Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Највећи заједнички делилац и најмањи заједнички садржалац: школске теме и пратећа теорија

Ментор: Проф. др Александар Липковски

Чланови комисије: Проф. др Зоран Петровић,
Проф. др Небојша Икодиновић

Студент:Марија Пруткин 1049/2014

Београд,
2015.

Садржај

1 Увод

Са појмовима највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца се ученици упознају на самом почетку свог школовања. Изучавање и коришћење највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца се, на различитим нивоима, наставља током целе основне и средње школе. При томе се коришћење ових појмова са бројева преноси и даље, на полиноме. Може се слободно рећи да ови појмови спадају у најзначајније алгебарске појмове који се провлаче кроз цело школовање и веома много користе.

2 Дељивост

Дељивост бројева је прва тема из области алгебре са којом се ученици сусрећу у петом разреду основне школе. Као и са било којом другом, и на почетку ове теме је битно мотивисати ученике на рад и стицање нових знања. Ученицима је од изузетног значаја да добро савладају дељивост бројева, одређивање највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца јер без тога касније неће моћи да скраћују, упоређују, сабирају и одузимају разломке. Међутим, ученицима није довољна мотивација то што им је једна тема неопходна да би савладали следећу, па би их требало заинтересовати за дељивост и уопште особине бројева у вези са дељењем уочавањем неких правилности које важе.

У уџбеницима за 5. разред основне школе упознавање ученика са дељивошћу природног броја природним бројем започиње мотивационим примерима.

Пример 1. *Госпођа Драгица пожелела је да девет гербера распореди у вазе, тако да у свакој од ваза буде једнак број цветова.*

Најпре је покушала да их распореди у две вазе, што јој није успело. Један цвет је остао нераспоређен.

Успела је да распореди девет цветова у три вазе, у свакој по три цвета.

Овај пример је преузет из [2].

Циљ оваквог примера је да деца помоћу једноставне ситуације из реалног живота која им је у примеру представљена дођу до закључка да број 9 није дељив бројем 2 (те 9 цветова није могуће распоредити у 2 вазе тако да у свакој од њих буде једнак број цветова), а такође и да је број 9 дељив бројем 3 (па је могуће 9 цветова распоредити у 3 вазе, тако да у свакој од њих иде исти број цветова).

Након мотивационог примера, следи дефинисање релације дељивости и увођење симбола $|$.

Дефиниција 1. *Број $m \in \mathbb{N}_0$ дељив је природним бројем $n \in \mathbb{N}$ ако постоји број $k \in \mathbb{N}_0$ за који важи да је $m = k \cdot n$.*

То означавамо са $n|m$ и читамо "број n дели број m".

Посебну пажњу би требало посветити запису $n|m$ и разјаснити положај бројева n и m, јер ученици веома често грешком замене места овим бројевима, или пак уместо да читају "n дели m"грешком кажу "n је дељиво са m".

Дефиниција 2. *Ако је број $m \in \mathbb{N}_0$ дељив бројем $n \in \mathbb{N}$ тада кажемо да је n делилац броја m , а m називамо садржаоцем броја n.*

Из претходне дефиниције се лако може закључити да ако је $m = 0$, онда је за било које $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0$ испуњено $m = n \cdot k$, тј. да сваки природан број дели нулу.

$$n \in \mathbb{N} : n|0$$

Слично, може се закључити да нула не дели ниједан природан број$m \in \mathbb{N}$, јер за свако $k \in \mathbb{N}_0$ важи да је $m \neq k \cdot 0$.

За произвољан број $m \in \mathbb{N}_0$ за $k = m$ важи једнакост $m = m \cdot 1$, па се на основу тога може закључити да број 1 дели сваки природан број.

$$m \in \mathbb{N}_0 : 1|m$$

Пример 2. *Пошто је $3 \cdot 25 = 75$, тада је $75 : 25 = 3$, па се може закључити да је број 75 дељив бројем 25.*

Дакле, $25|75$.

Слично, може се извести и закључак да $3|75$. *Требало би нагласити да су бројеви 3 и 25 делиоци броја 75, а да је број 75 садржалац бројева 3 и 25.*

Из претходног примера закључујемо да важи следеће:

Дефиниција 3. *Сваки природан број $m \in \mathbb{N}$ дељив је својим чиниоцима, тј. ако важи да је $m = n \cdot k$ следи да $n|m$ и $k|m$.*

Ученици су након овога упознати са чињеницом да број може имати више различитих делилаца, као и више различитих садржалаца. То даје довољно основе да се уведе дефиниција скупа делилаца неког броја, као и скупа његових садржалаца.

Дефиниција 4. *Скуп делилаца неког броја m означава се са D_m:*

$$D_m = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ и } x|m\}$$

Скуп садржалаца неког броја m означава се са S_m:

$$S_m = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ и } m|x\}$$

Пример 3. *Одредити делиоце броја 10.*

Сличан пример се може наћи у [5].

За решавање овог примера потребно је да ученици из тога што је $10 = 2 \cdot 5$ закључе да $2|10$ и $5|10$, тј. да су бројеви 2 и 5 делиоци броја 10. Из тога што знамо да је $10 = 1 \cdot 10$, следи да $1|10$ и $10|10$. Можемо закључити да, поред тога што је јединица делилац било ког природног броја, и тај број је сам себи делилац.

Дакле, скуп делилаца броја 10 је скуп $D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$.

Пример 4. *Наћи све делиоце бројева прве десетице.*

број	делиоци
1	1
2	1,2
3	1,3
4	1,2,4
5	1,5
6	1,2,3,6
7	1,7
8	1,2,4,8
9	1,3,9
10	1,2,5,10

Може се приметити да бројеви $2, 3, 5$ и 7 имају само по два делиоца, и то су сам тај број и јединица.

Овај пример може послужити и као мотивација за дискусију са ученицима о броју елемената скупа свих делиоца неког природног броја.

3 Прости и сложени бројеви

Сваки елемент скупа природних бројева тј. скупа $\mathbb{N}$ има барем један делилац. То је број 1 јер:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1|n$$

Сви природни бројеви осим броја 1, тј. сви бројеви из скупа $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ имају најмање два делиоца, јер су сви дељиви бројем 1 и самим собом.

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} : 1|n \text{ и } n|n$$

$$n = n \cdot 1$$

Међутим скуп $\mathbb{N}$ садржи и бројеве који имају више од два делиоца, нпр.

$$120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

Ученици су сада упознати са тиме да неки скупови делилаца имају по два елемента, а неки и више од два. На тај начин и уводимо просте и сложене бројеве.

Дефиниција 5. *Природне бројеве који имају тачно два делиоца, тј. дељиви су самим собом и бројем* 1*, називамо простим бројевима.*

Дефиниција 6. *Природни бројеви који имају више од два делиоца називају се сложени.*

Водећи се претходним дефиницијама, може се закључити да је број 2 једини паран прост број, јер су сви остали поред броја 1 и самим собом, дељиви и бројем 2, па су самим тим сложени.

Број 1 није ни прост ни сложен.

Број 0 сматрамо сложеним бројем, јер је дељив било којим природним бројем.

Пример 5. *Постоји много покушаја да се одреди израз по коме би могао да се одреди сваки прост број. На пример, ако се у изразу* $n \cdot n + n + 11$ *замене бројеви* $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$*, добиће се прост бројеви* $11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101$*. Ако се замени* $n = 10$ *добиће се број* 121 *који није прост јер је дељив са* 11*. Дакле, претходни израз даје просте бројевесамо за* $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$*.*

Претходни пример је преузет из [2].

4 Растављање на чиниоце

Теорема 1. *Сваки сложен број има најмање један прост чинилац.*

Доказ. Нека је a сложен број. Он је према дефиницији сложених бројева дељив неким бројем b, таквим да је $0 < b < a$. Уколико је број b прост, тада a има један прост делилац. Ако је пак b сложен, онда он по дефиницији сложених бројева мора бити дељив неким бројем c, таквим да је $0 < c < b$. Ако је c прост, онда је он прост чинилац броја a, ако није, онда понављамо претходни поступак. Наварно, тај процес мора имати краја, јер број a мора имати коначан број чинилаца, па се мора доћи и до простог чиниоца броја a.

□

Теорема 2. *Сваки сложен број може се записати у облику производа простих чинилаца.*

Тај процес се назива "растављање броја на просте чиниоце".

Доказ. Нека је a сложен број. Према теореми 1, он има један прост чинилац. Нека је то број p_1. Дакле,

$$a = p_1 \cdot b$$

Ако је b прост број, онда је a записан у облику производа простих бројева. Ако је b сложен, онда је:

$$b = p_2 \cdot c,$$

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot c$$

Ако је c прост, онда је a записан као производ простих бројева. Ако је пак сложен, онда се процес понавља све док се a не запише у облику производа простих чинилаца. Тај процес се након коначног броја корака мора завршити јер се a мора записати помоћу коначног броја чинилаца.

□

У уџбеницима за пети разред основне школе, ова тема је обрађена углавном кроз примере, јер је пракса показала да ученици на тај начин лакше и брже савладају градиво.

Пример 6. *Колико простих делилаца имају бројеви* 4 *и* 10*? А број* 30*?*

Број $4 = 2 \cdot 2$, дакле број 4 има један прост делилац.
Слично $10 = 2 \cdot 5$, па број 10 има два делиоца.
Број $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, тј. има три проста делиоца и то су бројеви 2, 3 и 5.

Циљ оваквих примера је да ученици добију прилику да стекну увид у то да раставити неки сложен број на просте чиниоце значи да би га требало написати у облику производа простих чинилаца.

У [5] процес растављања на чиниоце је објашњен на три начина.

Пример 7. *Раставити на чиниоце број* 48*.*

Први начин:

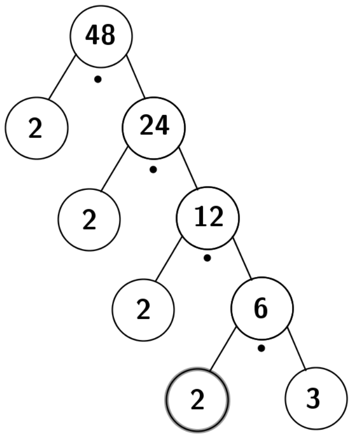
$$\begin{aligned} 48 &= 2 \cdot 24 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 12 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 2^4 \cdot 3 \end{aligned}$$

Растављање броја на чиниоце је најједноставније испитивањем који је његов најмањи делилац из скупа простих бројева.

Како је број 48 дељив бројем 2, следи да је $48 = 2 \cdot 24$.

Пошто је број 24 чинилац броја 48, који је сложен и такође се може раставити на просте чиниоце, претходни поступак се понавља за растављање броја 24 на просте чиниоце.

Други начин:



Овај начин приказује да се број 48 може написати као производ бројева 2 и 24, те да се даље број 24 раставља на просте чиниоце, тј. да се може записати као производ бројева 2 и 12. Број 12 је производ бројева 2 и 6, а број 6 се може написати као производ бројева 2 и 3, при чему су оба чиниоца прости бројеви.

Дакле, $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Трећи начин:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Број 48 се прво дели са 2, количник је број 24 и он се записује испод броја 48.

Број 24 је такође дељив са 2, количник је број 12 и записује се испод 24.

12 је дељиво са 2, па количник, број 6 пише се испод 12.

6 је такође дељиво са 2, па количник 3 записује се испод броја 6.

И на крају, број 3 је дељив са 3, а количник је број 1.

Са десне стране црте су прости чиниоци броја 48, тј. $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Ученицима је најлакше и најбрже да дођу до решења користећи трећи начин, па углавном само тај поступак и користе. Требало би само нагласити да би при коришћењу овог начина требало делити само простим бројевима и да се обично креће од најмањег, тј. броја 2. Поступак се понавља докле год је количник дељив са 2. Затим се проверава дељивост са 3, па са 5, и тако редом. Дакле, дели се само са бројевима који су прости.

Пример 8. *Раставити на чиниоце бројеве* 315, 196 *и* 243*:*

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Дакле, $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

$$\begin{array}{r|l} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Следи да је $196 = 2^2 \cdot 7^2$.

$$\begin{array}{r|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Може се закључити да је $243 = 3^5$.

Пример 9. *Одреди све бројеве мање од* 1500 *код којих се у растављању на просте чиниоце број* 2 *појављује тачно четири пута, а број* 3 *тачно два пута.*

У овом примеру се траже бројеви који су умножак броја $2^4 \cdot 3^2$ са простим бројем већим од 3. То су $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ и $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Приликом обраде ове теме са ученицима, требало би одрадити што више примера, као и различитих начина, како би ученици у што већој мери усвојили знање на које ће се у току даљег математичког изучавања веома често позивати.

5 Заједнички делилац. Највећи заједнички делилац

У већини уџбеника за пети разред, ученици се у причу о највећем заједничкод делиоцу уводе кроз интересантне примере који су повезани са свакодневним животом.

Пример 10. *Марков деда на селу има* 8 *белих и* 12 *црних зечева. Марко треба да му помогне да их распореди у кавезе, тако да у сваком кавезу буде једнак број зечева исте боје. Колико је кавеза Марку и његовом деди за то потребно?*

Овај пример је преузет из [5].

Беле зечеве могу распоредити у 1, 2, 4 или 8 кавеза тако да у сваком од њих буде једнак број белих зечева. То су у ствари делиоци броја 8.

$$D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$$

Црне зечеве могу распоредити у 1, 2, 3, 4, 6 или 12 кавеза. То су деиоци броја 12.

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Како у сваком кавезу мора бити једнак број зечева исте боје, Марко и његов деда могу закључити да се сви зечеви могу распоредити у 1, 2 или 4 кавеза. Бројеви 1, 2 и 4 су делиоци и броја 8 и броја 12, па су то заједнички делиоци бројева 8 и 12.

Од свих заједничких делиоца бројева 8 и 12, број 4 је највећи, па је то њихов највећи заједнички делилац.

Дефиниција 7. *Број којим се могу поделити два или више природних бројева назива се заједнички делилац тих бројева.*

Скуп заједничких делилаца природних бројева a и b означава се са $D_{a,b}$.

Дефиниција 8. *Највећи од заједничких делилаца назива се највећи заједнички делилац.*

У различитим уџбеницима за пети разред, се највећи заједнички делилац различито обележава. У [5] и [8], највећи заједнички делилац природних бројева a и b се означава са $D(a, b)$, док се у осталим уџбеницима означава са $NZD(a, b)$.

Деци је углавном лакше да прихвате да се највећи заједнички делилац природних бројева a и b означава са $NZD(a, b)$, јер тај запис повезују са:

N- највећи
Z- заједнички
D- делилац

Ученицима се пружа више начина за одређивање највећег заједничког делиоца за два броја, па се кроз израду примера долази до најбржег и најефикаснијег начина.

Пример 11. *Одредити највећи заједнички делилац бројева* 10 *и* 15.

$$D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$$
$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$$
$$D_{10,15} = \{1, 5\}$$

Највећи заједнички делилац бројева 10 и 15 је $NZD(10, 15) = 5$.

За одређивање највећег заједничког делиоца у овом примеру, било је потребно прво одредити скупове делилаца оба броја за која се највећи заједнички делилац тражи, затим скуп заједничких делилаца за та два броја, и на крају из тог скупа треба издвојити највећи.

Наравно, овакве примере је могуће урадити и на другачији начин, помоћу растављања бројева на просте чиниоце.

Дефиниција 9. *Највећи заједнички делилац је производ простих чинилаца који су заједнички у растављању свих бројева чији највећи заједнички делилац одређујемо.*

Пример 12. *Одредити највећи заједнички делилац бројева* 300 *и* 840.

Ако је потребно одредити највећи заједнички делилац бројева 300 и 840, прво се ти бројеви растављају на просте чиниоце.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Дакле, } 300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Дакле, } 840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Како је највећи заједнички делилац једнак производу заједничких простих делилаца бројева 300 и 840, а то су бројеви 2, 2, 3 и 5, то је $NZD(300, 840) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Скраћено се то може записати и на другачији начин:

$$\begin{array}{rr|l} 300, & 840 & 2 \\ 150, & 420 & 2 \\ 75, & 210 & 3 \\ 25, & 70 & 5 \\ 5, & 14 & \end{array}$$

Дакле, $NZD(300, 840) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Ученицима је лакше одређивање највећег заједничког делиоца помоћу растављања бројева на чиниоце јер је запис краћи и брже долазе до решења.

Потребно је посебно нагласити да се поступак израчунавања највећег заједничког делиоца завршава када се у истом реду добију узајамно прости бројеви.

Дефиниција 10. *Природни бројеви a и b су узајамно прости ако им је једини заједнички делилац број* 1.

Пример 13. *Одредити највећи заједнички делилац бројева* 7 *и* 15.

Како бројеви 7 и 15 осим броја 1 немају других заједничких делилаца, тј. не постоји број различит од 1 којим се могу поделити 7 и 15, закључујемо да је $NZD(7, 15) = 1$.

Дакле, бројеви 7 и 15 су узајамно прости.

Дефиниција 11. *Ако су природни бројеви a и b узајамно прости, тада је њихов највећи заједнички делилац број* 1, *тј.* $NZD(a, b) = 1$.

Пример 14. *Одредити највећи заједнички делилац бројева* 10 *и* 70.

$$\begin{array}{rr|l} 10, & 70 & 2 \\ 5, & 35 & 5 \\ 1, & 7 & \end{array}$$

Дакле, $NZD(10, 70) = 2 \cdot 5 = 10$.

Пример 15. *Одредити највећи заједнички делилац бројева* 15 *и* 45.

$$\begin{array}{rr|l} 15, & 45 & 3 \\ 5, & 15 & 5 \\ 1, & 3 & \end{array}$$

Дакле, $NZD(15, 45) = 3 \cdot 5 = 15$.

Ученици би требло да примете да се у примерима попут претходна два, тражи NZD бројева од којих је један дељив другим.

Дефиниција 12. *Ако* $a|b$, *тада је* $NZD(a, b) = a$.

Пример 16. *Одредити највећи заједнички делилац бројева* 15, 50 *и* 75.

Како је у овом примеру потребно одредити највећи заједнички делилац за три броја, потребно је наћи заједничке просте делиоце сва три броја.

$$\begin{array}{rrr|l} 15, & 50, & 75 & 5 \\ 3, & 10 & 15 & \end{array}$$

Пошто су бројеви 3, 10 и 15 узајамно прости, немају других заједничких делилаца осим броја 1, поступак тражења заједничких простих делилаца се ту завршава, па је $NZD(15, 50, 75) = 5$.

Пример 17. *Одредити највећи заједнички делилац бројева* 48, 72 *и* 96.

Слично као у претходном примеру, и у овом је потребно прво наћи све заједничке просте делиоце.

$$\begin{array}{rrr|l} 48, & 72, & 96 & 2 \\ 24, & 36, & 48 & 2 \\ 12, & 18, & 24 & 2 \\ 6, & 9, & 12 & 3 \\ 2, & 3, & 6 & \end{array}$$

Дакле, $NZD(48, 72, 96) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$

6 Решавање проблемских задатака помоћу одређивања најмањег заједничког делиоца

Приликом обраде ове теме, ученицима је потребно скренути пажњу и на широку примену највећег заједничког делиоца при решавању неких проблемских задатака и многих конкретних проблема.

Пример 18. *Две вреће јабука, једну од $36kg$ сорте делишес и другу од $42kg$ сорте јонатан, требало би препаковати у мање, једнаке вреће тако да у свакој буду јабуке исте сорте. Израчунај највећу количину јабука коју треба ставити у сваку мању врећу.*

Овај пример је преузет из [7].

Како би се јабуке расподелиле у мањи вреће тако да у свакој буде највећа могућа и једнака количина јабука исте сорте, требало би одредити највећи број којим можемо поделити количине јабука обе сорте. Дакле, требало би одредити ништа друго до $NZD(36, 42)$.

$$\begin{array}{rr|l} 36, & 42 & 2 \\ 18, & 21 & 3 \\ 6, & 7 & \end{array}$$

Може се закључити да је $NZD(36, 42) = 2 \cdot 3 = 6.$

Закључак је да се у сваку мању врећу може ставити по $6kg$ јабука.

$36kg$ јабука сорте делишес требало би поделити у 6 мањих врећа по $6kg$, а $42kg$ јабука сорте јонатан би требало поделити у 7 мањих врећа од по $6kg$.

Пример 19. *Два канапа, дужине* $75cm$ *и* $105cm$*, требало би исећи на што веће делове једнаких дужина. Колика ће бити дужина сваког дела и колико таквих делова ће се добити од оба канапа?*

Овај пример је преузет из [5].

Како је потребно и један и други канап поделити на једнаке делове, потребно је наћи број који дели и 75 и 105, тј, заједнички делилац бројева 75 и 105. С обзиром на то да би делови канапа требало да буду што већи, њихова дужина је једнака највећем заједничком делиоцу бројева 75 и 105.

$$\begin{array}{rr|l} 75, & 105 & 3 \\ 25, & 35 & 5 \\ 5, & 7 & \end{array}$$

Како је највећи заједнички делилац бројева 75 и 105 једнак $NZD(74, 105) = 3 \cdot 5 = 15$, може се извести закључак да ће дужина сваког новодобијеног дела бити $15cm$.

Од првог канапа ће се добити $75 : 15 = 5$ делова, а од другог канапа $105 : 15 = 7$ делова.

Дакле, укупно ће се добити 12 делова канапа.

Пример 20. 180 *ученика једне и* 252 *ученика друге школе требало би поделити у екипе за спортска такмичења, тако да у свакој од екипа буде једнак број ученика из прве и једнак број ученика из друге школе. Колико је највише таквих екипа могуће формирати и по колико ученика из сваке школе ће бити у једној екипи?*

Овај пример је преузет из [2].

Како је ученике из обе школе потребно поделити у екипе тако да у свакој екипи буде једнак број ученика из прве и друге школе, потребно је наћи број којим можем поделити број ученика из прве и број ученика из друге школе, тј. 180 и 252. А пошто је потребно одредити највећи број таквих екипа, тражени број је највећи заједнички делилац бројева 180 и 252.

$$\begin{array}{rr|l} 180, & 252 & 2 \\ 90, & 126 & 2 \\ 45, & 63 & 3 \\ 15, & 21 & 3 \\ 5, & 7 & \end{array}$$

Дакле, $NZD(180, 252) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

Дакле, ученике можемо поделити у 36 екипа.

У свакој екипи ће из прве школе учествовати по $180 : 36 = 5$ ученика, а из друге школе по $252 : 36 = 7$ ученика.

Пример 21. *Тераса је дугачка* $270cm$ *а широка* $210cm$. *Ако је желимо поплочати плочицама квардатног облика што већих димензија, колика ће бити дужина сваке плочице?*

Ако се тераса поплочава плочицама квардатног облика, онда и њена дужина и њена ширина морају бити дељиве бројем плочица по дужини односно ширини. Дакле, потребно је наћи заједнички делилац бројева 270 и 210. Како се у задатку тражи још и да су плочице што веће, то значи, да је потребно наћи највећи заједнички делилац бројева 270 и 210.

$$\begin{array}{rr|l} 270, & 210 & 2 \\ 135, & 105 & 3 \\ 45, & 35 & 5 \\ 9, & 7 & \end{array}$$

Може се израчунати да је $NZD(270, 210) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Дакле, ивица плочице ће бити $30cm$.

По дужини терасе ће стати $270 : 30 = 9$ плочица, а по ширини $210 : 30 = 7$ плочица.

Пример 22. *Две зграде висине* $24m$ *и* $32m$ *би требало да имају спратове једнаке висине. Које висине спратова су могуће? Које од њих су смислене за боравак људи?*

Како би обе зграде требало да имају спратове исте висине, то значи да та висина може бити само број којим је могуће поделити висине обе зграде. То значи да би требало одредити заједнички делилац бројева 24 и 32.

Скуп делилаца броја 24 је $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

Скуп делилаца броја 32 је $D_{32} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

Дакле, скуп заједничких делилаца је скуп $D_{24,32} = \{1, 2, 4, 8\}$.

Из тога следи да спратови обе зграде у теорији могу бити висине $1m$, $2m$, $4m$ или $8m$. Међутим, смислено је да висина спрата зграде, која је намењена за боравак људи, буде $2m$.

Пример 23. *Лука има* 20 *црвених,* 30 *жутих и* 45 *плавих кликера. Колико се највише пријатеља може играти кликерима, а да сви игру започну с једнаким бројем црвених, једнаким бројем жутих и једнаких бројем плавих кликера? Колико ће којих кликера добити свако од њих?*

Како пријатељи међу собом морају на једнаке делове поделити и 20 црвених, и 30 жутих, као и 45 плавих кликера, то значи да број пријатеља мора бити такав, да се тим бројем може поделити 20 црвених, 30 жутих, односно 45 плавих кликера. А како се у задатку тражи највећи могући број пријатеља који могу поделити кликере, није довољно наћи само заједнички делилац бројева 20, 30 и 45, већ је потребно наћи највећи заједнички делилац за те бројеве.

$$\begin{array}{ccc|c} 20, & 30, & 45 & 5 \\ 4, & 6, & 9 & \end{array}$$

Како су бројеви 4, 6 и 9 узајамно прости, заустављамо се у процесу тражења највећег заједничког делиоца, и закључује се да је $NZD(20, 30, 45) = 5$.

Дакле, највише 5 пријатеља може међу собом поделити 20 црвених, 30 жутих и 45 плавих кликера на једнаке делове и започети игру са њима.

То значи да ће сваки од њих добити по $20 : 5 = 4$ црвена кликера, $30 : 5 = 6$ жутих и $45 : 5 = 9$ плавих кликера.

Од велике користи може бити уколико ученицима предочимо значај и корист налажења најмањег заједничког делиоца код скраћивања разломака, множења и дељења разломака.

7 Заједнички садржалац. Најмањи заједнички садржалац

Без познавања најмањег заједничког садржалаца немогуће је упоређивати разломке, сабирати и одузимати разломке различитих именилаца и тако даље, тако да је од изузетног значаја да сви ученици савладају поступак налажења најмањег заједничког садржаоца. Како ће то тек користити у будућим математичким темама петог разреда, па и виших разреда, неопходно је инсистирати на трајности усвојених знања.

Слично као код највећег заједничкод делиоца, потребан је мотивациони пример, којим би се ученици увели у причу о најмањем заједничком садржаоцу и увидели потребу за увођењем новог математичког појма.

Пример 24. *Мајини родитељи, раде у авио компанији. Мајин тата је пилот и лети на релацији Београд- Лондон, а Мајина мама је стјуардеса и лети на релацији Београд- Париз. Ако је Мајин тата у Београду сваки трећи дан, а њена мама сваки четврти дан, када ће Мајини родитељи истовремено бити у Београду?*

Овај пример је преузет из [5].

Како је Мајин тата у Београду сваки трећи дан, то значи да ће у Београду бити после 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... дана.

Може се приметити да су ови бројеви садржаоци броја 3.

$$S_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, \cdots\}$$

Мајина мама је у Београду сваки четврти дан, што значи да ће у Београду бити после 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... дана.

Ови бројеви су садржаоци броја 4.

$$S_4 = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, \cdots\}$$

Посматрајући ова два скупа, може се извући зкључак да ће Мајини родитељи истовремено бити у Београду после 12, 24, 36, ... дана, јер су то заједнички садржаоци бројева 3 и 4.

$$S_3 \cap S_4 = S_{3,4} = \{12, 24, 36, \cdots\}$$

Дефиниција 13. *Број који је дељив са два или више природних бројева назива се заједнички садржалац тих бројева.*

Дефиниција 14. *Скуп свих заједничких садржалаца два броја a и b представља пресек скупова садржалаца једног броја и садржалаца другог броја и означавамо га са $S_{a,b}$.*

Потребно је приметити да скуп садржалаца неког броја a није коначан, тј. да су то сви природни бројеви облика $a \cdot k, k \in \mathbb{N}$. Слично скуп садржалаца броја b није коначан и њему припадају бројеви облика $b \cdot k, k \in \mathbb{N}$. Следи да ни скуп заједничких садржалаца не може бити коначан, али из њега можемо издвојити најмањи елемент. То ће бити најмањи заједнички сдржалац бројева a и b.

Дефиниција 15. *Најмањи од заједничких садржалаца природних бројева a и b називамо најмањи заједнички садржалац бројева a и b.*

Као и ознаке за највећи заједнички делилац, тако се и ознаке за најмањи заједнички садржалац разликују од уџбеника до уџбеника. У [5] и [8] најмањи заједнички садржалац се обележава са $S(a, b)$, док се у осталим уџбеницима означава са $NZS(a, b)$.

Ученицима је углавном јасније ако најмањи заједнички садржалац два броја a и b обележавају са $NZS(a, b)$ јер тај запис повезују са почетним словима речи:

N- најмањи
Z- заједнички
S- садржалац

Постоји више начина за налажење најмањег заједничког садржалаца. Корисно је ученицима изложити и објаснити сваки од њих, како би и сами могли да увиде који је начин најефикаснији и њима најлакши.

Пример 25. *Одредити најмањи заједнички садржалац бројева* 9 *и* 12.

Први начин:

Скуп садржалаца броја 9 је:

$$S_9 = \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 \cdots\}$$

Слично, може се одредити скуп садржалаца броја 12:

$$S_{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, \cdots\}$$

Посматрајући ова два скупа, долази се до закључка да је скуп заједничких садржалаца:

$$S_{9,12} = S_9 \cap S_{12} = \{36, 72, \cdots\}$$

Како је најмањи елемент овог скупа број 36, закључак је да је:

$$NZS(9, 12) = 36$$

Овај начин одређивања најмањег заједничког садржалаца одузима поприлично доста времена, нарочито док се исписују елементи скупа садржалаца за оба броја, и након тога траже они који су заједнички за оба скупа.

Други начин:

Овај начин налажења заједничког садржаоца подразумева да прво упоредимо бројеве 9 и 12. Како је број 12 већи, налази се скуп његових садржалаца:

$$S_{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, \cdots\},$$

а затим се проверава који од елемената тог скупа је садржалац и броја 9.

12 није дељиво са 9, па 12 није садржалац броја 9.

Ни 24 није дељиво са 9, тако да ни 24 није садржалац броја 9.

Како је $36 : 9 = 4$, закључује се да је број 36 најмањи заједнички садржалац бројева 9 и 12.

Дакле, $NZS(9, 12) = 36$.

Овај начин налажења најмањег заједничког садржалаца одузима нарочито доста времена док се сваки редом елемент скупа садржалаца броја 12 провери да ли је уједно и садржалац броја 9.

Трећи начин:

Хајде да прво бројеве 9 и 12 раставимо на чиниоце:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Дакле, } 9 = 3 \cdot 3.$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Дакле, } 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Најмањи заједнички садржалац ројева 9 и 12 може се добити као производ свих простих чинилаца који се јављају у растављању броја 9 и у растављању броја 12.

Дакле, $NZS(9, 12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

Код овог начина тражења најмањег заједничког садржалаца, ученицима би требало посебну пажњу скренути на то да смо код одређивања највећег заједничког делиоца множили оне просте чиниоце који се појављују и у једном и у другом броју, док код одређивања најмањег заједничког садржалаца множимо просте чиниоце који се појављују бар у једном броју.

Четврти начин:

Најмањи заједнички садржалац бројева 9 и 12 се може наћи и ако оба броја истовремено растављамо на чиниоце, с тим што делимо бројем који дели бар један од њих.

Ако су оба броја дељива неким простим чиниоцем, онда оба броја и делимо њиме.

Ако је само један број дељив неким простим чиниоцем, онда само тај и делимо, а други само преписујемо.

Овај поступак се наставља док све не раставимо на просте чиниоце.

$$\begin{array}{rr|l} 9, & 12 & 2 \\ 9, & 6 & 2 \\ 9, & 3 & 3 \\ 3, & 1 & 3 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

Дакле, $NZS(9,12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Треба посебно нагласити да се поступак тражења најмањег заједничког садржаоца завршава када у истом реду добијемо све 1, што значи да смо све бројеве раставили на просте чиниоце.

Овај начин је вероватно најбржи и најефикаснији за одређивање најмањег заједничког садржаоца, а вероватно га ученици највише и примењују у пракси.

Дефиниција 16. *Када два броја истовремено раставимо на просте чиниоце, њихов намјмањи заједнички садржалац једнак је производу свих простих чинилаца који су у растављању учествовали.*

Пример 26. *Одредити најмањи заједнички садржалац бројева* 4 *и* 15.

$$\begin{array}{rr|l} 4, & 15 & 2 \\ 2, & 15 & 2 \\ 1, & 15 & 3 \\ 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

На основу горе изведеног растављања на просте чиниоце, следи да је:

$$NZS(4,15) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 15 = 60$$

Може се приметити је да су бројеви 4 и 15 узајамно прости, тј. немају других заједничких делилаца осим броја 1, а да је њихов најмањи заједнички садржалац заправо производ 4 и 15.

Дефиниција 17. *Најмањи заједнички садржалац узајамно простих бројева a и b је њихов производ.*

$$NZS(a,b) = a \cdot b$$

Пример 27. *Одредити најмањи заједнички садржалац бројева* 3 *и* 18.

$$\begin{array}{rr|l} 3, & 18 & 2 \\ 3, & 9 & 3 \\ 1, & 3 & 3 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

Дакле, $NZS(3,18) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 18$.

Приметимо да је број 18 дељив бројем 3, па је 18 уједно и садржалац броја 3. Следи да је број 18 и најмањи заједнички садржалац.

Дефиниција 18. *Ако је један број садржалац другог броја, онда је њихов најмањи заједнички садржалац сам тај број.*

$$a|b \Longrightarrow NZS(a,b) = b$$

Ученике је потребно подсетити да за два узајамно проста броја a и b важи да је њихов највећи заједнички делилац једнак броју 1.

Тада им је лако да изведу закључак да за два проста броја a и b за које је $NZD(a,b) = 1$, следи да је $NZS(a,b) = a \cdot b$. Тривијално је да на основу тога важи следећа једнакост:

$$NZD(a,b) \cdot NZS(a,b) = a \cdot b$$

Међутим, ова једнакост важи за било која два броја, не само за узајамно просте бројеве.

Теорема 3. *Производ највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца било која два броја a и b једнак је производу тих бројева:*

$$NZD(a,b) \cdot NZS(a,b) = a \cdot b$$

Доказ. Како $NZD(a,b)|a$ и $NZD(a,b)|b$, следи да постоје $m, n \in \mathbb{N}$ такви да је $a = m \cdot NZD(a,b)$ и $b = n \cdot NZD(a,b)$, при чему су m и n узајамно прости бројеви.

При том важи да је $NZS(a,b) = m \cdot NZD(a,b) \cdot n$, јер су m и n узајамно прости.

Дакле, имамо да је:

$$NZD(a,b) \cdot NZS(a,b) = NZD(a,b) \cdot m \cdot NZD(a,b) \cdot n = a \cdot b$$

□

Пример 28. *Одредити најмањи заједнички садржалац бројева* 4, 15 *и* 60.

$$\begin{array}{rrr|l} 4, & 15, & 60 & 2 \\ 2, & 15, & 30 & 2 \\ 1, & 15, & 15 & 3 \\ 1, & 5, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

Дакле, $NZD(4,15,60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Како је број 60 дељив и бројем 4 и бројем 15, могао је и одмах да се изведе закључак да је број 60 садржалац бројева 4 и 15, па је уједно и најмањи заједнички садржалац.

Пример 29. *Одредити најмањи заједнички садржалац бројева* 8, 10 *и* 20.

$$\begin{array}{rrr|l} 8, & 10, & 20 & 2 \\ 4, & 5, & 10 & 2 \\ 2, & 5, & 5 & 2 \\ 1, & 5, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

Поступак тражења најмањег заједничког садржаоца завршава се када се у истом реду добију све 1, јер то значи да смо све бројеве раставили на просте чиниоце.

На основу растављања бројева на чиниоце, закључак је да је $NZS(10, 12, 20) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$.

8 Решавање проблемских задатака помоћу одређивања најмањег заједничког садржаоца

Код одређивања најмањег заједничког садржаоца не треба тражити од ученика да науче само по шаблону да нађу најмањи заједнички садржалац за два или више бројева, требало би показати примену најмањег заједничког садржаоца при решавању многих других проблема.

Пример 30. *Дуж пута , с једне стране засађени су јабланови на растојању од 45m, а с друге стране јасенови на растојању од 60m. Ако је први јаблан тачно наспрам првог јасена, након колико метара ће засађени јаблан поново бити тачно наспрам јасена?*

Овај пример је преузет из [5].

Растојање између првих засађених стабала и стабала који ће поново бити једно наспрам другог једнако је најмањем заједничком садржаоцу бројева 45 и 60.

$$\begin{array}{rr|l} 45, & 60 & 2 \\ 45, & 30 & 2 \\ 45, & 15 & 3 \\ 15, & 5 & 3 \\ 5, & 5 & 5 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

На основу растављања бројева на просте чиниоце, следи да је $NZS(45, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$.

Дакле, након $180m$ ће засађени јаблан поново бити тачно наспрам јасена.

Пример 31. *Две неонске рекламе на ресторану укључују се истовремено. Једна трепне на свакох* 9 *секунди, а друга на сваких* 15. *Колико ће секунди проћи док обе рекламе не трепну истовремено?*

Овај пример је преузет из [7].

С обзиром на то да прва реклама трепне на сваких 9 секунди, а друга на сваких 12 секунди, да би израчунали за колико секунди ће обе рекламе истовремено трепнути, потебно је наћи број који је дељив и бројем 9 и бројем 12. Како требамо израчунати за колико секунди ће обе рекламе први пут истовремено трепнути, потребно је наћи најмањи заједнички садржалац за бројеве 9 и 15.

$$\begin{array}{rr|l} 9, & 15 & 3 \\ 3, & 5 & 3 \\ 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

Најмањи заједнички садржалац бројева 9 и 15 је $NZS(9,15) = 3\cdot3\cdot5 = 45$. Дакле, рекламе ће следећи пут истовремено трепнути након 45 секунди.

Пример 32. *Код старог часовничара један сат звони на сваких* 36 *минута, а други на сваких* 48 *минута. Они су управо зазвонили у исто време. Након колико времена ће поново зазвонити истовремено?*

Слично као у претходном примеру, потребно је наћи најмањи заједнички садржалац бројева 36 и 48.

$$\begin{array}{rr|l} 36, & 48 & 2 \\ 18, & 24 & 2 \\ 9, & 12 & 2 \\ 9, & 6 & 2 \\ 9, & 3 & 3 \\ 3, & 1 & 3 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

Како је $NZS(36, 48) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$. Дакле, сатови ће поново истовремено зазвонити након 144 минута.

Пример 33. *Ана долази у бибиотеку сваких 7 дана, а Дајана сваких 10 дана. Ако су се данас среле и посвађале, после колико дана ће се поново срести у библиотеци и добити прилику да се помире?*

$$\begin{array}{cc|c} 7, & 10 & 2 \\ 7, & 5 & 5 \\ 7, & 1 & 7 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

Најмањи заједнички садржалац бројева 13 и 20 је $NZS(13, 20) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$. Дакле, Ана и Дајана ће се поново срести у библиотеци након 70 дана.

Пример 34. *Три брата посећују своје родитеље. Први брат их посећује сваких шест дана, други код родитеља долази сваки осми дан, а трећи брат сваки девети дан. Данас су их посетили сви заједно. За колико дана ће се поново окупити сви заједно код родитеља?*

$$\begin{array}{ccc|c} 6, & 8, & 9 & 2 \\ 3, & 4, & 9 & 2 \\ 3, & 2, & 9 & 2 \\ 3, & 1, & 9 & 3 \\ 1, & 1, & 3 & 3 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

Како бисмо израчунали после колико дана ће се сва три брата поново окупити код својих родитеља, потребно је наћи најмањи заједнички садржалац бројева 6, 8 и 9, с обзиром да их први брат посећује сваких шест дана, други сваких осам дана, а трећи сваких девет дана.

Како је $NZS(6, 8, 9) = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$, следи да ће сва три брата поново заједно посетити родитеље након 72 дана.

9 Еуклидов алгоритам за одређивање највећег заједничког делиоца два броја

Наставним програмом је предвиђено да се прича о највећем заједничком делиоцу и најмањем заједничком садржаоцу настави у првом разреду средње школе у оквиру елементарне теорије бројева, када се између осталог понавља и градиво основне школе у вези природних и целих бројева.

Пример 35. *Одредити најмањи заједнички садржалац и највећи заједнички делилац за бројеве* 165, 220, 234 *и* 1014.

Овај пример је преузет из [11].

Прво ћемо наћи најмањи заједнички садржалац за ова четири броја.

$$\begin{array}{cccc|c}
165, & 220, & 234, & 1014 & 2\\
165, & 110, & 117, & 507 & 2\\
165, & 55, & 117, & 507 & 3\\
55, & 55, & 39, & 169 & 3\\
55, & 55, & 13, & 169 & 5\\
11, & 11, & 13, & 169 & 11\\
1, & 1, & 13, & 169 & 13\\
1, & 1, & 1, & 13 & 13\\
1, & 1, & 1 & 1 &
\end{array}$$

$NZS(165, 220, 234, 1014) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 = 334620.$

$NZD(165, 220, 234, 1014) = 1$ јер су бројеви 165, 220, 234 и 1014 узајамно прости, тј. немају другог заједничког делиоца осим броја 1, с обзиром на то да је:

$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$234 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13$$

$$1014 = 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 13$$

Пример 36. *Израчунати* $NZS(24, NZD(90, 126))$.

Овај пример је преузет из [11].

Да би се одредио тражени најмањи заједнички садржалац, потребно је прво наћи $NZD(90, 126)$.

$$\begin{array}{rr|l} 90, & 126 & 2 \\ 45, & 63 & 3 \\ 15, & 21 & 3 \\ 5, & 7 & \end{array}$$

Поступак тражења највећег заједничког делиоца завршавамо када у истом реду добијемо два узајамно проста броја, а 5 и 7 то јесу.

Дакле, $NZD(90, 126) = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Задатак се сада своди на тражење $NZS(24, 18)$.

$$\begin{array}{rr|l} 24, & 18 & 2 \\ 12, & 9 & 2 \\ 6, & 9 & 2 \\ 3, & 9 & 3 \\ 1, & 3 & 3 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

Дакле, тражени најмањи заједнички садржалац је $NZS(24, 18) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Ученици прве године средње школе се упознају са још једним, и то прилично ефикасним, начином налажења највећег заједничког делиоца, а то је Еклидов алгоритам.

Наставним програмом за прву годину средње школе је придвиђена обрада Еуклидовог алгоритма на часовима додатне наставе. Еуклидов алгоритам је веома ефикасан за одређивање највећег заједничког делиоца, нарочито уколико се од ученика тражи да нађу највећи заједнички делилац за два велика број, код којих процес растављања на просте чиниоце може бити веома компликован.

Еуклидов алгоритам за одређивање највећег заједничког делиоца два природна броја је први пут описан у Еуклидовим "Елементима", античком делу о математици које је настало око 300. године пре нове ере, иако се верује да је алгоритам био познат и 200 година раније. У 7. књизи "Елемената"је исказан за природне бројеве, а у 10. књизи је дата његова примена на дужи.

Еуклидов алгоритам је први нетривијални алгоритам који је преживео до данас. Врло је ефикасан за рачунање највећег заједничког делиоца два природна броја који не захтева њихово претходно растављање на чиниоце. Требало би напоменути да је растављање на чиниоце великих природних бројева један од тешких математичких проблема.

Коректност Еуклидовог алгоритма се заснива на чињеници да се највећи заједнички делилац два природна броја неће променити ако се од већег одузме мањи, а затим се одреди највећи заједнички делилац мањег од два посматрана броја и добијене разлике. Понављањем овог поступка се добијају све мањи и мањи бројеви. Како скуп природних бројева има најмањи елемент, то се и поступак завршава у коначно много корака.

Да би се исказала и доказала теорема која говори о Еуклидово алгоритму, потребно је прво споменути и доказати пар других теорема. Прва говори о једној особини дељивости, а то је да уколико цели број дели два цела броја, онда дели и њихову линеарну комбинацију.

Теорема 4. *Нека су a, b и c цели бројеви. Ако $c|a$ и $c|b$, онда за свака два цела броја m и n важи да $c|(m \cdot a + n \cdot b)$.*

Доказ. Како $c|a$ то значи да постоји неко p такво да важи $a = p \cdot c$. Слично, ако $c|b$, онда постоји неко q такво да је $b = q \cdot c$. Тада следи да је:

$$m \cdot a + n \cdot b = m \cdot (p \cdot c) + n \cdot (q \cdot c)$$
$$m \cdot a + n \cdot b = m \cdot p \cdot c + n \cdot q \cdot c$$
$$m \cdot a + n \cdot b = c \cdot (m \cdot p + n \cdot q)$$

На основу овога се може извести закључак да $c|(m \cdot a + n \cdot b)$.

Теорема је доказана за два цела броја, а њена генерализација је тривијална.

□

Теорема 5. *За произвољан природан број b и цели број a постоје јединствени цели бројеви q и r, такви да је $a = b \cdot q + r$, при чему је $0 \leq r < b$. Број q називамо количником, а број r остатком при дељењу.*

Доказ. Прво ћемо доказати егзистенцију:

Посматрајмо скуп $\{a - b \cdot m\}$, при чему је m неки цео број. Најмањи ненегативни члан тог скупа ћемо означити са r. Тада, по дефиницији, морало би да важи $0 \leq r < b$, и постоји цео број q, такав да важи $a - b \cdot q = r$, тј. $a = b \cdot q + r$.

Следеће доказујемо јединственост:

Претпоставимо да постоји још један пар q_1 и r_1, такви да је $a = b \cdot q_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < b$. Прво ћемо показати да важи $r_1 = r$.

Претпоставимо супротно, тј. да је нпр. $r < r_1$. Тада је $0 \leq r_1 - r < b$. С друге стране је $r_1 - r = b \cdot (q_1 - q)$. Како b дели $q_1 - q$, онда мора да дели и $r_1 - r$, што је немогуће.

Следи да је претпоставка била погрешна, тј. да је $r_1 = r$, па самим тим мора важити и $q_1 = q$.

□

Теорема 6 (Еуклидов алгоритам)**.** *Нека су a и b природни бројеви. Претпоставимо да је узастопном применом теореме 5 добијен низ једнакости:*

$$a = b \cdot q_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2$$

$$\cdots$$

$$r_{j-2} = r_{j-1} \cdot q_j + r_j, 0 \leq r_j < r_{j-1}$$

$$r_{j-1} = r_j \cdot q_{j+1}.$$

Тада је $NZD(a, b) = r_j$, тј. последњем остатку различитом од 0.

Доказ. Према теореми 4 следи:

$$\begin{aligned} NZD(a,b) &= NZD(a - b \cdot q_1, b) \\ &= NZD(r_1, b) = NZD(r_1, b - r_1 \cdot q_2) \\ &= NZD(r_1, r_2) = NZD(r_1 - r_2 \cdot q_3, r_2) \\ &= NZD(r_3, r_2). \end{aligned}$$

Настављајући овај процес добија се:

$$NZD(a,b) = NZD(r_{j-1}, r_j) = NZD(r_j, 0) = r_j.$$

Индукцијом се доказује да је свако r_j линеарна комбинација од a и b.

То је очигледно да важи за r_1 и r_2, па претпоставимо да важи за r_{i-1} и r_{i-2}. Међутим како је r_i линеарна комбинација од r_{i-1} и r_{i-2}, то по претпоставци индукције добијамо да је r_i линеарна комбинација од a и b.

□

Ученици у средњој школи углавном савладавају само процедуру извођења Еуклидовог алгоритма, и не решавају проблемске задатке који би захтевали примену Еуклидовог алгоритма. То ученицима даје за право да овај алгоритам памте и изводе углавном механички.

Пример 37. *Одредити њавећи заједнички делилац бројева* 319 *и* 224.

$$\begin{array}{rcc} 319 & = & 224 \cdot 1 + 95 \\ 224 & = & 95 \cdot 2 + 34 \\ 95 & = & 34 \cdot 2 + 27 \\ 34 & = & 27 \cdot 1 + 7 \\ 27 & = & 7 \cdot 3 + 6 \\ 7 & = & 6 \cdot 1 + 1 \\ 6 & = & 1 \cdot 6 \end{array}$$

Дакле, $NZD(319, 224) = 1$.

Пример 38. *Одредити њавећи заједнички делилац бројева* 660 *и* 468.

$$\begin{aligned}
660 &= 468 \cdot 1 + 192 \\
468 &= 192 \cdot 2 + 84 \\
192 &= 84 \cdot 2 + 24 \\
84 &= 24 \cdot 3 + 12 \\
24 &= 12 \cdot 2
\end{aligned}$$

Дакле, $NZD(660, 468) = 12$.

Како би ученици усвојили Еуклидов алгоритам с разумевањем потребно је да разумеју принцип који је у основи овог алгоритма. Такође, требало би их оспособити да препознају ситуцију у којој могу да примене Еуклидов алгоритам.

На пример, уколико је потребно наћи највећи заједнички делилац два броја за која је процес растављања на просте чиниоце компликован или одузима доста времена, ефикасније је применити Еуклидов алгоритам.

Пример 39. *Одредити највећи заједнички делилац бројева* 8398 *и* 3718.

Како је процес растављања бројева 8398 и 3718 на просте чиниоце тежак, тј. одузима доста времена, у овом случају је корисније и ефикасније користити Еуклидов алгоритам за одређивање највећег заједничког делиоца за ова два броја.

$$\begin{aligned}
8398 &= 3718 \cdot 2 + 962 \\
3718 &= 962 \cdot 3 + 832 \\
962 &= 832 \cdot 1 + 130 \\
832 &= 130 \cdot 6 + 52 \\
130 &= 52 \cdot 2 + 26 \\
52 &= 26 \cdot 2
\end{aligned}$$

Дакле, $NZD(8398, 3718) = 26$.

Осим за налажење највећег заједничког делиоца два броја, које је компликовано раставити на просте чиниоце, Еуклидов алгоритам се може користити и приликом решавања неких проблемских задатака. Нпр. може се ставити у контекст геометрије.

Пример 40. *Пронаћи најдужу дуж која се цели број пута садржи у дужима дужине* $76cm$ *и* $20cm$*.*

Прво покушавамо дуж дужине $76cm$ да измеримо помоћу дужи чија је дужина $20cm$, тј. покушавамо дужу дуж да измеримо краћом.

$$76 = 20 \cdot 3 + 16$$

Затим, дуж дужине $20cm$ меримо помоћу дужи чија је дужина $16cm$, што је иначе остатак при претходном мерењу.

$$20 = 16 \cdot 1 + 4$$

Потом, дуж дужине $16cm$ меримо помоћу дужи чија је дужина $4cm$, што је иначе остатак при претходном мерењу.

$$16 = 4 \cdot 4$$

Као резултат добијамо да је дуж дужине $4cm$ најдужа дуж која је садржана цели број пута у дужима чије су дужине $76cm$ и $20cm$.

10 Полиноми

Коришћење појмова најмањег заједничког садржаоца и највећег заједничког делиоца се са бројева преноси и даље, на полиноме. Ученици прве године средње школе се ближе упознају са полиномима и операцијама са њима, међу осталим и са дељењем полинома и растављањем полинома на чиниоце.

Да би могли да оперишемо са њима, прво је неоподно увести појам полинома.

Дефиниција 19. *Нека су* a_0*,* a_1*,* a_2*, ...,* a_n *дати реални бројеви. Пресликавање* P *којим се реалан број* x *пресликава у реалан број:*

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_0$$

назива се реалан полином.

Дефиниција 20. *Ако је* $a_n \neq 0$ *број* n *назива се степен полинома* P *и каже се да је полином* P n*-тог степена по* x*.*

Степен полинома P се означава са $st(P)$.

Дефиниција 21. $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_0$ *где је* x *променљива, а* a_0*,* a_1*,* a_2*, ...,* a_n *дате константе и* n *природан број или* 0*, називамо канонским обликом полинома.*

Дефиниција 22. *Два полинома* P *и* Q *су једнака ако имају идентичне канонске облике, тј. ако имају једнаке степене и све одговарајуће коефицијенте:*

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_0$$
$$P(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + b_0$$

и

$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \cdots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$$

11 Растављање полинома на чиниоце

Као и код налажења најмањег заједничког садржаоца и највећег заједничког делиоца два или више бројева, тако и приликом одређивања најмањег заједничког садржаоца и највећег заједничког делиоца два или више полинома, прво је потребно савладати растављање полинома на чиниоце.

У општем случају, раставити полином на чиниоце значи написати га у облику производа два или више полинома мањег степена. Ученици се упознају са неколико метода којима се раствљају полиноми.

Ученици средње школе су упознати са трансформацијама целих алгебарских израза, тако да за растављање полинома на чиниоце прво покушавају да примене дистрибутивни закон, разлику квадрата, збир и разлику кубова, квадрат и куб бинома.

За изразе A, B, C и D важи:

$$A \cdot (B \pm C) = A \cdot B \pm A \cdot C - distributivni\ \ zakon$$

$$A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B) - razlika\ \ kvadrata$$

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B) \cdot (A^2 \pm A \cdot B + B^2) - zbir\ \ i\ \ razlika\ \ kubova$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2 \cdot\ \ A \cdot B + B^2 - kvadrat\ \ binoma$$

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 \pm 3 \cdot B^3 - kub\ \ binoma$$

Све ове формуле се лако изводе и доказују, али због ефикасности и брзине решавања задатака, ученици их углавном уче напамет, зато је битно инсистирати на разумевању датих формула и начина извођења истих, јер ће у том случају знање ученика бити дуготрајније.

Пример 41. *Раставити на чиниоце полином* $9x^2 - 36$

Да би се овај полином раставио на чиниоце, потребно је приметити да је 9 квадрат броја 3, а 36 квадрат броја 6, те да се за растављање полинома може применити формула за разлику квадрата:

$$9x^2 - 36 = 3^2x^2 - 6^2 = (3x)^2 - 6^2 = (3x - 6) \cdot (3x + 6)$$

Пример 42. *Раставити на чиниоце полином* $(x - 5)^2 - 4$

У овом примеру је потребно примтити да је 4 квадрат броја 2, па се може применити формула за разлику квадрата:

$$(x-5)^2 - 4 = (x-5)^2 - 2^2 = (x-5-2) \cdot (x-5+2) = (x-7) \cdot (x-3)$$

Пример 43. *Раставити на чиниоце полином* $8x^3 - 27y^3$

Како је 8 куб броја 2, број 27 куб броја 3, за растављање датог полинома на чиниоце може се применити формула за разлику кубова:

$$8x^3 - 27y^3 = 2^3x^3 - 3^3y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x-3y) \cdot (4x^2 + 6xy + 9y^2)$$

Пример 44. *Раставити на чиниоце полином* $\frac{27}{64} + x^3$

Пошто је $\frac{27}{64} = \frac{3}{4}^3$, за растављање овог полинома можемо применити формулу за збир кубова:

$$\frac{27}{64} + x^3 = (\frac{3}{4})^3 + x^3 = (\frac{3}{4} + x) \cdot (\frac{9}{4} - \frac{3}{4}x + x^2)$$

Пример 45. *Раставити на чиниоце полином* $9a^2 + 6a + 1$

За растављање овог полинома, требало би приметити да је дати полином квадрат бинома:

$$9a^2 + 6a + 1 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a + 1 = (3a+1)^2$$

Пример 46. *Раставити на чиниоце полином* $y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$

Како је $\frac{1}{16}$ квадрат броја $\frac{1}{4}$, дати полином се може написати као квадрат бинома:

$$y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}y + (\frac{1}{4})^2 = (y - \frac{1}{4})^2$$

Корисно је са ученицима урадити што већи број оваквих и сличних примера, како би ученици усвојили разне методе за растављање полинома на чиниоце и сам процес увежбали што боље.

Ученици се упознају и са једном новом теоремом коју могу користити за растављање полинома.

Теорема 7 (Безуова теорема)**.** *Остатак дељења полинома $P(x)$ са $x-a$, где је a константа, је $P(a)$.*

Доказ. У општем случају, када би се приликом дељења полинома $P(x)$ неким полиномом $Q(x)$ добио количник $G(x)$ и остатак $R(x)$, можемо записати то на следећи начин:

$$P(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

У посебном случају, када полином $P(x)$ делимо биномом $(x-a)$, тј. када је $G(x) = (x - a)$, то записујемо на следећи начин:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$$

Уколико за вредност непознате x изаберемо баш a, добијамо:

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R(a)$$
$$P(a) = R(a)$$

а пошто је $R(x)$ константа, самим тим ће бити да је $R(a) = R(x)$, па следи да је:

$$P(a) = R(x)$$

□

Последица ове теореме је да ако је $P(a) = 0$, онда је полином $P(x)$ дељив са $x - a$.

Пример 47. *Раставити на чиниоце полином* $P(x) = x^3+9x^2+23x+15$.

Потребно је приметити да је $P(-1) = 0$. Одатле се закључује да је полином $P(x)$ дељив са $(x+1)$.

$$
\begin{array}{rrrl}
(x^3 & +9x^2 & +23x+15) & :(x+1) = x^2+8x+15 \\
-x^3 & -x^2 & & \\
\hline
 & 8x^2 & +23x+15 & \\
 & -8x^2 & -8x & \\
\hline
 & & 15x+15 & \\
 & & -15x-15 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

Дакле, полином $P(x)$ се може записати као производ два полинома:

$$P(x) = x^3+9x^2+23x+15 = (x+1)\cdot(x^2+8x+15)$$

Како се полином $Q(x) = x^2+8x+15$ такође може раставити на чиниоце, а $Q(-3) = 0$, то значи да је $Q(x)$ дељиво са $(x+3)$:

$$
\begin{array}{rrl}
(x^2 & +8x & +15):(x+3) = x+5 \\
-x^2 & -3x & \\
\hline
 & 5x & +15 \\
 & -5x & -15 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

Дакле, $Q(x) = x^2+8x+15 = (x+3)\cdot(x+5)$.

Следи да је полином $P(x) = (x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+5)$.

Са растављањем полинома је завршено када се он напише у облику производа полинома нижих степена, који се даље не могу растављати на чиниоце.

Пример 48. *Раставити на чиниоце полином* $P(x) = x^3-6x^2+11x-6$ *ако се зна да је* $P(1) = 0$.

Овај пример је преузет из [11].

Ако зна да је $P(1) = 0$ то значи да је полином $P(x)$ дељив са $(x-1)$:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-x^3 + x^2} \\
\quad 5x^2 + 11x - 6 \\
\quad \underline{-5x^2 - 5x} \\
\qquad 6x - 6 \\
\qquad \underline{-6x + 6} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Полином $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ можемо даље раставити на чиниоце, јер је $Q(3) = 0$, па је полином $Q(x)$ дељив са $(x-3)$:

$$\begin{array}{l}
(x^2 - 5x + 6) : (x-3) = x - 2 \\
\underline{-x^2 + 3x} \\
\quad -2x + 6 \\
\quad \underline{+2x - 6} \\
\qquad 0
\end{array}$$

Полином $P(x)$ је сада растављен на чиниоце:

$$P(x) = (x+3) \cdot (x-3) \cdot (x-2)$$

Пример 49. *Дат је полином $P(x) = ax^3 + 3ax^2 + 3x$. Одреди вредност параметра a тако да полином $P(x)$ буде дељив са $x+2$.*

Слични примери се могу наћи у [10].

Да би се одредио параметар a потребно је искористити последицу Безуове теореме и закључити да ако је полином $P(x)$ дељив са $x - 2$ онда је $P(-2) = 0$.

$$P(-2) = a \cdot (-2)^3 + 3a \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) = -8a + 12a - 6 = 4a - 6$$

Како је $P(-2) = 0$, следи да је $4a - 6 = 0$, тј. $a = \frac{3}{2}$.

12 Највећи заједнички делилац полинома

Дефиниција 23. *Полином $D(x)$ је највећи заједнички делилац полинома $P(x)$ и $Q(x)$:*

$$D(x) = NZD(P(x), Q(x))$$

ако су оба полинома, и $P(x)$ и $Q(x)$, дељиви са $D(x)$ и важи да:

$$\forall R(x) : (R(x)|P(x) \wedge R(x)|Q(x)) \Longrightarrow R(x)|D(x)$$

На основу тога што $R(x)|D(x)$, следи да степен полинома $D(x)$ није мањи од степена полинома $R(x)$, па је зато $D(x)$ полином највећег степена који дели полиноме $P(x)$ и $Q(x)$.

Пример 50. *Одредити највећи заједнички делилац полинома:*

$$P(x) = (x^2 - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$$

и

$$Q(x) = (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$$

Полином $P(x)$ се може раставити на чиниоце $x^2 - 3$, $x - 1$ и $x + 2$, а полином $Q(x)$ је производ чинилаца $x + 3$, $x - 1$ и $x + 2$.

Како се може приметити, заједнички делиоци ова два полинома су $x - 1$ и $x + 2$, па је највећи заједнички делилац једнак њиховом производу $(x - 1) \cdot (x + 2)$.

$$NZD(P(x), Q(x)) = (x - 1) \cdot (x + 2)$$

Пример 51. *Одредити највећи заједнички делилац полинома:*

$$P(x) = (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x^2+x+1)$$

и

$$Q(x) = (x-3)^2 \cdot (x^2+x+1)^3$$

У овом примеру би требало скренути пажњу ученицима на то да ако је полином $P(x)$ дељив са $(x-3)^3$ а полином $Q(x)$ дељив са $(x-3)^2$, онда су оба полинома дељива са $(x-3)^2$.

Такође, ако је $P(x)$ дељиво са x^2+x+1, $Q(x)$ дељиво са $(x^2+x+1)^3$, то значи да су оба полинома дељива са x^2+x+1.

Дакле, $NZD(P(x), Q(x)) = (x-3)^3 \cdot (x^2+x+1)$.

Пример 52. *Одредити највећи заједнички делилац полинома:*

$$P(a) = a^2 - b^2$$

$$Q(a) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$R(a) = a^2 - 3ab + 2b^2$$

Како се дати полиноми могу раставити на чиниоце и записати на следећи начин:

$$P(a) = a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$$

$$Q(a) = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$R(a) = a^2 - 3ab + 2b^2 = (a-b) \cdot (a-2b)$$

закључује се да је заједнички делилац само $a-b$, па је то уједно и највећи заједнички делилац.

$$NZD(a^2-b^2, a^2-2ab+b^2, a^2-3ab+2b^2) = a-b$$

У овом и сличним примерима од ученика се прво захтева да раставе полиноме на чиниоце, а потом одреде њихов највећи заједнички делилац.

Пример 53. *Одредити највећи заједнички делилац полинома* $3a+9$ *и* $3a-6$.

Прво је потребно раставити ова два полинома на чиниоце.

$$3a+9=3\cdot(a+3)$$
$$3a-6=3\cdot(a-2)$$

На основу растављања на чиниоце, види се да је заједнички делилац само број 3, па је то и највећи заједнички делилац.

$$NZD(3a+9,3a-6)=3$$

Приметимо да је највећи заједнички делилац за ова два полинома константа. Такви полиноми су узајамно прости.

Дефиниција 24. *Полиноми су узајамно прости ако је највећи заједнички делилац тих полинома једнак константи.*

13 Најмањи заједнички садржалац полинома

Дефиниција 25. *Полином* $S(x)$ *је најмањи заједнички садржалац полинома* $P(x)$ *и* $Q(x)$:

$$S(x)=NZS(P(x),Q(x))$$

ако је $S(x)$ *дељив са оба полинома, и* $P(x)$ *и* $Q(x)$, *и важи да:*

$$\forall R(x):(R(x)|P(x)\vee R(x)|Q(x))\Longrightarrow R(x)|S(x)$$

Најмањи заједнички садржалац полинома $P(x)$ и $Q(x)$ је полином који има најнижи степен међу полиномима који су дељиви и полиномом $P(x)$ и полиномом $Q(x)$.

Најмањи заједнички садржалац полинома $P(x)$ и $Q(x)$ означава се са $NZS(P(x), Q(x))$.

У збиркама за средњу школу најчешћи задаци су они у којима се од ученика тражи да одреде најмањи заједнички садржалац два или више полинома.

Пример 54. *Одредити најмањи заједнички садржалац полинома* $2a+2b$ *и* $3a-3b$*.*

Како би могли да одреде најмањи заједнички саржалац два или више полинома, неопходно је да ученици знају да раставе те полиноме на чиниоце.

Овде видимо примену растављања полинома на чинице и колико је важно да ученици на време то разумеју и науче да примењују.

Како се полиноми $2a+2b$ и $3a-3b$ могу раставити на следећи начин:

$$2a+2b = 2 \cdot (a+b)$$
$$3a-3b = 3 \cdot (a-b)$$

најмањи заједнички садржалац ових полинома је:

$$NZS(2a+2b, 3a-3b) = 2 \cdot 3 \cdot (a+b) \cdot (a-b)$$

Најмањи заједнички садржалац је производ свих чинилаца који деле бар један од датих полинома.

Дакле, $NZS(2a+2b, 3a-3b) = 6(a+b)(a-b)$.

То је полином најмањег степена који је дељив и полиномом $2a+2b$ и полиномом $3a-3a$.

Пример 55. *Одредити најмањи заједнички садржалац полинома:*

$$P(x) = x^4 - x^2$$
$$Q(x) = x^3 + 2x^2 + x$$
$$R(x) = x^2 - 1$$

Прво се дати полиноми растављају на чиниоце:

$$P(x) = x^2 \cdot (x^2 - 1) = x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$$
$$Q(x) = x \cdot (x^2 + 2x + 1) = x \cdot (x + 2)^2$$
$$R(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)$$

Да би ученици раставили дате полиноме на чиниоце потребно је да знају да примене дистрибутивни закон и формуле за квадрат бинома и разлику квадрата.

Када се полиноми $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ раставе на чиниоце који се даље не могу растављати, закључује се да је:

$$NZS(P(x), Q(x), R(x)) = x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)^2$$

Пример 56. *Одреди најмањи заједнички садржалац полинома:* $4x^2 - 8x^3 + 4x^2$ *и* $3x^3 + 6x^2 + 3x$.

Као у претходним примерима, прво је потребно раставити дате полиноме на чиниоце:

$$4x^2 - 8x^3 + 4x^2 = 4x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 4x^2 \cdot (x - 1)^2$$
$$3x^3 + 6x^2 + 3x = 3x \cdot (x^2 + 2x + 1) = 3x \cdot (x + 1)^2$$

За растављење полинома у овом примеру, неопходно је да ученици умеју да препознају и примене формулу за квадрат бинома.

Како је полином $4x^2 - 8x^3 + 4x^2$ дељив са x^2, а полином $3x^3 + 6x^2 + 3x$ дељив са x, то ће најмањи заједнички садржалац ова два полинома бити дељив са x^2 јер је већег степена него x.

$$NZS(4x^2 - 8x^3 + 4x^2, 3x^3 + 6x^2 + 3x) = 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$$
$$NZS(4x^2 - 8x^3 + 4x^2, 3x^3 + 6x^2 + 3x) = 12 \cdot x^2 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$$

Пример 57. *Одредити најмањи заједнички садржалац полинома:*

$$P(x) = x^2 + 2x + 1$$

и

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1$$

За растављање датих полинома на чиниоце потребно је приметити да су полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ квадрати бинома:

$$P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$
$$Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Како је заједнички делилац ова два полинома број 1, следи да су полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ узајамно прости.

Најмањи заједнички садржалац полинома $P(x)$ и $Q(x)$ једнак је производу ова два полинома:

$$NZS(P(x), Q(x)) = (x+1)^2 \cdot (x-1)^2$$

Дефиниција 26. *Најмањи заједнички садржалац полинома $P(x)$ и $Q(x)$ који су узајамно прости, једнак је производу тих полинома.*

$$NZD(P(x), Q(x)) = const \Longrightarrow NZS(P(x), Q(x)) = P(x) \cdot Q(x)$$

14 Еуклидов алгоритам за одређивање највећег заједничког делиоца два полинома

Нека су P и S два полинома различита од нултог.

Низ једнакости:

$$P = S \cdot Q_1 + R_1, \quad 0 < st(R_1) < st(S)$$
$$S = R_1 \cdot Q_2 + R_2, \quad 0 < st(R_2) < st(R_1)$$
$$R_1 = R_2 \cdot Q_3 + R_3, \quad 0 < st(R_3) < st(R_2)$$
$$\cdots$$
$$R_{n-2} = R_{n-1} \cdot Q_n + R_n, \quad 0 < st(R_n) < st(R_{n-1})$$
$$R_{n-1} = R_n \cdot Q_{n-1}$$

називамо Еуклидовим алгоритмом за два полинома P и S.

Као и за целе бројеве, и за полиноме важи теорема аналогна теореми за бројеве.

Теорема 8. *За свака два реална полинома P и S, при чему S није нула полином, постоји јединствен Еуклидов алгоритам, при чему је:*

$$NZD(P, S) = R_n,$$

где је R_n последњи остатак у Еуклидовом алгоритму који је различит од нула полинома.

По програму средњих школа, Еуклидов алгоритам није намењен обради на редовним часовима, већје намењен додатној настави. У складу са тим, у збиркама за средњу школу нема задатака у којима се инсистира на употреби Еуклидовог алгоритма.

Ученици се на часовима додатне наставе упознају са применом Еуклидовог алгоритма за одређивање највећег заједничког делиоца два полинома кроз примере.

Пример 58. *Користећи Еуклидов алгоритам, одреди највећи заједнички делилац полинома:*

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

и

$$S(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

Прво је потребно поделити полином P полиномом S.

$$\begin{array}{rrrrrl} (x^4 & +2x^3 & +3x^2 & +2x & +1) & : (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) = 1 \\ -x^4 & -x^3 & -2x^2 & -x & -1 & \\ \hline & x^3 & +x^2 & +x & & \end{array}$$

Дакле, количник је $Q_1 = 1$, а остатак $R_1 = x^3 + x^2 + x$.

Даље, се полином S дели остатком R_1.

$$\begin{array}{rrrrrl} (x^4 & +x^3 & +2x^2 & +x & +1) & : (x^3+x^2+x) = x \\ -x^4 & -x^3 & -x^2 & & & \\ \hline & & x^2 & +x & +1 & \end{array}$$

Након дељења ова два полинома, добија се количник $Q_2 = x$ и остатак $R_2 = x^2 + x + 1$.

У следећем кораку се дели полином R_1 полиномом R_2.

$$\begin{array}{rrrl} (x^3 & +x^2 & +x) & : (x^2+x+1) = x \\ -x^3 & -x^2 & -x & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

Дељењем ова два полинома добија се количник $Q_3 = x$ и остатак је једнак 0.

Дакле, Еуклидов алгоритам за полиноме P и Q изражен је следећим једнакостима.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 &= (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) \cdot 1 + (x^3 + x^2 + x) \\ x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 &= (x^3 + x^2 + x) \cdot x + (x^2 + x + 1) \\ x^3 + x^2 + x &= (x^2 + x + 1) \cdot x \end{aligned}$$

Следи да је $NZD(P, Q) = x^2 + x + 1$.

У овом примеру вреди приметити да се полином P представља као производ чиниоца на следећи начин:

$$P = (x^2 + x + 1)^2$$

а полином Q:

$$Q = (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + 1)$$

што није баш лако добити класичним растављањем полинома на чиниоце.

Закључак је да је у неким примерима лакше и ефикасније применити Еуклидов алгоритам за одређивање највећег заједничког делиоца.

15 Закључак

Ученици се са најмањим заједничким садржаоцем и највећим заједничким делиоцем први пут срећу у петом разреду основне школе. Тада уче методе за одређивање најмањег заједничког садржаоца и највећег заједничког делиоца два или више природних бројева. Од великог им је значаја да са разумевањем усвоје градиво ове области, како би касније могли да оперишу са разломцима различитих именилаца. Одређивање најмањег заједничког садржаоца и највећег заједничког делиоца ученицима у великој мери може користити и приликом решавања разних проблемских задатака.

На редовној настави у петом разреду се не обрађује Еуклидов алгоритам за одређивање највећег заједничког делиоца, али на додатној настави старијих разреда ученици се могу упознати и са овом веома ефикасном методом за одређивање највећег заједничког делиоца.

У првој години средње школе, ученици се ближе упознају са полиномима и растављањем истих на чиниоце. У оквиру те теме се дотичу и одређивања највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца два или више полинома. Нешто ближе се тиме могу бавити на часовима додатне наставе где између осталог уче да примене Еуклидов алгоритам за одређивање највећег заједничког делиоца два полинома.

Савладавање одређивања највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца два или више полинома је ученицима неопходно да би касније могли научено да примене приликом обраде операција са рационалним алгебарским изразима.

Литература

[1] С. Првановић, Модерна математика, Завод за издавање уџбеника социјалистичке републике Србије, Београд, 1971.

[2] С. Јешић, М. Игњатовић, Д. Мишић, Математика за 5. разред основне школе, уџеник, Герундијум, Београд 2012.

[3] С. Јешић, Д. Мишић, М. Игњатовић, Збирка задатака из математике за 5. разред основне школе, Герундијум, Београд 2012.

[4] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, С. Милојевић, Н. Вуловић, Математика за 5. разред основне школе, приручник за наставнике, Клетт, Београд 2012.

[5] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, С. Милојевић, Н. Вуловић, Математика за 5. разред основне школе, уџбеник, Клетт, Београд 2012.

[6] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, С. Милојевић, Н. Вуловић, Математика за 5. разред основне школе, збирка задатака, Клетт, Београд 2012.

[7] М. Стојсављевић- Радовановић, Љ. Вуковић, Ј. Ранчић, Математика, уџбеник за пети разред основне школе са задацим за вежбање,1. део, Креативни центар, Београд 2008.

[8] Б. Јевремовић, Р. Божић, Ј. Ђуковић, Математика за 5. разред основне школе, уџбеник, Школа плус, Београд 2013.

[9] Б. Јевремовић, Р. Божић, Ј. Ђуковић, Математика 5., збирка задатака за пети разред основне школе, Школа плус, Београд 2013.

[10] Ж. Ивановић, С. Огњановић, Математика 1, збирка задатака и тестова за први разред гимназија и тхеничких школа, Круг, Београд 2003.

[11] Мр Вене Т. Богославов, Збирка решених задатака из математике 1, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2004.