МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

БЕОГРАД

РИМАНОВ ИНТЕГРАЛ ВЕКТОРСКО ВРЕДНОСНИХ ФУНКЦИЈА

Мастер рад

Аутор- Љиљана Врачар

Ментор - др Милош Арсеновић

Београд, 2015.

Мом поштованом ментору проф. др Милошу Арсеновићу

Код човека постоји жеља за трајним усавршавањем. Он је на том путу често усамљен и онда тај процес бива мукотрпан. Ако му пак, вештом руком, притекну у помоћ озбиљни зналци, остављајући притом осећање што самосталнијег напредовања онда је незаобилазна огромна захвалност таквим људима.

<u>Риманов интеграл векторско вредносних функција</u>

Садржај

<u>Риманов интеграл векторско вредносних функција</u>

Увод

На развој математике су утицали реални проблеми које је било потребно решити. Један од основних проблема био је и израчунавање површине и запремине. Површина правоугаоника се лако израчунава као производ дужина његових страница. Површину троугла и паралелограма можемо рачунати трансформацијом датих фигура до правоугаоника. Уопштено, површина многоугла се може израчунати поделом фигуре на троуглове.

Проблем настаје код потребе за израчунавањем површине фигуре оивичене кривом линијом. Архимед је још у трећем веку користио такозвану методу исцрпљивања или ексхаустије. Он је рачунао површину круга описујући му и уписујући му правилне многоуглове чиме је исцрпљивао површину круга површинама многоуглова. Повећавајући број страница могао је да рачуна површину круга са потребном тачношћу. Математичари су вековима решавали овај проблем и налазили за сваки посебан пример прилагођену формулу.

Проблем је решен тек у 17. веку откривањем једне опште методе и то не геометријски, већ аналитички. Појам интеграла је један од најважнијих појмова у математичкој анализи. У данашњем смислу јавио се у радовима Њутна и Лајбница, али је тек са Кошијевим радовима о граничним вредностима било могуће дефинисати интеграл као граничну вредност интегралних сума Лајбниц уводи ознаку $\int$, стилизовано слово S као асоцијацију на суму.

Њутн и Лајбниц су знали са појам брзине, силе, убрзања, али су знали за само три димензије. У деветнаестом веку долази се до прецизног дефинисања појма вектора. Самом открићу вектора претходе три покушаја развијања теорије (1) откриће и геометријско представљање комплексних бројева (2) Лајбницово истраживање теорије положаја и (3) Њутнова идеја о паралелограму сила или брзина. Тек даљим напретком науке, пре свега физике долазимо до појма векторских функција, јавља се потреба за даљим развојем теорије вектора.

У овом раду бавићемо се Римановим интегралом векторских функција. Указаћемо на особине, ставове и теореме које се преносе са једнодимензионалних на векторско вредносне функције, указаћемо на ставове који се уз мању модификацију преносе на општи случај као и на поучне примере функција које узимају вредност у бесконачно димензионалним просторима. У општем случају се не можемо ослањати на поредак, тј. немамо концепте доњег и горњег Дарбуовог интеграла. Дакле за увођење појма конвергенције Риманових сума, а тиме и појма интеграбилности неопходно морамо имати метрику, а заправо норму на нашем векторском простору.

Сам рад је подељен у пет делова. Како претпостављамо да су читаоцу познати основни појмови обрађени и у Анализи1, као што су појам низа, конвергенције...у првом делу ћемо дати кратак преглед основних појмова попут векторског простора, метричког простора, норме и Банаховог простора, навешћемо примере Банахових простора. У другом делу уводимо појам Римановог интеграла и наводимо осцилаторни критеријум интеграбилности који се често не обрађује на почетним курсевима анализе и наводимо особине интеграла. У трећем делу сажето износимо теорију о интеграцији реалних функција и упоређујемо критеријуме интеграбилности реалних и векторско вредносних функција. Четврти део садржи теорију о интеграцији векторско вредносних функција, указује се на разлике у интеграбилности реалних и векторско вредносних функција, као и занимљиве контрапримере. Пети део повезује интеграл и извод функције, доказује се Њутн-Лајбницова формула.

<u>Риманов интеграл векторско вредносних функција</u>

1.Основни појмови

Векторски простор

Дефиниција 1.1.Структура $V=(V,+,\cdot,F)$, при чему је V скуп чије елементе зовемо векторима, $+$ бинарна операција у скупу V при чему је $(V,+)$Абелова група, F скуп чије елементе називамо скаларима и који има структуру поља $(F,+,\cdot)$. Нека је даље дефинисано пресликавање, које називамо множење вектора скаларом, $F\times V\to V$, које сваком вектору $x\in V$ придружује вектор $\alpha x\in V$ тако да важе аксиоми:

1. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,\forall\alpha,\beta\in F,\forall x\in V$
2. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\forall\alpha\in F,\forall x,y\in V$
3. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\forall\alpha,\beta\in F,x\in V$
4. $1x=x,1\in F,\forall x\in V.$

V се зове векторски простор над пољем $\mathbb{F}$ и означава се са V. За нас су од интереса случајеви када је поље скалара $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Метрички простор

Дефиниција 1.2. Метрички простор је пар (M,d) где је M скуп, а d је метрикана M , то јест функција $d:M\times M\to\mathbb{R}^+$ таква да

1. $d(x, y) = 0$ ако и само ако $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ (неједнакост троугла).

Функција d се такође назива функцијом раздаљине или просто раздаљином.

<u>**Риманов интеграл векторско вредносих функција**</u>

Дефиниција 1.3. Низ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ у метричком простору (X,d) је Кошијев ако за свако $\varepsilon>0$ постоји $n_0\in N$ такав да је $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ за све $m,n>n_0$.

Дефиниција 1.4. Метрички простор се назива комплетним уколико у њему сваки Кошијев низ конвергира.

Класичан резултат је да сваки Кошијев низ реалних бројева конвергира.

Дефиниција 1.5. Кажемо да је функција $f:I\to X$ Липшиц непрекидна на интервалу $I\subset\mathbb{R}$ ако постоји константа $L\geq 0$ таква да је $\|f(x_1)-f(x_2)\|\leq L|x_1-x_2|$.

Дефиниција 1.6. Кажемо да је функција $f:I\to X$, где је X метрички простор,равномерно (униформно) непрекидна ако се за свако $\varepsilon>0$ може наћи $\delta>0$ тако да за сваке две тачке x_1 и x_2 из скупа I које су на растојању мањем од δ важи $d(f(x_1)-f(x_2))<\varepsilon$.

Норма и нормирани простор

Дефиниција 1.7. Нека је X векторски простор над пољем K, где K означава поље $\mathbb{R}$ или поље $\mathbb{C}$. Функција $\|\cdot\|:\mathrm{X}\to[0,\infty)$ која има особине

1. $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$
2. $\|\alpha x\|=\alpha\|x\|,\forall x\in X,\forall\alpha\in K$
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|,\forall x,y\in X$

назива се нормом на X, а простор X заједно са датом нормом назива се нормирани векторски простор или краће нормирани простор.

Дефиниција 1.8. Комплетан нормирани векторски простор назива се Банаховим простором.

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Неки примери норми и Банахових простора

Пример 1.1.Уочимо скуп $\mathbb{R}^k$ и норме:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} ; 1 \le p < \infty$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \le j \le k} |x_j| .$$

Ови простори су Банахови. Слично имамо и за $\mathbb{C}^k$.

Пример 1.2.Уочимо скуп свих непрекидних функција $C[a,b]$ на интервалу $[a,b]$ и норму $\|f\| = \sup_{a \le t \le b} |f(t)| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|$. Овај простор је такође Банахов.

Доказ – Узмимо да је f_n неки Кошијев низ из $C[a,b]$, одаберимо $\varepsilon > 0$, тада за неко n_0 важи $|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon, m, n > n_0, t \in [a,b]$.

Следи да је за свако $t \in [a,b]$ низ $f_n(t)$ Кошијев низ у $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, па он конвергира ка броју $f(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(t)$. Овако је дефинисано пресликавање $t \mapsto f(t)$ коме ће низ f_n конвергирати. Граничним прелазом кад $n \to \infty$ добијамо $|f_m(t) - f(t)| < \varepsilon$, $m > n_0, t \in [a,b]$ која је непрекидна, јер равномерна конвергенција чува непрекидност.□

Пример 1.3. $l^p, 1 \le p < \infty$ санормом $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}$, $\mathrm{x} = (x_1, x_2, ...) \in l^p, p \ge 1$.

Пример 1.4. Скуп ограничених низова и нула низова са супремум нормама.

$$l^\infty = \left\{ x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \|x\|_\infty = \sup_{n \ge 1} |\xi_n| < +\infty \right\},$$

$$c_0 = \left\{ x \in l^\infty \,\middle|\, x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \lim_{\mathrm{n} \to \infty} \xi_n = 0 \right\}.$$

c0 је векторски подпростор од l^{∞}, наслеђује норму (па тиме и метрику) из l^{∞}. Како је c_0 затворен у Банаховом простору l^{∞}, он је и сам Банахов простор.

Пример 1.5. Нека је S непразан скуп. Скуп свих ограничених функција $B(S)=\left\{f:S\to\mathbb{R}\ \middle|\ \exists M\in\mathbb{R}:|f(x)|\le M, x\in S\right\}$ норма $\|f\|_{\infty}=\sup_{x\in S}|f(x)|$ чине један Банохов простор.

Риманов интеграл векторско вредносних функција

2.Основна својства интеграла

2.1.Дефиниција Римановог интеграла. Линеарност интеграла

Дефиниција 2.1. Подела сегмента $[a,b]$ је коначан низ тачака $x_0, x_1, ..., x_n$, из $[a,b]$ такав да је $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Сегменти $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$, су подеони сегменти те поделе P. За њихове дужине уводимо ознаку

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1,}\ 1 \le i \le n.$

Параметар поделе P је

$\lambda(P) = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i.$

Скуп свих подела сегмента $[a,b]$ означавамо са $P_{[a,b]}$ или P.

Скуп свих подела сегмента $[a,b]$ можемо уредити релацијом $\prec$. Ако је свака подеона тачка поделе P_1 истовремено и подеона тачка поделе P, другим речима P се добија из P_1 додавањем подеоних тачака, тада пишемо $P_1 \prec P$ рећи ћемо да је подела P финија од поделе P_1, односно да је подела P_1 грубља од поделе P.

Дефиниција 2.2. Пар (P, ξ) је подела сегмента $[a,b]$ са изабраним тачкама ако је $P: a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ подела сегмента $[a,b]$, а $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ уређена $n-$торка тачака таква да је $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n.$

Скуп свих подела са изабраним тачкама сегмента $[a,b]$ означавамо са $\Pi_{[a,b]}$ или Π.

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Дефиниција 2.3. Нека је $f:[a,b]\to X$ функција са вредностима у Банаховом простору X. Тада за сваку поделу са изабраним тачкама уводимо одговарајућу Риманову суму $\sigma(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Овде одступамо од договора да производ скалара λ и вектора v пишемо λv, већ овде пишемо сдесна vλ. Приметимо да $\sigma(f,P,\xi)\in X$.

Ако $I\in X$ испуњава услов

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):(P,\xi)\in P_{[a,b]} \text{ и } \lambda(P)<\delta\Rightarrow\left\|\sigma(f,P,\xi)-I\right\|<\varepsilon$$

онда пишемо $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I$.

Тада је I једнозначно одређено и зовемо га Римановим интегралом функције f на сегменту $[a,b]$ и означавамо са $\int_a^b f(x)dx$, а за функцију кажемо да је Риман интеграбилна на интервалу $[a,b]$, a и b називамо респективно доњом и горњом границом интеграла, а функцију f називамо подинтегралном функцијом.

Скуп свих Риман интеграбилних функција на сегменту $[a,b]$ означавамо са $R([a,b],X)$ или са $R[a,b]$ ако је $X=\mathbb{R}$.

Напомена 2.1. Да би $\int_a^b f(x)dx=I$ неопходан и довољан услов је да за сваки низ (P^n,ξ^n) подела са изабраним тачкама такав да је $\lim_{n\to\infty}\lambda(P^n)=0$ важи $\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P^n,\xi^n)=I$. Другим речима $f\in R([a,b],X)$ ако и само ако $\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P^n,\xi^n)$ постоји кад год је $\lim_{n\to\infty}\lambda(P^n)=0$.

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Теорема 2.1. (Линеарност интеграла) Нека су функције $f,g:[a,b]\to X$ Риман интеграбилне. Тада су и $f+g,\lambda f$ Риман интеграбилне $(\lambda\in\mathbb{R})$ и важи:

$$(1)\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx,$$

$$(2)\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx.$$

Доказ: Нека је $I_f=\int_a^b f(x)dx$ и $I_g=\int_a^b g(x)dx$

$$\sigma(f+g,P,\xi)=\sigma(f,P,\xi)+\sigma(g,P,\xi).$$

Задајмо $\varepsilon>0,$ тада постоје $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$ тако да важи

$$\left\|\sigma(f,P,\xi)-I_f\right\|<\frac{\varepsilon}{2}\ \lambda(P)<\delta_1,\ \left\|\sigma(g,P,\xi)-I_g\right\|<\frac{\varepsilon}{2}\ \lambda(P)<\delta_2.$$

Нека је $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Ако је $\lambda(P)<\delta$ онда је

$$\left\|\sigma(f+g,P,\xi)-(I_f+I_g)\right\|\le\left\|\sigma(f,P,\xi)-I_f\right\|+\left\|\sigma(g,P,\xi)-I_g\right\|<\varepsilon.$$

Овим је доказано да је $R([a,b],X)$ векторски простор, а $\int_a^b :R([a,b],X)\to X$ линеарно пресликавање.□

Најједноставнији пример је интеграл константне функције.

Доказ је прототип оних доказа који се непосредно преносе на векторске случајеве.

Нека је $c\in X$ онда је за $f(x)=c(a\le x\le b)$

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=c\sum_{i=1}^n\Delta x_i=c(b-a)$$

па следи $\int_a^b c dx = (b-a)c.$

Ако је $f:[a,b]\to X$ једнака нули осим у коначно много тачака онда је f Риман интеграбилна и $\int_a^b f(x)dx = 0$. Наиме нека је f једнака нули на $[a,b]\setminus\{t_1,t_2,...,t_k\}$. За $C=\max_{1\le j\le k}\|f(t_j)\|$ имамо да је $\|\sigma(f,P,\xi)\|\le 2kC\lambda(P)$, а то је довољно.□

Као последицу претходног имамо тврђење:

Ако су $f,g:[a,b]\to X$ и нека се разликују у коначно много тачака онда $f\in R([a,b],X)$ акко $g\in R([a,b],X)$ онда из горњег и (1) примењеног на случај разлике следи $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$ Може се рећи да су коначни скупови занемарљиви у смислу интеграције. Може се говорити о Риман интеграбилности и Римановом интегралу функције која је задата на комплементу коначног подскупа сегмента $[a,b]$.

2.2.Кошијев критеријум Риман интеграбилности

Став 2.1.(Кошијев критеријум) Функција $f:[a,b]\to X$ је Риман интеграбилна ако и само ако испуњава услов

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):\forall(P',\xi')\lambda(P')<\delta,\forall(P'',\xi'')\lambda(P'')<\delta\Rightarrow\|\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,P'',\xi'')\|<\varepsilon \quad (C).$$

Доказ – Нека је $f\in R([a,b],X)$, означимо $\int_a^b f(x)dx$ са I, задајмо $\varepsilon>0$. По дефиницији 2.3. постоји $\delta>0$ такво да је $\|\sigma(f,P,\xi)-I\|<\frac{\varepsilon}{2}$ кад год је $\lambda(P)<\delta.$

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Непосредноследи $\left\|\sigma\left(f, \mathrm{P}', \xi'\right)-\sigma\left(f, \mathrm{P}'', \xi''\right)\right\| \leq\left\|\sigma\left(f, \mathrm{P}', \xi'\right)-I\right\|+\left\|I-\sigma\left(f, \mathrm{P}'', \xi''\right)\right\|<\varepsilon$ акоје $\lambda\left(P_1\right)<\delta \; \lambda\left(P'\right)<\delta, \lambda\left(P''\right)<\delta.$

Обрнуто, нека важи Кошијев критеријум.За дато $\delta>0$ нека је
$A_\delta=\left\{\sigma(f, P, \xi) \mid \lambda(P)<\delta\right\}$ и нека је

$$\omega_\delta=diam A_\delta=\sup_{\lambda(P')<\delta, \lambda(P'')<\delta}\left\|\sigma\left(f, P', \xi'\right)-\sigma\left(f, P'', \xi''\right)\right\|.$$

Из услова (C) следи да је $\lim\limits_{\delta \rightarrow 0+} \omega_\delta=0.$ Посматрајмо низ скупова $F_n=\overline{A_{\frac{1}{n}}}$ они чине опадајући низ $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ непразних затворених подскупова Банаховог простора X и $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} diam F_n=0.$ Из комплетностипростора X имамо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq 0$, штавише тај пресек садржи једну тачку $I \in X$ (овде се позивамона теорему 1.14.из [4]).

Докажимо да је $I=\int_a^b f(x) dx.$ Наиме, за дато $\varepsilon>0$ због $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} diam F_n=0$ следи да постоји $n \in N: diam F_n<\varepsilon$ због $A_{\frac{1}{n}} \subset F_n$ следи да је $\|\sigma(f, P, \xi)-I\|<\varepsilon$ кад год је $\lambda(P)<\frac{1}{n}$, што је довољно.

Последица 2.1 Ако је $f:[a, b] \rightarrow X$ Риман интеграбилна онда је f ограничена на $[a, b]$.

Доказ: Претпоставимо да је функција неограничена на датом сегменту, тада за произвољну поделу постоји сегмент Δ_i на коме је функција неограничена. На осталим подеоним сегментима фиксирамо по једну тачку $\xi_j \in \Delta_j$, док из сегмента Δ_i варирамо промењљиву тачкуη. Тада је

$\sigma\left(f,P,\xi\right)=f\left(\eta\right)\Delta x_i+\sum_{j\neq i}f\left(\xi_j\right)\Delta x_j$ функција од η која није ограничена по $\eta\in\Delta_i$ те функција не може бити интеграбилна.□

Следећи став је основна интегрална неједнакост.

Став 2.2. Нека је $f\in R\left(\left[a,b\right],X\right)$ и нека је $\left\|f\left(x\right)\right\|\leq C$ за $a\leq x\leq b.$ Тада је

$$(3)\left\|\int_a^b f\left(x\right)dx\right\|\leq C\left(b-a\right).$$

Доказ – За сваку поделу са изабраним тачкама $\left(P,\xi\right)$ важиће

$\left\|\sigma\left(f,P,\xi\right)\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\right\|\leq\sum_{i=1}^{n}C\Delta x_i=C\left(b-a\right)$, преласком на лимес $\left(\lambda\left(P\right)\to 0\right)$ добијамо (3).□

Пример 2.1.- Дирихлеова функција $\chi\left(x\right)$ дефинисана је

$$\chi\left(x\right)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\0, x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

је ограничена на $\mathbb{R}$, прекидна у свакој тачки и није Риман интеграбилна ни на једном сегменту $\left[a,b\right]$.

Доказ– Узмимо произвољне бројеве aи b и нека је $a<b$. Нека је P произвољна подела сегмента $\left[a,b\right]$. Узмимо два скупа истакнутих тачака $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)$ и $\xi'=\left(\xi_1',\xi_2',...,\xi_n'\right)$ истакнутих тачака, тако да је $\xi_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$ рационалан број, а $\xi'_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$ ирационалан број.

Сада имамо $\sigma\left(\chi,P,\xi\right)=\sum_{i=1}^{n}1\Delta x_i=b-a$, са друге стране $\sigma\left(\chi,P,\xi'\right)=\sum_{i=1}^{n}0\Delta x_i=0$.

Одавде следи да $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma\left(\chi,P,\xi\right)$не постоји, па Дирихлеова функција није Риман интеграбилна на датом сегменту.□

Нека су P_1 и P_2 две произвољне поделе сегмента $\left[a,b\right]$.Подеоне тачке подела P_1и P_2 формирају поделу P коју зовемо унијом подела P_1и P_2и пишемо $P=P_1\bigcup P_2$.. Тако формирана подела P је заједничко профињење подела P_1и P_2. Овај поступак ћемо користити у доказу тврђења.

Став 2.3. Функција $f:\left[a,b\right]\to X$је Риман интеграбилна ако и само ако испуњава следећи услов

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right):\left(P',\xi'\right)\left(P'',\xi''\right)\in\Pi_{\delta,}P'\prec P''\Rightarrow\left\|\sigma\left(f,P',\xi'\right)-\sigma\left(f,P'',\xi''\right)\right\|<\varepsilon.$$

Доказ–"$\Rightarrow$" следи из Кошијевог критеријума

"$\Leftarrow$" Задајмо $\varepsilon>0$и одаберимо $\delta>0$из датог услова. Нека је $\lambda\left(P_1\right)<\delta,\lambda\left(P_2\right)<\delta,P=P_1\bigcup P_2,\lambda\left(P\right)<\delta.$

Тада за дате поделе са изабраним тачкама: $\left(P,\xi\right),\left(P_1,\xi'\right)$и $\left(P_2,\xi''\right)$ важи

$$\left\|\sigma\left(f,P_1,\xi'\right)-\sigma\left(f,\mathrm{P}_2,\xi''\right)\right\|=\left\|\sigma\left(f,P_1,\xi'\right)-\sigma\left(f,\mathrm{P},\xi\right)+\sigma\left(f,\mathrm{P},\xi\right)-\sigma\left(f,\mathrm{P}_2,\xi''\right)\right\|\leq$$
$$\leq\left\|\sigma\left(f,P_1,\xi'\right)-\sigma\left(f,\mathrm{P},\xi\right)\right\|+\left\|\sigma\left(f,\mathrm{P},\xi\right)-\sigma\left(f,\mathrm{P}_2,\xi''\right)\right\|\leq 2\varepsilon\square$$

2.3.Интеграбилност непрекидних и монотоних функција

Интеграбилност непрекидних и монотоних функција рађено је у курсу Анализе 1, али тада су разматране само функције са кодоменом у скупу реалних бројева, како не можемо говорити о монотоности векторских функција уводимо појам осцилације дате функције.

Он се може успешно користити и у стандардном случају реалних функција.

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Дефиниција 2.4. За функцију $f : S \to X$, где је S скуп, а X Банахов простор дефинишемо осцилацију дате функције:

$$\underset{S}{osc} f = \sup_{x_1, x_2 \in S} \left\| f(x_1) - f(x_2) \right\|.$$

Осцилацију функције ћемо искориситi за увођење услова интеграбилности векторских функција. Напоменимо да се у литератури често користи и ознака var.

Став 2. 4. Нека ограничена функција $f : [a,b] \to X$ испуњава следећи услов

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \lambda(P) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \underset{\Delta_i}{osc} f_i \Delta x_i < \varepsilon \qquad (\, os \,)$$

Тада је функција f Риман интеграбилна на $[a,b]$.

Скуп свих ограничених функција $f : [a,b] \to X$ које испуњавају (os) услов означавамо са $R_{os}([a,b], X)$.

Овај став тврди да је $R_{os}([a,b], X) \subset R\,([a,b], X)$.

Доказ– Нека је $\varepsilon > 0$. Бирамо $\delta > 0$ из (os) услова. Нека су P_1 и P_2 поделе, такве да је P_2 профињење поделе P_1 и $\lambda(P_1) < \delta$. Нека су $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]\, 1 \le i \le n$ подеони сегменти поделе P_1, нека се поделом P_2 сваки сегмент поделе P_1 дели подеоним тачкама $x_{i-1} = x_{i,0} < \ldots < x_{i,k} = x_i$ формираподеоне сегменте $\Delta x_{i,j} = x_{ij} - x_{ij-1}, 1 \le j \le k_i$.

Тада је $\sigma(f, P_1, \xi_1) - \sigma(f, \mathrm{P}_{2,}\, \xi_2) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\Delta x_1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_1} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\left[f(\xi_i) - f(\xi_{ij})\right]\Delta x_{ij}$.

Одатле следи $\left\|\sigma(f, P_1, \xi_1) - \sigma(f, P_2, \xi_2)\right\| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \underset{\Delta_i}{osc} f \Delta x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \underset{\Delta_i}{osc} f \Delta x_i < \varepsilon$.□

Риманов интеграл векторско вредносних функција

За ограничену функцију $f:[a,b]\to X$ и дату поделу P сегмента $[a,b]$ уводимо ознаку $osc(f,P)=\sum_{I=1}^{n}\underset{\Delta_i}{osc}f\,\Delta x_i$.

Основна теорема о Риман интеграбилности непрекидних функција важиће и у контексту Банахових простора.

Теорема 2.2. Нека је X Банахов простор. Тада је свака непрекидна функција $f:[a,b]\to X$ Риман интеграбилна.

Доказ– Доказаћемо да свака непрекидна функција $f:[a,b]\to X$ испуњава осцилаторни критеријум. Нека је $\varepsilon>0$. Како је функција равномерно непрекидна постоји $\delta>0:|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow\|f(x_1)-f(x_2)\|<\varepsilon,\lambda(P)<\delta\Rightarrow\underset{\Delta_i}{osc}f<\varepsilon$ за свако $i\Rightarrow\sum\underset{\Delta_i}{osc}f\,\Delta x_i<\varepsilon(b-a)$.$\square$

Сада можемо да запишемо:

$C([a,b],X)\subset R_{os}([a,b],X)\subset R([a,b],X)$.

Касније ћемо детаљније испитивати да ли важи једнакост $R_{os}([a,b],X)=R([a,b],X)$, с тим да већ сада можемо напоменути да већ за случај $X=\mathbb{R}$ имамо да је $C([a,b],\mathbb{R})\neq R_{os}([a,b],\mathbb{R})$ тј. да постоје функције које испуњавају осцилаторни критеријум, а нису непрекидне.

Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ растућа функција. За произвољну поделу P имамо

$$osc(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]\lambda(P)=\left[f(b)-f(a)\right]\lambda(P).$$

Последица горње неједнакости је следећа теорема.

Теорема 2.3. Свака монотона функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ је Риман интеграбилна.

<u>**Риманов интеграл векторско вредносних функција**</u>

2.4.Адитивност интеграла

Став 2.5. Нека је функција $f:[a,b]\to X$ Риман интеграбилна. Онда је f Риман интеграбилна на сваком сегменту $[c,d]\subset[a,b]$.

Доказ: Нека су (P',ξ') и (P'',ξ'') две различите поделе са изабраним тачкама на $[c,\mathrm{d}]$. Допунимо их на исти начин до подела (P_1',ξ_1') и (P_1'',ξ_1'') сегмента $[a,\mathrm{b}]$. Тада из Кошијевог критеријума имамо

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):\forall(P_1',\xi')\lambda(P')<\delta,\forall(P_1'',\xi'')\lambda(P'')<\delta\Rightarrow\left\|\sigma(f,P_1',\xi')-\sigma(f,P_1'',\xi'')\right\|<\varepsilon$$

из овога следи

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):\forall(P',\xi')\lambda(P')<\delta,\forall(P'',\xi'')\lambda(P'')<\delta\Rightarrow\left\|\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,P'',\xi'')\right\|<\varepsilon.$$

Став 2.6.Нека је $a<c<b$ и нека је $f:[a,b]\to X$ Риман интеграбилна на $[a,\mathrm{c}]$ и $[c,b]$.Тада је f Риман интеграбилна на целом сегменту $[a,b]$ и важи:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Доказ– Из интеграбилности на датим подсегментима следи ограниченост функције на целом сегменту и добијамо $\|f(x)\|\le C,\mathrm{a}\le x\le b.$

Задајмо $\varepsilon>0$, из Кошијевог критеријума за оба подсегмента добијамо $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$. Изаберимо δ за које је $\delta\le\delta_1$, $\delta\le\delta_2$ и $4C\delta<\varepsilon.$

Нека су (P,ξ) и (P_1,ξ_1) две поделе са изабраним тачкама сегмента $[a,b]$ такве да су им параметри мањи од δ. Ако је c међу подеоним тачкама из P, онда је $P=P'$ и $P_1=P_1'$, ако није P' се добија из P додавањем нове подеоне тачке с у Δ_i, а ξ' из ξ додавањем две нове тачке. Поступак поновимо за P_1 и ξ_1. Сада имамо

$$\left\|\sigma\left(f,P',\xi'\right)-\sigma\left(f,P_1',\xi_1'\right)\right\|<2\varepsilon$$
$$\left\|\sigma\left(f,P',\xi'\right)-\sigma\left(f,P,\xi\right)\right\|<2C\delta$$
$$\left\|\sigma\left(f,P_1',\xi_1'\right)-\sigma\left(f,P_1,\xi_1\right)\right\|<2C\delta.$$

Из наведених неједнакости и услова следи

$$\left\|\sigma\left(f,P,\xi\right)-\sigma\left(f,P_1,\xi_1\right)\right\|<3\varepsilon.$$

Из наведеног следи Риман интеграбилност на целом интервалу.□

Дефиниција 2.5. Кажемо да је $f:I\to X$ локално Риман интеграбилна на интервалу I произвољног типа ако је Риман интеграбилна на на сваком подсегменту од I.

Овај појам је од велике важности за увођење несвојственог интеграла.

Нека је $f:I\to X$, за $a<b,\ a,b\in I$ дефинишемо:

$$\int_b^a f\left(x\right)dx=-\int_a^b f\left(x\right)dx.$$

Такође дефинишемо за да $a\in I$:

$$\int_a^a f\left(x\right)dx=0.$$

Без обзира на распоред a, b и c из датог из I важиће:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx+\int_b^c f\left(x\right)dx+\int_c^a f\left(x\right)dx=0.$$

Доказ: Доказ ћемо извести за један распоред, $a<b<c$, за остале распореде се ради аналогно.

$$\int_a^b f\left(x\right)dx+\int_b^c f\left(x\right)dx+\int_c^a f\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(x\right)dx+\int_b^c f\left(x\right)dx-\int_a^c f\left(x\right)dx=\int_a^c f\left(x\right)dx-\int_a^c f\left(x\right)dx=0.\square$$

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Индукцијом се лако доказује да важи:

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx, x_i \in I.$$

2.5.Неки довољни услови Риман интеграбилности

Став 2.6. Нека је функција $f: I \to X$ локално Риман интеграбилна на интервалу $I \subset \mathbb{R}$ и нека је $x_0 \in I$. Тада је функција $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$

непрекидна на I, штавише она је Липшиц непрекидна на сваком подсегменту интервала I.

Доказ – Довољно је доказати последње тврђење. Нека је J подсегмент од I. Тада је функција f ограничена на J: $\|f(x)\| \le C_j$ за свако $x \in J$. Следи

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \left\|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right\| \le C_j |x_2 - x_1| \text{ за све } x_1, x_2 \in J. \square$$

Став 2.7. Нека је функција $f: [a,b] \to X$ ограничена и Риман интеграбилна на $[a,\beta]$ за свако $a < \beta < b$. Тада је f Риман интеграбилна на $[a,b]$.

Доказ–Нека је $\|f(x)\| < C$ за $a \le x \le b$. Функција $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ је Липшиц непрекидна на [*a*, *b*) са константом C, па зато постоји $\lim_{x\to b} F(x) = I$ и важи $\|I - F(x)\| \le C(b-x)$. За произвољно $\varepsilon > 0$ узмемо $\beta \in (a,b)$ тако да важи $C(b-\beta) < \varepsilon$. Сада постоји $\delta > 0$ тако да је $\|\sigma(f,P,\xi) - F(\beta)\| < \varepsilon$ за сваку поделу сегмента $[a,b]$ са изабраним тачкама чији је параметар поделе мањи од δ.

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Нека је $(P,\xi)\in\Pi_{[a,b]},\lambda(P)<\delta$, и нека је подела (P',ξ') добијена из (P,ξ) додавањем тачке β и заменом одговарајуће тачке ξ_i са две тачке ако подела P већ не садржи β. Овим је подела P разложена да поделу P_1 сегмента $[a,\beta]$ и P_0 сегмента $[\beta,b]$ и имамо

$$\sigma(f,\mathrm{P}',\xi')=\sigma(f,\mathrm{P}_1,\xi_1)+\sigma(f,\mathrm{P}_0,\xi_0).$$

Из постављених услова имамо да је

$$\left\|\sigma(f,\mathrm{P}_0,\xi_0)\right\|\le C(b-\beta)<\varepsilon.$$

Са друге стране важи:

$$\left\|\sigma(f,P_1,\xi_1)-F(\beta)\right\|<\varepsilon$$
$$\left\|\sigma(f,P,\xi)-\sigma(f,P',\xi')\right\|\le 2C\lambda(P)$$
$$\left\|F(\beta)-I\right\|<\varepsilon.$$

Из наведених неједнакости добијамо $\left\|\sigma(f,P,\xi)-I\right\|<3\varepsilon+2C\delta$, а то је довољно.□

Аналогно тврђење и ако имамо ограниченост на $[a,b]$ и интеграбилност на $[\alpha,b]$ за $a<\alpha<b$. Из наведеног и адитивности важи:

Последица 2.2. Нека је функција $f:I\to X$ ограничена и нека је за $a<c<b$ и свако довољно мало $\varepsilon>0$ Риман интеграбилна на $[a,c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon,b]$. Тада је f Риман интеграбилна на $[a,b]$.

Ова последица се лако уопштава и доказује индукцијом за коначно много тачака $c_1,c_2,...,c_n$ из $[a,b]$. Сада можемо уопштити основну теорему о интеграбилности непрекидних функција и долазимо до става који важи и за векторске функције:

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Став 2.8. Свака ограничена функција $f : I \to X$ која има коначно много тачака прекида је Риман интеграбилна.

3.Интеграција реалних функција

3.1.Дарбуове суме

Иако је ово поглавље посвећено реалним функцијама које се обрађују у основном курсуАнализе 1, овде ћемо у доказима користити осцилаторни критеријум.У дефинисању и даљем излагању о Дарбуовим сумама учествује поредак, па је појам Дарбуових сума карактеристичан за случај реалних функција. Везу између поретка и осцилације даје формула (4), види ниже.

Дефиниција 3.1. Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена и нека је $P: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$: подела сегмента $[a,b]$. Означимо

$m_i=\inf\limits_{\Delta_i} f$, $M_i=\sup\limits_{\Delta_i} f$ $1\le i\le n$. Тада је доња Дарбуова сума:

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,$$

агорња Дарбуова сума:

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

За сваку поделу (P,ξ)са изабраним тачкама важи:

а) $s(f,P)\le\sigma(f,P,\xi)\le S(f,P)$, б) $\inf\limits_{\xi}\sigma(f,P,\xi)=s(f,P)$ и $\sup\limits_{\xi}\sigma(f,P,\xi)=S(f,P)$.

Доказ– а) За дату поделу (P,ξ)са изабраним тачкама важи

$m_i\le f(\xi_i)\le M_i$, $1\le i\le n$. Множењем са Δx_i и сабирањем добија се

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

б) Узмимо $\varepsilon > 0$. Докажимо да постоји подела (P,ξ) таква да је $\sigma(f,P,\xi) < s(f,P)+\varepsilon$. Како је $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ постојаће тачка $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ таква да је $f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}, 1 \le i \le n$. Множењем са Δx_i и сабирањем добија се $\sigma(f,P,\xi) < s(f,P)+\varepsilon.$

Слично се доказује $\sigma(f,P,\xi) > S(f,P)-\varepsilon$.□

Из доказаних неједнакости и Кошијевог критеријума добијамо услов неопходан за Риман интеграбилност реалне функције на $[a,b]$, а то је да је

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} osc(f,P) = 0.$$

Наведени услов је и довољан на основу (os) услова и следеће једнакости:

$$(4)\, S(f,P)-s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\Delta_i}{osc} f \Delta x_i = osc(f,P).$$

Теорема 3.1. Ограничена функција $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ је Риман интеграбилна ако и само ако је

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} osc(f,P) = 0.$$

Тада је $\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P).$

У коментару уз теорему 2.2. је речено да ће се касније испитати да ли важи једнакост $R_{os} = R$. Овим је доказано да за случај $X = \mathbb{R}$ важи $R_{os}[a,b] = R[a,b]$.

Став 3.1. Ако су $f,g:[a,b]\to \mathbb{R}$ је Риман интеграбилне, онда је и $fg:[a,b]\to \mathbb{R}$

Риман интеграбилна.

Доказ– Како су функције f и g ограничене постоје константе K и L такве да је $|f(x)| \le K$ и $|g(x)| \le L$ за $a \le x \le b$. Нека је дата подела P, тада за сваки подеони сегмент Δ_i важи

$\operatorname*{osc}_{\Delta_i} fg \le K \operatorname*{osc}_{\Delta_i} g + L \operatorname*{osc}_{\Delta_i} f$, па је

$osc(fg,P) \le Kosc(g,P) + Losc(f,P)$, тиме је на основу горње теореме став доказан.□

Став 3.2. Ако су $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ је Риман интеграбилне, онда су $\max(f,g) = f \vee g$, $\min(f,g) = f \wedge g$ Риман интеграбилне.

Доказ– Без умањења оштости узмимо да је $M_i^f \ge M_i^g$, онда имамо да је $M_i^{f\vee g} = M_i^f$, а $m_i^{f\vee g} \ge m_i^f$.

Тада је $M_i^{f\vee g} - m_i^{f\vee g} \le M_i^f - m_i^f$

Сада имамо $\operatorname*{osc}_{\Delta_i}(f \vee g) \le \max\left(\operatorname*{osc}_{\Delta_i} f, \operatorname*{osc}_{\Delta_i} g\right)$. Како је $\max(a,\mathrm{b}) \le a+b; a,b>0$, следи

$osc(f \vee g,P) \le osc(f,P) + osc(g,P)$. На основу претходне теореме став је доказан.□

Доказ за $f \wedge g$ се ради аналогно.

3.2. Интеграција и поредак

Став 3.3. Нека је $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ Риман интеграбилна. Тада је и $|f(x)|, \mathrm{a} \le \mathrm{x} \le \mathrm{b}$ Риман интеграбилна и важи

(5) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Доказ–Како важи да је $\left\| u \right| - \left| v \right\| \leq \left| u - v \right|, u, v \in \mathbb{R}$ имамо $\underset{\Delta_i}{osc}\left| f \right| \leq \underset{\Delta_i}{osc} f$, па је $osc\left(\left| f \right|, P \right) \leq osc\left(f, P \right)$. Риман интеграбилност следи из осцилаторног критеријума.

Основна интегрална неједнокост се добија преласком на лимес у неједнакости $\left| \sigma\left(f, P, \xi \right) \right| \leq \sigma\left(\left| f \right|, P, \xi \right)$.$\square$

Напомена: Овај став треба упоредити са ставом 4.3. Видећемо да под извесним условима имамо слично тврђење, само је апсолутна вредност замењена нормом.

Став 3.4. Нека су $f, g : \left[a, b \right] \to \mathbb{R}$ Риман интеграбилна. Ако за свако $x \in \left[a, b \right]$важи $f\left(x \right) \leq g\left(x \right)$тада имамо $\int\limits_a^b f\left(x \right) dx \leq \int\limits_a^b g\left(x \right) dx.$

Доказ– Нека је дата подела $\left(P, \xi \right)$. Како је $f\left(x \right) \leq g\left(x \right)$ имамо $g\left(x \right) - f\left(x \right) \geq 0$, те важи $\sigma\left(g - f, P, \xi \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(g\left(x \right) - f\left(x \right) \right) \Delta x_i \geq 0.$

Преласком на $\lim\limits_{\lambda(P) \to 0}$ добијамо$\int\limits_a^b \left(g\left(x \right) - f\left(x \right) \right) dx \geq 0$ тј. $\int\limits_a^b g\left(x \right) dx \geq \int\limits_a^b f\left(x \right) dx$.$\square$

Ако је $f : \left[a, b \right] \to \mathbb{R}$ Риман интеграбилна на [a, b] и $m \leq f(x) \leq M$ за свако $x \in \left[a, b \right]$ онда је

$$m\left(b - a \right) \leq \int\limits_a^b f\left(x \right) dx \leq M\left(b - a \right).$$

Ако је $f : \left[a, b \right] \to \mathbb{R}$ Риман интеграбилна на$\left[a, b \right]$ и $f\left(x \right) \geq 0$ за свако $x \in \left[a, b \right]$онда је $\int\limits_a^b f\left(x \right) dx \geq 0.$

<u>Риманов интеграл векторско вредносних функција</u>

Став 3.5. Нека је $f \in C[a,b], f(x) \geq 0$ за свако $x \in [a,b]$ и $f(x_0) > 0$ за неко $x_0 \in [a,b]$ онда је $\int_a^b f(x)dx > 0.$

Треба напоменути да се претпоставка непрекидности функције на датом сегменту може заменити слабијим условом интеграбилности уз услов да је функција непрекидна у тачки x_0.

Лема 3.1. Нека је $f \in R[a,b], \int_a^b f(x)dx = 0$ и $f(x) \geq 0$ за свако $x \in [a,b]$ онда за свако $\varepsilon > 0$ постоји подсегмент $[c,d]$ такав да је $f(x) < \varepsilon$ за свако $x \in [c,\mathrm{d}]$.

Доказ– За дато ε изаберимо поделу P такву да је $S(f,P) < \varepsilon(b-a)$, тада за бар једно Δ_i важи $M_i < \varepsilon$□

Став 3.6. Нека је $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ Риман интеграбилна и $f(x) > 0$ за свако $x \in [a,b]$ онда је $\int_a^b f(x)dx > 0.$

Доказ–Претпоставимо супротно, тј. да је $\int_a^b f(x)dx = 0$, онда је $\int_c^d f(x)dx = 0$ за сваки подсегмент $[c,d]$ од $[a,b]$. Користећи претходно наведену лему и претпоставку формирамо низ уметнутих сегмената J_n од $[a,b]$ такав да је $f(x) < \frac{1}{n}$ на J_n. Добијамо да је $f(x) = 0$ на скупу $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ који је непразан по Канторовом ставу о уметнутим сегментима, што представља контрадикцију .□

3.3.Прва теорема о средњој вредности

Став 3.7. Нека је $f \in R[a,b], m = \inf f(x), M = \sup f(x), a \le x \le b$, онда постоји $\mu \in [m, \mathrm{M}]$такво да је $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

Ако је $f \in C[a,b]$ онда постоји $\xi \in (a,b)$ такво да је

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказ–Први део тврђења је последица раније доказане процене $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Други део тврђења–Како је f непрекидна, имамо $M = f(x_1), m = f(x_2)$ за неке $x_1, x_2 \in [a,b]$. По теореми о међувредностима постоји $\xi \in (x_1, x_2) : f(\xi) = \mu$.□

Теорема 3.2. Нека је $f, g \in R[a,b], m = \inf\limits_{[a,b]} f, \mathrm{M} = \sup\limits_{[a,b]} f$ и нека је $g(x) \ge 0, a \le x \le b.$ Тада постоји μ из $[m, M]$ такво да је

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

Уз додатну претпоставку да је функција непрекидна имамо

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \text{ за неко } \xi \in [a,b].$$

Риманов интеграл векторско вредносних функција

4.Функције са вредностима у $\mathbb{R}^k$ и интеграбилност сложене функције

Видећемо да се практично сви резултати који важе за интеграцију реалних функција преносе на случај $\mathbb{R}^k$ вредносних функција.

4.1.Интеграбилност векторско вредносних функција

Интеграбилност векторски вредносне функције зависиће од интеграбилности функција $f_i, 1 \le i \le k$ које је дефинишу.

Став 4 .1 Нека је $f = (f_1, ..., f_k) : [a,b] \to \mathbb{R}^k$, функција f је интеграбилна ако и само ако су све функције $f_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $1 \le j \le k$, интеграбилне и тада је

$$(6) \int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^b f_1(x)dx, ..., \int_a^b f_k(x)dx \right).$$

Доказ–За свако $(P,\xi) \in \prod$ важи

$$\sigma(f,P,\xi) = (\sigma(f_1,P,\xi), ..., \sigma(f_k,P,\xi)).$$

Ако постоји $\int_a^b f(x)dx = I = (I_1, ..., I_k) \in \mathbb{R}^k$ онда Риман интеграбилност функција f_j и горња формула за $\int_a^b f(x)dx$ следе из $\left|\sigma(f_{j,}P,\xi) - I_j\right| \le \left\|\sigma(f,P,\xi) - I\right\|$.

Обрнуто нека су $f_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ Риман интеграбилне и нека је $I_j = \int_a^b f_j(x)dx$ за $1 \le j \le k$.

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Нека је $I=(I_1,...,I_k)$ Риман интеграбилност функције f следи из

$\left\|\sigma(f,P,\xi)-I\right\|\le k^{\frac{1}{2}}\max\limits_{1\le j\le k}\left\|\sigma(f_j,P,\xi)-I_J\right\|$.□

Комплексна функција $f(x)=u(x)+iv(x)$ где су u и v реалне функције је Риман интеграбилна ако и само ако су u и v Риман интеграбилне и тада важи $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b u(x)dx+i\int\limits_a^b v(x)dx$. Ово је специјални случај $k=2$ раније разматраних, специјално формуле (6).

Став 4.2. Ограничена функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}^k$ је Риман интеграбилна ако и само ако испуњава (os) услов.

Доказ–Фиксирајмо подеони сегмент Δ_i. Неједнакости

$$\operatorname*{osc}_{\Delta_i} f_j\le\operatorname*{osc}_{\Delta_i} f=\sup_{x',x''\in\Delta_i}\left\|f(x')-f(x'')\right\|==\sup_{\Delta_i}\left\|\left(f_1(x')-f_1(x''),...,f_k(x')-f_k(x'')\right)\right\|$$

$$=\sup_{\Delta_i}\left(\sum_{j=1}^{k}\left|f_j(x')-f_j(x'')\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left[\sum_{j=1}^{k}\left(\operatorname*{osc}_{\Delta_i} f_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\le\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{osc}_{\Delta_i} f_j$$

дају сумирањем по i неједнакост $osc(f_j,P)\le osc(f,P)\le\sum\limits_{j=1}^{n}osc(f_j,P)$.

На основу става 4.1.следи тврђење. □

Овим је показано да за $\dim X<\infty$ $(X=\mathbb{R}^k)$ важи $R_{os}=R$ (случај за $n=1$ приказан је кроз теорему 3.1.). Наредни став је треба упоредити са ставом 3.3.који се односи на реалне функције. У ставу о реалним функцијама уместо овде наведене норме имамо апсолутну вредност.

Став 4.3. Ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}^k$ је Риман интеграбилна онда је и $\left\|f(x)\right\|, a\le x\le b$ Риман интеграбилна и важи $\left\|\int\limits_a^b f(x)dx\right\|\le\int\limits_a^b\left\|f(x)\right\|dx$.

Доказ – Риман интеграбилност следи из $\underset{\Delta_i}{osc}\left\|f(x)\right\| \le \underset{\Delta_i}{osc} f(x)$, а неједнакост из $\left\|\sigma(f,P,\xi)\right\| \le \sigma\left(\left\|f\right\|,P,\xi\right)$.□

Напоменимо да горња неједнакост важи и за $f \in R\left([a,b],X\right)$,али уз додатни услов да је$\left\|f(x)\right\|$ Риман интеграбилна на датом интервалу, а то није увек испуњено у случају произвољног Банаховог простора. Такав случај приказан је у овом поглављу у примеру 4.3. Можемо приметити у излагању о реалним функцијама у ставу 3.2.имамо слично својство, само што уместо норме имамо апсолутну вредност.

За даље излагање навешћемо дефиницију скупа Лебегове мере нула и неколико ставова без доказа, сматрајући да је то читаоцу познато из курсева анализе.

Дефиниција 4.1. Скуп $A \subset \mathbb{R}$ је (Лебегове) мере нула ако за свако $\varepsilon > 0$постоји низ (коначан или бесконачан) интервала I_j, тако да важи $A \subset \bigcup_j I_j$ и $\sum_j \left|I_j\right| < \varepsilon$, где смо са $\left|I_j\right|$означили дужину интервала I_j. У том случају пишемо $m(A) = 0$.

У горњој дефиницији није битно да ли су интервалиI_j отворени или затворени, тако да ћемо радити са отвореним ако се другачије не нагласи.

Став 4.4. Сваки подскуп скупа мере нула је и сам мере нула. Пребројива или коначна унија скупова мере нула је исто скуп мере нула. Можемо записати:

$$m(A) = 0, \mathrm{B} \subset A \Rightarrow m(B) = 0,$$
$$m(A_n) = 0\left(n = 1,2...\right) \Rightarrow m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Последица 4.1. Сваки коначан или пребројив подскуп од $\mathbb{R}$ је мере нула.

Став 4.5. Ако је $a < b$ онда сегмент $[a,b]$није скуп мере нула.

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Ако је скуп свих $x \in A$ таквих да својство $P(x)$ не важи у тачки x скуп мере нула, онда кажемо да својство $P(x)$ важи скоро свуда на скупу $A \subset \mathbb{R}$.

Дефиниција 4.2. $\varphi_{f,x}(\delta) = \underset{(x-\delta,x+\delta)\cap[a,b]}{osc} f$ је растућа по $\delta > 0$ и зато постоји $\lim\limits_{\delta \to 0} \varphi_{f,x}(\delta)$ и означавамо га са $osc(f,x)$.

Лако је доказати је функција непрекидна у тачки x ако и само ако је $osc(f,x) = 0$.

Лема 4.1.За свако $\varepsilon > 0$ скуп $V = \{x \in [a,b] | osc(f,x) < \varepsilon\}$ је отворен у $[a,b]$.

Доказ –Нека је $x_0 \in [a,b] : osc(f,x_0) < \varepsilon, \lim\limits_{\delta \to 0} \varphi_{f,x_0}(\delta) < \varepsilon.$

Постоји $\delta_0 > 0 : \varphi_{f,x_0}(\delta_0) < \varepsilon, \underset{(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\cap[a,b]}{osc} f < \varepsilon.$

Нека је $|x - x_0| < \delta_0, x \in [a,b]$, те је $osc(f,x) < \varepsilon.$ Дакле $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b] \subset V$ те јескуп V отворен.

Теорема4.1.Ограничена функција $f : [a,b] \to X$, где је X Банахов простор, испуњава (os) услов ако и само ако је непрекидна скоро свуда на $[a,b]$.

Дакле, можемо рећи да $f \in R_{os}([a,b], X)$ ако и само ако је функција f ограничена и скоро свуда непрекидна.

Доказ – Узмимо да је $E_k = \left\{x \in [a,b] | osc(f,x) \geq \frac{1}{k}\right\}$. Овако одређени скупови су, по леми 4.1. компактни и $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ је скуп свих тачака прекида функције f. Претпоставимо да важи осцилаторни услов и фиксирајмо $k \in \mathbb{N}$. Сада имамо, за сваку поделу P

$$osc(f,P)=\sum \underset{\Delta_i}{osc} f \Delta x_i \geq \frac{1}{k}\sum{}' \Delta x_i$$

где у последњој суми $\sum{}'$ сумирамо по свим i за које унутрашњост Δ_i садржи бар једну тачку из E_k. Дакле укупна дужина интервала Δ_i који покривају E_k је мања или једнака $k\cdot osc(f,P)$. Како је $\lim_{\lambda(P)\to 0} osc(f,P)=0$ следи да је E_k скуп мере нула, те је и скуп E мере нула.

Обрнуто, нека је $m(E)=0$, па је и $m(E_k)=0, \forall k\in\mathbb{N}$. Фиксирајмо $k\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon>0$. Покријмо E_k са коначно много отворених интервала укупне дужине мање од ε. Нека је Δ један од комплементарних сегмената. Тада за свако $x\in\Delta$ постоји отворен интервал I који садржи x такав да је осцилација на $I\bigcap[a,b]$ мања од $\frac{1}{k}$. Сада лако можемо поделити сегмент Δ тако да осцилација функције на сваком подеоном сегменту буде мања од $\frac{1}{k}$. Узимајући све те добијене подеоне тачке (за сваки комплементарни сегмент Δ) добијамо поделу P закоју важи: $\sum osc_{\Delta_i} f\Delta x_i=\sum{}'+\sum{}''\leq \varepsilon V+\frac{1}{k}(b-a)$ где је V осцилација дате функције на сегменту $[a,b]$. Овим је доказано да за свако $\varepsilon>0$ постоји подела P таква да је $osc(f,P)<\varepsilon$. Може се доказати да је то довољно за (os).

Последица 4.2. Ограничена функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}^k$ је Риман интеграбилна ако и само ако је скоро свуда непрекидна.

4.2.Риман интеграбилност сложене функције

Став 4.6. Нека је $f:[a,b]\to X$ ограничена функција, тада је (os) услов еквивалентан Du Bois-Reymond-овом услову:

Риманов интеграл векторско вредносних функција

$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \eta > 0)(\exists \delta > 0)\lambda(P) < \delta \Rightarrow \sum_{\eta} \Delta x_i < \varepsilon$ (DBR)

где $\sum_{\eta}$ иде по свим i за које је $\underset{\Delta_i}{osc} f \geq \eta$.

Доказ– Нека је $M = \sup_{[a,b]} \|f(x)\|$. За дато $\eta > 0$ и $\varepsilon > 0$ бирамо $\delta > 0$ из DBR услова. Тада за сваку поделу P такву да је $\lambda(P) < \delta$ имамо

$$osc(P, f) = \sum_{\eta} \Delta x_i \underset{\Delta_i}{osc} f + \sum{}' \Delta x_i \underset{\Delta_i}{osc} f.$$

Како имамо да је $\underset{\Delta_i}{osc} f \leq 2M$ прву суму можемо ограничити са $2M\varepsilon$. Друга сума иде по оним i за које је $osc\Delta_i f \leq \eta$, па је $\sum{}' \Delta x_i \underset{\Delta_i}{osc} f < \eta(b-a)$. Дакле $osc(P, f) < 2M\varepsilon + \eta(b-a)$ ако је $\lambda(P) < \delta$.

За обрнуту импликацију уочити да важи $\sum_{i=1}^{n} \underset{\Delta_i}{osc} f \Delta x_i \geq \sum_{\eta} \underset{\Delta_i}{osc} f \Delta x_i \geq \eta \sum_{\eta} \Delta x_i$. Дакле имамо да постоји $\delta > 0$ тако да је $osc(f, P) < \eta\varepsilon$ кад код за дату поделу P важи $\lambda(P) < \delta$, а то даје $\eta \sum_{\eta} \Delta x_i \leq osc(f, P) < \eta\varepsilon$ и дакле $\sum_{\eta} \Delta x_i < \varepsilon$□

Став 4 .7. Нека су X и y Банахови простири и нека је $f \in R_{os}([a,b], X)$, и нека је $X_0 = f([a,b])$ и нека је $\phi : \mathrm{X}_0 \to Y$ равномерно непрекидна и ограничена.

Тада је $\phi \circ f \in R_{os}([a,b], Y)$.

Доказ–Функција $\phi \circ f$ је ограничена. Задајмо $\eta > 0$. Из равномерне непрекидности знамо да постоји $\sigma > 0$ такво да за све $x_1, x_2 \in X_0$ важи $\|x_1 - x_2\| \leq \sigma \Rightarrow \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \eta$. Како f испуњава(DBR)услов, бирамо $\delta > 0$ које одговара ε и σ и тада добијамо да $\phi \circ f$ испуњава (DBR)услов.□

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Последица 4.1. Ако је $f \in R[a,b]$, $m \le f(x) \le M$ за $a \le x \le b$ и ако је $\phi \in C[m,M]$ онда је $\phi \circ f \in R[a,b]$.

Специјално из интеграбилности $f:[a,b] \to R$ следи интеграбилност $|f|^p$ за свако $p > 0$. Ако је $f:[a,b] \to R$ Риман интеграбилна и $|f| \ge \delta$ за $a \le x \le b$, онда је и $\frac{1}{f(x)}$ Риман интеграбилна.

4.3.Контрапримери

Навешћемо неке занимљиве примере и неочекиване ситуације.

Пример 4.1. Показаћемо примером да композиција две интеграбилне функције не мора бити интеграбилна функција. Ово не захтева излазак у векторске просторе.

Дефинишимо Риманову функцију $f:\square \to [0,1]$овако $f(x) = \frac{1}{n}$ ако је $x = \frac{m}{n}, m \in \square, n \in \square, (m,n) = 1$и $f(x) = 0$ ако је x ирационалан број.

Тада је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ за свако $x_0 \in \square$ па је f непрекидна у свакој ирационалној , а прекидна у свакој рационалној тачки. Функција је Риман интеграбилна на сваком сегменту $[a,b]$, како је $m_i = 0$имамо да је $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Нека је $\phi(x) = 1$за свако $x \ne 0$и $\phi(0) = 0$. Ова функција је ограничена, интеграбилна на сваком сегменту и имаједну тачку прекида. Композиција $\phi \circ f$ две Риман интеграбилне функције на $[0,1]$ није интеграбилна, та композиција је Дирихлеова функција. Види пример 2.1.

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Пример 4.2. Показаћемо примером да функција може бити интеграбилна, а прекидна у свакој тачки, тиме показујемо да у случају бесконачно димензионаллних простора не можемо у коментару теореме 2.2. писати знак једнакости.

Нека је X Банахов простор свих ограничених функција на $[0,1]$ са супремум нормом. Дефинишимо функцију φ_X на $[0,1]$,

$$\varphi_x(t)=\begin{cases}0, 0\le t\le x\\ 1, x<t\le 1.\end{cases}$$

Дефинишимо $f:[0,\ 1]\ \to X$ и $f\ (\ x\ )=\varphi_x$. Тада је f Риман интеграбилна и важи

$$\int_0^1 f(x)dx=\psi, \psi(t)=t, 0\le t\le 1.$$

Функција f је прекидна у свакој тачки сегмента $[0,\ 1]$ и $\underset{\Delta_i}{osc} f\ =\ 1$, те функција те f не испуњава осцилаторни услов.

Пример 4.3. Иако бисмо интуитивно очекивали да је норма интеграбилне функције интеграбилна функција, то не мора да буде, тј. ако је $f(x), a\le x\le b$ интеграбилна, то не значи да је $\|f(x)\|, a\le x\le b$ интеграбилна.

Нека је $X\ =\ c_0$ простор свих низова који конвергирају ка нули са супремум нормом. Нека је $\{r_1,\ r_2,\ ...\}$ скуп свих рационалних бројева из сегмента $[0,1]$, записан без понављања, $e_n=(0,0,...,1,0,...)$ јединични вектор и нека је

$f:[0,1]\to c_0$ задана са $f(x)=\begin{cases}e_n, x=r_n\\ 0, x\notin[0,1]\cap\mathbb{Q}\end{cases}.$

Тада је $f \in R\left(\left[a,b\right], c_0\right)$ и $\int_0^1 f\left(x\right)dx = 0$. Како је $\left\| f\left(x\right) \right\| = \chi_{\mathbb{Q}}\left(x\right), 0 \le x \le 1$ ($\chi_{\mathbb{Q}}$ је ознака Дирихлеове функције) функција није Риман интеграбилна на $\left[0,1\right]$(види пример 2.1.).

Генерално важиће $C\left(\left[a,b\right], \mathrm{X}\right) \subset R_{os}\left(\left[a,b\right], \mathrm{X}\right) \subset R\left(\left[a,b\right], \mathrm{X}\right)$. Можемо закључити да је осцилаторни критеријум еквивалентан DBR критеријуму и услову да је функција скоро свуда непрекидна. За просторе $\dim X < \infty$ имамо да је $R_{os}\left(\left[a,b\right], X\right) = R\left(\left[a,b\right], X\right)$ и дакле функција је Риман интеграбилна ако и само ако је ограничена и скоро свуда непрекидна.

<u>**Риманов интеграл векторско вредносних функција**</u>

5.Интеграл и извод

5.1.Појам извода

Под изводом векторске функције F у тачки xћемо подразумевати

$$(7)\, F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

За извод векторско вредносне функције важе уобичајена правила за извод збира и извод производа константе и функције (линеарност извода). Важи и следећа теорема.

Теорема 5.1. Ако је $f:[a,b]\to X$ непрекидна на $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b)и $M=\sup\limits_{a<x<b}\|f'(x)\|<\infty$ онда је $\|f(b)-f(a)\|\le M(b-a)$.

Последица 5.1.Ако је $f'(x)=0$ за $a<x<b$ онда је функција f константана$[a,b]$.

5.2.Њутн-Лајбницова формула

Узмимо да је $f\in R([a,b],X)$ и да је $F(x)=\int_a^x f(t)dt, a\le x\le b.$

Подсетимо се.

Став 5.1. Функција F је Липшиц непрекидна:

$$\|F(x_2)-F(x_1)\|\le\left(\sup_{a\le t\le b}\|f(t)\|\right)|x_2-x_1|.$$

Ово тврђење је већ доказано у ставовима 2.2. и 2.6.

Став 5.2. Нека је f непрекидна с десна у тачки $x_0<b$. Тада важи $F'_d(x_0)=f(x_0)$.

Уз претпоставку непрекидности с лева у тачки $x_0 > a$ можемо навести и аналогно тврђење за леви извод.

Доказ –Имамо $\left\| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right\| = \frac{1}{h} \left\| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)| dt \right\| \leq \sup_{x_0 \leq t \leq x_0+h} \|f(t)-f(x_0)\|,$

а последњи израз тежи нули кад $h \to 0, h > 0.$ Аналогно се доказује тврђење за леви извод.□

Из овог става следи следећа фундаментална теорема.

Теорема 5.1. Нека је $f:[a,b] \to X$ непрекидна, X Банахов простор, тада f има примитивну функцију на $[a,b]$: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ задовољава $F'(x) = f(x), a \leq x \leq b.$

Свака примитивна функција за f је облика $F(x) = \int_a^x f(t)dt + c,\ c \in X$ је константа.

Напоменимо да уместо сегмента $[a,b]$ можемо имати интервал произвољног типа, само тада уместо $\int_a^x$ имамо $\int_{x_0}^x$, при чему је x_0 фиксирана тачка датог интервала.

Дефиниција 5.1. Нека је X Банахов простор, $I \subset \mathbb{R}, f: I \to X.$ Кажемо да је $F: I \to X$ К-примитивна (К од речи коначан или Коши) за функцију f ако је F непрекидна на интрвалу I и ако постоји коначан скуп $A \subset I$ такав да је F диференцијабилна на $I \setminus A$ и да је $F'(x) = f(x)$ за свако $x \in I \setminus A.$.

Следећа теорема уопштава претходну.

Теорема 5.2. Ако је $f: I \to X$ локално ограничена и има само коначно много тачака прекида на интервалу $I \subset \mathbb{R}$, онда f има К-примитивну функцију на I, једна од примитивних по Кошију је

Риманов интеграл векторско вредносних функција

(8) $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt, x\in I$

Овде је чему је $x_0 \in I$ фиксирано. $F(x)$ је К-примитивна функција за f ако и само ако је облика $F(x)+c, c\in X$.

Теорема 5.3. (Њутн-Лајбницова формула) Нека је X Банахов простор, функција $f: I\to X$ ограничена и има само коначно много тачака прекида, онда је

(9) $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$,

где је је F било која К-примитивна функција за f .

Доказ – Нека је $\varphi(t)=\int_a^b f(x)dx - F(t)$, онда је $\varphi'(t)=0$ осим у коначно много тачака, на основу последице 5.1. имамо да је функција константна, заправо да је $\varphi(a)=\varphi(b)$ из чека следи (9).

Размотримо поново класичан случај $X = \mathbb{R}$.

Ако је $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна на $[a,b]$ и ако има ограничен први извод на отвореном интервалу (a,b) онда за сваку поделу P датог сегмената важи:

$s(f,P)\le F(b)-F(a)\le S(f,P)$.

Заиста, на основу Лагранжове теореме имамо да је $F(x_j)-F(x_{j-1})=f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})\ge m_j(x_j-x_{j-1})$, а затим сумирањем по j добијамо $F(b)-F(a)\ge s(f,\mathrm{P})$. Доказ другог дела неједнакости се ради аналогно.

Из претпоставки не следи да је функција Риман интеграбилна на $[a,b]$, али ово доказује следеће:

Риманов интеграл векторско вредносних функција

Теорема 5.4. Ако је $f:[a,b]\to R$ Риман интеграбилна на $[a,b]$ и ако функција има примитивну функцију $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ онда важи:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

<u>**Риманов интеграл векторско вредносних функција**</u>

Литература:

1. Laurent Schwartz: Analyse mathématiques I, II, Hermann, Paris, 1967.

2. Nicolas Bourbaki: Fonctions d’une Variable Réelle, Hermann, Paris, 1958.

3. Душан Аднађевић, Зоран Каделбург: Математичка анализа 1, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1991.

4. Милош Арсеновић, Милутин Достанић, Данко Јоцић, Теорија мере, функционална анализа, теорија оператора, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2012.

5. Bernard Gerbaun, John Olmsted: Counterexamples in Analysis, Holden Day, San Francisco, 1964.