Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

MASTER RAD

Tema:

Doprinos nestandardnih zadataka iz trigonometrije poboljšanju nastave matematike

Profesor: dr Zoran Petrović **Student: Marijana Nikolić**

Beograd 2015.

SADRŽAJ:

Uvod

Zahvaljujem se profesorima dr Zoranu Petroviću, dr Nebojši Ikodinoviću i dr Goranu Đankoviću koji su pomogli nizom korisnih primedbi i sugestija.

Trigonometrija je matematička disciplina koja se bavi proučavanjem odnosa među elementima pravouglog trougla, koji izražavaju uglove pomoću stranica i obrnuto. Reč "trigonometrija" je nastala od starogrčkih reči trigonom (trougao) i metron (mera). Poznata su metrička svojstva koja povezuju samo uglove ili samo stranice pravouglog trougla, od kojih je najznačajnija Pitagorina teorema. Ona omogućava da se na osnovu dve poznate stranice pravouglog trougla izračuna treća. Takođe, u pravouglom trouglu može da se izračuna jedan oštar ugao ako je poznat drugi. Međutim, ako bi bila poznata jedna stranica pravouglog trougla i jedan oštar ugao, onda se ostale dve stranice ne bi mogle izračunati pomoću do sada poznatih svojstava vezanih za pravougli trougao. Zato je i nastala trigonometrija.

Sa trigonometrijom se učenici prvi put susreću na kraju prve godine gimnazije. Tada se tek upoznaju sa najosnovnijim pojmovima vezanih za pomenutu temu, dok na drugoj godini se po planu i programu rade znatno ozbiljniji zadaci među kojima su i trigonometrijske jednačine. Najpre se rade najjednostavnije jednačine, kako bi se kasnije složenije svodile na jednostavne. Prema planu i programu za trogodišnje stručne škole u područjima rada: mašinstvo i obrada metala, elektrotehnika, geodezija i građevinarstvo, saobraćaj, rudarstvo, geologija, trgovina itd, trigonometrija se proučava jedno polugodište.

U ovom radu koji sadrži detaljno rešene zadatke iz jedne od najtežih tema u matematici srednje škole, prikazani su različiti oblici trigonometrijskih jednačina kao i različite metode rešavanja takvih problema. Na primer, za neke trigonometrijske jednačine su potrebne drugačije ideje pri njihovom rešavanju. To i jeste jedan od razloga zbog kog učenici ne vole trigonometriju. Iako se mnogi matematički problemi mogu rešiti na više načina, ovde su rešeni na jednostavniji način. Za to su korišćene mnoge trigonometrijske formule, kao i teorija iz ove oblasti. Neke od njih su:

<u>Osnovne trigonometrijske identičnosti:</u>

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Sinus i kosinus suplementnih uglova:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

odnosno

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Sinusna i kosinusna teorema:

sinusna teoreama:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

kosinusna teorema:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\gamma$$

Adicione formule:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

Trigonometrijske funkcije dvostrukog ugla:

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t$$
$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

Trigonometrijske funkcije polovine argumenta:

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$
$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

Transformacije proizvoda:

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Transformacije u proizvod:

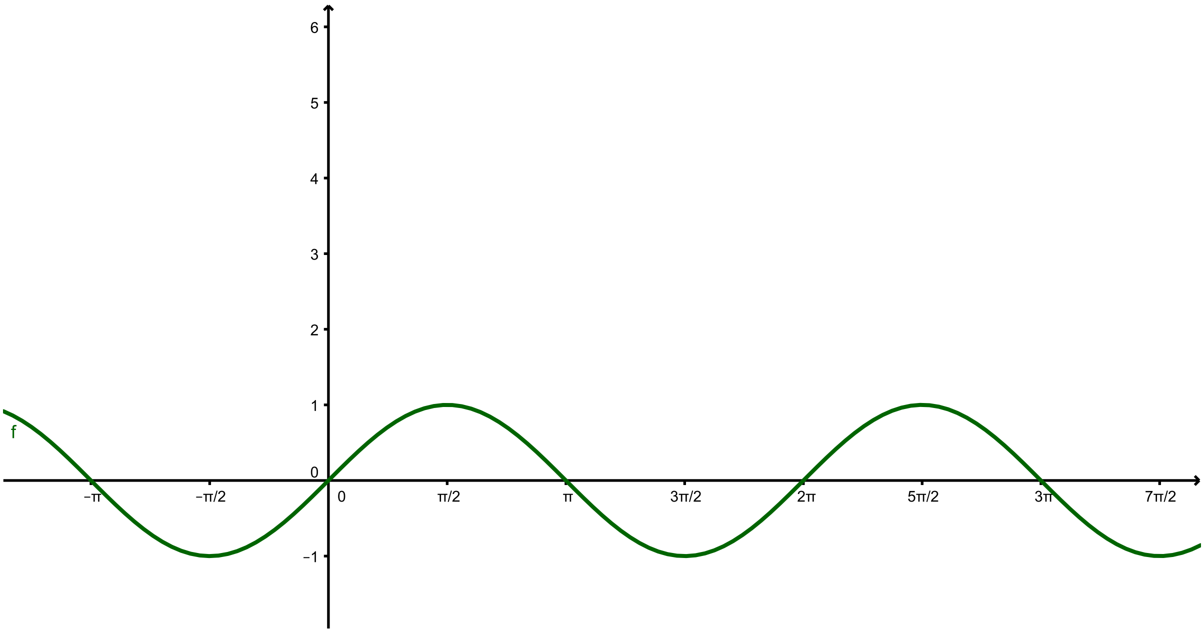
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

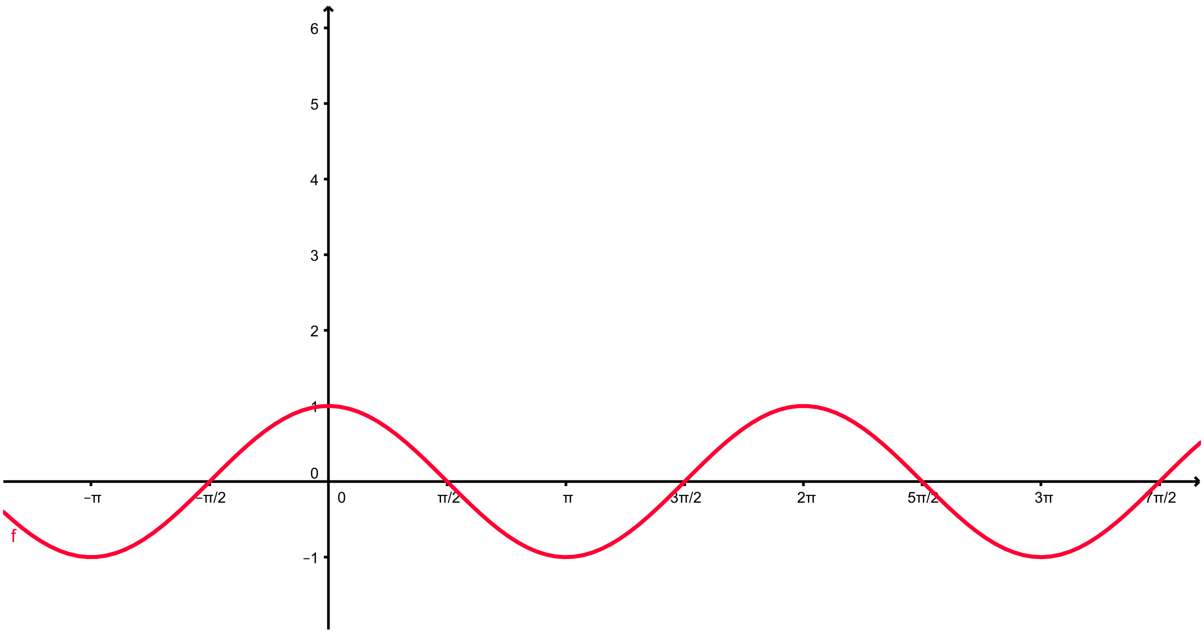
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

Grafik funkcije $\sin x$:



Grafik funkcije $\cos x$:



1. Trigonometrijske jednačine

1. Rešiti jednačinu $\sin x - \cos 2x = 0$.

Rešenje.

Na prvi pogled jednačina izgleda komplikovano, jer se pojavljuju dve različite trigonometrijske funkcije od kojih je jedna funkcija dvostrukog ugla, ali kako je

$$\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right),$$

jednačina dobija oblik

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0.$$

Koristimo formulu za transformaciju iz zbira u proizvod

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{(x-y)}{2}\cos\frac{(x+y)}{2}.$$

Kada je iskoristimo jednačina: $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$ transformiše se u

$$2\sin\frac{(x - (\frac{\pi}{2} - 2x))}{2}\cos\frac{(x + \frac{\pi}{2} - 2x)}{2} = 0.$$

Ova jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$2\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Koristeći parnost funkcije $\cos x$, dobijamo da je dobijena jednačina ekvivalentna sledećoj

$$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Prozvod dva broja jednak je nuli, ako je bar jedan od njih jednak nuli, odnosno

$$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{ili} \quad \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Najpre rešimo trigonometrijsku jednačinu

$$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Kako je $\sin t$ jednako 0 samo za $t = k\pi$, dobijamo:

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Stoga je rešenje ove jednačine dato sa:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Sada rešavamo jednačinu

$$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Dobijamo da je

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$

odnosno

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Lako se uočava da se ovaj skup rešenja sadrži u skupu rešenja prethodne jednačine, pa je skup rešenja polazne jednačine skup

$$\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Rešiti jednačinu $\sin^2 x + \sin^2 2x = \frac{3}{2}$.

Rešenje.

Na osnovu formule

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x,$$

sledi da je

$$\sin^2 x + 4\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{2}.$$

Jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$\sin^2 x + 4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = \frac{3}{2},$$

odnosno

$$8\sin^4 x - 10\sin^2 x + 3 = 0.$$

Nakon smene $t = \sin^2 x$, jednačina se svodi na kvadratnu

$$8t^2 - 10t + 3 = 0.$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo dva rešenja $t = \frac{3}{4}$ ili $t = \frac{1}{2}$. Najpre rešimo jednačinu

$$\sin^2 x = \frac{3}{4},$$

odnosno

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dobijamo da je

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sada rešimo drugu jednačinu

$$\sin^2 x = \frac{1}{2},$$

odnosno

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sledi da je

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{ili} \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. Rešiti jednačinu $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2$.

Rešenje.

Ova jednačina je ekvivalentna jednačini:

$$\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\sin 4x = 1.$$

Primetimo da brojevi uz $\sin x$ i $\cos x$ predstavljaju kosinus i sinus ugla $\frac{\pi}{3}$

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)\sin 4x = 1.$$

Na izraz $\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$, primenimo adicionu formulu. Dobijamo:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin 4x = 1.$$

Kako je $|\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)| \leq 1$ i $|\sin 4x| \leq 1$, mora biti:

$$\sin(\frac{\pi}{3} + x) = 1 \quad \text{i} \quad \sin 4x = 1$$

ili

$$\sin(\frac{\pi}{3}+x)=-1 \quad \text{i} \quad \sin 4x=-1.$$

Posmatramo prvi sistem jednačina. Dobijamo da je

$$\frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{2}+2l\pi \quad \text{i} \quad 4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

za cele brojeve k i l. Iz prve i druge jednakosti sledi da je:

$$x=\frac{\pi}{6}+2l\pi \quad \text{i} \quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}.$$

Ako izjednačimo obe vrednosti x-a, videćemo za koje vrednosti k i l jednačina ima smisla

$$\frac{\pi}{6}+2l\pi=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},$$

odnosno

$$4l-k=-\frac{1}{12}.$$

Međutim kako su k i l celi brojevi, predhodna jednakost nije moguća, tako da jednačina nema rešenja.

Sada posmatramo drugi sistem. Dobijamo da je

$$\frac{\pi}{3}+x=\frac{3\pi}{2}+2m\pi \quad \text{i} \quad 4x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi,$$

za cele brojeve m i n. Slično kao i u prethodnom slučaju dolazimo do zaključka da je veza između m i n:

$$4m-n=-\frac{19}{12}$$

što nije moguće, jer su m i n celi brojevi. Tako da jednačina nema rešenja.

4. Rešiti jednačinu $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$.

Rešenje.

Kako je jednačina

$$\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$$

ekvivalentna jednačini

$$\sin x+\cos x=1-\sin x\cos x,$$

kvadriranjem desne i leve strane jednakosti dobijamo

$$(\sin x + \cos x)^2 = (1 - \sin x \cos x)^2.$$

Ideja je da se posle kradriranja iskoristi trigonometrijski identitet ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), i tako jednačina pojednostavi:

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - 2\sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x.$$

Posle zamene $\sin^2 x + \cos^2 x$ sa 1 i sređivanja, dobijamo

$$4\sin x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x = 0.$$

Kada izvučemo ispred zagrade $\sin x \cos x$, dobijamo

$$\sin x \cos x(4 - \sin x \cos x) = 0.$$

Sledi da je

$$\sin x \cos x = 0 \quad \text{ili} \quad 4 - \sin x \cos x = 0.$$

Druga jednačina je nemoguća jer je $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, a iz prve sledi da je

$$\sin x = 0 \quad \text{ili} \quad \cos x = 0.$$

Ako u zadatu jednačinu zamenimo da je $\sin x = 0$, dobijamo da je $\cos x = 1$, a kada zamenimo da je $\cos x = 0$, sledi da je $\sin x = 1$. Zaključak je da su rešenja:

$$x = 2k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

5. Rešiti jednačinu $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

Rešenje.

Kada je u zadatku zadata trigonometrijska funkcija drugog stepena, tada možemo da koristimo formulu za sinus i kosinus dvostrukog ugla, odnosno

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}.$$

Zamenom date formule, oslobodićemo se stepena

$$\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{1}{2} + \cos^2 3x = 1.$$

Poslednji član $\cos^2 3x$, nismo transformisali jer će se kasnije pri rešavanju pojaviti trigonometrijska funkcija čiji će argument biti $3x$. To se može videti ako se prisetimo formula za transformaciju iz zbira u proizvod. Posle sređivanja dobijamo jednačinu:

$$\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{2} + \cos^2 3x = 0,$$

$$\cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0.$$

Primenimo na prva dva člana transformaciju iz zbira u proizvod

$$2\cos\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2} + 2\cos^2 3x = 0,$$

odnosno

$$2\cos 3x\cos x + 2\cos^2 3x = 0.$$

Kada izvučemo ispred zagrade $2\cos 3x$, jednačina će biti ekvivalentna sledećoj

$$2\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 0.$$

Posle transformacije izraza $\cos x + \cos 3x$ iz zbira u proizvod imamo da je

$$2\cos 3x\Big(2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}\Big) = 0,$$

$$4\cos 3x\cos 2x\cos x = 0.$$

Možemo zaključiti da je

$$\cos 3x = 0 \quad \text{ili} \quad \cos 2x = 0 \quad \text{ili} \quad \cos x = 0.$$

Dobijamo da su rešenja:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3} \quad \text{ili} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2} \quad \text{ili} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k, l, m \in \mathbb{Z}.$$

Naredni tip zadatka se obično zadaje na takmičenjima. Iako se u njemu pojavljuje čak osmi stepen, to ne bi trebalo da predstavlja problem jer je osam paran broj, pa je moguće koristiti poznatu razliku kvadrata.

6. Rešiti jednačinu $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^8 x - \cos^8 x$.

Rešenje.

Desnu stranu jednakosti možemo da prebacimo na levu stranu

$$\sin^4 x - \cos^4 x - (\sin^8 x - \cos^8 x) = 0.$$

Jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$\sin^4 x - \cos^4 x - (\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) = 0.$$

Kada izvučemo zajednički činilac $\sin^4 x - \cos^4 x$ biće

$$(\sin^4 x - \cos^4 x)(1 - (\sin^4 x + \cos^4 x)) = 0.$$

Zaključujemo da je

$$\sin^4 x - \cos^4 x = 0 \quad \text{ili} \quad \sin^4 x + \cos^4 x = 1.$$

Prvo ćemo rešiti jednačinu $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$.
Ako je $\cos x = 0$ tada mora biti i $\sin x = 0$, što je nemoguće, te zaključujemo da je $\cos x \neq 0$. Jednačina se svodi na $\operatorname{tg}^4 x = 1$ iz koje sledi da je $\operatorname{tg} x = \pm 1$, odnosno

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Za rešavanje druge jednačine: $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$, koristimo da je $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$, tako da je jednačina ekvivalentna sledećoj

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1.$$

Zamenimo $\sin^2 x + \cos^2 x$ sa 1 :

$$1^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$\cancel{1} - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cancel{1},$$

odnosno

$$\frac{1}{2}(\sin 2x)^2 = 0,$$

$$\sin 2x = 0.$$

Konačno, rešenja su:

$$x = \frac{m\pi}{2},\ m \in \mathbb{Z}.$$

7. Rešiti jednačinu $\operatorname{tg} 3x \cos x = 0$.

Rešenje.

Ako je $\cos x = 0$, onda je $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, odakle sledi da je

$$3x = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi = \frac{\pi}{2} + (3k+1)\pi.$$

Ali, tada $\operatorname{tg} 3x$ nije definisano. Stoga je $\cos x \neq 0$ i jednačina se svodi na $\operatorname{tg} 3x = 0$.
Rešimo jednačinu

$$\operatorname{tg} 3x = 0$$

odnosno

$$\sin 3x = 0 \quad \text{i} \quad \cos 3x \neq 0.$$

Dovoljno je posmatrati da je

$$\sin 3x = 0.$$

Tako da su sva rešenja jednačine data sa:

$$x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

8. Rešiti jednačinu $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$.

Rešenje.

Zbog apsolutne vrednosti, najbolje je da datu jednačinu kvadriramo, tako da će ona dobiti sledeći oblik

$$\sin^2 x = \sin^2 x + 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x.$$

Posle skraćivanja $\sin^2 x$, imamo da je

$$4\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0.$$

Sređivanjem predhodnog izraza dobijamo:

$$\cos x(\sin x + \cos x) = 0,$$

odakle sledi da je

$$\cos x = 0 \quad \text{ili} \quad \sin x = -\cos x$$

odnosno

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = -\frac{\pi}{4} + l\pi,\ k, l \in \mathbb{Z}.$$

Kako se pri kvadriranju dobija jednačina koja može imati i neka rešenja koja ne zadovoljavaju polaznu jednačinu, neophodno je izvršiti proveru. Proverom se dobija da su rešenja polazne jednačine samo $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ i $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}$.

9. Rešiti jednačinu $\frac{1}{1-\sin x} = \frac{2}{\cos^2 x}$.

Rešenje.

Kako bismo rešili zadatak moramo postaviti uslove $1 - \sin x \neq 0$ i $\cos^2 x \neq 0$, odnosno mora biti $\sin x \neq 1$ i $\cos x \neq 0$. Zamenimo $\cos^2 x$ sa $1 - \sin^2 x$ u početnu jednakost. Dobijamo da je

$$\frac{1}{1 - \sin x} = \frac{2}{1 - \sin^2 x}$$

posle unakrsnog množenja, jednačina će biti ekvivalentna sledećoj

$$1 - \sin^2 x = 2(1 - \sin x)$$

odnosno

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 2(1 - \sin x).$$

Levu i desnu stranu jednakosti možemo podeliti sa $(1 - \sin x)$, zbog uslova $\sin x - 1 \neq 0$, tako da je

$$(1 + \sin x) = 2$$

$$\sin x = 1.$$

Kako je uslov: $\sin x \neq 1$, rešenje moramo odbaciti. Zaključak je da zadatak nema rešenja!

10. Rešiti jednačinu $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$.

Rešenje.

Prvi način:

Transfornisanjem desne strane jednakosti pomoću adicione formule, jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\Big(\sin x \cos\frac{5\pi}{4} + \cos x \sin\frac{5\pi}{4}\Big),$$

odnosno

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\Big(\sin x \cdot \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) + \cos x \cdot \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big).$$

Nakon sređivanja

$$\sin x - \cos x = -\sin x - \cos x,$$

sledi da je

$$\sin x = 0.$$

Tako da su rešenja:

$$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Drugi način:

Koristimo ideju iz zadatka 3, tj. celu jednakost ćemo podeliti sa $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$$

odnosno

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right).$$

Ideja je da u levoj strani jednačine iskoristimo adicionu formulu. Stoga ćemo $\frac{\sqrt{2}}{2}$ zapisati kao $\cos\frac{\pi}{4}$ i $\sin\frac{\pi}{4}$

$$\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$$

odnosno

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right).$$

Jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$\sin\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big)-\sin\Big(x+\frac{5\pi}{4}\Big)=0.$$

Posle primene formule za transformaciju razlike u proizvod, treba da rešimo jednačinu

$$2\sin\Big(\frac{x-\frac{\pi}{4}-(x+\frac{5\pi}{4})}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x-\frac{\pi}{4}+x+\frac{5\pi}{4}}{2}\Big)=0.$$

Sređivanjem dobija se ekvivalentna jednačina

$$\sin\Big(-\frac{3\pi}{4}\Big)\cos\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)=0,$$

iz koje sledi da je

$$\sin\Big(-\frac{3\pi}{4}\Big)=0 \quad \text{ili} \quad \cos\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)=0.$$

Kako je $\sin\Big(-\frac{3\pi}{4}\Big)\neq 0$, to ostaje samo $\cos\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)=0$. Rešavanjem jednačine

$$\cos\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)=0.$$

Dobijamo da je

$$x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

odnosno

$$x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

11. Rešiti jednačinu $\sin\frac{\pi}{1+x^2}=0$.

Rešenje.

Iz jednačine $\sin\frac{\pi}{1+x^2}=0$, sledi da je $\frac{\pi}{1+x^2}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, odnosno biće

$$\frac{1}{1+x^2}=k,$$

$$1+x^2=\frac{1}{k}, k\in\mathbb{Z}.$$

Posle sređivanja izraz se svodi na

$$x^2=\frac{1-k}{k}.$$

Sledi da je

$$\frac{1-k}{k} \geq 0,$$

jer je $\frac{1-k}{k}$ kvadrat od x. Zaključujemo da je

$$1 \geq k > 0.$$

Dakle, $k = 1$, tj. $x = 0$ što predstavlja jedino rešenje date jednačine.

12. Rešiti jednačinu $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$.

Rešenje.

Data jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$\sin x + 2\sin 2x - \sin 3x = 3. \quad (1)$$

Transformišimo $\sin 3x$ primenom adicione formule

$$\sin 3x = \sin(x+2x) = \sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x = \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x\cos x\cos x =$$

$$= \sin x\cos^2 x - \sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x.$$

Zamenimo prethodnu jednakost u (1). Dobijamo:

$$\sin x + 4\sin x\cos x - \sin x(3 - 4\sin^2 x) = 3.$$

Kada izvučemo $\sin x$ ispred zagrade

$$\sin x(1 + 4\cos x - (3 - 4\sin^2 x)) = 3,$$

jednačina će biti ekvivalentna sledećoj

$$2\sin x(-1 + 2\cos x + 2\sin^2 x) = 3$$

odnosno

$$\sin x(-2\cos^2 x + 2\cos x + 1) = \frac{3}{2}.$$

Ako posmatramo izraz $-2\cos^2 x + 2\cos x + 1$ i ako ga malo transformišemo

$$-2\cos^2 x + 2\cos x + 1 = -2(\cos^2 x - \cos x - \frac{1}{2}) = -2\Big(\Big(\cos x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\Big),$$

dobijamo da je

$$-2\cos^2 x + 2\cos x + 1 = -2\Big(\cos x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Kako je

$$-2\cos^2 x + 2\cos x + 1 \leq \frac{3}{2} \quad \text{i} \quad \sin x \leq 1,$$

iz prethodnog zaključujemo da mora biti $\sin x = 1$ i $\cos x = \frac{1}{2}$ (samo za tu vrednost kosinusa izraz je jednak $\frac{3}{2}$), ali to nije moguće. Zaključujemo da zadatak nema rešenje.

13. Rešiti jednačinu $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$.

Rešenje.

Sve članove izraza prebacićemo na levu stranu jednakosti,

$$1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x = 0$$

a, zatim ih faktorizovati

$$(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$$

odakle sledi

$$\sin x = 1 \quad \text{ili} \quad \cos x = 1.$$

Rešenja su:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

14. Rešiti jednačinu $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(\cos 99x)$.

Rešenje.

Koristimo ideju iz zadatka 3, dakle podelimo celu jednakost sa $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) = \cos 99x$$

$$\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \cos 99x.$$

Primenom adicione formule za razliku dva ugla dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos 99x,$$

odnosno

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos 99x = 0.$$

Sada, koristimo formulu za transformaciju iz razlike u proizvod

$$-2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}-x+99x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}-x-99x}{2}\right)=0,$$

posle sređivanja dobija se ekvivalentna jednačina

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+98x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}-100x}{2}\right)=0,$$

te je

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+98x}{2}\right)=0 \quad \text{ili} \quad \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}-100x}{2}\right)=0.$$

Dobijamo da je

$$\frac{\frac{\pi}{4}+98x}{2}=k\pi \quad \text{ili} \quad \frac{\frac{\pi}{4}-100x}{2}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

odnosno

$$x=\frac{2k\pi}{98}-\frac{\pi}{392} \quad \text{ili} \quad x=\frac{\pi}{400}-\frac{k\pi}{50},\ k\in\mathbb{Z}.$$

15. Odrediti broj rešenja jednačine $x=4\pi\sin x$.

Rešenje.

Kako je

$$x=4\pi\sin x$$

mora biti

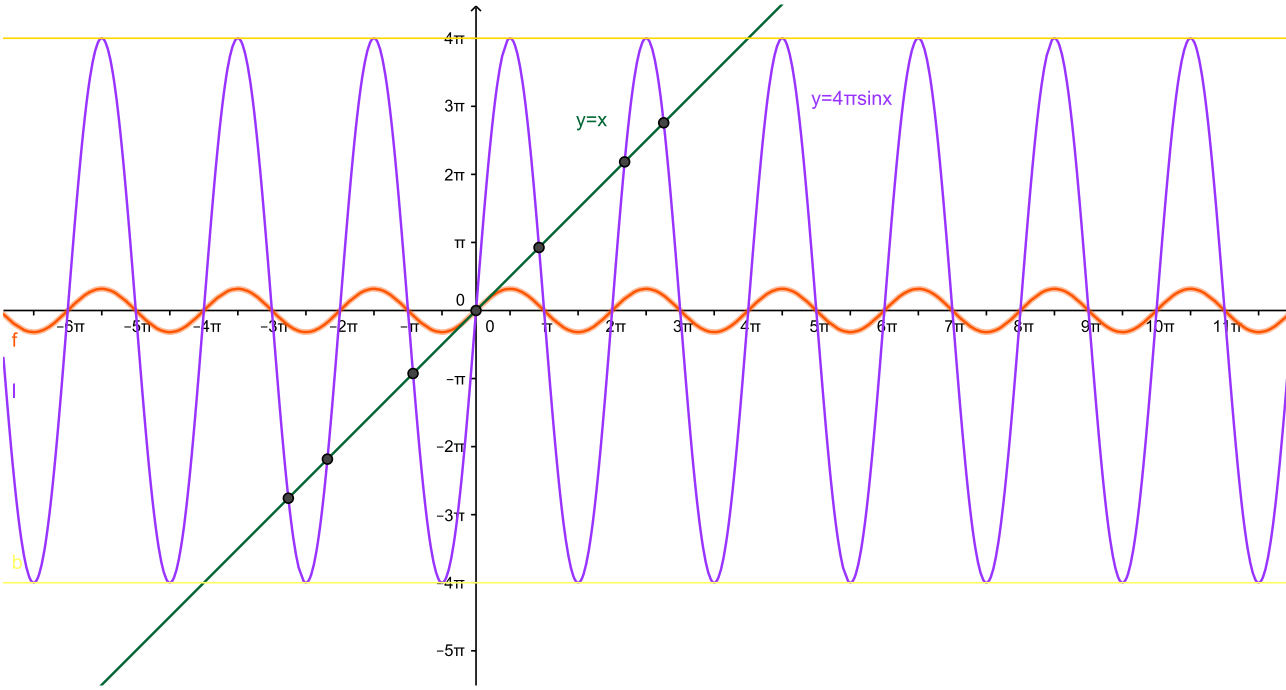
$$-1\leq\frac{x}{4\pi}\leq 1$$

odnosno

$$-4\pi\leq x\leq 4\pi.$$

Međutim, $x\neq -4\pi, 4\pi$, jer ako se zamene vrednosti -4π i 4π, u datu jednačinu, jednakost neće imati smisla.
Rešenje ove jednačine ćemo prikazati crtežom. Prvo nacrtajmo funkciju $\sin x$, a zatim funkciju $4\pi\sin x$, primetićemo da funkcija $4\pi\sin x$ ima maksimum u 4π, nakon toga crtamo pravu $y=x$ i gde se funkcije

$$y=x \quad \text{i} \quad y=4\pi\sin x$$



preseku to su rešenja, vidićemo da je to ukupno sedam preseka tj. sedam rešenja.

16. Rešiti jednačinu $\text{tg}\, x + \text{tg}\, 2x + \text{tg}\, 3x = 0$.

Rešenje.

Ako primenimo adicionu formulu: $\text{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha \text{tg}\,\beta}$, na $\text{tg}\, 3x$, naša jednačina se svodi na

$$\text{tg}\, x + \text{tg}\, 2x + \frac{\text{tg}\, x + \text{tg}\, 2x}{1 - \text{tg}\, x \text{tg}\, 2x} = 0.$$

Jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$(\text{tg}\, x + \text{tg}\, 2x)\Big(1 + \frac{1}{1 - \text{tg}\, x \text{tg}\, 2x}\Big) = 0,$$

odnosno

$$(\text{tg}\, x + \text{tg}\, 2x)\Big(\frac{2 - \text{tg}\, x \text{tg}\, 2x}{1 - \text{tg}\, x \text{tg}\, 2x}\Big) = 0.$$

Odavde sledi

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{2 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0 \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = 2.$$

Najpre rešimo jednačinu $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$. Posle transformisanja $\operatorname{tg} 2x$, sledi

$$\operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

odnosno

$$3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x = 0.$$

Dobijamo da je

$$\operatorname{tg} x(3 - \operatorname{tg}^2 x) = 0,$$

odnosno

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}.$$

Rešenja su:

$$x = k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

Iz druge jednačine $\operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} 2x = 2$, sledi

$$\operatorname{tg} x \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 2$$

odnosno

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rešenja su:

$$x = \operatorname{arctg} \ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

17. Rešiti jednačinu $\log_{0,1} \sin 2x + \log \cos x - \log 7 = 0$.

Rešenje.

U ovom zadatku treba pažljivo iskoristiti svojstva logaritma. Posebno treba obratiti pažnju na oblast definisanosti funkcija koje se tu pojavljuju.

Neophodni uslovi su da je $\sin 2x > 0$ i $\cos x > 0$, a to je ekvivalentno sa tim da je $\sin x > 0$ i $\cos x > 0$.

$$\log_{0,1} \sin 2x + \log \cos x - \log 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{10}} \sin 2x + \log \cos x - \log 7 = 0.$$

Primenimo pravilo: $\log_{a^s} b = \frac{1}{s} \log_a b,\ \ b > 0, a > 0, a \neq 1, s \neq 0$. Kako je $\frac{1}{10} = 10^{-1}$, biće

$$-\log \sin 2x + \log \cos x - \log 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log \cos x - \log \sin 2x - \log 7 = 0.$$

Posle primene pravila: $\log a - \log b = \log \frac{a}{b},\ \ a > 0,\ \ b > 0$, jednačina će biti ekvivalentna sledećoj

$$\log \frac{\cos x}{7 \cdot \sin 2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{7 \cdot \sin 2x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 14 \cdot \sin x \cdot \cos x.$$

Nakon sređivanja jednačina se svodi na

$$\sin x = \frac{1}{14}.$$

Konačno uz uslov da je $\sin x > 0$ i $\cos x > 0$, rešenja su:

$$x = \arcsin \frac{1}{14} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

2. Iracionalne trigonometrijske jednačine

18. Rešiti jednačinu $2\cos x = \sqrt{2+\sin 2x}$.

Rešenje.

Kako je jednačina iracionalna kvadriraćemo je i kako je $2+\sin 2x > 0$, a koren uvek definisan za pozitivne vrednosti, biće $\sqrt{2+\sin 2x} > 0$, te je i $\cos x > 0$. Posle kvadriranja dobijamo:

$$4\cos^2 x = 2 + \sin 2x.$$

Posle sređivanja dobijamo

$$2\cdot(2\cos^2 x - 1) = \sin 2x.$$

Zamenom $2\cos^2 x - 1$ sa $\cos 2x$, jednačina se svodi na

$$2\cos 2x = \sin 2x.$$

Zatim podelimo jednačinu sa $\cos 2x$. Primetimo da $\cos 2x$ mora biti različito od nule, pošto bi iz jednačine sledilo da je onda i $\sin 2x$ nula, što ne može biti. Stoga se može deliti sa $\cos 2x$. Kako je $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$\operatorname{tg} 2x = 2.$$

Odavde sledi da su rešenja

$$x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}.$$

Kako je uslov $\cos x > 0$, a to važi za $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, treba proveriti za koje vrednosti $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$ zadovoljava nejednakost. Zaključak je za: $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ \ k = 4n$ ili $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ k = 4n-1,\ n \in \mathbb{Z}$.

19. Rešiti jednačinu $\sqrt{1-\cos x} = \sin x$.

Rešenje.

Mora važiti

$$1 - \cos x \geq 0 \wedge \sin x \geq 0$$

odnosno

$$\cos x \leq 1 \wedge \sin x \geq 0.$$

Prvi uslov je uvek zadovoljen.

Kada kvadriramo jednačinu, dobićemo ekvivalentnu jednačinu

$$1 - \cos x = \sin^2 x.$$

Zamenimo $\sin^2 x$ sa $1-\cos^2 x$, kako bismo jednačinu predstavili preko funkcije kosinus

$$1 - \cos x = 1 - \cos^2 x.$$

Nakon sređivanja izraz se svodi na jednostavniji

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$

odnosno

$$\cos x(\cos x - 1) = 0.$$

Dobijamo

$$\cos x = 0 \quad \text{ili} \quad \cos x = 1.$$

Rešenja su:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Vidimo da ova rešenja zadovoljavaju uslov $\sin x \geq 0$, te smo time dobili sva rešenja.

20. Rešiti jednačinu $\cos(\frac{\pi}{8} \cdot (3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})) = 1, \; x \in \mathbb{Z}$.

Rešenje.

Dobijamo da je

$$\frac{\pi}{8} \cdot (3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

odnosno

$$\sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16k.$$

Kvadriranjem leve i desne strane jednakosti, dobijamo novu jednačinu

$$9x^2 + 160x + 800 = 9x^2 - 96kx + 256k^2,$$

odnosno

$$5x + 3kx = 8k^2 - 25,$$

gde je $k \in \mathbb{Z}$.
Izvucimo ispred zagrade x

$$x(3k + 5) = 8k^2 - 25.$$

Iz jednakosti

$$x(3k + 5) = 8k^2 - 25,$$

gde je x ceo broj, sledi da $3k + 5$ deli $8k^2 - 25$. Kako je $(3k + 5)(3k - 5) = 9k^2 - 25$ to je i $9k^2 - 25$ deljivo sa $3k + 5$. Sledi da je i k^2 deljivo sa $3k + 5$, pa onda je i 25 deljivo sa $3k + 5$, odnosno da je vrednost izraza $3k + 5$ jedan od brojeva $1, -1, 5, -5, 25, -25$. To je moguće samo za $k = 0, -2, -10$ pri čemu su za x odgovarajuće vrednosti: $-31, -7, -5$. Neposrednom proverom u polaznoj jednačini utvrđuju se konačna rešenja: $x = -31$ ili $x = -7$.

3. Trigonometrijske jednačine sa parametrom

21. Rešiti jednačinu $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ $(a \in \mathbb{R})$.

Rešenje:

Ako levu stranu jednakosti transformišemo, dobićemo ekvivalentnu jednačinu

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = a.$$

Zamenom $\sin^2 x + \cos^2 x$ sa 1, izraz se pojednostavljuje

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = a.$$

Primenom transformacije za dvostruki ugao sledi da je

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = a,$$

odnosno

$$\sin^2 2x = 2 - 2a.$$

Za $a > 1$, jednačina nema rešenje, jer je izraz na desnoj strani jednakosti negativan, a na levoj zbog sinusa mora biti $2 - 2a \leq 1$. U, slučaju da je $a \leq 1$, korenovanjem dobijamo ekvivalentan oblik

$$|\sin 2x| = \sqrt{2 - 2a}$$

pa, je skup rešenja unija skupova rešenja jednačina

$$\sin 2x = \sqrt{2 - 2a} \quad \text{i} \quad \sin 2x = -\sqrt{2 - 2a}.$$

Ove jednačine imaju rešenja akko je $0 \leq 2 - 2a \leq 1$, tj. $a \in [\frac{1}{2}, 1]$. U tom slučaju rešenja polazne jednačine možemo zapisati u obliku

$$\frac{1}{2}\left\{\arcsin\sqrt{2-2a}, -\arcsin\sqrt{2-2a}, \pi - \arcsin\sqrt{2-2a}, \pi + \arcsin\sqrt{2-2a}\right\} + k\pi.$$

22. Rešiti jednačinu $\cos x + \sqrt{3}\sin x = m, m \in \mathbb{Z}$.

Rešenje.

Koristimo ideju iz 3. zadatka, tj. celu jednačinu podelimo sa 2

$$\frac{1}{2}(\cos x + \sqrt{3}\sin x) = \frac{m}{2}$$

odnosno

$$\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = \frac{m}{2}.$$

Kako je $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ i $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, jednačina će biti ekvivalentna sledećoj

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{2}.$$

Mora biti $|\frac{m}{2}| \leq 1$, jer je $|\cos x| \leq 1$. Stoga je $-2 \leq m \leq 2$.

Ako je $m = -2$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

Jednačina se svodi na

$$x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

odnosno

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ako je $m = -1$

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}.$$

Jednačina se svodi na

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

odnosno

$$x = \pi + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ako je $m = 0$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Jednačina se svodi na

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

odnosno

$$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ako je $m = 1$

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}.$$

Jednačina se svodi na

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

odnosno

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ako je $m = 2$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Jednačina se svodi na

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

odnosno

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Trigonometrijske jednačine koje se rešavaju smenom

23. Rešiti jednačinu $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

Rešenje.

Među rešenjima ove jednačine ne postoji nijedno za koje bi bilo $\cos x = 0$, jer bi tada bilo i $\sin x = 0$, što je nemoguće. Otuda deleći sa $\cos^2 x \neq 0$, dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4\sin x\cos x}{\cos x\cos x} + \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0.$$

Nakon skraćivanja, imamo izraz koji podseća na kvadratnu jednačinu

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - 4\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) + 3 = 0.$$

Zamenimo $\frac{\sin x}{\cos x}$ sa $\operatorname{tg} x$. Dobijamo sledeću ekvivalentnu jednačinu

$$(\operatorname{tg} x)^2 - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

Posle smene, $\operatorname{tg} x = t$, jednačina će biti kvadratna po t

$$t^2 - 4t + 3 = 0.$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo dva rešenja

$$\operatorname{tg} x = 3 \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg} x = 1.$$

Odavde su rešenja redom

$$x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

24. Rešiti jednačinu $5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$.

Rešenje.

Zamenimo 2 sa $2(\cos^2 x + \sin^2 x)$. Na taj način jednačinu svodimo na homogenu i rešavamo kao u prethodnom zadatku. Dobijamo

$$5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x).$$

Nakon sređivanja jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 0,$$

odnosno

$$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0.$$

Podelimo celu jednačinu sa $\cos^2 x$

$$\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x\cos x}{\cos x\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0.$$

Kao i u prethodnom primeru odavde sledi da je

$$3(\operatorname{tg} x)^2 + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

Nakon smene, $\operatorname{tg} x = t$, jednačina postaje kvadratna po t

$$3t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}.$$

Sledi da su rešenja redom

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

25. Rešiti jednačinu

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}.$$

Rešenje.

Data jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$(\sin^4 x)^2 + (\cos^4 x)^2 = \frac{17}{32}.$$

Ako dodamo i oduzmemo $2\sin^4 x\cos^4 x$ na levoj strani jednakosti, pojaviće se kvadrat binoma

$$(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x = \frac{17}{32}$$

$$\Leftrightarrow (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 = \frac{17}{13} + 2\sin^4 x \cos^4 x.$$

Primenimo isti postupak kao i u prethodnom koraku

$$((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x)^2 = \frac{17}{32} + \frac{\sin^4 2x}{8}$$

$$\Leftrightarrow ((1^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x)^2 = \frac{17}{32} + \frac{\sin^4 2x}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}\right)^2 = \frac{17}{32} + \frac{\sin^4 2x}{8}.$$

Nakon smene $t = \frac{\sin^2 2x}{2}$, jednačina se svodi na kvadratnu

$$(1-t)^2 = \frac{17}{32} + \frac{t^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2t + t^2 = \frac{17}{32} + \frac{t^2}{2}.$$

Sređivanjem, jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$t^2 - 4t + \frac{15}{16} = 0$$

odnosno

$$16t^2 - 64t + 15 = 0.$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo dva rešenja $t_1 = \frac{15}{4}$ ili $t_2 = \frac{1}{4}$. Prvo rešenje odbacujemo, jer ne može biti $\sin^2 2x = \frac{15}{4}$, a drugo prihvatamo. Sada rešimo jednačinu

$$\frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1}{4},$$

primenom formule za polovinu ugla, dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\frac{1 - \cos 4x}{4} = \frac{1}{4}.$$

Nakon sređivanja sledi da je

$$\cos 4x = 0,$$

odnosno

$$4x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Rešenja su:

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$

26. Odrediti ona rešenja jednačine $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$ koja su u skupu $[\frac{3}{4}, 1]$.

Rešenje.

Zamenimo $\cos 2x$ sa $2\cos^2 x - 1$. Dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3.$$

Nakon smene $4^{\cos^2 x} = t$, jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu po t:

$$t^2 + 4t - 12 = 0.$$

Odavde slede dva rešenja

$$t_1 = -6 \ \text{ ili } \ t_2 = 2.$$

Prvo rešenje odbacujemo jer mora biti $t = 4^{\cos^2 x}$ veće od nule, dakle data jednačina ekvivalentna je sa $4^{\cos^2 x} = 2$ i ona se svodi na

$$2^{2\cos^2 x} = 2^1.$$

Na osnovu svojstava funkcije 2^x, zaključujemo da mora biti

$$2\cos^2 x = 1.$$

Transformisanjem prethodne jednačine dobijamo:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nakon sređivanja sledi da je

$$\cos 2x = 0,$$

odnosno

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Od svih rešenja postoji samo jedno koje pripada datom intervalu $[\frac{3}{4}, 1]$, a to je $x = \frac{\pi}{4}$.

27. Rešiti jednačinu $11\text{ctg}\, x - 5\text{tg}\, x = \frac{16}{\sin x}$, za $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Rešenje.

Nakon zamene trigonometrijskih identiteta

$$\text{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \text{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

jednačina je ekvivalentna sledećoj

$$11 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 5 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{16}{\sin x}.$$

Celu jednačinu pomnožimo sa $\sin x \cdot \cos x$ (na osnovu uslova zadatka znamo da je $\sin x \cdot \cos x \neq 0$), kako bi je pojednostavili

$$11 \cos^2 x - 5 \sin^2 x = 16 \cos x,$$

odnosno

$$16 \cos^2 x - 16 \cos x - 5 = 0.$$

Nakon smene $\cos x = t$, jednačina će se svesti na kvadratnu po t

$$16t^2 - 16t - 5 = 0.$$

Kada rešimo kvadratnu jednačinu dobijamo dva rešenja

$$t_1 = \frac{5}{4} \ \text{ ili } \ t_2 = -\frac{1}{4}.$$

Prvu mogućnost ćemo odbaciti zbog toga što mora biti $-1 \leq \cos x \leq 1$, tako da rešavamo sledeću trigonometrijsku jednačinu

$$\cos x = -\frac{1}{4},$$

odnosno

$$x = \pm \arccos\big(-\frac{1}{4}\big) + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}.$$

28. Rešiti jednačinu $\arcsin 3x = \operatorname{arctg} 5x$.

Rešenje.

Neka je: $\beta = \arcsin 3x$, tada je $\sin\beta = 3x$, a kako je $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ sledi da je

$$\cos^2\beta = 1 - 9x^2$$
$$\Leftrightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{1-9x^2}.$$

Zamenom prethodnih izraza jednačina će biti ekvivalentna sledećoj

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{3x}{\pm\sqrt{1-9x^2}}.$$

Kako je i $\beta = \operatorname{arctg} 5x$, to je $\operatorname{tg}\beta = 5x$. Dakle jednačina se svodi na

$$\frac{3x}{\pm\sqrt{1-9x^2}} = \frac{5x}{1},$$

odnosno

$$\pm 3x = 5x\sqrt{1-9x^2}.$$

Jedno rešenje je $x = 0$. Ako je $x \neq 0$, onda je $\pm 3 = 5\sqrt{1-9x^2}$. Međutim, pošto je koren uvek nenegativan, zaključujemo da je

$$3 = 5\sqrt{1-9x^2}.$$

Sada kvadriramo jednačinu $3 = 5\sqrt{1-9x^2}$, kako bismo se oslobodili korena

$$9 = 25(1-9x^2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{25} = 1 - 9x^2.$$

Rešimo nepotpunu kvadratnu jednačinu

$$9x^2 = 1 - \frac{9}{25}$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{25}\cdot\frac{1}{9}.$$

Rešenja su:

$$x = \pm\frac{4}{15}.$$

29. Data je jednačina $(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = a\pi^3$.
a) Pokazati da jednačina nema rešenja ako je $a < \frac{1}{32}$.
b) Rešiti jednačinu u slučajevima $a = \frac{1}{8}$ i $a = \frac{7}{8}$.

Rešenje.

a) Zbog oblasti definisanosti funkcija $\arcsin x$ i $\arccos x$, važi da je $-1 \leq x \leq 1$. Uvođenjem smene $t = \arcsin x$ sledi da je $\frac{\pi}{2} - t = \arccos x$, tako se jednačina transformiše u

$$t^3 + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^3 = a\pi^3.$$

Posle sređivanja dobija se jednačina

$$12t^2 - 6\pi t + \pi^2 - 8a\pi^2 = 0$$

odnosno

$$12t^2 - 6\pi t + \pi^2(1 - 8a) = 0.$$

Diskriminanta za našu kvadratnu jednačinu je

$$D = b^2 - 4ac = 36\pi^2 - 4 \cdot 12 \cdot (\pi^2 - 8a\pi^2) = -12\pi^2 + 384a\pi^2 = -12\pi^2(1 - 32a).$$

Za $a < \frac{1}{32}$ jednačina će imati negativnu diskriminantu, pa prema tome nema rešenje.
b) Zamenom $a = \frac{1}{8}$ u

$$12t^2 - 6\pi t + \pi^2(1 - 8a) = 0$$

jednačina se svodi na

$$12t^2 - 6\pi t + \pi^2(1 - 8 \cdot \frac{1}{8}) = 0,$$

odnosno

$$12t^2 - 6\pi t = 0.$$

Kada izvučemo t ispred zagrade

$$t \cdot (12t - 6\pi) = 0$$

dobijamo da je

$$t = 0 \quad \text{ili} \quad t = \frac{\pi}{2}$$

odnosno
$$\arcsin x = 0 \quad \text{ili} \quad \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$
Konačno rešenja su:
$$x = 0 \quad \text{ili} \quad x = 1.$$
Za $a = \frac{7}{8}$
$$12t^2 - 6\pi t + \pi^2(1 - 8 \cdot \frac{7}{8}) = 0.$$
Sređivanjem, jednačina se svodi na jednostavniju
$$2t^2 - \pi t - \pi^2 = 0$$
iz koje sledi da je
$$t = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ili} \quad t = \pi$$
odnosno
$$\arcsin x = \pi \quad \text{ili} \quad \arcsin x = -\frac{\pi}{2}.$$
Prvo rešenje odbacujemo jer je $t = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a $\arcsin x = -\frac{\pi}{2}$ prihvatamo. Sledi da je $t = -\frac{\pi}{2}$, odnosno $x = -1$.

30. Rešiti jednačinu $\sin(\sin x) - \cos(\cos x) = 0$.

Rešenje.

Smenom: $\sin x = p$ i $\cos x = q$, dobijamo jednačinu:
$$\sin p - \cos q = 0$$
odnosno
$$\sin p = \cos q.$$
Ova jednačina je ekvivalentna sa
$$\sin p = \sin\left(\frac{\pi}{2} - q\right)$$
gde $p, q \in [-1, 1]$. Sledi da je
$$p = \frac{\pi}{2} - q \quad \text{ili} \quad p = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - q\right).$$
Rešimo sistem
$$p = \frac{\pi}{2} - q$$

$$p^2 + q^2 = 1.$$

Primenom metode zamene, dobijamo kvadratnu jednačinu po q

$$\left(\frac{\pi}{2} - q\right)^2 + q^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} - \pi q + q^2 + q^2 = 1.$$

Posle sređivanja dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$8q^2 - 4\pi q + \pi^2 - 4 = 0.$$

Kako je diskriminanta $D < 0$ sistem nema rešenja.

Ako je

$$p = \frac{\pi}{2} + q$$

tada treba rešiti sledeći sistem

$$p = \frac{\pi}{2} + q$$

$$p^2 + q^2 = 1.$$

Nakon rešavanja kao i za prethodni slučaj dobijamo da je $D < 0$, tako da je zaključak da početna jednačina nema rešenja.

31. Rešiti jednačinu $\sin(\cos x) - \cos(\sin x) = 0$.

Rešenje.

Smenom: $\cos x = p$ i $\sin x = q$, polazna jednačina se svodi na sistem

$$\sin p = \cos q$$

$$p^2 + q^2 = 1.$$

Kao i u prethodnom zadatku sistem se svodi na

$$p = \frac{\pi}{2} - q$$

$$p^2 + q^2 = 1,$$

ili

$$p = \frac{\pi}{2} + q$$

$$p^2 + q^2 = 1.$$

Primenimo metod zamene na prvi sistem

$$\left(\frac{\pi}{2} - q\right)^2 + q^2 = 1,$$

odnosno

$$8q^2 - 4\pi q + \pi^2 - 4 = 0.$$

Kako je diskriminanta $D < 0$ sistem nema rešenja.
Kada rešimo drugi sistem diskriminanta će takođe biti manja od nule, tako da je zaključak da jednačina nema rešenja.

32. Rešiti jednačinu $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$.

Rešenje.

Znamo da važi

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Zadatak se svodi na rešavanje sledećeg sistema

$$\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Kada saberemo prethodne dve jednakosti imamo da je

$$2 \arccos x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

odnosno

$$\arccos x = \frac{\pi}{3}.$$

Dakle

$$x = \frac{1}{2}.$$

Lako se proveri da je $x = \frac{1}{2}$ zaista rešenje date jednačine.

33. Rešiti jednačinu $\sin x = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Rešenje.

Smena: $t = \frac{x}{2}, (x = 2t)$ dovodi do "nove" jednačine:

$$\sin 2t = \operatorname{tg} t.$$

Primetimo da ovde mora biti $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, tj. $\cos t \neq 0$ te u daljem to koristimo. Dobijamo

$$2 \sin t \cos t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Jedno rešenje je $\sin t = 0$. Iz kog sledi

$$t = l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Kada vratimo smenu, dobijamo

$$x = 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Sada razmatramo slučaj kada je $\sin t \neq 0$. Rešimo jednačinu

$$2 \cos t = \frac{1}{\cos t},$$

iz koje sledi

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}.$$

Zamenimo $\frac{1+\cos 2t}{2}$ sa $\cos^2 t$. Dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nakon sređivanja

$$\cos 2t = 0,$$

odnosno

$$2t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rešenja su:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ali, kako je uslov da $\cos t \neq 0$, odnosno $x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \ m \in \mathbb{Z}$, moramo odbaciti rešenje $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

34. Rešiti jednačinu $\operatorname{ctg} 2^x = \operatorname{tg} 2^x + 2\operatorname{tg} 2^{x+1}$.

Rešenje.

Smena: $2^x = t$, dovodi do ekvivalentne jednačine

$$\operatorname{ctg} t = \operatorname{tg} t + 2\operatorname{tg} 2t.$$

Zamenimo $\frac{\cos t}{\sin t}$ sa $\operatorname{ctg} t$, zatim $\frac{\sin 2t}{\cos 2t}$ sa $\operatorname{tg} 2t$. Dobijamo da je:

$$\frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sin t}{\cos t} + 2\frac{\sin 2t}{\cos 2t}.$$

Pomnožimo jednačinu sa $\sin t \cdot \cos t \cdot \cos 2t$, da bismo se oslobodili razlomka

$$\cos^2 t \cdot \cos 2t = \sin^2 t \cdot \cos 2t + 2 \sin t \cdot \cos t \cdot \sin 2t.$$

Mora važiti uslov da je: $\sin t, \cos t, \sin 2t \neq 0$. Posle sređivanja jednačina se svodi na

$$\cos^2 t \cdot \cos 2t - \sin^2 t \cdot \cos 2t - \sin^2 2t = 0.$$

Dokažimo da je

$$\cos^2 t \cdot \cos 2t - \sin^2 t \cdot \cos 2t - \sin^2 2t = \cos 4t.$$

Izvlačenjem ispred zagrade $\cos 2t$, dobijamo

$$\cos 2t \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t) - \sin^2 2t.$$

Međutim kako je $\cos^2 t - \sin^2 t$, kosinus dvostrukog ugla, biće

$$\cos 2t \cdot \cos 2t - \sin^2 2t = \cos^2 2t - \sin^2 2t,$$

što je primenom već pomenute formule za dvostruki ugao jednako

$$\cos 4t.$$

Konačno, rešavamo jednačinu

$$\cos 4t = 0.$$

Zaključujemo da je

$$4t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

odnosno

$$t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Kada vratimo smenu $2^x = t$ rešenja su

$$2^x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}.$$

Kako znamo da 2^x mora biti pozitivno, odbacićemo vrednosti k, za koje je $k < 0$. Ostaju samo za $k \geq 0$. Međutim, moramo celu jednakost da logaritmujemo, da bismo došli do x

$$x = \log_2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

35. Rešiti jednačinu $\log_2 (\cos 2x + \cos \frac{x}{2}) + \log_{0.5} (\sin x + \cos \frac{x}{2}) = 0$.

Rešenje.

Na osnovu definicije logaritamske funkcije imamo sledeće uslove:

$$\cos 2x + \cos \frac{x}{2} > 0 \quad \text{i} \quad \sin x + \cos \frac{x}{2} > 0.$$

Koristeći pravilo za logaritmovanje jednačinu možemo pojednostaviti

$$\log_2 \left(\cos 2x + \cos \frac{x}{2} \right) + \log_{2^{-1}} \left(\sin x + \cos \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\cos 2x + \cos \frac{x}{2} \right) - \log_2 \left(\sin x + \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Levu stranu jednakosti možemo predstaviti preko količnika, a nulu kao $\log_2 1$. Ideja je da logaritmi i sa leve i sa desne strane jednakosti imaju istu osnovu, u našem slučaju osnova je 2

$$\log_2 \frac{\cos 2x + \cos \frac{x}{2}}{\sin x + \cos \frac{x}{2}} = \log_2 1.$$

Dobijamo da je

$$\frac{\cos 2x + \cos \frac{x}{2}}{\sin x + \cos \frac{x}{2}} = 1,$$

odavde sledi

$$\cos 2x + \cos \frac{x}{2} = \sin x + \cos \frac{x}{2}.$$

Transformisanjem dobijamo

$$\cos 2x - \sin x = 0.$$

Umesto $\cos 2x$, pisaćemo $\cos^2 x - \sin^2 x$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0$$

Izrazimo $\cos x$, preko $\sin x$, kako bismo jednačinu sveli na jednostavniju

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Smena: $\sin x = t$, dovodi do kvadratne jednačine

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

iz koje sledi da je

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{ili} \quad t = -1,$$

odnosno

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Kada zamenimo $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ u izraz $\cos 2x + \cos\frac{x}{2}$, taj izraz postaće negativan, a uslov je da bude pozitivan. Tako da, uzimajući u obzir uslove, neka od ovih rešenja moramo odbaciti jer ne zadovoljavaju ranije navedeni uslov. Konačno, rešenja su: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ili $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

5. Razni nestandardni trigonometrijski zadaci

36. Odrediti $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$, ako je $\cos(\alpha+\beta)=0$ i $\cos(\alpha-\beta)=1$.

Rešenje.

Koristimo adicione formule, za zbir i razliku dva ugla, tako da se zadatak svodi na rešavanje sledećeg sistema

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=0$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=1.$$

Sabiranjem prethodne dve jednakosti dolazimo do

$$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=1$$

što je ekvivalentno sa

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}.$$

Na sličan način, oduzimanjem, dobijamo

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}.$$

Konačno

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1.$$

37. Dokazati $x+y+z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z$, ako su svi $x,\ y,\ z$ takvi da su $\operatorname{tg}x,\ \operatorname{tg}y,\ \operatorname{tg}z$ definisani.

Rešenje.

$\Longleftarrow$:
Transformisanjem $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z$, dobijamo:

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=-\operatorname{tg}z(1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y).\ (1)$$

Ideja je da izraz "navedemo" na adicionu formulu. Ako je $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=1$, tada se iz početnog izraza dobija da je $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}z$, pa sledi da je $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=0$, odnosno $\operatorname{tg}x=-\operatorname{tg}y$. Kada zamenimo $\operatorname{tg}x=-\operatorname{tg}y$ u

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1$, dobijamo da je $\operatorname{tg}^2 x = -1$, a to je nemoguće. Zaključak je da možemo deliti sa $1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ izraz (1)

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = -\operatorname{tg} z,$$

odavde sledi da je

$$\operatorname{tg}(x + y) = -\operatorname{tg} z.$$

Zaključujemo da je

$$x + y = -z + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

odnosno

$$x + y + z = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Što je i trebalo dokazati.

$\Longrightarrow$:

$$x + y + z = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Prebacimo z na desnu stranu

$$x + y = -z + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Primenimo tangens na levu i desnu stranu jednakosti

$$\operatorname{tg}(x + y) = -\operatorname{tg} z.$$

Levu stranu jednakosti zapišemo preko adicione formule

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = -\operatorname{tg} z.$$

Zatim ceo izraz pomnožimo sa $1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$, kako bismo se oslobodili razlomka

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = -\operatorname{tg} z(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y).$$

Posle sređivanja imamo da je

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z,$$

što je i trebalo dokazati.

38. Ako je $\sin x + \cos x = a$, odrediti $\sin^4 x + \cos^4 x$.

Rešenje.

Transformisanjem izraza $\sin^4 x + \cos^4 x$ dobijamo:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} \qquad (1).$$

Primenom formule za dvostruki ugao, sledi da je

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1.$$

Dakle

$$\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = a^2 - 1.$$

Zamenimo $\sin 2x$ sa $a^2 - 1$ u (1)

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{(a^2-1)^2}{2}.$$

Posle sređivanja dobija se

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1 + 2a^2 - a^4}{2}.$$

39. Dokazati da zbir: $\sqrt{4\cos^4 x - 6\cos 2x + 3} + \sqrt{4\sin^4 x + 6\cos 2x + 3}$ ne zavisi od x.

Rešenje.

Kako se u zadatom izrazu pojavljuje $\cos^4 x$, $\sin^4 x$ kao i $\cos 2x$, pogodno je izvršiti transformaciju na $\cos^4 x$ i $\sin^4 x$ (kako bi sve izrazili preko $\cos 2x$), korišćenjem sledećih formula:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Kada ih zamenimo u zadatu jednakost, koju ćemo pre toga da transformišemo, zadatak će biti jednostavniji za dokazivanje

$$\sqrt{(2\cos^2 x)^2 - 6\cos 2x + 3} + \sqrt{(2\sin^2 x)^2 + 6\cos 2x + 3} =$$

$\sqrt{4\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 - 6\cos 2x + 3} + \sqrt{4\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + 6\cos 2x + 3} =$

$\sqrt{1+2\cos 2x + \cos^2 2x - 6\cos 2x + 3} + \sqrt{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 6\cos 2x + 3} =$

$\sqrt{4 - 4\cos 2x + \cos^2 2x} + \sqrt{4 + 4\cos 2x + \cos^2 2x} =$

$\sqrt{(2-\cos 2x)^2} + \sqrt{(2+\cos 2x)^2} =$

kako je $\sqrt{a^2} = |a|$, biće:

$|2-\cos 2x| + |2+\cos 2x| = 2 - \cos 2x + 2 + \cos 2x = 4.$

40. Za koju vrednost α i β važi jednakost $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$?

Rešenje.

Transformisanjem leve strane jednakosti uz pomoć adicione formule, jednakost se svodi na

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\beta,$$

odnosno

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha - \sin\alpha - \sin\beta = 0.$$

Izvucimo zajednički činilac ispred zagrade

$$\sin\alpha \cdot (\cos\beta - 1) + \sin\beta \cdot (\cos\alpha - 1) = 0$$

ili

$$\sin\alpha \cdot (1-\cos\beta) + \sin\beta \cdot (1-\cos\alpha) = 0. \quad (1)$$

Ako je $\sin\alpha \cdot \sin\beta = 0$, onda sledi da je $\sin\alpha = 0$ ili $\sin\beta = 0$. Ako je $\sin\alpha = 0$, tada iz (1) sledi da je $\sin\beta(1-\cos\alpha) = 0$, a to je moguće za $\sin\beta = 0$ ili $\cos\alpha = 1$. Ukoliko je $\cos\alpha = 1$, odnosno $\alpha = 2k\pi$, tada će jednakost važiti za proizvoljno β. Međutim, za $\sin\beta = 0$, sledi da je $\sin\alpha \cdot (1-\cos\beta) = 0$, odakle se može zaključiti da jednakost važi za $\sin\alpha = 0$ ili za $\beta = 2k\pi$ i α proizvoljno.
Ako je $\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq 0$, (1) se može napisati u obliku

$$\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} = -\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Kako je

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x},$$

sledi

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Iz

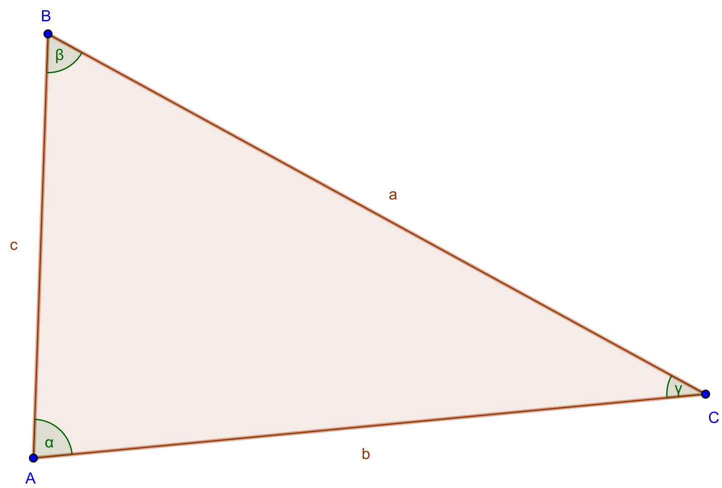
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\alpha}{2}\right),$$

dobija se

$$\frac{\beta}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \pi k.$$

Dakle, data jednakost važi za:
1. $\alpha = 2k\pi$, β proizvoljno, $k \in \mathbb{Z}$,
2. α proizvoljno, $\beta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
3. $\alpha + \beta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

41. Za unutrašnje uglove α i β trougla ABC (kod A, odnosno B) važi $\sin^{23}\frac{\alpha}{2}\cos^{48}\frac{\beta}{2} = \sin^{23}\frac{\beta}{2}\cos^{48}\frac{\alpha}{2}$.Naći odnos $\frac{AC}{BC}$.



Rešenje.

Dokažimo da je $\alpha = \beta$. Ako bi bilo $\alpha \neq \beta$, na primer, $0 < \alpha < \beta < \pi$, bilo bi

$$0 < \sin\frac{\alpha}{2} < \sin\frac{\beta}{2} \wedge 0 < \cos\frac{\beta}{2} < \cos\frac{\alpha}{2},$$

odakle sledi da je

$$\sin^{23}\frac{\alpha}{2}\cos^{48}\frac{\beta}{2} < \sin^{23}\frac{\beta}{2}\cos^{48}\frac{\alpha}{2},$$

suprotno pretpostavci. Dakle,

$$\alpha = \beta, \qquad \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = 1.$$

42. Ako su α, β, γ uglovi trougla i ako je $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sqrt{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$, onda je bar jedan od uglova α, β, γ jednak $\frac{\pi}{3}$. Dokazati.

Rešenje.

Transformisanjem datog izraza dobijamo:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sqrt{3}\cos\alpha - \sqrt{3}\cos\beta - \sqrt{3}\cos\gamma = 0.$$

Ako celu jednakost podelimo sa dva, pojaviće se vrednosti nekih trigonometrijskih funkcija, tako da ćemo primeniti adicionu formulu kao i da za trougao važi $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma$

$$\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\sin\gamma - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left((\pi - \alpha - \beta) - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Primenimo formulu za transformaciju iz zbira u proizvod

$$2\sin\left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{3} + \beta - \frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{3} - \beta + \frac{\pi}{3}}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha - \beta\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(2\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{(\alpha+\beta)}{2}\Big)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) = 0. \quad (1)$$

Sređivanjem izraza $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$, dobijamo:

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3(\alpha+\beta) - 2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{3(\pi-\gamma) - 2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Transformisanjem: $\left(\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$, dobijamo:

$-2\cdot\sin\left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right).$

Posle zamene izraza $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\gamma}{2}\right)$ i $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$ u (1), sledi :

$$2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\gamma}{2}\right)2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=0.$$

Zaključujemo da neki od činilaca mora biti jednak nuli, pa dobijamo (s obzirom da su α, β i γ unutrašnji uglovi trougla):

$$\frac{\pi}{6}-\frac{\gamma}{2}=0 \text{ ili } \frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}=0 \text{ ili } \frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}=0,$$

sledi da je

$$\gamma=\frac{\pi}{3} \text{ ili } \beta=\frac{\pi}{3} \text{ ili } \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

43. Pokazati da je $\cos^2 3+\cos^2 1-\cos 4\cdot\cos 2=1$.

Rešenje.

Primenom formule za polovinu ugla i transformacije iz proizvoda u zbir sledi

$\frac{1+\cos 6}{2}+\frac{1+\cos 2}{2}-\frac{1}{2}(\cos(4+2)+\cos(4-2))=\frac{1}{2}+\frac{\cos 6}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\cos 2}{2}-\frac{1}{2}(\cos 6+\cos 2)=$

$=1+\frac{\cos 6}{2}+\frac{\cos 2}{2}-\frac{\cos 6}{2}-\frac{\cos 2}{2}=1.$

Što je i trebalo dokazati.

44. Dokazati da je:

a) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$;

b) $\operatorname{tg} 6^\circ\operatorname{tg} 54^\circ\operatorname{tg} 66^\circ=\operatorname{tg} 18^\circ$.

Rešenje.

Prvi način.

a) Transformisanjem izraza $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$, iz proizvoda u zbir , dobijamo

$\sin 20^\circ\cdot\frac{1}{2}(\cos(40^\circ-80^\circ)-\cos(40^\circ+80^\circ))=\sin 20^\circ\cdot\frac{1}{2}(\cos(-40^\circ)-\cos 120^\circ)$

$$= \sin 20^\circ \cdot \frac{1}{2}\cos 40^\circ + \frac{1}{4}\sin 20^\circ = \frac{1}{4}(\sin(20^\circ + 40^\circ) + \sin(20^\circ - 40^\circ)) + \frac{1}{4}\sin 20^\circ$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 60^\circ + \sin(-20^\circ)) + \frac{1}{4}\sin 20^\circ = \frac{1}{4}\sin 60^\circ - \frac{1}{4}\sin 20^\circ + \frac{1}{4}\sin 40^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Drugi način.

Pokažimo da važi

$$\sin\alpha \sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

Primenimo adicionu formulu pri dokazivanju identiteta

$$\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha) = (\sin 60^\circ \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos 60^\circ)(\sin 60^\circ \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 60^\circ)$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{4} = \sin\alpha\left(\frac{3}{4}\cdot\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(3\cdot\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\right).$$

Kako je

$$\sin 3\alpha = 3 \cdot \cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha,$$

sledi da je

$$\sin\alpha \sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

Primenimo prethodni identitet na $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \sin 20^\circ \sin(60^\circ - 20^\circ)\sin(60^\circ + 20^\circ) = \frac{1}{4}\sin 60^\circ = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

b) Kako je

$$\mathrm{tg}\,\alpha \mathrm{tg}\,(60^\circ - \alpha)\mathrm{tg}\,(60^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \frac{\mathrm{tg}\,60^\circ - \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}\,60^\circ \cdot \mathrm{tg}\,\alpha} \cdot \frac{\mathrm{tg}\,60^\circ + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,60^\circ \cdot \mathrm{tg}\,\alpha},$$

odnosno

$$\mathrm{tg}\,\alpha \mathrm{tg}\,(60^\circ - \alpha)\mathrm{tg}\,(60^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \frac{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha} \cdot \frac{\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Transformisanjem, dobijamo da je

$$\mathrm{tg}\,\alpha \mathrm{tg}\,(60^\circ - \alpha)\mathrm{tg}\,(60^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \frac{3 - (\mathrm{tg}\,\alpha)^2}{1 - 3 \cdot (\mathrm{tg}\,\alpha)^2} = \frac{3\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\,\alpha}{1 - 3 \cdot \mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

Kako je

$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\,\alpha}{1 - 3\cdot\mathrm{tg}^2\,\alpha},$$

možemo zaključiti da

$$\mathrm{tg}\,\alpha\mathrm{tg}\,(60^\circ - \alpha)\mathrm{tg}\,(60^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,3\alpha.$$

Primenom prethodnog identiteta, sledi da je

$$\mathrm{tg}\,6^\circ\mathrm{tg}\,54^\circ\mathrm{tg}\,66^\circ = \mathrm{tg}\,18^\circ = \mathrm{tg}\,6^\circ\cdot\mathrm{tg}\,(60^\circ-6^\circ)\cdot\mathrm{tg}\,(60^\circ+6^\circ) = \mathrm{tg}\,3\cdot6^\circ = \mathrm{tg}\,18^\circ.$$

U narednim zadacima koristićemo oznake a, b, c, za dužine stranica trougla, a α, β, γ, za odgovarajuće uglove kod temena A, B, C.

45. Ako za uglove i stranice trougla važi:
   a) $a = 2b\cos\gamma$, dokazati da je trougao jednakokraki;
   b) $(b + c + a)\cdot(b + c - a) = 3bc$, dokazati da je $\alpha = 60^\circ$.

Rešenje.

a) Posle množenja leve i desne strane jednakosti $a = 2b\cos\gamma$ sa a, sledi da je

$$a^2 = 2ab\cos\gamma.$$

Primenom kosinusne teoreme $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, formiramo sistem

$$a^2 = 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Koristimo metodu zamene pri rešavanju sistema

$$c^2 = a^2 + b^2 - a^2.$$

Dobijamo da je

$$c^2 = b^2,$$

odnosno

$$c = b.$$

b) Iz $(b + c + a)\cdot(b + c - a) = 3bc$, primenom razlike kvadrata, sledi da je

$$(b + c)^2 - a^2 = 3bc,$$

odnosno

$$b^2 + c^2 - a^2 = bc.$$

Korišćenjem kosinusne teoreme: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, sledi da je

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (1)$$

Zamenom (1) u $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, dobijamo

$$\cos\alpha = \frac{bc}{2bc},$$

odnosno

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

Odavde možemo da zaključimo da je

$$\alpha = 60^\circ.$$

46. Dokazati da u svakom trouglu važi:

$$a \cdot (\sin\beta - \sin\gamma) + b \cdot (\sin\gamma - \sin\alpha) + c \cdot (\sin\alpha - \sin\beta) = 0$$

Rešenje.

Koristimo sinusnu teoremu

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

gde je R, poluprečnik opisanog kruga. Dobijamo

$$\frac{b}{2R} = \sin\beta \quad \text{i} \quad \frac{a}{2R} = \sin\alpha \quad \text{i} \quad \frac{c}{2R} = \sin\gamma. \quad (1)$$

Zamenimo (1), u zadatu jednakost

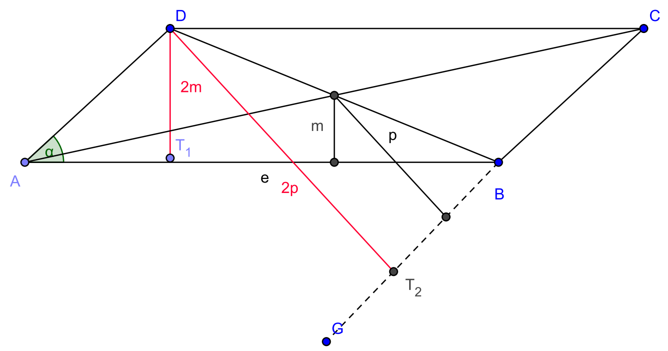
$$a \cdot \left(\frac{b}{2R} - \frac{a}{2R}\right) + b \cdot \left(\frac{c}{2R} - \frac{a}{2R}\right) + c \cdot \left(\frac{a}{2R} - \frac{b}{2R}\right) = 0.$$

Dobijamo da je

$$a \cdot (b - c) + b \cdot (c - a) + c \cdot (a - b) = a \cdot b - a \cdot c + b \cdot c - b \cdot a + c \cdot a - c \cdot b = 0.$$

47. U paralelogramu $ABCD$ je dat oštar ugao α (kod temena A) i odstojanja m i p tačke preseka dijagonale od neparalelnih stranica AB i BC. Izračunati dužine dijagonala paralelograma.

Rešenje.



Neka je T_1, podnožije normale iz temena D na stranicu AB. Posmatrajmo trougao ADT_1: AD je hipotenuza za pravougli trougao i $2m$ je naspramna stranica u odnosu na α, jer je rastojanje od preseka dijagonala paralelograma do stranice paralelograma m. Kako je $\sin\alpha$ odnos naspramne stranice i hipotenuze pravouglog trougla imamo da je

$$\sin\alpha = \frac{2m}{AD}$$

odakle sledi

$$AD\cdot\sin\alpha = 2m \quad \text{i} \quad BC = AD.$$

Slično važi i za ΔDCT_2, gde je T_2 podnožje normale iz temena D, na stranicu BC

$$AB = \frac{2p}{\sin\alpha}.$$

Primenom kosinusne teoreme na ΔABC, sledi da je

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos(\pi-\alpha)} = \sqrt{\left(\frac{2p}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{2m}{\sin\alpha}\right)^2 + 2\frac{4mp}{\sin^2\alpha}\cdot\cos\alpha}$$

odnosno,

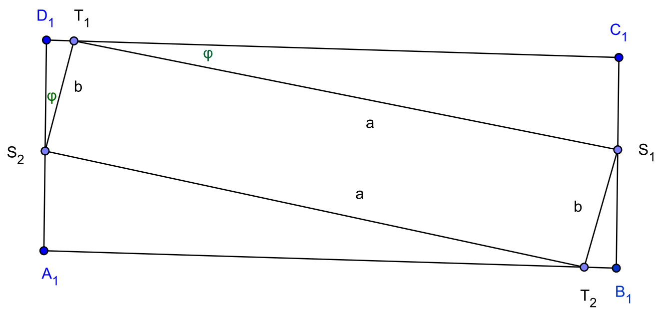
$$AC = \sqrt{\frac{4p^2}{\sin^2\alpha} + \frac{4m^2}{\sin^2\alpha} + \frac{8mp}{\sin^2\alpha} \cdot \cos\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2 + p^2 + 2mp \cdot \cos\alpha}.$$

Slično se dokazuje i za

$$BD = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2 + p^2 - 2mp \cdot \cos\alpha}.$$

48. Oko datog pravougaonika, čije su stranice a i b, opisati novi pravougaonik koji će imati zadatu površinu m^2. Za koje vrednosti m zadatak ima rešenja?

Rešenje.



Neka je φ ugao koji grade stranica opisanog i datog pravougaonika. Iz

$$\Delta T_1 D_1 S_2$$

dobijamo

$$\sin\varphi = \frac{D_1T_1}{b},$$

iz

$$\Delta S_1 T_1 C_1$$

dobijamo

$$\cos\varphi = \frac{T_1C_1}{a}.$$

Stranice opisanog pravougaonika su redom jednake

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi \quad \text{i} \quad a\sin\varphi + b\cos\varphi.$$

Prema uslovu zadatka je

$$(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\cdot(a\sin\varphi + b\cos\varphi) = m^2.$$

Sređivanjem dalje dobijamo

$$(a^2+b^2)\cdot(\cos\varphi\cdot\sin\varphi) + a\cdot b\cdot(cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = m^2.$$

Kako je

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

izraz se svodi na

$$(a^2+b^2)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi + a\cdot b = m^2$$

odnosno

$$(a^2+b^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi + a\cdot b = m^2.$$

Transformisanjem dobijamo da je

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2)\cdot\sin 2\varphi = m^2 - a\cdot b,$$

$$(a^2+b^2)\cdot\sin 2\varphi = 2\cdot(m^2 - a\cdot b),$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2\cdot(m^2 - a\cdot b)}{a^2+b^2}.$$

Zadatak ima rešenje akko je

$$0 \le \frac{2\cdot(m^2 - a\cdot b)}{a^2+b^2} \le 1.$$

Nema smisla posmatrati za $\varphi > 90^\circ$, jer je φ unutrašnji ugao pravouglog trougla, pa samim tim manji od 90°

$$0 \le \frac{2m^2 - 2a\cdot b}{a^2+b^2} \le 1.$$

Kada celu nejednakost pomnožimo sa a^2+b^2, biće

$$0 \le 2m^2 - 2ab \le a^2+b^2.$$

Sada celoj nejednakosti dodamo $2ab$

$$2ab \leq 2m^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab,$$

odnosno

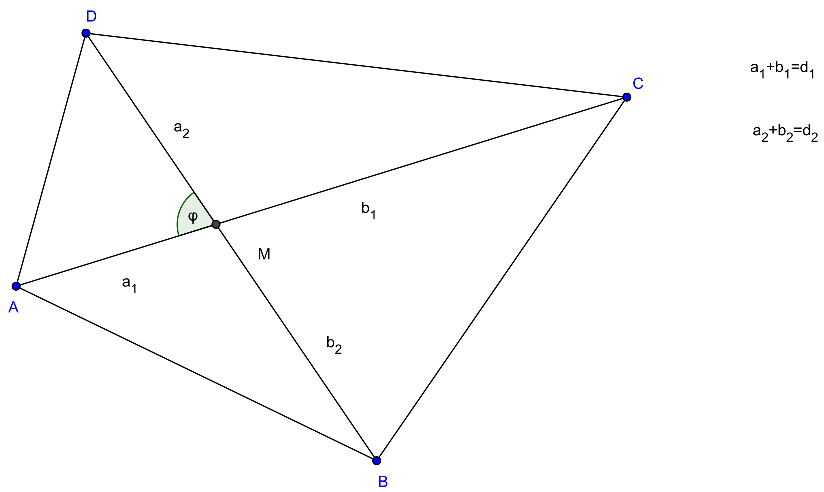
$$ab \leq m^2 \leq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Posle korenovanja, dobijamo za koje vrednosti m, zadatak ima rešenje

$$\sqrt{ab} \leq m \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

49. Neka su d_1 i d_2 dijagonale konveksnog četvorougla, a φ ugao koji one grade. Dokazati da je površina tog četvorougla $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$.

Rešenje.



Koristimo da je $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$.
Neka su a_1 i b_1 odnosno a_2 i b_2 odsečci na koje su dijagonale d_1 i d_2 podeljene tačkom u kojoj se seku. Tada je

$$S = P(\triangle ABM) + P(\triangle BMC) + P(\triangle CMD) + P(\triangle DMA).$$

Primenimo formulu za površinu trougla $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, na $\triangle ABM$, $\triangle BMC$, $\triangle CMD$ i $\triangle DMA$

$$S = \frac{1}{2}a_1b_2\sin(180^\circ-\varphi)+\frac{1}{2}b_2b_1\sin(180^\circ-\varphi)+\frac{1}{2}b_1a_2\sin(180^\circ-\varphi)+\frac{1}{2}a_1a_2\sin(180^\circ-\varphi).$$

Sređivanjem dobijamo da je

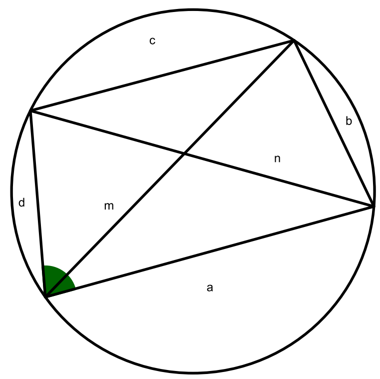
$$S = \frac{1}{2}\sin\varphi(a_1b_2 + b_2b_1 + b_1a_2 + a_1a_2) = \frac{1}{2}\sin\varphi(a_1b_2 + b_2b_1 + b_1a_2 + a_1a_2),$$

odnosno

$$S = \frac{1}{2}\sin\varphi(a_1(b_2+a_2)+b_1(b_2+a_2)) = \frac{1}{2}\sin\varphi((b_2+a_2)(a_1+b_1)) = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$$

50. Izraziti dijagonale tetivnog četvorougla preko njegovih stranica. Izvesti odatle Ptolomejevu teoremu: proizvod dijagonala tetivnog četvorougla jednak je zbiru proizvoda naspramnih strana.

Rešenje.



Neka su a, b, c, d stranice, m i n dijagonale tetivnog četvorougla, a ugao između stanica a i d označimo sa φ. Iz kosinusne teoreme je:

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi \quad \text{i} \quad n^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \varphi).$$

Kako je $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, biće

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi \quad \text{i} \quad n^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\varphi.$$

Iz prve jednakosti imamo da je

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + d^2 - n^2}{2ad}.$$

Zamenom prethodnog izraza u $n^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\varphi$, dobijamo da je

$$n^2 = b^2 + c^2 + 2bc\frac{a^2 + d^2 - n^2}{2ad},$$

odnosno

$$n^2 = b^2 + c^2 + \frac{bca}{d} + \frac{bcd}{a} - \frac{bcn^2}{ad}.$$

Oslobodimo se razlomka

$$adn^2 = adb^2 + adc^2 + bca^2 + bcd^2 - bcn^2.$$

Transformisanjem, dobijamo da je

$$n^2(ad + bc) = (db + ac) \cdot (ab + dc),$$

odnosno

$$n^2 = \frac{(db + ac) \cdot (ab + dc)}{ad + bc}. \quad (1)$$

Analogno se dobija

$$m^2 = \frac{(ab + bc) \cdot (ac + bd)}{ab + cd}. \quad (2)$$

Posle množenja (1) i (2),

$$n^2 \cdot m^2 = \frac{(db + ac) \cdot (ab + dc)}{(ad + bc)} \cdot \frac{(ab + bc) \cdot (ac + bd)}{(ab + cd)}$$

izraz se svodi na

$$n^2 \cdot m^2 = (ac + bd)^2,$$

odnosno

$$n \cdot m = ac + bd.$$

Tako smo dokazali Ptolomejevu teoremu.

ZAKLJUČAK:

Ideja ovog rada je da se učenicima približi trigonometrija kao i da se mnoge nedoumice oko pojedinih matematičkih problema iz jedne od težih tema iz matematike koja se predaje u školi otklone. Za to su birani različiti primeri u kojima se koriste mnoge ideje. Neke se mogu koristiti na dodatnoj nastavi, za pripremu za takmičenja ili prijemni. Zadaci su postupno rešeni i treba da ukažu na metodu rešavanja zadataka iz trigonometrije, tako što komplikovane matematičke probleme, na različite načine, svodimo na jednostavne. Cilj je da nakon vežbe ponuđenih zadataka učenik samostalno može da reši zadatak iz trigonometrije.

LITERATURA:

[1] Đorđe Kadijević, ZBIRKA NESTANDARDNIH ZADATAKA IZ TRIGONOMETRIJE, Arhimedes, Beograd 1990.

[2] Đorđe Dugošija, Živorad Ivanović, TRIGONOMETRIJA, Krug, Beograd 2006.

[3] Srđan Ognjanović, Živorad Ivanović, MATEMATIKA 2, Krug, Beograd 2004.

[4] Gradimir Vojvodić, Milan Vukasović, Radivoje Despotović, Đura Paunić, Vojislav Petrović, Ratko Tošić, MATEMATIKA , Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd

[5] http://www.dms.rs, Društvo matematičara