VLADIMIR DEVIDE

MATEMATIČKA LOGIKA

PRVI DIO

(KLASIČNA LOGIKA SUDOVA)

DRUGO NEPROMIJENJENO IZDANJE

BEOGRAD
1972

VLADIMIR DEVIDÉ

MATEMATIČKA LOGIKA

PRVI DIO

(KLASIČNA LOGIKA SUDOVA)

DRUGO NEPROMIJENJENO IZDANJE

BEOGRAD
1972

ПОСЕБНА ИЗДАЊА МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА

КЊИГА 3

Уредник

Д. С. Митриновић

ВЛАДИМИР ДЕВИДЕ

МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА

ПРВИ ДЕО

(КЛАСИЧНА ЛОГИКА СУДОВА)

Саопштено 15. новембра 1963. године на општем скупу Математичког института

Републички фонд за научни рад СРС финансирао је штампање ове књиге

私の愛してやまない美しい日本の人々に捧げる

Ljudima Japana,

u znak zahvalnosti za sve ono

što im dugujem nakon boravka u njihovoj zemlji.

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Prvo izdanje ove knjige, štampano prije 8 godina, već je dugo vremena rasprodano. Povodom sve većeg interesa i potrebe za matematičkom logikom kako u matematici tako i u primjenama u drugim znanostima i u tehnici, osjetila se potreba za novim izdanjem knjige.

Razloga da ovo drugo izdanje izlazi nepromijenjeno (osim što je izostavljen rezime na engleskom) ima više. Od više „tehničkih" to je mogućnost njenog skorijeg izlaženja te manji troškovi izrade a time i niža cijena, dakle veća pristupačnost širem krugu potencijalnih čitalaca. Vrlo brižljivom radu slagara koji su radili na prvom izdanju valja zahvaliti da u njemu praktički nema štamparskih pogrešaka, što je omogućilo da se drugo izdanje izvede fotokopiranjem sloga prvog izdanja. Od više „materijalnih" razloga to je činjenica da se odgovarajuće područje matematičke logike posljednjih godina nije bitnije obogatilo, bar u pogledu fundamentalnih rezultata koji treba da uđu u jedan uvodni udžbenik, nadalje to, što je prema tekstu prvog izdanja s uspjehom održano nekoliko poslijediplomskih kolegija, a također i opsežan prikaz prvog izdanja knjige u vodećem *The Journal of Symbolic Logic*, *USA*, Vol. 35 (1970), Nr 2, p. 326—329 (referent prof. I. Boh sa The Ohio State University, USA).

Zbog veoma velike zauzetosti nizom drugih obaveza nije mi dosad nažalost bilo moguće dovršiti rukopis i za drugi dio knjige, kako je kao veća cjelina bila zamišljena. Međutim, čitalac zainteresiran za šire područje matematičke logike od onog obuhvaćenog ovom knjigom, može posegnuti za u međuvremenu publiciranim lijepim djelom *dr S. Prešića:* Elementi matematičke logike, Beograd 1968. (Matematička biblioteka, svezak 34.).

U Zagrebu, 6. VIII 1972. V. D.

PREDGOVOR

Istraživanja iz područja osnova matematike posljednjih su se decenija toliko razgranala i produbila da bi potpuniji pregled dobivenih rezultata zahtijevao više opsežnih svezaka. Danas već postoji nekoliko časopisa koji publiciraju isključivo radnje iz područja matematičke logike i osnova matematike a mnogi drugi uključuju takve radove. Izlazi i nekoliko serija monografija o osnovama matematike. Na svim svjetskim jezicima raspoloživa su djela karaktera udžbenika matematičke logike (naročito mnogo na njemačkom i engleskom jeziku). Karakteristično je da je u posljednjih desetak godina takvih djela publicirano više nego li u čitavom periodu prije toga vremena. Mnoge katedre održavaju kolegije i seminare iz raznih grana matematičke logike i srodnih oblasti. U USA, Poljskoj, SSSR-u, Njemačkoj, Japanu, Izraelu i nekim drugim zemljama postoje razvijene škole kojih je rad orijentiran na dalju izgradnju ovih područja matematike. Nabrajanje pojedinih matematičara-logičara, čak ako bi se ograničili na one koji su dali značajne priloge koji će ostati trajna svojina matematike, ispunilo bi listu od nekoliko stotina imena — a takvu listu trebalo bi stalno i brzo proširivati.

Unutar ovog djela moguće je, dakako, iznijeti samo malen dio ovako goleme materije.

Ovaj, prvi dio Matematičke logike obuhvaća klasičnu (dvovaljanu) logiku sudova. Tačnije: Uvodna Glava I obrađuje principijelnu problematiku oko zasnivanja matematike sa stajališta matematičara (u filozofsku problematiku oko toga pitanja nisam ulazio), u Glavi II izložena je algebra sudova, u Glavi III detaljnije je razrađeno kako se algebre sudova uklapaju u teoriju Booleovih struktura, a u Glavi IV — koja čini glavni sadržaj ove knjige — razvijena je klasična logika sudova kao formalizirana deduktivna teorija; konačno, u Glavi V provedena su neka aksiomatička ispitivanja u vezi s nekontradiktornošću, nezavisnošću, potpunošću i nekategoričnošću sistema aksioma logike sudova.

I materijal i način izlaganja u ovoj knjizi odabran je tako da bi u jednu ruku dao *dovoljno* znanje o tom području matematike čitaocu koji se u nj želi uputiti, a u drugu ruku da pruži *nužno* predznanje onom čitaocu koji će nakon ove knjige posegnuti za opsežnijom ili specijaliziranijom literaturom.

Pored standardnog materijala djelo sadrži pojedinosti koje su, mislim, nove: Definicija demonstracije i dedukcije nešto je modificirana prema uobičajenoj; grupe aksioma negacije i konstanata nešto se razlikuju od ranije razmatranih; dio rezultata 8. poglavlja Glave II je nov — slično vrijedi za neke manje priloge u Glavi III; neka od razmatranja u glavi V također djelomično sadrže proširenja prema standardnom izlaganju. Manjih promjena u definicijama, teoremima i njihovim dokazima naći će se na mnogim mjestima (usp. npr. definiciju jednakosti funkcija algebre sudova u Glavi II).

Budući da je ovo prvi sistematski prikaz logike sudova na hrvatskosrpskom jeziku trebalo je u njemu stvoriti i našu terminologiju za to područje. Nastojao sam da je — u skladu s internacionalnom — odaberem tako, da bi mogla biti prihvaćena kao jedinstvena jugoslavenska terminologija. Praksa će pokazati u kojoj je mjeri ovdje predloženi izbor bio sretan.

Principijelno za razumijevanje teksta koji dolazi ne treba većeg matematičkog predznanja. Međutim, mjestimično će trebati izvjesna zrelost u matematičkom rasuđivanju.

Numeracija definicija (D), teorema (T) i jednadžbi teče po Glavama, a korolara (K) i lema (L) po poglavljima.

Ideja i sugestija za pisanje ove monografije potekla je od profesora D. S. Mitrinovića; prije blizu 4 godine on mi je predložio da napišem rukopis za takvo djelo koje bi se štampalo kao edicija „Matematičke Biblioteke". Tokom čitavog tog perioda a naročito za vrijeme mojeg gotovo dvogodišnjeg boravka na Univerzitetima u Tokiju, prof. Mitrinović stalno me je bodrio na poslu pisanja tog rukopisa i sa svoje strane učinio sve da bi se ova knjiga što prije i na što bolji način štampala. (Kasnije je, iz tehničkih razloga u vezi sa subvencioniranjem, odlučeno da se rukopis štampa kao monografija među edicijama Matematičkog Instituta, umjesto kao edicija „Matematičke Biblioteke" što je bila prvobitna zamisao.)

Na ovome mjestu volio bih se zahvaliti i svima koji su mi indirektno pomogli u pisanju rukopisa za ovu knjigu. Zahtijevalo bi previše imena da se poimence zahvalim svima onima s kojima sam kod nas, u Varšavi, Jeruzalemu i Tokiju imao prilike voditi razgovore koji su na ovaj ili onaj način utjecali na koncipiranje nekog poglavlja ove knjige.

Također, svaki autor nekog matematičkog teksta treba da je obavezan i prema onima koji su svojim rukama izveli sve ono što treba učiniti da bi se *rukopis* pretvorio u *knjigu*: tkogod je ikada imao prilike vidjeti kako se rađa matematički slog, znat će ocijeniti koliko ne samo stručnog znanja nego i ljubavi za svoj posao treba da tu ulože slagari.

Svakom čitaocu bit ću obavezan na napomenama i sugestijama u vezi s tekstom ove knjige; molim da mi se one pošalju na moju adresu: Zagreb, Vinogradska 10.

U Zagrebu, 19. X 1963. V. Devidé

POPIS LITERATURE

za dalji studij područja matematičke logike obuhvaćenog u ovoj knjizi
(djela su poredana kronološki, prema posljednjem izdanju)

HILBERT D. — ACKERMANN W.
Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1938.

HILBERT D. — BERNAYS P.
Grundlagen der Mathematik I, II, Berlin 1934/9.

MOSTOWSKI A.
Logika Matematyczna, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocłav 1948,

BETH E. W.
Les fondements logiques des mathématiques, Paris 1950.

QUINE W. V. O.
Methods of Logic, New York 1950.

QUINE W. V. O.
Mathematical Logic, Cambridge 1951.

KLEENE S. C.
Introduction to Metamathematics, New York 1952.

CURRY H.
Leçons de logique algébrique, Paris 1952.

ROSSER J. B.
Logic for Mathematicians, New York 1953.

BOURBAKI N.
Théorie des Ensembles, Livre I. ASI 1212, Paris 1954.

LORENZEN P.
Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin 1955.

HEYTING A.
Les fondements des mathématiques, Paris 1955.

HEYTING A.
Intuitionism, Amsterdam 1956.

HENKIN L.
La structure algébrique des théories mathématiques, Paris 1956.

CHURCH A.
Introduction to Mathematical Logic I, Princenton 1956.

ŁUKASIEWICZ J.
Elementy logiki matematyczney, Panst. Wyd. Naukowe, Warszawa 1958.

FRAENKEL A. A. — BAR-HILLEL Y.
Foundations of Set Theory, Amsterdam 1958.
BETH E. W.
The Foundations of Mathematics, Amsterdam 1959.
NOVIKOV P. S.
Elementi matematičeskoi logiki, Moskva 1959.
ASSER G.
Einführung in die mathematische Logik I, Leipzig 1959.
SCHMIDT H. A.
Mathematische Gesetze der Logik I, Berlin 1960.
SCHÜTTE K.
Beweistheorie, Berlin 1960.
SCHOLZ H. — HASENJÄGER G.
Grundzüge der mathematischen Logik, Berlin 1961.

SADRŽAJ

GLAVA IV — LOGIKA SUDOVA

GLAVA V — NEKA ISPITIVANJA AKSIOMATIKE LOGIKE SUDOVA

GLAVA I

UVOD

1. KRIZA SAVREMENE MATEMATIKE

Kroz historiju matematike mogu se pratiti epohe njene veće i manje rigoroznosti.

Formule za površinu četverokuta starih Egipćana bile su samo približne; o nekom *dokazu* ili *izvodu* takve formule nije dakako bilo ni govora.

U doba starih Grka matematika je — čini se po prvi put — postala egzaktna *deduktivna* nauka u onom smislu kako mi to danas shvaćamo. Jedan od najvećih spomenika toga vremena, Euklidovi *Elementi*, bili su kroz dva tisućljeća uzor savršenstva matematičke sinteze.

U počecima novovjeke takozvane više matematike učinjeno je mnogo toga što antika ne bi priznala strogim izvodom. Eulerovo tretiranje mnogih problema infinitezimalnog računa po strogosti je daleko od Arhimedove metode ekshaustije, a po suptilnosti metode Eudoksova teorija omjera daleko nadvisuje mnoga ostvarenja novog vijeka.

Kasnije je radovima Cauchya, Weierstrassa i drugih teorija realnih brojeva i matematička analiza u glavnim konturama dobila oblik za koji se tada uglavnom mislilo da je definitivno zadovoljavajući i bilo je malo onih, koji su sa Kroneckerom o tome izražavali sumnje.

U stoljeću u kojem živimo doživljavamo dosad daleko najozbiljniju, najdublju, najtežu ali i najveličanstveniju krizu matematike. Željeli bismo, da iz nje matematika „uskrsne" pomlađena, kao što se to dešavalo i iza ranijih kriza: Sjetimo se samo da je otkriće nesumjerljivih dužina dovelo do Eudoksove teorije omjera i da je kritika i analiza Euklidova aksioma o paralelama dovela do neeuklidskih geometrija!

No moramo priznati da je sadanja kriza po karakteru bitno različita od ranijih. (Doduše, i svaka ranija bila je po karakteru bitno različita od prethodnih!) Prije se nije postavljalo pitanje matematičke istine kao takve niti je bilo skepse o osnovnim logičkim principima koji se primjenjuju u matematici, već je problem bio u iznalaženju putova i metoda koji će nas dovesti do te istine. Danas međutim — i to iz jakih razloga — ne postoji jedinstvenost ni u principijelnom stavu prema biti matematičke egzistencije i matematičke istine niti prema legitimnosti sredstava kojima se ona može tražiti.

Kad je nakon mnogih kritika, pojava antinomija i diskusija oko pojma matematičke beskonačnosti postalo očito da se neke fundamentalne koncepcije klasične matematike moraju revidirati, razvilo se više struja koje su tu reviziju pokušale provesti veoma različitim sredstvima.

2. ANTINOMIJE ILI PARADOKSI

2.1. *Paradoksi* ili *antinomije* koje su se u matematici javile na prelazu iz devetnaestog u dvadeseto stoljeće bile su — iako ne jedini — svakako jedan od glavnih razloga, da se matematika i matematičko mišljenje u cjelini podvrgne kritici i reviziji.

Tek što je Cantorova teorija skupova počela pobjedonosno rušiti barijere nezainteresiranosti i čak nepovjerenja prema novoj nauci, javili su se rezultati, koji su stavili u pitanje nju samu a preko nje i dotadašnji način matematičkog rasuđivanja uopće. Ovo naravno nije imalo za posljedicu neki opći defetizam matematičara. Doduše, mnogi su načelno priznavali dubinu i oštrinu krize, ali je većina od njih ipak za „vlastite potrebe" i dalje radila „po starom". Tješila je činjenica da svi ti paradoksi nisu direktno zahvaćali neko od klasičnih razrađenih područja matematike već samo izvjesne „periferne" ogranke teorije skupova. Pa ipak, ostao je stalni signal da nešto nije u redu s klasičnom matematikom.

Razna duboko različita shvaćanja osnova i biti matematike dovela su do razvoja velikih teorija, koje su, pored ostalog, imale i zadatak da likvidiraju antinomije.

Tako zvanim „intuicionistima" (o kojima ćemo uskoro govoriti nešto opširnije) doduše antinomije klasične matematike ne čine briga, jer je ova po njihovom shvaćanju ionako nelegitimna, a unutar okvira matematike koja je po intuicionističkim shvaćanjima legitimna, po uvjerenju intuicionista neke antinomije se principijelno ne mogu javiti. No ovu sigurnost oni su platili skupom cijenom odricanja od čitavih područja matematike i znatnim kompliciranjem preostalih.

Tako zvani „formalisti" (o kojima ćemo također uskoro govoriti opširnije) pak dosad nisu uspjeli da garantiraju odsutnost antinomija u svojim teorijama, a po svemu se čini, da tako nešto unutar njihova sistema principijelno nije moguće — bar ne u onom smislu kako se to *htjelo* postići i vjerovalo da *će se* postići.

U drugu ruku, većina matematičara i danas je uvjerena da se uz potreban oprez antinomije u matematičkoj *praksi* mogu izbjeći.

2.2. Osvrnut ćemo se nešto pobliže na jednu od najpoznatijih antinomija: *Russellov paradoks*. Rasuđivanja će, razumije se, biti na nivou tzv. „klasične" ili „naivne" teorije skupova.

Za svaki skup S možemo postaviti ovu alternativu: ili *je* S element od S, ili S *nije* element od S. Skupove prve vrste, dakle one koji *sadrže* same sebe kao element, zvat ćemo e-skupovima, a one druge vrste, koji *ne* sadrže same sebe kao element, zvat ćemo n-skupovima.

Npr. skup svih prirodnih brojeva očito je n-skup, jer se čitav taj skup ne poklapa ni sa kojim posebnim prirodnim brojem, dakle ni sa kojim svojim elementom. Prazni skup također je n-skup, jer ne sadrži nijedan element, dakle ni samog sebe kao element (svaki skup, koji kao svoj *element* — *ne* kao svoj *podskup*! — sadrži prazni skup, sadrži time bar jedan element, pa nije prazan).

U drugu ruku, dozvolimo li egzistenciju „skupa svih skupova", tj. skupa koji kao elemente sadrži sve skupove, bit će među tim elementima i on sam — jer i on je skup — pa je to *e*-skup.

Međutim, ako i ne ulazimo u pitanje egzistencije „skupa svih skupova", dovoljno je da dopustimo da za bilo koji dani skup *S* uvijek vrijedi jedna i samo jedna od mogućnosti da je to bilo *e*-skup, bilo *n*-skup (što dakako samo po sebi još ne isključuje mogućnost da npr. *e*-skupova uopće nema).

Definirajmo sada — ovo je ključna tačka Russellove antinomije — skup *P* kao onaj, koji kao elemente sadrži sve *n*-skupove, dakle sve one skupove *S*, koji *ne* sadrže same sebe kao element. (Zbog ranije navedenih *n*-skupova — kojih egzistencija nije bila u pitanju — skup *P* sigurno nije prazan, što međutim nije bitno za razmatranja koje slijede.)

Postavlja se pitanje, da li je *P* *e*-skup ili *n*-skup?

Ako bi *P* bio *e*-skup, dakle sadržavao samog sebe kao element, bio bi *P* — po definiciji od *P* — jedan od *n*-skupova, tj. ne bi sadržavao samog sebe kao element. — Dovle još nema ničeg paradoksalnog, jer bi ovo mogli shvatiti indirektnim dokazom da je *P* u stvari *n*-skup.

Međutim sada dolazi poteškoća:

Ako bi *P* bio *n*-skup, tj. ne bi sadržavao sebe samog kao element, bio bi *P* — po definiciji od *P* — jedan od elemenata od *P*, tj. sadržavao bi sebe kao element i po tome bio *e*-skup.

Izlazi dakle, da *P* sadrži sam sebe kao element onda i samo onda, ako ne sadrži sam sebe kao element! U ovome i jest paradoks Russellove antinomije.

(Do navedene antinomije došao je engleski filozof i matematičar Bertrand Russell 1902. i iste godine pisao o tome njemačkom matematičaru G. Fregeu, koji je upravo bio dovršio svoje veliko djelo *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet* — Osnovi aritmetike, izvedeni simboličkim pismom — Jena, Vol. I 1893, Vol. II 1903. U dodatku tome djelu Frege priznaje da je Russellovim rezultatom uzdrman jedan od temelja njegova djela. U pokušaju da ukloni teškoće, Frege nije uspio. 1903. Russell je svoj rezultat i publicirao. U isto vrijeme nađena je ova antinomija i u Göttingenu; o njoj su raspravljali E. Zermelo i njegovi učenici, ali je nisu publicirali.)

2.3. Razmotrimo sada neke od putova kojima se — bez uspjeha — pokušalo *u klasičnim okvirima* rastumačiti Russellov paradoks.

Da bismo bolje razumjeli prvi od njih, opišimo najprije naizgled srodni „paradoks brijača".

U nekom selu bio je brijač, koji je brijao sve *one* (i *samo* one) stanovnike sela, koji se *nisu* brijali sami. Da li je brijač brijao sebe?

Ako bi se brijač brijao, bio bi on jedan od onih stanovnika sela koji se briju sami, pa se ne bi smio brijati. Ako se pak brijač ne bi brijao, bio bi on jedan od stanovnika sela koji se ne briju sami, pa bi se morao brijati.

U prvi mah čini se da — u principu, po logičkoj strukturi opisane situacije — ovdje imamo pred sobom okolnosti vrlo srodne onima u Russellovu paradoksu.

Međutim „paradoks“ brijača lako je na zadovoljavajući način likvidirati: treba samo uočiti, da iz zaključivanja oko njega izlazi, da nije moglo postojati selo, u kojem bi brijač djelovao na opisani način. Radi se dakle o tome, da bi korektna formulacija problema bila ta, da se pita da li je moglo postojati selo s brijačem koji radi na navedeni način — a rješenje je, da nije moglo postojati. Na taj način „paradoks“ brijača nije neočekivaniji niti čudniji od činjenice, da ne može postojati selo, u kojem ima brijač koji nedjeljom nikad ne radi a koji nedjeljom kojiput radi.

Ako analognu argumentaciju primijenimo na Russellov paradoks, dobit ćemo da iz njega jedino proizlazi da *ne egzistira* (tamo definirani) skup P svih onih skupova S, koji ne sadrže *same* sebe kao element. Time smo doduše uklonili apsurdni zaključak da P *sadrži* sebe kao element onda i samo onda ako P *ne* sadrži sebe kao element — ali smo umjesto toga došli u situaciju da moramo negirati egzistenciju skupa P, koji je, klasično rasuđujući, bio razumno definiran. To onda nije mnogo manji apsurd od ranijeg i ne razjašnjava antinomiju na zadovoljavajući način (o čemu će još biti govora kasnije).

2.4. Jedan drugi put za pokušaj bijega pred paradoksom je ovaj: Može se prigovoriti, da se u Russellovu paradoksu govori o skupovima u preširokom i nedovoljno određenom smislu, tako da značenje tog pojma nije u dovoljnoj mjeri matematički precizirano.

Što npr. znači „skup svih n-skupova“? Kakvi sve skupovi dolaze u obzir? Da li samo oni kojima su elementi *matematički* objekti ili također oni, kojima su elementi živa bića, ili kakvi god apstraktni pojmovi itd?

Međutim, ubrzo se uvida da ni ovaj prigovor ne vodi izlazu iz ćorsokaka. Naime, ako (neprazne) skupove ograničimo na takve koji sadrže samo „dopustive“ elemente, pri čemu definiramo da su „dopustivi“ elementi bilo

1° prirodni brojevi,

bilo

2° skupovi s dopustivim elementima

(G. Gentzen 1936.), onda gornji prigovor nedefiniranosti područja skupova s kojima radimo otpada. No ponavljanjem ranijeg rasuđivanja uz ovdje dana ograničenja na pojam „skupa“ lako se vidi da sam paradoks ostaje na snazi.

Dapače, područje skupova, koje dopuštamo, moguće je još više ograničiti time, da se kao dopustivi element pod 1° prihvati samo prazan skup 0 (uz 2° kao ranije).

Analizirajmo nešto detaljnije što su sada legitimni skupovi — pitanje, koje je i samo *po sebi* od interesa.

0 je skup. Po 1° skup je i $\{0\}$, tj. skup kojem je prazni skup jedin element. Dalje je odatle uz 2° $\{\{\emptyset\}\}$, a uz 1° i 2° $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ skup. Odatle su dalje, opet uz 1° i 2°, skupovi također i $\{\{\{0\}\}\}$; $\{\{\emptyset, \{0\}\}\}$; $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$; $\{\emptyset, \{0, \{0\}\}\}$; $\{\{0\}, \{\{0\}\}\}$; $\{\{0\}, \{0, \{0\}\}\}$; $\{\{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\}$; $\{0, \{0\}, \{\{\emptyset\}\}\}$; $\{\emptyset, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$; $\{0, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\}$; $\{\{0\}, \{\{0\}\}, \{0, \{\emptyset\}\}\}$; $\{0, \{0\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}\}$; itd. Nadalje, kako su na ovaj način npr. $\{0\}, \{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \ldots$, $\{\{\{\ldots\{0\}\ldots\}\}\}, \ldots$ skupovi, to po 2° postoji i beskonačni skup koji sve upravo naznačene sadrži kao elemente, itd, itd.

(Spomenimo, potpunosti radi, i ovo: Smatramo li, da prazni skup ,,automatski" zadovoljava uvjet, da sadrži samo dopustive elemente — jer sigurno ne sadrži nijedan nedopustivi — možemo u danoj definiciji područja legitimnih skupova izostaviti 1°.)

Iz započete konstrukcije legitimnih skupova možemo zaključiti ovo:

U jednu ruku dobiveno područje skupova znatno je uže od područja ,,kakvih god" skupova, pa čak i od područja ranije definiranih ,,matematičkih" skupova (gdje su pod 1° dopustivi elementi bili prirodni brojevi). Npr. $\{1\}$ sada nije skup (iako, dakako. raspolažemo čak sa beskonačno mnogo skupova koji sadrže tačno jedan element, npr. $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \ldots$). Ipak, lako je provjeriti da i za ovako ograničeno područje skupova Russellov paradoks tvrdoglavo ostaje na snazi.

2.5. Vratimo se na prigovor analogan ranijem, naime da i za ovako ograničeno područje skupova jednostavno *ne egzistira* ,,skup svih n-skupova".

Zašto ne postoji takav skup? Ako mu negiramo egzistenciju samo *zato* i *nakon* toga, što pretpostavka o njemu vodi do kontradikcije, kakav ćemo imati kriterij za egzistenciju matematičkih objekata? Nikada nećemo znati, neće li definicija nekog takvog objekta tko zna gdje i kada dovesti do protivrječja.

Likvidacija Russellova paradoksa negiranjem egzistencije skupa svih n-skupova je dakle *relativna* mjera, kojom, zatvarajući jedna vrata antinomijama, ni po čemu nismo sigurni, da one neće ući na neka druga.

Sve u svemu, čini se da danas ima dovoljno razloga smatrati da se Russellov i drugi paradoksi u okvirima klasične logike i matematike ne mogu na zadovoljavajući način protumačiti i time kao antinomije ukloniti.

3. POTENCIJALNA I AKTUALNA BESKONAČNOST

3.1. Nakon Torricellieva pokusa sa živom postalo je jasno da priroda doduše nema ,,horror vacui" (strah pred prazninom) ali je ostalo uvjerenje da ima ,,horror infiniti" (strah pred beskonačnošću).

Zaista, prema današnjem našem znanju nigdje u prirodi ne nailazimo na neku *faktičku*, već *ostvarenu*, *aktualnu* beskonačnost. Ako npr. govorimo o ,,beskonačnom" broju molekula, atoma, elektrona — ili kojih drugih od obilja čestica kojim su nas zasuli moderni fizičari — postupamo slično kao pripadnici jednog plemena, koji se, ako žele izraziti neki broj veći od 6, hvataju za kosu nastojeći time pokazati kako je broj u pitanju neizrecivo velik.

Čak i u kozmičkim razmjerima teško je prihvatiti ideju o beskonačnom (u smislu *beskonačno velikom*) svemiru i zasad se čini prirodnijom pretpostavka da je on doduše *bez granica*, ali *konačan* — kao što bi to npr. bila kuglina površina za neka dvodimenzionalna bića nesposobna za percepciju i komunikaciju s preostalim trodimenzionalnim prostorom izvan i unutar te površine.

3.2. Matematičaru je naprotiv beskonačnost ,,kruh svagdanji". Po H. Weylu matematika upravo i jest *nauka o beskonačnom*.

Historijski je brojanje bilo početak matematike. A kad smo se jednom odlučili na prelaz od broja n na broj $n+1$, što će nas u tom procesu zaustaviti? Ako u čitavoj prirodi, u čitavom svemiru, ima N ,,elementarnih čestica" koje se „ne mogu dalje dijeliti“, zar je to razlog da $N+1$ više ne bude „prirodan“ prirodni broj?

Naročito intuicionisti inzistiraju na tome, da se matematika sastoji od misaonih *konstrukcija* — a ovima je, čini se, nemoguće propisati da se moraju zaustaviti kod nekog određenog broja.

Ipak, valja dobro uočiti, da je ovakva beskonačnost kakva se javlja kod neograničene konstrukcije sve većih i većih prirodnih brojeva bitno drugačijeg karaktera od one, na koju mislimo, kad govorimo o skupu svih prirodnih brojeva, smatrajući ovaj *gotovim*, *svršenim*, tako reći pred nama razastrtim totalitetom. U prvom slučaju radi se o *potencijalnoj*, a u drugom o *aktualnoj* beskonačnosti.

U potencijalnu beskonačnost, bar u njenom navedenom običnom smislu, možda će posumnjati samo vrlo radikalan „ultraintuicionistički“ matematičar. Što se tiče aktualne beskonačnosti stvari stoje drugačije.

Nemaju svi matematičari jednake poglede na to, u kojoj se mjeri, s kakvim opravdanjem i da li se uopće s aktualnom beskonačnosti može i smije postupati služeći se klasičnom logikom i matematikom. Aristotelova logika je, kažu intuicionisti, nastala apstrakcijom od rasuđivanja o *konačnim* skupovima, i nema opravdanja da se njena pravila upotrebljavaju izvan toga područja.

3.3. Jednostavan primjer pomoći će da jasnije uočimo razliku između potencijalne i aktualne beskonačnosti.

Uzmimo da smo neko svojstvo S prirodnih brojeva dokazali pomoću tzv. *matematičke indukcije*, tj. da smo dokazali da 1° broj 1 ima svojstvo S i 2° da, ako broj n ima svojstvo S, i idući broj $n+1$ također ima svojstvo S.

Gledajući na prirodne brojeve kao *potencijalno* beskonačan skup, možemo odatle direktno zaključiti da *bilo koji odabrani* broj k ima svojstvo S, jer do toga — bilo faktički, bilo bar u principu — dolazimo ponavljanjem $k-1$ puta zaključka 2°. Drugim riječima, kako postupno konstruiramo prirodne brojeve, tako — paralelno — zaključujemo, da *svaki* tako dostignuti broj *ima* svojstvo S.

Ovo će priznati i intuicionisti, ukoliko su, dakako, tvrdnje 1° i 2° dokazane na za njih prihvatljiv način.

Međutim, *nije isto* ako kažemo da iz dokazanog izlazi da *svi* prirodni brojevi (a ne samo *bilo koji dani* prirodni broj) imaju svojstvo S i ako pod tim „svi“ ne želimo razumjeti samo sinonim za „bilo koji“, već pomoću „svi“ želimo za sve prirodne brojeve „odjednom“ izreći da imaju svojstvo S. *Direktno* dakako ovu tvrdnju ne možemo dokazati, jer je ne možemo efektivno *provjeriti* za *sve* prirodne brojeve iteriranjem zaključka 2°. Uz klasično rasuđivanje možemo tvrdnju sada opravdati samo *indirektnim* dokazom, naime ovako:

Uzmimo da *nije* tako da svi prirodni brojevi imaju svojstvo S. Tada bi postojao neki određeni prirodni broj k koji *nema* svojstvo S. (Nije bitno da bi postojao i *najmanji* takav broj, tj. ne treba nam *dobro uređenje* skupa prirodnih brojeva!) No zaključivanjem kao ranije izlazi da k *ima* svojstvo S. Dobiveno protivrječje *obara* pretpostavku da *nije* tako da svi prirodni brojevi imaju svojstvo S, a to je i trebalo dokazati. — Ovdje smo, dakako, rasuđivali *klasično*, jer za intuicioniste aktualno beskonačni skup prirodnih brojeva nije matematički objekt na koji se smije primjenjivati zaključke poput ovdje učinjenog: naime, ako *nije* tako da *svi* prirodni brojevi *imaju* svojstvo S, to još *ne* znači da možemo *efektivno* naći neki broj koji to svojstvo *nema* i stoga intuicionistički još nije opravdano tvrditi da tada takav broj postoji (usp. 4.).

3.4. Promotrimo još jedan primjer. Uzmimo da razmatramo problem *postoji* li neki prirodni broj nekog danog svojstva T — npr. postoji li prirodni broj n sa svojstvom da je veći od 2 i da postoje prirodni brojevi x, y, z takvi da je $x^n + y^n = z^n$.

Ako je — na za njega zadovoljavajući način — efektivno određen broj k sa svojstvom T, i klasični matematičar i intuicionist priznat će problem riješenim i dokazanim stavak, da *postoji* prirodni broj sa svojstvom T.

Ako *pretpostavka* da *postoji* prirodni broj sa svojstvom T — za njega legitimnim putem — vodi do protivrječja, i klasični i intuicionistički matematičar priznat će problem riješenim i dokazanim stavak da *ne* postoji prirodni broj sa svojstvom T. (Jedino za ultraintuicionista Grissovih shvaćanja ovakav slučaj ne dolazi u obzir.)

Sada dolazimo do najzanimljivijeg slučaja.

Ako pretpostavka da *ne* postoji prirodni broj sa svojstvom T — na za njega dopušten način — vodi do protivrječja, klasični matematičar će bez daljnjega zaključiti da tada *postoji* broj sa svojstvom T. Intuicionist međutim, ako je obaranje pretpostavke da ne postoji prirodni broj sa svojstvom T bilo takvog karaktera, da još — niti u principu— *ne* omogućuje *nalaženje* broja sa svojstvom T, ne bi odatle zaključio da broj sa svojstvom T *postoji*, jer za njega „postojati" znači isto što i „biti konstruiran".

Kad bi prirodnih brojeva bilo samo konačno mnogo, moglo bi se pokušati verificiranjem konstatirati ima li broj 1 svojstvo T, ima li ga broj 2, pa broj 3 itd. Takvu konstrukciju priznao bi i intuicionist, ukoliko je, dakako, za svaki pojedini broj provjeravanje provedeno na način koji on priznaje.

No za aktualno beskonačni skup prirodnih brojeva ne možemo kušanjem provjeriti ima li među njima traženi broj. Kao potencijalno beskonačan skup možemo pak prirodne brojeve ispitivati na sadržavanje broja traženog svojstva, ali će time odgovor o postojanju traženog broja čak i u klasičnom smislu biti definitivan jedino ako ga nađemo; ako ga nema, nećemo to ovim putem nikad saznati.

Tako dugo dok rasuđujemo samo o potencijalnoj beskonačnosti čini se da nema opasnosti da bi došli do antinomija o kojima je ranije bilo govora: one su uvijek na neki način uključivale aktualnu beskonačnost.

U drugu ruku, upravo su prihvaćanje aktualne beskonačnosti i primjena na nju klasičnog matematičkog zaključivanja doveli do najbogatijih matematičkih teorija, naročito otkako je izgrađena teorija skupova. Po Hilbertovim riječima nitko ne treba da nas protjera iz raja kojeg nam je stvorio Cantor. Aktualnu beskonačnost bitno upotrebljavaju mnoge od najjačih i najelegantnijih matematičkih metoda. Zermelov aksiom izbora samo je jedan primjer.

Aktualna beskonačnost bila je za matematiku plod „drveta spoznaje". Okusivši od njega, postala je „božanskom" naukom, ali je zato protjerana iz „raja" u kojem nije bilo sumnji.

Smije li se u matematici zadržati aktualna beskonačnost? Ima li taj pojam uopće neko značenje? Možemo li očekivati da baratajući s takvim barutom neće uvijek dolaziti do eksplozija novih paradoksa? Koja je vrijednost teorema dobivenih upotrebom aktualne beskonačnosti?

Na ova pitanja matematičari različitih shvaćanja neće dati iste odgovore. Drugačije će odgovoriti klasični matematičar, drugačije logicist, drugačije formalist i drugačije intuicionist. Poneki od njih priznat će da i drugi imaju „u izvjesnom smislu" donekle pravo i pokušat će njihove postupke „reinterpretirati" na vlastitom jeziku. Ali svaki će ostati više ili manje uvjeren da je u krajnjoj liniji on taj koji je imao pravo.

No činjenica je da su ispitivanja *svih* tih smjerova o osnovama matematike izvanredno obogatila ovu nauku. Stvorene su nove teorije, nove metode, nove grane matematike. Dobiven je niz izvanredno dubokih rezultata od trajne vrijednosti.

Uvod u Bourbakijevo djelo o osnovama matematike i teoriji skupova završava riječima:

„... vjerujemo da je matematici određeno da preživi i da nikad nećemo doživjeti da se bitni dijelovi ove veličanstvene zgrade sruše zbog neke kontradikcije koja bi se najednom javila; ali ne tvrdimo da ovo mišljenje počiva na nečem drugom do li iskustvu. To je malo, reći će neki. Ali eto, dvadesetipet stoljeća matematičari imaju običaj da ispravljaju svoje pogrješke i nalaze time svoju nauku obogaćenom a ne osiromašenom; ovo im daje pravo da u budućnost gledaju s vedrinom."

4. INTUICIONIZAM

4.1. Prema takozvanim logicističkim shvaćanjima *matematika* se osniva na *logici*; sa tog stajališta gledano matematika je, u krajnjoj liniji, *grana* logike. Ovu koncepciju zastupao je naročito Frege i zatim Russell. Monumentalno djelo „Principia Mathematica" Russella i Whiteheada imalo je za zadatak da na toj osnovi konsolidira „napuklu" zgradu matematike. Međutim, jedna od ključnih tačaka ove teorije, tzv. *aksiom reducibiliteta*, nije s uspjehom izdržao kritike. (U ovoj knjizi o logicizmu nećemo govoriti detaljnije.)

4.2. Nasuprot logicistima, intuicionistima nije matematika grana logike, već — obrnuto — za njih je *logika* grana *matematike*, ali nikako *ne* njen *osnov*. Za intuicioniste su osnovne, primarne, matematičke konstrukcije, a logičke zakonitosti su sekundarne, one su izvedene apstrakcije odnosa na koje nailazimo u matematici. Naprimjer, kad kažemo „Ako A povlači B, a B povlači C, onda A povlači C" onda to — intuicionistički — treba interpretirati ovako: „Ako posjedujem metodu kojom na osnovu konstrukcije od A mogu sagraditi konstrukciju od B, i metodu kojom na osnovu konstrukcije od B mogu sagraditi konstrukciju od C, onda time posjedujem i metodu kojom na osnovu konstrukcije od A mogu sagraditi konstrukciju od C". Radi se dakle o izreci matematičkog karaktera, iako velike općenitosti. To je dakle *konstatacija* o nekim okolnostima koje vladaju kod matematičkog izvođenja a ne neki *primarni* i *apsolutni* logički princip koji „općenito vrijedi" pa se *stoga* može primjenjivati *i* kod matematičkog izvođenja.

4.3. Sami nazivi „intuicionizam" i „intuicionistički" prouzročili su mnoge nesporazume. Historijski su potekli odatle, što su neki intuicionisti inzistirali na nekoj „praintuiciji" prirodnog broja. Ovo se kadšto — naročito među nematematičarima — tumačilo tako da se intuicionizam smatrao neke vrste „matematičkom metafizikom". Međutim, u stvari o tome ne može biti govora. Uz precizniju formulaciju polaznih postavki i koncepcija intuicionizma (to će mu nesretno *ime*, čini se, ostati) lako se možemo osvjedočiti da on ne sadrži ničeg što bi opravdavalo da ga se klasificira kao metafiziku.

Za intuicioniste egzistencija nekog matematičkog objekta ekvivalentna je s poznavanjem metode kojom se taj objekt može konstruirati. Matematičko rasuđivanje sastoji se u *misaonim konstrukcijama*, tj. u konstruiranju matematičkih objekata u našem duhu, u mislima. Međutim, *ne* tvrdi se da bi neki *primarni* objekti *nad* kojima se te konstrukcije vrše morali *preegzistirati* u našem *duhu* prije svakog opažanja i mišljenja. Naprotiv, oni mogu biti i rezultat apstrakcije nad rezultatima *opažanja* objekata *vanjskog*, materijalnog svijeta oko nas. Pri percepciji nekog objekta stvaramo pojam određene *jedinke* procesom apstrahiranja od sekundarnih, nebitnih karakteristika tog konkretnog objekta. U tome što prihvaćamo mogućnost neograničenog *ponavljanja* ovog događaja leži — intuicionistički — izvor pojma prirodnog broja. Dalje ispitivanje prirodnih brojeva je onda posve određeno, tj. ne svodi se na izvođenje posljedica iz nekog u izvjesnoj mjeri proizvoljnog sistema aksioma (npr. Peanova) već se sastoji u ispitivanju prirodnih brojeva, onakvih kakvi su dani gornjom deskripcijom.

Inzistiranje na konstruktibilnosti u matematičkim rasuđivanjima ima za posljedicu da intuicionisti ne priznaju legitimnim neke postupke uobičajene u klasičnoj matematici. Od indirektnog dokaza ostaje sačuvano da se njime mogu obarati pretpostavke time da se iz same pretpostavke (intuicionistički prihvatljivo) izvede neki apsurd (npr. jednakost $0=1$). Međutim, indirektni dokaz u općem slučaju *ne* može garantirati valjanost neke pretpostavke P odatle što suprotna pretpostavka (makar i intuicionistički prihvatljivo) vodi do apsurda. Ovakva okolnost jedino pokazuje da je „apsurdnost od P apsurdna" (tj. vodi na kontradikciju), ali to još intuicionistički ne opravdava tvrdnju da sama pretpostavka P *stoji*. Iz istih razloga u općem slučaju nije legitimno zaključivanje po principu *tertium non datur* (trećeg nema); tj. principu koji izražava tvrdnju da svaka tvrdnja *ili* stoji *ili* ne stoji (i *nema* neke daljnje treće mogućnosti).

Općenito uzevši, većini matematičara intuicionističke koncepcije su opore; svakako, relativno je malen broj onih koji ih prihvaćaju i načelno i u „svakodnevnom" matematičkom radu. Ipak sve ove koncepcije ne treba definitivno i kategorički odbaciti samo zato što nisu u skladu s uobičajenim, tradicionalnim i dominantnim shvaćanjima. Sjetimo se samo kakva je bila situacija kad su stvarane neeuklidske geometrije! Sam Gauss se ustručavao da o tome objavljuje rezultate, jer se bojao „vike Beoćana".

Čini se da glavna težina argumenata protiv intuicionizma nije u principijelnim zamjerkama, nego u rezultatima do kojih konsekventni intuicionizam vodi. Čitava područja matematike intuicionisti moraju odbaciti kao bezsadržajna ili ih posve iznova izgrađivati s rezultatom koji često malo nalikuje na ono što je trebalo rekonstruirati. Neki fundamentalni teoremi analize više ne vrijede. Već teorija realnih brojeva u osnovi se razlikuje od klasične.

Od *principijelnih* teškoća pridolazi činjenica da ni sami intuicionisti međusobno nisu uvijek potpuno saglasni u pogledu pitanja što je u matematici legitimno a što nije.

Međutim, mnogi rezultati intuicionističke matematike sami su po sebi od interesa i trajne vrijednosti. Pored toga intuicionistička kritika bila je sigurno jedan od odlučujućih motiva koji su doveli do izgradnje nekih velikih novih matematičkih teorija, koje doduše same nisu *konstruktivne* teorije, ali su (klasične) teorije *o konstruktibilnom* (npr. rekurzivne funkcije).

(O razlici između konstruktivnih teorija i teorija o konstruktibilnom citirajmo A. Heytinga:

„U nekoj teoriji o konstruktibilnom definira se određena klasa matematičkih objekata kao klasa konstruktibilnih objekata. Ovdje je bitno troje: 1° pretpostavlja se jedna matematička teorija u kojoj se klasa konstruktibilnih objekata može definirati; 2° pojam konstruktibiliteta je definirani pojam, a ne primarni pojam; 3° postoji izvjesna sloboda u izboru definicije konstruktibilnog, uz jedinu pretpostavku da u dovoljnoj mjeri odgovara našem intuitivnom pojmu matematičke konstrukcije...

...Pod konstruktivnom teorijom razumijevam teoriju u kojoj smatramo da neki objekt postoji jedino nakon toga što je konstruiran. Drugim riječima, u jednoj konstruktivnoj teoriji ne mogu se spominjati drugi objekti osim konstruktibilnih...

...Iz činjenice da se samo za konstruktibilne objekte smatra da postoje, izlazi da oni ne čine neku podklasu klase svih matematičkih objekata. U konstruktivnoj teoriji ne može biti referencije na neki matematički sistem koji bi joj prethodio; ona mora, po svojoj prirodi, biti samostalna.")

5. FORMALIZAM

David Hilbert i njegovi sljedbenici formalističkog smjera ne pristaju da zbog intuicionističke kritike žrtvuju bogatu baštinu klasične matematike.

Odreći matematičaru mogućnost primjene isključenog trećeg po Hilbertu je isto, kao zabraniti boksaču da se služi pesnicama.

Da bi osigurali rezultate klasične matematike, formalisti su odijelili *formalnu* matematiku *koju* ispituju i izgrađuju od *sadržajne* „metamatematike" *pomoću koje* se ta ispitivanja i izgradnja one prve vrši. Konsekventno provedena, ova koncepcija vodi do toga da se ne samo *objekti* formalne teorije i relacije među njima već i sama *dedukcija unutar teorije* (u principu) lišavaju sadržaja. Time manipulacija sa znakovima postaje neke vrste „igra" s tačno propisanim pravilima, poput npr. šaha. (Dakako, ova pravila nisu odabrana proizvoljno, već s tendencijom da formalna teorija „obuhvati" neku klasičnu). Krajnji zadatak metamatematike je da pokaže *nekontradiktornost* formalne teorije, tj. da nas uvjeri da se *unutar* formalizirane teorije ne mogu naći dedukcije dvaju teorema A i $\neg A$ (koji bi, sadržajno interpretirani, izražavali suprotne tvrdnje).

U takvom svom programu formalizam ne samo da *nije* definitivno uspio, nego je čak — do neke mjere — *definitivno* osuđen da *neće moći* uspjeti. Pokazalo se, da je uz određeno preciziranje metamatematičkih postupaka (specijalno uz inzistiranje na *striktnoj* finitnosti, tj. izbjegavanju nefinitnih postupaka bilo koje vrste: egzistencijalnih, ne-konstruktivnih i indirektnih dokaza, aktualne beskonačnosti, transfinitne indukcije i tome sličnog) unutar određene *vrlo široke* klase formalnih teorija (npr. već svake sa svojstvom da se u njoj može izgraditi elementarna aritmetika) *nemoguće* dokazati njenu nekontradiktornost. Nadalje, u takvim teorijama — ukoliko uopće *jesu* nekontradiktorne — uvijek postoje formalizirane tvrdnje koje su *neodlučive*, tj. izrazi A koji su na dopušteni način formirani u teoriji a takvi, da sigurno *ni* izraz A *ni* izraz $\neg A$ *ne* može biti deduciran unutar teorije.

Ovi rezultati K. Gödela nesumnjivo su vrlo duboki i dalekosežni. U neku ruku oni su „negativni" u smislu da njima dolaze do izražaja izvjesne principijelne poteškoće i ograde koje su vezane uz osnovne formalističke koncepcije. (Spomenimo ipak da uz određeno *oslabljenje* zahtjeva finitnosti metamatematike može doći do novih okolnosti; G. Gentzen je npr. dokazao nekontradiktornost elementarne teorije brojeva upotrebom transfinitne indukcije do određenog „ne tako veoma velikog" beskonačnog ordinalnog broja. Ali to je *odstupanje* od striktnog Hilbertova programa.)

Bez obzira na sve ovo, zahvaljujući radovima Hilberta i drugih formalista razvio se niz novih metoda i skupljeno je obilje vanredno interesantnih, dalekosežnih i lijepih rezultata koji će sigurno također ostati trajna svojina matematike (među njima npr. spomenuti Gödelovi rezultati).

I ovdje treba spomenuti da su i nazivi „formalizam" i „formalistički" odabrani dosta nesretno. Njima prvenstveno treba „zahvaliti" da je dosta matematičara a još više filozofa *a priori* odbacilo diskusiju o njihovim koncepcijama smatrajući ih formalističkim u pejorativnom smislu, kao da formalisti u matematici inzistiranjem na *formi* žele ovom *nadomjestiti* sadržaj. Ovo sigurno nije tačno; treba samo uočiti da su upravo formalisti bili ti koji su tražili skrupuloznu finitnost u *sadržajnoj* metamatematici; skrupuloznu čak u još većoj mjeri nego li je intuicionisti traže za svoju matematiku.

6. ZAKLJUČAK

Uz formalističke koncepcije očuvana je praktički čitava klasična matematika — ali definitivne sigurnosti od pojava kontradikcija još nema. Za intuicioniste je sloboda od kontradikcije njihove matematike evidentna, ali je u njoj ostalo sačuvano relativno vrlo malo klasične matematike.

Postoji niz daljnjih ovima više ili manje srodnih a i od njih radikalno različitih koncepcija o biti matematike, matematičke egzistencije i matematičke istine. Vjerojatno bi još bilo preuranjeno o svima njima dati konačan sud Ali sve su one — neka u većoj, neka u manjoj mjeri — obogatile matematiku.

Na jednom predavanju Hilbert je rekao: „Wir müssen wissen. Wir werden wissen." (Moramo znati. Znat ćemo.) Možda uvjerenje o značenju matematike i entuzijastičko pouzdanje u njenu moć nije nigdje bilo izrečeno tako snažno kao u ove dvije krajnje sažete rečenice. S druge strane duboka vjera u sigurnost matematičkih metoda ali i ogromne teškoće na koje nailazimo u pokušajima njihova definitivnog fundiranja teško da su igdje izražene duhovitije nego li u izreci A. Weila: „God exists since mathematics is consistent, and the devil exists since we cannot prove it." (Bog postoji jer je matematika neprotivrječna, a đavo postoji jer to ne možemo dokazati.)

Potencijalnu „detronizaciju" matematike sa pijedestala nepogrješive kraljice nauka *ne* treba primiti kao *degradaciju* njene vrijednosti. Ako smo uvidjeli da ona *nije* djelo *bogova* nego djelo *ljudi*, imamo time sada samo još više prava da se njome ponosimo, više dužnosti i poticaja da je dalje izgrađujemo i više mogućnosti da joj se radujemo i uživamo u njenoj ljepoti.

GLAVA II

ALGEBRA SUDOVA

1. PREDMET ALGEBRE SUDOVA

1.1. *Uvod i program.* Ciljem izgradnje *algebre sudova* bit će nam konstrukcija jedne matematičke teorije koja treba da obuhvati izvjestan (vrlo elementaran) dio logike.

Ova teorija, kao što ćemo vidjeti, neće još biti u potpunosti formalizirana deduktivna teorija, već ćemo u njoj formalizirati samo *objekte* teorije i *relacije* među njima·ali ne i samu *deduktivnu strukturu* teorije:

Naime, kada budemo uveli pravila za „računanje" s algebarskim simbolima koji će nam reprezentirati sudove neće nam više biti potrebno (ni dopušteno) da se pozivamo na njihov intendirani smisao, već samo na ona njihova svojstva koja smo ranije eksplicitno ili implicitno karakterizirali aksiomima — slično kao što su npr. u Hilbertovim Osnovama geometrije tačka i pravac samo još elementi nekih „sistema objekata" koji se podvrgavaju određenim zahtjevima, a ne više Euklidovo „ono što nema dijelova" odnosno „dužina bez širine" koja „za sve tačke na njoj podjednako leži". Ali zaključivanje i rasuđivanje u vezi s izvođenjem daljnjih relacija među objektima teorije iz ishodnih neće ovdje još biti striktno ni eksplicitno formalizirano, već će se vršiti u okvirima uobičajenog „klasičnog" logičkog izvođenja, onako kao što se provodi u velikoj većini matematičkih teorija.

Formalizirana logička dedukcija bit će uvedena u Glavi IV ove knjige. Tek tamo će čitalac kojem je ova knjiga prvi susret s metodama matematičke logike moći bolje osjetiti i ocijeniti fundamentalnu i duboku razliku među koncepcijama na osnovu kojih su izgrađene Glava II i Glava IV. Ovdje dane napomene treba dakle shvatiti kao samo privremenu, grubu i nepotpunu indikaciju nečeg što po prirodi stvari može biti do kraja jasno i određeno tek kad se očituje u provedbi na konkretnom materijalu.

U izgradnji algebre sudova ići ćemo dakle za tim da stvorimo neku matematičku teoriju određenog područja našeg mišljenja. Kod toga se neminovno moramo sukobiti s jednim problemom koji nam se nameću uvijek onda kad želimo preciznim matematičkim definicijama obuhvatiti i tačno razgraničiti pojmove koji u „običnom govoru" imaju samo nejasne konture a kojima pridjeljujemo izvjesni smisao koji je obično daleko od toga da bi neposredno dopuštao rigoroznu matematičku obradu. Razumije se da takav pothvat u stanovitom smislu nikad nije apsolutno i idealno ostvariv, jer upravo time što za neprecizni pojam supstituiramo jedan drugi precizni, vršimo određeni zahvat, određenu izmjenu okolnosti, i ne treba da nas začudi ako ova dovede do posljedica koje se kojiput u prvi mah čine paradoksalnim ukoliko ih nesvijesno interpretiramo tako da ih „naivno" imputiramo ishodnim intuitivnim (= matematički još nepreciziranim, nego shvaćenim u smislu „običnog govora") objektima. Sjetimo se npr. Weierstrassove krivulje koja je u svakoj tački neprekinuta a nigdje nema derivaciju: egzistenciji takvog objekta ne treba se previše čuditi ako samo imamo na umu da pojam neprekinutosti onako kao što ga precizno uvodimo u osnovama više analize nije „ono isto" što bismo kao matematički neškolovani ljudi mogli razumijevati pod takvim nazivom.

Moramo se dakle sprijateljiti s time da „sud" u algebri sudova neće biti „ono isto" što i u običnom govoru. Time ćemo doduše neizbježno izgubiti neke aspekte dijela „realnosti" o kojem želimo izgraditi matematičku teoriju, ali ćemo za naknadu dobiti u ruke materijal koji će dopuštati egzaktnu matematičku obradu. Čini se da je ovakav postupak neizbježan ne samo u matematici nego i u prirodnim naukama, u najmanju ruku ako pod „naukom" shvatimo ono što se pod tim imenom razvijalo počevši od stare Grčke. Ovdje ne bi bilo na mjestu ulaziti u problematiku oko toga mogu li se načelno prihvatiti koncepcije o nekom bitno drugačijem prilaženju pitanju spoznavanja prirode oko nas.

1.2. *Deskriptivna, intuitivna definicija suda.* Pod s u d o m razumijevamo suvislu deklarativnu izreku, koja se podvrgava principima 1° isključenog trećeg i 2° kontradikcije:

1° Svaki sud ima *bar jedno* od svojstava istinitosti ili neistinitosti (tj. nema suda koji ne bi bio *niti* istinit *niti* neistinit) i

2° Svaki sud ima *najviše jedno* od svojstava istinitosti ili neistinitosti (tj. nema suda koji bi bio *i* istinit *i* neistinit).

Što se istinitosti tiče ima dakle svaki sud *jednu i samo jednu* v r i j e d n o s t i s t i n i t o s t i: on je bilo i s t i n i t, bilo n e i s t i n i t ili l a ž a n.

Kao što je istaknuto u samom naslovu ovog paragrafa, možemo ovo shvatiti samo kao *opisnu* definiciju suda a nipošto kao definiciju u *matematičkom* smislu te riječi. Njome nastojimo — koliko je to moguće — opisati i razgraničiti objekte našeg mišljenja o kojima želimo izgraditi matematičku teoriju.

Ako je sud A istinit, pisat ćemo $\tau A = \top$ (simbol $\top$ čitaj „te"), a ako je neistinit pisat ćemo $\tau A = \bot$ (simbol $\bot$ čitaj „ne — te"). (Znak $\top$ treba da potsjeti na početno slovo T engleske riječi true=istinit.)

Primjeri.

1.2.1. „$2+2=4$" je istinit a „$2+2=1$" neistinit sud; oboje dakako uz uobičajenu interpretaciju znakova 2, 4, 1, +, =. (Ako bi npr. + interpretirali kao zbrajanje modulo 3, bila bi izreka „$2+2=1$" istinita.)

1.2.2. „Svaki istostranični trokut je istokračan" je istinit, a „Postoji ravni pravokutni trokut koji je istostraničan" je neistinit sud.

1.2.3. „Paran broj n je bez ostatka djeljiv sa 3" nije sud, jer dok ništa pobliže nije rečeno o n, za tu izreku nije jednoznačno određeno da li je istinita ili nije.

1.2.4. „Ja sada lažem" nije sud. Jer, pretpostavimo li da je ta izreka *istinita* onda sam *zaista* lagao pa je ono što sam rekao *neistina*. Obrnuto, pretpostavimo li da je izreka *neistinita* onda *nisam* lagao pa je ono što sam rekao *istina*. Uz uobičajeni način zaključivanja dobili bi dakle da ta izreka nije niti istinita niti neistinita. Slično vrijedi npr. za izreku „Ova izreka je neistinita".

1.2.5. „Svaki kvadrat je pravokutnik" je sud, *ukoliko* smo ranije definirali da li ćemo kvadrat smatrati pravokutnikom ili ne.

1.2.6. Izreka „Algebra je interesantnija grana matematike nego li analiza" mogla bi se eventualno smatrati sudom samo onda, ukoliko se raspravlja u krugu ljudi koji o tome imaju svi jednako (bilo takvo, bilo suprotno) uvjerenje.

1.2.7. Izreka „Dođi ovamo" nije sud jer nije deklarativna.

1.2.8. Izreka „Utorak u smjelom bubregu čita obrijanu uzbrdicu" nije sud jer nije suvisla (osim, možda, u apstraktnoj poeziji).

1.2.9. Na nekom srednjevjekovnom suđenju optuženom je rečeno: „Moraš dati jednu suvislu izjavu. Ako ona bude istinita (i samo onda) bit ćeš obješen, a ako bude neistinita (i samo onda) odrubit ćemo ti glavu."

Može li se optuženi spasiti?

Može, (ako je porota fair i drži riječ i) ako npr. izjavi: „Odrubit ćete mi glavu." Tada ga naime ne smiju *objesiti* jer je takav postupak predviđen samo za *istinitu* izjavu, što „odrubit ćete mi glavu" u tom slučaju ne bi bila. No ne smiju mu ni *odrubiti glavu*, jer se ovo predviđa samo za *laž*, a „odrubit ćete mi glavu" bi onda bila istina. (Druga izjava koja bi spasila optuženog bila bi „nećete me objesiti".)

Izreku „odrubit ćete mi glavu" dakle u smislu naše definicije ne bi smjeli smatrati sudom jer njena istinitost odnosno neistinitost samom izrekom nije određena već ovisi o budućim događajima.

1.2.10. Kako stoji stvar s izrekom: „Postoje prirodni brojevi x, y, z, n ($n > 2$) tako da je $x^n + y^n = z^n$"? Ako zauzmemo klasično stajalište, ona je *ili* istinita *ili* neistinita a činjenica da do danas ne znamo koja od tih alternativa vrijedi *ne* sprečava nas da je smatramo sudom. No s intuicionističkog stajališta nedopušteno je ovako govoriti o vrijednosti istinitosti neke tvrdnje prije nego li poznajemo konkretnu metodu kojom bi se (bar u principu) moglo konstatirati koja alternativa nastupa.

1.3. *Sud kao objekt algebre sudova.* Već neki od primjera navedenih u prošlom paragrafu pokazuju da sud kao što smo ga tamo definirali nije nešto što bi neposredno dopuštalo striktno matematičko tretiranje u smislu uobičajenom u matematici. U algebri sudova apstrahirat ćemo stoga od toga što sud „jest" a brinut ćemo se samo o tome koja *svojstva* posjeduje, tj. koje *relacije* zadovoljava. No razumije se da ćemo kod toga imati za cilj da postavljamo samo takve relacije koje bi što više intuitivnih sudova stvarno zadovoljavalo i koje bi i za posljedice imale opet samo takve relacije — a u drugu ruku nastojat ćemo da takvih relacija dobijemo *što više*. Time dakle pokušavamo matematički obuhvatiti sudove „što bolje" u smislu da o njima izrečemo samo konstatacije koje zaista stoje, ali da što više ovakvih stvarno i navedemo.

Ovakav program izgradnje algebre sudova precizirat ćemo dalje (i oštro ga suziti) time što se više uopće nećemo brinuti o *sadržaju* pojedinog suda, već samo o njegovoj *vrijednosti istinitosti*. *Unutar algebre sudova* bit će nam dakle npr. sudovi „$0 \neq 1$" i „svaka zatvorena Jordanova krivulja dijeli ravninu na dva dijela" potpuno istovrijedni. Drugim riječima, klasu „svih" sudova podijelit ćemo u dvije podklase, klasu *istinitih* i klasu *neistinitih* sudova. Elemente prve klase reprezentirat će opet simbol $\top$, a elemente druge simbol $\perp$. Uz potreban oprez ne će dovesti do konfuzije ako i *same elemente* $\top$, $\perp$ također budemo zvali sudovima, jer ih npr. naprosto možemo shvatiti oznakama nekih *odabranih* reprezentanata klase istinitih i klase neistinitih sudova. Skup S objekata algebarske strukture koju ćemo zvati algebrom sudova sadržavat će dakle samo 2 elementa, $\top$ i $\perp : S = \{\top, \perp\}$.

1.4. *Operacije algebre sudova.* Preostaje još da odaberemo operacije koje treba da su definirane među elementima $\top$, $\perp$. Ovo se može provesti na više načina, a tokom čitave ove Glave razmatrat ćemo nekoliko od tih mogućnosti. U prvim poglavljima koja slijede uvest ćemo kao *osnovne* operacije &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ i $\neg$ a kao *izvedenu* $\not\Leftrightarrow$ i kasnije $\not\Rightarrow$.

1.4.1. Operacija & bit će *binarna* (definirana na S), a zvat ćemo je k o n j u n k c i j a. Sam znak „&" čitat ćemo „et" (na latinskom znači „i"). Intendirani smisao ove operacije bit će značenje veznika „i". Odatle je jasno kako pojedinim kombinacijama vrijednosti istinitosti komponenata konjunkcije (tj. parovima vrijednosti varijabla sudova x, y nad S) treba da odgovaraju vrijednosti istinitosti čitave konjunkcije: Konjunkcija $x \& y$ sudova x, y bit će istinita ($= \top$) onda i samo onda, ako su *oba* suda x, y istinita. Dakle

$$\top \& \top = \top, \quad \text{a inače} \quad \top \& \perp = \perp \& \top = \perp \& \perp = \perp.$$

Neka je npr. A sud „$2+3=5$" a B sud „$2+3=4$". (A i B) je tada sud „$2+3=5$ i $2+3=4$". Sud A je istinit a sud B neistinit. Sud (A i B) — kao cjelina — je neistinit.

Napomene.

1° Vrijednost istinitosti konjunkcije intuitivnih sudova ovisi samo o vrijednostima istinitosti njenih komponenata, što i omogućuje da se & na prirodni način uvede kao operacija u skupu $S = \{\top, \perp\}$. Naime, ako je $\tau A = \tau A_1$ i $\tau B = \tau B_1$ bit će i $\tau(A \text{ i } B) = \tau(A_1 \text{ i } B_1)$.

Na jeziku apstraktne algebre mogli bismo reći da je preslikavanje skupa objekata strukture $\mathscr{S}_1 = \{$klasa intuitivnih sudova; i$\}$ na skup objekata strukture $\mathscr{S}_2 = \{S; \&\}$ koje sudu A pridružuje $\top$ ili $\perp$ već prema tome da li je $\tau A = \top$ ili $\tau A = \perp$ homomorfizam od $\mathscr{S}_1$ na $\mathscr{S}_2$. (Ukoliko bi dopustili da $\mathscr{S}_1$ uopće zovemo strukturom.)

Analogna napomena vrijedi i za sve ostale operacije koje uvodimo.

2° Intuitivno značenje veznika „*a*" možemo također „prevesti" u $\{S; \&\}$ sa &. Ako naime analiziramo što znači npr. „$2 < 5$ *i* $-2 > -5$" s jedne strane te „$2 < 5$ *a* $-2 > -5$" s druge uočit ćemo da sadržajno nema bitne razlike jer oba složena suda tvrde konjunkciju sudova „$2 < 5$", „$-2 > -5$".

Ipak, u običnom govoru kadšto postoji nijansa razlike između značenja „i“ i „a“. Npr. često ćemo radije reći „$-3 < 0$ *a* $3 > 0$“ nego li „$-3 < 0$ *i* $3 > 0$“ jer upotrebom „a“ ujedno na neki način ističemo da u prvu komponentu tog složenog suda ulazi dio „< 0“ dok u drugu ulazi dio „> 0“ „suprotnog“ značenja.

U nekim jezicima nema različite riječi za naš „i“ i „a“, i u njima se ta distinkcija u izražavanju gubi — kao što se gubi i u algebri sudova koju izgrađujemo ako želimo da nam se i „a“ u nju prevodi sa &.

Slično bi i "ali", „dok“, „međutim“ i neke druge riječi mogli prevesti u $\{S; \&\}$ sa & — ako prihvatimo manja ili veća izobličenja njihovog intuitivnog značenja koja time nastaju.

1.4.2. Operacija $\vee$ bit će također binarna a zvat ćemo je d i s j u n k c i j a. Sam znak „$\vee$“ čitat ćemo „vel“ (na latinskom znači „ili“). Intendirani smisao ove operacije bit će značenje veznika „ili“ u njegovom slabijem, *inkluzivnom* smislu. Ako su naime A i B sudovi, razumijevat ćemo pod sudom (A ili B) tvrdnju da vrijedi *bilo* sud A, *bilo* sud B uz mogućnost da vrijede i *oba* istodobno. (Za razliku od toga, po užem, *ekskluzivnom* smislu od „ili“ — koje odgovara latinskom „aut“ — razumijevala bi se pod sudom (A ili B) tvrdnja da vrijedi *jedan i samo jedan* od sudova A, B.) Disjunkcija je dakle istinita onda i samo onda ako je *bar* jedna od njenih komponenata istinita. Parovima vrijednosti istinitosti varijabla sudova x, y disjunkcije $x \vee y$ odgovaraju prema tome ove vrijednosti istinitosti čitave disjunkcije:

$$\top \vee \top = \top \vee \bot = \bot \vee \top = \top, \quad \text{dok je} \quad \bot \vee \bot = \bot.$$

U običnom govoru naš „ili“ kadšto ima značenje inkluzivne (vel) a kadšto ekskluzivne disjunkcije (aut). U rečenici „Od služenja vojnog roka oslobođene su osobe koje su strani državljani ili boluju od neke teže bolesti“ riječ „ili“ ima očito *inkluzivni*, slabi smisao, jer se samo po sebi razumije da će po njoj biti oslobođeni služenja vojnog roka i strani državljani koji boluju od neke teže bolesti. Naprotiv, u rečenici „Treba se pridržavati saobraćajnih propisa ili platiti kaznu“ riječ „ili“ ima očito *ekskluzivni*, jaki smisao, jer se samo po sebi razumije da se od onoga koji se pridržava saobraćajnih propisa ne će tražiti da plati kaznu (te vrste). Jasno je dakle da bi prevođenje i jake disjunkcije u algebru sudova sa $\vee$ dovelo do grubih grešaka prema intendiranom smislu logičnih operacija. (Kako se jaka disjunkcija može izraziti pomoću drugih operacija koje uvodimo vidjet ćemo kasnije u **1.4.6.**)

1.4.3. Operacija $\Rightarrow$ bit će binarna a zvat ćemo je i m p l i k a c i j a. Sam znak „$\Rightarrow$“ čitat ćemo „povlači“. Intendirani smisao od ($A \Rightarrow B$) bit će: „Ako je A, onda je B“, „Iz A proizilazi B“, „A je dovoljan uvjet za B“, „B je nuždan uvjet za A“. Treba još istaći da ovdje „povlači“ i analogni izrazi nisu mišljeni u „kauzalnom“ smislu već samo tvrde da je u slučaju istinitosti od A i sud B istinit. Prema tome bit će $x \Rightarrow y$ neistinito onda i samo onda ako je x istinito a y neistinito, tj.

$$\top \Rightarrow \bot = \bot \quad \text{a inače} \quad \top \Rightarrow \top = \bot \Rightarrow \top = \bot \Rightarrow \bot = \top .$$

U implikaciji oblika $A \Rightarrow B$ zvat ćemo A a n t e c e d e n t o m a B k o n s e k v e n t o m implikacije.

U običnom govoru „ako... onda" nije uvijek tako mišljeno. Po našoj definiciji sudovi „Ako je $2+2=5$ onda vrijedi Pitagorin poučak" i „Ako je $2+2=5$ onda ne vrijedi Pitagorin poučak" oba su istiniti, naprosto zato, što *nije* istina da je $2+2=5$. Kao ne-matematičari možda bi se kolebali da li da ih oba prihvatimo kao istinite. No za matematičara naša interpretacija implikacije je uobičajena. Npr. sud „Ako postoji najveći primbroj p, takav da je i broj $p-2$ primbroj, onda ima samo konačno mnogo primbrojeva-blizanaca" smatramo istinitim bez obzira na to da li postoji najveći primbroj p, takav da je i $p-2$ primbroj ili ne. Formulu $(|x| > 1) \Rightarrow (x^2 > 1)$ smatramo istinitom za svaki realni x, pa i za x za koji je $|x| < 1$ jer ona u potonjem slučaju ni ne tvrdi da je $x^2 > 1$.

Dakako da i u običnom govoru „ako... onda" *može* imati ovakvo značenje. Npr. ako kažem „Magarac ja, ako ti u ovome uspiješ" (što, usput rečeno, prema našoj definiciji nije sud budući da unaprijed ne znamo da li je ta tvrdnja istinita jer se možda ipak može dogoditi da on uspije a da ja nisam magarac) želim time što šutke pretpostavljam da sam rekao istinu istaći da ne vjerujem da bi onaj kome to govorim mogao uspjeti jer smatram evidentnim da nisam magarac. Natpis „Mladeži ispod 16 godina pristup zabranjen" znači „Ako neka osoba još nema 16 godina, onda joj nije dozvoljeno da uđe". No ta zabrana nije prekršena, tj. ostaje istinitom, ako ulaze osobe od 16 godina i starije (dapače, redovno se njome upravo i želi primamiti što više ovakve „zrelije" publike).

1.4.4. Operacija $\Leftrightarrow$ bit će binarna, a zvat ćemo je e k v i v a l e n c i j a. Sam znak „$\Leftrightarrow$" čitat ćemo „ekvivalentno". Intendirani smisao od $(A \Leftrightarrow B)$ bit će: „A je onda i samo onda ako je B" ili, što je isto, „A je nuždan i dovoljan uvjet za B". $(A \Leftrightarrow B)$ tvrdi dakle isto što i složeni sud $(A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$. Prema tome $x \Leftrightarrow y$ bit će istinito onda i samo onda ako su vrijednosti istinitosti od x, y međusobno jednake, tj.

$$\top \Leftrightarrow \top = \bot \Leftrightarrow \bot = \top, \text{ a } \top \Leftrightarrow \bot = \bot \Leftrightarrow \top = \bot.$$

O razlici prema običnom govoru moglo bi se reći slično kao kod implikacije. Npr. po našoj definiciji izreka „$2>4$ onda i samo onda ako postoji najveći primbroj" je istinita, jer ne postoji najveći primbroj a 2 nije veće od 4.

1.4.5. Operacija $\neg$ bit će *unitarna* (definirana na S), a zvat ćemo je n e g a c i j a. Sam znak „$\neg$" čitat ćemo „non" (na latinskom znači „ne"). Intendirani smisao od $\neg A$ bit će „Nije A". Prema tome $\neg x$ bit će istinito ako je x neistinito i obrnuto, tj.

$$\neg \top = \bot, \quad \neg \bot = \top.$$

1.4.6. Sada smo u mogućnosti da i ekskluzivni „ili" prevedemo u algebru sudova. Naime (A ili$_{\text{ekskluzivno}}$ B) tvrdi isto što i $[A \& (\neg B)] \vee [B \& (\neg A)]$. Dakle, što se tiče vrijednosti istinitosti, bit će ekskluzivna disjunkcija između x i y u algebri sudova dana sa $[x \& (\neg y)] \vee [y \& (\neg x)]$.

Također bismo, što se tiče vrijednosti istinitosti, ekskluzivnu disjunkciju između x i y mogli izraziti sa $\neg (x \Leftrightarrow y)$. Zbog ovog posljednjeg upotrebit ćemo kadšto za ekskluzivnu disjunkciju i poseban znak $\not\Leftrightarrow$ (čitaj: „nije ekvivalentno sa").

1.4.7. Tok vrijednosti istinitosti uvedenih logičkih operacija možemo pregledno predočiti ovim t a b l i c a m a v r i j e d n o s t i i s t i n i t o s t i:

$x \& y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$x \vee y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$x \Rightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$x \Leftrightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

x	$\top$	$\bot$
$\neg x$	$\bot$	$\top$

1.4.8. Uvedene operacije dakako nisu jedine koje bi se mogle uvesti (usp. **8.3.**). Često se algebra sudova izgrađuje s manjim brojem operacija, npr. samo sa &, $\vee$, $\neg$. Kasnije ćemo detaljnije ispitati kako se pojedine „funkcije" algebre sudova mogu izraziti pomoću nekih određenih ishodnih operacija (**4.3.1**, **4.3.2**, **9.**).

1.4.9. Za operacije &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ u literaturi postoje i druge, alternativne oznake, npr.

Umjesto & neki pišu $\wedge$, neki $\cdot$, neki ništa, neki $\cap$.
Umjesto $\vee$ neki pišu $+$, neki $\cup$.
Umjesto $\Rightarrow$ neki pišu $\supset$, neki $\rightarrow$, neki $\rightharpoonup$.
Umjesto $\Leftrightarrow$ neki pišu $\equiv$, neki $\leftrightarrow$, neki $\sim$, neki $=$.
Umjesto $\neg$ neki pišu $\overline{}$ (potez gore), neki $\sim$.

1.5. Kad smo jednom odabrali elemente od S i operacije među njima imajući stalno na umu njihov intendirani smisao (tj. dio realnosti, dio našeg mišljenja čije zakonitosti nastojimo opisati matematičkom teorijom koju izgrađujemo) „zaboravit" ćemo na ovaj intendirani smisao i izgrađivati teoriju dalje deduktivno, ne pozivajući se više ni na sudove u intuitivnom smislu ni na intuitivno značenje logičkih operacija koje smo uveli. No dakako da ćemo se razmatrajući neki tako već izgrađeni dio teorije povremeno „sjetiti" intendiranog smisla sudova i operacija ali samo da bismo provjerili da li su rezultati koje smo dobili u apstraktnoj teoriji u skladu s okolnostima za koje smatramo da vrijede u konkretnoj, „realnosti". To je jedini način koji nam stoji na raspolaganju da njime provjeravamo dopustivost, prikladnost i vrijednost naše teorije.

2. ALGEBRA SUDOVA KAO ALGEBARSKA STRUKTURA

Sada smo u mogućnosti da a l g e b r u s u d o v a koju namjeravamo izgrađivati uvedemo kao *algebarsku matematičku strukturu.*

2.1. *Definicija* 1. *A l g e b r a s u d o v a je struktura* $\{\{\top, \bot\};\ \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$ *gdje su operacije* &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ *definirane tablicama u* **1.4.7.**

Za izgradnju s i m b o l a, f o r m u l a i j e d n a k o s t i algebre sudova postavljamo ove definicije:

Definicija 2. *Konstante algebre sudova su elementi od S, tj.* $\top$ *i* $\bot$. *Varijable algebre sudova su znakovi (slova) x, y, z, ... (zamišljamo da takvih ima na raspolaganju potencijalno prebrojivo beskonačno mnogo).*

Definicija 3. *Formule algebre sudova su (konačni) izrazi koji se izgrađuju iz konstanata i varijabla pomoću operacija* &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ *uz upotrebu zagrada (na dopušteni način, tj. tako da* &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ *djeluju kao binarne a* $\neg$ *kao unitarna operacija).*

Formule algebre sudova označavat ćemo redovno velikim latinskim slovima: $A, B, C, \ldots$

Npr. x, $\top$, $x \Rightarrow \top$, $\neg(\top \Rightarrow x)$, $[x \vee (\neg y)] \Rightarrow \top$, $x \Leftrightarrow y$ su formule algebre sudova.

Broj zagrada u formuli možemo često smanjiti ako prihvatimo neku konvenciju o jačini razdvajanja operacija — npr. tako da ova čini padajući niz u poretku

$$\Leftrightarrow, \Rightarrow, \vee, \&, \neg.$$

Najjače dakle razdvaja $\Leftrightarrow$, zatim $\Rightarrow$ itd. a najslabije $\neg$. Prema tome je npr. $x \Leftrightarrow y \ \& \ z$ isto što i $x \Leftrightarrow (y \ \& \ z)$, $x \Rightarrow y \vee z \ \& \ x$ isto što i $x \Rightarrow [y \vee (z \ \& \ x)]$. Međutim, zbog lakšeg čitanja ne ćemo uvijek izostavljati maksimalno mogući broj zagrada.

2.2. *Definicija* 4. *(Definicija semantičke jednakosti) Dvije formule A, B algebre sudova zvat ćemo istovrijednim ili semantički jednakim ako su za sve moguće zamjene varijabla sudova iz A, B konstantama iz* $\{\top, \bot\}$ *korespondentne vrijednosti istinitosti od A i B međusobno jednake. Ako su A i B istovrijedne formule pisat ćemo* $A = B$.

(Za razliku od toga značit će $A \equiv B$ da su formule A, B *identički građene*, tj. da — osim po gore navedenim konvencijama ne-neophodnih zagrada — redom sadrže iste odgovarajuće znakove. Npr. $x \equiv x$, $x \vee (\neg z) \equiv x \vee \neg z$, $x \ \& \ (y \ \& \ z) \equiv x \ \& \ (y \ \& \ z)$. Simbol $\equiv$ trebat će nam često kod definiranja značenja neke *oznake* za formulu.)

Relacija istovrijednosti je (u smislu apstraktne algebre) *relacija ekvivalencije* u skupu $\mathcal{S}$ svih formula logike sudova. Naime, ona je 1° refleksivna, 2° simetrična i 3° tranzitivna, tj: 1° $A = A$, 2° ako je $A = B$ onda je $B = A$, 3° ako je $A = B$ i $B = C$ onda je $A = C$.

Za refleksivnost i simetričnost ovo je neposredno očito iz same definicije istovrijednosti. Preostaje da provjerimo tranzitivnost. Neka su dakle A, B, C takve formule da je $A = B$ i $B = C$. Neka je Γ skup varijabla koje ulaze u A, Δ skup varijabla koje ulaze u B i Λ skup varijabla koje ulaze u C. Razmotrimo *bilo koju* danu kombinaciju vrijednosti istinitosti varijabla iz $\Gamma \cup \Lambda$ i proširimo je na *proizvoljni* način na varijable iz $\Gamma \cup \Delta \cup \Lambda$. Uz tu *proširenu* kombinaciju, *restringiranu* na $\Gamma \cup \Delta$ odnosno na $\Delta \cup \Lambda$ bit će vrijednost istinitosti τA od A jednaka vrijednosti istinitosti τB od B a ova opet jednaka vrijednosti istinitosti τC od C. Prema tome za *prvotno* danu kombinaciju vrijednosti istinitosti varijabla od $\Gamma \cup \Lambda$ vrijedi i $\tau A = \tau C$.

(Ova stanovita „tehnička" komplikacija u dokazu tranzitivnosti relacije istovrijednosti među formulama algebre sudova može se izbjeći ako se **D 4.** modificira tako da se uspoređuju vrijednosti istinitosti od A i B za sve moguće kombinacije vrijednosti istinitosti prebrojivo beskonačnog niza *svih* varijabla sudova (a ne *konačnog* niza onih koje ulaze u *bar jednu* od formula A, B kao što je prihvaćeno u **D 4.**). Tada naime i tranzitivnost istovrijednosti postaje neposredno očita posljedica definicije istovrijednosti. No ovako modificirana definicija ima neke druge nedostatke: Prvo, po njoj bi morali prihvatiti egzistenciju aktualno beskonačnog niza varijabla (što uz **D 4.** nije potrebno); drugo, trebalo bi pokazati da je ispitivanje da li su dvije dane formule A, B po modificiranoj definiciji istovrijedne ili ne uvijek moguće provesti u konačno mnogo koraka (dok je ovo uz **D 4.** trivijalno) — što je bez daljnjega moguće i čak lako ali ipak, rigorozno provedeno, zahtijeva izvjestan prostor (možda veći od onog što smo ga gore trebali za dokaz tranzitivnosti po **D 4.**). Ipak, teško se može zanijekati, da bi modificirana definicija, bar po klasičnom shvaćanju, bila elegantnija od **D 4.**)

Prema tome relacija semantičke jednakosti vrši *particiju* od $\mathcal{S}$ u disjunktne podskupove *međusobno* istovrijednih formula.

Primjeri.

2.2.1. $A \equiv \neg(x \vee y)$ i $B \equiv (\neg x)\ \&\ (\neg y)$ su istovrijedne formule. Da bismo to uvidjeli provedimo ovu a n a l i z u t o k a v r i j e d n o s t i i s t i n i t o s t i:

1	2	3	4	5	6	7
x	y	$x \vee y$	$\neg(x \vee y)$	$\neg x$	$\neg y$	$(\neg x)\ \&\ (\neg y)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Analiza je provedena ovako: Parovi elemenata u prva dva stupca sadrže sve moguće kombinacije pridruženja elemenata iz $S = \{\top, \perp\}$ varijablama x i y koje ulaze u A, B. 3. i 4. stupac služe za postupno iznalaženje odgovarajuće vrijednosti istinitosti od A, a stupci 5. do 7. za iznalaženje odgovarajuće vrijednosti istinitosti od B. Vidimo da se 4. i 7. stupac poklapaju čime smo pokazali da je $A = B$.

2.2.2. Ispitajmo da li su formule $A \equiv x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$, $B \equiv y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$ istovrijedne.

Analiza toka vrijednosti istinitosti daje

x	y	z	$y \Rightarrow z$	$A \equiv x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$x \Rightarrow z$	$B \equiv y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

$A = B$ jer se 5. i 7. stupac poklapaju.

2.2.3. Ispitajmo da li su formule $A \equiv x \,\&\, (x \Rightarrow y)$, $B \equiv y$ istovrijedne. Analiza toka vrijednosti istinitosti daje

x	y	$x \Rightarrow y$	$A \equiv x \,\&\, (x \Rightarrow y)$	$B \equiv y$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$

Budući da se 4. i 5. stupac *razlikuju* (u trećem retku četvrtog stupca je $\perp$, a u trećem retku petog je $\top$) A i B *nisu* istovrijedne formule.

2.2.4. *Vježba.* Ispitaj analizom toka vrijednosti istinitosti da li su istovrijedni ovi parovi formula: 1° $A \equiv (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z$, $B \equiv x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$; 2° $A \equiv (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$, $B \equiv x \Rightarrow (y \Rightarrow y)$; 3° $A \equiv x \Leftrightarrow y$, $B \equiv \neg\, [(x \,\&\, \neg\, y) \vee (\neg\, x \,\&\, y)]$.

2.3. *Definicija* 5. *(Semantička definicija identičke istinitosti) Formula A algebre sudova je* ***identički istinita*** *ako je za sve moguće zamjene varijabla sudova iz A konstantama iz* $\{\top, \perp\}$ *korespondentna vrijednost istinitosti od A jednaka* $\top$.

Identički istinite formule logike sudova zovu se i **tautologije** logike sudova.

Npr. $x \vee \neg\, x$ (*tertium non datur* = nema trećeg) je identički istinita formula kao što vidimo iz

x	$\neg\, x$	$x \vee \neg\, x$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$

Definicija 5a. *Formula A algebre sudova je* ***identički neistinita*** ***(lažna)****, ako je za sve moguće zamjene varijabla sudova iz A konstantama iz* $\{\top, \perp\}$ *vrijednost istinitosti od A jednaka* $\perp$.

Npr. formala $x \,\&\, \neg\, x$ je identički neistinita, kao što vidimo iz

x	$\neg\, x$	$x \,\&\, \neg\, x$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$

Očito, formula A je identički istinita onda i samo onda ako je formula $\neg\, A$ identički neistinita i obrnuto.

Primjeri.

2.3.1. Formula $A \equiv (x \Rightarrow y) \Rightarrow \{[(x \Rightarrow y) \Rightarrow z] \Rightarrow (x \Rightarrow z)\}$ je identički istinita kao što se vidi iz njene analize toka vrijednosti istinitosti

x	y	z	$x\Rightarrow y$	$(x\Rightarrow y)\Rightarrow z$	$x\Rightarrow z$	$[(x\Rightarrow y)\Rightarrow z]\Rightarrow(x\Rightarrow z)$	A
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

2.3.2. Formula $A \equiv \neg(x \Rightarrow (\neg x \Rightarrow y))$ je identički neistinita prema

x	y	$\neg x$	$\neg x \Rightarrow y$	$x \Rightarrow (\neg x \Rightarrow y)$	A
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$

2.3.3. Formula $(x\Rightarrow y)\,\&\,(y\Rightarrow x)$ nije niti indetički istinita niti identički lažna, jer u njenoj analizi toka vrijednosti istinitosti

x	y	$x\Rightarrow y$	$y\Rightarrow x$	$(x\Rightarrow y)\,\&\,(y\Rightarrow x)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

u posljednjem stupcu dolazi i znak $\top$ i znak $\bot$.

2.3.4. *Vježbe.* Pokaži da su identički istinite ove formule: 1° $((x\Rightarrow y)\Rightarrow x)\Rightarrow x$ (Pierce-ova tautologija); 2° $x\Rightarrow(\neg x\Rightarrow y)$ (*ex falso quodlibet* = iz neispravnog proizvoljno); 3° $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$ (*verum ex quolibet* = istinito iz makar čega); 4° $\neg(x\,\&\,\neg x)$ (apsurdnost kontradikcije); 5° $(\neg x \Rightarrow x) \Rightarrow x$ (zaključak *ex contrario* = iz suprotnog); 6° $(x \Rightarrow \neg x) \Rightarrow \neg x$ (zaključak *in contrarium* = na suprotno).

2.3.5. *Napomena.* Identička istinitost odnosno neistinitost dane formule može se u pojedinim konkretnim slučajevima lakše i brže provjeriti na drugačiji način, bez ispisivanja čitave analize toka vrijednosti istinitosti. Npr.:

Da je formula A iz **2.3.1.** identički istinita možemo kraće uvidjeti ovako: *Ako* bi uopće *postojala* neka kombinacija vrijednosti istinitosti varijabla sudova od A za koju A poprima vrijednost istinitosti $\perp$, onda bi za nju konsekventa od A (izraz u vitičastoj zagradi u **2.3.1.**) poprimala vrijednost istinitosti $\perp$, a antecedenta $x \Rightarrow y$ vrijednost istinitosti $\top$. No tada bi i konsekventa konsekvente tj. $x \Rightarrow z$ poprimila vrijednost istinitosti $\perp$ — dakle $x = \top$, $z = \perp$ — a antecedenta konsekvente tj. izraz $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$ vrijednost istinitosti $\top$ — dakle zbog $x = \top$, $z = \perp$ bilo bi $y = \perp$. No ovo se protivi ranijem zahtjevu da $x \Rightarrow y$ poprima vrijednost istinitosti $\top$. Tražene kombinacije dakle *nema* pa je A indetički istinita formula.

Formula $A \equiv (x \vee y) \& [(\neg x) \vee (\neg y)] \& [x \vee (\neg y)] \& [(\neg x) \vee y]$ je identički neistinita jer da za neku kombinaciju vrijednosti istinitosti od x i y A poprima vrijednost istinitosti $\top$ morala bi tada i svaka od njenih komponenata (povezanih sa &) poprimiti vrijednost istinitosti $\top$, pa iz prve i treće komponente izlazi da bi moralo biti $x = \top$ a iz druge i četvrte da bi moralo biti $x = \perp$.

2.4. *Teorem* 1. *A je identički istinita formula onda i samo onda ako je* $A = \top$, *tj. ako je A istovrijedno s formulom* $\top$. *A je identički neistinita formula onda i samo onda ako je* $A = \perp$, *tj. ako je A istovrijedno s formulom* $\perp$.

Teorem 2. $A = B$, *tj. A je istovrijedno sa B onda i samo onda ako je* $A \Leftrightarrow B$ *identički istinita formula.*

Ispravnost ovih teorema izlazi neposredno iz **D 4.** i **5, 5a.** i definicije toka vrijednosti istinitosti operacije $\Leftrightarrow$.

2.5. *Intuitivno* identički istinitim formulama algebre sudova odgovaraju složeni sudovi takvog oblika da su *uvijek* (kao cjelina) istiniti, bez obzira na vrijednost istinitosti komponenata. Npr. (A ili nije A) je uvijek istinit sud bez obzira na to da li je sud A istinit ili ne. Recimo izreka „$2+2=4$ ili nije $2+2=4$" je istinita kao i izreka „$2+2=5$ ili nije $2+2=5$".

Parovima istovrijednih formula odgovaraju intuitivno parovi složenih sudova takvog oblika da su oba člana para *iste* vrijednosti istinitosti bez obzira na vrijednosti istinitosti komponenata od kojih su sagrađeni. Npr. sud „nije (A ili B)" ima uvijek istu vrijednost istinitosti kao i sud „(nije A) i (nije B)". Recimo izreka „Nije istina da si glup ili kukavica" znači isto što i „Nije istina da si glup i nije istina da si kukavica".

Vježba. Opravdaj nazive pojedinih identički istinitih formula iz vježbe **2.3.4.**

2.6. *Neka algebarska svojstva operacija logike sudova.* Lako se provjerava da vrijedi:

1° Konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija su komutativne, tj.

$$x \& y = y \& x, \quad x \vee y = y \vee x, \quad x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x.$$

2° Konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija su asocijativne, tj.

$$(x \& y) \& z = x \& (y \& z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \quad (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z).$$

3° Konjunkcija i disjunkcija su idempotentne, tj.

$$x \& x = x, \quad x \vee x = x.$$

4° Konjunkcija je distributivna prema disjunkciji i obrnuto, tj.

$$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z), \quad x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z).$$

5° Konjunkcija je apsorptivna prema disjunkciji i obrnuto, tj.

$$x \& (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \& y) = x.$$

6° Negacija je involutivna tj.

$$\neg\neg x = x.$$

7° $\top$ je neutralni element za konjunkciju i ekvivalenciju a $\perp$ za disjunkciju, tj.

$$x \& \top = \top \& x = x, \; x \Leftrightarrow \top = \top \Leftrightarrow x = x, \; x \vee \perp = \perp \vee x = x.$$

8° $\top$ je nul-element za disjunkciju a $\perp$ za konjunkciju, tj.

$$x \vee \top = \top \vee x = \top, \quad x \& \perp = \perp \& x = \perp.$$

3. NEKE METODE ZAKLJUČIVANJA U ALGEBRI SUDOVA

Dokazat ćemo ovaj teorem:

Teorem 3.

1° *(Modus ponens). Ako su formule A i $A \Rightarrow B$ identički istinite, onda je i formula B identički istinita.*

2° *Ako su formule $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow C$ identički istinite, onda je i formula $A \Rightarrow C$ identički istinita.*

3° *Ako su formule $A \Rightarrow B$ i $A \Rightarrow C$ identički istinite, onda je i formula $A \Rightarrow (B \& C)$ identički istinita.*

4° *(Demonstratio per enumerationem = dokaz nabrajanjem). Ako su formule $A \Rightarrow C$ i $B \Rightarrow C$ identički istinite, onda je i formula $(A \vee B) \Rightarrow C$ identički istinita.*

5° *Ako su formule $A \Rightarrow B$ i $\neg A \Rightarrow B$ identički istinite, onda je i formula B identički istinita.*

6° *(Deductio ad absurdum = dovođenje do protivrječja). Ako su formule $A \Rightarrow B$ i $A \Rightarrow \neg B$ identički istinite, onda je i formula $\neg A$ identički istinita.*

Dokaz. 1° Treba pokazati da B ni za koju kombinaciju vrijednosti istinitosti varijabla iz B ne može poprimiti vrijednost istinitosti $\perp$.

Pretpostavimo tome *suprotno*, tj. da je za neku takvu kombinaciju odgovarajuća vrijednost istinitosti od B jednaka $\perp$ ($\tau B = \perp$). Uz iste vrijednosti istinitosti za varijable iz B (i *kakve god* vrijednosti istinitosti onih varijabla iz A koje *ne* ulaze u B — ako takvih ima) moralo bi onda biti $\tau A = \perp$, jer bi inače bilo $\tau(A \Rightarrow B) = \perp$. No $\tau A = \perp$ protivi se pretpostavci o identičkoj istinitosti od A. Time je pretpostavka $\tau B = \perp$ oborena.

2° Pretpostavimo da za neku kombinaciju vrijednosti istinitosti varijabla iz $A \Rightarrow C$ vrijedi $\tau(A \Rightarrow C) = \perp$. To bi značilo da za tu istu kombinaciju vrijedi $\tau A=\top, \tau C=\bot$. No onda za tu kombinaciju (nadopunjenu bilo kojim vrijednostima istinitosti za varijable iz B koje *ne* ulaze *ni* u A *ni* u C — ako takvih ima) ne bi moglo biti $\tau B=\top$ jer bi se to protivilo pretpostavci $B\Rightarrow C=\top$, ali ni $\tau B=\bot$, jer bi se to protivilo pretpostavci $A\Rightarrow B=\top$. $\tau(A\Rightarrow C)=\bot$ vodi dakle do protivrječja pa ne može nastupiti tj. vrijedi $A\Rightarrow C=\top$.

3° Pretpostavimo da za neku kombinaciju vrijednosti istinitosti varijabla iz A, B, C nastupa $\tau[A\Rightarrow(B\ \&\ C)]=\bot$. To bi značilo da je za tu istu kombinaciju $\tau A=\top$, $\tau(B\ \&\ C)=\bot$ dakle bilo $\tau B=\bot$, bilo $\tau C=\bot$ (bilo oboje). No $\tau A=\top$, $\tau B=\bot$ protivi se $A\Rightarrow B=\top$, a $\tau A=\top$, $\tau C=\bot$ protivi se $A\Rightarrow C=\top$.

4° Da je za neku kombinaciju vrijednosti istinitosti varijabla iz A, B, C $\tau[(A\vee B)\Rightarrow C]=\bot$, bilo bi tada $\tau(A\vee B)=\top$, $\tau C=\bot$ dakle bilo $\tau A=\top$ bilo $\tau B=\top$. No $\tau A=\top$, $\tau C=\bot$ protivi se $A\Rightarrow C=\top$ a $\tau B=\top$, $\tau C=\bot$ protivi se $B\Rightarrow C=\top$.

5° Pretpostavimo da za neku kombinaciju vrijednosti istinitosti varijabla iz B vrijedi $\tau B=\bot$. Onda bi za tu istu kombinaciju (nadopunjenu bilo kojim vrijednostima istinitosti za varijable iz A koje ne ulaze u B — ako takvih ima) zbog $A\Rightarrow B=\top$ moralo biti i $\tau A=\bot$. No ovo se protivi $\neg A\Rightarrow B=\top$.

6° Uzmimo opet da je za neku kombinaciju vrijednosti istinitosti varijabla $\tau A=\top$. Tada bi za tu istu kombinaciju (eventualno proširenu kao ranije) zbog $A\Rightarrow B=\top$ bilo i $\tau B=\top$ dakle $\tau(\neg B)=\bot$. No to se protivi $A\Rightarrow\neg B=\top$. Uvijek je dakle $\tau A=\bot$, što znači da je $\neg A=\top$.

3.1. *Vježba.* Dokaži da vrijede ova pravila kontrapozicije:

1° $A\Rightarrow B=\top$ onda i samo onda ako je $\neg B\Rightarrow\neg A=\top$;

2° $A\Rightarrow\neg B=\top$ onda i samo onda ako je $B\Rightarrow\neg A=\top$;

3° $\neg A\Rightarrow B=\top$ onda i samo onda ako je $\neg B\Rightarrow A=\top$.

4. FUNKCIJE ALGEBRE SUDOVA

4.1. *Definicija* 6. *Neka je $N=\{x,y,\ldots,w\}$ n-torka ($n>0$) varijabla x, $y,\ldots,w$ a P skup svih 2^n preslikavanja od N u $\{\top,\bot\}$. Svako preslikavanje $F(x,y,\ldots,w)$ od P u skup $\{\top,\bot\}$ zvat ćemo funkcijom (algebre sudova) od n varijabla $x,y,\ldots,w$.*

Svakoj funkciji F od n varijabla odgovara dakle na prirodni način neka n-arna operacija (s istim tokom vrijednosti istinitosti kao F). Stoga ćemo kadšto npr. umjesto o *funkciji* dviju varijabla govoriti i o *binarnoj operaciji* itd.

Prema **D 6**, za $n=0$ (jedine) funkcije algebre sudova od 0 varijabla su konstante $\top$ i $\bot$.

4.1.1. Funkciju algebre sudova možemo zadati tablicom toka vrijednosti istinitosti (slično kao i tok vrijednosti istinitosti operacije algebre sudova), npr:

$G(x)$

x	$G(x)$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

$H(x, y)$

x	y	$H(x, y)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

$K(x, y, z)$

x	y	z	$K(x, y, z)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Specijalno funkcije *dviju* varijabla možemo predočiti i pomoću k v a d r a t n e t a b l i c e, npr.

$H(x, y)$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

4.2. *Definicija 7. Neka je F funkcija od n varijabla $x, y, \ldots, w$ a G funkcija od m varijabla $x', y', \ldots, v'$. Označimo $\{x, y, \ldots, w\}$ sa Γ a $\{x', y', \ldots v'\}$ sa Δ. Reći ćemo da su funkcije F, G j e d n a k e i pisati $F = G$ onda i samo onda ako vrijedi: za svako preslikavanje od $\Gamma \cup \Delta$ u $\{\top, \perp\}$ restrikciji tog preslikavanja na Γ odnosno Δ pridružene su po F odnosno G međusobno jednake vrijednosti istinitosti.*

Lako se uviđa da je ovako definirana jednakost *relacija ekvivalencije* u skupu svih funkcija algebre sudova (usporedi analogno rasuđivanje za formule pod 2.2.).

Ako promatramo funkcije nekog *čvrstog* skupa od n varijabla vidimo da ima 2^{2^n} međusobno *različitih* takvih funkcija.

Jednakost u smislu **D 7.** treba razlikovati od *identičke* jednakosti dviju funkcija. $F \equiv G$ (znak „$\equiv$" čitaj „identički jednako") ako je ne samo $F = G$ u smislu **D 7**, nego su pored toga F i G shvaćeni funkcijama nad *istim* skupom varijabla. Npr. za $F(x) = x$, $G(x, y) = x$ je $F = G$ ali $F \not\equiv G$; za $F(x, y) = x \mathbin{\&} y$, $G(x, y) = y \mathbin{\&} x$ je $F = G$ i $F \equiv G$; za $F(x, y) = x \Rightarrow y$, $G(x, y) = y \Rightarrow x$ je $F \neq G$ dakle pogotovo $F \not\equiv G$.

4.2.1. Neke funkcije algebre sudova mogu se očito zadavati i formulama algebre sudova (time smo se netom već i poslužili). Svaka *formula A* algebre sudova u koju ulaze varijable $x, y, \ldots, w$ naime na prirodni način definira neku *funkciju* $A(x, y, \ldots, w)$ tih varijabla (s istim tokom vrijednosti istinitosti). U takvom slučaju pisat ćemo također $A = A(x, y, \ldots, w)$. Npr. funkciju $F(x, y)$ zadanu tablicom

x	y	$F(x, y)$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

možemo zadati i formulom $A \equiv x \,\&\, \neg y$ pa ćemo ovdje pisati i $F(x, y) = x \,\&\, \neg y$.

Dakako da se formulom u koju *eksplicitno* ulaze varijable $x, y, \ldots, w$ mogu zadavati i funkcije koje *pored* tih varijabla sadrže *još* i *neke druge*. Npr. možemo staviti $F(x, y, z) = x \vee \neg z$. Međutim, ako oznakom ili izrijekom ne kažemo drugačije, redovno ćemo smatrati da formula zadaje funkciju *onih* varijabla koje u formulu *eksplicitno* ulaze (*bez* obzira da li funkcija o svim tim varijablama „bitno“ ovisi, tj. bez obzira da li npr. $F(x, y, z)$ za ma koju kombinaciju vrijednosti istinitosti $\tau x = \tau_1$, $\tau y = \tau_2$, $\tau z = \tau_3$ poprima istu vrijednost istinitosti kao za $\tau x = \tau_1$, $\tau y = \tau_2$, $\tau z = \neg \tau_3$).

Kojiput trebat će nam i složene funkcije raznog oblika ili pak izrazi *sastavljeni* od formula i funkcija; oznake će u tom slučaju biti takve kao što je to u matematici inače uobičajeno. Odatle je jasno značenje od npr. $F(x, y \vee z)$, $G(x, y) \,\&\, H(z)$, $F(x, H(y \,\&\, z, x), z) \vee H(F(x, x, z), H(y, z))$ itd.

4.3. Postavlja se pitanje može li se *svaka* funkcija algebre sudova definirati nekom formulom algebre sudova. Potvrdan odgovor daje

Teorem 4. *Svaka funkcija $F(x, y, \ldots, w)$ od $n > 1$ varijabla može se definirati nekom formulom A algebre sudova, čak ako se ograničimo na formule koje su sagrađene (najviše) pomoću varijabla $x, y, \ldots, w$, operacija $\&$, $\vee$, $\neg$ i zagrada (dakle bez $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ i konstanata) i u kojima $\neg$ ne djeluje na složene izraze (nego najviše na varijable).*

Funkcije $F = \top$, $G = \perp$ mogu se također definirati npr. sa $F = x \vee \neg x$, $G = x \,\&\, \neg x$.

Ako je funkcija F zadana svojom tablicom toka vrijednosti istinitosti može se pripadna formula efektivno konstruirati. Razmotrit ćemo dva takva efektivna postupka koji su naročito jednostavni.

4.3.1. $F(x, y, \ldots, w)$ u *kanonskoj disjunktivnoj normalnoj formi.*

Ako u posljednjem stupcu tablice toka vrijednosti istinitosti za F dolaze samo simboli $\perp$ možemo staviti $F = x \,\&\, \neg x$.

Pretpostavimo dakle da to *nije* slučaj, tj. da u *bar jednom* retku posljednjeg stupca dolazi znak $\top$. Kako se u tom slučaju gradi kanonska disjunktivna normalna forma od F pokazat će nam jasno jedan primjer. Neka je F funkcija $K(x, y, z)$ dana u **4.1.1.** Uočimo najprije u kojim sve recima njene tablice u posljednjem stupcu dolazi $\top$: vidimo da je to *prvi, četvrti* i *šesti* redak. Ispišimo iste retke prvih n (3) stupaca; to su:

$$\begin{matrix} \top & \top & \top \\ \top & \perp & \perp \\ \perp & \top & \perp \end{matrix}$$

Drugim riječima, K poprima vrijednost istinitosti $\top$ u ovim i samo ovim slučajevima:

$$1^\circ \ \tau x = \top, \ \tau y = \top, \ \tau z = \top;$$

$$2^\circ \ \tau x = \top, \ \tau y = \perp, \ \tau z = \perp;$$

$$3^\circ \ \tau x = \perp, \ \tau y = \top, \ \tau z = \perp.$$

Odatle je odmah jasno da je

$$K(x,y,z) = (x \& y \& z) \vee (x \& \neg y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& \neg z).$$

Naime, ovako zadani K bit će „$\top$" onda i samo onda ako je (bar) jedna od komponenata u okruglim zagradama „$\top$". No ovo nastupa onda i samo onda ako vrijedi jedan od slučajeva 1°, 2°, 3°. Naime, ako vrijedi 1° prva okrugla zagrada je $= \top$, ako vrijedi 2° druga okrugla zagrada je $= \top$, a ako vrijedi 3° treća; ako pak ne nastupa ni jedan od slučajeva 1°, 2°, 3° nijedna od okruglih zagrada, dakle ni K nije $= \top$.

Vidimo da kanonska disjuktivna normalna forma od F ima onoliko k o m p o n e n a t a d i s j u n k c i j e koliko u posljednjem stupcu tablice toka vrijednosti istinitosti od F ima znakova $\top$. (Radi jednostavnijeg izražavanja govorimo dakle o „jednokomponentnoj" disjunktivnoj formi ako u njoj znak disjunkcije uopće ne dolazi). Svaka komponenta sadrži, povezane konjukcijom, svih n varijabla od F (i to svaku *bilo* samu, *bilo* jednom negiranu).

Vidimo također da će prikaz od F u kanonskoj disjunktivnoj normalnoj formi biti jednoznačno određen ako npr. komponente disjunkcije poredamo *leksikografski* uz „abecedu" x, $\neg x$, y, $\neg y$, z, $\neg z, \ldots$ U našem primjeru gornji prikaz od K već posjeduje ovaj oblik. (Lako se vidi da će to uvijek biti tako ako retke prvih n stupaca tablice toka vrijednosti istinitosti za F nižemo tako da je u prvih 2^{n-1} redaka *prva* varijabla $= \top$, a zatim $\perp$; nadalje da je u prvih 2^{n-2} *druga* varijabla $= \top$, zatim u daljnjih 2^{n-2} redaka $= \perp$ pa opet u 2^{n-2} redaka $= \top$ i konačno opet u posljednjih 2^{n-2} redaka $= \perp$; nadalje da je *treća* naizmjence $= \top$ i $= \perp$ u svakih 2^{n-3} redaka tablice itd.)

Nadalje, lako uočavamo da dvije ovako leksikografski uređene kanonske disjunktivne normalne forme, ako *nisu* identično građene, *ne mogu* predočavati funkcije *jednake* u smislu **D 7**.

Odatle možemo npr. na još jedan (iako znatno manje spretan) način izračunati broj međusobno različitih funkcija od n danih varijabla $x, y, \ldots, w$:

Predočimo ih najprije sve u leksikografski uređenoj kanonskoj disjunktivnoj normalnoj formi.

Jednokomponentnih takvih formi bit će 2^n, budući da je na toliko načina moguće raspodijeliti znak $\neg$ na neke od varijabla $x, y, \ldots, w$ jer je

$$1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

Dvokomponentnih leksikografski uređenih kanonskih disjunktivnih normalnih formi ima $\binom{2^n}{2}$, *trokomponentnih* $\binom{2^n}{3}$ itd. Kako kanonska disjunktivna normalna forma funkcije F od n varijabla ima najviše 2^n komponenata (za $F = \top$) izlazi ako još uzmemo u obzir na početku **4.3.1.** isključenu funkciju ($F = \bot$), da je traženi broj $\nu(n)$ *međusobno različitih* funkcija algebre sudova od danih n varijabla jednak

$$\nu(n) = 1 + 2^n + \binom{2^n}{2} + \binom{2^n}{3} + \cdots + \binom{2^n}{2^n} = (1+1)^{2^n} \quad + 2^{2^n}.$$

(Bio bi moguć i ovakav način zaključivanja: Ako *već znamo* da ima 2^{2^n} kanonskih disjunktivnih normalnih formi nad n danih varijabla i koje predočuju međusobno *različite* funkcije tih varijabla i ako *već znamo* da (u smislu **D 7.**) takvih (različitih) funkcija uopće ima također upravo 2^{2^n}, možemo odatle zaključiti da vrijedi **T 4.**)

4.3.2. *Kanonska konjunktivna normalna forma* od $F(x, y, \ldots, w)$ uvodi se analogno, „dualno" kanonskoj disjunktivnoj normalnoj formi. Ako u posljednjem stupcu tablice toka vrijednosti istinitosti za F dolaze samo simboli $\top$ možemo staviti $F = x \vee \neg x$. Pretpostavimo dakle da to nije slučaj, tj. da u bar jednom retku posljednjeg stupca dolazi znak $\bot$.

Pokažimo opet na primjeru $K(x, y, z)$ iz **4.1.1.** kako se u tom slučaju gradi kanonska konjunktivna normalna forma. Uočimo najprije u kojim sve recima njene tablice u posljednjem stupcu dolazi $\bot$: vidimo da je to *drugi, treći, peti, sedmi* i *osmi* redak. Ispišimo iste retke prvih n stupaca tablice; to su

$$\begin{array}{ccc} \top & \top & \bot \\ \top & \bot & \top \\ \bot & \top & \top \\ \bot & \bot & \top \\ \bot & \bot & \bot \end{array}$$

Drugim riječima, K poprima vrijednost istinitosti $\bot$ u ovim i samo ovim slučajevima:

$1°\ \tau x = \top,\ \tau y = \top,\ \tau z = \bot;$

$2°\ \tau x = \top,\ \tau y = \bot,\ \tau z = \top;$

$3°\ \tau x = \bot.\ \tau y = \top,\ \tau z = \top;$

$4°\ \tau x = \bot,\ \tau y = \bot,\ \tau z = \top;$

$5°\ \tau x = \bot,\ \tau y = \bot,\ \tau z = \bot.$

Odatle zaključujemo da je

$$K(x, y, z) = (\neg x \vee \neg y \vee z) \,\&\, (\neg x \vee y \vee \neg z) \,\&\, (x \vee \neg y \vee \neg z) \,\&\, (x \vee y \vee \neg z) \,\&\, (x \vee y \vee z).$$

Naime, ovako zadani K bit će $=\perp$ onda i samo onda ako je (bar jedna) od komponenata konjunktivne forme u okruglim zagradama $=\perp$. No ovo nastupa onda i samo onda ako vrijedi jedan od slučajeva 1° do 5°: Naime, ako nastupa 1° prva okrugla zagrada je $=\perp$, uz 2° druga je $=\perp$ itd; ako pak ne nastupa ni jedan od slučajeva 1° do 5° nijedna od okruglih zagrada, dakle ni K, nije $=\perp$.

Vidimo da kanonska konjunktivna normalna forma ima onoliko komponenata konjunkcije koliko u posljednjem stupcu tablice toka vrijednosti istinitosti za F ima znakova $\perp$. (Radi jednostavnijeg izražavanja govorimo i ovdje o jednokomponentnoj konjunktivnoj formi ako u njoj znak & uopće ne dolazi.) Svaka komponenta sadrži, povezane konjunkcijom, svih n varijabla od F (i to svaku od njih bilo samu, bilo negiranu).

Vidimo također da će i prikaz od F u kanonskoj konjunktivnoj normalnoj formi biti jednoznačan, ako npr. komponente konjunkcije poredamo leksikografski. Uz konvenciju o nizanju redaka prvih n stupaca tablice toka vrijednosti istinitosti za F kao što smo je opisali u **4.3.1.** imat će odgovarajuće napisana kanonska konjunktivna normalna forma od F komponente u poretku upravo suprotnom od leksikografskog.

Dvije leksikografski uređene kanonske konjunktivne normalne forme u istim varijablama predočivat će dakle u smislu **D 7.** *jednake* funkcije onda i samo onda, ako su *identično* građene.

5. TRANSFORMACIJA I SUPSTITUCIJA U ALGEBRI SUDOVA

5.1. Neka je F neka dana formula algebre sudova koja na nekom određenom mjestu σ kao *komponentu* sadrži formulu A; označimo to s $F(-A-)$. Transformiramo li formulu F tako, da u njoj (na tome mjestu σ) komponentu A zamijenimo formulom B, preći će F u $F' \equiv F(-B-)$.

Teorem 5. *(Teorem transformacije) Ako je formula A istovrijedna s formulom B, onda je i formula $F(-A-)$ istovrijedna s formulom $F(-B-)$ tj.*

$$\textit{ako je } A=B, \textit{ onda je } F(-A-)=F(-B-).$$

Specijalno, ako je formula $F(-A-)$ identički istinita, bit će i $F(-B-)$ identički istinita formula.

Teorem izlazi neposredno iz **D 4.**

5.2. Neka je opet F neka dana formula algebre sudova. Ako na svakom mjestu gdje u F dolazi varijabla x namjesto ove supstituiramo istu formulu A, dobit ćemo nakon tog uvrštavanja novu formulu koju ćemo označiti sa $F(A\,|\,x)$ (čitaj: „F sa A namjesto x").

Očito će onda i samo onda biti $F \equiv F(A\,|\,x)$, ako nastupa bar jedan od ovih slučajeva: 1° F uopće ne sadrži varijablu x, 2° $A \equiv x$.

Teorem 6. *(Teorem supstitucije) Ako su formule F, G istovrijedne, onda su i formule $F(A\,|\,x)$, $G(A\,|\,x)$ istovrijedne, tj.*

$$\textit{ako je } F=G, \textit{ onda je } F(A\,|\,x)=G(A\,|\,x).$$

Specijalno, (za $G \equiv \top$) ako je formula F identički istinita bit će i formula $F(A|x)$ identički istinita formula.

Dokaz. Ako bi postojala neka kombinacija vrijednosti istinitosti varijabla iz $F(A|x)$ i $G(A|x)$, za koju bi bilo $\tau F(A|x) \neq \tau G(A|x)$, bila bi za tu kombinaciju određena i vrijednost istinitosti τA od A pa bi uz ranije nađene vrijednosti istinitosti varijabla iz F i G osim x i za $\tau x = \tau A$ bilo i $\tau F = \tau F(A|x) \neq \tau G(A|x) = \tau G$ suprotno pretpostavci $F = G$.

5.3. Ako u formuli F s i m u l t a n o (istodobno) zamijenimo varijablu x (svagdje gdje dolazi) formulom X, varijablu y formulom Y itd. dobit ćemo formulu koju ćemo označiti sa $F(X|x, Y|y, \ldots)$.

Teorem 7. (T e o r e m s i m u l t a n e s u p s t i t u c i j e ili G e n e r a l i z i r a n i teorem supstitucije) Ako su formule F, G istovrijedne, onda su i formule $F(X|x, Y|y, \ldots)$, $G(X|x, Y|y, \ldots)$ istovrijedne.

Dokaz se može provesti posve analogno kao dokaz **T 6.**

Međutim, **T 7.** može se i *izvesti iz* **T 6,** jer se simultana supstitucija može (s istim konačnim rezultatom) nadomjestiti *sukcesivnom* provedbom *običnih* supstitucija. Ilustrirajmo ovo na slučaju simultane supstitucije za *dvije* varijable:

Ako u X *ne* dolazi varijabla y mogu se obje supstitucije $X|x$, $Y|y$ naprosto superponirati jer je tada

$$F(X|x,\ Y|y) \equiv F(X(Y|y)|x,\ Y|y) \equiv [F(X|x)](Y|y).$$

Slično, ako x *ne* dolazi u Y bit će opet

$$F(X|x,\ Y|y) \equiv F(X|x,\ Y(X|x)|y) \equiv [F(Y|y)](X|x).$$

Međutim, u *općem* slučaju treba postupati drugačije. Neka je w neka varijabla koja *ne* dolazi *ni* u F, *ni* u X, *ni* u Y i neka je $X' \equiv X(w|y)$. Tada je

$$F(X|x,\ Y|y) \equiv \{[F(X'|x)](Y|y)\}(y|w).$$

Simultana supstitucija može se dakle nadomjestiti sa *tri* uzastopne supstitucije za po jednu varijablu.

5.4. Analogni teoremi vrijede i za *funkcije* algebre sudova. Npr.

Neka je $F(x, y, \ldots, w)$ funkcija algebre sudova. Ako su $X(x_1, y_1, \ldots, u_1)$, $Y(x_2, y_2, \ldots, v_2), \ldots, W(x_k, y_k, \ldots, w_k)$ funkcije algebre sudova bit će i složena funkcija $F(X, Y, \ldots, W)$ neka funkcija $F'(x_1, y_1, \ldots, u_1;\ x_2, y_2, \ldots, v_2;\ \ldots;\ x_k, y_k, \ldots, w_k)$ algebre sudova.

Teorem 5a. Ako za funkcije $X_1, X_2;\ Y_1, Y_2; \ldots;\ W_1, W_2$ vrijedi $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2, \ldots, W_1 = W_2$ bit će i za proizvoljnu funkciju F

$$F(X_1|x,\ Y_1|y, \ldots,\ W_1|w) = F(X_2|x,\ Y_2|y, \ldots,\ W_2|w).$$

Teorem 7a. Ako su funkcije F, G jednake u smislu D 7, bit će u istom smislu međusobno jednake i funkcije koje iz F, G izlaze zamjenom varijable x sa X, y sa Y itd.

Analogno vrijedi za izraze *sastavljene* od formula i funkcija (usp. **4.2.1.**).

Navedeni teoremi omogućuju da sa formulama i funkcijama algebre sudova postupamo, što se tiče *jednakosti* (u smislu **D 4.** i **D 7.**) na u matematici uobičajeni način.

Npr. ako su formule A, B (semantički) jednake bit će uz $F(-A-) \equiv A \& C$ po **T 5.** $A \& C = B \& C$. Ako u X, Y, F formule i $X = Y$ bit će (eventualno višestrukom) primjenom **T 5.** i $F(X|x) = F(Y|x)$; ako su F, G, X, Y formule i $F = G$, $X = Y$ bit će i $F(X|x) = G(Y|x)$ (jer je po **T 5.** $F(X|x) = F(Y|x)$ a po **T 7.** $F(Y|x) = G(Y|x)$) itd. Analogno po **T 5a.** i **T 7a.** umjesto **T 5.** i **T 7.** vrijedi i za funkcije algebre sudova.

6. SEMANTIČKI DUALITET U ALGEBRI SUDOVA

6.1. *Definicija* 8. *Neka je* $F(x, y, \ldots, w)$ *neka funkcija. Ako u čitavoj tablici toka vrijednosti istinitosti za* F *međusobno zamijenimo* $\top$ *i* $\bot$, *dobit ćemo opet neku tablicu koju možemo interpretirati kao tablicu toka vrijednosti istinitosti neke funkcije* $F^*(x, y, \ldots, w)$. *Funkciju* F^* *zvat ćemo* d u a l n o m *funkciji* F.

Da novu tablicu uopće možemo interpretirati kao tablicu toka vrijednosti istinitosti neke funkcije izlazi odatle što i u njoj u pojedinim recima u prvih n stupaca dolaze sve moguće kombinacije vrijednosti istinitosti za varijable $x, y, \ldots, w$.

Prema **D 8.** je $F^*(\neg x, \neg y, \ldots, \neg w) = \neg F(x, y, \ldots, w)$ (jer u F^* *suprotnoj* kombinaciji vrijednosti istinitosti *varijabla* odgovara *suprotna* vrijednost istinitosti *funkcije*). Odatle supstitucijom $\neg x$ za x, $\neg y$ za y, $\ldots$, $\neg w$ za w zbog $\neg\neg x = x$ itd. po **T 7a.** i **T 5a.** izlazi

$$F^*(x, y, \ldots, w) = \neg F(\neg x, \neg y, \ldots, \neg w).$$

Odavde (ili direktno iz definicije) očito je $F^{**} = F$ pa ako je $F^* = G$ bit će $G^* = F$ tj. *dualiziranje* neke funkcije je *involutivna* operacija a relacija *dualnosti* među funkcijama je *simetrična*.

Kod dualiziranja očito se čuva jednakost funkcija (u smislu **D 7.**). Ako je naime $F(x, y, \ldots, w) = F'(x', y', \ldots, v')$ bit će (uz supstituciju $\neg x$ za x itd.) $F(\neg x, \neg y, \ldots, \neg w) = F'(\neg x', \neg y', \ldots, \neg v')$ dakle i

$$\neg F(\neg x, \neg y, \ldots, \neg w) = \neg F'(\neg x', \neg y', \ldots, \neg w') \text{ tj. } F^* = F'^*.$$

6.1.1. *Definicija* 9. *Funkcija* F *za koju je* $F^* = F$ *zove se* a u t o d u a l n a *funkcija*.

Primjeri.

6.2.1. Funkciji određenoj s $x \vee y$ dualna je funkcija određena s $x \& y$ kao što se vidi iz tablica

x	y	$F = x \vee y$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

x	y	F^*
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$

ili preuređeno po recima

x	y	F^*
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Kraće ćemo reći da je konjunkcija dualna disjunkciji.

6.2.2. Identički istinitoj funkciji $F = \top$ dualna je identički neistinita funkcija $F^* = \bot$.

6.2.3. Funkcija određena s $F(x) = \neg x$ je autodualna jer je $F^*(x) = \neg F(\neg x) = \neg(\neg\neg x) = \neg x = F(x)$. Isto vrijedi za funkcije $F(x, y) = \neg x$ i $F(x, y) = \neg y$. Funkcije $F(x) = x$, $F(x, y) = x$, $F(x, y) = y$ također su autodualne.

Kasnije ćemo (usp. **8.6.2.**) vidjeti da među funkcijama dviju varijabla x, y nema drugih autodualnih osim 4 ovdje navedene.

6.2.4. Funkciji određenoj s $F(x, y) = x \Leftrightarrow y$ dualna je funkcija određena s $F^*(x, y) = (x \& \neg y) \vee (y \& \neg x)$ (ekskluzivna disjunkcija $\not\Leftrightarrow$); vidi **1.4.6.**

6.2.5. Funkciji određenoj s $F(x, y) = x \Rightarrow y$ (implikacija od x na y) dualna je funkcija određena s $F^*(x, y) = \neg(y \Rightarrow x)$ (negacija suprotne implikacije od y na x). Ovu funkciju označavat ćemo kadšto sa $y \not\Rightarrow x$.

6.3. Neka je A neki izraz sagrađen (najviše) od konstanata, varijabla i operacija ili općenitije funkcija (od bar jedne varijable) algebre sudova. $\bar{A}$ neka je izraz koji nastaje od A ako u A sve znakove konstanata, operacija i funkcija zamijenimo znakovima *dualnih* konstanata, operacija i funkcija. Tada su funkcije predočene sa A i $\bar{A}$ međusobno dualne.

Dokaz. Provest ćemo dokaz indukcijom po broju $n = nA$ znakova funkcija (operacija) koje ulaze u A (brojenim svaki onoliko puta koliko dolazi).

Baza indukcije. Za $n = 0$ A ima ili oblik 1° $A \equiv x$ gdje je x neka varijabla ili oblik 2° $A \equiv \tau$ gdje je τ neka konstanta ($\top$ ili $\bot$).

U slučaju 1° je $\bar{A} \equiv A$. No uz $F(x) = x$ je i $F^*(x) = x$ jer je to autodualna funkcija.

U slučaju 2°, ako je $A \equiv \top$ onda je $\bar{A} \equiv \bot$, a ako je $A \equiv \bot$ onda je $\bar{A} \equiv \top$. No uz $F = \tau$ je $F^* = \neg\tau$.

Tvrdnja dakle stoji za $n = 0$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja *vrijedi* za sve izraze B sa $nB < k$, $(k > 0)$. Neka je dalje A izraz sa $nA = k + 1$. A je tada oblika

$$A \equiv F(A_1, A_2, \ldots, A_m)$$

gdje je F neka funkcija od m varijabla ili m-arna operacija a $A_1, A_2, \ldots, A_m$ izrazi kakve razmatramo sa $nA_i < k$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Neka su $x, y, \ldots, w$ sve varijable koje ulaze u A, dakle u bar jedan od izraza A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, a G neka je funkcija od $x, y, \ldots, w$ određena sa A. Tada je

$$G^* = \neg F[A_1(\neg x, \neg y, \ldots, \neg w), A_2(\neg x, \neg y, \ldots, \neg w), \ldots,$$
$$A_m(\neg x, \neg y, \ldots, \neg w)] = F^*[\neg A_1(\neg x, \neg y, \ldots, \neg w),$$
$$\neg A_2(\neg x, \neg y, \ldots, \neg w), \ldots, \neg A_m(\neg x, \neg y, \ldots, \neg w)].$$

Ako su dakle G_i funkcije određene izrazima A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ bit će po pretpostavci indukcije

$$G_i^*(x, y, \ldots, w) = \bar{A}_i(x, y, \ldots, w), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

odakle je

$$G^* = F^*[G_1^*(x, y, \dots, w),\ G_2^*(x, y, \dots, w), \dots,\ G_m^*(x, y, \dots, w)] =$$

$$F^*[\bar{A}_1(x, y, \dots, w),\ \bar{A}_2(x, y, \dots, w), \dots,\ \bar{A}_m(x, y, \dots, w)] = \bar{A}$$

pa tvrdnja stoji i za $n = k+1$.

Primjeri. Funkciji određenoj sa $(x \& y) \vee z$ dualna je funkcija određena sa $(x \vee y) \& z$. Funkciji određenoj sa $(x \Leftrightarrow y) \& (z \Leftrightarrow \perp)$ dualna je funkcija određena sa $(x \not\Leftrightarrow y) \vee (z \not\Leftrightarrow \top)$. Funkciji određenoj sa $(x \& \top) \vee (y \Leftrightarrow H(x, w))$ dualna je funkcija određena sa $(x \vee \perp) \& (y \not\Leftrightarrow H^*(x, w))$.

7. RELACIJA $<$ MEĐU FUNKCIJAMA ALGEBRE SUDOVA

7.1. *Definicija* 10. *Neka su $F(x, y, \dots, w)$, $F'(x', y', \dots, v')$ neke dane funkcije algebre sudova. Po definiciji neka je $F < F'$ onda i samo onda, ako je $F \& F' = F$, tj. onda i samo onda ako je $F \& F' \Leftrightarrow F = \top$.*

Pokažimo da je relacija $<$ relacija (parcijalnog) *uređenja* u skupu funkcija algebre sudova (uz jednakost u smislu **D 7.**).

1° $F < F$ jer je $F \& F = F$.

2° Ako je $F < F'$ i $F' < F$ bit će $F \& F' = F$ i $F' \& F = F'$, pa kako je $F \& F' = F' \& F$ bit će i $F = F'$.

3° Ako je $F < F'$ i $F' < F''$ bit će $F \& F' = F$ i $F' \& F'' = F'$ dakle

$$F \& F'' = (F \& F') \& F'' = F \& (F' \& F'') = F \& F' = F \text{ tj. } F < F''.$$

Teorem 8. *Ako za funkcije F, G vrijedi $F < G$, onda za dualne funkcije F^*, G^* vrijedi $G^* < F^*$.*

Dokaz. Ako je $F \& G = F$ bit će $\neg(F \& G) = \neg F$ dakle $(\neg F) \vee (\neg G) = \neg F$, dakle $[(\neg F) \vee (\neg G)] \& (\neg G) = (\neg F) \& (\neg G)$ tj. $\neg G = (\neg F) \& (\neg G)$. Posljednja jednakost vrijedi i nakon supstitucije negiranih varijabla od F, G na mjesto tih varijabla, tj. vrijedi $G^* = F^* \& G^*$ odakle je $G^* < F^*$.

Primjeri.

7.2.1. Za svaku funkciju F je $\perp < F < \top$ jer je $\perp \& F = \perp$, $F \& \top = F$.

7.2.2. $x \& y < x \vee y$ jer je $(x \& y) \& (x \vee y) = (x \& y \& x) \vee (x \& y \& y) = x \& y$.

7.2.3. Funkcije x i $\neg x$ su neuporedljive obzirom na $<$, jer je

$$x \& \neg x = \perp \quad \text{dakle} \quad x \& \neg x \neq x \quad \text{i} \quad x \& \neg x \neq \neg x.$$

7.2.4. Neka je $F(x, y) = x \Rightarrow y$, $G(x, y) = x \Leftrightarrow y$. Tada je

$$F(x, y) \& G(x, y) = (x \Rightarrow y) \& (x \Leftrightarrow y) = (x \Rightarrow y) \& (x \Rightarrow y) \& (y \Rightarrow x) =$$

$$(x \Rightarrow y) \& (y \Rightarrow x) = x \Leftrightarrow y = G(x, y) \quad \text{pa izlazi} \quad x \Leftrightarrow y < x \Rightarrow y.$$

7.2.5. Neka je $F(x, y) = \neg(x \Rightarrow y)$, $G(x, y) = x$. Tada je

$$F \& G = \neg(x \Rightarrow y) \& x = (x \& \neg y) \& x = x \& \neg y = \neg(x \Rightarrow y) = F(x, y) \quad \text{pa je}$$

$$\neg(x \Rightarrow y) < x.$$

7.3. Dokažimo da je $F<G$ onda i samo onda ako je $F\Rightarrow G=\top$.

$F\Rightarrow G=\top$ onda i samo onda ako je $\neg F\vee G=\top$. U drugu ruku, $F\& G=F$ onda i samo onda ako je $F\& G\Leftrightarrow F=\top$ dakle onda i samo onda ako je $(F\& G\Rightarrow F)\&(F\Rightarrow F\& G)=\top$ dakle onda i samo onda ako je

$$[\neg(F\& G)\vee F]\&[\neg F\vee(F\& G)]=\top$$

dakle onda i samo onda ako je

$$[(\neg F\vee\neg G)\vee F]\&[(\neg F\vee F)\&(\neg F\vee G)]=\top.$$

No $\neg F\vee F=\top$ pa gornja jednakost nastupa onda i samo onda ako je $\neg F\vee G=\top$.

Dakako, da smo $F<G$ definirali sa $F\Rightarrow G=\top$ dobili bi **D 10.** kao *teorem.* **D 10.** odabrali smo kao *definiciju* radi veze s korespondentnom definicijom u III, 3.3. (6a).

7.4. *Teorem* 9. *$F<G$ onda i samo onda, ako je za svaku kombinaciju vrijednosti istinitosti varijabla iz F za koju je $\tau F=\top$ proširenu bilo kojim kombinacijama vrijednosti istinitosti varijabla iz G koje ne dolaze u F (ako takvih ima) ujedno i $\tau G=\top$.*

Teorem izlazi odatle što po **7.3.** uz $F<G$ nema nijedne kombinacije vrijednosti istinitosti varijabla iz F i G za koju bi bilo $\tau F=\top$, $\tau G=\perp$ i obrnuto, ako takve kombinacije nema, mora biti $F<G$.

7.5. Što odgovara relaciji $<$ *intuitivno*? $F<G$ definirano je sa $F\& G=F$ dakle uz $F<G$ sud (F i G) tvrdi isto što i sud F *sam*. To znači da je F „jača" tvrdnja nego li G, ili, tačnije, F je „bar toliko jaka" tvrdnja kao G. „$<$" dakle intuitivno možemo prevesti sa „je jača tvrdnja nego li" ili „je oštrija tvrdnja od". Npr. **7.2.2.** možemo interpretirati u smislu da sud (A i B) izriče jaču tvrdnju nego li sud (A ili B). Naime, ako je prvi istinit onda je pogotovo istinit drugi.

8. BAZE ALGEBRE SUDOVA

U **4.3.** vidjeli smo da se za svaku danu funkciju algebre sudova može naći njoj po toku vrijednosti istinitosti *jednaka* formula algebre sudova u kojoj od operacija dolaze *samo* $\&$, $\vee$, $\neg$. To znači da su te tri operacije dovoljne da se pomoću njih izgrade sve moguće funkcije algebre sudova.

Mogao bi se razmatrati općenitiji problem: Za dani skup funkcija odrediti skup svih onih funkcija koje se mogu sagraditi pomoću danih, ili, obrnuto, za dani skup funkcija naći neki skup funkcija pomoću kojeg se mogu sagraditi sve funkcije iz danog skupa. Dakako, od naročitog interesa bili bi ovdje takvi skupovi, koji su dovoljni za izgradnju danog skupa ali sami sadrže što manje funkcija.

U ovom poglavlju razmatrat ćemo detaljno nešto uži problem izgradnje sviju funkcija pomoću funkcija od *jedne* i *dvije* varijable. Budući da smo u **4.3.** vidjeli da se sve funkcije mogu sagraditi pomoću operacija $\&$, $\vee$ i $\neg$ bit će dovoljno tražiti sisteme funkcija pomoću kojih se može sagraditi konjunkcija, disjunkcija i negacija.

8.1. Problem možemo dalje pojednostavniti uvođenjem Shefferove operacije (funkcije) $\uparrow$ i Łukasiewiczeve operacije (funkcije) $\downarrow$. Ove su definirane tablicama

$x \uparrow y$

$x \setminus y$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$

$x \downarrow y$

$x \setminus y$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Lako možemo provjeriti da su $\uparrow$ i $\downarrow$ u smislu **D 8.** međusobno dualne funkcije. Također se lako provjerava da vrijede jednakosti

$$x \uparrow y = \neg (x \& y), \qquad x \downarrow y = \neg (x \vee y).$$

Odatle je specijalno

$$x \uparrow x = \neg (x \& x) = \neg x, \quad x \downarrow x = \neg (x \vee x) = \neg x$$

pa je dalje

$$(x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y) = \neg (x \uparrow y) = x \& y, \quad (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = \neg (x \downarrow y) = x \vee y;$$

$$(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y) = \neg (\neg x \& \neg y) = x \vee y, \quad (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = \neg (\neg x \vee \neg y) = x \& y.$$

Vidimo dakle da su kako Shefferova tako i Łukasiewiczeva operacija *same za sebe* dovoljne za izgradnju funkcija &, $\vee$, $\neg$ — dakle zbog **T 4.** i *svih* funkcija algebre sudova uopće.

Ako dakle za neki sistem želimo provjeriti mogu li se pomoću njega sagraditi sve funkcije, dovoljno je da provjerimo može li se pomoću njih sagraditi bilo Shefferova bilo Łukasiewiczeva operacija.

Nakon ovog uvodnog razmatranja precizirajmo program daljeg ispitivanja u ovom poglavlju:

8.2. Prema toku vrijednosti istinitosti ima $2^{2^1} = 4$ međusobno različitih funkcija jedne dane varijable i $2^{2^2} = 16$ međusobno različitih funkcija dvije dane varijable. Postavljamo ovaj problem:

Među podskupovima $\mathcal{U}$ skupa $\mathcal{M}$[1] *spomenutih* $4 + 16 = 20$ *funkcija jedne i dvije varijable treba naći sve one podskupove $\mathcal{U}_m$ koji imaju ova dva svojstva:*

1° *Sastavljanjem funkcija iz $\mathcal{U}_m$ može se sagraditi svaka funkcija iz $\mathcal{M}$; drugim riječima: $\mathcal{U}_m$ je sistem izvodnica ili generirajući sistem za $\mathcal{M}$.*

2° *Ako se iz $\mathcal{U}_m$ odstrani makar samo jedna funkcija, preostali sistem više nema svojstvo 1°; drugim riječima sistem izvodnica $\mathcal{U}_m$ je minimalan.*

Pritom pod „sastavljanjem" mislimo na konstrukciju složenih funkcija pomoću danih funkcija a eventualno i pomoću varijabla. U tom se smislu npr. funkcija $F = x$ može dobiti iz svakog — pa i praznog — skupa funkcija

---

[1] Među funkcijama koje su elementi od $\mathcal{M}$ ima ih međusobno jednakih u smislu **D 7.** (usp. kasnije **8.8.**): svaka funkcija od x jednaka je nekoj funkciji od x, y. Međutim među funkcijama od $\mathcal{M}$ očito nema *identički* jednakih u smislu **4.2.**

jer se može definirati pomoću same varijable x. Alternativna konvencija o sastavljanju funkcija samo slaganjem danih funkcija bit će razmotrena kasnije u **8.10**; pokazat će se međutim da ona, što se tiče rezultata ovog poglavlja, vodi na isto kao i gore prihvaćena konvencija.

Svaki minimalni generirajući sistem $\mathcal{U}_m$ od $\mathcal{M}$ zvat ćemo b a z o m od $\mathcal{M}$.

Prema **8.1.** je npr. $\mathcal{U}_m = \{\uparrow\}$, tj. jednoelementni sistem koji sadrži samo funkciju definiranu Shefferovom operacijom $\uparrow$, baza algebre sudova. Isto tako je i $\mathcal{U}_m = \{\downarrow\}$ baza algebre sudova.

Na kraju razmatranja u ovom poglavlju vidjet ćemo da postoje tačno dvije jednočlane, tačno 34 dvočlanih i tačno 10 tročlanih baza algebre sudova a nijedna baza sa više od tri elementa. Znači da među 2^{20} podskupova od $\mathcal{M}$ samo ih je 46 koji su baze, dok su preostali bilo *preslabi* da bi bili baze, tj. njima se *ne mogu* generirati sve funkcije, bilo su *prejaki* da bi bili baze, tj. već nekim njihovim *pravim* podskupom *mogu* se generirati sve funkcije algebre sudova.

8.3. Uvedimo najprije radi jednostavnijeg pisanja neke oznake (njima ćemo se služiti samo u ovom poglavlju).

Funkcije jedne varijable (kojima odgovaraju unitarne operacije) označavat ćemo sa α_i, $i=1,\ldots,4$ a funkcije dvije varijable (kojima odgovaraju binarne operacije) označavat ćemo sa β_j, $j=1,\ldots,16$.

Indekse i, j odabrat ćemo pritom ovako:

Za danu unitarnu operaciju napišimo najprije njenu vrijednost istinitosti za slučaj kad varijabla poprima vrijednost istinitosti $\top$, a zatim njenu vrijednost istinitosti za slučaj kad varijabla poprima vrijednost istinitosti $\perp$. Time dobivenom dvočlanom uređenom slogu pridružimo slog sastavljen od elemenata skupa $\{0,1\}$ i to tako da znaku $\top$ pridružimo 0 a znaku $\perp$ pridružimo 1. Dobiveni slog znamenaka interpretirajmo kao dijadsku (u pisanju s bazom 2) notaciju nekog prirodnog broja $n>0$. Unitarnu operaciju kojoj je na taj način pridružen broj n označit ćemo sa α_{n+1}. Npr. za negaciju $\neg$ dobivamo slog $\langle\perp\top\rangle$ kome je dalje pridružen slog $\langle 10\rangle$ što je u dijadskom sistemu broj 2. Zato ćemo funkciju $F(x)=\neg x$ označiti sa $\alpha_{2+1}=\alpha_3$.

U svemu time imamo za unitarne operacije (funkcije jedne varijable) ove oznake:

α_1 za $\langle 00\rangle$ ($\alpha_1 x=\top$; tu operaciju zvat ćemo u n i t a r n a u n i v e r z a l n a a f i r m a c i j a),

α_2 za $\langle 01\rangle$ ($\alpha_2 x=x$; tu operaciju zvat ćemo o p e r a c i j a i d e n t i t e t a),

α_3 za $\langle 10\rangle$ ($\alpha_3 x=\neg x$; negacija),

α_4 za $\langle 11\rangle$ ($\alpha_4 x=\perp$; tu operaciju zvat ćemo u n i t a r n a u n i v e r z a l n a n e g a c i j a).

Slično ćemo uvesti oznake za funkcije dvije varijable, dakle za binarne operacije.

Za danu binarnu operaciju napišimo redom njene vrijednosti istinitosti kako ih poprima uz ove kombinacije vrijednosti istinitosti njenih varijabla (argumenata): najprije za $\top$, $\top$ zatim za $\top$, $\perp$ zatim za $\perp$, $\top$ i konačno za $\perp$, $\perp$. Time dobivenom četveročlanom uređenom slogu (elemenata iz $\{\top, \perp\}$) pridružimo opet četveročlani uređeni slog elemenata iz $\{0,1\}$ tako da opet znaku $\top$ pridružimo 0 a znaku $\perp$ pridružimo 1. Dobiveni slog znamenaka interpretirajmo opet kao dijadsku notaciju broja $n > 0$. Binarnu operaciju kojoj je na taj način pridružen broj n označit ćemo sa β_{n+1}. Npr. za ekvivalenciju $\Leftrightarrow$ dobivamo najprije slog $\langle \top \perp \perp \top \rangle$ (jer je $\top \Leftrightarrow \top = \top$, $\top \Leftrightarrow \perp = \perp$, $\perp \Leftrightarrow \top = \perp$, $\perp \Leftrightarrow \perp = \top$). Ovome pridružimo slog $\langle 0110 \rangle$. To je dijadska notacija za $2^2+2=6$. U našoj notaciji bit će dakle funkcija $F(x, y) = x \Leftrightarrow y$ označena sa $\beta_{6+1} = \beta_7$.

U svemu time za binarne operacije imamo ove oznake:

β_1 za $\langle 0000 \rangle$ ($x \beta_1 y = \top$; tu operaciju zvat ćemo **binarna univerzalna afirmacija**),

β_2 za $\langle 0001 \rangle$ ($x \beta_2 y = x \vee y$; [inkluzivna] disjunkcija),

β_3 za $\langle 0010 \rangle$ ($x \beta_3 y = y \Rightarrow x$; implikacija od y na x),

β_4 za $\langle 0011 \rangle$ ($x \beta_4 y = x$; tu operaciju zvat ćemo **prva projekcija**),

β_5 za $\langle 0100 \rangle$ ($x \beta_5 y = x \Rightarrow y$; implikacija od x na y),

β_6 za $\langle 0101 \rangle$ ($x \beta_6 y = y$; tu operaciju zvat ćemo **druga projekcija**),

β_7 za $\langle 0110 \rangle$ ($x \beta_7 y = x \Leftrightarrow y$; ekvivalencija),

β_8 za $\langle 0111 \rangle$ ($x \beta_8 y = x \,\&\, y$; konjunkcija),

β_9 za $\langle 1000 \rangle$ ($x \beta_9 y = x \uparrow y$; Shefferova operacija),

β_{10} za $\langle 1001 \rangle$ ($x \beta_{10} y = \neg(x \Leftrightarrow y) = (x \,\&\, \neg y) \vee (\neg x \,\&\, y) = x \not\Leftrightarrow y$; negacija ekvivalencije = ekskluzivna disjunkcija),

β_{11} za $\langle 1010 \rangle$ ($x \beta_{11} y = \neg y$; negacija druge projekcije),

β_{12} za $\langle 1011 \rangle$ ($x \beta_{12} y = x \,\&\, \neg y = \neg(x \Rightarrow y) = x \not\Rightarrow y$; negacija implikacije od x na y),

β_{13} za $\langle 1100 \rangle$ ($x \beta_{13} y = \neg x$; negacija prve projekcije),

β_{14} za $\langle 1101 \rangle$ ($x \beta_{14} y = \neg(y \Rightarrow x) = y \not\Rightarrow x$; negacija implikacije od y na x),

β_{15} za $\langle 1110 \rangle$ ($x \beta_{15} y = x \downarrow y$; Łukasiewiczeva operacija),

β_{16} za $\langle 1111 \rangle$ ($x \beta_{16} y = \perp$; tu operaciju zvat ćemo **binarna univerzalna negacija**).

8.4. Vratimo se sada problemu formuliranom u **8.2.** Od skupa operacija $\mathcal{M} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_4; \beta_1, \ldots, \beta_{16}\}$ treba naći one podskupove $\mathcal{U}_m = \{\alpha_{i_1}, \ldots; \beta_{j_1}, \ldots\}$ (kraće: $\mathcal{U}_m = \{\alpha_i, \beta_j\}$) koji čine bazu od $\mathcal{M}$.

Najprije ćemo potražiti sve baze od $\mathcal{M}_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_{16}\}$, tj. sve podskupove $\mathcal{U}_{2m} = \{\beta_i\}$ od $\mathcal{M}_2$ koji imaju svojstvo da se *svaka* operacija β može generirati operacijama iz $\{\beta_i\}$, ali da *za svaku* operaciju $\beta^\circ \in \mathcal{U}_{2m}$ *postoji* neka operacija $\beta \in \mathcal{M}_2$ takva, da se β *ne može* generirati operacijama iz $\mathcal{U}_{2m} \setminus \{\beta^\circ\}$.

Kasnije ćemo vidjeti kako se iz svih baza od $\mathcal{M}_2$ mogu lako dobiti i sve baze od $\mathcal{M}$.

Problemu pristupamo ovako: Najprije ćemo u **8.5.1.** do **8.5.4.** potražiti neke kriterije koji će omogućiti da zaključimo da izvjesni podskupovi $\mathcal{U}_2$ od $\mathcal{M}_2$ sigurno *ne mogu* biti baze od $\mathcal{M}_2$. Zatim ćemo u **8.6.1.** i **8.6.2.** naći neke postupke koji će omogućiti da pomoću nekih podskupova $\mathcal{U}_{2m}$ za koje već znamo da *jesu* baze dobijemo neke *nove* koji su također baze. Postavljeni problem bit će riješen kad nam primjenom obih metoda za svaki od 2^{16} podskupova od $\mathcal{M}_2$ uspije odlučiti da li *jest* baza od $\mathcal{M}_2$ ili *nije*.

8.5. Ideja za nalaženje gore spomenutih „kriterija nemogućnosti" je ova:

Navest ćemo neka svojstva operacija β koja su u isto vrijeme i h e r e d i t a r n a i n e u n i v e r z a l n a i to u ovom smislu:

Reći ćemo da je neko svojstvo π operacija β_j hereditarno, ako svaka operacija β, koja se (u smislu **8.2.**) može sagraditi pomoću operacija β_j koje sve imaju svojstvo π, opet i *sama* ima svojstvo π. (Prema tome β_4 i β_6 imaju sva hereditarna svojstva.)

Hereditarnim svojstvima operacija β odgovaraju dakle obzirom na sastavljanje operacija uz upotrebu varijabla *stabilni* podskupovi od $\mathcal{M}_2$.

Reći ćemo da je neko svojstvo π operacija β_j neuniverzalno, ako postoji bar jedna operacija $\beta \in \mathcal{M}_2$ koja *nema* svojstvo π.

Neuniverzalnim svojstvima π odgovaraju dakle *pravi* podskupovi od $\mathcal{M}_2$.

Potražit ćemo dakle neke stabilne prave podskupove od $\mathcal{M}_2$.

8.5.1. *Definicija. Operacija* β *ima svojstvo* π_1 *ako je* $\top\beta\top = \top$.

Očito je da je ovako definirano svojstvo π_1 neuniverzalno jer nijedna od operacija β_9 do β_{16} nema svojstvo π_1.

Da bismo dokazali da je svojstvo π_1 hereditarno, izvest ćemo najprije jedan teorem koji će nam kasnije biti od koristi i na drugim mjestima.

Definicija 11. *Među operacijama* $\beta \in \mathcal{M}_2$ *definiramo ternarnu operaciju kompozicije ovako: Uređenoj trojki* β_i, β_j, β_k *pridružujemo kao ternarni produkt operaciju* $[\beta_i \beta_j \beta_k] = \beta_m$ *danu sa*

$$x \beta_m y = (x \beta_i y) \beta_j (x \beta_k y).$$

Teorem 10. *Podskup* $\mathcal{U}_2$ *od* $\mathcal{M}_2$ *sa svojstvom* $\{\beta_4, \beta_6\} \subset \mathcal{U}_2$ *stabilan je onda i samo onda, ako je za svaku uređenu trojku operacija* β_i, β_j, $\beta_k \in \mathcal{U}_2$ *i ternarni produkt* $[\beta_i \beta_j \beta_k] \in \mathcal{U}_2$.

Dokaz. Uvjet teorema očito je *nuždan* jer ako je $\mathcal{U}_2$ stabilan mora uz β_i, β_j, β_k svakako sadržavati i $[\beta_i \beta_j \beta_k]$.

Preostaje dokaz da je uvjet teorema i *dovoljan*. Provest ćemo ga indukcijom po rasponu ρA sastavljenog izraza A kojim je neka operacija β definirana (sagrađena) pomoću varijabla i operacija iz $\mathcal{U}_2$, naime po broju operacija β iz $\mathcal{U}_2$ koje ulaze u A (brojenim svaka onoliko puta koliko puta dolazi).

Baza indukcije. $\rho A = 0$. Tada je $A \equiv \xi$ neka varijabla pa je β dano sa $\xi \beta y = \xi$ ili sa $x \beta \xi = \xi$, tj. $\beta = \beta_4$ ili $\beta = \beta_6$. No po pretpostavci teorema je β_4, $\beta_6 \in \mathcal{U}_2$, dakle $\beta \in \mathcal{U}_2$ i teorem vrijedi za $\rho A = 0$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da teorem vrijedi za operacije $\beta \in \mathcal{M}_2$ koje se mogu definirati pomoću operacija iz $\mathcal{U}_2$ izrazima raspona $\rho < k$ $(k > 0)$. Neka je operacija β s argumentima x, y definirana nekim izrazom A raspona $\rho A = k + 1$.

Možemo pretpostaviti da A ne sadrži varijable različite od x i y. Ako bi ih naime prvotno sadržavao, lijeva strana od $x \beta y = A$ po pretpostavci o takvim varijablama ne može zavisiti pa ih sve možemo zamijeniti npr. sa x. Prema tome A je oblika $A_1 \beta_j A_2$ gdje izrazi A_1, A_2 sadrže samo (najviše) varijable x i y, raspon im je $<k$, a $\beta_j \in \mathcal{U}_2$.

Po hipotezi indukcije binarne operacije definirane sa A_1 i A_2 mogu se predočiti u obliku $x \beta_i y$ i $x \beta_k y$ sa $\beta_i, \beta_k \in \mathcal{U}_2$. Prema tome je

$$x \beta y = (x \beta_i y) \beta_j (x \beta_k y).$$

No prema uvjetu teorema je $\beta \in \mathcal{U}_2$ pa teorem vrijedi i za β koji su definirani s A sa $\rho A = k+1$. Teorem je dokazan.

Napomena. Lako se nalazi kako će se ternarnim produktom izraziti neke jednostavno složene funkcije. Npr.

$$x \beta y = x \beta_i x = x[\beta_4 \beta_i \beta_4] y,$$

$$x \beta y = y \beta_i x = x [\beta_6 \beta_i \beta_4] y,$$

$$x \beta y = y \beta_i (x \beta_j y) = x [\beta_6 \beta_i \beta_j] y,$$

$$x \beta y = x \beta_i (y \beta_j x) = x [\beta_4 \beta_i [\beta_6 \beta_i \beta_4]] y.$$

Vratimo se sada ispitivanju svojstva π. Prema **T 10.** odmah uviđamo da je to svojstvo hereditarno jer β_4 i β_6 imaju to svojstvo a ako $\beta_i, \beta_j, \beta_k$ imaju svojstvo π_1 bit će

$$\top \beta_m \top = (\top \beta_i \top) \beta_j (\top \beta_k \top) = \top \beta_j \top = \top$$

pa i β_m ima svojstvo π_1.

Podskup $\mathcal{P}_1 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_8\}$ operacija $\beta \in \mathcal{M}_2$ sa svojstvom π_1 je dakle stabilan.

8.5.2. *Definicija. Operacija* β *ima svojstvo* π_2 *ako je* $\perp \beta \perp = \perp$.

I za ovo svojstvo očito je da je neuniverzalno, jer operacije β_i s neparnim i to svojstvo ne posjeduju.

β_4 i β_6 imaju svojstvo π, pa da bismo uvidjeli da je ono i hereditarno možemo opet primijeniti **T 10:**

$$\perp \beta_m \perp = (\perp \beta_i \perp) \beta_j (\perp \beta_k \perp) = \perp \beta_j \perp = \perp;$$

uvjet teorema je dakle ispunjen i svojstvo π_2 je hereditarno.

Podskup $\mathcal{P}_2 = \{\beta_2, \beta_4, \beta_6, \beta_8, \ldots, \beta_{16}\}$ operacija $\beta \in \mathcal{M}_2$ sa svojstvom π_2 je dakle stabilan.

8.5.3. *Definicija. Operacija* β *ima svojstvo* π_3, *ako u njenoj tablici vrijednosti istinitosti znak* $\top$ *dolazi paran broj puta (dakle ili uopće ne, ili dvaput ili četiri puta).*

Svojstvo π_3 je neuniverzalno jer npr. β_2 nema to svojstvo.

β_4 i β_6 imaju svojstvo π_3 pa možemo primijeniti **T 10.** Valja dakle ispitati operacije β dane sa

$$x \beta y = (x \beta_i y) \beta_j (x \beta_k y),$$

gdje $\beta_i, \beta_j, \beta_k$ imaju svojstvo π_3.

Razlikovat ćemo dva slučaja:

1° Bilo i bilo k (bilo i i k) jednak je 1 ili 16.

2° Niti i niti k nije jednak ni 1 ni 16.

Drugim riječima, slučaj 2° nastupa ako u tablicama vrijednosti istinitosti obiju operacija β_i, β_k dolaze po dva znaka $\top$ i po dva znaka $\perp$; inače nastupa slučaj 1°.

Slučaj 1°. Ako je $\beta_i=\beta_1$ ili $=\beta_{16}$, onda β ima svojstvo π_3 jer to svojstvo ima operacija β_k. Analogno, ako je $\beta_k=\beta_1$ ili $=\beta_{16}$, β ima svojstvo π_3 jer to svojstvo ima operacija β_i.

Slučaj 2°. Ovdje opet razlikujemo *dvije* mogućnosti: Ako su $\langle\tau_1\,\tau_2\rangle$, $\langle\tau_3\,\tau_4\rangle$ oba para vrijednosti istinitosti za koje je $\tau_1\beta_i\tau_2=\top$, $\tau_3\beta_i\tau_4=\top$, onda je ili $\tau_1\beta_k\tau_2=\tau_3\beta_k\tau_4$ (slučaj 2° α) ili je $\tau_1\beta_k\tau_2\neq\tau_3\beta_k\tau_4$ (slučaj 2° β).

Slučaj 2° α. Ovdje se opet lako uviđa da β ima svojstvo π_3.

Slučaj 2° β. Sada je ili $\tau_1\beta_k\tau_2=\top$, $\tau_3\beta_k\tau_4=\perp$ ili $\tau_1\beta_k\tau_2=\perp$, $\tau_3\beta_k\tau_4=\top$. Ako su tada $\langle\tau_5\,\tau_6\rangle$ i $\langle\tau_7\,\tau_8\rangle$ oba para vrijednosti istinitosti za koje je $\tau_5\beta_i\tau_6=\perp$, $\tau_7\beta_i\tau_8=\perp$, onda je ili istodobno $\tau_5\beta_k\tau_6=\top$, $\tau_7\beta_k\tau_8=\perp$ ili pak istodobno $\tau_5\beta_k\tau_6=\perp$, $\tau_7\beta_k\tau_8=\top$. Operacija β je dakle ovdje u svim slučajevima takva, da su simboli u njenoj tablici vrijednosti istinitosti na određeni način porazmješteni simboli tablice vrijednosti istinitosti za β_j. β dakle opet ima svojstvo π_3 jer to svojstvo ima operacija β_j.

Podskup $\mathcal{P}_3=\{\beta_1, \beta_4, \beta_6, \beta_7, \beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{13}, \beta_{16}\}$ operacija $\beta\in\mathcal{M}_2$ sa svojstvom π_3 je dakle stabilan.

8.5.4. *Definicija. Operacija* β_i *ima svojstvo* π_4 *ako joj je indeks jednak 6 ili jednak nekoj potenciji od 2.*

Svojstvo π_4 imaju dakle operacije podskupa $\mathcal{P}_4=\{\beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_6, \beta_8, \beta_{16}\}$ od $\mathcal{M}_2$.

$\beta_3\notin\mathcal{P}_4$ pa je svojstvo π_4 neuniverzalno.

$\beta_4, \beta_6\in\mathcal{P}_4$ pa možemo primijeniti **T 10.** Treba dakle ispitati operacije β dane sa

$$x\beta y=(x\beta_i y)\beta_j(x\beta_k y),$$

gdje je β_i, β_j, $\beta_k\in\mathcal{P}_4$.

Radi kraćeg pisanja označit ćemo ovdje operaciju $\beta=[\beta_i\beta_j\beta_k]$ kraće s (i, j, k) i razlikovati 6 slučajeva, već prema tome da li je $j=1$, 2, 4, 6, 8 ili 16. (Dakako, β_i, β_k uvijek su $\in\mathcal{P}_4$.)

Slučaj 1° $j=1$. $(i, 1, k)=\beta_1\in\mathcal{P}_4$.

Slučaj 2° $j=2$. Kao što se lako izračunava, vrijedi $(1, 2, k)=(k, 2, 1)=\beta_1$; za $k>2$ je $(2, 2, k)=(k, 2, 2)=\beta_2$; $(4, 2, 6)=(6, 2, 4)=\beta_2$; za $k=4$, 8, 16 je $(4, 2, k)=(k, 2, 4)=\beta_4$; za $k>6$ je $(6, 2, k)=(k, 2, 6)=\beta_6$; za $k=8$, 16 je $(8, 2, k)=(k, 2, 8)=\beta_8$; $(16, 2, 16)=\beta_{16}$. Dakle opet uvijek vrijedi $(i, 2, k)\in\mathcal{P}_4$.

Slučaj 3° $j=4$. $(i, 4, k)=\beta_i$.

Slučaj 4° $j=6$. $(i, 6, k)=\beta_k$.

Slučaj 5° $j=8$. $(1, 8, k)=(k, 8, 1)=\beta_k$; za $k>2$ je $(2, 8, k)=(k, 8, 2)=\beta_k$; $(4, 8, 6)=(6, 8, 4)=\beta_8$; za $k=4, 8, 16$ je $(4, 8, k)=(k, 8, 4)=\beta_k$; za $i>6$, $k>i$ je $(i, 8, k)=(k, 8, i)=\beta_k$.

Slučaj 6° $j=16$. $(i, 16, k)=\beta_{16}$.

Time je i stabilitet od $\mathcal{P}_4$ dokazan.

8.6. U **6.1.** uveli smo pojam danoj funkciji dualne funkcije. Za dalja izvođenja trebat će nam još pojam danoj funkciji dvije varijable transponirane funkcije (operacije).

Neka je dakle β funkcija dvije varijable dana tablicom vrijednosti istinitosti

$x\,\beta\,y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$
$\top$	τ_1	τ_2
$\perp$	τ_3	τ_4

gdje su τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 elementi iz skupa $\{\top, \perp\}$.

Operaciji β trasponirana operacija β' dana je onda (po definiciji) tablicom vrijednosti istinitosti

$x\,\beta'\,y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$
$\top$	τ_1	τ_3
$\perp$	τ_2	τ_4

Drugim riječima, $\top\beta'\top=\top\beta\top$, $\perp\beta'\perp=\perp\beta\perp$ a $\top\beta'\perp=\perp\beta\top$ i $\perp\beta'\top=\top\beta\perp$. (Prema tome bit će $\beta=\beta'$ onda i samo onda ako je $\top\beta\perp=\perp\beta\top$.)

Transponiranje je očito involutivno, jer je $(\beta')'=\beta$ pa je relacija transponiranosti simetrična, tj. ako je $\beta_i=\beta_k'$ onda je $\beta_k=\beta_i'$.

Označimo li par operacija $\{\beta_i, \beta_k\}$ kraće sa (i, k), vidimo da među operacijama β_1 do β_{16} postoje ovi parovi međusobno transponiranih:

$$(1, 1), (2, 2), (3, 5), (4, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10), (11, 13), (12, 14),$$
$$(15, 15), (16, 16).$$

8.6.1. *T-postupak za konstrukciju novih baza.*

Vrijedi ovaj teorem:

Neka su $\{\beta_i\}$, $\{\beta_k\}$ *disjunktni podskupovi od* $\mathcal{M}_2$. *Ako je* $\mathcal{U}_{2m}=\{\beta_i\}\cup\{\beta_k\}$ *baza od* $\mathcal{M}_2$, *onda je i* $\mathcal{U}'_{2m}=\{\beta_i'\}\cup\{\beta_k\}$ *baza od* $\mathcal{M}_2$, *tj. ako u nekoj bazi transponiramo kojegod odabrane operacije, dobivamo opet bazu.*

Da bismo ovo dokazali pokažimo najprije da se svaka operacija β koja se može predočiti izrazom A sagrađenim operacijama iz $\mathcal{U}_{2m}$ može predočiti i izrazom A' sagrađenim operacijama iz $\mathcal{U}'_{2m}$. Dokaz ćemo provesti indukcijom po rasponu ρA od A (usp. dokaz T **10.**). Iz razloga kao u **8.5.1.** možemo pretpostaviti da A od varijabla sadrži (najviše) samo x i y.

Baza indukcije. Za $\rho A = 0$ A ima oblik $A \equiv x$ ili $A \equiv y$ pa možemo uzeti $A' \equiv A$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je tvrdnja već dokazana za operacije β koje se mogu predočiti izrazom raspona $\rho < k\,(k > 0)$. Neka je sada A neki izraz raspona $\rho A = k + 1$. On je tada oblika

$$A \equiv A_1\, \beta_j\, A_2,$$

gdje su A_1, A_2 izrazi raspona $< k$ sagrađeni operacijama iz $\mathcal{U}_{2m}$, a $\beta_j \in \mathcal{U}_{2m}$. Po pretpostavci indukcije operacije predočene sa A_1, A_2 mogu se predočiti i nekim izrazima A_1', A_2' sagrađenim operacijama iz $\mathcal{U}'_{2m}$. Vrijedi dakle

$$x\,\beta\, y = A_1'\, \beta_j\, A_2',$$

$\beta_j \in \mathcal{U}_{2m}$. Razlikovat ćemo 2 slučaja:

1° $\beta_j \in \{\beta_k\}$. Tada je $x\,\beta\, y = A_1'\, \beta_j\, A_2'$ sa $\beta_j \in \mathcal{U}'_{2m}$ pa možemo uzeti $A' \equiv A_1'\, \beta_j\, A_2'$.

2° $\beta_j \in \{\beta_i\}$. Tada je $x\,\beta\, y = A_2'\, \beta_j'\, A_1'$ sa $\beta_j' \in \mathcal{U}'_{2m}$ pa možemo uzeti $A' \equiv A_2'\, \beta_j'\, A_1'$. Tvrdnja je dokazana.

Znači, ako je $\mathcal{U}_{2m}$ baza od $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{U}'_{2m}$ sigurno je sistem izvodnica za $\mathcal{M}_2$, tj. svaka operacija iz $\mathcal{M}_2$ može se sagraditi operacijama iz $\mathcal{U}'_{2m}$. Treba još dokazati da je $\mathcal{U}'_{2m}$ *minimalni* sistem izvodnica (dakle baza).

Uočimo najprije da su skupovi $\{\beta_i'\}$, $\{\beta_k\}$ disjunktni. Kad to naime ne bi bio slučaj, bilo bi $\mathcal{U}'_{2m} = \{\beta_i'\} \cup [\{\beta_k\} \setminus (\{\beta_i'\} \cap \{\beta_k\})]$. No argumentacijom kao ranije vidjeli bi da bi tada skup $(\mathcal{U}'_{2m})' = \{\beta_i\} \cup [\{\beta_k\} \setminus (\{\beta_i'\} \cap \{\beta_k\})]$, iako *pravi* podskup baze $\mathcal{U}_{2m}$, bio sistem izvodnica za $\mathcal{M}_2$ što je nemoguće. Zaista je dakle $\{\beta_i'\} \cap \{\beta_k\} = \emptyset$.

Pretpostavimo sada da sistem izvodnica $\mathcal{U}'_{2m}$ *nije* baza. Onda bi neki *pravi* podskup $\mathcal{U}$ od $\mathcal{U}'_{2m}$ bio baza. No argumentacijom kao što smo je upravo proveli (da bi dokazali $\{\beta_i'\} \cap \{\beta_k\} = \emptyset$) vidimo da bi onda opet morao postojati neki *pravi* podskup $\mathcal{U}'$ od $\mathcal{U}_{2m}$ koji bi bio sistem izvodnica za $\mathcal{M}_2$ što je nemoguće. $\mathcal{U}'_{2m}$ je dakle baza.

8.6.2. *D-postupak za konstrukciju novih baza.* Označimo operaciji β dualnu operaciju sa β^*; $x\,\beta^*\, y = \neg(\neg x\, \beta\, \neg y)$. Ako opet par operacija $\{\beta_i, \beta_k\}$ označimo kraće sa (i, k) nalazimo da postoje ovi parovi međusobno dualnih operacija:

(1,16), (2,8), (3,12), (4,4), (5,14), (6,6), (7,10), (9,15), (11,11), (13,13).

Vrijedi ovaj teorem:

Ako je $\mathcal{U}_{2m} = \{\beta_i\}$ baza od $\mathcal{M}_2$, onda je i $\mathcal{U}^*_{2m} = \{\beta_i^*\}$ baza od $\mathcal{M}_2$, tj. ako u nekoj bazi sve operacije zamijenimo dualnim dobivamo opet bazu.

Dokažimo najprije ovo: Ako se operacija β može definirati nekim izrazom A sagrađenim operacijama iz $\mathcal{U}_{2m}$, onda se operacija β^* može definirati nekim izrazom A^* sagrađenim operacijama iz $\mathcal{U}^*_{2m}$.

Provedimo dokaz opet indukcijom po rasponu ρA izraza A kojim je definirana operacija β. Pritom opet možemo pretpostaviti da A od varijabla sadrži (najviše) samo x i y.

Baza indukcije. Ako je $\rho A = 0$, A ima oblik $A \equiv x$ ili $A \equiv y$. Tada je $\beta = \beta_4$ odnosno $\beta = \beta_6$. No operacije β_4 i β_6 su autodualne, pa je, uz $A^* \equiv A$, β^* definirano sa A^* i tvrdnja je ispravna.

Korak indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za operacije koje se mogu definirati izrazima raspona $\rho < k \, (k > 0)$. Neka je sada β neka operacija definirana izrazom A raspona $\rho A = k+1$. A je dakle oblika $A_1 \beta_j A_2$ sa $\beta_j \in \mathcal{U}_{2m}$, tj.

$$x \beta y = A \equiv A_1 \beta_j A_2 .$$

Izraz A_1 sam za sebe definira neku operaciju β', a kako je $\rho A_1 < k$ postoji po pretpostavci indukcije izraz A_1^*, sagrađen operacijama iz $\mathcal{U}^*_{2m}$, koji definira operaciju β'^*. Analogno, A_2 sam za sebe definira neku operaciju β'', a kako je i $\rho A_2 < k$ postoji po pretpostavci indukcije izraz A_2^*, sagrađen operacijama iz $\mathcal{U}^*_{2m}$, koji definira operaciju β''^*. Imamo dakle

$$x \beta y = (x \beta' y) \beta_j (x \beta'' y), \quad x \beta'^* y = A_1^*, \; x \beta''^* y = A_2^* .$$

Odatle po definiciji dualne funkcije izlazi (zbog involutivnosti negacije)

$$\begin{aligned} x \beta^* y &= \neg [(\neg x \beta' \neg y) \beta_j (\neg x \beta'' \neg y)] \\ &= \neg [\neg \neg (\neg x \beta' \neg y) \beta_j \neg \neg (\neg x \beta'' \neg y)] \\ &= \neg [\neg (x \beta'^* y) \beta_j \neg (x \beta''^* y)] = (x \beta'^* y) \beta_j^* (x \beta''^* y) \\ &= A_1^* \beta_j^* A_2^* \equiv A^* \end{aligned}$$

pa se i β^* može definirati izrazom sagrađenim operacijama iz $\mathcal{U}^*_{2m}$. Tvrdnja je dokazana. (Uostalom, ona izlazi i kao specijalan slučaj teorema dokazanog u **6.3.**)

Sada možemo zaključivati ovako: Za svaku danu funkciju postoji neka funkcija kojoj je dana funkcija dualna, pa je $\mathcal{U}^*_{2m}$ sigurno sistem izvodnica za $\mathcal{M}_2$. Kad $\mathcal{U}^*_{2m}$ ne bi bio baza, tj. minimalni sistem izvodnica, bio bi to neki njegov pravi podskup $\mathcal{U}$. No tada bi — argumentacijom kao gore — uvidjeli da bi i $\mathcal{U}^*$ morao biti sistem izvodnica za $\mathcal{M}_2$ iako bi $\mathcal{U}^*$ bio pravi podskup od $\mathcal{U}_{2m}$ — što nije moguće.

8.7. Rezultati iz **8.5.** do **8.6.2.** omogućuju da pređemo na sistematsko traženje i enumeraciju baza od $\mathcal{M}_2$.

8.7.1. Budući da samo β_9 i β_{15} *nemaju* nijedno od svojstva π_1 do π_3 dolaze za jednočlane baze u obzir samo te dvije operacije. U drugu ruku, u **8.1.** vidjeli smo da svaka od tih operacija zaista *jest* baza za skup svih funkcija algebre sudova pa su to pogotovo baze od $\mathcal{M}_2$. Prema tome postoje tačno dvije jednočlane baze od $\mathcal{M}_2$, naime $\mathcal{U}_{2m} = \{\beta_9\}$ i $\mathcal{U}_{2m} = \{\beta_{15}\}$.

8.7.2. Da bismo našli sve *dvočlane* baze, koristit ćemo se ovdje danom *Tablicom.* U njoj na očit način svakom paru $\{\beta_i, \beta_k\}$, $i > k$, odgovara po jedno polje Tablice u kojem su upisane ili neke arapske ili jedna rimska brojka.

Tablica

		3 1	2 1	1	3 2 1	1	3 2 1	3 1	2 1		3 2	3	2	3	2	
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}
1, 3	β_1															
1, 2	β_2	1														
1	β_3	1	1													
1, 2, 3	β_4	1,3	1,2	1												
1	β_5	1	1	1	1											
1, 2, 3	β_6	1,3	1,2	1	1,2,3	1										
1, 3	β_7	1,3	1	1	1,3	1	1,3									
1, 2	β_8	1	1,2	1	1,2	1	1,2	1								
	β_9	0	0	0	0	0	0	0	0							
2, 3	β_{10}	3	2	I	2,3	I	2,3	3	2	0						
3	β_{11}	3	II	III	3	III	3	3	II	0	3					
2	β_{12}	V	2	IV	2	IV	2	I	2	0	2	III				
3	β_{13}	3	II	III	3	III	3	3	II	0	3	3	III			
2	β_{14}	V	2	IV	2	IV	2	I	2	0	2	III	2	III		
	β_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2, 3	β_{16}	3	2	V	2,3	V	2,3	3	2	0	2,3	3	2	3	2	0

Arapske cifre upisane su u Tablicu prema ovim okolnostima:

Pored svake operacije β, u prvom stupcu i u prvom retku Tablice, upisane su one od cifara j, za koje β *ima* svojstvo π_j ($j = 1, 2, 3$). Tako npr. pored β_7 lijevo i gore pišu cifre, 1, 3 jer β_7 ima svojstva π_1 i π_3 (tj. $\beta_7 \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3$) a nema svojstvo π_2 ($\beta_7 \notin \mathcal{P}_2$); pored β_9 ne piše lijevo ni gore nijedna cifra jer ta operacija *nema* nijedno od svojstava π_1, π_2, π_3 (tj. $\beta_9 \notin \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$) itd. U polju Tablice u kojem se križa redak od β_i i stupac od β_k upisane su one i samo one cifre koje stoje *i* lijevo uz β_i *i* gore uz β_k. Time dakle u tom polju (gdje se križa redak od β_i i stupac od β_k) stoje one i samo one cifre j za koje *obje* operacije β_i, β_k imaju svojstvo π_j ($j = 1, 2, 3$). Reci i stupci od β_9 i β_{15} unutar Tablice ispunjeni su sa 0. O rimskim brojevima bit će govora kasnije.

Prema rezultatima iz **8.5.1.** do **4.** očito je da nijedan par $\{\beta_i, \beta_k\}$ za koji u našoj Tablici na križanju i-tog retka i k-tog stupca (ili obratno) stoji upisana bar jedna arapska cifra različita od 0 ne može biti baza od $\mathcal{M}_2$. Tada naime β_i i β_k imaju zajedničko neko neuniverzalno hereditarno svojstvo π_j koje prenose i na svoje „potomke" — operacije β koje se pomoću njih mogu definirati u smislu **8.2.** — pa sigurno ima operacija od $\mathcal{M}_2$ koje se ne mogu sagraditi sa β_i, β_k. Par $\{\beta_i, \beta_k\}$ je dakle „preslab" da bi bio baza.

U drugu ruku parovi $\{\beta_i, \beta_k\}$ za koje u našoj Tablici na križanju i-tog retka i k-tog stupca (ili obratno) stoji upisano 0 „prejaki" su da bi bili baza, jer je već jedan član takvog para sistem izvodnica za $\mathcal{M}_2$ (naime β_9 ili β_{15}).

Time od ukupno $\binom{16}{2} = 120$ parova $\{\beta_i, \beta_k\}$ za njih 96 znamo da ne mogu činiti bazu (vidi Tablicu).

Pokazat ćemo sada da svih preostalih 120—96 = 24 para $\{\beta_i, \beta_k\}$ *čine* bazu od $\mathcal{M}_2$; time će biti nađene sve dvočlane baze.

1° Kao što se lako provjerava, vrijedi

$$x\,\beta_{10}\,(x\,\beta_5\,y) = x\,\beta_9\,y = x \dagger y.$$

Kako je $\{\beta_9\}$ baza a $\{\beta_{10}\}$ i $\{\beta_5\}$ sami za sebe nisu baze, to je dakle $\{\beta_{10}, \beta_5\}$ baza.

U skladu s ranijim kraćim oznakama upotrebljavat ćemo i sada za par $\{\beta_i, \beta_k\}$ operacija β kraću oznaku (i, k).

Primijenimo li na par (10,5) — koji je baza — T- ili D-postupak, dobit ćemo tri daljnje baze prema shemi

$$D\left(\begin{array}{c} \overbrace{(10,5)\ \ T\ \ (10,3)} \\ \underbrace{(14,7)\ \ T\ \ (12,7)} \end{array}\right)D$$

Shema 1.

[Ako u bazi (10,5) transponiramo element β_5 dobivamo novu bazu (10,3); elementu 10 transponirani je opet 10 pa time ne bi dobili ništa nova. Nadalje, ako u (10,5) dualiziramo elemente dobivamo novu bazu (14,7) a ako dualiziramo elemente u (10,3) dobivamo novu bazu (12,7). Ove posljednje dvije nove baze prelaze jedna u drugu uz transponiranje elementa 14 odnosno 12, pa je time shema baza koje proizlaze T- i D-postupkom iz (10,5) zatvorena, tj. primijenjujemo li T- i D-postupak na bilo koju bazu sheme 1 dobivamo opet neku bazu koja je u njoj već sadržana.] Odgovarajuća 4 polja u Tablici označena su sa I.

2° Slično se lako provjerava da je

$$x\,\beta_{11}\,(x\,\beta_8\,y) = x\,\beta_9\,y = x \dagger y.$$

(11,8) je dakle baza od $\mathcal{M}_2$. Primjena T- i D-postupka daje i ovdje tri daljnje baze prema shemi

$$D\left(\begin{array}{c} \overbrace{(11,8)\ \ T\ \ (13,8)} \\ \underbrace{(11,2)\ \ T\ \ (13,2)} \end{array}\right)D$$

Shema 2.

Odgovarajuća 4 polja Tablice označena su sa II.

3° Dalje je

$$x\,\beta_5\,(x\,\beta_{11}\,y) = x\,\beta_9\,y = x \dagger y;$$

(11,5) je dakle također baza. Ovdje nam primjena *T*- i *D*-postupka daje još sedam novih baza prema shemi

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad I \qquad\qquad\qquad T\\
D\left\{\begin{array}{l}(11,5)\ \ T\ \ (11,3) \qquad D\left\{\begin{array}{l}(13,3) \qquad (13,5)\\ \qquad\ \ D \quad D\\ (13,12) \qquad (12,11)\end{array}\right.\\ \\ (14,11)\ \ T\ \ (14,13)\end{array}\right.\\
\qquad\qquad\qquad\quad T \qquad\qquad\qquad T
\end{array}$$

Shema 3.

koja je sada opet zatvorena. Odgovarajućih 8 polja u Tablici označeno je sa III.

4° Zatim je

$$(x\,\beta_{12}\,x)\,\beta_3\,y = x\,\beta_{11}\,y.$$

A kako je prema ranijem (12,11) baza (Shema 3.), to je dakle i (12,3) baza. ($\{\beta_{12}\}$ i $\{\beta_3\}$ naime sami nisu baze, a sa β_{12} i β_3 može se predočiti i β_{12} i β_{11}). *T*- i *D*-postupak daje odatle tri daljnje baze prema shemi

$$\underset{D}{(12,3)}\ \ T\ \ \underbrace{(14,3)\ \ T\ \ \underset{D}{(14,5)}\ \ T\ \ (12,5)}_{D}$$

Shema 4.

Odgovarajuća 4 polja u Tablici označena su sa IV.

5° Konačno je

$$(x\,\beta_{16}\,x)\,\beta_3\,x = x\,\beta_{13}\,y.$$

No ranije smo našli da je (13,3) baza, pa je dakle i (16,3) baza. Tri daljnje daje shema

$$D\left(\begin{array}{l}(16,3)\ \ T\ \ (16,5)\\ (12,1)\ \ T\ \ (14,1)\end{array}\right)D$$

Shema 5.

Odgovarajuća 4 polja u Tablici označena su sa V.

Time smo dobili $4+4+8+4+4=24$ dvočlane baze od $\mathcal{M}_2$, a ranije smo vidjeli da ih više ne može biti.

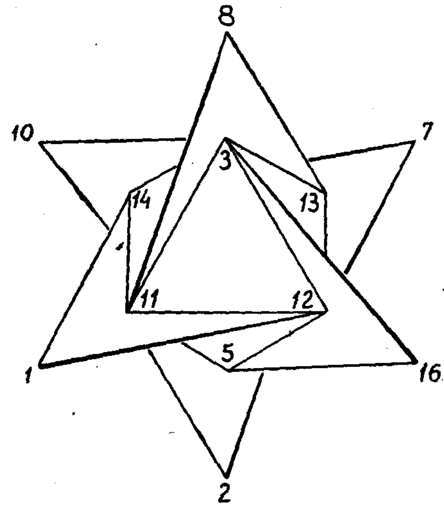
Prije nego li pređemo na traženje višečlanih baza (sa više od 2 elementa) razmotrimo ukratko međusobnu povezanost dvočlanih baza od $\mathcal{M}_2$.

Kao što vidimo direktno iz Tablice, u dvočlane baze uopće ulaze kao elementi 12 od 16 operacija β. (Da ih ne može biti više jasno je i unaprijed:

naime, Shefferova i Łukasiewiczeva operacija otpadaju jer svaka od njih sama za sebe čini bazu, a β_4 i β_6 otpadaju jer se zbog $x\beta_4 y = x$, $x\beta_6 y = y$ sve, što se — po dogovoru u **8.2.** — može izraziti sa $\{\beta_4, \beta_6; \beta_i\}$, može izraziti već i sa samim $\{\beta_i\}$.) Od tih 12 β-operacija 6 ih se u dvočlanim bazama pojavljuje po 6 puta a preostalih 6 po 2 puta.

Međusobna povezanost svih 24 dvočlanih baza može se predočiti ovako:

Oktaedru pridodajmo (sl. 1.) tri romba koji prolaze njegovim dijagonalnim ravninama i imaju s njim zajednička po dva vrha. Sl. 1. pokazuje nastalu geometrijsku tvorevinu G. Ako vrhove od G numeriramo indeksima 12 navedenih binarnih operacija onako kao što je to učinjeno na slici, vrijedi — kao što se lako provjerava —:



sl. 1

Par (a, b) je baza od $\mathcal{M}_2$ tačno onda, ako su a i b u G vrhovi nekog brida.

8.7.3. Baze od $\mathcal{M}_2$ koje sadrže više od 2 elementa. Neka je

$$\mathcal{U}_2 = \{\beta_a, \beta_b, \ldots, \beta_k\}$$

neki bar tročlani podskup od $\mathcal{M}_2$. Operacije β_i neka su pritom poredane tako da indeksi $a, b, \ldots, k$ čine padajući niz. Da bismo našli koji od takvih podskupova čine bazu od $\mathcal{M}_2$, poslužit ćemo se opet Tablicom.

Uočimo najprije da za najveći indeks a dolaze u obzir samo vrijednosti 10 i 16: Ako je naime $a < 8$, $\mathcal{U}_2$ ne može biti baza, jer bi svi elementi od $\mathcal{U}_2$ tada imali svojstvo π_1. $a = 9$ i $a = 15$ ne dolazi u obzir ni za dvočlane a kamo li za višečlane baze. Da je $a = 11$ ili $a = 13$ bio bi $\mathcal{U}_2$ opet — kao što se vidi direktno iz Tablice — ili prejak za bazu (jer bi sadržavao jedno- ili dvočlani pravi podskup koji je već sam baza), ili pak preslab za bazu (jer bi mu svi elementi imali svojstvo π_3). Analognim rasuđivanjem (uz zamjenu π_3 sa π_2) vidimo da i $a = 12$ i $a = 14$ također ne dolaze u obzir.

Preostaje dakle da ispitamo podskupove $\mathcal{U}_2$ sa $a = 10$ i $a = 16$.

Imamo li na umu da ne smiju svi elementi od $\mathcal{U}_2$ imati isto svojstvo π_i, $i = 1, 2, 3$ kao i da $\mathcal{U}_2$ ne smije kao pravi podskup sadržavati neku jedno- ili dvočlanu bazu, vidimo iz Tablice da treba ispitati nisu li baze ovi podskupovi $\mathcal{U}_2$ ($(a, b, \ldots, k)$ -bit će opet kraća oznaka za $\{\beta_a, \beta_b, \ldots, \beta_k\}$ s padajućim indeksima $a, b, \ldots, k$):

α) *Tročlani podskupovi U_2*

(10,2,1), (10,7,2), (10,8,1), (10,8,7); (16,2,1), (16,7,2), (16,8,1), (16,8,7).

Od ovih otpadaju podskupovi (16,2,1) i (16,8,1) jer im svi elementi imaju svojstvo π_4.

Da preostalih 6 podskupova jesu tročlane baze pokazuje ovo razmatranje: Lako je provjeriti da je

$$(x\,\beta_8\,y)\,\beta_7\,y = x\,\beta_3\,y\,.$$

Kako je prema **8.7.2.** 1° (10,3) baza, to je i (10,8,7) baza, a D-postupak daje da je stoga i (10,7,2) baza.

Dalje je

$$(x\,\beta_{16}\,y)\,\beta_7\,x = x\,\beta_{13}\,y\,.$$

No prema **8.7.2.** 2° (13,2) je baza, pa je i (16,7,2) baza. Također po **8.7.2.** 2° i (13,8) je baza pa je dakle i (16,8,7) baza. D-postupak daje odatle preostale dvije baze (10,8,1) i (10,2,1).

β) *Četvero- i višečlani podskupovi* $\mathcal{U}_2$.

Ako imamo na umu da sada pored onog što je već bilo rečeno na početku **8.7.3.** $\mathcal{U}_2$ ne smije kao pravi podskup sadržavati ni neku tročlanu bazu, vidimo pomoću Tablice da ne može biti četveročlane ni višečlane baze od ${}_c\mathcal{M}_2$ niti sa $\beta_a = \beta_{10}$ niti sa $\beta_a = \beta_{16}$, drugim riječima da uopće nema nijedne baze koja bi sadržavala više od 3 elementa. Ovo možemo zaključiti ovim rasuđivanjima:

Prvo, nijedna baza $\mathcal{U}_2$ sa više od tri elementa ne može sadržavati ni operaciju β_{15} ni β_9. Također nijedna baza ne može sadržavati ni β_4 ni β_6, jer ako je $\mathcal{U}_2$ neki sistem izvodnica za ${}_c\mathcal{M}_2$ onda je — po dogovoru u **8.2.** — i $\mathcal{U}_2 \setminus \{\beta_4, \beta_6\}$ sistem izvodnica za ${}_c\mathcal{M}_2$. Nadalje:

1° Da postoji baza oblika $\mathcal{U}_2 = (16,14,c, \ldots)$ moralo bi (vidi Tablicu!) c biti različito ne samo od 9 nego i od 13, 11, 7, 5, 3 i 1 jer bi inače $(14,c)$ bila baza sadržana kao pravi podskup u $\mathcal{U}_2$. Iz istog razloga moralo bi i za sve dalje operacije β_i sadržane u $\mathcal{U}_2$ (tj. s indeksom i manjim od c) biti $i \neq 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1$. Drugim riječima sve operacije iz $\mathcal{U}_2$ morale bi imati parni indeks. No tada bi sve one imale svojstvo π_2 pa takav $\mathcal{U}_2$ sigurno ne bi bio baza.

2° Da postoji baza oblika $\mathcal{U}_2 = (16,13, \ldots)$ morale bi sve daljnje operacije β_i iz $\mathcal{U}_2$ imati indeks manji od 13 i različit od 12, 9, 8, 5, 3, 2 jer bi inače opet $\mathcal{U}_2$ sadržavao bilo jednočlanu bazu $\{\beta_9\}$ bilo dvočlanu bazu $\{\beta_{13}, \beta_i\}$. No tada bi sve te operacije β_i (vidi Tablicu!) kao i β_{16} i β_{13} imale svojstvo π_3 pa $\mathcal{U}_2$ opet ne može biti baza.

3° Da ne postoji baza oblika $\mathcal{U}_2 = (16,12, \ldots)$ uviđa se kao pod 1°, a da ne postoji baza oblika $\mathcal{U}_3 = (16,11, \ldots)$ uviđa se kao pod 2°.

4° Da postoji baza oblika $\mathcal{U}_2 = (16,10, \ldots)$ morao bi $\mathcal{U}_2$ (zbog $\beta_{16}, \beta_{10} \in {}_c\mathcal{P}_2 \cap {}_c\mathcal{P}_3$) sadržavati neku operaciju β_c koja nema svojstvo π_2 kao i neku operaciju β_d koja nema svojstvo $\pi_3\,(c \lessgtr d)$. No c i d morali bi biti < 10 i različiti od 9, 5, 3 jer bi inače $\mathcal{U}_2$ opet sadržavao kao pravi podskup neku jedno- ili dvočlanu bazu. Za c i d preostali bi dakle kao mogućnosti (vidi Tablicu) ovi parovi: $c = 7$, $d = 8$; $c = 1$, $d = 8$; $c = 7$, $d = 2$; $c = 1$, $d = 2$. No u svakom od tih slučajeva $\mathcal{U}_2$ bi sadržavao neku tročlanu bazu (vidi α)) pa sam ne bi bio baza.

5° Da postoji baza $\mathcal{U}_2=(16,8,\ldots)$ ne bi u njoj mogle biti sadržane operacije β_3 ni β_5. Također u takvom $\mathcal{U}_2$ ne može biti sadržana operacija β_7 jer je (16,8,7) baza. Prema tome bi za elemente od $\mathcal{U}_2$ pored β_{16} i β_8 došle u obzir samo još operacije β_1, β_2. No sve one su elementi od $\mathcal{P}_4$ pa takav $\mathcal{U}_2$ ne može biti baza.

6° Kad bi postojala baza oblika $\mathcal{U}_2=(16,7,\ldots)$ uviđamo kao u 5° da bi preostale operacije u $\mathcal{U}_2$ morale biti različite od β_3 i β_5 a i od β_2. Preostaje dakle samo mogućnost da u $\mathcal{U}_2$ pored β_{16} i β_7 bude sadržana operacija β_1. No tada bi $\mathcal{U}_2$ bio najviše tročlan.

Slično ćemo se uvjeriti da nema četveročlane ni višečlane baze oblika $\mathcal{U}_2=(10,\ldots)$:

Da je $\mathcal{U}_2=(10,\ldots)$ baza, ne bi u $\mathcal{U}_2$ mogle biti sadržane operacije β_3 ni β_5, jer su (10,3) i (10,5) baze. No u $\mathcal{U}_2$ ne može biti sadržano ni β_1, jer bi inače $\mathcal{U}_2^*$ bila dualna četveročlana ili višečlana baza koja sadrži $\beta_1^*=\beta_{16}$ a takve, kao što smo vidjeli u 1° do 6°, nema. Dakle:

7° Da postoji baza oblika $\mathcal{U}_2=(10,8,\ldots)$ morali bi preostali elementi β_i od $\mathcal{U}_2$ biti različiti još i od β_7 (jer je (10,8,7) baza). $\mathcal{U}_2$ bi dakle pored β_{10} i β_8 mogao sadržavati samo još operaciju β_2 pa bi bio najviše tročlan.

8° Da postoji baza oblika $\mathcal{U}_2=(10,7,\ldots)$ morali bi preostali elementi β_i od $\mathcal{U}_2$ biti različiti još i od β_2 pa $\mathcal{U}_2$ dakle pored β_{10} i β_7 ne bi mogao sadržavati nijednu daljnju operaciju β.

Time je konačno dokazano da nema baza od $\mathcal{M}_2$ koje bi sadržavale više od tri operacije β.

8.8. Vratimo se u **8.2.** postavljenom problemu. Uočimo najprije da je (u smislu **D 7.**)

$$\alpha_1 x = x\beta_1 y, \qquad \alpha_2 x = x\beta_4 y, \qquad \alpha_3 x = x\beta_{13} y, \qquad \alpha_4 x = x\beta_{16} y.$$

Odatle izlazi da je svaka baza od $\mathcal{M}_2$ ujedno baza od $\mathcal{M}$.

Obrnuto, ako je $\{\alpha_1;\ \beta_i\}$ baza od $\mathcal{M}$ onda je i $\{\beta_1,\ \beta_i\}$ baza od $\mathcal{M}$ (jer je to sigurno sistem izvodnica od $\mathcal{M}$, a da je neki pravi podskup $\mathcal{U}$ od $\{\beta_1,\ \beta_i\}$ baza od $\mathcal{M}$ bio bi $\mathcal{U}$ sistem izvodnica od $\mathcal{M}_2$ pa bi neki pravi podskup od $\{\alpha_1;\ \beta_i\}$ bio baza od $\mathcal{M}$). Slično vrijedi za parove pridružene prema

$$\{\alpha_2;\ \beta_i\} \leftrightarrow \{\beta_4,\ \beta_i\} \quad (\text{ili } \{\beta_6,\ \beta_i\} \quad \text{zbog} \quad \alpha_2 x = y\beta_6 x),$$

$$\{\alpha_3;\ \beta_i\} \leftrightarrow \{\beta_{13},\ \beta_i\} \quad (\text{ili } \{\beta_{11},\ \beta_i\} \quad \text{zbog} \quad \alpha_3 x = y\beta_{11} x),$$

$$\{\alpha_4;\ \beta_i\} \leftrightarrow \{\beta_{16},\ \beta_i\}.$$

Prema **8.7.2.** dobivamo dakle ove daljnje dvočlane baze od $\mathcal{M}$:

$$\{\alpha_1,\ \beta_{12}\},\ \{\alpha_1,\ \beta_{14}\};\ \{\alpha_3,\ \beta_2\},\ \{\alpha_3,\ \beta_3\},\ \{\alpha_3,\ \beta_5\},\ \{\alpha_3,\ \beta_8\},$$

$$\{\alpha_3,\ \beta_{12}\},\ \{\alpha_3,\ \beta_{14}\};\ \{\alpha_4,\ \beta_3\},\ \{\alpha_4,\ \beta_5\};\ \{\alpha_1,\ \beta_2,\ \beta_{10}\},\ \{\alpha_1,\ \beta_8,\ \beta_{10}\};$$

$$\{\alpha_4,\ \beta_2,\ \beta_7\},\ \{\alpha_4,\ \beta_7,\ \beta_8\}.$$

Lako se vidi da ne može postojati baza od $\mathcal{M}$ koja bi sadržavala više od dvije operacije α. Da naime postoji neka takva baza sa bar dvije operacije α, onda bi (kao što se uviđa analogno upravo rečenom za baze s jednom operacijom α) postojala i baza $\{\beta_i\}$ koja bi sadržavala bar dvije operacije β iz skupa $\{\beta_1, \beta_4, \beta_{13}, \beta_{16}\}$. Međutim, kao što smo vidjeli u **8.7.2.** i **8.7.3**, ovo nije slučaj.

8.9. Konačni rezultat je prema tome ovaj: Ima

α) 2 *jednočlane baze od* $\mathcal{M}$, *naime* $\{\beta_9\}$ *i* $\{\beta_{15}\}$,

β) $10+24=34$ *dvočlanih baza od* $\mathcal{M}$, *naime*

$\{\alpha_1, \beta_{12}\}$, $\{\alpha_1, \beta_{14}\}$; $\{\alpha_3, \beta_2\}$, $\{\alpha_3, \beta_3\}$, $\{\alpha_3, \beta_5\}$, $\{\alpha_3, \beta_8\}$, $\{\alpha_3, \beta_{12}\}$, $\{\alpha_3, \beta_{14}\}$;

$\{\alpha_4, \beta_3\}$, $\{\alpha_4, \beta_5\}$; $\{\beta_{10}, \beta_3\}$, $\{\beta_{10}, \beta_5\}$; $\{\beta_{11}, \beta_2\}$, $\{\beta_{11}, \beta_3\}$, $\{\beta_{11}, \beta_5\}$, $\{\beta_{11}, \beta_8\}$;

$\{\beta_{12}, \beta_1\}$, $\{\beta_{12}, \beta_3\}$, $\{\beta_{12}, \beta_5\}$, $\{\beta_{12}, \beta_7\}$, $\{\beta_{12}, \beta_{11}\}$; $\{\beta_{13}, \beta_2\}$, $\{\beta_{13}, \beta_3\}$, $\{\beta_{13}, \beta_5\}$,

$\{\beta_{13}, \beta_8\}$, $\{\beta_{13}, \beta_{12}\}$; $\{\beta_{14}, \beta_1\}$, $\{\beta_{14}, \beta_3\}$, $\{\beta_{14}, \beta_5\}$, $\{\beta_{14}, \beta_7\}$, $\{\beta_{14}, \beta_{11}\}$, $\{\beta_{14}, \beta_{13}\}$;

$\{\beta_{16}, \beta_3\}$, $\{\beta_{16}, \beta_5\}$.

γ) $4+6 \quad 10$ *tročlanih baza od* $\mathcal{M}$, *naime*

$\{\alpha_1, \beta_2, \beta_{10}\}$, $\{\alpha_1, \beta_8, \beta_{10}\}$; $\{\alpha_4, \beta_2, \beta_7\}$, $\{\alpha_4, \beta_7, \beta_8\}$;

$\{\beta_{10}, \beta_2, \beta_1\}$, $\{\beta_{10}, \beta_7, \beta_2\}$, $\{\beta_{10}, \beta_8, \beta_1\}$, $\{\beta_{10}, \beta_8, \beta_7\}$; $\{\beta_{16}, \beta_7, \beta_2\}$, $\{\beta_{16}, \beta_8, \beta_7\}$.

δ) — *i nijedna četvero- ili višečlana baza.*

Napomena. Ako unitarne i binarne operacije shvatimo kao funkcije algebre sudova, onda među dobivenim bazama ima jednakih u smislu **D 7.** Npr. $\{\alpha_1, \beta_{12}\} = \{\beta_1, \beta_{12}\}$. No među njima dakako nema identički jednakih.

8.10. Razmatranja u **8.2.** do **8.9.** bila su provedena uz dogovor (iz **8.2.**) da se pod sastavljanjem funkcija razumijeva upotreba varijabla i kompozicija danih funkcija.

Pogledajmo ukoliko se ta razmatranja mijenjaju ako ovu konvenciju izmijenimo u smislu da za sastavljanje dopustimo samo kompoziciju danih funkcija. (Po ovoj novoj konvenciji npr. prazni skup operacija β ne će više biti sistem izvodnica za $\{\beta_4, \beta_6\}$.)

Pokazat ćemo da baze od $\mathcal{M}_2$ i $\mathcal{M}$ ostaju one iste koje su to bile i uz raniju konvenciju iz **8.2.**

Uočimo najprije da je svaki sistem izvodnica po novoj konvenciji o sastavljanju funkcija pogotovo sistem izvodnica po ranijoj konvenciji.

Nadalje, sve baze po ranijoj konvenciji su baze i po novoj, jer su konstrukcije u **8.1**, **8.7.2.** 1' do 5' i **8.7.3.** upotrebljavale samo kompoziciju funkcija a ne same varijable, a razmatranja u **8.8.** vrijede i uz novu konvenciju. Za opravdanje T- i D-postupka dovoljne su ove modifikacije ranijeg:

1° U bazi indukcije uz T-postupak polazimo od $\rho A = 1$. Ako je $A \equiv x\beta y$ i $\beta \in \beta_k$ onda je $A' \equiv A$ a ako je $\beta \in \beta_l$ onda je $A' \equiv y\beta' x$. Slično za $A \equiv y\beta x$; $x\beta x$, $y\beta y$.

2° U koraku indukcije uz T-postupak je $k > 1$ a najviše jedan od izraza A_1, A_2 može biti varijabla x ili y; tada je $A_1' \equiv A_1$ ili $A_2' \equiv A_2$ a inače se dokaz ne mijenja.

3° U bazi indukcije uz D-postupak polazimo od $\rho A = 1$. Za $A \equiv x\beta_i y$ ona je trivijalna. Za $x\beta y = A \equiv y\beta_i x$ je $x\beta^* y = \neg(\neg y\beta_i \neg x) = y\beta_i^* x$. Slično za $A \equiv x\beta_i x$, $y\beta_i y$.

4° U koraku indukcije uz D-postupak je $k > 1$ a (najviše) jedan od izraza A_1, A_2 može biti varijabla x ili y; dokaz da je i tada $x\beta^* y \equiv A^*$ lako se provodi i u tom slučaju s tim što će npr. uz $A_1 \equiv y$ biti $A^* \equiv y\beta_j^* A_2^*$ (i slično u drugim slučajevima koji sada mogu nastupiti).

Obrnuto, ako je $\mathcal{U}$ baza po novoj konvenciji bit će $\mathcal{U} \setminus \{\beta_4, \beta_6\}$ sistem izvodnica po ranijoj pa postoji neki $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \setminus \{\beta_4, \beta_6\}$ koji je baza po ranijoj. No prema upravo rečenom $\mathcal{U}'$ je onda baza i po novoj konvenciji (jer smo u **8.9.** našli sve baze po ranijoj konvenciji). Mora dakle biti $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$ a to znači da je $\mathcal{U}$ onda baza i po ranijoj konvenciji.

9. PREDOČENJE OPERACIJA &, $\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \not\Leftrightarrow, \uparrow, \downarrow, \neg, \top, \perp$ U NEKIM BAZAMA

Prema rezultatma iz **8.9.** i **8.10.** mogu se sve binarne i sve unitarne operacije i konstante $\top$, $\perp$ predočiti kompozicijom operacija bilo koje dane baze.

U principu mogli bismo sva takva predočenja dobiti pozivom na izvođenja iz **8.** do **8.8.** jer su ona bila konstruktivna u ovom smislu: Prvo, za svaku bazu bilo je (direktno ili indirektno) pokazano kako se pomoću nje može konstruirati funkcija $\uparrow$. Drugo, u **8.1.** vidjeli smo kako se pomoću $\uparrow$ može izraziti &, $\vee$ i $\neg$. Treće, u **4.3.1.** vidjeli smo kako se koja god dana funkcija algebre sudova može izraziti pomoću &, $\vee$ i $\neg$. Često će međutim ovim putem dobiveni izrazi biti dosta složeni a mogu se lako naći i njima (u smislu **D 4.** i **7.**) jednaki ali znatno jednostavnije građeni izrazi koji predočuju danu funkciju operacijama dane baze.

Ovdje ćemo razmotriti neka specijalna od tih predočenja koja su ili češće potrebna ili sama po sebi od interesa.

9.1. *Predočenja s jednočlanim bazama.*

9.1.1. *Baza* $\{\uparrow\}$. Već smo ranije u **8.1.** vidjeli da je

(1a) $$x \& y = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y).$$

(2a) $$x \vee y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y).$$

(3a) $$\neg x = (x \uparrow x).$$

Odatle je dalje

$$x \Rightarrow y = \neg x \vee y = [(x \uparrow x) \uparrow (x \uparrow x)] \uparrow (y \uparrow y);$$

no jednostavnije operaciju $\Rightarrow$ možemo predočiti sa $\uparrow$ ako se sjetimo da je $x \uparrow y = \neg(x \& y)$ a $\neg x \vee y = \neg(x \& \neg y)$ — tako je

(4a) $$x \Rightarrow y = x \uparrow (y \uparrow y).$$

Za ekvivalenciju izlazi iz (4a) $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \& (y \Rightarrow x) = \{[x \uparrow (y \uparrow y)] \uparrow [y \uparrow (x \uparrow x)]\} \uparrow \{[x \uparrow (y \uparrow y)] \uparrow [y \uparrow (x \uparrow x)]\}$, no kraće je npr. $x \Leftrightarrow y = (x \& y) \vee (\neg x \& \neg y) = \neg[\neg(x \& y) \& \neg(\neg x \& \neg y)] = \neg\{(x \uparrow y) \& [(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)]\} = (x \uparrow y) \uparrow [(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)]$ dakle

(5a) $$x \Leftrightarrow y = (x \uparrow y) \uparrow [(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)].$$

Za ekskluzivnu disjunkciju je $x \not\Leftrightarrow y = (x \& \neg y) \vee (y \& \neg x) = \neg[\neg(x \& \neg y) \& \neg(y \& \neg x)] = \neg\{[x \uparrow (y \uparrow y)] \& [y \uparrow (x \uparrow x)]\}$ pa je

(6a) $$x \not\Leftrightarrow y = [x \uparrow (y \uparrow y)] \uparrow [y \uparrow (x \uparrow x)].$$

Kako je $x \vee \neg x = \neg(\neg x \& x) = \top$, $\bot = \neg \top$ bit će

(7a) $$\top = (x \uparrow x) \uparrow x.$$

(8a) $$\bot = [(x \uparrow x) \uparrow x] \uparrow [(x \uparrow x) \uparrow x].$$

Konačno, zbog $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ bit će

(9a) $$x \downarrow y = [(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)] \uparrow [(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)].$$

9.1.2. *Predočenja s bazom* $\{\downarrow\}$ dobivamo po **6.3.** lako iz (1a) do (9a) jer je (vidi **8.6.2.**) $\downarrow$ dualno sa $\uparrow$, $\&$ sa $\vee$, $\neg$ sa $\neg$, $\Leftrightarrow$ sa $\not\Leftrightarrow$, $\top$ sa $\bot$, $x \Rightarrow y$ sa $\neg(y \Rightarrow x)$.

(1b) $$x \& y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y).$$

(2b) $$x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y).$$

(3b) $$\neg x = x \downarrow x.$$

(4b) $$x \Rightarrow y = [y \downarrow (x \downarrow x)] \downarrow [y \downarrow (x \downarrow x)].$$

(5b) $$x \Leftrightarrow y = [x \downarrow (y \downarrow y)] \downarrow [y \downarrow (x \downarrow x)].$$

(6b) $$x \not\Leftrightarrow y = (x \downarrow y) \downarrow [(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)].$$

(7b) $$\top = [(x \downarrow x) \downarrow x] \downarrow [(x \downarrow x) \downarrow x].$$

(8b) $$\bot = (x \downarrow x) \downarrow x.$$

(9b) $$x \uparrow y = [(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)] \downarrow [(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)].$$

9.2. Predočenja s nekim dvočlanim bazama.

9.2.1. Baza $\{\neg, \&\}$.

(1c) $$x \vee y = \neg(\neg x \& \neg y).$$

(2c) $$x \Rightarrow y = \neg(x \& \neg y).$$

(3c) $$x \Leftrightarrow y = \neg(x \& \neg y) \& \neg(y \& \neg x).$$

(4c) $$x \not\Leftrightarrow y = \neg (x \,\&\, y) \,\&\, \neg (\neg x \,\&\, \neg y).$$

(5c) $$x \uparrow y = \neg (x \,\&\, y).$$

(6c) $$x \downarrow y = \neg x \,\&\, \neg y.$$

(7c) $$\top = \neg (x \,\&\, \neg x).$$

(8c) $$\bot = x \,\&\, \neg x.$$

9.2.2. *Baza* $\{\neg, \vee\}$ (dualna bazi $\{\neg, \&\}$).

(1d) $$x \,\&\, y = \neg (\neg x \vee \neg y).$$

(2d) $$x \Rightarrow y = \neg x \vee y.$$

(3d) $$x \Leftrightarrow y = \neg (x \vee y) \vee \neg (\neg x \vee \neg y).$$

(4d) $$x \not\Leftrightarrow y = \neg (x \vee \neg y) \vee \neg (y \vee \neg x).$$

(5d) $$x \uparrow y = \neg x \vee \neg y.$$

(6d) $$x \downarrow y = \neg (x \vee y).$$

(7d) $$\top = x \vee \neg x.$$

(8d) $$\bot = \neg (x \vee \neg x).$$

9.2.3. *Baza* $\{\neg, \Rightarrow\}$.

(1e) $$x \,\&\, y = \neg (x \Rightarrow \neg y).$$

(2e) $$x \vee y = \neg x \Rightarrow y.$$

(3e) $$x \Leftrightarrow y = \neg [(x \Rightarrow y) \Rightarrow \neg (y \Rightarrow x)].$$

(4e) $$x \not\Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \Rightarrow \neg (y \Rightarrow x).$$

(5e) $$x \uparrow y = x \Rightarrow \neg y.$$

(6e) $$x \downarrow y = \neg (\neg x \Rightarrow y).$$

(7e) $$\top = x \Rightarrow x.$$

(8e) $$\bot = \neg (x \Rightarrow x).$$

Pomoću dosad nađenih predočenja za dvočlane baze mogu se lako sagraditi i predočenja za neke daljnje dvočlane baze. Npr.

9.2.4. *Baza* $\{\Rightarrow, \bot\}$. (Konstantu $\bot$ možemo shvatiti i kao binarnu univerzalnu negaciju β_{16} i obrnuto; što se može sagraditi s jednom može se i s drugom. Kao formule ili kao funkcije $\bot$ i $x \beta_{16} y$ jednake su u smislu **D 4.** i **D 7.**)

(1f) $$\neg x = x \Rightarrow \bot$$

i odatle prema **9.2.3.**

(2f) $$x \,\&\, y = [x \Rightarrow (y \Rightarrow \bot)] \Rightarrow \bot.$$

(3f) $$x \vee y = (x \Rightarrow \perp) \Rightarrow y.$$

(4f) $$x \Leftrightarrow y = \{(x \Rightarrow y) \Rightarrow [(y \Rightarrow x) \Rightarrow \perp]\} \Rightarrow \perp.$$

(5f) $$x \nLeftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \Rightarrow [(y \Rightarrow x) \Rightarrow \perp].$$

(6f) $$x \uparrow y = x \Rightarrow (y \Rightarrow \perp).$$

(7f) $$x \downarrow y = [(x \Rightarrow \perp) \Rightarrow y] \Rightarrow \perp.$$

(8f) $$\top = x \Rightarrow x.$$

9.2.5. *Baza* $\{\Rightarrow, \nRightarrow\}$ (usp. **6.2.5.**).

(1g) $$\perp = x \nRightarrow x$$

i odatle prema **9.2.4.** i **9.2.3.**

(2g) $$\neg x = x \Rightarrow (x \nRightarrow x).$$

(3g) $$x \,\&\, y = x \nRightarrow [y \Rightarrow (y \nRightarrow y)].$$

(4g) $$x \vee y = [x \Rightarrow (x \nRightarrow x)] \Rightarrow y.$$

(5g) $$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \nRightarrow (y \nRightarrow x).$$

(6g) $$x \nLeftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \Rightarrow (y \nRightarrow x).$$

(7g) $$x \uparrow y = x \Rightarrow [y \Rightarrow (y \nRightarrow y)],$$

(8g) $$x \downarrow y = [x \Rightarrow (x \nRightarrow x)] \nRightarrow y.$$

(9g) $$\top = x \Rightarrow x.$$

9.2.6. *Baza* $\{\Rightarrow, \nLeftrightarrow\}$.

(1h) $$\perp = x \nLeftrightarrow x.$$

(2h) $$\neg x = x \Rightarrow (x \nLeftrightarrow x),$$

i odatle prema **9.2.4.**

(3h) $$x \,\&\, y = \{x \Rightarrow [y \Rightarrow (x \nLeftrightarrow x)]\} \Rightarrow (x \nLeftrightarrow x).$$

(4h) $$x \vee y = [x \Rightarrow (x \nLeftrightarrow x)] \Rightarrow y.$$

Zbog $x \Leftrightarrow y = \neg(x \nLeftrightarrow y) = (x \nLeftrightarrow y) \Rightarrow \perp$

(5h) $$x \Leftrightarrow y = (x \nLeftrightarrow y) \Rightarrow (x \nLeftrightarrow x).$$

$$x \uparrow y = x \Rightarrow [y \Rightarrow (x \nLeftrightarrow x)],$$

no kraće je

(6h) $$x \uparrow y = x \Rightarrow (x \nLeftrightarrow y).$$

(7h) $$x \downarrow y = \{[x \Rightarrow (x \nLeftrightarrow x)] \Rightarrow y\} \Rightarrow (x \nLeftrightarrow x).$$

(8h) $$\top = x \Rightarrow x.$$

9.3. *Predočenja s nekim tročlanim bazama.*

9.3.1. *Baza* $\{\bot, \&, \Leftrightarrow\}$.

(1i) $\neg x = x \Leftrightarrow \bot.$

(2i) $x \vee y = [(x \Leftrightarrow \bot) \& (y \Leftrightarrow \bot)] \Leftrightarrow \bot.$

(3i) $x \Rightarrow y = [x \& (y \Leftrightarrow \bot)] \Leftrightarrow \bot.$

(4i) $x \not\Leftrightarrow y = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow \bot.$

(5i) $x \uparrow y = (x \& y) \Leftrightarrow \bot.$

(6i) $x \downarrow y = (x \Leftrightarrow \bot) \& (y \Leftrightarrow \bot).$

(7i) $\top = x \Leftrightarrow x.$

9.3.2. *Baza* $\{\vee, \Leftrightarrow, \not\Leftrightarrow\}$.

(1j) $\bot = x \not\Leftrightarrow x.$

(2j) $\neg x = x \Leftrightarrow (x \not\Leftrightarrow x).$

(3j) $x \& y = \{[x \Leftrightarrow (x \not\Leftrightarrow x)] \vee [y \Leftrightarrow (y \not\Leftrightarrow y)]\} \Leftrightarrow (x \not\Leftrightarrow x).$

(4j) $x \Rightarrow y = [x \Leftrightarrow (x \not\Leftrightarrow x)] \vee y.$

(5j) $x \uparrow y = [x \Leftrightarrow (x \not\Leftrightarrow x)] \vee [y \Leftrightarrow (y \not\Leftrightarrow y)].$

(6j) $x \downarrow y = (x \vee y) \Leftrightarrow (x \not\Leftrightarrow x).$

(7j) $\top = x \Leftrightarrow x.$

10. SINTAKTIČKA DEFINICIJA JEDNAKOSTI U ALGEBRI SUDOVA

10.1. *Definicija* 12. *U algebri sudova* $\{\{\top, \bot\}; \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$ *vrijede (po definiciji) ove* ***sintaktičke jednakosti:***

1° *a, b* $\quad x \& y = y \& x, \quad x \vee y = y \vee x$ *(komutativnost)*

2° *a, b* $\quad (x \& y) \& z = x \& (y \& z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ *(asocijativnost)*

3° *a, b* $\quad x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z), \quad x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$ *(distributivnost)*

4° *a, b* $\quad x \& x = x, \quad x \vee x = x$ *(idempotentnost)*

5° *a, b* $\quad x \& (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \& y) = x$ *(apsorptivnost)*

6° *a, b, c, d* $\quad x \& \top = x, \quad x \& \bot = \bot; \quad x \vee \top = \top, \quad x \vee \bot = x$

7° *a, b* $\quad x \& \neg x = \bot, \quad x \vee \neg x = \top$

8° *a, b* $\quad \neg \top = \bot, \quad \neg \bot = \top$

9° $\quad \neg \neg x = x$

10° a, b $\qquad \neg(x \,\&\, y) = \neg x \vee \neg y, \qquad \neg(x \vee y) = \neg x \,\&\, \neg y$

11° $\qquad x \Rightarrow y = \neg x \vee y$

12° $\qquad x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \,\&\, (y \Rightarrow x).$

Ovdje ne ulazimo detaljno u pitanje *nezavisnosti* navedenog sistema jednakosti 1° do 12° ili podsistema toga sistema, tj. ne ćemo rješavati problem ne može li se nijedna jednakost takvog sistema algebarskim metodama izvesti iz preostalih (problem *sintaktičke nezavisnosti*) niti problem postoji li za svaku jednakost takvog sistema neka struktura (*model*) u kojoj su sve osim te jednakosti ispunjene a ona sama nije (problem *nezavisnosti u smislu modela*). Inače, lako se vidi da dani sistem 1° do 12° kao cjelina nije sintaktički nezavisan (dakle da ima jednakosti koje se mogu izvesti iz preostalih) a stoga on pogotovo nije nezavisan u smislu modela.

Npr. iz 6°a za $x = \neg\top$ izlazi $\neg\top \,\&\, \top = \neg\top$, a iz 7°a za $x = \top$ izlazi $\top \,\&\, \neg\top = \bot$; kako je zbog 1°a $\neg\top \,\&\, \top = \top \,\&\, \neg\top$ bit će i $\neg\top = \bot$ tj. već iz 6°a, 7°a i 1°a može se izvesti 8°a. Slično iz 6°d izlazi $\neg\bot \vee \bot = \neg\bot$, iz 7°b $\bot \vee \neg\bot = \top$ i odatle zbog 1°b $\neg\bot = \top$ tj. 8°b (usp. i kasnije **10.6.2.**).

10.2. Sve jednakosti 1° do 12° ispravne su ako ih interpretiramo kao istovrijednost **(D 4.)** (usp. **2.6, 2.3, 2.2.1, 6.1, 1.4.5, 1.4.3, 1.4.4.**). Također se lako možemo uvjeriti da sve jednakosti koje se mogu izvesti iz 1° do 12° na način kako je to uobičajeno u algebri (tj. zamjenom jednakog jednakim, supstitucijom, refleksivnošću, simetrijom i tranzitivnošću jednakosti) također moraju biti ispravne ako ih interpretiramo kao istovrijednost (semantičku jednakost) (usp. **5.**).

Nazovemo li dakle jednakosti koje se na u algebri uobičajeni način mogu izvesti iz 1° do 12° s i n t a k t i č k i m j e d n a k o s t i m a algebre sudova, vidimo da vrijedi:

Teorem 11. *Svaka sintaktička jednakost algebre sudova ujedno je i semantička jednakost algebre sudova.*

Obrnuto međutim nipošto nije a priori jasno da li vrijedi i obrat **T 11**, tj. da li je svaka semantička jednakost ujedno i sintaktička. Pitanje o tom je u stvari pitanje (semantičke) *potpunosti* sistema 1° do 12°. (Ne ulazeći opet detaljnije u diskusiju potpunosti nekog sistema aksioma spomenimo samo da kažemo da je neki sistem aksioma $\mathcal{S}$ neke matematičke teorije $\mathcal{T}$ potpun u semantičkom smislu, ako se iz $\mathcal{S}$ može izvesti svaka istinita tvrdnja od $\mathcal{T}$.)

Mogao bi naime u principu nastupiti slučaj da relacije 1° do 12° zadovoljava i neki strukturno drugačiji „model“ nego li onaj određen našim tablicama vrijednosti istinitosti za &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ i u kojem ne bi bila „identički istinita“ neka formula A koja to u algebri sudova jest. U takvom se slučaju A dakako ne bi moglo izvesti iz 1° do 12°, tj. 1° do 12° ne bi bio semantički potpun sistem aksioma algebre sudova. Dapače, po onome što smo dosad rekli ne možemo tvrditi čak ni da u slučaju da takvog modela nema svaka semantička jednakost mora biti izvediva iz 1° do 12° tj. da je onda taj sistem semantički potpun.

10.3. Dokazat ćemo međutim da ovdje takve okolnosti ipak ne nastupaju, naime da vrijedi i obrat **T 11**, tj.

Teorem 12. *Svaka semantička jednakost algebre sudova je i sintaktička jednakost.*

Prije nego li pređemo na dokaz **T 12.** spomenimo i to, da on pored ostalog omogućuje da za koje god dane dvije formule algebre sudova provjerimo da li su one sintaktički jednake ili ne. Sama definicija sintaktičke jednakosti (prema drugom odlomku **10.2.** i **D 12.**) nije „definicija postupka", tj. ne kaže kako će se primijeniti da bi se u konkretnom slučaju odlučilo da li je dani par formula sintaktički jednak ili ne. Direktno naime ne vidimo kako bismo ustanovili da li se neka jednakost može izvesti iz 1° do 12°. Jer, jednakosti koje se odatle mogu izvesti ima neograničeni broj i *a priori* nije nipošto jasno u kom smjeru treba da ih provodimo pa da saznamo što je s jednakosti u pitanju: koliko god jednakosti iz 1° do 12° izveli, ako tražena nije među njima, time samim još ništa ne znamo ne bi li se kasnije ipak mogla pojaviti. U drugu ruku definicija semantičke jednakosti *jest* definicija postupka: u danom paru formula ima samo konačan broj varijabla, dakle samo konačan broj kombinacija vrijednosti istinitosti za te varijable pa ćemo u konačno mnogo koraka moći provjeriti da li se odgovarajuće vrijednosti istinitosti obiju danih formula uvijek poklapaju ili ne.

T 12. omogućit će nam dakle — zbog toga što zajedno s **T 11.** identificira semantičke i sintaktičke jednakosti — da za bilo koji dani par formula algebre sudova konstatiramo da li su te formule sintaktički jednake ili ne.

Štaviše, kao što će se vidjeti iz oblika dokaza **T 12,** bit ćemo u mogućnosti ne samo da konstatiramo da li je neka jednakost izvediva iz 1° do 12°, nego, što je bitno više od toga, u slučaju da *jest* izvediva znat ćemo i *kako* je izvediva, tj. moći ćemo je (bar u principu) i efektivno izvesti.

No budući da će dokaz **T 12.** biti — iako lak — poduži (sastojat će se od niza koraka) bit će korisno da ga paralelno pratimo i na jednom konkretnom primjeru.

10.4. Neka su A, B dvije istovrijedne formule logike sudova, tj. neka je $A = B$ semantička jednakost. Treba pokazati da je ona tada i sintaktička jednakost.

Konkretno, za formule

$$A \equiv (x \Leftrightarrow z) \,\&\, (z \Rightarrow y), \qquad B \equiv \top \Rightarrow \neg\, [(x \vee z) \,\&\, \neg\, (x \,\&\, y \,\&\, z)]$$

lako je provjeriti da su prema **D 4.** semantički jednake; na tom paru formula pratit ćemo općeniti dokaz da semantička jednakost dviju formula povlači njihovu sintaktičku jednakost.

U tu ćemo svrhu sistematski (pomoću 1° do 12°) transformirati formule A i B u njima sintaktički jednake, nastojeći da na kraju A i B dovedemo na identički jednaki oblik:

$$A = A_1 = A_2 = \cdots = A_m \equiv C,$$

$$B = B_1 = B_2 = \cdots = B_n \equiv C.$$

Ako u tome uspijemo, pokazali smo time sintaktičku jednakost $A = B$, jer gornje nizove jednakosti možemo sastaviti prema

$$A = A_1 = A_2 = \cdots = A_m \equiv C \equiv B_n = \cdots = B_2 = B_1 = B.$$

Ideja samog dokaza jest u tome, da se A i B (tačnije: funkcije određene s A i B nad varijablama koje ulaze u bar jednu od tih formula) svedu na kanonsku disjunktivnu normalnu formu (odnosno na $\perp$ ako su identički neistinite) A_m odnosno B_n (usp. **4.3.1.**). Pokazat će se da je to pomoću 1° do 12° uvijek moguće. Ranije smo (u **4.3.1.**) vidjeli da je taj oblik za danu funkciju jednoznačno određen (do poretka komponenata disjunkcije i samih članova u pojedinim komponentama). Ako dakle A i B svedemo na njihove respektivne kanonske disjunktivne normalne forme A_m odnosno B_n, bit će, ako su A i B istovrijedne formule, te forme nužno identički jednake. Drugim riječima, ako dobivene kanonske disjunktivne normalne forme *nisu* identički jednake (do poređaja komponenata i članova u njima), *ne mogu* ni A i B biti istovrijedne formule.

Prema tome dokazni postupak koji ćemo provesti za opći slučaj (i pratiti ga na konkretnom primjeru) pokazat će da je semantička jednakost uvijek i sintaktička, a već smo rekli da nam on daje i mogućnost efektivnog izvoda sintaktičke jednakosti formula u pitanju; pored toga dat će nam taj dokaz u ruke još jednu efektivnu metodu kojom u konačno mnogo koraka možemo odlučiti da li je dani par formula istovrijedan ili ne.

Razumije se da — kao što je to u takvim okolnostima često slučaj — ta metoda ne će za svaki pojedini par A, B formula biti „najekonomičnija"; za *konkretno* dani par formula bit će često moguće naći neki kraći efektivni izvod njihove sintaktičke jednakosti. Međutim, važno je da *uopće postoji* i da možemo efektivno naći jednu *jedinstvenu* metodu, koja, iako ne najkraća za svaki pojedini slučaj, ipak *rješava* svaki pojedini slučaj.

Pređimo sada konačno na sam dokaz, tj. na transformaciju od A i B pomoću 1° do 12° na njihovu kanonsku disjunktivnu normalnu formu.

10.5.1. *Prvi korak. Eliminacija operacija* $\Leftrightarrow$ *i* $\Rightarrow$. Pomoću 12° možemo iz formula A, B eliminirati $\Leftrightarrow$, a pomoću 11° možemo eliminirati $\Rightarrow$. (Ako već same dane formule ne sadrže ni $\Leftrightarrow$ ni $\Rightarrow$, prelazimo odmah na idući korak.)

Konkretno, za formule A i B koje smo naveli na početkn **10.4.** bit će

$$A = (x \Rightarrow z) \,\&\, (z \Rightarrow x) \,\&\, (z \Rightarrow y) = (\neg x \vee z) \,\&\, (\neg z \vee x) \,\&\, (\neg z \vee y) \equiv A_1,$$

$$B = \neg \top \vee \neg[(x \vee z) \,\&\, \neg(x \,\&\, y \,\&\, z)] \equiv B_1.$$

10.5.2. *Drugi korak. Eliminacija konstanata* $\top$, $\perp$. Pomoću 6°, 1° i 8° možemo iz A_1 i B_1 postupno eliminirati konstante $\top$ i $\perp$ (ako ove u njima uopće dolaze), osim u slučaju da se time jedna (ili obje) od formula A_1, B_1 reduciraju na samo jedan od simbola $\top$, $\perp$.

Za naš primjer bit će

$$A_1 \equiv A_2, \quad B_1 = \perp \vee \neg[(x \vee z) \,\&\, \neg(x \,\&\, y \,\&\, z)] = \neg[(x \vee z) \,\&\, \neg(x \,\&\, y \,\&\, z)] \equiv B_2.$$

Ako bi za neku formulu F ovaj korak doveo do $F_2 \equiv \perp$ smatrat ćemo time transformaciju od F završenom. Ako bi doveo do $F_2 \equiv \top$ možemo po 7° b i 6° a pisati

$$F_2 = (x \vee \neg x) \& (y \vee \neg y) \& \ldots \& (w \vee \neg w) \equiv F_3, \text{ gdje su } x, y, \ldots, w$$

sve varijable koje ulaze u na početku razmatrani par formula A, B. (Ovo ne će imati smisla jedino u slučaju da u na početku razmatranom paru uopće ne dolazi nijedna varijabla. No tada je nužno $A_2 \equiv \top$, $B_2 \equiv \top$ i dokaz **T 12.** je završen; slučajevi $A_2 \equiv \top$, $B_2 \equiv \perp$ i $A_2 \equiv \perp$, $B_2 \equiv \top$ očito ne mogu nastupiti jer tada $A = B$ ne bi bila semantička jednakost.) Primjenom 3° a F_3 prelazi u kanonsku disjuktivnu normalnu formu čime je transformacija te formule opet završena.

10.5.3. *Treći korak. Importacija negacije.* Pomoću 10° možemo sve znakove $\neg$ postupno dovesti do samih varijabla ili (jedamput ili više puta) negiranih varijabla. Za primjer koji razmatramo bit će $A_2 \equiv A_3$,

$$B_2 = \neg\{(x \vee z) \& [\neg(x \& y) \vee \neg z]\} = \neg[(x \vee z) \& (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)]$$
$$= \neg(x \vee z) \vee \neg(\neg x \vee \neg y \vee \neg z) = (\neg x \& \neg z) \vee (\neg\neg x \& \neg\neg y \& \neg\neg z) \equiv B_3.$$

10.5.4. *Četvrti korak. Eliminacija višestrukih negacija.* Pomoću 9° možemo višestruko negiranu varijablu reducirati na ne-negiranu ili na jedamput negiranu već prema tome da li je bila negirana paran ili neparan broj puta.

$$A_3 \equiv A_4, \quad B_3 = (\neg x \& \neg z) \vee (x \& y \& z) \equiv B_4.$$

10.5.5. *Peti korak. Svođenje na disjunktivnu normalnu formu.* Pomoću 3° a možemo postupno formule dovesti na oblik disjunkcije komponenata od kojih je svaka konjunkcija članova koji su varijable ili negirane varijable. Za naš primjer bit će

$$A_4 = [(\neg x \& \neg z) \vee (\neg x \& x) \vee (z \& \neg z) \vee (z \& x)] \& (\neg z \vee y)$$
$$= (\neg x \& \neg z \& \neg z) \vee (\neg x \& \neg z \& y) \vee (\neg x \& x \& \neg z) \vee (\neg x \& x \& y)$$
$$\vee (z \& \neg z \& \neg z) \vee (z \& \neg z \& y) \vee (z \& x \& \neg z) \vee (z \& x \& y) \equiv A_5,$$
$$B_4 \equiv B_5.$$

10.5.6. *Šesti korak. Eliminacija duplikata članova u pojedinim komponentama disjunkcije.* Pomoću 4° a možemo u svakoj komponenti koja sadrži dva ili više jednakih članova izostaviti sve te članove osim jednog.

$$A_5 = (\neg x \& \neg z) \vee (\neg x \& \neg z \& y) \vee (\neg x \& x \& \neg z) \vee (\neg x \& x \& y)$$
$$\vee (z \& \neg z) \vee (z \& \neg z \& y) \vee (z \& x \& \neg z) \vee (z \& x \& y) \equiv A_6,$$
$$B_5 \equiv B_6.$$

10.5.7. *Sedmi korak. Eliminicija komponenata disjunkcije jednakih $\perp$.* Ako neka komponenta sadrži (eventualno među ostalim) članove ξ i $\neg\xi$ za neku varijablu ξ, možemo tu komponentu prema 7° a, 6° b (i, po potrebi, 1° a i 2° a) zamijeniti sa $\perp$ i zatim prema 6° d izostaviti iz disjunktivne normalne forme (osim u slučaju da su time *sve* komponente disjunktivne normalne forme zamijenjene sa $\perp$; no tada je po 6° d — za $x = \perp$ — i čitava disjunktivna normalna forma jednaka $\perp$ čime se njena transformacija može smatrati završenom).

$$A_6 = (\neg x \,\&\, \neg z) \vee (\neg x \,\&\, \neg z \,\&\, y) \vee (z \,\&\, x \,\&\, y) \equiv A_7,$$
$$B_6 \equiv B_7.$$

10.5.8. *Osmi korak. Kompletiranje komponenata disjunkcije.* Svakoj komponenti možemo prema 6° a i 7° b dodati $\&(\xi \vee \neg \xi)$ za svaku varijablu ξ (ako takvih ima) koja dolazi u A ili u B a nema je u toj komponenti. Time dobivena formula općenito ne će više neposredno biti u disjunktivnoj normalnoj formi ali u nju prelazi primjenom 3° a.

$$\begin{aligned} A_7 &= [(\neg x \,\&\, \neg z) \,\&\, (y \vee \neg y)] \vee (\neg x \,\&\, \neg z \,\&\, y) \vee (z \,\&\, x \,\&\, y) \\ &= (\neg x \,\&\, \neg z \,\&\, y) \vee (\neg x \,\&\, \neg z \,\&\, \neg y) \vee (\neg x \,\&\, \neg z \,\&\, y) \vee (z \,\&\, x \,\&\, y) \equiv A_8, \\ B_7 &= [(\neg x \,\&\, \neg z) \,\&\, (y \vee \neg y)] \vee (x \,\&\, y \,\&\, z) \\ &= (\neg x \,\&\, \neg z \,\&\, y) \vee (\neg x \,\&\, \neg z \,\&\, \neg y) \vee (x \,\&\, y \,\&\, z) \equiv B_8. \end{aligned}$$

10.5.9. *Deveti korak. Eliminacija duplikata komponenata disjunkcije.* Ako u dobivenim disjunktivnim normalnim formama neka komponenta dolazi dva ili više puta, možemo duplikate prema 4° b izostaviti. Time konačno dobivamo kanonske disjunktivne normalne forme.

$$A_8 = (\neg x \,\&\, \neg z \,\&\, y) \vee (\neg x \,\&\, \neg z \,\&\, \neg y) \vee (z \,\&\, x \,\&\, y) \equiv A_9, \quad B_8 \equiv B_9.$$

Vidimo da se A_9 i B_9 poklapaju (do na poredak članova).

10.6. *Napomene.*

10.6.1. Prema dokazu **T 12.** vidimo da on vrijedi i ako se u izgradnji algebre sudova ograničimo na operacije $\&$, $\vee$, $\neg$. (Jer se 11° i 12° upotrebljavaju samo u prvom koraku transformiranja formula, pa ako u njima nema znakova $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ne trebaju ni jednakosti 11° i 12°.)

10.6.2. Ako pažljivo pratimo čitav dokaz **T 12.** vidjet ćemo da nigdje nismo morali upotrebiti 5° a, b. To znači da **T 12.** vrijedi i ako u **D 12.** izostavimo jednakosti 5°. No jednakosti 5° su semantičke jednakosti dakle po **T 12.** i sintaktičke jednakosti pa ih se stoga može izvesti iz preostalih jednakosti **D 12.** Prema dokazu **T 12.** možemo lako konstruirati izvod tih jednakosti.

Prvo, prema 3° a i 4° a je

$$x \,\&\, (x \vee y) = (x \,\&\, x) \vee (x \,\&\, y) = x \vee (x \,\&\, y)$$

pa je dovoljno dokazati jednu od jednakosti 5° a, b. Pratimo li dokaz **T 12.** počevši od osmog koraka sa $A \equiv x \vee (x \,\&\, y)$, $B \equiv x$ bit će

$$\begin{aligned} A &= x \,\&\, (y \vee \neg y) \vee (x \,\&\, y) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, \neg y) \vee (x \,\&\, y) \\ &= (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, \neg y), \\ B &= x \,\&\, (y \vee \neg y) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, \neg y), \end{aligned}$$

dakle $A = B$.

10.6.3. Kao što smo spomenuli u **10.2, T 12.** može se izreći tako, da se kaže da je sistem 1° do 12° *semantički potpun* jer se pod time upravo razumijeva da se u njemu može izvesti svaka semantička jednakost.

T 11. može se pak izreći tako da se kaže da je sistem 1° do 12° *semantički nekontradiktoran* jer se pod time upravo razumijeva da se u njemu mogu izvoditi samo semantičke jednakosti. Sistem 1° do 12° je nekontradiktoran i u klasičnom smislu, naime ne postoji nikakva formula A tako da $A = \neg A$ bude izvedivo iz 1° do 12°: da naime postoji neka sintaktička jednakost oblika $A = \neg A$ bila bi to po **T 12.** i semantička jednakost što je nemoguće jer ni za jednu kombinaciju vrijednosti istinitosti (eventualnih) varijabla u A odgovarajuće vrijednosti istinitosti od A i $\neg A$ ne mogu biti jednake. Nadalje, sistem 1° do 12° je i sintaktički nekontradiktoran, naime ima formalnih jednakosti koje se u njemu ne mogu izvesti; npr. $\top = \bot$ očito se ne može izvesti iz 1° do 12° jer to nije semantička jednakost.

Konačno, sistem 1° do 12° je *sintaktički potpun*, naime ako mu su pridoda kakva god jednakost koja nije sintaktička, on postaje sintaktički kontradiktoran tj. u proširenom sistemu može se izvesti bilo koja (dana) formalna jednakost. Ovo možemo uvidjeti ovako:

Neka je $A = B$ neka (formalno napisana) jednakost koja nije sintaktička (dakle po **T 12.** ni semantička). Proširimo sistem 1° do 12° sa

$$13^\circ \quad A = B.$$

Budući da 13° po pretpostavci nije semantička jednakost, postoji neka kombinacija vrijednosti istinitosti (eventualnih) varijabla u 13° za koju su odgovarajuće vrijednosti istinitosti od A, B različite. Ako te vrijednosti istinitosti uvrstimo na mjesto odgovarajućih varijabla u 13° dobit ćemo već uz (najviše) 1°, 6°, 8°, 11° i 12° da je u proširenom sistemu izvediva jednakost $\top = \bot$. Neka je sada $C = D$ bilo koja dana (formalno napisana) jednakost. Pokazat ćemo da je $C = D$ izvedivo u proširenom sistemu 1° do 13°. Zaista, po 6° je

$$C = C \,\&\, \top, \quad D = D \,\&\, \top.$$

No u proširenom sistemu izvedivo je $\top = \bot$, pa je

$$C = C \,\&\, \bot, \quad D = D \,\&\, \bot$$

i zbog 6° b

$$C = \bot, \quad D = \bot$$

dakle

$$C = D.$$

O nezavisnosti, nekontradiktornosti i potpunosti formaliziranih matematičko-logičkih sistema bit će detaljnije govora u Glavi V.

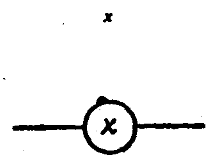
11. ALGEBRA SUDOVA I ELEKTRIČKI SKLOPOVI S PREKIDAČIMA

11.1. Pridruženje kombinacijama vrijednosti istinitosti varijabla sudova odgovarajuće vrijednosti istinitosti neke njihove funkcije može se ilustrirati za tu funkciju prikladno konstruiranim električkim sklopom s prekidačima.

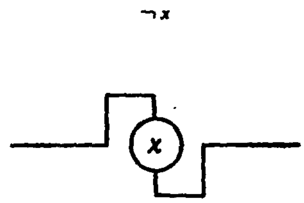
U takvoj interpretaciji pridružit ćemo varijablama sudova prekidače; vrijednosti istinitosti $\top$ pridružit ćemo *horizontalni* položaj prekidača a vrijednosti istinitosti $\perp$ *vertikalni* položaj prekidača (sl. 2.). Pritom pretpostavljamo da *horizontalni* položaj prekidača omogućuje prolaz struje kroz prekidač samo u *horizontalnom* smjeru, a *vertikalni* položaj samo u *vertikalnom* smjeru. Danoj funkciji varijabla sudova pridružit ćemo neki električki sklop s prekidačima (naime prekidače — koji odgovaraju varijablama te funkcije — povezane na određeni način električkim vodovima), tako da kroz sklop može teći struja onda i samo onda (tj. za one i samo one položaje prekidača) kad je odgovarajuća vrijednost istinitosti dane funkcije $= \top$.

11.2. Tako npr. sklop na sl. 3. predočuje funkciju $F_1(x) = x$, a sklop na sl. 4. predočuje funkciju $F_2(x) = \neg x$, jer kroz prvi struja može teći onda i samo onda ako je prekidač u horizontalnom položaju (kao što je $\tau F_1(x) = \top$ onda i samo onda kad je $\tau x = \top$) a kroz drugi onda i samo onda ako je prekidač u vertikalnom položaju (kao što je $\tau F_2(x) = \top$ onda i samo onda kad je $\tau x = \perp$).

sl. 2.

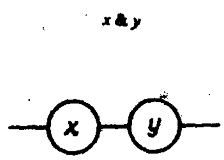


sl. 3.

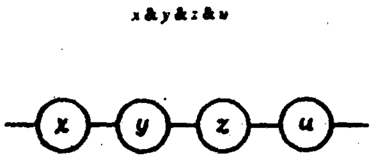


sl. 4.

11.3. *Konjunkciji* dviju ili više varijabla odgovara *serijski spoj* prekidača koji ih reprezentiraju (sl. 5. i 6.), jer će tim sklopom moći prolaziti struja onda i samo onda ako su svi prekidači u horizontalnom položaju, kao što konjunkcija varijabla poprima vrijednost istinitosti $\top$ onda i samo onda kad sve njene varijable poprimaju vrijednost istinitosti $\top$.



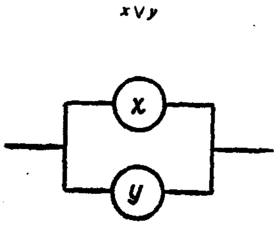
sl. 5.



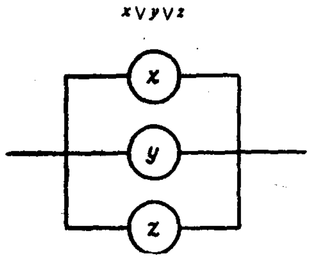
sl. 6.

11.4. *Disjunkciji* dviju ili više varijabla odgovara *paralelni spoj* prekidača koji ih reprezentiraju (sl. 7. i 8.), jer će tim sklopom moći prolaziti struja onda i samo onda ako je bar jedan od prekidača u horizontalnom položaju, kao što disjunkcija varijabla poprima vrijednost istinitosti $\top$ onda i samo onda kad bar jedna od njenih varijabla poprimi vrijednost istinitosti $\top$.

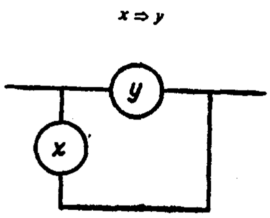
11.5. *Implikaciji* $x \Rightarrow y$ odgovara sklop prema sl. 9. Njime struja može prolaziti onda i samo onda ako je bilo prekidač koji reprezentira y u horizontalnom položaju, bilo prekidač koji reprezentira x u vertikalnom položaju, kao što je $\tau(x \Rightarrow y) = \top$ onda i samo onda ako je bilo $\tau x = \perp$, bilo $\tau y = \top$.



sl. 7.



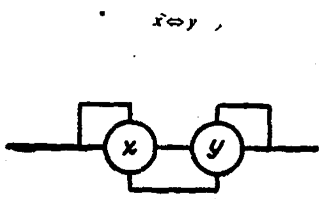
sl. 8.



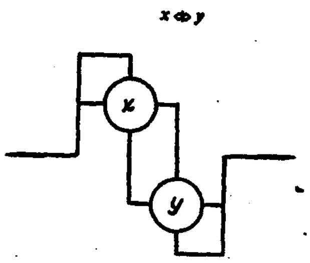
sl. 9.

11.6. *Ekvivalenciji* $x \Leftrightarrow y$ odgovara sklop prema sl. 10. Njime struja može prolaziti onda i samo onda ako su oba prekidača (koji reprezentiraju x i y) u istom položaju, kao što je $\tau(x \Leftrightarrow y) = \top$ onda i samo onda ako x i y poprimaju istu vrijednost istinitosti.

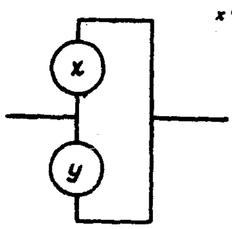
11.7. *Ekskluzivnoj disjunkciji* i njoj jednakoj funkciji negaciji ekvivalencije $x \not\Leftrightarrow y$ odgovara sklop prema sl. 11. Njime struja može prolaziti onda i samo onda ako su prekidači (koji reprezentiraju x i y) u suprotnim položajima kao što je $\tau(x \not\Leftrightarrow y) = \top$ onda i samo onda ako x i y poprimaju suprotne vrijednosti istinitosti.



sl. 10.



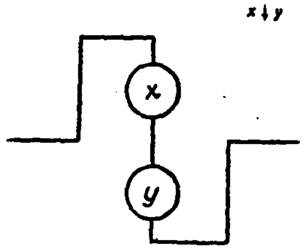
sl. 11.



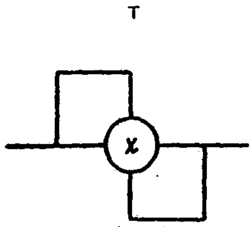
sl. 12.

11.8. *Shefferovoj operaciji* $x \uparrow y$ odgovara sklop prema sl. 12. Njime struja može prolaziti onda i samo onda ako je bar jedan od prekidača (koji reprezentiraju x i y) u vertikalnom položaju, kao što je $\tau(x \uparrow y) = \top$ onda i samo onda kad je bar jedna od vrijednosti istinitosti τx, τy jednaka $\perp$.

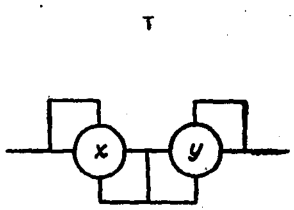
11.9. *Łukasiewiczevoj operaciji* $x \downarrow y$ odgovara sklop prema sl. 13. Njime struja može prolaziti onda i samo onda ako su oba prekidača (koji reprezentiraju x i y) u vertikalnom položaju, kao što je $\tau(x \downarrow y) = \top$ onda i samo onda ako je $\tau x = \tau y = \perp$.



sl. 13.

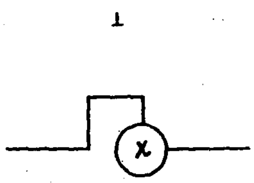


sl. 14.

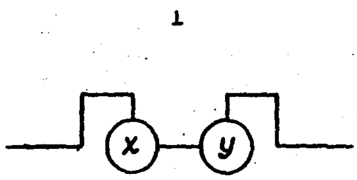


sl. 15.

11.10. *Funkcijama* $F(x) = \top$, $F(x, y) = \top$ odgovaraju sklopovi prema sl. 14. i 15, a *funkcijama* $F(x) = \perp$, $F(x, y) = \perp$ npr. prema sl. 16. i 17.

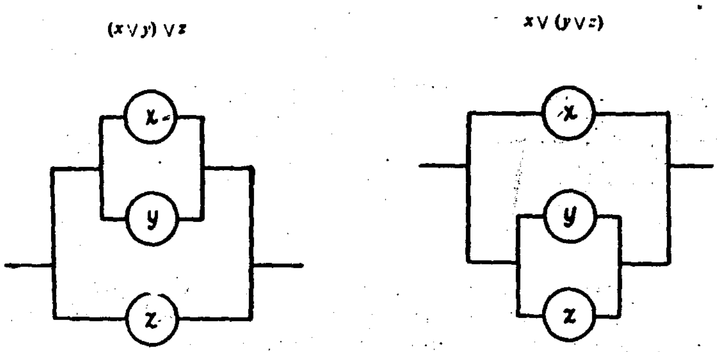


sl. 16.



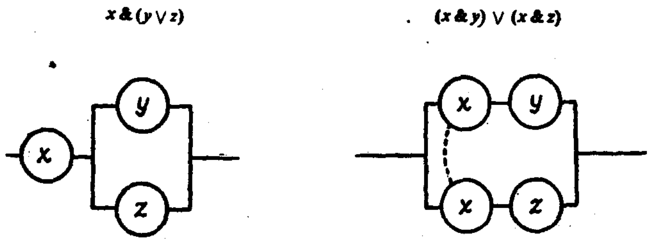
sl. 17.

11.11. *Jednakost* formula algebre sudova (dakle *par istovrijednih formula*) bit će ilustrirana parom sklopova koji „jednako rade", tj. za koju god kombinaciju položaja prekidača prvi može propuštati struju onda i samo onda ako to uz istu kombinaciju može i drugi. Npr. sl. 18. ilustrira jednakost $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.



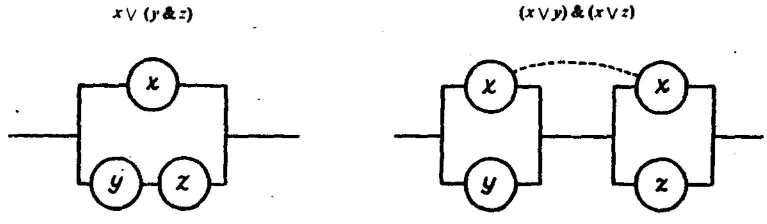
sl. 18.

Sl. 19. daje par sklopova koji ilustriraju jednakost $x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$. Pri tome dakako u drugom sklopu oba prekidača x moraju uvijek biti u međusobno jednakom položaju, što je simbolički označeno crtkanom vezom.



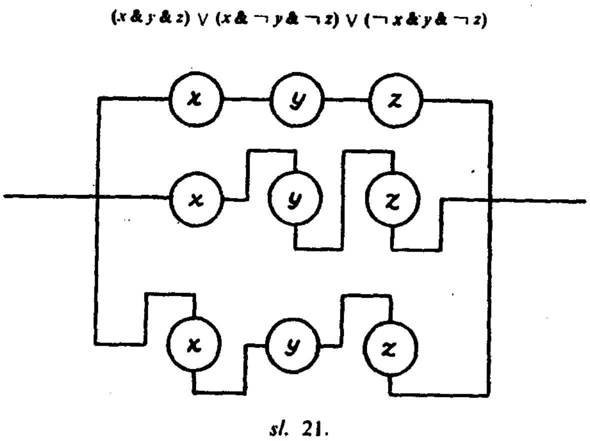
sl. 19.

Sl. 20. ilustrira jednakost $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$.



sl. 20.

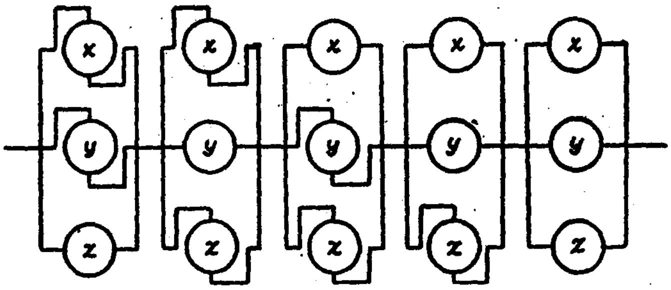
11.12. Razmatranja iz **4.3.** do **4.3.2.** pokazuju da se svaki električki sklop (tipa kakav smo uveli) može nadomjestiti (jer jednako radi) sklopom koji



sl. 21.

se sastoji od paralelno spojenih blokova serijski spojenih prekidača kao i sklopom koji se sastoji od serijski spojenih blokova paralelno spojenih prekidača — što odgovara kanonskoj disjunktivnoj odnosno konjunktivnoj normalnoj formi predočenja odgovarajuće funkcije. Npr. za funkciju $K(x, y, z)$ iz **4.1.1.** dobivamo odgovarajuće sklopove prema sl. 21. i 22.

$$(\neg x \vee \neg y \vee z) \& (\neg x \vee y \vee \neg z) \& (x \vee \neg y \vee \neg z) \& (x \vee y \vee \neg z) \& (x \vee y \vee z)$$



sl. 22.

GLAVA III

ALGEBRE SUDOVA KAO BOOLEOVE STRUKTURE

1. MREŽA KAO PARCIJALNO UREĐENI SKUP

1.1. Skup S je *djelomično (parcijalno) uređen*, ako je u njem definirana binarna relacija $<$ sa svojstvima: 1^0 $x < x$ za svaki $x \in S$, 2^0 ako za neki par $x, y \in S$ vrijedi $x < y$ i $y < x$, onda je $x = y$, 3^0 ako za $x, y, z \in S$ vrijedi $x < y$ i $y < z$, onda je i $x < z$.

Definicija 1. *Za djelomično uređeni (neprazni) skup $(S, <)$ kažemo da je S-mrežasta struktura ili kraće S-mreža, ako za svaki par elemenata $x, y \in S$ u S postoji element $u = \inf(x, y)$ koji je najveći među svima onima koji su $<$ x i $<$ y, kao i element $v = \sup(x, y)$ koji je najmanji među svima onima koji su $>$ x i $>$ y.*

(Oznaku „*inf*" čitat ćemo „infimum" a oznaku „*sup*" „supremum".)

Uvedemo li (ovdje samo zbog kraćeg pisanja, dakle kao *neformalne* oznake) simbole: & za „i", $\vee$ za (inkluzivno) „ili", $\Rightarrow$ za „povlači", $\Leftrightarrow$ za „onda i samo onda ako je", $\neg$ za „nije", $\forall$ za „za svaki" i $\exists$ za „postoji" i prihvatimo li radi štednje zagrada istu konvenciju o jačini razdvajanja prvih pet od tih simbola kao u Glavi II, možemo uvjete **D 1.** pisati u obliku

(1a) $(\forall x, y \in S)\ (\exists u \in S)\ [u < x \,\&\, u < y \,\&\, (\forall z)(z < x \,\&\, z < y \Rightarrow z < u)]$,

(1b) $(\forall x, y \in S)\ (\exists v \in S)\ [x < v \,\&\, y < v \,\&\, (\forall z)(x < z \,\&\, y < z \Rightarrow v < z)]$.

1.2. *Primjeri.*

1.2.1. Neka je T neki dani skup a $\mathcal{P} T = S$ partitivni skup od T (tj. skup svih podskupova od T). Uvedimo u S binarnu relaciju $<$ kao skupovnu inkluziju, dakle za $x, y \in S$ (tj. $x, y \subset T$) neka je po definiciji $x < y \underset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} x \subset y$.

Lako je provjeriti da je tada $(S, <)$ djelomično uređen skup. Nadalje, ako za svaki par $\langle x, y\rangle$ definiramo $u = u(x, y) = x \cap y$, $v = v(x, y) = x \cup y$ (gdje je $\cap$ skupovni presjek a $\cup$ skupovna unija) možemo provjeriti da u i v zadovoljavaju uvjete (1a), (1b). Konstruirana struktura $(S, <)$ je dakle S-mreža.

1.2.2. Neka je N^* skup pozitivnih prirodnih brojeva, $N^* = \{1, 2, \ldots\}$. Definirajmo u N^* binarnu relaciju $<$ kao „ je mjera od", tj. za $x, y \in N^*$ neka je po definiciji $x < y \underset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} x \mid y$ ($x \mid y$ čitaj „x je mjera od y" ili „x dijeli y" ili „y je (bez ostatka) djeljivo sa x").

$(N^*, <)$ je time djelomično uređeni skup. Nadalje, za svaki par $\langle x, y\rangle$, $x, y \in N^*$ neka je $u = u(x, y) = (x, y)$ (najveća zajednička mjera od x i y), $v = v(x, y) = [x, y]$ (najmanji zajednički višekratnik od x, y). Vidimo da u, v zadovoljavaju uvjete (1a), (1b) pa je $(N^*, <)$ S-mreža.

1.2.3. Neka je S skup konveksnih likova u ravnini. (Skup tačaka L u ravnini zove se *konveksni lik*, ako za svaki par tačaka x, y ravnine vrijedi da $x \in L$ & $y \in L$ povlači da je i za svaku tačku z koja leži na dužini $\overline{xy}, z \in L$. Npr. prazni skup tačaka, svaka pojedina tačka, pravci, polupravci, krugovi, poluravnina, čitava ravnina su konveksni likovi u ravnini.) U S definiramo $<$ kao „je obuhvaćen u" tj. za koji god par konveksnih likova $x, y \in S$ neka je $x < y$ onda i samo onda ako x leži u y, tj. ako svaka tačka lika x pripada i liku y.

$(S, <)$ je djelomično uređeni skup. Neka nadalje za svaki par konveksnih likova $x, y \in S$ bude $u = u(x, y) = x \cap y$ (dio ravnine zajednički likovima x, y — a to je opet neki konveksni lik), a $v = v(x, y)$ neka je *konveksni omotač* likova x, y tj. presjek svih konveksnih likova koji sadrže x i y (dakle najmanji takav lik). Opet se lako vidi da je $(S, <)$ S-mreža.

1.2.4. Neka je $S = \{a\}$ jednoelementni skup za koji je $<$ definirano sa $a < a$. $(S, <)$ je S-mreža.

1.2.5. Neka je S skup kompleksnih brojeva $x + iy$ (x, y realni) kojima je modul $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$. Uvedimo u S relaciju $<$ definicijom

$$x_1 + y_1 i < x_2 + y_2 i \underset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2 \,\&\, y_1 < y_2.$$

Lako se vidi da je $(S, <)$ djelomično uređen skup. No to nije S-mreža, jer npr. u S nema elementa $sup\,(1, i)$.

1.2.6. Neka je S skup svih kompleksnih brojeva, a relacija $<$ definirana je kao u **1.2.5.** Tada je $(S, <)$ S-mreža. (Za dane $z_1, z_2 \in S$ bit će $inf\,(z_1, z_2)$ „donji lijevi" a $sup\,(z_1, z_2)$ „gornji desni" ugao pravokutnika u kompleksnoj ravnini određenog sa z_1, z_2 kao uglovima i stranicama paralelnim s realnom odnosno imaginarnom osi.)

2. MREŽA KAO ALGEBARSKA STRUKTURA

2.1. *Definicija* 2. *Za algebarsku strukturu* $(S; \wedge, \vee)$ *sa dvije binarne operacije* $\wedge, \vee$ *nad skupom* $S \neq \emptyset$ *kažemo da je A-mrežasta struktura ili kraće A-mreža, ako su obje njene operacije komutativne, asocijativne i apsorptivne, tj. ako je*

(2a,b) $\quad (\forall x, y \in S) \quad x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x;$

(3a,b) $\quad (\forall x, y, z \in S) \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z);$

(4a,b) $\quad (\forall x, y \in S) \quad x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x.$

(Znak „$\wedge$" čitaj „kep" — odgovara $\cap$ što podsjeća na kapu, engl. = *cap*; znak „$\vee$" čitaj „kap" — odgovara $\cup$ što podsjeća na šalicu, engl. = *cup*.)

2.2. *Primjeri.* **2.2.1.** Neka je, kao u **1.2.1,** T neki dani skup a $\mathcal{P}T = S$ partitivni skup od T. Za $x, y \in S$ neka je $x \wedge y = x \cap y$, $x \vee y = x \cup y$. Lako je provjeriti da je $(S; \wedge, \vee)$ A-mreža.

2.2.2. Neka je, kao u **1.2.2,** N^* skup pozitivnih prirodnih brojeva. Za $x, y \in N^*$ neka je $x \wedge y = (x, y)$, $x \vee y = [x, y]$. $(N^*; \wedge, \vee)$ je A-mreža.

2.2.3. Neka je, kao u **1.2.3,** S skup konveksnih likova u ravnini. Za $x, y \in S$ neka je $x \wedge y = x \cap y$, $x \vee y =$ konveksni omotač od x, y. $(S;\ \wedge,\ \vee)$ je A-mreža.

2.2.4. Neka je, kao u **1.2.4,** $S = \{a\}$ i $\wedge$, $\vee$ definirano sa $a \wedge a = a \vee a = a$. $(S;\ \wedge,\ \vee)$ je A-mreža.

2.2.5. Neka je S skup cijelih brojeva, a $\wedge$, $\vee$ definirano sa $x \wedge y = x \cdot y$, $x \vee y = x + y$. $(S;\ \wedge,\ \vee)$ nije A-mreža, jer općenito ne vrijedi apsorpcija (npr. $1 \cdot (1+1) = 2 \neq 1$).

3. EKVIVALENTNOST S-MREŽA I A-MREŽA

3.1. Prva četiri korespondentna primjera u **1.2.** i **2.2.** pokazali su da je u nekim slučajevima moguće na prirodni način međusobno pridružiti po jednu S-mrežu i jednu A-mrežu. Postavlja se pitanje da li je to uvijek slučaj. Potvrdni odgovor daju iduća tri teorema.

3.2. *Teorem* 1. *Ako u S-mreži* $(S, <)$ *definiramo operacije* $\wedge$, $\vee$ *sa*

$$(5a) \qquad (\forall x, y \in S) \qquad x \wedge y \underset{Df}{=} inf(x, y),$$

$$(5b) \qquad (\forall x, y \in S) \qquad x \vee y \underset{Df}{=} sup(x, y)$$

bit će $(S;\ \wedge,\ \vee)$ *A-mreža.*

Dokaz. 1° Zbog (1a) je $inf(x, y) = inf(y, x)$ pa je $x \wedge y = y \wedge x$ i vrijedi (2a). Analogno vrijedi (2b).

2° Zbog (1a) je $inf(inf(x, y), z) = inf(x, inf(y, z))$ pa je $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ i vrijedi (3a). Analogno za (3b).

3° Zbog (1a) je $inf(x, sup(x, y)) < x$. U drugu ruku, zbog (1b) je $x < sup(x, y)$ a kako je i $x < x$ to je zbog (1a) i $x < inf(x, sup(x, y))$. Dakle je $inf(x, sup(x, y)) = x$ pa je $x \wedge (x \vee y) = x$ i vrijedi (4a). Analogno za (4b).

3.3. *Teorem* 2. *Ako u A-mreži* $(S;\ \wedge,\ \vee)$ *definiramo relaciju* $<$ *sa*

$$(6a) \qquad x < y \underset{Df}{\Leftrightarrow} x \wedge y = x$$

ili sa

$$(6b) \qquad x < y \underset{Df}{\Leftrightarrow} x \vee y = y,$$

bit će $(S, <)$ *S-mreža.*

Dokaz. Pokažimo najprije da su definicije (6a), (6b) međusobno ekvivalentne.

Ako je $x \wedge y = x$, bit će zbog (4b) (za y kao „x" i x kao „y") $y = y \vee (y \wedge x) =$ (zbog (2a)) $y \vee (x \wedge y) =$ (po pretpostavci) $y \vee x =$ (zbog (2b)) $x \vee y$ pa (6a) povlači (6b).

Obrnuto, ako je $x \vee y = y$ bit će zbog (4a) $x = x \wedge (x \vee y) = x \wedge y$ pa (6b) povlači (6a).

Kao prvo, lako se provjerava da je $(S, <)$ djelomično uređeni skup (za dokaz refleksivnosti usp. niže **4.1.**).

Dokažimo sada da $x \wedge y$ odnosno $x \vee y$ zadovoljavaju zahtjeve za $u = inf(x, y)$ odnosno $v = sup(x, y)$ u (1a,b). Zbog upravo dokazanog možemo se pritom služiti obim relacijama (6a), (6b).

1° Po (6b) je $x \wedge y < x$ jer je po (2b) i (4b) $(x \wedge y) \vee x = x \vee (x \wedge y) = x$. Također je $x \wedge y < y$ jer je po (2a), (2b) i (4b) $(x \wedge y) \vee y = (y \wedge x) \vee y = y \vee (y \wedge x) = y$.

2° Ako je $z < x$ i $z < y$ znači to po (6a) da je $z \wedge x = z$, $z \wedge y = z$. Prema tome je tada $z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z$ dakle opet po (6a) $z < x \wedge y$.

Time je (1a) dokazano. Analogno se dokazuje (1b).

3.4. *Teorem* 3. *a) Neka je $(S, <)$ S-mreža, $(S; \wedge, \vee)$ njoj prema* **T 1.** *pridružena A-mreža, a $(S, <_1)$ ovoj prema* **T 2.** *pridružena S-mreža. Tada je $(S, <) \equiv (S, <_1)$ tj.*

$$(\forall x, y \in S) \qquad x < y \Leftrightarrow x <_1 y.$$

b) Neka je $(S; \wedge, \vee)$ A-mreža, $(S, <)$ njoj prema **T 2.** *pridružena S-mreža, a $(S; \wedge_1, \vee_1)$ ovoj prema* **T 1.** *pridružena A-mreža. Tada je $(S; \wedge, \vee) \equiv (S; \wedge_1, \vee_1)$ tj.*

$$(\forall x, y \in S) \qquad (x \wedge y = x \wedge_1 y) \,\&\, (x \vee y = x \vee_1 y).$$

Prema tome relacija pridruženosti između S-mreža i A-mreža je simetrična.

Dokaz. a) Prema (6a) je $x <_1 y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow$ (prema (5a)) $inf(x, y) = x$. No prema (1a) očito je $u = inf(x, y) = x$ onda i samo onda ako je $x < y$.

b) Prema (5a) je $x \wedge_1 y = inf(x, y)$. U drugu ruku, u dokazu **T 2.** pokazali smo da $x \wedge y$ zadovoljava uvjete za u iz (1b) za $(S, <)$, pa je $u = inf(x, y) = x \wedge y$. Vrijedi dakle $x \wedge y = x \wedge_1 y$. Analogno se dokazuje $x \vee y = x \vee_1 y$.

T 1.-3. omogućuju da umjesto o S-mrežama i A-mrežama govorimo naprosto o m r e ž a m a.

Kadšto ćemo mrežom zvati i strukturu $(S; <; \wedge, \vee)$ gdje su $(S, <)$ i $(S; \wedge, \vee)$ po **T 1,2.** pridružene S-mreža i A-mreža.

4. NEKA DALJA SVOJSTVA OPERACIJA $\wedge$, $\vee$ I RELACIJE $<$ U MREŽAMA

4.1. Ako je $(S; \wedge, \vee)$ mreža, operacije $\wedge$, $\vee$ su idempotentne, tj. vrijedi

$$(\forall x \in S) \quad x \wedge x = x, \quad x \vee x = x.$$

Dokaz. Prema (4b) za x kao „y" je $x \wedge x = x \wedge [x \vee (x \wedge x)]$. No prema (4a) za $x \vee x$ kao „y" je $x \wedge [x \vee (x \wedge x)] = x$. Dakle je $x \wedge x = x$. Jednakost $x \vee x = x$ dokazuje se analogno.

4.2. Uzastopnom primjenom (2a) i (3a) uviđamo da u izrazu sagrađenom od varijabla $x, y, z, \ldots$ mreže $(S; \wedge, \vee)$ i operacije $\wedge$ možemo izostaviti zagrade i po volji izmijeniti redoslijed varijabla. Ako neka varijabla dolazi više nego jedamput, možemo sve primjerke u kojima se javlja, osim jednog, izostaviti (zbog. **4.1.**). Analogno za izraz sagrađen od varijabla $x, y, z, \ldots$ i operacije $\vee$. Isto vrijedi i za izraze koji pored varijabilnih elemenata od S sadrže i konstante, tj. neke čvrsto odabrane elemente od S.

4.3. U mreži $(S, <)$ za svaki neprazni *konačni* podskup Z elemenata od S postoji najveći element u od S koji je $<$ od svakog elementa x od Z i najmanji element v od S koji je $>$ od svakog elementa x od Z; pisat ćemo $u = \mathit{inf}\, Z$, $v = \mathit{sup}\, Z$. Ako je $Z = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vrijedi u $(S; <; \wedge, \vee)$ da je $\mathit{inf}\, Z = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$, $\mathit{sup}\, Z = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$. Da je tome tako uviđa se lako višestrukom primjenom **D 1.** iz **1.1.**

4.4. U mreži $(S; <: \wedge, \vee)$ vrijedi:

a) ako je $x < y_1$, $x < y_2, \ldots, x < y_n$ onda je i $x < y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$.

b) ako je $y_1 < x$, $y_2 < x, \ldots, y_n < x$, onda je i $y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n < x$.

Dokažimo ovu tvrdnju za $n = 2$ (za opći n tvrdnja se dokazuje indukcijom).

a) $x < y_1$, $x < y_2$ znači po (6a) $x \wedge y_1 = x \wedge y_2 = x$, pa je

$$x \wedge (y_1 \wedge y_2) = (x \wedge y_1) \wedge y_2 = x \wedge y_2 = x$$

a to opet po (6a) znači $x < y_1 \wedge y_2$. b) se dokazuje analogno.

4.5. U mreži $(S; <; \wedge, \vee)$ vrijedi monotonija od $<$ prema $\wedge$ i $\vee$: Ako je $x < y$, onda je $x \wedge z < y \wedge z$ i $x \vee z < y \vee z$.

Dokaz. Iz $x < y$ izlazi po (6a) $x \wedge y = x$ pa je $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$. No odatle je i $(x \wedge z) \wedge (y \wedge z) = x \wedge z$ pa je po (6a) $x \wedge z < y \wedge z$. Relacija $x \vee z < y \vee z$ dokazuje se analogno.

4.6. U mreži $(S; <; \wedge, \vee)$ vrijedi

$$(\forall x, y, z \in S) \quad x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad (x \wedge y) \vee (x \wedge z) < x \wedge (y \vee z).$$

Dokaz. Po (1a) i (5a) je $x \wedge y < x$, $x \wedge z < x$ pa je po **4.4.** b)

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) < x.$$

Dalje je slično $x \wedge y < y < y \vee z$, $x \wedge z < z < y \vee z$ dakle i $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) < y \vee z$. Odatle i iz ranije izvedene relacije $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) < x$ izlazi po **4.4.** a) da je $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) < x \wedge (y \vee z)$. Relacija $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ dokazuje se analogno.

4.7. U mreži $(S; <; \wedge, \vee)$ vrijedi: Ako je $z < x$, onda je $(x \wedge y) \vee z < x \wedge (y \vee z)$.

Dokaz. Uz $z \leqslant x$ je po (6a) $x \wedge z = z$ pa iz druge relacije **4.6.** izlazi tvrdnja.

4.8. U mreži $(S; <; \wedge, \vee)$ vrijedi: Ako je $y < x$ i $w < z$ onda je $y \vee w < x \vee z$ i $y \wedge w < x \wedge z$.

Dokaz. Kako je po pretpostavci $y < x < x \vee z$, $w < z < x \vee z$ to je po **4.4.** b) i $y \vee w < x \vee z$. Slično je $y \wedge w < w < z$, $y \wedge w < y < x$ dakle i $y \wedge w < x \wedge z$.

5. DISTRIBUTIVNE MREŽE

5.1. *Definicija* 3. *Mrežu* $(S;\ \wedge,\ \vee)$ *zovemo* *distributivnom ako je*

(7a, b) $(\forall x, y, z \in S)\quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),\quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$

Lako se dokazuje da je mreža distributivna čim vrijedi jedna od relacija (7a, b) tj. da (7a) povlači (7b) i obrnuto. Ako naime vrijedi (7a), bit će zbog (2a), (4a, b) i (3b)

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] = [x \wedge (x \vee y)] \vee [(x \vee y) \wedge z] =$$

$$x \vee [z \wedge (x \vee y)] = x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)] = x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] =$$

$$[x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z) = x \vee (y \wedge z)$$

pa vrijedi (7b). Analogno (7b) povlači (7a).

Mrežu $(S, <)$ zvat ćemo dakle distributivnom ako je za svaku trojku $x, y, z \in S$: $inf\,(x,\ sup\,(y, z)) = sup\,(inf\,(x, y),\ inf\,(x, z))$ kao i ako je $sup\,(x,\ inf\,(y, z)) = inf\,(sup\,(x, y),\ sup\,(x, z))$ — što je ekvivalentno prvom zahtjevu.

5.2. *Primjeri.*

5.2.1. Mreža $(S;\ \wedge,\ \vee)$ iz 2.2.1. je distributivna, jer za skupove vrijedi $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$. Mreža $(N^*;\ \wedge,\ \vee)$ iz 2.2.2. također je distributivna jer za pozitivne prirodne brojeve vrijedi $(x, [y, z]) = [(x, y), (x, z)]$.

5.2.2. Mreža $(S;\ \wedge,\ \vee)$ iz 2.2.3. nije distributivna. Neka je npr. x neki dani krug a y i z neka su dva (različita) pravca koji prolaze njegovim središtem. x, y i z su — po definiciji u 1.2.3. — konveksni likovi. $y \vee z$ je čitava ravnina, pa je $x \wedge (y \vee z) = x$. U drugu ruku, $x \wedge y$ i $x \wedge z$ su dva (različita) promjera od x, pa je $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ pravokutnik upisan krugu x. Znači ovdje je $x \wedge (y \vee z) \neq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. (Lako je naći i trojku ograđenih dvodimenzionalnih konveksnih likova za koju ne vrijedi (7a)).

5.2.3. Neka je $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ i neka je u S definirana relacija $<$ tako da je $a_1 < a < a_5$ za sve $a \in S$ dok elementi parova $\langle a_2, a_3\rangle$, $\langle a_3, a_4\rangle$, $\langle a_4, a_2\rangle$ nisu uporedljivi. Lako se provjerava da je $(S;\ <;\ \wedge,\ \vee)$ mreža. Ona međutim nije distributivna jer je npr.

$$a_2 \vee (a_3 \wedge a_4) = a_2 \vee a_1 = a_2, \quad \text{dok je} \quad (a_2 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee a_4) = a_5 \wedge a_5 = a_5.$$

5.2.4. *Vježba.* Pokaži da je svaka mreža od najviše 4 elementa distributivna.

5.2.5. Neka je S skup realnih brojeva i neka je za $x, y \in S$ definirano $x \wedge y = min\,(x, y)$, $x \vee y = max\,(x, y)$. Pokaži da je $(S;\ \wedge,\ \vee)$ distributivna mreža.

5.2.6. Dokažimo da vrijedi ovaj teorem: Mreža $(S;\ \wedge,\ \vee)$ distributivna je onda i samo onda ako je

(7') $(\forall\ x, y, z \in S)\quad (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x).$

Dokaz. Ako je dana mreža distributivna vrijedi

$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge z] \vee [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x] =$$

$$\text{(zbog (4a))}\ [(x \vee y) \wedge z] \vee [(y \vee z) \wedge x] = [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \vee [(y \wedge x) \vee (z \wedge x)] =$$

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x),$$

pa je zadovoljena relacija (7'). Treba još dokazati i obrat. Pokažimo u tu svrhu najprije da u mreži $(S; <; \wedge, \vee)$ koja zadovoljava (7') vrijedi

Lema. Ako je $w < u$, *onda je* $u \wedge (v \vee w) = (u \wedge v) \vee w$

$$(\textit{dakle i}\ \ w \vee (v \wedge u) = (w \vee v) \wedge u).$$

Dokaz leme. Uz $w < u$ je $w \vee u = u$, a $u < u \vee v$ dakle $(w \vee u) \wedge (u \vee v) = u$. Također je uz $w < u$: $w \wedge u = w$ što radi $v \wedge w < w$ daje $(w \wedge u) \vee (v \wedge w) = w$. Tako uz (7') dobivamo

$$u \wedge (v \vee w) = (w \vee u) \wedge (u \vee v) \wedge (v \vee w) = (u \wedge v) \vee (w \wedge u) \vee (v \wedge w) = (u \wedge v) \vee w$$

i lema je dokazana.

Vratimo se sada dokazu traženog obrata. Kako je $x \wedge y < x$ i $z \wedge x < x$ daje lema da je

$$x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] = x \wedge \{[(y \wedge z) \vee (z \wedge x)] \vee (x \wedge y)\} =$$

$$\{x \wedge [(y \wedge z) \vee (z \wedge x)]\} \vee (x \wedge y) = \{[x \wedge (y \wedge z)] \vee (z \wedge x)\} \vee (x \wedge y) =$$

$$(\text{radi}\ x \wedge y \wedge z < z \wedge x = x \wedge z)\ (x \wedge z) \vee (x \wedge y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

U drugu je ruku zbog (7')

$$x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] = x \wedge [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)] =$$

$$[x \wedge (x \vee y)] \wedge [(y \vee z) \wedge (z \vee x)] = x \wedge [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] =$$

$$[x \wedge (x \vee z)] \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z).$$

Vrijedi dakle (7a) pa je prema **5.1.** $(S; \wedge, \vee)$ distributivna mreža što je trebalo dokazati.

5.2.7. Prema **4.6.** mreža $(S; <; \wedge, \vee)$ distributivna je čim je

$$(8) \qquad (\forall x, y, z \in S)\ x \vee (y \wedge z) > (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

6. KOMPLEMENTIRANE MREŽE

6.1. *Definicija* 4. *Mreža* $(S; \wedge, \vee)$ *zove se* ***komplementirana***, *ako postoji preslikavanje* $\neg\colon S \to S$ *koje svakom* $x \in S$ *jednoznačno pridružuje njegov komplement* $\neg x \in S$ *tako da vrijedi*

$$(9) \qquad (\forall x, y \in S) \quad x \wedge (\neg x) = y \wedge (\neg y), \quad x \vee (\neg x) = y \vee (\neg y).$$

U komplementiranoj mreži dakle (uz dani $\neg$) $x \wedge (\neg x)$ ima istu vrijednost za sve $x \in S$; također i $x \vee (\neg x)$ ima istu vrijednost za sve $x \in S$. Označimo prvu od njih sa $0^{\neg}$ a drugu sa $1^{\neg}$.

Zbog (4a,b) izlazi

(10a,b) $x = x \wedge [x \vee (\neg x)] = x \wedge 1^{\neg}, \quad x = x \vee [x \wedge (\neg x)] = x \vee 0^{\neg}.$

Pokažimo da elementi $0^{\neg}$, $1^{\neg}$ ne ovise o $\neg$. Neka je $\neg_1 x$ komplement od x obzirom na $\neg_1$, a $\neg_2 x$ komplement od x obzirom na $\neg_2$. Tada je prema (10b), (2b) $0^{\neg_1} = 0^{\neg_1} \vee 0^{\neg_2} = 0^{\neg_2} \vee 0^{\neg_1} = 0^{\neg_2}$. Analogno zbog (10a) izlazi $1^{\neg_1} = 1^{\neg_2}$. U komplementiranoj mreži možemo dakle umjesto $0^{\neg}$, $1^{\neg}$ pisati kratko 0, 1, pa je

(10'a,b) $x = x \wedge 1, \quad x = x \vee 0.$

Odatle dalje dobivamo da je u komplementiranoj mreži

$$x \wedge 0 = (x \vee 0) \wedge 0 = 0 \wedge (0 \vee x) = 0, \quad x \vee 1 = (x \wedge 1) \vee 1 = 1 \vee (1 \wedge x) = 1$$

tj. vrijedi

(10″a,b) $x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1.$

(10″) izlazi iz (10′) i preko (6a,b). Ujedno odatle vidimo da je u komplementiranoj mreži $(S; <; \wedge, \vee)$ 0 *apsolutno minimalni* a 1 *apsolutno maksimalni* element, tj. vrijedi

(11a,b) $(\forall x \in S) \quad 0 < x < 1.$

6.2. *Primjeri.*

6.2.1. Primjer iz **1.2.1.** je komplementirana mreža ako za podskup x od T stavimo $\neg x = T \setminus x$. (Ovdje je $0 = \emptyset$, $1 = T$.)

6.2.2. Primjer iz **1.2.2.** nije komplementirana mreža jer među elementima od N^* nema najveći (obzirom na $<$).

6.2.3. U primjeru $(S; <; \wedge, \vee)$ iz **1.2.3.** postoji apsolutno najmanji element (prazni skup $\emptyset$) i apsolutno najveći element 1 (čitava ravnina R). Ako bi dakle $(S; <; \wedge, \vee)$ bila komplementirana mreža, morao bi njen element 0 biti jednak $\emptyset$, a njen element 1 biti jednak R. Neka je P neki pravac u R; P je konveksni lik. $\neg P$ bi morao biti konveksni lik sa svojstvima $P \wedge (\neg P) = \emptyset$, $P \vee (\neg P) = R$. Zbog prvog zahtjeva nijedna tačka od P ne može biti i tačka od $\neg P$. Stoga bi se čitav $\neg P$ morao nalaziti u jednoj od poluravnina na koje je ravnina R podijeljena sa P (spojnica dviju tačaka od $\neg P$ koje bi ležale u različitim poluravninama sijekla bi P). No tada i konveksni omotač od P i $\neg P$ ne bi mogao sadržavati nijednu tačku iz druge poluravnine (osim njenih rubnih tačaka na P). To je pak u suprotnosti s drugim zahtjevom koji bi $\neg P$ morao zadovoljiti. Vidimo dakle da takav $\neg P$ ne postoji pa razmatrana mreža nije komplementirana.

6.2.4. Definirajmo u primjeru **5.2.3.**

a) $\neg a_1 = a_5, \quad \neg a_2 = a_3, \quad \neg a_3 = a_4, \quad \neg a_4 = a_2, \quad \neg a_5 = a_1;$

b) $\neg a_1 = a_5, \quad \neg a_2 = a_4, \quad \neg a_3 = a_2, \quad \neg a_4 = a_3, \quad \neg a_5 = a_1.$

Lako možemo provjeriti da je $(S; \wedge, \vee)$ komplementirana mreža uz $\neg$ definiran sa a) kao i uz $\neg$ definiran sa b) $(0 = a_1, \ 1 = a_5)$.

6.2.5. *Vježba.* Neka je S skup svih konačnih podskupova nekog beskonačnog skupa T i neka je za $x, y \in S$: $x \wedge y = x \cap y$, $x \vee y = x \cup y$. Pokaži da je $(S;\ \wedge, \vee)$ distributivna nekomplementirana mreža.

7. BOOLEOVE ALGEBRE

7.1. *Definicija* 5. *Komplementirana distributivna mreža zove se* *Booleova algebra.*

7.2. *Teorem* 4. *U Booleovoj algebri komplement svakog elementa određen je jednoznačno, tj. postoji (jedno i) samo jedno preslikavanje* $\neg: S \to S$ *koje danu Booleovu algebru čini komplementiranom mrežom.*

Stoga nije potrebno da Booleovu algebru $(S;\ \wedge, \vee)$ koja je komplementirana mreža uz $\neg$ označujemo sa $(S;\ \wedge, \vee, \neg)$.

T 4. možemo izreći i tako, da kažemo da je u Booleovoj algebri sistem jednadžbi $a \wedge x = 0$, $a \vee x = 1$ jednoznačno rješiv za svaki $a \in S$.

Dokaz **T 4.** Neka su $\neg_1 : S \to S$, $\neg_2 : S \to S$ dva preslikavanja od S u S koja distributivnu mrežu $(S;\ \wedge, \vee)$ čine komplementiranom. Označimo (za proizvoljno odabrani x) $\neg_1 x$ sa x_1, a $\neg_2 x$ sa x_2. Tada je

$$0 = x \wedge x_1 = x \wedge x_2,\quad 1 = x \vee x_1 = x \vee x_2 \quad \text{dakle} \quad x_1 = x_1 \vee (x \wedge x_2) = (x_1 \vee x) \wedge$$

$$(x_1 \vee x_2) = (x \vee x_1) \wedge (x_1 \vee x_2) = (x \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2) = (x \wedge x_1) \vee x_2 = (x \wedge x_2) \vee x_2 = x_2 .$$

Korolar 1. *U Booleovoj algebri preslikavanje* $\neg$ *je involutivno, tj.*

$$\neg(\neg x) = x .$$

Dokaz. $(\neg x) \wedge [\neg(\neg x)] = 0 = x \wedge (\neg x) = (\neg x) \wedge x$; $(\neg x) \vee [\neg(\neg x)] = 1 = x \vee (\neg x) = (\neg x) \vee x$, pa su $\neg(\neg x)$ i x komplementi od $\neg x$. Prema **T 4.** je dakle $\neg(\neg x) = x$.

Specijalno iz **K 1.** zaključujemo da je preslikavanje $\neg : S \to S$ u Booleovoj algebri preslikavanje od S na S.

Korolar 2. *U Booleovoj algebri je* $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$.

Dokaz. U komplementiranoj mreži je $0 \wedge 1 = 0$, $0 \vee 1 = 1$. **T 4.** povlači tvrdnju korolara.

7.3. *Teorem* 5. *U Booleovoj algebri* $(S;\ \wedge, \vee)$ *vrijede* *de Morganove relacije*

$$(12a,b) \qquad (\forall x, y \in S)\ \neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y),\quad \neg(x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y) .$$

Dokaz. $(x \wedge y) \wedge [(\neg x) \vee (\neg y)] = [(x \wedge y) \wedge (\neg x)] \vee [(x \wedge y) \wedge (\neg y)] =$

$$\{[x \wedge (\neg x)] \wedge y\} \vee \{x \wedge [y \wedge (\neg y)]\} = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0 ;$$

$$(x \wedge y) \vee [(\neg x) \vee (\neg y)] = \{x \vee [(\neg x) \vee (\neg y)]\} \wedge \{y \vee [(\neg x) \vee (\neg y)]\} =$$

$$\{[x \vee (\neg x)] \vee (\neg y)\} \wedge \{[y \vee (\neg y)] \vee (\neg x)\} = [1 \vee (\neg y)] \wedge [1 \vee (\neg x)] = 1 \wedge 1 = 1 .$$

Prema **T 4.** vrijedi dakle (12a). (12b) dokazuje se analogno.

Teorem 6. *(Dualne Booleove algebre) Ako je* $(S;\ \wedge,\ \vee)$ *Booleova algebra, bit će i* $(S;\ \vee,\ \wedge)$ *Booleova algebra. (Pritom je maksimalni element prve jednak minimalnom elementu druge i obrnuto.)*

Definiramo li naime za elemente $x, y \in S$ nove operacije $x \wedge_1 y = x \vee y$, $x \vee_1 y = x \wedge y$ zadovoljavat će struktura $(S; \wedge_1, \vee_1)$ zahtjeve za Booleovu algebru uz $\neg_1 x = \neg x$, $0_1 = 1$, $1_1 = 0$.

Dokaz. Za sve uvjete osim komplementiranosti ovo je očito jer su oni simetrični obzirom na $\wedge$ i $\vee$. Komplementiranost dobivamo uz $\neg_1 x = \neg x$ iz

$$x \wedge_1 (\neg_1 x) = x \vee (\neg x) = 1 = 0_1, \quad x \vee_1 (\neg_1 x) = x \wedge (\neg x) = 0 = 1_1.$$

Booleova algebra $(S;\ \vee,\ \wedge)$ zove se dualna Booleovoj algebri $(S;\ \wedge, \vee)$. Booleova algebra dualna dualnoj Booleovoj algebri identična je s ishodnom Booleovom algebrom. Odatle je prelaz od dane Booleove algebre na dualnu involutivna operacija, pa je relacija dualnosti među Booleovim algebrama simetrična.

Ako su $(S;\ \wedge, \vee)$, $(S;\ \vee, \wedge)$ dualne Booleove algebre, one su izomorfne. Ovo uviđamo uz preslikavanje $x \to \neg x$ skupa elemenata prve na skup elemenata druge, jer je po **T 5.** $\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$, $\neg(x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y)$.

(Ovo samo po sebi već je dovoljno i za dokaz **T 6**, ako samo uočimo da je svaka struktura izomorfna Booleovoj algebri i sama Booleova algebra.)

Pojam dualne strukture može se analogno uvesti i općenito za mreže ili za distributivne mreže, ali u tim slučajevima općenito za dualnu strukturu ne možemo bez daljnjega tvrditi da je izomorfna s ishodnom.

7.4. *Primjeri.*

7.4.1. Primjer **1.2.1.** je Booleova algebra zbog **5.2.1.** i **6.2.1.**

7.4.2. Neka je T neki dani skup a S neki takav neprazni podskup partitivnog skupa $\mathcal{P}T$ da je S skupovno tijelo, tj. S je zatvoreno obzirom na presjek, uniju i komplementiranje do T, naime:

1° Ako je $x, y \in S$ onda je i $x \cap y, x \cup y \in S$,

2° Ako je $x \in S$, onda je i $(T \setminus x) \in S$.

Lako je provjeriti da je tada (uz $x \wedge y = x \cap y, x \vee y = x \cup y, \neg x = T \setminus x$) $(S;\ \wedge, \vee)$ Booleova algebra.

Primjer **1.2.1.** je specijalni slučaj ovog za $S = \mathcal{P}T$.

Lako se vidi da je u **7.4.2.** umjesto 1° i 2° dovoljno tražiti da vrijedi samo 2° i jedan od zahtjeva

1° a) Ako je $x, y \in S$, onda je i $x \cap y \in S$;

1° b) Ako je $x, y \in S$, onda je i $x \cup y \in S$.

Uzmimo naime da npr. vrijedi 1° a) i 2°. Kako je $x \cup y = T \setminus [(T \setminus x) \cap (T \setminus y)]$, bit će sa $x, y \in S$ i $T \setminus x$, $T \setminus y \in S$ dakle i $(T \setminus x) \cap (T \setminus y) \in S$, dakle i $x \cup y \in S$. Analogno se vidi da 1° b) i 2° podvlači 1° a).

Primjer. Neka je T neki dani bar troelementni skup i A neki dani bar dvoelementni pravi podskup od T. S neka je skup svih onih podskupova x od T za koje je bilo $x \cap A = \emptyset$ bilo $x \cap A = A$. Tada je (uz $S \neq \mathcal{P} T$) ispunjeno 1° a) i 2° pa je $(S; \cap, \cup)$ Booleova algebra.

7.4.3. Primjer **1.2.2.** nije Booleova algebra zbog **6.2.2.**

7.4.4. Primjer **5.2.3.** nije Booleova algebra jer to po **5.2.3.** nije distributivna mreža. Ako još ne bismo znali da ta mreža nije distributivna, mogli bismo po **T 4.** zaključiti da nije Booleova algebra (dakle, posebno, da nije distributivna) i odatle što se po **6.2.4.** može komplementirati na više načina.

7.4.5. Neka je $S = \{a\}$ jednočlani skup i $(S; \wedge, \vee)$ mreža iz **2.2.4.** Ta mreža je Booleova algebra u kojoj je $0 = a = 1$.

7.4.6. *Vježba*. **Pokaži** da je u Booleovoj algebri $(S; \wedge, \vee)$ $0 = 1$ onda i samo onda ako S **sadrži** samo jedan element.

7.4.7. Provjeri da je struktura $(S; \wedge, \vee)$ sa $S = \{0, a, b, 1\}$ i $\wedge, \vee$ danim sa

$x \vee y$

$x \backslash y$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$x \wedge y$

$x \backslash y$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

Booleova algebra izomorfna sa strukturom iz primjera **1.2.1.** sa $T = \{a, b\}$ (uz korespondenciju $\emptyset \leftrightarrow 0$, $\{a\} \leftrightarrow a$, $\{b\} \leftrightarrow b$, $\{a, b\} \leftrightarrow 1$).

7.5. *Napomena*. (***Reprezentacije** Booleovih algebra*)

Može se dokazati da vrijede ovi teoremi:

1 *Svaka konačna Booleova algebra (tj. Booleova algebra* $(S; \wedge, \vee)$ *sa konačnim* S*) izomorfna je s nekom strukturom* $(\mathcal{P} T; \cap, \cup)$, *gdje je* $\mathcal{P} T$ *partitivni skup nekog skupa* T.

2 *Svaka Booleova algebra izomorfna je sa strukturom* $(S; \cap, \cup)$ *gdje je* S *neko skupovno tijelo.*

Odatle izlazi da je primjer **1.2.1.** do izomorfizma najopćenitiji primjer konačne Booleove algebre, a primjer **7.4.2.** je do izomorfizma najopćenitiji primjer Booleove algebre uopće (konačne ili beskonačne).

Za konačne n postoje dakle Booleove algebre $(S; \wedge, \vee)$ sa $\bar{\bar{S}} = n$ ($\bar{\bar{S}}$ je broj elemenata od S) onda i samo onda ako je $n = 2^m$ za neki prirodni broj $m > 0$ i u takvom je slučaju Booleova algebra brojem svojih elemenata određena jednoznačno s tačnošću do izomorfizma. Drugim riječima, za konačne $n = 2^m$ postoji jedna a za konačne $n \neq 2^m$ nijedna apstraktna Booleova algebra sa n elemenata.

8. TEOREMI O DUALITETU U BOOLEOVIM ALGEBRAMA

8.1. *Definicija* 6. *Neka je* $(S; \wedge, \vee)$ *Booleova algebra.* $A = A(a_1, a_2, \ldots, a_k; x_1, x_2, \ldots, x_m) = A(a_i, x_j)$ *neka je neki izraz sagrađen (najviše) od konstanata* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$, *varijabla* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *nad* S *te operacija* $\wedge$, $\vee$, $\neg$. *Ako u* A *svagdje međusobno zamijenimo znakove* $\wedge$ *i* $\vee$ *a konstante* a_i *nadomjestimo njihovim komplementima* $\neg a_i$[1], *dobit ćemo izraz* B *koji ćemo zvati* *d u a l n i m* *izrazu* A *i pisati* $B \equiv A^* \equiv A^*(\neg a_i, x_j)$.

Npr. izrazu $A \equiv x \wedge y$ dualan je izraz $A^* \equiv x \vee y$. Izrazu $A \equiv (\neg y) \wedge (x \wedge 1)$ dualan je izraz $A^* \equiv (\neg y) \vee (x \vee 0)$. Izrazu $A \equiv x$ dualan je izraz $A^* \equiv x$.

Po **D 6.** vidimo da je (zbog involutivnosti od $\neg$) $A^{**} \equiv A$, tj. izraz dualan dualnom izrazu poklapa se s ishodnim izrazom.

Ako je dakle $A^* \equiv B$ bit će $B^* \equiv A$ pa je relacija „je dualno sa" simetrična.

8.2. *Teorem* 7. *U Booleovoj algebri vrijedi*

$$\neg A(a_i, x_j) = A^*(\neg a_i, \neg x_j). \tag{13}$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti indukcijom po broju νA operacija $\wedge$, $\vee$, $\neg$ koje ulaze u A.

Baza indukcije. Neka je $\nu A = 0$. Tada A ima jedan od oblika 1° $A \equiv a$, 2° $A \equiv x$.

1° Ovdje je $A^* = \neg a = A^*(\neg a_i, \neg x_j)$, dok je $\neg A(a_i, x_j) \equiv \neg a$. Vrijedi dakle $\neg A(a_i, x_j) = A^*(\neg a_i, \neg x_j)$ tj. (13) je u tom slučaju zadovoljeno.

2° Sada je $A^* \equiv x$, pa je $A^*(\neg a_i, \neg x_j) \equiv \neg x$. Kako je i $\neg A(a_i, x_j) \equiv \neg x$ opet vrijedi (13).

Korak indukcije. Uzmimo da je **T 6.** već dokazan za izraze B sa $\nu B < k$ $(k > 0)$ i pretpostavimo da je $\nu A = k + 1$. Tada A ima jedan od oblika

1° $A \equiv B_1 \wedge B_2$, 2° $A \equiv B_1 \vee B_2$, 3° $A \equiv \neg B$, gdje je νB_1, νB_2, $\nu B < k$.

1° Primjena **T 5.** i pretpostavka indukcije daje

$$\neg A(a_i, x_j) = (\neg B_1(a_i, x_j)) \vee (\neg B_2(a_i, x_j)) = B_1^*(\neg a_i, \neg x_j) \vee B_2^*(\neg a_i, \neg x_j)$$

— no posljednji izraz je po **D 6.** $\equiv A^*(\neg a_i, \neg x_j)$; (13) dakle u tom slučaju vrijedi i za $\nu A = k + 1$.

2° Dokaz je analogan kao pod 1°.

[1] Time mislimo da konstantu a_i zamijenimo konstantom $b_i (= \neg a_i)$, a ne da umjesto a_i pišemo 2 simbola „$\neg a_i$".

3° Sada je

$$\neg A(a_i, x_j) = \neg\neg B(a_i, x_j) = \neg(B^*(\neg a_i, \neg x_j)) \equiv A^*(\neg a_i, \neg x_j),$$

pa opet (13) vrijedi i za $\nu A = k+1$. Teorem je dokazan.

8.3. *Teorem* 8. *(Prvi teorem o semantičkom dualitetu u Booleovoj algebri) Neka je*

$$A(a_i, x_k) = B(b_j, y_l) \tag{14}$$

neka jednakost dvaju izraza A, B koja vrijedi u nekoj danoj Booleovoj algebri $(S;\ \wedge,\ \vee)$. (a_i, b_j su konstante iz S a x_k, y_l varijable nad S.)

Tada u $(S;\ \wedge,\ \vee)$ vrijedi i dualna jednakost

$$A^*(\neg a_i, x_k) = B^*(\neg b_i, y_l). \tag{14*}$$

(Ne pretpostavljamo da (14) vrijedi u *svakoj* Booleovoj algebri; dakle pogotovo ne možda da bi se (14) dalo izvesti iz jednakosti za koje smo ranije pokazali da vrijede u svakoj Booleovoj algebri.)

Dokaz. Ako na (14) primijenimo operaciju $\neg$ i **T 7**, dobit ćemo

$$A^*(\neg a_i, \neg x_k) = \neg A(a_i, x_k) = \neg B(b_j, y_l) = B^*(\neg b_j, \neg y_l).$$

Ako u dobivenu jednakost (prvog i posljednjeg člana) za varijable x_k, y_l uvrstimo negirane iste varijable, tj. $\neg x_k$, $\neg y_l$ izlazi zbog involutivnosti operacije $\neg$ da vrijedi (14*).

(Ako **T 8.** primijenimo na (14*) dobit ćemo opet (14).)

8.4. *Teorem* 9. *(Drugi teorem o semantičkom dualitetu u Booleovim algebrama) Neka je*

$$A(a_i, x_k) < B(b_j, y_l) \tag{15}$$

relacija koja vrijedi između A i B u danoj Booleovoj algebri $(S;\ <;\ \wedge,\ \vee)$ (za svaki izbor vrijednosti varijabla x_k, y_l u S).

Tada u $(S;\ <;\ \wedge,\ \vee)$ vrijedi i dualna relacija

$$B^*(\neg b_j, y_l) < A^*(\neg a_i, x_k). \tag{15*}$$

Dokaz. (15) znači zbog (6a) da je $A \wedge B = A$ pa je prema **T 8.** $(A \wedge B)^* \equiv A^* \vee B^* = A^*$, što prema (6b) znači da je $B^* < A^*$.

9. SINTAKTIČKI DUALITET U STRUKTURAMA $(S;\ \wedge,\ \vee,\ \neg)$

9.1. *Definicija* 7. *Neka je $(S;\ \wedge,\ \vee,\ \neg)$ $(S \neq \emptyset)$ algebarska struktura sa dvije binarne operacije $\wedge$, $\vee$ i unitarnom operacijom $\neg$ koja je involutivna. Neka je $A \equiv A(a_i, x_j)$ izraz sagrađen (najviše) od konstanata a_i iz S, varijabla x_j nad S i operacija $\wedge, \vee, \neg$. Ako u A međusobno zamijenimo znakove $\wedge, \vee$ i konstante a_i nadomjestimo konstantama $\neg a_i$ dobit ćemo izraz B koji ćemo označiti sa $A^*(\neg a_i, x_j)$ i zvati dualnim izrazu A. (Pritom opet kod nadomještavanja a_i sa $\neg a_i$ razumijevamo da umjesto a_i pišemo $b_i (= \neg a_i)$, a ne oba simbola „$\neg a_i$".)*

Po **D 7.** je $A^{**} \equiv A$.

9.2. *Teorem* 10. *(Metateorem o sintaktičkom dualitetu) Neka je* $(S;\ \wedge,\ \vee,\ \neg)$ *algebarska struktura sa dvije binarne operacije* $\wedge$, $\vee$ *i unitarnom involutivnom operacijom* $\neg$. *U toj strukturi neka vrijedi sistem* Σ *jednakosti*

$$A_\gamma(a_i, x_k) = B_\gamma(b_j, y_l), \qquad \gamma \in \Gamma$$

gdje su a_i, b_j *konstante iz* S *a* x_k, x_l *varijable nad* S *(skupovi* $\{a_i\}$, $\{b_j\}$, $\{x_k\}$, $\{y_l\}$ *mogu se razlikovati za različite* γ*). Sustav* Σ *neka je takav da ako sadrži jednakost* $A(a_i, x_k) = B(b_j, y_l)$ *onda sadrži i dualnu jednakost (u smislu D 7.)* $A^*(\neg a_i, x_k) = B^*(\neg b_i, y_l)$.

Ako se tada iz Σ *može (uz uobičajena pravila računanja s jednakostima u algebri) izvesti jednakost* σ:

$$A_0(a_i, x_k) = B_0(b_j, y_l)$$

onda se iz Σ *može izvesti i dualna jednakost* σ^*:

$$A_0^*(\neg a_i, x_k) = B_0^*(\neg b_j, y_l).$$

Dokaz. Ako pratimo izvod od σ i svaki korak zamijenimo „dualnim" (što je moguće po pretpostavci o Σ), dobit ćemo izvod od σ^*.

9.3. *Primjeri.*

9.3.1. Mreže možemo shvatiti kao $(S;\ \wedge,\ \vee,\ \neg)$-strukture koje zadovoljavaju uvjete **T 10**, ako $\neg$ definiramo kao identičko preslikavanje $I: x \to x$ od S na S i kao Σ uzmemo sistem jednakosti (2a,b), (3a,b) (4a,b). U **4.1.** izveli smo da u $(S;\ \wedge,\ \vee)$ vrijedi $x \wedge x = x$. Dakle se može izvesti i $x \vee x = x$.

9.3.2. Distributivne mreže možemo shvatiti kao $(S;\ \wedge,\ \vee,\ \neg)$-strukture koje zadovoljavaju uvjete **T 10**, ako opet $\neg$ definiramo kao identičko preslikavanje a kao Σ uzmemo pored (2a,b), (3a,b), (4a,b) još (7a,b).

Umjesto (7a,b) možemo prema **5.2.6.** uzeti samo (7'), koja je jednakost sama sebi dualna (autodualna jednakost).

9.3.3. Booleove algebre zadovoljavaju uvjete **T 10**, ako kao Σ uzmemo npr. (2a,b), (3a,b), (4a,b), (7a,b), $x \wedge (\neg x) = 0$, $x \vee (\neg x) = 1$.

Uoči međutim ovu razliku u primjeni **T 8.** i **T 10.** na Booleove algebre:

Ako $A = B$ vrijedi u Booleovoj algebri $(S;\ \wedge,\ \vee)$, onda po **T 8.** i $A^* = B^*$ vrijedi u $(S;\ \wedge, \vee)$. Ako se međutim $A = B$ čak može izvesti iz Σ za Booleove algebre, onda se po **T 10.** i $A^* = B^*$ može izvesti (dakle i vrijedi). No u tom slučaju (ako se $A = B$ može izvesti) može se i po **T 8.** zaključiti da $A^* = B^*$ vrijedi, tj. ta jednadžba se onda i uz **T 8.** može dokazati dakle i izvesti. **T 8.** kaže nam dakle za slučaj Booleovih algebra više nego li **T 10.** jer je moguće da u nekoj specijalnoj Booleovoj algebri vrijedi neka jednakost σ koja se ne može općenito izvesti iz Σ za Booleove algebre. Npr. jednakost σ: $x = x \wedge y$ vrijedi u Booleovoj algebri gdje je $S = \{a\}$ jednočlan a sigurno se ne može izvesti iz Σ jer za Booleove algebre σ općenito ne vrijedi. Po **T 8.** možemo i sada zaključiti da u toj specijalnoj Booleovoj algebri vrijedi i σ^* dok nam **T 10.** u ovom slučaju ne bi kazivao ništa.

10. (&, $\vee$, $\neg$)-ALGEBRA SUDOVA KAO BOOLEOVA ALGEBRA

10.1. Neka je $S=\{\top, \bot\}$ i neka su u S definirane operacije &, $\vee$, $^{-}$ kao u algebri sudova. Lako je provjeriti da je (S; &, $\vee$) Booleova algebra.

10.2. Neka je opet $S=\{\top, \bot\}$ i neka su u S definirane operacije $\vee$, &, $\neg$ kao u algebri sudova. (S; $\vee$, &) je Booleova algebra dualna Booleovoj algebri (S; &, $\vee$) iz **10.1.**

10.3. Neka je T skup koji sadrži simbole $\top$, $\bot$ i prebrojivo beskonačno mnogo (od $\top$ i $\bot$ i međusobno) različitih simbola (varijabla) x_i:

$$T=\{\top, \bot, x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

Z neka je neki dani neprazni (konačni ili beskonačni) podskup od T.

Neka je dalje $\mathcal{Z}$ skup svih (konačnih) izraza koji se mogu sagraditi povezivanjem elemenata od Z simbolima za operacije &, $\vee$, $\neg$ (time da &, $\vee$ kao binarne operacije povezuju po dvije, a $\neg$ kao unitarna operacija djeluje na po jednu komponentu izraza). U $\mathcal{Z}$ uvedimo relaciju ekvivalencije R time da za $z_1, z_2 \in \mathcal{Z}$ stavimo $z_1 R z_2$ onda i samo onda, ako su z_1, z_2, shvaćeni kao formule algebre sudova, semantički jednaki tj. ako za svaku zamjenu varijabla x_i elementima iz $\{\top, \bot\}$, z_1 i z_2 poprimaju međusobno jednake vrijednosti istinitosti (uz interpretaciju &, $\vee$, $^{-}$ kao u algebri sudova). Sa R je određena particija od $\mathcal{Z}$ na disjunktne klase. Kvocijentna struktura $\mathcal{Z}/R$ je skup tih klasa; označimo taj skup sa S_Z. U S_Z definirat ćemo operacije $\wedge, \vee, \neg$ ovako: Ako su $x, y \in S_Z$, odaberemo u tim klasama (elementima od $\mathcal{Z}/R$) po jedan element od $\mathcal{Z}$ kao predstavnika γ klase. Neka je $\gamma x = x'$, $\gamma y = y'$. $x \wedge y$ definiramo sada kao klasu koja sadrži x' & y'; $x \vee y$ definiramo kao klasu koja sadrži $x' \vee y'$ a $\neg x$ kao klasu koja sadrži $\neg x'$. Odatle kako smo konstruirali $\mathcal{Z}/R$ lako uviđamo da su te definicije operacija dobre, tj. da je njihov rezultat jednoznačno određen (neovisan o izboru predstavnika klasa x, y).

Prema konstrukciji $\mathcal{Z}/R$ i definiciji $\wedge, \vee, \neg$ u S_Z lako se provjerava da je (S_Z; $\wedge, \vee$) Booleova algebra.

Ako Z sadrži konačno mnogo elemenata bit će i S_Z konačan. Tačnije, ako Z sadrži n simbola x_i (a nijedan od simbola $\top$, $\bot$), S_Z će sadržavati 2^{2^n} elemenata jer u algebri sudova ima upravo toliko različitih funkcija od n danih varijabla. Ako Z ne sadrži nijednu varijablu a bar jedan od elemenata $\top$, $\bot$ imat će S_Z 2 elementa i u tom se slučaju **10.3.** reducira na **10.1.** Ako Z sadrži n ($n>1$) varijabla (simbola x_i) i bar jedan od simbola $\top$, $\bot$, S_Z će opet sadržavati 2^{2^n} elemenata jer dodavanje simbola $\top$, $\bot$ ne povećava broj funkcija koje se mogu sagraditi, a već za $n=1$ je $2^{2^1}=2^2=4>2$.

Vidimo dakle da za konačni Z koji sadrži n ($n>0$) simbola x_i, S_Z ima 2^{2^n} elemenata (bez obzira da li Z sadrži i neki — ili oba — od simbola $\top$, $\bot$).

Za (prebrojivo) beskonačan Z i S_Z će biti prebrojivo beskonačan (jer u $\mathcal{Z}$ ulaze samo izrazi konačne duljine).

U (S_Z; $\wedge, \vee$) bit će 1 skup svih identički istinitih formula (koje se mogu sagraditi od elemenata od Z i &, $\vee$, $\neg$), a 0 će biti skup svih identički neistinitih formula.

Analogno bismo uz zamjenu & sa $\vee$ i obrnuto dobili upravo razmotrenim dualne Booleove algebre.

Prednja izvođenja pokazuju u kom se smislu skup formula algebre sudova ograničene na operacije $\&, \vee, \neg$ može shvatiti kao Booleova algebra.

10.4. Neka je S skup svih funkcija algebre sudova nad varijablama iz nekog danog najviše prebrojivo beskonačnog skupa.

α) Za $x, y \in S$ neka je $x \wedge y$ jednako funkciji određenoj sa $x \& y$, $x \vee y$ jednako funkciji određenoj sa $x \vee y$ (disjunkcija funkcija x, y).

Lako možemo provjeriti da je $(S; \wedge, \vee)$ Booleova algebra (uz $0 = \perp$, $1 = \top$), izomorfna s odgovarajućom Booleovom algebrom $(S_Z, \wedge, \vee)$ iz **10.3.**

β) Za $x, y \in S$ neka je $x \wedge y$ disjunkcija funkcija x, y a $x \vee y$ jednako funkciji određenoj sa $x \& y$. $(S; \wedge, \vee)$ je Booleova algebra dualna Booleovoj algebri iz **10.4.** α) (uz $0 = \top$, $1 = \perp$).

α) i β) pokazuje u kom se smislu skup funkcija algebre sudova može shvatiti kao Booleova algebra.

10.5. *Vježba.* Provjeri da je Booleova algebra $(S_Z; \wedge, \vee)$ uz $Z = \{x_1\}$ izomorfna s Booleovom algebrom iz **7.4.7.** (npr. uz pridruženje: klasa od $x_1 \vee (\neg x_1) \leftrightarrow 1$, klasa od $x_1 \leftrightarrow b$, klasa od $\neg x_1 \leftrightarrow a$, klasa od $x_1 \& (\neg x_1) \leftrightarrow 0$.

10.6. Neka je $A = B$ neka semantička jednakost izraza sagrađenih (najviše) od konstanata $\top, \perp$, varijabla x_i i simbola operacija $\&, \vee, \neg$. Pridružimo toj jednakosti jednakost $A' = B'$ koju formalno dobivamo ako u $A = B$ nadomjestimo $\top$ sa 1, $\perp$ sa 0 i & sa $\wedge$. $A' = B'$ je onda teorem u općoj (svakoj) Booleovoj algebri $(S; \wedge, \vee)$ tj. može se izvesti iz (2a,b), (3a,b), (4a,b), (7a,b) i uvjeta **D 4.**

Dokaz. Po pretpostavci, zbog **II T 12.** $A = B$ je i sintaktička jednakost algebre sudova, tj. može se izvesti iz II **D 12.** 1° do 12°. No sve te jednakosti vrijede uz zamjenu $\top$ sa 1, $\perp$ sa 0 i & sa $\wedge$ i u općoj Booleovoj algebri pa je i $A' = B'$ izvedivo u općoj Booleovoj algebri.

Obrnuto, neka je $A' = B'$ neka jednakost izvediva u općoj Booleovoj algebri, tako da ta jednakost od varijabla sadrži (najviše) varijable x_i a od konstanata najviše 1 i 0. Pridružimo toj jednakosti jednakost $A = B$ koju formalno dobivamo ako u $A' = B'$ nadomjestimo 1 sa $\top$, 0 sa $\perp$, $\wedge$ sa &. No aksiomi Booleove algebre ((2a,b), (3a,b), (4a,b), (7a,b) i uvjeti **D 4.**) vrijede —opet uz ista nadomještavanja — i u algebri sudova (kao sintaktičke jednakosti), pa je dakle $A = B$ sintaktička a po II **T 11.** odatle i semantička jednakost algebre sudova.

Vrijedi dakle teorem:

$A = B$ je semantička (sintaktička) jednakost algebre sudova onda i samo onda ako je $A' = B'$ teorem (tj. izvedivo iz aksioma) Booleove algebre.

Ovaj teorem dakako nije iznenađujući jer su aksiomi Booleove algebre upravo i bili formulirani s namjerom da dobivena teorija obuhvati algebru sudova. Ovo je u stvari bilo postignuto već u II **10.** jer je tamo definirana struktura ekvivalentna s Booleovom algebrom. Razlika u formulaciji Booleove algebre kako smo je uveli u ovoj Glavi prema strukturi definiranoj u II **10.** je u tome, što je ovdje Booleova algebra uvedena kao specijalna vrsta *mreža* (tj. kao mreža koja je komplementirana i distributivna).

11. BOOLEOVI PRSTENI S JEDINICOM

11.1. *Definicija* 8. *Algebarska struktura* $(S;\ +,\ \cdot,\ ')$ *s dvije binarne operacije* $+,\ \cdot$, *i jednom unitarnom operacijom* $'$ *zove se* ***Booleov prsten s jedinicom***, *ako vrijedi;*

(16)	$(\forall x, y \in S)$	$x+y=y+x$	(*komutativnost zbroja*)
(17)	$(\forall x, y, z \in S)$	$(x+y)+z=x+(y+z)$	(*asocijativnost zbroja*)
(18)	$(\exists\, 0 \in S)(\forall x \in S)$	$x+0=x$	(*postoji neutralni element* 0 *za zbroj*[1])
(19)	$(\forall x \in S)$	$x+x'=0$	(*uz svaki element postoji suprotni*)
(20)	$(\forall x, y, z \in S)$	$(xy)z=x(yz)$	(*asocijativnost produkta*)
(21)	$(\forall x, y, z \in S)$	$x(y+z)=xy+xz$; $(x+y)z=xz+yz$	(*distributivnost množenja prema zbrajanju*)
(22)	$(\forall x \in S)$	$xx=x$	(*idempotentnost produkta*)
(23)	$(\exists\, 1 \in S)(\forall x \in S)$	$x \cdot 1=x$	(*postoji desni neutralni element za produkt*)

11.2. *Primjeri.*

11.2.1. Neka je T neki skup a $S=\mathcal{P}\,T$ partitivni skup od T. Definirajmo u S operacije $+,\ \cdot,\ '$ tako da za $x, y \in S$ (tj. $x, y \subset T$) stavimo $x \cdot y = x \cap y$, $x+y=(x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ (tj. $x+y$ je onaj podskup od T koji sadrži tačno one elemente od T koji su elementi jednog ali ne i drugog od podskupova x, y od T), $x'=x$. Tada je lako provjeriti da je $(S;\ +,\ \cdot,\ ')$ Booleov prsten s jedinicom (uz $0=\emptyset$, $1=T$).

11.2.2. Neka je $S=\{0, 1\}$, $+$ i $\cdot$ neka su zbrajanje odnosno množenje modulo 2, a $x'=x$. Tada je, kao što se lako provjerava, $(S;\ +,\ \cdot,\ ')$, Booleov prsten s jedinicom.

11.2.3. Neka je S_P skup polinoma sa koeficijentima iz $(S;\ +,\ \cdot,\ ')$ iz **11.2.2.** nad varijablama iz nekog podskupa P prebrojivo beskonačnog skupa varijabla $x, y, z, \ldots$ koje varijable su po definiciji idempotentne, tj. polinomi se po definiciji identificiraju uz jednakosti $\xi^2=\xi$ za sve varijable, i neka je $'$ identitet. Tada je $(S_P;\ +,\ \cdot,\ ')$ Booleov prsten s jedinicom.

11.2.4. Neka je $S=\{0, a, b, 1\}$ i $+,\ \cdot$ dano tablicama na str. 106. i $x'=x$. Provjeri da je $(S;\ +,\ \cdot,\ ')$ Booleov prsten s jedinicom.

11.3. *Neka svojstva Booleovih prstena s jedinicom.*

11.3.1. Ako je $(S;\ +,\ \cdot,\ ')$ Booleov prsten s jedinicom, vrijedi zbog (16) do (19) da je $(S,\ +)$ *aditivna grupa.*

---

[1] Dakle je $S \neq \emptyset$.

11.3.2. U Booleovom prstenu s jedinicom vrijedi

(24) $(\forall x \in S) \quad x+x=0.$

$x+y$

$x \backslash y$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	0	1	b
b	b	1	0	a
1	1	b	a	0

$x \cdot y$

$x \backslash y$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

Dokaz. $x+y+xy+yx=$ (zbog (22)) $x^2+y^2+xy+yx=$ (zbog (21)) $(x+y)^2=$ (zbog (22)) $x+y$. Dakle je zbog **11.3.1.**

(25) $(\forall x, y \in S) \quad xy+yx=0.$

Stavimo li $y=x$, izlazi $x^2+x^2=0$ pa zbog (22) vrijedi (24).

11.3.3. Ako u (24) pribrojimo lijevo i desno od jednakosti element x' izlazi zbog (17) i (18)

(26) $(\forall x \in S) \quad x'=x.$

(26) opravdava da Booleov prsten s jedinicom $(S; +, \cdot, ')$ označujemo i kraće s $(S; +, \cdot)$.

11.3.4. Iz (25) izlazi $(xy)'=yx$; kako je u drugu ruku prema (26) $(xy)'=xy$ vrijedi

(27) $(\forall x, y \in S) \quad xy=yx$

tj. Booleov prsten s jedinicom je *komutativan.*

11.3.5. Booleov prsten s jedinicom sadrži samo jednu jedinicu i samo jednu nulu.

Dokaz. Neka su 1_1, 1_2 jedinice nekog Booleovog prstena s jedinicom. Tada je zbog (23) i (27) $1_1=1_1\cdot 1_2=1_2\cdot 1_1=1_2$. Analogno, ako su 0_1, 0_2 njegove nule, bit će zbog (18) i (16) $0_1=0_1+0_2=0_2+0_1=0_2$.

11.3.6. U Booleovom prstenu s jedinicom vrijedi

(28) $(\forall x \in S) \quad x\cdot 0=0.$

Dokaz. $x\cdot 0=x(0+0)=x\cdot 0+x\cdot 0=0.$

11.3.7. U Booleovom prstenu s jedinicom $(S; +, \cdot, ')$ vrijedi $0=1$ onda i samo onda ako je S jednoelementni skup.

Zaista, za $S=\{a\}$ uz $a+a=a$, $aa=a$, $a'=a$ lako je provjeriti da je $(\{a\}; +, \cdot, ')$ Booleov prsten s jedinicom $1=a=0$.

Obrnuto, ako u nekom Booleovom prstenu s jedinicom $(S; +, \cdot, ')$ vrijedi $1=0$ bit će zbog (23) i (28) za svaki $x \in S$

$$x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0,$$

pa je $S = \{0\}$.

11.4. *Dualni Booleovi prsteni s jedinicom.*

11.4.1. *Teorem* 11. *Neka je* $(S;\ +,\ \cdot)$ *Booleov prsten s jedinicom i neka su operacije* $+_1$ *i* $\cdot_1$ *definirane sa*

$$x +_1 y = 1 + x + y,$$

$$x \cdot_1 y = x + y + xy.$$

Tada je $(S;\ +_1, \cdot_1)$ *Booleov prsten s jedinicom izomorfan* $(S;\ +,\ \cdot)$. *Ovaj novi prsten zvat ćemo prvotnom prstenu* ***dualnim*** *prstenom. (Pritom je jedinica prvog prstena nula drugog i obrnuto.)*

Dokaz. Za $(S;\ +_1,\ \cdot_1)$ treba provjeriti (16) do (23). (16) i (17) je očito ispunjeno. (18) je ispunjeno za $0_1 = 1$ jer je $x +_1 1 = 1 + x + 1 = x$. (19) je ispunjeno za $x' = x$ jer je $x +_1 x = 1 + x + x = 1 = 0_1$. (23) je ispunjeno za $1_1 = 0$ jer je $x \cdot_1 0 = x + 0 + x \cdot 0 = x$. (22) je ispunjeno jer je $x \cdot_1 x = x + x + xx = 0 + x = x$. Dokažimo (20):

$$(x \cdot_1 y) \cdot_1 z = (x + y + xy) + z + (x + y + xy)\, z = x + y + z + xy + xz + yz + xyz.$$

Ovaj izraz simetričan je u x, y, z pa će biti jednak izrazu za $x \cdot_1 (y \cdot_1 z)$ jer je $\cdot_1$ očito komutativno pa je $x \cdot_1 (y \cdot_1 z) = (y \cdot_1 z) \cdot_1 x$.

Dokažimo još (21):

$$x \cdot_1 (y +_1 z) = x + (1 + y + z) + x(1 + y + z) = 1 + y + z + xy + xz;$$

$$x \cdot_1 y +_1 x \cdot_1 z = 1 + (x + y + xy) + (x + z + xz) = 1 + y + z + xy + xz.$$

Zbog komutativnosti od $\cdot_1$ druga jednakost (21) izlazi iz prve.

Da bi uvidjeli izomorfiju Booleovih prstena s jedinicom $(S;\ +,\ \cdot)$, $(S;\ +_1,\ \cdot_1)$ promotrimo preslikavanje $x \to \bar{x} = x + 1$ skupa elemenata prvog na skup elemenata drugog (preslikavanje je *na* jer za $x = y + 1$ vrijedi $x \to \bar{x} = x + 1 = y + 1 + 1 = y$; ono je uzajamno jednoznačno jer $\bar{x} = \bar{y}$ znači da je $x + 1 = y + 1$ dakle $(x + 1) + 1 = (y + 1) + 1$ tj. $x = y$). Uz to preslikavanje je

$$\bar{x} +_1 \bar{y} = 1 + (1 + x) + (1 + y) = 1 + (x + y) = \overline{(x + y)},$$

$$\bar{x} \cdot_1 \bar{y} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{x}\bar{y} = (1 + x) + (1 + y) + (1 + x)(1 + y) = 1 + xy = \overline{(xy)};$$

izomorfija je dokazana. (Ovo samo po sebi već je dovoljno i za dokaz **T 11**, ako znamo da je svaka struktura izomorfna Booleovom prstenu s jedinicom i sama Booleov prsten s jedinicom.)

11.4.2. Pokažimo još da je Booleov prsten s jedinicom $(S;\ +_2,\ \cdot_2)$, dualan Booleovom prstenu s jedinicom $(S;\ +_1,\ \cdot_1)$, identičan ishodnom Booleovom prstenu s jedinicom $(S;\ +,\ \cdot)$. Zaista,

$$x +_2 y = 1_1 +_1 x +_1 y = (0 +_1 x) +_1 y = 1 + (1 + 0 + x) + y = x + y,$$

$$x \cdot_2 y = x +_1 y +_1 x \cdot_1 y = (x +_1 y) +_1 x \cdot_1 y = 1 + (1 + x + y) + (x + y + xy) = xy.$$

Prelaz od Booleovog prstena s jedinicom na dualni je dakle involutivna operacija pa je relacija dualnosti među Booleovim prstenima s jedinicom simetrična.

Npr. Booleovi prsteni s jedinicom iz **13.2.** i **13.1.** (vidi tamo!) međusobno su dualni, jer je

$$(\perp \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow y = (x \,\&\, \neg y) \vee (y \,\&\, \neg x) \quad \text{(ekskluzivna disjunkcija)},$$
$$(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \vee y) = x \,\&\, y \quad \text{(konjunkcija)}.$$

12. VEZA IZMEĐU BOOLEOVIH PRSTENA S JEDINICOM I BOOLEOVIH ALGEBRA

12.1. *Teorem* 12. *Neka je* $(S;\ +,\ \cdot)$ *Booleov prsten s jedinicom* 1. *Definirajmo u S operacije* $\wedge,\ \vee,\ \neg$ *prema*

$$x \wedge y = xy, \qquad x \vee y = x + y + xy, \qquad \neg x = 1 + x.$$

Tada je $(S;\ \wedge,\ \vee)$ *Booleova algebra.*

Dokaz. (2a) vrijedi zbog (27) a (3a) zbog (20). (2b) vrijedi zbog (16) i (27). Dokažimo (3b):

$$(x \vee y) \vee z = (x + y + xy) + z + (x + y + xy)\, z = x + y + xy + z + xz + yz + xyz;$$

u drugu ruku je

$$x \vee (y \vee z) = x + (y + z + yz) + x\,(y + z + yz) = x + y + z + yz + xy + xz + xyz.$$

Dalje je

$$x \wedge (x \vee y) = x\,(x + y + xy) = x^2 + xy + xy = x + 0 = x,$$
$$x \vee (x \wedge y) = x + xy + x\,(xy) = x + xy + x^2 y = x + xy + xy = x + 0 = x$$

pa vrijedi (4a,b). Zatim je

$$x \wedge (y \vee z) = x\,(y + z + yz) = xy + xz + xyz,$$

a u drugu ruku je

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = xy + xz + xy \cdot xz = xy + xz + x^2 yz = xy + xz + xyz$$

pa vrijedi (7a). Konačno,

$$x \wedge (\neg x) = x\,(1 + x) = x + x^2 = x + x = 0$$

neovisno o x i

$$x \vee (\neg x) = x + (1 + x) + x\,(1 + x) = x + 1 + x + x + x^2 =$$
$$x + x + 1 + x + x = 0 + 1 + 0 = 1,$$

neovisno o x.

12.2. *Teorem* 13. *Neka je* $(S;\ \wedge,\ \vee,\ \neg)$ *Booleova algebra. Definirajmo u S operacije* $+,\ \cdot,\ '$ *sa*

$$x + y = [x \wedge (\neg y)] \vee [y \wedge (\neg x)], \quad xy = x \wedge y, \quad x' = x.$$

Tada je $(S;\ +,\ \cdot,\ ')$ *Booleov prsten s jedinicom.*

Dokaz. Označimo $x \wedge (\neg x)$ sa 0 a $x \vee (\neg x)$ sa 1.

Zbog (3a) vrijedi (20). Zbog (2b) vrijedi (16). Zbog **4.1.** vrijedi (22). Zbog (4a) je $x \cdot 1 = x \wedge 1 = x \wedge [x \vee (\neg x)] = x$ pa vrijedi (23).

$$x + x' = x + x = [x \wedge (\neg x)] \vee [x \wedge (\neg x)] = 0 \vee 0 = 0$$

pa vrijedi (19). Dalje,

$$x(y+z) = x \wedge \{[y \wedge (\neg z)] \vee [z \wedge (y)]\} =$$

(zbog (7a,b))

$$[x \wedge y \wedge (\neg z)] \vee [x \wedge z \wedge (\neg y)];$$

u drugu ruku je zbog **T 5.**

$$xy + xz = \{(x \wedge y) \wedge [\neg (x \wedge z)]\} \vee \{(x \wedge z) \wedge [\neg (x \wedge y)]\} =$$

$$\{x \wedge y \wedge [(\neg x) \vee (\neg z)]\} \vee \{x \wedge z \wedge [(\neg x) \vee (\neg y)]\} =$$

$$\{[x \wedge y \wedge (\neg x)] \vee [x \wedge y \wedge (\neg z)]\} \vee \{[x \wedge z \wedge (\neg x)] \vee [x \wedge z \wedge (\neg y)]\} =$$

$$(\text{zbog } x \wedge (\neg x) = 1 \quad \text{i} \quad 1 \wedge y = 1 \wedge z = 0)$$

$$[x \wedge y \wedge (\neg z)] \vee [x \wedge z \wedge (\neg y)],$$

pa vrijedi prva jednakost (21). No zbog (2a) je $\cdot$ komutativno pa je $(x+y)z = z(x+y) =$ (zbog upravo dokazanog) $zx + zy = xz + yz$, dakle vrijedi i druga jednakost (21).

Zatim, zbog $\neg 0 = 1$ bit će $x + 0 = (x \wedge 1) \vee [(\neg x) \wedge 0] = x \vee 0 = x$ pa vrijedi (18). Konačno, da bismo dokazali asocijativnost zbroja, uočimo najprije da je po **T 5.**

$$\neg (x+y) = \neg \{[x \wedge (\neg y)] \vee [y \wedge (\neg x)]\} = [(\neg x) \vee y] \wedge [(\neg y) \vee x] =$$

(zbog distributivnosti)

$$[(\neg x) \wedge (\neg y)] \vee [(\neg x) \wedge x] \vee [y \wedge (\neg y)] \vee (y \wedge x) =$$

$$(\text{zbog } x \wedge (\neg x) = y \wedge (\neg y) = 0)\ (x \wedge y) \vee [(\neg x) \wedge (\neg y)].$$

Odatle je

$$(x+y)+z = [(x+y) \wedge (\neg z)] \vee [z \wedge \neg (x+y)] =$$

$$(\{[x \wedge (\neg y)] \vee [y \wedge (\neg x)]\} \wedge (\neg z)) \vee (z \wedge \{(x \wedge y) \vee$$

$$[(\neg x) \wedge (\neg y)]\}) = [x \wedge (\neg y) \wedge (\neg z)] \vee [y \wedge (\neg x) \wedge (\neg z)] \vee$$

$$[z \wedge x \wedge y] \vee [z \wedge (\neg x) \wedge (\neg y)].$$

Ako na desnoj strani međusobno zamijenimo x i z prelazi ona sama u sebe dok lijeva prelazi u $(z+y)+x = x+(y+z)$. Vrijedi dakle

$$(x+y)+z = x+(y+z) \quad \text{tj.} \quad (17).$$

12.3. *Teorem* 14. *Neka je* $(S;\ +,\ \cdot)$ *neki Booleov prsten s jedinicom,* $(S;\ \wedge,\ \vee)$ *njemu po* **T 12.** *pridružena Booleova algebra, a* $(S;\ +_1,\ \cdot_1)$ *ovoj po*

T 13. *pridružen Booleov prsten s jedinicom. Tada je dobiveni Booleov prsten identičan s ishodnim, tj.* $x +_1 y = x + y$, $x \cdot_1 y = xy$.

Obrnuto, neka je $(S;\ \wedge,\ \vee)$ *neka Booleova algebra,* $(S;\ +,\ \cdot)$ *njoj po* T 13. *pridružen Booleov prsten s jedinicom, a* $(S;\ \wedge_1,\ \vee_1)$ *ovom po* T 12. *pridružena Booleova algebra. Tada je dobivena Booleova algebra identična s ishodnom, tj. vrijedi* $x \wedge_1 y = x \wedge y$, $x \vee_1 y = x \vee y$.

Prema tome relacija pridruženosti između Booleovih algebra i Booleovih prstena s jedinicom je simetrična.

Dokaz. $x +_1 y = [x \wedge (\neg y)] \vee [y \wedge (\neg x)] = x(1+y) \vee y(1+x) = x(1+y) +$

$$y(1+x) + x(1+y)\,y(1+x) = x + xy + y + xy + xy + x^2y + xy^2 + x^2y^2 = x + y$$

(zbog (22), (24), (27); $x \cdot_1 y = x \wedge y = xy$.

Obrnuto,

$x \wedge_1 y = xy = x \wedge y$; $x \vee_1 y = (x+y) + xy = [(x+y) \wedge \neg(xy)] \vee [(xy) \wedge \neg(x+y)] =$

(vidi dokaz T 13.)

$$(\{[x \wedge (\neg y)] \vee [y \wedge (\neg x)]\} \wedge \neg(x \wedge y)) \vee ((x \wedge y) \wedge \{(x \wedge y) \vee [(\neg x) \wedge (\neg y)]\}) =$$

$$(\{[x \wedge (\neg y)] \vee [y \wedge (\neg x)]\} \wedge \neg(x \wedge y)) \vee (x \wedge y) =$$

$$(\{[x \wedge (\neg y)] \vee [y \wedge (\neg x)]\} \vee (x \wedge y)) \wedge [\neg(x \wedge y) \vee (x \wedge y)] =$$

$$\{[x \wedge (\neg y)] \vee [y \wedge (\neg x)]\} \vee (x \wedge y) = x \vee y.$$

12.4. U međusobno pridruženim Booleovim algebrama $(S;\ \wedge,\ \vee)$ i Booleovim prstenima s jedinicom $(S;\ +,\ \cdot)$ maksimalni odnosno minimalni element 1 odnosno 0 od $(S;\ \wedge,\ \vee)$ poklapa se s jedinicom odnosno nulom od $(S;\ +,\ \cdot)$.

Dokaz. Označimo maksimalni element od $(S;\ \wedge,\ \vee)$ sa 1_a a minimalni sa 0_a. Jedinicu od $(S;\ +,\ \cdot)$ označ.mo sa 1_p a nulu sa 0_p. Tada je zbog **T 14.**

$$0_a = 0_a \wedge 0_p = 0_a \cdot 0_p = 0_p,$$

$$1_a = 1_a \vee 1_p = 1_a + 1_p + 1_a 1_p = 1_a + 1_p + 1_a = 0_p + 1_p = 1_p.$$

12.5 *Vježba.* Pokaži da je Booleova algebra iz **7.4.7** pridružena Booleovom prstenu s jedinicom iz **11.2.4.**

12.6. Lako se uviđa da su izomorfnim Booleovim algebrama pridruženi izomorfni Booleovi prsteni s jedinicom i obrnuto. Naime, neka je

$(S; \wedge, \vee) \cong (S'; \wedge', \vee')$ uz pridruženje elemenata $S \ni x \leftrightarrow x' \in S'$, tj.

$$(x \wedge y)' = x' \wedge' y',\quad (x \vee y)' = x' \vee' y',\ (\neg x)' = \neg' x'.$$

Za pridružene prstene tada vrijedi

$$x + y = [x \wedge (\neg y)] \vee [y \wedge (\neg x)],\quad xy = x \wedge y;$$

$$(x+y)' = [x \wedge (\neg y)]' \vee' [y \wedge (\neg x)]' = [x' \wedge' (\neg' y')] \vee' [y' \wedge' (\neg' x')]$$

$$= x' +' y';\quad (x \cdot y)' = (x \wedge y)' = x' \wedge' y' = x' \cdot' y'.$$

Oni su dakle također međusobno izomorfni (uz isto pridruženje elemenata). Obrnuta tvrdnja dokazuje se analogno.

Odatle prema **7.5.1°** izlazi da konačni Booleovi prsteni postoje samo za slučaj kada je broj elemenata od S jednak 2^m, m prirodni broj, i da su tim brojevima određeni jednoznačno od izomorfizma. Najopćenitiji primjer konačnih Booleovih prstena s jedinicom dan je dakle do izomorfizma s **11.2.1.**

Nadalje, budući da svako skupovno tijelo uz x, y sadrži i njihovu simetričnu diferenciju $(x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ izlazi iz **7.5.2°** da je svaki Booleov prsten s jedinicom do izomorfizma određen nekim skupovnim tijelom uz operaciju $+$ kao simetričnu diferenciju i $\cdot$ kao presjek.

12.7. *Teorem* 15. *Međusobno dualnim Booleovim algebrama pridruženi su međusobno dualni Booleovi prsteni s jedinicom i obrnuto.*

Dokažimo najprije drugi dio teorema (obrnutu tvrdnju). Neka su dakle $(S; +, \cdot)$ i $(S; +_1, \cdot_1)$ međusobno dualni Booleovi prsteni s jedinicom a $(S; \wedge, \vee)$ i $(S; \wedge_1, \vee_1)$ njima pridružene Booleove algebre. Tada je

$$x +_1 y = 1 + x + y, \quad x \cdot_1 y = x + y + xy;$$

$$x \wedge y = xy, \quad x \vee y = x + y + xy;$$

$$x \wedge_1 y = x \cdot_1 y, \quad x \vee_1 y = x +_1 y +_1 x \cdot_1 y.$$

Odatle je

$$x \wedge_1 y = x + y + xy = x \vee y,$$

$$x \vee_1 y = (x +_1 y) +_1 x \cdot_1 y = 1 + (1 + x + y) + (x + y + xy) = xy = x \wedge y,$$

pa je $(S; \wedge_1, \vee_1) \equiv (S; \vee, \wedge)$ a to je Booleovoj algebri $(S; \wedge, \vee)$ dualna Booleova algebra.

Prvi dio teorema izlazi odatle zbog **T 14.** jer je za dani Booleov prsten s jedinicom ovome dualni jednoznačno određen.

13. ($\Leftrightarrow, \vee, \perp$)- I ($\not\Leftrightarrow$, &, $\top$)-ALGEBRE SUDOVA KAO BOOLEOVI PRSTENI S JEDINICOM

13.1 Neka je $S = \{\top, \perp\}$. Operacije $\cdot$ i $'$ neka su definirane kao konjunkcija & odnosno identitet a $+$ neka je definirano kao ekskluzivna disjunkcija tj. $\top + \perp = \top$, $\perp + \top = \top$, $\top + \top = \perp$, $\perp + \perp = \perp$. Lako se vidi da je $(S; +, \cdot, ')$ Booleov prsten s jedinicom.

13.2. Neka je kao u **13.1.** $S = \{\top, \perp\}$. Operacija $+$ neka je definirana kao ekvivalencija, operacija $\cdot$ kao (inkluzivna) disjunkcija a operacija $'$ kao identitet. Lako se vidi da je $(S; +, \cdot, ')$ Booleov prsten s jedinicom, dualan Booleovom prstenu s jedinicom iz **13.1.**

13.3. Neka je — kao u **10.3.** — T skup koji sadržava simbole $\top, \perp$ i prebrojivo beskonačno mnogo (od $\top$ i $\perp$ i međusobno različitih) simbola za variable x_i; $T = \{\top, \perp, x_1, x_2, \dots\}$. Z neka je neki dani (konačni ili beskonačni) podskup od T, takav da je $\perp \in Z$.

Neka je dalje $\mathcal{Z}$ skup svih (konačnih) izraza koji se mogu sagraditi povezivanjem elemenata od Z simbolima za binarne operacije $\Leftrightarrow$, $\vee$. U $\mathcal{Z}$ uvedimo relaciju ekvivalencije R time da za $z_1, z_2 \in \mathcal{Z}$ stavimo $z_1 R z_2$ onda i samo onda, ako su z_1, z_2, shvaćeni kao formule algebre sudova, semantički jednaki. Sa R je određena particija od $\mathcal{Z}$ na disjunktne klase. Kvocijentna struktura $\mathcal{Z}/R$ je skup tih klasa; označimo taj skup sa S_Z. U S_Z definirat ćemo operacije $+, \cdot$ ovako: Ako su $x, y \in S_Z$, odaberemo u tim klasama (elementima od $\mathcal{Z}/R$) po jedan element $\mathcal{Z}$ kao predstavnika γ klase. Neka je $\gamma x = x'$, $\gamma y = y'$. $x+y$ definiramo sada kao klasu koja sadrži $x' \Leftrightarrow y'$ a $x \cdot y$ definiramo kao klasu koja sadrži $x' \vee y'$. Odatle kako smo konstruirali $\mathcal{Z}/R$ lako uviđamo da su te definicije dobre, tj. da je njihov rezultat jednoznačno određen (neovisan o izboru predstavnika klasa x, y).

Prema konstrukciji $\mathcal{Z}/R$ i definiciji $+, \cdot$ u S_Z lako se provjerava da je $(S; +, \cdot)$ Booleov prsten s jedinicom $(1 = \perp,\ 0 = 1+1 = \top)$.

Ako Z sadrži konačno mnogo elemenata bit će i S_Z konačan. Tačnije, budući da Z po pretpostavci sadrži $\perp$, a $\{\Leftrightarrow, \vee, \perp\} = \{\beta_7, \beta_2, \beta_{16}\}$ je prema II **8.7.3.** baza algebre sudova, stoga — ako Z sadrži n $(n > 0)$ simbola x_i — sadržavat će S_Z 2^{2^n} elemenata, jer u algebri sudova ima upravo toliko različitih funkcija od n danih varijabla. Ako je Z (prebrojivo) beskonačan, bit će i S_Z prebrojivo beskonačan.

Prednja izvođenja pokazuju u kom se smislu skup formula algebre sudova ograničene na operacije $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\perp$ može shvatiti kao Booleov prsten s jedinicom. (Konstantu $\perp$ možemo shvatiti i kao određenu operaciju nad — ili funkciju od — nula varijabla.)

Analogno bismo uz operacije $\not\Leftrightarrow$ (ekskluzivna disjunkcija), &, $\top$ dobili upravo razmotrenim dualne Booleove prstene s jedinicom.

13.4. Neka je S skup svih funkcija algebre sudova nad varijablama iz nekog danog najviše prebrojivo beskonačnog skupa varijabla.

α) Za $x, y \in S$ neka je $x+y$ jednako funkciji određenoj sa $x \Leftrightarrow y$, $x \cdot y$ jednako funkciji određenoj sa $x \vee y$. Lako možemo provjeriti da je $(S; +, \cdot)$ Booleov prsten s jedinicom (uz $1 = \perp, 0 = \top$), izomorfan s odgovarajućim Booleovim prstenom iz **13.3.**

β) Za $x, y \in S$ neka je $x+y$ jednako funkciji određenoj sa $x \not\Leftrightarrow y$, $x \cdot y$ jednako funkciji određenoj sa $x \,\&\, y$. $(S; +, \cdot)$ je Booleov prsten s jedinicom dualan odgovarajućem Booleovom prstenu iz **13.4.** α).

Primjeri α) i β) pokazuju u kom se smislu skup funkcija algebre sudova može shvatiti Booleovim prstenom s jedinicom.

13.5. *Vježba.* Provjeri da je Booleov prsten s jedinicom $(S_Z; +, \cdot)$ iz **13.3.** uz $Z = \{\perp, x_1\}$ izomorfan s Booleovim prstenom s jedinicom $(S; +, \cdot)$ iz **11.2.4.** (uz pridruženje: klasa od $\perp \Leftrightarrow \perp \leftrightarrow 0$, klasa od $x_1 \leftrightarrow a$, klasa od $x_1 \Leftrightarrow \perp \leftrightarrow b$, klasa od $\perp \leftrightarrow 1$.)

14. BOOLEOVE 3-STRUKTURE I (&, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\neg$)-ALGEBRE SUDOVA

14.1. *Definicija* 9. *Algebarsku strukturu* $(S; \wedge, \vee, +)$ *zvat ćemo* B o o l e o v o m 3-s t r u k t u r o m, *ako je istovremeno*

1° $(S; \wedge, \vee)$ *Booleova algebra,*

2° $(S; +, \wedge)$ *Booleov prsten s jedinicom.*

Npr. ako je $(S; \wedge, \vee)$ dana Booleova algebra a $(S; +, \cdot)$ njoj po **T 13.** pridružen Booleov prsten s jedinicom, bit će $(S; \wedge, \vee, +)$ Booleova 3-struktura. Pokazat ćemo da je ovo ujedno najopćenitiji slučaj, tj. da vrijedi

14.2. *Teorem* 16. *Ako je* $(S; \wedge, \vee, +)$ *Booleova 3-struktura, onda su Booleova algebra* $(S; \wedge, \vee)$ *i Booleov prsten s jedinicom* $(S; +, \wedge)$ *međusobno pridruženi (u smislu T 14.).*

Dokaz. Treba dokazati da je $x \vee y = x + y + x \wedge y$. Označimo najprije maksimalni element od $(S; \wedge, \vee)$ sa 1_a, a minimalni sa 0_a. Nadalje označimo jedinicu od $(S; +, \wedge)$ sa 1_p, a nulu sa 0_p.

Tada je $x \wedge 1_a = x$ pa je zbog **11.3.5.** $1_p = 1_a$. Također je (zbog (28)) $0_a = 0_a \wedge 0_p = 0_p$. Označimo dakle ubuduće 1_a, 1_p sa 1, a 0_a, 0_p sa 0.

Pokažimo sada da $x + 1$ zadovoljava relacije $(x+1) \wedge x = 0$, $(x+1) \vee x = 1$. Zaista,

$$(x+1) \wedge (\neg x) = [x \wedge (\neg x)] + 1 \wedge (\neg x) = 0 + (\neg x) = \neg x$$

pa je

$$[(x+1) \wedge (\neg x)] \vee x = (\neg x) \vee x = 1, \quad [(x+1) \vee x] \wedge [(\neg x) \vee x] = 1$$

dakle stvarno $(x+1) \vee x = 1$; u drugu ruku je

$$(x+1) \wedge x = x \wedge x + 1 \wedge x = x + x = 0.$$

Prema **T 4.** mora dakle biti $x + 1 = \neg x$, pa je po **T 5.**

$$x \vee y = \neg [(\neg x) \wedge (\neg y)] = [(x+1) \wedge (y+1)] + 1 =$$
$$x \wedge y + x + y + 1 + 1 = x + y + x \wedge y$$

što je trebalo dokazati.

14.3. T 16. može se dokazati i ovim razmatranjem:

Po (6a) možemo danoj A-mreži pridruženu S-mrežu odrediti poznavajući samo operaciju $\wedge$, a odatle po (5b) možemo odrediti operaciju $\vee$ dobivenoj S-mreži pridružene *ishodne* A-mreže (usp. **T 3.b)**). Odatle izlazi da je zadavanjem $\wedge$-operacije dane mreže jednoznačno određena i njena $\vee$-operacija. Posebno ovo vrijedi i za Booleove algebre. Prema tome, ako je $(S; \wedge, \vee, +)$ Booleova 3-struktura, mora se Booleova algebra $(S; \wedge, \vee)$ poklapati s Booleovom algebrom pridruženom prstenu $(S; +, \wedge)$.

14.4. Neka je $S = \{\top, \bot\}$, $\wedge$ disjunkcija, $\vee$ konjunkcija i $+$ ekvivalencija. Tada je $(S; \wedge, \vee, +)$ Booleova 3-struktura a $\neg x$ je komplement od x u $(S; \wedge, \vee)$.

Dualno analogno uz $\wedge = \&$, $\vee =$ (inkluzivna) disjunkcija, $+ =$ ekskluzivna disjunkcija.

14.5. *Vježba.* Pokaži, analogno razmatranjima u **10.3.** i **13.3,** u kom se smislu skup formula algebre sudova, ograničene na operacije $\vee$, &, $\Leftrightarrow$, $\neg$, može shvatiti Booleovom 3-strukturom.

14.6. *Vježba.* Pokaži, analogno razmatranjima u **10.4.** i **13.4,** u kom se smislu skup funkcija algebre sudova može shvatiti Booleovom 3-strukturom.

GLAVA IV

LOGIKA SUDOVA

1. LOGIKA SUDOVA *VERSUS* ALGEBRA SUDOVA

U stvari će tek ova Glava biti „matematička logika" u užem smislu. U drugoj i trećoj Glavi ispitivali smo doduše sudove, ali metodama klasične matematike, poglavito apstraktne algebre. Zato smo matematičku teoriju izgrađivanu u Glavi II i zvali *algebrom* sudova.

U ovoj će Glavi biti formalizirani tj. (u principu) lišeni značenja ne samo objekti teorije, već i *dedukcija* unutar teorije. Dakako, kod rasuđivanja *o* teoriji služit ćemo se i nadalje *sadržajnom* dedukcijom ali će ona biti strogo ograničena na *finitne* postupke. Ukratko rečeno, ova će se Glava razlikovati od druge prvenstveno u tome, što ćemo ovdje zahtijevati bitno veću striktnost, rigoroznost i skrupuloznost nego li što je to u Glavi II bilo potrebno i moguće. Naprimjer, ovdje si nećemo moći dozvoliti izreke poput „izvod metodama uobičajenim u algebri". Teorija *o* toj strogo formaliziranoj matematičko-logičkoj teoriji koju ćemo zvati *logikom sudova* bit će dakle doduše opet ne-formalizirana, ali strogo finitna u smislu zahtjeva koje je Hilbert postavio na metamatematiku i time na daleko višem stepenu „pouzdana" i „egzaktna" nego li su to općenito metode klasične matematike. (U problematiku formalizacije i same metamatematike i njenog ispitivanja pomoću jedne meta-metamatematike ovdje ne možemo ulaziti.)

U skladu s ovim zahtjevima „čišćenja" formalizirane teorije od elemenata koji bi u nju mogli posredno unijeti nešto što sami nismo imali namjeru da svijesno u nju stavimo, bit ćemo konsekventni ako ovdje *same simbole* smatramo *objektima* teorije a *ne* oznakama za objekte teorije. U Glavi II, npr., $\top$ je bila oznaka ili ime za istiniti sud. Ovdje će sam znak $\top$ *biti* „istiniti sud".

Još 1922 Hilbert je napisao:

„... apstraktno operiranje općim sadržajima i opsezima pojmova pokazalo se nedovoljnim i nesigurnim. Kao preduvjet za primjenu logičkih zaključaka i provođenje logičkih operacija mora naprotiv nešto već biti dano u predodžbi: određeni izvanlogički diskretni objekti, koji su prije svakog mišljenja zorno tu kao neposredan doživljaj. Treba li logičko zaključivanje da bude sigurno, mora da se ti objekti potpuno u svim dijelovima mogu pregledati a njihovo navođenje, njihovo razlikovanje, njihov slijed za nas je istodobno s objektima neposredno tu kao nešto, što se ne može reducirati na još nešto drugo. Kad zauzimam ovo stajalište, meni su — u tačnoj suprotnosti prema Fregeu i Dedekindu — predmeti teorije brojeva znakovi sami, kojih oblik možemo općenito i sigurno ponovno prepoznati neovisno o mjestu i vremenu i o posebnim uvjetima izrade znakova kao i od neznatne razlika u izvedbi. (U ovom smislu zovem znakove istog oblika kratko „isti znak“). U tome leži čvrst filozofski stav, za koji smatram da ga treba zahtijevati kod zasnivanja čiste matematike kao uopće za sve naučno mišljenje, razumijevanje i saopćavanje: na početku — tako to ovdje vrijedi — je znak“.

Puni smisao i doseg svega ovog osjetit će se tek prorađivanjem teksta koji slijedi. Iako će na nivou algebre odnosno logike sudova razlike biti uočljive znatno više u *koncepciji* i *metodama izgradnje* teorije nego li u njenim *rezultatima*, ipak ćemo već u ovoj knjizi na osnovu tih razlika moći prosuditi i ocijeniti dubinu i dalekosežnost Hilbertova zahvata kojim je matematiku odijelio od metamatematike. (Naime, na nivou *sudova* ne bi bilo teško precizirati formiranje formula algebre sudova i manipulacije s jednakostima među njima tako da ona postane *isto tako* rigorozna kao što će biti logika sudova koju ćemo iznijeti u ovoj Glavi. Međutim u daljoj izgradnji matematičke logike i njene primjene na npr. aksiomatsko fundiranje teorije skupova razlikuje se izgradnja teorije pomoću finitne metamatematike od njene klasične izgradnje znatno radikalnije nego li kod sudova i na takvom nivou nije više moguće klasične postupke precizirati u toj mjeri da bi za tako „pročišćenu“ klasičnu teoriju finitna metamatematika postala izlišna a da sama pročišćena teorija zadrži predašnji opseg i doseg. Razlog ove razlike je u tome što je klasična algebra sudova i *sama* u osnovi finitna dok to npr. klasična teorija skupova nije. Stoga je bolje da odmah od početka, od nivoa sudova, na striktnoj finitnosti inzistiramo jedino kod izgradnje striktno *formalizirane* teorije.)

Ova je dakle Glava „nadgradnja“ u razvoju matematičke logike nad Glavom II. No i druga Glava bila je potrebna, jer se bez nje ne bi pravilno mogao ocijeniti značaj i smisao ove. Konačno, takav je bio i historijski put: najprije se je — na nivou sudova — matematička logika razvijala metodama klasične matematike, kao što smo to prikazali u Glavi II, a tek kasnije formaliziranom dedukcijom kao što ćemo to opisati ovdje. Sama Glava II ne daje sliku modernijih koncepcija u matematičkoj logici na nivou sudova, dok sama Glava IV ne bi u potpunosti opravdala i rastumačila svoje postojanje.

2. SIMBOLI LOGIKE SUDOVA

2.1. *Definicija* 1. *Simboli logike sudova jesu 1° slova logike sudova, 2° operatori logike sudova i 3° zagrade logike sudova.*

1° Slova logike sudova jesu:

(1) $\begin{cases} a) \text{ Konstante logike sudova } \top, \perp; \\ b) \text{ varijable logike sudova } a, b, c, d, e, f, g, \ldots \end{cases}$

2° Operatori logike sudova jesu:

(2) $$\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow;$$

prvi od njih je unitarni operator a ostali su binarni.

3° Zagrade logike sudova jesu:

(3) $(,)$;

prva od njih je l i j e v a, *a druga* d e s n a.

Umjesto „simboli logike sudova" reći ćemo često samo „simboli"; analogno za slova, konstante, varijable, operatore i zagrade.

2.2. Pretpostavljamo, da imamo na raspolaganju *potencijalno prebrojivo beskonačno mnogo* varijabla. Kad to kažemo, mislimo time reći ovo:

Kako god veliki bio neki odabrani prirodni broj n, u nizu $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$ možemo ići tako daleko da su mu članovi do uključivo n-tog sve međusobno (i od $\top$, $\perp$) različita slova. Kod toga dakako nije bitno što abeceda sadrži samo tridesetak različitih slova, jer je lako možemo po volji daleko na sistematski način nastaviti nekim daljnjim znakovima. Uostalom, mogli smo umjesto $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$ uvesti niz $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ u kojem članove s različitim indeksom smatramo različitim.

Najčišće (naime bez potrebe da unaprijed poznajemo abecedu ili znakove za označavanje prirodnih brojeva) mogli bismo kao potencijalno prebrojivo beskonačan niz varijabla uvesti ovaj:

$$|, ||, |||, ||||, |||||, \ldots$$

Očito je međutim, da bi ovakvo označavanje — iako u načelu najbolje — praktički bilo nespretno. Ostat ćemo stoga kod niza iz **D 1**, 1° b; vidjet ćemo da će nam za naše potrebe faktički dostajati nekoliko prvih slova abecede.

2.3. *Intuitivno* će dakako slovima algebre sudova odgovarati sudovi. Konstanti $\top$ odgovarat će istiniti a konstanti $\perp$ neistiniti sud. Varijablama logike sudova odgovarat će varijable algebre sudova, tj. na „njihovo mjesto" moći će „doći" bilo neki istiniti, bilo neki neistiniti sud.

Operatorima logike sudova odgovarat će operacije algebre sudova, i to svakome jednako označena: operatoru $\neg$ negacija, operatoru & konjunkcija itd.

(Što se tiče samih simbola tih operatora, oni u literaturi nisu jedinstveni. Postoje alternativni istog oblika kao što je u II **1.4.9.** bilo navedeno za algebru sudova.)

Zagrade će, kao i inače u matematici, imati ulogu da omoguće i osiguraju jednoznačnu rekonstrukciju sastava složenih izraza. Pokazat će se, da je u tu svrhu u principu dovoljan jedan par (jedna *vrsta*) zagrada. (A bilo bi moguće i pisanje bez zagrada uopće, kao što će biti pokazano u **5.** do **5.4.**)

2.4. U daljem tekstu striktno ćemo se držati **D 1.** (Usporedi npr. vježbu **3.3.1**, naročito 2°, 5°, 10° i 11°.)

3. RIJEČI LOGIKE SUDOVA

3.1. *Definicija* 2. *Svaki (neprazni) konačni slog (niz) simbola logike sudova zove se* r i j e č *logike sudova.*

(Ubuduće ćemo često reći samo „riječ".)

Riječi dakle dobivamo ako nanižemo jedan iza drugog simbole logike sudova. Svaki pojedini simbol također je riječ. Dakako da u danoj riječi isti simbol može nastupiti i više puta. Tako su npr. $\perp\top\top$, *a*), *aab*$\top$, $\neg\neg\neg$,)(itd. riječi logike sudova.

3.2. Broj δ ($\delta > 1$) simbola neke riječi zove se d u l j i n a te riječi; pritom se svaki simbol broji onoliko puta koliko puta u danoj riječi dolazi. Npr. riječ a ima duljinu $\delta = 1$, a riječ $a \Rightarrow (\neg a \Rightarrow b)$ ima duljinu $\delta = 8$.

Duljina neke riječi *nije* objekt formalizirane matematičko-logičke teorije koju izgrađujemo, naime logike sudova. Ona pripada metamatematici *pomoću koje* izgrađujemo logiku sudova i ukazuje na određeno *svojstvo* — naime duljinu — nekih *objekata* logike sudova — naime riječi.

Simboli logike sudova su jedine riječi duljine 1.

3.3. *Vježbe.*

3.3.1. Koji od navedenih izraza su riječi logike sudova:

$$1°\ )));\ 2°\ a \Leftarrow b;\ 3°\ \overset{\neg}{a};\ 4°\ \neg\&\vee;\ 5°\ \Rightarrow,\Leftrightarrow;\ 6°\ a^n;\ 7°\ b_i;$$

$$8°\ anbi;\ 9°\ (a\&b)+(a\vee b);\ 10°\ (\mathrm{a})\&(\mathrm{b});\ 11°\ v;\ 12°\ \dashv?$$

(Odgovor: 1°, 4°, 8° su riječi; ostali izrazi nisu. Npr. u 2° dolazi znak „$\Leftarrow$" koji nije simbol logike sudova ($\Rightarrow$ jest); u 5° dolazi zarez „," koji nije simbol logike sudova; u 6° i 7° slova dolaze kao eksponenti odnosno indeksi što nismo predvidjeli u **D 2.**; u 10° slova „a" i „b" nisu u kurzivu (kao u **D 1**, 1° b)); u 11° i 12° simbol *a* odnosno $\top$ (ili $\perp$) nije u položaju predviđenom s **3.1.**.

3.3.2. Koliko u našem sistemu ima riječi određene duljine δ koje su takve da ne sadrže nijedno slovo? (Odgovor: Koliko i varijacija s ponavljanjem od $5+2=7$ elemenata — operatora i zagrada — δ-tog razreda, dakle 7^δ.)

3.3.3. Da li je izraz *aaa* ... *a* riječ? (Nije; izraz *aaa* ... *a* može eventualno biti kraća oznaka za neku riječ ili oznaka nekih riječi određenog tipa (npr. takvih koje sadrže samo slova *a*) no on, sam po sebi, nije riječ jer sadrži znakove „." koji nisu simboli logike sudova.)

3.3.4. Koliko ima riječi? (Rješenje: Sve simbole logike sudova možemo numerirati prirodnim brojevima npr. tako da $\top$ numeriramo sa 1, $\perp$ sa 2, operator & sa 3, $\vee$ sa 4, $\Rightarrow$ sa 5, $\Leftrightarrow$ sa 6, $\neg$ sa 7, zagradu (sa 8,) sa 9 a zatim varijable logike sudova brojevima od 10 redom na više. Time će i svakoj riječi logike sudova uzajamno jednoznačno odgovarati neki (neprazni konačni) slog pozitivnih prirodnih brojeva. Ove slogove podijelimo sada najprije u klase tako da u klasu σ uđu oni i samo oni slogovi za koje je zbroj svih brojeva koji ih sačinjavaju — svaki uzet onoliko puta koliko dolazi u slogu — jednak σ. Dobivene klase možemo poredati u prebrojivi niz po rastućem σ, a unutar svake klase poredajmo slogove koje ona sadrži leksikografski. Budući da svaka klasa sadrži samo konačno mnogo slogova, poredani su time svi slogovi u prebrojiv niz, pa znači da ih ima prebrojivo beskonačno mnogo. I riječi logike sudova ima dakle prebrojivo beskonačno mnogo.

3.4. Ukoliko pojedine riječi logike sudova ne navodimo direktno (eksplicitno) označavat ćemo ih redovno velikim latinskim slovima (eventualno s indeksima). Iznimno ćemo simbole binarnih operatora kojiput označavati kružićem $\circ$, a varijable logike sudova malim latinskim slovima $x, y, \ldots$ Takve oznake zvat ćemo i **pokratama** za odgovarajuće riječi, bez obzira da li sama riječ sadrži *više* od jednog simbola ili ne. Npr. A može biti pokrata za a ili za $((a))$ ili za $\top \bot \Rightarrow a \& bbb$ itd. Razumije se međutim da i opet takve pokrate same *nisu* objekti formaliziranog matematičko-logičkog sistema *koji* izgrađujemo (naime logike sudova), već *oznake* ili imena takvih objekata. One dakle *ne* pripadaju matematičkoj teoriji *koju* izgrađujemo, već metamatematici *pomoću koje* ispitujemo našu matematičku teoriju.

3.5. Kod pisanja i označavanja složenih izraza logike sudova služit ćemo se ovim principom *jukstapozicije* ili *nadovezivanja:* Ako su A i B oznake za riječi logike sudova, označavat će AB riječ logike sudova koju dobijemo ako ispišemo najprije redom simbole riječi A a zatim na njih nadovežemo redom simbole riječi B. Npr. ako $(a \vee b)$ označimo sa A, a $\& c$ sa B, bit će AB oznaka za $(a \vee b) \& c$. Analogno ćemo slagati oznake za više od dvije riječi.

Upotrebljavat ćemo i „miješano" označavanje riječi logike sudova, time da dopustimo slaganje i riječi i oznaka za riječi. Npr. ako b označimo sa A a $a \vee \neg a$ sa B, bit će $A \Rightarrow (B)$ oznaka za $b \Rightarrow (a \vee \neg a)$. Razumije se da takvi „miješani" izrazi poput $A \Rightarrow (B)$ i opet nisu objekti logike sudova već njene metamatematike. Konačno, slaganjem samih riječi logike sudova dobivamo opet riječi logike sudova. Npr. ako na riječ $\neg(a$ nadovežemo riječ $\& \neg a)$, dobivamo riječ $\neg(a \& \neg a)$.

3.6. Mogu se uvoditi i *oznake za oznake* za riječi itd. Neka je npr. A oznaka za riječ $a \& \neg a$ a B oznaka za (oznaku) $A \Rightarrow b$. Tada je npr. $A \Rightarrow (B)$ oznaka za $A \Rightarrow (A \Rightarrow b)$, a ovo je oznaka riječi $a \& \neg a \Rightarrow (a \& \neg a \Rightarrow b)$. $A \Rightarrow (B)$ je dakle oznaka oznake riječi $a \& \neg a \Rightarrow (a \& \neg a \Rightarrow b)$. Slično bi mogli govoriti o *oznakama za oznake oznakâ* riječi itd. Sve ovakve tvorevine opet su objekti metamatematike logike sudova a ne same logike sudova. Radi jednostavnosti izražavanja govorit ćemo ipak često — ako ne bude opasnosti zabune — naprosto o „oznakama za riječi".

Često ćemo poći i korak dalje, pa ćemo — umjesto da kažemo da je A oznaka neke riječi — reći kraće da je A riječ. Ovakvo izražavanje zapravo nije korektno ali je uobičajeno u matematici i uz potrebni oprez ne dovodi do zabune ni nesporazuma. Npr. ako logaritamsku funkciju varijable x označimo sa $\log x$, reći ćemo obično da je $\log x$ funkcija od x, iako je to u stvari oznaka za funkciju a ne funkcija. Postoje dakako jaki razlozi zbog kojih se odlučujemo da prihvatimo ovakvo u principu nekorektno izražavanje: ti su, što bi inače izražavanje ubrzo postalo dugačko, nespretno i nepregledno.

3.7. Ako A označuje npr. riječ $a \vee \neg b$, pisat ćemo $A \equiv a \vee \neg b$ („$\equiv$" čitaj „identički jednako"); analogno za druge riječi. Ne treba da nas smeta naziv „identički jednako" među objektima koji nisu identički jednaki u uobičajenom (nematematičkom) značenju tog naziva. Izraz poput $A \equiv a \vee \neg b$ dakako opet, kao cjelina, nije objekt logike sudova, već njene metamatematike. Ako su A i B oznake (ili oznake za oznake itd.) za istu riječ, pisat ćemo (ako nema mogućnosti zabune) $A \equiv B$. (U prvom slučaju: $A \equiv a \vee \neg b$ simbol $\equiv$ je dakle bio oznaka relacije između objekta metamatematike i objekta matematike; u drugom: $A \equiv B$ on je oznaka relacije među objektima metamatematike.)

3.8. Pomoću terminologije i simbolike uvedene u **3.4.** i **3.5.** možemo riječi logike sudova definirati i ovom *induktivnom* definicijom:

Definicija 2a. 1° Svaki simbol logike sudova je riječ logike sudova.

2° Ako je A riječ a B simbol logike sudova, onda je AB riječ logike sudova.

3° Pomoću 1° i 2° može se konstruirati svaka riječ, tj. nema drugih riječi osim onih, koje se dobivaju (eventualno višestrukom ali konačno mnogo puta upotrebljenom) primjenom 1°, 2°.

Npr. $a\vee\neg b$ je riječ po **D 2.** Po **D 2a.** to je također riječ jer: a je simbol pa je to po 1° i riječ; no $\vee$ je simbol pa je $a\vee$ po 2° riječ. Isto tako $\neg$ je simbol pa je — opet po 2° — $a\vee\neg$ riječ. Konačno, b je simbol pa je po 2° $a\vee\neg b$ riječ.

Ekvivalentnost **D 2a.** sa **D 2.** neposredno je očita.

3.9. Ako je A oznaka neke riječi, označit ćemo duljinu δ te riječi sa $\delta[A]$. („$\delta[A]$" nije dakle niti objekt logike sudova, niti svojstvo objekta logike sudova nego *oznaka* za *svojstvo objekta* logike sudova.)

Ako je $\delta[A]=\delta_A$, $\delta[B]=\delta_B$, bit će $\delta[AB]=\delta_A+\delta_B$; analogno za riječi dobivene jukstapozicijom od više riječi.

3.10. *Vježbe.*

3.10.1. Ako je $A\equiv a\Rightarrow b$, $B\equiv b$, što označuje 1° AA; 2° AB; 3° BA; 4° $(A)\Rightarrow B$; 5° $a\Rightarrow B$? (Odgovor: 1° $a\Rightarrow ba\Rightarrow b$; 2° $a\Rightarrow bb$; 3° $ba\Rightarrow b$; 4° $(a\Rightarrow b)\Rightarrow b$; 5° $a\Rightarrow b$.

3.10.2. a) Na koje se načine riječ $\neg\neg(a)$ može sastaviti nadovezivanjem dviju riječi? b) Na koliko načina se dana riječ duljine $\delta\,(\delta>2)$ može sastaviti nadovezivanjem dviju riječi? c) Na koliko načina se dana riječ duljine $\delta\,(\delta>3)$ može sastaviti nadovezivanjem triju reči? (Odgovor:

a) $AB\equiv\neg\neg(a)$ uz 1° $A\equiv\neg$, $B\equiv\neg(a)$; 2° $A\equiv\neg\neg$, $B\equiv(a)$;
3° $A\equiv\neg\neg($, $B\equiv a)$; 4° $A\equiv\neg\neg(a$, $B\equiv)$.

b) Na $\delta-1$ način. c) Prema b) može se dana riječ dobiti sastavljanjem triju od kojih prva ima duljinu 1 na $\delta-2$ načina; ako prva ima duljinu 2 na $\delta-3$ načina; općenito ako prva ima duljinu k na $\delta-(k+1)$ načina. k je barem 1 a najviše $\delta-2$, pa je traženi broj jednak

$$(\delta-2)+(\delta-3)+\cdots+1=\frac{1}{2}(\delta-1)(\delta-2).$$

Ova formula vrijedi — kao što vidimo direktno — i bez ograničenja $\delta>3$.)

3.10.3 Neka je $A\equiv aaaa$, $B\equiv aa$. Kojim je sve oznakama, u koje ulazi B, oznaka A identički jednaka? (Odgovor: $A\equiv Baa\equiv aBa\equiv aaB\equiv BB$.)

3.10.4. Neka je

$$A\equiv a\Rightarrow c,\ B\equiv b\Rightarrow c,\ C\equiv a\vee b\Rightarrow c,\ D\equiv(a\Rightarrow c)\Rightarrow((b\Rightarrow c)\Rightarrow(a\vee b\Rightarrow c)).$$

Šta označuju X, Y, Z, U ako je $XAYBZCU\equiv D$? (Odgovor:

$$X\equiv(,\ Y\equiv)\Rightarrow((,\ Z\equiv)\Rightarrow(,\ U\equiv)).)$$

4. FORMULE LOGIKE SUDOVA

4.1. Među svim riječima logike sudova istaknut ćemo neke koje ćemo zvati formulama logike sudova ili kraće formulama (ili suvislim riječima).

Definicija 3.[1] *(Formiranje* *formula* *logike sudova)*

1° *Svako slovo logike sudova je formula logike sudova.*

2° *Ako je A formula, onda je i* $\neg(A)$ *formula.*

Nadalje, ako su A i B formule, onda su i ove riječi formule: 3° $(A)\&(B)$, 4° $(A)\vee(B)$, 5° $(A)\Rightarrow(B)$, 6° $(A)\Leftrightarrow(B)$.

7° *Formule su samo one riječi koje se mogu konstruirati (eventualno višestrukom ali konačno mnogo puta upotrebljenom) primjenom* 1° *do* 6°.

Budući da formule čine podskup skupa riječi logike sudova koje su objekti logike sudova, to su i formule logike sudova objekti logike sudova.

Npr. da je $(a)\Rightarrow((b)\vee(\neg(b)))$ formula, uviđamo ovako: b je formula po 1°, pa je $\neg(b)$ formula po 2° i stoga $(b)\vee(\neg(b))$ formula po 4°. Kako je i a formula po 1°, to je dani izraz formula po 5°.

O tome kako se za danu riječ može ispitati da li je formula ili ne, bit će govora nešto kasnije (usp. **4.6.**).

Intuitivno, ako slovima odgovaraju sudovi, formulama odgovaraju (suvisli) složeni sudovi sastavljeni od osnovnih (najviše) pomoću konjunkcije, disjunkcije, implikacije, ekvivalencije i negacije.

4.2. Za formule uvodimo induktivno i pojam r a n g a. Rang formule A označavat ćemo sa $\rho[A]$:

Definicija 4. *Slova imaju rang* 0. $\rho[\neg(A)]=\rho[A]+1$.

$$\rho[(A)\&(B)]=\rho[(A)\vee(B)]=\rho[(A)\Rightarrow(B)]=\rho[(A)\Leftrightarrow(B)]=\max\{\rho[A],\ \rho[B]\}+1.$$

Kod formiranja formule po **D 3.** primjenom 2° raste dakle rang za 1, a primjenom 3° do 6° rang nove formule je za 1 veći od ranga one komponente koja ima veći rang (odnosno, ako obje imaju isti rang, za 1 veći od toga ranga).

Kasnije ćemo (usp. **4.6.**) vidjeti, da je rang dane formule *jednoznačno* određen broj. (*A priori* naime nije evidentno ne može li se dana formula izgraditi na više načina po kojima bi dobila više rangova.)

Kao „$\delta[A]$", i „$\rho[A]$" je oznaka za određeno svojstvo nekog objekta logike sudova, naime formule označene sa A. No dok je $\delta[A]$ definirano za svaku riječ, $\rho[A]$ definirano je za one i samo one riječi koje su formule.

4.3. *Vježbe.*

4.3.1. Koje od navedenih riječi su formule:

1° $\neg a$; 2° $(\neg a)$; 3° $\neg(a)$; 4° $(\neg(a))$; 5° $a\vee b$; 6° $(a\vee b)$; 7° $(a)\vee(b)$; 8° $((a)\vee(b))$; 9° $\neg\neg a$; 10° $\neg(\neg a)$; 11° $\neg(\neg(a))$; 12° $(\neg\neg)(a)$; 13° $(\neg(\neg a))$; 14° $\neg(a\Rightarrow b)$; 15° $(\neg a)\Rightarrow(b)$; 16° $(\neg(a))\Rightarrow b$; 17° $(\neg(a))\Rightarrow(b)$; 18° $(a\&b)\vee c$; 19° $((a)\&(b))\vee(c)$; 20° $(a)\&((b)\vee(c))$; 21° $(a)\&(b)\vee(c)$; 22° z?

(Odgovor: 3°, 7°, 11°, 17°, 19°, 20°, 22° su formule; ostale riječi nisu.)

---

[1] Usporedi ovu induktivnu definiciju s induktivnom definicijom riječi u **3.8.**

4.3.2. Koje sve formule sadrže 1° od slova samo jedamput a; 2° od slova samo dvaput a? (Odgovor: 1° a, $\neg(a)$, $\neg(\neg(a))$, $\neg(\neg(\neg(a)))$ itd; 2° α) sa & a bez $\neg$: $(a)\&(a)$, β) sa & i s jednim znakom $\neg$: $(a)\&(\neg(a))$, $(\neg(a))\&(a)$, $\neg((a)\&(a))$, γ) sa & i s dva znaka $\neg$: $(a)\&(\neg(\neg(a)))$, $(\neg(a))\&(\neg(a))$, $(\neg(\neg(a)))\&(a)$, $\neg((a)\&(\neg(a)))$, $\neg((\neg(a))\&(a))$, $\neg(\neg((a)\&(a)))$ i dalje formule sa & i tri i više znakova $\neg$; nadalje analogno građeni izrazi sa $\vee$, $\Rightarrow$ ili $\Leftrightarrow$ umjesto &.

4.3.3. Koje su sve formule duljine δ, za $\delta=1, 2, \ldots 10$? (Odgovor: Jedine formule duljine 1 su slova — konstante i varijable — logike sudova. Formula duljine 2 i 3 nema, jer su, nakon slova, najkraće formule oblika $\neg(A)$ gdje je A neko slovo. To su ujedno sve formule duljine 4. Formula duljine 5 i 6 opet nema. Formule duljine 7 su oblika $\neg(\neg(A))$, $(A)\&(B)$, $(A)\vee(B)$, $(A)\Rightarrow(B)$, $(A)\Leftrightarrow(B)$, gdje su A i B slova. Formula duljine 8 i 9 nema. Formule duljine 10 su oblika $\neg(\neg(\neg(A)))$, zatim $\neg((A)\&(B))$, $(\neg(A))\&(B)$, $(A)\&(\neg(B))$ gdje su A i B slova te analogno građene formule s operatorom $\vee$, $\Rightarrow$ ili $\Leftrightarrow$ umjesto &.

4.3.4. Koliko ima formula? (Rješenje: U jednu ruku, budući da je svako slovo formula, formula ima barem prebrojivo beskonačno mnogo. U drugu ruku, budući da je svaka formula riječ, formula po **3.3.4.** ima najviše prebrojivo beskonačno mnogo. Odatle formula ima tačno prebrojivo beskonačno mnogo.)

4.4. Već vježba **4.3.3.** pokazala je da za neke δ ne postoji nijedna formula duljine δ. Pokazat ćemo da općenito vrijedi:

Postoje *samo* formule duljine $\delta=3\nu-2$ (gdje je ν pozitivni prirodni broj). (Za svaki ν *postoje* formule duljine $3\nu-2$; no dakako *nije svaka* riječ te duljine i formula.)

Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po $\overline{\delta}=\left[\frac{\delta-1}{3}\right]$, gdje je δ duljina riječi logike sudova a [ ] oznaka za „najveće cijelo od".

Baza indukcije. Tvrdnja je sigurno ispravna za $\overline{\delta}=0$ tj. za $\delta<3\cdot 1=3$, jer (usp. **4.3.3.**) formula duljine 2 i 3 nema, a $1=3\cdot 1-2$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $\overline{\delta}<\mu-1$ $(\mu>1)$ tj. za $\delta<3\cdot\mu$ i pokažimo da ona tada vrijedi i za $\overline{\delta}<\mu$ tj. za $\delta<3(\mu+1)$. Zaista, ako je $3\mu<\delta[A]<3(\mu+1)$, formula A je prema **D 3.** oblika $A\equiv\neg(B)$, $A\equiv(B)\&(C)$, $A\equiv(B)\vee(C)$, $A\equiv(B)\Rightarrow(C)$ ili $A\equiv(B)\Leftrightarrow(C)$, gdje je u prvom slučaju $\delta[B]<3(\mu+1)-3=3\mu$, a u ostalim $\delta[B]$ i $\delta[C]$ manje od $3(\mu+1)-5<3\mu$. Po pretpostavci indukcije je stoga u prvom slučaju $\delta[B]=3\nu-2$, dakle $\delta[A]=(3\nu-2)+3=3(\nu+1)-2$, a u ostalim $\delta[B]=3\nu_1-2$, $\delta[C]=3\nu_2-2$, pa je tu $\delta[A]=(3\nu_1-2)+(3\nu_2-2)+5=3(\nu_1+\nu_2+1)-2$. Ako je pak $\delta[A]<3\mu$ tvrdnja je ispravna već po pretpostavci indukcije.

Time je dokazano da svaka formula ima duljinu $\delta=3\nu-2$. Nadalje, riječi $\top$, $\neg(\top)$, $\neg(\neg(\top))$, $\neg(\neg(\neg(\top)))$ itd. pokazuju da za svaki ν postoje formule duljine $3\nu-2$ a riječi),)))),))))))) itd. da nisu sve riječi tih duljina formule.

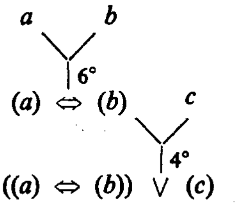
Inače, *da već znamo* da je rang formule jednoznačno određen broj, mogli bi tvrdnju nešto jednostavnije dokazati indukcijom po rangu $\rho[A]$ formule A:

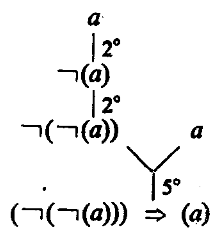
Baza indukcije. Tvrdnja je ispravna za $\rho[A]=0$, jer je tada

$$\delta[A]=1=3\cdot 1-2.$$

Korak indukcije. Ako je tvrdnja ispravna za $\rho[A]<\mu$, bit će za $\rho[A]=\mu+1$ bilo $A\equiv\neg(B)$ sa $\rho[B]<\mu$ bilo $A\equiv(B)\circ(C)$ gdje je $\circ$ oznaka za $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$ ili $\Leftrightarrow$ sa $\rho[B]$, $\rho[C]<\mu$. U prvom je slučaju $\delta[A]=(3\nu-2)+3=3(\nu+1)-2$ a u ostalim $\delta[A]=(3\nu_1-2)+(3\nu_2-2)+5=3(\nu_1+\nu_2+1)-2$.

4.5. *Shematski prikaz formiranja formula.* Formiranje formula možemo zgodno predočiti shematski u obliku „drveta“: svakoj primjeni **D 3,** 2° odgovarat će jedna „grana“ drveta a svakoj primjeni 3° do 6° jedne „rašlje“. Konačno formirana formula bit će „korijen“ drveta. Npr. sheme



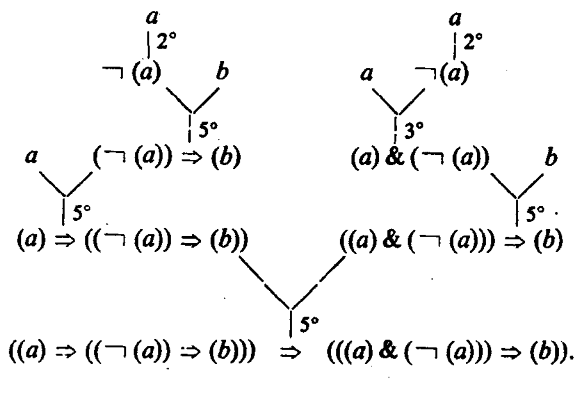


predočuju shematski formiranje formula $((a)\Leftrightarrow(b))\vee(c)$, $(\neg(\neg(a)))\Rightarrow(a)$. Iz ovakve sheme možemo odmah očitati i rang dobivene formule: on je za 1 manji od broja „slojeva“ u drvetu; prva formula ima rang 2 a druga 3.

Vježba. Predoči shematski formiranje formule

$$((a)\Rightarrow((\neg(a))\Rightarrow(b)))\Rightarrow(((a)\,\&\,(\neg(a)))\Rightarrow(b)).$$

(Rješenje je drvo sa 5 slojeva pa je rang dobivene formule 4. Radi preglednosti zgodno je pojedine komponente pisati tačno jednu ispod druge, tako da svaki simbol u čitavom drvetu — od krajnje grane do korijena — dolazi u istom vertikalnom stupcu:



4.6. U **4.5.** razmotreni primjeri upućuju da će rastav dane formule („čitanje" sheme odozdo prema gore) danom formulom biti jednoznačno određen. Time bi, specijalno, i rang dane formule bio jednoznačno određen. No razumije se da ovakvo *naslućivanje* ne može nadomjestiti *dokaz.* (Slično npr. u elementarnoj aritmetici naslućujemo jednoznačnost rastava prirodnog broja većeg od 1 na primfaktore jer kod manjih brojeva gdje imamo neposredan pregled mogućih faktorizacija odmah uočavamo jednoznačnost — do poretka faktora — rastava na primfaktore. No da bi izrekli *teorem* o jednoznačnosti rastava moramo ga onda i dokazati.) U nizu sličnih okolnosti navelo bi nas analogno „naslućivanje" na pogrešan rezultat.

Drugo pitanje koje još nismo riješili nameće se uz **D 3**: Kako ćemo za danu riječ doći do odluke da li je ona formula logike sudova ili ne? Za riječi male duljine to dakako neće biti problem (usp. npr. vježbu **4.3.1.**). Međutim, ako je duljina riječi veći broj, nije trivijalno kako da ispitamo da li je to formula ili ne. Npr. već za riječ duljine $\delta = 43$

$$\neg((\neg(((a)\vee(\bot))\Rightarrow(\neg(c))))\vee((\neg(a))\Rightarrow(\neg(\neg(b)))))$$

nije neposredno na prvi pogled vidljivo da li je to formula.

Da bi odgovorili na pitanje odlučivosti problema da li je dana riječ formula i da bi rigorozno dokazali jednoznačnost formiranja dane formule, drugim riječima jednoznačnost postupne razgradnje dane formule na sve kraće komponente, do, konačno, slova logike sudova, potrebno je da najprije detaljnije analiziramo ulogu zagrada u konstrukciji složenih izraza kako smo je definirali pravilima formiranja formula logike sudova (**D 3.**).

Pretpostavimo da neka riječ sadrži *paran* broj zagrada i da su one na neki način podijeljene u *parove* od po dvije zagrade. Za zagrade pojedinog para reći ćemo da su *međusobno pridružene.* Međusobno pridruženje možemo označiti istim indeksom ispod zagrada. Npr. u riječi $)(a\,\&)))\,b \Rightarrow)$ možemo pridružiti prvu zagradu petoj (prvi par), drugu trećoj (drugi par) i četvrtu šestoj (treći par), što ćemo označiti ovako:

$$\underset{1}{)}\,\underset{2}{(}\,a\,\&\,\underset{2}{)}\,\underset{3}{)}\,\underset{1}{)}\,b \Rightarrow \underset{3}{)}.$$

Razdiobu zagrada neke riječi logike sudova u parove međusobno pridruženih zvat ćemo *regularnom* ako ona ima svojstva:

1° Svaki par međusobno pridruženih zagrada sadrži jednu lijevu i jednu desnu zagradu, i to tako, da lijeva dolazi u riječi lijevo od njoj pridružene desne.

2° Bilo koja dva para μ, ν međusobno pridruženih zagrada (ako riječ uopće sadrži više od dvije zagrade) dolaze u riječi — ne gledajući na njene preostale simbole — bilo u poredaju

$$\underset{\mu}{(}\;\underset{\mu}{)}\;\underset{\nu}{(}\;\underset{\nu}{)}$$

bilo u poredaju

$$\underset{\mu}{(}\;\underset{\nu}{(}\;\underset{\nu}{)}\;\underset{\mu}{)},$$

ali nikad ne dolaze u poredaju

$$\underset{\mu}{(}\ \underset{\nu}{(}\ \underset{\mu}{)}\ \underset{\nu}{)},$$

tj. ne mogu se razdvajati. (Drugim riječima, parovi međusobno pridruženih zagrada ili su posve jedan *izvan* drugog ili posve jedan *unutar* drugog ali ne mogu „zasijecati“ jedan u drugi.)

Iz dane definicije regularne razdiobe zagrada lako se uviđa da ona ima i ova daljnja svojstva:

3° Ako iz riječi duljine δ s regularnom razdiobom zagrada uklonimo bilo koji par međusobno pridruženih zagrada, a za (eventualno) preostale ostavimo isto pridruženje u parove, dobivamo u novo nastaloj riječi duljine $\delta-2$ opet regularnu razdiobu zagrada (ukoliko su još uopće preostale neke zagrade).

4° Ako u riječi koju čine simboli unutar nekog para međusobno pridruženih zagrada (eventualne) zagrade pridružimo u parove kao što su bile pridružene u danoj riječi, dobivamo u novoj riječi opet regularnu razdiobu zagrada (ako ih ona još uopće sadrži).

5° U danoj riječi s regularnom razdiobom zagrada (koja sadrži zagrade) dolazi bar jedan takav par međusobno pridruženih zagrada, da unutar njega nema drugih zagrada (jer su riječi konačne duljine).

Npr. sa $\underset{1}{(}\ \underset{1}{)}\ \underset{2}{(}\ \underset{3}{(}\ \&\ \underset{4}{(}a\underset{4}{)}\ \underset{3}{)} \Rightarrow \underset{5}{(}\ \underset{5}{)}cc\underset{2}{)} \vee$

dana je regularna razdioba zagrada riječi $A \equiv ()((\&(a)) \Rightarrow ()cc) \vee$, jer su zadovoljeni uvjeti 1° i 2°.

Za ilustraciju svojstva 3° izostavimo u A par zagrada 3. Tada preostaje

$$\underset{1}{(}\ \underset{1}{)}\ \underset{2}{(}\ \&\ \underset{4}{(}a\underset{4}{)} \Rightarrow \underset{5}{(}\ \underset{5}{)}cc\underset{2}{)} \vee,$$

čime je opet dana regularna razdioba zagrada riječi $B \equiv ()(\&(a) \Rightarrow ()cc) \vee$.

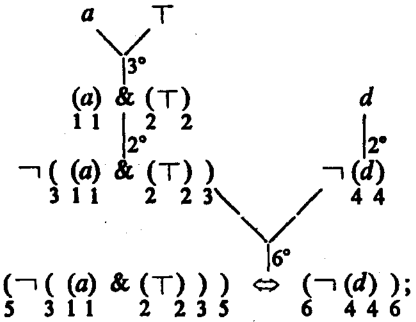
Za ilustraciju svojstva 4° razmotrimo u A izraz unutar para zagrada 2, tj.

$$\underset{3}{(}\ \&\ \underset{4}{(}a\underset{4}{)}\underset{3}{)} \Rightarrow \underset{5}{(}\ \underset{5}{)}cc;$$

njime je dana regularna razdioba zagrada riječi $C \equiv (\&(a)) \Rightarrow ()cc$.

Za ilustraciju svojstva 5° uočimo, da npr. unutar para 5 u A nema nikakvih drugih zagrada.

Za riječi koje su *formule* logike sudova i uopće sadrže zagrade uvijek *postoji* regularna razdioba zagrada. Ovo možemo uvidjeti ako pratimo formiranje neke dane formule po **D 3**. označavanjem zagrada indeksima (istim za međusobno pridružene zagrade). Kadgod upotrebimo **D 3**, 2° pridružimo međusobno par novo pridošlih zagrada. Kadgod upotrebimo **D 3**, 3° do 6° pridružimo međusobno zagrade novo pridošlog para zagrada lijevo od novo pridošlog binarnog operatora i također pridružimo međusobno zagrade novo pridošlog para zagrada desno od novo pridošlog binarnog operatora. Tada će na kraju dobivena formula očito imati regularnu razdiobu zagrada jer se tokom njenog formiranja čuvaju svojstva regularnosti 1° i 2°. Npr.



dobivena formula ima regularnu razdiobu zagrada.

U drugu ruku dakako ima i riječi koje *nisu* formule a da za njih *postoji* regularna razdioba zagrada (npr. riječ ( )).

Dokazat ćemo sada ovu osnovnu lemu:

Lema 1. *Za danu riječ postoji najviše jedna regularna razdioba zagrada, tj. ako se zagrade neke riječi uopće mogu rastaviti na parove međusobno pridruženih zagrada tako da su ispunjeni uvjeti 1° i 2°, onda je za svaku zagradu jednoznačno određen njen par.*

Dokaz. Tvrdnja leme očita je za riječi koje sadrže $2=2\cdot 1$ zagrade. Pretpostavimo da ona vrijedi za riječi koje sadrže 2ν (ν prirodni broj >1) zagrada. Neka je A sada neka riječ sa $2(\nu+1)$ zagrada. Ako za te zagrade postoje regularne razdiobe Π_1 i Π_2 na parove međusobno pridruženih zagrada, postoji prema svojstvu 5° neki par P po Π_1 međusobno pridruženih zagrada, između kojih nema drugih zagrada. Zagrade para P moraju onda biti međusobno pridružene i po Π_2 jer bi inače za Π_2 zbog 1° bio povrijeđen uvjet 2°. Ako pak u A izostavimo P, imamo u novo nastaloj riječi po 3° opet regularnu razdiobu zagrada koja je po pretpostavci indukcije jednoznačno određena, pa se Π_1 i Π_2 ne mogu razlikovati ni u razdiobi preostalih zagrada u parove međusobno pridruženih. — Time je proveden korak indukcije i lema je dokazana.

Ranije smo vidjeli da za svaku riječ koja je formula i sadrži zagrade postoji regularna razdioba zagrada. U vezi s **L 1.** odatle izlazi:

Lema 2. *Za svaku formulu logike sudova (koja se ne sastoji samo od jednog slova) postoji jedna i samo jedna regularna razdioba zagrada.*

Sada možemo pristupiti razmatranju pitanja o tome kako ćemo odrediti da li je dana riječ formula i kako ćemo rekonstruirati izgradnju dane formule, te da li je ona uvijek jednoznačno određena.

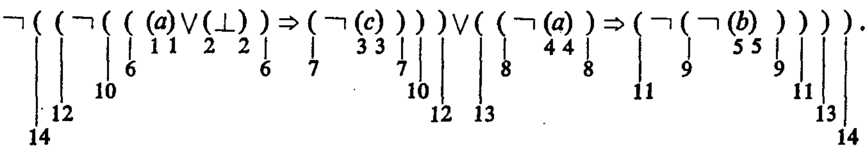
Prvo, lako je uvidjeti da **L 2.** povlači jednoznačnost formiranja dane formule. Naime, ako je posljednji korak u njenoj izgradnji bio primjena **D 3,** 2° ona će biti oblika $\neg(A)$ i prvi korak razgradnje je prelaz na formulu A. Ako je pak posljednji korak u izgradnji formule bio primjena **D 3,** 3° do 6°, ona će biti oblika $(A)\circ(B)$ gdje je $\circ$ neki od binarnih operatora &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. No zbog **L 2.** taj oblik je danom formulom određen jednoznačno, jer je druga po redu zagrada u pokrati $(A)\circ(B)$ ona koja je regularnom razdiobom u time označenoj formuli pridružena prvoj. Postupno se tako dana formula može do kraja jednoznačno razgraditi i njeno formiranje time je jednoznačno rekonstruirano. Specijalno odatle izlazi da je rang dane formule jednoznačno određen broj.

Radi se dakle još o tome da za danu riječ logike sudova ispitamo postoji li za nju regularna razdioba zagrada i ako postoji, da je odredimo. Ako se pokaže da *ne* postoji, onda ta riječ sigurno *nije* formula logike sudova. Ako *postoji* i našli smo je, možemo prema upravo opisanom postupku postepeno razgrađivati danu riječ; ako razgradnja konačno dovede do samih *slova*, riječ *je* formula, a ako *ne*, ona to *nije*.

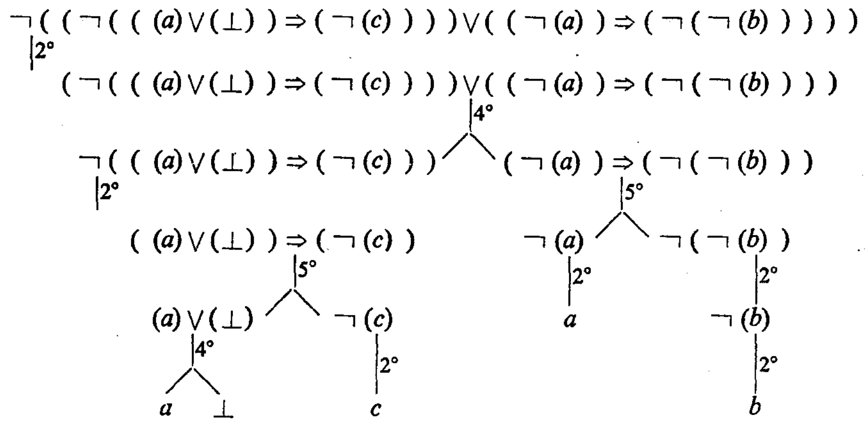
Ispitivanje o postojanju i iznalažnje regularne razdiobe zagrada može se provesti ovako:

Najprije pridružimo međusobno zagrade onih parova zagrada od kojih je prva lijeva, druga desna i unutar kojih nema daljnjih zagrada. Zatim provedemo to isto u riječi koja preostaje ako se uklone parovi već međusobno pridruženih zagrada itd. Ako se taj postupak može provesti skroz, tj. sve dok sve zagrade dane riječi nisu rastavljene u parove međusobno pridruženih, dobivena je time i regularna razdioba zagrada dane riječi. Ako to nije slučaj, za danu riječ ne postoji regularna razdioba zagrada.

Primjer 1. Razmotrimo riječ navedenu ne početku **4.6.** Vidimo da dobivamo ovu regularnu razdiobu njenih zagrada:

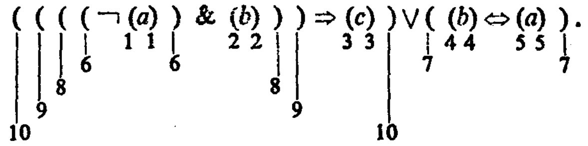


Kako je ona provediva do kraja, možemo preći na ispitivanje da li je dana riječ formula i kako je formirana:

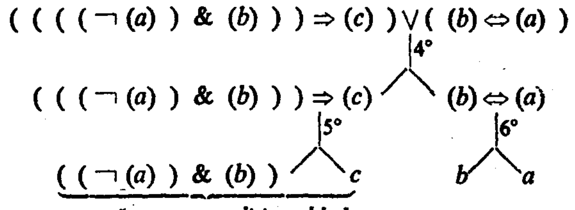


Razgradnja je do kraja provediva u skladu s **D 3.** i vodi do samih slova logike sudova, pa je dana riječ formula logike sudova.

Primjer 2. U riječi $((((\neg(a))\,\&\,(b)))\Rightarrow(c))\vee((b)\Leftrightarrow(a))$ može se provesti regularna razdioba zagrada prema



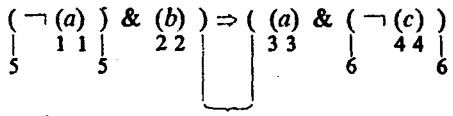
Međutim, ako je pokušamo razgraditi kao formulu logike sudova vidimo da postupak razgradnje u skladu s **D 3.** nije do kraja provediv:



ne može se razgraditi u skladu sa **D 3.**

Dana riječ dakle nije formula logike sudova.

Primjer 3. U riječi $(\neg(a))\,\&\,(b))\Rightarrow((a)\,\&\,(\neg(c))$ ne može se do kraja provesti regularna razdioba zagrada kao što vidimo prema



ne može se pridružiti zbog 1°

pa dana riječ sigurno nije formula.

Nakon provedenog razmatranja vidimo, zašto smo se kod **D 1.** mogli ograničiti na *jednu* vrst zagrada: ona je *dovoljna*, da se na jednoznačan način može rekonstruirati izgradnja neke formule.

4.7. Već smo ranije na nekoliko mjesta govorili o „komponenti" neke formule; iz konteksta je uvijek bilo jasno što smo pod tim razumijevali. Sada ćemo taj pojam uvesti općenito i eksplicitno.

Ako u shematskom prikazu formiranja dane formule F negdje dolazi formula A, možemo — silazeći vertikalno niz shemu do njenog korijena F — tamo naći taj isti primjerak od A. Svaka takva formula A, uz podatak na kojem mjestu u F dolazi, zove se *komponenta* od F.

Npr. iz sheme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
a \arrow[dr] & & \top \arrow[dl] & \\
& (a)\,\&\,(\top) \arrow[d] & & \\
& \neg((a)\,\&\,(\top)) \arrow[dr] & & a \arrow[dl] \\
& & (\neg((a)\,\&\,(\top))) \Rightarrow (a) &
\end{tikzcd}$$

vidimo da formula $F \equiv (\neg((a)\&(\top))) \Rightarrow (a)$ ima ove (i samo ove) komponente: a (*peti* po redu simbol u riječi F), $\top$, $(a)\&(\top)$, $\neg((a)\&(\top))$, a (*pretposljednji* simbol u riječi F), F. (Pritom smo podatak o mjestu pojavljivanja u F izostavili kod onih formula A koje u F dolaze na samo jednom mjestu pa je taj podatak sa A već jednoznačno određen.)

Prema našoj definiciji smatramo za identički iste formule koje se javljaju na više mjesta u F da su *kao komponente* od F međusobno različite. Npr. a u gornjem primjeru formule F koji je peti simbol u riječi F razlikuje se kao komponenta od F od a koji je pretposljednji simbol riječi F.

Iz razmatranja u **4.6.** izlazi: Ako su A, B komponente od F, onda je ili 1° A komponenta od B, ili 2° B komponenta od A, ili 3° riječi A i B su disjunktne u riječi F, tj. nema ni jednog simbola od F koji bi (na istom mjestu pojavljivanja) bio simbol i od A i od B. U ovom posljednjem slučaju reći ćemo kratko da su A i B disjunktne komponente od F.

Lako uviđamo da vrijedi: Ako u danoj formuli F međusobno disjunktne komponente $A, B, C, \ldots$ redom zamijenimo formulama $K, L, M, \ldots$ bit će novo dobivena riječ opet formula.

Strogi dokaz ove tvrdnje izvest ćemo indukcijom po rangu $\rho[F]$ od F.

Baza indukcije. Uz $\rho[F]=0$ F se reducira na neko slovo logike sudova. Ako ga zamijenimo danom formulom dobili smo kao novu riječ tu formulu pa tvrdnja vrijedi trivijalno.

Korak indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za formule ranga $\rho<k$ a F neka je neka formula sa $\rho[F]=k+1$. Ako je neka od komponenata $A, B, C, \ldots \equiv F$, onda je to jedina komponenta koja se zamjenjuje formulom pa od F opet trivijalno nastaje formula. Razmotrimo dakle samo još slučaj kad među komponentama $A, B, C, \ldots$ *nijedna* ne iscrpljuje F. Tada razlikujemo dva slučaja: 1° $F \equiv \neg(G)$, 2° $F \equiv (G) \circ (H)$ gdje je $\circ$ neki od binarnih operatora $\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. (U oba slučaja je $\rho[G]$, $\rho[H] \leq k$.)

Zamjena komponenata $A, B, C, \ldots$ od F sa $K, L, M, \ldots$ vrši se u slučaju 1° u G, a u slučaju 2° raspodjeljuje se na G i H (jer su G i H disjunktne komponente od F pa nijedna komponenta od F ne može zasijecati i u G i u H). Po pretpostavci indukcije riječi koje tim zamjenama nastaju od G odnosno od G i H opet su formule pa je i riječ koja nastaje od F opet formula što je trebalo dokazati.

5. NEKI ALTERNATIVNI SISTEMI ZA SIMBOLE I IZGRADNJU RIJEČI I FORMULA LOGIKE SUDOVA

5.1. Pored sistema koji smo uveli u **2, 3.** i **4.** postoje u literaturi i drugačiji. Jedan od najvažnijih među njima — koji je i sam po sebi od interesa — je sistem po kojem za formiranje formula *uopće nisu potrebne* nikakve zagrade, pa ih se u njem stoga ni ne uvodi kao simbole logike sudova. Ovim su se sistemom naročito mnogo služili poljski matematičari-logičari, pa ćemo ga ubuduće kratko zvati *poljskim* sistemom ili notacijom.

Inače, materijal ovog poglavlja neće biti iskorištavan u preostalom dijelu knjige, pa ga čitalac koji za nj nije zainteresiran može preskočiti bez štete za razumijevanje daljeg teksta.

Najprije valja uočiti da se zagrada ne možemo riješiti naprosto tako da ih izostavimo uz inače ista pravila formiranja formula kao ranije. U tom naime slučaju općenito ne bismo mogli jednoznačno rekonstruirati izgradnju dane formule. Npr. u formulama $(a)\&((b)\vee(c))$, $((a)\&(b))\vee(c)$ ne smijemo naprosto izostaviti zagrade jer bi onda obje dovele do iste riječi $a\&b\vee c$ iako su ishodne formule sagrađene na bitno različit način.

5.2. Definirat ćemo poljski sistem notacije za logiku sudova ovako:

5.2.1. *Definicija* 1*a*. *Simboli logike sudova jesu 1° slova logike sudova i 2° operatori logike sudova.*

Pritom su slova i operatori logike sudova oni isti simboli koji su to bili po **D 1.**

5.2.2. *Definicija* 2*a*. *Svaki (neprazni) konačni slog simbola logike sudova zove se riječ logike sudova.*

D 2a. ista je kao i **D 2,** no zbog razlike u **D 1a.** prema **D 1,** u poljskom sistemu riječi logike sudova ne sadrže nikakve zagrade.

5.2.3. *Definicija* 3*a*.

1° Svako slovo logike sudova je formula logike sudova.

2° Ako je A formula logike sudova onda je i $\neg A$ *formula logike sudova.*

Nadalje, ako su A i B formule logike sudova, onda su i ove riječi formule:

$$3^\circ\ \& AB,\quad 4^\circ\ \vee AB,\quad 5^\circ\ \Rightarrow AB,\quad 6^\circ\ \Leftrightarrow AB.$$

7° Formule su samo one riječi koje se mogu konstruirati (eventualno višestrukom) primjenom 1° do 6°.

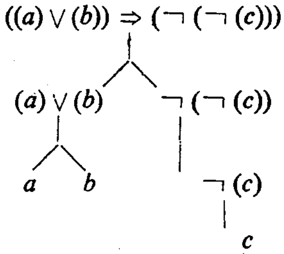
5.3. Već smo u našem ranijem sistemu uvedenom u **2.** do **4.** uvidjeli potrebu strogog dokaza da je uz **D 3.** rekonstrukcija izgradnje dane formule jednoznačno određena. To je pogotovo neophodno kod poljskog sistema koji razmatramo sada, jer tu čak nema neposredno nametljivih razloga za *naslućivanje* takve jednoznačnosti. Ovo tim više ako se sjetimo da se u našem ranijem sistemu — kao što smo spomenuli potkraj **5.1.** — izostavljanjem zagrada jednoznačnost rekonstrukcije dane formule općenito faktički *gubi.*

Prije nego li pređemo na razmatranje jednoznačnosti rekonstrukcije dane formule u poljskom sistemu spomenimo neke njegove prednosti i nedostatke relativno prema našem ranijem sistemu: Poljski sistem sadrži kao simbole samo jedan pravi podskup simbola našeg ranijeg sistema a dana formula u poljskoj notaciji općenito je kraće duljine nego li odgovarajuća formula u našem ranijem sistemu. Što se toga tiče poljski je dakle sistem nesumnjivo *ekonomičniji* i *elegantniji*. U drugu ruku, u načem sistemu za danu formulu srednje duljine redovno je *lakše* neposredno uočiti njenu izgradnju nego li je to slučaj kod odgovarajuće formule napisane u poljskoj notaciji. Ovo je još pojačano činjenicom da smo u matematici uopće *navikli* na pisanje složenih izraza uz u principu onakvu upotrebu zagrada kao što smo je uveli i definicijom formiranja formula u našem ranijem sistemu. Za ilustraciju, izraz $(2+x)\cdot\pi$ napisan u poljskoj notaciji glasio bi $\cdot + 2x\pi$.

Npr. formula našeg ranijeg sistema

$$((a)\vee(b))\Rightarrow(\neg(\neg(c)))$$

odmah sugerira razgradnju prema shemi



Odatle je lako napisati odgovarajuću formulu u poljskoj notaciji: formuli $(a)\vee(b)$ odgovara u poljskom sistemu formula $\vee ab$, a formuli $\neg(\neg(c))$ formula $\neg\neg c$. Ishodnoj formuli našeg sistema odgovara dakle u poljskoj notaciji po **D 3a,** 5° formula $\Rightarrow\vee ab\neg\neg c$. Ne može se reći da je iz ove posljednje njena izgradnja isto tako lako uočljiva kao kod prvotne formule našeg ranijeg sistema (bar za onog koji nije navikao na poljsku notaciju); međutim ona ima duljinu 7, dok naša formula ima duljinu 19.

U ovoj knjizi odlučili smo se na naš sistem a ne na poljski jer je naš ipak u literaturi znatno rašireniji a i zbog toga što je bliži u matematici inače ustaljenim konvencijama označavanja. Nedostatak našeg sistema prema poljskom, naime veća duljina formule, bit će — bar za praktičke svrhe — u znatnoj mjeri ublažen dogovorom o skraćenom načinu pisanja formule koji ćemo uvesti u idućem poglavlju.

5.4. Pokazat ćemo sada kako je uz poljsku notaciju za danu riječ logike sudova odlučivo da li je formula ili ne i dokazati da je, u slučaju da riječ jest formula, rekonstrukcija njene izgradnje jednoznačno određena.

5.4.1. Uvedimo u tu svrhu najprije još jedan pomoćni pojam, na me težinu $\gamma[A]$ riječi A.

Definicija. Slova logike sudova imaju težinu 0 (*nula*). *Unitarni operator ima težinu* 1, *a binarni operatori* $\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ *imaju težinu* 2.

Težina $\gamma[A]$ *riječi* A *jednaka je zbroju težina svih simbola koji je sačinjavaju (uzetim svaki onoliko puta, kolika puta dolazi u* A*).*

Npr. riječ $\Rightarrow \vee a b \neg \neg c$ ima težinu $2+2+0+0+1+1+0=6$.

5.4.2. *Lema* 1. *Ako je riječ* A *formula logike sudova (u poljskoj notaciji), ona ima ova svojstva*

$$1^\circ \quad \delta[A]=\gamma[A]+1,$$

(duljina formule je dakle uvijek za 1 veća od njene težine);

2° *Za svaki pravi početni segment* B *od* A *(tj. za svaku riječ* B *koja je takva da postoji neka riječ* C *tako da je* $A\equiv BC$*) vrijedi*

$$\delta[B]<\gamma[B]$$

(duljina pravog početnog segmenta formule dakle nikad nije veća od njegove težine).

Lemu ćemo dokazati indukcijom po duljini δ formule A.

Dokažimo najprije svojstvo 1°.

Baza indukcije. Za $\delta[A]=1$, A mora biti neko slovo (konstanta ili varijabla) logike sudova pa je tada $\gamma[A]=0$, i svojstvo 1° je ispunjeno.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je svojstvo 1° ispunjeno za formule duljine $\delta<k\,(k>1)$, a A neka je neka formula duljine $\delta[A]=k+1$. Razlikujemo dva slučaja: α) A je oblika $\neg A_1$ gdje je A_1 neka formula se $\delta[A_1]=k$; β) A je oblika $\circ A_1 A_2$ gdje je $\circ$ neki binarni operator a A_1, A_2 su formule sa $\delta[A_1]$, $\delta[A_2]<k$. (Prema **D 3a.** očito je da osim α) i β) ne može nastupiti nikakav drugačiji slučaj.)

Slučaj α). Sada je $\delta[A]=1+\delta[A_1]$, $\gamma[A]=1+\gamma[A_1]$. No po pretpostavci indukcije je $\delta[A_1]=\gamma[A_1]+1$ pa je dakle $\delta[A]=1+\delta[A_1]=1+\gamma[A_1]+1=\gamma[A]+1$.

Slučaj β). Sada je $\delta[A]=1+\delta[A_1]+\delta[A_2]$, $\gamma[A]=2+\gamma[A_1]+\gamma[A_2]$. No po pretpostavci indukcije je $\delta[A_1]=\gamma[A_1]+1$, $\delta[A_2]=\gamma[A_2]+1$ pa je dakle opet $\delta[A]=1+(\gamma[A_1]+1)+(\gamma[A_2]+1)=\gamma[A]+1$.

Preostaje još dokaz svojstva 2°.

Baza indukcije. Za $\delta[A]=1$ nema pravih početnih segmenata od A pa je svojstvo 2° trivijalno jer za taj slučaj ništa ni ne tvrdi.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je svojstvo 2° ispunjeno za formule duljine $\delta<k\,(k>1)$, a A neka je neka formule duljine $\delta[A]=k+1$. Razlikujemo opet dva slučaja : α) A je oblika $\neg A_1$ gdje je A_1 neka formula sa $\delta[A_1]=k$; β) A je oblika $\circ A_1 A_2$ gdje je $\circ$ neki binarni operator a A_1, A_2 su formule sa $\delta[A_1]$, $\delta[A_2]<k$.

Slučaj α). Ako kao pravi početni segment formule A uzmemo riječ $B\equiv\neg$ svojstvo 2° je ispunjeno jer je tada $\delta[B]=\gamma[B]=1$. Ako pak B zadire u A_1 bit će $B\equiv\neg B_1$ gdje je riječ B_1 neki pravi početni segment formule A_1 pa je po pretpostavci indukcije $\delta[B_1]<\gamma[B_1]$. No $\delta[B]=1+\delta[B_1]$, $\gamma[B]=1+\gamma[B_1]$ pa je $\delta[B]<\gamma[B]$ i svojstvo 2° je opet ispunjeno.

Slučaj β). Za $B\equiv\circ$ 2° je ispunjeno jer je tada $\delta[B]=1$, $\gamma[B]=2$. Ako $B\equiv\circ B_1$ zadire u A_1 tako da je $BC\equiv\circ B_1 C\equiv\circ A_1$ bit će po pretpostavci indukcije $\delta[B_1] < \gamma[B_1]$. No $\delta[B] = 1 + \delta[B_1]$, $\gamma[B] = 2 + \gamma[B_1]$ pa je $\delta[B] < \gamma[B]$ dakle pogotovo $\delta[B] < \gamma[B]$ i svojstvo 2° je opet ispunjeno. Ako je $B \equiv \circ A_1$ bit će zbog svojstva 1° $\delta[A_1] = \gamma[A_1] + 1$. No $\delta[B] = 1 + \delta[A_1]$, $\gamma[B] = 2 + \gamma[A_1]$ pa je $\delta[B] = 1 + (\gamma[A_1] + 1) = \gamma[B]$ dakle pogotovo $\delta[B] < \gamma[B]$ i 2° je opet ispunjeno. Konačno, ako B zadire u A_2 tako da je $B \equiv \circ A_1 B_1$ i $A \equiv BC$, bit će po pretpostavci indukcije $\delta[B_1] < \gamma[B_1]$ a zbog svojstva 1° je $\delta[A_1] = \gamma[A_1] + 1$. No $\delta[B] = 1 + \delta[A_1] + \delta[B_1]$, $\gamma[B] = 2 + \gamma[A_1] + \gamma[B_1]$ pa je $\delta[B] < 1 + (\gamma[A_1] + 1) + \gamma[B_1] = \gamma[B]$ i opet vrijedi 2°. Lema je dokazana.

5.4.3. Dokažimo sada da vrijedi i obrat **L 1.** u smislu:

Lema 2. *Ako riječ A logike sudova (u poljskoj notaciji) ima svojstva 1° i 2° iz* **L 1**, *ona je formula.*

Drugim riječima, među riječima logike sudova jedino formule imaju svojstva da im je duljina za 1 veća od težine a da duljina nijednog njihovog pravog početnog segmente nije veća od njegove težine.

L 1. i **2.** zajedno *karakteriziraju* formule logike sudova u poljskom sistemu. Da bi dakle za danu riječ odlučili da li je formula ili ne, dovoljno je provjeriti ima li ona svojstva 1° i 2° ili ne.

Dokazat ćemo **L 2.** opet indukcijom po duljini $\delta[A]$ dane riječi sa svojstvima 1°, 2°.

Baza indukcije. Za $\delta[A] = 1$ riječ A može biti samo neko slovo (konstanta ili varijabla) logike sudova jer za unitarni operator $\neg$ vrijedi

$$\delta[\neg] = 1 = \gamma[\neg],$$

a za dani binarni operator $\circ$ je $\delta[\circ] = 1 < \gamma[\circ] = 2$ pa za riječi $A \equiv \neg$ i $A \equiv \circ$ ne može biti ispunjeno svojstvo 1°. No slova logike sudova su formule, pa dakle za $\delta[A] = 1$ **L 2.** vrijedi.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je **L 2.** ispravna za riječi logike sudova duljine $\delta < k$ $(k > 1)$. Neka je A dana riječ logike sudova sa $\delta[A] = k + 1$ i neka A ima svojstva 1° i 2°. Treba pokazati da je A onda (uz pretpostavku indukcije) također formula.

Budući da je $\delta[A]$ po pretpostavci indukcije barem 2, postoji pravi početni segment B od A duljine $\delta[B] = 1$. Taj simbol B ne može biti slovo logike sudova, jer bi tada bilo $\delta[B] = 1 = 0 + 1 = \gamma[B] + 1 > \gamma[B]$ pa A ne bi imao svojstvo 2°. Preme tome prvi simbol B riječi A je neki operator. Razlikovat ćemo 2 slučaja: α) $B \equiv \neg$; β) B je jedan od binarnih operatora &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Slučaj α). Sada je $A \equiv \neg A_1$. Budući da A po pretpostavci ima svojstva 1°, 2° imat će ih i A_1: Naime, prvo iz $\delta[A] = \gamma[A] + 1$ izlazi zbog $\delta[A] = 1 + \delta[A_1]$, $\gamma[A] = 1 + \gamma[A_1]$ da je i $\delta[A_1] = \delta[A] - 1 = \gamma[A] = \gamma[A_1] + 1$; drugo, da za neki pravi početni segment B_1 od A_1 vrijedi $\delta[B_1] > \gamma[B_1]$ bio bi $\neg B_1$ pravi početni segment od A za koji bi vrijedilo $\delta[\neg B_1] = 1 + \delta[B_1] > 1 + \gamma[B_1] = \gamma[\neg B_1]$. A_1 je dakle po pretpostavci indukcije formula. No tada je i $A \equiv \neg A_1$ po **D 3a**, 2° formula.

Slučaj β). Sada je $A \equiv \circ A_1$ gdje je $\circ$ jedan od binarnih operatora &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Neka je $B \equiv \circ B_1$ neki pravi početni segment od A. Kako A po pretpostavci ima svojstva 1° i 2°, bit će $1 + \delta[A_1] = \delta[A] = \gamma[A] + 1 = 2 + \gamma[A_1] + 1$ dakle

(4) $$\delta[A_1] = \gamma[A_1] + 2$$

i $1 + \delta[B_1] = \delta[B] < \gamma[B] = 2 + \gamma[B_1]$ dakle

(5) $$\delta[B_1] < \gamma[B_1] + 1.$$

Pokazat ćemo sada najprije da u (5) za bar jedan pravi početni segment B_1 od A_1 vrijedi *striktna* jednakost.

Zaista, pretpostavimo li *suprotno*, vrijedilo bi za sve prave početne segmente B_1 od A_1 da je $\delta[B_1] < \gamma[B_1] + 1$ tj. $\delta[B_1] < \gamma[B_1]$. Specijalno, ako bi kao B_1 odabrali pravi početni segment D od A_1 koji sadrži sve simbole riječi A_1 osim posljednjeg (a takav segment postoji, tj. $\delta[A_1] > 2$ zbog (4)), bilo bi

(6) $$\delta[D] < \gamma[D].$$

No odatle izlazi $\delta[A_1] = \delta[D] + 1 < \gamma[D] + 1 < \gamma[A_1] + 1$, u suprotnosti sa (4).

Znači, postoji početni segment $B_1 \equiv D$ od A_1 takav da u (5) vrijedi jednakost. Neka je D_1 *najkraći* takav segment, tj.

(7) $$\delta[D_1] = \gamma[D_1] + 1,$$

(8) $$\delta[B_1] < \gamma[B_1] \text{ za } D_1 \equiv B_1 C.$$

D_1 je tada po pretpostavci indukcije formula a A_1 ima oblik $A_1 \equiv D_1 D_2$.

Pokazat ćemo da i D_2 ima svojstva 1° i 2°:

Prvo, zbog (7) i (4) izlazi

$$\gamma[D_1] + 1 + \delta[D_2] = \delta[D_1] + \delta[D_2] = \delta[A_1] = \gamma[A_1] + 2 = \gamma[D_1] + \gamma[D_2] + 2,$$

dakle $\delta[D_2] = \gamma[D_2] + 1$.

Drugo, zbog (7) i (5), bit će za svaki pravi početni segment B_2 od D_2:

$$\gamma[D_1] + 1 + \delta[B_2] = \delta[D_1] + \delta[B_2] = \delta[D_1 B_2] < \gamma[D_1 B_2] + 1 = \gamma[D_1] + \gamma[B_2] + 1$$

dakle $\delta[B_2] < \gamma[B_2]$.

Po pretpostavci indukcije je dakle i D_2 formula. No tada je po **D 3a**, 3° do 6° i $A \equiv \circ D_1 D_2$ formula.

L 2. je time dokazana.

Napomenimo da je u poljskom sistemu kriterij za odluku da li je dana riječ A formula ili ne jednostavniji i elegantniji nego li u našem ranijem sistemu. Ovdje samo treba za sve prave početne segmente B dane riječi A provjeriti da li je $\delta[B] < \gamma[B]$ a za samu riječ A da li je $\delta[A] = \gamma[A] + 1$. U našem ranijem sistemu trebalo je najprije provjeriti da li dana riječ posjeduje regularnu razdiobu zagrada u međusobno pridružene parove, a zatim još da li se uz nju može do kraja razgraditi prema **D 3.** (usporedi primjere 1. i 2. u 4.6.).

Primjer 1. Ispitajmo da li je riječ u poljskoj notaciji

$$A \equiv \neg \vee \neg \Rightarrow \vee a \perp \neg c \Rightarrow \neg a \neg \neg b$$

formula logike sudova. Za samu riječ A je $\delta[A]=15$, $\gamma[A]=14$ dakle

$$\delta[A]=\gamma[A]+1.$$

Za prave početne segmente B od A dobivamo redom

$\delta[B]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\gamma[B]$	1	3	4	6	8	8	8	9	9	11	12	12	13	14

dakle uvijek $\delta[B]<\gamma[B]$. Znači, A je formula. (Vježba: Pokaži da formula A odgovara u našoj ranijoj notaciji formuli iz primjera 1. u **4.6.**)

Primjer 2. Ispitajmo da li je riječ $A \equiv \neg \vee a \neg \neg c \,\&\, \Rightarrow b \Rightarrow bc$ formula. $\delta[A]=12=11+1=\gamma[A]+1$. Za prave početne segmente izlazi

$\delta[B]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\gamma[B]$	1	3	3	4	5	5	—	—	—	—	—

Vidimo da za $\delta[B]=6$ imamo $\gamma[B]=5<6$ pa A ne može biti formula.

5.4.4. Pokažimo još jednoznačnost i samo provođenje rekonstrukcije formiranja dane formule u poljskoj notaciji. Činjenicu da se formiranje dane formule A u poljskoj notaciji može rekonstruirati na jednoznačan način dokazat ćemo opet indukcijom po duljini $\delta[A]$.

Baza indukcije. Ako je $\delta[A]=1$ i A je formula, ona se reducira na slovo (konstantu ili varijablu) logike sudova, pa je tvrdnja o jednoznačnoj rekonstrukciji formiranja trivijalna.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je tvrdnja već dokazana za formule duljine $\delta<k$ $(k>1)$ a A neka je neka dana formula duljine $\delta[A]=k+1$.

Zbog **D 3a.** A je ili oblika $\neg A_1$ ili oblika $\circ A_1$ gdje je $\circ$ neki binarni operator a $\delta[A_1]=k$.

U prvom slučaju je A morao nastati primjenom **D 3a,** 2° iz A_1 a kako je po pretpostavci indukcije formiranje od A_1 jednoznačno određeno vrijedi isto i za A.

U drugom slučaju A je morao nastati primjenom **D 3a,** 3° do 6° iz nekih formula A_2 i A_3, $A \equiv \circ A_2 A_3$. Ako bi postojale i formule B_2, B_3 tako da je $A \equiv \circ B_2 B_3$ uz $B_2 \not\equiv A_2$, bio bi ili A_2 pravi početni segment od B_2 ili B_2 pravi početni segment od A_2. No ovo je isključeno jer formule po **L 1.** imaju svojstva 1° i 2°. Znači da je nužno $B_2 \equiv A_2$ dakle i $B_3 \equiv A_3$ tj. komponente A_2, A_3 u $A \equiv \circ A_2 A_3$ određene su jednoznačno. Kako je pak $\delta[A_2]$, $\delta[A_3]<k$ to je formiranje od A_2 i A_3 po pretpostavci indukcije jednoznačno određeno pa isto opet vrijedi i za danu formulu A.

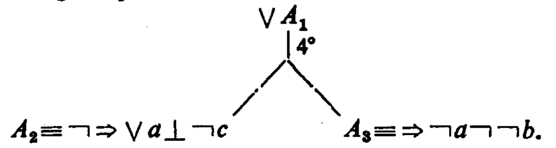
Postupak dokaza u koraku indukcije ujedno pokazuje *kako* ćemo postupno razgraditi danu formulu u poljskoj notaciji: Za prvi slučaj ($A \equiv \neg A_1$) ovo je očito, a u drugom ($A \equiv \circ A_1$) treba potražiti pravi početni segment od A_1 koji je formula; to će onda biti komponenta A_2.

Razmotrimo primjer 1. iz **5.4.3.**

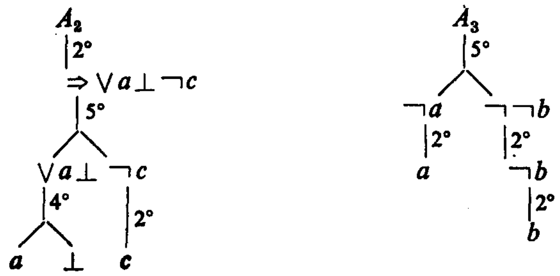
Prvi korak razgradnje daje

$$\begin{array}{c} A \\ \big|\, 2^\circ \\ \lor A_1 \equiv \lor \neg \Rightarrow \lor a \bot \neg c \Rightarrow \neg a \neg \neg b. \end{array}$$

Za riječ A_1 iza $\lor$ u posljednjem izrazu (tj. za $\neg \Rightarrow \lor a \bot \neg c \Rightarrow \neg a \neg \neg b$) nalazimo kao pravi početni segment A_2 koji je formula riječ $\neg \Rightarrow \lor a \bot \neg c$ (njoj je duljina za 1 veća od težine), pa je A_3 riječ $\Rightarrow \neg a \neg \neg b$. Odatle dobivamo drugi korak razgradnje



Slično je dalje



(usporedi i razgradnju odgovarajuće formule u našem ranijem sistemu u primjeru 1. u **4.6.**).

5.4.5. Postoji još jedan postupak koji, do kraja promišljen, također vodi do dokaza o jednoznačnoj određenosti formiranja dane formule u poljskoj notaciji i do kriterija o tom da li je dana riječ formula ili ne. Ilustrirat ćemo ga na istom primjeru kojim smo završili **5.4.4.** Osnovna ideja postupka je u „čitanju" dane riječi zdesna na lijevo i zaključivanju odatle na njeno formiranje prema **D** 3°**a**, 2° do 6°.

Riječ

$$A \equiv \neg \lor \neg \Rightarrow \lor a \bot \neg c \Rightarrow \neg a \neg \neg b$$

završava sa $\neg b$ odakle u njoj nalazimo komponentu kojoj odgovarajuća u našoj ranijoj notaciji glasi $\neg(b)$. Ispred $\neg b$ u A dolazi $\neg$ pa u A nalazimo (u našoj ranijoj notaciji) komponentu $\neg(\neg(b))$. Ispred $\neg \neg b$ u A dolazi $\neg a$ a ispred toga $\Rightarrow$, pa time u A nalazimo (u našoj notaciji) komponentu $(\neg(a)) \Rightarrow (\neg(\neg(b)))$. Dalje prema lijevo u A dolazi $\neg c$, tj. naša komponenta $\neg(c)$ a opet dalje $\lor a \bot$ tj. naš $(a) \lor (\bot)$. Ispred toga je $\Rightarrow$ pa u A nalazimo našu komponentu $((a)\vee(\perp))\Rightarrow(\neg(c))$. Dalje slijeva je $\neg$ pa imamo komponentu $\neg(((a)\vee(\perp))\Rightarrow(\neg(c)))$. Opet dalje slijeva je $\vee$ što u vezi s ranijim vodi na $(\neg(((a)\vee(\perp))\Rightarrow(\neg(c))))\vee((\neg(a))\Rightarrow(\neg(\neg(b))))$. Konačno, najviše slijeva u A je znak $\neg$ što vodi na riječ A kako je dana u **4.6.**

Budući da je postupak rekonstrukcije bio do kraja provediv, vidimo ujedno da je A formula.

Uočava se da je ovaj postupak odnosno na ovakvom postupku zasnovan dokaz jednoznačnosti formiranja dane formule i kriterij odluke o tom da li je dana riječ formula srodniji odgovarajućim rasuđivanjima u **4.6.** nego li u **5.4.2.** do **5.4.4.** Posljednji postupak je spretan za praktički rad ali su razmatranja u **5.4.2.** do **5.4.4.** elegantnija.

5.4.6. *Vježbe.*

1° Napiši u poljskoj notaciji formule koje u našoj ranijoj notaciji odgovaraju formulama

a) $((a)\,\&\,(b))\Rightarrow(c)$, b) $(a)\,\&\,((b)\Rightarrow(c))$, c) $(a)\,\&\,(\neg(b))$,

d) $(\neg(a))\,\&\,(b)$, e) $\neg((a)\,\&\,(b))$, f) $(\neg(\neg(a)))\vee(a)$,

g) $(\neg(a))\vee(\neg(a))$, h) $(a)\vee(\neg(\neg(a)))$, i) $\neg((a)\vee(\neg(a)))$,

j) $\neg((\neg(a))\vee(a))$, k) $\neg(\neg((a)\vee(a)))$.

(Rješenje:

a) $\Rightarrow\&abc$, b) $\&a\Rightarrow bc$, c) $\&a\neg b$, d) $\&\neg ab$, e) $\neg\&ab$,

f) $\vee\neg\neg aa$, g) $\vee\neg a\neg a$, h) $\vee a\neg\neg a$, i) $\neg\vee a\neg a$,

j) $\neg\vee\neg aa$, k) $\neg\neg\vee aa$.)

2° Napiši u našoj ranijoj notaciji formule koje u poljskoj notaciji odgovaraju formulama:

a) $\&\&\&abcd$, b) $\&\&a\&bcd$, c) $\&\&ab\&cd$,

d) $\&a\&\&bcd$, e) $\&a\&b\&cd$.

(Rješenje:

a) $(((a)\,\&\,(b))\,\&\,(c))\,\&\,(d)$, b) $((a)\,\&\,((b)\,\&\,(c)))\,\&\,(d)$,

c) $((a)\,\&\,(b))\,\&\,((c)\,\&\,(d))$, d) $(a)\,\&\,(((b)\,\&\,(c))\,\&\,(d))$,

e) $(a)\,\&\,((b)\,\&\,((c)\,\&\,(d)))$.)

3° Koje od navedenih riječi u poljskoj notaciji su formule:

a) $\&\&\&aaaa$, b) $\&\&a\&aaa$, c) $\&\&aa\&aa$, d) $\&\&aaa\&a$,

e) $\&\&aaaa\&$, f) $\&a\&\&aaa$, g) $\&a\&a\&aa$, h) $\&a\&aa\&a$,

i) $\&a\&aaa\&$, j) $\&aa\&\&aa$, k) $\&aa\&a\&a$, l) $\&aa\&aa\&$,

m) $\&aaa\&\&a$, n) $\&aaa\&a\&$, o) $\&aaaa\&\&$

(usp. vježbu 2°)? Rješenje: Riječi a), b), c), f), g) su formule; ostale riječi nisu.)

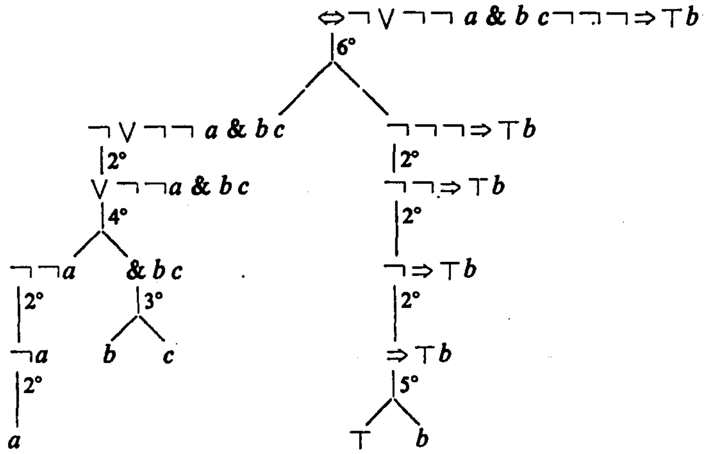
4° Pokaži: Ako je u danoj formuli u poljskoj notaciji slovo *A* *ispred* slova *B*, onda je i u odgovarajućoj formuli u našoj ranijoj notaciji odgovarajući primjerak od *A* *ispred* odgovarajućeg primjerka od *B* i obrnuto. (Odgovor: Tvrdnja izlazi odatle što se uz formiranje formula po **D 3.** i **D 3a.** međusobni poredak *slova* logike sudova ne razlikuje.)

5° Da li bi se u poljskoj notaciji kao niz varijabla logike sudova mogao uvesti ovaj: $|$, $||$, $|||$, $||||$, ... (usp. **2.2.**)? (Odgovor: Bez daljnjega se to ne bi moglo provesti jer tada npr. ne bi znali da li $\& \; |||$ u našoj ranijoj notaciji odgovara $(|)\&(||)$ ili $(||)\&(|)$. Međutim, ovaj bi se nedostatak lako uklonio time da uvedemo neki znak razdvajanja, recimo $\cdot$. Tada bi npr. formuli $(|)\&(||)$ u poljskoj notaciji odgovarala formula $\& |\cdot||$, a formuli $(||)\&(|)$ formula $\& \; ||\cdot|$.

6° Napiši u obliku obrnutog drveta shemu razgradnje formule

$$\Leftrightarrow \neg \vee \neg \neg a \& b c \neg \neg \neg \Rightarrow \top b .$$

(Rješenje: Postupkom kao u **5.4.4.** ili **5.4.5.** dobivamo:



5.4.7. U literaturi koja se služi poljskim sistemom notacije upotrebljavaju se često drugačije oznake za operatore. Obično **N** znači negaciju, **C** implikaciju, **K** konjunkciju, **A** disjunkciju, **D** Shefferovu operaciju i **E** ekvivalenciju.

5.5. Navedimo još jedan sistem notacije formula sa jednom vrsti zagrada koji je srodan našem ranijem sistemu, ali je od njega ekonomičniji jer, općenito uzevši, za odgovarajuću formulu u njemu treba manje zagrada nego li u našem sistemu. (U drugu ruku, izgradnja formula u našem sistemu bliža je uobičajenom načinu sastavljanja složenih izraza u matematici inače.)

Radi razlikovanja zvat ćemo ovaj novi, dosad treći sistem, sistemom ili notacijom s *vanjskim zagradama.*

D 1. i **2.** (definicije simbola i riječi) ovdje su iste kao u našem ranijem sistemu. Umjesto **D 3.** dolazi sada

Definicija 3b.

1° *Svako slovo logike sudova je formula logike sudova.*

2° *Ako je A formula, onda je i $(\neg A)$ formula.*

Nadalje, ako su A i B formule, onda su i ove riječi formule:

$$3°\,(A \,\&\, B),\quad 4°\,(A \vee B),\quad 5°\,(A \Rightarrow B),\quad 6°\,(A \Leftrightarrow B).$$

7° *Formule su samo one riječi koje se mogu konstruirati (eventualno višestrukom) primjenom* 1° *do* 6°.

Lako se vidi da će i formule formirane po **D 3b.** imati regularnu razdiobu zagrada (usp. **4.6.**) pa za sistem s vanjskim zagradama u pogledu jednoznačnosti rekonstrukcije i same razgradnje dane formule vrijedi isto što i u našem ranijem sistemu.

Primjer. Primjeru 1. iz **4.6.** odgovara u notaciji s vanjskim zagradama formula

$$(\neg((\neg((a \vee \bot) \Rightarrow (\neg c))) \vee ((\neg a) \Rightarrow (\neg(\neg b))))).$$

Njena duljina je za 8 manja od duljine tamošnjeg primjera. Ova ušteda ostvarena je samo na zagradama jer su slova i operatori ovdje dakako isti kao ranije.

Navedimo radi usporedbe duljine ovoj odgovarajućih formula u sva tri sistema:

	raniji sistem	vanjske zagrade	poljska notacija
$\delta[A]$	43	35	15
od toga zagrada	28	20	0

5.6. *Vježbe.*

5.6.1. Napiši u sistemu s vanjskim zagradama formulu kojoj u našem ranijem sistemu odgovara formula:

a) $((a) \,\&\, (b)) \Rightarrow (c)$, b) $(a) \,\&\, ((b) \Rightarrow (c))$, c) $(\neg(\neg(a))) \,\&\, (a)$,
d) $(\neg(a)) \,\&\, (\neg(a))$, e) $(a) \,\&\, (\neg(\neg(a)))$, f) $\neg((a) \,\&\, (\neg(a)))$,
g) $\neg((\neg(a)) \,\&\, (a))$, h) $\neg(\neg((a) \,\&\, (a)))$.

(Rješenje:

a) $((a \,\&\, b) \Rightarrow c)$, b) $(a \,\&\, (b \Rightarrow c))$, c) $((\neg(\neg a)) \,\&\, a)$,
d) $((\neg a) \,\&\, (\neg a))$, e) $(a \,\&\, (\neg(\neg a)))$, f) $(\neg(a \,\&\, (\neg a)))$,
g) $(\neg((\neg a) \,\&\, a))$, h) $(\neg(\neg(a \,\&\, a)))$.)

5.6.2. Napiši u našem ranijem sistemu formule koje odgovaraju ovim formulama u notaciji s vanjskim zagradama:

a) $((a \,\&\, \top) \vee (c \Leftrightarrow a))$, b) $((\neg a) \,\&\, (\neg b))$, c) $(((a \vee b) \vee c) \vee d)$.

(Rješenje:

a) $((a) \,\&\, (\top)) \vee ((c) \Leftrightarrow (a))$, b) $(\neg(a)) \,\&\, (\neg(b))$,
c) $(((a) \vee (b)) \vee (c)) \vee (d)$.)

5.6.3. Napiši u poljskoj notaciji formule koje odgovaraju ovim formulama u notaciji s vanjskim zagradama:

a) $((a \mathbin{\&} b) \Rightarrow (\neg c))$, b) $(a \mathbin{\&} (b \Rightarrow (\neg c)))$, c) $(((\neg a) \mathbin{\&} b) \Rightarrow c)$,

d) $((\neg a) \mathbin{\&} (b \Rightarrow c))$, e) $((a \mathbin{\&} (\neg b)) \Rightarrow c)$.

(Rješenje:

a) $\Rightarrow \&ab \neg c$, b) $\& a \Rightarrow b \neg c$, c) $\Rightarrow \& \neg abc$,

d) $\& \neg a \Rightarrow bc$, e) $\Rightarrow \& a \neg bc$.)

5.6.4. Napiši u notaciji s vanjskim zagradama formule koje odgovaraju ovim formulama u poljskom sistemu:

a) $\& a \Rightarrow \neg bc$, b) $\Rightarrow \neg \& abc$, c) $\& a \neg \Rightarrow bc$,

d) $\neg \Rightarrow \& abc$, e) $\neg \& a \Rightarrow bc$.

(Rješenje:

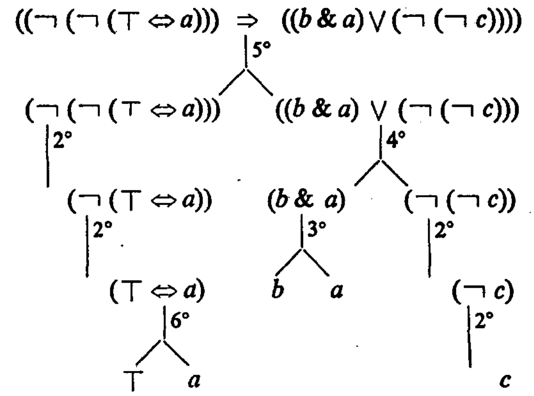
a) $(a \mathbin{\&} ((\neg b) \Rightarrow c))$, b) $((\neg (a \mathbin{\&} b)) \Rightarrow c)$, c) $(a \mathbin{\&} (\neg (b \Rightarrow c)))$,

d) $(\neg ((a \mathbin{\&} b) \Rightarrow c))$, e) $(\neg (a \mathbin{\&} (b \Rightarrow c)))$.)

5.6.5. Napiši u obliku „obrnutog drveta" shemu razgradnje formule u notaciji s vanjskim zagradama

$$((\neg (\neg (\top \Leftrightarrow a))) \Rightarrow ((b \mathbin{\&} a) \vee (\neg (\neg c)))).$$

(Rješenje:



Ubuduće se u ovoj knjizi nećemo služiti ni poljskom notacijom ni notacijom s vanjskim zagradama.

6. SKRAĆENO PISANJE FORMULA

6.1. U ovom poglavlju uvest ćemo neke konvencije o pojednostavnjenom pisanju formula kojima ćemo u znatnoj mjeri ublažiti nedostatak koji naš sistem ima prema poljskoj notaciji a pogotovo će praktički biti uklonjen nedostatak koji on ima prema notaciji s vanjskim zagradama.

Izraze koji će u skraćenom obliku predočivati formule zvat ćemo također i *oznakama* ili *pokratama* formula.

Razmotrimo npr. formulu $(a)\&(b)$. Ako je označimo sa $a\&b$ neće biti mogućnosti zabune o tome, koju *formulu* $a\&b$ na prirodni način *označuje*. Dakako, u našem sistemu riječ $a\&b$ sama *nije* formula, ali se možemo dogovoriti da nam ona služi kao *oznaka* formule $(a)\&(b)$. Slično, riječ $\neg\neg a$ može označavati formulu $\neg(\neg(a))$. Vidimo dakle, da u pojedinim formulama možemo izostaviti neke zagrade, pa da time dobijemo oznaku za danu formulu, iz koje će se ona lako i bez opasnosti zabune moći rekonstruirati.

Još znatno više zagrada moći ćemo uštedjeti ako dogovorno uvedemo određenu hijerarhiju operatora logike sudova: Uzet ćemo da u nizu

$$\neg,\ \&,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow$$

svaki operator ima sam po sebi veću moć razdvajanja od bilo kojeg drugog lijevo od njega. Ako to usvojimo, onda je jasno da npr. $a\&b\vee c$ označuje formulu $((a)\&(b))\vee(c)$ a ne možda formulu $(a)\&((b)\vee(c))$. (Slično npr. i u elementarnoj algebri znak $+$ ima veću moć razdvajanja od $\cdot$ pa je jasno da npr. $a\cdot b+c$ znači $(a\cdot b)+c$ a ne možda $a\cdot(b+c)$.) Pokrata za $(a)\&((b)\vee(c))$ bit će dakako $a\&(b\vee c)$.

U drugu ruku uz ovakvo uvođenje pokrata nećemo uvijek ići na krajnje moguće, tj. nećemo pod svaku cijenu broj zagrada u pokrati svesti na gornjim konvencijama omogućeni minimum: Ako bi time bilo teže uočljivo koju formulu pokrata označuje, ostavit ćemo radije u pokrati po koji par ne-neophodnih zagrada. Iako npr. po našem dogovoru pokrata $a\&b\vee c\Leftrightarrow d\Rightarrow\neg\neg e$ sigurno označuje formulu

$$(((a)\&(b))\vee(c))\Leftrightarrow((d)\Rightarrow(\neg(\neg(e)))),$$

označit ćemo tu formulu možda radije s $(a\&b\vee c)\Leftrightarrow(d\Rightarrow\neg\neg e)$.

Npr. formulu iz primjera 1. u **4.6.** možemo po našim konvencijama označiti pokratom

$$\neg((\neg((a\vee\bot)\Rightarrow\neg c))\vee(\neg a\Rightarrow\neg\neg b))$$

čime smo uštedjeli 18 zagrada, a što se tiče lakoće rekonstrukcije formiranja formule izraz je još znatno dobio.

Pokrata neke formule — kao pokrata — dakako *nije* objekt logike sudova nego njene metamatematike i samo *označuje* objekt matematičkog sistema logike sudova. Kao *objekt* logike sudova pokrata će uvijek biti riječ ali ne formula. Međutim, radi kraćeg izražavanja možemo u ovakvom slučaju — uz potrebni oprez — poći korak dalje i dogovoriti se, da ne govorimo uvijek eksplicitno o pokrati ili oznaci formule, nego naprosto o *formuli*. Strogo uzevši ovo dakako nije korektno, jer time nazivamo formulom nešto što *nije* formula. Ali, ako stalno budemo imali na umu da se tu radi samo o kraćem načinu izražavanja, neće biti opasnosti zabune. Npr. kad kažemo „riječ $\neg a\&b$" jasno je da time mislimo upravo na tu riječ $\neg a\&b$. Ako pak kažemo „formula $\neg a\&b$" onda ćemo to shvatiti kao kraći način izražavanja za „formula, koja je po našem dogovoru skraćeno označena sa $\neg a\&b$", pa u tom slučaju mislimo na riječ $(\neg(a))\&(b)$, koja je formula.

Razlog da uvodimo ovakvo izražavanje i ovdje je — kao što je to bio slučaj i u **3.6.** — taj, što bi inače izražavanje često bilo dugačko, nespretno ili nepregledno. Sličnih primjera ima dakako i drugdje u matematici dovoljno (i previše!). Npr. ako u izrazu

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 2$$

želimo označiti „redak 2 4" reći ćemo da je to „drugi redak determinante D" iako bi bilo korektnije da kažemo „drugi redak u shemi elemenata, kojom je određena determinanta D".

6.2. Sve dogovore, koje smo gore uveli za skraćeno pisanje formula, primjenjivat ćemo i kod pisanja oznaka za formule. Ako npr. $(A) \& (B)$ označuje neku formulu, pisat ćemo umjesto te oznake kraće $A \& B$; ako je

$$((A) \vee (\neg (B))) \Rightarrow (C)$$

oznaka neke formule pisat ćemo umjesto toga $A \vee \neg B \Rightarrow C$ itd. Time se dakako može dogoditi da kod prelaza od neke oznake dane formule na njenu pokratu moramo uvesti neke nove zagrade. Npr. ako je $A \equiv a \Rightarrow b$ formula (tačnije: ako A označuje formulu $(a) \Rightarrow (b)$) a $B \equiv c$ te ako je $A \& B$ oznaka neke formule C, onda je pokrata za C dana sa $(a \Rightarrow b) \& c$ (tj. $C \equiv ((a) \Rightarrow (b)) \& (c)$) a ne možda sa $a \Rightarrow b \& c$ (što bi po našim konvencijama moglo označavati jedino formulu s pokratom $a \Rightarrow (b \& c)$, tj. formulu $(a) \Rightarrow ((b) \& (c))$).

6.3. *Vježbe.*

6.3.1. Označi skraćeno formulu

1° $(a) \& (\neg (\neg (a)))$, 2° $(\neg (a)) \& (\neg (a))$, 3° $(\neg (\neg (a))) \& (a)$,
4° $\neg ((a) \& (\neg (a)))$, 5° $\neg ((\neg (a)) \& (a))$, 6° $\neg (\neg ((a) \& (a)))$.

(Rješenje:

1° $a \& \neg \neg a$, 2° $\neg a \& \neg a$, 3° $\neg \neg a \& a$, 4° $\neg (a \& \neg a)$,
5° $\neg (\neg a \& a)$, 6° $\neg \neg (a \& a)$.)

6.3.2. Napiši u neskraćenom obliku

1° $a \Rightarrow \neg b \& c$, 2° $\neg a \Leftrightarrow \top \& \neg \neg b$, 3° $\neg (\neg b \vee a \& c)$,
4° $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow b \& c))$.

(Rješenje:

1° $(a) \Rightarrow ((\neg (b)) \& (c))$, 2° $(\neg (a)) \Leftrightarrow ((\top) \& (\neg (\neg (b))))$,
3° $\neg ((\neg (b)) \vee ((a) \& (c)))$,
4° $((a) \Rightarrow (b)) \Rightarrow (((a) \Rightarrow (c)) \Rightarrow ((a) \Rightarrow ((b) \& (c))))$.)

6.4. Spomenut ćemo ukratko još neke konvencije o skraćivanju notacije formula koje se kadšto upotrebljavaju iako se mi u ovoj knjizi njima kasnije više nećemo služiti.

6.4.1. Za odjeljivanje komponenata formule upotrebljavaju se kadšto i tačke i to jedna ili više njih već prema jačini razdvajanja. Npr. pokrata u zadatku 4° iz 6.3.2. gore može se time pisati u kraćem obliku $a \Rightarrow b \,.. \Rightarrow .. \, a \Rightarrow c . \Rightarrow . a \Rightarrow b \& c$.

Kadšto se tačke za razdvajanje pišu samo s jedne strane operatora. To je dakako dovoljno a „čitkost" tako napisane formule samo je neznatno smanjena pa je takva konvencija ekonomičnija. Gore dani primjer glasio bi

$$a \Rightarrow b \Rightarrow\, ..\, a \Rightarrow c \Rightarrow .\, a \Rightarrow b \,\&\, c.$$

6.4.2. Ako zagradama ili hijerarhijom operatora nije određeno drugačije, smatra se da se izraz gradi zdesna na lijevo. Npr. umjesto pokrate $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ piše se samo $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ a umjesto $a \Rightarrow (b \,\&\, c \Rightarrow d)$ piše se $a \Rightarrow b \,\&\, c \Rightarrow d$.

6.4.2. Za operatore $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ uvode se znaci različite duljine, time da dulji znači jače razdvajanje. Tada se npr. umjesto $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$ može pisati

$$a \Rightarrow b \Longrightarrow c.$$

7. AKSIOMI LOGIKE SUDOVA

7.1. Kao što smo u **4.1.** među *riječima* logike sudova istakli neke koje smo nazvali *formulama,* tako ćemo sada među *formulama* istaknuti neke koje ćemo zvati *aksiomima* logike sudova, a u **8.** neke koje ćemo zvati *teoremima* logike sudova (ili kraće aksiomima odnosno teoremima).

Definicija 5. Neka su A, B, C kojegod dane formule. Tada su ove formule ***aksiomi*** *logike sudova:*

Grupa I. Aksiomi implikacije ($\Rightarrow$-aksiomi)

1° $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

2° $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

3° $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Grupa II. Aksiomi konjunkcije (&-aksiomi)

4° $A \,\&\, B \Rightarrow A$

5° $A \,\&\, B \Rightarrow B$

6° $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \,\&\, C))$

Grupa III. Aksiomi disjunkcije ($\vee$-aksiomi)

7° $A \Rightarrow A \vee B$

8° $B \Rightarrow A \vee B$

9° $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$

Grupa IV. Aksiomi ekvivalencije ($\Leftrightarrow$-aksiomi)

10° $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

11° $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

12° $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B))$

Grupa V. Aksiomi negacije ($\neg$-aksiomi)

13° $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

14° $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$

15° $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

Grupa VI. Aksiomi konstanata ($\top$- *i* $\perp$*-aksiom)*

16° $A \Rightarrow \top$

17° $\perp \Rightarrow A$.

7.2. Razumije se da navedenih 6 grupa aksioma uz unaprijed nefiksirane A, B, C još ne predočuju *pojedine* formule logike sudova već su oni tada *sheme* formula. Svaka takva *shema aksioma* postaje *aksiomom* čim u njoj A, B, C označuju *određene* formule (usp. **4.7.**).

Svakom od 17 definiranih shema aksioma određeno je dakle *beskonačno mnogo* aksioma. Shema 1° daje npr. aksiome $\top \Rightarrow (\top \Rightarrow \top)$, $\perp \Rightarrow (\perp \Rightarrow \perp)$,

$$a \Rightarrow (a \Rightarrow a),\ b \Rightarrow (b \Rightarrow b),\ \ldots\ \top \Rightarrow (\perp \Rightarrow \top),\ \perp \Rightarrow (\top \Rightarrow \perp),$$

$$a \Rightarrow (\top \Rightarrow a),\ \ldots\ \neg a \Rightarrow (a \Rightarrow \neg a),\ \ldots\ a \,\&\, b \Rightarrow (c \Rightarrow a \,\&\, b),\ \ldots$$

O *shemama aksioma* ili općenito *formula* govorit ćemo ubuduće i onda, ako u odgovarajućem izrazu *neki* (ali *ne* svi) od znakova A, B, C, ... (od kojih je, pored simbola logike sudova, izraz sagrađen) označuju određene formule a ostali *ne*.

Ipak ćemo kadšto, ako ne bude opasnosti zabune, umjesto o shemi aksioma (formula) govoriti kraće o aksiomu (formuli). O nekorektnosti ovakvog izražavanja vrijedi analogno kao što je bilo govora u **6.1.**

Ako pak želimo naročito istaći da neka formula *nije* shema formula, govorit ćemo kadšto o *individualnoj* formuli.

Ako u neku od gornjih shema aksioma za znakove A, B, C uvrstimo određene *sheme* formula, dobit ćemo dakako opet *sheme* aksioma. Tako npr. za B kao „A" i $\neg A \Rightarrow B$ kao „B" 7° daje shemu aksioma

7'° $$B \Rightarrow (B \vee (\neg A \Rightarrow B)),$$

kojom naravno nisu zadani svi oni aksiomi koje obuhvata 7° već samo oni od tih, koji se mogu pisati u takvom obliku (7'°).

Također, ako za neke (tj. *bar* jedan) od znakova formula u shemi aksioma uvrstimo *sheme* formula, a za ostale formule, dobit ćemo opet *sheme* aksioma. Analogno vrijedi za sukcesivno uvrštavanje.

Ako navedene sheme aksioma (ili same aksiome koji su njima određeni) interpretiramo kao odgovarajuće sheme algebre sudova lako vidimo da su sve to identički istinite formule algebre sudova.

7.3. Svaka od prvih pet grupa shema aksioma sadrži od operatora eksplicitno samo implikaciju i onaj od operatora po kojem grupa ima ime. U šestoj grupi shema sadrži eksplicitno pored operatora implikacije i po jednu konstantu. (Dakako da A, B, C u odgovarajućim aksiomima mogu označavati formule koje sadrže kojegod operatore.)

7.4. *Vježbe.*

7.4.1. Može li se za dani aksiom uvijek jednoznačno rekonstruirati primjenom koje sheme aksioma je nastao? (Odgovor: Ne. Npr. uzmemo li $A \equiv a$, $B \equiv \neg a$, daje shema 1° aksiom $a \Rightarrow (\neg a \Rightarrow a)$. Stavimo li pak $A \equiv B \equiv a$, daje shema 13° isti aksiom $a \Rightarrow (\neg a \Rightarrow a)$. Također npr. 16° za $A \equiv \perp$ daje isti aksiom kao 17° za $A \equiv \top$, naime $\perp \Rightarrow \top$. Za $A \equiv \perp$, $B \equiv \neg \perp$ daje shema 1° isti aksiom $\perp \Rightarrow (\neg \perp \Rightarrow \perp)$ kao i shema 13° za $A \equiv B \equiv \perp$ i kao shema 17° za $A \equiv \neg \perp \Rightarrow \perp$.)

7.4.2. Koliko ima aksioma? (Rješenje: Ako je A bilo koje slovo bit će npr. po 1° svaka formula $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ aksiom, pa aksioma ima *barem* prebrojivo beskonačno mnogo. No svaki aksiom je formula, pa aksioma po **4.3.4.** ima *najviše* prebrojivo beskonačno mnogo. Postoji dakle prebrojivo beskonačno mnogo aksioma.)

7.4.3. a) Koji je najmanji rang aksioma? b) Koja je najmanja duljina aksioma? (Rješenje: a) 1 — npr. 16° uz $A \equiv \top$. b) 7 — npr. 16° uz $A \equiv \top$ daje aksiom $(\top) \Rightarrow (\top)$.)

7.4.4. Koja je najmanja duljina δ aksioma koji izlaze primjenom shema 1° do 17°? (Rješenje: za 16° i 17° $\delta_{min} = 7$, za 1°, 4°, 5°, 7° i 8° $\delta_{min} = 13$; za 13° $\delta_{min} = 16$; za 2°, 10° i 11° $\delta_{min} = 19$; za 15° $\delta_{min} = 28$; za 3°, 12° i 14° $\delta_{min} = 31$; za 6° i 9° $\delta_{min} = 37$.)

7.4.5. Pomoću rezultata iz **4.4.** dokaži: Duljina aksioma koji izlaze po shemama 3°, 10° i 11° uvijek je neparan broj, dok duljina aksioma koji izlaze po ostalim shemama može biti bilo paran bilo neparan broj.

8. TEOREMI LOGIKE SUDOVA

8.1. Da bi razmatranja koja slijede bila preglednija, uvest ćemo ovaj način označavanja: Ako u shemu formula F, sagrađenu (najviše) od simbola logike sudova i znakova za formule $A, B, C, \ldots$ za znak A uvrstimo formulu ili shemu formula K, za znak B uvrstimo formulu ili shemu formula L, za znak C uvrstimo formulu ili shemu formula $M, \ldots$ označit ćemo time dobivenu formulu ili shemu formula (usp. **4.7.**) sa $F(K \mid A,\ L \mid B,\ M \mid C, \ldots)$ (čitaj: F sa K umjesto A, L umjesto B, M umjesto $C, \ldots$). Analogno za zamjenu varijabla formulama ili shemama formula. Ako je pritom, specijalno, F neka od shema aksioma **D 5**, $n°$ ($n = 1, 2, \ldots 17$), pisat ćemo umjesto slova F oznaku $n°$. Ako posebno na mjesto znaka X uvrštavamo taj isti znak, izostavit ćemo u $F(\ldots)$ dio $X \mid X$.

8.2. Sada ćemo dati dvije definicije, jednu kojom uvodimo pojam „teorema logike sudova" i drugu kojom uvodimo pojmove „teorema logike sudova" i „sheme teorema logike sudove" i pokazat ćemo da su pojmovi teorema logike sudova po obje definicije međusobno ekvivalentni. (Umjesto o teoremu logike sudova odnosno shemi teorema logike sudova govorit ćemo kraće i o teoremu odnosno shemi teorema.)

Definicija 6.

1° *Svaki (individualni) aksiom logike sudova je* t e o r e m *logike sudova.*

2° (*Modus ponens*) *Ako su (individualne) formule* A *i* $A \Rightarrow B$ *teoremi, onda je i formula* B *teorem.*

3° *Teoremi su samo one formule koje se mogu konstruirati (eventualno višestrukom) primjenom* 1° *i* 2°.

Definicija 6a.

1° *Svaki individualni aksiom je teorem i svaka shema aksioma je shema teorema. (Pritom — prema* **7.2.** *— pod shemama aksioma razumijevamo ne samo sve sheme 1° do 17° iz* **D 5,** *nego i sve sheme koje iz njih izlaze uvrštavanjem shema formula ili individualnih formula na mjesto oznaka za formule koje dolaze u* **D 5,** *1° do 17° — ukoliko je time dobiveni izraz uopće shema formula, a ne individualna formula.)*

2° *(Modus ponens) Ako su A i $A \Rightarrow B$ teoremi ili sheme teorema, onda je i B teorem ili shema teorema.*

3° *Teoremi i sheme teorema su samo one formule odnosno sheme formula koje se mogu konstruirati (eventualno višestrukom) primjenom 1° i 2°.*

Prije nego li predemo na dokaz ekvivalentnosti pojma teorema po **D 6.** i **D 6a,** napomenimo ovo:

Može se dogoditi da A i $A \Rightarrow B$ budu *sheme* teorema u smislu **D 6a,** a B da bude *individualni* teorem u smislu **D 6a.** Npr. $A \Rightarrow \top$ je shema teorema po **D 6a.** 1° i **D 5.** 16° a i $(A \Rightarrow \top) \Rightarrow \top$ je shema teorema po **D 6a.** 1° i **D 5.** 16° (uz $A \Rightarrow \top$ kao „A"). Međutim, u smislu **D 6a.** 2°, $\top$ je individualni teorem. U drugu ruku, ako je A individualni teorem a $A \Rightarrow B$ shema teorema, bit će dakako i B sam shema teorema (sve u smislu **D 6a.**). Konačno, slučaj da A bude shema teorema a $A \Rightarrow B$ individualni teorem očito ne može nastupiti.

Pređimo sada na dokaz da su pojmovi „(individualni) teorem logike sudova" kako izlaze prema **D 6.** i **D 6a.** međusobno ekvivalentni.

Prvo, svaki individualni teorem u smislu **D 6.** bit će — uz isti izvod, tj. jednako primjenjivanje slučajeva 1° i 2° definicije — očito teorem i po **D 6a.**

Obrat nije trivijalan, jer je moguće da u izvodu nekog individualnog teorema po **D 6a.** interveniraju i *sheme* teorema (usp. napomenu iza **D 6a!**). Dokazat ćemo međutim da obrat ipak vrijedi, tj. da je svaki individualni teorem u smislu **D 6a.** također teorem u smislu **D 6.**

Neka je dakle T individualni teorem u smislu **D 6a.** Neka u izvodu od T po **D 6a.** upotrebom 1° i 2° kao oznake za formule koje dolaze u shemama teorema koje se pritom upotrebljavaju (ako ih ima) nastupaju $A, B, C, \ldots$ (skup tih oznaka bit će prazan, ako je T po **D 6a.** izvedeno uz upotrebu samo individualnih teorema u smislu **D 6a.**). Zamijenimo li u čitavom tom izvodu (tj. kod svih primjena **D 6a.** 1° i 2°) svagdje $A, B, C, \ldots$ npr. sa $\top$, dobit ćemo time — kao što se lako uviđa — izvod od T po **D 6.** T je dakle teorem i u smislu **D 6.**

8.3. Ako je neka shema formula F shema teorema u smislu **D 6a,** bit će svaka individualna formula koju dobivamo iz F uvrštavanjem (individualnih formula na mjesto oznaka za formule) također (individualni) teorem po **D 6a.** Da se ovo uvidi, dovoljno je uočiti da ćemo uz provedbu istih zamjena oznaka za formule individualnim formulama skroz u čitavom izvodu od F po **D 6a.** dobiti izvod tražene individualne formule kao teorema po **D 6a.** (a već smo potkraj **8.2.** vidjeli da onda tu individualnu formulu možemo izvesti kao teorem i po **D 6.**).

Međutim, može se postaviti ovo pitanje: Ako iz neke sheme formula uvrštavanjem individualnih formula na mjesto oznaka za formule dobivamo uvijek individualne teoreme, da li je onda dana shema formula nužno bila shema teorema? Pokazat ćemo da to stoji, iako nije trivijalno: Moglo bi se naime možda dogoditi da je svaka pojedina individualna formula koja nastaje od F uvrštavanjem individualni teorem (po **D 6a.** ili, što je po **8.2.** isto, po **D 6.**) a da sama shema formula F nije shema teorema u smislu **D 6a.** (npr. ako bi se dvije različite individualne formule koje nastaju od F uvrštavanjem morale kao individualni teoremi izvoditi na različite načine). Ovakve okolnosti međutim ipak ne nastupaju, naime, ako F ima svojstvo da je svaka individualna formula koju od nje dobivamo uvrštavanjem teorem, onda je i F shema teorema u smislu **D 6a.** Ovo uviđamo ovako:

Supstituirajmo u F za međusobno različite oznake za formule neke određene varijable sudova $x, y, z, \ldots$ koje su sve međusobno različite, a pored toga različite su i od svih varijabla koje eksplicitno ulaze u danu shemu formula F (ako takvih ima). Dobivena individualna formula neka je G. Po pretpostavci o F, G je individualni teorem. No ako u nekom izvodu od G po **D 6.** skroz zamijenimo varijable $x, y, z, \ldots$ redom onim oznakama za formule na mjesto kojih smo ih ranije uvrstili (da bi iz F dobili G), dobit ćemo time — kao što se lako uviđa — izvod od F kao sheme teorema po **D 6a.**

8.4. Neka je F individualni teorem ili shema teorema. U F neka dolaze (najviše) simboli logike sudova (od varijabla: $x, y, z, \ldots$) i znakovi za formule $A, B, C, \ldots$ Ako su tada $X, Y, Z, \ldots; K, L, M, \ldots$ koje god dane individualne formule ili sheme formula bit će i

$$F(X|x,\ Y|y,\ Z|z,\ \ldots;\ K|A,\ L|B,\ M|C,\ \ldots)$$

teorem ili shema teorema logike sudova.

Da ovo uvidimo, dovoljno je uočiti da ćemo izvod od

$$F(X|x,\ Y|y,\ Z|z,\ \ldots;\ K|A,\ L|B,\ M|C,\ \ldots)$$

dobiti iz izvoda od F (oboje po **D 6a.**) ako u ovom potonjem skroz od početka do kraja provedemo zamjenu od x sa X, y sa Y, z sa $Z, \ldots$; A sa K, B sa L, C sa $M, \ldots$ (Pritom ne smeta ako već tokom izvoda od F u pojedinim shemama formula dolaze neki od znakova ili shema $X, Y, Z, \ldots; K, L, M, \ldots$). Za formalno strogi dokaz ovoga usp. na primjer slični dokaz u **11.5**; uz specijalizaciju $\Delta = 0$ dobivamo odanle kao poseban slučaj ovdje razmatrani.

Gornja razmatranja u **8.2.** do **8.4.** opravdavaju da kadšto, ako je to zgodnije radi kraćeg i jednostavnijeg izražavanja a nema opasnosti zabune, umjesto o *shemi teorema* govorimo kraće o *teoremu.*

8.5. Ako je neka individualna formula ili shema formula A teorem, pisat ćemo $\vdash A$; znak „$\vdash$" čitat ćemo „teorem".

Znak $\vdash$ dakle *nije* matematički znak (simbol logike sudova), već *metamatematički* simbol: $\vdash A$ simbolički, kraće označava izreku „A je teorem", a to je metamatematička izreka jer govori *o* logici sudova.

8.6. Ovdje se prirodno nameće pitanje: Kako ćemo u općem slučaju za danu formulu (shemu formula) odlučiti da li je ona teorem (shema teorema)? Da bi na ovo pitanje mogli odgovoriti trebat će nam nešto opsežnija priprema, pa ćemo se na taj problem vratiti kasnije i u potpunosti ga riješiti u **18.** poglavlju ove Glave.

8.7. Iz posljednjeg odlomka **7.2.** i iz **D 6.** i **D 6a.** možemo zbog **II 3. T 3.** 1° zaključiti da će svaki teorem (shema teorema) logike sudova, interpretiran kao formula algebre sudova, biti identički istinita formula. Kasnije ćemo (u **18.**) vidjeti da vrijedi i obrat, tj. ako je neka formula logike sudova, interpretirana kao formula algebre sudova identički istinita, ona je teorem logike sudova. Time će ujedno biti riješen problem iz **8.6.** jer za formule algebre sudova znamo konstatirati da li su identički istinite ili ne.

8.8. Sa **D 6.** i **6a.** u stvari je *formalizirana dedukcija* u logici sudova. Kod izvođenja novih teorema iz poznatih ne može više biti govora o „metodama uobičajenim u matematici" već se jedino smijemo pozivati na **D 6.** i **6a.** i na iz njih izvedena pravila. Upravo na ovome mjestu dolazi dakle do izražaja osnovna razlika u koncepciji izgradnje *algebre* sudova i *logike* sudova (iako, kao što smo već i ranije napomenuli, na nivou sudova ova razlika *neće* još dovesti do *materijalno* različitih teorija — usp. gore **8.7.**). Da ona *vodi* do znatne razlike u metodama izvođenja (koje, općenito uzevši, postaju složenije ali i „čišće") vidjet ćemo uskoro.

8.9. Primjer 1. Neka je A koja god dána individualna formula ili shema formula. Tada su formule 4° $(\neg A \mid B)$, 5° $(\neg A \mid B)$ (tj. formule $A \& \neg A \Rightarrow A$, $A \& \neg A \Rightarrow \neg A$) aksiomi dakle po **D 6a.** 1° i teoremi logike sudova. Dalje je i formula 14° $(A \& \neg A \mid A,\ A \mid B)$ (tj. formula

$$(A \& \neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \& \neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg(A \& \neg A))\ )$$

aksiom dakle i teorem logike sudova. Kako smo ranije našli da je $A \& \neg A \Rightarrow A$ teorem, dobivamo po **D 6a.** 2° da je i $(A \& \neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg(A \& \neg A)$ teorem. No ranije smo također našli da je $A \& \neg A \Rightarrow A$ teorem. Primijenimo li opet **D 6a.** 2° nalazimo konačno da je $\neg (A \& \neg A)$ teorem logike sudova. (Po njegovom obliku vidimo da on nije aksiom ni za koje značenje od A, jer nema sheme aksioma oblika $\neg (\ldots)$.)

Primjer 2. Neka je opet A koja god dana individualna formula ili shema formula. Sličnim postupkom kao u prošlom primjeru nalazimo da je:

$\vdash A \Rightarrow A \vee \neg A$ po **D 5.** 7°;

$\vdash \neg A \Rightarrow A \vee \neg A$ po **D 5.** 8°;

$\vdash (A \Rightarrow A \vee \neg A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow A \vee \neg A) \Rightarrow A \vee \neg A)$ po **D 5.** 15°.

Primijenimo li dvaput **D 6a.** 2° dobivamo da je $A \vee \neg A$ teorem logike sudova. (Ni taj teorem ni za koje značenje od A nije aksiom.)

Primjer 3. Prema **D 5.** 1° vrijedi

(9) $$\vdash A \Rightarrow (\neg \neg A \Rightarrow A).$$

Prema **D 5.** 13° je 13° $(\neg A \mid A,\ A \mid B)$ teorem tj.

(10) $$\vdash \neg A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A),$$

a prema **D 5.** 15° je 15° $(\neg\neg A \Rightarrow A \mid B)$ teorem tj.

(11) $$\vdash (A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)).$$

Zbog (9) i (11) je po **D 6a.** 2°

(12) $$\vdash (\neg A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A),$$

a odatle je zbog (10) — opet po **D 6a.** 2° — konačno

(13) $$\vdash \neg\neg A \Rightarrow A.$$

(Ni ovaj teorem $\neg\neg A \Rightarrow A$ očito nije aksiom ni za koje značenje od A.)

8.10. Izvodi teorema i shema teorema po **D 6.** i **6a.** mogu se zorno predočiti shemom u obliku drveta; svakoj primjeni **D 6.** ili **6a.** 1° odgovarat će početak jedne grane drveta, a svakoj primjeni **D 6.** ili **6a.** 2° odgovarat će jedne rašlje drveta. Dokazani teorem bit će korijen drveta.

8.10.1. Primjer. Za primjer 3. iz **8.9.** dobili bi, ako radi kraćeg pisanja formulu $\neg\neg A \Rightarrow A$ označimo sa D i radi jasnoće kraj svakog aksioma sa $n°$: označimo primjenom koje sheme aksioma $n°$ iz **D 5.** je nastao:

1°: $A \Rightarrow D$ 15°: $(A \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow D) \Rightarrow D)$

13°: $\neg A \Rightarrow D$ $(\neg A \Rightarrow D) \Rightarrow D$

D

Općenito ovakav shematski prikaz izvoda nekog teorema njim samim ne će biti jednoznačno određen (usp. npr. već **7.4.1.**), kao što se vidi npr. iz **10.4.**

8.10.2. *Vježba.* Napiši shemu izvoda teorema $A \& B \Leftrightarrow B \& A$. (Rješenje: Označimo li radi kraćeg pisanja $A \& B$ sa D, $B \& A$ sa E, bit će traženi shematski prikaz dan npr. sa

5°: $D \Rightarrow B$ 6° $(D \mid A, A \mid C)$ $(D \Rightarrow B) \Rightarrow ((D \Rightarrow A) \Rightarrow (D \Rightarrow E))$

5° $(B \mid A, A \mid B)$ $E \Rightarrow A$ 6° $(E \mid A, A \mid B, B \mid C)$ $(E \Rightarrow A) \Rightarrow ((E \Rightarrow B) \Rightarrow (E \Rightarrow D))$ 4°: $D \Rightarrow A$ $(D \Rightarrow A) \Rightarrow (D \Rightarrow E)$

4° $(B \mid A, A \mid B)$ $E \Rightarrow B$ $(E \Rightarrow B) \Rightarrow (E \Rightarrow D)$ $D \Rightarrow E$ 12° $(D \mid A, E \mid B)$ $(D \Rightarrow E) \Rightarrow ((E \Rightarrow D) \Rightarrow (D \Leftrightarrow E))$

$E \Rightarrow D$ $(E \Rightarrow D) \Rightarrow (D \Leftrightarrow E)$

$D \Leftrightarrow E$

9. NEKI VAŽNIJI TEOREMI IMPLIKACIJE

Ovdje ćemo izvesti nekoliko teorema o implikaciji, koji će nam trebati za kasnija razmatranja. Budući da će i u njima A, B, C, D moći označavati koje god individualne formule ili sheme formula, radit će se u stvari o *shemama* teorema. Ove sheme teorema sadržat će od operatora eksplicitno samo $\Rightarrow$, a kod dokaza da predstavljaju teoreme upotrebljavat ćemo od shema aksioma samo one iz grupe $\Rightarrow$-aksioma, pa ćemo stoga te teoreme zvati teoremima implikacije.

9.1. Označimo najprije sa F_1 formulu $(A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ i dokažimo da je F_1 teorem tj.

(14) $$\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B).$$

Ispisivanjem odgovarajućih formula možemo provjeriti da je

(15) $$\begin{cases} 3^\circ\ (A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \mid A,\ ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \mid B,\ A \Rightarrow B \mid C) \equiv \\ 3^\circ\ (A \Rightarrow B \mid B,\ B \mid C) \Rightarrow (2^\circ (A \Rightarrow B \mid A) \Rightarrow F_1); \end{cases}$$

naime, oba gornja izraza predočuju formulu

$$((A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B))) \Rightarrow$$
$$(((((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B))).$$

Ta formula je dakle zbog (15) aksiom (individualni ili shema) po **D 5.** 3° a i njena antecedenta $(A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ je aksiom (individualni ili shema) po **D 5.** 3°. Odatle je po **D 6a.** 2° njena konsekventa

$$((((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$$

teorem (individualni ili shema).

No po (15) i antecedenta ove formule je aksiom po **D 5.** 2° pa primjenom **D 6a.** 2° izlazi (14).

Specijalno, za $B \equiv A$ izlazi iz (14)

$$\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A).$$

Antecedenta ove formule je aksiom jer je to formula $1^\circ (A \mid B)$. Dakle je i konsekventa gornje formule, tj. $A \Rightarrow A$, teorem:

(16) $$\vdash A \Rightarrow A.$$

9.2. Označimo sa F_2 formulu $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.

Ispisivanjem odgovarajućih formula možemo opet provjeriti da je

(17) $$\begin{cases} 3^\circ\ ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A \mid A,\ (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \mid B,\ (A \Rightarrow B) \Rightarrow B \mid C) \equiv \\ 3^\circ\ (A \Rightarrow B \mid A,\ A \mid B,\ B \mid C) \Rightarrow (F_1 (A \Rightarrow B \mid A) \Rightarrow F_2); \end{cases}$$

naime, oba izraza predočuju formulu

$$(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B))) \Rightarrow$$
$$((((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B))).$$

Ta formula sama i njena antecedenta zbog (17) su aksiomi, pa je po **D 6a.** 2° njena konsekventa

$$(((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

teorem. No prema shemi teorema (14) iz **9.1.** i antecedenta ove formule po (17) je teorem, pa je i njena konsekventa F_2 teorem:

$$(18) \qquad \vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B).$$

9.3. Označimo sa F_3 formulu $A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.

Ispisivanjem odgovarajućih formula možemo provjeriti da je

$$(19) \qquad 3^\circ\ ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A \mid B,\ (A \Rightarrow B) \Rightarrow B \mid C) \equiv 1^\circ\ (A \Rightarrow B \mid B) \Rightarrow (F_2 \Rightarrow F_3);$$

naime, oba izraza predočuju formulu

$$(A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B))).$$

Ta formula sama i njena antecedenta po (19) su aksiomi, pa je njena konsekventa

$$(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

teorem. No prema **9.2.** (18) i antecedenta ove formule je teorem, pa je i njena konsekventa teorem, tj.

$$(20) \qquad \vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B).$$

9.4. Označimo sa F_4 formulu

$$(((B \Rightarrow C) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

Vrijedi

$$(21) \qquad 3^\circ\ (B \mid A,\ (B \Rightarrow C) \Rightarrow C \mid B,\ A \Rightarrow C \mid C) \equiv (F_3(B \mid A,\ C \mid B) \Rightarrow F_4),$$

jer oba izraza predočuju formulu

$$(B \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C)) \Rightarrow ((((B \Rightarrow C) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))).$$

Ona je aksiom pa zbog (21) i (20) primjenom **D 6a.** 2° izlazi

$$(22) \qquad \vdash (((B \Rightarrow C) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

9.5. Označimo sa F_5 formulu $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

Vrijedi

$$(23) \qquad \begin{cases} 3^\circ\ (A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \mid A,\ ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \mid B,\ B \Rightarrow (A \Rightarrow C) \mid C) \equiv \\ 3^\circ\ (B \Rightarrow C \mid B) \Rightarrow (F_4 \Rightarrow F_5), \end{cases}$$

jer oba izraza predočuju formulu

$$((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (((B \Rightarrow C) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))) \Rightarrow (((((B \Rightarrow C) \Rightarrow C) \Rightarrow$$

$$(A \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)))).$$

Ona je aksiom pa zbog (23) i (22) dvostrukom primjenom **D 6a.** 2° izlazi

$$(24) \qquad \vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

9.6. Označimo sa F_6 formulu $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

Vrijedi

(25) $$F_5(A \Rightarrow B \mid A,\ B \Rightarrow C \mid B,\ A \Rightarrow C \mid C) \equiv 3^\circ \Rightarrow F_6,$$

jer oba izraza predočuju formulu

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))).$$

Ona je teorem pa je zbog (25)

(26) $$\vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

9.7. Označimo sa F_7 formulu

$$(D \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C))).$$

Vrijedi

(27) $$\begin{cases} 3^\circ\ (D \Rightarrow B \mid A,\ (B \Rightarrow C) \Rightarrow (D \Rightarrow C) \mid B,\ (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow \\ (D \Rightarrow C)) \mid C) \equiv 3^\circ\ (D \mid A) \Rightarrow (F_6(B \Rightarrow C \mid B,\ D \Rightarrow C \mid C) \Rightarrow F_7), \end{cases}$$

jer oba izraza predočuju formulu

$$((D \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (D \Rightarrow C))) \Rightarrow$$
$$((((B \Rightarrow C) \Rightarrow (D \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C)))) \Rightarrow$$
$$((D \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C))))).$$

Ona je aksiom pa je zbog (27) i (26) konsekventa njene konsekvente teorem, tj.

(28) $$\vdash (D \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C))).$$

9.8. Označimo sa F_8 formulu

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((D \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C))).$$

Tada je (usp. **9.5.** i **9.7.**)

(29) $$F_5(D \Rightarrow B \mid A,\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \mid B,\ A \Rightarrow (D \Rightarrow C) \mid C) \equiv F_7 \Rightarrow F_8,$$

jer oba izraza predočuju formulu

$$((D \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C)))) \Rightarrow$$
$$((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((D \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C)))).$$

Ona je zbog (24) teorem pa je zbog (28) i njena konsekventa teorem, tj.

(30) $$\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((D \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow C))).$$

9.9. Označimo sa F_9 formulu

$$(C \Rightarrow D) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow D))).$$

Tada je (usp. **9.6.**)

(31) $$\begin{cases} 3^\circ\ (C \Rightarrow D \mid A,\ (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow D) \mid B,\ (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow \\ (B \Rightarrow D)) \mid C) \equiv F_6(B \mid A,\ C \mid B,\ D \mid C) \Rightarrow (F_6(B \Rightarrow C \mid B,\ B \Rightarrow D \mid C) \Rightarrow F_9), \end{cases}$$

jer oba izraza predočuju formulu

$$((C \Rightarrow D) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow D))) \Rightarrow$$
$$((((B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow D)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow D)))) \Rightarrow$$
$$((C \Rightarrow D) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow D))))).$$

Ona je aksiom pa je zbog (26) konsekventa njene konsekvente teorem, tj.

(32) $$\vdash (C \Rightarrow D) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow D))).$$

9.10. Označimo sa F_{10} formulu $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$. Tada je (usp. **9.9, 9.1.** i **9.8.**)

(33) $$\begin{cases} F_9(A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \mid A,\ A \Rightarrow B \mid B,\ A \Rightarrow (A \Rightarrow C) \mid C,\ A \Rightarrow C \mid D) \equiv \\ F_1(C \mid B) \Rightarrow (F_8(A \mid D) \Rightarrow F_{10}), \end{cases}$$

jer oba izraza predočuju formulu

$$((A \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow C))))$$
$$\Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))).$$

Ona je zbog (32) teorem pa je zbog (14) i (30) i konsekventa njene konsekvente teorem, tj.

(34) $$\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

9.11. Označimo sa F_{11} formulu $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

Tada je (usp. **9.5.**)

(35) $$F_5(A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \mid A,\ A \Rightarrow B \mid B,\ A \Rightarrow C \mid C) \equiv F_{10} \Rightarrow F_{11},$$

jer oba izraza predočuju formulu

$$((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))).$$

Ona je zbog (24) teorem pa je zbog (34) i njena konsekventa teorem, tj.

(36) $$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

Ovaj teorem trebat će nam kasnije kod izvoda teorema dedukcije u **13.4.**

10. DEMONSTRACIJE TEOREMA

10.1. *Definicija* 7. *(Konačni) niz formula (individualnih i shema) A, B, ..., Z zvat ćemo* d e m o n s t r a c i j o m *ili dokazom od S ako je S element danog niza i ako taj niz ima ovo svojstvo: Za svaki član N niza vrijedi (barem) jedna od ovih mogućnosti:*

1° *N je aksiom (individualni ili shema),*

2° *U nizu postoje ispred N članovi K i L, takvi da je* $L \equiv K \Rightarrow N$.

Istaknimo, da je po našoj. **D 7.** dani niz formula (koji je demonstracija) demonstracija *svakog* (*bilo kojeg*) svojeg člana (a ne možda *samo* posljednjeg). Ovakva definicija — iako se razlikuje od uobičajenije — spretnija je za dalja izvođenja.

10.2. Uz svaku danu demonstraciju neke formule S pripada i odgovarajući komentar, kojim je za svaku formulu danog niza opisano, na koji način je za nju ispunjen jedan od uvjeta 1°, 2° gornje definicije.

Ovakav komentar općenito samim danim nizom (demonstracijom od S) nije jednoznačno određen: moguće je npr. da za neki član niza vrijede oba uvjeta 1°, 2°. Navedimo za ilustraciju ovaj primjer:

1. $\top \Rightarrow \top$ je aksiom 16° $(\top\,|\,A)$; 2. $(\top \Rightarrow \top) \Rightarrow \top$ je aksiom 16°$(\top \Rightarrow \top\,|\,A)$; 3. $\top$ jer ranije u nizu dolaze članovi 1. i 2; 4. $\top \Rightarrow (\top \Rightarrow \top)$ je aksiom 1° $(\top\,|\,A,\ \top\,|\,B)$; 5. $\top \Rightarrow \top$ jer ranije u nizu dolaze članovi 3. i 4. ili jer je to aksiom 16° $(\top\,|\,A)$.

10.3. Indukcijom po broju članova niza lako se uviđa da vrijedi:

Formula (individualna ili shema) S je teorem (individualni ili shema) logike sudova onda i. samo onda, ako postoji (bar jedna) demonstracija od S. Pored toga, ako po **D 6a.** znamo dokazati da je S teorem, možemo odatle efektivno naći i jednu demonstraciju od S i obrnuto: Elemente sheme izvoda od S u obliku drveta možemo naime uvijek poredati u linearni niz tako da budu ispunjeni zahtjevi **D 7;** obrnuto, iz članova niza koji zadovoljava uvjete **D 7.** možemo uvijek konstruirati odgovarajuću shemu izvoda od S u obliku drveta.

Umjesto o demonstraciji *od S* pisat ćemo također o demonstraciji $\vdash S$. (Korektnije — ali manje kratko — bilo bi pisati o demonstraciji *koja pokazuje da je* $\vdash S$.)

10.3.1. Primjer. Prema rješenju vježbe **8.10.2.** možemo konstruirati ovu demonstraciju teorema $A \& B \Leftrightarrow B \& A$ (pokrate D i E imaju isto značenje kao u **8.10.2**, tj. $D \equiv A \& B$, $E \equiv B \& A$):

	Komentar:
1. $D \Rightarrow B$	Aksiom 5°
2. $(D \Rightarrow B) \Rightarrow ((D \Rightarrow A) \Rightarrow (D \Rightarrow E))$	Aksiom 6° $(D\,|\,A,\ A\,|\,C)$
3. $(D \Rightarrow A) \Rightarrow (D \Rightarrow E)$	Iz 1, 2. po **D 7.** 2°
4. $D \Rightarrow A$	Aksiom 4°
5. $D \Rightarrow E$	Iz 4, 3. po **D 7.** 2°
6. $(D \Rightarrow E) \Rightarrow ((E \Rightarrow D) \Rightarrow (D \Leftrightarrow E))$	Aksiom 12° $(D\,|\,A,\ E\,|\,B)$
7. $(E \Rightarrow D) \Rightarrow (D \Leftrightarrow E)$	Iz 5, 6. po **D 7.** 2°
8. $E \Rightarrow A$	Aksiom 5° $(B\,|\,A,\ A\,|\,B)$
9. $(E \Rightarrow A) \Rightarrow ((E \Rightarrow B) \Rightarrow (E \Rightarrow D))$	Aksiom 6° $(E\,|\,A,\ A\,|\,B,\ B\,|\,C)$
10. $(E \Rightarrow B) \Rightarrow (E \Rightarrow D)$	Iz 8, 9. po **D 7.** 2°
11. $E \Rightarrow B$	Aksiom 4° $(B\,|\,A,\ A\,|\,B)$
12. $E \Rightarrow D$	Iz 11, 10. po **D 7.** 2°
13. $D \Leftrightarrow E$	Iz 12, 7. po **D 7.** 2°.

Ovaj niz 1. — 13. ostao bi demonstracijom i uz neke permutacije njegovih članova (uz odgovarajuću prenumeraciju u komentaru): Mogli bismo ih npr. uzeti i redom 8, 9, 10, 11, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13 ili redom 1, 2, 8, 9, 3, 10, 4, 11, 5, 12, 6, 7, 13. itd.

10.4. Za dani teorem može postojati više različitih demonstracija, čak i onda ako na demonstraciju postavimo dodatni zahtjev 3°, da ne sadrži suvišnih članova (tj. da prestaje biti demonstracijom, ako se iz niza izbaci bilo koji član ili grupa članova) te ako pored toga demonstracije koje se razlikuju samo u poređaju članova u nizu još ne smatramo različitim.

Navedimo jedan primjer gdje ovo nastupa: dat ćemo dvije (i u takvom užem smislu) različite demonstracije teorema $((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$.

Demonstracija I

1.	$A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	Aksiom 1° $(A \mid B)$
2.	$(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (((A \Rightarrow A) \Rightarrow\ ) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$	Aksiom 3° $(A \Rightarrow A \mid B,\ A \mid C)$
3.	$((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	Iz 1, 2. po **D 7.** 2°.

Demonstracija II

1.	$(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$	Aksiom 3° $(A \Rightarrow A \mid B,\ A \mid C)$
2.	$(((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	Aksiom 2° $(A \Rightarrow A \mid A,\ A \mid B)$
3.	$((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A))) \Rightarrow (((((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)))$	Aksiom 3° $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A) \mid A,\ ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A) \mid B,\ A \Rightarrow A \mid C)$
4.	$((((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$	Iz 1, 3. po **D 7.** 2°
5.	$(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	Iz 2, 4. po **D 7.** 2°
6.	$A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	Aksiom 1° $(A \mid B)$
7.	$A \Rightarrow A$	Iz 6, 5. po **D 7.** 2°
8.	$(A \Rightarrow A) \Rightarrow (((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$	Aksiom 1° $(A \Rightarrow A \mid A, (A \Rightarrow A) \Rightarrow A \mid B)$
9.	$((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	Iz 7, 8. po **D 7.** 2°.

Inače, i za ovaj primjer lako je uvidjeti da taj teorem sigurno nije aksiom ni za koje značenje od A. Kad bi on naime bio aksiom za neko značenje od A, bio bi to neki aksiom implikacije. No odmah vidimo da nijedan od aksioma 1°, 2°, 3° ne dolazi za to u obzir.

10.5. *Vježbe.*

10.5.1. Napiši demonstraciju teorema a) $\neg (A \& \neg A)$, b) $A \vee \neg A$, c) $\neg \neg A \Rightarrow A$. (Uputa: usporedi primjere iz **8.9.**)

10.5.2. Napiši komentar demonstracije

1. $A \Rightarrow B \vee A$
2. $B \Rightarrow B \vee A$

3. $(A \Rightarrow B \vee A) \Rightarrow ((B \Rightarrow B \vee A) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow B \vee A))$
4. $(B \Rightarrow B \vee A) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow B \vee A)$
5. $A \vee B \Rightarrow B \vee A$
6. $B \Rightarrow A \vee B$
7. $A \Rightarrow A \vee B$
8. $(B \Rightarrow A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow A \vee B) \Rightarrow (B \vee A \Rightarrow A \vee B))$
9. $(A \Rightarrow A \vee B) \Rightarrow (B \vee A \Rightarrow A \vee B)$
10. $B \vee A \Rightarrow A \vee B$
11. $(A \vee B \Rightarrow B \vee A) \Rightarrow ((B \vee A \Rightarrow A \vee B) \Rightarrow (A \vee B \Leftrightarrow B \vee A))$
12. $(B \vee A \Rightarrow A \vee B) \Rightarrow (A \vee B \Leftrightarrow B \vee A)$
13. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

(Rješenje: 1. Aks. 8° $(B|A, A|B)$; 2. Aks. 7° $(B|A, A|B)$; 3. Aks. 9° $(B \vee A|C)$; 4. Iz 1, 3; 5. Iz 2, 4; 6. Aks. 8°; 7. Aks. 7°; 8. Aks. 9° $(B|A, A|B, A \vee B|C)$; 9. Iz 6, 8; 10. Iz 7, 9; 11. Aks. 12° $(A \vee B|A, B \vee A|B)$; 12. Iz 5, 11; 13. Iz 10, 12.)

10.5.3. Definirajmo d e m o n s t r a c i j u u š i r e m s m i s l u kao niz formula kod kojeg za svaki član vrijedi bilo mogućnost 1° ili 2° iz **D 7**, bilo je to 3° neki već ranije izvedeni teorem (individualni ili shema).

Dokaži: a) Svaki član niza demonstracije u širem smislu je teorem (individualni ili shema). b) Neka u demonstraciji u širem smislu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ od članova koji su teoremi dolaze samo formule $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ i neka za njih već imamo demonstracije (u običnom smislu) respektivne duljine od po $n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_m}$ formula u nizu. Tada postoji demonstracija od A_k (u običnom smislu) sa $\sum_{j=1}^{m} n_{i_j} + (k-m)$ članova (formula) u nizu.

11. DEDUKCIJE FORMULA

11.1. *Definicija* 8. *Neka je* Δ *neki (najviše konačni) skup formula (individualnih i shema). (Konačni) niz formula (individualnih i shema)* $A, B, \ldots, Z$ *zvat ćemo* d e d u k c i j o m *od S iz* Δ, *ako je S element danog niza i ako taj niz ima ovo svojstvo: Za svaki član niza vrijedi (barem) jedna od ovih mogućnosti:*

1° *N je aksiom (individualni ili shema),*

2° *N je jedna od formula (individualna ili shema) od* Δ,

3° *U nizu postoje ispred N članovi K i L, takvi da je* $L \equiv K \Rightarrow N$.

Ako postoji dedukcija od S iz Δ pisat ćemo $\Delta \vdash S$; znak „$\vdash$" čitat ćemo „vodi do". Umjesto o dedukciji *od S iz* Δ pisat ćemo također o dedukciji $\Delta \vdash S$. I ovdje bi (usporedi analognu napomenu na kraju **10.3.**) bilo korektnije govoriti o dedukciji *koja pokazuje da je* $\Delta \vdash S$.

Svakoj dedukciji također pripada komentar kao i svakoj demonstraciji.

I ovdje vrijedi analogna napomena kao uz definiciju demonstracije: Dani niz (koji je dedukcija) je dedukcija svakog (bilo kojeg) svojeg člana (a ne možda samo posljednjeg). Naša definicija zgodnija nam je od uobičajenije (gdje se dani niz smatra dedukcijom samo posljednje formule u nizu) radi kasnijih razmatranja (usp. npr. poglavlje **12.** ili dokaz u **14.7.**).

11.2. Istaknimo da po **D 8.** 2° nije dozvoljeno da S bude neka formula koja nastaje *uvrštavanjem* formula (individualnih i shema) u neku od shema formula iz Δ, već S smije biti jedino formula (individualna ili shema) koja je *sama* element od Δ. (Za razliku od toga po **D 8.** 1° S smije biti koja god formula koja nastaje *uvrštavanjem* formula — individualnih i shema — u neku *shemu aksioma*, kao i u **D 7.** 1°; usp. napomenu u zagradama iza **D 6a.** 1°.) Razlog za ovu restrikciju bit će jasan kasnije. Uostalom, lako je uvidjeti da bi bez ikakve restrikcije na **D 8.** 2° (tj. ako bi se njome dozvoljavale i formule koje iz elemenata od Δ nastaju uvrštavanjem) sama **D 8.** postala iluzorna: Neka je $\Delta \equiv A$, tj. Δ se sastoji od jedne sheme formula A. Tada bi

1. B	Zamjenom B za A u elementu od Δ (po **D 8.** 2° *nedozvoljeno*!)

bila „dedukcija" $A \vdash B$, tj. iz sheme A kojom je dana *bilo koja* (svaka) formula, mogla bi se „deducirati" shema formula B, kojom je opet dana *bilo koja druga* (svaka) formula!

U pogledu pitanja o jednoznačnosti komentara dane dedukcije i jednoznačnosti rekonstrukcije dedukcije za dane Δ, S vrijedi analogno onome, što je o tim pitanjima rečeno za demonstraciju.

11.3. Može se postaviti pitanje kada uz dane Δ, S vrijedi $\Delta \vdash S$, tj. koji je kriterij odluke da li za danu formulu postoji dedukcija iz danog skupa formula. Teoremom dedukcije (usp. **13.**) ovaj će problem biti sveden na pitanje kada je dana formula logike sudova teorem logike sudova (usp. i **8.6.**).

11.4. D 7. možemo smatrati posebnim slučajem **D 8**: Ako je u posljednjoj skup Δ prazan, dedukcija se specijalizira na demonstraciju. Također je jasno da, ako vrijedi $\vdash S$, vrijedi i $\Delta \vdash S$ za koji god skup formula (individualnih i shema) Δ.

11.5. Za dedukciju formula (individualnih i shema) iz skupa formula (individualnih i shema) vrijedi slična napomena kao što smo je u **8.4.** naveli za izvode teorema (individualnih i shema):

Pretpostavimo da smo pomoću **D 8.** dokazali $\Delta \vdash S$. U Δ, S neka dolaze (najviše) simboli logike sudova (od varijabla $x, y, \ldots$) i znakovi za formule $A, B, \ldots$ Ako su tada $X, Y, \ldots; K, L, \ldots$ kojegod formule (individualne i sheme) bit će i

$$\Delta(X|x,\ Y|y, \ldots;\ K|A,\ L|B, \ldots) \vdash S(X|x,\ Y|y, \ldots;\ K|A,\ L|B, \ldots), \tag{37}$$

gdje je $\Delta(X|x,\ Y|y, \ldots;\ K|A,\ L|B, \ldots)$ oznaka za skup formula (individualnih i shema) koje dobivamo ako u svakom elementu od Δ provedemo navedene zamjene.

Da ovo uvidimo opet je dovoljno uočiti da ćemo dedukciju od $S(X|x,\ Y|y, \ldots;\ K|A,\ L|B, \ldots)$ iz $\Delta(X|x,\ Y|y, \ldots;\ K|A,\ L|B, \ldots)$ dobiti iz dedukcije od S iz Δ ako u ovoj posljednjoj *skroz* od početka do kraja (tj. u *svakom* članu niza formula — individualnih i shema — koji je određuje) provedemo zamjenu od x sa X, y sa $Y, \ldots;$ A sa K, B sa $L, \ldots$ (Pritom *ne* smeta ako već u pojedinim članovima niza koji daje dedukciju $\Delta \vdash S$ dolaze neke od formula $X, Y, \ldots; K, L, \ldots$).

Strogi dokaz provest ćemo indukcijom po broju n članova niza formula koji daje pretpostavljenu dedukciju $\Delta \vdash S$.

Baza indukcije. Za $n=1$, S može biti aksiom (individualni ili shema) ili neki element od Δ. Tada je i $S(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots)$ aksiom (individualni ili shema) (u smislu 7.2.) ili element od $\Delta(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots)$, pa (37) vrijedi za sve $\Delta\vdash S$ sa $n=1$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve dedukcije dane nizovima koji sadrže ne više od k članova, a $\Delta\vdash S$ neka je neka dedukcija dana nizom od $k+1$ članova. Ako S nije posljednji član te dedukcije, onda (37) vrijedi već po pretpostavci indukcije, jer tada postoji i dedukcija od S iz Δ sa ne više od k članova. Možemo dakle pretpostaviti da je S posljednji član u danoj dedukciji od $n+1$. članova. S je sada ili aksiom, ili element od Δ ili pak u nizu postoje ispred njega članovi T i $R\equiv T\Rightarrow S$. U prva dva slučaja (37) vrijedi iz razloga kao u Bazi indukcije. U preostalom trećem slučaju po pretpostavci indukcije postoje dedukcije

$$\Delta(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots)\vdash T(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots),$$

$$\Delta(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots)\vdash R(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots).$$

Ako nadovežemo jedan na drugi nizove koji daju ove dvije dedukcije dobit ćemo opet jednu dedukciju u kojoj će među članovima njenog niza formula dolaziti

$$T(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots) \text{ i } R(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots).$$

A kako je zbog $R\equiv T\Rightarrow S$ također i

$$R(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots)\equiv T(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots)\Rightarrow S(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots)$$

možemo ovu posljednju dedukciju po **D 8.** 3° nastaviti još jednim članom $S(X|x, Y|y, \ldots; K|A, L|B, \ldots)$ pa (37) opet vrijedi i u tom slučaju. — Tvrdnja je dokazana.

11.6. *Primjeri.*

11.6.1. Neka je $\Delta\equiv A\Rightarrow B,\ B\Rightarrow C$ (u simbolici teorije skupova pisali bi $\Delta=\{A\Rightarrow B,\ B\Rightarrow C\}$). Tada je

1. $A\Rightarrow B$	Element od Δ
2. $(A\Rightarrow B)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow C))$	Aksiom 3°
3. $(B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$	Iz 1, 2. po **D 8.** 3°
4. $B\Rightarrow C$	Element od Δ
5. $A\Rightarrow C$	Iz 4, 3. po **D 8.** 3°

dedukcija $A\Rightarrow B,\ B\Rightarrow C\vdash A\Rightarrow C$.

11.6.2. Neka je $\Delta\equiv A\Rightarrow B,\ A\Rightarrow C$. Tada je

1. $A\Rightarrow B$	Element od Δ
2. $(A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow B\,\&\,C))$	Aksiom 6°
3. $(A\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow B\,\&\,C)$	Iz 1, 2.
4. $A\Rightarrow C$	Element od Δ
5. $A\Rightarrow B\,\&\,C$	Iz 4, 3.

dedukcija $A\Rightarrow B,\ A\Rightarrow C\vdash A\Rightarrow B\,\&\,C$.

11.6.3. Neka je $\Delta \equiv A \Rightarrow C,\ B \Rightarrow C$. Tada je

1. $A \Rightarrow C$	Element od Δ
2. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$	Aksiom 9°
3. $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$	Iz 1, 2.
4. $B \Rightarrow C$	Element od Δ
5. $A \vee B \Rightarrow C$	Iz 4, 3.

dedukcije $A \Rightarrow C,\ B \Rightarrow C \vdash A \vee B \Rightarrow C$.

11.6.4. Neka je $\Delta \equiv A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow A$. Tada je

1. $A \Rightarrow B$	Element od Δ
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B))$	Aksiom 12°
3. $(B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$	Iz 1, 2.
4. $B \Rightarrow A$	Element od Δ
5. $A \Leftrightarrow B$	Iz 4, 3.

dedukcija $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow A \vdash A \Leftrightarrow B$.

11.6.5. Neka je $\Delta \equiv A,\ \neg A$. Tada je

1. A	Element od Δ
2. $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$	Aksiom 13°
3. $\neg A \Rightarrow B$	Iz 1, 2.
4. $\neg A$	Element od Δ
5. B	Iz 4, 3.

dedukcija $A,\ \neg A \vdash B$.

11.6.6. Neka je $\Delta \equiv A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow \neg B$. Tada je

1. $A \Rightarrow B$	Element od Δ
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$	Aksiom 14°
3. $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$	Iz 1, 2.
4. $A \Rightarrow \neg B$	Element od Δ
5. $\neg A$	Iz 4, 3.

dedukcija $A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow \neg B \vdash \neg A$.

11.6.7. Neka je $\Delta \equiv A \Rightarrow B,\ \neg A \Rightarrow B$. Tada je

1. $A \Rightarrow B$	Element od Δ
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$	Aksiom 15°
3. $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B$	Iz 1, 2.
4. $\neg A \Rightarrow B$	Element od Δ
5. B	Iz 4, 3.

dedukcija $A \Rightarrow B,\ \neg A \Rightarrow B \vdash B$.

11.7. *Vježbe.*

11.7.1. Pokaži da je $A \Rightarrow \neg A \vdash \neg A$. (Rješenje: Zbog **9.1.** (16) postoji demonstracija $\vdash A \Rightarrow A$. Odatle je

1. ...	
2. ...	Demonstracija $\vdash A \Rightarrow A$
k. $A \Rightarrow A$	
(k+1) $(A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A)$	Aksiom 14° $(A \mid B)$
(k+2) $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$	Iz k, (k+1)
(k+3) $A \Rightarrow \neg A$	Element od Δ
(k+4) $\neg A$	Iz (k+3), (k+2)

dedukcija $A \Rightarrow \neg A \vdash \neg A$.)

11.7.2. Ako je $\Delta \vdash F$ mora postojati (bar jedan) *najkraći* niz formula (niz s najmanjim brojem članova) koji je dedukcija od F iz Δ. Ako je n unaprijed zadani (po volji veliki) prirodni broj, postoji li formula F, za koju najkraći niz, koji je njena dedukcija, sadrži bar n članova? (Odgovor: Da; uzmimo npr. formulu

$$F \equiv ((\ldots((a \vee b) \vee c) \vee \ldots) \vee y) \vee z$$

koja sadrži n različitih varijabla sudova $a, b, c, \ldots, y, z$. Lako se uviđa da dedukcija $a \vdash F$ ima bar $2n-1$ član. Naprotiv, za $z \vdash F$ postoji već dedukcija sa samo 3 člana.)

12. NEKA SVOJSTVA DEDUKCIJE

12.1. Uzmimo da je $\Delta \vdash A$, $\Delta \vdash B$, ... , $\Delta \vdash M$ tj. da se iz skupa formula (individualnih i shema) Δ može deducirati (konačan) skup formula (individualnih i shema) $\Phi = \{A, B, \ldots, M\}$. U tom slučaju možemo očito konstruirati i takvu dedukciju iz Δ u kojoj će među članovima njenog niza formula biti sve formule $A, B, \ldots, M$ (npr. nadovezivanjem nizova koji daju respektivno dedukcije $\Delta \vdash A$, $\Delta \vdash B$, ... , $\Delta \vdash M$). Tada ćemo kraće pisati $\Delta \vdash \Phi$. (Ova konvencija nije općenito prihvaćena, jer oznaka $\Delta \vdash \Phi$ kadšto znači da se iz *konjunkcije* elemenata od Δ može izvesti *disjunkcija* elemenata od Φ.) Ovakvu oznaku upotrebljavat ćemo i u slučaju kad je skup Δ prazan, dakle kad je Φ skup teorema (individualnih i shema).

12.2. Uz notaciju uvedenu u **12.1.** dedukcija ima i ova svojstva:

1° Ako je $\Delta \supset \Phi$, onda je $\Delta \vdash \Phi$.

2° Ako je $\Delta \vdash \Phi$ i $\Delta \vdash \Psi$, onda je i $\Delta \vdash \Phi \cup \Psi$.

3° Ako je $\Delta \vdash \Phi$ i $\Phi \vdash \Psi$, onda je i $\Delta \vdash \Psi$ (specijalno: ako je $\vdash \Phi$ i $\Phi \vdash \Psi$, onda je $\vdash \Psi$; usp. **10.5.3.**):

4° Ako je $\Delta \vdash \Phi$ i $\Phi \supset \Psi$, onda je i $\Delta \vdash \Psi$.

5° Ako je $\Phi \vdash \Psi$ i $\Delta \supset \Phi$, onda je i $\Delta \vdash \Psi$.

6° Ako je $\Delta \vdash \Phi$ i $\Gamma \vdash \Psi$, onda je $\Delta \cup \Gamma \vdash \Phi \cup \Psi$.

7° Ako je $\Delta \vdash \Phi$ i $\Delta \setminus \Gamma \vdash \Gamma$, onda je i $\Delta \setminus \Gamma \vdash \Phi$ (specijalno: ako je $\vdash \Gamma$ i $\Delta \vdash \Phi$, onda je $\Delta \setminus \Gamma \vdash \Phi$).

8° Ako je $\Delta \vdash \Phi$ i $\Gamma \vdash \Psi$, onda je $\Delta \cup (\Gamma \setminus \Phi) \vdash \Psi$.

9° Ako je $\Delta \vdash \Delta_1, \Delta_1 \vdash \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1} \vdash \Delta_n$ onda je i $\Delta \vdash \Delta_n$.

Svojstvo 9° omogućuje da umjesto $\Delta \vdash \Delta_1$, $\Delta_1 \vdash \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1} \vdash \Delta_n$ pišemo kraće $\Delta \vdash \Delta_1 \vdash \Delta_2 \vdash \ldots \vdash \Delta_{n-1} \vdash \Delta_n$. Ako pritom Δ_i $(1 < i < n)$ sadrži više od jednog elementa, bit će korisno — da ne bi došlo do zabune — pisati članove od Δ_i npr. unutar vitičastih zagrada. (Inače bi npr. $A \vdash B$, $C \vdash D$ mogli shvatiti i kao oznake dviju dedukcija $A \vdash B$ i $C \vdash D$, a ne samo kao skraćeno pisanje dedukcija $A \vdash B, C$ i $B, C \vdash D$.)

Dokaz svojstava 1° do 9°. 1° i 2° slijedi neposredno iz **D 8.** 3° uviđamo ovako: Konačnu dedukciju $\Delta \vdash \Psi$ dobivamo ako na dedukciju $\Delta \vdash \Phi$ nadovežemo dedukciju $\Phi \vdash \Psi$, s time da u ovoj posljednjoj uz članove niza koji imaju komentar „Element od Δ" ovaj komentar zamijenimo komentarom koji ista formula ima u dedukciji $\Delta \vdash \Phi$. Slično vrijedi i za ostala svojstva, no može ih se i svesti na 1° do 3° ovako:

Ad 4°. Zbog svojstva 1° je $\Phi \vdash \Psi$ pa zbog svojstva 3° vrijedi i svojstvo 4°

Ad 5°. Zbog 1° je $\Delta \vdash \Phi$ pa zbog 3° vrijedi 5°. Posebno za $\Phi = \emptyset$ odatle izlazi da se svaki skup teorema (individualnih i shema) može deducirati iz bilo kojeg skupa formula — što je, uostalom, i direktno očigledno.

Ad 6°. Prema 5° je $\Delta \cup \Gamma \vdash \Phi$ i $\Delta \cup \Gamma \vdash \Psi$ odakle zbog 2° vrijedi 6°.

Ad 7°. Zbog 1° je $\Delta \setminus \Gamma \vdash \Delta \setminus \Gamma$, pa je po 2° $\Delta \setminus \Gamma \vdash (\Delta - \Gamma) \cup \Gamma \supset \Delta$. Odatle zbog 4° i 3° vrijedi 7°.

Ad 8°. Prema 5° je $\Delta \cup (\Gamma \setminus \Phi) \vdash \Phi$, a prema 1° je $\Delta \cup (\Gamma \setminus \Phi) \vdash \Gamma \setminus \Phi$. Odatle je po 2° i 4° $\Delta \cup (\Gamma \setminus \Phi) \vdash \Gamma$, pa zbog 3° vrijedi 8°.

Ad 9°. Za bilo koji dani n 9° izlazi ako $n-1$ puta primijenimo 3°. Da 9° vrijedi za svaki n izlazi indukcijom.

12.3. Istaknimo još ovu važnu okolnost: Svojstva dedukcije 1° do 9° su takva da ne samo omogućuju da se iz *postojanja* jednih dedukcija zaključi na *postojanje* drugih, već — u što se je lako uvjeriti — iz *danih* dedukcija može se uvijek — bar u principu — i *efektivno* konstruirati tražena dedukcija.

13. TEOREM DEDUKCIJE

13.1. U **9.** smo imali prilike vidjeti da direktno dokazivanje teorema na osnovu **D 6a.** ne mora uvijek biti sasvim lako. Već praćenje gotovog izvoda može biti donekle tegobno, a pogotovo to vrijedi za njegovo iznalaženje. *Teorem dedukcije*[1] koji ćemo izvesti u ovom poglavlju i *pravila dedukcije* koja ćemo izvesti u idućem omogućit će mnogo jednostavnije i prirodnije (tj. bliže sadržajnom, ne-formaliziranom zaključivanju oko odgovarajućeg teorema o sudovima) izvođenje teorema (individualnih i shema) logike sudova. Pomoću pravila dedukcije bit će moguće posredno zaključiti da posto-

[1] Ovdje riječ „teorem" dakako ne uzimamo u smislu **D 6.** ili **6a**, već u njenom u matematici inače uobičajenom smislu. Teorem dedukcije za nas ovdje nije teorem *formalne* matematičke teorije koju izgrađujemo (tj. logike sudova), već *metamatematički* teorem (sadržajne) teorije *pomoću koje* izgrađujemo i ispitujemo logiku sudova. Kraće rečeno, teorem dedukcije *nije* teorem *logike sudova* nego je to teorem *o* logici sudova.

ji demonstracija nekog teorema ili dedukcija neke formule iz drugih, i to tako da bi je — bar u principu — mogli i efektivno konstruirati, a da neće biti potrebno da tu demonstraciju odnosno dedukciju zaista u potpunosti i *faktički* provedemo (što bi često bilo vrlo tegobno).

Teorem dedukcije, koji je i principijelno od osnovne važnosti, glasi:

Neka su A i B dane formule (individualne ili sheme) a Δ neka je neki dani skup formula (individualnih i shema). Tada vrijedi:

Ako je $\Delta, A \vdash B$, *onda je* $\Delta \vdash A \Rightarrow B$.

Riječima: Ako postoji dedukcija od B iz $\Delta \cup \{A\}$, onda postoji i dedukcija od $A \Rightarrow B$ iz Δ.

13.2. Na ovom mjestu vrlo je važno posebno istaknuti ovo: Ako bismo pokušali „sadržajno interpretirati" tvrdnju teorema dedukcije, mogli bismo možda pomisliti da je ona u ovome: Ako Δ i A zajedno povlače B, onda Δ sam povlači da A povlači B. Ovo se čini „trivijalno". Međutim, kod toga smo šutke intendirani smisao od $\Rightarrow$ i od $\vdash$. poistovjetili respektivno sa onim koji je za te simbole implicitno karakteriziran našim definicijama **5**, **7**. i **8**. Razumije se da tako nešto nije dopustivo, pogotovo dok još ne znamo koja svojstva implikacije stvarno jesu obuhvaćena s **D 5.** 1°—3°. Ako ovo imamo na umu bit će nam jasno da tvrdnja teorema dedukcije nipošto nije trivijalna.

13.3. Dokaz teorema dedukcije koji ćemo dati bit će ne samo egzistencijalan već i konstruktivan, tj: Čitav dokaz teorema dedukcije bit će vođen tako da će njime biti omogućeno ne samo da iz $\Delta, A \vdash B$ zaključimo na $\Delta \vdash A \Rightarrow B$, već, pored toga, ako je dedukcija $\Delta, A \vdash B$ dana (faktički ili bar u principu), naš dokaz teorema dedukcije omogućuje (bar i principu) i konkretnu konstrukciju dedukcije $\Delta \vdash A \Rightarrow B$. Pri tome ne smatramo bitnim što bi kod pokušaja praktičke provedbe skroz ove konstrukcije često naišli na velike ili čak jedva savladive poteškoće (naime, vrlo bi brzo došli do dugih izraza i dedukcija s ogromnim brojem članova u nizu, koje već zbog ograničene količine papira i vremena koje imamo na raspolaganju možda ne bismo mogli sve ni ispisati). Osnovno je, kao što smo rekli, da takva mogućnost konstrukcije u načelu postoji — ovo je za nas osnovno stoga jer logiku sudova želimo izgrađivati strogo finitno. Kao primitivnu ilustraciju okolnosti o kojima se ovdje radi spomenimo da npr. — stojeći na strogo finitnom stajalištu[1] — nećemo prigovoriti tvrdnji, da se u principu efektivnim iteriranim pribrajanjem jedinice može doseći kako god veliki unaprijed određeni broj n, iako vjerojatnu nikom sa zdravim razumom ne bi palo na pamet da to provjeri i stvarno provede npr. za $10^{10^{10}}$.

Istaknimo također da ćemo u dokazu teorema dedukcije (bilo direktno bilo indirektno) od aksioma upotrebiti samo one iz grupe $\Rightarrow$-aksioma, tj. **D 5.** 1° do 3°.

[1] Ovdje ne možemo ulaziti u diskusiju kako bi ovo pitanje izgledalo posmatrano sa tzv. ultraintuicionističkog stajališta kakvo je zauzeto u nekim novijim radovima npr. profesora Jesenjina-Volpina.

Prelazimo na dokaz teorema dedukcije. Provest ćemo ga indukcijom po broju članova niza koji čini *pretpostavljenu* dedukciju $\Delta, A \vdash B$.

Baza indukcije. Treba pokazati da teorem dedukcije vrijedi ako niz pretpostavljene dedukcije $\Delta, A \vdash B$ ima samo jedan član. Budući da ovdje slučaj **D 8.** 3° ne dolazi u obzir, dovoljno je provjeriti slučajeve **D 8.** 1° i 2°.

α) Nastupa slučaj 1°, tj. pretpostavljena dedukcija $\Delta, A \vdash B$ ima oblik

1. B	Aksiom $n°$.

Tada traženu dedukciju $\Delta \vdash A \Rightarrow B$ možemo konstruirati ovako:

1. B	Aksiom $n°$
2. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	Aksiom 1° $(B \mid A,\ A \mid B)$
3. $A \Rightarrow B$	Iz 1, 2.

β) Nastupa slučaj 2°, tj. pretpostavljena dedukcija $\Delta, A \vdash B$ ima oblik

1. B	Element od $\Delta \cup \{A\}$.

Ovdje razlikujemo dvije mogućnosti: 1) $B \in \Delta$, 2) $B \equiv A$. U prvom slučaju tražena dedukcija dobiva se analogno kao gore pod α) s jedinom razlikom što će sada komentar uz prvi član niza biti „Element od Δ" umjesto „Aksiom $n°$". U drugom slučaju posljednji član niza tražene dedukcije treba biti $A \Rightarrow A$. Po **9.1.** (16) to je teorem pa po **10.3.** postoji demonstracija $\vdash A \Rightarrow A$ dakle po **11.4.** pogotovo postoji i tražena dedukcija $\Delta \vdash A \Rightarrow A$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je teorem dedukcije ispravan ako pretpostavljena dedukcija ima najviše k $(k \geqslant 1)$ članova. Neka je sada $\Delta, A \vdash B$ pretpostavljena dedukcija koju čini neki niz od $k+1$ članova[1].

Označimo općenito r-ti član niza pretpostavljene dedukcije sa B_r $(B_{k+1} \equiv B)$. Ona dakle ima oblik

$$(38) \qquad \begin{array}{l} 1.\ B_1 \\ 2.\ B_2 \\ \vdots \\ k.\ B_k \\ (k+1)\,B \end{array}$$

s odgovarajućim komentarom. Po pretpostavci indukcije postoji dedukcija $\Delta \vdash A \Rightarrow B_k$ oblika

$$(39) \qquad \begin{array}{l} 1.\ \ldots. \\ \vdots \\ m_1\ A \Rightarrow B_1 \\ \vdots \\ m_2\ A \Rightarrow B_2 \\ \vdots \\ m_k\ A \Rightarrow B_k \end{array}$$

[1] Možemo pretpostaviti da je B njen *posljednji* član (usp. **11.5.**).

s odgovarajućim komentarom. Pokazat ćemo da se ova može produljiti do dedukcije $\Delta \vdash A \Rightarrow B$.

Ovdje ćemo razlikovati 4 slučaja: α) B je aksiom, β) $B \in \Delta$, γ) $B \equiv A$, δ) u (38) postoje članovi B_r, B_s takvi da je $B_s \equiv B_r \Rightarrow B$.

U slučajevima α) do γ) možemo zaključivati analogno kao u bazi indukcije. (Ili, možemo zaključivati ovako: ako ne nastupa slučaj δ), postoji i jednočlana pretpostavljena dedukcija $\Delta, A \vdash B$ pa po pretpostavci indukcije postoji i dedukcija $\Delta \vdash A \Rightarrow B$ a to je tražena dedukcija.)

Preostaje slučaj δ). Prema **9.11.** (36) vrijedi

(40) $$\vdash F_{11}(B_r \mid B,\ B \mid C),$$

pa se po **10.3.** niz (39) može produljiti demonstracijom (40). Time dobivamo dedukciju iz Δ oblika

$$\begin{array}{ll} & 1.\ \ldots \\ & \vdots \\ (41) & m_k\ A \Rightarrow B_k \\ & \vdots \\ & m.\ (A \Rightarrow B_r) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B_r \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \end{array}$$

s odgovarajućim komentarom.

No po pretpostavci u (38) dolaze članovi B_r i $B_s \equiv B_r \Rightarrow B$. Znači u (39) — pa stoga pogotovo u produljenju (41) od (39) — dolaze članovi $A \Rightarrow B_r$ i $A \Rightarrow B_s \equiv A \Rightarrow (B_r \Rightarrow B)$; neka prva od tih formula dolazi npr. kao m_r-ti, a druga kao m_s-ti član niza (41).

Dedukciju (41) iz Δ možemo dakle još produljiti sa

(m + 1)	$(A \Rightarrow (B_r \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	Iz m_r, m.
(m + 2)	$A \Rightarrow B$	Iz m_s, (m + 1).

— i tako dobivamo traženu dedukciju $\Delta \vdash A \Rightarrow B$.

Čitaocu se preporuča, da ovaj postupak provede za neke jednostavne konkretne dedukcije $\Delta, A \vdash B$ (izuzev možda dio u (41) od $(m_k + 1)$-tog do $(m - 1)$-tog retka, jer bi to bilo vrlo tegobno); time će mu metoda i smisao provedenih razmatranja postati bliži i prozirniji.

14. PRAVILA DEDUKCIJE

14.1. U ovom poglavlju izvest ćemo nekoliko pravila o dedukciji teorema (individualnih i shema) iz skupa teorema (individualnih i shema).

Ona od njih koja će biti oblika „Vrijedi $\Delta \vdash A$" zvat ćemo direktnim pravilima dedukcije, a one oblika „Ako je $\Delta \vdash A$, onda je $\Gamma \vdash B$" zvat ćemo pomoćnim pravilima dedukcije. (U prošlom poglavlju dokazani teorem dedukcije je npr. jedno od *pomoćnih* pravila dedukcije.) Pomoćnim pravilima dedukcije zvat ćemo i ona s *dvije* premise, oblika „Ako je $\Delta \vdash A$ i $\Gamma \vdash B$, onda je $\Lambda \vdash C$".

Pored klasifikacije na direktna i pomoćna podijelit ćemo pravila dedukcije i na pravila introdukcije (uvođenja) i pravila eliminacije (isključenja) operatora. Od *direktnih* bit će pravila introdukcije ona, koja *zdesna* od znaka $\vdash$ eksplicitno sadrže neki operator, a pravila eliminacije ona, koja taj operator sadrže *slijeva* od $\vdash$. Od *pomoćnih* bit će pravila introdukcije ona koja u *rezultirajućoj* dedukciji *zdesna* od $\vdash$ sadrže eksplicitno neki operator ili ga sadrže u *pretpostavljenoj* dedukciji *slijeva* od $\vdash$, a — obrnuto — pravila eliminacije bit će ona koja takav operator sadrže *slijeva* od $\vdash$ u *rezultirajućoj* dedukciji ili *zdesna* od $\vdash$ u *pretpostavljenoj* dedukciji.

Istaknimo da ćemo u dokazima pojedinih pravila introdukcije i eliminacije bilo posredno bilo neposredno od aksioma pored $\Rightarrow$-aksioma upotrebiti samo aksiome iz grupe onog operatora na koji se introdukcija ili eliminacija odnosi. Također će — kao što smo već istakli u **13.1.** — i ovdje razmatranja biti takva da u principu omogućuju konstrukciju tražene dedukcije (bilo direktno bilo iz pretpostavljenje već prema tome radi li se o direktnom ili pomoćnom pravilu dedukcije).

14.2. *Pravilo $\Rightarrow$-introdukcije* je pomoćno i glasi

Ako je $\Delta, A \vdash B$, *onda je* $\Delta \vdash A \Rightarrow B$.

Ovo je u prošlom poglavlju dokazani teorem dedukcije.

14.3. *Pravilo $\Rightarrow$-eliminacije* je direktno i glasi

$$A, A \Rightarrow B \vdash B.$$

Dokaz ovog pravila izlazi iz **D 8.** 2° i 3°:

1. A	Element od $A, A \Rightarrow B$
2. $A \Rightarrow B$	Element od $A, A \Rightarrow B$
3. B	Iz 1, 2.

14.4. *Pravilo &-introdukcije* je direktno i glasi

$$A, B \vdash A \,\&\, B.$$

Tražena dedukcija dana je sa

1. A	Element od A, B
2. B	Element od A, B
3. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	Aksiom 1°
4. $B \Rightarrow (B \Rightarrow B)$	Aksiom 1° $(B \mid A)$
5. $B \Rightarrow A$	Iz 1, 3.
6. $B \Rightarrow B$	Iz 2, 4.
7. $(B \Rightarrow A) \Rightarrow ((B \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A \,\&\, B)$	Aksiom 6° $(B \mid A, A \mid B, B \mid C)$
8. $(B \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A \,\&\, B)$	Iz 5, 7.
9. $B \Rightarrow A \,\&\, B$	Iz 6, 8.
10. $A \,\&\, B$	Iz 2, 9.

14.5. *Pravila &-eliminacije* su direktna i glase

$$A \& B \vdash A, \quad A \& B \vdash B.$$

Tražene dedukcije dane su sa

Prva dedukcija:	1. $A \& B$	Element $A \& B$
	2. $A \& B \Rightarrow A$	Aksiom 4°
	3. A	Iz 1, 2.

Druga dedukcija: Analogno, uz aksiom 5° umjesto aksioma 4°.

14.6. *Pravila* $\vee$*-introdukcije* su direktna i glase

$$A \vdash A \vee B, \quad B \vdash A \vee B.$$

Tražene dedukcije dane su sa

Prva dedukcija:	1. A	Element A
	2. $A \Rightarrow A \vee B$	Aksiom 7°
	3. $A \vee B$	Iz 1, 2.

Druga dedukcija: Analogno, uz aksiom 8° umjesto aksioma 7°.

14.7. *Pravilo* $\vee$*-eliminacije* je pomoćno i glasi

Ako je $\Gamma, A \vdash C$ i $\Gamma, B \vdash C$, onda je $\Gamma, A \vee B \vdash C$.

Traženu dedukciju dobivamo ovako: Najprije po teoremu dedukcije nalazimo dedukciju $\Gamma \vdash A \Rightarrow C$ i dedukciju $\Gamma \vdash B \Rightarrow C$, a ako ove nadovežemo jednu na drugu, dobivamo dedukciju $\Gamma \vdash A \Rightarrow C, B \Rightarrow C$ dakle pogotovo dedukciju $\Gamma, A \vee B \vdash A \Rightarrow C, B \Rightarrow C$. Uzmimo da u ovoj posljednjoj $A \Rightarrow C$ dolazi npr. kao r-ti a $B \Rightarrow C$ kao s-ti član njenog niza formula. Tada posljednju dedukciju možemo nastaviti sa (t je $max(r, s)$):

(t+1) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$	Aksiom 9°
(t+2) $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$	Iz r, (t+1)
(t+3) $A \vee B \Rightarrow C$	Iz s, (t+2)
(t+4) $A \vee B$	Element od $\Gamma \cup \{A \vee B\}$
(t+5) C	Iz (t+4), (t+3).

14.8. *Pravilo* $\Leftrightarrow$*-introdukcije* je pomoćno i glasi

Ako je $\Gamma, A \vdash B$ i $\Gamma, B \vdash A$, onda je $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B$.

Traženu dedukciju dobivamo ovako: Najprije po teoremu dedukcije nalazimo dedukcije

$$\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \text{i} \quad \Gamma \vdash B \Rightarrow A,$$

pa ako ove nadovežemo jednu na drugu, dobivamo dedukciju $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$,

$B \Rightarrow A$. U drugu ruku, u **11.6.4.** našli smo dedukciju $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A \vdash A \Leftrightarrow B$. Po **12.2.3°** odatle izlazi $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B$.

14.9. *Pravila $\Leftrightarrow$-eliminacije* su direktna i glase

$$A, A \Leftrightarrow B \vdash B, \qquad B, A \Leftrightarrow B \vdash A.$$

Tražene dedukcije dobivamo ovako:

Prva dedukcija:	1. A	Element od $A, A \Leftrightarrow B$
	2. $A \Leftrightarrow B$	Element od $A, A \Leftrightarrow B$
	3. $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	Aksiom 10°
	4. $A \Rightarrow B$	Iz 2, 3.
	5. B	Iz 1, 4.

Druga dedukcija: Analogno, uz aksiom 11° umjesto aksioma 10°.

14.10. *Pravila $\neg$-introdukcije* su pomoćna i glase

Ako je $\Gamma, A \vdash B$ *i* $\Gamma, A \vdash \neg B$, *onda je* $\Gamma \vdash \neg A$;

Ako je $\Gamma, A \vdash B$ *i* $\Gamma, \neg A \vdash B$, *onda je* $\Gamma \vdash B$.

(Prvo od tih pravila moglo bi se po našoj konvenciji klasificirati i kao pravilo $\neg$-eliminacije.)

Radi razlikovanja zvat ćemo prvo od navedenih pravila pravilom slabe $\neg$-introdukcije, a drugo pravilom jake $\neg$-introdukcije. (Može se pokazati da—uz odgovarajuću interpretaciju—prvo pravilo vrijedi i intuicionistički, dok drugo vrijedi klasično ali intuicionistički ne.)

Tražene dedukcije dobivamo ovako:

Slaba $\neg$-introdukcija. Najprije po teoremu dedukcije nalazimo dedukcije $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ i $\Gamma \vdash A \Rightarrow \neg B$, pa ako ove nadovežemo jednu na drugu, dobivamo dedukciju $\Gamma \vdash A \Rightarrow B, A \Rightarrow \neg B$. U drugu ruku, u **11.6.6.** našli smo dedukciju $A \Rightarrow B, A \Rightarrow \neg B \vdash \neg A$. Po **12.2.3°** odatle izlazi $\Gamma \vdash \neg A$.

Jaka $\neg$-introdukcija. Najprije opet po teoremu dedukcije nalazimo dedukcije $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ i $\Gamma \vdash \neg A \Rightarrow B$, pa ako ove nadovežemo jednu na drugu, dobivamo dedukciju $\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow B$. U drugu ruku, u **11.6.7.** našli smo dedukciju $A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow B \vdash B$. Po **12.2.3°** odatle izlazi $\Gamma \vdash B$.

14.11. *Pravila $\neg$-eliminacije* su direktna i glase

$$A, \neg A \vdash B, \qquad \neg\neg A \vdash A.$$

Radi razlikovanja zvat ćemo opet prvo od navedenih pravila pravilom slabe $\neg$-eliminacije, a drugo pravilom jake $\neg$-eliminacije. (I tu se može pokazati da — uz odgovarajuću interpretaciju — prvo pravilo vrijedi i intuicionistički, dok drugo vrijedi klasično ali intuicionistički ne.)

Tražene dedukcije dobivamo ovako:

Slaba $\neg$-eliminacija dokazana je u **11.6.5.**

Jaka $\neg\neg$*-eliminacija.* Izvedimo najprije ove dedukcije:

$$A \vdash \neg\neg A \Rightarrow A, \quad \neg A \vdash \neg\neg A \Rightarrow A.$$

Prva dedukcija:

1. A	Element A
2. $A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$	Aksiom $1°(\neg\neg A \mid B)$
3. $\neg\neg A \Rightarrow A$	Iz 1, 2.

Druga dedukcija:

1. $\neg A$	Element $\neg A$
2. $\neg A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$	Aksiom $13°(\neg A \mid A,\ A \mid B)$
3. $\neg\neg A \Rightarrow A$	Iz 1, 2.

Iz dobivenih dedukcija zaključujemo po pravilu jake $\neg$-introdukcije na dedukciju $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$ dakle pogotovo na dedukciju $\neg\neg A \vdash \neg\neg A \Rightarrow A$. Ovu posljednju (uzmimo da ima k članova u nizu formula i da je $\neg\neg A \Rightarrow A$ njen npr. s-ti član) nastavimo ovako:

(k+1) $\neg\neg A$	Element $\neg\neg A$
(k+2) A	Iz (k+1), s.

15. NEKI VAŽNIJI TEOREMI LOGIKE SUDOVA

15.1. U ovom poglavlju skupit ćemo niz (shema) teorema logike sudova, od kojih će neki biti aksiomi, neki ranije dokazani teoremi a preostale ćemo dokazati ovdje. Pored teorema bit će u ovom poglavlju skupljene i neke važnije dedukcije oblika $\Delta \vdash A$; to dakako nisu teoremi u smislu **D 6a.** (to nisu čak ni riječi logike sudova jer sadrže znak $\vdash$) već su to metamatematički teoremi. Analogno dakako vrijedi i za teoreme napisane u obliku $\vdash A$; sama formula A ovdje označuje teorem logike sudova, dok je izraz $\vdash A$ metamatematički „teorem", naime kraće napisana izreka „A je teorem logike sudova".

Pojedini teoremi i dedukcije koje dolaze bit će razvrstani u grupe prema *operatorima* koji se *eksplicitno* pojavljuju u odgovarajućim shemama. U posljednjem odjeljku bit će skupljeni teoremi i dedukcije koje *eksplicitno* sadrže *konstante* logike sudova. Čitalac neka naročito obrati pažnju na to, da ćemo kod dokazivanja tih teorema — bilo posredno bilo neposredno — upotrebljavati od aksioma samo aksiome implikacije i one grupe (odnosno onih grupa) aksioma koji se odnose na te operatore koji se u dotičnim shemama eksplicitno javljaju (te aksiome konstanata ako se i one javljaju). Npr. kod dokaza „$\Rightarrow$ &-dedukcije" $A \Rightarrow B \vdash A \,\&\, C \Rightarrow B \,\&\, C$ bit će upotrebljavani samo aksiomi implikacije i konjunkcije, a kod dokaza „$\& \vee \Leftrightarrow$-teorema" $\vdash A \vee B \,\&\, C \Leftrightarrow (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$ neće nigdje biti upotrebljeni aksiomi negacije niti aksiomi konstanata.

Pojedine izvode redovno nećemo provoditi detaljno već ćemo dati samo konciznu skicu odgovarajuće demonstracije ili dedukcije u obliku njenog skraćenog komentara, ali će to biti učinjeno na takav način da čitava rekonstrukcija izvoda čitaocu ne bi smjela činiti poteškoća. Upotrebljavat ćemo još i ovu kraticu: Ako na dedukciju $\Delta \vdash \Phi$ zaključujemo na osnovu pravila, teorema ili aksioma P, pisat ćemo kratko $\Delta \vdash [P]\Phi$. Specijalno, ako je $P \equiv F(K|A, L|B, \ldots)$ a zamjene od A sa K, B sa $L, \ldots$ su takve da se može pretpostaviti da se tako očito nameću da će ih čitalac lako sam pogoditi, pisat ćemo kadšto umjesto P samo F. Pravila **12.2.** 1° do 9° redovno ćemo upotrebljavati šutke.

15.2. $\Rightarrow$*-teoremi i dedukcije*

1° $A \vdash B \Rightarrow A$

2° $A \Rightarrow B \vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

3° $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$

4° $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

5° $A \Rightarrow B \vdash (C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$

6° $\vdash A \Rightarrow A$

7° $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

8° $\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

9° $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

10° $\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

11° $\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

12° $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

13° $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

14° $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

15° $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

16° $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$.

Dokaz. 1°: Aks. 1°, $\Rightarrow$-elim; 2°: Aks. 3°, $\Rightarrow$-elim; 3°: 2°, $\Rightarrow$-elim; 4°: **9.5.** (24), $\Rightarrow$-elim; 5°: **9.6.** (26), $\Rightarrow$-elim; 6°: **9.1.** (16); 7°: Aks. 1°; 8°: Aks. 2°; 9°: Aks. 3°; 10°: **9.1.** (14); 11°: **9.2.** (18); 12°: **9.3.** (20); 13°: **9.5.** (24); 14°: **9.10.** (34); 15°: **9.11.** (36); 16°: $A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C \vdash [1°]\, B \Rightarrow (A \Rightarrow C) \vdash [4°]\, A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, $\Rightarrow$-intr.

15.3. *&-dedukcije*

1° $A \vdash A \& A$

2° $A \& A \vdash A$

3° $A \& B \vdash A$

4° $A \& B \vdash B$

5° $A,\ B \vdash A \& B$

6° $A \& B \vdash B \& A$

7° $(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)$

8° $A \& (B \& C) \vdash (A \& B) \& C$.

Dokaz. 1°: &-intr; 2°: &-elim; 3°: &-elim; 4°: &-elim; 5°: &-intr; 6°: $A \& B \vdash B, A$, &-intr; 7°: $(A \& B) \& C \vdash \{A \& B,\ C\} \vdash \{A,\ B,\ C\} \vdash$ [&-intr.] $\{A,\ (B \& C)\} \vdash A \& (B \& C)$; 8°: analogno.

15.4. $\vee$*-dedukcije*

1° $A \vdash A \vee A$

2° $A \vee A \vdash A$

3° $A \vdash A \vee B$

4° $B \vdash A \vee B$

5° $A \vee B \vdash B \vee A$

6° $(A \vee B) \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$

7° $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C.$

Dokaz. 1°: $\vee$-intr; 2°: $A \vdash A$, $A \vdash A$, $\vee$-elim; 3°, 4°: $\vee$-intr; 5°: $B \vdash A \vee B$; $A \vdash A \vee B$; $\vee$-elim; 6°: $A \vdash A \vee (B \vee C)$; $B \vdash B \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$; $\vee$-elim: $A \vee B \vdash A \vee (B \vee C)$; $C \vdash B \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$; $\vee$-elim; 7°: analogno.

15.5. $\Leftrightarrow$*-teorem i dedukcije*

1° $\vdash A \Leftrightarrow A$

2° $A \Leftrightarrow B \vdash B \Leftrightarrow A$

3° $A \Leftrightarrow B,\ B \Leftrightarrow C \vdash A \Leftrightarrow C$

4° $A \Leftrightarrow B,\ A \vdash B$

5° $A \Leftrightarrow B,\ B \vdash A$

6° $A \Leftrightarrow B \vdash (A \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

7° $A \Leftrightarrow B \vdash (C \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow (C \Leftrightarrow B).$

Dokaz. 1°: $A \vdash A$; $A \vdash A$; $\Leftrightarrow$-intr; 2°: $A \Leftrightarrow B,\ B \vdash A$; $A \Leftrightarrow B,\ A \vdash B$; $\Leftrightarrow$-intr; 3°: $A \Leftrightarrow B,\ B \Leftrightarrow C,\ A \vdash \{B,\ B \Leftrightarrow C\} \vdash C$; $A \Leftrightarrow B,\ B \Leftrightarrow C,\ C \vdash \{B,\ A \Leftrightarrow B\} \vdash A$; $\Leftrightarrow$-intr; 4°, 5°: $\Leftrightarrow$-elim; 6°: $A \Leftrightarrow B,\ A \Leftrightarrow C \vdash$ [15.5. 2°] $\{B \Leftrightarrow A,\ A \Leftrightarrow C\} \vdash$ [15.5.3°] $B \Leftrightarrow C$; $A \Leftrightarrow B,\ B \Leftrightarrow C \vdash$ [15.5.3°] $A \Leftrightarrow C$; $\Leftrightarrow$-intr; 7°: analogno.

15.6. $\neg$*-dedukcije*

1° $\neg\neg A \vdash A$

2° $A,\ \neg A \vdash B$

3° $A \vdash \neg\neg A.$

Dokaz. 1°: Jaka $\neg$-elim; 2°: slaba $\neg$-elim; 3°: $A, \neg A \vdash A$; $A, \neg A \vdash \neg A$; slaba $\neg$-intr: $A \vdash \neg(\neg A)$.

15.7. $\Rightarrow$&*-dedukcije*

1° $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash A \,\&\, B \Rightarrow C$

2° $A \,\&\, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

3° $A \Rightarrow B \vdash A \,\&\, C \Rightarrow B \,\&\, C$

4° $A \Rightarrow B \vdash C \,\&\, A \Rightarrow C \,\&\, B.$

Dokaz. 1°: $A \Rightarrow (B \Rightarrow C),\ A \,\&\, B \vdash \{A \Rightarrow (B \Rightarrow C),\ A,\ B\} \vdash C$; $\Rightarrow$-intr; 2°: $A \,\&\, B \Rightarrow C,\ A,\ B \vdash \{A \,\&\, B,\ A \,\&\, B \Rightarrow C\} \vdash C$; $\Rightarrow$-intr; $\Rightarrow$-intr; 3°: $A \Rightarrow B,\ A \,\&\, C \vdash \{A \Rightarrow B,\ A,\ C\} \vdash \{B,\ C\} \vdash B \,\&\, C$; $\Rightarrow$-intr; 4°: $A \Rightarrow B,\ C \,\&\, A \vdash \{A \Rightarrow B,\ C,\ A\} \vdash \{C,\ B\} \vdash C \,\&\, B$; $\Rightarrow$-intr.

15.8. $\Rightarrow \vee$*-dedukcije*

1° $A \Rightarrow C,\ B \Rightarrow C \vdash A \vee B \Rightarrow C$

2° $A \Rightarrow B \vdash A \vee C \Rightarrow B \vee C$

3° $A \Rightarrow B \vdash C \vee A \Rightarrow C \vee B.$

Dokaz. 1°: Aks. 9°, $\Rightarrow$-elim; $\Rightarrow$-elim; 2°: $A \Rightarrow B,\ A \vdash B \vdash B \vee C$; $A \Rightarrow B,\ C \vdash B \vee C$; $\vee$-elim: $A \Rightarrow B,\ A \vee C \vdash B \vee C$; $\Rightarrow$-intr; 3°: analogno.

15.9. $\Rightarrow\Leftrightarrow$*-dedukcije*

1° $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow A \vdash A \Leftrightarrow B$

2° $A \Leftrightarrow B \vdash A \Rightarrow B$

3° $A \Leftrightarrow B \vdash B \Rightarrow A$

4° $A \Leftrightarrow B \vdash (A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$

5° $A \Leftrightarrow B \vdash (C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$

6° $A \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow B$

7° $B \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow B$.

Dokaz. 1°: Aks. 12°, $\Rightarrow$-elim; $\Rightarrow$-elim; 2°: Aks. 10°, $\Rightarrow$-elim; 3°: Aks. 11°, $\Rightarrow$-elim; 4°: $A \Leftrightarrow B,\ A \Rightarrow C \vdash \{B \Rightarrow A,\ A \Rightarrow C\} \vdash B \Rightarrow C$; $A \Leftrightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash \{A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C\} \vdash A \Rightarrow C$; $\Leftrightarrow$-intr; 5°: analogno; 6°: $A,\ A \Rightarrow B \vdash B$; $A,\ B \vdash [$**15.2. 1°** $(B \mid A,\ A \mid B)]\ A \Rightarrow B$; $\Leftrightarrow$-intr; 7°: $B,\ A \Rightarrow B \vdash B$; $B,\ B \vdash A \Rightarrow B$; $\Leftrightarrow$-intr.

15.10. $\Rightarrow\neg$*-teoremi i dedukcije*

1° $\neg A \vdash A \Rightarrow B$

2° $A \vdash \neg A \Rightarrow B$

3° $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$

4° $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$

5° $A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$

6° $\neg A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow A$

7° $A \Rightarrow \neg B \vdash B \Rightarrow \neg A$

8° $\neg A \Rightarrow \neg B \vdash B \Rightarrow A$.

Dokaz. 1°: Slaba $\neg$-elim; $\Rightarrow$-intr; 2°: slaba $\neg$-elim; $\Rightarrow$-intr; 3°: **15.6. 3°**, $\Rightarrow$-intr; 4°: **15.6.1°**, $\Rightarrow$-intr; 5°: $A \Rightarrow B,\ \neg B,\ A \vdash B,\ \neg B$; slaba $\neg$-intr: $A \Rightarrow B,\ \neg B \vdash \neg A$; $\Rightarrow$-intr; 6°: $\neg A \Rightarrow B \vdash [$**15.10.5°** $(\neg A \mid A)]\ \neg B \Rightarrow \neg\neg A$; **15.10.4°**; 7°: $A \Rightarrow \neg B,\ B,\ A \vdash B,\ \neg B$; slaba $\neg$-intr: $A \Rightarrow \neg B,\ B \vdash \neg A$; $\Rightarrow$-intr; 8°: $\neg A \Rightarrow \neg B \vdash [$**15.10.7°** $(\neg A \mid A)]\ B \Rightarrow \neg\neg A$; **15.10.4°**.

15.11. $\& \vee$*-dedukcije*

1° $A \& (B \vee C) \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$

2° $(A \& B) \vee (A \& C) \vdash A \& (B \vee C)$

3° $A \vee (B \& C) \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$

4° $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee (B \& C)$

5° $A \vee (A \& B) \vdash A$

6° $A \vdash A \vee (A \& B)$

7° $A \& (A \vee B) \vdash A$

8° $A \vdash A \& (A \vee B)$.

Dokaz. 1°: $A,\ B \vdash A \& B \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$; $A,\ C \vdash A \& C \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$; $\vee$-elim: $A,\ B \vee C \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$; $A \& (B \vee C) \vdash A,\ B \vee C$; 2°: $A \& B \vdash \{A,\ B\} \vdash \{A,\ B \vee C\} \vdash A \& (B \vee C)$; $A \& C \vdash \{A,\ C\} \vdash \{A,\ B \vee C\} \vdash A \& (B \vee C)$; $\vee$-elim; 3°: $A \vdash \{A \vee B,\ A \vee C\} \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$; $B \& C \vdash \{B,\ C\} \vdash \{A \vee B,\ A \vee C\} \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$; $\vee$-elim; 4°: $A,\ C \vdash A \vee (B \& C)$; $B,\ C \vdash B \& C \vdash A \vee (B \& C)$; $\vee$-elim: $A \vee B,\ C \vdash A \vee (B \& C)$; $A \vee B,\ A \vdash A \vdash A \vee (B \& C)$; $\vee$-elim: $A \vee B,\ A \vee C \vdash A \vee (B \& C)$; $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee B,\ A \vee C$; 5°: $A \vdash A$; $A \& B \vdash A$; $\vee$-elim; 6°: $\vee$-intr; 7°: $\&$-elim; 8°: $A \vdash \{A,\ A \vee B\} \vdash A \& (A \vee B)$.

15.12. *& $\Leftrightarrow$-teoremi i dedukcije*

1° $\vdash A \Leftrightarrow A \& A$

2° $\vdash (A \& B) \Leftrightarrow (B \& A)$

3° $\vdash (A \& B) \& C \Leftrightarrow A \& (B \& C)$

4° $A \Leftrightarrow B \vdash (A \& C) \Leftrightarrow (B \& C)$

5° $A \Leftrightarrow B \vdash (C \& A) \Leftrightarrow (C \& B)$

6° $A \vdash A \& B \Leftrightarrow B$.

Dokaz. 1°: **15.3.1°** i 2°, $\Leftrightarrow$-intr; 2°: **15.3.6°** i 6° $(B|A, A|B)$, $\Leftrightarrow$-intr; 3°: **15.3.7°** i 8°, $\Leftrightarrow$-intr; 4°: $A \Leftrightarrow B$, $A \& C \vdash \{A \Leftrightarrow B, A, C\} \vdash$ [**15.5.4°**] $\{B, C\} \vdash B \& C$; $A \Leftrightarrow B$, $B \& C \vdash \{A \Leftrightarrow B, B, C\} \vdash$ [**15.5.5°**] $\{A, C\} \vdash A \& C$; $\Leftrightarrow$-intr; 5°: analogno; 6°: A, $A \& B \vdash B$; A, $B \vdash A \& B$; $\Leftrightarrow$-intr.

15.13. *& $\neg$-teorem*

$$1° \vdash \neg (A \& \neg A).$$

Dokaz. 1°: $A \& \neg A \vdash A$, $\neg A$; slaba $\neg$-intr.

15.14. *$\vee$ $\Leftrightarrow$-teoremi i dedukcije*

1° $\vdash A \Leftrightarrow A \vee A$

2° $\vdash A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

3° $\vdash (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

4° $A \Leftrightarrow B \vdash (A \vee C) \Leftrightarrow (B \vee C)$

5° $A \Leftrightarrow B \vdash (C \vee A) \Leftrightarrow (C \vee B)$

6° $A \vdash A \vee B \Leftrightarrow A$.

Dokaz. 1°: **15.4.1°** i 2°, $\Leftrightarrow$-intr; 2°: **15.4.5°** i 5° $(B|A, A|B)$, $\Leftrightarrow$-intr; 3°: **15.4.6°** i 7°, $\Leftrightarrow$-intr; 4°: $A \Leftrightarrow B$, $A \vdash$ [**15.5.4°**] $B \vdash B \vee C$; $A \Leftrightarrow B$, $C \vdash B \vee C$; $\vee$-elim: $A \Leftrightarrow B$, $A \vee C \vdash B \vee C$; analogno $A \Leftrightarrow B$, $B \vee C \vdash A \vee C$; $\Leftrightarrow$-intr; 5°: analogno; 6°: A, $A \vee B \vdash A$; A, $A \vdash A \vee B$; $\Leftrightarrow$-intr.

Napomena. Zbog **15.12.3°**, **15.14.3°** i **15.5.** možemo ubuduće i u logici sudova izostavljati zagrade kod višestrukih konjunkcija i disjunkcija, a zbog **15.12.2°** i **15.14.2°** možemo u takvim izrazima također po volji permutirati članove — ukoliko nam nije stalo da skraćenom notacijom jednoznačno odredimo konstrukciju formule u pitanju, već samo da (kakvu god rekonstrukciju formiranja te formule odabrali) vrijedi odgovarajući teorem ili dedukcija. Zbog teorema transformacije logike sudova (usp. **16.**) vrijedi isto i za složene izraze u kojima kao komponente dolaze višestruke konjunkcije ili disjunkcije.

15.15. *$\vee \neg$-teorem i dedukcija*

1° $\vdash A \vee \neg A$

2° $\neg B$, $A \vee B \vdash A$.

Dokaz. 1°: $A \vdash A \vee \neg A$; $\neg A \vdash A \vee \neg A$; jaka $\neg$-intr; 2°: $\neg B$, $A \vdash A$; $\neg B$, $B \vdash$[**15.6.2°**] A; $\vee$-elim.

15.16. *$\Leftrightarrow \neg$-teorem i dedukcije*

1° $\vdash A \Leftrightarrow \neg \neg A$ 2° $A \Leftrightarrow B \vdash \neg A \Leftrightarrow \neg B$ 3° $A \Leftrightarrow \neg B \vdash B \Leftrightarrow \neg A$.

Dokaz. 1°: **15.6.1°** i 3°, $\Leftrightarrow$-intr; 2°: $A\Leftrightarrow B \vdash$ **[15.9.2°** i 3°] $\{A\Rightarrow B,\ B\Rightarrow A\} \vdash$ **[15.10.5°** i 5° $(B|A,\ A|B)$] $\{\neg B\Rightarrow\neg A,\ \neg A\Rightarrow\neg B\} \vdash$ **[15.9.1°]** $\neg A\Leftrightarrow\neg B$; 3°: $A\Leftrightarrow\neg B \vdash \{A\Rightarrow\neg B, \neg B\Rightarrow A\} \vdash$ **[15.10.7°** i 6°] $\{B\Rightarrow\neg A, \neg A\Rightarrow B\} \vdash B\Leftrightarrow\neg A$.

15.17. $\Rightarrow$ & $\Leftrightarrow$-*teorem*

1° $\vdash (A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(A\Rightarrow B)\ \&\ (B\Rightarrow A)$.

Dokaz. 1°: **15.9.2°** i 3°; &-intr: $A\Leftrightarrow B \vdash (A\Rightarrow B)\ \&\ (B\Rightarrow A)$; $(A\Rightarrow B)\ \&\ (B\Rightarrow A) \vdash \{A\Rightarrow B,\ B\Rightarrow A\} \vdash$ **[15.9.1°]** $A\Leftrightarrow B$; $\Leftrightarrow$-intr.

15.18. $\Rightarrow\Leftrightarrow\neg$-*dedukcije*

1° $\neg A \vdash (A\Rightarrow B)\Leftrightarrow\neg A$ 2° $\neg B \vdash (A\Rightarrow B)\Leftrightarrow\neg A$.

Dokaz. 1°: **15.10.1°**; $\neg A,\ A\Rightarrow B \vdash \neg A$; $\Leftrightarrow$-intr; 2°: $\neg B, A\Rightarrow B, A \vdash B, \neg B$; slaba $\neg$-intr: $\neg B, A\Rightarrow B \vdash \neg A$; $\neg B,\ \neg A \vdash$ **[15.10.1°]** $A\Rightarrow B$; $\Leftrightarrow$-intr.

15.19. &$\Leftrightarrow\neg$-*teorem i dedukcija*

1° $\neg B \vdash A\ \&\ B\Leftrightarrow B$ 2° $\vdash A\ \&\ B\ \&\ \neg B\Leftrightarrow B\ \&\ \neg B$.

Dokaz. 1°: $\neg B,\ A\ \&\ B \vdash B$; $\neg B,\ B \vdash$ **[15.6.2°** $(B|A,\ A\ \&\ B\,|\,B)$] $A\ \&\ B$; $\Leftrightarrow$-intr; 2°: $A\ \&\ B\ \&\ \neg B \vdash B\ \&\ \neg B$; $B\ \&\ \neg B \vdash \{B, \neg B\} \vdash A\ \&\ B\ \&\ \neg B$; $\Leftrightarrow$-intr.

15.20. $\vee\Leftrightarrow\neg$-*teorem i dedukcija*

1° $\neg B \vdash A\vee B\Leftrightarrow A$ 2° $\vdash A\vee B\vee\neg B\Leftrightarrow B\vee\neg B$.

Dokaz. 1°: $\neg B,\ A \vdash A\vee B$; $\neg B,\ A\vee B \vdash$ **[15.15.2°]** A; $\Leftrightarrow$-intr; 2° $B\vee\neg B \vdash A\vee B\vee\neg B$; $B\vee\neg B \vdash B\vee\neg B$; $A \vdash$ **[15.15.1°** $(B|A)$] $B\vee\neg B$; $\vee$-elim; $\Leftrightarrow$-intr.

15.21. $\Rightarrow$ & $\Leftrightarrow\neg$-*teoremi*

1° $\vdash (A\Rightarrow B)\Leftrightarrow\neg(A\ \&\ \neg B)$ 2° $\vdash A\ \&\ B\Leftrightarrow\neg(A\Rightarrow\neg B)$.

Dokaz. 1°: $A\Rightarrow B,\ A\ \&\ \neg B \vdash A,\ B, \neg B$; slaba $\neg$-intr: $A\Rightarrow B \vdash \neg(A\ \&\ \neg B)$; $\neg(A\ \&\ \neg B),\ A,\ \neg B \vdash \{A\ \&\ \neg B,\ \neg(A\ \&\ \neg B)\}$; slaba $\neg$-intr: $\neg(A\ \&\ \neg B),\ A \vdash \neg\neg B \vdash B$; $\Rightarrow$-intr; $\Leftrightarrow$-intr; 2°: $A\ \&\ B,\ A\Rightarrow\neg B \vdash A,\ B, \neg B$; slaba $\neg$-intr: $A\ \&\ B \vdash \neg(A\Rightarrow\neg B)$; $\neg(A\Rightarrow\neg B), \neg B \vdash$ **[15.2.1°** $(\neg B|A,\ A|B)$] $\{A\Rightarrow\neg B, \neg(A\Rightarrow\neg B)\}$; slaba $\neg$-intr: $\neg(A\Rightarrow\neg B) \vdash B$; $\neg(A\Rightarrow\neg B),\ \neg A \vdash$ **[15.10.1°** $(\neg B\,|\,B)$] $\{A\Rightarrow\neg B,\ \neg(A\Rightarrow\neg B)\}$; slaba $\neg$-intr: $\neg(A\Rightarrow\neg B) \vdash A$; &-intr.

15.22. $\Rightarrow\vee\Leftrightarrow\neg$-*teoremi*

1° $\vdash (A\Rightarrow B)\Leftrightarrow\neg A\vee B$ 2° $\vdash A\vee B\Leftrightarrow\neg A\Rightarrow B$

Dokaz. 1°: $A \Rightarrow B, A \vdash B \vdash \neg A \vee B$; $A \Rightarrow B, \neg A \vdash \neg A \vdash \neg A \vee B$; $\vee$-elim: $A \Rightarrow B, A \vee \neg A \vdash \neg A \vee B$; **15.15.1°**; $\neg A \vdash$ [**15.10.1°**] $A \Rightarrow B$; $B \vdash$ [**15.2.1°** $(B|A, A|B)$] $A \Rightarrow B$; $\vee$-elim; $\Leftrightarrow$-intr; 2°: $A \vdash$ [**15.10.2°**] $\neg A \Rightarrow B$; $B \vdash$ [**15.2.1°** $(B|A, \neg A|B)$] $\neg A \Rightarrow B$; $\vee$-elim; $\neg A \Rightarrow B, A \vdash A \vee B$; $\neg A \Rightarrow B, \neg A \vdash B \vdash A \vee B$; $\vee$-elim; **15.15.1°**; $\Leftrightarrow$-intr.

15.23. *$\& \vee \Leftrightarrow \neg$-teoremi*

1° $\vdash A \& (B \vee \neg B) \Leftrightarrow A$	4° $\vdash A \& B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
2° $\vdash A \vee (B \& \neg B) \Leftrightarrow A$	5° $\vdash \neg(A \& B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
3° $\vdash A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$	6° $\vdash \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \& \neg B$.

Dokaz. 1°: $A \& (B \vee \neg B) \vdash A$; $A \vdash$ [**15.15.1°**] $\{A, B \vee \neg B\} \vdash A \& (B \vee \neg B)$; $\Leftrightarrow$-intr; 2°: $A \vdash A$; $B \& \neg B \vdash \{B, \neg B\} \vdash$ [**15.6.2°**] A; $\vee$-elim; $A \vdash A \vee (B \& \neg B)$; $\Leftrightarrow$-intr; 3°: $A \vee B$, $\neg A \& \neg B \vdash \{A \vee B, \neg A, \neg B\} \vdash$ [**15.15.2°**] $A, \neg A$; slaba $\neg$-intr: $A \vee B \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$; $\neg(\neg A \& \neg B) \vdash$ [**15.21.1°** $(\neg A|A)$] $\neg A \Rightarrow B \vdash$ [**15.22.1°** $(\neg A|A)$] $\neg\neg A \vee B$; $\neg\neg A \vdash A \vdash A \vee B$; $B \vdash A \vee B$; $\vee$-elim: $\neg\neg A \vee B \vdash A \vee B$; $\Leftrightarrow$-intr; 4°: $A \& B, \neg A \vee \neg B \vdash \{A, B, \neg A \vee \neg B\} \vdash \{A, \neg\neg B, \neg A \vee \neg B\} \vdash$ [**15.15.2°** $(\neg A|A, \neg B|B)$] $A, \neg A$; slaba $\neg$-intr: $A \& B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$; **15.22.2°** $(\neg A|A, \neg B|B)$, **15.9.3°** $(\neg A \vee \neg B|A, \neg\neg A \Rightarrow \neg B|B)$, $\Rightarrow$-intr: $\vdash (\neg\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$; **15.10.5°**: $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(\neg\neg A \Rightarrow \neg B)$; $\Rightarrow$-elim: $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash \neg(\neg\neg A \Rightarrow \neg B) \vdash$ [**15.21.2°** $(\neg\neg A|A)$, **15.9.3°** $(\neg\neg A \& B|A, \neg(\neg\neg A \Rightarrow \neg B)|B)$] $\neg\neg A \& B \vdash \{\neg\neg A, B\} \vdash \{A, B\} \vdash A \& B$; $\Leftrightarrow$-intr; 5°: **15.23.4°**, **15.16.2°**: $\vdash \neg(A \& B) \Leftrightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$; **15.16.1°** $(\neg A \vee \neg B|A)$; **15.5.2°**, 3°; 6°: analogno iz **15.23.3°**.

15.24. *Teoremi o konstantama*

1° $\vdash A \Rightarrow \top$	5° $\vdash \top \Leftrightarrow \neg\bot$	9° $\vdash A \vee \top \Leftrightarrow \top$
2° $\vdash \bot \Rightarrow A$	6° $\vdash \bot \Leftrightarrow \neg\top$	10° $\vdash A \vee \bot \Leftrightarrow A$
3° $\vdash \top$	7° $\vdash A \& \top \Leftrightarrow A$	11° $\vdash A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$
4° $\vdash \neg\bot$	8° $\vdash A \& \bot \Leftrightarrow \bot$	12° $\vdash A \& \neg A \Leftrightarrow \bot$.

Dokaz. 1°: Aks. 16°; 2°: Aks. 17°; 3°: Aks. 16° $(\top \Rightarrow \top | A)$: $\vdash (\top \Rightarrow \top) \Rightarrow \top$; **15.2.6°** $(\top | A)$: $\vdash \top \Rightarrow \top$; $\Rightarrow$-elim: $\vdash \top$; 4°: Aks. 17° i 17° $(\neg A | A)$: $\vdash \bot \Rightarrow A$, $\vdash \bot \Rightarrow \neg A$; slaba $\neg$-intr: $\vdash \neg\bot$; 5°: **15.24.** 3°, 4°; $\Leftrightarrow$-intr; 6°: **15.16.3°**, **15.24.5°**; 7°: $A \& \top \vdash A$; $A \vdash \{A, \top\} \vdash A \& \top$;

$\Leftrightarrow$-intr; 8°: $\bot \vdash$[Aks. 17°] A, $\bot$; $A \& \bot \vdash \bot$; $\Leftrightarrow$-intr; 9°: $\top \vdash A \vee \top$; $A \vee \top \vdash \top$; $\Leftrightarrow$-intr; 10°: $A \vdash A$; $\bot \vdash A$; $\vee$-elim; $A \vdash A \vee \bot$; $\Leftrightarrow$-intr; 11°: $A \vee \neg A \vdash$ [15.24.3°] $\top$; $\top \vdash$[15.15.1°] $A \vee \neg A$; $\Leftrightarrow$-intr; 12°: $\bot \vdash$[Aks. 17°] $A \& \neg A$; $A \& \neg A \vdash \{A, \neg A\} \vdash$[slaba $\neg$-elim.] $\bot$; $\Leftrightarrow$-intr.

16. TEOREM TRANSFORMACIJE LOGIKE SUDOVA

16.1. *Definicija* 9. *Neka je A neka dana formula (individualna ili shema) logike sudova, koja na nekom određenom mjestu σ kao komponentu sadrži formulu (individualnu ili shemu) B; označimo to sa $A \equiv A(-B-)$. Transformiramo li A tako, da u njoj na tom mjestu σ komponentu B zamijenimo formulom (individualnom ili shemom) C, preći će A u $A' \equiv A(-C-)$.*

16.2. *Teorem transformacije. Vrijedi*

$$B \Leftrightarrow C \vdash A(-B-) \Leftrightarrow A(-C-).$$

(I ovo je, dakako, metamatematički teorem — usp.[1] uz **13.1.** Bilo bi stoga korektnije zvati ga „teoremom transformacije o logici sudova".)

Dokaz teorema transformacije provest ćemo indukcijom po razlici $d\rho = \rho[A(-B-)] - \rho[B]$ rangova formula $A(-B-)$ i B. (**4.2. D 4**; pod rangom sheme formula razumijevat ćemo rang individualne formule koja nastaje iz dane sheme ako u njoj oznake za formule zamijenimo npr. varijablama). Pritom će B i C biti kako god odabrane formule, fiksne tokom indukcije.

Baza indukcije. Za $d\rho = 0$ nužno je $A(-B-) \equiv B$, dakle $A(-C-) \equiv C$ pa se teorem transformacije reducira na trivijalno svojstvo od $\vdash$, naime na $B \Leftrightarrow C \vdash B \Leftrightarrow C$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da teorem transformacije vrijedi za $d\rho < k$ i neka je $A(-B-)$ neka formula ranga $\rho[A(-B-)] = \rho[B] + k + 1$. A sada mora imati jedan od oblika

1° $A(-B-) \equiv D(-B-) \Rightarrow E$

2° $A(-B-) \equiv E \Rightarrow D(-B-)$

3° $A(-B-) \equiv D(-B-) \& E$

4° $A(-B-) \equiv E \& D(-B-)$

5° $A(-B-) \equiv D(-B-) \vee E$

6° $A(-B-) \equiv E \vee D(-B-)$

7° $A(-B-) \equiv D(-B-) \Leftrightarrow E$

8° $A(-B-) \equiv E \Leftrightarrow D(-B-)$

9° $A(-B-) \equiv \neg D(-B-)$,

gdje je $\rho[D(-B-)] - \rho[B] < k$.

Treba dokazati da u svakom od tih slučajeva vrijedi teorem transformacije.

Po pretpostavci indukcije svakako je

$$B \Leftrightarrow C \vdash D(-B-) \Leftrightarrow D(-C-).$$

Odatle tražena tvrdnja izlazi

u slučaju 1° po **15.9.4°** $(D(-B-)|A,\ D(-C-)|B,\ E|C)$,

u slučaju 2° po **15.9.5°** (ista zamjena),

u slučaju 3° po **15.12.4°** (ista zamjena),

u slučaju 4° po **15.12.5°** (ista zamjena),

u slučaju 5° po **15.14.4°** (ista zamjena),

u slučaju 6° po **15.14.5°** (ista zamjena),

u slučaju 7° po **15.5.6°** (ista zamjena),

u slučaju 8° po **15.5.7°** (ista zamjena),

u slučaju 9° po **15.16.2°** $(D(-B-)|A,\ D(-C-)|B)$.

16.3. *Korolar* 1. Vrijedi

$$B \Leftrightarrow C,\quad A(-B-) \vdash A(-C-).$$

K 1. izlazi iz teorema transformacije uz **15.9.2°** nakon $\Rightarrow$-eliminacije.

16.4. *Korolar* 2. Vrijedi

$$\textit{Ako je } \vdash B \Leftrightarrow C, \textit{ onda je } \vdash A(-B-) \Leftrightarrow A(-C-).$$

K 2. izlazi iz teorema transformacije zbog svojstava od $\vdash$.

16.5. Višestrukom primjenom teorema transformacije vidimo da analogno vrijedi općenitiji teorem simultane transformacije po kojem se iz ekvivalencije $B \Leftrightarrow C$ može deducirati ekvivalencija $A \Leftrightarrow A'$ dane formule A koja B sadrži kao komponentu na jednom ili više mjesta s formulom A' koja nastaje iz A ako B na kojim god mjestima od onih gdje dolazi u A zamijenimo sa C.

Ilustrirajmo ovo za slučaj simultane zamjene od B sa C na 2 mjesta: Neka je $A \equiv A(-B-B-)$. Tada je po teoremu transformacije i **15.5.3°**

$$\begin{aligned} B \Leftrightarrow C &\vdash \{A(-B-B-) \Leftrightarrow A(-C-B-),\ A(-C-B-) \Leftrightarrow A(-C-C-)\} \\ &\vdash A(-B-B-) \Leftrightarrow A(-C-C-). \end{aligned}$$

17. DUALITET U LOGICI SUDOVA

17.1. Neka je F neka formula (individualna ili shema) logike sudova sagrađena najviše od slova logike sudova, oznaka za formule logike sudova, operatora $\&, \vee, \neg$ i zagrada logike sudova. Neka je G formula (individualna ili shema) koja nastaje ako u F izvršimo ove izmjene: 1° zamijenimo konstantu $\top$ (ako ulazi u F) sa $\perp$ i obrnuto i 2° zamijenimo operator & svagdje gdje dolazi u F sa $\vee$ i $\vee$ svagdje gdje dolazi sa &. Formulu G zvat ćemo dualnom formuli F i pisati $G \equiv F^*(a, b, c, \ldots; A, B, C, \ldots)$ gdje su među $a, b, c, \ldots$ sadržane sve varijable sudova koje ulaze u F a među $A, B, C, \ldots$ sve oznake za formule logike sudova koje ulaze u F. Tada vrijedi

Lema. $\vdash \neg F \Leftrightarrow F^*(\neg a, \neg b, \neg c, \ldots; \neg A, \neg B, \neg C, \ldots)$.

Dokaz ćemo provesti indukcijom po rangu $\rho[F]$ formule F (za *rang sheme* usp. **16.2.**).

Baza indukcije. Ako je $\rho[F]=0$ formula F ima jedan od oblika: 1° $F \equiv \top$, 2° $F \equiv \bot$, 3° $F \equiv a$, 4° $F \equiv A$. Tada je respektivno 1° $F^* \equiv \bot$, 2° $F^* \equiv \top$, 3° $F^* \equiv a$, 4° $F^* \equiv A$ pa lema tvrdi da je respektivno 1° $\vdash \neg \top \Leftrightarrow \bot$, 2° $\vdash \neg \bot \Leftrightarrow \top$, 3° $\vdash \neg a \Leftrightarrow \neg a$, 4° $\vdash \neg A \Leftrightarrow \neg A$.

1° je ispravno po **15.24.6°**, 2° po **15.24.5°**, 3° i 4° po **15.5.1°**. Lema dakle vrijedi za $\rho[F]=0$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da lema vrijedi za formule ranga $\rho < k (k > 0)$ a F neka je neka formula ranga $\rho[F]=k+1$. Tada F ima jedan od oblika: 1° $F \equiv G \,\&\, H$, 2° $F \equiv G \vee H$, 3° $F \equiv \neg H$ gdje je $\rho[G]$, $\rho[H] < k$, pa je respektivno 1° $F^* \equiv G^* \vee H^*$, 2° $F^* \equiv G^* \,\&\, H^*$, 3° $F^* \equiv \neg H^*$. Po pretpostavci indukcije je

$$\vdash \neg G \Leftrightarrow G^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots),$$

$$\vdash \neg H \Leftrightarrow H^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots).$$

Prema **15.23.5°** i 6° izlazi da je respektivno

$$1° \vdash \neg F \Leftrightarrow \neg G \vee \neg H, \qquad 2° \vdash \neg F \Leftrightarrow \neg G \,\&\, \neg H,$$

$$3° \vdash \neg F \Leftrightarrow \neg \neg H.$$

Prema **K 1.** teorema transformacije izlazi odatle zbog pretpostavke indukcije da je respektivno

$$1° \vdash \neg F \Leftrightarrow G^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots) \vee H^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots),$$

$$2° \vdash \neg F \Leftrightarrow G^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots) \,\&\, H^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots),$$

$$3° \vdash \neg F \Leftrightarrow \neg H^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots).$$

Prema ranijem je dakle u sva tri slučaja

$$\vdash \neg F \Leftrightarrow F^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots)$$

pa lema vrijedi i za F sa $\rho[F]=k+1$.

17.2. *Teorem dualiteta logike sudova. Neka su F_1, F_2 formule (individualne ili sheme) kao u lemi, a F_1^*, F_2^* odgovarajuće dualne formule. Tada vrijedi*

$$\textit{Ako je } \vdash F_1 \Leftrightarrow F_2, \textit{ onda je } \vdash F_1^* \Leftrightarrow F_2^*.$$

Napomena. Kao u **13.1.** i **16.2.** „teorem“ ovdje znači metamatematički teorem; korektnije bi bilo reći „Teorem dualiteta *o* logici sudova“. Svakako, naslov uz **17.2.** treba shvatiti kao „Teorem (dualiteta logike sudova)“ a ne kao „(Teorem dualiteta) (logike sudova)“.

Dokaz teorema. Prema lemi je

$$\text{(42)} \qquad \begin{cases} \vdash \neg F_1 \Leftrightarrow F_1^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots), \\ \vdash \neg F_2 \Leftrightarrow F_2^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots). \end{cases}$$

Po pretpostavci $\vdash F_1 \Leftrightarrow F_2$ je zbog **15.16.2°** $\vdash \neg F_1 \Leftrightarrow \neg F_2$. Odatle i iz (42) izlazi po **15.5.2°** i 3° da je

$$\vdash F_1^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots) \Leftrightarrow F_2^*(\neg a, \neg b, \ldots; \neg A, \neg B, \ldots)$$

a odatle zbog **8.4.** uz $\neg a | a,\ \neg b | b, \ldots;\ \neg A | A,\ \neg B | B, \ldots$ da je

$$(43) \qquad \vdash F_1^*(\neg\neg a,\ \neg\neg b, \ldots;\ \neg\neg A,\ \neg\neg B, \ldots) \Leftrightarrow F_2^*(\neg\neg a,\ \neg\neg b, \ldots;\ \neg\neg A,\ \neg\neg B, \ldots).$$

Zbog **15.16.1°** simultanom transformacijom (zamjenom $\neg\neg a$ sa a, $\neg\neg b$ sa $b, \ldots$; $\neg\neg A$ sa A, $\neg\neg B$ sa $B, \ldots$) izlazi tvrdnja teorema.

18. TEOREMI LOGIKE SUDOVA I IDENTIČKI ISTINITE FORMULE ALGEBRE SUDOVA

18.1. Već smo u **8.7.** vidjeli da je svaki *teorem logike sudova*, interpretiran kao formula algebre sudova, *identički istinita formula.* Tamo smo nagovijestili da vrijedi i obrat, tj. *ako je* neka formula algebre sudova *identički istinita, onda je* ona, interpretirana kao formula logike sudova, *teorem* logike sudova. Dosad razvijena sredstva omogućuju da taj obrat sada i dokažemo. Iz obiju tvrdnji izlazi rezultat da je neka formula logike sudova teorem logike sudova onda i samo onda, ako je ta formula, interpretirana kao formula algebre sudova, identički istinita. Ovaj rezultat u određenom smislu znači upravo to, da smo aksiomima logike sudova 1° do 17° i sa **D 6.** i **6a.** uspješno i u potpunosti formalizirali algebru sudova u obliku logike sudova. Problem strogo finitne, rigorozne fundacije tog područja matematike time je dakle u principu riješen.

18.2. Pređimo na dokaz gore navedenog obrata.

18.3. Lako uviđamo ovo: Ako u sintaktičkim jednakostima iz II **10.1. D 12.**1°—12° znak „=“ zamijenimo sa „⇔“ i interpretiramo nastale formule kao formule logike sudova, one su sve teoremi logike sudova, i to:

II **10.1.1°** a zbog **15.12.2°**	II **10.1.6°** b zbog **15.24.8°**
II **10.1.1°** b zbog **15.14.2°**	II **10.1.6°** c zbog **15.24.9°**
II **10.1.2°** a zbog **15.12.3°**	II **10.1.6°** d zbog **15.24.10°**
II **10.1.2°** b zbog **15.14.3°**	II **10.1.7°** a zbog **15.24.12°**
II **10.1.3°** a zbog **15.11.1°**, 2°; ⇔-intr.	II **10.1.7°** b zbog **15.24.11°**
II **10.1.3°** b zbog **15.11.3°**, 4°; ⇔-intr.	II **10.1.8°** a zbog **15.24.6°**
II **10.1.4°** a zbog **15.12.1°**	II **10.1.8°** b zbog **15.24.5°**
II **10.1.4°** b zbog **15.14.1°**	II **10.1.9°** zbog **15.16.1°**
II **10.1.5°** a zbog **15.11.7°**, 8°; ⇔-intr.	II **10.1.10°** a zbog **15.23.5°**
II **10.1.5°** b zbog **15.11.5°**, 6°; ⇔-intr.	II **10.1.10°** b zbog **15.23.6°**
II **10.1.6°** a zbog **15.24.7°**	II **10.1.11°** zbog **15.22.1°**

II **10.1.12°** zbog **15.17.1°**.

18.2.2. Neka je sada F neka dana identički istinita formula. Tada je $F=\top$ semantička jednakost. (II **2.4. T 1.**). U II **10.3. T 12.** vidjeli smo da je onda $F=\top$ i sintaktička jednakost. Pokazat ćemo da je tada $F\Leftrightarrow\top$, interpretirana kao formula logike sudova, teorem logike sudova.

18.2.3. Da bismo se u to uvjerili dovoljno je detaljno preći izvođenja u II **10.** kojima je pokazano kako se neka dana semantička jednakost može izvesti kao sintaktička iz II **10. D 12.** Čitav postupak sveo se na izvođenje niza sintaktičkih jednakosti koje su konačno dale traženu jednakost. Vidjet ćemo da se paralelno u logici sudova može izvesti odgovarajući niz teorema koji nastaju iz gornjih jednakosti ako u njima svagdje „=“ zamijenimo sa „$\Leftrightarrow$“ i dobivene formule interpretiramo kao formule logike sudova.

18.2.4. Za „polazne“ jednakosti, tj. jednakosti iz II **10. D 12.** već smo u **18.2.1.** vidjeli da zamjenom „=“ sa „$\Leftrightarrow$“ prelaze u teoreme logike sudova. Treba još pokazati da analogno vrijedi za sve u II **10.** upotrebljene manipulacije s jednakostima. To su ova svojstva jednakosti:

1° $A=A$, 2° ako je $A=B$, onda je $B=A$, 3° ako je $A=B$ i $B=C$ onda je $A=C$. Odgovarajuća svojstva ima i operator $\Leftrightarrow$ u logici sudova jer je 1° po **15.5.** 1° $\vdash A\Leftrightarrow A$, 2° po **15.5.**2° $A\Leftrightarrow B\vdash B\Leftrightarrow A$, 3° po **15.5.**3° $A\Leftrightarrow B$, $B\Leftrightarrow C\vdash A\Leftrightarrow C$.

4° Jednakost ostaje sačuvana ako neku varijablu koja u njoj dolazi (na svakom mjestu gdje dolazi) nadomjestimo istim izrazom; analogno za više varijabla. Odgovarajuće svojstvo imaju po **8.4.** i teoremi logike sudova.

5° Ako u nekom danom izrazu neku njegovu komponentu zamijenimo njoj jednakom, dobivamo danom izrazu jednaki izraz. Odgovarajuće svojstvo ima i operator $\Leftrightarrow$ u logici sudova; to je upravo sadržaj teorema transformacije iz **16.2.**

18.2.5. Dakle je zaista $\vdash F\Leftrightarrow\top$. Stoga je po **15.9.**3° također $\vdash\top\Rightarrow F$. No po **15.24.**3° vrijedi $\vdash\top$ pa $\Rightarrow$-eliminacija konačno daje $\vdash F$ što je trebalo dokazati.

18.3. Vratimo se još na pitanje postavljeno u **11.3.** Neka je

$$\Delta=\{A, B, \ldots, M\}$$

dani skup formula logike sudova. Pita se, da li je $\Delta\vdash S$ ili ne?

Ako je $\Delta\vdash S$, bit će (eventualno višestrukom) primjenom teorema dedukcije $\vdash A\Rightarrow(B\Rightarrow(\ldots(M\Rightarrow S)\ldots))$ pa je formula $A\Rightarrow(B\Rightarrow(\ldots(M\Rightarrow S)\ldots))$, interpretirana kao formula algebre sudova, identički istinita. Obrnuto, ako je ona identički istinita, dobivamo (eventualno višestrukom) $\Rightarrow$-eliminacijom da je $\Delta\vdash S$. Prema tome S se iz $A, B, \ldots, M$ može deducirati onda i samo onda, ako je formula $A\Rightarrow(B\Rightarrow(\ldots(M\Rightarrow S)\ldots))$ identički istinita.

19. NEKE ALTERNATIVNE AKSIOMATIZACIJE LOGIKE SUDOVA

19.1. U literaturi postoji čitav niz sistema aksioma za logiku sudova. Oni se od našeg sistema (usp. **7.**) (a i međusobno) razlikuju poglavito u aksiomima implikacije i negacije. Dakako, ako se pojedinim sistemom formalizira logika sudova koja ne sadrži sve one simbole kao naša, otpast će neke grupe aksioma. Npr. konstante se često ne uključuju u simbole logike sudova pa u takvom slučaju nema ni aksioma konstanata. Slično, ako se $\Leftrightarrow$ ne uključi u operatore, ne će ni sistem aksioma za takvu logiku sudova sadržavati aksiome ekvivalencije. (Ako se u takvom sistemu kasnije uvodi znak $\Leftrightarrow$ onda je to samo pokrata u pisanju formula, dakle metamatematički simbol a ne simbol logike sudova). Slično vrijedi i općenito za sisteme koji ne sadrže sve simbole kao naš. Međutim, gotovo uvijek prihvaćaju se kod izgradnje logike sudova kao operatori neke funkcije koje čine sistem izvodnica (usp. II **8.2.**) algebre sudova, tj. operatori obuhvaćaju (kao pravi ili nepravi podskup) neku *bazu* algebre sudova.

Svi sistemi aksioma koje ćemo navesti ekvivalentni su s našim (i međusobno) u ovom smislu: *Ako se pomoću simbola koji ulaze u dva od danih sistema može formirati neka formula, onda je ta formula teorem u jednom sistemu onda i samo onda ako je teorem i u drugom.* Pritom ćemo za izvođenje teorema uvijek (osim ako je izričito istaknuto drugačije) prihvatiti samo *modus ponens* (usp. **8.2. D 6.** i **D 6a.**). Doduše, u literaturi je uobičajenija drugačija konvencija izvođenja teorema po kojoj kao ishodne ne prihvaćamo sheme aksioma već samo *individualne* aksiome (tada dakle formule koje definiraju aksiome ne mogu sadržavati *oznake* za *formule* već samo simbole logike sudova). U takvim formalizacijama definiraju se kao teoremi ne samo aksiomi i formule koje iz aksioma i već izvedenih teoreme izlaze uz modus ponens, nego i formule koje iz aksioma i već dokazanih teorema izlaze zamjenom *varijabla* (ne oznaka za formule kao kod nas!) formulama. Uz našu konvenciju (koju je prvi upotrebio von Neumann) supstitucija je ograničena na sheme aksioma dok u pojedinačnim teoremima nije dopuštena kao izravno definicijom dano pravilo za izvođenje teorema. Ipak, lako se vidi da obje konvencije (ukoliko se u drugoj *individualni* aksiomi *interpretiraju* kao sheme) vode na isti rezultat — naime, ako je neka formula teorem uz jednu konvenciju izvođenja teorema bit će to ona i uz drugu i obrnuto. Međutim, sama tehnika izvođenja po von Neumannovoj konvenciji prikladnija je u toliko što je formulacija pravila dedukcije u njoj jednostavnija.

Sve sisteme aksioma koje ćemo navesti notirat ćemo našim oznakama za operatore (tj. $\Rightarrow$ za implikaciju, & za konjunkciju itd.). Naziv pojedinog sistema odabrat ćemo redovno prema autoru koji ga je upotrebio u nekom novijem djelu, a ne onom koji ga je prvi postavio.

19.2. *Hilbert-Bernaysov sistem aksioma za* $\Rightarrow \& \vee \Leftrightarrow \neg$*-logiku sudova bez konstanata*

Grupa I Aksiomi implikacije

1° i 3° kao kod nas

$2°\quad (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B).$

Grupa II, III i IV kao kod nas.

Grupa V Aksiomi negacije

$1°\quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

$2°\quad A \Rightarrow \neg\neg A$

$3°\quad \neg\neg A \Rightarrow A.$

19.2.1. Pokažimo kojim putem se uviđa da je ovaj sistem ekvivalentan s našim (u **19.1.** navedenom smislu).

Lako se provjerava da su svi aksiomi Hilbert-Bernaysova sistema, interpretirani kao formule algebre sudova, identički istinite formule. Iz prethodnog poglavlja **18.** odavle zaključujemo da su aksiomi Hilbert-Bernaysa teoremi našeg sistema. No onda i teoremi Hilbert-Bernaysa moraju biti teoremi i našeg sistema, tj. skup teorema logike sudova kako je definiran Hilbert-Bernaysovim sistemom aksioma sadržan je u skupu teorema definiranom našim sistemom aksioma logike sudova. Treba još dokazati da vrijedi i obrnuto (ako se u našem sistemu ograničimo na grupe aksioma I do V koji ne sadrže konstante).

19.2.2. Iz izvođenja u poglavlju **9.** vidimo da je tamo naš aksiom 2° upotrebljen jedino za izvod (našeg) teorema F_1 iz **9.1,** a to je upravo Hilbert-Bernaysov aksiom implikacije 2°. Odatle izlazi da su naši teoremi **9.1.**(16) i **9.11.**(36) također teoremi i u sistemu Hilbert-Bernaysa. (Dakako da tamo A, B ne mogu sadržavati konstante jer to nisu simboli u sistemu Hilbert-Bernaysa. Analogno vrijedi i kasnije.) No pored naših aksioma 1° i 3° (koji su aksiomi i kod Hilbert-Bernaysa) jedino su ta dva teorema upotrebljena kod dokaza teorema dedukcije u **13.** Znači, teorem dedukcije vrijedi i u sistemu Hilbert-Bernaysa.

Uz upotrebu teorema dedukcije u Hilbert-Bernaysovu sistemu izvest ćemo u njemu kao teoreme naše sheme aksioma negacije i našu drugu shemu aksioma implikacije (koje su jedine u kojima se naš sistem razlikuje od Hilbert-Bernaysova — osim što pored toga tamo nema aksioma o konstantama).

α) Neka je $\Delta = A$. Tada je

1.	A	Element od Δ
2.	$A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$	Aks. impl. $1°(\neg B \mid B)$
3.	$\neg B \Rightarrow A$	Iz 1, 2.
4.	$(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$	Aks. neg. $1°(\neg B \mid A, A \mid B)$
5.	$\neg A \Rightarrow \neg\neg B$	Iz 3, 4.
6.	$\neg\neg B \Rightarrow B$	Aks. neg. $3°(B \mid A)$
7.	$(\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow ((\neg\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B))$	Aks. impl. $3°(\neg A \mid A, \neg\neg B \mid B, B \mid C)$
8.	$(\neg\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$	Iz 5, 7.
9.	$\neg A \Rightarrow B$	Iz 6, 8.

Dakle je $A \vdash \neg A \Rightarrow B$ pa je po teoremu dedukcije $\vdash A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$; naš aksiom 13° je dakle teorem u sistemu Hilbert-Bernaysa.

β) Pokažimo najprije da u Hilbert-Bernaysovu sistemu vrijedi

$$\vdash B \mathbin{\&} \neg B \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B).$$

Zaista, zbog α) je tamo naš aksiom 13° $(B|A, \neg(B\Rightarrow B)|B)$ teorem, pa za $\Delta = B \& \neg B$ dobivamo

1.	....	Demonstracija prema α)
⋮		
k.	$B\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg(B\Rightarrow B))$	
(k+1)	$B \& \neg B$	Element od Δ
(k+2)	$B \& \neg B \Rightarrow B$	Aks. konjunkcije
(k+3)	$B \& \neg B \Rightarrow \neg B$	Aks. konjunkcije
(k+4)	B	Iz (k+1), (k+2).
(k+5)	$\neg B$	Iz (k+1), (k+3).
(k+6)	$\neg B \Rightarrow \neg(B\Rightarrow B)$	Iz (k+4), k.
(k+7)	$\neg(B\Rightarrow B)$	Iz (k+5), (k+6).

Znači $B \& \neg B \vdash \neg(B\Rightarrow B)$ pa je po teoremu dedukcije

$$\vdash B \& \neg B \Rightarrow \neg(B\Rightarrow B).$$

Odatle možemo konstruirati ovu dedukciju iz $\Delta = A\Rightarrow B, A\Rightarrow\neg B$:

1.	....	Demonstracija prema β)
⋮		
j.	$B \& \neg B \Rightarrow \neg(B\Rightarrow B)$	
(j+1)	$A\Rightarrow B$	Element od Δ
(j+2)	$A\Rightarrow\neg B$	Element od Δ
(j+3)	$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow$ $(A\Rightarrow B\&\neg B))$	Aks. konjunkcije (kao naš aks. 6° $(\neg B\|C)$)
(j+4)	$(A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(A\Rightarrow B\&\neg B)$	Iz (j+1), (j+3).
(j+5)	$A\Rightarrow B\&\neg B$	Iz (j+2), (j+4).
(j+6)	$(A\Rightarrow B\&\neg B)\Rightarrow$ $(\neg(B\&\neg B)\Rightarrow\neg A)$	Aks. negacije 1° $(B\&\neg B\|B)$
(j+7)	$\neg(B\&\neg B)\Rightarrow\neg A$	Iz (j+5), (j+6).
(j+8)	$(B\&\neg B\Rightarrow\neg(B\Rightarrow B))\Rightarrow$ $(\neg\neg(B\Rightarrow B)\Rightarrow\neg(B\&\neg B))$	Aks. negacije 1° $(B\&\neg B\|A, \neg(B\Rightarrow B)\|B)$
(j+9)	$\neg\neg(B\Rightarrow B)\Rightarrow\neg(B\&\neg B)$	Iz j, (j+8).
(j+10)	$B\Rightarrow(B\Rightarrow B)$	Aks. impl. 1° $(B\|A)$

(j+11)	$(B\Rightarrow(B\Rightarrow B))\Rightarrow(B\Rightarrow B)$	Aks. impl. 2° $(B\|A)$
(j+12)	$B\Rightarrow B$	Iz (j+10), (j+11).
(j+13)	$(B\Rightarrow B)\Rightarrow\neg\neg(B\Rightarrow B)$	Aks. negacije 2° $(B\Rightarrow B\|A)$
(j+14)	$\neg\neg(B\Rightarrow B)$	Iz (j+12), (j+13).
(j+15)	$\neg(B\&\neg B)$	Iz (j+14), (j+9).
(j+16)	$\neg A$	Iz (j+15), (j+7).

Znači $A\Rightarrow B,\ A\Rightarrow\neg B\vdash\neg A$ pa dvostrukom primjenom teorema dedukcije izlazi $\vdash(A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow\neg A)$; naš aksiom 14° je dakle također teorem u sistemu Hilbert-Bernaysa.

γ) Neka je $\Delta=A\Rightarrow B,\ \neg A\Rightarrow B$. Tada u sistemu Hilbert-Bernaysa možemo konstruirati ovu dedukciju:

1.	$A\Rightarrow B$	Element od Δ
2.	$\neg A\Rightarrow B$	Element od Δ
3.	$(A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg A)$	Aks. negacije 1°
4.	$(\neg A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg\neg A)$	Aks. negacije 1° $(\neg A\|A)$
5.	$\neg B\Rightarrow\neg A$	Iz 1, 3.
6.	$\neg B\Rightarrow\neg\neg A$	Iz 2, 4.
7.	....	Demonstracija prema β) uz $\neg B\|A,\ \neg A\|B$
:		
k.	$(\neg B\Rightarrow\neg A)\Rightarrow((\neg B\Rightarrow\neg\neg A)\Rightarrow\neg\neg B)$	
(k+1)	$(\neg B\Rightarrow\neg\neg A)\Rightarrow\neg\neg B$	Iz 5, k.
(k+2)	$\neg\neg B$	Iz 6, (k+1)
(k+3)	$\neg\neg B\Rightarrow B$	Aks. neg. 3° $(B\|A)$
(k+4)	B	Iz (k+2), (k+3).

Znači $A\Rightarrow B,\ \neg A\Rightarrow B\vdash B$ pa dvostrukom primjenom teorema dedukcije izlazi $\vdash(A\Rightarrow B)\Rightarrow((\neg A\Rightarrow B)\Rightarrow B)$; i naš aksiom 15° je dakle također teorem u sistemu Hilbert-Bernaysa.

δ) Neka je $\Delta=(A\Rightarrow B)\Rightarrow A$. Iz razloga kao u **19.2.2.** u Hilbert-Bernaysovu sistemu vrijedi zbog **9.5.** (24) $\vdash(A\Rightarrow(B\Rightarrow C))\Rightarrow(B\Rightarrow(A\Rightarrow C))$, pa tamo možemo konstruirati dedukciju

1.	....	Demonstracija **9.5.** (24) $(\neg A\|B,\ B\|C)$
:		
k.	$(A\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B))\Rightarrow(\neg A\Rightarrow(A\Rightarrow B))$	

(k + 1)	....	Demonstracija prema α)
⋮		
l.	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$	
(l + 1)	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	Iz k, l.
(l + 2)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$	Element od Δ
(l + 3)	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg (A \Rightarrow B))$	Aks. neg. $1^\circ (A \Rightarrow B \mid A, A \mid B)$
(l + 4)	$\neg A \Rightarrow \neg (A \Rightarrow B)$	Iz (l + 2), (l + 3).
(l + 5)	....	Demonstracija prema β) uz $\neg A \mid A, A \Rightarrow B \mid B$
⋮		
m.	$(\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg\neg A)$	
(m + 1)	$(\neg A \Rightarrow \neg (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg\neg A$	Iz (l + 1), m.
(m + 2)	$\neg\neg A$	Iz (l + 4), (m + 1).
(m + 3)	$\neg\neg A \Rightarrow A$	Aks. negacije 3°
(m + 4)	A	Iz (m + 2), (m + 3).

znači $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vdash A$ pa primjenom teorema dedukcije izlazi

$$\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A;$$

i naš aksiom implikacije 2 je dakle teorem u sistemu Hilbert-Bernaysa.

Iz α) do δ) izlazi da su naši aksiomi (koji ne sadrže konstante) grupa I do V teoremi u sistemu Hilbert-Bernaysa. To pak povlači da su formule Hilbert-Bernaysova sistema koje se u našem sistemu mogu izvesti kao teoremi upotrebom aksioma (bez konstanata) grupa I do V, ujedno i teoremi u sistemu Hilbert-Bernaysa. Ovo samo po sebi još ne povlači da su u Hilbert-Bernaysovu sistemu teoremi sve one formule koje se mogu formirati u tom sistemu (tj. ne sadrže konstante) a teoremi su u našem sistemu. Moglo bi se naime u principu možda dogoditi da se za dokaz nekog takvog teorema mora primijeniti neki od naših aksioma konstanata ili neki aksiom iz grupa I do V koji sadrži konstante. Međutim, u stvari takav slučaj ipak ne nastupa. U dokaz ove činjenice ovdje ne ulazimo, već ćemo samo spomenuti kojim putem se takav dokaz može provesti. Za to postoji više mogućnosti: Jedna je da se za Hilbert-Bernaysov sistem direktno pokaže da je u njemu izvediva kao teorem svaka identički istinita formula u koju ne ulaze konstante. Druga je, da se najprije razmotri logika sudova koja izlazi iz našeg sistema ako ne prihvatimo konstante kao simbole logike sudova i odbacimo aksiome VI grupe. Ako tada u bilo kojem teoremu našeg prvotnog (nerestringiranog) sistema konstante ⊤, ⊥ (ako tamo uopće dolaze) zamijenimo respektivno npr. formulama $a \vee \neg a$, $a \& \neg a$ bit će, kao što je lako pokazati, dobivena formula teorem u restringiranom sistemu. (Uoči da su sheme formula koje izlaze iz naše VI grupe npr. zamjenom $B \vee \neg B \mid \top$, $B \& \neg B \mid \bot$ teoremi restringiranog sistema!) Odatle izlazi da je svaki teorem našeg sistema koji kao formula ne sadrži konstante ujedno teorem našeg restringiranog sistema, pa je skup teorema Hilbert-Bernaysova sistema identičan s onim našeg restringiranog.

19.3. *Asser-ov sistem za $\Rightarrow$ & $\vee \Leftrightarrow \neg$-logiku sudova bez konstanata*

Grupe I do IV ovdje su iste kao kod nas a grupa V ista je kao kod Hilbert-Bernaysa.

Svi aksiomi — dakle i teoremi — Asserova sistema su dakle (usp. **19.2.1.**) teoremi našeg sistema. Obrnuto, ako naš sistem restringiramo na $\Rightarrow$ & $\vee \Leftrightarrow \neg$ -logiku sudova bez konstanata bit će svi naši teoremi ujedno teoremi Asserova sistema. (Da se ovo uvidi dovoljno je uočiti da u Asserovu sistemu vrijedi teorem dedukcije pa se naši aksiomi negacije mogu u njemu izvesti kao teoremi isto onako kao što je to u **19.2.2.** bilo učinjeno za Hilbert-Bernaysov sistem, s time što je Hilbert-Bernaysov aksiom implikacije 2° u Asserovu sistemu teorem kao i kod nas.)

19.4. *Novikovljev sistem za $\Rightarrow$ & $\vee \neg$-logiku sudova bez konstanata*

Grupa I Aksiomi implikacije

1° kao kod nas

2° $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Grupe II i III kao kod nas

Aksiomi negacije kao kod Hilbert-Bernaysa i Assera.

I za ovaj sistem može se pokazati da je ekvivalentan s našim restringiranim na $\Rightarrow$ & $\vee \neg$-logiku sudova bez konstanata u što međutim ne ulazimo.

19.5. *Kleeneev sistem za $\Rightarrow$ & $\vee \neg$-logiku sudova bez konstanata*

Grupa I Aksiomi implikacije

1° kao kod nas

2° $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Grupa II Aksiomi konjunkcije

1° i 2° kao naši aksiomi 4° i 5°

3° $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \& B)$

Grupa III kao kod nas

Aksiomi negacije

1° kao naš 14°

2° $\neg\neg A \Rightarrow A$.

I ovaj sistem ekvivalentan je s našim restringiranim na $\Rightarrow$ & $\vee \neg$-logiku sudova bez konstanata.

19.6. *Rosserov sistem za $\Rightarrow$ & $\neg$-logiku sudova bez konstanata*

Aksiomi su ovi

1° $A \Rightarrow A \& A$

2° $A \& B \Rightarrow A$

3° $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg(B \& C) \Rightarrow \neg(C \& A))$.

Sistem je ekvivalentan s odgovarajuće restringiranim našim.

19.7. *Frege-Łukasiewiczev sistem za $\Rightarrow\neg$-logiku sudova bez konstanata*

Grupa I kao kod Novikova

Aksiom negacije: $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

Sistem je ekvivalentan s odgovarajuće restringiranim našim.

19.8. *Whitehead-Russellov sistem za $\vee\neg$-logiku sudova bez konstanata*

Uz $\Rightarrow$ kao metamatematički simbol sa značenjem da je $A \Rightarrow B$ pokrata za $\neg A \vee B$, aksiomi su ovi

1° $A \vee A \Rightarrow A$

2° $A \Rightarrow A \vee B$

3° $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))$.

Uz odgovarajuću interpretaciju za modus ponens (gdje je sada $\Rightarrow$ pokrata) sistem je ekvivalentan s našim, restringiranim na $\vee\neg$-logiku sudova bez konstanata.

19.9. *Waysbergov sistem za $\Rightarrow$-logiku sudova s konstantom $\perp$.*

Aksiomi su ovi:

Grupa I kao kod Frege-Łukasiewicza

$\perp$*-aksiom:* $((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$.

19.10. *Nicodov sistem za $\uparrow$-logiku sudova bez konstanata*

Aksiom:

$$(A \uparrow (B \uparrow C)) \uparrow ((D \uparrow (D \uparrow D)) \uparrow ((E \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow E) \uparrow (A \uparrow E)))).$$

Za izvođenje teorema umjesto pravila modus ponens dolazi ovo: Ako su A i $A \uparrow (B \uparrow C)$ teoremi, onda je i C teorem.

GLAVA V

NEKA ISPITIVANJA AKSIOMATIKE LOGIKE SUDOVA

1. NEKA OPĆA SVOJSTVA SISTEMA AKSIOMA LOGIKE SUDOVA UZ MODUS PONENS KAO PRAVILO IZVOĐENJA

1.1. U poglavljima ove Glave ispitivat ćemo općenito neka svojstva sistema aksioma $\mathcal{S}$ logike sudova poput našeg. U tim poglavljima bit će $\mathcal{S}$ općenito *kakav god* skup individualnih formula logike sudova koje su (po definiciji) prihvaćene kao aksiomi. Takav sistem aksioma $\mathcal{S}$ može biti zadan npr. direktno listom elemenata koje sadrži, ili (kao kod nas u IV **7.**) shemama aksioma, ili kombinirano — neki individualni aksiomi direktno, a neki skupovi takvih aksioma shemama.

Za neku formulu F logike sudova reći ćemo da je izvediva iz $\mathcal{S}$ ili da je teorem *na osnovu* $\mathcal{S}$ i pisati $\vdash F$ (ako nema opasnosti zabune na koji $\mathcal{S}$ se znak $\vdash$ odnosi), ako se F može dobiti iz $\mathcal{S}$ preme IV **8.2. D 6.** s time da umjesto našeg sistema aksioma iz IV **7.** kao sistem aksioma prihvatimo $\mathcal{S}$. Dakako da onda općenito u tim poglavljima „logika sudova" neće označavati naš sistem već onaj određen sa $\mathcal{S}$. (Treba također uočiti da za ovakav općenitiji slučaj zadavanja aksioma gdje mogu direktno biti zadani i neki individualni aksiomi a ne samo sheme aksioma, neće vrijediti sve ono što je vrijedilo za izvođenje teorema iz našeg sistema aksioma koji je sadržavao samo sheme aksioma. Očito je naprimjer, da u punoj općenitosti sada neće biti primjenjiva razmatranja iz IV **8.4.**)

1.2. Ako je skup $\mathcal{S}$ neki sistem aksioma logike sudova, označavat ćemo skup svih onih formula koje su izvedive iz $\mathcal{S}$ sa $\overline{\mathcal{S}}$.

Za preslikavanje $\mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$ vrijede ova svojstva:

1° Atomarnost: Ako $\mathcal{S}$ sadrži samo jedan element (tj. samo jedan individualni aksiom, a ne možda samo jednu shemu aksioma, jer bi ta pridonijela beskonačno mnogo elemenata od $\mathcal{S}$), onda je $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

2° Porast: $\mathcal{S} \subset \overline{\mathcal{S}}$.

3° Monotonija: Ako je $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$, onda je $\overline{\mathcal{S}}_1 \subset \overline{\mathcal{S}}_2$.

4° Zatvorenost: $\overline{\overline{\mathcal{S}}} = \overline{\mathcal{S}}$.

Da vrijede prva tri svojstva uviđa se neposredno. Posljednje, četvrto, vrijedi stoga, što je svaka formula koja se može izvesti iz iz $\mathcal{S}$ izvedivih formula i sama izvediva iz $\mathcal{S}$.

1.3. Vrijedi ovaj gotovo trivijalni, ali zbog posljedica važni teorem:

Ako neka formula F nije izvediva iz nijednog konačnog podskupa sistema aksioma $\mathcal{S}$, ona nije izvediva ni iz $\mathcal{S}$.

Ili, po kontrapoziciji:

Ako je neka formula izvediva iz $\mathcal{S}$, ona je izvediva već i iz nekog konačnog podskupa od $\mathcal{S}$.

Ispravnost ovih tvrdnji izlazi odatle što uopće demonstracija bilo koje individualne formule F može upotrebljavati samo konačno mnogo individualnih aksioma.

2. NEKONTRADIKTORNOST SISTEMA AKSIOMA LOGIKE SUDOVA

2.1. U ovom poglavlju dat ćemo nekoliko definicija nekontradiktornosti (konsistencije) sistema aksioma logike sudova poput našeg i za svaku od njih ispitati naš sistem na odgovarajuće svojstvo.

2.2. *Definicija* 1. *Za sistem $\mathcal{S}$ aksioma logike sudova reći ćemo da je nekontradiktoran ili konsistentan u smislu egzistencije modela, ako postoji struktura $\mathcal{M} = (M; \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg)$ (model od $\mathcal{S}$), dakle skup M u kojem su definirane binarne operacije $\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ i unitarna operacija $\neg$ tako da*

1° $M \supset \{\top, \bot\}$,

2° *Ako u bilo kojem teoremu F izvedivom iz $\mathcal{S}$ na mjesto varijabla sudova na bilo koji način supstituiramo elemente od M pa izračunamo vrijednost dobivenog izraza u M, ona je uvijek jednaka $\top$.*

Pokazat ćemo da je naš sistem nekontradiktoran u smislu **D 1.**

Neka je $M = \{\top, \bot\}$ a operacije $\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ u M neka su definirane kao što se definiraju u algebri sudova. Budući da je, kao što smo ranije vidjeli, svaki teorem našeg sistema logike sudova interpretiran kao formula algebre sudova identički istinita formula, naš je sistem aksioma 1° do 17° nekontradiktoran u smislu **D 1.**

2.3. *Definicija* 2. *Za sistem aksioma $\mathcal{S}$ logike sudova reći ćemo da je nekontradiktoran ili konsistentan u klasičnom (Hilbertovu) smislu, ako ni za koju formulu F na osnovu $\mathcal{S}$ nije istodobno $\vdash F$ i $\vdash \neg F$ (tj. ako nema formule F takve, da bi i F i $\neg F$ bili teoremi sa $\mathcal{S}$ određene logike sudova).*

Iz **1.3.** izlazi da je $\mathcal{S}$ nekontradiktoran u klasičnom smislu onda (i samo onda) ako je svaki konačni podskup od $\mathcal{S}$ nekontradiktoran u klasičnom smislu.

Naš sistem je nekontradiktoran u klasičnom smislu, jer, ako je F teorem u našem sistemu logike sudova, onda je F, interpretiran kao formula algebre sudova, identički istinita formula. Tada međutim $\neg F$ nije identički istinita formula pa ne može biti $\vdash \neg F$.

2.4. *Definicija* 3. *Za sistem aksioma $\mathcal{S}$ logike sudova reći ćemo da je nekontradiktoran ili konsistentan u semantičkom smislu ako je svaka iz $\mathcal{S}$ izvediva formula (tj. svaki teorem sa $\mathcal{S}$ određene logike sudova), interpretirana kao formula algebre sudova, identički istinita formula.*

Da naš sistem ima ovo svojstvo vidjeli smo u IV **8.7.**

2.5. *Definicija* 4. *Za sistem aksioma $\mathcal{S}$ logike sudova reći ćemo da je* *nekontradiktoran ili konsistentan u sintaktičkom smislu, ako postoji bar jedna formula koja nije izvediva iz $\mathcal{S}$.*

Iz **1.3.** izlazi da je $\mathcal{S}$ sintaktički nekontradiktoran onda i samo onda, ako postoji bar jedna formula koja nije izvediva ni iz kojeg konačnog podskupa od $\mathcal{S}$.

Naš sistem ima ovo svojstvo jer npr. $\perp$ sigurno nije teorem, budući da to nije identički istinita formula.

2.6. Iz **D 2, 3, 4.** neposredno se uviđa da semantička konsistentnost uvijek povlači klasičnu a ova sintaktičku. Obrnuto međutim ne vrijedi, jer ima sistema aksioma koji su klasično konsistentni ali semantički ne, kao i sistema koji su sintaktički konsistentni ali klasično ne (dakle pogotovo ne semantički). To pokazuju ovi jednostavni primjeri:

2.6.1. Neka se $\mathcal{S}$ sastoji od samo ovog jednog aksioma: $\perp$. Tada se iz $\mathcal{S}$ ne može izvesti nikakav daljnji teorem pa je $\mathcal{S}$ klasično konsistentan. Međutim, $\mathcal{S}$ nije semantički konsistentan jer $\perp$ nije identički istinita formula.

2.6.2. Neka se $\mathcal{S}$ sastoji od samo ova dva aksioma: $\top, \neg\top$. Tada se iz $\mathcal{S}$ ne može izvesti nikakav daljnji teorem. Npr. formula $\top \& \top$ nije izvediva iz $\mathcal{S}$ pa je $\mathcal{S}$ sintaktički nekontradiktoran. No on nije klasično nekontradiktoran jer za $F \equiv \top$ vrijedi $\vdash F$, $\vdash \neg F$.

Međutim, ako $\mathcal{S}$ sadrži aksiome definirane shemom aksioma **IV 7. D 5.** 13°, tj. shemom $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ — ili ako su formule određene tom shemom teoremi od $\mathcal{S}$ — onda sintaktička nekontradiktornost od $\mathcal{S}$ *povlači* klasičnu. Ako takav sistem naime nije klasično nekontradiktoran, možemo iz $\vdash F$, $\vdash \neg F$, $\vdash A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ sa F kao „A" izvesti $\vdash B$ za svaku formulu B, pa tada $\mathcal{S}$ nije ni sintaktički nekontradiktoran.

2.7. Također se lako uviđa da semantička konsistentnost povlači konsistentnost u smislu egzistencije modela. Ako je naime sistem $\mathcal{S}$ semantički konsistentan možemo kao model od $\mathcal{S}$ uzeti strukturu $\mathcal{M}$ sa $M = \{\top, \perp\}$ u kojem su operacije $\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ definirane kao u algebri sudova. Obrnuto međutim ne vrijedi, tj. postoje sistemi aksioma koji su nekontradiktorni u smislu egzistencije modela ali ne i semantički. Npr. sistem $\mathcal{S}$ od samo jednog aksioma $\neg\top$ ima model $\mathcal{M}$ sa skupom $M = \{\top, \perp\}$ u kojem je $\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ definirano kako god a $\neg$ npr. sa $\neg\top = \neg\perp = \top$, no $\mathcal{S}$ nije semantički konsistentan sistem.

Zbog **2.6.** i **7.** možemo reći da je od svih četiri definicija konsistencije koje smo naveli semantička najoštrija (tj. zahtjev semantičke konsistencije je najjači, odnosno najteže ga je zadovoljiti).

2.8. Iz **D 1.** do **4.** lako se vidi (usp. **1.2.3**°) da vrijedi: Ako je sistem aksioma $\mathcal{Z}$ podskup sistema aksioma $\mathcal{S}$, onda konsistentnost od $\mathcal{S}$ u smislu egzistencije modela odnosno klasična odnosno semantička odnosno sintaktička povlači konsistentnost od $\mathcal{Z}$ u istom smislu.

3. POTPUNOST SISTEMA AKSIOMA LOGIKE SUDOVA

3.1. U ovom poglavlju dat ćemo nekoliko definicija potpunosti sistema aksioma logike sudova poput našeg i ispitati naš sistem na odgovarajuće svojstvo. (Neke od ovih definicija ne mogu se direktno prenijeti i na neke druge formalizirane matematičko-logičke sisteme, npr. logiku predikata. — Isto uostalom vrijedi i za **2,4.** i **5.**)

3.2. *Definicija* 5. *Za sistem aksioma* $\mathscr{S}$ *logike sudova reći ćemo da je* *p o t p u n u s m i s l u d e d u k t i v n e k a r a k t e r i z a c i j e m o d e l a, ako ima ovo svojstvo:*

Ako je F bilo koja formula koja vrijedi u svakom modelu $\mathscr{M}$ *od* $\mathscr{S}$ *(tj. ako za svaku moguću supstituciju elemenata od M na mjesto varijabla sudova od F dobiveni izraz u M poprima vrijednost* $\top$*), onda se F može izvesti iz* $\mathscr{S}$*.*

Uz ovu definiciju svaki u smislu egzistencije modela kontradiktorni (nekonsistentni) sistem aksioma $\mathscr{S}$ potpun je u smislu deduktivne karakterizacije modela (trivijalno) onda i samo onda, ako je svaka formula izvediva iz $\mathscr{S}$. (Jer, budući da u takvom slučaju nema modela od $\mathscr{S}$, svaka formula *F* trivijalno ima svojstvo da je zadovoljena u svakom modelu.)

Pokažimo da je naš sistem potpun u smislu **D 5.** $M=\{\top, \bot\}$ s operacijama &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ kao u algebri sudova daje model $\mathscr{M}$ od $\mathscr{S}$, pa ako je *F* neka formula sa svojstvom iz **D 5,** ona je identički istinita formula algebre sudova. U IV **18.2.** bilo je pokazano da se takva formula može izvesti iz našeg sistema aksioma 1° do 17° pa je taj dakle potpun u smislu deduktivne karakterizacije modela.

3.3. *Definicija* 6. *Za sistem aksioma* $\mathscr{S}$ *logike sudova reći ćemo da je* *p o t p u n u k l a s i č n o m s m i s l u, ako ima ovo svojstvo:*

Ako je F bilo koja formula koja ne sadrži nijednu varijablu sudova (dakle ako je sagrađena najviše od konstanata, operatora i zagrada) onda je iz $\mathscr{S}$ *izvediva bar jedna od formula F,* $\neg F$.

Naš sistem ima ovo svojstvo; naime, po pretpostavci o *F* vrijedit će za tu formulu, interpretiranu kao formulu algebre sudova, jedna od (semantičkih) jednakosti $F=\top$, $F=\bot$. U prvom slučaju bit će *F*, a u drugom $\neg F$ identički istinita formula, dakle po IV **18.2.** izvediva iz $\mathscr{S}$.

3.4. *Definicija* 7. *Za sistem aksioma* $\mathscr{S}$ *logike sudova reći ćemo da je* *p o t p u n u s e m a n t i č k o m s m i s l u, ako je svaka identički istinita formula algebre sudova, interpretirana kao formula logike sudova, izvediva is* $\mathscr{S}$.

Da naš sistem ima ovo svojstvo pokazali smo u IV **18.2.**

3.5. *Definicija* 8. *Za sistem aksioma* $\mathscr{S}$ *logike sudova reći ćemo da je* *p o t p u n u s i n t a k t i č k o m s m i s l u, ako ima ovo svojstvo:*

Pridoda li se aksiomima $\mathscr{S}$ *bilo koja shema formula (koja eksplicitno ne sadrži varijable) F koja nije izvediva iz* $\mathscr{S}$ *(tj. takva da bar jedna individualna formula određena sa F nije izvediva iz* $\mathscr{S}$*), onda je iz* $\mathscr{S} \cup F$ *izvediva svaka formula.*

Uz ovu definiciju svaki sintaktički kontradiktorni sistem je (trivijalno) sintaktički potpun. (Jer se u takvom slučaju od $\mathscr{S}$ definicijom **8.** ništa ne zahtijeva, budući da tada nema formule *F* koja ne bi bila izvediva iz $\mathscr{S}$.)

Pokažimo da naš sistem ima i svojstvo sintaktičke potpunosti. Neka je dakle F neka shema formula koja nije teorem u našem sistemu logike sudova. Onda formula F, interpretirana kao formula algebre sudova, nije identički istinita pa $F = \top$ nije semantička dakle ni sintaktička jednakost. Iz II **10.6.3.** izlazi da je tada iz aksioma u II **10.1. D 12.** 1° do 12° proširenog sa $F = \top$ izvediva svaka jednakost, dakle i jednakost $G = \top$ gdje je G bilo koja dana formula. U drugu ruku, ako F pridodamo našem sistemu $\mathcal{S}$, možemo izvesti $\top \vdash F$, $F \vdash \top$ odakle $\Leftrightarrow$-introdukcijom dobivamo teorem $\vdash F \Leftrightarrow \top$. Argumentacijom analognom onoj iz IV **18.2.** odatle možemo zaključiti da se u našem sistemu $\mathcal{S}$ proširenom novim aksiomom F može izvesti teorem $\vdash G \Leftrightarrow \top$ dakle po IV **15.9.**3° i $\vdash \top \Rightarrow G$ i odatle po IV **15.24.**3° $\Rightarrow$-eliminacijom $\vdash G$, što je trebalo dokazati.

3.6. Iz **D 6.** do **8.** lako možemo uvidjeti da je semantički potpun sistem aksioma $\mathcal{S}$ ujedno potpun u smislu **D 6.** i **8.** U tu svrhu dovoljno je pratiti gornje dokaze u **3.3.** i **3.5.** za naš sistem pa ćemo vidjeti da ih sve možemo provesti ako za $\mathcal{S}$ samo pretpostavimo da je semantički potpun. (Za **3.3.** ovo je trivijalno, a za **3.5.** izlazi odatle što svaki semantički potpun sistem aksioma logike sudova sadrži kao teoreme sve teoreme našeg sistema — uz eventualno još neke daljnje koji to kod nas nisu.)

3.7. Svaki sintaktički kontradiktorni sistem trivijalno je potpun u smislu karakterizacije modela, u klasičnom i u semantičkom smislu (a već je u **3.5.** bilo rečeno zašto je takav sistem trivijalno potpun i u sintaktičkom smislu).

3.8. Iz **D 6.** do **8.** lako se vidi (usp. **1.2.**3°) da vrijedi: Ako je sistem aksioma $\mathcal{S}$ podskup sistema aksioma $\mathcal{Z}$, onda potpunost od $\mathcal{S}$ u klasičnom odnosno semantičkom odnosno sintaktičkom smislu povlači potpunost od $\mathcal{Z}$ u istom smislu.

4. NEKATEGORIČNOST SISTEMA AKSIOMA LOGIKE SUDOVA

4.1. Općenito govoreći, za neki sistem aksioma neke matematičke strukture $\mathcal{G}$ kažemo da je *kategoričan* ako je njime struktura $\mathcal{G}$ određena jednoznačno do izomorfizma. tj. ako za bilo koji par modela $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ koji zadovoljavaju dani sistem aksioma postoji uzajamno jednoznačno preslikavanje φ skupa elemenata od $\mathcal{G}_1$ na skup elemenata od $\mathcal{G}_2$ koje čuva sve operacije i relacije strukture. (Tačnije u definiciju kategoričnog sistema aksioma ovdje nećemo ulaziti.)

4.2. Lako se vidi da našim sistemom aksioma logike sudova modeli koji taj sistem zadovoljavaju nisu određeni jednoznačno do izomorfizma. Već u **2.2.** vidjeli smo da $M = \{\top, \bot\}$ uz operacije &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ definirane kao u algebri sudova daje model $\mathcal{M}$ koji zadovoljava naš sistem u smislu da svaki aksiom i teorem poprima u M vrijednost $\top$ kako god za varijable u njemu supstituirali elemente od M.

Konstruirat ćemo sada još jedan model $\mathcal{M}'$ našeg sistema koji sigurno nije izomorfan sa $\mathcal{M}$ jer njegov skup elemenata M' sadrži drugačiji broj elemenata nego li skup elemenata M modela $\mathcal{M}$.

Neka je $M' = \{\top, \bot, \nabla, \Delta\}$ a operacije &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ neka su dane tablicama

$x \& y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
∇	∇	$\bot$	∇	$\bot$
Δ	Δ	$\bot$	$\bot$	Δ

$x \vee y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
∇	$\top$	∇	∇	$\top$
Δ	$\top$	Δ	$\top$	Δ

$x \Rightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
∇	$\top$	Δ	$\top$	Δ
Δ	$\top$	∇	∇	$\top$

$x \Leftrightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\bot$	$\bot$	$\top$	Δ	∇
∇	∇	Δ	$\top$	$\bot$
Δ	Δ	∇	$\bot$	$\top$

$\neg x$

x	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\neg x$	$\bot$	$\top$	Δ	∇

Lako se provjerava da M' daje model $\mathcal{M}'$ našeg sistema aksioma logike sudova u smislu da svaki aksiom poprima u M' vrijednost $\top$ kako god za varijable u njemu supstituirali elemente od M' i da se ovo prenosi i na teoreme koji se iz aksioma i već dokazanih teorema mogu izvoditi uz modus ponens (ovo posljednje stoga, što u prvom retku gore dane tablice za $\Rightarrow$ znak $\top$ dolazi samo u prvom stupcu).

4.3. I svi alternativni sistemi logike sudova iz IV **19.** su nekategorični. Za njih neizomorfni par modela $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ dobivamo iz para $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ iz **4.2**, ako se samo kod operacija definiranih u M, M' ograničimo na one koje ulaze u odgovarajuću logiku sudova.

5. NEZAVISNOST MEĐU FORMULAMA LOGIKE SUDOVA

5.1. *Definicija* 9. *Za individualnu formulu F logike sudova reći ćemo da je* n e z a v i s n a u s m i s l u m o d e l a *od sistema aksioma* $\mathcal{S}$, *ako postoji model* $\mathcal{M}$ *od* $\mathcal{S}$ *(usp.* **2.2.**) *u kojem ne vrijedi F, tj. takav model da je za bar jednu supstituciju elemenata od M na mjesto varijabla sudova od F pripadna vrijednost od F u M različita od* $\top$.

5.2. *Definicija* 10. *Za individualnu formulu F logike sudova reći ćemo da je* n e z a v i s n a u k l a s i č n o m s m i s l u *od sistema aksioma* $\mathcal{S}$, *ako su oba sistema aksioma* $\mathcal{S} \cup \{F\}$, $\mathcal{S} \cup \{\neg F\}$ *klasično nekontradiktorni.*

5.3. *Definicija* 11. *Za individualnu formulu F logike sudova reći ćemo da je* s i n t a k t i č k i n e z a v i s n a *od sistema aksioma* $\mathcal{S}$, *ako se ona ne može izvesti iz* $\mathcal{S}$.

5.4. *Definicija* 12. *Za shemu formula F logike sudova reći ćemo da je* n e z a v i s n a u s m i s l u m o d e l a, o d n o s n o k l a s i č n o, o d n o s n o s i n t a k t i č k i *od sistema aksioma* $\mathcal{S}$, *ako među formulama definiranim sa F ima bar jedna koja je nezavisna (u istom smislu) od* $\mathcal{S}$.

(Ako je sistem aksioma $\mathcal{S}$ sintaktički potpun, onda nijedna shema formula F koja eksplicitno ne sadrži varijable nema svojstvo da su $\mathcal{S} \cup F$ i $\mathcal{S} \cup \neg F$ klasično nekontradiktorni: Naime, ako je takva shema F teorem od $\mathcal{S}$, bit će sistem $\mathcal{S} \cup \neg F$ klasično kontradiktoran, a ako F nije teorem od $\mathcal{S}$ bit će sistem $\mathcal{S} \cup F$ sintaktički dakle pogotovo klasično kontradiktoran.)

U sistemu aksioma $\mathcal{S}$ logike sudova koji je (poput našeg) zadan skupom Σ shema aksioma u koje eksplicitno ne ulaze varijable sudova (nego samo — najviše — konstante, operatori, oznake za formule i zagrade) bit će (zbog napomene u IV **8.3.**) dana shema formula F sintaktički nezavisna od $\mathcal{S}$ onda i samo onda ako F nije shema teorema u sistemu određenom sa Σ.

Međutim, u istom sistemu aksioma $\mathcal{S}$ shema F može biti u klasičnom smislu nezavisna od $\mathcal{S}$, pa da nisu oba sistema aksioma definirana skupovima shema aksioma $\Sigma \cup \{F\}$, $\Sigma \cup \{\neg F\}$ klasično nekontradiktorni. Neka se npr. Σ sastoji od samo jedne sheme aksioma $A \Rightarrow A$, a shema F neka je dana sa $F = B$ (B je oznaka kojegod formule). Tada je F klasično nezavisno od Σ, jer su npr. oba sistema aksioma $\mathcal{S} \cup \{\top\}$, $\mathcal{S} \cup \{\neg \top\}$ klasično nekontradiktorni (u prvom su, kao što se lako uviđa, izvedive kao teoremi samo formule $\top$ i one oblika $A \Rightarrow A$, a u drugom samo $\neg \top$ i one oblika $A \Rightarrow A$). Međutim već shema F sama za sebe, dakle pogotovo $\mathcal{S} \cup F$ čine sistem aksioma koji je klasično kontradiktoran, jer je npr. već $\top, \neg \top \in F$.

5.5. *Za sistem aksioma* $\mathcal{S}$ *logike sudova zadan (poput našeg) skupom* Σ *shema aksioma u koje eksplicitno ne ulaze varijable sudova reći ćemo da je* n e z a v i s a n u s m i s l u m o d e l a o d n o s n o k l a s i č n o o d n o s n o s i n t a k-

***tički**, ako za svaku shemu aksioma A od Σ vrijedi da je shema A nezavisna (u istom smislu) od sistema aksioma određenog skupom $\Sigma \setminus \{A\}$ shema aksioma.*

Očito, ako je takav sistem nezavisan, onda je i svakim podskupom od Σ određeni sistem aksioma nezavisan (u istom smislu).

5.6. Ako je formula (individualna ili shema) F nezavisna u smislu modela odnosno klasično odnosno sintaktički od sistema aksioma $\mathcal{S}$, ona je (pogotovo) (usp. **1.2.3°**) u istom smislu nezavisna i od svakog sistema aksioma $\mathcal{Z}$ koji je podskup od $\mathcal{S}$.

5.7. Ako je formula (individualna ili shema) F nezavisna u smislu modela od sistema aksioma $\mathcal{S}$, ona je (pogotovo) sintaktički nezavisna od $\mathcal{S}$. (Jer da je sintaktički zavisna, ne bi mogla biti nezavisna u smislu modela.)

Ako je formula (individualna ili shema) F klasično nezavisna od sistema aksioma $\mathcal{S}$, ona je i sintaktički nezavisna. (Jer da je sintaktički zavisna, bila bi F—odnosno svaka sa F određena individualna formula F_i—izvediva iz $\mathcal{S}$, pa bi iz $\mathcal{S}\cup\{\neg F\}$ — odnosno $\mathcal{S}\cup\{\neg F_i\}$ — bilo izvedivo F i $\neg F$ — odnosno F_i i $\neg F_i$ — i sistem $\mathcal{S}\cup\{\neg F\}$ — odnosno $\mathcal{S}\cup\{\neg F_i\}$ — bio bi klasično kontradiktoran, dakle F — odnosno F_i — ne bi bila formula klasično nezavisna od $\mathcal{S}$.)

Odatle također izlazi da će svaki sistem aksioma $\mathcal{S}$ logike sudova zadan (poput našeg) shemama aksioma u koje eksplicitno ne ulaze varijable sudova biti sintaktički nezavisan čim je nezavisan bilo u smislu modela bilo klasično.

6. NEKE NEZAVISNOSTI U LOGICI SUDOVA

6.1. Za nezavisnost nekog shemama aksioma zadanog sistema aksioma $\mathcal{S}$ (u smislu **5.5.**) moglo bi se reći da je općenito više od estetske i praktičke vrijednosti nego li od principijelnog značenja. Za naš sistem nećemo je ispitivati, no za ilustraciju takvih ispitivanja pokazat ćemo kasnije da su neki od alternativnih sistema iz IV **19.** sintaktički nezavisni.

Često je interesantnije pitanje nezavisnosti nekog danog *teorema* (individualnog ili sheme) logike sudova (određene nekim sistemom aksioma $\mathcal{S}$ poput našeg) od *određenog podskupa* od $\mathcal{S}$, pa ćemo dalje u ovom poglavlju razmotriti nekoliko takvih primjera.

6.2. Označimo sa $\mathcal{Z}$ sistem aksioma koji preostaje ako u našem sistemu aksioma izostavimo shemu 13°.

Neka je $M=\{\top, \bot\}$ i neka su u M definirane operacije &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ kao u algebri sudova, a operacija $\neg$ neka je u M definirana sa $\neg\top=\neg\bot=\top$. Lako se provjerava da je time određen model $\mathcal{M}$ od $\mathcal{Z}$ (usp. **2.2.**), jer svaki aksiom A od $\mathcal{Z}$ vrijedi u $\mathcal{M}$ (tj. ako se za varijable od A kako god supstituiraju elementi od M i izračuna vrijednost dobivenog izraza u M, ona je uvijek jednaka $\top$) i jer svaka primjena pravila modus ponens na formule koje vrijede u $\mathcal{M}$ daje opet neku formulu koja vrijedi u $\mathcal{M}$ (usp. II 3.1°).

Neka su A i B takve formule logike sudova, da za neku supstituciju elemenata od M za varijable sudova iz A i B izraz dobiven iz A u M poprima vrijednost $\top$ a izraz dobiven iz B u M poprima vrijednost $\perp$. (Takvih parova formula dakako ima; npr. $A\equiv\top$, $B\equiv\perp$ ili $A\equiv a$, $B\equiv b$ uz supstituciju $\top$ za a, $\perp$ za b.) Tada izraz dobiven uz tu istu supstituciju iz formule $A\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B)$ kao i iz $(\neg B\Rightarrow A)\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B)$ u M poprima vrijednost $\perp$, pa su takve formule $A\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B)$, $(\neg B\Rightarrow A)\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B)$ nezavisne od $\mathcal{Z}$ u smislu modela dakle i sintaktički.

Prema definiciji u **5.4.** su dakle i sheme formula

$$A\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B),\ (\neg B\Rightarrow A)\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B)$$

u smislu modela i sintaktički nezavisne od sistema aksioma $\mathcal{Z}$.

Također, ako je A neka individualna formula logike sudova koja, interpretirana kao formula algebre sudova, nije identički istinita, onda formula $\neg\neg A\Rightarrow A$ ne vrijedi u $\mathcal{M}$, pa je ta formula u smislu modela i sintaktički nezavisna od $\mathcal{Z}$. Dakle i shema formula $\neg\neg A\Rightarrow A$ nezavisna je od $\mathcal{Z}$ u smislu modela i sintaktički.

Nadalje, neka su A i B takve individualne formule da formula $B\Rightarrow A$, interpretirana kao formula algebre sudova, nije identički istinita. Tada formula $(\neg A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(B\Rightarrow A)$ ne vrijedi u $\mathcal{M}$, pa je i ona u smislu modela i sintaktički nezavisna od $\mathcal{Z}$ te isto vrijedi za shemu formula $(\neg A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(B\Rightarrow A)$.

U drugu ruku, sve formule definirane shemama $A\vee\neg A$, $\neg(A\&\neg A)$, $A\Rightarrow\neg\neg A$, $(A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg A)$, $(A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(B\Rightarrow\neg A)$ vrijede u $\mathcal{M}$. To pak znači da su sheme formula $A\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B)$, $\neg\neg A\Rightarrow A$, $(\neg A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(B\Rightarrow A)$, $(\neg B\Rightarrow A)\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B)$ nezavisne u smislu modela i sintaktički čak od sistema $\mathcal{W}$ koji nastaje proširenjem od $\mathcal{Z}$ aksiomima definiranim shemama $A\vee\neg A$, $\neg(A\&\neg A)$, $A\Rightarrow\neg\neg A$, $(A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg A)$ i $(A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(B\Rightarrow\neg A)$. Dapače, navedene sheme formula ostaju nezavisne u istom smislu i u sistemu dobivenom daljim proširenjem od $\mathcal{W}$ aksiomima definiranim shemom $\neg A$ koja u našem sistemu aksioma 1°—17° nije shema teorema, ali vrijedi u $\mathcal{M}$.

6.3. Označimo sa $\mathcal{Z}'$ sistem aksioma koji preostaje ako u našem sistemu aksioma izostavimo sheme aksioma 14° i 15°.

Neka je $M'=\{\top,\perp\}$ i neka su u M' definirane operacije $\&,\vee,\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ kao u algebri sudova a operacija $\neg$ neka je u M' definirana sa $\neg\top=\neg\perp=\perp$. Zaključivanjem sličnim kao u **6.2.** lako se provjerava da je time dobiven model $\mathcal{M}'$ od $\mathcal{Z}'$ i da pored toga u $\mathcal{M}'$ vrijede npr. sve formule definirane shemama $\neg\neg A\Rightarrow A$, $(A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg A)$, $(\neg A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow A)$, ali da ne vrijede neke od formula definiranih shemama

$$A\Rightarrow\neg\neg A,\ (\neg A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(B\Rightarrow A),\ (A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(B\Rightarrow\neg A),\ A\vee\neg A,\ \neg(A\&\neg A),$$

te našim shemama aksioma 14° i 15°. Znači da su sve ove posljednje sheme formula u smislu modela i sintaktički nezavisne od sistema aksioma $\mathcal{Z}'$, čak ako ga proširimo shemama aksioma

$$\neg\neg A\Rightarrow A,\ (A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg A),\ (\neg A\Rightarrow B)\Rightarrow(\neg B\Rightarrow A).$$

Dapače, one bi ostale nezavisne u istom smislu i ako bi taj sistem još dalje proširili shemom aksioma $\neg A\Rightarrow B$ koja nije shema teorema u našem sistemu jer u $\mathcal{M}'$ vrijede i sve tom shemom definirane formule.

6.4. Neka je $\mathcal{Z}$ sistem aksioma koji preostaje ako se iz našeg sistema izostavi shema aksioma 16°.

Pretpostavimo da shema 16° nije sintaktički nezavisna od $\mathcal{Z}$. Tada bi uz $\mathcal{Z}$ postojala demonstracija $\mathcal{D}$ npr. formule $a \Rightarrow \top$. Kad bi u svim formulama koje ulaze u $\mathcal{D}$ svagdje $\top$ zamijenili sa b, dobili bi opet neki niz formula koji bi bio demonstracija formule $a \Rightarrow b$ jer u shemama aksioma od $\mathcal{Z}$ nigdje eksplicitno ne dolazi simbol $\top$. No formula $a \Rightarrow b$, interpretirana kao formula algebre sudova, nije identički istinita pa ona ne može biti izvediva ni iz čitavog našeg sistema aksioma a pogotovo ne iz $\mathcal{Z}$. Dobiveno protivrječje pokazuje da $a \Rightarrow \top$ ne može biti izvedivo iz $\mathcal{Z}$, pa je dakle shema aksioma 16° sintaktički nezavisna od $\mathcal{Z}$.

Analogno se uviđa da je naša shema aksioma 17° sintaktički nezavisna od sistema aksioma definiranog preostalim shemama 1°—16°.

7. SINTAKTIČKA NEZAVISNOST HILBERT-BERNAYSOVA SISTEMA AKSIOMA LOGIKE SUDOVA

Pokazat ćemo da se nijedna shema aksioma Hilbert-Bernaysova sistema aksioma (IV **19.2.**) ne može izvesti iz preostalih.

7.1. Neka je $M = \{\top, \bot, \nabla, \Delta\}$ i operacije $\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ definirane sa

$x \& y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
∇	∇	$\bot$	∇	Δ
Δ	Δ	$\bot$	Δ	Δ

$x \vee y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
∇	$\top$	∇	∇	∇
Δ	$\top$	Δ	∇	Δ

$x \Rightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
∇	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
Δ	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$

$x \Leftrightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
∇	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
Δ	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

$\neg x$

x	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\neg x$	$\perp$	$\top$	Δ	∇

Može se provjeriti da je $\mathcal{M}=\{M;\&,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\neg\}$ model Hilbert-Bernaysova sistema iz kojeg je uklonjena prva shema aksioma implikacije. (Svi preostali aksiomi *vrijede* u $\mathcal{M}$, tj. poprimaju u M vrijednost $\top$ za svaku supstituciju elemenata od M na mjesto varijabla sudova, a modus ponens *čuva* ovo svojstvo tj. ako ga imaju formule A i $A\Rightarrow B$, ima ga i formula B.) Međutim aksiom $a\Rightarrow(b\Rightarrow a)$ prve sheme u $\mathcal{M}$ *ne* vrijedi, jer je npr.

$$\Delta\Rightarrow(\top\Rightarrow\Delta)=\Delta\Rightarrow\perp=\perp.$$

Prva shema Hilbert-Bernaysova sistema aksioma je dakle u smislu modela — a onda pogotovo i sintaktički — nezavisna od preostalih.

Nadalje, lako je provjeriti da u $\mathcal{M}$ ne vrijedi nijedan od aksioma

$$a\Rightarrow(\neg a\Rightarrow b),\ a\vee\neg a,\ \neg(a\&\neg a),\ a\Rightarrow(b\Rightarrow a\&b),$$

(jer je npr. $\Delta\Rightarrow(\neg\Delta\Rightarrow\perp)=\perp$, $\Delta\vee\neg\Delta=\nabla$, $\neg(\Delta\&\nabla)=\nabla$, $\Delta\Rightarrow(\nabla\Rightarrow\Delta\&\nabla)=\perp$ a da vrijede svi aksiomi definirani shemama aksioma

$$A\Rightarrow A,\ B\Rightarrow(A\Rightarrow A).$$

Prema tome nijedna od shema formula

$$A\Rightarrow(\neg A\Rightarrow B),\ A\vee\neg A,\ \neg(A\&\neg A),\ A\Rightarrow(B\Rightarrow A\&B)$$

nije izvediva iz Hilbert-Bernaysova sistema aksioma iz kojeg je uklonjena njegova prva shema aksioma implikacije, čak ako se ovaj preostali sistem još proširi dodavanjem shema aksioma $A\Rightarrow A$, $B\Rightarrow(A\Rightarrow A)$.

7.2. Neka je $M=\{\top,\ \perp,\ \Delta\}$ i operacije $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ definirane sa

$x\&y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	Δ
$\top$	$\top$	$\perp$	Δ
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
Δ	Δ	$\perp$	Δ

$x\vee y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	Δ
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	Δ
Δ	$\top$	Δ	Δ

$x\Rightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	Δ
$\top$	$\top$	$\perp$	Δ
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
Δ	$\top$	Δ	$\top$

$x \Leftrightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	Δ
$\top$	$\top$	$\perp$	Δ
$\perp$	$\perp$	$\top$	Δ
Δ	Δ	Δ	$\top$

$\neg x$

x	$\top$	$\perp$	Δ
$\neg x$	$\perp$	$\top$	Δ

Može se provjeriti da je

$$\mathcal{M} = \{M;\ \&,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow,\ \neg\}$$

model Hilbert-Bernaysova sistema iz kojeg je uklonjena druga shema aksioma implikacije. Međutim aksiom

$$(a \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$$

druge sheme u $\mathcal{M}$ ne vrijedi, jer je npr.

$$(\Delta \Rightarrow (\Delta \Rightarrow \perp)) \Rightarrow (\Delta \Rightarrow \perp) = \Delta .$$

Također u $\mathcal{M}$ ne vrijedi npr. nijedan od aksioma

$$a \vee \neg a, \quad \neg (a \,\&\, \neg a), \quad (a \Rightarrow \neg a) \Rightarrow \neg a, \quad (a \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \Rightarrow (a \,\&\, a \Rightarrow b) .$$

To znači da je druga shema aksioma implikacije Hilbert-Bernaysova sistema aksioma sintaktički nezavisna od preostalih i da se iz tih preostalih ne mogu izvesti ni sheme

$$A \vee \neg A, \quad \neg (A \,\&\, \neg A), \quad (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A, \quad (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \,\&\, A \Rightarrow B);$$

zbog ovog posljednjeg dakle pogotovo ne niti shema

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \,\&\, B \Rightarrow C) .$$

7.3. Neka je $M = \{\top, \perp, \nabla, \Delta\}$ i operacije $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ definirane sa

$x \,\&\, y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
∇	∇	$\perp$	∇	$\perp$
Δ	Δ	$\perp$	$\perp$	Δ

$x \vee y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	∇	Δ
∇	$\top$	∇	∇	$\top$
Δ	$\top$	Δ	$\top$	Δ

$x \Rightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\top$	$\top$	∇	∇	Δ
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
∇	$\top$	Δ	$\top$	Δ
Δ	$\top$	∇	∇	$\top$

$x \Leftrightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\top$	$\top$	∇	∇	Δ
$\perp$	∇	$\top$	Δ	∇
∇	∇	Δ	$\top$	$\perp$
Δ	Δ	∇	$\perp$	$\top$

$\neg x$

x	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\neg x$	$\perp$	$\top$	Δ	∇

Može se provjeriti da je $\mathcal{M} = \{M; \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$ model Hilbert-Bernaysova sistema iz kojeg je uklonjena treća shema aksioma implikacije. Međutim aksiom $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$ treće sheme u $\mathcal{M}$ ne vrijedi, jer je npr. $(\top \Rightarrow \perp) \Rightarrow ((\perp \Rightarrow \Delta) \Rightarrow (\top \Rightarrow \Delta)) = \Delta$. Dakle je i treća shema aksioma implikacije Hilbert-Bernaysova sistema aksioma sintaktički nezavisna od preostalih.

7.4. Za dokaz sintaktičke nezavisnosti preostalih shema aksioma Hilbert-Bernaysova sistema (grupe II do V) mogu se konstruirati modeli $\mathcal{M} = \{M; \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$ sa $M = \{\top, \perp\}$ prema ovoj tabeli:

Shema aksioma F koje nezavisnost želimo dokazati	Definicija operacija u M, koje se *razlikuju* od one u algebri sudova	Supstitucija elemenata od M za oznake formula u F uz koju dobiveni izraz u M *ne* poprima vrijednost $\top$ (nego $\perp$).
II		
$A \& B \Rightarrow A$	$x \& y = y$	$\perp$ za A, $\top$ za B
$A \& B \Rightarrow B$	$x \& y = x$	$\top$ za A, $\perp$ za B
$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \& C))$	$x \& y = \perp$	$\top$ za A, B, C
III		
$A \Rightarrow A \vee B$	$x \vee y = y$	$\top$ za A, $\perp$ za B

Shema aksioma F koje nezavisnost želimo dokazati	Definicija operacija u M, koje se *razlikuju* od one u algebri sudova	Supstitucija elemenata od M za oznake formula u F uz koju dobiveni izraz u M *ne* poprima vrijednost $\top$ (nego $\perp$).
$B \Rightarrow A \vee B$	$x \vee y = x$	$\perp$ za A, $\top$ za B
$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$	$x \vee y = \top$	$\perp$ za A, B, C
IV		
$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$x \Leftrightarrow y = y \Rightarrow x$	$\top$ za A, $\perp$ za B
$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	$x \Leftrightarrow y = x \Rightarrow y$	$\perp$ za A, $\top$ za B
$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B))$	$x \Leftrightarrow y = \perp$	$\top$ za A, B
V		
$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	$\neg x = x$	$\perp$ za A, $\top$ za B
$A \Rightarrow \neg\neg A$	$\neg x = \perp$	$\top$ za A
$\neg\neg A \Rightarrow A$	$\neg x = \top$	$\perp$ za A

7.5. Pokažimo još da se naša druga shema aksioma implikacije

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

ne može izvesti iz Hilbert-Bernaysova sistema iz kojeg je uklonjena njegova treća shema aksioma negacije. (Da se ona može izvesti iz *punog* Hilbert-Bernaysova sistema pokazali smo u IV 19.2.2.).)

U tu svrhu ne može nam poslužiti posljednji model iz tablice u 7.4. (koji pokazuje nezavisnost Hilbert-Bernaysove treće sheme aksioma negacije od preostalih shema aksioma) jer je tamo implikacija definirana kao u algebri sudova pa će u $\mathcal{M}$ vrijediti svaka formula definirana shemom $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ jer su sve te formule identički istinite — pa nam dakle o izvedivosti te sheme ne kazuje ništa.

Neka je $M = \{\top, \perp, \Delta\}$ i operacije $\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ definirane sa

$x \& y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	Δ
$\top$	$\top$	$\perp$	Δ
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
Δ	Δ	$\perp$	Δ

$x \vee y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	Δ
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	Δ
Δ	$\top$	Δ	Δ

$x \Rightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	Δ
$\top$	$\top$	$\perp$	Δ
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
Δ	$\top$	$\perp$	$\top$

$x \Leftrightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\perp$	Δ
$\top$	$\top$	$\perp$	Δ
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
Δ	Δ	$\perp$	$\top$

$\neg x$

x	$\top$	$\perp$	Δ
$\neg x$	$\perp$	$\top$	$\perp$

Može se provjeriti da je $\mathcal{M} = \{M;\ \&,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow,\ \neg\}$ model Hilbert-Bernaysova sistema iz kojeg je uklonjena treća shema aksioma negacije. (U njemu ne vrijedi $\neg\neg a \Rightarrow a$ jer je $\neg\neg\Delta \Rightarrow \Delta = \Delta$, pa i ovaj model može poslužiti za dokaz sintaktičke nezavisnosti Hilbert-Bernaysove sheme aksioma V 3° od preostalih.) U $\mathcal{M}$ međutim ne vrijedi $((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a$ jer je npr. $((\Delta \Rightarrow \perp) \Rightarrow \Delta) \Rightarrow \Delta = \Delta$, pa je naša shema aksioma I 2° sintaktički nezavisna od Hilbert-Bernaysova sistema iz kojeg je uklonjena njegova shema aksioma V 3°.

Napomena. Asserov (dakle i naš) sistem nema ovaj „estetski nedostatak"; može se dokazati (u što ovdje ne ulazimo) da je u njemu svaka formula koja od operatora sadrži samo implikaciju a interpretirana kao formula algebre sudova je identički istinita, izvediva već iz samih aksioma implikacije.

8. PSEUDOMODELI

8.1. *Definicija* 13. *Neka je M neki skup takav da je $M \supset \{\top, \perp\}$, N neki podskup od M, takav da je $\top \in N$, $\perp \notin N$ (za elemente od N reći ćemo da su* i s t a k n u t i *u M), neka su u M definirane binarne operacije $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ i unitarna operacija $\neg$ i neka je F neka formula logike sudova.*

Za formulu F reći ćemo tada da je i s t a k n u t a *u strukturi $\mathcal{M} = (M, N;\ \&,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow,\ \neg)$ ako, kako god za varijable sudova od F supstituirali elemente od M, dobiveni izraz u M poprima kao vrijednost neki element od N, tj. neki istaknuti element od M (ne nužno isti za svaku supstituciju).*

8.2. *Definicija* 14. *Za strukturu $\mathcal{M} = (M, N;\ \&,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow,\ \neg)$ reći ćemo da je* p s e u d o m o d e l *sistema aksioma $\mathcal{S}$ logike sudova ako je svaka formula koja je i izvediva iz $\mathcal{S}$ (tj. svaki teorem na osnovu $\mathcal{S}$) istaknuta u $\mathcal{M}$.*

Struktura $\mathcal{M}$ bit će dakle sigurno pseudomodel sistema aksioma $\mathcal{S}$ ako vrijedi:

1° Svaki aksiom od $\mathcal{S}$ istaknut je u $\mathcal{M}$ i

2° Ako su formule A, $A \Rightarrow B$ istaknute u $\mathcal{M}$, onda je i formula B istaknuta u $\mathcal{M}$ (tj. ako modus ponens čuva istaknutost formula u $\mathcal{M}$).

8.3. *Definicija* 15. *Za formulu F logike sudova reći ćemo da je n e z a v i s n a u s m i s l u p s e u d o m o d e l a od sistema aksioma $\mathcal{S}$ ako postoji pseudomodel $\mathcal{M}$ od $\mathcal{S}$ u kojem formula F nije istaknuta.*

Budući da je svaki model ujedno i pseudomodel (uz $M=\{\top, \bot\}$), bit će svaka formula nezavisna od $\mathcal{S}$ u smislu modela pogotovo nezavisna u smislu pseudomodela.

8.4. Definicija nezavisnosti sheme formula i sistema aksioma zadanog (poput našeg) shemama aksioma u koje eksplicitno ne ulaze varijable sudova prenose se i na nezavisnost u smislu pseudomodela prema definicijama u **5.4.** i **5.5.**

Iz **8.2.** i **8.3.** izlazi da vrijedi ovaj teorem:

Ako je neki sistem aksioma logike sudova zadan (poput našeg) shemama aksioma u koje eksplicitno ne ulaze varijable sudova nezavisan u smislu pseudomodela, on je i sintaktički nezavisan.

9. SINTAKTIČKA NEZAVISNOST ASSEROVA SISTEMA AKSIOMA LOGIKE SUDOVA

Pokazat ćemo sada da se nijedna shema aksioma Asserova sistema aksioma logike sudova (IV **19.3.**) ne može izvesti iz preostalih. Budući da se taj sistem razlikuje od Hilbert-Bernaysova jedino u drugoj shemi aksioma implikacije i budući da je kod svih modela iz **7.4.** implikacija bila definirana kao u logici sudova pa su oni i modeli za odgovarajuće oslabljen Asserov sistem, bit će dovoljno da pokažemo sintaktičku nezavisnost Asserovih shema aksioma implikacije od preostalih shema aksioma tog sistema.

9.1. Neka je $M=\{\top, \bot, \nabla, \Delta\}$, $N=\{\top, \nabla, \Delta\}$ i neka su operacije & $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ definirane sa

$x \,\&\, y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
∇	$\top$	$\bot$	∇	∇
Δ	$\top$	$\bot$	∇	Δ

$x \vee y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\top$	∇	Δ
$\bot$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
∇	∇	∇	∇	Δ
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ

$x \Rightarrow y$

x \ y	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
∇	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
Δ	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

$x \Leftrightarrow y$

x \ y	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
∇	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
Δ	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

$\neg x$

x	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\neg x$	∇	Δ	$\top$	$\perp$

Može se provjeriti da je $\mathcal{M} = \{M, N; \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$ pseudomodel Asserova sistema iz kojeg je uklonjena njegova prva shema aksioma implikacije, i da u tom pseudomodelu modus ponens čuva istaknutost formula. U drugu ruku, formula $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$ nije istaknuta u $\mathcal{M}$, jer je npr. $\nabla \Rightarrow (\nabla \Rightarrow \nabla) = \perp$. Prva shema aksioma Asserova sistema je dakle u smislu psudomodela, a prema tome i sintaktički nezavisna od preostalih.

9.2. U modelu $\mathcal{M}$ iz **7.2.** ne vrijedi aksiom $((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a$ druge sheme Asserova sistema (jer je npr. $((\Delta \Rightarrow \perp) \Rightarrow \Delta) \Rightarrow \Delta = \Delta$) dok ostale vrijede, pa je i druga shema sintaktički nezavisna od preostalih.

9.3. Neka je $M = \{\top, \perp, \nabla, \Delta\}$ i neka su operacije $\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ definirane sa

$x \& y$

x \ y	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
∇	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
Δ	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$x \vee y$

x \ y	$\top$	$\perp$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
∇	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
Δ	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$x \Rightarrow y$

$x \backslash y$	⊤	⊥	∇	Δ
⊤	⊤	⊥	∇	Δ
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
∇	⊤	⊤	⊤	Δ
Δ	⊤	⊤	∇	⊤

$x \Leftrightarrow y$

$x \backslash y$	⊤	⊥	∇	Δ
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
∇	⊥	⊤	⊤	⊥
Δ	⊥	⊤	⊥	⊤

$\neg x$

x	⊤	⊥	∇	Δ
$\neg x$	⊥	⊤	⊤	⊤

Može se provjeriti da je $\mathcal{M} = \{M; \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$ model Asserova sistema iz kojeg je uklonjena njegova treća shema aksioma implikacije. U drugu ruku, formula $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$ ne vrijedi u $\mathcal{M}$ jer je npr. $(\Delta \Rightarrow \bot) \Rightarrow ((\bot \Rightarrow \nabla) \Rightarrow (\Delta \Rightarrow \nabla)) = \nabla$. Treća shema aksioma implikacije Asserova sistema je dakle također sintaktički nezavisna od preostalih.

10. NADOMJEŠTAVANJE NEKIH SHEMA AKSIOMA SHEMAMA DEMONSTRACIJE

Dosad smo pod „izvođenjem" teorema iz aksioma razumijevali njihovo izvođenje na temelju **D 6.** iz Glave IV, tj. uz modus ponens kao jedinu shemu demonstracije: Ako su formule (individualne ili sheme) A, $A \Rightarrow B$ bili teoremi ili aksiomi, onda je i B bio teorem. Shematski modus ponens možemo pisati u obliku

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \Rightarrow B \end{array}}{B.}$$

U logici sudova može se izvođenje definirati i drugačije, sa drugim shemama demonstracije.

10.1. Izostavimo li u Asserovu ili u našem sistemu aksioma shemu aksioma 9° i uvedemo li kao sheme demonstracije modus ponens i shemu

$$\frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow C \\ B \Rightarrow C \end{array}}{A \vee B \Rightarrow C}$$

(posljednja shema znači: ako su $A\Rightarrow C$, $B\Rightarrow C$ teoremi ili aksiomi, onda je — po definiciji — i $A\vee B\Rightarrow C$ teorem) bit će u novom sistemu teoremi one i samo one formule koje su to bile u prvotnom sistemu.

Dokaz. Dokažimo najprije da je skup teorema novog sistema sadržan u skupu teorema prvotnog. Ovo izlazi odmah odatle što u prvotnom sistemu vrijedi shema aksioma 9°, tj.

$$(A\Rightarrow C)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\vee B\Rightarrow C)),$$

pa ako su $A\Rightarrow C$, $B\Rightarrow C$ teoremi bit će i $A\vee B\Rightarrow C$ teorem.

Obrnuto, skup teorema prvotnog sistema sadržan je u skupu teorema novog. Naime, po novoj shemi demonstracije je

$$\frac{\begin{array}{c}A\Rightarrow((A\Rightarrow C)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow C))\\ B\Rightarrow((A\Rightarrow C)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow C))\end{array}}{A\vee B\Rightarrow((A\Rightarrow C)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow C)).}$$

Međutim, prve dvije od ovih formula su sheme teorema u novom sistemu, što uviđamo ovako: Budući da je teorem dedukcije u prvotnom sistemu bio izveden samo pomoću shema aksioma implikacije, on vrijedi i u novom sistemu, pa je u novom sistemu za $\Delta=A,\ A\Rightarrow C,\ B\Rightarrow C$

1. A	Element od Δ
2. $A\Rightarrow C$	Element od Δ
3. C	Iz 1, 2.

dedukcija $A,\ A\Rightarrow C,\ B\Rightarrow C\vdash C$ te je stoga u novom sistemu

$$A,\ A\Rightarrow C\vdash(B\Rightarrow C)\Rightarrow C$$

i dalje

$$A\vdash(A\Rightarrow C)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow C)$$

te konačno

$$\vdash A\Rightarrow((A\Rightarrow C)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow C)).$$

Analogno je u novom sistemu

$$\vdash B\Rightarrow((A\Rightarrow C)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow C)).$$

Po novoj shemi demonstracije je dakle shema formula

$$A\vee B\Rightarrow((A\Rightarrow C)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow C))$$

shema teorema u novom sistemu.

Zbog (24) iz IV **9.5.** (što je također u prvotnom sistemu bilo izvedeno samo pomoću aksioma implikacije pa vrijedi i u novom) bit će dakle u novom sistemu i

(1) $$\vdash(A\Rightarrow C)\Rightarrow(A\vee B\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow C)).$$

Zbog (24) iz IV **9.5.** je u novom sistemu također i

(2) $$\vdash(A\vee B\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow C))\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\vee B\Rightarrow C)).$$

Dalje je u novom sistemu zbog (2) i (26) iz IV **9.6.**

(3) $\vdash((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C))) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)))$,

i zbog (1), (3) konačno

(4) $$\vdash(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)).$$

Prvotna shema 9° je dakle shema teorema u novom sistemu pa on zaista sadrži kao teoreme i sve teoreme prvotnog, što je trebalo dokazati.

Naša shema aksioma 9° može se dakle nadomjestiti shemom demonstracije

$$\frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow C \\ B \Rightarrow C \end{array}}{A \vee B \Rightarrow C.}$$

Tačnije, naša prvotna shema aksioma 9° izvediva je već iz shema aksioma implikacije (koje su jednake u Asserovu i u našem prvotnom i novom sistemu) pomoću obih shema demonstracije novog sistema, a nova shema demonstracije može se izvesti kao pravilo za dokazivanje teorema već iz shema aksioma implikacije uz samo modus ponens kao shemu demonstracije.

10.2. Budući da (vidi IV **9.2.**) u Hilbert-Bernaysovu sistemu vrijedi teorem dedukcije te (24) iz IV **9.5.** i (26) iz IV **9.6.** sve kao posljedica (uz modus ponens) samo aksioma implikacije, mogu se razmatranja iz **10.1.** prenijeti i na taj sistem. Prema tome i u Hilbert-Bernaysovu sistemu može se pomoću samih aksioma implikacije uz modus ponens i

$$(D) \qquad \frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow C \\ B \Rightarrow C \end{array}}{A \vee B \Rightarrow C}$$

kao sheme demonstracije izvesti kao shema teorema shema (u prvotnom sistemu aksioma) disjunkcije $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$.

U „analogiji" s time moglo bi se obzirom na način kako su sagrađene sheme aksioma disjunkcije i konjunkcije u prvi mah pomisliti da će se u Hilbert-Bernaysovu sistemu iz samih aksioma implikacije uz modus ponens i

$$(K) \qquad \frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ A \Rightarrow C \end{array}}{A \Rightarrow B \,\&\, C}$$

kao sheme demonstracija moći izvesti kao shema teorema shema (u prvotnom sistemu aksioma) konjunkcije $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \,\&\, C))$. Pokazat ćemo međutim da to nije slučaj. Dublji razlog ovoga možemo tražiti u tome, što Hilbert-Bernaysove sheme aksioma implikacije nemaju takvu „simetriju" koja bi omogućavala da uz modus ponens i (K) izvedemo našu shemu aksioma 6° kao shemu teorema „paralelno" postupku kojim smo u **10.1.** uz modus ponens i (D) izveli kao teorem našu shemu aksioma 9°. (Obrnuto međutim u Hilbert-Bernaysovu sistemu uz modus ponens iz posljednje sheme aksioma konjunkcije odmah izlazi (K) kao pravilo za dokazivanje teorema.)

Konstrukcijom prikladnog modela dokazat ćemo čak da se naša shema aksioma 6° u Hilbert-Bernaysovu sistemu uz modus ponens i (K) kao sheme demonstracija ne može izvesti kao shema teorema ni iz sviju (njegovih) shema aksioma implikacije i disjunkcije te prvih dviju shema aksioma konjunkcije. (Međutim 6° se tako može izvesti ako se ovim shemama još pridodaju Hilbert-Bernaysove sheme aksioma negacije; no u dokaz ovog posljednjeg nećemo ulaziti.)

Neka je $M = \{\top, \bot, \nabla, \Delta\}$ i neka su operacije $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$ definirane sa

$x \& y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
∇	∇	$\bot$	∇	$\bot$
Δ	Δ	$\bot$	$\bot$	Δ

$x \vee y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
∇	$\top$	∇	∇	$\top$
Δ	$\top$	Δ	$\top$	

$x \Rightarrow y$

$x \backslash y$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\top$	$\top$	$\bot$	∇	Δ
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
∇	$\top$	$\bot$	$\top$	Δ
Δ	$\top$	$\bot$	∇	$\top$

Može se provjeriti da u $\mathcal{M} = \{M; \&, \vee, \Rightarrow\}$ vrijede aksiomi definirani Hilbert-Bernaysovim shemama aksioma implikacije i disjunkcije te prvim dvjema shemama aksioma konjukcije. Nadalje, ako formule $A, A \Rightarrow B$ u $\mathcal{M}$ uvijek poprimaju vrijednost $\top$, onda isto vrijedi za B, tj. modus ponens čuva svojstvo formula da vrijede u $\mathcal{M}$.

Pokazat ćemo da i shema demonstracije (K) čuva svojstvo formula da vrijede u $\mathcal{M}$.

Neka su dakle A, B, C takve formule da formule $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$ vrijede u $\mathcal{M}$. Treba provjeriti da tada i formula $A \Rightarrow B \& C$ vrijedi u $\mathcal{M}$. U tu svrhu razlikovat ćemo četiri slučaja, već prema tome koju vrijednost τA u $\mathcal{M}$ poprima A (za neku danu supstituciju elemenata od M na mjesto varijabla od A).

1° $\tau A = \top$. Tada zbog $\tau(A \Rightarrow B) = \tau(A \Rightarrow C) = \top$ mora biti i $\tau B = \tau C = \top$ pa je $\tau(A \Rightarrow B \& C) = \top \Rightarrow \top \& \top = \top$.

2° $\tau A = \bot$. Tada je odmah opet $\tau(A \Rightarrow B \& C) = \top$.

3° $\tau A = \nabla$. Tada je τB, $\tau C = \top$ ili ∇ pa je i $\tau(B \& C) = \top$ ili ∇ i odatle opet $\tau(A \Rightarrow B \& C) = \top$.

4° $\tau A = \Delta$. Tada je τB, $\tau C = \top$ ili Δ pa je i $\tau(B \& C) = \top$ ili Δ i odatle opet $\tau(A \Rightarrow B \& C) = \top$.

Međutim, posljednja shema aksioma konjunkcije ne vrijedi u $\mathcal{M}$, jer je npr. $(\nabla \Rightarrow \nabla) \Rightarrow ((\nabla \Rightarrow \Delta) \Rightarrow (\nabla \Rightarrow \nabla \& \Delta)) = \top \Rightarrow (\Delta \Rightarrow (\nabla \Rightarrow \bot)) = \bot$.

10.3. Pokazat ćemo sada još da se kako u Hilbert-Bernaysovu tako i u našem sistemu i Asserovu sistemu posljednja shema aksioma konjunkcije može izvesti kao shema teorema iz samih aksioma implikacije uz modus ponens i shemu demonstracije

$$(K_1) \qquad \frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \\ A \Rightarrow (B \Rightarrow B) \end{array}}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A \& B)}.$$

Zaista, u sva ta tri sistema logike sudova $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ je shema aksioma mplikacije. Nadalje, u tim sistemima vrijedi shema aksioma implikacije

$$(B \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow B))$$

koja izlazi iz prve sheme aksioma implikacije uz $B \Rightarrow B | A$, $A | B$. A kako je $B \Rightarrow B$ u tim sistemima shema teorema implikacije, to je uz modus ponens i $A \Rightarrow (B \Rightarrow B)$ shema teorema implikacije. Prema tome je uz shemu demonstracije (K_1) i $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \& B)$ shema teorema, izvedena iz samih shema aksioma implikacije uz modus ponens i (K_1).

U Hilbert-Bernaysovu, Asserovu i našem sistemu teorem dedukcije može se uz modus ponens dokazati iz samih shema aksioma implikacije (usp. IV **13.** i **19.2.**). Nadalje, kako je — kao što smo upravo vidjeli — u tim sistemima $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \& B)$ shema teorema izvediva uz modus ponens iz shema aksioma implikacije, to je (uz $B | A$, $C | B$) i $B \Rightarrow (C \Rightarrow B \& C)$ shema teorema izvediva iz shema aksioma implikacije.

Odatle je $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, $A \vdash \{B, C\} \vdash B \& C$ dakle uz teorem dedukcije $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow B \& C$ i dalje $A \Rightarrow B \vdash (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \& C)$ te konačno

$$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \& C))$$

što je i trebalo dokazati.

10.4. Ako u Hilbert-Bernaysovu sistemu izostavimo samo prvu shemu aksioma implikacije, ne može se ova uz modus ponens i

$$\frac{A}{B \Rightarrow A}$$

kao sheme demonstracije izvesti ni iz svih preostalih shema aksioma. (Obrnuto ta shema odmah izlazi iz prve sheme aksioma implikacije uz modus ponens.)

Ovo lako uviđamo ako samo uočimo da model iz **7.1.** ima svojstvo da ako u njemu vrijedi A onda u njemu vrijedi i $B \Rightarrow A$ — a vidjeli smo da u njem ne vrijedi aksiom $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$.

REGISTAR SIMBOLA

REGISTAR DEFINICIJA, TEOREMA, KOROLARA I LEMA

ABECEDNI REGISTAR POJMOVA

Tehnički urednik: *Milan Čavčić*

Izdaje: Matematički institut u Beogradu

ŠTAMPA: ŠTAMPARIJA RADIO-TELEVIZIJE BEOGRAD
Batajnički put 24, telefon 607-073