

# Skoro sigurna centralna granična teorema

**-master rad-**

Marko Milanović (1014/2014)

Matematički fakultet, Beograd

Jul 2016.

## Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Osnovni pojmovi</b>	<b>5</b>
2.1	Slučajna veličina, merljiva funkcija . . . . .	5
2.2	Konvergenције nizova slučajnih veličina . . . . .	6
2.3	Čebiševljeva nejednakost . . . . .	10
2.4	Karakteristična funkcija i njene osobine . . . . .	10
2.5	Primeri karakterističnih funkcija . . . . .	13
2.6	Sumacioni metodi . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Centralna granična teorema</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Skoro sigurna centralna granična teorema</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Univerzalan rezultat</b>	<b>30</b>
<b>6</b>	<b>O težinskim koeficijentima</b>	<b>36</b>
<b>7</b>	<b>Primeri</b>	<b>38</b>
7.1	Parcijalne sume . . . . .	38
7.2	Maksimalna statistika poretka . . . . .	39
7.3	Empirijska funkcija raspodele . . . . .	42
7.4	Vremena povratka . . . . .	43
	<b>Literatura</b>	<b>46</b>

---

## 1 Uvod

Centralna granična teorema je jedan od najosnovnijih i najbitnijih rezultata u teoriji verovatnoća i statistici. U svojoj najjednostavnijoj formi centralna granična teorema tvrdi da za niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina  $(X_n)$  sa disperzijom 1 i matematičkim očekivanjem 0 važi

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1) \quad (1.1)$$

gde je  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Kasniji rezultati su se bavili oslabljivanjem uslova pod kojima rezultat teoreme ostaje da važi. Tako postoje varijacije centralne granične teoreme gde se nužno ne podrazumeva nezavisnost niza  $(X_n)$  kao i poznata Lindeberg<sup>1</sup>-Felerova<sup>2</sup> teorema koja ne uključuje jednakost raspodela slučajnih veličina  $(X_n)$ . Prvi rezultati o skoro sigurnoj centralnoj graničnoj teoremi pojavili su se tek krajem osamdesetih godina prošlog veka u radovima [1] i [2]. Taj prvi i najjednostavniji oblik skoro sigurne granične teoreme za prethodno definisan niz slučajnih veličina  $(X_n)$  tvrdi da za svako  $x \in \mathbb{R}$  važi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} I \left\{ \frac{S_k}{\sqrt{k}} < x \right\} = \Phi(x) \quad (s.s.) \quad (1.2)$$

Nakon ovog pojavilo se nekoliko ekvivalentnih rezultata koji umesto parcijalnih suma  $S_n$  koriste neke druge statistike. Jedan od primera je slučaj maksimalne statistike poretka. Naime, neka je  $(X_n)$  niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina i neka je  $M_n = \max_{i \leq n} X_i$ . Ako za neke realne nizove  $(a_k)$  i  $(b_k)$  važi

$$\frac{M_k - a_k}{b_k} \xrightarrow{D} G \quad (1.3)$$

gde je  $G$  neka nedegenerisana funkcija raspodele onda za svako  $x \in \mathbb{R}$  važi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} I \left\{ \frac{M_k - a_k}{b_k} < x \right\} = G(x) \quad (s.s.) \quad (1.4)$$

Primetimo da su relacije (1.1) i (1.2) u istom odnosu kao i relacije (1.3) i (1.4) te u određenom smislu postoji analogija između ova dva rezultata. Na osnovu toga, proizašlo je pitanje koji sve tipovi 'slabih' graničnih teorema kao što su (1.1) i (1.3) imaju svoju skoro sigurnu verziju. Jedan od prvih

---

<sup>1</sup>Jar Waldemar Lindeberg (1876-1932), finski matematičar

<sup>2</sup>William Feller (1906-1970), hrvatsko-američki matematičar

univerzalnih rezultata koji je pokazao da pod određenim tehničkim uslovima svaka slaba granična teorema ima svoju skoro sigurnu verziju dokazan je u [1].

Ovaj rad je podeljen u nekoliko celina. U poglavlju nakon ovog biće prikazani pojmovi i definicije kao i neka pomoćna tvrđenja i leme koje ćemo koristiti dalje kroz rad. U trećem poglavlju biće dokazane osnovna centralna granična teorema kao i Lindeberg-Felerova teorema kojom se oslabljuje uslov jednake raspodeljenosti niza  $(X_n)$ . U četvrtom delu biće dokazano tvrđenje (1.2) kao jedan od prvih rezultata vezanih za skoro sigurnu centralnu graničnu teoremu. U petom delu biće prikazana grupa univerzalnih skoro sigurnih graničnih teorema koje pokrivaju veliku klasu slabih graničnih teorema. Nakon toga u šestom delu biće nekoliko reči o težinskim koeficijentima koji se javljaju u pomenutim teoremama. Na kraju, u poslednjem delu biće prikazana primena univerzalnih teorema datih u poglavlju 5 kroz nekoliko primera.

---

## 2 Osnovni pojmovi

U ovom delu biće prikazani osnovni pojmovi, definicije i teoreme koje će biti korišćene u radu.

### 2.1 Slučajna veličina, merljiva funkcija

Sa  $\Omega$  ćemo označiti prostor ishoda nekog eksperimenta. Podskupove prostora ishoda  $\Omega$  nazivamo događajima a klasu svih događaja označavamo sa  $\mathcal{A}$ . Za klasu svih događaja  $\mathcal{A}$  pretpostavljamo da sadrži skup  $\Omega$  (siguran događaj) i prazan skup  $\emptyset$  i da je zatvorena na primenu skupovnih operacija.

**Definicija 1** Klasa  $\mathcal{A}$  podskupova prostora ishoda  $\Omega$  koja ima sledeća svojstva:

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$ ,
2.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ ,
3.  $(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ,

zove se  $\sigma$ -algebra događaja. Elementi  $\sigma$ -algebre zovu se slučajni događaji ili samo događaji. Uređeni par  $(\Omega, \mathcal{A})$  zove se merljiv prostor.

**Definicija 2** Funkcija  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  je verovatnoća (verovatnosna mera) na merljivom prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$ , ako ima sledeća svojstva:

1.  $P(\Omega) = 1$ ,
2.  $(\forall A \in \mathcal{A}) P(A) \geq 0$ ,
3. Ako su  $A_1, A_2, A_3, \dots$  događaji iz  $\mathcal{A}$ , takvi da za različite  $i$  i  $j$  važi  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , onda važi jednakost

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

**Definicija 3** Uređena trojka  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , gde je

- $\Omega$  - prostor ishoda slučajnog eksperimenta,
- $\mathcal{A}$  -  $\sigma$ -algebra podskupova skupa  $\Omega$ ,
- $P$  - verovatnoća definisana na merljivom prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$ ,

zove se prostor verovatnoća ili verovatnosni model razmatranog slučajnog eksperimenta.

**Definicija 4** Neka su  $(X, \Sigma)$  i  $(Y, \Theta)$  merljivi prostori. Funkcija  $f : X \rightarrow Y$  je merljiva (u odnosu na  $\sigma$ -algebre  $\Sigma$  i  $\Theta$ ) ako inverzna slika svakog elementa  $\sigma$ -algebre  $\Theta$  pripada  $\sigma$ -algebri  $\Sigma$ , drugim rečima ako važi

$$(\forall E \in \Theta) \quad f^{-1}(E) := \{x \in X | f(x) \in E\} \in \Sigma.$$

**Definicija 5** Neka je dat prostor verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , i neka je  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  merljiv prostor čije su komponente skup realnih brojeva i Borelova  $\sigma$ -algebra podskupova skupa realnih brojeva. Funkcija  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zove se slučajna veličina ako je merljiva u odnosu na  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$ , tj. ako važi

$$(\forall B \in \mathcal{B}) \quad X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

**Definicija 6** Za slučajnu veličinu  $X$  definisanu na prostoru verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  kažemo da je degenerisana ako postoji  $a \in \mathbb{R}$  tako da važi

$$P\{\omega \in \Omega | X(\omega) = a\} = 1$$

drugim rečima ako slučajna veličina  $X$  uzima jednu fiksiranu vrednost sa verovatnoćom 1.

## 2.2 Konvergencije nizova slučajnih veličina

U sledećim definicijama pretpostavićemo da su slučajne veličine  $X, X_1, X_2, \dots$  definisane na prostoru verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  kao i da su  $F, F_1, F_2, F_3, \dots$  njihove odgovarajuće funkcije raspodele.

**Definicija 7** Niz slučajnih veličina  $(X_n)$  konvergira u raspodeli (ili slabo konvergira) ka slučajnoj veličini  $X$  ako važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C_F$$

gde  $C_F$  označava skup tačaka neprekidnosti funkcije raspodele  $F(x)$ .

Konvergencija u raspodeli označava se na sledeći način:  $X_n \xrightarrow{D} X$ .

Sledeća definicija je ekvivalent prethodnoj i nju ćemo koristiti u dokazu jedne od narednih teorema.

**Definicija 8** Niz slučajnih veličina  $(X_n)$  konvergira u raspodeli ka slučajnoj veličini  $X$  ako za svaku neprekidnu i ograničenu funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f(X_n)) = E(f(X)).$$

**Definicija 9** Niz slučajnih veličina  $(X_n)$  konvergira u verovatnoći ka slučajnoj veličini  $X$  ako važi:

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$$

Konvergenija u verovatnoći označava se na sledeći način:  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

**Definicija 10** Niz slučajnih veličina  $(X_n)$  skoro sigurno konvergira ka slučajnoj veličini  $X$  ako važi:

$$P\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\} = 1$$

Skoro sigurna konvergenija označava se na sledeći način:  $X_n \xrightarrow{s.s.} X$ .

**Definicija 11** Niz slučajnih veličina  $(X_n)$  konvergira u srednjem reda  $p$  ka slučajnoj veličini  $X$  ako važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^p) = 0$$

Konvergenija u srednjem reda  $p$  označava se na sledeći način:  $X_n \xrightarrow{L^p} X$ . Kada je  $p=2$  tada govorimo o srednje kvadratnoj konvergenciji.

Sledeća grupa teorema prikazuje odnos između prethodno definisanih konvergencija slučajnih veličina kao i neke uslove pod kojima važi skoro sigurna konvergenija.

**Teorema 1** Niz slučajnih veličina  $(X_n)$  skoro sigurno konvergira ka slučajnoj veličini  $X$  ako i samo ako za svako  $\varepsilon > 0$  važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon\} = 0.$$

*Dokaz direktno sledi iz niza sledećih ekvivalencija:*

$$\begin{aligned}
 P\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} &= 1 \\
 \iff P\left\{\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\}\right\} &= 1 \\
 \iff P\left\{\bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right\} &= 0 \\
 \iff P\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\}\right\} &= 0 \\
 \iff (\forall m \geq 1) P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\}\right\} &= 0 \\
 \iff (\forall m \geq 1) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\}\right\} &= 0 \\
 \iff (\forall m \geq 1) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\omega : \sup_{k \geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\right\} &= 0 \\
 \iff (\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\omega : \sup_{k \geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\} &= 0.
 \end{aligned}$$

**Teorema 2** *Ako za svako  $\varepsilon > 0$  važi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{|X_k - X| > \varepsilon\} < \infty,$$

*onda niz slučajnih veličina  $(X_n)$  skoro sigurno konvergira ka slučajnoj veličini  $X$ .*

*Dokaz sledi iz prethodne teoreme i sledećeg niza relacija*

$$\begin{aligned}
 &P\{\omega : \sup_{k \geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \\
 &= P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) \\
 &\leq \sum_{k=n}^{\infty} P\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}.
 \end{aligned}$$

**Teorema 3** Iz  $X_n \xrightarrow{s.s.} X$  sledi  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

*Dokaz:* Očigledno važi sledeća implikacija

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : \sup_{k \geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} &= 0 \\ \implies (\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} &= 0 \end{aligned}$$

odakle na osnovu teoreme 1 i definicije 9 direktno sledi tvrđenje.

**Teorema 4** Iz  $X_n \xrightarrow{L^p} X$  sledi  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

*Dokaz* pogledati u [4].

**Teorema 5** Iz  $X_n \xrightarrow{P} X$  sledi  $X_n \xrightarrow{D} X$ .

*Dokaz:* Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  proizvoljna neprekidna i ograničena funkcija tako da važi  $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = M < \infty$  i neka je  $\varepsilon > 0$  proizvoljan realan broj. Možemo izabrati  $A > 0$  tako da važi  $P\{|X| \geq A\} \leq \frac{\varepsilon}{8M}$ . Kako je neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu i ravnomerno neprekidna to za  $|x| \leq A$  možemo izabrati  $\delta > 0$ ,  $\delta = \delta(A, \varepsilon)$ , tako da čim je ispunjeno  $|x - y| \leq \delta$  važi  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Iz  $X_n \xrightarrow{P} X$  sledi da postoji broj  $n_0$  tako da za  $n \geq n_0$  važi nejednakost  $P\{|X_n - X| > \delta\} < \frac{\varepsilon}{4M}$ . Za tako izabrane brojeve  $A, \delta, n_0$  i za  $n \geq n_0$  važi:

$$\begin{aligned} |Ef(X_n) - Ef(X)| &= |E(f(X_n) - f(X))| \leq E|f(X_n) - f(X)| \\ &= \int_{\Omega} |f(X_n) - f(X)| dP = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

gde su  $I_1, I_2, I_3$  redom integrali po skupovima:

$$\{|X_n - X| \leq \delta, |X| \leq A\}, \{|X_n - X| \leq \delta, |X| > A\}, \{|X_n - X| > \delta\}$$

Na osnovu gore postavljenih nejednakosti dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} |Ef(X_n) - Ef(X)| &\leq \frac{\varepsilon}{4} + 2MP\{|X| > A\} + 2MP\{|X_n - X| > \delta\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Kako je  $\varepsilon$  izabrano proizvoljno sledi da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ef(X_n) = Ef(X)$$

što je i trebalo pokazati.

## 2.3 Čebiševljeva nejednakost

Dokažimo sada i širom poznatu Čebiševljevu<sup>3</sup> nejednakost koju ćemo koristiti u dokazu teoreme 15.

**Teorema 6** *Neka slučajna veličina  $X$  ima konačno matematičko očekivanje  $\mu$  i konačnu disperziju  $\sigma^2 \neq 0$ . Tada za svaki pozitivan broj  $M$  važi*

$$P\{|X - \mu| \geq M\} \leq \frac{\sigma^2}{M^2}.$$

*Dokaz sledi iz sledećeg niza nejednakosti*

$$\begin{aligned} P\{|X - \mu| \geq M\} &= E(I\{|X - \mu| \geq M\}) \\ &= E\left(I\left\{\left(\frac{X - \mu}{M}\right)^2 \geq 1\right\}\right) \\ &\leq E\left(\frac{X - \mu}{M}\right)^2 \\ &= \frac{1}{M^2}E(X - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{M^2}. \end{aligned}$$

## 2.4 Karakteristična funkcija i njene osobine

**Definicija 12** *Karakteristična funkcija slučajne veličine  $X$ , odnosno njene funkcije raspodele  $F(x)$ , je funkcija  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definisana na sledeći način:*

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} dF(x)$$

**Teorema 7** *Za karakterističnu funkciju  $\varphi(t) = Ee^{itX}$  neke slučajne veličine  $X$  važi sledeće:*

- a)  $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$
- b)  $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$
- c)  $\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)e^{itb}$
- d)  $\varphi(t)$  je ravnomerno neprekidna na  $\mathbb{R}$

---

<sup>3</sup>Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), ruski matematičar

*Dokaz:*

$$a) |\varphi(t)| = |Ee^{itX}| \leq E|e^{itX}| = 1 = \varphi(0)$$

$$b) \varphi(-t) = Ee^{i(-t)X} = Ee^{-itX} = E\cos(tX) - iE\sin(tX) = \overline{\varphi(t)}$$

$$c) \varphi_{aX+b}(t) = Ee^{it(aX+b)} = Ee^{itb}e^{i(at)X} = \varphi_X(at)e^{itb}$$

d) *Neka su  $t$  i  $h$  proizvoljni realni brojevi, tada važi:*

$$\begin{aligned} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i(t+h)x} - e^{itx})dF(x) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| \cdot |e^{ihx} - 1|dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1|dF(x). \end{aligned}$$

*Kako važi  $|e^{ihx} - 1| \leq 2$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = 1$  i  $\lim_{h \rightarrow 0} |e^{ihx} - 1| = 0$ , na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1|dF(x) = 0$$

*odakle se direktno dobija da je funkcija  $\varphi(t)$  ravnomerno neprekidna.*

**Teorema 8** *Neka su  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nezavisne slučajne veličine i  $\varphi_{X_1}, \varphi_{X_2}, \dots, \varphi_{X_n}$  njihove odgovarajuće karakteristične funkcije, tada važi:*

$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) \dots \varphi_{X_n}(t).$$

*Dokaz: Kako je matematičko očekivanje proizvoda nezavisnih slučajnih veličina jednako proizvodu očekivanja tih slučajnih veličina, dobijamo da važi:*

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) &= Ee^{it(X_1+X_2+\dots+X_n)} = E\left(\prod_{k=1}^n e^{itX_k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^n Ee^{itX_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) \end{aligned}$$

*što je i trebalo pokazati.*

**Teorema 9** *Neka je  $X$  slučajna veličina sa karakterističnom funkcijom  $\varphi(t)$  i funkcijom raspodele  $F(x)$ . Ako za neki prirodan broj  $n$  važi  $E|X|^n < +\infty$ , onda za svako  $k \leq n$  postoji izvod  $\varphi^{(k)}(t)$  i pri tom važe sledeće jednakosti:*

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx} dF(x), \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, n \quad (2.1)$$

$$EX^k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}, \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} EX^k + o(t^n), \quad t \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

*Dokaz pogledati u [4].*

Prema definiciji karakteristične funkcije jasno je da funkcija raspodele verovatnoće na jedinstven način određuje karakterističnu funkciju. Od značaja je pitanje da li i karakteristična funkcija na jedinstven način određuje funkciju raspodele, tj. da li iz jednakosti karakterističnih funkcija dveju slučajnih veličina sledi da one imaju jednaku raspodelu. Odgovor na ovo pitanje je potvrđan i prikazan je u sledećim teoremama.

**Teorema 10** *Neka su  $a$  i  $b$ , gde je  $a < b$ , tačke neprekidnosti funkcije raspodele  $F$  i  $\varphi$  odgovarajuća karakteristična funkcija. Tada važi jednakost:*

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

*Dokaz pogledati u [4].*

Kako relacija iz prethodne teoreme važi za sve tačke neprekidnosti funkcije raspodele  $F$ , pustivši da  $a \rightarrow -\infty$  dobijamo da za svaku tačku neprekidnosti  $b$  funkcije  $F$ , limes u prethodnoj teoremi je jednoznačno određen sa  $F(b)$  te prethodna jednakost na jedinstven način određuje funkciju raspodele. Otuda važi sledeća teorema koja je u teoriji verovatnoća poznata i pod nazivom teorema jedinstvenosti.

**Teorema 11** *Ako neke dve funkcije raspodele imaju istu karakterističnu funkciju onda su te dve funkcije raspodele identične.*

Rezultat sledeće teoreme će se koristiti u dokazu već pomenute Lindeberg-Felerove teoreme.

**Teorema 12** *Neka je  $X$  slučajna veličina definisana na prostoru verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  i neka su  $F(x)$  i  $\varphi(t)$  njena odgovarajuća funkcija raspodele i karakteristična funkcija. Tada za svaki realni broj  $a > 0$  važi nejednakost*

$$P\{X \leq 2a\} - P\{X < -2a\} \geq a \left| \int_{-a^{-1}}^{a^{-1}} \varphi(t) dt \right| - 1.$$

Dokaz pogledati u [4].

## 2.5 Primeri karakterističnih funkcija

U ovom odeljku prikazaćemo nekoliko primera karakterističnih funkcija. Za nas će najviše značaja imati karakteristična funkcija normalne raspodele.

**Primer 1** Neka slučajna veličina  $X$  ima Puasonovu raspodelu sa parametrom  $\lambda$ . Karakteristična funkcija ove slučajne veličine je:

$$\varphi(t) = Ee^{itX} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

**Primer 2** Neka je  $X$  slučajna veličina koja ima  $U[-a, a]$  raspodelu za neko  $a > 0$ . Za  $t = 0$  važi  $\varphi(t) = 1$  dok za  $t \neq 0$  imamo:

$$\varphi(t) = \int_{-a}^a e^{itx} \frac{1}{2a} dx = \int_{-a}^a \frac{\cos tx}{2a} dx = \frac{1}{2a} \frac{\sin tx}{t} \Big|_{x=-a}^{x=a} = \frac{\sin at}{at}.$$

**Primer 3** Neka slučajna veličina  $X$  ima standardnu normalnu raspodelu  $\mathcal{N}(0, 1)$ , njena karakteristična funkcija ima sledeći oblik:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx.$$

Diferenciranjem prethodne jednakosti po  $t$  dobijamo (ovo je dozvoljeno uraditi jer integral u prethodnoj jednakosti ravnomerno konvergira po  $t$ ):

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx$$

Parcijalnom integracijom dalje dobijamo:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= -t\varphi(t). \end{aligned}$$

Dakle karakteristična funkcija  $\varphi(t)$  zadovoljava diferencijalnu jednačinu  $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$  sa početnim uslovom  $\varphi(0) = 1$ . Opšte rešenje prethodne diferencijalne jednačine je  $\varphi(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$ , gde se iz početnog uslova dobija da je  $C = 1$ . Najzad, karakteristična funkcija slučajne veličine sa standardnom normalnom raspodelom je:

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Na osnovu prethodno pokazanog i osobina karakteristične funkcije sledi da je karakteristična funkcija slučajne veličine koja ima  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  raspodelu data sa:

$$\varphi(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

## 2.6 Sumacioni metodi

Svaki niz nenegativnih realnih brojeva  $\mathcal{D} = (d_1, d_2, \dots)$  za koji važi  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \infty$  definiše linearni sumacioni metod na sledeći način. Neka je dat niz realnih brojeva  $(x_n)$  i neka je

$$\sigma_n^{(\mathcal{D})} = \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k x_k \quad \text{gde je} \quad D_n = \sum_{k=1}^n d_k.$$

Kažemo da je  $(x_n)$   $\mathcal{D}$ -sumabilan ka  $x \in \mathbb{R}$  ako  $\sigma_n^{(\mathcal{D})} \rightarrow x$  kad  $n \rightarrow \infty$ .

**Definicija 13** Za sumacione metode  $\mathcal{D}$  i  $\mathcal{D}^*$  kažemo da su ekvivalentni ako za svaki realan niz  $(x_n)$  važi da je  $(x_n)$   $\mathcal{D}$ -sumabilan ka  $x$  ako i samo ako je  $\mathcal{D}^*$ -sumabilan ka  $x$ .

**Definicija 14** Za sumacioni metod  $\mathcal{D}^*$  kažemo da je jači od sumacionog metoda  $\mathcal{D}$  ako za svaki niz  $(x_n)$  važi da ako je  $(x_n)$   $\mathcal{D}$ -sumabilan onda je i  $\mathcal{D}^*$ -sumabilan i to ka istoj vrednosti.

**Definicija 15** Ako je sumacioni metod  $\mathcal{D}^*$  jači od sumacionog metoda  $\mathcal{D}$  i ako postoji niz  $(x_n)$  koji je  $\mathcal{D}^*$ -sumabilan a nije  $\mathcal{D}$ -sumabilan onda kažemo da je sumacioni metod  $\mathcal{D}^*$  strogo jači od sumacionog metoda  $\mathcal{D}$ .

Može se pokazati da pod malim tehničkim uslovima važi sledeća tvrdnja (pogledati [5]). Ako za dva sumaciona metoda  $\mathcal{D}$  i  $\mathcal{D}^*$  sa odgovarajućim parcijalnim sumama  $D_n$  i  $D_n^*$  važi  $D_n^* = O(D_n)$  onda je sumacioni metod  $\mathcal{D}^*$  jači od sumacionog metoda  $\mathcal{D}$ . Takođe, ako važi  $\mathcal{D}_n^\alpha \leq \mathcal{D}_n^* \leq \mathcal{D}_n^\beta$  za  $n \geq n_0$  i

---

neke brojeve  $0 < \alpha < \beta$  tada su sumacioni metodi  $\mathcal{D}^*$  i  $\mathcal{D}$  ekvivalentni. Na kraju, ako važi  $D_n^* = O(D_n^\gamma)$  za svako  $\gamma > 0$  tada je sumacioni metod  $\mathcal{D}^*$  strogo jači od sumacionog metoda  $\mathcal{D}$ .

Na primer, logaritamski sumacioni metod definisan sa  $d_k = 1/k$  je jači od običnog sumacionog metoda (aritmetičke sredine) definisanog sa  $d_k = 1$ . Takođe svi sumacioni metodi definisani sa  $d_k = (\log k)^\alpha/k$ , za  $\alpha > -1$  su ekvivalentni logaritamskom sumacionom metodu ([5]).

### 3 Centralna granična teorema

Centralna granična teorema daje graničnu raspodelu niza parcijalnih suma  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  gde je  $(X_n)$  dati niz slučajnih veličina. Pri pogodno izabranim normirajućim konstantama prethodno pomenuti niz parcijalnih suma ima normalnu raspodelu kada  $n \rightarrow \infty$ . Najjednostavniji oblik centralne granične teoreme odnosi se na niz nezavisnih i jednako raspoređenih slučajnih veličina sa konačnom disperzijom (teorema 13). Uopšteniji oblik dopušta nejednakost raspodela slučajnih veličina uz uslov da nijedna slučajna veličina nema dominantan uticaj u konačnom zbiru. Ova tvrdnja je data Lindeberg-Felerovom teoremom.

**Teorema 13** *Neka je  $(X_n)$  niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina, sa matematičkim očekivanjem  $EX_1 = m$  i konačnom disperzijom  $DX_1 = \sigma^2 > 0$ . Ako je  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , tada pri  $n \rightarrow \infty$  važi:*

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \equiv \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.1)$$

*Dokaz:* Neka je  $\varphi(t)$  karakteristična funkcija slučajne veličine  $X_1 - m$ , a  $\varphi_n(t)$  karakteristična funkcija slučajne veličine  $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ . Kako za slučajnu veličinu  $X_1 - m$  važi  $E|X_1 - m|^2 < +\infty$  to na osnovu treće stavke (2.3) iz teoreme 9 važi sledeće

$$\varphi(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2), \quad t \rightarrow 0,$$

a kako je  $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{X_k - m}{\sigma\sqrt{n}}$ , to dobijamo

$$\varphi_n(t) = \left[ \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n = \left[ 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Kako slučajna veličina sa  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodelom ima karakterističnu funkciju  $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$  (pogledati primer 3), to na osnovu teoreme 11 direktno sledi dokaz teoreme.

Prirodno pitanje koje se postavlja je da li se prilično jaki uslovi koje ova teorema zahteva mogu nekako oslabiti tako da rezultat ostaje na snazi. Odgovor na ovo pitanje je potvrđan. Jednakost raspodela se pod određenim uslovima može izostaviti i to ilustruje Lindeberg-Felerova teorema koja će biti data u nastavku. Takođe, i uslov nezavisnosti se u određenom smislu

i pod određenim uslovima može izostaviti ali se time u ovom radu nećemo baviti.

Generalizacija centralne granične teoreme biće data za takozvanu shemu serija slučajnih veličina. S tim u vezi definišemo sledeće pojmove. Neka je data shema serija slučajnih veličina

$$\left. \begin{array}{cccc} X_{11}, & X_{12}, & \dots & X_{1k_1}, \\ X_{21}, & X_{22}, & \dots & X_{2k_2}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1}, & X_{n2}, & \dots & X_{nk_n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

takva da važe sledeći uslovi:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$
- b) za svako  $n$  slučajne veličine  $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nk_n}$  su nezavisne
- c)  $EX_{nj} = 0$  za svako  $n$  i svako  $j \in \{1, 2, \dots, k_n\}$
- d)  $DX_{n1} + DX_{n2} + \dots + DX_{nk_n} = 1$  za svako  $n$ .

Za prethodno postavljenu shemu serija slučajnih veličina definišimo sledeće uslove

- o Centralna granična teorema

$$\sum_{j=1}^{k_n} X_{nj} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

- o Uslov ravnomerne asimptotske zanemarljivosti

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} P\{|X_{nj}| > \varepsilon\} = 0 \quad (3.4)$$

- o Lindebergov uslov ( $F_{nj}$  je funkcija raspodele slučajne veličine  $X_{nj}$ )

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) = 0 \quad (3.5)$$

Pre nego što formulišemo i dokažemo Lindeberg-Felerovu teoremu, dokažimo prvo nekoliko pomoćnih tvrđenja.

---

**Lema 1** Za svako  $x \in \mathbb{R}$  i svako  $n \in \mathbb{N}_0$  važi:

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^n \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \min \left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}.$$

*Dokaz:* Najpre indukcijom po  $n$  dokažimo jednakost:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^n \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^{it} dt. \quad (3.6)$$

Za  $n = 0$  jednostavnom proverom dobijamo da važi jednakost. Ako pretpostavimo da jednakost (3.6) važi za  $n$ , parcijalnom integracijom integrala u jednakosti (3.6) dobijamo

$$\int_0^x (x-t)^n e^{it} dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{i}{n+1} \int_0^x (x-t)^{n+1} e^{it} dt. \quad (3.7)$$

Zamenom (3.7) u (3.6) dobijamo da jednakost (3.6) važi i za  $n+1$ . Pogledajmo sada kako jednakost (3.7) izgleda ako umesto  $n$  stavimo  $n-1$

$$\int_0^x (x-t)^{n-1} e^{it} dt = \frac{x^n}{n} + \frac{i}{n} \int_0^x (x-t)^n e^{it} dt. \quad (3.8)$$

Množenjem jednakosti (3.8) sa  $\frac{i^n}{(n-1)!}$  dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^{it} dt &= \frac{i^n}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} e^{it} dt - \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \frac{i^n}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} (e^{it} - 1) dt \end{aligned}$$

te se izraz  $e^{ix}$  može zapisati i u obliku

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^n \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{i^n}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} (e^{it} - 1) dt. \quad (3.9)$$

Procenama integrala koji se pojavljuju u jednakostima (3.6) i (3.9) direktno dolazimo do dokaza leme.

**Lema 2** Neka su  $z_1, z_2, \dots, z_n, w_1, w_2, \dots, w_n$  kompleksni brojevi takvi da je modul svakog od njih manji ili jednak 1. Tada je

$$\left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n w_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - w_k|.$$

*Dokaz: Primitimo da važi nejednakost:*

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n w_k \right| &= \left| (z_1 - w_1) \prod_{k=2}^n z_k + w_1 \left( \prod_{k=2}^n z_k - \prod_{k=2}^n w_k \right) \right| \\ &\leq |z_1 - w_1| \left| \prod_{k=2}^n z_k \right| + |w_1| \left| \prod_{k=2}^n z_k - \prod_{k=2}^n w_k \right| \\ &\leq |z_1 - w_1| + \left| \prod_{k=2}^n z_k - \prod_{k=2}^n w_k \right|, \end{aligned}$$

odakle se indukcijom dobija dokaz leme.

**Lema 3** Heka je  $x$  realan broj i neka je  $|x| \leq \frac{1}{2}$ . Tada važi nejednakost  $|e^x - 1 - x| \leq x^2$ .

*Dokaz: Koristeći Tejlorov razvoj funkcije  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  koji važi na celom skupu  $\mathbb{R}$  dobijamo*

$$\begin{aligned} |e^x - 1 - x| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = x^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!} \\ &< \frac{x^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{k-2} = x^2. \end{aligned}$$

**Lema 4** Neka je  $z$  kompleksan broj i neka je  $|z| \leq \frac{1}{2}$ . Tada postoji kompleksan broj  $w$  takav da važi  $|w| < 1$  i  $\ln(1+z) - z = w|z|^2$ .

*Dokaz: Polazeći od Tejlorovog razvoja funkcije  $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k}$  koji važi za  $-1 < z \leq 1$  i koristeći činjenicu da je  $|z| < \frac{1}{2}$ , dobijamo*

$$\begin{aligned} |\ln(1+z) - z| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} \\ &= |z|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{k-2}}{k} \leq \frac{|z|^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{k-2} = |z|^2, \end{aligned}$$

odakle tvrđenje leme direktno sledi.

**Lema 5** Neka je data shema serija (3.2) i neka je  $\varphi_{n_j}$  karakteristična funkcija slučajne veličine  $X_{n_j}$ . Uslov (3.4) ravnomerne asimptotske zanemarljivosti važi ako i samo ako je

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} |\varphi_{n_j}(t) - 1| = 0. \quad (3.10)$$

Prvo ćemo dokazati direktan smer. Pretpostavimo dakle da važi uslov ravnomerne asimptotske zanemarljivosti (3.4). Važi sledeće

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n_j}(t) - 1| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) dF_{n_j}(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx} - 1| dF_{n_j}(x) \\
&= \int_{|x| \leq \varepsilon} |e^{itx} - 1| dF_{n_j}(x) + \int_{|x| > \varepsilon} |e^{itx} - 1| dF_{n_j}(x) \\
&\leq |t| \int_{|x| \leq \varepsilon} |x| dF_{n_j}(x) + \int_{|x| > \varepsilon} 2 dF_{n_j}(x) \\
&\leq \varepsilon |t| + 2P\{|X_{n_j}| > \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Sada dobijamo

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} |\varphi_{n_j}(t) - 1| \leq \varepsilon |t| + 2 \cdot \max_{1 \leq j \leq k_n} P\{|X_{n_j}| > \varepsilon\},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} |\varphi_{n_j}(t) - 1| \leq \varepsilon |t| + 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} P\{|X_{n_j}| > \varepsilon\}.$$

Kako prethodna nejednakost važi za svako pozitivno  $\varepsilon$  to pri  $\varepsilon \rightarrow 0$  dobijamo traženu nejednakost.

Sada dokazujemo obrnut smer te pretpostavljamo da važi uslov (3.10). Na osnovu teoreme 12 dobijamo

$$\begin{aligned}
P\{|X_{n_j}| > \varepsilon\} &\leq 2 - \frac{\varepsilon}{2} \left| \int_{|t| \leq \frac{2}{\varepsilon}} \varphi_{n_j}(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{4}{\varepsilon} - \int_{|t| \leq \frac{2}{\varepsilon}} \varphi_{n_j}(t) dt \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \left| \int_{|t| \leq \frac{2}{\varepsilon}} (1 - \varphi_{n_j}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t| \leq \frac{2}{\varepsilon}} |1 - \varphi_{n_j}(t)| dt,
\end{aligned}$$

Odakle direktno dobijamo

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq j \leq k_n} P\{|X_{n_j}| > \varepsilon\} &\leq \frac{\varepsilon}{2} \max_{1 \leq j \leq k_n} \int_{|t| \leq \frac{2}{\varepsilon}} |1 - \varphi_{n_j}(t)| dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t| \leq \frac{2}{\varepsilon}} \max_{1 \leq j \leq k_n} |1 - \varphi_{n_j}(t)| dt \rightarrow 0, \quad \text{kad } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

čime je dokaz leme završen.

**Teorema 14** (Lindeberg - Feler) Ako za shemu serija (3.2) važe uslovi a) - d) onda Lindebergov uslov (3.5) važi ako i samo ako važi centralna granična teorema (3.3) i uslov asimptotske zanemarljivosti (3.4).

---

Prvo ćemo dokazati direktan smer, tj. da iz Lindebergovog uslova (3.5) sledi uslov ravnomerne asimptotske zanemarljivosti (3.4) i centralna granična teorema (3.3). Važi sledeće

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq k_n} P\{|X_n| > \varepsilon\} &\leq \sum_{j=1}^{k_n} P\{|X_n| > \varepsilon\} = \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} dF_{n_j}(x) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{n_j}(x), \end{aligned}$$

odakle prelaskom na limes kad  $n \rightarrow \infty$  dobijamo da iz Lindebergovog uslova (3.5) sledi uslov ravnomerne asimptotske zanemarljivosti (3.4). Označimo sada  $\varphi_{n_j}(t)$  i  $\sigma_{n_j}^2$  karakterističnu funkciju i disperziju slučajne veličine  $X_{n_j}$ . Hoćemo da dokažemo da iz Lindebergovog uslova (3.5) sledi da za  $\forall t \in \mathbb{R}$  važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{n_j}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

što je ekvivalent centralnoj graničnoj teoremi (3.3). Kako je  $EX_{n_j} = 0$ , to na osnovu (2.3) važi  $\varphi_{n_j}(t) = 1 - \frac{t^2 \sigma_{n_j}^2}{2} + \rho_{n_j}(t)$ , pa dalje dobijamo

$$\rho_{n_j}(t) = \varphi_{n_j}(t) - 1 + \frac{t^2 \sigma_{n_j}^2}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2 x^2}{2} \right) dF_{n_j}(x),$$

$$\rho_n := \sum_{j=1}^{k_n} \rho_{n_j}(t) = \sum_{j=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2 x^2}{2} \right) dF_{n_j}(x),$$

$$\begin{aligned} |\rho_n| &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \left| \varphi_{n_j}(t) - 1 + \frac{t^2 \sigma_{n_j}^2}{2} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2 x^2}{2} \right| dF_{n_j}(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \left( \int_{|x| \leq \varepsilon} + \int_{|x| > \varepsilon} \right) \left| e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2 x^2}{2} \right| dF_{n_j}(x). \end{aligned}$$

Koristeći lemu 1 za  $n = 2$  dobijamo

$$\begin{aligned} |\rho_n| &\leq \frac{|t|^3}{6} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^3 dF_{n_j}(x) + t^2 \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{n_j}(x) \\ &\leq \frac{|t|^3}{6} \varepsilon \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n_j}^2 + t^2 \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{n_j}(x). \end{aligned}$$

Dalje na osnovu Lindebergovog uslova i činjenice da je  $t$  fiksiran realan broj dobijamo sledeću nejednakost

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \left| \varphi_{n_j}(t) - 1 + \frac{t^2 \sigma_{n_j}^2}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon |t|^3}{6}.$$

Kako  $\varepsilon$  može biti proizvoljan pozitivan broj, puštajući da  $\varepsilon \rightarrow 0$  dobijamo sledeću jednakost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \left| \varphi_{n_j}(t) - 1 + \frac{t^2 \sigma_{n_j}^2}{2} \right| = 0.$$

Na osnovu prethodne jednakosti koristeći lemu 2 dobijamo

$$\left| \prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{n_j}(t) - \prod_{j=1}^{k_n} \left( 1 - \frac{t^2 \sigma_{n_j}^2}{2} \right) \right| \leq \sum_{j=1}^{k_n} \left| \varphi_{n_j}(t) - 1 + \frac{t^2 \sigma_{n_j}^2}{2} \right| \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

Dalje važi

$$\sigma_{n_j}^2 = DX_{n_j} = \left( \int_{|x| \leq \varepsilon} + \int_{|x| > \varepsilon} \right) x^2 dF_{n_j} \leq \varepsilon^2 + \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{n_j}$$

Pa još jednom koristeći Lindebergov uslov dobijamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} \sigma_{n_j}^2 = 0. \quad (3.12)$$

Sada koristeći lemu 2, lemu 3, relaciju (3.12) i uslov d) koji ispunjava shema serija (3.2) dobijamo

$$\left| \prod_{j=1}^{k_n} \exp \left( -\frac{t^2 \sigma_{n_j}^2}{2} \right) - \prod_{j=1}^{k_n} \left( 1 - \frac{t^2 \sigma_{n_j}^2}{2} \right) \right|$$


---

$$\leq \sum_{j=1}^{k_n} \left| \exp\left(-\frac{t^2 \sigma_{nj}^2}{2}\right) - 1 + \frac{t^2 \sigma_{nj}^2}{2} \right| \leq \frac{t^2}{4} \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^4 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Iz prethodne relacije i relacije (3.11) dobijamo:

$$\prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) = \prod_{j=1}^{k_n} \exp\left(-\frac{t^2 \sigma_{nj}^2}{2}\right) + o(1) = e^{-\frac{t^2}{2}} + o(1),$$

čime je dokaz prvog dela teoreme završen.

Sada dokazujemo obrnut smer, tj. da ako važi centralna granična teorema (3.3) i uslov ravnomerne asimptotske zanemarljivosti (3.4) sledi da važi i Lindebergov uslov (3.5). Uslov (3.3) ekvivalentan je sa

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (3.13)$$

dok je uslov (3.4) na osnovu leme 5 ekvivalentan uslovu

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} |\varphi_{nj}(t) - 1| = 0. \quad (3.14)$$

Na osnovu jednakosti (3.14) sledi sa za svako fiksirano  $t$  iz  $\mathbb{R}$  postoji prirodan broj  $n_0 = n_0(t)$ , takav da za svako  $n \geq n_0$  važi nejednakost

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} |\varphi_{nj}(t) - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

Na osnovu leme 4 kada je  $n \geq n_0$  sledi

$$\ln \varphi_{nj}(t) = \varphi_{nj}(t) - 1 + c_{nj} |\varphi_{nj}(t) - 1|^2,$$

gde je  $|c_{nj}| \leq 1$ . Dalje važi

$$\sum_{j=1}^{k_n} \ln \varphi_{nj}(t) = \sum_{j=1}^{k_n} (\varphi_{nj}(t) - 1) + \sum_{j=1}^{k_n} c_{nj} |\varphi_{nj}(t) - 1|^2. \quad (3.15)$$

Odredimo granične vrednosti suma koje se javljaju u prethodnoj jednakosti kada  $n \rightarrow \infty$ . Iz jednakosti (3.13) sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \ln \varphi_{nj}(t) = -\frac{t^2}{2}.$$

Označimo  $M_n = \max_{1 \leq j \leq k_n} |\varphi_{nj}(t) - 1|$ . Tada je

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{nj}(t) - 1|^2 &\leq M_n \sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{nj}(t) - 1| \\
&= M_n \sum_{j=1}^{k_n} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1) dF_{nj}(x) \right| \\
&= M_n \sum_{j=1}^{k_n} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left( itx + \vartheta \frac{t^2 x^2}{2} \right) dF_{nj}(x) \right| \\
&\leq M_n |\vartheta| \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{nj}(x) \\
&\leq \frac{M_n t^2}{2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Dakle, na osnovu jednakosti (3.15) i prethodno izračunatih graničnih vrednosti dveju suma koje se u njoj javljaju dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} (\varphi_{nj}(t) - 1) = -\frac{t^2}{2},$$

odakle poredeći samo realne delove dolazimo do relacije

$$\sum_{j=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos tx) dF_{nj}(x) = \frac{t^2}{2} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Neka je  $\varepsilon > 0$ . Na osnovu prethodne jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{t^2}{2} - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \leq \varepsilon} (1 - \cos tx) dF_{nj}(x) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} (1 - \cos tx) dF_{nj}(x) \right| + o(1) \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{k_n} P\{|X_{nj}| \geq \varepsilon\} + o(1) \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{k_n} \frac{\sigma_{nj}^2}{\varepsilon^2} + o(1) = \frac{2}{\varepsilon^2} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$


---

Dalje, uzimajući u obzir da za svako  $x$  važi  $0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$  i uslov d) sheme serija (3.2) dobijamo

$$\begin{aligned}
0 &\leq 1 - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF_{n_j}(x) = 1 - \frac{2}{t^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{t^2 x^2}{2} dF_{n_j}(x) \\
&\leq 1 - \frac{2}{t^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \leq \varepsilon} (1 - \cos tx) dF_{n_j}(x) \\
&= \frac{2}{t^2} \left( \frac{t^2}{2} - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \leq \varepsilon} (1 - \cos tx) dF_{n_j}(x) \right) \\
&\leq \frac{2}{t^2} \cdot \frac{2}{\varepsilon} + o(1) = \frac{4}{\varepsilon t^2} + o(1).
\end{aligned}$$

Iz prethodnog niza nejednakosti dobijamo

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF_{n_j}(x) \right) \leq \frac{4}{\varepsilon t^2}.$$

Kako prethodna nejednakost važi za proizvoljan broj  $t$ , sledi da važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF_{n_j}(x) = 1,$$

što je zbog uslova c) i d) sheme serija (3.2) ekvivalentno sa Linderbegovim uslovom (3.5). Ovim je dokaz teoreme završen.

## 4 Skoro sigurna centralna granična teorema

U prethodnom delu prikazali smo slabu centralnu graničnu teoremu (termin slabu ovde upotrebljavamo jer se radi o konvergenciji u raspodeli), kao i slučaj u kojem se može izostaviti uslov jednakosti raspodela slučajnih veličina  $X_1, X_2, \dots$  a da pri tom i dalje važi relacija (3.1). Postavlja se pitanje da li je moguće ostvariti sličan rezultat za skoro svaku realizaciju slučajnih veličina  $X_1, X_2, \dots$ . S tim u vezi posmatrajmo niz slučajnih veličina  $I\{S_n/\sqrt{n} \leq x\}$ , gde  $S_n$  kao i do sada predstavlja  $n$ -tu parcijalnu sumu niza  $X_1, X_2, \dots$  nezavisnih i jednako raspedeljenih slučajnih veličina za koji važi  $EX_1 = 0$  i  $DX_1 = 1$ . Očigledno prethodno definisani niz slučajnih veličina ne konvergira ni za jedno  $x \in \mathbb{R}$ . S tim u vezi na pomenuti niz slučajnih veličina primenićemo neki od sumacionih metoda. Međutim u [2] je pokazano da

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I\{S_n/\sqrt{n} \leq x\} \rightarrow \Phi(x) \quad (s.s.)$$

ne važi ni za jedno  $x \in \mathbb{R}$ . Drugim rečima na niz  $I\{S_n/\sqrt{n} \leq x\}$  se ne može primeniti jaki zakon velikih brojeva jer postoji jaka zavisnost među slučajnim veličinama  $S_n$ . Otuda sledi da aritmetička sredina nije odgovarajući metod te se mora pribeći nekom jačem sumacionom metodu. Sledeća teorema predstavlja jedan od osnovnih rezultata iz teorije o skoro sigurnim centralnim graničnim teoremama.

**Teorema 15** *Neka je  $X_1, X_2, \dots$  niz nezavisnih i jednako raspedeljenih slučajnih veličina i neka važi  $EX_1 = 0$ ,  $DX_1 = 1$  i  $E|X_1|^3 < \infty$ . Ako sa  $\Phi(x)$  označimo funkciju raspodele slučajne veličine sa standardnom normalnom raspodelom i  $S_n$   $n$ -tu parcijalnu sumu niza slučajnih veličina  $X_n$  onda važi*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} I\left\{\frac{S_k}{\sqrt{k}} \leq x\right\} = \Phi(x) \quad (s.s.) \quad (4.1)$$

Pre nego što pređemo na dokaz teoreme, definišimo prvo integralnu karakterističnu funkciju.

**Definicija 16** *Integralna karakteristična funkcija  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  slučajne veličine  $X$  sa funkcijom raspodele  $F$  i odgovarajućom karakterističnom funkcijom  $\varphi$  data je sa*

$$g(u) = \int_0^u \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux} - 1}{ix} dF(x).$$

Za tako definisanu integralnu karakterističnu funkciju važi sledeća lema.

**Lema 6** *Neka su  $X, X_1, X_2, \dots$  slučajne veličine i neka su  $g, g_1, g_2, \dots$  i  $F, F_1, F_2, \dots$  njihove odgovarajuće integralne karakteristične funkcije odnosno funkcije raspodele. Ako  $g_n(u) \rightarrow g(u)$  za svako  $u \in \mathbb{Q}$  onda važi  $X_n \xrightarrow{D} X$ .*

*Dokaz leme se nalazi u [2]*

*Dokažimo sada teoremu 15. Uvedimo prvo sledeće pojmove*

$$\begin{aligned} Y_k(t) &= e^{\frac{itS_k}{\sqrt{k}}}, \\ W_N(t) &= \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} (Y_k(t) - EY_k(t)), \\ V_N(u) &= \int_0^u W_N(t) dt. \end{aligned}$$

*Za fiksirano  $u$  posmatrajmo sledeći izraz*

$$E|V_N(u)|^2 = \int_0^u \int_0^u EW_N(t) \overline{W_N(s)} dt ds \leq \int_0^u \int_0^u |EW_N(t) \overline{W_N(s)}| dt ds$$

*Posmatrajmo sada podintegralnu funkciju*

$$EW_N(t) \overline{W_N(s)} = \frac{1}{\log^2 N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{1}{nm} (EY_n(t) \overline{Y_m(s)} - EY_n(t) E\overline{Y_m(s)})$$

*Svaku ekvivalentnu statistiku koja će se ubuduće pojavljivati u dokazu i koja umesto od niza slučajnih veličina datog u iskazu teoreme zavisi od niza slučajnih veličina sa normalnom  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodelom označićemo sa  $*$  u eksponentu. Kako slučajna veličina  $S_k^*/\sqrt{k}$  ima  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodelu to važi*

$$EY_k^*(t) = Ee^{\frac{itS_k^*}{\sqrt{k}}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (4.2)$$

*Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dela u prethodnoj nejednakosti dobijamo da važi i*

$$E\overline{Y_k^*(s)} = Ee^{\frac{isS_k^*}{\sqrt{k}}} = e^{-\frac{s^2}{2}} \quad (4.3)$$

*Takođe, jednostavnim računom za  $m < n$  dobijamo da važi (pogledati [2])*

$$EY_n^*(t) \overline{Y_m^*(s)} = e^{-(t^2+s^2)/2 + \sqrt{\frac{m}{n}} st} \quad (4.4)$$

Sada, na osnovu jednakosti (4.2), (4.3) i (4.4) dobijamo sledeće

$$\begin{aligned}
|EW_N^*(t)\overline{W_N^*(s)}| &= \frac{1}{\log^2 N} \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{1}{nm} \left( e^{-(t^2+s^2)/2+st\sqrt{\min\{\frac{m}{n}, \frac{n}{m}\}}} - e^{-(t^2+s^2)/2} \right) \right| \\
&\leq \frac{e^{-(t^2+s^2)/2}}{\log^2 N} \left( 2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{nm} \left| e^{st\sqrt{m/n}} - 1 \right| + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} |e^{st} - 1| \right) \\
&\leq \frac{e^{-(t^2+s^2)/2}}{\log^2 N} 2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{1}{nm} \left| e^{st\sqrt{m/n}} - 1 \right| \\
&= \frac{e^{-(t^2+s^2)/2}}{\log^2 N} 2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{1}{nm} e^{st} \left| e^{st(\sqrt{m/n}-1)} - e^{-st} \right| \\
&\leq \frac{e^{-(t^2+s^2)/2}}{\log^2 N} 2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{1}{nm} e^{|st|} |st| \sqrt{\frac{m}{n}} \\
&\leq \frac{2|st|}{\log^2 N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n^3}} \sum_{m=1}^n \frac{1}{\sqrt{m}} \\
&\leq \frac{5|st|}{\log N}
\end{aligned}$$

za dovoljno veliko  $N$ . Pri tom, u prethodnom nizu nejednakosti primenili smo Lagranžovu teoremu na funkciju  $e^x$  kao i činjenice da važi  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \log N$  i  $\sum_{m=1}^n \frac{1}{\sqrt{m}} \sim 2\sqrt{n}$ . Dalje, koristeći uslov  $E|X_1|^3 < \infty$  (pogledati [2]) dobijamo

$$\begin{aligned}
|EY_n(t)\overline{Y_m(s)} - EY_n^*(t)\overline{Y_m^*(s)}| &\leq C_1\sqrt{m/n} \\
|EY_n(t)E\overline{Y_m(s)} - EY_n^*(t)E\overline{Y_m^*(s)}| &\leq C_2\sqrt{m/n}
\end{aligned}$$

za  $m \leq n$  pa na osnovu toga sledi

$$|EW_N(t)\overline{W_N(s)}| \leq \frac{C_3}{\log N}$$

za dovoljno veliko  $N$ . Konstanta  $C_3$  zavisi od  $s$  i  $t$ . Dalje sledi

$$E|V_N(u)|^2 \leq C/\log N$$

gde  $C$  zavisi od  $u$ .

Razmotrimo sada podniz  $(N_k)$ ,  $N_k = [e^{k^2}]$ . Na osnovu teoreme 6 sledi da za proizvoljno  $\varepsilon > 0$

$$P\{|V_{N_k}(u)| \geq \varepsilon\} \leq C \frac{1}{\varepsilon^2 k^2} = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad k \rightarrow \infty$$

Iz prethodne nejednakosti sledi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\{|V_{N_k}(u)| \geq \varepsilon\} < \infty$$

pa kako je  $\varepsilon$  proizvoljno izabrano na osnovu teoreme 2 sledi da

$$V_{N_k}(u) \xrightarrow{s.s.} 0. \quad (4.5)$$

Ako je  $N_k \leq N \leq N_{k+1}$  onda važi

$$\begin{aligned} |V_N(u) \log N - V_{N_k}(u) \log N_k| &= \\ &= \left| \int_0^u \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (Y_k(t) - EY_k(t)) dt - \int_0^u \sum_{n=1}^{N_k} \frac{1}{n} (Y_k(t) - EY_k(t)) dt \right| \\ &\leq \sum_{n=N_k}^N \frac{1}{n} \int_0^u |Y_k(t) - EY_k(t)| dt \\ &\leq \sum_{n=N_k}^{N_{k+1}} \frac{2u}{n} = 2u \left( \sum_{n=1}^{N_{k+1}} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N_k} \frac{1}{n} \right) \sim 2u \log \frac{N_{k+1}}{N_k} \\ &\sim 2u \log \frac{e^{(k+1)^2}}{e^{k^2}} \sim 2u \log e^{2k+1} = O(k). \end{aligned}$$

Kada obe strane prethodne nejednakosti podelimo sa  $\log N_k$  dobijamo

$$|V_N(u) - V_{N_k}(u)| = O(1/k). \quad (4.6)$$

Iz relacija (4.5) i (4.6) dobijamo da važi

$$V_N(u) \xrightarrow{s.s.} 0. \quad (4.7)$$

Kako je  $u$  u relaciji (4.7) proizvoljno to će ona važiti za svako racionalno  $u$ . Pri tom prethodna relacija ne važi na nekom skupu  $M$  mere (verovatnoće) nula. Ekvivalentan zapis relacije (4.7) je

$$\int_0^u \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} Y_n(t) dt \rightarrow \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (4.8)$$

Za  $\omega \notin M$  fiksirano označimo

$$F_N(x) = \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left\{ \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} < x \right\}.$$

Sada na osnovu leme 6 i (4.8) važi  $F_N(x) \rightarrow \Phi(x)$  što je i trebalo pokazati.

## 5 Univerzalan rezultat

U prethodnom poglavlju dati su rezultati koji se isključivo odnose na centralnu graničnu teoremu. Međutim, postoje rezultati analogni (4.1) koji se odnose na druge verzije graničnih teorema. Naime, Farhner i Stadtmüller (pogledati [6]) pokazali su da sličan rezultat važi i za ekstremne statistike poretka, tj. dokazali su da važi sledeća teorema.

**Teorema 16** *Neka je  $X_1, X_2, \dots$  niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina, neka je  $M_n = \max_{k \leq n} X_k$  i neka za neke realne nizove  $(a_k)$  i  $(b_k)$ ,  $b_k \neq 0$  važi*

$$\frac{M_k - a_k}{b_k} \xrightarrow{D} G \quad (5.1)$$

gde je  $G$  neka nedegerisana funkcija raspodele, onda važi

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} I \left\{ \frac{M_k - a_k}{b_k} \leq x \right\} = G(x) \quad (s.s.) \quad (5.2)$$

Teorema 16 je potpuna analogija teoreme 15 za slučaj ekstremnih statistika poretka. S tim u vezi postavilo se pitanje za koje sve slabe granične teoreme za niz nezavisnih slučajnih veličina postoji odgovarajuća 'skoro sigurna' verzija. U nastavku ovog poglavlja biće predstavljen zanimljiv rezultat koji govori o tome da svaka slaba granična teorema uz neke dodatne tehničke uslove ima i svoju 'skoro sigurnu' varijantu [1]. U cilju formulacije ove tvrdnje uvedimo nekoliko pomoćnih pojmova.

Najuopštenija forma slabe granične teoreme za dati niz slučajnih veličina  $(X_n)$  je

$$f_k(X_1, X_2, \dots) \xrightarrow{D} G, \quad (5.3)$$

gde su  $f_k : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  merljive funkcije a  $G$  funkcija raspodele. Primeri slabih graničnih teorema su

- a)  $f_k(x_1, x_2, \dots) = (x_1 + \dots + x_k) / \sqrt{k}$
- b)  $f_k(x_1, x_2, \dots) = a_k(\max_{i \leq k} x_i - b_k)$
- c)  $f_k(x_1, x_2, \dots) = \sqrt{k} \sup_t |k^{-1} \sum_{i \leq k} I(x_i \leq t) - F(t)|$
- d)  $f_k(x_1, x_2, \dots) = a_k(\sum_{i \leq k} I\{x_1 + \dots + x_i = 0\} - b_k)$

U većini slučajeva funkcije  $f_k$  zavise samo od konačno mnogo promenljivih te se najopštiji oblik slabe granične teoreme (5.3) svodi na

$$f_k(X_1, X_2, \dots, X_{n_k}) \xrightarrow{D} G$$

za neki niz  $(n_k)$  prirodnih brojeva. Za početak bavićemo se slučajem kada je  $n_k = k$ . Primetimo da svaka od gore pomenutih slabih graničnih teorema ispunjava ovaj uslov. Funkcije  $f_k$  u koje figurišu u slaboj graničnoj teoremi

$$f_k(X_1, X_2, \dots, X_k) \xrightarrow{D} G \quad (5.4)$$

moraju biti merljive. Međutim to nije jedini kriterijum koje moraju da zadovolje. Na primer, ako su funkcije  $f_k$  definisane na sledeći način  $f_k(X_1, \dots, X_k) = X_1 + X_2$  za svako  $k \geq 1$  i ako funkcija raspodele  $G$  predstavlja konvoluciju slučajnih veličina  $X_1$  i  $X_2$  onda je jasno da izraz (5.4) važi, ali se u tom slučaju ne može govoriti ni o kakvoj graničnoj teoremi jer funkcije  $f_k$  zavise samo od prva dva člana niza slučajnih veličina  $(X_n)$ . Istinska granična teorema mora uključivati beskonačno mnogo slučajnih veličina  $X_i$  i mora imati svojstvo da za svako  $k \geq 1$  uticaj prvih  $X_1, X_2, \dots, X_k$  slučajnih veličina postaje zanemarljiv na  $f_l(X_1, \dots, X_l)$  kako  $l \rightarrow \infty$ . Drugim rečima menjanjem konačno mnogo veličina  $X_i$  nećemo uticati na ispunjenost izraza (5.4). Formuliramo sada prethodno opisan uslov. Pretpostavimo da za svako  $l > k \geq 1$  postoji merljiva funkcija  $f_{k,l} : \mathbb{R}^{l-k} \rightarrow \mathbb{R}$  tako da važi

$$E(|f_l(X_1, \dots, X_l) - f_{k,l}(X_{k+1}, \dots, X_l)| \wedge 1) \leq c_k/c_l \quad (5.5)$$

za neki neopadajući niz realnih brojeva  $(c_k)$  takav da  $c_k \rightarrow \infty$ . Notacija  $\wedge$  u prethodnoj relaciji označava minimum dva argumenta:  $\min\{a, b\} \equiv a \wedge b$ . Uticaj brzine rasta niza  $(c_n)$  na to koliko početnih članova niza  $(X_n)$  nema značajnog uticaja na  $f_l(X_1, X_2, \dots, X_l)$  ilustrovaćemo sledećim primerima. Neka je  $c_k = k^\alpha$ , za neko  $\alpha > 0$ . Jednakost (5.5) govori da je  $f_l(X_1, X_2, \dots, X_l)$  blisko u verovatnoći  $f_{k,l}(X_{k+1}, \dots, X_l)$  ako je  $k/l$  malo, npr. manje od  $\varepsilon$ . Drugim rečima  $f_l(X_1, \dots, X_l)$  se menja malo u verovatnoći kada se promene vrednosti prvih  $l\varepsilon$  promenljivih koje u figurišu u funkciji  $f_l$ . Može se lako pokazati da sve gore navedene slabe granične teoreme ispunjavaju ovaj uslov što ćemo i videti u poslednjem poglavlju. Ako postavimo da je  $c_k = (\log k)^\alpha$  za neko  $\alpha > 0$  onda će desna strana nejednakosti (5.5) biti manja od  $\varepsilon$  ako važi  $k \leq l^\varepsilon$ . Drugim rečima izraz (5.5) znači da prvih  $l^\varepsilon$  promenljivih neznatno utiče na  $f_l(X_1, \dots, X_l)$ . Primetimo da je  $l^\varepsilon$  manje od  $l\varepsilon$  te je uticaj inicijalnih članova niza na  $f_l$  postaje veći nego u prvom slučaju. Kada niz  $(c_k)$  još sporije raste broj inicijalnih članova niza koje zanemarljivo utiču na  $f_l(X_1, \dots, X_l)$  postaje sve manji.

Pogledajmo sada prvu od ukupno četiri univerzalne teoreme koje će biti prikazane u ovom radu koja pod određenim uslovima svakoj slaboj graničnoj teoremi dodeljuje odgovarajuću skoro sigurnu verziju.

**Teorema 17** *Neka je  $(X_n)$  niz nezavisnih slučajnih veličina za koji važi slaba granična teorema*

$$f_k(X_1, X_2, \dots, X_k) \xrightarrow{D} G \quad (5.6)$$

gde su  $f_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) merljive funkcije i  $G$  neka funkcija raspodele. Pretpostavimo i da za svako  $1 \leq k < l$  postoji merljiva funkcija  $f_{k,l} : \mathbb{R}^{l-k} \rightarrow \mathbb{R}$  tako da

$$E(|f_k(X_1, X_2, \dots, X_l) - f_{k,l}(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_l)| \wedge 1) \leq A \frac{c_k}{c_l} \quad (5.7)$$

gde je  $A > 0$  konstanta a  $(c_n)$  neopadajući niz pozitivnih realnih brojeva takav da važi  $c_n \rightarrow \infty$  i  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = O(1)$ . Neka je

$$d_k = \log \left( \frac{c_{k+1}}{c_k} \right), \quad D_n = \sum_{k=1}^n d_k \quad (5.8)$$

tada za svako  $x \in C_G$  važi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k=1}^N d_k I\{f_k(X_1, X_2, \dots, X_k) \leq x\} = G(x) \quad (s.s.) \quad (5.9)$$

gde  $C_G$  označava skup tačaka neprekidnosti funkcije raspodele  $G$ . Rezultat važi i ako niz  $(d_k)$  zamenimo nekim drugim nizom  $(d_k^*)$  takvim da  $0 \leq d_k^* \leq d_k$  i  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^* = +\infty$ .

Drugim rečima, teorema 17 tvrdi da ako slaba granična teorema (5.6) ispunjava uslov (5.7) onda ona ima skoro sigurnu verziju čiji težinski koeficijenti zavise od niza  $(c_k)$ . U slučaju kada je  $c_k = k^\alpha$  gde je  $\alpha > 0$ , tada iz uslova (5.8) sledi da

$$d_k \sim \text{const} \frac{1}{k}$$

pa se (5.9) svodi na

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} I\{f_k(X_1, X_2, \dots, X_k) \leq x\} = G(x) \quad (s.s.)$$

U ovom slučaju skoro sigurna verzija slabe granične teoreme uključuje tzv. logaritamsko usrednjavanje (logaritamski sumacioni metod). Ovaj slučaj pokriva veliku klasu slabih graničnih teorema a neke od njih će biti detaljnije analizirane u odeljku 7. Ako je  $c_k = (\log k)^\alpha$  gde je  $\alpha > 0$ , tada iz uslova (5.8) sledi da

$$d_k \sim \text{const} \frac{1}{k \log k}$$

pa se (5.9) svodi na

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k \log k} I\{f_k(X_1, X_2, \dots, X_k) \leq x\} = G(x) \quad (s.s.)$$

Ovakvo log log usrednjavanje se koristi u skoro sigurnoj verziji Darling-Erdoš-ove granične teoreme (pogledati [1]).

Jasno je da kako funkcionali  $f_k$  u odgovarajućoj slaboj graničnoj teoremi (5.6) više zavise od inicijalnih argumenata (tj. niz  $(c_k)$  sporije teži beskonačnosti) to odgovarajući težinski koeficijenti u skoro sigurnoj verziji moraju biti manji, te se na osnovu osobina sumacionih metoda koristi jači sumacioni metod u skoro sigurnoj verziji granične teoreme (5.9).

Iako prethodna teorema obuhvata veliku klasu graničnih teorema uslov (5.7) se može značajno oslabiti. Sledeća teorema ilustruje optimalne uslove pod kojima iz slabe granične teoreme (5.6) sledi skoro sigurna konvergencija (5.9). Pre toga definišimo funkciju  $\log_+$  na sledeći način

$$\log_+ x = \begin{cases} \log x, & \text{za } x \geq 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

**Teorema 18** *Neka je  $(X_n)$  niz nezavisnih slučajnih veličina i  $f_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) merljive funkcije. Pretpostavimo i da za svako  $1 \leq k < l$  postoji merljiva funkcija  $f_{k,l} : \mathbb{R}^{l-k} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da*

$$E(|f_k(X_1, \dots, X_l) - f_{k,l}(X_{k+1}, \dots, X_l)| \wedge 1) \leq A(\log_+ \log_+ (\frac{c_l}{c_k}))^{-(1+\varepsilon)} \quad (5.10)$$

gde su  $A > 0$  i  $\varepsilon > 0$  konstante a  $(c_n)$  neopadajući niz pozitivnih realnih brojeva takav da važi  $c_n \rightarrow \infty$  i  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = O(1)$ . Neka je

$$d_k = \log \left( \frac{c_{k+1}}{c_k} \right), \quad D_n = \sum_{k=1}^n d_k$$

tada za svaku funkciju raspodele  $G$  sledeće relacije su ekvivalentne

$$(\forall x \in C_G) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k=1}^N d_k I\{f_k(X_1, \dots, X_k) \leq x\} = G(x) \quad (s.s.) \quad (5.11)$$

$$(\forall x \in C_G) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k=1}^N d_k P\{f_k(X_1, \dots, X_k) \leq x\} = G(x) \quad (5.12)$$

Rezultat važi i ako niz  $(d_k)$  zamenimo nekim drugim nizom  $(d_k^*)$  takvim da  $0 \leq d_k^* \leq d_k$  i  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^* = +\infty$ .

---

Primetimo da je uslov (5.7) iz prve teoreme u ovom poglavlju ovde značajno oslabljen. Takođe može se pokazati da za  $\varepsilon = 0$  teorema ne važi (kontraprimer za to pogledati u [7]). Iz ove teoreme se takođe može videti da ne samo što iz slabe konvergencije (5.6) sledi skoro sigurna konvergencija (5.11), već je skoro sigurna konvergencija (5.11) ekvivalentna 'usrednjenoj' slaboj konvergenciji, tj. uslovu (5.12). Sledeća teorema daje odgovor na pitanje kako bi trebalo izabrati težinske koeficijente  $d_k$  kada se uzimaju u obzir funkcionali  $f_k(X_1, X_2, \dots, X_k)$  samo za neki podniz  $(n_k)$  niza prirodnih brojeva.

**Teorema 19** *Neka je  $(X_n)$  niz nezavisnih slučajnih veličina i  $f_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) merljive funkcije. Pretpostavimo i da za svako  $1 \leq k < l$  postoji merljiva funkcija  $f_{k,l} : \mathbb{R}^{l-k} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da*

$$E(|f_k(X_1, \dots, X_l) - f_{k,l}(X_{k+1}, \dots, X_l)| \wedge 1) \leq A(\log_+ \log_+ (\frac{l}{k}))^{-(1+\varepsilon)}$$

gde su  $A > 0$  i  $\varepsilon > 0$  konstante. Neka je  $(n_k)$  rastući niz prirodnih brojeva takav da važi  $\frac{n_{k+1}}{n_k} = O(1)$ . Neka je

$$d_k = \log \left( \frac{n_{k+1}}{n_k} \right), \quad D_n = \sum_{k=1}^n d_k$$

tada su za svaku funkciju raspodele  $G$  sledeće relacije ekvivalentne

$$(\forall x \in C_G) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k=1}^N d_k I\{f_{n_k}(X_1, \dots, X_{n_k}) \leq x\} = G(x) \quad (s.s.) \quad (5.13)$$

$$(\forall x \in C_G) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k=1}^N d_k P\{f_{n_k}(X_1, \dots, X_{n_k}) \leq x\} = G(x) \quad (5.14)$$

Rezultat važi i ako niz  $(d_k)$  zamenimo nekim drugim nizom  $(d_k^*)$  takvim da  $0 \leq d_k^* \leq d_k$  i  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^* = +\infty$ .

Poslednja u nizu univerzalnih graničnih teorema biće uopštenje prethodne tri teoreme i odnosi se na granične teoreme tipa

$$f_k(X_1, X_2, \dots, X_{n_k})$$

za neki rastući niz  $(n_k)$  prirodnih brojeva.

**Teorema 20** *Neka je  $X_1, X_2, \dots$  niz nezavisnih slučajnih veličina,  $(n_k)$  rastući niz prirodnih brojeva i neka su  $f_k : \mathbb{R}^{n_k} \rightarrow \mathbb{R}$  merljive funkcije. Pretpostavimo da za svako  $1 \leq k < l$  postoji merljiva funkcija  $f_{k,l} : \mathbb{R}^{n_l - n_k} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da*

$$E(|f_l(X_1, \dots, X_{n_l}) - f_{k,l}(X_{n_{k+1}}, \dots, X_{n_l})| \wedge 1) \leq A(\log_+ \log_+ (\frac{c_l}{c_k}))^{-(1+\varepsilon)}$$

gde su  $A > 0$  i  $\varepsilon > 0$  konstante a  $(c_n)$  neopadajući niz pozitivnih realnih brojeva takav da važi  $c_n \rightarrow \infty$  i  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = O(1)$ . Neka je

$$d_k = \log \left( \frac{c_{k+1}}{c_k} \right), \quad D_n = \sum_{k=1}^n d_k$$

tada za svaku funkciju raspodele  $G$  sledeće relacije su ekvivalentne

$$(\forall x \in C_G) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k=1}^N d_k I\{f_k(X_1, \dots, X_{n_k}) \leq x\} = G(x) \quad (s.s.) \quad (5.15)$$

$$(\forall x \in C_G) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k=1}^N d_k P\{f_k(X_1, \dots, X_{n_k}) \leq x\} = G(x) \quad (5.16)$$

Rezultat važi i ako niz  $(d_k)$  zamenimo nekim drugim nizom  $(d_k^*)$  takvim da  $0 \leq d_k^* \leq d_k$  i  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^* = +\infty$ .

Napomenimo još da postoje varijacije prethodne teoreme gde funkcionali  $f_k$  ne zavise od niza  $(X_n)$  nezavisnih slučajnih veličina već od slučajnog procesa  $\{X(t), t \geq 0\}$  sa neprekidnim vremenom i nezavisnim priraštajima. Detaljni iskazi ovih teorema se mogu naći u [1].

## 6 O težinskim koeficijentima

U većini skoro sigurnih graničnih teorema koje se mogu naći u literaturi koristi se logaritamsko usrednjavanje  $d_k = 1/k$ . Uostalom, jedan od prvih rezultata vezanih za skoro sigurnu centralnu graničnu teoremu (teorema 15) koristi upravo ove koeficijente. Međutim, na osnovu prethodnih teorema i osobina sumacionih metoda vidimo da je logaritamsko usrednjavanje  $d_k = 1/k$  samo jedno iz velike klase sumacionih metoda koji se takođe mogu koristiti. Na primer, za niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina  $(X_n)$  sa očekivanjem  $EX_1 = 0$  i disperzijom  $DX_1 = 1$  izraz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k=1}^N d_k I \left\{ \frac{S_k}{\sqrt{k}} \leq x \right\} = \Phi(x) \quad (s.s.) \quad (6.1)$$

važi za sve težinske koeficijente  $0 \leq d_k \leq 1/k$  za koje važi  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \infty$ . Jednostavno je primetiti da izraz (6.1) važi i za

$$d_k = (\log k)^\alpha / k \quad (\alpha > -1) \quad (6.2)$$

jer su zapravo logaritamski sumacioni metod  $d_k = 1/k$  i metod (6.2) prema osobinama sumacionih metoda ekvivalentni. Takođe u [1] je pokazano da izraz (6.1) važi i za

$$d_k = e^{(\log k)^\alpha} / k \quad (6.3)$$

gde za  $\alpha$  važi  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ . Sumacioni metod (6.3) se po jačini nalazi tačno između logaritamskog sumacionog metoda  $d_k = 1/k$  i aritmetičke sredine  $d_k = 1$ . Pritom, za različite vrednosti parametra  $\alpha$  metodi definisani pomoću (6.3) generišu međusobno neekvivalentne sumacione metode. Dakle, ne samo da za određeni sumacioni metod postoji čitava klasa ekvivalentnih metoda već je pokazano da (6.1) važi za čitavu klasu međusobno neekvivalentnih metoda. Već smo pomenuli da je u [2] pokazano da (6.1) ne važi za  $d_k = 1$ . Očito što su veći težinski koeficijenti ( $d_k$ ) to je rezultat (6.1) optimalniji, te je od značaja odrediti težinske koeficijente za koje se postiže optimalan rezultat. Za  $\alpha = 0$  (6.3) se svodi na logaritamski sumacioni metod dok za  $\alpha = 1$  ista relacija se svodi na aritmetičku sredinu. Drugim rečima ovo znači da možemo ići bar do "polovine puta" od logaritamskog sumacionog metoda do običnog. Sličan rezultat može se primeniti i na univerzalni rezultat predstavljen teoremom 17 [5]. U slučaju obične centralne granične teoreme (pogledati [5]) određeni su optimalni težinski koeficijenti do na nepoznatu konstantu. Pokazano je da ako niz  $(d_k)$  ispunjava uslov

$$d_k = O \left( \frac{D_k}{k(\log \log k)^\alpha} \right) \quad (6.4)$$

onda za  $\alpha > 3$  važi skoro sigurna granična teorema (6.1) dok za  $\alpha < 1$  ne važi. To znači da se optimalan rezultat za skoro sigurnu centralnu graničnu teoremu (6.1) dobija za

$$D_N = \exp(\log N / (\log \log N)^\alpha) \quad (6.5)$$

i neko nepoznato  $1 \leq \alpha \leq 3$ . Primetimo da se za  $\alpha = 0$  dobija aritmetička sredina te se u nekom smislu može reći da je optimalan sumacioni metod dosta bliži običnom nego logaritamskom sumacionom metodu.

Slično prethodnom i težinski koeficijenti u teoremama 17 - 20 su daleko od optimalnih. Na primer, na osnovu osobina sumacionih metoda sledi da teoreme 17 - 20 važe i za

$$d_k = \log \left( \frac{c_{k+1}}{c_k} \right) (\log c_k)^\alpha, \quad (\alpha > -1).$$

Takođe, ako je desna strana jednakosti (5.10) ograničena sa  $A(c_l/c_k)^{-\gamma}$  za neko  $\gamma > 0$  onda se može pokazati da se mogu koristiti i sledeći koeficijenti

$$d_k = \log(c_{k+1}/c_k) \exp((\log c_k)^\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

S druge strane teorema ne važi za

$$d_k = \log(c_{k+1}/c_k) c_k^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Međutim, ponovo optimalan sumacioni metod ostaje nepoznat.

## 7 Primeri

### 7.1 Parcijalne sume

Neka je  $X_1, X_2, \dots$  niz nezavisnih slučajnih promenljivih i neka je sa  $S_n$  označena  $n$ -ta parcijalna suma tog niza  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Pretpostavimo da

$(S_n - a_n)/b_n \xrightarrow{D} G$  gde je  $G$  neka funkcija raspodele a  $(a_n)$  i  $(b_n)$  realni nizovi za koje važi  $b_n \uparrow \infty$ ,  $b_{n+1}/b_n = O(1)$ . Pretpostavimo još i da važi sledeća nejednakost

$$E \left( \log_+ \log_+ \left| \frac{S_n - a_n}{b_n} \right| \right)^{1+\delta} \leq K \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.1)$$

za neke konstante  $\delta > 0$  i  $K > 0$ . Ako postavimo  $c_k = b_k$  i

$$f_l(x_1, \dots, x_l) = \left( \sum_{i=1}^l x_i - a_l \right) / b_l,$$

$$f_{k,l}(x_{k+1}, \dots, x_l) = \left( \sum_{i=k+1}^l x_i - (a_l - a_k) \right) / b_l$$

onda će uslovi teoreme 18 biti ispunjeni. Da bismo to pokazali definišimo prvo pomoćnu funkciju

$$g(x) = 1 + (\log_+ \log_+ x)^{1+\delta}.$$

Tada za funkciju  $x/g(x)$  važi da

- je neprekidna za  $x \geq 0$ ,
- postoji  $x_0 > 0$  tako da je  $x/g(x)$  rastuća za  $x \geq x_0$ ,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x/g(x) = +\infty$ .

Na osnovu prethodnog sledi da postoji broj  $a_0 > 0$  takav da za  $0 \leq x \leq y$  i  $y \geq a_0$  važi  $x/g(x) \leq y/g(y)$  odnosno  $x/y \leq g(x)/g(y)$ . Neka je  $\lambda = b_l/b_k$ . Ako je  $\lambda > a_0$  tada na osnovu (7.1) dobijamo

$$\begin{aligned} & E(|f_l(X_1, \dots, X_l) - f_{k,l}(X_{k+1}, \dots, X_l)| \wedge 1) \\ &= E \left( \left| \frac{S_k - a_k}{b_l} \right| \wedge 1 \right) = E \left( \frac{1}{\lambda} \left\{ \left| \frac{S_k - a_k}{b_k} \right| \wedge \lambda \right\} \right) \\ &\leq \frac{1}{g(\lambda)} E g \left( \left| \frac{S_k - a_k}{b_k} \right| \wedge \lambda \right) \leq \frac{1}{g(\lambda)} E g \left( \left| \frac{S_k - a_k}{b_k} \right| \right) \\ &\leq K_1 (\log_+ \log_+ \lambda)^{-(1+\delta)} = K_1 \left( \log_+ \log_+ \frac{b_l}{b_k} \right)^{-(1+\delta)}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

gde je  $K_1 = K_1(K)$  konstanta. Ako je  $1 < b_l/b_k \leq a_0$  onda postoji dovoljno veliki broj  $K_2$  tako da važi

$$1 \leq K_2 \left( \log_+ \log_+ \frac{b_l}{b_k} \right)^{-(1+\delta)}. \quad (7.3)$$

Neka je  $A = \max\{K_1, K_2\}$ , tada na osnovu (7.2) i (7.3) za svako  $1 \leq k < l$  važi

$$E(|f_l(X_1, \dots, X_l) - f_{k,l}(X_{k+1}, \dots, x_l)| \wedge 1) \leq A \left( \log_+ \log_+ \frac{b_l}{b_k} \right)^{-(1+\delta)} \quad (7.4)$$

odakle sledi da jesu ispunjeni uslovi teoreme 18 za  $c_k = b_k$ . Ako pretpostavimo dodatno da važi i

$$b_l/b_k \geq C(l/k)^\gamma \quad (1 \leq k < l) \quad (7.5)$$

za neke konstante  $C > 0$  i  $\gamma > 0$ , onda desnu stranu nejednakosti (7.4) možemo zameniti sa  $A(\log_+ \log_+(l/k))^{-(1+\delta)}$  i tada važe uslovi teoreme 18 za  $c_k = k$ . U tom slučaju za težinske koeficijente važi  $d_k \sim c_k^{-1}$ , gde je  $c$  neka konstanta. Otuda dobijamo

**Teorema 21** *Neka su  $X_1, X_2, \dots$  nezavisne slučajne promenljive,  $S_n$  njihova  $n$ -ta parcijalna suma i neka je  $(S_n - a_n) b_n \xrightarrow{D} G$ , gde je  $G$  neka funkcija raspodele, a  $(a_n)$  i  $(b_n)$  realni nizovi za koje važi  $b_n \uparrow \infty$ ,  $b_{n+1}/b_n = O(1)$ . Ako nejednakost (7.1) važi za neke konstante  $\delta > 0$  i  $K > 0$ , tada važi*

$$(\forall x \in C_G) \quad \frac{1}{D_N} \sum_{k=1}^N d_k I \left\{ \frac{S_k - a_k}{b_k} < x \right\} = G(x) \quad (s.s.) \quad (7.6)$$

gde su  $d_k$  i  $D_k$  definisani na sledeći način

$$d_k = \log \left( \frac{b_{k+1}}{b_k} \right), \quad D_n = \sum_{k=1}^n d_k.$$

Ako niz  $(b_n)$  zadovoljava i uslov (7.5) onda (7.6) važi za  $d_k = 1/k$  i  $D_N = \log N$ .

## 7.2 Maksimalna statistika poretka

Neka je  $X_1, X_2, \dots$  niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina i neka su  $(a_n)$  i  $(b_n)$  realni nizovi. Ako postavimo  $c_k = k$  i

$$f_l(x_1, \dots, x_l) = a_l \left( \max_{i \leq l} x_i - b_l \right),$$

$$f_{k,l}(x_{k+1}, \dots, x_l) = a_l \left( \max_{k+1 \leq i \leq l} x_i - b_l \right),$$

onda će uslovi teoreme 17 biti ispunjeni. Pre nego što dokažemo prethodnu tvrdnju, dokažimo prvo sledeće tvrđenje.

**Lema 7** Za svaku funkciju raspodele  $F$  i svaku neopadajuću funkciju  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  važi sledeća nejednakost

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(F(x)) dF(x) \leq \int_0^1 \psi(t) dt.$$

*Dokaz:* Neka je  $F^{-1}(t) = \sup\{x : F(x) \leq t\}$  i  $U$  slučajna veličina koja ima uniformnu raspodelu na intervalu  $[0, 1]$ . Tada za svako  $t \in (0, 1)$  važi  $F(F^{-1}(t)) \leq t$  i slučajna veličina  $Y = F^{-1}(U)$  ima funkciju raspodele  $F$ , pa važi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(F(x)) dF(x) &= E\psi(F(Y)) = E\psi(F(F^{-1}(U))) \\ &\leq E\psi(U) = \int_0^1 \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Vratimo se sada na uslove teoreme 17 i posmatrajmo razliku funkcionala

$$f_l(X_1, \dots, X_l) - f_{k,l}(X_{k+1}, \dots, X_l).$$

Primetimo da je prethodni izraz različit od nule samo u slučaju kada važi

$$\max_{1 \leq i \leq k} X_i > \max_{k+1 \leq i \leq l} X_i. \quad (7.7)$$

Odredimo sada verovatnoću događaja (7.7). Neka je  $F$  funkcija raspodele slučajne promenljive  $X_1$  a  $H_1$  i  $H_2$  funkcije raspodela slučajnih veličina koje se javljaju u izrazu (7.7) tim redom. Tada je  $H_1(x) = (F(x))^k$  i  $H_2(x) = (F(x))^{l-k}$  pa koristeći lemu 7 važi

$$\begin{aligned} P \left( \max_{1 \leq i \leq k} X_i > \max_{k+1 \leq i \leq l} X_i \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(x) dH_1(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)^{l-k} k F(x)^{k-1} dF(x) \\ &\leq \int_0^1 kt^{l-1} dt = k/l. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Na osnovu toga dobijamo da je

$$E(|f_l(X_1, \dots, X_l) - f_{k,l}(X_{k+1}, \dots, X_l)| \wedge 1) \leq k/l \quad (7.9)$$

stoga važi sledeća teorema

**Teorema 22** Neka je  $X_1, X_2, \dots$  niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina i neka je  $M_k = \max_{i \leq k} X_i$ . Ako za neke nizove realnih brojeva  $(a_n)$  i  $(b_n)$  i neku funkciju raspodele  $G$  važi

$$a_k(M_k - b_k) \xrightarrow{D} G$$

onda za svako  $x \in C_G$  važi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} I\{a_k(M_k - b_k) < x\} = G(x) \quad (s.s.).$$

Primetimo da je uslov jednake raspodeljenosti slučajnih veličina korišćen samo u dobijanju nejednakosti (7.8). Takođe, primetimo da se desna strana nejednakosti (7.8) može zameniti sa  $C(k/l)$  za neku konstantu  $C$  a da uslovi teoreme 17 i dalje ostanu ispunjeni. Ispostavlja se da tako dobijena nejednakost važi ako je za svako  $l \geq 1$  i svaku permutaciju  $\{i_1, i_2, \dots, i_l\}$  skupa  $\{1, 2, \dots, l\}$

$$P(X_{i_1} \geq \max\{X_{i_2}, \dots, X_{i_l}\}) \leq C/l. \quad (7.10)$$

Jedna od mogućnosti za koju je prethodni uslov ispunjen je da su slučajne veličine  $X_1, X_2, \dots$  neprekidne i da postoji funkcija raspodele  $F$  i pozitivne konstante  $\gamma_1 \leq 1$  i  $\gamma_2$  tako da za svako  $i \geq 1$  važi

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \gamma_1(1 - F(t)) \leq P(X_i \geq t) \leq \gamma_2(1 - F(t)) \quad (7.11)$$

Zaista, ako označimo sa  $F_i$  označimo funkciju raspodele veličine  $X_i$ , koristeći lemu 7 i izraz (7.11) dobijemo da za verovatnoću u (7.10) važi

$$\begin{aligned} P(X_{i_1} \geq \max\{X_{i_2}, \dots, X_{i_l}\}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_{i_1}(x)) d \left( \prod_{r=2}^l F_{i_r}(x) \right) \\ &\leq \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F(x)) d \left( \prod_{r=2}^l F_{i_r}(x) \right) = \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \prod_{r=2}^l F_{i_r}(x) \right) dF(x) \\ &\leq \gamma_2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \gamma_1(1 - F(x)))^{l-1} dF(x) \leq \gamma_2 \int_0^1 (1 - \gamma_1(1 - u))^{l-1} du \\ &\leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} l^{-1} = C/l \end{aligned}$$

Pogledajmo sada još jedan primer gde uslov (7.9) nije ispunjen ali i dalje važe uslovi teoreme 17. U ovom slučaju slučajna veličina  $X_k$  ima funkciju raspodele  $F(x)^{c_k - c_{k-1}}$  gde je  $F(x)$  neka fiksirana funkcija raspodele i  $(c_k)$

rastući niz realnih brojeva gde je  $c_0 = 0$  i  $c_1 \geq 1$ . U ovom slučaju funkcije raspodela  $H_1(x)$  i  $H_2(x)$  slučajnih veličina  $\max\{X_1, \dots, X_k\}$  i  $\max\{X_{k+1}, \dots, X_l\}$  su redom  $F(x)^{c_k}$  i  $F(x)^{c_l - c_k}$ , odakle sledi da za verovatnoću u relaciji (7.8) važi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_2(x) dH_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)^{c_l - c_k} c_k F(x)^{c_k - 1} dF(x) \leq c_k / c_l,$$

gde smo za dobijanje poslednje nejednakosti ponovo koristili lemu 7. Na osnovu prethodnog važi sledeća teorema koja predstavlja proširenje teoreme 22.

**Teorema 23** *Neka su  $X_1, X_2, \dots$  nezavisne slučajne veličine i neka je raspodela slučajne veličine  $X_k$  data sa  $F(x)^{c_k - c_{k-1}}$  gde je  $(c_k)$  rastući niz realnih brojeva tako da važi  $c_0 = 0, c_1 \geq 1, c_n \rightarrow \infty$  i  $c_{n+1}/c_n = O(1)$ . Neka je  $M_k = \max\{X_1, \dots, X_k\}$  i pretpostavimo da važi*

$$a_k(M_k - b_k) \xrightarrow{D} G$$

za neke realne nizove  $(a_n)$  i  $(b_n)$  i neku funkciju raspodele  $G$ . Neka je

$$d_k = \log(c_{k+1}/c_k) \quad i \quad D_n = \sum_{k=1}^n d_k$$

onda za svako  $x \in C_G$  važi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k=1}^N d_k I\{a_k(M_k - b_k) < x\} = G(x) \quad (s.s.)$$

### 7.3 Empirijska funkcija raspodele

Neka je  $X_1, X_2, \dots$  niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina sa zajedničkom neprekidnom funkcijom raspodele  $F$ . Empirijsku funkciju raspodele  $F_n$  za uzorak  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  iz raspodele  $F$  definišemo na sledeći način

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I\{X_k < x\}.$$

Uslovi teoreme 17 su ispunjeni za  $c_k = k$  i

$$f_l(x_1, \dots, x_l) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{i=1}^l (I\{X_i < x\} - F(x)) \right|,$$

$$f_{k,l}(x_{k+1}, \dots, x_l) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{i=k+1}^l (I\{X_i < x\} - F(x)) \right|.$$

Ako označimo

$$T_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{i=1}^k (I\{X_i < x\} - F(x)) \right|$$

dobijamo sledeću nejednakost

$$E|f_l(X_1, \dots, X_l) - f_{k,l}(X_{k+1}, \dots, X_l)| \leq E|T_k/\sqrt{l}| \leq C\sqrt{k/l}$$

gde je  $C$  neka konstanta. Poslednja nejednakost sledi iz činjenice da je  $E|T_k/\sqrt{k}|$  ograničeno. Takođe poznata teorema Kolmogorova tvrdi da

$$f_k(X_1, \dots, X_k) \xrightarrow{D} G,$$

gde je  $G$  funkcija raspodele definisana sa

$$G(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2 x^2}.$$

Na osnovu teoreme 17 sledi

**Teorema 24** *Neka je  $X_1, X_2, \dots$  niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina sa funkcijom raspodele  $F$  i neka je  $F_n$  odgovarajuća empirijska funkcija raspodele. Ako je*

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

*Kolmogorovljeva statistika tada za svako  $x \in \mathbb{R}$  važi*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} I\{\sqrt{k} D_k < k\} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2 x^2} \quad (s.s.)$$

## 7.4 Vremena povratka

Neka su  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots$  uzastopni trenuci povratka u početni položaj dvodimenzione slučajne šetnje i neka je  $X_n = \tau_n - \tau_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Jasno je da je  $(X_n)$  niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina. Takođe, pokazano je da za slučajnu veličinu  $X_1$  važi

$$P\{X_1 > t\} \sim \frac{c}{\log t}, \quad t \rightarrow \infty \quad (7.12)$$

Ako postavimo  $M_k = \max_{i \leq k} X_i$  na osnovu (7.12) sledi da

$$\frac{1}{k} \log M_k \xrightarrow{D} H$$

gde za  $H$  važi

$$H(x) = \begin{cases} e^{-c/x} & \text{za } x > 0 \\ 0 & \text{za } x \leq 0 \end{cases} \quad (7.13)$$

Sada za  $c_k = k$  i

$$f_l(x_1, \dots, x_l) = \frac{1}{l} \log \max_{i \leq l} x_i, \quad f_{k,l}(x_{k+1}, \dots, x_l) = \frac{1}{l} \log \max_{k+1 \leq i \leq l} x_i \quad (7.14)$$

možemo na niz  $(X_n)$  primeniti teoremu 17. Primetimo da se uslov (7.14) može proveriti na isti način kao u primeru maksimalne statistike poretka. Dakle, dobijamo da za svako  $x \in \mathbb{R}$  važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} I \left\{ \frac{1}{k} \log M_k \leq x \right\} = H(x) \quad (s.s.)$$

Kako važi  $M_k \leq \tau_k \leq kM_k$  to sledi da

$$\frac{\log \tau_k - \log M_k}{k} \rightarrow 0 \quad (s.s.)$$

Na osnovu prethodnog sledi sledeća teorema

**Teorema 25** *Neka su  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots$  uzastopni trenuci povratka u početni položaj dvodimenzione slučajne šetnje. Tada za svako  $x \in \mathbb{R}$  važi*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} I \left\{ \frac{1}{k} \log \tau_k \leq x \right\} = H(x) \quad (s.s.)$$

gde je  $H$  funkcija raspodele definisana sa (7.13).

Primetimo sada da su jedine osobine prethodno definisanog niza  $(X_n)$  koje smo koristili uslov (7.12) i to što je  $(X_n)$  niz pozitivnih slučajnih veličina. To znači da za svaki niz nezavisnih i jednako raspodeljenih pozitivnih slučajnih veličina  $(X_n)$  za koji je ispunjen uslov (7.12) za svako  $x \in \mathbb{R}$  važi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} I \left\{ \frac{1}{k} \log S_k \leq x \right\} = H(x) \quad (s.s.)$$

gde je  $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ .

## Reč zahvalnice

Posebnu zahvalnost dugujem kolegi i prijatelju Bogdanu Oluiću koji je svojim zalaganjem doprineo da neki delovi ovog rada budu jasnije i detaljnije opisani.

---

## Literatura

- [1] ISTVÁN BERKES, ENDRE CSÁKI, A universal result in almost sure central limit theory, Hungarian Academy of Sciences 2001
  - [2] PETER SCHATTE, *On Strong Versions of the Central Limit Theorem*, Frieberg 1988
  - [3] GUNNAR A. BROSAMLER, An almost everywhere central limit theorem, The University of British Columbia 1988
  - [4] PAVLE MLADENović, *Verovatnoća i statistika*, Beograd 2008
  - [5] SIEGFRIED HÖRMANN, On the universal A.S. central limit theorem Graz University of Tehnology 2007
  - [6] I. FAHRNER, U. STADTMÜLLER, On almost sure max-limit theorems University of Ulm 1998
  - [7] M. LIFSHITS, On the difference between CLT and ASCLT Zapiski Seminarov POMI 2000
-