а $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, називамо *уобичајеном топологијом* и означавамо са $\mathcal{U}$.

Сваки метрички простор јесте тополошки, док обрнуто не мора да важи, а то ћемо и показати у наредна два примера.

Пример 1. Ако је X произвољан скуп, топологију индуковану дискретном метриком ρ на X, која је дефинисана са:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases},$$

зовемо *дискретном топологијом* и обележавамо са τ_d. Како је за произвољно $x \in X$ отворена кугла $B(x;\frac{1}{2}) = \{y \in X : \rho(x,y) < \frac{1}{2}\} = \{x\}$, то значи да је $\{x\}$ отворен скуп у тополошком простору X, па како је $A = \bigcup\limits_{a \in A} \{a\}$ за сваки скуп $A \subseteq X$, следи, из особине (3) у дефиницији 1, да дискретна топологија садржи све подскупове од X па је у ствари $\tau_d = \mathcal{P}(X)$.

Пример 2. Супротно од дискретне топологије, која садржи све подскупове скупа X, постоји и *антидискретна топологија,* која садржи само $\emptyset$ и X и обележава се са τ_a. Ако X садржи бар два елемента онда ова топологија није индукована метриком. Наиме, ако би d била метрика у којој су само $\emptyset$ и X отворени, онда би свака отворена кугла била једнака са X јер отворена кугла не може да буде празан скуп. Ако узмемо $x, y \in X$ две различите тачке и са $\epsilon = d(x, y) > 0$ означимо растојање између x и y, онда кугла $B(x; \frac{\epsilon}{2})$ не садржи тачку y. Одавде следи да антидискретан простор није метрички.

Све топологије на истом скупу уређене су парцијалним уређењем $\subseteq$ и у смислу те релације антидискретна топологија је најмања, а дискретна топологија највећа топологија на датом скупу.

Нека је (X, τ_X) тополошки простор и $A \subseteq X$. Тада је и А тополошки простор са топологијом која је дефинисана на следећи начин:

$$\tau_A = \{V \cap A : V \in \tau_X\}.$$

Дефиниција 2. Нека је (X, τ) тополошки простор. Фамилија $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ назива се **база топологије** τ ако су испуњени следећи услови:

1. Елементи колекције $\mathcal{B}$ су отворени скупови, тј. $\mathcal{B} \subseteq \tau$;

2. Сваки елемент A топологије τ може се представити као унија неких елемената фамилије $\mathcal{B}$, тј. постоји колекција $\{B_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{B}$ таква да је $A = \bigcup\limits_{j \in J} B_j$.

Пример 3. Базу у скупу $\mathbb{R}$ чине сви отворени интервали са рационалним крајевима, тј. сви интервали облика (a, b), где су $a, b \in \mathbb{Q}$. Наиме, сваки отворен скуп може се записати као унија оваквих отворених интервала. Такође, у скупу $\mathbb{R}^n$ једна база је $\mathcal{B} = \{B(x_0; \frac{1}{m}) : x_0 \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$.

Једна од битних особина коју ћемо касније користити приликом дефинисања Хааровог интеграла, дата је у следећој дефиницији.

Дефиниција 3. Кажемо да тополошки простор X задовољава **другу аксиому пребројивости** ако има највише пребројиву базу.

Пример 4. $\mathbb{R}^n$ задовољава другу аксиому пребројивости јер је база из примера 3 пребројива.

Још од раније познати су нам појмови попут околине тачке, непрекидности функција и компактности простора. Сада ћемо да се подсетимо тих дефиниција, а након тога ћемо увести топологије на количничком скупу и на производу тополошких простора.

Дефиниција 4. Нека је X тополошки простор и $x \in X$. Скуп $G \subseteq X$ називамо **околином тачке** x ако постоји отворен скуп V такав да

$$x \in V \subseteq G.$$

Дефиниција 5. За тополошки простор X кажемо да је **Хауздорфов** или да има својство T_2 ако сваке две различите тачке простора X имају међусобно дисјунктне околине.

Пример 5. Сваки метрички простор јесте Хауздорфов. Наиме, ако су $x, y \in X$ две различите тачке тада је њихово растојање $\epsilon = d(x, y) > 0$. Тада за околину U тачке x можемо узети $U = B(x; \frac{\epsilon}{3})$, а за околину V тачке y можемо узети $V = B(y; \frac{\epsilon}{3})$. Видимо да $x \in U$ и $y \in V$, а докажимо да је $U \cap V = \emptyset$. Ако бисмо претпоставили супротно, тј. да $U \cap V \neq \emptyset$, тада би постојало z такво да $z \in U \cap V$. Одавде следи да $z \in U$ и $z \in V$. Пошто $z \in U$ следи да је $d(x, z) < \frac{\epsilon}{3}$. Слично, пошто $z \in V$ следи да је $d(y, z) < \frac{\epsilon}{3}$. Сада имамо да је

$$\epsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = 2 \cdot \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,$$

а то је контрадикција.

Дефиниција 6. Нека су (X, τ_X) и (Y, τ_Y) тополошки простори. Функција $f : X \to Y$ је **непрекидна** ако је инверзна слика при f сваког отвореног скупа у Y отворен скуп у X, тј.

$$(\forall V \in \tau_Y) \quad f^{-1}(V) \in \tau_X.$$

Из дефиниције непосредно следи да ако је домен функције дискретан простор та функција је сигурно непрекидна.

Дефиниција 7. Нека је $f : X \to Y$ и $x_0 \in X$. Кажемо да је пресликавање f **непрекидно у тачки** x_0 ако за сваку околину V тачке $f(x_0)$ постоји околина U тачке x_0 таква да је $f(U) \subseteq V$.

Није тешко проверити да важи и следећи став.

Став 1. *Пресликавање $f : X \to Y$ је непрекидно ако и само ако је непрекидно у свакој тачки домена.*

Пример 6. Константно пресликавање $f : X \to Y$ је увек непрекидно. Ако је $y_0 \in Y$такво да је $f(x) = y_0$ за све $x \in X$, тада за $B \subseteq Y$ важи

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} X, & y_0 \in B \\ \emptyset, & y_0 \notin B \end{cases},$$

па је инверзна слика сваког скупа отворен скуп.

Пример 7. Идентичко пресликавање $1_X : X \to X$, које је дефинисано са $1_X(x) = x$ за све $x \in X$, је такође непрекидно. Наиме, $1_X^{-1}(A) = A$ за сваки скуп $A \subseteq X$, па ако је A отворен скуп, онда је и $1_X^{-1}(A)$ такође отворен скуп.

Дефиниција 8. Нека је X тополошки простор. Фамилија $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ назива се **покривач** простора X ако је $X = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Ако су чланови дате фамилије отворени скупови тада и сам покривач називамо отвореним. Тополошки простор X је **компактан** ако се из сваког његовог отвореног покривача може издвојити коначан потпокривач.

Нека је (X, τ_X) тополошки простор и $\sim$ релација еквиваленције на скупу X. Класу еквиваленције тачке $x \in X$ означавамо са $[x]$, а количнички скуп $\{[x] : x \in X\}$ са $X/\!\sim$. Нека је $\pi : X \to X/\!\sim$ природна сурјекција дата са $\pi(x) = [x]$. Уочимо следећу фамилију подскупова скупа $X/\!\sim$:

$$\tau_{X/\sim} := \{W \subseteq X/\!\sim\, : \pi^{-1}(W) \in \tau_X\}.$$

Став 2. *Фамилија $\tau_{X/\sim}$ је топологија на $X/\!\sim$.*

Доказ: Да бисмо доказали да дата фамилија јесте топологија, треба да покажемо да задовољава услове из дефиниције 1.

(1) Пошто је $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_X$ и $\pi^{-1}(X/\!\sim) = X \in \tau_X$, закључујемо да $\emptyset, X/\!\sim\, \in \tau_{X/\sim}$.
(2) Нека су $W_1, W_2 \in \tau_{X/\sim}$. Тада је $\pi^{-1}(W_1 \cap W_2) = \pi^{-1}(W_1) \cap \pi^{-1}(W_2) \in \tau_X$, па је и $W_1 \cap W_2 \in \tau_{X/\sim}$.
(3) Нека је $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ подфамилија фамилије $\tau_{X/\sim}$. Дакле, $\pi^{-1}(W_\lambda) \in \tau_X$ за све $\lambda \in \Lambda$. Одатле знамо да је $\pi^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(W_\lambda) \in \tau_X$ (јер је τ_X топологија), па важи да је $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \in \tau_{X/\sim}$. $\square$

Дефиниција 9. Тополошки простор $(X/\!\sim, \tau_{X/\sim})$ називамо **количничким простором простора** (X, τ_X)**.**

Нека су X и Y тополошки простори, а τ_X и τ_Y одговарајуће топологије. Желимо да дефинишемо топологију на $X \times Y$ такву да производи отворених скупова буду отворени. То ћемо урадити на следећи начин:

$$\tau_{X \times Y} := \{W \subseteq X \times Y : (\forall (x,y) \in W)(\exists U \in \tau_X)(\exists V \in \tau_Y)\ (x,y) \in U \times V \subseteq W\}.$$

Може да се покаже да важи следећи став.

Став 3. *Фамилија $\tau_{X \times Y}$ је топологија на $X \times Y$.*

База ове топологије је скуп $\mathcal{A} = \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$, јер се сваки елемент топологије може представити као унија неких елемената из скупа $\mathcal{A}$.

Дефиниција 10. Тополошки простор $(X \times Y, \tau_{X \times Y})$ називамо **тополошким производом** простора (X, τ_X) и (Y, τ_Y), а саму топологију $\tau_{X \times Y}$ називамо **топологијом производа** или **Тихоновљевом топологијом** на $X \times Y$.

Надаље, на тополошком производу $X \times Y$ подразумевамо ову топологију. Пошто је за произвољно $(x, y) \in X \times Y$ испуњено $\{(x, y)\} = \{x\} \times \{y\}$, важи и следећи став.

Став 4. *Нека су X и Y дискретни простори. Тада је и $X \times Y$ такође дискретан простор.*

2 Тополошке групе

Дефиниција 11. Уређен пар $(G, *)$, где је G скуп, а $*$ бинарна операција на G, назива се **група** ако задовољава следеће особине које се називају *аксиоме групе:*

1. $(\forall a, b, c \in G) \quad (a * b) * c = a * (b * c);$
2. $(\exists e \in G)(\forall a \in G) \quad a * e = e * a = a;$
3. $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G) \quad a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$

Ако поред ове 3 особине важи и особина *комутативности,* тј. $a * b = b * a$ за све $a, b \in G$, тада за групу кажемо да је **Абелова.** Елемент e називамо **неутралом** групе, а a^{-1} **инверзом** елемента a.

Пример 8. $(\mathbb{Z}, +)$ јесте група док $(\mathbb{Z}, \cdot)$ није група, јер 0 нема инверз у односу на множење. Такође, $(\mathbb{R}, +)$ јесте група, али $(\mathbb{R}, \cdot)$ није из истог разлога. $(\mathbb{Q}, +)$ је једна група, али $(\mathbb{Q}, \cdot)$ није. Али, ако посматрамо скуп рационалних бројева без нуле, тј. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, онда то јесте група у односу на множење рационалних бројева.

Након што смо се подсетили појма групе можемо да дефинишемо тополошку групу и да видимо разне примере ових група.

Дефиниција 12. Ако на скупу G имамо операцију $*$ у односу на коју је G група и ако имамо топологију такву да су $* : G \times G \to G$ и $i : G \to G \quad (i(x) = x^{-1})$ непрекидна пресликавања, онда кажемо да је G **тополошка група.**

Пример 9. Ако је G било која група са дискретном топологијом, тада је G тополошка група. Овакве групе називамо *дискретним групама.*
Наиме, функција $* : G \times G \to G$ је непрекидна јер је домен дискретан простор (в. дефиницију 6 и став 4). Слично, функција $i : G \to G$ је непрекидна, па су самим тим задовољени сви услови из дефиниције 12.

Ако је група коначна, подразумева се да на њој имамо дискретну топологију.

Пример 10. Реална права $\mathbb{R}$ са операцијом сабирања $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и уобичајеном топологијом на $\mathbb{R}$ чини једну тополошку групу.

Пример 11. Кружница $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, са операцијом множења комплексних бројева, чини једну тополошку групу. S^1 је група у односу на операцију множења комплексних бројева јер су задовољене све аксиоме групе (неутрал за множење је 1 а инверз за z је $\overline{z}$). Такође, то је и тополошки простор јер је подскуп тополошког простора $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Слично, сфера $S^3 = \{q \in \mathbb{R}^4 : |q| = 1\}$, са операцијом множења кватерниона, чини једну тополошку групу.

Кватерниони су у ствари уређене четворке (x, y, z, t), које можемо да представимо на сличан начин као комплексне бројеве:

$$(x, y, z, t) = x + y \cdot i + z \cdot j + t \cdot k.$$

Множење кватернинона приказано је у наредној табели:

$\cdot$	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Ако је $q = (x, y, z, t) = x + y \cdot i + z \cdot j + t \cdot k$, онда је $\overline{q} = x - y \cdot i - z \cdot j - t \cdot k$ и то је инверз од q, док је неутрал 1.

Познато је да су S^0, S^1 и S^3 једине сфере које су тополошке групе, а кључни допринос у утврђивању те чињенице дао је чувени британски математичар Френк Адамс [5].

У претходном одељку смо увели топологије на количничком скупу и на производу тополошких простора. Користећи тако дефинисане топологије, показаћемо неке битне чињенице које важе за количничке групе и производ две тополошке групе.

Дефиниција 13. Нека је $(G, *)$ група. Подскуп $H \subseteq G$ назива се **подгрупа** групе G, у ознаци $H \leq G$, ако важи:

1. $(\forall x, y \in H) \quad x * y \in H$;
2. $e \in H$, где је e неутрал групе G;
3. $(\forall x \in H) \quad x^{-1} \in H$.

Свака група има бар једну подгрупу, а то је $\{e\}$, и она се назива **тривијална подгрупа.** Ако је $H \leq G$ и $x \in G$ онда се скуп $x * H = \{x * y : y \in H\} \quad (H * x = \{y * x : y \in H\})$ назива **леви (десни) косет подгрупе** H **који садржи елемент** x**.**

Став 5. *Нека је G тополошка група и $H \leq G$. Тада је и H тополошка група.*

Доказ: H јесте једна група, а и тополошки простор јер је потпростор тополошког простора G. Операција подгрупе H, као и инверз, су непрекидна пресликавања јер су то рестрикције одговарајућих пресликавања, која су непрекидна. $\square$

Дефиниција 14. Подгрупа H групе $(G, *)$ је **нормална,** у ознаци $H \lhd G$, ако:

$$(\forall x \in G) \quad x * H = H * x$$

односно, ако су леви и десни косет произвољног елемента једнаки. Одавде је очигледно да су све подгрупе Абелове групе нормалне.

Означимо са $G/H = \{x * H : x \in G\}$ скуп свих левих косета подгрупе H. Ако је G група и $H \triangleleft G$, онда је G/H такође група коју називамо **количничком групом.**

Став 6. *Нека је G тополошка група и $H \triangleleft G$. Тада је и $(G/H, \diamond)$ тополошка група, где је $\diamond : G/H \times G/H \to G/H$ операција дата са: $(x * H) \diamond (y * H) = (x * y) * H$.*

Доказ (скица): Скуп G/H је идентичан скупу $G/\sim$, где је $\sim$ релација еквиваленције дефинисана са:

$$x \sim y \Leftrightarrow x^{-1} * y \in H.$$

Ако овако дефинишемо релацију еквиваленције, видимо да је скуп свих класа еквиваленције ($[x] = \{y : x \sim y\}$) у ствари скуп свих левих косета.

Дакле, доказано је да је G/H један количнички скуп, а како на сваком количничком скупу можемо да дефинишемо топологију, ово је један тополошки простор. Непрекидност операције $\diamond : G/H \times G/H \to G/H$, као и инверза, може се доказати из непрекидности одговарајућих пресликавања у групи G. $\square$

Став 7. *Нека су $(G, *)$ и $(H, \circ)$ тополошке групе. Тада је и $G \times H = \{(x, y) : x \in G, y \in H\}$ такође тополошка група у односу на операцију $\cdot$ која је дата са:*

$$(x, y) \cdot (z, t) = (x * z, y \circ t),$$

за све $x, z \in G$ и $y, t \in H$.

Пример 12. Ако посматрамо скуп $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$, можемо закључити да тај скуп чини једну тополошку групу.

Наиме, овај скуп чини групу у односу на множење матрица. Такође, важи асоцијативност, тј. $A(BC) = (AB)C$. Неутрал за множење је јединична матрица E, а инверз матрице A је матрица $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj A$. Такође, ово је и тополошки простор јер је подскуп тополошког простора $\mathbb{R}^{n^2}$.

Пример 13. Слично претходном примеру важи да су и

- $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$,
- $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = E\}$ и
- $SO(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = E, \det A = 1\}$

тополошке групе.

3 Инваријантна интеграција

3.1 Интеграбилне функције

Нека је G компактна тополошка група која задовољава другу аксиому пребројивости, $f : G \to \mathbb{R}$ и $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in G^m$, за неко $m \in \mathbb{N}$, коначан систем елемената групе G.
Дефинишемо функцију $M_{A,f} : G \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$M_{A,f}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{f(xa_i)}{m}, \quad x \in G \tag{1}$$

(са xa_i је означен производ елемената x и a_i у групи G).

Дефиниција 15. Реалан број p називамо **десном средином** функције f ако важи следеће:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists A = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in G^m)(\forall x \in G) \quad |M_{A,f}(x) - p| < \epsilon. \tag{2}$$

Слично, можемо да дефинишемо $M'_{B,f} : G \to \mathbb{R}$, где је $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in G^n$ коначан систем елемената на следећи начин:

$$M'_{B,f}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(b_j x)}{n}. \tag{3}$$

Дефиниција 16. Реалан број q називамо **левом средином** функције f ако важи следеће:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in G^n)(\forall x \in G) \quad |M'_{B,f}(x) - q| < \epsilon. \tag{4}$$

За сваку компактну тополошку групу и сваку функцију можемо дефинисати леву и десну средину и при том то могу бити различите вредности. Такође, функција може имати више левих, односно десних средина. Наредна дефиниција нам даје једну класу функција, која има особину да се лева и десна средина поклапају и да су јединствене.

Дефиниција 17. Функција $f : G \to \mathbb{R}$ је **интеграбилна** ако за њу постоји јединствена лева средина, јединствена десна средина и ако се оне поклапају. Ту вредност називамо **Хааровим интегралом** функције f и обележавамо са $\int f(x)dx$.

Став 8. *Ако је $f(x) = c$ за свако $x \in G$, где је $c \in \mathbb{R}$ (тј. ако је f константна), онда је*

$$\int f(x)dx = c.$$

Краће речено, $\int c dx = c$.

Доказ: Треба да покажемо да c јесте десна средина функције f, као и то да је лева средина и да нема других.
Нека је $\epsilon > 0$ произвољно и $A = (a_1, \dots, a_m) \in G^m$ коначан систем елемената. Пошто је $f(x) = c$ за свако $x \in G$, важи да је и $f(xa_i) = c$, па је

$$|M_{A,f}(x) - c| = \Big| \sum_{i=1}^{m} \frac{f(xa_i)}{m} - c \Big| = \Big| \sum_{i=1}^{m} \frac{c}{m} - c \Big| = |m \cdot \frac{c}{m} - c| = |c - c| < \epsilon,$$

односно c јесте једна десна средина функције f. Слично се показује да је то лева средина.

Нека је сада c' нека друга десна средина функције f. То значи да за свако $\epsilon > 0$ постоји коначан систем елемената $A = (a_1, \dots, a_m) \in G^m$ такав да за свако $x \in G$ важи

$$|M_{A,f}(x) - c'| < \epsilon.$$

Али, $M_{A,f}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{f(xa_i)}{m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{c}{m} = m \cdot \frac{c}{m} = c$, па је:

$$|c - c'| < \epsilon,$$

односно $c = c'$. □

Теорема 1. *Ако је $f : G \to \mathbb{R}$ интеграбилна и $\alpha \in \mathbb{R}$, онда је и αf интеграбилна и важи да је*

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx. \tag{5}$$

Доказ: За $\alpha = 0$, једнакост (5) важи на основу става 8. Нека је $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $p = \displaystyle\int f(x)dx$. Како је p десна средина функције f, то значи да за произвољно $\epsilon > 0$ постоји коначан систем елемената $A = (a_1, \dots, a_m) \in G^m$ такав да $(\forall x \in G)$ важи

$$|M_{A,f}(x) - p| < \frac{\epsilon}{|\alpha|}.$$

Ову неједнакост можемо да помножимо са $|\alpha| > 0$ и добијамо

$$|\alpha M_{A,f}(x) - \alpha p| < \epsilon$$

за свако $x \in G$, што је исто као

$$\Big| \alpha \sum_{i=1}^{m} \frac{f(xa_i)}{m} - \alpha p \Big| < \epsilon,$$

односно

$$\Big|\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha f(xa_i)}{m}-\alpha p\Big|<\epsilon,$$

а ово је еквивалентно са

$$|M_{A,\alpha f}(x)-\alpha p|<\epsilon,$$

па је αp десна средина функције αf.

Ако би b била нека друга десна средина функције αf, онда би $\frac{1}{\alpha}\cdot b$ била десна средина функције $\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha f=f$. Пошто је f интеграбилна, постоји јединствена десна средина која је једнака p, па је $\frac{b}{\alpha}=p$, односно $b=\alpha p$, чиме смо доказали да је αp јединствена десна средина функције αf. На исти начин се доказује да је αp јединствена лева средина функције αf. $\square$

Нека је дато $a\in G$ и функција $D_a:G\to G$ дефинисана са

$$D_a(x)=xa.$$

Ову функцију називамо **десном транслацијом елементом a.** Слично, функцију $L_a:G\to G$ дефинисану са

$$L_a(x)=ax$$

називамо **левом транслацијом елементом a.** Лако се види да су функције D_a и L_a непрекидне, као и да је $D_{a^{-1}}=D_a^{-1}$ и $L_{a^{-1}}=L_a^{-1}$, па су, дакле, D_a и L_a хомеоморфизми. У наредној теореми ћемо доказати својство које је кључно за Хааров интеграл, а то је инваријантност у односу на десне и леве транслације.

Теорема 2. *Ако је $f:G\to\mathbb{R}$ интеграбилна онда су за свако $a\in G$ и функције $f\circ D_a$ и $f\circ L_a$ интеграбилне и важи да је*

$$\int f\circ D_a(x)dx=\int f\circ L_a(x)dx=\int f(x)dx. \tag{6}$$

Доказ: Доказаћемо да је $f\circ D_a$ интеграбилна и да важи $\int f(xa)dx=\int f(x)dx$ за свако $a\in G$, а слично се доказује и друга једнакост.

Нека је $p=\int f(x)dx$ и $\epsilon>0$ произвољно. Како је p лева средина функције f, то постоји коначан систем $B=(b_1,\dots,b_n)\in G^n$ такав да за свако $x\in G$ важи

$$\Big|M'_{B,f}(x)-p\Big|=\Big|\sum_{i=1}^{n}\frac{f(b_ix)}{n}-p\Big|<\epsilon.$$

Ова неједнакост важи за све $x \in G$, па и за $xa \in G$. Дакле, имамо да је

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \frac{f(b_i xa)}{n} - p\Big| < \epsilon.$$

Али,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(b_i xa)}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f \circ D_a)(b_i x)}{n} = M'_{B, f\circ D_a}(x),$$

па је p лева средина и функције $f \circ D_a$.

Како је p и десна (лева) средина функције f, то постоји коначан систем $C = (c_1, \dots, c_m)$ такав да за свако $x \in G$ важи

$$\Big|M_{C,f}(x) - p\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{m} \frac{f(xc_i)}{m} - p\Big| < \epsilon.$$

Ову релацију можемо да напишемо у следећем облику:

$$|\sum_{i=1}^{m} \frac{f(xc_i a^{-1} a)}{m} - p| < \epsilon.$$

Нека је сада $C' = (c'_1, \dots, c'_m)$, где је $c'_i = c_i a^{-1}$ за све $i = \overline{1, m}$, коначан систем елемената. Имамо да је

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} \frac{f(xc'_i a)}{m} - p\Big| < \epsilon,$$

односно

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} \frac{(f \circ D_a)(xc'_i)}{m} - p\Big| = \Big|M_{C', f\circ D_a}(x) - p\Big| < \epsilon, \tag{7}$$

па је p десна (лева) средина и функције $f \circ D_a$.

Доказали смо да је p и лева и десна средина функције $f \circ D_a$. Сада ћемо да покажемо и да је јединствена. Ако би p' била нека друга десна средина функције $f \circ D_a$, тада би p' била десна средина и функције $f \circ D_a \circ D_{a^{-1}} = f \circ D_a \circ D_a^{-1} = f$, а функција f има јединствену десну средину и она је једнака p. Дакле, $p' = p$. $\square$.

Став 9. *Ако је φ интеграбилна и $\varphi(x) \geq 0$ за свако $x \in G$, онда је* $\int \varphi(x)dx \geq 0$.

Доказ: Нека је $p = \int \varphi(x)dx$. Треба да покажемо да је $p \geq 0$. Претпоставимо супротно: $p < 0$. Знамо да за било који коначан систем елемената

$A = (a_1, \dots, a_m) \in G^m$ и било коју тачку $x \in G$ важи:

$$|M_{A,\varphi}(x) - p| = \Big| \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi(xa_i)}{m} - p \Big| = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi(xa_i)}{m} - p = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi(xa_i)}{m} + |p| \geq |p|,$$

(јер је $\varphi(xa_i) \geq 0$, а $p < 0$).

Изаберимо $\epsilon := |p|$. На основу претходног јасно је да не постоји коначан систем елемената A са својством да је

$$(\forall x \in G) \quad |M_{A,\varphi}(x) - p| < \epsilon,$$

што је у контадикцији са чињеницом да је p десна средина функције φ. $\square$

3.2 Интеграбилност непрекидних функција

Посматрајмо сада функцију $f : G \to \mathbb{R}$ која је непрекидна. Приметимо да постоје $\min\limits_{x\in G} f(x)$ и $\max\limits_{x\in G} f(x)$, јер је f непрекидна а G компактан. Уведимо следеће ознаке:

$\min f := \min\limits_{x\in G} f(x)$
$\max f := \max\limits_{x\in G} f(x)$
$V_f := \max f - \min f.$

Тада за произвољан коначан систем елемената A групе G важе следеће релације:

$$\min M_{A,f} \geq \min f \tag{8}$$

$$\max M_{A,f} \leq \max f \tag{9}$$

$$V_{M_{A,f}} \leq V_f \tag{10}$$

Доказаћемо (8), док се (9) доказује на сличан начин, а релација (10) је последица ове две.

Означимо са $k = \min f$. Тада је $f(x) \geq k$ за свако $x \in G$. Посматрајмо $A = (a_1, \dots, a_m)$ коначан систем елемената из G. Тада је

$$(\forall x \in G)(\forall i \in \{1, \dots, m\}) \quad f(xa_i) \geq k.$$

Одавде следи да је

$$\sum_{i=1}^{m} f(xa_i) \geq m \cdot k$$

па када ово поделимо са m добијамо да је за свако $x \in G$

$$\tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(xa_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{f(xa_i)}{m} = M_{A,f}(x) \geq k.$$

Ово важи за све $x \in G$, па је и $\min M_{A,f} \geq k$. Ове релације важе и за функције $M'_{B,f}$.

Став 10. *Нека је $f : G \to \mathbb{R}$ неконстантна непрекидна функција. Тада постоји коначан систем A елемената групе G такав да важи*

$$V_{M_{A,f}} < V_f. \tag{11}$$

Доказ: Нека је $k = \min f$ и $l = \max f$. Пошто је f неконстантна функција важи да је $k < l$. Такође, пошто је f и непрекидна важи да је инверзна слика сваког отвореног скупа у $\mathbb{R}$ отворен скуп у G.

Нека је $h = \frac{k+l}{2}$. Скуп $U = f^{-1}(-\infty, h)$ је отворен у G и важи да је $f(x) \leq h < l$ за свако $x \in U$. Фамилија $\{Ua^{-1}\}_{a\in G}$ чини један отворен покривач скупа G. Како је G компактан, из сваког његовог отвореног покривача можемо издвојити коначан потпокривач. Дакле, постоји $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ коначан систем елемената из G такав да $\{Ua_i^{-1}\}_{i=\overline{1,m}}$ покрива скуп G. За свако $x \in G$ и за свако $i \in \{1, \ldots, m\}$ важи да је $f(xa_i) \leq l$. Одавде следи да је

$$\sum_{i=1}^{m} f(xa_i) \leq m \cdot l,$$

па када ову неједнакост поделимо са m имамо да је

$$M_{A,f}(x) \leq l.$$

Међутим, за свако $x \in G$ постоји $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ такво да $x \in Ua_{i_0}^{-1}$ (јер $\{Ua_i^{-1}\}_{i=\overline{1,m}}$ покрива G), односно $xa_{i_0} \in U$, па је $f(xa_{i_0}) \leq h$.
Сада имамо да је за свако $x \in G$

$$M_{A,f}(x) \leq \tfrac{(m-1)l+h}{m} < l,$$

односно максимум функције $M_{A,f}$ је строго мањи од максимума функције f. Како на основу (8) минимум функције $M_{A,f}$ није мањи од k, следи да важи (11). □

Нека су $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ коначни системи елемената и $AB := (a_1b_1, \ldots, a_1b_n, a_2b_1, \ldots, a_2b_n, \ldots, a_mb_1, \ldots a_mb_n)$. Тада за свако $x \in G$ важе и следеће једнакости:

$$M_{A,M_{B,f}}(x) = M_{AB,f}(x) \tag{12}$$

$$M_{A,M'_{B,f}}(x) = M'_{B,M_{A,f}}(x). \tag{13}$$

Наиме, важи да је $M_{B,f}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(xb_i)}{n}$, па је

$$M_{A,M_{B,f}}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{f(xa_jb_i)}{n}}{m} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(xa_jb_i)}{mn}$$

.

Такође, $M_{AB,f}(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(xa_jb_i)}{mn}$, чиме је показана једнакост (12).

Слично, $M'_{B,f}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(b_ix)}{n}$, па је

$$M_{A,M'_{B,f}}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{f(b_ixa_j)}{n}}{m} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{f(b_ixa_j)}{mn} = M'_{B,M_{A,f}}(x),$$

чиме је показана једнакост (13).

Обележимо са $\mathcal{O}(e)$ скуп свих околина неутрала e групе G.

Познато је да је свака непрекидна функција $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Риман-интеграбилна, док обрнуто не мора да важи. Та особина важи и за функције дефинисане на компактној тополошкој групи, а наредне дефиниције играју веома важну улогу у доказивању да је свака непрекидна функција дефинисана на компактној тополошкој групи и интеграбилна.

Дефиниција 18. Нека је Δ фамилија (неких) реалних функција на G.

а) Δ је **екви-непрекидна** ако важи:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists V \in \mathcal{O}(e))(\forall f \in \Delta)(\forall x, y \in G) \quad xy^{-1} \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{14}$$

б) Фамилија Δ је **равномерно ограничена** ако

$$(\exists l, l' \in \mathbb{R})(\forall f \in \Delta)(\forall x \in G) \quad l \leq f(x) \leq l'. \tag{15}$$

Дефиниција 19. Функција $f : G \to \mathbb{R}$ је **равномерно непрекидна** ако важи:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists V \in \mathcal{O}(e))(\forall x, y \in G) \quad xy^{-1} \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{16}$$

Наравно, и свака равномерно непрекидна функција је непрекидна, а позната је Канторова теорема која каже да је свака непрекидна функција из компактног метричког простора у $\mathbb{R}$ и равномерно непрекидна. То исто важи и за овако дефинисану равномерну непрекидност на компактним тополошким групама.

Дефиниција 20. Низ функција $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots : G \to \mathbb{R}$ **равномерно конвергира** ка функцији $f : G \to \mathbb{R}$ ако важи:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in G)(\forall n \geq n_0) \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \tag{17}$$

Следећа теорема (коју наводимо без доказа) је кључно тврђење за доказивање интеграбилности непрекидних функција. Њен доказ може се наћи у [4].

Теорема 3. *Нека је G тополошка група која задовољава другу аксиому пребројивости и Δ екви-непрекидна и равномерно ограничена фамилија функција дефинисаних на G. Тада из сваког низа функција $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ фамилије Δ можемо издвојити равномерно конвергентан подниз.*

Лема 1. *а) Нека су $\varphi, \psi : G \to \mathbb{R}$ и $\epsilon > 0$ такви да за свако $x, y \in G$ важи*

$$|\varphi(x) - \psi(y)| < \epsilon.$$

Тада за произвољан коначан систем елемената A важи:

$$(\forall x, y \in G) \quad |M_{A,\varphi}(x) - M_{A,\psi}(y)| < \epsilon. \tag{18}$$

б) Нека је $\varphi : G \to \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ и $p \in \mathbb{R}$ такви да за свако $x \in G$ важи

$$|\varphi(x) - p| < \epsilon.$$

Тада за произвољан коначан систем елемената A важи:

$$(\forall x \in G) \quad |M_{A,\varphi}(x) - p| < \epsilon. \tag{19}$$

Напомена: Ове неједнакости важе и ако уместо функције $M_{A,\varphi}$ посматрамо функцију $M'_{B,\varphi}$.

Доказ: а) Нека је $A = (a_1, \ldots, a_m)$ коначан систем елемената. Како је за свако $x, y \in G$

$$|\varphi(x) - \psi(y)| < \epsilon,$$

то је и

$$|\varphi(xa_i) - \psi(ya_i)| < \epsilon,$$

за све $i = \overline{1, m}$. Ако сада ову неједнакост сумирамо по i добијамо

$$\sum_{i=1}^{m} |\varphi(xa_i) - \psi(ya_i)| < m \cdot \epsilon.$$

Међутим, на основу неједнакости троугла следи

$$\Big|\sum_{i=1}^{m}(\varphi(xa_i)-\psi(ya_i))\Big| \leq \sum_{i=1}^{m}|\varphi(xa_i)-\psi(ya_i)| < m\cdot\epsilon,$$

односно

$$\Big|\sum_{i=1}^{m}\varphi(xa_i)-\sum_{i=1}^{m}\psi(ya_i)\Big| < m\cdot\epsilon.$$

Када ову неједнакост поделимо са m добијамо да је

$$|M_{A,\varphi}(x)-M_{A,\psi}(y)|<\epsilon,$$

што је и требало доказати.
Неједнакост под б) се доказује на сличан начин. □

У наредној теореми доказаћемо једну од кључних особина свих непрекидних функција.

Теорема 4. *Свака непрекидна функција је интеграбилна.*

Доказ: Нека је $f: G\to\mathbb{R}$ непрекидна функција. Да бисмо доказали да је ова функција интеграбилна, треба да покажемо да испуњава услове из дефиниције 17.

Нека је $\Delta=\{M_{A,f}:\ A=(a_1,\ldots,a_m)$ је коначан систем елемената из $G\}$ и $\epsilon>0$ произвољно. Пошто је функција f непрекидна, а G је компактан, f је и равномерно непрекидна (на основу Канторове теореме о равномерној непрекидности). То значи да постоји $V\in\mathcal{O}(e)$ такво да

$$(\forall x,y\in G)\quad xy^{-1}\in V\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon.$$

Нека је $A=(a_1,\ldots,a_m)$ коначан систем елемената. Из $xy^{-1}\in V$ следи да је $(xa_i)(ya_i)^{-1}=xy^{-1}\in V$, где је $i=\overline{1,m}$. Одавде имамо да је

$$|f(xa_i)-f(ya_i)|<\epsilon,$$

кад год је $xy^{-1}\in V$. На исти начин као у доказу леме 1 под а) добијамо да је

$$|M_{A,f}(x)-M_{A,f}(y)|<\epsilon,$$

кад год је $xy^{-1}\in V$, што значи да је фамилија Δ екви-непрекидна.

На основу (8) и (9) имамо да је за свако $x\in G$

$$\min f\leq\min M_{A,f}\leq M_{A,f}(x)\leq\max M_{A,f}\leq\max f,$$

па из (15) следи да је фамилија Δ и равномерно ограничена (узмемо да је $l'=\min f$, а $l=\max f$).
Нека је $s=\inf\limits_{\varphi\in\Delta}V_\varphi$. То значи да постоји низ:

$$f_1,f_2,\ldots,f_n,\ldots\in\Delta \tag{20}$$

такав да важи

$$\lim_{n\to\infty} V_{f_n} = s.$$

Како је фамилија Δ екви-непрекидна и равномерно ограничена, на основу теореме 3 важи да из низа (20) можемо издвојити равномерно конвергентан подниз:

$$g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$$

Нека је $g : G \to \mathbb{R}$ гранична функција овог подниза. Она је непрекидна јер су све функције g_n непрекидне, а конвергенција је равномерна. Пошто низ g_n равномерно конвергира ка функцији g, на основу (17) за $\epsilon > 0$ произвољно важи да

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in G)(\forall n \geq n_0) \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Такође, пошто је $\lim\limits_{n\to\infty} V_{g_n} = s$, важи да:

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1) \quad |V_{g_n} - s| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Сада имамо да је за $n \geq \max\{n_0, n_1\}$:

$|V_g - s| = |V_g - V_{g_n} + V_{g_n} - s| \leq |V_g - V_{g_n}| + |V_{g_n} - s| = |\max g - \min g - \max g_n + \min g_n| + |V_{g_n} - s| \leq |\max g - \max g_n| + |\min g - \min g_n| + |V_{g_n} - s| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$,

што значи да је $V_g = s$.

Показаћемо да је функција g константна, односно да је $s = 0$. Претпоставимо супротно: функција g није константна. Тада из (11) следи да је

$$V_{M_{A,g}} = s' < s, \tag{21}$$

за неки коначан систем $A = (a_1, \dots, a_m)$ елемената из G.
Нека је $\epsilon = \frac{1}{3}(s' - s)$. Пошто низ g_n равномерно конвергира ка функцији g, важи следеће:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in G)(\forall n \geq n_0) \quad |g_n(x) - g(x)| < \epsilon. \tag{22}$$

Нека је $n \geq n_0$ фиксирано. Тада на основу леме 1 важи

$$(\forall x \in G) \quad |M_{A,g_n}(x) - M_{A,g}(x)| < \epsilon \tag{23}$$

Из (21) и (23) следи да је:

$$V_{M_{A,g_n}} \leq s' + 2\epsilon < s,$$

што је контрадикција, јер $g_n \in \Delta$, па и $M_{A,g_n} \in \Delta$ на основу (12), а s је доње ограничење скупа $\{V_\varphi : \varphi \in \Delta\}$. Дакле, функција g је константна, односно $g \equiv p$, за неко $p \in \mathbb{R}$.

Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Пошто низ g_n равномерно конвергира ка g следи да

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in G)(\forall n \geq n_0) \quad |g_n(x) - p| < \epsilon.$$

Нека је $n \geq n_0$ фиксирано. Како је $g_n \in \Delta$, то је $g_n = M_{A_n,f}$ за неки коначан систем елемената A_n, па је:

$$(\forall x \in G) \quad |M_{A_n,f}(x) - p| < \epsilon.$$

Дакле, p јесте једна десна средина функције f.

Сада ћемо да покажемо да функција f има бар једну леву средину. Доказ може да се изведе аналогно доказу за постојање десне средине, али ћемо ми то урадити на другачији начин. Ако на групи G уведемо операцију $\times : G \times G \to G$ на следећи начин:

$$(\forall a, b \in G) \quad a \times b := b \cdot a, \tag{24}$$

где је $\cdot : G \times G \to G$ операција на групи G, добијамо нову тополошку групу G'. Пошто смо доказали да на свакој групи постоји бар једна десна средина, означимо са q десну средину функције $f : G' \to \mathbb{R}$. Тада за свако $\epsilon > 0$ постоји коначан систем елемената $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ тако да за све $x \in G'$ важи:

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x \times a_i)}{n} - q \Big| < \epsilon.$$

Из (24) следи да је

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i x)}{n} - q \Big| < \epsilon,$$

што значи да је q лева средина функције f на групи G.

Нека је сада p произвољна десна средина, а q произвољна лева средина функције f и нека је $\epsilon > 0$ фиксирано. Тада постоје коначни системи A и B тако да за свако $x \in G$ важе (2) и (4). На основу леме 1 за свако $x \in G$ важи:

$$|M'_{B,M_{A,f}}(x) - p| < \epsilon$$

$$|M_{A,M'_{B,f}}(x) - q| < \epsilon$$

.

На основу релације (13) следи да је
$|p - q| = |p - M'_{B,M_{A,f}}(x) + M_{A,M'_{B,f}}(x) - q|$
$\leq |p - M'_{B,M_{A,f}}(x)| + |M_{A,M'_{B,f}}(x) - q| < 2\epsilon,$

што значи да је $p = q$ и тиме је теорема доказана. $\square$

Наредни став нам даје неке битне особине Хааровог интеграла. Наиме, линеарност и монотоност су особине које важе за све интеграле, док особина 4) из наредног става је специфична за Хааров интерал.

Став 11. *Нека су $f, g : G \to \mathbb{R}$ непрекидне функције, $a \in G$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важе следеће особине:*

1)(линеарност)

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{25}$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx. \tag{26}$$

2)(монотоност)
Ако је $f(x) \leq g(x)$ за свако $x \in G$, онда је

$$\int f(x)dx \leq \int g(x)dx. \tag{27}$$

3)(нормирање)

$$\int dx = 1. \tag{28}$$

4)(инваријантност)

$$\int f(xa)dx = \int f(ax)dx = \int f(x)dx. \tag{29}$$

Доказ: 1) Како су функције f и g непрекидне, функција $f + g$ је такође непрекидна, па је и интеграбилна на основу теореме 4. То значи да постоје јединствена лева и јединствена десна средина ове функције и да се поклапају. Такође, како је функција f непрекидна, функција $M_{B,f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(xbi)}{n}$, где је $B = (b_1, \ldots, b_n)$ коначан систем елемената, је такође непрекидна па је и интеграбилна.

Нека је $p = \int f(x)dx$ и $q = \int g(x)dx$. Показаћемо да је $p + q$ десна средина функције $f + g$.

Пошто је p лева средина функције f, за свако $\epsilon > 0$ постоји коначан систем C елемената групе G такав да је

$$|M'_{C,f}(x) - p| < \epsilon \quad (\forall x \in G).$$

На основу леме 1 важи да је

$$|M_{B,M'_{C,f}}(x) - p| < \epsilon \quad (\forall x \in G) \tag{30}$$

па је на основу (13)

$$|M'_{C,M_{B,f}}(x) - p| < \epsilon, \tag{31}$$

што значи да је, за произвољан коначан систем B елемената групе G, p лева средина функције $M_{B,f}$, а како је ова функција интеграбилна то је p и десна средина.

Како је q десна средина функције g, за свако $\epsilon > 0$ постоји коначан систем елемената B такав да за свако $x \in G$ важи:

$$|M_{B,g}(x) - q| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Слично као малопре, на основу леме 1 добијамо да важи

$$|M_{A',M_{B,g}}(x) - q| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{32}$$

где је A' произвољан коначан систем елемената, а ово је на основу (12) еквивалентно са

$$|M_{A'B,g}(x) - q| < \frac{\epsilon}{2}, \quad x \in G. \tag{33}$$

Како је p десна средина функција $M_{B,f}$, то постоји коначан систем A елемената групе G такав да је

$$|M_{A,M_{B,f}}(x) - p| < \frac{\epsilon}{2}, \quad x \in G$$

а ово је еквивалентно са

$$|M_{AB,f}(x) - p| < \frac{\epsilon}{2}, \quad x \in G. \tag{34}$$

Из (33), (34) за $A = A'$ следи да је за свако $x \in G$

$$|M_{AB,f+g}(x) - (p+q)| \leq |M_{AB,f}(x) - p| + |M_{AB,g}(x) - q| < \epsilon \tag{35}$$

односно, $p + q$ јесте десна средина функције $f + g$. Дакле, важи да је

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Једнакост (26) је доказана у теореми 1.

2) Пошто је $(\forall x \in G) \quad f(x) \leq g(x)$, следи да је $g(x) - f(x) \geq 0$. На основу става 9 имамо да је и $\int (g(x) - f(x))dx \geq 0$. Из линеарности следи да је $\int g(x)dx - \int f(x)dx \geq 0$, односно $\int f(x)dx \leq \int g(x)dx$.

3) Важи на основу става 8 за $c = 1$.

4) Доказано у теореми 2.

Став 12. *Ако је $f : G \to \mathbb{R}$ непрекидна, тада је*

$$\Big|\int f(x)dx\Big| \leq \int |f(x)|dx. \tag{36}$$

Доказ: Пошто је $f : G \to \mathbb{R}$ непрекидна, и $|f|$ је непрекидна. Како важи да је

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

ову неједнакост можемо да интегралимо и на основу монотоности и линеарности добијамо

$$-\int |f(x)|dx \leq \int f(x)dx \leq \int |f(x)|dx.$$

Последње неједнакости су еквивалентне са

$$\Big|\int f(x)dx\Big| \leq \int |f(x)|dx,$$

чиме је овај став доказан. □

Став 13. *Нека је $f : G \to \mathbb{R}$ непрекидна. Ако је $f(x) \geq 0$ за свако $x \in G$ и $f(x_0) > 0$ за неко $x_0 \in G$, тада важи*

$$\int f(x)dx > 0. \tag{37}$$

Доказ: Пошто је f непрекидна, инверзна слика сваког отвореног скупа у $\mathbb{R}$ је отворен скуп у G. Ако је $h = \frac{f(x_0)}{2}$, тада је скуп $U = f^{-1}(h, +\infty) \subset G$ отворен и непразан. Одавде следи да је $f(x) > h > 0$ за свако $x \in U$. Фамилија $\{Ua^{-1}\}_{a\in G}$ је један покривач скупа G, а пошто је G компактан, постоји коначан систем елемената $A = (a_1, \ldots, a_m)$ такав да $\{Ua_i^{-1}\}_{i=\overline{1,m}}$ покрива скуп G.
Знамо да је $f(x) \geq 0$ за свако $x \in G$, а за дато x можемо наћи k такво да $x \in Ua_k^{-1}$, односно $xa_k \in U$. Одавде следи да је $f(xa_k) > h$, па је

$$M_{A,f}(x) \geq \frac{h}{m} \quad (\forall x \in G),$$

па на основу става 11 имамо да је

$$\int f(x)dx = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\int f(xa_i)dx = \frac{1}{m}\int\sum_{i=1}^{m} f(xa_i)dx = \int M_{A,f}(x)dx \geq \frac{h}{m} > 0.$$

□

У ставу 11 доказали смо особине Хааровог интеграла, а наредна теорема нам показује да је то једини интеграл који задовољава ове особине.

Теорема 5. *Ако је* $\int^*$ *још један интеграл дефинисан на класи свих непрекидних функција из* G *у* $\mathbb{R}$ *који задовољава својства из става 11, онда за произвољну непрекидну функцију* $f : G \to \mathbb{R}$ *важи*

$$\int^* f(x)dx = \int f(x)dx.$$

Доказ: Нека је $p = \int f(x)dx$. Треба да покажемо да је $\int^* f(x)dx = p$, односно да за $\epsilon > 0$ произвољно важи да је

$$\Big| \int^* f(x)dx - p \Big| \leq \epsilon. \tag{38}$$

Пошто је p десна средина функције f, за свако $\epsilon > 0$ постоји систем $A = (a_1, \ldots, a_m)$ такав да за свако $x \in G$ важи

$$|M_{A,f}(x) - p| < \epsilon,$$

односно

$$-\epsilon < M_{A,f}(x) - p < \epsilon.$$

Пошто је $\int^*$ монотон, следи да је:

$$\int^* (-\epsilon)dx \leq \int^* (M_{A,f}(x) - p)dx \leq \int^* \epsilon dx.$$

Из линеарности овог интеграла следи да је

$$-\epsilon \int^* dx \leq \int^* M_{A,f}(x)dx - p \int^* dx \leq \epsilon \int^* dx.$$

Како је $\int^* dx = 1$ то добијамо да је

$$-\epsilon \leq \int^* M_{A,f}(x)dx - p \leq \epsilon,$$

што је исто као

$$\Big| \int^* M_{A,f}(x)dx - p \Big| \leq \epsilon.$$

Даље, на основу дефиниције функције $M_{A,f}$ и особина (25)-(29) интерала $\int^*$ имамо да је

$$\int^* M_{A,f}(x)dx = \int^* \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(xa_i)dx = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\int^* f(x)dx = \int^* f(x)dx,$$

чиме је доказано (38). □

Став 14. *Нека је* $f : G \to \mathbb{R}$ *непрекидна функција. Тада је:*

$$\int f(x^{-1})dx = \int f(x)dx. \tag{39}$$

Доказ: Дефинишимо

$$\int^* f(x)dx := \int f(x^{-1})dx. \tag{40}$$

Показаћемо да овако дефинисан интеграл задовољава сва својства из става 11. Нека је $g : G \to \mathbb{R}$ још једна непрекидна функција, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $a \in G$.

1) Из линеарности Хааровог интеграла и (40) следи да је за свако $x^{-1} \in G$

$\int^* (f(x) + g(x))dx = \int (f(x^{-1}) + g(x^{-1}))dx = \int f(x^{-1})dx + \int g(x^{-1})dx = \int^* f(x)dx + \int^* g(x)dx;$

$\int^* \alpha f(x)dx = \int \alpha f(x^{-1})dx = \alpha \int f(x^{-1})dx = \alpha \int^* f(x)dx.$

2) Ако је $(\forall x \in G)\ f(x) \leq g(x)$ онда је и $f(x^{-1}) \leq g(x^{-1})$, па имамо да је

$$\int^* f(x)dx = \int f(x^{-1})dx \leq \int g(x^{-1})dx = \int^* g(x)dx.$$

3) Ако је $(\forall x \in G)\ f(x) = 1$ онда је и $f(x^{-1}) = 1$, па имамо да је

$$\int^* f(x)dx = \int f(x^{-1})dx = \int dx = 1.$$

4) Нека је $i : G \to G$ функција дата са $i(x) = x^{-1}$ и D_a десна транслација елементом a. Из инваријантности Хааровог интеграла имамо да је

$\int^* f(xa)dx = \int^* (f \circ D_a)(x)dx = \int (f \circ D_a)(x^{-1})dx = \int f(x^{-1}a)dx$

$= \displaystyle\int f((a^{-1}x)^{-1})dx = \int (f \circ i)(a^{-1}x)dx = \int (f \circ i)(x)dx = \int f(i(x))dx = \int f(x^{-1})dx = \int^{*} f(x)dx.$

Друга једнакост се доказује аналогно ако уместо функције D_a посматрамо функцију L_a ($L_a(x) = ax$).

Доказали смо да интеграл дефинисан у (40) задовољава сва својства из става 11, па из јединствености Хааровог интеграла следи да је

$$\int^{*} f(x)dx = \int f(x)dx,$$

чиме је став доказан. $\square$

До сада смо разматрали непрекидну функцију једне променљиве, а сада ћемо да видимо како рачунамо интеграл ако је дата функција две променљиве.

Нека су G и H компактне тополошке групе које задовољавају другу аксиому пребројивости, $P = G \times H$ и $f : P \to \mathbb{R}$ непрекидна функција две променљиве x и y, при чему је $x \in G$, $y \in H$. Ако фиксирамо y функцију f можемо посматрати као непрекидну функцију променљиве x па можемо да дефинишемо $\varphi(y) = \displaystyle\int f(x, y)dx$. Слично, ако фиксирамо x добијамо функцију променљиве y, па можемо да дефинишемо $\psi(x) = \displaystyle\int f(x, y)dy$.

Најпре ћемо да докажемо да су $\varphi(y) = \displaystyle\int f(x, y)dx$ и $\psi(x) = \displaystyle\int f(x, y)dy$ непрекидне функције. Пошто су G и H компактне тополошке групе које задовољавају другу аксиому пребројивости, важи да је и P компактна тополошка група која задовољава ову аксиому. Функцију $f : G \times H \to \mathbb{R}$ можемо да посматрамо као реалну функцију $f : P \to \mathbb{R}$ једне променљиве z, где је $z = (x, y) \in P$ ($x \in G, y \in H$). Та функција је непрекидна, а P је компактан, па је и равномерно непрекидна (Канторова теорема). Из (16) следи да

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists W \in \mathcal{O}(e))(\forall z', z \in P) \quad z'z^{-1} \in W \Rightarrow |f(z') - f(z)| < \epsilon,$$

где је e неутрал групе P.
Али, околина W садржи подоколину облика $U \times V$, где је U околина неутрала e_G групе G, а V околина неутрала e_H групе H (дакле, $e = (e_G, e_H)$).
Сада имамо да
$(\forall \epsilon > 0)(\exists U \in \mathcal{O}(e_G))(\exists V \in \mathcal{O}(e_H))(\forall x', x \in G)(\forall y', y \in H)$

$$x'x^{-1} \in U, y'y^{-1} \in V \Rightarrow |f(x', y') - f(x, y)| < \epsilon. \tag{41}$$

Ако фиксирамо $y, y' \in H$ такве да је $y'y^{-1} \in V$, из (41) следи да је

$$(\forall x \in G) \quad |f(x, y') - f(x, y)| < \epsilon, \tag{42}$$

јер $xx^{-1} = e_G \in U$.

На основу (42) и ставова 11 и 12 важи следеће:
$|\varphi(y') - \varphi(y)| = \Big| \int f(x, y')dx - \int f(x, y)dx \Big| = \Big| \int (f(x, y') - f(x, y))dx \Big| \leq \int |f(x, y') - f(x, y)|dx < \int \epsilon dx = \epsilon,$
односно функција φ је равномерно непрекидна. Слично се доказује да је и функција ψ (равномерно) непрекидна.
Хааров интеграл функције $f : P = G \times H \to \mathbb{R}$ обележићемо са $\iint f(x, y)dxdy$, а наредна теорема нам показује како рачунамо овај интеграл.

Теорема 6. *Нека су G и H компактне тополошке групе које задовољавају другу аксиому пребројивости и $f : G \times H \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада је*

$$\iint f(x, y)dxdy = \int \Big(\int f(x, y)dx \Big) dy = \int \Big(\int f(x, y)dy \Big) dx. \tag{43}$$

Доказ: Доказаћемо да је $\iint f(x, y)dxdy = \int \Big(\int f(x, y)dx \Big) dy$, док се друга једнакост доказује аналогно. Нека да је $\int^*$ интеграл на P дефинисан са

$$\int^* f(z)dz := \int \Big(\int f(x, y)dx \Big) dy$$

за непрекидну функцију $f : P \to \mathbb{R}$. Овај интеграл задовољава све особине из става 11. Ми ћемо показати (29), и то само једну од ове две једнакости. Нека је $c = (a, b) \in P$. Тада је:
$\int^* f(zc)dz = \int \Big(\int f(xa, yb)dx \Big) dy = \int \Big(\int f(x, yb)dx \Big) dy$
$= \int \Big(\int f(x, y)dx \Big) dy = \int^* f(z)dz.$

Међутим, због јединствености Хааровог интеграла важи да је $\int^* f(z)dz = \iint f(x, y)dxdy$ па је

$$\iint f(x, y)dxdy = \int \Big(\int f(x, y)dx \Big) dy,$$

чиме је доказана теорема. $\square$

Сада ћемо да одредимо Хааров интеграл за неке конкретне примере. Други и трећи пример су познати од раније, а ми ћемо да покажемо како можемо да их видимо као специјалне случајеве Хааровог интеграла.

3.3 Примери Хааровог интеграла

Пример 14. Нека је група $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ коначна и $f : G \to \mathbb{R}$ непрекидна. Тада је

$$\int f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(g_i)}{n} \tag{44}$$

Потребно је показати да овако дефинисан интеграл задовољава све особине из става 11.

1)(линеарност) Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ и $f, g : G \to \mathbb{R}$ непрекидне функције. Тада је

$$\int (f(x)+g(x))dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f+g)(g_i)}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(g_i)+g(g_i)}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(g_i)}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{g(g_i)}{n}$$
$$= \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Такође, важи и следеће:

$$\int \alpha f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha f(g_i)}{n} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{f(g_i)}{n} = \alpha \int f(x)dx,$$

па је задовољена особина 1) из става 11.

2)(монотоност) Ако је за свако $x \in G$ $f(x) \leq g(x)$, тада је

$$\int f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(g_i)}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{g(g_i)}{n} = \int g(x)dx,$$

чиме је доказана особина 2).

3)(нормирање) Ако је за свако $x \in G$ $f(x) = 1$, тада је

$$\int f(x)dx = \int dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

па важи и особина 3).

4) Нека је $a \in G$ било који елемент. Пошто је група G коначна, $a = g_j$ за неко $j \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\int f(xa)dx = \int (f \circ D_a)(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f \circ D_a)(g_i)}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(g_i a)}{n}.$$

Међутим, $\{g_1 a, \ldots, g_n a\} = G$ јер је функција D_a бијекција, па важи да је

$$\int f(xa)dx = \int f(x)dx.$$

Аналогно се доказује друга једнакост.
Дакле, Хааров интеграл реалне функције на коначној групи је аритметичка средина свих вредности те функције.

Пример 15. Нека је $f : S^1 \to \mathbb{R}$ непрекидна, где је S^1 јединична кружница. За Хааров интеграл функције f важи да је

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f ds, \tag{45}$$

где је $\displaystyle\int_{S^1} f ds$ криволинијски интеграл функције f по кривој S^1.

Докажимо ову чињеницу. Како је S^1 јединична кружница, то за свако $x = (x_1, y_1) \in S^1$ важи да је $x_1^2 + y_1^2 = 1$. Ако уведемо параметризацију на следећи начин:

$$x_1 = \cos t,$$

$$y_1 = \sin t,$$

где је $t \in [0, 2\pi]$, тада је $\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, па криволинијски интеграл можемо да израчунамо као одређени интеграл

$$\int_{S^1} f ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt.$$

Линеарност и монотоност важе за криволинијски интеграл. Доказаћемо особине 3) и 4) из става 11.

3) Ако је $(\forall x \in S^1)\ f(x) = 1$ тада је и $(\forall t \in [0, 2\pi])\ f(\cos t, \sin t) = 1$, па имамо да је
$\displaystyle\int f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot t\Big|_0^{2\pi} =$
$\displaystyle\frac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1.$

4) Нека је $a \in S^1$ произвољно. Тада је $a = (\cos t_a, \sin t_a)$, или у комплексној нотацији, $a = e^{it_a}$ за неко $t_a \in [0, 2\pi]$. Сада имамо да је за све $x = e^{it} \in S^1$

$a \cdot x = e^{it_a} \cdot e^{it} = e^{i(t_a+t)} = (\cos(t_a + t), \sin(t_a + t))$.
Међутим, функције cos и sin су 2π-периодичне, па је

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos(t_a + t), \sin(t_a + t))dt = \frac{1}{2\pi}\int_{t_a}^{t_a+2\pi} f(\cos u, \sin u)du$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos u, \sin u)du = \int f(x)dx.$$

Како је група S^1 комутативна, то је

$$\int f(xa)dx = \int f(ax)dx = \int f(x)dx.$$

Пример 16. Нека је $(\mathbb{R}, +)$ тополошка група реалних бројева и $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција са периодом 1, односно $\varphi(t + 1) = \varphi(t)$ за све $t \in \mathbb{R}$. Ако је $\mathbb{Z}$ подрупа целих бројева групе $\mathbb{R}$, тада је $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = G$ количничка група групе $\mathbb{R}$. Функцији φ дефинисаној на групи $\mathbb{R}$ одговара непрекидна функција $f : G \to \mathbb{R}$ таква да наредни дијаграм комутира,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ & G \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

где је $\pi : \mathbb{R} \to G$ дата са $\pi(x) = [x]$. И обрнуто, непрекидној функцији $f : G \to \mathbb{R}$ одговара непрекидна 1-периодична функција $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi := f \circ \pi$. За Хааров интеграл функције f на G важи да је

$$\int f(x)dx = \int_0^1 \varphi(t)dt, \tag{46}$$

где је интеграл на десној страни Риманов интеграл (одговарајуће) функције φ на сегменту [0, 1].

Докажимо то. Нека је $g : G \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна 1-периодична функција. То значи да следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ & G \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Доказујемо да важе особине из става 11.

1) Најпре ћемо показати да функцији $f+g$ одговара функција $\varphi+\psi$, односно да комутира следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi+\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ & G \arrow[u, "f+g"'] \end{tikzcd}$$

Вредност коју узима збир функција у некој тачки једнака је збиру вредности тих функција у тој тачки, па важи да је

$$(f+g)(\pi(t)) = f(\pi(t)) + g(\pi(t)) = \varphi(t) + \psi(t) = (\varphi+\psi)(t).$$

Сада имамо да је:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int_0^1 (\varphi(t)+\psi(t))dt.$$

Интеграли са десне стране једнакости су Риманови, па за њих важи линеарност, односно

$$\int_0^1 (\varphi(t)+\psi(t))dt = \int_0^1 \varphi(t)dt + \int_0^1 \psi(t)dt = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$. Функцији αf одговара функција $\alpha\varphi$ па важи и да је

$$\int \alpha f(x)dx = \int_0^1 \alpha\varphi(t)dt = \alpha \int_0^1 \varphi(t)dt = \alpha \int f(x)dx.$$

2) Нека је $f(x) \leq g(x)$ за свако $x \in G$. Тада је и $f(\pi(t)) \leq g(\pi(t))$ за свако $t \in \mathbb{R}$, односно $\varphi(t) \leq \psi(t)$, па важи да је:

$$\int f(x)dx = \int_0^1 \varphi(t)dt \leq \int_0^1 \psi(t)dt = \int g(x)dx,$$

чиме је показана особина 2).

3) Ако је $f(x) = 1$ за свако $x \in G$, тада је и $\varphi(t) = 1$ за свако $t \in \mathbb{R}$, па важи и особина 3).

4) Нека је $a \in G$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ такво да је $\pi(t_0) = t_0 + \mathbb{Z} = a$. Тада је за свако $x \in G$ $a \cdot x = (t_0 + \mathbb{Z}) \cdot (t + \mathbb{Z}) = t_0 + t + \mathbb{Z}$, где је $t \in \mathbb{R}$ такво да је $\pi(t) = x$. Ако непрекидној функцији $f : G \to \mathbb{R}$ одговара непрекидна 1-периодична функција $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, показаћемо да функцији $f \circ L_a$ одговара функција $\varphi \circ L_{t_0}$. Прво, комутира следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[rr, "\varphi\circ L_{t_0}"] \arrow[drr, "\pi"'] & & \mathbb{R} \\
& & G \arrow[u, "f\circ L_a"']
\end{tikzcd}$$

$$(f \circ L_a)(\pi(t)) = f(L_a(x)) = f(a \cdot x) = f(\pi(t_0 + t)) = \varphi(t_0 + t) = (\varphi \circ L_{t_0})(t).$$

Сада имамо да је

$$\int f(ax)dx = \int (f \circ L_a)(x)dx = \int_0^1 (\varphi \circ L_{t_0})(t)dt = \int_0^1 \varphi(t_0+t)dt = \int_{t_0}^{t_0+1} \varphi(u)du$$
$$= \int_0^1 \varphi(u)du = \int f(x)dx,$$

а самим тим је:

$$\int f(xa)dx = \int f(x)dx,$$

јер је група G комутативна.

Литература

[1] F. Adams, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann.Math 72 (1960), 20-104.

[2] A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann.Math(3), vol.34 (1933), 147-169.

[3] M. Марјановић, С.Врећица, Топологија, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд (2012).

[4] L. Pontryagin, Topological Groups, Princeton, University Press (1946).

[5] J. von Neumann, Die Einfuhrung Analytischer Parameter in Topologischen Gruppen, Ann.Math (2), vol.34 (1933), pp.170-190.