МИНИСТАРСТВО ВОЈСКЕ И МОРНАРИЦЕ

ПРЕДАВАЊА

ИЗ

ТРИГОНОМЕТРИЈЕ

СА

НАУКОМ О ЛОГАРИТМИМА, ОСНОВИМА НАУКЕ
О КОМПЛЕКСНИМ КОЛИЧИНАМА, ПРИМЕНАМА
У ГЕОМЕТРИЈИ, ГЕОДЕЗИЈИ
И СФЕРНОЈ АСТРОНОМИЈИ

ЗА УПОТРЕБУ ПИТОМАЦА ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ

САСТАВИО

Др. ДИМИТРИЈЕ ДАНИЋ

РЕД. ПРОФЕСОР ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ

ДРУГО ИЗДАЊЕ

СА 122 СЛИКЕ У ТЕКСТУ.

БЕОГРАД

ШТАМПАРСКА РАДИОНИЦА МИНИСТАРСТВА ВОЈСКЕ И МОРНАРИЦЕ

1924.

ПРЕДАВАЊА

ИЗ

ТРИГОНОМЕТРИЈЕ

ИСПРАВКЕ:

СТР.	ВРСТА	МЕСТО	ЧИТАЈ
51	3 озго	у именитељу $1-3\,cotg\,\alpha$	$1-3\,cotg^2\,\alpha$
61	11 озго	$sin\,3\alpha = 3\,sin\,\alpha - sin^3\,\alpha$	$sin\,3\alpha = 3\,sin\,\alpha - 4\,sin^3\,\alpha$
80	3 озго	$a = \sqrt{y}$	$a = \sqrt[x]{y}$
83	13 озго	$a^{\frac{p}{qx}}$	$a^{\frac{px}{q}}$
187	9 оздо	Доводење	Довођење
225	17 озго	у зете	узете
324	10 оздо	у именитељу $ad + cd$	$ad + bc$
396	6 озго	допуњују до	допуњују се до
550	8 озго	$\frac{\sigma}{1}$	$\frac{\sigma}{2}$

ГРЧКА АЗБУКА

Α	α	алфа	Ν	ν		ни
Β	β	бета (вита)	Ξ	ξ		кси
Γ	γ	гама	Ο	ο		омикрон
Δ	δ	делта	Π	π		пи
Ε	ε	епсилон	Ρ	ρ		ро
Ζ	ζ	зета (зита)	Σ	σ	ς	сигма
Η	η	ета (ита)	Τ	τ		тау
Θ	ϑ	тета (тита)	Υ	υ		ипсилон
Ι	ι	јота	Φ	φ		фи
Κ	κ	капа	Χ	χ		хи
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ		пси
Μ	μ	ми	Ω	ω		омега.

ПРЕДГОВОР.

Оно што сам навео у Предговору ка првом издању мојих Предавања из Тригонометрије могу, у главноме, сада да поновим. Књига је састављена по мојим усменим предавањима која сам годинама држао у првој години Нижег Курса Војне Академије. Главна садржина предмета истакнута је типографски крупним слогом са проредом, док су допуне и разрада детаља штампани истим слогом, али без прореда и увлачењем текста у десно. Бројни примери, у колико су они били потребни да ученика упуте у практичну примену важнијих проблема, сложени су ситнијим словима. Таквим је распоредом хтео писац да видно одвоји важније од мање важнога како би се добио бољи преглед на једноме опсежном, али и врло важноме предмету. Одељци и поједини чланови, који се могу изоставити, а да се органска веза осталога не квари, означени су у Садржају звездицом. На тај начин омогућено је да се књига може употребити како у већој, тако и у мањој опширности. Обзири на распоред математичке наставе и њене примене у Војној Академији учинили су да уђу неке партије које, строго узев, не спадају у Тригонометрију.

Као у првоме издању тако сам и сада ставио код сваког научног термина његов немачки и француски израз да бих тиме олакшао разумевање страних дела. Најзад, као и у осталим мојим школским књигама, ја сам и овде на подесним местима унео кратке историске напомене и имена оних радeника на овоме пољу Математике који су заслужили да их се Историја Науке сећа.

Београд, Августа 1924.

Др. ДИМИТРИЈЕ ДАНИЋ.

УВОД

Тригонометрија је Наука, која нас учи како се из довољнога броја познатих комада једнога троугла, рачунским путем, налазе његови остали комади. Она се дели на *равну* и *сферну* Тригонометрију. Прва се бави разрешавањем равних, друга разрешавањем сферних троуглова. Под овима последњим разумемо фигуре, које постају пресецањем три велика круга на површју лопте.

Пошто се сваки полигон, повлачењем диагонала, односно великих кругова лопте, ако је полигон сферан, може разложити на извесан број равних или сферних троуглова, то је појмљиво како се разрешавање ма какве сложене фигуре да свести на разрешавање ових последњих. Са тога гледишта можемо Тетрагонометрију, Полигонометрију и овој у простору одговарајућу Полиедрометрију сматрати као примене Тригонометрије, у којима се примењују њени резултати на рачунско разрешавање четвороугаоника, општих полигона и полиедара у простору.

Ми знамо да је један троугао потпуно одређен, кад су нам позната три његова комада, који морају бити независни један од другог. У саставке троугла

УВОД

Тригонометрија је Наука, која нас учи како се из довољнога броја познатих комада једнога троугла, рачунским путем, налазе његови остали комади. Она се дели на *равну* и *сферну* Тригонометрију. Прва се бави разрешавањем равних, друга разрешавањем сферних троуглова. Под овима последњим разумемо фигуре, које постају пресецањем три велика круга на површју лопте.

Пошто се сваки полигон, повлачењем диагонала, односно великих кругова лопте, ако је полигон сферан, може разложити на извесан број равних или сферних троуглова, то је појмљиво како се разрешавање ма какве сложене фигуре да свести на разрешавање ових последњих. Са тога гледишта можемо Тетрагонометрију, Полигонометрију и овој у простору одговарајућу Полиедрометрију сматрати као примене Тригонометрије, у којима се примењују њени резултати на рачунско разрешавање четвороугаоника, општих полигона и полиедара у простору.

Ми знамо да је један троугао потпуно одређен, кад су нам позната три његова комада, који морају бити независни један од другог. У саставке троугла могу се рачунати, осим његових страна и углова, још и висине, површина и обим троугла, полупречници уписаних и описаног круга и т. д. Једно због тога што се сви задатци, до којих долазимо комбиновањем горњих података на разне начине, у главноме своде на неколико основних задатака (у Планиметрији она позната четири случаја подударности), у којима се не узимају други комади осим страна и углова, а друго што су поменути комади и иначе најважнији, јер најнепосреднији саставци како код равних тако и код сферних фигура, наша циљ ће бити да, на првоме месту, нађемо обрасце за разрешавање тих главних задатака. Обрасци, који би били подесни за разрешавање ових задатака, очевидно, морају изражавати везу, која постоји између страна и углова једнога троугла. Да бисмо, пак, могли поставити једначине између тих комада ми замењујемо угле извесним бројним количинама, које од углова тако зависе, да вредности једних потпуно одређују вредности ових других и обратно. Количине, које заводимо место углова, зову се *тригонометриске* или *гониометриске функције,* а онај део Тригонометрије, који се бави проучавањем тих функција, без обзира на њихову примену, зове се *Гониометрија.*

ПРВИ ДЕО

ГОНИОМЕТРИЈА

I

ОПШТИ ПОЈМОВИ.

1.

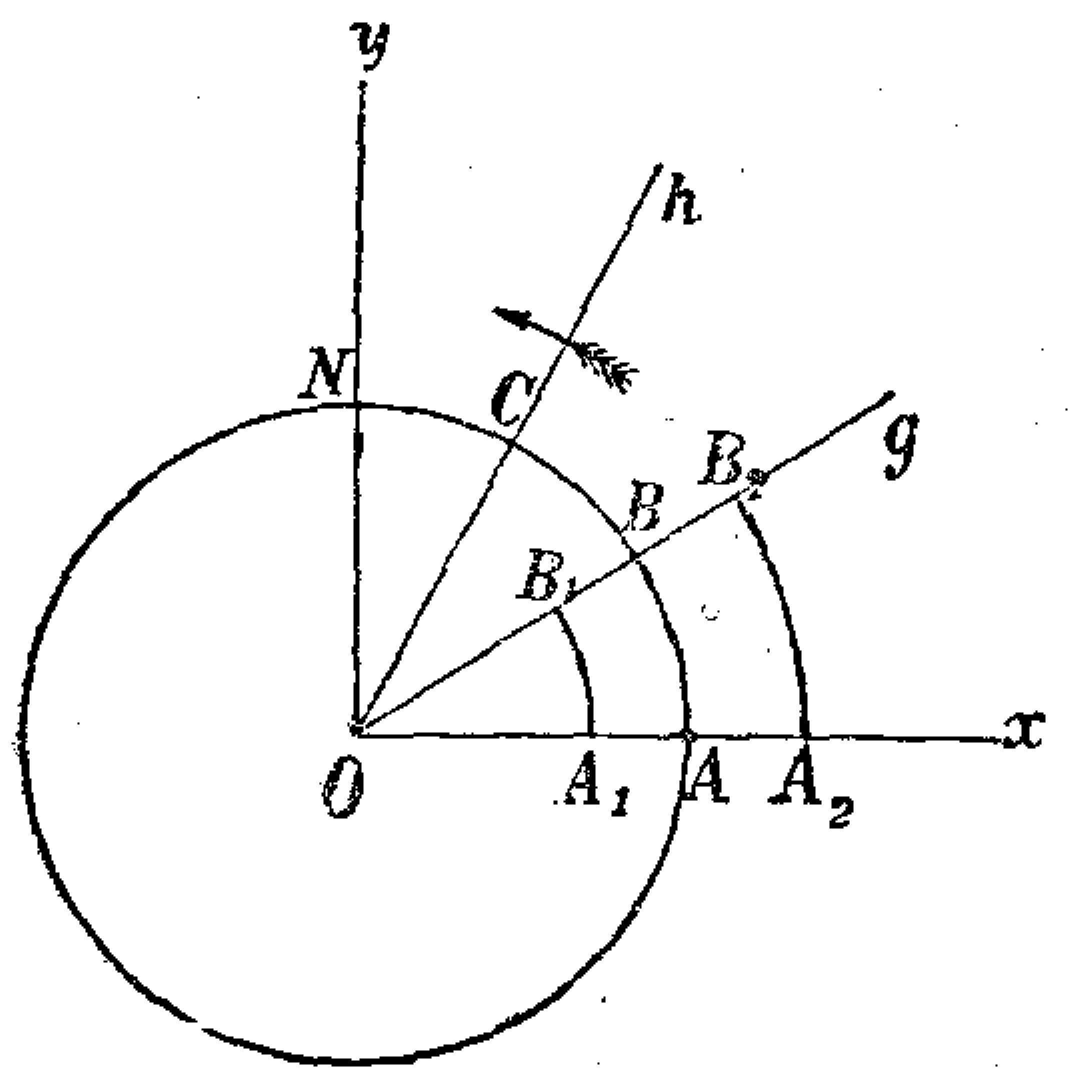
Дефиниције.

1. **Мерење углова.** — Замислимо једну праву Ox, која се непрекидно и у једноме смислу, н. пр. од десна на лево, обрће око једне своје тачке O. Пошав из положаја Ox права поступно долази у нове положаје, н. пр. у правце Og, Oh, Oy итд. и описује, на тај начин, све могуће угле. При томе обртању свака тачка праве Ox описује круг, чија периферија зависи од одстојања покретне тачке од сталне тачке (средишта) O.

Из Планиметрије знамо, да су угли, које права Ox описује при обртању око O, сразмерни луцима, које ма која њена тачка A у истоме времену прелази. То значи постоји сразмера

$$\sphericalangle gOx : \sphericalangle hOx : \sphericalangle yOx : \cdots = arc AB : arc AC : arc AN : \cdots$$

Одавде следује, да је један угао, н. пр. $\sphericalangle hOx$ два, три или у опште n пута већи од другог угла $\sphericalangle gOx$, ако је лук (arcus) AC два, три или n пута већи од лука AB. Тај резултат природно нас упућује да угле меримо луцима изражавајући, на тај начин, величину угла у јединици дужине. Но пошто дужина лука зависи и од полупречника круга, тако да са растењем овога и луци сразмерно расту,[1] то је појмљиво, да се угао несме мерити апсолутном дужином одговарајућег лука, но количником из тога лука и полупречника. Тако н. пр. ставља се



Сл. 1.

$$\sphericalangle gOx = \frac{arc\,AB}{OA} = \frac{arc\,A_1B_1}{OA_1} = \frac{arc\,A_2B_2}{OA_2},$$

$$\sphericalangle hOx = \frac{arc\,AC}{OA}, \quad \sphericalangle yOx = \frac{arc\,AN}{OA}, \text{ итд.}$$

Према овоме има се под јединицом угла разумети онај угао, коме одговара лук раван полупречнику. Ако, пак, ставимо полупречник $OA = 1$, онда је непосредно $\sphericalangle gOx = arc\,AB$, $\sphericalangle hOx = arc\,AC$, $\sphericalangle yOx = arc\,AN$, итд. Узев полупречник круга за јединицу изражава дакле један исти број како угле, тако и луке, које ти угли захватају међу својим крацима.

---

[1]) У Планиметрији се показује, да се има

$$arc\,AB : arc\,A_1B_1 : arc\,A_2B_2 : \cdots = OA : OA_1 : OA_2 : \cdots,$$

да је дакле

$$\frac{arc\,AB}{OA} = \frac{arc\,A_1B_1}{OA_1} = \frac{arc\,A_2B_2}{OA_2} = \cdots$$

С тога се врло често (а и ми ћемо од тога правити употребу) речи; угао и лук узимају у истоме смислу.

2. **Продужење о мерењу углова.** — Пошто мерење углова луцима није подесно за практичну употребу, јер се дужина кривих линија не може просто и тачно да определи, то осим поменутога начина мерења углова има још један други, можемо рећи, вештачки начин, који се нарочито у пракси употребљава. Овај други начин мерења основан је на следећем. Цела раван дели се из тачке O на 360 једнаких делова у виду исечака. Сваки такав исечак представља извесан угао са теменом у тачци O. Тај 360-ти део равни узимамо за јединицу, којом меримо угле и зовемо га *степеном* (*Grad*, degré), а бележимо знаком ^{0}. Ову јединицу делимо даље на мање јединице: *минуте* (*Minuten*, minutes) и *секунде* (*Sekunden*, secondes), за које употребљавамо знаке $'$ и $''$. Стављамо

$$1^0 = 60', \quad 1' = 60'', \quad \text{дакле} \quad 1^0 = 60 \cdot 60'' = 3600''. \ ^{1)}$$

Тако н. пр. представља $67^0\,14'\,38{,}56''$ угао од 67 степени, 14 минута, 38 целих и 56 стотих секунде.

---

[1]) За време прве француске револуције, када је извршено преустројство мера дужине и тежине (метарска система), заведена је и за угле десетна подела, по којој се прав угао делио на сто делова место на деведесет. Цела периферија садржавала је дакле 400 делова, које су такође звали степенима. Степен је био подељен на 100 минута, а минута на 100 секунада. У овој системи имао би се написати угао од $39^0\,15'\,27{,}83''$ простије $39{,}152783^0 = 3915{,}2783' = 391527{,}83''$.

Поред свију њених добрих страна, с погледом на рачунање и начин писања, и поред све препоруке од париске Академије Наука године 1869. ова се десетна подела није могла да одржи, већ је остала она стара подела.

Пример.

$$26^0\,43'\,53{,}47'' = 26 \cdot 60.60'' + 43 \cdot 60'' + 53{,}47'' = 96233.47''$$

$$= \frac{96233{,}47'}{60} = 1603{,}8912'$$

$$= \frac{1603{,}8912^0}{60} = 26{,}731520.$$

У пракси подела се врши на периферији једнога произвољним полупречником описаног круга. Пошто су луци сразмерни углима, то 360-ти део периферије круга даје ону јединицу угла, која се зове степен; 60-ти део овога одговара једној минути, а 60-ти део лука једне минуте мери угао једне секунде. На тај начин, место у јединици дужине, ми изражавамо величину углова степенима, минутама и секундама, т. ј. у деловима периферије (пуног угла од 360^0).

3. **Продужење о мерењу углова.** — Када сравнимо међусобом она два начина мерења углова, која смо изложили горе у чл. 1. и 2., налазимо, отуда што се периферија круга 2π дели на 360^0, да

углу	од	180^0	одговара	дужина	лука	$\pi = 3{,}1415927,$
„	„	90^0	„	„	„	$\frac{\pi}{2} = 1{,}5707963,$
„	„	1^0	„	„	„	$\frac{\pi}{180} = 0{,}0174533,$
„	„	$1'$	„	„	„	$\frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}0002909,$
„	„	$1''$	„	„	„	$\frac{\pi}{180.60.60} = 0{,}0000048.$

Обратно јединица угла у лучној мери, т. ј. угао, коме одговара лук = полупречнику = 1 износи $\frac{180^0}{\pi} = 57^0$ $17' 44{,}81'' = 206264{,}81''$.

Зарад претварања углова из једне системе мерења у другу служи пропорција

$$\varphi^0 : 180^0 = arc\,\varphi : \pi, \tag{1}$$

одакле

$$\varphi^0 = \frac{arc\,\varphi}{\pi} \cdot 180^0, \qquad arc\,\varphi = \frac{\varphi^0}{180^0} \cdot \pi,$$

где је означено са φ^0 величина угла у степенима, а са $arc\,\varphi$ његова величина у виду дужине лука.

За случај, да је задати угао изражен у минутама или секундама сразмера гласи

$$\varphi' : 180 \cdot 60' = arc\,\varphi : \pi,$$

односно

$$\varphi'' : 180 \cdot 60 \cdot 60'' = arc\,\varphi : \pi,$$

одакле

$$\varphi' = \frac{arc\,\varphi}{\pi} \cdot 180 \cdot 60', \qquad arc\,\varphi = \frac{\varphi'}{180 \cdot 60'} \cdot \pi,$$

$$\varphi'' = \frac{arc\,\varphi}{\pi} \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60'', \qquad arc\,\varphi = \frac{\varphi''}{180 \cdot 60 \cdot 60''} \cdot \pi.$$

Примери.

1) Дата је дужина лука за полупречник 1

$$arc\,\varphi = 1{,}2835496.$$

Колики је угао, који одговара томе луку?

$$\varphi^0 = \frac{1{,}2835496}{3{,}1415927} \cdot 180^0 = 73{,}5419740^0 = 73^0\,32'\,31{,}11''$$
$$= 264751{,}11''.$$

2) Које је лучна мера за угао

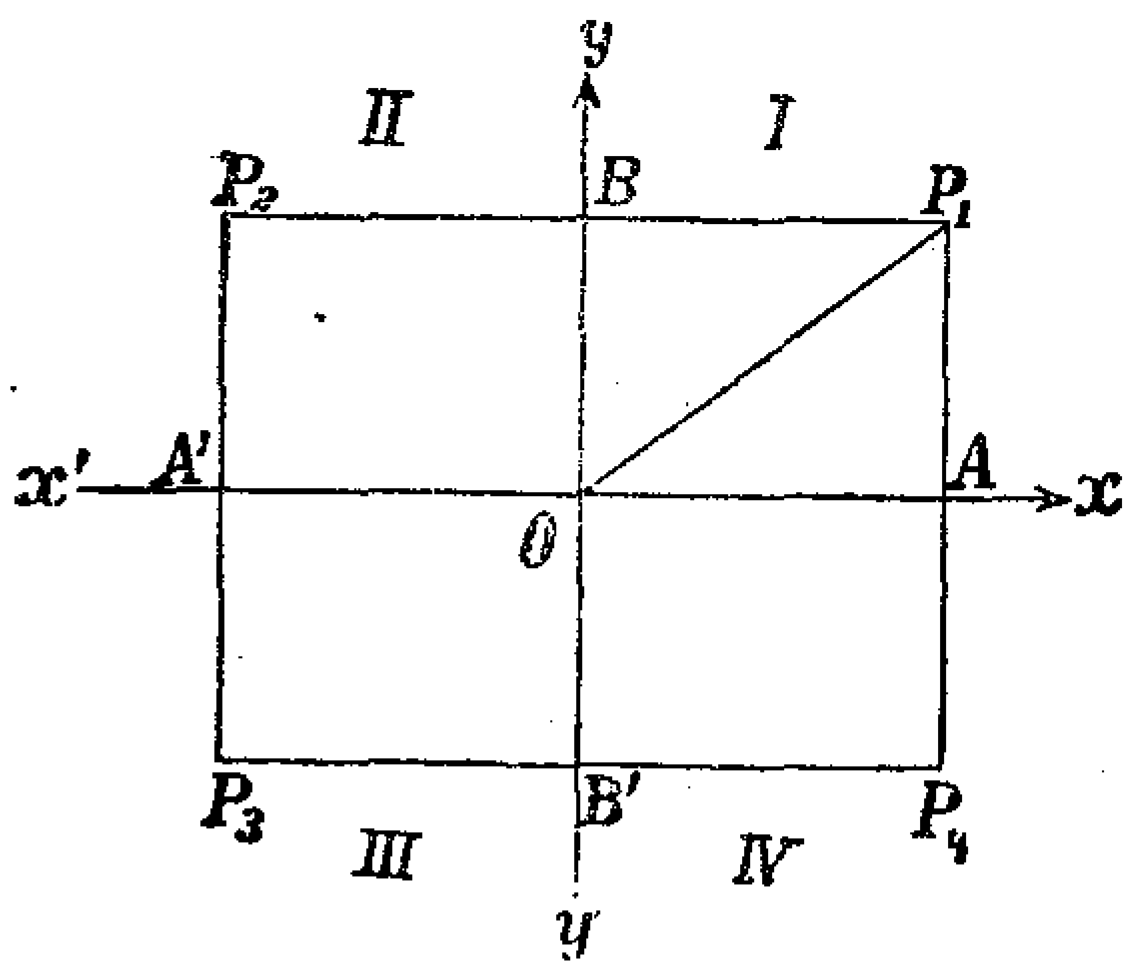
$$\varphi = 49^0\,18'\,27{,}53'' = 49{,}307647^0?$$

$$arc\,\varphi = \frac{49{,}307647}{180} \cdot 3{,}1415927 = 0{,}860581.$$

Ово је дакле дужина лука, који одговара задатоме углу φ, узев да је полупречник $= 1$.

4. **Правоугла координатна система.** — За одређивање положаја тачака у равни постоји следећа метода, којом су се први служили француски математичари *Ферма* (*Pierre de Fermat*, Beaumont de Lomagne 1601 — Toulouse 1655) и *Декарт* (*René Descartes* латински *Renatus Cartesius*, La Haye 1596 — Штокхолм 1650).

Замислимо две сталне под правим углом секуће се праве линије $x'x$ и $y'y$. Оне деле раван на четири квадранта, а то су простори са углима xOy, yOx', $x'Oy'$ и $y'Ox$. Праве $x'x$ и $y'y$ зову се *координатне осе* (*Coordinaten-Axen*, axes des coordonnées); права $x'x$ је x-оса (x-*Axe*, axe des x), а права $y'y$ y-оса (y-*Axe*, axe des y). Обе заједно, x- и y-оса, образују тако-звану *правоуглу*[1]) *координатну систему* (*rechtwinkliges Coordinatensystem*, système des coordonnées rectangulaires). Тачка O, пресек координатних оса, зове



Сл. 2.

[1]) Система се зове правоугла зато што је $\sphericalangle xOy$, такозвани *координатни угао* (*Coordinatenwinkel*, angle des coordonnées) прав. У противноме случају, да $\sphericalangle xOy$ није $= 90^0$, координатна система је *косоугла* (*schiefwinklig*, oblique).

се *почетак координата* (*Anfangspunkt od. Ursprung der Coordinaten,* origine des coordonnées).

Положај једне тачке у ма којем од она четири квадранта, н. пр. положај тачке P_1, одређен је одстојањима те тачке од координатних оса, т. ј. дужима BP_1 и AP_1. Ове дужи зовемо *правоуглим координатама (rechtwinklige Coordinaten,* coordonnées rectangulaires) дотичне тачке. Одстојање тачке од y-осе зовемо *апсцисом* (*Abscisse,* abscisse); одстојање тачке од x-осе зовемо *ординатом* (*Ordinate,* ordonnée). Апсцису једне тачке бележимо у опште са x, ординату са y. Због тога што је $BP_1 = OA$, $AP_1 = OB$ ми ове дужине меримо на дотичним осама: апсцисе на x-оси, а ординате на y-оси рачунајући и једне и друге од тачке O. Ово је разлог зашто x-осу још зовемо и *апсцисном,* а y-осу *ординатном осом.*

Када бисмо хтели да нађемо тачку, чије су координате $x = a$, $y = b$, ми бисмо дакле одмерили на x-оси дуж a, на y-оси дуж b и подигли управне у крајњим тачкама. У пресеку тих на координатне осе подигнутих управни лежала би тачка, коју тражимо. Но осим апсолутних вредности од a и b (одстојања тачке од правих $x'x$ и $y'y$) треба да знамо још и квадрант, у којем се тачка налази. Тако н. пр., ако знамо да тачка лежи у четврти, која је у слици означена са *I,* ми ћемо дуж a (апсцису) одмерити од O пошав на десно: начинићемо $OA = a$. Дуж b (ординату) одмерићемо од тачке O на више, т. ј, направићемо $OB = b$. Тачка P_1, са координатама $x = a$, $y = b$, налази се у пресеку нормала, које треба подићи у тачкама A и B на координатне осе.

Ако, пак, квадрант, у коме тачка лежи, није познат, но само апсолутне вредности од a и b, онда дотична тачка није потпуно одређена, зато што у свакој четврти има по једна тачка, чија су одстојања од координатних оса равна a и b. Од тога, да ли ћемо дуж a, на x-оси, мерити десно или лево од тачке O, т. ј. да ли ћемо узети $a = OA$ или $a = OA'$ и од тога хоћемо ли дуж b, на y-оси, мерити на више или на ниже од почетка O, т. ј. хоћемо ли направити $b = OB$ или $b = OB'$ зависи коју ћемо од оне четири тачке P_1, P_2, P_3 и P_4 добити. Да бисмо уклонили ову неодређеност, ми узимамо код одстојања у рачун, осим апсолутне дужине, и њихов правац. Тако н. пр. између дужи OA и OA', које су по њиховој апсолутној вредности једнаке и представљају одстојање тачака P_1, P_2, P_3 и P_4 од y-осе или између дужи OB и OB', које дају одстојање истих тачака од x-осе постоји разлика у правцу: правац од OA' је супротан ономе од OA, као што је правац од OB' супротан правцу од OB. Разлику између два супротна правца можемо да представимо алгебарским знацима $+$ и $-$. Сасвим је свеједно којем ћемо правцу придати знак $+$, а којем знак $-$. Али када се већ једанпут учини тај избор, онда треба остати доследан и дужи, које леже у супротним правцима навек узимати са противним знацима.

Обично се за положан правац x-осе узима она половина, која води од тачке O на десно, а за положан правац y-осе њена половина од O на више. Ако рачунамо четврт, која је обележена положним правцима координатних оса као први квадрант, а остале будемо бројали од десна на лево, т. ј. у противноме смислу обртања сатне казаљке, следује, према оваквим одредбама, да је за тачке

$$\left.\begin{array}{llcccc} \text{у квадранту} & & I & II & III & IV \\ \text{апсциса} & x & + & - & - & + \\ \text{ордината} & y & + & + & - & - \end{array}\right\} \qquad (2$$

Тако н. пр. координате

тачке	P_1	јесу	$x=+a,$	$y=+b,$
„	P_2	„	$x=-a,$	$y=+b,$
„	P_3	„	$x=-a,$	$y=-b,$
„	P_4	„	$x=+a,$	$y=-b,$
„	A	„	$x=+a,$	$y=0,$
„	A'	„	$x=-a,$	$y=0,$
„	B	„	$x=0,$	$y=+b,$
„	B'	„	$x=0,$	$y=-b.$

У почетку координата (тачци O) јесте $x=0$ и $y=0$.

Одстојање једне тачке од почетка координата зове се *потега* или *radius vector* (*Leitstrahl,* rayon vecteur) те тачке. Потега вазда се сматра као апсолутна (положна) количина. Из слике читамо непосредно

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ или } r = +\sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (3$$

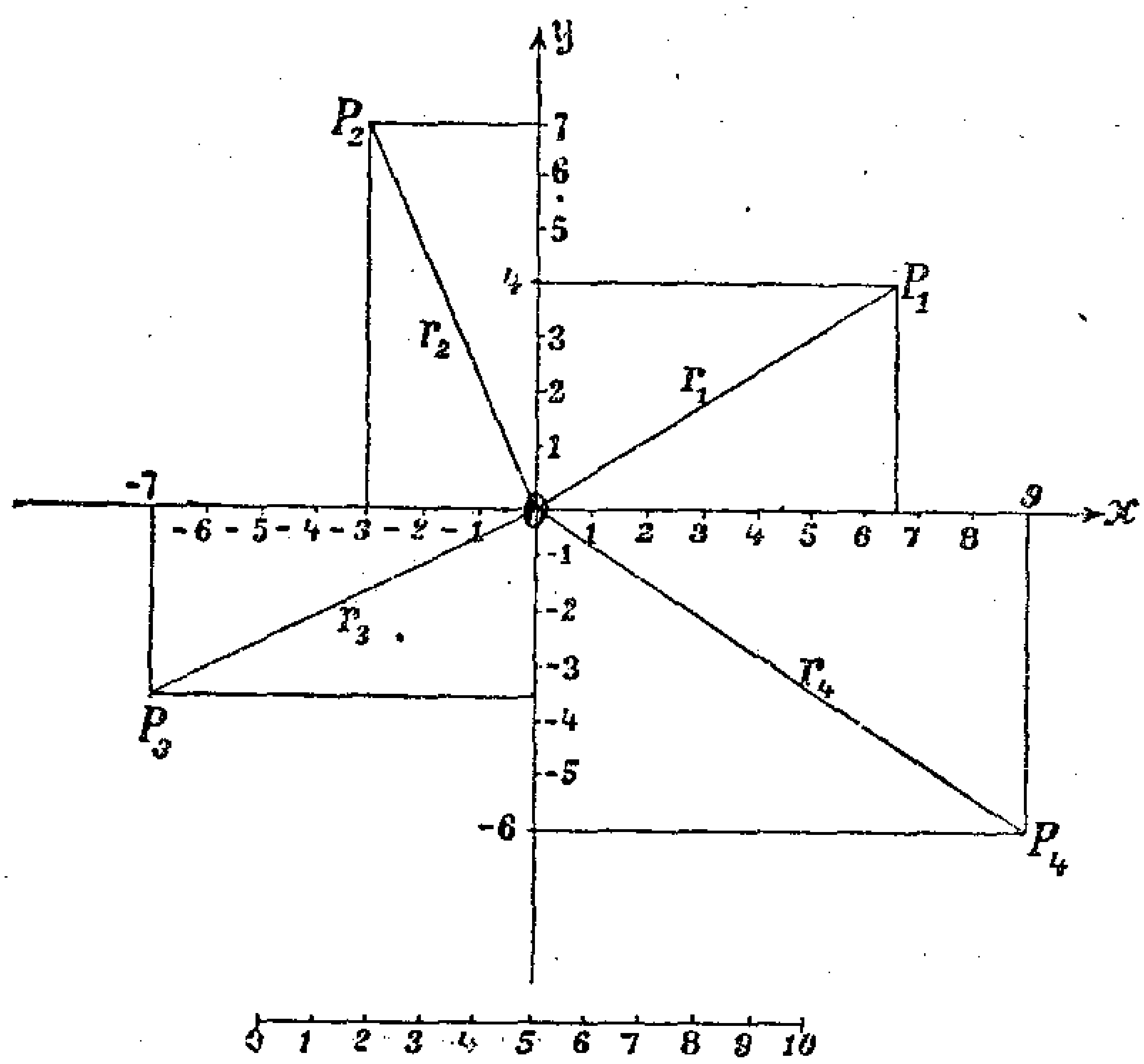
Закључак: са погодбом, да координате једне тачке изражавају одстојања те тачке од две под правим углом секуће се праве линије, како по дужини одстојања, тако и по правцу истих, можемо казати, да је положај тачке потпуно одређен њеним координатама. Свакој тачци у равни одговара дакле само један спрег координатних вредности, као и обратно што једноме задатом спрегу координата одговара увек само једна тачка у равни.

Примери.

Да се конструкцијом одреде следеће тачке:

P_1 са координатама $x_1 = 6{,}5, \quad y_1 = 4,$
P_2 „ „ $x_2 = -3, \quad y_2 = 7,$
P_3 „ „ $x_3 = -7, \quad y_3 = -3{,}5$
P_4 „ „ $x_4 = 9, \quad y_4 = -6$

и да се израчунају њихове потеге.



Сл. 3.

За тачку P_1 је $r_1 = \sqrt{6{,}5^2 + 4^2} = 7{,}632,$
„ „ P_2 „ $r_2 = \sqrt{3^2 + 7^2} = 7{,}616,$
„ „ P_3 „ $r_3 = \sqrt{7^2 + 3{,}5^2} = 7{,}826,$
„ „ P_4 „ $r_4 = \sqrt{9^2 + 6^2} = 10{,}817,$

5. **Позитивни и негативни угли.** — Сваки угао, био он ма какав, можемо замислити да лежи теменом у у почетку, а једним краком у положноме правцу x-осе једне правоугле координатне системе. Од величине угла зависи у коју ће четврт пасти његов други

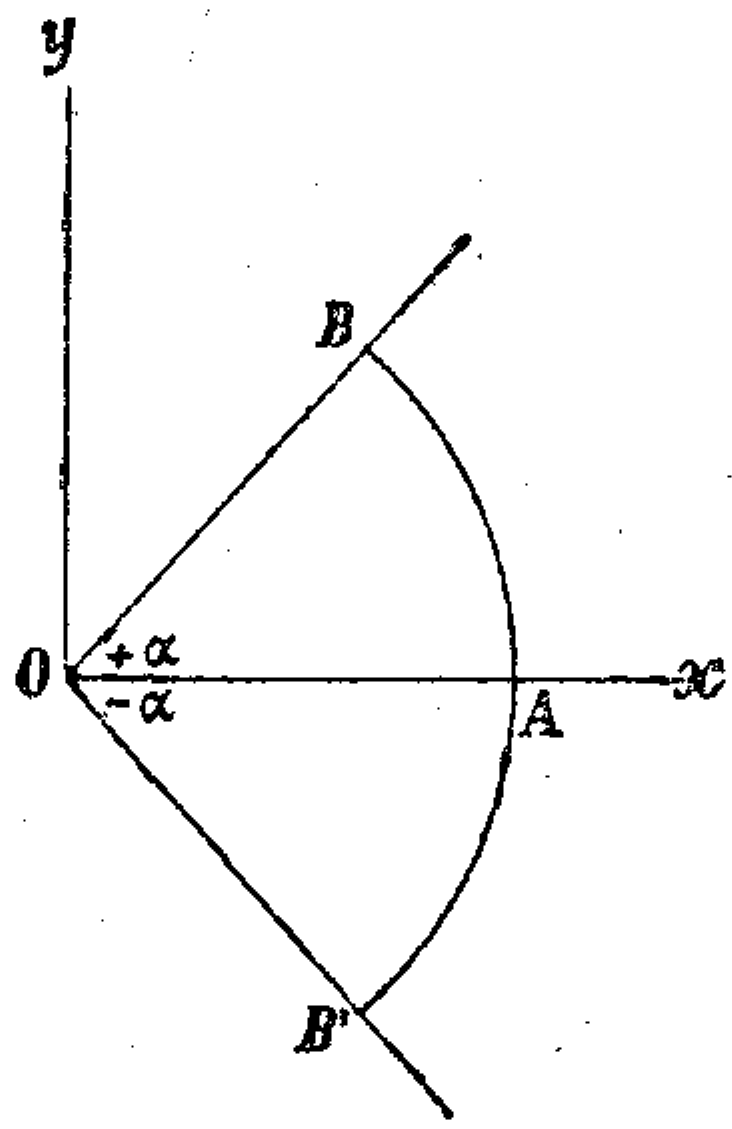
крак. Код оштрих углова пада тај крак у први квадрант, код тупих углова он се налази у другом, трећем или четвртом квадранту, према томе да ли је вредност угла између 90^0 и 180^0, 180^0 и 270^0 или 270^0 и 360^0. Ради краткоће у изразу ми кажемо угао је у првоме, другоме, трећем или четвртом квадранту.

Служећи се, горе у чл. 4. датим, појмовима о координатној системи можемо постајање углова, о чему смо говорили одма у почетку чл. 1., да опишемо на овај начин. Узев положан правац x-осе као сталан крак угла, ми замишљамо његов други крак да се, пошав од Ox, непрекидно и у једноме смислу обрће око почетка координата. Нама је остављено на вољу да изаберемо смисао, у коме покретан крак описује угле. Но с обзиром на избор, који смо учинили у прошломе члану односно позитивног правца x- и y-осе и с обзиром на бројање квадраната од десна на лево, сасвим је природно да останемо при погодби, коју смо већ учинили у чл. 1., а то је да се обртање замишља од десна на лево или дакле у противноме смислу кретања сатне казаљке.

Када једанпут утврдимо, да се угли рачунају од десна на лево, онда је сасвим логично, да угле, који постају обртањем у противноме смислу, сматрамо као противне онима, који постају на горе означени начин. Очевидио је смисао обртања од лева на десно тако исто противан смислу обртања од десна на лево, као што је правац позитивне x-осе противан правцу негативне половине x-осе или обратно.

Узев, дакле, да угли расту од десна на лево следује да у противноме смислу они морају опадати.

Тако н. пр. $\sphericalangle AOB = \alpha$ постаје обртањем од десна на лево покретнога крака из положаја OA до положаја OB. Замислимо сада да се крак OB враћа натраг у противном смислу (од лева на десно); угао опада и постаје најзад $= 0$, када се OB буде поклапало са OA. Ако то обртање продужимо и даље добићемо угле, који су противнога знака са углом α. У кратко: ако претпоставимо, да је смисао обртања од десна на лево позитиван (смисао растења), онда морамо њему противан смисао од лева на десно сматрати као негативан (смисао опадања). Тако н. пр., ако је по апсолутној дужини лук AB' раван луку AB има се ставити $\sphericalangle AOB' = - \sphericalangle AOB = -\alpha$.



Сл. 4.

6. **Опште дефиниције тригонометриских функција.** — Узмимо (ма какав) угао $AOB = \alpha$ и спустимо из произвољне тачке P крака OB нормалу PQ на крак OA. Тиме смо добили три дужи: 1) одстојање тачке P од темена O, т. ј. дуж OP, 2) нормалу PQ и 3) одсечак OQ, који та нормала чини на краку OA. Док величина самих дужи OP, PQ и OQ зависи од избора тачке P, размере образоване из двеју њих зависе, пак, једино од угла и за исти угао имају константне вредности у ма коме одстојању од темена O узели тачку P. Ове размере, којих има шест, као количници из два именована броја, изражене су неименованим бројевима и зову се *тригонометриске* или *гониометриске функције* (trigonometrische od. goniometrische Funktionen, Kreisfunktionen; fonctions circulaires) дотичног угла.

Под *синусом* (sinus) угла AOB разумемо размеру из нормале PQ и дужи OP. То се бележи овако

$$\sin AOB = \frac{PQ}{OP}.$$

Косинус (cosinus) угла AOB jесте количник из одсечка OQ и дужи OP. То се означава

$$\cos AOB = \frac{OQ}{OP}.$$

Тангенша (tangens) угла AOB je однос између синуса и косинуса тога угла или размера нормале PQ према одсечку OQ. У знацима

$$\mathrm{tg}\, AOB = \frac{\sin AOB}{\cos AOB} = \frac{PQ}{OQ}.$$

Реципрочне вредности ова три количника jесу *кошангенша* (cotangens) или изврнута вредност тангенте

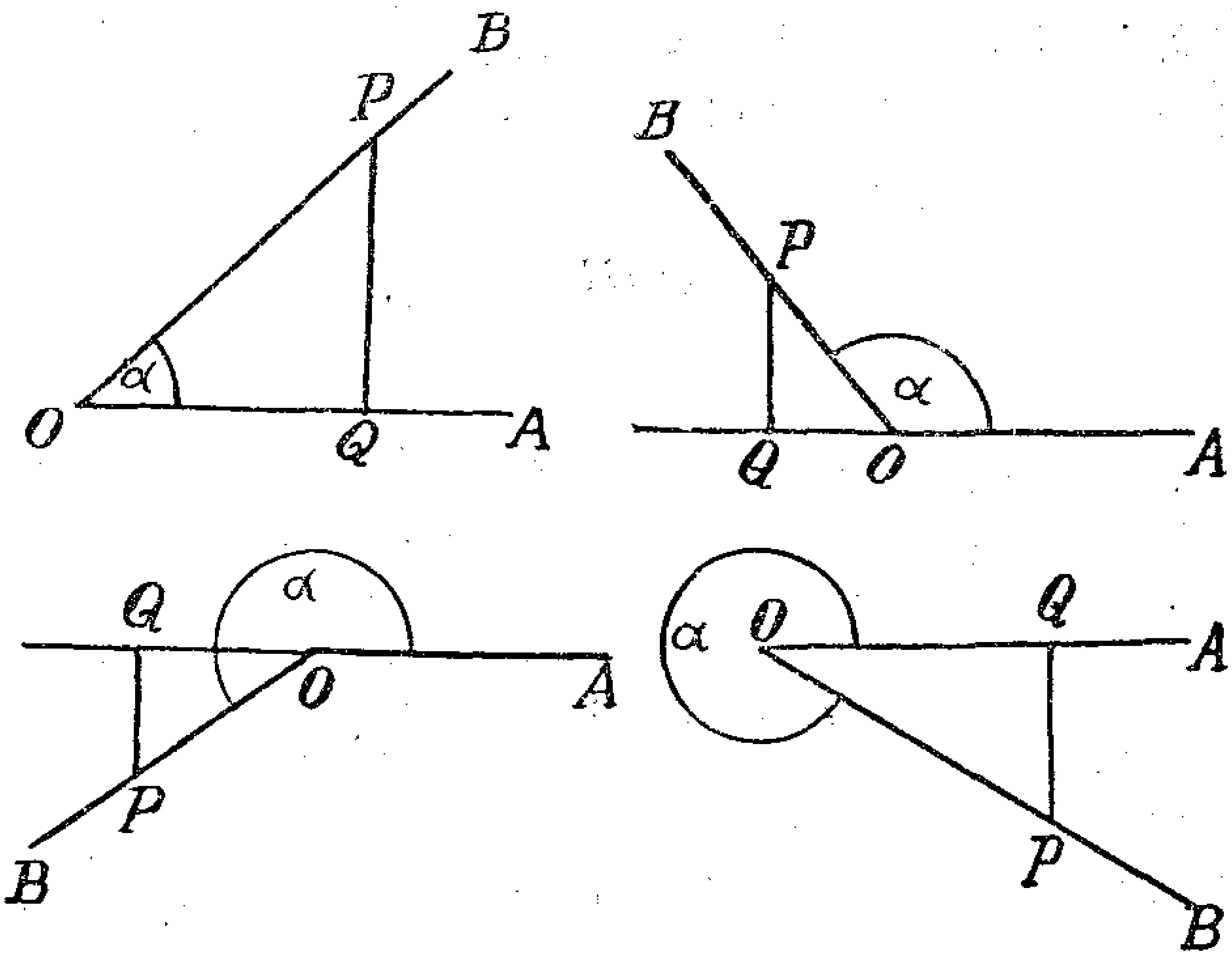
$$\mathrm{cotg}\, AOB = \frac{1}{\mathrm{tg}\, AOB} = \frac{\cos AOB}{\sin AOB} = \frac{OQ}{PQ};$$

секанша (secans) или изврнута вредност косинуса

$$\sec AOB = \frac{1}{\cos AOB} = \frac{OP}{PQ};$$

косеканша (cosecans) или изврнута вредност синуса

$$\mathrm{cosec}\, AOB = \frac{1}{\sin AOB} = \frac{OP}{PQ}.$$



Сл. 5.

И пошто ове количине, као што видимо, зависе на некакав начин од угла на који се оне односе, тако да свакоме углу одговарају одређене вредности тригонометриских функција, а и обрнуто задатим вредностима ових може да се нађе кореспондирајући угао, то је јасно да се место углова могу да заведу ове количине да би се рачунски довеле у везу стране са угловима једне фигуре.

Да бисмо горње дефиниције простије формулисали, а у исто време и боље прецизирали тригонометриске функције у погледу њиховог алгебарског знака, узећемо теме O за почетак координата, крак OA као позитиван правац x-осе једне правоугле координатне системе. Сада имамо ова краћа означења

$$OQ = x, \quad PQ = y, \quad OP = r$$

и дефиниције тригонометриских функција угла $\alpha = \sphericalangle AOB$ гласе

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\alpha = \dfrac{y}{r} & \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{\sin\alpha} \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{x}{r} & \sec\alpha = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \\[2ex] tg\,\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & cotg\,\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{tg\,\alpha} \end{array}\right\} \quad (4$$

7. **Дефиниције тригонометриских функција оштрих углова.** — Применимо опште дефиниције тригонометриских функција специално на оштре угле. У томе случају координате тачке P и њена потега, односно полупречник, образују један правоугли троугао у коме је полупречник r хипотенуза, апсциса x и ордината y катете, а овој последњој супротни угао α онај оштар угао, који расматрамо. Према горњим дефиницијама следује да је за оштар угао α његов

синус раван размери супротне катете наспрам хипотенузе;

косинус размера налегле катете наспрам хипотенузе;

тангента, а то је количник из синуса и косинуса, јесте размера супротне катете наспрам налегле;

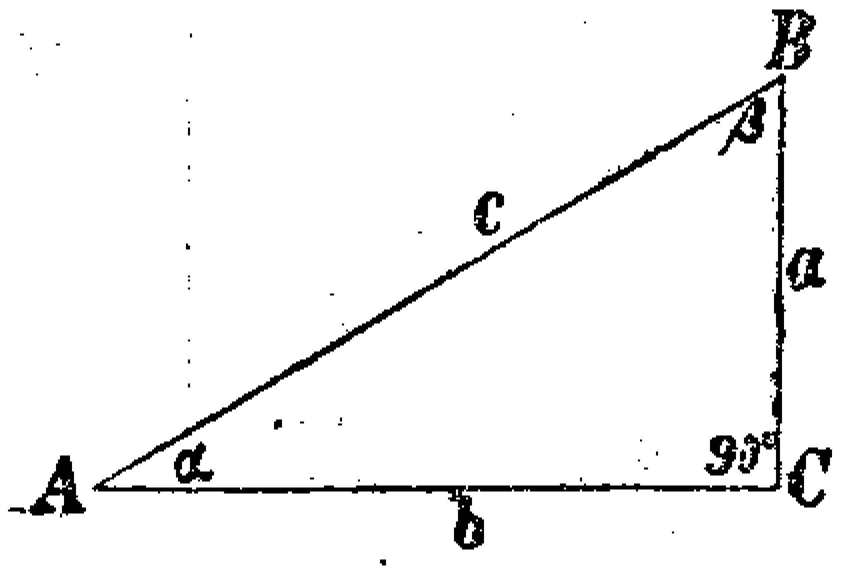
котангента (или изврнута вредност тангенте) то је размера налегле наспрам супротне катете;

секанта (изврнути косинус) јесте размера хипотенузе наспрам налегле катете;

косеканта (изврнути синус) јесте размера хипотенузе наспрам супротне катете.

8. **Односи између тригонометриских функција комплементних углова.** — Из правоуглога троугла ABC,

а на основу у последњем члану исказатих дефиниција, читамо



Сл. 6

$$\frac{a}{c} = sin\,\alpha = cos\,\beta,$$

$$\frac{b}{c} = cos\,\alpha = sin\,\beta,$$

$$\frac{a}{b} = tg\,\alpha = cotg\,\beta,$$

$$\frac{b}{a} = cotg\,\alpha = tg\,\beta,$$

$$\frac{c}{b} = sec\,\alpha = cosec\,\beta,$$

$$\frac{c}{a} = cosec\,\alpha = sec\,\beta.$$

Пошто су угли α и β комплементни: $\alpha + \beta = 90^0$, $\beta = 90^0 - \alpha$, то можемо горње односе да напишемо

$sin\,\alpha = cos\,(90^0 - \alpha)$, $\qquad cos\,\alpha = sin\,(90^0 - \alpha)$,

$tg\,\alpha = cotg\,(90^0 - \alpha)$, и обратно $cotg\,\alpha = tg\,(90^0 - \alpha)$,

$sec\,\alpha = cosec\,(90^0 - \alpha)$, $\qquad cosec\,\alpha = sec\,(90^0 - \alpha)$.

То значи да су синус, тангента и секанта оштрога угла α равни косинусу, котангенти односно косеканти комплементнога угла $90^0 - \alpha$ и обратно. Ово је узрок зашто се последње три функције зову *кофункције* (*Co-Functionen*) првих трију. Cosinus је скраћено од complementi sinus, cotangens од complementi tangens, cosecans од complementi secans.[1])

---

[1]) Ова скраћења завео је *Edmund Gunter* (Herefordshire 1581 — London 1626). в. M. Marie. Histoire des Sciences Mathématiques et Phys'ques. Tome III. pag. 184.

Примери.

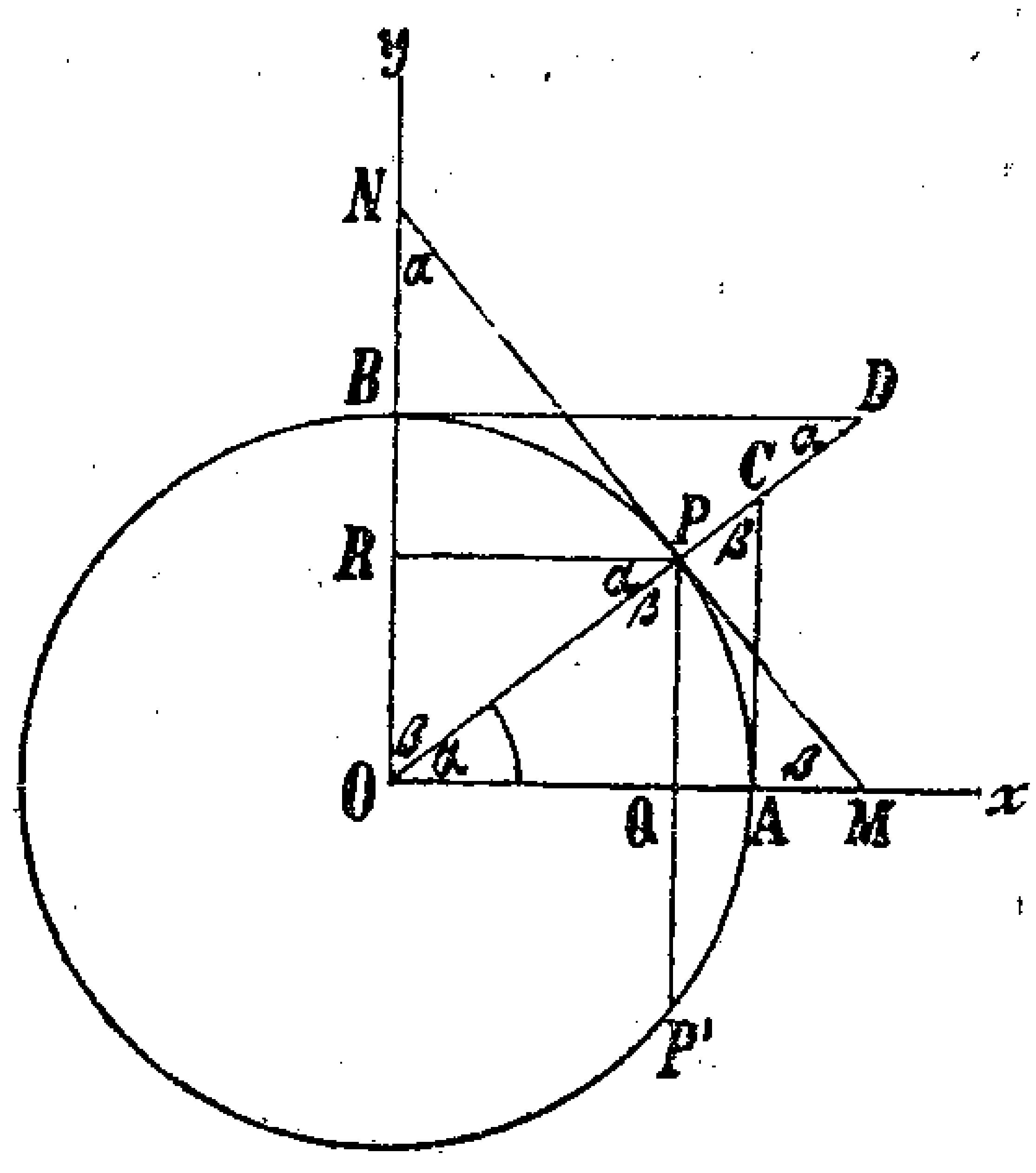
1) $$\sin(45^0 \pm \alpha) = \cos(45^0 \mp \alpha),$$
$$tg(45^0 \pm \alpha) = cotg(45^0 \mp \alpha),$$
$$\sec(45^0 \pm \alpha) = cosec(45^0 \mp \alpha),$$
зато што је $45^0 \mp \alpha = 90^0 - (45^0 \pm \alpha)$.

2) $$\sin 45^0 = \cos 45^0,$$
$$tg\, 45^0 = cotg\, 45^0,$$
$$\sec 45^0 = cosec\, 45^0,$$
јер је $45^0 = 90^0 - 45^0$.

3) $\sin 30^0 = \cos 60^0$, $\qquad \cos 30^0 = \sin 60^0$,
$tg\, 30^0 = cotg\, 60^0$ и обратно $cotg\, 30^0 = tg\, 60^0$,
$\sec 30^0 = cosec\, 60^0$, $\qquad cosec\, 30^0 = \sec 60$,
пошто је $60^0 = 90^0 - 30^0$.

4) $$\sin 27^0\, 42'\, 18{,}36'' = \cos 62^0\, 17'\, 41{,}64'',$$
$$tg\, 27^0\, 42'\, 18{,}36'' = cotg\, 62^0\, 17'\, 41{,}64'',$$
$$\sec 27^0\, 42'\, 18{,}36'' = cosec\, 62^0\, 17'\, 41{,}64''$$
и обратно, јер је $62^0\, 17'\, 41{,}64'' = 90^0 - 27^0\, 42'\, 18{,}36''$.

9. Графичко представљање тригонометриских функција. — Количници, са којима смо се горе упознали под именом тригонометриских функција, могу да се, на врло прост начин, графички представе у виду дужи. Нека је $\sphericalangle AOP = \alpha$ задати угао, а њему комплементни угао BOP означимо са β, дакле $\alpha + \beta = 90^0$. Опишимо из темена (почетка координата) O круг са полупречником $OA = 1$. Координате тачке P јесу



Сл. 7.

$x = OQ = RP$ и $y = QP = OR$. На основу горњих дефиниција, а имајући у виду да је овде $OP = 1$, следује

$$\sin\alpha = QP = OR = \cos\beta,$$
$$\cos\alpha = OQ = RP = \sin\beta.$$

Подигнимо у тачкама A и B управне на OA и OB, а то су дирке на круг у дотичним тачкама. Оне ће сећи продужење полупречника OP у тачкама C и D. Из троугла OAC, у коме је $OA = 1$, читамо

$$tg\,\alpha = AC = cotg\,\beta,$$
$$\sec\alpha = OC = cosec\,\beta,$$

а из троугла OBD, у коме је $OB = 1$, следује

$$cotg\,\alpha = BD = tg\,\beta,$$
$$cosec\,\alpha = OD = \sec\beta.$$

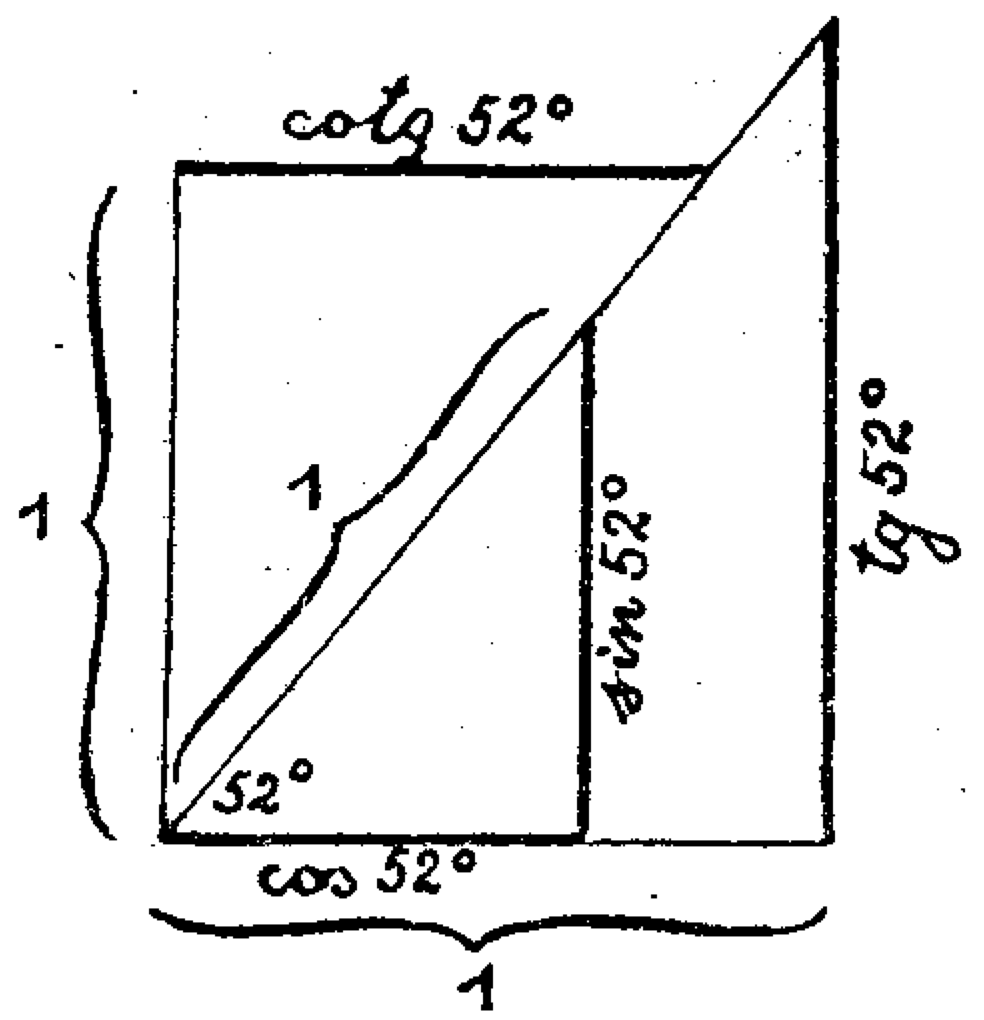
Последње четири функције можемо још другојаче да представимо, кад у тачци P повучемо дирку на круг. Нека су M и N тачке пресека те дирке са x- и y-осом. Из правоуглих троуглова OPM и OPN, чија је катета $OP = 1$, добијамо

$$tg\,\alpha = PM = cotg\,\beta,$$
$$\sec\alpha = OM = cosec\,\beta,$$
$$cotg\,\alpha = PN = tg\,\beta,$$
$$cosec\,\alpha = ON = \sec\beta.$$

Примедба. Пада у очи, да геометриски значај линија, за које смо показали да представљају тригонометриску тангенту и секанту једнога угла, објашњава и саме називе тих функција. О постанку речи sinus незна се ништа позитивно. Но, по свој прилици, биће да је највероватнија хипотеза, коју даје париски оријенталиста *Мунк* (Munk). По истој се порекло речи sinus води од санскритске речи *џиа* или *џива*, коју су арапски астрономи усвојили претворивши је у *џиба*, а после у *џаиб*, које (на арапскоме) значи *урез* и *залив*. *Плато од Тиволи* (Plato von Tivoli od. Plato Tiburtinus у првој половини XII века), преводилац извесног списа о кретању звезда од знаменитог арапског астронома *Мухамеда Албатегна* (Muhammed ben Geber назван, по месту рођења Battâni, Albatani или Albategnius, 850—928), превео је џаиб са sinus, које на латинскоме има исти значај, који и реч џаиб на арапскоме. На тај начин је *Плато од Тиволи* први завео тај научни израз.[1]) — Тумачење, по коме је реч sinus постала из s. in., скраћења од semissis inscriptae (половина тетива), т. ј. као израз за половину тетива *PP'* (в. сл. 7), које одговара двоструком средишном углу 2α, сматра се само као вешта игра речи, чиме је француски математичар *Годен* (Louis Godin, 1704—1760) покушавао да објасни порекло тога научног термина.[2])

Примери.

1) Да се конструише *sin*, *cos*, *tg* и *cotg* за угао $\alpha = 52^0$



Сл. 8.

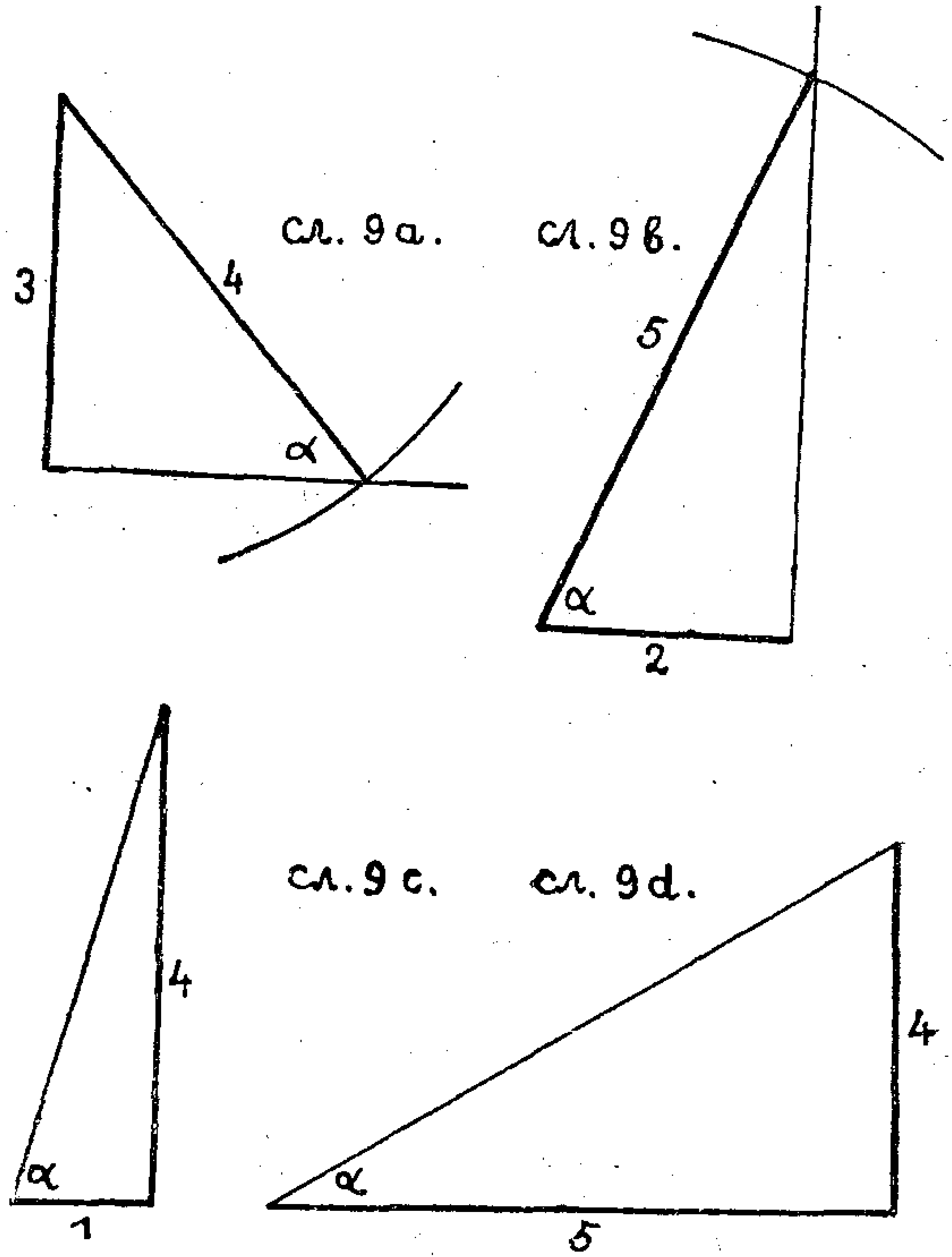
2) Конструисати угао за који је

---

[1]) *Moritz Cantor*. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band, pag. 632. Leipzig 1880.

[2]) *Georg Simon Klügel. Mathematisches Wörterbuch, Vierter Theil*, pag. 369. *Leipzig* 1823.

a) $sin\,\alpha = \frac{3}{4}$, b) $cos\,\alpha = \frac{2}{5}$, c) $tg\,\alpha = 4$, d) $cotg\,\alpha = \frac{5}{3}$.



2.

Својства и односи између тригонометриских функција.

10. **Знаци тригонометриских функција у појединим квадрантима.** — Због мање важности функција sec и cosec, ми ћемо се у будуће бавити само тригонометриским функцијама sin, cos, tg и cotg, за које су, у осталом, и таблице искључиво удешене. Отуда што је

у квадранту		I	II	III	IV
апсциса	x	$+$	$-$	$-$	$+$
ордината	y	$+$	$+$	$-$	$-$

(в. таблицу 2. у чл. 4.), а на основу општих дефиниција под 4. у чл. 6. и с обзиром на то, да се полупречник r има навек сматрати као положна количина, изводимо да је

$$\left.\begin{array}{lllcccc} \text{у квадранту} & & & I & II & III & IV \\ \frac{y}{r} & \text{т. j.} & \text{sinus} & + & + & - & - \\ \frac{x}{r} & „ & \text{cosinus} & + & - & - & + \\ \frac{y}{x} & „ & \text{tangens} & + & - & + & - \\ \frac{x}{y} & „ & \text{cotangens} & + & - & + & - \end{array}\right\} \qquad (5$$

11. **Крајње вредности тригонометриских функција.** — Помоћу слике је лако утврдити, да је за угао

$$\left.\begin{array}{llllll} \alpha \text{ од} & 0^0 & 90^0 & 180^0 & 270^0 & 360^0 \\ x = & r & 0 & -r & 0 & r \\ y = & 0 & r & 0 & -r & 0. \end{array}\right\} \qquad (6$$

Ми закључујемо отуда, да је за

$$\left.\begin{array}{rcccccc} \alpha & = & 0^0 & 90^0 & 180^0 & 270^0 & 360^0 \\ \sin\alpha & = & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cos\alpha & = & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ tg\,\alpha & = & 0 & \pm\infty & 0 & \pm\infty & 0 \\ cotg\,\alpha & = & \mp\infty & 0 & \mp\infty & 0 & \mp\infty \end{array}\right\} \qquad (7$$

Узев само апсолутне вредности, ми видимо из последње таблице да се синус и косинус крећу између 0 и 1, а тангента и котангента од 0 па до ∞. Или дакле синус и косинус изражени су вазда правим разломцима, док тангента и котангента могу имати све могуће вредности.

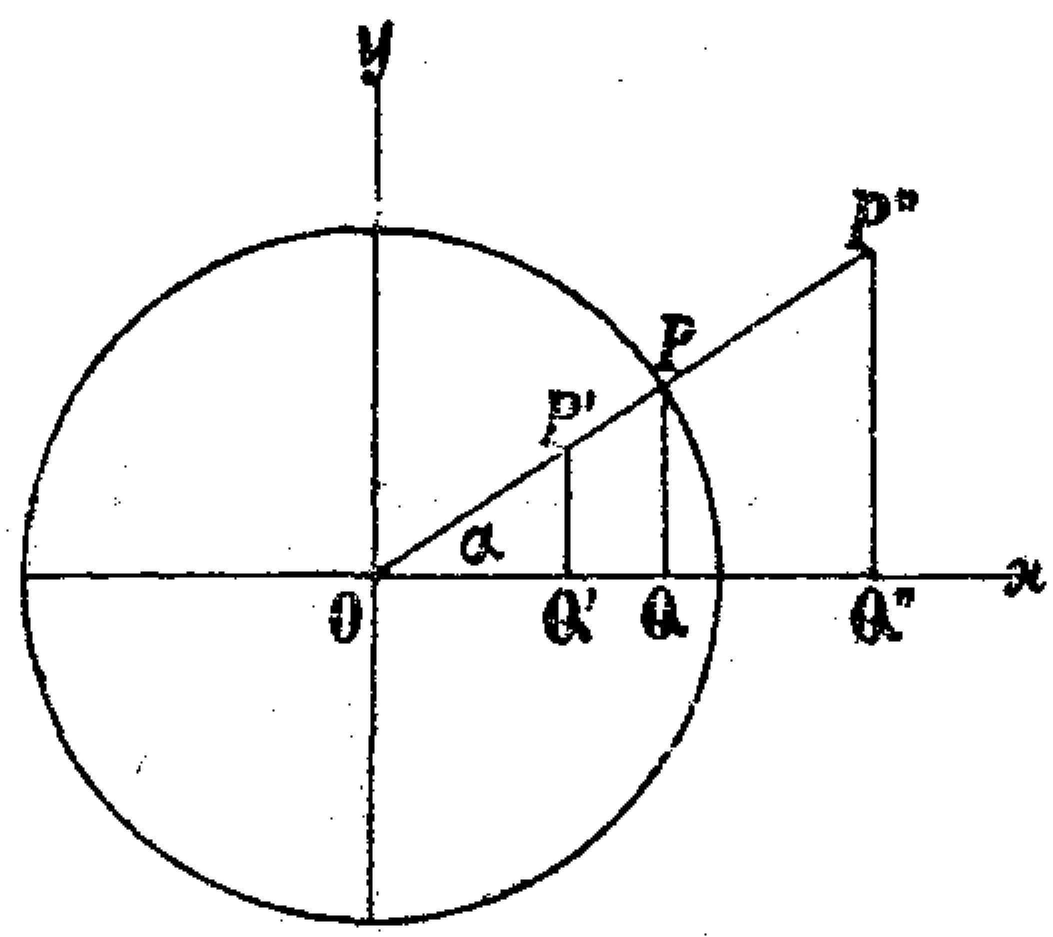
Напомена. Из таблице 7 читамо да тангента и котангента имају за извесне угле по две бесконачно велике вредности са супротним знацима. То долази отуда што се до сваког од углова, који се налазе у горњој таблици, може доћи из два разна квадранта: путем растења и путем смањивања. Тако н. пр. до угла од 90^0 долазимо или растењем оштрих углова (из првога квадранта) или смањивањем тупих углова (из другога квадранта). У првој четврти је тангента положна, а у другој четврти она је одречна. Помоћу слике врло је лако уверити се, да су апсолутне вредности ма које тригонометриске функције за два угла, као што су $90^0 - \alpha$ и $90^0 + \alpha$ (који су дакле подједнако удаљени од правог угла), једнаке. За тангенту постоји однос $tg\,(90^0 + \alpha) = -tg\,(90^0 - \alpha)$, о чему нас слика на први поглед уверава. Смањивањем од α оштар угао $90^0 - \alpha$ и туп угао $90^0 + \alpha$ све се више приближују правоме углу (90^0), апсолутне вредности њихове тангенте све више расту и постају најзад (за $\alpha = 0$) бесконачно велике са знаком $+$ и са знаком $-$.

На исти начин објашњавамо и остале двојаке вредности у таблици 7. Тако н. пр. јесте $tg\,270^0 = \pm\infty$, према томе да ли се до угла од 270^0 долази растењем (из трећег квадранта) или опадањем (из четвртог квадранта). У првоме случају имамо $tg\,270^0 = +\infty$, у другоме је $tg\,270^0 = -\infty$. И. т. д.

12. **Растење и опадање тригонометриских функција са мењањем угла.** — Из општих дефиниција у чл. 6. потпуно је јасно да тригонометриске функције искључиво зависе од дотичнога угла. Тако н. пр. синус угла α дефинисали смо као размеру управне (ординате) PQ наспрам дужине (полупречника) OP. Тај количник, као и сваки други, не зависи од апсолутне вредности дељеникове и делиочеве. Из сличности троуглова OPQ, $OP'Q'$, $OP''Q''$ следује

$$\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'} = \frac{P''Q''}{OP''}$$

и према томе синус угла α раван је ма коме од тих количника. Пошто је дакле сасвим свеједно у коме ћемо одстојању од темена (почетка координата) узети тачку P, чије координате одређују тригонометриске функције угла α, то можемо поменуто одстојање узети



Сл. 10.

стално и ставити н. пр. да је полупречник $OP = 1$. Растење и опадање тригонометриских функција зависи онда од растења и опадања координата тачке P. Синус се управља према ординати y, косинус према апсциси x, а тангента и котангента према размери координата.

Из слике, или на основу таблице 7 у чл. 11., изводимо да са *растењем угла*.

8)

у квадранту			
I	*II*	*III*	*IV*
синус			
расте	опада	опада	расте
од 0 до 1	од 1 до 0	од 0 до -1	од -1 до 0
косинус			
опада	опада	расте	расте
од 1 до 0	од 0 до -1	од -1 до 0	од 0 до 1
тангента			
расте	расте	расте	расте
од 0 до $+\infty$	од $-\infty$ до 0	од 0 до $+\infty$	од $-\infty$ до 0
котангента			
опада	опада	опада	опада
од $+\infty$ до 0	од 0 до $-\infty$	од $+\infty$ до 0	од 0 до $-\infty$.

Напомена. Констатујемо да мењање (растење и опадање) тригонометриских функција бива *непрекидно*, т. ј. тако да функције пролазе кроз све могуће вредности, које леже између њене почетне и крајне вредности. Тако н. пр. мењањем угла од 0 до 90^0 пролазе синус и косинус кроз све вредности између 0 и 1, а тангента и котангента узимају све могуће вредности од 0 па до ∞.

13. **Односи између тригонометриских функција једнога и истог угла.** — Пре свега, на основу самих дефиниција (в. једн. 4 чл. 6.), јесте

$$tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha},$$

$$cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}.$$

Из горњег следује дакле да је

$$tg\,\alpha\, cotg\,\alpha = 1. \qquad (9$$

Други један врло значајан образац налазимо, кад прве две једначине под 4 у чл. 6., а то су

$$sin\,\alpha = \frac{y}{r}\,,\quad cos\,\alpha = \frac{x}{r}\,,$$

подигнемо на квадрат и саберемо, имајући на уму, да је $x^2 + y^2 = r^2$ (в. једн. 3 чл. 4.). Добијамо

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1. \qquad (10$$

Речима исказато гласи: *збир квадрата синуса и косинуса једнога и истог угла раван је јединици.* Ово, очевидно, није ништа друго до Питагорино правило преведено на језик Тригонометрије.

Помоћу горе наведених образаца у стању смо да изнађемо везу између ма које две тригонометриске функције. До истих резултата долазимо пошав од самих одредаба под 4 у чл. 6. и узев у обзир да је $r^2 = x^2 + y^2$. На који било од та два начина ми добијамо изразе, који су сложени прегледно у таблици:

$$11)\begin{cases} \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}} \\[2ex] \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{cotg\,\alpha}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}} \\[2ex] tg\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{cotg\,\alpha} \\[2ex] cotg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \dfrac{1}{tg\,\alpha}. \end{cases}$$

Од ових образаца обратимо пажњу на ова два

$$12)\qquad \begin{cases} 1+tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \\[2ex] 1+cotg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \end{cases}$$

пошто су од честе употребе.

Примери. У следећим примерима дата нам је једна тригонометриска функција извесног угла, а траже се остале функције истога угла.

1) $$\sin\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5^2-4^2}}{5} = \frac{3}{5}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}, \qquad cotg\,\alpha = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

2) $$\cos\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3^2-2^2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad cotgt\,\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3) $$tg\,\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$cotg\,\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

4) $$cotg\,\alpha = 3$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{3}$$

14. **Свођење тригонометриских функција углова који су већи од 90^0 на тригонометриске функције углова испод 90^0.** — Да се тригонометриске функције углова преко 90^0, дакле углова другог, трећег и четвртог квадранта, могу да сведу на тригонометриске функције оштрих углова, т. ј. углова првог квадранта, показаћемо на следећа два начина.

Први начин редукције.

Према дефиницији тригонометриских функција (в. чл. 6.), а с обзиром да се полупречник r може узети произвољно, н. пр. $r = 1$, следује да је синус одређен ординатом, а косинус апсцисом тачке која дотични угао каректерише.

Ако је угао у другом квадранту, дакле између 90^0 и 180^0, онда се он може да представи у форми $180^0 - \alpha$, разумевајући под α некакав оштар угао. Тако је н. пр. $167^0 = 180^0 - 13^0$ у коме је случају $\alpha = 13^0$. Упоређујући координате тачке P_2, којој одговара угао $180^0 - \alpha$, са координатама тачке P_1, којој припада оштар угао α (в. сл. 11.) констатујемо да је ордината тачке P_2 једнака са ординатом тачке P_1, по дужини и по знаку, док је апсциса тачке P_2 једнака апсциси тачке P_1 по дужини, али је противног знака. То значи да је

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$

и према томе

$$tg(180^0 - \alpha) = -tg\,\alpha$$
$$cotg(180^0 - \alpha) = -cotg\,\alpha.$$

Нпр.

$$\sin 167^0 = \sin(180^0 - 13^0) = \sin 13^0$$
$$\cos 167^0 = \cos(180^0 - 13^0) = -\cos 13^0$$
$$tg\,167^0 = \frac{\sin 167^0}{\cos 167^0} = -tg\,13^0$$
$$cotg\,167^0 = \frac{\cos 167^0}{\sin 167^0} = -cotg\,13^0.$$

Ако се угао налази у трећем квадранту (између 180^0 и 270^0), онда се он може да представи у форми

$180^0 + \alpha$ и тачка P_3, која одређује тај угао има ординату и апсцису једнаку са ординатом и апсцисом тачке P_1, (угла α у првом квадранту), али са супротним знаком. То значи да је

$$\begin{aligned} \sin(180^0 + \alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(180^0 + \alpha) &= -\cos\alpha \\ tg(180^0 + \alpha) &= tg\,\alpha \\ cotg(180^0 + \alpha) &= cotg\,\alpha. \end{aligned}$$

Нпр.

$$\begin{aligned} \sin 218^0 &= \sin(180^0 + 38^0) = -\sin 38^0 \\ \cos 218^0 &= \cos(180^0 + 38^0) = -\cos 38^0 \\ tg\,218^0 &= \frac{\sin 218^0}{\cos 218^0} = tg\,38^0 \\ cotg\,218^0 &= \frac{\cos 218^0}{\sin 218^0} = cotg\,38^0. \end{aligned}$$

Најзад углове четвртог квадранта (између 270^0 и 360^0) представљамо у форми $360^0 - \alpha$. Примећујемо да тачка P_4, којој одговара угао $360^0 - \alpha$ има са P_1 по дужини једнаке координате само што су им ординате противног знака тако да је

$$\begin{aligned} \sin(360^0 - \alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(360^0 - \alpha) &= \cos\alpha \\ tg(360^0 - \alpha) &= -tg\,\alpha \\ cotg(360^0 - \alpha) &= -cotg\,\alpha. \end{aligned}$$

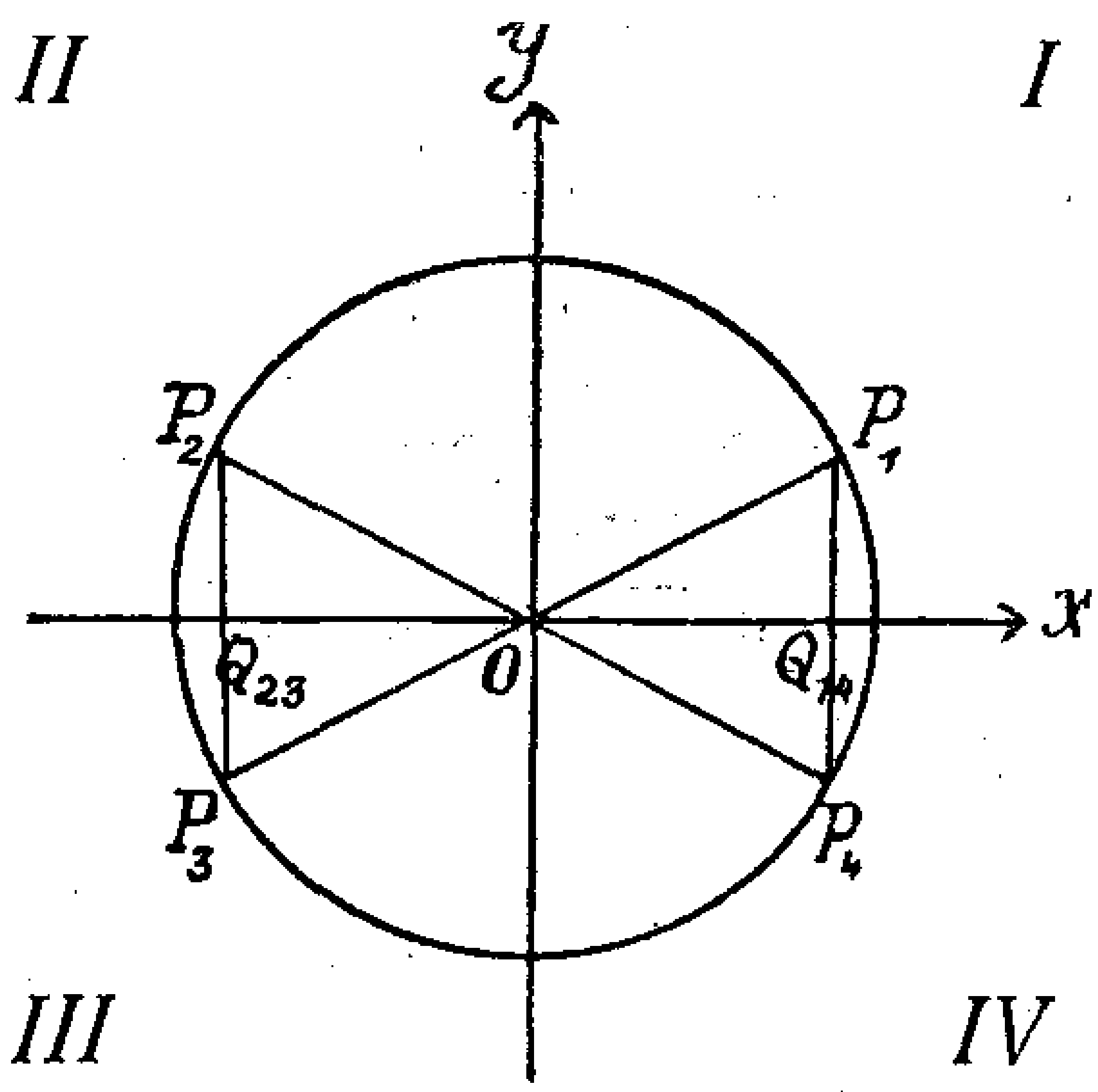
Нпр.

$$\begin{aligned} \sin 311^0 &= \sin(360^0 - 49^0) = -\sin 49^0 \\ \cos 311^0 &= \cos(360^0 - 49^0) = \cos 49^0 \\ tg\,311^0 &= \frac{\sin 311^0}{\cos 311^0} = -tg\,49^0 \\ cotg\,311^0 &= \frac{\cos 311^0}{\sin 311^0} = -cotg\,49^0. \end{aligned}$$

Овим смо добили као први начин редуковања:

13а)

квадрант	II	III	IV
угао	$180^0 - \alpha$	$180^0 + \alpha$	$360^0 - \alpha$
sinus	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
cosinus	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tangens	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotangens	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$



Сл. 11.

Други начин редукције.

Углове у другом квадранту можемо да представимо формулом $90^0 + \alpha$ (место $180^0 - \alpha$) и долазимо до извесне тачке P'' чија је ордината једнака по дужини и знаку са апсцисом тачке P' у првом квадранту за угао α (в. сл. 12.), а апсциса тачке P'' једнака са ординатом тачке P', али са супротним знаком, тако да је:

$$\sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$

и према томе

$$\operatorname{tg}(90^0 + \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(90^0 + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Нпр.

$$\sin 167^0 = \sin(90^0 + 77^0) = \cos 77^0$$
$$\cos 167^0 = \cos(90^0 + 77^0) = -\sin 77^0$$
$$tg\, 167^0 = \frac{\sin 167^0}{\cos 167^0} = -\cot g\, 77^0$$
$$\cot g\, 167^0 = \frac{\cos 167^0}{\sin 167^0} = -tg\, 77^0,$$

које се слаже са горњим резултатом да је $\sin 167^0 = \sin 13^0$, $\cos 167^0 = -\cos 13^0$ итд., јер је $\sin 13^0 = \cos 77^0$, $\cos 13^0 = \sin 77^0$ итд. (в. чл. 8.).

Угао у трећем квадранту може да се представи у форми $270^0 - \alpha$ (место $180^0 + \alpha$). Упоређујући координате дотичне тачке P''' са координатама тачке P' изводимо да је

$$\sin(270^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(270^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$tg\,(270^0 - \alpha) = \cot g\,\alpha$$
$$\cot g\,(270^0 - \alpha) = tg\,\alpha.$$

Нпр.

$$\sin 218^0 = \sin(270^0 - 52^0) = -\cos 52^0$$
$$\cos 218^0 = \cos(270^0 - 52^0) = -\sin 52^0$$
$$tg\, 218^0 = \frac{\sin 218^0}{\cos 218^0} = \cot g\, 52^0$$
$$\cot g\, 218^0 = \frac{\cos 218^0}{\sin 218^0} = tg\, 52^0,$$

које стоји у сагласности са горе добивеним резултатом, јер је $\cos 52^0 = \sin 38^0$, $\sin 52^0 = \cos 38^0$ итд.

Најзад, ако је угао у четвртом квадранту, онда се он може да представи у форми $270^0 + \alpha$ (место $360^0 - \alpha$) и сравнујући координате тачке P'''' за угао $270^0 + \alpha$ са координатама тачке P' за оштар угао α закључујемо да је

$$sin\,(270^0 + \alpha) = -\,cos\,\alpha$$
$$cos\,(270^0 + \alpha) = sin\,\alpha$$
$$tg\,(270^0 + \alpha) = -\,cotg\,\alpha$$
$$cotg\,(270^0 + \alpha) = -\,tg\,\alpha.$$

Тако нпр. је $sin\,311^0 = sin\,(270^0 + 41^0) = -\,cos\,41^0$

$$cos\,311^0 = cos\,(270^0 + 41^0) = sin\,41^0$$

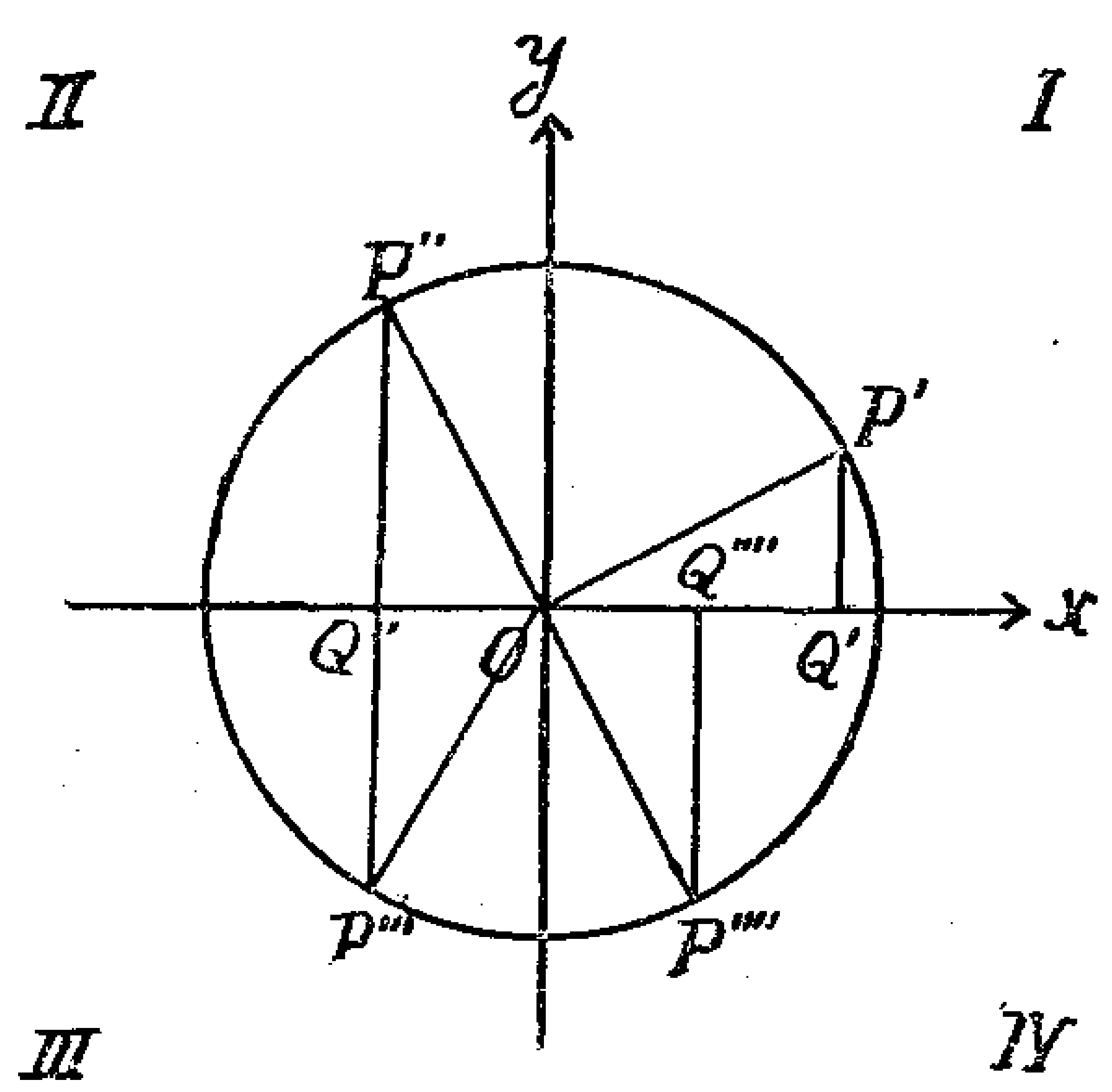
$$tg\,311^0 = \frac{sin\,311^0}{cos\,311^0} = -\,cotg\,41^0$$

$$cotg\,311^0 = \frac{cos\,311^0}{sin\,311^0} = -\,tg\,41^0.$$

Ово се слаже са горе нађеним резултатом, јер је $cos\,41^0 = sin\,49^0$, $sin\,41^0 = cos\,49^0$ итд.

Ми смо овим добили као други начин редуковања да је у

13b)	квадранту	II	III	IV
	угао	$90^0 + \alpha$	$270^0 - \alpha$	$270^0 + \alpha$
	sinus	$cos\,\alpha$	$-\,cos\,\alpha$	$-\,cos\,\alpha$
	cosinus	$-\,sin\,\alpha$	$-\,sin\,\alpha$	$sin\,\alpha$
	tangens	$-\,cotg\,\alpha$	$cotg\,\alpha$	$-\,cotg\,\alpha$
	cotcngens	$-\,tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-\,tg\,\alpha$



Сл. 12.

Закључак. Из свега овога утврђујемо за свођење тригонометриских функција углова преко 90^0 на тригонометриске функције углова испод 90^0 по првом начину редуковања правило: замишљајући да су углови у другом, трећем и четвртом квадранту представљени у форми $180^0 - \alpha$, $180^0 + \alpha$ и $360^0 - \alpha$ (са одговарајућим тачкама P_2, P_3 и P_4) функција остаје иста: она не мења име (ако је *sin* остаје *sin*, ако је *cos* остаје *cos* итд.), а знак се управља према квадранту у коме се угао налази онако како је то утврђено табличицом 5) у чл. 10.

По другом начину редуковања ми замишљамо да су углови у другом, трећем и четвртом квадранту представљени у форми $90^0 + \alpha$, $270^0 - \alpha$ и $270^0 + \alpha$ (са одговарајућим тачкама P'', P''' и P''''). У овоме се случају функција претвара у своју кофункцију (*sin* у *cos*, а *cos* у *sin* итд.), а знак се опет одређује према квадранту у коме се угао налази као што је назначено у табличици 5) у чл. 10.

Напомена. Из таблица 13a) и 13b) читамо:

$$\begin{aligned} sin\,\alpha &= sin\,(180^0 - \alpha) \\ cos\,\alpha &= cos\,(360^0 - \alpha) \\ tg\,\alpha &= tg\,(180^0 + \alpha) \\ cotg\,\alpha &= cotg\,180^0 + \alpha). \end{aligned}$$

Ми видимо да свакој задатој вредности синуса одговарају по два угла, који се допуњују од 180^0, тако да ако је један од њих α, онда је онај други $180^0 - \alpha$. Једноме и истом косинусу одговарају угли α и $360^0 - \alpha$, дакле два угла који се допуњују до 360^0. Најзад за сваку вредност тангенте или котангенте добијамо по два угла, који се разликују за 180^0. Познавањем вредности *једне* тригонометриске функције одговарајући угао није, дакле, потпуно одређен, јер их има два.

Ово нам објашњује још и следећу околност. У таблици 11 имамо средство за израчунавање осталих тригонометрискax функција када нам је дата једна од њих. Тако н. пр. ако познајемо синус ми налазимо оне остале функције на овај начин

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha},$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}, \qquad cotg\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Примећујемо да свака, на основу ових образаца израчуната функција добија, услед двојакога знака корене количине, две вредности, од којих је једна положна, а друга одречна. И заиста не познавајући сам угао, но само синус његов, горњи обрасци морају за остале функције дати нам оне вредности, које припадају свима оним углима, чији је синус једнак, а то су угли α и $180^0 - \alpha$. Таблице 13) показују да за ова два угла све тригонометриске функције, осим синуса, имају по две вредности са супротним знацима. Према овоме у примеру 1 чл. 13., у коме је *дато*

$$\sin\alpha = \frac{4}{5},$$

има да се стави

$$\cos\alpha = \pm\frac{3}{5}, \quad tg\,\alpha = \pm\frac{4}{3}, \quad cotg\,\alpha = \pm\frac{3}{4}.$$

15. **Периодност тригонометриских функција.** — Пошто се координате једне тачке P не мењају, кад дотични угао $AOP = \alpha$, односно лук AP, повећамо или смањимо за ма колики (цео) број пуних углова од 360^0, односно целих периферија 2π, а знамо да тригонометриске функције зависе од координата тачке P, то је разумљиво, да је сасвим уопште

$$\left.\begin{aligned} F(\alpha \pm n \cdot 360^0) &= F(\alpha) \\ \text{или} \qquad F(\alpha \pm n \cdot 2\pi) &= F(\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где F означава ма коју од тригонометриских функција, а n произвољан цео број. У једначини 14) исказано је дакле значајно својство свију тригонометриских функција, услед којега се оне не мењају, кад углу, односно луку, додамо или одузмемо ма колико пуних углова од 360^0, односно целих периферија 2π.

Функције, које своју вредност не мењају, кад се променљивој, од које оне зависе, ма колико пута дода или одузме извесна стална количина, зову се *периодне* (*periodisch,* périodique). Она стална количина, која се променљивој може додати или одузети, а да се функциона вредност не промени, зове се *модуо* или *амплитуда периоде* (*Periodicitätsmodul,* amplitude de la période). Очевидно је једна периодна функција потпуно позната, када су познате њене вредности у размаку једне периоде, зато што се у идућој периоди функционе вредности по истоме реду понављају.

Према горе реченоме изилази да су све тригонометриске функције периодне. Њихова општа периода је $= 360^0$ или 2π. Из таблица 13) у чл. 15. видимо, да тангента и котангента, имају краћу периоду од синуса, и косинуса. Док је за ове две последње функције амплитуда периоде $= 360^0 = 2\pi$ она је за прве две половина тога, т. ј. $= 180^0 = \pi$.

Примери.

1) $$sin\,1642^0 = sin\,(4.360^0 + 202^0) = sin\,202^0,$$
$$sin\,202^0 = sin\,(180^0 + 22^0) = -\,sin\,22^0.$$

2) $$cos\,783^0 = cos\,(2.360^0 + 63^0) = cos\,63^0.$$

3) $$tg\,675^0 = tg\,(3.180^0 + 135^0) = tg\,135^0,$$
$$tg\,135^0 = tg\,(180^0 - 45^0) = -\,tg\,45^0.$$

4) $$cotg\,216^0 = cotg\,(180^0 + 36^0) = cotg\,36^0.$$

16. **Многозначност циклометриских функција.** — Нека су x и y две променљиве количине, које, на извесан начин, зависе једна од друге. Ми кажемо, у томе случају, да су количине x и y *функције* једна од друге. Ту везу, коју замишљамо између променљивих x и y, представићемо општом (функционом) једначином

$$F\,(x,\ y) = 0. \tag{a}$$

Ова једначина показује нам, да свакој задатој вредности једне променљиве одговара једна или више вредности оне друге променљиве. Када бисмо хтели да покажемо на који се начин добијају вредности једне променљиве из задатих вредности оне друге, ми бисмо горњу једначину *a)* решили по оној количини, чије вредности израчунавамо. Према томе, коју бисмо од оне две количине x или y узели за *независно променљиву,* једначина *a)* добила би један од ова два вида

$$y = f(x) \tag{b}$$

и

$$x = \varphi(y). \tag{c}$$

Код вида *b)* узето је *x* као независно променљива, док ту улогу игра код вида *c)* променљива *y*. Све три форме, *a)*, *b)* и *c)*, представљају у ствари један и исти алгебарски израз. Вид *a)* зовемо *скривеном* или *имплицитном* (implicite), видове *b)* и *c)* *откривеном* или *експлицитном* (explicite) формом функције.

Две функције, какве представљају изрази под *b)* и *c)*, који се једино разликују у избору независно променљиве количине, зову се *изврнуте* или *инверзне* (inverse) функције.

Тако н. пр. из

$$ax^2 - bx^2y + cy + d = 0$$

следује, кад решимо по y,

$$y = \frac{ax^2 + d}{bx^2 - c},$$

а када решимо по x добијамо изврнуту функцију

$$x = \sqrt{\frac{cy + d}{by - a}}.$$

Изврнуте функције јесу

$$y = a^x \text{ и } x = log^{(a)}y$$

итд.

Када ово извртање функција применимо на тригонометриске функције добијамо такозване *циклометриске функције (cyklometrische Funktionen,* fonctions circulaires inverses). Ако ставимо н. пр. $y = sin\, x$, т. ј. ставимо да је y равно синусу лука x, онда је, обратно, x лук (arcus), чији је синус раван y или у знацима

$x = arc\,sin\,y$. Дакле тригонометриској функцији sinus јесте изврнута (циклометриска) функција arcus sinus. Исто тако тригонометриској функцији cosinus јесте изврнута функција arcus cosinus. Итд.

Извртањем следује из

$y = sin\,x$,	да је обратно	$x = arc\,sin\,y$,
$y = cos\,x$,	" " "	$x = arc\,cos\,y$,
$y = tg\,x$,	" " "	$x = arc\,tg\,y$,
$y = cotg\,x$,	" " "	$x = arc\,cotg\,y$,
$y = sec\,x$,	" " "	$x = arc\,sec\,y$,
$y = cosec\,x$,	" " "	$x = arc\,cosec\,y$.

Ми знамо да свакоме углу одговара увек само по једна вредност тригонометриских функција, док, обратно, услед периодности тригонометриских функција, једној истој вредности ма које тригонометриске функције одговарају безбројно много углова.

Када једној задатој вредности независно променљиве одговара само једна вредност њене функције, онда кажемо да је та функција *једнозначна* (*eindeutig*, monotrope). Али ако за једну исту вредност независно променљиве њена функција добија две, три или више разних вредности, онда кажемо да је функција дво-, тро- или уопште *многозначна* (*mehrdeutig*, polytrope).

Периодност тригонометриских функција чини, да су њима изврнуте, такозване циклометриске функције многозначне.

Отуда што је

$$sin\,x = sin\,(x + 2\pi) = sin\,(x + 2 \cdot 2\pi) = \cdots$$
$$= sin\,(x + n \cdot 2\pi) = y$$

читамо да је

$$arc\sin y = x, = x + 2\pi, = x + 2\cdot 2\pi, \cdots = x + n\cdot 2\pi.$$

Једној задатој вредности синуса, н. пр. некој вредности y, одговарају безбројно много вредности лука, а то су луци $x, x+2\pi, x+2\cdot 2\pi, \cdots x+n\cdot 2\pi$, од којих је најмањи x, а они остали од њега се разликују за извесан цео број периодне амплитуде синуса, а то је 2π. Ово што смо рекли за синус важи тако исто и за косинус, пошто је његова периодна амплитуда иста као и за синус.

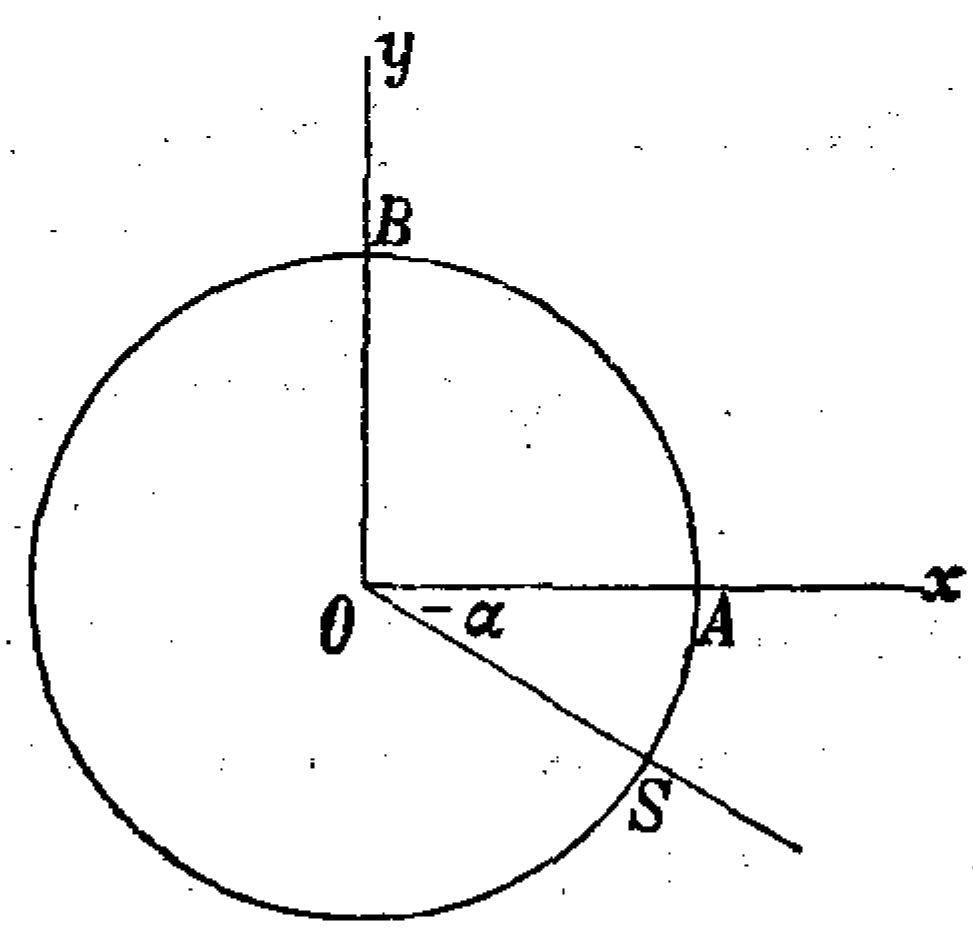
За тангенту и котангенту периодна амплитуда је равна π, због чега је н. пр.

$$tg\,x = tg\,(x+\pi) = tg\,(x+2\cdot\pi) = \cdots = tg\,(x+n\cdot\pi) = y$$

и према томе

$$arc\,tg\,y = x, = x+\pi, = x+2\cdot\pi, \cdots = x+n\cdot\pi.$$

17. **Тригонометриске функције негативних углова.** — Пошто се краци одречнога угла $AOS = -\alpha$ поклапају са крацима положнога угла $360^0 - \alpha$, ма какав био угао α, оштар или туп, па дакле и координате тачке S имају једну исту вредност сматрали ми ту тачку као крајњу тачку негативног лука $AS = -\alpha$ или као крајњу тачку позитивног лука $ABS = 2\pi - \alpha$, следује да се тригонометриске функције одречнога угла $-\alpha$ слажу са



Сл. 13.

тригонометриским функцијама угла $360^0 - \alpha$ и да је према томе, а на основу таблице 13*а)* у чл. 14.

$$15) \quad \begin{cases} sin\,(-\alpha) = sin\,(360^0 - \alpha) & = -\,sin\,\alpha \\ cos\,(-\alpha) = cos\,(360^0 - \alpha) & = cos\,\alpha \\ tg\,(-\alpha) = tg\,(360^0 - \alpha) & = -\,tg\,\alpha \\ cotg\,(-\alpha) = cotg\,(360^0 - \alpha) & = -\,cotg\,\alpha \end{cases}$$

Косинус одречнога угла једнак је косинусу положнога угла. Међутим синус, тангента и котангента одречнога угла равни су одречноме синусу, тангенти и котангенти положнога угла.

Примери.

$$\begin{aligned} sin\,(-73^0) &= -\,sin\,73^0 \\ &= sin\,(360^0 - 73^0) = sin\,287^0. \\ cos\,(-73^0) &= cos\,73^0. \\ tg\,(-73^0) &= -\,tg\,73^0. \\ &= tg\,(180^0 - 73^0) = tg\,107^0. \\ cotg\,(-73^0) &= -\,cotg\,73^0 = cotg\,107^0. \end{aligned}$$

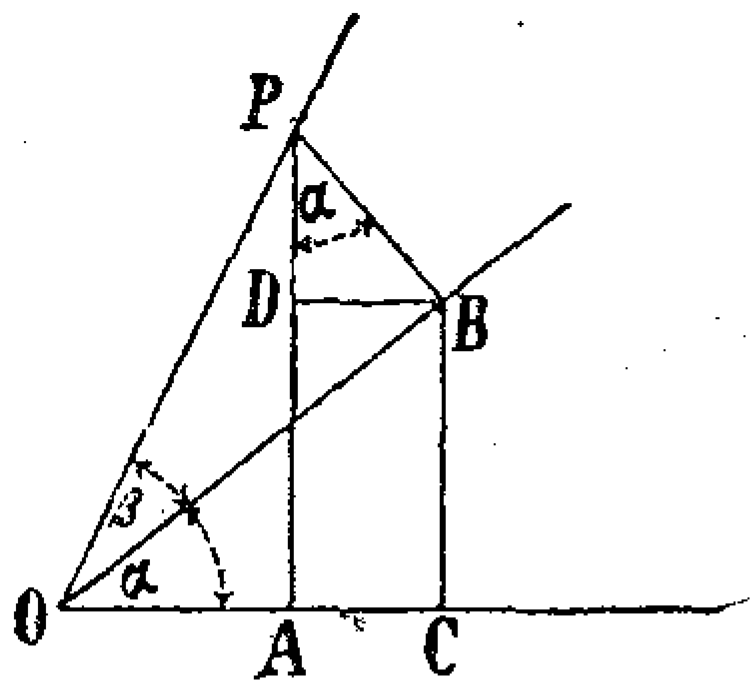
II
ОПШТИ ОБРАСЦИ.

1.
Тригонометриске функције збира и разлике двају лукова.

18. **Синус збира и разлике двају лукова.** — Задатак је овај: дати су синуси и косинуси два угла α и β. Тражи се синус збира $\alpha + \beta$ и разлике $\alpha - \beta$.

Претпоставимо да су угли α и β позитивни иначе ма колики.

Да бисмо добили $sin\,(\alpha + \beta)$ положићемо угао β у продужењу угла α и спустићемо из произвољне тачке P крака OP две управне: једну управну PA на први и другу управну PB на други крак угла α. Затим ћемо из тачке B спустити такође две управне и то управну BC на крак OA и управну BD на нормалу PA. Имајући на уму да је $\sphericalangle BPD = \alpha$ (зато што краци тога угла стоје управно на крацима угла α) читамо из слике непосредно



Сл. 14.

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AP}{OP} = \frac{AD + DP}{OP}$$

$$= \frac{CB}{OP} + \frac{DP}{OP}$$

$$= \frac{OB \cdot \sin\alpha}{OP} + \frac{BP \cdot \cos\alpha}{OP}$$

и пошто је

$$\frac{OB}{OP} = \cos\beta, \quad \frac{BP}{OP} = \sin\beta$$

следује

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Образац за синус разлике добићемо, најлакше, кад у овоме обрасцу за збир заменимо β са $-\beta$, ставимо дакле

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

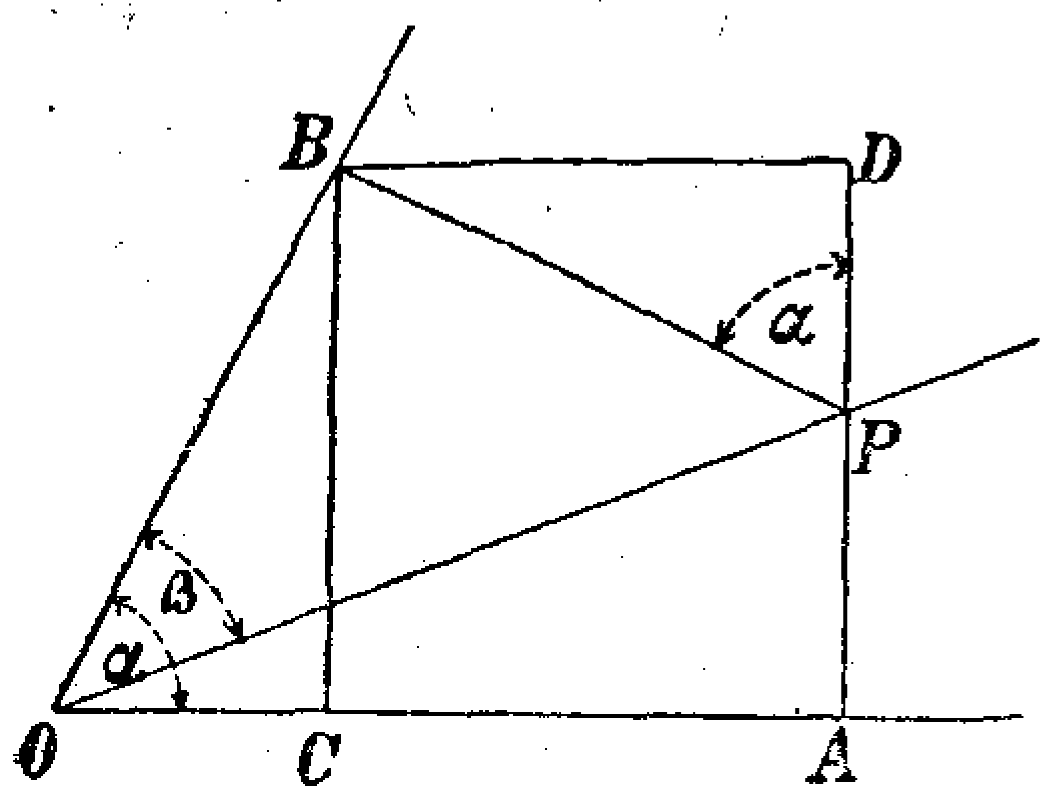
које, услед тога што је

$$\cos(-\beta) = \cos\beta, \quad \sin(-\beta) = -\sin\beta$$

(в. једн. 15. у чл. 17.), води обрасцу

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Овај образац можемо доказати и помоћу слике на врло прост начин. Унесимо угао β у угао α, на начин како слика 15 показује, и извршимо исту конструкцију коју и горе код слике 14, т. ј. спустимо из произвољне тачке P крака OP управне PA и PB на оба крака угла α, а из тачке B управне BC и BD.



Сл. 15.

Пошто приметимо да је $\sphericalangle BPD = \alpha$ (зато што његови краци стоје управно на крацима угла α) читамо из слике

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{AP}{OP} = \frac{AD - PD}{OP} = \frac{CB}{OP} - \frac{PD}{OP}$$

$$= \frac{OB \cdot \sin\alpha}{OP} - \frac{BP \cdot \cos\alpha}{OP}$$

и услед тога што је

$$\frac{OB}{OP} = \cos\beta, \quad \frac{BP}{OP} = \sin\beta$$

налазимо, као и горе,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Да овај образац за синус разлике важи не само за $\beta < \alpha$, дакле $\alpha - \beta > 0$, но и онда кад је $\beta > \alpha$, т. ј. $\alpha - \beta < 0$ следује већ из тога, што се тај образац изводи из онога за синус збира, за који не постоји никаква претпоставка који је од она два угла већи, а који мањи. Но ми бисмо могли да докажемо то и на овај начин. Пошто смо, помоћу сл. 15 доказали, да је за $\alpha > \beta$, дакле за $\alpha - \beta > 0$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

претпоставимо случај, да је $\alpha < \beta$, т. ј. $\alpha - \beta < 0$. Имајући на уму, да је сада $\beta - \alpha > 0$, то је, према доказатом обрасцу,

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha,$$

одакле, кад заменимо β са $-\beta$, а α са $-\alpha$, добијамо горњи образац за синус разлике.

19. **Косинус збира и разлике двају лукова.** — Познати су синуси и косинуси два угла α и β. Тражи се косинус збира $\alpha + \beta$ и разлике $\alpha - \beta$.

Најбрже ћемо доћи до резултата кад у обрасцима за синус збира и разлике заменимо угао α са $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Из обрасца за синус збира следује на тај начин

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right]$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

или

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

Из обрасца за синус разлике налазимо

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right]$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

или

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

које нам даје и последњи образац за косинус разлике, кад у њему заменимо β са $-\beta$.

До ових резултата долазимо још и помоћу слике. Из слике 14 читамо

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OA}{OP}=\frac{OC-AC}{OP}=\frac{OC}{OP}-\frac{DB}{OP}$$

$$=\frac{OB\cdot\cos\alpha}{OP}-\frac{BP\cdot\sin\alpha}{OP}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Слика 15 даје нам

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{OA}{OP}=\frac{OC+CA}{OP}=\frac{OC}{OP}+\frac{BD}{OP}$$

$$=\frac{OB\cdot\cos\alpha}{OP}+\frac{BP\cdot\sin\alpha}{OP}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Овим смо добили формуле

$$16)\qquad \begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,\end{cases}$$

које важе сасвим уопште, ма какви били углови α и β.

Примена. Помоћу горњих образаца за синус и косинус збира и разлике двају лукова лако је извести обрасце за збир и разлику од више углова. Тако н. пр. када ставимо у једн. 16) $\beta + \gamma$ место β налазимо

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta+\gamma) &= \sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha\sin(\beta+\gamma) \\ &= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ &+ \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta+\gamma) &= \cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin(\beta+\gamma) \\ &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ &- \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma. \end{aligned}$$

Одавде, заменом γ са $\gamma + \delta$, могли би смо добити $\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ и $\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ и т. д.

20. **Тангента и котангента збира и разлике двају лукова.** — Да бисмо изразили тангенту збира двају лукова помоћу тангената појединих лукова ставимо

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

и поделимо на десној страни бројитељ и именитељ са $\cos\alpha\cos\beta$, па ћемо добити

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

или дакле

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta}.$$

Одавде, када заменимо β са $-\beta$ и будемо имали на уму да је

$$tg(-\beta) = -tg\,\beta$$

(в. једн. 15 у чл. 17.), налазимо

$$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta}.$$

На сличан начин изводимо

$$cotg\,(\alpha + \beta) = \frac{cos\,(\alpha + \beta)}{sin\,(\alpha + \beta)} = \frac{cos\,\alpha\, cos\,\beta - sin\,\alpha\, sin\,\beta}{sin\,\alpha\, cos\,\beta + cos\,\alpha\, sin\,\beta},$$

одакле, кад поделимо броитељ и именитељ са $sin\,\alpha\, sin\,\beta$, следује

$$cotg\,(\alpha + \beta) = \frac{cotg\,\alpha\, cotg\,\beta - 1}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta},$$

а одавде, заменом угла β са $-\beta$ и с обзиром на то да је

$$cotg\,(-\beta) = -cotg\,\beta,$$

$$cotg\,(\alpha - \beta) = \frac{cotg\,\alpha\, cotg\,\beta + 1}{cotg\,\beta - cotg\,\alpha}.$$

Помоћу образаца

$$17) \quad \left\{ \begin{aligned} tg\,(\alpha + \beta) &= \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} \\ tg\,(\alpha - \beta) &= \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta} \\ cotg\,(\alpha + \beta) &= \frac{cotg\,\alpha\, cotg\,\beta - 1}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta} \\ cotg\,(\alpha - \beta) &= \frac{cotg\,\alpha\, cotg\,\beta + 1}{cotg\,\beta - cotg\,\alpha} \end{aligned} \right.$$

у стању смо да нађемо тангенту и котангенту збира и разлике два угла, када су нам познате тангенте и котангенте појединих углова.

Примене.

Ако ставимо у једн. 17) $\alpha = 45^0$, а знамо да је

$$tg\, 45^0 = cotg\, 45^0 = 1,$$

пошто је $sin\, 45^0 = cos\, 45^0$ (в. пример 2 чл. 8.) добићемо

$$tg\,(45^0 + \beta) = \frac{1 + tg\,\beta}{1 - tg\,\beta}, \quad tg\,(45^0 - \beta) = \frac{1 - tg\,\beta}{1 + tg\,\beta},$$

$$cotg\,(45^0 + \beta) = \frac{cotg\,\beta - 1}{cotg\,\beta + 1}, \; cotg\,(45^0 - \beta) = \frac{cotg\,\beta + 1}{cotg\,\beta - 1}.$$

2) Заменом угла β са $\beta + \gamma$ у једн. 17) изводимо

$$tg\,(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{tg\,\alpha + tg\,(\beta + \gamma)}{1 - tg\,\alpha\; tg\,(\beta + \gamma)}$$

$$= \frac{tg\,\alpha + \dfrac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{1 - tg\,\beta\; tg\,\gamma}}{1 - tg\,\alpha\,\dfrac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{1 - tg\,\beta\; tg\,\gamma}}$$

или

$$tg\,(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha\; tg\,\beta\; tg\,\gamma}{1 - tg\,\alpha\; tg\,\beta - tg\,\beta\; tg\,\gamma - tg\,\gamma\; tg\,\alpha}.$$

$$cotg\,(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{cotg\,\alpha\; cotg\,(\beta + \gamma) - 1}{cotg\,\alpha + cotg\,(\beta + \gamma)}$$

$$= \frac{cotg\,\alpha\,\dfrac{cotg\,\beta\; cotg\,\gamma - 1}{cotg\,\beta + cotg\,\gamma} - 1}{cotg\,\alpha + \dfrac{cotg\,\beta\; cotg\,\gamma - 1}{cotg\,\beta + cotg\,\gamma}}$$

или

$$cotg\,(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{cotg\,\alpha\; cotg\,\beta\; cotg\,\gamma - cotg\,\alpha - cotg\,\beta - cotg\,\gamma}{cotg\,\alpha\; cotg\,\beta + cotg\,\beta\; cotg\,\gamma + cotg\,\gamma\; cotg\,\alpha -}$$

На сличан начин добили бисмо обрасце за $tg(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, $cotg(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ и т. д.

2.

Тригонометриске функције двоструких и половљених лукова.

21. **Тригонометриске функције двоструких лукова.** — Дате су тригонометриске функције ма каквог угла. Траже се тригонометриске функције за двоструки угао.

Ставимо у горњим обрасцима 16) и 17), који нам дају тригонометриске функције збира двају углова, да је $\alpha=\beta$, па ћемо добити непосредно следеће обрасце, у којима су тригонометриске функције двоструког угла изражене помоћу тригонометриских функција простога угла:

$$18) \qquad \begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ tg\, 2\alpha = \dfrac{2\, tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} \\ cotg\, 2\alpha = \dfrac{cotg^2\alpha - 1}{2\, cotg\,\alpha}. \end{cases}$$

Ако у оним истим једначинама 16) и 17) за тригонометриске функције збира двају углова ставимо $\beta = 2\alpha$ и заменимо онда, на основу нађених образаца 18), тригонометриске функције двоструког угла њиховим вредностима добићемо обрасце

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg\,3\alpha = \frac{3\,tg\,\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3\,tg^2\alpha}$$

$$cotg\,3\alpha = \frac{3\,cotg\,\alpha - cotg^3\alpha}{1 - 3\,cotg\,\alpha},$$

који могу да послуже за израчунавање тригонометриских функција трострукога угла из тригонометриских функција простога угла.

Тако исто могли бисмо наћи изразе за тригонометриске функције четворострукога угла и т. д.

22. **Тригонометриске функције половљених лукова.** — Задатак је обратан ономе у чл. 21.: дате су тригонометриске функције извеснога угла, а траже се исте функције за два пута мањи угао.

Ако у једначини 10) чл. 13. и у другој једначини 18) чл. 21. заменимо α са $\frac{\alpha}{2}$, па дакле и 2α са α, добићемо те обрасце у форми

$$cos^2\frac{\alpha}{2} + sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2} = cos\,\alpha,$$

које, када саберемо и одузмемо, даје

$$2\,cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + cos\,\alpha$$

$$2\,sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - cos\,\alpha$$

или

$$
19)\left\{\begin{aligned}
&\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}\\
&\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)},\\
&\text{а одавде}\\
&tg\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\\
&cotg\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.
\end{aligned}\right.
$$

Из ових образаца видимо да за једну исту вредност од $\cos\alpha$ потичу за сваку тригонометриску функцију половљенога угла увек две вредности, које су супротнога знака. Ми тумачимо то на овај начин. Пошто нама није познат сам угао α, но његов косинус, а знамо да једном и истом косинусу одговарају безбројно много углова, јер је $\cos\alpha=\cos(360^0-\alpha)$ $=\cos(360^0+\alpha)=\cos(360^0+360^0+\alpha)=\cdots$, то је појмљиво да обрасци 19) морају дати све оне вредности тригонометриских функција половљенога угла, које одговарају половини углова α, $360^0-\alpha$, $360^0+\alpha$, $720^0+\alpha$, $\cdots$, т. ј. које припадају угловима $\frac{\alpha}{2}$, $180^0-\frac{\alpha}{2}$, $180^0+\frac{\alpha}{2}$, $360^0+\frac{\alpha}{2}$, $\cdots$, који, као што показују таблице 13) у чл. 14., заиста дају за сваку тригонометриску функцију по две вредности са противним знацима.

23. **Продужење о тригонометриским функцијама половљених лукова.** — Синус и косинус половљенога угла можемо да изразимо још на други начин: место косинусом целога угла његовим синусом.

На основу једначине 10) чл. 13. и прве једначине 18) чл. 21. јесте

$$sin^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$2\,sin\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2} = sin\,\alpha,$$

одакле сабирањем и одузимањем

$$\left(sin\frac{\alpha}{2} + cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + sin\,\alpha$$

$$\left(sin\frac{\alpha}{2} - cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - sin\,\alpha$$

или

$$sin\frac{\alpha}{2} + cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + sin\,\alpha}$$

$$sin\frac{\alpha}{2} - cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - sin\,\alpha},$$

које опет, кад саберемо и одузмемо, даје

$$\left.\begin{aligned} sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + sin\,\alpha} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - sin\,\alpha} \\ cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + sin\,\alpha} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1 - sin\,\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (20$$

Ми видимо, одавде, да синус и косинус половљенога угла добивају по четири вредности, од којих су две и две једнаке, али супротнога знака. Узев да угао, од чије се половине тражи синус и косинус, није познат, но само његов синус следује из тога што је $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha) = \sin(360^0 + \alpha) = \sin(360^0 + 180^0 - \alpha) = \sin(360^0 + 360 + \alpha) = \cdots$ да обрасци 20) дају синусе и косинусе половине од углова α, $180^0 - \alpha$, $360^0 + \alpha$, $540^0 - \alpha$, $720^0 + \alpha$, $\cdots$, т. ј. синусе и косинусе углова $\frac{\alpha}{2}$, $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $180^0 + \frac{\alpha}{2}$, $270^0 - \frac{\alpha}{2}$, $360^0 + \frac{\alpha}{2}$, $\cdots$, који се своде, како за једну тако и за другу функцију, на четири разне вредности, а то су оне, које одговарају првима четири угла.

3.

Претварање збира и разлике тригонометриских функција у производе.

24. **Претварање збира и разлике двају синуса и косинуса у производе.** — При употреби логаритама уопште је од врло велике практичне вредности свођење збира и разлике на производе или количнике. С тога ћемо покушати да изнађемо обрасце, у којима ће збир и разлика тригонометриских функција бити изражени производима таквих функција.

Сабирањем и одузимањем образаца

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

(једн. 16 чл. 19.) добијамо

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta.$$

Ако ставимо овде

$$\alpha+\beta=\varphi,\quad \alpha-\beta=\psi,$$

дакле

$$\alpha=\frac{\varphi+\psi}{2},\quad \beta=\frac{\varphi-\psi}{2}$$

последњи обрасци гласиће

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi+\sin\psi&=2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\\ \sin\varphi-\sin\psi&=2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\\ \cos\psi+\cos\varphi&=2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\\ \cos\psi-\cos\varphi&=2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\end{aligned}\right\}\qquad (21$$

Да бисмо изразили збир или разлику једнога синуса и једнога косинуса можемо двојако да поступимо: или косинус да заменимо синусом комплементнога угла или обратно да заменимо синус косинусом комплементнога угла. Узећемо да је

$$\cos\varphi\pm\sin\psi=\sin(90^0-\varphi)\pm\sin\psi$$

или

$$\cos\varphi\pm\sin\psi=\cos\varphi\pm\cos(90^0-\psi).$$

Прва замена своди задатак на један од прва два случаја, друга замена на један од последња два случаја у једначинама 21). Применом тих образаца налазимо

$$\cos\varphi + \sin\psi = 2\sin\left(45^0 - \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{\varphi+\psi}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(45^0 + \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\sin\left(45^0 + \frac{\varphi+\psi}{2}\right)$$

$$\cos\varphi - \sin\psi = 2\cos\left(45^0 - \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\sin\left(45^0 - \frac{\varphi+\psi}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(45^0 + \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\cos\left(45^0 + \frac{\varphi+\psi}{2}\right).$$

Примене.

1) Ако у последњим изразима ставимо $\varphi = \psi$ и будемо имали на уму да је

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

добићемо ове нове обрасце

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\cdot\cos(45^0 - \varphi) = \sqrt{2}\cdot\sin(45^0 + \varphi)$$

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \sqrt{2}\cdot\sin(45^0 - \varphi) = \sqrt{2}\cdot\cos(45^0 + \varphi),$$

одакле опет

$$\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} = tg\,(45^0 + \varphi).$$

2) Делећи две и две једначине 21) међусобом налазимо

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{tg\,\dfrac{\varphi+\psi}{2}}{tg\,\dfrac{\varphi-\psi}{2}}$$

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\cos\psi + \cos\varphi} = tg\,\frac{\varphi+\psi}{2}$$

$$\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\sin\varphi - \sin\psi} = tg\,\frac{\varphi+\psi}{2}$$

$$\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\sin\varphi + \sin\psi} = tg\,\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\cos\psi + \cos\varphi} = tg\,\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$$\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\cos\psi + \cos\varphi} = tg\,\frac{\varphi+\psi}{2}\,tg\,\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

25. **Претварање збира и разлике двеју тангената и котангената у производе.** — Збиру и разлици тангената и котангената дајемо вид производа на следећи начин

$$tg\,\varphi \pm tg\,\psi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \pm \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{\sin\varphi\cos\psi \pm \cos\varphi\sin\psi}{\cos\varphi\cos\psi}$$

$$= \frac{\sin(\varphi \pm \psi)}{\cos\varphi\cos\psi},$$

$$cotg\,\varphi \pm cotg\,\psi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \pm \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\sin\psi\cos\varphi \pm \cos\psi\sin\varphi}{\sin\varphi\sin\psi}$$

$$= \frac{\sin(\psi \pm \varphi)}{\sin\varphi\sin\psi}.$$

Одавде, кад одвојимо збир од разлике, следују ова четири обрасца

$$22)\quad \begin{cases} tg\,\varphi + tg\,\psi = \dfrac{sin\,(\varphi + \psi)}{cos\,\varphi\,cos\,\psi} \\[2ex] tg\,\varphi - tg\,\psi = \dfrac{sin\,(\varphi - \psi)}{cos\,\varphi\,cos\,\psi} \\[2ex] cotg\,\varphi + cotg\,\psi = \dfrac{sin\,(\psi + \varphi)}{sin\,\varphi\,sin\,\psi} \\[2ex] cotg\,\varphi - cotg\,\psi = \dfrac{sin\,(\psi - \varphi)}{sin\,\varphi\,sin\,\psi}. \end{cases}$$

У случају да имамо збир или разлику од две различне функције: једне тангенте и једне котангенте, поступићемо онако исто као у прошломе члану са синусом и косинусом, т. ј. ми ћемо ма коју од оне две функције заменути кофункцијом комплементнога угла и начинити тако обе функције једноименима. Ставићемо дакле

$$cotg\,\varphi \pm tg\,\psi = tg\,(90^0 - \varphi) \pm tg\,\psi$$

или

$$cotg\,\varphi \pm tg\,\psi = cotg\,\varphi \pm cotg\,(90^0 - \psi)$$

и, употребом горњих образаца, добићемо

$$cotg\,\varphi + tg\,\psi = \frac{cos\,(\varphi - \psi)}{sin\,\varphi\,cos\,\psi}$$

$$cotg\,\varphi - tg\,\psi = \frac{cos\,(\varphi + \psi)}{sin\,\varphi\,cos\,\psi}$$

Примене.

1) Кад у последње две једначине ставимо $\varphi = \psi$ и применимо образац $2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi = sin\,2\,\varphi$ (в. једн. 18 чл. 21.) добијамо

$$cotg\,\varphi + tg\,\varphi = \frac{2}{sin\,2\varphi}$$

$$cotg\,\varphi - tg\,\varphi = 2\,cotg\,2\varphi.$$

2) Из једначина 22) следује делењем

$$\frac{tg\,\varphi + tg\,\psi}{tg\,\varphi - tg\,\psi} = \frac{cotg\,\psi + cotg\,\varphi}{cotg\,\psi - cotg\,\varphi} = \frac{sin\,(\varphi + \psi)}{sin\,(\varphi - \psi)}$$

$$\frac{tg\,\varphi + tg\,\psi}{cotg\,\varphi + cotg\,\psi} = -\frac{tg\,\varphi - tg\,\psi}{cotg\,\varphi - cotg\,\psi} = tg\,\varphi\,tg\,\psi.$$

III

О ИЗРАЧУНАВАЊУ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ ФУНКЦИЈА.

1.

Вредности тригонометриских функција за извесне особене углове.

26. **Тригонометриске функције угла од 45^0 или лука $\frac{\pi}{4}$.** — Из равнокраког правоуглог троугла ABC, у коме је хипотенуза.

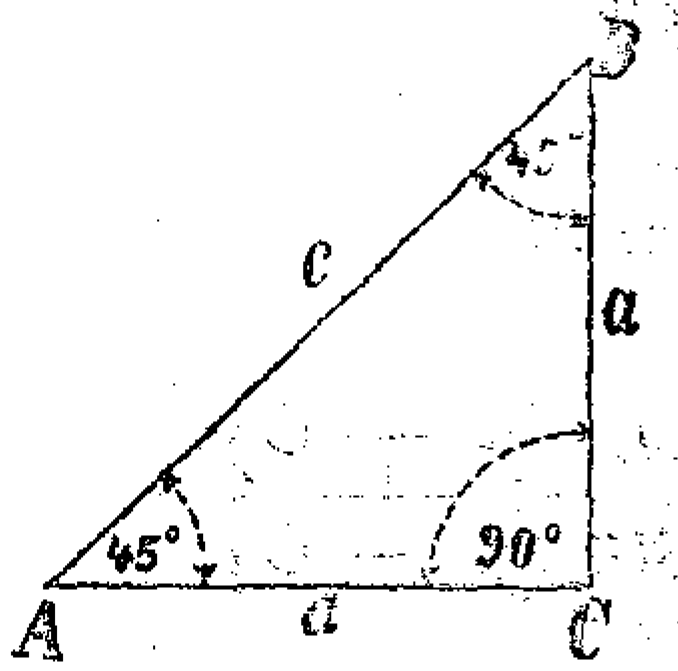
$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2},$$

следују, непосредно, за угао од 45^0 или лук $\frac{\pi}{4}$ вредности тригонометриских функција

$$\left.\begin{aligned} sin\,45^0 = cos\,45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ tg\,45^0 = cotg\,45^0 = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (23$$

Напомена. До ових вредности можемо доћи и чисто рачунским путем.

1) узев на ум да је $\sin 45^0 = \cos(90^0 - 45^0) = \cos 45^0$ следује $tg\, 45^0 = cotg\, 45^0 = 1$, а одавде, и на основу опште формуле



Сл. 16.

$$\sin \alpha = \frac{tg\, \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}},$$

налазимо

$$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^0.$$

2) употребом образаца 19) чл. 22. или образаца 20) чл. 23., када ставимо у истим $\alpha = 90^0$, а знамо да је $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$, добијамо

$$\sin 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 90^0)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

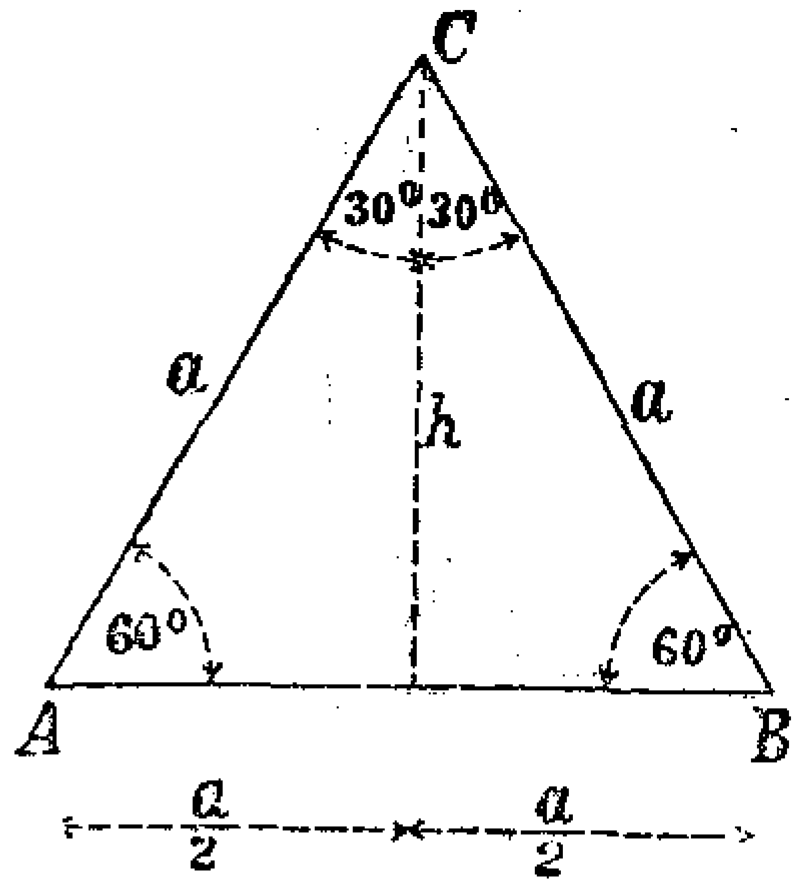
$$\cos 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 90^0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и т. д.

27. Тригонометриске функције углова од 30^0 и од 60^0 или лукова $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$. — Из равностраног троугла ABC, у коме је висина

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

читамо



Сл. 17.

$$\left.\begin{aligned} \sin 30^0 &= \cos 60^0 = \frac{1}{2} \\ \cos 30^0 &= \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ tg\, 30^0 &= cotg\, 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ cotg\, 30^0 &= tg\, 60^0 = \sqrt{3}. \end{aligned}\right\} \quad (24$$

Напомена. Рачунским путем налазимо вредности тригонометриских функција за угао од 30^0 (па дакле и за комплементни угао од 60^0) решавањем кубне једначине, коју добијамо, када у обрасцу

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

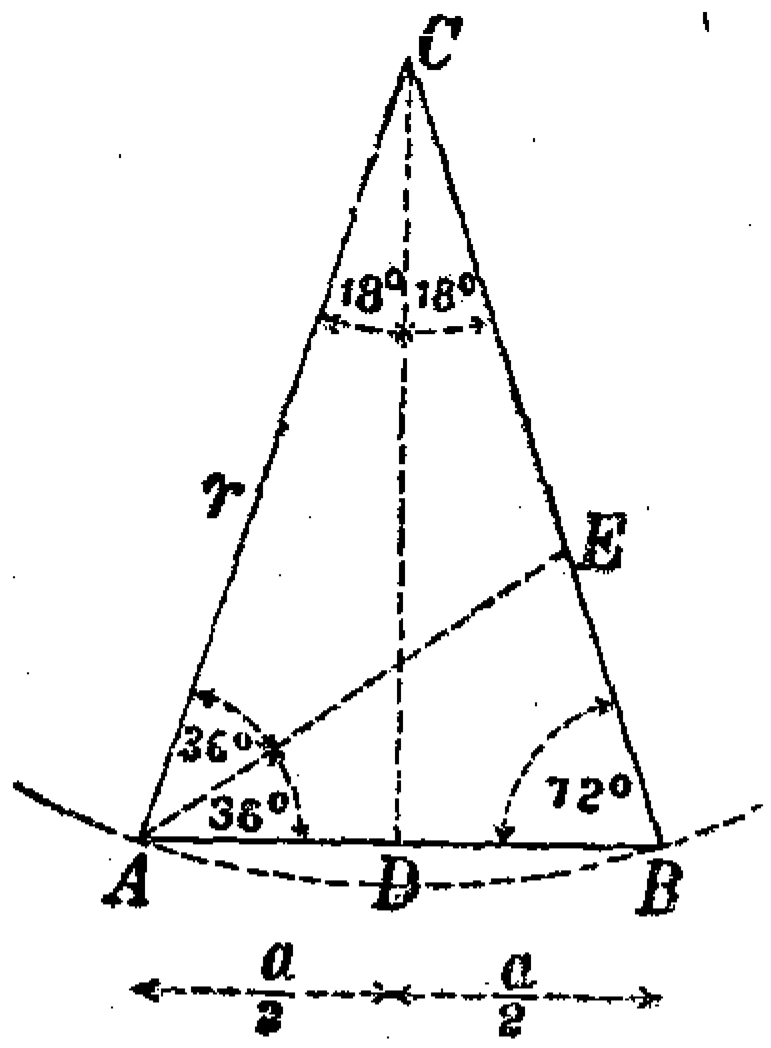
(в. на крају чл. 21.) ставимо $\alpha = 30^0$, а то је кубна једначина

$$1 = 3x - 4x^3,$$

где је $x = \sin 30^0$. Да је $x = \frac{1}{2}$ заиста корен ове кубне једначине уверићемо се када ставимо у њу поменуту вредност за x.

28. **Тригонометриске функције углова од 18^0 и од 72^0 или лукова $\frac{\pi}{10}$ и $\frac{2\pi}{5}$.** — Нека је $AB = a$ страна једнога правилног десетоугаоника око којега је описан круг са средиштем у C и полупречником r. Из Планиметрије знамо да је страна правилнога десетоугаоника геометриска средина између полупречника

описаног круга и разлике из полупречника и стране; постоји дакле сразмера



Сл. 18.

$$r : a = a : r - a,$$ [1])

одакле

$$a^2 + ar - r^2 = 0,$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} r.$$

Односно двојаког знака $+$ и $-$ у нађеноме изразу за полигонску страну a имамо да приметимо да, и ако су аналитички оправдана оба знака, у овоме чисто геометрискоме задатку важи само знак $+$, јер узев знак $-$ дошли би до резултата, који садржи у себи ту немогућност да је дужина a већа од полупречника r. Из троугла ABC видимо, на први поглед, из углова, да мора бити $a < r$. Према томе треба дакле ставити

$$a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r.$$

Имајући на уму, да је $\sphericalangle ACB = \frac{360^0}{10} = 36^0$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = 72^0$ и ако из C спустимо управну CD на страну AB, услед чега постаје $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD = 18^0$, $AD = BD = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} r$, читамо из слике

[1]) Доказ. Повуцимо AE тако да полови угао код A. Посматрањем углова закључујемо, да су троугли ABE и ACE равнокраки, дакле $AE = CE = AB$ т. ј. $= a$. Из тога што је $\triangle ABE \sim \triangle ABC$ (јер имају једнаке углове) следује $AC : AB = AB : BE$ или $r : a = a : r - a$ q. e. d.

$$\sin 18^0 = \cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 18^0 = \sin 72^0 = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$tg\, 18^0 = cotg\, 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}\,^{1)}$$

$$cotg\, 18^0 = tg\, 72^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.^{2)}$$

29. **Примене.** Помоћу добивених вредности тригонометриских функција за углове од 45^0, 30^0 (60^0) и 18^0 (72^0), а употребом образаца за тригонометриске функције збира и разлике (једначине 16 чл. 19. и једначине 17. чл. 20), образаца за тригонометриске функције двоструких углова (једначине 18 чл. 21.) и

---

[1] $$tg^2\, 18^0 = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{10+2\sqrt{5}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}} = \frac{(6-2\sqrt{5})\,(10-2\sqrt{5})}{(10+2\sqrt{5})\,(10-2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{80-32\sqrt{5}}{80} = 1-\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

$$tg\, 18^0 = \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

[2] $$cotg^2\, 18^0 = \frac{10+2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{10+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}} = \frac{(10+2\sqrt{5})\,(6+2\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{5})\,(6+2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{80+32\sqrt{5}}{16} = 5+2\sqrt{5},$$

$$cotg\, 18^0 = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

најзад образаца за тригонометриске функције половљених углова (једначине 19 чл. 22. и једначине 20 чл. 23.) налазимо нове групе вредности тригонометриских функција.

Тако н. пр.

1) полазећи од вредности

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(в. под 23 чл. 26.) изводимо за угао $\frac{180^0}{8} = 22\frac{1}{2}^0$ $\left(\text{лук } \frac{\pi}{2^3}\right)$

$$\sin 22\tfrac{1}{2}^0 = \cos 67\tfrac{1}{2}^0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 45^0)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\cos 22\tfrac{1}{2}^0 = \sin 67\tfrac{1}{2}^0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 45^0)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$tg\, 22\tfrac{1}{2}^0 = cotg\, 67\tfrac{1}{2}^0 = \frac{1 - \cos 45^0}{\sin 45^0} = \sqrt{2} - 1$$

$$cotg\, 22\tfrac{1}{2}^0 = tg\, 67\tfrac{1}{2}^0 = \frac{1 + \cos 45^0}{\sin 45^0} = \sqrt{2} + 1$$

а одавде опет за угао $\frac{180^0}{16} = 11\frac{1}{4}^0$ $\left(\text{лук } \frac{\pi}{2^4}\right)$

$$\sin 11\tfrac{1}{4}^0 = \cos 78\tfrac{3}{4}^0 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos 22\tfrac{1}{2}^0\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\cos 11\tfrac{1}{4}^0 = \sin 78\tfrac{3}{4}^0 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos 22\tfrac{1}{2}^0\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

и т. д. Продужујући на тај начин ми бисмо добили вредности тригонометриских функција сасвим уопште за углове од $\frac{180^0}{2^m}$, односно лукове $\frac{\pi}{2^m}$, ако означимо са m ма какав цео и позитиван број.

2) из добивених вредности

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(в. под 24 чл. 27.) налазимо за угао $\frac{180^0}{4 \cdot 3} = 15^0$ $\left(\text{лук } \frac{\pi}{2^2 \cdot 3}\right)$

$$\sin 15^0 = \cos 75^0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 30^0)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\cos 15^0 = \sin 75^0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 30^0)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$tg\, 15^0 = cotg\, 75^0 = \frac{1 - \cos 30^0}{\sin 30^0} = 2 - \sqrt{3}$$

$$cotg\, 15^0 = tg\, 75^0 = \frac{1 + \cos 30^0}{\sin 30^0} = 2 + \sqrt{3}. \text{ [1]}$$

---

[1]) Ове вредности тригонометриских функција за угао од 15^0 и угао од 75^0 могли бисмо добити и помоћу образаца за тригонометриске функције збира и разлике, пошто је $15^0 = 45^0 - 30^0 = 60^0 - 45^0$, $75^0 = 45^0 + 30^0$.

Одавде следује даље за угао $\frac{180^0}{8 \cdot 3} = 7\frac{1}{2}^0 \left\{лук \ \frac{\pi}{2^3 \cdot 3}\right\}$

$$\sin 7\tfrac{1}{2}^0 = \cos 82\tfrac{1}{2}^0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 15^0)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$\cos 7\tfrac{1}{2}^0 = \sin 82\tfrac{1}{2}^0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 15^0)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

и т. д. Када бисмо и даље овако продужили ми бисмо нашли тригонометриске функције за све углове од $\frac{180^0}{2^m \cdot 3}$, односно лукове $\frac{\pi}{2^m \cdot 3}$.

3) Отуда што је

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \qquad \cos 18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

(в. под 25 чл. 28.) следује за угао од $\frac{180^0}{4 \cdot 5} \left\{лук \frac{\pi}{2^2 \cdot 5}\right\}$

$$\sin 9^0 = \cos 81^0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 18^0)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

$$\cos 9^0 = \sin 81^0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 18^0)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

и т. д. Одавде опет изводимо, на исти начин, вредности тригонометриских функција за угао од $4\frac{1}{2}^0$ и т. д. и сасвим опште за угле од $\frac{180^0}{2^m \cdot 5}$, односно лукове $\frac{\pi}{2^m \cdot 5}$.

Обрасци за тригонометриске функције збира и разлике дају нам средства да израчунамо тригонометриске функције углова $15^0 + 18^0 = 33^0$, $15^0 + 9^0 = 24^0$, $45^0 - 18^0 = 27^0$, $30^0 - 18^0 = 12^0$, $18^0 - 15^0 = 3^0$ и т. д., које, опет, можемо да употребимо за нове комбинације путем сабирања, одузимања половљења тих углова.

Комбинујући тригонометриске функције углова $\frac{180^0}{2^m}$, $\frac{180^0}{2^m \cdot 3}$ и $\frac{180^0}{2^m \cdot 5}$ ми их налазимо за све углове, који су обухваћени у општој форми $\frac{k.\ 180^0}{2^m \cdot 3 \cdot 5}$, где су k и m ма какви цели и позитивни бројеви. Тригонометриске функције за основну вредност углова $\frac{k.\ 180^0}{2^m \cdot 3 \cdot 5}$, а то је за угао од $3^0 = \frac{180^0}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$, добићемо, између осталих начина, и овако, кад ставимо $3^0 = 18^0 - 15^0$

$$\sin 3^0 = \sin 18^0 \cos 15^0 - \cos 18^0 \sin 15^0$$

$$= \frac{1}{8}\left[(\sqrt{5} - 1)\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right]$$

$$\cos 3^0 = \cos 18^0 \cos 15^0 + \sin 18^0 \sin 15^0$$

$$= \frac{1}{8}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{2+\sqrt{3}}+(\sqrt{5}-1)\sqrt{2-\sqrt{3}}\right].$$

Тригонометриске функције за угао од 1^0 наћићемо помоћу $\sin 1^0$, који добијамо, кад у општем обрасцу

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

(в. на крају чл. 21.) заменимо $\alpha = 1^0$, дакле из кубне једначине

$$4\sin^3 1^0 - 3\sin 1^0 + \sin 3^0 = 0.$$

Пошто будемо нашли вредности тригонометриских функција за 1^0 лако је израчунати (помоћу образаца за тригонометриске функције збира) вредности тих функција за сваки цео број степени.

2.

О израчунавању тригонометриских функција у опште.

30. **Напомена.** — На основу везе, која постоји између тригонометриских функција једног истог угла (в. таблицу 11 у чл. 13.) и услед тога што се тригонометриске функције тупих и негативних углова могу да сведу на тригонометриске функције оштрих и позитивних углова (в. таблице 13 у чл. 14. и таблицу 15 у чл. 17.), израчунавање тригонометриских функција свију углова може да се ограничи на непосредно израчунавање свега *једне* тригонометриске функције и то само за углове од 0 до 90^0.

Најбоље методе за непосредно израчунавање тригонометриских функција даје нам Виша Анализа. Ми ћемо у следећем показати једну елементарну методу, која је веома практична.

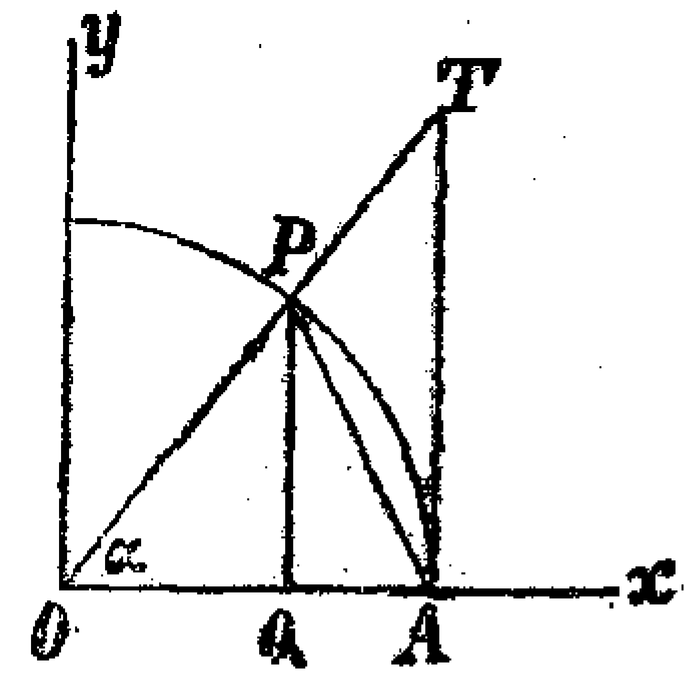
31. **Резултати на којима се оснива израчунавање тригонометриских функција.** — Пре него што изложимо један веома практичан и елементаран начин израчунавања тригонометриских функција потребно је да изнесемо извесне резултате, на којима се оснива тај начин израчунавања.

1. *Став.* Сваки лук у првој четврти $\left(\text{т. ј. од } 0 \text{ па до } \frac{\pi}{2}\right)$ већи је од свога синуса, али мањи од тангенте.

Доказ. Нека је $\alpha = arc\, AP$ један лук у првој четврти описан полупречником $OA = 1$.

Тада је $PQ = \sin\alpha$, $TA = tg\,\alpha$. Из слике видимо, на први поглед, да је $arc\, AP >$ тетива AP (јер је тетиво AP најкраће растојање тачака A и P), а тетиво $AP > PQ$, дакле у толико више $arc\, AP > PQ$ или

$$\alpha > \sin\alpha.$$



Сл. 19.

Даље, слика нам показује, да је површина кружнога исечка OAP мања од површине правоуглог троугла OAT; то значи да је $\frac{OA}{2}\, arc\, AP < \frac{OA}{2} \cdot TA$, одакле, кад скратимо лево и десно са $\frac{OA}{2}$, $arc\, AP < TA$ или

$$\alpha < tg\,\alpha.$$

Овим смо доказали горњи став, да је у првој четврти вазда

$$\sin\alpha < \alpha < tg\,\alpha. \qquad (25$$

2. *Став.* У колико се један лук мање разликује од нуле, у толико је вредност количника $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ приближнија 1.

Или: опадањем лука α од $\frac{\pi}{2}$ до 0 количник $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ (вазда < 1) све се више приближује 1 и постаје најзад, за бескрајње мало α, раван јединици.

Доказ. Из горње неравности 25, кад је поделимо са $\sin\alpha$, следује

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$$

или ако је изврнемо

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha.$$

Ова неравност, као и она горња, из које смо је добили, постоји дакле за све лукове α између 0 и $\frac{\pi}{2}$. Ако замислимо сада да лук α све више и више опада, онда се десна страна последње неравности (т. ј. $\cos\alpha$) све више приближава јединици, т. ј. све се више примиче левој страни исте неравности. Најзад за бескрајње мали лук α лева и десна страна постају једнаке и поклапају дакле и оно што је између њих лежало. То значи да је за бескрајње мало α или

26) $$\text{за } \alpha = 0 \text{ количник } \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

Исто тако доказује се да је за бескрајње мали лук α, т. ј.

27) $$\text{за } \alpha = 0 \text{ и количник } \frac{tg\,\alpha}{\alpha} = 1$$

1. *Закључак.* Из на послетку реченога следује, да за бескрајно мале лукове синуси могу да се замене самим луцима. Са извесном приближношћу ми смемо и онда да заменимо синус његовим луком, ако је тај лук довољно мали. Грешка, коју чинимо том приликом, јесте у толико незнатнија у колико је мањи лук.

Пошто је, по израчунавање тригонометриских функција, на начин који намеравамо изложити, од врло велике важности да знамо границе у којима лежи грешка, која се чини услед замене синуса његовим луком, — то ћемо сада приступити испитивању тих грешака.

Ако у обрасцу

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\,tg\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

на десној страни заменимо $tg\frac{\alpha}{2}$ самим луком $\frac{\alpha}{2}$, који је, као што смо показали, мањи од своје тангенте, добићемо

$$\sin\alpha > 2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ или } \sin\alpha > \alpha\left\{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Ова се неравност пооштрава, кад на десној страни место $\sin\frac{\alpha}{2}$ ставимо $\frac{\alpha}{2}$, дакле место $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ узмемо $\frac{\alpha^2}{4}$. На тај начин следује

$$\sin\alpha > \alpha\left\{1 - \frac{\alpha^2}{4}\right\}$$

или

$$\alpha > \sin\alpha > \alpha - \frac{\alpha^3}{4}, \tag{28}$$

одакле

$$0 < \alpha - \sin\alpha < \frac{\alpha^3}{4}.$$

Разлика између лука и његовог синуса или, што је исто, (апсолутна) грешка коју чинимо код врло малих лукова узев место синуса сам лук јесте мања од четвртине куба тога лука. Релативна грешка, т. ј. грешка у јединици дотичног лука јесте

$$\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha} < \frac{\alpha^2}{4}.$$

2. *Закључак.* Ми знамо да се са смањивањем лука косинус све више приближава јединици. Одредимо границе у којима лежи грешка, кад косинус једнога врло малог лука заменимо јединицом.

Заменимо у обрасцу

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$\sin\frac{\alpha}{2}$ већом количином $\frac{\alpha}{2}$, па ћемо добити

29) $$1 > \cos\alpha > 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

одакле

$$0 < 1 - \cos\alpha < \frac{\alpha^2}{2}.$$

Апсолутна грешка, која произилази услед замене косинуса јединицом, мања је дакле од половине квадрата лука.

Но ми ћемо се још знатно више приближити правој вредности косинуса једнога врло малог лука, ако тај косинус заменимо не јединицом, него количином $1-\frac{\alpha^2}{2}\cdot$ Грешка, коју тада чинимо, још је далеко мања од $\frac{\alpha^2}{2}\cdot$ Ставимо у обрасцу

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

на десној страни место синуса његову приближну, али мању, вредност коју нам даје десна страна неравности 28), на основу које је

$$\sin\frac{\alpha}{2} > \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{32},$$

па ћемо добити следећу неравност

$$\cos\alpha < 1 - 2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{32}\right)^2$$

или

$$\cos\alpha < 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16} - \frac{2\alpha^6}{32^2},$$

која се пооштрава, кад последњи, одречан, члан на десној страни занемаримо и напишемо је простије

$$\cos\alpha < 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16}.$$

Према овоме, и на основу горње неравности 29), следује

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} < \cos\alpha < 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16}. \qquad (30$$

Апсолутна грешка, коју правимо, кад место косинуса једнога малог лука узмемо количину $1-\frac{\alpha^2}{2}$ мања је дакле од $\frac{\alpha^4}{16}\cdot$

32. **Израчунавање тригонометриских функција.** — Да бисмо имали вредности тригонометриских функција за све могуће углове биће довољно ако израчунамо непосредно само синус и косинус углова од 0^0 па до 45^0.[1]) Познавајући синус и косинус налазимо и остале тригонометриске функције, јер је

$$tg\,\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad cotg\,\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{tg\,\alpha},$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

За израчунавање синус и косинуса углова од 0^0 па до 45^0 у размаку н. пр. од $10''$ до $10''$ потребно је да нађемо, са извесном приближношћу, $\sin 10''$ и $\cos 10''$.

Пошто је угао од $10''$ врло мали угао, можемо, са великом тачношћу, заменити $\sin 10''$ самим луком од $10''$. Грешка, коју чинимо, биће мања од четвртине куба тога лука (в. образац 28 у чл. 31.). Израчунајмо ту грешку. Означимо $arc\,10'' = \varepsilon$. Према чл. 3. јесте

$$\varepsilon = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \cdot 10 = \frac{\pi}{64\,800},$$

које је $< 0{,}00005$, дакле

$$\frac{\varepsilon^3}{4} < 0{,}000\,000\,000\,000\,04.$$

Грешка се показује, дакле, тек у четрнајестоме десетном месту; мања је од половине јединице тринајестога десетног места.

---

[1]) в. 1. пример у 8. члану.

Према томе је вредност

$$\sin 10'' = \frac{\pi}{64\,800} = 0{,}000\,048\,481\,3681$$

тачна на 13 децимала.

За $\cos$ 10″ добићемо врло приближну вредност кад ставимо

$$\cos 10'' = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Учињена грешка је $< \frac{\varepsilon^4}{16}$ (в. образац 30 чл. 31.), т. ј. $< \frac{(0{,}00005)^4}{16} < \frac{4}{10^{19}}$, дакле мања од половине јединице осамнајестога десетног места.

Према томе је вредност

$$\cos 10'' = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{64\,800}\right)^2 = 0{,}999\,999\,998\,824\,778\,47$$

тачна на седамнајест децимала.

Имајући вредности синуса и косинуса за угао од 10″ лако је онда, помоћу образаца за тригонометриске функције збира, израчунати синусе и косинусе углова од $10'' + 10'' = 20''$, $20'' + 10'' = 30''$, $30'' + 10'' = 40''$ и т. д. за све углове у размаку од 10″ до 10″. Подесне обрасце дају нам једначине 16) чл. 19. Из ових добијамо, на врло прост начин,

$$\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta),$$

које, кад ставимо $\beta = 10''$ и означимо $2 \cos 10'' = q$, даје обрасце

$$a) \quad \begin{cases} \sin(\alpha + 10'') = q \sin\alpha - \sin(\alpha - 10'') \\ \cos(\alpha + 10'') = q \cos\alpha - \cos(\alpha - 10''). \end{cases}$$

Одавде, кад ставимо $\alpha = 10'', 20'', 30'', \cdots,$ налазимо

$$\begin{array}{ll} \sin 20'' = q \sin 10'' & \cos 20'' = q \cos 10'' - 1 \\ \sin 30'' = q \sin 20'' = \sin 10'' & \cos 30'' = q \cos 20'' - \cos 10'' \\ \sin 40'' = q \sin 30'' = \sin 20'' & \cos 40'' = q \cos 30'' - \cos 20'' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Зарад бржега рачунања за препоруку је ставити $q = 2 - p$. На тај начин имамо, место горњих образаца под *a)*, ове једначине

$$b) \quad \begin{cases} \sin(\alpha + 10'') = 2\sin\alpha - \sin(\alpha - 10'') - p\sin\alpha \\ \cos(\alpha + 10'') = 2\cos\alpha - \cos(\alpha - 10'') - p\cos\alpha, \end{cases}$$

одакле, кад ставимо $\alpha = 10'', 20'', 30'', \ldots,$ налазимо

$$\begin{aligned} \sin 20'' &= 2 \sin 10'' - p \sin 10'' \\ \sin 30'' &= 2 \sin 20'' - \sin 10'' - p \sin 20'' \\ \sin 40'' &= 2 \sin 30'' - \sin 20'' - p \sin 30'' \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 20'' &= 2 \cos 10'' - 1 - p \cos 10'' \\ \cos 30'' &= 2 \cos 20'' - \cos 10'' - p \cos 20'' \\ \cos 40'' &= 2 \cos 30'' - \cos 20'' - p \cos 30'' \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Овде је дакле $p = 2 - q = 2 - 2\cos 10''$ и пошто смо узели да је $\cos 10'' = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, то је

$$p = \varepsilon^2 = 0{,}000\,000\,002\,3504.$$

Напомена. Пошто су оне две, горе узете, основне вредности за $sin\ 10''$ и $cos\ 10''$ само приближне, то се разуме да исто важи и за све остале вредности до којих долазимо употребом њих двеју. И пошто је се бојати да, горе изложеним начином приближног рачунања, грешке не пређу извесну дозвољену границу, потребно је од времена на време, у извесним размацима (н. пр. у размаку од сваки 9°), контролисати добивене вредности вредностима које можемо са сваком жељеном тачношћу добити на непосредан начин, као што смо то показали у чл. 29.

Закључак. Таблице, у којима су за сваки угао (у извесним размацима) израчунате вредности гониометриских функција тако да и обратно за сваку задату вредност једне од тригонометриских функција једнога непознатог угла можемо наћи и тај непознати угао, зову се таблице природних синуса, косинуса и т. д. У практичним рачунима, међутим, ређе се употребљавају сами синуси, косинуси и т. д., већ њихови логаритми. Таблице, у којима су сложени логаритми тригонометриских функција за сваки угао, зову се логаритамско-тригонометриске таблице.

При срачунавању логаритамско-тригонометриских таблица довољно је израчунати непосредно логаритме само за синус и косинус, јер је

$$log\ tg\ \alpha = log\ sin\ \alpha - log\ cos\ \alpha$$
$$log\ cotg\ \alpha = log\ cos\ \alpha - log\ sin\ \alpha = - log\ tg\ \alpha$$
$$log\ sec\ \alpha = - log\ cos\ \alpha$$
$$log\ cosec\ \alpha = - log\ sin\ \alpha.$$

ДРУГИ ДЕО

НАУКА О ЛОГАРИТМИМА

I

ТЕОРИЈА

I.

Дефиниције и опште теореме.

33. Дефиниције. — Једначина

$$y = a^x \qquad (31$$

садржи три количине: x, y и a. Ако су две од њих познате, онда можемо трећу да израчунамо. Према томе, која је од тих количина непозната, разрешавање задатка се врши на један од следећа три начина.

1) Ако је познато a и x, једначина 31) даје непосредно

$$y = a^x.$$

Ми кажемо:

y је x-ти степен од a.

y је *степен* (*Potcnz*, puissance), a *основица* (*Basis, Grundzahl*, base), x *степени изложитељ* (*Potenzexponent*, exposant). Радња, помоћу које налазимо непознату y, зове се *степеновање*.

2) Ако је познато x и y, онда, разрешењем једначине 31) по a, следује

32)
$$a = \sqrt[x]{y}$$

или речима

a је x-ти корен из y.

Овде је a *корен* (*Wurzel*, radical), y *радиканд* (*Radikand*), x *корени изложитељ* (*Wurzelexponent*, l'indice de la racine, l'indice du radical). Радња, којом долазимо до вредности за a, зове се *корeновање*. — Најзад

3) У случају да је познато a и y једначина 31) разрешена по x, гласи

33)
$$x = log^{(a)} y$$

и ми је читамо овако:

x је *логаритам* (*Logarithmus, Verhältnisszahl*, logarithme) *броја* или *логаритманда* (*Numerus, Logarithmand*, nombre) y за *основицу* (*Basis, Grundzahl*, base) a. Радња, помоћу које добијамо x, зове се *логаритмовање*.

Логаритам једнога броја (y) је дакле изложитељ (x) којим треба степеновати извесну количину (основицу a), па да се добије тај број (y). Тако н. пр. јесте

$$log^{(7)} 49 = 2, \qquad \text{јер је } 7^2 = 49$$
$$log^{(2)} 32 = 5, \qquad \text{„ „ } 2^5 = 32$$
$$log^{(4)} \frac{1}{64} = -3, \qquad \text{„ } 4^{-3} = \frac{1}{64} \text{ и т. д.}$$

Ако је познат логаритам x једнога броја y за основицу a и тражи се број y, онда се то означава тиме што се пред вредност логаритма ставе слогови *num log* (скраћено из numerus logarithmi), дакле овако

$$y = num\ log^{(a)}\, x, \tag{34}$$

а чита се:

y је број, чији је логаритам за основицу a раван x.

Очевидно је последња једначина идентична са једначином 31).

Приметимо најзад да, на основу саме дефиниције, постоје ове идентичне једначине:

$$\left.\begin{aligned} a^{log^{(a)}y} &= y \\ log^{(a)}a^{y} &= y. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

34. **Закључци.** — Из једначине

$$y = a^{x}$$

изводимо, непосредно, следеће закључке.

У претпоставци да је основица a ма какав положан број различан од јединице ($0 < a \gtrless 1$)[1]) следује да свакоме положном броју y мора одговарати извесна одређена вредност логаритма x (која може, према случају, бити положна или одречна), док, међутим, за одречне вредности y-а логаритми x немају стварну вредност, пошто положан број a подигнут на ма који степен даје навек положан резултат и неможе, дакле, ни у коме случају бити раван одречноме броју y.

Ако је основица већа од јединице, онда логаритми расту и опадају у исто време са бројем, т. ј. већем

---

[1]) Зато што јединица подигнута на ма који степен даје увек резултат 1.

броју одговара и већи логаритам и обратно. Логаритам је положан или одречан, према томе да ли је логаритманд већи или мањи од јединице. У знацима:

36) $$\begin{cases} \text{за } a > 1 \text{ јесте } x > 0, \text{ ако је } y > 1, \\ \qquad\qquad\qquad \text{а } x < 0 \quad " \quad " \quad y < 1 \\ \qquad\qquad\qquad log\, \infty = \infty \\ \qquad\qquad\qquad log\, 0 = -\infty. \end{cases}$$

Ако је, напротив, основица мања од јединице, онда логаритми опадају са растењем броја и обратно. Логаритми су положни или одречни, према томе да ли је логаритманд мањи или већи од јединице. У знацима:

37) $$\begin{cases} \text{за } a < 1 \text{ јесте } x > 0, \text{ ако је } y < 1, \\ \qquad\qquad\qquad \text{а } x < 0 \quad " \quad " \quad y > 1 \\ \qquad\qquad\qquad log\, \infty = -\infty \\ \qquad\qquad\qquad log\, 0 = \infty. \end{cases}$$

35. **Теорема.** — За сваку основицу, различну од нуле,[1]) логаритам основице је раван јединици.

Доказ. Отуда што је

$$a = a^1$$

следује

38) $$log^{(a)}\, a = 1.$$

36. **Теорема.** — Логаритам јединице увек је раван нули.

Доказ. Ма који број (различан од нуле) подигнут на нулти степен даје јединицу:

$$a^0 = 1,$$

---

[1]) Зато што је сваки положан степен од нуле опет нула, а одречан степен од нуле бесконачно велика вредност.

одакле

$$log^{(a)}\,1 = 0. \tag{39}$$

37. **Теореме.** — Нека је

$$y = a^{x},\ y' = a^{x'},\ y'' = a^{x''}, \cdots,$$

дакле

$$x = log^{(a)}\,y,\ x' = log^{(a)}\,y',\ x'' = log^{(a)}\,y'', \cdots$$

Из познатих нам правила

$$a^{x} \cdot a^{x'} \cdot a^{x''} \cdots = a^{x + x' + x'' + \cdots}$$

$$\frac{a^{x}}{a^{x'}} = a^{x - x'}$$

$$(a^{x})^{p} = a^{px}$$

$$\sqrt[q]{a^{x}} = a^{\frac{x}{q}}$$

или сасвим уопште

$$(a^{x})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}x},$$

следује, кад узмемо код сваке једначине, лево и десно, логаритам за једну исту основицу a,

$$log\,(y \cdot y' \cdot y'' \cdots) = log\,y + log\,y' + log\,y'' + \cdots \tag{40}$$

$$log\left(\frac{y}{y'}\right) = log\,y - log\,y' \tag{41}$$

$$log\,y^{p} = p\,log\,y \tag{42}$$

$$log\sqrt[q]{y} = \frac{log\,y}{q} \tag{43}$$

и сасвим уопште

$$log\, y^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \, log\, y.$$

Речима гласи:

једначина 40: логаритам једнога производа раван је збиру логаритама његових чинитеља;

једначина 41: логаритам количника (разломка) раван је разлици из логаритма дељеника (бројитеља) и логаритма делитеља (именитеља);

једначина 42: логаритам једне степене количине налазимо кад помножимо логаритам основице те степене количине њеним изложитељем;

једначина 43: логаритам једне корене количине добијамо кад поделимо логаритам радиканда кореним изложитељем.

Ове четири теореме јасно показују важност логаритама по практично рачунање. Употребом логаритама ми сводимо множење и делење на сабирање и одузимање; степеновање и кореновање сводимо на множење и делење, које опет, кад понова логаритмујемо, води сабирању, односно одузимању. Корист логаритама лежи, дакле, у томе, што се све сложене алгебарске радње, а то су множење, делење, степеновање и кореновање, могу да сведу на прве две основне операције: на сабирање и одузимање.

Напомена. Ако ставимо да је $q = a^k$,

$$y = a^x, \text{ дакле } x = log\, y,$$

онда је

$$yq = a^{x+k} \quad \text{или} \quad x + k = log\,(yq)$$

$$yq^2 = a^{x+2k} \quad \text{или} \quad x + 2k = log\,(yq^2)$$
$$yq^3 = a^{x+3k} \quad \text{„} \quad x + 3k = log\,(yq^3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$yq^n = a^{x+nk} \quad \text{„} \quad x + nk = log\,(yq^n).$$

Ми видимо, да логаритми појединих чланова геометриске постепености

$$y,\ yq,\ yq^2,\ yq^3, \cdots yq^n$$

образују аритметичну постепеност

$$x,\ x+k,\ x+2k,\ x+3k, \cdots x+nk.$$

То значи да, ако четири броја y', y'', y''' и y'''' стоје у геометриској сразмери

$$y' : y'' = y''' : y'''',$$

онда њихови логаритми x', x'', x''' и x'''' образују аритметичну сразмеру

$$x' - x'' = x''' - x''''.$$

Због ове сразмерности, у извесноме смислу, између степених количина и њихових изложитеља ови последњи добили су назив логаритма (сразмерници од грчкога λογων = однос и ἀριθμός = број).

Примери.

1) $log\,(a^m\, b^n) = log\, a^m + log\, b^n = m\, log\, a + n\, log\, b.$

2) $log\left(\dfrac{\sqrt[q]{a} \cdot b^p}{c^r}\right) = log\,(\sqrt[q]{a} \cdot b^p) - log\, c^r = log \sqrt[q]{a} + log\, b^p - log\, c^r$

$$= \frac{log\, a}{q} + p\, log\, b - r\, log\, c.$$

3) $$log\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{15^2}{26^4}}\right) = log\frac{6}{5} + log\sqrt[3]{\frac{15^2}{26^4}} = log\,6 - log\,5 + \frac{1}{3}\,log\left(\frac{15^2}{26^4}\right)$$

$$= log\,(2\cdot3) - log\,5 + \frac{1}{3}(log\,15^2 - log\,26^4)$$

$$= log\,2 + log\,3 - log\,5 + \frac{2}{3}\,log\,(3\cdot5) - \frac{4}{3}\,log\,(2\cdot13)$$

$$= \left(1 - \frac{4}{3}\right)log\,2 + \left(1 + \frac{2}{3}\right)log\,3 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)log\,5 - \frac{4}{3}\,log\,13$$

$$= \frac{1}{3}\,(-\,log\,2 + 5\,log\,3 - log\,5 - 4\,log\,13).$$

4) $$log^{(2)}\sqrt{8\sqrt{8\sqrt{8\sqrt{8}}}} = \frac{1}{2}\,log^{(2)}\,8 + \frac{1}{4}\,log^{(2)}\,8 + \frac{1}{8}\,log^{(2)}\,8 + \frac{1}{16}\,log^{(2)}\,8$$

$$= \frac{15}{16}\,log^{(2)}\,8 = \frac{45}{16}.$$

5) $log\,(a^2 - b^2) = log\,[(a + b)\,(a - b)] = log\,(a + b) + log\,(a - b)$.

6) $log\left(\frac{1}{a}\right) = log\,1 - log\,a = -\,log\,a$. То значи: логаритми реципрочних количина јесу једнаки, али са супротним знацима.

2.

Логаритамске системе.

38. **О избору основице логаритамске системе.** — Да бисмо се, у практичноме рачунању, могли користити логаритмима, чија нам употреба указује тако огромне олакшице (в. чл. 37.), потребно је њихово познавање за све целе[1]) и положне[2]) бројеве од 1 па до извесне

---

[1]) Логаритам разломљених бројева добијамо као разлику из логаритама два цела броја (в. једн. 41 чл. 37.).

[2]) Код рачунања са бројевима, били они положни или одречни, лежи тешкоћа у савлађивању операција, које са дотичним бројевима треба

границе. Скуп логаритама свију целих и положних бројева, за једну исту основицу, зове се *логаритамска система* (*Logarithmensystem*, système de logarithmes), а збирку, у којој су, на извесан прегледан начин, сложени бројеви y са њиховим логаритмима x, зовемо *логаритамске таблице* (*Logarithmentafeln*, tables de logarithmes).

Пошто горње, у чл. 37. изложене, теореме важе сасвим уопште за сваку основицу, која је различна од нуле и јединице, и пошто основица логаритамске системе иначе није ни од каквог утицаја по крајни резултат, то је управо њен избор потпуно произвољан, са јединим, већ учињеним ограничењем, да није равна јединици[1]) или нули.[2])

Немајући дакле, код логаритамскога рачунања, потребе узимати у обзир друге бројеве до само целе и положне (такозване природне бројеве), то остаје, да бисмо избегли одречне и уображене вредности логаритама, да за основицу учинимо избор међу положним бројевима, који су већи од 1.[3])

У Математици чини се употреба од само двеју логаритамских система. Једоа од њих има за основицу ирационални број 2,718281828459 · · ·, који се

извршити, а то су поглавито радње множења, делења, степеновања и кореновања. Алгебарски знак резултата врло је лако одредити и због тога можемо, при вршењу напоменутих операција, сматрати све бројеве као апсолутне количине, т. ј. узети их све са знаком $+$.

[1]) В. примедбу под [1]) у чл. 34.

[2]) В. примедбу под [1]) у чл. 35.

[3]) Ако бисмо узели основицу < 1, онда би логаритми бројева који су већи од 1 били негативни (в. једн. 37 чл. 34., где стоји да је за основицу $a < 1$ логаритам $x < 0$, кад је $y > 1$). — Степени једне одречне основице ($a < 0$) јесу, опет, према случају, положни, одречни или уображени.

означава са e и чија је права вредност представљена збирљивим бесконачним редом

$$e = 2 + \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n} + \cdots \text{ у беск.}$$

Логаритми ове системе зову се *Непер*-ови,[1]) *природни*[2]) или *хиперболични*[3]) логаритми (*Neper'sche, natürliche, hyperbolische Logarithmen*, logarithmes népériens.

Непер-ови логаритми примењују се поглавито у вишим партијама Математике.

Природан логаритам једнога броја y бележимо са $log\,nat\,y$ (скраћење од naturales), $ln\,y$, $lg\,y$ или просто ly.

Друга система логаритама, за коју су удешене готово све таблице, којима се при рачунању служимо, има за основицу број 10. Ови се логаритми зову *Бриг*-ови,[4]) *обични* или *десетни* (*Brigg'sche, gemeine, dekadische Logarithmen*, logarithmes vulgaires).

---

[1]) Тако названи по шкотскоме математичару *Lord John Neper* (или Napier, Lord of Merchiston, Merchiston 1550 — Merchiston 1617), који је логаритме пронашао и узео број e за основицу. Године 1614. издао је *Непер* своје таблице природних логаритама синуса и тангенте под насловом:

Mirifici logarithmorum canonis descriptio,
auctore et inventore Johann Nepero,
Edinburgi a. 1614.

[2]) Зато што нам се, са чисто аналитичке стране, број e по себи намеће за основицу логаритамске системе, као што то показује Виша Анализа.

[3]) Израчунавање површине хиперболичних одсечака и исечака води нас таквима логаритмима. Ово су показали *Nikolaus Mercator* (латинизирано *Kaufmann*. Holstein 16.. — Paris 1687) и *James Gregory* (Aberdeen 1638 — Edinburgh 1675) године 1668.

[4]) По енглескоме математичару *Henry Briggs* (Warley Wood 1556 — Oxford 1630), који је године 1617. у своме раду под именом Logarithmorum Chilias prima завео те логаритме израчунав их на 8 десетих места

Бриг-ов логаритам броја y бележи се са $log\, vulg\, y$ (скраћење од vulgares) или просто са $log\, y$.

Примедба. Наведимо најзад да је, готово у једно време са *Непер*-овим и *Бриг*-овим радовима, не знајући за њих, Швајцарац *Joost Bürgi* (или *Byrg*, Lichtensteig 1552 — Kassel 1632) у својима *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen, Prag* 1620 израчунао логаритме за основицу 1,0001.

39. **Претварање логаритама једне системе у логаритме друге системе.** — Ако познајемо логаритме за ма коју основицу a, онда можемо, врло лако, помоћу њих, да израчунамо логаритме и за сваку другу основицу b. Нека је x логаритам броја y у системи, чија је основица a, z логаритам истога броја у системи b, т. ј.

$$x = log^{(a)}\, y$$

$$z = log^{(b)}\, y,$$

дакле

$$y = a^x = b^z.$$

Логаритмовањем ове једначине добијамо

$$x\, log\, a = z\, log\, b$$

$$z = x \frac{log\, a}{log\, b}$$

за бројеве од 1 до 1000. Године 1624. издао је *Бриг* опширније таблице под насловом Arithmetica logarithmica, у којима су обични логаритми бројева од 1 до 20 000 и од 90 000 до 100 000 израчунати на 14 десетних места. — Празнину, коју је *Бриг* оставио у својим таблицама, попунио је холандски књижар, а у исто време и математичар, *Adriaen Vlack* израчунав логаритме бројева од 20 000 до 90 000 на 10 десетних места, на основу чега је, под скромним насловом другога издања од Arithmetica logarithmica, Goudae 1628, издао потпуне таблице за све бројеве од 1 до 100 000 на 10 десетних места, таблице, које су и доцније служиле као основа за све друге логаритамске таблице.

или узев логаритме у системи a, где је $log\, a = 1$, простије

$$z = x \cdot \frac{1}{log^{(a)}\, b}.$$

Нашли смо дакле да је

$$log^{(b)}\, y = log^{(a)}\, y \cdot \frac{1}{log^{(a)}\, b}. \tag{44}$$

То значи: b- логаритам ма којег броја y добијамо кад поделимо познати a- логаритам тога броја са a- логаритмом основице b. Чинитељ $\frac{1}{log^{(a)}\, b}$, којим треба множити познате нам a- логаритме да бисмо добили b- логаритме, зове се *модуо* (*Modulus*, module) b- системе у однос на a- систему. Претварање логаритама једне системе у логаритме друге системе врши се кад се познати нам логаритми прве системе помноже модуом нове системе.

На основу једначине 44) имамо за претварање десетних (*Бриг*-ових) логаритама у природне (*Непер*-ове) логаритме и обратно следеће обрасце

$$\begin{cases} log\, y = l\, y \cdot \frac{1}{l\, 10} \\ l\, y = log\, y \cdot \frac{1}{log\, e}. \end{cases} \tag{45}$$

Овде је

$$\frac{1}{l\, 10} = log\, e = 0{,}434\,294\,481\,903 \ldots$$

модуо *Бриг*-ових логаритама;

$$\frac{1}{log\, e} = l\, 10 = 2{,}302\,585\,092\,994 \ldots$$

модуо *Непер*-ових логаритама.

3.

Својства Бриг-ових логаритама.

40. **Општа својства.** — Пошто је основица *Бриг*-ове системе већа од јединице, то знамо (в. чл. 34.) да логаритми расту и опадају заједно са бројем: већем броју одговара и већи логаритам. Логаритми су положни за бројеве који су већи од 1, а одречни за бројеве који су мањи од 1. Логаритми негативних бројева су имагинарни.

Из таблице

БРОЈ	ЛОГАРИТАМ
$\infty = 10^{\infty}$	∞
$\vdots$	$\vdots$
$10\,000 = 10^4$	4
$1\,000 = 10^3$	3
$100 = 10^2$	2
$10 = 10^1$	1
$1 = 10^0$	0
$0{,}1 = 10^{-1}$	-1
$0{,}01 = 10^{-2}$	-2
$0{,}001 = 10^{-3}$	-3
$0{,}0001 = 10^{-4}$	-4
$\vdots$	$\vdots$
$0 = 10^{-\infty}$	$-\infty$

видимо и то да су логаритми целих степена од 10 цели бројеви.

Логаритми свију других бројева, који нису цели степени од основице 10, јесу ирационалне количине.[1])

[1]) Под ирационалним количинама разумемо такве количине, које се немогу да представе у савршеној форми (помоћу целих или разломљених

Доказ. Претпоставимо да је логаритам броја y представљен рационално у виду количника из два односно проста броја p и q:

$$log\, y = \frac{p}{q}.$$

Одавде обратно следује

$$y = 10^{\frac{p}{q}} \text{ или } y^q = 10^p = 2^p \cdot 5^p.$$

Ова последња једначина може, пак, једино тако да постоји, ако је број y састављен само из простих бројева 2 и 5, т. ј. ако буде имао овај вид $y = 2^\alpha \cdot 5^\beta$, где су α и β цели бројеви. Једначина тада гласи

$$(2^\alpha \cdot 5^\beta)^q = 2^p \cdot 5^p \text{ или } 2^{\alpha q} \cdot 5^{\beta q} = 2^p \cdot 5^p,$$

одакле следује

$$p = \alpha q = \beta q, \text{ дакле } \alpha = \beta, \frac{p}{q} = \alpha.$$

То значи да је горња једначина могућа само тада, кад је број y цео степен од 10 (јер кад је $\alpha = \beta$, онда је $y = 2^\alpha \cdot 5^\alpha = 10^\alpha$), у коме случају је $log\, y = \frac{p}{q} =$ целоме броју α. За сваку другу вредност од y једначина $y = 10^{\frac{p}{q}}$ постаје немогућа и према томе, дакле, логаритам таквога броја y неможе бити рационалан $\left(= \text{разломку } \frac{p}{q}\right)$.

бројева). Њихова права (тачна) вредност изражена је често једним бесконачним верижним разломком или једним бесконачним збирљивим редом. У рачунима узимамо приближну вредност таквих бројева у виду десетних разломака. Ирационални бројеви јесу н. пр. *Лудолфов* број π, основица *e* *Непер*ових логаритама, већи део корених количина, н. пр. $\sqrt{2}$ и т. д.

Отуда следује, да се логаритми бројева, који нису потпуни степени основице 10, састоје уопште из два дела: из једнога целог броја, такозване *значице* или *карактеристике* (*Charakteristik, Kennziffer*, caractéristique) и једнога чистог несвршеног десетног разломка, који зовемо *додатком* или *мантисом* (*Mantisse*) логаритма.

41. **Логаритми бројева > 1.** — Пре свега знамо да су логаритми бројева, који су већи од јединице увек позитивни.

Карактеристика логаритма једнога броја већег од јединице јесте положна и за 1 мања од броја цифара, које изражавају цео део у логаритманду.

Доказ. Нека је y један број, чији се цели састоје из k цифара. Отуда што је

$$10^k > y > 10^{k-1}$$

следује

$$k > \log y > k - 1,$$

дакле $k - 1$ карактеристика логаритма броја y.

Тако н. пр. број 548,73 лежи између 10^2 и 10^3. Логаритам тога броја лежи, дакле, између целих 2 и 3 (в. таблицу у чл. 40.). Карактеристика логаритма је, према томе, равна 2, т. ј. за јединицу мања од броја цифара из којих се састоји цео део 548 зада-тога броја 548,73.

Примери.

БРОЈ	КАРАКТ. ЛОГ.
6384,96	3
47,324	1
762	2
3,4	0
495 127	5
и т. д.	и т. д.

Закључак. Ако је логаритам једнога броја положан, онда тај број мора бити >1. Из карактеристике закључујемо колики је број цифара из којих се састоје цели дотичног броја: број цифара које изражавају целе у логаритманду јесте за 1 већи од карактеристике. Н. пр. ако је карактеристика логаритма једнога броја равна 3, онда се цели тога броја састоје из четири цифре. Број логаритма са карактеристиком 0 има 1 цифру целих. И т. д.

42. Логаритми бројева <1. — Ми знамо да су логаритми бројева мањих од 1 негативни. Такав одречан логаритам можемо да претворимо у други логаритам, чија је мантиса положна, а карактеристика одречна, кад задатоме логаритму додамо и одузмемо, у исто време, онај цео број који је за јединицу већи од карактеристике задатога логаритма, т. ј. кад задати логаритам (његову апсолутну вредност) одузмемо од онога целог броја, који је за 1 већи од карактеристике логаритма и тако добивеноме резултату додамо исти број са одречним знаком као одречну карактеристику новога логаритма. Н. пр.

$$-2{,}835\,6904 = (3 - 2{,}835\,6904) - 3 = 0{,}164\,3096 - 3.$$

Разлику, коју добијамо, кад одузмемо један логаритам од 10, зовемо *десетном допуном* (*dekadische Ergänzung*, complément arithmétique) тога логаритма.

43. Карактеристика логаритама бројева <1. — Претпостављајући да су логаритми бројева мањих од 1 доведени на вид, у коме је мантиса положна (в. чл. 42.), можемо да поставимо следеће правило:

Карактеристика логаритма једнога броја, који је мањи од 1, узев тај број у форми десетног разломка, јесте одречна и то равна броју нула, које претходе највишем десетном месту код логаритманда.

1. Доказ. Означимо са y један цео број од k цифара. Онда је $\frac{y}{10^{k+p}}$ један десетан разломак, у коме пред највишем десетноме месту стоје $p+1$ нула закључно са нулом пред знаком запете. Из неравности

$$10^k > \quad y \quad > 10^{k-1}$$

следује

$$\frac{10^k}{10^{k+p}} > \frac{y}{10^{k+p}} > \frac{10^{k-1}}{10^{k+p}}$$

или

$$10^{-p} > \frac{y}{10^{k+p}} > 10^{-(p+1)},$$

одакле

$$-p > log \frac{y}{10^{k+p}} > -(p+1).$$

Имајући на уму да је мантиса (означимо је са m) логаритма положан и чист разломак, то је, према последњој неравности, $log \frac{y}{10^{k+p}} = m - (p+1)$, дакле логаритамска карактеристика разломка $\frac{y}{10^{k+p}}$ равна $-(p+1)$, т. ј. одречна и равна броју нула, које, у задатоме разломку, претходе највишем десетном месту.

2. Доказ. Означимо, као и горе, са y један цео k- цифрени број, дакле са $\frac{y}{10^{k+p}}$ десетан разломак, у

коме се пред највишем десетном месту налази $p+1$ нула закључно са нулом пред знаком запете. Према чл. 41. јесте

$$\log y = (k-1) + m,$$

где је m (мантиса) извесан положан и чист десетан разломак. На основу једначине 41) чл. 37. имамо да је

$$\log \frac{y}{10^{k+p}} = \log y - \log 10^{k+p},$$

дакле

$$\log \frac{y}{10^{k+p}} = (k-1) + m - (k+p)$$

$$= m - (p+1) \quad \text{q. e. d.}$$

Тако н. пр. отуда што је $10^{-2} > 0{,}0035 > 10^{-3}$, дакле $-2 > \log 0{,}0035 > -3$ (в. таблицу у чл. 40.) закључујемо да је карактеристика логаритма десетног разломка 0,0035 равна -3. До истог резултата долазимо и на овај начин:

$$\log 0{,}0035 = \log \frac{35}{10\,000} = \log 35 - \log 10\,000$$

$$= 1 + m - 4 = m - 3.$$

Примери.

БРОЈ	КАРАКТ. ЛОГ.
0,000025	-5
0,0004	-4
0,00713	-3
0,038	-2
0,41	-1
и т. д.	и т. д.

Напомена. Одречне карактеристике пишу се навек после положне мантисе, н. пр. $log\, 0{,}0035$ $= 0{,}544\,0680 - 3$ или овако $\bar{3}{,}5440680$.

Закључак. Ако је какав логаритам одречан или, што је исто, ако је његова карактеристика одречна, онда је одговарајући број мањи од 1. На основу одречне карактеристике можемо да закључимо са којим десетним местом логаритманд почиње, пошто је број нула, које стоје пред највишем десетном месту, раван карактеристици логаритма. Тако н. пр. ако је карактеристика једнога логаритма равна -2, онда одговарајући логаритманд почиње са другим десетним местом (т. ј. са стотима, дакле овако $0{,}0\ldots$). И т. д.

Негативан логаритам $-4{,}382\,6907$ има за логаритманда један десетни разломак који почиње тек са петим десетним местом, јер је $-4{,}382\,6907 =$ $= 0{,}617\,3093 - 5$.

44. **Теорема о мантиси логаритама чистих и нечистих десетних разломака.** — Мантиса логаритма једног целог броја остаје непромењена, кад на десној страни задатога броја додамо ма колики број нула.

Доказ. Додати на десној страни једнога целог броја y извесан број, н. пр. k нула значи помножити тај број y са 10^k. Отуда што је

$$log\,(10^k \cdot y) = k + log\, y$$

видимо да се само карактеристика повећава за k јединица, а мантиса се не мења.

Тако исто је лако уверити се, на основу тога што је

$$log\, \frac{y}{10^k} = log\, y - k,$$

где је k ма какав цео и положан број, да логаритамска мантиса остаје иста и онда кад логаритманд поделимо са 10^k.

Дакле уопште: мантиса логаритма једнога броја остаје непромењена када тај број помножимо или поделимо са ма којим целим степеном од 10.

Или другим речима: логаритми бројева, који су представљени једним истим, и по истом реду текућим, цифрама, па били они цели бројеви, чисти или нечисти (десетни) разломци имају сви једнаке мантисе. Тако н. пр. логаритми бројева 2350, 235, 23,5, 2,35, 0,235, 0,0235, . . . имају сви једну исту мантису 0,371 0679.

На овоме својству *Бриг*-овиx логаритама оснивају се следећа два важна правила.

Прво правило. Логаритам једног нечистог десетног разломка налазимо, кад определимо карактеристику према броју цифара целих (в. чл. 41.), а за мантису узмемо мантису логаритма онога целог броја, који произилази из задатог десетног разломка, изостављањем знака запете.

Тако н. пр. карактеристика логаритма нечистог десетног разломка 15,482 равна је 1, а мантиса је она иста која припада логаритму целога броја 15482. Ми можемо то и овако да представимо

$$log\,15{,}482 = log\,\frac{15482}{10^3} = log\,15482 - 3$$

$$= (4 + m) - 3 = 1 + m,$$

где је m логаритамска мантиса целога броја 15482.

Друго правило. Логаритам једнога чистог десетног разломка налазимо, кад узмемо мантису логаритма целога броја, који је састављен из истих цифара из којих се састоји и задати разломак, а карактеристику одредимо према броју нула, које претходе највишем десетном месту (в. чл. 43.).

Н. пр. мантиса логаритма чистога десетног разломка 0,0584 идентична је са мантисом логаритма целога броја 584. Карактеристика логаритма је $= -2$. Ми можемо да представимо то на овај начин

$$\log 0{,}0584 = \log \frac{584}{10^4} = \log 584 - 4$$

$$= (2 + m) - 4 = m - 2,$$

где означава m логаритамску мантису целога броја 584.

45. **Преимућство Бриг-ове системе над другима логаритамским системама.** — Из оних, у последња четири члана, изложених својстава *Бриг*-ових логаритама можемо, лако, да оценимо њихову практичну вредност. Поменута својства, која тако повољно одликују *Бриг*-ове логаритме од логаритама свију других система, показују јасно какав је срећан избор учинио њихов проналазач узев број 10 за основицу.

Подесност *Бриг*-ових логаритама по практичну употребу састоји се у томе што се одређивање логаритама, како чистих тако и нечистих десетних разломака (дакле уопште свију бројева), своди на одређивање логаритамске мантисе за искључиво целе бројеве, која (мантиса) је вазда у виду једнога чистог и положног десетног разломка. Карактеристика логаритма, која је, према случају, положна или одречна, одређује се, као што смо већ показали, на врло прост начин и због тога она није ни означена у логаритамским таблицама. Такве таблице дају нам само (положне) мантисе логаритама целих бројева од 1 па до извесне границе, према опширности таблице. Изостављањем карактеристике уштеђује се простор и таблице добивају, на тај начин, знатно у прегледности.

4.

Израчунавање логаритама.

46. **О израчунавању логаритама уопште.** — За израчунавање логаритама имамо разних метода. Методе, које се служе Алгебром, све су, више или мање, врло споре[1]). Елегантније и несравњено краће методе пружа нам Виша Анализа. Од метода, којима се израчунавају десетни логаритми помоћу Елементарне Математике показаћемо свега две: ону, којом је се служио сам *Бриг*, а доцније и *Влак* (Adriaen Vlack), при првоме израчунавању логаритама и још једну, која је од свију елементарних метода најпрактичнија.

Наведимо овде још и следеће.

Пошто се логаритми разломака могу, на врло прост начин, да изнађу из логаритама целих бројева, то, разуме се, није ни потребно њих непосредно израчунавати.[2]) Али и израчунавање логаритама целих

---

[1]) У потврду наведимо да је *Бриг*, при израчунавању својих таблица за бројеве од 1 до 20 000 и од 90 000 до 100 000 (в. примедбу под 4 стр. 88. и 89.). радио са осам помоћника годину дана. *Klügel, Georg Simon. Mathematisches Wörterbuch, Dritter Theil,* pag. 547.

[2]) Логаритам једнога разломљеног броја можемо да нађемо на двојак начин: било као логаритам количника из два цела броја, дакле кад одузмемо логаритам именитеља од логаритма бројитеља (в. једн. 41 чл. 37.), било да претворимо задати разломљени број у десетан разломак, у коме се случају логаритам разломка своди на логаритам једнога целог броја (в. правила у чл. 44.).

бројева од 1 па до извесне границе, н. пр. до 100000, своди се на непосредно израчунавање логаритама од само простих бројева, који се у томе размаку налазе.[1]) Ми знамо да се сваки сложен број може да представи као производ из простих бројева. Према томе је, дакле, логаритам једнога сложеног броја раван збиру логаритама његових простих чинитеља (в. једн. 40 чл. 37.).

Н. пр.

$$\log 42 = \log (2 \cdot 3 \cdot 7) = \log 2 + \log 3 + \log 7$$

$$\log 24 = \log (2^3 \cdot 3) = 3 \log 2 + \log 3$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2.$$

47. **Бриг-ова метода.** — Најбоље ћемо објаснити ову методу на једноме примеру. Узмимо да се хоће да израчуна $\log 3$. Ставимо

$$\log 3 = x,$$

дакле

$$10^x = 3.$$

Отуда што је

$$10^0 < 3 < 10^1$$

Н. пр.

$$\log 5\frac{3}{8} = \log \frac{43}{8} = \log 43 - \log 8$$

или

$$\log 5\frac{3}{8} = \log 5{,}375 = \log 5375 - 3.$$

[1]) Тако н. пр. у размаку од 20 000 до 90 000 (а то је онај размак, који је *Влак* попунио у *Бриг*-овим таблицама. В. примедбу под 4 стр. 88. и 89.) има отприлике 6500 простих бројева. *Klügel, G. S. Mathematisches Wörterbuch. Dritter Theil,* pag. 551.

следује да x (а то је $log\,3$) лежи између 0 и 1, т. ј.

$$0 < x < 1.$$

Да бисмо нашли x покушајмо да узмемо за x аритметичну средину из ове две крајне вредности и ставимо

$$x = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2},$$

па ћемо добити

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162.2775,$$

које је, као што видимо, веће од задатога броја 3.

Из неравности

$$10^0 < 3 < 10^{\frac{1}{2}}$$

изводимо за x ове уже границе

$$0 < x < \frac{1}{2}.$$

Да бисмо се још више приближили правој вредности x-а ставићемо

$$x = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

Тиме добијамо

$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{3{,}162\,2775} = 1{,}778\,2795,$$

које је, опет, мање од задатога броја 3.

Пошто је дакле

$$10^{\frac{1}{4}} < 3 < 10^{\frac{1}{2}}$$

и према томе

$$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$$

узмимо, као тачнију приближну вредност,

$$x = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8},$$

па ћемо добити

$$10^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{10^3} = \sqrt[4]{10\sqrt{10}} = \sqrt[4]{10}\sqrt{\sqrt[4]{10}} = 1{,}778\,2795$$

$$\times \sqrt{1{,}778\,2795} = 1{,}778\,2795 \times 1{,}333\,5215$$

$$= 2{,}371\,3732.$$

На основу тога што је

$$10^{\frac{3}{8}} < 3 < 10^{\frac{1}{2}},$$

па дакле

$$\frac{3}{8} < x < \frac{1}{2}$$

узећемо

$$x = \frac{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{16},$$

које даје

$$10^{\frac{7}{16}} = \sqrt[16]{10^7} = \sqrt[8]{10^3\sqrt{10}} = \sqrt[8]{10^3}\sqrt{\sqrt[8]{10}} = 2{,}371\,3732$$

$$\times \sqrt{1{,}333\,5215} = 2{,}371\,3732 \times 1{,}154\,1175$$

$$= 2{,}738\,4196.$$

Продужујући, на овај начин, ми добијамо постепено за x вредности, које се све више приближују правој вредности $\log 3$ и постају у толико тачније у колико 10^x мање одступа од задатога броја 3.

Ток рачуна обележен је шематски у следећем:

$$10^{\frac{7}{16}} < 3 < 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{7}{16} < x < \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\frac{7}{16} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{15}{32} \qquad 10^{\frac{15}{32}} = 2{,}942\,7272$$

$$10^{\frac{15}{32}} < 3 < 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{15}{32} < x < \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\frac{15}{32} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{31}{64} \qquad 10^{\frac{31}{64}} = 3{,}050\,5280$$

$$10^{\frac{15}{32}} < 3 < 10^{\frac{31}{64}}$$

$$\frac{15}{32} < x < \frac{31}{64}$$

$$x = \frac{\frac{15}{32} + \frac{31}{64}}{2} = \frac{61}{128} \qquad 10^{\frac{61}{128}} = 2{,}996\,1428$$

$$10^{\frac{61}{128}} < 3 < 10^{\frac{31}{64}}$$

$$\frac{61}{128} < x < \frac{31}{64}$$

$$x = \frac{\frac{61}{128} + \frac{31}{54}}{2} = \frac{123}{256} \qquad 10^{\frac{123}{256}} = 3{,}023\,2126$$

$$10^{\frac{61}{128}} < 3 < 10^{\frac{123}{256}}$$

$$\frac{61}{128} < x < \frac{123}{256}$$

$$x = \frac{\frac{61}{128} + \frac{123}{256}}{2} = \frac{245}{512} \qquad 10^{\frac{245}{512}} = 3{,}009\,6472$$

$$10^{\frac{61}{128}} < 3 < 10^{\frac{245}{512}}$$

$$\frac{61}{128} < x < \frac{245}{512}$$

$$x = \frac{\frac{61}{128} + \frac{245}{512}}{2} = \frac{489}{1024} \qquad 10^{\frac{489}{1024}} = 3{,}002\,8876$$

$$10^{\frac{61}{128}} < 3 < 10^{\frac{489}{1024}}$$

$$\frac{61}{128} < x < \frac{489}{1024}$$

$$x = \frac{\frac{61}{128} + \frac{489}{1024}}{2} = \frac{977}{2048} \qquad 10^{\frac{977}{2048}} = 2{,}999\,5132$$

$$10^{\frac{977}{2048}} < 3 < 10^{\frac{489}{1024}}$$

$$\frac{977}{2048} < x < \frac{489}{1024}$$

$$x = \frac{\frac{977}{2048} + \frac{489}{1024}}{2} = \frac{1955}{4096} \qquad 10^{\frac{1955}{4096}} = 3{,}001\,2000$$

$$10^{\frac{977}{2048}} < 3 < 10^{\frac{1955}{4096}}$$

$$\frac{977}{2048} < x < \frac{1955}{4096}$$

$$x = \frac{\frac{977}{2048} + \frac{1955}{4096}}{2} = \frac{3909}{8192} \qquad 10^{\frac{3909}{8192}} = 3{,}000\ 3566$$

$$10^{\frac{977}{2048}} < 3 < 10^{\frac{3909}{8192}}$$

$$\frac{977}{2048} < x < \frac{3909}{8192}$$

$$x = \frac{\frac{977}{2048} + \frac{3909}{8192}}{2} = \frac{7817}{16384} \qquad 10^{\frac{7817}{16384}} = 2{,}999\ 9345$$

$$10^{\frac{7817}{16384}} < 3 < 10^{\frac{3909}{8192}}$$

$$\frac{7817}{16384} < x < \frac{3909}{8192}$$

$$x = \frac{\frac{7817}{16384} + \frac{3909}{8192}}{2} = \frac{15635}{32768} \qquad 10^{\frac{15635}{32768}} = 3{,}000\ 1455$$

$$10^{\frac{7817}{16384}} < 3 < 10^{\frac{15635}{32768}}$$

$$\frac{7817}{16384} < x < \frac{15635}{32768}$$

$$x = \frac{\frac{7817}{16384} + \frac{15635}{32768}}{2} = \frac{31269}{65536} \qquad 10^{\frac{31269}{65536}} = 3{,}000\ 0396$$

$$10^{\frac{7817}{16384}} < 3 < 10^{\frac{31269}{65536}}$$

$$\frac{7817}{16384} < x < \frac{31269}{65536}$$

$$x = \frac{\frac{7817}{16384} + \frac{31269}{65536}}{2} = \frac{62537}{131072} \qquad 10^{\frac{62537}{131072}} = 2{,}999\,9179$$

$$10^{\frac{62537}{131072}} < 3 < 10^{\frac{31269}{65536}}$$

$$\frac{62537}{131072} < x < \frac{31269}{65536}$$

$$x = \frac{\frac{62537}{131072} + \frac{31269}{65536}}{2} = \frac{125075}{262144} \qquad 10^{\frac{125075}{262144}} = 3{,}000\,0132$$

$$10^{\frac{62537}{131072}} < 3 < 10^{\frac{125075}{262144}}$$

$$\frac{62537}{131072} < x < \frac{125075}{262144}$$

$$x = \frac{\frac{62537}{131072} + \frac{125075}{262144}}{2} = \frac{250149}{524288} \qquad 10^{\frac{250149}{524288}} = 3{,}000\,0007.$$

Овим смо добили врло приближну вредност за x, јер је на шест десетних места тачно

$$log\, 3 = \frac{250149}{524288} = 0{,}477\,121.$$

Напомена. Узимајући за x увек аритметичну средину из два броја своди се израчунавање поступних вредности од 10^x на извлачење корена квадратног.

48. **Лонг**[1]**-ова метода**. Да бисмо имали логаритме свију бројева довољно је да израчунамо логаритамске мантисе за све (целе и разломљене) бројеве од 1 па до 10, јер ми знамо да н. пр. логаритам броја 7348 има исту мантису, коју има и логаритам броја 7,348 (в. чл. 44.).

Помоћу таблице

БРОЈ	ЛОГАРИТАМ	БРОЈ	ЛОГАРИТАМ
10,000 00	1,000 00	1,002 25	0,000 98
3,162 28	0,500 00	1,001 12	0,000 49
1,778 28	0,250 00	1,000 56	0,000 24
1,333 52	0,125 00	1,000 28	0,000 12
1,154 78	0,062 50	1,000 14	0,000 06
1,074 61	0,031 25	1,000 07	0,000 03
1,036 63	0,015 62	1,000 04	0,000 02
1,018 15	0,007 81	1,000 02	0,000 01
1,009 04	0,003 91	1,000 01	0,000 00
1,004 51	0,001 95		

коју добијамо поступним извлачењем корена квадратног из 10, т. ј. израчунавањем вредности $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$, $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{10}}$, $10^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$ и т. д. све док не дођемо до резултата, који се, према ступњу тачности, који таблицама желимо дати, разликује за незнатно мало од јединице, — у стању смо да одредимо логаритам једнога задатог броја и обратно да нађемо број, ако је познат његов логаритам.

Тако н. пр. да бисмо нашли *log* 78495 ми ћемо, помоћу таблице, потражити мантису логаритма од

[1]) По Енглезу *Roger Long* (Norfolk 1680 — Pembroke 1770) који је ту методу саопштио године 1714.

7,8495 и то на следећи начин. Поделићемо број 7,8495 оним бројем из таблице који му је најближи по вредности, али мањи од њега, дакле са 3,162 28. Добивени количник $\frac{7{,}8495}{3{,}162\,28} = 2{,}482\,22$ поделићемо табличним бројем 1,778 28, који је њему најближи, а од њега мањи. Са тим новим количником поступићемо на исти начин и све тако даље док не дођемо до једнога количника, који се од јединице не буде разликовао за више, но што одређује ступањ тачности наше таблице За узети пример је поступак следећи:

$$\frac{7{,}8495}{3{,}162\,28} = 2{,}482\,22$$

$$\frac{2{,}482\,22}{1{,}778\,28} = 1{,}395\,85$$

$$\frac{1{,}395\,85}{1{,}333\,52} = 1{,}046\,74$$

$$\frac{1{,}046\,74}{1{,}036\,63} = 1{,}009\,76$$

$$\frac{1{,}009\,76}{1{,}009\,04} = 1.000\,71$$

$$\frac{1{,}000\,71}{1{,}000\,56} = 1{,}000\,16$$

$$\frac{1{,}000\,16}{1{,}000\,14} = 1{,}000\,02$$

$$\frac{1{,}000\,02}{1{,}000\,02} = 1{,}000\,00.$$

На тај начин разлаже се задати број 7,8495 чинитеље

$$7{,}8495 = 3{,}162\,28 \times 1{,}778\,28 \times 1{,}333\,52 \times 1{,}036\,63$$
$$\times 1{,}009\,04 \times 1{,}000\,56 \times 1{,}000\,14 \times 1{,}000\,02,$$

а пошто је логаритам производа раван збиру логаритама појединих чинитеља, то је, на основу горње таблице,

$$\begin{aligned} \log 7{,}8495 &= 0{,}500\,00 + 0{,}250\,00 + 0{,}125\,00 + 0{,}015\,62 \\ &+ 0{,}003\,91 + 0{,}000\,24 + 0{,}000\,06 + 0{,}000\,01 \\ &= 0{,}894\,84 \end{aligned}$$

и према томе

$$\log 78495 = 4{,}894\,84.$$

Узмимо сада обратни случај: дат нам је логаритам једнога броја, тражи се тај број. Нека је $\log y = 4{,}894\,84$. Да бисмо нашли број y ми ћемо мантису задатога логаритма представити у виду збира на следећи начин. Од мантисе 0,894 84 одузећемо ону мантису из наше таблице, која је њој најближа, али мања од ње, а то је мантиса 0,500 00. Од разлике 0,894 84 — 0,500 00 = 0,394 84 одузећемо понова ону табличну мантису, која јој је најближа, дакле мантису 0,250 00. Са добивеном разликом 0,144 84 поступићемо на исти начин и све тако даље док не добијемо разлику, која је, на пет десетних места тачно, равна нули. За узети пример поступак је следећи:

$$\begin{aligned} 0{,}894\,84 - 0{,}500\,00 &= 0{,}394\,84 \\ 0{,}394\,84 - 0{,}250\,00 &= 0{,}144\,84 \\ 0{,}144\,84 - 0{,}125\,00 &= 0{,}019\,84 \\ 0{,}019\,84 - 0{,}015\,62 &= 0{,}004\,22 \\ 0{,}004\,22 - 0{,}003\,91 &= 0{,}000\,31 \end{aligned}$$

$$0{,}000\,31 - 0{,}000\,24 = 0{,}000\,07$$
$$0{,}000\,07 - 0{,}000\,06 = 0{,}000\,01$$
$$0{,}000\,01 - 0{,}000\,01 = 0{,}000\,00.$$

На тај начин јесте

$$\begin{aligned} \log y &= 3 + 0{,}894\,84 \\ &= 3 + 0{,}500\,00 + 0{,}250\,00 + 0{,}125\,00 + 0{,}015\,62 \\ &\qquad + 0{,}003\,91 + 0{,}000\,24 + 0{,}000\,06 + 0{,}000\,01 \end{aligned}$$

и према томе број y раван производу бројева за поједине логаритме, на које смо разложили задати логаритам, дакле, на основу горње таблице,

$$\begin{aligned} y &= 10\,000 \times 3{,}162\,28 \times 1{,}778\,28 \times 1{,}333\,52 \\ &\qquad \times 1{,}036\,63 \times 1{,}009\,04 \times 1{,}000\,56 \\ &\qquad \times 1{,}000\,14 \times 1{,}000\,02 \\ &= 10\,000 \times 7{,}8495 = 78495. \end{aligned}$$

II

УПОТРЕБА ЛОГАРИТАМСКИХ ТАБЛИЦА.

I.

О употреби логаритамских таблица уопште.

49. **Начин логаритамског рачунања.** — Корист логаритама, по практично рачунање, састоји се, као што смо већ раније напоменули (в. чл. 37.), у томе што се свака алгебарска радња своди на другу од ње простију радњу: множење на сабирање, делење на одузимање, степеновање и кореновање на множење, односно делење, дакле може све да се сведе на прва четири или управо на прва два вида рачуна.

a) Поступак при логаритамском израчунавању алгебарских израза, у којима се врше радње множења, делења, степеновања и кореновања, јесте следећи: прво се логаритмује дотични израз и пошто се (према правилима у чл. 37.) логаритам целога израза разложи на логаритме појединих саставака и изврше означене радње са појединим логаритмима тражи се од тога резултата поново број. Тај број представља вредност задатога израза.

Да бисмо израчунали н. пр.

$$\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{15^2}{26^4}}$$

ми ћемо прво логаритмовати и добити

$$log\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{15^2}{26^4}}\right)=\frac{1}{3}(-log\,2+5\,log\,3-log\,5-4\,log\,13)$$

$$=\frac{1}{3}[5\,log\,3-(log\,2+log\,5+4\,log\,13)]^{1)}$$

(в. 3. пример у чл. 37.) и пошто нађемо у таблицама да је

$$log\,2=0{,}301\,0300$$

$$log\,5=0{,}698\,9700$$

$$4\,log\,13=4{,}455\,7736,$$

дакле $\quad log\,2+log\,5+4\,log\,13=5{,}455\,7736$

---

1) Имавши на уму да је $log\,2+log\,5=log\,(2\cdot 5)=1$ могли бисмо простије да ставимо

$$log\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{15^2}{26^4}}\right)=\frac{1}{3}[5\,log\,3-(1+4\,log\,13)].$$

и, пошто је

$$\log 3 = 0{,}477\ 1213, \quad 5 \log 3 = 2{,}385\ 6065,$$

имамо

$$5 \log 3 - (\log 2 + \log 5 + 4 \log 13) = -3{,}070\ 1671$$

и према томе

$$\log\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{15^2}{26^4}}\right) = -3{,}070\ 1671 : 3 = -1{,}023\ 3890$$

$$= 0{,}976\ 6110 - 2.$$

Помоћу таблица налазимо

$$\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{15^2}{26^4}} = num \log (0{,}976\ 6110 - 2) = 0{,}094\ 757.$$

b) Тамо где има више оваквих алгебарских израза да се саберу или одузму треба сваки од њих израчунати посебице и потоме сабрати их или одузети, пошто се логаритам збира и разлике неможе даље да разлаже.[1]) Тако н. пр. кад бисмо имали да израчунамо израз оваквог вида

$$x = \frac{ab}{c} + d\sqrt[m]{e^n} - \frac{f}{g}$$

---

[1]) У случајевима, када се збир или разлика може да доведе на вид производа треба то учинити, јер тако рачун постаје знатно краћи. В. пример 5. у чл. 37. Тако н. пр.

место $\sqrt{42{,}95^2 - 13{,}67^2}$ узећемо $\sqrt{(42{,}95+13{,}67)(42{,}95-13{,}67)} = \sqrt{56{,}62 \cdot 29{,}28}$

„ $a^2 + b^2 + ab$ „ $(a+b)^2 - ab$ и т. д.

О удешавању израза за логаритамско рачунање види чл. 63.—67.

ми бисмо прво израчунали вредности појединих чланова $\frac{ab}{c}$, $d\sqrt[m]{e^n}$, $\frac{f}{g}$ и затим, сабирањем и одузимањем, изнашли вредност целога израза x.

c) Ако међу бројевима, које множимо, делимо, степенујемо или коренујемо или међу бројевима којима множимо или делимо буде имало негативних количина, онда треба, на прво́ме месту, испитати од каквога су утицаја оне по знак целога израза: хоће ли исти бити положан или одречан. Уверимо ли се да је резултат положан ми можемо све негативне количине узети са знаком $+$. Тако н. пр. при израчунавању

од	узећемо	јер је
$\frac{(-35{,}847)^4 \cdot -634{,}53}{-57{,}692}$	$\cdots \frac{35{,}847^4 \cdot 634{,}53}{57{,}692} \cdots$	$\frac{(-35{,}847)^4 \cdot -634{,}53}{-57{,}692} = \frac{+35{,}847^4 \cdot +634{,}53}{+57{,}692}$

и т. д.

Покаже ли се, међутим, да је резултат негативан, онда ћемо израчунати апсолутну вредност његову и добивени резултат помножити са -1, т. ј. узети га одречно. При логаритмовању задатога израза ставићемо иза логаритма у загради знак — (minus) или знак n да бисмо тиме наговестили да је број тога логаритма негативан. Н. пр. да бисмо израчунали $\sqrt[3]{-2786{,}53}$ ми ћемо, пошто већ знамо да је вредност тога израза одречна, израчунати $\sqrt[3]{2786{,}53}$ и томе резултату придати знак —, јер је

$\sqrt[3]{-2786{,}53} = -\sqrt[3]{2786{,}53}$. Логаритмујући бележићемо

$$\log\sqrt[3]{-2786{,}53} = \frac{1}{3}\log 2786{,}53\ (-) \text{ или}$$

$$= \frac{1}{3}\log 2786{,}53\ (n).$$

На сличан начин поступамо, ако је израз, који помоћу логаритама израчунавамо, имагинаран. Ми тада издвајамо из њега чинитељ $\sqrt{-1} = i$ (имагинарну јединицу) и пошто логаритамски изнађемо ону стварну вредност, ми понова множимо тај резултат са $\sqrt{-1}$. Н. пр. да бисмо нашли $\sqrt{-574{,}832}$, које је имагинарно, ми прво одређујемо $\sqrt{574{,}832}$ и тако добивену стварну вредност множимо са $\sqrt{-1}$, јер је

$$\sqrt{-574{,}832} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{574{,}832}.$$

50. **Сабирање, одузимање, множење и делење логаритама.** — Разлажући логаритам једнога сложеног алгебарског израза на логаритме његових саставних делова долазимо у положај да логаритме сабирамо, одузимамо, множимо и делимо. Услед тога често произилазе одречни логаритми и логаритми са разломљеном значицом. Пошто таквих логаритама нема у логаритамским таблицама, то ћемо у следећем да објаснимо, на примерима, шта у таквим приликама треба да радимо.

а) Сабирање логаритама. — Ми знамо да је

$$\log(abc\cdots k) = \log a + \log b + \log c + \cdots + \log k.$$

Логаритамско израчунавање једнога производа води нас, дакле, сабирању логаритама чинитеља, из којих је састављен производ.

Ако међу логаритмима, које сабирамо, има и таквих са одречном карактеристиком, онда, по свршеном сабирању, треба, по могућству, скратити одречне значице са положним значицама.

Примери.

1) Нека је $\log a = 2{,}854\,6317$, $\log b = 0{,}693\,2765 - 4$.

Тада је
$$\log(ab) = 2{,}854\,6317 + 0{,}693\,2765 - 4$$
$$= 3{,}547\,9082 - 4 = 0{,}547\,9082 - 1$$

2) Нека је $\log a = 1{,}526\,8541$, $\log b = 0{,}764\,5018 - 2$

Дакле
$$\log(ab) = 1{,}526\,8541 + 0{,}764\,5018 - 2$$
$$= 2{,}291\,3559 - 2 = 0{,}291\,3559.$$

b) Одузимање логаритама. — Одузимање логаритама јавља се при израчунавању количника, јер је

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Претпоставимо да је

$$\log a > \log b,$$

дакле $\frac{a}{b} > 1$. Следећи примери показују, довољно јасно, како се има поступити у свима сличним приликама.

Примери.

1) Дато је: $\log a = 1{,}379\,5432$, $\log b = 0{,}582\,3714 - 3$.

Отуда следује

$$\log\frac{a}{b} = 1{,}379\,5432 - (0{,}582\,3714 - 3)$$

$$= 1{,}379\ 5432 - 0{,}582\ 3714 + 3 = 3{,}797\ 1718.$$

2) Дато је: $\log a = 0{,}241\ 7536 - 2$, $\log b = 0{,}685\ 2793 - 3$.

Одавде налазимо

$$\log \frac{a}{b} = 0{,}241\ 7536 - 2 - (0{,}685\ 2793 - 3)$$

$$= 0{,}241\ 7536 - 2 - 0{,}685\ 2793 + 3 = 0{,}556\ 4743.$$

Узмимо сада да је

$$\log a < \log b,$$

дакле $\frac{a}{b} < 1$. Овде, где имамо од мањег логаритма да одузмемо већи логаритам додаћемо првоме (мањем) логаритму онолико јединица колико је потребно па да резултат одузимања постане положан и ставићемо тој разлици натраг, као одречну значицу, онај број, који смо били додали првоме логаритму.

Пример.

Нека је $\log a = 2{,}623\ 1459$, $\log b = 3{,}975\ 4261$.

Одавде следује

$$\log \frac{a}{b} = 2{,}623\ 1459 - 3{,}975\ 4261$$

$$= 4{,}623\ 1459 - 3{,}975\ 4261 - 2 = 0{,}647\ 7198 - 2.$$

Напомена. Ако количник, који израчунавамо, представља коју од тригонометриских функција извеснога угла, онда се одузимање већег логаритма од мањег врши сабирањем десетне допуне другог логаритма са првим логаритмом и стављајући томе збиру натраг број 10 у име одречне значице.

Тако н. пр. ако је

$$\frac{a}{b} = \sin\varphi$$

$$\log a = 3{,}740\,2983, \quad \log b - 4{,}531\,8617$$

поступићемо на овај начин

$$\begin{aligned}\log\sin\varphi &= 3{,}740\,2983 - 4{,}531\,8617\\ &= 3{,}740\,2983 + (10 - 4{,}531\,8617) - 10\\ &= 3{,}740\,2983 + 5{,}468\,1383 - 10 = 9{,}208\,4366 - 10.\end{aligned}$$

c) Множење логаритама. — За множење логаритама указује се прилика при израчунавању степених количина, јер је

$$\log a^p = p \cdot \log a.$$

Овде имамо да учинимо следеће примедбе.

Прво. Ако множимо логаритме, који имају одречну карактеристику, онда треба, по извршеноме множењу скратити, по могућству, одречну значицу са положном значицом, која би се јавила услед множења положне мантисе са дотичним бројем.

Н. пр. да бисмо израчунали

$$0{,}03192^3$$

узећемо

$$\begin{aligned}\log 0{,}03192^3 &= 3 \cdot \log 0{,}03192 = 3 \cdot (0{,}504\,0629 - 2)\\ &= 1{,}512\,1887 - 6 = 0{,}512\,1887 - 5.\end{aligned}$$

Друго. У случају, где је број, којим множимо, разломљен, а логаритам, који множимо, има одречну карактеристику, ми ћемо, да бисмо избегли разломљену значицу, задати логаритам превести у негативну форму (одузевши положну мантису од одречне карактеристике), а по извршеноме множењу са дотичним бројем даћемо добивеноме резултату понова вид логаритма са положном мантисом и одречном карактеристиком.

Н. пр.

$$0{,}0752^{5{,}308}$$

добићемо кад ставимо

$$\begin{aligned} log\, 0{,}0752^{5{,}308} &= 5308 \cdot log\, 0{,}0752 \\ &= 5{,}308 \cdot (0{,}876\,2178 - 2) = 5.308 \cdot (-1{,}123\,7822) \\ &= -5{,}965\,0359 = 0{,}034\,9641 - 6. \end{aligned}$$

Међутим ми бисмо могли и овако да поступимо:

$$\begin{aligned} log\, 0{,}0752^{5{,}308} &= 5{,}308 \cdot log\, 0{,}0752 = 5{,}308 \cdot (0{,}876\,2178 - 2) \\ &= 4{,}650\,9641 - 10{,}616 \\ &= 4{,}650\,9641 - 4{,}616 - 6 = 0{,}034\,9641 - 6. \end{aligned}$$

Треће. При множењу логаритама са разломљеним бројевима треба резултат заокруглити на онолико десетних места за колико су таблице удешене. Служећи се седмоместним таблицама ми ћемо сваку логаритамску мантису удесити на седам десетних места, па ма је имали и са више цифара. Тако у прошломе примеру, где смо имали да помножимо 1,123 7822 са 5,358 узели смо, место резултата 5,965 035 9176, заокругљено 5,965 0359.

Четврто. Ако је број, којим множимо задати логаритам, многоцифрен, тако да множење постаје неугодно, онда је упутно извршити и то помоћу логаритама и свести, на тај начин, множење на сабирање.

Тако н. пр. да рисмо израчунали

$$7{,}3^{0{,}45698}$$

узећемо

$$\log 7{,}3^{0{,}45698} = 0{,}45698 \cdot \log 7{,}3 = 0{,}45698 \cdot 0{,}863\,3229.$$

Али пошто је множење ова два броја доста дангубно, ми ћемо понова логаритмовати и добићемо

$$\begin{aligned} \log(\log 7{,}3^{0{,}45698}) &= \log(0{,}45698 \cdot 0{,}863\,3229) \\ &= \log 0{,}45698 + \log 0{,}863\,3229 \\ &= 0{,}659\,8972 - 1 + 0{,}936\,1732 - 1 \\ &= 0{,}596\,0704 - 1, \end{aligned}$$

одакле налазимо

$$num \log(\log 7{,}3^{0{,}45698}) = \log 7{,}3^{0{,}45698} = 0{,}394\,5213$$

и најзад

$$num \log 7{,}3^{0{,}45698} = 7{,}3^{0{,}45698} = 2{,}4804.$$

Пето. Ако је изложитељ *(p)* степене количине, дакле број којим множимо логаритам, негативан, а логаритам основице *(log a)*, т. ј. логаритам који множимо позитиван, онда је и цео производ *(p · log a)*, а то је логаритам степене количине *(log a^p)* одречан. Да бисмо, у таквоме случају, помоћу таблица нашли одговарајући број *(num log a^p)* потребно је да тај одречан логаритам претворимо у полуодречан логаритам, т. ј. у логаритам чија је мантиса положна а карактеристика одречна (в. чл. 42.). Ако је, међутим, и логаритам основице негативан, онда је производ, односно логаритам степене количине, позитиван и може да се непосредно тражи у таблицама.

Примери.

1) Израчунаћемо

$$25{,}864^{-3}$$

кад узмемо

$$\log 25{,}864^{-3} = -3 \cdot \log 25{,}864 = -3 \cdot 1{,}412\,6957$$
$$= -4{,}238\,0871 = 0{,}761\,9129 - 5,$$

дакле

$$25{,}864^{-3} = num\,\log(0{,}761\,9129 - 5) = 0{,}000057798.$$

2) $$0{,}71248^{-5} = ?$$

Узећемо

$$\log 0{,}71248^{-5} = -5 \cdot \log 0{,}71248 = -5 \cdot (0{,}852\,7727 - 1)$$
$$= 5 \cdot (1 - 0{,}852\,7727)$$
$$= 5 \cdot 0{,}147\,2273 = 0{,}736\,1365,$$

дакле

$$0{,}71248^{-5} = num\,\log 0{,}736\,1365 = 5{,}44674.$$

d) Делење логаритама. — Отуда што је

$$\log \sqrt[q]{a} = \frac{\log a}{q}$$

видимо да се делење логаритама указује при израчунавању корених количина.

Делење логаритама даје места следећим напоменама.

Прво. Да бисмо један логаритам са одречном карактеристиком поделили каквим целим бројем и онда кад карактеристика није дељива дотичним бројем, ми додајемо карактеристици онолико јединица колико је потребно па да постане дељива, а исто толико јединица стављамо и пред мантисом у виду положне значице.

Тако н. пр. при израчунавању

$$\sqrt[3]{0{,}482\,91}$$

узимамо

$$log \sqrt[3]{0{,}492\,91} = \frac{1}{3} log\, 0{,}482\,91 = (0{,}683\,8662 - 1) : 3$$

$$= (2{,}683\,8662 - 3) : 3 = 0{,}894\,6221 - 1.$$

Друго. Ако је број којим делимо разломљен, а логаритам, који делимо, има одречну карактеристику, онда ћемо поступити исто онако као и код множења у сличној прилици (в. множење логаритама, друга напомена), т. ј. ми ћемо у задатоме логаритму уклонити одречну значицу, претворивши логаритам у негативну форму, извршићемо затим делење и најзад добивеноме резултату дати понова вид логаритма са положном мантисом и одречном значицом.

Тако н. пр. код

$$\sqrt[2{,}763]{0{,}00983}$$

поступићемо како следује:

$$log \sqrt[2{,}763]{0{,}00983} = \frac{log\, 0{,}00983}{2{,}763} = \frac{0{,}992\,5535 - 3}{2.763} = \frac{-2{,}007\,4465}{2{,}763}$$

$$= -0{,}722\,9267 = 0{,}277\,0733 - 1,$$

$$\sqrt[2{,}763]{0{,}00983} = num\; log\,(0{,}277\,0733 - 1) = 0{,}1892663.$$

Треће. Извесну примедбу, коју смо већ учинили код множења (в. множење логаритама, трећа напомена) треба да поновимо и овде, а то је да при делењу логаритама треба резултат заокруглити на онолико десетних места за колико су таблице удешене. Служећи се, н. пр. седмоместим таблицама, ми, у таквоме случају, заокругљавамо логаритамску мантису на седам десетних места.

Види последња два примера.

Четврто. Пошто је делење многоцифрених бројева међусобом неугодно, то је, при израчунавању количника из задатога логаритма и каквога вишецифреног броја, за препоруку свршити тај посао помоћу логаритама и свести, на тај начин, делење на одузимање.

Н. пр. да бисмо израчунали

$$\sqrt[8,60745]{4285,69}$$

ми ћемо узети

$$log \sqrt[8,60745]{4285,69} = \frac{log\,4285,69}{8,60745} = \frac{3,6320208}{8,60745}$$

и пошто је делење ова два вишецифрена броја дангубно логаритмоваћемо понова

$$log \left(log \sqrt[8,60745]{4285,69}\right) = log \frac{3,632\,0208}{8,60745}$$

$$= log\,3,632\,0208 - log\,8,60745$$

$$= 0,560\,1483 - 0,934\,8745 = 0,625\,2738 - 1$$

на основу чега налазимо

$$log \sqrt[8,60745]{4285,69} = num\,log\,(0,625\,2738 - 1) = 0,421\,9624$$

$$\sqrt[8,60745]{4285,69} = num\,log\,0,421\,9624 = 2,642\,18.$$

Пето. При израчунавању корених количина са одречним изложитељем имамо да поступимо као и код степеновања са одречним изложитељем (в. множење логаритама, пета напомена). Ако је логаритам подкорене количине $(log\,a)$ положан, онда је, у случају одречнога кореног изложитеља (q), количник $\left(\frac{log\,a}{q}\right)$, а то је логаритам корене количине $\left(log \sqrt[q]{a}\right)$, негативан. У таквоме случају треба, да бисмо могли у таблицама наћи одговарајући број, претворити тај негативан логаритам у логаритам у коме је само карактеристика одречна, а мантиса положна. Али ако је и логаритам основице, као и корени изложитељ, негативан, онда количник из њих, а то је логаритам корене количини, остаје положан и може се непосредно тражити у таблицама.

Примери.

1) $$\sqrt[-6]{1093{,}86} = ?$$

$$\log \sqrt[-6]{1093{,}86} = \frac{\log 1093{,}86}{-6} = \frac{3{,}038\,9617}{-6}$$

$$= -0{,}506\,4936 = 0{,}493\,5064 - 1$$

$$\sqrt[-6]{1093{,}86} = num \log (0{,}493\,5064 - 1) = 0{,}311\,5347.$$

2) $$\sqrt[-4]{0{,}05974} = ?$$

$$\log \sqrt[-4]{0{,}05974} = \frac{\log 0{,}05974}{-4} = \frac{0{,}776\,2652 - 2}{-4} = \frac{2 - 0{,}776\,2652}{4}$$

$$= \frac{1{,}223\,7348}{4} = 0{,}305\,9337$$

$$\sqrt[-4]{0{,}05974} = num \log 0{,}305\,9337 = 2{,}02271.$$

2.

Логаритамске таблице за обичне бројеве.

51. **О логаритамским таблицама у опште.** — Под логаритамским таблицама разумемо једну на прегледан начин сложену збирку логаритама за све целе и положне бројеве[1]) од један па до извесне границе.

[1]) В. примедбе под 1 и под 2 на стр. 86.

Таквих таблица имамо врло много и оне су, већином, израчунате за основицу 10.[1]) Због тога се *Бриг*-ови логаритми зову још и *таблични логаритми* (Tafel-logarithmen).

Нама је познато да су сви логаритми, изузев логаритме целих степена основице 10, ирационалне количине.[2]) Према томе оне вредности логаритама, које нам дају таблице у виду свршених десетних разломака, нису апсолутно тачне; оне су само приближне. Осим разлике у спољашности (у формату, читкости слога, распореду), коју опажамо код разних таблица, оне се поглавито разликују у ступњу тачности и њихове опширности. Тако н. пр. имамо таблице у којима су логаритамске мантисе израчунате на 4, 5, 6, 7, 8 и више десетних места. Таблице са 4 десетна места дају мантисе логаритама за бројеве од 1 до 1000; оне са 5 десетних места дају логаритамске мантисе бројева од 1 до 10 000, а оне са 7 десетних места односе се на бројеве од 1 па до 100 000, и т. д.

Од најчешће су употребе таблице са 5, 6 и са 7 десетних места. Првима се служимо у рачунима из обичног живота, док се оне друге употребљавају у приликама, где се захтева велика тачност у резултату, као што је то код егзактних посматрања и мерења. Таблице са 4 десетна места служе више само за приближно срачунавање.

Напоменимо да су са таблицама за логаритме обичних бројева махом спојене таблице за логаритме тригонометриских функција. Такве таблице зову се

---

[1]) В. чл. 45.

[2]) В. чл. 40.

логаритамско-тригонометриске таблице. Већина од њих садржи још и друге збирке бројева који су од користи у практичним рачунима.

Употреба логаритамских таблица за обичне бројеве састоји се у следећем:

1) кад је дат број да се нађе његов логаритам и

2) кад је познат логаритам да се нађе одговарајући број.

Прво је *логаритмовање,* а друго *антилогаритмовање.*

Примедба. С погледом на неизмерну корист, коју нам указују логаритми у практичним рачунима, сматрамо за умесно да, бар у кратким напоменама, упознамо почетника са именима и делима оних првих трудбеника, који су највише стекли заслуге по израчунавање логаритамских таблица.

Одма после самих проналазача *Непер-а* и *Бирги-а*[1]) долази творац десетних логаритама *Бриг,* који је год. 1617. издао своје прве логаритамске таблице и којима су год. 1624. следовале друге много опширније таблице.[2])

Овде је место да поменемо рад *Бриг*-овог колеге *Edmund Gunter-a* (Herefordshire 1581 — London 1626), који је год. 1620. издао свој Canon triangulorum, у коме су, први пут, израчунати *Бриг*-ови логаритми синуса и тангенте и то на 7 десетних места. Ову збирку је Gunter прештампао доцније, заједно са онима првим *Бриг*-овим таблицама за логаритме бројева од 1 до 1000, у делу de Sectore et Radio.

У најнепосреднијој свези са *Бриг*-овим радовима стоје и радови холандеза *Влака,* јер их допуњују.[3])

Из овога, првога, доба имамо у Немачкој два човека која треба поменути.

Benjamin Ursinus или *Behr* (Шлезија 1587 — Франкфурт на Одри 1633 или 1634), у својим великим таблицама Magnus Canon Triangulorum Logarithmicus, Coloniae 1624, израчунао је природне логаритме синуса углова од 10 до 10 секунада

---

[1]) В. примедбу под 1 на стр. 88. и *примедбу* на стр. 89.

[2]) В. примедбу под 4 на стр. 88.

[3]) В. примедбу под 4 на стр. 88.

са логаритмима тангената, као и природне синусе за полупречник 100 000 000. У његовоме другом раду Trigonometria cum magno Logarithmorum Canone, Coloniae 1625 показао је израчунавање тригонометриских линија и логаритама са упутствима како се употребљавају.

Johannes Kepler (Magstatt 1571 — Regensburg 1630) у делу Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos, praemissa demonstratione legitima ortus logarithmorum eorumque usus, Marpurgi 1624 дао је природне логаритме синуса. Овим таблицама следовао је Supplementum Chiliadis Logarithmorum continens praecepta de eorum usu, Marpurgi 1625.

Од доцнијих раденика на овоме пољу поменимо нарочито *Abraham Sharp* (Little-Horton код Bradford-a 1651 — Little-Horton 1742), који је у својој Geometry Improved, London 1717 израчунао логаритме простих бројева испод 1100 и логаритме бројева од 999 981 до 1 000 015 на 60 десетних места тачно.

James Dodson (? — Лондон 1757) издао је год. 1742. Antilogarithmic Canon, у коме су логаритми сређени по аритметичноме, а бројеви, дакле, по геометриском реду. У поменутим таблицама налазе се сви логаритми испод 100 000 са разликом = 1, а одговарајући бројеви означени су са 11 цифара заједно са њиховим разликама и сразмерним деловима.

Wolfram, холандски артиљериски официр, израчунао је природне логаритме за све просте бројеве испод 10 000 на 48 десетних места.

За време прве француске револуције, кад је се код свију мера, па и код углова, завела десетна подела, указала је се потреба и за нове таблице тригонометриских линија и њихових логаритама. Директору комисије за катастар *Gaspard-Clair-François-Marie-Riche de Prony* (Chamelet код Лиона 1755 — Asnières код Париза 1839) поверено је да управља израдом оваквих таблица, које су по опширности и тачности надмашиле све друге радове те врсте. Тај посао, на коме су радили 7 или 8 математичара и 60 до 80 помоћника, свршен је у краткоме времену од три године (1797.). Штампање ових таблица, које би, осим опширнога Увода, изнеле око 1200 страна фолио, отпочето је, али доцније, услед поништења папирнога новца, прекинуто. Два примерка у рукопису, сваки засебно рачунат и сваки по 17 свезака фолио, налазе се у париској Обсерваторији.

Ове таблице садрже: природне синусе за сваки $\frac{1}{10\,000}$-ти део квадранта на 25 десетних места; логаритме синуса за сваки $\frac{1}{100\,000}$-ти део квадранта на 14 десетних места; логаритме размере синуса наспрам његовог лука за 5000 првих $\frac{1}{100\,000}$-тих делова квадранта на 14 десетних места; логаритме тангенте; логаритме размере тангенте наспрам њеног лука; логаритме бројева од 1 до 10 0000 на 19 десетних места; логаритме бројева од 10 000 до 200 000 на 14 десетних места.

52. **Тражење логаритма.** — Да бисмо објаснили употребу логаритамских таблица узећемо логаритамско-тригонометриске таблице *Вегине*[1]), које су удешене на 7 десетних места и којима се више година служили питомци Војне Академије. Нема сумње да ће онај, који се упозна са руковањем ових таблица, умети служити се и ма којима другим.

Садржај Вегиних таблица је следећи:

После *Предговора* и *Увода*, у коме је, у кратко, изложена употреба логаритама, долази први део под I (стр. 2.—185.) у којем су *Бриг*-ови логаритми бројева од 1 до 100 000. Овоме следује други део под II (стр. 188.—287.) са логаритмима синуса и тангенте од секунде до секунде. За тим долази трећи део под III (стр. 290.—559.) у којем се налазе логаритми тригонометриских функција за сваку десету секунду.

Осим тога налази се у овој Збирци:

На стр. 186. таблица за претварање природних логаритама у обичне и таблица за претварање обичних логаритама у природне.

На стр. 288. таблица за дужину лука у кругу са полупречником 1 за сваки цео степен периферије, за

[1]) Vega, G. v., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch.

сваку минуту једнога степена и за сваку секунду једне минуте.

На стр. 560. таблица за претварање лукова у време (часове, минуте, секунде) и то за сваки цео степен периферије, сваку (угловну) минуту једнога степена и сваку (угловну) секунду једне минуте.

На крају књиге је

Додатак

у коме се налази

1. таблице за претварање звезданог времена у средње време.

2. таблице за претварање средњег времена у звездано време.

3. таблице за рефракцију.

4. константе које су важне у Теорији или су узете из Природе.

Таблице под I служе за изналажење логаритма задатих бројева и обратно за изналажење броја кад је познат његов логаритам.

Ове се таблице састоје из два дела: стране 6. до 185. садрже логаритме бројева од 10 000 до 100 000, а прве четири стране (т. ј. стр. 2.—5.) дају логаритме бројева од 1 до 1000, који су, ма да се налазе међу онима у другоме делу,[1]) засебно сложени.

a) Употреба првога дела (стр. 2.—5.) таблица I разумљива је по себи. Свака страна подељеиа је на ступце, од којих њих пет имају натпис (и потпис)

[1]) Тако н. пр. логаритам броја 376, који налазимо у првоме делу (на стр. 3.) можемо наћи и у другоме делу (на стр. 61.) истих таблица, било да узмемо број 3760 или број 37600.

N (скраћено од *Numerus*), а други пет натпис (и потпис *Log* (скраћено од *Logarithmus*). У ступцима под *N* стоје бројеви, а у ступцима под *Log* одговарајући логаритми или боље рећи њихове логаритамске мантисе. Зарад лакшег прегледа сваки десети број (који има натраг 0) обележен је крупније но остали, а логаритми њихови стављени су између две хоризонталне црте. Свака страна садржи 250 бројева и, разуме се, томико исто логаритама:

На страни	налазе се бројеви	
2.	1— 250	и њихови логаритми.
3.	250— 500	„ „ „
4.	500— 750	„ „ „
5.	750—1000	„ „ „

Овај део таблица даје нам, дакле, логаритме за сваки број који је састављен из највише три цифре и за сваки други који постаје из таквога множењем са 10, 100, · · · (т. ј. додавањем нула на десној страни), па био он цео број или десетан разломак. Тако н. пр. ако хоћемо $log\,47{,}2$, а ми ћемо потражити за цео број 472 и пошто нађемо (на стр. 3.) мантису 673 9420 ставићемо $log\,47{,}2 = 1{,}673\,9420$.

Тако исто налаазимо:		узев мантису за цео број
$log\,1{,}68$	$= 0{,}225\,3093$	168
$log\,0{,}965$	$= 0{,}984\,5273 - 1$	965
$log\,0{,}00802$	$= 0{,}904\,1744 - 3$	802
$log\,6940$	$= 3{,}841\,3595$	694

b) Други део (стр. 6.—185.) таблица I даје нам непосредно логаритамске мантисе за све петоцифрене бројеве, дакле за бројеве од 10 000 па до 100 000, а тако исто и за бројеве од 1 до 10 000, пошто се од њих, додавањем нула на десној страни, могу начинити петоцифрени бројеви.

Свака страна овога дела таблица раздељена је на дванаjест стубаца. Први стубац (с лева рачунајући), који има натпис и потпис N, садржи десетине (т. ј. прве четири цифре) петоцифрених бројева. Оваквих десетина има на једној страни педесет. Свака десетина, код које је натраг 0, исписана је потпуно и то са крупним цифрама, а дотична врста одвојена је, горе и доле, са по једном пругом, које чине да она пада боље у очи. На овај начин подељена је страна на пет подједнако широких хоризонталних поља. Од осталих десетина, које натраг имају цифре 1, 2, 3, · · · · 9, исписане су увек само крајње две цифре. — Идући десет стубаца, са натписом (и потписом) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, садрже логаритамске мантисе оних петоцифрених бројева, чије су прве четири цифре (десетине) са њима у истоме реду лево под N, а пета цифра у врху (као натпис), односно у дну (као потпис) дотичног стубца. Због уштеде у простору исписане су само последње четири мантисине цифре, јер се прве три врло често (отприлике 20 до 230 пута) узастопце понављају; прве три цифре означене су по једанпута у свакоме од оних пет хоризонталних поља и то у стубцу под 0. Овакве три цифре односе се, дакле, на све оне мантисе које су у истоме реду са њима а важе и за следеће редове све до идуће троцифрене групе. За оне мантисе, над чијом првом цифром стоји једна мала црта, треба узети идуће, а не претходеће, три цифре. — Најзад у дванаjестоме стубцу, над и испод којега сроји *P. P.* (скраћено од partes proportionales = сразмерни делови), налазе се табличице, које служе за израчунавање логаритама бројева који су састављени из више од пет цифара.

Да бисмо нашли логаритам једнога броја од пет цифара, н. пр. броја 42 853 ми ћемо, пре свега, потражити страну на којој се у првоме ступцу (под *N*) налазе прве четири цифре 4285 задатога броја. И пошто смо то нашли (на стр. 71.) поћићемо у тој врсти (где је број 4285) на десно до у стубац над и испод којега је пета цифра 3 задатога броја 42 853. На томе месту налази се група 9812, пред коју кад ставимо њој одговарајуће три цифре 631, добијамо логаритамску мантису 631 9812. Према томе је дакле $\log 42\,853 = 4{,}631\,9812$.

Узмимо сада да се хоће $\log 34837$. Пошто (на стр. 55.) у ступцу под *N* нађемо десетине задатога броја, а то су његове прве четири цифре 3483 отићићемо у томе реду до у стубац над и испод којега стоји пета цифра 7 нашег броја. На томе месту је група 0407, али пошто се над првом цифром (над нулом) налази једна мала цртица (овако: $\bar{0}407$), то значи да као прве три цифре мантисине треба узети 542 (а не 541) и да је, према томе, мантиса 542 0407, а с тиме $\log 34\,837 = 4{,}542\,0407$.

Тако исто налазимо:	узев лог. мантису за цео број
$\log 82{,}937 = 1{,}918\,7483$	82937
$\log 0{,}067842 = 0{,}831\,4986 - 2$	67842
$\log 7860500 = 6{,}895\,4502$	78605
$\log 2{,}976 = 0{,}473\,6329$	39760.

c) У случају да се хоће логаритам једнога броја који се састоји из више но пет цифара поступићемо на следећи начин. Ми знамо, пре свега, да логаритамска мантиса једино зависи од реда по коме поједине цифре у задатоме броју следују једна другој, а ни уколико од десетна знака и на коме се месту он налази (в. чл. 44.). Према томе можемо сваки број, који има више од пет цифара (па био он цео или у виду десетна разломка), свести на један десетан разломак са пет цифара у целима. Тако н. пр. од броја 508,6379 постаје (премештањем знака запете) број 50863,79, који са првим има једну исту логаритамску мантису. Овако добивени десетни разломак лежи, увек, између два узастопна цела (петоцифрена) броја, па дакле и његов логаритам између два логаритма, која нам непосредно дају таблице за петоцифрене бројеве. У нашем примеру је

$$50863 < 50863{,}79 < 50864,$$

дакле

$$log\,50863 < log\,50863{,}79 < log\,50864$$

или

$$4{,}706\,4020 < log\,50863{,}79 < 4{,}706\,4105,$$

јер је $log\,50863 = 4{,}706\,4020$, $log\,50864 = 4{,}706\,4105$ (в. у таблицама на стр. 87.).

Да бисмо, помоћу ова два позната логаритма, од којих је један мањи, а други већи од онога који тражимо, одредили овај последњи послужићемо се ставом који гласи да је мењање (т. ј. растење и опадање) логаритма у толико више сразмерно мењању (растењу и опадању) броја у колико је промена у броју мања наспрам самог броја.

Или другим речима: разлика у логаритмима два броја постаје у толико приближније сразмерна разлици дотичних бројева у колико је ова разлика мања наспрам самих бројева.

Неки је $a > c > b$ и претпоставимо да су разлике $a - b$ и $c - b$ довољно мале наспрам b, па дакле и наспрам a и c, онда, према изреченоме ставу, постоји, у извесним границама тачности, сразмера

46) $\log a - \log b : \log c - \log b = a - b : c - b$[1])

одакле

46$_a$) $$\log c = \log b + \frac{c - b}{a - b}(\log a - \log b).$$

Применимо ово на горњи пример и ставимо

$$c = 50863{,}79, \quad a = 50864, \quad b = 50863.$$

Овде је дакле

$$c - b = 0{,}79, \quad a - b = 1.$$

Из логаритамских таблица налазимо (на стр. 87.) непосредно

$$\log a = 4{,}706\,4105$$

$$\log b = 4{,}706\,4020,$$

дакле

$$\log a - \log b = 0{,}000\,0085$$

и према томе, а на основу обрасца 46$_a$, следује $\log c$ или

$$\begin{aligned}\log 50\,863{,}79 &= 4{,}706\,4020 + 0{,}79 \times 0{,}000\,0085\\ &= 4{,}706\,4020 + 0{,}000\,0067\\ &= 4{,}706\,4087.\end{aligned}$$

[1]) В. 2. *Напомену* на крају овога члана.

Разуме се да ћемо доћи до истога резултата, ако непосредно употребимо сразмеру 46, која, у овоме случају, гласи овако

$$0{,}000\,0085 : \log c - \log b = 1 : 0{,}79.$$

Означимо $\log c - \log b$ са x, а то је поправка коју треба додати логаритму мањег (петоцифреног) броја b па да се добије логаритам задатог броја c. Последњу сразмеру могли бисмо да напишемо простије

$$85 : x = 1 : 0{,}79,$$

где је поправка x изражена у јединици седмога десетног места.

Табличице у дванајестоме ступцу (над и испод којих стоји *P. P.*) служе за лакше и брже одређивање ових поправака, које ваља сабрати са логаритмима петоцифрених бројева па да би се добили логаритми шесто- и седмоцифрених бројева. Тако у овоме нашем примеру: пошто смо нашли (на стр. 87.) логаритме она два петоцифрена броја, између којих лежи задати број, и добили као разлику та два логаритма 85 јединица у седмоме десетном месту, — ми се обраћамо табличици (у ступцу под *P. P.*) над којом стоји број 85. У тој табличици израчунато је, да кад мењање броја за 1 повлачи собом мењање логаритма за 85 јединица у седмоме десетном месту, колика је промена у логаритму за сваки десети део од промене 1 у броју. Помоћу такве табличице лако је онда (дељењем са 10 и 100) израчунати колика је промена логаритма кад се број мења за ма колико стотих или хиљадитих делова јединице. Тако у табличици под 85 налазимо да је

за промену броја	промена логаритма
од 0,7	$= 59{,}5 \left(= 7 \times \frac{85}{10}\right)$,
„ 0,09	$= 7{,}65 \left(= 9 \times \frac{85}{100}\right)$

и да, према томе, промени броја од $0{,}7 + 0{,}09 = 0{,}79$ одговара у логаритму промена од $59{,}5 + 7{,}65 = 67{,}15$ јединица у седмоме десетном месту, коју кад додамо логаритму броја 50863 добијамо логаритам броја 50863,79.

1. *Напомена*. Место да логаритам задатога броја израчунавамо из логаритма мањег броја, додавањем извесне поправке, можемо, на сличан начин, да нађемо тај логаритам из логаритма већег броја, кад од овога одузмемо извесан сразмерни део. Н. пр. у горњем примеру јесте разлика између већега и задатог броја

$$a - c = 50864 - 50863{,}79 = 0{,}21.$$

Таблице нам дају

$$\log a - \log b = 0{,}000\,0085.$$

На основу горе наведенога става постављамо пропорцију

$$85 : x = 1 : 0{,}21,$$

одакле

$x = 17{,}85$ или заокругљено $x = 18$ јединица

у седмоме десетном месту (дакле управо $x = 0{,}000\,0018$), које кад одузмемо од $\log a =$

за промену броја	промена логаритма
од 0,7	$= 59{,}5 \left(= 7 \times \frac{85}{10}\right)$,
„ 0,09	$= 7{,}65 \left(= 9 \times \frac{85}{100}\right)$

и да, према томе, промени броја од $0{,}7 + 0{,}09 = 0{,}79$ одговара у логаритму промена од $59{,}5 + 7{,}65 = 67{,}15$ јединица у седмоме десетном месту, коју кад додамо логаритму броја 50863 добијамо логаритам броја 50863,79.

1. *Напомена.* Место да логаритам задатога броја израчунавамо из логаритма мањег броја, додавањем извесне поправке, можемо, на сличан начин, да нађемо тај логаритам из логаритма већег броја, кад од овога одузмемо извесан сразмерни део. Н. пр. у горњем примеру јесте разлика између већега и задатог броја

$$a - c = 50864 - 50863{,}79 = 0{,}21.$$

Таблице нам дају

$$\log a - \log b = 0{,}000\,0085.$$

На основу горе наведенога става постављамо пропорцију

$$85 : x = 1 : 0{,}21,$$

одакле

$x = 17{,}85$ или заокругљено $x = 18$ јединица

у седмоме десетном месту (дакле управо $x = 0{,}000\,0018$), које кад одузмемо од $\log a =$

4,706 4105, добијамо, као и горе, $\log c = 4{,}706\,4087$.

2. *Напомена*. У Алгебарској Анализи доказује се да је

$$l(b+d) - lb =$$

$$\frac{d}{b} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{b}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{d}{b}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{d}{b}\right)^4 + - \cdots \qquad (\alpha$$

или, ако ставимо $b + d = a$, дакле $d = a - b$,

$$la - lb =$$

$$\frac{a-b}{b} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{b}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{b}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{b}\right)^4 + - \cdots \qquad (\beta$$

а за *Бриг*-ове логаритме

$$\log a - \log b =$$

$$m\left[\frac{a-b}{b} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{b}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{b}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{b}\right)^4 + - \cdots\right], (\gamma$$

где је m модуо *Бриг*-ове системе (в. чл. 39.). Овде се претпоставља да је $d < b$ или дакле $a - b < b$. На десној страни образаца α, β и γ имамо један такозвани бесконачан збирљив ред, који је у толико наглије збирљив (т. ј. чији чланови у толико брже опадају) у колико је разлика $a - b$ мања наспрам броја b. У случају да је $a - b$ веома мало наспрам b можемо у томе реду, без бојазни да ћемо учинити осетну грешку, да занемаримо све чланове према првоме члану. На тај начин добијамо из обрасца γ ову простију једначину

$$\log a - \log b = m\,\frac{a-b}{b}. \qquad (\delta$$

Тако исто, у претпоставци да је $c - b$ довољно мало наспрам b, следује

$$\delta') \qquad log\, c - log\, b = m \frac{c - b}{b},$$

која, упоређена са прошлом једначином δ, даје пропорцију 46)

$$log\, a - log\, b : log\, c - log\, b = a - b : c - b.$$

Врло лако је уверити се да грешка, коју чинимо примењујући ову сразмеру 46 (или образац 46_a) на израчунавање логаритама бројева који леже између два узастопна цела петоцифрена броја, не утиче ни на осмо десетно место логаритамске мантисе. Из обрасца γ видимо да је грешка, означимо је са R, коју чинимо, узев тај образац у скраћеној форми δ, мања од другог члана у горњем реду, т. ј.

$$R < \frac{m}{2}\left(\frac{a - b}{b}\right)^2,$$

а ово је у толико мање у колико је број b већи. По себи се разуме да је сразмера 46, па дакле и образац 46_a, на истоме ступњу тачности на коме су и једначине δ и δ'.

Узмимо најнеповољнији случај, а то је да су бројеви a и b, између којих лежи задати број c, најмањи петоцифрени бројеви и ставимо $a = 10\,001$, $b = 10\,000$, тако да је задати број $c = 10\,000 +$ једноме чистом десетном разломку. Имавши на уму да је $m < 0{,}5$ следује

$$R < \frac{0{,}5}{2}\left(\frac{10\,001 - 10\,000}{10\,000}\right)^2 = \frac{0{,}5}{2} \times \frac{1}{100\,000\,000}$$

или дакле

$$R < 0{,}000\,000\,003.$$

Примери.

1) $$log\,70{,}79428 = ?$$

Потражићемо $log\,70794{,}28$, који лежи између $log\,70795$ и $log\,70794$.

Из таблица (на стр. 127.) налазимо

$$log\,70795 = 4{,}850\,0026$$
$$log\,70794 = 4{,}849\,9965$$

$$log\,70795 - log\,70794 = 0{,}000\,0061,$$

дакле 61 јединица у седмоме десетном месту.

Поправку x, коју треба додати логаритму мањег броја па да добијемо логаритам задатога броја, израчунаћемо из сразмере

$$61 : x = 1 : 0{,}28,$$

одакле

$$x = \frac{61 \times 28}{100} = 17{,}08$$

или заокругљено

$x = 17$ јединица у седмоме десетном месту.

Према томе је

$$log\,70794{,}28 = 4{,}849\,9965 + 0{,}000\,0017 = 4{,}849\,9982$$
$$log\,70{,}79428 = 1{,}849\,9982.$$

Но, место да сами израчунавамо поправку x, ми читамо из табличице (*P. P.*) под 61 да је

за промену у броју	промена у логаритму
од 2 десете	$= 12{,}2$
„ 8 стотих	$= 4{,}88,$

дакле

за промену у броју од 0,28 промена у логаритму $= 17{,}08$ јединица у седмоме десетном месту.

2) $$\log 937{,}05136 = ?$$

Из таблица (на стр. 173.) налазимо

$$\log 93706 = 4{,}971\,7674$$
$$\log 93705 = 4{,}971\,7628$$

$\log 93706 - \log 93705 = \cdots\cdot$ 46 јединица у седмом десетном месту.

Поправку x добијамо или помоћу сразмере

$$46 : x = 1 : 0{,}136,$$

одакле

$$x = \frac{46 \times 136}{1000} = 6{,}256$$

или помоћу табличице (*P. P.*) под бројем 46. Из ње видимо да је

за промену у броју:	промена у логаритму:
од 0,1	= 4,6
„ 0,03	= 1,38
„ 0,006	= 0,276
од 0,136	= 6,256.

Према томе је дакле

$$\log 937{,}05136 = 2{,}971\,7628 + 0{,}000\,0006 = 2{,}971\,7634.$$

3) $$\log 38742028 = ?$$

У таблицама (на стр. 63.) имамо

$$\log 38743 = 4{,}588\,1932$$
$$\log 38742 = 4{,}588\,1820$$

$\log 38743 - \log 38742 = \cdots$ 112.

Поправку x добијамо из сразмере

$$112 : x = 1 : 0{,}028,$$

одакле

$$x = \frac{112 \times 28}{1000} = 3{,}136$$

или из табличице (*P. P.*) под бројем 112, која показује да

промени у броју:	одговара промена у логаритму:
0,02	2,24
0,008	0,896
0,028	3,136.

Према томе је

$log\ 38742028 = 7{,}588\ 1820 + 0{,}000\ 0003 = 7{,}588\ 1823.$

53. **Тражење броја.** — Узмимо да нам је дат логаритам и ми треба да нађемо број, коме тај логаритам припада.

Пошто карактеристика логаритма одређује само место на коме треба ставити десетни знак, а ни уколико не утиче на ред цифара из којих је дотични број састављен, то о њој и не треба даље водити рачуна. Запазићемо, дакле, само логаритамску мантису и њу ћемо, као што је и у таблицама учињено, поделити на две групе: једну која се састоји из прве три и другу коју образују последње четири цифре.

Да бисмо нашли она два таблична логаритма, између којих лежи задати логаритам и помоћу њих нашли она два узастопна петоцифрена броја, од којих је један мањи а други већи од броја који тражимо (замишљајући овај као један нечист десетан разломак са пет цифара у целима), — ми, пре свега, тражимо страну (од 6-те до 185-те) на којој се, у другоме ступцу (са натписом 0), налази прва, троцифрена, група мантисе. Затим сравњујемо другу, четвороцифрену, мантисну групу задатога логаритма са табличним четвороцифреним групама које важе као допуне нађеној троцифреној групи.

Ако задатак не захтева више но пет цифара у логаритманду, онда треба узети оних пет цифара које одговарају логаритму, који је нашем најближи, било да је то онај мањи или онај већи логаритам.

Нека је н. пр. задати логаритам ово

$$\log c = 1{,}828\,9068$$

и претпоставимо да се у броју c не траже више од три десетна места. Отуда што је значица логаритма 1, дакле број цифара целих у логаритманду раван 2, следује да је довољно да нађемо свега пет цифара од броја c. У ту циљ потражићемо у ступцу са натписом 0 прву мантисну групу 828 и пошто је нађемо (на стр. 120.) ми упоређујемо ону другу мантисну групу 9068 са табличним четвороцифреним групама, које се односе на нађену групу 828. На тај начин налазимо да наша група 9068 лежи између ових двеју 9047 и 9111. Прве четири цифре 6743 логаритманда, које одговарају табличним групама 9047 и 9111, у свези са њима заједничком троцифреном групом 828, стоје у истоме реду са њима у (првоме) ступцу под N, а пете цифре 8 и 9 у врху дотичних стубаца, у којима су мантисне групе 9047 и 9111.

И заиста добијамо обратно да је

за број 67438 логаритамска мантиса $= 0{,}828\,9047$

„ „ 67439 „ „ $= 0{,}828\,9111$.

Ако узмемо ону исту карактеристику коју има $\log c$ можемо овако да напишемо

$\mathrm{num}\,\log 1{,}828\,9047 = 67{,}438$, јер је $\log 67{,}438 = 1{,}828\,9047$

$\mathrm{num}\,\log 1{,}828\,9111 = 67{,}439$, „ „ $\log 67{,}439 = 1{,}828\,9111$.

Из тога што задати логаритам лежи између ова два таблична логаритма закључујемо да је

$$67{,}438 < c < 67{,}439.$$

Но пошто је мањи логаритам, по својој вредности, задатоме логаритму ближи од онога већег и пошто се у броју c не траже више од три десетна места, треба узети $c = 67{,}438$.

На случај да је $log\, c = 0{,}828\,9068 - 2$ ми бисмо се, не тражећи у броју c више од три десетна места, задовољили са прве две цифре логаритманда и ставили бисмо $c = 0{,}067$. Узев свих пет цифара: $c = 0{,}067438$ имали бисмо резултат тачан на шест десетних места. И т. д.

У случају да је за тачност резултата потребно имати више од пет цифара броја c послужићемо се ставом, који смо у сличном циљу већ употребили (в. једн. 46 и 46_a у чл. 52.), израчунавши поправку, коју треба додати оној од броја c мањој петоцифреној вредности како бисмо нашли што тачнију вредност логаритманда c.

Останимо при горњем примеру

$$log\, c = 1{,}828\,9068.$$

Помоћу таблица (стр. 120.) нашли смо да је

$$1{,}828\,9047 < log\, c < 1{,}828\,9111,$$

дакле

$$67{,}438 < c < 67{,}439.$$

Да бисмо за c добили тачнију вредност но што је петоцифрени број 67,438 применићемо сразмеру 46, која, кад је решимо по непознатој c, гласи

$$46_b) \qquad c = b + \frac{\log c - \log b}{\log a - \log b}(a - b).$$

Одавде, кад ставимо за $\log c$ задату вредност,

$$\log a = 1{,}828\,9111 \qquad a = 67{,}439$$

$$\log b = 1{,}828\,9047 \qquad b = 67{,}438,$$

следује

$$c = 67{,}438 + \frac{1{,}828\,9068 - 1{,}828\,9047}{1{,}828\,9111 - 1{,}828\,9047}(67{,}439 - 67{,}438)$$

$$= 67{,}438 + \frac{21}{64} \times 0{,}001 = 67{,}438 + 0{,}000328 \cdots$$

$$= 67{,}438\,328 \cdots$$

Поправку $0{,}000\,328 \cdots$, означимо је са y, коју смо додали мањем броју b и на тај начин добили тачнију вредност за број c, налазимо помоћу простог правила тројног. За разлику 1 у последњем (овде трећем десетном) месту између два броја a и b разлика њихових логаритама $\log a - \log b$ износи 64 јединице у седмоме десетном месту; колика мора, онда, да буде разлика y између два броја c и b, кад је разлика њихових логаритама $\log c - \log b = 21$ јединицу у седмоме десетном месту. На основу става, који је исказан сразмером 46, имамо

$$0{,}001 : y = 64 : 21,$$

одакле

$$y = \frac{21}{64} \times 0{,}001$$

и пошто нађемо y, које је $= c - b$, налазимо $c = b + y$. Множење количника $\frac{21}{64}$ са 0,001 показује да је вредност поправке y изражена у јединици последњег, овде дакле трећега, десетног места броја b, коме додајемо ту поправку. Сасвим уопште: поправка је изражена у јединици пете цифре логаритмандове; то значи да нам она даје цифре које следују петој цифри, т. ј. шесту, седму, осму, $\cdots$ цифру у логаритманду. И заиста ми примећујемо у овоме примеру да, када се пета цифра логаритманда промени за 1 (т. ј. место броја $b = 67{,}438$ узмемо број $a = 67{,}439$), логаритам се мења за 64 јединице у седмоме десетном месту. Међутим разлика између задатог логаритма $\log c$ и онога, $\log b$, који је одма до њега мањи износи само 21 јединицу у седмоме десетном месту. Отуда следује да је разлика између броја c (који тражимо) и (познатог) броја b мања но између (познатих) бројева a и b, т. ј. мања од једне целе јединице у петој цифри. На име јесте разлика $c - b = \frac{21}{64}$ јединице пете цифре. Према томе, дакле, ако количник $\frac{21}{64}$ представимо у виду десетног разломка, онда ће његове десете, стоте, хиљадите, $\cdots$ дати нам шесту, седму, осму, $\cdots$ цифру логаритманда c.

Израчунавање поправке y можемо себи да уштедимо употребом табличица $P. P.$ У нашем примеру имамо да узмемо табличицу под бројем 64, у којој су израчунате мантисне разлике за сваки десети део јединице промене броја 67438 у његовој петој цифри. Из мантисне промене у стању смо, обратно, да одредимо промену у броју изражену у десетим, стотим, хиљадитим, $\cdots$ деловима јединице пете цифре логаритмандове. Пошто смо нашли да је разлика између задатога логаритма и онога од њега мањег табличног логаритма равна 21 (јединицу у седмоме месту мантисе) ми са том разликом идемо у табличицу под бројем 64. Из ње видимо да је логаритамској разлици 21 најближа мања вредност 19,2, којој у броју одговара промена од 3 десете у јединици пете цифре. Овај број 3 је, према томе, шеста цифра у логаритманду c. Седму цифру добићемо кад, у табличици, потражимо бројну промену за логаритамску разлику $10 \times (21 - 19{,}2) = 18$. Овој вредности је најближа мања логаритамска разлика 12,8, којој одговара цифра 2. Идућу, осму, цифру налазимо на сличан начин: кад образујемо $18 - 12{,}8 = 5{,}2$, помножимо то са 10, узмемо дакле 52 и за ту логаритамску разлику потражимо бројну промену, која је $= 8$. И т. д. Првих осам цифара у логаритманду c јесу дакле 67438328, а с обзиром на карактеристику треба ставити $c = 67{,}438328$.

1. *Напомена.* Тражити више од осам цифара у логаритманду нема смисла, зато што већ и осма цифра није сасвим сигурна.

2. *Напомена.* Ако је број цифара целих у логаритманду већи од броја цифара које нам таблице могу поуздано дати, онда треба на десној страни логаритманда додати потребан број нула.

Н. пр. ако је

$$log\, c = 9{,}828\,9068,$$

тако да број c мора имати десет цифара у целима, док нам таблице, међутим, дају једва осам цифара са сигурношћу, а то су цифре

67438328, ми додајемо натраг још две нуле и стављамо

$$c = num\ log\ 9{,}828\ 9068 = 6743832800.$$

Примери.

1) $$num\ log\ 3{,}902\ 1925 = ?$$

Помоћу прве, троцифрене, мантисне групе 902 налазимо (на стр. 145.) оне две мантисе између којих лежи задата мантиса, а то су ове две

$$0{,}902\ 1933\ (> 0{,}902\ 1925)$$

и

$$0{,}902\ 1879\ (< 0{,}902\ 1925).$$

Разлика њихова јесте $= 54$, а разлика између задате и оне мање табличне мантисе јесте $= 46$ (јединица у седмоме десетном месту).

Првих пет цифара броја c, а то су 79834, добијамо кад узмемо логаритманд за мању табличну мантису 0,902 1879, а идуће цифре (шесту, седму и осму) помоћу сразмере

$$54 : 46 = 1 : y,$$

одакле

$$y = \frac{46}{54} = 0{,}852.$$

Место тога можемо у табличици *P. P.* под бројем 54 да потражимо мантисну разлику, која је најближа разлици 46 и тој разлици 43,2 одговарајући број 8 да узмемо као шесту цифру у логаритманду c. Затим ћемо образовати 46 — — 43,2 = 2,8, помножити то са 10, т. ј. узећемо 28, и тој вредности одредити (у табличици *P. P.*) најприближнију (али од ње мању) мантисну разлику 27,0, којој припада број 5. То је седма цифра у логаритманду. Осму цифру налазимо кад 28 — 27,0 = 1 помножимо са 10 и мантисној разлици 10,8, која је тој вредности најближа, узмемо одговарајући број 2.

Логаритманд c састоји се, дакле, из ових осам цифара 79834852 и с обзиром на карактеристику 3 треба ставити

$$c = 7983{,}4852.$$

2) $$num\ log\ 1{,}413\,6279 = ?$$

У другоме ступцу (који има натпис 0) потражићемо троцифрену групу 413 и наћићемо (на стр. 37.) мантисе

$$413\,6182 \text{ и } 413\,6350,$$

између којих се налази задата мантиса 413 6279.

Разлика између ових двеју табличних мантиса јесте $= 168$, а између задате и оне мање мантисе разлика је $= 97$.

Првих пет цифара логаритманда c јесу 25 919 (а то је логаритманд за табличну мантису 413 6182). Остале цифре следују из сразмере

$$168 : 97 = 1 : y,$$

одакле

$$y = \frac{97}{168} = 0{,}577.$$

Ми их добијамо и помоћу табличице *P. P.* под бројем 168. Из ње видимо да је

разлици	најближа мања разлика	којој одговара број
97	84	5,
$10 \times (97 - 84) = 130$	117,6	7,
$10 \times (130 - 117{,}6) = 124$	117,6	7.

Према томе је c или

$$num\ log\ 1{,}413\,6279 = 25{,}919\,577.$$

3) $$num\ log\ 7{,}271\,0834 = ?$$

На стр. 23. налазимо троцифрену групу 271. Пошто су све четвороцифрене групе, које се налазе у истоме реду са 271, па разуме се и оне у следећим редовима, веће од наше четвороцифрене групе 0834, то нам ваља тражити у претходећем реду међу групама над чијом првом цифром стоји цртица, као знак који показује да и за њих вреди троцифрена група 271. На тај начин добијамо ове две мантисе

$$271\,0745 \text{ и } 271\,0978,$$

од којих је једна мања, а друга већа од задате мантисе.

Разлика између ових двеју табличних мантиса износи 233, а разлика између задате и мање мантисе јесте = 89.

Првих пет цифара непознатога броја c добијамо узев петоцифрени логаритманд за табличну мантису 271 0745. То су, дакле, цифре 18667. Идуће цифре налазимо из сразмере

$$233 : 89 = 1 : y,$$

одакле

$$y = \frac{89}{233} = 0{,}382$$

или помоћу табличице $P. P.$ под бројем 233. Из ње читамо да је

разлици	најближа мања разлика	којој одговара број
89	69,9	3,
$10 \times (89 - 69{,}9) = 191$	186,4	8,
$10 \times (191 - 186{,}4) = 46$	46,6	2.

Према томе имамо поуздано ових осам цифара 18667382. Дакле

$$c = 18667382.$$

3.

Логаритамске таблице за тригонометриске бројеве.

54. **О логаритамско-тригонометриским таблицама у опште.** — Логаритамско-тригонометриске таблице дају нам логаритме тригонометриских функција за углове у првоме квадранту.[1]) Помоћу таквих таблица

[1]) Ми знамо да се тригонометриске функције тупих углова могу, врло лако, да сведу на тригонометриске функције оштрих углова (в. чл. 14.).

ми смо у стању да и обратно из логаритма ма које тригонометриске функције једнога угла одредимо сам угао.

Употреба логаритамско-тригонометриских таблица састоји се, дакле, у следећем:

1) кад је дат један угао да се нађе логаритам ма које тригонометриске функције тога угла; и

2) кад је дат логаритам једне тригонометриске функције каквога угла да се одреди дотични угао.

У свези са логаритамским таблицама за обичне бројеве могу горња питања и овако да се поставе:

1) дат је један угао; тражи се ма која тригонометриска функција тога угла; и

2) позната је вредност ма које тригонометриске функције једнога угла; тражи се тај угао.

Примедба. Прве покушаје израчунавања тригонометриских функција учинио је, без сумње, *Хипарх* (Hipparch, рођен у Никеји — Nicäa — у Битинији — Bithynien), творац научне Астрономије и Тригонометрије, као њене помоћне науке. *Хипарх,* чија астрономска посматрања на острву Родос (Rhodos) или у Александрији падају између 161. и 126. пре Хр., написао је у 12 књига Науку о тетивима у кругу израчунавши и једну таблицу за тетива. Овај његов рад, на пољу Тригонометрије, који је, по свој прилици, извршен око 150. пре Хр., познајемо само из причања *Теона* (Theon) из Александрије, који је писао око 365. после Хр.

После *Хипарха* ред је да поменемо *Менелаја* (Menelaus) из Александрије за кога знамо да је год. 98. после Хр., за време владе *Трајана,* извршио два астрономска посматрања у Риму. *Менелај* је написао 6 књига о израчунавању тетива, које су, као и оне *Хипарх*-ове, изгубљене. Његове 3 књиге из Науке о лопти, које нам у оригиналу (на јелинскоме) такође нису познате, но само у преводима (арапскоме и јеврејском) јесу нека врста Сферне Тригонометрије.

Клаудије Птолемеј (Klaudius Ptolemäus, живио је у Александрији у првој половини 2. столећа после Христова рођења) довршио је што су *Хипарх* и *Менелај* били отпочели служећи се, вероватно, радовима ова његова два велика претходника. *Птолемеј* је дао Тригонометрији тако савршену форму да је она више од хиљаду година остала ненадмашена и владала Науком не мање, а извесно са више успеха, но она под именом птолемејеве системе позната Теорија о кретању небесних тела. Његов из 13 књига састојећи се спис, астрономске и тригонометриске садржине, носи натпис μεγάλη συνταξις, који је доцније, приликом превођења с арапског језика на латински и додавањем грчкој речи μέγιστος арапски члан al, претворен у име *Алмагест* (Almagest), под којим је опште познат. За нас је од интереса прва књига Алмагеста, у којој је израчуната таблица за тетива. *Птолемеј* дели периферију круга на 360 делова и сваки такав део он полови још. Пречник круга подељен је на 120 делова (полупречник дакле на 60) и та подела продужује се по сексагезималној системи на мање јединице: на 60 првих и 60 других делова, који су у латинскоме преводу назвати partes minutae primae и partes minutae secundae из чега су остали језици начинили називе *минута* и *секунда*. Међутим заслуга *Птолемеја* не лежи у начину ове поделе, која је, без сумње, и пре њега постојала, но у самоме израчунавању тетива. Полазна тачка у овоме израчунавању то је познати *Птолемеј*ев став о тетивном четвороугаонику, који гласи да је производ из дијагонала раван збиру производа из две и две супротне стране. Осим тога израчунавање је основано на познавању извесних тетива, а то су стране у круг уписаних правилних троуглова, четворо-, пето-, шесто- и десетоугаоника, као тетива за лукове од 120^0, 90^0, 72^0, 60^0 и 36^0. Помоћу тетива двају лукова може да се израчуна тетиво разлике и збира од та два лука; из тетива једнога лука налази се тетиво половине тога лука. Тако из познатих тетива за лукове од 72^0 и 60^0 израчунава *Птолемеј* тетиво за лук од $72^0 - 60^0 = 12^0$, а одавде опет тетива за лукове од 6^0, 3^0, $1^0 30'$, $45'$. Да би добио тетиво за лук од 1^0 *Птолемеј* примењује једну методу која се одликује великом елеганцијом, и пошто је то израчунао добија тетиво за лук од $1^0 30' - 1^0 = 30'$. Помоћу ове последње вредности израчуната је таблица тетива за лукове од 0 до 180^0 од пола до пола степена. За израчунавање тетива таквих лукова, који леже између два таблична лука постоје табличице за сразмерне делове, где *Птолемеј* полази са претпоставке да су у размаку од $\frac{1^0}{2}$ (или $30'$) промене у тетивима сразмерне променама у луцима.

Други један одломак у овој 1. књизи Алмагеста бави се Тригонометријом и то нарочито Сферном.

Први радови на пољу Тригонометрије показују да је ова постала због њене примене у Астрономији. У томе лежи објашњење зашто је Сферна Тригонометрија далеко пре усавршена но што је Равна Тригонометрија. Тако исто и доцније она прва израчунавања тригонометриских функција учињена су због астрономске потребе.

Око половине 9. века после Хр. заменио је арапски астроном *Албашегније* тетива полутетивима под именом џаиб, одакле је латински преводилац *Плашо од Тиволи* начинио реч sinus[1].) Ову значајну, и ако незнатно изгледајућу, новину *Албашегније* није учинио случајно, већ са потпуним разумевањем њенога значаја давајући у својој Астрономији. која садржи у исто време и Тригонометрију, разлоге томе одступању од Алмагеста. Осим тога вредно је напоменути да је код *Албашегнија* употреба Тригонометрије на чисто алгебарској основи тако да је њено геометриско порекло већ заборављено.

Георг од Пурбах (Georg von Purbach или Peurbach рођен 1423. у месту Peurbach недалеко од Линца, умро 1461. у Бечу) израчунао је синусе углова од 10 до 10 минута за полупречник 600 000. Ове таблице изгледа да нису штампане. Спису de Quadrato geometrico (штампан у Нирнбергу 1516.), у којем је *Пурбах* описао један нови инструменат за посматрање, придате су таблице за одређивање углова чија је тангента један од бројева између 0 и 1200 узев полупречник = 1200, дакле за углове од 0 до 45° изражене у степенима, минутама и секундама.

Јоханес Милер или *Јоханес Региомонтан* (Johannes Müller, Regiomontanus или како је се и сам звао Joannes de Monte Regio, Johannes Germanus, Johannes Francus или Kunisperger по варошици Königsberg, Herzogthum Coburg у којој се родио 1436.; умро у Риму 1476.) израчунао је две синусне таблице: једну за полупречник 6 000 000, а другу за полупречник 10 000 000. Углови иду од минуте до минуте. Ове таблице, заједно са једним *Пурбах*-овим списом, издао је *Јоханес Шонер* (Johannes Schoner или Schöner, Karlstad 1477. — Нирнберг 1547.) године 1541. у Нирнбергу. Све до *Региомонтана* тригонометриске таблице садржавале су само синусе. *Региомонтан* је додао тангенте и назвао је ове таблице, због њихове корисне употребе, tabulam foecundam. У једним *Региомонтан*-овим астрономским таблицама налазе се тангенте за полупречник 100 000, али само за целе степене.

---

[1]) В. примедбу на крају чл. 9.

Славни реформатор Науке о нашој сунчаној системи *Никола Коперник* (Nicolaus Copernicus или Koppernigk, Thorn 1473. — Frauenburg 1543.), у тригонометрискоме делу свога знаменитог списа de revolutionibus orbium coelestium, Нирнберг 1543., издао је једну синусну таблицу за сваки 10′ углова од 0 до 90° у полупречнику 100 000.

Још пре ових таблица штампао је *Георг Јоахим*, назват *Решик* (Georg Joachim, Rhäticus, Фелдкирх 1514. — Кашава 1576.), у Витенбергу (Wittenberg) год. 1542. спис de lateribus et angulis triangulorum libellus, који није ништа друго до онај тригонометриски део горе наведеног *Коперник*овог списа. *Решик* је, међутим, заменио *Коперник*ову таблицу својом синусном таблицом за сваку минуту у полупречнику 10 000 000. Таблицама дао је распоред који оне и данас имају: са натписима и потписима, који се допуњују до 90°.

Године 1596. *Валентин Ото* (Valentin Otho, *Решиков* ђак и помоћник) издао је таблице *Решика*, кога је смрт прекинула у раду, под насловом Opus Palatinum de Triangulis. Оне су израчунате за синус, тангенту и, први пут заведену, секанту[1]) за углове у размаку од 10″ у полупречнику 10 000 000 000 (т. ј. на десет десетних места). Таблицама је придата, осим упутства за израчунавање њихово, целокупна Равна и Сферна Тригонометрија. — *Решик* је израчунао још једне веће таблице, на 15 десетних места, за углове у размаку од 10″. Код првог и последњег степена узет је размак од 1″. Ове таблице издао је под именом Thesaurus mathematicus год. 1613. свештеник *Bartholomäus Pitiscus* (Шлезија 1561. — Хајделберг 1613.), који је, по свој прилици, први употребио име *Тригонометрија*.

Проналазак Вишега Рачуна открио је нове, несравњено краће и брже, методе за израчунавање тригонометриских функција. Велике олакшице, у томе погледу, створио је славни математичар *Леонхард Ајлер* (Leonhard Euler, Базел 1707. — Петроград 1783.).

Зарад лакшега множења и дељења великих тригонометриских бројева *Непер* је пронашао логаритме саопштивши своје откриће таблицама за (природне) логаритме синуса и тангенте год. 1614.[2])

Бриг, узев за основицу број 10, израчунао је таблицу за логаритме синуса и тангенте за сваки стоти део степена

[1]) У исто време са *Решик*ом израчунао је у Сицилији *Франческо Мауролико* (Francesco Maurolico или латинизирано Maurolycus, 1494.—1575.) таблицу секаната, коју је назвао tabulam beneficam.

[2]) В. примедбу под 1) на стр. 88.

на 14 десетних места и једну таблицу природних синуса на 15, тангената и секаната на 10 десетних места. У намери да напише Упутство за употребу његових таблица *Бриг* умре и *Henry Gellibrand* (Лондон 1597. — Лондон 1637.) изда те таблице под именом Trigonometria Britannica год. 1633.

Влак, који је, као што знамо, допунио *Бриг*-ове таблице за логаритме обичних бројева,[1]) додао је овима још и логаритме синуса, тангенте и секанте на 10 десетних места за сваку минуту. Служећи се *Ретик*овим Каноном *Влак* је израдио и штампао год. 1633. своју Trigonometria artificialis, sive magnus Canon triangulorum logarithmicus, etc. где се налазе логаритми синуса и тангенте од 10 до 10 секунада на 10 десетних места.

Ова два велика и ретка *Влак*ова дела, Arithmetica logarithmica и Trigonometria artificialis, прештампао је, са извесним поправкама, изменама и допунама *Вега* (Georg Freiherr von Vega, Загорица 1756. — Nussdorf код Беча 1802.) у својој класичној Збирци Thesaurus Logarithmorum completus. Lipsiae 1794.

У Француској, за време Велике Револуције, поводом завођења нове, десетне, поделе кружне периферије, предузме *Борда* (Jean-Charles Borda, Dax 1733. — Париз 1799.) израчунавање логаритамских таблица за тригонометриске и за обичне бројеве. Пошто *Борда* умре, имавши још само Увод да напише, то је ове таблице издао доцније *Деламбр* (Jean-Baptiste-Joseph Delambre, Amiens 1749. — Париз 1822.) под именом Tables trigonométriques décimales. A Paris, An IX (1795.).

Сличне таблице за десетну поделу квадранта издали су у Берлину год. 1799. берлински професори *Хоберт* (Johann Philipp Hobert, Берлин 1759. — Берлин 1826.) и *Иделер* (Ludwig Jdeler, Gross-Brese 1766. — Берлин 1846.).

Осим ових, до сада наведених, радова треба да поменемо још и следећа издања, која важе као класична.

Sherwin's mathematical tables, the third edition, carefully revised and corrected by W. Gardiner. London 1742.

Gardiner. Tables of Logarithms, for all numbres from 1 to 102 100, and for the sines and tangent, to every ten seconds of each degree in the quadrant, al also for the sines of the first 72 minutes to every single second, with other useful and necessary tables. London. 1742.

Оба ова издања, као и нови отисак *Гардинер*-ових таблица, који је приређен год. 1770. у Авињону (Avignon) и коме

---

[1]) В. примедбу под 4) на стр. 88 и 89.

су додати логаритми синуса и тангенте за сваку секунду прва четири степена, сматрају се као ванредно тачна и употребљива.

Joh. Karl Schulze. Sammlung logarithmischer, trigonometrischer, und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlichen Tafeln. Berlin, 1778. 2 Bände. За прва два степена израчунати су логаритми синуса и тангенте за сваку секунду. Придати су *Бриг*-ови и *Непер*-ови логаритми из *Урзин*-овог великог Канона. Тригонометриски бројеви и њихови логаритми израчунати су за прва и последња четири степена за сваки десет секунада, а код осталих степена за сваку целу минуту.

Овде је место да поменемо табличне збирке заслужног *Веге*. Његове прве таблице, које су штампане у Бечу год. 1783., садрже оно што је најважније из *Шервин*-ових таблица и осим тога још за првих и последњих пет степени логаритме тригонометриских бројева од 10 до 10 секунада. За овим долази *Вегин* Logaritmisch-trigonometrisches Handbuch, Leipzig 1793., који не садржи саме тригонометриске бројеве, но њихове логаритме. Потпуније издање изашло је у Лајпцигу год. 1797. у 2 свеске. Ону његову велику збирку поменули смо већ горе.

Врло тачне и за употребу добро удешене јесу Tables portatives de Logarithmes, par François Callet. Edition stéréotype, à Paris, An IX (1795.). Код првих пет степени израчунати су логаритми синуса и тангенте за сваку секунду, а код осталих степена од 10 до 10 секунада старе (сексагезималне) поделе на 7 десетних места. Осим тога ове таблице садрже логаритме синуса и тангенте за сваку минуту нове (десетне или центезималне) поделе на 7 десетних места. Најзад израчунати су природни синуси за сваки десети део степена десетне поделе заједно са њиховим логаритмима; обоје на 15 десетних места.

Напомена. Ови историски податци узети су из Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. I и II и из *G. M. Klügel. Mathematisches Wörterbuch. Erster Theil. Artikel: Cyklotechnie.*

55. Употреба логаритамско-тригонометриских таблица. — Пошто смо у чл. 52. објаснили употребу првога дела под I *Вегиних* таблица, у коме су сложени логаритми обичних бројева, узмимо сада на расматрање други део под II (стр. 188.—287.), где се налазе логаритми синуса и тангенте за сваку секунду првих пет степени, односно логаритми косинуса и котангенте углова од 85^0 до 90^0.

а) Отворивши књигу имамо на левој (т. ј. парним бројем нумерисаној) страни логаритме синуса, а на десној (непарно нумерисаној) страни логаритме тангенте. Степени и минуте означени су горе, у врху, а секунде на левој ивици стране, у првоме ступцу. Ови логаритми синуса и тангенте углова од 0 до 5^0 јесу у исто време логаритми косинуса и котангенте комплементних углова између 85^0 и 90^0, чији су степени и минуте забележени доле, у дну, а секунде на десној ивици стране, у последњем ступцу.

Тако н. пр. читамо

$$\log \sin 3^0\, 27'\, 52'' = \log \cos 86^0\, 32'\, 8'' = 8{,}781\, 2463$$

$$\log tg\, 2^0\, 19'\, 36'' = \log cotg\, 87^0\, 40'\, 24'' = 8{,}608\, 8503.$$

Отуда, што су синуси и косинуси за све углове, а тангенте за углове између 0 и 45^0, мањи од јединице, следује да су њихови логаритми одречни. Ови одречни логаритми претворени су у таблицама у положне логаритме, узимајући за сваки логаритам његову десетну допуну (в. чл. 42.). Према томе се код свакога табличног логаритма има додати (ма и у мислима само) одречна карактеристика — 10. Тако код горња два примера јесте

$$\log \sin 3^0\, 27'\, 52'' = \log \cos 86^0\, 32'\, 8'' = 8{,}781\, 2463 - 10$$
$$= -1{,}218\, 7537$$

$$\log tg\, 2^0\, 19'\, 36'' = \log cotg\, 87^0\, 40'\, 24'' = 8{,}608\, 8503 - 10$$
$$= -1{,}391\, 1497.$$

b) Претпоставимо да се тражи логаритам једне тригонометриске функције угла, који садржи и делове једне секунде. Пошто нам ове таблице II дају логаритме тригонометриских функција само за целе секунде, то ћемо имати да извршимо један мали рачун сличан ономе при израчунавању сразмерних делова за логаритме бројева који се састоје из више цифара но што их таблице непосредно дају. Поступак је овај: узимамо разлику из она два узастопна таблична логаритма, која припадају угловима (од целих секунада) између којих лежи задати угао, множимо ту логаритамску разлику са десетним разломком у секундама датога угла и додајемо или одузимамо тај производ од логаритма мањега угла, према томе да ли функција, чији се логаритам тражи, расте или опада са растењем угла, т. ј. према томе да ли је функција синусна, тангентна или косинусна, котангентна.

Примери.

1) $\log \sin 2^0\, 48'\, 15{,}716'' = ?$

Из таблица (на стр. 244.) читамо:

$$\log \sin 2^0\, 48'\, 16'' = 8{,}689\ 5508$$

$$\log \sin 2^0\, 48'\, 15'' = 8{,}689\ 5078,$$

одакле таблична разлика $= \quad 430.$

То значи: разлика у углу од $1''$ причињава у логаритмима синуса разлику од 430 јединица у седмоме десетном месту. Према томе, а на основу начела исказатог у једн. 46), промени у углу од $0{,}716''$ одговара промена у логаритму синуса од $430 \times 0{,}716 = 307{,}88$ или заокругљено од 308 јединица у седмоме десетном месту. Отуда, и имавши на уму да синус расте заједно с углом, следује

$$\log \sin 2^0\, 48'\, 15{,}716'' = 8{,}689\ 5078 + 0{,}000\ 0308 = 8{,}689\ 5386.$$

2) $\log tg\, 4^0\, 31'\, 28{,}09'' = ?$

Из таблица (на стр. 279.) налазимо:

$$\log tg\, 4^0\, 31'\, 29'' = 8{,}898\ 3734$$

$$\log tg\, 4^0\, 31'\, 28'' = 8{,}898\ 3467.$$

Таблична разлика ($\log tg\, 4^0\, 31'\, 29'' - \log tg\, 4^0\, 31'\, 28''$) је дакле $= 267$, а поправка $267 \times 0{,}09 = 240{,}3$ или заокругљено 240 јединица у седмоме десетном месту, које, кад додамо логаритму мањег угла (јер тангента расте заједно са углом), даје

$$\log tg\, 4^0\, 31'\, 28{,}09'' = 8{,}898\ 3467 + 0{,}000\ 0240 = 8{,}898\ 3707.$$

3) $\log \cos 89^0\, 7'\, 23{,}146'' = ?$

У таблицама на стр. 204.) налазимо:

$$\log \cos 89^0\, 7'\, 23'' = 8{,}\ 184\ 8325$$

$$\log \cos 89^0\, 7'\, 24'' = 8{,}\ 184\ 6949,$$

одакле таблична разлика $= 1376$

и према томе поправка $= 1376 \times 0{,}146 = 200{,}896$ или у округлој цифри 201, која (пошто косинус опада кад угао расте), кад је одузмемо од логаритма мањег угла, даје

$$\log \cos 89^0\, 7'\, 23{,}146'' = 8{,}184\ 8325 - 0{,}000\ 0201 = 8{,}184\ 8124.$$

4) $\log cotg\, 87^0\, 0'\, 5{,}24'' = ?$

Прво налазимо (на стр. 247.)

$$\log cotg\, 87^0\, 0'\, 5'' = 8{,}719\ 1943$$

$$\log cotg\, 87^0\, 0'\, 6'' = 8{,}719\ 1540.$$

Таблична разлика је $= 403,$

а поправка $403 \times 0{,}24 = 96{,}72$ или дакле 97 и пошто котангента опада кад угао расте, то је

$$\log cotg\, 87^0\, 0'\, 5{,}24'' = 8{,}719\ 1943 - 0{,}000\ 0097 = 8{,}719\ 1846.$$

c) При одређивању угла, за који знамо логаритам ма које његове тригонометриске функције, поступамо онако исто као и при одређивању броја из његова логаритма. Са неколико речи поступак је следећи: прво се траже она два узастопна таблична логаритма између којих лежи задати логаритам, разуме се на оној страни на којој се налазе логаритми дотичне тригонометриске функције. Затим се са разликом из та два таблична логаритма дели разлика из задатога и онога до њега мањег логаритма или разлика из онога већег и задатог логаритма, према томе да ли дотична функције расте или опада са растењем угла, т. ј. према томе да ли је функција синусна, тангентна или косинусна, котангентна. Тако добивени количник из оне две логаритамске разлике даје делове секунде, који се додају углу мањега или углу већега логаритма, према функцији којом је угао одређен.

Примери.

1) $\log \sin \alpha = 8{,}880\,9314, \ \alpha = ?$

У таблицама (на стр. 274.) налазимо ова два синусна логаритма: 8,880 9170 и 8,880 9446, од којих је један мањи, а други већи од задатог логаритма. Њихови углови јесу $4^0\,21'\,35''$ и $4^0\,21'\,36''$.

Разлика из ова два таблична логаритма чини 276 јединица у седмоме десетном месту и њој одговара у углу разлика од $1''$. Разлика из задатога и онога до њега мањег логаритма јесте $= 144$ јединица у седмоме десетном месту. На основу става исказатог у једн. 46) јесте разлика између непознатог нам угла α и угла $4^0\,21'\,35''$, т. ј. угла коме припада онај мањи таблични логаритам, равна $\frac{144''}{276} = 0{,}522''$ и према томе, а с обзиром на то да синус расте заједно с углом,

$$\alpha = 4^0\,21'\,35'' + 0{,}522'' = 4^0\,21'\,35{,}522''.$$

2) $\log \cos \alpha = 8{,}797\,6105, \ \alpha = ?$

У таблицама (на стр. 258.) налазимо

$$8{,}797\,6263 \text{ као } \log \cos 86^0\,24'\,8''$$
$$8{,}797\,5928 \quad „ \quad \log \cos 86^0\,24'\,9''.$$

Разлика из ова два таблична логаритма јесте $= 335$. Пошто косинусна функција опада са растењем угла, то ћемо узети разлику из оног већег и задатог логаритма и ту ћемо разлику од 158 поделити целом (табличном) разликом од 335. Количник $\frac{158}{335} = 0{,}472$ даје делове секунде, које треба додати углу већег логаритма. На тај начин добијамо

$$\alpha = 86^0\,24'\,8{,}472''.$$

Напомена. До истога резултата долазимо кад узмемо разлику из задатога и онога мањег логаритма, а то је 177, поделимо је целом (табличном) разликом 335 и тај количник $\frac{177}{335} = 0{,}528$, као делове секунде, одузмемо од угла мањег логаритма, јер је опет

$$\alpha = 86^0\,24'\,9'' - 0{,}528'' = 86^0\,24'\,8{,}472''.$$

3) $\log tg\, \alpha = 8{,}478\,3985, \ \alpha = ?$

У таблицама (на стр. 223.) налазе се ова два логаритма:

$$8{,}478\,4477 \text{ као } \log tg\, 1^0\,43'\,25''$$
$$8{,}478\,3776 \quad „ \quad \log tg\, 1^0\,43'\,24''.$$

Таблична разлика је $= 701$, а разлика из задатога и мањег логаритма је $= 209$. Одавде следује поправка $\frac{209''}{701} = 0{,}298''$, која, додата углу мањег логаритма, даје

$$\alpha = 1^0\,43'\,24{,}298''.$$

4) $\log cotg\, \alpha = 8{,}574\,3257, \ \alpha = ?$

Из таблица (на стр. 231.) читамо ова два узастопна логаритма котангентне функције

$$8{,}574\,3512 \text{ као } \log\operatorname{cotg} 87^0\,51'\,3''$$
$$8{,}574\,2950 \text{ „ } \log\operatorname{cotg} 87^0\,51'\,4''$$

између којих лежи наш задати логаритам. Таблична разлика је $= 562$. Поправку можемо добити на двојак начин: или кад разлику из већег и задатога логаритма или разлику из задатог и мањег логаритма поделимо табличном разликом. У првом случају треба тај количник $\frac{255}{562} = 0{,}454$, као делове секунде, додати углу већег лотаритма; у другоме случају треба количник $\frac{307}{562} = 0{,}546$, опет као делове секунде, одузети од угла мањега логаритма. У једноме и у другоме случају следује

$$\alpha = 87^0\,51'\,3{,}454''.$$

56. **Продужење прошлог члана.** — *a) Опис шаблица III* (стр. 290.—559.). Ове таблице садрже логаритме синуса, косинуса, тангенте и котангенте за сваку десету секунду углова од 0 па до 90⁰. У првој половини квадранта (од 0 до 45⁰) степени су забележени горе, у врху стране, а минуте и секунде, означени са ′ и ″, лево у првоме и другоме ступцу и за њих вреде горњи натписи појединих стубаца. У другој половини квадранта (т. ј. од 45⁰ до 90⁰) степени стоје доле, у дну стране, минуте и секунде, обележене знацима ′ и ″, налазе се десно у првоме и другоме ступцу и на њих се односе доњи потписи. Степени, минуте и секунде, читајући их одозго и с леве стране, допуњују се са степенима, минутама и секундама, кад их читамо одоздо и с десне стране, до 90⁰. Ове комплементне вредности у угловима стоје у свези са комплементношћу тригонометриских функција којима је један исти стубац нат- и потписан. Стубаца, који садрже логаритме тригонометриских функција, има, на свакој страни, четири и они, од лева на десно

рачунајући, носе натписе Sin, Tang, Cotg и Cos, а у исто време и потписе Cos, Cotg, Tang и Sin. Позната околност да је ма која тригонометриска функција једнога угла равна њеној кофункцији комплементнога угла (в. чл. 8.) узрок је томе да сваки таблични логаритам има ова два значаја: прво као логаритам тригонометриске функције која стоји као натпис дотичног ступца и то за степене, минуте и секунде, који су означени у врху стране односно на левој ивици у истоме реду са логаритмом и друго као логаритам тригонометриске функције којом је дотични стубац потписан и на коју се односе степени у дну стране, а минуте и секунде на десној ивици и у истоме реду са логаритмом који расматрамо.

Разлике између два узастопна логаритма налазе се у нарочитим ступцима. За синус и за косинус разлике се налазе десно и стоје увек између она два логаритма, на које се односе. Ови ступци носе натпис и потпис *d* (differentia). Логаритми тангенте и котангенте имају заједничке разлике. С тога су оне сложене у један исти стубац, који је нат- и потписан са *d. c.* (differentia communis), а лежи између ступаца за Tang и Cotg.

На свакој страни, изузев за првих пет степени,[1]) налазе се мале таблице које су натписане логаритамским разликама и које служе зарад олакшице при израчунавању сразмерних делова за логаритме углова, чија се тачна вредност у таблицама неналази.

Напослетку напоменимо још следеће. Ми знамо да су синуси и косинуси увек < 1, а тако исто и

[1]) За првих пет степени није потребно зато што за њих имамо нарочите, опширне таблице II.

тангенте углова испод 45°. Логаритми таквих функција су, дакле, одречни и у таблицама су они замењени њиховим десетним допунама. С тога треба имати на уму да свакоме табличном логаритму синуса и косинуса, а и логаритмима тангенте за углове између 0 и 45°, припада одречна карактеристика — 10, која, међутим, у таблицама, зарад уштеде у простору, није забележена. Код логаритама тангенте углова од 45° до 90° није узета десетна допуна, пошто они нису негативни и према томе учињена напомена за њих не важи.

b) Тражење логаритма тригонометриских функција. Поступак је у свему сличан ономе при тражењу логаритма обичних бројева. Он је укратко следећи. Ако је задати угао између 0 и 45°, онда читамо степене на темену, минуте и секунде на левој ивици стране и логаритам тражимо у ступцу, који је натписан знаком оне функције чији логаритам хоћемо. На случај да је угао већи од 45°, т. ј. између 45° и 90°, онда степене тражимо у дну, минуте и секунде на десној ивици стране и управљамо се према потписима појединих стубаца. Пошто нам таблице дају логаритме тригонометриских функција само од десет до десет секунада, то смо принуђени да за углове, који леже између два таблична угла, израчунавамо поправке, које се, ако функција расте заједно с углом (као што је код синуса и тангенте), додају, иначе, ако функција опада са растењем угла (као косинус и котангента), одузимају од логаритма мањег угла. Ове поправке, за јединице, десете и стоте делове секунде, израчунавају се онако исто као и поправке за логаритме многоцифрених бројева, т. ј. помоћу сразмере 46) или табличица које су за ту циљ удешене и стоје на ивици дотичних страна.

Примери.

1) $\log \sin 27^0\, 14'\, 35{,}69'' = ?$

Пошто је задати угао $< 45^0$, то треба степене тражити у врху, минуте и секунде на левој ивици стране и треба читати натписе. Таблични углови, између којих лежи задати угао, то су $27^0\, 14'\, 40''$ и $27^0\, 14'\, 30''$. У таблицама (на стр. 453.) имамо

$$\log \sin 27^0\, 14'\, 40'' = 9{,}660\ 6641$$

$$\log \sin 27^0\, 14'\, 30'' = 9{,}660\ 6232,$$

одакле следује таблична разлика 409 јединица у седмоме десетном месту. Отуда, што је разлика између задатога и мањег табличног угла $= 5{,}69''$, а на основу сразмере 46), имамо, за израчунавање поправке, сразмеру

$$409 : x = 10 : 5{,}69,$$

одакле

$$x = \frac{409 \times 5{,}69}{10} = 232{,}721$$

или у округлој цифри

$$x = 233 \text{ јединица у седмоме десетном месту.}$$

Пошто синус заједно са углом расте, то је онда

$$\log \sin 27^0\, 14'\, 35{,}69'' = 9{,}660\ 6232 + 0{,}000\ 0233 = 9{,}660\ 6465.$$

Место да ми сами израчунавамо поправку можемо се послужити табличицом под бројем 409. Из ње читамо да је

за угловну разлику	логаритамска разлика
од $5''$	$= 204{,}5$
„ $0{,}6''$	$= 24{,}54$
„ $0{,}09''$	$= 3{,}681,$

дакле за угловну разлику од 5,69″ логаритамска разлика = 232,721.

На случај да неби било табличице за разлику 409 ми бисмо се могли послужити табличицом за какву приближну разлику, н. пр. табличицом за 408 или табличицом за 411.

Служећи се табличицом за 408 имамо

за угловну разлику	логаритамску разлику
од 5″	= 204,0
„ 0,6″	= 24,48
„ 0,09″	= 3,672
од 5,69″	= 232,152.

Но пошто наша таблична разлика није 408 него 409, то овој поправци 232,152 треба додати још 0,569 × (409 — 408) = 0,569, које чини да она постаје = 232,721.

До истога резултата доћићемо, ако се послужимо табличицом 411. Из ње видимо да је

за угловну разлику	логаритамска разлика
од 5″	= 205,5
„ 0,6″	= 24,66
„ 0,09″	= 3,699
од 5,69″	= 233,859.

Али имавши на уму да је наша таблична разлика за 2 мања од разлике 411 ми ћемо од поправке 233,859 одузети 0,569 × (411 — 409) = 1,138 и тиме добити њену праву вредност 232,721.

Приметимо да је

$$\log \sin 27^{0}\,14'\,35{,}69'' = \log \cos 62^{0}\,45'\,24{,}31''.$$

2) $$\log \cos 38^{0}\,43'\,21{,}75'' = ?$$

Одозго и с лева читајући налазимо (на стр. 522.) из таблица

$$\log\cos 38^0 43' 20'' = 9{,}892\,1992$$

$$\log\cos 38^0 43' 30'' = 9{,}892\,1823.$$

одакле таблична разлика = 169. Из табличице за 169 читамо да је

за угловну разлику	логаритамска разлика
од $1''$	$= 16{,}9$
„ $0{,}7''$	$= 11{,}83$
„ $0{,}05''$	$= 0{,}845$
од $1{,}75''$	$= 29{,}575$

или заокругљено 30 јединица у седмоме десетном месту.

Пошто косинус опада са растењем угла, то је

$$\log\cos 38^0 43' 21{,}75'' = 9{,}892\,1992 - 0{,}000\,0030 = 9{,}892\,1962,$$

чему је раван и $\log\sin 51^0 16' 38{,}25''$.

3) $$\log tg\, 71^0 25' 32{,}06'' = ?$$

Задати угао је $> 45^0$; према томе ћемо читати степене у дну стране, минуте и секунде на десној ивици и управљаћемо се према потписима. На 401. страни таблица налазимо

$$\log tg\, 71^0 25' 40'' = 0{,}473\,6639$$

$$\log tg\, 71^0 25' 30'' = 0{,}473\,5942.$$

Логаритамска разлика је = 697. Поправку x добијамо из сразмере

$$697 : x = 10 : 2{,}06$$

или помоћу табличице за 697. Из ове читамо да је

за угловну разлику	логаритамска разлика
од $2''$	$= 139{,}4$
„ $0{,}06''$	$= 4{,}182$
од $2{,}06''$	$= 143{,}582$

или заокругљено 144 јединице у седмоме десетном месту.

Пошто тангента заједно с углом расте, то је

$$\log tg\, 71^0 25' 32{,}06'' = 0{,}473\,5942 + 0{,}000\,0144 = 0{,}473\,6086,$$

а ово је такође $= \log cotg\, 18^0 34' 27{,}94''$.

4) $$\log cotg\, 63^0 34' 50{,}48'' = ?$$

Читајући степене одоздо, минуте и секунде на десној ивици и управљајући се према потписима налазимо на 448. страни таблица

$$\log cotg\, 63^0 34' 50'' = 9{,}696\,2055$$

$$\log cotg\, 63^0 35' 0'' = 9{,}696\,1527.$$

Таблична разлика је дакле = 528. Поправку x добијамо из сразмере

$$528 : x = 10 : 0{,}48$$

или помоћу табличице под бројем 528. Из ње читамо да је

за угловну разлику	логаритамска разлика
од 0,4″	= 21,12
„ 0,08″	= 4,224
од 0,48″	= 25,344

и према томе, а с обзиром на то да котангенга опада са растењем угла,

$$\log cotg\, 63^0 34' 50{,}48'' = 9{,}696\,2055 - 0{,}000\,0025 = 9{,}696\,2030$$

$$= \log tg\, 26^0 25' 9{,}52''.$$

Напомена. На случај да је угао, чије тригонометриске функције логаритам тражимо, већи од 90^0, ми сводимо тригонометриску функцију задатога угла на исту или другу тригонометриску функцију једнога оштрог угла (помоћу образаца 13 у чл. 14.). Ако је тако добивена функција одречна, онда се код њенога логаритма ставља натраг знак — или знак *n* (в. чл. 49. *c*.). То исто вреди и онда кад је сам угао одречан.

Примери.

1) $$\sin 219^0 45' 8{,}46'' = ?$$

Пре свега знамо да је

$$\sin 219^0 45' 8{,}46''$$

$$= -\sin (219^0 45' 8{,}46'' - 180^0) = -\sin 39^0 45' 8{,}46''$$

или

$$= -\cos (270^0 - 219^0 45' 8{,}46'') = -\cos 50^0 14' 51{,}54''.$$

Из таблица III (на стр. 528.) налазимо

$$\log \sin 39^0 45' 8{,}46'' = \log \cos 50^0 14' 51{,}54'' = 9{,}805\,8205,$$

дакле

$$\log \sin 219^0 45' 8{,}46'' = 9{,}805\,8205_n.$$

Помоћу таблица I (стр. 113.) добијамо

$$\sin 219^0 45' 8{,}46'' = -0{,}639\,4704.$$

2) $$\cos 146^0\, 0' 15{,}3'' = ?$$

$$\cos 146^0\, 0' 15{,}3''$$

$$= -\cos (180^0 - 146^0\, 0' 15{,}3'') = -\cos 33^0 59' 44{,}7''$$

или

$$= -\sin (146^0\, 0' 15{,}3'' - 90^0) = -\sin 56^0\, 0' 15{,}3''.$$

У таблицама III (на стр. 493.) налазимо

$$\log \cos 33^0 59' 44{,}7'' = \log \sin 56^0\, 0' 15{,}3'' = 9{,}918\,5959,$$

дакле

$$\log \cos 146^0\, 0' 15{,}3'' = 9{,}918\,5959_n$$

и помоћу таблица I (стр. 151.)

$$\cos 146^0\, 0' 15{,}3'' = -0{,}829\,0790.$$

3) $$tg\,(-12^0\, 4' 56{,}7'') = ?$$

$$tg\,(-12^0\, 4' 56{,}7'') = -tg\, 12^0\, 4' 56{,}7''$$

$$\log tg\,(-12^0\, 4' 56{,}7'') = (\log tg\, 12^0\, 4' 56{,}7'')_n = 9{,}330\,5364_n$$

(таб. III стр. 362.).

$$tg\,(-12^0\,4'\,56{,}7'') = -0{,}214\,0604$$

(таб. I стр. 28.).

4) $$\sin 112^0\,24'\,37{,}02'' = ?$$

$$\sin 112^0\,24'\,37{,}02''$$

$$= \sin\,(180^0 - 112^0\,24'\,37{,}02'') = \sin 67^0\,35'\,22{,}98''$$

$$= \cos\,(112^0\,24'\,37{,}02'' - 90^0) = \cos 22^0\,24'\,37{,}02''$$

и према томе

$$\log \sin 112^0\,24'\,37{,}02'' = 9{,}965\,8964$$

(таб. III стр. 424.), а одавде

$$\sin 112^0\,24'\,37{,}02'' = 0{,}924\,4777$$

(таб. I стр. 170.).

5) $$tg\,304^0\,18'\,9{,}7'' = ?$$

$$tg\,304^0\,18'\,9{,}7''$$

$$= -\,tg\,(360^0 - 304^0\,18'\,9{,}7'') = -\,tg\,55^0\,41'\,50{,}3''$$

$$= -\,cotg\,(304^0\,18'\,9{,}7'' - 270^0) = -\,cotg\,34^0\,18'\,9{,}7''$$

$$\log tg\,304^0\,18'\,9{,}7'' = (\log tg\,55^0\,41'\,50{,}3'')_n = 0{,}166\,0739_n$$

(таб. III стр. 495.)

$$tg\,304^0\,18'\,9{,}7'' = -\,1{,}465\,7973$$

(таб. I стр. 15.).

6) $$cotg\,209^0\,36'\,17{,}26'' = ?$$

$$cotg\,209^0\,36'\,17{,}26''$$

$$= cotg\,(209^0\,36'\,17{,}26'' - 180^0) = cotg\,29^0\,36'\,17{,}26''$$

$$= tg\,(270^0 - 209^0\,36'\,17{,}26'') = tg\,60^0\,23'\,42{,}74''$$

$\log cotg\,209^0\,36'\,17{,}26'' = 0{,}245\,5066$ (таб. III стр. 467.)

$cotg\,209^0\,36'\,17{,}26'' = 1{,}759\,9753$ (таб. I стр. 21.).

c) Тражење угла из логаритма тригонометриске функције. Поступа се сасвим слично као кад се за један логаритам тражи одговарајући број. У ступцима, који су било нат- или потписани функцијом, чији нам је логаритам дат, траже се она два логаритма између којих се налази задати логаритам. Према томе да ли дотична тригонометриска функција расте или опада са растењем угла образује се разлика између задатога логаритма и мањег табличног логаритма или разлика између већег табличног логаритма и задатога логаритма и дели се табличном разликом (т. ј. разликом између она два узастопна таблична логаритма). Тај количник, који даје секунде и делове секунде (јер је изражен у јединици од 10″), сабира се са степенима, минутама и секундама онога угла на који се односи мањи, односно већи таблични логаритам, према томе да ли је дотична функција синусна, тангентна или косинусна, котангентна. Ако смо логаритам тражили у ступцу, који задату функцију носи као натпис, онда степене читамо у врху, минуте и секунде на левој ивици; али ако смо се, при тражењу, управљали према потписатим функцијама, онда степене узимамо у дну стране, а минуте и секунде на десној ивици.

Примери.

1) $\log \sin \alpha = 9{,}518\,3124, \quad \alpha = ?$

Из таблица (на стр. 405.), а у ступцу са натписом *Sin*, налазимо ова два узастопна таблична логаритма

$$9{,}518\,3477 \text{ као } \log \sin 19^0\,15'\,40''$$

$$9{,}518\,2875 \quad „ \quad \log \sin 19^0\,15'\,30''.$$

Таблична разлика је $= 602$ јединице у седмоме десетном месту; њој одговара у углу разлика од 10″.

Пошто синус расте заједно с углом, то ћемо узети разлику између задатога логаритма и мањег табличног логаритма, а то је 249, и поделивши је табличном разликом 602 добићемо (у јединици од 10″) поправку, коју кад додамо мањем табличном углу $19^0 15' 30''$ налазимо угао α. Ову поправку добијамо управо из сразмере 46), а то је овде

$$602 : 249 = 10 : y,$$

одакле

$$y = \frac{249 \times 10''}{602} = 4{,}14''$$

и према томе

$$\alpha = 19^0 15' 30'' + 4{,}14'' = 19^0 15' 34{,}14''.$$

2) $$\log \cos \alpha = 9{,}654\,2097, \quad \alpha = ?$$

Таблице (стр. 450.) дају нам ова два косинусна логаритма:

9,654 2253 као (одоздо читајући) $\log \cos 63^0 11' 20''$

9,654 1836 „ „ „ $\log \cos 63^0 11' 30''$.

Таблична разлика је $= 417$, а разлика између већега табличног и задатога логаритма јесте $= 156$. Поправку добијамо из сразмере

$$417 : 156 = 10 : y,$$

одакле

$$y = \frac{156 \times 10''}{417} = 3{,}74''$$

и према томе

$$\alpha = 63^0 11' 23{,}74''.$$

Поправку y можемо наћи и помоћу табличице под бројем 417. Из ње видимо да је нашој логаритамској разлици 156 најближа мања разлика $= 125{,}1$, којој одговара угловна разлика од 3″. Остатку $156 - 125{,}1 = 30{,}9$ помноженоме са 10, дакле разлици 309 најближа мања разлика је 291,9, а њој одговара угао од 7″, дакле остатку 30,9 угао од 0,7″. Образујући разлику $309 - 291{,}9 = 17{,}2$ и множећи је са 10 добијамо за 171 угао од 4″, а овде, пошто смо два пута множили са 10, одговара томе угао од $0{,}04''$. Према томе је угловна поправка за логаритамску разлику од 156 равна $3'' + 0{,}7'' + 0{,}04'' = 3{,}74''$

3) $$\log tg\, \alpha = 0{,}051\,2647, \alpha = ?$$

Одоздо читајући имамо у таблицама (на стр. 539.) ова два тангентна логаритма

$$0{,}051\,2829 \text{ као } \log tg\, 48^0\, 22'\, 30''$$
$$0{,}051\,2405 \quad „ \quad \log tg\, 48^0\, 22'\, 20''.$$

Таблична разлика је $= 424$, а разлика између задатога логаритма и табличног мањег логаритма јесте $= 242$. Поправку добијамо, према томе, из сразмере

$$424 : 242 = 10 : y,$$

одакле

$$y = \frac{242 \times 10''}{424} \doteq 5{,}71'',$$

а можемо је добити и помоћу табличице под бројем 424. Из те табличице видимо да је логаритамској разлици 242 најближа мања разлика 212,0, којој одговара угао од $5''$. Узев $242 - 212 = 30$ и множећи са 10 налазимо да је тој разлици 300 најближа мања разлика 296,8, која нам даје угао од $0{,}7''$. Најзад за $(300 - 296{,}8) \times 10 = 32$ имамо приближно угао од $0{,}01''$,

На тај начин јесте

$$\alpha = 48^0\, 22'\, 25{,}71''.$$

4) $$\log cotg\, \alpha = 0{,}757\,3049, \alpha = ?$$

Од горе читајући налазимо у таблицама (стр. 349.) котангентне логаритме

$$0{,}757\,3897 \text{ као } \log cotg\, 9^0\, 55'\, 0''$$
$$0{,}757\,2657 \quad „ \quad \log cotg\, 9^0\, 55'\, 10''.$$

Таблична разлика је $= 1240$. Пошто котангента опада кад угао расте, то узимамо разлику између већег табличног логаритма и задатога логаритма; она је $= 848$. За израчунавање поправке имамо, дакле, сразмеру

$$1240 : 848 = 10 : y,$$

одакле

$$y = \frac{848 \times 10''}{1240} = 6{,}84''.$$

Исту вредност даје нам и табличица под бројем 1240 Према томе следује

$$\alpha = 9^0\,55'\,6{,}84''.$$

Напомена. На крају чл. 14. приметили смо да познавање само једне тригонометриске функције није довољно да се тачно одреди дотичан угао. Отуда што је

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \sin(180^0 - \alpha) \\ \cos\alpha &= \cos(360^0 - \alpha) \\ tg\,\alpha &= tg\,(180^0 + \alpha) \\ cotg\,\alpha &= cotg\,(180^0 + \alpha) \\ -\sin\alpha &= \sin(180^0 + \alpha) = \sin(360^0 - \alpha) \\ -\cos\alpha &= \cos(180^0 - \alpha) = \cos(180^0 + \alpha) \\ -tg\,\alpha &= tg\,(180^0 - \alpha) = tg\,(360^0 - \alpha) \\ -cotg\,\alpha &= cotg\,(180^0 - \alpha) = cotg\,(360^0 - \alpha) \end{aligned}\right\} (47$$

(в. таблице 13 у чл. 14.) видимо да свакој, положној и одречној, вредности једне тригонометриске функције одговарају увек два угла. Код синусне функције та се два угла допуњују до 180^0 или до 3×180^0, према томе да ли је задата вредност синуса положна или одречна. Код косинуса углови се допуњују до 360^0, а код тангенте и котангенте они се разликују за 180^0.

Угао постаје потпуно одређен:

1) ако је осим једне његове тригонометриске функције познат квадрант у коме се угао налази;

2) ако познајемо вредности двеју тригонометриских функција: вредности синуса и косинуса, синуса и тангенте (односно котангенте) или косинуса и тангенте (односно котангенте);

3) ако најзад сам задатак показује који од она два могућа угла треба узети.

Примери.

1) $$\sin\alpha = 0{,}374\,1525, \quad \alpha = ?$$

Из таблица I (на стр. 60.) налазимо

$$\log\sin\alpha = 9{,}573\,0486,$$

одакле, помоћу таблица III (стр. 421.), следује за угао α оштра вредност

$$\alpha_1 = 21^0\,58'\,18{,}9''.$$

Друга вредност је

$$\alpha_2 = 180^0 - 21^0\,58'\,18{,}9'' = 158^0\,1'\,41{,}1''.$$

На случај да је

$$\sin\alpha = -\,0{,}374\,1525,$$

дакле

$$\log\sin\alpha = 9{,}573\,0486_n$$

имали бисмо за угао α ове две вредности

$$\alpha' = 180^0 + 21^0\,58'\,18{,}9'' = 201^0\,58'\,18{,}9''$$

$$\alpha'' = 360^0 - 21^0\,58'\,18{,}9'' = 338^0\,1'\,41{,}1''.$$

2) $$\cos\alpha = 0{,}694\,7023, \quad \alpha = ?$$

Таблице I (стр. 124.) дају

$$\log \cos \alpha = 9{,}841\,7987$$

и према томе (таб. III стр. 554.)

оштра вредност угла α

$$\alpha_1 = 45^0\,59'\,47{,}43''$$

осим које постоји још и друга вредност

$$\alpha_2 = 360^0 - 45^0\,59'\,47{,}43'' = 314^0\,0'\,12{,}57''.$$

За

$$\cos \alpha = -0{,}694\,7023$$

имали бисмо ове две вредности

$$\alpha' = 180^0 - 45^0\,59'\,47{,}43'' = 134^0\,0'\,12{,}57''$$

$$\alpha'' = 180^0 + 45^0\,59'\,47{,}43'' = 225^0\,59'\,47{,}43''.$$

3) $$tg\,\alpha = 0{,}040\,5937, \quad \alpha = ?$$

Пре свега налазимо (таб. I стр. 67.)

$$\log tg\,\alpha = 8{,}608\,4586$$

и одавде помоћу таблица III (стр. 303.) или још боље помоћу таблица II (стр. 235.) за угао α оштру вредност

$$\alpha_1 = 2^0\,19'\,28{,}46''.$$

Она друга вредност јесте

$$\alpha_2 = 180^0 + 2^0\,19'\,28{,}46'' = 182^0\,19'\,28{,}46''.$$

Да је

$$tg\,\alpha = -0{,}040\,5937,$$

дакле

$$\log tg\,\alpha = 8{,}608\,4586_n$$

имали бисмо

$$\alpha' = 180^0 - 2^0\,19'\,28{,}46'' = 177^0\,40'\,31{,}54''$$

$$\alpha'' = 360^0 - 2^0\,19'\,28{,}46'' = 357^0\,40'\,31{,}54''.$$

4) $$cotg\,\alpha = 5{,}782\,179, \quad \alpha = ?$$

Из таблица I (на стр. 101.) добијамо

$$\log cotg\,\alpha = 0{,}762\,0915.$$

Одавде, а помоћу таблица III (стр. 348.), следује оштра вредност

$$\alpha_1 = 9^0\,48'\,43{,}18'',$$

а друга вредност је према томе

$$\alpha_2 = 180^0 + 9^0\,48'\,43{,}18'' = 189^0\,48'\,43{,}18''.$$

На случај да је

$$cotg\,\alpha = -\,5{,}782\,179$$

важиле би ове две вредности

$$\alpha' = 180^0 - 9^0\,48'\,43{,}18'' = 170^0\,11'\,16{,}82''$$

$$\alpha'' = 360^0 - 9^0\,48'\,43{,}18'' = 350^0\,11'\,16{,}82''.$$

ТРЕЋИ ДЕО

ПРИМЕНЕ ГОНИОМЕТРИСКИХ ФУНКЦИЈА

I

РАЗРЕШАВАЊЕ ПРАВОУГЛИХ ТРОУГЛОВА.

1.

Општа расматрања.

57. **Напомена.** — Сваки троугао има три стране и три угла. Ови комади, из којих је састављен један троугао, зову се првенствено елементи троугла. Док су, међутим, стране (т. ј. њихове дужине) независне једна од друге, осим што збир двеју од њих мора бити већи од оне треће, код углова то није случај, јер је њихов збир навек $= 180^0$ и, према томе, са два угла и трећи по себи већ одређен. Најзад знамо да стране и углови стоје у односу да већој страни лежи на супрот већи угао и обратно. Ако означимо са a, b, c стране, са α, β, γ углове једнога троугла, онда мора да је

$$b + c > a, \quad c + a > b, \quad a + b > c,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

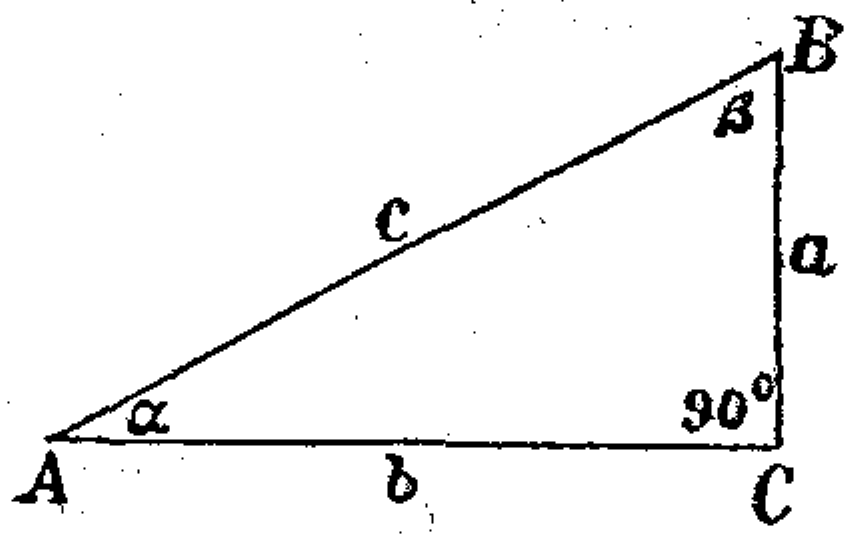
(тако да је $\alpha = 180^0 - \beta - \gamma$, $\beta = 180^0 - \gamma - \alpha$, $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta$) и у претпоставци да је

$$a \gtreqless b \gtreqless c \text{ мора бити } \alpha \gtreqless \beta \gtreqless \gamma.$$

И обратно само тако, ако су испуњени ови услови, могуће је из три независна елемента одредити оне остале, па дакле и сам троугао. Како се овакви задатци конструктивно (графички) решавају познато нам је из Планиметрије. Средства за рачунско решење њихово, за ма какав троугао, даје нам Равна Тригонометрија, пошто она располаже са нарочито за ту циљ удешеним обрасцима. Ми ћемо, овде, да се ограничимо на разрешавање правоуглих троуглова, које се може да изврши без помоћи тригонометриских теорема, искључиво на основу дефиниција гониометриских функција.

Имавши на уму да је код правоуглих троуглова један елеменат унапред познат, а то је прав угао, појмљиво је да је за одређивање таквих троуглова довољно познавати само два независна комада његова.

58. **Обрасци.** — Задатке, који се односе на стране и углове правоуглих троуглова, можемо да решимо помоћу следећих образаца које добијамо непосредно из самих дефиниција гониометриских функција (в. чл. 8.).

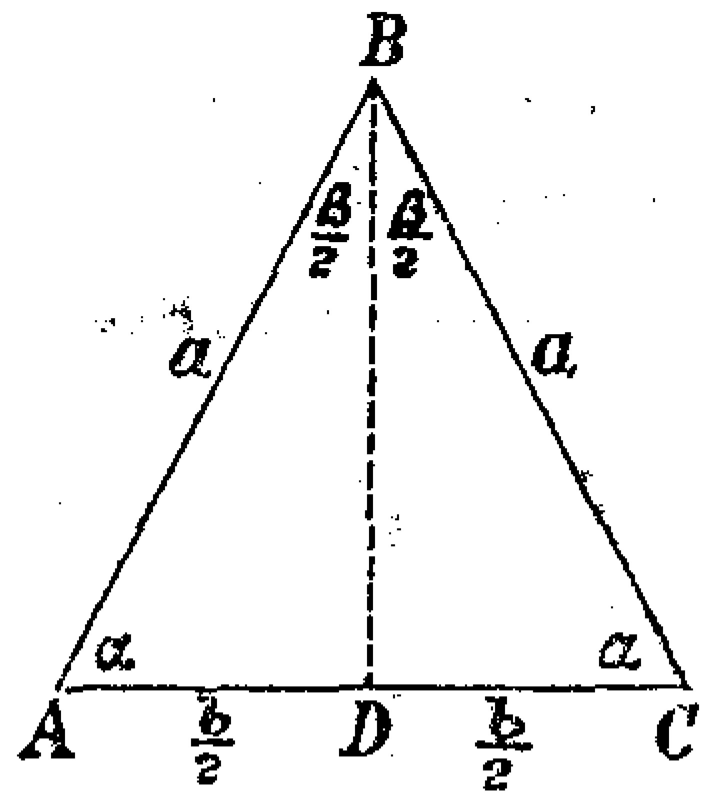


Сл. 20.

$$
\left.
\begin{aligned}
a &= \sqrt{c^2 - b^2} \text{ или боље} \\
&= \sqrt{(c+b)\,(c-b)}\,^{1)} \\
&= b \cdot tg\,\alpha = b \cdot cotg\,\beta \\
&= c \cdot sin\,\alpha = c\,.\,cos\,\beta \\
b &= \sqrt{c^2 - a^2} \text{ или боље} \\
&= \sqrt{(c+a)\,(c-a)} \\
&= a \cdot cotg\,\alpha = a \cdot tg\,\beta \\
&= c \cdot cos\,\alpha = c \cdot sin\,\beta \\
c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
&= \frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{a}{cos\,\beta} \\
&= \frac{b}{cos\,\alpha} = \frac{b}{sin\,\beta} \\
sin\,\alpha &= cos\,\beta = \frac{a}{c} \\
cos\,\alpha &= sin\,\beta = \frac{b}{c} \\
tg\,\alpha &= cotg\,\beta = \frac{a}{b} \\
cotg\,\alpha &= tg\,\beta = \frac{b}{a}.
\end{aligned}
\right\} \quad (48
$$

[1]) Није тешко увидити да је у рачунању са бројевима, а нарочито онда када су количине c и b многоцифрене, знатно краће и лакше срачунати $(c+b)\,(c-b)$ но $c^2 - b^2$, било помоћу логаритама или на обичан начин.

Напомена. Спуштањем управне BD из темена B на основицу AC делимо равнокраки троугао ABC на два подударна правоугла троугла ABD и CBD и сводимо, на тај начин, разрешавање равнокраких троуглова на разрешавање правоуглих троуглова. Између елемената a, b, α и β постоје ови односи



Сл. 21.

$$\cos\alpha = \sin\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2a}. \qquad (49$$

2.

Задатци.

59. **Задатак 1.** — Дате су катете a и b. Тражи се хипотенуза c и углови α и β.

1. Решење. Најпре налазимо

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

па онда

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} \text{ или } \sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ итд.}$$

$$\beta = 90^0 - \alpha.$$

2. Решење. Израчунајмо прво

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b},$$

па онда, познавајући угао α, дакле и $\sin\alpha$, налазимо

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} \text{ итд.}$$

Пример.

$$a = 17{,}0528, \quad b = 12{,}4896.$$
$$c = ? \quad \alpha = ? \quad \beta = ?$$

1. Начин.

$log\, a = 1{,}231\,7957$ $\qquad$ $log\, b = 1{,}096\,5485$

$log\, a^2 = 2{,}463\,5914$ $\qquad$ $log\, b^2 = 2{,}193\,0970$

$$a^2 = 290{,}7980$$
$$b^2 = 155{,}9901$$

$$a^2 + b^2 = 446{,}7881$$
$$log\,(a^2 + b^2) = 2{,}650\,1016$$
$$log\, c = log\sqrt{a^2 + b^2} = 1{,}325\,0508$$
$$c = 21{,}1374.$$
$$log\, a = 1{,}231\,7957$$
$$log\, b = 1{,}096\,5485$$

$$log\, tg\,\alpha = log\frac{a}{b} = 0{,}135\,2472$$
$$\alpha = 53^0\,46'\,50{,}04''$$
$$\beta = 90^0 - \alpha = 36^0\,13'\,9{,}96''.$$

2. Начин.

$$log\, a = 1{,}231\,7957$$
$$log\, b = 1{,}096\,5485$$

$$log\, tg\,\alpha = log\frac{a}{b} = 0{,}135\,2472$$
$$\alpha = 53^0\,46'\,50{,}04''$$
$$\beta = 90^0 - \alpha = 36^0\,13'\,9{,}96''.$$

$$\log a = 1{,}231\,7957 = 11{,}231\,7957 - 10$$

$$\log \sin \alpha = 9{,}906\,7449 - 10$$

$$\log c = \log \frac{a}{\sin \alpha} = 1{,}325\,0508$$

$$c = 21{,}1374.$$

60. **Задатак 2.** — Дата је једна катета, нпр. a и хипотенуза c. Тражи се она друга катета b и углови α и β.

1. Решење. Израчунајмо прво

$$b = \sqrt{(c + a)(c - a)}.$$

Затим

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} \text{ или } \sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{итд.}$$

$$\beta = 90^0 - \alpha.$$

2. Решење. Одредимо прво угао α, на основу обрасца

$$\sin \alpha = \frac{a}{c},$$

па онда, познавајући α, дакле и $\cos \alpha$, $cotg\,\alpha$,

$$b = c \cdot \cos \alpha = a \cdot cotg\,\alpha \quad \text{итд.}$$

Пример.

$$a = 0{,}9617, \; c = 2{,}0435.$$

$$b = ? \; \alpha = ? \; \beta = ?$$

1. Начин.

$$c + a = 3{,}0052, \; c - a = 1{,}0818$$

$$\begin{array}{r} \log(c+a)=0{,}477\,8734 \\ \log(c-a)=0{,}034\,1470 \\ \hline \log(c+a)(c-a)=0{,}512\,0204 \end{array}$$

$$\log b=\log\sqrt{(c+a)(c-a)}=0{,}256\,0102$$

$$b=1{,}8031.$$

$$\begin{array}{r} \log a=0{,}983\,0396-1=9{,}983\,0396-10 \\ \log b=0{,}256\,0102 \\ \hline \log tg\,\alpha=\log\frac{a}{b}=9{,}727\,0294-10 \end{array}$$

$$\alpha=28^0\,4'\,27''$$

$$\beta=90^0-\alpha=61^0\,55'\,33''.$$

2. Начин.

$$\begin{array}{r} \log a=0{,}983\,0396-1=9{,}983\,0396-10 \\ \log c=0{,}310\,3746 \\ \hline \log \sin\alpha=\log\frac{a}{c}=9{,}672\,6650-10 \end{array}$$

$$\alpha=28^0\,4'\,27''$$

$$\beta=90^0-\alpha=61^0\,55'\,33''.$$

$$\begin{array}{r} \log\cos\alpha=9{,}945\,6356-10 \\ \log c=0{,}310\,3746 \\ \hline \log b=\log c\cdot\cos\alpha=0{,}256\,0102 \end{array}$$

$$b=1{,}8031.$$

61. **Задатак 3.** — Дата је хипотенуза c и један оштар угао, нпр. угао α. Траже се остали комади a, b и β.

Решење.

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

$$\beta = 90^0 - \alpha.$$

Пример.

$$c = 8{,}5349, \quad \alpha = 49^0\, 38'\, 12{,}67''.$$

$$a = ? \quad b = ? \quad \beta = ?$$

Решење.

$$\log c = 0{,}931\,1984$$

$$\log \sin \alpha = 9{,}881\,9294 - 10$$

$$\log \cos \alpha = 9{,}811\,3269 - 10$$

$$\log a = \log c \cdot \sin \alpha = 0{,}813\,1278, \quad a = 6{,}5032.$$

$$\log b = \log c \cdot \cos \alpha = 0{,}742\,5253, \quad b = 5{,}5275.$$

$$\beta = 90^0 - \alpha = 40^0\, 21'\, 47{,}33''.$$

62. **Задатак 4.** — Дата је једна катета и један оштар угао, нпр. a и α. Траже се остали комади b, c и β.

Решење.

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$b = a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \quad \text{или} \quad b = c \cdot \cos \alpha$$

$$\beta = 90^0 - \alpha.$$

Пример.

$$a = 407{,}25, \quad \alpha = 17^0\, 41'\, 5{,}2''.$$

$$b = ? \quad c = ? \quad \beta = ?$$

Решење.

$$\log a = 2{,}609\,8611 = 12{,}609\,8611 - 10$$

$$\log \operatorname{cotg} \alpha = 0{,}496\,4163$$
$$\log \sin \alpha = 9{,}482\,5591 - 10$$

$$\log b = \log a \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 3{,}106\,2774, \; b = 1277{,}25.$$

$$\log c = \log \frac{a}{\sin \alpha} = 3{,}127\,3020, \; c = 1340{,}61.$$

$$\beta = 90^0 - \alpha = 72^0\, 18'\, 54{,}8''.$$

II

УПОТРЕБА ГОНИОМЕТРИСКИХ ФУНКЦИЈА КОД ЛОГАРИТАМСКОГ РАЧУНАЊА.

1.

Удешавање израза за логаритамско рачунање.

63. О удешавању израза за логаритамско рачунање. — Велика корист, коју нам указују логаритми у рачунању са бројевима, основана је на томе што се помоћу њих свака сложена радња може да сведе на другу, од ње простију, радњу: множење на сабирање, делење на одузимање, степеновање на множење, кореновање на делење и најзад све на сабирање и одузимање (в. чл. 37.). Према томе се логаритамски начин израчунавања може да примени на сваки израз у коме се има да множи, дели, степенује и коренује. Али ако се у дотичноме изразу јавља и сабирање или одузимање, онда се израчунавају поједини делови његови, који су везани међусобом знацима + и —, одвојено помоћу логаритама и после узима алгебарски збир од тако добивених вредности (в. чл. 49. *b*.) или се покушава да се, којим било начином, задати израз доведе на други вид у коме се врше само радње подесне за логаритамску употребу, а то је множење, делење, степеновање и кореновање. Изрази, на које се могу да примену логаритми, зову се *логаритамски подесни* за разлику од оних код којих то није случај и за које кажемо да су *логаритамски неподесни*. Нпр. логаритамски подесан израз јесте $\frac{a^{\frac{p}{q}}\sqrt{b}}{c}$, а логаритамски неподесан је $c\sqrt[m]{a^n} \pm \frac{b}{d}$ итд. Логаритамски неподесни јесу сви изрази који, доведени на најпростију форму, имају вид алгебарског збира.

Општа упутства за претварање логаритамски неподесних израза на вид логаритамски подесних не постоје и ми смо упућени, више или мање, на нашу вештину и досетљивост да пронађемо оне радње које треба извршити са задатим логаритамски неподесним изразом како би он постао логаритамски подесан. Пример једне такве досетке имали смо у чл. 58., где смо место $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ ставили $a = \sqrt{(c+b)(c-b)}$.

Једно, доста опште, средство да се логаритамски неподесним изразама да логаритамски подесна форма основано је на завођењу једнога *помоћног угла*. Но место да објашњавамо како се заводе помоћни углови, које ћемо најбоље увидити из идућих примера, ми ћемо, овде, само извесне напомене да учинимо, које су врло важне за оно што следује. Пошто ћемо, у будуће, просте и сложене количине замењивати тригонометриским функцијама једнога помоћнога угла, то треба, при избору дотичних тригонометриских функција, имати на уму (в. чл. 11. и 12.)

1) да се вредности тангенте и котангенте крећу од $-\infty$ па до $+\infty$ и да, према томе, сваку коли-

чину, просту или сложену, била она положна или одречна, ма како мала или велика, можемо сматрати као tangens или cotangens или ма какав степен тангенте и котангенте извеснога угла, који можемо да одредимо помоћу тригонометриских или логаритамско-тригонометриских таблица.

2) вредности синуса и косинуса крећу се од -1 па до $+1$, тако да се свака, положна или одречна, количина, чија је вредност равна једноме чистом разломку, може да представи као sinus или cosinus или ма какав степен синуса и косинуса једнога угла, који се налази помоћу тригонометриских или логаритамско-тригонометриских таблица.

3) изврнуте вредности синуса и косинуса (тј. косеканта и секанта) јесу, по апсолутној вредности, увек веће од 1. Према томе може се свака количина, која је апсолутно већа од 1, сматрати као изврнути синус или изврнути косинус или најзад као изврнута вредност ма којега степена синуса или косинуса извеснога угла, који се одређује помоћу тригонометриских или логаритамско-тригонометриских таблица.

64. **Довођење збира на логаритамски подесну форму.** — Нека је

$$P+Q$$

задати израз у коме P и Q могу бити ма како сложени из других простијих количина путем множења, дељења, степеновања и кореновања.

Да бисмо овоме изразу дали вид подесан за примену логаритама напишемо

$$P+Q=P\left(1+\frac{Q}{P}\right)$$

и ставимо

$$\alpha) \qquad \frac{Q}{P} = tg^2 \varphi,$$

где је φ извесан помоћни угао, који се одређује помоћу тригонометриских или логаритамско-тригонометриских таблица, пошто је на основу α)

$$tg\, \varphi = \sqrt{\frac{Q}{P}}$$

или

$$\beta) \qquad \log tg\, \varphi = \frac{1}{2} (\log Q - \log P).$$

На основу α) следује.

$$1 + \frac{Q}{P} = 1 + tg^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

и према томе

$$\gamma) \qquad P + Q = \frac{P}{\cos^2 \varphi}.$$

Употребом помоћнога угла φ довели смо логаритамски неподесан израз $P + Q$ на логаритамски подесну форму $\frac{P}{\cos^2 \varphi}$, јер логаритмујући γ) добијамо

$$\delta) \qquad \log (P + Q) = \log P - 2 \log \cos \varphi.$$

Напомена. Овај начин претварања логаритамски неподесног збира у логаритамски подесан вид можемо да применимо и тамо где се збир састоји из више чланова. Тако нпр. ако је дат израз

$$P + Q + R$$

ми ћемо прво бином $P + Q$ довести на вид

$\frac{P}{cos^2 \varphi}$, а затим, на исти начин, увођењем другога помоћног угла ψ и стављајући у

$$P + Q + R = \frac{P}{cos^2 \varphi} + R = R\left(1 + \frac{P}{R\, cos^2 \varphi}\right)$$

$$\frac{P}{R\, cos^2 \varphi} = tg^2 \psi$$

доводимо задати израз $P + Q + R$ на логаритамски подесну форму $\frac{R}{cos^2 \psi}$. Итд.

65. **Задатци.** — Следећи задатци и примери показаће нам употребу помоћног угла при довођењу једнога израза, који има вид збира, на логаритамски подесну форму.

1. Задатак. Израз

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

јесте логаритамски неподесан, јер логаритмујући га следује

$$log \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} log\, (a^2 + b^2),$$

одакле видимо да је израчунавање задатог израза потребно израчунати вредност од $a^2 + b^2$, које се логаритмовањем не може довести на простији вид (в. пример у чл. 59.).

Да бисмо нашем изразу дали логаритамски подесну форму написаћемо

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

и ставићемо

$$\alpha) \qquad \frac{b}{a} tg\,\varphi,$$

дакле

$$\beta) \qquad \log tg\,\varphi = \log b - \log a.$$

На тај начин постаје

$$\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{1+tg^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

и према томе задати израз добија логаритамски подесну форму

$$\gamma) \qquad \sqrt{a^2+b^2} = \frac{a}{\cos\varphi},$$

одакле логаритмовањем

$$\delta) \qquad \log\sqrt{a^2+b^2} = \log a - \log\cos\varphi.$$

Пример.

$$\sqrt{31948^2+7529^2} = ?$$

Овде је

$$a = 31\,948, \; b = 7529$$

и према α) и β)

$$tg\,\varphi = \frac{7529}{31948}$$

$$\log tg\,\varphi = \log 7529 - \log 31948 = 3{,}876\,7373 - 4{,}504\,4437$$
$$= 13{,}876\,7373 - 10 - 4{,}504\,4437 = 9{,}372\,2936 - 10$$
$$\varphi = 13^0\,15'\,38{,}2''.$$

На основу ове вредности помоћнога угла налазимо из таблица

$$\log\cos\varphi = 9{,}988\,2631 - 10$$

и одавде, а с обзиром на γ) и δ),

$$\log \sqrt{31\,948^2 + 7529^2} \log = 31\,948 - \log \cos 13^0\,15'\,38{,}2''$$
$$= 4{,}504\,4437 - 9{,}988\,2631 + 10$$
$$= 4{,}516\,1806$$

$$\sqrt{31\,948^2 + 7529^2} = num \log 4{,}516\,1806 = 32823{,}17.$$

2. Задатак. Да бисмо општи израз

$$\sqrt[m]{a^p + b^q}$$

начинили логаритамски подесним напишимо

$$\sqrt[m]{a^p + b^q} = \sqrt[m]{a^p\left(1 + \frac{b^q}{a^p}\right)}$$

и ставимо

$$\frac{b^q}{a^p} = tg^2\,\varphi, \tag{α}$$

тако да је

$$\log tg\,\varphi = \frac{1}{2}(q \log b - p \log a), \tag{β}$$

па ћемо добити

$$\sqrt[m]{a^p + b^q} = \sqrt[m]{\frac{a^p}{\cos^2\varphi}}. \tag{γ}$$

С овим смо довели задати израз на жељену форму, јер је

$$\log \sqrt[m]{a^p + b^q} = \frac{1}{m}(p \log a - 2 \log \cos \varphi). \tag{δ}$$

Пример.

$$\sqrt[5]{3976^3 + 71062^2} = ?$$

Написаћемо

$$\sqrt[5]{3976^3 + 71062^2} = \sqrt[5]{3976^3\left(1 + \frac{71062^2}{3976^3}\right)}$$

и ставићемо

α') $$\frac{71062^2}{3976^3} = tg^2\,\varphi.$$

На тај начин постаје

γ') $$\sqrt[5]{3976^3 + 71062^2} = \sqrt[5]{\frac{3976^3}{\cos^2\varphi}}$$

δ') $$\log\sqrt[5]{3976^3 + 71062^2} = \frac{1}{5}\,(3\cdot\log 3976 - 2\cdot\log\cos\varphi).$$

Из α') налазимо

β') $$\log tg\,\varphi = \frac{1}{2}\,(2\cdot\log 71062 - 3\cdot\log 3976)$$

$$= \frac{1}{2}\,(2\times 4{,}851\,6374 - 3\times 3{,}599\,4464)$$

$$= 9{,}452\,4678 - 10,$$

дакле

$$\varphi = 15^0\,49'\,30{,}3''$$

$$\log\cos\varphi = 9{,}983\,2196 - 10,$$

које кад ставимо у δ') даје

$$\log\sqrt[5]{3976^3 + 71062^2} = \frac{1}{5}\,[3\cdot\log 3976 - 2\cdot\log\cos 15^0\,49'\,30{,}3'']$$

$$= \frac{1}{5}\,[3\times 3{,}599\,4464 - 2\cdot(9{,}983\,2196 - 10)]$$

$$= 2{,}166\,3800$$

и према томе

$$\sqrt[5]{3976^3 + 71062^2} = 146{,}6831.$$

3. Задатак. Општи израз

$$p\sin\alpha + q\cos\beta$$

начинићемо логаритамски подесним кад напишемо

$$p \sin\alpha + q\cos\beta = p\sin\alpha\left(1 + \frac{q\cos\beta}{p\sin\alpha}\right)$$

и ставимо

$$\frac{q\cos\beta}{p\sin\alpha} = tg^2\varphi, \qquad (\alpha$$

одакле

$$\log tg\,\varphi = \frac{1}{2}(\log q + \log\cos\beta - \log p - \log\sin\alpha). \qquad (\beta$$

Завођењем помоћнога угла φ постаје

$$p\sin\alpha + q\cos\beta = \frac{p\sin\alpha}{\cos^2\varphi} \qquad (\gamma$$

$$\log(p\sin\alpha + q\cos\beta) = \log p + \log\sin\alpha - 2\log\cos\varphi. \qquad (\delta$$

Пример.

$$65{,}349\cdot\sin 28^0\,19'\,56{,}2'' + 17{,}408\cdot\cos 73^0\,10'\,42{,}6'' = ?$$

Према α) ставићемо

$$\frac{17{,}408\cdot\cos 73^0\,10'\,42{,}6''}{65{,}349\cdot\sin 28^0\,19'\,56{,}2''} = tg^2\varphi, \qquad (\alpha'$$

одакле

$$\log tg\,\varphi = \frac{1}{2}\{\log 17{,}408 + \log\cos 73^0\,10'\,42{,}6''$$

$$- \log 65{,}349 - \log\sin 28^0\,19'\,56{,}2''\}$$

$$= \frac{1}{2}\{1{,}240\,7489 + (9{,}461\,4850 - 10)$$

$$- 1{,}815\,2389 - (9{,}676\,3132 - 10)\}$$

$$= 9{,}605\,3409 - 10 \qquad (\beta'$$

$$\varphi = 21^0\,57'\,3{,}9''$$

$$\log\cos\varphi = 9{,}967\,3155 - 10.$$

На основу γ) и δ) јесте

$$65{,}349 \cdot \sin 28^0\,19'\,56{,}2'' + 17{,}408 \cdot \cos 73^0\,10'\,42{,}6''$$

$$\gamma') \qquad = \frac{65{,}349 \cdot \sin 28^0\,19'\,56{,}2''}{\cos^2 21^0\,57'\,3{,}9''}$$

$$\log\,(65{,}349 \cdot \sin 28^0\,19'\,56{,}2'' + 17{,}408 \cdot \cos 73^0\,10'\,42{,}6'') =$$

$$\log 65{,}349 + \log \sin 28^0\,19'\,56{,}2'' - 2 \cdot \log \cos 21^0\,57'\,3{,}9'' =$$

$$1{,}815\,2389 + (9{,}676\,3132 - 10) - 2 \cdot (9{,}967\,3155 - 10)$$

$$\delta') \qquad = 1{,}524\,2366$$

и према томе

$$65{,}349 \cdot \sin 28^0\,19'\,56{,}2'' + 17{,}408 \cdot \cos 73^0\,10'\,42{,}6'' = 33{,}438.$$

Напомена. Ако у горњем обрасцу $p \sin \alpha + q \cos \beta$ узмемо да је $\beta = \alpha$, онда добијамо израз

$$p \sin \alpha + q \cos \alpha,$$

који можемо још на следећи начин довести на логаритамски подесну форму.

Ставимо у

$$p \sin \alpha + q \cos \alpha = p \left(\sin \alpha + \frac{q}{p} \cos \alpha \right)$$

$$\alpha) \qquad \frac{q}{p} = tg\, \varphi,$$

дакле

$$(\beta \qquad \log tg\, \varphi = \log q - \log p,$$

па ћемо добити

$$p \sin \alpha + q \cos \alpha + p\,(\sin \alpha + tg\, \varphi \cos \alpha)$$

$$= \frac{p}{\cos \varphi} (\sin \alpha \cos \varphi + \sin \varphi \cos \alpha)$$

или простије

$$p \sin \alpha + q \cos \alpha = \frac{p \sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}, \qquad (\gamma$$

а одавде

$$\log (p \sin \alpha + q \cos \alpha)$$

$$= \log p + \log \sin (\alpha + \varphi) - \log \cos \varphi. \qquad (\delta$$

4. Задатак. Нека је

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Да бисмо израз на десној страни ове једначине начинили логаритамски подесним напишимо

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

$$= \cos a \left(\cos b + \frac{\sin a \sin b \cos C}{\cos a}\right)$$

$$= \cos a (\cos b + \sin b \, tg \, a \cos C)$$

и ставимо

$$tg \, a \cos C = tg \, \varphi. \qquad (\alpha$$

На тај начин је

$$\cos b + \sin b \, tg \, a \cos C = \cos b + \sin b \, tg \, \varphi$$

$$= \frac{\cos b \cos \varphi + \sin b \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}$$

и према томе

$$\cos c = \frac{\cos (b - \varphi)}{\cos \varphi} \cos a. \qquad (\gamma$$

Пример.

$$\cos c = \cos 102^0 34' 8'' \cdot \cos 127^0 54' 21'' +$$

$$\sin 102^0 34' 8'' \cdot \sin 127^0 54' 21'' \cdot \cos 75^0 16' 29''.$$

Овде је

$$tg\,\varphi = tg\,102^0\,34'\,8'' \cdot cos\,75^0\,16'\,29'' \qquad (\alpha'$$

$$= tg\,(180^0 - 77^0\,25'\,52'') \cdot cos\,75^0\,16'\,29''$$

$$= -tg\,77^0\,24'\,52'' \cdot cos\,75^0\,16'\,29'',$$

дакле

$$log\,tg\,\varphi = (log\,tg\,77^0\,25'\,53'' + log\,cos\,75^0\,19'\,29'')_n$$

$$= (0{,}651\,7800 + 9{,}405\,1493 - 10)_n = 0{,}056\,9293_n\,.$$

Одавде следује да је таблична (оштра) вредност угла $= 48^0\,44'\,40{,}5''$, а пошто је tangens φ одречно добијамо за угао φ ове две вредности (в. једн. 47 чл. 56.)

$$\varphi_1 = 180^0 - 48^0\,44'\,40{,}5'' = 131^0\,15'\,19{,}5''$$

$$\varphi_2 = 360^0 - 48^0\,44'\,40{,}5'' = 311^0\,15'\,19{,}5''$$

и према томе, а на основу γ),

$$\gamma')\quad \begin{cases} cos\,c = \dfrac{cos\,(127^0\,54'\,21'' - 131^0\,15'\,19{,}5'')}{cos\,131^0\,15'\,19{,}5''}\,cos\,102^0\,34'\,8'' \\ \text{или} \\ cos\,c = \dfrac{cos\,(127^0\,54'\,21'' - 311^0\,15'\,19{,}5'')}{cos\,131^0\,15'\,19{,}5''}\,cos\,102^0\,34'\,8'', \end{cases}$$

које се, кад доведемо косинусе тупих углова на косинусе оштрих углова (помоћу таблица 13 чл. 14.), своди на

$$cos\,c = \frac{cos\,3^0\,20'\,58{,}5''}{cos\,48^0\,44'\,40{,}5''}\,cos\,77^0\,25'\,52''.$$

На тај начин налазимо

$$log\,cos\,c$$

$$= log\,cos\,3^0\,20'\,58{,}5'' + log\,cos\,77^0\,25'\,52'' - log\,cos\,48^0\,44'\,40{,}5''$$

$$= 9{,}999\,2574 - 10 + 9{,}337\,6854 - 10 - 9{,}819\,1601 + 10$$

$$= 9{,}517\,7827 - 10$$

$$cos\,c = 0{,}329\,445.$$

5. Задатак. Из квадратне једначине

$$x^2 + p\,x - q = 0,$$

у којој је q положна количина, дакле $-q$ одречно, следују два *стварна* корена

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}.$$

Ако ставимо овде

$$\frac{4q}{p^2} = tg^2\,\varphi, \tag{α}$$

дакле

$$\begin{aligned} 2\log tg\,\varphi &= \log 4 + \log q - 2\log p \\ &= 2\log 2 + \log q - 2\log p \end{aligned}$$

или

$$\log tg\,\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log q - \log p \tag{β}$$

добићемо

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\,\frac{1}{\cos\varphi},$$

које на основу α) по чему је

$$\frac{p}{2} = \sqrt{q}\cdot cotg\,\varphi = \sqrt{q}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

можемо написати и овако

$$x = -\sqrt{q}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \pm \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}.$$

С обзиром на гониометриске обрасце

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},\quad 1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

(в. једн. 19 чл. 22.)

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$ (в. једн. 18 чл. 21.)

корене вредности задате квадратне једначине могу да се представе на овај, логаритамски врло подесан, начин

$$x_1 = -\sqrt{q}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}+\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}(1-\cos\varphi)$$

$$=\frac{\sqrt{q}\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

γ_1)
$$x_1=\sqrt{q}\cdot tg\,\frac{\varphi}{2}.$$

$$x_2=-\sqrt{q}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}=-\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}(1+\cos\varphi)$$

$$=-\frac{\sqrt{q}\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

γ_2)
$$x_2=-\frac{\sqrt{q}}{tg\,\frac{\varphi}{2}}.$$

Из γ_1) и γ_2) следује

δ_1)
$$\log x_1=\frac{1}{2}\log q+\log tg\,\frac{\varphi}{2}$$

δ_2)
$$\log x_2=\left(\frac{1}{2}\log q-\log tg\,\frac{\varphi}{2}\right)_n.$$

Пример

Да се израчунају корени x_1 и x_2 квадратне једначине

$$x^2+3x-5=0.$$

Ставимо у решењу

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{1 + \frac{20}{9}}$$

$$\frac{20}{9} = tg^2\,\varphi, \qquad (\alpha'$$

дакле

$$\log tg\,\varphi = \frac{1}{2}\log 20 - \log 3 \qquad (\beta'$$

и добићемо на тај начин

$$x_1 = \sqrt{5}\cdot tg\frac{\varphi}{2} \qquad (\gamma'_1$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}}{tg\frac{\varphi}{2}} \qquad (\gamma'_2$$

$$\log x_1 = \frac{1}{2}\log 5 + \log tg\frac{\varphi}{2} \qquad (\delta'_1$$

$$\log x_2 = \left(\frac{1}{2}\log 5 - \log tg\frac{\varphi}{2}\right)_n. \qquad (\delta'_2$$

На основу β') добијамо

$$\log tg\,\varphi = \frac{1}{2}\times 1{,}301\,0300 - 0{,}477\,1213 = 0{,}173\,3937$$

$$\varphi = 56^0\,8'\,43{,}7'', \quad \frac{\varphi}{2} = 28^0\,4'\,21{,}9''$$

$$\log tg\frac{\varphi}{2} = 9{,}727\,0035 - 10$$

$$\log x_1 = \frac{1}{2}\times 0{,}698\,9700 + 9{,}727\,0035 - 10 = 0{,}076\,4885$$

$$\log x_2 = \left(\frac{1}{2}\times 0{,}698\,9700 - 9{,}727\,0035 + 10\right)_n = 0{,}622\,4815_n$$

$$x_1 = 1{,}1926$$

$$x_2 = -4{,}1926.$$

66. **Довођење разлике на логаритамски подесну форму.** — Претпоставимо да задати израз има вид разлике

$$P - Q$$

и према томе логаритамски неподесан. P и Q могу бити ма како сложене количине.

Према томе да ли је $P >$ или $< Q$,[1]) разлика $P - Q$ дакле положна или одречна, количник $\frac{Q}{P}$ или количник $\frac{P}{Q}$ мањи од јединице, написаћемо

$$P - Q = P\left(1 - \frac{Q}{P}\right)$$

или

$$P - Q = -Q\left(1 - \frac{P}{Q}\right)$$

и ставићемо

у првоме случају $(P > Q)$

$\alpha_1)$ $$\frac{Q}{P} = \sin^2 \varphi,$$

дакле

$\beta_1)$ $$\log \sin \varphi = \frac{1}{2}(\log Q - \log P)$$

$\gamma_1)$ $$P - Q = P \cos^2 \varphi$$

$\delta_1)$ $$\log (P - Q) = \log P + 2 \log \cos \varphi,$$

а у другоме случају $(P < Q)$

---

[1]) Ако су P и Q сложене количине, онда у већини случајева, није могуће с места оценити која је од њих већа а која мања. Али пошто је израчунавање логаритама од P и Q потребно за одређивање помоћнога угла φ, може се из $\log P$ и $\log Q$ лако познати која је од тих количина већа, која мања.

$$\frac{P}{Q} = \sin^2 \varphi, \tag{α_2}$$

$$\log \sin \varphi = \frac{1}{2}(\log P - \log Q) \tag{β_2}$$

$$P - Q = - Q \cos^2 \varphi \tag{γ_2}$$

$$\log (P - Q) = (\log Q + 2 \log \cos \varphi)_n. \tag{δ_2}$$

Напомена. Понављајући онај у чл. 64. и овај овде изложени начин више пута ми бисмо могли сваки алгебарски збир, од ма колико чланова, да претворимо у форму производа и количника и дати му, дакле, за логаритамску употребу подесан вид.

67. **Задатци.** — У идућим задатцима и примерима учињена је примена помоћнога угла при претварању разлике на логаритамски подесан вид.

1. Задатак. Да бисмо изразу

$$\sqrt{a^2 - b^2}$$

дали логаритамски подесну форму написаћемо

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} = a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Задати израз имаће стварну вредност само тако ако је $a^2 > b^2$, тј. $a > b$ и у таквоме случају можемо ставити

$$\frac{b}{a} = \sin \varphi, \tag{α}$$

дакле

$$\log \sin \varphi = \log b - \log a. \tag{β}$$

На тај начин постаје задати израз логаритамски подесан, јер је

$$\sqrt{a^2-b^2}=a\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=a\sqrt{1-\sin^2\varphi}$$

или

γ) $$\sqrt{a^2-b^2}=a\cos\varphi,$$

одакле, кад логаритмујемо, следује

δ) $$\log\sqrt{a^2-b^2}=\log a+\log\cos\varphi$$

Напомена. Ако су a и b особени бројеви, онда је тако исто подесно користити се обрасцем

$$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

(в. пример у чл. 60.).

Пример.

$$x=\sqrt{18562^2-9457^2}=?$$

Овде је

$$a=18562,\ b=9457$$

α) $$\sin\varphi=\frac{9457}{18562}$$

β) $$\log\sin\varphi=\log 9457-\log 18562$$

$$=3{,}975\,7534-4{,}268\,6248=9{,}707\,1286-10$$

$$\varphi=30^0\,37'\,45{,}5''$$

$$\log\cos\varphi=9{,}934\,7416-10$$

γ) $$x=18562\cdot\cos 30^0\,37'\,45{,}5''$$

δ) $$\log x=\log 18562+\log\cos 30^0\,37'\,45{,}5''$$

$$=4{,}268\,6248+9{,}934\,7416-10=4{,}203\,3664$$

$$x=15972{,}26.$$

До истога резултата долазимо и на овај начин:

$$x = \sqrt{(18562 + 9457)(18562 - 9457)} = \sqrt{28019 \times 9105}$$

$$log\, x = \frac{1}{2}(log\, 28019 + log\, 9105) = \frac{1}{2}(4{,}447\,4526 + 3{,}959\,2800)$$

$$= 4{,}203\,3663$$

$$x = 15972{,}26.$$

2. Задатак. Као са прошлим, тако ћемо поступити и са изразом

$$\sqrt[m]{a^p - b^q},$$

разуме се, у претпоставци да је његова вредност стварна, тј. да је $a^p > b^q$. Написаћемо

$$\sqrt[m]{a^p - b^q} = \sqrt[m]{a^p\left(1 - \frac{b^q}{a^p}\right)}$$

и ставићемо онда

$$\frac{b^q}{a^p} = sin^2\, \varphi, \tag{α}$$

дакле

$$log\, sin\, \varphi = \frac{1}{2}(q\, log\, b - p\, log\, a)\,. \tag{β}$$

На тај начин постаје

$$\sqrt[m]{a^p - b^q} = \sqrt[m]{a^p\, cos^2\, \varphi}\,. \tag{γ}$$

$$log \sqrt[m]{a^p - b^q} = \frac{1}{m}(p\, log\, a + 2\, log\, cos\, \varphi)\,. \tag{δ}$$

Пример.

$$x = \sqrt[7]{814023^3 - 21764^4} = ?$$

Ставићемо

$\alpha')$ $$\sin^2\varphi = \frac{2176^4}{81402^3},$$

дакле

$\beta')$ $$\log\sin\varphi = \frac{1}{2}(4\cdot\log 2176 - 3\cdot\log 81402)$$
$$= \frac{1}{2}(4\times 3{,}337\,6589 - 3\times 4{,}910\,6351)$$
$$= 9{,}309\,3651 - 10$$
$$\varphi = 11^0\,45'\,49{,}3''$$
$$\log\cos\varphi = 9{,}990\,7813 - 10$$

$\gamma')$ $$x = \sqrt[7]{81402^3\cdot\cos^2 11^0\,45'\,49{,}3''}$$

$\delta')$ $$\log x = \frac{1}{7}(3\cdot\log 81402 + 2\cdot\log\cos 11^0\,45'49{,}3'')$$
$$= \frac{1}{7}[3\times 4{,}910\,6351 + 2\cdot(9{,}990\,7813 - 10)] = 2{,}101\,9240$$
$$x = 126{,}4515.$$

3. Задатак. Израз

$$p\sin\alpha - q\cos\beta$$

начинићемо логаритамски подесним кад напишемо

$$p\sin\alpha - q\cos\beta = p\sin\alpha\left\{1 - \frac{q\cos\beta}{p\sin\alpha}\right\}$$

или

$$p\sin\alpha - q\cos\beta = -q\cos\beta\left\{1 - \frac{p\sin\alpha}{q\cos\beta}\right\}$$

и то на један или други начин, према томе да ли је $p\sin\alpha >$ или $<$ од $q\cos\beta$ и ставимо онда

у првоме случају $(p\sin\alpha > q\cos\beta)$

$\alpha_1)$ $$\frac{q\cos\beta}{p\sin\alpha} = \sin^2\varphi,$$

дакле

$$\log \sin \varphi = \frac{1}{2} (\log q + \log \cos \beta - \log p - \log \sin \alpha) \quad (\beta_1$$

$$p \sin \alpha - q \cos \beta = p \sin \alpha \cos^2 \varphi \quad (\gamma_1$$

$$\log (p \sin \alpha - q \cos \beta) = \log p + \log \sin \alpha + 2 \log \cos \varphi, \quad (\delta_1$$

а у другоме случају $(p \sin \alpha < q \cos \beta)$

$$\frac{p \sin \alpha}{q \cos \beta} = \sin^2 \varphi \quad (\alpha_2$$

и према томе

$$\log \sin \varphi = \frac{1}{2} (\log p + \log \sin \alpha - \log q - \log \cos \beta) \quad (\beta_2$$

$$p \sin \alpha - q \cos \beta = - q \cos \beta \cos^2 \varphi \quad (\gamma_2$$

$$\log (p \sin \alpha - q \cos \beta) = (\log q + \log \cos \beta + 2 \log \cos \varphi)_n \quad (\delta_2$$

Пример.

$$x = 810{,}37 \cdot \sin 61^0 15' 34'' - 279{,}85 \cdot \cos 29^0 18' 42'' = ?$$

Ставићемо

$$\frac{279{,}85 \cdot \cos 29^0 18' 42''}{810{,}37 \cdot \sin 61^0 15' 34''} = \sin^2 \varphi, \quad (\alpha'$$

дакле

$$\log \sin \varphi$$

$$= \frac{1}{2} (\log 279{,}85 + \log \cos 29^0 18' 42'' - \log 810{,}37 - \log \sin 61^0 15' 34'') \quad (\beta'$$

$$= \frac{1}{2} [2{,}446\,9253 + 9{,}940\,5013 - 10 - 2{,}908\,6834 - (9{,}942\,9035 - 10)]$$

$$= 9{,}767\,9198 - 10$$

$$\varphi = 35^0 52' 32{,}8''$$

$$\log \cos \varphi = 9{,}908\,6402 - 10$$

$$x = 810{,}37 \cdot \sin 61^0 15' 34'' \cdot \cos^2 35^0 52' 32{,}8'' \quad (\gamma'$$

δ') $\log x = \log 810{,}37 + \log \sin 61^0 15' 34'' + 2 \cdot \log \cos 35^0 52' 32{,}8''$

$= 2{,}908\,6834 + 9{,}942\,9035 - 10 + 2 \cdot (9{,}908\,6402 - 10)$

$= 2{,}668\,8673$

$$x = 466{,}52.$$

Напомена. Ако у горњем изразу претпоставимо да је $\beta = \alpha$, онда имамо израз

$$p \sin \alpha - q \cos \alpha,$$

који можемо да доведемо на логаритамски подесну форму још и на овај начин, кад у

$$p \sin \alpha - q \cos \alpha = p \left\{ \sin \alpha - \frac{q}{p} \cos \alpha \right\}$$

ставимо

α) $$\frac{q}{p} = tg\, \varphi$$

дакле

β) $$\log tg\, \varphi = \log q - \log p$$

$$p \sin \alpha - q \cos \alpha = p \left\{ \sin \alpha - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha \right\}$$

$$= \frac{p}{\cos \varphi} (\sin \alpha \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha)$$

или простије

γ) $$p \sin \alpha - q \cos \alpha = \frac{p \sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi},$$

одакле

$$\log (p \sin \alpha - q \cos \alpha)$$

δ) $$= \log p + \log \sin (\alpha - \varphi) - \log \cos \varphi.$$

4. Задатак. Да бисмо израз

$$\cos C = - \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

начинили логаритамски подесним написаћемо

$$\cos C = \cos B\,(\sin A\;tg\,B\cos c - \cos A)$$

и ставићемо

$$tg\,B\cos c = cotg\,\varphi, \qquad (\alpha$$

дакле

$$\log cotg\,\varphi = \log tg\,B + \log\cos c, \qquad (\beta$$

па ћемо добити

$$\cos C = \cos B\,(\sin A\;cotg\,\varphi - \cos A)$$

$$= \frac{\cos B}{\sin\varphi}(\sin A\cos\varphi - \cos A\sin\varphi)$$

или

$$\cos C = \frac{\cos B}{\sin\varphi}\sin(A-\varphi), \qquad (\gamma$$

а одавде

$$\log\cos C = \log\cos B + \log\sin(A-\varphi) - \log\sin\varphi \quad (\delta$$

Пример.

$$\cos C = -\cos 114^0\,7'\,41{,}5'' \cdot \cos 83^0\,28'\,16{,}3'' +$$

$$\sin 114^0\,7'\,41{,}5'' \cdot \sin 83^0\,28'\,16{,}3'' \cdot \cos 68^0\,54'\,9{,}2'' = ?$$

Овде је

$$cotg\,\varphi = tg\,83^0\,28'\,16{,}3'' \cdot \cos 68^0\,54'\,9{,}2'', \qquad (\alpha'$$

дакле

$$\log cotg\,\varphi = \log tg\,83^0\,28'\,16{,}3'' + \log\cos 68^0\,54'\,9{,}2'' \qquad (\beta'$$

$$= 0{,}941\,4035 + 9{,}556\,2475 - 10$$

$$= 0{,}497\,6510$$

$$\varphi = 17^0\,38'\,15{,}7''$$

$$\log\sin\varphi = 9{,}481\,4382 - 10$$

$$A - \varphi = 114^0\,7'\,41{,}5'' - 17^0\,38'\,15{,}7'' = 96^0\,29'\,25{,}8''$$

$$\cos C = \frac{\cos 83^0\,28'\,16{,}3''}{\sin 17^0\,38'\,15{,}7''}\sin 96^0\,29'\,25{,}8'' \qquad (\gamma'$$

или, кад сведемо синус тупога угла на синус оштрога угла на основу обрасца $sin\ (180^0 - \alpha) = sin\ \alpha$,

$$cos\ C = \frac{cos\ 83^0\ 28'\ 16{,}3''}{sin\ 17^0\ 38'\ 15{,}7''}\ sin\ 83^0\ 30'\ 34{,}2''$$

δ′) $$log\ cos\ C$$

$$= log\ cos\ 83^0\ 28' 16{,}3'' + log\ sin\ 83^0\ 30' 34{,}2'' - log\ sin\ 17^0\ 38' 15{,}7''$$

$$= 9{,}055\ 7708 - 10 + 9{,}997\ 2075 - 10 - 9{,}481\ 4382 + 10$$

$$= 9{,}571\ 5401 - 10$$

$$cos\ C = 0{,}372\ 8551.$$

5. Задатак. Из квадратне једначине

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

следује

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}.$$

У претпоставци да су корени стварни, тј. да је $p^2 > 4q$ можемо ставити

α) $$\frac{4q}{p^2} = sin^2\ \varphi,$$

дакле

$$2\ log\ sin\ \varphi = log\ 4 + log\ q - 2\ log\ p$$

$$= 2\ log\ 2 + log\ q - 2\ log\ p$$

или

β) $$log\ sin\ \varphi = log\ 2 + \frac{1}{2}\ log\ q - log\ p.$$

На тај начин следује

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\ cos\ \varphi = -\frac{p}{2}\ (1 \mp cos\ \varphi),$$

тј. ако означимо са x_1 и x_2 корене вредности и с обзиром на обрасце

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad 1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

(в. једн. 19 чл. 22.)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -p\sin^2\frac{\varphi}{2} \\ x_2 &= -p\cos^2\frac{\varphi}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{γ}$$

Пример.

$$x^2 - 7x + 9 = 0.$$

Овде је $p = -7$, $q = 9$, дакле

$$\sin^2\varphi = \frac{36}{49} \tag{α}$$

$$\log\sin\varphi = \frac{1}{2}(\log 36 - \log 49) \tag{β'}$$

$$= \frac{1}{2}(1{,}556\,3025 - 1{,}690\,1961) = 9{,}933\,0532 - 10$$

$$\varphi = 58^0\,59'\,50{,}2'', \quad \frac{\varphi}{2} = 29^0\,29'\,55{,}1''$$

$$\log\sin\frac{\varphi}{2} = 9{,}692\,3206 - 10, \quad \log\cos\frac{\varphi}{2} = 9{,}939\,7026 - 10$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 7\cdot\sin^2 29^0\,29'\,55{,}1'' \\ x_2 &= 7\cdot\cos^2 29^0\,29'\,55{,}1'' \end{aligned}\right\} \tag{γ'}$$

$$\log x_1 = \log 7 + 2\cdot\log\sin 29^0\,29'\,55{,}1''$$

$$= 0{,}845\,0980 + 2\cdot(9{,}692\,3206 - 10) = 0{,}229\,7392$$

$$\log x_2 = \log 7 + 2\cdot\log\cos 29^0\,29'\,55{,}1''$$

$$= 0{,}845\,0980 + 2\cdot(9{,}939\,7026 - 10) = 0{,}724\,5032$$

$$x_1 = 1{,}69722$$

$$x_2 = 5{,}30278$$

6. Задатак. Да се израз

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma}$$

претвори у други вид који ће бити подесан за логаритамско рачунање.

Написаћемо

$$c = \sqrt{(a+b)^2 - 2\,a\,b\,(1+\cos\gamma)}$$

$$= (a+b)\sqrt{1 - \frac{2\,a\,b\,(1+\cos\gamma)}{(a+b)^2}}$$

или с обзиром на то што је

$$1 + \cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

(в. једн. 19 чл. 22.)

$$c = (a+b)\sqrt{1 - \frac{4\,a\,b\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2}}$$

$$= (a+b)\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{a\,b}\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}\right)^2}$$

и у претпоставци да задати израз има стварну вредност, тј. да је $a^2 + b^2 > 2\,a\,b\cos\gamma$, дакле $\dfrac{2\sqrt{a\,b}\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b} < 1$ ставићемо

α)
$$\frac{2\sqrt{a\,b}\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b} = \sin\varphi$$

$$\log\sin\varphi$$

β) $$= \log 2 + \frac{1}{2}(\log a + \log b) + \log\cos\frac{\gamma}{2} - \log(a+b),$$

па ћемо добити

$$c = (a + b) \cos \varphi \qquad (\gamma$$

$$\log c = \log (a + b) + \log \cos \varphi. \qquad (\delta$$

Пример

$$c = \sqrt{2067^2 + 3194^2 - 2 \times 2067 \times 3194 \cdot \cos 41^0 15' 27''} = ?$$

Овде је

$$\sin \varphi = \frac{2\sqrt{2067 \times 3194} \cdot \cos 20^0 37' 43{,}5''}{2067 + 3194} \qquad (\alpha'$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2} (\log 2067 + \log 3194) + \log \cos 20^0 37' 43{,}5'' - \log 5261 \quad (\beta'$$

$$= 0{,}301\,0300 + \frac{1}{2} (3{,}315\,3405 + 3{,}504\,3349) + 9{,}971\,2215 - 10$$

$$- 3{,}721\,0683 = 9{,}961\,0209 - 10$$

$$\varphi = 66^0 5' 10{,}8''$$

$$\log \cos \varphi = 9{,}607\,8405 - 10$$

$$c = (2067 + 3194) \cos 66^0 5' 10{,}8'' \qquad (\gamma'$$

$$= 5261 \cdot \cos 66^0 5' 10{,}8''$$

$$\log c = \log 5261 + \log \cos 66^0 5' 10{,}8'' \qquad (\delta'$$

$$= 3{,}721\,0683 + 9{,}607\,8405 - 10$$

$$= 3{,}328\,9088$$

$$c = 2132{,}597.$$

2.

Логаритми збира и разлике.

68. **log (1 + K).** — Претпоставимо да нам је дат логаритам једнога (непознатог) позитивног броја K и ми желимо да нађемо логаритам за јединицу већега броја $1 + K$, а да не одређујемо број K.

Ако ставимо

α) $$K = tg^2 \varphi,$$

одакле

β) $$\log tg\, \varphi = \frac{1}{2} \log K$$

добићемо

$$1 + K = 1 + tg^2 \varphi = 1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

тј.

γ) $$1 + K = \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

δ) $$\log (1 + K) = -2 \log \cos \varphi .$$

Ми видимо, одавде, да се $\log (1 + K)$ може добити из познатога нам $\log K$ кад се на основу обрасца β) израчуна помоћни угао φ и та његова вредност стави у образац δ).

Пример.

Нека је
$$\log K = 0{,}671\,3098.$$

Тражи се $\log (1 + K)$.

На основу β) имамо

β′) $$\log tg\, \varphi = \frac{0{,}671\,3098}{2} = 0{,}335\,6549,$$

одакле

$$\varphi = 65^0\, 13'\, 4{,}6''$$

$$\log \cos \varphi = 9{,}622\,3878 - 10$$

и према томе, а на основу δ),

δ′) $$\log (1 + K) = -2 \cdot (9{,}622\,3878 - 10) = 0{,}755\,2244.$$

Напомена. Отуда што се употребом седмомесних логаритамских таблица помоћни угао φ, у оваквој прилици, може највише на десете делове од секунде тачно да одреди произилази да у логаритмима, који су израчунати на основу угла φ, седмо, а понекад и шесто, десетно место није поуздано. Тако код горњег примера јесте на седам места тачна вредност резултата $\log(1+K) = 0{,}755\,2245$, дакле за јединицу у седмоме десетном месту различна од горе нађене вредности.

69. **log (P + Q).** — Дати су логаритми од два (непозната) позитивна броја P и Q; хоће се логаритам збира $P+Q$, а да се претходно не одређују бројеви P и Q.

Овај задатак своди се на онај у прошломе члану, јер отуда што је

$$P + Q = P\left(1 + \frac{Q}{P}\right)$$

или ако ставимо

$$\frac{Q}{P} = K,$$

дакле

$$\log K = \log Q - \log P$$

следује

$$\log(P+Q) = \log P + \log(1+K). \qquad (\text{s}$$

На десној страни имамо познати $\log P$ и имамо $\log(1+K)$, које се, на показати начин, може да добије из познате нам вредности за $\log K$.

Пример.

Нека је

$$\log P = 3{,}295\,0471, \quad \log Q = 2{,}751\,8654.$$

Тражи се $\log(P+Q)$.

Прво треба да одредимо $log(1+K)$, где је $K=\frac{Q}{P}$

$$log K = log Q - log P = 2{,}751\,8654 - 3{,}295\,0471 = 9{,}456\,8183 - 10$$
$$= 2\, log\, tg\, \varphi,$$

дакле (в. образац β)

$$log\, tg\, \varphi = \frac{1}{2}\cdot(9{,}456\,8183 - 10) = 9{,}728\,4091 - 10$$

$$\varphi = 28^0\, 8'\, 59{,}3''$$

$$log\, cos\, \varphi = 9{,}945\,3293 - 10$$

и према томе (в. образац δ)

$$log(1+K) = -2\cdot(9{,}945\,3293 - 10) = 0{,}109\,3414,$$

које, с обзиром на образац ε), даје

$$log(P+Q) = 3{,}295\,0471 + 0{,}109\,3414 = 3{,}404\,3885$$

(место тачне вредности 3,404 3887).

70. **log (K — 1).** — Замислимо да нам је познат логаритам једнога броја K који је већи од 1[1]); желимо да нађемо логаритам за јединицу мањега броја $K-1$, без да претходно одређујемо сам број K.

Ставимо.

α) $$K = \frac{1}{cos^2\varphi},\text{[2])}$$

одакле

$$log K = -2\, log\, cos\, \varphi$$

β) $$log\, cos\, \varphi = -\frac{1}{2}\, log K.$$

---

[1]) Да ли је један непознати број K, чији нам је логаритам дат, већи или мањи од 1 дознајемо из карактеристике логаритма (в. чл. 40. или *Закључак* на крају чл. 41. и *Закључак* на крају чл. 43.).

[2]) В. под 3) на крају чл. 63.

На тај начин следује

$$K - 1 = \frac{1}{cos^2 \varphi} - 1 = \frac{1 - cos^2 \varphi}{cos^2 \varphi} = \frac{sin^2 \varphi}{cos^2 \varphi}$$

или

$$K - 1 = tg^2 \varphi \qquad (\gamma$$

$$log (K - 1) = 2 \, log \, tg \, \varphi. \qquad (\delta$$

Пример.

Нека је

$$log \, K = 2{,}852\,3946.$$

Да бисмо нашли $log (K - 1)$ узимамо према обрасцу β)

$$log \, cos \, \varphi = -\frac{2{,}852\,3946}{2} = -1{,}426\,1973 = 8{,}573\,8027 - 10,$$

одакле

$$\varphi = 87^0\,51'\,7{,}3''$$

$$log \, tg \, \varphi = 1{,}425\,8906$$

и, на основу обрасца δ), налазимо

$$log (K - 1) = 2 \times 1{,}425\,8906 = 2{,}851\,7812$$

(место тачније вредности 2,851 7841).

71. **log (1 — K).** — Познавајући логаритам једнога (непознатог) позитивног броја $K < 1$ можемо да одредимо логаритам од $(1 - K)$, а да претходно не одредимо број K, ако ставимо

$$K = sin^2 \varphi, \qquad (\alpha$$

дакле

$$log \, sin \, \varphi = \frac{1}{2} log \, K \qquad (\beta$$

$$1 - K = cos^2 \varphi \qquad (\gamma$$

$$log (1 - K) = 2 \, log \, cos \, \varphi. \qquad (\delta$$

Пример.

Нека је
$$\log K = 0{,}108\,2046 - 2.$$

Да бисмо нашли $\log(1-K)$ узећемо према обрасцу β)

$$\log \sin \varphi$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(0{,}108\,2046 - 2) = 0{,}054\,1023 - 1 = 9{,}054\,1023 - 10,$$

одакле
$$\varphi = 6^0\,30'\,13{,}2''$$
$$\log \cos \varphi = 9{,}997\,1961 - 10$$

и, на основу обрасца δ), добијамо
$$\log(1-K) = 2\cdot(9{,}997\,1961 - 10) = 0{,}994\,3922 - 1$$

(тачно на сви седам десетних места).

72. **log (P — Q).** — На ова у последња два члана (70. и 71.) изложена случаја можемо да сведемо задатак да помоћу логаритама два (непозната) позитивна броја P и Q нађемо логаритам разлике $P - Q$, а да претходно не одређујемо бројеве P и Q, јер ако напишемо
$$P - Q = Q\left(\frac{P}{Q} - 1\right)$$
или
$$P - Q = P\left(1 - \frac{Q}{P}\right)$$
добићемо
$$\log(P-Q) = \log Q + \log\left(\frac{P}{Q} - 1\right),$$
односно
$$\log(P-Q) = \log P + \log\left(1 - \frac{Q}{P}\right).$$

Логаритам разлике од два броја P и Q, чији су нам познати само логаритми, налазимо кад претходно, на горе показати начин, израчунамо $log\left(\frac{P}{Q}-1\right)$ или $log\left(1-\frac{Q}{P}\right)$, на основу познатих вредности за $log\frac{P}{Q}=log\,P-log\,Q$ и $log\frac{Q}{P}=log\,Q-log\,P$, и томе додамо $log\,Q$, односно $log\,P$.

Пример.

Дато је

$$log\,P=3{,}195\,7042,\quad log\,Q=2{,}756\,8305.$$

Тражи се $log-(P-Q)$.

1. Решење.

$$P-Q=Q\left(\frac{P}{Q}-1\right)$$

$$log\,(P-Q)=log\,Q+log\left(\frac{P}{Q}-1\right)=2{,}756\,8305+log\left(\frac{P}{Q}-1\right).$$

Да бисмо нашли $log\left(\frac{Q}{P}-1\right)$ ставићемо (в. чл. 70.)

$$\frac{P}{Q}=\frac{1}{cos^2\varphi},$$

дакле

$$\frac{P}{Q}-1=tg^2\varphi$$

и добићемо

$$log\,cos\,\varphi=-\frac{1}{2}(log\,P-log\,Q)=-\frac{1}{2}(3{,}195\,7042-2{,}756\,8305)$$

$$=9{,}780\,5631-10$$

$$\varphi=52^0\,53'\,25{,}5''$$

$$log\,tg\,\varphi=0{,}121\,1583$$

$$\log\left(\frac{P}{Q}-1\right)=2\log tg\,\varphi=0{,}242\,3166.$$

На тај начин следује

$$\log(P-Q)=2{,}756\,8305+0{,}242\,3166=2{,}999\,1471.$$

2. Решење.

$$P-Q=P\left(1-\frac{Q}{P}\right)$$

$$\log(P-Q)=\log P+\log\left(1-\frac{Q}{P}\right)=3{,}195\,7042+\log\left(1-\frac{Q}{P}\right).$$

Да бисмо нашли $\log\left(1-\frac{Q}{P}\right)$ ставићемо (према чл. 71.)

$$\frac{Q}{P}=sin^2\varphi,$$

на основу чега је

$$1-\frac{Q}{P}=cos^2\varphi$$

$$\log sin\,\varphi=\frac{1}{2}(\log Q-\log P)=\frac{1}{2}(2{,}756\,8305-3{,}195\,7042)$$

$$=9{,}780\,5631-10$$

$$\varphi=37^0\,6'\,34{,}5''$$

$$\log cos\,\varphi=9{,}901\,7214-10$$

$$\log\left(1-\frac{Q}{P}\right)=2\log cos\,\varphi=0{,}803\,4428-1,$$

дакле

$$\log(P-Q)=3{,}195\,7042+0{,}803\,4428-1=2{,}999\,1471$$

(место тачније вредности 2,999 1453).

73. **Гаус-ови логаритми.** — У последњих пет чланова показато је како се логаритам једнога бинома може да одреди помоћу логаритама његових чланова. Зарад практичне примене овога израчунате су наро-

чите таблице. Ову замисао, коју је први имао *Леонели* (Zecchini *Leonelli*, Кремона 1776. — Крф 1847.), остварио је *Гаус* (Carl Friedrich Gauss, Брауншвајг 1777. — Гетинген 1855.), који је такве таблице, израчунате на 5 десетних места, штампао 1812. године и по коме се ови логаритми зову *Гаус-ови логаритми* (Gauss-sche Logarithmen, logarithmes de Gauss) или *адициони* и *субтракциони логаритми* (Additions- und Subtraktions-Logarithmen, logarithmes d'addition et de soustraction).

Распоред оваквих таблица за *Гаус*-ове логаритме јесте у главноме следећи. У три ступца, означена са A, S и U, сложене су вредности од

$$log\,P - log\,Q = \frac{P}{Q},\ log\left(1 + \frac{Q}{P}\right) \text{ и } log\,\frac{1}{1 - \frac{Q}{P}}.\text{[1]}$$

За сваку положну вредност од $log\,P - log\,Q$ таблице нам дају одговарајуће вредности од $log\left(1+\frac{Q}{P}\right)$ и од $log\,\frac{1}{1-\frac{Q}{P}}$, помоћу којих налазимо $log\,(P+Q)$ и $log\,(P-Q)$, јер је

[1]) У горе напоменутим *Гаус*-овим таблицама од год. 1812. ступци су означени са A, B и C и садрже вредности од $log\,P - log\,Q = log\,\frac{P}{Q}$, $log\left(1+\frac{Q}{P}\right)$ и $log\left(1+\frac{P}{Q}\right)$, тако је дакле $C = A + B$. Ако ставимо $\frac{P}{Q} = tg^2\varphi$, онда је $1 + \frac{Q}{P} = \frac{1}{sin^2\varphi} = cosec^2\varphi$, $1 + \frac{P}{Q} = \frac{1}{cos^2\varphi} = sec^2\varphi$. То значи да ступци A, B, C садрже двоструке логаритме тангенте, косеканте и секанте углова од 45° до 90°. Ми видимо, отуда, да се *Гаус*-ове таблице могу да добију, на врло прост начин, помоћу логаритамско-тригонометриских таблица.

$$\log (P+Q)=\log P+\log \left(1+\frac{Q}{P}\right)$$

$$\log (P-Q)=\log P-\log \frac{1}{1-\frac{Q}{P}}.$$

Ове таблице, које се могу корисно употребити свуда где се логаритамски има да израчуна какав израз који је у виду једнога бинома, уштеђују нам и труд и време у колико се отварање таблица од три пута своди на само једно отварање,[1]) и према томе су за препоруку свима који раде много са логаритмима, пошто је за њих и најмања уштеда у времену од користи.[2])

III

КОМПЛЕКСНЕ КОЛИЧИНЕ

1.

О комплексним количинама у опште.

74. **Напомене.** — Прошириваање индиректних аритметичких операција на све могуће случајеве доводи нас природно до прошириваања појма о броју. Радња

[1]) Да бисмо израчунали $\log(P \pm Q)$ без помоћи *Гаус*-ових таблица из познатих вредности за $\log P$ и $\log Q$ треба да отворимо три пута логаритамске таблице: први пут да бисмо нашли $num \log P$; други пут да бисмо нашли $num \log Q$ и трећи пут да бисмо нашли $\log (num \log P \pm num \log Q)$. Употребом *Гаус*-ових таблица ми их отварамо само један пут тражећи $\log\left(1+\frac{Q}{P}\right)$ или $\log\frac{1}{1-\frac{Q}{P}}$.

[2]) Carl Friedrich Gauss Werke. Herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Dritter Band, pag. 244.

одузимања води негативним, радња делења разломљеним, а радња кореновања ирационалним и имагинарним бројевима. До ових последњих долазимо кад је подкорена количина негативна, а корени изложитељ паран број. Изрази, који воде имагинарним количинама, то су дакле изрази вида $\sqrt[2n]{-a^2}$.[1]) Кад напишемо

$$\sqrt[2n]{-a^2}=\sqrt[2n]{a^2(-1)}=\sqrt[2n]{a^2}\sqrt[2n]{-1}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{\sqrt{-1}}=\sqrt[n]{a\sqrt{-1}},$$

онда добијамо у последњој подкореној количини $a\sqrt{-1}$ основан тип имагинарног броја. $\sqrt{-1}$ означио је *Гаус* (Karl Friedrich Gauss, Брауншвајг 1777 — Гетинген 1855) са i и назвао *латералном јединицом* (laterale Einheit), а бројеве, који из ње произилазе на исти начин на који стварни бројеви из стварне јединице, назвао је латералним бројевима. Ми их данас зовемо *уображеним* или *имагинарним* бројевима.

Најопштији вид једне имагинарне количине представља израз

$$a+i\,b,$$

где су a и b ма какви стварни бројеви, а $i=\sqrt{-1}$. Количине вида $a+i\,b$ назвао је *Гаус комплексним бројевима.* Оне имају, дакле, форму бинома у коме је први део *а стваран* (реалан), а други *$i\,b$ чисто имагинаран.*

Комплексни бројеви садрже у себи како реалне, тако и чисто уображене бројеве као специалне форме;

---

[1]) Квадрат сваког (реалног) броја је позитиван. Према томе је $-a^2$ негативан број, ма којег знака да је a. Парне бројеве бележимо символно са $2n$, јер је двојина ма каквог (парног или непарног) броја увек парна. Значи да је $2n+1$ и $2n-1$ непарно, ма какво било n.

они представљају, према томе, најопштији тип броја. Из $a + i\,b$ следује 1) на случај да је $b = 0$ стваран број a и 2) на случај да је $a = 0$ чисто имагинаран број $i\,b$.

75. Теорема. — Комплексна количина је једино тако равна нули, ако је њен стварни део и њен имагинарни део сваки за се раван нули.

Из
$$a + i\,b = 0$$
следује
$$a = -i\,b$$
$$a^2 = (-i\,b)^2 = -b^2$$
$$a^2 + b^2 = 0.$$

С обзиром на то да су a^2 и b^2 позитивни бројеви, јасно је да последња једначина може да постоји само ако је
$$a = 0 \text{ и } b = 0.$$

Закључак. Две комплексне количине јесу једнаке само онда ако су им једнаки како стварни, тако и они са i помножени делови.

Из
$$a + i\,b = c + i\,d$$
следује
$$(a - c) + i\,(b - d) = 0,$$
а одавде према горњој теореми
$$a - c = 0 \text{ и } b - d = 0$$
или
$$a = c \text{ и } b = d.$$

2.

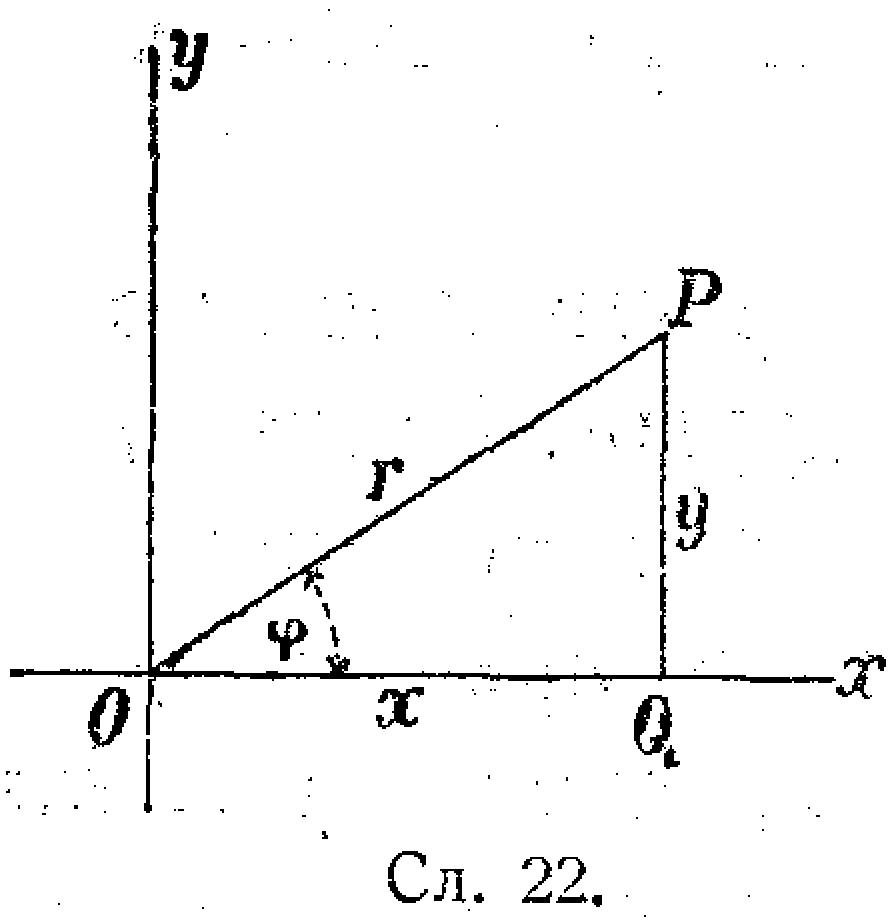
Геометриско представљање комплексних количина.

76. **Представљање комплексних количина помоћу правоуглих координата.** — Стварне (рационалне и ирационалне) бројеве представљамо тачкама једне праве линије на којој узимамо једну тачку O као почетну или нулту тачку. Ма која тачка на тој правој репрезентује број, чија је апсолутна вредност дата одстојањем (мерено одређеном дужном јединицом) те тачке од почетне тачке, а чији је алгебарски знак (тј. да ли је број позитиван или негативан) опредељен правцем којим се кретањем од нулте тачке долази до дотичне тачке. Замишљајући бројну праву у хоризонталноме положају ми споразумно сматрамо правац десно од тачке O као позитиван, а њему супротан, дакле лево од тачке O, као негативан.

Код комплексних количина $x + iy$ имамо два броја x и y који су независни један од другог. Стога су за геометриско представљање комплексних количина потребне две димензије: једна у којој се крећу вредности x-а и друга у којој се крећу вредности y-а. Ми можемо, према томе, да представимо комплексне количине помоћу правоугле координатне системе тачкама у равни тако да комплексној количини $x + iy$ одговара тачка са координатама x и y, а и обратно да тачки са координатама x и y одговара комплексан број $x + iy$.

Јасно је да овај начин геометриске репрезентације комплексних количина садржи и познату геометриску репрезентацију стварних бројева, јер кад ставимо $y=0$ комплексна количина $x+iy$ добија стварну вредност x, а тачке за које је $y=0$ налазе се на x-оси. То значи да све оне тачке, које представљају стварне бројеве, леже на x-оси или другим речима x-оса је представник стварних бројева. Ако, пак, узмемо да је $x=0$, онда се комплексна количина $x+iy$ своди на чисто имагинаран број iy и ми видимо да сви такви бројеви или боље рећи све тачке, које они представљају, леже на y-оси, јер је на њој $x=0$. Следује да је y-оса представник чисто уображених бројева. Најзад сам почетак координата, за који је $x=0$ и $y=0$ представља нулу.

77. Представљање комплексних количина помоћу поларних координата. — Тачку P у равни можемо да утврдимо и на овај начин: њеним одстојањем OP од једне сталне тачке O и углом који правац OP чини са некаквом сталном правом OX. Одстојање $OP=r$ зовемо *потега* или *radius vector*, а $\sphericalangle POX=\varphi$ *поларни угао* или *амплитуда*. Једно и друго (r и φ) сачињавају *поларне координате* тачке P. Тачка O се зове *пол*, права OX *поларна оса* поларне системе.



Сл. 22.

Вредност потеге r узима се увек апсолутно (са знаком $+$) и креће се од 0 до ∞; поларни угао φ рачуна се од десна на лево, тј. у супротноме смислу обртања сахатне казаљке и броји се од 0 до 360^0, Очевидно да $\varphi+n\,360^0$, где је n ма какав цео број, води истој тачци којој и угао φ. Тако исто је свеједно узели $-\varphi$ или $360^0-\varphi$.

Из правоуглог троугла OPQ читамо односе

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

и обратно

$$\left.\begin{aligned} & r = +\sqrt{x^2+y^2} \\ & \sin\varphi = \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos\varphi = \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}},\quad tg\,\varphi = \frac{y}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Ми смо овим у стању да из поларних координата (r и φ) једне тачке израчунамо њене правоугле координате (x и y) и обратно из правоуглих да нађемо поларне координате.

На основу образаца 50) доводимо комплексну количину на тригонометриски вид

$$x + i\,y = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{52}$$

У овој тз. *редуцираној форми* комплексне количине r је *модуо* или *норма*,[1] φ *амплитуда* или *аргуменат*, бином $\cos\varphi + i\sin\varphi$ *угловни сачинитељ*.

Док комплексне количине,у зете у форми $x + i\,y$ и интерпретоване у правоуглој системи, представљају тачке у равни, оне, кад се узму у редуцираној форми $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и интерпретују у поларној системи, представљају дужи по величини и правцу њиховом. Дужина је изражена модуом, а правац угловним сачинитељем, односно амплитудом. Комплексна количина $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ представља, на тај начин, дуж величине r у правцу који је одређен углом φ. Значи да

[1]) Назив *модуо* за r завео је *Арган* (Argand) год. 1814., а *норма* је од *Гаус*-а (1831.). Вид $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ назвао је *Коши* (Augustin-Louis Cauchy, Париз 1789 — Sceaux 1857) *редуцираном формом* год. 1821.

дужима исте величине r и истога правца φ одговара једна иста комплексна количина $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и да су, према томе, дужи OP_1 и P_2P или OP_2 и P_1P (в. сл 23.) представљене истом комплексном количином.

1. *Пример.* Комплексну количину $21{,}4 + 17{,}3 . i$ довести на редуцирану форму.

Овде је $x = 21{,}4$, $y = 17{,}3$, дакле

$$r = \sqrt{21{,}4^2 + 17{,}3^2} = 27{,}518$$

$$tg\,\varphi = \frac{17{,}3}{21{,}4} = \frac{173}{214}, \quad \varphi = 38^0\,57'\,9''$$

и према томе

$$21{,}4 + 17{,}3 \cdot i = 27{,}518\,(\cos 38^0\,57'\,9'' + i\sin 38^0\,57'\,9'').$$

2. *Пример.* Из поларних координата $r = 18{,}6$, $\varphi = 51^0\,24'16''$ израчунати правоугле координате x, y.

На основу формула 50) имамо

$$x = 18{,}6 \cdot \cos 51^0\,24'\,16'' = 11{,}603$$

$$y = 18{,}6 \cdot \sin 51^0\,24'\,16'' = 14{,}537.$$

На тај начин јесте

$$18{,}6 \cdot (\cos 51^0\,24'\,16'' + i\sin 51^0\,24'\,16'') = 11{,}603 + 14{,}537 \cdot i.$$

Примедба. Код израчунавања угла φ из координата x и y наилазимо на неизвесност услед тога што се тај угао φ добија помоћу тригонометриских функција. Та неодређеност се, међутим, уклања тиме што је, на основу алгебарских знакова од x и y, унапред већ познат квадрант у коме се налази угао φ. Тако у 1. примеру $21{,}4 + 17{,}3 \cdot i$ узели смо за φ оштру вредност $\varphi = 38^0 57'\,9''$ зато што тачка $x = 21{,}4$, $y = 17{,}3$ лежи у првоме квадранту. Ми бисмо, пак, узели ону другу могућу вредност угла φ, за коју је такође $tg\,\varphi = \frac{173}{214}$, а то је $38^0\,57'\,9'' + 180^0 = 218^0\,57'\,9''$ да тачка лежи у трећем квадранту, тј. да је задата комплексна количина $-21{,}4 - 17{,}3 \cdot i$, где је $x = -21{,}4$, $y = -17{,}3$. На случај да је задата комплексна количина $-21{,}4 +$

$+17{,}3 \cdot i$ или $21{,}4-17{,}3 \cdot i$, тј. да тачка лежи у другом или четвртом квадранту имали бисмо $tg\,\varphi = -\frac{173}{214}$ и узели бисмо $\varphi = 180^0 - 38^0 57' 9'' = 141^0 2' 51''$, односно $\varphi = 360^0 - 38^0 57' 9'' = 321^0 2' 51''$.

3.

Алгебарске радње са комплексним количинама.

78. **Напомена.** — При завођењу нових појмова у Математици зависи махом од наше воље и споразума на који ћемо начин пренети законе операција, којима подлеже стари појмови и на нове појмове. Ову произвољност регулише Математика једним начелом, које је *Ханкел* (Hermann Hankel, Хале 1839 — Шрамберг у Шварцвалду 1873) назвао *принципом непромењљивости формалних закона* (Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze). Начело се састоји у томе да се сва основна правила, која важе за старе појмове, пренашају и на нове појмове у колико се тиме не долази у супротност са опште важећим истинама. Овоме начелу има Математика да благодари своју доследност и хармоничност, коју опажамо између њених разних партија: особине које Математику у великој мери одликују. Истина да је поменуто начело узето произвољно, али би Математика без њега изгубила своје најлепше особине.

Овде нека је само напоменуто да речени принцип може у пуној важности да се примене и код имагинарних бројева, тј. да се сва основна правила, позната нам из Аритметике, могу да пренесу и на уображене количине, а да не дођемо у сукоб са опште утврђеним истинама.

79. **Сабирање.** — Комплексне количине се сабирају кад се одвојено саберу сви стварни, а тако исто и сви чисто имагинарни (са i помножени) делови појединих сабирака:

$$(x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) + \cdots + (x_n + i\,y_n) =$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + i\,(y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Нпр.

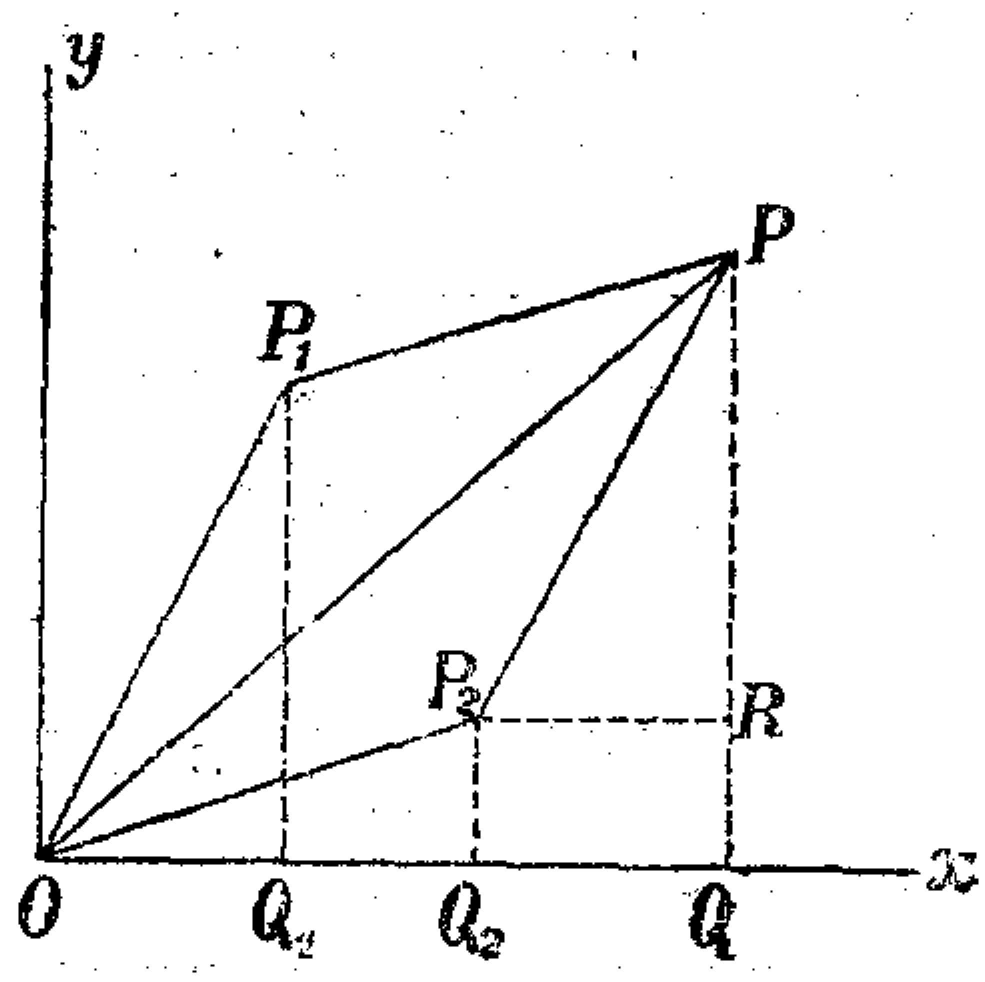
$$(3 + 2\,i) + (5 + 4\,i) = 3 + 5 + i\,(2 + 4) = 8 + 6\,i$$
$$(2 + 6\,i) + 7 = 2 + 7 + 6\,i = 9 + 6\,i$$
$$(8 + 9\,i) + 4\,i = 8 + i\,(9 + 4) = 8 + 13\,i.$$

Пошто је

$$(x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) = (x_2 + i\,y_2) + (x_1 + i\,y_1),$$

видимо да *комутативни закон*, који важи за стварне бројеве, постоји и за комплексне количине.

Конструктивно налазимо збир комплексних количина $x_1 + i\,y_1$ и $x_2 + i\,y_2$, којима одговарају тачке P_1 и P_2, кад одредимо тачку P са апсцисом $OQ = x_1 + x_2$ и ординатом $PQ = y_1 + y_2$. Није тешко доказати да је тачка P, тј. тачка збира, четврто теме паралелограма чија су остала три темена у тачкаиа O, P_1 и P_2 или посматрајући комплексне количине као дужи: збир двеју комплексних количина представљен је диагоналом паралелограма чије су стране (по дужини и правцу) равне сабирцима.



Сл. 23.

Отуда што је једна страна троугла мања од збира других двеју страна, а с обзиром на то да је у троуглу $OP_1 P$

$$OP_1 = mod\,(x_1 + i\,y_1), \quad P_1 P = OP_2 = mod\,(x_2 + i\,y_2),$$
$$OP = mod\,[x_1 + x_2 + i\,(y_1 + y_2)],$$

следује

$$mod[x_1 + x_2 + i\,(y_1 + y_2)] < mod(x_1 + i\,y_1) + mod(x_2 + i\,y_2).$$

Речима: модуо збира двеју (или више) комплексних количина мањи је од збира модуа појединих сабирака.

80. **Одузимање.** — Разлика двеју комплексних количина добија се кад се узму одвојено разлике из стварних и из чисто имагинарних делова и из та два резултата образује нова комплексна количина. У формули:

$$(x_1 + i\,y_1) - (x_2 + i\,y_2) = x_1 - x_2 + i\,(y_1 - y_2).$$

Правило одузимања са правилом сабирања исказато је општим обрасцем

$$(x_1 + i\,y_1) \pm (x_2 + i\,y_2) \pm \cdots \pm (x_n + i\,y_n) =$$
$$x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n + i\,(y_1 \pm y_2 \pm \cdots \pm y_n). \qquad (53$$

Речима: алгебарски збир више комплексних количина раван је комплексној количини чији је, како стварни, тако и уображени део раван алгебарском збиру стварних, односно чисто уображених делова појединих чланова.

Нпр.

$$(4 + 3\,i) + (-9 - 10\,i) - (1 - 2\,i) = 4 - 9 - 1 + i\,(3 - 10 + 2) = -6 - 5\,i$$
$$(11 + i) - (5 - 6\,i) + (4 - 7\,i) = 11 - 5 + 4 + i\,(1 + 6 - 7) = 10$$
$$(15 - 8\,i) + (-12 + 13\,i) - (3 + 4\,i) = 15 - 12 - 3 + i\,(-8 + 13 - 4) = i.$$

Графички можемо да конструишемо разлику двеју комплексних количина на двојак начин.

1) Из

$$(x_1 + i\,y_1) - (x_2 + i\,y_2) = x_1 - x_2 + i\,(y_1 - y_2)$$

следује

$$(x_1 + i\,y_1) = (x_2 + i\,y_2) + [(x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)]$$

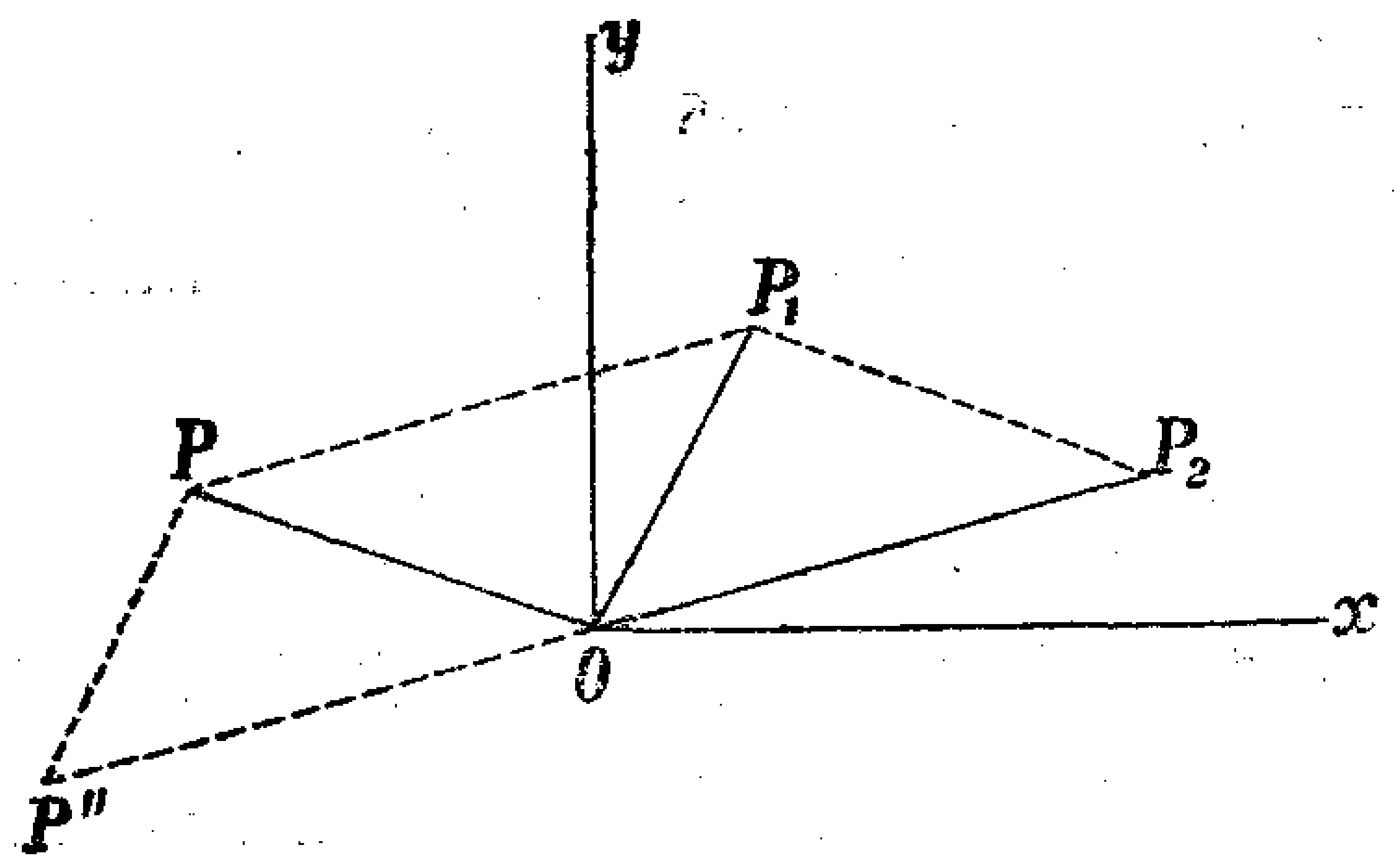
или, ако зарад краћег бележења означимо поједине комплексне количине дужима које им одговарају, можемо то и овако да обележимо

$$OP_1 - OP_2 = OP$$

и

$$OP_1 = OP_2 + OP.$$

То значи да је OP_1 диагонала паралелограма чије су стране OP_2 и OP. Или: дуж OP, која репрезентује разлику из двеју комплексних количина, јесте страна паралелограма у којем је умањеник OP_1 диагонала, а умалитељ OP_2 она друга страна. Графичко решење радње одузимања комплексних количина састоји се, дакле, у томе да се нађе друга страна једнога паралелограма кад нам је позната његова диагонала и једна страна[1]).



Сл. 24.

[1]) Као што видимо конструкција збира и разлике комплексних количина основана је на истоме принципу на коме и слагање кретања (помоћу паралелограма). Код сабирања су дате компоненте, а тражи се резултанта; код одузимања замишља се да је позната резултанта и једна компонента, а хоће се она друга компонента.

До истог резултата долазимо и на овај
2) начин, а то сматравши разлику као алгебарски збир

$$(x_1 + i\,y_1) - (x_2 + i\,y_2) = (x_1 + i\,y_1) + (-x_2 - i\,y_2)$$

или краће

$$OP_1 - OP_2 = OP_1 + (-OP_2),$$

а узмемо у обзир да дужи OP_2 и $-OP_2$ имају једнаку величину а супротан правац. Диагонала OP из $OP_1 = x_1 + i\,y_1$ и $OP'' = -OP_2 = -x_2 - i\,y_2$ конструисаног паралелограма $OP_1\,PP''$ даје нам разлику коју тражимо, јер је

$$OP = OP_1 + OP'' = (x_1 + i\,y_1) + (-x_2 - i\,y_2).$$

81. **Множење.** — Производ двеју (или више) комплексних количина јесте, у опште, опет једна комплексна количина

$$(x_1 + i\,y_1)\,(x_2 + i\,y_2) = x_1\,x_2 - y_1\,y_2 + i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1).$$

Нпр.

$$(3 + 2\,i)\,(4 + 5\,i) = 2 + 23\,i.$$

Ако узмемо комплексне количине у тригонометриској форми добићемо овакав резултат

$$r_1\,(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1).\ r_2\,(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) =$$
$$r_1\,r_2\,[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2 + i\,(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]$$

или на основу познате адиционе теореме за тригонометриске функције простије

$$r_1\,(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1)\cdot\ r_2\,(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) =$$
$$r_1\,r_2\,[\cos\,(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin\,(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Сасвим опште имамо формулу

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\cdots r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) =$$

$$54)\quad r_1 r_2\cdots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)].$$

Из овога обрасца читамо правило да је производ двеју или више комплексних количина једна комплексна количина чији је модуо једнак производу модуа, а амплитуда једнака збиру амплитуда појединих чинитеља.

Тако нпр. јесте

$$15(\cos 42^0 5' 36'' + i\sin 42^0 5' 36'')\cdot 12(\cos 19^0 47' 21'' + i\sin 19^0 47' 21'')$$
$$= 15\cdot 12[\cos(42^0 5' 36'' + 19^0 47' 21'') + i\sin(42^0 5' 36'' + 19^0 47' 21'')]$$
$$= 180(\cos 61^0 52' 57'' + i\sin 61^0 52' 57'').$$

Две комплексне количине, које се разликују једино у знаку њиховог имагинарног дела, зову се *спрегнуте* или *конјуговане* комплексне количине. Такве су количине

$$x + iy \text{ и } x - iy$$

или

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ и } r(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Њихов је производ стваран и позитиван: раван квадрату модуа:

$$55)\quad \begin{cases} (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \\ r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r^2. \end{cases}$$

Конструкцију производа двеју комплексних количина оснивамо на следећем расматрању. Нека је $\overline{OA} = 1$, P тачка производа комплексних количина, које су представљене тачкама P_1 и P_2. На основу горњег правила је

$$\overline{OP} = r_1 r_2 = \overline{OP_1}\cdot\overline{OP_2},$$

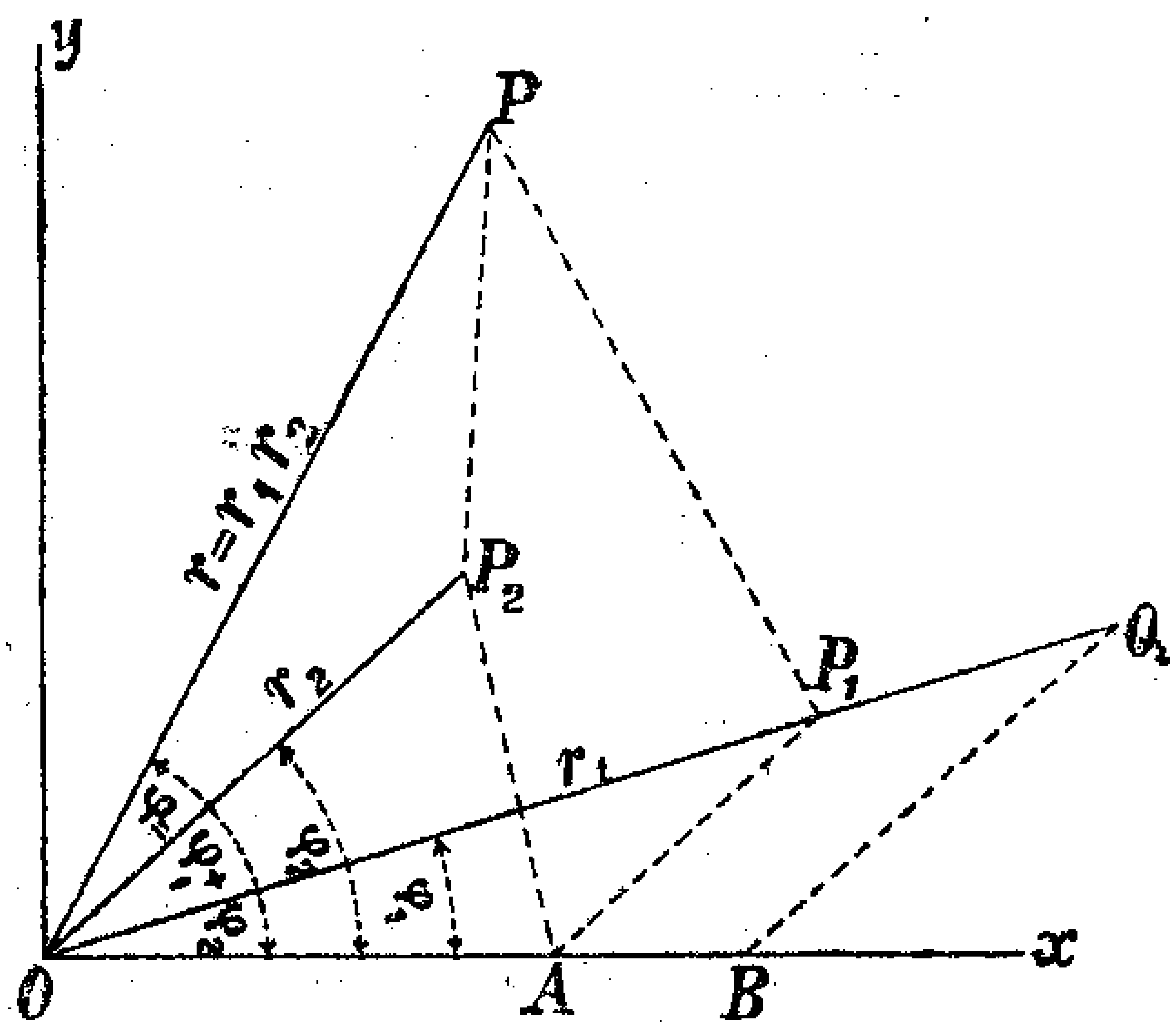
одакле

$$\overline{OA} : \overline{OP_1} = \overline{OP_2} : \overline{OP}.$$

Осим овога је

$$\sphericalangle POX = \sphericalangle P_1 OX + \sphericalangle P_2 OX = \varphi_1 + \varphi_2.$$

То значи да је $\sphericalangle POP_2 = \sphericalangle P_1 OX = \varphi_1$ и према овоме су троуглови POP_2 и $P_1 OA$ слични. Из истих су разлога слични и троуглови POP_1 и $P_2 OA$. На основу тога лако је конструисати тачку P из задатих тачака A, P_1 и P_2.



Сл. 25.

Ако је један чинитељ стваран, онда тачка производа има са тачком комплексног чинитеља исту или за 180^0 већу амплитуду, према томе да ли је стварни чинитељ позитиван или негативан. Тако нпр. тачка производа за P_1 и B, од којих тачка P_1 представља један комплексан, а тачка B један стваран и позитиван број, налази се у Q. Аналитички се то тумачи помоћу горњег правила 54), узевши у обзир да је амплитуда за позитивне стварне бројеве (тј. тачке на позитивној половини x-осе) равна нули, а за негативне стварне бројеве (тачке на негативној половини x-осе) равна 180^0 и да према томе позитивни стварни бројеви у тригонометриској форми изгледају $r\,(\cos 0 + i \sin 0)$, а негативни бројеви $r\,(\cos 180^0 + i \sin 180^0)$, где r означава њихову апсолутну вредност. Производ једне комплексне количине $r_1\,(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и једног стварног броја јесте у првоме случају

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r(\cos 0 + i\sin 0) = r r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

а у другом случају

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r(\cos 180^0 + i\sin 180^0) =$$
$$r r_1[\cos(\varphi_1 + 180^0) + i\sin(\varphi_1 + 180^0)].$$

Напомена: Положај тачке производа у однос на тачке чинитеља зависи и од дужне јединице, које код збира и разлике није случај. Јер, ако променимо дужну јединицу у размери 1 : к, потега збира и разлике промениће се у истој мери као и потеге сабирака, док се потега производа мења у односу 1 : к². Код збира и разлике дужи се мењају све у истој мери и облик фигуре остаје исти. Код производа зависи изглед фигуре од јединице којом меримо, јер се мењањем ове дуж производа мења у јачој мери но дужи чинитеља.

82. **Делење.** — Количник из две комплексне количине је у опште такође комплексан. Да бисмо такав количник довели на вид комплексне количине помножићемо дељеник и делитељ комплексном количином која је са делитељем конјугована:

$$\frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} = \frac{(x_1 + i y_1)(x_2 - i y_2)}{(x_2 + i y_2)(x_2 - i y_2)}$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Нпр.

$$\frac{5 + 6i}{8 + 2i} = \frac{(5 + 6i)(8 - 2i)}{(8 + 2i)(8 - 2i)} = \frac{13}{20} + \frac{19}{40}i.$$

Узев комплексне количине у тригонометриској форми имамо

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$\frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}$$

или на основу познатих образаца из Гониометрије краће

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\Big[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big]. \quad (56$$

Одавде читамо правило да је модуо количника из две комплексне количине једнак количнику из модуа, а лук количника раван разлици из лука дељеникова и лука делитеља.

Тако нпр.

1) $$\frac{24(\cos 67^0 18' 49'' + i\sin 67^0 18' 49'')}{5(\cos 49^0 25' 16'' + i\sin 49^0 25' 16'')}=4{,}8(\cos 17^0 53' 33'' + i\sin 17^0 53' 33'').$$

2) $$\frac{15(\cos 38^0 4' 52'' - i\sin 38^0 4' 52'')}{12(\cos 17^0 21' 8'' - i\sin 17^0 21' 8'')}=\frac{15}{12}\,\frac{\cos 17^0 21' 8'' + i\sin 17^0 21' 8''}{\cos 38^0 4' 52'' + i\sin 38^0 4' 52''}$$

$$=\frac{5}{4}\Big(\cos(-20^0 43' 44'')+i\sin(-20^0 43' 44'')\Big)$$

$$=\frac{5}{4}(\cos 20^0 43' 44'' - i\sin 20^0 43' 44'').$$

Конструкцију количника изводимо из конструкције производа. Из формуле 56) следује

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

$$=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\cdot\frac{r_1}{r_2}\Big[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big].$$

Овде се има сматрати да је познат производ

$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и чинитељ $r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, а непознат чинитељ $\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$.

То би значило на сл. 25., у којој тачка P представља производ чинитеља P_1 и P_2, дакле тачка P_2 количник из P и P_1, да се из тачака P и P_1 одреди тачка P_2. Ово се решава врло лако на основу онога што смо утврдили односно сличности извесних троуглова.

1. *Напомена.* Дељење бисмо могли да подведемо под множење кад напишемо

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\frac{1}{r_2}[\cos(2\pi - \varphi_2) + i\sin(2\pi - \varphi_2)].$$

Конструкција производа комплексних количина $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $\frac{1}{r_2}[\cos(2\pi - \varphi_2) + i\sin(2\pi - \varphi_2)]$ даје количник $\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}$.

2. *Напомена.* Приметимо да мењањем дужне јединице положај тачке количника остаје недарнут, јер у ма којој размери да продужимо или скратимо дужи дељеника и делитеља, дуж количника остаће непромењена. Облик фигуре се, међутим, мења.

83. **Степеновање.** — Кад у формули 54) чл. 81. ставимо $r_1 = r_2 = \cdots = r_n$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n$ добијамо такозвани *Моавр-ов образац* (Abraham de Moivre,

Vitry у Шампањи 1667 — Лондон 1754) који гласи

$$[r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)]^n = r^n\,(cos\,n\,\varphi + i\,sin\,n\,\varphi). \qquad (57$$

Речима: n-ти степен једне комплексне количине јесте комплексна количина чија је амплитуда једнака амплитуди основице помноженој експонентом n, а потега или модуо једнак изложитељем n степенованом модулу основице.

Да ово правило важи и за негативне експоненте потврђује се на следећи начин

$$[r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)]^{-n}$$

$$= \frac{1}{[r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)]^n} = \frac{1}{r^n\,(cos\,n\,\varphi + i\,sin\,n\,\varphi)}$$

$$= r^{-n}\,(cos\,n\,\varphi - i\,sin\,n\,\varphi) = r^{-n}\,[cos\,(-n\,\varphi) + i\,sin\,(-n\,\varphi)].$$

84. **Примена Моавр-овог обрасца на развијање синуса и косинуса умноженог лука у ред који тече по степенима синуса и косинуса простога лука.** — На основу *Моавр*-овог обрасца јесте

$$(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)^n = cos\,n\,\varphi + i\,sin\,n\,\varphi,$$

одакле, кад леву страну развијемо по биномноме правилу и одвојено сравнимо стварне и уображене делове на левој и десној страни, следује

$$cos\,n\varphi = cos^n\varphi - \binom{n}{2} cos^{n-2}\varphi\,sin^2\varphi + \binom{n}{4} cos^{n-4}\varphi\,sin^4\varphi - \cdots \qquad (58$$

$$sin\,n\,\varphi = \binom{n}{1} cos^{n-1}\,\varphi\,sin\,\varphi - \binom{n}{3} cos^{n-3}\,\varphi\,sin^3\,\varphi + \cdots \qquad (59$$

Напомена. Вредно је запазити да је према *Моавр*-овом обрасцу

$$(cos\,x + i\,sin\,x)^y = (cos\,y + i\,sin\,y)^x.$$

85. **Кореновање.** — Ако у формули 57) предпоследњег члана заменимо $\varphi = \frac{\Phi}{n}$, $r = \sqrt[n]{R}$ добићемо

$$\left[\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}\right)\right]^n = R(\cos\Phi + i\sin\Phi),$$

одакле

$$60)\quad \sqrt[n]{R(\cos\Phi + i\sin\Phi)} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}\right),$$

које, кад напишемо у форми

$$[R(\cos\Phi + i\sin\Phi)]^{\frac{1}{n}} = R^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\Phi + i\sin\frac{1}{n}\Phi\right)$$

показује да *Моавр*-ов образац важи и за разломљене експоненте, дакле у опште.

Примери.

1) $[3{,}5(\cos 72^0 24' 17'' + i\sin 72^0 24' 17'')]^6 =$

$3{,}5^6[\cos 6\cdot(72^0 24' 17'') + i\sin 6\cdot(72^0 24' 17'')] =$

$1838{,}264(\cos 434^0 25' 42'' + i\sin 434^0 25' 42'') =$

$1838{,}264(\cos 74^0 25' 42'' + i\sin 74^0 25' 42'')$.

2) $[1{,}8(\cos 21^0 5' 34'' + i\sin 21^0 5' 34'')]^{-3} =$

$1{,}8^{-3}[\cos(-3)(21^0 5' 34'') + i\sin(-3)(21^0 5' 34'')] =$

$0{,}171[\cos(-63^0 16' 42'') + i\sin(-63^0 16' 42'')] =$

$0{,}171(\cos 63^0 16' 42'' - i\sin 63^0 16' 42'')$.

3) $[4{,}2(\cos 51^0 29' 36'' + i\sin 51^0 29' 36'')]^{7/4} =$

$4{,}2^{7/4}\left[\cos\frac{7}{4}(51^0 29' 36'') + i\sin\frac{7}{4}(51^0 29' 36'')\right] =$

$12{,}322(\cos 90^0 6' 48'' + i\sin 90^0 6' 48'') =$

$12{,}322(-\cos 89^0 53' 12'' + i\sin 89^0 53' 12'')$.

86. **Корене вредности.** — Услед периодности тригонометриских функција (за 2π) комплексна количина $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ не мења своју вредност, кад њеној амплитуди додамо ма колики (цео) број h пуних периферија, тј. кад њену амплитуду φ заменимо амплитудом $\varphi + 2\pi h$. На основу тога, дакле, што је

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left[\cos(\varphi + 2\pi h) + i\sin(\varphi + 2\pi h)\right]$$

може формула 60) у прошлом члану овако да се напише

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi h}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi h}{n}\right). \quad (60a$$

Одавде закључујемо да n-ти корен из једне количине има увек n разних вредности, које добијамо кад у формули 60$_a$) поступно ставимо

$$h = 0, 1, 2, 3 \cdots n - 1.$$

Да n-ти корен из једне количине *нема више* од n вредности показује сам образац 60$_a$), јер из њега видимо да је

корена вредности за	она иста која и за
$h = n$	$h = 0$
$h = n + 1$	$h = 1$
$h = n + 2$	$h = 2$

итд.

Корене вредности, после n-те, понављају се, дакле, периодно.

Да су оне n вредности, које даје формула 60$_a$) кад у њој заменимо редом $h = 0, 1, 2, \cdots n - 1$, све *различне* доказаћемо на следећи начин.

Претпоставимо да међу кореним вредностима има две једнаке и нека су h_1 и h_2 она два броја из реда

$0, 1, 2, \cdots n-1$ која воде тим једнаким вредностима. Амплитуде ових једнаких корених вредности могу се разликовати само за цео број g периферија 2π, тј. између дотичних амплитуда треба да постоји једначина

$$\frac{\varphi + 2\pi h_1}{n} = \frac{\varphi + 2\pi h_2}{n} + 2\pi g,$$

одакле

$$h_1 - h_2 = n g.$$

Ова једначина је међутим, апсурдна зато што су, према претпоставци, бројеви h_1 и h_2 мањи од n, па дакле и $h_1 - h_2 < n$, док је пак $n g > n$. То значи да је учињена претпоставка, да има два једнака корена, погрешна.

Овим смо доказали значајну теорему да свака корена количина има увек онолико (разних) вредности колики је њен корени експонент.

Примери.

1) $$\sqrt[5]{-15{,}83 + 12{,}67\, i} = ?$$

Овде је $$r = \sqrt{15{,}83^2 + 12{,}67^2} = 20{,}27604$$

$$tg\,\varphi = -\frac{12{,}67}{15{,}83} = -\frac{1267}{1583}$$

$$\varphi = 180^0 - 38^0\, 40'\, 23'' = 141^0\, 19'\, 37''.$$

Према овоме, а на основу формуле 60 a), имамо

$$\sqrt[5]{-15{,}83 + 12{,}67\, i}$$

$$= \sqrt[5]{20{,}27604}\left(\cos\frac{141^0 19' 37'' + h \cdot 360^0}{5} + i \sin\frac{141^0 19' 37'' + h \cdot 360^0}{5}\right)$$

$$= 1{,}825558\,[\cos(28^0 15' 55{,}4'' + h \cdot 72^0) + i \sin(28^0 15' 55{,}4'' + h \cdot 72^0)],$$

где треба ставити $h = 0, 1, 2, 3, 4.$

За $h = 0$ следује

$$\sqrt[5]{-15,83 + 12,67\,i}$$

$$= 1,825558\,(\cos 28^0 15' 55,4'' + i \sin 28^0 15' 55,4'')$$

$$= 1,607889 + 0,864506\,i.$$

За $h = 1$ следује

$$\sqrt[5]{-15,83 + 12,67\,i}$$

$$= 1,825558\,(\cos 100^0 15' 55,4'' + i \sin 100^0 15' 55,4'')$$

$$= 1,825558\,(-\cos 79^0 44' 4,6'' + i \sin 79^0 44' 4,6'')$$

$$= -0,325329 + 1,796340\,i.$$

За $h = 2$ следује

$$\sqrt[5]{-15,83 + 12,67\,i}$$

$$= 1,825558\,(\cos 172^0 15' 55,4'' + i \sin 172^0 15' 55,4'')$$

$$= 1,825558\,(-\cos 7^0 44' 4,6'' + i \sin 7^0 44' 4,6'')$$

$$= -1,808949 + 0,245692\,i.$$

За $h = 3$ следује

$$\sqrt[5]{-15,83 + 12,67\,i}$$

$$= 1,825558\,(\cos 244^0 15' 55,4'' + i \sin 244^0 15' 55,4'')$$

$$= 1,825558\,(-\cos 64^0 15' 55,4'' - i \sin 64^0 15' 55,4'')$$

$$= -0,792663 - 1,644490\,i.$$

За $h = 4$ следује

$$\sqrt[5]{-15,83 + 12,67\,i}$$

$$= 1,825558\,(\cos 316^0 15' 55,4'' + i \sin 316^0 15' 55,4'')$$

$$= 1,825\,558\,(\cos 43^0 44' 4,6'' - i \sin 43^0 44' 4,6'')$$

$$= 1,319\,056 - 1,262\,043\,i.$$

2) $$\sqrt[3]{2,7635} = ?$$

Овде је $r = 2,7635$, $\varphi = 0$ и према томе

$$\sqrt[3]{2{,}7635} = \sqrt[3]{2{,}7635}\left(\cos\frac{0^0 + h \cdot 360^0}{3} + i \sin\frac{0^0 + h \cdot 360^0}{3}\right)$$

$$= 1{,}403\,309\,(\cos h \cdot 120^0 + i \sin h \cdot 120^0),$$

где ћемо узети $h = 0,\ 1,\ 2.$

За $h = 0$ имамо $\sqrt[3]{2{,}7635} = 1{,}403\,309.$

За $h = 1$ имамо $\sqrt[3]{2{,}7635} = 1{,}403\,309\,(\cos 120^0 + i \sin 120^0)$

$$= 1{,}403\,309\,(-\cos 60^0 + i \sin 60^0)$$

$$= -0{,}701\,654 + 1{,}215\,300\,i.$$

За $h = 2$ имамо $\sqrt[3]{2{,}7635} = 1{,}403\,309\,(\cos 240^0 + i \sin 240^0)$

$$= 1{,}403\,309\,(-\cos 60^0 - i \sin 60^0)$$

$$= -0{,}701\,654 - 1{,}215\,300\,i.$$

3) $$\sqrt[4]{-37{,}49} = ?$$

Овде је $r = 37{,}49,\ \varphi = 180^0$, дакле

$$\sqrt[4]{-37{,}49} = \sqrt[4]{37{,}49}\left(\cos\frac{180^0 + h \cdot 360^0}{4} + i \sin\frac{180^0 + h \cdot 360^0}{2}\right)$$

$$= 2{,}474\,451\,[\cos(45^0 + h \cdot 90^0) + i \sin(45^0 + h \cdot 90^0)],$$

где има да ставимо $h = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

За $h = 0$ следује $\sqrt[4]{-37{,}49} = 2{,}474\,451\,(\cos 45^0 + i \sin 45^0)$

$$= 1{,}749\,701 + 1{,}749\,701\,i.$$

За $h = 1$ следује $\sqrt[4]{-37{,}49} = 2{,}474\,451\,(\cos 135^0 + i \sin 135^0)$

$$= 2{,}474\,451\,(-\cos 45^0 + i \sin 45^0)$$

$$= -1{,}749\,701 + 1{,}749\,701\,\mathrm{i}.$$

За $h = 2$ следује $\sqrt[4]{-37{,}49} = 2{,}474\,451\,(\cos 225^0 + i \sin 225^0)$

$$= 2{,}474\,451\,(-\cos 45^0 - i \sin 45^0)$$

$$= -1{,}749\,701 - 1{,}749\,701\,i.$$

За $h = 3$ следује $\sqrt[4]{-37{,}49} = 2{,}474\,451\,(\cos 315^0 + i \sin 315^0)$

$$= 2{,}474\,451\,(\cos 45^0 - i \sin 45^0)$$

$$= 1{,}749\,701 - 1{,}749\,701\,i.$$

4) $$\sqrt[3]{580{,}47\,i} = ?$$

Овде је $r = 583{,}47$, $\varphi = 90^0$ и онда

$$\sqrt[3]{583{,}47\,i} = \sqrt[3]{583{,}47}\left(\cos\frac{90^0 + h \cdot 360^0}{3} + i \sin\frac{90^0 + h \cdot 360^0}{3}\right)$$

$$= \sqrt[3]{583{,}47}\,[\cos(30^0 + h \cdot 120^0) + i \sin(30^0 + h \cdot 120^0)],$$

где треба узети редом $h = 0,\ 1,\ 2.$

За $h = 0$ имамо $\sqrt[3]{583{,}47\,i} = 8{,}356\,150\,(\cos 30^0 + i \sin 30^0)$

$$= 7{,}236\,637 + 4{,}178\,075\,i.$$

За $h = 1$ имамо $\sqrt[3]{583{,}47\,i} = 8{,}356\,150\,(\cos 150^0 + i \sin 150^0)$

$$= 8{,}356\,150\,(-\cos 30^0 + i \sin 30^0)$$

$$= -7{,}236\,637 + 4{,}178\,075\,i.$$

За $h = 2$ имамо $\sqrt[3]{583{,}47\,i} = 8{,}356\,150\,(\cos 270^0 + i \sin 270^0)$

$$= -8{,}356\,150\,i.$$

Напомена. Формула 60*a*) даје решење за биномне једначине

$$z^n \pm c = 0,$$

одакле

$$z = \sqrt[n]{\pm c}$$

или ако број c (који може бити ма какав: комплексан или стваран) представимо у тригонометриској форми $\pm c = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$$z = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i \sin\varphi)}.$$

На исто се своди и решавање једначина

$$z^{2n} + p\,z^n + q = 0,$$

јер је

$$z^n = -\frac{\;}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$z = \sqrt[n]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}.$$

Тако нпр. имамо у горња четири примера решења биномних једначина

$$z^5 - (-15{,}83 + 12{,}67\,i) = 0,\quad z^3 - 2{,}7635 = 0,$$

$$z^4 + 37{,}49 = 0,\quad z^3 - 583{,}47\,i = 0.$$

87. **Продужење прошлога члана.** — Пошто је према правилу за множење и правилу за кореновање

$$\cos\frac{\varphi + 2\pi h}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi h}{n}$$

$$= \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi h}{n} + i\sin\frac{2\pi h}{n}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\sqrt[n]{\cos 2\pi h + i\sin 2\pi h}$$

$$= \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\sqrt[n]{1}$$

може формула 60*a)* да се напише

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\sqrt[n]{1}.$$

Одавде видимо да се корене вредности за

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ могу добити кад се прва корена вредност, а то је она којој одговара најмања амплитуда $\frac{\varphi}{n}$ (до које долазимо заменом $h = 0$), помножи редом свима n вредностима $\sqrt[n]{1}$.

Тако добијамо вредности n-тога корена из каквог стварног и позитивног броја кад апсолутну (стварну и позитивну) вредност корена помножимо редом са свима n вредностима $\sqrt[n]{1}$.

Тако исто, с обзиром на то што је

$$\sqrt[n]{-r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\sqrt[n]{-1}$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\sqrt[n]{-1},$$

следује да ћемо добити све вредности n-тога корена из негативне количине $-r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ кад прву вредност (ону са најмањом амплитудом) n-тога корена из исте позитивно узете количине $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ помножимо поступно са појединим n вредностима од $\sqrt[n]{-1}$. На тај начин налазимо n-ти корен из једне стварне и негативне количине кад апсолутну вредност корена помножимо редом са свима n вредностима $\sqrt[n]{-1}$.

Из свега овога ми закључујемо да се кореновање ма каквих количина може, на извесан начин, да подведе на кореновање позитивне и негативне јединице, дакле на $\sqrt[n]{1}$ и $\sqrt[n]{-1}$.

88. $\sqrt[n]{1}$. — Кад у формули 60$_a$) чл. 86. ставимо $r=1$, $\varphi=0$ добијамо образац

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2\pi h}{n}+i\sin\frac{2\pi h}{n} \tag{61}$$

којим налазимо вредности $\sqrt[n]{1}$ узев поступно

$$h=0, 1, 2, 3, \cdots n-1.$$

Од ових n корених вредности стварне су само оне код којих је имагинарни део раван нули, за које је дакле

$$\sin\frac{\pi h}{}=0,$$

тј.

$$\frac{2\pi h}{n}=g\pi \text{ или } h=\frac{ng}{2},$$

ако са g означимо цео број. Но пошто је h највише $=n-1$, број g је

или $\qquad g=0$, дакле и $h=0$

или $\qquad g=1$, дакле $\quad h=\frac{n}{2}$.

Ово друго $\left(h=\frac{n}{2}\right)$ може да буде само тада, ако је n паран број, пошто h мора да је цео број. То значи: ако је корени изложитељ n паран број, онда $\sqrt[n]{1}$ има две стварне вредности и ми их добијамо кад у формулу 61) ставимо $h=0$ и $h=\frac{n}{2}$, а то су ове две корене вредности

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1$$

и

$$\cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Ако је, пак, изложитељ n непаран, онда постоји само један стваран корен: $\cos 0 + i \sin 0 = 1$. Све остале вредности су комплексне и увек су по две конјуговане, тако да ако је $\cos \alpha + i \sin \alpha$ један од комплексних корена, онда је и $\cos \alpha - i \sin \alpha$ такође корена вредност.

Доказ. Нека је h_1 један број из реда $0, 1, 2, 3, \cdots n-1$, онда је и $n - h_1$ такође један од тих бројева. Замене $h = h_1$ и $h = n - h_1$ воде нас двема спрегнутим кореним вредностима, јер је

за $h = h_1$, $\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi h_1}{n} + i \sin \frac{2\pi h_1}{n}$, а

за $h = n - h_1$, $\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi (n - h_1)}{n}\, i \sin \frac{2\pi (n - h_1)}{n}$

$$= \cos \left(2\pi - \frac{2\pi h_1}{n}\right) + i \sin \left(2\pi - \frac{2\pi h_1}{n}\right)$$

$$= \cos \frac{2\pi h_1}{n} - i \sin \frac{2\pi h_1}{n}.$$

Примери.

1) $\sqrt{1} = \cos \frac{2\pi h}{2} + i \sin \frac{2\pi h}{2} = \cos \pi h + i \sin \pi h$

$h = 0$, $\sqrt{1} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$h = 1$, $\sqrt{1} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$

2) $\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2\pi h}{3} + i \sin \frac{2\pi h}{3}$

$h = 0$, $\sqrt[3]{1} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$$h = 1, \sqrt[3]{1} = \cos 120^0 + i \sin 120^0 = -\cos 60^0 + i \sin 60^0 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 2, \sqrt[3]{1} = \cos 240^0 + i \sin 240^0 = -\cos 60^0 - i \sin 60^0 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Приметимо да је трећа корена вредност равна квадрату друге, а друга равна квадрату треће вредности.

3) $$\sqrt[4]{1} = \cos\frac{2\pi h}{4} + i \sin\frac{2\pi h}{4} = \cos\frac{\pi h}{2} + i \sin\frac{\pi h}{h}$$

$$h = 0, \quad \sqrt[4]{1} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$h = 1, \quad \sqrt[4]{1} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$h = 2, \quad \sqrt[4]{1} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$$

$$h = 3, \quad \sqrt[4]{1} = \cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

89. $\sqrt[n]{-1}$. — Кад у формулу 60*a*) чл. 86. ставимо $r = 1$, $\varphi = \pi$ добијамо образац

62) $$\sqrt[n]{-1.} = \cos\frac{(1 + 2h)\pi}{n} + i \sin\frac{(1 + 2h)\pi}{n}$$

помоћу којег израчунавамо вредности $\sqrt[n]{-1}$, кад заменимо поступно $h = 0, 1, 2, 3, \cdots n - 1$.

Да бисмо добили стварну корену вредност мора да је

$$\sin\frac{(1 + 2h)\pi}{n} = 1,$$

дакле

$$\frac{(1 + 2h)\pi}{n} = g\pi \text{ или } h = \frac{ng - 1}{2},$$

где g означава један цео број. С обзиром на то да је h такође цео број и да је највише $= n - 1$ следује да број g може само бити $= 1$. За $g = 1$ јесте $h = \frac{n-1}{2}$, а ово је само за непарно n могуће. Видимо да $\sqrt[n]{-1}$ може да има само једну стварну вредност и то ако је корени изложитељ n непаран. Ту стварну корену вредност

$$\cos\pi + i\sin\pi = -1$$

добијамо заменом $h = \frac{n-1}{2}$.

Ако је n парно, онда су све корене вредности комплексне.

Као код $\sqrt[n]{1}$, тако и овде код $\sqrt[n]{-1}$ увек су по две комплексне вредности спрегнуте.

Доказ. Нека је h_1 ма који од бројева $0, 1, 2, 3, \cdots n-1$, онда је $n - 1 - h_1$ такође један од тих бројева. Замене $h = h_1$ и $h = n - 1 - h_1$ дају два спрегнута корена.

За $h = h_1$ имамо

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(1+2h_1)\pi}{n} + i\sin\frac{(1+2h_1)\pi}{n}, \text{ а}$$

за $h = n - 1 - h_1$ имамо

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{[1+2(n-1-h_1)]\pi}{n} + i\sin\frac{[1+2(n-1-h_1)]\pi}{n}$$

$$= \cos\left[2\pi - \frac{(1+2h_1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[2\pi - \frac{(1+2h_1)\pi}{n}\right]$$

$$= cos \frac{(1+2h_1)\pi}{n} - i\, sin \frac{(1+2h_1)\pi}{n}.$$

Примери.

1) $$\sqrt{-1} = cos \frac{(1+2h)\pi}{2} + i\, sin \frac{(1+2h)\pi}{2}$$

$h=0,\quad \sqrt{-1} = cos\, 90^0 + i\, sin\, 90^0 = i.$

$h=1,\quad \sqrt{-1} = cos\, 270^0 + i\, sin\, 270^0 = -i.$

2) $$\sqrt[3]{-1} = cos \frac{(1+2h)\pi}{3} + i\, sin \frac{(1+2h)\pi}{3}$$

$h=0,\quad \sqrt[3]{-1} = cos\, 60^0 + i\, sin\, 60^0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$

$h=1,\quad \sqrt[3]{-1} = cos\, 180^0 + i\, sin\, 180^0 = -1.$

$h=2,\quad \sqrt{-1} = cos\, 300^0 + i\, sin\, 300^0 = cos\, 60^0 - i\, sin\, 60^0 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$

3) $$\sqrt[4]{-1} = cos \frac{(1+2h)\pi}{4} + i\, sin \frac{(1+2h)\pi}{4}$$

$h=0,\quad \sqrt[4]{-1} = cos\, 45^0 + i\, sin\, 45^0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$

$h=1,\quad \sqrt[4]{-1} = cos\, 135^0 + i\, sin\, 135^0 = -cos\, 45^0 + i\, sin\, 45^0 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$

$h=2,\quad \sqrt[4]{-1} = cos\, 225^0 + i\, sin\, 225^0 = -cos\, 45^0 - i\, sin\, 45^0 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$

$h=3,\quad \sqrt[4]{-1} = cos\, 315^0 + i\, sin\, 315^0 = cos\, 45^0 - i\, sin\, 45^0 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$

90. **Cotes-ова теорема.** — Нека је c стваран и позитиван број, дакле $r = c$, $\varphi = 0$. На основу формуле 60а) чл. 86. и онога што смо констатовали односно конјугације корених вредности имамо као решења биномне једначине $x^n - c = 0$

1) ако је n парно

$$x = r\left\{\cos\frac{2\pi}{n} \pm i\sin\frac{2\pi}{n}\right\}$$

$$x = r\left\{\cos\frac{4\pi}{n} \pm i\sin\frac{4\pi}{n}\right\}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x = -r.$$

Множењем корених чинитеља, којима одговарају конјуговани корени, добијамо једначину

$$x^n - r^n = (x^2 - r^2)\left\{x^2 - 2r\cos\frac{2\pi}{n}\cdot x + r^2\right\} \times$$

$$\left\{x^2 - 2r\cos\frac{4\pi}{n}\cdot x + r^2\right\}\cdots\left\{x^2 - 2r\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\cdot x + r^2\right\}.$$

2) ако је n непарно

$$x = r$$

$$x = r\left\{\cos\frac{2\pi}{n} \pm i\sin\frac{2\pi}{n}\right\}$$

$$x = r\left\{\cos\frac{4\pi}{n} \pm i\sin\frac{4\pi}{n}\right\}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

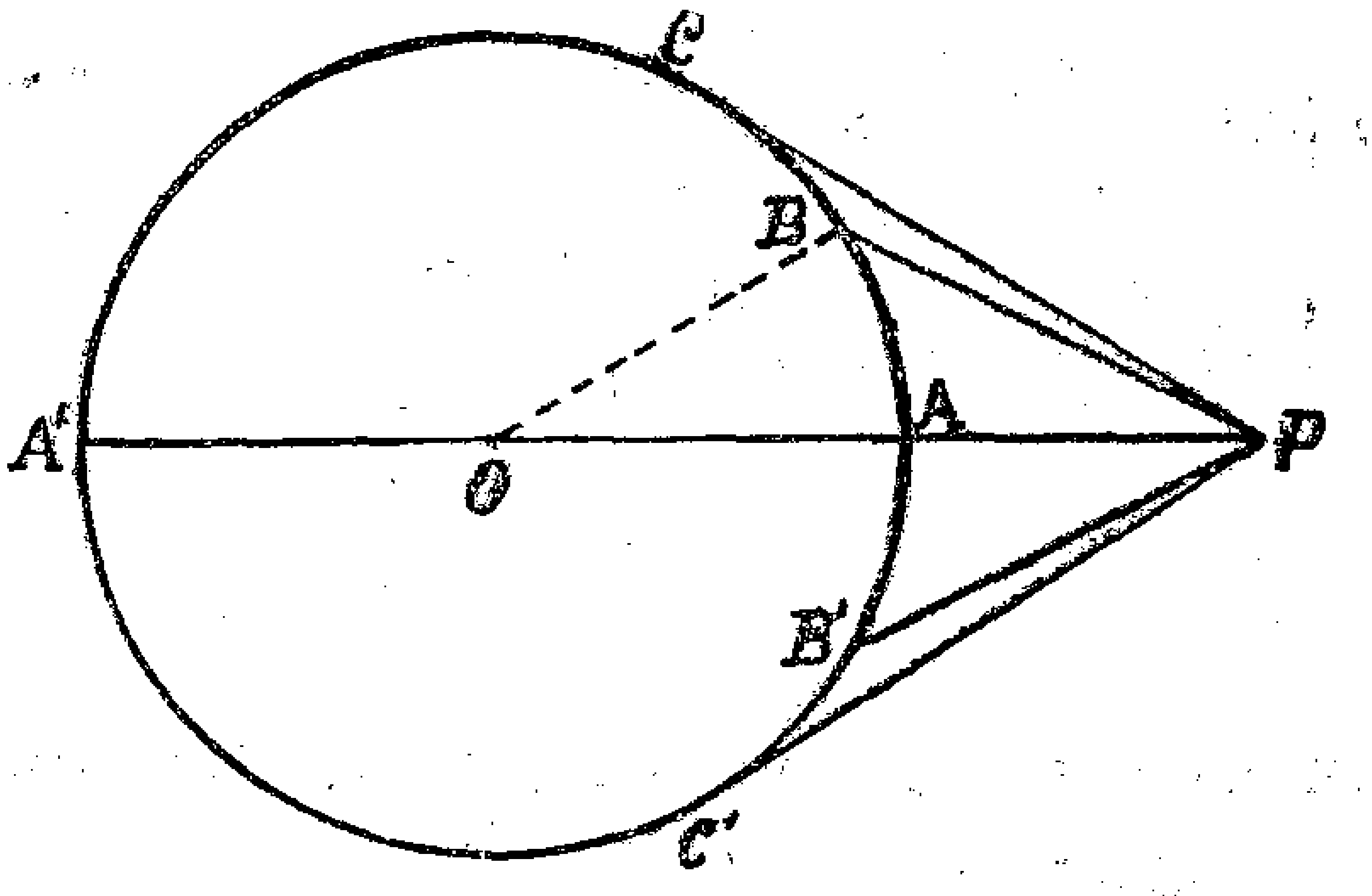
$$x = r\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right\},$$

одакле

$$x^n - r^n = (x - r)\left\{x^2 - 2r\cos\frac{2\pi}{n}\cdot x + r^2\right\} \times$$

$$\left\{x^2 - 2r\cos\frac{4\pi}{n}\cdot x + r^2\right\}\cdots\left\{x^2 - 2r\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot x + r^2\right\}.$$

Ове формуле за разлагање $x^n - r^n$ на чинитеље могу да се геометриски протумаче. Опишимо круг са полупречником r и поделимо га, почевши од које било тачке A, на n једнаких делова. На пречнику AA' одмерићемо $OP = x$ и спојићемо тачку P са тачкама B, C и т. д. које деле периферију круга на n једнаких делова. Из слике читамо



Сл. 26.

$$PB^2 = OB^2 + OP^2 - 2 \cdot OB \cdot OP \cos BOA$$
$$= r^2 + x^2 - 2\, r\, x \cos \frac{2\pi}{n}$$

и на исти начин

$$PC^2 = r^2 + x^2 - 2\, r x \cos \frac{4\pi}{n} \text{ итд.}$$

или

$$PB \cdot PB' = r^2 + x^2 - 2\, r\, x \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$PC \cdot PC' = r^2 + x^2 - 2\, r\, x \cos \frac{4\pi}{n} \text{ итд.}$$

Производи дужи $PB \cdot PB'$, $PC \cdot CP'$, $\cdots$ представљају дакле квадратне чинитеље из којих је састављено $x^n - r^n$. Ако је n парно, онда имамо два линеарна и стварна чинитеља $x - r = PA$ и $x + r = PA'$, чији је производ једнак квадратному чинитељу $x^2 - r^2 =$

$PA \cdot PA'$. Ако је, пак, n непарно, онда имамо само један стваран чинитељ првог степена $x - r = PA$.

Овај резултат је формулисан *Cotes*-овом теоремом (Roger Cotes, Burbach [Leicester] 1682 — Cambridge 1716): разлика n-тих степена дужи PO и AO једнака је производу дужи које су повучене из тачке P ка тачкама B, C, $\cdots$ које деле круг на n једнаких делова.

Напомена. Код биномне једначине $x^n + c = 0$ имали бисмо према формули $60\,a$) у чл. 86.

$$x = \sqrt[n]{-c} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{(1+2h)\pi}{n} + i\sin\frac{(1+2h)\pi}{n}\right].$$

И овде се $x^n + r^n$ може да представи као производ стварних чинитеља другог степена и да се геометриски протумачи аналогно горе показатоме. Разлика између овога и прошлог случаја је у томе што подела круга на n једнаких делова овде не почиње из тачке A, него од тачке која је од ове удаљена за $\frac{\pi}{n}$.

4.

Функције комплексних количина.

91. **Експоненциална функција.** — Кад је x стварно, онда се под e^x разуме стварна и позитивна вредност од $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ и тиме је експоненциална функција e^x схваћена као једнозначна функција. Узмимо место стварног ихложитеља x комплексан изложитељ

$x+iy$. Степена количина $\left(1+\frac{x+iy}{m}\right)^m$ је у опште многозначна и има свега једну вредност само тада ако је m цео број. У сагласности са горе за e^x реченим ми ћемо и сада e^{x+iy} сматрати као границу којој тежи она *најпростија* вредност (а то је она са најмањом амплитудом) израза $\left(1+\frac{x+iy}{m}\right)^m$ кад пустимо да m у бесконачност расте.

Да бисмо нашли на који начин функција

$$63)\qquad e^{x+iy}=\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x+iy}{m}\right)^m$$

зависи од x и y ставимо

$$1+\frac{x+iy}{m}=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

дакле

$$a)\qquad 1+\frac{x}{m}=r\cos\varphi$$

$$b)\qquad \frac{y}{m}=r\sin\varphi$$

и на основу *Моавр*-овог обрасца

$$\left(1+\frac{x+iy}{m}\right)^m=r^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi).$$

Да бисмо добили $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{x+iy}{m}\right)^m$ треба оредити $\lim\limits_{m=\infty} r^m$ и $\lim\limits_{m=\infty} m\varphi$. Имајмо на уму да са растењем броја m у бесконачност угао φ опада у бесконачност тако да можемо одмах узети m толико велико да према *а)* $1+\frac{m}{x}$, а то је $r\cos\varphi$ буде позитивно. То значи да можемо φ ограничити на вредности између $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ и да при израчунавању најпростије степене вредности аргументу основе не додајемо множине од 2π.

Из *a)* и *b)* следује $r^2 = 1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2}$, дакле

$$r^m = \left[1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2}\right]^{\frac{m}{2}}, \qquad (c$$

а пошто је r^m апсолутан број треба и на десној страни од *c)* узети само ону стварну и позитивну вредност. Ставимо у *c)*

$$d) \qquad \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2} = \frac{1}{n},$$

дакле

$$r^m = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{m}{2}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{m}{2n}},$$

које, кад пређемо граници (пустимо m, па дакле и n да у бесконачност расте), даје

$$e) \qquad \lim_{n=\infty} r^m = \left[\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\lim \frac{m}{2n}} = e^x,$$

јер је $\lim\limits_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, а на основу *d)* је $\lim\limits_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \frac{m}{2n} = x$.

Из *a)* и *b)* изводимо

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{y}{m}}{1 + \frac{x}{m}}$$

или

$$m\varphi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}=\frac{y}{1+\dfrac{x}{m}},$$

одакле, имавши на уму да је $\lim\limits_{\varphi=0}\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}=1$, $\lim\limits_{\varphi=0}\dfrac{1}{\cos\varphi}=1$, следује резултат

$$\lim_{m=\infty} m\varphi=y.$$

С овим под *e)* и *f)*, а на основу једначине

$$e^{x+iy}=\lim_{m=\infty}\left\{1+\frac{x+iy}{m}\right\}^m=\lim_{m=\infty} r^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi),$$

добијамо формулу која прецизира дефиницију за експоненциалну функцију са комплексним експонентом

64) $$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Напомена. Из дефиниције 64) закључујемо

1) да основно својство експоненциалне функције, а то је

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$$

важи и за комплексне изложитеље, јер ако ставимо

$$z_1=x_1+iy_1,\qquad z_2=x_2+iy_2,$$

дакле

$$e^{z_1}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1),\ e^{z_2}=e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)$$

следује

$$\begin{aligned}e^{z_1}\cdot e^{z_2}&=e^{x_1+x_2}(\cos y_1+i\sin y_1)(\cos y_2+i\sin y_2)\\&=e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]\\&=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=e^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

2) да је експоненцијална функција периодна функција и да је модуо периоде имагинаран $= 2\pi i$.

Означимо са k ма какав цео број. Тада је

$$e^{x+iy+2k\pi i} = e^{x+i(y+2k\pi)}$$

$$= e^x[\cos(y+2k\pi)+i\sin(y+2k\pi)]$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy},$$

дакле

$$e^{z+2k\pi i} = e^z.$$

92. **Логаритам.** — Дефиниција: под природним логаритмом комплексног броја $x+iy$ разумемо експонент којим треба степеновати основу e па да бисмо добили $x+iy$ као вредност експоненциалне функције.

Пошто је у опште

$$x+iy = r[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)],$$

а на основу горње дефиниције природан логаритам броја $x+iy$ јесте експонент u за који је

$$e^u = x+iy$$

или с обзиром на чл. 91.

$$e^u = x+iy = r[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)]$$

$$= e^{lr+i(\varphi+2k\pi)}$$

и према томе u, тј.

$$l(x+iy) = lr + i\varphi + 2k\pi i,$$

које, услед тога што је $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = arc\,tg\,\frac{y}{x}$, може да се напише

$$l(x+iy) = \frac{1}{2}l(x^2+y^2) + i\,arc\,tg\,\frac{y}{x} + 2k\pi i. \quad (65$$

Одавде видимо да природан логаритам броја $x+iy$ има безбројно много вредности, које се разликују једна од друге за целе множине од $2\pi i$. Логаритам је, дакле, *многозначна* функција. За $k=0$ добијамо *најпростију* вредност природног логаритма од $x+iy$, а то је

$$l(x+iy)=\frac{1}{2}l\cdot(x^2+y^2)+i\,arc\,tg\,\frac{y}{x}.$$

Најпростија вредност природног логаритма броја $x+iy$ добија се кад се логаритму модуа дода са i помножени *најмањи* лук $\varphi = arc\,tg\,\frac{y}{x}$ комплексног броја.

Напомена. Из онога у напомени прошлог члана наведеног својства експоненциалне функције следује правило за логаритме

$$l\,w_1+l\,w_2=l\,(w_1\,w_2),$$

где, како код lw_1, тако и код lw_2, треба узети неодређен број пута $2\pi i$.

93. **Веза између тригонометриских функција и експоненциалне функције.** — Према дефиниционој једначини 64) у чл. 91. јесте

$$66)\qquad \begin{cases} \cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi} \\ \cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi}, \end{cases}$$

одакле изводимо значајне формуле

$$67)\qquad \begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \\[2ex] \sin\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$$

из којих опет

$$tg\,\varphi = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2i\varphi}-1}{e^{2i\varphi}+1}.$$

Примедба. Формуле 66) и 67) поставио је *Ајлер.*

Примена. Збир косинуса и синуса лукова који теку по аритметичкој прогресији.

Нека је

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots + \cos[a+(m-1)b] = x$$

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \cdots + \sin[a+(m-1)b] = y,$$

дакле на основу 66)

$$\begin{aligned} x+iy &= e^{ia} + e^{i(a+b)} + e^{i(a+2b)} + \cdots + e^{i[a+(m-1)b]} \\ &= e^{ia}[1 + e^{ib} + e^{2ib} + \cdots + e^{(m-1)ib}] \\ &= e^{ia}[1 + q + q^2 + \cdots + q^{m-1}] = e^{ia}\frac{1-q^m}{1-q} \\ &= (\cos a + i\sin a)\frac{1-(\cos b + i\sin b)^m}{1-\cos b - i\sin b} \\ &= (\cos a + i\sin a)\frac{(1-\cos mb) - i\sin mb}{(1-\cos b) - i\sin b} \end{aligned}$$

или с обзиром на формуле 18 (чл. 21.) и 19 (чл. 22.)

$$\begin{aligned} x+iy &= (\cos a + i\sin a)\frac{2\sin^2\frac{mb}{2} - i\,2\sin\frac{mb}{2}\cos\frac{mb}{2}}{2\sin^2\frac{b}{2} - i\,2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}} \\ &= (\cos a + i\sin a)\frac{\sin\frac{mb}{2}\,\sin\frac{mb}{2} - i\cos\frac{mb}{2}}{\sin\frac{b}{2}\,.\,\sin\frac{b}{2} - i\cos\frac{b}{2}}. \end{aligned}$$

Множењем бројитеља и именитеља последњег разломка на десној страни са i следује

$$x+iy=(\cos a+i\sin a)\frac{\sin\frac{mb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\,\frac{\cos\frac{mb}{2}+i\sin\frac{mb}{2}}{\cos\frac{b}{2}+i\sin\frac{b}{2}},$$

које опет, на основу правила за множење и дељење комплексних количина (формула 54 у чл. 81. и формула 56 у чл. 82.), може да се напише

$$x+iy=\frac{\sin\frac{mb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\left\{\cos\left[a+\frac{(m-1)\,b}{2}\right]+i\sin\left[a+\frac{(m-1)\,b}{2}\right]\right\}.$$

Одавде (в. закључак у чл. 75.) следује

$$x=\frac{\sin\frac{mb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\cos\left[a+\frac{(m-1)\,b}{2}\right]$$

$$y=\frac{\sin\frac{mb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\sin\left[a+\frac{(m-1)\,b}{2}\right].$$

94. **Примена формула у прошлом члану на развијање степена синуса и косинуса у ред који тече по синусу и косинусу умножених лукова.** — На основу формуле 67) у прошлом члану имамо

$$2^n\cos^n\varphi=(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})^n,\quad (2\,i)^n\sin^n\varphi=(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})^n,$$

које, кад применимо биномно правило, даје

$$2^n\cos^n\varphi=$$

$$\begin{bmatrix} e^{in\varphi}+\binom{n}{1}e^{i(n-2)\varphi}+\binom{n}{2}e^{i(n-4)\varphi}+\cdots \\ +e^{-in\varphi}+\binom{n}{1}e^{-i(n-2)\varphi}+\binom{n}{2}e^{-i(n-4)\varphi}+\cdots \end{bmatrix}$$

$$=2\left[\cos n\varphi+\binom{n}{1}\cos(n-2)\varphi+\binom{n}{2}\cos(n-4)\varphi+\cdots\right],$$

одакле

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos n\varphi + \binom{n}{1} \cos(n-2)\varphi + \binom{n}{2} \cos(n-4)\varphi + \cdots \right]$$

и аналогно

$$(2i)^n \sin^n \varphi = \begin{bmatrix} e^{in\varphi} - \binom{n}{1} e^{i(n-2)\varphi} + \binom{n}{2} e^{i(n-4)\varphi} - \cdots \\ \pm e^{-in\varphi} \mp \binom{n}{1} e^{-i(n-2)\varphi} \pm \binom{n}{2} e^{-i(n-4)\varphi} \mp \cdots \end{bmatrix}$$

Ако је *n парно*, онда је

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos n\varphi + \binom{n}{1} \cos(n-2)\varphi + \binom{n}{2} \cos(n-4)\varphi + \cdots + \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \right] \tag{68}$$

$$\sin^n \varphi = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \left[\cos n\varphi - \binom{n}{1} \cos(n-2)\varphi + \binom{n}{2} \cos(n-4)\varphi - \cdots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \right]. \tag{69}$$

За *непарно n* имамо

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos n\varphi + \binom{n}{1} \cos(n-2)\varphi + \binom{n}{2} \cos(n-4)\varphi + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \cos\varphi \right] \tag{68a}$$

$$\sin^n \varphi = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \left[\sin n\varphi - \binom{n}{1} \sin(n-2)\varphi + \right.$$

$$69a) \qquad \binom{n}{2} \sin(n-4)\varphi - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \sin\varphi \Bigg].$$

95. **Тригонометриске функције комплексног аргумента.** — Пошто су обрасци 67) доказани за стварне вредности лука φ ставићемо да је $\varphi = x + iy$ и узећемо, на основу поменутих једначина 67), као дефиниционе једначине за тригонометриске функције комплексног аргумента формуле

$$\cos(x+iy) = \frac{e^{(x+iy)i} + e^{-(x+iy)i}}{2}$$

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{(x+iy)i} - e^{-(x+iy)i}}{2i},$$

код којих се десна страна може лако да доведе на вид $u + iv$

$$70) \quad \begin{cases} \sin(x+iy) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x \\[2ex] \cos(x+iy) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x, \end{cases}$$

а одавде

$$70a) \quad \begin{cases} tg(x+iy) = \dfrac{2\sin 2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x} \\[2ex] cotg(x+iy) = \dfrac{2\sin 2x - i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}. \end{cases}$$

Извођење формула 70) и 70a):

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} e^{ix} - e^{y} e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2i}$$

$$= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \sin x - \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \cos x$$

$$= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \cos x.$$

На исти начин добијамо формулу за $\cos(x + iy)$.

Дељењем првога са другим обрасцем под 70) и множењем бројитеља и именитеља конјугованим именитељем следује

$$tg(x + iy) = \left[\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \cos x\right] \times$$

$$\left[\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \cos x + i \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \sin x\right] :$$

$$\left[\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)^2 \cos^2 x + \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)^2 \sin^2 x\right]$$

$$= \left\{\left[\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)^2\right] \sin x \cos x +\right.$$

$$\left. i \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) (\cos^2 x + \sin^2 x)\right\} :$$

$$\left[\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{4} (\cos^2 x + \sin^2 x) + \frac{2}{4} (\cos^2 x - \sin^2 x)\right]$$

$$= \frac{\sin x \cos x + i \dfrac{e^{2y} - e^{-2y}}{4}}{\dfrac{e^{2y} + e^{-2y}}{4} + \dfrac{2}{4} (\cos^2 x - \sin^2 x)}$$

$$= \frac{2 \sin 2x + i (e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} + 2 \cos 2x}.$$

96. **Хиперболичне функције.** — Кад у једн. 70) ставимо $x = 0$, а y заменимо са φ, добијамо функције које су у многоме сличне тригонометриским функцијама, а зову се *хиперболичне функције*. Оне су дефинисане следећим формулама.

$$
71) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\sin hyp\, \varphi &= \frac{1}{i} \sin i\, \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \\
\cos hyp\, \varphi &= \cos i\, \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \\
tg\, hyp\, \varphi &= \frac{1}{i}\, tg\, i\, \varphi = \frac{e^{2\varphi} - 1}{e^{2\varphi} + 1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Из прве две једн. 71) следује непосредно

$$
72) \qquad \cos hyp\, \varphi \pm \sin hyp\, \varphi = e^{\pm \varphi}.
$$

На основу 71) и 72) добијамо

$$
\sin hyp\, (\varphi \pm \psi) = \frac{e^{\varphi \pm \psi} - e^{-(\varphi \pm \psi)}}{2} = \frac{e^{\varphi}\, e^{\pm \psi} - e^{-\varphi}\, e^{\mp \psi}}{2} =
$$

$$
[(\cos hyp\, \varphi + \sin hyp\, \varphi)(\cos hyp\, \psi \pm \sin hyp\, \psi) -
$$

$$
(\cos hyp\, \varphi - \sin hyp\, \varphi)(\cos hyp\, \psi \mp \sin hyp\, \psi)] : 2
$$

$$
= \sin hyp\, \varphi \cos hyp\, \psi \pm \cos hyp\, \varphi \sin hyp\, \psi
$$

и аналогно образац за $\cos hyp\, (\varphi \pm \psi)$. Дакле

$$
73) \left\{
\begin{aligned}
\sin hyp\, (\varphi \pm \psi) &= \sin hyp\, \varphi \cos hyp\, \psi \pm \cos hyp\, \varphi \sin hyp \\
\cos hyp\, (\varphi \pm \psi) &= \cos hyp\, \varphi \cos hyp\, \psi \pm \sin hyp\, \varphi \sin hy
\end{aligned}
\right.
$$

Ако узмемо $\varphi = \psi$, онда последње једначине дају формуле

$$
74) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\sin hyp\, 2\varphi &= 2 \sin hyp\, \varphi \cos hyp\, \varphi \\
\cos hyp\, 2\varphi &= \cos hyp^2 \varphi + \sin hyp^2 \varphi.
\end{aligned}
\right.
$$

Специалне вредности аргумента φ за које $\sin hyp\, \varphi$ и $\cos hyp\, \varphi$ постају $= 0$ или $= 1$ наћићемо помоћу дефиниција 71).

Да би био $\sin hyp\, \varphi = 0$ треба да је $e^{\varphi} = e^{-\varphi}$ или $e^{2\varphi} = 1$, дакле $\varphi = 0$. Међутим $\sin hyp\, \varphi = 1$ води једначини $e^{\varphi} - e^{-\varphi} = 2$ или $e^{2\varphi} - 2\, e^{\varphi} - 1 = 0$, одакле $e^{\varphi} = 1 + \sqrt{2}$, $\varphi = l\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

За $\cos hyp\, \varphi = 0$ мора да је $e^{\varphi} + e^{-\varphi} = 0$ или $e^{2\varphi} = -1$, $\varphi = \frac{1}{2} l\,(-1) = \frac{i\,\pi}{2}$[1]. Најзад из $\cos hyp\, \varphi = 1$ закључујемо $e^{\varphi} + e^{-\varphi} = 2$ или $e^{2\varphi} - 2\, e^{\varphi} + 1 = 0$, одакле $e^{\varphi} = 1$, $\varphi = 0$.

Према овоме је

$$\left.\begin{array}{ll} \sin hyp\, 0 = 0 & \cos hyp\, \frac{i\,\pi}{2} = 0 \\ \sin hyp\, l\left(1 + \sqrt{2}\right) = 1 & \cos hyp\, 0 = 0. \end{array}\right\} \qquad (75$$

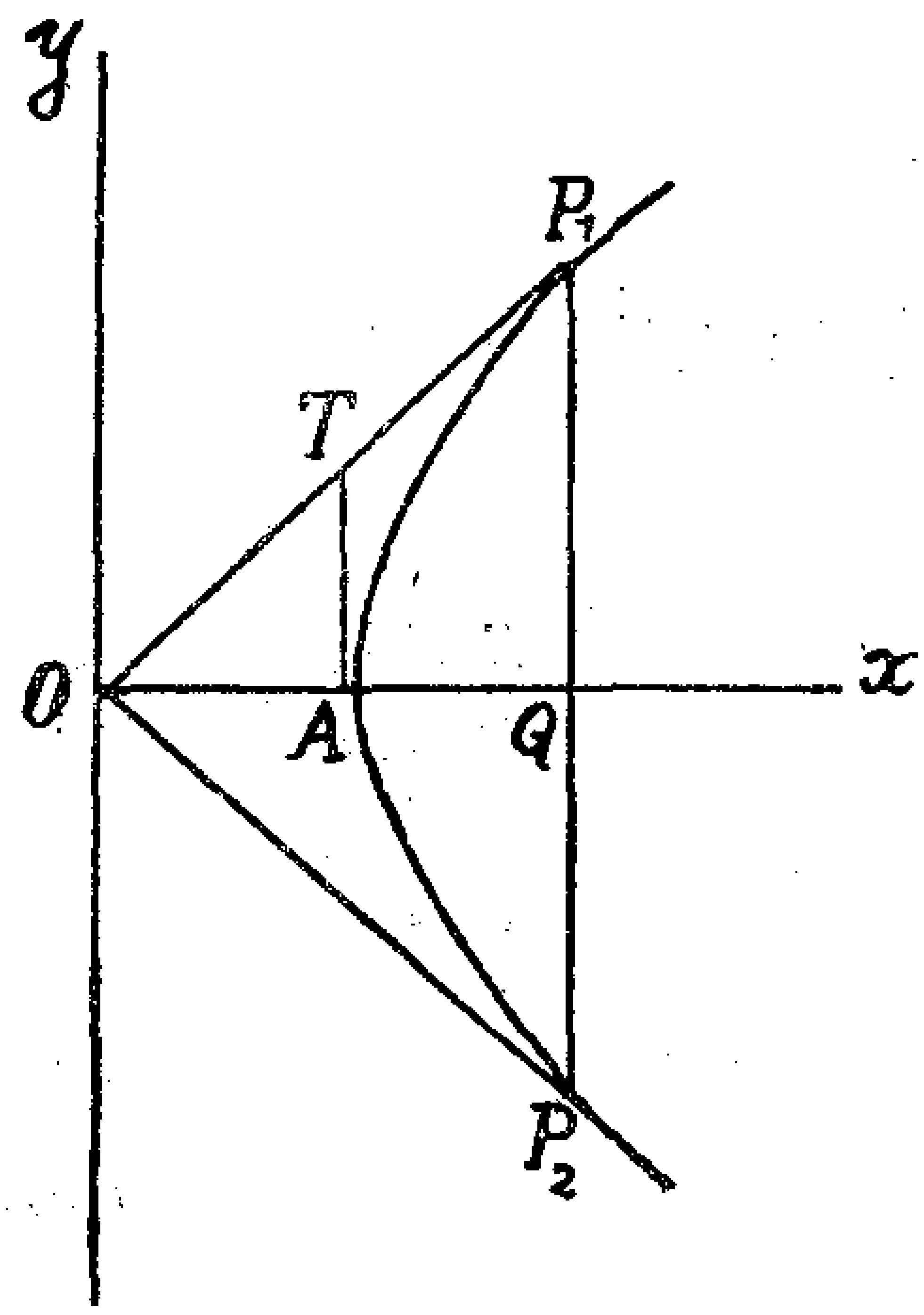
Да бисмо графички представили хиперболичне функције послужићемо се једном равнокраком хиперболом, чије су полуосе $a = b = OA = 1$.

Једначина те хиперболе гласи

$$x^2 - y^2 = 1$$

(в. Анал. Геом. чл. 104. једн. 86.). Нека је површина фигуре

$$OP_1\, AP_2\, O \doteq \varphi.$$



Сл. 27.

Из слике видимо да је

$$\varphi = OP_1\, P_2 - P_1\, AP_2\, P_1,$$

1) Отуда што је $-1 = e^{i\,(2k+1)\,\pi}$ закључујемо да је најпростија вредност ($k = 0$) $l\,(-1) = i\,\pi$.

где кад ставимо

$$OP_1 P_2 = x y,$$

$$P_1 A P_2 P_1 = \Big[x y - l(x+y) \Big]_{\substack{x=1 \\ y=0}}^{\substack{x \\ y}} = x y - l(x+y)$$

(в. Инт. Рачун чл. 37. 2. пример) налазимо $\varphi = l(x+y)$ или с обзиром на једначину хиперболе

$$\varphi = l\left(\sqrt{1+y^2} + y\right)$$

$$\varphi = l\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

одакле

$$\sqrt{1+y^2} + y = e^{\varphi}, \qquad y = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = sin\, hyp\, \varphi$$

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = e^{\varphi}, \qquad x = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = cos\, hyp\, \varphi.$$

Нашли смо, дакле, да је

$$sin\, hyp\, \varphi = P_1 Q$$

$$cos\, hyp\, \varphi = OQ$$

и према томе

$$tg\, hyp\, \varphi = AT.$$

1. *Напомена*. Констатујемо и ову аналогију између хиперболичних и тригонометриских функција да је њихова изводна (или диференциални количник) опет хиперболична функција, јер је

$$d\, sin\, hyp\, \varphi = cos\, hyp\, \varphi \cdot d\, \varphi$$

$$d\, cos\, hyp\, \varphi = sin\, hyp\, \varphi \cdot d\, \varphi$$

$$d\, tg\, hyp\, \varphi = \frac{d\, \varphi}{cos\, hyp^2\, \varphi}$$

аналогно познатим формулама

$$d\,sin\,\varphi = cos\,\varphi \cdot d\,\varphi$$
$$d\,cos\,\varphi = -\,sin\,\varphi \cdot d\,\varphi$$
$$d\,tg\,\varphi = \frac{d\,\varphi}{cos^2\varphi}\,.$$

2. *Напомена*. Извртањем хиперболичних функција долазимо до инверзних функција

$$\left.\begin{aligned} arc\,sin\,hyp\,\varphi &= l\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right)\\ arc\,cos\,hyp\,\varphi &= l\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2-1}\right)\\ arc\,tg\,hyp\,\varphi &= \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right), \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

које су аналогне циклометриским функцијама.

3. *Напомена*. Функције *arc sin hyp* φ, *arc cos hyp* φ, *arc tg hyp* φ могу да се представе као алгебарски интеграли

$$arc\,sin\,hyp\,\varphi = \int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}$$
$$arc\,cos\,hyp\,\varphi = \int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}}$$
$$arc\,tg\,hyp\,\varphi = \int \frac{d\,\varphi}{1-\varphi^2}$$

слично циклометриским функцијама

$$arc\,sin\,\varphi = \int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}$$
$$arc\,cos\,\varphi = -\int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}$$
$$arc\,tg\,\varphi = \int \frac{d\,\varphi}{1+\varphi^2}\,.$$

Као доказ за прва два интеграла в. Инт. Рачун чл. 13. 1. пример кад ставимо $p = 0$, $q = \pm 1$, а за трећи интеграл в. чл. 8. 1. пример.

4. *Напомена.* Зарад боље ориентације израчунате су у следећој табличици вредности првих трију хиперболичних функција за неколико еквидистантних аргумената.

φ	$\sin hyp\, \varphi$	$\cos hyp\, \varphi$	$tg\, hyp\, \varphi$
0,0	0,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,1002	1,0050	0,0997
0,2	0,2013	1,0201	0,1973
0,3	0,3045	1,0453	0,2913
0,4	0,4108	1,0811	0,3800
0,5	0,5211	1,1276	0,4621
0,6	0,6367	1,1855	0,5371
0,7	0,7586	1,2552	0,6044
0,8	0,8881	1,3374	0,6640
0,9	1,0265	1,4331	0,7163
1,0	1,1752	1,5431	0,7616
1,1	1,3356	1,6685	0,8005
1,2	1,5095	1,8107	0,8337
1,3	1,6984	1,9709	0,8617
1,4	1,9043	2,1509	0,8854
1,5	2,1293	2,3524	0,9052
1,6	2,3756	2,5775	0,9216
1,7	2,6456	2,8283	0,9354
1,8	2,9422	3,1075	0,9468
1,9	3,2682	3,4177	0,9563
2,0	3,6269	3,7622	0,9640
2,5	6,0502	6,1323	0,9866
3,0	10,0179	10,0677	0,9951
3,5	16,5426	16,5728	0,9982
4,0	27,2899	27,3082	0,9993
4,5	45,0030	45,0141	0,9998

φ	$sin\,hyp\,\varphi$	$cos\,hyp\,\varphi$	$gt\,hyp\,\varphi$
5,0	74,2032	74,2099	0,9999
5,5	122,3439	122,3480	$\sim$ 1,0000

97. **Циклометриске функције за стварне аргументе.** — Извртањем тригонометриских функција долазимо до циклометриских функција. Као што постоји веза између тригонометриских функција, тако, разуме се, постоји веза и између циклометриских функција. Нека је $u = arc\,sin\,x$, дакле $sin\,u = x$, $cos\,u = \sqrt{1-x^2}$, $tg\,u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и према томе $u = arc\,sin\,x = arc\,cos\,\sqrt{1-x^2} = arc\,tg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. На исти начин налазимо и за остале функције. Имамо

$$\left.\begin{aligned} arc\,sin\,x &= arc\,cos\,\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - arc\,cos\,x = arc\,tg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ arc\,cos\,x &= arc\,sin\,\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - arc\,sin\,x = arc\,tg\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ arc\,tg\,x &= arc\,sin\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = arc\,cos\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{2} - arc\,cotg\,x. \end{aligned}\right\} \quad (77$$

Из периодности тригонометриских функција (*sin* и *cos* за 2π, а *tg* и *cotg* за π) потиче многозначност циклометриских функција:

$$\left.\begin{aligned} arc\,sin\,x &= n\,\pi + (-1)^n\,|arc\,sin\,x| \\ arc\,cos\,x &= 2\,n\,\pi \pm |arc\,cos\,x| \\ arc\,tg\,x &= n\,\pi + |arc\,tg\,x| \\ arc\,cotg\,x &= n\,\pi + |arc\,cotg\,x|\,. \end{aligned}\right\} \quad (78$$

На основу дефиниције за тригонометриске функције негативних лукова следује

$$79)\quad \begin{cases} \arcsin(-x) = -\arcsin x \\ \arccos(-x) = \pi - \arccos x \\ \mathrm{arc\,tg}(-x) = -\mathrm{arc\,tg}\,x \\ \mathrm{arc\,cotg}(-x) = -\mathrm{arc\,cotg}\,x. \end{cases}$$

Из адиционе теореме

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

$$\mathrm{tg}(u \pm v) = \frac{\mathrm{tg}\,u \pm \mathrm{tg}\,v}{1 \mp \mathrm{tg}\,u\,\mathrm{tg}\,v}$$

кад ставимо

$$\sin u = x, \text{ дакле } \cos u = \sqrt{1-x^2},\; u = \arcsin x,$$

$$\sin v = y, \quad \text{"} \quad \cos v = \sqrt{1-y^2},\; v = \arcsin y$$

следује $\sin(u \pm v) = x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}$, дакле

$$u \pm v = \arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Тако исто изводимо обрасце и за остале случајеве. Имамо ове формуле

$$80)\quad \begin{cases} \arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right) \\ \arccos x \pm \arccos y = \arccos\left(xy \pm \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \\ \mathrm{arc\,tg}\,x \pm \mathrm{arc\,tg}\,y = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{x \pm y}{1 \mp xy} \end{cases}$$

$$\arcsin x \pm \arccos y = \arcsin\left(xy \pm \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$$

$$= \arccos\left(y\sqrt{1-x^2} \mp x\sqrt{1-y^2}\right)$$

$$arc\,tg\,x \pm arc\,cotg\,y = arc\,cotg\,\frac{y \mp x}{x\,y \pm 1}.$$

98. **Веза између циклометриских функција ма каквог аргумента и логаритма.** — Означимо $x + i\,y = z$. Тада је према дефиницији у чл. 95.

$$cos\,z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$sin\,z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i}$$

или

$$\left.\begin{aligned} e^{iz} &= cos\,z + i\,sin\,z \\ e^{-iz} &= cos\,z - i\,sin\,z. \end{aligned}\right\} \qquad (a$$

Ставимо у претпоследњој једначини $sin\,z = u$ и узмимо од обе стране једначине природан логаритам, па ћемо добити

$$i\,z = l\,(cos\,z + i\,sin\,z),$$

одакле z или

$$arc\,sin\,u = \frac{1}{i}\,l\,(i\,u + \sqrt{1 - u^2}$$

или с обзиром да је $l\,i = \frac{\pi\,i}{2}$[1], пошто напишемо

$$arc\,sin\,u = \frac{1}{i}\,l\left[i\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)\right],$$

$$arc\,sin\,u = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\,l\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right).$$

С обзиром да је $arc\,cos\,u = \frac{\pi}{2} - arc\,sin\,u$ (в. једн. 77

---

[1]) Формула 65) у чл. 92. кад у њој ставимо $x = 0$, $y = 1$ даје као најпростију вредност $l\,i = \frac{i\,\pi}{2}$.

у чл. 97.) јесте

$$arc\cos u = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i}\, l\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)$$

или

$$arc\cos u = \frac{\pi}{2} + i\, l\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right).$$

Најзад кад поделимо једн. а) једну с другом следује

$$e^{2iz} = \frac{1 + i\, tg\, z}{1 - i\, tg\, z}$$

или узмемо лево и десно природан логаритам и означимо $tg\, z = u$ добићемо формулу

$$arc\, tg\, u = \frac{1}{2i}\, l\left(\frac{1 + iu}{1 - iu}\right).$$

Добили смо, дакле ове формуле, које показују везе између циклометриских функција ма каквог аргумента и логаритма

$$81)\qquad \begin{cases} arc\sin u = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\, l\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right) \\[2ex] arc\cos u = \frac{\pi}{2} + i\, l\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right) \\[2ex] arc\, tg\, u = \frac{1}{2i}\, l\left(\frac{1 + iu}{1 - iu}\right). \end{cases}$$

Напомена. Ми знамо да логаритам има безбројно много вредности које се једна од друге разликују за целе множине од $2\pi i$ (в. чл. 92.). Према томе, а на основу једн. 81), *arc sin* и *arc cos* имају безбројно много вредности које се разликују за целе множине од 2π, а *arc tg* и *arc cotg* безбројно много вредности које се једна од друге разликују за целе множине од π.

5.

Употреба комплексних количина при решавању кубних једначина.

99. **Кардан-ов образац.** — Пошто једначину средимо и непознату у највишем степену ослободимо њеног коефицијента, тј. поделимо целу једначину тим коефицијентом, општа једначина трећег степена добија вид

$$x^3 + p\,x^2 + q\,x + r = 0. \qquad \text{(I}$$

Овде су p, q, r, познати (стварни) бројеви. Заменом

$$x = y - \frac{p}{3} \qquad \text{(II}$$

претварамо задату једначину I) у нову кубну једначину у којој нема непознате y у квадрату. То је једначина

$$y^3 + Q\,y + R = 0 \qquad \text{(III}$$

у којој су нови коефицијенти

$$\left.\begin{aligned} Q &= q - \frac{p^2}{3} \\ R &= 2\left(\frac{p}{3}\right)^3 - \frac{p\,q}{3} + r. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV}$$

Замислимо непознату y разложену на два дела:

$$y = u + v. \qquad \text{(V}$$

Кад идентичну једначину

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3\,u\,v\,(u + v)$$

с обзиром на супституцију V) напишемо

$$y^3 - 3\,u\,v\,y - (u^3 + v^3) = 0$$

и сравнимо са једначином III) видимо да ће те две једначине постати истоветне, ако ставимо

$$\left.\begin{aligned} 3\,u\,v &= -Q \\ u^3 + v^3 &= -R. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI}$$

Одавде израчунавамо количине u и v помоћу којих добијамо (према V) непознату y, а с овом (према II) и непознату x.

Узев из прве једн. VI) $v = -\frac{Q}{3\,u}$ и замењујући у другу једн. VI) добијамо

$$u^3 - \left(\frac{Q}{3\,u}\right)^3 = -R \text{ или } u^6 + R\,u^3 = \left(\frac{Q}{3}\right)^3,$$

одакле

$$u^3 = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3},$$

а с овим и помоћу друге једн. VI) (VII

$$v^3 = -\frac{R}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3}.$$

Последња два обрасца дају за u и v по три вредности, које добијамо кад стварну вредност кубног корена помножимо редом кореним вредностима $\sqrt[3]{1}$, а то су 1, $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.[1] Нека су u и v стварне корене вредности $\sqrt[3]{u^3}$ и $\sqrt[3]{v^3}$, остале су $u\,\alpha$, $u\,\alpha^2$, $v\,\alpha$, $v\,\alpha^2$. На основу тако добивених вредности за u и v, а према формули V), налазимо за

[1]) в. чл. 87. и чл. 88. 2. пример.

непознату y девет вредности. Међутим с обзиром на прву једн. VI), по којој производ uv мора да је стваран $\left(=-\frac{Q}{3}\right)$ видимо да од тих девет комбинација свега њи три одговарају поменутом услову. То су комбинације склопљене из спрегова u и v, $u\alpha$ и $v\alpha^2$, $u\alpha^2$ и $v\alpha$. Оне нам дају следећа три корена кубне једначине III)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= u+v \\ y_2 &= u\alpha+v\alpha^2 = -\frac{u+v}{2}+i\frac{u-v}{2}\sqrt{3} \\ y_3 &= u\alpha^2+v\alpha = -\frac{u+v}{2}-i\frac{u-v}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII}$$

Ако у формули V) ставимо за u и v њихове вредности, одређене једначинама VII), добићемо образац којим су обухваћена сва три корена кубне једначине III) и који је опште познат под именом *Кардановог обрасца.* [1])

$$y=\sqrt[3]{-\frac{R}{2}+\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{Q}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{R}{2}-\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{Q}{3}\right)^3}} \quad \text{(IX}$$

100. **Дискусија.** — Примећујемо да се у *Кардановоме* обрасцу јавља квадратни корен из $\left(\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{Q}{3}\right)^3$. То нам даје повода да разликујемо случајеве:

прво

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{Q}{3}\right)^3>0$$

[1]) По чувеноме полихистору из доба реформације *Geronimo Cardano* (Павија 1501 — Рим 1576).

у коме случају *Кардан*-ов образац даје један стваран и два уображена корена као што показују обрасци VIII). Друго

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{Q}{3}\right)^3=0.$$

Тада је $u^3=v^3=-\frac{R}{2}$ и према обрасцима VIII)

$$y_1=-2\sqrt[3]{\frac{R}{2}}$$

$$y_2=y_3=\sqrt[3]{\frac{R}{2}}.$$

Треће

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{Q}{2}\right)^3<0.$$

Вредности за u и v постају уображене, као што се види из формула VII). Тако исто и *Кардан*-ов образац добија имагинаран вид и ако кубна једначина мора да има бар један стваран корен.[1] Шта више њена су сва три корена сада стварна што значи да *Кардан*-ов образац постаје неупотребљив у овоме случају *(casus irreducibilis)*. Мора да потражимо други начин решавања кубни једначина.

101. **Тригонометриско решење.** — Узмимо сада на расматрање случај

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{Q}{3}\right)^3<0$$

---

[1]) Из теорије алгебарских једначина знамо да једначине непарног степена мора да имају бар један стваран корен.

у коме *Кардан*-ов образац постаје неупотребљив. Све до постављања једначина

$$\left.\begin{aligned} 3\,u\,v &= -Q \\ u^3 + v^3 &= -R \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI}$$

ток излагања је исти као и при извођењу *Кардан*-овог обрасца. Место да ове једначине решавамо обичном методом (заменом), што би нас довело *Кардан*-овој формули, која у овоме случају води апсурдном резултату, ми разлажемо прву једначину VI) на нове две

$$\left.\begin{aligned} u &= \sqrt{-\frac{Q}{3}}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ v &= \sqrt{-\frac{Q}{3}}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{1)} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(X}$$

заводећи помоћни угао φ, који ћемо добити помоћу друге једначине VI) на основу које је

$$u^3 + v^3 = -R = 2\sqrt{\left(-\frac{Q}{3}\right)^3}\cos 3\varphi,^{2)}$$

одакле

$$\cos 3\varphi = \frac{-\dfrac{R}{2}}{\sqrt{\left(-\dfrac{Q}{3}\right)^3}}. \qquad \text{(XI}$$

---

[1]) Овде је, као увек, $i = \sqrt{-1}$. Да су ове две једначине X) еквивалентне првој једн. VI) лако је уверити се, пошто множењем њих двеју међусобом произилази прва једн. VI).

[2]) Образовање u^3 и v^3 из u и v по *Моавр*-овоме правилу чл. 83.

Да ова формула XI) даје могуће вредности за угао 3φ следује отуда што је разломак $\dfrac{-\dfrac{R}{2}}{\sqrt{\left(-\dfrac{Q}{3}\right)^3}}$, којим је изражен $\cos 3\varphi$ стваран и < 1. Ово се потврђује претпоставком $\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{Q}{3}\right)^3 < 0$ на основу које је $\left(-\dfrac{Q}{3}\right)^3 > \left(\dfrac{R}{2}\right)^2$, дакле подкорена количина $\left(-\dfrac{Q}{3}\right)^3 > 0$, а осим тога још и $\dfrac{R}{2} < \sqrt{\left(\dfrac{-Q}{3}\right)^3}$, дакле $\cos 3\varphi < 1$.

Најзад примећујемо да помоћу формуле XI) налазимо за угао 3φ вредности

$$3\varphi,\ 3\varphi + 360^0,\ 3\varphi + 2\cdot 360^0,\ 3\varphi + 3\cdot 360^0,\ \ldots$$

а за сам угао φ

$$\varphi,\ \varphi + 120^0,\ \varphi + 240^0,\ \varphi + 360^0,\ \ldots$$

на основу чега, а према обрасцима X), добијамо за y свега ове три вредности

$$\text{XII)}\qquad \begin{cases} y_1 = 2\sqrt{-\dfrac{Q}{3}}\cos\varphi \\[2ex] y_2 = 2\sqrt{-\dfrac{Q}{3}}\cos(\varphi + 120^0) \\[2ex] y_3 = 2\sqrt{-\dfrac{Q}{3}}\cos(\varphi + 240^0). \end{cases}$$

102. *Примери.* — 1. Пример.

$$x^3 - 10x^2 + 37x - 52 = 0.$$

Овде је $p = -10$, $q = 37$, $r = -52$. На основу замене II)

$$x = y + \frac{10}{3}$$

и пошто је према обрасцима IV)

$$Q = \frac{11}{2},\ R = -\frac{74}{27}$$

задата једначина претвара се у ову

$$y^3 + \frac{11}{3}y - \frac{74}{27} = 0.$$

Обрасци VII) дају

$$u^3 = \frac{74}{2 \cdot 27} + \sqrt{\left(\frac{74}{2 \cdot 27}\right)^2 + \left(\frac{11}{3 \cdot 3}\right)^3}$$

$$= \frac{37 + \sqrt{37^2 + 11^3}}{27} = \frac{88,961524}{27}$$

$$v^3 = \frac{74}{2 \cdot 27} - \sqrt{\left(\frac{74}{2 \cdot 27}\right)^2 + \left(\frac{11}{3 \cdot 3}\right)^3}$$

$$= \frac{37 - \sqrt{37^2 + 11^3}}{27} = -\frac{14,961524}{27},$$

одакле апсолутне вредности

$$u = \sqrt{\frac{88,961524}{27}} = \frac{4,464102}{3} = 1,488034$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{-14,961524}{27}} = -\frac{2,464102}{3} = -0,821367$$

а с овима и помоћу образаца VIII)

$$y_1 = 0,666667 = \frac{2}{3}$$

$$y_2 = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2{,}309\,401 = -\frac{1}{3} + 2\,i$$

$$y_3 = -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2{,}309\,401 = -\frac{1}{3} - 1\,i.$$

Одавде следују корени задате кубне једначине

$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = 4$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{3} + 2\,i\right) + \frac{10}{3} = 3 + 2\,i$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{3} - 2\,i\right) + \frac{10}{3} = 3 - 2\,i.$$

2. Пример.

$$x^3 - 7\,x^2 + 7\,x + 15 = 0.$$

Овде је $p = -7$, $q = 7$, $r = 15$. Замена II)

$$x = y + \frac{7}{3}$$

претвара задату једначину у нову

$$y^3 - \frac{28}{3}y + \frac{160}{27} = 0,$$

где је према обрасцима IV)

$$Q = -\frac{28}{3},\ R = \frac{160}{27}.$$

Пошто је $\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3}\right)^3 < 0$ то се *Кардан*-ов образац у овоме примеру не може да употреби.

Према обрасцу XI) имамо

$$\cos 3\,\varphi = \frac{-160}{2.27\sqrt{\left(\frac{28}{3.3}\right)^3}} = -\frac{80}{\sqrt{28^3}}$$

$$\log 28 = 1{,}447\,1580 \qquad \log 80 = 1{,}903\,0900$$

$$\log\sqrt{28^3} = \frac{3}{2}\cdot 1{,}447\,1580 = 2{,}170\,7370$$

$$\log\frac{80}{\sqrt{28^3}} = 9{,}732\,3530 - 10$$

$$\log\cos 3\varphi = 9{,}732\,3530\,(n)$$

$$3\varphi = 180^0 + 57^0\,19'\,11{,}3'' = 237^0\,19'\,11{,}3''$$

$$\varphi_1 = 79^0\,6'\,23{,}8''$$

$$\varphi_2 = 120^0 + \varphi_1 = 199^0\,6'\,23{,}8''$$

$$\varphi_3 = 240^0 + \varphi_1 = 319^0\,6'\,23{,}8''.$$

С овим и на основу формула XII) налазимо

$$y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{28}\cos 79^0\,6'\,23{,}8'' = \frac{2}{3}$$

$$\log 2 = 0{,}301\,0300$$
$$\log\sqrt{28} = 0{,}723\,5790$$
$$\log 2\sqrt{28} = 1{,}024\,6090$$
$$\log\cos 79^0\,6'\,23{,}8'' = 9{,}276\,4207$$
$$\log 2\sqrt{28}\cos 79^0\,6'\,23{,}8'' = 0{,}301\,0297$$
$$2\sqrt{28}\cos 79^0\,6'\,23{,}8'' = 2$$

$$y_2 = \frac{2}{3}\sqrt{28}\cos 199^0\,6'\,23{,}8'' = -\frac{2}{3}\sqrt{28}\cos 19^0\,6'\,23{,}8'' = -\frac{10}{3}$$

$$\log 2\sqrt{28} = 1{,}024\,6090$$
$$\log\cos 19^0\,6'\,23{,}8'' = 9{,}975\,3910$$
$$\log 2\sqrt{28}\cos 19^0\,6'\,23{,}8'' = 1$$
$$2\sqrt{28}\cos 19^0\,6'\,23{,}8'' = 10$$

$$y_3 = \frac{2}{3}\sqrt{28}\cos 319^0\,6'\,23{,}8'' = \frac{2}{3}\sqrt{28}\cos 40^0\,53'\,36{,}2'' = \frac{8}{3}$$

$$\log 2\sqrt{28} = 1{,}024\,6090$$
$$\log\cos 40^0\,53'\,36{,}2'' = 9{,}878\,4810$$
$$\log 2\sqrt{28}\cos 40^0\,53'\,36{,}2'' = 0{,}903\,0900$$
$$2\sqrt{28}\cos 40^0\,53'\,36{,}2'' = 8.$$

Према добивеним вредностима y_1, y_2, y_3 налазимо корене задате једначине

$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3$$

$$x_2 = -\frac{10}{3} + \frac{7}{3} = -1$$

$$x_3 = \frac{8}{3} + \frac{7}{3} = 5.$$

ЧЕТВРТИ ДЕО

РАВНА ТРИГОНОМЕТРИЈА

I

ТЕОРЕМЕ И ОБРАСЦИ.

1.

Теореме и обрасци за стране и угле једнога троугла.

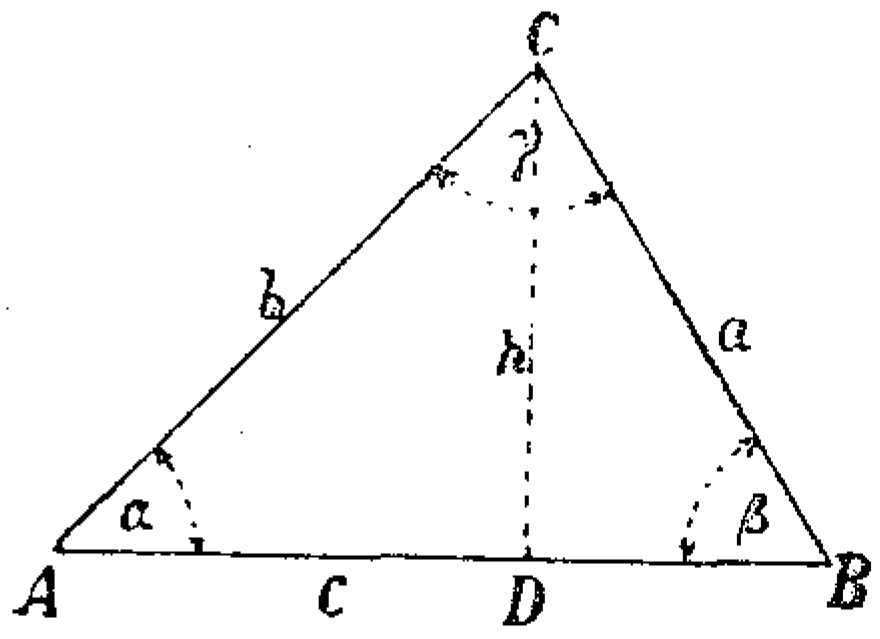
103. **Пројекциона теорема.** — *Ма која страна у једноме троуглу равна је збиру два производа, која добијамо кад помножимо сваку од осталих двеју страна косинусом угла који дотична страна чини с оном првом страном.*

Ову теорему изражавају обрасци:

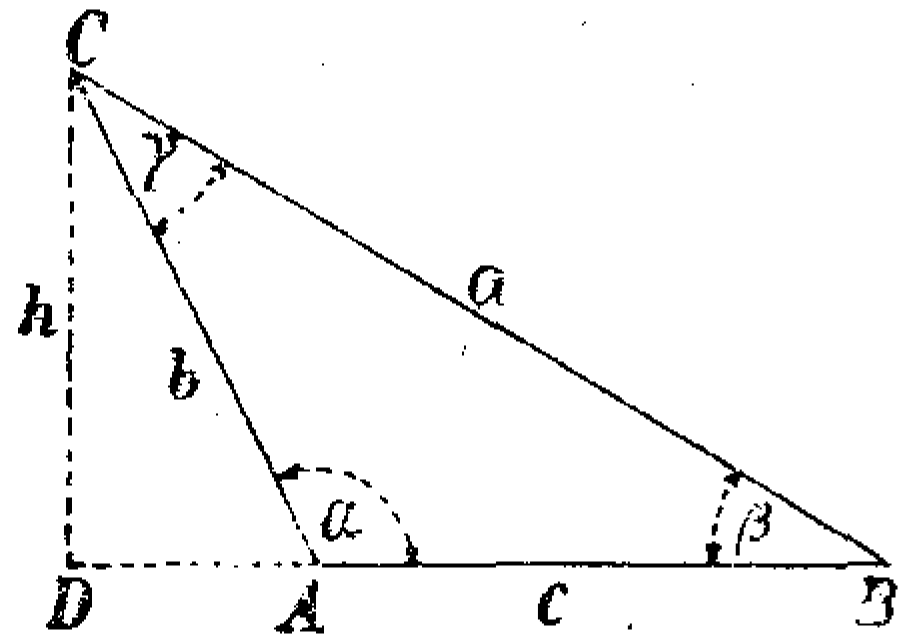
$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b &= c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c &= a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (82$$

Доказ. Спуштањем управне CD из темена C на супротну страну AB и посматрањем тако добивених правоуглих троуглова ACD и BCD читамо непосредно из сл. 28. да је

$$c = BD + DA = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$



Сл. 28.



Сл. 29.

На случај да је један од она два угла на страни AB, нпр. угао α туп и да, према томе, управна CD не сече страну AB, него тек њено продужење, као што је код сл. 29., имамо

$$c = BD - AD = a \cos\beta - b \cos(180^0 - \alpha)$$
$$= a \cos\beta + b \cos\alpha,$$

дакле исти образац као и горе.

На потпуно исти начин изводимо и она друга два обрасца за стране b и a.

Примедба. Горњу теорему можемо да искажемо и на овај начин: *свака страна у једноме троуглу равна је збиру пројекција осталих двеју страна на ту страну:* $c =$ proj. $a +$ proj. b. Овако формулисана теорема дала јој је име пројекционе теореме. Примећујемо аналогију између ове теореме и правила за сабирање комплексних количина (в. чл. 79.), као и сличност са принципом за слагање кретања, сила итд. помоћу паралелограма. Свака страна у троуглу може се сматрати као резултанта из оних других двеју страна.

Поменимо да се ова теорема може да проширии на полигон од ма колико страна.

104. **Синусна теорема.** — *Стране једнога троугла имају се као синуси супротних углова.*

У формули:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \qquad (83$$

или

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Доказ. Из правоуглих троуглова ACD и BCD (в. сл. 28. и 29.) читамо

$$h = b \sin \alpha \text{ и } h = a \sin \beta,$$

одакле

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Тако исто изводимо и остале две сразмере

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma, \quad c : a = \sin \gamma : \sin \alpha.$$

Напомена. Синусна теорема може да нам послужи да разрешимо следећа два основна задатка:

1) кад нам је дата једна страна и два угла да израчунамо остале две стране.

Тако нпр. из познатих комади a, α и β налазимо

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

или, пошто је $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, $\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta)$,

$$c = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

2) кад су нам дате две стране и једној од њих двеју супротни угао да одредимо и оној другој страни супротни угао, а помоћу њега и остале комаде.

Узмимо нпр. за познате комаде a, b и α. Угао β добијамо на овај начин

$$sin\, \beta = \frac{b\, sin\, \alpha}{a},$$

а помоћу њега

$$c = \frac{a\, sin\, (\alpha + \beta)}{sin\, \alpha}.$$

За овај задатак постоје у опште два решења услед тога што се непознати угао β добија синусном функцијом, а ми знамо да једноме и истом синусу одговарају два разна угла, јер је $sin\, \beta = sin\, (180^0 - \beta)$. У извесним случајевима задатак може имати само једно решење па и ниједно.

Пре свега ми видимо да је задатак могућ само онда када је $b\, sin\, \alpha \leqq a$, а немогућ ако је $b\, sin\, \alpha > a$, пошто $sin\, \beta$ неможе да буде > 1. За $b\, sin\, \alpha = a$ постоји само једно решење, јер је у томе случају $sin\, \beta = 1$, $\beta = 90^0$, па дакле и $180^0 - \beta = 90^0$.

Ако је $b\, sin\, \alpha < a$, задатак, дакле, могућ, онда постоје ови подслучајеви:

1) $a < b$, дакле и $\alpha < \beta$. Угао β има тада две вредности: једну оштру вредност (која је, разуме се, $> \alpha$) и њој суплементну вредност. Задатак има два решења.

2) $a = b$ и према томе $\alpha = \beta$. Суплементна вредност угла β невреди. Задатак има само једно решење: један равнокраки троугао.

3) $a > b$ у коме је случају $\alpha > \beta$. Појмљиво је да се за угао β сме узети само она оштра вредност, јер је суплементна вредност $> \alpha$. Задатак има, дакле, и сада само једно решење.

Из свега овога видимо да горе постављени задатак

кад је $a < b \sin \alpha$ нема ниједно решење;
„ „ $a = b \sin \alpha$ има само једно решење (један правоугли троугао):
„ „ $b \sin \alpha < a < b$ има два решења;
„ „ $a = b$ има само једно решење (један равнокраки троугао);
„ „ $a > b$ има само једно решење.

105. **Косинусна теорема.** — *Квадрат једне стране у троуглу раван је збиру квадрата осталих двеју страна мање удвојеном производу из ових страна и косинуса угла који они међусобом чине.*

Ова теорема представљена је обрасцима:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2\,c\,a \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (84$$

1. Доказ. Из сл. 28. и 29. читамо подједнако да је

$$a^2 = \overline{BD}^2 + h^2.$$

Према томе да ли је страни a супротни угао α оштар (као у сл. 28.) или туп (као у сл. 29.) јесте

$$BD = c - DA \quad \text{или} \quad BD = c + AD.$$

Но пошто је $DA = b \cos \alpha$, $AD = b \cos (180^0 - \alpha) = - b \cos \alpha$, то је за оба случаја без разлике

$$BD = c - b \cos \alpha.$$

С овим и на основу тога што је

$$h = b \sin \alpha$$

добијамо сасвим у опште

$$a^2 = (c - b \cos \alpha)^2 + b^2 \sin^2 \alpha = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha.$$

На потпуно исти начин доказују се и остала два обрасца за стране b и c.

2. Доказ. На основу синусне теореме јесте

$$a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

а из пројекционе теореме следује

$$a \cos \beta = c - b \cos \alpha.$$

Ако ове две једначине подигнемо на квадрат па их онда саберемо добићемо образац који желимо да докажемо.

Напомена. Помоћу косинусне теореме можемо да разрешимо следеће основне задатке:

1) кад су нам дате две стране и захваћени угао да нађемо трећу страну, а помоћу ње и остале комаде.

Тако нпр. ако су нам познате стране a и b и захваћени угао γ налазимо трећу страну

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma}.$$

Непознате угле α и β можемо да израчунамо употребом синусне или пројекционе теореме.

2) кад су нам дате две стране и једној од њих супротни угао да одредимо трећу страну, па дакле и остале комаде.

Узмимо да су нам познати комади a, b и α. Из прве једначине 84), кад је разрешимо по c, следује

$$c = b \cos \alpha \pm \sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 - b^2}$$

или краће

$$c = b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}.$$

Ми закључујемо одавде да овај задатак има у опште два решења, у извесним случајевима, пак, само једно или ниједно решење. Вредности за c нису стварне (задатак је немогућ), ако је подкорена количина $a^2 - b^2 \sin^2 \alpha$ негативна, тј. ако је $a < b \sin \alpha$. — Вредности за c јесу стварне и једнаке (задатак има само једно решење), ако је $a = b \sin \alpha$, у коме је случају $c = b \cos \alpha$ (дакле троугао правоугао). — Вредности за c јесу стварне и различне (задатак има два решења), ако је подкорена количина $a^2 - b^2 \sin^2 \alpha$ позитивна, тј. ако је $a > b \sin \alpha$.

На случај да је $a = b$ јесте $c = 2\, b \cos \alpha$ и ми имамо само једно решење: један равнокраки троугао. (Види 2. задатак у *Напомени* чл. 104.)

3) кад су нам дате све три стране једнога троугла да израчунамо његове угле.

Из једначина 84.) следују обрасци:

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\, b\, c} \\ \cos \beta &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\, c\, a} \\ \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\, a\, b}. \end{aligned}\right\} \qquad (84a$$

Имавши на уму да је косинус навек мањи од 1 закључујемо из горњих образаца да је овај задатак могућ само тако, ако је

$$b^2 + c^2 - a^2 < 2\, b\, c, \quad c^2 + a^2 - b^2 < 2\, c\, a,$$
$$a^2 + b^2 - c^2 < 2\, a\, b,$$

одакле

$$a + c > b, \quad b + a > c, \quad c + b > a.$$

На случај да је нпр. $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, јесте $\alpha = 90^0$. То значи да је дотични троугао правоугао.

106. **Молдвајде-ови обрасци.** — Из синусне теореме, а на основу једнога познатог става о сразмерама, следује

$$a : b + c = \sin\alpha : \sin\beta + \sin\gamma$$

$$a : b - c = \sin\alpha : \sin\beta - \sin\gamma.$$

Ако у овим двема сразмерама ставимо

$$\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma) = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\sin\beta - \sin\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

и после по могућству их скратимо добићемо

$$a : b + c = \cos\frac{\beta+\gamma}{2} : \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$a : b - c = \sin\frac{\beta+\gamma}{2} : \sin\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

На исти начин налазимо

85)
$$b : c + a = \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} : \cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

$$b : c - a = \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} : \sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

$$c : a + b = \cos\frac{\alpha+\beta}{2} : \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$c : a - b = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} : \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ово су *Молвајде-ови* обрасци, тако назвати по немачкоме математичару Karl Brandan Mollweide (Wolfenbüttel 1774. — Leipzig 1825.), који казују да се *ма која сшрана у шроуглу има према збиру (разлици) других двеју сшрана као косинус (синус) полузбира према косинусу (синусу) полуразлике овима супрошних углова.*

Напомена. Молвајде-ови обрасци могу да послуже, место синусне теореме, да из једне стране и два угла израчунамо остале две стране.

Тако нпр. ако нам је дата страна a и угли β и γ израчунаћемо, помоћу првих двеју једначина 85), збир и разлику осталих двеју страна,

$$b+c=a\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}},\quad b-c=a\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}},$$

а с овим и саме стране b и c.

107. **Тангентна теорема.** — Поделимо код једн. 85) прву са другом, трећу са четвртом и пету са шестом, па ћемо добити обрасце

$$\left.\begin{aligned} a+b : a-b &= tg\frac{\alpha+\beta}{2} : tg\frac{\alpha-\beta}{2} \\ b+c : b-c &= tg\frac{\beta+\gamma}{2} : tg\frac{\beta-\gamma}{2} \\ c+a : c-a &= tg\frac{\gamma+\alpha}{2} : tg\frac{\gamma-\alpha}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (86$$

који изражавају *шангеншну шеорему*.

Речима: *збир двеју страна у једноме троуглу има се према њиховој разлици као тангента полузбира према тангенти полуразлике супротних углова.*

Напомена. Помоћу тангентне теореме у стању смо да из две стране и захваћеног угла израчунамо непосредно остала два угла.

Нпр. из страна a и b и захваћеног угла γ налазимо остала два угла, јер познавајући њихов збир

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$$

добијамо разлику њихову из првог обрасца 86)

$$tg\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} tg\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

108. **Тангентни обрасци.** — Према синусној и пројекционој теореми јесте

$$b \sin \alpha = a \sin \beta \qquad c \sin \alpha = a \sin \gamma$$

$$b \cos \alpha = c - a \cos \beta \qquad c \cos \alpha = b - a \cos \gamma,$$

одакле, деобом, добијамо за $tg\,\alpha$ следећа два израза

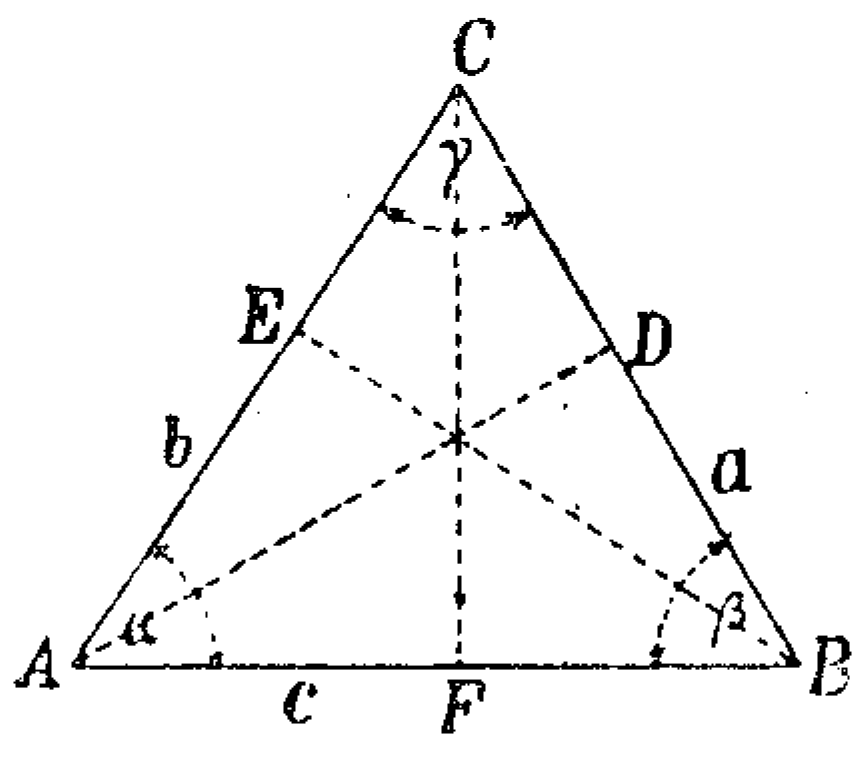
$$tg\,\alpha = \frac{a \sin \beta}{c - a \cos \beta}, \quad tg\,a = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}.$$

Тако исто налазимо и за угле β и γ по две вредности. Тако добивени обрасци

$$87) \quad \begin{cases} tg\,\alpha = \dfrac{a \sin \beta}{c - a \cos \beta} = \dfrac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma} \\[2ex] tg\,\beta = \dfrac{b \sin \gamma}{a - b \cos \gamma} = \dfrac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha} \\[2ex] tg\,\gamma = \dfrac{c \sin \alpha}{b - c \cos \alpha} = \dfrac{c \sin \beta}{a - c \cos \beta} \end{cases}$$

зову се *тангентни обрасци.*

Лако је геометриски доказати ове обрасце. Замислимо у задатоме троуглу ABC из појединих темена спуштене управне на супротне стране (в. сл. 30). Из правоуглог троугла ACF читамо



Сл. 30.

$$tg\,\alpha = \frac{CF}{AF} = \frac{CF}{c - FB},$$

где је, као што видимо из правоуглог $\triangle$ BCF,

$$CF = a \sin\beta, \quad FB = a \cos\beta,$$

дакле

$$tg\,\alpha = \frac{a \sin\beta}{c - a\cos\beta}.$$

Посматрањем правоуглих троуглова ABE и BCE изводимо за $tg\,\alpha$ другу вредност

$$tg\,\alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{BE}{b - EC}, \; BE = a\sin\gamma, \; EC = a\cos\gamma,$$

дакле

$$tg\,\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}.$$

Тако исто доказујемо обрасце за $tg\,\beta$ и $tg\,\gamma$.

Напомена. Обрасци 87) имају исту примену као и обрасци 86), а то је да се из две стране и захваћеног угла (нпр. a, b и γ) израчунају остала два угла (α и β).

109. **Обрасци за израчунавање углова помоћу страна.** — Ми смо, раније већ, објаснили да се употребом косинусне теореме могу да израчунају угли једнога троугла кад су нам познате стране његове. Међутим обрасци

84*а*) који нам служе за ту циљ, нису подесни за логаритамску употребу и ми ћемо, због тога, потражити нове обрасце који ће томе захтеву боље одговарати.

Ако у познатоме гониометриском обрасцу

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}$$

ставимо

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

добићемо

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}\right)} = \sqrt{\frac{2\,b\,c + b^2 + c^2 - a^2}{4\,b\,c}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4\,b\,c}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4\,b\,c}}$$

или, ако назначимо

збир страна $a + b + c = 2\,s$, полузбир $\frac{a+b+c}{2} = s$,

дакле $\frac{b+c-a}{2} = s - a$, имаћемо краће

$$88)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{b\,c}}, \\ \text{а на исти начин} \\ \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{c\,a}} \\ \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{a\,b}}. \end{array}\right.$$

Полазећи од гониометриског обрасца

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)},$$

а на основу горње вредности за $\cos\alpha$, изводимо

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}\right)}=\sqrt{\frac{2\,b\,c-b^2-c^2+a^2}{4\,b\,c}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4\,b\,c}}=\sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{4\,b\,c}}$$

или, имавши на уму да је

$$\frac{a-b+c}{2}=s-b,\quad \frac{a+b-c}{2}=s-c,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{b\,c}},$$

а на исти начин

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)\,(s-a)}{c\,a}} \qquad (89$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{a\,b}}.$$

Деобом једначина 89) са једначинама 88) добијамо ове нове обрасце

$$
90)\quad
\begin{cases}
tg\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\dfrac{1}{s-a}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\[2ex]
tg\dfrac{\beta}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\dfrac{1}{s-b}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\[2ex]
tg\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\dfrac{1}{s-c}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}
\end{cases}
$$

Најзад применом гониометриског обрасца

$$sin\,\alpha = 2\,sin\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2},$$

а на основу једначина 88) и 89), добијамо следеће обрасце, који су, као и они 88), 89) и 90), врло подесни за логаритамску употребу:

$$
91)\quad
\begin{cases}
sin\,\alpha=\dfrac{2}{b\,c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\[2ex]
sin\,\beta=\dfrac{2}{c\,a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\[2ex]
sin\,\gamma=\dfrac{2}{a\,b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.
\end{cases}
$$

110. — **Основни обрасци Равне Тригонометрије.** — Ми знамо да је троугао одређен трима комадима, међу којима мора бити бар једна страна. Отуда закључујемо да између шест елемената (три стране и три угла) једнога троугла морају и могу постојати ни више ни мање него само три независне једначине.

Овакве три једначине, помоћу којих смо у стању да из три задата комада једнога троугла израчунамо и остала три непозната комада, могу се сматрати као основни обрасци Равне Тригонометрије, тј. као обрасци који су довољни па да се један троугао потпуно разреши.

а) Као основне обрасце из којих се аналитички могу да изведу сви остали обрасци Равне Тригонометрије, можемо да узмемо

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^0, \end{aligned}\right\} \qquad (a$$

а то је синусна теорема и познато правило из Планиметрије да је збир углова у троуглу раван 180^0.

Доказ. Пројекциону теорему добијамо на следећи начин.

Отуда што је

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma),$$

дакле

$$\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$$

и кад заменимо $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ странама a, b, c, које су им сразмерне, добијамо

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$$

а тако исто и остале две једначине 82) чл. 103.

Косинусну теорему можемо да изведемо на овај начин. На основу горњих образаца *а*) јесте

$$\cos\alpha = -\cos(\beta + \gamma) = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$

$$= -\sqrt{1 - \sin^2\beta}\sqrt{1 - \sin^2\gamma} + \sin\beta\sin\gamma$$

или

$$(\cos\alpha - \sin\beta \sin\gamma)^2 = (1 - \sin^2\beta)(1 - \sin^2\gamma),$$

одакле, кад заменимо (на основу образаца *a*)

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}, \quad \sin\gamma = \frac{c \sin\alpha}{a}$$

и по могућству сведемо, следује

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos\alpha.$$

Тако исто доказујемо и остале две једначине 84) чл. 105.

b) Место образаца *a*) могу се узети обрасци који изражавају пројекциону теорему као основни обрасци, а то су ови

$$b)\qquad \begin{cases} a = b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{cases}$$

Доказ. Помножимо ове једначине редом са $-a$, $+b$, $+c$ и саберимо их затим, па ћемо добити

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos\alpha,$$

а на сличан начин и оне друге две којима је формулисана косинусна теорема.

Синусну теорему изводимо кад из друге једн. *b*) узмемо

$$\cos\gamma = \frac{b - \cos\alpha}{a}$$

и ставимо ту вредност у прву једн. *b*), чиме добијамо

$$a^2 - b^2 = c\,(a\cos\beta - b\cos\alpha),$$

одакле, кад заменимо овде за *c* његову вредност из треће једн. *b*), налазимо

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 \beta - b^2 \cos^2 \alpha$$

или

$$a^2 \sin^2 \beta = b^2 \sin^2 \alpha .$$

Пошто су угли α и β (а разуме се и γ) мањи од 180^0, њихови синуси, дакле, положни, то је онда

$$a \sin \beta = b \sin \alpha \text{ или } \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} .$$

Тако исто доказујемо да је ово последње $= \dfrac{\sin \gamma}{c}$.

Најзад, познато планиметриско правило: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, доказаћемо кад из једн. b) елиминујемо стране a, b, c. Из првих двеју једн. b) следује

$$a = \frac{c}{\sin^2 \gamma} (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma),$$

$$b = \frac{c}{\sin^2 \gamma} (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma),$$

које, кад заменимо у трећу једн. b), даје

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$$

или

$$(\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)^2 = 1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma$$

$$= \sin^2 \beta \sin^2 \gamma,$$

одакле, кад извучемо, лево и десно, корен квадратни и пребацимо други члан леве стране на десну страну једначине,

$$\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma \pm \sin \beta \sin \gamma = - \cos (\beta \pm \gamma).$$

Одавде следује

$$\alpha \pm \beta \pm \gamma = (2n + 1) \cdot 180^0,$$

где под n разумемо ма какав цео број, под $2n+1$ дакле један непаран број. Односно знакова на левој страни добивеног обрасца једино је могућ случај

$$\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\cdot 180^0,$$

јер свака друга комбинација, као нпр. $\alpha-\beta+\gamma=(2n+1)\cdot 180^0$, $\alpha+\beta-\gamma=(2n+1)\cdot 180^0$ итд., значила би да је збир два угла мање трећем углу равно непарноме броју пута 180^0, у којем би случају морало бити могуће и то да је $\alpha=\beta=\gamma=180^0$, које, међутим, као што знамо, неможе да буде. Најзад, да и сам непарни број $2n+1$ није никоји други до 1 (а не нпр. 3, 5, 7, $\cdots$) и да је, трема томе,

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0,$$

следује отуда што је сваки од углова α, β, γ појединце мањи од 180^0.

c) Једначине

$$c)\qquad \begin{cases} a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos\alpha \\ b^2=c^2+a^2-2\,c\,a\cos\beta \\ c^2=a^2+b^2-2\,a\,b\cos\gamma, \end{cases}$$

које исказују косинусну теорему, могу такође да се узму за основне обрасце и да се из њих изведу сви други обрасци Равне Тригонометрије.

Доказ. Пројекциону теорему добијамо сабирањем ма којих двеју једн. *c*). Тако нпр. кад саберемо последње две једначине и по могућству скратимо налазимо

$$a=b\cos\gamma+c\cos\beta,$$

а тако исто и оне друге две аналогне једначине.

Синусну теорему изводимо на следећи начин. На основу прве једн. c) јесте

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c},$$

дакле

$$\sin^2\alpha = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2\,a^2\,b^2 + 2\,a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2}{4\,b^2\,c^2}$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2\,a^2\,b^2 + 2\,a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2}{4\,a^2\,b^2\,c^2}.$$

Исту вредност налазимо, помоћу друге и треће једн. c), за количнике $\frac{\sin^2\beta}{b^2}$ и $\frac{\sin^2\gamma}{c^2}$, а пошто су угли α, β, γ, сви мањи од 180^0, њихови синуси, дакле, положни, то следује онда

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Планиметриски став, да је збир углова у троуглу раван 180^0, доказаћемо кад из једначина c) елиминујемо стране a, b, c. Тиме добијамо између углова релацију

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1,$$

одакле, као и горе при извођењу овога става из пројекционе теореме, закључујемо да мора бити

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

2.

Израчунавање површине троугла.

111. **Обрасци за површину троугла.** — Пошто се стране и углови једне праволиниске фигуре у равни дају најнепосредније измерити, природно је да се

поменути делови фигуре имају првенствено сматрати као елементи њени. Покушаћемо да нађемо обрасце за израчунавање површине троугла на основу тих најважнијих његових саставака.

Из Планиметрије нам је познато да је површина троугла ABC (в. сл. 30.)

$$P = \frac{1}{2} b \cdot BE = \frac{1}{2} c \cdot CF = \frac{1}{2} a \cdot AD,$$

а пошто је

$$BE = c \sin \alpha, \quad CF = a \sin \beta, \quad AD = b \sin \gamma,$$

то је онда

$$92) \qquad P = \frac{1}{2} b\, c \sin \alpha, = \frac{1}{2} c\, a \sin \beta = \frac{1}{2} a\, b \sin \gamma.$$

Површина троугла равна је, дакле, половини производа из две стране и синуса захваћеног угла.

Кад овде, у једн. 92), ставимо

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}, \quad a = \frac{b \sin a}{\sin \beta},$$

а с обзиром на то да је

$$\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta), \quad \sin \alpha = \sin (\beta + \gamma),$$

$$\sin \beta = \sin (\gamma + \alpha),$$

добићемо

$$93) \quad P = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)} = \frac{b^2 \sin \gamma \sin \alpha}{2 \sin (\gamma + \alpha)},$$

где је површина изражена помоћу једне стране и два угла.

Најзад, ако у једн. 92) заменимо $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ њиховим вредностима које нам дају обрасци 91), добићемо формулу

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad 94)$$

која нам служи да израчунамо површину троугла помоћу страна његових.

Напомена. С погледом на образац 94) једначине 91) могу да се напишу простије

$$\sin\alpha = \frac{2P}{bc}, \quad \sin\beta = \frac{2P}{ca}, \quad \sin\gamma = \frac{2P}{ab}.$$

II

ПРИМЕРИ И ПРИМЕНЕ.

1.

Основни задатци о разрешавању троуглова.

112. **Први задатак.** — Дата је једна страна и налегли угли, нпр. a, β и γ; тражи се трећи угао α, остале две стране b и c и површина P троугла.

Решење:

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$$

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$P = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}.$$

Стране b и c могли бисмо да нађемо и на овај начин

$$b + c = a\cos\frac{\beta-\gamma}{2} : \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$b - c = a\sin\frac{\beta-\gamma}{2} : \sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Пример.

Дато je:

$$a = 347{,}298^{m},\ \beta = 84^{0}16'21{,}4'',\ \gamma = 53^{0}9'17{,}8''.$$

Тражи се:

$$\alpha,\ b,\ c \text{ и } P.$$

Решење:

$$\alpha = 180^{0} - (\beta + \gamma) = 42^{0}34'20{,}8'';$$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} \qquad\qquad c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$\log a = 2{,}540\,7023$	$\log a = 2{,}540\,7023$
$\log \sin\beta = 9{,}997\,8266$	$\log \sin\gamma = 9{,}903\,2311$
$\log \sin\alpha = 9{,}830\,2818$	$\log \sin\alpha = 9{,}830\,2818$
$\log b = 2{,}708\,2471$	$\log c = 2{,}613\,6516$
$b = 510{,}796^{m};$	$c = 410{,}820^{m};$

$$P = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha},$$

$$\log a^2 = 2 \log a = 5{,}081\,4046$$
$$\log \sin\beta = 9{,}997\,8266$$
$$\log \sin\gamma = 9{,}903\,2311$$
$$\log 2 = 0{,}301\,0300$$
$$\log \sin\alpha = 9{,}830\,2818$$

$$\log P = 4{,}851\,1505$$
$$P = 70\,982{,}37\ \mathrm{m}^2.$$

113. **Други задатак.** — Дате су две стране, нпр. b и c и захваћени угао α; траже се остала два угла β и γ, трећа страна a и површина P троугла.

Решење: познавајући збир

$$\beta + \gamma = 180^{0} - \alpha$$

налазимо разлику помоћу обрасца

$$tg\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}tg\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2\,b\,c\cos\alpha}$$

$$P=\frac{1}{2}\,b\,c\sin\alpha$$

Угле β и γ можемо и одвојено да израчунамо:

$$tg\,\beta=\frac{b\sin\alpha}{c-b\cos\alpha},\quad tg\,\gamma=\frac{c\sin\alpha}{b-c\cos\alpha},$$

а пошто њих нађемо одредићемо страну

$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

или на овај начин:

$$a=(b+c)\cos\frac{\beta+\gamma}{2}:\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$=(b-c)\sin\frac{\beta+\gamma}{2}:\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

Пример.

Дато је:

$$b=57{,}094^{m},\quad c=43{,}916^{m},\quad \alpha=61^{0}\,7'\,52{,}68''.$$

Тражи се:

β, γ, a и P.

Решење:

$$tg\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}tg\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$b - c = 13,178 \qquad\qquad \log(b-c) = 1,119\,8495$

$\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2} = 59^0\,26'\,3,66'' \qquad \log tg\frac{\beta+\gamma}{2} = 0,228\,7143$

$b + c = 101,010 \qquad\qquad \log(b+c) = 2,004\,3644$

$$\log tg\frac{\beta-\gamma}{2} = 9,344\,1994$$

$$\frac{\beta-\gamma}{2} = 12^0\,27'\,24,11''$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = 59^0\,26'\,3,66'',$$

дакле

$$\beta = 71^0\,53'\,27,77'',\ \gamma = 46^0\,58'\,39,55'';$$

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta} \qquad\qquad P = \frac{1}{2} b c \sin\alpha$$

$\log b = 1,756\,5905 \qquad\qquad \log b = 1,756\,5905$

$\log\sin\alpha = 9,942\,3694 \qquad\qquad \log c = 1,642\,6228$

$\log\sin\beta = 9,977\,9372 \qquad\qquad \log\sin\alpha = 9,942\,3694$

$\log a = 1,721\,0227 \qquad\qquad \log 2 = 0,301\,0300$

$a = 52,604^m; \qquad\qquad \log P = 3,040\,5527$

$$P = 1097,874 m^2.$$

114. **Трећи задатак.** — Дате су стране a, b и c, траже се угли α, β и γ и површина P троугла.

Решење: за израчунавање углова помоћу страна имамо обрасце 84*a*, 88, 89, 90 и 91, а за израчунавање површине образац 94.

Пример.

Дато је:

$$a = 7135,248^m,\ b = 5269,744^m,\ c = 4093,526^m.$$

Тражи се:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \text{и}\ P.$$

Решење:

$$s-a=1114{,}011 \qquad \log(s-a)=3{,}046\,8895$$
$$s-b=2979{,}515 \qquad \log(s-b)=3{,}474\,1456$$
$$s-c=4155{,}733 \qquad \log(s-c)=3{,}618\,6476$$
$$s=8249{,}259 \qquad \log s=3{,}916\,4149$$

$$\log\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}=6{,}223\,2678$$

$$\log\sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}}=3{,}111\,6339.$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\log\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=3{,}111\,6339$$
$$\log(s-a)=3{,}046\,8895$$

$$\log tg\frac{\alpha}{2}=0{,}064\,7444$$

$$\frac{\alpha}{2}=49^0\,15'\,18{,}3''$$

$$\alpha=98^0\,30'\,36{,}6'';$$

$$tg\frac{\beta}{2}=\frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\log\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=3{,}111\,6339$$
$$\log(s-b)=3{,}474\,1456$$

$$\log tg\frac{\beta}{2}=9{,}637\,4883$$

$$\frac{\beta}{2}=23^0\,27'\,38{,}8''$$

$$\beta=46^0\,55'\,17{,}6'';$$

$$tg\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\log\sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}}=3{,}111\,6339$$
$$\log(s-c)=3{,}618\,6476$$

$$\log tg\frac{\gamma}{2}=9{,}492\,9863$$

$$\frac{\gamma}{2}=17^0\,17'\,2{,}9''$$

$$\gamma=34^0\,34'\,5{,}8'';$$

$$P=\sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$$

$$\log s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)=14{,}056\,0976$$

$$\log P=\ 7{,}028\,0488$$

$$P=10\,667\,160\mathrm{m}^2.$$

115. **Четврти задатак.** — Дате су две стране, нпр. a и b и угао α који је супротан једној од њих; траже се остала два угла β и γ, трећа страна c и површина P троугла.

Решење: било да прво израчунамо угао β на основу синусне теореме

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a},$$

било страну c на основу косинусне теореме

$$c = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\alpha}$$

и један и други начин решавања показује да задатак

нема ниједно решење, ако је . . . . $a < b \sin\alpha$
има једно решење (1 правоугли $\triangle$), ако је $a = b\sin\alpha$
има два решења, ако је . . . . . $b\sin\alpha < a < b$
има једно решење (1 равнокраки $\triangle$), ако је $a = b$
има једно решење, ако је . . . . $a > b$.

Пример за 1. случај.

Дато је:

$$a = 48{,}607^{m},\ b = 84{,}623^{m},\ \alpha = 37^0\,14'\,30''.$$

Тражи се:

$$\beta,\ \gamma,\ c \text{ и } P.$$

Решење:

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$$

$$\log b = 1{,}927\,4884$$
$$\log \sin\alpha = 9{,}781\,8833$$
$$\overline{\log b \sin\alpha = 1{,}709\,3717}$$
$$\log a = 1{,}686\,6988.$$

Ми видимо, одавде, да је $a < b \sin\alpha$, дакле задатак немогућ.

Пример за 2. случај.

Дато је:

$$a = 51{,}212^{m},\quad b = 84{,}623^{m},\quad \alpha = 37^{0}\,14'\,30''.$$

Тражи се:

$$\beta,\ \gamma,\ c \text{ и } P.$$

Решење:

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$$

$$\log b = 1{,}927\,4884$$
$$\log\sin\alpha = 9{,}781\,8833$$
$$\log b\sin\alpha = 1{,}709\,3717$$
$$\log a = 1{,}709\,3717.$$

Пошто је $a = b\sin\alpha$ има овај задатак само једно решење и то у виду једног правоуглог троугла, јер је $\sin\beta = 1$, дакле

$$\beta = 90^{0};\qquad \gamma = 90^{0} - \alpha = 52^{0}\,45'\,30'';$$

$$c = b\cos\alpha \qquad P = \frac{1}{2}\,a\,c$$

$$\log b = 1{,}927\,4884$$
$$\log\cos\alpha = 9{,}900\,9622$$
$$\log c = 1{,}828\,4506$$
$$c = 67{,}368^{m};$$

$$\log a = 1{,}709\,3717$$
$$\log c = 1{,}828\,4506$$
$$\log 2 = 0{,}301\,0300$$
$$\log P = 3{,}236\,7923$$
$$P = 1725{,}01\,m^{2}.$$

Пример за 3. случај.

Дато је:

$$a = 73{,}659^{m},\quad b = 84{,}623^{m},\quad \alpha = 37^{0}\,14'\,30''.$$

Тражи се:

$$\beta,\ \gamma,\ c \text{ и } P.$$

Решење:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

$$\begin{aligned}
\log b &= 1{,}927\,4884 \\
\log\sin\alpha &= 9{,}781\,8833 \\ \hline
\log b\sin\alpha &= 1{,}709\,3717 \\
\log a &= 1{,}867\,2258 \\ \hline
\log\sin\beta &= 9{,}842\,1459,
\end{aligned}$$

на основу чега добијамо следећа два решења постављеног задатка:

$$\beta_1 = 44^0\,2'\,52''; \qquad \beta_2 = 180^0 - \beta_1 = 135^0\,57'\,8'',$$

$$\gamma_1 = 98^0\,42'\,38''; \qquad \gamma_2 = 6^0\,48'\,22'';$$

$$c_1 = \frac{a\sin\gamma_1}{\sin\alpha} \qquad c_2 = \frac{a\sin\gamma_2}{\sin\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\log a &= 1{,}867\,2258 & \log a &= 1{,}867\,2258 \\
\log\sin\gamma_1 &= 9{,}994\,9617 & \log\sin\gamma_2 &= 9{,}073\,7546 \\
\log\sin\alpha &= 9{,}781\,8833 & \log\sin\alpha &= 9{,}781\,8833 \\ \hline
\log c_1 &= 2{,}080\,3047 & \log c_2 &= 1{,}159\,0971 \\
c_1 &= 120{,}311^{m}; & c_2 &= 14{,}424^{m};
\end{aligned}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma_1 \qquad P_2 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma_2$$

$$\begin{aligned}
\log a &= 1{,}867\,2258 & \log a &= 1{,}867\,2258 \\
\log b &= 1{,}927\,4884 & \log b &= 1{,}927\,4884 \\
\log\sin\gamma_1 &= 9{,}994\,9617 & \log\sin\gamma_2 &= 9{,}073\,7546 \\
\log 2 &= 0{,}301\,0300 & \log 2 &= 0{,}301\,0300 \\ \hline
\log P_1 &= 3{,}488\,6459 & \log P_2 &= 2{,}567\,4382 \\
P_1 &= 3080{,}68\,m^2. & P_2 &= 369{,}35\,m^2.
\end{aligned}$$

Пример за 4. случај.

Дато је:

$$a = 84{,}623^{m},\; b = 84{,}623^{m},\; \alpha = 37^0\,14{,}30''.$$

Тражи се:

$$\beta,\ \gamma,\ c \text{ и } P.$$

Решење: задатак има само једно решење, јер је $a = b$, дакле

$$\beta = \alpha = 37^0\,14'\,30'';$$

$$\gamma = 180^0 - 2\,\alpha = 105^0\,31';$$

$c = 2\,a\cos\alpha$	$P = \frac{1}{2}\,a^2 \sin\gamma$
$\log 2 = 0{,}301\,0300$	$\log a^2 = 2\log a = 3{,}734\,4516$
$\log a = 1{,}867\,2258$	$\log \sin\gamma = 9{,}983\,8755$
$\log\cos\alpha = 9{,}900\,9622$	$\log 2 = 0{,}301\,0300$
$\log c = 2{,}069\,2180$	$\log P = 3{,}417\,2971$
$c = 117{,}278^m;$	$P = 2613{,}95\ m^2.$

Пример за 5. случај.

Дато је:

$$a = 107{,}394^m,\quad b = 84{,}623^m,\quad \alpha = 37^0\,14'\,30''.$$

Тражи се

$$\beta,\ \gamma,\ c \text{ и } P.$$

Решење: услед тога што је овде $a > b$, па мора да буде $\alpha > \beta$, следује да овај задатак има само једно решење.

$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$	$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$
$\log b = 1{,}927\,4884$	$\log a = 2{,}030\,9800$
$\log\sin\alpha = 9{,}781\,8833$	$\log\sin\gamma = 9{,}959\,7867$
$\log a = 2{,}030\,9800$	$\log\sin\alpha = 9{,}781\,8833$
$\log\sin\beta = 9{,}678\,3917$	$\log c = 2{,}208\,8834$
$\beta = 28^0\,28'\,50{,}1'';$	$c = 161{,}765^m;$

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 114^0\,16'\,39{,}9'';$$

$$P = \frac{1}{2} a\, b \sin\gamma$$

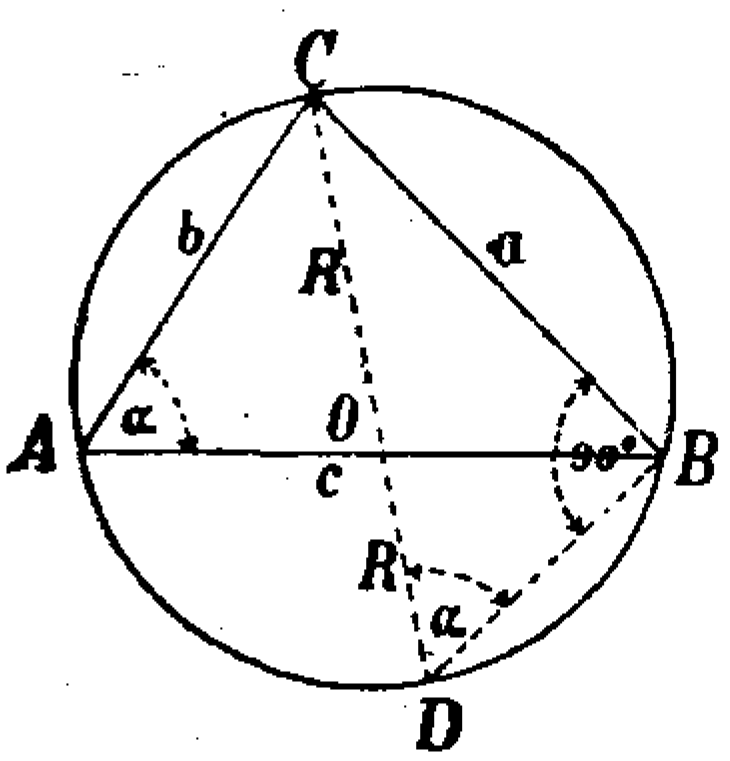
$$\log a = 2{,}030\,9800$$
$$\log b = 1{,}927\,4884$$
$$\log \sin\gamma = 9{,}959\,7867$$
$$\log 2 = 0{,}301\,0300$$

$$\log P = 3{,}617\,2251$$
$$P = 4142{,}14\,\text{m}^2.$$

2.

Примене у Геометрији.

116. **Полупречник око троугла описаног круга.** — Нека је ABC троугао око којег је описан круг са полупречником R. Повуцимо из темена C пречник $CD = 2R$ и спојимо тачку D са теменом B. Из правоуглог троугла BCD, у коме је $\measuredangle\, CBD = 90^0$ (као перифериски угао над полукругом), $\measuredangle\, BDC = \alpha$ (јер стоји над истим луком BC као и $\measuredangle\, BAC$, читамо



Сл. 31.

$$a = 2R \sin\alpha, \quad R = \frac{a}{2\sin\alpha},$$

дакле у опште

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}. \tag{95}$$

Ако ставимо овде за $\sin\alpha$, $\sin\beta$ или $\sin\gamma$ њихове вредности из образаца 91) добићемо за полупречник описаног круга овај нови израз

$$R = \frac{a\,b\,c}{4\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(c-c)}}. \qquad (96$$

Примедба. Из формуле 95) видимо да је за све троуглове, који су уписани у један задати круг (са полупречником R), количник из једне стране и синуса њој супротног угла константан ($= 2\,R$).

117. **Полупречник у троугао уписаног круга.** — Спојимо средиште O уписаног круга са теменима A, B, C задатог троугла. Добићемо три троугла AOB, BOC и COA чије су основице стране $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, а висине све равне полупречнику r уписаног круга.

Отуда што је

$$\triangle\, ABC = \triangle\, BOC + \triangle\, COA + \triangle\, AOB,$$

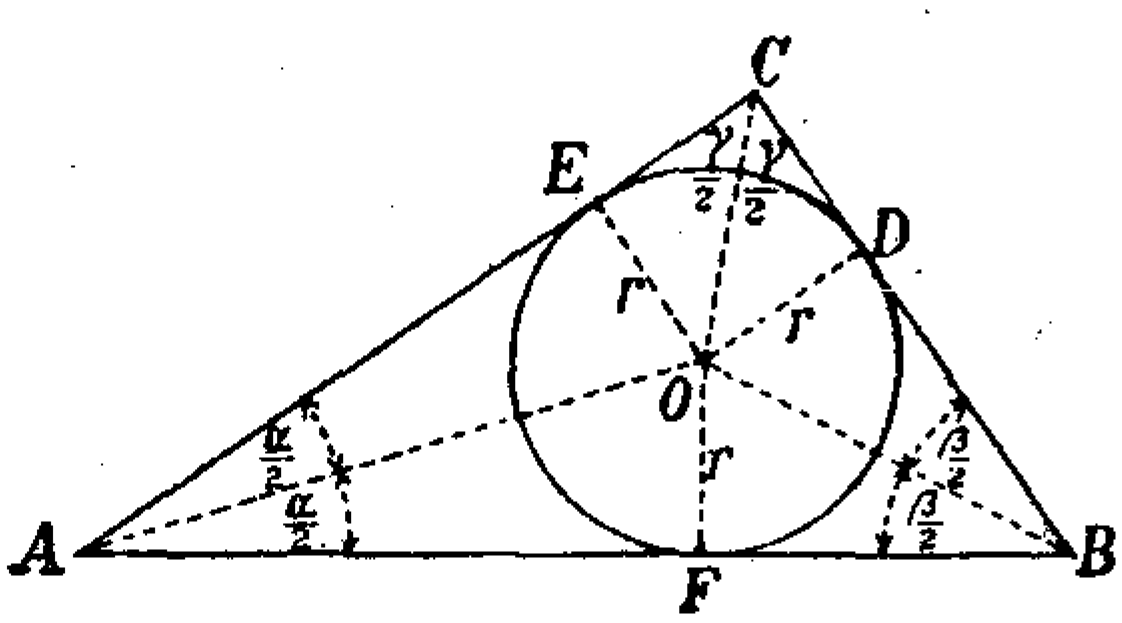
дакле, ако означимо са P површину задатога троугла ABC,

$$P = \frac{1}{2}\,r\,a + \frac{1}{2}\,r\,b + \frac{1}{2}\,r\,c = \frac{1}{2}\,r\,(a+b+c)$$

следује

$$r = \frac{2\,P}{a+b+c} = \frac{P}{s}$$

или, с обзиром на образац 94),



Сл. 32.

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}. \qquad (97$$

С погледом на обрасце 90) можемо да изразимо полупречник r и на овај начин

98) $r = (s - a)\, tg\frac{\alpha}{2} = (s - b)\, tg\frac{\beta}{2} = (s - c)\, tg\frac{\gamma}{2}$[1])

Ми можемо полупречник r да изразимо још на трећи начин. Из правоуглог троугла BOD видимо да је OD, тј. $r = OB \cdot sin\frac{\beta}{2}$ или пошто је, на основу синусне теореме за $\triangle BOC$, $OB = \dfrac{a\, sin\frac{\gamma}{2}}{sin\left(180^0 - \frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$

$$= \frac{a\, sin\frac{\gamma}{2}}{sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = a\frac{sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}$$

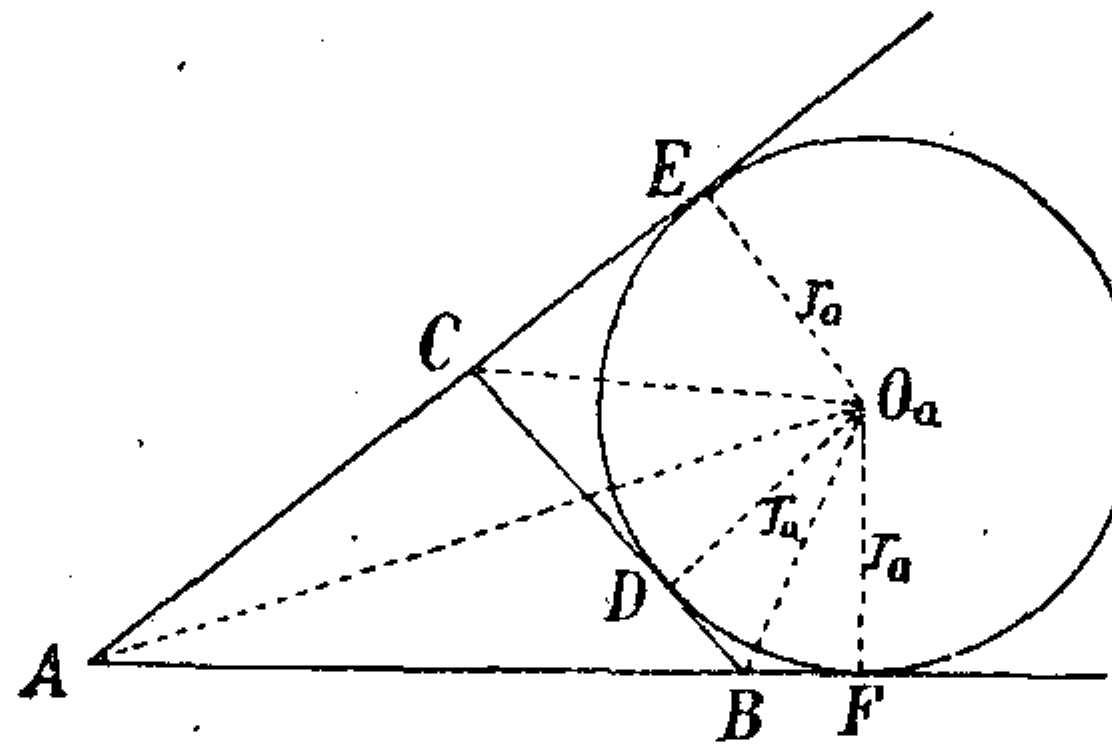
99) $$r = a\frac{sin\frac{\beta}{2}\, sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}} = b\frac{sin\frac{\gamma}{2}\, sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\beta}{2}} = c\frac{sin\frac{\alpha}{2}\, sin\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\gamma}{2}}.$$

118. **Полупречници кругова који додирују једну страну троугла и продужења осталих двеју страна.** — Кад вежемо средиште O_a круга, који додирује страну BC и продужења осталих двеју страна AC и AB, са сва три темена задатог троугла приметићемо да је

$$\triangle ABC = \triangle O_aAC + \triangle O_aAB - \triangle O_aBC$$

[1]) Ове обрасце је лако добити и помоћу слике. Ми видимо да је $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{AE}$, дакле $r = AE \cdot tg\frac{\alpha}{2}$. Но пошто је $AE = AF$, $CD = CE$, $BD = BF$ и према томе $AE + BD + CD = s$, $AE = s - (BD + CD) = s - a$, следује $r = (s - a)\, tg\frac{\alpha}{2}$. На исти начин доказује се $r = (s - b)\, tg\frac{\beta}{2} = (s - c)\, tg\frac{\gamma}{2}$.

или, ако означимо са P површину задатог троугла ABC и будемо имали на уму да су основице троуглова O_aAC, O_aAB, O_aBC равне странама: $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, а висине њихове све једнаке полупречнику r_a, јер је $O_aE = O_aF = O_aD = r_a$,



Сл. 33.

$$P = \frac{1}{2} b r_a + \frac{1}{2} c r_a - \frac{1}{2} a r_a = \frac{1}{2} r_a (b + c - a) = r_a (s - a),$$

одакле

$$r_a = \frac{P}{s - a}$$

или на основу обрасца 94)

$$\left.\begin{aligned} r_a &= \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}\,. \\ &\text{Тако исто:} \\ r_b &= \sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}} \\ r_c &= \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{(s-c}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (100$$

С погледом на једначине 90) може се овим обрасцима дати овакав вид

$$\left.\begin{aligned} r_a &= s \cdot tg\,\frac{\alpha}{2} \\ r_b &= s \cdot tg\,\frac{\beta}{2} \\ r_c &= s \cdot tg\,\frac{\gamma}{2}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (101$$

Ми можемо, најзад, полупречнике r_a, r_b и r_c да изразимо још на један врло прост начин. Из $\triangle O_aBC$, на основу синусне теореме и имајући, при томе, у виду конструкцију средишта O_a[1]), читамо

$$O_aB = a\frac{\sin\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = a\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Из правоуглог троугла O_aBD, у којем је $O_aD = r_a$, следује

$$r_a = O_aB\cdot\sin\left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right) = O_aB\cdot\cos\frac{\beta}{2},$$

дакле

102)

$$r_a = a\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

На исти начин:

$$r_b = b\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$r_c = c\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

---

1) Према познатој конструкцији јесте $\sphericalangle O_aCB = \sphericalangle O_aCE = \frac{1}{2}(180^0 - \gamma) = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$, $\sphericalangle O_aBC = \sphericalangle O_aBF = \frac{1}{2}(180^0 - \beta) = 90^0 - \frac{\beta}{2}$ и на тај начин $\sphericalangle BO_aC = 180^0 - \left(90^0 - \frac{\beta}{2} + 90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta+\gamma}{2}$, а ово је $= 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

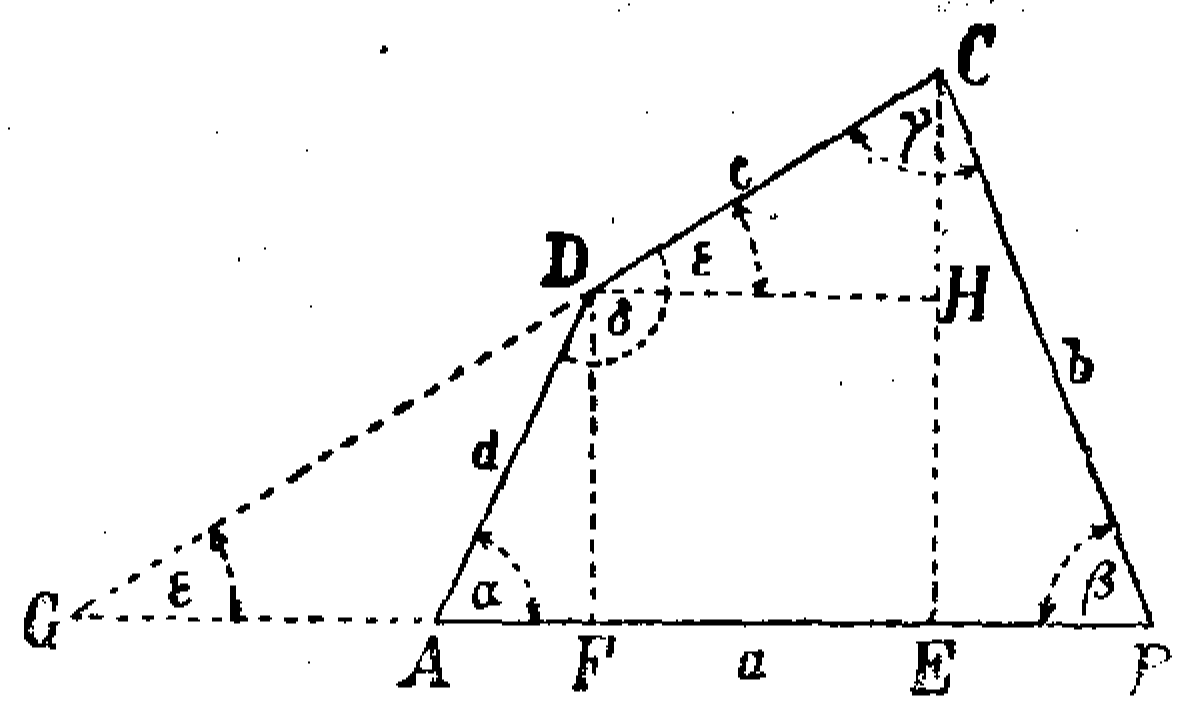
119. **Односи између полупречника око троугла описаног круга, полупречника кругова који додирују стране троугла и површине троугла.** — Из образаца 94), 96), 97) и 100) лако је добити ове формуле:

$$\left.\begin{aligned} P &= \sqrt{r r_a r_b r_c} \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \\ R &= \frac{1}{4}(r_a + r_b + r_c - r). \end{aligned}\right\} \qquad (103$$

120. **Основни обрасци за решавање општих четвороуглова.** — Четвороугли разрешавају се, обично, кад се, повлачењем дијагонала или других помоћних линија, разложе на троугле који су, датим комадима, тригонометриски одређени. На основу тих тригонометриских односа, који постоје између комада тако добивених троуглова, израчунавају се онда, непосредно или посредно, непознати комади четвороугла. У случајима, где такво разлагање на троугле не води циљу (због тога што добивени троугли нису тригонометриски одређени датим комадима), принуђени смо да, завођењем нових помоћних линија и количина, потражимо односе између тих заведених количина датих и непознатих комада четвороугла, на основу којих односа нам је могуће да израчунамо непознате комаде. Овакви задатци, који се не могу да разреше простим разлагањем четвороугла на троугле, зову се *тетрагонометриски* задатци.

а) Обрасци. Нека је $ABCD$ један произвољан четвороугао, α, β, γ, δ његова четири угла (ми знамо да је $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$), a, b, c, d његове стране.

Пројектујмо коју било страну на њој супротну страну, нпр. страну CD на страну AB, тј. спустимо $CE \perp AB$, $DF \perp AB$. Повуцимо затим $DH \perp CE$ и продужимо страну CD до њеног пресека са страном AB: до тачке G. Слика нам показује да је AB, тј.



Сл. 34.

$$a = BE + EF + FA = b \cos \beta + c \cos \varepsilon + d \cos \alpha^{1}).$$

Из $\triangle BCG$ видимо да је $\varepsilon = 180^0 - (\beta + \gamma)$, а на основу тога што је $\beta + \gamma = 360^0 - (\alpha + \delta)$, тако исто $\varepsilon = \alpha + \delta - 180^0$, дакле $\cos \varepsilon = -\cos(\beta + \gamma) = -\cos(\alpha + \delta)$ и према томе

$$104)\quad \left\{ \begin{array}{l} a = b \cos \beta - c \cos(\beta + \gamma) + d \cos \alpha \\ \text{или} \\ a = b \cos \beta - c \cos(\alpha + \delta) + d \cos \alpha. \end{array} \right.$$

Даље видимо из слике да је

$$CE = EH + HC \quad \text{или} \quad CE - EH - HC = 0.$$

Ако ставимо овде $CE = b \sin \beta$, $EH = FD = d \sin \alpha$, $HC = c \sin \varepsilon = c \sin(\beta + \gamma) = -c \sin(\alpha + \delta)$ добићемо

$$105)\quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = b \sin \beta - c \sin(\beta + \gamma) - d \sin \alpha \\ \text{или} \\ 0 = b \sin \beta + c \sin(\alpha + \delta) - d \sin \alpha. \end{array} \right.$$

Имавши на уму да је $\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$, $\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 1$, можемо обрасцима 104) и 105) да дамо следећу за памћење подеснију форму

---

1) В. на крају примедбе у чл. 103.

$$\left.\begin{aligned} & a \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \\ &= b\cos\beta + d\cos\alpha - c\cos(\beta+\gamma) \\ &= b\cos\beta + d\cos\alpha - c\cos(\alpha+\delta) \end{aligned}\right\} \quad (104a$$

$$\left.\begin{aligned} & a \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \\ &= b\sin\beta - d\sin\alpha - c\sin(\beta+\gamma) \\ &= b\sin\beta - d\sin\alpha + c\sin(\alpha+\delta), \end{aligned}\right\} \quad (105a$$

које, преведено речима, гласи:

1) У свакоме четвороуглу јесте производ из једне стране и косинуса збира свију четвороугловних углова раван збиру два производа, које добијамо кад сваку од оних двеју страна између којих лежи дотична страна помножимо косинусом угла који оне чине са овом страном, смањено са производом из дотичној страни супротне стране и косинуса збира два узастопна четвороугловна угла, од којих је један налегао првој страни.

2) У свакоме четвороуглу јесте производ из једне стране и синуса збира свију четвороугловних углова раван разлици из два производа, које добијамо кад сваку од оних двеју страна између којих лежи поменута страна помножимо синусом угла који оне чине са овом страном, смањено (повећано) са производом из супротне стране и синуса збира два узастопна четвороугловна угла, од којих је један налегао првој страни, а јавља се код умањеника (умалитеља) поменуте разлике.

Примењујући на дијагонале BD и AC косинусну теорему налазимо непосредно обрасце

$$\left.\begin{aligned} a^2 + d^2 - 2\,a\,d\cos\alpha &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\gamma \\ a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\beta &= c^2 + d^2 - 2\,c\,d\cos\delta. \end{aligned}\right\} \quad (106$$

b) Општи задатци. Образац под 104*a*) (као и она остала три, које добијамо кад поменути образац применимо на стране *b, c* и *d)* изражава везу која постоји између све четири стране и три (или управо сва четири) угла једнога четвороугла. Образац под 105*a*) (и она остала, њему слична, три обрасца који се изводе на потпуно исти начин) показује нам однос између три стране и три (односно сва четири) угла. Најзад обрасци под 106) везују у себи све четири стране са по два супротна угла. Сви ти обрасци, 104*a*), 105*a*) и 106) могу да нам послуже, као основни обрасци, при разрешавању четвороуглова; ми смо у стању да, помоћу њих, из пет задатих комада (међу којима морају бити најмање две стране) израчунамо остале комаде четвороугла. Тако нпр.

1) ако су нам дате две супротне стране a и c и угли α, β, γ, δ налазимо остале две стране b и d помоћу образаца 105*a*)

$$d \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) =$$
$$a \sin\alpha - c \sin\delta - b \sin(\alpha+\beta) = 0,$$
$$b \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) =$$
$$a \sin\beta - c \sin\gamma - d \sin(\alpha+\beta) = 0,$$

одакле

$$b = \frac{a \sin\alpha - c \sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad d = \frac{a \sin\beta - c \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

2) узмимо да су нам дате две узастопне стране, нпр. a и b и угли α, β, γ, δ. Помоћу образаца 105*a*)

$$d \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) =$$
$$a \sin\alpha - c \sin\delta - b \sin(\alpha+\beta) = 0,$$

$$c \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) =$$
$$b \sin\gamma - d \sin\delta - a \sin(\alpha+\beta) = 0$$

добијамо остале две стране

$$c = \frac{a \sin\alpha - b \sin(\alpha+\beta)}{\sin\delta}, \quad d = \frac{b \sin\gamma - a \sin(\alpha+\beta)}{\sin\delta}.$$

3) нека су нам дате три стране a, b, c и она два захваћена угла β и γ. Из 104) и 105) следује

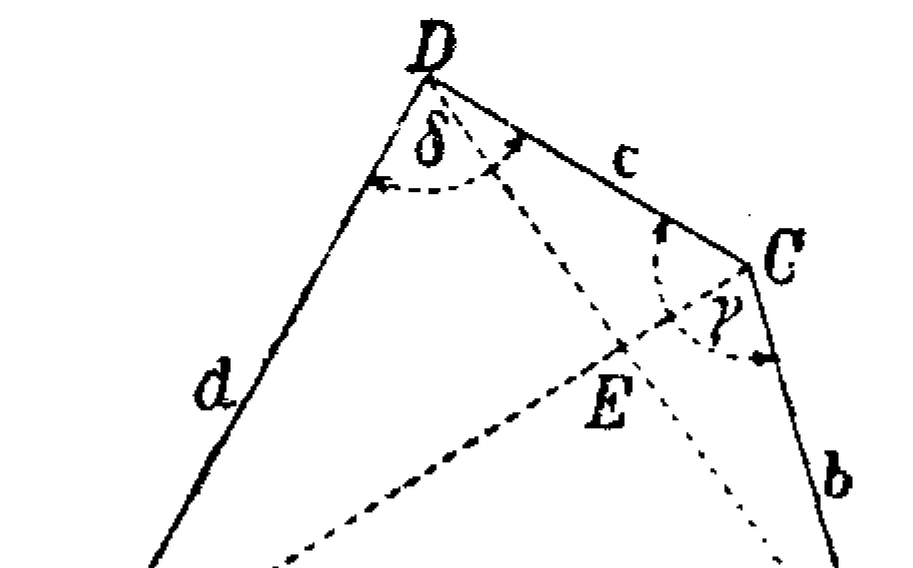
$$d \cos\alpha = a - b \cos\beta + c \cos(\beta+\gamma)$$
$$d \sin\alpha = b \sin\beta - c \sin(\beta+\gamma),$$

одакле деобом

$$tg\,\alpha = \frac{b \sin\beta - c \sin(\beta+\gamma)}{a - [b \cos\beta - c \cos(\beta+\gamma)]}.$$

Познавајући три угла α, β, γ налазимо и четврти $\delta = 360^0 - (\alpha+\beta+\gamma)$, а с овим и четврту страну d помоћу ма којег од горњих образаца.

c) *Површина четвороугла.* Повуцимо дијагонале AC и BD у задатоме четвороуглу $ABCD$. На тај начин растварамо четвороугао на четири троугла ABE, BEC, CED и DEA који имају сви свој врх у пресечној тачци E дијагонала. Пошто сва четири угла код тачке E имају један исти синус, то је, на основу образаца 92) чл. 111., површина



Сл. 35.

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} AE \cdot BE \cdot \sin E, \triangle BEC = \frac{1}{2} BE \cdot CE \cdot \sin E,$$

$$\triangle CED = \frac{1}{2} CE \cdot DE \cdot \sin E, \triangle DEA = \frac{1}{2} DE \cdot AE \cdot \sin E$$

и према томе површина четвороугла $ABCD$, означимо је са P,

$$P = \frac{1}{2}(AE \cdot BE + BE \cdot CE + CE \cdot DE + DE \cdot AE) \sin E$$

$$= \frac{1}{2}[(AE + CE) \cdot BE + (CE + AE) \cdot DE] \sin E$$

$$= \frac{1}{2}(AE + CE)(BE + DE) \sin E$$

или дакле

107) $$P = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin E.$$

Површина четвороугла равна је половини производа из дијагонала и синуса угла који дијагонале међусобом заклапају.

С обзиром на обрасце 92) чл. 111. можемо добивени резултат да искажемо и на овај начин:

Четвороугао је раван (по површини) једноме троуглу чије су две стране и захваћени угао равни дијагоналама и углу који ове заклапају.

Други један образац за израчунавање површине четвороугла добијамо разлажући задати четвороугао на два троугла: $ABCD = \triangle ABC + \triangle ADC = \triangle ABD + \triangle BCD$ и примењујући на ове троугле обрасце 92). На тај начин налазимо да је површина четвороугла

108) $$P = \frac{1}{2}(a\,b \sin\beta + c\,d \sin\delta) = \frac{1}{2}(a\,d \sin\alpha + b\,c \sin\gamma).$$

121. **Тетивни четвороугао.** — а) *Обрасци.* Четвороугао око којег се може да опише круг (чија темена леже на периферији једнога круга) зове се *тетивни*

четвороугао (Sehnenviereck). Из Планиметрије знамо да је у таквоме четвороуглу збир два супротна угла $= 180^0$:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0. \tag{109}$$

Једначине 106) гласе, према томе, у овоме случају

$$\left.\begin{aligned} a^2 + d^2 - 2\,a\,d\cos\alpha &= b^2 + c^2 + 2\,b\,c\cos\alpha \\ a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\beta &= c^2 + d^2 + 2\,c\,d\cos\beta, \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

одакле

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,(a\,d + b\,c)} = -\cos\gamma \\ \cos\beta &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(a\,b + c\,d)} = -\cos\delta. \end{aligned}\right\} \tag{110a}$$

Одавде, а помоћу образаца 19) чл. 22., изводимо

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)} = \sqrt{\frac{2\,a\,d + 2\,b\,c - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{4\,(a\,d + b\,c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{4\,(a\,d + b\,c)}} = \sqrt{\frac{(b + c + d - a)\,(a + b + c - d)}{4\,(a\,d + b\,c)}},$$

које, ако означимо $a + b + c + d = 2\,s$, може да се напише

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - d)}{a\,d + b\,c}} = \cos\frac{\gamma}{2},$$

а тако исто

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - b)}{a\,b + c\,d}} = \cos\frac{\delta}{2}. \tag{111}$$

На исти начин изводимо

$$
111a)\quad \begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}} = \sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{ab+cd}} = \sin\frac{\delta}{2}. \end{cases}
$$

Из добивених једначина налазимо деобом

$$
112)\quad \begin{cases} tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}} = cotg\frac{\gamma}{2} \\ tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}} = cotg\frac{\delta}{2}, \end{cases}
$$

а употребом обрасца 18) чл. 21., по којем је $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$,

$$
(113\quad \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2}{ad+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sin\gamma \\ \sin\beta = \frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sin\delta. \end{cases}
$$

Обрасци 111), 111a), 112) 113) служе нам да израчунамо угле једнога тетивног четвороугла кад су нам познате стране његове.

За израчунавање површине тетивних четвороуглова добијамо, на основу једн. 108) чл. 120, кад у њој ставимо $\sin\beta = \sin\delta$, $\sin\alpha = \sin\gamma$, а ово опет заменимо горе, под 113), нађеним вредностима, ове обрасце

$$P = \frac{1}{2}(a\,b + c\,d)\sin\beta = \frac{1}{2}(a\,d + b\,c)\sin\alpha. \quad (114$$

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \quad (115$$

b) *Теореме.* На основу косинусне теореме (в. сл. 34.) јесте

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\beta},\ BD = \sqrt{(a^2 + d^2 - 2\,a\,d\cos\alpha}$$

или, кад ставимо за $\cos\beta$ и $\cos\alpha$ њихове вредности из 110*a*),

$$AC = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}},\ BD = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}},$$

одакле, множењем, односно деобом,

$$AC \cdot BD = a\,c + b\,d \quad (116$$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{a\,d + b\,c}{a\,b + c\,d}. \quad (117$$

Формула 116), такозвана *Птоломејева теорема*, може да се искаже на овај начин: правоугаоник конструисан из дијагонала једнога тетивног четвороугла раван је збиру два правоугаоника, који су конструисани из двеју супротних страна.

Формула 117), преведена речима, гласи да је размера дијагонала тетивног четвороугла равна размери два збира из производа оних страна, које се у крајњим тачкама дотичних дијагонала стичу.

Количник из дијагонала једнога тетивног четвороугла може да се изрази на други, краћи, начин. Из образаца 114) следује

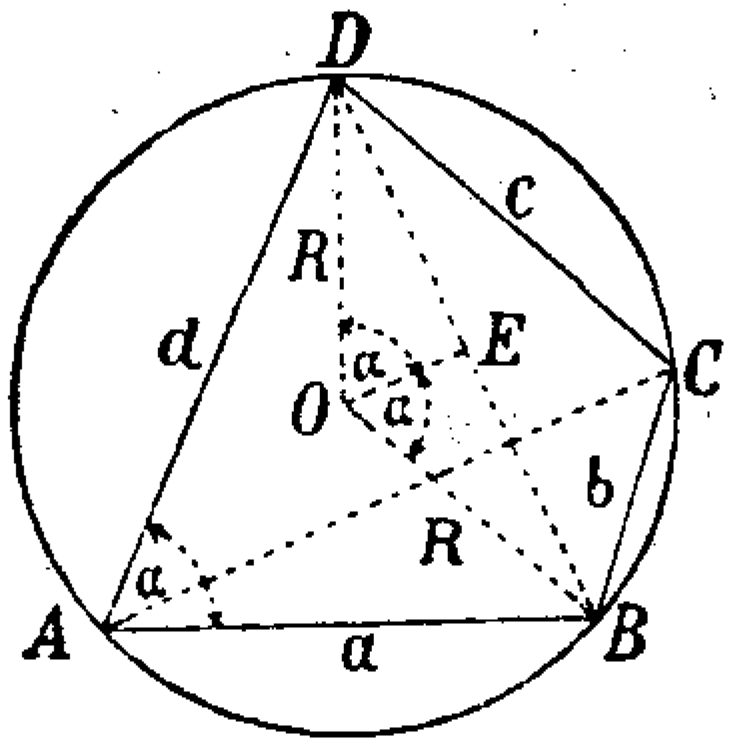
$$\frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

које, сравњено са теоремом 117), даје

118) $$\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

То значи да се дијагонале тетивног четвороугла имају као синуси њима супротних углова[1]).

c) *Полупречник описаног круга.* Да бисмо одредили полупречник R око тетивног четвороугла $ABCD$ описаног круга спојићемо средиште O тога круга са теменима B и D и добићемо један равнокраки троугао OBD у коме је $OB = OD = R$, $\sphericalangle BOD = 2\alpha$, као средишни угао коме одговара периферијски угао $BAD = \alpha$. Спустимо $OE \perp BD$, па ћемо добити два правоугла троугла из којих непосредно читамо

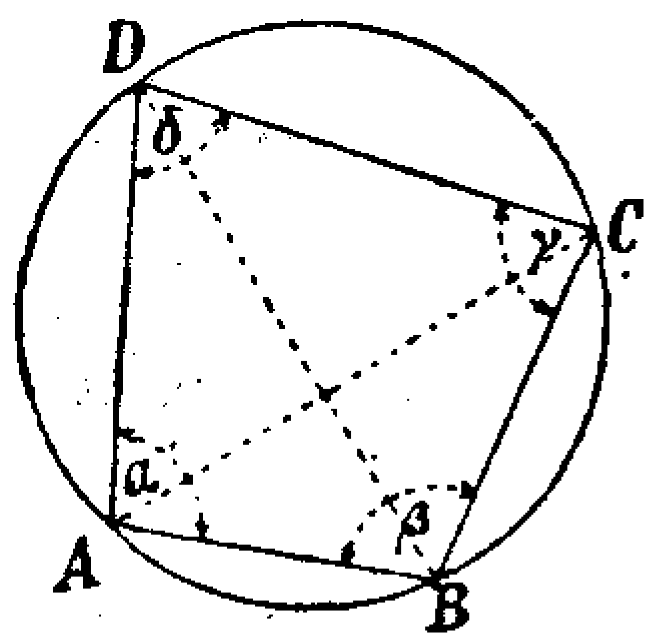


Сл. 37.

$$BE = DE = \frac{1}{2} BD = R \sin\alpha,$$

---

[1]) Овај је израз за количник из дијагонала **нов.** Због своје краткоће и извесне аналогије са познатом синусном теоремом лако је запамтити га. Директан доказ је врло прост. На основу синусне теореме читамо



Сл. 36.

из $\triangle ACD$ да је $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin\delta}{\sin ACD} = \dfrac{\sin\beta}{\sin ACD}$.

„ $\triangle ABD$ „ „ $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin ABD}$,

одакле, имајући на уму да је $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD$ као периферијски угли над истим луком AD, следује теорема $AC : BD = \sin\beta : \sin\alpha$. *J. A. Grunert. Archiv der Mathematik und Physik. Zweite Reihe. Bd. 17.*

одакле

$$R = \frac{BD}{2\sin\alpha} = \frac{BD}{2\sin\gamma}$$

или, на исти начин,

$$R = \frac{AC}{2\sin\beta} = \frac{AC}{2\sin\delta}.$$

Ако заменимо овде за BD, односно AC, и $\sin\alpha$, односно $\sin\beta$, њихове горе назначене вредности добићемо за полупречник R описаног круга овај израз

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}. \quad (119$$

122. **Тангентни четвороугао.** — Под *тангентним четвороуглом* (*Tangentenviereck*) разумемо такав четвороугао чије су стране (сл. 38.) или њихова продужења (сл. 39.) дирке једнога круга.

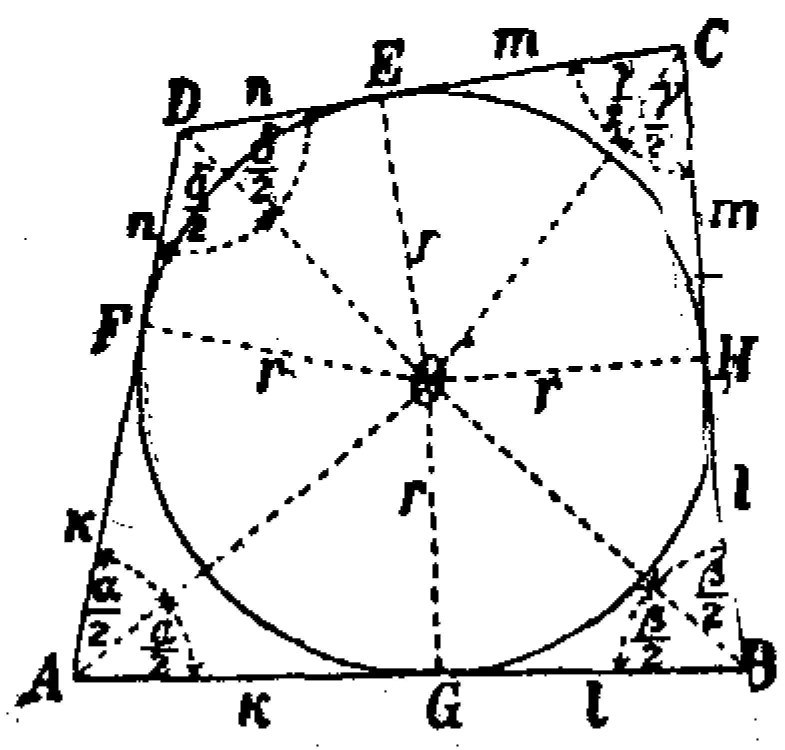
a) *Теорема.* У свакоме тангентном четвороуглу јесте збир двеју супротних страна раван збиру осталих двеју супротних страна.

Доказ. Означимо стране

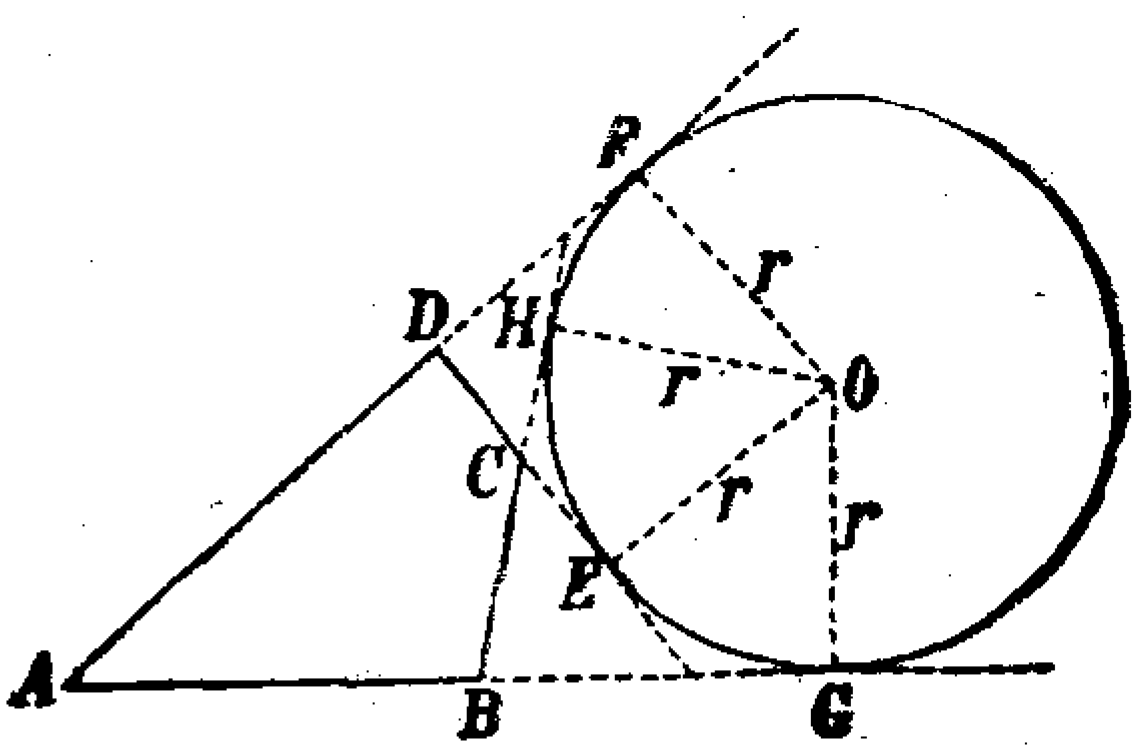
$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d.$$

Нека је

$$AG = AF = k, BG = BH = l,\ CH = CE = m,\ DE = DF = n.$$



Сл. 38.



Сл. 39.

Из слике видимо да је

$$a = k + l,\ b = l + m,\ c = m + n,\ d = n + k,$$

дакле

$$a + c = k + l + m + n,\ \ b + d = k + l + m + n$$

и према томе

120) $$a + c = b + d.$$

b) Површина. Из сл. 38. видимо непосредно да је четвороугао

$$ABCD = \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COD + \triangle DOA$$

$$= \frac{1}{2} a\, r + \frac{1}{2} b\, r + \frac{1}{2} c\, r + \frac{1}{2} d\, r,$$

дакле, ако означимо са P површину четвороугла,

121) $$P = \frac{1}{2}(a + b + c + d)\, r = s\, r,$$

где је

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$$

c) Полупречник уписаног круга. Спојимо средиште O уписаног круга са теменима задатог четвороугла $ABCD$ (в. сл. 38.). Лако је увидити да праве OA, OB, OC и OD полове угле α, β, γ и δ. Из правоуглих троуглова AOG и BOG читамо

$$k = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2},\ l = r \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2},$$

које, кад саберемо и с обзиром на то да је $k + l = a$, даје

$$a = r\left(cotg\frac{\alpha}{2} + cotg\frac{\beta}{2}\right),$$

одакле

$$\left.\begin{aligned} & r = \frac{a}{cotg\frac{\alpha}{2} + cotg\frac{\beta}{2}}. \\ & \text{Тако исто добијамо} \\ & r = \frac{b}{cotg\frac{\beta}{2} + cotg\frac{\gamma}{2}} = \frac{c}{cotg\frac{\gamma}{2} + cotg\frac{\delta}{2}} = \frac{d}{cotg\frac{\delta}{2} + cotg\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (122$$

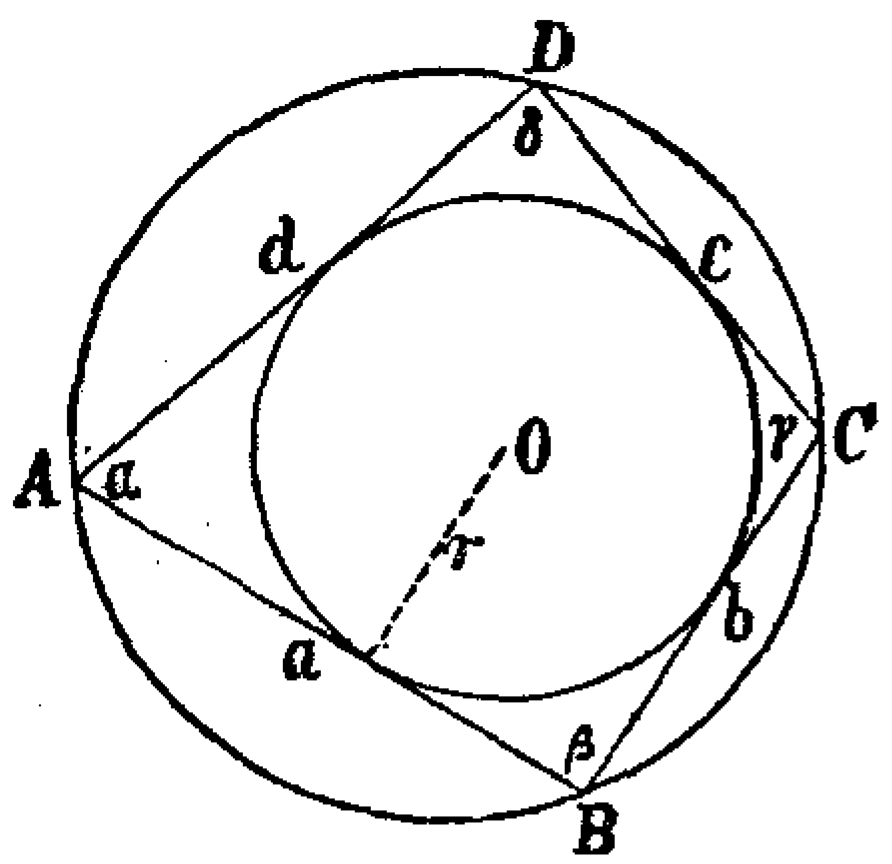
Применом трећег обрасца под 22 у чл. 25. на добивене резултате 122) налазимо за полупречник r ове нове изразе

$$r = \frac{a \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{b \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{c \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2}} = \frac{d \sin\frac{\delta}{2} \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\delta+\alpha}{2}}. \quad (123$$

123. **Кружни четвороугао.** — Четвороугли, чије су стране тетива у једноме кругу а у исто време тангенте на други круг, зову се *кружни четвороугли* (*Kreisviereck*). Такви четвороугли уживају, дакле, сва својства тетивних и тангентних четвороуглова. Код њих је дакле

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0 \\ a + c = b + d. \end{aligned}\right\} \quad (124$$

Означимо, као и до сада, стране четвороуглове са a, b, c, d, угле са α, β, γ, δ, збир страна $a+b+c+d=2s$, полупречник уписаног круга са r, површину са P.



Сл. 40.

Имавши на уму да је код кружних четвороуглова

$$s=a+c=b+d,$$

дакле

$$s-a=c,\ s-b=d,\ s-c=a,\ s-d=b$$

и с обзиром на, одмах у почетку овога члана, учињену примедбу добијамо из образаца 112) и 115) чл. 121. и обрасца 121) чл. 122. непосредно следеће једначине

$$125)\qquad \begin{cases} tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{b\,c}{a\,d}}=cotg\frac{\gamma}{2} \\ tg\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{c\,d}{a\,b}}=cotg\frac{\delta}{2} \end{cases}$$

$$126)\qquad P=\sqrt{a\,b\,c\,d}$$

$$127)\qquad r=\frac{\sqrt{a\,b\,c\,d}}{a+c}=\frac{\sqrt{a\,b\,c\,d}}{b+d}.$$

124. **Правилни многоугли.** — Многоугли, чије су све стране једнаке, а тако исто и угли, зову се *правилни многоугли* или *правилни полигони* (*regelmässige Vielecke,* polygones réguliers). За сваки правилан по-

лигон могу да се конструишу два (концентрична) круга, од којих један пролази кроз темена, а други додирује стране његове. Један је око полигона *описан* (*umbeschrieben*, circonscrit), други је у полигон *уписан* (*einbeschrieben*, inscrit).

Напомена. Пошто се сваки правилан полигон, спајањем темена са његовим средиштем (које је, у исто време, средиште описаног и уписаног круга), може да разложи на извесан број подударних равнокраких троуглова, а ми знамо да је равнокраки троугао одређен двома комадима (в. *Напомену* на крају чл. 58.), то је јасно да је и правилан полигон потпуно одређен кад су нам позната два елемента његова. Као такве (елементе који одређују један правилан полигон) можемо сматрати

n, број страна;

$\alpha = \frac{360^0}{n}$, средишни угао за сваку страну;

s_n, дужину стране;

u, обим (периметар), тј. збир страна;

P, површину полигона;

r, полупречник уписаног круга;

R, полупречник описаног круга.

Осим тога означићемо у будуће за задати круг са полупречником r са

s_n дужину стране полигона од n страна око којега је круг описан; са

S_n дужину стране полигона од n страна у који је круг уписан; са

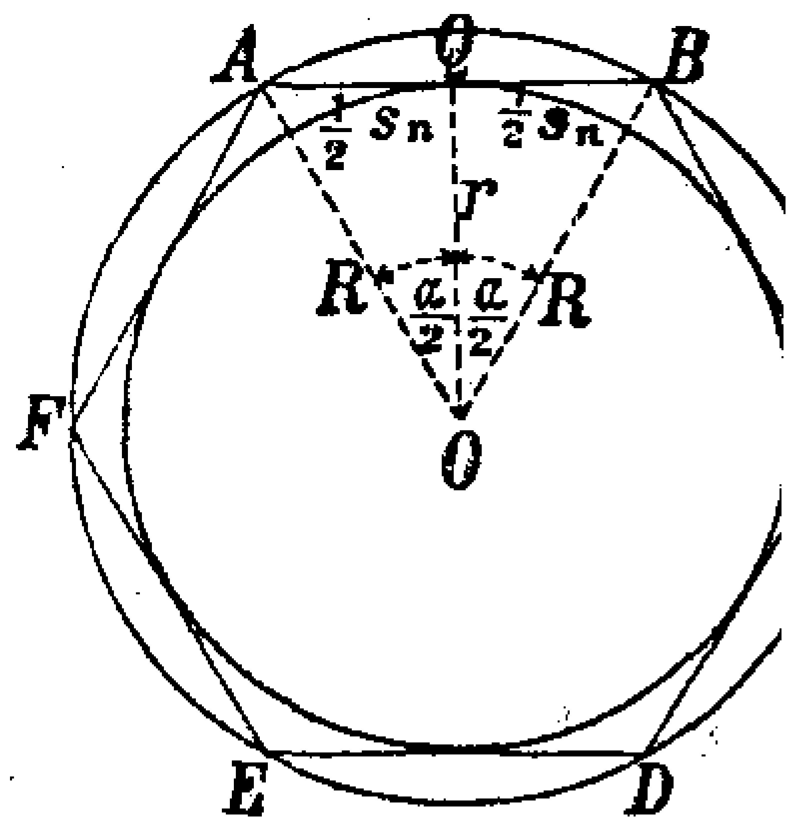
p_n и P_n површине та два полигона; са

s_{2n} и S_{2n} дужине страна полигона од $2n$ страна, од којих је први задатоме кругу уписан, а други описан и најзад са

p_{2n} и P_{2n} површине тих полигона.

а) Обрасци за правилан полигон са уписаним и описаним кругом.

128)
$$\begin{cases} s_n = 2\,r\,tg\,\dfrac{180^0}{n} = 2\,R\,sin\,\dfrac{180^0}{n} \\ r = \dfrac{1}{2}\,s_n\,cotg\,\dfrac{180^0}{n} = R\,cos\,\dfrac{180^0}{n} \\ R = \dfrac{s_n}{2\,sin\,\dfrac{180^0}{n}} \\ u = n\,s_n = 2\,n\,r\,tg\,\dfrac{180^0}{n} = 2\,n\,R\,sin\,\dfrac{180^0}{n} \\ P = \dfrac{n\,s_n\,r}{2} = \dfrac{n\,s_n^{\,2}}{4}\,cotg\,\dfrac{180^0}{n} \\ \quad = n\,r^2\,tg\,\dfrac{180^0}{n} = \dfrac{n\,R^2}{2}\,sin\,\dfrac{360^0}{n}. \end{cases}$$

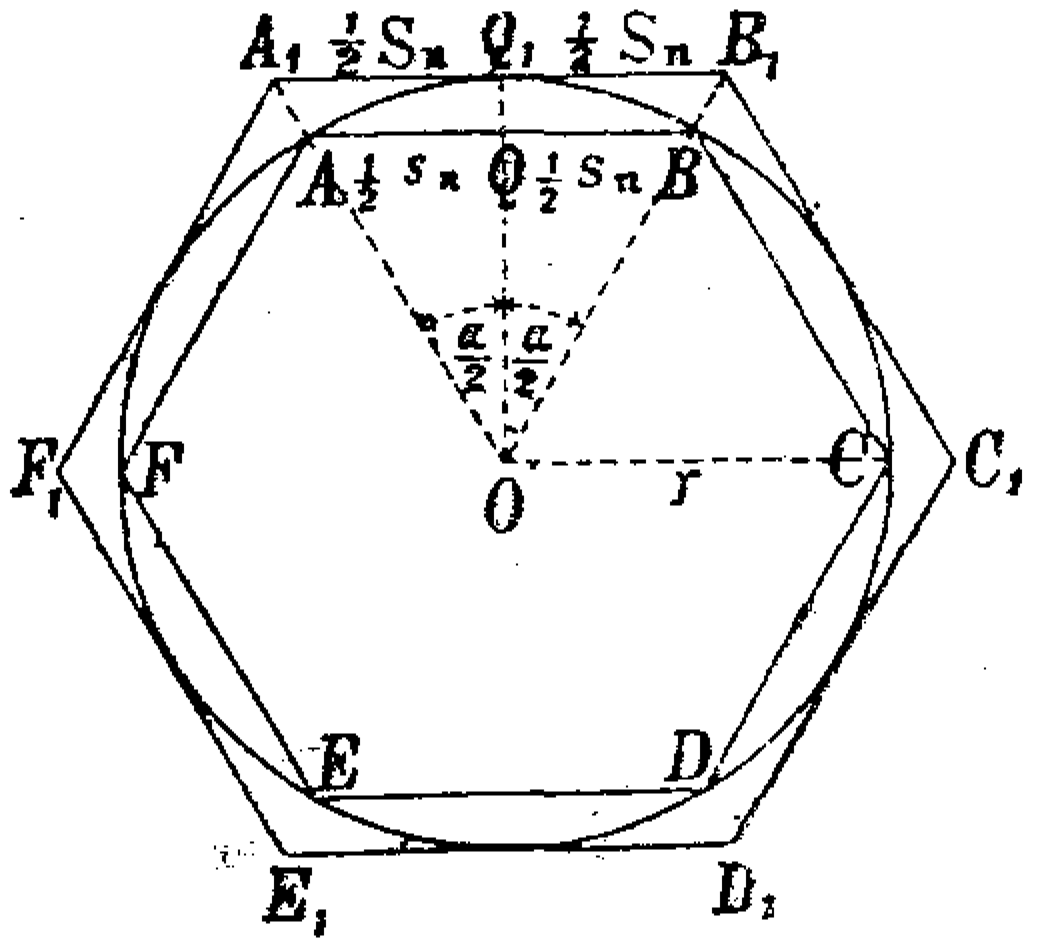


Сл. 41.

Докази. Обрасци за s_n, r и R, из којих се одмах изводе они за u, добивају се непосредно из сл. 41. посматрањем правоуглих троуглова AOQ и BOQ у којима је $AQ = BQ = \frac{1}{2}s_n$, $OQ = r$, $OA = OB = R$, $\sphericalangle AOQ = \sphericalangle BOQ = \frac{\alpha}{2} = \frac{180^0}{n}$. Обрасце а P налазимо узев у обзир да се задати полигон раствара на n конгруентних троуглова као што је $\triangle AOB$, чија је површина $= \frac{1}{2}\,s_n\,r$.

b) Обрасци за круг са уписаним и описаним правилним полигоном.

$$\left.\begin{aligned} s_n &= S_n \cos\frac{180^0}{n} \\ S_n &= \frac{s_n}{\cos\frac{180^0}{n}} \end{aligned}\right\} \quad (129.$$



Сл. 42.

Доказ. Помоћу сл. 42., у којој је

$$AQ = BQ = \frac{1}{2} s_n,$$

$$AQ_1 = BQ_1 = \frac{1}{2} S_n,$$

$$OA = OB = OQ_1 = r, \quad \sphericalangle A_1 OQ_1 = \sphericalangle B_1 OQ_1 = \frac{\alpha}{2} = \frac{180^0}{n},$$

добијамо

из правоуглог $\triangle AOQ, \ \frac{1}{2} s_n = r \sin\frac{\alpha}{2},$

„ „ $\triangle A_1 OQ_1, \ \frac{1}{2} S_n = r \, tg\frac{\alpha}{2},$ одакле

$$\frac{s_n}{S_n} = \cos\frac{\alpha}{2} \text{ итд.}$$

c) Обрасци за уписане и описане правилне полигоне од којих један има два пута већи број страна од онога другог. За два у круг са полупречником R уписана правилна полигона од којих један има n, а други $2n$ страна постоје односи

$$130) \quad \begin{cases} s_n = \dfrac{s_{2n}}{R}\sqrt{4R^2 - s^2_{2n}} \\ \\ s_{2n} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - s^2_n}\right)}. \end{cases}$$

Доказ. Према првоме обрасцу под 128) јесте

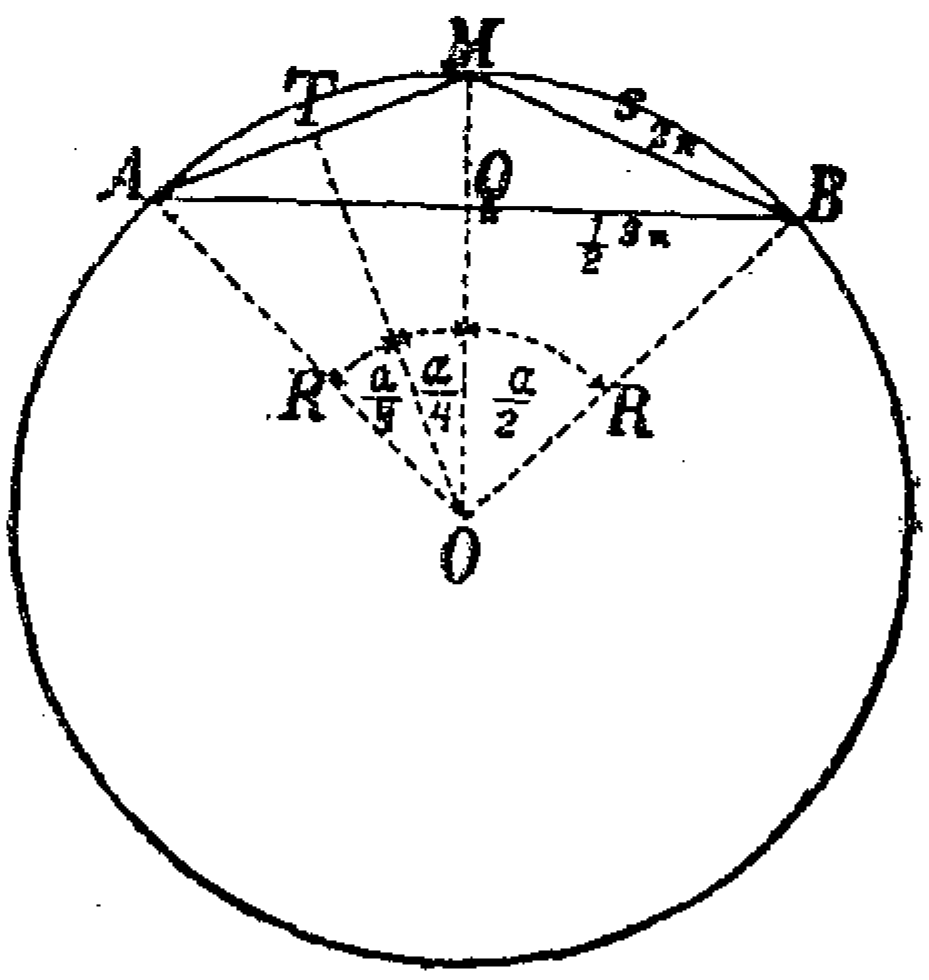
$$s_n = 2R\sin\frac{180^0}{n} = 4R\sin\frac{90^0}{n}\cos\frac{90^0}{n}$$

$$s_{2n} = 2R\sin\frac{180^0}{2n} = 2R\sin\frac{90^0}{n}.$$

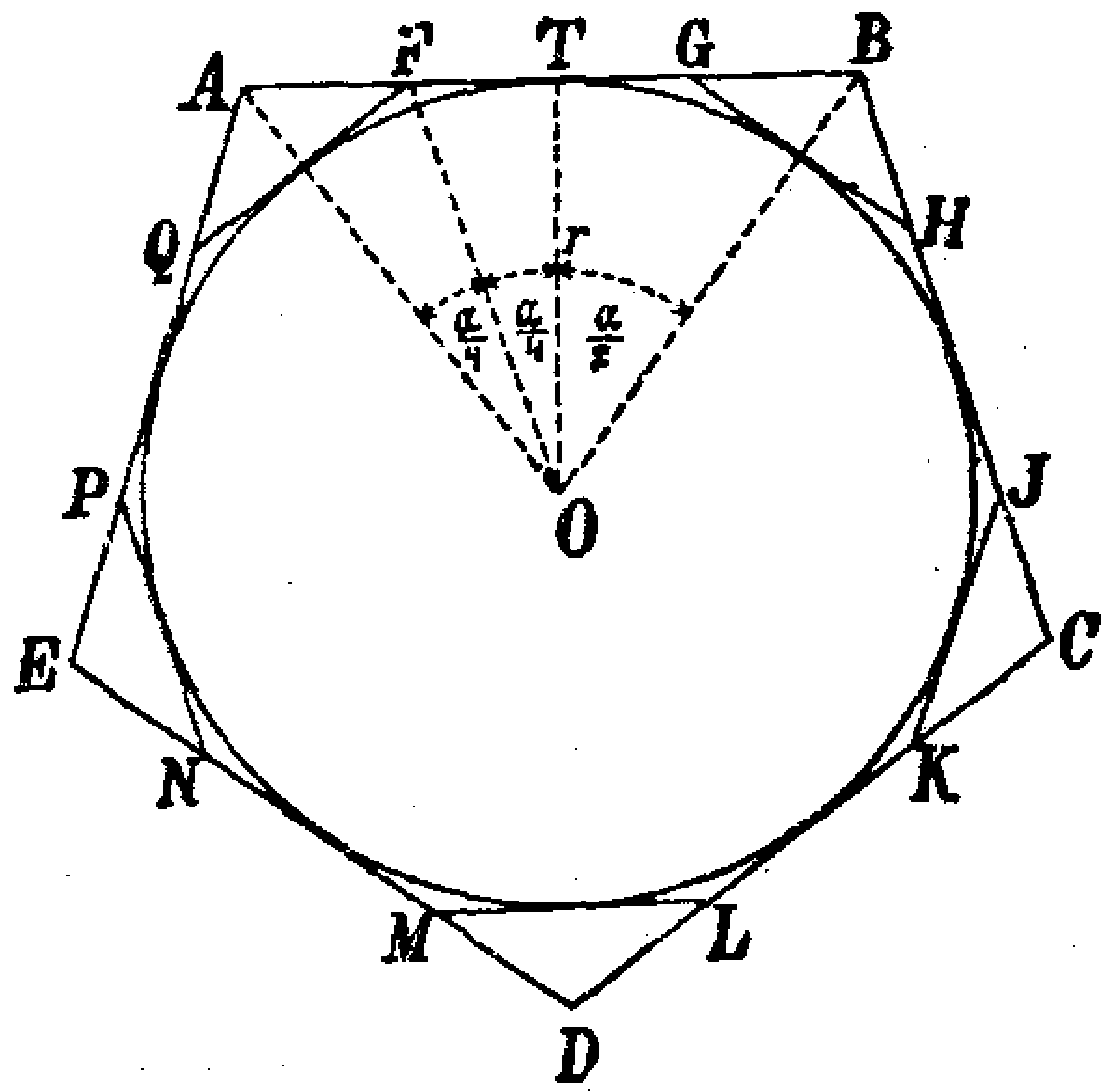
Из овога последњег следује

$$\sin\frac{90^0}{n} = \frac{s_{2n}}{2R},\ \cos\frac{90^0}{n} = \sqrt{1 - \frac{s^2_{2n}}{4R}} = \frac{1}{2R}\sqrt{4R^2 - s^2_{2n}},$$

које, кад заменимо у образац за s_n, даје горе под 130) назначену вредност.



Сл. 43.



Сл. 44.

За два око круга са полупречником r описана правилна полигона од којих један има n, а други $2n$ страна јесте према првоме обрасцу под 128)

$$S_n = 2\,r\,tg\,\frac{180^0}{n}$$

$$S_{2n} = 2\,r\,tg\,\frac{180^0}{2\,n} = 2\,r\,tg\,\frac{90^0}{n},$$

одакле

$$\left.\begin{aligned} S_n &= S_{2n}\,tg\,\frac{180^0}{n}\,cotg\,\frac{90^0}{n} \\ S_{2n} &= S_n cotg\,\frac{180^0}{n}\,tg\,\frac{90^0}{n}\,. \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

До истог резултата долазимо посматрањем сл. 44. у којој је $AB = S_n$, $FG = S_{2n}$, $\frac{\alpha}{2} = \frac{180^0}{n}$, $\frac{\alpha}{4} = \frac{90^0}{n}$.

На основу петог обрасца под 128) јесте за круг са полупречником ρ

површина упис. полиг. са n страна $p_n = \frac{n\rho^2}{2}\,sin\,\frac{360^0}{n}$,

„ опис. „ „ „ „ $P_n = n\rho^2\,tg\,\frac{180^0}{n}$,

„ упис. „ „ $2\,n$ „ $p_{2n} = \frac{2n\rho^2}{2}\,sin\,\frac{360^0}{2\,n}$,

одакле изводимо да је $\frac{p_n}{p_{2n}} = \frac{p_{2n}}{P_n}$, тј.

$$p_n : p_{2n} = p_{2n} : P_n\,. \tag{132}$$

То значи да је површина уписаног правилног полигона са $2\,n$ страна геометриска средња из површине уписаног и површине описаног правилног полигона са n страна.

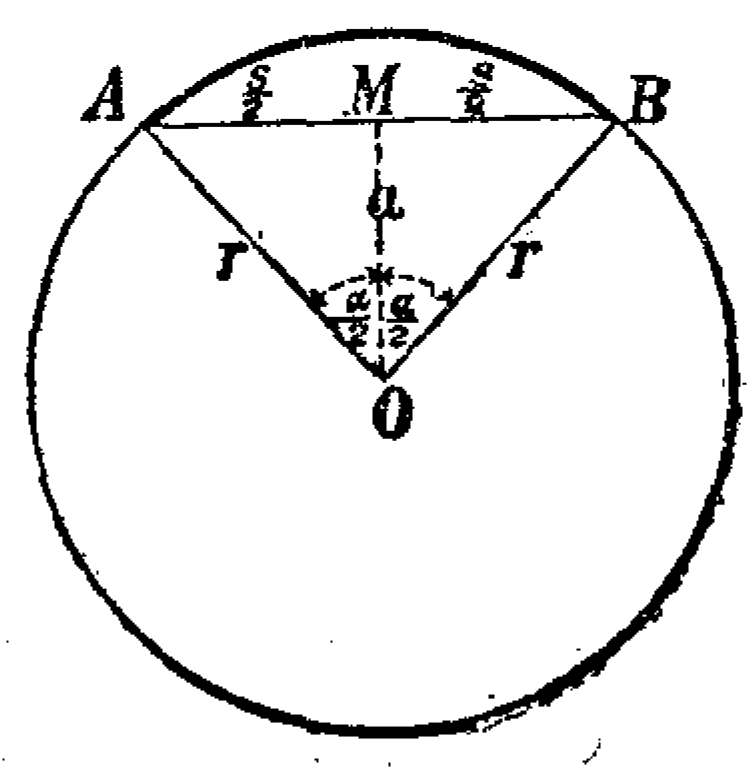
Тако нпр. јесте површина уписаног правилног (тј. равностраног) троугла $=\frac{3}{4}\sqrt{3}\,\rho^2$, површина описаног равностраног троугла $=3\sqrt{3}\,\rho^2$ и према томе површина уписаног правилног шестоугла $=\frac{3}{2}\sqrt{3}\,\rho^2$. — Отуда што је површина уписаног правилног четвороугла (тј. квадрата) $=2\,\rho^2$, површина описаног квадрата $=4\,\rho^2$ следује за површину уписаног правилног осмоугла да је $=2\sqrt{2}\,\rho^2$.

125. **Израчунавање круга, кружних делова, линија и углова који стоје у вези са кругом.** — Као познате обрасце из Планиметрије за израчунавање периферије П и површине К круга наведимо да је

$$\text{133)} \qquad \begin{cases} \Pi = 2\,r\,\pi \\ K = r^2\,\pi, \end{cases}$$

где је r полупречник круга, $\pi = 3{,}1415\,9265\ldots$ Лудолф-ов број.

a) Обрасци за тетиво, полупречник, средишни угао и кружни лук. Нека је, као што показује сл. 45., $r = OA = OB$ полупречник задатог круга, $s = AB$ једно тетиво, $\alpha = \sphericalangle\, AOB$ овоме одговарајући средишни угао, $\operatorname{arc} AB$ дотични кружни лук и најзад $a = OM$ дужина нормале која је спуштена из средишта O на тетиво AB. Између поменутих елемената постоје следећи односи:

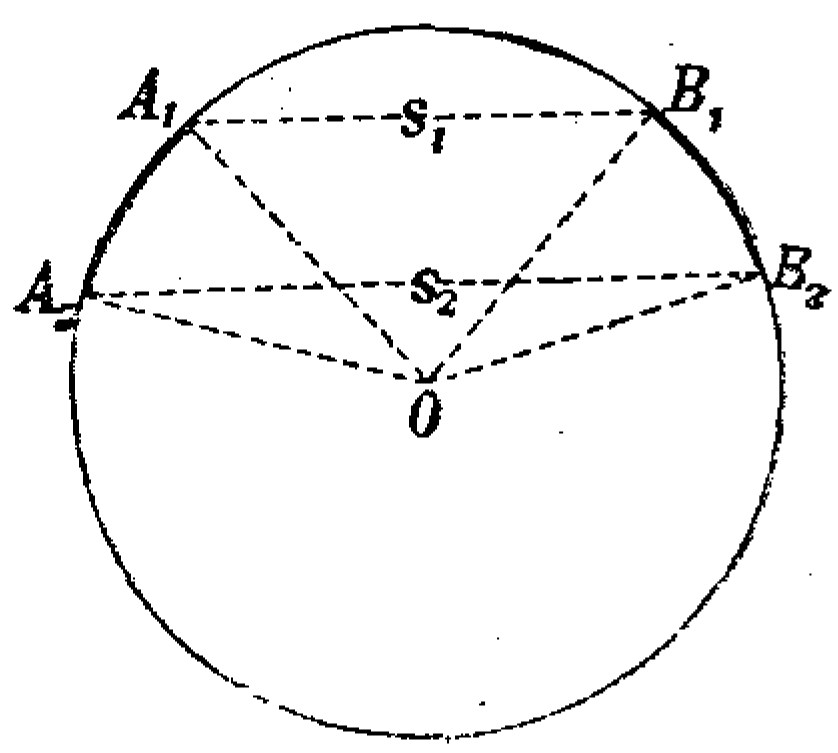


Сл. 45.

$$\left.\begin{aligned}
&s = 2\,r\,sin\frac{\alpha}{2} = 2\,a\,tg\frac{\alpha}{2}\\
&r = \frac{s}{2\,sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{cos\frac{\alpha}{2}}\\
&sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r},\ cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{r},\ tg\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2a}\\
&arc\,AB = 2\,r\,\pi\,\frac{\alpha^0}{360^0} = \frac{\pi\,s}{sin\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\alpha^0}{360^0}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (134$$

Доказ. Обрасце за s, r, a и α добијамо непосредно из сл. 45. посматрањем правоуглих троуглова AOM и BOM. — Обрасце за $arc\,AB$ налазимо из познате сразмере $arc\,AB : 2\,r\,\pi = \alpha^0 : 360^0$, где место r стављамо његову вредност $r = \dfrac{s}{2\,sin\frac{\alpha}{2}}$.

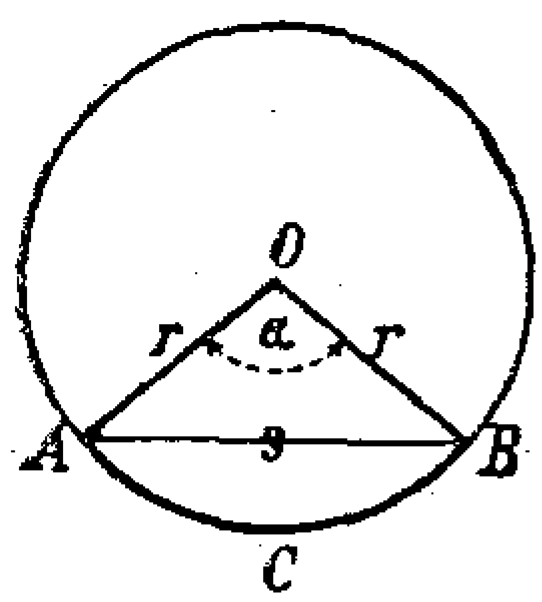
Напомена. При израчунавању лука $A_1A_2 = B_1B_2$, који лежи између два паралелна тетива A_1B_1 и A_2B_2, поступили бисмо на овај начин: израчунали бисмо, на горе показати начин, $arc\,A_1B_1$, а тако исто $arc\,A_2B_2$ и нашли бисмо онда



Сл. 46.

$$arc\,A_1A_2 = \frac{arc\,A_2B_2 - arc\,A_1B_1}{2}\,.$$

b) Кружни исечак. Из Планиметрије знамо да се површина кружнога *исечка (Kreisausschnitt, Sektor,* secteur) $OABC$, означимо је са Sk, има према површини целога круга као што се има средишни угао α према пуноме углу од 360^0, тј. постоји сразмера



Сл. 47.

$$Sk : \pi r^2 = \alpha^0 : 360^0,$$

одакле

$$Sk = \pi r^2 \frac{\alpha^0}{360^0}.$$

Тако исто знамо за сразмеру

$$Sk : \pi r^2 = arc\,AB : 2\,r\pi,$$

одакле

$$Sk = \frac{r}{2}\,arc\,AB.$$

То значи да је површина једнога кружног исечка равна површини једнога троугла чија је основица једнака дужини лука којим, са стране кружне периферије, исечак граничи, а висина равна полупречнику круга.

Последњи образац можемо да напишемо још мало другојачије. Означимо са $arc\,\alpha$ лук који одговара средишном углу α у кругу са полупречником 1, тако да је $arc\,AB : arc\,\alpha = r : 1$, $arc\,AB = r \cdot arc\,\alpha$, па ћемо добити

$$Sk = \frac{r^2}{2}\,arc\,\alpha.$$

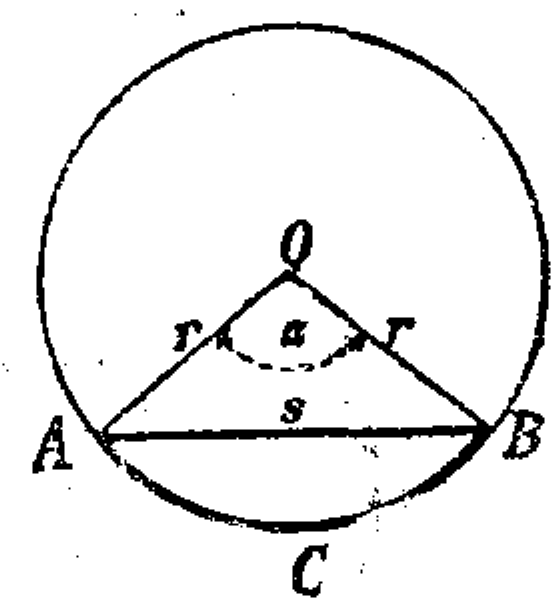
На случај да нам је, место полупречника r, тетиво s дато, које одговара кружноме луку AB, имамо, пошто заменимо $r = \dfrac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ (в. једн. 134), ове обрасце

$$S\,k = \frac{\pi\, s^2}{4\, sin^2 \frac{\alpha}{2}}\,\frac{\alpha^0}{360^0} = \frac{s \cdot arc\, AB}{4\, sin\, \frac{\alpha}{2}} = \frac{s^2}{8\, sin^2 \frac{\alpha}{2}}\, arc\, \alpha.$$

За израчунавање површине кружнога исечка имамо, дакле, следеће обрасце:

$$\left.\begin{aligned} S\,k &= \pi\, r^2 \frac{\alpha^0}{360^0} = \frac{r}{2}\, arc\, AB = \frac{r^2}{2}\, arc\, \alpha \\ &= \frac{\pi\, s^2}{4\, sin^2 \frac{\alpha}{2}}\,\frac{\alpha^0}{360^0} = \frac{s \cdot arc\, AB}{4\, sin\, \frac{\alpha}{2}} = \frac{s^2}{8\, sin^2 \frac{\alpha}{2}}\, arc\, \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (135$$

c) Кружни одсечак. Из слике видимо да је површина кружног *одсечка* (*Kreisabschnitt, Segment*, segment) ABC, означимо је са $S\,g$, равна површини кружног исечка $OABC$ мање површини равнокраког троугла OAB, тј. $S\,g = OABC - OAB$,



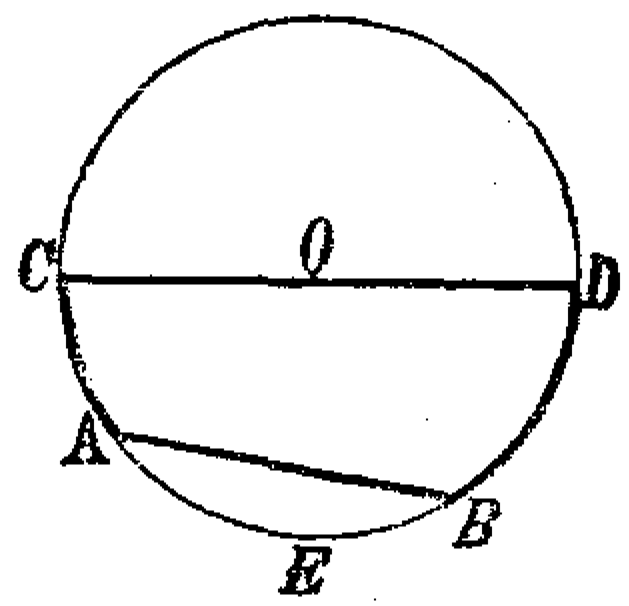
Сл. 48.

одакле, кад ставимо $OABC = \pi\, r^2 \frac{\alpha^0}{360^0} = \frac{r^2}{2}\, arc\, \alpha$ (в. једн. 135.), $\triangle\, OAB = \frac{1}{2}\, r^2\, sin\, \alpha$ (в. једн. 92 чл. 111.) и изразимо, најзад, полупречник r тетивом (на основу једн. 134), добијамо за израчунавање површине кружног одсечка ове обрасце

$$\left.\begin{aligned} S\,g &= \frac{r}{2}\left[2\,\pi\,\frac{\alpha^0}{360^0} - sin\,\alpha\right] = \frac{r^2}{2}\,(arc\,\alpha - sin\,\alpha) \\ &= \frac{s^2}{8\, sin^2 \frac{\alpha}{2}}\,(arc\,\alpha - sin\,\alpha). \end{aligned}\right\} \quad (136$$

Напомена. На израчунавање кружних одсечака своде се још и следећи случајеви.

1. Примена. Израчунавање кружног дела $ABCD$ који је ограничен пречником $CD = 2r$ и тетивом $AB = s$. На сл. 49. примећујемо да је $ABCD = \frac{1}{2}$ круга — одсечку ABE. Половина површине круга знамо да је $\frac{1}{2} r^2 \pi$. Површину одсечка ABE изнаћићемо кад, помоћу обрасца $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$ (в. једн. 134), из задатих комада s и r израчунамо средишни угао α за тетиво s и поступимо онда по једној од горњих формула 136).

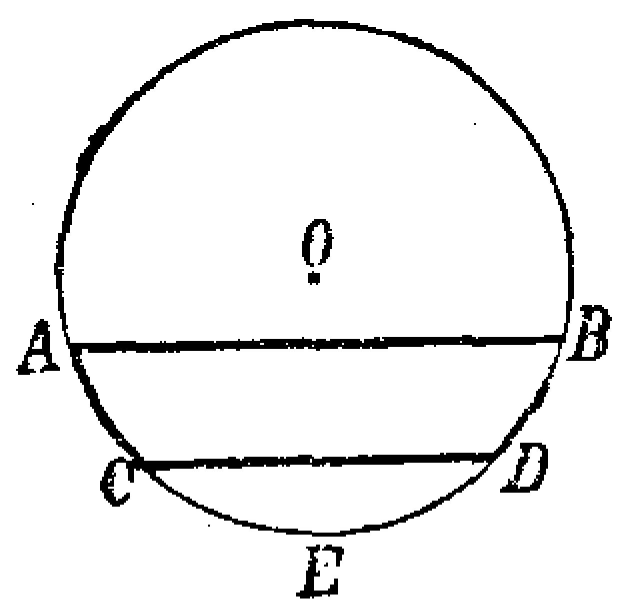


Сл. 49.

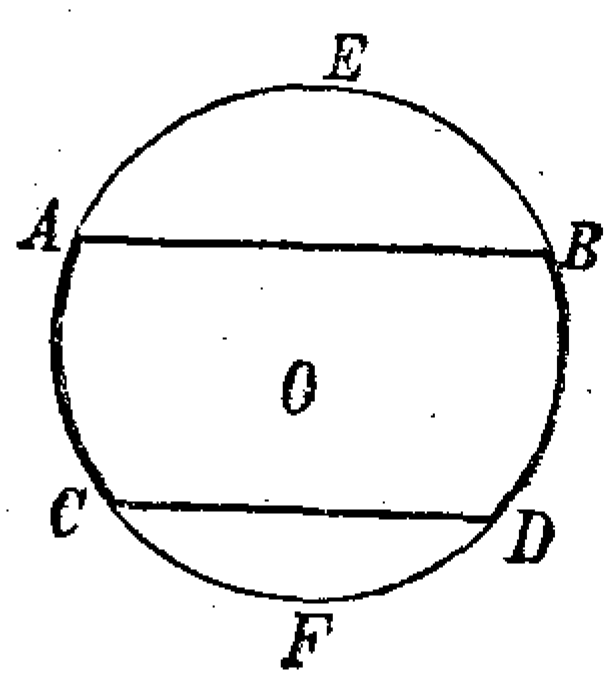
2. Примена. Израчунавање кружног дела $ABCD$ који се налази између два паралелна тетива AB и CD.

Ако се тетива AB и CD налазе на једној истој страни средишта, као што је у сл. 50., онда је површина

$$ABCD = \text{одсечку } ABE - \text{одсечку } CDE.$$



Сл. 50.

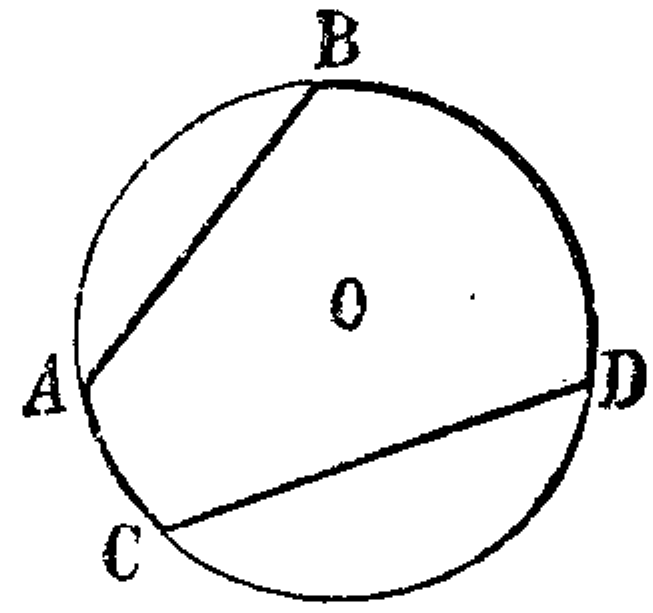


Сл. 51.

Ако су, пак, тетива AB и CD на разним странама средишта круга, као што је у сл. 51., онда је површина

$ABCD =$ површ. круга — одсечку ABE — одсечку CDF.

Поменуте одсечке израчунавамо на познати начин, пошто одредимо дотичне средишне угле из задатих тетива и полупречника круга или, ако су луци дати, из тих лукова и полупречника.



Сл. 52.

Тако исто бисмо поступили при израчунавању кружног дела који лежи између два произвољна тетива (в. сл. 52).

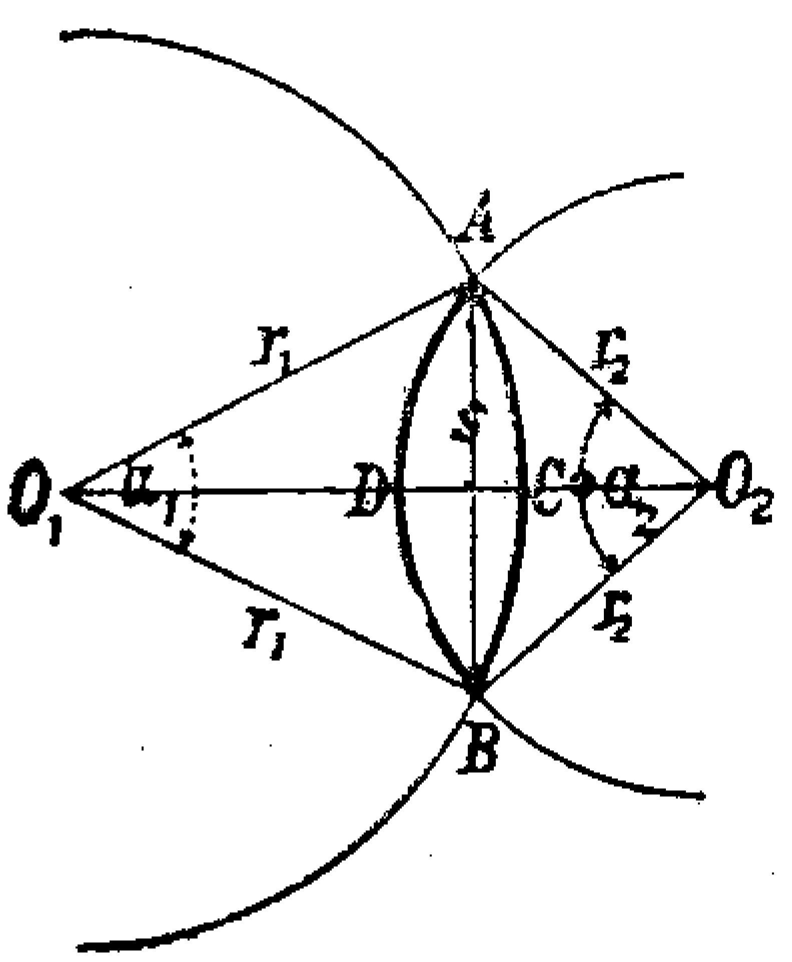
3. Примена. Израчунавање површине фигуре $ABCD$ коју образују два секућа се круга.

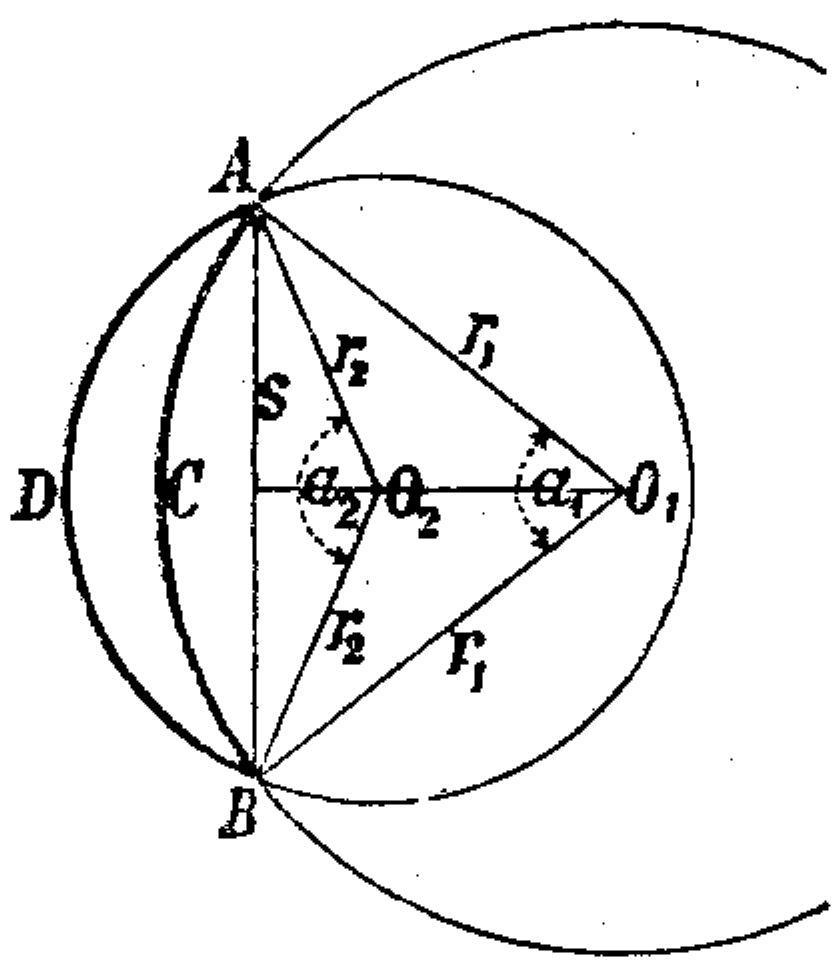
Ако се кругови секу споља, као што је у сл. 53., онда је површина фигуре

$ABCD =$ одсечку $ABC +$ одсечку ABD.

Ако се, пак, кругови секу изнутра, као у сл. 54., онда је површина од

$ABCD =$ одсечку $ABD -$ одсечку ABC.


Сл. 53.


Сл. 54.

Дотичне кружне одсечке ABC и ABD израчунаћемо на познати начин из полупречника r_1 и r_2 задатих кругова и заједничког тетива $AB = s$, помоћу чега налазимо средишне угле:

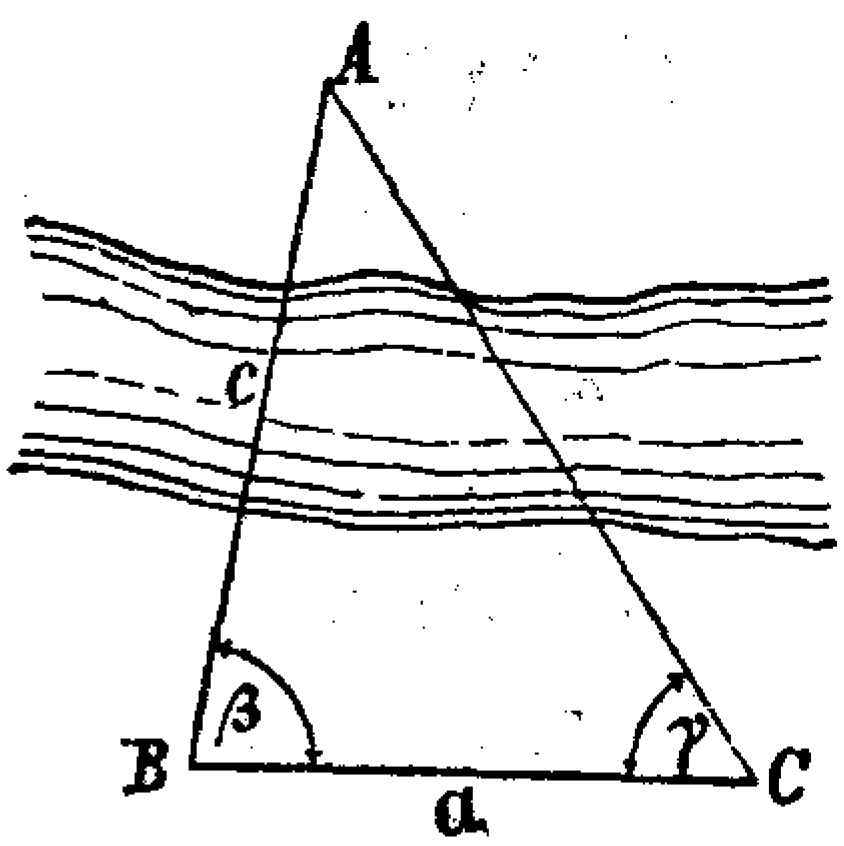
$sin\,\frac{\alpha_1}{2} = \frac{s}{2\,r_1}$, $sin\,\frac{\alpha_2}{2} = \frac{s}{2\,r_2}$. — Место тетива s може бити дато одстојање средишта $O_1O_2 = d$, јер смо у стању да, помоћу њега и полупречника r_1 и r_2, израчунамо тетиво s, па дакле и средишне угле α_1 и α_2.

3.

Примене у Геодезији.

126. **Напомена.** — При мерењу у пољу замишља се да су тачке, чија се растојања одређују, везане међусобом правим линијама. Угли, који такве праве заклапају, мере се такозваним угломерима: инструментима као што су нпр. теодолит, секстант итд. Пошто је непосредно мерење дужина у пољу (помоћу ланца, пантљике, подељених прутова итд.) скопчано са далеко већим тешкоћама и изложено већим грешкама, него што је то случај код мерења углова, то се, обично, само једна дужина мери непосредно, пазећи при избору исте на што повољније околности. Та непосредно измерена дужина зове се *основица*. Све остале дужине изналазе се рачуном.

127. **Израчунавање растојања двеју тачака.** — 1. *Задатак*. Одредити растојање двеју тачака A и B, од којих је тачка A неприступна: раздвојена од тачке B каквом било препреком, нпр. реком.



Сл. 55.

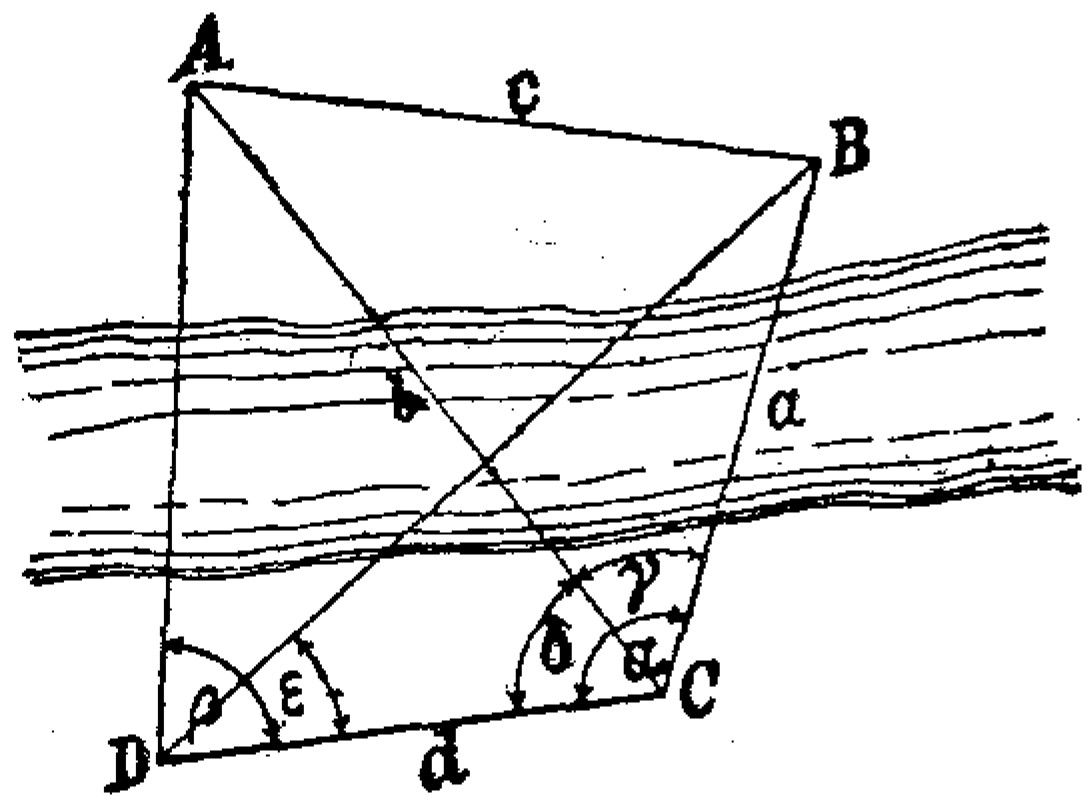
Измерићемо основицу $BC = a$ и угле које она чини са правцима BA и CA, тј. угле β и γ. На тај начин имамо један троугао ABC у коме нам је позната једна страна и два налегла угла и на основу синусне теореме добијамо

$$c = a \frac{\sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}.$$

2. *Задатак*. Наћи растојање двеју неприступних тачака A и B.

На нама приступној страни измерићемо основицу $CD = d$ и угле α, β, γ, δ, ε[1]) који се налазе на основици.

Непозната дужина $AB = c$ јавља се у троуглу ABC, у коме нам је познат само измерени угао γ. Међутим ми смо у стању да израчунамо стране $BC = a$ и $AC = b$ тога троугла и онда, помоћу њих и захваћеног угла γ, да нађемо страну c.



Сл. 56.

Из троугла BCD налазимо $a = d \frac{\sin \varepsilon}{\sin (\alpha + \varepsilon)}$,

„ „ ACD „ $b = d \frac{\sin \beta}{\sin (\beta + \delta)}$,

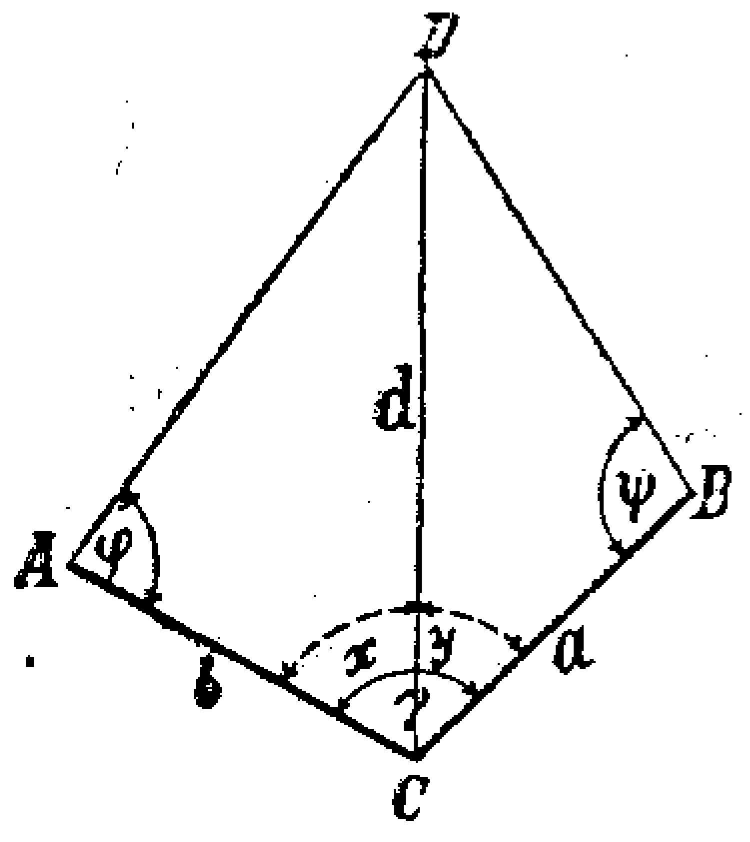
на основу чега добијамо

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma}.$$

---

1) Ако је земљиште равно, тј. ако се тачке A, B, C, D налазе све у једној истој равни, онда је довољно да се код тачке C измере само два угла, пошто је у томе случају $\alpha = \gamma + \delta$.

128. **Одређивање положаја једне тачке.** — 1. *Задатак.* Дате су нам три тачке A, B, C; нека је $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. За четврту тачку D (у истој равни са задатим тачкама) знамо $\sphericalangle CAD = \varphi$, $\sphericalangle CBD = \psi$. Да се одреди положај тачке D.



Сл. 57.

Положај тачке D утврдићемо углима $\sphericalangle ACD = x$, $\sphericalangle BCD = y$ и остојањем $CD = d$.

Из троуглова ACD и BCD читамо, на основу синусне теореме, да је

$$d = b\,\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + x)}, \quad d = a\,\frac{\sin\psi}{\sin(\psi + y)}$$

и према томе

$$b\,\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + x)} = a\,\frac{\sin\psi}{\sin(\psi + y)},$$

одакле, с обзиром на то да је $y = \gamma - x$,

$$\frac{\sin(\psi + \gamma - x)}{\sin(\varphi + x)} = \frac{a\sin\psi}{b\sin\varphi}$$

или

$$\frac{\sin(\psi + \gamma)\cos x - \cos(\psi + \gamma)\sin x}{\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x} = \frac{a\sin\psi}{b\sin\varphi}$$

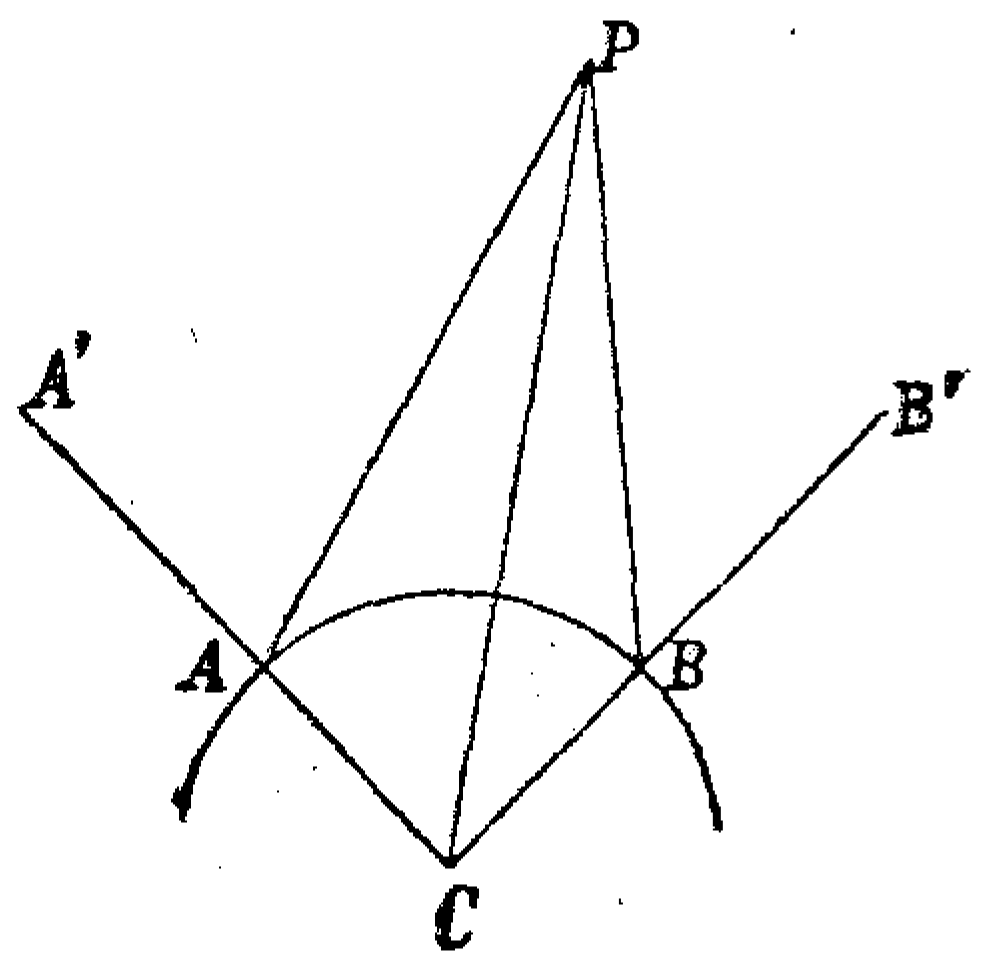
$$\frac{\sin(\psi + \gamma) - \cos(\psi + \gamma)\,tg\,x}{\sin\varphi + \cos\varphi\,tg\,x} = \frac{a\sin\psi}{b\sin\varphi},$$

дакле

$$tg\,x = \frac{[b\sin(\psi + \gamma) - a\sin\psi]\sin\varphi}{b\sin\varphi\cos(\psi + \gamma) + a\cos\varphi\sin\psi}.$$

Пошто је угао $x < 180^0$, то је, онда, овим x потпуно одређен, а са њиме и угао $y = \gamma - x$, па и одстојање $CD = d$ и на тај начин и положај тачке D.

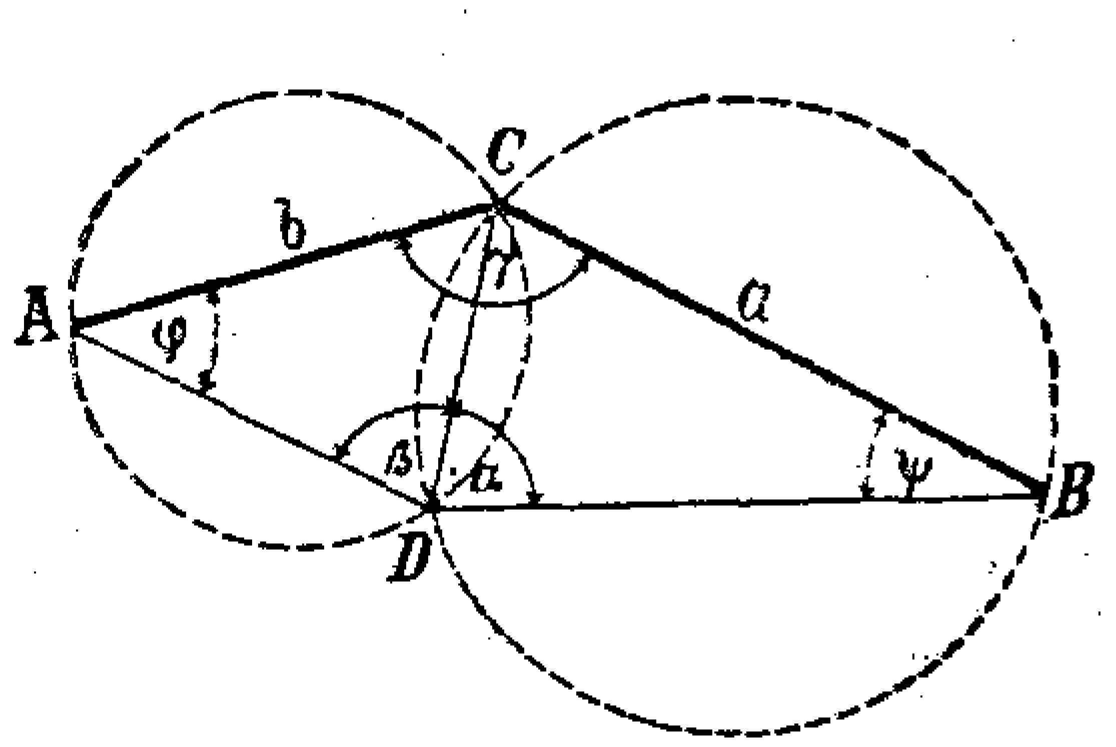
Напомена. Истим начином, како смо решили горњи задатак, могли бисмо да израчунамо (приближно) одстојање једне планете од наше земље, сматравши нашу земљу као лопту.



Сл. 58.

У тачкама A и B, које се налазе на једноме и истом меридијану, измерићемо, у тренутку кад планета P буде пролазила кроз тај меридијан на небу, њена зенитна одстојања, тј. $\sphericalangle A'AP$ и $\sphericalangle B'BP$. Познавајући полупречник земље $AC = BC$, $\sphericalangle PAC = 180^0 - \sphericalangle A'AP$, $\sphericalangle PBC = 180^0 - \sphericalangle B'BP$ и $\sphericalangle ACB$, који је раван разлици из географских ширина места A и B, очевидно овај задатак постаје идентичан са задатком који смо горе решили.

2. *Задатак.* Дате су три тачке A, B, C, тако да су нам познати сви елементи из њих образованог троугла ABC. У равни тога троугла има да се одреди четврта тачка D из које се стране AC и BC виде под извесним задатим углима.[1])



Сл. 59.

[1]) Овај значајни геодетски задатак први је решио *Willebrord Snellius* (Leyden 1580. — Leyden 1624.) године 1617. Међутим, неправедно, он

Дато је дакле

$$BC=a,\ AC=b,\ \sphericalangle ACB=\gamma,\ \sphericalangle BDC=\alpha,\ \sphericalangle ADC=\beta.$$

Да бисмо одредили положај тачке D биће довољно ако израчунамо $\sphericalangle CAD=\varphi$, $\sphericalangle CBD=\psi$, и одстојање CD.

Из $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ а на основу синусне теореме, следује

$$x) \qquad CD=\frac{b \sin\varphi}{\sin\beta}=\frac{a \sin\psi}{\sin\alpha},$$

одакле $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$ или на основу једнога познатог става о сразмерама

$$\frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\sin\varphi+\sin\psi}=\frac{a\sin\beta-b\sin\alpha}{a\sin\beta+b\sin\alpha},$$

које се, опет, може да напише (в. примене под 2 у чл. 24.) овако

$$\frac{tg\frac{\varphi-\psi}{2}}{tg\frac{\varphi+\psi}{2}}=\frac{a\sin\beta-b\sin\alpha}{a\sin\beta+b\sin\alpha}.$$

Познавајући збир $\varphi+\psi=360^0-(\alpha+\beta+\gamma)$, $\dfrac{\varphi+\psi}{2}=180^0-\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ (в. сл. 59., где је у четворо-

---

се зове *Потенотов задатак* по француском математичару *Laurent Pothenot* (1660.? — Paris 1732.), који га је решио много доцније (1692.). — Овај проблем налази примену и у Хидрографији при одређивању острвца, стена у води или места на којем је вршено мерење дубине (сондирање). Исти проблем има да реши капетан лађе који је, услед велике непогоде, приморан да бежи на отворено море напуштајући место где је брод био усидрен, како би доцније то место могао опет наћи.

углу $ABCD$ збир углова $\varphi + \psi + \alpha + \beta + \gamma = 360^0$), налазимо разлику помоћу последњег обрасца

$$tg\frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{a \sin\beta - b \sin\alpha}{a \sin\beta + b \sin\alpha}\, tg\frac{\varphi + \psi}{2},$$

па дакле и углове φ и ψ одвојено, а с овима и одстојање CD.

1. *Напомена.* Зарад лакшег израчунавања можемо учинити да горњи образац буде логаритамски подесан ако га напишемо

$$tg\frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{1 - \dfrac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}}{1 + \dfrac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}}\, tg\frac{\varphi + \psi}{2}$$

ставимо

$$\frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta} = tg\,\omega \qquad (y$$

и применимо познати образац $\dfrac{1 - tg\,\omega}{1 + tg\,\omega} = tg\,(45^0 - \omega)$ (в. примене под 1 у чл. 20.). На тај начин добијамо овај подеснији израз

$$tg\frac{\varphi - \psi}{2} = tg\,(45^0 - \omega)\, tg\frac{\varphi + \psi}{2}. \qquad (z$$

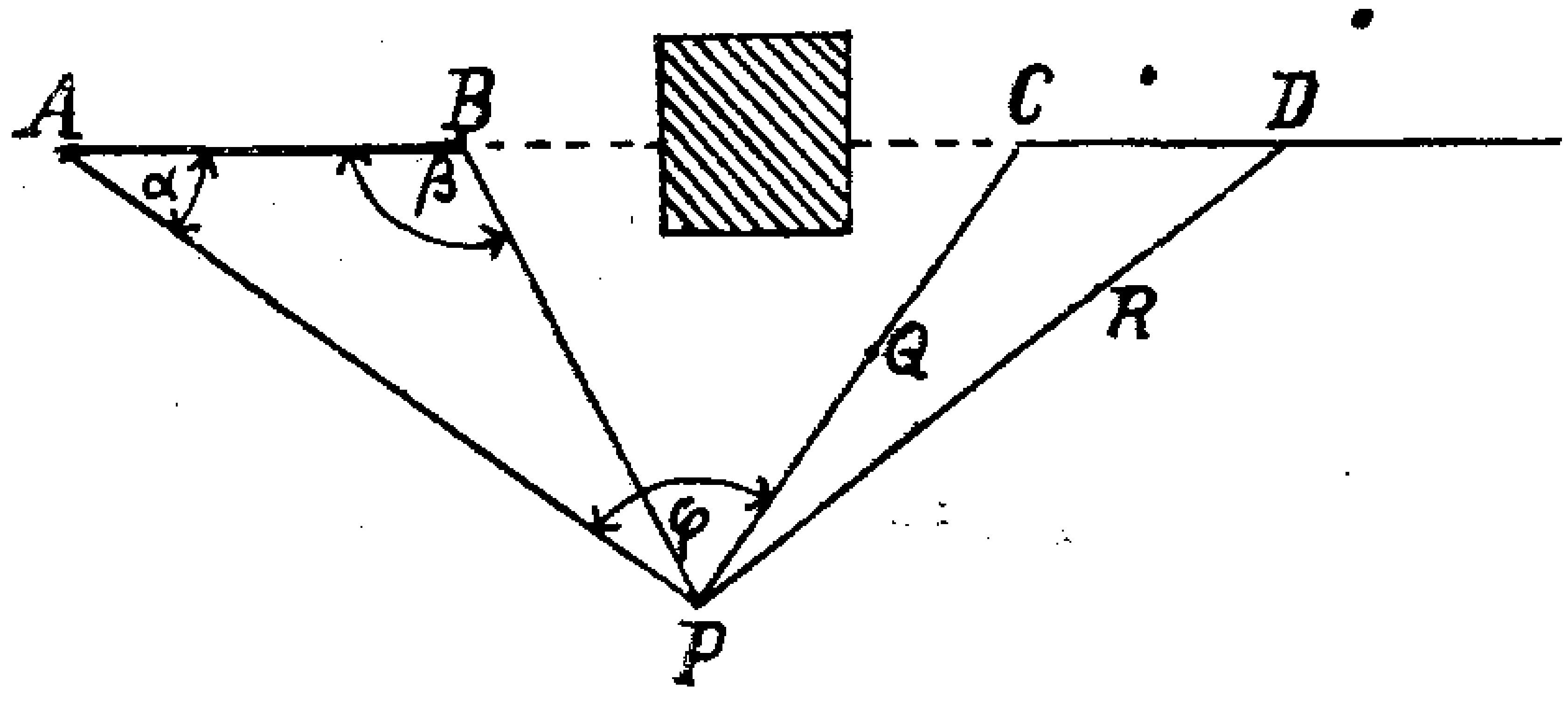
2. *Напомена.* Овај геодетски задатак може и конструктивно, врло лако, да се реши. Над страном AC, као над тетивом, описаћемо круг у којем је периферијски угао над AC раван задатоме углу β. Тако исто и над страном BC, као над тетивом, треба описати круг у којем је периферијски угао над BC раван задатоме

углу α. Тачка D, у којој се буду секла та два круга, јесте тачка коју тражимо.

Има, међутим, један случај кад тачка D постаје неодређена, а то је када се она два круга над AC и BC поклапају, тј. кад се око четвороугла $ABCD$ може да опише круг: кад је четвороугао $ABCD$ један тетивни четвороугао. У томе је случају $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, $\varphi + \psi = 180^0$, дакле $tg \frac{\varphi + \psi}{2} = \infty$. Пошто је тада $\sin \varphi = \sin \psi$, дакле на основу обрасца x) $b \sin \alpha = a \sin \beta$ и према томе, а с обзиром на образац y), $tg\, \omega = 1$, $\omega = 45^0$, дакле $tg\,(45^0 - \omega) = 0$ тако да горњи израз под z) постаје неодређен, јер је

$$tg \frac{\varphi - \psi}{2} = 0 \cdot \infty = \frac{0}{0}.$$

129. **Продужавање правца у пољу.** — Има да се продужи правац AB иза некаквог предмета (зграде) који не дозвољава визирање преко њега.

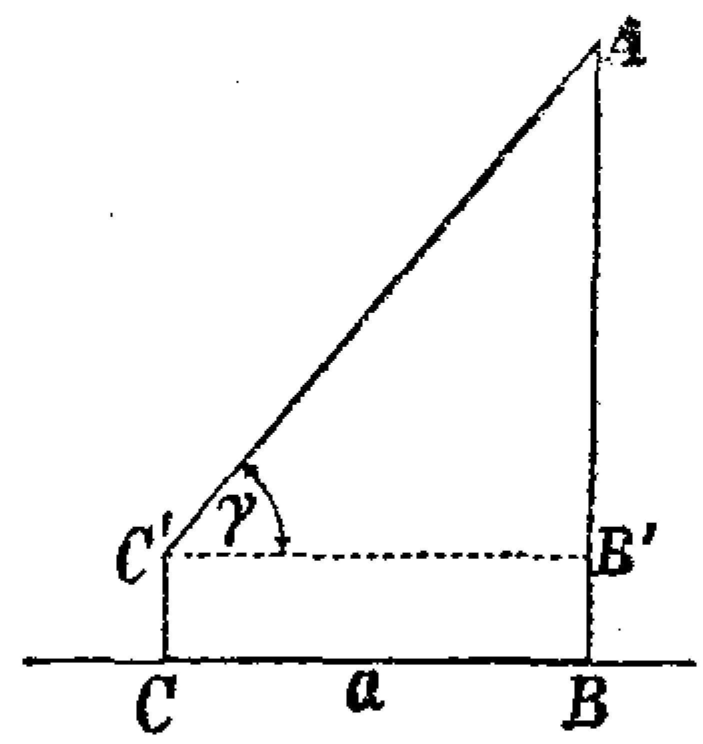


Сл. 60.

Ми бирамо на страни тачку P тако да се из ње може да визира на обе стране предмета који чини препреку. Пошто смо измерили дуж AB и углове α и β бацамо из P визуру у правцу PQ под каквим било углом φ. Из троугла ABP израчунавамо страну AP (помоћу елемената AB, α, β), а помоћу ње и углова α и φ израчунавамо дуж PC као страну у троуглу APC. Нашавши тако тачку C и познавајући и угао код C добили смо тиме правац у коме лежи продужење од AB.

Место да узимамо угао код C ми бисмо могли да одредимо тачку D бацањем визуре PR из тачке P и израчунавањем стране PD у троуглу APD. Везивањем тачака C и D добијамо продужење од AB.

130. **Израчунавање висине предмета.** — 1. *Задатак.* Да се одреди висина једнога вертикалног предмета (нпр. каквога торња, куле итд.) AB који се налази на хоризонталноме земљишту[1]) или земљишту на којем је могуће измерити једну дуж BC у хоризонталноме правцу ка подножју дотичнога предмета.



Сл. 61.

Измерићемо у хоризонталноме правцу дуж $BC = a$, у тачци C' угао γ, где CC' представља висину угломера. Из правоуглог троугла $AB'C'$ читамо

$$AB' = B'C' \cdot tg\,\gamma = a\; tg\,\gamma$$

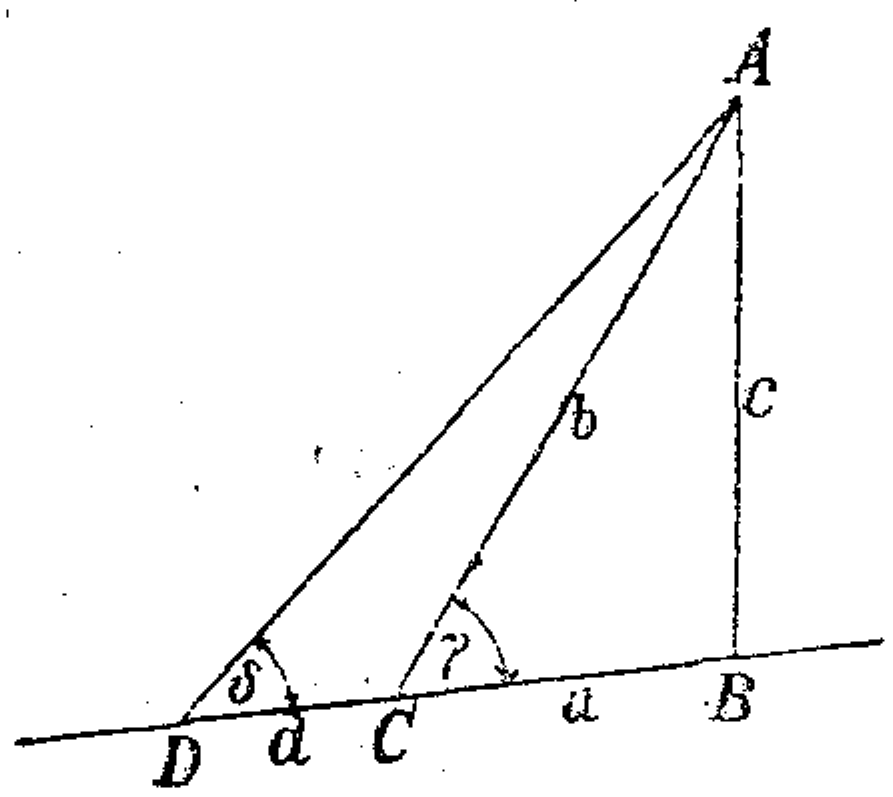
и, кад томе додамо висину инструмента $CC' = BB'$, добијамо висину предмета

$$AB = AB' + B'B = a\; tg\,\gamma + C'C.$$

---

[1]) Земљиште је *хоризонтално* кад његова раван стоји управно на правцу у којем тела слободно падају. Овај последњи, вертикални правац, одређујемо (у пракси) помоћу *виска* (*Senkblei, Bleiloth,* fil. à plomb). Хоризонталну раван добијамо помоћу такозване *либеле* (*Libelle Wasserwage,* niveau); она нам даје *привидан хоризонат* (*scheinbarer Horizont,* horizon sensible) места (на земљи) кроз које ту раван замишљамо. Раван, која пролази кроз средиште земље а паралелна је са привидним хоризонтом једног места, зове се *истински* или *прави хоризонат* (*wahrer Horizont,* horizon rationnel, horizon céleste) тога места.

2. *Задатак.* Да се нађе висина једнога предмета AB кад је подножје тога предмета приступно, а земљиште нагнуто (косо).



Сл. 62.

У правцу DB према подножју предмета измерићемо дужи $BC = a$, $CD = d$, а угломером у тачкама C и D угле γ и δ.

Из $\triangle ACD$, у којем познајемо страну $CD = d$ и сва три угла, добијамо, на основу синусне теореме, страну AC

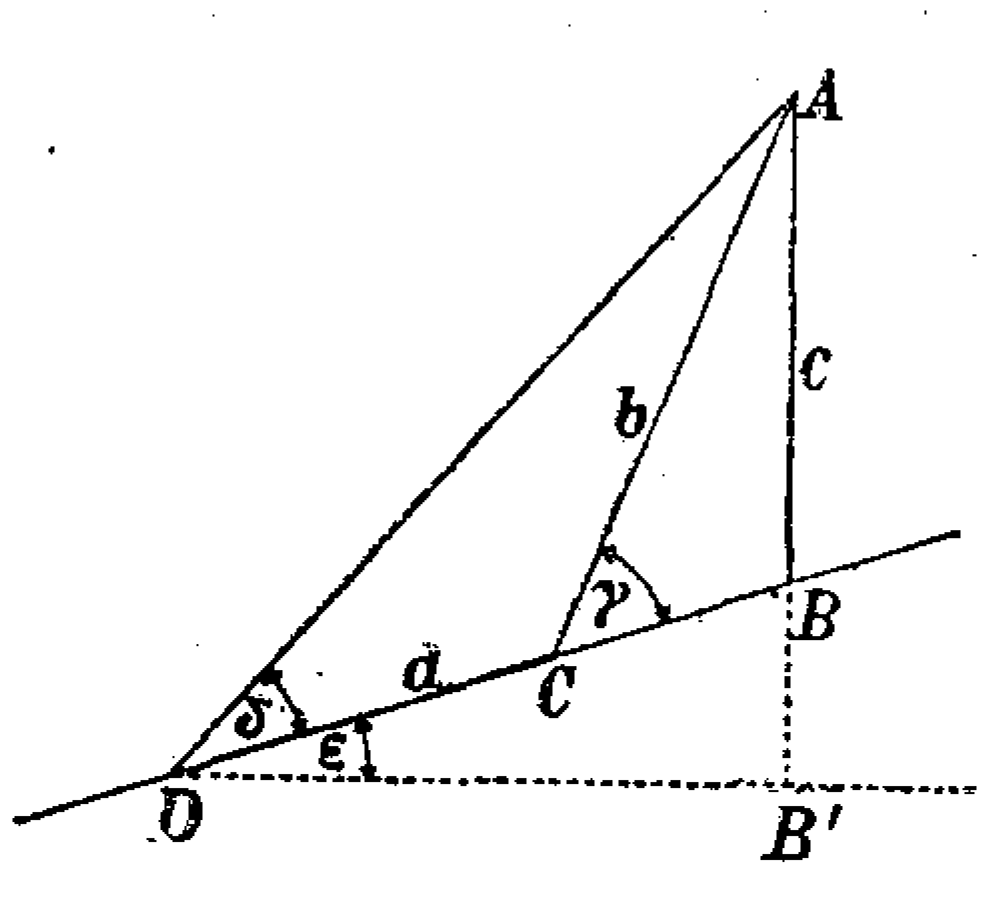
$$b = \frac{d \sin \delta}{\sin (\gamma - \delta)}.$$

С овим смо у стању да израчунамо висину предмета AB, као непознату страну c у $\triangle ABC$, у којем познајемо две стране a и b и захваћени угао γ, нпр. помоћу косинусне теореме

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos \gamma}$$

или на ма који други начин (в. чл. 113.).

3. *Задатак.* Наћи висину предмета AB кад подножје његово није приступно, а и земљиште није хоризонтално.



Сл. 63.

Први случај. Претпоставимо да се у правцу подножја може да мери.

У правцу према подножју измерићемо дуж $CD = d$, затим угле γ и δ и угао ε који правац BD чини са хоризонталним правцем $B'D$.

Из $\triangle ACD$, а на основу синусне теореме, налазимо

$$b = \frac{d \sin \delta}{\sin (\gamma - \delta)}.$$

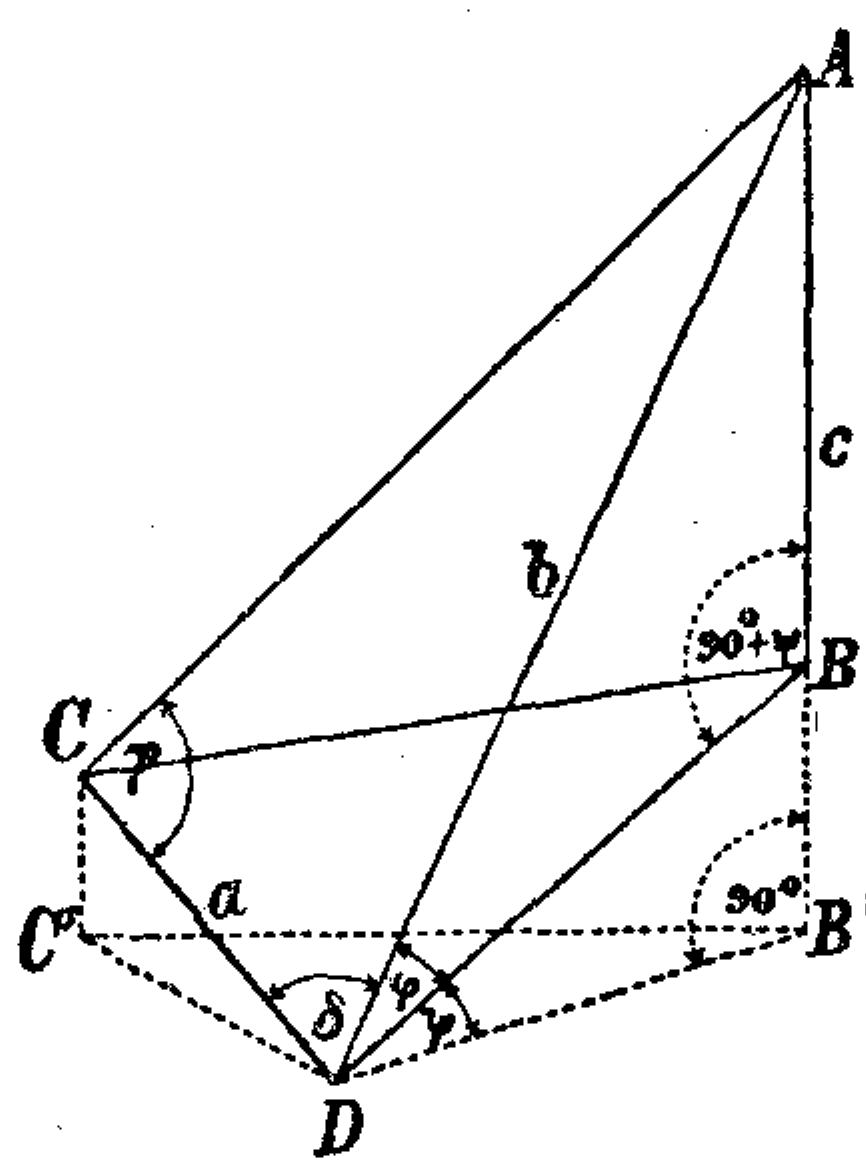
Имајући на уму да је угао код B' прав ($= 90^0$) и према томе $\measuredangle ABC = 90^0 + \varepsilon$, висину c предмета AB добијамо из $\triangle ABC$, у којем познајемо једну страну $AC = b$ и сва три угла,

$$c = \frac{b \sin \gamma}{\sin (90^0 + \varepsilon)} = \frac{b \sin \gamma}{\cos \varepsilon} = \frac{d \sin \gamma \sin \delta}{\sin (\gamma - \delta) \cos \varepsilon}.$$

Други случај. Узмимо да се у правцу према подножју не може да мери.

Обележимо двема тачкама C и D и подножјем B предмета AB, чију висину тражимо, један троугао BCD на земљишту. Нека је $\triangle B'C'D$ тај троугао *сведен на хоризонат,* тј. нека је $\triangle B'C'D$ пројекција троугла BCD на хоризонталну раван коју замишљамо да је положена кроз тачку D. Пошто смо измерили основицу $CD = a$ и $\measuredangle ACD = \gamma$, $\measuredangle ADC = \delta$ налазимо из $\triangle ACD$, на основу синусне теореме,

$$AD = b = \frac{a \sin \gamma}{\sin (\gamma + \delta)}.$$

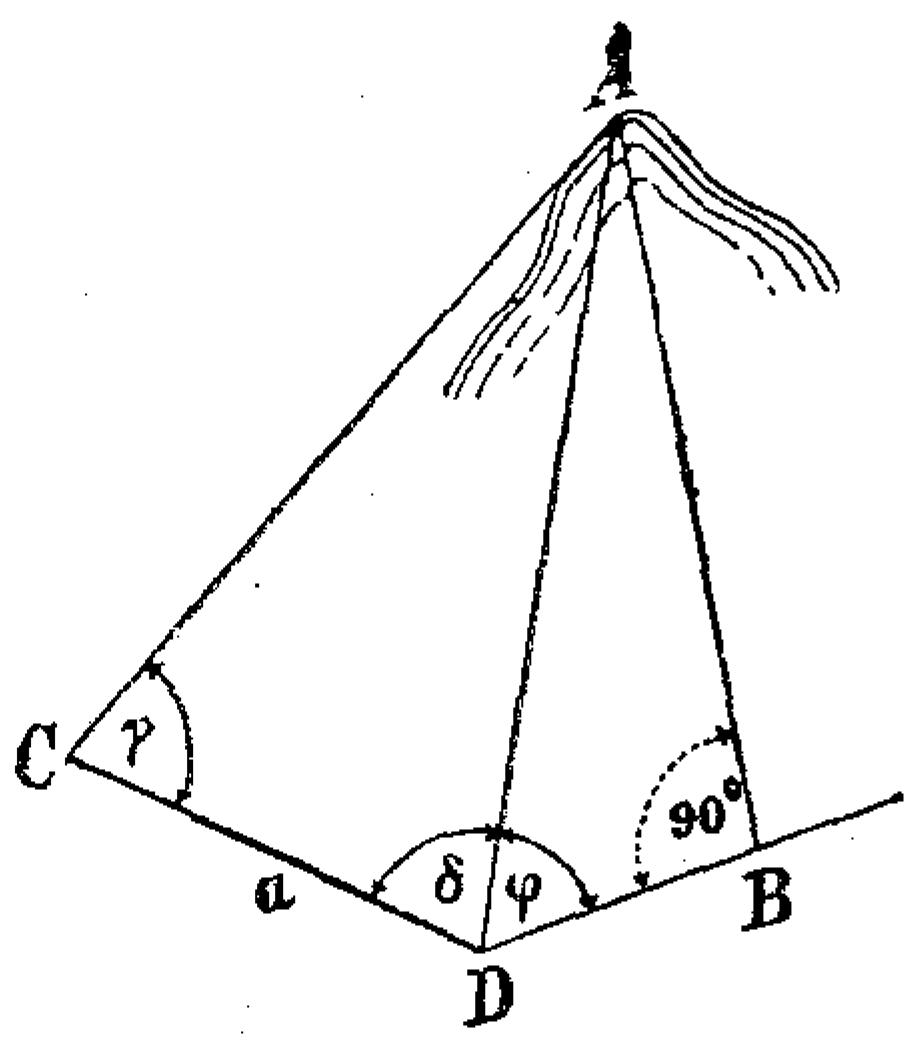


Сл. 64.

Ако измеримо још и вертикалне угле: $\measuredangle ADB = \varphi$ и $\measuredangle BDB' = \psi$ и будемо имали на уму да је $\measuredangle BB'D = 90^0$, дакле $\measuredangle ABD = 90^0 + \psi$ добићемо из $\triangle ABD$, у којем познајемо страну b и сва три угла, на основу синусне теореме, висину предмета AB

$$c = \frac{b \sin \varphi}{\sin (90^0 + \psi)} = \frac{b \sin \varphi}{\cos \psi} = \frac{a \sin \gamma \sin \varphi}{\sin (\gamma + \delta) \cos \psi}.$$

Напомена. На случај да тачка B лежи испод B' треба заменути ψ са $-\psi$, које, међутим, ни уколико не мења горњи образац за израчунавање висине c, пошто је $\cos(-\psi) = \cos \psi$. Тако исто видимо да не утиче на поменути образац хоће ли тачка C лежати изнад или испод тачке C'. То значи да добивени образац важи сасвим опште: лежало земљиште, на којем меримо, изнад или испод хоризонталне равни, коју замишљамо кроз тачку D. На овај начин ми смо у стању да израчунамо висину каквога предмета који се налази у долини са положаја који је виши и од самога предмета.



Сл. 65.

Ако је подножје B у хоризонталној равни, дакле $\psi = 0$, онда образац за израчунавање висине добија овај простији вид

$$c = a \frac{\sin \gamma \sin \varphi}{\sin (\gamma + \delta)}.$$

Последњи образац може да се примени при израчунавању висине каквога брда над хоризонталном равни земљишта на којем се ми налазимо. Пошто измеримо на земљишту основицу $CD = a$, угломером одредимо $\sphericalangle ACD = \gamma$, $\sphericalangle ADC = \delta$ и вертикални угао $\sphericalangle ADB = \varphi$ налазимо из $\triangle ACD$

$$AD = \frac{a \sin \gamma}{\sin (\gamma + \delta)}$$

и затим из правоуглог троугла ABD висину брда

$$AB = AD \cdot \sin\varphi = a\,\frac{\sin\gamma\,\sin\varphi}{\sin(\gamma+\delta)}.$$

Овде, као и у прошла два задатка, треба добивеној висини додати још висину угломера.

131. **Даљина догледа са узвишених тачака.** — Задатак је: до које се даљине l може да види врх B некога предмета AB (светлеће куле, брега итд.) чија је висина $= h$.

Из правоуглог троугла OBC_1 читамо

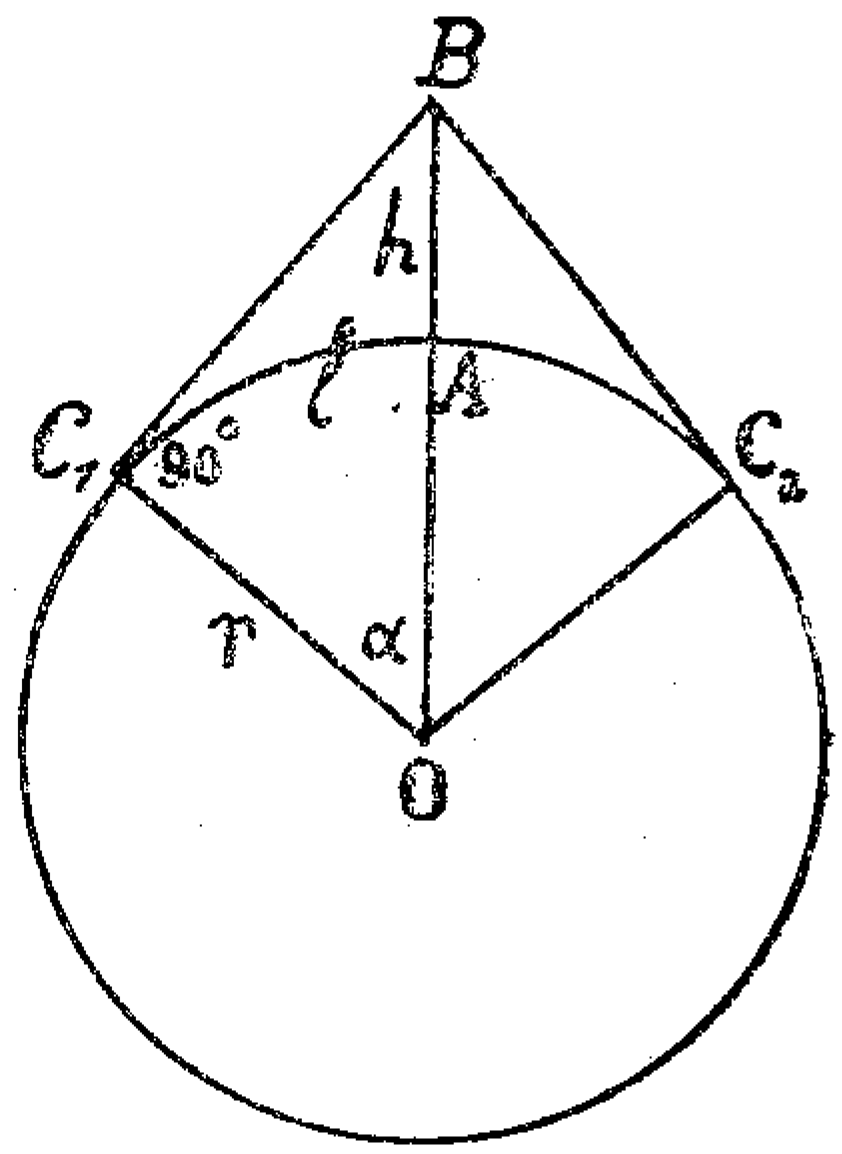
$$\cos\alpha = \frac{r}{r+h},$$

дакле

$$\alpha = \operatorname{arc\,cos}\frac{r}{r+h}$$

и према томе

$$l = r\,\alpha = r\,\operatorname{arc\,cos}\frac{r}{r+h}.$$



Сл. 66.

Одавде следује

$$h = r\left(\sec\frac{l}{r} - 1\right),$$

а то је висина на коју се треба попети (нпр. аеропланом) да би се могло видети до раздаљине l од тачке подножја A.

Пример. — Узмимо $h = 4810\,m$ (висина Монблана), $r = 6\,368\,150\,m$ (средњи полупречник земље). Тада је

$$\cos\alpha = \frac{6\,368\,150}{6\,372\,960},$$

$$\alpha = 2^0 13' 30'' = 8010''$$

или на основу пропорције

$$648\,000 : 8010 = \pi : arc\,\alpha$$

$$arc\,\alpha = \frac{8010 \cdot \pi}{648\,000} = \frac{801 \cdot \pi}{64\,800},$$

а тиме

$$l = 6\,368\,150 . \frac{801 \cdot \pi}{64\,800} \sim 247{,}3\ Km.$$

Површина земне калоте, која се види са висине $h = 4810\ m$ добија се по формули

$$P = 2\,r\,\pi \times \text{висина калоте}$$

и пошто је висина калоте $= r - r\cos\alpha = r\,(1 - \cos\alpha) = \frac{r\,h}{r + h}$, дакле

$$P = \frac{2\,\pi\,r^2\,h}{r + h}$$

следује

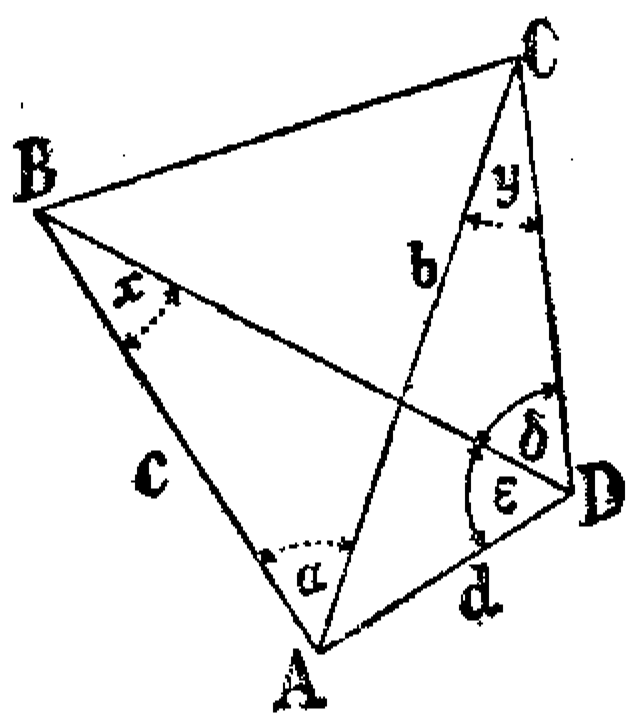
$$P = 192\,300\ Km^2.$$

У следећој табличици израчунате су раздаљине l и средишни углови α са неколике висине h.

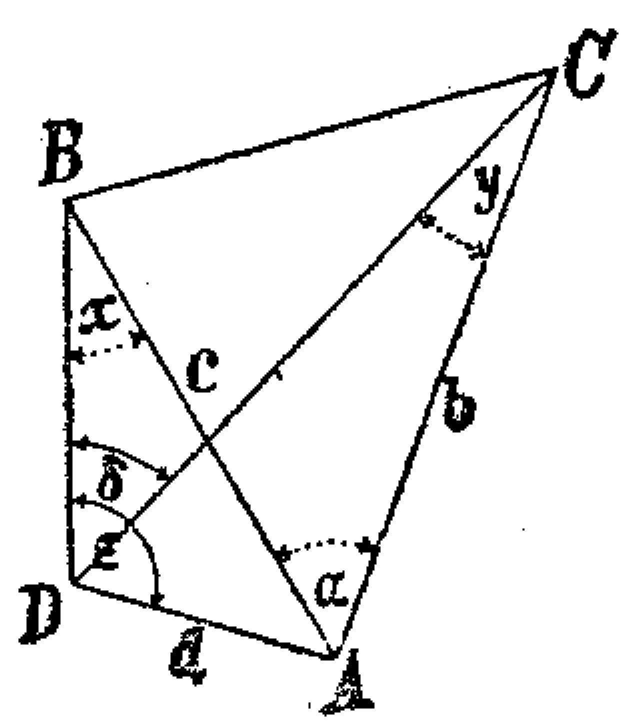
h	l	α	h	l	α	h	l	α
10 m	11,1 km	0^0 6′,0	100 m	35,8 km	0^0 19′,3	1000 m	112,9 km	1^0 0′,9
20 „	15,9 „	„ 8′,6	200 „	50,4 „	„ 27′,2	2000 „	159,5 „	„ 26′,1
30 „	19,7 „	„ 10′,6	300 „	61,7 „	„ 33′,3	3000 „	195,5 „	„ 45′,5
40 „	22,6 „	„ 12′,2	400 „	71,3 „	„ 38′,5	4000 „	225,7 „	2^0 1′,8
50 „	25,2 „	„ 13′,6	500 „	79,9 „	„ 43′,1	5000 „	252,4 „	„ 16′,2
60 „	27,6 „	„ 14′,9	600 „	87,5 „	„ 47′,2	6000 „	276,5 „	„ 29′,2
70 „	29,8 „	„ 16′,1	700 „	94,5 „	„ 51′,0	7000 „	298,5 „	„ 41′,1
80 „	31,9 „	„ 17′,2	800 „	101,0 „	„ 54′,5	8000 „	319,1 „	„ 52′,2
90 „	33,9 „	„ 18′,3	900 „	107,1 „	„ 57′,8	9000 „	338,9 „	3^0 2′,9
100 „	35,8 „	„ 19′,3	1000 „	112,9 „	1^0 0′,9	10000 „	356,7 „	„ 12′,5

1·32. **Свођење углова на средиште.** — Код великих геодетских радова узимају се за темена троуглова, обично, врло узвишене тачке, као што су нпр. врхови звонара, намештени знаци на бреговима итд. У таквим случајима није могуће поставити угломер тачно над теменом угла који треба измерити; ми смо принуђени да га поставимо где на страни, али, по могућству, што ближе темену дотичног угла. Тако измерени угао, разуме се, није једнак углу који, управо, желимо да добијемо, он је од њега различан за извесну малу вредност и да бисмо добили угао троугла потребно је да, над измереним углом, извршимо извесну корекцију. Израчунавање те поправке зове се *свођење угла на средиште* или *центрирање* (*Centriren der Winkel*, réduction des angles aux centres des stations).

Нека је ABC геодетски троугао у којем смо, због неприступности темена A, место угла $BAC = \alpha$ измерили угао $BDC = \delta$.



Сл. 67.

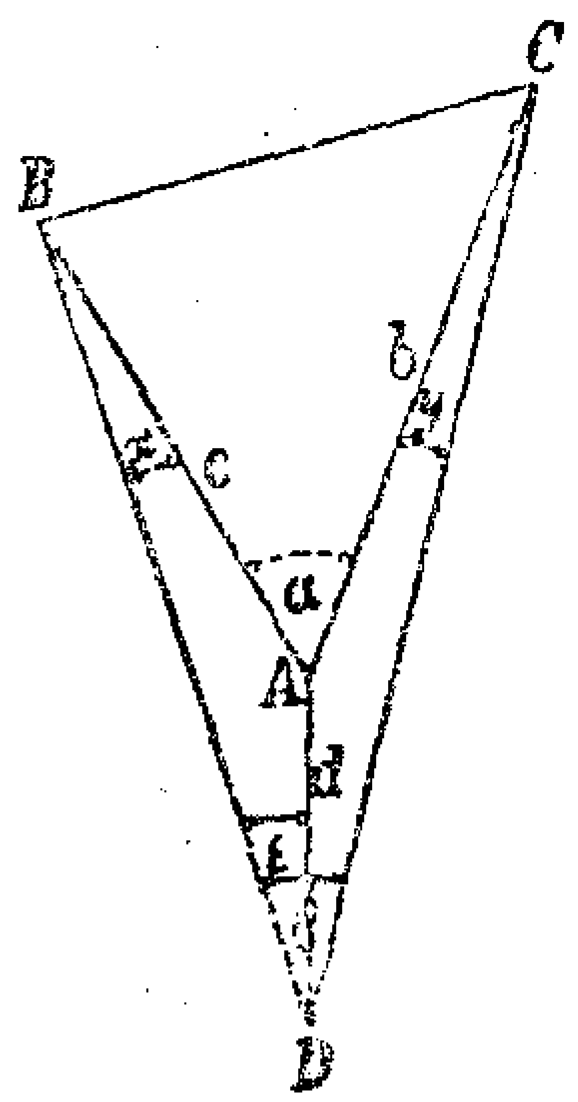


Сл. 68.

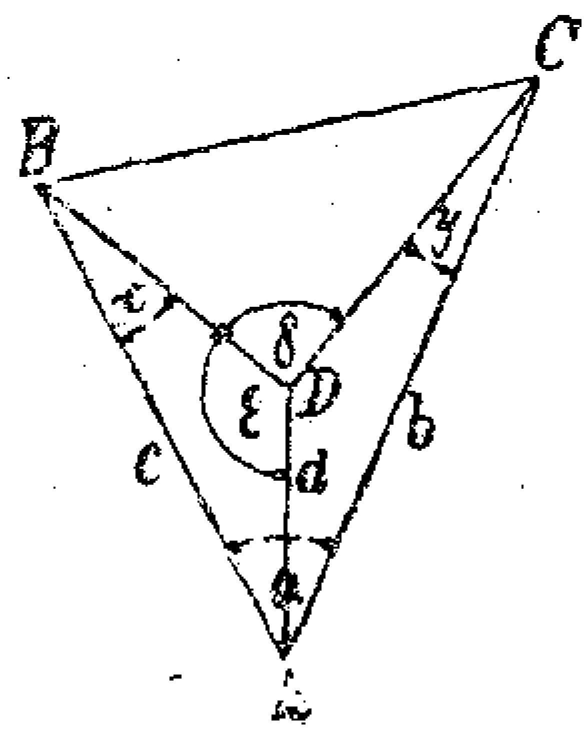
Према положају изабране тачке D у однос на троугао ABC имамо између непознатих углова α, x, y и измереног угла δ следеће односе

$$\left.\begin{aligned}
x + \alpha &= y + \delta, \text{ дакле } \alpha = \delta - (x - y) \text{ као у сл. } 67.\\
x + \delta &= y + \alpha, \quad " \quad \alpha = \delta + (x - y) \;\; " \;\; " \;\; " \;\; 68.\\
x + y + \delta &= \alpha, \quad " \quad \alpha = \delta + (x + y) \;\; " \;\; " \;\; " \;\; 69.\\
x + y + \alpha &= \delta, \quad " \quad \alpha = \delta - (x + y) \;\; " \;\; " \;\; " \;\; 70.
\end{aligned}\right\} (a$$

Разлика $x - y$, односно збир $x + y$, које имамо да одузмемо или да додамо измереноме углу δ, па да бисмо нашли праву вредност угла α, то је корекција коју треба да израчунамо. Да бисмо могли да израчунамо угле x и y, и помоћу њих корекцију $x - y$, односно $x + y$, потребна је прво: дужина $AD = d$ која се, обично и најбоље, добија на начин показат у 2. задатку чл. 127.; друго: угли $BDC = \delta$ и $ADB = \varepsilon$ који се непосредно мере угломером, пошто је тачка



Сл. 69.



Сл. 70.

D изабрана што могуће подесније за ту циљ и треће: стране $AC = b$ и $AB = c$ троугла ABC. Међутим, за израчунавање корекције, довољно је да познајемо само приближне вредности троуглових страна, пошто је грешка, која отуда произилази (из нетачних вредности страна) за $x - y$ или $x + y$, несразмерно мала наспрам корекције и може да се занемари. У околностима, какве ми замишљамо и у којима се овај задатак о центрирању углова примењује, троугао ABC није сам и одвојен, него је у свези са другим троуглима: троугао ABC чини део једне такозване тригонометриске мреже и као такав он има једну страну заједнички са другим једним, већ разрешеним, троуглом.[1]) Познавајући, дакле, једну страну троугла ABC довољно је да измеримо, ма и приближно, два његова угла (постављајући угломер што ближе теменима троуглових), па да добијемо приближне вредности осталих двеју страна, које су потребне, а и довољне, за израчунавање корекције измерених углова. Са тако добивеним тачнијим вредностима углова разрешићемо понова троугао и добићемо тачније вредности оних двеју израчунатих страна.

За сваки положај тачке D (в. сл. 67.—70.) јесте (нг основу синусне теореме)

$$\frac{\sin x}{\sin \varepsilon} = \frac{d}{c}, \text{ дакле } \sin x = \frac{d \sin \varepsilon}{c}.$$

док за угао y, међутим, имамо, према случају, ове обрасце

$$\frac{\sin y}{\sin (\delta + \varepsilon)} = \frac{d}{b}, \text{ дакле } \sin y = \frac{d \sin (\delta + \varepsilon)}{b}$$

(в. сл. 67.)

$$\frac{\sin y}{\sin (\varepsilon - \delta)} = \frac{d}{b}, \quad \text{"} \quad \sin y = \frac{d \sin (\varepsilon - \delta)}{b}$$

(в. сл. 68.)

$$\frac{\sin y}{\sin (\delta - \varepsilon)} = \frac{d}{b}, \quad \text{"} \quad \sin y = \frac{d \sin (\delta - \varepsilon)}{b}$$

(в. сл. 69.)

$$\frac{\sin y}{\sin (360^0 - \delta - \varepsilon)} = \frac{d}{b}, \quad \text{"} \quad \sin y = \frac{- d \sin (\delta + \varepsilon)}{b}$$

(в. сл. 70.).

[1]) В. чл. 133. о тригонометриским мрежама.

Пошто су угли x и y врло мали, то ћемо, без осетне грешке, смети да заменимо синусе њиховим луцима[1]) и да ставимо

$$x = \frac{d \sin \varepsilon}{c},$$

$$y = \frac{d \sin (\delta + \varepsilon)}{b}, \quad y = \frac{d \sin (\varepsilon - \delta)}{b},$$

$$y = \frac{d \sin (\delta - \varepsilon)}{b}, \quad y = - \frac{d \sin (\delta + \varepsilon)}{b}.$$

Овде су x и y изражени у лучној мери. Но пошто угле једнога троугла изражавамо у степенима, минутама и секундама, а тако их и при мерењу са инструментима (угломерима) изналазимо, то ћемо и корекцију, па дакле и угле x и y, имати на исти начин да изразимо. Означимо са x_1 и y_1 вредности тих углова у секундама и имаћемо[2])

[1]) В. 1. *Закључак* у чл. 31 На основу резултата добивених у чл. 32. лако је уверити се да овако учињена грешка (замењујући синус одговарајућим луком или лук његовим синусом) неће утицати на седмо десетно место све докле лук, односно угао, не прелази $29' = 1740''$.

[2]) Код врло малих углова узима се за јединицу секунда. У полупериферији круга има $180 \times 60 \times 60 = 648000$ секунада и према томе је $\frac{\pi}{648000}$ равно дужини лука који одговара углу од једне секунде у кругу са полупречником 1. Означимо дужину тога лука са ω. Нека је α ма какав лук, α_1 број секунада који одговара луку α. Очевидно је (в. чл. 1., 2. и 3.) $\alpha = \omega\alpha_1$ или $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\omega}$. При логаритамском рачунању ми ћемо смети да заменимо $\log \omega$ са $\log \sin \omega$, тј. са $\log \sin 1''$, пошто је тиме учињена грешка тако незнатна да не утиче ни на седмо десетно место дотичног логаритма. На тај начин добили смо ове обрасце

$$\alpha = \alpha_1 \sin 1'', \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\sin 1''}$$

за израчунавање углова у лучној мери, кад их имамо у секундама и обратно за израчунавање углова у секундама кад су нам они дати у лучној мери.

$$x_1 = \frac{d \sin \varepsilon}{c \sin 1''}, \quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{d \sin (\delta + \varepsilon)}{b \sin 1''} & \text{за положај у сл. 67.} \\ y_1 = \dfrac{d \sin (\varepsilon - \delta)}{b \sin 1''} & \text{" " " " 68.} \\ y_1 = \dfrac{d \sin (\delta - \varepsilon)}{b \sin 1''} & \text{" " " " 69.} \\ y_1 = -\dfrac{d \sin (\delta + \varepsilon)}{b \sin 1''} & \text{" " " " 70.} \end{cases}$$

Одавде, и према горњим обрасцима под *a*), следује

за први и четврти положај тачке D (сл. 67. и сл. 70.)

$$\alpha = \delta - \frac{d}{\sin 1''}\left[\frac{\sin \varepsilon}{c} - \frac{\sin (\delta + \varepsilon)}{b}\right],$$

за други и трећи положај тачке D (сл. 68. и сл. 69.)

$$\alpha = \delta + \frac{d}{\sin 1''}\left[\frac{\sin \varepsilon}{c} - \frac{\sin (\varepsilon - \delta)}{b}\right].$$

133. **Тригонометриске мреже.** — При премеравању већих делова земље (нпр. једне државе или појединих округова њених) замишља се да је цео простор покривен једном мрежом троуглова у којој су троугли везани међусобом тако да увек по два од њих имају једну страну заједнички. При склапању такве мреже поступа се, у главноме, на следећи начин. Прво се, што је могуће тачније, измери једна дуж бирајући за њу што повољније место и што боље околности. Та непосредно, и нарочитим инструментом, такозваним *базисним апаратом*, измерена дуж зове се *основица* (*Grundlinie, Basis,* base). Над том основицом подиже се један троугао, узев на повољноме месту терена,

као треће теме, извесну тачку, и измере се сва три угла[1]) тако добивеног троугла. Познавајући једну страну и угле овога троугла ми можемо остале две стране да израчунамо. На тај први троугао домећемо други тако да једну страну има заједнички с оним првим троуглом и пошто измеримо угле у новоме троуглу изналазимо остале комаде (две стране) рачунским путем. Овоме другом троуглу додајемо трећи, па онда томе, на исти начин, четврти троугао итд. Тако образована мрежа троуглова, којом покривамо земљиште које премеравамо, зове се *тригонометриска мрежа*.

При образовању тригонометриске мреже узимају се, на првом месту, врло велики троугли, са странама дугачким по неколико миља географских; они сачињавају такозване *троугле првога реда*. При разрешавању ових великих троуглова нужно је да се узме у рачун кривина земље и ми их зато не разрешавамо као равне, него као сферне троуглове. Упутства за то даје нам Сферна Тригонометрија. Она нас учи и то до којих граница можемо мање троугле на лопти (дакле и на нашој земљи) сматрати као равне троугле и како се с њима, при разрешавању, има поступити. — У ову мрежу великих троуглова уноси се друга, трећа мрежа итд. троуглова са странама мањим и мањим. То су *троугли другог, трећег реда* итд.

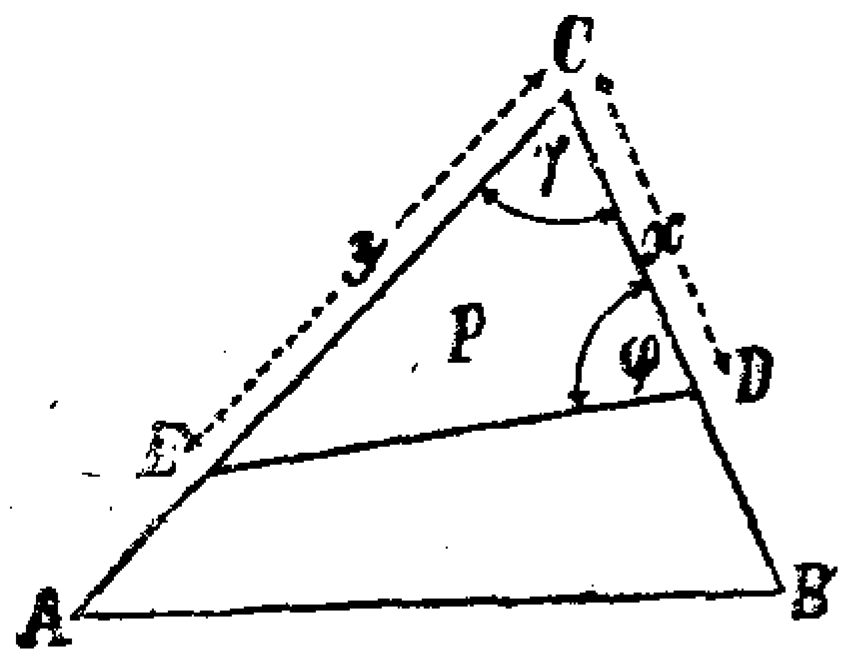
Мерења и израчунавања, која имамо да извршимо око покривања земљишта тригонометриском мрежом, дакле цео тај рад, зовемо *тријангулацијом*.

---

[1]) Са теориског гледишта било би довољно да се измере само два угла у троуглу, ако претпоставимо да је троугао раван (а не сферан), јер је тиме одређен и трећи угао. Међутим, због грешака које су неизбежне код мерења и посматрања у опште, за препоруку је да се измере, ипак, сва три угла и да се онда сваки угао, изравнавањем на 180°, поправи.

Поједине стране троуглова тријангулацијом добро утврђене тригонометриске мреже дају поуздане основице за сва доцнија детаљна (ситнија) теренска премеравања. Одређивањем положаја (помоћу географских координата) појединих тачака тригонометриске мреже, тријангулисање земљишта служи нам за све оне радове који имају за циљ картографско снимање дотичног земљишта.

134. **Делење фигура.** — 1. *Задатак.* Од једног датог троугла ABC да се правом DE, која с једном од троуглових страна, нпр. са страном BC, треба да заклапа извесан угао φ, одвоји троугао CDE задате површине p.



Сл. 71.

Положај праве DE одредићемо комадима $CD = x$ и $CE = y$.

Познате количине јесу: елементи задатог троугла ABC, површина p троугла CDE и угао φ, а непознате количине комади x и y.

На основу тога што је

$$p = \frac{1}{2} x y \sin\gamma \text{ (према формули 92 у чл. 111.)}$$

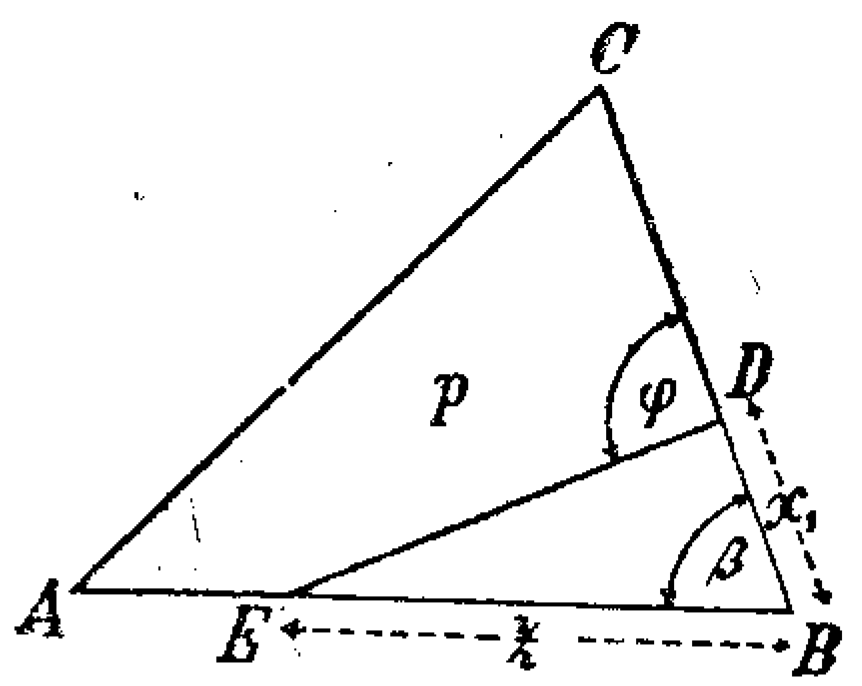
$$\frac{x}{y} = \frac{\sin(\gamma + \varphi)}{\sin\varphi} \text{ (према формули 83 у чл. 104.)}$$

налазимо одмах

$$x = \sqrt{\frac{2p\sin(\gamma+\varphi)}{\sin\varphi\sin\gamma}}, \quad y = \sqrt{\frac{2p\sin\varphi}{\sin(\gamma+\varphi)\sin\gamma}}.$$

1. *Напомена*. По себи се разуме да је горњи задатак могућ само онда кад је $\gamma+\varphi<180^0$ (в. троугао CDE), дакле $\varphi<180^0-\gamma$ и кад је p, тј. површина троугла CDE мања од површине задатог троугла ABC.

2. *Напомена*. Ако би се показало да је $y>AC$, онда би то значило да права DE не сече страну AC, него страну AB (в. сл. 72.) и ми бисмо имали да поступимо на следећи начин. Положај праве DE одредићемо комадима $BD=x_1$ и $BE=z$, а ове налазимо из једначина



Сл. 72.

$$P-p=\frac{1}{2}x_1 z \sin\beta,$$

$$\frac{x_1}{z}=\frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi},$$

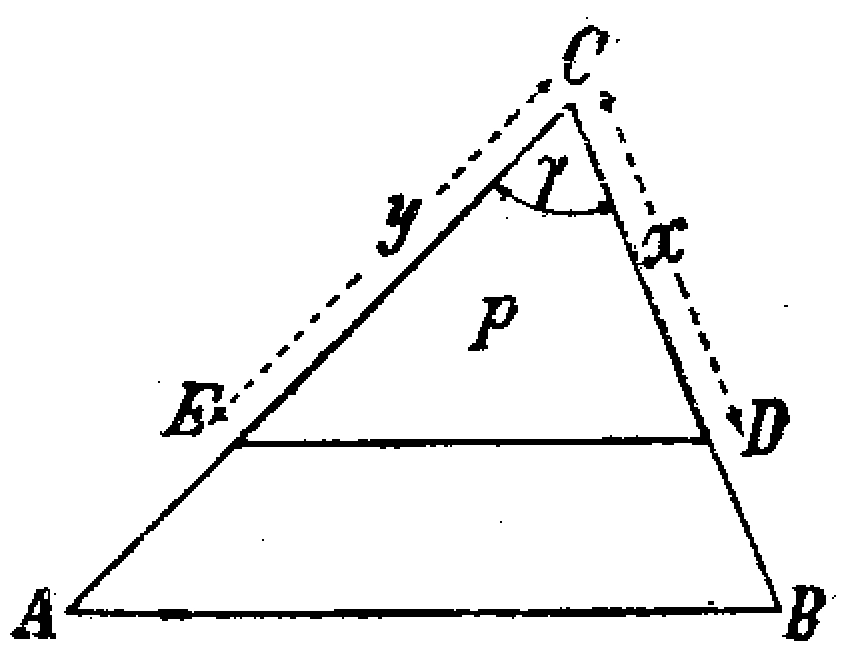
одакле

$$x_1=\sqrt{\frac{2(P-p)\sin(\varphi-\beta)}{\sin\beta\sin\varphi}},\quad z=\sqrt{\frac{2(P-p)\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\varphi-\beta)}}.$$

Овде је P површина задатог троугла ABC, p површина фигуре $ACDE$ коју треба, правом DE, одвојити од троугла ABC.

Тако исто поступили бисмо да је $x>BC$, тј. да права DE не сече страну BC.

3. *Напомена*. Ако је $\varphi=\beta$, тј. ако од задатога троугла ABC ваља одсећи троугао CDE задате површине p правом $DE \parallel AB$, онда имамо за x и y ове једначине



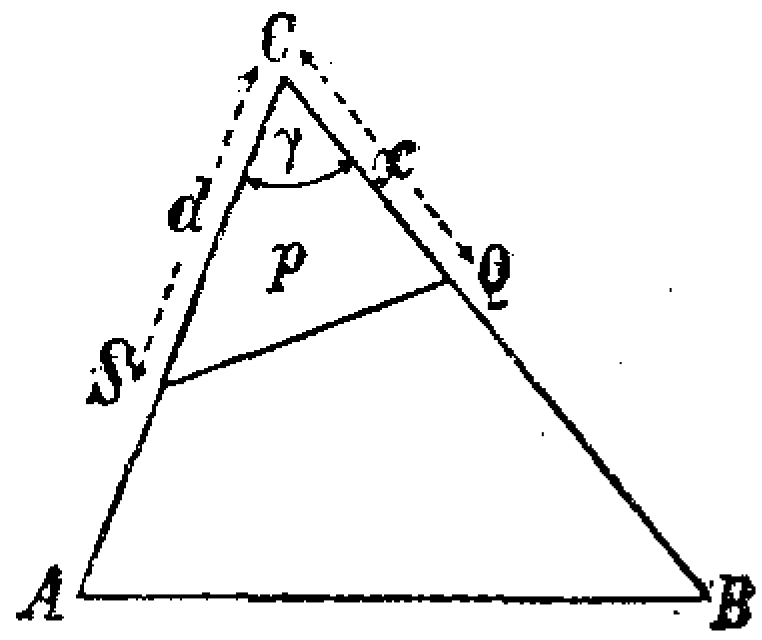
Сл. 73.

$$p=\frac{1}{2}x\,y\sin\gamma,\quad \frac{x}{y}=\frac{a}{b}.$$

(где је $a = BC$, $b = AC$), одакле

$$x = \sqrt{\frac{2pa}{b \sin \gamma}}, \quad y = \sqrt{\frac{2pb}{a \sin \gamma}}.$$

2. *Задатак*. Из тачке S, која се налази на страни AC троугла ABC, да се повуче права SQ тако да од троугла ABC одвоји троугао CSQ дате површине p.



Сл. 74.

Да бисмо одредили положај праве SQ (в. сл. 74.) довољно је ако израчунамо комад $CQ = x$. Њега, пак, добијамо из обрасца

$$x = \frac{1}{2} d\, x \sin \gamma,$$

одакле

$$x = \frac{2p}{d \sin \gamma}.$$

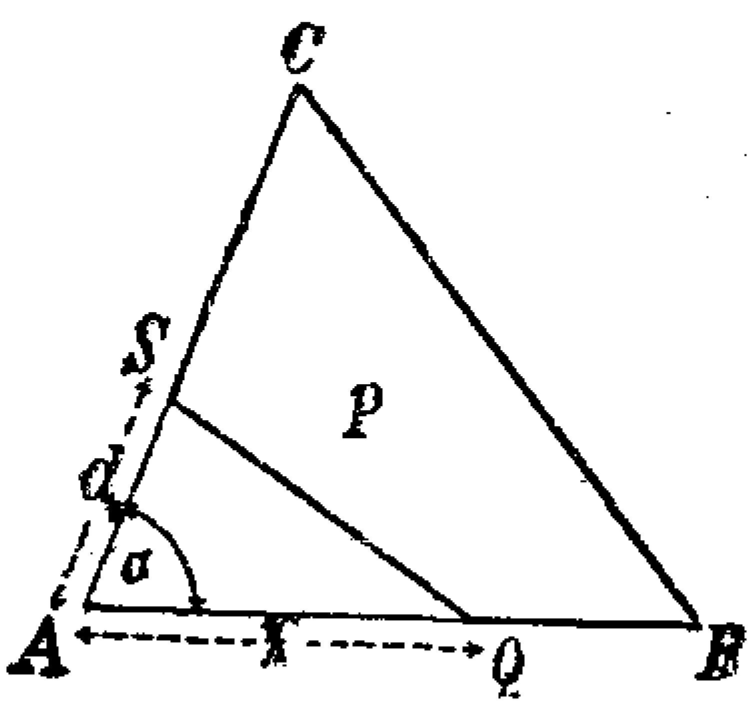
Овде је $d = CS$.

Напомена. На случај да је $x > BC$, права SQ не сече страну BC, него страну AB и у томе случају је

$$P - p = \frac{1}{2} d_1 z \sin \alpha,$$

одакле

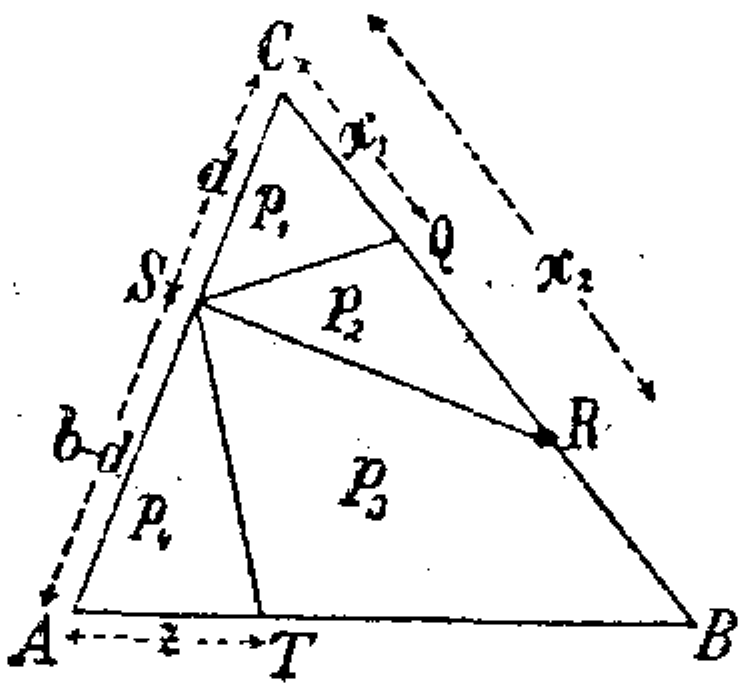
$$z = \frac{2(P-p)}{d_1 \sin \alpha}.$$



Сл. 75.

Овде је P површина троугла ABC, p површина фигуре $BCSQ$, коју од троугла ABC одсецамо правом SQ, $d_1 = AS$ одстојање задате тачке S од темена A, $z = AQ$ комад којим одређујемо положај праве SQ.

3. *Задатак*. Да се из једне тачке S, која се налази на страни AC троугла ABC у одстојању d од темена C, повуку праве SQ, SR и ST које ће задати троугао ABC разделити на четири дела $SCQ = p_1$, $SQR = p_2$, $SRT = p_3$, $STA = p_4$, тако да буде



Сл. 76.

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = k : l : m : n.$$

Ако означимо са P површину задатога троугла ABC, онда је према самоме задатку

$$p_1 = \frac{kP}{k+l+m+n}, \quad p_2 = \frac{lP}{k+l+m+n},$$

$$p_3 = \frac{mP}{k+l+m+n}, \quad p_4 = \frac{nP}{k+l+m+n}.$$

Образац 92 у чл. 111. показује да су површине два троугла који имају један угао једнак сразмерне производима из страна које тај угао заклапају. На тај начин, ако означимо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CQ = x_1$, $CR = x_2$, $AT = z$, $SC = d$, имамо следеће сразмере

$$P : p_1 = ab : dx_1$$

$$P : p_1 + p_2 = ab : dx_2$$

$$P : p_4 = bc : (b - d)z,$$

које с обзиром на горње вредности за p_1, p_2, p_3 и p_4, дају

$$x_1 = \frac{abp_1}{dP} = \frac{abk}{(k+l+m+n)d}$$

$$x_2 = \frac{a\,b\,(p_1 + p_2)}{d\,P} = \frac{a\,b\,(k + l)}{(k + l + m + n)\,d}$$

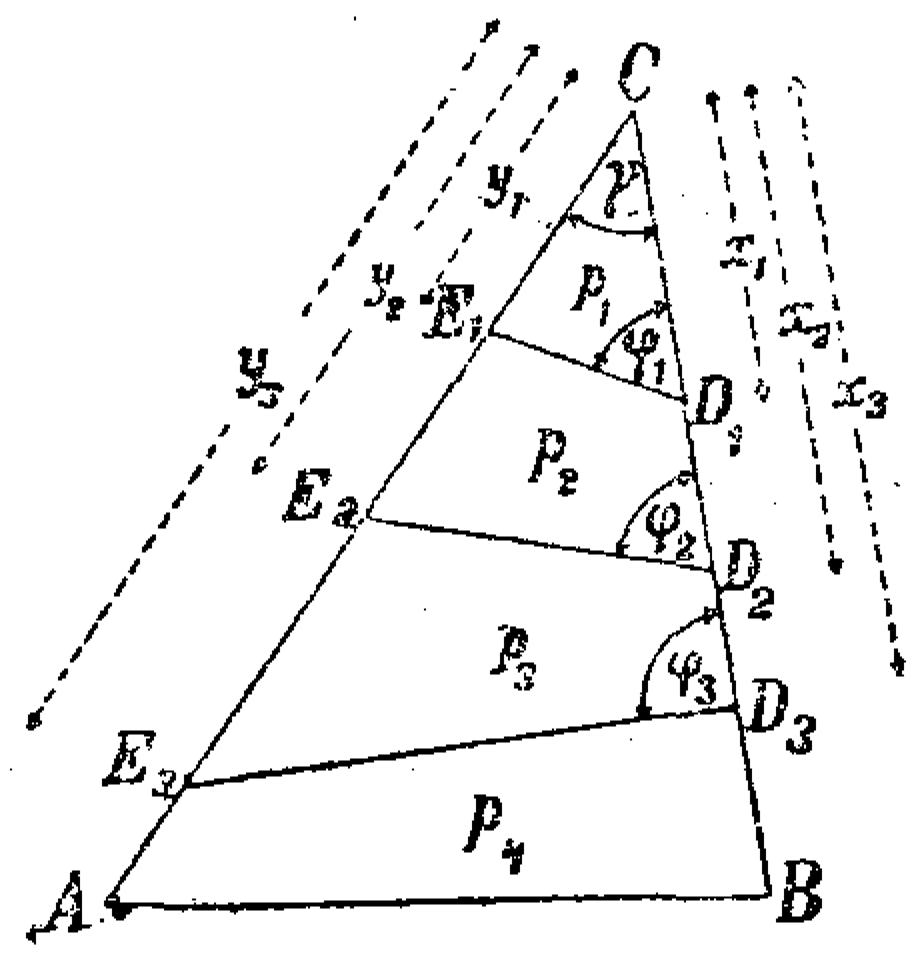
$$z = \frac{b\,c\,p}{(b - d)\,P} = \frac{b\,c\,n}{(k + l + m + n)\,(b - d)}.$$

Ове дужи x_1, x_2 и z одређују положај правих SQ, SR и ST и са тиме је задатак разрешен.

Напомена. При израчунавању дужи x_1, x_2 и z треба имати на уму оно што смо казали у 2. *Напомени* првога задатка

4. *Задатак.* Да се трима правама D_1E_1, D_2E_2 и D_3E_3, које страну BC троугла ABC секу под извесним задатим углима φ_1, φ_3 и φ_3, раздели троугао ABC на четири дела CD_1E_1, $D_1D_2E_1E_2$, $D_2D_3E_2E_3$, ABD_3E_3 чије ће површине образовати сразмеру

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = k : l : m : n.$$



Сл. 77.

Положај правих D_1E_1, D_2E_2 и D_3E_3 одредићемо одсечцима $CD_1 = x_1$, $CE_1 = y_1$, $CD_2 = x_2$, $CE_2 = y_2$, $CD_3 = x_3$, $CE_3 = y_3$, које оне чине на троугловим странама BC и AC.

Према постављеном задатку јесте

$$p_1 = \frac{k\,P}{k + l + m + n}, \quad p_2 = \frac{l\,P}{k + l + m + n},$$

$$p_3 = \frac{m\,P}{k + l + m + n}, \quad p_4 = \frac{n\,P}{k + l + m + n}.$$

где је P површина троугла ABC. На основу обра заца 93) у чл. 111. јесте

$$p_1 = \frac{x_1{}^2 \sin\gamma \sin\varphi_1}{2\sin(\gamma+\varphi_1)} = \frac{y_1{}^2 \sin\gamma \sin(\gamma+\varphi_1)}{2\sin\varphi_1}$$

$$p_1 + p_2 = \frac{x_2{}^2 \sin\gamma \sin\varphi_2}{2\sin(\gamma+\varphi_2)} = \frac{y_2{}^2 \sin\gamma \sin(\gamma+\varphi_2)}{2\sin\varphi_2}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{x_3{}^2 \sin\gamma \sin\varphi_3}{2\sin(\gamma+\varphi_3)} = \frac{y_3{}^2 \sin\gamma \sin(\gamma+\varphi_3)}{2\sin\varphi_3},$$

које, упоређено с горњим вредностима за p_1, p_2, p_3, даје једначине

$$\frac{kP}{k+l+m+n} = \frac{x_1{}^2 \sin\gamma \sin\varphi_1}{2\sin(\gamma+\varphi_1)} = \frac{y_1{}^2 \sin\gamma \sin(\gamma+\varphi_1)}{2\sin\varphi_1}$$

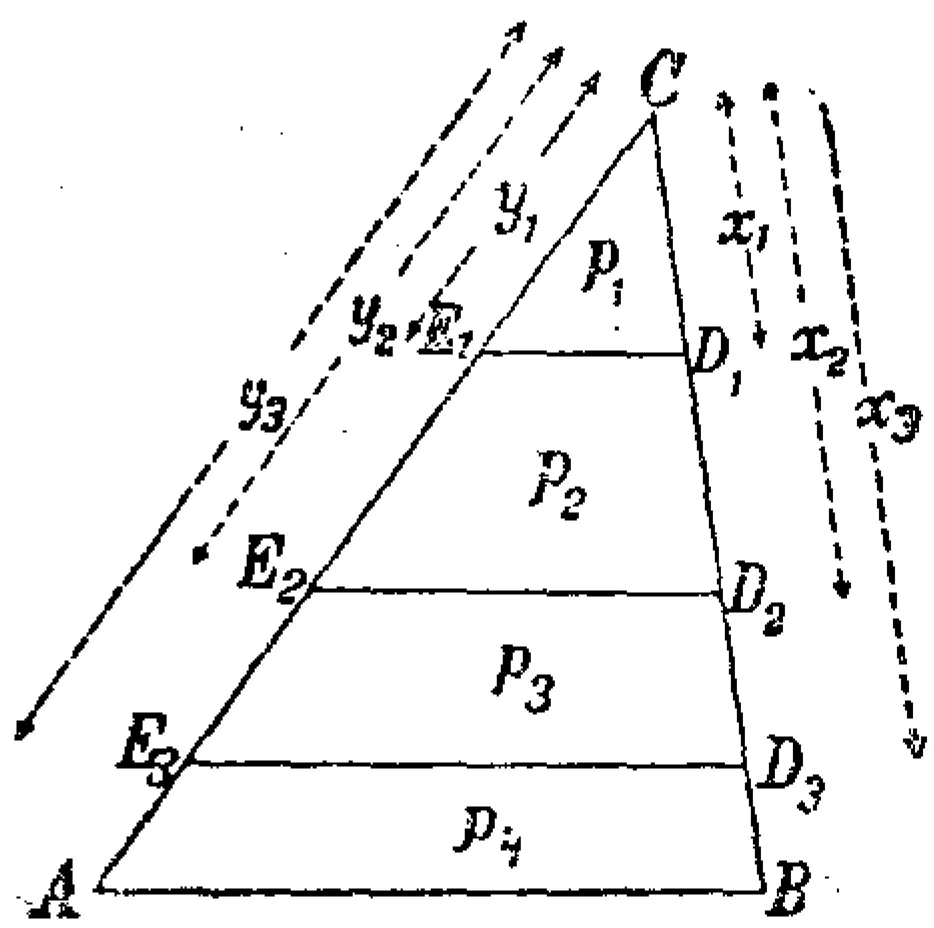
$$\frac{(k+l)P}{k+l+m+n} = \frac{x_2{}^2 \sin\gamma \sin\varphi_2}{2\sin(\gamma+\varphi_2)} = \frac{y_2{}^2 \sin\gamma \sin(\gamma+\varphi_2)}{2\sin\varphi_2}$$

$$\frac{(k+l+m)P}{k+l+m+n} = \frac{x_3{}^2 \sin\gamma \sin\varphi_3}{2\sin(\gamma+\varphi_3)} = \frac{y_3{}^2 \sin\gamma \sin(\gamma+\varphi_3)}{2\sin\varphi_3}$$

из којих се, на прост начин, могу да израчунају дужи x_1, y_1, x_2, y_2, и x_3, y_3.

1. *Напомена*. При израчунавању дужи x_1, y_1, x_2, y_2 и x_3, y_3 треба имати на уму оно што смо приметили у 2 *Напомени* првога задатка.

2. *Напомена*. Ако су праве D_1E_1, D_2E_2 и D_3E_3, које раздељују задати троугао ABC на четири дела, паралелне страни AB, у којем је



Сл. 78.

случају $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \beta$, онда имамо за израчунавање дужи x_1, y_1, x_2, y_2 и x_3, y_3 следеће једначине

$$p_1 = \frac{1}{2} x_1 y_1 \sin\gamma, \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{a}{b},$$

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{2} x_2 y_2 \sin\gamma, \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{a}{b},$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{2} x_3 y_3 \sin\gamma, \quad \frac{x_3}{y_3} = \frac{a}{b}.$$

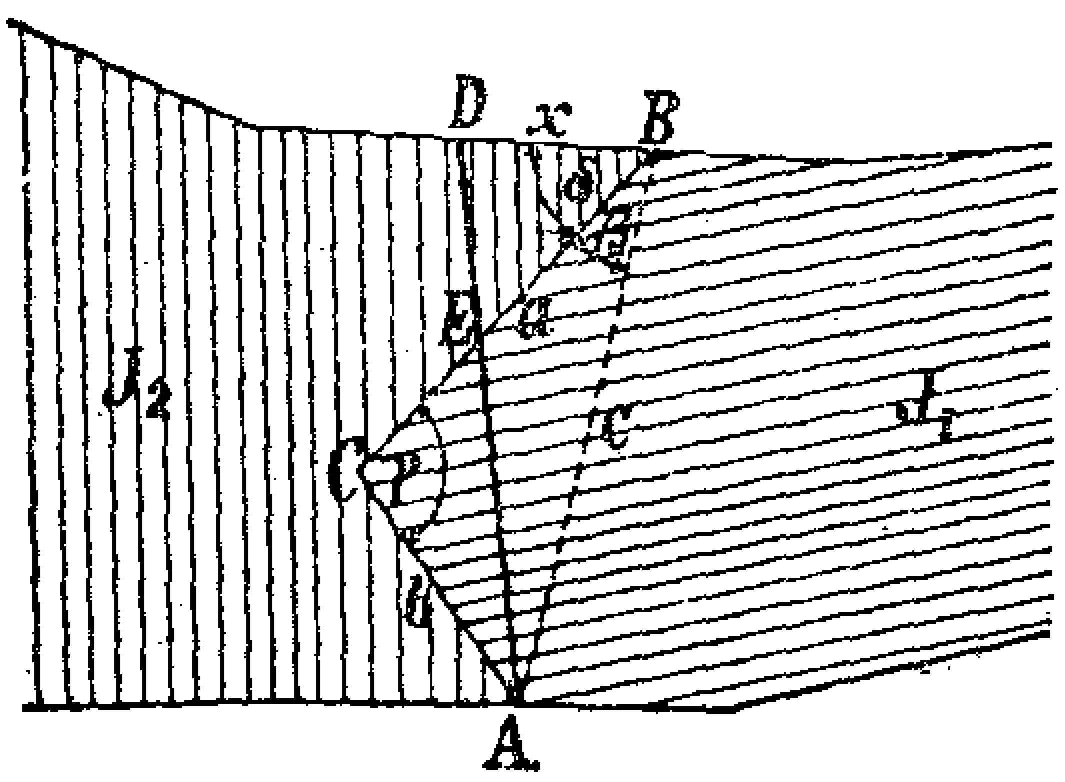
За површине p_1, p_2 и p_3 имамо оне исте изразе које и горе.

5. *Задатак.* Да бисмо један четвороугао разделили, под извесним условима, на два или више делова, ми ћемо његове две супротне стране продужити до пресека њиховог и, на тај начин, задати четвороугао, додавањем једног троугла, допунити до другог једног, већег, троугла. Према томе ће задати четвороугао бити раван разлици из два троугла. Пошто израчунамо онај додати троугао (а то је врло лако) ми смо, онда, свели овај задатак о раздељивању четвороуглова на један од прошлих задатака о деоењу троуглова.

Слично томе поступили бисмо и при деоењу ма каквог другог полигона.

135. **Исправљање граница.** — Нека је ACB граница која раздваја два имања J_1 и J_2, нпр. два поља, две ливаде итд. Захтева се да се граница ACB *исправи (ректификује)* из једне дате тачке, нпр. тачке A, то значи да се постојећа граница замени правом линијом AD тако да имања своју величину задрже.

Нека је граница ACB утврђена овим елементима: $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle CBD = \delta$. Положај нове границе AD одредићемо кад, из горе означених података, израчунамо дуж $BD = x$.



Сл. 79.

Нова граница AD има да се одреди тако како ће део ($\triangle ACE$), који се њоме одузима од поља J_1, а додаје пољу J_2, бити раван делу ($\triangle BED$) који се, тим ректификовањем, додаје пољу J_1, а одузима пољу J_2. Или, ако замислимо тачку A спојену са тачком B, дакле образован $\triangle ABC$, ректификација мора бити таква да је површина $\triangle ABC =$ површини $\triangle ABD$, тј.

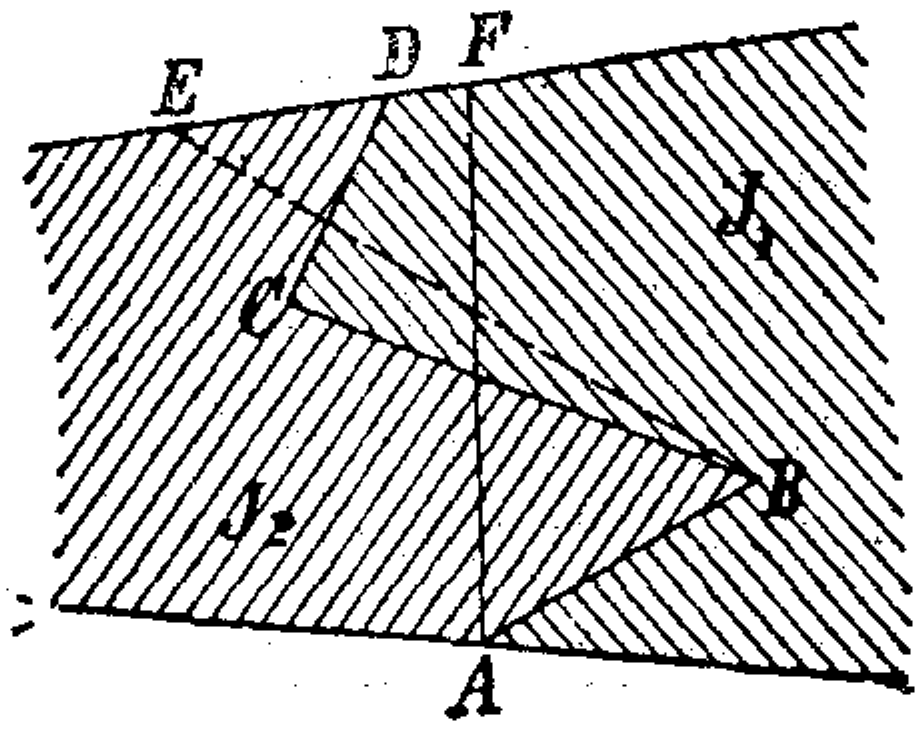
$$\frac{1}{2} a\, b \sin\gamma = \frac{1}{2} c\, x \sin(\beta + \delta),$$

одакле

$$x = \frac{a\, b \sin\gamma}{c \sin(\beta + \delta)}.$$

Овде су a, b, γ и δ непосредно измерени, c и β добијамо рачуном из троугла ABC у којем познајемо две стране a и b и захваћени угао γ.

Напомена. Ако је граница, коју треба исправити, састављена из више од два комада правих линија, онда се, према случају, има да понови горњи начин два или више пута. Узмимо нпр. да је граница два пута преломљена линија $ABCD$ и да је треба исправити из тачке A. Ми ћемо прво исправити разломљени део BCD из тачке B правом BE, на горе показати начин, после чега добијамо једанпута преломљену границу ABE, са којом ћемо тако исто поступити из тачке A и добити исправљену границу AF која замењује стару границу $ABCD$.



Сл. 80.

III

УТИЦАЈ ГРЕШАКА У ПОДАТЦИМА НА РАЧУНОМ ДОБИВЕНЕ РЕЗУЛТАТЕ.

1.

Општа посматрања.

136. **О мерењу и грешкама.** — Ми смо у *Уводу* већ напоменули да је главни задатак Тригонометрије израчунавање непознатих комада једне фигуре из познатих комада. У практичним применама оваквих тригонометриских задатака (као нпр. у Геодезији) познати комади фигуре добивају се *мерењем*. Међутим сви мерењем добивени податци навек су само приближни и не могу се, ни у којем случају, сматрати као апсолутно тачни. Узрок томе лежи у несавршености наших чула, којима опажамо, и инструментима, којима се при томе служимо, а после и у непознавању свију оних узрока који утичу, или могу утицати, на тачност мерења. Ми смо склони да једноме, мерењем добивеноме, податку поклонимо у толико више поверења и да му признамо у толико већи ступањ тачности у колико

више ценимо вештину и брижљивост посматрача као и квалитет инструмената са којима је он радио.

Код грешака, које се чине при свакоме мерењу, правимо разлику између *сталних* или *правилних* и *случајних* или *неизбежних грешака*. Сталне или правилне грешке јесу оне које се, под једнаким условима, јављају правилно, које зависе нпр. од извесних особина инструмената (њихове несавршености), од способности посматрачеве или најзад од извесних непознатих дејстава спољашних (физичких) околности и која у сличним приликама једнако и у истоме смислу утичу на тачност мерења. Под случајним или неизбежним грешкама разумемо такве грешке које се у једнаким приликама разно, по величини и по смислу (правцу), јављају и које се, према томе, не могу приписати једном извесном узроку.

Случајне грешке можемо да паралишемо (поништимо) кад једну исту количину измеримо под једнаким околностима (које у опште и према природи самога задатка могу бити од утицаја по тачност резултата) што више пута. Претпоставка да ће се у више пута, под истим околностима, поновљеноме мерењу једне исте количине њена вредност наћи толико исто пута већа колико и мања од њене праве вредности, тако је евидентна да се може узети као аксиома. Са теориског гледишта је заиста подједнако могуће да случајне грешке буду позитивне колико и да буду негативне[1]). Та претпоставка води нас логичноме закључку да се од једнога броја вредности, које су мерењем под истим околностима доби-

[1]) При мерењу углова је ово по себи јасно. При мерењу дужина, међутим, вероватније је да ће грешка бити позитивна него негативна, тј. више је вероватно да ће се измерена дуж наћи већа него мања од истин-

вене за извесну количину, њихова аритметична средина има сматрати као најпоузданија, јер највероватнија вредност мерене количине. Међутим ова, овако добивена, вредност није слободна од сталних грешака, пошто се утицај ових не може да поништи умножавањем измерених вредности. Ако су узроци константних грешака познати и њихов уплив на посматрану вредност може рачуном да се одреди, онда се може узети да такве грешке и не постоје, јер се дају кориговати у резултату на извесан начин. Но ако узроци сталних грешака нису познати или су такви да се немогу подвргнути рачуну, онда гледамо да њихов уплив смањимо на други начин, а то поглавито *методом мерења*. У таквоме случају ми мењамо (али без да очигледно погоршавамо) услове и околности за које знамо или имамо разлога да сумњамо, да проузрокују сталне грешке. Радећи тако ми сводимо правилне грешке на случајне, тј. ми чинимо да правилне грешке добију карактер случајних грешака и да се, на тај начин, подесним распоредом и методом мерења, све грешке могу подвргнути истим начелима.

Грана Математике, која нас учи како се из вредности добивених из више посматрања (која су учињена под једнаким или различним околностима) налази највероватнија вредност мерене количине, како се оцењује поузданост и ступањ тачности таквога резултата у исто време одређујући тачно и границе између којих се налази грешка која је при томе, може бити, учињена, — зове се *Метода Најмањих Квадрата*.

ске вредности. Узроци овоме јесу нпр. скретање од правога правца, недовољно затезање ланца којим се мери. Теориски, пак, јесу положне грешке и одречне грешке подједнако могуће и вероватне.

2.

Израчунавање грешака у резултатима из грешака у податцима.

137. **Извођење општих образаца.** По себи је јасно да кад податци нису безпогрешни немогу то бити ни количине које се из њих израчунавају. Остављајући на страну питање како се за количине добивене посматрањем, односно мерењем, одређују границе између којих морају лежати грешке које су, вероватно, учињене (питање које се, као што горе већ рекосмо, решава Методом Најмањих Квадрата), ми ћемо да проучимо начин како се одређује утицај грешака које су учињене при мерењу података на тачност оних резултата који се, рачунским путем, добивају из тих података. Другим речима: ми претпостављамо да су нам већ познате границе између којих се морају кретати грешке искуством (тј. мерењем) добивених података и питамо се за границе између којих, према томе, морају лежати грешке оних количина које су, из тих података, рачуном нађене.

Да бисмо на постављено питање могли одговорити нужно је да нађемо односе који постоје између грешака у податцима и грешака у резултатима; или говорећи језиком Алгебре: мораћемо да потражимо потребан број једначина које ће везивати грешке података са грешкама добивених резултата. Помоћу таквих једначина ми ћемо бити у стању да тачно одредимо утицај грешака међусобом сматравши грешке података као познате, а грешке резултата као непознате количине. Појмљиво је да начин који показује како зависе грешке појединих количина (које су међусобом везане каквом једначином) једна од друге мора зависити од начина како саме количине зависе једна од друге и, према томе је јасно, да једначине за одређивање грешака морају оснивати се на једначинама које су служиле за израчунавање резултата из посматраних количина.

При извођењу једначина за израчунавање грешака поћићемо од претпоставке да су грешке које су у мерењу учињене толико мале према измереннм количинама да се њихови производи и виши степени могу занемарити. Код грешака у угловима ми ћемо, следствено, заменити косинус грешке јединицом, а синус грешке луком који томе синусу одговара у кругу са полупречником 1. (Види 1. и 2. *Закључак* на крају чл. 31.).

Применимо ово наше опште посматрање на троугао, јер је то са тригонометриског гледишта од основног значаја. Нека су a, b, c стране, α, β, γ угли једнога троугла. Од ових шест комада јесу три (међу којима мора бити најмање једна страна) непосредно измерена, остала три рачуном добивена. Означимо са $\triangle a, \triangle b, \triangle c, \triangle \alpha, \triangle \beta$ и $\triangle \gamma$ грешке тих комада; онда су, дакле, њихове праве (тј. тачне), вредности $a + \triangle a$, $b + \triangle b$, $c + \triangle c$, $\alpha + \triangle \alpha$, $\beta + \triangle \beta$, $\gamma + \triangle \gamma$. Ови шест грешака морају бити везане трима једначинама како бисмо, помоћу њих из три задате грешке могли израчунати остале три грешке. Такве три једначине, за израчунавање грешака, можемо добити из ма која три основна обрасца, која служе за израчунавање самих комада троуглових, нпр. из образаца

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

или, што је једно исто, из

$$a) \quad \begin{cases} a \sin \beta = b \sin \alpha \\ b \sin \gamma = c \sin \beta \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^0 \end{cases}$$

или најзад из ма којих других образаца који се из наведених могу аналитичким путем да изведу.[1])

Обрасци a) важе како за тачне тако и за погрешне вредности комада троуглових, јер нам они служе за израчунавање непознатих елемената из погрешно измерених комада. Према томе постоје, поред једначина a), још и ове њима одговарајуће једначине

$$a_1) \begin{cases} (a + \triangle a) \sin (\beta + \triangle \beta) = (b + \triangle b) \sin (\alpha + \triangle \alpha) \\ (b + \triangle b) \sin (\gamma + \triangle \gamma) = (c + \triangle c) \sin (\beta + \triangle \beta) \\ \alpha + \triangle \alpha + \beta + \triangle \beta + \gamma + \triangle \gamma = 180^0. \end{cases}$$

На основу горе учињене примедбе, да се производи и виши степени грешака смеђу занемарити и да се синус угловне грешке може заменути одговарајућим луком, а косинус угловне грешке ставити $= 1$, тј. да се може ставити $\sin \triangle \alpha = arc \triangle \alpha$, $\cos \triangle \alpha = 1$ итд., једначине a_1) добивају вид

$$a \sin \beta + a \cos \beta \, arc \triangle \beta + \sin \beta \triangle a$$
$$= b \sin \alpha + b \cos \alpha \, arc \triangle \alpha + \sin \alpha \triangle b$$
$$b \sin \gamma + b \cos \gamma \, arc \triangle \gamma + \sin \gamma \triangle b$$
$$= c \sin \beta + c \cos \beta \, arc \triangle \beta + \sin \beta \triangle c$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \triangle \alpha + \triangle \beta + \triangle \gamma = 180^0.$$

[1]) В. чл. 110.

Из ових једначина и оних под *a)* следује одузимањем

$$\left.\begin{aligned} a\cos\beta\, arc\,\triangle\beta+\sin\beta\,\triangle a&=b\cos\alpha\, arc\,\triangle\alpha+\sin\alpha\,\triangle b\\ b\cos\gamma\, arc\,\triangle\gamma+\sin\gamma\,\triangle b&=c\cos\beta\, arc\,\triangle\beta+\sin\beta\,\triangle c\\ \triangle\alpha+\triangle\beta+\triangle\gamma&=0.\end{aligned}\right\}\quad (b$$

Ове једначине показују везу која постоји између грешака $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle c$, $\triangle\alpha$, $\triangle\beta$ и $\triangle\gamma$ тако да кад познајемо њих три, међу којима мора бити грешка бар једне стране, остале три можемо да израчунамо.

Прве две једначине под *b)* можемо да доведемо на други вид који је много подеснији за памтење. Из прве једначине *b)* следује

$$\sin\beta\,\triangle a-\sin\alpha\,\triangle b=b\cos\alpha\, arc\,\triangle\alpha-a\cos\beta\, arc\,\triangle\beta$$

или, кад поделимо целу једначину са $a\,b$,

$$\frac{\sin\beta}{b}\,\frac{\triangle a}{a}-\frac{\sin\alpha}{a}\,\frac{\triangle b}{b}=\frac{\cos\alpha}{a}\, arc\,\triangle\alpha-\frac{\cos\beta}{b}\, arc\,\triangle\beta.$$

Пошто је, на основу синусне теореме, $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$ равно некаквоме броју k, то онда можемо последњу једначину овако да напишемо

$$k\left\{\frac{\triangle a}{a}-\frac{\triangle b}{b}\right\}\frac{\cos\alpha}{a}\, arc\,\triangle\alpha-\frac{\cos\beta}{b}\, arc\,\triangle\beta$$

или

$$\frac{\triangle a}{a}-\frac{\triangle b}{b}=\frac{\cos\alpha}{k\,a}\, arc\,\triangle\alpha-\frac{\cos\beta}{k\,b}\, arc\,\triangle\beta,$$

а ово опет, имајући на уму да је $k\,a=\sin\alpha$, $k\,b=\sin\beta$,

$$\frac{\triangle a}{a} - \frac{\triangle b}{b} = \frac{arc \triangle \alpha}{tg \alpha} - \frac{arc \triangle \beta}{tg \beta}.$$

На исти начин изводимо из оне друге једначине под *b)*

$$\frac{\triangle b}{b} - \frac{\triangle c}{c} = \frac{arc \triangle \beta}{tg \beta} - \frac{arc \triangle \gamma}{tg \gamma}.$$

Овима двема придружује се, као последица, трећа њима слична једначина

$$\frac{\triangle c}{c} - \frac{\triangle a}{a} = \frac{arc \triangle \gamma}{tg \gamma} - \frac{arc \triangle \alpha}{tg \alpha}.$$

За израчунавање грешака имамо, дакле, следеће врло симетричне једначине

$$137) \quad \begin{cases} \dfrac{\triangle a}{a} - \dfrac{\triangle b}{b} = \dfrac{arc \triangle \alpha}{tg \alpha} - \dfrac{arc \triangle \beta}{tg \beta} \\[2ex] \dfrac{\triangle b}{b} - \dfrac{\triangle c}{c} = \dfrac{arc \triangle \beta}{tg \beta} - \dfrac{arc \triangle \gamma}{tg \gamma} \\[2ex] \dfrac{\triangle c}{c} - \dfrac{\triangle a}{a} = \dfrac{arc \triangle \gamma}{tg \gamma} - \dfrac{arc \triangle \alpha}{tg \alpha} \\[2ex] \triangle \alpha + \triangle \beta + \triangle \gamma = 0, \end{cases}$$

од којих су, разуме се, само три независне. Последњу једначину могли бисмо и овако да напишемо

$$arc \triangle \alpha + arc \triangle \beta + arc \triangle \gamma = 0.$$

1. *Напомена.* Ако имамо разлога да извесне троуглове елементе можемо сматрати као потпуно тачне, онда треба у формулама 137) да ставимо да су њихове грешке $= 0$ и добићемо, тако, знатно простије обрасце. Такав случај може да наступи кад је за страну или

за угао троугла, који разрешавамо, узета страна или угао једнога троугла, који је раније већ, било непосредним мерењем или рачуном, потпуно тачно одређен; или нпр. кад се унапред зна да је троугао, који разрешавамо, правоугао, у којем се случају грешка правога угла ставља $= 0$.

Пример. У првоме задатку чл. 130. имамо један правоугли троугао у којем је измерена страна a и угао γ, познат прави угао код B (угао β), а рачуном се изналази страна c.

Из треће једначине 137) следује

$$\frac{\triangle c}{c} = \frac{\triangle a}{a} - \frac{arc \triangle \alpha}{tg\, \alpha} + \frac{arc \triangle \gamma}{tg\, \gamma}$$

које се, услед тога што је у овој прилици $\alpha = 90^0 - \gamma$, дакле $tg\, \alpha = cotg\, \gamma$ и што је $\triangle \beta = 0$ и према томе (а на основу четврте једначине 137) $\triangle \alpha = - \triangle \gamma$, своди на овај знатно простији образац

$$\frac{\triangle c}{c} = \frac{\triangle a}{a} + (tg\, \gamma + cotg\, \gamma)\, arc \triangle \gamma$$

$$= \frac{\triangle a}{a} + \frac{2\, arc \triangle \gamma}{sin\, 2\gamma}.$$

Ми видимо, одавде, да ће грешка $\triangle c$ стране c (а то је израчуната висина вертикалног предмета AB, в. сл. 61.) бити најмања кад је $sin\, 2\gamma = 1$, тј. $\gamma = 45^0$. Најповољније околности, за решавање поменутог задатка, јесу, дакле, оне у којима је правоугли троугао ABC равнокрак. Измерена основица a треба, дакле, да је што приближнија висини предмета.

2. *Напомена.* Грешке, које се чине при мерењу, могу бити како положне тако и одречне и

пошто ми нисмо у стању да сазнамо ништа сигурно, односно знака учињених грешака, упутно је, при одређивању грешака у резултатима, израчунати њихове највеће вредности, које им могу припасти. Њих ћемо добити кад у једначинама, које будемо извели из основних образаца 137) за непосредно израчунавање непознатих грешака из познатих, узмемо на десној страни њиховој поједине чланове са онаквим знаком са каквим ће сви они постати положни и њихов збир, дакле, добити највећу вредност која је у опште могућа.

3. *Напомена*. Обрасци 137), као и сви они које помоћу њих добијамо, служе за израчунавање малих промена рачуном добивених комада, које су проузроковане извесним малим променама датих (измерених) комада.

Много брже долазимо до образаца 137) употребом Диференциалног Рачуна. Диференциалењем прве једначине *a*) добијамо

$$\sin\beta\, da + a\cos\beta\, d\beta = \sin\alpha\, d b + b\cos\alpha\, d\alpha,$$

одакле

$$a\sin\beta\left(\frac{d a}{a} + \frac{d\beta}{tg\,\beta}\right) = b\sin\alpha\left(\frac{d b}{b} + \frac{d\alpha}{tg\,\alpha}\right)$$

или најзад пошто је $a\sin\beta = b\sin\alpha$

$$\frac{d a}{a} + \frac{d\beta}{tg\,\beta} = \frac{d b}{b} + \frac{d\alpha}{tg\,\alpha}.$$

На исти начин даје друга једначина *a*)

$$\frac{d b}{b} + \frac{d\gamma}{tg\,\gamma} = \frac{d c}{c} + \frac{d\beta}{tg\,\beta}.$$

Трећа једначина *a*) даје непосредно

$$d\alpha + d\beta + d\gamma = 0.$$

3.

Четири основна случаја за троугао.

138. **Први случај.** — Нека су a, β и γ непосредно измерени комади једнога троугла, остали комади α, b и c рачуном нађени. Из погрешака $\triangle a$, $\triangle \beta$ и $\triangle \gamma$ датих комада да се одреде погрешке $\triangle \alpha$, $\triangle b$ и $\triangle c$ израчунатих комада.

Из четврте, прве и треће једн. 137 добијамо непосредно

$$\left.\begin{aligned}
&\triangle \alpha = -\triangle \beta - \triangle \gamma \text{ или } arc\,\triangle \alpha = -arc\,\triangle \beta - arc\,\triangle \gamma \\
&\triangle b = b\left\{\frac{\triangle a}{a} - \frac{arc\,\triangle \alpha}{tg\,\alpha} + \frac{arc\,\triangle \beta}{tg\,\beta}\right\} \\
&\triangle c = c\left\{\frac{\triangle a}{a} - \frac{arc\,\triangle \alpha}{tg\,\alpha} + \frac{arc\,\triangle \gamma}{tg\,\gamma}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (137a$$

Напомена. Последња два обрасца могли бисмо да напишемо

$$\frac{\triangle b}{b} = \frac{\triangle a}{a} - \frac{arc\,\triangle \alpha}{tg\,\alpha} + \frac{arc\,\triangle \beta}{tg\,\beta}$$

$$\frac{\triangle c}{c} = \frac{\triangle a}{a} - \frac{arc\,\triangle \alpha}{tg\,\alpha} + \frac{arc\,\triangle \gamma}{tg\,\gamma}.$$

У овим обрасцима за $\frac{\triangle b}{b}$ и $\frac{\triangle c}{c}$ грешке $\triangle b$ и $\triangle c$ изражене су у деловима дужи b и c, док су у горњим обрасцима поменуте грешке изражене у апсолутној мери (метру итд.).

Пример:

У једноме троуглу је измерено

$$a = 462{,}7\text{m},\ \beta = 53^0\,17'\,43'',\ \gamma = 67^0\,9'\,38'',$$

а рачуном нађено

$$\alpha = 59^0\,32'\,39'',\ b = 430{,}3\text{m},\ c = 494{,}7\text{m}^{1)}$$

Претпоставимо да грешка измерене стране a није већа од $\frac{1}{10\,000}$ дела њене дужине, а грешке измерених углова β и γ да нису веће од $1''$. Ставићемо дакле

$$\frac{\triangle a}{a} = 0{,}0001,\quad \triangle\beta = \triangle\gamma = 1''.$$

Према првоме обрасцу 137a), а с обзиром на 2. *Напомену* у чл. 137, следује као највећа вредност грешке угла α

$$\triangle\alpha = \triangle\beta + \triangle\gamma = 2''.$$

За грешке $\triangle b$ и $\triangle c$ имамо следећи рачун:

$$\log arc\, 2'' = \log \sin 2'' = 4{,}986\,6049 - 10^{2)}$$

$$\log tg\, 59^0\,32'\,39'' = 0{,}230\,6174$$

$$\log \frac{arc \triangle\alpha}{tg\,\alpha} = \log \frac{arc\, 2''}{tg\, 59^0\,32'\,39''} = 4{,}755\,9875 - 10$$

---

1) В. чл. 112.

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma) = 59^0\,32'\,39'';$$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} \qquad\qquad c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log a & = 2{,}665\,2995 & \log a & = 2{,}665\,2995 \\
\log \sin\beta & = 9{,}904\,0262 - 10 & \log \sin\gamma & = 9{,}964\,5406 - 10 \\
\log \sin\alpha & = 9{,}935\,5175 - 10 & \log \sin\alpha & = 9.935\,5175 - 10 \\
\hline
\log b & = 2{,}633\,8082 & \log c & = 2{,}694\,3226 \\
b & = 430{,}3\text{m} & c & = 494{,}7\text{m}
\end{array}$$

2) В. 1. *Закључак* у чл. 31. Тако нпр. грешка коју чинимо кад $\sin 10''$ заменимо са $arc\ 10''$ утиче тек на четрнајесто десетно место (в. чл. 32). Разуме се да је код горе учињене замене $arc\, 2'' = \sin 2''$ и $arc\, 1'' = \sin 1''$ грешка још далеко незнатнија.

$$\frac{arc \triangle \alpha}{tg \alpha} = 0{,}000\,0057,$$

$$log\, arc\, 1'' = log\, sin\, 1'' = 4{,}685\,5749 - 10$$

$$log\, tg\, 53^0\, 17'\, 43'' = 0{,}127\,5493$$

$$log \frac{arc \triangle \beta}{tg \beta} = log \frac{arc\, 1''}{tg\, 53^0\, 17'\, 43''} = 4{,}558\,0256 - 10$$

$$\frac{arc \triangle \beta}{tg \beta} = 0{,}000\,0036,$$

$$log\, arc\, 1'' = log\, sin\, 1'' = 4{,}685\,5749 - 10$$

$$log\, tg\, 67^0\, 9'\, 38'' = 0{,}375\,5409$$

$$log \frac{arc \triangle \gamma}{tg \gamma} = log \frac{arc\, 1''}{tg\, 67^0\, 9'\, 38''} = 4{,}310\,0340 - 10$$

$$\frac{arc \triangle \gamma}{tg \gamma} = 0{,}000\,0020.$$

Према овоме и с обзиром на 2. *Напомену* у чл. 137. имамо ове крајње вредности

$$\frac{\triangle b}{b} = 0{,}0001 + 0{,}000\,0057 + 0{,}000\,0036 = 0{,}000\,1093$$

$$\frac{\triangle c}{c} = 0{,}0001 + 0{,}000\,0057 + 0{,}000\,0020 = 0{,}000\,1077.$$

То значи, дакле, да рачуном добивене стране b и c могу, у најнеповољнијем случају, за нешто мало више од $\frac{1}{10\,000}$ њихове дужине бити погрешне, а израчунати угао α највише за $2''$.

У апсолутној мери јесу крајње вредности грешака $\triangle b$ и $\triangle c$ ове

$$\triangle b = b \cdot 0{,}000\,1093 = 0{,}047\text{m}$$
$$\triangle c = c \,.\, 0{,}000\,1077 = 0{,}053\text{m}.$$

Напомена. Ако бисмо имали да израчунамо *промене* комада b, c и α које одговарају горе назначеним променама комада a, β и γ, онда бисмо морали узети у рачун и дотичне алгебарске знаке појединих чланова у једн. 137a. У горњем примеру имали бисмо

$$\triangle \alpha = -1'' - 1'' = -2''$$

$$\frac{\triangle b}{b} = 0{,}0001 - 0{,}000\,0057 + 0{,}000\,0036 = 0{,}000\,0979$$

$$\frac{\triangle c}{c} = 0{,}0001 - 0{,}000\,0057 + 0{,}000\,0020 = 0{,}000\,0963$$

$$\triangle b = 0{,}042\text{m}, \ \triangle c = 0{,}048\text{m}.$$

139. **Други случај.** — Из непосредно измерених комада b, c и α израчунати су остали троуглови елементи β, γ и a. Да се из грешака $\triangle b$, $\triangle c$ и $\triangle \alpha$ израчунају грешке $\triangle \beta$, $\triangle \gamma$ и $\triangle a$.

С обзиром на четврту једн. 137), на основу које је

$$arc \triangle \gamma = -(arc \triangle \alpha + arc \triangle \beta),$$

другој од поменутих једначина можемо дати овај вид

$$\frac{\triangle b}{b} - \frac{\triangle c}{c} = (cotg\,\beta + cotg\,\gamma)\, arc \triangle \beta + cotg\,\gamma\, arc \triangle \alpha$$

$$= \frac{sin\,(\beta + \gamma)}{sin\,\beta\, sin\,\gamma}\, arc \triangle \beta + cotg\,\gamma\, arc \triangle \alpha$$

или, пошто је $sin\,(\beta + \gamma) = sin\,\alpha$,

$$\frac{\triangle b}{b} - \frac{\triangle c}{c} = \frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta\, sin\,\gamma}\, arc \triangle \beta + \frac{cos\,\gamma}{sin\,\gamma}\, arc \triangle \alpha$$

одакле

$$arc \triangle \beta =$$

$$\frac{sin\,\beta\, sin\,\gamma}{b \quad sin\,\alpha} \triangle b - \frac{sin\,\gamma\, sin\,\beta}{c \quad sin\,\alpha} \triangle c - \frac{cos\,\gamma\, sin\,\beta}{sin\,\alpha}\, arc \triangle \alpha.$$

Ако на десној страни ове једначине заменимо (на основу синусне теореме) у првоме члану: $\frac{sin\,\beta}{b}$

$=\frac{sin\,\alpha}{a}$, у другоме члану: $\frac{sin\,\gamma}{c}=\frac{sin\,\alpha}{a}$, а у трећем члану: $sin\,c=\frac{b\,sin\,\alpha}{a}$ добићемо, после учињених скраћења, следећи образац за израчунавање грешке $\triangle\beta$

$$arc\triangle\beta=\frac{sin\,\gamma}{a}\triangle b-\frac{sin\,\beta}{a}\triangle c-\frac{b\,cos\,\gamma}{a}arc\triangle\alpha.$$

На исти начин изводимо образац за израчунавање грешке $\triangle\gamma$

$$arc\triangle\gamma=\frac{sin\,\beta}{a}\triangle c-\frac{sin\,\gamma}{a}\triangle b-\frac{c\,cos\,\beta}{a}arc\triangle\alpha.$$

Да бисмо нашли образац за грешку $\triangle a$ ставићемо у прву једн. 137) за $arc\triangle\beta$ овде нађену вредност и добићемо

$$\frac{\triangle a}{a}=\frac{\triangle b}{b}+\frac{arc\triangle\alpha}{tg\,\alpha}-\frac{arc\triangle\beta}{tg\,\beta}$$

$$=\frac{\triangle b}{b}+\frac{arc\triangle\alpha}{tg\,\alpha}-\frac{cotg\,\beta\,sin\,\gamma}{a}\triangle b+\frac{cotg\,\beta\,sin\,\beta}{a}\triangle c+\frac{b\,cotg\,\beta\,cos\,\gamma}{a}arc\triangle\alpha$$

$$=\left(\frac{1}{b}-\frac{cos\,\beta\,sin\,\gamma}{a\,sin\,\beta}\right)\triangle b+\frac{cos\,\beta}{a}\triangle c+\left(\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}+\frac{b\,cos\,\beta\,cos\,\gamma}{a\,sin\,\beta}\right)arc\triangle\alpha$$

или, кад (на основу синусне теореме) ставимо на десној страни у првоме члану: $sin\,\gamma=\frac{c\,sin\,\beta}{b}$, у трећем члану: $\frac{1}{sin\,\alpha}=\frac{b}{a\,sin\,\beta}$ и доведемо на заједнички именитељ, овако

$$\frac{\triangle a}{a}=\frac{a-c\,cos\,\beta}{a\,b}\triangle b+\frac{cos\,\beta}{a}\triangle c+\frac{b(cos\,\alpha+cos\,\beta\,cos\,\gamma)}{a\,sin\,\beta}arc\triangle\alpha,$$

Ако сада на десној страни ове једначине заменимо у првоме члану: $a - c\cos\beta = b\cos\gamma$ (на основу пројекционе теореме), а у трећем члану: $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma) = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$ и извршимо сва скраћења добићемо образац за израчунавање грешке $\triangle a$

$$\triangle a = \cos\gamma \triangle b + \cos\beta \triangle c + b\sin\gamma \, arc \triangle \alpha.$$

За израчунавање грешака $\triangle\beta$, $\triangle\gamma$ и $\triangle a$ имамо дакле ове обрасце

$$137b)\left\{\begin{array}{l} arc \triangle\beta = \dfrac{\sin\gamma}{a}\triangle b - \dfrac{\sin\beta}{a}\triangle c - \dfrac{b\cos\gamma}{a} arc \triangle\alpha \\[2ex] arc \triangle\gamma = \dfrac{\sin\beta}{a}\triangle c - \dfrac{\sin\gamma}{a}\triangle b - \dfrac{c\cos\beta}{a} arc \triangle\alpha \\[2ex] \triangle a = \cos\gamma\triangle b + \cos\beta\triangle c + b\sin\gamma \, arc\triangle\alpha. \end{array}\right.$$

Напомена. Сабирањем прва два обрасца 137*b*) следује

$$arc\triangle\beta + arc\triangle\gamma = -\frac{b\cos\gamma + c\cos\beta}{a} arc\triangle\alpha,$$

одакле, услег тога што је $b\cos\gamma + c\cos\beta = a$ (на основу пројекционе теореме),

$$arc\triangle\beta + arc\triangle\gamma = -arc\triangle\alpha,$$

које потврђује да су горе добивени обрасци тачни.

140. **Трећи случај.** — Из грешака $\triangle a$, $\triangle b$ и $\triangle c$ непосредно измерених страна a, b, c одредити грешке $\triangle\alpha$, $\triangle\beta$ и $\triangle\gamma$ рачуном добивених углова α, β, γ.

Из прве две једначине 137):

$$\frac{\triangle a}{a}-\frac{\triangle b}{b}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,arc\,\triangle\alpha-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\,arc\,\triangle\beta$$

$$\frac{\triangle b}{b}-\frac{\triangle c}{c}=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\,arc\,\triangle\beta-\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\,arc\,\triangle\gamma,$$

од којих ову другу, с обзиром на то што је $arc\,\triangle\gamma = -arc\,\triangle\alpha - arc\,\triangle\beta$, $\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma=\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha$, можемо да напишемо

$$\frac{\triangle b}{b}-\frac{\triangle c}{c}=\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\,arc\,\triangle\alpha+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\,arc\,\triangle\beta$$

следују ове две једначине

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\,arc\,\triangle\beta=\frac{\triangle b}{b}-\frac{\triangle a}{a}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,arc\,\triangle\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\,arc\,\triangle\beta=\frac{\triangle b}{b}-\frac{\triangle c}{c}-\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\,arc\,\triangle\alpha,$$

одакле, кад помножимо прву једначину са $\sin\alpha$, другу са $\sin\gamma\cos\beta$ и затим одузмемо другу од прве, произилази

$$\frac{\triangle b}{b}(\sin\alpha-\sin\gamma\cos\beta)-\frac{\triangle a}{a}\sin\alpha$$

$$+\frac{\triangle c}{c}\sin\gamma\cos\beta+(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)\,arc\,\triangle\alpha=0.$$

Заменимо овде у првоме члану $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma$, а у последњем члану $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma)=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma$, па ћемо добити

$$\frac{\triangle b}{b}\sin\beta\cos\gamma-$$

$$\frac{\triangle a}{a} \sin\alpha + \frac{\triangle c}{c} \sin\gamma \cos\beta + \sin\beta \sin\gamma \, arc \triangle\alpha = 0,$$

одакле

$$arc \triangle\alpha = \frac{\triangle a}{a} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta \sin\gamma} - \frac{\triangle b}{b} \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} - \frac{\triangle c}{c} \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

или најзад, кад ставимо на десној страни у првоме члану $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$, а у трећем члану $c \sin\beta = b \sin\gamma$,

$$137c) \begin{cases} arc \triangle\alpha = \frac{\triangle a}{b \sin\gamma} - \frac{\triangle b \cdot \cos\gamma}{b \sin\gamma} - \frac{\triangle c \cdot \cos\beta}{b \sin\gamma}. \\ \text{Тако исто налазимо} \\ arc \triangle\beta = -\frac{\triangle a \cdot \cos\gamma}{c \sin\alpha} + \frac{\triangle b}{c \sin\alpha} - \frac{\triangle c \cdot \cos\alpha}{c \sin\alpha} \\ arc \triangle\gamma = -\frac{\triangle a \cdot \cos\beta}{a \sin\beta} - \frac{\triangle b \cdot \cos\alpha}{a \sin\beta} + \frac{\triangle c}{a \sin\beta}. \end{cases}$$

Место овога трећег обрасца могли бисмо, за израчунавање грешке $\triangle\gamma$, употребити четврту једн. 137)

$$arc \triangle\gamma = - arc \triangle\alpha - arc \triangle\beta.$$

Пример.

Измерене су стране једнога троугла

$a = 37\,214{,}6$, $b = 29\,863{,}9$, $c = 34\,712{,}7$,

а израчунати угли

$\alpha = 69^0\,55'\,5{,}32''$, $\beta = 48^0\,54'\,39{,}64''$, $\gamma = 61^0\,10'\,15{,}02''$[1])

---

1) В. чл. 114.

$s = 50\,895{,}6$	$\log s = 4{,}706\,6803$
$s - a = 13\,681$	$\log (s - a) = 4{,}136\,1178$
$s - b = 21\,031{,}7$	$\log (s - b) = 4{,}322\,8744$
$s - c = 16\,182{,}9$	$\log (s - c) = 4{,}209\,0563$

$$\log \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = 3{,}980\,6841$$

Нека су

$$\triangle a = 3{,}2,\quad \triangle b = 2{,}4,\quad \triangle c = 2{,}9$$

највеће вредности за грешке измерених страна. Да се нађе за колико највише могу бити погрешни рачуном добивени угли.

Према обрасцима 137c) имамо сладећи рачун:

$$\triangle a = 3{,}2$$

$$\log \triangle b = 0{,}380\,2112$$

$$\log \cos\gamma = 9{,}683\,2269 - 10$$

$$\log \triangle b \cdot \cos\gamma = 0{,}063\,4381 \qquad \triangle b \cdot \cos\gamma = 1{,}157\,279$$

$$\log \triangle c = 0.462\,3980$$

$$\log \cos\beta = 9{,}817\,7177 - 10$$

$$\log \triangle c \cdot \cos\beta = 0{,}280\,1157 \qquad \triangle c \cdot \cos\beta = 1{,}905\,968$$

$$\triangle a + \triangle b \cdot \cos\gamma + \triangle c \cdot \cos\beta = 6{,}263\,247$$

$$\log b = 4{,}475\,1465 \qquad \log(\triangle a + \triangle b \cdot \cos\gamma + \triangle c \cdot \cos\beta)$$

$$\log \sin\gamma = 9{,}942\,5345 - 10 \qquad = 0{,}796\,7995$$

$$\log b \sin\gamma = 4{,}417\,6810 \;\ldots\ldots\ldots\; = 4{,}417\,6810$$

$$\log \frac{\triangle a + \triangle b \cdot \cos\gamma + \triangle c \cdot \cos\beta}{b \sin\gamma} = 0{,}379\,1185 - 4$$

и према томе највећа вредност грешке угла α у лучној мери

$$arc \triangle \alpha = 0{,}000\,2394$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \qquad tg\frac{\beta}{2} = \frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\log tg\frac{\alpha}{2} = 9{,}844\,5663 - 10 \qquad \log tg\frac{\beta}{2} = 9{,}657\,8097 - 10$$

$$\alpha = 69^0\,55'\,5{,}32''; \qquad \beta = 48^0\,54'\,39{,}64'';$$

$$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\log tg\frac{\gamma}{2} = 9{,}771\,6278 - 10$$

$$\gamma = 61^0\,10'\,15{,}02''.$$

или, пошто је

$$\log \triangle \alpha = \log arc \triangle \alpha - \log \sin 1''$$ [1]

$$= 6{,}379\,1185 - 10 - (4{,}685\,5749 - 10) = 1{,}693\,5436,$$

у секундама

$$\triangle \alpha = 49{,}38''.$$

$$\begin{array}{rl} \log \triangle a = & 0{,}505\,1500 \\ \log \cos \gamma = & 9{,}683\,2269 - 10 \\ \hline \log \triangle a \cdot \cos \gamma = & 0{,}188\,3769 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \triangle a \cdot \cos \gamma = & 1{,}543\,039 \\ \triangle b = & 2{,}4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \triangle c = & 0{,}462\,3980 \\ \log \cos \alpha = & 9{,}535\,7526 - 10 \\ \hline \log \triangle c \cdot \cos \alpha = & 0{,}998\,1506 - 1 \end{array} \qquad \triangle c \cdot \cos \alpha = 0{,}995\,751$$

$$\triangle a \cdot \cos \gamma + \triangle b + \triangle c \cdot \cos \alpha = 4{,}938\,790$$

$$\begin{array}{rl} \log c = & 4{,}540\,4883 \\ \log \sin \alpha = & 9{,}972\,7595 - 10 \\ \hline \log c \sin \alpha = & 4{,}513\,2478 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \log(\triangle a \cdot \cos\gamma + \triangle b + \triangle c \cdot \cos \alpha) \\ \qquad = 0{,}693\,6205 \\ \qquad = 4{,}513\,2478 \end{array}$$

$$\log \frac{\triangle a \cdot \cos \gamma + \triangle b + \triangle c \cdot \cos \alpha}{c \sin \alpha} = 0.180\,3727 - 4$$

према томе највећа вредност грешке угла β у лучној мери

$$arc \triangle \beta = 0{,}000\,1515$$

или, пошто је

$$\log \triangle \beta = \log arc \triangle \beta - \log \sin 1''$$

$$= 6{,}180\,3727 - 10 - (4{,}685\,5749 - 10) = 1{,}494\,7978,$$

у секундама

$$\triangle \beta = 31{,}25''.$$

[1]) В. примедбу под 2) у чл. 132. на стр. 358.

$$\begin{array}{rlrl}
\log \triangle a &= 0{,}505\,1500 & & \\
\log \cos\beta &= 9{,}817\,7177 - 10 & & \\
\hline
\log \triangle a \cdot \cos\beta &= 0{,}322\,8677 & \triangle a \cdot \cos\beta &= 2{,}103\,138 \\
\log \triangle b &= 0{,}380\,2112 & & \\
\log \cos\alpha &= 9{,}535\,7526 - 10 & & \\
\hline
\log \triangle b \cdot \cos\alpha &= 0{,}915\,9638 - \ \ 1 & \triangle b \cdot \cos\alpha &= 0{,}824\,069 \\
 & & \triangle c &= 2{,}9
\end{array}$$

$$\triangle a \cdot \cos\beta + \triangle b \cdot \cos\alpha + \triangle c = 5{,}827\,207$$

$$\begin{array}{rll}
\log a &= 4{,}570\,7134 & \log(\triangle a \cdot \cos\beta + \triangle b \cdot \cos\alpha + \triangle c) \\
\log \sin\beta &= 9{,}877\,1925 - 10 & \qquad\qquad = 0{,}765\,4604 \\
\hline
\log a \sin\beta &= 4{,}447\,9059 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad\qquad = 4{,}447\,9059
\end{array}$$

$$\log \frac{\triangle a \cdot \cos\beta + \triangle b \cdot \cos\alpha + \triangle c}{a \sin\beta} = 0{,}317\,5545 - 4,$$

дакле, највећа вредност грешке за угао γ у лучној мери

$$arc \triangle \gamma = 0{,}000\,2078$$

или, пошто је

$$\log \triangle \gamma = \log arc \triangle \gamma - \log \sin 1''$$

$$= 6{,}317\,5545 - 10 - (4{,}685\,5749 - 10) = 1{,}631\,9796,$$

у угловној мери

$$\triangle \gamma = 42{,}85''.$$

Напомена. Ако би се захтевале *промене* углова, које одговарају горе назначеним променама $\triangle a$, $\triangle b$ и $\triangle c$ троуглових страна, онда бисмо имали — узев у рачун и алгебарске знаке појединих чланова у обрасцима 137c) — следеће вредности

$$arc \triangle \alpha = \frac{\triangle a - \triangle b \cdot \cos\gamma - \triangle c \cdot \cos\beta}{b \sin\gamma} = 0{,}000\,0052$$

$$arc\,\triangle\beta = \frac{-\triangle a\cdot\cos\gamma + \triangle b - \triangle c\cdot\cos\alpha}{c\sin\alpha} = -0{,}000\,0043$$

$$arc\,\triangle\gamma = \frac{-\triangle a\cdot\cos\beta - \triangle b\cdot\cos\alpha + \triangle c}{a\sin\beta} = -0{,}000\,0010$$

или у угловној мери

$$\triangle\alpha = 1{,}08'', \triangle\beta = -0{,}88'', \triangle\gamma = -0{,}20''.$$

Овоме као проба служи то да је $\triangle\alpha + \triangle\beta + \triangle\gamma = 0.$

141. **Четврти случај.** — Из грешака $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle\alpha$ измерених комада a, b, α да се одреде грешке $\triangle c$, $\triangle\beta$, $\triangle\gamma$ рачуном добивених комада c, β, γ.

Грешку угла β добијамо непосредно из прве једначине 137), кад је разрешимо по $\triangle\beta$

$$arc\,\triangle\beta = \left\{\frac{\triangle b}{b} - \frac{\triangle a}{a}\right\} tg\,\beta + \frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha}\,arc\,\triangle\alpha.$$

Грешку угла γ можемо такође из прве једначине 137) да израчунамо, кад у њој заменимо $arc\,\triangle\beta = -arc\,\triangle\alpha - arc\,\triangle\gamma$. На тај начин добијамо

$$\frac{\triangle a}{a} - \frac{\triangle b}{b} = (cotg\,\alpha + cotg\,\beta)\,arc\,\triangle\alpha + cotg\,\beta\,arc\,\triangle\gamma,$$

одакле, кад ставимо $cotg\,\alpha + cotg\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$,

$$arc\,\triangle\gamma = \left\{\frac{\triangle a}{a} - \frac{\triangle b}{b}\right\} tg\,\beta - \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}\,arc\,\triangle\alpha$$

или кад заменимо $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$ (на основу синусне теореме)

$$arc\,\triangle\gamma = \left\{\frac{\triangle a}{a} - \frac{\triangle b}{b}\right\} tg\,\beta - \frac{c}{a\cos\beta}\,arc\,\triangle\alpha.$$

Међутим ми можемо простије да нађемо грешку $\triangle\gamma$ на овај начин

$$arc\triangle\gamma = -arc\triangle\alpha - arc\triangle\beta,$$

пошто смо, претходно, већ израчунали грешку $\triangle\beta$.

Грешку $\triangle c$ добићемо помоћу треће једначине 137), кад у њој ставимо за $arc\triangle\gamma$ ону вредност коју смо горе нашли, дакле из једначине

$$\frac{\triangle c}{c} = \frac{\triangle a}{a} - \frac{arc\triangle\alpha}{tg\,\alpha}$$

$$+\left(\frac{\triangle a}{a} - \frac{\triangle b}{b}\right) tg\,\beta\, cotg\,\gamma - \frac{c\, cotg\,\gamma}{a\cos\beta} arc\triangle\alpha$$

$$= \frac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{tg\,\gamma}\frac{\triangle a}{a} - \frac{tg\,\beta}{tg\,\gamma}\frac{\triangle b}{b} - \left(cotg\,\alpha + \frac{c\, cotg\,\gamma}{a\cos\beta}\right) arc\triangle\alpha.$$

Да бисмо ову једначину довели на што могуће простији вид ставићемо на десној страни у првоме члану $tg\,\beta + tg\,\gamma = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$ а у трећем члану $\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ и добићемо

$$\frac{\triangle c}{c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma\, tg\,\gamma}\frac{\triangle a}{a} - \frac{\sin\beta\cos\gamma}{\cos\beta\sin\gamma}\frac{\triangle b}{b}$$

$$-\frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\cos\beta} arc\triangle\alpha$$

или, кад у последњем члану на десној страни заменимо $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$,

$$\triangle c = \frac{c\sin\alpha}{a\sin\gamma}\frac{\triangle a}{\cos\beta} - \frac{c\sin\beta}{b\sin\gamma}\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\triangle b - c\, tg\,\beta\, arc\triangle\alpha$$

или најзад, пошто је на десној страни $c \sin \alpha = a \sin \gamma$ $c \sin \beta = b \sin \gamma$, простије

$$\triangle c = \frac{\triangle a}{\cos \beta} - \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \triangle b - c \, tg \, \beta \, arc \triangle \alpha.$$

За израчунавање грешака имамо дакле, у овоме случају, следеће обрасце

$$137d) \begin{cases} arc \triangle \beta = \left\{ \frac{\triangle b}{b} - \frac{\triangle a}{a} \right\} tg \, \beta + \frac{tg \, \beta}{tg \alpha} arc \triangle \alpha \\ arc \triangle \gamma = \left\{ \frac{\triangle b}{b} - \frac{\triangle a}{a} \right\} tg \, \beta - \frac{c}{a \cos \beta} arc \triangle \alpha \\ \quad (\text{или} : arc \triangle \gamma = - arc \triangle \alpha - arc \triangle \beta) \\ \quad \triangle c = \frac{\triangle a}{\cos \beta} - \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \triangle b - c \, tg \, \beta \, arc \triangle \alpha. \end{cases}$$

ПЕТИ ДЕО

СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА.

I

ПОЈМОВИ ИЗ НАУКЕ О ЛОПТИ.

1.

О лопти.

142. **Дефиниција лопте.** — *Лопта* је једна површина чије су све тачке подједнако удаљене од једне извесне тачке: од такозваног *средишта* лопте. Оно стално одстојање ма које тачке на површини од средишта зове се *полупречник*, а дуж између двеју тачака на површини, кад дотичне тачке леже на једној правој која пролази кроз средиште, зове се *пречник* (= два пута полупречнику) лопте.

143. **Равни пресеци лопте.** — Пресек лопте са равни јесте увек круг. Ако раван пресека пролази кроз средиште, онда се такав пресек зове *главан* или *велики круг*. Сви велики кругови полове се узајамно и имају своје средиште у средишту лопте, а њихов је полупречник једнак полупречнику лопте. Равни

пресеци, чија раван не пролази кроз средиште лопте, јесу *споредни* или *мали кругови*. Њихови су полупречници мањи од полупречника лопте.

Тачке, у којима се секу два велика круга, а то су крајње тачке једнога пречника лопте, зову се *супротне тачке* (*Gegenpunkte*).

Кроз две тачке, које нису супротне тачке, на површини лопте пролази само један велики круг.[1]) Или другим речима: један велики круг је потпуно одређен његовим двема тачкама, ако ове нису супротне.

Кроз две супротне тачке пролазе безбројно много великих кругова.[2])

Две тачке на једноме великом кругу раздељују тај круг на два комада, од којих је један мањи, а други већи од половине великог круга. Онај мањи део нам означава *сферну дуж* (*sphärische Strecke*) коју ограничавају ове две тачке. Сферне дужи можемо да изразимо на два начина: угловном и дужном мером; угловном мером помоћу средишног угла, који одговара дотичној сферној дужи као извесноме делу једнога великог круга; дужном мером, пак, у виду дужине једнога кружног лука са познатим полупречником.

144. **Сферни угли.** — Под углом, који чине две секуће се криве линије, разумемо угао који чине њихове дирке у пресечној тачци. При таквоме начину схватања ми замишљамо да угао, који чине две криве

[1]) Очевидно, јер две тачке на површини (ако ове две тачке нису једна другој супротне) одређују се средиштем лопте, као трећом тачком, раван великог круга.

[2]) Две супротне тачке леже са средиштем лопте на једној правој линији и не одређују, према томе, никакву раван.

линије, образују она два бесконачно мала лучна елемента тих двеју кривих линија који су код саме тачке пресека. Сматрајући ова два бескрајно мала лучна елемента задатих линија као праволиниске елементе и продужујући их (пошто величина угла не зависи од дужине његових кракова) добијамо тангенте на дотичне криве линије у њиховој пресечној тачци.

Ова општа дефиниција за угао, који заклапају две секуће се криве линије, разуме се, да важи и за угао који чине међусобом кругови, односно кружни луци.

Замислимо две сферне дужи које полазе из једне исте тачке на површини лопте. Да бисмо добили угао, који те две сферне дужи заклапају, повућићемо дирке на њих у њиховој заједничкој тачци. Ако кроз сваку од ових тангената и средиште лопте положимо раван, онда ће се те две равни сећи по једноме пречнику, а површину лопте по двома великим круговима и образоваће један *клин (Keil)*, чији ће угао *(Flächenwinkel)* бити раван углу који чине оне две сферне дужи на површини лопте. Пресецимо ове две равни трећом равни, која пролази кроз средиште лопте, а стоји управно на оним двема. Та ће раван сећи површину лопте такође по једном великом кругу. Пресечне праве ове треће равни са првим двема образоваће један средишни угао који је = углу између тангената које су повучене на сферне дужи и који ће бити мерен сферном дужи трећег великог круга, која се налази између прва два велика круга. Према овоме је разумљиво како се сферни угао, тј. угао који захватају две сферне дужи, може да мери сферном дужи.

Сводећи, овим, сферне угле на равне угле, тј. на угле који се налазе у једној равни, појмљиво је да се све оне дефиниције из Планиметрије, које се односе на једнакост и неједнакост углова, на упоредне и унакрсне угле, као и сви они закључци, који се отуда изводе, могу непосредно пренети и на сферне угле.

Између осталога наведимо:

Два упоредна угла на лопти допуњује до 180°.

Два унакрсна угла на лопти јесу једнака.

Ако су два упоредна угла једнака, онда је сваки од њих прав угао (= 90°).

Краци правога сферног угла стоје *управно* један на другом. Сферне дужи, које су управне једна на другој (заклапају угао од 90°), зову се *сферне управне*.

У једној тачци сферне дужи може се подићи само једна сферна управна.

Из једне тачке на површини лопте може се спустити само једна сферна управна на једну задату сферну дуж.

Збир свију сферних углова око једне тачке на површини лопте јесте = 360°.

Итд. итд.

145. **Полови великих кругова.** — Кад на раван једнога великог круга подигнемо управну у средишту лопте, онда та управна продире површину лопте у двема тачкама, које се зову *полови* онога великог круга.

Сферне дужи, које полазе из пола, а свршавају се ма у којој тачци дотичног великог круга, стоје управно на великоме кругу и имају све једну исту дужину = четвртини великог круга. Таква се сферна дуж сове *сферни полупречник* (*sphärischer Halbmesser*) главног круга.

Ако, дакле, из ма које тачке на површини лопте опишемо круг са сферним полупречником добићемо велики круг, чији је пол у тачци из које смо описали тај круг. Обратно: да бисмо одредили полове за извесан велики круг описаћемо из две произвољне тачке тога круга два лука на површини лопте са сферним полупречником. Где се та два лука буду секла лежаће полови задатога великог круга.

Кад је пол једнога великог круга теме каквога сферног угла, онда се тај сферни угао мери оним комадом великог круга који се налази између кракова дотичног сферног угла.

146. **Сферне фигуре.** — Део површине лопте, који захватају два велика полукруга, зове се *сферни двоугао* (*sphärisches Zweieck*). Дотичие полукругове зовемо *стране*, а сферне угле, које они захватају, *угле* сферног двоугла. Сферни двоугао има, дакле, две (једнаке) стране (= великоме полукругу) и два (једнака) угла. Према томе да ли су угли сфернога двоугла мањи или већи од 180° сферни двоугао је мањи или већи од половине лопте.

Кад сферни двоугао пресечемо једним великим кругом, који не пролази кроз темена углова сферног двоугла, добијамо један *сферни троугао*. Сферни троугао постаје, дакле, пресецањем трију великих кругова на површини лопте. Комади великих кругова, који су ограничени њиховим пресечним тачкама, зову се *стране*, а сферни угли, које ти кругови међусобом чинн, *угли* сфернога троугла. Сферни троугли имају, дакле, као и равни троугли, три стране и три угла.

Сферни троугли чије су стране и угли мањи од 180° јесу мањи од половине целе лопте и леже, према томе, на једној половини лопте. Да је то заиста тако увериђемо се кад себи представимо сферни троугао, продужењем двеју троуглових страна до њиховог другог пресека, допуњен до сферног двоугла. А пошто је тако добивени двоугао (са углом мањим од 180°), према горе у почетку овога члана реченом, мањи од половине лопте, то је онда, још у јачој мери, исти случај са сферним троуглом.

Свака фигура на површини лопте, која постаје пресецањем више великих кругова, зове се *сферни полигон.* Према броју страна имамо сферне четвороугле, петоугле итд. Пошто се сваки сферни полигон, повлачењем диагоналних великих кругова, може да разложи на извесан број сферних троуглова (полигон од n страна на $n-2$ троугла), појмљиво је да управо главна задаћа Сферне Тригонометрије мора бити разрешавање сферних троуглова.

Из разлога што се разрешавање сферних троуглова са странама и углима већим од 180° може, на врло прост начин, да сведе на разрешавање сферних троуглова чије су стране и угли мањи од 180°, расматраћемо, у будуће, искључиво сферне троугле у којима су стране и угли мањи од 180°.

2.

О рогљевима.

147. **Како постају рогљеви.** — Кад се n равни секу по n правих линија, које се све у једну тачку стичу, онда оне образују један просторни облик, који зовемо *телесни рогаљ* (*Ecke*) или *просторни угао* (*körperlicher Winkel*). Према броју равни, односно броју правих линија по којима се оне секу, имамо *тро-*

стране телесне рогље (*dreikantige Ecken*, angles trièdres), *четворостране, петостране* итд.

Праве линије, по којима се секу поједине равни, зову се *ивице* (*Kanten*, arêtes), а угли, које оне заклапају, *ивични угли* (angles plans). Делови равних између две и две ивице зову се *стране* (*Seiten*, faces) рогљеве, а угли, које те равни међусобом чине, *телесни угли* (*Winkel*, angles dièdres). Тачку, у којој се секу стране и ивице, зовемо *теме* (*Scheitel*, sommet) или *врх* (*Spitze*) рогљев.

148. **Однос између тространог телесног рогља и сферног троугла.** — Један тространи телесни рогаљ (а такав нас, овде, искључиво и интересује) има, дакле, три ивице и три стране; три ивична и три телесна угла. Тространи телесни рогаљ можемо да добијемо кад темена једнога сферног троугла ABC (в. сл. 81.) спојимо са средиштем O лопте. Ивични угли тако добивеног тространог рогља $OABC$ једнаки су странама сфернога троугла:

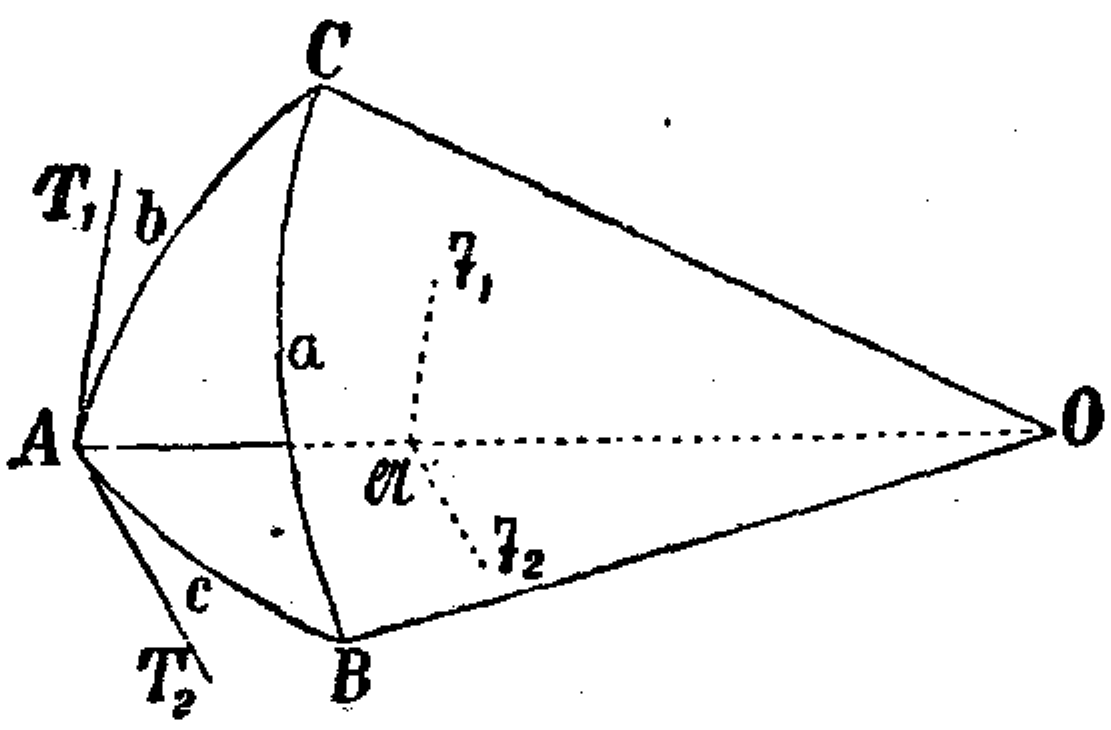
$$\sphericalangle BOC = a, \quad \sphericalangle COA = b, \quad \sphericalangle AOB = c;$$

телесни угли рогљеви равни су углима сфернога троугла:

$$\sphericalangle(AOB, COA) = A, \sphericalangle(AOB, BOC) = B, \sphericalangle(BOC, COA) = C.$$

Да су ивични угли рогљеви једнаки странама сфернога троугла јасно је по себи, јер ми знамо да се угли мере луцима (в. чл. 1.), а по себи се разуме да луци $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ имају своја средишта у лоптином средишту O.

Да су, међутим, телесни угли рогљеви равни углима сферног троугла разумећемо узевши на ум



Сл. 82.

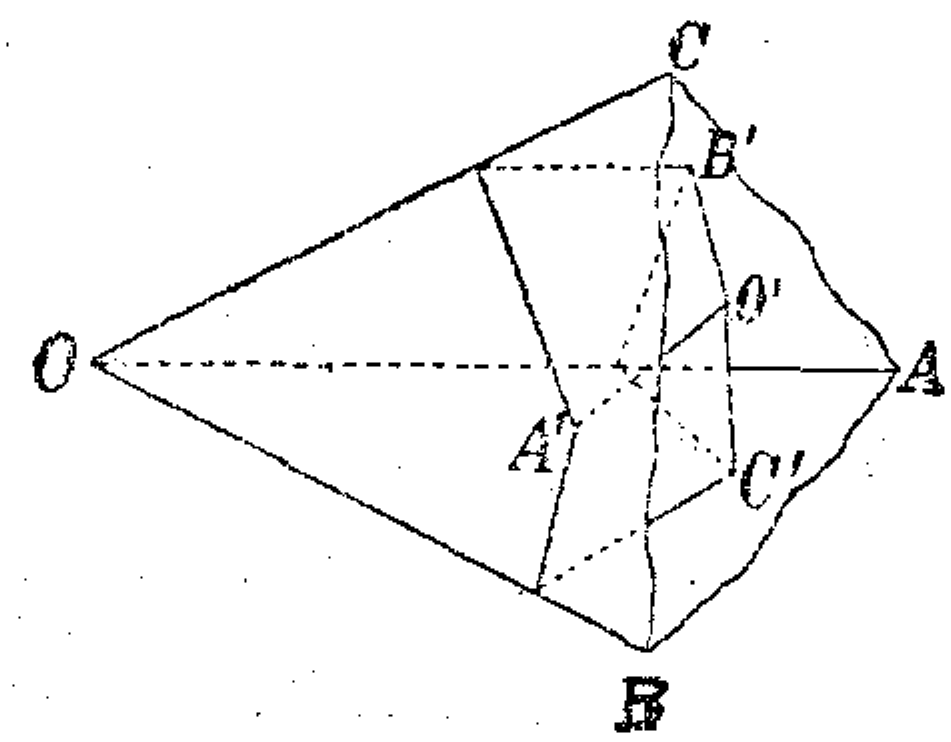
1. да угао који две равни (нпр. равни COA и AOB) чине јесте угао који заклапају две праве (овде нпр. праве $\mathfrak{A}\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{T}_2$) које стоје управно на пресеку тих равни (дакле на ивици OA), а налазе се у дотичним равнима (права $\mathfrak{A}\mathfrak{T}_1$ у равни COA, права $\mathfrak{A}\mathfrak{T}_2$ у равни AOB).

2. да под углом, који чине две секуће се криве линије (нпр. кружни луци AC и AB), треба разумети угао који чине њихове дирке (овде AT_1 и AT_2) у пресечној тачци (в. чл. 144.). Пошто је овда $AT_1 \perp OA$, а тако исто $AT_2 \perp OA$ и пошто AT_1 лежи у равни лука AC, дакле у равни COA, а дирка AT_2 у равни лука AB, тј. у равни AOB, следује $AT_1 \parallel \mathfrak{A}\mathfrak{T}_1$, $AT_2 \parallel \mathfrak{A}\mathfrak{T}_2$ и према томе $\sphericalangle T_1AT_2 = \mathfrak{T}_1\mathfrak{A}\mathfrak{T}_2$, тј. $A = \sphericalangle(AOB, COA)$.

Отуда, што свакоме сферном троуглу одговара један тространи телесни рогаљ, чији су ивични и телесни угли појединце једнаки странама, односно углима сфернога троугла, следује да обрасци и теореме, које важе за стране и угле сферних троуглова, морају важити и за ивичне и телесне угле тространих рогљева и обратно.

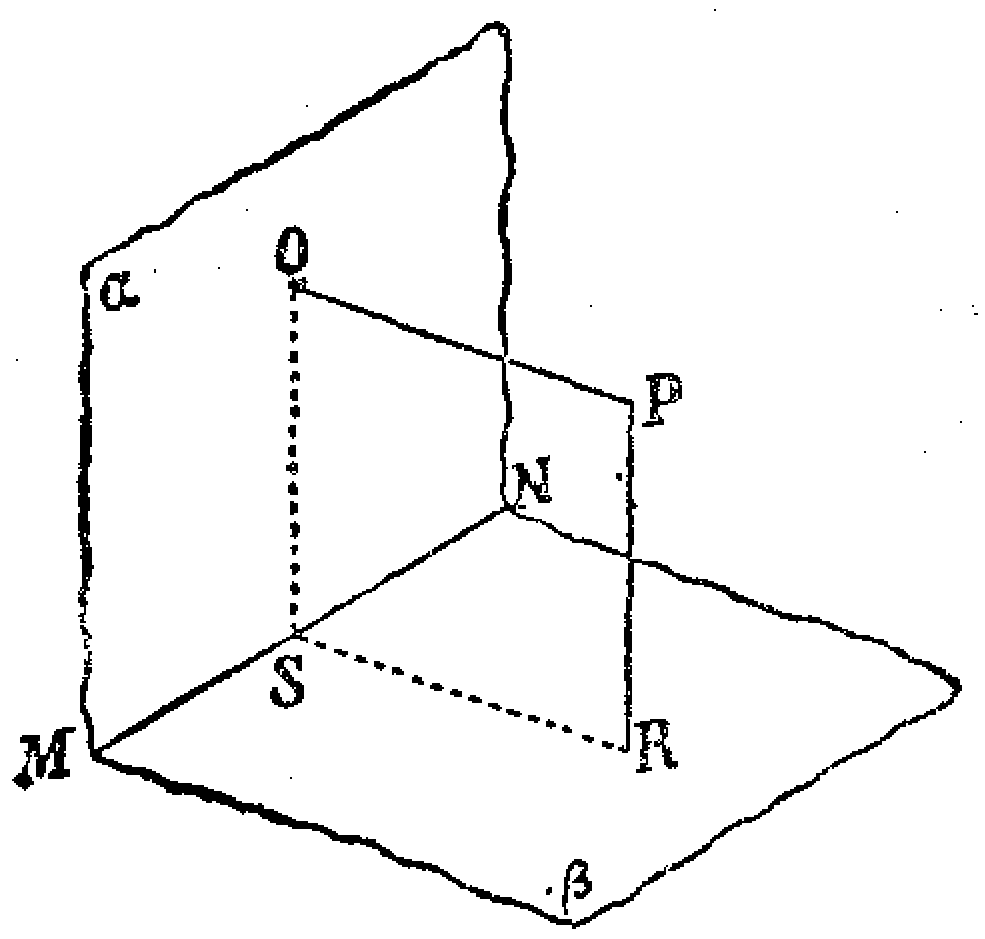
149. **Поларни рогљеви.** — Управне $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$ (в. сл. 82.), спуштене из произвољне тачке O' на стране (равни) OBC, OCA и OAB тространог те-

лесног рогља $OABC$, образују ивице једнога новог тространог телесног рогља $O'A'B'C'$, који има то својство да његови ивични угли допуњују телесне угле задатог рогља до 180^0, као што опет и ивични угли задатог рогља допуњују до 180^0 телесне угле новога рогља.



Сл. 82.

Да ивични угли новога рогља допуњују телесне угле старога рогља до 180^0 разумећемо кад узмемо у помоћ сл. 83. Кад из једне тачке P спустимо управне PQ и PR на две секуће се равни α и β и из тачака Q и R, у којима спуштене управне продиру дотичне равни, спустимо нормале QS и RS на пресек MN задатих равни добијамо један четвороугалник $PQRS$, у којем су угли код Q и код R равни 90^0. Отуда следује да је $\sphericalangle P + \sphericalangle S = 180^0$. Угао код S мери нагиб задатих равни, он је, дакле, телесни угао за те две равни; угао код P јесте ивични угао рогља који би имао своје теме у тој тачци P.



Сл. 83.

Пошто рогаљ $OABC$ (в. сл. 82.) стоји према рогљу $O'A'B'C'$ у истоме односу у коме је и овај последњи према првоме, тј. отуда што је однос између рогљева $OABC$ и $O'A'B'C'$ потпуно узајаман (реципрочан), јер се може замислити да рогаљ $OABC$ постаје из рогља $O'A'B'C'$ онако исто као што је постао рогаљ $O'A'B'C'$ из рогља $OABC$, — појмљиво је да ивични угли задатог рогља $OABC$ морају допуњавати до 180^0 телесне угле рогља $O'A'B'C'$.

Оваква два рогља, код којих ивични и телесни угли једнога допуњују телесне, односно ивичне угле другога до 180^0, зову се *суплементни* или *реципрочни рогљеви*.

Пошто је избор тачке O' потпуно произвољан, то онда можемо тачку O' узети и у самоме темену O задатога рогља. И ако, онда, у темену O задатога рогља подигнемо управне OA', OB' и OC' на његове стране BOC, COA и AOB добићемо суплементни рогаљ $OA'B'C'$. Таквим двома суплементним рогљима одговарају на лопти два суплементна троугла ABC и $A'B'C'$, чије стране и угли стоје у истом односу у коме су ивични и телесни угли дотичних рогљева. Ако означимо са a, b, c стране са A, B, C угле сфернога троугла ABC; са a',b',c' стране, са A', B', C' угле суплементног сферног троугла $A'B'C'$, онда постоје између тих комада следећи односи:

$$138)\quad \begin{cases} A+a'=180^0 & \text{или} \quad a'=180^0-A \\ B+b'=180^0 & \text{„} \quad b'=180^0-B \\ C+c'=180^0 & \text{„} \quad c'=180^0-C \\ a+A'=180^0 & \text{„} \quad A'=180^0-a \\ b+B'=180^0 & \text{„} \quad B'=180^0-b \\ c+C'=180^0 & \text{„} \quad C'=180^0-c. \end{cases}$$

Из саме конструкције, на основу које добијамо суплементне сферне троугле, јасно је да су темена једнога троугла (темена A', B', C') полови за стране онога другог троугла (стране $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$) и обратно. Из тога разлога зову се суплементни сферни троугли још и *поларни* сферни троугли.

150. **Тeoреме.** — *Теорема.* Кад су једнаке две стране (тј. два ивична угла) једнога тространог телесног рогља[1]), онда су једнаки и (телесни) угли који су супротни тим странама.

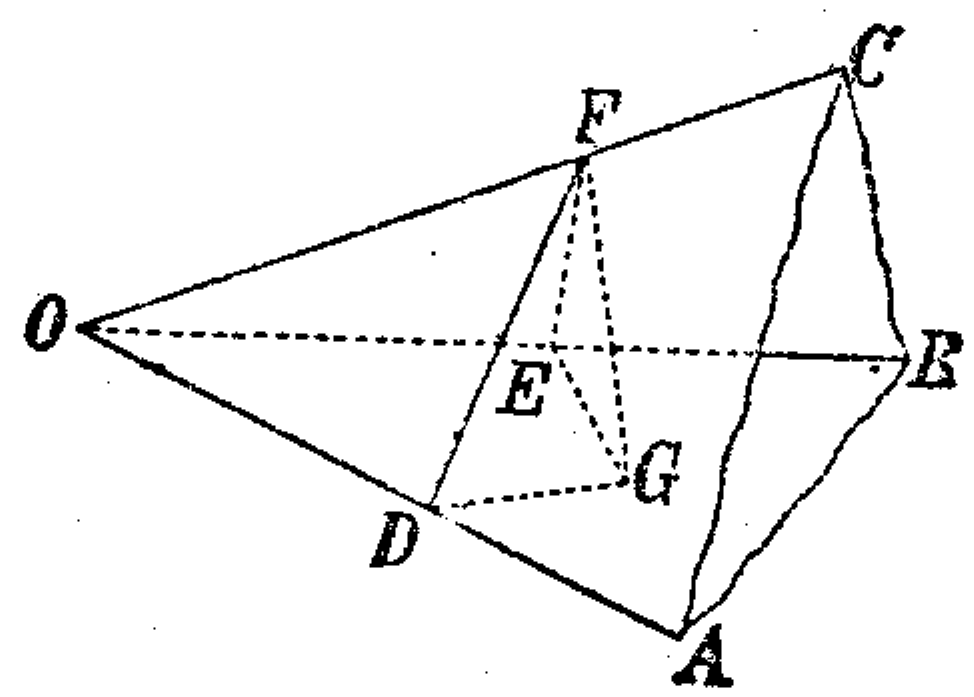
Доказ. Претпоставимо, дакле, да је (в. сл. 84).

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC.$$

Положимо кроз ма коју тачку F на ивици OC две равни управно на ивице OA и OB тако да је

$$DFG \perp OA,\ EFG \perp OB.$$

Те две равни DFG и EFG стоје управно на рогљевој страни AOB и секу се по правој FG, која је такође $\perp AOB$.



Сл. 84.

Отуда, што је

$$OF = OF$$

$$\sphericalangle DOF = \sphericalangle EOF$$

$$\sphericalangle ODF = \sphericalangle OEF = 90^0,$$

следује

$$\triangle ODF \cong \triangle OEF,$$

дакле

$$DF = EF.$$

На основу овога, што је

$$DF = EF$$

и

$$FG = FG$$

$$\sphericalangle DGF = \sphericalangle EGF = 90^0,$$

видимо да је

$$\triangle DGF \cong \triangle EGF,$$

[1]) Рогаљ, чије су две стране једнаке, зовемо *равнокрак*.

дакле

$\sphericalangle FDG = \sphericalangle FEG$ или $\sphericalangle(AOB, AOC) = \sphericalangle(AOB, BOC)$ q. e. d.

1. *Закључак*. Ако су једнаке све три стране (сва три ивична угла) једнога тространог телесног рогља[1]), онда су једнака и његова сва три (телесна) угла.

2. *Закључак*. Ако су два ивична угла тространог рогља права ($= 90^0$), онда су и супротни телесни угли прави ($= 90^0$).

2. *Теорема*. Кад су у једноме тространом телесном рогљу једнака два телесна угла, онда су једнаки и ивични угли (стране рогљеве) који су супротни тим углима.

1. Доказ. Претпоставимо, дакле, да је (в. сл. 84.)

$$\sphericalangle(AOB, AOC) = \sphericalangle(AOB, BOC).$$

Положићемо кроз ма коју тачку F на ивици OC две равни управне на ивицама OA и OB:

$$DFG \perp OA, \; EFG \perp OB.$$

Ове равни DFG и EFG стоје управно на рогљевој страни AOB, а тако исто је и њихова пресечна права $FG \perp AOB$.

Отуда, што је

$$FG = FG$$
$$\sphericalangle DGF = \sphericalangle EGF = 90^0$$
$$\sphericalangle FDG = \sphericalangle FEG$$

(ово последње на основу учињене претпоставке и имавши на уму да је $\sphericalangle FDG = \sphericalangle(AOB, AOC)$, $\sphericalangle FEG = \sphericalangle(AOB, BOC)$), следује

1) Такав рогаљ зовемо *равностран*.

$$\triangle DFG \cong \triangle EFG,$$

дакле

$$DF = EF,$$

а на основу овога и тога што је

$$OF = OF$$

$$\sphericalangle ODF = \sphericalangle OEF = 90^0$$

следује даље

$$\triangle ODF \cong \triangle OEF$$

и према томе

$$\sphericalangle DOF = \sphericalangle EOF, \text{ тј. } \sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC \quad \text{q. e. d.}$$

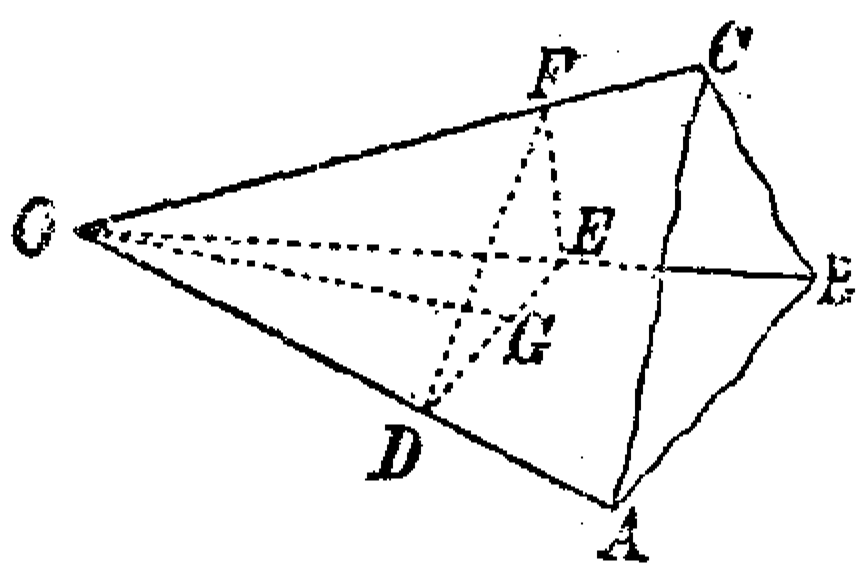
2. Доказ. Замислимо задатоме рогљу, у којем су једнака два телесна угла, конструисан поларни рогаљ. У томе рогљу, према горе у чл. 149. утврђеним односима између поларних рогљева, биће једнака два ивична угла, а пошто овима (на основу прошле теореме) одговарају два једнака супротна телесна угла, то онда (опет према чл. 149) морају бити једнака она два ивична угла која су код задатог рогља супротна оним двома једнаким телесним углима.

1. *Закључак.* Кад су код једног тространог телесног рогља сва три телесна угла једнака, онда су, тако исто, и његова сва три ивична угла једнака, тј. његове све три стране.

2. *Закључак.* Ако су два телесна угла рогљева права ($= 90^0$), онда су и супротни ивични угли прави ($= 90^0$).

3. *Теорема.* У свакоме тространом телесном рогљу јесте збир двеју страна (тј. збир два ивична угла) већи од треће стране (трећега ивичног угла).

Доказ. Узмимо да је ивични угао AOB највећи од сва три, тј.



Сл. 85.

$$AOC < AOB > BOC.$$

Доказаћемо да је при свему томе

$$AOB < AOC + BOC$$[1].

Спојимо ма коју тачку D на ивици OA са ма којом тачком E на ивици OB, тј. повуцимо DE. Пренесимо ивични угао AOC на раван AOB, тј. начинимо да буде $\sphericalangle DOG = \sphericalangle AOC$ и начинимо да је $OF = OG$. Вежимо још тачку F са тачком D и тачком E.

Из слике читамо да је

$$DF + EF > DE$$

или

$$DF + EF > DG + GE$$

или најзад, пошто је

$$DF = DG$$

(услед подударности троуглова ODF и ODG, јер је $OD = OD$, $OF = OG$, $\sphericalangle DOF = \sphericalangle DOG$),

$$EF > GE.$$

У троуглима OEF и OEG јесте дакле

$$OE = OE,\ OF = OG,\ EF > GE$$

и према томе

$$\sphericalangle EOF > \sphericalangle EOG,$$

---

[1]) Ако су ивични угли једнаки, онда се по себи разуме да је збир двају већи од трећег.

одакле, кад додамо лево и десно

$$\sphericalangle DOF = \sphericalangle DOG,$$

следује

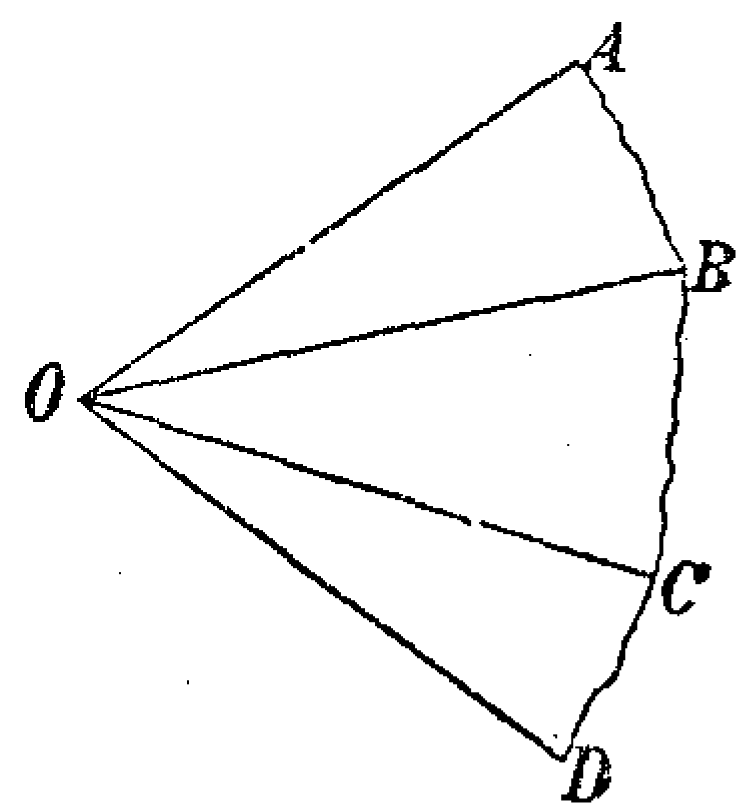
$$\sphericalangle DOF + \sphericalangle EOF > \sphericalangle DOG + \sphericalangle EOG,$$

тј.

$$AOC + BOC > AOB$$

q. e. d.

Напомена. Модел једнога тространог телесног рогља можемо да начинимо од хартије на врло прост начин. Повуцимо из тачке O четири зрака OA, OB OC и OD и исецимо хартију по OA и OD. Превимо, у истоме смислу, тако добивени комад хартије дуж OB и OC, тада ће се обртањем стране AOB око OB, стране COD око OC поклопити ивица OD са ивицом OA, ако буде



Сл. 86.

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD > \sphericalangle BOC.$$

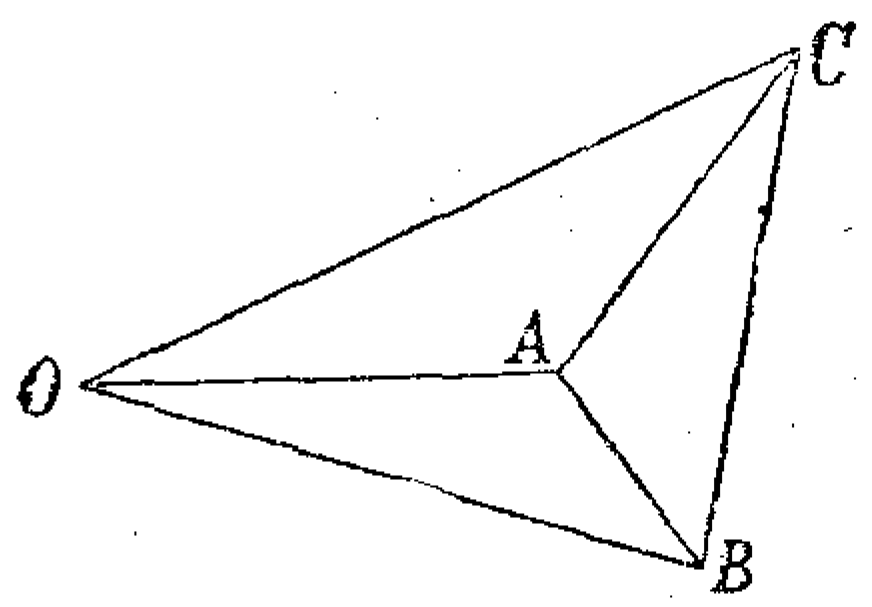
Ово можемо сматрати као очигледан доказ горње теореме.

4. *Теорема.* У свакоме тространом телесном рогљу јесте збир сва три ивична угла (тј. збир страна) мањи од четири права угла (360^0).

Доказ. Нека је $OABC$ један тространи телесни рогаљ. Пресецимо ивице његове једном произвољном равни ABC. На тај начин постају (осим задатога рогља $OABC$) још три тространа телесна рогља

$$AOBC, \; BOAC \; COAB.$$

Примењујући на њих горњу (3.) теорему следује



$$OAC + OAB > BAC$$
$$OBA + OBC > CBA$$
$$OCB + OCA > ACB,$$

дакле, пошто је

Сл. 87.

$$BAC + CBA + ACB = 180^0,$$

$$OAC + OAB + OBA + OBC + OCB + OCA > 180^0$$

или, кад на левој страни ове неравности заменимо

$$OAC + OCA = 180^0 - AOC$$
$$OAB + OBA = 180^0 - AOB$$
$$OBC + OCB = 180^0 - BOC$$

добићемо

$$3 \cdot 180^0 - (AOC + AOB + BOC) > 180^0,$$

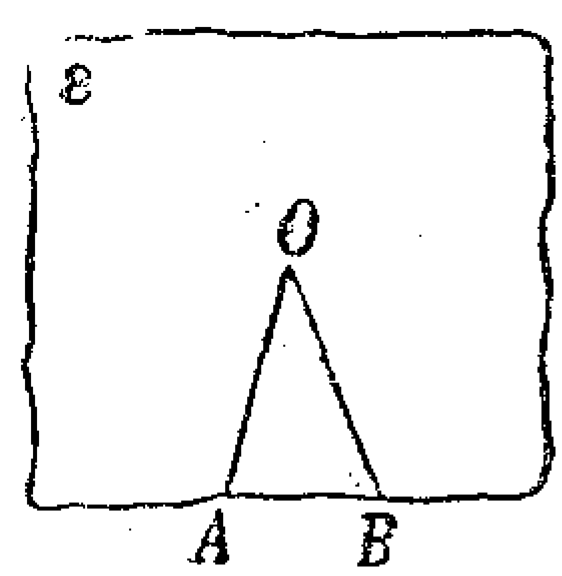
одакле

$$AOC + AOB + BOC < 360^0$$

q. e. d.

Напомена. Ова теорема важи сасвим опште за све телесне рогљеве, ма колико страна они имали. Ми можемо да докажемо ову теорему на очигледан начин сличан ономе доказу у *Напомени* за 3. теорему.

Да бисмо могли из једнога комада хатије ε (в. сл. 88.) начинити модел једнога рогља са теменом у тачци O морамо из тога комада хартије исећи ма и најмањи угао AOB, услед чега збир ивичних углова постаје $= 360^0 - \sphericalangle AOB$, дакле $< 360^0$.



Сл. 88.

5. *Теорема.* У свакоме тространом телесном рогљу јесте збир телесних углова већи од два права угла (180^0), а мањи од шест правих углова (540^0).

Доказ. Означимо са A, B, C телесне, са a, b, c ивичне угле једнога тространог телесног рогља, са A', B', C' телесне, са a', b', c' ивичне угле њему поларног рогља.

На основу прошле (4.) теореме, применувши је на поларни рогаљ, јесте

$$a' + b' + c' < 360^0,$$

а према обрасцима 138) у чл. 149. мора у задатоме рогљу да је

$$180^0 - A + 180^0 - B + 180^0 - C < 360^0,$$

тј.

$$A + B + C > 180^0.$$

дакле збир телесних углова већи од 180^0.

Да је збир тих углова мањи од $3.\ 180^0$, тј. 540^0 увидићемо, одмах, кад узмемо на ум да је сваки од њих мањи од 180^0. Међутим то исто следује и из 3. теореме, на врло прост начин. На основу поменуте теореме јесте у поларноме (као уопште у свакоме) рогљу

$$b' + c' > a', \quad c' + a' > b', \quad a' + b' > c'$$

и према томе, а с обзиром на једначине 138 у чл. 149.,

$$180^0 - B + 180^0 - C > 180^0 - A$$

$$180^0 - C + 180^0 - A > 180^0 - B$$

$$180^0 - A + 180^0 - B > 180^0 - C,$$

одакле

$$B + C - A < 180^0$$
$$C + A - B < 180^0$$
$$A + B - C < 180^0,$$

које, кад саберемо, даје

$$A + B + C < 540^0.$$

3.

О сферним троуглима.

151. **Дефиниције.** — Супротне тачке темена ма каквог сферног троугла ABC, означимо их са A_1, B_1 и C_1, образују на површини лопте сферни троугао $A_1B_1C_1$, који се, у однос на задати троугао ABC, зове његов *унакрсни троугао (Scheiteldreieck)*. Разуме се да је и обратно задати троугао ABC унакрсан троуглу $A_1B_1C_1$. Из саме је дефиниције јасно да два унакрсна троугла имају једнаке стране и једнаке угле. Таква два сферна троугла нису, међутим, подударна, него само *симетрично једнака* ($\fallingdotseq$); они једно друго немогу да покрију (и ако им је површина једнака), јер комади једнога не следују у истоме (него у супротноме) смислу у којем следују одговарајући комади у другоме троуглу.

Два сферна (као и два равна) троугла јесу *подударна* или *конгруентна* ($\cong$), кад су стране и угли једнога појединце и по истоме реду (тј. у истоме смислу: од лева на десно или од десна на лево) једнаки странама и углима онога другог троугла. Подударни троугли могу увек да покрију једно друго и обратно два (сферна или равна) троугла јесу подударна, ако једна друго могу да покрију.

Кад су темена једног сферног троугла полови страна другог сферног троугла, онда кажемо да је онај први троугао у однос на други троугао *поларан*. Узмимо ма какав сферни троугао ABC и одредимо странама његовим BC, CA и AB полове A', B' и C'. Они образују поларни троугао $A'B'C'$. Отуда што је

$$BA' = CA' = 90^0$$

$$CB' = AB' = 90^0$$

$$AC' = BC' = 90^0$$

(в. чл. 145.) следује

$$AB' = AC' = 90^0$$

$$BC' = BA' = 90^0$$

$$CA' = CB' = 90^0$$

а то значи да су темена A, B, C задатога троугла полови странама $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ троугла $A'B'C'$. Ако је, дакле, троугао $A'B'C'$ поларан троуглу ABC, онда је и обратно троугао ABC поларан троугао троуглу $A'B'C'$. Због овога се поларни троугли зову још и *реципрочни троугли*.

Стране и угли једнога троугла допуњују угле и стране поларног троугла до 180^0. Ако означимо са A, B, C, a, b, c угле и стране једног сферног троугла, са A', B', C', a', b', c' угле и стране њему поларног троугла, онда између тих елемената постоје односи који су представљени једначинама 138) у чл. 139[1]). Услед овога својства поларних троуглова зову се они још и *суплементни троугли.*

152. **Теореме.** — Према ономе што смо утврдили у чл. 148., а на основу горе у чл. 150. доказатих пет теорема за тростране телесне рогљеве, можемо, без икаквих нарочитих доказа, да поставимо следећи први пет теорема за сферне троугле.

1. *Теорема.* У сферном троуглу, у којем су две стране једнаке, јесу и угли, који су супротни тим странама, једнаки.

Дакле, ако је $a = b$, онда је и $A = B$. Сферни троугли, у којима су две стране једнаке, зову се *равнокраки.*

1. *Закључак.* Ако су у једноме сферном троуглу све три стране једнаке, онда су и његова сва три угла једнака. Тј. ако је $a = b = c$, онда је и $A = B = C$.

За сферни троугао, чије су све три стране једнаке, кажемо да је *равностран.*

2. *Закључак.* Ако су две стране у једноме сферном троуглу равне 90^0, онда су и њима супротни угли равни 90^0. Ако је нпр. $a = b = 90^0$, онда је и $A = B = 90^0$. У томе је случају трећа страна једнака трећем углу: $c = C$, јер је теме C пол стране c (в. чл. 145.).

---

[1]) Ми можемо ово да докажемо непосредно на следећи начин. Задовољићемо се да докажемо само први однос: $A + a' = 180^0$. Замислићемо да су повучене сферне дужи AB' и AC'. Збир сва четири угла око тачке A износи 360^0 (в. на крају чл. 144.). Један од та четири угла јесте угао A; угли $B'AC$ и $C'AB$ јесу сваки по 90^0. пошто су $B'A$ и $B'C$ сферни полупречници за страну AC а $C'A$ и $C'B$ сферни полупречници за страну AB. На тај начин је четврти угао $B'AC' = a'$ (в. чл. 145.) и према томе $A + 90^0 + 90^0 + a' = 360^0$, одакле $A + a' = 180^0$.

2. *Теорема*. У сферноме троуглу, у којем су два угла једнака, јесу и њима супротне стране једнаке: троугао је равнокрак.

Ако је нпр. $A = B$, онда је $a = b$.

1. *Закључак*. Ако су у једном сферном троуглу сва три угла једнака, онда су његове све три стране такође једнаке: троугао је равностран. Тј. ако је $A = B = C$, онда је и $a = b = c$.

2. *Закључак*. Ако су у сферноме троуглу два угла права ($= 90^0$), онда су и овима супротне стране праве ($= 90^0$), а трећи угао је раван трећој страни. Ако је нпр. $A = B = 90^0$, онда је $a = b = 90^0$, а $C = c$. Ово последње зато што је, у томе случају, теме С пол за страну $AB = c$.

3. *Теорема*. У свакоме сферном троуглу јесте збир двеју страна већи од треће стране:

$$b + c > a, \quad c + a > b, \quad a + b > c.$$

4. *Теорема*. У свакоме сферном троуглу јесте збир страна мањи од четири права угла (360^0), тј. мањи од једнога великог круга:

$$a + b + c < 360^0. \qquad (139$$

5. *Теорема*. У свакоме сферном троуглу јесте збир углова већи од два права угла (180^0), а мањи од шест правих углова (540^0):

$$180^0 < A + B + C < 540^0. \qquad (140$$

Вишак збира сва три угла преко 180^0 зове се *сферни вишак* или *сферни ексцес* (*sphärischer Excess*, excès sphérique); бележићемо га са E, дакле

$$E = A + B + C - 180^0. \qquad (141$$

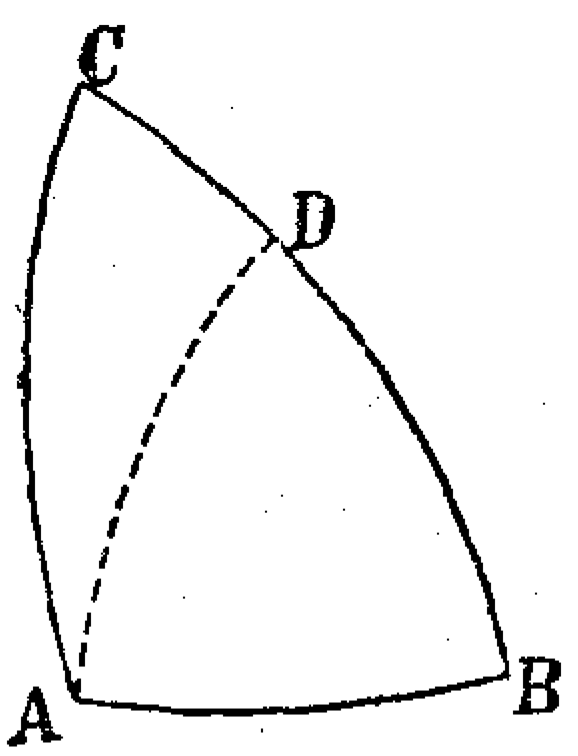
Према овој 5. теореми излази да је

$$0 < E < 360^0, \tag{142}$$

дакле

$$\frac{E}{2} < A,\ \frac{E}{2} < B,\ \frac{E}{2} < C.$$

6. *Теорема.* У сферноме троуглу одговара већем углу и већа супротна страна.



Сл. 89.

Доказ. Нека је у сферноме троуглу ABC

$$A > B.$$

Начинићемо да је $\sphericalangle BAD = B$. Онда ће, према 2. теореми, бити $AD = BD$. На основу 3. теореме јесте $AD + CD > AC$ или $BD + CD > AC$, тј.

$$a > b.$$

7. *Теорема.* У сферноме троуглу одговара већој страни увек већи супротни угао.

Доказ. Нека је у сферноме троуглу ABC (в. сл. 89.)

$$a > b,$$

дакле

$$180^0 - a < 180^0 - b.$$

То значи да је, онда, у поларноме сферном троуглу

$$A' < B'$$

и према томе, а на основу прошле 6. теореме,

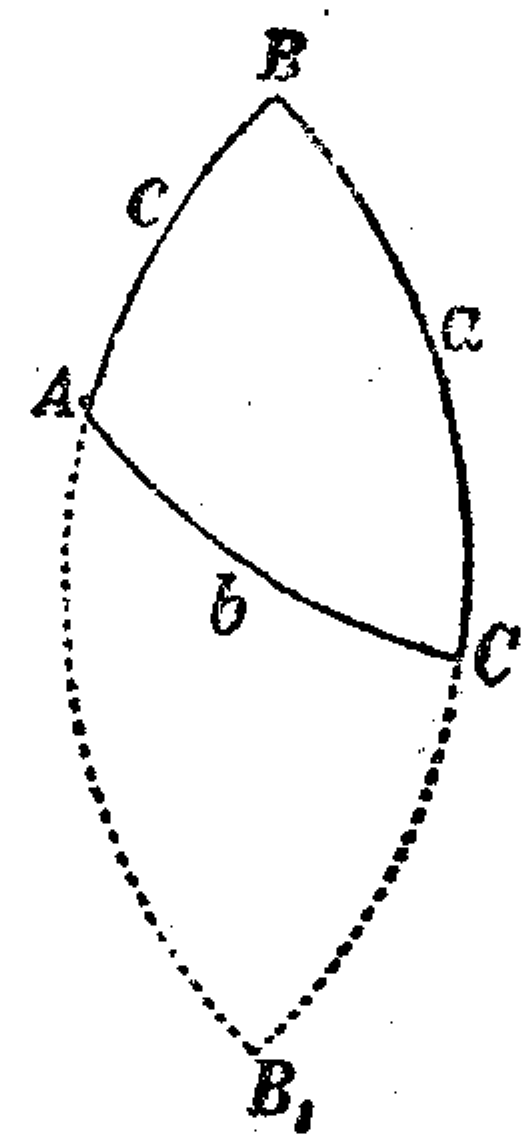
$$a' < b'$$

$$180^0 - a' > 180^0 - b',$$

дакле у задатоме троуглу

$$A > B \text{ q. e. d.}$$

8. *Теорема*. Према томе да ли је збир двеју страна у једноме сферном троуглу већи, раван или мањи од 180° биће и збир дотичним странама супротних углова већи, раван или мањи од 180° и обратно: ако је збир два угла једнога сферног троугла већи, раван или мањи од 180° јесте и збир овим углима супротних страна већи, раван или мањи од 180°.



Сл. 90.

Доказ. Допунимо задати троугао ABC, продуживши стране a и c до њиховог пресека у тачци B_1, до сферног двоугла BB_1 у којем је $B = B_1$.

Из последње две теореме знамо да је

$$\text{за } CB_1 \gtreqless AC \text{ и } \sphericalangle CAB_1 \gtreqless \sphericalangle AB_1C,$$

тј. да је за $180^0 - a \gtreqless b$ и $180^0 - A \gtreqless B$, одакле следује да је

$$\text{за } a + b \gtreqless 180^0 \text{ тако исто } A + B \gtreqless 180^0$$

и обратно.

9. *Теорема*. У правоугломе сферном троуглу, у којем је један од хипотенузи налеглих углова већи, раван или мањи од 90°, јесте и томе углу супротна катета већа, равна или мања од 90°. И обратно:

ако је у правоугломе сферном троуглу једна катета већа, равна или мања од 90^0, онда је и њој супротни угао већи, раван или мањи од 90^0.

Доказ. Узмимо да је $C = 90^0$, дакле c хипотенуза у једноме правоуглом сферном троуглу. Нека је

$$A \gtreqless 90^0,$$

дакле

$$A + C \gtreqless 180^0$$

и према томе, а на основу 8. теореме,

$$a + c \gtreqless 180^0.$$

Отуда што је $A \gtreqless 90^0$, тј.

$$A \gtreqless C,$$

па (према 6. теореми) дакле и

$$a \gtreqless c$$

следује

$$2\,a \gtreqless a + c$$

или, услед тога што је $a + c \gtreqless 180^0$ у још јачој мери

$$a \gtreqless 90^0 \quad \text{q. e. d.}$$

Тако исто и обратно:

$$\text{ако је } a \gtreqless 90^0 \text{ јесте } A \gtreqless 90^0.$$

10. *Теорема.* Сферна дуж, која везује две тачке на површини лопте, краћа је од лука ма којега малог круга, који пролази кроз оне две тачке.

Доказ. Ми знамо да кроз две тачке на површини лопте, означимо их са A и B, пролази само један велики круг (в. чл. 143.), а бесконачно много споредних или малих кругова. Луци свију тих кругова, који пролазе кроз тачке A и B, имају заједничко тетиво AB. Означимо са R полупречник великог круга (а то је полупречник лопте), са r полупречник ма којег споредног круга, који пролази кроз тачке A и B. Отуда што је $r < R$ следује да је средишни угао за тетиво AB у споредноме кругу већи од средишног угла за тетиво AB у великоме кругу и помоћу обрасца 134) у чл. 125. изводимо закључак да је дужина споредног лука над тетивом AB такође већа од дужине лука великог круга, који је над истим тетивом AB.

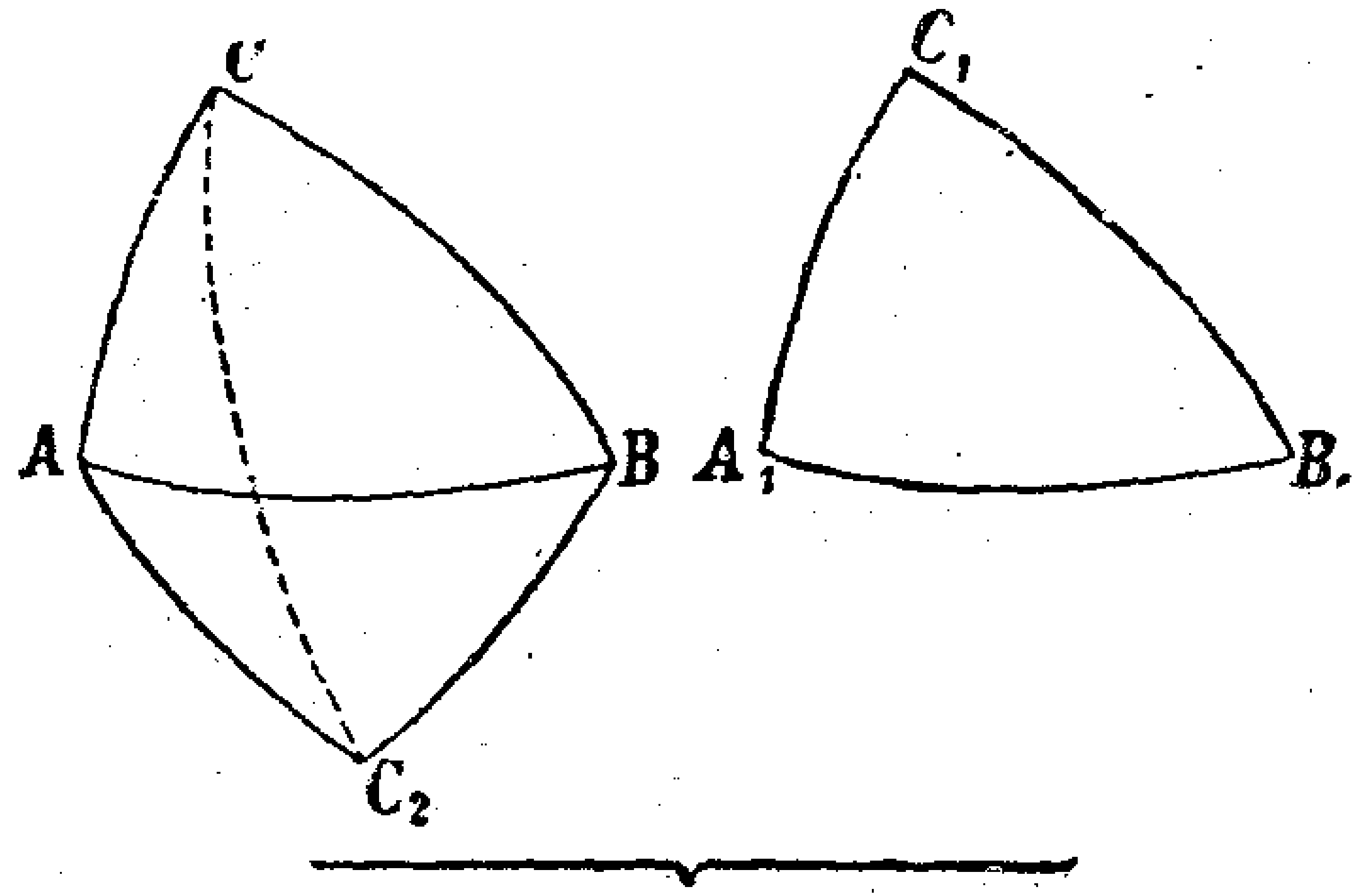
Најкраће растојање између двеју тачака на површини лопте то је, дакле, сферна дуж која везује те тачке.

Напомена. Велики кругови и сферне дужи имају, према горе реченоме, на површини лопте исти значај који имају праве линије и дужи у равни, а то да нам дају најкраћа растојања између двеју тачака. Такве линије, које на једној површини дају најкраћа растојања, зову се *геодетске линије* те површине. Геодетске линије на сфери јесу дакле велики кругови, док су то у равни праве линије.

153. **Случајеви подударности.** — 1. *Случај*. Два сферна троугла јесу подударна кад су стране једнога појединце и по истоме реду једнаке странама другог троугла.

Доказ. Претпоставимо да је у сферних троуглова ABC и $A_1B_1C_1$

$$AB = A_1B_1, \quad BC = B_1C_1, \quad AC = A_1C_1.$$



Сл. 91.

Конструишимо за један од датих троуглова, нпр. за троугао $A_1B_1C_1$, унакрсни троугао $A_2B_2C_2$ и положимо га тако да једна његова страна, нпр. страна A_2B_2 падне на одговарајућу страну AB троугла ABC. Треће теме C_2 тога унакрсног троугла спојићемо, сферном дужи, са трећим теменом C првога троугла. Тим начином добићемо два равнокрака сферна троугла ACC_2 и BCC_2 у којима је

$$\sphericalangle ACC_2 = \sphericalangle AC_2C$$

$$\sphericalangle BCC_2 = \sphericalangle BC_2C,$$

одакле, сабирањем, следује

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC_2B.$$

На исти начин доказали бисмо да су и остала два угла у троуглима ABC и $A_2B_2C_2$ једнака. И пошто су, дакле, све три стране и сва три угла једнака, али у противноме реду, то је, према дефиницији у чл. 151.,

$$\triangle A_2B_2C_2 \approx \triangle ABC.$$

Но пошто је тако исто

$$\triangle A_2B_2C_2 \approx \triangle A_1B_1C_1$$

изилази да је

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$$

q. e. d.

2. *Случај*. Два сферна троугла јесу подударна кад су угли једнога појединце и по истоме реду једнаки углима онога другог троугла.

Доказ. Пошто су у троуглима, који су поларни задатима, стране једнога појединце и по истоме реду једнаке странама оног другог троугла, то су, на основу горе доказатог 1. случаја, та два поларна троугла подударна и на тај начин, онда, морају бити подударни и задати троугли.

3. *Случај*. Два сферна троугла јесу подударна кад су две стране и захваћени угао једнога појединце и по истоме реду једнаки двема странама и захваћеном углу оног другог троугла.

Доказ. Нека су ABC и $A_1B_1C_1$ (в. сл. 91.) два сферна троугла у којима је

$$AC = A_1C_1,\quad BC = B_1C_1,\quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle A_1C_1B_1.$$

Ми можемо ова два троугла довести у такав положај да страна A_1C_1 поклопи страну AC, страна

B_1C_1 поклопи страну BC, јер су означене стране једнаке и заклапају једнак угао. Пошто, на тај начин, темена једнога троугла поклапају одговарајућа темена другог троугла, то је јасно да се и њихове треће стране морају поклапати као најкраћа растојања (сферне дужи) између тих тачака. То значи, дакле, да су троугли подударни.

4. *Случај*. Два сферна троугла јесу подударна кад је једна страна и њој налегла два угла првога троугла по истоме реду једнаки једној страни и њој налеглим углима другог троугла.

Доказ. Овај случај можемо да докажемо на сличан начин као и прошли, показавши да се два сферна троугла, који имају једнаку једну страну и два налегла угла, могу да доведу у такав положај да стране једнога троугла поклопе појединце стране другог троугла. Можемо, међутим, овај случај да сведемо на прошли (3. случај), узев у обзир да су троугли који су поларни задатим троуглима подударни, пошто је код њих испуњен услов наведен у 3. случају: они имају једнаке две стране и захваћени угао и то по истоме реду. Према томе мора да су и задати троугли подударни.

5. *Случај*. Два сферна троугла јесу подударна кад имају појединце и по истоме реду једнаке две стране и угао супротан једној од тих страна и кад је збир она два угла, који су супротни другим двема једнаким странама, већи или мањи од 180^0.

Доказ. Нека је у сферних троуглова ABC и $A_1B_1C_1$:

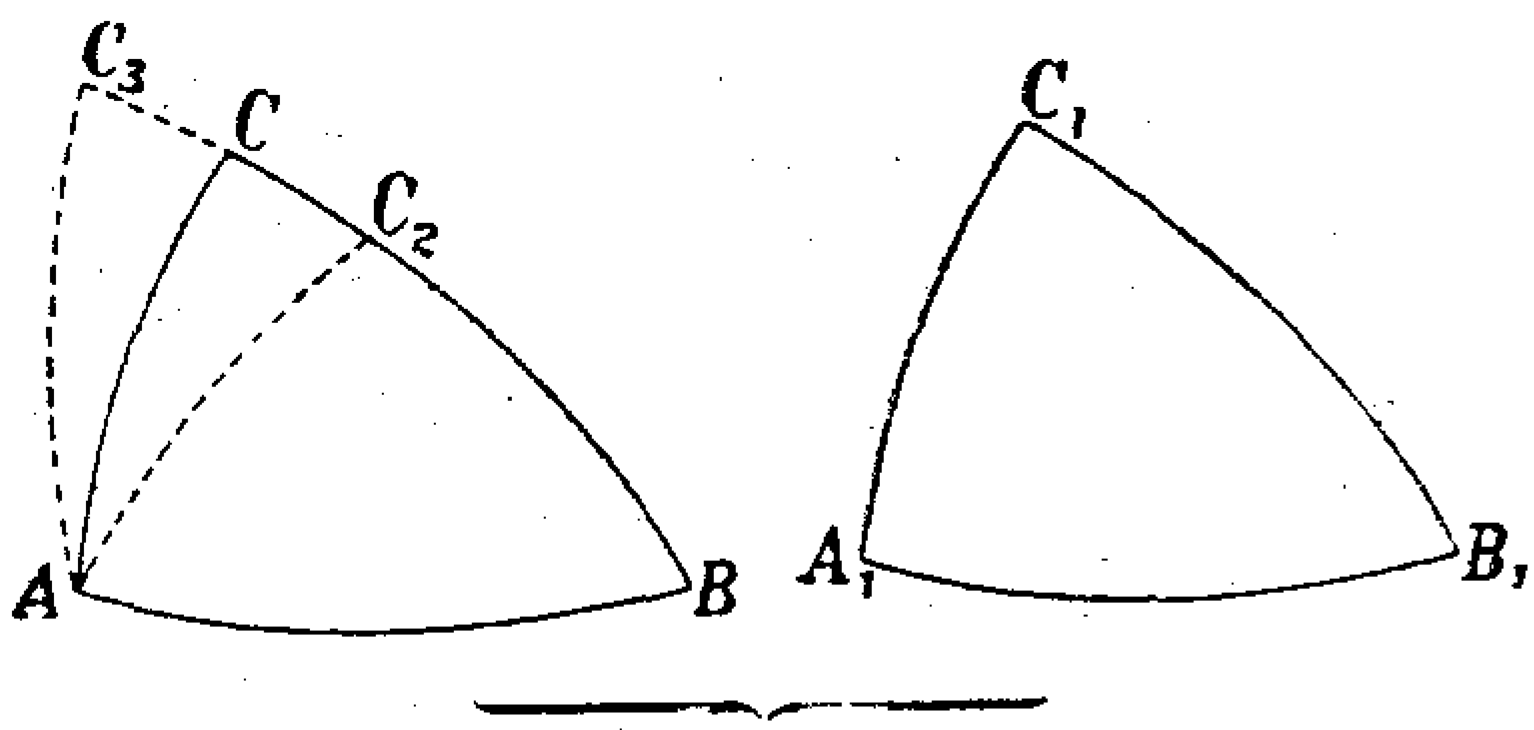
$$AB = A_1B_1,\quad AC = A_1C_1,\quad B = B_1,\quad C + C_1 \gtrless 180^0.$$

Замислимо страну A_1B_1 положену на страну AB, којој је она, према претпоставци, равна; тада ће и страна B_1C_1 пасти на страну BC због једнакости углова B_1 и B. Ако се стране A_1C_1 и AC неби поклапале, узмимо да страна A_1C_1 добије положај AC_2, онда би, према претпоставци, морало да буде

$$AC_2 = A_1C_1 = AC,$$

дакле (на основу 1. теореме чл. 152.)

$$\sphericalangle AC_2C = \sphericalangle ACC_2 = C.$$



Сл. 92.

Из слике видимо да је

$$\sphericalangle AC_2C + \sphericalangle AC_2B = 180^0,$$

а то би значило

$$C + C_1 = 180^0,$$

које је у опреци с учињеном претпоставком:

$$C + C_1 \gtrless 180^0.$$

На исти начин доказује се да страна A_1C_1 не може пасти ни изван троугла ABC, нпр. у положај AC_3. Према томе изилази да се троугли $A_1B_1C_1$ и ABC морају поклапати, тј. да су подударни.

6. *Случај.* Два сферна троугла јесу подударна кад имају појединце и по истоме реду једнака два угла и страну која је супротна једноме од она два

угла и кад је при томе збир страна, које су супротне другим двома једнаким углима, већи или мањи од 180^0.

Доказ. Овај случај своди се на прошли (5. случај), кад се узме у обзир да су код троуглова који су задатим троуглима поларни испуњени услови наведени у 5. случају, тј. да имају појединце и по истоме реду једнаке две стране и угао који је једној од тих страна супротан и да је збир она два угла, који су супротни другим двема једнаким странама, већи или мањи од 180^0. Из подударности поларних троуглова следује подударност задатих троуглова.

154. **Подела сферних троуглова.** — Сферне троугле можемо да поделимо на три групе: 1) на правоугле сферне троугле, тј. троугле у којима је један угао прав ($=90^0$); 2) на сферне троугле код којих је једна страна $=90^0$ и 3) на опште сферне троугле, рачунајући у њих све троугле код којих су стране и угли различни од 90^0.

Разрешавање сферних троуглова друге врсте, а то су троугли у којих је једна страна $=90^0$, своди се на разрешавање сферних троуглова прве врсте, тј. на разрешавање правоуглих сферних троуглова, зато што троугли прве и друге врсте стоје у односу суплементних троуглова. И заиста, ако је у једноме сферном троуглу прве врсте угао $C=90^0$, њему суплементни троугао припадаће сферним троуглима друге врсте, јер је у њему страна $c'=180^0-C=90^0$. Ми можемо, на тај начин, из образаца, које будемо нашли за правоугле сферне троугле, простом употребом односа који су исказати у једн. 138) чл. 149., непосредно да добијемо обрасце за разрешавање сферних троуглова у којих је једна страна $=90^0$.

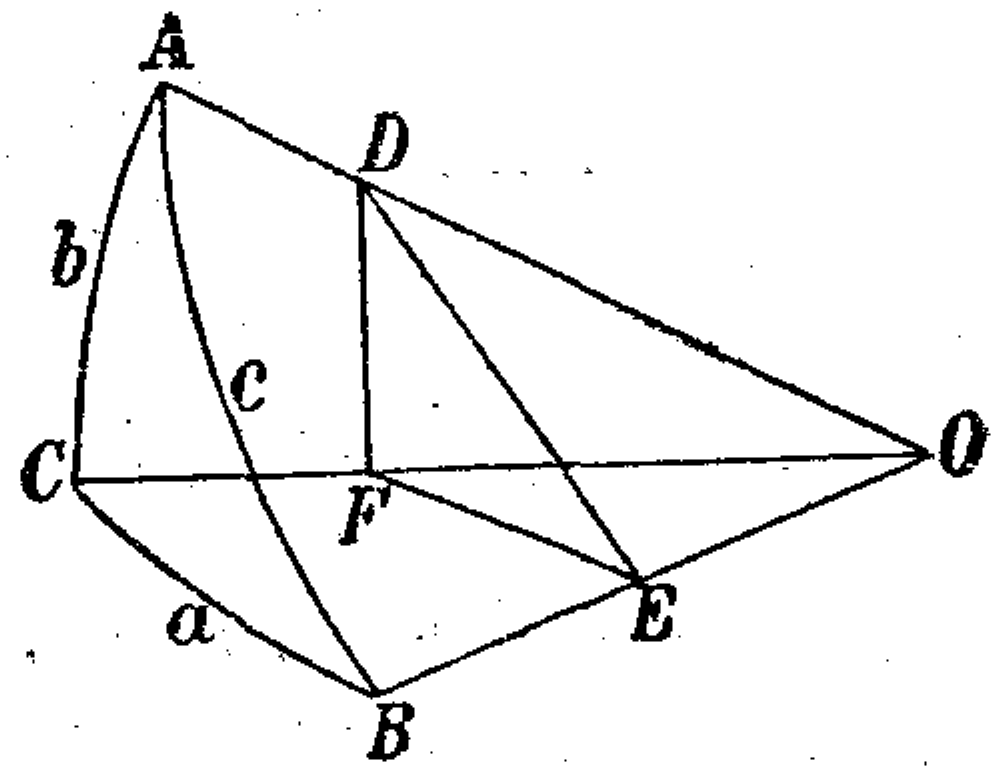
II

ТЕОРЕМЕ И ОБРАСЦИ.

1.

Теореме и обрасци за стране и угле једнога сферног троугла.

155. **Непер-ово правило.** — Нека је ABC један правоугао сферан троугао, у коме је угао $C = 90^0$; нека је $OABC$ тространи телесни рогаљ, који постаје везивањем темена задатог троугла са средиштем O лопте. Рогљеве стране (равни) AOC и BOC стоје управно једна на другој. Спустимо из ма које тачке D ивице OA управну DF на ивицу OC, а затим из тачке F управну FE на ивицу OB. Онда је и DE управна на OB и према томе $\sphericalangle DEF = B$ (в. чл. 144. и чл. 148.).



Сл. 93.

Из $\triangle ODE$, у коме је $\sphericalangle OED = 90^0$, $\sphericalangle DOE = c$, читамо

$$\cos c = \frac{OE}{OD},$$

где је

$$OE = OF \cdot \cos a$$

(као што видимо из $\triangle OEF$, у коме је $\sphericalangle OEF = 90^0$, $\sphericalangle EOF = a$)

$$OD = \frac{OF}{\cos b}$$

(које следује из $\triangle ODF$, у коме је $\sphericalangle OFD = 90^0$, $\sphericalangle DOF = b$), дакле

$$\cos c = \cos a \cos b. \qquad (\alpha$$

Из $\triangle DEF$, у коме је $\sphericalangle DFE = 90^0$, $\sphericalangle DEF = B$, следује

$$\cos B = \frac{EF}{DE} = \frac{OF \cdot \sin a}{OD \cdot \sin c} = \frac{OD \cdot \cos b \sin a}{OD \cdot \sin c} = \frac{\cos b \sin a}{\sin c}$$

или, кад земенимо $\cos b = \dfrac{\cos c}{\cos a}$ (из једн. α)

$$\beta) \qquad \cos B = tg\, a\, cotg\, c\,.$$

Из истога троугла DEF добијамо

$$\sin B = \frac{DF}{DE} = \frac{OD \cdot \sin b}{OD \cdot \sin c} = \frac{\sin b}{\sin c},$$

одакле

$$\gamma) \qquad \sin b = \sin c \sin B\,.$$

Једначинама β) и γ) одговарају ове две сличне једначине[1])

$$\beta') \qquad \cos A = tg\, b\, cotg\, c$$

$$\gamma') \qquad \sin a = \sin c \sin A.$$

Ако у једначинама β) и β') заменимо $tg\, a$ и $tg\, b$ вредностима, које налазимо помоћу образаца α), γ) и γ')

$\sin b = \sin c \sin B$	$\sin a = \sin c \sin A$
$\cos b = \dfrac{\cos c}{\cos a}$	$\cos a = \dfrac{\cos c}{\cos b}$
$tg\, b = tg\, c \cos a \sin B$	$tg\, a = tg\, c \cos b \sin A,$

[1]) Једначине β') и γ') исказују у ствари оно исто што и једначине β) и γ) и с тога није потребно изводити их нарочито. Једначине β') и γ') добивају се из једначина β) и γ) кад се замени катета a катетом b, па, разуме се, и обратно, катета b катетом a. Тако исто треба променути узајамно и супротне угле A и B. Појмљиво је по себи да оно што важи за једну катету и један од она два коса угла мора вредити и за другу катету, односно други коси угао. Само хипотенуза своју улогу не мења, јер је она једна.

добићемо

$$\cos B = \cos b \sin A \qquad (\delta$$

$$\cos A = \cos a \sin B. \qquad (\delta'$$

Из слике ($\triangle OEF$) читамо да је

$$\sin a = \frac{EF}{OF} = \frac{EF : DF}{OF : DF} = \frac{\operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg} b}$$

или

$$\sin a = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} B. \qquad (\varepsilon$$

Тако исто јесте

$$\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} A \qquad (\varepsilon'$$

Најзад, ако у једначини α) ставимо за $\cos b$ и $\cos a$ њихове вредности из образаца δ) и δ'):

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}, \qquad \cos a = \frac{\cos A}{\sin B},$$

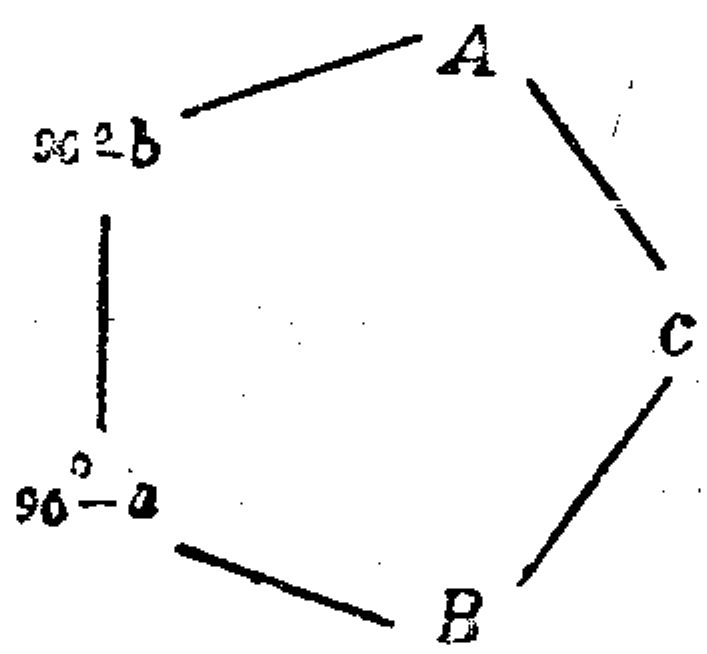
добићемо

$$\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B. \qquad (k$$

Пошто добивене обрасце α), β) . . . k) средимо на начин: или овако:

$$\left.\begin{aligned}
\sin a &= \sin c \sin A & \cos(90^0 - a) &= \sin c \sin A \\
&= \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} B & &= \operatorname{cotg}(90^0 - b) \operatorname{cotg} B \\
\sin b &= \sin c \sin B & \cos(90^0 - b) &= \sin c \sin B \\
&= \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} A & &= \operatorname{cotg}(90^0 - a) \operatorname{cotg} A \\
\cos c &= \cos a \cos b & \cos c &= \sin(90^0 - a) \sin(90^0 - b) \\
&= \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B & &= \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \\
\cos A &= \cos a \sin B & \cos A &= \sin(90^0 - a) \sin B \\
&= \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} c & &= \operatorname{cotg}(90^0 - b) \operatorname{cotg} c \\
\cos B &= \cos b \sin A & \cos B &= \sin(90^0 - b) \sin A \\
&= \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} c & &= \operatorname{cotg}(90^0 - a) \operatorname{cotg} c
\end{aligned}\right\} \quad (143$$

можемо речима да их искажемо. Нека су a, B, c, A, b, нерачунајући прав угао C, комади једнога правоуглог сферног троугла по реду којим следују један другоме. Ако назовемо она два комада, између којих се налази ма који од наведених пет комада, дотичноме комаду *налегле* комаде, а остала два *одвојене* комаде, онда можемо да поставимо следеће правило:



Сл. 94.

У правоугломе сферном троуглу јесте косинус ма којег комада једнак производу синуса одвојених комада или раван производу котангената налеглих комада, узев у свакоме случају место катета њихове допуне до 90^0.

Помоћу овога такозваног *Непер-овог правила* у стању смо да разрешимо сваки задатак који се односи на стране и угле правоуглог сферног троугла (в. чл. 170.—175.).

156. Непер-ово правило за суплементни сферни троугао. — Ако једначине 143) у прошломе члану, које служе за разрешавање правоуглих сферних троуглова, применимо на суплементни сферни троугао добићемо обрасце за разрешавање сферних троуглова у којих је једна страна, нпр. страна $c = 90^0$. Обрасци, до којих долазимо, кад у поменутим једначинама 143) учинимо замене означене у изразима 138) чл. 149., гласе

$$
144) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\sin A = \operatorname{tg} B \operatorname{cotg} b = \sin C \sin a \\
&\sin B = \operatorname{tg} A \operatorname{cotg} a = \sin C \sin b \\
&\cos C = -\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b = -\cos A \cos B \\
&\cos a = -\operatorname{tg} B \operatorname{cotg} C = \cos A \sin b \\
&\cos b = -\operatorname{tg} A \operatorname{cotg} C = \cos B \sin a.
\end{aligned} \right.
$$

157. **Синусна теорема.** — Ова теорема гласи: *у свакоме сферном троуглу имају се синуси страна као што се имају синуси њима супротних углова.*

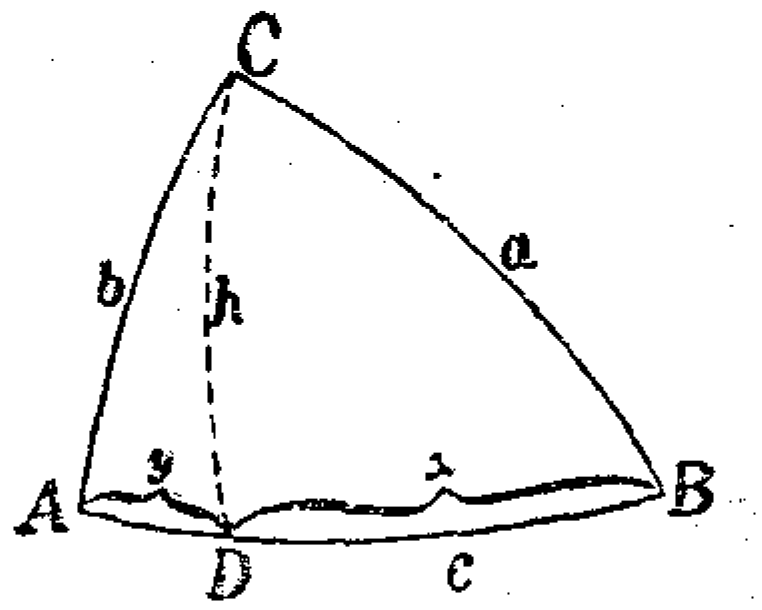
Доказ. Спустимо из темена C сферну управну[1]) $CD = h$ на супротну страну AB. Било да сферна управна сече саму страну, на коју је спуштена (као у сл. 95.), или продужење од те стране (као у сл. 96.) у једноме и у другоме случају добијамо два правоугла сферна троугла ACD и BCD из којих, на основу *Непер*-ова правила, изводимо

$$\sin h = \sin b \sin A$$

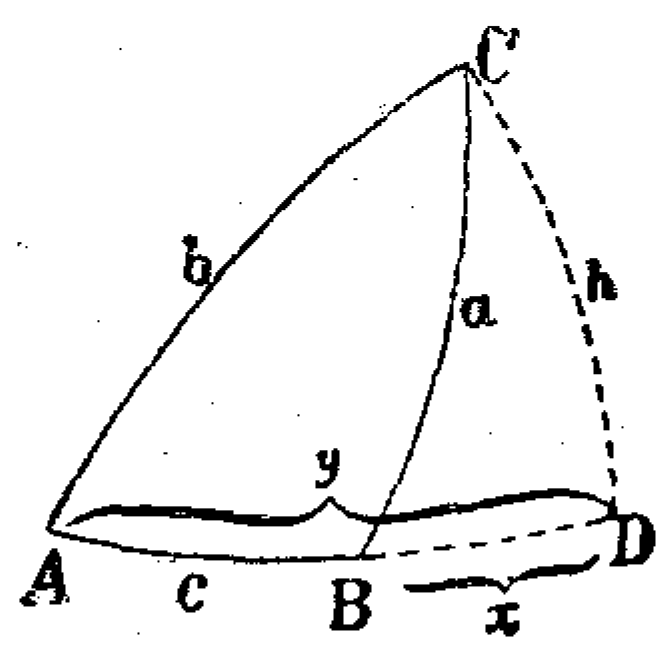
$$\sin h = \sin a \sin B,$$

одакле следује

$$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$$



Сл. 95.



Сл. 96.

Тако исто, спуштањем управних из темена A и B на њима супротне стране BC и AC и употребом *Непер*-овог правила на тако добивене правоугле сферне троугле, налазимо ове две сразмере

$$\sin b : \sin c = \sin B : \sin C$$

$$\sin c : \sin a = \sin C : \sin A,$$

[1]) Сферна управна, спуштена из тачке C на лук AB, јесте комад великог круга који AB сече под правим углом. Раван сферне управне пролази кроз тачку C и стоји управно на равни лука AB.

које можемо да спојимо у продуженој сразмери

145) $\quad \sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C$

или

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

као формулски израз за *синусну теорему*.

Напомена. Синусну теорему можемо да применимо у ова два случаја:

1) кад су нам познате две стране и једној од њих двеју супротни угао, нпр. a, b и A, да нађемо оној другој странн супротни угао, тј. B:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \sin A.$$

2) кад су нам позната два угла и једноме од њих супротна страна, нпр. A, B и a, да израчунамо ономе другом углу супротну страну, тј. b:

$$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A} \sin a.$$

У једноме и у другоме случају трећа страна и трећи угао остају непознати, услед тога што збир углова у сферним троуглима није увек један исти, него се креће између 180^0 и $3 \cdot 180^0$.

158. **Косинусна теорема.** — Теорема гласи: *у свакоме сферном троуглу јесте косинус једне стране раван производу косинуса осталих двеју страна више производу синуса истих страна помножено косинусом захваћеног угла.*

У формули:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned}\right\} \quad (146$$

Доказ. Спустимо из темена C сферну управну $CD = h$ на супротну страну $AB = c$ и означимо $BD = x$, $AD = y$ (в. сл. 95. и 96.).

Из правоуглог троугла BCD следује, на основу *Непер*-овог правила,

$$\cos a = \cos h \cos x.$$

Пошто је $x = c - y$ (в. сл. 95.) или $x = y - c$ (в. сл. 96.), дакле и у једном и у другом случају $\cos x = \cos c \cos y + \sin c \sin y$, то је онда

$$\cos a = \cos h\,(\cos c \cos y + \sin c \sin y)$$

или, услед тога што је (на основу *Непер*-овог правила за правоугли троугао ACD)

$$\cos h = \frac{\cos b}{\cos y},$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin c \cos b \operatorname{tg} y.$$

Из правоуглог троугла ACD читамо

$$\cos A = \operatorname{cotg} b \operatorname{tg} y,$$

одакле

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} b \cos A, \quad \cos b \operatorname{tg} y = \sin b \cos A,$$

које, кад заменимо у горњи нбразац за $\cos a$, даје једначину

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

На исти начин долазимо до једначина за $\cos b$ и $\cos c$.

Напомена. Помоћу косинусне теореме у стању смо да разрешимо следећа два основна задатка:

1) кад су нам познате две стране, нпр. a и b и захваћени угао C да одредимо трећу страну c, јер је:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

2) кад су нам познате стране једног троугла да израчунамо угле његове. Решење задатка дају нам опет једн. 146) кад их напишемо у форми

$$146a)\quad \begin{cases} \cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\[2ex] \cos B = \dfrac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} \\[2ex] \cos C = \dfrac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}. \end{cases}$$

159. **Косинусна теорема за суплементни сферни троугао.** — Кад применимо косинусну теорему на суплементни сферни троугао, другим речима кад у једначинама 146) заменимо вредности под 138) у чл 149. добијамо ове нове обрасце

$$147)\quad \begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c, \end{cases}$$

а одавде

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \\ \cos b &= \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A} \\ \cos c &= \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}. \end{aligned}\right\} \qquad (147a$$

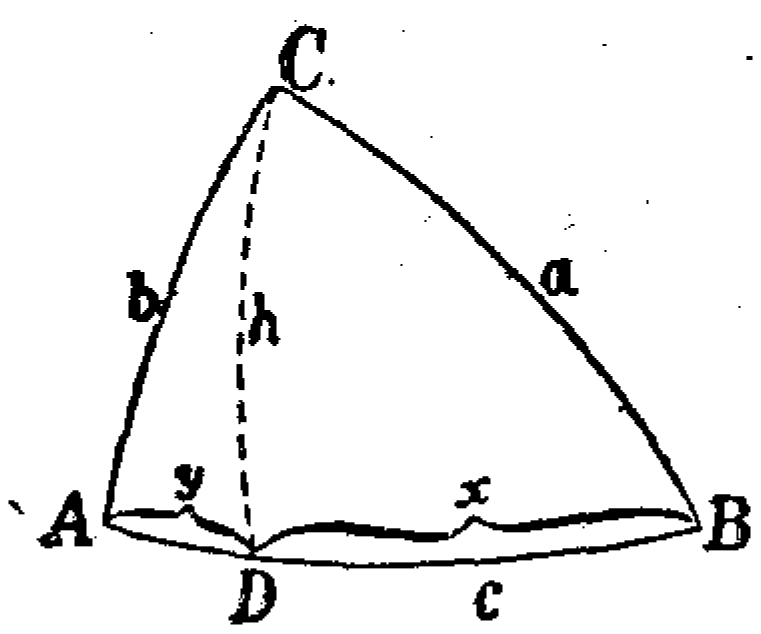
Напомена. Помоћу једн. 147) налазимо из једне стране, нпр. a и налеглих углова B и C трећи угао A, а помоћу једн. 147a) добијамо стране кад су нам дати угли.

160. — **Тангентни обрасци.** — Спустимо из темена C сферну управна $CD = h$ на супротну страну $AB = c$ и ставимо $BD = x$, $AD = y$.

На основу *Непер*-овог правила за правоугле троугле ACD и BCD јесте

$$tg\, A = \frac{tg\, h}{\sin y}$$

$$tg\, h = tg\, B \sin x,$$



Сл. 95.

дакле

$$tg\, A = \frac{tg\, B \sin x}{\sin y}$$

или, ако заменимо $\sin y = \sin (c - x) = \sin c \cos x - \cos c \sin x$,

$$tg\, A = \frac{tg\, B \sin x}{\sin c \cos x - \cos c \sin x} = \frac{tg\, B\, tg\, x}{\sin c - \cos c\, tg\, x}.$$

Ако овде за $tg\, x$ ставимо вредност, коју налазимо из правоуглог троугла BCD, а то је

$$tg\,x = tg\,a \cos B,$$

добићемо

$$tg\,A = \frac{tg\,a \sin B}{\sin c - tg\,a \cos c \cos B}.$$

Спуштањем управне из темена B на супротну страну AC изводимо, на исти начин, за $tg\,A$ овај други израз

$$tg\,A = \frac{tg\,a \sin C}{\sin b - tg\,a \cos b \cos C}.$$

Кружним мењањем слова добијамо сличне обрасце за $tg\,B$ и $tg\,C$.

$$48)\quad \begin{cases} tg\,A = \dfrac{tg\,a \sin B}{\sin c - tg\,a \cos c \cos B} = \dfrac{tg\,a \sin C}{\sin b - tg\,a \cos b \cos C} \\[2ex] tg\,B = \dfrac{tg\,b \sin C}{\sin a - tg\,b \cos a \cos C} = \dfrac{tg\,b \sin A}{\sin c - tg\,b \cos c \cos A} \\[2ex] tg\,C = \dfrac{tg\,c \sin A}{\sin b - tg\,c \cos b \cos A} = \dfrac{tg\,c \sin B}{\sin a - tg\,c \cos a \cos B} \end{cases}$$

Напомена. Ови обрасци могу да нам послуже да помоћу двеју страна, нпр. a и b и захваћенога угла C нађемо непосредно остала два угла A и B, јер је

$$tg\,A = \frac{tg\,a \sin C}{\sin b - tg\,a \cos b \cos C},$$

$$tg\,B = \frac{tg\,b \sin C}{\sin a - tg\,b \cos a \cos C}.$$

161. **Тангентни обрасци за суплементни сферни троугао.** — Применом образаца 148) на суплементни сферни троугао, тј. вршењем замене које су назна-

чене са 138) у чл. 149. у поменуте једначине 148) добијамо следеће њима одговарајуће обрасце

$$\left.\begin{aligned} tg\,a &= \frac{tg\,A\,\sin b}{\sin C + tg\,A\cos C\cos b} = \frac{tg\,A\,\sin c}{\sin B + tg\,A\cos B\cos c} \\ tg\,b &= \frac{tg\,B\,\sin c}{\sin A + tg\,B\cos A\cos c} = \frac{tg\,B\,\sin a}{\sin C + tg\,B\cos C\cos a} \\ tg\,c &= \frac{tg\,C\,\sin a}{\sin B + tg\,C\cos B\cos a} = \frac{tg\,C\,\sin b}{\sin A + tg\,C\cos A\cos b}. \end{aligned}\right\} \quad (149$$

Напомена. Употреба ових образаца је та да, кад нам је позната једна страна и два налегла угла, нпр. c, A и B, нађемо непосредно остале две стране a и b:

$$tg\,a = \frac{tg\,A\,\sin c}{\sin B + tg\,A\cos B\cos c},$$

$$tg\,b = \frac{tg\,B\,\sin c}{\sin A + tg\,B\cos A\cos c}.$$

162. **Обрасци за израчунавање углова помоћу страна.** — Пођимо од косинусне теореме на основу које је

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

и ставимо у тој једначини

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$$

$$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$$

(в. једн. 19, чл. 22.), па ћемо добити

$$\cos a = \cos b\cos c - \sin b\sin c + 2\sin b\sin c\cos^2\frac{A}{2}$$

$$= \cos(b + c) + 2\sin b\sin c\cos^2\frac{A}{2}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c - 2 \sin b \sin c \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$= \cos (b - c) - 2 \sin b \sin c \sin^2 \frac{A}{2},$$

одакле

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos a - \cos (b + c)}{2 \sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos (b - c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}}$$

или, употребом образаца 21 у чл. 24.,

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (b + c - a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a + c - b) \sin \frac{1}{2} (a + b - c)}{\sin b \sin c}}$$

које, кад ставимо

$$a + b + c = 2 s, \quad \frac{1}{2} (a + b + c) = s,$$

дакле

$$\frac{1}{2} (b + c - a) = s - a, \quad \frac{1}{2} (a + c - b) = s - b,$$

$$\frac{1}{2} (a + b - c) = s - c,$$

добија овај вид

$$os \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}}, \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}}.$$

Одавде, опет, изводимо

$$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$$

$$=\frac{1}{\sin(s-a)}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}},$$

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=\frac{2}{\sin b\sin c}\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}.$$

На потпуно исти начин или простом променом слова налазимо једначине за остала два угла B и C.

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\sin a}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\end{aligned}\right\}\qquad(150$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin c\sin a}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}\end{aligned}\right\}\qquad(151$$

$$152)\quad \begin{cases} tg\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{sin\,(s-a)}\sqrt{\dfrac{sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}{sin\,s}} \\[2ex] tg\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{sin\,(s-b)}\sqrt{\dfrac{sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}{sin\,s}} \\[2ex] tg\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{sin\,(s-c)}\sqrt{\dfrac{sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}{sin\,s}} \end{cases}$$

$$153)\quad \begin{cases} sin\,A=\dfrac{2}{sin\,b\,sin\,c}\sqrt{sin\,s\,sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)} \\[2ex] sin\,B=\dfrac{2}{sin\,c\,sin\,a}\sqrt{sin\,s\,sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)} \\[2ex] sin\,C=\dfrac{2}{sin\,a\,sin\,b}\sqrt{sin\,s\,sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}. \end{cases}$$

163. — **Обрасци за израчунавање страна помоћу углова.** — При извођењу ових образаца поступићемо као и у прошломе члану. Поћићемо од једн. 147)

$$cos\,A=-\,cos\,B\,cos\,C+sin\,B\,sin\,C\,cos\,a$$

и заменићемо у њој

$$cos\,a=2\,cos^2\frac{a}{2}-1$$

$$cos\,a=1-2\,sin^2\frac{a}{2},$$

а затим ћемо извршити оне исте трансформације које смо већ употребили у прошломе члану. Означићемо

$$A + B + C = 2S, \quad \frac{1}{2}(A + B + C) = S,$$

дакле

$$\frac{1}{2}(B + C - A) = S - A, \quad \frac{1}{2}(C + A - B) = S - B,$$

$$\frac{1}{2}(A + B - C) = S - C$$

и добиће мо следеће групе једначина, које су врло подесне за логаритамско израчунавање страна једнога сферног троугла, кад су нам познати његови угли,

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}} \\ \cos\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(S-C)\cos(S-A)}{\sin C \sin A}} \\ \cos\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A \sin B}} \end{aligned}\right\} \qquad (154$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B \sin C}} \\ \sin\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\sin C \sin A}} \\ \sin\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\sin A \sin B}} \end{aligned}\right\} \qquad (155$$

$$
156)\quad \begin{cases}
tg\frac{a}{2} = \cos(S-A)\sqrt{\dfrac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}} \\[2ex]
tg\frac{b}{2} = \cos(S-B)\sqrt{\dfrac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}} \\[2ex]
tg\frac{c}{2} = \cos(S-C)\sqrt{\dfrac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}
\end{cases}
$$

$$
157)\quad \begin{cases}
\sin a = \dfrac{2}{\sin B \sin C}\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)} \\[2ex]
\sin b = \dfrac{2}{\sin C \sin A}\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)} \\[2ex]
\sin c = \dfrac{2}{\sin A \sin B}\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}.
\end{cases}
$$

Напомена. До ових образаца 154), 155), 156) и 157) могли бисмо, врло брзо, доћи на други начин. Пошто овај задатак, израчунавање страна помоћу углова, стоји са прошлим задатком, израчунавање углова помоћу страна, у односу реципрочности, тј. у односу у којем су два суплементна сферна троугла, — то је најлакше добити једначине овога члана кад се једначине 150), 151), 152) и 153) прошлога члана примену на суплементни сферни троугао. То значи у једначинама прошлог члана треба заменути

a са $180^0 - A$, A са $180^0 - a$,
b „ $180^0 - B$, B „ $180^0 - b$,
c „ $180^0 - C$, C „ $180^0 - c$,
$2s$ са $3 \cdot 180^0 - 2S$,
s „ $3 \cdot 90^0 - S$

и према томе

$$\begin{array}{llll}
\text{место } \sin\frac{A}{2} & \text{узети} & \cos\frac{a}{2}, & \text{итд.} \\
\text{„} \quad \cos\frac{A}{2} & \text{„} & \sin\frac{a}{2}, & \text{„} \\
\text{„} \quad tg\frac{A}{2} & \text{„} & cotg\frac{a}{2}, & \text{„} \\
\text{„} \quad \sin A & \text{„} & \sin a, & \text{„} \\
\text{„} \quad \sin(s-a) & \text{„} & \cos(S-A), & \text{„} \\
\text{„} \quad \sin s & \text{„} & -\cos S. &
\end{array}$$

Тако исто бисмо и обратно из образаца овога члана добили обрасце прошлога члана.

164. **Гаус-ове једначине.** — Ако у познатим обрасцима

$$\sin\frac{A \pm B}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \pm \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\cos\frac{A \pm B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \mp \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

(в. једн. 16, чл. 19.) ставимо за $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \cos\frac{A}{2}$ и $\cos\frac{B}{2}$ њихове вредности из образаца 150) и 151) у чл. 162. добићемо

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}},$$

које, на основу треће једн. 151) може да се напише

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{C}{2},$$

а ово опет, употребом познатих образаца 21) у чл. 24.

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{2\sin\frac{2s-a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}$$

$$=\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2},$$

дакле

$$\alpha)\qquad \sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}.$$

На исти начин налазимо

$$\beta)\qquad \sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2}$$

$$\gamma)\qquad \cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}$$

$$\delta)\qquad \cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}.$$

Кружним мењањем слова добијамо из сваке од ових једначина још по две. Примећујемо да су једначине α) и δ), а разуме се и оне које променом слова из њих следују, реципрочне. Једначине β) и γ) реципрочне су саме себи.

Гаус-ове једначине гласе дакле

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} &= \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}\\
\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{a}{2} &= \cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{A}{2}\\
\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{b}{2} &= \cos\frac{c-a}{2}\cos\frac{B}{2}\\[1em]
\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} &= \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}\\
\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{a}{2} &= \sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{A}{2}\\
\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{b}{2} &= \sin\frac{c-a}{2}\cos\frac{B}{2}\\[1em]
\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} &= \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}\\
\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{a}{2} &= \cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{A}{2}\\
\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{b}{2} &= \cos\frac{c+a}{2}\sin\frac{B}{2}\\[1em]
\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} &= \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}\\
\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{a}{2} &= \sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{A}{2}\\
\cos\frac{C-A}{2}\sin\frac{b}{2} &= \sin\frac{c+a}{2}\sin\frac{B}{2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (158$$

165. **Непер-ове аналогије.** — Кад две и две од *Гаус*-ових једначина 158) поделимо једну с другом добијамо ове нове једначине које зовемо *Непер-овим аналогијама*

$$
\left\{
\begin{aligned}
tg\frac{a+b}{2} &= \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\,tg\frac{c}{2} &\qquad tg\frac{a-b}{2} &= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\,tg\frac{c}{2}\\[2ex]
tg\frac{b+c}{2} &= \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}\,tg\frac{a}{2} &\qquad tg\frac{b-c}{2} &= \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}\,tg\frac{a}{2}\\[2ex]
tg\frac{c+a}{2} &= \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C+A}{2}}\,tg\frac{b}{2} &\qquad tg\frac{c-a}{2} &= \frac{\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{C+A}{2}}\,tg\frac{b}{2}\\[2ex]
tg\frac{A+B}{2} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\,cotg\frac{C}{2} &\qquad tg\frac{A-B}{2} &= \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\,cotg\frac{C}{2}\\[2ex]
tg\frac{B+C}{2} &= \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\,cotg\frac{A}{2} &\qquad tg\frac{B-C}{2} &= \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\,cotg\frac{A}{2}\\[2ex]
tg\frac{C+A}{2} &= \frac{\cos\frac{c-a}{2}}{\cos\frac{c+a}{2}}\,cotg\frac{B}{2} &\qquad tg\frac{C-A}{2} &= \frac{\sin\frac{c-a}{2}}{\sin\frac{c+a}{2}}\,cotg\frac{B}{2}.
\end{aligned}
\right.
\tag{159}
$$

Напомена. *Непер*-ове аналогије можемо да употребимо:

1) кад су нам дате две стране и захваћени угао, нпр. a, b и C, да израчунамо остале комаде. Седма и десета једн. 159) дају нам угле A и B у виду збира и разлике:

$$tg\frac{A+B}{2}=\frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{a+b}{2}}cotg\frac{C}{2},$$

$$tg\frac{A-B}{2}=\frac{sin\frac{a-b}{2}}{sin\frac{a+b}{2}}cotg\frac{C}{2}.$$

Трећу страну c налазимо помоћу четврте једначине

$$tg\frac{c}{2}=\frac{sin\frac{A+B}{2}}{sin\frac{A-B}{2}}tg\frac{a-b}{2}.$$

2) Кад нам је дата једна страна и два налегла угла, нпр. c, A и B да нађемо остале комаде.

Стране a и b налазимо, у виду збира и разлике, на основу прве и четврте једначине

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{cos\frac{A-B}{2}}{cos\frac{A+B}{2}}tg\frac{c}{2},$$

$$tg\frac{a-b}{2}=\frac{sin\frac{A-B}{2}}{sin\frac{A+B}{2}}tg\frac{c}{2}.$$

Угао C даје десета једначина

$$tg\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot g\frac{A-B}{2}.$$

166. **Основни обрасци Сферне Тригонометрије.** — Као год што је раван троугао одређен трима комадима тако и сферан троугао, само са том разликом што код сферних троуглова могу задати комади састојати се и из самих углова, које код равних троуглова не може да буде. На тај начин важи и овде оно што смо већ казали у чл. 110. Равне Тригонометрије, а то да између шест комада једнога сферног троугла[1]) морају и могу постојати само три независне једначине из којих се сви остали обрасци за разрешавање сферних троуглова могу извести чисто аналитички. Као такве основне једначине можемо да узмемо следећа три обрасца

$$146)\qquad \begin{cases} \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\ \cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B\\ \cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C,\end{cases}$$

а то је косинусна теорема (в. једн. 146, чл. 158.). Неће бити, с тога, излишно ако наведене обрасце 146) докажемо на још један, непосредан, начин.

Нека је ABC један сферни троугао. Вежимо његова темена A, B, C са средиштем O лопте и обра-

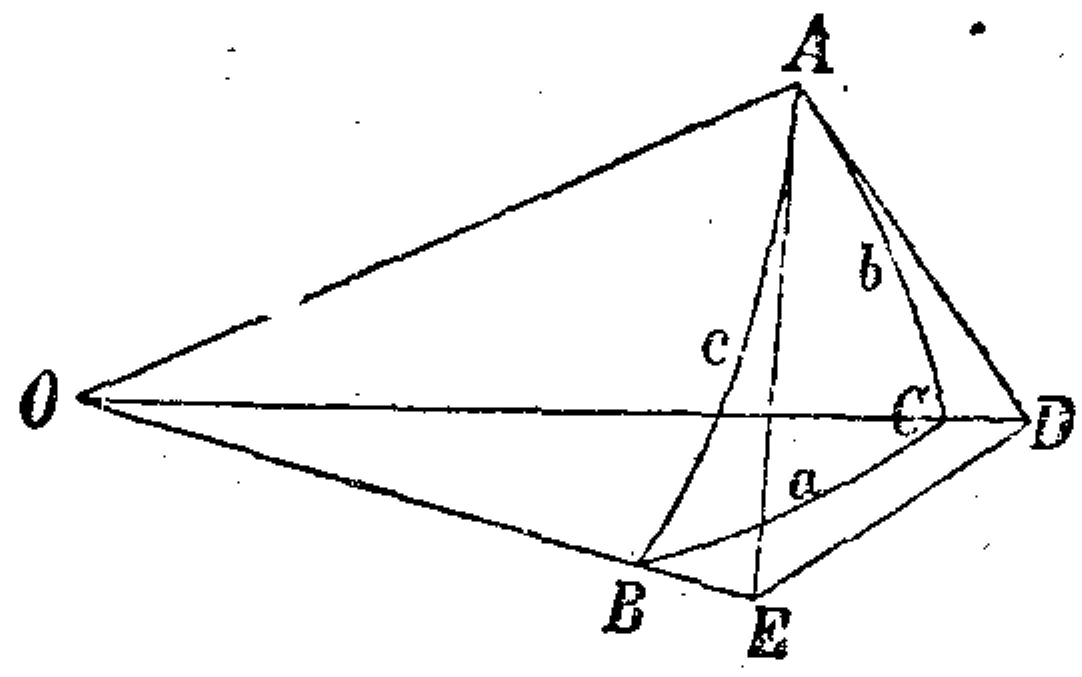
---

[1]) Под комадима једнога сферног троугла разумемо овде његове најважније елементе, а то су стране и угли.

зујмо, на тај начин, тространи телесни рогаљ $OABC$ у коме су ивични угли

$$\measuredangle BOC = a, \quad \measuredangle COA = b, \quad \measuredangle AOB = c.$$

Повуцимо у темену A тангенте AD и AE на луке AC и AB (стране b и c задатог троугла). Онда је $\measuredangle DAE =$ сферноме углу A (в. чл. 144.). Означимо са r полупречник лопте: $r = OA = OB = OC$.



Сл. 97.

Из слике читамо непосредно

за раван троугао ADE

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \cos A,$$

за раван троугао DOE

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2 \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OE} \cdot \cos a$$

(на основу познате косинусне теореме за равне троугле), дакле

$$\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \cos A$$
$$= \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2 \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OE} \cdot \cos a,$$

где је, као што из слике видимо,

$$AD = r \cdot tg\, b, \; AE = r \cdot tg\, c, \; OD = \frac{r}{\cos b}, \; OE = \frac{r}{\cos c}$$

и према томе

$$r^2\, tg^2\, b + r^2\, tg^2\, c - 2\, r^2\, tg\, b\, tg\, c \cos A$$

$$\frac{r^2}{\cos^2 b} + \frac{r^2}{\cos^2 c} - 2\, \frac{r^2 \cos a}{\cos b \cos c}$$

или, кад леву и десну страну поделимо са r^2, а помножимо са $\cos^2 b \cos^2 c$,

$$\sin^2 b \cos^2 c + \sin^2 c \cos^2 b - 2 \sin b \sin c \cos b \cos c \cos A =$$
$$\cos^2 c + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c,$$

одакле даље следује

$$2 \cos a \cos b \cos c =$$
$$(1-\sin^2 b)\cos^2 c + (1-\sin^2 c)\cos^2 b + 2 \sin b \sin c \cos b \cos c \cos A$$

или

$$2 \cos a \cos b \cos c =$$
$$2 \cos^2 b \cos^2 c + 2 \sin b \sin c \cos b \cos c \cos A$$

и најзад

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad \text{q. e. d.}$$

На исти начин изводимо и остале две једначине.

Да су једначине 146) потпуно довољне и да се из њих могу, чисто рачунским путем, изнаћи и сви други обрасци Сферне Тригонометрије, који служе за разрешавање сферних троуглова, увидићемо на следећи начин. Пре свега знамо да је сферни троугао потпуно одређен двема странама и захваћеним углом (в. 3. случај подударности, чл. 153.), нпр. странама b, c и углом A. Прва једн. 146) даје нам, у томе случају, трећу страну a и то нам је даје *несумњиво* (пошто је страна a изражена косинусном функцијом, а знамо да је $a < 180^0$); помоћу осталих двеју једначина израчунавамо тако исто несумњиво угле B и C. То значи, дакле, да су једначине 146) потпуно довољне да се, помоћу њих, сферни троугао разреши. Да, поред ових једначина 146), не могу постојати никакви други од њих независни обрасци јасно је отуда што кад бих било таквих образаца и кад бих они за троугао дали елементе различне од оних, које смо нашли употребом косинусне теореме, то би, онда, значило да троугао није потпуно одређен задатим комадима (двема странама и захваћеним углом), чиме бисмо, пак, дошли у сукоб са једном већ познатом и доказатом истином.

Да се горњи обрасци 146) могу да узму као основне једначине, из којих се сви остали обрасци Сферне Тригонометрије дају извести, уверићемо се и на овај формални начин кад се опоменемо да су обрасци 150), 151), 152) и 153) у чл. 162. добивени из косинусне теореме. Помоћу образаца у чл. 162. нашли смо *Гаус*-ове једначине 158) у чл. 164., а помоћу ових, опет, *Непер*-ове аналогије 159) у чл. 165. Синусну теорему (једн. 145 чл. 157.) могли бисмо да добијемо из једн. 153) чл. 162. поделивши две и две од тих једначина једну с другом. Примена косинусне теореме и образаца који се непосредно из ње изводе на суплементни сферни троугао води нас обрасцима 147) (чл. 159.), 154), 155), 156) и 157) (чл. 163.). Специјалисањем ових општих образаца за правоугли сферни троугао (узев нпр. $C = 90^0$) долазимо до *Непер*-овог правила: једн. 143) у чл. 155. и једн. 144) у чл. 156. а с овим налазимо, на већ показати начин, једн. 148) чл. 160. и једн. 149) чл. 161.

Осим ових, до сада добивених, образаца можемо да изведемо још и друге, нове, обрасце из косинусне теореме. Тако нпр. ако вредност за $\cos c$, коју нам даје трећа једначина 146) ставимо у прву од тих једначина добићемо

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A$$

или

$$\cos a\,(1 - \cos^2 b) = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A\,,$$

одакле, кад поделимо целу једначину са $\sin b$ и у тако добивеној једначини променимо кружно слова, налазимо следеће нове обрасце

$$160)\quad \begin{cases} \cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A \\ \cos b \sin c = \sin b \cos c \cos A + \sin a \cos B \\ \cos c \sin a = \sin c \cos a \cos B + \sin b \cos C \\ \cos a \sin c = \sin a \cos c \cos B + \sin b \cos A \\ \cos b \sin a = \sin b \cos a \cos C + \sin c \cos B \\ \cos c \sin b = \sin c \cos b \cos A + \sin a \cos C, \end{cases}$$

који изражавају везу између све три стране и два угла.

Кад у овим обрасцима ставимо, на основу синусне теореме, редом

$$\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}, \quad \sin a = \frac{\sin b \sin A}{\sin B}, \quad \sin b = \frac{\sin c \sin B}{\sin C},$$

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}, \quad \sin c = \frac{\sin b \sin C}{\sin B}, \quad \sin a = \frac{\sin c \sin A}{\sin C}$$

и после их скратимо (поделимо леву и десну страну) са $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, добићемо обрасце у којима су везане по две стране са по два угла

$$\left.\begin{aligned}
cotg\, a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C\, cotg\, A \\
cotg\, b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A\, cotg\, B \\
cotg\, c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B\, cotg\, C \\
cotg\, a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B\, cotg\, A \\
cotg\, b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C\, cotg\, B \\
cotg\, c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A\, cotg\, C.
\end{aligned}\right\} \quad (161$$

Ако у првој једн. под 160), а то је

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A$$

заменимо

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}, \quad \sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$$

наћићемо

$$\frac{\sin a \cos a \sin B}{\sin A} = \sin a \cos b \cos C + \frac{\sin a \sin C \cos A}{\sin A}$$

или

$$\sin a \cos a \sin B = \sin a \cos b \sin A \cos C + \sin a \sin C \cos A,$$

које, кад поделимо, лево и десно, са $\sin a$ и кружно променимо слова, даје ову нову групу образаца

$$\left.\begin{aligned}
\cos a \sin B &= \cos b \sin A \cos C + \cos A \sin C \\
\cos b \sin C &= \cos c \sin B \cos A + \cos B \sin A \\
\cos c \sin A &= \cos a \sin C \cos B + \cos C \sin B \\
\cos a \sin C &= \cos c \sin A \cos B + \cos A \sin B \\
\cos b \sin A &= \cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C \\
\cos c \sin B &= \cos b \sin C \cos A + \cos C \sin A
\end{aligned}\right\} \quad (162$$

у којима је изражена веза између две стране и сва три угла.

Помоћу ових, на послетку добивених, образаца можемо да нађемо обрасце у којима се јавља само по једна страна са сва три угла (обрасце 147, чл. 159.). Ако ставимо из пете једн. 162) за $\cos b \sin A$ његову вредност: $\cos b \sin A = \cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C$ у прву од тих једначина добићемо

$$\cos a \sin B =$$

$$\cos a \sin B \cos^2 C + \cos B \sin C \cos C + \cos A \sin C,$$

одакле

$$\cos a \sin B\,(1 - \cos^2 C) = \cos B \sin C \cos C + \cos A \sin C$$

или

$$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A$$

и најзад

$$147)\ \begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \\ \text{А тако исто} \\ \cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{cases}$$

До сасвим нових образаца долазимо кад узмемо прве једначине из група 146) и 147), дакле ове две једначине

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

помножимо прву са $\cos A$, другу са $\cos a$ и у резултату

$$\cos b \cos c \cos A + \sin b \sin c \cos^2 A =$$

$$- \cos B \cos C \cos a + \sin B \sin C \cos^2 a$$

(који добијамо на основу начела да кад су две количине равне једној трећој оне и međусобом морају бити равне) заменимо $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$. У тако добивеној једначини

$$\cos b \cos c \cos A + \sin b \sin c - \sin b \sin c \sin^2 A =$$

$$- \cos B \cos C \cos a + \sin B \sin C - \sin B \sin C \sin^2 a$$

скраћује се трећи члан на левој страни са трећим чланом на десној страни, јер је (на основу синусне теореме) $\sin b \sin A \cdot \sin c \sin A = \sin B \sin a \cdot \sin C \sin a$ и остаје

$$\left.\begin{array}{l} \sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a. \\ \text{Тако исто налазимо:} \\ \sin c \sin a + \cos c \cos a \cos B = \sin C \sin A - \cos C \cos A \cos b \\ \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c. \end{array}\right\} (163$$

Ове једначине 163), које доводе у везу свих шест елемената сфернога троугла, зову се *كањоли*-ови обрасци таконазвати по талијанскоме астроному *Andrea Cagnoli* (Занте 1743. — Верона 1816.).

2.

Обрасци за сферни ексцес и површину сфернога троугла.

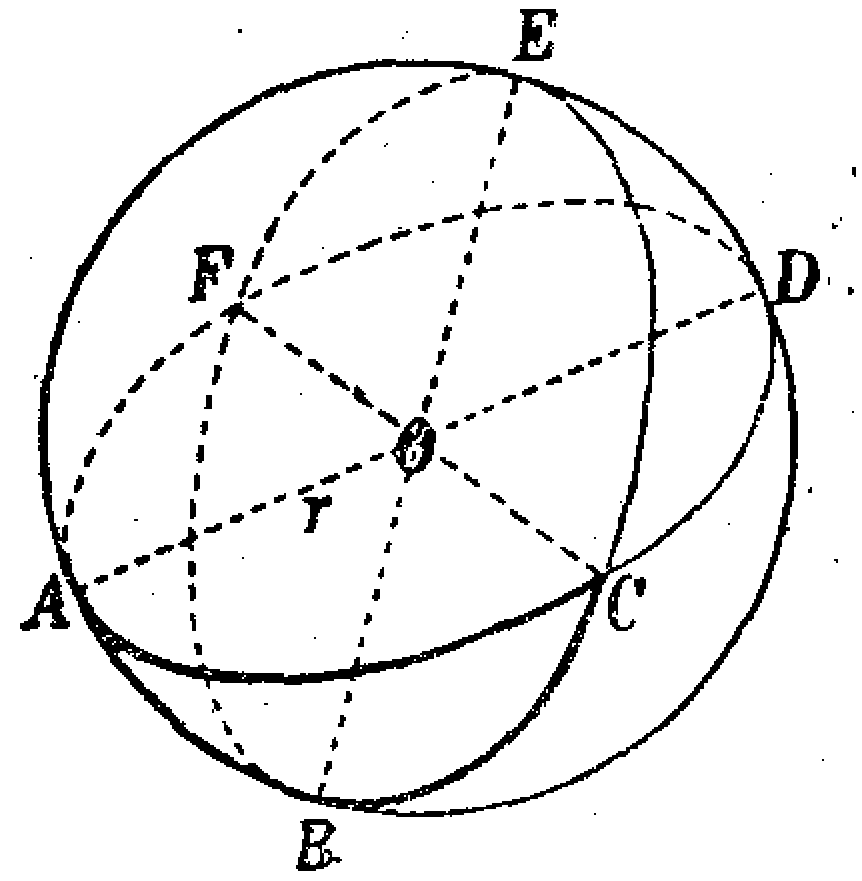
167. **Површина сфернога двоугла.** — Означимо са p површину сфернога двоугла $ABDCA$ са сферним

углом $A = D$, а на површини лопте са полупречником r. Имавши на уму да је површина целе лопте $= 4\pi r^2$ по себи је јасно да постоји пропорција

$$p : 4\pi r^2 = A^0 : 360^0,$$

одакле

$$164) \qquad p = \frac{A^0}{90^0} \pi r^2$$



Сл. 98.

или, ако сферни угао A изразимо његовим луком на основу познате сразмере $A^0 : 180^0 = arc\,A : \pi$

$$164a) \qquad p = 2 r^2 \, arc\, A.$$

168. **Површина сфернога троугла.** — Из слике 98, а на основу обрасца 164) читамо

$$\triangle ABC + \triangle BCD = \text{двоуглу } ABDCA = \frac{A}{90^0} \pi r^2$$

$$\triangle ABC + \triangle ACE = \quad \text{„} \quad BCEAB = \frac{B}{90^0} \pi r^2$$

$$\triangle ABC + \triangle ABF = \quad \text{„} \quad CBFAC = \frac{C}{90^0} \pi r^2,$$

које, кад саберемо и заменимо сферни троугао ABF сферним троуглом CDE, који му је, као унакрсни, по површини једнак (в. у почетку чл. 151.), даје

$$2 \cdot ABC + ABC + BCD + ACE + CDE$$
$$= \frac{A + B + C}{90^0} \pi r^2$$

или, пошто је $ABC + BCD + ACE + CDE =$ половини целе лопте $= 2\pi r^2$,

$$2 \cdot ABC + 2\pi r^2 = \frac{A+B+C}{90^0} \pi r^2,$$

одакле

$$ABC = (A + B + C - 180^0) \frac{\pi r^2}{180^0},$$

или, ако означимо површину сфернога троугла ABC са P, сферни ексцес $A + B + C - 180^0 = E$,

$$P = \frac{E \pi r^2}{180^0} \tag{165}$$

или, најзад, ако сферни ексцес, на основу сразмере $E : 180^0 = arc\,E : \pi$, изразимо у лучној мери,

$$P = r^2\, arc\, E. \tag{165a}$$

169. **Сферни ексцес.** — Из горњега обрасца, за површину сфернога троугла, видимо да је за њено израчунавање потребно познавати сферни ексцес.

У случајима, где су нам дата сва три угла сфернога троугла, познат је и сферни вишак, јер је $E = A + B + C - 180^0$. Кад су нам дата само два угла и једна (ма која) страна или кад су нам дате две стране и једној од њих двеју супротни угао, ми налазимо трећи угао, односно остала два угла, помоћу *Непер*-ових аналогија и добијама тако на најкраћи начин и сферни ексцес. За остала два случаја, пак, а то: кад су нам дате две стране и захваћени угао и кад су нам дате све три стране, тражићемо нарочите обрасце за израчунавање сфернога вишка.

1. Израчунавање сфернога вишка кад су нам дате две стране и захваћени угао, нпр. a, b и C.

Пођимо од *Гаус*-ових једначина

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}$$

и помножимо прву са $\cos\frac{C}{2}$, другу са $\sin\frac{C}{2}$ и онда их саберимо. Добићемо

$$\left\{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}\right\}\cos\frac{c}{2}$$

$$=\cos\frac{a-b}{2}\cos^2\frac{C}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

или

$$\sin\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{c}{2}=$$

$$\left\{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right\}\cos^2\frac{C}{2}+$$

$$\left\{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right\}\sin^2\frac{C}{2}$$

или најзад, имавши на уму да је $\frac{A+B+C}{2}=90^0+\frac{E}{2}$, дакле $\sin\frac{A+B+C}{2}=\cos\frac{E}{2}$, а пошто на десној страни скратимо по могућству

$$\cos\frac{E}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\left\{\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right\}$$

$$=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C,$$

одакле

$$\cos\frac{E}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}{\cos\frac{c}{2}}. \qquad (166_a$$

Помножимо сада прву *Гаус*-ову једначину са $\sin\frac{C}{2}$, другу са $\cos\frac{C}{2}$ и одузмимо прву једначину од друге, па ћемо добити

$$\left\{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}\right\}\cos\frac{c}{2}$$
$$=\left\{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right\}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

или

$$\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{c}{2}=-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C,$$

одакле, с обзиром на то да је $\cos\frac{A+B+C}{2}=-\sin\frac{E}{2}$,

$$\sin\frac{E}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C}{\cos\frac{c}{2}}. \qquad (166_b$$

Деобом обрасца 166_b) са обрасцем 166_a) налазимо следећи израз за одређивање сфернога вишка из две стране и захваћенога угла

$$tg\frac{E}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}=\frac{\sin C}{cotg\frac{a}{2}\,cotg\frac{b}{2}+\cos C} \qquad (166$$

Напомена. За правоугли сферни троугао, у коме $C = 90^0$, дакле a и b његове катете, имамо, место обрасца 166) овај простији

$$167) \qquad tg\frac{E}{2} = tg\frac{a}{2}\,tg\frac{b}{2}.$$

2. Израчунавање сфернога вишка помоћу страна сфернога троугла.

Из прве *Гаус*-ове једначине, коју ћемо написати у форми

$$\frac{sin\dfrac{A+B}{2}}{cos\dfrac{C}{2}} = \frac{cos\dfrac{a-b}{2}}{cos\dfrac{c}{2}},$$

следује, на основу једног познатог става о пропорцијама

$$\frac{sin\dfrac{A+B}{2} - cos\dfrac{C}{2}}{sin\dfrac{A+B}{2} + cos\dfrac{C}{2}} = \frac{cos\dfrac{a-b}{2} - cos\dfrac{c}{2}}{cos\dfrac{a-b}{2} + cos\dfrac{c}{2}},$$

одакле, кад ставимо $cos\dfrac{C}{2} = sin\dfrac{180^0 - C}{2}$ и претворимо збирове и разлике тригонометриских функција у производе (помоћу једн. 21 у чл. 24.), налазимо

$$\frac{sin\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\,cos\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)}{cos\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\,sin\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)}$$

$$= \frac{sin\frac{1}{4}(b+c-a)\,sin\frac{1}{4}(a+c-b)}{cos\frac{1}{4}(b+c-a)\,cos\frac{1}{4}(a+c-b)}$$

или

$$\left.\begin{aligned} tg\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\,cotg\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)\\ =tg\frac{1}{4}(b+c-a)\,tg\frac{1}{4}(a+c-b). \end{aligned}\right\}(\alpha$$

Узмимо сада ону другу *Гаус*-ову једначину

$$\frac{cos\,\frac{A+B}{2}}{sin\,\frac{C}{2}}=\frac{cos\,\frac{a+b}{2}}{cos\,\frac{c}{2}}.$$

Из ње следује

$$\frac{sin\,\frac{C}{2}-cos\,\frac{A+B}{2}}{sin\,\frac{C}{2}+cos\,\frac{A+B}{2}}=\frac{cos\,\frac{c}{2}-cos\,\frac{a+b}{2}}{cos\,\frac{c}{2}+cos\,\frac{a+b}{2}},$$

које, кад ставимо $sin\,\frac{C}{2}=cos\,\frac{180^0-C}{2}$ и претворимо збирове и разлике тригонометриских функција у производе, даје

$$\frac{sin\,\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\,sin\,\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)}{cos\,\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\,cos\,\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)}$$

$$=\frac{sin\,\frac{1}{4}(a+b+c)\,sin\,\frac{1}{4}(a+b-c)}{cos\,\frac{1}{4}(a+b+c)\,cos\,\frac{1}{4}(a+b-c)}$$

или

$$\beta) \quad \begin{cases} tg\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\, tg\frac{1}{4}(A+B-C+180^0) \\ \qquad = tg\frac{1}{4}(a+b+c)\, tg\frac{1}{4}(a+b-c). \end{cases}$$

Помножимо једначине α) и β) једну с другом, па ћемо добити

$$tg^2\frac{E}{4} =$$

$$tg\frac{1}{4}(a+b+c)\, tg\frac{1}{4}(b+c-a)\, tg\frac{1}{4}(a+c-b)\, tg\frac{1}{4}(a+b-c),$$

одакле, кад извучемо корен квадратни из обеју страна једначине и ставимо, као и до сада, $a+b+c=2s$, следује такозвани *Лилие-ов образац* (Simon-Antoine-Jean Lhuilier, Женева 1750. — Женева 1840.) за израчунавање сферног ексцеса помоћу страна сферног троугла

$$168) \qquad tg\frac{E}{4} = \sqrt{tg\frac{s}{2}\, tg\frac{s-a}{2}\, tg\frac{s-b}{2}\, tg\frac{s-c}{2}}.$$

III

ПРИМЕРИ И ПРИМЕНЕ.

1.

Основни задатци о разрешавању правоуглих сферних троуглова.

170. **Први задатак.** — Дата је хипотенуза c и једна катета, нпр. катета a. Траже се остали комади b, A и B.

Решење. Трећа и пета једн. 143) чл. 155. дају

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}, \quad \cos B = tg\, a \, cotg\, c.$$

Комад A могли бисмо израчунати непосредно из задатих комада на основе прве једн. 143)

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c},$$

али, због неодређености, која се јавља при израчунавању лукова помоћу синусне функције, боље је употребити један од ова два обрасца из групе 143)

$$\cos A = \cos a \sin B = tg\, b \, cotg\, c, \quad tg\, A = \frac{tg\, a}{\sin b} = \frac{cotg\, B}{\cos c}.$$

Пример.

Дато је:

$$c = 110^0 \, 4' \, 15'', \quad a = 41^0 \, 16' \, 8''.$$

Тражи се:

$$b, A \text{ и } B.$$

Решење.

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a} \qquad\qquad \cos B = tg\, a \, cotg\, c$$

$$\begin{array}{ll} \log \cos c = 9{,}535\,5240\ (n) & \log tg\, a = 9{,}943\,2767 \\ \log \cos a = 9{,}875\,9997 & \log cotg\, c = 9{,}562\,7340\ (n) \\ \hline \log \cos b = 9{,}659\,5243\ (n) & \log \cos B = 9{,}506\,0107\ (n) \\ b = 180^0 - 62^0\,49'\,58{,}3'' & B = 180^0 - 71^0\,17'\,55{,}2'' \\ \quad = 117^0\,10'\,1{,}7''; & \quad = 108^0\,42'\,4{,}8''. \end{array}$$

$$tg\, A = \frac{tg\, a}{\sin b}$$

$$\begin{array}{l} \log tg\, a = 9{,}943\,2767 \\ \log \sin b = 9{,}949\,2331 \\ \hline \log tg\, A = 9{,}994\,0436 \\ \quad A = 44^0\,36'\,25{,}6''. \end{array}$$

Напомена. Ми бисмо могли угао A да израчунамо непосредно из задатих комада a и c

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$$

$$\log \sin a = 9{,}819\,2765$$
$$\log \sin c = 9{,}972\,7900$$
$$\log \sin A = 9{,}846\,4865$$
$$A = 44^0\,36'\,25{,}6'',$$

јер је она друга угловна вредност $180^0 - A$ искључена на основу 7. теореме чл. 152.

171. **Други задатак.** — Дате су катете a и b. Траже се остали комади c, A и B.

Решење. Из треће, друге и прве једн. 143) добијамо

$$\cos c = \cos a \cos b, \quad tg\, A = \frac{tg\, a}{\sin b}, \quad tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin a}.$$

Или, пошто израчунамо хипотенузу c, могли бисмо угле да израчунамо на овај начин

$$\cos A = tg\, b \cot g\, c, \quad \cos B = tg\, a \cot g\, c.$$

Пример.

Дато је:

$$a = 83^0\,1'\,14'', \quad b = 74^0\,6'\,28''.$$

Тражи се:

$$c, A \text{ и } B.$$

Решење.

$$\cos c = \cos a \cos b$$
$$\log \cos a = 9{,}084\,6236$$
$$\log \cos b = 9{,}437\,4789$$
$$\log \cos c = 8{,}522\,1025$$
$$c = 88^0\,5'\,35{,}5'';$$

$$tg\,A = \frac{tg\,a}{sin\,b} \qquad\qquad tg\,B = \frac{tg\,b}{sin\,a}$$

$$\begin{array}{rl|rl}
log\,tg\,a = & 0{,}912\,1462 & log\,tg\,b = & 0{,}545\,5961 \\
log\,sin\,b = & 9{,}983\,0751 & log\,sin\,a = & 9{,}996\,7698 \\
\hline
log\,tg\,A = & 0{,}929\,0711 & log\,tg\,B = & 0{,}548\,8263 \\
A = & 83^0\,17'\,5{,}4''; & B = & 74^0\,13'\,10{,}8''.
\end{array}$$

172. **Трећи задатак.** — Позната је хипотенуза c и један налегли угао, нпр. угао A. Да се израчунају остали комади a, b и B.

Решење. Из треће и четврте једн. 143) налазимо

$$tg\,B = \frac{cotg\,A}{cos\,c}, \quad tg\,b = tg\,c\,cos\,A.$$

Комад a могли бисмо добити на основу прве једн. 143)

$$sin\,a = sin\,c\,sin\,A,$$

али, пошто је страна a изражена синусном функцијом, боље је употребити један од ових образаца

$$cos\,a = \frac{cos\,c}{cos\,b} = \frac{cos\,A}{sin\,B}, \quad tg\,a = sin\,b\,tg\,A = tg\,c\,cos\,B.$$

Пример.

Дато је:

$$c = 71^0\,14'\,9'', \quad A = 62^0\,3'\,47''.$$

Тражи се:

$$a,\ b \text{ и } B.$$

Решење.

$$tg\,B = \frac{cotg\,A}{cos\,c} \qquad\qquad tg\,b = tg\,c\,cos\,A$$

$$\begin{array}{rl|rl}
log\,cotg\,A = & 9{,}724\,5205 & log\,tg\,c = & 0{,}468\,8661 \\
log\,cos\,c = & 9{,}507\,4154 & log\,cos\,A = & 9{,}670\,7092 \\
\hline
log\,tg\,B = & 0{,}217\,1051 & log\,tg\,b = & 0{,}139\,5753 \\
B = & 58^0\,45'\,34''; & b = & 54^0\,3'\,8{,}8'';
\end{array}$$

$$tg\, a = \sin b\, tg\, A$$
$$\log \sin b = 9{,}908\,2462$$
$$\log tg\, A = 0{,}275\,4795$$
$$\log tg\, a = 0{,}183\,7257$$
$$a = 56^0\, 46'\, 23{,}5''.$$

Напомена. Страну a израчунаћемо непосредно из задатих комада c и A на начин:

$$\sin a = \sin c \sin A$$
$$\log \sin c = 9{,}976\,2815$$
$$\log \sin A = 9{,}946\,1887$$
$$\log \sin a = 9{,}922\,4702$$
$$a = 56^0\, 46'\, 23{,}5''.$$

Друга угловна вредност $180^0 - a$ не може да постоји услед 6. теореме чл. 152.

173. **Четврти задатак.** — Позната је једна катета, нпр. катета a и налегли угао B. Да се нађу остали комади b, c и A.

Решење. Из прве, пете и четврте једн. 143) налазимо

$$tg\, b = \sin a\, tg\, B, \quad tg\, c = \frac{tg\, a}{\cos B}, \quad \cos A = \cos a \sin B.$$

Пример.

Дато је:

$$a = 137^0\, 15'\, 40'', \quad B = 58^0\, 21'\, 16''.$$

Тражи се:

$$b,\ c \text{ и } A.$$

Решење.

$$tg\, b = \sin a\, tg\, B$$
$$\log \sin a = 9{,}831\,6512$$
$$\log tg\, B = 0{,}210\,2074$$
$$\log tg\, b = 0{,}041\,8586$$
$$b = 47^0\, 45'\, 24{,}8'';$$

$$tg\, c = \frac{tg\, a}{\cos B}$$
$$\log tg\, a = 9{,}965\,6865\ (n)$$
$$\log \cos B = 9{,}719\,8804$$
$$\log tg\, c = 0{,}245\,8061\ (n)$$
$$c = 180^0 - 60^0\, 24'\, 43{,}8''$$
$$= 119^0\, 35'\, 16{,}2'';$$

$$\cos A = \cos a \sin B$$

$$\log \cos a = 9{,}865\,9647\ (n)$$

$$\log \sin B = 9{,}930\,0877$$

$$\log \cos A = 9{,}796\,0524\ (n)$$

$$A = 180^0 - 51^0\,17'\,58{,}6'' = 128^0\,42'\,1{,}4''.$$

174. **Пети задатак.** — Дати су угли A и B, да се израчунају стране a, b и c.

Решење. Четврта, пета и трећа једн. 143) дају

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin A}, \quad \cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B.$$

Пример.

Дато је:

$$A = 65^0\,7'\,18{,}3'', \quad B = 79^0\,14'\,35{,}8''.$$

Тражи се:

a, b и c.

Решење.

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B} \qquad\qquad \cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$$

$$\log \cos A = 9{,}623\,9637 \qquad\qquad \log \cos B = 9{,}271\,0031$$

$$\log \sin B = 9{,}992\,3009 \qquad\qquad \log \sin A = 9{,}957\,7048$$

$$\log \cos a = 9{,}631\,6628 \qquad\qquad \log \cos b = 9.313\,2983$$

$$a = 64^0\,38'\,44{,}2''; \qquad\qquad b = 78^0\,7'\,39{,}9'';$$

$$\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B$$

$$\log \operatorname{cotg} A = 9{,}666\,2589$$

$$\log \operatorname{cotg} B = 9{,}278\,7021$$

$$\log \cos c = 8{,}944\,9610$$

$$c = 84^0\,56'\,45{,}1''.$$

175. **Шести задатак.** — Дата је једна катета и њој супротни угао, нпр. a и A. Треба да се израчунају остали комади b, c и B.

Решење. Ма који од непознатих комада b, c или B узели да израчунамо, примећујемо да је дотични елеменат изражен синусном функцијом. Непознате комаде b, c и B добијамо из познатих комада a и A помоћу прве, друге и четврте једн. 143)

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}, \quad \sin b = tg\, a \, cotg\, A, \quad \sin B = \frac{\cos A}{\cos a}.$$

Отуда, што свакоме синусу одговарају две разне лучне вредности, видимо да овај задатак има у опште два решења. У извесним случајима, пак, задатак може немати ниједно решење или имати само једно.

Пре свега задатак је немогућ, ако задати елементи a и A не одговарају ономе што тврди 9. теорема чл. 152., тј. ако катета и њој супротни угао нису или обоје већи или равни или мањи од 90^0 [1]).

Задатак је одређен, тј. има само једно решење

1) кад је $A < 90^0$, дакле $A + C < 180^0$ и према томе (а на основу 8. теореме чл. 152.) $a + c < 180^0$, а од оне две вредности које добијамо за c из обрасца

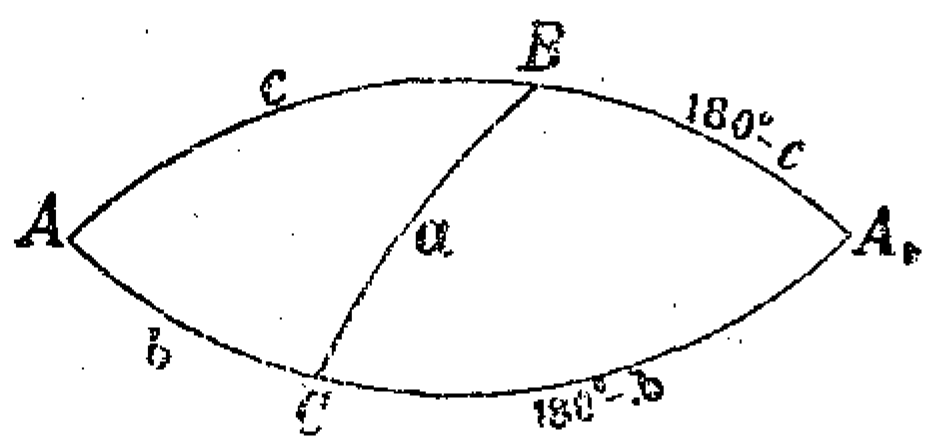
[1]) Девету теорему чл. 152., да у једноме правоуглом сферном троуглу морају катете и њима супротни угли бити обоје или већи или равни или мањи од 90^0, можемо да докажемо помоћу горњег обрасца $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$. Јер, пошто је угао B, као у опште сваки угао у сферноме троуглу, мањи од 180^0, дакле $\sin B > 0$, следује да $\cos A$ и $\cos a$ морају бити једнога истог знака, тј. или су обоје ($\cos A$ и $\cos a$) положни или су обоје одречни. Ми знамо да је косинус положан у првоме квадранту: за угле мање од 90^0; одречан је у другоме квадранту: за угле веће од 90^0. То значи, онда, да су a и A или обоје већи или мањи или, пак, обоје равни 90^0.

$sin\,c = \frac{sin\,a}{sin\,A}$ само једна одговара томе да је $a + c < 180^0$.

2) на случај да је $A > 90^0$, дакле $A + C > 180^0$ и $a + c > 180^0$, а од нађених вредности за c само једна испуњава услов $a + c > 180^0$.

Ако је $A = 90^0$, онда је и $a = 90^0$ и према томе $sin\,c = \frac{sin\,a}{sin\,A} = 1$, $c = 90^0$. Из пете једн. 143) следује у томе случају да је $cos\,B = cos\,b$, дакле $B = b$. То значи: кад су у једноме сферном троуглу два угла права, па дакле и њима супротне стране $= 90^0$, онда је трећа страна равна трећем углу. У томе случају задатак има безбројно много решења.

У свима осталим случајима задатак има два решења; добивају се два правоугла сферна троугла, која имају задату страну a и овој супротни угао A. Такав два троугла ABC и A_1BC допуњују се до сфернога двоугла ABA_1CA. Ако означимо са $a, b, c, A, B, C = 90^0$ стране и угле једнога од та два троугла, онда су стране и угли онога другог троугла a, $180^0 - b$, $180^0 - c$, A, $180^0 - B$, $C = 90^0$.



Сл. 99.

Пример.

Дато је:

$$a = 39^0\,12'\,27{,}5'',\quad A = 53^0\,19'\,21{,}4''.$$

Тражи се:

$$b,\ c,\ \text{и}\ B.$$

Решење.

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$$

$$\log \sin a = 9{,}800\,8082$$
$$\log \sin A = 9{,}904\,1806$$
$$\overline{\log \sin c = 9{,}896\,6276}$$

$$c = 52^0\,0'\,58'' \text{ и } c = 180^0 - 52^0\,0'\,58'' = 127^0\,59'\,2''.$$

Као што видимо за обадве вредности од c јесте $a + c < 180^0$ и задатак има два решења.

За прву вредност $c = 52^0\,0'\,58''$ имамо:

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a} \qquad\qquad tg\, B = \frac{cotg\, A}{\cos c}$$

$$\log \cos c = 9{,}789\,1856 \qquad\qquad \log cotg\, A = 9{,}872\,0183$$
$$\log \cos a = 9{,}889\,2234 \qquad\qquad \log \cos c = 9{,}789\,1856$$
$$\log \cos b = 9{,}899\,9622 \qquad\qquad \log tg\, B = 0{,}082\,8327$$
$$b = 37^0\,24'\,52{,}8''; \qquad\qquad B = 50^0\,25'\,52{,}2''.$$

За другу вредност $c = 127^0\,59'\,2''$ јесте

$$b = 180^0 - 37^0\,24'\,52{,}8'' = 142^0\,35'\,7{,}2''$$
$$B = 180^0 - 50^0\,25'\,52{,}2'' = 129^0\,34'\,7{,}8''.$$

Добили смо, дакле, ова два правоугла сферна троугла као решења постављеног задатка

$$\text{I}\left\{\begin{array}{lll} a = 39^0\,12'\,27{,}5'', & b = 37^0\,24'\,52{,}8'', & c = 52^0\,0'\,58'', \\ A = 53^0\,19'\,21{,}4'', & B = 50^0\,25'\,52{,}2'', & C = 90^0. \end{array}\right.$$

$$\text{II}\left\{\begin{array}{lll} a = 39^0\,12'\,27{,}5'', & b = 142^0\,35'\,7{,}2'', & c = 127^0\,59'\,2'', \\ A = 53^0\,19'\,21{,}4'', & B = 129^0\,34'\,7{,}8'', & C = 90^0. \end{array}\right.$$

2.

Основни задатци о разрешавању општих сферних троуглова.

176. **Први задатак.** — Дате су стране a, b, c једнога сферног троугла; траже се његови угли A, B и C.

Решење. За израчунавање углова једнога сферног троугла помоћу страна имамо обрасце 150), 151), 152) и 153 (чл. 162.). Да би овај задататак био у опште могућ, задати елементи, тј. стране, морају испуњавати ове услове

$$b + c > a,\; c + a > b,\; a + b > c,$$

$$a + b + c < 360^0$$

(в. 3. и 4. теорему у чл. 152.).

Пример.

Дато је:

$a = 98^0\,14'\,27{,}8''$, $b = 56^0\,34'\,19{,}3''$, $c = 75^0\,28'\,46{,}5''$.

Тражи се:

A, B, C и E.

Решење.

$s = 115^0\,8'\,46{,}8''$	$\log \sin s = 9{,}956\,7568$
$s - a = 16^0\,54'\,19''$	$\log \sin (s - a) = 9{,}463\,5800$
$s - b = 58^0\,34'\,27{,}5''$	$\log \sin (s - b) = 9{,}931\,1104$
$s - c = 39^0\,40'\,0{,}3''$	$\log \sin (s - c) = 9{,}805\,0393$

$$\log \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}} = 9{,}621\,4864.$$

$$\log tg\frac{A}{2}=\log\frac{1}{\sin(s-a)}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

$$=9{,}621\,4864-9{,}463\,5800=0{,}157\,9064$$

$$\frac{A}{2}=55^0\,11'\,38{,}31'',\qquad A=110^0\,23'\,16{,}6'':$$

$$\log tg\frac{B}{2}=\log\frac{1}{\sin(s-b)}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

$$=9{,}621\,4864-0{,}931\,1104=9{,}690\,3760$$

$$\frac{B}{2}=26^0\,6'\,51{,}24'',\qquad B=52^0\,13'\,42{,}5'';$$

$$\log tg\frac{C}{2}=\log\frac{1}{\sin(s-c)}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

$$=9{,}621\,4864-9{,}805\,0393=9{,}816\,4471$$

$$\frac{C}{2}=33^0\,14'\,14{,}07'',\qquad C=66^0\,28'\,28{,}1''.$$

Према овоме је сферни вишак

$$E=A+B+C-180^0=49^0\,5'\,27{,}2''.$$

Непознавајући угле, ми бисмо сферни вишак могли да израчунамо непосредно из страна помоћу *Лилие* овог обрасца (једн. 168., чл. 169.):

$$\frac{s}{2}=57^0\,34'\,23{,}4''\qquad \log tg\frac{s}{2}=0{,}197\,0372$$

$$\frac{s-a}{2}=8^0\,27'\,9{,}5''\qquad \log tg\frac{s-a}{2}=9{,}172\,0365$$

$$\frac{s-b}{2}=29^0\,17'\,13{,}75''\qquad \log tg\frac{s-b}{2}=9{,}748\,8692$$

$$\frac{s-c}{2}=19^0\,50'\,0{,}15''\qquad \log tg\frac{s-c}{2}=9{,}557\,1224$$

$$\log tg\frac{E}{4}=\log\sqrt{tg\frac{s}{2}\,tg\frac{s-a}{2}\,tg\frac{s-b}{2}\,tg\frac{s-c}{2}}=9{,}337\,5326$$

$$\frac{E}{4}=12^0\,16'\,21{,}83'',\qquad E=49^0\,5'\,27{,}3''.$$

177. **Други задатак.** — Познати су угли A, B, C сфернога троугла; да се израчунају стране његове a, b и c.

Решење. Задатак можемо да решимо помоћу образаца 154), 155), 156) и 157) (чл. 163.). Да би овај задатак био у опште могућ, задати елементи тј. угли, морају да испуне услове

$$180^0 < A + B + C < 540^0$$ [1]

(в. 5. теорему у чл. 152.).

Пример.

Дато је:

$$A = 47^0\, 18'\, 56'', \quad B = 118^0\, 35', \quad C = 85^0\, 4'\, 18''.$$

Тражи се:

$$a, b, c \text{ и } E.$$

Решење.

$$E = A + B + C - 180^0 = 70^0\, 58'\, 14''.$$

$S = 125^0\, 29'\, 7''$	$\log\cos S = 9{,}763\,7976\,(n)$
$S - A = 78^0\, 10'\, 11''$	$\log\cos(S-A) = 9{,}311\,7821$
$S - B = 6^0\, 54'\, 7''$	$\log\cos(S-B) = 9{,}996\,8414$
$S - C = 40^0\, 24'\, 49''$	$\log\cos(S-C) = 9{,}881\,6039$

$$\log\sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}} = 0{,}286\,7851$$

[1]) Пошто овај други задатак стоји с првим задатком у односу реципрочности, тј. у односу у којем стоје два суплементна троугла, — то се, према томе, и услови за могућност другог задатка могу да закључе из услова за могућност првога задатка. И заиста из $b + c > a$ следује реципроцисањем (применом на суплементни сферни троугао) да мора бити $180^0 - B + 180^0 - C > 180^0 - A$, одакле $A + B + C < 180^0 + 2A$ или, пошто је $A < 180^0$, да мора бити $A + B + C < 540^0$. На исти начин изводимо из услова $a + b + c < 360^0$ реципрочни услов $180^0 - A + 180^0 - B + 180^0 - C < 360^0$, тј. $A + B + C > 180^0$.

$$\log tg \frac{a}{2} = \log \cos (S - A) \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}}$$

$$= 9{,}311\,7821 + 0{,}286\,7851 = 9{,}598\,5672$$

$$\frac{a}{2} = 21^0\,38'\,34{,}72'', \qquad a = 43^0\,17'\,9{,}4'';$$

$$\log tg \frac{b}{2} = \log \cos (S - B) \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}}$$

$$= 9{,}996\,8414 + 0{,}286\,7851 = 0{,}283\,6265$$

$$\frac{b}{2} = 62^0\,30'\,20{,}08'', \qquad b = 125^0\,0'\,40{,}2'';$$

$$\log tg \frac{c}{2} = \log \cos (S - C) \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}}$$

$$= 9{,}881\,6039 + 0{,}286\,7851 = 0{,}168\,3890$$

$$\frac{c}{2} = 55^0\,21{,}70'', \qquad c = 111^0\,40'\,43{,}4''.$$

178. **Трећи задатак.** — Дате су две стране и захваћени угао, нпр. a, b и C; да се израчунају троуглови елементи c, A и B.

1. Решење. Страну c налазимо помоћу косинусне теореме (треће једн. 146 у чл. 158.), а по томе угле A и B помоћу синусне теореме или боље помоћу *Гаус*-ових једначина (седмог и десетог обрасца 158, чл. 164.), *Непер*-ових аналогија (седмог и десетог обрасца 159, чл. 165.), помоћу тангентних образаца једн. 148, чл. 160.) или најзад на начин као у првоме задатку, тј. употребом ма којих од образаца 150), 151), 152) или 153) у чл. 162.

2. Решење. Израчунаћемо прво угле A и B помоћу *Непер*-ових аналогија (седмог и десетог обрасца 159 у чл. 165.) или тангентних образаца (једн. 148 у чл. 160.). Страну c можемо добити било помоћу

синусне или косинусне теореме, помоћу *Гаус*-ових једначина (првог или седмог обрасца 158, чл. 164.), *Непер*-ових аналогија (првог или четвртог обрасца 159, чл. 165.), тангентних образаца (једн. 149, чл. 161.) или најзад на начин као у другоме задатку, тј. употребом ма којих од образаца 154), 155), 156) или 157) у чл. 163.

Пример.

Дато је:

$$a = 95^0\,36'\,4{,}3'', \quad b = 43^0\,15'\,27{,}9'', \quad C = 65^0\,24'\,18{,}6''.$$

Тражи се:

$$c,\ A,\ B \text{ и } E.$$

Решење.

Овде је

$$\frac{a+b}{2} = 69^0\,25'\,46{,}1'' \qquad \frac{a-b}{2} = 26^0\,10'\,18{,}2''$$

$$log\,sin\,\frac{a+b}{2} = 9{,}971\,3874 \qquad log\,sin\,\frac{a-b}{2} = 9{,}644\,5006$$

$$log\,cos\,\frac{a+b}{2} = 9{,}545\,7525 \qquad log\,cos\,\frac{a-b}{2} = 9{,}953\,0230$$

$$\frac{C}{2} = 32^0\,42'\,9{,}3''$$

$$log\,cotg\,\frac{C}{2} = 0{,}192\,4296.$$

С овим, а помоћу *Непер*-ових аналогија (седмог и десетог обрасца 159 у чл. 165.) налазимо

$$log\,tg\,\frac{A+B}{2} = log\,\frac{cos\,\frac{a-b}{2}}{cos\,\frac{a+b}{2}}\,cotg\,\frac{C}{2}$$

$$= 9{,}953\,0230 + 0{,}192\,4296 - 9{,}545\,7525$$

$$= 0{,}599\,7001$$

$$\frac{A+B}{2}=75^0\,53'\,25,17'';$$

$$\log tg\frac{A-B}{2}=\log\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot g\frac{C}{2}$$

$$=644\,5006+0,192\,4296-9,971\,3874$$

$$=9,865\,5428$$

$$\frac{A-B}{2}=36^0\,16'\,8,48''.$$

Сабирањем и одузимањем добивених вредности за $\frac{A+B}{2}$ и $\frac{A-B}{2}$ следује

$$A=112^0\,9'\,33,65'',\quad B=39^0\,37'\,16,69''.$$

Страну c израчунаћемо, такође, помоћу *Непер*-ових аналогија (прве једн. 159, чл. 165.):

$$tg\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}tg\frac{a+b}{2}$$

$$\log\cos\frac{A+B}{2}=9,386\,9959$$

$$\log tg\frac{a+b}{2}=0,425\,6349$$

$$\log\cos\frac{A-B}{2}=9,906\,4688$$

$$\log tg\frac{c}{2}=9,906\,1620$$

$$\frac{c}{2}=38^0\,51'\,27,59''\qquad c=77^0\,42'\,55,2''.$$

Најзад за сферни ексцес налазимо

$$E = A + B + C - 180^0 = 37^0 11'8{,}94''.$$

Непосредно из задатих комада a, b и C добићемо сферни ексцес помоћу обрасца 166) у чл. 169.

$$tg\frac{E}{2} = \frac{sin\, C}{cotg\frac{a}{2}\, cotg\frac{b}{2} + cos\, C}$$

$$log\, cotg\frac{a}{2} = 9{,}957\,4759$$

$$log\, cotg\frac{b}{2} = 0{,}401\,7446$$

$$log\, cotg\frac{a}{2}\, cotg\frac{b}{2} = 0{,}359\,2205 \qquad cotg\frac{a}{2}\, cotg\frac{b}{2} = 2{,}286\,7595$$

$$log\, cos\, C = 9{,}619\,3008 \qquad cos\, C = 0{,}416\,1988$$

$$cotg\frac{a}{2}\, cotg\frac{b}{2} + cos\, C = 2{,}702\,9583$$

$$log\, sin\, C = 9{,}958\,6946$$

$$log\left(cotg\frac{a}{2}\, cotg\frac{b}{2} + cos\, C\right) = 0{,}431\,8393$$

$$log\, tg\frac{E}{2} = 9{,}526\,8553$$

$$\frac{E}{2} = 18^0 35'\, 34{,}48'', \qquad E = 37^0 11'\, 8{,}96''.$$

179. **Четврти задатак.** — Дата је једна страна и два налегла угла, нпр. c, A и B; да се израчунају остали комади a, b и C.

1. Решење. Угао C добијамо на основу косинусне теореме (треће једн. 147 у чл. 159.), пи онда стране a и b помоћу синусне теореме или боље по-

моћу *Гаус*-ових једначина (првог и седмог обрасца 158, чл. 164.), *Непер*-ових аналогија (првог и четвртог обрасца 159, чл. 165.), тангентних образаца (једн. 149, чл. 161.) или најзад на начин као у првоме задатку, тј. употребом ма којих од образаца 150), 151), 152) или 153) у чл. 162.

2. Решење. Израчунајмо прво стране a и b помоћу *Непер*-ових аналогија (првог и четвртог обрасца 159, чл. 165.) или тангентних образаца (једн. 149, чл. 161.). Угао C можемо добити било помоћу синусне или косинусне теореме, помоћу *Гаус*-ових једначина (првог или четвртог обрасца 158, чл. 164.), *Непер*-ових аналогија (седмог или десетог обрасца 159, чл. 156.), тангентних образаца (једн. 148., чл. 160.) или најзад на начин као у другоме задатку, тј. употребом ма којих од образаца 154), 155), 156) или 157) у чл. 163.

Приметимо да овај задатак стоји са прошлим (3.) задатком у односу реципрочности.

Пример.

Дато је:

$$c = 134^0\,17'\,45{,}6'', \quad A = 103^0\,57'\,2{,}9'', \quad B = 129^0\,35'\,18{,}7''.$$

Тражи се:

$$a,\ b,\ C \text{ и } E.$$

Решење.

Овде је

$$\frac{A+B}{2} = 116^0\,46'\,10{,}8'' \qquad \frac{A-B}{2} = -12^0\,49'7{,}9''$$

$$log\,sin\frac{A+B}{2} = 9{,}950\,7661 \qquad log\,sin\frac{A-B}{2} = 9{,}346\,0976\ (n)$$

$$log\,cos\frac{A+B}{2} = 9{,}653\,6031\ (n) \qquad log\,cos\frac{A-B}{2} = 9{,}989\,0386$$

$$\frac{c}{2} = 67^0\, 8'\, 52{,}8''$$

$$\log tg \frac{c}{2} = 0{,}375\,2749.$$

С овим, а помоћу *Непер*-ових аналогија (првог и четвртог обрасца 159, чл. 165) добијамо.

$$tg\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\,tg\frac{c}{2} = \frac{\cos(-12^0\,49'\,7{,}9'')}{\cos 116^0\,46'\,10{,}8''}\,tg\,67^0\,8'\,52{,}8''$$

$$= -\frac{\cos 12^0\,49'\,7{,}9''}{\cos 63^0\,13'\,49{,}2''}\,tg\,67^0\,8'\,52{,}8''$$

$$\log tg\frac{a+b}{2} = (9{,}989\,0386 + 0{,}375\,2749 - 0{,}653\,6031)\,(n)$$

$$= 0{,}710\,7104\,(n)$$

$$\frac{a+b}{2} = 180^0 - 78^0\,59'\,3{,}27'' = 101^0\,0'\,56{,}73'';$$

$$tg\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\,tg\frac{c}{2} = \frac{\sin(-12^0\,49'\,7{,}9'')}{\sin 116^0\,46'\,10{,}8''}\,tg\,67^0\,8'\,52{,}8''$$

$$= -\frac{\sin 12^0\,49'\,7{,}9''}{\sin 63^0\,13'\,49{,}2''}\,tg\,67^0\,8'\,52{,}8''$$

$$\log tg\frac{a-b}{2} = (9{,}346\,0976 + 0{,}375\,2749 - 9{,}950\,7661)\,(n)$$

$$= 9{,}770\,6064\,(n)$$

$$\frac{a-b}{2} = -30^0\,31'\,35{,}14''.$$

Сабирањем и одузимањем израчунатих вредности за $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$ налазимо

$$a = 70^0\,29'\,21{,}59'',\quad b = 131^0\,32'\,31{,}87''.$$

Угао C израчунаћемо, такође, помоћу *Непер*-ових аналогија, нпр. помоћу седме једн. 159)

$$tg\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}cotg\frac{A+B}{2}=\frac{\cos(-30^0\,31'\,35{,}14'')}{\cos 101^0\,0'\,56{,}73''}cotg\,116^0\,46'\,10{,}8$$

$$=\frac{\cos 30^0\,31'\,35{,}14''}{\cos 78^0\,59'\,3{,}27''}cotg\,63^0\,13'\,49{,}2''$$

$$\log\cos 30^0\,31'\,35{,}14''=9{,}935\,2023$$
$$\log cotg\,63^0\,13'\,49{,}2''=9{,}702\,8371$$
$$\log\cos 78^0\,59'\,3{,}27''=9{,}281\,2129$$

$$\log tg\frac{C}{2}=0{,}356\,8265$$

$$\frac{C}{2}=66^0\,15'\,50{,}68''. \qquad C=132^0\,31'\,41{,}36''.$$

Према горњим вредностима јесте сферни ексцес

$$E=A+B+C-180^0=186^0\,4'\,3''.$$

180. **Пети задатак.** — Познате су нам две стране и угао који лежи према једној од тих двеју страна, нпр. a, b и A. Има да се одреде остали троуглови комади c, B и C.

Решење. Угао B добијамо помоћу синусне теореме

$$\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}\sin A,$$

угао C помоћу *Непер*-ових аналогија (седмог или десетог обрасца 159, чл. 165.), а страну c тако исто (употребом првог или четвртог обрасца 159) или, користећи се већ израчунатим комадима, на ма који од горе изложених начина.

Отуда, што је прво израчунати комад, угао B, изражен синусном функцијом, а ми знамо да једноме и истом синусу одговарају две угловне вредности, које се допуњују до 180^0, видимо да овај задатак има у опште два решења. У извесним случајевима, пак, задатак може имати и само једно решење или шта више немати ниједно решење.

Напомена. Да бисмо поједине случајеве, који могу да наступе код овога задатка, ближе испитали користићемо се 8. теоремом чл. 152., на основу које за $a + b \gtreqless 180^0$ јесте $A + B \gtreqless 180^0$.

Према томе можемо да разликујемо следеће могућности:

I на случај да је $a + b > 180^0$, дакле и $A + B > 180^0$, а при томе

1. ако је $A > 90^0$ јесте B неодређено, јер има у опште две вредности.

2. ако је $A = 90^0$ јесте $B > 90^0$, тј. може имати само једну вредност.

3. ако је $A < 90^0$ јесте $B > 90^0$, тј. може имати само једну вредност.

II на случај да је $a + b = 180^0$, дакле и $A + B = 180^0$, а при томе

1. ако је $A > 90^0$ биће $B < 90^0$, тј. може имати само једну вредност.

2. ако је $A = 90^0$ биће $B = 90^0$, тј. може имати само једну вредност.

3. ако је $A < 90^0$ биће $B > 90^0$ тј. може имати само једну вредност.

III на случај да је $a + b < 180^0$, дакле и $A + B < 180^0$, а при томе

1. ако је $A > 90^0$ биће $B < 90^0$, тј. може да има само једну вредност.

2. ако је $A = 90^0$ биће $B < 90^0$, тј. може да има само једну вредност.

3. ако је $A < 90^0$ биће B неодређено, јер има у опште две вредности.

Према овоме задатак може да буде неодређен, тј. може имати два решења само у ова два случаја

1. кад је $a + b > 180^0$, $A > 90^0$ и
2. „ „ $a + b < 180^0$, $A < 90^0$.

Међутим ми смо у стању да, у извесним приликама, и овде одредимо потпуно вредност угла B. Јер, ако је $a + b > 180^0$, $A > 90^0$, а при томе $a \leqq b$, онда (на основу 7. теореме чл. 152.) мора бити $B \geqq A$, дакле $B > 90^0$. Тако исто кад је $a + b < 180^0$, $A < 90^0$, а при томе $a \geqq b$ мора (услед поменуте 7. теореме чл. 152.) да буде $B \leqq A$, дакле $B < 90^0$. У једноме и у другоме случају задатак постаје потпуно одређен, јер се за угао B добија само по једна вредност.

Одавде следује да горњи задатак може да буде неодређен само у ова два случаја

1. кад је $a + b > 180^0$, $A > 90^0$, $a > b$ и
2. „ „ $a + b < 180^0$, $A < 90^0$, $a < b$.

У свакоме је другом случају задатак или одређен или немогућ. Но и ово последње неће наступити ако су троуглови елементи добивени мерењем или се у опште односе на какав постојећи сферни троугао.

1. Пример.

Дато је:

$$a = 48^0\,9'\,10'', \quad b = 35^0\,17'\,24'', \quad A = 71^0\,49'\,5''.$$

Тражи се:

$$c,\ B.\ C \text{ и } E.$$

Решење.

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \sin A$$

$$\log \sin b = 9{,}761\,7138$$

$$\log \sin A = 9{,}977\,7558$$

$$\underline{\log \sin a = 9{,}872\,1134}$$

$$\log \sin B = 9{,}867\,3562$$

$$B = 47^0\,27'\,37{,}72'' \quad \text{и} \quad B = 180^0 - 47^0\,27'\,37{,}72'' = 132^0\,32'\,22{,}28''.$$

Од ове две вредности за угао B сме се узети само прва вредност

$$B = 47^0\,27'\,37{,}72'',$$

јер, узевши ону другу вредност, дошло би се до несугласице да је за $a > b$, $A < B$, које је противно 7. теореми чл. 152.

Трећу страну c и трећи угао C можемо израчунати помоћу прве или четврте и помоћу седме или десете *Непер*-ових аналогија (једн. 159, чл. 165.)

$$\frac{A+B}{2} = 59^0\,38'\,21{,}36'' \qquad \frac{A-B}{2} = 12^0\,10'\,43{,}64''$$

$$\frac{a+b}{2} = 41^0\,43'\,17'' \qquad \frac{a-b}{2} = 6^0\,25'\,53''$$

$$tg\,\frac{c}{2} = \frac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}}\,tg\,\frac{a+b}{2} = \frac{\cos 59^0\,38'\,21{,}36''}{\cos 12^0\,10'\,43{,}64''}\,tg\,41^0\,43\,17\,'$$

$$\log \cos \frac{A+B}{2} = 9{,}703\,6718$$

$$\log tg \frac{a+b}{2} = 9{,}950\,1883$$

$$\underline{\log \cos \frac{A-B}{2} = 9{,}990\,1141}$$

$$\log tg \frac{c}{2} = 9{,}663\,7460$$

$$\frac{c}{2} = 24^0\,45'\,7{,}06'', \qquad c = 49^0\,30'\,14{,}12''.$$

$$tg\,\frac{C}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\,cotg\,\frac{A+B}{2} = \frac{\cos 6^0\,25'\,53''}{\cos 41^0\,43'\,17''}\,cotg\,59^0\,38'\,21{,}36$$

$$\log\cos\frac{a-b}{2} = 9{,}997\,2582$$

$$\log cotg\frac{A+B}{2} = 9{,}767\,7313$$

$$\log\cos\frac{a+b}{2} = 9{,}872\,9657$$

$$\log tg\frac{C}{2} = 9{,}892\,0238$$

$$\frac{C}{2} = 37^0\,56'\,58{,}92'', \qquad C = 75^0\,53'\,57{,}84''.$$

Најзад

$$E = A + B + C - 180^0 = 15^0\,10'\,40{,}56''.$$

2. Пример.

Дато је:

$$a = 127^0\,56', \quad b = 73^0\,12'. \quad A = 142^0\,17'.$$

Тражи се:

$$c, B, C \text{ и } E.$$

Решење.

Пошто је у овоме примеру $a + b > 180^0$, $A > 90^0$, $a > b$, то је, према горе (у *Напомени*) реченоме, ово један од она два случаја у којима задатак има два решења.

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}\sin A$$

$$\log\sin b = 9{,}981\,0569$$

$$\log\sin A = 9{,}786\,5791$$

$$\log\sin a = 9{,}896\,9265$$

$$\log\sin B = 9{,}870\,7095$$

$$B = 47^0\,56'\,48{,}21'' \text{ и } B = 180^0 - 47^0\,56'\,48{,}21'' = 132^0\,3'\,11{,}79''.$$

За $B = 47^0\,56'\,48{,}21''$ имамо:

$$\frac{A+B}{2} = 95^0\,6'\,54{,}1'' \qquad \frac{A-B}{2} = 47^0\,10'\,5{,}9''$$

$$\frac{a+b}{2} = 100^0\,34' \qquad \frac{a-b}{2} = 27^0\,22'$$

$$tg\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\,tg\frac{a+b}{2} = \frac{\cos 95^0\,6'54{,}1''}{\cos 47^0\,10'5{,}9''}\,tg\,100^0\,34'$$

$$= \frac{\cos 84^0\,53'\,5{,}9''}{\cos 47^0\,10'\,5{,}9''}\,tg\,79^0\,26'$$

$$\begin{aligned} \log\cos 84^0\,53'\,5{,}9'' &= 8{,}950\,1483 \\ \log tg\,79^0\,26' &= 0{,}729\,2214 \\ \log\cos 47^0\,10'\,5{,}9'' &= 9{,}832\,4112 \\ \hline \log tg\frac{c}{2} &= 9{,}846\,9585 \end{aligned}$$

$$\frac{c}{2} = 35^0\,6'\,26{,}7'', \qquad c = 70^0\,12'\,53{,}4''.$$

$$tg\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\,cotg\frac{A+B}{2} = \frac{\cos 27^0\,22'}{\cos 100^0\,34'}\,cotg\,95^0\,6'\,54{,}1''$$

$$= \frac{\cos 27^0\,22'}{\cos 79^0\,26'}\,cotg\,84^0\,53'\,5{,}9''$$

$$\begin{aligned} \log\cos 27^0\,22' &= 9{,}948\,4535 \\ \log cotg\,84^0\,53'\,5{,}9'' &= 8{,}951\,8812 \\ \log\cos 79^0\,26' &= 9{,}263\,3507 \\ \hline \log tg\frac{C}{2} &= 9{,}636\,9840 \end{aligned}$$

$$\frac{C}{2} = 23^0\,26'\,11{,}35'', \qquad C = 46^0\,52'\,22{,}7''.$$

За $B = 132^0\,3'\,11{,}79''$ имамо:

$$\frac{A+B}{2} = 137^0\,10'\,5{,}9'' \qquad \frac{A-B}{2} = 5^0\,6'\,54{,}1''$$

$$\frac{a+b}{2} = 100^0\,34' \qquad \frac{a-b}{2} = 27^0\,22'$$

$$tg\,\frac{c}{2} = \frac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}}\,tg\,\frac{a+b}{2} = \frac{\cos 137^0\,10'\,5{,}9''}{\cos 5^0\,6'\,54{,}1''}\,tg\,100^0\,34'$$

$$= \frac{\cos 42^0\,49'\,54{,}1''}{\cos 5^0\,6'\,54{,}1''}\,tg\,79^0\,26'$$

$$\begin{aligned} \log\cos 42^0\,49'\,54{,}1'' &= 9{,}865\,3136 \\ \log tg\,79^0\,26' &= 0{,}729\,2214 \\ \log\cos 5^0\,6'\,54{,}1'' &= 9{,}998\,2671 \\ \hline \log tg\,\frac{c}{2} &= 0{,}596\,2679 \end{aligned}$$

$$\frac{c}{2} = 75^0\,46'\,58{,}43'', \qquad c = 151^0\,33'\,56{,}86''.$$

$$tg\,\frac{C}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\,cotg\,\frac{A+B}{2} = \frac{\cos 27^0\,22'}{\cos 100^0\,34'}\,cotg\,137^0\,10'\,5{,}9''$$

$$= \frac{\cos 27^0\,22'}{\cos 79^0\,26'}\,cotg\,42^0\,49'\,54{,}1''$$

$$\begin{aligned} \log\cos 27^0\,22' &= 9{,}948\,4535 \\ \log cotg\,42^0\,49'\,54{,}1'' &= 0{,}032\,9024 \\ \log\cos 79^0\,26' &= 9{,}263\,3507 \\ \hline \log tg\,\frac{C}{2} &= 0{,}718\,0052 \end{aligned}$$

$$\frac{C}{2} = 79^0\,9'\,48{,}04'' \qquad C = 158^0\,19'\,36{,}08''.$$

Добили смо, дакле, ова два сферна троугла:

$$\mathrm{I}\begin{cases} a=127^0\,56', & b=73^0\,12', & c=70^0\,12'\,53{,}4'', \\ A=142^0\,17', & B=47^0\,56'\,48{,}21'', & C=46^0\,52'\,22{,}7'', \\ & E=57^0\,6'\,10{,}91''. & \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} a=127^0\,56', & b=73^0\,12', & c=151^0\,33'\,56{,}86'', \\ A=142^0\,17', & B=132^0\,3'\,11{,}79', & C=158^0\,19'\,36{,}08'', \\ & E=252^0\,39'\,47{,}87''. & \end{cases}$$

181. **Шести задатак.** — Дата су два угла и страна која лежи према једноме од та два угла, нпр. A, B и a; да се израчунају остали комади b, c и C.

Решење. Страну b добијамо помоћу синусне теореме

$$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A} \sin a,$$

страну c помоћу *Непер*-ових аналогија (првог или четвртог обрасца 159, чл. 165.), а угао C тако исто (помоћу седмог или десетог обрасца 159) или, ако се будемо користили већ израчунатим комадима, на ма који од раније показатих начина.

Услед тога што је прво одређени елеменат (страна c) изражен синусном функцијом, јасно је да овај задатак, као и онај прошли (5. задатак), има у опште два решења; у извесним приликама он може имати и само једно решење, па и ниједно.

Напомена. Расматрајући посебице случајеве када је $A+B>180^0$, $A+B=180$, $A+B<180^0$ онако исто као и у прошломе члану или с погледом на то да је овај задатак, па дакле и сви услови који за њега важе, реципрочан претходећем (5.) задатку, долазимо до резултата да овај задатак може да буде неодређен, тј. да има два решења само у ова два случаја

1. кад је $A+B>180^0$, $a>90^0$, $A>B$ и
2. „ „ $A+B<180^0$, $a<90^0$, $A<B$.

У свакоме другом случају задатак је одређен или у опште немогућ.

1. Пример.

Дато је:

$A=97^0\,4'\,20{,}9''$, $B=79^0\,0'\,31{,}4''$, $a=105^0\,42'\,18{,}2''$.

Тражи се:

$$b,\ c,\ C \text{ и } E.$$

Решење.

$$\sin b=\frac{\sin B}{\sin A}\sin a$$

$$\log\sin B=9{,}991\,9594$$

$$\log\sin a=9{,}983\,4765$$

$$\log\sin A=9{,}996\,6829$$

$$\log\sin b=9{,}978\,7530.$$

На основу овога добијамо за страну b ове две вредности

$$b=72^0\,13'\,24{,}4'' \text{ и } b=180^0-72^0\,13'\,24{,}4=107^0\,46'\,35{,}6'',$$

од којих се сме узети само прва вредност

$$b=72^0\,13'\,24{,}4'',$$

јер бисмо, узевши ону другу вредност, имали $A>B, a<b$, што је противно 6. теореми чл. 152.

Трећу страну c и трећи угао C наћићемо, као и у прошломе задатку, помоћу *Непер*-овим аналогија.

$$\frac{A+B}{2}=88^0\,2'\,26{,}15'' \qquad \frac{A-B}{2}=9^0\,1'\,54{,}75''$$

$$\frac{a+b}{2}=88^0\,57'\,51{,}3'' \qquad \frac{a-b}{2}=16^0\,44'\,26{,}9''$$

$$tg\frac{c}{2}=\frac{sin\dfrac{A+B}{2}}{sin\dfrac{A-B}{2}}\,tg\frac{a-b}{2}=\frac{sin\,88^0\,2'26{,}15''}{sin\;\;9^0\,1'54{,}75''}\,tg\,16^0\,44'\,26{,}9''$$

$$\begin{aligned} log\,sin\,88^0\;\;2'\,26{,}15'' &= 9{,}999\,7461\\ log\,tg\,16^0\,44'\,26{,}9'' &= 9{,}478\,2646\\ \underline{log\,sin\;\;9^0\;\;1'\,54{,}75''} &= \underline{9{,}195\,8551}\\ log\,tg\frac{c}{2} &= 0{,}282\,1556 \end{aligned}$$

$$\frac{c}{2}=62^0\,25'\,33{,}7'' \qquad c=124^0\,51'\,7{,}4''.$$

$$tg\frac{C}{2}=\frac{sin\dfrac{a-b}{2}}{sin\dfrac{a+b}{2}}\,cotg\;\frac{A-B}{2}=\frac{sin\,16^0\,44'\,26{,}9''}{sin\,88^0\,57'\,51{,}3''}\,cotg\,9^0\,1'\,54{,}75''$$

$$\begin{aligned} log\,sin\,16^0\,44'\,26{,}9'' &= 9{,}459\,4567\\ log\,cotg\;\;9^0\;\;1'\,54{,}75'' &= 0{,}798\,7264\\ \underline{log\,sin\,88^0\,57'\,51{,}3''} &= \underline{9{,}999\,9291}\\ log\,tg\frac{C}{2} &= 0{,}258\,2540 \end{aligned}$$

$$\frac{C}{2}=61^0\,6'\,43{,}48'' \qquad C=122^0\,13'\,27''.$$

Најзад

$$E=A+B+C-180^0=118^0\,18'\,19{,}3''.$$

2. Пример.

Дато je:

$A = 51^0\,6'\,32{,}8''$, $B = 119^0\,4'\,21{,}6''$, $a = 48^0\,2'\,45{,}2''$.

Тражи се:

$$b,\ c,\ C \text{ и } E$$

Решење.

$$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A}\sin a$$

$$\log \sin B = 9{,}941\,5135$$
$$\log \sin a = 9{,}871\,3864$$
$$\underline{\log \sin A = 9{,}891\,1711}$$
$$\log \sin b = 9{,}921\,7288$$

$b = 56^0\,37'\,27{,}5''$ и $b = 180^0 - 56^0\,37'\,27{,}5'' = 123^0\,22'\,32{,}5''$.

За прву вредност $b = 56^0\,37'\,27{,}5''$ следује:

$$\frac{A+B}{2} = 85^0\,5'\,27{,}2'' \qquad \frac{A-B}{2} = -\,33^0\,58'\,54{,}4''$$

$$\frac{a+b}{2} = 52^0\,20'\,6{,}35'' \qquad \frac{a-b}{2} = -\,4^0\,17'\,21{,}15''$$

$$tg\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\,tg\frac{a-b}{2} = \frac{\sin 85^0\,5'\,27{,}2''}{\sin(-33^0\,58'\,54{,}4'')}\,tg(-4^0\,17'\,21{,}15'')$$

$$= \frac{\sin 85^0\,5'\,27{,}2''}{\sin 33^0\,58'\,54{,}4''}\,tg\,4^0\,17'\,21{,}15''$$

$$\log \sin 85^0\,\,5'\,27{,}2'' = 9{,}998\,4040$$
$$\log tg\,\,4^0\,17'\,21{,}15'' = 8{,}875\,0669$$
$$\underline{\log \sin 33^0\,58'\,54{,}4'' = 9{,}747\,3568}$$
$$\log tg\frac{c}{2} = 9{,}126\,1141$$

$$\frac{c}{2} = 7^0 36' 53,94'', \qquad c = 15^0 13' 47,9''$$

$$tg\frac{C}{2} = \frac{sin\dfrac{a-b}{2}}{sin\dfrac{a+b}{2}} cotg\frac{A-B}{2} = \frac{sin(-4^0 17' 21,15'')}{sin 52^0 20' 6,35''} cotg(-33^0 58' 54,4'')$$

$$= \frac{sin 4^0 17' 21,15''}{sin 52^0 20' 6,35''} cotg 33^0 58' 54,4''$$

$$\begin{aligned} log\, sin\ 4^0 17' 21,15'' &= 8,873\,8488 \\ log\, cotg\, 33^0 58' 54,4'' &= 0,171\,3105 \\ log\, sin\, 52^0 20'\ 6,35'' &= 9,898\,5047 \\ \hline log\, tg\frac{C}{2} &= 9,146\,6546 \end{aligned}$$

$$\frac{C}{2} = 7^0 58' 44,96'' \qquad C = 15^0 57' 29,9''.$$

За другу вродност $b = 123^0 22\ 32,5''$ добићемо:

$$\frac{A+B}{2} = 85^0 5' 27,2 \qquad \frac{A-B}{2} = -33^0 58' 54,4''$$

$$\frac{a+b}{2} = 85^0 42' 38,85'' \qquad \frac{a-b}{2} = -37^0 39' 53,65''$$

$$tg\frac{c}{2} = \frac{sin\dfrac{A+B}{2}}{sin\dfrac{A-B}{2}} tg\frac{a-b}{2} = \frac{sin 85^0 5' 27,2''}{sin(-33^0 58' 54,4'')} tg(-37^0 39\ 53,65'')$$

$$= \frac{sin 85^0\ 5' 27,2''}{sin 33^0 58' 54,4''} tg 37^0 39' 53,65''$$

$$\begin{aligned} log\, sin\, 85^0\ 5' 27,2'' &= 9,998\,4040 \\ log\, tg\, 37^0 39' 53,65'' &= 9,887\,5666 \\ log\, sin\, 33^0 58' 54,4'' &= 9,747\,3568 \\ \hline log\, tg\frac{c}{2} &= 0,138\,6138 \end{aligned}$$

$$\frac{c}{2} = 53^0\,59'\,31{,}74'', \qquad c = 107^0\,59'\,3{,}5''.$$

$$tg\frac{C}{2} = \frac{sin\dfrac{a-b}{2}}{sin\dfrac{a+b}{2}}\,cotg\,\frac{A-B}{2} = \frac{sin\,(-37^0\,39'53{,}65'')}{sin\,85^0\,42'\,38{,}85''}\,cotg(-33^0\,58'\,54{,}4''$$

$$= \frac{sin\,37^0\,39'\,53{,}65''}{sin\,85^0\,42'\,38{,}85''}\,cotg\,33^0\,58'\,54{,}4''$$

$$\begin{aligned} \log sin\,37^0\,39'\,53{,}65'' &= 9{,}786\,0713 \\ \log cotg\,33^0\,58'\,54{,}4'' &= 0{,}171\,3105 \\ \log sin\,85^0\,42'\,38{,}85'' &= 9{,}998\,7819 \\ \hline \log tg\frac{C}{2} &= 9{,}958\,5999 \end{aligned}$$

$$\frac{C}{2} = 42^0\,16'\,23{,}52'', \qquad C = 84^0\,32'\,47''.$$

Добили смо, дакле, ова два сферна троугла:

$$\text{I}\begin{cases} a = 48^0\,2'\,45{,}2'', & b = 56^0\,37'\,27{,}5'', & c = 15^0\,13'\,47{,}9'', \\ A = 51^0\,6'\,32{,}8'', & B = 119^0\,4'\,21{,}6'', & C = 15^0\,57'\,29{,}9'', \\ & E = 6^0\,8'\,24{,}3''. & \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} a = 48^0\,2'\,45{,}2'', & b = 123^0\,22'\,32{,}5'', & c = 107^0\,59'\,3{,}5'', \\ A = 51^0\,6'\,32{,}8'', & B = 119^0\,4'\,21{,}6'', & C = 84^0\,32'\,47'', \\ & E = 74^0\,43'\,41{,}4''. & \end{cases}$$

182. **Изрази за дужину страна сферног троугла у дужној јединици и површину сферног троугла у површинској јединици.** — Примећујемо да се у обрасцима Сферне Тригонометрије *стране* троуглове не јављају никад у *непосредној* форми као стране — као што је случај у Равној Тригонометрији — него увек у виду тригонометриских функција и да се, према

томе, претпоставља да су исте (тј. стране) изражене као и угли: степенима, минутама и секундама. На овај начин полупречник лопте, на којој замишљамо луке (тј. стране троуглове), остаје потпуно произвољан. Ако се, међутим, жели да зна *дужина* лукова, који образују стране сфернога троугла, онда се мора узети у рачун полупречник лопте. Означимо са ω дужину лука који одговара углу од $1''$ у кругу са полупречником 1, дакле $\omega = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{\pi}{648\,000}$ (в. чл. 3.); онда је $r\omega$ дужина лука једне секунде у кругу са полупречником r и, према томе, дужина лука којем одговарају a секунада, означимо тај лук са $arc\, a$,

$$arc\, a = a\, r\, \omega.$$

Показали смо раније да је, рачунајући са логаритмима, дозвољено $log\, \omega$ заменути са $log\, sin\, \omega$, тј. са $log\, sin\, 1''$, пошто је грешка, која се тиме чини, тако мала да не утиче на седмо десетно место[1]). Према томе можемо да ставимо

$$arc\, a = a\, r\, sin\, 1'',$$

одакле

$$a = \frac{arc\, a}{r\, sin\, 1''}.$$

Помоћу ових образаца можемо да изразимо дужину лукова (стране сфернога троугла) у дужној јединици, нпр. у метрима, познавајући њихову вредност у секундама, као и обратно што можемо да израчунамо колико секунада садрже извесни луци (стране

[1]) В. чл. 32. и примедбу под 2 у чл. 132. на стр. 358.

сфернога троугла) познавајући њихову величину у дужној јединици.

За површину сферног троугла имали смо образац

$$P = r^2 E \frac{\pi}{180^0}$$

(в. једн. 165, чл. 168.), у којем се претпоставља да је сферни ексцес E изражен у степенима и деловима степена. Ако, пак, сферни ексцес изразимо у секундама, онда је површина

$$P = r^2 E \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60},$$

где је, према горе реченом, $\frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = \omega$ дужина лука једне секунде у кругу са полупречником 1, и које можемо да заменимо са $\sin 1''$. На тај начин следује образац

$$P = r^2 E \sin 1'',$$

који нам даје површину сферног троугла у површинској јединици. Тако нпр. ако је полупречник r лопте изражен у метрима површина P биће изражена у квадратним метрима.

Пример.

Нека је за један сферни троугао

$$a = 95^0\,36'\,4{,}3'' \quad b = 43^0\,15'\,27{,}9'' \quad c = 77^0\,42'\,55{,}2''$$
$$= 344\,164{,}3'', \quad = 155\,727{,}9'', \quad = 279\,775{,}2'',$$
$$E = 37^0\,11'\,8{,}9'' = 133\,868{,}9''$$

(в. пример у чл. 178.), а полупречник лопте

$$r = 541\ m.$$

Према горњем обрасцу налазимо дужину страна у метрима.

$$a = 344\,164{,}3 \cdot 541 \cdot \sin 1''$$
$$\log 344\,164{,}3 = 5{,}536\,7460$$
$$\log 541 = 2{,}733\,1973$$
$$\log \sin 1'' = 4{,}685\,5749 - 10$$
$$\log a = 2{,}955\,5182$$
$$a = 902{,}6475\ m$$

$$b = 155\,727{,}9 \cdot 541 \cdot \sin 1''$$
$$\log 155\,727{,}9 = 5{,}192\,3664$$
$$\log 541 = 2{,}733\,1973$$
$$\log \sin 1'' = 4{,}685\,5749 - 10$$
$$\log b = 2{,}611\,1386$$
$$b = 408{,}4497\ m$$

$$c = 279\,775{,}2 \cdot 541 \cdot \sin 1''$$
$$\log 279\,775{,}2 = 5{,}446\,8092$$
$$\log 541 = 2{,}733\,1973$$
$$\log \sin 1'' = 4{,}685\,5749 - 10$$
$$\log c = 2{,}865\,5814$$
$$c = 733{,}8063\ m.$$

$$P = 541^2 \cdot 133\,868{,}9 \cdot \sin 1''$$
$$\log 541^2 = 2 \cdot \log 541 = 5{,}466\,3946$$
$$\log 133\,868{,}9 = 5{,}126\,6797$$
$$\log \sin 1'' = 4{,}685\,5749 - 10$$
$$\log P = 5{,}278\,6492$$
$$P = 189\,954{,}3\ m^2.$$

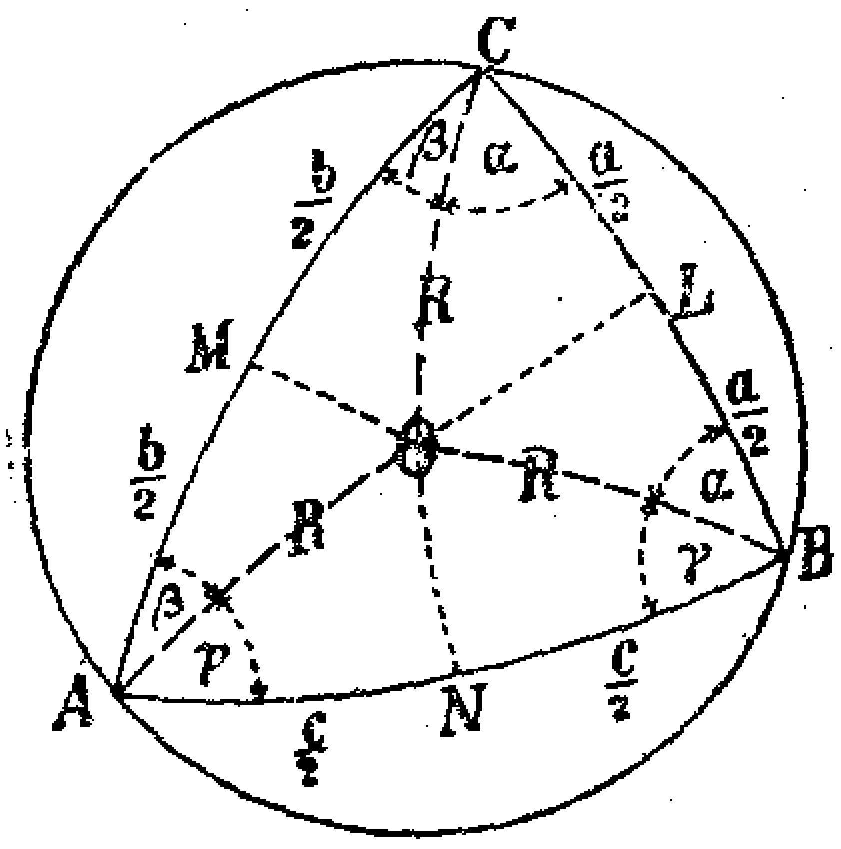
Површина целе лопте јесте: $L = 4\pi r^2$. Овде је

$$\log 4 = 0{,}602\,0600$$
$$\log \pi = 0{,}497\,1499$$
$$\log r^2 = 5{,}466\,3946$$
$$\log L = 6{,}565\,6045$$
$$L = 3677\,939\ m^2.$$

3.

Примене у Геометрији и Геодезији.

183. **Полупречник око троугла описаног круга.** — Да бисмо добили сферно средиште O споредног круга



Сл. 100.

који пролази кроз темена сферног троугла ABC преполовићемо стране тога троугла и подићићемо у тако добивеним тачкама L, M и N сферне управне, које ће се сећи све у тачци O: средишту око троугла описаног круга[1]).

Означимо са R сферни полупречник око троугла описаног круга: $R = OA = OB = OC$.

Из правоуглог сферног троугла OBL, а на основу *Непер*-овог правила, читамо

$$\cos \alpha = tg\,\frac{a}{2}\,cotg\,R, \quad \text{одакле} \quad tg\,R = \frac{tg\,\frac{a}{2}}{\cos \alpha}.$$

---

[1]) Да се сферне управне, подигнуте у тачкама L, M и N (срединама троуглових страна), секу све три у једној тачци O, која је у подједнаком одстојању од темена сфернога троугла, доказаћемо на овај начин. Нека је O пресечна тачка сферних управних, које су подигнуте у тачкама L и M. Отуда што је

$$\triangle OBL \approx \triangle OCL \quad \text{и} \quad \triangle OAM \approx \triangle OCM$$

(јер назначени троуглови имају једнаке две стране и захваћени угао, али комади једнога троугла следују у противном смислу у којем следују одговарајући комади у другоме троуглу) следује

$$OB = OC \quad \text{и} \quad OA = OC, \quad \text{тј.}$$

$$OA = OB = OC,$$

а то значи да и трећа сферна управна подигнута у средини N стране AB пролази кроз тачку O.

или, пошто је

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}(A + B + C) = S,$$

дакле

$$\alpha = S - (\beta + \gamma) = S - A,$$

$$tg\,R = \frac{tg\,\frac{a}{2}}{\cos(S - A)}.$$

На исти начин налазимо друге две сличне вредности:

$$tg\,R = \frac{tg\,\frac{a}{2}}{\cos(S - A)} = \frac{tg\,\frac{b}{2}}{\cos(S - B)} = \frac{tg\,\frac{c}{2}}{\cos(S - C)}. \quad (169$$

Ако, овде, заменимо $tg\,\frac{a}{2}$, $tg\,\frac{b}{2}$ и $tg\,\frac{c}{2}$ вредностима које нам дају једн. 156), чл. 163., добићемо образац

$$tg\,R = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S - A)\cos(S - B)\cos(S - C)}} \quad (170$$

у којем је сферни полупречник описаног круга изражен помоћу углова сферног троугла.

Ми можемо полупречник R да изразимо и помоћу троуглових страна. Узмимо ове две *Гаус*-ове једначине

$$\cos\frac{A + B}{2} = \frac{\cos\frac{a + b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A + B}{2} = \frac{\cos\frac{a - b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2},$$

помножимо прву са $\cos\frac{C}{2}$, другу са $\sin\frac{C}{2}$ и онда их саберимо, па ћемо добити

$$\cos\frac{1}{2}(A+B-C)=\frac{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

или употребом познатих гониометриских образаца, краће

$$\cos(S-C)=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin C.$$

На исти начин налазимо

$$s\,(S-A)=\frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\sin A,\quad \cos(S-B)=\frac{\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}\sin B.$$

Заменом ових добивених вредности за $\cos(S-A)$, $\cos(S-B)$ и $\cos(S-C)$ у горње обрасце 169) следује

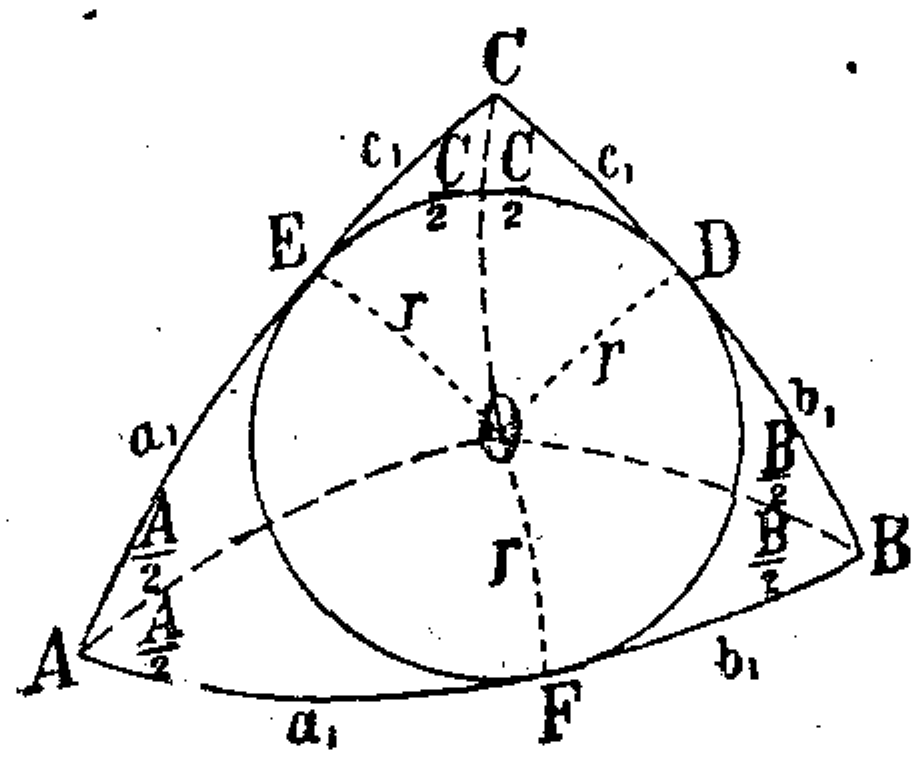
$$1)\quad \operatorname{tg}R=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\sin B}=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin C}.$$

Најзад, ако ставимо овде за $\sin A$, $\sin B$ и $\sin C$ њихове вредности из једн. 153), чл. 162. и извршимо извесна проста скраћења (на основу гониометриских образаца 18, чл. 21.), добићемо израз

$$172) \qquad tg\,R = \frac{2 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}},$$

у којем је сферни полупречник око троугла описаног круга изражен помоћу страна сферног троугла.

184. **Полупречник у троугао уписаног круга.** — Средиште O споредног круга, који додирује све три стране једнога сферног троугла ABC, налази се у тачци где се секу велики кругови који полове угле сфернога троугла[1]).



Сл. 101.

Спустимо из средишта O уписаног круга сферне управне на троуглове стране и означимо њихову дужину, а то је сферни полупречник уписаног круга, са r, дакле $r = OD = OE = OF$.

---

[1]) Доказ. Нека је O пресечна тачка она два велика круга који полове угле A и B сфернога троугла ABC. Спустимо из тачке O сферне управне OD, OE и OF на све три троуглове стране. Отуда што је

$$\triangle OAF \approx \triangle OAE \quad \text{и} \quad \triangle OBF \approx \triangle OBD$$

(в. 6. *Случај* у чл. 153.) следује

$$OF = OE \quad \text{и} \quad OF = OD, \text{ тј.}$$

$$OD = OE = OF,$$

дакле тачка O, пошто је подједнако удаљена од све три троуглове стране, средиште уписаног круга.

Отуда, опет, што је

$$\triangle ODC \approx \triangle OEC,$$

дакле

$$\sphericalangle OCD = \sphericalangle OCE,$$

закључујемо да велики круг, који полови трећи угао C, такође пролази кроз тачку O.

Из правоуглог сферног троугла OAF, а на основу *Непер*-овог правила, читамо

$$\sin a_1 = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\, \operatorname{tg} r, \text{ одакле } \operatorname{tg} r = \sin a_1 \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

или, с обзиром на то да је $a_1 + b_1 + c_1 = \frac{1}{2}(a + b + c) = s$, дакле $a_1 = s - (b_1 + c_1) = s - a$,

$$\operatorname{tg} r = \sin(s - a) \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

На исти начин налазимо

$$173)\quad \operatorname{tg} r = \sin(s-a)\frac{A}{2} = \sin(s-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sin(s-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Заменимо овде $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ њиховим вредностима из једн. 152), чл. 162., па ћемо добити образац

$$174)\quad \operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}},$$

у којем је сферни полупречник круга изражен помоћу страна троугла у који је круг уписан.

Да бисмо полупречник r изразили у углима сферног троугла узећемо *Гаус*-ове једначине

$$\cos\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\cos\frac{c}{2}$$

$$\sin\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\sin\frac{c}{2},$$

помножићемо прву са $-\sin\frac{c}{2}$, другу са $\cos\frac{c}{2}$, па ћемо их сабрати и добити

$$\sin\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2},$$

које се, на основу познатих гониометриских образаца, може да напише краће

$$\sin(s-c)=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\sin c.$$

На потпуно исти начин налазимо

$$\sin(s-a)=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\sin a,\quad \sin(s-b)=\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\sin b.$$

Packed Заменом ових вредности за $\sin(s-a)$, $\sin(s-b)$ и $\sin(s-c)$ у обрасце 173) добијамо

$$tg\,r=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin a}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin b}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin c}{\cos\frac{C}{2}},\quad (175$$

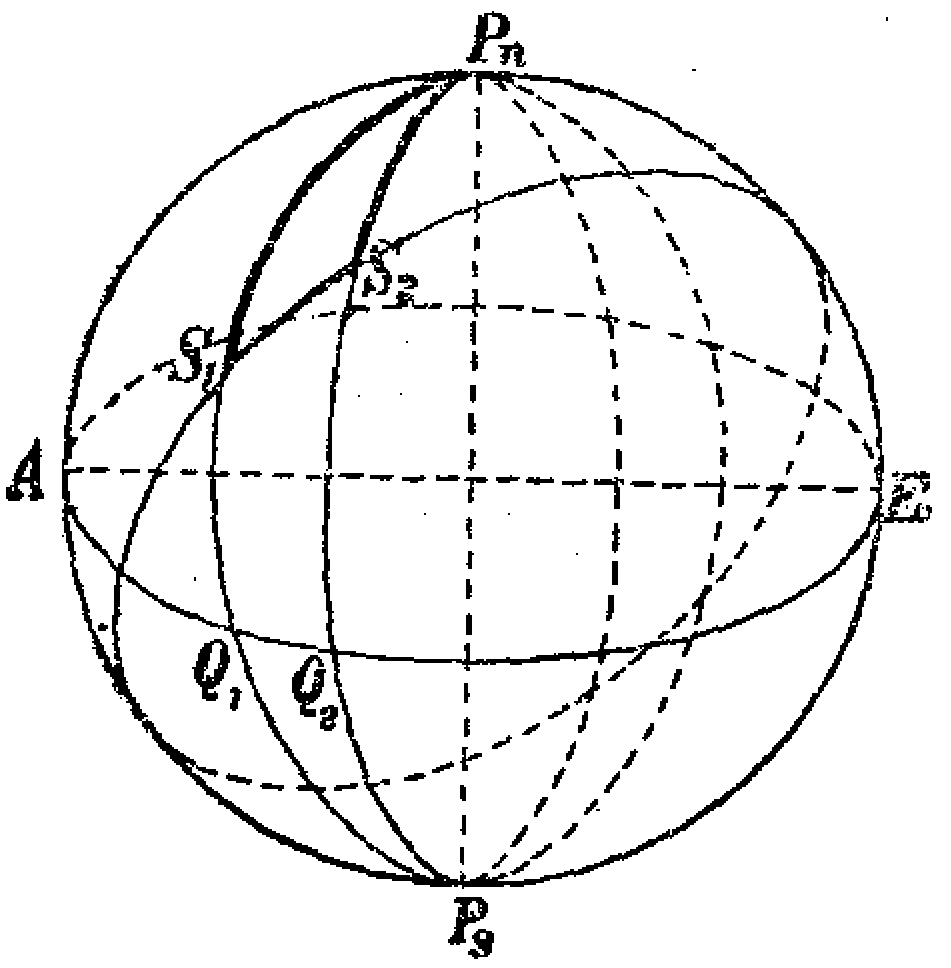
одакле опет, кад ставимо овде за $\sin a, \sin b$ и $\sin c$ њихове вредности из једн. 157), чл. 163., следује

$$tg\,r=\frac{\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},\quad (176$$

а то је образац у којем је сферни полупречник круга изражен помоћу углова сферног троугла у који је круг уписан.

Напомена. Примећујемо да обрасци за полупречник описаног круга и обрасци за полупречник уписаног круга стоје међусобом у односу реципрочности, тако да се једни могу да изведу из других на познати начин. Није тешко увидити да је узрок томе у реципрочности самих задатака.

185. **Растојање двеју тачака на земљи.** — Из географске ширине и дужине два места на земљи да се израчуна њихово сферно растојање.



Сл. 102.

Нека је P_n северни, P_s јужни пол, AE екватор, P_nAP_sE први (почетни) меридијан, S_1 и S_2 два места на земној лопти. Означимо са φ_1 и λ_1 географске координате (географску ширину и географску дужину) места S_1, са φ_2 и λ_2 географске координате места S_2. Замислимо да су за обадве тачке S_1 а S_2 повучени њихови меридијани $P_nS_1P_s$ и $P_nS_2P_s$. Тада је

$$\varphi_1 = S_1Q_1, \qquad \lambda_1 = AQ_1,$$

$$\varphi_2 = S_2Q_2, \qquad \lambda_2 = AQ_2.$$

Ако тачке S_1 и S_2 спојимо сферном дужи (тј. луком великог круга који пролази кроз те две тачке) добићемо сферни троугао $P_nS_1S_2$, у којем познајемо две стране и захваћени угао: стране $P_n S_1 = 90^0 - \varphi_1$, $P_n S_2 = 90^0 - \varphi_2$ и угао $S_1 P_n S_2 = \lambda_2 - \lambda_1$ [1]). Дужину стране $S_1 S_2$, а то је сферно растојање тачака S_1 и S_2, наћићемо помоћу косинусне теореме

$$\cos S_1 S_2 =$$
$$\cos(90^0 - \varphi_1)\cos(90^0 - \varphi_2) + \sin(90^0 - \varphi_1)\sin(90^0 - \varphi_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$
$$= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

или на ма који од оних начина, по којима се може разрешити задатак у чл. 178.

Зарад лакшег рачунања са логаритмима за препоруку је да се у горњем обрасцу, пошто се напише

$$\cos S_1 S_2 = \sin\varphi_1 [\sin\varphi_2 + \operatorname{cotg}\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)],$$

стави

$$\operatorname{cotg}\varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) = \operatorname{cotg}\psi$$

и на тај начин образац доведе на логаритамски подесну форму

---

[1]) Ми претпостављамо, овде, да се оба места S_1 и S_2 налазе на једној истој половини лопте како у однос на екватор тако и у однос на први меридијан. Другим речима ми замишљамо да места S_1 и S_2 имају или обадва северне или обадва јужне ширине, а тако исто и да су обадва на источној или на западној хемисфери. Да бисмо обухватили све могуће случајеве треба да утврдимо да се географске ширине (φ) сматрају као положне на северној, а као одречне на јужној половини земље. Тако исто треба да правимо разлику односно знака између источних и западних дужина (λ), узев једне са знаком $+$, а друге са знаком $-$. Ако означимо са φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2 апсолутне вредности географских координата два места на земљи, онда је, према реченоме, $P_n S_1 = 90^0 \mp \varphi_1$, $P_n S_2 = 90^0 \mp \varphi_2$, $S_1 P_n S_2 = \lambda_2 \mp \lambda_1$ и на основу косинусне теореме

$$\cos S_1 S_2 = \cos(90^0 \mp \varphi_1)\cos(90^0 \mp \varphi_2) + \sin(90^0 \mp \varphi_1)\sin(90^0 \mp \varphi_2)\cos(\lambda_2 \mp \lambda_1)$$
$$= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 \mp \lambda_1),$$

где, као што рекосмо, треба узети $\lambda_2 - \lambda_1$, ако су оба места на истој хемисфери (источној или западној), а $\lambda_2 + \lambda_1$, ако су на различним хемисферама (једно место на источној, а друго на западној половини).

$$\cos S_1S_2 = \frac{\sin \varphi_1 \cos (\varphi_2 - \psi)}{\sin \psi}$$

(в. 4. задатак, чл. 65.).

Пример.

Да се израчуна сферно растојање између Париза ($\varphi_1 = 48^0 61', \lambda_1 = 2^0 20'$) и Рима ($\varphi_2 = 41^0 54', \lambda_2 = 12^0 30'$).

Решење.

Рачун за помоћни угао ψ:

$$cotg\, \psi = cotg\, \varphi_1 \cos (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Овде је

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 10^0\, 10'$$

$$\log cotg\, \varphi_1 = 9{,}941\ 4585$$

$$\log \cos (\lambda_2 - \lambda_1) = 9{,}993\ 1268$$

$$\log cotg\, \psi = 9{,}934\ 5853$$

$$\psi = 49^0\, 17'\, 55{,}7''.$$

Израчунавање сферног растојања Париз-Рим:

$$\cos S_1S_2 = \frac{\sin \varphi_1 \cos (\varphi_2 - \psi)}{\sin \psi}.$$

Овде је

$$\psi - \varphi_2 = 7^0\, 23'\, 55{,}7''$$

$$\log \sin \varphi_1 = 9{,}876\ 7889$$

$$\log \cos (\varphi_2 - \psi) = 9{,}996\ 3689$$

$$\log \sin \psi = 9{,}879\ 7384$$

$$\log \cos S_1S_2 = 9{,}993\ 4194$$

$$S_1S_2 = 9^0\, 56'\, 56{,}5''.$$

Ако желимо то растојање да имамо у дужној јединици, нпр. у метрима, односно километрима, употребићемо сразмеру

$$40\,000\,000 : x = 360^0 : \sphericalangle S_1S_2,$$

где је 40 000 000 периферија једног великог круга[1]) на земљи у метрима, x растојање Париз-Рим такође у метрима. Из постављене сразмере налазимо

$$x = 1\,105\,448\,m = 1105{,}5\,km.$$

Напомена. Показати начин израчунавања сферног растојања двеју тачака на земној површини може да се примене и на одређивање угловног (привидног) растојања двеју тачака на небу. Ако означимо

$$\text{са } \varphi_1 \text{ и } \varphi_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{висине,} \\ \text{деклинације или} \\ \text{астр. ширине} \end{array} \right.$$

$$\text{„ } \lambda_1 \text{ „ } \lambda_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{азимуте,} \\ \text{ректасцензије или} \\ \text{астр. дужине} \end{array} \right.$$

двеју тачака на небу, онда је сферно одстојање њихово, као и горе, дато једначином

$$\cos S_1S_2 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

или

$$\cos S_1S_2 = \frac{\sin\varphi_1 \cos(\varphi_2 - \psi)}{\sin\psi},$$

где је

$$\operatorname{cotg}\psi = \operatorname{cotg}\varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Пример.

Колика је угловна мера за дужину путање једнога метеора, који је, кад је почео да светли, имао висину $\varphi_1 = 35^0$, азимут $\lambda_1 = 70^0$, а кад је пресгао да светли имао $\varphi_2 = 20^0$, $\lambda_2 = 95^0$?

---

[1]) Тачније периферија једног меридијана.

Решење.

$$cotg\,\psi = cotg\,35^0 \cos 25^0 \qquad \cos S_1S_2 = \frac{\sin 35^0 \cos 17^0\,41'\,27''}{\sin 37^0\,41'\,27''}$$

$\log cotg\,35^0 = 0{,}154\,7732$

$\log \cos 25^0 = 9{,}957\,2557$

$\log cotg\,\psi = 0{,}112\,0289$

$\psi = 37^0\,41'\,27''$

дакле у округлој мери:

$\log \sin 35^0 = 9{,}758\,5913$

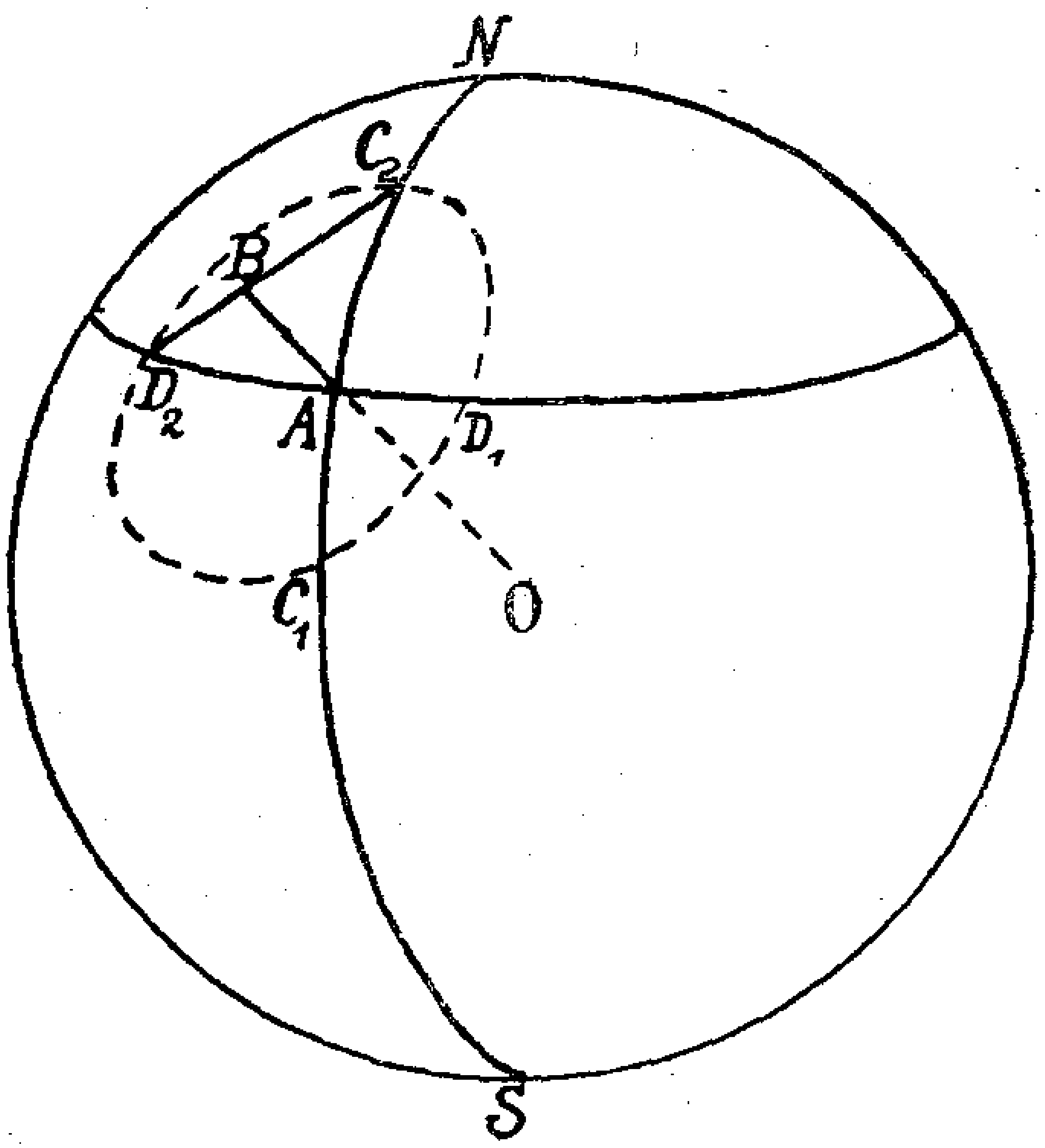
$\log \cos 17^0\,41'\,27'' = 9{,}978\,9608$

$\log \sin 37^0\,41'\,27'' = 9{,}786\,3257$

$\log \cos S_1S_2 = 9{,}951\,2264,$

$S_1S_2 = 26^0\,39'.$

186. **Задатак**. — Које су крајње тачке на северу, југу, западу и истоку из којих се може да види врх B вертикалног предмета AB чија је висина $= h$.



Сл. 103.

Нека је O средиште земље. Из тачке B замишљамо повучен тангенциални конус на лопту, који ову додирује по извесноме малом кругу $C_1D_1C_2D_2$. Овај круг, чије је сферно средиште у тачци A и који сече меридијан тачке A у C_1 и C_2, а паралелни круг тачке A у D_1 и D_2, има као сферни полупречник $AC_1 = AC_2$ за чији средишни угао α постоји образац

$$\cos \alpha = \frac{r}{r+h}$$

(в. чл. 131.).

Ако означимо са φ, λ географске координате задате тачке A; са φ_1 и φ_2 географске ширине тачака C_1 и C_2 (које имају исту дужину λ коју и тачка A); са λ_1 и λ_2 географске дужине тачака D_1 и D_2 (које имају исту ширину φ као и тачка A), онда је, с обзиром да су меридијански луци $AC_1 = AC_2 =$ сферноме полупречнику (јер једно и друго представља најкраћа растојања између тачака A и C_1, односно A и C_2), очевидно

$$\varphi_1 = \varphi - \alpha \quad \text{или} \quad \varphi_1 = \varphi - arc\,cos\,\frac{r}{r+h},$$

$$\varphi_2 = \varphi + \alpha \quad \text{„} \quad \varphi_2 = \varphi + arc\,cos\,\frac{r}{r+h}.$$

Дужине λ_1 и λ_2 тачака D_1 и D_2 добићемо користећи са решењем задатка у последњем члану имавши у виду да су географске ширине поменутих тачака једнаке географској ширини тачке A. Из једначина

$$cos\,\alpha = sin^2\varphi + cos^2\varphi\,cos\,(\lambda - \lambda_1)$$
$$= sin^2\varphi + cos^2\varphi\,cos\,(\lambda_2 - \lambda)$$

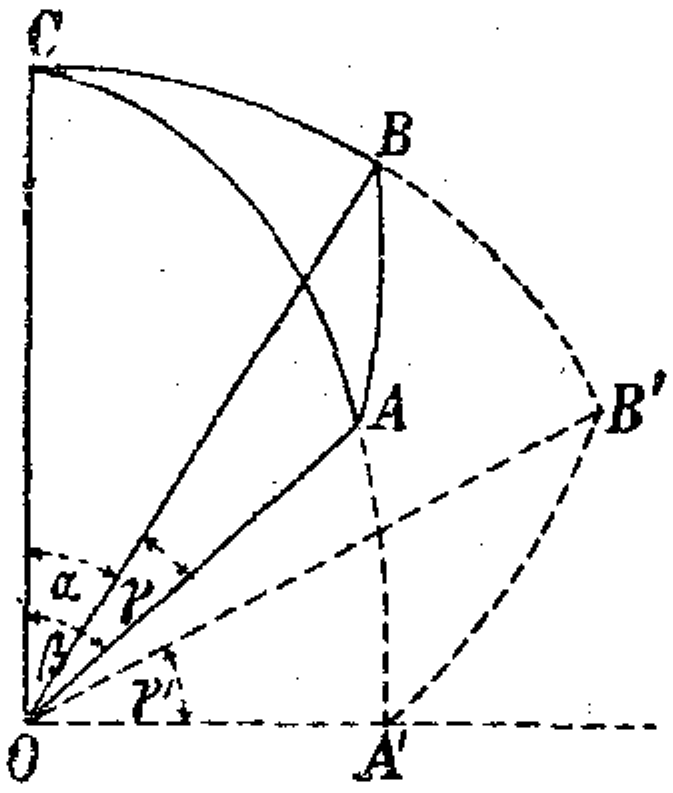
следује

$$\lambda_1 = \lambda - arc\,cos\,\frac{\frac{r}{r+h} - sin^2\varphi}{cos^2\varphi}$$

$$\lambda_2 = \lambda + arc\,cos\,\frac{\frac{r}{r+h} - sin^2\varphi}{cos^2\varphi}.$$

187. **Свођење углова на хоризонат.** — Измерен је угао који заклапају две праве OA и OB: угао $\gamma =$

$\sphericalangle AOB$ и измерени су угли које чине његови краци OA и OB са нормалом OC : угли $\alpha = \sphericalangle BOC$ и $\beta = \sphericalangle AOC$. Из ова три угла има да се израчуна угао $\gamma' = \sphericalangle A'OB'$, тј. угао који чине пројекције OA' и OB' правих OA и OB на хоризонталну раван која пролази кроз теме O. На тај начин је угао γ' пројекција угла γ на хоризонталну раван. Израчунавање угла γ' из угла γ зовемо *свођење угла на хоризонат.*



Сл. 104.

Замислимо да је из темена O описана лопта. Зраци OA, OB, OC, OA' и OB' продираће ту лопту у тачкама A, B, C, A' и B'. Тачке A, B и C образују сферни троугао ABC, чије су стране $BC = \alpha$, $CA = \beta$, $AB = \gamma$ познате, а угао $C = \sphericalangle A'OB'$, тј. $=$ углу γ' (в. на крају чл. 145.) који тражимо. Ми имамо случај, који смо расматрали у општем задатку чл. 176. Тако нпр. помоћу образаца 152) чл. 162. налазимо

$$tg\frac{\gamma'}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\,\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}}.$$

Ако се мерење врши теодолитем, онда се угао $C = \sphericalangle A'OB'$ добија непосредно. Тако исто могу се измерити и угли $\alpha = \sphericalangle BOC, \beta = \sphericalangle AOC$. Из ова три угла, односно из страна a, b и захваћеног угла C, добијамо угао $\gamma = \sphericalangle AOB$ на начин као што смо показали у општем задатку чл. 178.

188. **Лежандр-ова теорема.** — Сферни троугли, у којих су стране врло мале наспрам полупречника лопте, на којој се они замишљају, могу — без осетне грешке — да се замене равним троуглима, чије су стране једнаке странама сферног троугла, а угли једнаки углима сферног троугла, пошто се сваки од њих смањи за трећину сфернога сувишка.

Ову значајну, а по Геодезију нарочито важну, теорему пронашао је године 1787. познати француски математичар *Лежандр* (Adrien-Marie Legendre, Париз 1752. — Париз 1833).

Замислимо један сферни троугао, чије су стране a, b, c врло мале наспрам полупречника одговарајуће лопте. Зарад краћег бележења идућих образаца узећемо полупречник лопте за дужну јединицу, ставићемо дакле $r = 1$. Троуглове стране a, b, c, изражене у овој јединици, тј. као дужине лукова, биће — према учињеној претпоставци — представљене врло малим бројевима, разуме се у виду разломака. Према томе ћемо, а да се немамо бојати да ћемо чинити осетне грешке, смети да занемаримо све више степене тих количина, који, по вредности њиховој, изчезавају према нижим степенима.

На основу образаца 150) и 151) чл. 162. јесте

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}.$$

У Алгебарској Анализи показује се да се синус ма каквог лука може да представи једним збирљивим бесконачним редом, да је за ма какво x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + - \cdots \pm \frac{x^n}{n\,!} \mp \cdots$$ [1]) у бескон.

(в. Основи Инф. Рачуна. Први део. чл. 74.).

Збир реда на десној страни јесте коначан и одређен и пошто је навек $= \sin x$, служимо се њиме да израчунамо синус лука x.

Према овоме можемо горња два обрасца да напишемо

$$\sin\frac{A}{2} =$$

$$\sqrt{\frac{\left[(s-b) - \frac{(s-b)^3}{3\,!} + \frac{(s-b)^5}{5\,!} \cdots\right]\left[(s-c) - \frac{(s-c)^3}{3\,!} + \frac{(s-c)^5}{5\,!} \cdots\right]}{\left[b - \frac{b^3}{3\,!} + \frac{b^5}{5\,!} - + \cdots\cdots\right]\left[c - \frac{c^3}{3\,!} + \frac{c^5}{5\,!} - + \cdots\cdots\right]}}$$

$$\cos\frac{A}{2} =$$

$$\sqrt{\frac{\left[s - \frac{s^3}{3\,!} + \frac{s^5}{5\,!} - \cdots\cdots\right]\left[(s-a) - \frac{(s-a)^3}{3\,!} + \frac{(s-a)^5}{5\,!} - \cdots\right]}{\left[b - \frac{b^3}{3\,!} + \frac{b^5}{5\,!} - + \cdots\cdots\right]\left[c - \frac{c^3}{3\,!} + \frac{c^5}{5\,!} - + \cdots\cdots\right]}}$$

или, кад измножимо редове испод корених знакова и занемаримо чланове у којима се налазе количине b, c, $s-a$, $s-b$, $s-c$ у четвртом и вишем степену,

---

[1]) Овде је $3\,! = 1.2.3$, $5\,! = 1.2.3.5$ итд. $n! = 1.2.3\ldots n$. Овакав производ свију целих и положних бројева од 1 па до извесног назначеног целог и положног броја n зове се *n-производно, n-факултет* или *n-факторијел*.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{1-\frac{(s-b)^2+(s-c)^2}{6}}{1-\frac{b^2+c^2}{6}}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\frac{1-\frac{s^2+(s-a)^2}{6}}{1-\frac{b^2+c^2}{6}}},$$

које, кад ставимо

$$\frac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6}}=1+\frac{b^2+c^2}{6},$$ [1]

можемо да напишемо

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\left[1-\frac{(s-b)^2+(s-c)^2}{6}\right]\left[1+\frac{b^2+c^2}{6}\right]}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\left[1-\frac{s^2+(s-a)^2}{6}\right]\left[1+\frac{b^2+c^2}{6}\right]},$$

одакле, кад измножимо испод корених знакова и опет занемаримо чланове са четвртим и вишим степеном, налазимо ове вредности

---

[1]) Обичним начином за дељење добијамо $\frac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6}}=1:1-\frac{b^2+c^2}{6}$ $=1+\frac{b^2+c^2}{6}+\frac{(b^2+c^2)^2}{6^2}+\frac{(b^2+c^2)^3}{6^3}+\cdots$ или, ако занемаримо четврте и више степене количина b и c, $\frac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6}}=1-\frac{b^2+c^2}{6}$.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\,c}}\sqrt{1+\frac{b^2+c^2-(s-b)^2-(s}{6}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\,c}}\sqrt{1+\frac{s(s-a)}{3}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{b\,c}}\sqrt{1-\frac{s^2+(s-a)^2-b^2-c^2}{6}}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)}{b\,c}}\sqrt{1-\frac{(s-b)\,s-c)}{3}}.$$

Непрекорачујући границе приближности мож
мо, овде, да ставимо

$$\sqrt{1+\frac{s(s-a)}{3}}=1+\frac{s(s-a)}{6},\ \sqrt{1-\frac{(s-b)(s-c)}{6}}=1-\frac{(s-b)}{6}$$

и да напишемо на тај начин

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\,c}}\left[1+\frac{s(s-a)}{6}\right]$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{b\,c}}\left[1-\frac{(s-b)(s-c)}{6}\right].$$

[1]) Ово налазимо кад по познатој методи извршимо кореновање. тачности добивених вредности уверићемо се кад извршимо пробу, а то к леву и десну страну дотичних израза подигнемо на квадрат и онда занем римо на десној страни чланове четвртог и вишег степена.

Комбинујући ове обрасце с обрасцима

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{b\,c}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s\,(s-a)}{b\,c}}$$

(в. једн. 88 и 89 чл. 109.), који важе за раван троугао, чије су стране a, b, c (дакле једнаке странама сферног троугла који расматрамо), а угли његови α, β, γ, налазимо

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=$$

$$\frac{\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{b\,c}\;\frac{s\,(s-a)+(s-b)\,(s-c)}{6}$$

или

$$\sin\frac{1}{2}(A-\alpha)=\frac{\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{6}$$

одакле, с обзиром на ступањ тачности којег се држимо, а на основу 1. *Закључка* у чл. 31 замењујући $\sin\frac{1}{2}(A-\alpha)$ луком $\frac{1}{2}(A-\alpha)$ и с погледом на образац 94), чл. 111. следује

$$\frac{1}{2}(A-\alpha)=\frac{P}{6},$$

одакле

$$\alpha=A-\frac{P}{3},$$

а разуме се исто тако

$$\beta = B - \frac{P}{3},$$

$$\gamma = C - \frac{P}{3},$$

где P означава површину равног троугла са странама a, b, c. Из ових образаца је јасно да су угли α, β, γ мерени луцима у кругу са полупречником 1 и пошто је за раван троугао $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то је (сабирајући последња три обрасца)

$$\pi = A + B + C - P$$

или

$$P = A + B + C - \pi,$$

дакле

$$P = E,$$

ако са E означимо сферни ексцес задатог сферног троугла.

Пошто је полупречник лопте узет за дужну јединицу: стављено $r = 1$, то је површина сферног троугла, означимо је са P_1, према обрасцу 165_a) чл. 168.

$$P_1 = E,$$

које сравњено са P, тј. површином равног троугла. чије су стране једнаке странама сферног троугла, показује да је

$$P_1 = P$$

$$\alpha = A - \frac{E}{3}$$

$$\beta = B - \frac{E}{3}$$

$$\gamma = C - \frac{E}{3}.$$

Овим је доказана *Лежандр*-ова теорема.

Из начина како смо извели ову *Лежандр*-ову теорему јасно је да она није строго тачна, него само приближна и да је њена тачност у толико већа у колико су стране сферног троугла мање наспрам полупречника лопте, на којој троугао замишљамо. Тако нпр. троугли на земној површини (сматравши ову као лопту), у којих дужина страна не прелази 15 географских миља (отприлике 1^0) могу да се решавају по *Лежандр*-овој теореми, а да се не морамо бојати да ће резултати бити осетно погрешни.

4.

Примене у Сферној Астрономији.

189. **Небесна сфера.** — Ми замишљамо небо као једну сферу, која је са неодређеним полупречником описана из средишта наше земље[1]). Сваки посматрач на земљи види, разуме се, само једну половину те сфере. Круг, којим се привидно наслања видна половина небесне сфере на земљу, зове се *доглед* или *хоризонат* (*Horizont*, *Gesichtskreis*, *Gränzkreis*, horizon) посматрачев.

Геометриски полови хоризонта, а то су дакле тачке у којима управна подигнута на хоризонталну раван у тачци где се посматрач налази продире небесну сферу, зову се *зенит* (*Zenit Scheitelpunkt*, zènith) и *надир* (*Nadir*, *Fusspunkt*, nadir). Зенит је над

---

1) В. *Напомену* на крају овога члана.

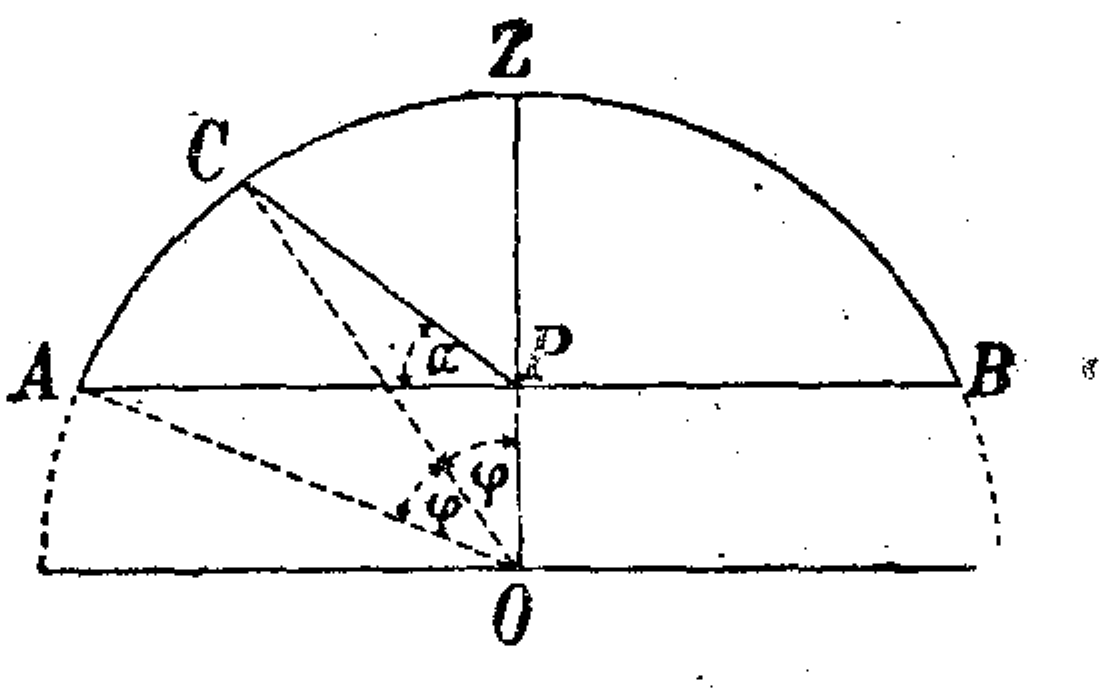
хоризонтом, дакле видљив; надир испод хоризонта и, према томе, за посматрача невидљив.

Свака тачка хоризонта је удаљена за 90^0 како од зенита тако и од надира.

Напомена. Непосредни утисак, који добијамо посматрањем неба, изазива у нама представу да небо има облик једнога свода[1]), који је спљоштен у вертикалноме правцу, тако да нам изгледа да је његова најузвишенија тачка нама најближа.

Под извесним претпоставкама лако је одредити облик небесног свода. *Смит* (Robert Smith у своме делу од год. 1728.) претпоставља да је небо (или боље рећи онај део неба који посматрач види) један део лопте, тј. једна калота, чије се средиште налази вертикално испод посматрача, дакле у правцу ка надиру.

Нека је ABZ вертикалан пресек небесног свода, AB пресек хоризонта за посматрача у тачци P; Z зенит. Средиште небесног свода замишљамо у продужењу вертикале ZP, нпр. у тачци O. Одређивање облика небесног свода састоји се у изналажењу угла 2φ, јер познавајући тај угао добија се, на врло прост начин, положај средишта O, отуда што је $\frac{OP}{OA} = \cos 2\varphi$. Тиме налазимо



Сл. 105.

1) Отуда реч *небесни свод* (*Himmelsgewölbe*, *Firmament*, voûte du ciel).

OP, па дакле и PZ и PA у деловима полупречника лопте. Да би нашао угао φ *Смит* је измерио $\sphericalangle APC = \alpha$, а то је угао под којим се према хоризонту види тачка C, која је привидно подједнако удаљена од хоризонта и зенита, тј. од тачака A и Z. Помоћу угла α лако је израчунати угао φ. Из правоуглог троугла OAP читамо

$$OP = OA \cdot \cos 2\varphi;$$

из троугла OPC следује, на основу синусне теореме

$$OP : OC = \sin(180^0 - 90^0 - \alpha - \varphi) : \sin(90^0 + \alpha),$$

одакле, пошто је $OC = OA$,

$$OP = OA \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\cos\alpha},$$

које, сравњено са горњим, даје једначину

$$\cos 2\varphi \cos\alpha = \cos(\alpha + \varphi).$$

Ова је једначина трећег степена у односу на $\cos\varphi$ и има три стварна корена, од којих, међутим, само један одговара постављеноме задатку. Према тачним мерењима *Рајмана* (Reimann) угао α варира између 22^0 и 30^0, које зависи од оних околности које утичу на јачину светлости.

За $\alpha = 23^0$ добија се $\varphi = 16^0\,33'$ и према томе за лук AZ (место 90^0) угао $33^0\,6'$. Ако ставимо $OA = 1$ добићемо

$$AP = \sin 33^0\,6' = 0{,}546,\ OP = \cos 33^0\,6' = 0{,}838,$$

$$PZ = 1 - OP = 0{,}162.$$

Одавде следује

$$\frac{AP}{PZ} = 3,37.$$

С овом околношћу стоји у непосредној вези позната појава (дејство такозване ваздушне перспективе) да сунце и месец у колико су ближе хоризонту изгледају већи и да близу хоризонта добивају елиптичан облик. Велика оса њихове елипсе паралелна је са хоризонтом, а мала оса управна према њему. Према горе наведеним резултатима изалази да је за сунце и месец у висини од 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, 90^0 над хоризонтом величина њиховог пречника 68%, 50%, 40%, 34%, 31%, 30% дужине, коју пречници тих небесних тела имају у хоризонту.

За Математичну Географију, а нарочито за питања која се односе на одређивање положаја тачака на небу (питања која нас овде поглавито интересују) није ни од какве важности ни значаја ово одступање облика небесног свода од полусфере. Напротив ми ћемо, као што смо горе већ напоменули, сматрати небо као једну лопту са средиштем у средишту земље или што изилази на исто (услед бесконачне величине небесне сфере наспрам земне лопте) као лопту која је описана из места на којем се налази посматрач.

Услед тога што је полупречиик небесне сфере (на којој замишљамо звезде) бесконачно велики наспрам полупречника земне лопте или боље рећи услед врло великих удаљења звезда од наше земље (према којима полупречник земље изчезава) дозвољено је замислити да се посматрања врше из средишта земље и према томе је дозвољено идентификовати *при-*

видан хоризонат (*scheinbarer Horizont*, horizon sensible), а то је круг по којем хоризонтална раван сече небесну сферу, са *истинским хоризонтом* (*wahrer Horizont*, horizon rationnel), тј. са кругом по којем раван, која је паралелно са посматрачевом хоризонталном равни повучена кроз средиште земне лопте, сече небесну сферу.

190. **Појмови који се односе на обртање земље око њене осе.** — а) *Општи појмови.* Обртање земље око њене осе од запада ка истоку за време од 24 сата пројектује се на небу и показује нам се у обртању небесне сфере око *светске* или *небесне осе* (*Welt- od. Himmelsaxe*, axe du monde) у противноме смислу, тј. од истока ка западу, а у истоме времену од 24 сата. Тачке, у којима замишљамо да светска оса (а то је продужење обртне осе наше земље) продире небесну сферу, зову се *светски* или *небесни полови* (*Welt- od. Himmelspole*, pôles du monde). Пол, који је на северној половини сфере, дакле онај којег ми (на северној хемисфери) видимо, зове се *северни пол* (*Nordpol*, pôle boréal), а онај други, на јужној половини, *јужни пол* (*Südpol*, pôle austral).

Круг, по којем раван земног екватора сече небесну сферу, зове се *светски* или *небесни полутар* или *екватор* (*Himmelsäquator*, équateur céleste). Сви са светским екватором паралелни кругови зову се, као и код земље, *парарелни кругови* (*Parallelkreise*, parallèles).

Меридијанима на земљи одговарају на небу *светски* или *небесни полудневци* или *меридијани* (*Himmelsmeridiane*, méridiens célestes), као велики кругови који пролазе кроз светске полове.

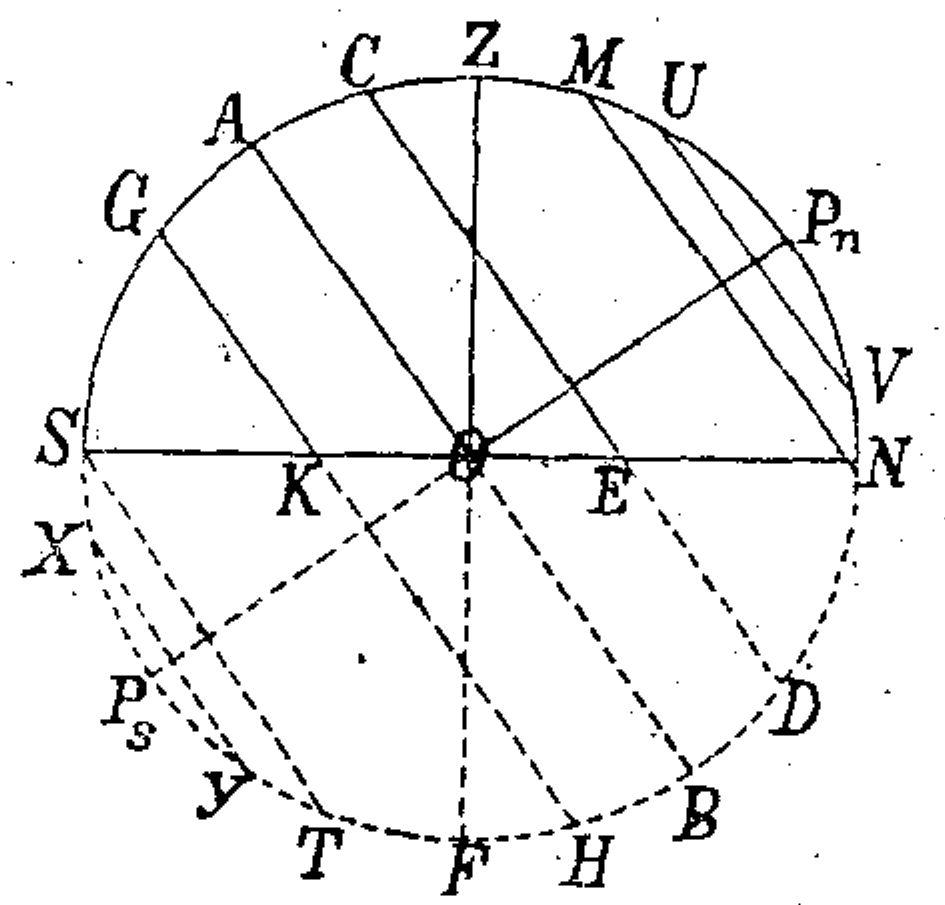
b) Излазак и залазак звезда. Појаву обртања небесне сфере опажамо у обртању звезданог неба око светске осе у времену од 24 сата. У томе обртању примећујемо следеће правилности: прво, да се звездано небо обрће равномерно, тј. са подједнаком брзином и друго, да све звезде описују, при томе, паралелне кругове. У тој системи паралелних кругова је светски екватор велики круг. Тај велики круг (тј. светски екватор) сече хоризонат по једноме пречнику, такозваној *источно-западној линији* (*Ostwestlinie*), која на хоризонту одређује две тачке: *источну тачку* (*Ostpunkt*, Est) и *западну тачку* *Westpunkt*, Ouest). Меридијан (велики круг који пролази кроз северни и јужни пол, зенит и надир посматрачев) сече хоризонат такође по једноме пречнику, по такозваној *полудневици* или *меридијанској линији*[1]) (*Mittagslinie*, méridienne), која стоји управно на источно-западној линији и на хоризонту одређује *северну тачку* (*Nordpunkt*, Nord) и *јужну тачку* (*Südpunkt*, Sud). Северна, јужна, источна и западна тачка образују четири *основне тачке* (*Kardinalpunkte*, points cardinaux) хоризонта.

Нека је у сл. 106. круг, који је описан из тачке *O*, меридијан за посматрача, којег замишљамо у тачци

---

[1]) Меридијанска линија може, врло просто, да се овако одреди. У хоризонталној равни опише се један круг и у његовоме средишту постави се вертикално један танак штап. Затим се запазе оне две тачке у којима (први пут пре подне, други пут после подне) сенка тога штапа таман додирује периферију круга. Управна, повучена из средишта круга на праву која спаја оне две посматране тачке, даје правац меридијанске линије. Зарад веће тачности могу, место једног круга, да се узму више концентричних кругова и за сваки круг, одвојено, да се речена нормала одреди. Средња из свију тих нормала показује правац меридијанске линије. Ова најстарија астрономска справа, којом су се служили већ Вавилонани, позната је под именом *гномона* (Gnomon).

O. Тачке Z и F представљају зенит и надир, права NS меридијанску линију (пресек меридијана са хоризонтом), N северну, S јужну тачку хоризонта; права $P_n P_s$ представља светску, осу P_n северни, P_s јужни пол. Паралелна тетива UV, MN, CD, GH, ST, XY (међу којима је и пречник AB), која стоје управно на светској оси $P_n P_s$, као пресеци паралелннх кругова, представљају (у пресеку) путање звезда, које ове, при дневноме обртању небесне сфере око своје осе, описују. Пошто је за посматрача видна само она половина небесне сфере која је изнад посматрачевог хоризонта, појмљиво је на који начин извесне звезде, подижући се над хоризонтом и спуштајући се испод њега, у току од 24 сата бивају видне и невидне.



Сл. 106.

Тако нпр. звезде, чију путању у пресеку представља тетиво CD, јесу видне у положајима који су представљени тетивним комадом CE, јер су тада изнад хоризонта NS, а невидне су у положајима којима одговара тетивни комад DE, пошто се оне, тада, налазе испод посматрачевог хоризонта. Помоћу сл. 106. лако појмити да има и таквих звезда које се никад не спуштају испод хоризонта, које, дакле, никако и не залазе, као што опет има и таквих које се не појављују над хоризонтом и, на тај начин, за посматрача остају навек невидне. Такве звезде, чије путање (паралелни кругови) леже сасвим изнад или сасвим испод хоризонта, које, да–

кле, било да никако не залазе или никако не излазе, зову се *циркумполарне звезде* (*Zirkumpolarsterne*, étoiles circumpolaires). Тетиво UV представља путању звезде која никад не налази, тетиво XY путању звезде која се никад не појављује над хоризонтом. Уопште све звезде на калоти MP_nN и калоти TP_sS јесу циркумполарне; прве (северне) не залазе, друге (јужне) не излазе. Све остале звезде, а то су оне у зони $SMNT$, периодно се спуштају и дижу изнад хоризонта.

Ако назовемо угао, који светска или земна оса заклапа са хоризонтом, дакле $\sphericalangle P_nON = \varphi$, *поларном висином*[1]) (*Polhöhe*, élévation ou hauteur du pôle) места на којем је посматрач, онда можемо горе наведене категорије звезда да карактеришемо овако: звезде, чије је угловно удаљење од северног пола $< \varphi$ припадају северним, звезде, чије је угловно удаљење од јужног пола $< \varphi$ (од северног пола $> 180^0 - \varphi$) припадају јужним циркумполарним звездама. Све остале звезде излазе и залазе периодно у току од 24 сата.

Путање (круг), коју једна звезде описује на небу зовемо *дневним кругом* (*Tageskreis*, cercle diurne) звезде. Онај део тога круга, који је изнад хоризонта, у којем је, дакле, звезда видна[2]), зове се *дневни лук* (*Tagbogen*); други део, који је испод хоризонта и за време чијег описивања звезда бива невидна, зове се *ноћни лук* (*Nachtbogen*). За звезде, које се крећу у равни небесног екватора AB, јесте дневни лук $=$ ноћноме луку $= 180^0$; за звезде на северној хеми-

---

[1]) Угао, који чини светски или земни екватор са хоризонтом, дакле $\sphericalangle AOS$, зове се *екваторска висина (Aequatorhöhe)*. Поларна висина$+$екваторска висина $= 90^0$.

[2]) Апстрахујући од сунчане светлости, која чини да се звезде дању немогу видети.

сфери дневни лук је већи од ноћног, за звезде на јужној хемисфери, обратно, јесте дневни лук мањи од ноћнога. Разуме се да се ово односи на посматраче северне хемисфере, нпр. за посматраче у Европи. За посматраче на јужној половини неба прилике су обратне.

Звезде, чије су путање подједнако удаљене од екватора, а налазе се на супротним странама од њега, имају једнаке дневне кругове, али с том разликом што је дневни лук једних раван ноћноме луку оних други звезда и обратно ноћни лук првих раван дневноме луку других.

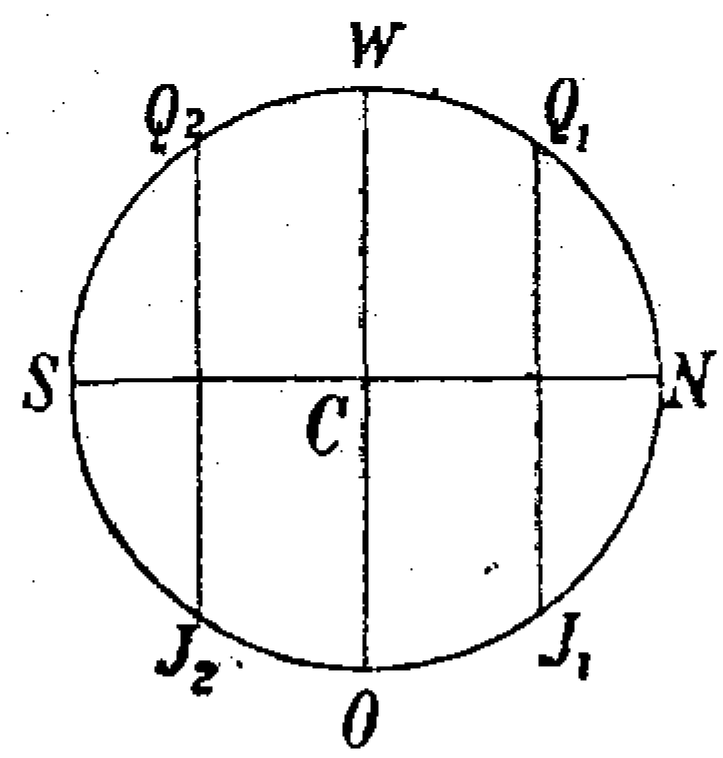
Вертикална раван, која сече хоризонат по северо-јужној линији, а то је меридијан, полови све паралелне кругове (звездане путање) на два симетрична дела. Једна од тих пресечних тачака заузима највиши, она друга најнижи положај у односу према хоризонту. Звезде *кулминују* кад пролазе кроз једну од тих двеју тачака њихове путање; налазећи се у највишој тачци кажемо да је звезда у *горњој*, ако је у најнижој тачци да је у *доњој кулминацији*[1]) *(obere und untere Kulmination).*

Лучно одстојање тачке изласка једна звезде (тј. тачке у којој се звезда издиже над хоризонтом) од источне тачке зовемо *јутарње удаљење (Morgenweite*, amplitude orientale) звезде, а лучно одстојање тачке заласка (тј. тачке у којој звезда силази испод хоризонта) од западне тачке зовемо *вечерње удаљење* (*Abendweite*, amplitude occidentale) звезде.

Узимимо да круг, који је описан из тачке *C*, представља ортогоналну пројекцију небесне сфере

[1]) Код циркумполарних звезда јесу обе кулминације или над или испод хоризонта.

на раван хоризонта. Нека је N северна, S јужна тачка (NS дакле меридијанска линија), O источна, W западна тачка (OW дакле источно-западна линија) хоризонта. Права NS представља нам пројекцију меридијана, права OW пројекцију прве вертикалне равни на раван хоризонта. Под *првом вертикалном равни (erster Vertikal*, premier vertical) разумемо раван која стоји управно на меридијану, а хоризонат сече по источно-западној линији. Два са правом OW паралелна тетива J_1Q_1 и J_2Q_2 јесу пројекције два паралелна круга на раван хоризонта и представљају пројекције путања (дневних кругова) двеју звезда Према горе реченоме представљају дакле, луци OJ_1 и OJ_2 јутарња, луци WQ_1 и WQ_2 вечерња удаљења звезда које описују дневне кругове J_1Q_1 и J_2Q_2. Из слике видимо да је јутарње удаљење једне звезде једнако њеном вечерњем удаљењу, јер је $arc\ OJ_1 = arc\ WQ_1$.



Сл. 107.

Јутарња и вечерња удаљења звезда, које излазе и залазе ближе тачци N, узимају се са положним знаком, оних звезда, пак, које излазе и залазе ближе тачци S са одречним знаком. За звезде, које изилазе у тачци O, а залазе у тачци W, јутарње и вечерње удаљење је равно нули.

c) Однос између времена и угловне мере. Равномерно (привидно) обртање небесне сфере упућује нас непосредно на начин мерења времена. Време које протекне између две узастопне горње кулминације једне звезде или, што је исто, време које је потребно једној звезди[1]) да се врати у исти положај на небу (нпр. време између два узастопна пролаза кроз меридијан) зовемо *звездани дан* (*Sterntag*, jour sidéral). То време делимо на 24 једнака дела, на *сашове* или *часове*. Час делимо на шесет *минуша*, а минуту на шесет *секунада*. Дакле

$$1 \text{ дан} = 24 \text{ часа}, \qquad 1 \text{ час} = 60 \text{ минута},$$
$$1 \text{ минута} = 60 \text{ секунада}$$

или, у знацима

$$1^d = 24^h, \quad 1^h = 60^m, \quad 1^m = 60^s.$$

Време, које је основано на овој јединици (звезданом дану), зове се *звездано време* (*Sternzeit*, temps sidéral).

Отуда, што једноме дану или 24 часа одговарају 360^0 (тј. један обртај сфере), следују између времене и угловне мере ови односи

$$\left.\begin{array}{lll} 1^h = 15^0, & 1^m = 15', & 1^s = 15'', \\ 1^0 = 4^m, & 1' = 4^s, & 1'' = 0{,}0\overline{6}^s. \end{array}\right\} \qquad \text{(I}$$

191. **Појмови који се односе на кружење земље око сунца.** — *a*) *Кружење земље око сунца.* Осим дневнога обртања око светске осе, које имају заједнички сва небесна тела, сунце показује још једно друго кретање на небу, које је само њему својствено. То кретање сунца долази услед кружења наше земље око сунца и огледа се у појави кретања сунца по једноме великом кругу, који је отприлике за $23\frac{1}{2}^\circ$ нагнут према

[1]) Ми замишљамо овде звезде које, осим дневнога обртања око светске осе, не показују никакво друго кретање, дакле звезде из категорије *некрешница* (*Fixsterne*, étoiles fixes).

небесноме екватору. Ова привидна путања сунца, коју оно описује у току једне године $= 365\frac{1}{4}$ дана, зове се *еклиптика*[1]) (*Ekliptik*, écliptique), а угао ($23\frac{1}{2}^{\circ}$), који она чини са екватором, *косина еклиптике* (*Schiefe der Ekliptik*).

Еклиптика и екватор, као два велика круга, секу се по једноме пречнику, чије се крајње тачке зову *равнодневице* или *еквинокциалне тачке* (*Aequinoctial-punkte od. Nachtgleichepunkte*, points équinoctials). Кроз једну од тих тачака пролази сунце, при своме годишњем кружењу, кад из јужне небесне хемисфере ступа у северну хемисферу; кроз ону другу тачку кад из северне ступа у јужну хемисферу. Прва тачка се зове *пролетња равнодневица* или *пролетња еквиноциална тачка* (*Frühlingsäquinoctium*, point vernal ou équinoxe du printemps); у њој се сунце налази 21. Марта. Она друга тачка зове се *јесења равнодневица* или *јесења еквинокциална тачка* (*Herbstäquinoctium*, équinoxe d'automne); сунце се налази у њој 23. Септембра.

Пошто се сунце, кад је у еквинокциалним тачкама, налази на екватору и према томе јутарње и вечерње удаљење сунца $= 0$, то је, на основу раније реченога, јасно да је тада (тј. 21. Марта и 23. Септембра) дневни лук $=$ ноћноме луку круга, који сунце тих дана описује на небу (в. сл. 106.). То значи да је тада дан $=$ ноћи $= 12^h$. За све време од 21. Марта па до 23. Септембра сунце се налази на северној половини неба; јутарња и вечерња удаљења су положна (в. на крају под *b*) у чл. 190.); дневни лук је већи од ноћ-

1) Овај назив постао је од грчке речи ἔκλειψις, која значи изостанак (светлости), а односи се на примећену околност да помрачења наступају само онда када се месец налази у равни путање сунца.

нога лука (в. сл. 106.) и према томе дан дужи од ноћи. — Од 23. Септембра па до 21. Марта сунце је на јужној половини небесне сфере; јутарња и вечерња удаљења јесу одречна; дневни лук мањи од ноћнога лука и, дакле, дан је краћи од ноћи.

Отуда што сунце, при своме годишњем кретању, мења поступно своје место на небу, а на основу горе констатованог факта, да су — за све време од 21. Марта па до 23. Септембра — дневни луци већи од ноћних лукова, следује да, почевши од 21. Марта (којег је дана дневни лук = ноћноме луку), дневни луци расту, тј. да бивају већи и то све до извеснога датума, а после тога термина да опадају (бивају мањи) док (23. Септ.) не постану, опет, равни ноћноме луку. Из тога закључујемо да једнога дана (између 21. Марта и 23. Септембра) дневни лук сунца мора достићи извесну највећу дужину, а ноћни лук постати најмањи и да ће тога датума, дакле, дан бити најдужи, а ноћ најкраћа. Посматрања показују да је то случај 21. Јуна. — Обратно: од 23. Септембра па до 21. Марта сунце се креће по јужној хемисфери и, као што рекосмо, тада је дневни лук мањи од ноћнога лука. Дакле из истог разлога, који смо горе већ навели, следује да, почев од 23. Септембра па до извесног датума, дневни лук бива све мањи док не достигне извесну најмању дужину, а затим да, опет, расте све до 21. Марта када се поново изравњава с ноћним луком. Искуством дознајемо да је најкраћи дан (најмањи дневни лук), а најдужа ноћ (највећи ноћни лук) 21. Декембра.

Тачке еклиптике, у којима се сунце налази 21. Јуна и 21. Декембра, зову се *солстиције* и то она прва зове се *летња солстиција* или *дугодневица* (*Sommersolstitium od. Sommersonnenwende*, solstice d'été), она друга *зимња солстиција* или *кратkодневица* (*Wintersolstitium od. Wintersonnenwende*, solstice d'hiver). Солстиције јесу крајње тачке пречника, који је управан на пречнику по којем се секу еклиптика и екватор, а чије крајње тачке означавају еквинокције.

b) Зодијак. Поред обичне поделе круга на 360° постоји за еклиптику, већ од најстаријих времена, подела на 12 равних делова од којих, дакле, сваки обухвата 30°[1]. Ти делови, такозвани *знаци*, почевши од пролетње равнодневице па редом од запада ка истоку зову се и бележе како следује

1) Ован (*Widder*, Bélier) ♈
2) Бик (*Stier*, Taureau) ♉
3) Близнаци (*Zwillinge*, Gémeaux) ♊
4) Рак (*Krebs*, Cancer) ♋
5) Лав (*Löwe*, Lion) ♌
6) Девојка (*Jungfrau*, Vierge) ♍
7) Веси (*Wage*, Balance) ♎
8) Акреп (*Skorpion*, Scorpion) ♏
9) Стрелац (*Schütze*, Sagittaire) ♐
10) Јарац (*Steinbock*, Capricorne) ♑
11) Водолија (*Wassermann*, Verseau) ♒
12) Рибе (*Fische*, Poissons) ♓.

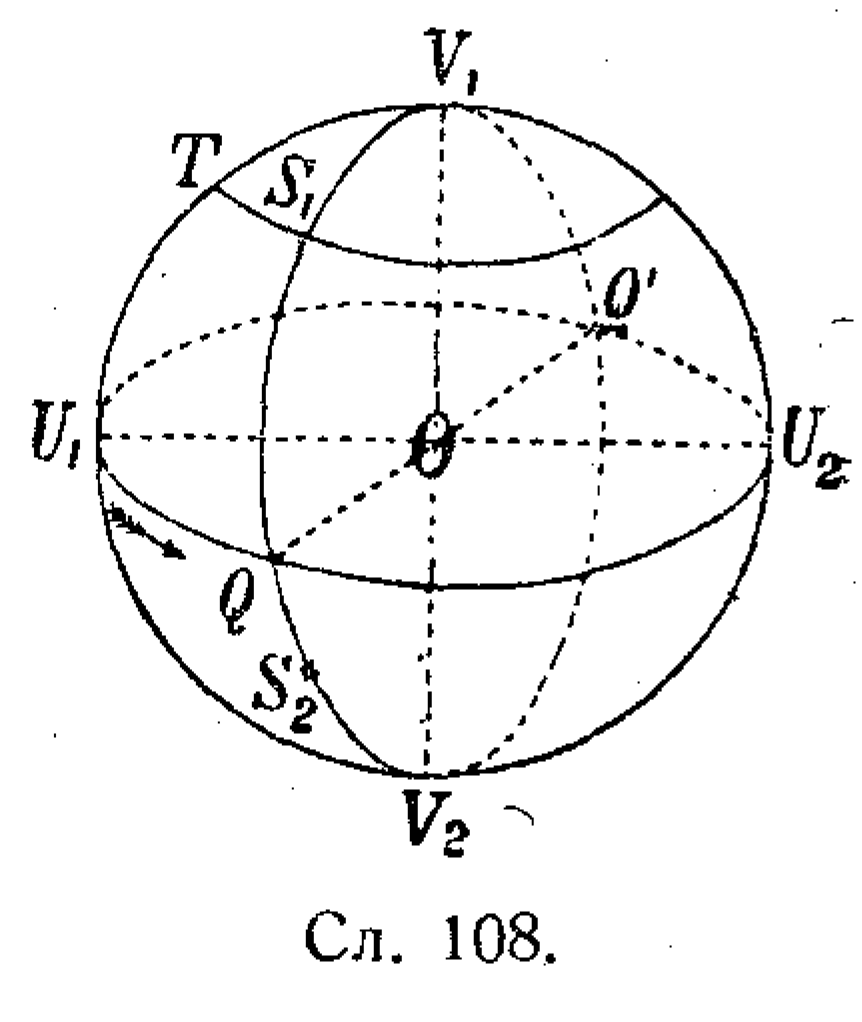
Имена ових знакова узета су од њима околних звезданих јата и пошто су она позајмљена махом из животињскога царства, то је, отуда, и постао назив

---

[1]) Ова подела је, без сваке сумње, постојала већ 800—1000 година пре Христова рођења код халдејских и египатских астронома. Види: Prof. Dr. S. Günther. Handbuch der mathematischen Geographie. Stuttgart, 1890 примедбу под 1) на стр. 70. и 71.

животињски круг или *зодијак*[1]) (*Tierkreis*, *Zodiakus*, zodiaque). У времену, када су стари Јелињани први пут строго научно извршили поделу зодијака, пролетња равнодневица је лежала у знаку Овна, јесења равнодневица у знаку Веси, летња солстиција (дугодневица) у знаку Рака, а зимња солстиција (краткодневица) у знаку Јарца. Но, услед појаве, познате под именом *прецесије* (*Präzession*) звезда, тј. услед *одступања еквинокцијалних тачака* (*Zurückgehen der Aequinoctialpunkte*, précession des équinoxes), које се показује у враћању ових тачака у назад за 50″ годишње[2]), зодијакални знаци се данас не подударају више са звезданим јатама, од којих су добили своја имена. Зодијакални знаци променили су своја места за једно цело звездано јато и то унапред. При свему томе они су задржали своја стара имена.

192. **Одређивање положаја тачака на небу помоћу сферних координата.** — *а) О сферним координатама уопште.* Положај тачака на једној задатој лопти (тј. на лопти чији је полупречник познат) можемо да утврдимо на следећи начин. Пре свега узимамо два стална велика круга, од којих је један хоризонталан, нека је то круг U_1QU_2Q', а други вертикалан: круг $V_1U_1V_2U_2$. Тачке V_1 и V_2 јесу полови првога (хоризонталног) круга. Да бисмо одредили положај ма које тачке, нпр. тачке S_1



Сл. 108.

[1]) Од грчкога ζώδιον = животиња, ζωδιακὸς κύκλος = животињски круг.

[2]) Услед овога прелази пролетња еквинокцијална тачка целу еклиптику за непуних 26000 година.

на тој сфери, ми замишљамо кроз дотичну тачку S_1 повучен вертикални круг $V_1S_1V_2$, а то је велики круг који пролази кроз полове V_1 и V_2 и стоји, разуме се, управно на хоризонталноме кругу. Вертикални круг $V_1S_1V_2$ сећи ће овај последњи, тј. круг U_1QU_2Q' у двема тачкама Q и Q', од којих ћемо, међутим, узети у обзир ону која је ближа самој тачци S_1; овде, дакле, узећемо тачку Q и измерићемо на хоризонталноме кругу лук између речене тачке Q и једне као почетак на хоризонталноме кругу узете тачке U_1. Овај лук U_1Q, који се зове *сферна апсциса* тачке S_1 и који се увек у једноме и истом смислу (нпр. у смислу који је у сл. 108. означен стрелицом) почиње да мери од тачке U_1, бројимо од 0 па до 360°. Осим овога лука U_1Q измерићемо још и лук који лежи између тачака S_1 и Q, тј. лук S_1Q, узевши овај са положним знаком кад се тачка S_1 налази изнад хоризонталног круга, тј. на хемисфери са полом V_1, а са одречним знаком кад се тачка налази испод хоризонталног круга, тј. на хемисфери са полом V_2, као што је случај са тачком S_1. Лук S_1Q, такозвану *сферну ординату* бројимо од 0 па до 90°. Сферна апсциса $U_1Q = u$ и сферна ордината $S_1Q = v$ одређују потпуно положај тачке S_1 на лопти и образују сферне координате дотичне тачке.

Напомена. Није тешко приметити аналогију између сферних координата, којима одређујемо положај тачака на лопти, и правоуглих координата у равни (в. чл. 4.). Хоризонтални круг U_1QU_2Q' игра улогу x-осе, вертикални круг $V_1U_1V_2U_2$ улогу y-осе. Тачке вертикалних кругова, тј. кругова који пролазе кроз полове V_1 и V_2, имају једнаке или за 180°

различне апсцисе. Тачке хоризонталних кругова, тј. кругова који су паралелни са сталним хоризонталним кругом U_1QU_2Q', имају једнаке ординате.

Примери.

Означимо за тачку S_1 сферне координате $U_1Q = u_1$, $S_1Q = v_1$. Из слике видимо да су

за тачку	S_2 сферне координате:	$u = u_1$,	$v = -v_1$;
„ „	Q' „ „	$u = u_1 + 180^0$,	$v = 0$;
„ „	T „ „	$u = 0$,	$v = v_1$;
„ „	U_1 „ „	$u = 0$,	$v = 0$;
„ „	U_2 „ „	$u = 180^0$,	$v = 0$;
„ „	V_1 „ „	$u = ?$ [1]),	$v = 90^0$;
„ „	V_2 „ „	$u = ?$ [1]),	$v = -90^0$.

b) Сферне координате у Астрономији. У Астрономији и Математичној Географији употребљују се поглавито три системе сферних координата, до којих долазимо узевши за апсцисни или хоризонтални круг хоризонат посматрачев, небесни екватор или еклиптику.

1. Хоризонатна система.

Ако за апсцисни круг U_1QU_2Q' изберемо хоризонат, у којем је случају V_1 зенит, V_2 надир посматраоца, којег замишљамо у тачци O, онда се апсциса U_1Q зове *азимут* (*Azimut*, azimut), ордината S_1Q *висина* (*Höhe*, hauteur) звезде S_1, а комплеменат висине: $90^0 - S_1Q = V_1S_1$ зове се *зенитно одстојање*[2]) (*Zenit-*

[1]) Пошто се тачке V_1 и V_2 налазе на свима вертикалним круговима, то њихове апсцисе нису одређене и може им се придати свака вредност између 0 и 360^0.

[2]) Према овоме је висина + зенитно одстојање $= 90^0$.

distanz, distance zénithale). Кругови паралелни са хоризонтом зову се *алмукантарати (Almukantarate*, almucantarats). То су, дакле, кругови на којима су тачке једнаке висине. Кругови, по којима се мере ординате, зову се *вертикални* или *висински кругови (Vertikal- oder Höhenkreise)*. Круг $V_1U_1V_2U_2$, од којег азимуте почињемо да бројимо, јесте *меридијан*; U_1 је јужна, U_2 северна тачка. Вертикални круг управан на меридијану, а то је вертикални круг чији је азимут $= 90^0$, назвали смо *првом вертикалном равни*.

Азимуте бројимо од јужне тачке ка западној тачци, тако да је азимут јужне тачке $= 0$, западне тачке $= 90^0$, северне тачке $= 180^0$, а источне тачке $= 270^0$. Знак ординате (висине) одређујемо сматравши видну половину сфере (полусферу *над* хоризонтом), а то је она која за пол има зенит, као положну хемисферу.

2. Екватореална система.

У овој системи узет је небесни екватор као апсцисни круг U_1QU_2Q' и онда је V_1 северни, V_2 јужни небесни пол. Апсциса U_1Q зове се *ректасцензија* (*Rectascension*, *gerade Aufsteigung*, ascension droite) или *успон*, ордината S_1Q *деклинација* (*Declination*, *Abweichung*, déclinaison) или *скретај* звезде S_1, а комплеменат деклинације *поларна даљина*[1]) (*Poldistanz*, distance polaire) звезде. Кругове паралелне са екватором, а то су кругови са тачкама једнаке деклинације, назвали смо већ *паралелним круговима*, а кругове, по којима се мере деклинације (кругове са тачкама једнаке или за 180^0 различне ректасцензије), зовемо *деклинационе кругове* (*Deklinationskreise*). Деклинациони

[1]) То значи да је деклинација + поларна даљина $= 90^0$.

кругови еквинокцијалних тачака и солстиција зову се *колури* (*Koluren*, colures).

За почетну тачку U_1 на екватору, од које се почињу да рачунају ректасцензије, узима се тачка Овна (♈, тј. пролетња равнодневница) и бројање се врши у противноме смислу обртања сатне казаљке или, што је исто, у смислу кружења сунца. Односно знака ординате (деклинације) примећујемо да се хемисфера са северним полом сматра као положна.

У овој системи координата, где је екватор основни круг, постоји још један други, за врло мало различан, начин одређивања положаја тачака на сфери. Ординате су, као и горе, деклинације, а место ректасцензија узимају се такозвани *часовни угли* (*Stundenwinkel*, angle horaire) за апсцисе. Под часовним углом једне звезде разумемо сферни угао или лук између меридијана и деклинационог круга дотичне звезде. Ректасцензије и часовни угли мере се, дакле, на истоме апсцисном кругу (на екватору) и сва је разлика између њих у почетној тачци. Часовни угао меримо с обеју страна меридијана: источно и западно од 0 па до 180^0, а изражавамо га, као и ректасцензију, двојако: у лучној мери и у времену, имавши на уму да углу од 15^0 одговара у времену 1^h (в. чл. 190 *c)*. Тако нпр. ако је часовни угао једне звезде $+77^0\,30'$, онда је од њене горње кулминација прошло времена $\frac{77\frac{1}{2}^h}{15} = 5^h\,10^m$. Ако је часовни угао звезде $= -66^0$, онда то значи да до њене горње кулминације има да протече још $\frac{66^h}{15} = 4^h\,24^m$. — При оваквоме мерењу сферних апсциса (часовним углима) деклинациони кругови називају се *часовни кругови* (*Stundenkreise*, cercles horaires).

Напомена. Дана (21. Марта) кад се сунце налази у тачци ♈ (пролетњој равнодневници) дневни круг сунца је сам екватор и дан = ноћи. У тој тачци су ректасцензија и деклинација сунца равне нули. Пролазећи кроз тачку ♈ сунце се подиже над екватором и ступа у северну хемисферу. Паралелни кругови, које сунце на небу дневно описује, бивају све удаљенији од екватора; деклинација сунца расте и достиже своју највећу вредност 21. Јуна (у летњој солстицији) кад сунце ступа у знак Рака (♋). Ректасцензија сунца у тој њеној највишој тачци над екватором јесте $= 90^0$, а деклинација $= 23\frac{1}{2}^\circ$, тј. равна косини еклиптике. Тога дана (21. Јуна) знамо да је дневни лук највећи, ноћни лук најкраћи и сунце описује на небу паралелни круг, који се зове *повратни круг Рака* (*Wendekreis des Krebses*, tropique du Cancer). Тачка, у којој се сунце тада налази, зове се *повратна тачка* (*Wendepunkt*, point solsticial). — После 21. Јуна дневни кругови сунца поново се приближују екватору; деклинација сунца опада и постаје опет равна нули са ступањем сунца у знак Веси (♎), 23. Септембра. Сунце је у јесењој равнодневници; дан је опет раван ноћи. Ректасцензија сунца је $= 180^0$, деклинација $= 0$. Пролазећи кроз ову тачку (♎) сунце ступа у јужну хемисферу: силази испод екватора. Деклинације сунца јесу јужне (одречне) и достижу 21. Децембра своју крајњу вредност од $23\frac{1}{2}^\circ$ са ступањем сунца у знак Јарца (♑). Тога дана (зимње солстиције) сунце описује на небу паралелни круг, чији је дневни лук од свију најкраћи и зове се *повратни круг Јарца* (*Wendekreis des Steinbocks*, tropique du Capricorne). Тачка, у којој се тога дана сунце налази и која има ректасцензију = 270^0, деклинацију = $-23\frac{1}{2}^{\circ}$, зове се повратна тачка, јер се, после тога, сунце враћа натраг екватору; деклинација опада, ректасцензија расте и то све док сунце поново не дође у тачку ♈, где је деклинација = 0, ректасцензија = 360^0, односно = 0.

3. Еклиптикална система.

За апсцисни круг U_1QU_2Q' узима се еклиптика. V_1 је северни, V_2 јужни пол еклиптике. Апсциса U_1Q зове се *астрономска дужина (astronomische Länge*, longitude céleste), ордината S_1Q *астрономска ширина (astronomische Breite*, latitude céleste). Мерење астрономске дужине по еклиптици врши се у истоме смислу и почиње од исте тачке као и мерење ректасцензије по екватору, тј. почиње од пролетње равнодневице (тачке Овна, ♈) и продужује се у смислу сунчевог кретања, а то је у противноме смислу обртања сатне казаљке. На тај начин припадају тачкама ♈, ♋, ♎, ♑ апсцисне вредности 0, 90^0, 180^0, 270^0. Ординате (астрономске ширине) сматрамо као положне за тачке које се налазе на хемисфери са северним полом еклиптике, а као одречне на хемисфери са јужним полом еклиптике.

4. Општи преглед свију појмова код сферних координата.

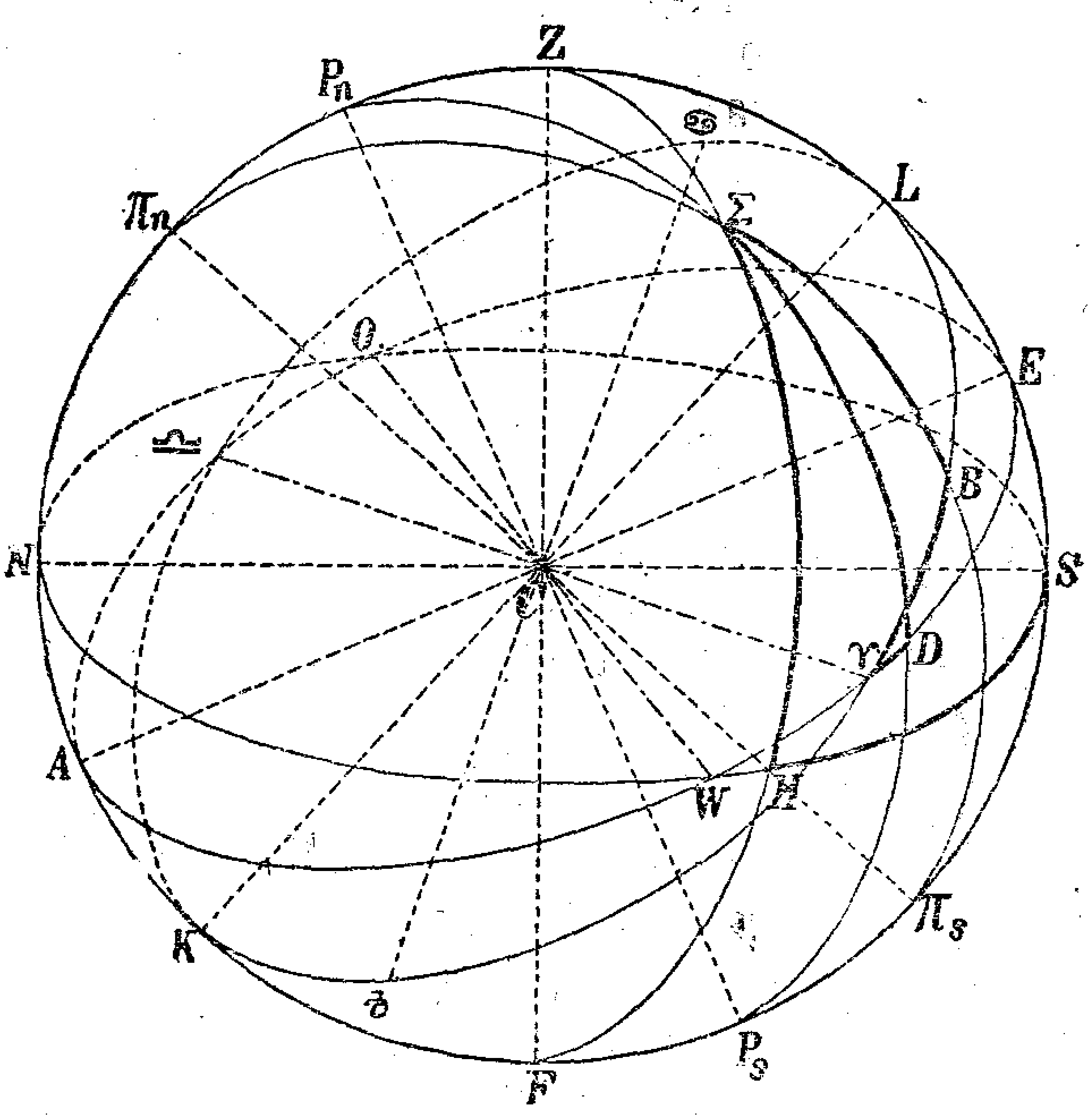
Замислимо да је посматрач у тачци C; његов хоризонат нека је представљен хоризонталним кругом $NWSO$, који се у сл. 109. показује у пројекцији као елипса. Z је зенит, F надир.

Узмимо да $AWEO$ представља небесни екватор, који хоризонат $NWSO$ сече по источно-западној линији OW; O је источна, W западна тачка. Означимо са P_n северни, са P_s јужни небесни пол.

Велики круг ZP_nNFP_sS, који пролази кроз зенит, надир, северни и јужни пол и стоји управно на хоризонту, зове се меридијан. Тај круг сече хоризонат по меридијанској линији NS, која стоји управно на источно-западној линији. Крајње тачке N и S меридијанске линије зову се северна и јужна тачка хоризонта.

Нека велики круг $K♈L♎$ представља еклиптику. Она сече екватор по пречнику, чије су крајње тачке пролетња равнодневница или тачка Овна (♈) и јесења равнодневница или тачка Веси (♎). Крајње тачке пречника, који је управан на овоме пресеку (♈♎) еклиптике са екватором, обележене су на еклиптици знацима ♋ и ♑; једно је летња солстиција или повратна тачка Рака, друго зимња солстиција или повратна тачка Јарца. Северни пол еклиптике означен је са Π_n, јужни са Π_s.

Узмимо ма где на сфери једну тачку Σ и повуцимо велике кругове $Z\Sigma HF$, $P_n\Sigma DP_s$ и $\Pi_n\Sigma B\Pi_s$. Тада су сферне координате тачке Σ



Сл. 109.

у системи хоризонта:

$$\text{азимут} = SH \text{ и}$$
$$\text{висина} = \Sigma H \text{ или}$$
$$\text{зенитно одстојање} = Z\Sigma = 90^0 - \Sigma H;$$

у системи екватора:

$$\text{ректасцензија} = \Upsilon D \text{ и}$$
$$\text{деклинација} = \Sigma D \text{ или}$$
$$\text{поларна даљина} = P_n \Sigma = 90^0 - \Sigma D.$$

Ако претпоставимо да је ZP_nNFP_sS *први* меридијан, онда можемо узети за сферне координате тачке Σ у системи екватора:

$$\text{часовни угао} = ED \text{ и}$$
$$\text{деклинацију} = \Sigma D.$$

Најзад имамо као сферне координате тачке Σ у системи еклиптике:

$$\text{астрономску дужину} = \Upsilon B \text{ и}$$
$$\text{„ ширину} = \Sigma B.$$

c) Трансформација сферних координата. Један од врло важних задатака у Астрономији састоји се у томе да се из познатих (нпр. измерених) координата једне тачке на небу израчунају координате исте тачке на небу израчунају координате исте тачке за коју другу систему координата. Овакво израчунавање координата једне системе из координата друге системе зове се претварање или *трансформација координата*, а обрасци, на основу којих се такав задатак решева, зову се *трансформационе једначине*.

1. Претварање еклиптикалних координата у екваторeалне и обратно.

Нека је (в. сл. 110.) C средиште небесне сфере (место са којег посматрамо), AE екватор, P_n северни пол, KL еклиптика, Π_n њен северни пол, Υ тачка Овна (пролетња равнодневница), $\sphericalangle E\Upsilon L = \varepsilon$ косина еклиптике. На тај начин представља круг $P_n\Pi_n AKEL$ колур солстиција, круг $P_n\Upsilon$ колур еквинокција, који (пошто су управни један према другоме) чине у тачци P_n прав угао.

Узмимо да је Σ звезда, чији положај на небу одређујемо и повуцимо кроз њу и полове P_n и Π_n велике кругове $P_n\Sigma D$ и $\Pi_n\Sigma B$, од којих први стоји управно на екватору, а други управно на еклиптици. Према горњим дефиницијама јесу сферне координате звезде Σ

у системи екватора:

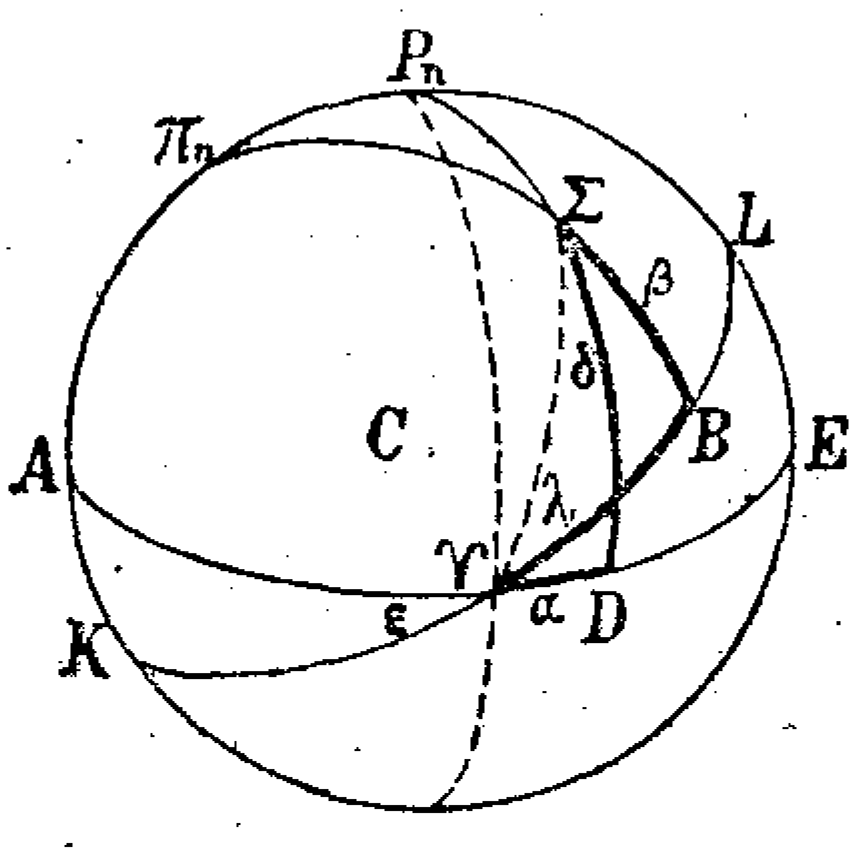
ректасцензија $\Upsilon D = \alpha$ и

деклинација $\Sigma D = \delta$;

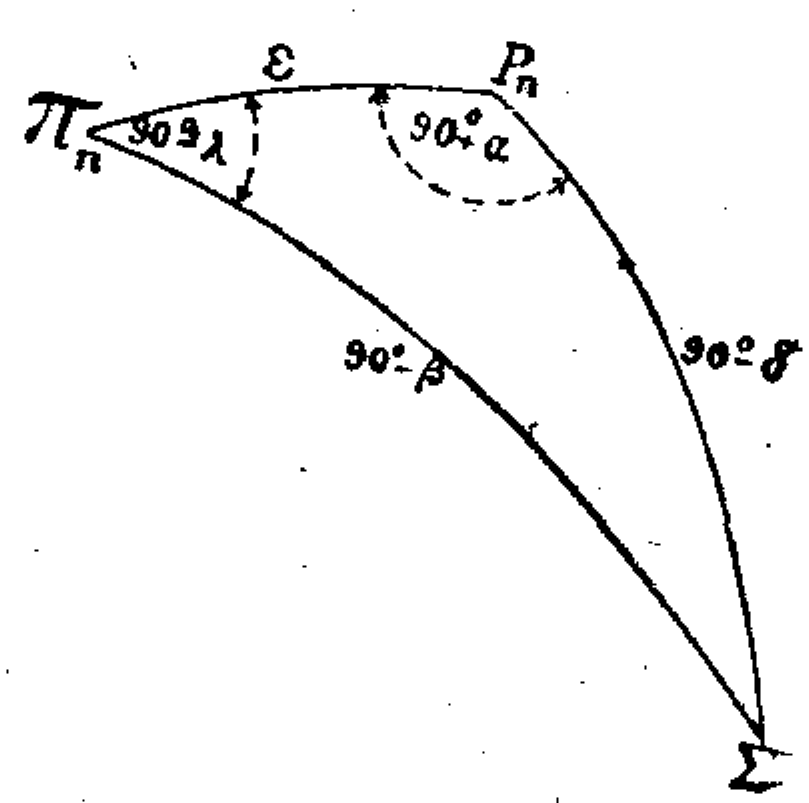
у системи еклиптике:

астрономска дужина $\Upsilon B = \lambda$ и

„ ширина $\Sigma B = \beta$.



Сл. 110.



Сл. 111.

Кад расмотримо из ближе сферни троугао $\Sigma P_n \Pi_n$ (в. сл. 111.) приметићемо да је у њему

$$
\begin{aligned}
P_n \Pi_n &= \varepsilon \\
P_n \Sigma &= 90^0 - \delta \\
\Pi_n \Sigma &= 90^0 - \beta \\
\sphericalangle\, \Pi_n P_n \Sigma &= \sphericalangle\, \Pi_n P_n \Upsilon + \sphericalangle\, \Upsilon P_n D = 90^0 + \alpha \\
\sphericalangle\, P_n \Pi_n \Sigma &= \sphericalangle\, L \Pi_n \Upsilon - \sphericalangle\, B \Pi_n \Upsilon = 90^0 - \lambda.
\end{aligned}
$$

Између ових пет комада (три стране и два угла) сфернога троугла $\Sigma P_n \Pi_n$ врло је лако поставити потребне једначине на основу којих се из три задата комада могу израчунати остала два, па, ако је потребно, и шести комад: $\sphericalangle\, P_n \Sigma \Pi_n$, такозвани *позициони угао (Positionswinkel*, angle de position). Тако нпр. помоћу синусне и косинусне теореме добијамо непосредно за решавање сфернога троугла $\Sigma P_n \Pi_n$ ове обрасце

$$
\left.
\begin{aligned}
\cos\alpha \cos\delta &= \cos\beta \cos\lambda\text{[1]} \\
\sin\beta &= \cos\varepsilon \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta \sin\alpha \\
\sin\delta &= \cos\varepsilon \sin\beta + \sin\varepsilon \cos\beta \sin\lambda.
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(II}
$$

Помоћу ових једначина, од којих су довољне и две, у стању смо да потпуно решимо горе постављени задатак односно претварања еклиптикалних координата у екваторeалне и обратно. Тако нпр. ако смо измерили екваторeалне координате α и δ[2]) добићемо из њих еклиптикалне на овај начин. Из друге једн.

[1]) Ову једначину можемо да добијемо и без употребе синусне теореме, кад повучемо сферну дуж $\Sigma\Upsilon$ (в. сл. 110.). Имамо два правоугла сферна троугла $\Sigma\Upsilon D$ и $\Sigma\Upsilon B$ у којима је сферна дуж $\Sigma\Upsilon$ хипотенуза. По *Непер*-овом правилу читамо за први троугао $\cos \Sigma\Upsilon = \cos\alpha \cos\delta$, а за други $\cos\Sigma\Upsilon = \cos\beta\cos\lambda$, дакле $\cos\alpha\cos\delta = \cos\beta\cos\lambda$.

[2]) Косина еклиптике (ε) је у свакоме случају позната.

II израчунаћемо β, које опет, кад заменимо у прву једн. II, даје λ. Обратно, ако су нам познате еклиптикалне координате λ и β, ми ћемо из треће једн. II израчунати δ, а заменом те вредности у прву једначину наћи α.

1. *Напомена.* Задатак трансформације у посматраноме случају своди се, као што видимо, на решавање основнога задатка Сферне Тригонометрије да се из двеју страна и захваћеног угла израчуна трећа страна и један угао дотичног сферног троугла[1]). Разуме се да бисмо, место горњих једначина II, које смо добили употребом синусне и косинусне теореме, могли применути и сваки други образац за сферни троугао, у којем је постављена веза између означених пет комада. Тако нпр. могли бисмо употребити и *Непер*-ове аналогије, само што би се томе начину итрачунавања могло пребацити завођење позиционог угла код Σ, који нас иначе не интересује. С друге стране, опет, може се последњим двема једначинама II замерити то што су у форми неподесној за непосредну употребу логаритама. Међутим, томе ћемо доскочити, држећи се раније већ датих упустава (в. 4. задатак у чл. 65.), кад поменуте једначине напишемо

$$\sin\beta = \frac{\sin\delta}{\cos\Phi}\cos(\varepsilon+\Phi), \text{ где је } tg\Phi = cotg\,\delta\sin\alpha.$$

$$\sin\delta = \frac{\sin\beta}{\cos\Psi}\cos(\varepsilon-\Psi), \quad \text{„} \quad \text{„} \quad tg\Psi = cotg\,\beta\sin\lambda\text{[2]}).$$

---

[1]) Код трансформације екватореалних координата у еклиптикалне мамо познате две стране ε и $90^0-\delta$ и захваћени угао $90^0+\alpha$; тражи се рећа страна $90^0-\beta$ и угао $90^0-\lambda$. Код трансформације еклиптикалних оордината у екватореалне познате су стране ε и $90^0-\beta$ и захваћени угао $0^0-\lambda$; тражи се трећа страна $90^0-\delta$ и угао $90^0+\alpha$.

[2]) Није тешко уверити се да је $\Psi-\Phi=\varepsilon$.

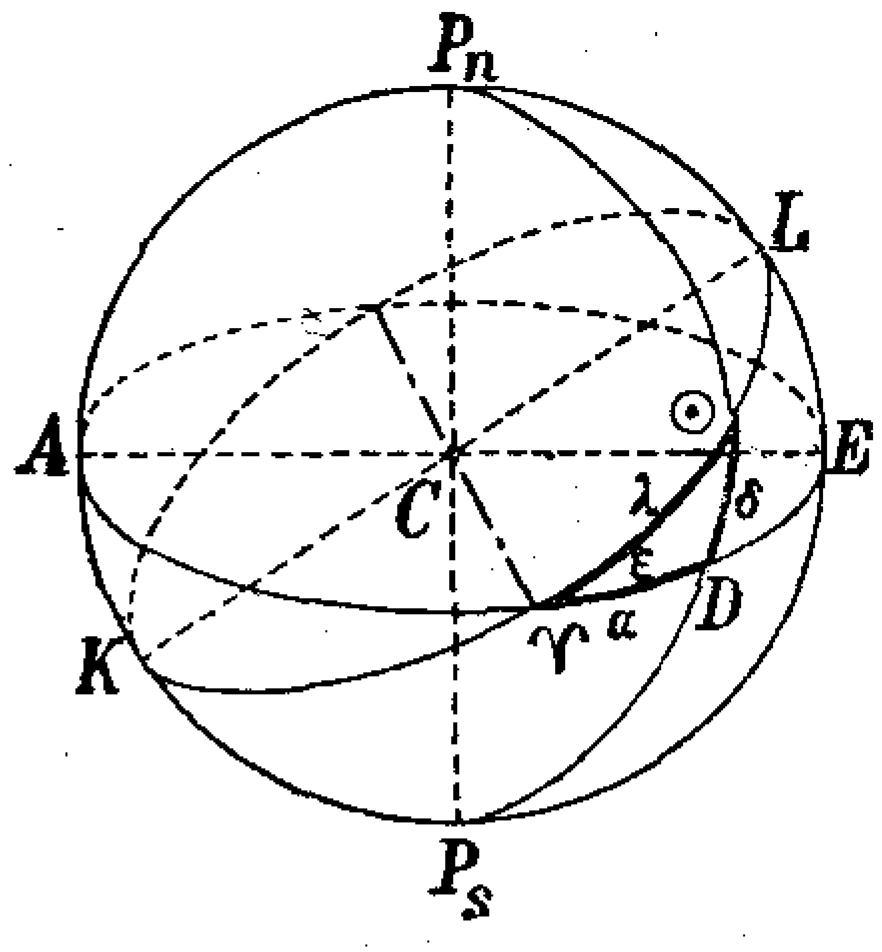
На тај начин имамо за претварање екватореалних координата у еклиптикалне ове трансформационе једначине

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{\sin\delta}{\cos\Phi}\cos(\varepsilon+\Phi), \text{ где је } tg\,\Phi = cotg\,\delta\sin\alpha \\ \cos\lambda &= \frac{\cos\alpha\cos\delta}{\cos\beta}, \end{aligned}\right\} \text{(I}$$

а за претварање еклиптикалних у елваторе-алне координате

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= \frac{\sin\beta}{\cos\Psi}\cos(\varepsilon-\Psi), \text{ где је } tg\,\Psi = cotg\,\beta\sin\lambda \\ \cos\alpha &= \frac{\cos\lambda\cos\beta}{\cos\delta}. \end{aligned}\right\} \text{(II}$$

2. *Напомена*. Рачун око трансформације координата постаје знатно простији, ако место звезде (Σ), узмемо сунце ($\odot$). У томе случају имамо један правоугли сферни троугао $\Upsilon\odot D$, у којем је хипотенуза $\Upsilon\odot = \lambda$, катете $\Upsilon D = \alpha$ и $\odot D = \delta$, а један од оштрих углова косина еклиптике: $\sphericalangle\,\odot\Upsilon D = \varepsilon$. Једначине за разрешавање овога троугла можемо добити из горњих општих једначина II кад у њима ставимо $\beta = 0$ или помоћу познатог *Непер*-овог правила. Оне гласе:



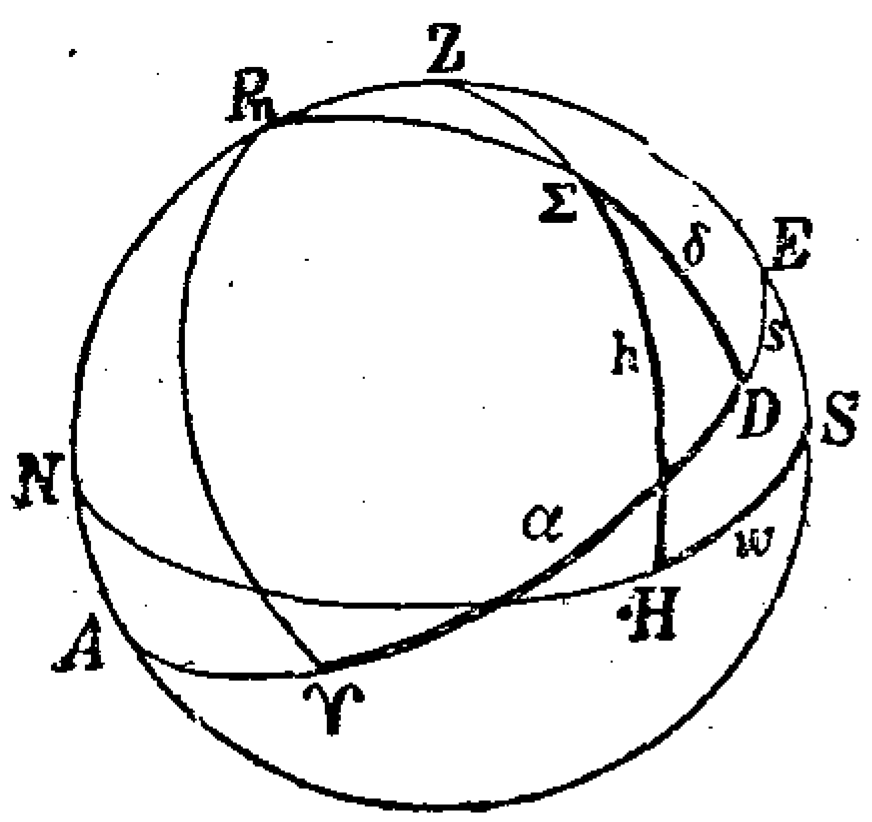
Сл. 112.

$$\text{III)} \quad \begin{cases} \cos\lambda = \cos\alpha\cos\delta \\ \sin\alpha = \operatorname{cotg}\varepsilon\operatorname{tg}\delta \\ \sin\delta = \sin\varepsilon\sin\lambda \\ \operatorname{tg}\alpha = \cos\varepsilon\operatorname{tg}\lambda. \end{cases}$$

2. Претварање екватореалних координата у хоризонатне и обратно.

Да бисмо што простије решили овај задатак, претпоставићемо да су екватореалне апсцисе мерене од меридијана (а не од пролетње тачке), тј. ми ћемо, место ректасцензије узети часовни угао звезде.

Замислимо да круг ZP_nNASE представља меридијан, Z зенит, N северну, S јужну тачку хоризонта NHS. Нека је ADE екватор, Υ пролетња тачка, P_n северни небесни пол. Према овоме је E горња, A доња кулминациона тачка екватора.



Сл. 113.

Положај звезде Σ одредићемо кад из Σ повучемо сферне управне ΣH и ΣD на велике кругове NHS (хоризонат) и ADE (екватор). На тај начин добијамо за звезду Σ сферне координате

у системи екватора:

ректасцензију $\Upsilon D = \alpha$ или
часовни угао $ED = s$ и
деклинацију $\Sigma D = \delta$;

у системи хоризонта:

азимут $SH = w$ и

висину $\Sigma H = h$.

Назначимо поларну висину $ZE = \varphi$.

У сферноме троуглу $ZP_n\Sigma$ (зенит-пол-звезда) јесте (в. сл. 114.)

$$P_n Z = 90^0 - \varphi$$

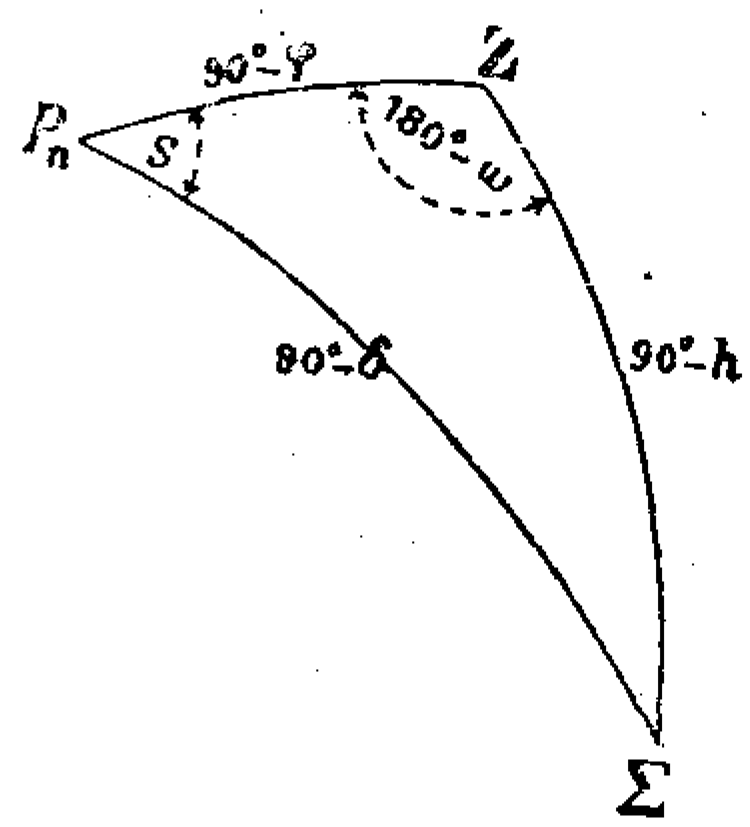
$$P_n \Sigma = 90^0 - \delta$$

$$\Sigma Z = 90^0 - h$$

$$\sphericalangle P_n Z \Sigma = 180^0 - \sphericalangle HZS = 180^0 - w$$

$$\sphericalangle ZP_n \Sigma = arc\ ED = s.$$

Трансформација се, дакле, и овде састоји у томе да се из две стране и захваћеног угла израчуна трећа страна и један од она остала два угла сферног троугла: било да се из страна $90^0 - \delta$ и $90^0 - \varphi$ и захваћеног угла s (тј. из екватореалних координата δ, s и у свакоме случају познате поларне висине φ) израчунају $90^0 - h$ и $180^0 - w$ (дакле хоризонатне координате h и w) или обратно из страна $90^0 - \varphi$ и $90^0 - h$ и захваћенога угла $180^0 - w$ (другим речима из хоризонатних координата h, w и познате поларне висине φ) да се израчунају $90^0 - \delta$ и s (тј. екватореалне координате δ и s).



Сл. 114.

Угао код Σ ($\sphericalangle Z\Sigma P_n = v$), такозвана *вариација* (*Variation*) врло ретко се употребљује.

Од свију образаца, који могу да се поставе за наведене комаде сферног троугла $ZP_n\Sigma$, навешћемо само ове

$$
\text{IV)} \quad \begin{cases} \cos h \sin w = \cos \delta \sin s \\ \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s \\ \sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos w, \end{cases}
$$

које изводимо помоћу синусне и косинусне теореме.

Напомена. Односно рачунања са обрасцима IV упућујемо на 1. *Напомену,* коју смо учинили код прошлог случаја: приликом дискусије једн. II за претварање еклиптикалних координатата у екватореалне и обратно.

d) *Примери за претварање координата.*

1. Звезда Кастор (Castor, α Geminorum) имала је 1885. год. ове екватореалне координате

$$\alpha = 7^h\, 27^m\, 15{,}48^s = 111^0\, 48'\, 52{,}2'', \quad \delta = 32^0\, 8'\, 22{,}3''.$$

Косина еклиптике била је тада $\varepsilon = 23^0\, 27'\, 12{,}8''$.

Да се израчунају еклиптикалне координате λ и β.

Према трансформационим једначинама $\mathrm{II_a}$ jèсте

$$
\begin{aligned}
tg\, \Phi &= cotg\, \delta \sin \alpha \\
\log cotg\, \delta &= 0{,}201\,8602 \\
\log \sin \alpha &= 9{,}967\,7313 \\
\hline
\log tg\, \Phi &= 0{,}169\,5915 \\
\Phi &= 55^0\, 54'\, 46{,}9'' \\
\varepsilon + \Phi &= 79^0\, 21'\, 59{,}7''.
\end{aligned}
$$

$$
\sin \beta = \frac{\sin \delta}{\cos \Phi} \cos (\varepsilon + \Phi) \qquad\qquad \cos \lambda = \frac{\cos \alpha \cos \delta}{\cos \beta}
$$

$$
\begin{array}{rl|rl}
\log \sin \delta &= 9{,}725\,8976 & \log \cos \alpha &= 9{,}570\,0790\ (n) \\
\log \cos (\varepsilon + \Phi) &= 9{,}266\,0543 & \log \cos \delta &= 9{,}927\,7578 \\
\log \cos \Phi &= 9{,}748\,5374 & \log \cos \beta &= 9{,}993\,2340 \\
\hline
\log \sin \beta &= 9{,}243\,4145 & \log \cos \lambda &= 9{,}504\,6028\ (n)
\end{array}
$$

$$\beta = 10^0\, 5'\, 15''; \; \lambda = 180^0 - 71^0 21' 41{,}2'' = 108^0 38' 18{,}8''.$$

2. Звезда Менкар (Menkar, α Ceti) имала је 1870. год. еклиптикалне координате

$$\lambda = 42^0\,28'\,13{,}5'', \quad \beta = -12^0\,35'\,9{,}3'',$$

а косина еклиптике је била $\varepsilon = 23^0\,27'\,20''$.

Да се израчунају екваторелне координате α и δ.

Према трансформационим једначинама II_b јесте

$$tg\,\Psi = cotg\,\beta\,sin\,\lambda$$

$$log\,cotg\,\beta = 0{,}651\,1727\,(n)$$

$$log\,sin\,\lambda = 9{,}829\,4386$$

$$log\,tg\,\Psi = 0{,}480\,6113\,(n)$$

$$\Psi = 180^0 - 71^0\,42'\,9{,}9'' = 108^0\,17'\,50{,}1''$$

$$\Psi - \varepsilon = 84^0\,50'\,30{,}1''.$$

$$sin\,\delta = \frac{sin\,\beta}{cos\,\Psi}\,cos\,(\varepsilon - \Psi) \qquad cos\,\alpha = \frac{cos\,\lambda\,cos\,\beta}{cos\,\delta}$$

$$log\,sin\,\beta = 9{,}338\,2639\,(n) \qquad log\,cos\,\lambda = 9{,}867\,8362$$

$$log\,cos\,(\varepsilon - \Psi) = 8{,}953\,7976 \qquad log\,cos\,\beta = 9{,}989\,4367$$

$$log\,cos\,\Psi = 9{,}496\,8561\,(n) \qquad log\,cos\,\delta = 9{,}999\,1527$$

$$log\,sin\,\delta = 8{,}795\,2054 \qquad log\,cos\,\alpha = 9{,}858\,1202$$

$$\delta = 3^0\,34'\,39{,}9''; \qquad \alpha = 43^0\,50'\,15'' = 2^h\,55^m\,29^s.$$

3) 10. Маја 1880. год. $\odot$ (сунце) имало је астрономску дужину $\lambda = 50^0\,9'\,52''$.

Косина еклиптике била је $\varepsilon = 23^0\,27'\,18{,}82''$.

Да се израчунају екватореалне координате α и δ, које је сунце имало тога дана.

Помоћу четврте и прве једн. III налазимо

$$tg\,\alpha = cos\,\varepsilon\,tg\,\lambda \qquad cos\,\delta = \frac{cos\,\lambda}{cos\,\alpha}$$

$$log\,cos\,\varepsilon = 9{,}962\,5452 \qquad log\,cos\,\lambda = 9{,}806\,5777$$

$$log\,tg\,\lambda = 0{,}078\,7192 \qquad log\,cos\,\alpha = 9{,}827\,8741$$

$$log\,tg\,\alpha = 0{,}041\,2644 \qquad log\,cos\,\delta = 9{,}978\,7036$$

$$\alpha = 47^0\,43'\,4{,}4'' = 3^h\,10^m\,52{,}29^s; \qquad \delta = 17^0\,47'\,48{,}7''.$$

4) 28. Августа 1880. год. ☉ (сунце) имало је ректасцензију $\alpha = 10^h\, 29^m\, 15{,}69^s = 157^0\, 18'\, 55{,}35''$.

Косина еклиптике је била $\varepsilon = 23^0\, 27'\, 18{,}20''$.

Да се израчуна деклинација δ и астрономска дужина λ сунца тога дана.

Друга и четврта једн. III дају

$$tg\,\delta = sin\,\alpha\, tg\,\varepsilon \qquad\qquad tg\,\lambda = \frac{tg\,\alpha}{cos\,\varepsilon}$$

$$\begin{array}{rlcrl} log\,sin\,\alpha &= 9{,}586\,2029 & \qquad & log\,tg\,\alpha &= 9{,}621\,1698\,(n) \\ log\,tg\,\varepsilon &= 9{,}637\,3696 & & log\,cos\,\varepsilon &= 9{,}962\,5457 \\ \hline log\,tg\,\delta &= 9{,}223\,5725 & & log\,tg\,\lambda &= 9{,}658\,6241 \end{array}$$

$\delta = 9^0\, 29'\, 57{,}6''$; $\qquad \lambda = 180^0 - 24^0\, 29'\, 45{,}7'' = 155^0\, 30'\, 14{,}3''$.

5) 7. Октобра 1880. год. сунце је имало деклинацију $\delta = -5^0\, 45'\, 20{,}7''$.

Косина еклиптике је била $\varepsilon = 23^0\, 27'\, 17{,}92''$.

Да се израчуна ректасцензија α и астрономска дужина λ сунца за назначени дан.

Употребом друге и треће једн. III добијамо

$$sin\,\alpha = \frac{tg\,\delta}{tg\,\varepsilon} \qquad\qquad sin\,\lambda = \frac{sin\,\delta}{sin\,\varepsilon}$$

$$\begin{array}{rlcrl} log\,tg\,\delta &= 9{,}003\,4437\,(n) & \qquad & log\,sin\,\delta &= 9{,}001\,2486\,(n) \\ log\,tg\,\varepsilon &= 9{,}637\,3680 & & log\,sin\,\varepsilon &= 9{,}599\,9140 \\ \hline log\,sin\,\alpha &= 9{,}366\,0757\,(n) & & log\,sin\,\lambda &= 9{,}401\,3346\,(n) \end{array}$$

$\alpha = 180^0 + 13^0\, 26'\, 0{,}08'' = 193^0\, 26'\, 0{,}08''$ $\quad \lambda = 180^0 + 14^0\, 35'\, 37{,}06''$
$= 12^h\, 53^m\, 44{,}01^s$: $\qquad\qquad = 194^0\, 35'\, 37{,}06''$.

193. **Однос између кулминационе висине звезде (и сунца) и посматрачеве поларне висине.** — У тренутку кад једна звезда кулминује, тј. кад пролази кроз мери-

дијан онога места на којем посматрамо, јесте њен часовни угао $s=0$ (в. сл. 113), дакле $\cos s=1$ и на основу друге једн. IV чл. 192.

$$\sin h_0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos (\varphi - \delta),$$

одакле

$$90^0 - h_0 = \varphi - \delta$$

или

$$h_0 = 90^0 - \varphi + \delta, \quad \varphi = 90^0 - h_0 + \delta, \qquad \text{(V}$$

где h_0 означава кулминациону висину звезде.

С овим смо у стању да израчунамо висину кулминације једне звезде (или сунца) кад познајемо деклинацију звезде и поларну висину посматрачева места. А тако исто можемо из висине кулминационе тачке једне звезде и њене деклинације да израчунамо поларну висину места на којем посматрамо.

Напомена. До истога резултата под V долазимо узев на ум да је у меридијану азимут звезде $w=0$ (в. сл. 113.), дакле $\cos w=1$ и на тај начин, а на основу треће једн. IV,

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h_0 - \cos \varphi \cos h_0 = -\cos (\varphi + h_0)$$

или

$$\cos (90^0 - \delta) = \cos (180^0 - \varphi - h_0),$$

одакле, као и горе, висина звездине кулминације

$$h_0 = 90^0 - \varphi + \delta.$$

За $\begin{cases}\text{најдужи}\\ \text{најкраћи}\end{cases}$ дан јесте $\delta = \begin{cases}+\varepsilon\\ -\varepsilon\end{cases}$ и

према томе $h_0 = \begin{cases}90^0 - \varphi + \varepsilon\\ 90^0 - \varphi - \varepsilon.\end{cases}$

194. **Израчунавање дужине дневних лукова за звезде и сунце.** — Кад у једн. IV чл. 192. ставимо $h = 0$ и означимо одговарајући часовни угао са s_0 добијамо обрасце

$$\sin w = \cos \delta \sin s_0$$

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s_0 = 0$$

$$\sin \delta = - \cos \varphi \cos w,$$

који се односе на тренутак у којем се звезда јавља над хоризонтом или у којем се она спушта испод хоризонта, јер је у једноме и у другоме случају висина звезде $h = 0$. Средњи од горња три обрасца даје нам часовни угао тих момената (тј. изласка и заласка звезде), а то је половина дневнога лука. Тај образац гласи.

$$\text{VI)} \qquad \cos s_0 = - tg\, \varphi\, tg\, \delta.$$

Ово што вреди за звезде, разуме се, да вреди и за сунце. Израчунати дневни лук сунца значи израчунати дужину дана, па, дакле, и дужину ноћи. Најдужи или најкраћи дан једнога места, чија је поларна висина $= \varphi$, добићемо, кад у једн. VI за деклинацију сунца ставимо њену највећу вредност $\delta = \varepsilon$[1]) (тј. $=$ косини еклиптике), односно њену најмању вредност $\delta = - \varepsilon$, дакле помоћу образаца

---

[1]) Косина еклиптике се мења. Она је, доста тачно, за годину $1850 + t$ изражена обрасцем

$$\varepsilon = 23^0\, 27'\, 29{,}6'' - 0{,}48''.\, t.$$

По *Лагранжу* косина еклиптике ће достићи своју најмању вредност од $22^0\, 54'$ године 6000. Највећу вредност од $23^0\, 53'$ имала је године 2000. пре Христова рођења. Види: Dr. R. Wolf. Handbuch der Astronomie ihrer Geschichte und Litteratur. Zürich 1890. Erster Band, pag. 421 et 424.

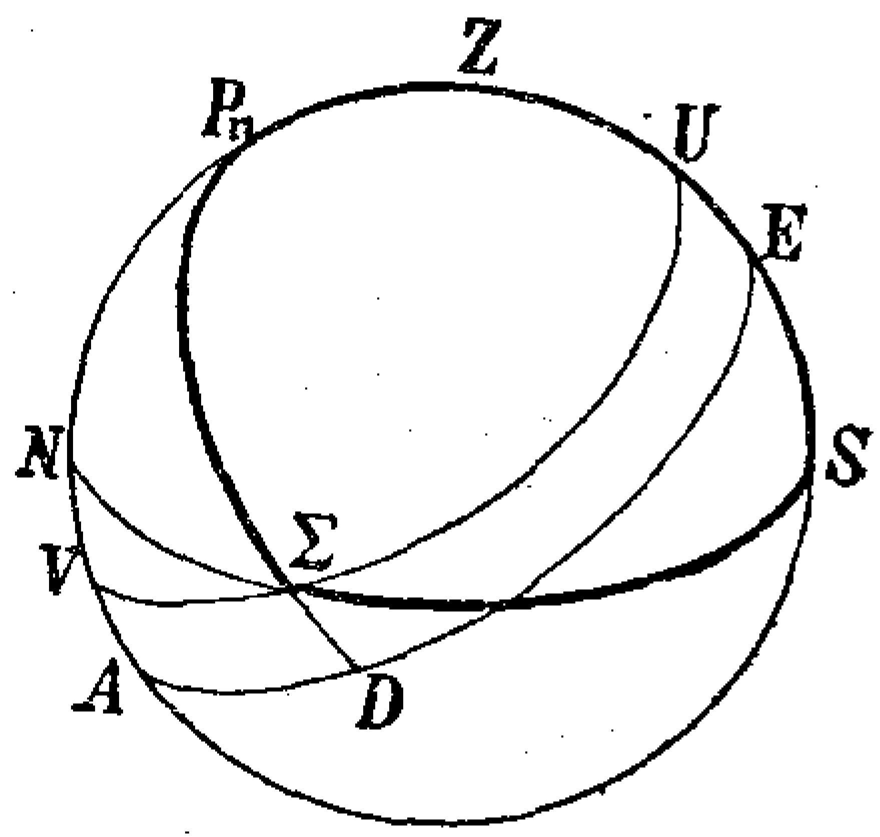
$$\left.\begin{aligned} \cos s_0 &= -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varepsilon \\ \cos s_0 &= \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{IV}_a$$

1. *Напомена*. Образац VI добићемо и посматрањем сл. 115., где је ZP_nNASE меридијан, NS хоризонат, Z зенит места на којем посматрамо. Нека је P_n северни пол, AE екватор небесни, UV паралелан круг по којем се креће извесна звезда. Тачка Σ, као тачка пресека путање звездине са хоризонтом посматрачевим, представља, према диспозицији сл. 115., тачку заласка, у којој је висина звезде $h = 0$.

Из правоуглог сферног троугла $P_n\Sigma S$, у којем је

страна $P_n\Sigma = P_nD - \Sigma D$
$= 90^0 - \delta$,

страна $P_nS = P_nE + ES$
$= 90^0 + 90^0 - \varphi$
$= 180^0 - \varphi$,



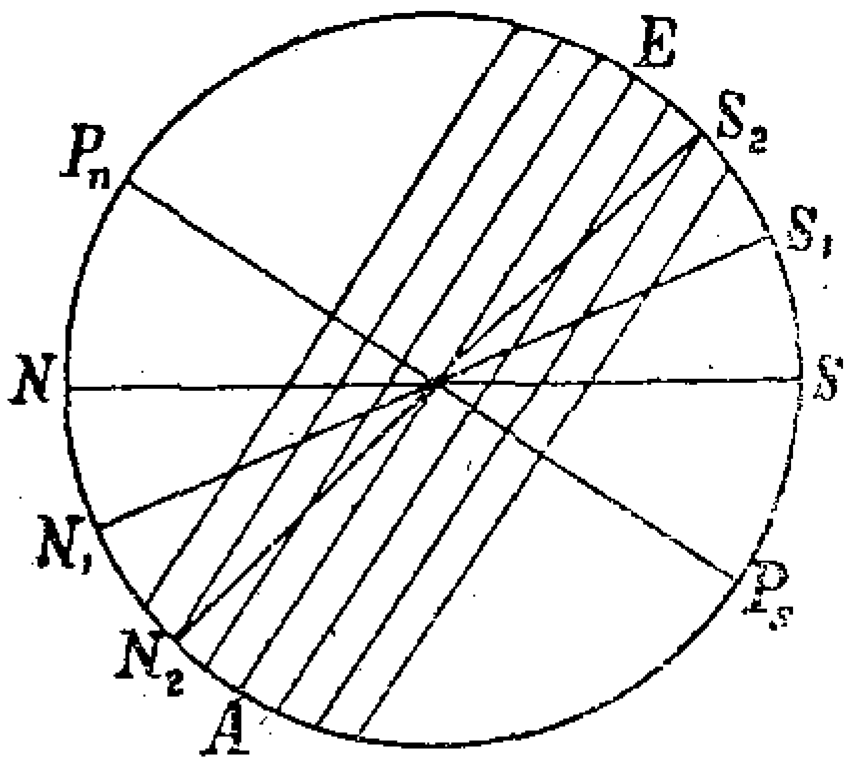
Сл. 115.

сферни угао $\Sigma SP_n = 90^0$, сферни угао ΣP_nS = часовноме углу s_0, читамо, на основу *Неперовог* правила,

$$\cos s_0 = \operatorname{cotg}(90^0 - \delta)\operatorname{tg}(180^0 - \varphi) = -\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi.$$

2. *Напомена*. Образац VI показује да дужина дана (односно ноћи) независи само од деклинације сунца (тј. од годишњег времена), него и од поларне висине (географске ширине) места на којем ово посматрамо. Разлика између дужине дана и дужине ноћи јесте у толико већа у колико је и поларна висина већа.

Помоћу сл. 116. врло је лако ово разумети. Ако повећамо географску ширину, тј. ако место хоризонта NS узмемо хоризонат N_1S_1, дневни луци сунца за овај нови хоризонат биће за време северних деклинација већи, а за време јужних деклинација мањи од дневних лукова за пређашњи хоризонат NS. На местима, чији хоризонат N_2S_2 чини са екватором AE угао раван косини еклиптике $(23\frac{1}{2}^\circ)$, сунце на дан летње солстиције никако и не залази, а на дан зимње солстиције, тако исто опет, никако не излази: у првоме је случају дневни лук сунца $= 24^h$ (ноћни лук $= 0$), у другоме дневни лук $= 0$ (ноћни лук $= 24^h$). За таква места (чија је, дакле, поларна висина или географска ширина $= 90^0 - \varepsilon = 66\frac{1}{2}^\circ$) повратан круг Рака лежи над хоризонтом, додирујући се с њиме у северној тачци N_2 хоризонта; повратан круг Јарца лежи испод хоризонта, додирујући га у његовој јужној тачци S_2. На местима са још већом поларном висином (тј. већом од $66\frac{1}{2}^\circ$) сунце, за време своје северне деклинације, описује, кроз неколико дана узастопце, дневне кругове који су сви изнад хоризонта; тада сунце за све то време никако не залази. За време своје јужне деклинације сунце, кроз неколико дана узастопце, описује дневне кругове испод хоризонта и за све то време, дакле, траје ноћ. На самоме полу (тј. за $\varphi = 90^0$) хоризонат се поклапа са екватором и према томе су дневни кругови, које сунце описује, паралелни са хоризонтом. Отуда следује да на полу сунце никако не залази за све време



Сл. 116.

северних деклинација, а тако исто, опет, да се не појављује над хоризонтом за све време јужних деклинација. На обрту, дакле, траје дан 6 месеци, а толико исто и ноћ.

3. *Напомена.* Употребом обрасца VI добијамо за дневне луке вредности које се осетно разликују од њихове праве вредности[1]). Ово долази услед *преламања светлости (astronomische Strahlenbrechung*, réfraction astronomique) на што се, при извођењу формуле VI, нисмо обзирали. Дејство преламања светлости показује се у томе што се све звезде (па разуме се и сунце и месец) виде за извесно време пре њиховог изласка, а, отприлике за толико исто, и после њиховог заласка. Утицајем преламања светлости можемо да видимо звезде (месец и сунце) за извесно време док су оне испод хоризонта, њихове висине, дакле, негативне. Ово продужавање дневнога лука, преламањем светлости зависи од атмосферских прилика и за наше средње географске ширине износи приближно 35′, тако да ми видимо једну везду и онда док је она 35′ испод хоризонта, њена висина, дакле, = — 35′. На тај начин видни лук звезде постаје већи од онога који налазимо из обрасца VI.

С обзиром на преламање светлости добићемо знатно тачнију вредност (означимо је са σ) за половину дневнога лука, ако се послужимо обрасцима

1) В. примере који следују.

$$\text{VII)}\quad \begin{cases} \sin\dfrac{\sigma}{2} = \\ \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(90^0+35'+\varphi-\delta)\sin\frac{1}{2}(90^0+35'-\varphi+\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}} \\ \cos\dfrac{\sigma}{2} = \\ \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(270^0+35'+\varphi+\delta)\sin\frac{1}{2}(-90^0-35'+\varphi+\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}}. \end{cases}$$

4. *Напомена.* Осим преламања светлости утиче на видни лук звезде и променљивост њене деклинације у току дана. Ова променљивост деклинације чини да лук од изласка звезде до њене кулминације није тачно једнак луку од кулминације до заласка звезде. У ефемеридама[1]) се обично означава деклинација небесних тела за подне онога места за које су ефемериде израчунате. Код сунца се, дакле, односи деклинација на тренутак кад оно пролази кроз меридијан дотичног места: Берлина, Париза, Гринича итд. Да бисмо добили деклинацију за излазак и залазак једне звезде, треба да израчунамо извесну поправку, коју одузимамо, односно додајемо табличној деклинацији. Ову корекцију израчунавамо с претпоставком да се у току од 24 сата деклинација равномерно

[1]) *Ефемериде (Ephemeriden)* или астрономски календари јесу збирке у којима су срећени податци који се односе на положаје сунца, месеца, планета и неких важнијих звезда (некретница) на небу и њихово кретање за време једне године. Ови податци добивају се посматрањем и рачуном, који се на њима оснива. Од најчешће употребе и најпознатије ефемериде јесу берлинске (Berliner Astronomisches Jahrbuch), париске (Connaissance des Temps) и griничке (Nautical Almanac).

мења. Промене у деклинацији за време једнога дана врло су мале. Тако нпр. у идућем (1.) примеру за Јупитер јесте промена деклинације за време једнога дана (од 8. до 9. Јуна) $3'50''$.

Примери.

1) Географска ширина Берлина јесте

$$\varphi = 52^0\,30'\,16{,}7''.$$

За берлинско (средње) подне, тј. у 12^h, Јуна 1881. год. планета ♃ (Јупитер) имала је деклинацију

$$\delta = 14^0\,56'\,7{,}9''.$$

Да се израчуна дневни лук Јупитеров за тај дан.

Према обрасцу VI овога члана јесте

$$\cos s_0 = -tg\,\varphi\,tg\,\delta$$

$$\log tg\,\varphi = 0{,}115\,0923$$

$$\log tg\,\delta = 9{,}426\,0939$$

$$\log \cos s_0 = 9{,}541\,1862\,(n)$$

часовни угао изласка или заласка

$$s_0 = 180^0 - 69^0\,39'\,15{,}1'' = 110^0\,20'\,44{,}9'',$$

а дневни лук

$$2\,s_0 = 220^0\,41'\,29{,}8'' = 14^h\,42^m\,46^s.$$

Напомена. Берлинске ефемериде за 1881. год. дају за дневни лук Јупитеров 8. Јуна 1881. год. у округлој цифри вредност $14^h\,50^m$. Узрок овој разлици (која износи отприлике 7^m) између наше и праве вредности за Јупитеров дневни лук лежи у преламању светлости, о чему ми нисмо водили рачуна.

С обзиром на преламање светлости имамо за горњи пример следећи рачун.

$$\varphi = 52^0\,30'\,16{,}7'' \qquad \log\cos\varphi = 9{,}784\,4012$$

$$\delta = 14^0\,56'\;\;7{,}9'' \qquad \log\cos\delta = 9{,}985\,0745$$

$$\log\cos\varphi\cos\delta = 9{,}769\,4757$$

$$\frac{1}{2}(90^0+35'+\varphi-\delta) = 64^0\,4'\,34{,}4'' \qquad \log\sin\frac{1}{2}(90^0+35'+\varphi-\delta) = 9{,}953\,9415$$

$$\frac{1}{2}(90^0+35'-\varphi+\delta) = 26^0\,30'\,25{,}6'' \qquad \log\sin\frac{1}{2}(90^0+35'-\varphi+\delta) = 9{,}649\,6355$$

$$\log\sin^2\frac{\sigma}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(90^0+35'+\varphi-\delta)\sin\frac{1}{2}(90^0+35'-\varphi+\delta)}{\cos\varphi\cos\delta} = 9{,}834\,1013$$

$$\log\sin\frac{\sigma}{2} = 9{,}917\,0506$$

$$\frac{\sigma}{1} = 55^0\,42'\,13{,}1$$

дакле дневни полулук

$$\sigma = 111^0\,24'\,26{,}3'' = 7^h\,25^m\,38^s\text{ [1]}.$$

2) За средње подне у Берлину 21. Јануара 1898. год јесте за планету ♂ (Марс) деклинација

$$\delta = -23^0\,26'\,47{,}0''.$$

Географска ширина Берлина јесте

$$\varphi = 52^0\,30'\,16{,}7''.$$

Према обрасцу VI овога члана следује

$$\cos s_0 = tg\,52^0\,30'\,16{,}7''\;tg\,23^0\,26'\,47''$$

$$\log tg\,52^0\,30'\,16{,}7'' = 0{,}115\,0923$$

$$\log tg\,23^0\,26'\,47'' = 9{,}637\,1897$$

$$\log\cos s_0 = 9{,}752\,2820$$

---

[1] У берлинским ефемеридама (Berliner Astronomisches Jahrbuch) означено је $\sigma = 7^h\,25^m$.

и према томе дневни полулук

$$s_0 = 55^0\,34'\,35{,}8'' = 3^h\,42^m\,18^s\,.$$

Напомѣна. Употребом образаца VII, тј. с обзиром на преламање светлости, налазимо за σ тачнију вредност на следећи начин

$$\varphi = 52^0\,30'\,16{,}7'' \qquad \log\cos\varphi = 9{,}784\,4012$$

$$\delta = -23^0\,26'\,47{,}0'' \qquad \log\cos\delta = 9{,}962\,5742$$

$$\log\cos\varphi\cos\delta = 9{,}746\,9754$$

$$\frac{1}{2}(90^0 + 35' + \varphi + \delta) = 83^0\,16'\,1{,}85'' \quad \log\sin\frac{1}{2}(90^0 + 35' + \varphi - \delta) = 9{,}996\,9946$$

$$\frac{1}{2}(90^0 + 35' - \varphi + \delta) = 7^0\,18'\,58{,}15'' \quad \log\sin\frac{1}{2}(90^0 + 35' - \varphi + \delta) = 9{,}104\,9793$$

$$\log\sin^2\frac{\sigma}{2} = \log\frac{\sin\frac{1}{2}(90^0 + 35' + \varphi - \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 + 35' - \varphi + \delta)}{\cos\varphi\cos\delta} = 9{,}354\,9985$$

$$\log\sin\frac{\sigma}{2} = 9{,}677\,4992$$

$$\frac{\sigma}{2} = 28^0\,25'\,0{,}44'',$$

дакле дневни полулук

$$\sigma = 56^0\,50'\,0{,}9'' = 3^h\,47^m\,20^s\ [1]).$$

3) У париским ефемеридама читамо да је за средње подне 16. Априла 1898. год деклинација сунца

$$\delta = 10^0\,13'\,41{,}7''.$$

Географска ширина Париза јесте

$$\varphi = 48^0\,50'\,11{,}2''.$$

На основу обрасца VI имамо

[1]) У берлинским ефемеридама стоји $\sigma = 3^h\,47^m$.

$$\cos s_0 = -\,tg\,48^0\,50'\,11{,}2''\ tg\,10^0\,13'\,41{,}7''$$

$$\log tg\,48^0\,50'\,11{,}2'' = 0{,}058\,3341$$

$$\log tg\,10^0\,13'\,41{,}7'' = 9{,}256\,3267$$

$$\log \cos s_0 = 9{,}314\,6608\ \ (n)$$

$$s_0 = 180^0 - 78^0\,5'\,23{,}6'' = 101^0\,54'\,36{,}4'' = 6^h\,47^m 38^s\,.$$

Према овоме би тога дана у Паризу био

излазак (рађање) сунца у $5^h\,12^m$,

залазак (седање) сунца у $6^h\,48^m$, дакле

дужина дана (дневни лук сунца) $13^h\,35^m$.

Напомена. Добићемо знатно тачније вредности, ако, за израчунавање дневног лука, употребимо један од образаца VII. Рачун је следећи:

$$\varphi = 48^0\,50'\,11{,}2'' \qquad \log\cos\varphi = 9{,}818\,36\ldots$$

$$\delta = 10^0\,13'\,41{,}7'' \qquad \log\cos\delta = 9{,}993\,04\ldots$$

$$\log\cos\varphi\cos\delta = 9{,}811\,40\ldots$$

$$\frac{1}{2}(90^0+35'+\varphi-\delta) = 64^0 35'\,44{,}75'',\ \log\sin\frac{1}{2}(90^0+35'+\varphi-\delta) = 9{,}955\,83\ldots$$

$$\frac{1}{2}(90^0+35'-\varphi+\delta) = 25^0 59'\,15{,}25'',\ \log\sin\frac{1}{2}(90^0+35'-\varphi+\delta) = 9{,}641\,64\ldots$$

$$\log\sin^2\frac{\sigma}{2} = \log\frac{\sin\frac{1}{2}(90^0+35'+\varphi-\delta)\sin\frac{1}{2}(90+35'-\varphi+\delta)}{\cos\varphi\cos\delta} = 9{,}786\,07\ldots$$

$$\log\sin\frac{\sigma}{2} = 9{,}893\,03$$

$$\frac{\sigma}{2} = 51^0 24'\,5\ldots$$

Дневни полулук: $\sigma = 102^0\,49'\,55{,}2'' = 6^h\,51^m\,20^s$ и према томе излазак сунца у $5^h\,9^m$,

залазак сунца у $6^h\,51^m$, а

дужина дана $13^h\,43^m$[1]).

4) Да се израчуна најдужи дан за Београд.

Узмимо да је за Београд

$$\varphi = 44^0\,48',$$

а за косину еклиптике вредност

$$\varepsilon = 23^0\,27'.$$

Ми знамо да је најдужег дана деклинација сунца $\delta = \varepsilon$ и према томе теорно за најдужи дан

$$\cos s_0 = -\,tg\,\varphi\,tg\,\varepsilon$$

(в. прву једн. VI_a овога члана), где је

$$\log tg\,\varphi = 9{,}996\,9680$$

$$\log tg\,\varepsilon = 9{,}637\,2646$$

$$\log\cos s_0 = 9{,}634\,2326\,(n)$$

$$s_0 = 180^0 - 64^0\,29'\,4'' = 115^0\,30'\,56''$$

$$2\,s_0 = 231^0\,1'\,52'' = 15^h\,24^m\,8^s.$$

Напомена. С обзиром на преламање светлости израчунаћемо трајање најдужег дана помоћу једног од образаца VII како следује.

$$\varphi = 44^0\,48' \qquad \log\cos\varphi = 9{,}850\,9957$$

$$\delta = 23^0\,27' \qquad \log\cos\delta = 9{,}962\,5624$$

$$\log\cos\varphi\cos\delta = 9{,}813\,5581$$

[1]) У париским ефемеридама (Connaissance des Temps) стоји Lever (излазак) $5^h\,10^m$, Coucher (залазак) $6^h\,51^m$.

$$\frac{1}{2}(90^0 + 35' + \varphi - \delta) = 55^0\,58' \qquad log\,sin\frac{1}{2}(90^0 + 35' + \varphi - \delta) = 9{,}918\,4$$

$$\frac{1}{2}(90^0 + 35' - \varphi + \delta) = 34^0\,37' \qquad log\,sin\frac{1}{2}(90^0 + 35' - \varphi + \delta) = 9{,}754\,4$$

$$log\,sin^2\frac{\sigma}{2} = log\frac{sin\frac{1}{2}(90^0 + 35' + \varphi - \delta)\,sin\frac{1}{2}(90^0 + 35' - \varphi + \delta)}{cos\,\varphi\,cos\,\delta} = 9{,}859\,2$$

$$log\,sin\frac{\sigma}{2} = 9{,}929\,6$$

$$\frac{\sigma}{2} = 58^0\,15'2$$

Дакле дневни полулук: $\sigma = 116^0\,30'\,45{,}84'' = 7^h\,46^m\,3^s$ и према томе

излазак сунца у $4^h\,14^m$,

залазак сунца у $7^h\,46^m$, а

најдужи дан $= 15^h\,32^m$.

5) Под којом географском ширином леже места на којима најдужи дан траје 20^h?

Дневни лук сунца је тога дана на таквим местима

$$2\,s_0 = 20 \cdot 15^0 = 300^0, \text{ дневни полулук } s_0 = 150^0,$$

а деклинација сунца $\delta = 23^0\,27'$.

Неводећи рачуна о преламању светлости, постоји према првоме обрасцу VI_a ова једначина

$$cos\,150^0 = -\,tg\,\varphi\,tg\,23^0\,27',$$

одакле

$$tg\,\varphi = \frac{cos\,30^0}{tg\,23^0\,27'}$$

Према томе имамо

$$log\,cos\,30^0 = 9{,}937\,5306$$
$$log\,tg\,23^0\,17' = 9{,}637\,2646$$

$$log\,tg\,\varphi = 0{,}300\,2660$$
$$\varphi = 63^0\,23^0\,40{,}6''.$$

6) Под којом географском ширином сунце најдужег дана незалази; најдужи дан, дакле, траје 24^h?

Из часовног угла (дневног полулука)

$$s_0 = 12^h = 180^0$$

и деклинације сунца

$$\delta = 23^0\,27'$$

следује

$$\cos 180^0 = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} 23^0\,27',$$

одакле

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg} 23^0\,27'$$

$$\varphi = 66^0\,33'.$$

Разуме се да и овде није узета у рачун рефракција светлости.

195. **Трајање изласка и заласка сунца и месеца.** — Небесна тела која имају мерљиву величину (приметан пречник), као што су сунце и месец, не излазе а и не залазе тренутно. Код таквих тела траје извесно време док се она потпуно дигну над хоризонтом и док се спусте испод хоризонта.

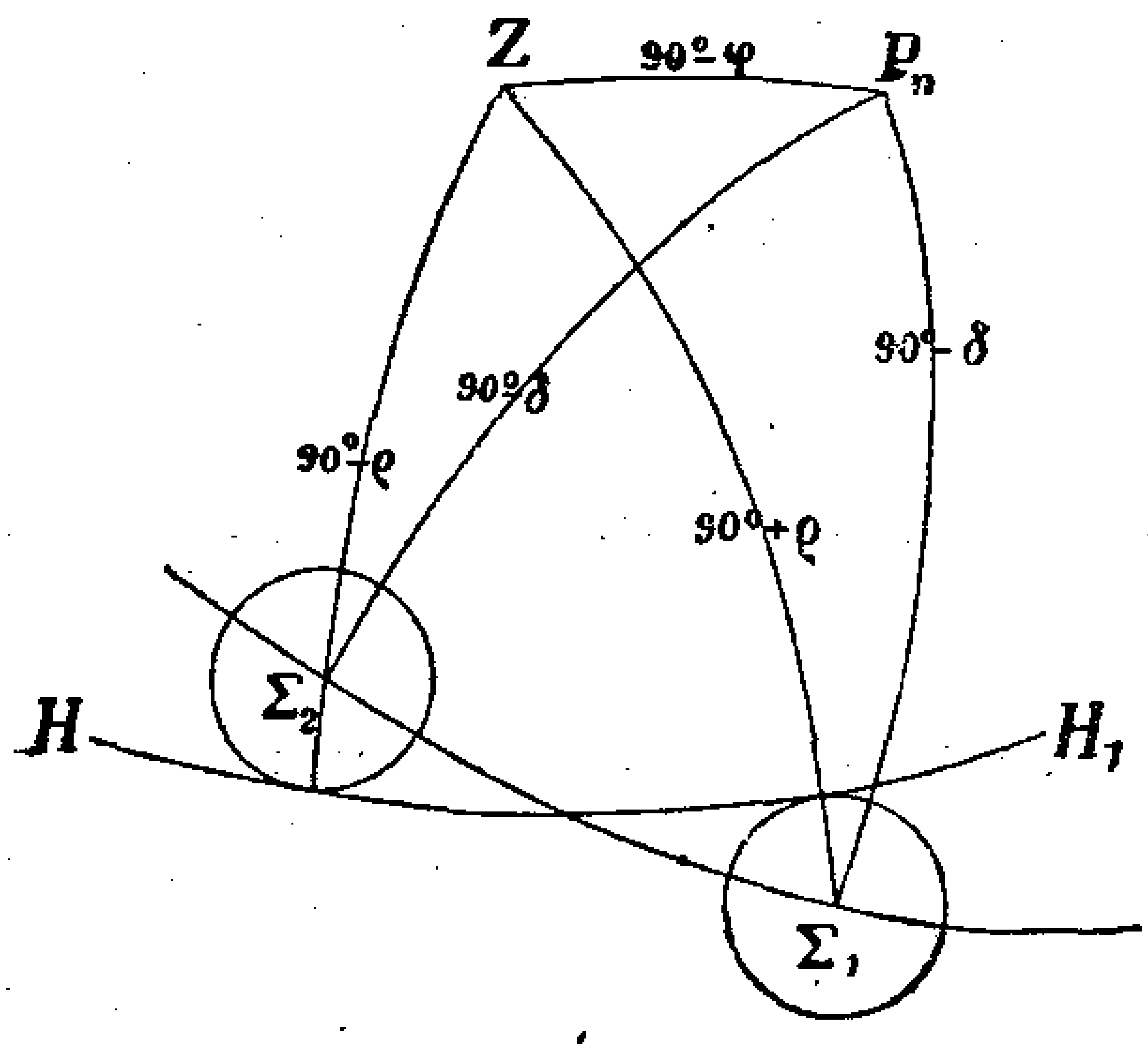
Означимо са Σ_1 средиште сунца или месеца у почетку изласка, тј. у тренутку када се то тело почиње да јавља на хоризонту HH_1. Са Σ_2 означићемо средиште посматраног тела на крају изласка, тј. у тренутку када је се оно потпуно дигло над хоризонтом. У првоме положају (Σ_1), сунчев, односно месечев котур додирује HH_1 одоздо, у другоме положају (Σ_2) додирује га одозго. Означимо још са P_n северни пол, са Z зенит и конструишимо сферне троугле $\Sigma_1 P_n Z$ и $\Sigma_2 P_n Z$. Стране првога троугла $\Sigma_1 P_n Z$ јесу

$$P_n Z = 90^0 - \varphi,\ P_n\Sigma_1 = 90^0 - \delta,\ Z\Sigma_1 = 90^0 + \rho,$$

а стране другог троугла $\Sigma_2 P_n Z$ ово

$$P_n Z = 90^0 - \varphi,\ P_n\Sigma_2 = 90^0 - \delta,\ Z\Sigma_2 = 90^0 - \rho.$$

Овде је φ поларна висина места на којем посматрамо, δ деклинација небесног тела, које посматрамо, а ρ сферни полупречник тога тела.



Сл. 117.

Познавајући стране горе поменутих сферних троуглова, можемо да израчунамо $\sphericalangle\ \Sigma_1 P_n Z = s_1$ и $\sphericalangle\ \Sigma_2 P_n Z = s_2$, од којих први представља (негативан) часовни угао звезде у почетку изласка, а други, опет, представља часовни угао на крају изласка. Трајање (време) изласка очевидно је сразмерно углу $\Sigma_1 P_n \Sigma_2$, који је раван разлици $\sphericalangle\ \Sigma_1 P_n Z - \sphericalangle\ \Sigma_2 P_n Z = s_1 - s_2$. Према овоме се своди наш задатак на онај основни случај разрешавања сферних троуглова, у којем су познате стране троуглове, а траже се његови угли (в. чл. 176.). Применом косинусне теореме на сферне троугле $\Sigma_1 P_n Z$ и $\Sigma_2 P_n Z$ налазимо

$$\text{VIII)}\qquad \begin{cases} \cos s_1 = -\dfrac{\sin\rho + \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta} \\[2ex] \cos s_2 = \dfrac{\sin\rho - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}, \end{cases}$$

а применом једн. 150) и 151) чл. 162. добијамо следеће логаритамски подесне обрасце

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{s_1}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(90+\rho-\varphi+\delta)\,\sin\frac{1}{2}(90^0+\rho+\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}} \\
\cos\frac{s_1}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(270^0+\rho-\varphi-\delta)\,\sin\frac{1}{2}(90^0-\rho-\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}} \\
\sin\frac{s_2}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(90^0-\rho-\varphi+\delta)\,\sin\frac{1}{2}(90^0-\rho+\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}} \\
\cos\frac{s_2}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(270^0-\rho-\varphi-\delta)\,\sin\frac{1}{2}(90^0+\rho-\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}}.
\end{aligned}\right\}\text{(IX}$$

Напомена. Обраћамо пажњу на аналогију између ових образаца IX и образаца VII у чл. 194. Узрок томе је лако наћи.

Примери.

1) Колико је трајао излазак (и залазак) сунца у Греничу 24. Марта 1898. год?

Тога дана био је полупречник сунца[1])

$$\rho = 16'\,3{,}45'',$$

деклинација сунца

$$\delta = 1^0\,32'\,35{,}8''.$$

Поларна висина или географска ширина Гринича јесте

$$\varphi = 51^0\,28'\,38{,}1''.$$

[1]) Привидни полупречник сунца није увек једнак; његова се величина мења у току године. Као средња вредност сунчевог пречника, од које се оне остале врло мало разликују, може се усети $\frac{1^0}{2} = 30'$.

Рачун по обрасцу VIII:

$$\log\cos\varphi = 9{,}794\,3662$$
$$\log\cos\delta = 9{,}999\,8425$$
$$\overline{\log\cos\varphi\cos\delta = 9{,}794\,2087}$$

$$\log\sin\varphi = 9{,}893\,4$$
$$\log\sin\delta = 8{,}430\,2$$
$$\overline{\log\sin\varphi\sin\delta = 8{,}323\,6}$$

$$\log\sin\rho = 7{,}669\,3972 \qquad \sin\varphi\sin\delta = 0{,}021\,0$$
$$\sin\rho = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = 0{,}004\,6$$
$$\overline{\sin\rho + \sin\varphi\sin\delta = 0{,}025\,7}$$
$$\sin\rho - \sin\varphi\sin\delta = -\,0{,}01$$

$$\log(\sin\rho + \sin\varphi\sin\delta) = 8{,}410\,6338 \qquad \log(\sin\rho - \sin\varphi\sin\delta) = 8{,}214\,9$$
$$\log\cos\varphi\cos\delta = 9{,}794\,2087 \qquad \log\cos\varphi\cos\delta = 9{,}794\,2$$
$$\overline{\log\cos s_1 = 8{,}616\,4251\ (n)} \qquad \overline{\log\cos s_2 = 8{,}420\,6}$$
$$s_1 = 180^0 - 87^0\,37'\,49{,}51'' \qquad s_2 = 180^0 - 88^0\,29'$$
$$= 92^0\,22'\,10{,}49'' \qquad = 91^0\,30'\,33{,}79'',$$

дакле трајање изласка (односно заласка) сунца

$$t = 92^0\,22'\,10{,}49'' - 91^0\,30'\,33{,}79'' = 51'\,36{,}7''$$
$$= 206{,}4^s = 3^m\,26{,}4''.$$

Рачун по обрасцу IX:

$$\log\cos\varphi = 9{,}7$$
$$\log\cos\delta = 9{,}9$$
$$\overline{\log\cos\varphi\cos\delta = 9{,}7}$$

$$\frac{1}{2}(90^0 + \rho - \varphi + \delta) = 20^0\,10'\,0{,}57'' \qquad \log\sin\frac{1}{2}(90^0 + \rho - \varphi + \delta) = 9{,}5$$
$$\frac{1}{2}(90^0 + \rho + \varphi - \delta) = 70^0\,6'\,2{,}87'' \qquad \log\sin\frac{1}{2}(90^0 + \rho + \varphi - \delta) = 9{,}9$$

$$\log\sin^2\frac{s_1}{2} = \log\frac{\sin\frac{1}{2}(90^0 + \rho - \varphi + \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 + \rho + \varphi - \delta)}{\cos\varphi\cos\delta} = 9{,}7$$

$$\log \sin \frac{s_1}{2} = 9{,}858\,2824$$

$$\frac{s_1}{2} = 46^0\,11'\,5{,}25'', \qquad s_1 = 92^0\,22'\,10{,}5'';$$

$$\frac{1}{2}(90^0 - \rho - \varphi + \delta) = 19^0\,53'\,57{,}12'' \qquad \log \sin \frac{1}{2}(90^0 - \rho - \varphi + \delta) = 9{,}531\,9467$$

$$\frac{1}{2}(90^0 - \rho + \varphi - \delta) = 69^0\,49'\,59{,}42'' \qquad \log \sin \frac{1}{2}(90^0 - \rho + \varphi - \delta) = 9{,}972\,5235$$

$$\log \cos \varphi \cos \delta = 9{,}794\,2087$$

$$\log \sin^2 \frac{s_2}{2} = \log \frac{\sin \frac{1}{2}(90^0 - \rho - \varphi + \delta) \sin \frac{1}{2}(90^0 - \rho + \varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta} = 9{,}710\,2615$$

$$\log \sin \frac{s_2}{2} = 9{,}855\,1307$$

$$\frac{s_2}{2} = 45^0\,45'\,16{,}88'' \qquad s_2 = 91^0\,30'\,33{,}76''$$

Према томе је излазак (и залазак) сунца трајао тога дана

$$t = 92^0\,22'\,10{,}50'' - 91^0\,30'\,33{,}76'' = 51'\,36{,}74''$$
$$= 206{,}4^s = 3^m\,26{,}4^s.$$

2) Да се израчуна трајање изласка и заласка сунца у Београду за време еквинокција (21. Марта и 23. Септембра).

У равнодневницама је деклинација сунца

$$\delta = 0;$$

поларна висина (географска ширина) Београда

$$\varphi = 44^0\,48'.$$

За полупречник сунца узећемо у округлој цифри

$$\rho = 16'.$$

Обрасци VIII за овај случај ($\delta = 0$) гласе

$$\cos s_1 = -\frac{\sin \rho}{\cos \varphi}, \qquad \cos s_2 = \frac{\sin \rho}{\cos \varphi}.$$

Овде је

$$\log \sin \rho = 7{,}667\,8445$$
$$\log \cos \varphi = 9{,}850\,9957$$
$$\log \cos s_2 = 7{,}816\,8488$$
$$s_2 = 89^0\,37'\,27{,}06''$$
$$s_1 = 180^0 - s_2$$

и према томе трајање изласка, односно заласка сунца за време еквинокција у Београду

$$t = s_1 - s_2 = 180^0 - 2\,s_2 = 45'\,5{,}88''$$
$$= 180{,}4^s = 3^m\,0{,}4^s.$$

3) На земноме екватору сви паралелни кругови (а то су дневни кругови које звезде описују), па и небесни екватор, секу хоризонат под правим углом и према томе налазимо трајање изласка, односно заласка сунца на екватору из сразмере

$$360 \cdot 60' : 32' = 24 \cdot 60^m : t,$$

одакле

$$t = \frac{24 \cdot 60 \cdot 32^m}{360 \cdot 60} = 2^m.$$

Толико исто, отприлике, траје и излазак, односно залазак месеца, пошто је његов сферни пречник приближно једнак сферноме пречнику сунца.

196. **Сутон.** — Услед одбијања сунчане светлости од горњих атмосферских слојева небо је за извесно време пре изласка, а тако исто и после заласка сунца обасуто светлошћу. То видело, које траје неко време, док је сунце још испод хоризонта (висина сунца, дакле, негативна), зове се *сутон* (*Dämmerung*, crépuscule). Утицајем ове појаве, као и преламањем светлости, дужина дана постаје већа (а ноћ, дакле, краћа)

од његове теорне дужине, коју добијамо у дневноме луку из обрасца VI у чл. 194.

Искуство нас учи да је, уопште, сутон најкраћи у тропима и да траје у толико дуже у колико је веће удаљење од екватора. Не упуштајући се у ближе објашњење ове појаве, напоменућемо, овде, да се прави разлика између *астрономског* и *грађанског сутона*. Астрономски сутон почиње (пред излазак), односно престаје (после заласка), кад је сунце отприлике 18^0 испод хоризонта и карактерисан је моментом у којем звезде почињу да нестају (пре рађања сунца), односно кад почињу да се јављају (после седања сунца). Грађански сутон траје за време док сунце није више од $6\frac{1}{2}^{\circ}$ испод хоризонта, а узима се као оно време пре и после заласка сунца, у којем је видело још довољно за вршење обичних радова, као нпр. да се, без вештачког осветлења, може да чита.

Покушаћемо да одговоримо на питање: колико траје сутон на извесноме месту, узев да он почиње, односно престаје кад сунце има негативну висину h_1^0.

Нека је у сл. 118. HH_1 хоризонат, Z зенит места на којем посматрамо (са поларном висином φ); AE екватор, P_n северни пол, MN паралелни круг, који сунце извесног дана описује; Σ положај сунца испод хоризонта у тренутку када почиње јутарњи сутон[1]). Нека је R тачка изласка (рађања) сунца. Повућићемо висни круг $Z\Sigma$, који сече хоризонат у тачци T и повућићемо деклинационе кругове P_nU и P_nV. Тада је

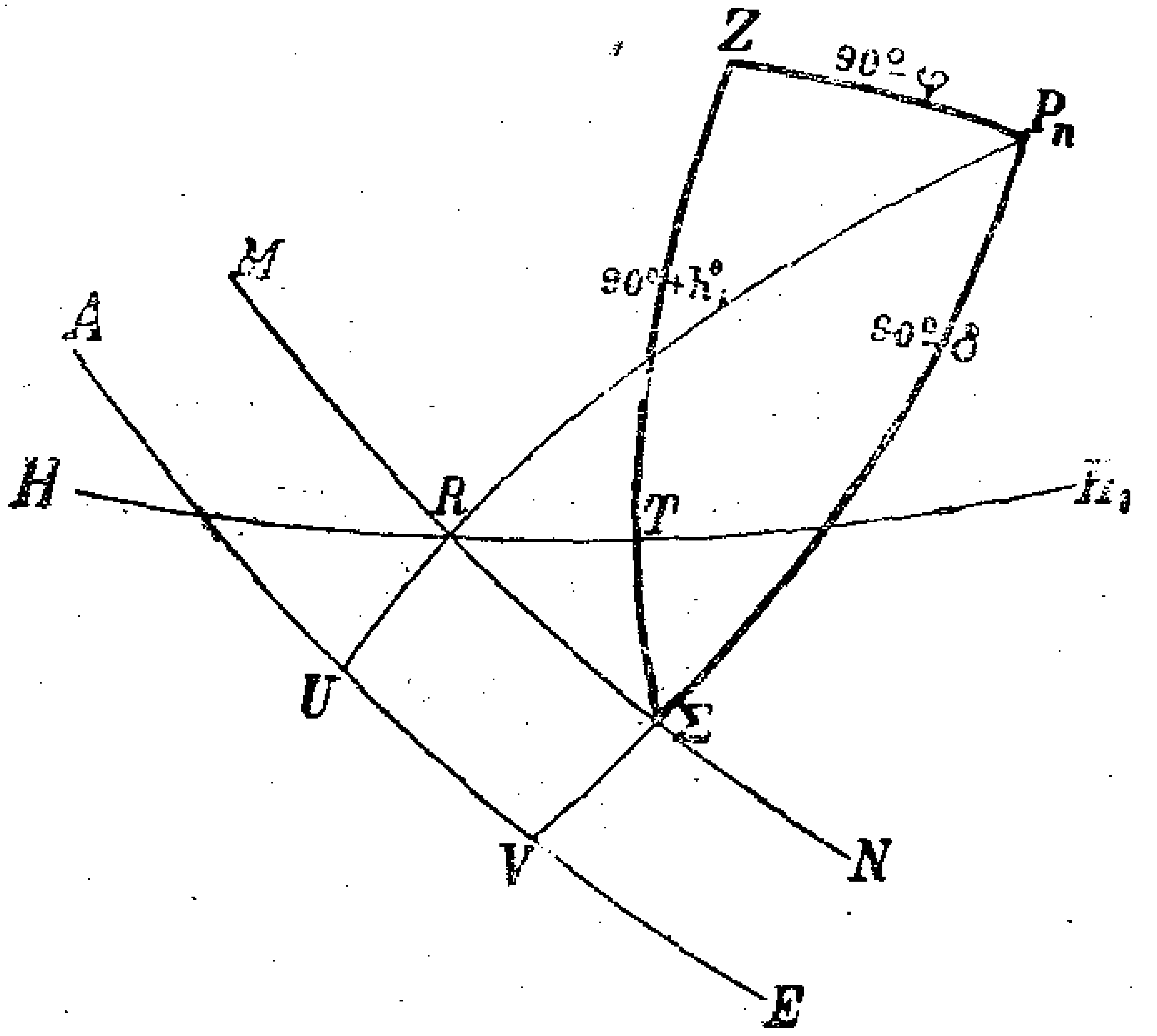
$$ZP_n = 90^0 - \varphi, \quad Z\Sigma = 90^0 + h_1^0, \quad \Sigma V = RU = \delta,$$

[1]) Вечерњи сутон траје толико исто колико и јутарњи.

дакле

$$P_n\Sigma = 90^0 - \delta.$$

Из сферног троугла $ZP_n\Sigma$, у којем су стране
$ZP_n = 90^0 - \varphi$, $Z\Sigma = 90^0 + h^0_1$, $P_n\Sigma = 90^0 - \delta$,



Сл. 118.

налазимо, на познати начин, сферни угао $ZP_n\Sigma = s$, а то је часовни угао сунца за положај Σ, од којег кад одузмемо $\sphericalangle ZP_nR = s_0$, тј. часовни угао тачке сунчевог рађања (а то је дневни полулук) добијамо $\sphericalangle RP_n\Sigma = \tau$: угао који изражава трајање јутарњег (а, разуме се, и вечерњег) сутона. Применом образаца 150), 151) и 152) у чл. 162. на сферни троугао $ZP_n\Sigma$ добијамо

$$\text{X)}\quad \begin{cases} \sin\dfrac{s}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(90^0 + h_1 - \varphi + \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 + h_1 + \varphi - \delta)}{\cos\varphi\cos\delta}} \\[2ex] \cos\dfrac{s}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(270^0 + h_1 - \varphi - \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 - h_1 - \varphi - \delta)}{\cos\varphi\cos\delta}} \\[2ex] tg\dfrac{s}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(90^0 + h_1 - \varphi + \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 + h_1 + \varphi - \delta)}{\sin\frac{1}{2}(270^0 + h_1 - \varphi - \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 - h_1 - \varphi - \delta)}} \end{cases}$$

и пошто, на раније показати начин, израчунамо дневни полулук s_0 сунца налазимо трајање (јутарњег или вечерњег) сутона у угловној мери

$$\tau = s - s_0,$$

а у јединици времена (у часовима) кад поделимо са 15 (в. једн. I у чл. 190. *c*).

1. *Напомена*. Примећујемо да је са математичног гледишта овај задатак о израчунавању сутона потпуно аналоган горњем расматрању о трајању изласка и заласка сунца (и месеца), као и ономе о преламању светлости. То нам показује и сама сличност дотичних образаца VII, IX и X.

2. *Напомена*. На оним местима на земљи, чија је географска ширина таква да сунце у извесном времену у години (или шта више и преко целе године) не силази ниже од 18^0 испод хоризонта, влада *непрекидан сутон*. Тамо вечерњи сутон прелази у јутарњи сутон и каже се да су на таквим местима *беле* или *светле ноћи*. Имавши на уму, да је у оваквоме случају часовни угао s тачке Σ, тј. $\sphericalangle ZP_n\Sigma = 180^0$, дакле $\frac{s}{2} = 90^0$, лако је, на основу горњег обрасца за $tg\frac{s}{2}$, израчунати под којом географском ширином, односно у којем времену у години наступа непрекидан сутон. До истог резултата долазимо применом косинусне теореме на сферни троугао $ZP_n\Sigma$

$$\cos(90^0 + h_1) = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s,$$

кад овде ставимо $h_1 = 18^0, s = 180^0$, дакле помоћу обрасца

$$\cos 108^0 = \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi\cos\delta,$$

одакле

$$\cos 108^0 = -\cos(\varphi+\delta)$$

$$180^0 - 108^0 = \varphi + \delta$$

$$\text{XI)} \qquad 72^0 = \varphi + \delta.$$

Примери.

1. Колико траје астрономски сутон у Београду 15. Јануара? Деклинација сунца је (у округлој цифри) тога дана

$$\delta = 21^0 4',$$

географска ширина Београда

$$\varphi = 44^0 48'.$$

За израчунавање лука s употребићемо трећи образац под X.

$$\frac{1}{2}(90^0 + h_1 - \varphi + \delta) = 42^0 8' \qquad \log\sin\frac{1}{2}(90^0 + h_1 - \varphi + \delta) = 9{,}82$$

$$\frac{1}{2}(90^0 + h_1 + \varphi - \delta) = 65^0 52' \qquad \log\sin\frac{1}{2}(90^0 + h_1 + \varphi - \delta) = 9{,}96$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(90 + h_1 - \varphi + \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 + h_1 + \varphi - \delta) = 9{,}78$$

$$\frac{1}{2}(270^0 + h_1 - \varphi - \delta) = 111^0 4' \qquad \log\sin\frac{1}{2}(270^0 + h_1 - \varphi - \delta) = 9{,}96$$

$$\frac{1}{2}(90^0 - h_1 - \varphi - \delta) = 3^0 4' \qquad \log\sin\frac{1}{2}(90^0 - h_1 - \varphi - \delta) = 8{,}72$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(270^0 + h_1 - \varphi - \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 - h_1 - \varphi - \delta) = 8{,}69$$

$$\log tg^2\frac{s}{2} = \log\frac{\sin\frac{1}{2}(90^0 + h_1 - \varphi + \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 + h_1 + \varphi - \delta)}{\sin\frac{1}{2}(270^0 + h_1 - \varphi - \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 - h_1 - \varphi - \delta)} = 1{,}08$$

$$\log tg \frac{s}{2} = 0{,}544\,3077$$

$$\frac{s}{2} = 74^0\,3'\,46{,}6'', \qquad s = 148^0\,7'\,33''.$$

Дневни лук сунца израчунаћемо помоћу првога обрасца VII.

$$\log \cos \varphi = 9{,}850\,9957$$
$$\log \cos \delta = 9{,}969\,9574$$

$$\log \cos \varphi \cos \delta = 9{,}820\,9531$$

$$\frac{1}{2}(90^0 + 35' + \varphi - \delta) = 57^0\,9'30'' \qquad \log \sin \frac{1}{2}(90^0 + 35' + \varphi - \delta) = 9{,}924\,3684$$

$$\frac{1}{2}(90^0 + 35' - \varphi + \delta) = 33^0 25'30'' \qquad \log \sin \frac{1}{2}(90^0 + 35' - \varphi + \delta) = 9{,}741\,0294$$

$$\log \sin^2 \frac{\sigma}{2} = \log \frac{\sin\frac{1}{2}(90^0 + 35' + \varphi - \delta)\sin\frac{1}{2}(90^0 + 35' - \varphi + \delta)}{\cos \varphi \cos \delta} = 9{,}844\,4447$$

$$\log \sin \frac{\sigma}{2} = 9{,}922\,2223$$

$$\frac{\sigma}{2} = 56^0\,43'\,24'', \qquad \sigma = 113^0\,26'\,48''.$$

Према овоме је трајање сутона у угловној мери

$$\tau = s - \sigma = 34^0\,40'\,45'',$$

а у времену изражено јесте

$$\tau = 2^h\,18^m\,43^s.$$

Напомена. Служећи се обрасцем VI, при израчунавању дневног полулука, не водећи, дакле, рачуна о преламању светлости, налазимо за дневни лук сунца $s_0 = 112^0\,29'\,23''$ и према томе $\tau = 35^0\,38'\,10'' = 2^h\,22^m\,33^s$.

2) С обзиром на то да је $\delta = 23\frac{1}{2}^0$ највећа деклинација, коју сунце може имати, следује из обрасца XI да непрекидан сутон почиње тек са географском ширином $\varphi = 72^0 - 23\frac{1}{2}^0$

$= 48\frac{1}{2}^{\circ}$. На местима са географском ширином од $48\frac{1}{2}^{\circ}$[1]) непрекидни сутон траје само на дан летње дугодневнице, тј. 21. Јуна.

3) Колика треба да је деклинација сунца, па да у Петрограду сутон целу ноћ траје?

За Петроград је

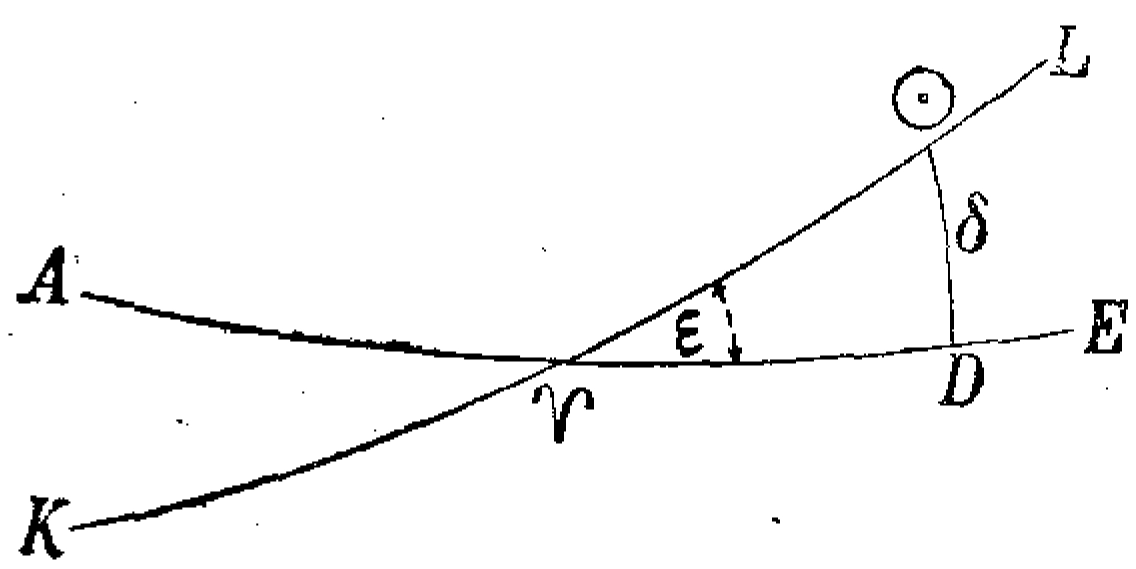
$$\varphi = 59^{0}\,56'\,30''$$

и на основу обрасца XI следује

$$\delta = 72^{0} - 59^{0}\,56'\,30'' = 12^{0}\,3'\,30'',$$

а ову деклинацију сунце има око 21. Априла[2]).

197. Приближно израчунавање деклинације сунца. — Ми смо раније већ напоменули да се деклинација сунца непрестано (па и у току једнога дана) мења.



Сл. 119.

Астрономски календари (ефемериде) дају нам деклинацију сунца за сваки дан и то за подне дотичног места (Париза, Гринича, Берлина итд.). Међутим ми можемо и сами да израчунамо приближно деклинацију сунца за који било дан.

Нека је AE екватор, KL еклиптика, Υ пролетња тачка, $\sphericalangle L\Upsilon E = \varepsilon$ косина еклиптике.

Сунце описује периферију (360^{0}) еклиптике за $365\frac{1}{4}$ дана и прелази, дакле, дневно путању, које је у угловној мери $= \dfrac{360^{0}}{365\frac{1}{4}} = \dfrac{1440^{0}}{1461} = 0{,}986^{0}$[3]). За n

---

[1]) Ово је отприлике географска ширина Париза ($\varphi = 48^{0}\,50'\,11{,}2''$).

[2]) В. идући члан 180.

[3]) Ово је само приближно, пошто се сунце (односно наша земља) не креће потпуно равномерно (тј. са подједнаком брзином). Услед тога је, разуме се, и цео овај рачун само приближно тачан.

дана је сунчева путања $= n \cdot 0{,}986^0$. Деклинација сунца у тачца Υ јесте $= 0$, а у положају $\odot$ нека је $\delta = \odot D$. Из правоуглог сферног троугла $\Upsilon \odot D$ (прав угао је код D), у коме је $\Upsilon \odot = n \cdot 0{,}986^0$, $\sphericalangle \odot \Upsilon D = \varepsilon$, читамо

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin (n \cdot 0{,}986^0). \qquad \text{(XII}$$

Помоћу овога обрасца XII, у којем n означава број дана који су протекли од пролетње равнодневице (тј. од 21. Марта), у стању смо да за сваки дан (за свако n) израчунамо приближно деклинацију сунца, као што можемо и обратно да израчунамо дан (тј. број n) којег деклинација сунца има извесну вредност δ.

198. **Јединице за време**. — Равномерно обртање наше земље око своје осе, које се нама показује у привидноме обртању небесне сфере око једне замишљене праве (светске осе), упућује нас сасвим природно на начин како да меримо време и даје нам непосредно и јединицу, којом да га меримо. Сматравши за знак једнога потпуног обрта небесне сфере (или управо једнога обрта наше земље) око своје осе повратак некретница[1]) у своје положаје, које су оне пре тога у извесноме тренутку заузимале, ми узимамо тај размак времена као од природе дату јединицу и зовемо трајање таквог једног обрта *звездани дан (Sterntag*, jour sidéral). Обично се звездани дан дефинише као време између два узастопна пролаза једне некретнице кроз горњу или доњу кулминацију, дакле кроз меридијан. Како се ова основна јединица, коју

[1]) Које осим поменутог, свима небесним телима заједничког обртања не показују никакво друго кретање.

смо назвали звезданим даном, дели на мање јединице, на часове, минуте и секунде и на који се начин ове јединице времена доводе у везу са угловном мером показали смо већ у чл. 190. *c*.

Према горњој дефиницији имамо под *звезданим временом (Sternzeit*, temps sidéral) да разумамо време које је мерено на основу дневнога обртања некретница. Ако пролетњу тачку ♈ узмемо за почетну тачку, од чијег проласка кроз меридијан почињемо да рачунамо време, онда се, у ствари, под звезданим временом има да разуме часовни угао пролетње тачке, разуме се, изражен у времену. На тај начин часовник, који је удешен за звездано време, у тренутку проласка кроз меридијан тачака, чије су ректасцензије 90^0 и 270^0, показиваће 6^h, односно 18^h.

Пошто се ректасцензије почињу да броје од пролетње тачке ♈, лако је уверити се да између часовног угла, ректасцензије и звезданог времена постоји овај прости однос

XIII) часовни угао + ректасцензији = звезданом времену

(В. сл. 109., где је $ED + \Upsilon D = E\Upsilon$, , ED часовни угао, ΥD ректасцензија, $E\Upsilon$ звездано време.)

Посматрањем обртања небесне сфере с погледом на периодно понављање једнаких положаја сунца на небу, долазимо до времене јединице која се зове *прави* или *истински сунчани дан* (*wahrer Sonnentag*, jour solaire, jour vrai). Прави сунчани дан то је времени интервал између два узастопна проласка сунчевог средишта кроз меридијан, а под *правим* или *истинским сунчаним временом* (*wahre Sonnenzeit*, temps solaire, temps vrai) разумемо часовни угао сунчевог средишта[1]).

Сунчани дани нису, као звездани дани, сви једнаки. Узрок овој неједнакости сунчаних дана лежи једно у томе што привидно кретање сунца није равномерно (зими је брже, лети спорије), а поглавито у томе што небесна обртна оса не стоји управно на сунчевој путањи (еклиптици), услед чега у једнаким временима пролазе кроз меридијан неједнаки луци еклиптике. Ова неједнакост сунчаних дана чини их неподесне за практичну употребу. С тога је (од размерно скорашњег датума) опште примљен други начин за рачунање времена. Место истинског сунца замишља се друго (уображено) сунце, које се по екватору равномерно креће. Време, које пролази између две узастопне кулминације тога уображеног сунца, узимамо за јединицу и зовемо то *средњи сунчани дан (mittlerer Sonnentag*, jour solaire moyen); часовни угао тога замишљеног сунца за извесан моменат зове се *средње сунчано време (mittlere Sonnenzeit*, temps moyen). Дужина средњег сунчаног дана је, дакле, стална, као што је дужина звезданог дана. Услед кретања сунца у супротноме смислу дневнога обртања небесне сфере средњи сунчани дан није раван звезданоме дану. Један средњи сунчани дан има у звезданом времену $24^h 3^m 56{,}5^s$, а један звездани дан изражен у средњем сунчаном времену јесте $= 23^h 56^m 4{,}09^s$.

Разуме се да је и истинско сунчано време различно од средњег сунчаног времена. Разлика између та два времена, узета за извесан моменат, зове се *једначина*

---

1) Посматрано средиште сунца треба, разуме се, кориговати од погрешке коју проузрокује преламање светлости.

времена (*Zeitgleichung*, équation du temps). Она је четири пута у години равна нули; два пута има позитиван, а два пута негативан максимум (највећу вредност). Ове особене вредности једначине времена распоређене су преко године на следећи начин

12. Февр.	15. Априла	14. Маја	14. Јуна
$+14^m31^s$	0	-3^m53^s	0
26. Јула	31. Авг.	13. Нов.	24. Дек.
$+6^m12^s$	0	-16^m18^s	0.

Примедба. Време, које показују наши часовници, или је звездано или средње сунчано време. Вавилоњани, Грци, Римљани, као уопште сви културни народи у староме и у средњем веку, рачунали су по истинском сунчаном времену, делећи одвојено дан (време од изласка до заласка сунца) и ноћ (време од заласка до изласка сунца) на по дванајест часова. Услед мењања дужине дана и дужине ноћи мењала је се, на тај начин, и дужина часова преко године. У лето су дневни часови били дужи од ноћних, а зими обратно: ноћни часови су били дужи од дневних. Једино за време еквинокција били су дневни и ноћни часови једнаки. Тако нпр. на местима под 48° географске ширине, на којима за време солстиција дан траје 16, а ноћ 8 сахати (данашњих) и обратно дан 8, а ноћ 16 сахати, делећи дан, а тако исто и ноћ, на дванајест једнаких делова, бивало је да је за време дугодневица један дневни час био $= \frac{16^h}{12} = 1\frac{1}{3}$ часа данашњег (тј. 80 минута средњег сунчаног времена), а ноћни час био $= \frac{8^h}{12} = \frac{2}{3}$ часа данашњег (40 минута средњег сунчаног времена). За време краткодневице, обратно, трајао је дневни час $\frac{2}{3}$, ноћни $1\frac{1}{3}$ часа средњег сунчаног времена. Овај начин рачунања је постојао до у најновије доба. У Женеви почело је се рачунати по средњем сунчаном времену од године 1780; Париз је примио данашњи начин рачунања времена тек 1816. год.; Берлин шест година раније. У некада слободној вароши

Нирнбергу рачунали су још од 15. века по истинскоме и по средњем сунчаном времену, називајући истинско време *велико време (grosse Zeit)*, средње време *мало време (kleine Zeit)*.[1]

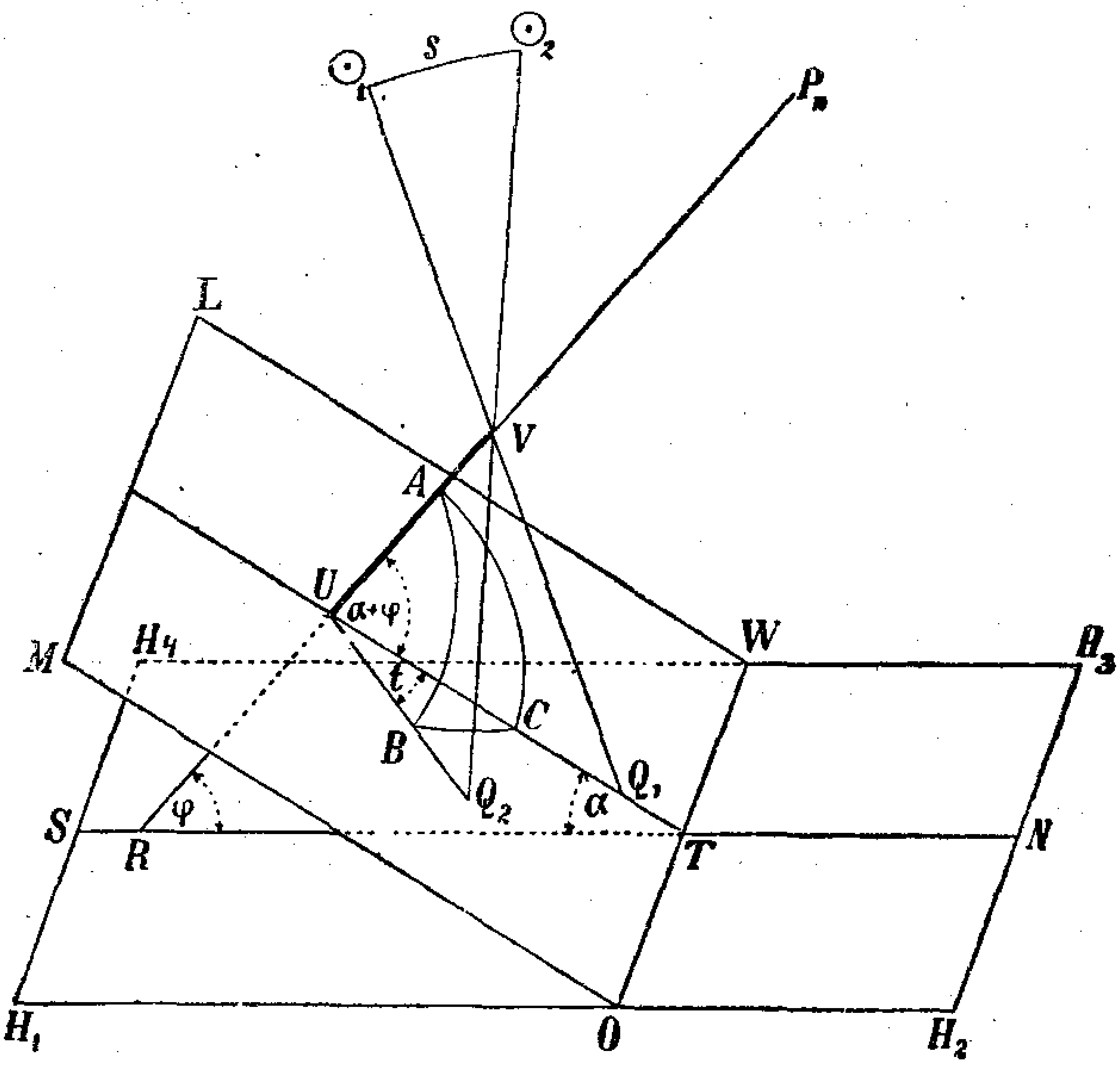
199. **Конструкција сунчаника**. — Под *сунчаником* (*Sonnenuhr*, cadran solaire), уопште, разумемо једну направу, помоћу које добијамо истинско сунчано време из положаја сенке коју једна утврђена праволиниска казаљка (*Stylus*, style) баца на неку површину. Сунчаник се састоји, дакле, из два дела: једне казаљке, која баца сенку и површине за коју је, под извесним углом, притврђена казаљка и на коју она своју сенку баца. На овој површини конструисане су линије, такозване *часовне линије* (*Stundenlinien*, lignes horaires), чије подударање са сенком казаљке показује дневни час.

Да би сунчаник могао, преко целе године, да показује време, треба да је испуњен тај једини услов да је сунчаникова казаљка паралелна са светском осом.

Ми ћемо, овде, претпоставити (а то махом и јесте случај) да је површина, на којој су повучене часовне линије, једна раван. Нека је $LMOW$ часовникова раван, тј. раван на којој треба конструисати часовне линије, узета у таквоме положају како ће се са хоризонтом $H_1H_2H_3H_4$ сећи по источно-западној линији OW и на тај начин пресечна права поменутих равни стојати управно на меридијанској линији SN. Означимо са UV казаљку сунчаника, која, пошто је у правцу светске осе, продужена пролази кроз светски пол P_n, а хоризонт продире у тачци R, где са хоризонталном равни чини угао $\varphi =$ географској ширини онога места на којем сунчаник по-

[1]) Види: Prof. Dr. S. Günther. Handbuch der mathematischen Geographie. Stuttgart. 1890. Нота на стр. 171. и 172.

дижемо. Нека је α угао који заклапа часовникова раван са хоризонтом. Из слике видимо да је $\sphericalangle VUT = \alpha + \varphi$ (као спољашни угао за $\triangle RUT$). Означимо са $\odot_1$ место сунца за време кулминације (тј. у подне), са $\odot_2$ ма какав други положај сунца. Тада је $arc\, \odot_1 \odot_2 = s$ часовни угао сунца за положај $\odot_2$. Часовна линија, која одговара сунчаноме



Сл. 120.

месту $\odot_1$, а то је линија UQ_1, пада у правац UT, пошто се у томе моменту сунце налази у меридијану, а пресек равни меридијана са сунчаниковом равни јесте поменута права UT. Сунчаном месту $\odot_2$ одговараће друга нека часовна линија, нпр. часовна линија UQ_2, која с оном првом заклапа $\sphericalangle Q_1UQ_2 = t$. Овај угао t на сунчаниковој површини, који одговара часовноме углу s сунца, даје нам меру за време које је протекло од кулминације сунца, тј. од подне, односно време које има да протекне до кулминације сунца. Наш задатак (мерење истинског сунчаног времена помоћу положаја сенке UQ_2, коју казаљка UV баца на сунчаникову раван $LMOW$) биће решен ако нађемо образац за израчунавање угла t из s, φ и α.

Замислимо из тачке U описану лопту са полупречником 1. Тространи телесни рогаљ UVQ_1Q_2 образује на тој лопти правоугли сферни троугао ABC, у којем је

$$\sphericalangle C = 90^0, \quad \sphericalangle A = s,$$

$$\text{страна } BC = t, \quad \text{страна } AC = \alpha + \varphi.$$

На основу *Непер*-овог правила следује

$$\cos\,[90^0 - (\alpha + \varphi)] = \operatorname{cotg} s \operatorname{cotg}\,(90^0 - t),$$

одакле

$$\operatorname{tg} t = \sin\,(\alpha + \varphi)\ \operatorname{tg} s. \qquad \text{(XIV}$$

Помоћу овога обрасца је лако конструисати часовне линије.

Понајвише се употребљују следеће три врсте сунчаника:

1) *Екваторeални сунчаник* (*Aequatorialuhr*, cadran équatorial), код којег је сахатна површина у положају екватора, дакле

$$\alpha + \varphi = 90^0.$$

Образац XIV своди се на овај простији

$$t = s. \qquad \text{(XIV}_a$$

Угли t, које чине часовне линије међусобом, сразмерни су разлици њима одговарајућих часовних углова или простије: угли, које описује сенка казаљкина, сразмерни су протеклом времену. Конструкција оваквих (екватореалних) сунчаника врло је проста. Око тачке U (подножја казаљке) опише се круг и његова периферија се подели на 24 равних делова.

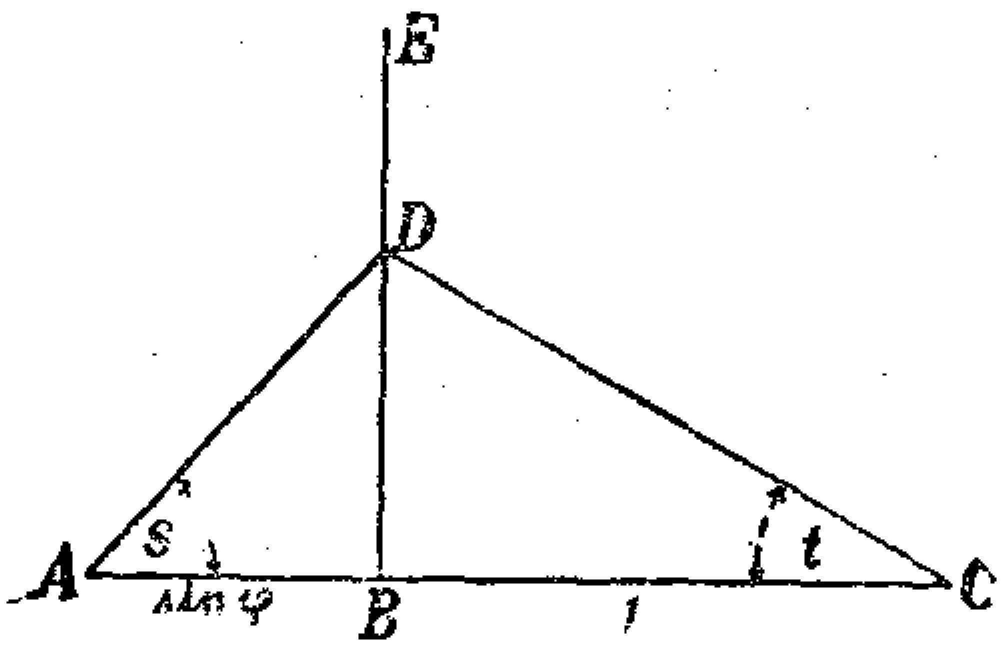
2) *Хоризонтални сунчаник* (*Horizontaluhr*, cadran horizontal), чија је површина сахатна паралелна са хоризонтом, дакле

$$\alpha = 0,$$

у коме случају образац XIV гласи

$$\text{XIV}_b) \qquad tg\, t = \sin \varphi \; tg\, s.$$

За одређивање угла t помоћу φ и s може да нам послужи следећа врло проста конструкција. Начинимо $AB = \sin \varphi$ (за Београд би било $\sin \varphi = 0{,}7046$), $BC = 1$. Пренесимо код A часовни угао s. Ако спојимо затим добивену тачку D са тачком C имаћемо код C тражени угао t, о чему је, из саме слике, лако уверити се.



Сл. 121.

3) *Вертикални сунчаник* (*Vertikaluhr*, cadran vertical). Његова површина налази се у положају првог вертикалног круга (стоји управно на меридијану и на хоризонту).

У овоме је случају

$$\alpha = 90^0$$

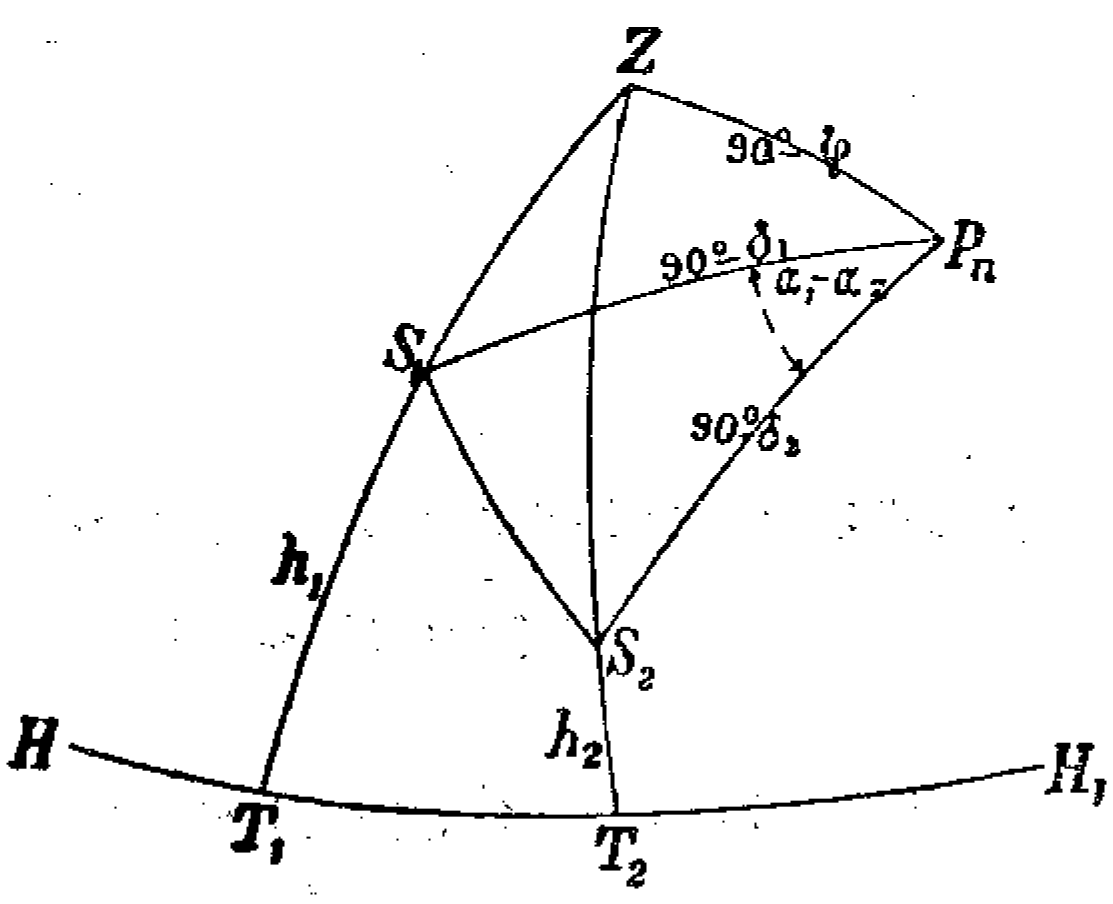
и према томе образац XIV добија вид

$$\text{XIV}_c) \qquad tg\, t = \cos \varphi \; tg\, s.$$

Ову једначину је тако исто лако конструкцијом разрешити као и ону прошлу XIV_b. Сва је разлика у томе што у овоме случају треба начинити $AB = \cos\varphi$ (за Београд је $\cos\varphi = 0{,}7096$).

Овакви сунчаници се могу видити поглавито на црквама, код којих су зидови већ иначе оријентисани према основним тачкама хоризонта.

200. **Гаус-ова метода за одређивање географске ширине места на земљи.** — Нека је HH_1 хоризонат, Z зенит посматрачев, P_n северни пол, S_1 и S_2 две посматране звезде, чије смо висине (одстојања од хоризонта) $S_1T_1 = h_1$ и $S_2T_2 = h_2$ или њихова зенитна одстојања $ZS_1 = 90^0 - h_1$ и $ZS_2 = 90^0 - h_2$ измерили и чије ректасцензије α_1 и α_2



Сл. 122.

и деклинације δ_1 и δ_2 познајемо. Замислимо да су тачке S_1 и S_2 луцима великих кругова везане са тачкама P_n и Z. У сферноме троуглу $P_nS_1S_2$ дате су нам две стране и захваћени угао: стране: $P_nS_1 = 90^0 - \delta_1$ и $P_nS_2 = 90^0 - \delta_2$ и угао $S_1P_nS_2 = \alpha_1 - \alpha_2$; можемо, дакле, да израчунамо остале комаде: $\sphericalangle P_nS_1S_2 = \sigma_1$, $\sphericalangle P_nS_2S_1 = \sigma_2$ и страну $S_1S_2 = a$. Познавајући, на тај начин, у сферноме троуглу ZS_1S_2 све три стране: $ZS_1 = 90^0 - h_1$, $ZS_2 = 90^0 - h_2$, $S_1S_2 = a$ у стању смо да израчунамо $\sphericalangle ZS_1S_2 = \Sigma$, а с овим, опет, да разрешимо сферни троугао S_1P_nZ, познавајући његове две стране и захваћени угао: стране $ZS_1 = 90^0 - h_1$ и $P_nS_1 = 90^0 - \delta_1$ и $\sphericalangle P_nS_1Z = \Sigma - \sigma_1$. У томе троуглу S_1P_nZ

налази се страна $P_n Z = 90^0 - \varphi$, а то је екваторска висина посматрачева, која је, као што знамо, равна комплементу његове поларне висине или географске ширине φ.

Ова метода може да послужи да, осим поларне висине, одредимо и време, јер се, разрешавањем сфернога троугла $S_1 P_n Z$, добија и $\sphericalangle Z P_n S_1$, а то је часовни угао.

IV

УТИЦАЈ ГРЕШАКА У ПОДАТЦИМА НА РАЧУНОМ ДОБИВЕНЕ РЕЗУЛТАТЕ.

1.

Израчунавање грешака у резултатима из грешака у податцима.

201. **Извођење општих образаца.** — Исти задатак, који смо у Равној Тригонометрији у одељку III проучавали за равне троугле, имаћемо сада да поновимо за сферне троугле. Разуме се, да све оне напомене, које смо учинили том приликом, важе и у овоме случају. Наша је циљ, дакле, као и пре, да нађемо једначине, помоћу којих ћемо бити у стању, да из (познатих) грешака задатих (тј. мерењем добивених) комада једнога сферног троугла израчунамо (непознате) грешке које отуда потичу у комадима које рачуном изналазимо. Или што је једно исто: имаћемо да испитамо како се из врло малих промена извесних комада једнога сферног троугла могу да нађу одговарајуће промене осталих комада, које добијамо рачуном из оних задатих комада.

Као и пре (у Равној Тригонометрији) тако су нам и сада потребне три једначине, помоћу којих ћемо из грешака трију комада моћи да израчунамо грешке остала три комада. Начин извођења је у свему сличан ономе начину којим смо се, у поменутој прилици, већ послужили.

Поћићемо од основних једначина 146), чл. 158.

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned}\right\} \qquad (a$$

из којих се, као што знамо (в. чл. 166.), могу да изведу сви остали обрасци Сферне Тригонометрије. Ако означимо са $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle c$, $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle C$, грешке (или промене) елемената a, b, c, A, B, C сфернога троугла, онда имамо на основу једн. a) да је

$$\left.\begin{gathered} \cos(a+\triangle a) = \\ \cos(b+\triangle b)\cos(c+\triangle c)+\sin(b+\triangle b)\sin(c+\triangle c)\cos(A+\triangle A) \\ \cos(b+\triangle b) = \\ \cos(c+\triangle c)\cos(a+\triangle a)+\sin(c+\triangle c)\sin(a+\triangle a)\cos(B+\triangle B) \\ \cos(c+\triangle c) = \\ \cos(a+\triangle a)\cos(b+\triangle b)+\sin(a+\triangle a)\sin(b+\triangle b)\cos(C+\triangle C), \end{gathered}\right\} (a_1$$

одакле, кад развијемо косинусе и синусе збира и при томе се будемо држали начела, по којем се за врло мале луке синус може заменути самим луком, косинус ставити $= 1$, а производи и виши степени тих малих количина (грешака односно промена $\triangle a$, $\triangle b, \cdots \triangle A, \cdots$) могу занемарити, и пошто од тако добивених једначина одузмемо посебице једн. a) — налазимо

$$\sin a \triangle a = \cos b \sin c \triangle c + \cos c \sin b \triangle b + \sin b \sin c \sin A \triangle A$$
$$- \cos b \sin c \cos A \triangle b - \sin b \cos c \cos A \triangle c$$

$$\sin b \triangle b = \cos c \sin a \triangle a + \cos a \sin c \triangle c + \sin c \sin a \sin B \triangle B$$
$$- \cos c \sin a \cos B \triangle c - \sin c \cos a \cos B \triangle a$$

$$\sin c \triangle c = \cos a \sin b \triangle b + \cos b \sin a \triangle a + \sin a \sin b \sin C \triangle C$$
$$- \cos a \sin b \cos C \triangle a - \sin a \cos b \cos C \triangle b \text{ [1]}$$

или

$$\sin a \triangle a = (\cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A) \triangle b +$$
$$(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A) \triangle c + \sin b \sin c \sin A \triangle A$$

$$\sin b \triangle b = (\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B) \triangle c +$$
$$(\cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B) \triangle a + \sin c \sin a \sin B \triangle B$$

$$\sin c \triangle c = (\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C) \triangle a +$$
$$(\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C) \triangle b + \sin a \sin b \sin C \triangle C.$$

С обзиром на једначине 160) у чл. 166., могу последњи обрасци да се напишу

$$\sin a \triangle a = \sin a \cos C \triangle b + \sin a \cos B \triangle c + \sin b \sin c \sin A \triangle A$$
$$\sin b \triangle b = \sin b \cos A \triangle c + \sin b \cos C \triangle a + \sin c \sin a \sin B \triangle B$$
$$\sin c \triangle c = \sin c \cos B \triangle a + \sin c \cos A \triangle b + \sin a \sin b \sin C \triangle C$$

или, ако их поделимо појединце са $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ и узмемо у рачун да је у последњем члану на десној страни, на основу синусне теореме,

[1]) Пошто су код сферних троуглова стране и угли изражени у истој јединици (било да су изражени у лучној или у угловној мери) дозвољено је, услед тога, заменути $arc \triangle a$, $arc \triangle A$, · · · · изразима $\triangle a$, $\triangle A$, · · · ·

$$\frac{\sin c \sin A}{\sin a} = \sin C, \frac{\sin a \sin B}{\sin b} = \sin A, \frac{\sin b \sin C}{\sin c} = \sin B,$$

добићемо једначине у по могућству сведеној форми

$$\left.\begin{aligned} \triangle a &= \cos C \triangle b + \cos B \triangle c + \sin b \sin C \triangle A \\ \triangle b &= \cos A \triangle c + \cos C \triangle a + \sin c \sin A \triangle B \\ \triangle c &= \cos B \triangle a + \cos A \triangle b + \sin a \sin B \triangle C. \end{aligned}\right\} (177$$

Добивени обрасци 177) показују на који начин количине $\triangle a, \triangle b, \triangle c, \triangle A, \triangle B, \triangle C$ (а то су грешке, односно промене троуглових елемената) једна од друге зависе и како се из њих трију могу остале три да израчунају.

Применом образаца 177) на суплементни сферни троугао налазимо следеће једначине

$$\left.\begin{aligned} \triangle A &= -\cos c \triangle B - \cos b \triangle C + \sin B \sin c \triangle a \\ \triangle B &= -\cos a \triangle C - \cos c \triangle A + \sin C \sin a \triangle b \\ \triangle C &= -\cos b \triangle A - \cos a \triangle B + \sin A \sin b \triangle c. \end{aligned}\right\} (178$$

Нови један вид једначина за израчунавање грешака, вид који је потпуно сличан једначинама које смо имали у чл. 137. Равне Тригонометрије, добићемо, кад пођемо од образаца за синусну теорему (једн. 145, чл. 157.)

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B$$

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C.$$

Пошто, у овим једначинама, заменимо a, b, c, A, B, C вредностима $a + \triangle a$, $b + \triangle b$, $c + \triangle c$,

$A + \triangle A$, $B + \triangle B$, $C + \triangle C$, развијемо синусе збира[1]) и од тако добивених образаца одузмемо задате једначине налазимо следеће обрасце

$$\cos a \sin B \triangle a + \sin a \cos B \triangle B =$$
$$\cos b \sin A \triangle b + \sin b \cos A \triangle A$$
$$\cos b \sin C \triangle b + \sin b \cos C \triangle C =$$
$$\cos c \sin B \triangle c + \sin c \cos B \triangle B$$
$$\cos c \sin A \triangle c + \sin c \cos A \triangle A =$$
$$\cos a \sin C \triangle a + \sin a \cos C \triangle C,$$

које, кад поделимо појединце са $\sin b \sin A$, $\sin c \sin B$, $\sin a \sin C$,

$$\frac{\cos a \sin B}{\sin b \sin A} \triangle a + \frac{\sin a \cos B}{\sin b \sin A} \triangle B = \frac{\triangle b}{\operatorname{tg} b} + \frac{\triangle A}{\operatorname{tg} A}$$
$$\frac{\cos b \sin C}{\sin c \sin B} \triangle b + \frac{\sin b \cos C}{\sin c \sin B} \triangle C = \frac{\triangle c}{\operatorname{tg} c} + \frac{\triangle B}{\operatorname{tg} B}$$
$$\frac{\cos c \sin A}{\sin a \sin C} \triangle c + \frac{\sin c \cos A}{\sin a \sin C} \triangle A = \frac{\triangle a}{\operatorname{tg} a} + \frac{\triangle C}{\operatorname{tg} C},$$

и услед тога што је

$$\frac{\sin B}{\sin b \sin A} = \frac{1}{\sin a}, \frac{\sin a}{\sin b \sin A} = \frac{1}{\sin B}, \frac{\sin C}{\sin c \sin B} = \frac{1}{\sin b},$$
$$\frac{\sin b}{\sin c \sin B} = \frac{1}{\sin C}, \frac{\sin A}{\sin a \sin C} = \frac{1}{\sin c}, \frac{\sin c}{\sin a \sin C} = \frac{1}{\sin A}$$

(на основу синусне теореме), може простије да се напише

[1]) Са погодбом да синус грешке заменимо грешком, а косинус јединицом, тј. да ставимо $\sin \triangle a = \triangle a$, $\cos \triangle a = 1$ итд. и да производе из грешака занемаримо.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\triangle a}{tg\,a}-\frac{\triangle b}{tg\,b}&=\frac{\triangle A}{tg\,A}-\frac{\triangle B}{tg\,B}\\ \frac{\triangle b}{tg\,b}-\frac{\triangle c}{tg\,c}&=\frac{\triangle B}{tg\,B}-\frac{\triangle C}{tg\,C}\\ \frac{\triangle c}{tg\,c}-\frac{\triangle a}{tg\,a}&=\frac{\triangle C}{tg\,C}-\frac{\triangle A}{tg\,A}\text{[1]}.\end{aligned}\right\} \qquad (179$$

1. *Напомена.* Ако се по неки од измерених или уопште познатих комада троуглових могу сматрати као апсолутно тачни, онда треба у горњим једначинама 177), 178) и 179) за израчунавање грешака ставити да су грешке дотичних комада равне нули. Тако нпр. ако се зна да је у једноме сферном троуглу један угао прав, нпр. $C=90^0$, онда треба ставити $\triangle C=$ или ако је страна $a=90^0$ ваља ставити $\triangle a=0$ итд.

2. *Напомена.* Много брже долазимо до формула 179) помоћу Диференциалног Рачуна (в. 3. *Напомену* у чл. 137.). Диференциалењем обрасца за синусну теорему

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

следује

$$\cos a \sin B\, da + \sin a \cos B dB$$
$$= \cos b \sin A db + \sin b \cos A dA$$

или

$$\sin a \sin B \left(\frac{da}{tg\,a}+\frac{dB}{tg\,B}\right)$$
$$= \sin b \sin A \left(\frac{db}{tg\,b}+\frac{dA}{tg\,A}\right),$$

---

[1]) Сравни са једн. 137) у чл. 137.

одакле по скраћену лево и десно

$$\frac{da}{tg\,a}+\frac{dB}{tg\,B}=\frac{db}{tg\,b}+\frac{dA}{tg\,A}$$

итд.

2.

Шест основних случајева за општи сферни троугао.

202. **Први случај.** — Нека су стране a, b, c непосредно измерене, угли A, B, C из њих рачуном добивени. Да се из грешака $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle c$ одреде грешке $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle C$.

Из горњих образаца 177) добијамо непосредно

$$177_a)\quad \begin{cases} \triangle A=\dfrac{\triangle a-\cos C\,\triangle b-\cos B\,\triangle c}{\sin b\,\sin C} \\[2ex] \triangle B=\dfrac{\triangle b-\cos A\,\triangle c-\cos C\,\triangle a}{\sin c\,\sin A} \\[2ex] \triangle C=\dfrac{\triangle c-\cos B\,\triangle a-\cos A\,\triangle b}{\sin a\,\sin B}. \end{cases}$$

203. **Други случај.** — Измерени су угли A, B, C а стране a, b, c рачуном добивене. Треба, дакле, из грешака $\triangle A$ $\triangle B$ и $\triangle C$ израчунати грешке $\triangle a$, $\triangle b$ и $\triangle c$.

Из горњих једначина 178) налазимо непосредно ове обрасце

$$178_a)\quad \begin{cases} \triangle a=\dfrac{\triangle A+\cos c\,\triangle B+\cos b\,\triangle C}{\sin B\,\sin c} \\[2ex] \triangle b=\dfrac{\triangle B+\cos a\,\triangle C+\cos c\,\triangle A}{\sin C\,\sin a} \\[2ex] \triangle c=\dfrac{\triangle C+\cos b\,\triangle A+\cos a\,\triangle B}{\sin A\,\sin b}. \end{cases}$$

Напомена. Услед тога што овај случај стоји са првим случајем у односу реципрочности, могли бисмо једн. 178_a) добити непосредно из једн. 177_a), пошто (према обрасцима 138 у чл. 149.) заменимо $\sin a$ са $\sin A$ (и обратно $\sin A$ са $\sin a$), $\cos a$ са $-\cos A$ (и обратно $\cos A$ са $-\cos a$), $\triangle a$ са $-\triangle A$ (и обратно $\triangle A$ са $-\triangle a$) итд.

204. **Трећи случај**. — Дате су две стране и захваћени угао, нпр. a, b, C; израчунати су остали комади A, B, c. Да се из грешака $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle C$ одреде грешке $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle c$.

Трећа једначина 177) даје непосредно грешку $\triangle c$

$$\triangle c = \cos B \triangle a + \cos A \triangle b + \sin a \sin B \triangle C.$$

Остале две грешке $\triangle A$ и $\triangle B$ добићемо на следећи начин. Напишимо прве две једначине 177) у виду

$$\cos B \triangle c + \sin b \sin C \triangle A = \triangle a - \cos C \triangle b$$

$$\cos A \triangle c + \sin c \sin A \triangle B = \triangle b - \cos C \triangle a,$$

заменимо овде за $\triangle c$ горњу вредност из прве једначине 177) и средимо то, па ћемо добити

$$\sin^2 B \triangle a - (\cos C + \cos A \cos B) \triangle b =$$

$$\sin b \sin C \triangle A + \sin a \sin B \cos B \triangle C$$

$$\sin^2 A \triangle b - (\cos C + \cos A \cos B) \triangle b =$$

$$\sin c \sin A \triangle B + \sin a \sin B \cos A \triangle C,$$

које, кад заменимо

$\cos C + \cos A \cos B = \sin A \sin B \cos c$ (једн. 147 у чл. 159.)

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B, \quad \sin a \sin B = \sin b \sin A$$

(једн. 145 у чл. 157.) и после тога скратимо прву једначину са $\sin B$, другу са $\sin A$, даје

$$\sin B \triangle a - \cos c \sin A \triangle b = \sin c \triangle A + \sin a \cos B \triangle C$$
$$\sin A \triangle b - \cos c \sin B \triangle a = \sin c \triangle B + \sin b \cos A \triangle C,$$

одакле

$$177_b) \begin{cases} \triangle A = \dfrac{\sin B}{\sin c} \triangle a - \operatorname{cotg} c \sin A \triangle b - \dfrac{\sin a \cos B \triangle C}{\sin c} \\ \triangle B = \dfrac{\sin A}{\sin c} \triangle b - \operatorname{cotg} c \sin B \triangle a - \dfrac{\sin b \cos A}{\sin c} \triangle C. \\ \text{Ово, са горњом једначином} \\ \triangle c = \cos B \triangle a + \cos A \triangle b + \sin a \sin B \triangle C, \end{cases}$$

јесу обрасци за израчунавање грешака $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle c$.

205. **Четврти случај.** — Измерена је једна страна и два налегла угла, нпр. c, A, B, остали су комади a, b, C израчунати. Да се из грешака $\triangle c$, $\triangle A$, $\triangle B$ одреде грешке $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle C$.

Пошто је овај случај реципрочан ономе прошлом (трећем) случају, то ћемо, најкраћим путем, доћи до једначина за израчунавање грешака, кад горе, у трећем задатку, добивене једначине применимо на суплементни сферни троугао, тј. кад у њима заменимо $\sin a$ са $\sin A$ и обратно $\sin A$ са $\sin a$; $\cos a$ са $-\cos A$ и обратно $\cos A$ са $-\cos a$, $\triangle a$ са $-\triangle A$ и обратно $\triangle A$ са $-\triangle a$ итд. На тај начин долазимо непосредно до образаца

$$178_b) \begin{cases} \triangle a = \dfrac{\sin b}{\sin C} \triangle A + \operatorname{cotg} C \sin a \triangle B + \dfrac{\sin A \cos b \triangle c}{\sin C} \\ \triangle b = \dfrac{\sin a}{\sin C} \triangle B + \operatorname{cotg} C \sin b \triangle A + \dfrac{\sin B \cos a \triangle c}{\sin C} \\ \triangle C = -\cos b \triangle A - \cos a \triangle B + \sin A \sin b \triangle c. \end{cases}$$

Напомена. Ове обрасце могли бисмо добити и непосредно, пошав од образаца 178) и поступајући с њима на исти начин као у последњем члану (трећем случају).

206. **Пети случај.** — Измерене су две стране и угао који лежи према једној од њих, нпр. a, b, A. Остали комади c, B, C нађени су рачуном. Да се из грешака $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle A$ одреде грешке $\triangle c$, $\triangle B$, $\triangle C$.

Грешку $\triangle c$ добијамо непосредно из прве једн. 177)

$$\triangle c = \frac{\triangle a - \cos C \triangle b - \sin b \sin C \triangle A}{\cos B},$$

грешку $\triangle B$ из прве једн. 179)

$$\triangle B = \left[\frac{\triangle A}{tg A} - \frac{\triangle a}{tg\, a} + \frac{\triangle b}{tg\, b}\right] tg B.$$

Грешку $\triangle C$ добићемо кад у трећу једначину 177) заменимо за $\triangle c$ горе означену вредност. Трећа једначина 177) постаје тиме

$$\frac{\triangle a - \cos C \triangle b - \sin b \sin C \triangle A}{\cos B} =$$

$$\cos B \triangle a + \cos A \triangle b + \sin a \sin B \triangle C$$

или кад је средимо

$$\sin^2 B \triangle a - (\cos C + \cos A \cos B) \triangle b$$

$$- \sin b \sin C \triangle A - \sin a \sin B \cos B \triangle C = 0,$$

одакле, имавши на уму да је

$\cos C + \cos A \cos B = \sin A \sin B \cos c$ (једн. 147 у чл. 159.)

$\sin b \sin C = \sin c \sin B$ (једн. 145 у чл. 157),

$\sin B \triangle a - \sin A \cos c \triangle b - \sin c \triangle A - \sin a \cos B \triangle C = 0$

$$\triangle C = \frac{tg B \triangle a}{\sin a} - \frac{\cos c \sin A}{\sin a \cos B} \triangle b - \frac{\sin c \triangle A}{\sin a \cos B}.$$

За израчунавање грешака имамо, дакле, следеће три једначине

$$177_c) \begin{cases} \triangle c = \dfrac{\triangle a - \cos C \triangle b - \sin b \sin C \triangle A}{\cos B} \\[2ex] \triangle B = \left[\dfrac{\triangle A}{tg A} - \dfrac{\triangle a}{tg a} + \dfrac{\triangle b}{tg b}\right] tg B \\[2ex] \triangle C = \dfrac{tg B}{\sin a} \triangle a - \dfrac{\sin A \cos c}{\sin a \cos B} \triangle b - \dfrac{\sin c}{\sin a \cos B} \triangle A. \end{cases}$$

207. **Шести случај.** — Дата су два угла и страна која је супротна једноме од њих, нпр. A, B, a. Остали елементи b, c, C добивени су рачуном. Да се из грешака $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle a$ одреде грешке $\triangle b$, $\triangle c$, $\triangle C$.

Пошто овај задатак стоји са последњим (петим) задатком у односу реципрочности, то ћемо, најлакше, доћи до једначина за израчунавање грешака кад једначине за прошли (пети) случај применимо на суплементни сферни троугао. На тај начин добијамо ове обрасце

$$178_c) \begin{cases} \triangle C = \dfrac{-\triangle A - \cos c \triangle B + \sin B \sin c \triangle a}{\cos b} \\[2ex] \triangle b = \left[\dfrac{\triangle a}{tg a} - \dfrac{\triangle A}{tg A} + \dfrac{\triangle B}{tg B}\right] tg b \\[2ex] \triangle c = -\dfrac{tg b}{\sin A} \triangle A - \dfrac{\sin a \cos C}{\sin A \cos b} \triangle B + \dfrac{\sin C}{\sin A \cos b} \triangle a. \end{cases}$$

Напомена. Прву и другу од ових једначина добијамо непосредно из прве једн. 178) и прве једн. 159). Трећу бисмо добили на исти начин као и у прошлом случају: замењујући у трећу једн. 178) већ добивену вредност за $\triangle C$.

САДРЖАЈ.

ПРВИ ДЕО

ГОНИОМЕТРИЈА.

I

ОПШТИ ПОЈМОВИ.

1.

Дефиниције.

2.

Својства и односи између тригонометриских функција.

II

ОПШТИ ОБРАСЦИ.

1.

Тригонометриске функције збира и разлике двају лукова.

2.

Тригонометриске функције двоструких и половљених лукова.

3.

Претварање збира и разлике тригонометриских функција у производе.

III

О ИЗРАЧУНАВАЊУ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ ФУНКЦИЈА.

1.

Вредности тригонометриских функција за извесне особене углове.

2.

*** О израчунавању тригонометриских функција уопште.**

ДРУГИ ДЕО

НАУКА О ЛОГАРИТМИМА.

I

ТЕОРИЈА.

1.

Дефиниције и опште теореме.

2.

Логаритамске системе.

3.

Својства Бриг-ових логаритама.

4.

* Израчунавање логаритама.

II.

УПОТРЕБА ЛОГАРИТАМСКИХ ТАБЛИЦА.

1.

О употреби логаритамских таблица уопште.

2.

Логаритамске таблице за обичне бројеве.

3.

Логаритамске таблице за тригонометриске бројеве.

ТРЕЋИ ДЕО

ПРИМЕНЕ ГОНИОМЕТРИСКИХ ФУНКЦИЈА.

I

РАЗРЕШАВАЊЕ ПРАВОУГЛИХ ТРОУГЛОВА.

1.

Општа расматрања.

2.

Задатци.

II

* УПОТРЕБА ГОНИОМЕТРИСКИХ ФУНКЦИЈА КОД ЛОГАРИТАМСКОГ РАЧУНАЊА.

1.

Удешавање израза за логаритамско рачунање.

2.

Логаритми збира и разлике.

III
КОМПЛЕКСНЕ КОЛИЧИНЕ.

1.
О комплексним количинама у опште.

Члан Страна

2.
Геометриско представљање комплексних количина.

3.
Алгебарске радње са комплексним количинама.

4.
Функције комплексних количина.

5.

Употреба комплексних количина при решавању кубних једначина

ЧЕТВРТИ ДЕО

РАВНА ТРИГОНОМЕТРИЈА.

I.

ТЕОРЕМЕ И ОБРАСЦИ.

1.

Теореме и обрасци за стране и угле једнога троугла.

2.

Израчунавање површине троугла.

II

ПРИМЕРИ И ПРИМЕНЕ.

1.

Основни задатци о разрешавању троуглова.

2.

*** Примене у Геометрији.**

3.

* Примене у Геодезији.

III

*УТИЦАЈ ГРЕШАКА У ПОДАТЦИМА НА РАЧУНОМ ДОБИВЕНЕ РЕЗУЛТАТЕ.

1.

Општа посматрања.

2.

Израчунавање грешака у резултатима из грешака у податцима.

3.

Четири основна случаја за троугао.

ПЕТИ ДЕО

СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА.

I

ПОЈМОВИ ИЗ НАУКЕ О ЛОПТИ.

1.

О лопти.

2.

О рогљевима.

3.

О сферним троуглима.

II

ТЕОРЕМЕ И ОБРАСЦИ.

1.

Теореме и обрасци за стране и угле једнога сферног троугла.

2.

Обрасци за сферни ексцес и површину сфернога троугла.

III

ПРИМЕРИ И ПРИМЕНЕ.

1.

Основни задатци о разрешавању правоуглих сферних троуглова.

2.

Основни задатци о разрешавању општих сферних троуглова.

3.

*** Примене у Геометрији и Геодезији.**

4.

*** Примене у Сферној Астрономији.**

IV

* УТИЦАЈ ГРЕШАКА У ПОДАТЦИМА НА РАЧУНОМ ДОБИВЕНЕ РЕЗУЛТАТЕ.

1.

Израчунавање грешака у резултатима из грешака у податцима.

2.

Шест основних случајева за општи сферни троугао.