Математички факултет
Универзитет у Београду

Масловљев индекс и монотоне Лагранжеве подмногострукости

Димитрије Цицмиловић

Ментор: Проф. Дарко Милинковић

Београд, 2016.

Предговор

Циљ ове тезе је да представи Масловљев индекс и да презентује одређене теме у којима Масловљев индекс игра битну улогу. Конкретно, у случају Флорове теорије.

У првој глави су представљени основни појмови симплектичке топологије неопходни за разумевање наставка рада, поготово за разумевање четврте главе.

У другој глави представљен је Масловљев индекс аксиоматски. Представљен је начин на који су Робин и Саламон у свом раду [2] дефинисали индекс не би ли превазишли одређене опструкције у Арнолдовој дефиницији Масловљевог индекса. Такође, уведен је специјалан случај Масловљевог индекса који игра битну улогу у конструкцији Флорове хомологије.

У трећој глави су доказана уопштења оператора који се јавља у Морсовој теорији. Потом је аксиоматски уведен спектрални ток. За крај су дате две примене резултата добијених у прва три одељка. Прва примена се односи на оператор који се јавља при дефинисању Јакобијевих поља, а друга се односи на Коши-Риманов оператор који се јавља у Флоровој теорији.

У последњој, четвртој, глави дат је врло кратак преглед Флорове теорије. Посебна пажња је дата услову монотоности као услову на основу ког је могуће посматрати Флорову хомологију за периодичне орбите и за Лагранжеве пресеке.

Желим да се захвалим свом ментору, професору Дарку Милинковићу, на многим сугестијама, упутствима и саветима које ми је давао током израде овог рада. Он је својим залагањем, знањем и иницијативом утицао на мој развој као математичара, као и на начин на који данас приступам математици. Такође се захваљујем и члановима комисије, др Јелени Катић и професору Милошу Арсеновићу, на врло корисним сугестијама приликом читања овог рада.

Садржај

1 Основи симплектичке геометрије

Дефиниција 1.1. **Симплектички векторски простор** је пар (V, ω) који се састоји од коначно димензионалног реалног векторског простора V и билинеарне форме $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ тако да су задовољени следећи услови:

(анти-симетричност) За све v, $w \in V$

$$\omega(v, w) = -\omega(w, v).$$

(недегенерисаност) За свако $v \in V$

$$\omega(v, w) = 0 \ \ \forall w \in V \quad \Rightarrow v = 0.$$

Напомена 1.1. Форма ω се зове **симплектичка форма**. Сви симплектички векторски простори су парне димензије. Штавише, ако је ω симплектичка форма простора V, то је $\omega^n \neq 0$ форма запремине.

Природно питање је шта су аутоморфизми у симплектичкој категорији. Очигледно ћемо обратити пажњу на морфизме који чувају симплектичку структуру простора:

Дефиниција 1.2. Нека је (V, ω) симплектички векторски простор и $L \in End(V)$. Тада L зовемо линеарним **симплектоморфизмом** акко је

$$L^*\omega = \omega.$$

Као и у случају Риманових многострукости, уопштимо појам симплектичког векторског простора на симплектичку многострукост, захтевајући да тангентни простор у свакој тачки такве многострукости има симплектичку структуру. Формализујемо то размишљање на следећи начин:

Дефиниција 1.3. **Симплектичка многострукост** (M, ω) је многострукост где је $\omega \in \Omega^2(M)$ затворена недегенерисана форма.

Приметимо да ω може бити тачна, тј. $\omega = d\alpha$. У том случају M зовемо тачна симплектичка многострукост.

Слично, уопштавамо појам линеарног симплектоморфизма симплектичког векторског простора на појам симплектоморфизма многострукости захтевајући да је извод тог дифеоморфизма симплектормофизам тангентних простора у одговарајућим тачкама:

Дефиниција 1.4. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и $\varphi \in Diff(M)$. Тада је φ симплектоморфизам акко

$$\varphi^* \omega = \omega.$$

Напомена 1.2. Сви симплектоморфизми (M, ω) образују групу у односу на композицију као операцију. Ту групу ћемо означавати са

$$Symp(M, \omega)$$

или $Symp(M)$, када је симплектичка форма позната из контекста.

Знамо да $\mathbb{R}^{2n}$ има симплектичку структуру задану са $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$. Форму ω_0 зовемо **стандардна симплектичка форма**.

Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Тада је $\omega^n \neq 0$, па је ω^n форма запремине M. Штавише, приметимо да је свака оријентабилна површ симплектичка многострукост са формом запремине као симплектичком формом.

Пример 1.1. Затворене симплектичке многострукости (M, ω) имају глобалне тополошке рестрикције:

$$H^{2k}_{dR}(M) \neq 0$$

за $0 \leq k \leq n$. Дакле, на пример, само сфера $\mathbb{S}^2$ има симплектичку структуру.

Дакле, постоје глобалне тополошке опструкције за постојање симплектичке структуре на некој многострукости. Наредна теорема нам заправо указује на битну разлику Риманове и симплектичке геометрије: да је локално свака симплектичка многострукост иста, тј. симплектоморфна је Еуклидском простору са стандардном симплектичком структуром. Дакле, не постоје локалне инваријанте у симплектичкој геометрији. Ово је у контрасту са Римановом геометријом.

Теорема 1.1. (Дарбу) *Свака тачка p симплектичке многострукости (M, ω) има карту (U, ϕ) тако да*
$$\omega|_U = \phi^* \omega_0,$$
где је ω_0 стандардна симплектичка форма.

Пример 1.2. У претходним примерима смо видели да не постоји симплектичка структура на свакој многострукости. Међутим, оно што је занимљиво код симплектичке геометрије је то да свакој многострукост можемо канонски да доделимо тачну симплектичку структуру на њеном котангентном раслојењу.

Нека је (M, g) произвољна Риманова многострукост и нека је $\pi : T^*M \to M$ канонска пројекција котангентног раслојења. Канонска 1-форма $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ дефинисана као
$$\lambda_p = {\pi_{\pi(p)}}^*(p)$$
је **Лиувилова форма**. Приметимо да се у дефиницији Лиувилове форме p интерпретира на два начина: као тачка котангентног раслојења и као 1-форма на M. Конкретно,
$$\lambda_p(X_p) = p(\pi_*(p)(X_p))$$
где $X_p \in T_p(T^*M)$. Тада је симплектичка форма на T^*M дата са $\omega = -d\lambda$.

Такође, посматрајући нулто сечење котангентног раслојења (што је исто као и канонско улагање M), добијамо $\lambda|_M = 0 = \omega|_M$. Ово је битан пример Лагранжеве подмногострукости, појма који ћемо ускоро дефинисати.

Линеарност симплектичке форме нам омогућава да дефинишемо симплектички комплемент потпростора симплектичког простора.

Дефиниција 1.5. Нека је $W \subset V$ линеаран потпростор симплектичког простора (V, ω). Тада је симплектички комплемент од W сагласан са формом ω дефинисан као
$$W^\omega := \{v \in V \mid \ \omega(u, v) = 0 \text{ за све } u \in W\}$$
.

У контрасту са ортогоналним комплементом одређеним скаларним производом, $W \cap W^\omega$ не мора бити тривијално. Овај феномен у симплектичкој геометрији даје следећу дефиницију:

Дефиниција 1.6. Нека је $W \subset V$ линеаран потпростор симплектичког простора (V, ω) и W^ω симплектички комплемент сагласан са ω. Тада дефинишемо

- W је изотропан $\iff W \subseteq W^\omega$
- W је коизотропан $\iff W \supseteq W^\omega$
- W је Лагранжев $\iff W = W^\omega$, тј. W је и изотропан и коизотропан

Још једном уопштавамо ове појмове у случају симплектичке многострукости:

Дефиниција 1.7. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и N њена подмногострукост. Тада дефинишемо

- N је изотропна $\iff T_xN \subseteq T_xM$ је изотропан потпростор, за свако $x \in N$
- N је коизотропна $\iff T_xN \subseteq T_xM$ је коизотропан потпростор, за свако $x \in N$
- N је Лагранжева $\iff T_xN \subseteq T_xM$ је Лагранжев потпростор, за свако $x \in N$

Напомена 1.3. Еквивалентна дефиниција Лагранжеве подмногострукости L симплектичке многострукости (M, ω) је: L је Лагранжева акко је $\imath^*\omega = 0$, где је $\imath : L \hookrightarrow M$ улагање, и $dimL = \frac{1}{2}dimM$.

Пример 1.3. Свака крива γ у $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ је Лагранжева. Услов димензије очигледно важи, али такође важи и услов о анулирању форме. Нека је i улагање криве γ у $\mathbb{R}^2$. Тада је $i^*\omega_0 \in \Omega^2(\gamma) = 0$ пошто је крива једнодимензионална.

У наставку тезе увелико ћемо се фокусирати на Лагранжеве подмногострукости, поготово због чињенице да оне играју централну улогу у симплектичкој геометрији. Конкретно, Лагранжеве подмногострукости су посебно битне јер уопштавају симплектоморфизме.

Лема 1.2. *Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Тада је $M \times M$ такође симплектичка многострукост са симплектичком формом*

$$\Omega := \pi_1^*\omega - \pi_2^*\omega.$$

Тада је $\varphi : M \to M$ симплектоморфизам ако и само ако је његов график

$$\Gamma(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \in M \times M \,|x \in M\}$$

Лагранжева подмногострукост у $(M \times M, \Omega)$.

Доказ. Како је $T(M \times M) = TM \oplus TM$, недегенерисаност Ω следи директно из недегенерисаности ω. Такође, $d\Omega = \pi_1^* d\omega - \pi_2^* d\omega = 0$. Сада, нека је

$$j = (id, \varphi) : M \to M \times M, j(x) = (x, \varphi(x))$$

инклузија чија је слика очигледно $\Gamma(\varphi)$. Како је

$$j^*\Omega = (id^*, \varphi^*)(\pi_1^*\omega - \pi_2^*\omega) = \omega - \varphi^*\omega,$$

то је $j^*\Omega = 0$ ако и само ако φ је симплектоморфизам. □

Битан појам структуре која такође увек постоји на симплектичкој многострукости је појам **скоро комплексне** структуре. Наиме, знамо да у $\mathbb{R}^{2n}$ постоји стандардна симплектичка форма ω_0, за коју важи

$$\omega_0(u, v) = \langle J_0 u, v \rangle$$

за све $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, а где је J_0 матрица дефинисана са

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Приметимо да је $J_0^T = -J_0$ и да је $J_0^2 = -\operatorname{Id}$. Штавише, важи и

$$\omega_0(u, J_0 v) = \langle u, v \rangle.$$

Дефиниција 1.8. Комплексна структура на векторском простору V је линеарни аутоморфизам J на њему за који важи $J^2 = -\operatorname{Id}$.

Приметимо да је назив комплексна структура са правом такав. Наиме, дефиниција J задаје неопходност парности димензије простора V, а чак шта више, и задаје комплексну структуру са којом смо се до сада сусретали. Овако задано J је ништа друго него множење са i.

Дефиниција 1.9. Скоро комплексна структура на многострукости је глатка фамилија комплексних структура на њеним тангентним просторима. Оваква многострукост се назива **скоро комплексном**.

Дефиниција 1.10. Кажемо да је скоро комплексна структура J на симплектичкој многострукост (M, ω) **сагласна** са симплектичком формом ω ако је $\omega(\cdot, J\cdot)$ Риманова метрика на M.

Свака комплексна многострукост је скоро комплексна. Међутим, важи и јаче тврђење везано за симплектичку структуру:

Теорема 1.1. Свака симплектичка многострукост (M, ω) поседује скоро комплексну структуру J сагласну са симплектичком формом. Штавише, скуп таквих комплексних структура је контрактибилна бесконачнодимензиона многострукост.

Чињеница о контрактибилност је нетривијална ствар.

2 Масловљев индекс

У овом одељку представићемо начин на који је Арнолд увео Масловљев индекс, из угла алгебарске топологије и из геометријског угла. Потом ћемо представити Саламонову и Робинову аксиоматску дефиницију Масловљевог индекса која превазилази одређене опструкције у Арнолдовој дефиницији.

Масловљев индекс има битну улогу у конструкцији Флорове хомологије. Конкретно, користи се за градуацију Флоровог ланца. Конли-Цендеров индекс представља специјалан случај Масловљевог индекса (надаље сматрамо да говоримо о Масловљевом индексу у смислу Саламонове и Робинове дефиниције) коришћен у Хамилтоновој Флоровој хомологији, док се општи Масловљев индекс користи за Лагранжеву Флорову хомологију. О детаљима улоге Масловљевог индекса у Флоровој хомологији ће бити реч у одељку 4.

Овај одељак обухвата детаље формалног заснивања Масловљевог индекса.

2.1 Лагранжев Грасманијан

Увешћемо Лагранжев Грасманијан $\mathcal{L}(n)$ као многострукост за коју ћемо дефинисати Масловљев индекс као класу прве кохомологије.

Дефиниција 2.1. Лагранжев Грасманијан је скуп свих (неоријентисаних) Лагранжевих потпростора $\mathbb{R}^{2n}$.

Сада је циљ показати да овако дефинисан скуп има глатку структуру, не би ли појам кохомологије на том скупу имао смисла. Знамо да је $\mathbb{R}^{2n}$ симплектички векторски простор са стандардном симплектичком формом

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

Постоји скоро комплексна структура

$$J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n},\ J(q,p) = (-p,q)$$

која је ω_0-компатибилна са стандардним Еуклидским производом

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(q_i^2 + p_i^2).$$

Аутоморфизми $\mathbb{R}^{2n}$ који чувају ове три структуре су $\mathbf{Sp}(n)$, $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ и $\mathbf{O}(2n)$, редом. Ставише, аутоморфизми који чувају две од наведене три стуктуре чуваће и трећу.

Лема 2.1. *Аутоморфизми из претходне напомене су*

$$\mathbf{O}(2n) \cap \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n) \cap \mathbf{O}(2n) = \mathbf{U}(n)$$

Циљ је доказати да је $\mathcal{L}(n)$ глатка многострукост. У доказивању те чињенице неопходно је обратити пажњу на карактеризацију Лагранжевих потпростора $\mathbb{R}^{2n}$. Следећа лема даје такву карактеризацију:

Лема 2.2. *Нека су X и Y реалне $n \times n$ матрице. Дефинишимо $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ као*

$$\Lambda = \operatorname{range} Z \text{ , где је } Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Тада је $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$ ако и само ако је матрица Z ранга n и

$$X^T Y = Y^T X.$$

Специјално, график $\Lambda = \{(x, Ax) | x \in \mathbb{R}^{2n}\}$ матрице $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ је Лагранжев потпростор ако и само ако је A симетрична матрица.

Доказ. Сваки вектор у Λ има облик $v = (Xu, Yu)$. Дакле, за свака два вектора из Λ имамо $\omega_0(v, v') = u^T(X^T Y - Y^T X)u'$. Ово запажање нам даје прву еквиваленцију. Друга еквиваленција следи из прве, за специјалан случај када је $X = E$ и $Y = A$. $\square$

Као што можемо да приметимо, сваки Лагранжев потпростор је одређен матрицом Z из претходне леме, чији је ранг једнак n. Такву матрицу Z ћемо звати **Лагранжев рам**. Штавише, колоне матрице Z формирају ортонормирану базу Λ ако и само ако је $U = X + iY$ унитарна матрица. Матрицу Z која задовољава управо наведен услов ћемо звати **унитарни Лагранжев рам**. Приметимо да из леме 2.2 следи да је свака унитарна матрица уједно и симплектоморфизам. Како симплектоморфизми чувају симплектичку форму, то ће Лагранжеви потпростори ићи у Лагранжеве потпросторе при симплектичким аутоморфизмима. Имајући у виду претходна запажања и дефиницију $\mathcal{L}(n)$, поставља се питање да ли је могуће видети сваки Лагранжев потпростор као слику неког фиксираног Лагранжевог потпростора за неки симплектоморфизам. Одговор је потврдан и наредна лема доказује ову тврдњу:

Лема 2.3. *Фиксирајмо следећи Лагранжев потпростор*

$$\Lambda_{hor} = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} | y = 0\}.$$

Тада

(i) *Ако* $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$ *и* $\Phi \in \mathbf{Sp}(n)$, *тада* $\Phi\Lambda \in \mathcal{L}(n)$.

(ii) *За свака два Лагранжева потпростора* $\Lambda,\ \Lambda' \in \mathcal{L}(n)$ *постоји симплектоморфизам* $\Phi \in \mathbf{Sp}(n)$ *такав да* $\Lambda' = \Phi\Lambda$.

(iii) *Постоји природан изоморфизам* $\mathcal{L}(n) = \mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n)$

Доказ. Нека је $\Lambda = \operatorname{range} Z$, где је Z унитаран рам као у леми 2.2. Тада је матрица

$$\Phi = \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix}$$

у $\mathbf{Sp}(n) \cap \mathbf{O}(2n)$ и $\Phi\Lambda_{hor} = \Lambda$. Дакле, сваки Лагранжев потпростор је симплектоморфна слика Λ_{hor}. Сада (ii) следи компоновањем ових пресликавања. Последња ставка следи из чињенице да је $U = X + iY \in \mathbf{U}(n)$, одређен унитарним Лагранжевим рамом, јединствено одређен са Λ до на ортогоналну трансформацију базе чији је линеарни омотач управо Λ. $\square$

Дакле, из претходне леме следи да $\mathbf{U}(n)$ дејствује транзитивно на $\mathcal{L}(n)$ са стационарном групом изоморфном са $\mathbf{O}(n)$. Како је овде реч о глатком дејству Лијевих група, следи да је $\mathcal{L}(n)$ глатка многострукост. Штавише, како је $\mathbf{U}(n)$ компактно, то ће и $\mathcal{L}(n)$ бити компактна многострукост.

2.2 Масловљев индекс Лагранжевог Грасманијана

У овој секцији представићемо Арнолдову дефиницију Масловљевог индекса, како алгебарско тополошку, тако и геометријску. Наравно, испоставиће се да су ове дефиниције еквивалентне.

Како смо у претходној секцији доказали да је Лагранжев Грасманијан глатка многострукост, сада можемо коректно да уведемо Масловљев индекс Лагранжевог Грасманијана, како алгебарско тополошки, тако и геометријски. Циљ је да покажемо да је $\pi_1(\mathcal{L}(n)) \cong \mathbb{Z}$. За почетак, приметимо да лема 2.2 задаје раслојење

$$\mathbf{O}(n) \to \mathbf{U}(n) \to \mathcal{L}(n).$$

Такође, детерминанта као хомоморфизам индукује следеће раслојење

$$\mathbf{SU}(n) \to \mathbf{U}(n) \xrightarrow{det} \mathbb{S}^1.$$

Знамо да тачке многострукости $\mathcal{L}(n)$ можемо да идентификујемо са унитарним матрицама, до на ортогонални изоморфизам базе те тачке. Како су вредности детерминанте на скупу ортогоналних матрица једино ± 1, и узимајући у обзир претходни коментар, следеће пресликавање је коректно дефинисано:

$$Det^2 : \mathcal{L}(n) \to \mathbb{S}^1, \;\; Det^2(A \cdot \mathbf{O}(n)) = det^2(A).$$

Означимо $S\mathcal{L}(n)$ скуп свих Лагранжевих потпростора Λ таквих да је $Det^2 \Lambda = 1$. Како $\mathbf{U}(n)$ дејствује транзитивно на $\Lambda(n)$, тада $\mathbf{SU}(n)$ дејствује транзитивно на $S\mathcal{L}(n)$, а стационарна група је $\mathbf{SU}(n) \cap \mathbf{O}(n) = \mathbf{SO}(n)$. Следи, $S\mathcal{L}(n) = \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SO}(n)$ и имамо следеће индуковано раслојење

$$\mathbf{SO}(n) \to \mathbf{SU}(n) \to S\mathcal{L}(n).$$

Комбинујући сва ова раслојења добијамо следећи дијаграм

$$\begin{tikzcd}
S\mathbf{O}(n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{O}(n) \arrow[r, "det"] \arrow[d] & S^0 \arrow[d] \\
S\mathbf{U}(n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{U}(n) \arrow[r, "det"] \arrow[d] & S^1 \arrow[d, "z^2"] \\
S\mathcal{L}(n) \arrow[r] & \mathcal{L}(n) \arrow[r, "Det^2"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Из следећих дугих тачних низова фибрација

$$\ldots \longrightarrow \pi_1(S\mathbf{U}(n)) \longrightarrow \pi_1(S\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \pi_0(S\mathbf{O}(n)) \longrightarrow \ldots$$

и

$$\ldots \longrightarrow \pi_2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(S\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_0(S\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \ldots$$

и чињеница да су сви простори овде путно-повезани и $\pi_1(S\mathbf{U}(n)) \cong 0$ (јер јер реч о Штифеловим многострукостима над $\mathbb{C}$), имамо да је

$$\pi_1(\mathcal{L}(n)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z},$$

где $[Det^2]$ индукује изоморфизам. Из Хуревићевог изоморфизма следи да је $H_1(\mathcal{L}(n)) \cong \mathbb{Z}$. Како је $\mathcal{L}(n)$ компактан и његова прва кохомолошка група слободна, имамо да је

Лема 2.4. $H^1(\mathcal{L}(n), \mathbb{Z}) \cong H_1(\mathcal{L}(n), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

$[Det^2]$ ће такође индуковати изоморфизам у кохомологији $[Det^2]^* : H^1(\mathbb{S}^1) \to H^1(\mathcal{L}(n))$. То јест, генератор ће се сликати у генератор. Притом знамо да је deg генератор прве кохомолошке групе $\mathbb{S}^1$.

Дефиниција 2.2. Масловљев индекс Лагранжевог Грасманијана $\mathcal{L}(n)$ је

$$\mu = [Det^2]^* deg.$$

Масловљев индекс криве γ заправо представља степен пресликавања следеће композиције:

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{L}(n) \xrightarrow{Det^2} \mathbb{S}^1.$$

Пример 2.1. Фиксирајмо Лагранжев потпростор $\lambda = A \cdot \mathbf{O}(n)$ и посматрајмо аутоморфизме $e^{i\varphi} \in \mathbf{U}(n)$. Тада су одговарајући Лагранжеви простори $e^{i\varphi\lambda}$ где

$\varphi \in [0, \pi]$. Ова фамилија Лагранжевих потпростора је заправо затворена крива $\gamma : S^1 \to \mathcal{L}(n)$ јер је $e^{i\pi}E = -E = E$. Ако израчунамо $det(e^{i\pi}E) = e^{in\varphi}$, добијемо да је

$$Det^2(e^{i\varphi\lambda}) = Det^2(e^{i\varphi}EA \cdot \mathbf{O}(n)) = det^2(e^{i\varphi}EA) = e^{2in\varphi}det^2(A) = e^{2in\varphi}Det^2(\lambda).$$

Дакле, Масловљев индекс криве γ је n.

Сада желимо да уопштимо Масловљев индекс, тј. да видимо да ли можемо да га аналогно дефинишемо на Лагранжевим подмногострукостима симплектичких многострукости. За почетак, нека је L Лагранжева подмногострукост $\mathbb{R}^{2n}$. Посматрајмо пресликавање:

$$\tau : L \to \mathcal{L}(n), \quad p \mapsto T_pL.$$

Ово пресликавање индукује класу у $H^1(L, \mathbb{Z})$:

Дефиниција 2.3. Дефинишемо **Масловљев индекс Лагранжеве подмногострукости** L као

$$\mu_L := \tau^*\mu \in H^1(L, \mathbb{Z}).$$

У овом случају, Масловљев индекс L затворене криве $\gamma : \mathbb{S}^1 \to L$ је дефинисан као број ротација квадрата детерминанте затворене петље Лагранжевих тангентних простора подмногострукости L, тј. степен пресликавања следеће композиције

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\gamma} L \xrightarrow{\tau} \mathcal{L}(n) \xrightarrow{Det^2} \mathbb{S}^1.$$

Приметимо да је ово дефиниција у духу алгебарске топологије. Међутим, Арнолд је такође дао и геометријску интерпретацију Масловљевог индекса у свом раду [1].

Претпоставимо да је L у „општој позицији" (видети [1]).**Цикл** Σ (индукован генералном позицијом) је скуп свих сингуларних тачака пројекције на првих n координата. Нека је γ крива трансверзална на Σ тако да крајње тачке криве γ не припадају Σ. Σ представља скуп свих сингуларних тачака пројекције подмногострукости L (уложене у $\mathbb{R}^{2n}$) на првих n координата. Дефинишимо тада **Масловљев индекс** криве γ као њен индекс пресека са Σ, и означимо тај индекс пресека са ind.

Сетимо се да је за теорију пресека неопходна оријентација; крива γ је очигледно оријентисана, али нас интересује оријентација хиперповрши Σ. Испоставља се да је Σ двострана, дакле оријентабилна, те је индекс пресека ind дефинисан за Σ коректно дефинисана прва кохомолошка класа од L.

Дефиниција 2.4. Подмногострукост N (многострукости M) кодимензије 1 је **двострана** ако је компактна и ако има тривијално нормално раслојење (или еквивалентно ако је нормално раслојење оријентабилно).

Означавајући тада број тачака пресека које идући дуж криве γ прелазе са негативне на позитивну страну цикла Σ са ν_+ и аналогно ν_-, имамо да је

$$ind(\gamma) = \nu_+ - \nu_-.$$

Поента ове конструкције је заправо показати да $\mathcal{L}(n)$ на неки начин овде представља класификирајући простор на основу ког дефинишемо Масловљев индекс. Ако задамо две дефиниције на $\mathcal{L}(n)$, доказујући да су еквивалентне, и показујући да се обе дефиниције лако преводе претходно конструисаним пресликавањима на дефиниције за опште Лагранжеве подмногострукости, добијамо да су управо наведене дефиниције Масловљевог индекса за Лагранжеву подмногострукост заиста еквивалентне.

Мотивисани тиме, дефинишемо појам Масловљевог цикла и у $\mathcal{L}(n)$, у циљу имитирања управо дате геометријске интерпретације Масловљевог индекса базираног на теорији пресека. Нека је $V = 0 \times \mathbb{R}^n$ фиксирани Лагранжев потпростор. Тада са Λ_k означавамо скуп свих Лагранжевих потпростора који имају k-димензионалан пресек са V. Дефинишемо **Масловљев цикл** Λ као затворење Λ_1 у $\mathcal{L}(n)$. Тада је овако дефинисан Масловљев цикл подмногострукост од $\mathcal{L}(n)$, кодимензије 1. Штавише,

Теорема 2.5. Λ *је двостран.*

Дефинишимо сада **Масловљев индекс** криве у $\mathcal{L}(n)$ као индекс пресека Масловљевог цикла и дотичне криве. Ова дефиниција је коректна јер смо управо поменули да је Масловљев цикл Λ двостран. Означимо овако дефинисан Масловљев индекс са Ind.

Директан рачун даје $Ind = \mu$. Арнолд је у [1] доказао да је

$$\tau^* Ind = ind$$

што даје

$$\mu_L = \tau^* \mu = \tau^* Ind = ind.$$

Другим речима, ове две дефиниције Масловљевог индекса Лагранжеве подмногострукости су еквивалентне.

2.3 Робинова и Саламонова дефиниција Масловљевог индекса

У овој секцији ћемо увести Масловљев индекс аксиоматски, на начин на који су то урадили Робин и Саламон. Потом ћемо представити Масловљев индекс на $\mathbf{Sp}(n)$ чија је прва фундаментална група једнака $\mathbb{Z}$ (имајући у виду да смо раније показали да је Масловљев индекс изоморфизам на $\pi_1(\mathcal{L}(n))$). На крају ћемо увести Конли-Цендеров индекс, као специјалан случај конструисаног Масловљевог индекса, и који игра битну улогу у Флоровој хомологији о којој ће бити реч у глави 4.

Као што смо раније видели, Арнолд је дефинисао Масловљев индекс за криве чије крајње тачке не припадају Масловљевом циклу. У дефиницији коју су Робин и Саламон дали Масловљев индекс је дефинисан за сваки непрекидан пут, без рестрикција за крајње тачке. Такође, тако дефинисан Масловљев индекс ће узимати вредности у $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_2$, што уопштава Арнолдову дефиницију Масловљевог индекса јер у њој Масловљев индекс узима само целобројне вредности. Међутим, Робинова и Саламонова дефиниција ће зависити од избора фиксног Лагранжевог потпростора који ће индуковати Масловљев цикл на исти начин као што је то био случај у Арнолдовој дефиницији.

Да бисмо аксиоматски увели Масловљев индекс, неопходно је прво дефинисати канонски изоморфизам

$$T_\Lambda\mathcal{L}(n) \to S^2(\Lambda) : (\Lambda, \widehat{\Lambda}) \mapsto Q = Q(\Lambda, \widehat{\Lambda})$$

између тангентног простора у тачки Λ и простора свих квадратних форми на њему схваћеном као Лагранжев потпростор. Дајмо наредне две дефиниције:

Дефиниција 2.5. Нека је $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$ и $\widehat{\Lambda} \in T_\Lambda\mathcal{L}(n)$. Нека је $\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathcal{L}(n)$ јединствено Кошијево решење са почетним условима $\gamma(0) = \Lambda$ и $\gamma'(0) = \widehat{\Lambda}$. Тада је $\gamma(t) = \theta(t)\gamma(0)$ за неку криву $\theta : (-\delta, \delta) \to \mathbf{Sp}(n)$, такву да $\theta(0) = \mathrm{Id}$. Сада дефинишемо придружену форму $q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}$ са

$$q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}} := \omega(v, \dot{\theta}(0)v), \text{ за све } \ v \in \Lambda.$$

Дефиниција 2.6. Нека је $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$ и $\widehat{\Lambda} \in T_\Lambda \mathcal{L}(n)$ и $\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathcal{L}(n)$ јединствено Кошијево решење са почетним условима $\gamma(0) = \Lambda$ и $\gamma'(0) = \widehat{\Lambda}$. Нека је $W \in \mathcal{L}(n)$ Лагранжев комплемент за Λ. За $v \in \Lambda$ и довољно мало t дефинишхемо $w(t) \in W$ тако да задовољава услов $v + w(t) \in \gamma(t)$. Тада дефинишемо придружену форму $Q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}$ са

$$Q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}(v) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \omega(v, w(t)).$$

Дакле, обе дефиниције нам сваком тангентном вектору $\widehat{\Lambda} \in T_\Lambda \mathcal{L}(n)$ у тачки Λ придружују квадратну форму на тангентном простору $T_\Lambda \mathcal{L}(n)$. Међутим, проблем са другом дефиницијом је избор комплемента. Такође, питање које се намеће је да ли су ове две дефиниције есенцијално исте. Наредна теорема даје одговор на ова питања.

Теорема 2.1. Нека су $Q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}$ и $q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}$ претходно уведе квадратне форме. Тада

(1) Дефиниција $Q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}$ је независна од избора W.

(2) Дефиниције $Q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}$ и $q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}$ су еквивалентне.

(3) Ако је $Z(t) = (X(t), Y(t))$ за Λ, тада је

$$Q(v) = \langle X(0)u, \dot{Y}(0)u \rangle - \langle Y(0)u, \dot{X}(0)u \rangle$$

(4) Форма $q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}$ је природна у смислу

$$q_{\Phi\Lambda,\Phi\widehat{\Lambda}} \circ \Phi = q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}, \text{ за све симплектичке матрице } \Phi$$

(5) Форма $Q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}$ је природна у смислу

$$Q_{\Phi\Lambda,\Phi\widehat{\Lambda}} \circ \Phi = Q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}, \text{ за све симплектичке матрице } \Phi$$

Доказ. Прво, изаберимо координате тако да $\Lambda = \gamma(0) = \mathbb{R}^n \times 0$. Тада је сваки Лагранжев комплемент од $\gamma(0)$ график симетричне матрице $B \in \mathbb{R}^{n^2}$ (пресек мора бити тривијалан и из леме 2.2, комплемент мора бити график симетричне матрице), тј.

$$W = \{(By, y)|\ y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Нека је $v = (x, 0) \in \Lambda$. Тада $w(t) = (By(t), y(t)) \in W$, па је $v + w(t) = (x + By(t), y(t)) = (x, A(t)x) \in \gamma(t)$ за неко $x \in \mathbb{R}^n$. Следи $y(t) = A(t)(x + By(y))$ и $y(0) = 0$. На крају, рачун даје

$$\begin{aligned} Q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}(v) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \omega(v, w(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \omega((x,0),(By(t),y(t))) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle x, y(t)\rangle \\ &= \langle x, \dot{y}(0)\rangle = \langle x, \dot{A}(0)(x + By(t)) + A(0)(x + B\dot{y}(0))\rangle = \langle x, \dot{A}(0)\rangle. \end{aligned}$$

Дакле, форма је заиста независна од избора W.

Сада, нека је $\theta : (-\delta, \delta) \to \mathbf{Sp}(n)$ крива која задовољава $\gamma(t) = \theta(t)\Lambda$, тј. график $A(t) = \theta(t)(\mathbb{R}^n \times 0)$. Тада је

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A(t) & E \end{pmatrix}$$

Како је $A(t)$ симетрична, $\theta(t)$ је заиста симплектичка матрица. Сада за све $v = (x, 0) \in \Lambda$ важи

$$Q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}(v) = \langle x, \dot{A}(0)x\rangle = \omega((x,0),(\dot{A}(0)x) = \omega(v, \dot{\theta}(0)v) = q_{\Lambda,\widehat{\Lambda}}(v).$$

Што се последње две ставке тиче, тривијално важе пошто линеарни симплектоморфизми чувају симплектичку форму. $\square$

Наредни корак у експлицитном дефинисању Масловљевог индекса је користити претходно успостављен изоморфизам. Дефинисане форме ће бити део експлицитне формуле Масловљевог индекса, биће дефинисане у тачкама Масловљевог цикла, али ће сходно томе и зависити од нивоа Масловљевог цикла ком припадају. Ово је кључна разлика између Масловљевог индекса дефинисаног од стране Арнолда и овог којег ћемо ускоро дефинисати.

Фиксирајмо неки Лагранжев потпростор V који ће индуковати Масловљев цикл. Избор V задаје декомпозицију Лагранжевог Грасманијана

$$\mathcal{L}(n) = \bigcup_{k=0}^{n} \Sigma_k(V)$$

где је $\Sigma_k(V)$ подмногострукост свих Лагранжевих потпростора који имају k-димензионалан пресек са V. Штавише, Арнолд је доказао (погледати [1]) да је Σ_k подмногострукост кодимензије $\frac{k(k+1)}{2}$. **Масловљев цикл** индукован потпростором V је алгебарски варијетет

$$\Sigma(V) = \overline{\Sigma_1(V)} = \bigcup_{k-1}^{n} \Sigma_k(V).$$

Тангентни простор подмногострукости $\Sigma_k(V)$ у тачки $\Lambda \in \Sigma_k(V)$ је дат као

$$T_\Lambda \Sigma_k(V) = \left\{ \widehat{\Lambda} \in T_\Lambda \mathcal{L}(n) : \, Q(\Lambda, \widehat{\Lambda})|_{\Lambda \cap V} = 0 \right\}.$$

Дакле, сваком тангентном вектору тангентног простора у некој тачки смо доделили квадратну форму. Како је циљ да имитирамо теорију пресека коју је Арнолд користио у својој дефиницији Масловљевог индекса, сасвим је логично да дефинишемо Масловљев индекс за глатке криве (које имају дефинисане тангентне векторе). Дакле,

Дефиниција 2.7. Нека је $\gamma(t) : [a, b] \to \mathcal{L}(n)$ глатка крива. **Прелаз** криве γ је $t \in [a, b]$ за које $\gamma(t)$ има нетривијалан пресек са V, тј. $\gamma(t) \in \Sigma(V)$. Тада за сваки прелаз t дефинишемо **форму преласка**

$$\Gamma(\gamma, V, t) = Q_{\gamma(t), \dot{\gamma}(t)}|_{\gamma(t) \cap V}.$$

Уколико t није прелаз, дефинишемо $\Gamma(\gamma, V, t) = 0$.

Напомена 2.1. Како је $\Sigma(V)$ компактан као затворен скуп компактне многострукости $\mathcal{L}(n)$, знамо да је скуп прелаза такође компактан. Штавише, како је форма преласка дефинисана ослањајући се на придружену форму дефинисану раније, имамо да је форма преласка такође природна у смислу дејства симплектичке матрице:

$$\Gamma(\Phi\gamma, \Phi V, t) \circ \Phi = \Gamma(\gamma, V, t),$$

за сваку матрицу Φ. У доказу теореме 2.1 видели смо да за $V = \mathbb{R}^n \times 0$ и $\gamma(t) = Gr(A(t))$, где је $A(t)$ пут симплектичких матрица, придружена форма има облик

$$\Gamma(\gamma, V, t)(v) = \langle x, \dot{A}(t) x \rangle$$

за свако $v = (x, 0)$ тако да $x \in \ker A(t)$. Ово уме да буде корисно када рачунамо Масловљев индекс криве, управо из разлога што ће се сама формула за

Масловљев индекс ослањати на форму преласка. Даље, γ је тангентна на $\Sigma_k(V)$ у прелазу t ако и само ако је $\gamma(t) \in \Sigma_k(V)$ и $\Gamma(\gamma, V, t) = 0$. Ово последње следи из дефиниције форме преласка и карактеризације тангентног простора подмногострукости $\Sigma_k(V)$.

Гледаћемо посебну врсту прелаза:

Дефиниција 2.8. Прелаз $t \in [a, b]$ криве γ је **регуларан** ако је форма преласка $\Gamma(\gamma, V, t)$ несингуларна. Крива која има само регуларне прелазе је **регуларна крива**. Прелаз је **прост** ако је регуларан и ако је $\gamma(t) \in \Sigma_1(V)$.

Приметимо да крива има само просте прелазе ако и само ако је трансверзална на свако $\Sigma_k(V)$. Ова запажање следи из чињенице да је форма преласка несингуларна и кодимензије $\Sigma_k(V)$.

Дефиниција 2.9. Знак квадратне недегенерисане форме $q : V \times V \to \mathbb{R}$ чија је матрична репрезентација S је

$$\operatorname{sign}(q) := (\sharp \text{ позитивне соп. вред. } S) - (\sharp \text{ негативне соп. вред. } S).$$

Сада напокон можемо дефинисати Масловљев индекс:

Дефиниција 2.10. Нека је $\gamma : [a, b] \to \mathcal{L}(n)$ регуларна крива и V фиксиран Лагранжев потпростор. Дефинишемо Масловљев индекс криве γ као

$$\mu(\gamma, V) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}\Gamma(\gamma, V, a) + \sum_{a<t<b} \operatorname{sign}\Gamma(\gamma, V, t) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\Gamma(\gamma, V, b)$$

где су t прелази.

Напомена 2.2. Приметимо да у датој дефиницији не постоје опструкције за a и b (за разлику од Арнолдове дефиниције која није дозвољавала да крајеви припадају Масловљевом циклу). Дакле, ова дефиниција уопштава Арнолдову. Штавише, уколико посматрамо петље, директно из формуле се може видети да је вредност Масловљевог индекса петље цео број.
Такође, из теорије трансверзалности знамо да постоји само коначан број прелаза, те је сума у дефиницији коначна.

Пример 2.2. Дајмо сада један конкретан пример у ком ћемо видети како се рачуна Масловљев индекс задане криве, а који користи управо дату дефини-

цију. Заправо ће се испоставити да је Масловљев индекс криве једнак Масловљевом индексу исте криве, израчунат помоћу Арнолдове дефиниције ([1], страна 2), за $n = 1$.
Имајући на уму да је $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, фиксирајмо $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$. Дефинишимо криву

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathcal{L}(1), \quad \gamma(t) = e^{it} V.$$

Ова крива нам заправо говори да је реч о једнодимензионим Лагранжевим потпросторима, те можемо директно видети да су једини прелази криве γ тачке 0 и 1 (што је исто као и у случају примера 2.1, где је $\gamma(\pi) = -V = V$). Узимајући у обзир прву дефиницију овог одељка, јасно је да је $\theta_0(t) = e^{it}$ и $\theta_\pi(t) = -e^{it}$ (присетимо се да се прва дефиниција ослања на чињеницу да постоји параметризација криве помоћу симплектичких матрица, али само локално, док не мора да постоји таква параметризација глобално; дакле, овај пример је конкретан пример када не постоји глобална параметризација у духу прве дефиниције). Сада посматрамо придружене форме

$$q_{\gamma(0), \dot{\gamma}(0)}(z) = \omega(z, \dot{\theta}_0(0) z) = \omega(z, iz) = x^2 = |z|^2, \text{ за све } z \in V,$$

$$q_{\gamma(\pi), \dot{\gamma}(\pi)}(z) = \omega(z, \dot{\theta}_\pi(\pi) z) = \omega(z, iz) = x^2 = |z|^2, \text{ за све } z \in V.$$

Дакле, у оба случаја, знакови форми су једнаки $\operatorname{sign} q_{\gamma(0), \dot{\gamma}(0)} = \operatorname{sign} q_{\gamma(\pi), \dot{\gamma}(\pi)} = 1$. Следи, Масловљев индекс криве γ је једнак $\mu(\gamma, V) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Знамо да локално, уз добар одабир координата, сваки пут у $\mathcal{L}(n)$ се може видети као пут симплектичких матрица. Та тврдња указује на врло битан моменат у анализи Масловљевог индекса конкретних путева, јер анализа често зависи од посматрања прелаза локално. Штавише, приметимо да из прве дефиниције директно следи да се Масловљев индекс понаша врло лепо са надовезивањем, тј.

$$\mu(\gamma * \gamma', V) = \mu(\gamma, V) + \mu(\gamma', V).$$

Узимајући у обзир претходних пар коментара, поставља се природно питање шта је Масловљев индекс пута графика симетричних матрица.

Лема 2.6. ***(Локализација)*** *Нека је $\gamma : [a, b] \to \mathcal{L}_n$ и нека $V \in \mathcal{L}(n)$. Претпоставимо да је $\gamma(t) = Gr(A(t))$, где је $A(t)$ глатка крива у простору симетричних матрица, дефинисана за $t \in [a, b]$. Тада је Масловљев индекс криве γ за* *фиксиран Лагранжев потпростор V дат* ***спектралним током***

$$\mu(\gamma, V) = \frac{1}{2}\operatorname{sign} A(b) - \frac{1}{2}\operatorname{sign} A(a).$$

Доказ. Како је Масловљев индекс природан у смислу дејства симплектичких матрица (јер је формула дефинисана помоћу форме Γ која је природна у истом смислу), без умањења општости је довољно посматрати само случај $V = \mathbb{R}^n \times 0$. Приметимо да у формулацији теореме ништа није решено о прелазима криве γ, тј. постоји коначан број прелаза који могу да се налазе било где на $[a, b]$. Нека је t_0 прелаз тако да је $A(t_0)$ ранга $n - k$. Можемо да претпоставимо да је $A(t_0)$ дијагонална. Даље, како је γ дато путем симетричних матрица, за t близу t_0 имамо

$$A(t) = \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ v^T(t) & w(t) \end{pmatrix},$$

тако да

- $u(t) \in \mathrm{Мат}_k(\mathbb{R})$ је симетрична и $u(t_0) = 0$,
- $w(t) \in \mathrm{Мат}_{n-k}(\mathbb{R})$ је симетрична и $w(t_0)$ је недегенерисана и дијагонална (те и инвертибилна),
- $v(t)$ је $k \times (n-k)$ матрица и $v(t_0) = 0$.

Можемо да факторишемо $A(t) = P(t)D(t)P^T(t)$, где је

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & v(t)w^{-1}(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} u(t) - v(t)w^{-1}(t)v^T(t) & 0 \\ 0 & w(t) \end{pmatrix}$$

Из Тејлоровог развоја за t близу t_0 имамо

$$D(t) = \begin{pmatrix} (t - t_0)\dot{u}(t_0) & 0 \\ 0 & w(t_0) + (t - t_0)\dot{w}(t_0) \end{pmatrix} + O((t - t_0)^2).$$

Желимо да видимо у ком $\Sigma_k(V)$ тачка $\gamma(t_0)$ лежи:

$$
\begin{aligned}
\gamma(t_0) \cap V &= Gr(A(t_0)) \cap \mathbb{R}^n \times 0 \\
&= \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A(t_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \middle| x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{n-k} \right\} \cap (\mathbb{R}^n \times 0) \\
&= \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \middle| x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{n-k} \right\} \cap (\mathbb{R}^n \times 0) \\
&= \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ w(t_0)y \end{pmatrix} \right) \middle| x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{n-k} \right\} \cap (\mathbb{R}^n \times 0) \\
&= \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \middle| x \in \mathbb{R}^k \right\} \cong \mathbb{R}^k.
\end{aligned}
$$

Дакле, сваки вектор у $\gamma(t_0) \cap V$ је облика $v = (x, 0)$, где $x \in \mathbb{R}^k$ и тада $Q_{\gamma(t_0),\dot{\gamma}(t_0)} = \omega((x,0), \dot{A}(t_0)(x,0))$. Сада следи да

$$\operatorname{sign} Q_{\gamma(t_0,\dot{\gamma}(t_0)}|_{\gamma(t_0)\cap V} = \operatorname{sign} \dot{A}(t_0)|_{\mathbb{R}^k} = \operatorname{sign} \dot{u}(t_0)$$

За $t > t_0$ и t довољно близу t_0 имамо

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sign} A(t) = \operatorname{sign} D(t) &= \operatorname{sign}((t-t_0)\dot{u}(t_0)) + \operatorname{sign}(w(t_0) + (t-t_0)\dot{w}(t_0)) \\
&= \operatorname{sign} \dot{u}(t_0) + \operatorname{sign} w(t_0) = \operatorname{sign} Q_{\gamma(t_0,\dot{\gamma}(t_0)}|_{\gamma(t_0\cap V} + \operatorname{sign} A(t_0) \\
&= \operatorname{sign} \Gamma(\gamma, V, t_0) + \operatorname{sign} A(t_0).
\end{aligned}
$$

Слично, за $t < t_0$ и t довољно близу t_0 имамо

$$\operatorname{sign} A(t_0) = -\operatorname{sign} \Gamma(\gamma, V, t_0) + \operatorname{sign} A(t_0).$$

Посматрајући све претходно добијено, имамо да

$$\operatorname{sign} A(t_0 + \varepsilon) - \operatorname{sign} A(t_0 - \varepsilon) = 2\Gamma(\gamma, V, t_0), \text{ за довољно мало } \varepsilon > 0.$$

Приметимо да за суседне прелазе $t_0 < t_1$ и $\varepsilon > 0$ довољно мало, важи

$$\operatorname{sign} A(t_0 + \varepsilon) = \operatorname{sign} A(t_1 - \varepsilon).$$

Коначно,

$$
\begin{aligned}
\mu(\gamma, V) =& \frac{1}{2}\operatorname{sign}\Gamma(\gamma, V, a) + \sum_{a<t_0<b} \operatorname{sign}\Gamma(\gamma, V, t_0) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\Gamma(\gamma, V, b) \\
=& \frac{1}{2}\operatorname{sign} A(a+\varepsilon) - \frac{1}{2}\operatorname{sign} A(a) + \sum_{a<t_0<b} \left(\frac{1}{2}\operatorname{sign} A(t_0+\varepsilon) - \frac{1}{2}\operatorname{sign} A(t_0-\varepsilon)\right) \\
& + \frac{1}{2}\operatorname{sign} A(b) - \frac{1}{2}\operatorname{sign} A(b-\varepsilon) \\
=& -\frac{1}{2}\operatorname{sign} A(a) + \frac{1}{2}\operatorname{sign} A(b).
\end{aligned}
$$

□

Приметимо да смо до сада увек говорили и радили са глатким кривама у $\mathcal{L}(n)$. Међутим, наредне леме нам омогућавају да дефиницију Масловљевог индекса проширимо на ширу класу (непрекидних) путева у $\mathcal{L}(n)$.

Лема 2.7. *Претпоставимо да криве $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathcal{L}(n)$ такве да $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ имају само регуларне прелазе. Ако су γ_0 и γ_1 хомотопне релативно крајње тачке, тада оне имају исти Масловљев индекс.*

Лема 2.8. *Сваки непрекидан пут Лагранжевих потпростора $\gamma : [a, b] \to \mathcal{L}(n)$ је хомотопан релативно крајње тачке кривој у $\mathcal{L}(n)$ која има само регуларне прелазе.*

Обратимо пажњу на следећа својства Масловљевог индекса дефинисаног за криве у $\mathcal{L}(n)$.

Теорема 2.9. *Наредна својства називамо аксиомама Масловљевог индекса:*

*(**Природност**) За сваки $\Phi \in \mathbf{Sp}(n)$*

$$\mu(\Phi\gamma, \Phi V) = \mu(\gamma, V).$$

*(**Надовезивање**) За $a < c < b$*

$$\mu(\gamma, V) = \mu(\gamma|_{[a,c]}) + \mu(\gamma|_{[c,b]}).$$

*(**Производ**) Ако је $n' + n'' = n$, идентификујемо $\mathcal{L}(n') \times \mathcal{L}(n'')$ као подмно-*

гострукост $\mathcal{L}(n)$ на очигледан начин. Тада је

$$\mu(\gamma' \oplus \gamma'', V' \oplus V'') = \mu(\gamma', V') + \mu(\gamma'', V'').$$

(Хомотопија) *Два пута $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathcal{L}(n)$, за које важи $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, су хомотопна релативно крајње тачке ако и само ако имају исти Масловљев индекс.*

(Анулирање) *Сваки пут $\gamma : [a, b] \to \Sigma_k(V)$ има Масловљев индекс $\mu(\gamma, V) = 0$.*

Доказ. Доказ се може наћи у [2]. Аксиома хомотопије је једина неочигледна.

Напомена 2.3. Лема 2.8 имплицира да је могуће проширити дефиницију Масловљевог индекса на све непрекидне путеве у $\mathcal{L}(n)$. Конкретно, произвољном путу доделимо Масловљев индекс једнак Масловљевом индексу регуларне криве којој је пут хомотопан релативно крајње тачке. Како је Масловљев индекс инваријантан у односу на хопомотопије релативно крајње тачке (теорема 2.9), следи добра дефинисаност Масловљевог индекса за непрекидне путеве у $\mathcal{L}(n)$.

Овако дефинисан Масловљев индекса на ширем скупу путева се може окарактерисати истим аксиомама, тј. својствима, наведеним у теореми 2.9.

Последица 2.1. Масловљев индекс је мономорфизам

$$\pi_1(\mathcal{L}(n)) \to \mathbb{Z}, \qquad \alpha \mapsto \mu(\alpha, V) \quad \text{за неки фиксиран } V \in \mathcal{L}(n).$$

Доказ. Аксиома хомотопије из теореме 2.9 нам даје добру дефинисаност на $\pi_1(\mathcal{L}(n))$, а како говоримо о петљама, знамо да је тада Масловљев индекс функција са кодоменом у $\mathbb{Z}$. Аксиома надовезивања имплицира да је реч о хомоморфизму. Аксиома хомотопије (обрнута импликација) директно имплицира да је Масловљев индекс инјективно пресликавање. □

Штавише, Масловљев индекс је изоморфизам. Потребно је још само доказати да је на. Специјално, довољно је доказати да постоји пут који се слика у генератор од $\mathbb{Z}$, тј. чији је Масловљев индекс једнак 1. Конструисаћемо такав пут.

Нека је $\gamma : [0, \pi] \to \mathcal{L}(n)$ пут Лагранжевих потпростора дефинисан

$$\gamma(t) = e^{it}(\mathbb{R} \times 0) \oplus (\mathbb{R} \times 0) \oplus \ldots \oplus (\mathbb{R} \times 0),$$

где је $\Lambda = (\mathbb{R}\times 0)\oplus(\mathbb{R}\times 0)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{R}\times 0)$ Лагранжев потпростор у $\mathbb{R}^{2n}$. Присетимо се да не постоје рестрикције за избор фиксираног Лагранжевог потпростора у дефиницији Масловљевог индекса. Сада, ослањајући се на аксиоме Масловљевог индекса, рачунамо

$$\begin{aligned}\mu(\gamma,\Lambda) =&\mu((e^{it}(\mathbb{R}\times 0))\oplus(\mathbb{R}\times 0)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{R}\times 0),\Lambda)\\ =&\mu(e^{it}(\mathbb{R}\times 0),\mathbb{R}\times 0)+\mu(const_{\mathbb{R}\times 0},\mathbb{R}\times 0)+\ldots\mu(const_{\mathbb{R}\times 0},\mathbb{R}\times 0)\\ =&\mu(e^{it}(\mathbb{R}\times 0),\mathbb{R}\times 0)=1.\end{aligned}$$

где последња једнакост следи из примера 2.2.

Овиме смо доказали следећу теорему.

Теорема 2.10. *Масловљев индекс је изоморфизам*

$$\mu:\pi_1(\mathcal{L}(n))\to\mathbb{Z}.$$

2.4 Масловљев индекс на $\mathbf{Sp}(n)$

Како је $\pi_1(\mathbf{Sp}(n))\cong\pi_1(\mathbf{U}(n))\cong\mathbb{Z}$ и знајући да је Масловљев индекс изоморфизам, можемо се запитати да ли је могуће дефинисати Масљовљев индекс за путеве у $\mathbf{Sp}(n)$ тако да задовољавају својства аналогна својствима уведеним од стране Робина и Саламона за $\mathcal{L}(n)$. Да бисмо показали да је одговор потврдан, прво ћемо увести појам Масловљевог индекса за пар Лагранжевих путева, или **релативан Масловљев индекс**.

Дефиниција 2.11. Нека су γ и γ' пар кривих $\gamma,\gamma':[a,b]\to\mathcal{L}(n)$. Дефинишемо **релативну форму преласка** $\Gamma(\gamma,\gamma',t)$ на $\gamma\cap\gamma'$ као

$$\Gamma(\gamma,\gamma',t)=\Gamma(\gamma,\gamma'(t),t)-\Gamma(\gamma',\gamma(t),t).$$

Прелаз t је **регуларан** ако је $\Gamma(\gamma,\gamma',t)$ недегенерисана форма.

Дефиниција 2.12. За пар Лагранжевих кривих γ,γ' које имају само регуларне прелаские у духу дефиниције 2.11, дефинишимо **релативан Масловљев индекс** као

$$\mu(\gamma,\gamma')=\frac{1}{2}\mathrm{sign}\,\Gamma(\gamma,\gamma',a)+\sum_{a<t<b}\mathrm{sign}\,\Gamma(\gamma,\gamma',t)+\frac{1}{2}\mathrm{sign}\,\Gamma(\gamma,\gamma',b).$$

Приметимо да претходна дефиниција уопштава дефиницију Масловљевог индекса за путеве у $\mathcal{L}(n)$, узимајући $\gamma'(t) \equiv V$. Даље, наредне теореме показују да се релативан Масловљев индекс понаша као обичан Масловљев индекс за Лагранжеве путеве, независно од избора кривих γ и γ'.

Теорема 2.2. Релативан Масловљев индекс је природан у смислу

$$\mu(\Phi\gamma, \Phi\gamma') = \mu(\gamma, \gamma')$$

за сваки пут симплектичких матрица $\Phi : [a, b] \to \mathbf{Sp}(n)$.

Теорема 2.3. Размотримо симплектички простор $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, (-\omega) \times \omega)$. Тада је

$$\mu(\Phi\gamma, \gamma') = \mu(\Gamma\mathrm{p}(\Phi), \gamma \times \gamma').$$

Специјално, када је $\Phi(t) \equiv 1$, имамо

$$\mu(\gamma, \gamma') = \mu(\Delta, \gamma \times \gamma'),$$

где је $\Delta \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ дијагонала.

Доказ. Доказ [2].

Фокусирајмо се сада на $\mathbf{Sp}(n)$. Симплектичке матрице имају следећу блок декомпозицију

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Пресликавање

$$\Phi \mapsto \Phi(0 \times \mathbb{R}^n)$$

индукује раслојење

$$\mathrm{St}(n) \to \mathbf{Sp}(n) \to \mathcal{L}(n).$$

$\mathrm{St}(n)$ представља фибру, те је **стационарна подгрупа** свих симетричних матрица Φ дата условом $\Phi(0 \times \mathbb{R}^n) = 0 \times \mathbb{R}^n$. Еквивалентно, $\mathrm{St}(n)$ садржи све симплектичке матрице за које је $B = 0$ у блок декомпозицији наведеној горе.
Дефинишимо сада Масловљев индекс за путеве симплектичких матрица:

Дефиниција 2.13. За пут симплектичких матрица $\Phi : [a, b] \to \mathbf{Sp}(n)$ и фиксиран Лагранжев потпростор $V = 0 \times \mathbb{R}^n$ дефинишемо **Масловљев индекс**

као

$$\mu(\Phi) = \mu(\Phi V, V).$$

Сада се опет питамо да ли је могуће дати геометријску интерпретацију Масловљевог индекса у случају симплектичких матрица. Да бисмо то урадили, прва ствар коју желимо да шватимо је шта је аналог Масловљевом циклу у $\mathbf{Sp}(n)$. Дакле, ако желимо да одредимо k-ти ниво Масловљевог цикла, посматрамо

$$\mathrm{Sp}_k(n) = \{\Phi \in \mathbf{Sp}(n) | \dim(\Phi V \cap V) = k\}.$$

Приметимо да је тада k-ти ниво заправо инверзна слика од $\Sigma_k(V)$ при фибрацији $\mathbf{Sp}(n) \to \mathcal{L}(n)$. Дакле, $\Phi \in Sp_k(n)$ ако и само ако $\mathrm{rank} B = n - k$ и $\Phi \in Sp_0(n)$ ако и само ако $\det B \neq 0$ у блок декомпозицији. $\mathrm{Sp}_k(n)$ је подмногострукост од $\mathbf{Sp}(n)$ кодимензије $\frac{k(k+1)}{2}$.

Масловљев индекс за путеве симплектичких матрица се може аналогно видети као индекс пресека пута Φ и **Масловљевог цикла** дефинисаног

$$\overline{\mathrm{Sp}_1(n)} = \mathbf{Sp}(n)/\mathrm{Sp}_0(n) = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{Sp}_k(n).$$

Овај Масловљев индекс за кодомен има $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_2$. Индекс пута је једнак целом броју ако и само ако крајње тачке пута леже у $\mathrm{Sp}_0(n)$. Када причамо о прелазима, регуларним прелазима и осталим појмовима о којима је била реч, мислимо на одговарајуће појмове посматране за криву ΦV у $\mathcal{L}(n)$ за одговарајући Масловљев цикл $\Sigma(V)$.

Даље, како последњих n колона матрице Φ формира Лагранжев потпростор ΦV, форма преласка $\Gamma(\Phi, t) : \ker B(t) \to \mathbb{R}$ је дата са

$$\Gamma(\Phi, t)(y) = -\langle D(t)y, \dot{B}(t)y \rangle,$$

где су $D(t)$ и $B(t)$ блокови из декомпозиције (2.1).

Теорема 2.4. Масловљев индекс за путеве симплектичких матрица се може карактеризовати следећим аксиомама:

(**Хомотопија**) Два пута која почињу у Φ_0 и завршавају у Φ_1 су хомотопна релативно крајње тачке ако и само ако имају исти Масловљев индекс.

(**Анулирање**) За свако k сваки пут у $Sp_k(n)$ има Масловљев индекс једнак нули.

(**Надовезивање**) Ако $\Phi : [a, b] \to \mathbf{Sp}(n)$ и $a < c < b$, тада

$$\mu(\Phi) = \mu(\Phi|_{[a,c]}) + \mu(\Phi|_{[c,b]}).$$

(**Производ**) Ако $n' + n'' = n$, идентификујемо $\mathbf{Sp}(n') \times \mathbf{Sp}(n'')$ као подгрупу $\mathbf{Sp}(n)$ на очигледан начин. Тада је

$$\mu(\Phi' \oplus \Phi'') = \mu(\Phi') + \mu(\Phi'').$$

(**Нормализација**) За **симплектички блок**

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & B(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

дефинисан на интервалу $[a, b]$, Масловљев индекс је дат

$$\mu(\Phi) = \frac{1}{2}\operatorname{sign} B(a) - \frac{1}{2}\operatorname{sign} B(b).$$

Доказ. [2].

Напомена 2.4. Посматрајмо симплектички векторски простор $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, \bar{\omega} = (-\omega) \times (\omega))$. За $\Phi : [a, b] \to \mathbf{Sp}(n)$ које задовољава $\Phi(a) = \mathrm{Id}$ и $\det(\mathrm{Id} - \Phi(b)) \neq 0$, индекс

$$\mu_{CZ}(\Phi) = \mu(\text{Гр }(\Phi), \Delta)$$

зовемо **Конли-Цендеров индекс**. Овај индекс је цео број и задовољава

$$(-1)^{\mu(\Phi) - n} = \operatorname{sign} \det(\mathrm{Id} - \Phi(b)).$$

У одељку 3.5 видећмо како Фредхолмов индекс Коши-Римановог оператора који се јавља у Флоровој теорији може да се изрази помоћу Конли-Цендеровог индекса.

3 Спектрални ток и Масловљев индекс

Циљ овог одељка је да аксиоматски заснује спектрални ток и покаже да је Фредхолмов индекс одређеног Фредхолмовог оператора дефинисаног под одређеним условима, специјалан случај спектралног тока. На почетку ћемо дати мотивацију из Морсове теорије, посматрајући коначнодимензиони случај. Потом уопштавамо запажања на бесконачнодимензиони случај. За крај ћемо видети како спектрални ток и Масловљев индекс интерагују у случају теореме о Морсовом индексу и у случају Коши-Римановог оператора који се појављује у Флоровој теорији.

3.1 Коначнодимензиони случај

У Морсовој теорији (погледати [14]) линеаризација дуж негативне градијентне трајекторије која повезује критичне тачке p и q задаје Фредхолмов оператор

$$(D_A\xi)(t) = \dot{\xi}(t) - A(t)\xi(t),$$

где је $A(t)$ пут симетричних матрица које конвергирају у норми оператора ка недегенерисаним матрицама $\mathrm{Hess}_p f$ и $\mathrm{Hess}_q f$. Фредхолмовост овог оператора се користи као кључно својство у испитивању топологије модулског простора градијентних трајекторија које повезују критичне тачке p и q. За даље детаље погледати [14].

Циљ ове секције је да докаже Фредхолмовост истог пресликавања, али уз слабије претпоставке. За почетак, посматраћемо линеаризацију дуж пута који не мора бити градијентна трајекторија, а који повезује две хиперболичке критичне тачке. Такође, матрице $A(t)$ не морају бити симетричне, али лимеси

$$A^{\pm} = \lim_{t\to\pm\infty} A(t)$$

постоје и хиперболички су.

Теорема 3.1. *Претпоставимо да је $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$ непрекидно пресликавање и да претходно наведене матрице $A^{\pm}$ постоје и да су хиперболичке. Тада је*

$$(D_A\xi)(t) = \dot{\xi}(t) - A(t)\xi(t)$$

$$D_A : W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

Фредхолмов оператор чији је индекс једнак

$$\operatorname{index} D_A = \dim E^u(A^-) - \dim E^u(A^+).$$

Доказ. Да бисмо доказали да је D_A Фредхолмов оператор, неопходно је да покажемо следеће:

1) да је ограничен линеаран оператор

2) да има коначно димензионално језгро

3) да има коначно димензионално којезгро

4) да има затворену слику

Лема Б.3 нам омогућава да покажемо 2) и 3). Ова лема се често користи када је потребно доказати Фредхолмовост неког оператора. Не бисмо ли се позвали на лему, показаћемо следећу неједнакост

$$\|\xi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})} \leq c(\|\xi\|_{L^2(I)} + \|D_A\xi\|_{L^2(\mathbb{R})}) \tag{3.1}$$

за довољно велико $I = [-T, T]$. Прво, имамо да директно важи

$$\|\xi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})} \leq c(\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|D_A\xi\|_{L^2(\mathbb{R})})$$

јер је $\dot{\xi} = D_A\xi + A\xi$ и због чињенице да је $A(t)$ линеаран (дакле непрекидан, дакле ограничен) оператор на коначнодимензионом простору.
Како оператори $A(t)$ конвергирају у топологији норме ка хиперболичким операторима, из асимптотског понашања фамилије оператора можемо да очекујемо боље оцене за D_A. Мотивисани тиме, посматраћемо специјалан случај $A(t) \equiv A^-$. Испоставиће се да је D_A у том случају бијекција. Како је A^- хиперболичка, знамо да можемо да извршимо разбијање $\mathbb{R}^n = E^- \oplus E^+$, где је E^- директна сума сопствених потпростора који одговарају сопственим вредностима оператора A^-, а имају негативну реалну компоненту. Аналогно дефинишемо E^+ који одговара сопственим вредностима са позитивним реалним делом. Без губитка општости, можемо да решимо проблем за $\mathbb{R}^n = E^-$.
За $\eta \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ јединствено решење једначине $D_A\xi = \eta$ за $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ је дато са

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A^-(t-s)}\eta(s)ds = \Phi * \eta(t),$$

где је

$$\Phi(t) = \begin{cases} e^{A^- t} & , \text{for } \ t \geq 0 \\ 0 & , \text{for } \ t < 0 \end{cases} .$$

Заиста,

$$\frac{d}{dt}\xi = \frac{d}{dt}\left(e^{A^- t}\int_{-\infty}^{t} e^{-A^- s}\eta(s)ds\right) = A^-\xi + e^{A^- t}e^{-A^- t}\eta(t) = A^-\xi + \eta(t)$$

Проверимо да је овако дефинисано дефинисано ξ заиста у $W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Прво,

$$\begin{aligned}
\|\xi(t)\|_{L^2}^2 =& \|\Phi * \eta(t)\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t-s)\eta(s)ds\Big|^2 dt \\
\leq& \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(t-s)|^{\frac{1}{2}}|\Phi(t-s)|^{\frac{1}{2}}|\eta(s)|ds\right)^2 dt \\
\leq& \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(t-s)|dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(t-s)|\cdot|\eta(s)|^2 dt\right)ds \\
=& \|\Phi\|_{L^1}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(t-s)|\cdot|\eta(s)|^2 dsdt \\
=& \|\Phi\|_{L^1}^2\cdot\|\eta\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Дакле, $\xi \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Како је $\dot{\xi} = A^-\xi + \eta$, имамо

$$\|\dot{\xi}\|_{L^2} \leq \|A^-\xi\|_{L^2} + \|\eta\|_{L^2} \leq (\|A^-\|\cdot\|\Phi\|_{L^1} + 1)\|\eta\|_{L^2}.$$

Доказали смо $\xi \in W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, па је D_{A^-} на. Штавише, добили смо неједнакост

$$\|\xi\|_{W^{1,2}} \leq c\cdot\|D_{A^-}\xi\|_{L^2}. \tag{3.2}$$

Како је A^- хиперболички оператор, језгро D_{A^-} мора бити тривијално јер свака функција из језгра мора бити експоненцијална, па не би била у L^2, осим ако није тривијална.

За крај, неједнакост доказујемо лепљењем интервала на којима имамо потребне оцене. Како су $A^\pm$ лимит матрице, имамо да (без губљења општости) за произвољно мало ε постоји $T > 0$ тако да $\|A(t) - A^-\| \leq \varepsilon$ за $t < -T + 1$. За $\xi = 0$ кад $t \geq -T + 1$ имамо следећу процену

$$\begin{aligned}
\|\xi\|_{W^{1,2}} \leq& c\cdot\|D_{A^-}\xi\|_{L^2} = c\cdot\|(\partial_t - A^-)\xi\|_{L^2} \\
\leq& c\cdot(\|(\partial_t - A(t))\xi\|_{L^2} + \|(A(t) - A^-)\xi\|_{L^2}) \\
\leq& c\cdot(\|D_A\xi\|_{L^2} + \varepsilon\|\xi\|_{L^2})
\end{aligned}$$

Аналогно, имамо исту процену за A^+ и $\xi = 0$ кад $t \leq T-1$.

У општем случају, користимо кат-оф функцију $K_T \in C^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ такву да $K_T(t)=1$ кад $|t| \leq T-1$ и $K_T(t)=0$ кад $|t|>T$. Директно следи да је

$$\|(1-K_T)\xi\|_{W^{1,2}} \leq const \cdot \|D_A((1-K_T)\xi)\|_{L^2}$$

и

$$\begin{aligned}\|K_T\xi\|_{W^{1,2}} \equiv & \|K_T\xi\|_{L^2} + \|\partial_t\left(K_T\xi\right)\|_{L^2} \\ \leq & \|K_T\xi\|_{L^2} + \|D_A\left(K_T\xi\right)\|_{L^2} + (\sup_{\mathbb{R}}\|A(t)\|)\cdot\|K_T\xi\|_{L^2} \\ \leq & const \cdot (\|K_T\xi\|_{L^2} + \|D_A\left(K_T\xi\right)\|_{L^2}).\end{aligned}$$

Коначно,

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{W^{1,2}} \leq & \|(1-K_T)\xi\|_{W^{1,2}} + \|K_T\xi\|_{W^{1,2}} \\ \leq & const \cdot (\|K_T\xi\|_{L^2} + \|D_A\left(K_T\xi\right)\|_{L^2} + \|D_A\left((1-K_T)\xi\right)\|_{L^2}) \\ \leq & const \cdot (\|\xi\|_{L^2[-T,T]} + \|D_A\xi\|_{L^2})\end{aligned}$$

Рестрикција $W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \to L^2([-T,T],\mathbb{R}^n)$ је компактна због Собољевљеве теореме о утапању (рестрикцију компонујемо са компактним утапањем простора Собољева у L^2). Како је D_A је ограничен оператор и како смо доказали неједнакост (3.1), из леме Б.3 имамо да D_A има коначно димензионално језгро и затворену слику.

Остало је да докажемо да је којезгро коначнодимензионо. Из додатка А знамо да у случају Хилбертових простора (а $W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ и $L^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ то сигурно јесу) имамо $(\mathrm{im}D_A)^\perp \cong \ker D_A{}^*$, где је $D_A{}^*$ адјунговани оператор оператора A. Штавише, када је оператор затворен (а доказали смо да D_A јесте), постоји изоморфизам $(\mathrm{im}D_A)^\perp \cong \mathrm{coker}D_A$. Ово је одличан начин посматрања којезгра, али, нажалост, неопходно је знати $D_A{}^*$ експлицитно. Ово је у општем случају поприлично тешко (чак и у Морсовој теорији где су матрице $A(t)$ симетричне (а самим тим и само-адјунговане), што у овој теореми није ни случај!). Међутим, можемо да дефинишемо формални адјунговани оператор $D_A{}^\bullet$ (види додатак А за дефиницију) који решава проблем (погледати две леме које почињу одмах по завршетку доказа теореме).

Приметимо да $\mathrm{coker}D_A \cong \ker D_A{}^\bullet$. Ако би $D_A{}^\bullet$ имао коначнодимензионо језгро, завршили бисмо доказивање Фредхолмовости оператора D_A. Ово заиста и јесте случај. Једноставно приметимо да из леме 3.2 директно следи да ${D_A}^\bullet$ има коначнодимензионо језгро ослањајући се на део доказа који смо до сада урадили за D_A. Приметимо да ${D_A}^\bullet$ може да се посматра и као $-D_{-A^T}$, и да фамилија оператора $A^T(t)$ задовољава претпоставке теореме 3.1.

Што се рачунања индекса тиче, погледати остатак доказа у [3]. Међутим, постоји и лакши начин рачунања индекса не ослањајући се на асимптотску анализу стабилних и нестабилних потпростора. Сетимо се да се Фредхолмовост оператора не мења уколико фамилију оператора $A(t)$ хомотопијом близу бесконачности поистоветимо са константним матрицама $A^\pm$. Ово је могуће јер имамо конвергенцију у операторској норми. Та хомотопија може да се окарактерише као пертурбација фамилије у бесконачности. Ово размишљање ће бити формализовано у секцији о бесконачнодимензионом случају.

□

Лема 3.2. ${D_A}^\bullet$ *је дефинисан на* $W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *и*

$${D_A}^\bullet = -\partial_t - A^T.$$

Доказ. За све $\xi, \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ имамо да је

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, {D_A}^\bullet \eta \rangle dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle D_A \xi, \eta \rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \dot{\xi} - A\xi, \eta \rangle dt \qquad (\xi, \eta \text{ компактан supp}) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, \dot{\eta} \rangle dt - \int_{-\infty}^{\infty} \langle A\xi, \eta \rangle dt \qquad \big((xAGy)^T = y^T G A^T x^T\big) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, -\partial_t \eta \rangle dt - \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, A^T \eta \rangle dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, (-\partial_t - A^T)\eta \rangle dt
\end{aligned}$$

Како су функције $C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ густе и у $W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, то формални адјунговани оператор можемо да продужимо на $W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

□

Лема 3.3. $\mathrm{coker} D_A \cong \ker {D_A}^\bullet$

Доказ. Знамо да је $\mathrm{coker} D_A \cong (\mathrm{im} D_A)^\perp \cong \ker {D_A}^* \subset W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Тада, ако је $\eta \in (\mathrm{im} D_A)^\perp$, имамо

$$0 = \langle D_A \xi, \eta \rangle_{L^2} = \langle \xi, {D_A}^\bullet \eta \rangle_{L^2}$$

за све $\xi \in W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (у претходној леми смо доказали да је формални адјунговани оператор дефинисан на $W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$). Дакле, $\eta \in \ker D_A{}^{\bullet}$.

Обрнутно, ако је $\eta \in \ker D_A{}^{\bullet}$, тада из исте једнакости следи да $\eta \in (\mathrm{im} D_A)^{\perp}$.
$\square$

Напомена 3.1. Приметимо да се претходна теорема може интерпретирати независно од геометријског контекста Морсове теорије. Ово ће нас мотивисати да уведемо спектрални ток аксиоматски.

Напомена 3.2. Претпоставимо да су $A^{\pm}$ симетричне, као у случају Морсове теорије. Тада су све сопствене вредности реалне (јер су симетричне матрице само-адјунговане). Тада имамо

$$\begin{aligned}\mathrm{sign}(A^{\pm}) :=&(\sharp \text{ позитивне соп. вред. од } S) - (\sharp \text{ негативне соп. вред. од } S)\\ =&2(\sharp \text{ позитивне соп. вред. од оф } S) - n\end{aligned}$$

Сада нам претходна теорема даје

$$\begin{aligned}\mathrm{index}\, D_A =&\dim E^u(A^-) - \dim E^u(A^+)\\ =&(\sharp \text{ позитивне соп. вред. од } A^-) - (\sharp \text{ позитивне соп. вред. од } A^+)\\ =&\frac{1}{2}\mathrm{sign}\, A^- - \frac{1}{2}\mathrm{sign}\, A^+.\end{aligned}$$

3.2 Бесконачнодимензиони случај

У овом одељку доказано је уопштење теореме из претходног одељка. Даље, доказано је да одређене пертурбације Фредхолмовог оператора не утичу на његово својство Фредхолмовости, нити на његов индекс.

Циљ је уопштити претходну теорему са аналогним оператором, али за бесконачнодимензиони случај. Нека су W и H реални сепарабилни Хилбертови простори такви да
$$W \subset H = H^* \subset W^*.$$

Претпостављамо да је инклузија компактна и да има густу слику. Надаље идентификујемо H са својим дуалним простором. Нећемо користити скаларни производ на W, већ само норму. Стога, разликоваћемо W од свог дуалног простора W^*. Такође, скаларни производ на H ћемо означавати са $\langle \xi, \eta \rangle_H$ када су и ξ и η у H. $\langle \xi, \eta \rangle_{W,W^*}$ ће означавати спаривање $\xi \in W$ и $\eta \in W^*$.

Намера нам је да докажемо теорему која ће моћи да се примени на просторе $W = W^{1,2}$ и $L = L^2$.
Фиксирајмо фамилију ограничених оператора

$$A(t) : W \to H$$

индексираних са $t \in \mathbb{R}$. За дату глатку криву $\xi : \mathbb{R} \to W$, дефинишемо $D_A : \mathbb{R} \to H$ као

$$(D_A \xi)(t) = \dot{\xi}(t) - A(t)\xi(t). \tag{3.3}$$

Како нам је циљ да уопштимо теорему за коначодимензиони случај, намећемо следеће услове:

(A-1) Пресликавање $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H)$ је BC^1. То значи да је непрекидно диференцијабилно у слабој операторској топологији и да постоје константа $c_0 > 0$ таква да

$$\|A(t)\xi\|_H + \|\dot{A}(t)\xi\|_H \leq c_0 \|\xi\|_W$$

за свако $t \in \mathbb{R}$ и свако $\xi \in W$.

(A-2) Оператори $A(t)$ су самоадјунговани. То значи да је за свако t оператор $A(t)$, посматран као неограничен оператор на H са доменом $\operatorname{dom} A(t) = W$, самоадјунгован и да постоји константа c_1 која задовољава неједнакост

$$\|\xi\|_W^2 \leq c_1 \left(\|A(t)\xi\|_H^2 + \|\xi\|_H^2 \right)$$

за свако $t \in \mathbb{R}$ и свако $\xi \in W$.

(A-3) Постоје инвертибилни оператори $A^\pm \in \mathcal{L}(W, H)$ такви да

$$\lim_{t \to \pm\infty} \|A(t) - A^\pm\|_{\mathcal{L}(W,H)} = 0.$$

Напомена 3.3. Из неједнакости услова **(A-1)** имамо да $\xi \in L^2(\mathbb{R}, W)$ директно имплицира да $\dot{A}\xi \in L^2(\mathbb{R}, H)$.

Напомена 3.4. Самоадјунговани оператор на H са густим доменом W је затворен ако и само ако је W Хилбертов са нормом графика. Те следи да неједнакост услова **(A-2)** заиста важи.

Инклузија је компактна ако и само ако је резолвентски оператор $(\lambda \operatorname{Id} - A)^{-1}$ компактан за сваки елемент из комплемента спектра оператора A. У том случају, спектар оператора A је дискретан и састоји се само од реалних сопствених вредности коначне вишеструкости (ово ће се показати битним при аксиоматизацији и експлицитној конструкцији спектралног тока).

За детаље о неограниченим операторима на Хилбертовим просторима видети A.1.

Напомена 3.5. Када посматрамо затворен симетричан оператор A као ограничен оператор, тада је његов адјунговани оператор дефинисан и ограничен. Означићемо адјунговани оператор такође са A (јер је A симетричан). Тада је

$$A \in \mathcal{L}(W, H) \cap \mathcal{L}(H, W^*). \tag{3.4}$$

Следи, ако је A самоадјунгован (што значи да се домени A и његовог адјунгованог поклапају), тада $A\xi \in H$ повлачи $\xi \in W$ (независно од тога да ли схватамо A означава A или његов адјунговани оператор).

Дефинишемо Хилбертове просторе $\mathcal{H}$ и $\mathcal{W}$ као

$$\begin{aligned}\mathcal{H} =& L^2(\mathbb{R}, H)\\ \mathcal{W} =& L^2(\mathbb{R}, W) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}, H)\end{aligned}$$

са нормама

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \|\xi\|_H^2 dt\\ \|\xi\|_{\mathcal{W}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\|\xi\|_W^2 + \|\dot{\xi}\|_H^2\right) dt\end{aligned}$$

Напомена 3.6. Приметимо да сада говоримо о интеграбилним функцијама са општим Банаховим простором као кодоменом.

Инклузија $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{H}$ је ограничен линеарни оператор ($\|\xi\|_{\mathcal{H}} \leq \|\xi\|_{\mathcal{W}}$ важи јер је $W \hookrightarrow H$ компактна инклузија, те је $\|\xi\|_H \leq \|\xi\|_W$) са густом сликом (јер је $C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$ густ у оба простора). Наш циљ је да докажемо да је овако конструисан оператор D_A Фредхолмов под наведеним претпоставкама.

Теорема 3.1. Претпоставимо да је за свако t, $A(t)$ неограничнен, самоадјунгован оператор на Хилбертовом простору H, са независним по параметру доменом $W = \mathrm{dom}(A(t))$. Претпоставимо више, да је W Хилбертов простор сам по себи, да је инклузија $W \hookrightarrow H$ компактна и да је норма простора W еквивалентна норми графика оператора $A(t)$ за свако t. Претпоставимо још да је пресликавање $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H) : t \mapsto A(t)$ непрекидно диференцијабилно у односу на слабу операторску топологију. Претпоставимо коначно да $A(t)$ конвергира у норми оператора ка инвертибилним операторима $A^{\pm} \in \mathcal{L}(W, H)$ кад t тежи $\pm\infty$. Тада је оператор

$$\begin{aligned} D_A : W^{1,2}(\mathbb{R}, H) \cap L^2(\mathbb{R}, W) &\to L^2(\mathbb{R}, H) \\ (D_A \xi)(t) &:= \dot{\xi}(t) - A(t)\xi(t) \end{aligned}$$

је Фредхолмов и његов индекс је дат спектралним током фамилије оператора $A(t)$.

Приметимо да су услови **(A-1)**, **(A-2)** и **(A-3)** услови поменути у теореми. Да бисмо доказали Фредхолмовост оператора D_A, неопходно је доказати следеће

1) да је ограничен линеаран оператор

2) да има коначнодимензионо језгро

3) да има коначнодимензионо којезгро

4) да има затворену слику

Лема 3.4. *D_A је ограничен линеаран оператор.*

Доказ. Услов **(A-1)** нам даје ограниченост оператора $\xi \mapsto D_A \xi$. Заиста, за свако $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$ је

$$
\begin{aligned}
\|D_A\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = & \int_{-\infty}^{\infty} \|(D_A\xi)(t)\|_H^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \|\dot{\xi}(t) - A(t)\xi(t)\|_H^2 dt \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \langle \dot{\xi}(t) - A(t)\xi(t), \dot{\xi}(t) - A(t)\xi(t)\rangle_H dt \\
= & \|\dot{\xi}\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \langle A\xi, A\xi\rangle_H dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} \langle \dot{\xi}, A\xi\rangle_H dt \\
\stackrel{(*)}{=} & \|\dot{\xi}\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \|A\xi\|_H^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, \dot{A}\xi\rangle_H dt \\
\leq & \int_{-\infty}^{\infty} \|\dot{\xi}\|_H^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} c_0^2 \|\xi\|_W^2 dt + \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \|\xi\|_H^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \|\dot{A}\xi\|_H^2 dt} \\
\leq & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\|\dot{\xi}\|_H^2 + c_0^2\|\xi\|_W^2\right) dt + \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \|\xi\|_H^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} c_0^2\|\xi\|_H^2 dt} \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\|\dot{\xi}\|_H^2 + c_0^2\|\xi\|_W^2 + c_0\|\xi\|_H^2\right) dt \\
\leq & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\|\dot{\xi}\|_H^2 + c_0^2\|\xi\|_W^2 + c_0\|\xi\|_W^2\right) dt \leq const \cdot \|\xi\|_{\mathcal{W}}^2
\end{aligned}
$$

Директан рачун доказује једнакост $(*)$:

$$
\begin{aligned}
2\int_{-\infty}^{\infty} \langle \dot{\xi}, A\xi\rangle_H dt = & 2\left(\langle \xi, A\xi\rangle_H \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, \dot{A}\xi + A\dot{\xi}\rangle_H\right) \qquad (\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, W)) \\
= & -2\left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, \dot{A}\xi\rangle_H dt + \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, A\dot{\xi}\rangle_H dt\right) \qquad (A \text{ самоадјунгован}) \\
= & -2\left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, \dot{A}\xi\rangle_H dt + \int_{-\infty}^{\infty} \langle A\xi, \dot{\xi}\rangle_H dt\right)
\end{aligned}
$$

следи

$$
4\int_{-\infty}^{\infty} \langle \dot{\xi}, A\xi\rangle_H dt = -2\int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, \dot{A}\xi\rangle_H dt.
$$

Како је $C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$ густ скуп, проширимо D_A на $\mathcal{W}$ и притом се норма D_A не промени. □

Лема Б.3 ће нам још једном дати 2) и 4), али је прво неопходно дефинисати операторе који ће учествовати у леми. Зато, за свако $T > 0$ дефинишимо Хилбертове просторе $\mathcal{W}(T)$ и $\mathcal{H}(T)$ као

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = & L^2([-T, T], H) \\
\mathcal{W} = & L^2([-T, T], W) \cap W^{1,2}([-T, T], H)
\end{aligned}
$$

са горе наведеним нормама. Пошто желимо да искористимо лему, неохподно је да имамо компактан оператор. Уопштавајући коначнодимензиони случај (где смо користили теорему Собољева о утапању за коначнодимензионе векторске функције), доказујемо следеће:

Лема 3.5. *За свако* $T > 0$ *инклузија* $\mathcal{W}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}(T)$ *је компактан оператор.*

Доказ. Доказ ће се ослањати на две корисне чињенице везане за компактне операторе. Прво, на чињеницу да је скуп компактних оператора између два Банахова простора затворен у односу на топологију индуковану операторском нормом. Друго, да композиција компактним оператором преводи јаку конвергенцију оператора у конвергенцију у норми оператора.

Изаберимо потпун систем $H = \overline{\mathrm{Lin}_{k\geq 1} e_k}$ и означимо са $\pi_n : H \to \mathbb{R}^n$ ортогоналну пројекцију на потпростор одређен са првих n елемената потпуног система. Како је

$$\begin{aligned}
\left\|(\pi_n^*\pi_n - 1)x\right\|_H &= \left\|(\pi_n^*\pi_n - 1)\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle_H e_k\right\|_H \\
&= \left\|\pi_n^*\left(\langle x, e_1\rangle_H, \langle x, e_2\rangle_H, \ldots, \langle x, e_n\rangle_H\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle_H e_k\right\|_H \\
&= \left\|\left(\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle_H e_k\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle_H e_k\right\|_H \\
&= \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle_H e_k\right\|_H \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

имамо да $\pi_n^*\pi_n$ јако конвергира ка идентитету на H, а како је инклузија $W \to H$ компактна (видети додатак А), низ оператора

$$\pi_n^*\pi_n|_W : W \to H$$

конвергира ка инклузији у норми оператора на $\mathcal{L}(W, H)$. Посматрајмо следећу декомпозицију оператора $\mathcal{W}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}(T)$:

$$\mathcal{W}(T) \to W^{1,2}([-T, T], \mathbb{R}^n) \to C([-T, T], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}(T).$$

У овом низу, први оператор је индукован са π_n, а други је компактан на основу Арцела-Асколи теореме и чињенице да се теорема Собољева о утапању преноси са скаларно-вредносних функција једне промењливе на векторски-вредносне функције. Трећи, и последњи, оператор је индукован са π_n^*. Сада је

$$\|\xi - \pi_n^* \pi_n \xi\|_{\mathcal{H}(T)} \leq \|1 - \pi_n^* \pi_n\|_{\mathcal{L}(W,H)} \|\xi\|_{\mathcal{W}(T)}.$$

Следи, инклузија $\mathcal{W}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}(T)$ је компактна као лимес компактних оператора у односу на топологију индуковану нормом оператора.

□

Докажимо сада следећу неједнакост која ће нам, заједно са претходном лемом, дати 2) и 4) позивајући се на лему Б.3.

Лема 3.6. *Постоје константе $c > 0$ и $T > 0$ такве да*

$$\|\xi\|_{\mathcal{W}} \leq c(\|\xi\|_{\mathcal{H}(T))} + \|D_A \xi\|_{\mathcal{H}}) \tag{3.5}$$

за свако $\xi \in \mathcal{W}$.

Доказ. Овај доказ је аналоган доказу неједнакости у коначнодимензионом случају. Докажимо прво да неједнакост важи за $T = \infty$. За свако $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$

$$\begin{aligned}
\|D_A \xi\|_{\mathcal{H}}^2 =& \|\dot{\xi} - A\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\dot{\xi}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|A\xi\|_{\mathcal{H}}^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \langle \dot{\xi}, A\xi \rangle_H dt \\
\overset{(*)}{=}& \|\dot{\xi}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|A\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, \dot{A}\xi \rangle_H dt \\
\geq& \|\dot{\xi}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|A\xi\|_{\mathcal{H}}^2 - c_0 \|\xi\|_{\mathcal{H}} \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)} \qquad \textbf{(A-1)} + \text{(Коши-Шварц)} \\
\geq& \|\dot{\xi}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{c_1} \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)}^2 - \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 - c_0 \|\xi\|_{\mathcal{H}} \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)} \qquad \textbf{(A-2)} \\
\geq& \|\dot{\xi}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2c_1} \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)}^2 - \left(1 + \frac{c_0 c_1}{2}\right) \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 \qquad \textbf{(A-2)} \\
\geq& \frac{1}{2c_1} \|\xi\|_{\mathcal{W}}^2 - c\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Тада,

$$\|\xi\|_{\mathcal{W}}^2 \leq 2c_1(c\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|D_A\xi\|_{\mathcal{H}}^2) \leq C(\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|D_A\xi\|_{\mathcal{H}}^2) \leq C(\|\xi\|_{\mathcal{H}} + \|D_A\xi\|_{\mathcal{H}})^2.$$

Како је $C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$ густ у $\mathcal{W}$, тада неједнакост важи за свако $\xi \in \mathcal{W}$.

Фамилија оператора конвергира у топологији операторске норме ка операторима $A^\pm$. Ово асимптотско понашање нам даје добре процене за D_A довољно далеко од $t = 0$. Тада, као у коначнодимензионом случају, посматрамо специјалан случај фамилије оператора $A(t) \equiv A_0$, где је A_0 инвертибилан. Тада D_{A_0} задовољава

$$\|\xi\|_{\mathcal{W}} \leq c\|D_{A_0}\xi\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.6}$$

За остатак доказа, који је аналоган доказу за коначнодимензиони случај, погледати [3].

□

Напомена 3.7. Приметимо да још увек нисмо доказали да је индекс D_A једнак спектралном току фамилије оператора $A(t)$. То ће бити доказано када уведемо спектрални ток аксиоматски.

Остало је још само да докажемо да D_A има коначнодимензионо којезгро. Идеја ће бити иста као и у коначнодимензионом случају, тј. посматраћемо формални адјунговани оператор. Међутим, уколико обратимо пажњу на формални адјунговани оператор у коначнодимензионом случају, можемо да приметимо да је било релативно лако одредити га захваљујући матричној репрезентацији скаларног производа у коначнодимензионом векторском простору. У бесконачном случају то неће бити могуће.

Доказаћемо јаче тврђење које ћемо звати **елиптичком регуларношћу**. Али, пре свега, претпоставимо да је A самоадјунгован и да су $\xi, \eta \in H$ такви да

$$\langle A\phi, \xi\rangle_H = \langle \phi, \eta\rangle_H \tag{3.7}$$

важи за свако $\phi \in W$. Како је A самоадјунгован, важи $\langle \phi, A\xi\rangle = \langle A\phi, \xi\rangle$. Дакле, $\langle \phi, A\xi\rangle = \langle \phi, \eta\rangle$ за свако $\phi \in W$. Следи, $A\xi = \eta \in H$, па је $\xi \in W$. Другим речима, свако **слабо решење** $\xi \in H$ проблема $A\xi = \eta$ за $\eta \in H$ је **јако решење**. Приметимо да је напомена овог типа врло честа у теорији парцијалних диференцијалних једначина. Приметимо такође да смо могли да дођемо до овог закључка јер је A самоадјунгован. Приметимо додатно да се први вектор леве стране једначине (3.7) може интерпретирати као адјунгован оператор. На овај начин смо дефинисали феномен слабог решења ка јаком решењу, ослањајући се на адјунгованост. Међутим, D_A није самоадјунгован, те је неопходно ослонити се на формалан адјунговани оператор оператора D_A, са намером да дефинишемо појам слабог решења. Вођени мотивацијом из коначно димензионалног случаја, посматрамо следећу формулу

$$\langle \dot{\phi} + A\phi, \xi\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \phi, D_A\xi\rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

за свако $\phi, \xi \in \mathcal{W}$, која би имплицирала да је $-D_{-A}$ формални адјунгован оператор оператора D_A. Ово је конзистентно са коначнодимензионим случајем, имајући у виду да је A самоадјунгован (те би у коначнодимензионом случају оператор A био једнак A^T). Циљ је доказати да ова формула важи за свако $\xi \in \mathcal{W}$.

Теорема 3.7. (Елиптичка регуларност) *Претпоставимо да $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ задовољавају једначину*

$$\langle \dot{\phi} + A\phi, \xi \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \phi, \eta \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \tag{3.8}$$

за свако $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$. Тада $\xi \in \mathcal{W}$ и $D_A\xi = \eta$.

Доказ. Прво ћемо доказати теорему у специјалном случају. Претпоставимо да ξ и η имају компактне носаче на интервалу I тако да је $A(t) : W \to H$ бијекција за коју важи неједнакост

$$\|A(t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W,H)} \leq c$$

за све $t \in I$. Докажимо ово у четири корака.

1. корак: $\xi \in W^{1,2}(\mathbb{R}, W^*)$ *анд*

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + \eta(t) \tag{3.9}$$

где $A(t) \in \mathcal{L}(H, W^*)$ (погледати (3.4)).

Приметимо да (3.9) имплицира $D_A\xi = \eta$. Ово је очигледно оно што желимо да покажемо, али нам недостаје $\xi \in \mathcal{W}$ јер је $W \subset W^*$.

Доказ 1. корака: За $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$ (желели бисмо да се ослонимо на (3.8); обратити пажњу на кодомен ϕ и за коју вредносну функцију ξ желимо да докажемо први корак)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \langle \dot{\phi}(t), \xi(t) \rangle_H dt &\overset{(3.8)}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} \langle A(t)\phi(t), \xi(t) \rangle_H dt - \int_{-\infty}^{\infty} \langle \phi(t), \eta(t) \rangle_{W,W^*} dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \langle \phi(t), A(t)\xi(t) \rangle_{W,W^*} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \langle \phi(t), \eta(t) \rangle_{W,W^*} dt \qquad (A \text{ самоадјунгова} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \langle \phi(t), A(t)\xi(t) + \eta(t) \rangle_{W,W^*} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \dot{\phi}(t), \int_{-\infty}^{t} (A(s)\xi(s) + \eta(s))\, ds \right\rangle_{W,W^*} dt \qquad (\text{ парц. инт.})
\end{aligned}$$

Како су изводи функције $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$ густи у $L^2(\mathbb{R}, W)$, доказали смо први корак.

Означимо са $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатку кат-оф функцију такву да је $\rho(t) = 0$ за $|t| \geq 1$, $\rho(t) \geq 0$ и $\int \rho = 1$. За мало $\delta > 0$ дефинишемо $\rho_\delta(t) := \delta\rho(\delta^{-1}t)$.

2. корак: За довољно мало $\delta > 0$ важи $\xi_\delta = \rho_\delta * \xi \in \mathcal{W}$.

Циљ је да покажемо да је ξ конструисано у првом кораку заправо елемент простора $\mathcal{W}$. То ћемо постићи апроксимацијом конволуцијама са кат-оф функцијама.

Доказ 2. корака: Множењем (3.9) са A^{-1} и и применом конволуције са ρ_δ добијамо

$$\begin{aligned}
\xi_\delta =&\rho_\delta * (A^{-1}\dot{\xi} - A^{-1}\eta)\\
=&\rho_\delta * (A^{-1}\dot{\xi}) - \rho_\delta(A^{-1}\eta) \qquad (\rho * (u\dot{v}) = \dot{\rho} * (uv) - \rho * (\dot{u}v))\\
=&\dot{\rho}_\delta * (A^{-1}\xi) + \rho_\delta * (A^{-1}\dot{A}A^{-1}\xi) - \rho_\delta(A^{-1}\eta)\\
=&\dot{\rho}_\delta * (A^{-1}\xi) + \rho_\delta * (A^{-1}\zeta)
\end{aligned}$$

где $\zeta = \dot{A}A^{-1}\xi - \eta \in \mathcal{H}$.

3. корак: Постоји константа $c > 0$ таква да важи $\|D_A\xi_\delta\|_{\mathcal{H}} \leq c$ за довољно мало δ.

Доказ 3. корака: Директан рачун даје

$$\begin{aligned}
D_A\xi_\delta =&\dot{\xi}_\delta - A^{-1}\xi_\delta \qquad\qquad (\dot{\xi}_\delta = \dot{\rho}_\delta * \xi)\\
=&\dot{\rho}_\delta * \xi - A(\dot{\rho}_\delta * (A^{-1}\xi) + \rho_\delta * (A^{-1}\zeta))\\
=&A(A^{-1}\dot{\rho}_\delta * \xi - \dot{\rho}_\delta * (A^{-1}\xi)) + \rho_\delta * (A^{-1}\zeta).
\end{aligned}$$

Како је $\zeta \in \mathcal{H}$, то је други сабирак са десне стране ограничен у $\mathcal{H}$, униформно по δ. Одредимо процену за први сабирак:

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}\dot{\rho}_\delta * \xi(t) - \dot{\rho}_\delta * (A^{-1}\xi)(t)\|_W =&\left\| \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{1}{\delta}\dot{\rho}\left(\frac{t-s}{\delta}\right) \frac{A^{-1}(t) - A^{-1}(s)}{\delta}\xi(s)ds \right\|_W\\
\leq& c\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\delta}\dot{\rho}\left(\frac{t-s}{\delta}\right)\right| \|\xi(s)\|_H, ds
\end{aligned}$$

где је константа c униформно ограничена за A^{-1} на I (ово је могуће због претпоставке **(A-1)** и компактности I). Сада из Јангове неједнакости следи

$$\|A^{-1}\dot{\rho}_\delta * \xi(t) - \dot{\rho}_\delta * (A^{-1}\xi)(t)\|_{L^2(\mathbb{R},W)} \leq c\|\xi(s)\|_{\mathcal{H}}\|\dot{\rho}\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Овим је доказ трећег корака завршен.

4. корак: $\xi \in \mathcal{W}$ анд $D_A\xi = \eta$.

Доказ 4. корака: Из другог корака и леме 3.6 имамо да је $\|\xi_\delta\|_{\mathcal{W}} \leq c$ за неку константу независну од δ. Како је сваки слабо конвергентан ред ограничен, тада можемо да изаберемо низ $\delta_n \to 0$ такав да ξ_{δ_n} конвергира слабо ка неком ξ_0 из $\mathcal{W}$, али тај низ конвергира ка истој вредности и у $\mathcal{H}$ ($H \subset W^*$). Међутим, $\xi_{\delta_n} = \rho_{\delta_n} * \xi$ конвергира јако ка ξ у $\mathcal{H}$, па је $\xi = \xi_0 \in \mathcal{W}$.

Дакле, доказали смо теорему у специјалном случају. Како је $C_0(\mathbb{R}, W)$ густ у $\mathcal{W}$ и $\mathcal{L}$, то и у општем случају функције ξ и η имају коначан носач ($W_0^{1,2} = W^{1,2}$). Приметимо да $A(t)$ у општем случају не мора да буде бијективна. Али, из напомене 3.4 знамо да $A(t)$ има дискретан спектар, за свако t. Како је инвертибилност отворено својство у односу на топологију индуковану нормом оператора, можемо да изаберемо отворене интервале I_j и одговарајуће константе λ_j такве да је $\lambda_j \operatorname{Id} - A(t) : W \to H$ бијективно пресликавање за које важи неједнакост

$$\|(\lambda_j \operatorname{Id} - A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(W,H} \leq c_j.$$

Ослањајући се на линеарност оператора D_A, проблем бијективности оператора A можемо да превазиђемо партицијом јединице. Циљ је да сумирамо локална решења (имајући и даље на уму линеарност оператора D_A). Сума мора бити коначна у општем случају. Међутим, како ξ и η имају компактне носаче, то из компактности носача следи постојање коначног покривања $\{I_j\}$.

Одаберимо сада партицију јединице β_j подређену конструисаном коначном покривању $\{I_j\}$. Тада је $\xi_j = \beta_j\xi$ слабо решење

$$\dot{\xi}_j - A_j\xi_j = \eta_j$$

где

$$A_j = A - \lambda_j \operatorname{Id}, \qquad \eta_j = \beta_j\eta + (\dot{\beta}_j + \lambda_j\beta_j)\xi.$$

Сада из специјалног случаја следи да $\xi_j \in \mathcal{W}$, па је $\xi = \sum_j \xi_j \in \mathcal{W}$.

□

Напомена 3.8. Приметимо да нисмо користили **(A-3)** у претходном доказу. Дакле, елиптичка регуларност важи и у случају када матрице $A^\pm$ не постоје.

Показали смо експлицитно шта је формални адјунгован оператор оператора D_A. Из елиптичке регуларности следи следећих пар резултата.

Теорема 3.2. Оператор D_A је Фредхолмов.

Доказ. Из теореме 3.7 имамо да је формални адјунговани оператор оператора D_A заправо $D_A{}^{\bullet} = -D_{-A}$. Како фамилија оператора $-A$ такође задовољава претпоставке теореме 3.1, следи да је језгро формалног адјунгованог оператора такође коначнодимензионо. Дакле, којезгро D_A је коначнодимензионо. Закључујемо да је тада D_A Фредхолмов. □

Теорема 3.8. *Претпоставимо да је* $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H)$ *класе* C^{k-1} *тако да је* $\frac{d^k A}{dt^k}$ *слабо непрекидан и да су* $\frac{d^j A}{dt^j}$ *равномерно ограничени за* $0 \leq j \leq k$. *Ако је* $\xi \in \mathcal{W}$ *и*

$$D_A \xi = \eta \in W^{k,2}(\mathbb{R}, H)$$

тада је

$$\xi \in W^{k,2}(\mathbb{R}, W) \cap W^{k+1,2}(\mathbb{R}, H).$$

Доказ. Индукцијом. Доказ погледати у [3].

□

Теорема 3.9. *Ако је* $A(t)$ *бијективан оператор за свако* t, *тада Фредхолмов индекс* D_A *једнак 0.*

Сада ћемо се фокусирати на пертурбациони аспект. „Пертурбације нижег реда” оператора A стварају Фредхолмове операторе, односно посматраћемо пертурбацију $\xi \mapsto C\xi$ индуковану операторима $C(t) : W \to H$. Претпостављамо да је $C : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H)$ непрекидно (у односу на топологију индуковану нормом оператора $\mathcal{L}(W, H)$) тако да је $C(t)$ компактан оператор за свако t и да је

$$\lim_{t \to \pm\infty} \|C(t)\|_{\mathcal{L}(W,H)} = 0.$$

Позната чињеница је да компактне пертурбације не утичу на својство Фредхолмовости, нити сам Фредхолмов индекс (видети Б.3). Дакле, циљ је показати следеће:

Лема 3.10. *Оператор*

$$\mathcal{W} \to \mathcal{H} : \xi \mapsto C\xi$$

је компактан.

Доказ. Ако докажемо да је C компактан кад год има компактан носач, то ћемо апроксимацијом кат-оф функцијама у општем случају C представити као лимес оператора са компактним носачем (за које важи тврђење) у односу на операторску норму.

Дакле, нека је C претходно дефинисан оператор са компактним носачем I. Одаберимо ортонормиран потпун систем $H = \overline{\mathrm{Lin}_{k\geq 1} e_k}$ и означимо са $\pi_n : H \to \mathbb{R}^n$ ортогоналну пројекцију на првих n координата. Из леме 3.5 знамо да низ $\pi_n^* \pi_n$ конвергира јако ка идентитету на H, па компонујући са компактним оператором $C(t)$, добијамо да

$$C_n(t) = \pi_n^* \pi_n C(t)$$

конвергира ка $C(t) \in \mathcal{L}(W, H)$ у операторској норми. Штавише, конвергенција је униформна по t јер је $C : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H)$ непрекидна у операторској норми.

Оператор множења индукован оператором $C_n = \pi_n^* \pi_n C$ се може декомпоновати на следећи начин

$$\mathcal{W} \to W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n) \to L^2(I, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{H},$$

где је први оператор индукован оператором $\pi_n C$, други је компактан по Собољеву, а последњи је индукован са π_n^*. Следи, C_n је компактан. Како $C_n : \mathcal{W} \to \mathcal{H}$ конвергира ка $C : \mathcal{W} \to \mathcal{H}$ у норми оператора, следи да је C компактан. Коначно у општем случају, као што смо навели на почетку доказа, апроксимирајмо у односу на норму оператора оператор C множећи га кат-оф функцијама. □

Последица 3.1. Оператор $D_{A+C} : \mathcal{W} \to \mathcal{H}$ дефинисан са

$$D_{A+C}\xi = \dot{\xi} - A\xi - C\xi$$

је Фредхолмов. Штавише,

$$\operatorname{index} D_{A+C} = \operatorname{index} D_A$$

.

Напомена 3.9. Ако је $B : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H, H)$ јако непрекидно (у односу на топологију индуковану јаком конвергенцијом оператора) и конвергира ка 0 у топологији норме оператора кад $t \to \pm\infty$, тада фамилија оператора $C(t) = B(t)|_W$ задовољава претпоставке за пертурбацију. Заиста, како је инклузија $i : W \hookrightarrow H$ компактна, то је и композиција $B(t) \circ i = B(t)|_W$ компактна за свако $t \in \mathbb{R}$. Како композиција компактним оператором претвара јаку конвергенцију у конвергенцију у операторској норми, то је $C(t)$ непрекидно у односу на операторску норму. Конвергенција ка 0 у операторској норми је тривијална.

3.3 Спектрални ток

У овом одељку уводимо спректрални ток аксиоматски. Доказујемо да Фредхолмов индекс задовољава ове аксиоме. Доказујемо преосталу тврдњу теореме 3.1 која се тиче индекса Фредхолмовог оператора дефинисаног у претходном одељку.

Користимо исту нотацију као у претходном одељку.

Дефиниција 3.1. За $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H)$ и $t \in \mathbb{R}$ дефинишемо **оператор преласка** као

$$\Gamma(A, t) := P\dot{A}(t)P|_{\text{кер}\, A(t)}$$

где $P : H \to H$ представља ортогоналну пројекцију на језгро оператора $A(t)$. Дефинишемо **прелаз** фамилије A као број $t \in \mathbb{R}$ за који $A(t)$ није ињективан.

Напомена 3.10. Оператор преласка у t је једнак 0 ако t није прелаз, јер је у том случају $A(t)$ ињективно, те је језгро тривијално. Претпостављамо да је скуп прелаза компактан.

Дефиниција 3.2. Прелаз t је **регуларан** ако је оператор преласка $\Gamma(A, t)$ недегенерисан. Прелаз t је **прост** ако је регуларан и ако је $\dim \ker A(t) = 1$. Ако је t_0 прост прелаз, тада локално постоје јединствена реално вредносна C^1 функција $\lambda = \lambda(t)$ за коју важи да су $\lambda(t)$ сопствене вредности $A(t)$, за свако t довољно близу t_0, и $\lambda(t_0) = 0$.

Дефиниција 3.3. Такву функцију $\lambda(t)$ зовемо **функција преласка сопствених вредности**.

Приметимо да је за прост прелаз t_0 оператор преласка $\Gamma(A, t_0)$ дат множењем $\dot{\lambda}(t_0)$ (јер је језгро једнодимензионо), па је $\dot{\lambda}(t_0) \neq 0$.

Како нам је циљ да докажемо чињеницу везану за Фредхолмов индекс из теореме (3.3), то мотивише следећу формулацију теореме:

Теорема 3.3. Претпоставимо да A задовољава **(A-1)**, **(A-2)**, **(A-3)** и да има само регуларне прелазе. Нека је D_A дефинисан као у (3.3). Тада је скуп прелаза коначан и

$$\operatorname{index} D_A = -\sum_t \operatorname{sign} \Gamma(A, t) \tag{3.10}$$

где сума иде по свим прелазима t и sign означава знак дефинисан у одељку 2.3. Дакле, за криву која има само просте прелазе важи следећа формула

$$\operatorname{index} D_A = -\sum_t \operatorname{sign} \dot{\lambda}(t) \tag{3.11}$$

Напомена 3.11. Тривијално је да директна сума две криве са само регуларним прелазима има само регуларне прелазе. Ово није тачно за криве са простим прелазима (на пример, посматрати $A \oplus A$). Међутим, испоставља се је својство да крива има само просте прелазе генеричко.

Циљ овог одељка је да уведе спектрални ток. За почетак, морамо да дефинишемо које фамилије оператора ћемо узимати у обзир. Специјално, желимо да фамилија оператора која се појављује у 3.1 припада скупу фамилија за које је дефинисан спектрални ток; прецизније, желимо да дотичне фамилије задовољавају **(A-1)**, **(A-2)**, **(A-3)**.

Означимо Банахов простор ограничених симетричних оператора који сликају W у H са

$$\mathcal{L}_{sym}(W, H) = \{A \in \mathcal{L}(W, H) : A^*|_W = A\}$$

и нека је $\mathcal{S}(W, H) \subset \mathcal{L}_{sym}(W, H)$ отворен подскуп којег чине оператори са непразном резолвентом, односно, оператор

$$\lambda \operatorname{Id} - A : W \to H$$

бијективан за бар један реалан број λ. Ово одговара услову **(A-2)** када се A посматра као неограничен оператор (видети напомену 3.4). Приметимо да претпостављамо да је инклузија W у H компактна са густом сликом. Штавише, појам симетричности оператора је кључан јер су тада све сопствене вредности реалне, те ће теорема (3.11) имати смисла.

Означимо сада са $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}, W, H)$ Банахов простор свих непрекидних (у операторској норми) пресликавања $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}_{sym}(W, H)$ (између два Банахова простора) која имају граничне вредности

$$A^{\pm} = \lim_{t \to \pm\infty} A(t)$$

у операторској норми. Присетимо се да граничне вредности могу постојати и у слабој топологији, не обавезно у топологији индукованој операторском нормом. Ово одговара **(A-3)**, али нам недостаје инвертибилност.

Означимо са $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}^1(\mathbb{R}, W, H) \subset \mathcal{B}$ Банахов простор оних фамилија $A \in \mathcal{B}$ које су непрекидно диференцијабилне у норми оператора и задовољавају неједнакост

$$\|A\|_{\mathcal{B}^1} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big(\|A(t)\| + \|\dot{A}(t)\| \Big) < \infty.$$

Ово одговара **(A-1)**, само је разлика у томе што је услов **(A-1)** слабији јер гарантује C^1 регуларност у слабој топологији, док су фамилије из $\mathcal{B}$ C^1 у норми оператора.

На крају, дефинишимо отворен подскуп

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, W, H)$$

који садржи оне $A \in \mathcal{B}$ за које су граничне вредности $A^{\pm} : W \to H$ бијективни оператори (овај услов за $\mathcal{A}$ је отворено својство; сада имамо **(A-3)**) и $A(t) \in \mathcal{S}(W, H)$ за свако $t \in \mathbb{R}$ (сада имамо **(A-2)**). Тада је скуп

$$\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^1(\mathbb{R}, W, H) = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^1$$

отворени (наслеђена топологија) у $\mathcal{B}^1$. Очигледно, $\mathcal{A}^1$ садржи сва пресликавања $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H)$ која задовољавају сва три услова и, додатно, су непрекидно диференцијабилна у операторској норми. Па из теореме 3.1 следи да је D_A Фредхолмов за свако $A \in \mathcal{A}^1$. На овај начин смо конструисали скуп фамилија оператора за које желимо да дефинишемо спектрални ток.

Дефиниција 3.4. За дате $A_i \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, W_i, H_i)$, $i = 1, 2$, дефинишемо **директну суму**

$$A_1 \oplus A_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, W_1 \oplus W_2, H_1 \oplus H_2)$$

на очигледан начин, за сваку тачку $t \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 3.5. За дате $A, A_l, A_r \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H)$ кажемо да је A **надовези-**

вање фамилија A_l и A_r ако је

$$A(t) = \begin{cases} A_l(t) & \text{за } t \leq 0 \\ A_r(t) & \text{за } t \geq 0 \end{cases}$$

и $A_l(t) = A(0) = A_r(-t)$ за све $t > 0$. У том случају пишемо

$$A = A_l \# A_r.$$

Коначно, карактеризујемо спектрални ток:

Теорема 3.4. Постоје јединствена пресликавања $\mu : \mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H) \to \mathbb{Z}$, једно за сваку компактну густу инклузију Хилбертових простора $W \hookrightarrow H$, која задовољавају следећа својства:

(Хомотопија) μ је константно на повезаним компонентама $\mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H)$.

(Константа) Ако је A константно, тада је $\mu(A) = 0$.

(Директна сума) $\mu(A_1 \oplus A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

(Надовезивање) Ако је $A = A_l \# A_r$, тада је $\mu(A) = \mu(A_l \# A_r) = \mu(A_l) + \mu(A_r)$.

(Нормализација) За $W = H = \mathbb{R}$ и $A(t) = \arctan(t)$, важи $\mu(A)$ı1.

Број $\mu(A)$ зовемо **спектрални ток** фамилије A. Наведена својства зовемо аксиоме.

Напомена 3.12. Нека је $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H)$. Нека је $\varepsilon > 0$ довољно мало (ускоро ћемо видети зашто). Ако $A_0, A_1 \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}, W, H)$ задовољавају

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t) - A_j(t)\|_{\mathcal{L}(W,H)} \leq \varepsilon$$

тада пут $A_\tau = (1-\tau)A_0 + \tau A_1$ лежи у $\mathcal{A}^1(\mathbb{R}, W, H)$ за свако $0 \leq \tau \leq 1$. Докажимо ово. Сетимо се да је $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^1$. Прво, скуп свих непрекидно диференцијабилних пресликавања између два Банахова простора је затворен у односу на операцију. Даље, из

$$
\begin{aligned}
\|A_\tau\|_{\mathcal{B}^1} = & \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(\|A_\tau(t)\| + \|\dot{A}_\tau(t)\|\Big) \\
= & \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(\|(1-\tau)A_0(t) + \tau A_1(t)\| + \|(1-\tau)\dot{A}_0(t) + \tau \dot{A}_1(t)\|\Big) \\
\leq & \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(\|A_0(t)\| + \|A_1(t)\| + \|\dot{A}_0(t)\| + \|\dot{A}_1(t)\|\Big) \\
\leq & \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(\|A_0(t)\| + \|\dot{A}_0(t)\|\Big) + \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(\|A_1(t)\| + \|\dot{A}_1(t)\|\Big) < \infty
\end{aligned}
$$

следи да $A_\tau \in \mathcal{B}^1$ за свако τ.

Друго, из Нојманових редова знамо да је скуп инвертибилних оператора отворен у Банаховом простору ограничених (непрекидних) оператора у топологији индукованој нормом оператора. Пошто су A_0 и A_1 бијективни гранични оператори, и пошто је

$$
\begin{aligned}
\|A_\tau^\pm - A_0^\pm\|_{\mathcal{L}(W,H)} = & \|\tau(A_0^\pm - A_1^\pm)\|_{\mathcal{L}(W,H)} \leq \|\tau(A_0^\pm - A^\pm + A^\pm - A_1^\pm)\|_{\mathcal{L}(W,H)} \\
\leq & \|A_0^\pm - A^\pm\|_{\mathcal{L}(W,H)} + \|A^\pm - A_1^\pm\|_{\mathcal{L}(W,H)} \\
\leq & \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t) - A_1(t)\|_{\mathcal{L}(W,H)} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t) - A_0(t)\|_{\mathcal{L}(W,H)} \leq 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

можемо да видимо да за ε довољно мало $A_\tau^\pm$ ће остати инвертибилно за свако τ. Како је скуп симетричних оператора (видети дефиницију скупа $\mathcal{B}$) затворен у односу на операције, следи да $A_\tau \in \mathcal{A}$ за свако τ, те је $A_\tau \in \mathcal{A}^1 = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^1$. Приметимо да је овде реч о C^1 хомотопији.

Сада, ако су $A_0, A_1 \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}, W, H)$ хомотопне непрекидном (у норми оператора) хомотопијом у $\mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H)$, тада су оне хомотопне и C^1-хомотопијом у $\mathcal{A}^1(\mathbb{R}, W, H)$. Заиста, неједнакост у дефиницији скупа $\mathcal{B}$ је сувишна уколико посматрамо C^1 пресликавања у $\mathcal{A}$. Ово опажање следи дирекнтно из асимптотског понашања фамилија из $\mathcal{A}$. Како су C^1 функције густе у непрекидним, то је скуп $\mathcal{A}^1$ густ у $\mathcal{A}$. Дакле, свака хомотопија у $\mathcal{A}$ се може апроксимирати надовезивањем хомотопија у $\mathcal{A}^1$ које су конструисане у претходном пасусу.

Коначно, свака хомотопска инваријанта на $\mathcal{A}^1(\mathbb{R}, W, H)$ се може јединствено проширити на хомотопску инваријанту на $\mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H)$.

Напомена 3.13. Разлог постојања претходне напомене је евидентан у претпоставкама теореме 3.4. Приметимо да је карактеризација спектралног тока у теореми 3.4 дата на $\mathcal{A}$, што је шира класа фамилија од фамилија које припадају $\mathcal{A}^1$, иако је за потребе примене на теорему 3.1 довољно посматрати спектрални ток на $\mathcal{A}^1$. Међутим, дефинисаћемо свакако спектрални ток на $\mathcal{A}^1$ као хомотопно инваријантно пресликавање, па на основу претходне напомене знамо да можемо тако дефинисан спектрални ток јединствено да проширимо на $\mathcal{A}$.

Приметимо такође да је ово аналогно начину на који су Робин и Саламон дефинисали Масловљев индекс. Наиме, Масловљев индекс је прво дефинисан за криве (глаткост), те је потом доказано да се тако дефинисан индекс може проширити на ширу класу непрекидних путева. Такав ће случај бити и код спектралног тока, пошто је $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^1$, где је по дефиницији $\mathcal{B}^1$ услов глаткости фамилије, односно тока.

Запишимо скуп $\mathcal{S} = \mathcal{S}(W, H)$ као бесконачну дисјунктну унију

$$\mathcal{S}(W, H) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k(W, H)$$

где $\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_k(W, H)$ представља скуп оператора $\mathcal{S}_k$ са k-димензионалним језгром. Унија је бесконачна јер посматрамо бесконачно димензионалан Хилбертов простор W. Испоставља се да је $\mathcal{S}_k$ подмногострукост од $\mathcal{S}$ кодимензије $\frac{k(k+1)}{2}$. Тангентан простор $\mathcal{S}_k$ у тачки $L \in \mathcal{S}_k$ је задат са

$$T_L \mathcal{S}_k = \left\{ \widehat{L} \in \mathcal{L}_{sym}(W, H) : P \widehat{L} P = 0 \right\}$$

где $P : H \to H$ представља ортогоналну пројекцију на језгро од L. Другим речима, крива $A \in \mathcal{A}$ је тангентна на $\mathcal{S}_k$ у $t = 0$ ако и само ако $A(0) \in \mathcal{S}_k$ и ако је оператор преласка $\Gamma(A, 0) = 0$. Следи, свака крива у $\mathcal{S}_k$ има спектрални ток једнак нули.

Приметимо да смо говорили о тангентном простору у тачки криве чији је кодомен Банахов простор. Сетимо се да је $\mathcal{L}_{sym}$ отворен у простору ограничених линеарних оператора између Банахових простора у топологији индукованој операторском нормом, па тада $\mathcal{L}_{sym}$ има структуру Банахове многострукости. Тада је $\mathcal{S}$ отворен у $\mathcal{L}_{sym}$, па $\mathcal{S}$ такође има структуру Банахове многострукости (са наслеђеном топологијом из $\mathcal{L}_{sym}$).

$\mathcal{S}_1$ је кодимензије 1. Тада крива има само просте прелазе (једнодимензиона језгра) ако и само ако је трансверзална на свако $\mathcal{S}_k$ за свако k. Како су $\mathcal{S}_k$ кодимензија строго већих од 1, тада из теорије трансверзалности следи да генеричка крива са само простим прелазима неће имати заједничких тачака са $\mathcal{S}_k$, за $k \geq 2$.

Доказ. (**теореме 3.4**)

Теорему ћемо доказати у два корака. Први ће се огледати у експлицитном дефинисању спектралног тока на $\mathcal{A}^1$, при чему ћемо се ослањати на претходно уведене појмове, доказујући да таква дефиниција задовољава аксиоме. Тада на основу претходне напомене знамо да можемо јединствено да проширимо дефиницију спектралног тока на $\mathcal{A}$. Други корак ће бити доказ јединствености.

За $A \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}, W, H)$ дефинишимо $\mu(A)$ као индекс пресека криве A и цикла $\mathcal{S}_1$ (са оријентацијом, са обзиромом на то да користимо теорију пресека) као у [13]. Да би оваква дефиниција била коректна, неопходно је доказати да је скуп кривих трансверзалних на све $\mathcal{S}_k$ отворен и густ у $\mathcal{A}^1$ и да је скуп хомотопија трансверзалних на све $\mathcal{S}_k$ густ. Све ове стандардне аргументе теорије трансверзалности покривене су теоријом трансверзалности које је Робин развио у [7].

Уколико је сада $A \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}, W, H)$ трансверзална на свако $\mathcal{S}_k$ (односно дисјунктна са сваким нивоом сем са $\mathcal{S}_1$) тада је индекс пресека A и S_1 (односно спектрални ток A) дат са

$$\mu(A) = \sum_t \operatorname{sign} \dot{\lambda}(t)$$

где је десна страна иста као у (3.11). Ово следи директно из дефиниције оператора преласка, конкретно у случају простих прелаза. Како смо спектрални ток дефинисали као индекс пресека, а узимајући у обзир претходну причу о теорији трансверзалности коју је развио Робин, знамо да спектрални ток задовољава аксиому хомотопије.

За потребе доказивања карактеризације потребна нам је теорема 4.5. из [3]. Нека је $\mu(A)$ спектрални ток дефинисан као у претходном пасусу. Нека је $\widetilde{\mu} : \mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H) \to \mathbb{Z}$ неко пресликавање које задовољава аксиоме. Циљ је доказати да је $\mu = \widetilde{\mu}$.

Приметимо да је свака крива у простору матрица $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (због дефиниције $\mathcal{A}$), хомотопна кривој дијагоналних матрица. Тада из аксиома хомотопије, директне суме и нормализације следи да је

$$\mu(B) = \frac{1}{2}\operatorname{sign} B^+ - \frac{1}{2}\operatorname{sign} B^-. \tag{3.12}$$

Нека је $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H)$ произвољна крива и $B \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ тако да је $A \oplus B$ хомотопна константној фамилији (видети теорему 4.5 у [3]). Тада је $\mu(B) = \widetilde{\mu}(B)$ и из аксиома хомотопије и констатности имамо да $\mu(A \oplus B) = \widetilde{\mu}(A \oplus B) = 0$. Сада из аксиоме директне суме следи да је $\mu(A) = \widetilde{\mu}(A)$. Дакле, $\mu = \widetilde{\mu}$.

□

Напомена 3.14. Ако обратимо пажњу на чињеницу да смо дефинисали спектрални ток као индекс пресека са хиперповрши у Банаховом простору, можемо, условно, да интерпретирамо спектрални ток као Масловљв индекс за путеве симетричних оператора на бесконачнодимензионом Хилбертовом простору.

Напомена 3.15. Погледајмо (3.12). Тада је напомена 3.12 специјалан случај спектралног тока за коначну димензију. Штавише, конзистентно је са лемом 2.6.

Приметимо да нигде нисмо користили аксиому надовезивања у доказу јединствености. Дакле, аксиома надовезивања следи из осталих аксиома.

Лема 3.11. *Аксиома надовезивања следи из аксиома хомотопије, директне суме и константности.*

Сада смо завршили са карактеризацијом спектралног тока. Главна мотивација за карактеризацију је била одређивање индекса Фредхолмовог оператора из теореме 3.1. Циљ је доказати да је спектрални ток једнак Фредхолмовом идексу тог оператора. Следећа лема важи:

Лема 3.12. *Претпоставимо да $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H)$ задовољава **(A-1)**, **(A-2)**, **(A-3)** и да има само регуларне прелазе. Тада је број прелаза коначан и спектрални ток A је једнак*

$$\mu(A) = \sum_k \operatorname{sign}\Gamma(A, t).$$

Доказ. За доказ погледати [3].

Ова лема и једначина у доказу карактеризације спектралног тока нас наводе да се запитамо да ли минус Фредхолмов индекс задовољава аксиоме. Испоставља се да заиста задовољава. Међутим, приметимо да нам теорема 3.1 даје Фредхолмовост оператора под претпоставкама **(A-1)**, **(A-2)**, **(A-3)**, те можемо да причамо о минус Фредхолмовом индексу једнаком спектралном току само на $\mathcal{A}^1$, док карактеризација, а самим тим и јединственост, важе за $\mathcal{A}$. Али то неће представљати проблем због чињенице да постоје јединствена проширења хомотопно инваријантних пресликавања са $\mathcal{A}^1$ на $\mathcal{A}$.

Теорема 3.5. Минус Фредхолмов индекс задовољава аксиоме теореме 3.4:

$$\mathcal{A}^1(\mathbb{R}, W, H) \to \mathbb{Z} : A \mapsto -\operatorname{index} D_A.$$

Доказ. Аксиома хомотопије следи из својства Фредхломовости. Аксиома директног збира је очигледна. Аксиома константности следи из 3.9. Аксиома нормализације следи из 3.1. Навели смо да аксиома надовезивања следи из осталих аксиома. Дакле, $-\operatorname{index} D_A = \mu(A)$. Међутим, **(A-1)**, **(A-2)**, **(A-3)** не карактеризује $\mathcal{A}^1$. Наведени услови тврде да је A заправо C^1 у слабој операторској топологији. Али, ми можемо да апроксимирамо криву која задовољава ова три услова кривама у $\mathcal{A}^1$, ослањајући се на аксиому хомотопије и својство Фредхолмовости које има исту формулацију. Комбинујући овај резултат са 3.12 добијамо 3.3. □

Овом теоремом је завршен доказ теореме 3.1.

3.4 Теорема о Морсовом индексу

Представићемо примену претходно доказаних теорема за диференцијални оператор који се јавља у диференцијалног геометрији. Конкретно, у Јакобијевој једначини.

Јакобијево векторско поље J описује понашање геодезијских линија у бесконачно малој околини дате геодезијске γ. То векторско поље је добијено диференцирањем глатке фамилије геодезијских γ_s таквих да $\gamma_0 = \gamma$:

$$J(t) = \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s}\Big|_{s=0}.$$

Штавише, векторско поље дуж геодезијске криве γ на Римановој многострукости (M, g) се зове **Јакобијево поље** ако задовољава наредну једначину коју зовемо **Јакобијева једначина**:

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) + R\left(J(t), \dot{\gamma}(t)\right)\dot{\gamma}(t) = 0,$$

где D представља коваријантан извод сагласан са Леви-Чевита конексијом и R представља кривину многострукости. Јакобијева једначина је очигледно обична диференцијална једначина другог реда.

У одговарајућим координатама, Јакобијева једначина има облик

$$Au = -\frac{d^2u}{ds^2} - Q(s)u = 0. \tag{3.13}$$

Нека је (без умањења општости) $s \in [0,1]$, и притом је $u(s) \in \mathbb{R}^n$ пошто говоримо о векторским пољима на коначно димензионалним многострукостима, и $Q(s)$ симетрична матрица која представља кривину R.

Дефиниција 3.6. Тачку $s_0 \in (0,1]$ зовемо **конјугована тачка** једначине A ако постоји нетривијално решење (3.13) које задовољава услов $u(0) = u(s_0) = 0$. Димензију векторског простора свих таквих решења зовемо **вишеструкост** конјуговане тачке. Означимо са $\nu(A)$ број конјугованих тачака A бројених са вишеструкошћу.

Нека је $\Phi(s) \in \mathbb{R}^{n^2}$ фундаментално решење (3.13):

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} + Q\Phi = 0, \quad \Phi(0) = 0, \quad \frac{d\Phi}{ds}(0) = 1,$$

за $s \in [0,1]$. Тада је

$$\Lambda(s) = \mathrm{range}\begin{pmatrix}\Phi(s)\\ \dot{\Phi}(s)\end{pmatrix}$$

Лагранжев потпростор за свако s. Ово важи јер су и Φ и $\dot{\Phi}$ симетричне матрице (што се може закључити директно из једначине фундаменталног решења, имајући на уму да је Q такође симетрична). Тада важи следећа теорема:

Теорема 3.6. Претпоставимо да $\det\Phi(1) \neq 0$. Тада је број $\nu(A)$ конјугованих тачака повезан са Масловљевим индексом пута Λ на следећи начин

$$\mu(\Lambda, V) = -\nu(A) - \frac{n}{2}$$

где је $V = \{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Наш циљ је да применимо претходно наведене теореме на специјалан сучај оператора који настаје посматрајући Јакобијеву једначину. Не бисмо ли то урадили, дефинишимо просторе на којима ћемо анализирати наведени оператор:

$$H = L^2([0,1],\mathbb{R}^n), \qquad W = W^{2,2}([0,1],\mathbb{R}^n) \cap W^{1,2}([0,1],\mathbb{R}^n).$$

Бирамо $W^{2,2}$ због другог извода који се налази у дефиницији A. Штавише, посматраћемо диференцијални оператор

$$A(t) = -\frac{d^2}{ds^2} - Q(s,t).$$

Претпостављамо да је Q класе C^1 на затвореној траци $[0,1] \times \mathbb{R}$ и да је независан од t за $|t| \geq T$. Претпоставимо још да 1 није тачка конјугованости ниједног од оператора $A^{\pm}$ (што имплицира да су ти оператори инвертибилни). Тада је

Теорема 3.7. Спектрални ток фамилије оператора $A(t)$ је дат са

$$\mu(A) = \nu(A^-) - \nu(A^+).$$

Доказ. [3].

Последица 3.2. (Теорема о Морсовом индексу) Претпоставимо да је оператор $A : W \to H$ дефинисан једначином (3.13) инвертибилан. Тада је његов Морсов индекс (број негативних сопствених вредности бројених са вишеструкошћу) једнак броју $\nu(A)$ конјугованих тачака.

Доказ. Посматрајмо фамилију оператора

$$A(t) = A - b(t) = -\frac{d^2}{ds^2} - Q(s) - b(t)$$

где је $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатка функција таква да је $b(t) = b^- < \lambda_1$ за $t \leq -1$ и $b(t) = 0$ за $t > 1$.

Из претпоставки је очигледно да је $Q(s) + b(t)$ класе C^1 и да је независно од t за $|t| \geq 1$. Штавише, A је симетричан ограничен оператор, те је његов спектар ограничен и реалан.

1 не може да буде тачка конјуговасти ниједног од оператора $A^{\pm}$. Да бисмо то доказали, приметимо прво да је $A^+ = A(t) = A - b(t) = A$, за $t > 1$ пошто је $b(t) = 0$ за $t \geq 1$. Како је A инвертибилан по претпоставци, то је његово језгро тривијално, па не постоје нетривијална решења једначине $Au = 0$ на $[0, 1]$.

A^- је инвертибилан због дефиниције функције $b(t)$, тј. јер је $b(t) = b^{-1} < \lambda_1$, где је λ_1 најмања сопствена вредност (овај коментар је коректан јер су све сопствене вредности реалне због симетричности A). Како је $A^- = A - b^-$, 1 није тачка конјугованости јер да јесте, то би импицирало да је b^- сопствена вредност A, што није могуће због дефиниције b^-. Приметимо да A^- има само позитивне сопствене вредности.

Сада можемо да применимо претходну теорему на $A(t)$ да бисмо добили да је

$$\mu(A(t)) = \nu(A^-) - \nu(A^+) = \nu(A - b^-) - \nu(A).$$

Ако би s_0 била конјугована тачка $A - b^-$ и u нетривијално решење $[0, s_0]$, то би имплицирало да је b^- сопствена вредност A. То није могуће. Следи, не постоје конјуговане тачке $A - b^-$, односно $\nu(A - b^-) = 0$. Дакле, $\mu(A(t)) = -\nu(A)$.

Израчунајмо сада спектрални ток $A(t) = A - b(t)$ по дефиницији. Наиме, раније смо закључили да $A(t)$ није инјективно за неко $t \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $b(t)$ сопствена вредност оператора A. Дакле, за потребе рачуна спектралног тока, довољно је обратити пазњу на прелазе који су вредности t такве да је $b(t)$ сопствена вредност оператора A. Тада је оператор преласка у t_0 дат са

$$\Gamma(A(t), t_0) = P\dot{A(t)}P|_{\ker A(t_0)} = P(A - \dot{b(t)})P|_{\ker A(t_0)} = -P\dot{b}(t)P|_{\ker A(t_0)} = -\dot{b}(t)\,\mathrm{Id},$$

односно форма преласка је дата множењем скаларом $\dot{b}(t)$. Како је по дефиницији $b(t)$ растућа функција, то је сваки прелаз регуларан и $-b(t)$ је негативан број. Како фамилија $A(t)$ очигледно задовољава претпоставке **(A-1)**, **(A-2)**, **(A-3)**, то из леме 3.12 следи да је спектрални ток $A(t)$ дат са

$$\mu(A(t)) = \sum_{b(t)} \mathrm{sign}\,\Gamma(A(t), t) = \sum_{b(t)} \mathrm{sign}\,(-\dot{b}(t)\,\mathrm{Id}) = -\sum_{b(t)} \mathrm{dim} E_{b(t)} = -\mathrm{ind} A,$$

где сума иде по свим прелазима (који истовремено одговарају сопственим вредностима оператора A), а $E_{b(t)}$ представља сопствени простор који одговара сопственој вредности $b(t)$.

Коначно, имамо $\nu(A) = \mathrm{ind}\, A$. □

3.5 Коши-Риманов оператор

У овом одељку ћемо навести последицу коју претходно развијена теорија даје у случају Коши-Римановог оператора. Посебан значај овог одељка, као и мотивација, представљени су у одељку 4.1.

Нека је J_0 стандардна скоро-комплексна структура на $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$. Посматрајмо пертурбовани Коши-Риманов оператор

$$\bar{\partial}_{S,\Lambda}\zeta = \frac{d\zeta}{dt} - J_0 \frac{d\zeta}{ds} + S\zeta. \tag{3.14}$$

где је $\zeta : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ које задовољава граничне услове

$$(\zeta(0, t), \zeta(1, t)) \in \Lambda(t),$$

где је $\Lambda(t)$ пут у $\mathcal{L}(2n)$ и $S(s,t) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ фамилија матрица. Постављамо следеће услове који ће нам омогућити да применимо теорему 3.1:

$(\mathbf{CR-1})$ Пресликавање $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(2n)$ је класе C^1. Лагранжев Грасманијан $\mathcal{L}(2n)$ се односи на симплектички простор $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, (-\omega_0) \times \omega_0)$. Нека постоје Лагранжеви потпростори $\Lambda^{\pm}$ и константа $T > 0$ таква да је $\Lambda(t) = \Lambda^+$ за $t \geq T$ и $\Lambda(t) = \Lambda^-$ за $t \leq -T$.

$(\mathbf{CR-2})$ Функција $S : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ је непрекидна. Штавише, нека постоје симетричне матрице $S^{\pm} : [0,1] \to \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ такве да

$$\lim_{t\to\pm\infty} \sup_{0\leq s\leq 1} \|S(s,t) - S^{\pm}(s)\| = 0.$$

$(\mathbf{CR-3})$ Нека су $\Phi^{\pm} : [0,1] \to \mathbf{Sp}(n)$ дефинисани као

$$\frac{d\Phi^{\pm}}{ds} + J_0 S^{\pm}\Phi^{\pm} = 0, \qquad \Phi^{\pm}(0,t) = \mathrm{Id}\,.$$

Тада је график $\Phi^{\pm}(1)$ трансверзалан на $\Lambda^{\pm}$.

Можемо да приметимо да Коши-Риманов оператор има облик $D_A = \frac{d}{dt} - A(t)$, међутим проблем је у томе што не постоји домен $A(t) : W(t) \to H$ независан од параметра t, док је у теореми 3.1 то један од услова. Овај проблем се може превазићи променом координата. Приметимо да услов $(\mathbf{CR-1})$ тврди да оператори $A(t)$ имају фиксан домен за све $t \geq |T|$. Из Лагранжових граничних услова и симетричности $S^{\pm}$ даје да су гранични оператори $A^{\pm}$ самоадјунговани. Услов $(\mathbf{CR-3})$ даје инвертибилност истих.

Посматрајмо сада просторе

$$\begin{aligned} L^2 &= L^2([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n}) \\ W^{1,2} &= \left\{\zeta \in W^{1,2}([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n}) \mid (\zeta(0,t), \zeta(1,t)) \in \Lambda(t)\right\} \end{aligned}$$

У случају $\Lambda(t) \equiv \Lambda$ константних граничних услова, ово су управо простори $\mathcal{H} = L^{1,2}$ и $\mathcal{W} = W^{1,2}_{\Lambda}$.

С обзиром на овакву конструкцију простора, за Коши-Риманов оператор важи следеће тврђење:

Теорема 3.8. Посматрајмо оператор $\bar{\partial}_{S,\Lambda} : W^{1,2}_{\Lambda} \to L^2$ за који важе претпоставке $(\mathbf{CR-1}), (\mathbf{CR-2})$ и $(\mathbf{CR-3})$. Тада је оператор $\bar{\partial}_{S,\Lambda}$ Фредхолмов и индекс тог оператора је дат са

$$\operatorname{index} \bar{\partial}_{S,\Lambda} = \mu(\mathrm{Gr}(\Phi^-), \Lambda^-) - \mu(\mathrm{Gr}(\Phi^+), \Lambda^+) - \mu(\Delta, \Lambda)$$

Доказ. [3].

4 Монотоне Лагранжеве подмногострукости

4.1 Флорова теорија

Уз симплектичку структуру на многострукости долази природна врста динамике коју ћемо звати Хамилтоновом динамиком. Наиме, недегенерисаност симплектичке форме успоставља бијекцију

$$\imath : TM \to T^*M, \quad X \mapsto \imath(X)\omega = X \lrcorner \omega.$$

Дакле, уколико посматрамо глатку функцију $H : M \to \mathbb{R}$, знамо да постоји глатко векторско поље X_H тако да

$$\imath(X_H)\omega = dH.$$

Уколико сада имамо глатку функцију $H : M \times I \to \mathbb{R}$, где је $I = [0,1]$, то за свако $t \in I$ имамо задано глатко векторско поље X_{H_t} тако да важи

$$\imath(X_{H_t})\omega = dH_t.$$

Дефиниција 4.1. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Глатку функцију $H : M \times I \to \mathbb{R}$ називамо **Хамилтонијаном** уколико постоји компакт $K \subset M$ такав да $\operatorname{supp}(H_t) \subset K$ за свако $t \in I$ (у случају затворене многострукости ово је празан услов). Једначину

$$\imath(X_{H_t})\omega = dH_t$$

називамо **Хамилтоновом једначином**, а генерисано векторско поље X_{H_t} дефинисано Хамилтоновом једначином називамо **Хамилтоновим векторским пољем**, а ток Хамилтоновог векторског поља **Хамилтоновим током** дат једначином

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_{H_t} \circ \phi_t, \qquad \phi_0 = id.$$

Како је $X_{H_t} = 0$ ван K, то X_{H_t} дефинише фамилију дифеоморфизама ϕ_t, где је $\phi_0 = id$. Дифеоморфизме φ_t, $t \in I$, називамо **Хамилтоновим дифеоморфизмима**.

Хамилтонови дифеоморфизми су посебно интересантни јер су истовремено и симплектоморфизми. Хамилтонови дифеоморфизми такође чине нормалну подгрупу групе симплектоморфизама. Ову подгрупу ћемо надаље означавати са $Ham(M)$, подразумевајући да је симплектичка форма позната из контекста.

Штавише, за разлику од Риманове геометрије где је група изометрија многострукости димензије веће од 1 заправо тривијална за генерички избор метрике, у симплектичкој геометрији је очигледно група симплектоморфизама велика с обзиром на то да очигледно садржи Хамилтонове дифеоморфизме.

Надаље претпостављамо да је $H_0 = H_1$, тј. у општем случају можемо да посматрамо 1-периодичан Хамилтонијан $H_t = H_{t+1}$. Тада су фиксне тачке Хамилтоновог дифеоморфизма ϕ_1 у 1-1 кореcподенцији са 1-периодичним решењима

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_{H_t} \circ \phi_t, \quad \phi_0 = id$$

и скуп таквих решења ћемо означавати са

$$\mathcal{P}(H) = \left\{ \phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M : \quad \frac{d}{dt}\gamma(t) = X_{H_t}(\gamma(t)) \right\}.$$

Дефиниција 4.2. Периодично решење $\gamma \in \mathcal{P}(H)$ је **недегенерисано** уколико је испуњен услов

$$\det(\mathrm{Id} - d\phi_1(\gamma(0))) \neq 0.$$

Хамилтонијан је **недегенерисан** ако су сва његова периодична решења недегенерисана.

Арнолдова хипотеза (слабији случај исте) каже да је у недегенерисаном случају број 1-периодичних решења ограничен одоздо сумом Бетијевих бројева симплектичке многострукости M:

Теорема 4.1. (Арнолд) Нека је (M, ω) компактна симплектичка многострукост и нека је $H_t = H_{t+1}$ гладак 1-периодичан Хамилтонијан који је притом и недегенерисан. Тада је

$$\sharp\mathcal{P}(H) \geq \sum_{i=0}^{2n} \dim H_i(M, \mathbb{Q}),$$

где $H_i(M, \mathbb{Q})$ представља сингуларну хомологију са рационалним коефицијентима.

Андреас Флор је развио теорију која је по њему добила назив, а која је за циљ имала да докаже Арнолдову хипотезу. У наставку ћемо дати врло кратак преглед Флорове теорије, тј. Флорове хомологије.

Флорова намера је била да направи бесконачнодимензиону Морсову теорију за неку функцију која ће за критичне тачке имати управо 1-периодичне Хамилтонове петље у M. Мотивисан тиме, на простору контрактибилних петљи $\mathcal{L}M$ симплектичке многострукости M дефинисао је следећи функционал који зовемо **функционалом дејства**:

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = -\int_{\mathbb{D}^2} u^*\omega - \int_0^1 H_t(\gamma(t))dt,$$

где је $u : \mathbb{D}^2 \to M$ произвољно пресликавање диска за које важи услов $u|_{\partial\mathbb{D}^2} = \gamma$. Не би ли функционал био добро дефинисан, довољно је да претпоставимо да је $\pi_2(M) = 0$. Уз ту претпоставку и имајући у виду затвореност симплектичке форме, интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{D}^2} u^*\omega$ неће зависи од избора пресликавања u. Варијацијом добијамо да је

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi) = -\int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_H(\gamma))dt,$$

па узимајући у обзир недегенерисаност симплектичке форме и произвољност варијације, примећујемо да су критичне тачке функционала дејства управо и једино 1-периодичне Хамилтонове петље.

Као што смо помињали, Флорова идеја је била да гради Морсову хомологију за функционал дејства. Пре свега, простор свих контрактибилних петљи симплектичке многострукости M је бесконачнодимензион. Дакле, уколико бисмо у духу Морсове хомологије посматрали функционал дејства, посматрали бисмо негативне градијентне трајекторије у $\mathcal{L}M$

$$\frac{du}{ds} = -\nabla\mathcal{A}_H(u(s)),$$

где је $u(s) : \mathbb{R} \to \mathcal{L}M$ глатка једнопараметарска фамилија петљи. Међутим, градијент је индукован метриком, што повлачи да је неопходно задати метрику на $\mathcal{L}M$. Како је M симплектичка, то можемо да посматрамо 1-периодичну фамилију скоро комплексних структура $J_t = J_{t+1} \in \mathcal{J}(M, \omega)$ које задају одговарајућу фамилију сагласних метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle_t = g_t(\cdot,\cdot) = \omega(\cdot, J_t\cdot)$. Сада можемо да задамо метрику на $\mathcal{L}M$ на следећи начин:

$$\langle\xi, \eta\rangle = \int_0^1 \langle\xi(t), \eta(t)\rangle_t,$$

за произвољне тангентне векторе $\xi, \eta \in T_\gamma \mathcal{L}M = C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \gamma^* TM)$ у тангентном простору тачке (тј. петље) γ.

Градијентна једначина је очигледно диференцијална једначина у бесконачно димензионалном простору. Флорова идеја је била да заправо градијентну једначину сведе на парцијалну диференцијалну једначину у коначно димензионалном простору. Наиме, како је градијент дефинисан као

$$\mathrm{d}\mathcal{A}_H(u)(\xi) = g_t(\xi, \nabla_t \mathcal{A}_H)$$

следи да је

$$\nabla_t \mathcal{A}_H(u) = J_t \left(\frac{du}{dt} - \nabla_t H(u(t)) \right),$$

где је градијент од H_t добијен сагласно са метриком g_t на M. Сада ће негативна градијентна трајекторија $u(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{L}M$, уколико је заправо посматрамо као пресликавање $u(s,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to M$, задовољавати парцијалну диференцијалну једначину

$$\frac{du}{ds} + J_t \frac{du}{dt} - \nabla_t H_t(u) = 0 \tag{4.1}$$

коју зовемо **пертурбованом Коши-Римановом једначином** или **Флоровом једначином**, док ћемо решење једначине звати **пертурбованим холоморфним пресликавањем**. Еквивалентно, једначина (4.1) је једнака

$$\frac{du}{ds} + J_t \frac{du}{dt} - J_t X_H(u) = 0.$$

Конструкција Флорове хомологије се заснива на анализи једначине (4.1), коју као у Морсовом случају, можемо посматрати као сечење добро изабраних Банахових многострукости. Добар избор тих простора ће заједно са Фредхолмовошћу сечења задатог једначином (4.1) (о чему је била реч у 3.5) давати глатку структуру на модулском простору додељеном критичним тачкама функционала дејства, тј. 1-периодичним Хамилтоновим петљама. Како ће линеаризација Флорове једначине бити оператор (3.14), то ће димензија модулског простора бити дата индексом тог оператора.

Пошто желимо да дефинишемо хомологију у духу Морсове хомологије, поставља се питање да ли ће увек постојати пертурбована холоморфна пресликавања која ће повезивати две петље. Такође се поставља питање како извршити градуацију. У Морсовом случају за коначнодимензионе многострукости градиција је вршена по Морсовом индексу критичне тачке. И на крају, поставља се питање топологије модулског простора $\mathcal{M}(x^-, x^+)$, обзиром да су у коначнодимензионом случају Морсове хомологије модулски простори били у извесном смислу компактни.

Прво питање има потврдан одговор, уз одговарајуће претпоставке. Пре свега, дефинишимо енергију пертурбованог цилиндра u у $\mathcal{L}M$ са

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_\infty^\infty \left(\left|\frac{du}{ds}\right|^2 + \left|\frac{du}{dt} - X_t(u)\right|^2\right) dsdt.$$

Директан рачун показује да је

$$E(u) = \mathcal{A}_H(x^+) - \mathcal{A}_H(x^-),$$

где је u пертурбовани холоморфни цилиндар који повезује Хамилтонове петље $x^\pm$. Ово је конзистентно за Морсовом теоријом. Штавише, испоставља се да је услов коначности енергије пертурбованог цилиндра еквивалентан томе да он спаја Хамилтонове петље:

Теорема 4.2. Нека је $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ решење (4.1). Тада су следећа тврђења еквивалентна:

(1) $E(u) < \infty$

(2) Постоје 1-периодичне петље $x^\pm \in \mathcal{P}(H)$ такве да

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s,t) = x^\pm(t)$$

и $\lim\limits_{s\to\pm\infty} \dfrac{du}{ds} = 0$, и ове конвергенције су униформне по t.

(3) Постоје константе $\delta > 0$ и $c > 0$ такве да

$$\left|\frac{du}{ds}(s,t)\right| \leq ce^{-\delta|c|}$$

за све $s \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{S}^1$.

Доказ. [4].

Што се градуације тиче, могуће је доделити свакој Хамилтоновој петљи Конли-Цендеров индекс. О детаљима ове конструкције погледати Оденину кнјигу. Тада дефинишемо хомолошки оператор ∂ на следећи начин

$$\partial x^+ = \sum_{\substack{x^- \\ \mu_{CZ}(x^+) - \mu_{CZ}(x^-) = 1}} n(x^+, x^-) x^- \tag{4.2}$$

где је $n(x^+, x^-)$ број пертурбованих цилиндара u, која повезују Хамилтонове петље у претходно наведеном смислу. Да би оператор био коректно дефинисан, неопходно је да број пертурбованих цилиндара који повезују Хамилтонове петље, чија је разлика Конли-Цендерових индекса једнака 1, буде коначан. Ово заиста и јесте јесте случај, као и у случају Морсове хомологије.

Компактност је у Флоровом случају суптилно питање. Наиме, Громов је у свом револуционарном раду из 1985. године увео појам псеудохомолорфних пресликавања, на којима је Флор базирао своју теорију:

Дефиниција 4.3. Пресликавање $f : M \to N$ скоро комплексних многострукости (M, J_M) и (N, J_N) зовемо **псеудо-холоморфним** или краће **холоморфним** уколико важи

$$df \circ J_N = J_M \circ df.$$

Специјално, уколико је Σ Риманова површ са глобалним координатама (s, t), $t = is$, услов холоморфности пресликавања је еквивалентан једначини

$$\frac{du}{ds} + J\frac{du}{dt} = 0$$

коју називамо **Коши-Римановом** једначином. Оваква хомолорфна пресликавања $u : \Sigma \to M$ називамо **холоморфним кривама**, пошто су Риманове површи димензије 1 над $\mathbb{C}$. Уколико обратимо пажњу на једначину (4.1), у случају кад је $H_t \equiv 0$ и $J_t \equiv J$, Флорова једначина је заправо Коши-Риманова једначина.

Дефиниција 4.4. Нека је $u : \Sigma \to M$ холоморфна крива. Енергију криве u дефинишемо као

$$E(u) = \int_\Sigma u^* \omega.$$

Теорема 4.3. Нека је $u : \Sigma \to M$ холоморфна крива на симплектичкој многострукости (M, ω), J скоро комплексна структура на M сагласна са ω и g

Риманова метрика на Σ. Тада важи

$$E(u) = \int_\Sigma u^*\omega = \frac{1}{2}\int_\Sigma \|du\|^2 d\sigma,$$

где је $d\sigma$ форма запремине на Σ једнака 1 на ортонормираној бази, а $\|du\|$ Хилберт-Шмитова норма оператора du.

Дакле, све холоморфне криве имају позитивну енергију. Приметимо притом да је лева стране једнакости тополошки, а десна страна аналитички објекат. Дакле, топологија многострукости M може да утиче на компактност датих пресликавања, односно компакност простора холоморфних кривих. Ово је од изузетне важности за Флорову теорију јер компактност модулског простора димензије 0 омогућава конструкцију хомологије. У Морсовој теорији је компакност модулског простора димензије 0 играла кључну улогу у стварању Морсове хомологије, али у Морсовом случају је било лако доћи до тог закључка јер нам је Собољевља теорема о утапању дала информацију о томе да су трајекторије биле непрекидне, те смо могли да користимо Арцела-Асколи теорему. Међутим, компакност простора холоморфних кривих је суптилније питање, али је од кључне важности за конструкцију Флорове хомологије. Испоставља се да уколико добро исконтролишемо енергију простора холоморфних кривих, можемо да добијемо компакност модулског простора димензије 0. Наредна теорема нам описује које све опструкције за ту врсту компактности можемо да имамо у случају холоморфних пресликавања:

Дефиниција 4.5. Сингуларна холоморфна крива је формална коначна сума

$$u + \sum_k m_k v_k$$

где су m_k природни бројеви, а

$$u : \Sigma \to M, \quad v_k : \mathbb{C}P^1 \to M$$

холоморфне криве.

Теорема 4.4. (Громовљева теорема о компактности) Нека је

$$u_n : \Sigma \to M$$

низ холоморфних пресликавања таквих да је

$$u_{n*}[\Sigma] = A \in H_2(M, \mathbb{Z}).$$

Тада постоји сингуларна крива $u_\infty = u_0 + \sum_k m_k v_k$ таква да за неки подниз низа u_n (означен опет са u_n) важи:

(1) Ван коначног скупа тачака $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset \Sigma$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_\infty$$

у C^1 топологији.

(2) $u_{0*}[\Sigma] + \sum_k m_k v_k[\mathbb{C}P^1] = A$.

(3) $E(u_\infty) = E(u_0) + \sum_k m_k E(v_k) = \lim\limits_{n\to\infty} E(u_n)$.

(4) Скупови $\mathrm{Im}(u_n)$ конвергирају ка $\mathrm{Im}(u_\infty)$ у Хаусдорфовој топологији.

(5) $\mathrm{Im}(u_\infty)$ је повезан и кроз сваку од тачака z_k пролази сфера v_k.

Холоморфне сфере v_k зовемо **мехуровима**, а одговарајућу конвергенцију **конвергенција до на мехурове**. Појаву мехурова ћемо посматрати као опструкцију за компакност. Мехурови не морају пролазити ни кроз једну од тачака z_k (могу да се појављују на другим мехуровима), те не морају да додирују класу $u_\infty(\Sigma)$.

Теорема компактности важи и за Риманове површи са границом. Можемо теорему формулисати и за низ пресликавања $u_n : (\Sigma, \partial\Sigma) \to (M, L)$, где је L Лагранжева подмногострукост. Разлика у односу на случај површи без границе је то што се мехурови могу појавити и у форми холоморфних пресликавања $w_k : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \to (M, L)$ диска. Ово опажање је битно за констуркцију Флорове теорије за Лагранжеве пресеке.

Вратимо се сада на конструкцију Флорове хомологије за дати Хамилтонијан. Дефинисали смо гранични оператор (4.2).Услов $\pi_2(M) = 0$ је иницијало био техничке природе, али се испоставља да је од суштинске важности јер тад услов имплицира да су J-холоморфне сфере заправо константне. Директан рачун нам даје ову чињеницу. Дакле, испоставља се да имамо компакност у модулском простору која нам је неопходна. Ако сада за генераторе Флорових ланчастих комплекса $CF_*(H)$ изаберемо периодичне Хамилтонове орбите, можемо да конструишемо хомолофију коју зовемо **Хамилтонова Флорова хомологија**. Испоставља се да је овако конструисана хомологија изоморфна сингуларној за затворену многострукост, те из те чињенице следи Арнолдова хипотеза.

Флорова хомологија може да се уопшти (видети [17]). Наиме, нека су L_0 и L_1 две Лагранжеве подмногострукости које су трансверзалне. Тада је проблем конструкције Флорове хомологије у оваквој поставци заправо проблем решавања следеће једначине:

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} + J_t \frac{du}{dt} = 0 \\ u(s,0) \in L_0 \\ u(s,1) \in L_1 \\ u(-\infty, t) = x^+ \\ u(\infty, t) = x^-, \qquad \text{где } x^+, x^- \in L_0 \cap L_1 \end{cases} \tag{4.3}$$

Конструкцију Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке вршимо на исти начин као и конструкцију Хамилтонове Флорове хомологије. Проблеми о којима је била реч у Хамилтоновој Флоровој хомологији ће се појављивати и у случају Лагранжеве Флорове хомологије. Генератори ланчастих комплекса ће бити пресечне тачке Лагранжевих подмногострукости, а гранични оператор ће бити дефинисан бројањем холоморфних дискова, односно решења једначине (4.3). Сетимо се само да поред мехурова, може доћи и до појаве холоморфних дискова, који ће такође представљати опструкцију за компактност. Овако дефинисана хомологија се зове **Лагранжева Флорова хомологија** или **Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке**.

4.2 Услов монотоности

У овом одељку ћемо представити посебну класу симплектичких многострукости и Лагранжевих подмногострукости, за које ћемо моћи да добро заснујемо Хамилтонову Флорову хомологију и Лагранжеву Флорову хомологију.

Како је простор скоро комплексних структура $\mathcal{J}(M,\omega)$ контрактибилан и непразан, то је прва Чернова класа $c_1 = c_1(TM, J) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ независна од избора скоро комплексне структуре.

Дефиниција 4.6. Симплектичка многострукост (M, ω) је **монотона** ако постоји позитивна константа $\tau \in \mathbb{R}$ таква да једнакост

$$\int_{\mathbb{S}^2} v^* c_1 = \tau \int_{\mathbb{S}^2} v^* \omega$$

важи за све $v : \mathbb{S}^2 \to M$.

Присетимо се да и даље претпостављамо да је M компактна многострукост (јер нам је циљ Арнолдова хипотеза).

Дефиниција 4.7. Нека је (M, ω) компактна симплектичка многострукост. Тада дефинишемо **минималан Чернов број** многострукости M као цео број

$$N = \inf \left\{ k > 0 \middle| \, \exists v : \mathbb{S}^2 \to M, \int_{\mathbb{S}^2} v^* c_1 = k \right\}.$$

Ако је $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} v^* c_1 = 0$ за свако $v : \mathbb{S}^2 \to M$, кажемо да је $N = \infty$ минималан Чернов број. Ако је $N \neq \infty$, тада је $\langle c_1, \pi_2(M) \rangle = N\mathbb{Z}$.

Надаље претпостављамо да је M монотона и да смо нормализовали симплектичку форму тако да $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} v^* \omega \in \mathbb{Z}$, за свако глатко пресликавање $v : \mathbb{S}^2 \to M$.

Сада можемо конструисати Хамилтонову Флорову хомологију за исти функционал енергије на простору контрактибилних орбита за монотону симплектичку многострукост, која не задовољава услов $\pi_2(M) = 0$. Међутим, као што смо раније помињали, претпоставка $\pi_2(M) = 0$ није само технички услов, већ је суштински јер спречава појаву мехурова, те не постоје опструкције за компактност модулског простора. Међутим, тај услов је био и техничке природе јер нам је омогућавао да коректно дефинишемо функционал дејства. Функционал дејства у монотоном случају је ипак могуће коректно дефинисати као

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = -\int_{\mathbb{D}^2} u^* \omega - \int_0^1 H_t(\gamma(t)) dt.$$

Тада је функционал дејства дефинисан као пресликавање $\mathcal{A}_H : \mathcal{L}M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, где је $u : \mathbb{D}^2 \to M$ произвољно пресликавање за које важи $u|_{\partial \mathbb{D}^2} = \gamma$. Такво пресликавање увек постоји јер је γ контрактибилна орбита, те је једно такво пресликавање дато хомотопијом. Услов монотоности нам даје да $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} v^* \omega \in \mathbb{Z}$, за сва пресликавања $v : \mathbb{S}^2 \to M$, те је самим тим вредност функционала дејства за дату контрактибилну орбиту дефинисана до на цео број. То оправдава избор кодомена $\mathcal{A}_H : \mathcal{L}M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Извод овако дефинисаног функционала дејства ће имати исти облик као извод функционала енергије о ком смо раније дискутовали, те ће конструкција Флорове хомологије ићи скоро аналогно.

Градијентне трајекторије ће бити задане Флоровом једначином (4.1), и важиће теорема 4.2. За генерички Хамилтонијан, као и у случају $\pi_2(M) = 0$, модулски простори

$$\mathcal{M}(x^-, x^+) = \mathcal{M}(x^-, x^+; H, J)$$

ће бити коначнодимензиони. Штавише, модулски простори димензије 1, односно скуп непараметризованих кривих које спајају Хамилтонове орбите чији се индекси у градуацији (која је опет направљена на основу Конли-Цендеровог индекса; видети [4]) ће бити коначни у смислу кардиналности. То ће нам дати коректност дефиниције граничног оператора. Услов монотоности ће дати неопходну компактност модулског простора, односно неће долазити до појаве мехурова.

Услов монотоности се може појавити и у случају конструкције Лагранжеве Флорове хомологије. Имитирајући дефиницију монотоне симплектичке многострукости, желимо да дефинишемо појам монотоне Лагранжеве подмногострукости. За почетак, дефинишимо **енергију диска** $\mathcal{E} : \pi_2(M, L) \to \mathbb{R}$ са границом на Лагранжевој подмногострукости L као

$$\mathcal{E}(\beta) = \int_{\mathbb{D}^2} \varphi^* \omega,$$

где је $\beta \in \pi_2(M, L)$ класа репрезентована пресликавањем $\varphi : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \to (M, L)$.

Такође, можемо да дефинишемо и **Масловљев индекс** $\mu : \pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}$ на следећи начин. Нека је $\beta = [\varphi] \in \pi_2(M, L)$. Посматрајмо векторско раслојење индуковано пул-беком тангентног раслојења, $\varphi^* TM \to \mathbb{D}^2$, заједно са пул-беком симплектичке форме $\varphi^*\omega$ која ће остати симплектичка форма. Како је $\mathbb{D}^2$ контрактибилан, то је наведено раслојење тривијално и јединствено до на изоморфизам раслојења: $\varphi^* TM \simeq \mathbb{D}^2 \times (\mathbb{C}^n, \omega)$, при чему тривијализација чува симплектичку форму. Како $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$ припада Лагранжевој подмногострукости L, то можемо да посматрамо рестрикцију тривијализације на $\mathbb{S}^1$, која нам индукује фамилију n-димензионалних потпростора $T_{\varphi(t)}L \subset T_{\varphi(t)}M \simeq (\mathbb{C}^n, \omega)$. Како је L Лагранжева подмногострукост, то је $T_{\varphi(t)}L \in \mathcal{L}(n)$, па $t \mapsto T_{\varphi(t)}L$ представља пут у $\mathcal{L}(n)$. Тада $\mu(\beta)$ дефинишемо као Масловљев индекс управо конструисаног пута у $\mathcal{L}(n)$. Дефиниција је коректна јер хомотопна пресликавања $\beta = [\varphi] = [\varphi']$ индукују изоморфна раслојења.

Претпоставке за овако конструисан Масловљев индекс на $\pi_2(M, L)$ ће нам бити кључан аргумент у контролисању компактности модулског простора, тј. у контролисању појаве псеудохоломорфних дискова. Наиме, испоставља се да модулски простор свих псеудохоломорфних дискова $\varphi : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \to (M, L)$ који погађају класу β има димензију $n + \mu(\beta) - 2$ (ово је нетривијална чињеница). Холоморфни дискови индукују исту класу у модулском простору уколико су исти као пресликавања до на Мебијусову трансформацију диска.

Дефиниција 4.8. Лагранжева подмногострукост L је **монотона** ако постоји позитивна константа τ независна од $\beta \in \pi_2(M, L)$ за коју важи

$$\mu(\beta) = \tau\mathcal{E}(\beta).$$

Дефиниција 4.9. Минималан Масловљев број Лагранжеве подмногострукости L је цео број

$$N = \min\left\{\mu(\beta) |\, \beta \in \pi_2(M, L), \mu(\beta) > 0\right\}.$$

Монотоне Лагранжеве подмногострукости постоје само у монотоним симплектичким многострукостима. Такође, нека је на $M \times M$ дата симплектичка структура $\pi_1^*\omega - \pi_2^*\omega$. Тада је M монотона симплектичка многострукост ако и само ако је дијагонала Δ_M монотона Лагранжева подмногострукост многострукости $M \times M$.

Пример 4.1. Дајемо још један пример монотоне Лагранжеве подмногострукоалнсти. Знамо да је сфера $\mathbb{S}^2$ симплектичка. Како је дводимензионална, свака проста петља је уједно и Лагранжева подмногострукост. Дакле, Лагранжевих подмногострукости има непребројиво. Конкренто, сваки круг „паралелан" екватору је Лагранжев. Међутим, постоји само једна монотона Лагранжева подмногострукост међу њима на $\mathbb{S}^2$ и то ће управо бити екватор.

Наиме, нека је дата нека проста петља γ у $\mathbb{S}^2$, која дели сферу на две дисјунктне области A и B за које је очигледно $\partial A = \partial B = \gamma$. Тада је $\pi_2(M, L) \cong \mathbb{Z}^2$; генератори су ништа друго него два диска (A и B) на које γ дели $\mathbb{S}^2$. Тада су Масловљеви индекси оба генератора једнаки 2 (јер се директно види да A и B можемо да посматрамо као најобичније јединичне дискове у $\mathbb{C}$, а γ као јединичну сферу). Дакле, ако су α и β генератори $\pi_2(M, L)$, то је $\mu(\alpha) = \mu(\beta) = 2$. Специјално, енергије оба генератора су ништа друго него њихове површине.

Сада из услова монотоности имамо

$$\tau\mathcal{E}(\alpha) = \mu(\alpha) = 2 = \mu(\beta) = \tau\mathcal{E}(\beta),$$

односно површине области A и B морају бити једнаке. Од свих паралела, то је могуће само уколико је γ екватор.

Минималан Масловљев број екватора је 2.

Флорову хомологију за Лагранжеве пресеке је могуће конструисати у случају монотоних Лагранжевих подмногострукости. Наиме, О је оказао следеће:

Теорема 4.5. Нека су L_1 и L_2 монотоне Лагранжеве подмногострукости са минималним Масловљевим бројевима N_1 и N_2 редом. Претпоставимо да је $N_1, N_1 \geq 3$. Претпоставимо да су или слике $H_1(L_1;\mathbb{Z})$, $H_1(L_2;\mathbb{Z})$ у $H_1(M;\mathbb{Z})$ коначне или да су L_1 и L_2 хомотопне у M. Тада постоји $\mathbb{Z}_N$ (где је $N =$ НЗД (N_1, N_2)) градуисана Флорова хомологија са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима која задовољава услове

(1) Ако су L_1 и L_2 трансверзални, тада је

$$\sum_k \mathrm{rank} HF^k(L_1, L_2) \geq \sharp(L_1 \cap L_2)$$

и

$$\sum_k (-1)^k \mathrm{rank} HF^k(L_1, L_2) = L_1 \cdot L_2.$$

$\sharp(L_1 \cap L_2)$ представља кардиналност скупа, а $L_1 \cdot L_2$ индекс пресека.

(2) За Хамилтонов дифеоморфизам $\phi : M \to M$ (у смислу дефиниције дате у секцији о Флоровој теорији) важи

$$HF(\phi(L_1), \phi(L_2)) \cong HF(L_1, L_2).$$

Скренимо пажњу на то како услови за Масловљев индекс контролишу компактност модулског простора. О је показао да се стварање псеудохоломорфних дискова дешава у модулском простору димензије 1 само уколико постоје неконстантни холоморфни дискови чији је Масловљев индекс ≤ 2.

Дакле, из монотоности L следи да не постоје неконстантни холоморфни дискови Масловљевог индекса ≤ 0. Заиста, холоморфни дискови чији је Масловљев индекс ≤ 0 би због монотоности ($\tau > 0$) задовољавали

$$\int_{\mathbb{D}^2} \varphi^* \omega \leq 0,$$

те они морају бити константни јер су енергије холоморфних кривих увек позитивне. Узимајући у обзир овај коментар и О-ов резултат, јасно је да неће доћи до појаве мехурова уколико тражимо да услов о минималном Масловљевом индексу буде испуњен.

A Хилбертови простори

Дефиниција A.1. Нека је H $\mathbb{C}$-векторски простор. Скаларни производ на H је пресликавање $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ које задовољава следеће услове:

1. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}, \quad \text{за све} u, v \in H$

2. $\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle, \quad \text{за све } \ a, b \in \mathbb{C} \quad \text{и} \ \ u, v, w \in H$

3. $\langle u, u\rangle \geq 0, \quad \text{за све } \ u \neq 0 \quad (\text{једнакост важи само за } \ u = 0)$

Наредне теореме важе и у случају када је H $\mathbb{R}$-векторски простор. Скаларни извод индукује норму задату са $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ на H.

Дефиниција A.2. Нека је H $\mathbb{C}$-векторски простор са дефинисаним склаарним производом и нека је дата норма индукована скаларним производом. H је **Хилбертов простор** ако је комплетан у односу на метрику индуковану нормом.

Теорема A.1. Нека је дат Хилбертов простор H. Тада важи следећа неједнакост која се зове **неједнакост Коши-Шварц**

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Дефиниција A.3. Нека су X и Y комплексни Хибертови простори и нека је $L \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X, Y)$ ограничен $\mathbb{C}$-линеаран оператор, где $L \in \mathbb{L}^{\mathbb{C}}(X, Y)$ означава све $\mathbb{C}$-линеарне операторе. Тада је **адјунговани оператор** $A^* : Y \to X$ оператора A јединствен оператор за који важи

$$\langle A^* x, y\rangle_X = \langle y, Ax\rangle_Y$$

за све $x \in X$ и $y \in Y$.

Наведимо нека својства ограничених оператора на Хилбертовим просторима:

Теорема A.2. Нека су X, Y и Z комплексни Хилбертови простори и нека су дати оператори $A \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X, Y)$ и $B \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(Y, Z)$. Тада важи:

(1) $A^* \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X, Y)$ и $\|A^*\| = \|A\|$.

(2) $(AB)^* = B^* A^*$ и $(\lambda \operatorname{Id})^* = \bar{\lambda} \operatorname{Id}$, за све $\lambda \in \mathbb{C}$.

(3) $A^{**} = A$.

(4) $\ker(A^*) = \mathrm{im}(A)^\perp$.

(5) Ако A има затворену слику, тада и A^* има затворену слику.

(6) Ако A има затворену слику, односно уколико је $\mathrm{im}(A)$ затворен скуп, тада је $\mathrm{coker}(A) \cong (\mathrm{im}(A))^\perp$.

(7) Ако је A Фредхолмов, тада је и A^* Фредхолмов и $\mathrm{index}(A^*) = -\mathrm{index}(A)$.

Дефиниција А.4. Оператор $L \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X, X)$ зовемо **самоадјунгованим** ако је $A = A^*$.

Дефиниција А.5. Нека су дата векторска раслојења $X \to M$ и $Y \to M$ са метрикама, где је M Риманова многострукост. Ако је $L : C^\infty(X) \to C^\infty(Y)$ линеарно пресликавање сечења, тада је **формални адјунговани оператор** (уколико постоји) пресликавање $L^\bullet : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ које задовољава

$$\int_M \langle Lx, y\rangle_Y vol_M = \int_M \langle x, L^\bullet y\rangle_X vol_M$$

за све $x \in C_c^\infty(X)$ и $y \in C_c^\infty(Y)$. vol_M означава форму запремине на M.

А.1 Неограничени линеарни оператори

Дефиниција А.6. Нека су X и Y реални (или комплексни) Банахови простори. **Неограничен (комплексно) линеаран оператор** из X у Y је пар $(A, \mathrm{dom}(A))$, где је $\mathrm{dom}(A) \subset X$ (комплексан) потпростор и

$$A : \mathrm{dom}(A) \to Y$$

је (комплексно) линеарно пресликавање. Неограничен оператор $A : \mathrm{dom}(A) \to Y$ је **густо дефинисан** ако је његов домен густ потпростор од X. Неограничен оператор је **затворен** ако је његов **график**, дефинисан са

$$\mathrm{graph}(A) := \{(x, Ax) | x \in \mathrm{dom}(A)\}$$

затворен линеаран простор простора $X \times Y$ у односу на топологију производа.

Дефиниција А.7. Норма графика неограниченог оператора A је норма на $\mathrm{dom}(A)$ задата са

$$\|x\|_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Норма графика омогућава да неограничен оператор посматрамо и као ограничен оператор у односу на норму графика.

Лема А.1. *Неограничен оператор је затворен ако и само ако његов домен Банахов простор у односу на норму графика.*

Неки примери неограничених оператора су

- Посматрајмо $X = C([0,1])$ простор свих непрекидних функција са супремум нормом. Тада је оператор

  $$Af := f', \qquad \mathrm{dom}(A) = C^1([0,1]),$$

  очигледно неограничен оператор на $C([0,1])$, са густим доменом и затвореним графиком.

- Можемо да уопштимо претходни пример посматрајући простор $X = L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, за фиксирано $1 \leq p \leq \infty$. Дефинишимо неограничен оператор

  $$Af := \frac{df}{dt}, \qquad \mathrm{dom}(A) := W^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

  који има затворен график за свако p, али има густ домен за $1 \leq p < \infty$.

- Фиксирајмо $n \in \mathbb{N}$ и $1 < p < \infty$. Тада је Лапласов оператор

  $$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} : W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$

  неограничен оператор са густим доменом.

Дефиниција А.8. Неограничен оператор $A : \mathrm{dom}(A) \to X$ комплексног Банаховог простора са доменом $\mathrm{dom}(A) \subset X$ има **компактну резолвенту** ако је $\rho(A) \neq 0$ и ако је резолвентски оператор $R_\lambda(A) = (\lambda \,\mathrm{Id} - A)^{-1} \in \mathcal{L}^C(X)$ компактан за све $\lambda \in \rho(A)$.

Теорема А.3. Нека је X комплексан Банахов простор и нека је $A : \mathrm{dom}(A) \to X$ неограничен комплексно линеаран оператор на X са компактном резолвентом. Тада је

$$\sigma(A) = P\sigma(A)$$

дискретан подскуп од $\mathbb{C}$. $\sigma(A)$ означава спектар, а $P\sigma(A)$ тачкасти спектар. Такође, потпростор

$$E_\lambda := \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker(\lambda \operatorname{Id} - A)^k$$

је коначнодимензион за све $\lambda \in P\sigma(A)$.

Дефиниција А.9. Нека су X и Y комплексни Хилбертови простори и нека је

$$A : \operatorname{dom}(A) \to Y, \qquad \operatorname{dom}(A) \subset X$$

густо дефинисан неограничен оператор. **Адјунговани оператор**

$$A^* : \operatorname{dom}(A^*) \to X, \qquad \operatorname{dom}(A^*) \subset Y$$

је дефинисан на следећи начин. Домен адјунгованог оператора је скуп свих $y \in Y$ за које постоји константа $c \geq 0$ таква да је

$$|\langle y, Ax \rangle| \leq c\|x\|_X$$

за све $x \in \operatorname{dom}(A)$. Сада, за свако $y \in \operatorname{dom}(A^*)$, елемент $A^*y \in X$ је јединствен елемент простора X за који важи

$$\langle A^*y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$$

за све $x \in \operatorname{dom}(A)$.

Тада је график адјунгованог оператора карактеризован условом

$$y \in \operatorname{dom}(A^*) \ \text{ и } \ x = A^*y \iff \langle A^*y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \ \text{ за све } \ x \in \operatorname{dom}(A).$$

Оператор A је **самоадјунгован** ако је $X = Y$ и $A = A^*$.

Б Фредхолмова теорија

Дефиниција Б.1. Нека је V $\mathbb{F}$-векторски простор ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Норма на V је пресликавање $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ које задовољава следеће услове:

1. $\|v\| > 0 \quad$ ако $\ v \neq 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|, \quad$ за свако $\ \alpha \in \mathbb{F}$
3. $\|\alpha v + w\| \leq \|\alpha v\| + \|\alpha w\|, \quad$ за све $\ v, w \in V$

Норма $\| \cdot \|$ индукује метрику на векторском простору са $d_{\|\cdot\|}(v, w) = \|v - w\|$.

Дефиниција Б.2. Нормиран простор $(V, \| \cdot \|)$ је **Банахов** ако је метрика $d_{\|\cdot\|}$ индукована нормом комплетна.

Дефиниција Б.3. Нека су $(X, \| \cdot \|_X)$ и $(Y, \| \cdot \|_Y)$ нормирани $\mathbb{F}$-векторски простори. Оператор L је $\mathbb{F}$-линеарно пресликавање $L : X \to Y$. Норма оператора L је

$$\|L\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Оператор је **ограничен** ако је $\|L\| < \infty$.

Лема Б.1. *Линеаран оператор је ограничен ако и само ако је непрекидан.*

Нека су X и Y нормирани простори. Тада скуп свих ограничених оператора та два простора има структуру нормираног векторског простора. Норма је дата нормом оператора. Овај простор означавамо са $\mathcal{L}(X, Y)$.
Надаље, кад будемо говорили о векторским просторима, подразумеваћемо да су нормирани, те нећемо увек експлицитно наводити норму, већ само простор. Такође, подразумевамо да када кажемо за нешто да је оператор, да је реч о линеарном оператору векторских простора.

Лема Б.2. *Нека су X и Y Банахови простори. Тада је простор ограничених оператора $\mathcal{L}(X, Y)$ Банахов простор. Тада $\mathcal{L}(X, Y)$ означавамо са $\mathcal{B}(X, Y)$.*

Дефиниција Б.4. Ограничен оператор $K : X \to Y$ који слика ограничене скупове у скупове чија су затворења компактна зовемо **компактним оператором**.

Компактни оператори имају битна својства:

Теорема Б.1. Нека су X, Y и Z Банахови простори.

(1) Нека су $A : X \to Y$ и $B : Y \to Z$ ограничени оператори и нека је бар један од A и B компактан. Тада је $BA : X \to Z$ је компактан оператор.

(2) Нека је $K_n : X \to Y$ низ компактних оператора који конвергира ка оператору $K : X \to Y$ у операторској норми. Тада је K компактан.

Лема Б.3. ***(Апстрактна лема о затвореној слици)*** *Претпоставимо да су X, Y и Z Банахови простори, да је $D : X \to Y$ ограничен линеаран оператор, и да је $K : X \to Z$ компактан линеаран оператор. Претпоставимо још да важи неједнакост*

$$\|x\|_X \leq c\,(\|Dx\|_Y + \|Kx\|_Z)$$

за свако $x \in X$. Тада D има затворену слику и коначнодимензионо језгро.

Дефиниција Б.5. Ограничен оператор $L : X \to Y$ Банахових простора је **Фредхолмов оператор** ако су $\mathrm{ker}L$ и $\mathrm{coker}L$ коначнодимензиони. **Фредхолмов индекс** Фредхолмовог оператора је

$$\mathrm{index}L := \dim \mathrm{ker}L - \dim \mathrm{coker}L.$$

Наведимо нека битна својства Фредхолмових оператора.

Теорема Б.2. Композиција Фредхолмових оператора је Фредхолмов оператор и индекс композиције је једнак збиру Фредхолмових индекса оператора.

Теорема Б.3. Нека су X и Y Банахови простори и нека је $L : X \to Y$ Фредхолмов оператор.

(1) Ако је $K : X \to Y$ компактан оператор, тада је $L+K$ Фредхолмов оператор и $\mathrm{index}(L) = \mathrm{index}(L+K)$.

(2) Постоји константа $\varepsilon > 0$ таква да важи следеће: Ако је $D : X \to Y$ ограничен оператор такав да је $\|D\| < \varepsilon$, тада је $L+D$ Фредхолмов оператор и $\mathrm{index}(L) = \mathrm{index}(L+D)$.

Дакле, компактне пертурбације или неке мале пертурбације Фредхолмовог оператора не мењају својство Фредхолмовости. Такође, наведимо да је слика домена Фредхолмовог оператора увек затворена.

Литература

[1] V.I. Arnold, *On a characteristic class entering into conditions of quantization*, Functional analysis 1 (1967) 1-8.

[2] J. Роббин, Д. Саламон, *Тхе Маслов индеш фор патхс*, Топологы, 1993.

[3] J. Robbin, D. Salamon, *The spectral flow and the Maslov index*, Bulletin of the London Mathematical Society, 1995.

[4] J. Robbin, D. Salamon, *The Maslov index for paths*, Topology, 1993.

[5] T. Bühler, D. Salamon, *Functional analysis, Lecture notes* `https://people.math.ethz.ch/ salamon/PREPRINTS/funcana.pdf`.

[6] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Mathematical Monographs, 1999.

[7] R. Abraham and J. Robbin, *Transversal Flows and Maps*, Benjamin, 1970.

[8] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Elsevier, 2003.

[9] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2012.

[10] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2010.

[11] В. Драговић, Д. Милинковић, *Анализа на многострукостима*, Математички факултет у Београду, 2003.

[12] J. Milnor, *Characteristic classes - Notes by James Stasheff* , 1957.

[13] J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1969.

[14] M. Schwarz, *Morse Homology*, Birkhäuser, 1993.

[15] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1st edition, 1973.

[16] George W. Whitehead *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1978.

[17] Вукашин Стојисављевић, Мастер теза, 2015.

[18] M. Audin, M. Damian, *Morse Theory and Floer Homology*, Springer, 2014.

[19] Yong-Geun Oh, *Floer cohomology of lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks I*, 1993.