U N I V E R Z I T E T U P R I Š T I N I

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

mr Fehim J. Dedagić

O OPERATORIMA SUPERPOZICIJE U BANAHOVIM PROSTORIMA NIZOVA

- doktorska disertacija -

P R I Š T I N A
1 9 8 6

S a d r ž a j

U V O D

Operator superpozicije uveo je V.V. Nemicki (1934 g.) u kontekstu rešavanja nekih nelinearnih integralnih jednačina - i do danas je bio predmet izučavanja mnogih matematičara, medju kojima je čitav niz poznatih imena - od K. Karateodorija, M.M. Vajnberga, A. Hammerštejna do - M.A. Krasnoseljskog, L.A. Ladiženskog, P.P. Zabrejka, J.B. Rutickog i dr.

Kod operatora uopšte, pa i kod operatora superpozicije, njegova bitna svojstva su u tesnoj sprezi sa prostorima u kojim oni deluju. Može se, bez sumnje, konstatovati da je operator superpozicije detaljno izučen u Lebegovim prostorima funkcija - L_p i tu postoji, relativno obimna literatura ([9], [24], [25], [27] i tamo citirana). Kao što se može videti, izučeni su uslovi delovanja, neprekidnosti, ograničenosti, ravnomerne neprekidnosti, kompaktnosti, diferencijabilnosti u tački i na prostoru, analitičnosti i dr. Operator superpozicije i odgovarajuće nelinearne integralne jednačine izučavani su i u drugim prostorima funkcija (Helderovim, Lipšicovim, Orličevim i tkz. idealnim prostorima merljivih funkcija) - medjutim, ima prostora gde se o operatoru superpozicije gotovo ništa ne zna.

Lako se uočava, da su po pravilu rezultati o operatoru superpozicije u Lebegovim prostorima $L_p(\Omega,\mu)$ imali jaku pretpostavku o neprekidnosti mere μ na Ω. Još više, ako izostane takva pretpostavka - rezultati više ne važe. Dakle o operatoru superpozicije u čitavoj klasi prostora, sa p-stepenom integrabilnih funkcija na Ω - skupu proizvoljne mere, skoro da ništa ne znamo.

Cilj ove disertacije je, u prvom redu razmatranje operatora superpozicije u Banahovim prostorima nizova i odgovarajućih nelinearnih beskonačnih sistema, a potom uopštavanjem - preneti rezultate na prostore $L_p(\Omega,\mu)$ - funkcija na skupu Ω, proizvoljne mere μ. Time se, pored praktičnosti, prevdaju upotrebljene oznake funkcija - za označavanje nizova ((koji su, jasno - funkcije). Pošto radova, koji bi se bavili upravo operatorom superpozicije u prostorima nizova, koliko je moguće videti, skoro da nema (tu se jedino mogu navesti [20] i [33]) - nadamo se da disertacija čini izvestan pomak.

Rad je izložen u dve glave. U prvoj, koja je podeljena na devet poglavlja, dobijeni su sledeći rezultati:

- potrebni i dovoljni uslovi delovanja operatora superpozicije iz jednog prostora nizova u drugi;
- potrebni i dovoljni uslovi neprekidnosti operatora superpozicije;
- potrebni i dovoljni uslovi ograničenosti operatora superpozicije;
- potrebni i dovoljni uslovi ravnomerne neprekidnosti;
- uslovi kompaktnosti i kondenziranja operatora superpozicije;
- uslovi diferencijabilnosti i analitičnosti operatora superpozicije u prostorima nizova.

U poslednjem poglavlju prve glave, data su neka uopštenja.

Druga glava sadrži pet poglavlja u kojima je dat niz teorema o uslovima egzistencije i jedinstvenosti rešenja beskonačnih nelinearnih sistema jednačina, sa operatorom superpozicije u ulozi nelinearnog dela tih sistema; s tim u vezi, koriste se rezultati dobijeni u prvoj glavi. Iz obilja mogućnosti odlučili smo se samo za nekoliko rezultata vezanih za sopstvene vrednosti i tačke bifurkacije beskonačnih nelinearnih sustema, koji se poznatim postupcima ([24], [27]), lako prenose i na odgovarajuće nelinearne integralne jednačine opštijih prostora.

Deo rezultata disertacije objavljen je u [14], a deo poglavlja I.2. i II.3. - saopšten je na VIII Kongresu MFA - Jugoslavije, septembra 1985 g.

Na ogromnoj pomoći, ne samo pri izboru teme i radu na disertaciji, autor duguje duboku zahvalnost svome mentoru Prof. Dr Pjotru P. Zabrejku, sa Beloruskog Državnog Univerziteta - „V. I. Lenjin" u Minsku, gde je autor boravio i radio na ovoj tezi u toku zimskog semestra 1984/85 godine.

P r v a g l a v a

O P E R A T O R S U P E R P O Z I C I J E

U v o d. Funkcije $f:\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gde je Ω neki podskup konačno dimenzionalnog realnog prostora $\mathbb{R}^k$ - konačne ili σ - konačne mere μ i $x:\Omega \to \mathbb{R}$, svojim superpozicijama na prirodan način generišu nelinearan operator

$$Fx(s) = f(s,x(s)) \qquad /I/$$

poznat u literaturi pod imenom o p e r a t o r s u p e r p o z i c i j e. Početak izučavanja operatora superpozicije vezan je za ime poznatog sovjetskog matematičara V.V. Nemickog (1934) (neki autori, operator /I/ - zovu operatorom Nemickog). Izučavanje operatora superpozicije je početo u sklopu rešavanja nekih nelinearnih integralnih jednačina ([31]), a prilog tom proučavanju dao je i K. Karateodori. Operator superpozicije je kasnije proučavan i samosatalno u različitim prostorima funkcija i pri raznim pretpostavkama za funkciju $f(s,u)$ - koja ga generiše. Medjutim, za operator /I/ u prostorima L_p - sa p- stepenom integrabilnih (u Lebegovom smislu) funkcija, dominira pretpostavka da funkcija $f(s,u)$ - zadovoljava Karateodorijeve uslove ($f(s,\cdot)$ - merljiva i $f(s,u)$ - neprekidna po u za skoro svako s). Može se reći da je operator /I/ u prostorima L_p prilično izučen i tu postoji relativno obimna literatura, npr. [24 - 26], [9], [3 - 4] . Osnovne rezultate (o neprekidnosti i delovanju), dobili su nezavisno M.A. Krasnoseljski (v. npr [25]) i M.M. Vajnberg ([9]). Uslove diferencijabilnosti, takodje Vajnberg, a analitička svojstva i uslove delovanja operatora /I/ - kao „poboljšanog" operatora, tj. operatora koji kompaktne skupove preslikava u apsolutno ograničene ([25], v. takodje [5]) - P.P. Zabrejko i E.I. Pustiljnik. Uslove pod kojima je operator superpozicije kondenzirajući proučili su B.N. Sadovski i njegovi učenici ([34], videti i [6]).

Kao sve operatore, operator superpozicije bitno karakteriše prostor u kome on deluje, pored toga u definiciji operatora superpozicije, kao član superpozicije učestvuje i funkcija $f(s,u)$, te je prirodno što pretpostavke naložene funkciji f takodje odredjuju ponašanje operatora. S tim u vezi, treba reći da je operator /I/ izučavan, ne samo u Lebegovim prostorima - već i u mnogim drugim prostorima funkcija (Helderovim, Orličevim, prostoru Lipšicovih funkcija, idealnim prostorima - koji u sebi kao podklasu sadrže i L_p i mnoge druge poznate prostore itd.). U do sada poznatim rezultatima - operator superpozicije, po prirodi prostora u kojima je istraživan, po pravilu je imao generator-funkciju $f(s,u)$, sa uslovima Karateodorija, o čemu smo već govorili. Uočljivo je, takodje, da ti rezultati imaju i pretpostavku da je Ω - skup konačne ili σ - konačne n e p r e k i d n e mere μ. Još više, ako mera μ ima a t o m e , specijalno ako je μ d i s k r e t n a mera na Ω - tada rezultati ne važe.

Slučaj operatora superpozicije na prostorima sa diskretnom merom, na prvi pogled izgleda jednostavniji, medjutim do sada nisu bili poznati čak ni uslovi delovanja operatora superpozicije iz prostora l_p u prostor l_q (koji nisu ništa drugo do - prostori L_p i L_q - kada se za Ω uzme skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, a za $\mu(D)$ - broj elemenata skupa D iz $\mathbb{P}(\mathbb{N})$).

I.O. Neka svojstva operatora superpozicije

Neka je $f(s,u)$ realna funkcija argumenta $s \in \mathbb{N}$ i $u \in \mathbb{R}$. Tada superpozicije $f(s,x(s))$, definišu pomoću

$$Fx(s) = f(s,x(s)) \qquad (\text{I.o.1})$$

nelinearan operator superpozicije na prostorima realnih funkcija prirodnog argumenta. Dakle, pretpostavljamo da je funkcija $f(s,u)$ - koja generiše operator (I.o.1) definisana za svako $s \in \mathbb{N}$ i $u \in \mathbb{R}$, mada se, očito moglo pretpostaviti da je $f(s,u)$ definisana za svako $s \in \mathbb{N}$ i $u \in U(s) \subset \mathbb{R}$, gde skup $U(s)$ - zavisi od s. Što se tiče uslova koje postavljamo funkciji $f(s,u)$, za razliku od slučaja operatora superpozicije u Lebegovim prostorima L_p - to je dovoljno. Istina, lako je videti da $f(s,u)$ - implicitno zadovoljava uslov o njenoj merljivosti po prvom argumentu. Izborom skupa prirodnih brojeva za domen funkcija $x(s)$ - jasno odričemo se i jedne od bitnih pretpostavki svih do sada poznatih rezultata o operatoru /I/ u prostorima L_p - naime mera μ na $\Omega = \mathbb{N}$ nije neprekidna. Primetimo, da se mera μ - naziva neprekidnom, ako za svaki merljiv skup $D \subset \Omega$, postoji skup $D_1 \subset D$, takav da je $2\mu(D_1) = \mu(D)$.

Nosačem funkcije $x(s)$, kao i obično, nazivamo skup $\operatorname{supp} x(s) = \{ s \in \mathbb{N} : x(s) \neq 0 \}$. Funkcije sa disjunktnim nosačima - kratko ćemo zvati disjunktne funkcije. Operator (I.o.1) ima svojstvo „delimične aditivnosti", drugim rečima za disjunktne funkcije $x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)$, važi jednakost

$$F(x_1 + \dots + x_n) = Fx_1 + \dots + Fx_n - (n-1)F\theta, \qquad (\text{I.o.2})$$

gde je $\theta(s)$ - funkcija identički jednaka nuli. Često je zgodno pretpostaviti da je

$$f(s,o) = o \qquad (s \in \mathbb{N}), \tag{I.o.3}$$

posle čega se, očito (I.o.2) pojednostavljuje. Pošto se uvek umesto operatora F može uzeti $F_o x = F(x_o + x) - Fx_o$, koji pretstavlja operator superpozicije, generisan funkcijom

$$f(s,x_o(s)+x(s)) - f(s,x_o(s)) ,$$

koja zadovoljava (I.o.3), to se ovaj uslov ne može smatrati nikakvim sužavanjem opštosti.

Iz (I.o.2) direktno slede neka jednostavna svojstva operatora superpozicije /I/ , odnosno (I.o.1). Naime, ako F preslikava neku kuglu prostora X u prostor Y - tada ([25]) on preslikava svaku funkciju iz X u funkciju prostora Y ; ako je F neprekidan u svim tačkama neke kugle prostora X - tada je on neprekidan u svim tačkama prostora X i na kraju , isto svojstvo važi i za ograničenost operatora F. Primetimo, da kod nelinearnih operatora svojstva neprekidnosti i ograničenosti, nisu ekvivalentna.

Kako je to uobičajeno, sa l_p $(1 \leq p < \infty)$ označavamo Banahov prostor funkcija $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (dakle, realnih nizova), za koje ima smisla i konačna je norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{s=1}^{\infty} |x(s)|^p \right)^{1/p}, \tag{I.o.4}$$

a sa l_∞ prostor ograničenih i l_∞^o - prostor nuli konvergentnih nizova, sa normom:

$$\|x\|_\infty = \sup_{s\in\mathbb{N}} |x(s)|. \tag{I.o.5}$$

Operator množenja karakterističnom funkcijom χ_D - skupa $D\subset\mathbb{N}$, označićemo sa P_D, a sa $\sum$ - skup svih funkcija iz $\hat{l}_p$ $(1\le p\le\infty)$ ili $\hat{l}^o_\infty$, za koje je $|x(s)|\le r$, $s\in\mathbb{N}$ i $r>o$. Lako je videti da je $\sum$ zatvoren i konveksan skup. U prostorima $\hat{l}_\infty$ i $\hat{l}^o_\infty$ - $\sum$ se poklapa sa kuglama poluprečnika r, koje ćemo, bez obzira u kom se prostoru nalaze označavati sa $B(x_o,r)=\{x : \|x-x_o\|\le r\}$.

Sledeća lema daje potrebne i dovoljne uslove pripadnosti nekog elementa skupu $\sum$ i njen ćemo rezultat koristiti u dokazima nekih rezultata ove glave.

<u>L e m a 1.</u> Funkcija $x\in\hat{l}_p$ pripada skupu $\sum$, ako i samo ako se ona može pretstaviti u obliku

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_m , \tag{I.o.6}$$

gde su x_j $(j=1,2,\dots,m)$ - disjunktne funkcije iz kugle poluprečnika r prostora $\hat{l}_p$. Pri tome, ako x pripada $\sum$, tada za funkciju x postoje dekompozicije (I.o.6) u kojima je

$$m \le 2^p r^{-p} \|x\|_p^p + 1 . \tag{I.o.7}$$

D o k a z : Očevidno je funkcija x, za koju postoji dekompozicija (I.o.6), iz skupa $\sum$, jer medjusobna disjunktnost sabiraka u (I.o.6) za svako $s\in\mathbb{N}$ - povlači da je najviše jedan različit od nule.

Obrnuto, ako $x\in\sum$, tada se lako može naći disjunktno razbijanje (konačno) $\{N_1,N_2,\dots,N_m\}$ skupa $\mathbb{N}$, takvo da je $\|P_{N_j}x\|_p\le r$, $(j=1,\dots,m)$. Stavljajući $x_j = P_{N_j}x$ - dobijamo dekompoziciju (I.o.6). Pri tome, bez gubitka opštosti, može se smatrati da je za svako, osim možda jednog j, ispunjeno $\|x_j\|_p \geq r/2$. Zaista, ako je naprimer $\|x_{j'}\|_p < r/2$ i $\|x_{j''}\|_p < r/2$, tada se elementi $x_{j'}$ i $x_{j''}$ u (I.o.6) mogu zameniti elementom $x_{j'} + x_{j''}$, koji je disjunktan sa ostalim i važi $\|x_{j'} + x_{j''}\|_p \leq r$. Na taj način iz (I.o.6), dobijamo

$$\|x\|_p^p = \sum_{j=1}^{m} \|x_j\|_p^p \geq (m-1)(r/2)^p,$$

čime je lema dokazana.

Skup $\sum$ možemo okarakterisati i pomoću sledećeg funkcionala:

$$H(x) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{m} \|P_{D_j}x\|_p \ : \|P_{D_j}x\|_p = 1,\ j=1,\dots,m\right\} \quad (\text{I.o.8})$$

gde se infimum uzima preko svih disjunktnih particija $\{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ skupa $\mathbb{N}$. Jasno je da funkcional (I.o.8) uzima samo nenegativne vrednosti na l_p, gde je i vrednost $H(x) = \infty$ - moguća. Za dato $r > o$ označimo $\sum(o,r)$ - skup svih $x \in l_p$, takvih da je $H(x/r) < \infty$. Nije teško zapaziti da važi jednakost: $\sum = \sum(o,r)$.

Procena funkcionala (I.o.8) u konkretnim prostorima nije jednostavna, no za prostore l_∞ i l_∞^o , skoro je očevidno da važi

$$H(x) = \begin{cases} \|x\| & , \|x\|_\infty \leq 1 \\ \infty & , \|x\|_\infty > 1 \end{cases}.$$

I.I. U s l o v i d e l o v a n j a o p e r a t o r a s u p e r p o z i c i j e i z ℓ_p u ℓ_q

Ovde ćemo dati potrebne i dovoljne uslove delovanja operatora superpozicije (I.o.1) iz prostora ℓ_p u prostor ℓ_q, naime tačna je.

<u>T e o r e m a I.1.1.</u> Neka je $1 \leq p,q < \infty$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

a) Operator F deluje iz ℓ_p u ℓ_q;

b) Postoji funkcija $a(s) \in \ell_q$ i konstante $\delta > o$, $n \in \mathbb{N}$, $b \geq o$ – za koje je

$$|f(s,u)| \leq a(s) + b|u|^{p/q} \quad (s \geq n,\ |u| \leq \delta); \quad (\mathrm{I.1.1})$$

c) Za svako $\varepsilon > o$ postoje – funkcija $a_\varepsilon(s) \in \ell_q$ i konstante $\delta_\varepsilon > o$, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $b_\varepsilon \geq o$, za koje je $\|a_\varepsilon(s)\|_q \leq \varepsilon$ i

$$|f(s,u)| \leq a_\varepsilon(s) + b_\varepsilon|u|^{p/q} \quad (s \geq n_\varepsilon,\ |u| \leq \delta_\varepsilon). \quad (\mathrm{I.1.2})$$

D o k a z : Tvrdjenja da iz b) sledi a) i iz c) sledi b) su očevidna. Pokažimo da iz a) sledi c). Pri tome, kao što smo videli, možemo pretpostaviti da je ispunjen uslov (I.o.3).

Dakle, neka je svojstvo a) – tačno. Pokažimo prvo, da za bilo koje $\varepsilon > o$ postoje takvi $\delta_\varepsilon > o$ i $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da nejednakost $\|x\|_p \leq \delta_\varepsilon$ povlači nejednakost $\|FP_{n_\varepsilon}x\|_q \leq \varepsilon$, gde je $P_n = P_{\{n+1,n+2,\dots\}}$. Zaista, u suprotnom za neko $\varepsilon > o$ i bilo koje prirodno n – možemo naći niz $x_n \in \ell_p$, takav da iz $\|x_n\|_p \leq 2^{-n}$, sledi $\|FP_n x_n\|_q > \varepsilon$. Kako je

$$\lim_{m \to \infty} \|F(P_n - P_m)x_n\|_q = \|FP_n x_n\|_q \quad ,$$

to za bilokoje n – postoji $n' > n$, takvo da je $\|F(P_n - P_{n'}) x_n\|_q >$ $> \varepsilon$. Sada po indukciji konstruišemo niz prirodnih brojeva n_k, za koji je $n_1 = 1$ i $n_{k+1} = (n_k)'$; $(k=1,2,\dots)$. Još više, tada su tačne sledeće nejednakosti

$$\|(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}, \quad \|F(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}\|_q > \varepsilon .$$

Stavimo

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k} \quad ,$$

tada iz

$$\left(\sum_{s=1}^{\infty} |\hat{x}(s)|^p\right)^{1/p} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=n_k+1}^{n_{k+1}} |x_{n_k}(s)|^p\right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \quad ,$$

zaključujemo da $\hat{x}$ pripada $\hat{l}_p$. Sa druge strane, relacija

$$\left(\sum_{s=1}^{\infty} |f(s,\hat{x}(s))|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=n_k+1}^{n_{k+1}} |f(s,x_{n_k}(s))|^q\right)^{1/q} \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^q\right)^{1/q}$$

pokazuje da $F\hat{x}$ ne pripada $\hat{l}_q$, što protivureči pretpostavci da je a) tačno.

Za unapred zadato $\varepsilon > o$, definisaćemo funkciju

$$f_\varepsilon(s,u) = \max\left\{o, |f(s,u)| - 2^{p/q} \delta_\varepsilon^{-p/q} \varepsilon |u|^{p/q}\right\} \qquad (I.1.3)$$

i za svaku funkciju $x(s)$ iz $\hat{l}_p$, koja zadovoljava uslov

$\left|P_{n_c} x(s)\right| \leq \delta_\varepsilon$, stavimo:

$$D(x) = \left\{ s > n_\varepsilon \; : \left| f(s,x(s)) \right| \geq 2^{p/q} \delta_\varepsilon^{-p/q} \varepsilon \left| x(s) \right|^{p/q} \right\} \qquad (I.1.4)$$

i na kraju $\hat{x} = P_{D(x)} x$.

Na osnovu leme 1, funkciju $\hat{x}$ možemo predstaviti u obliku najviše $2^p \delta_\varepsilon^{-p} \|\hat{x}\|_p^p + 1$ - medjusobno disjunktnih sabiraka z_1, $z_2, \dots, z_m$, sa svojstvom $\|z_j\|_p \leq \delta_\varepsilon$ $(j=1,\dots,m)$. Imajući u vidu i uslov (I.o.3), dobijamo:

$$\sum_{s>n_\varepsilon} |f_\varepsilon(s,x(s))|^q = \sum_{s>n_\varepsilon} |f_\varepsilon(s,\hat{x}(s))|^q = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s>n_\varepsilon} |f_\varepsilon(s,z_j(s))|^q \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{s>n_\varepsilon} |f(s,z_j(s))|^q - \sum_{s>n_\varepsilon} 2^p \delta^{-p} \varepsilon^q |z_j(s)|^p \leq$$

$$\leq m\varepsilon^q - 2^p \delta_\varepsilon^{-p} \varepsilon^q \|\hat{x}\|_p^p \leq \varepsilon^q ,$$

odakle je $\|F_\varepsilon P_{n_\varepsilon} x\|_q \leq \varepsilon$. Dakle, iz nejednakosti

$$|x(s)| \leq \delta_\varepsilon , \quad (s > n_\varepsilon) \qquad (I.1.5)$$

sledi nejednakost

$$\sum_{s>n_\varepsilon} |f_\varepsilon(s,x(s))|^q \leq \varepsilon^q . \qquad (I.1.6)$$

Iz relacija (I.1.5) i (I.1.6) , sledi

$$\sum_{s>n_\varepsilon} |a_\varepsilon(s)|^q \leq \varepsilon^q ,$$

gde je

$$a_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0 , \text{ ako je } s \leq n_\varepsilon ; \\ \sup\limits_{|u|\leq \delta_\varepsilon} |f_\varepsilon(s,u)| , \text{ ako je } s > n_\varepsilon , \end{cases}$$

a iz (I.1.3) i (I.1.4) - sledi da je

$$a_\varepsilon(s) \geq f_\varepsilon(s,u) \geq |f(s,u)| - 2^{p/q} \delta^{-p/q}_\varepsilon \varepsilon |u|^{p/q} ,$$

za $|u| \leq \delta_\varepsilon$ i $s > n_\varepsilon$. Ako u gornjoj nejednakosti stavimo $b_\varepsilon = 2^{p/q} \delta_\varepsilon^{-p/q} \varepsilon$, dobijamo uslov (I.1.2) , čime je teorema u potpunosti dokazana.

I.2. Uslovi ograničenosti operatora superpozicije

Operator superpozicije (I.o.1), koji deluje iz l_p u l_q, pri uslovima teoreme I.1.1. nije čak ni lokalno ograničen, a da on ne mora biti ni ograničen na svim ograničenim skupovima prostora l_p, pokazuju jednostavni primeri, koje ćemo mi uskoro dati. Medjutim, ako su ispunjene odgovarajuće pretpostavke, tada se mogu formulisati uslovi lokalne ograničenosti operatora superpozicije (I.o.1). Naime, važi

<u>T e o r e m a I.2.1.</u> Neka je $1 \leq p,q<\infty$ i neka operator superpozicije (I.o.1), koji je generisan funkcijom $f(s,u)$, deluje iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q$. Tada je operator F lokalno ograničen ako i samo ako je svaka funkcija $f(s,u)$ $(s\in\mathbb{N})$ - ograničena.

D o k a z: Pokažimo prvo, da je uslov dovoljan. Neka su funkcije $f(s,u)$ $(s\in\mathbb{N})$ - ograničene (tj. svaka od njih je ograničena na svim ograničenim skupovima realne prave) i neka je $x_o\in\hat{l}_p$. Neka su dalje, δ i n - brojevi za koje, pri odgovarajućim $a(s)\in\hat{l}_q$ i $b\geq o$ - važi (I.1.1). Stavimo $\varrho=\delta/2$ i pokažimo da je operator F ograničen na $B(x_o,\varrho)$. Neka je, u tom cilju $\hat{n}\in\mathbb{N}$, takav da je: $\hat{n}>n$ i $|x_o(s)|\leq\varrho$ za $s>\hat{n}$. Stavimo,

$$m(s) = \sup_{|u-x_o(s)|\leq\varrho} |f(s,u)|. \tag{I.2.1}$$

Tada, pri $\|x-x_o\|_p\leq\varrho$ za $s>\hat{n}$, važe nejednakosti $|x(s)|\leq\varrho$ i obzirom na (I.2.1) i (I.1.1), imamo

$$\|Fx\|_q = \sum_{s=1}^{\infty} |f(s,x(s))|^q \,^{1/q} \leq \left(\sum_{s=1}^{\hat{n}} m^q(s) + 2^q\sum_{s=\hat{n}+1}^{\infty} a^q(s)+2^q b^q\delta^p\right)^{1/q}.$$

Kako konstanta na desnoj strani poslednje nejednakosti ne zavisi od x, ograničenost operatora F na datoj kugli je pokazana.

Da bi pokazali da je uslov teoreme potreban, dovoljno je primetiti da za svako $s\in\mathbb{N}$ - funkcija $f(s,u)$ pretstavlja superpoziciju triju funkcija: potapanja $u\to u\cdot\chi_{\{s\}}$ realne ose u $\hat{l}_p$, operatora F i surjekcije $y\to y(s)$ prostora $\hat{l}_q$ i realne prave $\mathbb{R}$. Kako su prva i treća funkcija ograničene, to iz lokalne ograničenosti operatora F sledi lokalna ograničenost funkcije $f(s,u)$. Ostaje da primetimo, da su svojstva lokalne ograničenosti i ograničenosti (tj. ograničenosti na svakom ograničenom skupu) - kod skalarnih funkcija skalarne promenljive - ekvivalentna i teorema je dokazana.

Funkcija $f(s,u) = u^s$ - generiše operator superpozicije $Fx(s) = [x(s)]^s$ i prema teoremi I.1.1. - on očito deluje iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q$, medjutim on nije ograničen ni na jednoj kugli radijusa većeg od jedinice. U sledećoj teoremi nalazimo potrebne i dovoljne uslove ograničenosti operatora (I.o.1).

<u>T e o r e m a I.2.2.</u> Neka je $1 \le p,q < \infty$. Operator superpozicije F je ograničen operator iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q$, ako i samo ako za bilokoje $r > o$, važi nejednakost

$$|f(s,u)| \le a_r(s) + b_r |u|^{p/q} \quad (|u| \le r) \quad (I.2.2)$$

gde je $a_r(s) \in \hat{l}_q$ i $b_r \ge o$. Pri tome važe nejednakosti:

$$\mu_F(r) \le \nu_F(r) \le \|F\theta\|_q + (1+ 2^{p/q})\mu_F(r) \quad (o < r < \infty) \quad (I.2.3)$$

gde je $\mu_F(r)$ - funkcija rasta operatora F:

$$\mu_F(r) = \sup_{\|x\|_p \le r} \|Fx\|_q \quad (I.2.4)$$

a funkcija $\nu_F(r)$ - definisana pomoću:

$$\nu_F(r) = \inf \{ \|a\|_q + b\, r^{p/q} : (a,b) \in T(f) \} \quad (I.2.5)$$

gde je $T(f)$ - skup svih parova (a,b), za koje važi (I.2.2).

D o k a z : Pretpostavimo da funkcija f - koja generiše operator superpozicije (I.o.1), zadovoljava uslov (I.2.2) i neka je $\|x\|_p \leq r$; tada je

$$\sum_{s=1}^{\infty} |f(s,x(s))|^q \leq \sum_{s=1}^{\infty} \left[a_r(s) + b_r |x(s)|^{p/q} \right]^q ,$$

odnosno

$$\|Fx\|_q \leq \|a_r(s)\|_q + b_r \|x\|^{p/q} \leq \|a_r(s)\|_q + b_r r^{p/q} . \qquad (I.2.6)$$

Iz (I.2.6) sledi ograničenost operatora F na B(o,r) i leva nejednakost u (I.2.3).

Uslov (I.2.2) - je potreban. Neka je operator F ograničen na B(o,r), drugim rečima iz $\|x\|_p \leq r$ sledi $\|Fx\|_q \leq M_r \leq$ $\leq \sup_{\|x\|_p \leq r} \|Fx\|_q = \mu_F(r)$. Uvodimo pomoćnu funkciju

$$f_r(s,u) = \max \left\{ o, |f(s,u)| - |f(s,o)| - 2^{p/q} r^{-p/q} \mu_F(r) |u|^{p/q} \right\} \qquad (I.2.7)$$

i stavljamo $\hat{x} = P_{D(x)} x$, gde je

$$D(x) = \left\{ s \in \mathbb{N} : |f(s,x(s))| \geq |f(s,o)| + 2^{p/q} r^{-p/q} \mu_F(r) |x(s)|^{p/q} \right\} .$$

Koristeći lemu 1, imamo

$$\sum_{s=1}^{\infty} | f_r(s,x(s))|^q = \sum_{s=1}^{\infty} |f_r(s,\hat{x}(s))|^q \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{\infty} |f(s,x_j(s))|^q - \sum_{s=1}^{\infty} |f(s,o)|^q - 2^p r^{-p} \mu_F^q(r) \sum_{s=1}^{\infty} |x_j(s)|^p \leq$$

$$\leq (2^p r^{-p}\|\hat{x}\|_p^p + 1)\mu_F^q(r) - 2^p r^{-p}\mu_F^q(r)\|\hat{x}\|_p^p = \mu_F^q(r) ,$$

dakle

$$\|F_r x\|_q \leq \mu_F(r) \quad (|x(s)| \leq r,\ x \in l_p).$$

Ako stavimo $\hat{a}_r(s) = \sup_{|u|\leq r} |f_r(s,u)|$ iz poslednje nejednakosti, dobijamo

$$\sum_{s=1}^{\infty} \hat{a}_r(s)^q = \sum_{s=1}^{\infty} (\sup_{|x(s)|\leq r} | f_r(s,x(s)) |)^q \leq \mu_F^q(r) ,$$

drugim rečima, $\|\hat{a}_r(s)\|_q \leq \mu_F(r)$. Očevidno je $f_r(s,u) \leq \hat{a}_r(s)$ za $|u| \leq r$, pa ako uvedemo oznake $a_r(s) = \hat{a}_r(s) + |f(s,o)|$ i $b_r = 2^{p/q} r^{-p/q} \mu_F(r)$ - iz (I.2.7) dobijamo nejednakost (I.2.2), čime je neophodnost uslova dokazana.

Iz (I.2.5) i ograničenosti funkcije $\hat{a}_r(s)$, dobijamo

$$\vartheta_F(r) = \|\hat{a}_r(s)\|_q + \|F\theta\|_q + 2^{p/q} r^{-p/q} \mu_F(r) r^{p/q} \leq$$

$$\leq \|F\theta\|_q + (2^{p/q} + 1)\mu_F(r) ,$$

čime je teorema dokazana.

Teoremu I.2.2. mogli smo dokazati i na sledeći način: prvo pokazati jednostavnije tvrdjenje teoreme za $p=q=1$, a zatim uz pomoću homeomorfizma prostora l_p i l_q - koji se realizuje, npr. pomoću

$$T_{p,q}x(s) = |x(s)|^{p/q} \operatorname{sign}\{x(s)\}, \qquad (I.2.8)$$

lako pokazati opšti slučaj. To je moguće, jer operator superpozicije $T_{1,q}F\, T_{p,1}$ - pretstavlja kompoziciju operatora koji ograničene skupove iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_1$, iz $\hat{l}_1$ u $\hat{l}_1$ i iz $\hat{l}_1$ u $\hat{l}_q$ preslikavaju u ograničene skupove.

Na kraju ovog poglavlja, primetimo da u n e p r e k i d n o m slučaju (kada kažemo - neprekidan slučaj mislimo po pravilu, na operator /I/ u prostorima $L_p(\Omega,\mu)$, gde je mera neprekidna; s tim u vezi - za naš slučaj koristićemo sintagmu - „diskretan slučaj"), uz pretpostavku (I.o.3) (v. [3]), autori su pokazali da važi

$$\mu_F(r) \leq \nu_F(r) \leq 2\mu_F(r),$$

a u radu [4], da je $\mu_F(r) = \nu_F(r)$.

I.3. U s l o v i n e p r e k i d n o s t i i r a v n o m e r n e n e p r e k i d n o s t i o p e r a t o r a s u p e r p o z i c i j e

Neka su funkcije $f(s,u)$ $(s \in \mathbb{N})$, koje generišu operator superpozicije (I.o.1), neprekidne (po $u \in \mathbb{R}$) i neka $x_o \in \hat{l}_p$. Neka je, dalje, ε proizvoljan pozitivan broj i δ_ε, n_ε - brojevi za koje, pri odgovarajućim $a_\varepsilon(s) \in \hat{l}_q$ $(\|a_\varepsilon\|_q \leq \varepsilon)$ i $b_\varepsilon \geq o$

- važi nejednakost (I.1.2). Stavimo $2\eta = \delta_\varepsilon$ i neka $\hat{n}$ bude prirodan broj za koji važi: $\hat{n} \geq n_\varepsilon$ i $\|P_{\hat{n}}x_o\|_p \leq \min\{\eta, (b_\varepsilon^{-1}\varepsilon)^{q/p}\}$. Tada, ako je $\|x-x_o\|_p \leq \eta$ i $s > \hat{n}$ - važi $|x(s)| \leq \leq \delta_\varepsilon$; pa zbog (I.1.2), imamo

$$\begin{aligned} |f(s,x_o(s))| &\leq a_\varepsilon(s) + b_\varepsilon |x_o(s)|^{p/q} , \\ |f(s,x(s))| &\leq a_\varepsilon(s) + b_\varepsilon |x(s)|^{p/q} . \end{aligned} \tag{I.3.1}$$

Iz nejednakosti

$$\|Fx-Fx_o\|_q \leq \Big(\sum_{s=1}^{\hat{n}} |f(s,x(s)) - f(s,x_o(s))|^q\Big)^{1/q} + \|FP_{\hat{n}}x\|_q + \|FP_{\hat{n}}x_o\|_q ,$$

i relacija (I.3.1), sledi da je

$$\begin{aligned} \|Fx - Fx_o\|_q &\leq \Big(\sum_{s=1}^{\hat{n}} |f(s,x(s)) - f(s,x_o(s))|^q\Big)^{1/q} + \\ &+ 2\|a_\varepsilon\|_q + b_\varepsilon\Big(\|P_{\hat{n}}x(s)\|_p^{p/q} + \|P_{\hat{n}}x_o(s)\|_p^{p/q}\Big) \leq \\ &\leq \Big(\sum_{s=1}^{\hat{n}} |f(s,x(s)) - f(s,x_o(s))|^q\Big)^{1/q} + 3\varepsilon + b_\varepsilon\Big[(b_\varepsilon^{-1}\varepsilon)^{q/p} + \|x-x_o\|_p\Big]^{p/q} . \end{aligned}$$

Pošto smo pretpostavili da su funkcije $f(s,u)$ $(s \in \mathbb{N})$ - neprekidne, možemo izabrati $\varrho > 0$ takvo da je $\varrho \leq \eta$ i za $\|x-x_o\|_p \leq \varrho$, prvi sabirak na desnoj strani poslednje nejednakosti neće biti veći od ε. Pri tome, bez umanjenja opštosti, možemo računati da poslednji sabirak na desnoj strani iste nejednakosti - neće biti veći od 2ε. Dakle, za $\|x-x_o\|_p \leq \varrho$ važi $\|Fx - Fx_o\|_q \leq 6\varepsilon$, drugim rečima operator superpozicije F je neprekidan u tački $x_o \in \mathit{l}_p$, čime smo dokazali prvi deo sledeće teoreme:

<u>T e o r e m a I.3.1.</u> Neka operator superpozicije (I.o.1) - koji je generisan funkcijom $f(s,u)$ - deluje iz l_p u l_q $(1 \leq p,q<\infty)$. Tada je operator F neprekidan, ako i samo ako je svaka funkcija $f(s,u)$ $(s \in \mathbb{N})$ neprekidna.

Drugi deo ove teoreme (o neophodnosti uslova [1]), dokazuje se analogno inetom dokazu teoreme I.2.1. - jer je očito da su funkcije: $u \mapsto u\cdot\chi_{\{s\}}$ (potapanje $\mathbb{R}$ u l_p) i surjekcija $y \mapsto y(s)$, prostora l_q i $\mathbb{R}$ - neprekidne. Primetimo ovde da je rezultat ove teoreme, za slučaj $p=q=1$, dokazan u [2o].

Jednostavni primeri pokazuju da neprekidni operator superpozicije (I.o.1) iz l_p u l_q - nije obavezno (na ograničenim skupovima) i ravnomerno neprekidan. Naprimer, funkcija $f(s,u) = u\sin(\pi su)$ generiše neprekidan operator superpozicije F, koji deluje iz l_p u l_p (v. teoreme I.1.1 i I.3.1) - ali on nije ravnomerno neprekidan. Zaista, neka je

$$u_n(s) = \begin{cases} 2 + (1/2n), & \text{za } s=n \\ o, & \text{za } s\neq n \end{cases}$$

$$v_n(s) = \begin{cases} 2 - (1/2n), & \text{za } s=n \\ o, & \text{za } s\neq n . \end{cases}$$

Tada je $\|u_n\|_p \leq 5/2$ i $\|v_n\|_p < 5/2$, a $\|u_n - v_n\|_p = 1/n$, medjutim, kako je $\|Fu_n - Fv_n\|_p = 4$ - operator nije ravnomerno neprekidan na kugli $B(o,5/2)$.

[1]) Dovoljni uslovi su ustanovljeni ranije, v. [33].

<u>T e o r e m a I.3.2.</u> Neka je $1 \leq p,q < \infty$. Operatpr superpozicije (I.o.1), generisan funkcijom $f(s,u)$ - ravnomerno je neprekidan operator iz $\mathfrak{l}_p$ u $\mathfrak{l}_q$, ako i samo ako za bilokoje $r, \delta \geq 0$ i svako $\varepsilon > 0$, važi nejednakost

$$|f(s,u) - f(s,v)| \leq a_{r,\delta}(s) + b_{r,\delta}|u|^{p/q} + c_{r,\delta}|v|^{p/q} +$$

$$+ d_{r,\delta}|u - v|^{p/q} \quad (|u|,|v| \leq r, \ |u-v| \leq \delta) \quad (I.3.2)$$

gde je $\|a_{r,\delta}\|_q + (b_{r,\delta} + c_{r,\delta}) r^{p/q} \leq \varepsilon$, $d_{r,\delta} \geq 0$. Pri tome važe nejednakosti:

$$\omega_F(r,\delta) \leq \pi_F(r,\delta) \leq (1 + 2^{(p+q)/q})\omega_F(r,\delta) \quad (0 \leq \delta, r < \infty) \quad (I.3.3)$$

gde je $\omega_F(r,\delta)$ - modul neprekidnosti operatora (I.o.1) :

$$\omega_F(r,\delta) = \sup_{\|x\|_p,\ \|y\|_p \leq r,\ \|x-y\|_p \leq \delta} \|Fx - Fy\|_q , \qquad (I.3.4)$$

a $\pi_F(r,\delta)$ - funkcija definisana pomoću:

$$\pi_F(r,\delta) = \inf \left\{\|a\|_q + (b + c)r^{p/q} + d\delta^{p/q}\right\} \qquad (I.3.5)$$

gde se infimum uzima po svim (a,b,c,d), za koje važi (I.3.2).

D o k a z : Ako je ispunjen uslov (I.3.2), tada za $\|x\|_p$, $\|y\|_p \leq r$, $\|x - y\|_p \leq \delta$, važe nejednakosti:

$$|f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \le a_{r,\delta}(s) + b_{r,\delta}|x(s)|^{p/q} +$$

$$+ c_{r,\delta}|y(s)|^{p/q} + d_{r,\delta}|x(s) - y(s)|^{p/q},$$

za svako $s \in \mathbb{N}$, odakle lako sledi da je $\|Fx - Fy\|_q \le \pi_F(r,\delta)$. Ovim smo pokazali da je uslov (I.3.2) - dovoljan. Još više, uzimajući supremum na levoj strani, dobijamo i prvu nejednakost iz (I.3.3).

Pretpostavimo sada, da je operator (I.o.1) ravnomerno neprekidan na kugli $\|x\|_p \le r$ i uvedimo sledeću funkciju:

$$g_{r,\delta}(s,u) =$$

$$= \sup_{|t|\le\delta,\, -r-u\le t\le r-u} \max\left\{o, |f(s,u+t)-f(s,u)| - 2^{p/q}\delta^{-p/q}\omega_F(r,\delta)|t|^{p/q}\right\}$$

i oznake

$$D(t) = \left\{s\in\mathbb{N} : |f(s,x(s)+t(s)) - f(s,x(s))| \ge 2^{p/q}\delta^{-p/q}\omega_F(r,\delta)\,|t(s)|^{p/q}\right\},$$

$t' = P_{D(t)}t$. Na osnovu leme 1, imamo:

$$\sum_{s=1}^{\infty} |g_{r,\delta}(s,x(s))|^q = \sum_{s=1}^{\infty} |g_{r,\delta}(s,x'(s))|^q \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{\infty} |f(s,x_j(s)+t_j(s))-f(s,x_j(s))|^q - 2^p\delta^{-p}\omega_F^q(r,\delta)\sum_{s=1}^{\infty}|t_j(s)|^p\right) \le$$

$$\leq 2^p\delta^{-p}\omega_F^q(r,\delta)\|t'\|_p^p + \omega_F^q(r,\delta) - 2^p\delta^{-p}\omega_F^q(r,\delta)\|t'\|_p^p .$$

Odakle zaključujemo da je operator, generisan funkcijom $g_{r,\delta}(s,u)$ (označimo ga sa G) - ograničen na skupu $B(o,r)\subset \hat{l}_p$ i stavimo li $\sup_{|u|\leq r} |g_{r,\delta}(s,u)| = a_{r,\delta}(s)$ - iz definicije funkcije $g_{r,\delta}(s,u)$, sledi

$$a_{r,\delta}(s) \geq g_{r,\delta}(s,u) \geq |f(s,u+t)-f(s,u)| - 2^{p/q}\delta^{-p/q}\omega_F(r,\delta)|t|^{p/q} .$$

Primenimo li sada teoremu I.2.2. tj. ograničenost operatora G , koji je generisan funkcijom $g_{r,\delta}(s,u)$, povlači da je

$$g_{r,\delta}(s,u) \leq a_{r,\delta}(s) + 2^{p/q} r^{-p/q}\omega_F(r,\delta)|u|^{p/q} \qquad (|u|\leq r)$$

što, zajedno sa prethodno dokazanom nejednačinom, daje (I.3.2) u kojoj je

$$c_{r,\delta} = o , \; b_{r,\delta} = 2^{p/q} r^{-p/q}\omega_F(r,\delta) \quad i \quad d_{r,\delta} = 2^{p/q}\delta^{-p/q}\omega_F(r,\delta).$$

Nije teško videti da je

$$\|a_{r,\delta}(s)\|_q \leq \omega_F(r,\delta) \tag{I.3.6}$$

odakle zajedno sa (I.3.5) - dobijamo desnu nejednakost iz (I.3.3), čime je teorema u potpunosti dokazana.

Pre nego što damo jednu posledicu teoreme I.3.2. - treba primetiti da, zbog ravnomerne neprekidnosti operatora F, koji je generisan funkcijom $f(s,u)$ i ocene (I.3.6) iz upravo dokazane teoreme, za svako $\varepsilon > 0$ - imamo ocenu $\|a_{r,\delta}(s)\|_q + (b_{r,\delta} + c_{r,\delta})r^{p/q} \leq \varepsilon$.

Nameće se logično pitanje - pod kojim uslovima operator superpozicije (I.o.1) zadovoljava Lipšicov uslov na skupu - $B(o,r) \subset l_p$. U slučaju da je $p=q$ i bez pomoći teoreme I.3.2. - jasno je da operator superpozicije F, generisan funkcijom $f(s,u)$, zadovoljava Lipšicov uslov na kugli $B(o,r)$ (sa konstantom $k(r)$), ako i samo ako važi:

$$|f(s,u) - f(s,v)| \leq k(r)|u - v| \quad (|u|, |v| \leq r). \tag{I.3.7}$$

L e m a 2.(v. T. 19 u [40]) Neka su α, β i a_n takvi da je $0 < \alpha < \beta$ .. Tada važi nejednakost:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\beta}\right)^{1/\beta} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}.$$

Iz leme 2, sledi da je (I.3.7) - potrban (u slučaju $p \geq q$) odnosno dovoljan (za $p \leq q$) - uslov da operator (I.o.1) zadovoljava Lipšicov uslov. Medjutim, sve ovo i više od toga možemo, primenom teoreme I.3.2. - dobijamo sledećim tvrdjenjem:

Operator superpozicije (I.o.1), generisan funkcijom $f(s,u)$ - zadovoljava Lipšicov uslov na kugli $B(o,r) \subset l_p$, ako i samo ako važi relacija

$$\pi_F(r,\delta) = O(\delta) \qquad (0 \leq r < \infty). \tag{I.3.8}$$

Zbog nejednakosti (I.3.3) - dovoljnost uslova (I.3.8) je očevidna. Zaista, neka je (I.3.8) ispunjeno, tj. neka je

$$\lim_{\delta\to o} \frac{\pi_F(r,\delta)}{\delta} = M_r \qquad (o < M_r < \infty).$$

Tada za svako $\varepsilon > o$ iz (I.3.3), dobijamo

$$\|Fx - Fy\|_q \leq \omega_F(r,\delta) \leq \pi_F(r,\delta) \leq M_r(\|x-y\|_p + \varepsilon),$$

dakle F - zadovoljava Lipšicov uslov.

Ako F zadovoljava Lipšicov uslov na $B(o,r)$, tada zbog teoreme I.3.2. - odnosno nejednakosti (I.3.3) i gore ukazane ocene $\|a_{r,\delta}(s)\|_q + (b_{r,\delta} + c_{r,\delta})r^{p/q} \leq \varepsilon$, stavljajući u (I.3.5) $d = d_o\varepsilon^{-k}$, imamo

$$\pi_F(r,\delta) = \inf\{\|a\|_q + (b + c)r^{p/q} + d\delta^{p/q}\} \leq$$

$$\leq \inf\{\varepsilon + d_o\varepsilon^{-k}\delta^{p/q}\} \leq M\delta, \qquad \text{(I.3.9)}$$

gde je $M = (kd_o)^{(k+1)^{-1}}\left[1 + d_o(kd_o)^{-k}\right]$, a $k = (p-q)/q$. Jasno je da iz (I.3.9) sledi (I.3.8), čime je ispravnost gornjeg tvrdjenja dokazana.

I.4. Uslovi kompaktnosti i kondenziranja operatora superpozicije

U [16] je detaljno izučeno svojstvo apsolutne ograničenosti skupova u proizvoljnim idealnim prostorima, medjutim kao što smo u uvodu rekli ima razloga, da se posebno pozabavimo prostorima u kojima izostaje pretpostavka o neprekidnosti mere. Jasno, mi ćemo se ovde zadržati na opštim uslovima apsolutne ograničenosti skupova u $\hat{l}_q$ prostorima i s tim u vezi, na uslovima potpune neprekidnosti (kompaktnosti) operatora superpozicije (I.o.1).

Skup $M \subset \hat{l}_q$ - naziva se apsolutno ograničenim, ako je ([16])

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in M} \|P_n x(s)\|_q = 0.$$

(Operator P_n je - operator množenja karakterističnom funkcijom skupa $\{n+1, n+2, \dots\}$, v. str. 10). Odmah uočavamo da su pojmovi apsolutne ograničenosti skupa i njegove predkompaktnosti u našem slučaju, ekvivalentni. Prema tome, apsolutno ograničen operator, tj. operator koji ograničene skupove preslikava u apsolutno ograničene, nije ništa drugo - već potpuno neprekidan operator (jasno, $\hat{l}_q$ je Banahov prostor). Opšte uslove predkompaktnosti skupova u $\hat{l}_q$ prostorima, formulisaćemo i dokazati u analogu poznatoj Valle-Pussenovoj teoremi, koja se odnosi na neprekidan slučaj (v. [16]).

<u>Lema 3.</u> Neka je $1 \le q < \infty$ i $u_0(s)$ - proizvoljna pozitivna funkcija iz $\hat{l}_q$. Skup $M \subset \hat{l}_q$ apsolutno ograničen, ako i samo ako postoji, monotono rastuća na $(0, \infty)$ - funkcija $\Phi(u)$, za koju je

$$\lim_{u \to \infty} u^{-1} \Phi(u) = \infty \quad \text{i}$$

$$\sup_{x\in M} \| \Phi(u_o^{-1}(s)|x(s)|)u_o(s)\|_q < \infty . \qquad (I.4.1)$$

D o k a z: Neka je skup $M \subset l_q$ apsolutno ograničen. Stavimo

$$\Psi(n) = \sup_{x\in M} \Big(\sum_{s>n} |x(s)|^q \Big)^{1/q} .$$

Tada je $\lim_{n\to\infty} \Psi(n) = o$. Neka je $\{n_k\}$ - podniz prirodnih brojeva $o=n_o<n_1<\ldots<n_k<\ldots$, takav da red $\sum_{k=o}^{\infty} \Psi(n_k)$ - konvergira. Označimo sa $\{\delta_k\}$ - monotono rastući, sa gornje strane neograničen niz brojeva, za koji važi uslov

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \Psi(n_{k-1}) < \infty$$

i neka je φ - bilokoja monotono rastuća funkcija za koju je $\varphi(n_k) = \delta_k$ $(k=1,2,\ldots)$. Očevidno je da funkcija $\Phi(u) = u\varphi(u)$ $(o<u<\infty)$ - zadovoljava uslove leme. Neka je, dalje

$$S_k = \{ s\in \mathbb{N} : n_{k-1}u_o(s) < |x(s)| \le n_k u_o(s) \ , \ u_o(s) > o \},$$

za $k = 1,2,\ldots$. Za proizvoljno $x\in M$, imamo

$$\Big(\sum_{s=1}^{\infty} \Big|\Phi\Big[\frac{|x(s)|}{u_o(s)}\Big] u_o(s)\Big|^q\Big)^{1/q} \le \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{s\in S_k} \Big|\Phi\Big[\frac{|x(s)|}{u_o(s)}\Big] u_o(s)\Big|^q\Big)^{1/q} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{s\in S_k} \Big|\varphi\Big[\frac{|x(s)|}{u_o(s)}\Big] |x(s)|\Big|^q\Big)^{1/q} \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{s \in S_k} |\varphi(n_k)|^q |x(s)|^q \Big)^{1/q} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(n_k) \Big(\sum_{s \in S_k} |x(s)|^q \Big)^{1/q} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \Big(\sum_{s \geq n_k} |x(s)|^q \Big)^{1/q} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \Big[\sup_{x \in M} \Big(\sum_{s > n_{k-1}} |x(s)|^q \Big)^{1/q} \Big] = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \, \Psi(n_{k-1}) < \infty .$$

Ovim smo pokazali (I.4.1), odnosno neophodnost uslova. Uslov je dovoljan. Neka je $\varepsilon > o$. Za $u \geq \lambda$ ($o < \lambda < \infty$), važi nejednakost $u \leq \varepsilon \Phi(u)$ i ako je $u_o \in \hat{1}_q$ ($u_o(s) > o$), imamo:

$$\Big(\sum_{s>n} |x(s)|^q \Big)^{1/q} \leq \Big(\sum_{|x(s)| > \lambda u_o(s)} \frac{|x(s)|^q}{u_o(s)} u_o(s) \Big)^{1/q} +$$

$$+ \Big(\sum_{|x(s)| \leq \lambda u_o(s)} |x(s)|^q \Big)^{1/q} \leq$$

$$\leq \Big(\lambda^q \sum_{s>n} |u_o(s)|^q \Big)^{1/q} + \Big(\varepsilon^q \sum_{s>n} \Big| \Phi\Big[\frac{x(s)}{u_o(s)}\Big] u_o(s) \Big|^q \Big)^{1/q} \leq$$

$$\leq \lambda \Big(\sum_{s>n} |u_o(s)|^q \Big)^{1/q} + m\varepsilon \leq \varepsilon(\lambda + m),$$

gde je sa m - označena leva strana u (I.4.1). Iz poslednjeg niza nejednakosti, lako zaključujemo da je

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in M} \Big(\sum_{s>n} |x(s)|^q \Big)^{1/q} = o .$$

Dakle, skup M je apsolutno ograničen, čime je lema u potpunosti dokazana.

Iz leme 3 i teoreme I.2.2. - sledi

Teorema I.4.1. Neka je $1 \leq p,q < \infty$ i operator superpozicije (I.o.1) generisan funkcijom $f(s,u)$ - preslikava L_p u L_q. Tada je on potpuno neprekidan, ako i samo ako za bilo koje $r > o$ - postoji monotono rastuća, na (o,∞), funkcija Φ_r - za koju je $\lim\limits_{n \to \infty} u^{-1} \Phi_r(u) = \infty$ i

$$\Phi_r(u_o^{-1}(s)|f(s,u)|)u_o(s) \leq a_r(s) + b_r|u|^{p/q} \quad (|u| \leq r) \quad (I.4.2)$$

gde je $a_r(s) \in L_q$ i $b_r \geq o$.

Dokaz: Uslov je dovoljan. Neka je za svako $r > o$, obezbedjena egzistencija funkcije $\Phi_r(u)$, sa gore ukazanim svojstvima i neka važi (I.4.2). Pretpostavimo još da x pripada ograničenom skupu $M \subset B(o,r)$. Tada je $|x(s)| \leq r$ $(s \in \mathbb{M})$ i iz (I.4.2), lako sledi (v. teoremu I.2.2.):

$$\|\Phi_r(u_o^{-1}(s)|f(s,x(s))|)u_o(s)\|_q \leq \|a_r\|_q + b_r r^{p/q} \qquad (u_o(s) > o)$$

odnosno uslov (I.4.1) - leme 3, gde prirodno, umesto M stoji $F(M)$, tj. supremum se mora uzeti po svim $Fx \in F(M)$, gde je F - operator (I.o.1). Imajući u vidu da je L_q Banahov prostor iz leme 3 - sledi kompaktnost skupa $F(M)$.

Uslov je potreban. Ako je operator F kompaktan, tada iz leme 3 - sledi egzistencija funkcije $\Phi_r(u)$ - sa potrebnim nam osobinama i uslovom:

$$\sup \|\Phi_r(u_o^{-1}(s)|f(s,x(s))|)u_o(s)\|_q < \infty ,$$

odakle zaključujemo da je operator (označimo ga sa Φ_r), koji je generisan funkcijom $\Phi_r(u_o^{-1}(s)|f(s,u)|)u_o(s)$ - ograničen. Nejednakost (I.4.2) - sledi iz teoreme I.2.2. - čime je teorema dokazana.

U nastavku ovog poglavlja, razmotrićemo neke činjenice u vezi sa uslovima pod kojima je operator superpozicije (I.o.1) kondenzirajući i vezano s time , formulisati i dokazati dve teoreme. Prvo treba reći, da ćemo u l_p prostorima, za meru nekompaktnosti uzeti Hausdorfovu meru nekompaktnosti. Hausdorfova mera nekompaktnosti $\chi(M)$ - čija se vrednost, na ograničenom skupu M, definiše kao infimum pozitivnih brojeva ε, za koje skup M ima konačnu ε-mrežu - kao što je poznato (npr. [34]) u prostorima l_p, definiše se formulom

$$\chi(M) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} \|P_n x\|_p . \tag{I.4.3}$$

Potsetimo, da za operator F, koji deluje iz l_p u prostor l_q - kažemo da je (k,χ) -ograničen ili χ-kondenzujući , ako za bilokoji skup $M\subset B(x_o,r)\subset l_p$, važi

$$\chi(FM) \leq k\chi(M) . \tag{I.4.4}$$

<u>L e m a 4.</u> Neka operatori F i G, koji su generisani funkcijama $f(s,u)$ i $g(s,u)$ redom, deluju iz l_p u l_q $(1 \leq p,q < \infty)$. Neka je, dalje za svako $x\in l_p$, ispunjeno

$$|f(s,x(s))| \leq |g(s,x(s))|, \tag{I.4.5}$$

Tada je

$$\chi(FM) \leq \chi(GM) \ . \qquad (I.4.6)$$

D o k a z : Stepenovanjem nejednakosti (I.4.5) sa q i sumiranjem istih, dokaz postaje očevidan.

T e o r e m a I.4.2. Neka je $1 \leq p,q < \infty$ i neka operator superpozicije F, koji je generisan funkcijom $f(s,u)$ - deluje iz $\hat{1}_p$ u $\hat{1}_q$. Tada je operator F, χ-kondenzujući, tj. važi

$$\chi(FM) \leq k(r)\chi(M) \qquad (M \subset B(x_o,r) \subset \hat{1}_p) \qquad (I.4.7)$$

gde je x_o proizvoljna tačka, a

$$k(r) = r^{(p-q)/q} \inf \{ b_\varepsilon : |f(s,u)| \leq a_\varepsilon(s) + b_\varepsilon |u|^{p/q}, |u| \leq r, \ s > n \}.$$

D o k a z : Pre svega, veličina $k(r)$ je korektna, jer operator F deluje iz $\hat{1}_p$ u $\hat{1}_q$ - pa funkcija $f(s,u)$, koja ga generiše, zadovoljava uslove teoreme I.1.1. . Neka je $f_1(s,u) = a_\varepsilon(s) + b_\varepsilon |u|^{p/q}$ i F_1 - operator generisan ovom funkcijom. Jasno je da, pri izračunavanju veličine $\chi(F_1(M))$, funkcija $a_\varepsilon(s)$ ne igra bitnu ulogu, pa je za $x \in M \subset B(x_o,r) \subset \hat{1}_p$ ($x \in \hat{1}_p$ povlači $x^{p/q} \in \hat{1}_q$):

$$\chi(F_1(M)) = \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in M} b_\varepsilon \Big(\sum_{s>n} |x(s)|^p \Big)^{1/q} \leq b_\varepsilon r^{(p-q)/q} \chi(M).$$

Kako poslednja relacija važi za svako b_ε iz (I.1.1), to iz leme 4, direktno sledi (I.4.7) - čime je teorema dokazana.

Pošto u praktičnoj primeni svojstva kondenziranja operatora, osnovnu ulogu igra koeficijent kondenziranja, to ćemo se zadržati na njemu. Stavimo

$$H(r,\delta) = \sup_{M\subset B(o,r),\chi(M)\leq\delta} \chi(F(M)), \qquad (I.4.8)$$

gde je r poluprečnik kugle B, χ- Hausdorfova mera nekompaktnosti. Funkciju $H(r,\delta)$, nazvaćemo - funkcija kondenziranja operatora superpozicije F. Njeno detaljnije izučavanje, koliko možemo videti, nije nimalo jednostavno, pa ovde ćemo dati samo jednu njenu majorizaciju, ko ja se kod linearnih operatora pojednostavljuje, prelazeći u jednakost.

<u>T e o r e m a I.4.3.</u> Neka je $1 \leq p,q<\infty$ i neka operator superpozicije F, generisan funkcijom $f(s,u)$, deluje iz ℓ_p u ℓ_q. Tada važi nejednakost

$$H(r,\delta) \leq \delta^{p/q} \inf W(f;r,\delta), \qquad (I.4.9)$$

gde je $W(f;r,\delta)$ - skup konstanti $b \geq o$, za koje pri odgovarajućim $a(s)\in\ell_q$, $c \geq o$ i $n\in\mathbb{N}$, važi nejednakost

$$|f(s,u)-f(s,v)|\leq a(s) + b|u|^{p/q} + c|v|^{p/q} \quad (|u|,|v|\leq r, |u-v|\leq\delta).$$

D o k a z : Neka je - M proizvoljan skup iz kugle $B(o,r)$, $\delta>\chi(M)$ i $b\in W(f;r,\delta)$. Označimo sa $\{x_j(s):j=1,2,\ldots,m\}$- konačnu δ-mrežu skupa M. Neka je $x\in M$ i $\|x-x_j\|_p<\delta$; tada za dovoljno veliko k, imamo

$$\|P_kFx\|_q \leq \|P_kFx_j\|_q + \|P_k(Fx - Fx_j)\|_q \leq$$

$$\leq \|P_k F x_j\|_q + \|P_k a\|_q + b\|P_k x\|_p^{p/q} + c\|P_k x_j\|_p^{p/q} \leq$$

$$\leq \max_j \left(\|P_k F x_j\|_q + \|P_k a\|_q + c\|P_k x_j\|_p^{p/q}\right) + b\delta^{p/q} ,$$

odakle, dobijamo (I.4.9). Teorema je dokazana.

Koristeći (I.4.8), koeficijent kondenzacije operatora superpozicije (I.o.1), možemo definisati pomoću

$$k(r) = \sup_{o < \delta \leq r} \delta^{-1} H(r,\delta), \qquad \text{(I.4.1o)}$$

a iz teoreme I.4.3. - sledi ocena

$$k(r) \leq \sup_{o < \delta \leq r} \inf \delta^{(p-q)/q} W(f;r,\delta) , \qquad \text{(I.4.11)}$$

koja, u krajnjem slučaju kod linearnih operatora, prelazi u jednakost.

Ovde ćemo još, dati jedan primer. Neka je $f(s,u) = u^{1/2}/s$. Zbog očigledne nejednakosti

$$(1/s)u^{1/2} \leq 1/(2b^2 s^2) + (b^2/2)u ,$$

gde je $b > o$ i teoreme I.1.1. - operator superpozicije F - generisan ovom funkcijom, deluje u ℓ_p. Kako je $\inf (b^2/2) = o$, iz (I.4.7) - nalazimo da je $\chi(F(M)) = o$ (za bilokoji ograničeni skup iz ℓ_p), dakle F je kompaktan operator.

I.5. Operator superpozicije sa vrednostima u prostorima l_∞ i l_∞^o

Da li dobijeni rezultati u prethodnim poglavljima ostaju u važnosti, ako se operator superpozicije (I.o.1) - posmatra u okvirima prostora l_∞ i l_∞^o (u standardnijim oznakama m i c_o), tj. kada bar jedan od parametara p ili q uzima beskonačnu vrednost. Nije teško videti da formulisani i dokazani rezultati iz prethodnih poglavlja - ne važe. Stoga ćemo se u ovom i narednom poglavlju zadržati na operatoru (I.o.1) u ovim prostorima. Pošto, za naša razmatranja, očito nije bitno to što nizovi iz l_∞^o - konvergiraju nuli (mogu bilokom drugom broju konvergirati), svi rezultati se direktno prenose i na operator superpozicije u prostorima c (konvergentnih nizova) te ovaj nećemo posebno posmatrati.

Mi ćemo se sada opredeliti za samo nekoliko rezultata, analoga iznetim u I.1. - I.4. - što ne znači da se i ostali ne mogu dobiti - naprotiv!

<u>Teorema I.5.1.</u> Neka je $1 \le p < \infty$. Tada operator superpozicije (I.o.1), generisan funkcijom f(s,u), deluje iz l_p u l_∞ (u l_∞^o) - ako i samo ako, važi

$$\overline{\lim_{s\to\infty,\, u\to o}} |f(s,u)| < \infty \qquad \left(\lim_{s\to\infty,\, u\to o} f(s,u) = o \right). \tag{I.5.1}$$

Pri tome on je neprekidan, tada i samo tada, kada su funkcije f(s,u), ravnomerno po $s \in \mathbb{N}$ - neprekidne po u (funkcije f(s,u) - neprekidne po u). Pored toga, važe relacije

$$\mu_F(r) = \sup_{|u| \le r} |f(s,u)| \tag{I.5.2}$$

(v. (I.2.4));

$$\omega_F(r,\delta) = \sup_{|u|,|v|\le r,\ |u-v|\le\delta} |f(s,u - f(s,v)| , \qquad (I.5.3)$$

(v. (I.3.4));

$$H(r,\delta) = \lim_{s\to\infty} \sup_{|u|,|v|\le r, |u-v|\le\delta} |f(s,u)-f(s,v)| \qquad (I.5.4)$$

(v. (I.4.9)).

D o k a z : Relacije (I.5.2) - (I.5.4), su očevidne. U dokazu prvog dela teoreme, ograničićemo se na slučaj $F:\hat{l}_p \to \hat{l}_\infty$ - jer je dokaz potpuno isti i u slučaju da $F: \hat{l}_p \to \hat{l}^o_\infty$.

Uslov je dovoljan. Neka je $x\in\hat{l}_p$, proizvoljno i neka važi prvi deo uslova (I.5.1). Tada postoji $n_o\in\mathbb{N}$ i $\delta>o$, tako da za $|x(s)|<\delta$ i $s>n_o$ - važi $|f(s,x(s))|\le M$ (M je pozitivna konstanta), drugim rečima, niz $(Fx(s))$ - je, zbog relacije (I.o.1), ograničen; dakle $Fx\in\hat{l}_\infty$.

Neophodnost uslova (I.5.1) - pokazaćemo kontrapozicijom. Neka je, zato $\lim_{s\to\infty, u\to o} |f(s,u)| = \infty$, odnosno - za svako $\delta>o$ i svako $n\in\mathbb{N}$, postoji $x_n(s)$ - tako da važi

$$|x_n(s)| \le \delta 2^{-n}, \text{ povlači } |f(s,x_n(s))|>n, \quad s>n .$$

Stavimo $\hat{x}(s) = P_{\{1\}}x_1(s) + P_{\{2\}}x_2(s) + \dots$, gde su operatori $P_{\{i\}}$ - definisani na str. lo. Očito je $\hat{x}\in\hat{l}_p$ i $\|\hat{x}\|_p<\delta$. Još više, sledeći rezon kao u dokazu teoreme I.1.1. - nalazimo da je

$$f(s,\hat{x}(s)) = P_{\{1\}} f(s,x_1(s)) + \cdots ,$$

odakle sledi $\sup_s |f(s,\hat{x}(s))| \ge \sup_s P_{\{n\}} f(s,x_n(s)) \ge n;$

čime smo pokazali da $F\hat{x} \in \mathit{l}_{\infty}$.

Neka je sada operator superpozicije (I.o.1) - iz l_p u l_{∞}, neprekidan u tački $x_o \in \mathit{l}_p$. Tada za svako $\varepsilon > o$, postoji $\delta > o$, tako da iz $\|x-x_o\|_p \leq \delta$ sledi $\|Fx-Fx_o\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Neka je $s_o \in \mathbb{M}$, proizvoljno; tada iz $|\ell - x_o(s_o)| \leq \delta$, sledi

$$|f(s_o,\hat{\ell}(s)) - f(s_o,x_o(s_o))| \leq \|F\hat{\ell} - Fx_o\|_{\infty} \leq \varepsilon ,$$

gde je

$$\hat{\ell}(s) = \begin{cases} x_o(s) & , \quad s \neq s_o \\ \ell & , \quad s = s_o \end{cases} .$$

Dakle, funkcija $f(s_o,x(s_o))$ - je neprekidna u tački x_o i iz njene proizvoljnosti i očevidne nezavisnosti δ od $s \in \mathbb{M}$, sledi prvi deo tvrdjenja - o neprekidnosti operatora superpozicije $F\colon \mathit{l}_p \to \mathit{l}_{\infty}$. Obrnuto, ako su funkcije $f(s,u)$ - neprekidne po u (ravnomerno po $s \in \mathbb{M}$), tada iz

$$\|Fx - Fx_o\|_{\infty} = \sup_{s \in \mathbb{M}} |f(s,x(s)) - f(s,x_o(s))|,$$

sledi neprekidnost operatora F (u tački $x_o \in \mathit{l}_p$), čime je teorema dokazana.

U dokazu gornje teoreme, uloga prostora - u kome je domen operatora superpozicije (I.o.1) - očito nije presudna, pa se rezultat slobodno može preneti i na operator koji deluje iz l^o_{∞} u l_{∞} (odnosno l^o_{∞}); potrebni i dovoljni uslovi toga delovanja su u relacijama (I.5.1).

I.6. Operator superpozicije na prostorima l_∞ i l_∞^0

Na kraju prethodnog poglavlja, započeli smo nešto što ćemo ovde malo detaljnije analizirati. Naime, cilj ovog paragrafa je - izučiti neke analoge tvrdjenja iznetih u dosadašnjim razmatranjima, tačnije slučaj delovanja operatora superpozicije (I.o.1) iz prostora l_∞ i l_∞^0 u neki od prostora l_q (gde je q - konačno), l_∞ ili l_∞^0.

<u>Teorema I.6.1.</u> Operator superpozicije (I.o.1) - generisan funkcijom $f(s,u)$, deluje iz l_∞^0 u l_q $(1 \leq q < \infty)$, odnosno u l_∞^0 ili u l_∞, ako i samo ako, za neko $n \in \mathbb{N}$ i $\delta > 0$, važi

$$|f(s,u)| \leq a(s) \qquad (|u| \leq \delta\ ,\ s \geq n\ ), \quad (I.6.1)$$

gde je $a(s)$ - funkcija iz l_q, odnosno iz l_∞^0 ili l_∞. U slučaju da vrednosti operatora leže u l_q ili l_∞^0 - on je neprekidan, tada i samo tada, kada su funkcije $f(s,u)$ $(s \in \mathbb{N})$ neprekidne po u ; a u slučaju da vrednosti leže u l_∞ - on je neprekidan, ako i samo ako su funkcije $f(s,u)$, ravnomerno po $s \in \mathbb{N}$, neprekidne po u.

D o k a z : Deo tvrdjenja teoreme, koji se odnosi na potrebne i dovoljne uslove neprekidnosti - dokazuje se potpuno isto kao u teoremi I.5.1. i zato ćemo se zadržati samo na dokazu prvog dela teoreme uz ograničenja da to činimo samo za slučaj kada je kodomen operatora (I.o.1) u l_q $(1 \leq q < \infty)$.

Pretpostavimo da operator superpozicije (I.o.1) deluje iz l_∞^0 u l_q. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ i $n(\varepsilon)$ iz $\mathbb{N}$, tako da iz $\|x\|_\infty \leq \delta(\varepsilon)$, sledi $\|FP_{n(\varepsilon)}x\|_q \leq \varepsilon$, gde su poeratori P_n - definisani na lo. strani. Zaista, u protivnom - postojalo bi $\varepsilon > 0$, takvo da za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\delta > 0$, možemo naći niz $x_n \in l_\infty^0$ - takav da iz $\|x_n\|_\infty \le \delta 2^{-n}$, sledi da je $\|FP_n x_n\|_q > \varepsilon$. Kako je

$$\lim_{m \to \infty} \|F(P_n - P_m)x_n\|_q = \|FP_n x_n\|_q ,$$

to za svako n, postoji $n' \in \mathbb{N}$ - da iz $n' > n$ - imamo $\|F(P_n - P_{n'})x_n\|_q > \varepsilon$. Konstrujišimo podniz prirodnih brojeva $\{n_k\}$, takav da je $n_1 = 1, \ldots, n_{k+1} = (n_k)'$, $(k=1,2,\ldots)$ i da važe relacije:

$$\|(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}\|_\infty \le \delta 2^{-k}, \quad \|F(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}\|_q > \varepsilon.$$

Stavimo $\hat{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}$; tada je

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\hat{x}(s)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=n_k+1}^{n_{k+1}} |x_{n_k}(s)| \right) \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} ,$$

odakle zaključujemo da $\hat{x} \in l_1 \subset l_\infty^0$. Još više,

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \|(P_{n_k} - P_{n_{k+1}})x_{n_k}\|_\infty \le \delta .$$

Medjutim, iz

$$\left(\sum_{s=1}^{\infty} |f(s,\hat{x}(s))|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=n_k+1}^{n_{k+1}} |f(s,x_{n_k}(s))|^q \right)^{1/q},$$

pošto je poslednja suma veća od $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^q\right)^{1/q}$, zaključujemo da $F\hat{x}$ ne pripada prostoru l_q.

Za funkciju $f(s,u)$, koja generiše operator superpozicije iz l_∞^o u l_q - očito važi $f(s,o) = h(s)$ i $h \in l_q$; posmatramo sledeću funkciju:

$$f_h(s,u) = \max\left\{o, \ |f(s,u)| - |h(s)|\right\}. \qquad (I.6.2)$$

Sa $D(x)$ - označimo skup svih $s > n(\varepsilon)$, takvih da je $|h(s)| \leq |f(s,x(s))|$ i $x' = P_{D(x)}x$. Tada za $x \in l_\infty^o$ ($|x(s)| \leq \delta(\varepsilon)$, $s > n(\varepsilon)$), imamo:

$$\left(\sum_{s>n(\varepsilon)} |f_h(s,x(s))|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{s>n(\varepsilon)} |f_h(s,x'(s))|^q\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s>n(c)} |f(s,x'(s))|^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{s=1}^{\infty} |h(s)|^q\right)^{1/q} \leq \varepsilon + \|h\|_q .$$

Prema tome, za $\|x(s)\|_\infty \leq \delta(c)$, sledi

$$\left(\sum_{s>n(c)} |f_h(s,x(s))|^q\right)^{1/q} \leq \varepsilon + \|h\|_q ,$$

odakle sledi da je i $a_\varepsilon(s) \in l_q$, gde je $a_\varepsilon(s) = o$, za $s \leq n(\varepsilon)$ i $a_\varepsilon(s) = \sup_{|u| \leq \delta(\varepsilon)} |f_h(s,u)|$, za $s > n(\varepsilon)$.

Iz definicije funkcija $a_\varepsilon(s)$ i $f_h(s,u)$, sledi

$$a_\varepsilon(s) \geq f_h(s,u) \geq |f(s,u)| - |h(s)|, \ |u| \leq \delta(\varepsilon),$$

i stavimo li $a(s) = a_\varepsilon(s) + h(s)$ u poslednjoj relaciji, dobijamo relaciju (I.6.1). Pošto je obrnuto tvrdjenje, direktna posledica činjenice da $a(s) \in \hat{l}_q$ - teorema je u potpunosti dokazana.

<u>T e o r e m a I.6.2.</u> Operator superpozicije (I.o.1), generisan funkcijom $f(s,u)$ - deluje iz $\hat{l}_\infty$ u $\hat{l}_q$ $(1 \leq q < \infty)$, odnosno u $\hat{l}^o_\infty$ ili $\hat{l}_\infty$ - ako i samo ako, važi

$$|f(s,u)| \leq a_r(s), \quad (|u| \leq r,\ o < r < \infty) \tag{I.6.3}$$

gde je - $a_r(s)$ funkcija iz $\hat{l}_q$, $\hat{l}^o_\infty$ ili $\hat{l}_\infty$, zavisno od toga u kome od njih leži kodomen operatora (I.o.1). U tom slučaju operator je ograničen, tada i samo tada - kad važi relacija (I.6.3).

D o k a z : Jasno je da se dokaz prvog dela teoreme I.6.1. može bez bitnih izmena i ovde preneti, pa odmah prelazimo na deo teoreme, koji se odnosi na uslove ograničenosti operatora $F: \hat{l}_\infty \to \hat{l}_q$.

Uslov je potreban. Neka je operator F ograničen na skupu $B(o,r) \subset \hat{l}_\infty$, tj. za $x \in B(o,r)$, sledi $\|Fx\|_q \leq M \leq \mu_F(r)$; funkcija rasta operatora - $\mu_F(r)$, definisana je pomoću (I.2.4).

Razmotrimo funkciju:

$$f_r(s,u) = \begin{cases} |f(s,u)| - |f(s,o)| - \mu_F(r)\, 2^{-s/q}, & s \in D(x) \\ 0, & s \in \mathbb{M} \setminus D(x) \end{cases} \tag{I.6.4}$$

gde je $D(x) = \{s : |f(s,x(s))| \geq |f(s,o)| + \mu_F(r)\, 2^{-s/q}\}$ i neka bude $\bar{x} = P_{D(x)}x$. Slično, kao kod dokaza teoreme I.2.2. dobijamo, da je:

$$\Big(\sum_{s=1}^{\infty} |f_r(s,x(s))|^q\Big)^{1/q} \leq 3\mu_F(r),$$

odakle vidimo da je i operator soperpozicije, generisan funkcijom (I.6.4), ograničen na kugli $B(o,r)\subset l_\infty$. Još više, stavimo li $\bar{a}_r(s) = \sup\limits_{|u|\leq r} |f_r(s,u)|$ $(o<r<\infty)$ - iz gornje nejednakosti, dobićemo da $\bar{a}_r(s)\in l_q$ i iz $\bar{a}_r(s) \geq f_r(s,u)$ relacijom (I.6.4), lako dolazimo do (I.6.3).

Da je uslov (I.6.3) dovoljan, sledi iz očigledne nejednakosti $\|Fx\|_q \leq \|a_r(s)\|_q$, čime smo teoremu dokazali.

I.7. Uslovi diferencijbilnosti operatora superpozicije

U ovom poglavlju ćemo dati zapažanja u vezi sa glatkosti operatora superpozicije (I.o.1).

Za funkciju $a(s)$ - kažemo da je multiplikator iz l_p u l_q, ako je $a(s)h(s)\in l_q$, za svako $h(s)\in l_p$. Kao što je poznato, skup svih multiplikatora l_q/l_p - iz prostora l_p u prostor l_q, sa normom

$$\|a\|_{l_q/l_p} = \sup_{\|h\|_p\leq 1} \|ah\|_q \tag{I.7.1}$$

je Banahov prostor. Neka je $1 \leq p,q<\infty$. Tada za $p>q$, iz [1])

$$\sum_{s=1}^{\infty}|a(s)h(s)|^q \leq\Big(\sum_{s=1}^{\infty} |a(s)|^{pq/(p-q)}\Big)^{(p-q)/p}\Big(\sum_{s=1}^{\infty}|h(s)|^p\Big)^{q/p}$$

---

1) V. [40] , T. 11.

a ako je $p \leq q$,(koristeći lemu 2 - lako se pokazuje):

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a(s)h(s)|^q = \left(\sup_{s\in \mathrm{I\!I}} |a(s)| \right)^q \left(\sum_{s=1}^{\infty} |h(s)|^p \right)^{q/p}$$

- nalazimo, da je

$$\hat{l}_q/\hat{l}_p = \begin{cases} \hat{l}_{pq/(p-q)} , & p \geq q \\ \\ \hat{l}_{\infty} , & p \leq q . \end{cases} \qquad (I.7.2)$$

Primetimo, da se (I.7.2), razlikuje od svog analoga u neprekidnom slučaju, naime u L_p - je:

$$L_q/L_p = \begin{cases} L_{pq/(p-q)} , & p \geq q \\ \\ 0 , & p < q . \end{cases}$$

Dozvolimo sada, da je operator superpozicije (I.o.1), koji je generisan funkcijom $f(s,u)$ - definisan na nekoj kugli $B(x_o,r)$, sa vrednostima u $\hat{l}_q$. Ako postoji neprekidan linearni operator iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q$, tako da je (linearni operator, označimo sa G):

$$F(x_o + h) - Fx_o = Gh + w(x_o,h) \qquad (\|h\|_p \leq r) \quad (I.7.3)$$

gde je $w(x_o,h) = o(\|h\|)$, tj.

$$\lim_{\|h\|_p \to o} \|w(x_o,h)\| / \|h\|_p = o, \qquad (I.7.3a)$$

- kažemo da je operator F, diferencijabilan (u Frešeovom smislu) u tački $x_o \in \hat{l}_p$, v. npr. [39] , [30], [25]. U tom slučaju operator G, zovemo izvod operatora F u tački x_o i označavamo ga sa $F'(x_o)$.

Pretpostavimo sada, da je operator (I.o.1) diferencijabilan u tački $x_o \in \hat{l}_p$. Rasudjivanjem kao i u neprekidnom slučaju ([25]), nije teško pokazati, da postoji

$$f'_u(s,x_o(s)) = \lim_{u \to o} \frac{f(s,x_o(s)+u) - f(s,x_o(s))}{u} \qquad (I.7.4)$$

i važi relacija:

$$F'(x_o)h(s) = f'_u(s,x_o(s))\,h(s), \qquad (I.7.5)$$

koja, izmedju ostalog, pokazuje da $f'_u(s,x_o(s)) \in \hat{l}_q/\hat{l}_p$. Izraz $F'(x_o)h(s)$ - zove se Frešeov diferencijal operatora F u tački x_o. Pošo se dokaz poslednjih tvrdjenja, bitno ne razlikuju od nihovih neprekidnih analoga, mi ćemo ovde samo skicirati dokaz. Dakle, stavimo li u (I.7.3) $h = u\,\varkappa_o$, gde je $\varkappa_o(t) \equiv$ $\equiv 1$ (tj. niz koji, osim jedne jedinice, ima sve nule) - iz svojstva (I.7.3a), sledi da je funkcija $f'_u(s,x_o(s)) = F'(x_o)\,\varkappa_o$ oblika (I.7.4). Još više, (I.7.5) - važi za karakterističnu funkciju bilokog konačnog skupa $D \subset \mathbb{N}$ (tj, niza koji na rednim mestima po članovima skupa D ima jedinice, a na ostalim nule). Uzmemo li za u - racionalne, skup nizova za koje važe gornje relacije je gust u $\hat{l}_p$, pa iz neprekidnosti operatora F', sledi (I.7.5). Jasno, $f'_u(s,x_o(s)) \in \hat{l}_q/\hat{l}_p$ – jer u protivnom operator $F'(x_o)$ – ne bi delovao iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q$.

Uslovi (I.7.4)- (I.7.5), predstavljaju potrebne uslove diferencijabilnosti operatora superpozicije (I.o.1) u tački x_o – medjutim može se pokazati da to još uvek ne predstavlja i dovoljne uslove. U sledećoj teoremi, formulisaćemo dovoljne uslove diferencijabilnosti operatora (I.o.1), u tački $x_o \in \hat{l}_p$.

<u>T e o r e m a I.7.1.</u> (v. [1o]) Neka su ispunjeni uslovi (I.7.4)-(I.7.5), gde je $f(s,u)$ – funkcija koja generiše operator superpozicije (I.o.1), koji deluje iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q$ $(1 \leq p, q < \infty)$ i $x_o \in \hat{l}_p$. Tada, ako operator G – generisan funkcijom

$$g(s,u) = \begin{cases} \dfrac{f(s,x_o(s)+u) - f(s,x_o(s))}{u} - f'_u(s,x_o(s)), & u \neq o \\ o, & u = o \end{cases} \qquad (I.7.6)$$

– deluje iz prostora $\hat{l}_p$ u prostor $\hat{l}_q/\hat{l}_p$, operator superpozicije (I.o.1), je diferencijabilan u tački $x_o \in \hat{l}_p$. Pri tome je

$$F'(x_o)h(s) = f'_u(s,x_o(s))h(s), \quad (h(s) \in \hat{l}_p).$$

D o k a z : Obzirom na, gore pokazane, relacije (I.7.4) - (I.7.5), dokaz teoreme se svodi na dokaz, relacije

$$\lim_{\|h\|_p \to o} \frac{\|w(s,h(s))\|_q}{\|h(s)\|_p} = o \quad (h(s) \in \hat{l}_p). \quad (I.7.7)$$

Iz (I.7.3) je jasno, da je

$$w(s,u) = f(s,x_o(s)+u) - f(s,x_o(s)) - f'_u(s,x_o(s))u \qquad (I.7.8)$$

a iz (I.7.6), sledi da je $w(s,h(s)) = g(s,u)h(s)$. Iz definicije prostora $\hat{L}_q/\hat{L}_p$ i pretpostavke teoreme, da operator G, koji je generisan funkcijom $g(s,u)$ - deluje iz $\hat{L}_p$ u $\hat{L}_q/\hat{L}_p$ - imamo

$$\frac{\|w(s,h(s))\|_q}{\|h(s)\|_p} \leq \|Gh(s)\|_{\hat{L}_q/\hat{L}_p}. \qquad (I.7.9)$$

Pošto je funkcija $g(s,u)$ - neprekidna u nuli (v. (I.7.6)), to primenom teorema I.3.1. (u slučaju $p>q$), odnosno I.5.1. (za $p \leq q$), zaključujemo da je operator G, neprekidan u nuli; prema tome desna strana u (I.7.9), teži nuli, kada $\|h(s)\|_p \to o$, čime je teorema dokazana.

Primetimo, da u oba slučaja ($p>q$ i $p \leq q$), vrednosti operatora G iz gornje teoreme, leže u $\hat{L}^o_\infty \subset \hat{L}_q/\hat{L}_p$.

Teorema I.2.2. - omogućava nam da formulišemo potrebne i dovoljne uslove diferencijabilnosti operatora superpozicije F, generisanog pomoću (I.o.1), u zadatoj tački $x_o \in \hat{L}_p$. U tu svrhu, dovoljno je razmotriti operator superpozicije W - generisan funkcijom $w(s,u)$, koja je definisana pomoću (I.7.8); zaista

<u>T e o r e m a I.7.2.</u> Neka operator superpozicije (I.o.1), generisan funkcijom $f(s,u)$ - deluje iz $\hat{L}_p$ u $\hat{L}_q$ $(1 \leq p,q < \infty)$. Da bi operator F bio diferencijabilan u tački x_o - potrebno je i dovoljno, da važi

$$\nu_W(r) = o(r) \qquad (o < r < \infty) \qquad (I.7.1o)$$

- gde je $\nu_W(r)$, funkcija definisana pomoću (I.2.5).

D o k a z : Iz teoreme I.2.2. i relacije (I.2.3), sledi ekvivalentnost uslova (I.7.1o) i

$$\mu_W(r) = o(r) \qquad (o < r < \infty). \qquad (I.7.11)$$

Neka je operator F diferencijabilan u tački x_o. Tada iz (I.7.3 - 3a), nalazimo da je

$$\lim_{\|h\|_p \to o} \frac{\|Wh(s)\|_q}{\|h(s)\|_p} = o \qquad (\|h(s)\|_p \leq r),$$

odakle, lako sledi (I.7.11).

Obrnuto je posledica sledećih nejednakosti:

$$\|Wh(s)\|_q \leq \mu_W(r) \leq \nu_W(r) , \qquad (\|h\|_p \leq r)$$

i činjenice da iz $r \to o$, sledi $\|h(s)\|_p \to o$. Teorema je dokazana.

Pretpostavićemo sada, da je operator (I.o.1), definisan na svim elementima $\hat{L}_p$ - prostora, koji leže van kugle $B(o,r)$ - i da postoji linearni operator G, sa svojstvom:

$$\lim_{\|x\|_p \to \infty} \frac{\|Fx - Gx\|_q}{\|x\|_p} = o . \qquad (I.7.12)$$

Kao što je, npr. u [25], ovakav operator G se naziva asimptotski izvod (ili izvod u beskonačnosti), operatora F ; operator superpozicije F, u tom slučaju - kažemo da je asimptotski diferencijabilan i njegov izvod u beskonačnosti, najčešće označavamo sa $F'(\infty)$.

Operator superpozicije /I/, u slučaju da deluje iz L_p u L_q $(p<q)$, je ([25], Lema 17.6 (V)) asimptotski diferencijabilan i $F'(\infty) = 0$. Za operator (I.o.1), očito takva tvrdnja ne stoji. Medjutim, ako je za operator (I.o.1), koji je generisan funkcijom $f(s,u)$, a deluje iz $\hat{L}_p$ u $\hat{L}_q$ $(1 \leq q < p < \infty)$ - ispunjen, npr. uslov:

$$|f(s,u) - a_1(s)u| \leq a_o(s) + a_r(s)|u|^r \qquad (o < r < 1)$$

gde funkcije $a_t(s) \in \hat{L}_q/\hat{L}_p^t (o \leq t \leq 1)$- operator je asimptotski diferencijabilan i važi

$$F'(\infty)h(s) = a_1(s)h(s) \,, \quad (h(s) \in \hat{L}_p).$$

Stvarno, iz gore ukazanog uslova, lako dolazimo do

$$\|Fx - a_1(s)x\|_q \leq \|a_o\|_q + \|a_r\|_{\hat{L}_q/\hat{L}_p^t} \|x\|_p^r \,,$$

- gde je $\hat{L}_q/\hat{L}_p^t = \hat{L}_{pq/(p-tq)}$, $(o \leq t \leq 1)$; odakle je

$$\lim_{\|x\|_p \to \infty} \frac{\|Fx - a_1(s)x\|_q}{\|x\|_p} = o \,.$$

Na kraju ovog poglavlja, zapažamo još da se može istražiti i neprekidna diferencijabilnost operatora superpozicije i sa tim povezano, proučiti skup tačaka u kojima je operator (I.o.1) diferencijabilan. Ovde ukazujemo samo na jednu činjenicu, koja sledi iz već dokazanih tvrdjenja ovog poglavlja. Naime, operator superpozicije (I.o.1) - generisan funkcijom $f(s,u)$, koji deluje iz $\hat{I}_p$ u $\hat{I}_q$ - je neprekidno diferencijabilan u tom i samo tom slučaju, kada postoji, neprekidan po u, parcijalni izvod $f'_u(s,u)$ - koji generiše operator superpozicije iz $\hat{I}_p$ u prostor multiplikatora $\hat{I}_q/\hat{I}_p$; pri tome je

$$F'(x)h(s) = f'_u(s,x(s))\,h(s) \qquad (\, h(s)\in \hat{I}_p \,).$$

I.8. Izvodi višeg reda i analitičnost operatora superpozicije

Sa B_k - označićemo k-stepeni operator, tj. operator definisan i linearan na direktnoj sumi $\hat{I}_p^k = \hat{I}_p \oplus \hat{I}_p \oplus \cdots \oplus \hat{I}_p$, sa svojstvom invarijantnosti na permutacije argumenata. Drugim, rečima on je neprekidan i ima svojstvo k-homogenosti ($B_k(\lambda h) \equiv$ $\equiv \lambda^k B_k h$; $k=1,2,\dots,n$).

Izvode višega reda, nelinearnog operatora superpozicije F, definisaćemo pomoću Tejlorove formule. Neka je operator F , u okolini (proizvoljnoj) $\|x - x_o\|_p \le r$, tačke $x_o \in \hat{I}_p$ - moguće pretstaviti u obliku:

$$F(x_o + h) - Fx_o = B_1 h + \frac{1}{2!} B_2 h + \cdots + \frac{1}{n!} B_n h + w_n(h) \qquad (I.8.1)$$

gde su B_k $(k=1,\dots,n)$ k-stepeni operatori, a ostatak $w_n(h)$, zadovoljava uslov:

$$\lim_{\|h\|_p \to o} \frac{\|w_n(h)\|_q}{\|h\|_p^n} = o. \qquad (I.8.2)$$

Rećićemo, u tom slučaju - da operator F kao operator iz l_p u l_q - ima u tački x_o izvode (u Frešeovom smislu) do reda n. Pri tome, izvod k-toga teda, definiše se pomoću

$$F^{(k)}(x_o)h = B_k h \quad (h \in l_p).$$

Neka je operator superpozicije F, generisan funkcijom $f(s,u)$ - takav da deluje iz l_p u l_q $(1 \leq p,q < \infty)$ i u tački x_o ima izvode do reda k. Tada, kao i u slučaju egzistencije prvog izvoda, bez većih poteškoća pokazuje se da su izvodi, oblika

$$F^{(k)}(x_o)h = a_k(s)(h(s))^k , \qquad (I.8.3)$$

gde su funkcije $a_k(s)$, definisane pomoću

$$a_k(s)=k! \lim_{u \to o} \frac{f(s,x_o(s)+u)-f(s,x_o(s)) -a_1(s)u-\cdots-a_{k-1}(s)u^{k-1}/(k-1)!}{u^k} \qquad (I.8.4)$$

i jasno, $a_k(s) \in l_{pq/(p-kq)}$ (ako je $p > kq$), odnosno $a_k(s)$ - pripadaju l_∞, u suprotnom. Iz relacije (I.8.1), nalazimo, da funkcija

$$w(s,h)= f(s,x_o(s)+h)-f(s,x_o(s)) - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(s)}{i!} h^i, \qquad (I.8.5)$$

- ima sledeća svojstva: a) generiše operator superpozicije iz ℓ_p u ℓ_q i b) zadovoljava uslov (I.8.2), tj. $w(s,h) = o(\|h\|_p^k)$.

Može se pokazati, da uslovi (I.8.3-4), još nisu dovoljni da operator superpozicije (I.o.1) - ima izvode do reda k.

Posmatraćemo sledeću funkciju

$$g(s,h)=\begin{cases} \dfrac{f(s,x_o(s)+h) - f(s,x_o(s)) - \sum\limits_{i=1}^{k-1} h^i a_i(s)/i!}{h^k} - a_k(s)/k! & \\ & \text{(I.8.6)} \\ o & , h = o \end{cases}$$

i pretpostavimo li da ona generiše operator superpozicije iz ℓ_p u $\ell_{pq/(p-kq)}$ $(p>kq)$, odnosno ℓ_∞ $(p \leq kq)$ - zajedno sa (I.8.3-4), imamo dovoljne uslove da operator (I.o.1) ima izvode do reda k, u tački x_o.

Zaista, iz neprekidnosti funkcije $g(s,h)$ u nuli (na osnovu teoreme I.3.1. - sledi neprekidnost operatora G (koji je generisan funkcijom $g(s,h)$) (naravno, u slučaju da je $p\leq kq$, njegova neprekidnost sledi iz teoreme I.5.1.) u istoj tački. Dalje, iz (I.8.5) i (I.8.6), sledi $w(s,h) = g(s,h)h^k$ - a iz

$$\frac{\|w(s,h)\|_q}{\|h\|_p^k} \leq \|Gh\|_{\ell_q/\ell_p^k} , \qquad h\in \ell_p$$

i neprekidnosti operatora G - uslov (I.8.2), dakle operator F ima izvode u tački x_o do k-tog reda, koji su dati pomoću (I.8.3).

Pod uslovom da je pomoću (I.8.5), data funkcija koja generiše ograničen operator iz l_p u l_q (lako je videti da je dovoljno da ona zadovoljava (I.2.2)), funkcija $\nu_W(r)$ (v. relaciju (I.2.5)) - nosi u sebi informaciju o potrebnim i dovoljnim uslovima postojanja izvoda višega reda, operatora superpozicije F. Naime, ima mesto

T e o r e m a I.8.1. Neka je operator superpozicije F, generisan funkcijom $f(s,u)$ i neka deluje iz l_p u l_q ($1 \leq p,q < \infty$). Da bi operator F bio k-puta diferencijabilan u tački x_0, potrebno je i dovoljno, da važi

$$\nu_W(r) = o(r) \qquad (0 < r < \infty) \qquad (I.8.7)$$

- W operator generisan funkcijom (I.8.5), koja zadovoljava uslov (I.2.2).

D o k a z : Analogno teoremi I.7.2.

Nelinearni operator F, koji deluje u Banahovim prostorima naziva se analitičkim u tački x_0, ako se njegov priraštaj u x_0 - može predstaviti u obliku

$$F(x_0 + h) - Fx_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n h^n , \qquad (I.8.8)$$

- gde je, za male h, red na desnoj strani konvergentan; ovde su B_n n-stepeni operatori, kao što su definisani na početku poglavlja. Red (I.8.8) uniformno konvergira u unutrašnjosti kugle $B(x_0,r_u)$, gde je prema Koši-Adamarovoj formuli:

$r_u = \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \|B_n\|^{1/n} \right]^{-1}$ i apsolutno konvergira u zvezdastoj oblasti $S(x_0,r_a(\cdot))$, gde je $r_a(h) = \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \|B_n h\|^{1/n} \right]^{-1}$.

Specijalno, red (I.8.8) apsolutno konvergira unutar kugle $B(x_o,r_a)$ - gde je $r_a = \inf\{r_a(h) : \|h\| \leq 1\}$, a radijusi uniformne i apsolutne konvergencije reda (I.8.8), zadovoljavaju nejednakosti: $o < r_u \leq r_a \leq \infty$; v. npr. [39].

Prvo što ćemo razmotriti, u vezi sa uslovima analitičnosti operatora superpozicije (I.o.1) - jeste analog, nedavno dobijenog rezultata za operator superpozicije u idealnim prostorima (v. T.2. u [5]). Naime, ima mesta

T e o r e m a I.8.2. Neka operator superpozicije F - generisan funkcijom $f(s,u)$ - deluje iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q$ $(1 \leq p,q < \infty)$ i neka je analitički u tački $x_o \in \hat{l}_p$. Neka je, dalje r_a - radijus apsolutne konvergencije odgovarajućeg reda (I.8.8) i $\sum(x_o,r)$ - skup definisan pomoću funkcionala (I.o.8) (v.str. 11). Tada je:

(a) Operator F analitički u svakoj tački skupa $\sum(x_o,r_a)$,

(b) funkcija $f(s,u)$, za svako $s \in \mathbb{M}$, analitička u $x_o(s)$, što znači važi:

$$f(s,x_o(s)+u) - f(s,x_o(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)u^n, \qquad (I.8.9)$$

- gde poslednji red konvergira za $|u| < \delta(s)r_a$; $\delta(s)$ je definisano pomoću:

$$\delta(s) = \sup\{|x(s)| : \|x\|_p \leq 1\},$$

(u smislu K-prostora (v. npr. [21])).

Pri tome je:

$$B_n h^n(s) = a_n(s)h^n(s) , \ (n=1,2,\dots).$$

D o k a z : Bez gubitka opštosti, možemo uzeti da je $x_o = o$

i $f(s,o) = o$,za svako $s \in \mathbb{M}$. Prema (I.7.4) i (I.7.5) - na osnovu diferencijabilnosti operatora F u nulu, imamo

$$a_1(s) = \lim_{u \to o} \frac{f(s,u)}{u} \quad \text{i} \quad B_1 h(s) = a_1(s)h(s) ,$$

- gde je B_1 prvi operator u (I.8.8) i on se poklapa sa $F'(o)$. Sada beskonačna diferencijabilnost funkcije $f(s,u)$ u nuli, povlači po indukciji, postojanje funkcija

$$a_n(s) = \lim_{u \to o} \frac{f(s,u)-a_1(s)u-\cdots-a_{n-1}(s)u^{n-1}}{u^n} , \quad (n=1,2,\ldots)$$

i valjanost relacije $B_n h^n(s) = a_n(s)h^n(s)$, $n=1,2,\ldots$. Po pretpostavci, radijus konvergencije reda na desnoj strani u (I.8.8) - odnosno, obzirom na to da je $x_o=o$ - u

$$F(h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)h^n(s) ,$$

jeste r_a. Odavde sledi, da za neko $h \in l_p$, $\|h\|_p < r_a$, red

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)h^n(s) \tag{I.8.1o}$$

koji je (zbog formalnog stavljanja $u=h(s)$) specijalan slučaj reda

$$w(s,u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)\, u^n \tag{I.8.11}$$

- konvergira apsolutno u l_q . To znači, da red

$$\beta^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)\, h(s)^{\,n} ,$$

konvergira u l_q - za svako $s \in \mathbb{N}$. Dakle, red (I.8.10) apsolutno konvergira za svako $s \in \mathbb{N}$.

Pošto je l_p $(1 \leq p < \infty)$, separabilan prostor, možemo izabrati gust skup $\{h_1, h_2, \ldots\}$ u otvorenoj jediničnoj kugli prostora l_p - i jasno

$$\delta(s) = \sup\{\, |h_j(s)| \; : \; j=1,2,\ldots \,\}.$$

Stavimo li $h_j(s) r_a$ u red (I.8.11) - dobićemo, brojni red koji apsolutno konvergira za svako $s \in \mathbb{N}$. Prema Abelovoj teoremi (npr. [39]), radijus konvergencije reda (I.8.11) ne može biti manji od $\delta(s) r_a$. Na kraju, granica $w = w(s,u)$ data pomoću (I.8.11) - je neprekidna funkcija od u za svako $s \in \mathbb{N}$, a operator superpozicije koji ona generiše - poklapa se sa operatorom $F(x_o + h) - Fx_o$. Dakle, neprekidne funkcije $w(s,u)$ i $f(s, x_o(s)+u) - f(s, x_o(s))$ - za svako $s \in \mathbb{N}$ i $|u| < \delta(s) r_a$ - poklapaju se, odakle sledi (I.8.9). Pošto je operator superpozicije na $\sum(x_o, r_a)$, zbog očigledne disjunktnosti funkcija iz njega, a funkcija zadovoljava (I.o.3) - čak aditivan, to je ispunjeno i (a) - čime je teorema u potpunosti dokazana.

Sada ćemo malo uopštiti definisani pojam multiplikatora, koji smo dali na početku poglavlja I.7. Naime, sa l_q / l_p^n , $n=1,\ldots$ ... - označićemo (istu smo već koristili u ovom poglavlju) prostor svih realnih funkcija x na $\mathbb{N}$, za koje $xh^n \in l_q$, za svako $h \in l_p$ - sa normom (v. (I.7.1)):

$$\|x\|_{\hat{l}_q/\hat{l}_p^n} = \sup\left\{ \|xh^n\|_q : \|h\|_p \le 1 \right\}.$$

Slično slučaju datom o prethodnom poglavlju, potrebno je razlikovati: $p/q > n$ i $p/q \le n$. Lako je videti, da je $\hat{l}_q/\hat{l}_p^n$ - Banahov prostor i da važi

$$\hat{l}_q/\hat{l}_p^n = \begin{cases} \hat{l}_{pq/(p-nq)} & , \text{ ako je } p/q > n \\ \\ \hat{l}_\infty & , \text{ ako je } p/q \le n . \end{cases} \tag{I.8.12}$$

Prvo što zapažamo, rečeno u terminima iz ([5]), jeste da ako je $p/q > n$ (za svako n) - prostori $\hat{l}_p$ i $\hat{l}_q$, su nedegenerisani (tj. prostor $\hat{l}_q/\hat{l}_p^n$ - netrivijalan je za svako n) - što se pak, za L_p ne može reći (v. str. 44).

Pretpostavimo sad da funkcija $f(s,u)$, koja generiše operator superpozicije F ima u tački $x_o(s)$ razvoj (I.8.9); na osnovu prethodne teoreme i gornje relacije (I.8.12), bez većih poteškoća se može pokazati, da važi

<u>T e o r e m a I.8.3.</u> Operator superpozicije F - generisan funkcijom $f(s,u)$, koji deluje iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q$ $(1 \le p,q < \infty)$ - je analitički u tački $x_o \in \hat{l}_p$, ako i samo ako $a_n(s)$ pripadaju prostoru $\hat{l}_q/\hat{l}_p^n$ $(n = 1,2,\ldots)$; i ako red (I.8.9) konvergira za $|u| < a\delta(s)$, tada je

$$o < r_u \le \left[\overline{\lim_{n \to \infty}} \|a_n\|_{\hat{l}_q/\hat{l}_p^n}^{1/n} \right]^{-1} \le a .$$

Na kraju ovog poglavlja, primetimo da je u [5] (Teor. 1.) dokazano- da ako je operator superpozicije analitički, tada je funkcija koja taj operator generiše, kao operator superpozicije izmedju dva idealna prostora ([16]) - polinom. Nismo ubedjeni da je i u diskretnom slučaju klasa analitičkih operatora superpozicije tako ekstremno uska, ali nažalost dokaza (za sada)- nemamo.

I.9. N e k a   u o p š t e n j a

Pokazaćemo sada, kako se dobijeni rezultati iz poglavlja (I.1. - I.8.) mogu uopštiti na proizvoljan diskretni slučaj, odnosno iskoristiti, za slučaj delovanja operatora superpozicie /I/ u Lebegovim prostorima $L_p(\Omega,\mu)$ - sa p-stepenom integrabilnih μ-merljivih funkcija, definisanih na skupu Ω- konačne ili σ-konačne mere μ.

Skup Ω, kao što je poznato (Lebegova teorema o razlaganju), na jedinstven način možemo razložiti na dva disjunktna podskupa Ω_c i Ω_d, tako da je restrikcija mere μ na skupovima iz Ω_c - neprekidna (tj. svaki skup $D\subset\Omega_c$ - pozitivne i konačne mere, možemo razbiti na dva podskupa koji su disjunktni i jednake mere), a suženje mere μ na podskupove iz Ω_d - je diskretna mera (tj. Ω_d je prebrojiva unija atoma mere μ). Time je, svaki skup $\mathbb{D}$ iz σ-algebre $\sum(\Omega)$, merljivih podskupova skupa Ω- unija disjunktnih skupova $\mathbb{D}_c=\mathbb{D}\cap\Omega_c$ i $\mathbb{D}_d=\mathbb{D}\cap\Omega_d$, na prvom je mera μ neprekidna a na drugom - diskretna.

Sada je uočljivo da se rezultati koje smo dobili u poglavljima I.1. - I.8. mogu uopštiti na operator superpozicije /I/ - koji deluje iz jednog Lebegovog prostora $L_p(\Omega,\mu)$ u drugi $L_q(\Omega,\mu)$, gde je μ proizvoljna konačna ili σ-konačna mera na skupu Ω. U slučaju da je mera na Ω diskretna - to sledi iz linearne izometrije prostora $L_p(\Omega)$ i l_p $(1\leq p<\infty)$. Izometrija se realizuje unutrašnjom superpozicijom na sledeći način:

Skup svih atoma mere μ je prebrojiv. Neka je h bijekcija tog skupa i skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Meru na $\mathbb{N}$ - označimo sa m ($m(D)$ - predstavlja broj elemenata skupa D). Dakle, $h^{-1}(\{s\})$ - je neki atom mere μ na Ω, $s\in\mathbb{N}$. Unija svih takvih inverznih slika sa svim svojim podskupovima, očito je jedna δ-algebra skupova, na kojoj su stavljajući $m(h^{-1}(\{s\}) = m(\{s\})$ - definisane dve mere m i μ. Još više, one su uzajamno apsolutno neprekidne (dakle, iz $m(D) = o$ sledi $\mu(D) = o$ i obrnuto), pa prema Radon-Nikodimovoj teoremi (npr. [21]) funkcija $d\mu/dm$ pripada prostoru $L_1(m) = \ell_1$, imajući u vidu da u L_p - ne razlikujemo funkcije jednake s.s. („skoro svuda" u odnosu na tamošnju meru). Prema tome preslikavanje $g : x \mapsto x(d\mu/dm)^{1/p}$ - je linearna izometrija prostora $L_p(\Omega)$ i ℓ_p.

Ako je, medjutim mera na Ω - proizvoljna (nije čisto atomska, odnosno diskretna), tada obzirom na gore ukazano Lebegovo razlaganje objedinjujući odgovarajuće rezultate dobijene uz pretpostavku o neprekidnosti mere na Ω ([25], [27], [3], [4] [9], [31] i dr.) - koji se odnose na operator superpozicije /I/ i rezultate iznete u ovoj disertaciji, dobijaju se uslovi: delovanja, neprekidnosti, ograničenosti, diferencijabilnosti, kompaktnosti i dr. - za operator superpozicije koji deluje iz proizvoljnog Lebegovog prostora L_p u prostor L_q.

Rezultati se mogu poopštiti i na operatore superpozicije koji deluju iz jednog u drugi Orličev koordinantni prostor, koji sa svoje strane ptetstavljaju uopštenje Banahovih prostora nizova (v. npr. [27], [12], [33]). Po standardnim šemama takvog uopštavanja ([27]), sve dobijene rezultate prenosimo na Orličeve koordinantne prostore, a mi ćemo ovde to prenošenje ilustrovati, sledećim tvrdjenjem:

<u>T e o r e m a I.9.1.</u> Neka su ℓ_M i ℓ_N Orličevi koordinantni prostori definisani konveksnim funkcijama $M(u)$ i $N(u)$ - medjusobno dopunjavajućim u smislu Junga [27]. Tada operator superpozicije F, koji je generisan funkcijom $f(s,u)$ ($s\in\mathbb{N}$, $u\in\mathbb{R}$) - deluje iz ℓ_M u ℓ_N, ako i samo ako postoje, funk-

cija $a(s)\in \hat{l}_p$ $(1 \leq p < \infty)$ i konstante α, β, $b>o$ i $\delta>o$, tako da je

$$(I.9.1) \qquad N\left[\alpha f(s,u)\right] \leq a(s) + bM(\beta|u|) \qquad (|u| \leq \delta \ , \ s\in\Pi).$$

D o k a z : Dovoljnost uslova je skoro očevidna (v. [2o] , Teor. 5b.).

Uslov je potreban. Neka operator superpozicije deluje iz $\hat{l}_M$ u $\hat{l}_N$, tada operator superpozicije G, generisan funkcijom

$$g(s,v) = N\left[\alpha f(s, \frac{1}{\beta} M^{-1}(|v|))\right] ,$$

deluje iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_p$, pa iz teoreme I.1.1. (za $q=p$), imamo

$$N\left[\alpha f(s,\frac{1}{\beta} M^{-1}(|v|))\right] \leq a(s) + b|v| ,$$

- gde je $b>o$ i $a(s)\in\hat{l}_p$. Stavimo li u poslednjoj relaciji $v = M(\beta|u|)$ - dobićemo (I.9.1), čime je teorema dokazana.

Na kraju, nije teško videti da se naši rezultati mogu uopštiti i na proizvoljne Orličeve prostore funkcija.

D r u g a   g l a v a

B E S K O N A Č N I   N E L I N E A R N I S I S T E M I

U v o d: U ovoj glavi ćemo, primenom izmedju ostalih i dobijenih rezultata u prvoj glavi ove disertacije, izučavati problem rešivosti diskretnog analoga poznate Hamerštejnove nelinearne integralne jednačine

$$x(t) = \int_{\Omega} k(s,t)f(s,x(s))ds + g(t), \qquad /II/$$

gde je Ω - ograničen zatvoren skup konačnodimenzionalnog prostora, $x(t)$ $(t\in\Omega)$ - nepoznata funkcija sa vrednostima u konačnodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$, $k(s,t)$ $(s,t\in\Omega)$ - matrica-jezgro i $f(s,u)$ - funkcija koja generiše odgovarajući operator superpozicije /I/. Mi ćemo ovde razmotriti neka od standardnih pitanja (egzistenciju i jedinstvenost rešenja, sopstvene vrednosti, tačke bifurkacije i dr.) beskonačnih nelinearnih sistema, koji su analog jednačine /II/.

Prve važnije rezultate o rešivosti jednačina tipa /II/, dobio je A. Hammerštejn (v. npr. [25]) varijacionim metodom, kasnije su razvijajući taj metod, teoreme o egzistenciji dobili M. Golomb ([11]), M.M. Vajnberg ([8]) i dr. Rezultate u vezi sa sopstvenim funkcijama jednačine /II/ - dobili su L.A. Ljusternik, M.A. Krasnoseljski (v. [24 - 25]), M.M. Vajnberg - ([8]) i mnogi dr. Osnovne rezultate u vezi sa tačkama bifurkacije nelinearnih integralnih jednačina ustanovio je M.A. Krasnoseljski ([24], [25], [27]).

Može se reći da su beskonačni sistemi tipa Hamerštejnove nelinearne jednačine /II/, relativno malo izučavani i tu je literature malo, no svakako ovde treba pomenutu [33]. Bez sumnje tak.v om stanju je doprinela činjenica, da se malo znalo o operatoru superpozicije u prostorima nizova.

Po pravilu su rezultati o rešivosti nelinearnih integralnih jednačina tipa /II/, dobijeni varijacionim ([8]) i topološkim metodom ([24]) - koji je, razvijanjem teorije rotacije vektorskih polja ([26]), presudno usavršio M.A. Krasnoseljski sa svojim saradnicima.

Već u prvim radovima, koji tretiraju probleme nelinearne integralne Hammerštejnove jednačine /I/, uočeno je da za dobijanje uslova njene rešivosti nužna je i presudna korelacija - karaktera matrice-jezgra k(s,t) i osobina funkcije f(s,u), koja generiše odgovarajući operator superpozicije; koliko se može videti, najbolje je tu korelaciju opisati u terminima delovanja različitih operatora (povezanih sa /I/) u nekim povoljno izabranim pomoćnim prostorima. Koristeći u tu svrhu skalu - Lebegovih prostora, Orličevih ili pak proizvoljnih idealnih prostora ([25], [17 - 19]), citirani autori su dali niz originalnih rezultata u ovoj problematici, pa rezultati koje ćemo izneti na na sledećim stranicama ove disertacije uglavnom pretstavljaju uočenu analogiju, važećih rezultata u prostorima L_p - a služeći kao primena rezultata prve glave ovog rada imaju u sebi i dozu originalnoga.

II.1. Beskonačne matrice i linearni operatori u prostorima realnih nizova

Neki stohastički problemi i ne samo oni, nameću pitanje rešivosti nekih nelinearnih beskonačnih sistema jednačina, posebno diskretnog analoga poznate Hammerštejnove nelinearne integralne jednačine (/I/), pa će kao neposredna primena već dobijenih rezultata - predmet našeg razmatranja, biti upravo, beskonačni nelinearni sistemi

$$x(t) = \sum_{s=1}^{\infty} k(s,t) f(s,x(s)) \quad + \quad g(t) \qquad \text{(II.1.1)}$$

- koji predstavlja diskretni analog jednačine /I/. Argumenti s i t - su iz skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, $f(s,u)$ - funkcija koja generiše operator (I.o.1), $k(s,t)$ - matrica-jezgro i $x(t), g(t)$ - realne funkcije prirodnog argumenta. Jasno je da rešivost beskonačnog sistema (II.1.1) bitno zavisi od uslova naloženih matrici $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$ i funkciji $f(s,u)$ - koja generiše operator superpozicije. Nama je ovde neophodno utvrditi dovoljne uslove za matricu-jezgro $k(s,t)$ - da ona definiše: 1. Neprekidan linearan operator iz l_p u l_q $(1 \leq p,q \leq \infty)$ i 2. Potpuno neprekidan operator izmedju istih prostora.

Poznato je (npr. [21]) da linearnom operatoru K, koji deluje iz l_p u l_q $(1 \leq p,q \leq \infty)$ - na jedinstven način odgovara beskonačna matrica $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$. Takve operatore nazivamo matričnim operatorima i u ovom poglavlju dajemo nekoliko, za nas važnih činjenica, sledeći pri tome [27], [40] i [25].

Pretpostavimo da je operator K - definisan pomoću matrice $k(s,t)$, na sledeći način:

$$Kx(t) = \sum_{s=1}^{\infty} k(s,t)x(s) \qquad (II.1.2)$$

- gde je $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$ - beskonačna simetrična matrica (tj. $k(s,t) = k(t,s)$; $s,t \in \mathbb{N}$). U daljem je matrica $k(s,t)$ - po pretpostavci simetrična, ako mi to otvoreno i ne budemo naglasili. Linearni operator K, definisan pomoću (II.1.2) u superpoziciji sa nelinearnim operatorom F - definisanim pomoću (I.o.1) - u oznaci KF, nazivamo diskretni Hammerštejnov operator. Pretpostavljaćemo po pravilu - da simetrična matrica $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$ definiše samoadjungovani operator K u Hilbertovom prostoru l_2, sa standardnim skalarnim proizvodom, to znači da je $(Kx,y) = (x,Ky)_{l_2}$ $(x,y \in l_2)$.

Neka za svako $s \in \mathbb{N}$, matrica-jezgro $k(s,t)$, kao funkcija od $t \in \mathbb{N}$ - pripada prostoru l_r $(1 \le r \le \infty)$ i stavimo:

$$\phi(s) = \|k(s,t)\|_r \quad . \qquad (II.1.3)$$

Odredimo dovoljne uslove da funkcija $\phi(s) \in l_q$ $(1 \le q \le \infty)$. Neka je, prvo r konačno (kao i obično, ograničenje ove vrste znači da je l_r različito od l_∞ i l_∞^0). Tada (npr. [21]) funkcija $\phi(s) \in l_q$, za $1 \le q < \infty$, ako je:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{t=1}^{\infty} |k(s,t)|^r\right)^{q/r} < \infty, \quad r^{-1} + q^{-1} = 1 \qquad (II.1.4)$$

i $\phi(s) \in l_\infty$ (odnosno l_∞^0), ako je:

$$\sup_{s \in \mathbb{N}} \sum_{t=1}^{\infty} |k(s,t)|^r < \infty .$$

Slično, kao u [25] , nejednakost (II.1.4), važi ako je:

$$\sum_{s,t=1}^{\infty} |k(s,t)|^{w} < \infty ,$$

- gde je $w = \max\{r,q\}$.

Neka je r - beskonačno; tada za konačno q, $\varnothing(s) \in l_q$, ako važi:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sup_{t\in \mathbb{N}} |k(s,t)|\right)^{q} < \infty$$

i $\varnothing(s) \in l_\infty$ (odnosno l_∞^{o}), ako je

$$\sup_{s\in \mathbb{N}} \sup_{t\in \mathbb{N}} |k(s,t)| < \infty .$$

Stavimo li u gornjim relacijama umesto $r - p(p-1)^{-1}$, a $q=p$ - gde je $1 \leq p \leq \infty$; tada dovoljni uslovi neprekidnosti matričnog linearnog operatora (II.1.2), slede iz sledeće teoreme:

T e o r e m a II.1.1. Neka $\varnothing(t) = \| k(s,t)\|_p$ - pripada l_p $(1 \leq p \leq \infty)$; tada operator K - definisan relacijom (II.1.2) - deluje iz $l_{p'}$ u l_p . Pri tome je

$$\|K\|_{p' - p} = \|\varnothing(t)\|_p \tag{II.1.5}$$

- gde je $p' = p(p-1)^{-1}$.

D o k a z : Iz uslova teoreme i Helderove nejednakosti [21])

- imamo

$$|Kx(t)| \leq \sum_{s=1}^{\infty} |k(s,t)x(s)| \leq \sum_{s=1}^{\infty} |k(s,t)||x(s)| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s=1}^{\infty} |k(s,t)|^{p}\right)^{1/p} \left(\sum_{s=1}^{\infty} |x(s)|^{p'}\right)^{1/p'},$$

odnosno, iz poslednjih nejednakosti

$$|Kx(t)| \leq \phi(t)\, \|x\|_{p'} ;$$

odakle i (II.1.5). Teorema je dokazana.

Interesuju nas sada dovoljni uslovi za potpunu neprekidnost linearnog matričnog operatora (II.1.2), dakle pod kojim uslovima operator (II.1.2) - ograničene skupove jednog prostora nizova preslikava u kompaktne skupove drugog takvog prostora; ovde je od posebnog interesa situacija kada operator deluje iz $\hat{l}_{p'}$ u $\hat{l}_p$ - gde su p' i p kao u gore datoj teoremi II.1.1.

Poznato je (v. npr.[2]), da je dovoljan uslov potpune neprekidnosti operatora (II.1.2) - koji deluje iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q$, da važi:

$$\sum_{s,t=1}^{\infty} |k(s,t)|^{\max\{q,p/(p-1)\}} < \infty . \qquad \text{(II.1.6)}$$

Pretpostavimo sada, da simetrična matrica $k(s,t)$ $(s,t\in \mathbb{N})$ - definiše samoadjungovani operator (II.1.2), koji deluje u

Hilbertovom prostoru l_2. Dakle, za svako $\emptyset, h \in l_2$ je $(K\emptyset,h) = (\emptyset,Kh)$; još više (npr. [1]), svaki samoadjungovani operator koji je potpuno neprekidan, možemo predstaviti u obliku:

$$Kh = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (h, e(i))e(i) \ , \qquad (II.1.7)$$

gde su λ_i $(i=1,2,\ldots)$ - sopstvene vrednosti operatora K, $e(i)$ - odgovarajuće sopstvene funkcije, pri čemu je za $i,j=1,2,\ldots$ - $(e(i),e(j)) = \delta_{ij}$, gde je $\delta_{ii} = 1 = \delta_{jj}$, $\delta_{ij}=o$.

Primetimo, da se uslovi potpune neprekidnosti Hammerštejnovog diskretnog operatora KF, gde je K definisan pomoću (II.1.2), a operator F - (I.o.1) - mogu lako dobiti kombinacijom uslova (II.1.6) i odgovarajućih uslova za operator superpozicije F - dobijenih u prvoj glavi. Naprimer, operator KF je potpuno neprekidan ako je operator (I.o.1) ograničen, a operator K definisan matricom $k(s,t)$ - koja zadovoljava uslov (II.1.6).

Sledeći [22], formulisaćemo i pokazati tkz. uslove tipa Kantoroviča o neprekidnosti operatora K, definisanog pomoću (II.1.2), naime važi:

T e o r e m a II.1.2. Operator K, definisan pomoću relacije (II.1.2) - je neprekidan linearni operator iz l_p u l_q ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$(a) \qquad \left(\sum_{t=1}^{\infty} |k(s,t)|^r\right)^{1/r} \leq C_1 \qquad (o < r < \infty)$$

za svako $s \in \mathbb{N}$;

$$(b) \qquad \left(\sum_{s=1}^{\infty} |k(s,t)|^{\sigma}\right)^{1/\sigma} \leq C_2 \qquad (o < \sigma < \infty)$$

– za svako $t \in \mathbb{N}$;

(c) $q \geq p$, $q \geq \sigma$, $r = p'(q-\sigma)/q$, $p,q \geq 1$ i $p' = p(p-1)^{-1}$.

Pri tome je:

$$\| K \|_{p \to q} \leq C_1^{(q-\sigma)/q} C_2^{\sigma/q} . \qquad \text{(II.1.8)}$$

D o k a z : Iz (II.1.2), imamo

$$|Kx(s)| \leq \sum_{t=1}^{\infty} \left[|k(s,t)|^{\sigma} |x(t)|^{p} \right]^{1/q} |x(t)|^{(q-p)/q} |k(s,t)|^{(q-\sigma)/q}$$

i ako u [40],(Teor. 11, st.22), stavimo :

$\lambda_1 = q$, $\lambda_2 = pq/(p-q)$, $\lambda_3 = p' = p/(p-1)$ – iz poslednje nejednakosti, dobijamo:

$$|Kx(s)| \leq \left(\sum_{t=1}^{\infty} |k(s,t)|^{\sigma} |x(t)|^{p} \right)^{1/q} \|x\|_p^{(q-p)/q} \, C_1^{(q-\sigma)/q} ,$$

– odakle posle stepenovanja sa $q \geq 1$ i sumiranja, po $s \in \mathbb{N}$ – sledi (II.1.8). Teorema je dokazana.

II.2. R a s c e p l j e n j e m a t r i č n i h o p e r a t o r a

Dualni prostor prostora ℓ_p (prostor svih ograničenih linearnih funkcionala sa prostora ℓ_p), kao što je dobro poznato - je izometrički izomorfan sa prostorom ℓ_q , gde je $q = p/(p-1)$. Posmatrajmo sledeće prostore: $\ell_{p/(p-1)}$, ℓ_2 i ℓ_p - gde je $p \geq 2$. Lako je videti da važi

$$\ell_{p/(p-1)} \subset \ell_2 \subset \ell_p \ . \tag{II.2.1}$$

Pretpostavimo, sada da neki linearni operator A - deluje iz ℓ_p u $\ell_{p/(p-1)}$ i razmotrimo pod kojim se uslovima operator A može r a s c e p i t i u superpoziciju oblika:

$$A = A_1 A_2 \ , \tag{II.2.2}$$

gde je A_2 - linearni operator iz ℓ_p u ℓ_2, a A_1 - linearni operator iz ℓ_2 u $\ell_{p/(p-1)}$.

Za operator A, koji deluje u nekom Hilbertovom prostoru H, kao i obično kažemo da je pozitivan, ako je $(Ah,h) \geq 0$, za svako h iz domena operatora A. Neka je A - pozitivan samoadjungovan operator koji deluje u ℓ_2. Iz spektralne teorije linearnih operatora, proizilazi postojanje operatora $A^{1/2}$ - kvadratnog korena operatora A (v. npr. [37]), koji sa svoje strane predstavlja samoadjungovani operator, takav da je:

$$Ah = A^{1/2} A^{1/2} h \qquad (h \in \ell_2). \tag{II.2.3}$$

Još više, ako je operator A potpuno neprekidan, tada je (v. npr. [1]) $A^{1/2}$, takodje potpuno neprekidan operator. Rascepljenje operatora A oblika (II.2.3) bi će iskorišćeno pri razmatranju egzistencije rešenja beskonačnog nelinearnog sistema (II.1.1), koje ćemo učiniti u narednom poglavlju.

Neka su sada $e_k(s)$ $(k=1,2,\dots)$ - normirane sopstvene funkcije matrice-jezgra, koja definiše samoadjungovani potpuno neprekidani operator u prostoru ℓ_2, pomoću (II.1.2) i neka su λ_k $(k=1,2,\dots)$ - odgovarajuće sopstvene vrednosti:

$$k(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(s)\, e_k(t) \qquad (s,t \in \mathbb{N}) .$$

Tada se operator $K^{1/2}$, može predstaviti u obliku (v. (II.1.7))

$$K^{1/2}\phi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \,(e_k,\phi) e_k(s) \qquad (s \in \mathbb{N}) \qquad \text{(II.2.4)}$$

- gde je matrica $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$ - simetrična pozitivno definisana i zadovoljava uslov: (v. (II.1.6))

$$\sum_{s,t=1}^{\infty} |k(s,t)|^2 < \infty .$$

Prirodno uopštenje jednakosti (II.2.3), predstavlja:

$$A = B B^*, \qquad \text{(II.2.5)}$$

- gde je $A : \ell_q \to \ell_p$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, B i B^* - adjungovani operatori koji deluju iz l_2 u l_p i iz l_q u l_2 - redom. Adjungovanost operatora B i B^*, ovde označava ([24]) da je:

$$(Bh,\emptyset) = (h,B'\emptyset) \quad (h\in l_2 \, , \, \emptyset\in l_q \,).$$

Pokazaćemo da se matrični operatori, razume se, pod odgovarajućim pretpostavkama mogu predstaviti u obliku (II.2.5). Neka je operator (II.1.2) definisan simetričnom pozitivno definisanom matricom $k(s,t)$ $(s,t\in \mathbb{M})$, koja zadovoljava relaciju (II.1.6) (q=2) - i

$$\sum_{s,t=1}^{\infty} |k(s,t)|^p < \infty \, , \tag{II.2.6}$$

gde je - $2 \leq p \leq p_o$ $(p_o^{-1} + q_o^{-1} = 1, \; q_o \leq q \leq 2, \; K : l_q \to l_p)$. Tada primenom nejednakosti iz [40]-T. 308 - 309 -310, dobijamo da operator $K^{1/2}$ (definisan je na l_2) neprekidno deluje iz l_2 u l_p - za bilo koje $p\in(2,p_o)$, gde je $p_o^{-1} + q_o^{-1} = 1$. Pri ovde učinjenim analizama, koristeći metod iz [24], nije teško pokazati sledeći rezultat:

<u>T e o r e m a II.2.1.</u> Ako pozitivno definisana simetrična matrica $k(s,t)$ $(s,t\in\mathbb{M})$, koja zadovoljava (II.2.6) - definiše operator (II.1.2); tada operator K ((II.1.2)), posmatran na l_q - dozvoljava rascepljenje oblika (II.2.5), gde je B - neprekidan operator iz l_2 u l_p $(p^{-1} + q^{-1} = 1 \; ; \; 2 \leq q < q_o)$. 1)

---

1) Ako matrica $k(s,t)$ $(s,t\in\mathbb{M})$, potpuno neprekidan operator (umesto neprekidan) K - rezultat ostaje u važnosti i operator B je potpuno neprekidan.(v. [24] ,T.4.4.)

II.3. Egzistencija i jedinstvenost rešenja beskonačnih sistema

Neka je dat beskonačni nelinearni sistem jednačina oblika (II.1.1), tj. diskretna nelinearna Hammerštejnova jednačina:

$$x(t) = \sum_{s=1}^{\infty} k(s,t)f(s,x(s)) \qquad \text{(II.3.1)}$$

gde je $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$ - beskonačna simetrična matrica, koja zadovoljava uslov (II.1.6), dakle definiše potpuno neprekidan operator $K : l_p \to l_q$ $(1 \leq p < q \leq \infty)$. Neka je dalje, F - operator superpozicije (I.o.1), generisan funkcijom $f(s,u)$ - koji deluje iz l_q u l_p. Pri ovim pretpostavkama, znači operator KF deluje u prostoru l_q.

Postavlja se pitanje rešivosti jednačine (II.3.1) u nekoj kugli $B(o,r) \subset l_q$. Na početku ćemo razmotriti specijalan slučaj i odmah pokazati da je skup rešenja ove jednačine (razume se pod odredjenim pretpostavkama) - neprazan. Dakle neka ograničeni operator superpozicije F, svojom funkcijom $\nu_F(r)$ - definisanom pomoću (I.2.5), zadovoljava uslov:

$$\nu_F(r) \leq r(\|K\|)^{-1} \qquad \text{(II.3.2)}$$

na kugli $B(o,r)$, gde je

$$o < r < (b_o\|K\|)^{q/(p-q)} \qquad \text{(II.3.2a)}$$

- a b_o je nenegativan broj za koji važi (I.2.2) (str. 17.). Tvrdimo da jednačina (II.3.1) ima bar jedno rešenje u kugli $B(o,r)\subset l_q$, radijusa r - koji zadovoljava (II.3.2a). Zaista, iz teoreme I.4.2. sledi (k,χ)-ograničenost operatora F - tj. on je kondenzirajući operator sa koeficijentom kondenziranja $k(r)<1$ (v. (I.4.11) i (II.3.2a). Iz uslova (II.3.2) - imamo:

$$r \geq \|K\|\nu_F(r) \geq \|K\|/\mu_F(r) \geq \|K\|\,\|Fx\|_p \geq \|KFx\|_q\,, \quad x\in B(o,r)$$

drugim rečima, operator KF - preslikava kuglu $B(o,r)$ u nju samu. Dokaz tvrdjenja će biti završen ako se još pozovemo na teoremu I.5.3-3 iz [38].

U monografijama [24] i [26], izložena je teorija izučavanja rešivosti nekih integralnih jednačina, pomoću varijacionih i topoloških metoda, koje nam daju ideju da na pitanje egzistencije rešenja jednačine (II.3.1) pokušamo istim metodama - dati odgovor. Jasno, ovde ćemo za naše potrebe neke od tih sjajno izgradjenih metoda samo dotaći. Sada ćemo gore pokazano tvrdjenje o postojanju rešenja jednačine (II.3.1), uz neznatnu korekciju pretpostavki, dokazati topološkim metodom (koji se oslanja na teoriju rotacije vektorskog polja [26]). Naime, ako na sferi $S(o,r) = \{x : \|x\| = r\}$ ograničeni operator F zadovoljava uslov:

$$\nu_F(r) \leq r^{p/q}(\|K\|)^{-1} \qquad \text{(II.3.2b)}$$

gde je $r < \min\{1, (b_o\|K\|)^{q/(p-q)}\}$, a b_o - kao u (II.3.2a); tada beskonačni nelinearni sistem (II.3.1) ima bar jedno rešenje u kugli $B(o,r)$. Stvarno, za $\|x\| = r$ iz (II.3.2b) i teoreme I.2.2. - sledi

$$\|KFx\| \le \|K\|\|Fx\| \le \|K\|\mu_F(r) \le \|K\|\nu_F(r) \le r^{p/q} = \|x\|^{p/q} < \|x\|$$

- odakle je $x - KFx \neq -ax$, $a > o$.[1] Dakle neprekidno vektorsko polje $\emptyset = I - KF$ ima pozitivnu orijentaciju u svakoj tački sfere $S(o,r)$ ([26]). Posmatrajmo sada, u l_q, operator $Gx = o$, za svako $x \in l_q$. Pošto neprekidno vektorsko polje $\Psi = I - G$, nema nula na $S(o,r)$ - to prema teoremi 3.1 iz [26] - rotacija vektorskog polja Ψ jednaka je jedinici. Vektorska polja $\emptyset$ i Ψ su očito homotopna (homotopija je npr. definisana sa $H(t,x) : [o,1] \times B(o,r) \to l_q$, gde je $H(t,x) = (1-t)KFx + tGx$), pa zbog teoreme 4.1 iz [26] - sledi da je rotacija $\gamma[I-G,B(o,r)] = \gamma[I-KF,B(o,r)] = 1$. Pozovemo li se sada na poznatu Brauerovu teoremu o nepokretnoj tački (v. npr. [38]), dobićemo da jednačina $x = KFx$, $x \in l_q$ - koja predstavlja operatorsku formu beskonačnog nelinearnog sistema (II.3.1) - ima bar jedno rešenje u $B(o,r) \subset l_q$.

Koristeći takz. varijacioni metod, izučavan od strane mnogih poznatih matematičara (npr. M.Golomb - [11], M.M.Vajnberg - [8], M.A.Krasnoseljski - [24],...), do kraja ovog poglavlja, besdaćemo nekoliko rezultata u vezi sa egzistencijom rešenja beskonačnog nelinearnog sistema. Dakle, neka je dat sistem:

$$x(t) = \sum_{s=1}^{\infty} k(s,t)f(s,x(s)) + g(t) , \qquad \text{(II.3.3)}$$

- gde je, kao i pre $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$, simetrična beskonačna matrica koja definiše samoadjungovani operator u l_2 - i jednovremeno neprekidan linearni operator koji deluje iz $l_{p'}$ u l_p ($p' = p(p-1)^{-1}$, a p neki broj iz $[1,\infty]$). Pri tome, uslove koje treba da ispuni matrica-jezgro izneli smo u poglavlju II.1. i II.2. Za funkciju $f(s,u)$, pretpostavljamo da generi-

[1]) U suprotnom, $(1+a)\|x\| = \|KFx\| < \|x\|$ - kontradikcija!

še potpuno neprekidan operator superpozicije (I.o.1), koji deluje iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_{p'}$; uslovi slede iz teorema I.1.1 i I.4.1 - koje smo dokazali u prvoj glavi. Na kraju, pretpostavićemo da funkcija $g(t) \in \hat{l}_2$.

Neka je $K = UL$ - polarna dekompozicija operatora K u superpoziciju unitarnog operatora $U : \hat{l}_2 \to \hat{l}_2$ i pozitivno definisanog operatora $L : \hat{l}_2 \to \hat{l}_2$. Označimo sa C - kvadratni koren operatora L. Neka je $H(K)$ - kodomen operatora C.

Razmotrićemo prvo, slučaj kada je operator K pozitivno definisan; u tom je slučaju $U = I$ i $L = K$. Tada, kao što smo pokazali u poglavlju II.2. - operator C deluje iz $\hat{l}_2$ u $\hat{l}_p$ i istovremeno, dopušta proširenje u neprekidan operator C^* koji deluje iz $\hat{l}_{p'}$ u $\hat{l}_2$. Ako je $g \in H(K)$, rešivost sistema (II.3.3) u $H(K)$, očevidno možemo svesti na rešivost u $\hat{l}_2$, operatorske jednačine:

$$h = C^*FCh + k \; ; \tag{II.3.4}$$

ovde je $Ck = g$.

Posmatrajmo sad na $\hat{l}_2$, sledeći funkcional:

$$G(h) = \sum_{s=1}^{\infty} \emptyset(s, Ch(s)) \, , \tag{II.3.5}$$

gde je

$$\emptyset(s,u) = \int_0^u f(s,t)dt \, . \tag{II.3.6}$$

Relacijama (II.3.5-6.), definisan je poznati Golombov funkcional i kao što je to pokazano u [24], operator Krasnoseljskog C^*FC - je gradijent funkcionala (II.3.5) ([24], lema I.5.1.).

Rasudjivanjem kao u [24] (v. takodje [17]), zaključujemo da, h_o predstavlja rešenje jednačine (II.3.4), ako je ono kritična tačka funkcionala

$$T(h) = (h,h)/2 - G(h) - (k,h) \ , \qquad \text{(II.3.7)}$$

dok je za egzistenciju kritične tačke (tačke minimuma) ovoga funkcionala - u kugli $\|h\|_2 \leq r$ - dovoljno da važi

$$G(h) + (k,h) \leq r^2/2 \quad (\|h\|_2 = r), \qquad \text{(II.3.8)}$$

ako još funkcija $\emptyset(s,u)$ - zadovoljava nejednakost:

$$2\emptyset(s,u) \leq q(s)u^2 + b(s) \ , \qquad \text{(II.3.9)}$$

gde je $q(s) \in \hat{L}_\infty$ i $b(s) \in \hat{L}_1$. Provera tvrdjenja (II.3.8) potpuno je ista kao u neprekidnom slučaju (v. [24]; str. 305). Ovim smo dokazali da važi:

<u>T e o r e m a II.3.1.</u> Neka je pozitivno definisan operator K, a funkcija $\emptyset(s,u)$ - zadovoljava uslov (II.3.9), gde je za $p \leq 2$ - $q(s) \in \hat{L}_\infty$ (osim toga - $\|q\|_\infty \|K\|_{2\to 2} < 1$), odnosno $q(s) \in \hat{L}_{p(p-2)^{-1}}$ (i više - $\|q\|_{r(r-2)^{-1}} \|K\|_{r\to r} < 1$), ako je $p > 2$ i r - neki broj iz $[2,p]$. Neka, dalje, važi jedan od uslova:

(a) Operator $K : \hat{l}_{p'} \to \hat{l}_p$, je potpuno neprekidan;

(b) Operator $F : \hat{l}_p \to \hat{l}_{p'}$, je potpuno neprekidan;

(c) Operator $F : \hat{l}_{p_o} \to \hat{l}_{p'}$, je ograničen i bilo da je $p > 2$ ili $p \leq 2$ - $q(s) \in \hat{l}_{\infty}^{o}$;

(d) $p = \infty$.

Tada za bilo koju funkciju g iz $H(K)$, jednačina (II.3.3) ima bar jedno rešenje u $H(K)$.

Primetimo, da se jednačina (II.3.3) može napisati u obliku:

(1) $$x = KFx + h', \qquad (x \in \hat{l}_p,\ Ch' = g,\ h' \in \hat{l}_p)$$

- odakle se ekvivalentnost rešenja jednačine (II.3.3) i jednačine (II.3.4) - jasnije uočava. Naime, svakom rešenju jednačine (1), odnosno (II.3.3) - odgovara rešenje $C^{*}Fy \in \hat{l}_2$ - jednačine (II.3.4) i obrnuto: svakom rešenju jednačine (II.3.4) (u oznaci $h \in \hat{l}_2$) - odgovara rešenje $Ch \in \hat{l}_p$ jednačine (II.3.3). Jasno je, da je to posledica činjenice da se operator K, pri učinjenim pretpostavkama (v. (II.2.3)), može rascepiti na trojci prostora $\hat{l}_{p'}$, $\hat{l}_2$ i $\hat{l}_p$ (v. (II.2.1)).

<u>T e o r e m a II.3.2.</u> Neka funkcija $f(s,u)$, koja generiše operator superpozicije F, zadovoljava uslov:

$$(u - v)(f(s,u) - f(s,v)) \leq q(s)(u - v)^2, \qquad \text{(II.3.1o)}$$

gde je $q(s) \in \hat{l}_{\infty}$. Neka operatori K i F zadovoljavaju uslove prethodne teoreme i neka je $g \in H(K)$. Tada je rešenje jednačine (II.3.3) - jedinstveno.

D o k a z : Neka su $x_1 = Ch_1$ i $x_2 = Ch_2$, dva rešenja jednačine (II.3.3); tada ako je $h_1 \neq h_2$, iz (II.3.4) - imamo:

$$\|h_1 - h_2\|_2^2 = (C^* FCh_1 - C^* FCh_2 \ , \ h_1 - h_2) =$$

$$= (FCh_1 - FCh_2 \ , \ Ch_1 - Ch_2) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \left[f(s, Ch_1(s)) - f(s, Ch_2(s)) \right] (Ch_1(s) - Ch_2(s)) \leq$$

$$\leq \sum_{s=1}^{\infty} q(s)(Ch_1(s) - Ch_2(s))^2 \leq \|q\|_{\infty} \|C(h_1 - h_2)\|_2^2 \leq \|q\|_{\infty} \|K\| \|h_1 - h_2\|_2^2,$$

- što protivureči pretpostavci (teor. II.3.1.) o veličini - $\|q\|_{\infty} \|K\|$. Teorema je dokazana.

Razmotrićemo sad slučaj kada je operator K u l_2 - kvazi-pozitivno definisan, tj. kada operator K ima konačan broj negativnih sopstvenih vrednosti: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Neka su $e_1(s), e_2(s), \dots, e_m(s)$ - odgovarajuće sopstvene funkcije (koje odgovaraju tim sopstvenim vrednostima). Neka je P ortogonalni projektor na lineal $L(e_1, e_2, \dots, e_m)$. Pri ovim uslovima posmatramo linearni matrični operator K - definisan matricom

$$\hat{k}(s,t) = k(s,t) - 2 \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j(s) e_j(t) \ ,$$

gde je matrica $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$ - definisana;str. 7o. Sad u gore ukazanoj polarnoj dekompoziciji, uzimamo $U = I - 2P$, gde je P ortogonalni projektor na podprostor konačne dimenzije. Operator C, takodje, deluje iz $\hat{l}_2$ u $\hat{l}_p$ i ima proširenje u obliku neprekidnog operatora iz $\hat{l}_{p'}$ u $\hat{l}_2$. Po analogiji na jednačinu (II.3.4), treba razmatrati jednačinu

$$h = 2Ph + C'FCh + k , \qquad \text{(II.3.11)}$$

- a umesto funkcionala (II.3.7) - funkcional:

$$S(h) = (h,h)/2 - (Ph,h) - G(h) - (k,h). \qquad \text{(II.3.12)}$$

Nejednakost (II.3.8) - nužno je zameniti, nejednakošću:

$$(Ph,h) + G(h) + (k,h) \leq r^2/2 \qquad (\|h\| = r). \text{ (II.3.13)}$$

Neka je još, $\varkappa(K)$ - najmanja (po apsolutnoj vrednosti) negativna sopstvena vrednost operatora K, tj.

$$\varkappa(K) = - \sup_{h \in L, \|h\| \leq 1} (Kh,h) .$$

Gore učinjenim analizama, grubim crtama je pokazana

<u>Teorema II.3.3.</u> Neka je operator K kvazi-pozitivno definisan, a funkcija $\emptyset(s,u)$ (v. (II.3.6)) - zadovoljava:

$$2\emptyset(s,u) \leq qu^2 + b(s) ,$$

gde je q - broj koji ispunjava zahtev $q\varkappa(K) < -1$, a $b(s)$ funkcija iz $\hat{L}_1$. Neka je ispunjen jedan od uslova:

(a) Operator $K : \hat{L}_{p'} \to \hat{L}_p$ - je potpuno neprekidan;

(b) Operator $F : \hat{L}_p \to \hat{L}_{p'}$ - je potpuno neprekidan;

(c) $p = \infty$.

Tada za bilo koje $g \in H(K)$, jednačina (II.3.3) ima bar jedno rešenje u $H(K)$ i ako funkcija $f(s,u)$ - koja generiše operator superpozicije (I.o.1), zadovoljava nejednakost:

$$(u - v)[f(s,u) - f(s,v)] \leq q\,(u - v)^2,$$

rešenje je jedinstveno.

II.4. Sopstvene vrednosti diskretnog Hamerštejnovog operatora

Za funkciju $g \in l_p$ $(g \neq o)$, koristimo, kao do sada, naziv sopstvena funkcija operatora $A : l_p \to l_q$, ako postoji broj λ, takav da je $Ag = \lambda g$. U tom slučaju, broj λ - nazivamo sopstvena vrednost operatora A, koja odgovara sopstvenoj funkciji g. Ako za broj λ, ne postoji $g \neq o$, sa svojstvom $Ag = \lambda g$ - kažemo da je λ rezolventna vrednost operatora A. Inverznu vrednost sopstvene vrednosti operatora A, zvaćemo karakteristična vrednost operatora A. Skup svih sopstvenih vrednosti nelinearnog operatora A, a po analogiji na linearne operatore, nazivamo spektar operatora A.

Ovde ćemo posmatrati jednačine

$$\sum_{s=1}^{\infty} k(s,t)f(s,x(s)) = \lambda x(t) , \qquad (II.4.1)$$

gde matrica $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$ i funkcija $f(s,u)$ - imaju svojstva izneta u definiciji beskonačnog nelinearnog sistema iz (II.3.3) (v. str. 74.). Sistem (II.4.1) možemo napisati u operatorskoj formi $KFx = \lambda x$.

Dosta je pitanja na koja, poznavanjem sopstvenih funkcija Hamerštejnovog operatora KF, možemo relativno brzo dati odgovor (medju njima su, svakako, pitanja egzistencije tačaka bifurkacije, struktura spektra, struktura skupa sopstvenih funkcija operatora i dr.), ali mi ćemo se ovde samo dotaći pitanja strukture spektra i u narednom poglavlju - tačaka bifurkacije beskonačnih nelinearnih sistema.

Poznato je, da linearni potpuno neprekidni operator ima diskretan spektar i nulu kao tačku nagomilavanja skupa sopstvenih vrednosti. Kod nelinearnih operatora, spektar, takodje može biti diskretan, medjutim, može se ipak smatrati da je, u opštem slučaju njihov spektar „veći" - što će potvrditi i teorema koju ćemo dole formulisati.

Ovde je neophodna primedba. Naime, govoreći o sopstvenim vrednostima operatora KF - govorimo o sopstvenim vrednostima beskonačnog nelinearnog sistema (II.3.3). Ta činjenica sledi iz pretpostavke o potpunoj neprekidnosti operatora K (koju smo već učinili) i uslova koje ispunjava nelinearni operator superpozicije F (koje ćemo dati nešto kasnije) - te poznate Fretholmove alternative.

Za sada pretpostavljamo da je, što se tiče funkcije $f(s,u)$ koja generiše operator superpozicije F, jedino $f(s,o)=o$ za svako $s \in \mathbb{N}$.

Teoremama o egzistenciji rešenja sistema (II.4.1) - pokazali smo da je spektar operatora KF - neprazan. Topološkim metodama (rotacija vektorskih polja), potpuno isto kao u neprekidnom slučaju ([24] , teor. II.4.8.), pokazuje se da važi:

<u>T e o r e m a II.4.1.</u> Neka je g_o - sopstvena funkcija nelinearnog potpuno neprekidnog operatora KF, koji je neprekidno diferencijabilan u okolini tačke g_o.

Neka je, dalje, λ_o - sopstvena vrednost koja odgovara sopstvenoj funkciji g_o, različita od nule i rezolventna je vrednost Frešeovog izvoda operatora KF, u tački g_o.

Tada, spektar operatora KF sadrži neki interval $(\lambda_o - \varepsilon, \lambda_o + \varepsilon)$, pri tome postoji okolina tačke g_o - takva da svakom λ iz intervala $(\lambda_o - \varepsilon, \lambda_o + \varepsilon)$ odgovara jedinstvena funkcija g iz te okoline, koja sa svoje strane neprekidno zavisi od λ.

Jasno, ostalo je nekoliko napomena o funkciji $f(s,u)$, koja generiše operator superpozicije F - koji sa operatorom K (kompozicijom) - čini operator KF. No, pre toga nešto o diferencijabilnosti operatora KF.

Neka je K linearni neprekidan operator iz l_r u l_q i neka funkcija $f(s,u)$ - generiše operator superpozicije F, koji deluje iz l_p u l_r. Sada operator KF deluje iz l_p u l_q i predstavlja diskretni nelinearni Hamerštejnov operator. Ako je operator superpozicije F - diferencijabilan u nekoj tački $x_o \in l_p$, tada, kao što smo videli poglavlju I.7. njegov izvod predstavlja linearni operator, takodje, iz l_p u l_r i zbog (I.7.5), linearni operator

$$Bh(t) = \sum_{s=1}^{\infty} k(s,t) f'_u(s, x_o(s))\, h(s) \qquad \text{(II.4.2)}$$

- deluje iz l_p u l_q - neprekidno. Još više, iz očevidne nejednakosti:

$$\| KF(x_o + h) - KFx_o - Bh \|_q \leq \|K\| \, \|F(x_o + h) - Fx_o - F'(x_o)\, h\|_q$$

nalazimo da je operator KF - diferencijabilan u tački x_o iz l_p i linearni operator B, predstavlja njegov izvod.

Na taj način iz svakog kriterijuma diferencijabilnosti (u Frešeovom smislu), operatora superpozicije (I.o.1) - lako možemo dobiti odgovarajuće uslove diferencijabilnosti operatora KF, tj. diskretnog nelinearnog Hamerštejnovog operatora definisanog desnom stranom relacije (II.3.1).

II.5. Tačke bifurkacije beskonačnih nelinearnih sistema

Neka je dat beskonačni nelinearni sistem

$$\sum_{s=1}^{\infty} k(s,t)f(s,x(s)) = \lambda x(t) , \qquad \text{(II.5.1)}$$

gde beskonačna matrica $k(s,t)$ $(s,t\in\mathbb{N})$ - ispunjava sve uslove, da operator K , koji ona definiše - bude: samoadjungovan, pozitivno definisan (pogl. II.2.) operator koji se može predstaviti u obliku $K = C C^{*}$ (pogl. II.2. - (II.2.5)); samoadjungovani operatori C i C^{*} - deluju iz l_2 u l_p i iz l_q u l_2 - redom ($K : l_q \to l_p$; $p^{-1} + q^{-1} = 1$).
Pretpostavke koje treba naložiti funkciji $f(s,u)$, detaljnije ćemo izneti nešto kasnije, ali za sada: funkcija $f(s,u)$ - generiše operator superpozicije (I.o.1) i $f(s,o) = o$, za svako $s\in\mathbb{N}$. Sistem (II.5.1), napisaćemo u operatorskoj formi:

$$KFx = \lambda x \qquad (x\in l_p , \ F : l_p \to l_q). \ \text{(II.5.2)}$$

Broj λ_o - naziva se tačka bifurkacije jednačine (II.5.2) - ako za svako $\varepsilon > o$ postoji takvo λ, da je $|\lambda - \lambda_o| < \varepsilon$ i jednačina (II.5.2) ima u kugli $B(o,\varepsilon)$ - bar jedno rešenje različito od nula. Broj λ_{∞} , naziva se asimptotska tačka bifurkacije ([24]), jednačine (II.5.2) ako za svako $\varepsilon > o$ - možemo naći takvo λ, da je $|\lambda - \lambda_{\infty}| < \varepsilon$ i jednačina, van kugle $\|x\| < \varepsilon^{-1}$ - ima bar jedno rešenje.

Pretpostavke koje treba da ispuni operator K, (i sa njim u vezi matrica $k(s,t)$), već smo izneli; sad o dodatnim uslovima za funkciju $f(s,u)$ i s tim u vezi operatoru F. Naime, pretpostavimo da važi:

$$f(s,u) = a_o(s)u + w(s,u)u\,, \tag{II.5.3}$$

gde je $a_o \in \hat{l}_q/\hat{l}_p$ (v. (I.7.2)), a funkcija $w(s,u)$ - generiše operator superpozicije iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q/\hat{l}_p$.

Pri ovim pretpostavkama operator F , koji je generisan funkcijom $f(s,u)$, deluje iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_q$, a operator KF - u prostoru $\hat{l}_p$. Specijalno, ako je operator superpozicije F - diferencijabilan na $B(o,r) \subset \hat{l}_p$, tada (v. pogl. I.7.), očigledno važi (II.5.3). Sada smo u situaciji, da operator (II.4.2) „uopštimo" - uvodjenjem sledećeg

$$B_o x(t) = \sum_{s=1}^{\infty} k(s,t)a_o(s)x(s) \tag{II.5.4}$$

- njegovog analoga.

Pod istim pretpostavkama posmatramo i operator Krasnoseljskog C^*FC ; sa njim u vezi i funkcional (II.3.5 - 6), gde ćemo pretpostaviti da operator generisan funkcijom $\emptyset(s,u)$ deluje iz $\hat{l}_p$ u $\hat{l}_1$.

<u>L e m a 5.</u> (V. tvrdjenje 4. [19]). Neka je ispunjen jedan od uslova:

(a) Operator K je potpuno neprekidan;

(b) Operator generisan funkcijom $w(s,u)$ iz (II.5.3) je neprekidan u nuli.

Tada je operator $C^{*}a_{o}C$ (a_o - je operator množenja funkcijom $a_o(s)$ iz (II.5.3)) - Frešeov izvod operatora $C^{*}FC$ u nuli.

Na osnovu učinjenih analiza i pretpostavki koje ispunjavaju funkcije $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$ i $f(s,u)$, stečeni su svi argumenti, da važi sledeća teorema - koja se pokazuje kao i analog u neprekidnom slučaju (T.VI.2.2. - [24]),pa je mi samo formulišemo:

T e o r e m a II.5.1. Ako je operator K - pozitivno definisan, tj. sve sopstvene vrednosti matrice $k(s,t)$ $(s,t \in \mathbb{N})$ su pozitivne; i neka važi jedan od uslova:

(a) Operator K je potpuno neprekidan;

(b) Operator generisan funkcijom $\emptyset(s,u)$ (v. (II.3.6)) - je ograničen, a operator generisan funkcijom $w(s,u)$ (II.5.3) - neprekidan u nuli;

Tada svaka nenulta sopstvena vrednost λ_o, operatora B_o (vidi (II.5.4)) - je tačka bifurkacije beskonačnog nelinearnog sistema (II.5.1).

Jasno je da rezultat ostaje u važnosti, ako se pozitivna definisanost operatora zameni - kvazi-pozitivnom i tehniku toga prelaza, dali smo u poglavlju II.3.

Slično se mogu razmotriti i asimptotske tačke bifurkacije, uz korišćenje iznetog - o asimptotskoj diferencijabilnosti operatora superpozicije (I.o.1).

Razmatranja izneta u ovoj glavi standardnim šemama ([27]) - koristeći uopštene rezultate, iznete u prvoj glavi, na prostore Orliča, bez većih poteškoća možemo uopštiti na beskonačne nelinearne sisteme u Orličevim prostorima nizova i funkcija.

L i t e r a t u r a :

1. Ахиезер Н.И. и Глазман И.М. - Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Госунивиздат, Харков, 1977.

2. Aljančić S. - Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1968.

3. Appell J. i Zabrejko P.P. - On a theorem of M.A. Krasnoseljski, Nonlinear Analisis, Methods and Applications, V. 7, N.° 7, 1983.

4. Аппель Ю. и Забрейко П.П. - Точние оценки сверху для оператора суперпозиции, Доклади Академии наук БССР, Том 27 № 8, 1983.

5. Appell J. and Zabrejko P.P. - On analyticiti conditions for the superposition operator in ideal function spaces, Univ. Augsburg, Preprint Nr. 63, 1985.

6. Jacques Robert - Continuite d'un operateur non lineaire sur certains espaces de suites, C.R.Acad.Sc. Paris, t.259, Groupe 1, 1964.

7. Аппель Ю. - Меры некомпактности и апроксимацийи в локально выпуклых пространствах, Качествение и приближние мет. исл. операт. ур., Выпуск 4, Ярославль, 1979.

8. Вайнберг М.М. - Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, 1956.

9. Вайнберг М.М. - Оператор Немыцкого, УМЖ 7, вып.4, 1955.

10. Ван Шен-ван - Дифференцируемость оператора Немыцкого, ДАН СССР 150, № 6, 1963.

11. Golomb M. - Uber systeme von nichtlinearen Integralgleichungen, Publications Matematiques de l´Universite de Belgrade, T. V, Belgrade, 1936.

12. Грибанов Ю.И. - К теории пространств l^N, „Учение записки Казанского ун-та", т.II7, I957.

13. Данфорд Н. и Шварц Дж. - Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, I963.

14. Дедагич Ф. и Забрейко П.П. - Об операторах суперпозиции в пространствах I_p , Принята к печаты ред. жур. „Сибырски мат. журнал", I985.

15. Zabrejko P.P. - The Schaefer metod in the theori of Hammerstein integral equations, Mat. USSR Sbornik, Vol. 13 , Nº 3, 1971.

16. Забрейко П.П. - Идеальные пространства функций -I, Вестник Яросльавского Ун-та, Выпуск 8, Ярославль, I974.

17. Забрейко П.П. и Поволоцкий А.И. - К теории уравнений Гамерштейна, Укр. матем. журнал, т- 22, № 2, I970.

18. Забрейко П.П. и Рябикова И.Н. - К теории производных высшых порятков для операторов в банахових пространствах, Кач. и пр. методы иссл. опер. урав., Вып.4, Ярославль, I970.

19. Забрейко П.П. и Поволоцкий А.И. - О точках бифуркации уравнения Гамерштейна, Изв.в.учеб.зав. Матем. № 6/I09,I97I.

2o. Jacques Robert - Continuite d´un operateur non lineaire sur certains espaces de suites, C.R.Ac.Paris,t-259, 1964.

21. Канторович Л.В. и Акилов Г.П. – Функциональний анализ, Москва, „Наука", 1984.

22. Канторович Л.В. – Об операторах интегральных, УМН 7, вып. 2, 1956.

23. Caratheodory K. – Vorlesungen über reale Funktionen, Leipzig und Berlin, 1918.

24. Красносельский М.А. – Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва, 1956.

25. Красносельский М.А. и др. – Интегральные операторы в пр. суммируемых функций, Москва, 1966.

26. Красносельский М.А. и др. – Векторние полья на плоскости, Москва, 1963.

27. Красносельски М.А. и Рутицкий Я.Б. – Выпуклые функции и пространства Орлича, Москва, 1958.

28. Кук Р. – Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, Госиздфизматлит – Москва, 1969.

29. Kurepa S. – Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene , Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

30. Люстерник Л.А. и Соболев В.И. – Элементи функционального анализа, Наука, Москва, 1965.

31. Немыцкий В.В. – Об одном классе нелинейных интегральных уравнений, Матем. сб. 41, № 4, 1934.

32. Riesz F. and E.Sz.- Nagi - Functional Analisis, Freder. Ungar Pub. Co., New York, 1955.

33. Рутицкий Я.Б. - О некотором обобщении координатных пространств Орлича, Научние труды ВИСИ, Сборник № 9, I962.

34. Садовский Б.Н. - Предельно компактные и уплотняющие операторы, УМН Том 27 - № I, I972.

35. Фихтенгольц Г.М. - Курс дифференциального и интегрального исчисления - I и II, Физматгиз, Москва, I962.

36. Halmos P.R. - A Hilbert Space Problem Book, Van Nostrand, New York, 1967.

37. Halmos P.R. - Mesure Theory, D. Van Nostrand, Princeton, 1950.

38. Hadžić O. - Osnovi teorije nepokretne tačke, Institut za Matematiku, Novi Sad, 1978.

39. Hille E. and Phillips R. - Functional analysis and semi - groups, Coll. Publ., Providence, 1957.

40. Hardy G.H.,Littlewood J.E. and Pólya G. - Inequalities, At the University press - Cambrigge, 1934.

4I. Шилов Г.Е. - Дифференцирование функций: высшие производные и варионционное исчисление, Основы современного анализа, Ярославль, I980.

ОБ ОПЕРАТОРЕ СУПЕРПОЗИЦИИ В БАНАХОВИХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕИ

– Докторская диссертация –

Дедагич Фехим

Р Е З Ю М Е :

Оператор суперпозиции /I/ (см. стр. 6) в пространствах L_p – интегрируемых с р-й степенью функций на изучен сравнительно детально /см., например [24-25]/. Для него получены необходимые и достоточные условия действия из одного лебегого пространства в другое, выяснены условия его непрерывности, ограниченности и абсолютной ограниченности, условия дифференцируемости в отдельных точках и на всем пространстве, условия аналитичности и др. Однако, все эти результаты получены в предположении, что мера μ на Ω является непрерывной / без атомов / и оказываются неверными при наличии атомов, в частности если мера дискретна. В настоящей работе получени:

– неопходымые и достаточные условия действия оператора суперпозиции /I/ из одного пространства последовательностей $\hat{l}_p$ в другое $\hat{l}_q$ /$I \leq p, q \leq \infty$/ ; условия его непрерывности, ограничености, абсолютной ограниченности, дифференцируемости, аналитичности в банахових пространствах посльедовательностей.

В качестве примера приложений полученных теорем – установлен ряд теорем о разрешимости бесканечного нелинейного система уравнений типа Гаммерштейна.

Полученные результаты легко можно перености на случай операторов суперпозиции /I.O.I/; (см. § I.9.)- действующих из одного L_p в другое L_q , в случае произвольной меры. Этим обьясняется использованые в работе для последовательностей – функциональных обозначений. В §I.9. тоже указано как они /получение результати/ переносятся и на операторы, действующие из одного пространства Орлича в другое.

B i o g r a f s k i   p o d a c i   o   a u t o r u

Rodjen sam 1. marta 1948 g. u Priboju, gde sam završio i osmogodišnju školu. Učiteljsku školu u Titovom Užicu, završio sam sa odličnim uspehom kao i Prirodno-matematički fakultet - grupu za matematiku u Prištini, gde sam diplomirao 1972 g. Na istom fakultetu upisao sam 1977/78 g. postdiplomske studije i magistrirao 1980 g. - odbranivši rad pod naslovom: „Izometrijske i unitarne dilatacije operatora kontrakcije".

Po diplomiranju, kratko sam radio kao profesor matematike u Gimnaziji u Priboju, a od 1. febr. 1973 g.- prvo kao asistent za matematiku na Tehničkom fakultetu u Prištini, a potom i na PMF-u u Prištini. Od 1981 g. predavač sam na Odseku za matematiku PMF-a u Prištini, gde se i danas nalazim.

Objavio sam radove:

- „ O matričnoj triangulaciji operatora klase C_ρ, $\rho > 0$". Zbornik radova PMF - Priština, VIII, 1982.

- „ O operatorima superpozicije u prostorima l_p".(kao koautor sa P.P. Zabrejkom) - Sibirski mat. žurnal - 1985 (primljen u štampu).

- „Ograničenost i funkcija rasta operatora superpozicije u l_p". Saopštenje na VIII Kongresu MFA - Jugoslavije, 1985.

Oženjen sam i imam jedno dete.

25. mart 1986 g.   A u t o r