Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Сингуларне вредности оператора и теорија мажорације, са применом на операторне неједнакости

Аутор:
Милан Лазаревић

Ментор:
др Данко Јоцић

Октобар, 2015.

Садржај

Предговор

У овом мастер раду приказани су основне особине компактних оператора (и њихових идеала) и теорије мажорације, при чему је посебан осврт дат на њихову примену на операторне функције операторне промењиве. Рад се састоји од четири главе.

Прва глава састоји се од приказа основних дефиниција и својстава која су коришћена у раду. Компактни оператори на Hilbert-овим просторима имају важну улогу у функционалној анализи и теорији оператора, као и диференцијалним и интегралним једначинама. Уведен је појам сингуларних вредности компактног оператора и приказана су најзначајнија својства и неједнакости везана за њих. Проблеми везани за сопствене и сингуларне вредности су једна од централних тема матричне анализе. Међутим, апроксимације и неједнакости нису биле првобитна мотивација за проучавање сингуларних вредности, већ је она проистекла из диференцијалне геометрије и алгебре из проблема факторизације реалних квадратних матрица. Почетком прве половине XX века појављује се значајан број радова који садрже важне неједнакости са сингуларним и сопственим вредностима. Најзначајније од тих неједнакости су представљене у овом раду. H. Weyl, Ky Fan, G. Pólya и A. Horn су неки од математичара који су у овом периоду највише допринели развоју ове области.

У другој глави је изложена теорија симетрично нормираних идеала прстена ограничених оператора у Hilbert-овом простору. Уведен је појам унитарно инваријантних (у.и) норми компактних оператора, које су једнозначно одређене сингуларним вредностима тих оператора и представљају основ за њихову класификацију у идеале компактних оператора, међу којима су Schaten-fon Nojman-ови идеали свакако најпознатији. Ky Fan-ове норме представљају следећи важан пример у.и. норми и имају важну улогу у формулисању основних неједнакости за сингуларне вредности збира и производа компактних оператора и отварају пут за примену (техника и метода) теорије мажорације. За детаљнији поглед на материју изложену у прве две главе погледати и [GK],[GGK], [Sch], [Si].

У трећој глави представљене су и показане одређене важне и познате неједнакости за у.и. норме оператора. Наиме, доказана је такозвана аритметичко-геометријска неједнакост, која (као и у стандардној анализи) има своје дубокосежне последице (видети и [BK08]), што ћемо већ видети у истој глави, где смо уз помоћ ње показали Cauchy Schwarz-ову неједнакост за елементарне операторе. Под елементарним оператором подразумевамо пресликавање $\Lambda\colon \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ дефинисано са $\Lambda(X) \overset{\text{деф}}{=} \sum_{j=1}^{n} A_j X B_j$, где су A_j и B_j фиксирани оператори и $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, дато на простору ограничених линеарних оператора $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Овакве операторе увели су Lumer и Rozenblum у раду [LR], и даље су проучавани током седамдесетих и осамдесетих година прошлог века. Најпознатији специјални случајеви елементарних оператора су елементарни множитељ $M_{A,B}(X) \overset{\text{деф}}{=} AXB$, деривација $\Delta_A(X) \overset{\text{деф}}{=} AX - XA$, као и уопштена деривација

$\Delta_{A,B}(X) \overset{\text{деф}}{=} AX - XB$. За детаљнију причу о елементарним операторима на идеалима компактних оператора погледати [Ke] (као и тамошње референце). Такође, у трећој глави смо представили и неке типове деривационих, односно пертубационих неједнакости за у.и. норме.

Четврта глава започиње увођењем операторних функција, за шта ће велику заслугу имати спектрална теорема за нормалне операторе која ће нам дозволити да уведемо функционални рачун за нормалне операторе. То ће нам омогућити да дефинишемо разне класе операторних функција, као што су оператор конвексне, оператор конкавне, или пак оператор монотоне функције. Оператор монотоне функције први пут су детаљније изучаване од стране K. Löwnera у раду *Über monotone Matrixfunktionen*, Math. Z. **38** (1934) 177–216. У том раду он је остварио везу између оператор монотоности, позитивности матрица са подељеним разликама и Pick-ових функција. Такође, он је приметио да су функције $f(t) = t^p$, $0 < p < 1$, и $f(t) = \log t$ оператор монотоне на $(0, \infty)$. Потом је теорија даље развијана, пре свега од стране F. Kraus-а, у свом раду *Über konvexe Matrixfunktionen*, Math. Z. **41** (1936) 18–42, као и E. Heinz-а у [He], који је користио теорију оператор монотоних функција за проучавање проблема везаних за пертубациону теорију ограничених и неограничених оператора. Такође, у том раду Heinz је успоставио и интегралну репрезентацију операторних функција, за коју се показало да представља једну од битнијих техника у раду са операторним функцијама (видети, пре свега, [An] и [A88]). Методе Kraus-а и Heinz-а даље су развијане од стране многих других, пре свих то су J. Bendat и S. Sherman, C. Davis ,W.F. Donoghue, F. Hansen и G.K. Pedersen, а у последње време у радовима T. Ando-а, R. Bhatia-је, F. Kittaneh-а, F. Hiai-ја, M. Uchiyama-е, X. Zhan-а, као и других математичари.

Такође, у четвртој глави дате субадитивне, односно суперадитивне, неједнакости везане за у.и. норме, где су приказани резултати радова [AZ99], [BU] и [Ko]. Ти резултати су искоришћени за показивање некомутативне Clarkson-McCarthy-јеве неједнакости за у.и. норме и њених одговарајућих уопштења (видети [BK04],[C],[M],[HK02],[HK08]).

Посебну захвалност дугујем свом ментору проф. др Данку Јоцићу на корисним сугестијама и саветима у току израде мастер рада.

Глава 1

Компактни оператори на Hilbert-овом простору

1 Спектрална теорема и сингуларни развој компактних оператора

Ово поглавље започињемо навођењем неких основних дефиниција и својстава компактних оператора. За сва наведена тврђења, за која нису дати докази, докази се могу наћи у [АДЈ].
Са $\mathcal{H}$ ћемо означавати комплексан, сепарабилан Hilbert-ов простор.

Дефиниција **1.1.** *Линеаран оператор* $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *назива се* ***компактним*** *ако сваки ограничен скуп из* $\mathcal{H}$ *пресликава у релативно компактан скуп у* $\mathcal{H}$. *Класу свих компактних оператора из* $\mathcal{H}$ *у* $\mathcal{H}$ *означавамо са* $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$.

Директно из дефиниције следи да сваки компактан оператор $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ припада и $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, простору ограничених линеарних оператора из $\mathcal{H}$ у $\mathcal{H}$. Познато је и да је $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ један затворен двострани идеал у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ који садржи све коначно димензионалне операторе $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$, о чему ће више речи бити у наредној глави.

Такође, у случају Hilbert-ових простора имамо следећу карактеризацију компактних оператора.

Став 1.1. ***Оператор*** $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ***је компактан ако и само ако слабо конвергентне низове преводи у јако конвергентне.***

Од значаја ће нам бити и следеће теореме

Теорема 1.1. ***Следећа тврђења су међусобно еквивалентна:***

1° A ***је компактан,***

2° A^*A ***је компактан,***

3° $|A|$ ***је компактан,***

4° A^* ***је компактан,***

5° AA^* ***је компактан и***

6° $|A^*|$ ***је компактан.***

Теорема 1.2. **[спектрална теорема за компактне самоадјунговане операторе]** ***Сваки компактан самоадјунговани оператор A има ортонормирану базу својих сопствених вектора. Све сопствене вредности оператора A (осим евентуално нуле) су реалне и коначне вишеструкости, па поређане у низ, уз понављање сагласно својој вишеструкости, чине коначан или нули конвергентан низ $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ако је $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирани низ њима одговарајућих сопствених вектора, онда важи разлагање***

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n^{\star}.$$

Теорема 1.3. **[поларна декомпозиција ограниченог оператора]** ***За сваки $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ постоји позитиван оператор D и парцијална изометрија V такви да је $A = VD$. Штавише, оваква репрезентација је јединствена уколико су D и V спрегнути релацијом $\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(D)$.***

Уобичајена ознака за оператор $\sqrt{A^*A}$ је $|A|$, па је $A = V\,|A|$ (видимо из доказа претходне теореме), што се назива **поларном репрезентацијом** за A. При томе је V парцијална изометрија из $\overline{\mathcal{R}(A^*)} = \overline{\mathcal{R}(|A|)}$ у $\overline{\mathcal{R}(A)}$ и $V = 0$ на $\mathcal{N}(|A|) = \mathcal{N}(A)$.

За оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ћемо рећи да је **нормалан** уколико је $A^*A = AA^*$, док ћемо за $U \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ рећи да је **унитаран** уколико је $\mathcal{R}(U) = \mathcal{H}$ и $\|Uf\| = \|f\|$ за свако $f \in \mathcal{H}$. Од користи ће нам бити и следећа варијанта претходне теореме за нормалне операторе.

Теорема 1.4. ***У поларној репрезентацији $A = U|A|$ нормалног оператора увек се може изабрати U да буде унитаран оператор такав да комутира са $|A|$.***

Дефиниција 1.2. *$A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ назива се* ***позитивним*** *и означава са $A \geqslant 0$ уколико му је квадратна форма ненегативна, тј., уколико је $\langle Af, f\rangle \geqslant 0$ за све $f \in \mathcal{H}$. Назив* ***строго позитиван*** *резервисан је за операторе код којих је $\langle Af, f\rangle > 0$ за све $f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.*

Може се показати да је $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ позитиван ако и само ако је A самоадјунгован и $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. Али треба бити пажљив, јер $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ строго позитиван није еквивалетно са A је самоадјунгован и $\sigma(A) \subset (0, \infty)$. Наиме, ако посматрамо оператор $A\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ дат са $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) \overset{\text{деф}}{=} (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$, тада A јесте строго позитиван оператор, али не важи $\sigma(A) \subset (0, \infty)$ јер $0 \in \sigma(T)$.

Сваки позитиван оператор се може кореновати, како то показује следећа

Теорема 1.5. **[квадратни корен позитивног оператора]** ***За дати позитиван оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ постоји јединствен позитиван оператор $B \geqslant 0$ (у ознаци $B = \sqrt{A}$) за који је $B^2 = A$, при чему B комутира са свим операторима са којима комутира и A.***

За сваки компактан оператор A и оператор A^*A је такође компактан и позитиван. Уколико све сопствене вредности оператора A^*A поновимо онолико пута колика им је вишеструкост и поређамо их у опадајући низ $\lambda_1(A^*A) \geqslant \lambda_2(A^*A) \geqslant \ldots$, добијамо један нули конвергентан низ.

Дефиниција **1.3.** *Бројеви*

$$s_n(A) \overset{\text{деф}}{=} \sqrt{\lambda_n(A^*A)} = \lambda_n(|A|) \tag{1.1}$$

називају се ***сингуларним вредностима*** *или $s-$**бројевима** оператора A.*

Приметимо да је при том $s_1(A) = \|A\|$. Наиме, A^*A је компактан и самоадјунгован оператор, те $\|A^*A\| \in \sigma(A^*A) \subseteq \overline{\mathbb{D}}(0, \|A^*A\|)$, где смо са $\overline{\mathbb{D}}(0, \|A^*A\|)$ означили затворен диск са центром у 0 полупречника $\|A^*A\|$. Одатле је $\lambda_1(A^*A) = \|A^*A\| = \|A\|^2$, односно $s_1(A) = \|A\|$.

Лема 1.6. ***Сингуларне вредности имају следећа својства:***

1° ***За сваки скалар** c **је** $s_i(cA) = |c|\, s_i(A)$.*

2° $s_i(A) = s_i(A^*)$, ***за све*** $i = 1, 2, \ldots$.

3° ***За сваки ограничен оператор** B **важе следеће неједнакости***

$$s_i(BA) \leqslant \|B\|\, s_i(A) \quad \textbf{за све } i = 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

$$s_i(AB) \leqslant \|B\|\, s_i(A) \quad \textbf{за све } i = 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

△ Особина 1° директно следи. Да бисмо се уверели да 2° важи, приметимо да ако је $I - AB$ инвертибилан за неке $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, да је онда са $I + B(I - AB)^{-1}A$ дат инверз за $I - BA$. Одатле следи да је $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$ и $\sigma_p(AB) \cup \{0\} = \sigma_p(BA) \cup \{0\}$ за све $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, где смо са σ_p означили пунктуални (илити тачкасти) спектар. Самим тим, специјално, су све не-нула сопствене вредности од $\lambda_i(A^*A)$ и $\lambda_i(AA^*)$ међусобно једнаке, па је $s_i(A) = s_i(A^*)$ за све $i = 1, 2, \ldots$.

Покажимо сад 3°. Према дефиницији (1.3) је $s_i^2(BA) = \lambda_i((BA)^*BA) = \lambda_i(A^*B^*BA)$ и $s_i^2(A) = \lambda_i(A^*A)$. Такође важи и

$$\langle A^*B^*BAf, f\rangle = \|BAf\|^2 \leqslant \|B\|^2\, \|Af\|^2 = \left\langle \|B\|^2\, A^*Af, f\right\rangle.$$

Из претходне релације следи $A^*B^*BA \leqslant \|B\|^2\, A^*A$, због чега је

$$s_i^2(BA) = \lambda_i(A^*B^*BA) \leqslant \lambda_i(\|B\|^2\, A^*A) = \|B\|\, s_i^2(A).$$

Тиме смо показали да важи својство (1.2). Да бисмо доказали својство (1.3) користимо да важи $s_i(A) = s_i(A^*)$ и већ доказано својство (1.2)

$$s_i(AB) = s_i(B^*A^*) \leqslant \|B^*\|\, s_i(A^*) = \|B\|\, s_i(A). \qquad \square$$

Ако је оператор A компактан тада је и оператор $|A|$ такође компактан и позитиван оператор, те се он према Теореми 1.2 може представити у следећем облику

$$|A| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(|A|)\, \langle\cdot, f_n\rangle\, f_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) f_n \otimes f_n^\star.$$

Према Теореми 1.3 о поларној декомпозицији важи $A = V\,|A|$, те следи да је

$$A = V\,|A| = V \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) f_n \otimes f_n^\star = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) V f_n \otimes f_n^\star.$$

Ако узмемо $e_n \overset{\text{деф}}{=} Vf_n$ добијамо такозвани **сингуларни** или **Schmidt-ов** развој компактног оператора A

$$A=\sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)e_n\otimes f_n^{\star}. \tag{1.4}$$

При том су $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормиране базе простора $\overline{\mathcal{R}(A)}$, односно $\overline{\mathcal{R}(|A|)}=\overline{\mathcal{R}(A^*A)}=\overline{\mathcal{R}(A^*)}$, сачињене од сопствених вектора оператора $|A|$ и $|A^*|$. Из (1.4) добијамо да је са

$$A^*=\sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)f_n\otimes e_n^{\star}. \tag{1.5}$$

дат сингуларни развој за A^*. Из (1.4) и (1.5) непосредно следи да је

$$\begin{aligned}
A^*A &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(A)f_n\otimes f_n^{\star}, && (1.6)\\
AA^* &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(A)e_n\otimes e_n^{\star}, && (1.7)\\
A^*Af_n &= s_n^2(A)f_n, && (1.8)\\
AA^*e_n &= s_n^2(A)e_n, && (1.9)\\
Af_n &= s_n(A)e_n, && (1.10)\\
A^*e_n &= s_n(A)f_n. && (1.11)
\end{aligned}$$

Само на први поглед постоји недостатак равноправности улога A и A^* у формулама (1.6)–(1.10) због сталног присуства $s_n(A)$, али не и $s_n(A^*)$, али сетимо се да је $s_n(A)=s_n(A^*)$ за свако $n\in\mathbb{N}$.

На основу (1.6)–(1.10) закључујемо да је представљање (1.4) суштински јединствено (до на избор ортонормиране базе у сваком сопственом потпростору једнакостима (1.11) и (1.10), при чему су нужни и услови сагласности (1.8) и (1.9)). Тиме је доказана следећа

Теорема 1.7. *За сваки $A\in\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ је*

$$A=\sum_{n=1}^{\infty} s_n e_n\otimes f_n^{\star}, \tag{1.12}$$

за неке еквипотентне ортонормиране базе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ простора $\overline{\mathcal{R}(A)}$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ простора $\overline{\mathcal{R}(A^*)}$, као и неки нерастући нули конвергентан низ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Представљање (1.12) је јединствено у смислу да прва два низа морају задовољити (1.8), (1.9), (1.11) и (1.10), док се $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ може одредити из (1.1).

Постојање баш оваквог сингуларног развоја је карактеризациона особина компактних оператора, као што то показује

Теорема 1.8. ***Ако су $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ два дата еквипотентна ортонормирана система вектора у $\mathcal{H}$, а $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ дат и нерастући нули конвергентан низ, тада***

$$A\overset{\text{деф}}{=}\sum_{n=1}^{\infty} s_n e_n\otimes f_n^{\star}, \tag{1.13}$$

дефинише компактан оператор, чији ће сингуларни развој бити дат управо горњом формулом (1.13)**.**

Дефиниција **1.4.** *$A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ назива се* ***коначно димензионалним оператором*** *или* ***оператором коначног ранга*** *ако је његов* ***ранг****, тј. број $r(A) \overset{\text{деф}}{=} \dim \mathcal{R}(A)$, коначан.*

Претходна теорема нам даје следећу важну карактеризацију компактних оператора за Hilbert-ове просторе.

Теорема **1.9.** ***Оператор на Hilbert-овом простору је компактан ако и само је униформна граница коначно димензионалних оператора.***

Дефиниција **1.5.** *Сви оператори $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ за које је*

$$\|A\|_1 \overset{\text{деф}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) < +\infty$$

називају се ***нуклеарним*** *операторима.*

Класа $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ свих нуклеарних оператора од великог је значаја у разним областима математичке анализе и једна је од најважнијих класа компактних оператора.

Нуклеарни оператори су у потпуности одређени следећом

Теорема **1.10.** ***$A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ је нуклеаран ако и само ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} \langle Ag_n, h_n \rangle$ апсолутно конвергирају за произвољне ортонормиране базе $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ простора $\mathcal{H}$. По испуњењу тог услова важи***

$$\sup_{\{g_n\}_{n=1}^{\infty}, \{h_n\}_{n=1}^{\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Ag_n, h_n \rangle| = \|A\|_1 , \tag{1.14}$$

где се супремум узима по свим О.Н.Б. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ простора $\mathcal{H}$.

Показује се да је са $\|\cdot\|_1$ дата норма на $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, а са њом нормиран $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ је Banach-ов простор и двострани идеал у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ у коме је

$$\|CAD\|_1 \leqslant \|C\| \, \|D\| \, \|A\|_1 \qquad \text{за све } C, D \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \text{ и све } A \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}).$$

Такође, за операторе из $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ разматра се следећи аналог трага матрице у коначно димензионалним просторима.

Дефиниција **1.6.** *Сума реда*

$$\operatorname{tr}(A) \overset{\text{деф}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ag_n, g_n \rangle$$

назива се ***матричним трагом*** *датог оператора $A \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$.*

Дефиниција је коректна, јер за сваки $A \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} \langle Ag_n, g_n \rangle$ апсолутно конвергира за било коју О.Н.Б. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ простора $\mathcal{H}$, а сам збир реда не зависи од избора базе.

За tr се зна да је то један ограничен линеаран функционал на $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ норме 1, са особином $\operatorname{tr}(A^*) = \overline{\operatorname{tr}(A)}$ за сваки $A \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Такође, ако су $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ такви да истовремено $AB \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ и $BA \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, тада је $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Дефиниција **1.7.** *$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ назива се **Hilbert-Schmidt-овим** ако је*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ag_n\|^2 < +\infty \qquad \text{за неку О.Н.Б. } \{g_n\}_{n=1}^{\infty},$$

*а класа $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ свих таквих оператора назива се **Hilbert-Schmidt**-овом класом.*

Може се показати да ако $A \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ да тада $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. Да се ради о једној постојаној операторној особини говори

Теорема 1.11. ***Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ag_n\|^2$ конверīира за неку О.Н.Б. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ у $\mathcal{H}$, ӣада $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ah_n\|^2$ конверīира и за сваку друīу О.Н.Б. $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ исӣоī ӣросӣора (и ӣо исӣој вредносӣи). Шӣавише, ӣошӣо је сваки ӣакав A комӣакӣан, за њеīове синīуларне вредносӣи важи***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ah_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(A).$$

Дефиниција **1.8.** *За сваки Hilbert-Schmidt-ов оператор A величина $\|A\|_2$ дата са $\|A\|_2 \overset{\text{деф}}{=} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(A)}$ назива се **Hilbert-Schmidt-ова** или **Frobenius-ова** норма оператора A.*

Примереност овог назива оправдава

Теорема 1.12. ***$\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ је Banach-ов ӣросӣор и двосӣрани идеал у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ за који је $\mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}_2(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$, док за њеīову норму $\|\cdot\|_2$ важи***

1° $\|A^*\|_2 = \|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_1}$ ***за све*** $A \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$,

2° $\|CAD\|_2 \leqslant \|C\| \, \|D\| \, \|A\|_2$ ***за све*** $A \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ ***и све*** $C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и***

3° $\|A\|_\infty \leqslant \|A\|_2 \leqslant \|A\|_1$ ***за све*** $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$.

Може се показати да су коначно димензионални оператори густи у сваком од простора $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}), \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ и $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Због сепарабилности коначно димензионалних оператора (при сепарабилности самог $\mathcal{H}$) значи да су сви разматрани простори сепарабилни. Међу њима се $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ издваја по томе што је Hilbert-ов. Наиме, $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ је Hilbert-ов простор када се у њега уведе скаларни производ са

$$\langle\!\langle A, B \rangle\!\rangle \overset{\text{деф}}{=} \operatorname{tr}(AB^*) \qquad \text{за све } A, B \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H}).$$

Приметимо и то да је за $A, B \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ коректно дефинисан $\operatorname{tr}(AB^*)$, јер тада AB^* припада класи нуклеарних оператора.

Може се показати и да је сваки функционал $l^\star$ на $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ једнозначно генерисан неким оператором $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ на следећи начин, $l^\star(X) \overset{\text{деф}}{=} \operatorname{tr}(AX)$ за свако X из $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. При томе важи $\|l^\star\|_{(\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}))^\star} = \|A\|_1$. Путем истог пресликавања, остварује се изометрички изоморфизам и између $(\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))^\star$ и $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

2 Сопствене и сингуларне вредности и дијагонални елементи матрица

Лема 1.13. [Weyl, Horn] ***Ако је A компактан оператор, тада је***

$$\det\left[\langle Af_i, Af_j\rangle\right]_{i,j=1}^n \leqslant \prod_{k=1}^n s_k^2(A)\ \det\left[\langle f_i, f_j\rangle\right]_{i,j=1}^n \tag{1.15}$$

за сваки систем вектора $f_1, \dots f_n$, при том се једнакост у (1.15) достиже за систем вектора $e_1, \dots e_n$ из Schmidt-овог развоја оператора $|A|$.

△ Приметимо да је лему довољно доказати за позитивне компактне операторе, јер важи $s_n(A) = s_n(|A|)$ и

$$\det\left[\langle Af_i, Af_j\rangle\right]_{i,j=1}^n = \det\left[\langle A^*Af_i, f_j\rangle\right]_{i,j=1}^n = \det[\langle |A|^2 f_i, f_j\rangle]_{i,j=1}^n = \det\left[\langle |A|f_i, |A|f_j\rangle\right]_{i,j=1}^n .$$

Оператор $|A|$ је позитиван и компактан, па има развој $|A| = \sum_{n=1}^\infty s_n(A) e_n \otimes e_n^\star$. Слично, оператор A^*A је такође позитиван компактан оператор и има следећи развој $A^*A = \sum_{n=1}^\infty s_n^2(A) e_n \otimes e_n^\star$. Нека је $P_N \overset{\text{деф}}{=} \sum_{k=1}^N e_k \otimes e_k^\star$, при чему разматрамо само случајеве када је $N \geqslant n$. Ако уведемо оператор $A_N \overset{\text{деф}}{=} |A|\, P_N = \sum_{k=1}^N s_k(A) e_k \otimes e_k^\star$, тада је

$$A_N^* A_N = \sum_{k,l=1}^n s_l(A) s_k(A)\, \langle e_k, e_l\rangle\, e_l \otimes e_k^\star = \sum_{k=1}^N s_k(A)^2 e_k \otimes e_k^\star,$$

а самим тим важи и

$$\begin{aligned}
\det\left[\langle A_N f_i, A_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^n &= \det\left[\left\langle f_i, A_N^* A_N f_j\right\rangle\right]_{i,j=1}^n = \det\left[\left\langle f_i, \sum_{k_j=1}^N s_{k_j}^2(A)\, \langle f_j, e_{k_j}\rangle\, e_{k_j} \right\rangle\right]_{i,j=1}^n \\
&= \det\left[\sum_{k_j=1}^N s_{k_j}^2(A) \overline{\langle f_j, e_{k_j}\rangle}\, \langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^n \\
&= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\{1,2,\dots,n\}^N} \prod_{j=1}^n s_{k_j}^2(A) \prod_{j=1}^n \overline{\langle f_j, e_{k_j}\rangle}\ \det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^n .
\end{aligned}$$

Приметимо да је $\det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^n = 0$ за $k_i = k_j$, те у суми остају само оне n-торке у којима су сви индекси k_i различити, тј. добијамо

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_n)\in\{1,2,\cdots,n\}^N,\\ k_i\neq k_j, \forall i\neq j}} \prod_{j=1}^n s_{k_j}^2(A) \prod_{j=1}^n \overline{\langle f_j, e_{k_j}\rangle}\ \det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^n \\
&= \sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_n\leqslant N} \prod_{j=1}^n s_{k_j}^2(A) \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \prod_{j=1}^n \overline{\langle f_j, e_{k_{\sigma(j)}}\rangle}\ \det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^n \\
&= \sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_n\leqslant N} \prod_{j=1}^n s_{k_j}^2(A)\, \overline{\det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^n}\, \det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^n \\
&\leqslant \prod_{j=1}^n s_j^2(A) \sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_n\leqslant N} \left|\det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^n\right|^2 = \prod_{j=1}^n s_j^2(A)\ \det\left[\langle P_N f_i, P_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^n .
\end{aligned}$$

Последњу једнакост добијамо из претходно доказаног дела једнакости када се оне примене на оператор P_{N} уместо на оператор A_{N}, јер је тада $s_1(P_N) = \ldots = s_N(P_N) = 1$, па је

$$\det\left[\langle P_N f_i, P_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} = \sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_n\leqslant N} \left|\det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^{n}\right|^2.$$

Тиме смо доказали да важи

$$\det\left[\langle A_N f_i, A_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} \leqslant \prod_{k=1}^{n} s_n^2(A)\, \det\left[\langle P_N f_i, P_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} \tag{1.16}$$

Како $P_N \xrightarrow{s} I$ и $A_N = |A|\,P_N \xrightarrow{s} |A|$, када $N\to\infty$, добијамо да је

$$\begin{aligned} \langle P_N f_i, P_N f_j\rangle &\to \langle f_i, f_j\rangle\,, \quad \text{кад} \quad N\to\infty,\\ \langle A_N f_i, A_N f_j\rangle &\to \langle |A|\,f_i, |A|\,f_j\rangle = \langle A f_i, A f_j\rangle\,, \quad \text{кад} \quad N\to\infty, \end{aligned}$$

за свако $i, j \in 1,\ldots n$. Како је свака детерминанта непрекидна функција својих елемената, закључујемо да важи

$$\begin{aligned} \det\left[\langle P_N f_i, P_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} &\to \det\left[\langle f_i, f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n}\,, \quad \text{кад} \quad N\to\infty,\\ \det\left[\langle A_N f_i, A_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} &\to \det\left[\langle A f_i, A f_j\rangle\right]_{i.j=1}^{n}\,, \quad \text{кад} \quad N\to\infty. \end{aligned}$$

На основу тога (1.15) следи из релације (1.16) кад $N\to\infty$.

Треба још показати да се једнакост достиже када за векторе f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ изаберемо баш првих n вектора из развоја оператора $|A|$, односно векторе $e_1, \ldots, e_n$. Заиста, тада важи

$$\begin{aligned} \det\left[\langle Ae_i, Ae_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} &= \det\left[\langle |A|\,e_i, |A|\,e_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} = \det\left[\langle s_i(A)e_i, s_j(A)e_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n}\\ &= \det\left[s_i(A)s_j(A)\,\langle e_i, e_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} = \prod_{k=1}^{n} s_k^2(A)\det\left[\langle e_i, e_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} = \prod_{k=1}^{n} s_k^2(A). \quad \square \end{aligned}$$

Неједнакост (1.15) има и своју геометријску интерпретацију. Наиме, приметимо да $\det\left[\langle f_i, f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n}$ представља Gram-ову детерминанту вектора $f_1, \ldots, f_n$. Зато, ако су $f_1, \ldots, f_n$ линеарно независни онда је $\det\left[\langle f_i, f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n}$ једнака квадрату запремине паралелопипеда разапетим са $f_1, \ldots, f_n$. Ако сада претпоставимо додатно да је A инвертибилна линеарна трансформација, то нам (1.15) говори да запремина паралелопипеда после примене трансформације A може бити једнака највише запремини почетног паралелопипеда помноженој са производом првих n сингуларних вредности од A.

За $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ћемо са $\nu(A)$ означавати суму вишеструкости свих не-нула сопствених вредности оператора A. Доказ следеће леме може се наћи у [GK, Лема II.3.2].

Лема 1.14. ***Нека је*** $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ***и*** $\{f_i\}_{i=1}^{r(A)}$ ***неки ортонормирани систем вектора за који важи***

$$|\langle Af_i, f_i\rangle| = s_i(A), \qquad i = 1, \ldots, r(A).$$

Тада је оператор A ***нормалан и*** $\{f_i\}_{i=1}^{r(A)}$ ***чине потпуни систем сопствених вектора у*** $\overline{\mathcal{R}(A)}$.

Биће нам потребна и следећа Schur-ова лема (за доказ видети [GGK, Лема II.3.3]).

Лема 1.15. [Schur] ***Нека је*** A ***компактан оператор на Hilbert-овом простору*** $\mathcal{H}$ ***и нека*** E_A ***представља минималан затворен потпростор на*** $\mathcal{H}$ ***који садржи све сопствене векторе и генералисане векторе од*** A ***који одговарају не-нула сопственим вредностима. Тада у*** E_A ***постоји ортонормирана база*** $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ***таква да за све*** $j = 1, 2, \dots$ ***важи***

$$A\varphi_j = a_{1j}\varphi_1 + a_{2j}\varphi_2 + \ldots + a_{jj}\varphi_j, \quad a_{jj} = \lambda_j(A).$$

Уз помоћ претходне две леме доказујемо

Лема 1.16. ***За сваки компактан оператор*** A ***је***

$$|\lambda_1(A) \dots \lambda_n(A)| \leqslant s_1(A) \dots s_n(A), \quad n = 1, \dots, \nu(A). \tag{1.17}$$

Ако је $\nu(A) = r(A) \leqslant \infty$***, тада једнакост важи за свако*** n ***ако и само ако је оператор*** A ***нормалан.***

△ Према Schur-овој леми 1.15 постоји ортонормирани систем $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\nu(A)}$ за који матрица оператора A има горње троугаону форму

$$A\varphi_i = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \cdots + a_{ii}\varphi_i, \quad i = 1, \dots, \nu(A),$$

где су $a_{ij} = \langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle$ и специјално $a_{ii} = \langle A\varphi_i, \varphi_i \rangle = \lambda_i(A)$. На основу тога закључујемо да је

$$\begin{aligned} \langle A\varphi_i, A\varphi_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{i} a_{ik}\varphi_i, \sum_{l=1}^{j} a_{jl}\varphi_l \Big\rangle &= \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} a_{ik}\overline{a_{jl}}\, \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} a_{ik}\overline{a_{jk}} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \langle A\varphi_i, \varphi_k \rangle\, \overline{\langle A\varphi_j, \varphi_k \rangle}, \end{aligned}$$

а одатле следи и

$$\begin{aligned} \det\left[\langle A\varphi_i, A\varphi_j \rangle\right]_{i,j=1}^{n} &= \det\left[\langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle\right]_{i,j=1}^{n} \det\left[\overline{\langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle}\right]_{i,j=1}^{n} \\ &= \left|\det\left[\langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle\right]_{i,j=1}^{n}\right|^2 = \lambda_1^2(A) \dots \lambda_n^2(A). \end{aligned} \tag{1.18}$$

С друге стране, према Леми 1.13 важи

$$\det\left[\langle A\varphi_i, A\varphi_j \rangle\right]_{i,j=1}^{n} \leqslant s_1^2(A) \dots s_n^2(A) \det\left[\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\right]_{i,j=1}^{n} \tag{1.19}$$

при чему је последња детерминанта једнака 1, јер је систем φ_i ортонормиран. Из (1.18) и (1.19) добијамо да важи прво тврђење леме

$$|\lambda_1(A) \dots \lambda_n(A)| \leqslant s_1(A) \dots s_n(A).$$

Размотримо још случај када је $\nu(A) = r(A)$ и када важи једнакост у (1.17) за свако $n = 1, \dots, r(A)$. Одатле следи да важи $|\lambda_i(A)| = s_i(A)$, тј. да је $|\langle A\varphi_i, \varphi_i \rangle| = s_i(A), i = 1, \dots, r(A)$. Према Леми 1.14 закључујемо да је тада оператор A нормалан.
Приметимо да када је оператор A коначно димензионалан, да ће тада важити једнакост у (1.17) за $n = \nu(A)$. □

Лема 1.17. ***Нека је*** $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ***конвексна функција и*** $\varphi(-\infty)\overset{\text{деф}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ ***и нека су*** $\{a_i\}_{i=1}^{\omega}$ ***и*** $\{b_i\}_{i=1}^{\omega}$ $(\omega\leqslant\infty)$***, нерастући низови реалних бројева такви да важи***

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}b_i,\qquad \textit{за све}\ \ k=1,2,\dots,\omega. \tag{1.20}$$

Тада за $k=1,2,\dots,\omega$ ***важи***

$$\sum_{i=1}^{k}\varphi(a_i)\leqslant\sum_{i=1}^{k-1}\varphi(b_i)+\varphi\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i-\sum_{i=1}^{k-1}b_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\varphi(b_i).$$

△ Из претпоставки леме се показује да је φ заправо ненегативна неопадајућа функција. Заиста, претпоставимо да је $x<y$. Тада постоји довољно велики природан број N такав да је $-N<x<y$. Како је φ конвексна функција, то су подељене разлике неопадајуће функције по оба аргумента, односно важи $\frac{\varphi(x)-\varphi(-N)}{x-(-N)}\leqslant\frac{\varphi(y)-\varphi(-N)}{y-(-N)}$, а тиме и

$$\varphi(x)-\varphi(-N)\leqslant\frac{x+N}{y+N}(\varphi(y)-\varphi(-N))\leqslant\varphi(y)-\varphi(-N),$$

то јест $\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$. Ненегативност јасно следи из управо показане монотоности и из $\varphi(-\infty)=0$.

Сада, нека је k фиксирано и $b_i'\overset{\text{деф}}{=}b_i$ за $i=1,2,\dots,k-1$ и $b_k'\overset{\text{деф}}{=}\sum_{i=1}^{k}a_i-\sum_{i=1}^{k-1}b_i$. Тада се прва неједнакост своди на $\sum_{i=1}^{k}(\varphi(b_i')-\varphi(a_i))\geqslant 0$. Означимо са $A_j\overset{\text{деф}}{=}\sum_{i=1}^{j}a_i$ и $B_j\overset{\text{деф}}{=}\sum_{i=1}^{j}b_i'$ за $j=1,2,\dots,k$ и $A_0\overset{\text{деф}}{=}B_0\overset{\text{деф}}{=}0$. Приметимо и да је $A_k=B_k$. Тада је

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(\varphi(b_i')-\varphi(a_i))&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\varphi(b_i')-\varphi(a_i)}{b_i'-a_i}(b_i'-a_i)\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\varphi(b_i')-\varphi(a_i)}{b_i'-a_i}(B_i-B_{i-1}-A_i+A_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\varphi(b_i')-\varphi(a_i)}{b_i'-a_i}(B_i-A_i)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\varphi(b_i')-\varphi(a_i)}{b_i'-a_i}(B_{i-1}-A_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\varphi(b_i')-\varphi(a_i)}{b_i'-a_i}(A_i-B_i)-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\varphi(b_i')-\varphi(a_i)}{b_i'-a_i}(B_{i-1}-A_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{k-1}\bigg(\frac{\varphi(b_i')-\varphi(a_i)}{b_i'-a_i}-\frac{\varphi(b_{i+1}')-\varphi(a_{i+1})}{b_{i+1}'-a_{i+1}}\bigg)(B_i-A_i),\end{aligned}$$

што је веће до једнако од нуле, с обзиром да је израз у првој загради ненегативан јер је φ конвексна функција (а тиме су и подељене разлике опадајућа функција), док је израз у другој загради ненегативан према услов саме леме. Дакле, тиме је показана прва неједнакост.

Друга тражена неједнакост следи из управо показане неједнакости и показане монотоности функције φ. Заиста, $\sum_{i=1}^{k}a_i-\sum_{i=1}^{k-1}b_i\leqslant b_k$ према услову саме леме, па је

$$\sum_{i=1}^{k-1}\varphi(b_i)+\varphi\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i-\sum_{i=1}^{k-1}b_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{k-1}\varphi(b_i)+\varphi(b_k)=\sum_{i=1}^{k}\varphi(b_i).\qquad\square$$

Теорема 1.18. ***Нека је*** A ***компактан оператор и*** $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(0) = 0$ ***функција таква да је функција*** $f \circ \exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto f(e^t)$ ***конвексна. Тада је***

$$\sum_{i=1}^{k} f(|\lambda_i(A)|) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(s_i(A)), \qquad \textbf{\textit{за све}}\ \ k = 1, \ldots, \nu(A).$$

Специјално, ако је $\nu(A) = \infty$ ***добијамо***

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(|\lambda_n(A)|) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(s_n(A)).$$

△ Ова теорема је последица лема 1.16 и 1.17. Из Леме 1.16 следи

$$|\lambda_1(A) \ldots \lambda_n(A)| \leqslant s_1(A) \ldots s_n(A),$$

одакле видимо да низови $a_i \overset{\text{деф}}{=} \ln(|\lambda_i(A)|)$ и $b_i \overset{\text{деф}}{=} \ln s_i(A)$ задовољавају услове Леме 1.17. Како је функција $\varphi(t) \overset{\text{деф}}{=} f(e^t)$ конвексна и како важи $\varphi(-\infty) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(e^t) = f(0) = 0$, то можемо применити Лему 1.17, те добијамо $\sum_{i=1}^{k} \varphi(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \varphi(b_i)$, што се своди на

$$\sum_{i=1}^{k} f\bigl(e^{\ln|\lambda_i(A)|}\bigr) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(e^{\ln s_i(A)}).$$

Одатле следи тврђење теореме. □

Последица 1.19. ***За свако*** $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ***важе следеће релације:***

$$\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i(A)|^p \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i^p(A), \qquad \textbf{\textit{за свако}}\ \ p > 0\ \ \textbf{\textit{и за све}}\ \ k = 1, \ldots, \nu(A), \tag{1.21}$$

$$\prod_{i=1}^{k}(1+r\,|\lambda_i(A)|) \leqslant \prod_{i=1}^{k}(1+rs_i(A)), \qquad \textbf{\textit{за свако}}\ \ r > 0\ \ \textbf{\textit{и за све}}\ \ k = 1, \ldots, \nu(A). \tag{1.22}$$

△ Да бисмо добили ове две неједнакости, применимо претходну Теорему 1.18 на функцију $f(t) = t^p$ за прву релацију, односно на функцију $f(t) = \ln(1 + rt)$ за другу релацију. При томе, јасно је да обе функције задовољавају услове саме Теореме 1.18. Заиста, прву релацију добијамо директно, а другу релацију добијамо из $\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + r\,|\lambda_i(A)|) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + rs_i(A))$, што је еквиваletно са

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + r\,|\lambda_i(A)|) \leqslant \prod_{i=1}^{k}(1 + rs_i(A)),$$

што је и требало доказати. □

3 Сингуларне вредности збира и производа компактних оператора

На овом месту за $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ дефинишимо $\|A\|_{(k)}$, такозване Ky Fan-ове k норме, $k = 1, 2, \dots \dim \mathcal{H}$, оператора A са

$$\|A\|_{(k)} \overset{\text{деф}}{=} \sum_{i=1}^{k} s_i(A).$$

Видећемо касније да је ово један пример фамилије унитарно инваријантних норми, као и да Ky Fan-ове норме представљају важан пример унитарно инваријантних норми јер је за доказ неједнакости између унитарно инваријатних норми довољно показати да дата неједнакост важи за Ky Fan-ове норме (видети Теорему 2.11). О свему томе више у наредним главама, док ћемо сада показати једну оперативну теорему која нам помаже за ефикасан рад са Ky Fan-овим нормама.

Теорема 1.20. **[Ky Fan-ов принцип]** ***За сваки*** A ***из*** $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ***и*** $k = 1, 2, \dots, \dim \mathcal{H}$ ***имамо***

$$\max_{\{g_i\}_{i=1}^k, \{h_i\}_{i=1}^k} \sum_{i=1}^{k} |\langle A g_i, h_i \rangle| = \max_{\{g_i\}_{i=1}^k, \{h_i\}_{i=1}^k} \left| \sum_{i=1}^{k} \langle A g_i, h_i \rangle \right| = \sum_{i=1}^{k} s_i(A) = \|A\|_{(k)},$$

где се максимум узима по свим ортонормираним системима вектора $\{g_i\}_{i=1}^k$ ***и*** $\{h_i\}_{i=1}^k$ ***из*** $\mathcal{H}$.

△ Нека је са $A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) e_n \otimes f_n^\star$ дат Schmidt-ов сингуларни развој компактног оператора A. Тада можемо представити A у облику $A = B + C$, где су оператори B и C дефинисани са $B \overset{\text{деф}}{=} \sum_{j=1}^{k} (s_j(A) - s_j(A)) e_j \otimes f_j^\star$, односно $C \overset{\text{деф}}{=} \sum_{j=1}^{k} s_k(A) e_j \otimes f_j^\star + \sum_{j=k+1}^{\infty} s_j(A) e_j \otimes f_j^\star$. Проценимо $\sum_{i=1}^{k} |\langle A g_i, h_i \rangle|$ за произвољне ортонормиране системе $\{g_i\}_{i=1}^k$ и $\{h_i\}_{i=1}^k$. Наиме, важи

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} |\langle A g_i, h_i \rangle| &\leqslant \sum_{i=1}^{k} |\langle B g_i, h_i \rangle| + \sum_{i=1}^{k} |\langle C g_i, h_i \rangle| \leqslant \|B\|_1 + k \|C\| \|g_i\| \|h_i\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} (s_i(A) - s_k(A)) \|e_i \otimes f_i^\star\|_1 + k s_k(A) = \sum_{i=1}^{k} s_i(A) = \|A\|_{(k)},\end{aligned}$$

где смо искористили да је $\|C\| = s_k(A)$, јер је то највећа сингуларна вредност оператора C (оператори B и C дати су у облику свог сингуларног развоја, који је јединствен до на избор базе).

Остало је још да покажемо да се десна страна и достиже. То добијамо ако за ортонормиран систем узмемо управо првих k вектора из сингуларног развоја оператора A. Заиста, тада важи

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle A f_i, e_i \rangle| = \sum_{i=1}^{k} s_i(A) \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{k} s_i(A) = \|A\|_{(k)}.$$

Тиме је показано да важи

$$\max_{\{g_i\}_{i=1}^k, \{h_i\}_{i=1}^k} \sum_{i=1}^{k} |\langle Ag_i, h_i\rangle| = \|A\|_{(k)} .$$

С обзиром да је $\left|\sum_{i=1}^k \langle Ag_i, h_i\rangle\right| \leqslant \sum_{i=1}^k |\langle Ag_i, h_i\rangle|$ и како је $\left|\sum_{i=1}^k \langle Af_i, e_i\rangle\right| = \|A\|_{(k)}$ за исти избор вектора као малопре, то важи и остатак тврђења теореме. $\square$

Следећа последица оправдава назив Ky Fan-ова норма, тј. да је $\|\cdot\|_{(k)}$ заиста једна норма на $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. Наиме, особине $\|A\|_{(k)} = 0$ акко $A = 0$ и $\|\alpha A\|_{(k)} = |\alpha| \, \|A\|_{(k)}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, су очигледне, док неједнакост троугла следи из

ПОСЛЕДИЦА 1.21. [Ky Fan] ***Ако су*** A ***и*** B ***компактни оператори тада важи***

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(A+B) \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(A) + \sum_{i=1}^{k} s_i(B), \qquad \textit{за све } k = 1, 2 \ldots, \tag{1.23}$$

односно важи

$$\|A+B\|_{(k)} \leqslant \|A\|_{(k)} + \|B\|_{(k)} .$$

△ За свако $k = 1, 2, \ldots$ и произвољне ортонормиране системе $\{g_i\}_{i=1}^k$ и $\{h_i\}_{i=1}^k$, према Ky-Fan-овом принципу 1.20 важи

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle (A+B)g_i, h_i\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\langle Ag_i, h_i\rangle| + \sum_{i=1}^{k} |\langle Bg_i, h_i\rangle| \leqslant \|A\|_{(k)} + \|B\|_{(k)} . \tag{1.24}$$

Како се, поново, према Ky-Fan-овом принципу 1.20 $\|A+B\|_{(k)}$ достиже на изразима с леве стране (1.24), то је $\|A+B\|_{(k)} \leqslant \|A\|_{(k)} + \|B\|_{(k)}$. $\square$

Пратећи линије доказа Ky-Fan-овог принципа 1.20, видимо да важи

ЛЕМА 1.22. ***Нека је*** $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$***. Тада је*** $\|A\|_{(k)} = \min_{A=B+C} \{\|B\|_1 + k\, \|C\|_\infty\}$***.***

Користећи претходну лему можемо једноставно установити наредне резултате.

ТЕОРЕМА 1.23. ***Ако су*** A ***и*** B ***из*** $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ***и функција*** $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$***,*** $f(0) = 0$***, неопадајућа и конвексна, тада важи***

$$\sum_{i=1}^{k} f(s_i(A+B)) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(s_i(A) + s_i(B)), \qquad \textit{за све } k = 1, 2, \ldots,$$

и као последица тога важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(s_n(A+B)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(s_n(A) + s_n(B)).$$

△ Да бисмо доказали теорему користимо Лему 1.24 и Лему 1.16, при чему за функцију φ узимамо функцију

$$\varphi(x) \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x < \infty \\ 0, & -\infty \leqslant x < 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

Како је $f(0) = 0, \varphi(-\infty) = 0$ и φ је конвексна, то функција φ испуњава услове леме. За низове $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ узмимо редом низове $\{s_i(A+B)\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{s_i(A)+s_i(B)\}_{i=1}^{\infty}$. Ти низови на основу последице 1.21 задовољавају услове Леме 1.17. Тако закључујемо да је

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \varphi(b_i),$$

односно, како су низови $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ позитивни, важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(s_n(A+B)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(s_n(A)+s_n(B)).$$ □

Последица 1.24. [Horn] ***Ако су A и B компактни оператори тада важи***

$$\prod_{i=1}^{n} s_i(AB) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_i(A) \prod_{i=1}^{n} s_i(B), \quad n = 1, 2 \ldots \tag{1.26}$$

△ Нека је $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормиран систем вектора из развоја оператора $|AB| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(AB) e_n \otimes e_n^{\star}$. Тада на основу Леме 1.13 важи

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} s_k^2(AB) = \det\left[\langle ABe_i, ABe_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} &\leqslant \prod_{k=1}^{n} s_k^2(A) \det\left[\langle Be_i, Be_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n} s_k^2(A) \prod_{k=1}^{n} s_k^2(B) \det\left[\langle e_j, e_k\rangle\right]_{j,k=1}^{n} = \prod_{k=1}^{n} s_k^2(A) \prod_{k=1}^{n} s_k^2(B).\end{aligned}$$

Тиме је релација (1.26) доказана. □

Теорема 1.25. ***Нека су A и B из $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ и функција $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ са $f(0) = 0$ таква да је функција $f \circ \exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto f(e^t)$ конвексна. Тада важи***

$$\sum_{i=1}^{k} f(s_i(AB)) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(s_i(A)s_i(B)), \qquad \textbf{\textit{за све}}\ k = 1, 2, \ldots,$$

а као последица и

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(s_n(AB)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(s_n(A)s_n(B)).$$

△ Слично као у претходној теореми, за доказ ове теореме користимо Лему 1.24 и Лему 1.17, с тим што сада за низове $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ бирамо редом низове $\{\ln s_i(AB)\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\ln[s_i(A)s_i(B)]\}_{i=1}^{\infty}$, док за функцију φ узмимо функцију

$$\varphi(t) \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} f(e^t), & 0 \leqslant t < \infty \\ 0, & -\infty \leqslant x < 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Покажимо прво да они задовољавају услове Леме 1.17. То нам омогућава Последица 1.24, јер помоћу ње добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} \ln\, s_i(AB) &= \ln \prod_{i=1}^{k} s_i(AB)\\ &\leqslant \ln \prod_{i=1}^{k} [s_i(A)s_i(B)] = \sum_{i=1}^{k} \ln[s_i(A)s_i(B)] = \sum_{i=1}^{k} b_i.\end{aligned}$$

Тада, применом Леме 1.17, добијамо $\sum_{i=1}^{k} \varphi(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \varphi(b_i)$, односно важи

$$\sum_{i=1}^{k} f(e^{\ln s_i(AB)}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(e^{\ln(s_i(A)s_i(B))}).$$

Последња неједнакост се своди на $\sum_{i=1}^{k} f(s_i(AB)) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(s_i(A)s_i(B))$, што је и требало доказати. □

Приметимо да се неједнакости из теорема 1.23 и 1.25 могу уопштити на случај са n оператора. Користећи то, доказујемо следећу

Последица 1.26. ***Ако су $A_1, \dots, A_n$ компактни оператори, тада важи***

$$\sum_{i=1}^{k} s_i^p(A_1 \dots A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i^p(A_1) \dots s_i^p(A_n), \quad \textbf{\textit{за}}\ k = 1, 2, \dots \ \textbf{\textit{и за свако}}\ p > 0$$

ако и само ако важи

$$\prod_{i=1}^{k} s_i(A_1 \dots A_n) \leqslant \prod_{i=1}^{k} s_i(A_1) \dots s_i(A_n), \quad \textbf{\textit{за}}\ k = 1, 2, \dots. \tag{1.28}$$

△ Директна смер следи из познатог тврђења да је

$$\lim_{p \to 0^+} \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^p}{k} \right)^{1/p} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} x_i},$$

при чему је $p > 0$ и $x_1, \dots, x_n$ позитивни реални бројеви. Како је према претпоставци

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} s_i^p(A_1 \dots A_n)}{k} \right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} s_i^p(A_1) \dots s_i^p(A_n)}{k} \right)^{1/p}, \quad \text{за}\ \ k = 1, 2, \dots,$$

пуштањем лимеса кад p тежи нули на основу претходног добијамо да важи

$$\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} s_i^p(A_1 \dots A_n)} \leqslant \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} s_i^p(A_1) \dots s_i^p(A_n)}, \quad \text{за}\ \ k = 1, 2, \dots,$$

што је еквивалетно са (1.28).

Обрнуто тврђење директно добијамо из Теореме 1.25, ако за функцију f узмемо $f(t) = t^p$. Заиста, она очигледно задовољава услове Теореме 1.25, па важи

$$\sum_{i=1}^{k} s_i^p(A_1 \dots A_n) = \sum_{i=1}^{k} f(s_i(A_1 \dots A_n)) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(s_i(A_1) \dots s_i(A_n)) = \sum_{i=1}^{k} s_i^p(A_1) \dots s_i^p(A_n),$$

што је и требало доказати □

Глава 2

Симетрично нормирани идеали прстена ограничених линеарних оператора

1 Двострани идеали прстена ограничених линеарних оператора

Дефиниција 2.1. *Скуп $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ је* ***двострани идеал*** *ако важи:*

1° *ако оператори $A, B \in \mathcal{M}$ тада је и $A + B \in \mathcal{M}$,*

2° *ако оператор $A \in \mathcal{M}$ и $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ тада је $AB \in \mathcal{M}$ и $BA \in \mathcal{M}$,*

3° *$\mathcal{M} \neq \{0\}$ и $\mathcal{M} \neq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.*

Како $I \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ је линеаран скуп, закључујемо да је и двострани идеал $\mathcal{M}$ такође линеаран скуп. Примери двостраних идела су скуп коначно димензионалних оператора $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ и скуп компактних оператора $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. Важи да су $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ најмањи, односно највећи двострани идеали, прецизније важи следећа

Теорема 2.1. [Calkin] ***Ако је $\mathcal{M}$ двострани идеал у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, тада је***

$$\mathfrak{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}).$$

Доказ теореме се може наћи у [GK, Теорема III.1.1].

Последица 2.2. ***$\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ је једини затворен двострани идеал у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.***

Једно од основних својстава идеала је да је сваки двострани идеал самоадјунгован. Односно, ако је $\mathcal{M}$ двострани идеал и $A \in \mathcal{M}$, тада је и $A^* \in \mathcal{M}$. Ова особина директно следи из поларне репрезентације оператора $A = V\,|A|$, где је V парцијална изометрија. Из претходне репрезентације следи да је $|A| = V^*A \in \mathcal{M}$, односно $A^* = |A|\,V^* \in \mathcal{M}$.

Симетрично нормирани идеали

Да бисмо дефинисали симетрично-нормиране идеале потребан нам је појам симетричне норме. Нека је $\mathcal{I} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ двострани идеал.

ДЕФИНИЦИЈА **2.2.** *Функционал* $|\!|\!|\cdot|\!|\!| : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ *је* ***симетрична норма*** *ако је*

1° $|\!|\!|X|\!|\!| > 0,$ *за свако* $X \in \mathcal{I}, X \neq 0,$

2° $|\!|\!|\lambda X|\!|\!| = |\lambda|\, |\!|\!|X|\!|\!|\,,$ *за све* $X \in \mathcal{I}, \lambda \in \mathbb{C},$

3° $|\!|\!|X+Y|\!|\!| \leqslant |\!|\!|X|\!|\!| + |\!|\!|Y|\!|\!|\,,$ *за све* $X, Y \in \mathcal{I},$

4° $|\!|\!|AXB|\!|\!| \leqslant \|A\|\, |\!|\!|X|\!|\!|\, \|B\|\,,$ *за све* $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), X \in \mathcal{I},$

5° *ако је* X *једнодимензионални оператор тада је* $|\!|\!|X|\!|\!| = \|X\| = s_1(X)$.

Пример симетричне норме је операторна норма дефинисана на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

ДЕФИНИЦИЈА **2.3.** *Кажемо да је норма* $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ ***унитарно инваријантна норма*** *ако се у претходној дефиницији услов* 4° *замени следећим условом*

$4^\star$ $|\!|\!|UX|\!|\!| = |\!|\!|XU|\!|\!| = |\!|\!|X|\!|\!|\,,$ *за свако* $X \in \mathcal{I}$ *и* $U \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *произвољан унитаран оператор.*

Приметимо да је свака симетрична норма уједно и унитарно инваријантна норма, тј. да услов 4° повлачи услов $4^\star$. Заиста, ако су U и V унитарни оператори, тада према услову 4° важи

$$|\!|\!|UXV|\!|\!| \leqslant \|U\|\, |\!|\!|X|\!|\!|\, \|V\| = |\!|\!|X|\!|\!|\,. \tag{2.1}$$

С друге стране, како су оператори U и V унитарни то важи $X = U^{-1}UXVV^{-1}$, па опет на основу 4° имамо да је

$$|\!|\!|X|\!|\!| = |\!|\!|U^{-1}UXVV^{-1}|\!|\!| \leqslant \|U^{-1}\|\, |\!|\!|UXV|\!|\!|\, \|V^{-1}\| = |\!|\!|UXV|\!|\!|\,. \tag{2.2}$$

Из релација (2.1) и (2.2) следи $|\!|\!|UXV|\!|\!| = |\!|\!|X|\!|\!|$, одакле директно следи услов $4^\star$.

ЛЕМА **2.3.** ***Ако је*** $\mathcal{I} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ***двострани идеал и*** $|\!|\!|\cdot|\!|\!| : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ ***симетрична норма, тада је***

$$|\!|\!|X|\!|\!| = |\!|\!|X^*|\!|\!| = |\!|\!|(XX^*)^{1/2}|\!|\!| = |\!|\!|(X^*X)^{1/2}|\!|\!|, \quad \textbf{за свако } X \in \mathcal{I}.$$

△ Нека је $X = V\,|X|$ поларна репрезентација оператора $X \in \mathcal{I}$. Показали смо већ да је тада и $|X| \in \mathcal{I}$. Тада на основу услова 4° важи

$$|\!|\!|X|\!|\!| = |\!|\!|V\,|X|\,|\!|\!| \leqslant \|V\|\, |\!|\!|\,|X|\,|\!|\!| = |\!|\!|\,|X|\,|\!|\!| \tag{2.3}$$

С друге стране, како је $|X| = V^*X$, опет на основу 4° имамо да важи

$$|\!|\!|\,|X|\,|\!|\!| = |\!|\!|V^*X|\!|\!| \leqslant \|V^*\|\, |\!|\!|X|\!|\!| = |\!|\!|X|\!|\!|\,. \tag{2.4}$$

На основу релација (2.3) и (2.4) добијамо $|\!|\!|X|\!|\!| = |\!|\!|(X^*X)^{1/2}|\!|\!|$. Слично, претходним поступком примењеним на оператор $X^* = |X|\,V^*$ и $|X| = X^*V$ видимо да важи $|\!|\!|X^*|\!|\!| = |\!|\!|(X^*X)^{1/2}|\!|\!|$. □

ДЕФИНИЦИЈА **2.4.** *Двострани идеал* $\mathcal{I} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *је* ***симетрично нормирани идеал*** *у прстену* $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *ако постоји симетрична норма* $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{\mathcal{I}}$ *дефинисана на њему у којој је* $\mathcal{I}$ *Banach-ов простор.*

2 Симетричне нормирајуће функције

Нека је c_0 простор реалних низова $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ који теже нули. Означимо са $\hat{c}$ скуп који се састоји од низова са коначно много не-нула елемената.

Дефиниција **2.5.** *Реална функција* $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots)$ *дефинисана на* $\hat{c}$ *се назива* ***нормирајућа функција*** *ако има следећа својства:*

1° $\Phi(\xi) > 0$, *за све* $\xi \in \hat{c}$, $\xi \neq 0$,

2° $\Phi(\alpha\xi) = |\alpha|\,\Phi(\xi)$, *за све* $\xi \in \hat{c}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

3° $\Phi(\xi + \eta) \leqslant \Phi(\xi) + \Phi(\eta)$, *за све* ξ, $\eta \in \hat{c}$,

4° $\Phi(1, 0, 0, \dots) = 1$.

Симетрична нормирајућа функција (с.н. функција) је нормирајућа функција која има и следеће својство:

5° $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots) = \Phi(|\xi_{\sigma(1)}|, |\xi_{\sigma(2)}|, \dots, |\xi_{\sigma(n)}|, 0, \dots)$, за све $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in \hat{c}$ и произвољну пермутацију σ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$.

Доказ наредне леме може се наћи у делу III.3 из [GK].

Лема **2.4.** ***Ако за векторе*** $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ ***из*** $\hat{c}$ ***важи*** $|\xi_i| \leqslant |\eta_i|$, $i = 1, 2, \dots$, ***тада је*** $\Phi(\xi) \leqslant \Phi(\eta)$.

Лема **2.5.** ***Уколико вектори*** $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ ***и*** $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^{n}$ ***задовољавају следеће услове***

$$\xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \dots \geqslant \xi_n \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$\eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \dots \geqslant \eta_n \geqslant 0, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \eta_i, \quad \text{за свако } k = 1, \dots, n, \tag{2.7}$$

тада вектор ξ ***има следећу репрезентацију***

$$\xi = \sum_{k=1}^{2^n n!} \alpha_k \eta^{(k)}, \tag{2.8}$$

где су $\eta^{(k)}$ ***сви*** $n-$***димензионални вектори добијени из*** η ***пермутовањем његових координата и још множећи их са*** 1 ***или*** -1, ***а*** α_k ***ненегативни бројеви за које је*** $\sum_{k=1}^{2^n n!} \alpha_k = 1$.

Доказ ове леме се може исто наћи у делу III.3 из[GK]. Приметимо и то да претходну лему можемо формулисати и на следећи начин, да сваки вектор ξ који задовољава услове (2.5)–(2.7) припада конвексном омотачу вектора $\eta^{(k)}$.

Лема 2.6. **[Ky Fan]** ***Нека су*** $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ***и*** $\eta=\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ ***из*** $\hat{c}$***. Ако је***

$$\xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \tag{2.9}$$

$$\eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \eta_i, \ \ \textit{за свако} \ \ k=1,2,\ldots, \tag{2.11}$$

тада за сваку симетричну нормирајућу функцију Φ ***важи***

$$\Phi(\xi) \leqslant \Phi(\eta).$$

△ Како низови ξ и η припадају $\hat{c}$, све њихове координате почев од n су једнаке 0. Означимо са $\eta^{(\nu)}$ вектор из $\hat{c}$ такав да су његових првих n координата добијени пермутовањем бројева η_i, $i=1,\ldots,n$ и множењем са 1 или -1. Тада на основу претходне леме, из (2.8) важи

$$\xi=\sum_{\nu}\alpha_\eta\eta^{(\nu)} \text{ и } \sum_{\nu}\alpha_\nu=1,\, \alpha_\nu\geqslant 0.$$

Користећи особине 3° и 2° из дефиниције 2.5 добијамо да је

$$\Phi(\xi)=\Phi\Big(\sum_{\nu}\alpha_\eta\eta^{(\nu)}\Big)\leqslant\sum_{\nu}\Phi(\alpha_\nu\eta^{(\nu)})=\sum_{\nu}\alpha_\nu\Phi(\eta^{(\nu)}).$$

Како због особине 5° из дефиниције 2.5 важи $\Phi(\eta^{(\nu)})=\Phi(\eta)$, добијамо тврђење леме

$$\Phi(\xi)\leqslant\Phi(\eta)\sum_{\nu}\alpha_\nu=\Phi(\eta).$$ □

Нека је k конус свих нерастућих низова из $\hat{c}$ који се састоје од ненегативних бројева. Сваком вектору $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ из $\hat{c}$ можемо придружити вектор $\xi^*=\{\xi_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ из k, при чему је $\xi_i^*=|\xi_{\eta_i}|$, $i=1,2,\ldots$ и η_i је пермутација позитивних целих бројева таква да је низ $\{|\xi_{\eta_i}|\}_{i=1}^{\infty}$ нерастући. Како је за симетрично нормирајуће функције испуњен услов 5° из дефиниције 2.5, важи $\Phi(\xi)=\Phi(\xi^*),\xi\in\hat{c}$. Дакле, с.н. функција је јединствено дефинисана ако је задата на конусу k. Одатле следи да се услови $1°-5°$ који дефинишу с.н. функцију могу заменити еквивалентним условима у којима фигуришу само вектори из k:

Лема 2.7. ***Нека је*** $\Phi(\xi)$ ***функција дефинисана на конусу*** k***. Једнакост***

$$\widetilde{\Phi}(\xi)\overset{\text{деф}}{=}\Phi(\xi^*),\qquad \xi\in\hat{c} \tag{2.12}$$

дефинише једну с.н. функцију ако и само ако су задовољени следећи услови:

$1^\star$ $\Phi(\xi)>0,\quad \xi\in k,\,\xi\neq 0$***,***

$2^\star$ $\Phi(\alpha\xi)=\alpha\Phi(\xi)$***,*** ***за свако*** $\alpha\geqslant 0$ ***и свако*** $\xi\in k$***,***

$3^\star$ $\Phi(\xi+\eta)\leqslant\Phi(\xi)+\Phi(\eta)$, ***за све*** $\xi,\eta\in k$***,***

$4^\star$ $\Phi(1,0,\ldots)=1$***,***

$5^\star$ $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty},\eta=\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}\in k$***,*** $\sum_{i=1}^{k}\xi_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}\eta_i$, $k=1,2,\ldots$ ***тада је*** $\Phi(\xi)\leqslant\Phi(\eta)$***.***

$\triangle$ Директан смер следи директно из дефиниције с.н. функције, јер ако је $\Phi(\xi)$ с.н. функција тада су задовољени услови $1^\circ - 5^\circ$ на $\hat{c}$ из дефиниције 2.5, па они специјално важе и на конусу k, односно важе услови $1^\star - 4^\star$, док услов $5^\star$ следи из Ky Fan-ове леме 2.6.

Обратно, нека функција Φ дефинисана на конусу k задовољава услове $1^\star - 5^\star$. Тада функција $\widetilde{\Phi}$ дефинисана једнакошћу (2.12) на $\hat{c}$ очигледно задовољава услове $1^\circ, 2^\circ, 4^\circ$ и 5° из дефиниције 2.5.

Докажимо још да важи својство 3°. Нека су ξ и η низови из $\hat{c}$ и $\zeta = \xi + \eta$. Очигледно да за тако дефинисане низове важи

$$\sum_{i=1}^{k} \zeta_i^* \leqslant \sum_{i=1}^{k} (\xi_i^* + \eta_i^*).$$

Тада из својства $5^\star$ и $3^\star$ следи да је

$$\widetilde{\Phi}(\xi + \eta) = \widetilde{\Phi}(\zeta) \leqslant \Phi(\xi^* + \eta^*) \leqslant \Phi(\xi^*) + \Phi(\eta^*) = \widetilde{\Phi}(\xi) + \widetilde{\Phi}(\eta).$$

Тиме смо доказали да важи и својство 3°. $\square$

У даљем тексту ћемо и за функцију $\widetilde{\Phi}$ и за Φ користити исту ознаку Φ, с тим што ћемо их разликовати у зависности од домена.

Најједноставнији пример с.н. функције је функција $\Phi_\infty(\xi)$, дефинисана на конусу k следећом релацијом

$$\Phi_\infty(\xi) = \xi_1, \quad \xi \in k.$$

Следећи једноставан пример с.н. функције је функција $\Phi_1(\xi)$ дефинисана са

$$\Phi_1(\xi) = \sum_i \xi_i, \quad \text{за свако } \xi \in k.$$

Очигледно је да важи $\Phi_\infty(\xi) = \max_i |\xi_i|$ и $\Phi_1(x) = \sum_i |\xi_i|$, при чему $\xi \in \hat{c}$.
Функције $\Phi_\infty(\xi)$ и $\Phi_1(\xi)$ су екстремне с.н. функције, односно важи

Лема 2.8. *За сваку с.н. функцију Φ важе следеће неједнакости*

$$\xi_1 \leqslant \Phi(\xi) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i, \quad \xi \in k.$$

$\triangle$ Лема директно следи из Ky Fan-ове леме 2.6, јер за сваки вектор ξ, из конуса k, облика $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots)$ важи

$$\xi_1 = \Phi(\xi_1, 0, \dots) \leqslant \Phi(\xi) \leqslant \Phi\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j, 0, \dots\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \Phi(1, 0, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j. \qquad \square$$

Због тога је природно да функције Φ_∞ и Φ_1 називамо минимална, односно максимална с.н. функција.

У следећој леми установићемо однос између с.н. функција Φ на конусу k и унитарно инваријантних норми $|||\cdot|||$ на скупу коначно димензионалних оператора $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Лема 2.9. ***Нека је Φ с.н. функција, тада једнакост***

$$\|A\|_\Phi \overset{\text{деф}}{=} \Phi(\{s_i(A)\}_{i=1}^\infty) \quad \textit{за произвољно } A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \tag{2.13}$$

дефинише унитарно инваријантну норму на $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.
Обрнуто, ако је $\|\!|\cdot|\!\|$ унитарно инваријантна норма на коначно димензионалним операторима и $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ ортонормирана база простора $\mathcal{H}$, тада једнакост

$$\Phi(\xi) = \Big|\!\Big|\!\Big|\sum_{i=1}^k \xi_i \langle \cdot, e_i\rangle e_i\Big|\!\Big|\!\Big|, \quad \xi \in k \tag{2.14}$$

дефинише с.н. функцију Φ за коју је $\|\!|\cdot|\!\| = \|\cdot\|_\Phi$.

△ Нека је $\|A\|_\Phi = \Phi(\{s_i(A)\}_{i=1}^\infty)$, $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ и $\|\cdot\|_\Phi : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$. Треба показати да су задовољени услови из дефиниције 2.2. Прва два својства следе директно из особина с.н. функција. Зато, пређимо на показивање осталих својстава.
3° Ако $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ тада $\{s_i(A)\}_{i=1}^\infty$ и $\{s_i(B)\}_{i=1}^\infty$ имају коначно не-нула чланова и према Леми 1.21 важи

$$\sum_{i=1}^k s_i(A+B) \leqslant \sum_{i=1}^k s_i(A) + \sum_{i=1}^k s_i(B).$$

Користећи последњу релацију и особину 5* из Леме 2.7 добијамо да је

$$\begin{aligned}\Phi(\{s_i(A+B)\}_{i=1}^\infty) &= \Phi\Big(\sum_{i=1}^k s_i(A+B)\Big) \leqslant \Phi\Big(\sum_{i=1}^k (s_i(A)+s_i(B))\Big)\\ &\leqslant \Phi\Big(\sum_{i=1}^k s_i(A)\Big) + \Phi\Big(\sum_{i=1}^k s_i(B)\Big) = \Phi(\{s_i(A)\}_{i=1}^\infty) + \Phi(\{s_i(B)\}_{i=1}^\infty),\end{aligned}$$

односно важи $\|A+B\|_\Phi \leqslant \|A\|_\Phi + \|B\|_\Phi$.
4° Како важи $s_i(AU) = s_i(A) = s_i(UA)$, за сваки унитаран оператор U и свако i, то одмах добијамо да је испуњено и $\|AU\|_\Phi = \|A\|_\Phi = \|UA\|_\Phi$.
5° Ако је A једнодимензионални оператор тада је $\|A\| = s_1(A)$ и $s_{i+1}(A) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, одакле следи

$$\|A\|_\Phi = \Phi(s_1(A), 0, \dots) = s_1(A)\,\Phi(1, 0, \dots) = s_1(A) = \|A\|.$$

Обрнуто, ако је функција Φ дефинисана са (2.14) тада се директно из својства унитарно инваријантних норми изводи да она задовољава услове 1° − 5° из дефиниције 2.5. □

Последица 2.10. ***Свака унитарно инваријантна норма на идеалу $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ је симетрична норма на том идеалу.***

△ Нека је $\|\!|\cdot|\!\|$ унитарно инваријантна норма на $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ и $\Phi(\xi)$ с.н. функција генерисана том нормом. Како за све операторе $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ важи

$$s_i(BAC) \leqslant \|B\|\,\|C\|\,s_i(A), \quad \text{за свако } A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

то из особина с.н. функција следи да је

$$\Phi(\{s_i(BAC)\}_{i=1}^\infty) \leqslant \Phi(\{\|B\|\,\|C\|\,s_i(A)\}_{i=1}^\infty) = \|B\|\,\|C\|\,\Phi(\{s_i(A)\}_{i=1}^\infty).$$

Тиме смо доказали да важи особина 4° из дефиниције 2.2, односно

$$\|\!|BAC|\!\| \leqslant \|B\|\,\|C\|\,\|\!|A|\!\|.$$

□

3 Симетрично нормирани идеали генерисани симетрично нормирајућим функцијама

Нека је $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ произвољан низ реалних бројева и $\xi^{(n)} \overset{\text{деф}}{=} (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$. Тада је за сваку с.н. функцију Φ низ $\left\{\Phi(\xi^{(n)})\right\}_{n=1}^{\infty}$ неопадајући.

Формирамо скуп $c_\Phi \overset{\text{деф}}{=} \{\xi \in c_0 : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Phi(\xi^{(n)}) < +\infty\}$ Проширићемо домен функције Φ следећом дефиницијом

$$\Phi(\xi) \overset{\text{деф}}{=} \lim_{n\to\infty} \Phi(\xi^{(n)}), \quad \text{за све } \xi \in c_\Phi.$$

Скуп c_Φ има следећа својства:

1° ***Ако** $\xi, \eta \in c_\Phi$, **тада и** $\xi+\eta \in c_\Phi$.* Како $\xi, \eta \in c_\Phi$ то је $\sup_n \Phi(\xi^{(n)}), \sup_n \Phi(\eta^{(n)}) < +\infty$, те нам следећи низ неједнакости даје тражени закључак

$$\begin{aligned}\sup_n \Phi((\xi+\eta)^{(n)}) &= \sup_n \Phi(\xi^{(n)} + \eta^{(n)}) \\ &\leqslant \sup_n (\Phi(\xi^{(n)}) + \Phi(\eta^{(n)})) \leqslant \sup_n (\Phi(\xi^{(n)})) + \sup_n (\Phi(\eta^{(n)})) < +\infty.\end{aligned}$$

2° ***Ако је** $\alpha \in \mathbb{R}$ **и** $\xi \in c_\Phi$, **тада** $\alpha\xi \in c_\Phi$.* Директно следи из $\sup_n \Phi(\xi^{(n)}) < +\infty$ и из низа једнакости

$$\sup_n \Phi(\alpha\xi^{(n)}) = \sup_n |\alpha| \ \Phi(\xi^{(n)}) = |\alpha| \sup_n \Phi(\xi^{(n)}).$$

3° ***Ако је** $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in c_\Phi$ **и вектор** $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty} \in c_0$ **задовољава услов** $\sum_{i=1}^{n} \eta_i^* \leqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i^*$, **за свако** $n = 1, 2, \ldots$, **тада и** $\eta \in c_\Phi$.* Прво ћемо показати да је

$$\sup_n \Phi(\xi^{(n)}) = \sup_n \Phi(\xi^{*(n)}), \quad \xi \in c_\Phi. \tag{2.15}$$

Наиме, ако је $\xi^{*(n)} = (\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(n)}, 0, \ldots)$, тада је према дефиницији вектора ξ^* испуњено $\xi_i \leqslant \xi_{\sigma(i)}$, за свако $i = 1, \ldots, n$. На основу тога закључујемо да у (2.15) важи $\leqslant$. Обрнуту неједнакост у (2.15) добијамо из

$$\Phi((\xi^{*(n)})_{n=1}^{\infty}) = \Phi((\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(n)}, 0, \ldots)) \leqslant \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma(k)}, 0, \ldots).$$

Нека је n произвољан природан број. Према услову тврђења важи $\sum_{i=1}^{k} \eta_i^* \leqslant \sum_{i=1}^{k} \xi_i^*$, $k = 1, \ldots, n$. Користећи Лему 1.21 и претходно доказану једнакост (2.15) добијамо да важи

$$\begin{aligned}\Phi((\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, 0, \ldots)) &\leqslant \Phi((\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*, 0, \ldots)) \\ &\leqslant \Phi((\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \eta_n^*, 0, \ldots)) \leqslant \sup_n \Phi(\xi_n^*) = \sup_n \Phi(\xi_n),\end{aligned}$$

што је и требало показати.

4° ***Користећи претходно тврђење добијамо да важи следећа еквиваленција***

$$\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in c_\Phi \iff \xi^* = \{\xi_i^*\}_{i=1}^{\infty} \in c_\Phi.$$

Директно се проверава да с.н. функција Φ у проширеном домену c_Φ задржава својства $1^\star - 5^\star$ из Леме 2.7. Скуп c_Φ називамо **природним доменом** с.н. функције Φ.

Свакој с.н. функцији Φ придружујемо скуп $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ свих оператора $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ за који је $s(A) = \{s_i(A)\}_{i=1}^\infty \in c_\Phi$, тј. $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}) \overset{\text{деф}}{=} \{A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}) : \{s_i(A)\}_{i=1}^\infty \in c_\Phi\}$. За свако $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ уочимо и $\|A\|_\Phi \overset{\text{деф}}{=} \Phi(s(A))$.
Ако $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ тада он има Schmidt-ов развој $A = \sum_{i=1}^\infty s_i(A) e_i \otimes f_i^\star$ и нека је A_n $n-$та парцијална сума Schimdt-овог развоја оператора A, односно $A_n = \sum_{i=1}^n s_i(A) e_i \otimes f_i^\star$. Тада је $\|A_n\|_\Phi = \Phi(s(A_n)) = \Phi((s_1(A), \dots, s_n(A), 0, \dots))$, одакле следи

$$\begin{aligned} A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}) &\iff A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}) \wedge \{s_i(A)\}_{i=1}^\infty \in c_\Phi \\ &\iff A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}) \wedge \sup_n \Phi(s_i^{(n)}(A)) < +\infty \\ &\iff A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}) \wedge \sup_n \|A_n\|_\Phi < +\infty. \end{aligned}$$

Тиме смо показали да важи $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}) \iff \sup_n \|A_n\|_\Phi < +\infty$ и $\|A\|_\Phi = \lim_{n\to\infty} \|A_n\|_\Phi = \Phi(s(A))$.

Директна последица Леме 2.6 представља

Теорема 2.11. [Ky Fan-ово доминационо својство] ***Ако оператори*** $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ***и*** $B \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ***задовољавају следеће својство***

$$\sum_{i=1}^k s_i(B) \leqslant \sum_{i=1}^k s_i(A), \quad \textbf{\textit{за}}\ k = 1, 2, \dots,$$

тада $B \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ***и*** $\|B\|_\Phi \leqslant \|A\|_\Phi$.

Претходна теорема у терминима с.н. функција значи да је свака с.н. фунцкија Φ изотона, односно да важи $\Phi\big(\{s_i\}_{i=1}^\infty\big) \leqslant \Phi\big(\{t_i\}_{i=1}^\infty\big)$ за слабо потчињени, нерастући, позитиван низ $\{s_i\} \prec_w \{t_i\}$, тј. за оне које за задовољавају $\sum_{i=1}^k s_i \leqslant \sum_{i=1}^k t_i$ за свако $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 2.12. ***Нека је*** Φ ***с.н. функција. Тада је скуп*** $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ***с.н. идеал са нормом***

$$\|A\|_\Phi = |||A||| = \Phi(s(A)), \quad \textbf{\textit{за свако}}\ A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}).$$

△ Прво ћемо показати да је $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ двострани идеал. Нека A_1 и A_2 припадају $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, што према дефиницији значи да $s(A_1)$ и $s(A_2)$ припадају c_Φ. На основу Леме 1.21 важи

$$\sum_{i=1}^k s_i(A_1 + A_2) \leqslant \sum_{i=1}^k s_i(A_1) + \sum_{i=1}^k s_i(A_2)$$

одакле следи да $A_1 + A_2 \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$.
Према $5^\star$ из Леме 2.7 важи $\|A_1 + A_2\|_\Phi \leqslant \|A_1\|_\Phi + \|A_2\|_\Phi$. Наиме ако је $\xi = s(A_1 + A_2)$ и $\eta = s(A_1) + s(A_2)$, тада је

$$\sum_{i=1}^k \xi_i = \sum_{i=1}^k s_i(A_1 + A_2) \leqslant \sum_{i=1}^k s_i(A_1) + \sum_{i=1}^k s_i(A_2) = \sum_{i=1}^k \eta_i,$$

одакле следи

$$\Phi(s(A_1 + A_2)) = \Phi(\xi) \leqslant \Phi(\eta) = \Phi(s(A_1) + s(A_2)) \leqslant \Phi(s(A_1) + \Phi(s(A_2))).$$

Очигледно је да ако важи $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, да тада и $\lambda A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и $\|\lambda A\|_\Phi = |\lambda| \, \|A\|_\Phi$. Покажимо сада да је простор $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ комплетан. Доказаћемо да је сваки апсолутно конвергентан низ у $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ конвергентан у том простору. Нека је $\sum_{n=1}^\infty A_n$ апсолутно конвергентан у $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, тј.

$$C \overset{\text{деф}}{=} \sum_{n=1}^\infty \|A_n\|_\Phi < +\infty,$$

одакле је и $\sum_{n=1}^\infty \|A_n\|_{\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})} \leqslant C$. Како је простор $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ комплетан закључујемо да постоји $A \overset{\text{деф}}{=} \sum_{n=1}^\infty A_n$, при чему је и $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. Покажимо прво да важи слаба основна неједнакост. Наиме, за неке ортонормиране системе $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_k$ је испуњено

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k s_i(A) &= \sum_{i=1}^k |\langle Ae_i, f_i\rangle| = \sum_{i=1}^k \Big|\Big\langle \sum_{n=1}^\infty A_n e_j, f_j\Big\rangle\Big| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^k |\langle A_n e_i, f_i\rangle| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty \max_{\{e_i\}_{i=1}^k, \{f_i\}_{i=1}^k} \sum_{i=1}^k |\langle A_n e_i, f_i\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^k s_i(A_n) = \sum_{i=1}^k \Big(\sum_{n=1}^\infty s_i(A_n)\Big),\end{aligned}$$

што нам даје да је $s_k(A) \prec_w \sum_{n=1}^\infty s_k(A_n)$, за све $k = 1, 2, \ldots$. Тада нам изотоност и непрекидност с.н. функције Φ даје

$$\begin{aligned}&\Phi(s_1(A), \ldots, s_k(A), 0, \ldots) \leqslant \Phi\Big(\sum_{n=1}^\infty s_1(A_n), \ldots, \sum_{n=1}^\infty s_k(A_n), 0, \ldots\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \Phi\Big(\sum_{n=1}^N s_1(A_n), \ldots, \sum_{n=1}^N s_k(A_n), 0, \ldots\Big) \leqslant \limsup_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \Phi\left(s_1(A_n), \ldots, s_k(A_n), 0, \ldots\right) \\ &\leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \Phi(s_1(A_n), \ldots, s_k(A_n), \ldots) = \sum_{n=1}^\infty \|A_n\|_\Phi = C < +\infty.\end{aligned}$$

Узимањем супремума по $k \in \mathbb{N}$ добијамо тражену слабу основну неједнакост

$$\|A\|_\Phi = \Phi\big(\{s_i(A)\}_{i=1}^\infty\big) \leqslant C = \sum_{n=1}^\infty \|A_n\|_\Phi. \tag{2.16}$$

Сада је јасно како показујемо јаку основну неједнакост. Наиме, ако применимо 2.16 на остатак апсолутно конвергентног реда $\sum_{n=1}^\infty A_n$, то добијамо

$$\Big\|\sum_{n=1}^\infty A_n - \sum_{n=1}^n A_n\Big\|_\Phi = \Big\|\sum_{n=N+1}^\infty A_n\Big\|_\Phi \leqslant \sum_{n=N+1}^\infty \|A_n\|_\Phi \longrightarrow 0, \quad \text{кад } N \to \infty.$$

Тиме смо доказали да је $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ комплетан простор. Да бисмо завршили доказ потребно је још доказати да важи $\|UA\|_\Phi = \|AU\|_\Phi = \|A\|_\Phi$, за сваки унитаран оператор U, али то следи из раније доказаних својстава (1.2) и (1.3). □

4 p-модификације с.н. функција и унитарно инваријантних норми

Посебно важан пример унитарно инваријантних норми су Schatten-ове p-норме дефинисане са

$$\|A\|_p \overset{\text{деф}}{=} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} s_i^p(A)} \quad \text{за} \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

и $\|A\|_\infty \overset{\text{деф}}{=} \|A\| = s_1(A)$, што се поклапа са $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ нормом $\|A\|$. Са $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$, за $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ћемо означавати Schatten-ове p идеале.
Један од начина модификације с.н. функције Φ је да уведемо њену p-модификацију $\Phi^{(p)}$ са

$$\Phi^{(p)}\big(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\big) \overset{\text{деф}}{=} \sqrt[p]{\Phi\big(\{|z_n|^p\}_{n=1}^{\infty}\big)},$$

где је функција $\Phi^{(p)}$ дефинисана на $\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) \overset{\text{деф}}{=} \big\{\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \Phi\big(\{|z_n|^p\}_{n=1}^{\infty}\big) < +\infty\big\}$. У терминима унитарно инваријантних норми, $p-$модификација било које $\|\cdot\|_\Phi$ норме је дата следећом формулом

$$\|A\|_{\Phi^{(p)}} = \||A|^p\|_\Phi^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{за све } A \text{ за које је } |A|^p \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}).$$

Дакле, имамо да је

$$\|A\|_{\Phi^{(p)}} = \Phi^{(p)}(\{s_i(A)\}_{i=1}^{\infty}) = \sqrt[p]{\Phi\big(\{s_i^p(A)\}\big)} = \sqrt[p]{\Phi\big(\{s_i(|A|^p)\}\big)} = \sqrt[p]{\||A|^p\|_\Phi} = \||A|^p\|_\Phi^{\frac{1}{p}}$$

односно

$$\Phi^{(p)}(s_i(A)) < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(s_i(|A|^p)) < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \||A|^p\|_\Phi < +\infty.$$

Да бисмо доказалаи да је и $\Phi^{(p)}$ с.н функција, према Леми 2.9 довољно је доказати да је $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ унитарно инваријантна норма. Доказаћемо неједнакост троугла, остале особине се директно доказују. Заиста, важи

$$\begin{aligned} \|A+B\|_{\Phi^{(p)}} &= \Phi((s_i^p(A+B))) \leqslant \Phi(((s_i(A)+s_i(B))^p)) && (2.17)\\ &\leqslant \Phi((1-\alpha)^{1-p}s_i^p(A) + \alpha^{1-p}s_i^p(B)) && (2.18)\\ &\leqslant (1-\alpha)^{1-p}\Phi(s_i^p(A)) + \alpha^{1-p}\Phi(s_i^p(B)) && (2.19)\\ &= (\Phi^{(p)}(s(A)) + \Phi^{(p)}(s(B)))^p = (\|A\|_{\Phi_{(p)}} + \|B\|_{\Phi^{(p)}})^p && (2.20) \end{aligned}$$

Неједнакост у (2.17) показујемо помоћу Ky Fan-овог доминационог својства 2.11. Наиме, Лема 1.21 нам даје да важи $\sum_{i=1}^k s_i(A+B) \leqslant \sum_{i=1}^k s_i(A) + \sum_{i=1}^k s_i(B)$, за $n = 1, 2, \ldots$. Како је функција $t \mapsto t^p$ конвексна на $[0, \infty)$ за $p \geqslant 1$, према Теореми 1.23 имамо да важи $s_k^p(A+B) \prec_w (s_k(A) + s_k(B))^p$. На основу претходне релације, према Ky Fan-овом доминационом својству 2.11 добијамо да важи неједнакост (2.17). Неједнакост (2.18) следи, поново, из конвексности функције $t \mapsto t^p$ на $[0, \infty)$ за $p \geqslant 1$. Како је функција Φ с.н. функција за њу важи неједнакост троугла, одакле следи неједнакост (2.19). Коначно, једнакост у (2.20) добијамо ако за α узмемо $\alpha \overset{\text{деф}}{=} \frac{\|B\|_{\Phi^{(p)}}}{\|A\|_{\Phi^{(p)}} + \|B\|_{\Phi^{(p)}}}$. □

За с.н. функције Φ, Ψ, Ω користићемо ознаку $\Omega \preceq \Phi\Psi$, кад год оне задовољавају $\Omega(s_n t_n) \preceq \Phi(s_n)\Psi(t_n)$, за све комплексне низове $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}, \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. За операторе то ће индуковати уопштену Hölder-ову неједнакост

$$\|AB\|_{\Omega} \leqslant \|A\|_{\Phi} \|B\|_{\Psi} \qquad \text{за све } A \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H}) \text{ и } B \in \mathfrak{C}_{\Psi}(\mathcal{H}),$$

одакле такође следи да важи $AB \in \mathfrak{C}_{\Omega}(\mathcal{H})$. Наиме, због изотоности имамо да је

$$\begin{aligned}\|AB\|_{\Omega} = \Omega\big(\{s_i(AB)\}_{i=1}^{\infty}\big) &\leqslant \Omega\big(\{s_i(A)\}_{i=1}^{\infty} \{s_i(B)\}_{i=1}^{\infty}\big)\\ &\leqslant \Phi\big(\{s_i(A)\}_{i=1}^{\infty}\big)\Psi\big(\{s_i(B)\}_{i=1}^{\infty}\big) = \|A\|_{\Phi} \|B\|_{\Psi} < +\infty.\end{aligned}$$

Покажимо још и

Теорема 2.13. ***За сваку с.н. функцију Φ и свако $p, q > 0$ је испуњено***

$$\Phi^{(\frac{pq}{p+q})} \preceq \Phi^{(p)}\Phi^{(q)},$$

па у специјалном случају важи следећа Hölder-ова неједнакост

$$\|AB\|_{\Phi^{(\frac{pq}{p+q})}} \leqslant \|A\|_{\Phi^{(p)}} \|B\|_{\Phi^{(q)}} \qquad \textit{за сваки оператор } A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) \textit{ и } B \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(q)}}(\mathcal{H}).$$

$\triangle$ Како је $\frac{1}{\frac{p+q}{q}} + \frac{1}{\frac{p+q}{p}} = 1$, применом Young-ове неједнакости на пар $\{\frac{p+q}{q}, \frac{p+q}{p}\}$ за свако $u > 0$ добијамо да је

$$(s_n t_n)^{\frac{pq}{p+q}} = (u s_n)^{\frac{pq}{p+q}} \Big(\frac{t_n}{u}\Big)^{\frac{pq}{p+q}} \prec_w \frac{q u^p}{p+q} s_n^p + \frac{p}{p+q} \frac{t_n^q}{u^q}.$$

Користећи Ky Fan-ово доминационо својство 2.11 и субадитивност с.н. функције Φ добијамо да важи

$$\begin{aligned}\Phi\big((s_n t_n)^{\frac{pq}{p+q}}\big) &\leqslant \Phi\Big(\frac{q u^p}{p+q} s_n^p + \frac{p}{p+q} \frac{t_n^q}{u^q}\Big)\\ &\leqslant \frac{q u^p}{p+q} \Phi(s_n^p) + \frac{p}{(p+q) u^q} \Phi(t_n^q) = \big(\Phi^{(p)}(s_n)\Phi^{(q)}(t_n)\big)^{\frac{pq}{p+q}},\end{aligned}$$

ако за u одаберемо $u \overset{\text{деф}}{=} \sqrt[p+q]{\frac{\Phi(t_n^q)}{\Phi(s_n^p)}}$. $\square$

Глава 3

Ку-Fan-ове норме и принципи мажорације

1 Аритметичко-геометријска неједнакост

Сваки оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ може се на јединствен начин представити као $A = A_{\Re} + iA_{\Im}$, где су $A_{\Re}$ и $A_{\Im}$ самоадјунговани. Заиста, можемо узети $A_{\Re} = \frac{A+A^*}{2}$ и $A_{\Im} = \frac{A-A^*}{2i}$. Није тешко утврдити да су $A_{\Re}$ и $A_{\Im}$ самоадјунговани и да важи $A = A_{\Re} + iA_{\Im}$. Да бисмо показали јединственост, претпоставимо да је $A = A_{\Re'} + iA_{\Im'}$ за неке друге самоадјунговане операторе $A_{\Re'}$ и $A_{\Im'}$ из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Тада је $A_{\Re} - A_{\Re'} = i(A_{\Im'} - A_{\Im})$, па како су $A_{\Re} - A_{\Re'}$ и $A_{\Im'} - A_{\Im}$ самодјунговани, то је довољно показати да не постоје самодјунговани оператори $B, C \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, осим нула оператора, такви да је $B = iC$. Да је тако, налазимо из $-iC = (iC)^* = B^* = B = iC$, јер би C тада, а тиме и B, морало бити нула оператор.

Лема 3.1. ***Нека је A компактан оператор. Тада важи***

$$\sum_{i=1}^{k} |\Re\lambda_i(A)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(A_{\Re}), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.1}$$

△ Применимо Schur-ову лему 1.15 на компактан оператор A. Тада добијамо ортонормиран систем $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\nu(A)}$ потпростора E_A такав да је

$$A\varphi_i = a_{1i}\varphi_1 + a_{2i}\varphi_2 + \ldots + a_{ii}\varphi_i \quad (i = 1, 2, \ldots \nu(A)).$$

Како је

$$\lambda_i(A) = a_{ii} = \langle A\varphi_i, \varphi_i\rangle = \langle A_{\Re}\varphi_i, \varphi_i\rangle + i\,\langle A_{\Im}\varphi_i, \varphi_i\rangle\,,$$

то следи $\Re\lambda_j(A) = \langle A_{\Re}\varphi_i, \varphi_i\rangle$. Тада нам Ку Fan-ов принцип 1.20 даје

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle A_{\Re}\varphi_i, \varphi_i\rangle| = \sum_{i=1}^{k} |\Re\lambda_i| \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(A_{\Re}),$$

што је и требало показати. □

Видимо и да малим изменема доказа претходне леме показујемо да важи

Лема 3.2. ***Нека је A компактан оператор. Тада важи***

$$\sum_{i=1}^{k} |\Im\lambda_i(A)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_i(A_{\Im}), \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Приметимо да је десна страна у (3.1) заправо $\|A_{\Re}\|_{(k)} = \frac{1}{2}\|A + A^*\|_{(k)}$. Нека је $\Phi_{(k)}$ симетрично нормирајућа функција која индукује Ky-Fan-ову норму, тј. $\|\cdot\|_{(k)} = \|\cdot\|_{\Phi_{(k)}}$. Тада се лева страна (3.1) може записати као $\Phi_{(k)}(|\Re\lambda(A)|)$, односно важи

$$\Phi_{(k)}(|\Re\lambda(A)|) \leqslant \frac{1}{2}\|A + A^*\|_{(k)} . \tag{3.2}$$

Последица 3.3. ***Нека су $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $X \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$ самоадјунговани оператори. Тада важи***

$$|||AXA||| \leqslant \tfrac{1}{2}|||A^2X + XA^2|||$$

за сваку унитарно инваријантну норму $|||\cdot|||$.

$\triangle$ Неједнакост (3.2) нам даје

$$\Phi_{(k)}\left(|\Re\lambda_i(A^2X)|\right) \leqslant \tfrac{1}{2}\|A^2X + XA^2\|_{(k)}.$$

Приметимо да је $\lambda_i(A^2X) = \lambda_i(AXA) \in \mathbb{R}$ с обзиром да је AXA самоадјунговани оператор. Зато је

$$\Phi\left(|\Re\lambda_i(A^2X)|\right) = \Phi(|\lambda_i(AXA)|) = \Phi(s_i(AXA)) = \|AXA\|_{(k)} ,$$

одакле следи тврђење на основу Ky-Fan-овог доминационог својства 2.11. $\square$

Одатле изводимо и такозвану аритметичко-геометријску неједнакост за операторе

Теорема 3.4. [аритметичко-геометријска неједнакост] ***Ако су $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ самоадјунговани и $X \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$, тада важи***

$$|||AXB||| \leqslant \tfrac{1}{2}|||A^*AX + XBB^*|||$$

за сваку унитарно инваријантну норму $|||\cdot|||$.

$\triangle$ Размотримо прво ситуацију када су A и B самоадјунговани оператори из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, а $X \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$. Нека су $T, Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ дати са

$$T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad Y \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Како су T и Y самоадјунговани оператори то можемо применити претходну Последицу 3.3 на њих и тиме добијамо да важи

$$|||TYT||| \leqslant \frac{1}{2}|||T^2Y + YT^2|||. \tag{3.3}$$

Множењем датих оператора добијамо да је

$$TYY = \begin{bmatrix} 0 & AXB \\ BX^*A & 0 \end{bmatrix},$$

$$T^2Y + YT^2 = \begin{bmatrix} 0 & A^2X + XB^2 \\ B^2X^* + X^*A^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Зато, из (3.3) добијамо да важи неједнакост

$$\left|\!\left|\!\left| \begin{bmatrix} 0 & AXB \\ BX^*A & 0 \end{bmatrix} \right|\!\right|\!\right| \leqslant \left|\!\left|\!\left| \begin{bmatrix} 0 & A^2X + XB^2 \\ B^2X^* + X^*A^2 & 0 \end{bmatrix} \right|\!\right|\!\right|. \tag{3.4}$$

Приметимо да за произвољан компактан оператор C важи

$$s\left(\begin{bmatrix} 0 & C \\ C^* & 0 \end{bmatrix}\right) = (s_1(C), s_1(C), s_2(C), s_2(C), \ldots),$$

где смо са $s(\cdot)$ означили низ сопствених вредности уређен по опадању вредности. Тада нам Ky-Fan-ово доминационо својство 2.11 даје да неједнакост (3.4) важи за све унитарно инваријантне норме ако и само ако важи

$$|||AXB||| \leqslant \tfrac{1}{2}|||A^2X + XB^2|||$$

за све унитарно инваријантне норме.

Сад, пређимо на општи случај. Нека су $A = V|A|$ и $B = |B^*|W$ поларне репрезентације оператора A и B (видети Теорему 1.4). Тада имамо

$$A^*AX + XBB^* = |A|^2X + X|B^*|^2,$$

док је

$$|||AXB||| = |||V|A|X|B^*|W||| = ||||A|X|B^*||||,$$

па теорема следи према претходном делу доказаном за самоадјунговане операторе. □

НАПОМЕНА. Претходна теорема се може директно добити и применом Последице 3.3 на

$$T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & A^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^* & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} 0 & X & 0 & 0 \\ X^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

за произвољне $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $X \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$.

2 Cauchy-Schwarz-ова неједнакост за елементарне операторе

Као што смо навели предговору, под елементарним операторима ћемо сматрати пресликавања $\Lambda\colon \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ дефинисана са $\Lambda(X) \overset{\text{деф}}{=} \sum_{j=1}^{n} A_jXB_j$, где су A_j и B_j фиксирани оператори и $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. У овом делу ћемо дати доказ Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за елемнтарне операторе. Пре тога, наведимо још неке дефиниције које ће нам бити потребне у даљем раду. Наиме, у класу самоадјунгованих оператора уводи се (делимично) уређење $\leqslant$ на следећи начин.

ДЕФИНИЦИЈА **3.1.** *За самоадјунговане операторе A и B ћемо рећи да важи $A \leqslant B$ ако и само ако је $\langle Af, f\rangle \leqslant \langle Bf, f\rangle$ за свако $f \in \mathcal{H}$.*

Овакав поредак (будући у суштини поредак међу одговарајућим формама) располаже следећим особинама:

1° ако је $A \leqslant B$ и $B \leqslant C$, онда је и $A \leqslant C$;

2° ако је $A \leqslant B$ и $C \leqslant D$, онда је и $A + C \leqslant B + D$;

3° ако је $A \leqslant B$ онда је $\alpha A \leqslant \alpha B$ за свако $\alpha \geqslant 0$;

4° ако је $A \leqslant B$ онда је $C^*AC \leqslant C^*BC$ за свако $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;

5° ако је $A > 0$ инвертибилан, онда је и $A^{-1} > 0$.

Сад смо у стању да представимо следећи резултат из [J99].

Теорема 3.5. ***Ако је** $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* C_n \leqslant I$, $\sum_{n=1}^{\infty} C_n C_n^* \leqslant I$, $\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* D_n \leqslant I$, $\sum_{n=1}^{\infty} D_n D_n^* \leqslant I$, **за неке фамилије ограничених оператора** $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ **и** $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, **тада** $\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y D_n \in \mathcal{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$ **кад год** $Y \in \mathcal{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$ **за неку унитарно инваријантну норму** $|||\cdot|||$, **и више, важи***

$$\Big|\Big|\Big|\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y D_n\Big|\Big|\Big| \leqslant |||Y|||\,. \tag{3.5}$$

△ За произвољне f и g из $\mathcal{H}$ Cauchy-Schwarz-ова неједнакост у $\mathcal{H}$, а потом и у $\ell^2(\mathbb{N})$ нам даје

$$\begin{aligned}
\Big|\Big\langle\Big(\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y D_n\Big) f, g\Big\rangle\Big| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|Y\|\,\|D_n f\|\,\|C_n^* g\| \\
&\leqslant \|Y\| \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|D_n f\|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|C_n^* g\|^2\Big)^{1/2} \\
&= \|Y\| \Big\langle\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* D_n f, f\Big\rangle^{1/2} \Big\langle\sum_{n=1}^{\infty} C_n C_n^* g, g\Big\rangle^{1/2} \\
&= \|Y\| \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{\infty} C_n C_n^*\Big)^{1/2} g\Big\| \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{\infty} D_n^* D_n\Big)^{1/2} f\Big\| \leqslant \|Y\|\,\|f\|\,\|g\|\,,
\end{aligned}$$

одакле налазимо да је

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y D_n\Big\| \leqslant \|Y\|\,. \tag{3.6}$$

Како су дуал од нуклеарних оператора ограничени оператори, то нека $l^\star$ представља функционал на $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ који одговара неком оператору $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, при чему је $\|l^\star\|_{(\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))^\star} = \|W\|$, тј. $l^\star(X) = \operatorname{tr}(WX)$ за свако $X \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Тада према претходном за свако $N = 1, 2, \ldots$ и $Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ имамо

$$\begin{aligned}
\Big|l^\star\Big(\sum_{n=1}^{N} C_n Y D_n\Big)\Big| &= \Big|\operatorname{tr}\Big(W \sum_{n=1}^{N} C_n Y D_n\Big)\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{N} \operatorname{tr}(W C_n Y D_n)\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{N} \operatorname{tr}(D_n W C_n Y)\Big| \\
&= \Big|\operatorname{tr}\Big(\Big(\sum_{n=1}^{N} D_n W C_n\Big) Y\Big)\Big| \leqslant \|Y\|_1 \Big\|\sum_{n=1}^{N} C_n W D_n\Big\| \leqslant \|Y\|_1\,\|W\| = \|Y\|_1\,\|l^\star\|_{(\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))^\star}\,,
\end{aligned}$$

што после узимања супремума по свим функционалима из $(\mathfrak{C}_1(\mathcal{H}))^\star$ чија је норма мања или једнака од један нам даје

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} C_n Y D_n\Big\|_1 \leqslant \|Y\|_1 . \tag{3.7}$$

Ако $Y \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$, нека је са $Y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(Y)\,\langle\cdot, f_n\rangle\, e_n$ дат Schmidt-ов сингуларни развој за неке ортонормиране системе $\{e_n\}$ и $\{f_n\}$. За све $k \geqslant 2$ дефинишемо операторе Z и V са $Z \overset{\text{деф}}{=} \sum_{i=1}^{k-1}(s_i(Y) - s_{i+1}(Y))\sum_{j=1}^{i}\langle\cdot, f_j\rangle\, e_j$ и $V \overset{\text{деф}}{=} s_k(Y)\sum_{i=1}^{k}\langle\cdot, f_i\rangle\, e_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} s_i(Y)\,\langle\cdot, f_i\rangle\, e_i$. Видимо да је

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{i}(s_i(Y) - s_{i+1}(Y))\,\langle\cdot, f_j\rangle\, e_j = \sum_{j=1}^{k-1}\Big(\sum_{i=j}^{k-1}(s_i(Y) - s_{i+1}(Y))\Big)\,\langle\cdot, f_j\rangle\, e_j \\ &= \sum_{j=1}^{k}(s_j(Y) - s_k(Y))\,\langle\cdot, f_j\rangle\, e_j = \sum_{i=1}^{k} s_i(Y)\,\langle\cdot, f_i\rangle\, e_i - s_k(Y)\sum_{i=1}^{k}\langle\cdot, f_i\rangle\, e_i = Y - V. \end{aligned}$$

Такође примећујемо да је $s_1(V) = \ldots = s_k(V) = s_k(Y)$, због ортогоналности система $\{e_n\}$ и $\{f_n\}$. То нам дозвољава да за све Ky-Fan k-норме видимо да важи

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{n=1}^{N} C_n Y D_n\Big\|_{(k)} &\leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{N} C_n Z D_n\Big\|_{(k)} + \Big\|\sum_{n=1}^{N} C_n V D_n\Big\|_{(k)} \\ &\leqslant \|Z\|_1 + k\Big\|\sum_{n=1}^{N} C_n V D_n\Big\|_\infty \qquad (3.8) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{k-1}(s_n(Y) - s_{n+1}(Y))\sum_{j=1}^{n}\|\langle\cdot, f_j\rangle\, e_j\|_1 + k\,\|V\|_\infty \qquad (3.9) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{k-1} n(s_n(Y) - s_{n+1}(Y)) + k s_k(Y) = \sum_{n=1}^{k} s_n(Y) = \|Y\|_{(k)}\,, \qquad (3.10) \end{aligned}$$

где (3.8) следи из (3.7), а (3.9) из (3.6).

Штавише, ако Y припада $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$, тада и $\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y D_n \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. Заиста, елементарни оператори $R_N(Y) \overset{\text{деф}}{=} \sum_{n=1}^{N} C_n Y D_n$ који делују на $\mathfrak{C}_\infty^{(k)}(\mathcal{H})$ (идеалу придруженом Ky Fan-овој k норми, који се јасно састоји од компактних оператора), представљају ограничену фамилију, јер према (3.10) важи $\|R_N(Y)\|_{(k)} \leqslant \|Y\|_{(k)}$ за све $Y \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. Такође, за све једнодимензионе операторе $f \otimes g^\star$ и $M > N$ имамо

$$\begin{aligned} \|R_M(f\otimes g^\star) - R_N(f\otimes g^\star)\|_{(k)} &\leqslant \Big\|\sum_{n=N+1}^{M} D_n^* g \otimes C_n f\Big\|_1 \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{M}\|D_n^* g\|\,\|C_n f\| \leqslant \Big\|\Big(\sum_{n=N+1}^{M} C_n C_n^*\Big)^{1/2} f\Big\|\Big\|\Big(\sum_{n=N+1}^{M} D_n^* D_n\Big)^{1/2} g\Big\|, \end{aligned}$$

што $\longrightarrow 0$ кад $M, N \to \infty$. Према томе, $R_N(Y)$ конвергира у $\mathfrak{C}_\infty^{(k)}(\mathcal{H})$ за све коначно димензионалне Y ка **компактном** оператору. Према принципу униформне ограничености исто важи и за све $\mathfrak{C}_\infty^{(k)}(\mathcal{H})$, због сепарабилности датог простора (јер су коначно димензионални оператори свуда густи у $\mathcal{C}_\infty^{(k)}(\mathcal{H})$). Дакле (3.5) важи за све Ky-Fan k-норме и према Ky-Fan-овом доминационом својству 2.11 закључујемо да (3.5) важи за све унитарно инваријатне норме, као што је и тражено. $\square$

Од значаја ће нам бити и следећа

Теорема 3.6. ***Нека је $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ низ самоадјунгованих оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ који јако конвергира ка неком оператору $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ако је $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ сепарабилан симетрично нормирајући идеал и $A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ тада низови $\{X_nA\}_{n=1}^\infty$, $\{AX_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{X_nAX_n\}_{n=1}^\infty$ конвергирају у норми идеала $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ка, редом, операторима XA, AX и XAX.***

Доказ се може наћи у [GK], Теорема III.6.3. Идеја доказа је да се прво покаже тврђење за коначно димензионалне операторе A, а да се у општем случају оператор A представи као сума коначно димензионалних оператора и оператора који има довољно малу $\|\cdot\|_\Phi$ норму.

У наставку рећи ћемо да је фамилија $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ квадратно сумабилна ако је $\sum_{n=1}^\infty \|A_nf\|^2 < +\infty$ за све $f \in \mathcal{H}$. Иако ово заправо представља само слабу конвергенцију $\sum_{n=1}^\infty A_n^*A_n$, помоћу принципа резонанције се показује да $\sum_{n=1}^\infty A_n^*A_n$ заправо дефинише **ограничен** оператор на Hilbert-овом простору, који због монотоности својих парцијалних сума конвергира заправо јако. За такве фамилије ограничених оператора следећа Cauchy-Schwartz-ова неједнакост важи, такође из [J99].

Теорема 3.7. ***За квадратно сумабилне фамилије $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ нормалних комутирајућих оператора важи***

$$\Big|\Big|\Big|\sum_{n=1}^\infty A_nXB_n\Big|\Big|\Big| \leqslant \Big|\Big|\Big|\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n^*A_n\Big)^{1/2} X \Big(\sum_{n=1}^\infty B_n^*B_n\Big)^{1/2}\Big|\Big|\Big|, \tag{3.11}$$

за све $X \in \mathcal{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$ и све унитарно инваријантне норме $|||\cdot|||$. Ако је $\mathcal{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$ сепарабилан и $X \in \mathcal{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$, тада сума на левој страни конвергира у норми овог идеала.

$\triangle$ Прво, потребна нам је одговарајућа факторизација за операторе A_n и B_n. Нека је $A \overset{\text{деф}}{=} \big(\sum_{n=1}^\infty A_n^*A_n\big)^{1/2}$ и $B \overset{\text{деф}}{=} \big(\sum_{n=1}^\infty B_n^*B_n\big)^{1/2}$ и нека су P и Q респективно ортогонални пројектори на $\overline{\mathcal{R}(A)}$ и $\overline{\mathcal{R}(B)}$. Приметимо и да за произвољно $f \in \mathcal{H}$ важи $\|A_nf\| \leqslant \|Af\|$, $n = 1, 2, \ldots$, с обзиром да је $\|Af\|^2 = \langle Af, Af\rangle = \langle \sum_{n=1}^\infty A_n^*A_nf, f\rangle = \sum_{n=1}^\infty \|A_nf\|^2$. Даље, ако за дато $f \in \mathcal{H}$ имамо $Pf = \lim_{k\to\infty} Ag_k$ за неки низ $\{g_k\}$ у $\mathcal{H}$, онда $\lim_{k\to\infty} A_ng_k$ постоји за све $n \geqslant 1$ и не зависи од избора овог низа. Заиста, имамо

$$\|A_ng_k - A_ng_l\| \leqslant \|Ag_k - Ag_l)\| \to \|Pf - Pf\| = 0$$

кад $k, l \to \infty$, и такође $\|A_ng_k - A_nh_k\| \leqslant \|A(g_k - h_k)\| \to 0$ кад $k \to \infty$ увек при $\lim_{k\to\infty} Ah_k = Pf$ за неки други низ $\{h_k\}$. Зато је добро дефинисан оператор $C_n, n = 1, 2, \ldots$, са $C_nf \overset{\text{деф}}{=} \lim_{k\to\infty} A_ng_k$ где је $\{g_k\}$ било који низ у $\mathcal{H}$, такав да је $\lim_{k\to\infty} Ag_k = Pf$. Приметимо да према нашој дефиницији сваки C_n једнак нули на $\mathcal{N}(A)$, односно, $C_n = C_nP$, као и да важи $C_nA = AC_n = A_n$. Заиста, ако $f \in \mathcal{N}(A)$ тада и $f \in \mathcal{N}(A_n)$ (јер је $\|A_nf\| \leqslant \|Af\|$ за свако $n = 1, 2, \ldots$), те је $C_nAf = 0$ и $A_nf = 0$, односно $C_nAf = A_nf$. Ако пак $f \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ то онда искористимо да $Af \in \mathcal{R}(A)$, те можемо узети да је низ $\{g_k\}$ константан, тј. $g_k = f$ за $k = 1, 2, \ldots$. Тада је према дефиницији оператора C_n испуњено $C_nAf = \lim_{k\to\infty} A_n g_k = A_n f$. Слично се показује и преостала једнакост. Штавише, важи $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^*C_n = P$. Заиста, $A^2 = A\Big(\sum_{n=1}^{\infty} C_n^*C_n\Big)A$ и примена поларизационог идентита нам даје $\big\langle\sum_{n=1}^{\infty} C_n^*C_n h, k\big\rangle = \langle h,k\rangle$ за све $h,k \in \mathcal{R}(A)$. Према непрекидности закључујемо да је $\big\langle\sum_{n=1}^{\infty} C_n^*C_n h, k\big\rangle = \langle h,k\rangle$ за све $h,k \in \overline{\mathcal{R}(A)}(=\overline{\mathcal{R}(A^2)})$. Како је сваки C_n једнак нули на $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(A^2)$, што је последица дефиниције оператора C_n, то закључујемо да важи $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^*C_n = P$. За све $m,n = 1,2,\dots$, C_m^* и C_n комутирају на $\mathcal{R}(A^2)$ и $\mathcal{N}(A^2)$, па према томе и на целом $\mathcal{H}$. Зато је $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ комутирајућа фамилија нормалних контракција која даје факторизацију $C_nA = AC_n = A_n$ где је $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^*C_n = P$ и која комутира са фамилијом $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Слично добијамо да комутирајућа фамилија $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ нормалних контракција такође комутира са $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ и задовољава $D_nB = BD_n = B_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} D_n^*D_n = Q$.

За $Y = AXB \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$ (нема ништа да се показује ако $Y \notin \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$), Теорема 3.5 нам даје

$$\left|\!\left|\!\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_nXB_n\right|\!\right|\!\right| = \left|\!\left|\!\left|\sum_{n=1}^{\infty} C_nYD_n\right|\!\right|\!\right| \leqslant |||Y||| = \left|\!\left|\!\left|\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^*A_n\Big)^{1/2} X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^*B_n\Big)^{1/2}\right|\!\right|\!\right|, \tag{3.12}$$

што доказује први део теореме.

Коначно, ако је $\mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$ сепарабилан, тада за све $N = 1,2,\dots$, из управо доказаног дела теореме комбинованог са аритметичко-геометријском неједнакошћу 3.4 нам даје

$$\begin{aligned}\left|\!\left|\!\left|\sum_{n=N}^{\infty} A_nXB_n\right|\!\right|\!\right| &\leqslant \left|\!\left|\!\left|\Big(\sum_{n=N}^{\infty} A_n^*A_n\Big)^{1/2} X \Big(\sum_{n=N}^{\infty} B_n^*B_n\Big)^{1/2}\right|\!\right|\!\right| \\ &= \left|\!\left|\!\left|\Big(\sum_{n=N}^{\infty} C_n^*C_n\Big)^{1/2} AXB \Big(\sum_{n=N}^{\infty} D_n^*D_n\Big)^{1/2}\right|\!\right|\!\right| \\ &\leqslant \left|\!\left|\!\left|\Big(\sum_{n=N}^{\infty} C_n^*C_n\Big) AXB + AXB\Big(\sum_{n=N}^{\infty} D_n^*D_n\Big)\right|\!\right|\!\right|. \end{aligned}\tag{3.13}$$

Видимо да према (3.12) $\big\{\sum_{n=N}^{\infty} C_n^*C_n\big\}_{N=1}^{\infty}$ и $\big\{\sum_{n=N}^{\infty} D_n^*D_n\big\}_{N=1}^{\infty}$ представљају ограничене низове самоадјунгованих оператора који јако конвергирају ка 0 кад $N\to\infty$. Како $AXB \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$, који је сепарабилан простор, то (3.13) тежи ка 0 како $N\to\infty$ према Теореми 3.6. Одатле закључак следи. ☐

Из претходне теореме директно следи

Последица 3.8. [пинчинг] ***Ако је $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ фамилија међусобно ортогоналних ортопројектора ($P_iP_j = 0$ за $i \neq j$) таква да је $\sum_{n=1}^{\infty} P_n \leqslant I$, тада за свако $X \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathcal{H})$ важи***

$$\left|\!\left|\!\left|\sum_{n=1}^{\infty} P_nXP_n\right|\!\right|\!\right| \leqslant |||X|||\,.$$

Дакле, Теорема 3.7 продужује Теореме II.5.1 из [GK] и 1.19 из [Si]. Напоменимо и то да је $\sum_{n=1}^{\infty} P_nXP_n$ такозвани пинчинг оператора X. Наиме, у случају када је X матрица тада пинчинг представља узимање главне дијагонале од X.

За $A,B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ са $A\oplus B$ означаваћемо блок матрицу $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}$ из $\mathfrak{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$. На сличан начин дефинишемо $A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_n$ за $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Нека су $A,B \geqslant 0$

компактни оператори и нека је $X \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} A^{1/2} & B^{1/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тада је

$$X^*X = \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad XX^* = \begin{bmatrix} A & A^{1/2}B^{1/2} \\ B^{1/2}A^{1/2} & B \end{bmatrix}.$$

Уколико дефинишемо $P_1 \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $P_2 \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, то приметимо да је $A \oplus B = P_1XX^*P_1 + P_2XX^*P_2$, односно да $A \oplus B$ представља пинчинг матрице XX^*. Тада нам претходна последица даје

$$|||A \oplus B||| \leqslant |||XX^*||| = |||X^*X||| = |||(A+B) \oplus 0||| = |||A+B||| ,$$

где последња једнакост следи из тога што су сингуларне вредности од $(A+B) \oplus 0$ и $A+B$ исте. Тиме смо добили неједнакост $|||A \oplus B||| \leqslant |||A+B|||$.

Сличан поступак можемо поновити и за n оператора. Наиме, ако су $A_1, \ldots, A_n \geqslant 0$ компактни оператори, тада уколико дефинишемо

$$X \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} A_1^{1/2} & A_2^{1/2} & \cdots & A_n^{1/2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

добијамо $|||A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n||| \leqslant |||A_1 + A_2 + \ldots + A_n|||$.

Уколико је $|||\cdot|||$ Schatten-ова p норма за $1 \leqslant p < +\infty$, то се претходна неједнакост своди на

$$\sum_{i=1}^{n} \|A_i\|_p^p \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} A_i \right\|_p^p,$$

за позитивне компактне операторе $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

3 Деривационе неједнакости

Као што смо видели пре, спектрална теорема за компактне самоадјунговане операторе 1.2 нам је омогућила Schmidt-ов развој за компактних оператора, који смо користили као један од основних алата у раду са компактним операторима. Иако ћемо ми у овој глави радити првенствено са компактним операторима (премда се резултати могу уопштити и на ограничене операторе, што нећемо овде радити), од значаја ће нам бити одговарајући спектрални развој нормалних оператора (а тиме ће важити и за самоадјунговане операторе).

Теорема 3.9. **[спектрална теорема за нормалне операторе]** *За сваки нормални оператор постоји јединствена спектрална мера E на Borel-овим подскуповима од $\sigma(A)$, таква да је*

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda \, dE(\lambda).$$

Доказ претходне теореме се може наћи у [АДЈ, Теорема 13.11]. Посебан значај претходне теореме видећемо у наредној глави, јер ћемо уз помоћ ње дефинисати функционални рачун за нормалне операторе, што ће нам бити од вишеструке користи.

Функцију f која задовољава $f(a+b-t) = f(t)$ за све $t \in [a,b]$ зваћемо симетричном функцијом на $[a,b]$. Напоменимо и то да су преостала тврдњења из ове главе из [J97]. Следећа лема генерализује познату Heinz-ову неједнакост из [He].

Лема 3.10. ***За самоадјунговане*** A ***и*** B ***из*** $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ***и произвољно*** $X \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$***, за све реалне*** $p \geqslant 1$ ***и све унитарно инваријантне норме*** $|||\cdot|||$***, функција***

$$f(s) = \left|\left|\left| |A|^{s-1} AX |B|^{p-s} + |A|^{p-s} XB |B|^{s-1} \right|\right|\right|$$

је конвексна и симетрична на $[0,p]$***, нерастућа на*** $[0,p/2]$ ***и неопадајућа на*** $[p/2,p]$.

△ Да бисмо показали да је f симетрична искористимо поларну репрезентацију за A и B као $A = U|A|$ и $B = V|B|$, где U и V унитарни оператори који комутирају са A и B редом и задовољавају релацију $U^2 = V^2 = I$ (видети Теорему 1.4). Зато је

$$\begin{aligned} f(p-s) &= \left|\left|\left| |A|^{p-s} UX |B|^{s} + |A|^{s} XV |B|^{p-s} \right|\right|\right| \\ &= \left|\left|\left| U \left(|A|^{s} UX |B|^{p-s} + |A|^{p-s} XV |B|^{s} \right) V \right|\right|\right| = f(s). \end{aligned} \tag{3.14}$$

с обзиром даје $|||\cdot|||$ унитарно инваријантна норма. Даље, показаћемо да је

$$f\left(\frac{s+t}{2}\right) \leqslant \frac{f(s)+f(t)}{2} \tag{3.15}$$

за све $1 \leqslant s < t \leqslant p$. Заиста, како је

$$f\left(\frac{s+t}{2}\right) = \left|\left|\left| |A|^{\frac{t-s}{2}} \left(|A|^{s-1} AX |B|^{p-t} + |A|^{p-t} XB |B|^{s-1} \right) |B|^{\frac{t-s}{2}} \right|\right|\right|,$$

то према Теореми 3.4 и (3.14) имамо

$$\begin{aligned} 2f\left(\frac{s+t}{2}\right) &\leqslant \left|\left|\left| |A|^{t-s} \left(|A|^{s-1} AX |B|^{p-t} + |A|^{p-t} XB |B|^{s-1} \right) \right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left. + \left(|A|^{s-1} AX |B|^{p-t} + |A|^{p-t} XB |B|^{s-1} \right) |B|^{t-s} \right|\right|\right| \\ &\leqslant \left|\left|\left| |A|^{p-s} XB |B|^{s-1} + |A|^{s-1} AX |B|^{p-s} \right|\right|\right| \\ &\qquad + \left|\left|\left| |A|^{t-1} AX |B|^{p-t} + |A|^{p-t} XB |B|^{t-1} \right|\right|\right| = f(s) + f(t). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Директна последица (3.15) је

$$f(\alpha s + (1-\alpha)t) \leqslant \alpha f(s) + (1-\alpha) f(t) \tag{3.17}$$

за све рационалне $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. За произвољно $\alpha \in [0,1]$, изаберимо низ рационалних бројева $\alpha_n \in [0,1]$ таквих да $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Како је оператор вредносна функција

$$g(s) = |A|^{s-1} AX |B|^{p-s} + |A|^{p-s} XB |B|^{s-1}$$

јако (што се може доказати на пример уз помоћ спектралне теореме 3.9 и теореме о доминантној конвергенцији), а тиме и слабо непрекидна, добијамо

$$\begin{aligned} f(\alpha s + (1-\alpha)t) &= \left|\left|\left| \mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} g(\alpha_n s + (1-\alpha_n)t) \right|\right|\right| \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \left|\left|\left| g(\alpha_n s + (1-\alpha_n)t) \right|\right|\right| = \liminf_{n\to\infty} f(\alpha_n s + (1-\alpha_n)t) \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} (\alpha_n f(s) + (1-\alpha_n) f(t)) = \alpha f(s) + (1-\alpha) f(t), \end{aligned} \tag{3.18}$$

јер $\|Y\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|Y_n\|$ кад год $Y_n \to Y$ слабо у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ово је последица добро познате чињенице

$$\|Y\|_\Phi = \sup\{|\mathrm{tr}(YZ)| : Z \text{ је коначног ранга и } \|Z\|_{\Phi^*} \leqslant 1\}$$

за све с.н. функције Φ и Φ^*, где смо са Φ^* означили конјуговану с.н. функцију функције Φ (видети Теорему 2.7 у [Si]). Дакле (3.17) важи за све $s, t \in [0, p]$ и за све $\alpha \in [0, 1]$.

Према (3.14) и (3.18) f је конвексна и симетрична на $[0, p]$, и према томе нерастућа на $[0, p/2]$ јер је

$$\begin{aligned} f(t) &= f\left(\frac{p-s-t}{p-2s}s + \frac{t-s}{p-2s}(p-s)\right) \leqslant \frac{p-s-t}{p-2s}f(s) + \frac{t-s}{p-2s}f(p-s) \\ &= \frac{p-s-t}{p-2s}f(s) + \frac{t-s}{p-2s}f(s) = f(s), \end{aligned}$$

за све $0 \leqslant s < t \leqslant p/2$. Слично добијамо $f(t) \geqslant f(s)$ за све $p/2 \leqslant s < t \leqslant p$, што нам даје крај доказа. □

Следећа теорема представља уопштење Теореме 1.1 из [JK].

ТЕОРЕМА 3.11. ***Ако су** A **и** B **самоадјунговани оператори из** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ **и** $X \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$**, тада је***

$$|||\,|AX + XB|^p\,||| \leqslant 2^{p-1}\|X\|^{p-1}\,|||\,|A|^{p-1}AX + XB\,|B|^{p-1}\,|||$$

за све реалне** $p \geqslant 3$ **и за све унитарно инваријантне норме** $|||\cdot|||$**.

△ Прво, посматрајмо специјална случај: $A = B, X = X^*$ и $|||\cdot||| = \|\cdot\|_{(k)}$. Можемо без губљења на општости додатно претпоставити $\|X\| \leqslant 1$. Лема 3.10 (за $f(p) \geqslant f(1)$) нам даје

$$\begin{aligned} &2^{p-1}\big\||A|^{p-1}AX + XA\,|A|^{p-1}\big\|_{(k)} \geqslant \\ &2^{p-2}\big\||A|^{p-1}AX + XA\,|A|^{p-1}\big\|_{(k)} + 2^{p-2}\big\|AX\,|A|^{p-1} + |A|^{p-1}XA\big\|_{(k)}, \end{aligned}$$

и зато је

$$2^{p-1}\big\||A|^{p-1}AX + XA\,|A|^{p-1}\big\|_{(k)} \geqslant 2^{p-2}\big\||A|^{p-1}(AX+XA) + (AX+XA)|A|^{p-1}\big\|_{(k)}. \tag{3.19}$$

За компактан самоадјунгован оператор A' нам спектрална Теорема 1.2 обезбеђује постојање ортонормиране базе простора $\mathcal{H}$ која је састављена од сопствених вектора оператора A', тачније, постоји ортнормирана база $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ таква да је

$$A'e_n = \lambda_n(A')e_n, \tag{3.20}$$

где су $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ сопствене вредности оператора A'.

Специјално, за $A' \overset{\text{деф}}{=} AX + XA$ из Ky Fan-овог принципа 1.20, (3.19) и (3.20) следи

$$\begin{aligned} &2^{p-1}\big\||A|^{p-1}AX + XA\,|A|^{p-1}\big\|_{(k)} \\ &\qquad \geqslant 2^{p-2}\sum_{i=1}^{k}\big|\big\langle\big(|A|^{p-1}(AX+XA) + (AX+XA)\,|A|^{p-1}\big)e_i, e_i\big\rangle\big| \\ &\qquad = 2^{p-1}\sum_{i=1}^{k}\big|\Re\langle(AX+XA)e_i, |A|^{p-1}e_i\rangle\big| = 2^{p-1}\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i(A')|\big\langle|A|^{p-1}e_i, e_i\big\rangle. \end{aligned}$$

Спектрална репрезентација 3.9 и Jensen-ова неједнакост дају

$$\begin{aligned}\langle |A|^{p-1}e_i, e_i\rangle &= \int_0^{+\infty} t^{p-1} d\mu_{e_i}(t) \geqslant \left(\int_0^{+\infty} t^2 d\mu_{e_i}(t)\right)^{\frac{p-1}{2}} = \langle |A|^2 e_i, e_i\rangle^{\frac{p-1}{2}} \\ &= \|Ae_i\|^{p-1} \geqslant \|XAe_i\|^{p-1} \geqslant |\Re\langle XAe_i, e_i\rangle|^{p-1} \\ &= 2^{1-p}|\langle (AX+XA)e_i, e_i\rangle|^{p-1} = 2^{1-p}|\lambda_i(A')|^{p-1}\end{aligned}$$

за $1 \leqslant i \leqslant k$, па је према томе

$$2^{p-1}\big\| |A|^{p-1}AX + XA|A|^{p-1}\big\|_{(k)} \geqslant \sum_{i=1}^k |\lambda_i(A')|^p = \big\| |AX+XA|^p \big\|_{(k)}. \tag{3.21}$$

Пошто смо доказали теорему за специјалан случај, нека су сада A и B произвољни самоадјунговани оператори из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и посматрајмо следеће 2×2 самоадјунговане операторне матрице

$$C \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Y \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} 0 & X \\ X^* & 0\end{bmatrix}$$

које делују на $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Праволинијски рачун даје

$$|C|^{p-1}CY + YC|C|^{p-1} = \begin{bmatrix} 0 & |A|^{p-1}AX + XB|B|^{p-1} \\ \big(|A|^{p-1}AX + XB|B|^{p-1}\big)^* & 0\end{bmatrix}$$

и

$$|CY+YC|^p = \begin{bmatrix} |(AX+XB)^*|^p & 0 \\ 0 & |(AX+XB)|^p\end{bmatrix}.$$

С обзиром да је

$$s_{2i-1}(CY+YC) = s_{2i}(CY+YC) = s_i(AX+XB),$$

као и

$$\begin{aligned} s_{2i-1}\big(|C|^{p-1}CY + YC|C|^{p-1}\big) &= s_{2i}\big(|C|^{p-1}CY + YC|C|^{p-1}\big) \\ &= s_i\big(|A|^{p-1}AX + XB|B|^{p-1}\big),\end{aligned}$$

то примењујући (3.21) на самоадјунговане C и Y добијамо

$$\begin{aligned} 2^{p-1}\big\| |A|^{p-1}AX + XA|A|^{p-1}\big\|_{(k)} &= 2^{p-2}\sum_{j=1}^{2k} s_j\big(|C|^{p-1}CY + YC|C|^{p-1}\big) \\ \geqslant 2^{-1}\sum_{j=1}^{2k} s_j^p(CY+YC) &= \sum_{i=1}^k s_i^p(AX+XB) = \big\| |AX+XB|^p\big\|_{(k)}.\end{aligned}$$

Сада, према Ky-Fan-овом доминационом својству 2.11 закључујемо да неједнакост важи и за све унитарно инваријантне норме $|||\cdot|||$. □

Претходна теорема може се реформулисати као

Теорема 3.12. ***Ако су** A **и** B **самоадјунговани оператори из** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ **и** $X\in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$**, тада за све реалне** $0\leqslant \alpha \leqslant 1/3$ **важи***

$$\left|\!\left|\!\left| \left| A\,|A|^{\alpha-1}X + XB\,|B|^{\alpha-1}\right|^{\frac{1}{\alpha}} \right|\!\right|\!\right| \leqslant 2^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\|X\|^{\frac{1}{\alpha}-1}\,|\!|\!|AX+XB|\!|\!|$$

***за све унитарно инваријантне норме** $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$.*

△ Ако означимо $C \overset{\text{деф}}{=} A\,|A|^{\alpha-1}$ и $D \overset{\text{деф}}{=} B\,|B|^{\alpha-1}$, тада су C и D ограничени оператори за које важи $|C| = |A|^{\alpha}$ и $|D| = |B|^{\alpha}$. Према томе, $|A| = |C|^{\frac{1}{\alpha}}$ и $A = C\,|C|^{\frac{1}{\alpha}-1}$, и слично $B = D\,|D|^{\frac{1}{\alpha}-1}$. Применом Теореме 3.11 на C, D и $1/\alpha$ добијамо жељени закључак. □

У случају када је $X = I$ услов $p\geqslant 3$ се може побољшати на услов $p\geqslant 2$, при чему A и B могу бити штавише произвољни ограничени оператори. Дакле, важи следећа пертубациона неједнакост за компактне операторе.

Теорема 3.13. ***Нека су** $A, B\in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ **такви да је** $A-B\in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ **за неко** $p\geqslant 2$**. Тада за све унитарно инваријантне норме** $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ **важи***

$$|\!|\!|\,|A-B|^p\,|\!|\!| \leqslant 2^{p-1}|\!|\!|A\,|A|^{p-1} - B\,|B|^{p-1}|\!|\!|.$$

△ Претпоставимо прво да су A и B самоадјунговани оператори и да је $|\!|\!|\cdot|\!|\!| = \|\cdot\|_{(k)}$. Ако дефинишемо $A' \overset{\text{деф}}{=} A - B$, тада, као у доказу Теореме 3.11, нам спектрална Теорема 1.2 за компактне самоадјунговане операторе даје да постоји ортонормирани низ сопствених вектора $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ који одговара низу сопствених вредности $\{\lambda_n(A')\}_{n=1}^{\infty}$, односно да је $A'e_n = \lambda_n(A')e_n$ за $n = 1, 2, \ldots$. Тада важи

$$\begin{aligned}2^{p-1}\big\|A\,|A|^{p-1} - B\,|B|^{p-1}\big\|_{(k)} &\geqslant 2^{p-2}\big\||A|^{p-1}(A-B) + (A-B)\,|B|^{p-1}\big\|_{(k)}\\ &\geqslant 2^{p-2}\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i(A-B)|\left(\big\langle |A|^{p-1}e_i, e_i\big\rangle + \big\langle |B|^{p-1}e_i, e_i\big\rangle\right).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Такође, из Jensen-ове неједнакости и спектралне репрезентације 3.9 имамо

$$\begin{aligned}&\big\langle |A|^{p-1}e_i, e_i\big\rangle + \big\langle |B|^{p-1}e_i, e_i\big\rangle \geqslant \langle |A|\,e_i, e_i\rangle^{p-1} + \langle |B|\,e_i, e_i\rangle^{p-1}\\ &\qquad \geqslant |\langle Ae_i, e_i\rangle|^{p-1} + \big|\langle Be_i, e_i\rangle\big|^{p-1} \geqslant 2^{2-p}\,|\langle (A-B)\,e_i, e_i\rangle|^{p-1} = 2^{2-p}\,|\lambda_i(A-B)|^{p-1}\end{aligned}$$

за $1\leqslant i\leqslant k$, што нам заједно са (3.22) даје

$$2^{p-1}\big\|A\,|A|^{p-1} - B\,|B|^{p-1}\big\|_{(k)} \geqslant \big\||A-B|^p\big\|_{(k)}.$$

У случају када су A и B произвољни ограничени оператори, то је онда довољно посматрати самоадјунговане операторне матрице

$$C \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad D \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix},$$

те се потом доказ завршава у истом маневру као и доказ Теореме 3.11. □

На сличан начин као и код Теореме 3.12, видимо да важи следећа реформулација претходне теореме.

Теорема 3.14. ***Нека су** A, B **из** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ **такви да** $A-B\in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ **и** $0\leqslant \alpha\leqslant 1/2$**. Тада за све унитарно инваријантне норме** $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ **важи***

$$\left|\!\left|\!\left| \left| A\,|A|^{\alpha-1} - B\,|B|^{\alpha-1}\right|^{1/\alpha} \right|\!\right|\!\right| \leqslant 2^{1/\alpha-1}\,|\!|\!|A-B|\!|\!|\,.$$

Глава 4

Неједнакости за конвексне и конкавне функције од оператора

У овој глави дефинисаћемо операторне (оператор вредносне) функције операторне промењиве. Да бисмо то урадили биће нам потребна спектрална теорема 3.9 за нормалне операторе. Наиме, исказана другим речима, спектрална теорема говори да је сваки нормални оператор истовремено и спектрални интеграл независно промењиве по њему придруженој спектралној мери. То нам омогућава да дефинишемо функционални рачун за нормалне операторе

Дефиниција **4.1.** *За произвољну ограничену Borel-ову функцију f на спектру $\sigma(A)$ нормалног оператора $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ дефинише се*

$$f(A) \overset{\text{деф}}{=} \int_{\sigma(A)} f\, dE.$$

Сада смо у стању да дефинишемо операторне функције.

Дефиниција **4.2.** *Реално вредносну функцију f дефинисану на интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$ (коначном или бесконачном) ћемо звати* ***оператор конвексном*** *на I ако за свака два самоадјунгована оператора A и B чији спектри леже у I и свако реално $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ важи*

$$f((1-\alpha)A + \alpha B) \leqslant (1-\alpha)f(A) + \alpha f(B). \tag{4.1}$$

Приметимо да је претходна дефиниција коректна, јер из $\sigma(A), \sigma(B) \subset I$ следи $\sigma((1-\alpha)A + \alpha B)) \subset I$ за реалне $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Дефиниција **4.3.** *За реално вредносну функцију f на интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$ кажемо да је* ***оператор конкавна*** *ако је $-f$ оператор конвексна, односно ако у (4.1) стоји обрнута неједнакост.*

Дефиниција **4.4.** *Реално вредносну функцију f дефинисану на интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$ (коначном или бесконачном) ћемо звати* ***оператор монотоном*** *на I ако $A \leqslant B$ повлачи $f(A) \leqslant f(B)$ за свака два самоадјунгована оператора A и B чији спектри леже у I.*

У даљем тексту функције из дефиниција 4.2–4.4 ћемо сматрати непрекидним. У том случају, што ћемо и користити, се услов (4.1) може заменити једноставнијим условом

$$f\Big(\frac{A+B}{2}\Big) \leqslant \frac{f(A)+f(B)}{2}.$$

Приметимо да је свака оператор конквексна функција уједно и једна конвексна функција, јер за свако a из датог интервала можемо посматрати aI, где је I јединични оператор. Исти закључак важи и за оператор конкавне функције, док је свака оператор монотона функција уједно и монотоно неопадајућа функција. Да обратно не важи, видимо из функције $f(t) = t^3$ на $[0, \infty)$, која очито јесте конвексна, али није оператор конвексна, јер можемо узети

$$A \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} \text{ и } B \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} 3I & I \\ I & I \end{bmatrix}.$$

Тада је

$$\frac{A^3+B^3}{2} - \Big(\frac{A+B}{2}\Big)^3 = \begin{bmatrix} 6I & I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

што није позитиван оператор.

Није тешко показати да је скуп оператор конвексних функција затворен за позитивне линеарне комбинације и тачка по тачка лимесе. Односно, ако су f и g оператор конвексне функције и α и β позитивни реални бројеви, тада је и $\alpha f + \beta g$ исто оператор конвексна функција. Слично, ако је $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ оператор конвексних функција и ако $f_n(t) \to f(t)$ кад $n \to \infty$, тада је f исто оператор конвексна функција. Претходна разматрања важе и за оператор конвексне функције, односно за оператор монотоне функције.

С обзиром да ћемо више пута користити особину 4° дату код дефинисања уређења $\leqslant$, то ћемо је овде посебно издвојити као лему.

Лема 4.1. ***Ако је*** $A \leqslant B$ ***онда је*** $C^*AC \leqslant C^*BC$ ***за свако*** $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Један од првих примера оператор монотоне функције дат је следећим ставом.

Став 4.1. ***Функција*** $f(t) = -\frac{1}{t}$ ***је оӣераӣор моноӣона на*** $(0, \infty)$.

△ Нека је $A \leqslant B$ и $\sigma(A), \sigma(B) \subset (0, \infty)$. Како $0 \notin \sigma(A), \sigma(B)$ то постоје A^{-1} и B^{-1}. Тада множећи леву и десну страну са $B^{-1/2}$ на основу Леме 4.1 добијамо $B^{-1/2}AB^{-1/2} \leqslant I$. Множећи потом леву и десну страну прво са $(B^{-1/2}AB^{-1/2})^{-1/2}$, а потом и са $B^{-1/2}$, поновна употреба Леме 4.1 нам даје $A^{-1} \geqslant B^{-1}$, односно $-A^{-1} \leqslant -B^{-1}$, што је и требало показати. □

Касније ћемо видети да је ово и један пример оператор конкавне фунцкије (видети Последицу 4.6).

Од значаја ће нам бити и следеће разматрање. Наиме, нека је f реална непрекидна функција дефинисана на неком интервалу I и нека је $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ самоадјунгован оператор дат на неком сепарабилном бесконачно димензионалном Hilbert-овом простору $\mathcal{H}$ такав да је $\sigma(X) \subset I$. Тада према функционалном рачуну за нормалне (а тиме и за самоадјунговане) операторе имамо $f(X) = \int_{\sigma(X)} f(t)\, dE(t)$, где је E спектрална мера придружена оператору X, тј. $X = \int_{\sigma(X)} t\, dE(t)$. Посматрајмо сада блок-дијагоналну операторну матрицу $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ на $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, што ћемо краће записивати са $T = A \oplus B$.

Приметимо и да је $\sigma(T)=\sigma(A)\cup\sigma(B)$. Нека су при томе $A,B\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ самоадјунговани оператори такви да $\sigma(A),\sigma(B)\subset I$. Показаћемо да је тада

$$f(T)=f(A)\oplus f(B)$$

за све реалне непрекидне функције f дефинисане не неком интервалу I који садржи $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$. Заиста, лако се уз помоћ математичке индукције показује да важи $T^n=A^n\oplus B^n$, где $n=0,1,2,\ldots$. Самим тим тврђење важи и за произвољан полином p. Такође, како је f непрекидна функција (коју суштински посматрамо на сегменту који садржи $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$), то према Weierstrass-овој теореми постоји низ полинома $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ такав да је f униформни лимес датих полинома. На овом месту искористимо да је $\|f(T)\|=\|f\|_E$ (за више детаља погледати [АДЈ] и [BS], као и тамошње референце), па за непрекидну функцију f на компакту $\sigma(T)$ важи $\|f(T)\|\leqslant\max\{|f(t)|:t\in\sigma(T)\}$. Зато из $p_n\rightrightarrows f$ на $\sigma(T)$ кад $n\to\infty$ добијамо

$$\|f(T)-p_n(T)\|=\|(f-p_n)(T)\|\leqslant\max\{|f(t)-p_n(t)|:t\in\sigma(T)\}\longrightarrow 0 \text{ кад } n\to\infty.$$

Одатле видимо да важи $f(T)=\lim_{n\to\infty}p_n(T)=\lim_{n\to\infty}(p_n(A)+p_n(B))$. Како је $\|C\oplus D\|=\max\{\|C\|,\|D\|\}$, за произвољне $C,D\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, то добијамо

$$\begin{aligned}\|f(A)\oplus f(B)-p_n(A)\oplus p_n(B)\|&=\|(f(A)-p_n(A))\oplus(f(B)-p_n(B))\|\\&=\max\{\|f(A)-p_n(A)\|,\|f(B)-p_n(B)\|\}\longrightarrow 0\end{aligned}$$

с обзиром да $p_n(A)\to f(A)$ и $p_n(B)\to f(B)$ кад $n\to\infty$ (што се може показати на исти начин као за оператор T). Дакле, $\lim_{n\to\infty}(p_n(A)\oplus p_n(B))=f(A)\oplus f(B)$, а самим тим смо показали када узмемо у обзир све претходно да важи $f(T)=f(A)\oplus f(B)$, односно

$$f\left(\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}f(A) & 0\\ 0 & f(B)\end{bmatrix}.$$

На сличан начин се показује да ако је додатно $U\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ унитаран оператор важи $f(U^*TU)=U^*f(T)U$. Довољно је приметити да је $\sigma(U^*TU)=\sigma(T)$ и да важи $(U^*TU)^n=U^*T^nU$, а затим прећи на полиноме, односно на непрекидне функције.

Сада смо спремни да покажемо следећу важну

Теорема 4.2. [Hansen, Pederson] ***Нека је I интервал који садржи 0 и нека је f реална функција на I. Тада су следећа тврђења међусобно еквивалетна:***

1° ***f је оператор конвексна на I и $f(0)\leqslant 0$,***

2° ***$f(K^*AK)\leqslant K^*f(A)K$ за сваку контракцију K и сваки самоадјунговани оператор A чији је спектар садржан у I,***

3° ***$f(K_1^*AK_1+K_2^*BK_2)\leqslant K_1^*f(A)K_1+K_2^*f(B)K_2$ за све операторе K_1 и K_2 за које је $K_1^*K_1+K_2^*K_2\leqslant I$ и све самодјунговане операторе A,B чији су спектри садржани у I,***

4° ***$f(PAP)\leqslant Pf(A)P$ за све ортогоналне пројекције P и самоадјунговане операторе A чији је спектар садржан у I.***

△ ($1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$) Нека су T, U и V оператори из $\mathfrak{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ дати са

$$T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} K & D_{K^*} \\ D_K & -K^* \end{bmatrix}, \quad V \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} K & -D_{K^*} \\ D_K & K^* \end{bmatrix},$$

где је $D_{K^*} \overset{\text{деф}}{=} (I-KK^*)^{1/2}$ и $D_K \overset{\text{деф}}{=} (I-K^*K)^{1/2}$. Није тешко проверити, с обзиром да је $K^*D_{K^*} = D_K K^*$, да су U и V унитарни оператори. Тада је

$$U^*TU = \begin{bmatrix} K^*AK & K^*AD_{K^*} \\ D_{K^*}AK & D_{K^*}AD_{K^*} \end{bmatrix}, \qquad V^*TV = \begin{bmatrix} K^*AK & -K^*AD_{K^*} \\ -D_{K^*}AK & D_{K^*}AD_{K^*} \end{bmatrix},$$

па је

$$\frac{U^*TU+V^*TV}{2} = \begin{bmatrix} K^*AK & 0 \\ 0 & D_{K^*}AD_{K^*} \end{bmatrix}.$$

Према томе, имамо

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} f(K^*AK) & 0 \\ 0 & f(D_{K^*}AD_{K^*}) \end{bmatrix} &= f\left(\frac{U^*TU+V^*TV}{2}\right) \leqslant \frac{f(U^*TU)+f(V^*TV)}{2} \\ &= \frac{U^*f(T)U+V^*f(T)V}{2} = \frac{1}{2}\left\{U^*\begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(0) \end{bmatrix}U + V^*\begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(0) \end{bmatrix}V\right\} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left\{U^*\begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U + V^*\begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V\right\} = \begin{bmatrix} K^*f(A)K & 0 \\ 0 & D_{K^*}f(A)D_{K^*} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

одакле добијамо да важи $f(K^*AK) \leqslant K^*f(A)K$.

($2^\circ \Longrightarrow 3^\circ$) Нека је $T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ и $K \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix}$. Приметимо да је K контракција с обзиром да из $K^*K = \begin{bmatrix} K_1^*K_1+K_2^*K_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ следи $\|K\| \leqslant 1$. Такође, $T=T^*$ и $\sigma(T) = \sigma(A)\cup\sigma(B) \subset I$. Како је

$$K^*TK = \begin{bmatrix} K_1^*AK_1+K_2^*BK_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то имамо

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} f(K_1^*AK_1+K_2^*BK_2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{bmatrix} &= f(K^*TK) \leqslant K^*f(T)K \\ &= \begin{bmatrix} K_1^* & K_2^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(B) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1^*f(A)K_1+K_2^*f(B)K_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

($3^\circ \Longrightarrow 4^\circ$) Очигледно да важи.

($4^\circ \Longrightarrow 1^\circ$) Нека су A и B произвољни самодјунговани оператори чији су спектри у I и нека је $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Дефинишимо операторе T и P са $T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $P \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и нека је

$$W \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\alpha}I & -\sqrt{\alpha}I \\ \sqrt{\alpha}I & \sqrt{1-\alpha}I \end{bmatrix}.$$

Приметимо и да је W унитаран оператор на $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ и да је P ортогонална пројекција. Како је

$$PW^*TWP = \begin{bmatrix} (1-\alpha)A+\alpha B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то имамо

$$\begin{bmatrix} f((1-\alpha)A+\alpha B) & 0 \\ 0 & f(0) \end{bmatrix} = f(PW^*TWP)$$

$$\leqslant Pf(W^*TW)P = PW^*f(T)WP = \begin{bmatrix} (1-\alpha)f(A)+\alpha f(B) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дакле, f је оператор конвексна функција и $f(0) \leqslant 0$, што је и требало показати. □

Помоћу ове теореме показујемо и интересантну везу између оператор монотоних и оператор конкавних функција на $[0,\infty)$.

Теорема 4.3. [Hansen, Pederson] ***Нека је $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ непрекидна функција. Тада је f оператор монотона ако и само ако је оператор конкавна.***

△ Претпоставимо прво да је f оператор монотона функција. Ако покажемо да је $f(K^*AK) \geqslant K^*f(A)K$ за произвољан позитиван оператора A и контракцију K, тада би према Теореми 4.2 следило да је f оператор конкавна функција. Зато, нека су T и U оператори дефинисани као у доказу ($1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$) Теореме 4.2, односно такви да важи $U^*TU = \begin{bmatrix} K^*AK & K^*AD_{K^*} \\ D_{K^*}AK & D_{K^*}AD_{K^*} \end{bmatrix}$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\lambda > 0$ такво да је

$$U^*TU \leqslant \begin{bmatrix} K^*AK+\varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda I \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Заиста, нека је $\varepsilon > 0$ фиксирано и $Y \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} K^*AK+\varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda I \end{bmatrix}$, где ћемо $\lambda > 0$ накнадно одредити. Тада је

$$Y - U^*TU = \begin{bmatrix} \varepsilon & -K^*AD_{K^*} \\ -D_{K^*}AK & \lambda I - D_{K^*}AD_{K^*} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} \varepsilon & -K^*AD_{K^*} \\ (-K^*AD_{K^*})^* & \lambda I \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

за све λ такве да важи $\lambda I \geqslant D_{K^*}AD_{K^*}$. Наметнимо још услов за λ такав да је последња операторна матрица у (4.3) позитивна. Нека су $f, g \in \mathcal{H}$ произвољни, тада је

$$\left\langle \begin{bmatrix} \varepsilon & -K^*AD_{K^*} \\ (-K^*AD_{K^*})^* & \lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right\rangle = \varepsilon\,\|f\|^2 - 2\Re\left\langle f, K^*AD_{K^*}g \right\rangle + \lambda\,\|g\|^2 \geqslant$$

$$\varepsilon\,\|f\|^2 - 2\|K^*AD_{K^*}\|\,\|f\|\,\|g\| + \lambda\,\|g\|^2 = \left(\sqrt{\varepsilon}\,\|f\| - \frac{\|K^*AD_{K^*}\|}{\sqrt{\varepsilon}}\,\|g\|\right)^2 + \left(\lambda - \frac{\|K^*AD_{K^*}\|^2}{\varepsilon}\right)\|g\|^2$$

што је веће до једнако од нуле ако узмемо $\lambda \geqslant \frac{\|K^*AD_{K^*}\|^2}{\varepsilon}$, што управо значи да је операторна матрица на десној страни у (4.3) позитивна. Дакле, ако узмемо довољно велико $\lambda > 0$ тада ће $Y - U^*TU \geqslant 0$, односно важиће (4.2). Како је f оператор монотона функција добијамо

$$\begin{bmatrix} K^*f(A)K & K^*f(A)D_{K^*} \\ D_{K^*}f(A)K & D_{K^*}f(A)D_{K^*} \end{bmatrix} = U^*f(T)U = f(U^*TU) \leqslant \begin{bmatrix} f(K^*AK+\varepsilon) & 0 \\ 0 & f(\lambda)I \end{bmatrix},$$

чиме смо показали да је $K^*f(A)K \leqslant f(K^*AK+\varepsilon)$ за свако $\varepsilon > 0$. Пуштањем да $\varepsilon \to 0^+$ добијамо тражену неједнакост $K^*f(A)K \leqslant f(K^*AK)$.

Претпоставимо сада да је f оператор конкавна функција и нека је $0 \leqslant A \leqslant B$. Тада за свако $\alpha \in (0,1)$ важи

$$\alpha B = \alpha A + (1-\alpha)\frac{\alpha}{1-\alpha}(B-A).$$

С обзиром да је f оператор конкавна то нам претходно даје

$$f(\alpha B) \geqslant \alpha f(A) + (1-\alpha) f\Big(\frac{\alpha}{1-\alpha}(B-A)\Big).$$

Како је $f(X)$ позитиван оператор за сваки позитиван оператор X, што видимо из спектралне теореме, то је $f(\alpha B) \geqslant \alpha f(A)$, што после пуштања да $\alpha \to 1^-$ нам даје $f(B) \geqslant f(A)$. □

Претходна теорема остаје на снази и ако додатно ослабимо услове. Наиме, ако је f непрекидна функција на $[0,\infty)$ и ако је $\lim_{t\to\infty} f(t) > -\infty$ тврђење теореме и даље важи. Заиста, ако је $f(t)$ оператор монотона тада је $g(t) \overset{\text{деф}}{=} f(t) - f(0)$ ненегативна и оператор монотона, јер је $f(t)$ растућа. Зато је према претходној теореми $g(t)$ оператор конкавна, а самим тим је и $f(t)$ оператор конкавна. Супротно, ако је $f(t)$ оператор конкавна тада је $f(t)$ конкавна и у обичајеном смислу, а тиме и растућа с обзиром да је $\lim_{t\to\infty} f(t) > -\infty$. Како је $0 \leqslant f(t) - f(0)$ оператор конкавна, то одатле лако следи и да је $f(t)$ оператор монотона.

Последица 4.4. ***Нека је*** $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ ***непрекидна функција. Ако је*** f ***оператор монотона функција тада је*** $g(t) = \frac{1}{f(t)}$ ***оператор конвексна функција.***

△ Нека су A и B самоадјунговани оператори и $\sigma(A), \sigma(B) \subset (0,\infty)$. Како је f оператор конкавна према Теореми 4.3, то важи $f\big(\frac{A+B}{2}\big) \geqslant \frac{f(A)+f(B)}{2}$, те добијамо

$$\left(f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)^{-1} \leqslant \left(\frac{f(A)+f(B)}{2}\right)^{-1} \leqslant \frac{f(A)^{-1}+f(B)^{-1}}{2},$$

где смо користили Став 4.1 и да је пресликавање $t \mapsto \frac{1}{t}$ оператор конвексно на $(0,\infty)$, што следи из следећих једнакости

$$\begin{aligned}
\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2} - \left(\frac{A+B}{2}\right)^{-1} &= \frac{A^{-1}+B^{-1}-4(A(A^{-1}+B^{-1})B)^{-1}}{2}\\
&= \frac{A^{-1}+B^{-1}-4B^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}}{2}\\
&= \frac{(A^{-1}+B^{-1}-2B^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(2A^{-1}-(A^{-1}+B^{-1}))}{2}\\
&= \frac{(A^{-1}-B^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(A^{-1}-B^{-1})}{2} \geqslant 0,
\end{aligned}$$

где позитивност следи на основу Леме 4.1. □

Напоменимо и то да смо у претходном доказу, између осталог, показали и да је $t \mapsto \frac{1}{t}$ оператор конвексна на $(0,\infty)$.

За $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ дефинишемо спектрални радијус од A, у ознаци $r(A)$, са

$$r(A) \overset{\text{деф}}{=} \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Приметимо, како је спектар компактан скуп и како је узимање модула непрекидна функција, то се претходни супремум достиже, тј. sup можемо заменити са max. Такође, није тешко показати да је резолвента оператора A, тј. $R_\lambda(A) \overset{\text{деф}}{=} (\lambda I - A)^{-1}$ где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, једна аналитичка функција.

Спектрални радијус има следеће корисне особине

1° $r(AB) = r(BA)$, ***за*** $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

2° ***Важи формула*** $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}$, ***за*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

3° ***Ако је*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***нормалан, тада је*** $r(A) = \|A\|$.

$\triangle$ Особина 1° следи из $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$ (погледати Лему 1.6).

2° Нека је $m \in \mathbb{N}$ фиксирано. Тада свако $n \in \mathbb{N}$ можемо записати у облику $n = pm+q$ где су $p, q \in \mathbb{N}$ и $q < m$. Зато имамо $\|A^n\| \leqslant \|A^m\|^p \|A^q\| \leqslant \max\{1, \|A\|^m\} \|A^m\|^p$, тј.

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \bigl(\max\{1, \|A\|^m\} \|A^{m/n}\|^{p/n}\bigr).$$

Како $\|A\|^{m/n}$ конвергира ка 1 кад $n \to \infty$ и како p/n конвергира ка $1/m$ кад $n \to \infty$, то нам претходна неједнакост даје $\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant \|A^m\|^{1/m}$. Одатле добијамо

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant \inf_{m\in\mathbb{N}} \|A^m\|^{1/m} \leqslant \liminf_{m\in\mathbb{N}} \|A^m\|^{1/m}.$$

То показује да $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$ постоји и да је једнак $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}$.

Радијус конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} A^n$ је $(\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n})^{-1}$, што се показује на исти начин као и у доказу CauchyHadamard-ове теореме за степене редове у комплексном случају, употребом Cauchy-јевог кореног критеријума.Зато, ако изаберемо $|\lambda| > \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$ тада ће ред $\sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$ конвегирати ка ограниченом оператору $R_\lambda(A)$, тј., $\lambda \in \rho(A)$. Тиме смо показали

$$r(A) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Докажимо сад да неједнакост не може бити строга. Наиме, ако би $\sigma(A)$ било садржано у $\overline{\mathbb{D}}\,(0, r)$, за неко $r < \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$, тада би

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\Bigl(I - \frac{1}{\lambda} A\Bigr)^{-1}$$

била аналитичка функција на $|\lambda| > r$. Тиме би и пресликавање $z \mapsto (1 - zA)^{-1}$, задато на $\mathbb{C}$, било аналитичко на $\overline{\mathbb{D}}\left(0, r^{-1}\right)$ и радијус конвергенције од $\sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n$ би био већи од $r^{-1} > (\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n})^{-1}$, што нам даје контрадикцију.

3° Нека је за почетак A самоадјунгован. Тада је $\|A\|^2 = \|A^* A\| = \|A^2\|$. На исти начин добијамо $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$ за $n \in \mathbb{N}$. Одатле је, на основу 2°

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|A\|.$$

Претпоставимо сад да је A нормалан. Тада је $A^* A$ самоадјунгован, па је према управо доказаном $\|A\|^2 = \|A^* A\| = r(A^* A)$. Математичком индукцијом се показује да је $\|(A^* A)^n\| = \|A^n\|^2$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па према делу под б) важи $r(A^* A) = (r(A))^2$, што нам заједно са претходним даје $\|A\|^2 = (r(A))^2$, тј. $r(A) = \|A\|$. $\square$

Сада смо у стању да покажемо следећи

Став 4.2. [Löwner - Heinz] ***Нека су*** $A \geqslant B$ ***самоадјунговани оператори такви да је*** $\sigma(A), \sigma(B) \subset [0, \infty)$***. Тада је*** $A^p \geqslant B^p$ ***за*** $p \in [0, 1]$***.***

$\triangle$ Овде ћемо дати доказ који потиче од Pederson-а. Нека је $f(t) = t^p$ на $[0, \infty)$, $A \geqslant B$ са $\sigma(A), \sigma(B) \subset [0, \infty)$ и уочимо скуп $S \overset{\text{деф}}{=} \{p \in \mathbb{R} : f(A) \geqslant f(B)\}$. Како је пресликавање $p \mapsto A^p$, односно $p \mapsto B^p$, непрекидно у норми, то је S затворен скуп. Очигледно $0, 1 \in S$. Да бисмо показали $[0, 1] \subset S$ то је довољно показати да из $p, q \in S$ следи $(p+q)/2 \in S$. Дакле, претпоставимо да је $A^p \geqslant B^p$ и $A^q \geqslant B^q$. Тада је према Леми 4.1 $A^{-p/2}B^pA^{-p/2} \leqslant A^{-p/2}A^pA^{-p/2} = I$, те је

$$\left\|B^{p/2}A^{-p/2}\right\|^2 = \left\|(B^{p/2}A^{-p/2})^*B^{p/2}A^{-p/2}\right\| = \left\|A^{-p/2}B^pA^{-p/2}\right\| \leqslant 1.$$

Дакле, $\left\|B^{p/2}A^{-p/2}\right\| \leqslant 1$, а слично добијамо и $\left\|B^{q/2}A^{-q/2}\right\| \leqslant 1$. Одатле, према особинама 1° и 3° спектралног радијуса, имамо

$$\begin{aligned}1 &\geqslant \left\|(B^{p/2}A^{-p/2})^*B^{q/2}A^{-q/2}\right\| = \left\|A^{-p/2}B^{(p+q)/2}A^{-q/2}\right\| \geqslant r\big(A^{-p/2}B^{(p+q)/2}A^{-q/2}\big)\\ &= r\big(A^{(q-p)/4}A^{-(p+q)/4}B^{(p+q)/2}A^{-q/2}\big) = r\big(A^{-(p+q)/4}B^{(p+q)/2}A^{-q/2}A^{(q-p)/4}\big)\\ &= r\big(A^{-(p+q)/4}B^{(p+q)/2}A^{-q/2}A^{-(p+q)/4}\big) = \left\|A^{-(p+q)/4}B^{(p+q)/2}A^{-q/2}A^{-(p+q)/4}\right\|.\end{aligned}$$

Дакле добијамо $I \geqslant A^{-(p+q)/4}B^{(p+q)/2}A^{-q/2}A^{-(p+q)/4}$, а самим тим према Леми 4.1 $A^{(p+q)/2} \geqslant B^{(p+q)/2}$, тј. $(p+q)/2 \in S$.

Приметимо да смо у претходном делу претпостављали да $0 \notin \sigma(A), \sigma(B)$, тј. да су A и B инвертибилни. Уколико то није случај, онда уместо A и B можемо за произвољно $\varepsilon > 0$ посматрати операторе $A + \varepsilon I$ и $B + \varepsilon I$. Они су тада инвертибилни, па претходно доказано можемо применити на њих, тј. $(A + \varepsilon I)^p \geqslant (B + \varepsilon I)^p$ за све $p \in [0, 1]$. Пуштањем да $\varepsilon \to 0^-$ добијамо жељено тврђење.

Теорема 4.5. [Hansen, Pederson] ***Нека је*** f ***(непрекидна) реална функција на интервалу*** $[0, \alpha)$***, за*** $\alpha > 0$***. Тада су следећи услови међусобно еквивалентни:***

1° f ***је оператор конвексна и*** $f(0) \leqslant 0$***,***

2° ***функција*** $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ ***је оператор монотона на*** $(0, \alpha)$***.***

$\triangle$ (1° $\Longrightarrow$ 2°) Нека је $A \leqslant B$ и $\sigma(A), \sigma(B) \subset (0, \alpha)$. Приметимо да су тада оператори A и B инвертибилни јер $0 \notin \sigma(A), \sigma(B)$. Како је функција $h(t) = t^{1/2}$ оператор монотона на $(0, \infty)$ према Ставу 4.2, то је $A^{1/2} \leqslant B^{1/2}$. Множећи с лева и с десна са $B^{-1/4}$ добијамо $B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4} \leqslant I$, тј.

$$1 \geqslant \|B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4}\| = r(B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4}) = r(B^{-1/2}A^{1/2}) = \|B^{-1/2}A^{1/2}\|,$$

према особинама 1° и 3° спектралног радијуса. Дакле $B^{-1/2}A^{1/2}$ је контракција, па користећи услов 2° из Теореме 4.2 добијамо

$$f(A) = f(A^{1/2}B^{-1/2}BB^{-1/2}A^{1/2}) \leqslant A^{1/2}B^{-1/2}f(B)B^{-1/2}A^{1/2}.$$

Множећи леву и десну страну са $A^{-1/2}$ добијамо

$$A^{-1/2}f(A)A^{-1/2} \leqslant B^{-1/2}f(B)B^{-1/2}.$$

Није тешко показати да $f(A)$ и $A^{-1/2}$ међусобно комутирају (на пример помоћу спектралне теореме), а исто важи и за $f(B)$ и $B^{-1/2}$, те се последња неједнакост своди на $A^{-1}f(A) \leqslant B^{-1}f(B)$. Дакле, g је оператор монотона функција на $(0, \alpha)$.

($2^\circ \implies 1^\circ$) Показаћемо да важи услов 4° Теореме 4.2. Зато, нека је P произвољна ортогонална пројекција и A позитиван оператор чији спектар припада $[0, \alpha)$. У даљем раду, без губитка на општости, можемо сматрати да је A инвертибилан оператор (ако није, онда за произвољно $\delta > 0$ можемо A заменити са $A + \delta I$, те после пустити да $\delta \to 0^-$). Како је $\|A\| < \alpha$ то постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $\|(1+\varepsilon)A\| < \alpha$, тј. $(1+\varepsilon)A$ има спектар садржан у $(0, \alpha)$. Такође, како је $P + \varepsilon I \leqslant (1+\varepsilon)I$ то имамо $A^{1/2}(P+\varepsilon I)A^{1/2} \leqslant (1+\varepsilon)A$. Тада нам оператор монотноност функције g даје

$$A^{-1/2}(P+\varepsilon I)^{-1}A^{-1/2}f(A^{1/2}(P+\varepsilon I)A^{1/2}) \leqslant (1+\varepsilon)^{-1}A^{-1}f((1+\varepsilon)A).$$

Множењем десне стране са $A^{1/2}(P+\varepsilon I)$, а леве са $(A^{1/2}(P+\varepsilon I))^* = (P+\varepsilon I)A^{1/2}$ добијамо

$$A^{-1/2}f(A^{1/2}(P+\varepsilon I)A^{1/2})A^{1/2}(P+\varepsilon I) \leqslant (1+\varepsilon)^{-1}(P+\varepsilon I)f((1+\varepsilon)A)(P+\varepsilon I).$$

Како је f непрекидна то можемо пустити $\varepsilon \to 0^+$, што нам даје

$$A^{-1/2}f(A^{1/2}PA^{1/2})A^{1/2}P \leqslant Pf(A)P. \tag{4.4}$$

Математичком индукцијом добијамо да важи $(A^{1/2}PA^{1/2})^n A^{1/2}P = A^{1/2}P(PAP)^n$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$, а потом преласком прво на полиноме, а затим и на произвољну реалну непрекидну функцију h на $\sigma(A) \subset [0, \alpha)$ видимо да важи $h(A^{1/2}PA^{1/2})A^{1/2}P = A^{1/2}Ph(PAP)$. Зато се (4.4) своди на $Pf(PAP) \leqslant Pf(A)P$.

Како је $g(t)$ неопадајућа функција на $(0, \alpha)$ (јер је оператор монотона) то важи $g(t) \leqslant g(\beta)$ за $0 < t < \beta < \alpha$, односно $f(t) \leqslant \frac{f(\beta)}{\beta}t$ за $0 < t < \beta < \alpha$. Пуштајући да $t \to 0^+$ добијамо $f(0) \leqslant 0$.

Нека је сад $\widetilde{f}(t) \overset{\text{деф}}{=} f(t) - f(0)$, где $t \in \sigma(A) \subset [0, \alpha)$. Математичком индукцијом показује се да важи $(PAP)^n = P(PAP)^n P$ за $n = 1, 2, \ldots$ (приметити да једнакост у општем случају није испуњена за $n = 0$). Зато важи и $p_n(PAP) = Pp_n(PAP)P$, где је p_n полином степена n за који је $p_n(0) = 0$. Како је $\widetilde{f}(0) = 0$ то постоји низ полинома $\widetilde{p}_n$ који униформно конвергира ка $\widetilde{f}$ на $\sigma(A)$ и за који је $\widetilde{p}_n(0) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Наиме, према Wiestrass-овој теореми постоји низ полинома p_n који униформно конвергира ка $\widetilde{f}$ на $\sigma(A)$, а потом је довољно узети $\widetilde{p}_n(t) \overset{\text{деф}}{=} p_n(t) - p_n(0)$ и приметити да и $\widetilde{p}_n \rightrightarrows \widetilde{f}$ кад $n \to \infty$, јер је $\lim_{n\to\infty} p_n(0) = \widetilde{f}(0) = 0$. Зато видимо да важи $\widetilde{f}(PAP) = P\widetilde{f}(PAP)P$. Одатле имамо

$$f(PAP) = \widetilde{f}(PAP) + f(0)I \leqslant \widetilde{f}(PAP) + f(0)P = P(\widetilde{f}(PAP) + f(0))P = Pf(PAP)P,$$

те је према претходном $f(PAP) \leqslant Pf(PAP)P = Pf(PAP) \leqslant Pf(A)P$, односно $f(PAP) \leqslant Pf(A)P$, што је и требало показати. □

Последица 4.6. [Hansen, Pederson] ***Нека је $f\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ непрекидна функција. Тада су следећи услови међусобно еквивалентни***

1° ***f је оператор монотона;***

2° ***$\frac{t}{f(t)}$ је оператор монотона;***

3° ***f је оператор конкавна.***

$\triangle$ ($1^\circ \implies 2^\circ$) Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада је $f(t+\varepsilon)$ оператор монотона функција на $[0,\infty)$ и $-f(t+\varepsilon) < 0$. Према Теореми 4.3 тада је $f(t+\varepsilon)$ оператор конкавна на $[0,\infty)$, те је $-f(t+\varepsilon)$ оператор конвексна функција на $[0,\infty)$. Даље, Теорема 4.5 нам даје да је $-\frac{f(t+\varepsilon)}{t}$ оператор монотона на $(0,\infty)$, а како је према према Ставу 4.1 функција $t \mapsto -t^{-1}$ оператор монотона на $(0,\infty)$ то добијамо и да је $\frac{t}{f(t+\varepsilon)} = -\big(-\frac{f(t+\varepsilon)}{t}\big)^{-1}$ оператор монотона на $(0,\infty)$. Пуштањем да $\varepsilon \to 0^-$ и коришћењем непрекидности функције f налазимо да је $\frac{t}{f(t)}$ оператор монотона на $(0,\infty)$.

($2^\circ \implies 1^\circ$) Доказ ове импликације је скоро исти као доказ претходне импликације. Наиме, нека је поново $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада је $\frac{t+\varepsilon}{f(t+\varepsilon)}$ оператор монотона на $[0,\infty)$ и $-\frac{t+\varepsilon}{f(t+\varepsilon)} < 0$ те нам поново примена Теореме 4.3 даје да је $-\frac{t+\varepsilon}{tf(t+\varepsilon)}$ оператор монотона на $(0,\infty)$. Тада нам оператор монотоност функције $t \mapsto -t^{-1}$ на $(0,\infty)$ даје да је $\frac{tf(t+\varepsilon)}{t+\varepsilon}$ оператор монотона функција на $(0,\infty)$. Одатле пуштањем да $\varepsilon \to 0^-$ добијамо жељени закључак.

($1^\circ \iff 3^\circ$) Услов 1° је еквивалентан са условом да је $f(t+\varepsilon)$ оператор монотона на $[0,\infty)$ за свако $\varepsilon > 0$, што је према Теореми 4.3 еквивалетно са тим да је $f(t+\varepsilon)$ оператор конкавна на $[0,\infty)$ за свако $\varepsilon > 0$, тј. са условом 3°. $\square$

Наведимо сад неколико примера операторних функција:

1° За свако $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$ функција $\alpha t + \beta$ је оператор монотона на $\mathbb{R}$.

2° Ако $c \notin (a,b)$ тада је $(c-t)^{-1}$ оператор монотона на (a,b).

3° За $0 \leqslant p \leqslant 1$ функција t^p је оператор монотона на $[0,\infty)$. Штавише, t^p ($p \in \mathbb{R}$) је оператор монотона на $(0,\infty)$ ако и само ако $p \in [0,1]$.

4° За $1 \leqslant p \leqslant 2$ функција t^p је оператор конвексна на $[0,\infty)$. Штавише, t^p ($p \in \mathbb{R}$) је оператор монотона на $(0,\infty)$ ако и само ако $p \in [-1,0] \cup [1,2]$.

5° Функција $f(t) = \frac{t-1}{\log t}$, са $f(0) \overset{\text{деф}}{=} 0$ и $f(1) \overset{\text{деф}}{=} 1$, је оператор монотона на $[0,\infty)$.

6° $\log t$ је оператор монотона и оператор конкавна на $(0,\infty)$.

7° $f(t) = t\log t$, са $f(0) \overset{\text{деф}}{=} 0$, је оператор конвексна на $[0,\infty)$.

$\triangle$ 1° је очигледно, те пређимо на 2°. Нека је $A \geqslant B$ и $\sigma(A), \sigma(B) \subset (a,b)$. Ако је $c \leqslant a$ тада је $A - cI \geqslant B - cI > 0$ па је $(A-cI)^{-1} \leqslant (B-cI)^{-1}$, према леми (4.1). Слично, ако је $c \geqslant b$ тада је $0 < cI - A \leqslant cI - B$ па је поново $(cI-A)^{-1} \geqslant (cI-B)^{-1}$.

3° За $p \in [0,1]$ то је заправо Став 4.2. Нека је сад $p < 0$. Тада t^p није монотоно неопадајућа на $(0,\infty)$, па самим тим ни оператор монотона на $(0,\infty)$. Док ако је $p > 1$ тада према претходном $\frac{t}{t^p} = t^{1-p}$ на $(0,\infty)$ није оператор монотона, па према Последици 4.6 није ни t^p оператор монотона на $(0,\infty)$.

4° Ако $p \in [1,2]$ тада је $\frac{t^p}{t} = t^{p-1}$ према (3) оператор монотона на $(0,\infty)$, те према Теореми 4.5 је t^p оператор конвексна на $[0,\infty)$. Даље, за $p \in [-1,0]$ је $t^p = \frac{1}{t^{-p}}$ према Последици 4.4 оператор конвексна на $(0,\infty)$. За $p > 0$, како је, према непрекидности, оператор конвкесност од t^p на $(0,\infty)$ еквивалетна оператор конвексности исте функције на $[0,\infty)$, то нам Теорема 4.5 даје да је t^p на $(0,\infty)$ оператор конвексна ако и само ако је $\frac{t^p}{t} = t^{p-1}$ оператор монотона на $(0,\infty)$. Зато, за $t \in (0,1) \cup (2,\infty)$ функција t^p није оператор конвексна. За $p < -1$ се доказ може наћи у [B].

5° Како важи $f(t) = \int_0^1 t^p\, dp$ за $t \geqslant 0$, то добијамо

$$\begin{aligned}\langle f(A)g, g\rangle &= \int_{\sigma(A)} f(t)\, d\mu_g(t) = \int_{\sigma(A)} \Big(\int_0^1 t^p\, dp\Big) d\mu_g(t)\\ &= \int_0^1 \Big(\int_{\sigma(A)} t^p d\mu_g(t)\Big) dp \geqslant \int_0^1 \Big(\int_{\sigma(B)} t^p d\mu_g(t)\Big) dp = \langle f(B)g, g\rangle\end{aligned}$$

за $A \geqslant B \geqslant 0$ и $g \in \mathcal{H}$, где смо искористили Fubini-јеву теорема и Став 4.2. Одатле добијамо $f(A) \geqslant f(B)$.

6° Из 5° добијамо да је $\frac{t}{\log(1+t)}$ оператор монотона на $(0, \infty)$, па је $\log(1+t)$ оператор монотона и оператор конкавна на $(0, \infty)$ према Последици 4.6. Како за свако $\varepsilon > 0$ важи $\log(\varepsilon + t) = \log \varepsilon + \log(1 + \frac{t}{\varepsilon})$, то је и $\log(\varepsilon + t)$ оператор монотона и оператор конкавна на $(0, \infty)$ за свако $\varepsilon > 0$. Сад, пуштањем да $\varepsilon \to 0^-$ добијамо тражено тврђење.

7° Како је дата функција $t \log t$ непрекидна на $[0, \infty)$ и како је према 6° $\log t = \frac{t \log t}{t}$ оператор монотона на $(0, \infty)$, то применом Теореме 4.5 добијамо да је $t \log t$ оператор конвексна на $[0, \infty)$. ☐

1 Субадитивност везана за оператор монотоне функције

Може се показати да за сваку ненегативну оператор монотону функцију $f(t)$ постоје јединствене константе $\alpha, \beta \geqslant 0$ и ненегативна мера $\mu(\cdot)$ на $[0, \infty)$ таква да важи

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \frac{st}{t+s} d\mu(s), \quad t \in [0, \infty).$$

Тачније, важи (за више детаља погледати [B], [An] и [D])

Теорема 4.7. ***Ако је f оператор монотона функција на $[0, \infty)$, тада постоји позитивна мера μ на $[0, \infty)$ таква да важи***

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \frac{st}{s+t} d\mu(s)$$

где је $\alpha = f(0)$, $\beta \geqslant 0$ и $\int_0^\infty \frac{s}{1+s} d\mu(s) < +\infty$. Ако је g оператор конвексна функција на $[0, \infty)$ тада постоји позитивна мера μ на $[0, \infty)$ таква да важи

$$f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \int_0^\infty \frac{st^2}{s+t} d\mu(s)$$

где је $\alpha = f(0)$, $\beta = f'_+(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t}$ и $\gamma \geqslant 0$.

Користећи претходно показује се да за сваку такву функцију f (ненегативну оператор монотону) и позитиван ограничен оператор $A \geqslant 0$ важи

$$\langle f(A)u, u\rangle = \alpha \langle u, u\rangle + \beta \langle Au, u\rangle + \int_0^\infty s \left\langle A(A + sI)^{-1}u, u\right\rangle d\mu(s) \quad \text{за све } u \in \mathcal{H}. \tag{4.5}$$

Наиме, довољно је показати за $\alpha = \beta = 0$, тј. сматрати да је $f(t) = \int_0^\infty \frac{st}{t+s} d\mu(s)$. Тада, према спектралној теореми за самоадјунговане операторе постоји комплексна Borel-ова мера ν_u таква да важи

$$\begin{aligned}\langle f(A)u, u\rangle &= \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\nu_u(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \int_0^\infty \frac{s\lambda}{\lambda + s} d\mu(s) d\nu_u(\lambda)\\ &= \int_0^\infty \int_{\sigma(A)} \frac{s\lambda}{\lambda + s} d\nu_u(\lambda) d\mu(s) = \int_0^\infty \left\langle sA(A+sI)^{-1}u, u\right\rangle d\mu(s),\end{aligned}$$

где смо искористи Fubini-јеву теорему за обртање редоследа интеграције.

Видели смо да нам спектрална теорема за нормалне операторе 3.9 омогућава да дефинишемо функционални рачун за нормалне операторе. Осим тога, показује се да за непрекидне функције на $\sigma(A)$, неког нормалног оператора $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, важи теорема о пресликавању спектра, односно $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.
Штавише, важи и $f(\sigma_p(A)) \subseteq \sigma_p(f(A))$, при чему је сваки сопствени вектор од A, који одговара сопственој вредности λ, уједно и сопствени вектор од $f(A)$, који одговара сопственој вредности $f(\lambda)$.

С обзиром да је $f(t)$ неопадајућа, то за $i = 1, 2, \ldots, n$ јединични сопствени вектор e_i од A који одговара сопственој вредности $\lambda_j(A)$, постаје јединични сопствени вектор од $f(A)$, јер важи $\lambda_i(f(A)) = f(\lambda_i(A))$. Зато, према дефиницији Ky-Fan-ових норми важи

$$\|f(A)\|_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \langle f(A)e_i, e_i\rangle, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.6}$$

Од користи у даљем раду ће нам бити и следећа

Теорема 4.8. ***Нека је*** $f(t)$ ***не-нула, ненегативна оператор монотона функција на*** $[0, \infty)$***. Тада је инверзна функција од*** $tf(t)$ ***оператор монотона.***

△ Нека је $g(t)$ инверзна функција од $tf(t)$. Према Теореми 4.7 оператор монотона функција $f(t)$ има интегралну репрезентацију

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \frac{st}{s+t} d\mu(s),$$

где су $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Претпоставимо прво да је $\mu(\cdot)$ мера са компактним носачем. Можемо сматрати да је $\int_0^\infty s\, d\mu(s) < +\infty$ и $\int_0^\infty \frac{st}{s+t} s\, d\mu(s) < +\infty$ за све $t \geqslant 0$. Нека је $\gamma \overset{\text{деф}}{=} \alpha + \int_0^\infty s\, d\mu(s)$ и $h(t) \overset{\text{деф}}{=} \int_0^\infty \frac{st}{s+t} s\, d\mu(s)$. Тада је $\gamma \geqslant 0$, $h(t)$ је оператор монотона и важи

$$tf(t) = \gamma t + \beta t^2 - h(t).$$

Зато је инверзна функција $g(t)$ јединствено одређена релацијом

$$\gamma g(t) + \beta g(t)^2 = h(g(t)) + t. \tag{4.7}$$

Приметити да γ и β не могу истовремено бити нула.

Сада, ставимо да је $g_0(t) \overset{\text{деф}}{=} 0$ и дефинишимо рекурентно низ функција $\{g_n(t)\}$ релацијом

$$\gamma g_{n+1}(t) + \beta g_{n+1}(t)^2 = h(g_n(t)) + t, \tag{4.8}$$

што је могуће с обзиром да су $\gamma, \beta \geqslant 0$ и при томе је један од њих строго позитиван. Претпоставимо даље да је $g_n(t)$ оператор монотона и покажимо да је тада и $g_{n+1}(t)$ оператор монотона функција. Наиме, из (4.8) следи

$$g_{n+1}(t) = \begin{cases} \dfrac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\beta(h(g_n(t)) + t)}}{2\beta}, & \beta > 0 \\ \dfrac{h(g_n(t)) + t}{\gamma}, & \beta = 0. \end{cases}$$

Како је композиција функције $h(g_n(t))$ и функције $t \mapsto t^{1/2}$ оператор монотона, то је и $g_{n+1}(t)$ оператор монотона функција. Слично, ако претпоставимо да је $g_n(t) \leqslant g(t)$, тиме је и $h(g_n(t)) \leqslant h(g(t))$ јер је h оператор монотона функција (а тиме и монотоно неопадајућа), па нам (4.7) и (4.8) дају $g_{n+1}(t) \leqslant g(t)$.

Поново, ако претпоставимо да је $g_{n-1}(t) \leqslant g_n(t)$, из (4.8) и одговарајуће релације закључујемо да важи $g_n(t) \leqslant g_{n+1}(t)$. Из претходног добијамо да низ $\{g_n(t)\}$ конвергира кад $n \to \infty$, док према (4.7) и (4.8) тај лимес мора бити баш $g(t)$. Зато је и $g(t)$ оператор монотона функција, као лимес оператор монотоних фунцкија.

Коначно, у општем случају дефинишимо

$$f_n(t) = \alpha + \beta t + \int_{1/n}^{n} \frac{st}{s+t} d\mu(s), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тада је $f_n(t)$ оператор монотона и конвергира растуће ка $f(t)$ кад $n \to \infty$. Зато је $f_n(t) > 0$ за довољно велико n. Како репрезентациона мера од $f_n(t)$ има компактан носач, то је према претходном инверзна функција $d_n(t)$ од $tf_n(t)$ оператор монотона, а како $d_n(t)$ конвергира растуће ка $g(t)$ кад $n \to \infty$, то је и $g(t)$ оператор монотона функција. □

ТЕОРЕМА 4.9. ***За компактне операторе*** $A, B \geqslant 0$ ***важи следеће***

а) ***За сваку ненегативну оператор монотону функцију*** $f(t)$ ***на*** $[0, \infty)$ ***и сваку унитарну инваријантну норму*** $|||\cdot|||$ ***важи***

$$|||f(A+B)||| \leqslant |||f(A) + f(B)|||.$$

б) ***За сваку ненегативну монотоно неопадајућу функцију*** $g(t)$ ***на*** $[0, \infty)$ ***код које је*** $g(0) = 0$ ***и*** $g(\infty) = \infty$***, чија је инверзна функција оператор монотона, и за сваку унитарно инваријантну норму*** $|||\cdot|||$ ***важи***

$$|||g(A) + g(B)||| \leqslant |||g(A+B)|||.$$

△ Доказ наведене теореме почињемо специјалним случајем $f(t) = \frac{t}{1+t}$ и $|||\cdot||| = \|\cdot\|_{(k)}$. Дакле, потребно је доказати да за компактне операторе $A, B \geqslant 0$ важи

$$\left\|(A+B)(A+B+I)^{-1}\right\|_{(k)} \leqslant \left\|A(A+I)^{-1} + B(B+I)^{-1}\right\|_{(k)}. \tag{4.9}$$

Како су A и B позитивни оператори, то је коректно дефинисан оператор $C \overset{\text{деф}}{=} (A + B + I)^{-\frac{1}{2}}$, који ће исто бити позитиван оператор. Приметимо још да важи разлагање $(A+B)(A+B+I)^{-1} = CAC + CBC$. Нека су e_i сопствени вектори који одговарају сопственим вредностима $\lambda_i = \lambda_i(A+B)$, $i = 1, \ldots, \dim \mathcal{H}$, компактног позитивног оператора $A+B$. Тада су e_i и сопствени вектори сопствених вредности $\lambda_i(1+\lambda_i)^{-1}$ оператора $(A+B)(A+B+I)^{-1}$, те према Ky Fan-овом принципу 1.20 за $k = 1, \ldots, \dim \mathcal{H}$ имамо

$$\begin{aligned}\left\|(A+B)(A+B+I)^{-1}\right\|_{(k)} &= \sum_{i=1}^{k} \left\langle (A+B)(A+B+I)^{-1} e_i, e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \langle CACe_i, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{k} \langle CBCe_i, e_i\rangle \,.\end{aligned}$$

Зато, да би доказали тражену неједнакост довољно је показати да важи

$$\sum_{i=1}^{k} \langle CACe_i, e_i\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left\langle A(A+I)^{-1} e_i, e_i \right\rangle, \tag{4.10}$$

односно аналогна оцена за оператор B, јер из те две неједнакости добијамо да је лева страна (4.9) мања до једнака од

$$\sum_{i=1}^{k} \left\langle (A(A+I)^{-1} + B(B+I)^{-1}) e_i, e_i \right\rangle \leqslant \left\|A(A+I)^{-1} + B(B+I)^{-1}\right\|_{(k)}.$$

Покажимо да важи (4.10). Прво, леву страну те неједнакости можемо записати као $\operatorname{tr}(P_k CACP_k) = \left\|A^{1/2}CP_k\right\|_2^2$, где је P_k ортопројектор над простор разапет сопственим векторима $\{e_1, \ldots, e_k\}$, односно $P_k = \sum_{i=1}^{k} e_i \otimes e_i^\star$. Тада за произвољну ортонормирану базу $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ простора $\mathcal{H}$ важи

$$\begin{aligned}\left\|A^{1/2}CP_k\right\|_2^2 &= \left\|P_k A^{1/2}CP_k\right\|_2^2 + \left\|(I-P_k)A^{1/2}CP_k\right\|_2^2 \\ &= \left\|(P_k A^{1/2}CP_k)^*\right\|_2^2 + \sum_{i,j=1}^{\infty} \left|\langle (I-P_k)A^{1/2}CP_k f_i, f_j\rangle\right|^2 \\ &= \left\|P_k CA^{1/2}P_k\right\|_2^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{\infty} (1+\lambda_i)^{-1} \left|\langle A^{1/2} f_i, f_j\rangle\right|^2 \\ &\leqslant \left\|P_k CA^{1/2}P_k\right\|_2^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{\infty} (1+\lambda_j)^{-1} \left|\langle A^{1/2} f_i, f_j\rangle\right|^2 \\ &= \left\|P_k CA^{1/2}P_k\right\|_2^2 + \sum_{i,j=1}^{\infty} \left|\langle (I-P_k)CA^{1/2}P_k f_i, f_j\rangle\right|^2 \\ &= \left\|P_k CA^{1/2}P_k\right\|_2^2 + \left\|(I-P_k)CA^{1/2}P_k\right\|_2^2 \\ &= \left\|CA^{1/2}P_k\right\|_2 = \operatorname{tr}(P_k A^{1/2}C^2A^{1/2}P_k) \\ &\leqslant \operatorname{tr}(P_k A^{1/2}(A+I)^{-1}A^{1/2}P_k) = \operatorname{tr}(P_k A(A+I)^{-1}P_k) = \sum_{i=1}^{k} \left\langle A(A+I)^{-1} e_i, e_i \right\rangle,\end{aligned}$$

где прву неједнакост добијамо из $\lambda_i \geqslant \lambda_j \geqslant 0$ за $1 \leqslant i \leqslant k$ и $j \geqslant k+1$, јер је тада $(1+\lambda_i)^{-1} \leqslant (1+\lambda_j)^{-1}$, док смо за другу искористили да је $C^2 = (A+B+I)^{-1} \leqslant$

$(A+I)^{-1}$. Тиме је показана неједнакост (4.10), а самим тим и (4.9). Тада нам Ky Fan-ово доминационо својство 2.11 даје крај доказа, у овом специјалном случају.

За доказ општег случаја приметимо да се из (4.9) лако изводи да за свако $s>0$ заменом A и B са $\frac{A}{s}$ и $\frac{B}{s}$, редом, важи

$$\left\|s(A+B)(A+B+sI)^{-1}\right\|_{(k)} \leqslant \left\|sA(A+sI)^{-1}+sB(B+sI)^{-1}\right\|_{(k)}.$$

Тада према интегралној репрезентацији (4.5) добијамо

$$\sum_{i=1}^{k}\langle f(A+B)e_i,e_i\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{k}\langle (f(A)+f(B))e_i,e_i\rangle\,,$$

што нам после примене (4.6) на $A+B$ уместо A даје

$$\|f(A+B)\|_{(k)} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\langle (f(A)+f(B))e_i,e_i\rangle\,,$$

а одатле на основу Ky Fan-овог принципа 1.20 добијамо

$$\|f(A+B)\|_{(k)} \leqslant \|f(A)+f(B)\|_{(k)}\,.$$

Тада а) следи на основу Ky-Fan-овог доминантног својства 2.11.

Да бисмо показали б) применимо а) на инверзну функцју $f(t)$ од $g(t)$, која је оператор монотона, $g(A),g(B)\geqslant 0$ и Ky-Fan-ову норму, те добијамо

$$\|f(g(A+B))\|_{(k)} = \|A+B\|_{(k)} = \|f(g(A))+f(g(B))\|_{(k)} \geqslant \|f(g(A)+g(B))\|_{(k)}\,,$$

односно $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B)\geqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(f(g(A)+g(B)))$. Тада нам Лема 1.17, с обзиром да је $g(t)$ неопадајућа и конвексна функција, даје

$$\begin{aligned}\|g(A+B)\|_{(k)} &= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(g(A+B)) = \sum_{i=1}^{k}g(\lambda_i(A+B)) \geqslant \sum_{i=1}^{k}g\big(\lambda_i(f(g(A)+g(B)))\big)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\big(g(f(g(A)+g(B)))\big) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(g(A)+g(B)) = \|g(A)+g(B)\|_{(k)}\,,\end{aligned}$$

а одатле нам Ky-Fan доминационо својство 2.11 даје

$$\|g(A+B)\| \geqslant \|g(A)+g(B)\|\,. \qquad \square$$

ПОСЛЕДИЦА 4.10. ***Нека је $g(t)$ ненегативна функција на $[0,\infty)$ таква да је $g(0)=0$. Ако је $g(t)$ оператор конвексна функција тада важи***

$$\|g(A)+g(B)\| \leqslant \|g(A+B)\|\,,$$

за све компактне операторе $A,B\geqslant 0$ и све унитарно инваријантне норме $\|\cdot\|$.

△ Према Теореми 4.5 знамо да је $h(t)$ на $[0,\infty)$ са $h(0)=0$ оператор конвексна ако и само ако је $h(t)/t$ оператор монотона. Зато можемо претпоставити да је $g(t)=tf(t)$ где је $f(t)$ оператор монотона функција. Према Теореми 4.8 знамо да је инверзна функција од $tf(t)$ оператор монотона, те нам примена другог дела Теореме 4.9 даје жељену неједнакост. □

Такође, није тешко проверити да доказ Теореме 4.9 пролази и за произвољне n-торке позитивних компактних опетора, односно да важи

Теорема 4.11. ***Нека су** $A_1,\ldots,A_n \geqslant 0$ **компактни оператори. Тада за сваку унитарно инваријантну норму** $|||\cdot|||$ **важи***

а)

$$\Big|\Big|\Big|\sum_{i=1}^{n} f(A_i)\Big|\Big|\Big| \geqslant \Big|\Big|\Big|f\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big)\Big|\Big|\Big|,$$

***где је** $f(t)$ **ненегативна оператор монотона функција на** $[0,\infty)$.*

б)

$$\Big|\Big|\Big|\sum_{i=1}^{n} g(A_i)\Big|\Big|\Big| \leqslant \Big|\Big|\Big|g\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big)\Big|\Big|\Big|,$$

где је** $g(t)$ **ненегативна растућа функција на** $[0,\infty)$ **таква да је** $g(0)=0$, $g(\infty)=\infty$ **и чији инверз је оператор монотона функција.

Самим тим, важиће и уопштење Последице 4.10, то јест

Последица 4.12. ***Нека је** $g(t)$ **ненегативна функција на** $[0,\infty)$ **таква да је** $g(0)=0$. **Ако је** $g(t)$ **оператор конвексна функција онда важи***

$$\Big|\Big|\Big|\sum_{i=1}^{n} g(A_i)\Big|\Big|\Big| \leqslant \Big|\Big|\Big|g\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big)\Big|\Big|\Big|,$$

***за све** n-**торке компактних оператора** $A_1,\ldots,A_n \geqslant 0$ **и све унитарно инваријантне норме** $|||\cdot|||$.*

Као што смо пре видели, свака оператор конвексна (конкавна) функција је уједно и ковексна (конкавна). Оно што је занимљиво је да се претходне теореме могу уопштити на конвексне, односно конкавне, функције.

Теорема 4.13. ***Нека су** $A,B \geqslant 0$ **компактни оператори и** g **ненегативна конвексна функција на** $[0,\infty)$ **таква да је** $g(0)=0$. **Тада за све унитарно инваријантне норме** $|||\cdot|||$ **важи***

$$|||g(A)+g(B)||| \leqslant |||g(A+B)|||\,.$$

△ Према Ky Fan-овом доминационом својству 2.11 теорему је довољно доказати за случај Ky Fan-ових норми $\|\cdot\|_{(k)}$. Претпоставимо да функције g_1 и g_2 задовољавају

Теорему 4.13. Користећи неједнакост троугла за Ky Fan-ове норме и чињеницу да су функције g_1 и g_2 неопадајуће то добијамо

$$\begin{aligned}\|(g_1+g_2)(A)+(g_1+g_2)(B)\|_{(k)} &\leqslant \|g_1(A)+g_1(B)\|_{(k)}+\|g_2(A)+g_2(B)\|_{(k)}\\ &\leqslant \|g_1(A+B)\|_{(k)}+\|g_2(A+B)\|_{(k)}=\sum_{i=1}^{k}\lambda(g_1(A+B))+\sum_{i=1}^{k}\lambda(g_2(A+B))\\ &=\sum_{i=1}^{k}g_1(\lambda(A+B))+\sum_{i=1}^{k}g_2(\lambda(A+B))=\sum_{i=1}^{k}(g_1+g_2)(\lambda_i(A+B))\\ &=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i((g_1+g_2)(A+B))=|\!|\!|(g_1+g_2)(A+B)|\!|\!|\,,\end{aligned}$$

те скуп свих функција које задовољавају Теорему 4.13 представља конвексан конус. Такође, тај скуп је затворен за тачка по тачка конвергенцију. Приметимо да се свака ненегативна конвексна функција g на $[0,\infty)$ за коју је $g(0)=0$ може представити као тачка по тачка лимес растућег низа функција облика $\sum_{l=1}^{m} c_l\gamma_{a_l}(t)$ где су $c_l, a_l>0$, где γ_a за $a>0$ представља функцију дату са $\gamma_a(t)\overset{\text{деф}}{=}\max\{t-a,0\}=\frac{1}{2}\big(|t-a|+(t-a)\big)$. Зато је довољно показати тврдење теореме за такве функције, тј. за γ_a где је $a>0$. Да бисмо то урадили, дефинишимо за $a,r>0$ функцију

$$h_{a,r}(t)=\frac{1}{2}\big(\sqrt{(t-a)^2+r}+t-\sqrt{a^2+r}\big),\quad t\in[0,\infty),$$

која је растућа и бијективна функција на $[0,\infty)$ и чији је инверз, после малог рачуна, дат са

$$t-\frac{r/2}{2t+\sqrt{a^2+r}-a}+\frac{\sqrt{a^2+r}+a}{2}.$$

Претходна функција је оператор конкавна с обзиром да је $-\frac{1}{t}$ оператор монотона према Ставу 4.1. Самим тим нам део б) Теореме 4.9 даје да тврђење теореме важи за функције $h_{a,r}$. Како, за $r\to 0$, $h_{a,r}$ униформно конвергира ка γ_a, то тврђење теореме важи и за γ_a, што је и требало показати. □

Користећи овај резултат показујемо и одговарајуће аналогно тврђење за конкавне функције. Наиме важи

Теорема 4.14. ***Нека су*** $A,B\geqslant 0$ ***компактни оператори и нека је*** f ***ненегативна конкавна функција на*** $[0,\infty)$***. Тада за све унитарно инваријантне норме*** $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ ***важи***

$$|\!|\!|f(A+B)|\!|\!|\leqslant|\!|\!|f(A)+f(B)|\!|\!|\,.$$

△ Поново, као и пре, довољно је доказати теорему за Ky Fan-ове норме $\|\cdot\|_{(k)}$. Приметимо и да је теорему довољно показати у случају кад је $f(0)=0$, јер општи случај следи из тог случаја примењеног на $f(t)-f(0)$. Зато, претпоставимо да је $f(0)=0$. Како је f ненегативна и неопадајућа, то ако са $\lambda_i(A+B)$, $i=1,\ldots,k$, обележимо k највећих сопствених вредности од $A+B$, а са e_i, $i=1,\ldots,k$ њима одговарајуће сопствене векторе, видимо да важи

$$\|f(A+B)\|_{(k)}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(f(A+B))=\sum_{i=1}^{k}\langle f(A+B)e_i,e_i\rangle=\operatorname{tr}(P_kf(A+B)P_k),$$

где је P_k ортогонална пројекција на простор разапет сопственим векторима $\{e_1, \dots, e_k\}$, односно $P_k = \sum_{i=1}^k e_i \otimes e_i^\star$. Зато је довољно показати, према Ky Fan-овом својству 1.20, да је испуњена неједнакост

$$\operatorname{tr}(P_k f(A+B)P_k) \leqslant \operatorname{tr}(P_k(f(A)+f(B))P_k,$$

а то је еквивалетно са показивањем да неједнакост

$$\operatorname{tr}(P_k(g(A)+g(B))P_k) \leqslant \operatorname{tr}(P_k g(A+B)P_k) \tag{4.11}$$

важи за ненегативне конвексне функције g на $[0,\infty)$ за које је $g(0)=0$. Свака таква функција може се апроксимирати линеарним комбинацијама облика $g(t) = \lambda t + h(t)$, за неко $\lambda < 0$ и неку ненегативну конвексну функцију h такву да је $h(0)=0$. Зато је (4.11) довољно показати за такве h. Наиме, имамо

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(P_k(h(A)+h(B))P_k) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i(P_k(h(A)+h(B))P_k) \leqslant \sum_{i=1}^k \lambda_i(h(A)+h(B))\\ &\leqslant \sum_{i=1}^k \lambda_i(h(A+B)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(P_k h(A+B)P_k) = \operatorname{tr}(P_k h(A+B)P_k),\end{aligned}$$

где друга неједнакост следи на основу претходне Теореме 4.13, док другу једнакост добијамо јер је h неопадајућа, те је P_k ортогонална пројекција и на простор разапетим са k сопствених вектора придружених првих k највећим сопственим вредностима од $h(A+B)$.

Тиме смо показали да важи (4.11) за h, а самим тим према претходним и за функцију g, чиме је показано тврђење теореме. □

Слично као и пре, инспекцијом доказа претходне две теореме није тешко проверити да важе одговарајуће теореме и за произвољне n-торке оператора. Односно, важи

Теорема 4.15. ***Нека су*** $A_1, \dots, A_n \geqslant 0$ ***компактни оператори и*** g ***ненегативна конвексна функција на*** $[0,\infty)$ ***таква да је*** $g(0)=0$***. Тада за све унитарно инваријантне норме*** $|||\cdot|||$ ***важи***

$$\Big|\Big|\Big|\sum_{i=1}^n g(A_i)\Big|\Big|\Big| \leqslant \Big|\Big|\Big|g\Big(\sum_{i=1}^n A_i\Big)\Big|\Big|\Big|.$$

Теорема 4.16. ***Нека су*** $A_1, \dots, A_n \geqslant 0$ ***компактни оператори и*** f ***ненегативна конкавна функција на*** $[0,\infty)$***. Тада за све унитарно инваријантне норме*** $|||\cdot|||$ ***важи***

$$\Big|\Big|\Big|f\Big(\sum_{i=1}^n A_i\Big)\Big|\Big|\Big| \leqslant \Big|\Big|\Big|\sum_{i=1}^n f(A_i)\Big|\Big|\Big|.$$

2 Clarkson-McCarthy-јеве неједнакости за n-торке оператора

У овом делу ћемо размотрити такозване Clarkson-McCarthy неједнакости за унитарно инваријантне норме. Наиме, Clarkson је у свом раду [C], између осталог, доказао следеће познате неједнакости за $\boldsymbol{\ell}^p$ и $\boldsymbol{L}^p$ просторе, где $x, y \in \boldsymbol{\ell}^p$ и $\boldsymbol{L}^p$,

$$2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) \leqslant \|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \leqslant 2^{p-1}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) \quad \text{за } 2 \leqslant p < +\infty,$$

односно

$$2^{p-1}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) \leqslant \|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \leqslant 2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) \quad \text{за } 1 < p \leqslant 2.$$

Са друге стране, McCarthy је у [M] (видети и [Si]) доказао аналогне некомутативне неједнакости за Schatten-ове $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ идеале, тј. да за $A, B \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ важи

$$2(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p) \leqslant \|A+B\|_p^p + \|A-B\|_p^p \leqslant 2^{p-1}(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p) \quad \text{за } 2 \leqslant p < +\infty, \tag{4.12}$$

односно

$$2^{p-1}(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p) \leqslant \|A+B\|_p^p + \|A-B\|_p^p \leqslant 2(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p) \quad \text{за } 0 < p \leqslant 2. \tag{4.13}$$

Претходне неједнакости, које ћемо звати Clarkson-McCarthy-јевим неједнакостима, имају важну улогу у теорији оператора и математичкој физици (видети нпр. [Si]). Овде ћемо приказати одговарајућа уопштења на унитарно инваријантне норме. Да бисмо то урадили биће нам потребна следећа лема која је последица спектралне теореме за самоадјунговане операторе.

ЛЕМА 4.17. ***Нека је A позитиван оператор из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тада важи***
1° ***Ако је f конвексна функција на $[0,\infty)$, онда је***

$$f(\langle Ax, x\rangle) \leqslant \langle f(A)x, x\rangle$$

за сваки јединични вектор x из $\mathcal{H}$.
2° ***Ако је g конкавна функција на $[0,\infty)$, онда је***

$$\langle g(A)x, x\rangle \leqslant g(\langle Ax, x\rangle)$$

за сваки јединични вектор x из $\mathcal{H}$.

△ На основу спектралне теореме за самоадјунговане операторе оператор A има репрезентацију $A = \int_{\sigma(A)} t\, dE(t)$. Тада је

$$f(\langle Ax, x\rangle) = f\Big(\int_{\sigma(A)} t\, d\mu_x(t)\Big) \leqslant \int_{\sigma(A)} f(t)\, d\mu_x(t) = \langle f(A)x, x\rangle,$$

где неједнакост добијамо на основу Jensen-ове неједнакости, јер је μ_x једна вероватносна мера (присетимо се да је $\|x\| = 1$). Тиме смо показали 1°, док 2° следи из 1° јер је $-g$ конвексна функција на $[0,\infty)$. □

Теорема 4.18. ***Нека је*** $f\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$ ***конвексна функција,*** $f(0)=0$, $A_n \geqslant 0$ ***компактни оператори,*** $\alpha_n > 0$ ***за*** $n=1,\dots,N$ ***и*** $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = 1$***. Тада важи***

$$\Big|\Big|\Big|f\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n A_n\Big)\Big|\Big|\Big| \leqslant \Big|\Big|\Big|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f(A_n)\Big|\Big|\Big|$$

за све унитарно инваријантне норме $|||\cdot|||$***.***

△ Према Ky Fan-овом доминационом својству 2.11 довољно је показати да неједнакост важи за Ky Fan-ове норме, односно да је

$$\Big\|f\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n A_n\Big)\Big\|_{(k)} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f(A_n)\Big\|_{(k)}.$$

Ако кренемо од десне стране неједнакости и примењујући Ky Fan-ов принцип 1.20 на првих N сопствених вредности λ_i (уређених по опадању вредности) од $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n A_n$, и њима одговарајућих сопствених вектора e_i, добијамо

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f(A_n)\Big\|_{(k)} &\geqslant \sum_{i=1}^{k}\Big\langle\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f(A_n)e_i, e_i\Big\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left\langle f(A_n)e_n, e_n\right\rangle\\
&\geqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f\left(\langle A_n e_n, e_n\rangle\right) \geqslant \sum_{i=1}^{k} f\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left\langle A_n e_n, e_n\right\rangle\Big) \qquad (4.14)\\
&= \sum_{i=1}^{k} f\Big(\Big\langle\sum_{n=1}^{N}\alpha_n A_n e_n, e_n\Big\rangle\Big) = \sum_{i=1}^{k} f\Big(\lambda_i\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n A_n\Big)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big(f\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n A_n\Big)\Big) = \Big\|f\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n A_n\Big)\Big\|_{(k)},
\end{aligned}$$

где прва неједнакост у (4.14) следи на основу 1° Леме 4.17, док другу неједнакост у (4.14) добијамо на основу класичне Jensen-ове неједнакости за суме . □
Коментар: Када је $\dim\mathcal{H} < +\infty$ тада се услов компактности оператора, као и услов $f(0)=0$, могу изоставити.

На исти начин се показује да важи

Теорема 4.19. ***Нека је*** $f\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$ ***конкавна функција,*** $A_n \geqslant 0$ ***компактни оператори,*** $\alpha_n > 0$ ***за*** $n=1,\dots,N$ ***и*** $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = 1$***. Тада важи***

$$\Big|\Big|\Big|f\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n A_n\Big)\Big|\Big|\Big| \geqslant \Big|\Big|\Big|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f(A_n)\Big|\Big|\Big|$$

за све унитарно инваријантне норме $|||\cdot|||$***.***

Теорема 4.20. ***Нека су*** $A_1,\dots,A_n\in\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$***,*** $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ***позитивни реални бројеви такви да је*** $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j = 1$ ***и нека је*** f ***ненегативна функција на*** $[0,\infty)$ ***таква да је*** $f(0)=0$ ***и*** $g(t)=f(\sqrt{t})$ ***је конвексна на*** $[0,\infty)$***. Тада важи***

$$\Big|\Big|\Big|f\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j\Big|\Big) + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} f\left(\sqrt{\alpha_j\alpha_k}\,|A_j - A_k|\right)\Big|\Big|\Big| \leqslant \Big|\Big|\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f\left(|A_j|\right)\Big|\Big|\Big|$$

за сваку унитарно инваријантну норму $|||\cdot|||$***.***

△ Следећи идентитет

$$\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j\Big|^2 + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\alpha_j\alpha_k\,|A_j - A_k|^2 = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,|A_j|^2, \tag{4.15}$$

који се директно проверава, представља кључни елемент доказа. Заиста, сада имамо

$$\begin{aligned}\Big\|\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f\left(|A_j|\right)\Big\|\Big| &= \Big\|\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g\big(|A_j|^2\big)\Big\|\Big| \geqslant \Big\|\Big|g\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,|A_j|^2\Big)\Big\|\Big| &(4.16)\\ &= \Big\|\Big|g\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j\Big|^2 + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\alpha_j\alpha_k\,|A_j - A_k|^2\Big)\Big\|\Big| &(4.17)\\ &\geqslant \Big\|\Big|g\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j\Big|^2\Big) + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} g\big(\alpha_j\alpha_k\,|A_j - A_k|^2\big)\Big\|\Big| &(4.18)\\ &= \Big\|\Big|f\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j\Big|\Big) + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} f\left(\sqrt{\alpha_j\alpha_k}\,|A_j - A_k|\right)\Big\|\Big|, &\end{aligned}$$

где неједнакост у (4.16) добијамо на основу Теореме 4.18, (4.17) следи из (4.15), док (4.18) добијамо помоћу Теореме 4.15. □

Користећи идеје претходног доказа, уз помоћ Теорема 4.19 и 4.16 добијамо да важи

Теорема 4.21. ***Нека су*** $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$***,*** $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ***позитивни реални бројеви такви да је*** $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j = 1$ ***и нека је*** f ***ненегативна функција на*** $[0,\infty)$ ***таква да је*** $g(t) = f(\sqrt{t})$ ***конкавна на*** $[0,\infty)$***. Тада важи***

$$\Big\|\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f\left(|A_j|\right)\Big\|\Big| \leqslant \Big\|\Big|f\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j\Big|\Big) + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} f\left(\sqrt{\alpha_j\alpha_k}\,|A_j - A_k|\right)\Big\|\Big|$$

за све унитарно инваријантну норму $|||\cdot|||$***.***

Специјално, ако је $f(t) = t^p$ тада је $g(t) = f(\sqrt{t}) = t^{p/2}$ конвексна функција за $2 \leqslant p < +\infty$, односно конкавна за $0 < p \leqslant 2$, те нам претходне две теореме дају

Последица 4.22. ***Нека су*** $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ***и*** $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ***позитивни реални бројеви такви да је*** $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j = 1$***. Тада за све унитарно инваријантне норме*** $|||\cdot|||$ ***важи***

$$\Big\|\Big|\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j\Big|^p + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(\alpha_j\alpha_k)^{p/2}\,|A_j - A_k|^p\Big\|\Big| \leqslant \Big\|\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,|A_j|^p\Big\|\Big| \tag{4.19}$$

за $2 \leqslant p < +\infty$***, односно***

$$\Big\|\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,|A_j|^p\Big\|\Big| \leqslant \Big\|\Big|\Big|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j\Big|^p + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(\alpha_j\alpha_k)^{p/2}\,|A_j - A_k|^p\Big\|\Big| \tag{4.20}$$

за $0 < p \leqslant 2$***.***

Уколико у претходну последицу у неједнакости (4.19) ставимо да је $n = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, тада за операторе $A, B \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ добијамо

$$\left|\!\left|\!\left| |A+B|^p + |A-B|^p \right|\!\right|\!\right| \leqslant 2^{p-1} \left|\!\left|\!\left| |A|^p + |B|^p \right|\!\right|\!\right| \quad \text{за } 2 \leqslant p < +\infty,$$

док уколико претходну неједнакост применимо на операторе $A+B$ и $A-B$ добијамо

$$2\left|\!\left|\!\left| |A|^p + |B|^p \right|\!\right|\!\right| \leqslant \left|\!\left|\!\left| |A+B|^p + |A-B|^p \right|\!\right|\!\right| \quad \text{за } 2 \leqslant p < +\infty.$$

Дакле, видимо да важи неједнакост

$$2\left|\!\left|\!\left| |A|^p + |B|^p \right|\!\right|\!\right| \leqslant \left|\!\left|\!\left| |A+B|^p + |A-B|^p \right|\!\right|\!\right| \leqslant 2^{p-1} \left|\!\left|\!\left| |A|^p + |B|^p \right|\!\right|\!\right| \quad \text{за } 2 \leqslant p < +\infty. \tag{4.21}$$

Истим поступком из (4.20) добијамо да за операторе $A, B \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ важи

$$2^{p-1}\left|\!\left|\!\left| |A|^p + |B|^p \right|\!\right|\!\right| \leqslant \left|\!\left|\!\left| |A+B|^p + |A-B|^p \right|\!\right|\!\right| \leqslant 2 \left|\!\left|\!\left| |A|^p + |B|^p \right|\!\right|\!\right| \quad \text{за } 0 < p \leqslant 2. \tag{4.22}$$

Неједнакости (4.21) и (4.22) представљају некомутативне Clarkson-McCarthy-јеве неједнакости за унитарно инваријантне норме (погледати и [HK02]).

Примењујући (4.21) и (4.22) сада на нуклеарну норму $\|\cdot\|_1$, тј. на специјалан случај унитарно инваријантне норме, добијамо

$$2\big(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\big) \leqslant \|A+B\|_p^p + \|A-B\|_p^p \leqslant 2^{p-1}\big(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\big) \quad \text{за } 2 \leqslant p < +\infty,$$

односно

$$2^{p-1}\big(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\big) \leqslant \|A+B\|_p^p + \|A-B\|_p^p \leqslant 2\big(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\big) \quad \text{за } 0 < p \leqslant 2,$$

чиме смо добили Clarkson-McCarthy-јеве неједнакости за Schatten-ове p норме.

Општије, Последица 4.22 примењена на нуклеарну норм $\|\cdot\|_1$ нам даје

Последица 4.23. ***Нека су*** $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ***и*** $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ***позитивни реални бројеви такви да је*** $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$. ***Тада важи***

$$\Big\|\sum_{j=1}^n \alpha_j A_j\Big\|_p^p + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (\alpha_j\alpha_k)^{p/2}\,\|A_j - A_k\|_p^p \leqslant \sum_{j=1}^n \alpha_j\,\|A_j\|_p^p$$

за $2 \leqslant p < +\infty$, ***односно***

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j\,\|A_j\|_p^p \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^n \alpha_j A_j\Big\|_p^p + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (\alpha_j\alpha_k)^{p/2}\,\|A_j - A_k\|_p^p$$

за $0 < p \leqslant 2$.
Специјално, избором $\alpha_j = \frac{1}{n}$ ***за*** $1 \leqslant j \leqslant n$ ***добијамо***

$$\Big\|\sum_{j=1}^n A_j\Big\|_p^p + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \|A_j - A_k\|_p^p \leqslant n^{p-1}\sum_{j=1}^n \|A_j\|_p^p$$

за $2 \leqslant p < +\infty$, ***односно***

$$n^{p-1}\sum_{j=1}^n \|A_j\|_p^p \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^n A_j\Big\|_p^p + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \|A_j - A_k\|_p^p$$

за $0 < p \leqslant 2$.

Обележимо сада са $\omega_1, \dots, \omega_n$ n-те корене јединице, односно $\omega_j = e^{2\pi ij/n}$, $j = 1, \dots, n$. Тада имамо

Теорема 4.24. ***Нека су*** $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ***и нека је*** f ***ненегативна функција таква да је*** $f(0) = 0$ ***и*** $g(t) = f(\sqrt{t})$ ***конвексна на*** $[0, \infty)$***. Тада важи***

$$\left\|\left|\sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|\right)\right\|\right| \leqslant \left\|\left|f\left(\left(\sum_{j=1}^n |A_j|^2\right)^{1/2}\right)\right\|\right| \leqslant \frac{1}{n}\left\|\left|\sum_{k=1}^n f\left(\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|\right)\right\|\right| \tag{4.23}$$

за све унитарно инваријантне норме $|||\cdot|||$***.***

$\triangle$ Као и у доказу Теореме 4.20, идентитет

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|^2 = \sum_{j=1}^n |A_j|^2 \tag{4.24}$$

представља кључни корак у доказивању дате теореме. Заиста, тада имамо

$$\begin{aligned}\left\|\left|\sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|\right)\right\|\right| &= \left\|\left|\sum_{k=1}^n g\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|^2\right)\right\|\right| \\ &\leqslant \left\|\left|g\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|^2\right)\right\|\right| = \left\|\left|g\left(\sum_{j=1}^n |A_j|^2\right)\right\|\right| = \left\|\left|f\left(\left(\sum_{j=1}^n |A_j|^2\right)^{1/2}\right)\right\|\right|,\end{aligned} \tag{4.25}$$

где неједнакост у (4.25) следи на основу Теореме 4.15, а прву једнакост у (4.25) добијамо на основу (4.24). Тиме смо добили прву неједнакост у датој (4.23). Другу неједнакост у (4.23) добијамо као

$$\left\|\left|f\left(\left(\sum_{j=1}^n |A_j|^2\right)^{1/2}\right)\right\|\right| = \left\|\left|f\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|^2\right)\right)^{1/2}\right\|\right| = \tag{4.26}$$

$$\left\|\left|g\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|^2\right)\right\|\right| \leqslant \left\|\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g\left(\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|^2\right)\right\|\right| = \frac{1}{n}\left\|\left|\sum_{k=1}^n f\left(\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|\right)\right\|\right|, \tag{4.27}$$

где (4.26) следи на основу (4.24), док дату неједнакост у (4.26) добијамо на основу Теореме 4.18. $\square$

Слично као и пре, користећи (4.24), Теореме 4.19 и 4.16, може се показати да важи

Теорема 4.25. ***Нека су*** $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ***и нека је*** f ***ненегативна функција таква да је*** $g(t) = f(\sqrt{t})$ ***конкавна на*** $[0, \infty)$***. Тада важи***

$$\frac{1}{n}\left\|\left|\sum_{k=1}^n f\left(\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|\right)\right\|\right| \leqslant \left\|\left|f\left(\left(\sum_{j=1}^n |A_j|^2\right)^{1/2}\right)\right\|\right| \leqslant \left\|\left|\sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{j=1}^n \omega_j^k A_j\right|\right)\right\|\right|$$

за све унитарно инваријантне норме $|||\cdot|||$***.***

Као и пре, ако је $f(t) = t^p$ тада је $g(t) = t^{p/2}$ конвексна функција за $2 \leqslant p < +\infty$, односно конкавна за $0 < p \leqslant 2$, те нам претходне две теореме дају

Последица 4.26. ***Нека су*** $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. ***Тада за сваку унитарно инваријантну норму*** $|||\cdot|||$ ***важи***

$$n^{-p/2}\Big|\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\omega_j^k A_j\Big|^p\Big|\Big|\Big| \leqslant \Big|\Big|\Big|\Big(\sum_{j=1}^{n}|A_j|^2\Big)^{p/2}\Big|\Big|\Big| \leqslant \frac{1}{n}\Big|\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\omega_j^k A_j\Big|^p\Big|\Big|\Big| \tag{4.28}$$

за $2 \leqslant p < +\infty$, ***односно***

$$\frac{1}{n}\Big|\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\omega_j^k A_j\Big|^p\Big|\Big|\Big| \leqslant \Big|\Big|\Big|\Big(\sum_{j=1}^{n}|A_j|^2\Big)^{p/2}\Big|\Big|\Big| \leqslant n^{-p/2}\Big|\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\omega_j^k A_j\Big|^p\Big|\Big|\Big| \tag{4.29}$$

за $0 < p \leqslant 2$.

Применом ове последице на нуклеарну норму $\|\cdot\|_1$ добијамо

Последица 4.27. ***Нека су*** $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. ***Тада за сваку унитарно инваријантну норму*** $|||\cdot|||$ ***важи***

$$n^{-p/2}\sum_{k=1}^{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\omega_j^k A_j\Big\|_p^p \leqslant \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{n}|A_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p^p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\omega_j^k A_j\Big\|_p^p \tag{4.30}$$

за $2 \leqslant p < +\infty$, ***односно***

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\omega_j^k A_j\Big\|_p^p \leqslant \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{n}|A_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p^p \leqslant n^{-p/2}\sum_{k=1}^{n}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\omega_j^k A_j\Big\|_p^p \tag{4.31}$$

за $0 < p \leqslant 2$.

У претходном делу видели смо нека уопштења неједнакости (4.12) и (4.13), при чему смо рекли да (4.12) и (4.13) представљају аналогне некомутативне неједнакости одговарајућих неједнакости из [C]. Поред њих, у [M] је McCarthy показао, за $A, B \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$, и следеће неједнакости

$$2(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p)^{q/p} \leqslant \|A+B\|_p^q + \|A-B\|_p^q \quad \text{за } 2 \leqslant p < +\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{4.32}$$

односно

$$2(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p)^{q/p} \leqslant \|A+B\|_p^q + \|A-B\|_p^q \quad \text{за } 0 < p \leqslant 2,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{4.33}$$

које исто представљају аналогне некомутативне неједнакости одговарајућих неједнакости из [C]. Али, за разлику од неједнакости (4.12) и (4.13) за која су позната одговарајућа уопштења (где првенствено мислимо на специјалан случај Последице 4.23), која су овде и приказана, није познато да ли постоје слична уопшетења за неједнакости (4.32) и (4.33). Односно, да ли важи

Хипотеза. ***Нека су*** $A_1, \ldots, A_n$ ***компактни оператори на сепарабилном Hilbert-овом простору. Тада важи***

$$n\Big(\sum_{j=1}^{n}\|A_j\|_p^p\Big)^{q/p} \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^{n}A_j\Big\|_p^q + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\|A_j - A_k\|_p^q$$

за $2 \leqslant p < +\infty$ ***и*** $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$***, односно***

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} A_j\Big\|_p^q + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \|A_j - A_k\|_p^q \leqslant n\Big(\sum_{j=1}^{n} \|A_j\|_p^p\Big)^{q/p}$$

за $0 < p \leqslant 2$ ***и*** $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$***.***

Напоменимо на крају и то да Теореме 4.24 и 4.25, као и њихове последице, представљају рафинације одређених неједнакости из [BK04].

Литература

[An] T. Ando, Topics on Operator Inequalities, Lecture notes (mimeographed), Hokkaido Univ., Sapporo, 1978.

[A88] T. Ando, *Comparasion of Norms* $\|\|f(A) - f(B)\|\|$ *and* $\|\|f(|A - B|)\|\|$, Math. Z. **197** (1988), 403–409.

[AZ99] T. Ando, X. Zhan, *Norm inequalities related to operator monotone functions*, Math. Ann. **315** (1999), 771–780.

[АДЈ] М. Арсеновић,М. Достанић, Д. Јоцић, Теорија мере, Функционална анализа и Теорија оператора, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[B] R. Bhatia, Matrix Analysis, Springer-Verlag, New York, 1997.

[BK04] R. Bhatia, F. Kittaneh, *Clarkson inequalities with several operators*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), 820-832.

[BK08] R. Bhatia, F. Kittaneh, *The matrix arithmeticgeometric mean inequality revisited*, Linear Algebra Appl. **428** (2008), 2177-2191

[BS] M. S. Birman, M. Z. Solomyak, Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[BU] J.-C. Bourin, M. Uchiyama, *A matrix subadditivity inequality for* $f(A + B)$ *and* $f(A) + f(B)$, Linear Algebra Appl. **423** (2007), 512-518.

[C] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936) 396–414.

[D] W. Donoghue, Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation, Springer, New York, 1974.

[GK] I.C. Gohberg, M.G. Krein, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Transl. Math. Monographs, 18, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1969.

[GGK] I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, Classes of linear operators, Operator Theory Vol. 49, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1990.

[He] E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann. **123** (1951), 415–438.

[Hi] F. Hiai, *Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators*, Banach Center Publ. **38** (1997), 119–181.

[HK02] O. Hirzallah, F. Kittaneh, *Non-commutative Clarkson inequalities for unitarily invariant norms*, Pacific J. Math. **202** (2002), 363–369.

[HK08] O. Hirzallah, F. Kittaneh, *Non-commutative Clarkson inequalities for n-tuples of operators*, Integr. Equ. Oper. Theo. **60** (2008), 369–379.

[HP] F. Hansen, G.K. Pedersen, *Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem*, Math. Ann. **258** (1981), 229–242.

[J97] D.R. Jocić, *Norm inequalities for self-adjoint derivations*, J. Funct. Anal. **145** (1997), 24–34.

[J99] D.R. Jocić, *The Cauchy-Schwarz norm inequality for elementary operators in Schatten ideals*, J. London Math. Soc. (2) **60** (1999), 925–934.

[JK] D. Jocić, F. Kittaneh, *Some perturbation inequalities for self-adjoint operators*, J. Operator Theory, **31** (1994), 3–10.

[Ke] Д.Ј. Кечкић, Елементарна пресликавања на идеалима компактних оператора на Хилбертовом простору, Магистарска теза, Математички факултет, Београд, 1998.

[Ko] T. Kosem, *Inequalities between $f(A+B)$ and $f(A)+f(B)$*, Linear Algebra Appl. **418** (2006), 153–160.

[LR] G. Lumer, M. Rosenblum, *Linear operator equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959) 32–41.

[M] C.A. McCarthy, c_p, Israel J. Math. **5** (1967), 249–271.

[Sch] R. Schatten, Norm Ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[Si] B. Simon, Trace ideals and their Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[Zh] X. Zhan, Matrix Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 2002.