АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

ТАЧКЕ, ПРАВЕ, КРУГА

И

КОНИЧНИХ ПРЕСЕКА

НАПИСАО

Др. БОГДАН ГАВРИЛОВИЋ,

професор Велике Школе

ИЗДАЊЕ КР. СРП. ДРЖ. ШТАМПАРИЈЕ

БЕОГРАД,
СРПСКО КРАЉЕВСКА ШТАМПАРИЈА
1896.

САВИ ТЕКЕЛИЈИ

Благодаран писац.

РЕЧ ДВЕ О ОВОМ ДЕЛУ.

Ову књигу писао сам за оне који хоће да се упознају са свима старим и новим основним начелима и методима пунктуалне и тангенцијалне геометрије. Нарочито сам пазио на то, да резултате који се у чистој геометрији добивају по познатом начелу *geometrica geometrice*, што елегантнијим аналитичким путем изведем. По неке од тих резултата сам доказао сâм, а махом сам доказе прикупљао по класичним делима, важнијим мемоарима и мањим расправама што изађоше у овоме веку после основних радова Карнотових, Монжевих, Понселетових, Жергонових, Мебијусових, Штајнерових и Шалових. Извори су ми у главном били Аронхолд, Гордан, Келе, Кезе, Клебш, Салмон, Пенвен и Хесе.

Најважније начело новије геометрије — начело корелације — изложио сам готово само по методу пунктуалних и тангенцијалних координата, али сам поред тога у нарочитом једном Одељку показао како се то начело примењује у геометрији и по Понселетову методу узајамних полара.

По садржају може се видети која се питања нарочито расправљају у овој књизи. Но ја ћу поменути да сем метода пунктуалних и тангенцијалних координата и метода узајамних полара у овој књизи има и ових метода: метод скраћеног бележења, метод идентичности, метод пројекцијâ и метод инваријаната. Сем тога има и један одељак о анхармонијским особинама коничних пресека.

Примера има много. Неки од њих су сасвим израђени, неки су дати с потребним напоменама, а неки и без ових.

Онај који буде мислио и о новим терминима који се јављају у овоме делу, нека има у виду прво и прво то, да се научни термини тешко стварају и друго, да се и за најбоље термине не може рећи да су добри с тога, што се научна терминологија не може стварати посебно, већ само укупно. Тако мисле сви који имају правилан суд у том питању.

На крају рећи ћу још то, да ћу бити веома задовољан ако се ово моје дело по обради својој буде могло сматрати као допуна и наставак Хесеове Аналитичне Геометрије тачке, праве и круга.

Београд
на Св. Саву 1896. год.

Др. Богдан Гавриловић
професор Велике Школе.

САДРЖАЈ

(Штогод је означено крстом није за почетнике.)

КЊИГА ПРВА

Одељак четврти. — Еквације некојих важнијих кривих.

КЊИГА ДРУГА

ПРАВА. ТАЧКА.

Одељак први. — Еквације праве.

Одељак други. — Проблеме.

$^+$ Трилинеарне координате тачке.

$^+$ Трипунктуалне тангенцијалне координате. Трансформација координатних система.

+ Одељак четврти. — Анхармонијска или двојна напремица. — Пројективни низови и прамени. — Инволуција.

КЊИГА ТРЕЋА

КРУГ

Одељак први. — Еквације круга.

Одељак други. — Проблеме.

Тангента. Нормала и полара.

Тангенцијална еквација круга. Проблеме.

Одељак трећи. — Системе кругова. — Радикална осовина.

Заједничке тангенте. Осовине сличности.

Инверсне слике круга.

КЊИГА ЧЕТВРТА

Одељак први. — Разредба кривих другога реда.

Одељак други. — Средиште, асимптоте, дијаметри и осовине.

Одељак трећи. — Редукција опште еквације другога степена.

Одељак четврти. — Тангента и полара.

Жиже и управнице.

Заједничке секанте, прамени и мреже кривих другога реда.

Одељак пети. — Криве друге врсте.

КЊИГА ПЕТА

ГЛАВНИЈЕ ОСОБИНЕ ЕЛИПСЕ, ХИПЕРВОЛЕ И ПАРАБОЛЕ.

Одељак први. — О елипси.

Одељак други. — О хиперболи.

Тангента и нормала.

Дијаметри.

Жиже и управнице.

Одељак трећи. — О параболи.

Тангента и нормала.

Дијаметри.

Жиже и управнице.

Одељак четврти. — Конфокални конични пресеци.

КЊИГА ШЕСТА

Одељак први. — Различити облици скраћених еквација коничних пресека.

Одељак други. — Општа еквација другог степена.

Одељак трећи. — Метод идентичности.

Одељак четврти. — Метод узајамних полара.

Одељак пети. — Анхармонијске особине коничних пресека.

Одељак шести. — Метод пројекција̑.

Одељак седми. — Инваријанте и коваријанте коничних пресека.

Пунктуалне и тангенцијалне мреже.

ERRATA

Стр. 3. ред 22. озго место »назива зе« треба назива се. — Стр. 18. ред 13. оздо место „међу тиме« треба међу тим. -- Стр. 32. ред 14. озго место »паралелие« треба паралелне. — Стр. 61. ред 2. оздо место »Цисојида« треба Строфојида. — Стр. 69. ред 4. озго место »Паскалов пуж подера круга« треба круг подера Паскалова пужа. — Стр. 89. ред 4. оздо место »нормала са p« треба нормала p. — Стр. 118. ред 13. озго у трећој врсти детерминанте место y_1 треба y_2. — Стр. 135. ред 10. озго место k_8 треба k_3. — Стр. 153. ред 6. оздо место »онда су праве паралелне« треба онда се праве поклапају. — Стр. 271. ред 9. озго место »они« треба оне. — Стр. 353. ред 17. озго место (x, y') треба (x', y'). — Стр. 392. ред 8. оздо место »Jakobi« треба Jacobi. — Стр. 529. ред 1. оздо место две тачке : треба једна тачка. — Стр. 642. ред 3. оздо место »хиперболу« треба асимптоте. —

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

У *Аналитичној Геометрији* испитују се особине геометријских слика алгебарском анализом еквацијâ.

Оснивач аналитичко-геометријске дисциплине је **Descartes (Cartesius)**.

Аналитична Геометрија дели се на два дела, на *аналитичну геометрију равни* и *аналитичну геометрију простора*. Прва се бави о геометријским сликама што леже у једној равни, а друга о сликама у простору.

Напомена. Основно дело Декартово изишло је 1637. год. под натписом *Géométrie.* За ово дело каже **Marie** (*Histoire des Sciences mathém. et phys.* t. IV. p. 30.) ово: La *Géométrie* de Descartes n' est pas, comme on pense bien, un Traité de Géométrie analytique; c' est un simple aperçu de ce que va pouvoir devenir cette branche de la Science, dès que l' idée de l' inventeur aura été comprise etc. — Поред Декартове Геометрије вредно је поменути још једну расправу у којој је изнесена основна мисао о Аналитичној Геометрији. Ту расправу написао је, не зна се ни данас кад, генијални **Fermat** под натписом *Ad locos planos et solidos isagoge.* Има их који тврде да је писана још пре 1637. год. Знаменити професор на универзитету у Хајделбергу **М. Кантор** мисли да поменута расправа Ферматова „у битним стварима“ далеко одмиче од Декартове Геометрије. „Nirgend hat Descartes die Herstellung der Gleichung eines geometrischen Ortes so klar beschrieben, wie Fermat gleich am Anfange der Isagoge es thut.“ (**M. Cantor.** *Geschichte der Mathematik.* II. p. 745.). Међу онима који су покушавали да примене Алгебру на Геометрију био је и **Марин Геталдић**, Србин из Дубровника. (**E. Gelcich.** *Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des* **Marino Gethaldi,** *Patrizier von Ragusa aus dem Jahre 1630.* Zeitschr. Math. Phys. XXVII. Suppl. p. 191—232.).

РАВНА ГЕОМЕТРИЈА

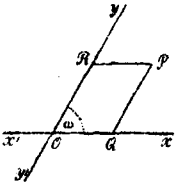
КЊИГА ПРВА

ОДЕЉАК ПРВИ

Координате и координатне системе

1. Положај неке тачке опредељује се у Аналитичној Геометрији бројевима; ти бројеви називају се *координате* те тачке.

Између *координатних система* поменућемо на првом месту *паралелну* или *Декартову координатну систему*. Та система је веома проста; она се састоји из две сталне, одређене праве $x'x$ и $y'y$ које се у тачци O секу под углом ω. Помоћу тог простог геометријског апарата определићемо на овај начин положај неке тачке P која се налази у истој оној равни, у којој се налазе и сталне праве $x'x$ и $y'y$. Повући ћемо из те тачке две праве PQ и PR паралелно са датим правима Тачка Q је пројекција тачке P на праву $x'x$, а тачка R пројекција њезина на праву $y'y$. Положајем тачке P потпуно су опредељене тачке R и Q, а са њима и дужи RP и QP: оне су на сталним правима одмерене дужима OQ и OR. С друге стране види се да је и обратно, тачка P потпуно



Сл. 1.

опредељена својим двема пројекцијама Q и R: она пада на четврто теме оног паралелограма, који је опредељен странама OQ и OR.

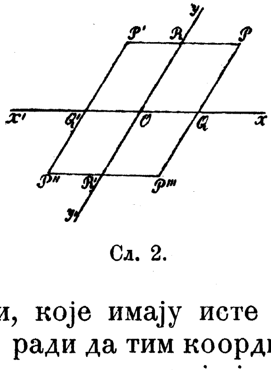
Дужи које одмеравамо на правој $x'x$ бележе се у опште са x, а дужи које меримо на правој $y'y$ са y. Ако бисмо узели н. пр. да је $RP = a$, $QP = b$, било би за тачку P

$$x = a, \quad y = b.$$

Ове две еквације аналитички опредељују тачку P; то су *еквације тачке* P.

Праве $x'x$ и $y'y$ зову се *координатне осовине*; једна између њих — $x'x$ — је *осовина* x или *осовина апсциса*, а друга — $y'y$ — *осовина* y или *осовина ордината*. Тачка O у којој се осовине секу зове се *почетак координатâ*; за њу је $x = o$, $y = o$. Дуж RP је *апсциса*, а дуж QP *ордината* тачке P. Обе заједно зову се *координате* тачке P. Координатна система је *ортогонална* кад је *угао координатне системе* $\omega = \sphericalangle xOy = 90^0$; у сваком другом случају је система *коса (локсогонална)*. Координатне осовине деле раван на четири *поља*; у ортогоналној системи зову се та поља *квадрантима*. Разломљена линија OQP назива зе *контура координата* тачке P.

2. Еквацијама $x = a$, $y = b$ није положај тачке *потпуно* опредељен у равни: има на име још три тачке



Сл. 2.

P', P'', P''' у равни, које имају исте координате као и тачка P. Ако смо ради да тим координатама буде опредељена *само једна тачка*, онда је јасно да ћемо морати водити рачун и *о правцу* тих координата. Ми ћемо на координатним осовинама узети два *противна* правца — један од њих ће бити *позитиван*, а други *негативан*. На осовини апсциса биће позитиван н. пр. правац Ox, а на осовини ордината н. пр. правац Oy; према томе су правци Ox' и Oy' негативни. Апсцисе OQ и OQ' (ординате OR и OR') су н. пр. по апсолутној величини једнаке, али се *алгебарски* разликују — једна је апсциса (ордината) позитивна, а друга негативна. Оне апсцисе и ординате су позитивне (негативне) које су одмерене у позитивном (негативном) правцу координатних осовина. По томе правилу је јасно, да се координате поменутих четирију тачака могу овако написати.

	x	y
P	$+a$	$+b$
P'	$-a$	$+b$
P''	$-a$	$-b$
P'''	$+a$	$-b$

Кад се дакле узме у рачун и правац координата, онда се види ово двоје: 1-во, *да је свака тачка аналитички опредељена двема еквацијама* $x = a$, $y = b$; 2-го, *да две еквације поменутог облика опредељују једну једину тачку у равни.*

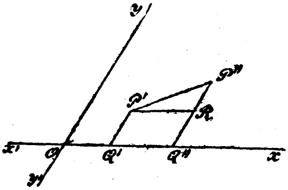
Ординате свију тачака осовине x су равне нули: $y = o$; апсцисе свију тачака осовине y су равне нули: $x = o$.

Еквације $x = a$, $y = b$ бележе се често симболом (a, b); према томе је тачка (a, b) аналитички опредељена еквацијама $x = a$, $y = b$.

3. *Наћи раздаљину* r *двеју тачака* (x', y'), (x'', y'').

Нека су P' и P'' дате две тачке; ординате њихове су $P'Q'$ и $P''Q''$. Кад би дуж $P'P''$ била паралелна са осовином x, било би $r = P'P'' = Q'Q'' = x'' - x'$; кад је

$P'P''$ паралелно са осовином y, онда је $r = P'P'' = y'' - y$.. Кад $P'P''$ није паралелно ни са једном, ни са другом осовином, онда ћемо дужину r те дужи наћи из троугла $P''P'R$



Сл. 3.

Ако са ω означимо угао координатне системе, биће

$$\sphericalangle\ P'RP'' = 180^\circ - \omega\ ;$$

услед тога је

$$r^2 = \overline{P'P''}^2 = \overline{P'R}^2 + \overline{P''R}^2 - 2\,P'R \cdot P''R \cos\ (180^\circ - \omega)\ ;$$

но како је

$$P'R = OQ'' - OQ' = x'' - x'.$$

$$P''R = P''Q'' - P'Q' = y'' - y',$$

биће и

$$r^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$$
$$+ 2\,(x'' - x')(y'' - y') \cos \omega. \qquad (1)$$

Кад би тачка P'' лежала у почетку координатне системе, било би $x'' = o$, $y'' = o$; у том случају би било

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos \omega \qquad (2)$$

Кад је система ортогонална биће изрази (1) и (2) много простији. У тој системи је на име $\omega = 90^\circ$, т. ј. $\cos\omega = o$; раздаљина двеју тачака (x', y'), (x'', y'') опредељена је, дакле, у ортогоналној системи релацијом

$$r^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2, \qquad (3)$$

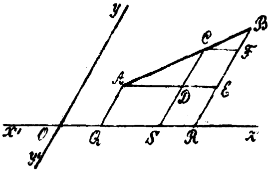
а раздаљина тачке (x', y') од почетка координатне системе релацијом

$$r^2 = x'^2 + y'^2. \qquad (4)$$

Из горњих релација види се да је раздаљина двеју тачака опредељена квадратним кореном јéдног одређеног алгебарског израза. Тај корен може имати два знака. Између тих двају знакова треба одабрати позитиван, кад је реч само о апсолутној величини дужи $P'P''$.

4. *Наћи координате тачке C, која дели дуж AB по датој напремици $m : n$.*

Нека су x', y' и x'', y'' координате тачака A и B, а x, y координате тачке C. Ако потегнемо ординате AQ, BR, CS биће



Сл. 4.

$$m : n = AC : CB = QS : SR\ ;$$

како је

$$QS = x - x',\ SR = x'' - x,$$

биће и

$$m : n = x - x' : x'' - x$$

На исти начин бисмо добили да је

$$m : n = y - y' : y'' - y.$$

Из ових двеју сразмера добићемо непосредно координате тачке C; ево тих координата:

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}, \quad y = \frac{my'' + ny'}{m + n}. \qquad (5)$$

Кад би тачка *C* лежала на правој ван ограничене дужи *AB*, кад би она, као што се то каже, *споља делила дуж AB*, онда бисмо имали ове сразмере:

$$m : n = x - x' : x - x'',$$

$$m : n = y - y' : y - y'',$$

а из ових је

$$x = \frac{mx'' - nx'}{m - n}, \quad y = \frac{my'' - ny'}{m - n}. \qquad (6)$$

5. Обрасци (5) и (6) разликују се само знаком параметра *n*. То се даје веома просто протумачити. *Кад тачка C дели дуж AB*, *онда је* $AC + CB = AB$ а по томе се види, да *знаци одсечака AC и CB зависе од положаја тачке C*: *одсечци су истога знака кад се тачка C налази на ограниченој дужи AB*, *а различитог знака кад се тачка C налази на неограниченом делу праве AB*; кад је један према *одређеном правцу* позитиван, други је према њему негативан. *У првом случају мора количник* $m : n = \lambda$ *имати позитивне*, *у другом негативне вредности*, јер је по дефиницији $\lambda = AC : CB$.

Поред тога види се из горњих образаца и то, *да ће свакој тачци праве AB одговарати једна једина вредност параметра* λ, и обратно, *да ће сваком посебном вредношћу параметра* λ *бити опредељена само једна једина тачка праве AB*. Кад се дакле λ мења од $-\infty$ до нуле и од нуле до $+\infty$, онда ће и тачка (x, y) непрестано мењати свој положај на правој линији. Кад је $\lambda = o$ $(m = o)$, онда тачка *C* пада на тачку *A*; кад је $\lambda = \infty$ $(n = o)$, онда тачка *C* поклапа тачку *B*. Кад је $\lambda = 1$ $(m = n)$ онда тачка (x, y) лежи на средини дужи AB, т. ј. кад се параметар λ мења од нуле до $+1$, онда се тачка C креће од тачке A до тачке која полови дуж AB; кад се λ мења од $+1$ до $+\infty$, онда се тачка C креће од средине дужи AB до тачке B. Напротив, кад се параметар мења од 0 до -1, кретаће се тачка C ван ограничене дужи по правој од тачке A до тачке, која је аналитички дата еквацијама $x = \infty$, $y = \infty$; та тачка лежи у бескрајности јер су координате којима је она определена бескрајне. Мења ли се λ и даље, од -1 до $-\infty$, то ће се тачка C кретати од тачке што на правој лежи у бескрајности до тачке B, а тим је у осталом завршен циклус свију вредности, које λ у опште може имати. Узмемо ли на ум да до тачке ∞ можемо доћи идући у два различита правца — мењањем параметра од 0 до -1 или од $-\infty$ до -1 — то ће нам бити јасно ово: *свака права се може сматрати и као једна специјална крива која је у бескрајности затворена.*

Но осим тога јасно је још нешто из овог што досад рекосмо. Свакој вредности параметра λ одговара само једна тачка. Тачку ∞ добијамо *само* кад је $\lambda = -1$, т. ј. *свака права има (аналитички) само једну једину тачку у бескрајности.*

Напомене. 1-во Ма која тачка дужи AB може се аналитички представити овим двема еквацијама:

$$x = \frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}.$$

2-го. Координате тачке у средини дужи AB су

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2}.$$

3-ће. Еквације

$$x = \frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}.$$

и
$$x = \frac{x'' + \lambda x'}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y'' + \lambda y'}{1 + \lambda}$$

представљају две тачке које у истој раздаљини леже од средине дужи AB.

6. Из овога што досад рекосмо види се, да се свака права може сматрати као један сасвим одређен *низ тачака (Punktreihe)*. Тачке тог низа су тако распоређене, да свакој тачци C која је на ограниченој дужи AB определена позитивном вредношћу параметра λ *одговара* само једна тачка D неограниченог дела праве линије — она, која је определена негативном вредношћу поменутог параметра; за те две тачке каже се да су *хармонијски коњуговане* према датим сталним тачкама A и B. Како тачка C дели дуж AB по напремици $AC : CB = m : n$, а тачка D по напремици $AD : DB = -m : n$, то се види да ће тачке C и D хармонијски делити дуж AB кад је

$$AC : CB = - AD : DB; \tag{7}$$

поред ове сразмере је међу тим и

$$CA : AD = - CB : BD$$

т. ј. *кад тачке C и D хармонијски деле дуж AB, онда и тачке A и B деле хармонијски дуж CD.*

Напишимо сад сразмеру (7) у овом облику:

$$AC \cdot BD + AD \cdot BC = o. \tag{8}$$

Из ове релације се види, да је алгебарски збир производа $AC \cdot BD$ и $AD \cdot BC$ раван нули; према томе ће ти

Сл. 5.

производи морати бити различитог знака; тачке C и D мораће дакле бити одвојене било тачком A, било тачком *B*, а то ће рећи, да су хармонијски парови одвојени једним елементом другог пара. Кад се један елеменат налази на ограниченом делу дужи, други се налази на неограниченом делу њезином; кад један полови изнутра дуж *AB*, други је полови споља т. ј. лежи у бескрајности. Приближује ли се један покретан елеменат ма којој од сталних тачака, то јој се у исто време и други приближује. Кад један од њих падне на једну од сталних тачака, пашће на њу и други. Покретни елементи ће се дакле само сусрести у сталним тачкама; чим се један од њих крене са сталне тачке, крenуће се одмах и други — један у једном, други у другом правцу.

Ако положај трију тачака *B*, *C*, *D* на правој определимо раздаљином тих тачака од четврте тачке *A*, моћи ћемо релацију (7) овако написати:

$$AC : AB - AC = AD : AD - AB,$$

а отуд је

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}. \qquad (9)$$

Ма којом између релација (7), (8) и (9) обележена је погодба под којом ће тачке *C* и *D* хармонијски бити коњуговане према тачкама *A* и *B* или обратно, тачке *A* и *B* према тачкама *C* и *D*. — У погодбеној релацији (9) зове се *AB* *хармонијска средина* дужи *AC* и *AD*.¹)

7. Свака између датих тачака *A*, *B*, *C*, *D* има своју паралелну пројекцију *A'*, *B'*, *C'*, *D'*. Ове последње —

---

¹) Ако узмемо на једној правој *n* тачака *A*, *B*, *C*, · · · и ако одаберемо на њој још једну тачку *M* тако, да је реципрочна вредност раздаљине *OM* те тачке од неке сталне тачке *O* равна аритметичкој средини реципрочних вредности раздаљина *OA*, *OB*, *OC*, · · · т. ј. тако, да је

$$\frac{n}{OM} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} + \cdots,$$

онда се по **Mac-Laurin-у** *(De linearum geometricarum proprietatibus etc.)* раздаљина *OM* зове *хармонијска средина* раздаљина *OA*, *OB*, *OC*, · · Тачку *M* зове **Poncelet** *(Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques)* *средиштем хармонијских средина* тачака *A*, *B*, *C*, · · · према сталној тачци *O*. (**Chasles**. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*).

две и две — биће хармонијски коњуговане кадгод су и дате тачке такве, јер је $AC : CB = A'C' : C'B'$, а $AD : DB = A'D' : D'B'$; кадгод постоји погодбена ралација (8), постојаће дакле и релација

$$A'C' \cdot B'D' + A'D' \cdot B'C' = o \qquad (10)$$

и обратно, кадгод постоји ова релација постојаће и релација (8).

Имајући у виду релацију (10), моћи ћемо веома лако наћи аналитичку погодбу под којом ће тачке A, B, C, D хармонијски делити једну праву.

Нека су (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) координате поменутих четирију тачака. Ако пројицирамо те тачке на једну осовину, н. пр. на осовину x, биће

$$A'C' = x_3 - x_1, \quad A'D' = x_4 - x_1,$$

$$B'C' = x_3 - x_2, \quad B'D' = x_4 - x_2.$$

По томе се види да се релација (10) може написати у овом облику:

$$(x_3 - x_1)\,(x_4 - x_2) + (x_4 - x_1)\,(x_3 - x_2) = o$$

или

$$x_1\,x_2 + x_3\,x_4 = \frac{1}{2}\,(x_1 + x_2)\,(x_3 + x_4). \quad (11)$$

Иста таква релација постоји и између ордината датих тачака.

Ако је апсциса тачке O што полови дуж AB x, биће $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; последња еквација може се дакле написати у овом облику:

$$(x_1 - x)\,(x_2 - x) + (x_3 - x)\,(x_4 - x) = o,$$

а по овој релацији се види да је

$$O'A' \cdot O'B' + O'C' \cdot O'D' = o\,;$$

но како тачка O' (пројекција тачке O) полови дуж $A'B'$, то је јасно да су дужи $O'A'$ и $O'B'$ једнаке а противно означене, па је с тога по последњој еквацији

$$O'C' \cdot O'D' = \overline{O'A'}^2 = \overline{O'B'}^2.$$

Ово је и опет једна од оних погодаба које постоје, кад тачке A', B', C', D' хармонијски деле осовину x; те тачке су међу тим пројекције датих тачака, па ће према томе у исто време постојати и ова погодба:

$$OC \cdot OD = \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2, \qquad (12)$$

то јест, *кад су тачке A и B хармонијски коњуговане према тачкама C и D, онда је производ раздаљина тачака C и D од средине O тачака A и B раван квадрату половине дужи AB.* По себи се разуме, да ће и обратно, поред релације (12) поменуте четири тачке морати хармонијски делити праву.

Додатак. Узмимо да су раздаљине α и β, α' и β' тачака A и B, A' и B' од заједничког почетка корени квадратних еквација

$$ax^2 + 2hx + b = o, \quad a'x^2 + 2h'x + b' = o.$$

Врло је лако наћи погодбу, која постоји између коефицијената датих двеју еквација, кад су дате четири тачке хармонијски коњуговане.

Тачке A' и B' биће на име хармонијски коњуговане према тачкама A и B кад је (11)

$$2\,\alpha\beta + 2\,\alpha'\beta' = (\alpha + \beta)\,(\alpha' + \beta').$$

Но како је

$$\alpha\beta = \frac{b}{a}, \quad \alpha'\beta' = \frac{b'}{a'},$$

$$\alpha + \beta = -\frac{2h}{a}, \qquad \alpha' + \beta' = -\frac{2h'}{a'},$$

биће погодба коју тражимо ово:

$$ab' + a'b - 2hh' = o. \qquad (13)$$

Из ове погодбене релације види се уједно и то, да ће две тачке $ax^2 + 2hx + b = o$ које су хармонијски коњуговане и према пару тачака $a'x^2 + 2h'x + b' = o$ и према пару тачака $a''x^2 + 2h''x + b'' = o$, хармонијски делити и раздаљину оних двеју тачака, чије су раздаљине од заједничког почетка корени еквације

$$(a'x^2 + 2h'x + b') + \mu(a''x^2 + 2h''x + b'') = o$$

(у тој еквацији је μ један параметар који може имати какву му драго вредност); погодба

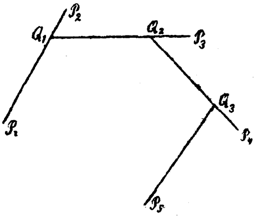
$$a(b' + \mu b'') + b(a' + \mu a'') - 2h(h' + \mu h'') = o$$

постоји на име кадгод је

$$ab' + a'b - 2hh' = o, \quad ab'' + a''b - 2hh'' = o.$$

8. *Наћи координате средишта сразмерних. раздаљина.*

Узмимо у равни систему од n тачака $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $\cdot\ \cdot\ \cdot$ $P_n(x_n, y_n)$ и уз њих на број n позитивних или негативних параметара m_1, m_2, $\cdot\ \cdot\ \cdot$ m_n. На правој P_1P_2 има једна једина тачка Q_1, која дуж P_1P_2 дели по датој напремици $m_2 : m_1$. Та тачка лежи или на ограниченом делу праве P_1P_2 (у овај мах су параметри m_1 и m_2 *истога* знака), или на неограниченом делу њезином (у овај мах су m_1 и m_2 *различитог* знака). Ту тачку Q_1 треба спојити са тачком P_3. На правој Q_1P_3 има једна једина тачка Q_2, која дели дуж Q_1P_3 по напремици $m_3 : m_1 + m_2$. На исти начин биће и на правој Q_2P_4 једна једина тачка Q_3, која ће дуж Q_2P_4 делити по напремици $m_4 : m_1 + m_2 + m_3$ и т. д. У системи тачака Q дошли бисмо тим путем најпосле до тачке Q_{n-1} која ће делити дуж Q_{n-2} P_n по напремици $m_n : m_1 + m_2 + \cdot \cdot \cdot + m_{n-1}$.



Сл. 6.

Тачка Q_{n-1} зове се *средиште сразмерних раздаљина.*[1]

Координате те тачке ћемо веома лако наћи. Ако су само (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), $\cdot \cdot \cdot$ (ξ_{n-2}, η_{n-2}), (ξ, η) координате тачака Q_1, Q_2, $\cdot \cdot \cdot$ Q_{n-2}, Q_{n-1}, биће најпре

$$\xi_1 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

за тим

$$\xi_2 = \frac{(m_1 + m_2)\,\xi_1 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

и т. д.

За ону тачку, дакле, коју ми тражимо је

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdot \cdot \cdot + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdot \cdot \cdot + m_n},$$

$$\eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdot \cdot \cdot + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdot \cdot \cdot + m_n}.$$

Ове обрасце можемо, ако хоћемо, написати и у овом облику:

---

[1] У системи од *n* материјалних тачака је та тачка *тежиште* системе.

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}.$$

Како координате ξ, η не зависе од распореда оних количина које се јављају у збировима $\Sigma m x$, $\Sigma m y$, Σm, то се види уједно и то, да положај средишта средњих раздаљина не зависи од реда којим се у низу поменутих тачака узастопце спајају поједине тачке.

Ако је збир параметара $m_1, m_2, \dots$ раван нули, $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = o$, онда је средиште (ξ, η) или неопредељено, или лежи у бескрајности на опредељеној правој. — Нека је на име Q_{n-2} средиште тачака P_1, P_2, $P_3, \dots P_{n-1}$; у том случају биће

$$Q_{n-2}\, Q_{n-1} : Q_{n-1}\, P_n = m_n : m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_{n-1} = -1,$$

а по томе се види ово: 1-во, ако тачка Q_{n-2} не поклапа тачку P_n, онда тачка Q_{n-1} лежи у бескрајности на правој $Q_{n-2}P_n$; 2-го, ако тачка Q_{n-2} пада на тачку P_n, онда тачка Q_{n-1} може бити ма која тачка у равни.

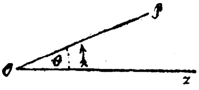
Напомена. Кад су параметри m једнаки, онда се средиште сразмерних раздаљина зове *средиштем средњих раздаљина*; координате његове су

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$\eta = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

9. **Поларне координате.** Положај тачке P можемо определити и у *поларној координатној системи*. Потегнимо у равни из сталне тачке O — *пола* — одређену, сталну полуправу Oz — *осовину*. Тачка P биће потпуно опредељена овим двема *поларним координатима*: раздаљином својом $\varrho = OP$ од пола системиног и углом θ који затвара права OP са осовином Oz.

Дуж $\varrho = OP$ зове се *потег (radius vector)*, а угао θ *поларни угао (амплитуда, аномалија)* тачке P. Све тачке што леже на периферији круга полупречника ϱ имају сталан потег, а променљив угао (овај се мења од 0 до 360°); све тачке полуправе OP, која је потегнута у правцу θ, имају сталан угао, а променљив потег (ϱ се мења

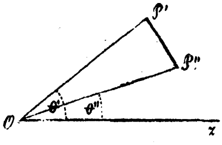


Сл. 7.

од 0 до $+\infty$). По томе се јасно види да ће ма која тачка $P(\varrho,\theta)$ по положају своме бити потпуно опредељена једним потегом који лежи између 0 и $+\infty$, и једним углом који лежи између 0 и $360°$. Кад је дакле реч само о одређивању положаја тачке P, онда је довољно мењати координате ϱ и θ само у *позитивном* правцу, а у поменутим границама: они поларни угли су позитивни, који постају кад се полуправа OP крене у правцу назначене стрелице са осовине Oz; они потези су позитивни, који су одмерени на полуправој којој је правац дат углом θ. Ми ћемо међу тим касније видети, да ће се ϱ и θ јављати и са негативним знаком; тај знак, кад га геометријски тумачимо, може се тицати *само правца*: они угли су негативни, који постају кад се полуправа OP крене са осовине Oz у противном правцу; они потези су негативни, који су одмерени у противном правцу на правој OP која је потегнута под углом θ из пола системиног.

10. *Треба наћи раздаљину* r *двеју тачака* (ϱ', θ'), (ϱ'', θ'').

Нека су P' и P'' дате две тачке. Потези њихови



Сл. 8.

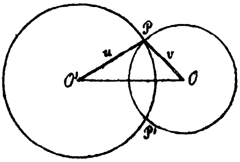
су OP' и OP''; угао који они затварају је $\theta' - \theta''$. Из троугла $P'OP''$ добивамо да је

$$r^2 = \overline{P'P''}^2 = \overline{OP'}^2 + \overline{OP''}^2 - 2OP' \cdot OP'' \cos(\theta' - \theta''),$$

па је према томе

$$r^2 = \varrho'^2 + \varrho''^2 - 2\varrho'\varrho'' \cos(\theta' - \theta'').$$

11. **Биполарне координате.** Узмимо две сталне тачке O и O', два пола. Положај неке тачке можемо определити раздаљинама њезиним u и v од датих полова O и O'. Те раздаљине зову се *биполарне координате* тачке. Кад знамо те координате, онда ћемо добити тачку P (u, v) у пресеку двају кругова који су описани око полова полупречницима u и v.

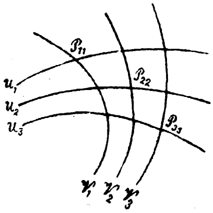


Сл. 9.

Ова система није тако савршена као поменуте две. Ми видимо на име ово: 1-во, два круга секу се у опште у *две* тачке P и P' и 2-го, сваком системом вредности параметара u и v не ће бити аналитички обележена нека тачка у равни: две количине u и v моћи ће на име бити координате једне тачке само ако им је збир $u + v$ већи (раван), а разлика $u - v$ или $v - u$ мања (равна) од раздаљине полова.

12. Поред поменутих координатних система има их још бескрајно много. Да бисмо сазнали опште начело по којима се оне граде, узећемо две врсте кривих линија, врсту линија U и врсту линија V и претпоставићемо да су линије U определене позитивним или негативним параметрима u, а линије V параметрима v. Кадгод се параметар буде мењао, мењаће се уједно

и крива коју он одређује. Кад параметар u има различите вредности $u_1, u_2, u_3, \ldots$ имаће и крива U различите, али одређене положаје $U_1, U_2, U_3, \ldots$; на исти начин ће, кад параметар v буде имао посебне вредности $v_1, v_2, v_3, \ldots$, и крива V заузети одређене положаје $V_1, V_2, V_3, \ldots$. Свака из системе линија U сећи ће се са сваком из системе линија V у опште у једној тачци. Тако је ма која тачка бескрајне равни, н. пр. тачка P_{ik} опредељена пресеком линија U_i и V_k. Координате те тачке су бројеви u_i и v_k, а скуп свију линија U, V даје слику *једне* координатне системе.



Сл. 10.

Линије U и V могу међу тиме бити веома разнолике, а то ће рећи, да су и координатне системе веома различите. Јасно је да је број њихов бескрајан.

У Картезијевој системи су линије U и V праве, од којих прве иду паралелно са осовином апсциса, а друге паралелно са осовином ордината.

У поларној координатној системи представљају систему линија U концентрични кругови, који су описани око пола полупречником ϱ, а систему линија V представљају праве које полазе у разним правцима са пола градећи са осовинама различите угле.

У биполарној системи су криве U, V кругови, описани око тачака O и O' полупречницима u и v.

Примери. Теореме и проблеме

1. Наћи раздаљину тачака $(\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta)$, $(\varrho \cos\theta', \varrho \sin\theta')$.

Одг. $$r = 2\varrho \sin\frac{\theta-\theta'}{2}.$$

2. Наћи раздаљину тачака $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

1-во. У ортогоналној системи је $r = \frac{C}{AB}\sqrt{A^2+B^2}$.

2-го. У косој системи је $r = \frac{C}{AB}\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}$.

3. Наћи раздаљину између тачака $\{a\cos(\alpha+\beta), b\sin(\alpha+\beta)\}$, $\{a\cos(\alpha-\beta), b\sin(\alpha-\beta)\}$.

Одг. $$r = 2\sin\beta\,(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Наћи погодбу под којом се секу под правим углом две праве које спајају дате тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2) са тачком (x, y).

У троуглу који добивамо спајањем поменутих трију тачака биће права (12) хипотенуса, а остале две праве катети, па је с тога

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2;$$

кад сведемо добивамо погодбу

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = o.$$

У косој системи је погодба ово:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) + [(x-x_1)(y-y_2)+(x-x_2)(y-y_1)]\cos\omega = o.$$

5. Наћи координате тачке на средини дужи која спаја тачке (8, 4), (6, 2).

6. Дуж што спаја тачке (2, 4), (5, —7) је подељена 1-во, на 4; 2-го, на 6; 3-ће на 8 једнаких делова. Наћи координате оне тачке делитељке, која је најближа тачци (2, 4).

7. Темена једног троугла су (2, 4), (4, 5), (6, 1). Наћи координате средишта описаног круга.

Средиште лежи у истој раздаљини од темена; с тога је

$$(x-2)^2+(y-4)^2=(x-4)^2+(y-5)^2,$$

$$(x-2)^2+(y-4)^2=(x-6)^2+(y-1)^2,$$

или

$$4x+2y=21,$$

$$8x-6y=17.$$

Кад решимо ове две еквације, добићемо да је

$$x=4,\ y=\frac{5}{2},$$

а то су, као што се јасно види, координате средишта описаног круга.

Полупречник тог круга је $r=\sqrt{(4-2)^2+\left(\frac{5}{2}-4\right)^2}=\frac{5}{2}.$

8. Наћи погодбу под којом ће три тачке (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') бити колинеарне.

Погодба је

$$\frac{x'-x''}{y'-y''}=\frac{x''-x'''}{y''-y'''}$$

или

$$(x'y''-x''y')+(x''y'''-x'''y'')+(x'''y'-x'y''')=o$$

или, у облику детерминанте,

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix}=\text{o}.$$

Кад су тачке дате поларним координатама, онда је погодба коју тражимо ово:

$$\varrho'\varrho''\sin(\theta'-\theta'') + \varrho''\varrho'''\sin(\theta''-\theta''') + \varrho'''\varrho'\sin(\theta'''-\theta') = o.$$

9. Тачке (a, b), (a', b'), $(a-a', b-b')$ су колинеарне. Доказати да је $ab' = a'b$.

10. Доказати да поларне координате $\varrho, \theta; -\varrho, \pi+\theta; -\varrho, \theta-\pi$ представљају исту тачку.

11. Праве што спајају средине дијагонала и средине двеју супротних страна четвороуглових секу се у једној тачци.

Ако су x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 координате темена четвороуглових, биће средина ма које између поменуте три праве ово:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}.$$

12. Ако је P средиште сразмерних раздаљина темена A, B, C једног троугла, а за систему параметара α, β, γ, онда је $\alpha : \beta : \gamma =$ троугао $B\Gamma C : CPA : APB$.

Ова теорема је врло важна, а може се овако доказати. Ако смо ради да нађемо средиште P, а ми ћемо наћи једну тачку C' која дели страну AB по напремици $AC' : C'B = \beta : \alpha$ или $BC' : C'A = \alpha : \beta$. За тим ћемо спојити тачку C' са теменом C и наћи ћемо на тој правој једну тачку P која је дели по напремици $\gamma : \alpha + \beta$. Тачка P била би средиште сразмерних раздаљина. Но како је $BC' : C'A =$ троугао $BPC : CPA$, то је уједно и $\alpha : \beta = BPC : CPA$. Сличним путем бисмо добили и да је $\beta : \gamma = CPA : APB$, а то ће рећи да је заиста $\alpha : \beta : \gamma = BPC : CPA : APB$.

Кад би параметри α, β, γ мењали своје вредности али тако, да је $\alpha + \beta + \gamma = o$, била би сва средишта P у бескрајности; па како, као што ћемо касније видети, све тачке у бескрајности леже на једној правој, на правој у бескрајности, то можемо рећи, да је поред погодбе $\alpha + \beta + \gamma = o$ место средишта P права у бескрајности.

13. Тачка у којој се секу висине једног троугла је средиште сразмерних раздаљина темена којима одговарају параметри tgA, tgB, tgC.

14. Ако су x', y'; x'', y''; x''', y''' координате темена једног троугла, а a, b, c дужине страна његових, онда су координате средишта уписаног круга

$$\xi = \frac{ax' + bx'' + cx'''}{a + b + c}, \quad \eta = \frac{ay' + by'' + cy'''}{a + b + c}.$$

15. Израчунати координате средишта средњих раздаљина тачака $(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$, $(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$, $(a\cos\gamma,\ b\sin\gamma)$, $\{a\cos(\alpha+\beta+\gamma),\ -b\sin(\alpha+\beta+\gamma)\}$.

Како је

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2},$$

биће и

$$\xi=a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2},$$

$$\eta=b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

16. Средиште круга који је описан око троугла ABC је средиште сразмерних раздаљина темена којима одговарају параметри $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$:

$$\xi=\frac{x'\sin 2A+x''\sin 2B+x'''\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C},$$

$$\eta=\frac{y'\sin 2A+y''\sin 2B+y'''\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}.$$

17. Ако је S средиште сразмерних раздаљина тачака $A, B, \ldots L$, а за параметре $a, b, \ldots l$, биће збир производа које добивамо множећи параметре $a, b, \ldots l$ пројекцијама дужи $SA, SB, \ldots SL$ на ма коју праву $= o$.

Ако пројицирамо на осовину x, а сваку праву можемо узети за осовину x, биће

$$\Sigma a x_1-\xi\,\Sigma a=o \text{ или } \Sigma a(x_1-\xi)=o.$$

Steiner.

18. S је средиште сразмерних раздаљина, а $a, b, \ldots l$ су параметри који одговарају тачкама $A, B, \ldots L$. Ако ма где у равни узмемо једну тачку T, биће

$$(\Sigma a)\,\overline{TS}^2=(\Sigma a)\,\Sigma a\cdot\overline{TA}^2-\Sigma ab\cdot\overline{AB}^2.$$

Lagrange.

19. $$\Sigma \overline{TA}^2 = \frac{1}{n} \Sigma \overline{AB}^2 + n \overline{TS}^2.$$

20. Око пола и тачака (ϱ', θ'), (ϱ'', θ'') је описан један круг Доказати да је дијаметар тог круга

$$d = \frac{\sqrt{\varrho'^2 + \varrho''^2 - 2\varrho'\varrho'' \cos(\theta' - \theta'')}}{\sin(\theta' - \theta'')}.$$

21. A_1, A_2, A_3 су три колинеарне тачке, а $\overline{12}$, $\overline{13}$ и т. д. раздаљине $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ и т. д. тих тачака. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = o$$

или

$$\overline{12}^4 + \overline{13}^4 + \overline{23}^4 - 2 \cdot \overline{12}^2 \cdot \overline{13}^2 - 2 \cdot \overline{13}^2 \cdot \overline{23}^2 - 2 \cdot \overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 = o$$

или

$$\Sigma \overline{12}^2 \ \overline{21}^2 - \Sigma \overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 = o.$$

Cayley. *Mathem. Papers.* I. и IV.

22. A_1, A_2, A_3, A_4 су четири копланарне тачке. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \overline{34}^2 & 1 \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \overline{43}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = o.$$

Ibid.

ОДЕЉАК ДРУГИ

Трансформација координата

13. Узмимо две координатне системе у равни — првобитну (основну) систему xOy и нову систему $x'O'y'$ — и означимо са x и y координате неке тачке у системи xOy, а са x' и y' координате те *исте* тачке у системи $x'O'y'$. Кад се зна како те две системе леже једна према другој, онда је могуће на веома лак начин прећи из једне системе у другу, променити координатну систему или, као што се то каже, *трансформовати* координате. При аналитичко-геометријским операцијама често је потребно трансформовати координате; с тога ћемо одмах на овом месту показати, како се аналитичким путем могу изразити координате x и y координатама x' и y' и обратно (обрнута трансформација), координате x' и y' координатама x и y.

Две координатне системе могу имати, кад се по међусобном положају пореде, у опште или два различита почетка са осовинама истих праваца, или један почетак, а осовине различитих праваца или, најпосле, два почетка са осовинама различитих праваца. Према томе и имамо у главном свега три трансформације.

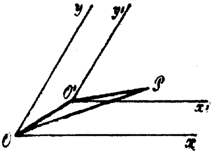
14. **Прва трансформација**: *почеци O и O' координата су различити; нове осовине $O'x'$ и $O'y'$ су паралелне са првобитним осовинама Ox и Oy.*

Нека су a и b координате почетка нове системе с обзиром на првобитну систему; тим координатама је потпуно опредељен у овај мах и положај нових осовина. Координате буди које тачке P означићемо у првобитној системи са x и y, а у новој са x' и y'. До те тачке можемо из тачке O доћи на два различита начина: или идући по правој OP или по разломљеној линији $OO'P$.

Према томе је

$$proj.\ OP = proj.\ OO' + proj.\ O'P.$$

Ако пројицирамо та два пута — водећи рачун о знаку пројекција — прво на осовину x паралелно с осовином y, па онда на осовину y паралелно с осовином x, онда ћемо добити ове две релације



Сл. 11.

$$x = a + x',\ y = b + y' \tag{1}$$

између координата основне и координата нове системе. Те релације, као што се јасно види, не зависе од углова координатних осовина.

Обратном трансформацијом добијамо

$$x' = x - a,\ y' = y - b.$$

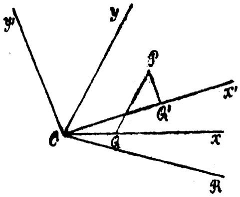
15. **Друга трансформација**: *почетак координата не мења своје место, а правци осовина су различити.* И у овом случају ћемо означити осовине првобитне системе са Ox и Oy, а осовине нове системе са Ox' и Oy'. Координате тачке P нека су у основној системи $OQ = x$, $PQ = y$, а у новој системи $OQ' = x'$, $PQ' = y'$.

Узмимо да је

$$\sphericalangle\ xOy = \omega,\ \sphericalangle\ xOx' = \alpha,\ \sphericalangle\ xOy' = \beta.$$

Како обе системе имају заједнички почетак, то је положај нових осовина потпуно опредељен углима α и β.

Нека је права OR осовина пројекције. На ту праву пројицираћемо ортогонално контуре OQP и $OQ'P$ координата тачке P. Те две разломљене линије имају исту ресултанту OP; с тога ће и пројекције њихове бити једнаке. Биће дакле



Сл. 12.

$$proj.\ OQ + proj.\ QP = proj.\ OQ' + proj.\ Q'P.$$

Ако са θ означимо угао који осовина OR гради са осовином x, биће

$$proj.\ OQ = OQ\ cos\theta = xcos\theta,$$

$$proj.\ OQ' = OQ'cos\ (\alpha + \theta) = x'cos\ (\alpha + \theta)\ ;$$

праве QP и $Q'P$ граде исте угле са правом OR као и осовине Oy и Oy', па је с тога

$$proj.\ QP = QPcos\ (\omega + \theta) = ycos\ (\omega + \theta),$$

$$proj.\ Q'P = Q'Pcos\ (\beta + \theta) = y'cos\ (\beta + \theta).$$

Кад се узму на ум те вредности пројекција појединих координата, онда се види да је у опште

$$xcos\ \theta + ycos\ (\omega + \theta) = x'cos\ (\alpha + \theta) + y'cos\ (\beta + \theta).$$

Да бисмо што пре доконали проблему, претпоставићемо да θ има ове две вредности:

1-во. Нека је $\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$; у овом случају ће права OR стојати управно на осовини Oy, а горњи општи образац ће имати овај специјалан облик:

$$x sin\omega = x' sin(\omega - \alpha) + y' sin(\omega - \beta).$$

2-го. Нека је $\theta = -\frac{\pi}{2}$; у овом случају ће осовина OR стојати управно на осовини Ox; а општи горњи образац ће се преобразити у овај специјалан:

$$y sin\omega = x' sin\alpha + y' sin\beta.$$

Према томе се прелази са првобитне косе системе xOy на нову косу систему $x'Oy'$ помоћу ових образаца:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' sin(\omega - \alpha) + y' sin(\omega - \beta)}{sin\omega}, \\ y &= \frac{x' sin\alpha + y' sin\beta}{sin\omega}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Обрнуту трансформацију је веома просто извести. Угао нове системе је $\omega' = \beta - \alpha$; првобитне осовине Ox и Oy граде међу тим углè $-\alpha$ и $\omega - \alpha$ са новом осовином Ox', па је с тога

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x sin\beta + y sin(\beta - \omega)}{sin\omega'}, \\ y' &= \frac{-x sin\alpha + y sin(\omega - \alpha)}{sin\omega'}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Кад се има у виду релација

$$sin\omega\, sin\omega' = sin\beta\, sin(\omega - \alpha) - sin\alpha\, sin(\omega - \beta),$$

онда се види уједно и то, да су детерминанте системе линеарних еквација (2) и (3) ово:

$$M = \frac{sin\beta\, sin\,(\omega - \alpha) - sin\alpha\, sin\,(\omega - \beta)}{sin^2\omega} = \frac{sin\omega'}{sin\omega}$$

и

$$M' = \frac{sin\beta\, sin\,(\omega - \alpha) - sin\alpha\, sin\,(\omega - \beta)}{sin^2\omega'} = \frac{sin\omega}{sin\omega'}\,;$$

те детерминанте су дакле обрнуте, јер је $MM' = 1$.

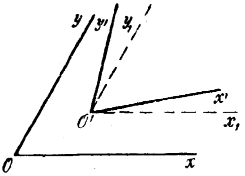
Напомена. Координате x,y *ма које* тачке у равни везане су с координатама x',y' *те исте* тачке овом релацијом:

$$x^2 + y^2 + 2xycos\omega = x'^2 + y'^2 + 2x'y'cos\omega'.$$

То бисмо могли доказати помоћу образаца под (2). У осталом то није потребно. Лева страна поменуте релације представља у првој системи квадрат раздаљине *ма које* тачке од почетка, а десна страна је у другој системи аналитички еквиваленат квадрата *те исте* раздаљине.

16. **Трећа, општа трансформација**: *почеци и правци координатних осовина су различити.*

Ову трансформацију добијамо комбинујући прве две. Нека је на име тачка O' (a, b) почетак нове системе. Кроз ту тачку потегнућемо две праве, две осовине $O'x_1$ и $O'y_1$ паралелно са првобитним осовинама Ox и Oy. По обрасцима (1) биће



Сл. 13.

$$x = a + x_1,\ y = b + y_1\,;$$

из те системе помоћнице лако је опет прећи у нову, дату систему $x'Oy'$; по обрасцима (2) биће на име

$$x_1 = \frac{x'sin\,(\omega - \alpha) + y'sin\,(\omega - \beta)}{sin\omega},$$

$$y_1 = \frac{x'sin\alpha + y'sin\beta}{sin\omega},$$

па је према томе и

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{x'sin\,(\omega - \alpha) + y'sin\,(\omega - \beta)}{sin\omega}, \\ y &= b + \frac{x'sin\alpha + y'sin\beta}{sin\omega}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

17. Обрасци под (2) нарочито се често јављају у неким специјалним случајевима, које ћемо одмах и побројити.

1-во. *Треба прећи са ортогоналне системе на косу.* Кад је првобитна система ортогонална биће $\omega = 90^0$; с тога ће се обрасци под (2) преобразити у ове:

$$x = x'cos\alpha + y'cos\beta,$$

$$y = x'sin\alpha + y'sin\beta.$$

2-го. *Треба прећи са косе системе на ортогоналну.* У овом случају је $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$; према томе је

$$x = \frac{x'sin\,(\omega - \alpha) - y'cos\,(\omega - \alpha)}{sin\omega},$$

$$y = \frac{x'sin\alpha + y'cos\alpha}{sin\omega}.$$

Напомена. Кад се прелази са косе системе на ортогоналну, а при том задржава осовина x — та је трансформација такођер врло важна — онда је $\alpha = o$, па је с тога по последњим обрасцима

$$x = \frac{x'sin\omega - y'cos\omega}{sin\omega}, \quad y = \frac{y'}{sin\omega}.$$

Обрнутом трансфорфацијом добива се ово:

$$x' = x + ycos\omega, \qquad y' = ysin\omega.$$

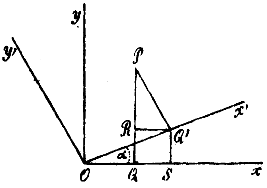
3-ће. *Треба прећи са ортогоналне системе на ортогоналну систему чије осовине затварају угао* α *са осовинама првобитне системе.*

У овом случају је

$$\omega = 90^\circ, \beta = 90^\circ + \alpha,$$

па је према томе

$$\left.\begin{aligned} x &= x'cos\alpha - y'sin\alpha, \\ y &= x'sin\alpha + y'cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$



Сл. 14.

Ове две релације зову се *ортогогоналним трансформацијама.* Кад их квадрирамо и саберемо добивамо ово:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2;$$

то је алгебарска карактеристика те трансформације.

Обрасце под (5) добијамо и непосредно из слике; из ове се на име види да је

$$x = OQ = OS - QS = OS - RQ',$$

$$y = PQ = QR + RP = SQ' + RP \text{ q. e. d.}$$

Обрнутом трансформацијом добивамо ово:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

18. Из свију образаца којима је могуће трансформовати координате једне тачке види се, да се координате x и y могу представити као целе, линеарне функције нових координата x' и y'. Општи облик поменутих образаца (1), (2) и (4) је ово:

$$x = a + bx' + cy', \quad y = \alpha + \beta x' + \gamma y', \qquad (6)$$

а оних, које добивамо обрнутом трасформацијом, ово:

$$x' = a' + b'x + c'y, \quad y' = \alpha' + \beta' x + \gamma' y. \qquad (7)$$

Имајући те обрасце у виду, моћи ћемо доказати ову важну теорему: *степен m алгебарске функције $f(x, y)$ није могуће трансформацијом координата изменити.*

Узмимо да се дата функција трансформацијом (6) преобразила у функцију $\varphi(x', y')$, узмимо дакле да је

$$f(a + bx' + cy', \alpha + \beta x' + \gamma y') = \varphi(x', y');$$

ова функција φ мора се супституцијом (7) преобразити у дату функцију f:

$$\varphi(a' + b'x + c'y, \alpha' + \beta' x + \gamma' y) = f(x, y).$$

Но ми видимо да се првом трансформацијом степен функције $\varphi(x', y')$ није могао *повисити*; чланови највиших димензија дате функције биће у опште облика $A_k\, x^k\, y^{m-k}$. Ти чланови преобразили би се међу тим поменутом супституцијом (6) у чланове облика $A_k(a+bx'+cy')^k(\alpha+\beta x'+\gamma y')^{m-k}$, а степен оне функције координата x' и y' коју добивамо множењем тих полинома *не може бити веħи од m.* — С друге стране се види и то, да се трансформацијом (6) степен функције не да ни *смањити*; јер кад би се он смањио, онда би се степен функције $\varphi\,(x', y')$ линеарном супституцијом (7) морао повисити а то, као што смо мало час доказали, не може да буде. *Степен функције $f\,(x, y)$ не зависи дакле од положаја и рода паралелних координатних система*, јер се он трансформацијом координата не може променити.

19. **Трансформација паралелних координата у поларне и обратно.**

Ми ħемо нарочито поменути два случаја.

1-во. *Осовина поларна пада на осовину x дате паралелие системе.*

Из троугла OPQ добивамо ове две сразмере:

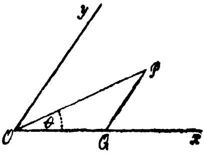
$$OQ : OP = sin\,(\omega - \theta) : sin\,(180^\circ - \omega),$$

$$PQ : OP = sin\theta : sin\,(180^\circ - \omega),$$

а из ових је

$$x = \frac{\varrho sin\,(\omega - \theta)}{sin\omega},\quad y = \frac{\varrho sin\theta}{sin\omega}. \tag{8}$$

Кад је система ортогонална, онда је $\omega = 90^\circ$, т. ј. кад поларна осовина пада на осовину x ортогоналне системе, а пол на почетак њезин, онда је



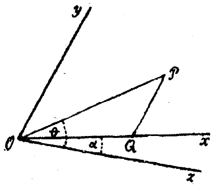
Сл. 15.

$$x = \varrho cos\theta,\ y = \varrho sin\theta. \tag{9}$$

Из тих образаца се види, да су ортогоналне паралелне координате x и y ортогоналне пројекције потега на осовину x и осовину y. Обрнутом трансформацијом добивамо из тих образаца ово:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\theta = \frac{y}{x}. \qquad (10)$$

2-го. *Осовина поларна гради са осовином x угао α.*



Сл. 16.

Јасно је да у овај мах треба у обрасцима (8) и (9) само заменити θ са $\theta - \alpha$ Кад би система била ортогонална, било би у овом случају

$$x = \varrho cos\,(\theta - \alpha),\ y = \varrho sin\,(\theta - \alpha). \qquad (11)$$

Примери

1. **Шта ће бити од еквације**

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 38x - 42y + 93 = o,$$

кад паралелним померањем осовина преместимо почетак координатне системе у тачку (2,3)?

Одг. Преобразиће се у еквацију

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8.$$

Тај задатак је веома лак, а решава се овако. Треба просто у датој еквацији сменити x и y са $x + 2$ и $y + 3$, свести све што се може, па ћемо добити назначен резултат.

2. Са ортогоналне системе треба прећи на другу ортогоналну систему обртањем осовина за 45^0 око заједничког почетка. Доказати да ће се том трансформацијом еквација

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$$

преобразити у еквацију $4x^2 + y^2 = 4$.

У овом случају је

$$x = x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}};$$

с тога је после супституције

$$5\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8$$

или, кад се сведе све што се може,

$$4x'^2 + y'^2 = 4.$$

Изоставивши у овој еквацији запете које стоје поред x и y, добићемо еквацију $4x^2 + y^2 = 4$.

3. Осовине ортогоналне системе треба обрнути за 45°. Шта ће услед тога бити са еквацијама

$$x^2 - y^2 = 2 \text{ и } x^2 + 3xy + y^2 = 2\,?$$

Одг. Преобразиће се у еквације

$$xy = -1, \; 5x^2 - y^2 = 4.$$

4. Осовине ортогоналне системе ћемо обрнути за 30°. Шта ће услед тога бити са еквацијом

$$2x^2 + \sqrt{3}\, xy + y^2 = 7\,?$$

Одг. Преобразиће се у еквацију

$$5x^2 + y^2 = 14.$$

5. Осовине ортогоналне системе ћемо обрнути око почетка за угао α. Шта ће услед тога бити са еквацијом

$$x^2 + 2xytg2\alpha - y^2 = 2c^2\,?$$

Одг. Преобразиће се у еквацију

$$x^2 - y^2 = 2c^2 cos2\alpha.$$

6. Система xOy је ортогонална, а нова система xOy' коса. Осовина Oy' те системе гради угао од 60^0 са заједничком осовином Ox. Пита се, у шта ће се том трансформацијом преобразити екваација

$$y = 3x + 2 \,?$$

Одг. Преобразиће се у еквацију

$$6x + (3 - \sqrt{3})\, y + 4 = o.$$

7. Две системе xOy и $x'Oy'$ имају исти почетак, а обрасци којима су везане координате x и y са координатама x' и y' јесу ово:

$$x = mx' + ny',\; y = m'x' + n'y'.$$

Доказати да је

$$mm'\,(n^2 + n'^2 - 1) = nn'\,(m^2 + m'^2 - 1).-$$

Како је у опште

$$x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\omega' = x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega,$$

биће у овом случају

$$x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\omega' \equiv (mx' + ny')^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

У овој еквацији треба изједначити коефицијенте што стоје уз x'^2 и y'^2 и елиминирати $\cos\omega$, па ћемо добити горњи резултат.

8. Наћи координате оне тачке у коју би паралелним померањем осовина̂ требало преместити почетак координатне системе, па да у оним еквацијама, у које би се том трансформацијом преобразиле еквације

$$3x^2 + 5xy + y^2 - 3x + 2y + 21 = o,$$

$$5x^2 + 2xy + y^2 - 10x + 2y + 10 = o,$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 6y - 10 = o$$

не буде чланова првога степена.

Одг. Требало би преместити почетак 1-во, у тачку

$\left(-\frac{16}{13}, \frac{27}{13}\right)$; 2-го, у тачку $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ и 3-ће, у тачку (∞, ∞).

9. Почетак ортогоналне координатне системе и пол поларне координатне системе леже у једној тачци, а поларна осовина пада на осовину x паралелне системе. Пита се ово двоје :

1-во. У шта ће се трансформацијом паралелних координата у поларне преобразити еквације

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad (x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0?$$

2-го. У шта ће се трансформацијом поларних координата у паралелне преобразити еквације

$$\varrho^2 cos 2\theta = a^2, \quad \varrho^2 sin 2\theta = b^2,$$

$$\varrho = a cos\theta + b, \quad \varrho^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} cos \frac{\theta}{2}?$$

Одг. Ad 1. Преобразиће се у еквације

$$\varrho = 2a cos\theta, \ \varrho = a sin 2\theta.$$

Ad 2. Преобразиће се у еквације

$$x^2 - y^2 = a^2, \ xy = \frac{b^2}{2},$$

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2 (x^2 + y^2), \ (2x^2 + 2y^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2).$$

◆

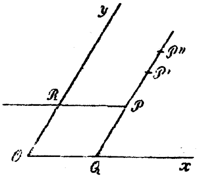
ОДЕЉАК ТРЕЋИ

Еквације кривих линија

20. Свака тачка је аналитички опредељена *двема* еквацијама $x = a$, $y = b$. У овима параметри x, y *не зависе* један од другог; они могу имати ма какве вредности. *Једна* између тих еквација, н. пр.

$$x = a, \tag{1}$$

не може бити аналитички еквиваленат *једне* тачке. Том еквацијом је на име само x опредељено, равно дужи a, а y у сваком погледу неопредељено. Еквација (1) мора, дакле, представљати читаву систему тачака сталне апсцисе $x = OQ = a$, а неодређених ордината.



Сл. 17.

Координате тих тачака су (a, y), а *место* њихово је једна права, која у раздаљини $OQ = a$ од почетка O координатне системе сече осовину x и иде паралелно са осовином y. *Еквација $x = a$ јесте дакле аналитички еквиваленат места тачака P, P', P'', . . . т. ј. она је еквација тога места.*

Из истог разлога је права што у раздаљини $OR = b$ сече осовину y, а иде паралелно са осовином x, геометријска слика еквације

$$y = b. \qquad (2)$$

Еквације $x = a$ и $y = b$ представљају, дакле, свака за се аналитички једну праву, обе заједно једну тачку P — ону, што лежи у пресеку тих правих. Према томе је еквација осовине x ово: $y = o$, а осовине y ово: $x = o$. Еквације почетка су, као што знамо $x = o$, $y = o$ т. ј. *само је почетак координатне системе и тачка осовине y, и тачка осовине x.*

21. Ми можемо у осталом доказати, да *свака еквација између координата x, y представља у опште једну криву.*

Нека је

$$f(x, y) = o \qquad (3)$$

дата еквација; у тој еквацији параметри x и y *зависе* један од другог. Један између њих, н. пр. x, може имати које му драго вредности, а други параметар y не — вредности y-ове су потпуно опредељене датом еквацијом, а по томе се већ види ово: 1-во, еквација (3) не може представљати *једну* тачку; 2-го, она не може представљати ни *све* тачке једне равни. Напротив, из читаве системе тачака што леже у равни, издвојиће се нарочита једна система, једно *место тачака*, које ће својим координатама задовољити дату еквацију; *еквација $f(x, y) = o$ била би еквација тог места* и обратно, *место тачака било би геометријска слика те еквације.* Та функција f је у опште *полидромна*, т. ј. *једној* вредности променљиве x одговараће у опште *више* вредности y-ових:

$$y = \varphi(x), y = \psi(x), y = \chi(x), \cdot \cdot \cdot$$

Ми ћемо студирати нарочито само једну између вредности y-ових, н. пр. $y = \varphi$ (x) и потражићемо оно место, које нам та *монодромна* (једнограна) функција представља.

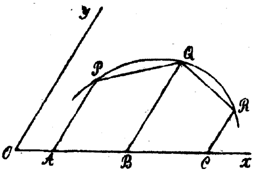
Нека је узастопце

$$x = a, b, c, \cdot \cdot \cdot ;$$

тим апсцисама одговараће ординате

$$y = \varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \cdot \cdot \cdot$$

На тај начин дошли бисмо до колико му драго растављених или, као што се то каже, *дискретних* тачака $P\ (a, \varphi(a))$, $Q\ (b, \varphi(b))$, $R\ (c, \varphi(c))$, · · · Те тачке морају бити тачке оног места које тражимо. Кад их спојимо дужима PQ, QR и т. д, добићемо разломљену линију PQR · · · Што год је мања разлика у апсцисама тачака P и Q, Q и R и т. д., биће у опште тим мања и разлика међу ординатама њиховим; кад је она прва бескрајно мала, биће у опште и она друга таква. У том случају тачке P, Q, R, · · не ће бити дискретне, оне ће се низати *одређеним* законом (овај је дат еквацијом $y = \varphi(x)$) једна уз другу градећи *једну криву*.



Сл. 18.

Јасно је да ће и функције $y = \psi(x)$, $y = \chi(x)$, ... свака за сѐ представљати по једну криву или, боље рећи, по једну *грану* оне криве, која је представљена еквацијом $f(x, y) = o$. *Место, које је опредељено еквацијом* $f(x, y) = o$, *јесте дакле у опште крива линија;* $f(x, y) = o$ *је њезина еквација или аналитички еквиваленат те криве.*

Напомене. 1-во. Све тачке једне равни могу се представити параметрима x и y, који један од другог не зависе; *с тога је раван слика или поље двеју димензија.* — Све тачке једне криве зависе од *једног* параметра; *с тога је крива слика или поље једне димензије.*

2-го. Ако је c реална количина ($\gtrless o$), онда еквација

$$[\varphi(x, y)]^2 + [\psi(x, y)]^2 + c^2 = o \qquad (4)$$

може представљати само једно *имагинарно место.*

Апсцисе и ординате тог места могле би на име бити само комплексни бројеви $x = u + iv$, $y = u' + iv'$; то се види по склопу еквације (4). Све тачке оног места које представља та еквација биле би дакле имагинарне, па би према томе и скуп свију тих тачака био слика једног одређеног имагинарног места.

3-ће. Еквација

$$[\varphi(x, y)]^2 + [\psi(x, y)]^2 = o \qquad (5)$$

представља *систему изолованих (осамних) тачака,* које леже у пресеку кривих

$$\varphi(x, y) = o, \psi(x, y) = o.$$

Ево доказа. Збир двеју апсолутно позитивних количина може само у једном јединим случају бити $= o$, онда на име, кад је сваки члан тога збира $= o$. Према томе ће лева страна еквације (5) моћи бити $= o$ само за оне вредности x-а и y-а, за које ће у исти мах бити и $\varphi(x, y) = o$ и $\psi(x, y) = o$. Обе те еквације представљају, као што знамо, по једну криву. — Узмимо сад неку специјалну тачку (a, b). Ако та тачка не лежи ни на једној ни на другој кривој, онда не ће бити $= o$ ни $\varphi(a, b)$, ни $\psi(a, b)$; ако та тачка лежи на кривој φ, а не лежи на кривој ψ, онда ће бити $\varphi(a, b) = o$, а $\psi(a, b) \gtrless o$; ако тачка (a, b) лежи на кривој ψ, а не лежи на кривој φ, онда ће бити $\varphi(a, b) \gtrless o$, а $\psi(a, b) = o$; најпосле, ако тачка (a, b) лежи и на једној и на другој кривој, т. ј. ако тачка (a, b) лежи у пресеку кривих φ и ψ, онда ће бити и $\varphi(a, b) = o$ и $\psi(a, b) = o$, а поред тога и $[\varphi(a, b)]^2 + [\psi(a, b)]^2 = o$. По томе се види да ће заиста само тачке што леже у пресеку кривих φ и ψ бити тачке оног места које је аналитички представљено еквацијом (5), а то ће рећи, да је еквацијом (5) заиста представљена система изолованих тачака. Тих тачака има исто онолико, колико има и тачака у којима се секу криве φ и ψ.

Тако н. пр. еквација

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = o$$

представља тачку, која лежи у пресеку правих

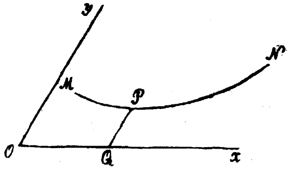
$$x = 1, \text{ и } y = 2,$$

а то ће рећи тачку (1, 2).

Кад би еквације $\varphi (x, y) = o$ и $\psi (x, y) = o$ биле алгебарске еквације — прва m-тог, а друга n-тог степена — онда бисмо у аналитичко-геометријској интерпретацији еквације (5) могли још и даље ићи; ми можемо на име у том случају определити и број осамних тачака, које представља еквација (5). По **Bezout-овој** теореми имале би еквације φ и ψ свега mn заједничких пари корена; према томе би еквацијом (5) била представљена система од mn осамних (реалних или имагинарних) тачака. Све те тачке леже у пресеку кривих φ и ψ, а то ће рећи, *да се криве* $\varphi (x, y) = o$ и $\psi (x, y) = o$ *секу у опште у* mn *тачака.* — У осталом то је јасно и с друге стране. Заједничке корене могли бисмо добити на овај начин: елиминираћемо из датих двеју еквација једну променљиву, н. пр. променљиву y. Резултанта њихова биће с погледом на x еквација mn-тог степена, т. ј. та еквација ће имати mn корена. Сваком таквом корену $x = a$ одговара у датим еквацијама један заједнички корен $y = b$, а сваком спрегу корена $x = a$, $y = b$ по једна тачка у пресеку кривих φ и ψ. Тих спрегова је на број mn, а по томе се опет види да се криве φ и ψ секу у mn тачака. Две криве, које би биле представљене еквацијама другога степена, секле би се н. пр. *у четири тачке.* Између тих тачака могле би се неке и поклапати, а неке лежати и у бескрајности.

22. Сад ћемо доказати, *да се и обратно свака крива даје представити еквацијом* $f(x, y) = o$.

Нека је MN дата крива. Потегнимо ма где у равни две осовине Ox и Oy. Координате ма које тачке дате



Сл. 19.

криве зависе од положаја те тачке на кривој: апсциса тачке P је н. пр. OQ, а ордината њезина је PQ; кад се апсциса тачке P буде мењала, мењаће се и ордината њезина PQ по неком одређеном закону: ордината y је дакле функција апсцисе x. Аналитичка природа те функције зависи од геометријске природе криве, т. ј. она зависи од неке специјалне, али ипак заједничке особине свију тачака криве MN. Кад бисмо ту особину изразили алгебарски, добили бисмо једну релацију која постоји између координата x и y. Како се особина тачака не мења, кад се тачка (x, y) креће по кривој, не би се мењао ни спољни облик поменуте релације. Та релација назива се *еквација* криве MN; она би имала н. пр. у системи xOy, овај облик:

$$f(x, y) = o.$$

23. Сваку криву могуће је определити на два начина: *геометријски* и *аналитички*. Корелација која постоји између геометријских места и еквација њихових, јесте основа Аналитичне Геометрије. Том корелацијом сасвим су јасно одређене и три основне проблеме Аналитичне Геометрије: 1-во, она тражи еквацију геометријских слика; 2-го, она одређује геометријску слику еквација и 3-ће, она испитује везу између геометријских особина слика и аналитичких облика еквација. — Свака крива може бити представљена аналитички

у колико му драго система. У различитим системама биће у опште и еквације кривих различите. Трансформацијом координатних система ће се на име обично изменити и облик еквације; ма којом трансформацијом паралелних координата прећи ће н. пр. еквација $f(x, y) = o$ у еквацију $\varphi(x', y') = o$. Прва еквација представљаће неку криву, рецимо, у координатној системи xOy, а друга еквација представљаће ту исту криву у другој координатној системи, н. пр. у системи $x'O'y'$. При различитим трансформацијама тежићемо у главном за тим, да дату еквацију криве прерушимо у оно алгебарско рухо, у ком ће се у сваком специјалном случају најбоље моћи испитивати геометријске особине криве. Кад би се неке проблеме могле боље решити у поларној системи него у паралелној, онда бисмо помоћу образаца

$$x = \frac{\varrho sin(\omega - \theta)}{sin\omega}, \quad y = \frac{\varrho sin\theta}{sin\omega}$$

преобразили функцију $f(x, y)$ у функцију

$$f\left(\frac{\varrho sin(\omega - \theta)}{sin\omega}, \frac{\varrho sin\theta}{sin\omega}\right) = \psi(\varrho, \theta)$$

тако, да би у тој поларној системи еквација криве била $\psi(\varrho, \theta) = o$.

На исти начин можемо и сваку еквацију тумачити у свакој системи. *Једна* еквација у разним системама представља *различита места*; интерпретација те еквације биће на име у различитим системама у опште различита.

Тако ће нам н. пр. еквација $x^2 + y^2 = r^2$, као што ћемо касније видети, представљати круг кад је система ортогонална, а елипсу кад је система коса и т. д.

24. Криве линије деле се на *трансцендентне* и *алгебарске* криве; трансцендентне криве су представљене трансцендентним еквацијама, а алгебарске алге-

барским. Тако би н. пр. криве $y = sinx$, $y = logx$ и т. д. биле трансцендентне, а криве $y = mx + b$, $x^2 + y^2 = r^2$ и т. д. алгебарске. Данашња геометрија бави се поглавито о алгебарским кривим линијама. Ма колико да је на име важна студија трансцендентних кривих, она је ипак ограничена, јер природа трансцендентних функција још није довољно позната.

Све алгебарске еквације могу се написати у облику целих, рационалних еквација. Степеном те еквације одређен је *ред криве линије*. Линија је првог, другог, трећег, . . . реда, како је кад еквација која њу представља, првог, другог, трећег, . . . степена.

Подела алгебарских кривих на редове јесте сасвим систематска. Ми смо доказали да се степен алгебарске функције $f(x, y)$ трансформацијом координата не ће променити; еквација неке криве биће дакле у свима координатним системама истога степена, а то ће рећи да се ред криве трансформацијама координатних система не ће променити. — *Степен еквације је према томе геометријска особина криве.*

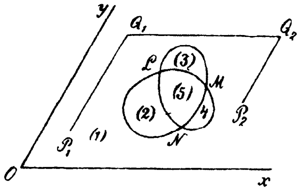
25. **Теорема.** *Свака права сече криву m-тог реда у m тачака.*

Ту теорему је веома лако доказати. Координатну систему лако је трансформовати тако, да нова осовина x буде управо дата права. Еквација криве ће бити у опште и у тој системи m-тог степена, а овог облика: $f(x, y) = o$. Еквација осовине x је $y = o$, а по томе се види, да ће корени еквације $f(x, o) = o$ бити апсцисе оних тачака у којима дата права — у овај мах осовина x — сече криву. Корени ове еквације могу бити разнолике природе; они су у опште и реални и имагинарни, а на број их је m. Свега дакле има m тачака у пресеку праве са кривом.

Две праве могу се сећи само у једној тачци. По томе се види, да су криве првога реда, праве линије.

Напомена. Кад се функција m-тог степена $f(x, y)$ даје растворити на производ функција $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, . . . нижег степена, онда ће еквација $f(x, y) = o$ представљати систему кривих нижега реда. *Крива линија m-тог реда може се у неким специјалним приликама изметнути у систему линија нижега реда* $\varphi = o$, $\psi = o, \ldots$.

26. Ако у еквацији једне криве сменимо x и y координатама које му драго тачке P, онда се резултат те супституције по **Штајнеру** назива *моћ* тачке P с обзиром на криву; ту дефиницију су примили сви енглески, француски и немачки писци (power, puissance Potenz). Ми знамо да ће тачка (a, b) лежати на кривој $f(x, y) = o$ само ако је $f(a, b) = o$. Према поменутој дефиницији можемо дакле рећи, да ће тачка (a, b) лежати на кривој само ако је моћ те тачке с обзиром на криву $= o$; према томе тачка (x, y) неће лежати на кривој кад је $f(x, y) >$ или $< o$, т. ј. кад је моћ те тачке $>$ или $<$ o.



Сл. 20.

Свака крива делиће раван у опште на више *крајева* т. ј. делова равни којима је она граница. Ма из које тачке једног краја могуће је доћи до друге тачке тог истог краја, а да не пређемо никад криву линију. Тако, на прилику, крива линија LMN (сл. 20) дели раван на пет крајева (1), (2), (3), (4), (5).

27. **Теорема.** *Алгебарски цео полином* $f(x, y)$ *не мења свој знак кад у њему* x *и* y *заменимо координатама двеју тачака истога краја.*

Нека је

$$f(x, y) = o$$

еквација мало час поменуте криве (сл. 20). Узмимо негде, н. пр. у првом крају две тачке, тачку P_1 (x_1, y_1)

и тачку P_2 (x_2, y_2). Са тачке P_1 можемо доћи до тачке P_2, а да не пређемо нигде криву, идући по разломљеној линији P_1 Q_1 Q_2 P_2 чији су делови паралелни било са једном, било са другом осовином. Да видимо како ће се мењати функција $f(x, y)$ кад покретна тачка пређе пут P_1 Q_1. Апсцисе свију тачака те праве су сталне, т. ј. кад се дата функција *двеју* променљивих мења у правцу линије P_1 Q_1 онда ће та функција бити само функција *једне* променљиве: на тој правој мењају се само y-и покретне тачке. Дата функција је алгебарска цела, па како се ова без прекида мења, а функција $f(x, y)$ није прошла кроз нулу, то је јасно, да је она морала задржати свој знак на правој P_1 Q_1.

Из истог разлога не ће моћи дата функција променити свој знак ни кад се покретна тачка буде кретала по правој Q_1 Q_2 која иде паралелно са осовином x; она је на име и у овај мах функција *једне* променљиве — променљиве x. Функција $f(x, y)$ има дакле и у тачкама P_1 и Q_2 исте знаке. Она у осталом мора и у тачкама Q_2 и P_2 имати исте знаке — те две тачке леже на правој што иде паралелно са осовином y — т. ј. *функција $f(x, y)$ у опште не мења свој знак у једном крају*, а то ће рећи, *да је моћ свију тачака једнога краја истога знака.*

28. На основу поменуте теореме моћи ћемо лако геометријски протумачити неједнакост $f(x, y) > $ или $< o$, кад нам је познат облик криве линије.

Узмимо да почетак координатне системе лежи у првом крају (сл. 20) и да је моћ почетка позитивна, $f(o, o) > o$. Кад се то претпостави, онда се по мало час поменутој теореми може смело тврдити да ће уједно и моћи свију тачака тога краја бити позитивне; у том погледу били бисмо већ с тачкама краја (1) на чисто. Да разгледамо још какве ће бити моћи тачака осталих крајева. Узмимо да смо се из неке тачке првога краја кренули било у крај (2), било у крај (3), било у крај (4), па да смо се држали путева који иду напоредо било са једном било са другом осовином. Функција $f(x, y)$ не ће променити свој знак докле год се путеви буду налазили у првом крају; чим зађемо у ма који од поменутих крајева (2), (3) или (4), мораће $f(x, y)$ променити свој знак, т. ј. биће $f(x, y) < o$; $f(x, y)$ је на име $= o$ у оним тачкама које издвајају крајеве (2), (3) и (4) од краја (1); та иста функција $f(x, y)$ се *без прекида* мења; она је, као што поменусмо, већ на граници крајева $= o$, т. ј. она ће у самим крајевима (2), (3) или (4) заиста имати негативну вредност.

Ја тврдим да ће моћи свију тачака краја (5) бити позитивне. Ако за један часак само изгубимо из вида прелазе L, M, N, онда ћемо на први поглед видети, да се до тачака тога краја из првог краја може доћи тек кад се крива *двапут* пређе. Међу тим кроз тачке L, M, N пролазе по *две* гране криве линије, а по томе се види, да ћемо и нри прелазу који води преко тих *распутних тачака другога реда (двојних тачака)* такођер морати у ствари прећи преко двеју грана криве линије. Јасно је да ће на првом путу функција *двапут* променити свој знак; но исто је тако јасно да ће функција $f(x, y)$ морати двапут променити свој знак и на прелазима L, M, N. Узмимо само да смо кроз једну од поменутих трију распутних тачака н. пр. кроз тачку $N(a, b)$ повукли једну праву $x = a$ паралелно са осовином y. Ординате оних тачака у којима та права сече криву добили бисмо из еквације $f(a, y) = o$. Та еквација морала би имати један двојни корен $y = b$. Кад бисмо сад из краја (1) пошли у крај (5) правцем праве $x = a$, било би $f(a. y) > o$; у самој тачци N било би $f(a, y) = o$; у тој тачци је међу тим функција $f(a, y)$ услед двојног корена $y = b$ двапут морала проћи кроз нулу, а по томе се види, да ће она задржати свој знак и кад се њезина промѐнљива y буде даље мењала. Моћи тачака краја (5) имаће дакле исти онакав знак, какав имају и моћи тачака краја (1). Према томе ће моћи првог и петог краја имати један, а моћи другог, трећег и четвртог краја други знак; кад су оне прве позитивне, биће ове друге негативне и обратно.

Знаке које ће по њином $f(x, y)$ имати у појединим крајевима моћи ћемо представити у овој таблици:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
+	−	−	−	+
−	+	+	+	−

Водећи рачун о знаку полинома $f\,(x,\ y)$ могли бисмо онај крај криве $f\,(x,\ y) = o$, у ком је $f\,(x,\ y)$ позитивно, звати позитивним крајем криве или позитивном страном криве; крај у ком је $f\,(x,\ y)$ негативно био би негативан крај или негативна страна криве.

◆

ОДЕЉАК ЧЕТВРТИ

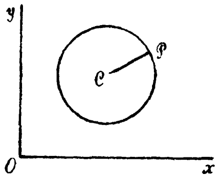
Еквације некојих важнијих кривих

29. На примерима, које ћемо у овом одељку поменути, видећемо како се у аналитичко-геометријској дисциплини заодевају геометријске слике алгебарским рухом; тек помоћу еквација тих места моћи ћемо се приближно упознати са оним начелима Аналитичне Геометрије, које смо мало час поменули.

30. **Круг.** *Круг је место тачака, које у истој раздаљини леже од једне сталне тачке*; та стална тачка зове се *средиште* круга.

Сваки круг је потпуно опредељен својим средиштем C (α, β) и својим полупречником $CP = r$ Еквацију круга добићемо на овај начин.

Узећемо ма где у равни једну ортогоналну координатну систему xOy. Раздаљина r ма које накружне тачке (x, y) од средишта (α, β) је опредељена релацијом



Сл. 21.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Та релација се не мења, кад се тачка (x, y) креће по периферији датог круга; та релација биће дакле еквација круга.

Кад би почетак системе био у средишту, биле би координате средишта ово: $\alpha = o$, $\beta = o$, па би према томе и еквација круга била овог облика:

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{2}$$

Круг дели раван на два краја; први крај је, рецимо, затворен периферијом, а други лежи ван ње.

Ако узмемо да је

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2,$$

биће $f(o, o) < o$; моћ почетка је, као што се види, негативна; с тога су и моћи осталих тачака првога краја негативне.

Према томе је у свима тачкама другога краја $f(x, y) > o$, а то значи, да је раздаљина средишта од свију тачака првога краја мања, а од свију тачака другога краја већа од полупречника круга.

31. **Елипса.** *Елипса је место у којем је збир раздаљинâ ма које тачке од двеју сталних тачака сталан.*

Сталне тачке F и F' називају се *жиже* елипсине. Раздаљину њихову обележићемо са $2c$, а збир раздаљина ма које тачке $P(x, y)$ елипсине од жижа са $2a$. Нека осовина x ортогоналне системе лежи на правој што везује жиже; за осовину y те системе ћемо узети праву која у тачци O полови раздаљину жижа $FF' = 2c$. Нека је $PF = r$, $PF' = r'$; тачка P је једна од тачака поменутог места; с тога је према дефиницији

$$r + r' = 2a. \tag{3}$$

Међу тим је из троуглова PQF и PQF'

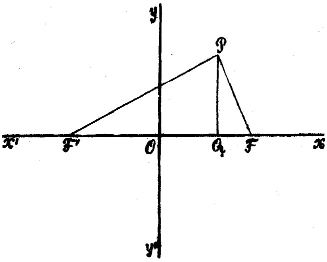
$$PF = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{FQ}^2},\ PF' = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{F'Q}^2}\ ;$$

како је

$$FQ = x - c, \quad F'Q = x + c,$$

биће

$$r = \sqrt{y^2 + (x - c)^2}, \quad r' = \sqrt{y^2 + (x + c)^2}.$$



Сл. 22.

Еквација криве (3) је дакле овог облика:

$$\sqrt{y^2 + (x - c)^2} + \sqrt{y^2 + (x + c)^2} = 2a$$

Из ове еквације ћемо уклонити корене. С тога ћемо пребацити први корен на десну страну и подићи ћемо еквацију, коју тим путем будемо добили, на квадрат. После тих операција добићемо ово:

$$y^2 + (x + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2} + y^2 + (x - c)^2$$

или, кад се сведе све што се може,

$$a\sqrt{y^2 + (x - c)^2} = a^2 - cx.$$

Ову еквацију ћемо такођер подићи на квадрат, за тим ћемо је скратити и уредити. Резултат ће бити ово:

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2)\, x^2 = a^2\, (a^2 - c^2). \qquad (4)$$

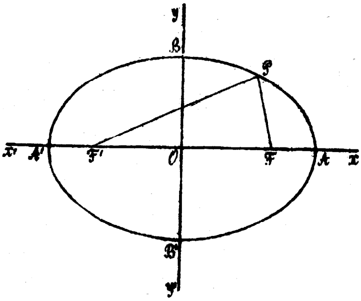
У троуглу FPF' је међу тим $PF + PF' > FF'$, т. ј. $2a > 2c$ или $a > c$; с тога је разлика $a^2 - c^2$ позитивна; могли бисмо дакле узети да је $a^2 - c^2 = b^2$, па сменити у еквацији (4) $a^2 - c^2$ са b^2. Према томе ће еквација елипсе бити овог облика:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Дискутовањем ове еквације можемо у главном одредити облик елипсе. По тој еквацији се види, да



Сл 23.

ће све тачке елипсине симетрично лежати према координатним осовинама; у еквацији (5) јављају се на име само квадрати променљивих x и y, а то ће рећи, да на кривој поред неке тачке (α, β) у исти мах леже и тачке $(-\alpha, \beta)$, $(-\alpha, -\beta)$, $(\alpha, -\beta)$, а те четири тачке симетрично леже према координатним осовинама. Праве xx' и yy' називају се с тога *осовине* криве, а тачке A и A', B и B' у којима те осовине продиру криву, *темена* њезина. Елипса има дакле две осовине и четири темена.

Из еквације (5) је даље

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ а } x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2};$$

Из прве еквације се види, да је y реално само за оне вредности x-ове, које леже између $-a$ и $+a$; према томе ће крива имати својих тачака само између напоредница $x = -a$ и $x = +a$. Из друге еквације се види, да је x реално само за оне вредности y-ове, које леже између $-b$ и $+b$; према томе ће крива имати својих тачака само између напоредница $y = -b$ и $y = +b$. Елипса се дакле ни у једном правцу не грана у бескрајност; она лежи у једном правоугаонику, а стране тог правоугаоника су $2a$ и $2b$.

32. **Хипербола.** *Хипербола је место у ком је разлика раздаљинâ ма које тачке од двеју сталних тачака стална.*

Сталне тачке F и F' (сл. 24) су *жиже* хиперболине. Раздаљину њихову обележићемо са $2c$, а разлику раздаљина ма које тачке P (x, y) од жижа са $2a$. Тачка P је тачка датог места; с тога је

$$r - r' = \pm 2a.$$

Еквација хиперболе је дакле

$$\sqrt{y^2 + (x - c)^2} - \sqrt{y^2 + (x + c)^2} = \pm 2a$$

или, кад последњу еквацију двапут узастопце подигнемо на квадрат и сведемо као и мало час,

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2\,y^2 = a^2\,(c^2 - a^2).$$

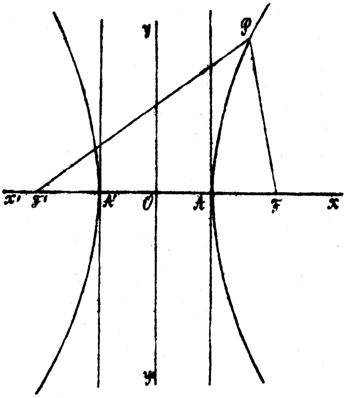
У троуглу FPF' је међу тим $FF' > PF - PF'$, т. ј. $2c > 2a$ или $c > a$; с тога је разлика $c^2 - a^2$ позитивна, $c^2 - a^2 = b^2$, па је према томе еквација хиперболе овог облика:

$$b^2\,x^2 - a^2\,y^2 = a^2\,b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (6)$$

Из еквације (6) види се, да ће све тачке хиперболине симетрично лежати према координатним осовинама. Хипербола се дакле састоји из четири конгруентна дела од којих сваки лежи у једном квадранту координатне системе. Праве xx' и yy' су с тога *осовине* криве. Осовина x сече криву линију у две реалне тачке. Координате тих тачака — *темена* — добијамо из еквације криве на веома прост начин ; y тих тачака је $= o$, па је с тога њихово $x = \pm a$. — Осовина y сече криву у имагинарним тачкама (o, bi) и $(o, -bi)$.



Сл. 24.

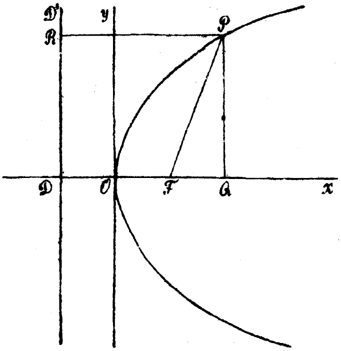
Из еквације (6) је даље

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

а по томе се види, да ће y бити имагинарно за оне вредности променљиве x, које леже између o и $\pm a$, а реално за оне вредности те променљиве, које леже између $+a$ и $+\infty$ с једне, и $-a$ и $-\infty$ с друге стране. Хипербола се према томе изван правих $x = +a$ и $x = -a$ грана у бескрајност ; једна *грана* њезина иде у правцу позитивних, друга у правцу негативних апсциса.

33. **Парабола.** *Парабола је место тачака, које леже у истој раздаљини од једне сталне тачке и једне сталне праве.*

Стална тачка F назива се *жижом*, а стална права DD' *управницом* параболе. Раздаљину FD жиже од управнице обележићемо са p. Нека осовина x координатне системе лежи на правој FD; осовину y ћемо потегнути управно на осовину x, а у тачци O која полови дуж $FD = p$; биће дакле $FO = DO$, т. ј. тачка O је једна од тачака криве. Нека је $PF = r$, $PR = r'$;



Сл. 25.

тачка P (x, y) по претпоставци лежи на параболи; с тога је

$$r = r'.$$

Међу тим је

$$r = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}, \quad r' = x + \frac{p}{2};$$

аналитички еквиваленат параболе је дакле ово:

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

или

$$y^2 = 2px. \qquad (7)$$

Дискутовањем ове еквације можемо у главном одредити и слику параболину. По тој еквацији види се на први поглед — што смо у осталом и мало час поменули — да крива пролази кроз почетак координатне системе. Из те еквације види се даље, да су тачке параболине симетрично распоређене само према осовини x — свакој апсциси одговарају на име два једнака, али различито означена y-а. Осовина x је из тог разлога *осовина* криве, а тачка O *теме* њезино. Парабола има дакле једну осовину и једно теме.

Да бисмо мисли средили и закључке доконали, претпоставићемо да је $p > o$, т. ј. да жижа F лежи на позитивном делу осовине x. Из еквације (7) је

$$y = \pm \sqrt{2px},$$

а по тој еквацији се види, да је y имагинарно кад се x мења између $-\infty$ и o, а реално кад се x мења између o и $+\infty$.

Парабола је дакле крива, која се само у једном правцу грана у бескрајност.

34. **Диоклова цисоjида.** *Дат је један круг, његов један пречник $OA = a$ и тангента AB на једном крају тог пречника. Са другог краја O тог пречника повући ћемо полуправу OD; ова ће сећи круг у тачци C, а тангенту у тачци D. На полуправој одмерићемо, почевши од тачке O, дуж $OP = CD$. Цисојида је место тачака P.*

Аналитички еквиваленат цисојиде добићемо на овај начин. Узећемо једну поларну координатну систему; нека је O пол, а пречник OA поларна осовина те системе. Координате тачке P ћемо означити са ϱ и θ.

Како је

$$OD = \frac{OA}{cos\theta} = \frac{a}{cos\theta},$$

а

$$OC = OA\cos\theta = a\cos\theta,$$

биће

$$\rho = OP = OD - OC = \frac{a}{\cos\theta} - a\cos\theta,$$

па је према томе

$$\rho = \frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta} \tag{8}$$

поларна еквација цисоjиде.

35. У паралелноj системи добићемо еквацију цисоjиде овим путем. Узећемо за осовину x праву OA, а тангенту круга у тачци O за осовину y. Та паралелна система је ортогонална, па је с тога

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$$

или обратно

$$\rho^2 = x^2 + y^2,\ tg\theta = \frac{y}{x}.$$

Ако познату еквацију (8) цисоjиде напишемо у овом облику:

$$\rho^2 = a tg\theta \cdot \rho\sin\theta,$$

то ће се ова еквација непосредно помоћу горњих образаца преобразити у ову:

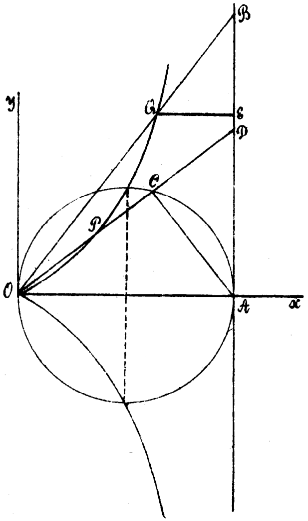
$$x(x^2 + y^2) = ay^2. \tag{9}$$

Ово је дакле у поменутоj паралелноj координатноj системи еквација цисоjиде.

Дискутовањем еквације (9) могли бисмо у главном одредити и слику цисоjидину. Из те еквације је

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a - x}};$$

свакоме x-у одговарају, као што се види, по два једнака, али противно означена y-а. Према томе су



Сл. 26.

тачке цисојидине симетрично распоређене према осовини x, а то ће рећи, да је осовина x осовина криве. Кад се x мења o до $+ a$, биће y реално; за све остале апсцисе је y имагинарно, т. ј. цисојида има својих тачака само између двеју напоредница $x = o$ и $x = a$. Посебним вредностима $x = o, \frac{a}{2}, a$ одговарају y-у ове вредности: $o, \pm \frac{a}{2}, \pm \infty$ т. ј. док се x мења у првој половини поља својих вредности, мења се y само од o до $\pm \frac{a}{2}$, а кад x пређе и у друго поље, расте y много брже — оно је тим веће што је разлика $a - x$ мања тако, да је y по апсолутној вредности веће од сваке количине кад је $a - x = o$ или $x = a$. Ако апсцису буди које тачке Q криве означимо са x, онда је разликом $a - x$ одмерена дуж QE, т. ј. раздаљина QE ма које тачке цисојидине од сталне тангенте AB је равна нули кад тачка Q оде по једној грани криве у бескрајност. Права AB којој се крива без престанка приближује зове се *асимптота* криве. Цисојида има дакле једну асимптоту.

Напомена. Дијаметар OA продире дат круг у тачци O и тачци A — додирној тачци тангенте AB. Кад бисмо тачку O, из које полуправе OD полазе, узели ма где на другом месту периферије, онда би тачка P поново описала једну цисојиду; та цисојида била би *коса*; цисојида (9) је *права*.

36. **Строфојида.** *Дат је прав угао xOy и на краку његову Ox стална тачка A. Са тачке A потегнућемо полуправу AD; ова ће сећи други крак датог угла у тачци C. На полуправој одмерићемо, почевши од тачке C у једном и у другом правцу, дужи CP и CP', једнаке дужи OC. Строфојида је место тачака P и P'.*

Тачке P и P' добијамо на врло прост начин; оне су на име заједно са тачком O тачке једнога круга, који је описан полупречником OC око тачке C као средишта.

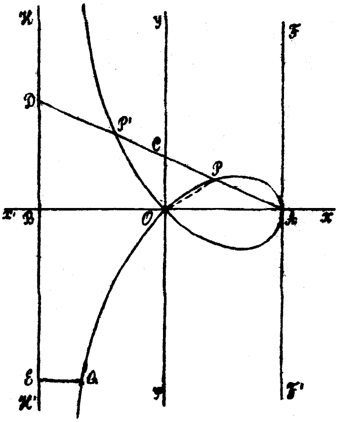
Нађимо еквацију строфојиде најпре у поларној системи. Узмимо тачку O за пол, а праву OA за поларну осовину. Раздаљину сталне тачке A од пола обележићемо са a, $OA = a$, а координате тачке P са ρ и θ. Троугао OCP је равнокрак; с тога је $\sphericalangle COP = \sphericalangle CPO = \frac{\pi}{2} - \theta$, па је према томе и угао $OCP = 2\theta$. У троуглу AOC је дакле угао $OAC = \frac{\pi}{2} - 2\theta$, а у троуглу AOP је угао $OPA = \frac{\pi}{2} + \theta$.

Из троугла AOP је непосредно

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

или

$$\rho = \frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}. \qquad (10)$$



Сл. 27.

Ова релација, као што би се веома лако могло доказати, постоји и између координата тачке P'; та релација је дакле еквација строфојиде у поларним координатама.

37. Еквацију строфојиде у ортогоналној координатној системи добићемо на овај начин. Краке датог правог угла xOy узећемо за осовине; теме тог угла биће почетак паралелне координатне системе.

Напишимо сад еквацију (10) у овом облику:

$$\rho\cos\theta \cdot \rho^2 = a\,(\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta)\,;$$

ова еквација ће се, кад се пређе из поларне системе у паралелну, прерушити у екваџију

$$x\,(x^2 + y^2) = a\,(x^2 - y^2). \qquad (11)$$

Ово је дакле екваџија строфојиде у паралелној координатној системи.

Дај да видимо како ћемо моћи у овом случају одредити слику строфојиде помоћу екваџије њезине. Из те екваџије се види, да је осовина x уједно и осовина криве; то је у осталом већ према начину којим крива постаје сасвим јасно. Из екваџије (11) је даље

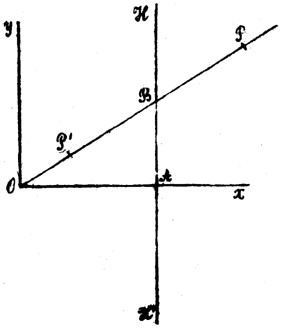
$$y = \pm\, x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}};$$

једним знаком је представљена једна, а другим друга грана криве. Кад се x мења од $+a$ до $-a$ биће y реално; за све остале апсцисе је y имагинарно т. ј. дато место има својих тачака само између двеју напоредница $x = a$ и $x = -a$. Посебним вредностима $x = a, o, -a$ одговарају ове вредности y-ове: $o, o, \mp \infty$, т. ј. док се x мења у првој половини поља својих вредности, мења се y од нуле којом почиње низ својих позитивних вредности, до нуле којом га завршује. Покретна тачка (x, y) описаће у том случају лук APO; међу тим, кад x пређе у друго поље својих вредности, y постаје негативно и нагло расте -- оно је, кад се узме по апсолутној вредности тим веће што је именитељ $a + x$ мањи тако, да је за $a + x = o$, т. ј. за $x = -a$, y веће од сваке количине. Прва грана спушта се, дакле, почевши од тачке O у правцу негативних ордината у бескрајност, т. ј. раздаљина QE између неке, ма које, тачке криве и праве $x = -a$ бива све мања и мања. Ова је у граници равна нули; права $x = -a$, а то ће рећи права HH', је према томе асимптота криве. Цисојида има дакле једну асимптоту. — Тачка O у којој се укрштавају две гране криве зове се *двојна тачка* **или** *расутна тачка другога реда.*

Напомена. Угао *xOy* може бити и кос. У том случају ће место тачака *P* и *P'* бити *коса* строфојида. Еквација (11) представља *праву* строфојиду.

38. **Никомедова конхојида.** *Дата је права HH' и ван ње стална* **тачка** *O. Са тачке O потегнућемо праву OB; ова ће сећи праву HH' у* **тачци** *B. На* **правој** *OB одмерићемо, почевши од* **тачке** *B и у* **једном** *и у другом правцу, дате дужи BP = BP' = b.* ***Конхојида*** *је место тачака P и P'.*

Нађимо еквацију конхојиде најпре у поларној координатној системи. Узмимо тачку O за пол, а управну *OA* на *HH'* за поларну осовину. Раздаљину сталне тачке *O* од дате праве *HH'* обележићемо са *a*, *OA* = *a*.



Сл. 28.

Из троугла *OAB* је

$$OB = \frac{a}{cos\theta},$$

а то ће рећи, да потег ϱ тачке *P* има ову вредност:

$$\varrho = \frac{a}{cos\theta} + b,$$

а потег ϱ тачке P' ову:

$$\varrho = \frac{a}{cos\theta} - b;$$

поларна еквација конхојиде је дакле

$$\varrho = \frac{a}{cos\theta} \pm b$$

или

$$(\varrho \mp b)\,cos\theta = a. \qquad (12)$$

39. Поред поменуте поларне системе узећемо још и ортогоналну координатну систему xOy. Еквација (12) прерушиће се при прелазу с једне системе на другу у еквацију

$$b^2 x^2 = (x - a)^2 (x^2 + y^2). \qquad (13)$$

Ово је дакле еквација конхојиде у паралелној координатној системи.

Из еквације (13) се непосредно види да је осовина x осовина конхојиде. Из ње је даље

$$y = \pm \frac{x}{x - a} \sqrt{(a + b - x)(x + b - a)}. \qquad (14)$$

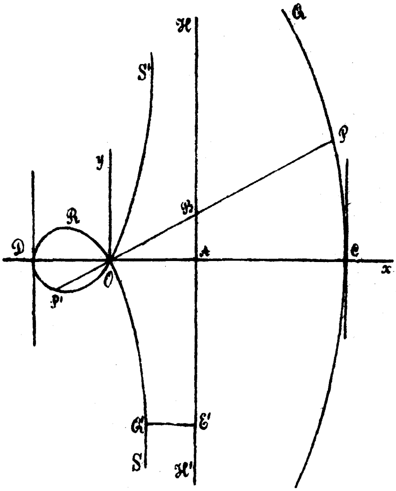
Ако смо ради да одредимо границе у којима се апсцисе x могу кретати, па да ординате y буду реалне, онда морамо водити рачун о релативној величини датих количина a и b.

1-во. *Нека је* $a < b$.

У овом случају ће y бити реално само за оне апсцисе које леже између $a - b$ и $a + b$, т. ј дато место има реалних тачака само између двеју напоредница $x = -(b - a)$ и $x = a + b$.

Да бисмо мисли средили и даље закључке доконали, узећемо испред корене количине која се јавља на десној страни еквације (14) само један, н. пр. позитиван знак.

Док се x мења од $-(b-a)$ до o, мења се y од нуле, којом почиње низ својих *позитивних* вредности, до нуле којом га завршава. Покретна тачка (x, y) опи-



Сл. 29.

саће у поменутом случају лук DRO. Кад x пређе у поље које је омеђено вредностима $x = o$ с једне, и $x = a$ с друге стране, наставиће тачка (x, y) свој пут по луку OS у правцу *негативних* ордината. Ординате свију тачака што леже на том луку биће по апсолутној величини тим веће, штогод се x више примиче својој *горњој* граници $x = a$; за $x = a$ је $y = -\infty$, т. ј. права HH' је асимптота криве. Јасно је да ће услед негативног знака, који се такођер јавља испред корена у еквацији (14), бити и тачке лука $DP'OS'$ тачке конхоидине. Тај лук бисмо добили обрнувши лук $DROS$ око осовине x за 180°.

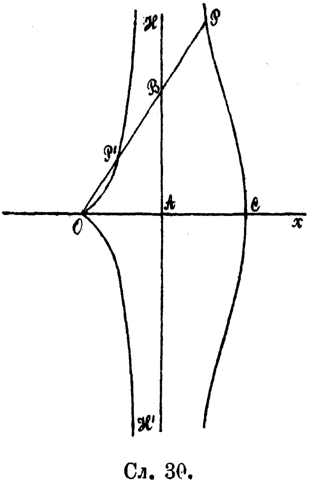
Узмимо да се најпосле x мења од a до $a + b$; y ће бити *позитивно*; за $x = a + b$ је $y = o$, т. ј.

крива сече осовину x у тачци C; за остале x-ове је y тим веће, што се x више примиче својој *доњој* граници $x = a$; за $x = a$ је $y = +\infty$; права линија HH' је дакле асимптота и другој грани конхојиде, т. ј. грани CPQ. Кад бисмо све тачке те гране пренели испод осовине x на оним ординатама које им одговарају, добили бисмо потпуну слику и те друге гране.

Тачка O је у овај мах *распутна* и то *двојна* тачка. Крива линија се грана, почевши од те двојне тачке, и у правцу позитивних, и у правцу негативних апсциса.

2-го. *Нека је* $a = b$. Из еквације (14) је

$$y = \pm \frac{x}{x-a} \sqrt{x\,(2a - x)}.$$



Сл. 30.

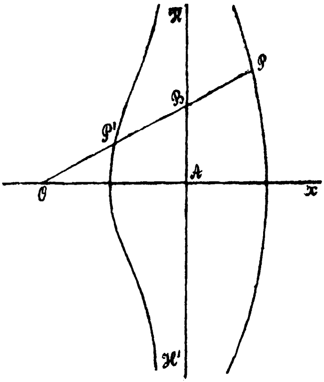
У овом случају је y реално само за оне вредности промењиве x, које леже између o и $2a$, т. ј. крива ће се моћи гранати само између напоредница $x = o$ и $x = 2a$. Права HH' је асимптота двема гранама њезиним; тачка D ће пасти на тачку O. Лука $DROP'$ у опште и нема.

Тачка O назива се у овом случају *завратна тачка (point de rebroussement)*. Крива линија (сл. 30.) пролази кроз њу и грана се, почевши од ње, само у правцу позитивних апсциса.

3-ће. *Нека је* $a > b$.

Ординате ће бити реалне само у пољу које је омеђено напоредницама $x = a - b$ и $x = a + b$ (сл. 31.). Права HH' је асимптота грана конхојидиних.

Тачка O је у овом случају мало чудновате природе. Она не лежи на кривој и поред свега тога координате њезине $x = o$, $y = o$ задовољавају еквацију криве. Тачка O припада према томе кривој, она је, као што се то каже, *осамна (изолована, коњугована)* тачка криве линије.



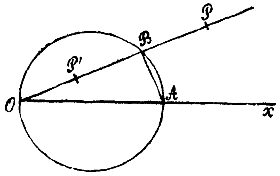
Сл. 31.

40. Паскалов пуж. *Дат је један круг и на њему стална тачка O. Са тачке O потегнућемо секанту OB; ова ће сећи круг у тачци B. На секанти одмерићемо, почевши од тачке B, и у једном и у другом правцу дате дужи BP = BP' = b. Паскалов пуж јесте место тачака P и P'.*

По овој дефиницији је дато место *конхојида круга*. Нека је $OA = a$ дијаметар датог круга. Из слике се види да је

$$OB = a\cos\theta,$$

па је с тога еквација Паскалова пужа у поларној координатној системи

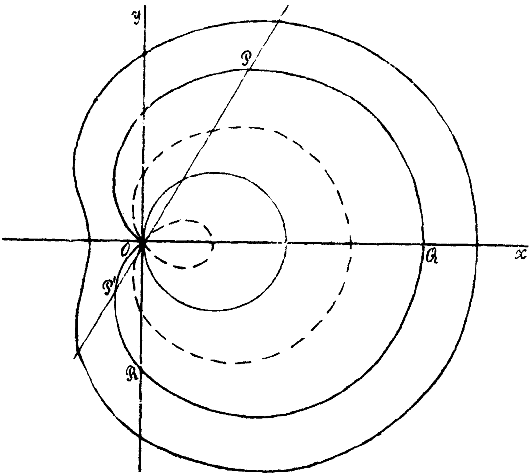


Сл. 32.

$$\rho = a\cos\theta \pm b, \qquad (15)$$

а у ортогоналној, паралелној

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2 (x^2 + y^2). \qquad (16)$$



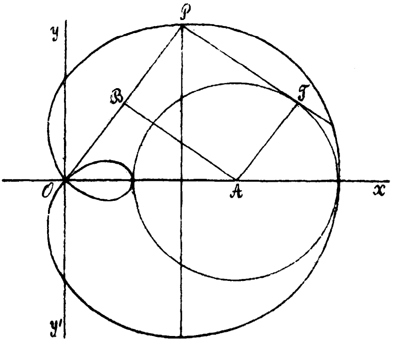
Сл. 33.

И у овом случају имамо три разнолике конхојиде круга, како је кад $a < b$, $a = b$ или $a > b$. Све три врсте показује сл. 33.

Кад је $a = b$, онда је крива налик на срце и зове се *кардиојида*; она је представљена на слици средњом, кривом $OPQRP'$. Кад је $a > b$, добијамо ону криву, која је у слици цртицама обележена; најпосле, кад је $a < b$, онда је конхојида она крива која у слици иде око кардиојиде.

41. **Подера круга (подножница круга).** *Дат је један круг, једна стална тачка O и ма где на кругу једна тангента PT. Са сталне тачке O потегнућемо праву OP управно на тангенту PT. Подера круга је место пројекцијâ P.*1)

Нађимо еквацију тог места у поларној координатној системи. Средиште сталног круга нека буде A, а полупречник његов нека је $AT = BP = b$. Раздаљину средишта A од сталне тачке O обележићемо са



Сл. 34.

a, $OA = a$, а координате ма које тачке P подерине са ρ и θ; према томе се непосредно из слике види, да је подера круга аналитички обележена еквацијом

---

1) Као што круг има своју подеру, има своју подеру и свака друга крива. Та подера назива се и *први позитиван педал* криве с обзиром на дату тачку. Педал првог позитивног педала је *други позитиван педал* и т. д. Обратно, дата крива назива се с обзиром на редове појединих педала, *негативним педалом првога, другога и т. д. реда.*

$$\varrho = a\cos\theta + b\,;$$

ово је међу тим и еквација Паскалова пужа, а то ће рећи, *да је подера круга Паскалов пуж*, и обратно, *Паскалов пуж подера круга*. Стална тачка O лежи или ван круга или на кругу или у кругу. У сл. 34. је тачка O ван круга т. ј. a је $>$ b.

42. Из примера, које до сад поменусмо, види се да су круг, елипса, хипербола и парабола криве линије другога реда; цисојида и строфојида су криве трећега, а конхојида праве и конхојида круга четвртога реда. Сваки ред кривих линија има дакле своје врсте, своје специје. Ми ћемо видети да кривих линија другога реда нема више од три врсте. Број врста кривих линија трећега реда је много већи; већ је **Њутн** пребројио седамдесет и две криве линије трећега реда, а има их и више. — Међу свима кривима најважније су криве другога реда. Њих су испитивали и стари. Тако је **Аполоније** изнео њихове особине у осам књига, у прве четири све оне које су и до њега биле познате, у друге четири оне до којих је својим истраживањем дошао. (**Chasles**. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie)*.

Примери

1. Две праве Ox и Oy секу се под правим углом. По тим правима клизе крајеви R и S неке дужи $RS = 2a = const.$ Управна OP, која је са тачке O спуштена на RS, сече RS у тачци P. Наћи место тачака P.

Праву Ox ћемо узети за осовину, а тачку O за пол поларне координатне системе. Еквација криве биће

$$\varrho = a\sin 2\theta.$$

У паралелним координатама је еквација криве овог облика:

$$(x^2 + y^2)^3 - 4a^2\,x^2\,y^2 = o.$$

Крива је, дакле, шестога реда; она има четири осовине — праве Ox и Oy и праве које полове угле између Ox и Oy — а сва лежи у једном кругу који је око тачке O описан полупречником a.

2. Наћи место у ком је производ раздаљина ма које тачке P од двеју сталних тачака F и F' сталан и раван квадрату половине раздаљине сталних тачака.

Половину $OF = OF'$ раздаљине FF' ћемо означити са a, $OF = OF' = a$, праву FF' ћемо узети за осовину x, а управну у O на FF' за осовину y. У тој системи биће

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

еквација криве. Крива је четвртог реда; она пролази кроз почетак координатне системе и сече поред тога осовину x још у две тачке $(o, a\sqrt{2})$ и $(o, -a\sqrt{2})$. Крива се не грана изван правих $x = a\sqrt{2}$ и $x = -a\sqrt{2}$. Лако би се дало показати да се крива ни у правцу ордината не грана у бескрајност. Све тачке криве леже, дакле, у одређеној раздаљини, а слика њезина личи на положену слику броја 8. Та крива зове се *лемниската.*

3. Основа a неког троугла је стална, а остале две стране његове b и c се мењају. Средњу линију која одговара основи a ћемо означити са d и претпоставићемо да је $b - c = d\sqrt{2}$. Доказати да је место темена у пресеку страна b и c лемниската.

4. Тачка P кренула се са тачке O у правцу потега $OA = const.$, а потег OA почео се у исти мах обртати око тачке O праве Oz. Претпоставићемо ово двоје: 1-во, да се брзине којима се крећу (обрћу) P и OA не мењају; 2-го, да за оно време, за које би се OA обрнуло за 360^0 око O, тачка P пређе OA и дође у тачку A. Наћи место тачака P.

Кад бисмо праву Oz узели за осовину, а тачку O за пол поларне координатне системе, била би еквација криве овог облика:

$$\varrho = a\theta;$$

у овој еквацији је a стална количина, а ϱ и θ су координате тачке P. Крива личи на спиралу и зове се *Архимедова спирала;* један крај њезин лежи у тачци O. Кад бисмо еквацију $\varrho = a\theta$ преобразили у паралелне координате, видели бисмо да је крива трансцендентна.

5. У еквацијама $f(x, y, \lambda) = o$ и $\varphi(x, y, \lambda) = o$ је са λ означен један параметар. Шта представљају те две еквације?

Еквација $f(x, y, \lambda) = o$ представљаће разред неких кривих A, а еквација $\varphi(x, y, \lambda) = o$ разред кривих B. Кад се има у виду то, да се λ мења без прекида и да свакој посебној вредности параметра λ одговара по једна крива једног и по једна крива другог разреда, онда ће нам јасно бити, да ће еквације $f(x, y, \lambda) = o$ и $\varphi(x, y, \lambda) = o$ представљати једну криву. Тачке те криве јесу тачке у којима се криве разреда A секу са одређеним кривима разреда B — са оним кривима на име, које су у том разреду опредељене истим вредностима параметра λ.

6. Наћи екваццију криве која је представљена екваццијама $f(x, y, \lambda) = o$ и $\varphi(x, y, \lambda) = o$.

Еквацију криве добићемо на овај начин: *елиминираћемо параметар* λ *из еквација* $f(x, y, \lambda) = o$ и $\varphi(x, y, \lambda) = o$. — Нека је $\lambda = \lambda'$. Том вредношћу параметра λ опредељене су две посебне криве

$$f(x, y, \lambda') = o, \quad \varphi(x, y, \lambda') = o.$$

Узмимо да се те криве секу у некој тачци (x', y'); услед тога ће бити и

$$f(x', y', \lambda') = o, \quad \varphi(x', y', \lambda') = o;$$

ове две еквације имају, као што видимо, заједнички корен λ'; према томе ће резултанта $R(x', y')$ тих двеју еквација морати бити $= o$; биће дакле

$$R(x', y') = o,$$

а по томе се види да тачка (x', y') лежи на кривој

$$R(x, y) = o.$$

Заиста се дакле добива еквација криве C која постаје у пресеку кривих једног и другог разреда, кад се из еквација тих кривих елиминира параметар λ.

Обратно би се дало доказати, да ће све тачке криве $R(x, y) = o$ *у опште* бити уједно и тачке криве C. — Узмимо на име да тачка (x', y') лежи на кривој $R(x, y) = o$, т. ј. узмимо да је

$$R(x', y') = o.$$

Како је резултанта R двеју функција f и φ за те две посебне вредности x' и y' променљивих x и y равна нули, то је јасно, да ће еквације

$$f(x', y', \lambda) = o, \quad \varphi(x', y', \lambda) = o \qquad (\alpha)$$

имати један заједнички корен $\lambda = \lambda'$; тим кореном опредељене су две криве — једна крива разреда A и једна крива разреда B, а еквације тих двеју кривих су

$$f(x, y, \lambda') = o, \quad \varphi(x, y, \lambda') = o. \qquad (\beta)$$

но како је λ' корен и једне и друге еквације (α), то ће бити уједно и

$$f\,(x', y', \lambda') = o, \quad \varphi\,(x', y', \lambda') = o,$$

а по томе се види да тачка (x', y') лежи у опште у пресеку кривих (β).

Напом. **Све тачке криве $R\,(x, y) = o$ не морају свакад припадати оном месту које је аналитички опредељено еквацијама $f\,(x, y, \lambda) = o$ и $\varphi\,(x, y, \lambda) = o$. (Види VI. прилог *G. Darboux-а* у Геометрији *Bourdon-овој* р. 538.).**

КЊИГА ДРУГА

ПРАВА. ТАЧКА

ОДЕЉАК ПРВИ

Еквације праве

43. Ми смо споменули већ на једном месту, да је свака крива линија првога реда, права линија. На овом месту доказаћемо непосредно, да *еквација првога степена између двеју променљивих x и y мора аналитички представљати једну праву.* Општи облик те еквације је

$$Ax + By + C = o\,; \qquad (1)$$

у њој су A, B, C стални, али неопредељени коефицијенти. Њих је на број три; кад се међу тим подели еквација једним између тих коефицијената — оним који није раван нули — н. пр. коефицијентом C, онда се види, да у свакој еквацији облика (1), управо има *два* неопредељена, стална коефицијента — два *параметра* $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$.

Међу коефицијентима A, B, C могу некоји бити равни и нули; у том случају имаће еквација (1) специјалне облике. Узмимо да је на прилику $A = o$; у том случају преобразиће се општа еквација у ову специјалну

$$By + C = o \quad \text{или} \quad y = -\frac{C}{B} \qquad (2)$$

или, ако $-\frac{C}{B}$ означимо са b, у еквацију

$$y = b,$$

т. ј. еквација $By + C = o$ представља једну у системи оних правих које иду паралелно са осовином x.

Напротив, кад би у општој еквацији (1) коефицијенат B био $= o$, онда би се она преобразила у специјалну еквацију

$$Ax + C = o, \qquad (3)$$

а ова се може написати у овом облику:

$$x = a;$$

и та нам еквација представља једну праву — на име једну од оних правих које иду паралелно са осовином y.

Доказали смо дакле већ то, да специјалне *еквације (2) и (3) првога степена аналитички представљају праве линије.*

44. Пођимо сад даље; узмимо на име да је апсолутан члан C опште еквације $= o$. У том случају преобразила би се општа еквација у ову:

$$Ax + By = o, \qquad (4)$$

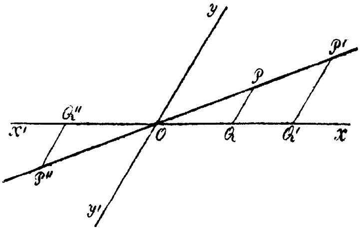
а та еквација може се, кад у њој вредност количника $-\frac{A}{B}$ означимо са m, написати у овом веома уобичајеном облику:

$$y = mx. \qquad (5)$$

У овој, као и у еквацији (4), имамо само *један* параметар m; онај други, који се такођер јавља у *свакој* еквацији праве, скривен је у погодби $C = o$. Тај параметар m може према знаку коефицијената A и B бити или позитиван или негативан.

1-во. *Нека је m позитиван број.* Из еквације (5) види се, да ће координате свију тачака места (5) бити истог знака — или су обе позитивне, или су обе негативне. Тачке тог места могу дакле лежати или у углу xOy или у углу $x'Oy'$. Напишимо сад еквацију (5) овако:

$$\frac{y}{x} = m.$$



Сл. 35.

Ако су (сл. 35.) тачке P, P', P'', . . . тачке датог места, онда ће, као што се по последњој еквацији види, бити

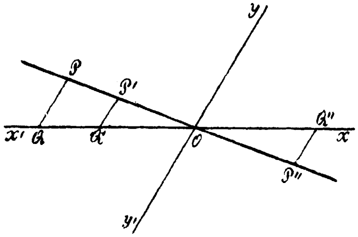
$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'} = \frac{-P''Q''}{-OQ''} = \cdot\cdot\cdot = m;$$

те сразмере нам казују, да су троугли POQ, $P'OQ'$, $P''OQ''$, . . . слични; угли POQ, $P'OQ'$, $P''OQ''$, . . . биће једнаки, па ће услед тога тачке P, P', P'', . . . све од реда лежати на једној правој која пролази кроз почетак координатне системе.

2-го. *Нека је m негативан број.* Из еквације (5) види се, да ће тачке датог места лежати или у углу yOx' или углу $y'Ox$. Ако су (сл. 36.) тачке P, P', P'', . . . тачке места (5), мора бити

$$\frac{PQ}{-OQ} = \frac{P'Q'}{-OQ'} = \frac{-P''Q''}{OQ''} = \cdot\cdot\cdot = m,$$

а по тим сразмерама се види да и тачке $P, P', P'', \ldots$ морају лежати на једној правој која пролази кроз почетак координатне системе.



Сл. 36.

Специјалне *еквације (4) и (5) првога степена јесу*, као што видимо, такође *аналитички еквиваленти правих линија.*

45. Узмимо најпосле општу еквацију

$$Ax + By + C = o.$$

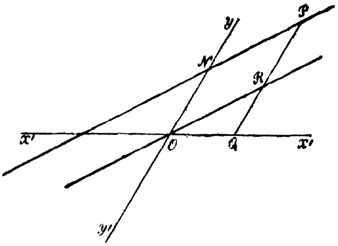
Из ње излази да је

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

или — ако $-\frac{A}{B}$ означимо са m, а $-\frac{C}{B}$ са b — да је

$$y = mx + b. \qquad (6)$$

Кад се ова последња еквација узме напоредо са еквацијом $y = mx$ праве OR, онда се види да су ординате тачака места (6) само за b веће (мање) од ордината тачака места (5), т. ј. *тачке места (6) морају лежати на једној правој која иде паралелно са правом OR.* За тачку N — у тој тачци права (6) сече осовину y — је $x = o$; ординату те тачке добићемо дакле, кад у еквацији $y = mx + b$ сменимо x посебном вредношћу $x = o$; с тога је ордината тачке N ово: $y = b$, т. ј. координате те тачке су $x = o$, $y = b$. Кад је b позитивно, онда тачка N лежи на позитивном делу осовине y т. ј. кад је параметар b позитиван, онда еквација (6) представља једну праву NP, која изнад почетка координатне системе сече осовину y; у противном случају је еквација (6) аналитички еквиваленат једне праве, која осовину y сече у раздаљини b испод почетка координатне системе.



Сл. 37.

Кад се скупи уједно све што рекосмо о разним облицима праве линије, онда се може рећи, да *свака линеарна еквација која постоји између променљивих x и y представља аналитички једну праву.*

Напомена. Еквацијом $Ax + By + C = o$ обележен је т. зв. *општи облик еквације праве.* (**Hesse.** *Analytische Geometrie*).

46. Обрнуто можемо доказати, *да се свака права даје представити једном еквацијом првога реда.*

1-во. Еквације правих што иду паралелно са осовином y или x јесу на име

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b.$$

2-го. Еквације правих што пролазе кроз почетак морају бити облика $y = mx$; узевши на име на таквој једној правој неколико тачака P, P', P'', · · · добили бисмо из сличних троуглова (сл. 35. и 36.) сразмере

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'} = \frac{-P''Q''}{-OQ''} = \cdot \cdot \cdot$$

с једне, и

$$\frac{PQ}{-OQ} = \frac{P'Q'}{-OQ'} = \frac{-P''Q''}{OQ''} = \cdot \cdot \cdot$$

с друге стране. Ако и у једном и у другом случају вредност сталне напремице обележимо са m, биће еквација праве ово:

$$\frac{y}{x} = m \quad \text{или} \quad y = mx \quad \text{q. e. d.}$$

3-ће. Еквација праве која на осовини y одсеца део b, мора бити оваквог облика:

$$y = mx + b.$$

То се веома лако може доказати. Повући ћемо кроз почетак координатне системе једну праву напоредо са датом правом. Еквација те праве била би, према оном што мало час рекосмо, ово: $y = mx$. Како се ординате оних тачака, које једна другој одговарају на тим двема правима, разликују само једном сталном количином, рецимо, количином b, то се види да је заиста $y = mx + b$ еквација дате праве. Тај параметар b је, као што смо видели, ордината оне тачке N (сл. 37.) у којој права сече осовину y — то је тако звана *ордината у почетку*.

47. У општој еквацији

$$y = mx + b$$

праве параметар b нема никакве везе са правцем њезиним; тај правац опредељен је на име оним другим параметром m, који се зове *коефицијенат правца*. Кад би се у датој еквацији мењао само параметар b, а онај други m непрестано остајао сталан, онда би еквација

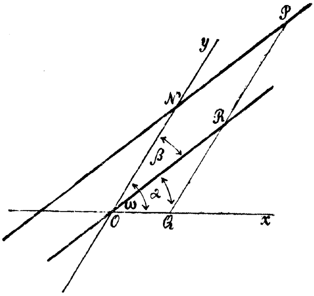
$y = mx + b$, као што се јасно види, представљала читаву једну систему правих које иду паралелно са правом $y = mx$, а то ће рећи, *да су коефицијенти правца у еквацијама паралелних правих линија једнаки.*

Да бисмо нашли праву вредност тог коефицијента узећемо праву

$$y = mx.$$

Нека је ω угао координатне системе, а α угао који та права затвара са *позитивним* правцем осовине x. И у овом случају је m или позитивно или негативно.

1-во. Нека је $m > o$. Ако је R (x, y) тачка праве $y = mx$, биће (сл. 38.)



Сл. 38.

$$m = \frac{y}{x} = \frac{RQ}{OQ} = \frac{sinQOR}{sinORQ} = \frac{sin\alpha}{sin\,(\omega - \alpha)}.$$

2-го. Нека је $m < o$, а R (x, y) поново једна тачка праве $y = mx$; у овом случају ће бити (сл. 39.)

$$m = \frac{y}{x} = \frac{RQ}{-OQ} = \frac{sinQOR}{-sinORQ} = \frac{sin\,(\pi - \alpha)}{-sin\,(\alpha - \omega)} = \frac{sin\alpha}{sin\,(\omega - \alpha)}.$$

И у једном и у другом случају је, дакле,

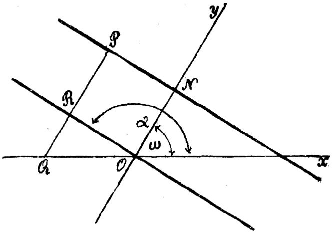
$$m = \frac{sin\alpha}{sin\,(\omega - \alpha)}. \qquad (7)$$

Из овог обрасца је

$$m \sin\omega \cos\alpha = (1 + m \cos\omega) \sin\alpha$$

или

$$tg\alpha = \frac{m \sin\omega}{1 + m \cos\omega}. \tag{8}$$



Сл. 30.

У ортогоналној системи је $\omega = \frac{\pi}{2}$, т. ј. *у ортогоналној системи је*

$$m = tg\alpha \tag{7*}$$

и обратно,

$$tg\alpha = m \tag{8*}$$

Из еквације (8) није могуће израчунати угао α помоћу логаритама. Но како је услед релације (7)

$$\frac{m - 1}{m + 1} = \frac{\sin\alpha - \sin(\omega - \alpha)}{\sin\alpha + \sin(\omega - \alpha)} = \frac{tg\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)}{tg\frac{\omega}{2}},$$

то је уједно и

$$tg\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right) = \frac{m - 1}{m + 1}\, tg\frac{\omega}{2},$$

а из ове еквације је већ могуће помоћу логаритамских таблица израчунати угао α.

Примедбе. 1-во. Кад је права паралелна са осовином x, онда је угао $\alpha = o$, т. ј. m је $= o$.

2-го. Кад је права паралелна са осовином y, онда је $\alpha = \omega$, т. ј. m је бескрајно.

3-ће. Кад права стоји управно на осовини x, онда је $\alpha = \frac{\pi}{2}$; с тога је $tg\alpha = tg\frac{\pi}{2} = \infty$; по обрасцу (8) види се дакле да је $1 + mcos\omega = o$ или $m = -\frac{1}{cos\omega}$.

4-то. Кад права стоји управно на осовини y, онда је $\alpha = \frac{\pi}{2} + \omega$, па је услед тога по обрасцу (7)

$$m = \frac{sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)}{sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\ cos\omega.$$

5-то. Кад су две праве дате еквацијама општега облика:

$$Ax + By + C = o, \quad A'x + B'y + C' = o,$$

онда је

$$m = -\frac{A}{B}, \quad m' = -\frac{A'}{B'},$$

т. ј. *праве су паралелне кад је*

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \textit{ или } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

а по томе се уједно види и то, *да се еквације паралелних правих разликују само у сталном члану.* Ако је на име

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{1}{\mu},$$

биће

$$A' = \mu A, \quad B' = \mu B,$$

т. ј. еквација праве $A'x + B'y + C' = o$ је

$$Ax + By + \frac{C'}{\mu} = o \quad \text{q. e. d.}$$

48. Према свему овоме види се да је еквација праве што пролази кроз почетак у опште ово:

$$y = \frac{sin\alpha}{sin\,(\omega - \alpha)}\,x\,; \qquad (9)$$

еквација праве која у почетку системе стоји управно на осовини x, јесте

$$ycos\omega + x = o, \qquad (10)$$

а оне, што у почетку са осовином y гради прав угао,

$$y + xcos\omega = o. \qquad (11)$$

49. Узмимо сад да нека права затвара са осовинама Ox и Oy косе системе xOy угле α и β. Косинуси тих углова везани су међу собом једном веома важном релацијом, а до те релације ћемо доћи овим путем.

Потегнућемо кроз почетак O системе xOy (сл. 38.) праву OR паралелно са датом правом NP и узећемо на правој OR ма где једну тачку R (x, y) у раздаљини $r = OR$ од почетка. Ако ортогонално пројицирамо дуж $OR = r$ и контуру координата OQR најпре на осовину x, за тим на осовину y и најпосле на саму праву OR, онда ћемо добити овај низ еквација:

$$r cos\alpha = x + y cos\omega,$$

$$r cos\beta = x cos\omega + y,$$

$$r = x cos\alpha + y cos\beta.$$

Тачка R не лежи у почетку система; у исти мах није дакле $r = x = y = o$.

Система горњих трију линеарних, хомогених еквација постојаће дакле само ако је резултанта те система равна нули, т. ј. ако је

$$\begin{vmatrix} cos\alpha & 1 & cos\omega \\ cos\beta & cos\omega & 1 \\ 1 & cos\alpha & cos\beta \end{vmatrix} = o. \qquad (12)$$

~~Дакле, кад нека права затвара угле α и β са косим~~ осовинама Ox и Oy, онда су косинуси тих углова везани релацијом (12).

Кад се детерминанта (12) развије, онда ће поменута погодбена релација бити овог облика:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta - 2 cos\alpha cos\beta cos\omega = sin^2\omega. \qquad (13)$$

У ортогоналној системи је $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ т.ј. у ортогоналној системи постоји између косинуса углова α и β ова релација:

$$cos^2\alpha + cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1$$

или

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1. \qquad (14)$$

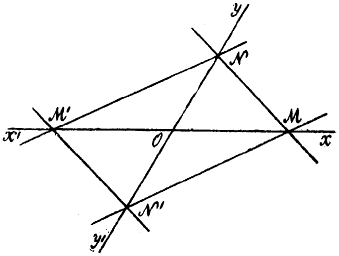
50. *Ако је одсечак праве линије MN на осовини x раван дужи OM = a, а на осовини y дужи ON = b, онда се еквација праве ма у којој паралелној системи може написати у овом облику:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Еквација сваке праве може се, као што знамо, написати у овом облику:

$$Ax + By + C = o;$$

та еквација могла би дакле аналитички представљати и дату праву MN. По себи се разуме да ће у том случају коефицијенти A, B, C или управо њихове напремице имати одређене вредности. Њих ћемо наћи на овај начин.



Сл. 40.

Тачке M и N леже на правој; координате њихове су $x = a$, $y = o$ с једне, и $x = o$, $y = b$ с друге стране. Кад сменимо x и y у еквацији $Ax + By + C = o$ координатама тих двеју специјалних тачака, добићемо ове две релације:

$$Aa + C = o, \quad Bb + C = o, \qquad (15)$$

а из ових је

$$A = -\frac{C}{a}, \quad B = -\frac{C}{b}.$$

Сменимо сад A и B овим вредностима у еквацији $Ax + By + C = o$ и поделимо еквацију са — C. Тим путем преобразила би се еквација $Ax + By + C = o$ у еквацију

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (16)$$

а то смо и тврдили.

По еквацији (16) види се да ће еквације страна једног паралелограма $MNM'N'$, који својим теменима пада на тачке (a, o), (o, b), $(-a, o)$, $(o, -b)$ бити ово:

$$MN \ldots \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad NM' \ldots -\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$M'N' \ldots -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1, \quad N'M \ldots \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1.$$

Примедба. Одсечке a и b праве $Ax + By + C = o$ на осовинама добићемо из еквација̂ (15). Из тих еквација̂ је на име

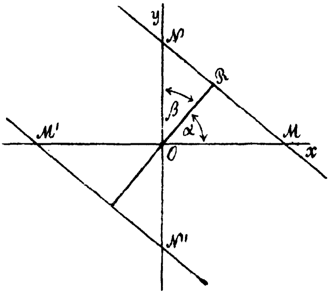
$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

По овим обрасцима се види, да ће одсечци праве на осовинама бити тим већи, што су мањи коефицијенти A и B. Кад је $A = o$, $B = o$ биће одсечци a и b бескрајни т. ј. под тим погодбама ће права лежати у бескрајности. *Аналитички еквиваленат праве у бескрајности је дакле*

$$0 . x + 0 . y + C = o \text{ или } const. = o. \qquad (17)$$

Штогод се на име права јаче одмиче од почетка системе, биће координате њезиних тачака апсолутно све веће и веће; у исто време ће и коефицијенти A и B бивати све мањи и мањи. У граници ће дакле с једне стране Ax, а с друге стране By имати вредност $0 . \infty$. Ова у опште не ће бити равна нули; напротив, вредности појединих чланова дате еквације су у граници такве, да у склопу са коефицијентом C граде еквацију (17). Тако морамо тумачити еквацију $C = o$, кад је сматрамо као аналитички еквиваленат праве у бескрајности.

51. Са почетка координатне системе потегнућемо нормалу $p = OR$ на праву MN. Та нормала ће градити угао α са осовином x, а угао β са осовином y. Дужину одсечака OM и ON означићемо опет са a и b.



Сл. 41.

Наћи еквацију праве кад су дате ове количине: нормала p и угли α и β које гради p са осовинама.

Из троуглова MRO и NRO је

$$a = \frac{p}{\cos\alpha}, \quad b = \frac{p}{\cos\beta}.$$

Еквација (16) преобразиће се, кад у њој сменимо параметре a и b са $\frac{p}{\cos\alpha}$ и $\frac{p}{\cos\beta}$, у еквацију

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = o. \qquad (18)$$

Ово је *нормалан облик еквације праве линије.* (**Hesse.** *Analytische Geometrie).*

У ортогоналној системи је $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, т.ј. у тој системи је нормалан облик еквације праве ово:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o. \qquad (19)$$

Кад се α мења од нуле до 2π, а нормала p од нуле до $+\infty$, представљаће ова еквација све праве и задржаће уз то стално свој нормалан облик. Тако би нормалан облик еквације праве $M'N'$, која иде паралелно са правом MN, с противне стране а у истој раздаљини од почетка, био у ортогоналној системи ово:

$$x\cos(\pi + \alpha) + y\sin(\pi + \alpha) - p = o.$$

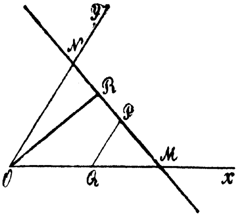
Ова еквација може се међу тим и овако написати:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = o;$$

у њој је угао α један између углова што леже између нуле и π, а сталан члан јој је позитиван, т. ј. еквација $x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = o$ праве $M'N'$ није нормалног облика.

52. Нормалан облик еквације праве MN могли бисмо добити и овим другим путем.

Узмимо на правој ма где једну тачку $P(x, y)$; ако



Сл. 42.

пројицирамо на OR ортогонално најпре пут $OQPR$, а за тим и саму нормалу $OR = p$, биће пројекције тих двају путова једнаке, т. ј. ма за коју тачку (x, y) праве MN је

$$x cos\alpha + y cos\beta = p \quad q. e. d.$$

53. *Ако две линеарне еквације*

$$Ax + By + C = o,$$

$$A'x + B'y + C' = o$$

представљају једну и исту праву, онда су коефицијенти A, B, C сразмерни с коефицијентима A', B', C' :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

То правило ћемо доказати врло лако. Из прве еквације је на име

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

или

$$y = mx + b,$$

а из друге је

$$y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}$$

или

$$y = m'x + b'.$$

Како еквације $y = mx + b$ и $y = m'x + b'$ по претпоставци представљају једну и исту праву, то је јасно, да ће бити

$$m = m' \quad \text{и} \quad b = b',$$

или

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}, \ -\frac{C}{B} = -\frac{C'}{B'},$$

а с тим и

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

54. *Општи облик линеарне еквације* $Ax+By+C=o$ *даје се свести на нормалан, т. ј. свакад је могуће геометријске количине* p, α, β *изразити општим коефицијентима* A, B, C.

1-во. *Нека су осовине координатне системе косе.*

Кад би количине p, α, β биле познате, могла би се дата права

$$Ax + By + C = o \qquad (20)$$

аналитички представити и овом еквацијом:

$$xcos\alpha + ycos\beta - p = o. \qquad (21)$$

Две линеарне еквације (20) и (21) могу међу тим по оном што мало час рекосмо, представљати *једну* праву само ако је

$$\frac{cos\alpha}{A} = \frac{cos\beta}{B} = \frac{-p}{C}.$$

Ако заједничку вредност ових напремица означимо са μ, биће

$$\frac{cos\alpha}{A} = \frac{cos\beta}{B} = \frac{-p}{C} = \mu,$$

па је према томе

$$cos\alpha = \mu A, \; cos\beta = \mu B, \; - p = \mu C.$$

У овим еквацијама је параметар μ непознат, а његову вредност ћемо наћи овако. Ми знамо да међу косинусима углова које гради једна права — у овај мах нормала са p — са осовинама, постоји релација

$$cos^2\alpha + cos^2\beta - 2cos\alpha cos\beta cos\omega = sin^2\omega;$$

сменивши у овој релацији $cos\alpha$ и $cos\beta$ са μA и μB, добићемо ово:

$$\mu^2 (A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega) = \sin^2\omega,$$

а по томе се види да је

$$\mu = \frac{\sin\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}.$$

Према томе је

$$\cos\alpha = \frac{A\sin\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

$$\cos\beta = \frac{B\sin\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

$$p = \frac{-C\sin\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}.$$

Како је p позитивна количина, то ћемо одабрати испред корена у именитељу знак тако, да количник којим је p опредељено, буде позитиван; ако је дакле C у датој еквацији позитивно, узећемо испред корена знак минус, а ако је C негативно, знак плус.

До горњих образаца могли бисмо доћи и овим путем. Ми знамо да су (сл. 41.) одсечци праве $Ax+By+C=o$ на координатним осовинама ово:

$$OM = -\frac{C}{A},\ ON = -\frac{C}{B};$$

према томе је (прим. 2. стр. 19.)

$$MN = \frac{C}{AB}\sqrt{A^2 + B^4 - 2AB\cos\omega};$$

па како је, као што се из троугла MON види,

$$MN : ON = \sin\omega : \sin M \text{ или } \cos\alpha,$$

биће

$$cos\alpha = \frac{ON \cdot sin\omega}{MN}$$

или, кад у количнику сменимо ON и MN њиховим вредностима,

$$cos\alpha = \frac{Asin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcos\omega}}.$$

Сличним путем бисмо дошли и до оног другог обрасца, којим је опредељен косинус угла β. Кад бисмо те обрасце упоредили са обрасцима $cos\alpha = \mu A$ или $cos\beta = \mu B$, добили бисмо и вредност параметра μ, а с њом непосредно и онај трећи образац којим је опредељено p.

2-го. *Нека је система ортогонална.*

У ортогоналној системи је $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, т. ј. у ортогоналној системи је

$$cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

а

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Напомена. У косој системи под углом ω је

$$sin\alpha = \frac{B - Acos\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcos\omega}},$$

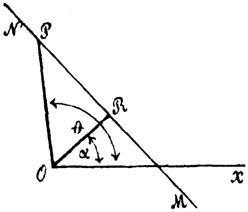
$$sin\beta = \frac{A - Bcos\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcos\omega}},$$

а

$$tg\alpha = \frac{B - Acos\omega}{Asin\omega}, \quad tg\beta = \frac{A - Bcos\omega}{Bsin\omega}.$$

55. *Еквација праве у поларној координатној системи.*

Тачку O узећемо за пол, а полуправу Ox за поларну осовину. У овој системи опредељена је права MN по положају свом потпуно нормалом $OR = p$ и



Сл. 43.

углом α, који нормала затвара са поларном осовином. Ако координате ма које тачке P праве MN обележимо са ρ, θ, добићемо из троугла ORP ово:

$$\rho\cos(\theta - \alpha) = p, \qquad (22).$$

а то је уједно и поларна еквација праве MN. Из те еквације је

$$\rho = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)},$$

а ова еквација се може написати и у овом облику:

$$\rho = \frac{p}{A\cos\theta + B\sin\theta}.$$

Напомене. 1-во. Кад права стоји управно на поларној осовини, онда је $\alpha = o$ или $\alpha = \pi$. У том случају је еквација праве ово:

$$\rho = \frac{p}{\cos\theta} \quad \text{или} \quad \rho = -\frac{p}{\cos\theta}.$$

2-го. Кад је права паралелна са поларном осовином, онда је $\alpha = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha = \frac{3\pi}{2}$. Еквација праве је

$$\rho = \frac{p}{sin\theta} \quad \text{или} \quad \rho = -\frac{p}{sin\theta}.$$

3-ће. Кад права пролази кроз почетак, онда је еквација њезина

$$\theta = const.$$

56. У свакој еквацији праве има свега *два* параметра. Они *потпуно* опредељују положај правој у равни. — Како нас свака геометријска погодба (геометријска погодба може н. пр. бити ово, да права пролази кроз неку тачку и т. д.) води једној релацији, која постоји између тих двају параметара, то је јасно да је довољно, а и потребно знати *две геометријске погодбе*, па да права буде потпуно опредељена. Свакој таквој геометријској погодби одговара на име по једна линеарна релација између двају параметара, а из тих двеју релација могуће је у опште добити само једну вредност за један, и једну вредност за други параметар.

Напомена. Геометријска погодба, којој одговара *једна* релација између параметара, назива се *линеарна погодба*. Према томе *сваку праву потпуно опредељују две линеарне погодбе*.

Примери

1. Угао координатне системе је $\omega = 30^0$. Доказати да права $x + y - 1 = o$ затвара угао од 105^0 са позитивним правцем осовине x.

2. Дате су две праве $y = m'x$ и $y = m''x$. Наћи угао α, који затвара са осовином x права што полови угао између $y = m'x$ и $y = m''x$.

Како је $2\alpha = \alpha' + \alpha''$, биће

$$tg\alpha = \sqrt{\frac{1 - cos(\alpha' + \alpha'')}{1 + cos(\alpha' + \alpha'')}} = \frac{sin(\alpha' + \alpha'')}{1 + cos(\alpha' + \alpha'')}.$$

У бројитељу ћемо развити синус, а у именитељу косинус и поделићемо и бројитељ и именитељ са $cos\alpha' cos\alpha''$: у резултату ћемо добити ово:

$$tg\alpha = \frac{tg\alpha' + tg\alpha''}{1 - tg\alpha' tg\alpha'' + \sqrt{(1 + tg^2\alpha')(1 + tg^2\alpha'')}},$$

па како је $m' = tg\alpha'$, $m'' = tg\alpha''$, биће и

$$tg\alpha = \frac{m' + m''}{1 - m'm'' + \sqrt{(1 + m'^2)(1 + m''^2)}}.$$

3. **Наћи еквацију праве, која на осовинама одсеца делове —3 и —4.**

Одг. $4x + 3y + 12 = o.$

4. **Наћи одсечке правих**

$$5x + 4y + 20 = o \quad \text{и} \quad y = x\sqrt{2} + 3$$

на осовинама.

Одг. $-4,\ -5;\ -\frac{3}{\sqrt{2}},\ 3.$

5. **Свести еквацију $5x - 12y + 7 = o$ на нормалан облик**

$$xcos\alpha + ysin\alpha - p = o.$$

У овај мах има апсолутан члан 7 еквације позитиван знак; полином $5x - 12y + 7$ ћемо с тога поделити са $-\sqrt{5^2 + (-12)^2} = -13$. Нормалан облик биће дакле ово:

$$-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{7}{13} = o.$$

Према томе је

$$cos\alpha = -\frac{5}{13},\ sin\alpha = \frac{12}{13},\ p = \frac{7}{13};$$

синус и косинус имају различите знаке, т. ј. угао α биће угао другог квадранта.

6. Написати еквације

$$y = mx + b,\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

у нормалном облику.

Одг. $$-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}x+\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}y-\frac{b}{\sqrt{1+m^2}}=o.$$

$$\frac{bx}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{ay}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=o.$$

Напом. Две последње еквације биле би нормални облици еквација датих правих само ако је система ортогонална. Кад би система била коса, биле би те две еквације другог облика. Кадгод не будемо од сад поменули каквог је рода паралелна система — да ли је коса или ортогонална — свакад ћемо ћутке претпоставити *да је система ортогонална.*

7. Са почетка координатне системе је спуштена нормала p на праве

$$x+y-3=o,\ x\sqrt{3}+y+6=o,\ -x\sqrt{3}+y+6=o,$$

$$x\sqrt{3}-y+6=o,\ x\sqrt{3}+y-6=o.$$

Наћи нормалу p и угао α који она затвара са осовином x.

Одг. $$\alpha=45^0,\ p=\frac{3}{\sqrt{2}};\ \alpha=210^0,\ p=3;\ \alpha=330^0,\ p=3;$$

$$\alpha=150^0,\ p=3;\ \alpha=30^0,\ p=3.$$

8. Наћи место тачака, које у истој раздаљини леже од тачака $(o,\ o)$ и $(2x',\ 2y')$.

Раздаљина тачке $(x,\ y)$ од почетка $(o,\ o)$ је $\sqrt{x^2+y^2}$, а раздаљина те исте тачке од тачке $(2x',\ 2y')$ је $\sqrt{(x-2x')^2+(y-2y')^2}$. Те две раздаљине су једнаке; биће дакле

$$x^2+y^2=(x-2x')^2+(y-2y')^2$$

или

$$xx'+yy'=x'^2+y'^2.$$

Ова еквација је првог степена, т. ј. место тачака $(x,\ y)$ је права.

9. Наћи место тачака, које у истој раздаљини леже од ових двеју тачака:

1-во; $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$, $(a\cos\varphi',\ b\sin\varphi')$.

Одг. $$\frac{ax}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}-\frac{by}{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}}=(a^2-b^2)\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}.$$

2-го; $(a\sec\varphi, b\operatorname{tg}\varphi)$, $(a\sec\varphi', b\operatorname{tg}\varphi')$.

Одг. $$\frac{2ax}{\cos\varphi+\cos\varphi'}+\frac{2by}{\sin(\varphi+\varphi')}=\frac{a^2+b^2}{\cos\varphi\cos\varphi'}.$$

3-ће; $(at^2, 2at)$, $(at'^2, 2at')$.

Одг. $$2(t+t')x+4y=a(t+t')(t^2+t'^2+4).$$

4-то; $\left(kt, \frac{k}{t}\right)$, $\left(kt', \frac{k}{t'}\right)$.

Одг. $$2x-\frac{2y}{tt'}=k\left(1-\frac{1}{t^2t'^2}\right)(t+t').$$

10. Протумачити екваціју $\sin 3\theta = 1$.

Одг. Екваціја представља три праве, од којих прва гради са поларном осовином угао од 30^0, друга угао од 150^0, а трећа угао од од 270^0. Све три праве пролазе кроз пол поларне системе.

* * *

ОДЕЉАК ДРУГИ

Проблеме

57. *Наћи угао између двеју правих* $Ax + By + C = o$ *и* $A'x + B'y + C' = o$.

a. Нека је система ортогонална. Угао φ између датих двеју правих је раван разлици углова θ и θ', које те две праве граде са позитивним правцем осовине x. Тангенте тих углова θ и θ' су

$$-\frac{A}{B} \text{ и } -\frac{A'}{B'};$$

с тога је

$$tg\varphi = \frac{\frac{A'}{B'} - \frac{A}{B}}{1 + \frac{AA'}{BB'}}$$

или

$$tg\varphi = \frac{A'B - AB'}{AA' + BB'}.$$

Напомене. 1-во. Кад су дате две праве паралелне, угао φ је $= o$; према томе је и $tg\varphi = o$, т. ј. праве су паралелне под погодбом (упор. чл. 47.)

$$A'B - AB' = o \text{ или } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

2-го. Ако се праве секу под правим углом, φ је $= 90^\circ$, а $tg\varphi = \infty$, т. ј. погодба под којом се дате две праве секу под правим углом је

$$AA' + BB' = o.$$

3-ће. Угао φ између правих $y = mx + b$ и $y = m'x + b'$ је опредељен обрасцем

$$tg\varphi = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

4-то. Праве $y = mx + b$ и $y = m'x + b'$ секу се под правим углом, ако је

$$1 + mm' = o.$$

5-то. Угао између правих

$$x cos\alpha + y sin\alpha - p = o, \quad x cos\beta + y sin\beta - q = o$$

је

$$\varphi = \alpha - \beta.$$

b. Нека је система коса под углом ω. Ако је θ угао између праве $Ax + By + C = o$ и осовине x, а α угао између осовине x и управне која је са почетка потегнута на праву, биће $\theta = 90^\circ + \alpha$, а с тим и (чл. 54.)

$$tg\theta = - cot\alpha = \frac{A sin\omega}{A cos\omega - B}.$$

Ако је θ' угао између праве $A'x + B'y + C' = o$ и осовине x, биће

$$tg\theta' = \frac{A' sin\omega}{A' cos\omega - B'};$$

према томе је

$$tg\varphi = tg\,(\theta - \theta') = \frac{(A'B - AB')\, sin\omega}{AA' + BB' - (AB' + A'B)\, cos\omega}.$$

Напомене. 1-во. Праве се секу под правим углом ако је

$$AA' + BB' - (AB' + A'B) \cos\omega = o.$$

2-го. Угао φ између правих $y = mx + b$ и $y = m'x + b'$ је у косој системи определен обрасцем

$$tg\varphi = \frac{(m - m') \sin\omega}{1 + mm' + (m + m') \cos\omega}.$$

3-ће. Погодба под којом се праве $y = mx + b$ и $y = m'x + b'$ у косој системи секу под правим углом је

$$1 + mm' + (m + m') \cos\omega = o.$$

Прим. 1. Наћи угао између правих

$$x - y\sqrt{3} + 1 = o, \quad x + y\sqrt{3} - 2 = o.$$

У овом случају је

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad m' = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

па је с тога

$$tg\varphi = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3},$$

т. ј. угао φ **је** $= 60^0$.

Прим. 2. Наћи угао између правих

$$\frac{x\cos\beta}{a} + \frac{y\sin\beta}{b} - 1 = o, \quad \frac{x\cos\gamma}{a} + \frac{y\sin\gamma}{b} - 1 = o.$$

Одг. $$\sin\varphi = \frac{ab\sin(\beta - \gamma)}{\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}\ \sqrt{a^2\sin^2\gamma + b^2\cos^2\gamma}}.$$

Прим. 3. Праве $6x + 4y + 5 = o$ **и** $2x - 3y + 7 = o$ **секу се под правим углом.**

Јер је $6(2) + 4(-3) = 12 - 12 = o$.

Прим. 4. Праве $y + x = o$ и $y - x = o$ секу се под правим углом било да је координатна система коса, било да је она ортогонална.

58. *Наћи тачку у пресеку двеју правих*

$$Ax + By + C = o,$$
$$A'x + B'y + C' = o.$$

Тачка у пресеку лежи и на једној и на другој правој; с тога ће координате те тачке задовољити и једну и другу еквацију. Координате те тачке добићемо дакле, ако разрешимо дате две линеарне еквације с обзиром на x и y као непознате. Биће дакле

$$x : y : 1 = BC' - B'C : CA' - C'A : AB' - A'B$$

или

$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}, \quad y = \frac{CA' - C'A}{AB' - A'B}.$$

Кад је детерминанта системе већа или мања од нуле, имаће x и y сасвим опредељене вредности, т. ј. праве ће се сећи у једној тачци, која је по положају својем потпуно опредељена.

Напротив, кад је детерминанта системе равна нули, а детерминанте у бројитељима веће или мање од нуле, онда су координате x, y тачке у пресеку бескрајне, т. ј. праве су паралелне; у том случају је

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

Ако су најпосле и детерминанте у бројитељима и детерминанта системе равне нули, онда координате тачке у пресеку не ће бити опредељене — x је на име $= \frac{o}{o}$, а тако исто и $y = \frac{o}{o}$. У овом случају је

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

т. ј. праве се поклапају.

Прим. 1. Наћи тачку у пресеку правих

$$2x - 3y + 6 = o, x - y + 1 = o.$$

У овом случају ће бити

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

или

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = 1,$$

па је с тога

$$x = 3, \quad y = 4.$$

Прим. 2. Наћи раздаљину почетка координатне системе од тачке у пресеку правих $x cos\alpha + y sin\alpha - p = o$ и $x cos\alpha' + y sin\alpha' - p' = o$.

Тачка у пресеку је, ако са φ означимо угао између правих, ово:

$$x = \frac{p sin\alpha' - p' sin\alpha}{sin\varphi}, \quad y = \frac{p' cos\alpha - p cos\alpha'}{sin\varphi},$$

па је према томе

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{sin^2\varphi}(p^2 + p'^2 - 2pp' cos\varphi)$$

Прим. 3. Наћи тачку у пресеку правих

$$\frac{x}{a} cos\varphi + \frac{y}{b} sin\varphi = 1, \frac{x}{a} cos\varphi' + \frac{y}{b} sin\varphi' = 1.$$

Одг.
$$x = \frac{a cos\frac{\varphi + \varphi'}{2}}{cos\frac{\varphi - \varphi'}{2}}, \quad y = \frac{b sin\frac{\varphi + \varphi'}{2}}{cos\frac{\varphi - \varphi'}{2}}.$$

Прим. 4. Наћи координате тачке која у истој раздаљини лежи од ових трију тачака: $(a cos\varphi, b sin\varphi)$, $(a cos\varphi', b sin\varphi')$, $(a cos\varphi'', b sin\varphi'')$.

Место тачака, које у истој раздаљини леже од тачака $(a cos\varphi, b sin\varphi)$, $(a cos\varphi', b sin\varphi')$ је (стр. 95. прим. 9.) права

$$\frac{ax}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}} - \frac{by}{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}} = (a^2-b^2)\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2},$$

а место тачака, које у истој раздаљини леже од тачака ($a\cos\varphi'$, $b\sin\varphi'$), ($a\cos\varphi''$, $b\sin\varphi''$), права

$$\frac{ax}{\cos\frac{\varphi'+\varphi''}{2}} - \frac{by}{\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}} = (a^2-b^2)\cos\frac{\varphi'-\varphi''}{2}.$$

Тачка у пресеку тих двеју правих је уједно и тачка која у истој раздаљини лежи од датих трију тачака. Према томе су координате те тачке ово:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a^2-b^2}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi''+\varphi}{2}, \\ y &= \frac{b^2-a^2}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\sin\frac{\varphi''+\varphi}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Ту тачку могли бисмо звати *циркум-центром* датог троугла (средиште описаног круга).

Прим. 5. Наћи координате тачке, која у истој раздаљини лежи од ових трију тачака:

1-во; ($a\sec\varphi$, $b\operatorname{tg}\varphi$), ($a\sec\varphi'$, $b\operatorname{tg}\varphi'$), ($a\sec\varphi''$, $b\operatorname{tg}\varphi''$).

Одг. $$x = \frac{a^2+b^2}{a}\,\frac{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi'-\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi''-\varphi}{2}}{\cos\varphi\cos\varphi'\cos\varphi''},$$

$$y = \frac{a^2+b^2}{b}\,\frac{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\sin\frac{\varphi''+\varphi}{2}}{\cos\varphi\cos\varphi'\cos\varphi''}.$$

2-го; (at^2, $2at$), (at'^2, $2at'$), (at''^2, $2at''$).

Одг. $$x = \frac{a}{2}(t^2+t'^2+t''^2+tt'+t't''+t''t+4),$$

$$y = -\frac{a}{4}(t+t')(t'+t'')(t''+t).$$

Прим. 6. Збир углова φ, φ', φ'', φ''' је 2π. Доказати да ће четири тачке $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$, $(a\cos\varphi',\ b\sin\varphi')$, $(a\cos\varphi'',\ b\sin\varphi'')$, $(a\cos\varphi''',\ b\sin\varphi''')$ лежати на периферији једнога круга.

По претпоставци је

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi''' = 2\pi,$$

па је према томе и

$$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = \pi - \frac{\varphi'' + \varphi'''}{2}, \quad \frac{\varphi + \varphi''}{2} = \pi - \frac{\varphi' + \varphi'''}{2}.$$

Кад бисмо тим зредностима сменили $\frac{\varphi + \varphi'}{2}$ и $\frac{\varphi + \varphi''}{2}$ у обрасцима (α), видели бисмо да тачка $(x,\ y)$, која у истој раздаљини лежи од прве, друге и треће тачке, у исти мах у истој раздаљини лежи и од друге, треће и четврте тачке, а то ће рећи, да поменуте четири тачке заиста леже на периферији једнога круга, ако је

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi''' = 2\pi.$$

Прим. 7. Ако је $t + t' + t'' + t''' = o$, доказати да четири тачке

$$(at^2,\ 2at),\ (at'^2,\ 2at'),\ (at''^2,\ 2at''),\ (at'''^2,\ 2at''')$$

леже на периферији истога круга.

59. *Наћи еквацију праве што пролази кроз тачку* $(x',\ y')$.

Аналитички еквиваленат ма које праве је

$$y = mx + b. \qquad (1)$$

Ако ова права пролази кроз тачку $(x',\ y')$, мораће координате x', y' бити везане релацијом

$$y' = mx' + b;$$

с тога је

$$b = y' - mx'.$$

Ако овом вредношћу сменимо b у еквацији (1), добићемо еквацију оне праве која пролази кроз тачку $(x',\ y')$. Та еквација била би ово:

$$y - y' = m\,(x - x').$$

Из те еквације се види на први поглед, да права коју она представља, пролази кроз тачку (x', y').

Свакој специјалној вредности параметра m одговара по једна таква права, па како параметар m може имати бескрајно много вредности, то се види да еквација $y - y' = m\,(x - x')$ представља читаву систему правих што пролазе кроз тачку (x', y').

60. *Наћи еквацију праве што пролази кроз тачку* $(x'\ y')$ *и иде паралелно са правом* $y = nx$.

Положај те праве је потпуно опредељен; у еквацији њеној може дакле бити само познатих параметара.

Права пролази кроз тачку (x', y'); еквација њезина је с тога већ овог облика:

$$y - y' = m\,(x - x');$$

но како је та права у исти мах и паралелна са датом правом $y = nx$, биће коефицијенат m раван коефицијенту n:

$$m = n;$$

тражена еквација је дакле ово:

$$y - y' = n\,(x - x'). \qquad (2)$$

У осталом ми бисмо могли наћи еквацију те праве L, која пролази кроз тачку (x', y') и иде паралелно са неком правом, и на овај много елегантнији начин.

Нека је

$$Ax + By + C = o$$

еквација дате праве, а

$$A'x + B'y + C' = o$$

еквација праве L. Та права пролази кроз тачку (x', y'), па је с тога

$$A'x' + B'y' + C' = o;$$

она је паралелна са правом $Ax + By + C = o$, па је према томе и

$$A'B - B'A = o.$$

Сад би требало из последњих двеју еквација израчунати $A' : B' : C'$; за тим би требало сменити $A' : B' : C'$ у еквацији $A'x + B'y + C' = o$, па би проблема била решена. До тог истог резултата доћи ћемо и на овај начин; просто ћемо елиминирати A', B', C' из системе трију последњих еквација. Резултанта те системе била била би еквација праве L. Према томе се еквација праве L може написати и у овом облику:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ B & -A & 0 \end{vmatrix} = o$$

или

$$A\,(x - x') + B\,(y - y') = o. \qquad (3)$$

Кад бисмо у тој еквацији сменили $-\frac{A}{B}$ са n, добили бисмо еквацију (2).

61. *Наћи еквацију праве што пролази кроз две тачке* (x', y') *и* (x'', y'').

Еквација те праве мора у опште бити овог облика:

$$y - y' = m\,(x - x'),$$

јер права пролази кроз тачку (x', y'). Ми знамо да нам та еквација представља све праве што пролазе кроз тачку (x', y'); том еквацијом је дакле аналитички представљена и права L која пролази кроз ону другу тачку

(x'', y''). Ако у тој еквацији заменимо x и y координатама x'' и y'', добићемо релацију

$$y'' - y' = m\,(x'' - x'),$$

а том релацијом је, као што видимо, опредељен коефицијенат правца праве L:

$$m = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Према томе је

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,(x - x')$$

или

$$\frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{x - x'}{x'' - x'} \tag{4}$$

еквација оне праве која спаја дате две тачке (x', y') и (x'', y''). Ова важна еквација (4) може се написати и једном од ових четирију облика:

$$(y' - y'')\,x - (x' - x'')\,y + x'y'' - y'x'' = o$$

или

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = o$$

или

$$\begin{vmatrix} x - x' & y - y' \\ x - x'' & y - y'' \end{vmatrix} = o$$

или, најпосле,

$$(x - x')\,(y - y'') = (y - y')\,(x - x'').$$

Специјалан случај. Кад тачка (x'', y'') лежи у почетку, онда је $x'' = o$, $y'' = o$; т. ј. еквација праве, која спаја почетак системе са тачком (x', y'), јесте

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = o$$

или

$$y'x - x'y = o. \qquad (5)$$

Прим. 1. Наћи еквацију праве која спаја тачку $(2, -4)$ с тачком $(3, -5)$.

Одг. $$x + y + 2 = o.$$

Прим. 2. Наћи еквацију праве која спаја тачку (a, o) с тачком (o, b).

Еквација те праве је

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & o & 1 \\ o & b & 1 \end{vmatrix} = o$$

или

$$-bx - ay + ab = o$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

а ту исту еквацију смо добили већ једном приликом, а другим једним путем.

Прим. 3. Наћи средње линије троугла (x', y'), $(x'' \; y'')$, (x''', y''') и тачку у којој се оне секу.

Одг. Еквације средњих линија су

$$(y'' + y''' - 2y')\,x - (x'' + x''' - 2x')\,y + (x'' + x''')\,y' - (y'' + y''')\,x' = o \quad \text{и т. д.,}$$

а координате тачке у пресеку њиховом су

$$\frac{x' + x'' + x'''}{3}, \quad \frac{y' + y'' + y'''}{3}.$$

Прим. 4. Наћи стране и средње линије троугла (2, 1), (3, —2), (—4, —1).

Одг. Еквације странâ тог троугла су

$$3x + y - 7 = o, \; x + 7y + 11 = o, \; x - 3y + 1 = o,$$

а еквације средњих линија су

$$x - y - 1 = o, \; x + 2y + 1 = o, \; x - 13y - 9 = o.$$

Прим. 5. Наћи еквације правих које спајају ове две и две тачке:

1-во; $(rcos\varphi, \; rsin\varphi)$, $(rcos\varphi', \; rsin\varphi')$.

Одг. $$xcos\,\frac{\varphi + \varphi'}{2} + ysin\,\frac{\varphi + \varphi'}{2} = rcos\,\frac{\varphi - \varphi'}{2}.$$

2-го; $(acos\varphi, \; bsin\varphi)$, $(acos\varphi', \; bsin\varphi')$.

Одг. $$\frac{x}{a}\,cos\,\frac{\varphi + \varphi'}{2} + \frac{y}{b}\,sin\,\frac{\varphi + \varphi'}{2} = cos\,\frac{\varphi - \varphi'}{2}.$$

3-ће; $(asec\varphi, \; btg\varphi)$, $(asec\varphi', \; btg\varphi')$.

Одг. $$\frac{x}{a}\,cos\,\frac{\varphi - \varphi'}{2} - \frac{y}{b}\,sin\,\frac{\varphi + \varphi'}{2} = cos\,\frac{\varphi + \varphi'}{2}.$$

4-то; $(at^2, \; 2at)$, $(at'^2, \; 2at')$.

Одг. $$2x - (t + t')\,y + 2att' = o.$$

5-то; $(\varrho', \; \theta')$, $\left(2\varrho', \; \theta' + \frac{\pi}{3}\right)$.

Одг. $$\varrho' = \varrho cos\,(\theta - \theta').$$

6-то; $(3cos\alpha, \; 2\alpha)$ $(3cos2\alpha, \; 3\alpha)$.

Одг. $$\varrho = 3cos\,(\theta - \alpha).$$

Прим. 6. Кроз темена троугла (1, 2), (—1, 1), (3, 2) повући ћемо праве напоредо са супротним странама. Наћи еквације тих напоредница.

Одг. $x - 4y + 7 = o$, $y = 1$, $x - 2y + 1 = o$.

Прим. 7. Наћи еквацију праве која спаја тачку у пресеку правих

$$2x + 3y + 3 = o, \quad x + 2y + 2 = o$$

с тачком у пресеку правих

$$2x + y + 3 = o, \quad 3x + 2y + 4 = o.$$

Одг. $x + y + 1 = o$.

62. *Наћи еквацију праве која пролази кроз тачку* (x', y') *и гради угао* φ *са правом* $Ax + By + C = o$.

Нека је

$$A'x + B'y + C' = o$$

еквација оне праве коју ми тражимо. Та права пролази кроз тачку (x', y'), па је с тога

$$A'x' + B'y' + C' = o,$$

а с тим и

$$A'(x - x') + B'(y - y') = o.$$

Овом еквацијом већ би била аналитички обележена једна права која пролази кроз тачку (x', y'). Према томе ће том еквацијом бити представљена и она права која пролази кроз тачку (x', y'), а гради уз то угао φ са правом $Ax + By + C = o$. По себи се разуме да ће у том специјалном случају коефицијенти A' и B', или управо њихова напремица, имати потпуно одређену вредност. Ту бројну вредност ћемо наћи овако.

Ми знамо да је угао φ, који затвара дата права са правом $A'x + B'y + C' = o$, определен обрасцем

$$tg\varphi = \frac{A'B - AB'}{AA' + BB'};$$

према томе је

$$A' (B - Atg\varphi) = B' (A + Btg\varphi)$$

— т. ј. еквација коју тражимо јесте овог облика:

$$\frac{x - x'}{B - Atg\varphi} + \frac{y - y'}{A + Btg\varphi} = o$$

или

$$\frac{x - x'}{Bcos\varphi - Asin\varphi} + \frac{y - y'}{Acos\varphi + Bsin\varphi} = o \quad (6)$$

или, у облику детерминанте,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ Asin\varphi - Bcos\varphi & Acos\varphi + Bsin\varphi & 0 \end{vmatrix} = o.$$

Кад је $\varphi = 90^\circ$, онда ће се еквација (6) преобразити у ову простију еквацију

$$B (x - x') = A (y - y') ; \qquad (7)$$

то је дакле еквација праве која је са тачке (x', y') управно спуштена на праву $Ax + By + C = o$.

Кад је $\varphi = o$, онда ће се еквација (6) преобразити у еквацију (3), коју смо мало час (чл. 60.) добили сасвим на други један начин.

Еквација праве, која пролази кроз тачку (x', y') и гради угао φ са правом $y = mx + b$, јесте

$$\frac{x - x'}{1 + mtg\varphi} = \frac{y - y'}{m - tg\varphi}.$$

Према томе је

$$y - y' = - \frac{1}{m} (x - x')$$

еквација праве која је са тачке (x', y') управно спуштена на праву $y = mx + b$.

Напомена. У косој координатној системи била би еквација праве која је са тачке (x', y') управно спуштена на праву $Ax + By + C = o$ овог облика:

$$(A\cos\omega - B)(x - x') = (B\cos\omega - A)(y - y').$$

Прим. 1. Наћи еквацију праве, која је са тачке $(-1, 2)$ управно спуштена на праву $5x - 2y - 5 = o$.

Одг. $2x + 5y - 8 = o$.

Прим. 2. Наћи еквацију праве, која је са тачке $(2, 3)$ управно спуштена на праву што спаја тачке $(1, 2)$ и $(-3, -14)$.

Одг. $x + 4y - 14 = o$.

Прим. 3. Наћи еквације висина троугла $(1, 2)$, $(-1, 1)$, $(-2, 3)$.

Одг. Еквације висинâ су

$$2x + y + 1 = o,\ 3x - y + 4 = o,\ x - 2y + 3 = o.$$

Прим. 4. Нека права је управна на правој $5x - 2y + 9 = o$ и пролази кроз тачку у пресеку правих $2x - y + 5 = o$ и $x + y - 1 = o$. Наћи еквацију те праве.

Одг. $2x + 5y - 9 = o$.

Прим. 5. Наћи управну на $x - ytg\varphi + atg^2\varphi = o$, а у тачци $(atg^2\varphi, 2atg\varphi)$ те праве.

Прим. 6. Стране неког троугла су

$$x - ty + at^2 = o,\ x - t'y + at'^2 = o,\ x - t''y + at''^2 = o.$$

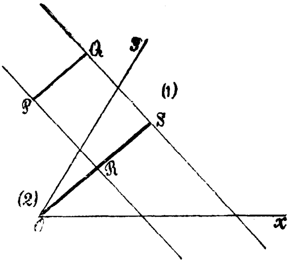
Доказати да се висине секу у тачци

$$-a,\ a(t + t' + t'' + tt't'').$$

63. *Наћи раздаљину d тачке (x', y') од праве $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = o$.*

Права $x cos\alpha + y cos\beta - p$ делиће раван на два краја, на крај (1) и крај (2). Тачка (x', y') и почетак координатне системе или леже у различитим крајевима или леже у истом крају.

Узмимо најпре онај први случај, т. ј. узмимо да дата тачка Q (x', y') лежи у крају (1), а почетак O координатне системе у крају (2) дате праве PR. Са тачке Q спустићемо на праву PR управну $QP = d$ и потегнућемо кроз тачку Q праву QS паралелно са правом PR. Нормала, која је са почетка спуштена на праву QS, је $OS = p + d$. С тога је



Сл. 44.

$$x cos\alpha + y cos\beta - (p + d) = o$$

еквација праве QS; па како тачка Q лежи на тој правој, биће

$$x' cos\alpha + y' cos\beta - (p + d) = o,$$

а одатле је

$$d = x' cos\alpha + y' cos\beta - p. \qquad (8)$$

Кад тачка Q не би била одвојена правом PR од почетка координатне системе, онда би дужина нормале OS била $p - d$; у том случају била би еквација праве QS ово:

$$x cos\alpha + y cos\beta - (p - d) = o,$$

координате тачке (x', y') биле би везане релацијом

$$x'cos\alpha + y'cos\beta - (p - d) = o,$$

па је према томе и

$$d = -(x'cos\alpha + y'cos\beta - p). \qquad (9)$$

У опште је дакле

$$d = \pm (x'cos\alpha + y'cos\beta - p). \qquad (10)$$

Међу тим, кад бисмо узели да су раздаљине d позитивне кад леже у оном крају у ком лежи и почетак (у том крају лежи и позитивна раздаљина p), а негативне кад леже у другом крају, онда би се раздаљина d могла определити и по овом обрасцу:

$$d = -(x'cos\alpha + y'cos\beta - p), \qquad (11)$$

т. ј. *раздаљина тачке* (x', y') *од праве* $xcos\alpha + ycos\beta - p = o$ *равна је негативној моћи те тачке с обзиром на праву* $xcos\alpha + ycos\beta - p = o$.

Кад би права била дата општом линеарном еквацијом

$$Ax + By + C = o,$$

онда бисмо помоћу познатих релација које постоје између количина p, α, β, с једне и коефицијената A, B, C с друге стране (чл. 54.) добили ово:

$$d = \pm \frac{(Ax' + By' + C)\, sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcos\omega}}. \qquad (12)$$

Полином $Ax' + By' + C$ има у почетку координатне системе знак сталног члана C, т. ј. полином $Ax' + By' + C$ и C имају исте знаке, кад права линија не одваја тачку (x', y') од почетка, а противне кад их одваја.

Кад се има на уму да је раздаљина почетка од праве позитивна, а то ће рећи да је $Csin\omega$:

$\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}$ позитивно, онда ћемо на лак начин моћи одредити знак испред количника.

У ортогоналној системи је образац (12) овог простијег облика:

$$d = \pm \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (13)$$

Кад би еквација праве била дата у облику

$$y = mx + b,$$

онда би у косој системи било

$$d = \pm \frac{(y' - mx' - b)\sin\omega}{\sqrt{1 + m^2 + 2m\cos\omega}},$$

а у ортогоналној

$$d = \pm \frac{y' - mx' - b}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Напомена. Из свију образаца, по којима се опредељује раздаљина тачке (x', y') од неке праве, види се да је у опште

$$d = \rho\,(Ax' + By' + C); \qquad (14)$$

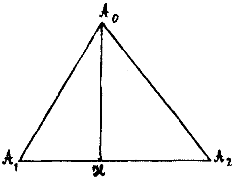
ρ је у свакој специјалној координатној системи стална количина која зависи *само од коефицијената* A, B *т. ј. од положаја дате праве*; та количина ни у каквој вези не лежи са координатама тачке (x', y').

64. *Наћи површину троугла који је дат координатама својих темена.*

Нека су темена троуглова A_0, A_1, A_2, а координате њихове x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2. Површину $\varDelta$ троуглову наћи ћемо тражећи висину његову $h = A_0H$ и основу $b = A_1A_2$, јер је као што знамо $2\varDelta = bh$.

Еквација стране A_1A_2 је

$$(y_1 - y_2)\, x - (x_1 - x_2)\, y + x_1\, y_2 - x_2\, y_1 = o,$$



Сл. 45.

па је с тога у ортогоналној системи

$$h = \pm \frac{(y_1 - y_2)\, x_0 - (x_1 - x_2)\, y_0 + x_1\, y_2 - x_2\, y_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \,;$$

према томе је већ висина h одређена све самим познатим количинама. Остаје нам дакле да нађемо још и основу b. Како је $b = A_1A_2$, биће $b = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, па је с тога $2A = bh$ или

$$2A = \pm (y_1 - y_2)\, x_0 - (x_1 - x_2)\, y_0 + x_1\, y_2 - x_2\, y_1$$

или

$$2A = \pm \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \qquad (15)$$

или

$$2A = \pm \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} \,; \qquad (16)$$

знак испред детерминанте треба одабрати тако, да $2A$ буде позитивна количина.

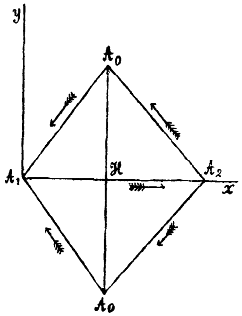
Правило по коме се тај знак одређује наћи ћемо на овај начин.

Кад троугао $A_0A_1A_2$ буде мењао свој положај у равни, мењаће се и координате његових темена; по себи се разуме да се површина његова при том кретању не ће променити, а то ће рећи, да ће свакад алгебарски израз

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

бити или позитивна количина $+ 2A$ или негативна количина $- 2A$.

Ми ћемо сад преместити троугао $A_0\, A_1\, A_2$ у равни тако, да теме његово A_1 падне на почетак системе, а основа A_1A_2 на позитиван правац осовине x; треће теме тог троугла моћи ће дакле лежати или у правцу позитивних или у правцу негативних ордината. У овај мах је $x_1 = o$, $y_1 = o$, $y_2 = o$, па је с тога



Сл. 46.

$$2A = \pm \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ o & o & 1 \\ x_2 & o & 1 \end{vmatrix} = \pm\, x_2\, y_0.$$

Но како је x_2 позитивно, а y_0 у првом случају позитивно, а у другом негативно, то је јасно да ће *знак* *који стоји испред детерминанте што одређује површину, бити позитиван или негативан како је кад* y_0 *позитивно или негативно.* У првом случају морамо страну A_1A_2 обртати у позитивном правцу око почетка, ако смо ради да она пређе површину троуглову. У том случају би површина некоме, који би је у правцу стрелица̑ обилазио, остајала *с леве* стране; у оном другом случају бисмо морали обртати страну A_1A_2 у противном правцу око почетка т. ј. површина би при обилажењу остајала *с десне* стране.

Према томе ћемо по овом правилу одредити знак испред детерминанте: обићи ћемо троугао и ићи ћемо при том обилажењу овако; поћи ћемо са оне тачке чије се координате налазе у првој врсти, а према оној тачци чије се координате налазе у другој врсти; са ове тачке ћемо се упутити ка оној тачци чије се координате налазе у трећој врсти детерминанте. Ако је при том обилажењу површина остајала с леве стране, т. ј. *ако је правац обилажења био позитиван, онда ћемо испред детерминанте узети знак плус; у противном случају ћемо узети знак минус.*

Кад би теме A_0 лежало у почетку, онда би се површина A одређивала по обрасцу

$$2A = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} . \qquad (17)$$

Напомене. 1-во. У осовинама косим под углом ω добили бисмо $2A$ множећи детерминанте у обрасцима (15), (16), (17) са $\sin\omega$.

2-го. Кад бисмо координате специјалне тачке (x_0, y_0) сменили општим координатама x, y, био би образац (15) без знака $\pm$ овог облика:

$$2A = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} . \qquad (18)$$

Узмимо сад да су тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2) сталне, а да тачка (x, y) мења свој положај. Ова детерминанта представљаће двојну површину једнога троугла који има два стална темена (x_1, y_1), (x_2, y_2) и једно промењиво теме (x, y). Ако претпоставимо да се површине тих троуглова не мењају, $2A = const.$, онда ће нам јасно бити да ће треће (промењиво) теме тих троуглова описати једно место које је аналитички представљено еквацијом (18). То место биће према томе једна права која иде паралелно са основом

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

а по томе се види, *да ће темена свију троуглова који имају сталну основу и сталну површину лежати на једној правој што иде паралелно са основом.*

3-ће. Кад би троугао $A_0A_1A_2$ аналитички био дат еквацијама својих страна:

$$A_1A_2 \cdot \cdot \cdot a_0x + b_0y + c_0 = 0,$$

$$A_2A_0 \cdot \cdot \cdot a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$A_0A_1 \cdot \cdot \cdot a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

морали бисмо најпре из тих еквација израчунати координате темена његових. Ако са $(a_0b_1c_2)$ означимо детерминанту системе датих еквација:

$$(a_0b_1c_2) = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

а са A_0, B_0, C_0, . . . миноре елемената a_0, b_0, c_0, . . . биће

$$2A = \pm \begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} : C_0 C_1 C_2$$

или

$$2A = \pm \frac{(a_0 b_1 c_2)^2}{(a_1 b_2)\ (a_2 b_0)\ (a_0 b_1)}. \qquad (19)$$

Додатак. Из овог што мало час поменусмо, види се да има разлике у начину којим постају површине. Неке површине остају оном, ко их по периметру обилази, с леве стране, а неке с десне стране. Прве површине бисмо могли назвати *позитивним површинама*, а друге бисмо могли назвати *негативним површинама*. Ако би н. пр. површина ABC била позитивна, биле би и површине BCA и CAB позитивне; негативне би биле површине ACB, BAC, CBA тако, да је $ABC = BCA = CAB = -ACB = -BAC = -CBA$, а с тим и

$$ABC + CBA = o \qquad \text{и т. д.}$$

Кад се површине на поменути начин поделе на позитивне и негативне, онда је јасно да оним двама знацима испред детерминанте и нема места. Ми можемо дакле написати да је у опште

$$2A = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прим. 1. **Наћи површину троугла (1, 2), (—2, 3), (5, 6).**

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(-3) - 2\,(-7) + 1\,(-27) = -16\,.$$

Прим. 2. Наћи површину троугла (2, 3), (— 4, 1), (— 1, 2).

$$2A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = o$$

т. ј. тачке (2, 3), (— 4, 1), (— 1, 2) су колинеарне.

Прим. 3. Наћи површину троугла чија су темена тачке (x', y'), $\left(-\frac{C}{A}, o\right)$, $\left(o, -\frac{C}{B}\right)$.

Одг. $$2A = \frac{C(Ax' + By' + C)}{AB}.$$

Прим. 4. Доказати да ће тачка (x, y) лежати у троуглу (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ако детерминанте

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

имају исти знак.

Прим. 5. Средње линије троугла ABC секу се у тачци O. Доказати да је $\triangle OBC = \frac{1}{3} \triangle ABC$.

Прим. 6. Површина A неког троугла је затворена осовином y и правима $y = mx + b$ и $y = m'x + b'$. Доказати да је

$$2A = \frac{(b' - b)^2}{m' - m}.$$

Прим. 7. Наћи површину троугла чије су стране

$$3x + y - 7 = o, x + 7y + 11 = o, x - 3y + 1 = o.$$

Одг. 10.

65. *Наћи површину полигона који је дат координатама својих темена.*

Нека су A_1, A_2, · · · A_n темена полигонова, а x_i, y_i координате темена A_i $(i = 1, 2, \cdots n)$. Узмимо *ма где* у равни једну тачку O (x, y). Ако ту тачку спојимо са свима теменима полигоновим, претвориће се површина A полигона у алгебарски збир површина самих троуглова, који ће имати сви заједничко теме (x, y). Биће дакле

$$2A = 2\,(OA_1A_2 + OA_2A_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot + OA_n\,A_1)$$

или

$$2A = \begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y \\ x_2-x & y_2-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2-x & y_2-y \\ x_3-x & y_3-y \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_n-x & y_n-y \\ x_1-x & y_1-y \end{vmatrix}$$

или, кад сваку између ових детерминаната растворимо на збир четирију детерминаната,

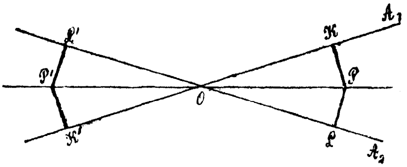
$$2A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

66. *Naћи еквацију праве што полови угао између двеју правих*

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = o, x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = o.$$

Две праве ће у опште градити два различита угла међу собом — угао $\alpha = KOL$ и напоредан му угао $180^0 - \alpha$.

Нека је почетак координатне системе у углу α. Узмимо на правој OP која полови угао α ма где једну тачку. Раздаљине те тачке од двеју датих правих биће



Сл. 47.

једнаке. Но како је за оне тачке $P\ (x, y)$ праве OP, које леже у углу KOL,

$$PK = -(x cos\alpha_1 + y sin\alpha_1 - p_1),$$

$$PL = -(x cos\alpha_2 + y sin\alpha_2 - p_2),$$

а за оне тачке $P'(x, y)$ те праве, које леже у унакрсном углу $K'OL'$,

$$P'K' = x cos\alpha_1 + y sin\alpha_1 - p_1,$$

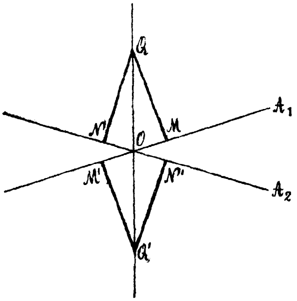
$$P'L' = x cos\alpha_2 + y sin\alpha_2 - p_2,$$

то је јасно, да ће и у једном и у другом случају координате x, y опште тачке праве OP међу собом бити везане овом линеарном релацијом:

$$x cos\alpha_1 + y sin\alpha_1 - p_1 = x cos\alpha_2 + y sin\alpha_2 - p_2,$$

па ће с тога том релацијом бити обележена еквација праве која полови угао α.

Еквацију праве OQ што полови напоредан угао добићемо на овај начин. Координатна система и у овај



Сл. 48.

мах, разуме се, лежи у углу $\alpha = MON'$. За праву OQ су такођер раздаљине ма које тачке њезине од сталних правих једнаке. Међу тим је у овај мах за оне тачке $Q(x, y)$, које леже на правој OQ у углу MON,

$$QM = x cos\alpha_1 + y sin\alpha_1 - p_1,$$

$$QN = -(x cos\alpha_2 + y sin\alpha_2 - p_2);$$

за тачке Q' (x, y), које леже у углу $M'ON'$ су алгебарски еквиваленти раздаљина̂ $Q'M'$ и $Q'N'$ ово:

$$Q'M' = -(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1),$$

$$Q'N' = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2,$$

а по томе се види да ће у овај мах координате x, y ма које тачке праве OQ бити везане овом линеарном релацијом:

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = -(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2).$$

Еквације правих које полове угле између датих двеју правих јесу дакле ово:

$$(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1) \mp (x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2) = o; \qquad (20)$$

Знак минус треба узети кад еквација (20) представља ону праву, која полови угао у коме лежи почетак координатне системе, а знак плус, кад представља ону другу праву.

Кад би еквације правих у ортогоналној системи биле

$$Ax + By + C = o, \quad A'x + B'y + C' = o,$$

онда би праве које полове угле између њих биле аналитички одређене овим двема еквацијама:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}. \qquad (21)$$

Прим. Наћи еквације правих које полове угле између

$$3x - 4y + 7 = o, \quad 12x + 5y - 5 = o.$$

Написаћемо те две еквације тако, да апсолутни чланови њихови буду истога знака н. пр. оба члана позитивна. Еквације правих биће дакле

$$3x - 4y + 7 = o, \; -12x - 5y + 5 = o.$$

а по тим еквацијама се види. да почетак лежи на позитивној страни обеју правих. Према томе је

$$\frac{3x - 4y + 7}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = + \frac{-12x - 5y + 5}{\sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}}$$

или

$$13(3x - 4y + 7) = 5(-12x - 5y + 5)$$

или

$$33x - 9y + 22 = o$$

еквација праве која полови онај угао у ком лежи и почетак.

Еквација оне праве, која полови напоредан угао, је

$$\frac{3x - 4y + 7}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = - \frac{-12x - 5y + 5}{\sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}}$$

или

$$21x + 77y - 116 = o.$$

67. *Наћи еквацију праве која пролази кроз тачку у пресеку двеју правих*

$$(A) \quad Ax + By + C = o, \qquad (A') \quad A'x + B'y + C' = o.$$

Тачка у којој се секу дате праве опредељена је непосредно еквацијама тих правих. Координате x', y' те тачке могли бисмо наћи веома просто (чл. 58.), па би еквација $y - y' = m(x - x')$ већ била аналитички еквиваленат праве што пролази кроз тачку у пресеку датих двеју правих.

Много брже се може међу тим наћи еквација те праве на основу овог врло важног начела: *ако су* $\varphi(x, y) = o$ *и* $\psi(x, y) = o$ *еквације двају места, онда ће место, које је представљено еквацијом*

$$\varphi(x, y) + \mu\psi(x, y) = o, \qquad (22)$$

(μ је стална, неопредељена количина) пролазити кроз све заједничке тачке места φ и ψ.

Полиноми $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ неће на име у исти мах бити равни нули; кад је $\varphi(x, y) = o$, $\psi(x, y)$ је у опште веће или мање од нуле и обратно, кад је

$\psi(x, y) = o$, онда је у опште $\varphi(x, y) \gtrless o$. Но има и таквих тачака — а то су тачке што леже у пресеку места φ и ψ — за које је у исти мах и $\varphi(x, y) = o$ и $\psi(x, y) = o$. За те тачке (x, y) биће и полином еквације (22) раван нули, т. ј. те тачке заиста леже на месту (22).

Кад поменуто опште начело применимо на наш специјалан случај, биће нам јасно, да ће линеарна еквација

$$(Ax + By + C) + \mu (A'x + B'y + C') = o \qquad (23)$$

морати представљати једну од оних правих, које пролазе кроз тачку у пресеку правих (A) и (A'). Та права имала би одређен положај у равни тек кад би се знала вредност параметра μ. Кад параметар μ мења своју вредност, мењаће еквација (23) свој облик. У том случају би еквација (23) представљала све другу и другу праву; све те праве морале би међу тим због нарочитог облика њихове еквације пролазити кроз тачку у пресеку правих (A) и (A'), т. ј. еквацијом (23) био би управо представљен читав један *прамен* правих. Тачку у пресеку правих (A) и (A') зваћемо *теменом*, а праве које пролазе кроз то теме *зрацима* поменутог прамена.

Веома лако би се могло доказати да еквација (23) представља све праве, које пролазе кроз тачку у пресеку правих (A) и (A'). Узмимо на име ма где у равни једну тачку (x', y'). Спојивши ту тачку са теменом прамена, добићемо један зрак тог прамена. Ону вредност параметра μ, којом би тај специјалан зрак аналитички био опредељен, наћи ћемо овако. Ако зрак (23) пролази кроз тачку (x', y'), мораће између координата x' и y' постојати ова релација:

$$(Ax' + By' + C) + \mu (A'x' + B'y' + C') = o,$$

а по томе се види да ће онај зрак прамена, који пролази кроз тачку (x', y'), бити одређен овом вредношћу параметра μ:

$$\mu = -\frac{Ax' + By' + C}{A'x' + B'y' + C'}.$$

Кад дакле μ има ову вредност, онда ће зрак (23) морати пролазити кроз тачку (x', y'). Еквација тога зрака је

$$\frac{Ax + By + C}{Ax' + By' + C} = \frac{A'x + B'y + C'}{A'x' + B'y' + C'}.$$

68. Узмимо сад да један зрак у прамену (23) иде паралелно са правом

$$(A'') \quad A''x + B''y + C'' = o.$$

Положај зрака у прамену је том једном погодбом потпуно опредељен, т. ј. параметар μ који се јавља у еквацији те праве мора имати сасвим одређену вредност. Ту вредност определићемо на овај начин.

Еквацију (23) општег зрака у прамену можемо овако написати :

$$(A + \mu A')\, x + (B + \mu B')\, y + (C + \mu C') = o\,;$$

овај зрак — то смо претпоставили — је паралелан са правом (A'') ; с тога ће између коефицијената, који се у еквацијама тих двеју правих јављају, постојати ова релација :

$$\frac{A + \mu A'}{B + \mu B'} = \frac{A''}{B''}\,;$$

у овај мах је дакле

$$\mu = \frac{BA'' - AB''}{A'B'' - B'A''},$$

па је према томе

$$(A'B'' - B'A'')(Ax + By + C) + (BA'' - AB'')$$
$$\times\, (A'x + B'y + C') = o \qquad (24)$$

еквација оног зрака који иде паралелно са датом правом.

На основу ове еквације могли бисмо доћи и до неких даљих закључака.

Кад се мењају параметри A'', B'', C'', мењаће се и положај правој $A''x + B''y + C'' = o$. Ако је у неком специјалном случају

$$A'B'' - B'A'' = o, \tag{25}$$

ако је дакле права (A'') паралелна са сталном правом (A') прамена, онда је еквација општег зрака (24) који иде напоредо са правом (A'') овог облика:

$$A'x + B'y + C' = o,$$

то јест, у поменутом случају ће *општи зрак лежати на сталном зраку* A'.

Из сличног разлога ће под погодбом

$$BA'' - AB'' = o \tag{26}$$

општи зрак лежати на сталном зраку (A). Како у исти мах не могу постојати обе погодбе (25) и (26), јер се сталне праве (A) и (A') секу у једној тачци, то се види да ће у првом случају бити $\mu = \infty$, а другом $\mu = o$.

Напомене. 1-во. Како сваки зрак у прамену пролази кроз једну сталну тачку — пресек двеју датих правих — с једне стране, и како је општи зрак опредељен једном еквацијом у којој се јавља један неопредељен параметар с друге стране, то можемо тврдити да и обратно *свака права, у чијој се еквацији јавља један неопредељен параметар, пролази кроз једну сталну тачку.*

2-го. *Еквација* $Ax + By + C = o$ *представљаће праве што пролазе кроз једну сталну тачку, ако су променљиви коефицијенти њезини* A, B, C *везани међу собом хомогеном, линеарном релацијом* $Aa + Bb + Cc = o$, у којој су количине a, b, c *сталне.*

Ову теорему доказаћу на овај начин. — Еквација $Ax + By + C = o$ представљала би *једну* праву само кад би коефицијенти њезини A, B, C имали сталну вредност. Но како су они по претпоставци променљиви, то је јасно да поменута еквација мора представљати читаву систему правих. Остаје нам дакле да докажемо још то, да све те праве пролазе кроз једну и исту тачку.

Из датих двеју погодбених еквација

$$Ax + By + C = o, \quad Aa + Bb + Cc = o$$

можемо елиминирати један између параметара; ја ћу елиминирати параметар C на овај начин. Систему горњих двеју еквација можемо сматрати као систему двеју хомогених еквација са две непознате C и *1*. Та система постојаће дакле само ако је резултанта њезина равна нули, т. ј. ако је

$$\begin{vmatrix} Ax + By & 1 \\ Aa + Bb & c \end{vmatrix} = o$$

или

$$A \begin{vmatrix} x & 1 \\ a & c \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} y & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = o$$

или, најпосле,

$$A\,(cx - a) + B\,(cy - b) = o.$$

У овом облику може се дакле, кад постоји погодбена релација $Aa + Bb + Cc = o$, написати еквација системе правих $Ax + By + C = o$, а отуд се непосредно види, да свака од тих правих пролази кроз сталну тачку $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$.

Кад би општа еквација $Ax + By + C = o$ имала специјалан облик $ux + vy + 1 = o$, а погодбена релација $Aa + Bb + Cc = o$ облик $ua + vb + 1 = o$, онда би права $ux + vy + 1 = o$ морала пролазити кроз сталну тачку $x = a$, $y = b$, ма параметри u и v у еквацији $ux + vy + 1 = o$ имали ма какву вредност.

69. **Теорема.** *Кад се три праве секу у једној тачци, онда полиноми њихових еквација морају бити везани међу собом једном линеарном, идентичном релацијом.*

Нека су

$$(A) \quad Ax + By + C = o,$$

$$(A') \quad A'x + B'y + C' = o,$$

$$(A'') \quad A''x + B''y + C'' = o$$

еквације датих правих. Свака права, која пролази кроз тачку у пресеку првих двеју правих, опредељена је еквацијом

$$\mu (Ax + By + C) + \mu' (A'x + B'y + C') = o$$

или

$$(\mu A + \mu' A') x + (\mu B + \mu' B') y + (\mu C + \mu' C') = o.$$

У системи тих правих је и права (A'') и ми ћемо претпоставити да је последњом еквацијом представљена баш сама права

$$A''x + B''y + C'' = o.$$

Ми имамо сад две еквације које представљају једну и исту праву. С тога ће између коефицијената тих еквација морати постојати ове погодбе:

$$\frac{\mu A + \mu' A'}{A''} = \frac{\mu B + \mu' B'}{B''} = \frac{\mu C + \mu' C'}{C''}, \quad (27)$$

а на основу ових погодбених релација доказаћу на веома прост начин поменуту теорему.

Количник горњих напремица обележићемо са $-\mu''$. На основу једне врло просте теореме Опште Аритметике биће јасно да ће услед погодаба (27) бити уједно и

$$\frac{(\mu A + \mu' A')\, x + (\mu B + \mu' B')\, y + (\mu C + \mu' C')}{A'' x + B'' y + C''} = -\mu''$$

тако, да је

$$(\mu A + \mu' A')\, x + (\mu B + \mu' B')\, y + (\mu C + \mu' C') \equiv -\mu'' (A'' x + B'' y + C'')$$

или

$$\mu (Ax + By + C) + \mu' (A'x + B'y + C') \equiv -\mu'' (A'' x + B'' y + C'')$$

или

$$\mu (Ax + By + C) + \mu' (A'x + B'y + C') + \mu'' (A'' x + B'' y + C'') \equiv o. \quad (28)$$

Ова погодба мора постојати ако је права (A'') једна у системи оних правих које пролазе кроз тачку у пресеку правих (A) и (A'), т. ј. кад се три праве секу у једној тачци онда су полиноми њихових еквација заиста везани једном идентичном, линеарном релацијом (28).

Поменута теорема може се и обрнути, т. ј. *кад међу полиномима еквацијâ трију правих постоји једна линеарна, идентична релација (28), онда се те три праве секу у једној тачци.*

Еквација (28) је идентична; но како ће полиноми $Ax + By + C$ и $A'x + B'y + C'$ — сваки за се — бити равни нули, кад се у њима смене x и y координатама тачке у пресеку првих двеју правих, то је јасно да ће, баш с тога што је релација (28) идентична, за исто x и исто y и полином $A''x + B''y + C''$ бити раван нули, а то ће рећи, да ће и права (A'') пролазити кроз ону тачку у којој се прве две секу.

Напомена. Напишимо погодбену релацију (28) у овом облику:

$$(\mu A + \mu' A' + \mu'' A'') x + (\mu B + \mu' B' + \mu'' B'') y \\ + (\mu C + \mu' C' + \mu'' C'') = o.$$

Та релација може бити идентична само ако је

$$\mu A + \mu' A' + \mu'' A'' = o,$$

$$\mu B + \mu' B' + \mu'' B'' = o,$$

$$\mu C + \mu' C' + \mu'' C'' = o.$$

Кад из ових погодбених еквацијâ елиминирамо непознате параметре μ, μ', μ'', добићемо ову погодбу:

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = o\,; \qquad (29)$$

и то би била једна од оних погодаба под којима би се три праве

$$Ax + By + C = o,\ A'x + B'y + C' = o,\ A''x + B''y + C'' = o$$

секле у једној тачци. То се у осталом види и по овоме. Система последњих трију еквација могла би постојати у исти мах само ако је њезина резултанта $= o$, т. ј. ако је

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = o,$$

а то је она иста погодба (29) коју смо и мало час добили.

Прим. 1. Доказати да се средње линије троугла ABC **секу у једној тачци.**

Узмимо стране AB и AC за осовине. Нека је $AB = a$, $AC = b$. Еквације страна AC, AB и BC биће

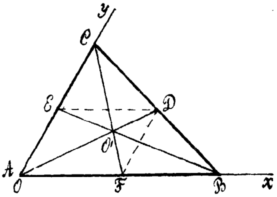
$$x = o, \; y = o, \; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Координате тачке D су $OF = \frac{a}{2}$, $DF = \frac{b}{2}$, т. ј. еквација праве AD је

$$AD \; . \; . \; . \; \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = o.$$

Одсечак праве BE на осовини x је $OB = a$, а на осовини y $OE = \frac{b}{2}$; еквација праве BE је дакле

$$BE \; . \; . \; . \; \frac{x}{a} + \frac{2y}{b} - 1 = o.$$



Сл. 49.

Најпосле, права CF сече осовину x у тачци $F\left(\frac{a}{2}, o\right)$ а осовину y у тачци C (o, b) т. ј. еквација праве CF је

$$CF \; . \; . \; . \; \frac{2x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = o.$$

Ако саберемо еквације средњих линија, помноживши пре тога прве две негативном јединицом, биће

$$\left(\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)-\left(\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}-1\right)-\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=o,$$

т. ј. *средње линије секу се у једној тачци.* Та тачка је *тежиште* троуглово или *центројид* троуглов.

Прим. 2. Дата су два троугла $M_1 M_2 M_3$ и $N_1 N_2 N_3$. Са темена M_1, M_2, M_3 ћемо потегнути праве паралелно са странама $N_2 N_3$, $N_3 N_1$, $N_1 N_2$. Наћи погодбу под којом ће се те три праве сећи у једној тачци.

Нека су a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 координате тачака M_1, M_2, M_3, а c_1, d_1; c_2, d_2; c_3, d_3 координате тачака N_1, N_2, N_3. Еквације поменутих трију правих биће ово:

$$(y-b_1)(c_2-c_3)-(x-a_1)(d_2-d_3)=o,$$

$$(y-b_2)(c_3-c_1)-(x-a_2)(d_3-d_1)=o,$$

$$(y-b_3)(c_1-c_2)-(x-a_3)(d_1-d_2)=o.$$

У збиру ових трију еквација биће коефицијенти који стоје уз x и y идентично равни нули; праве ће се дакле сећи у једној тачци, ако и збир апсолутних чланова тих трију еквација буде $=o$, т. ј ако је

$$\Sigma a_1(d_2-d_3)-\Sigma b_1(c_2-c_3)=o$$

или

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & 1 \\ a_2 & d_2 & 1 \\ a_3 & d_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 1 \\ b_2 & c_2 & 1 \\ b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = o.$$

Neuberg.

Напом. Кад се поменуте три праве секу у једној тачци, сећи ће се у једној тачци и оне три праве, које полазе из темена N_1, N_2, N_3 паралелно са странама $M_2 M_3$, $M_3 M_1$, $M_1 M_2$.

Прим. 3. Наћи погодбу под којом ће се управне са темена M_1, M_2, M_3 на стране $N_2 N_3$, $N_3 N_1$, $N_1 N_2$ сећи у једној тачци.

Погодба је ово:

$$\Sigma a_1(c_2-c_3)+\Sigma b_1(d_2-d_3)=o$$

или

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & 1 \\ b_2 & d_2 & 1 \\ b_3 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = o.$$

(Ibid.).

Напом. Кад се управне са теменâ троугла $M_1 M_2 M_3$ на стране троугла $N_1 N_2 N_3$ секу у једној тачци, сећи ће се у једној тачци и управне са теменâ троугла $N_1 N_2 N_3$ на стране троугла $M_1 M_2 M_3$.

Steiner.

Таква два троугла називају се *ортолошки* троугли.

Прим. 4. Троугли $M_1 M_2 M_3$ и $N_1 N_2 N_3$ су ортолошки. Ако тачке D_1, D_2, D_3 деле праве $M_1 N_1, M_2 N_2, M_3 N_3$ по истој напремици, биће ортолошки и троугли $D_1 D_2 D_3$ и $M_1 M_2 M_3$ с једне, и $D_1 D_2 D_3$ и $N_1 N_2 N_3$ с друге стране.

Neuberg.

Прим. 5. Треба доказати да се паралелне праве секу у бескрајности.

Нека су

$$Ax + By + C = o,$$

$$A'x + B'y + C' = o$$

еквације двеју правих. Еквација праве у бескрајности је

$$o . x + o . y + C'' = o.$$

Те три праве ће се сећи у једној тачци ако је

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ o & o & C'' \end{vmatrix} = o$$

или

$$(AB' - A'B)\, C'' = o$$

или

$$AB' - A'B = o,$$

то јест и т. д.

70. *Ако се између четири праве* $f_1 x + f_2 y + f_3 = o$, $g_1 x + g_2 y + g_3 = o$, $h_1 x + h_2 y + h_3 = o$, $k_1 x + k_2 y + k_3 = o$ *по три не секу у једној тачци, онда између полинома њихових еквација мора постојати једна идентична релација*

$$f\,(f_1 x + f_2 y + f_3) + g\,(g_1 x + g_2 y + g_3) + h\,(h_1 x + h_2 y + h_3) + k\,(k_1 x + k_2 y + k_3) \equiv o\,;$$

f, g, h, k *су у тој релацији сталне количине.*

Поменута релација може постојати само ако је

$$ff_1 + gg_1 + hh_1 + kk_1 \equiv o,$$
$$ff_2 + gg_2 + hh_2 + kk_2 \equiv o,$$
$$ff_3 + gg_3 + hh_3 + kk_3 \equiv o.$$

Из тих трију еквација могли бисмо определити $f:g:h:k$. Те четири непознате биле би сразмерне са минорима ове *проширене детерминанте (matrix)* :

$$\left\| \begin{array}{cccc} f_1 & g_1 & h_1 & k_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 & k_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 & k_8 \end{array} \right\| .$$

Ти минори нису $= o$, јер се између четири дате праве по три не секу у једној тачци ; с тога ће коефицијенти f, g, h, k или управо њихове напремице имати одређене вредности, па ће према томе и поменута идентична релација постојати.

71. *Са дате тачке C потегнућемо ма у ком правцу једну праву; ова ће сећи дате две праве OR и OS у тачкама A и B. На правој CAB ћемо наћи једну тачку D, која је с тачком C хармонијски коњугована према пару тачака A и B. Треба доказати да је место тачака D једна права, која пролази кроз теме угла ROS.* Права OD назива се *полара* тачке C, а тачка C *пол* праве OD.

Сталну тачку O узећемо за почетак координатне системе. Услед тога ће еквације правих OR и OS бити овог облика :

$$y - m_1 x = o, \quad y - m_2 x = o.$$

Координате тачке D ћемо обележити са x, y, а координате дате тачке C са x', y'. Ма коју тачку (ξ, η) низа CD моћи ћемо представити овим двема еквацијама :

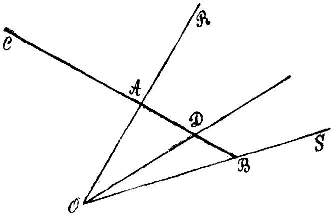
$$\xi = \frac{x + \lambda x'}{1 + \lambda}, \; \eta = \frac{y + \lambda y'}{1 + \lambda}.$$

Једна у низу тачака је и тачка A; тачка A је међу тим уједно и тачка праве $y - m_1 x = o$, па је с тога за тачку A

$$\eta - m_1 \xi = o$$

или

$$\frac{y + \lambda y'}{1 + \lambda} - \frac{m_1 (x + \lambda x')}{1 + \lambda} = o,$$



Сл. 50.

а из ове погодбене еквације добићемо да је

$$\lambda = - \frac{y - m_1 x}{y' - m_1 x'}.$$

На исти начин бисмо могли доказати да је за тачку B

$$\lambda = - \frac{y - m_2 x}{y' - m_2 x'}.$$

Тачке C и D су по претпоставци хармонијски коњуговане према тачкама A и B, а то значи, да су и тачке A и B хармонијски коњуговане према тачкама C и D; параметар λ који одређује тачку A разликује се дакле од параметра λ који одређује тачку B само знаком тако, да је

$$\frac{y - m_1 x}{y' - m_1 x'} + \frac{y - m_2 x}{y' - m_2 x'} = o. \qquad (30)$$

То је она релација која мора постојати између координата тачака D, т. ј. то је еквација места тачака D, а по тој еквацији се види *да тачка D заиста описује једну праву која пролази кроз теме угла ROS.*

Коецицијенат $\frac{y'}{x'}$ правца праве OC означићемо са m_3, а коефицијенат $\frac{y}{x}$ правца праве OD са m_4 и сменићемо у еквацији (30) $\frac{y'}{x'}$ и $\frac{y}{x}$ са m_3 и m_4. Тим путем бисмо добили ову погодбену релацију:

$$\frac{m_4 - m_1}{m_3 - m_1} + \frac{m_4 - m_2}{m_3 - m_2} = o.$$

Отуд је

$$(m_3 - m_1)(m_4 - m_2) + (m_4 - m_1)(m_3 - m_2) = o$$

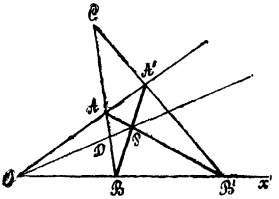
или

$$m_1 m_2 + m_3 m_4 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(m_3 + m_4). \qquad (31)$$

Са овом важном погодбеном релацијом сусрешћемо се непосредно у идућем одељку и доказаћемо да ће под том погодбом зраци $y = m_1 x$, $y = m_2 x$, $y = m_3 x$, $y = m_4 x$ градити тако звани *хармонијски прамен.*

72. *Са дате тачке C потегнућемо ма у ком правцу две праве. Ове ће сећи краке датог угла AOB у тачкама A, B с једне, и у тачкама A', B' с друге стране. Место тачака P што леже у пресеку трансверзалâ AB' и $A'B$ јесте једна права која пролази кроз теме угла AOB.*

Сталне праве OB и OA узећемо за осовине системе. Координате тачке P обележићемо са ξ, η а координате тачке C поново са x', y'.



Сл. 51.

Нека су

$$AB \cdot \cdot \cdot \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \ A'B' \cdot \cdot \cdot \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$$

еквације оних двеју правих што пролазе кроз сталну тачку C. Тачка C (x', y') лежи и на једној и на другој правој, па је с тога

$$\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 1, \quad \frac{x'}{a'} + \frac{y'}{b'} = 1.$$

Одузевши другу еквацију од прве добићемо ово:

$$x'\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right) + y'\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right) = o,$$

а одатле је

$$-\frac{y'}{x'} = \frac{bb'(a - a')}{aa'(b - b')}. \qquad (32)$$

Међу тим су еквације трансверзала̂ AB' и $A'B$ овог облика:

$$AB' \cdot \cdot \cdot \frac{x}{a} + \frac{y}{b'} = 1, \ A'B \cdot \cdot \cdot \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1.$$

Тачка $P\,(\xi, \eta)$ лежи и на једној и на другој трансверзали, па је с тога

$$\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b'} = 1, \quad \frac{\xi}{a'} + \frac{\eta}{b} = 1.$$

Кад поново одузмемо другу еквацију од прве, добићемо ово:

$$\xi\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right) - \eta\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right) = o,$$

а одатле је

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{bb'\,(a - a')}{aa'\,(b - b')}.$$

Но како је десни део ове еквације $= - \frac{y'}{x'}$ [упор. екв. (32)], то се види да ће између координата тачке P постојати ова релација:

$$x'\eta + y'\xi = o, \qquad (33)$$

т. ј. *тачка P заиста описује једну праву што пролази кроз почетак.*

Из еквације (33) види се још нешто. Кад бисмо у њој сменили координате ξ и η са x и y, добили бисмо еквацију

$$x'y + y'x = o, \qquad (34)$$

а та би еквација била идентична са оном еквацијом у коју би се преобразила еквација (30), кад бисмо претпоставили да су сталне праве OR и OS (сл. 50.) осовине координатне системе (у том случају би било $m_1 = \infty, m_2 = o$); *OP је, дакле, полара тачке C, а тачка C је пол праве OP*, а кад се то има у виду, онда је јасно да је и тачка D (сл. 51.) хармонијски коњугована с тачком C, а према пару тачака A и B.

Да бисмо нашли једну важну особину тачака праве OC, а ми ћемо написати еквацију праве OC. Ево те еквације :

$$x'y - y'x = o.$$

Узмимо сад ма где у равни једну тачку (x'', y''). Полара те тачке биће права

$$x''y + y''x = o\,; \qquad (35)$$

коефицијенат правца ове поларе је $-\frac{y''}{x''}$.

1-во. Претпоставићемо да је тачка (x'', y'') једна од тачака праве OC; координате те тачке задовољиле би у том случају еквацију праве OC, т. ј. било би

$$x'y'' - y'x'' = o$$

или

$$-\frac{y''}{x''} = -\frac{y'}{x'},$$

а то значи да је коефицијенат правца поларе оне тачке, која лежи на самој правој OC, управо раван количнику $-\frac{y'}{x'}$. Према томе је јасно, да се еквација полара оних тачака које леже на правој OC, може написати у овом облику :

$$x'y + y'x = o\,;$$

ова еквација је међу тим идентична са еквацијом (34), т. ј. *све тачке праве OC имају једну и исту полару.*

2-го. Претпоставићемо да је тачка (x'', y'') једна од тачака поларе OP пола C. У том случају би било

$$x'y'' + y'x'' = o$$

или

$$-\frac{y''}{x''} = \frac{y'}{x'},$$

а услед ове погодбене релације бисмо могли написати еквацију (35) поларе пола (x'', y'') у овом облику:

$$x'y - y'x = o;$$

ово је међу тим еквација праве OC, а по томе се види *да је, обратно, права OC полара свима тачкама праве OP.*

73. *Наћи напремицу одсечака праве $Ax + By + C = o$ на правој која спаја две дате тачке $P(x', y')$, $Q(x'', y'')$.*

Координате тачке R што лежи у пресеку датих правих обележићемо са x, y, а напремицу по којој та тачка дели дуж PQ са $\lambda = m : n$. Биће дакле

$$x = \frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}. \qquad (36)$$

Овим вредностима ћемо сменити x, y у еквацији $Ax + By + C = o$. Резултат супституције је

$$A(x' + \lambda x'') + B(y' + \lambda y'') + C(1 + \lambda) = o,$$

па је услед тога и

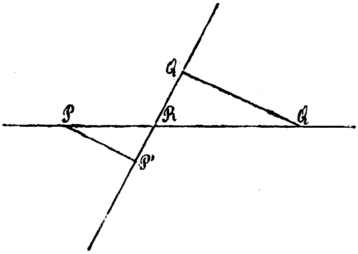
$$\lambda = -\frac{Ax' + By' + C}{Ax'' + By'' + C}, \qquad (37)$$

а по том обрасцу се види, да је напремица одсечака праве $Ax + By + C = o$ на правој што спаја тачке P и Q, равна напремици раздаљина PP' и QQ' тачака P и Q од праве $Ax + By + C = o$. Ми знамо на име да је

$$PP' = \pm \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad QQ' = \pm \frac{Ax'' + By'' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

а кад се та два обрасца имају на уму, онда се види да је заиста $\lambda =$ напремици раздаљина PP' и QQ'.

За тачке које изнутра деле дуж PQ је λ позитивно; у том случају полиноми $Ax' + By' + C$ и $Ax'' + By'' + C$ не би могли бити истога знака; кад је први позитиван, био би други негативан и обратно. Према томе би се у том случају нормале PP' и QQ' налазиле на различитим странама праве $Ax + By + C = o$, а сличним путем би се дало доказати и то, да би нормале PP' и QQ' морале лежати на једној страни праве $Ax + By + C = o$, кад би тачка R споља делила дуж PQ.



Сл. 52.

Ми знамо ону вредност параметра λ којом је опредељена тачка R; услед тога ћемо добити координате тачке R на овај начин: сменићемо λ поменутом вредношћу његовом у еквацијама (36). Координате тачке R биће дакле ово:

$$x = \frac{(Ax' + By' + C)\, x'' - (Ax'' + By'' + C)\, x'}{(Ax' + By' + C) - (Ax'' + By'' + C)},$$

$$y = \frac{(Ax' + By' + C)\, y'' - (Ax'' + By'' + C)\, y'}{(Ax' + By' + C) - (Ax'' + By'' + C)}.$$

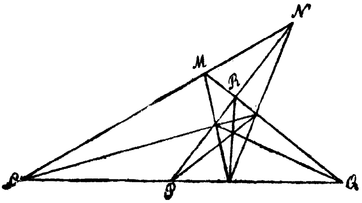
74. Помоћу обрасца (37) може се лако доказати ова теорема: *кад нека права сече стране троугла PQR у тачкама L, M, N, онда међу одсечцима, које она гради на странама, постоји ова релација :*

$$\frac{PL}{LQ} \cdot \frac{QM}{MR} \cdot \frac{RN}{NP} = -1. \qquad (38)$$

Та теорема се назива *Менелајева теорема.* Нека су x', y'; x'', y''; x''', y''' координате темена̂ P, Q, R а

$$Ax + By + C = o$$

еквација праве LMN. На основу поменутог обрасца биће



Сл. 53.

$$\frac{PL}{LQ} = -\frac{Ax' + By' + C}{Ax'' + By'' + C},$$

$$\frac{QM}{MR} = -\frac{Ax'' + By'' + C}{Ax''' + By''' + C},$$

$$\frac{RN}{NP} = -\frac{Ax''' + By''' + C}{Ax' + By' + C}.$$

Кад бисмо помножили ове три еквације, добили бисмо управо релацију (38), т. ј. поменута теорема заиста постоји.

Прим. 1. Наћи напремицу по којој права што спаја тачке (x_3, y_3) и (x_4, y_4) дели праву што спаја тачку (x_1, y_1) с тачком (x_2, y_2).

Одг.
$$\lambda = -\frac{(y_3 - y_4)\, x_1 - (x_3 - x_4)\, y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3}{(y_3 - y_4)\, x_2 - (x_3 - x_4)\, y_2 + x_3 y_4 - x_4 y_3}$$

или

$$\lambda = \frac{x_1\,(y_4 - y_3) + x_3\,(y_1 - y_4) + x_4\,(y_3 - y_1)}{x_2(y_3 - y_4) + x_3\,(y_4 - y_2) + x_4\,(y_2 - y_3)}.$$

Прим. 2. Темена неког троугла PQR спојићемо правима PD, QE, RF с неком тачком O. Те праве ће сећи супротне стране у тачкама D, E, F. Доказати да ће свакад постојати ова релација:

$$\frac{QD \cdot RE \cdot PF}{DR \cdot EP \cdot FQ} = +1.$$

J. Ceva.

ИМАГИНАРНЕ ПРАВЕ. — СИСТЕМЕ ПРАВИХ. — ИЗОТРОПНЕ ПРАВЕ.

75. Ми смо већ на једном месту споменули, да осим реалних тачака има и *имагинарних*. По себи се разуме да имагинарне тачке немају своје геометријске слике. Координате оних првих су реални бројеви; координате имагинарне тачке (x, y) су имагинарни или у опште комплексни бројеви: $x = u + iv$, $y = u' + iv'$. За две имагинарне тачке каже се *да су коњуговане, кад се бројеви који представљају њихове координате, разликују само у знаку чисто имагинарног броја.* Кад се узму две коњуговане имагинарне тачке (x', y'), (x'', y''):

$$x' = u + iv, \quad y' = u' + iv',$$

$$x'' = u - iv, \quad y'' = u' - iv',$$

биће координате средине њихове (x, y) ово:

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2}$$

или — кад параметре $x', x'',\ldots$ сменимо њиховим вредностима —

$$x = \frac{(u + iv) + (u - iv)}{2}, \quad y = \frac{(u' + iv') + (u' - iv')}{2};$$

према томе су координате тачке на средини ово:

$$x = u, \quad y = u',$$

т. ј. *тачка на средини између две коњуговано имагинарне тачке, јесте реална.*

Поред тога могли бисмо доказати и то, *да је права која спаја две коњуговано имагинарне тачке реална.*

Ми знамо на име да је

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}$$

еквација праве која спаја тачку (x', y') с тачком (x'', y''). Према томе је

$$\frac{x - u - iv}{-2iv} = \frac{y - u' - iv'}{-2iv'}$$

или

$$\frac{x - u}{v} = \frac{y - u'}{v'}$$

еквација праве која спаја коњуговано имагинарне тачке $(u + iv, u' + iv')$ и $(u - iv, u' - iv')$. Том последњом еквацијом је међу тим аналитички представљена једна реална права

$$v'x - vy + vu' - uv' = o, \qquad (1)$$

(ова пролази кроз тачку (u, u')), а по томе се види, да поменута теорема заиста постоји.

76. Свака линеарна еквација

$$Ax + By + C = o$$

представља, кад су коефицијенти A, B, C реални, бескрајан низ реалних тачака које леже на једној правој. Поред тих реалних тачака има на правој $Ax+By+C=o$ и бескрајно много имагинарних тачака. То би се веома лако могло доказати. Ако имагинарна тачка $(u + iv, u' + iv')$ лежи на правој $Ax + By + C = o$, онда мора бити

$$A(u + iv) + B(u' + iv') + C = o$$

или, кад се реалан део издвоји од имагинарног,

$$(Au + Bu' + C) + i(Av + Bv') = o.$$

У овој еквацији имамо један реалан и један имагинаран део; та еквација моћи ће дакле постојати само ако су оба (реалан и имагинаран) та дела за се $= o$. Према томе ћемо погодбу, под којом тачка $(u + iv, u' + iv')$ мора лежати на правој $Ax + By + C = o$, моћи и овако написати:

$$Au + Bu' + C = o, \quad Av + Bv' = o, \qquad (2)$$

а по тим двема еквацијама се види, да реални параметри u и u', v и v' имагинарних координата $u + iv$, $u' + iv'$ могу имати исте оне вредности, које имају реалне координате x и y оних тачака, које леже на правима $Ax + By + C = o$ и $Ax + By = o$. Тих реалних координата x и y има бескрајно много, па с тога има и бескрајно много различитих имагинарних тачака $(u + iv, u' + iv')$ које леже на правој $Ax + By + C = o$.

Но поред тачке $(u + iv, u' + iv')$ лежи на правој $Ax + By + C = o$ и коњуговано имагинарна тачка $(u - iv, u' - iv')$; еквацијама (2) обележене су на име у исти мах погодбе под којима ће и тачка $(u - iv,$

$u' - iv')$ лежати на правој $Ax + By + C = o$. Дакле, кад на једној правој лежи једна имагинарна тачка, мора услед аналитичке природе имагинарних тачака на тој правој лежати и коњуговано имагинарна тачка оне прве.

Из погодбених еквација (2) је даље

$$A : B : C = \begin{vmatrix} u' & 1 \\ v' & o \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & u \\ o & v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & u' \\ v & v' \end{vmatrix}$$

а одатле је

$$\frac{A}{C} = - \frac{v'}{uv' - u'v}, \quad \frac{B}{C} = \frac{v}{uv' - u'v};$$

кад су дакле параметри u, v, u', v' познати, онда су с њима заједно познати и параметри $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ који се јављају у еквацији оне реалне праве на којој лежи дата имагинарна тачка $(u + iv, u' + iv')$. Ти параметри имају, као што видимо, само једну вредност, а то ће рећи, да *кроз сваку имагинарну тачку пролази само једна једина реална права.* Реална права одређена је дакле и кад знамо само једну имагинарну тачку која на њој лежи.

77. Корени линеарне еквације

$$(A + iA')\,x + (B + iB')\,y + (C + iC') + o \qquad (3)$$

били би у опште само имагинарни. На линеарном месту (3) лежале би дакле само имагинарне тачке, т. ј. еквација (3) била би *еквација имагинарне праве.* Напишимо ту еквацију у овом облику:

$$(Ax + By + C) + i\,(A'x + B'y + C') = o\,;$$

та еквација је, као што видимо, линеарно састављена из двају линеарних полинома $Ax + By + C$ и $A'x + B'y + C'$, па је услед тога јасно, да имагинарна права пролази кроз тачку у пресеку реалних правих

$$Ax + By + C = o, \quad A'x + B'y + C' = o, \qquad (4)$$

т. ј. *свака имагинарна права пролази кроз једну једину реалну тачку.* —

За две имагинарне праве каже се *да су коњуговане, кад се коефицијенти који се јављају у њиховим еквацијама разликују само у знаку чисто имагинарне количине.* По тој дефиницији била би права

$$(A - iA')\,x + (B - iB')\,y + (C - iC') = o \qquad (5)$$

или

$$(Ax + By + C) - i\,(A'x + B'y + C') = o$$

коњугована с правом (3). Еквација те коњуговане праве је, као што видимо, такође линеарно састављена из еквација реалних правих (4); та коњуговано имагинарна права пролазиће према томе такође кроз тачку у пресеку реалних правих (4), т. ј. *две коњуговане, имагинарне праве секу се у једној реалној тачци.* Кад дакле кроз неку реалну тачку пролази једна имагинарна права, мораће пролазити у исти мах кроз њу још једна, она која је коњугована са првом правом. Реална тачка одређена је дакле и кад знамо само једну имагинарну праву која кроз њу пролази. — По себи се разуме, да ни имагинарна права не може имати своју геометријску слику.

78. Општи облик линеарне еквације $Ax+By+C=o$ своди се у ортогоналној системи на нормалан облик $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o$ кад полином $Ax + By + C$ поделимо квадратним кореном из збира квадрата коефицијената A и B. По аналогији можемо рећи, да ће се и општи облик еквације имагинарне праве (3) преобразити у нормалан, кад полином те еквације поделимо квадратним кореном из збира квадрата коефицијената

$A + iA'$ и $B + iB'$. (Претпоставља се наравно, да збир квадрата тих коефицијената није $= o$).

У нормалном облику линеарне еквације је збир квадрата коефицијената што стоје уз x и y раван јединици, т. ј. *еквације (3) и (5) би биле већ нормалног облика, обе у исти мах, кад би било*

$$(A \pm iA')^2 + (B \pm iB')^2 = 1$$

или, што је идентично с том погодбом, *кад би било*

$$A^2 - A'^2 + B^2 - B'^2 = 1, AA' + BB' = o.$$

Узевши да ове погодбе постоје, узевши дакле да су две коњуговано имагинарне праве дате еквацијама нормалног облика, добићемо еквације оних правих које им угле полове на овај начин. Саставићемо линеарно еквације (3) и (5) и то овако: помножићемо другу међу њима у први мах са — 1, у други мах са + 1 (чл. 66.). Тим путем дошли бисмо до ових двеју линеарних еквација:

$$A'x + B'y + C' = o, \quad Ax + By + C = o, \qquad (6)$$

т. ј. *праве које полове угао између двеју коњуговано имагинарних правих јесу реалне.*

79. Еквација n-тог степена $f(x, y) = o$ представља у опште криву n-тога реда. У неким специјалним приликама може се (чл. 25.) полином те еквације растворити на производ функција нижега степена; у том случају ће се дата крива изметнути у систему кривих линија нижега реда, а по томе се види, да ће еквација $f(x, y) = o$ представљати систему од n правих, кад се полином њезин $f(x, y)$ даје растворити на производ линеарних функција којих је на број свега n.

Ми ћемо у овај мах обратити пажњу само на полиноме такве природе и доказаћемо одмах ову теорему:

свака хомогена еквација n-тога степена између координата x и y представља n правих, што пролазе кроз почетак.

Општи облик хомогене еквације n-тог степена између x и y је

$$y^n + A_1 y^{n-1} x + \ldots + A_{n-1} y x^{n-1} + A_n x^n = o.$$

Поделимо и десни и леви део ове еквације са x^n; у резултату је

$$\left(\frac{y}{x}\right)^n + A_1 \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + A_{n-1} \left(\frac{y}{x}\right) + A_n = o.$$

Корене ове еквације ћемо означити са $m_1, m_2, \ldots m_n$. Полином њезин $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ је дакле идентично раван производу корених чинитеља:

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x} - m_1\right)\left(\frac{y}{x} - m_2\right) \cdot \cdot \cdot \left(\frac{y}{x} - m_n\right) \cdot$$

Кад се то има у виду, онда је јасно да се полином $f(x, y)$ дате еквације може овако написати:

$$f(x, y) = (y - m_1 x)(y - m_2 x) \ldots (y - m_n x)$$

т. ј. *хомогена еквација* $f(x, y) = o$ *n-тог степена заиста представља систему од n правих*

$$y - m_1 x = o, y - m_2 x = o, \ldots y - m_n x = o. \quad (7)$$

На основу тих резултата лако је доћи до неких општијих закључака. — Праве које представља хомогена еквација $f(x, y) = o$ или су све реалне, или су све имагинарне или су најпосле неке реалне, а неке имагинарне. Реалне праве су опредељене реалним, а имагинарне имагинарним коренима еквације $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = o$ или, што је једно и исто, коренима еквације $f(1, m) = o$. Коефицијенти те еквације су реални, па ће се с тога имагинарни корени, ако их у опште има, јављати само у парном броју; кадгод је на име $a + ib$ корен еквације $f(1, m) = o$, биће уједно и $a - ib$ корен те еквације и т. д. Према томе *ће се у системи правих, у које се изметнула сингуларна крива n-тог реда, јављати све две и две коњуговано имагинарне праве*; број имагинарних правих је дакле у тој системи *паран*, т. ј. *ако је хомогена еквација $f(x, y) = o$ непарног степена, онда у системи правих, које она представља, мора бар једна бити реална; у опште је број реалних правих, ако их има више од једне у том случају непаран.*

Специјалан случај. Хомогена квадратна еквација

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = o \qquad (8)$$

представља две праве; оне су реалне и различите, ако су корени квадратне еквације

$$bm^2 + 2hm + a = o \qquad (9)$$

реални и различити, т. ј. ако је $h^2 - ab > o$; оне се поклапају, ако су корени те квадратне еквације реални, а једнаки, т. ј. ако је $h^2 - ab = o$; оне су најпосле коњуговано имагинарне, ако су корени еквације (9) имагинарни т. ј. ако је $h^2 - ab < o$.

Напомена. Еквација

$$(y-b)^n + A_1 (y-b)^{n-1} (x-a) + \ldots + A_{n-1} (y-b) (x-a)^{n-1}$$
$$+ A_n (x-a)^n = o$$

представља систему правих, које пролазе кроз тачку (a, b). Та еквација би се на име паралелним померањем осовина̂ у тачку (a, b) преобразила у мало час поменуту хомогену еквацију $f(x, y) = o$.

80. *Наћи угао* φ *који граде праве*

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = o.$$

Полином дате хомогене квадратне еквације може се написа́ти у овом облику:

$$f(x, y) = b(y - mx)(y - m'x),$$

т. ј. еквације оних правих које су представљене еквацијом $f(x, y) = o$ јесу и

$$y - mx = o \quad \text{и} \quad y - m'x = o.$$

Угао који те две праве затварају одређује се у ортогоналној координатној системи по овом обрасцу:

$$tg\varphi = \frac{m - m'}{1 + mm'};$$

кад се разреши еквација (9) добиће се ово:

$$m = -\frac{h + \sqrt{h^2 - ab}}{b}, \quad m' = -\frac{h - \sqrt{h^2 - ab}}{b};$$

према томе је

$$tg\varphi = 2\frac{\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}.$$

По том обрасцу види се, да је угао φ реалан само кад је $h^2 - ab \geqq o$, а то значи да је φ реално само ако су праве $ax^2 + 2hxy + by^2 = o$ реалне. Напротив, ако је $h^2 - ab < o$, онда је угао φ имагинаран. —

Кад је $a = b$, а $h = o$, праве су имагинарне, њихова еквација је $x^2 + y^2 = o$, а тангента угла који оне затварају је $tg\varphi = \pm i$.

Из обрасца којим је одређен угао φ види се даље, да се праве $ax^2 + 2hxy + by^2 = o$ секу под правим углом кад је $a + b = o$, т. ј. *праве* $ax^2 + 2hxy + by^2 = o$ *секу се под правим углом кад се коефицијенти што се у еквацији њиховој јављају уз* x^2 *и* y^2 *разликују само у знаку.* Према томе је општи облик еквације свију таквих правих ово:

$$ax^2 + 2hxy - ay^2 = o$$

или

$$x^2 + \frac{2h}{a}xy - y^2 = o.$$

Напомена. У косој системи под углом ω је

$$tg\varphi = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b - 2h\cos\omega}\sin\omega\,;$$

према томе је

$$a + b - 2h\cos\omega = o$$

погодба под којом се у косој системи праве $ax^2 + 2hxy + by^2 = o$ секу под правим углом.

Ако је $h^2 - ab = o$, онда су праве паралелне.

81. *Наћи еквацију правих, које полове угле између двеју правих* $ax^2 + 2hxy + by^2 = o$.

Дате две праве могли бисмо аналитички представити и овим двема еквацијама:

$$y - mx = o, \quad y - m'x = o.$$

Угле између тих двеју правих полове праве

$$\frac{y - mx}{\sqrt{1 + m^2}} - \frac{y - m'x}{\sqrt{1 + m'^2}} = o,$$

$$\frac{y - mx}{\sqrt{1 + m^2}} + \frac{y - m'x}{\sqrt{1 + m'^2}} = o.$$

Помноживши ове две еквације, добићемо ово:

$$\frac{(y - mx)^2}{1 + m^2} - \frac{(y - m'x)^2}{1 + m'^2} = o$$

или, кад уклонимо имениteље,

$$(m + m')\, y^2 - 2\, (mm' - 1)\, xy - (m + m')\, x^2 = o.$$

Ова хомогена квадратна еквација већ би била еквација оних правих које полове угле између правих $y - mx = o$ и $y - m'x = o$. Из ње ћемо још помоћу познатих релација

$$m + m' = - \frac{2h}{b},\; mm' = \frac{a}{b}$$

елиминирати параметре m и m'. Тим путем ћемо добити еквацију

$$hy^2 + (a - b)\, xy - hx^2 = o$$

или

$$y^2 + \frac{a - b}{h}\, xy - x^2 = o, \qquad (10)$$

која нам већ представља оне две праве што полове угао између правих $ax^2 + 2hxy + by^2 = o$.

Кад бисмо разрешили квадратну еквацију (10) с обзиром на непознату $\frac{y}{x}$, видели бисмо да је њезина дискриминанта *позитивна*; корени те еквације били би дакле реални, ма количине a, b, h по величини својој ма како стојале једна према другој; ти корени биће дакле реални и кад је $h^2 - ab < o$, а то ће рећи *да су праве које полове угао између двеју имагинарних правих* $ax^2 + 2hxy + by^2 = o$ *такођер реалне (чл. 78.).* — Из еквације (10) види се даље и то, да се праве које полове угао између двеју правих секу под правим углом.

Кад је $h = o$, онда је $ax^2 + by^2 = o$ еквација двеју правих које се гранају из почетка, а $xy = o$ еквација правих које полове угле између те две праве. Осовине координатне системе полове дакле угле које граде праве ма у ком пару $ax^2 + by^2 = o$.

Ако претпоставимо да је поред $h = o$ и $a = b$, то ће еквација пара правих бити $x^2 + y^2 = o$; у том случају била би еквација правих, које полове угао између правих $x^2 + y^2 = o$, сасвим неодређена, т. ј. *буди које две праве, што стоје једна на другој управно, а пролазе кроз тачку* $x = o$, $y = o$ *полове угле између двеју правих* $x^2 + y^2 = o$. Праве $x^2 + y^2 = o$ називају се *изотропне праве.* Оне су коњуговано имагинарне, јер је $x^2 + y^2 \equiv (x + iy)(x - iy)$, а по томе се види, да се изотропне праве могу представити и овим двема еквацијама: $x + iy = o$, $x - iy = o$. — У косој системи је $x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = o$ еквација изотропних правих, па како је

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega$$
$$\equiv [x + y(\cos\omega + i\sin\omega)][x + y(\cos\omega - i\sin\omega)],$$

јасно је да се у косој системи еквације изотропних правих могу и овако написати:

$$x + y(\cos\omega + i\sin\omega) = o,\ x + y(\cos\omega - i\sin\omega) = o.$$

82. Из еквација $x - iy = o$ и $x + iy = o$ види се да су коефицијенти који одређују правац изотропних правих ово: $+ i$ и $- i$; правци изотропних правих су према томе имагинарни, а називају се *изотропни или апсолутни имагинарни правци равни.*

На основу поменутих двеју еквација моћи ћемо доказати неколико теорема:

1-во. *Свака изотропна права сече сама себе под правим углом.*

Две праве чији су правци опредељени коефицијентима m и m' сећи ће се под правим углом, ако је

$$1 + mm' = o,$$

па како је и

$$1 + i \,.\, i = o \quad \text{и} \quad 1 + (-i) \,.\, (-i) = o,$$

то се види, да је заиста свака права апсолутног правца сама на себи управна.

2-го. *Раздаљина двеју тачака једне изотропне праве је равна нули.*

Узмимо на прилику праву

$$x + iy = o$$

и на њој две тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2). Квадрат раздаљине r тих тачака је

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2;$$

у овај мах је међу тим $x_1 = - iy_1$, $x_2 = - iy_2$, па је с тога

$$r^2 = i^2 (y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

па како је $i^2 = -1$, биће

$$r^2 = -(y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = o,$$

т. ј. заиста је ма која дуж, одмерена на правој апсолутног правца, равна нули.

3-ће. *Раздаљина ма које тачке (x, y) која не лежи на изотропној правој, од те изотропне праве је бескрајно велика.*

Раздаљина d тачке (x, y) од једне изотропне праве, н. пр. од праве

$$x + iy = o$$

је ово:

$$d = \pm \frac{x + iy}{\sqrt{1 + i^2}} = \pm \infty,$$

а то смо и тврдили.

Напомене. 1-во. Добро треба имати на уму то, да су поменуте теореме само последице *аналитичких* особина изотропних правих.

2-го. Како се паралелне праве секу у бескрајности, то ће све праве које иду паралелно са правом

$$x - iy = o \quad \text{или} \quad x + iy = o$$

пролазити кроз једну и исту имагинарну тачку праве у бескрајности.

Тачке у којима изотропне праве секу праву у бескрајности зову се *имагинарне накружне тачке у бескрајности.* Оне се често бележе са I и J (**Salmon.** *Higher Plane Curves.*), а зову се по ***C. Taylor-у*** и *фокојиди.*

3-ће. Еквације изотропних правих кроз тачку (x', y') су

$$x - x' - i\,(y - y') = o,\; x - x' + i\,(y - y') = o.$$

83. *Наћи погодбу под којом општа еквација другог степена с двема променљивим* x *и* y *представља две праве.*

Општа еквација другог степена између x и y је овог облика:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o.$$

Узмимо да коефицијенат b није $= o$ и разрешимо ту еквацију с погледом на y. Тим путем добићемо да је

$$y = -\frac{hx+f}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(h^2-ab)\,x^2+2\,(hf-bg)\,x+f^2-bc}.$$

Десни члан ове еквације имаће облик линеарне функције $mx + b$ само кад је израз под кореном потпун квадрат, а то ће бити онда, кад међу коефицијентима $h^2 - ab$, . . . тог израза постоји релација

$$(hf - bg)^2 = (h^2 - ab)\,(f^2 - bc)$$

или

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = o.$$

Ова важна функција коефицијената дате еквације назива се *дискриминанта* те еквације; она се може написати и у облику ове симетричне детерминанте:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = o. \qquad (11)$$

Општа квадратна еквација представља дакле две праве кад је њезина дискриминанта равна нули.

То би се дало доказати и овако. Нека је

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$
$$\equiv (px + qy + r)(p'x + q'y + r'). \qquad (12)$$

Кад се упореде коефицијенти који се јављају с десне и с леве стране ове еквације, онда добивамо ово:

$$a = pp', \quad b = qq', \quad c = rr',$$

$$2f = qr' + q'r, \quad 2g = rp' + r'p, \quad 2h = pq' + p'q.$$

Помножимо сад ове две *сужене* детерминанте:

$$\begin{vmatrix} p & p' \\ q & q' \\ r & r' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} p' & p \\ q' & q \\ r' & r \end{vmatrix};$$

производ њихов је ово:

$$\begin{vmatrix} 2pp' & pq' + p'q & pr' + p'r \\ pq' + p'q & 2qq' & qr' + q'r \\ pr' + p'r & qr' + q'r & 2rr' \end{vmatrix},$$

па како је тај производ раван нули[1], а $a = pp'$, $b = qq'$, $c = rr'$ и т. д., јасно је да ће бити и

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = o.$$

---

[1] *Сужена детерминанта* је она детерминанта, у којој има више врста него колона; горње две сужене детерминанте имају две колоне, а три врсте. Производ таквих детерминаната је = *o*. Види **Baltzer**. *Theorie und Anwendung der Determinanten. Fünfte Auflage*, *p.* 48—50.

Није згорег поменути *да се полином дате еквације другог степена може изразити збиром квадрата двеју линеарних функција кадгод еквација представља две праве.*

Еквација $f(x, y) = o$ представљаће на име две праве или ако је

$$f(x, y) = RS,$$

или ако је

$$f(x, y) = (R + iS)(R - iS);$$

R и S су линеарне функције промењљивих x и y. У првом случају су праве реалне, а у другом коњуговано имагинарне. Но како је

$$RS \equiv \left(\frac{R+S}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-S}{2}\right)^2,$$

а

$$(R + iS)(R - iS) \equiv R^2 + S^2,$$

то се види да се полином $f(x, y)$ заиста у поменутом случају може представити збиром квадрата двеју линеарних функција.

Минори елемената дискриминанте Δ бележе се великим писменима A, B, C, F, G, H. Тако је

$$A = bc - f^2, \quad B = ca - g^2, \quad C = ab - h^2,$$

$$F = gh - af, \quad G = hf - bg, \quad H = fg - ch.$$

Да нађемо још координате тачке у пресеку двеју правих $ax^2 + 2hxy + \ldots = o$. Те две праве могли бисмо представити и овим еквацијама:

$$px + qy + r = o, \quad p'x + q'y + r' = o;$$

координате тачке што лежи у њихову пресеку опредељене су релацијама

$$x : y : 1 = qr' - q'r : rp' - r'p : pq' - p'q,$$

па како је

$$a = pp', \quad b = qq', \quad c = rr' \quad \text{и т. д.},$$

то је уједно и

$$x : y : 1 = \sqrt{A} : \sqrt{B} : \sqrt{C}.$$

Напомена. Често се коефицијенти опште квадратне еквације с двема промењивим x и y бележе једним писменом које има двојну казаљку. Општа квадратна еквација у којој се такви коефицијенти јављају била би овог облика:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = o.$$

Према томе је дискриминанта те еквације ово:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

Примери

1. Шта представља еквација $x^2 - y^2 = o$?

Одг. Праве $x - y = o$ и $x + y = o$ које полове угле међу осовинама.

2. Шта представља еквација

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = o?$$

Одг. Праве $x - 2y = o, x - 3y = o.$

3. Шта представља еквација

$$2x^3 - 5x^2y + 3xy^2 = o.$$

Одг. Три праве:

$$x = o,\ 2x - 3y = o,\ x - y = o.$$

4. Наћи угао између правих

$$6x^2 - xy - y^2 = o.$$

Одг. $\varphi = 45^0$.

5. Доказати да је θ угао између правих $x^2 - 2xy\sec\theta + y^2 = o$.

6. Доказати да се праве $3x^2 + 2xy - 3y^2 = o$ секу под правим углом.

7. Доказати да су праве $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 6 = o$ паралелне.

8. Доказати да еквација $6x^2 - xy - y^2 - x + 3y - 2 = o$ представља две праве. Наћи еквације тих правих.

Одг. Дискриминанта је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 12 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

или

$$\Delta = 8\,(12 - 12) = o.$$

Еквације правих су

$$2x - y + 1 = o, \quad 3x + y - 2 = o.$$

9. Определити h тако, да еквација

$$x^2 + hxy - 8y^2 + 12y - 4 = o$$

представља две праве.

Одг. $h = +2$ или -2.

10. Праве $x^2 + 2xy\sec 2\alpha + y^2 = o$ једнако су нагнуте према правој $x + y = o$.

11. Наћи погодбу под којом ће права $Ax + By + C = o$ пролазити кроз тачку у пресеку правих

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o.$$

Одг. Погодба је ово:

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ A & B & C \end{vmatrix} = o.$$

12. Наћи праве које представља еквација

$$x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 = o.$$

Смениһемо x и y са $r\cos\theta$ и $r\sin\theta$, па ћемо добити ово: $tg3\theta = 1$; према томе еквација представља три праве кроз почетак, од којих је прва нагнута према осовини x под углом од 15^0, друга под углом од 75^0, а трећа под углом од 135^0.

13. Ако је ω угао координатне системе, доказати да еквација

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2\cos2\omega = o$$

представља две праве кроз почетак; прва је према осовини x нагнута под углом од 45^0, а друга под углом од 135^0.

14. Доказати да ће једна од правих

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = o$$

поклапати једну од правих

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = o,$$

ако је

$$4\,(ah' - a'h)\,(hb' - h'b) = (ab' - a'b)^2.$$

15. Определити k тако, да се две између трију правих

$$2xy\,(ax + by) - k\,(x^3 + y^3) = o$$

секу под правим углом.

Одг. $k = o, a + b.$ —

То би се могло на овај начин доказати. Треба узети да је $x^2 - \lambda xy - y^2 = o$ еквација оних двеју правих, које се секу под правим углом, а $\alpha x + \beta y = o$ еквација оне треће праве. Кад се то претпостави, онда је

$$2xy(ax + by) - k(x^3 + y^3) \equiv (x^2 - \lambda xy - y^2)(\alpha x + \beta y).$$

Помножићемо и изједначићемо коефицијенте. Тим путем ћемо добити еквације којима је могуће определити α, β, λ и k.

16. Доказати да је производ управних са тачке (x', y') на праве

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = o$$

ово:

$$\frac{ax'^2 + 2hx'y' + by'^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}.$$

17. Доказати да је раздаљина између двеју тачака у којима права $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o$ сече праве

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = o$$

ово:

$$\frac{2p\sqrt{h^2 - ab}}{a\sin^2\alpha - 2h\sin\alpha\cos\alpha + b\cos^2\alpha}.$$

18. Еквација $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o$ представља две праве; доказати да су праве $ax^2 + 2hxy + by^2 = o$ паралелне с првим двема правима.

19. Пита се шта ћемо добити, ако у еквацији (10):

$$y^2 + \frac{a-b}{h}xy - x^2 = o$$

сменимо x и y са

$$x + \sqrt{\frac{A}{C}},\ y + \sqrt{\frac{B}{C}}\ ?$$

Одг. Добићемо еквацију оних двеју правих, које полове угле између правих $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o$.

20. Наћи погодбу под којом ће две између четири праве

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = o$$

половити угао између осталих двеју.

Одг. $3a + 3e + c = o$, $2(a-e)^2(a+e) = (b+d)(be+da)$.

21. Какву вредност мора имати λ, па да еквација

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda = o$$

представља две праве?

Одг. $$\lambda = \frac{\Delta}{h^2 - ab}.$$

22. Шта представља алгебарска еквација m-тог степена у којој се јавља само једна непозната x?

Одг. Еквација представља систему од m правих; све те праве иду паралелно са осовином y.

23. Шта представља еквација $x^2 - 3x + 2 = o$?

Одг. Како је $x^2 - 3x + 2 \equiv (x-1)(x-2)$, то ће дата еквација представљати две напоредница $x = 1$ и $x = 2$.

Разнолики примери

1. Стране неког троугла су

$$3x - 4y = o,\ 8x + 15y = o,\ x = 20.$$

Наћи «ин-центар» (средиште уписаног круга) тог троугла.

Одг. (13, 1).

2. Наћи ин-центар троугла (1, 2), (2, 5), (3, 4).

Одг $(\sqrt{5}, 4)$.

3. Доказати да је еквација праве која спаја тачку $(2c\cos\alpha, \alpha)$ с тачком $(2c\cos\beta, \beta)$ овог облика:

$$2c\cos\alpha\cos\beta = \varrho\cos(\alpha + \beta - \theta).$$

4. Доказати да је права кроз (ϱ', θ'), а управна на

$$\frac{1}{\varrho} = a\cos\theta + b\sin\theta$$

овог облика:

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{b\cos\theta - a\sin\theta}{b\cos\theta' - a\sin\theta'}.$$

5. Наћи еквацију праве, која је са тачке у пресеку правих

$$3x - y - 1 = o, x + y - 3 = o$$

управно спуштена на $3x + 4y + 5 = o$.

Одг. $$4x - 3y + 2 = o.$$

6. Наћи еквацију праве што спаја $(1, -2)$ са тачком у пресеку правих

$$3x - 4y + 5 = o, 2x - 3y + 4 = o.$$

Одг. Еквација је $x = 1$.

7. Тачка у пресеку правих

$$a_1x + b_1y + c_1 = o, \quad a_2x + b_2y + c_2 = o$$

је спојена једном правом с тачком у пресеку правих

$$a_3x + b_3y + c_3 = o, \quad a_4x + b_4y + c_4 = o.$$

Доказати да је

$$(a_1 x + b_1y + c_1) + \mu (a_2x + b_2y + c_2) = o$$

еквација те праве, ако је μ опредељено овом еквацијом:

$$\mu \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = o.$$

8. Стране неког паралелограма су

$$4x + 5y - 6 = o, 4x + 5y - 9 = o, 5x + 4y - 6 = o, 5x + 4y - 9 = o.$$

Наћи површину и еквације дијагонала његових.

Одг. Површина је $= 1$, а еквације дијагонала су $x - y = o$, $3x + 3y = 5$.

9. Ако су праве $Ax + By + C = o$, $A'x + B'y + C' = o$ паралелне, доказати да еквација

$$(Ax + By + C) + (A'x + B'y + C') = o$$

представља напоредницу, која лежи у средини између датих двеју правих.

10. Доказати да еквација $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 8x + 4y = o$ представља две праве које се секу под правим углом.

11. Доказати да еквација

$$(x'^2 + y'^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1) = (xx' + yy' - 1)^2$$

представља две праве.

12. Наћи праве које су представљене еквацијом

$$m(x^3 - 3xy^2) + y^3 - 3x^2y = o.$$

13. Наћи еквацију управних кроз (α, β), а на праве

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = o.$$

Одг. $$d(x - \alpha)^3 - c(x - \alpha)^2(y - \beta) + b(x - \alpha)(y - \beta)^2 - a(y - \beta)^3 = o.$$

14. Доказати да орто-центар (тачка у којој се секу висине), тежиште и циркум-центар неког троугла леже на једној правој. (Та права се назива *Ајлерова права*).

15. A и B су две дате тачке. Наћи место тачака P за које је $PA^2 - PB^2 = k^2 = const.$

Нека је $AB = 2a$. Узмимо праву AB за осовину x, а тачку O на средини дужи AB за почетак ортогоналне системе. Еквација места тачака P биће $4ax = k^2$, т. ј. место тачака P је права $\perp AB$.

16. Збир четирију углова $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$ је $= 2\pi$. Доказати да су координате средишта оног круга, који је описан око тачака

$$(a\cos\varphi, b\sin\varphi), (a\cos\varphi', b\sin\varphi'), (a\cos\varphi'', b\sin\varphi''), (a\cos\varphi''', b\sin\varphi''')$$

ово:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\xi, \quad y = \frac{b^2 - a^2}{b^2}\eta.$$

У овим обрасцима су са ξ и η означене координате тежишта четирију тачака $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$.

[*Напомена.* — Упореди координате тежишта тачака $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $(a\cos\beta, b\sin\beta)$, ... у прим. 15. стр. 22. са координатама (α) циркум-центра тачака $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, $(a\cos\varphi', b\sin\varphi')$ . . . у прим. 4. стр. 102.].

17. A, B, C су три дате тачке. Наћи место тачака P за које је $\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\,\overline{PA}^2$.

Ако су x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 координате тачака A, B, C, биће еквација места тачака P ово:

$$(4x_1 - 2x_2 - 2x_3)\,x + (4y_1 - 2y_2 - 2y_3)\,y$$
$$= 4x_1^2 + 4y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - x_3^2 - y_3^2,$$

т. ј. место је једна права.

18. Дате су четири тачке A, B, C, D. Нека тачка P се креће тако, да је

$$\triangle PAB + \triangle PCD = k^2 = const.$$

Наћи место тачака P.

Повуцимо $PM \perp AB$, а $PN \perp CD$. Нека је $AB = b$, а $CD = b'$. Ако су

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o \quad x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p' = o$$

еквације правих AB и CD, биће

$$PM = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p,\ PN = x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p';$$

па како је — то смо претпоставили —

$$AB \cdot PM + CD \cdot PN = 2k^2,$$

то је јасно да је место тачака P права

$$b\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) + b'\,(x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p') = 2k^2.$$

Напом. Збир на левој страни еквације је алгебарски.

19. Дате су две сталне тачке A и B на осовинама координатне системе: прва тачка лежи на осовини Ox, а друга на осовини Oy. Поред тих тачака узећемо на осовинама још две тачке — тачку A' на осовини x, и тачку B' на осовини y — тако, да буде

$$OA' + OB' = OA + OB.$$

Наћи место тачака у пресеку правих AB' и $A'B$.

Ако је $OA = a$, $OB = b$, биће еквација места ово:

$$x + y = a + b,$$

т. ј. место тачака у пресеку правих AB' и $A'B$ је права.

20. Теме O троугла OBC се не креће, а остала два темена његова B и C се крећу тако, да се угли троугла OBC не мењају. Претпоставићемо да се B креће по једној правој. Наћи место темена C.

Тачку O узећемо за пол, а управну OM са O на праву по којој се B креће за поларну осовину. Угле на теменима O, B, C ћемо означити са α, β, γ. Ако је

$$OM = a, OC = \varrho, \sphericalangle COM = \theta,$$

биће

$$a = OBcosBOM,$$

па како је

$$OB = OC \frac{sin\gamma}{sin\beta},$$

а

$$\sphericalangle BOM = \theta - \alpha,$$

биће еквација места ово:

$$a = \varrho \frac{sin\gamma}{sin\beta} cos (\theta - \alpha)$$

или

$$\varrho cos\theta cos\alpha + \varrho sin\theta sin\alpha = a \frac{sin\beta}{sin\gamma}$$

или

$$xcos\alpha + ysin\alpha - a \frac{sin\beta}{sin\gamma} = o,$$

т. ј. теме C ће описати једну праву.

21. Нека права $OPP_1P_2P_3$ обрће се око сталне тачке O и сече стране датог троугла у тачкама P_1, P_2, P_3. На тој правој узећемо једну тачку P тако, да је

$$\frac{3}{OP} = \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \frac{1}{OP_3}.$$

Место тачака P је једна права. **(Cotes-ова теорема).**

Тачку O узећемо за почетак координатне система. Нека су $xcos\alpha_1 + ysin\alpha_1 - p_1 = o$ и т. д. екваціје страна датог троугла. Ако са θ означимо угао који затвара права $OPP_1P_2P_3$ са осовином x, биће

$$OP_1 = \frac{p_1}{cos (\theta - \alpha_1)}, \quad OP_2 = \frac{p_2}{cos (\theta - \alpha_2)}, \quad OP_3 = \frac{p_3}{cos (\theta - \alpha_3)};$$

дакле, ако је $OP = \varrho$, биће

$$\frac{3}{\varrho} = \frac{cos(\theta - \alpha_1)}{p_1} + \frac{cos(\theta - \alpha_2)}{p_2} + \frac{cos(\theta - \alpha_3)}{p_3}$$

или

$$\frac{cos(\theta - \alpha_1)}{p_1} - \frac{1}{\varrho} + \frac{cos(\theta - \alpha_2)}{p_2} - \frac{1}{\varrho} + \frac{cos(\theta - \alpha_3)}{p_3} - \frac{1}{\varrho} = o$$

или

$$\frac{\varrho cos(\theta - \alpha_1) - p_1}{p_1} + \frac{\varrho cos(\theta - \alpha_2) - p_2}{p_2} + \frac{\varrho cos(\theta - \alpha_3) - p_3}{p_3} = o;$$

.•. место тачака $P(x, y)$ је права

$$\frac{xcos\alpha_1 + ysin\alpha_1 - p_1}{p_1} + \frac{xcos\alpha_2 + ysin\alpha_2 - p_2}{p_2}$$

$$+ \frac{xcos\alpha_3 + ysin\alpha_3 - p_3}{p_3} = o.$$

Та права назива се *полара* тачке O с обзиром на дат троугао, а тачка O је *пол* те праве. Често се права назива и *трилинеарна полара (хармоникала)*, а тачка O *трилинеарни пол* ***(Mathieu)***.

[*Напом.* Упор. с овим чл. 71.].

22. Нека права се креће по равни тако, да је алгебарски збир управних које су на њу спуштене из n сталних тачака (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \dots (x_n, y_n) = o$; доказати да права пролази кроз једну сталну тачку.

Нека је

$$xcos\alpha + ysin\alpha - p = o$$

еквација праве што се по равни креће. Алгебарска сума управних је $= o$; .•.

$$(x_1 cos\alpha + y_1 sin\alpha - p) + (x_2 cos\alpha + y_2 sin\alpha - p) + \dots$$

$$+ (x_n cos\alpha + y_n sin\alpha - p) = o$$

или

$$\Sigma x_i \cdot cos\alpha + \Sigma y_i \cdot sin\alpha - np = o.$$

Из ове еквације и еквације $xcos\alpha + ysin\alpha - p = o$ ћемо елиминирати p и добићемо тим путем опет еквацију оне праве која се по равни креће. Та еквација је овог облика:

$$\left(x - \frac{\Sigma x_i}{n}\right) + \left(y - \frac{\Sigma y_i}{n}\right) tg\alpha = o,$$

а по тој еквацији се види, да покретна права заиста пролази кроз сталну тачку

$$\xi = \frac{\Sigma x_i}{n},\ \eta = \frac{\Sigma y_i}{n};$$

та стална тачка је, као што видимо, тежиште системе датих тачака.

Да смо били претпоставили, да је m_1 пута прва $\perp + m_2$ пута друга $\perp +$ и т. д. $= o$, онда би права пролазила кроз тачку

$$\xi = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m},\ \eta = \frac{\Sigma my}{\Sigma m},$$

а та тачка би била средиште сразмерних раздаљина датих тачака.

23. У неком троуглу ABC повући ћемо праву DE паралелно са основом AB. Наћи место тачака у пресеку правих AD и BE.

Узмимо (сл. 49.) стране AB и AC за осовине координатне системе xOy. Нека је $AB = a$, $AC = b$, а

$$y - \lambda = o.$$

еквација праве DE.

Најпре ћемо наћи еквације правих BE и AD. Права BE сече осовину x у тачци $B(a, o)$, а осовину y у тачци $E(o, \lambda)$; с тога је еквација њезина ово:

$$y \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{x}{a} - 1 = o. \qquad (\alpha)$$

До еквације праве AD ћемо доћи на овај начин. Та права пролази кроз тачку D; у тачци D се секу праве DE и BC, т. ј. праве

$$y - \lambda = o,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = o.$$

Еквација праве AD мора дакле бити овог облика:

$$(y - \lambda) + \mu \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = o.$$

Апсолутан члан ове еквације мора бити $= o$, јер права AD пролази кроз почетак: $\lambda + \mu = o$. Према томе је

$$-y \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = o \qquad (\beta)$$

еквација праве AD.

Тачка O' лежи у пресеку правих BE и AD. С тога ћемо наћи еквацију места тачака O', кад из еквација (α) и (β) елиминирамо λ или управо $\frac{1}{\lambda}$. У резултату бисмо том елиминацијом добили ово:

$$y\left(\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=o,$$

т. ј. место тачака O' је или права

$$y=o,$$

или права

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1=o\,;$$

прва еквација представља осовину x, а друга средњу линију CF.

Напомена. Изгледа као да осовина x не би могла бити место оних тачака, које описује тачка O' при кретању праве DE. Међу тим ми видимо ово: кад се права DE креће према страни AB — осовини x — а не мења при том кретању свој правац, онда ће се дијагонале AD и BE трапеза $ABDE$ положајем својим све мање и мање разликовати од положаја праве AB. Кад права DE поклопи праву AB, онда ће и дијагонале AD и BE управо лежати на тој правој AB. У том положају био би пресек дијагонала неопредељен, т. ј. тачка O' може бити свака тачка осовине x.

24. Наћи дужине висинâ троугла (3, 8), (12, 2), (—4, —6).

Одг. $$\frac{21}{\sqrt{5}},\quad \frac{24}{\sqrt{5}},\quad \frac{56}{\sqrt{13}}.$$

25. Наћи дужине управних са почетка, а на праве које полове угле између

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=o,\quad x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-p'=o.$$

Одг. $$\frac{p-p'}{2\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}},\quad \frac{p+p'}{2\cos\frac{\alpha-\alpha'}{2}}.$$

26. Доказати да се праве које полове угле између двеју правих секу под правим углом.

27. Доказати да се права, која пролази кроз тачку (x', y') и гради угао θ са осовином x, аналитички може представити овим еквацијама:

$$x=x'+\varrho\cos\theta,\quad y=y'+\varrho\sin\theta.$$

Протумачити геометријски значај параметра ϱ.

28. Права што пролази кроз тачку D (2, 3) гради са осовином x угао од 60^0, а сече праву $4x + 5y + 6 = o$ у тачци E. Наћи дужину одсечка DE.

Еквација праве DE је

$$\frac{x-2}{cos60^0} = \frac{y-3}{sin60^0} = \varrho$$

$$\therefore \qquad x = 2 + \varrho cos60^0 = 2 + \frac{\varrho}{2},$$

$$y = 3 + \varrho sin60^0 = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\varrho.$$

Овим вредностима ћемо сменити x и y у еквацији $4x + 5y + 6 = o$, па ћемо добити овај резултат:

$$\varrho = DE = -\frac{58(5\sqrt{3}-4)}{59}.$$

29. Права која спаја средине дијагонала трапезових иде напоредо са двема основама његовим.

30. Потегнути једну праву која дат троугао дели на две једнаке чести.

31. Између четири праве узећемо три и три и добићемо тим путем четири троугла. Орто-центри тих троуглова леже на једној правој.

32. Са неке тачке P спустићемо управне PQ и PR на две сталне праве Ox и Oy. Наћи место средине корде RQ кад се тачка P креће по некој правој.

33. Дате су две сталне тачке A и B. Са тачке B потегнућемо ма у ком правцу једну праву и спустићемо са A управну AQ на ту праву; продужићемо ту управну и наћи ћемо на њој једну тачку P за коју је $AQ \cdot AP = const = k^2$. Наћи место тачака P.

Одг. Место тачака P је једна права која под правим углом сече AB, а у раздаљини $\frac{k^2}{c}$ од тачке A; c је $= AB$.

34. Темена A, B, C троугла ABC клизе по трима сталним правима OA, OB, OC, које се секу у тачци O, а две стране AC и CB пролазе кроз две сталне тачке. Доказати да ће и трећа страна AB пролазити кроз једну сталну тачку.

35. Дата је нека права

$$lx + my = 1$$

и нека крива

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o.$$

Наћи еквацију оних двеју правих које се из почетка координатне системе гранају према двема тачкама у којима дата права сече дату криву другога реда. —

Ту проблему ћемо решити овако. Полином еквације другога реда састоји се из три хомогена дела, из дела $ax^2 + 2hxy + by^2$, из дела $2gx + 2fy$ и из дела c. Онај први део помножићемо са $(lx + my)^0$, онај други са $(lx + my)^1$, а онај трећи са $(lx + my)^2$, сабраћемо те производе и претпоставићемо да им је збир раван нули. Тим путем ћемо добити ову еквацију:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2(gx + fy)(lx + my) + c(lx + my)^2 = o.$$

Кад имамо у виду ову еквацију, биће нам јасно да ће она морати представљати једно место које пролази кроз тачке у којима дата права сече дату криву Та еквација је међу тим хомогена, а другог је степена, па ће с тога та еквација морати представљати две праве које се гранају из почетка, т. ј. та хомогена квадратна еквација биће еквација оних двеју правих које ми тражимо.

36. Дат је угао LOM и дате су три сталне тачке Q, Q', Q''. Тачке Q и Q' леже заједно са теменом O датог угла на једној правој, а тачка Q'' ма где у равни. Из тачке Q'' повући ћемо према крацима OL и OM ма у ком правцу једну праву и означићемо тачке у којима ова сече краке OL и OM са A и B. Наћи место тачака P које леже у пресеку правих QA и $Q'B$.

Сталне праве QQ' и OL ћемо узети за осовине координатне системе (праву QQ' за осовину x, а праву OL за осовину y) и претпоставићемо да је $y = mx$ еквација крака OM. Ако означимо координате тачке Q са a и o, координате тачка Q' са a' и o и, најпосле, координате тачке Q'' са a'' и b'', биће еквација места тачака P овог облика:

$$[(a - a')a''m + a'b'']x + a(a' - a'')y - aa'b'' = o,$$

т. ј. тачка P описаће једну праву. Лако би се дало доказати да та права пролази кроз тачку P' у којој се секу крак OM и права QQ''.

37. Темена A и B троугла APB клизе по двема сталним правима OL и OM, а стране његове PA, PB и AB пролазе кроз три колинеарне тачке Q, Q', Q''. Доказати да ће при том кретању слободно теме P троугла APB описати једну праву.

Та теорема може се лако доказати кад се имају у виду резултати до којих се у претечном примеру дошло.

Напом. Поменута теорема је првобитно изведена из једног много општијег правила **Mac-Laurin-овог** и **Braikenridge-овог,** (*Философске трансакције* од г. 1735.). (Види **Chasles.** *Aperçu historique,* p. 151. и **Poncelet.** *Traité des propriétés projectives des figures, t. I. p. 281.*).

◆

ОДЕЉАК ТРЕЋИ

Еквације првога степена и њихови символи. Пробleме

84. Узмимо да су нам дате две линеарне еквације

$$A_1x + B_1y + C_1 = o, \quad A_2x + B_2y + C_2 = o.$$

Линеарним агрегатом тих двеју еквација, т. ј. еквацијом

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \mu (A_2x + B_2y + C_2) = o,$$

је као што знамо опредељена једна у системи правих које се гранају из тачке $(A_1x+B_1y+C_1, A_2x+B_2y+C_2)$; тим линеарним агрегатом је дакле аналитички представљен општи зрак у прамену чије теме лежи у пресеку датих двеју правих $A_1x + B_1y + C_1 = o$ и $A_2x + B_2y + C_2 = o$.

Ми ћемо обележити полиноме $A_1x + B_1y + C_1$ и $A_2x + B_2y + C_2$ символима U_1 и U_2:

$$U_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1, \quad U_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2.$$

Према томе биле би еквације датих двеју правих ово:

$$U_1 = o, \quad U_2 = o,$$

а еквација општега зрака у прамену (U_1, U_2) ово:

$$U_1 + \mu U_2 = o.$$

На исти начин могли бисмо и специјалне линеарне еквације

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = o, \quad x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = o$$

обележити симболима

$$\alpha_1 = o, \quad \alpha_2 = o;$$

еквација општег зрака у прамену (α_1, α_2) била би дакле ово:

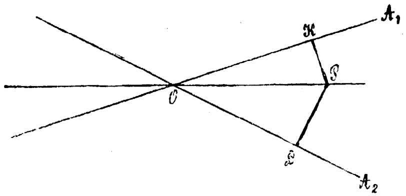
$$\alpha_1 + \mu\alpha_2 = o.$$

Свакој специјалној вредности параметра μ одговара, као што знамо, само један једини зрак у прамену, као што и обратно, сваком специјалном зраку одговара једна једина вредност параметра.

85. Геометријски значај тог параметра сазнаћемо на веома прост начин.

Узмимо да еквације $\alpha_1 = o$ и $\alpha_2 = o$ представљају праве OA_1 и OA_2, а еквација $\alpha_1 + \mu\alpha_2 = o$ општи зрак OP у прамену (α_1, α_2).

На том општем зраку узећемо ма где једну тачку $P\,(x, y)$ и спустићемо са ње нормале PK и PL на сталне праве. Раздаљина тачке P од праве α_1 је $PK = \alpha_1$, а



Сл 54.

од праве α_2, $PL = \alpha_2$. Из еквације зрака OP види се дакле да је напремица раздаљинâ ма које тачке општега зрака од сталних зракова стална; но како је $PK = OP \sin\,(KOP)$, а $PL = OP \sin\,(POL)$, то се уједно види и то, да је параметром μ представљена и напремица синуса углова, на које општи зрак дели угао A_1OA_2 који затварају стални зраци OA_1 и OA_2:

$$\mu = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{PK}{PL} = -\frac{sin\,(KOP)}{sin\,(POL)}\,.$$

Узевши да је почетак координатне системе у углу A_1OA_2 — то нека буде *унутрашњи* угао — одредићемо знак параметру μ на овај начин. За све тачке P, које леже у томе углу или у унакрсном углу тог угла, биће раздаљине PK и PL *истога* знака, т. ј. *параметар* μ *је негативне вредности за све зраке који изнутра деле угао* A_1OA_2. Напротив, за све оне тачке, које леже у *спољашњем* углу или у напоредном углу тог угла, биће те раздаљине *различитог* знака, т. ј. *параметар* μ *је позитивне вредности за све зраке, који споља деле угао што лежи између сталних зракова.*

Узмимо сад да се μ мења од $-\infty$ до нуле и од нуле до $+\infty$; по себи се разуме да ће у томе случају зрак $\alpha_1 + \mu\alpha_2$ непрестано мењати свој положај. Кад је $\mu = o$ $(PK = o)$, онда зрак $\alpha_1 + \mu\alpha_2$ поклапа сталан зрак α_1; кад је $\mu = -\infty$ $(PL = o)$, онда зрак $\alpha_1 + \mu\alpha_2$ лежи на зраку α_2; кад је $\mu = -1$ $(PK = PL)$, половиће зрак изнутра угао A_1OA_2, т. ј. док се параметар мења од нуле до -1, дотле се зрак $\alpha_1 + \mu\alpha_2$ креће по првој половини угла A_1OA_2 идући са зрака α_1 у правцу према зраку α_2; кад се μ мења од -1 до $-\infty$, онда се зрак $\alpha_1 + \mu\alpha_2$ креће по другој половини угла A_1OA_2.

Напротив, кад се параметар μ буде мењао од o до $+1$, кретаће се општи зрак $\alpha_1 + \mu\alpha_2 = o$ по спољашњем углу идући са зрака α_1 ка зраку α_2; кад је $\mu = +1$, половиће зрак $\alpha_1 + \mu\alpha_2$ споља угао што лежи између зракова OA_1 и OA_2. Ако се μ и даље мења, од $+1$ до $+\infty$, кретаће се зрак $\alpha_1 + \mu\alpha_2$ по другој половини спољашњег угла; кад μ буде $= +\infty$, онда ће општи зрак поклапати зрак α_2, а тим ће уједно бити и довршено кретање општега зрака $\alpha_1 + \mu\alpha_2$.

Ако су

$$U_1 = o, \quad U_2 = o$$

еквације зракова OA_1 и OA_2, а

$$U_1 + \mu U_2 = o$$

еквација општега зрака у прамену (U_1, U_2), онда параметар μ није раван напремици раздаљина PK и PL, већ је са овом само сразмеран.

Из еквације општега зрака је на име

$$\mu = -\frac{U_1}{U_2},$$

па како је (чл. 63.)

$$PK = \pm \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \varrho_1 (A_1x + B_1y + C_1),$$

$$PL = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \varrho_2 (A_2x + B_2y + C_2)$$

или

$$PK = \varrho_1 U_1, \; PL = \varrho_2 U_2,$$

биће у овај мах

$$\mu = -\frac{U_1}{U_2} = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{PK}{PL}.$$

Кад се има на уму да количник $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ има сталну вредност:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \pm \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2}{A_2^2 + B_2^2}} = const.,$$

онда се види, да је параметар μ заиста сразмеран са напремицом раздаљина PK и PL:

$$\mu = k \frac{PK}{PL}.$$

Како је

$$PK = OPsin\,(KOP),\; PL = OPsin\,(POL),$$

моћи ћемо параметар μ и овако изразити:

$$\mu = k \frac{\sin(KOP)}{\sin(POL)} \cdot$$

86. Праве које се гранају на све стране из темена праменова распоређене су у прамену тако, да ће свакомунутрашњем зраку, који је опредељен параметром $\mu = -\lambda$, *одговарати* само један спољашњи зрак — онај, који је одређен параметром $\mu = +\lambda$. Ти зраци $\alpha_1 - \lambda\alpha_2 = o$ и $\alpha_1 + \lambda\alpha_2 = o$ били би *хармонијски коњуговани* према сталним зрацима α_1 и α_2. По оном што мало час рекосмо види се, да су хармонијски коњуговани зраци одвојени сталним зрацима. Кад се један налази у унутрашњем углу, налази се други у спољашњем; кад један полови изнутра угао A_1OA_2, други га полови споља. Приближује ли се један од њих сталном зраку, то му се у исти мах приближује и други. Кад један од њих падне на сам сталан зрак, пашће на њега у исти мах и други. Хармонијски коњуговани парови ће се дакле сусрести само на сталним зрацима. Чим се један од њих крене са сталног зрака, кренуће се и други — један у једном, други у другом правцу.

Напомена. Узмимо да су зраци c и d хармонијски коњуговани према зрацима a и b. Ако су

$$\alpha_1 = o, \quad \alpha_2 = o$$

еквације зракова a и b, биће у опште

$$\alpha_1 + \mu\alpha_2 = o, \ \alpha_1 + \mu'\alpha_2 = o$$

еквације зракова c и d. Према томе је

$$\mu = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{\sin(aOc)}{\sin(cOb)} = -\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)},$$

$$\mu' = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{\sin(aOd)}{\sin(dOb)} = -\frac{\sin(ad)}{\sin(db)} \cdot$$

Ако су зраци c и d хармонијски коњуговани, биће $\mu = -\mu'$ т. ј. *зраци c и d лежаће хармонијски према* *зрацима* a *и* b *ако је*

$$\sin(ac) : \sin(cb) = -\sin(ad) : \sin(db). \qquad (1)$$

Ова погодбена релација може се међу тим написати и у овом облику:

$$\sin(ca) : \sin(ad) = -\sin(cb) : \sin(bd),$$

а по тој релацији се види, да су и зраци a и b хармонијски коњуговани према зрацима c и d. *Кадгод су дакле зраци* c *и* d *хармонијски коњуговани према зрацима* a *и* b, *биће у исти мах и зраци* a *и* b *хармонијски коњуговани према зрацима* c *и* d.

87. *Наћи погодбу под којом ће четири праве* $y = m_1 x$, $y = m_2 x$, $y = m_3 x$, $y = m_4 x$ *градити хармонијски прамен.*

Нека су праве 3 и 4 хармонијски коњуговане према првим двема 1 и 2; еквације правих 3 и 4 могли бисмо у том случају представити овим еквацијама:

$$(y - m_1 x) + \mu (y - m_2 x) = o, \quad (y - m_1 x) - \mu (y - m_2 x) = o$$

или

$$y = \frac{m_1 + \mu m_2}{1 + \mu} x, \quad y = \frac{m_1 - \mu m_2}{1 - \mu} x.$$

Кад се те еквације упореде с еквацијама $y = m_3 x$ и $y = m_4 x$ — прва с првом, а друга с другом — онда се види да је

$$m_3 = \frac{m_1 + \mu m_2}{1 + \mu}, \quad m_4 = \frac{m_1 - \mu m_2}{1 - \mu}.$$

Кад из ових последњих двеју релација елиминирамо μ, добићемо погодбу која постоји између параметара m_1, m_2, m_3, m_4 кад зраци 1 и 2 хармонијски леже према зрацима 3 и 4. Погодба је та овог облика:

$$(m_3 - m_1)(m_4 - m_2) + (m_4 - m_1)(m_3 - m_2) = o$$

или

$$m_1 m_2 + m_3 m_4 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(m_3 + m_4). \quad (2)$$

Прим. Наћи погодбу под којом су праве

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = o$$

хармонијски коњуговане према правима

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = o.$$

Ако прва квадратна еквација представља праве

$$y - m_1 x = o, \; y - m_2 x = o,$$

а друга праве

$$y - m_3 x = o, \; y - m_4 x = o,$$

биће

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \; m_1 m_2 = \frac{a}{b},$$

$$m_3 + m_4 = -\frac{2h'}{b'}, \; m_3 m_4 = \frac{a'}{b'},$$

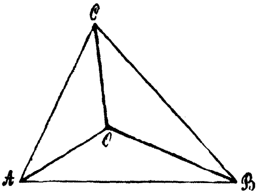
па је услед тога према обрасцу (2) тражена погодба ово:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2h}{b}\right)\left(-\frac{2h'}{b'}\right)$$

или

$$ab' + a'b - 2hh' = o.$$

88. *Наћи еквације правих које полове угле неког троугла ABC.*



Сл. 55.

Нека су

$$\alpha = o, \beta = o, \gamma = o$$

еквације оних страна које леже према теменима A, B, C. Ако почетак координатне системе лежи у троуглу, биће еквације правих које полове угле овог облика:

$$AO\ldots\beta-\gamma=o,\ BO\ldots\gamma-\alpha=o,\ CO\ldots\alpha-\beta=o. \qquad (3)$$

Збир левих страна ових еквација је идентично раван нули:

$$(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta)\equiv o$$

т. ј. *праве које полове унутрашње угле троугла ABC секу се у једној тачци.*

Еквације правих, које би половиле спољашње угле биле би овог облика:

$$\beta+\gamma=o,\ \gamma+\alpha=o,\ \alpha+\beta=o.$$

Ове еквације могу се спојити са еквацијама правих AO, BO, CO тако, да линеарни агрегати које тим путем будемо добили, буду идентично равни нули:

$$(\beta+\gamma)-(\gamma+\alpha)+(\alpha-\beta)\equiv o,$$

$$(\gamma+\alpha)-(\alpha+\beta)+(\beta-\gamma)\equiv o,$$

$$(\alpha+\beta)-(\beta+\gamma)+(\gamma-\alpha)\equiv o,$$

а по томе се види, *да се праве које полове два спољашња и трећи унутрашњи угао неког троугла секу у једној тачци.*

89. *Наћи еквацију висине AD троугла ABC.*

Нека темена A, B, C леже и у овај мах према странама

$$\alpha=o,\ \beta=o,\ \gamma=o.$$

Висина AD дели угао A на два угла; један је комплеменат углу B, а други је комплеменат углу C. Еквација те праве је

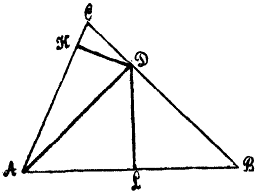
$$\beta + \mu\gamma = o,$$

а параметар μ који се у тој еквацији јавља ћемо одредити на овај начин. Спустићемо са тачке D нормале DK, DL на стране β и γ. Кад се претпостави да је почетак и у овај мах у троуглу, биће

$$\mu = -\frac{DK}{DL} = -\frac{sin\,(90^0 - C)}{sin\,(90^0 - B)} = -\frac{cosC}{cosB},$$

т. ј. еквација висине AD је

$$\beta cosB - \gamma cosC = o. \qquad (4)$$



Сл. 56.

Сличним путем бисмо могли доказати да су еквације осталих двеју висина ово:

$$\gamma cosC - \alpha cosA = o, \quad \alpha cosA - \beta cosB = o.$$

Збир последњих трију еквација је идентично раван нули:

$$(\beta cosB - \gamma cosC) + (\gamma cosC - \alpha cosA) + (\alpha cosA - \beta cosB) \equiv o,$$

т. ј. *висине троугла ABC секу се у једној тачци — у орто-центру тог троугла.*

90. *Наћи еквације средњих линија троугла ABC.*

Узећемо да почетак координатне системе и у овај мах лежи негде у троуглу.

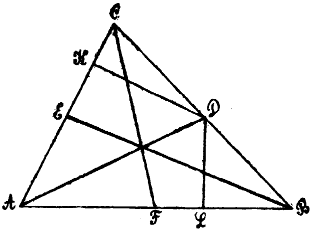
Еквација средње линије AD је овог облика:

$$\beta + \mu\gamma = o.$$

Из правоуглих троуглова DKC и DLB је

$$DK = DC\sin C, \; DL = DB\sin B,$$

па како је $DC = DB$, биће



Сл. 57.

$$\mu = -\frac{DK}{DL} = -\frac{DC\sin C}{DB\sin B} = -\frac{\sin C}{\sin B};$$

еквација средње линије AD је дакле овог облика:

$$\beta\sin B - \gamma\sin C = o. \tag{5}$$

Сличним путем би се дало доказати да су еквације осталих двеју средњих линија BE и CF ово:

$$\gamma\sin C - \alpha\sin A = o, \; \alpha\sin A - \beta\sin B = o.$$

Збир полинома̑ тих трију еквација је идентично раван нули:

$$(\beta\sin B - \gamma\sin C) + (\gamma\sin C - \alpha\sin A) + (\alpha\sin A - \beta\sin B) \equiv o,$$

т. ј. *средње линије троугла ABC секу се у једној тачци — у тежишту (центројиду) тог троугла.*

Напомена. Кад се упореди овај доказ те теореме са оним доказом те исте теореме у прим. 1. стр. 132, видеће се да овај од оног својом лепотом и простотом знатно одмиче.

91. *У троуглу ABC узећемо ма где једну тачку O и спојићемо је правима AD, BE и CF с теменима A, B, C. Треба доказати да су тачке L, M, N (сл. 58.) колинеарне.*

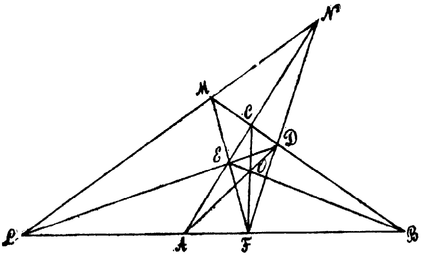
Нека су

$$\alpha = o, \ \beta = o, \ \gamma = o$$

еквације страна које леже према теменима A, B, C, а

$$m\beta \quad n\gamma = o, \ n\gamma - l\alpha = o, \ l\alpha - m\beta = o \qquad (6)$$

еквације правих AD, BE, CF. (Те три еквације могу бити еквације правих AD, BE и CF, јер је збир њихов $\equiv o$).



Сл. 58.

Најпре ћемо наћи еквације правих DE, EF, FD.

Тачка D лежи у пресеку правих

$$\alpha = o, \ m\beta - n\gamma = o, \qquad (7)$$

а у тачци E се секу праве

$$\beta = o, \ n\gamma - l\alpha = o. \qquad (7^*)$$

С тога ће еквација праве DE бити линеарно састављена и из еквација правих (7) и из еквација правих (7*). Еквација праве DE биће дакле овог облика:

$$DE \cdot \ \cdot \ \cdot l\alpha + m\beta - n\gamma = o.$$

Сличним путем би се дало доказати, да су еквације правих *EF* и *FD* овог облика:

$$EF \cdots m\beta + n\gamma - l\alpha = o,$$

$$FD \cdots n\gamma + l\alpha - m\beta = o.$$

Тачке L, M, N у којима се секу те три праве са странама γ, α, β троугла *ABC* опредељене су еквацијама:

$$L \cdots \gamma = o,\ l\alpha + m\beta - n\gamma = o,$$

$$M \cdots \alpha = o,\ m\beta + n\gamma - l\alpha = o,$$

$$N \cdots \beta = o,\ n\gamma + l\alpha - m\beta = o;$$

према томе ће линеарни агрегати

$$(l\alpha + m\beta - n\gamma) + 2n\gamma = o,$$

$$(m\beta + n\gamma - l\alpha) + 2l\alpha = o,$$

$$(n\gamma + l\alpha - m\beta) + 2m\beta = o$$

тих еквација представљати по једну од оних правих које пролазе кроз тачке L, M, N. Свака између тих еквација је међу тим идентична са еквацијом

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o, \qquad (8)$$

т. ј. тачке L, M, N заиста леже на једној правој.

Симболи α, β, γ који се јављају у еквацији (8) представљају управо дужину нормала које су са неке — ма које — тачке праве *LMN* спуштене на стране $\alpha = o, \beta = o, \gamma = o$ троугла *ABC*. Ми смо дакле добили једну релацију $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ којом су везане нормале α, β, γ које су ма са које тачке праве *LMN* потегнуте на стране троугла *ABC*. Кад бисмо те нормале сматрали као неку нову врсту координата, онда бисмо као што се по облику еквације (8) види, праву могли представити једном линеарном, *хомогеном* еквацијом. Тим путем дошли су геометри новијег доба на мисао о тако званим *трилинеарним координатама*, о којима ћемо се опширније бавити у једном од идућих одељака.

Кад се има у виду начин којим је постала права LMN, онда ће нам уједно бити јасно и то, како се може конструјисати права $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ кад је дат троугао ABC. Треба на име најпре одредити тачку O; та тачка лежи у пресеку правих (6). Тачку O ћемо спојити са теменима A, B, C; праве OA, OB, OC сећи ће стране BC, CA, AB у тачкама D, E, F. Кад се најпосле споје и тачке D, E, F правим линијама сећи ће те праве DE, EF, FD стране AB, BC, CA у тачкама L, M, N. Права $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ пролази кроз те тачке.

Напомена. Свака права $Ax + By + C = o$ могла би се представити и еквацијом

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o.$$

Кад се има у виду то, да симболи α, β, γ представљају линеарне функције $x cos\alpha + y sin\alpha - p$, $x cos\beta + y sin\beta - q$, $x cos\gamma + y sin\gamma - r$, онда је јасно да се еквација $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ свакад може написати у овом облику:

$$(l cos\alpha + m cos\beta + n cos\gamma)\, x + (l sin\alpha + m sin\beta + n sin\gamma)\, y$$
$$- (lp + mq + nr) = o.$$

Ова еквација представља исту ону праву коју представља и еквација $Ax + By + C = o$ ако је[1])

$$\left.\begin{aligned} l cos\alpha + m cos\beta + n cos\gamma &= A, \\ l sin\alpha + m sin\beta + n sin\gamma &= B, \\ lp + mq + nr &= -C. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

---

[1]) Ми смо у овај мах узели да су коефицијенти који се јављају у једној и у другој еквацији једнаки (потребно је да буду само сразмерни), т. ј. претпоставили смо да се у коефицијентима A, B, C већ *a priori* налази онај фактор којим би их требало помножити кад хоћемо да они буду једнаки с коефицијентима прве еквације.

Детерминанта система ових еквација *није равна нули*, јер се праве $\alpha = o, \beta = o, \gamma = o$ — стране троугла ABC — не секу у једној тачци. Према томе ћемо из системе еквација (9) добити по једну, одређену вредност за сваку непознату l, m, n, а то ће рећи, да еквације $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ и $Ax + By + C = o$ представљају једну и исту праву, као што смо и тврдили.

Прим. Доказати да су прамени $A\,(CBDM)$, $B\,(ACEN)$, $C\,(BAFL)$ хармонијски.

Еквације зракова AC, AB, AD, AM су

$$\beta = o, \gamma = o, m\beta - n\gamma = o, m\beta + n\gamma = o,$$

а по томе се види да зраци AD и AM хармонијски леже према зрацима AC и AB. Сличним путем би се могло доказати да су и остала два прамена хармонијска.

Дефин. Права LMN назива се *хармоникала* или *трилинеарна полара* тачке O.

92. *Наћи хармоникалу центроида троугла ABC.*

У овом случају биле би праве AD, BE, CF средње линије троугла ABC, па би према томе еквације тих правих биле ово:

$$\beta sinB - \gamma sinC = o, \gamma sinC - \alpha sinA = o, \alpha sinA - \beta sinB = o,$$

а по томе се види да је еквација тражене хармоникале ово:

$$\alpha sinA + \beta sinB + \gamma sinC = o. \qquad (10)$$

Еквација (10) је необично важна. Праве DE, EF, FD иду на име паралелно са странама AB, BC, CA; према томе ће тачке L, M, N лежати у бескрајности, па како су те тачке колинеарне, јасно је да се еквација (10) мора сматрати као аналитички еквиваленат *праве у бескрајности*.

Прим. Наћи хармоникалу орто-центра.

Одг. $\alpha cosA + \beta cosB + \gamma cosC = o.$

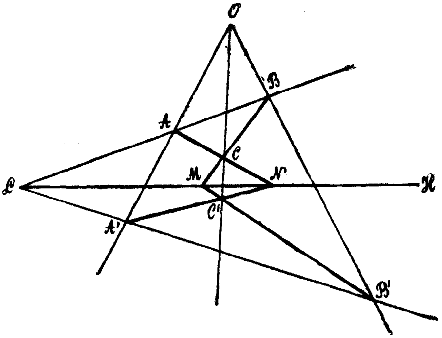
93. *Кад се стране троугла ABC са странама троугла $A'B'C'$ — две и две које једна другој одговарају — секу у три тачке L, M, N које леже на правој H, онда праве које спајају два и два темена, A и A', B и B', C и C' пролазе кроз једну тачку O.*

Нека су

$$\alpha = o, \ \beta = o, \ \gamma = o$$

еквације страна BC, CA, AB, а

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$



Сл. 59.

еквација праве H.

Страна $B'C'$ сече праву H у тачци M $(\alpha, l\alpha + m\beta + n\gamma)$; еквација њезина је дакле,

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma) + \mu\alpha = o$$

или

$$B'C' \cdot \cdot \cdot \ l'\alpha + m\beta + n\gamma = o.$$

Сличним путем би се дало доказати да су еквације правих $C'A'$, $A'B'$ овог облика:

$$C'A' \cdot \cdot \cdot \ l\alpha + m'\beta + n\gamma = o,$$

$$A'B' \cdot \cdot \cdot \ l\alpha + m\beta + n'\gamma = o.$$

Из последње три еквације добићемо, кад одузмемо другу од прве, трећу од друге и најпосле прву од треће, ово:

$$(l' - l)\alpha + (m - m')\beta = o,$$

$$(m' - m)\beta + (n - n')\gamma = o,$$

$$(n' - n)\gamma + (l - l')\alpha = o.$$

Збир ових еквација је идентично раван нули, т. ј. праве које оне представљају секу се у једној тачци. Те три праве пролазе кроз темена $(B'C', C'A')$, $(C'A', A'B')$, $(A'B', B'C')$ троугла $A'B'C'$, јер су њихове еквације линеарно састављене из еквација правих $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$; но те три праве пролазе и кроз темена (α, β), (β, γ), (γ, α) троугла ABC, јер су њихове еквације линеарно састављене и из еквација правих α, β, γ, а кад се то има у виду, онда је јасно да поменута теорема постоји.

За троугле ABC и $A'B'C'$ каже се да су *у перспективи*; права H је *осовина*, а тачка O *средиште перспективе*. **Poncelet** *(Traité des propriétés projectives des figures, I. p. 155.)* зове троугле ABC и $A'B'C'$ *хомолошким троуглима (triangles homologiques)*, праву H *осовином*, а тачку O *средиштем хомологије*.

ТАЧКА. ТАНГЕНЦИЈАЛНЕ КООРДИНАТЕ

94. Општа линсарна еквација

$$Ax + By + C = o$$

или

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = o,$$

представља свакад једну праву која осовину x сече у тачци $\left(-\frac{C}{A}, o\right)$, а осовину y у тачци $\left(o, -\frac{C}{B}\right)$.

Одсечци a и b те праве на осовинама су ово: $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$. Ако $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ означимо са u и v:

$$u = \frac{A}{C}, \quad v = \frac{B}{C},$$

биће

$$u = -\frac{1}{a}, \; v = -\frac{1}{b}, \tag{1}$$

а еквација $Ax + By + C = o$ биће овог облика:

$$ux + vy + 1 = o.$$

Параметри u и v који се у овој еквацији јављају јесу негативне реципрочне вредности одсечака праве на осовинама; ти параметри потпуно одређују положај правој у равни и зову се *координате* дате праве, а ми ћемо их звати и *тангенцијалним координатама.*[1] Еквације (1) биле би *еквације праве* (u, v). У тој специјалној системи је права, као што видимо одређена *двема* еквацијама. Једном између њих, н. пр. еквацијом $u = -\frac{1}{a}$ није одређен положај правој Има на име бесконачно много правих које одсецају на осовини x део a. Координате тих правих су $\left(-\frac{1}{a}, v\right)$, а слика коју ће оне *заогрнути* биће једна тачка — тачка (a, o). *Еквација* $u = -\frac{1}{a}$ *биће дакле у тангенцијалним координатама аналитички еквиваленат тачке* (a, o).

Сличним путем би се дало доказати, да је $v = -\frac{1}{b}$ еквација тачке (o, b). *Једна између еквација (1) представља дакле у тангенцијалној системи једну тачку; обе заједно одређују једну праву — ону, која спаја те две тачке.*

---

[1] Тангенцијалне координате почели су у оном облику, у ком се оне данас у науци јављају, први употребљавати **Plücker** *(Crelle's Journal, t. V. 1829.* и *Analytisch-geometrische Entwicklungen,* II. *1831.)* и **Chasles** *(Mémoire de Géométrie, 1829.* и *Aperçu historique, 1837.).*

Напомена. Координате неке тачке зваћемо од сад и *пунктуалним координатама.*

95. Узмимо сад да се у еквацији $ux + vy + 1 = o$ параметри u и v мењају. У том случају представљаће нам та еквација читаву једну систему правих. Све те праве пролазиће међу тим кроз сталну тачку $x = a$, $y = b$, ако су параметри u и v везани међу собом релацијом $au + bv + 1 = o$ (чл. 68.). Према томе можемо рећи *да свака линеарна еквација*

$$au + bv + 1 = o \qquad (2)$$

представља једну тачку. Координате те тачке су у паралелној системи

$$x = a, \; y = b.$$

Према томе ће линеарна еквација

$$ux + vy + 1 = o$$

представљати и еквацију праве (u, v), и еквацију тачке (x, y).

Та еквација биће еквација праве ако су у полиному њезином количине u, v сталне, а количине x, y променљиве; она нам казује да нека тачка (x, y) лежи на сталној правој (u, v).

Та еквација биће еквација тачке ако су у полиному њезином количине x, y сталне, а количине u, v променљиве; она нам казује да нека права (u, v) пролази кроз сталну тачку (x, y).

Еквацијом (2) је обележен *нормалан облик еквације тачке. (**Hesse**. l. c. p. 51.).*

Кад би еквација праве била овог облика:

$$Ax + By + C = o,$$

онда би координате њене

Кад би еквација тачке била овог облика:

$$Au + Bv + C = o,$$

онда би координате њене

у тангенцијалној системи биле

$$u = \frac{A}{C},\ v = \frac{B}{C}$$

у пунктуалној системи биле

$$x = \frac{A}{C},\ y = \frac{B}{C}.$$

Тако би на прилику у прамену

$$(u_1x + v_1y + 1) + \mu\,(u_2x + v_2y + 1) = o$$

општи зрак (u, v) био опредељен овим двема еквацијама:

$$u = \frac{u_1 + \mu u_2}{1 + \mu},\quad v = \frac{v_1 + \mu v_2}{1 + \mu}.$$

Напомена. У тангенцијалној системи је еквација почетка ово:

$$const. = o,$$

а еквација тачке у бескрајности ово:

$$Au + Bv = o.$$

То се даје овако протумачити. Општа еквација $Au + Bv + C = o$ представља аналитички тачку $x = \frac{A}{C}$, $y = \frac{B}{C}$. Ако је $A = B = o$, биће и $x = o$, $y = o$ т. ј. кад постоје погодбе $A = B = o$, онда општа еквација представља почетак координатне системе. Еквација почетка је дакле $o \cdot u + o \cdot v + C = o$ или $const. = o$. Напротив, ако је $C = o$, биће $x = \infty$, $y = \infty$ т. ј. под погодбом $C = o$ представља општа еквација тачке у бескрајности. Еквација тачке у бескрајности је дакле $Au + Bv = o$, а то смо и тврдили.

96. *Наћи еквацију тачке која лежи у пресеку двеју правих* (u_1, v_1), (u_2, v_2).

Нека су еквације тих правих ово:

96⁺. *Наћи еквацију праве која спаја две тачке* (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Нека су еквације тих тачака ово:

$$A_1x + B_1y + C_1 = o,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = o.$$

Из ових еквација се види да су координате тачке која лежи у пресеку датих правих ово:

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\quad y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Но како је

$$u_1=\frac{A_1}{C_1},\quad v_1=\frac{B_1}{C_1},$$

а

$$u_2=\frac{A_2}{C_2},\quad v_2=\frac{B_2}{C_2},$$

биће

$$x=\frac{v_1-v_2}{u_1v_2-u_2v_1},\quad y=-\frac{u_1-u_2}{u_1v_2-u_2v_1}.$$

Према томе је еквација тачке у којој се секу праве (u_1, v_1), (u_2, v_2) овог облика:

$$\frac{v_1-v_2}{u_1v_2-u_2v_1}\,u-\frac{u_1-u_2}{u_1v_2-u_2v_1}\,v+1=o$$

или

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = o.$$

$$A_1u + B_1v + C_1 = o,$$
$$A_2u + B_2v + C_2 = o.$$

Из ових еквација се види да су координате праве која спаја дате тачке ово:

$$u=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\quad v=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Но како је

$$x_1=\frac{A_1}{C_1},\quad y_1=\frac{B_1}{C_1},$$

а

$$x_2=\frac{A_2}{C_2},\quad y_2=\frac{B_2}{C_2},$$

биће

$$u=\frac{y_1-y_2}{x_1y_2-x_2y_1},\quad v=-\frac{x_1-x_2}{x_1y_2-x_2y_1}.$$

Према томе је еквација праве која спаја тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2) овог облика:

$$\frac{y_1-y_2}{x_1y_2-x_2y_1}\,x-\frac{x_1-x_2}{x_1y_2-x_2y_1}\,y+1=o$$

или

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = o.$$

97. *Наћи раздаљину тачке* $au + bv + 1 = o$ *од праве* (u_1, v_1).

У пунктуалној системи је еквација праве (u_1, v_1) ово:

$$u_1x + v_1y + 1 = o;$$

раздаљина r тачке (a, b) од ове праве је дакле

$$r = \pm \frac{au_1 + bv_1 + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}.$$

Кад бисмо место специјалне праве (u_1, v_1) узели ма коју другу праву (u, v), била би раздаљина тачке (a, b) од те праве одређена релацијом

$$r = \pm \frac{au + bv + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \qquad (3)$$

Ова релација скрива у себи једно начело, које је за нас сасвим ново, па с тога не ће бити згорег, ако се за један часак задржимо на њој. — Узмимо да су количине a, b, r сталне, а количине u, v променљиве. Јасно је да у том случају права (u, v) не ће моћи лежати ма где у равни. Напротив, она ће — не мењајући никад своју сталну раздаљину r од тачке (a, b) — мењањем својега положаја у равни *заогрнути* један круг и биће тангента тог круга у свакој појединој тачци његовој. Координате u и v ма које тангенте тог круга биће међу собом везане релацијом (3), т. ј. релација (3) биће *еквација круга у тангенцијалним координатама.*

Рационалан облик те еквације је ово:

$$r^2 (u^2 + v^2) = (au + bv + 1)^2. \qquad (4)$$

У пунктуалној системи је еквација тог истог круга овог облика:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \qquad (5)$$

а том формулом је аналитички обележен закон по коме се мора кретати нека тачка (x, y) која у свом кретању описује поменути круг.

Ми можемо дакле замислити да круг постаје на два различита начина: *или га описује нека тачка (x, y) по закону који је обележен еквацијом (5), или га заогрће нека права (u, v) по закону који је обележен ексва-*

цијом (4). У првом случају је круг творевина тачке (Punktgebilde) — *место тачака* — а у другом случају творевина праве (Liniengebilde) или *обвојница тангената (enveloppe)*.

Има дакле *два основна геометријска елемента*, који по одређеном закону производе круг: један елеменат је тачка, а други права. Између тих елемената постоји једна узајамност, коју треба поменути.

Ако тачку узмемо као основни елеменат, добићемо праву *спајањем* двеју тачака. Најпростије место тачака јесте права.

Ако праву узмемо као основни елеменат, добићемо тачку у *пресеку* двеју правих. Најпростија обвојница правих јесте тачка.

Напомене. 1-во. Кад би еквација тачке била овог облика:

$$Au + Bv + C = o,$$

била би раздаљина њезина од праве (u_1, v_1) ово:

$$r = \frac{\frac{A}{C} u_1 + \frac{B}{C} v_1 + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}$$

или

$$r = \frac{Au_1 + Bv_1 + C}{C \sqrt{u_1^2 + v_1^2}}.$$

2-го. Геометрију у којој је основни елеменат слика̂ тачка зваћемо кад и кад *пунктуалном геометријом*, а геометрију у којој је основни елеменат слика̂ права *тангенцијалном геометријом*. (Види предговор *P. Appell-a* у делу *Leçons sur les coordonnées tangentielles* од *G. Papelier-a*. I. св. 1894.).

98. Све што рекосмо о двојаком начину којим постаје круг, вреди и за остале криве линије: *свака крива је или творевина тачке или творевина праве*. Она је

као творевина тачке аналитички представљена еквацијом	као творевина праве аналитички представљена еквацијом
$f(x, y) = o$	$\varphi(u, v) = o.$

О еквацији $f(x, y) = o$ говорили смо већ једном приликом. Ми знамо да она представља једну криву; ми знамо даље, да ће — кад је реч о алгебарским кривима — степеном те еквације бити опредељен ред криве и т. д. Са значајем тих резултата ћемо се међу тим још боље упознати тумачећи упоредо и једну и другу еквацију. Узмимо само да је еквација

$f(x, y) = o$	$\varphi(u, v) = o$
m-тог степена. За сваку специјалну вредност променљиве x имаће y у опште m вредности:	n-тог степена. За сваку специјалну вредност променљиве u имаће v у опште n вредности:
$y = f_1(x), y = f_2(x), \ldots;$	$v = \varphi_1(u), v = \varphi_2(u), \ldots;$
посебна вредност $x = a$ опредељује дакле m тачака криве линије, т. ј. права $x = a$ сече криву у m тачака. Но како се еквација сваке праве трансформацијом координата може представити у облику $x = a$, то се види да ће криву f свака права сећи у m реалних или имагинарних тачака. Бројем тих тачака је опредељен *ред* криве линије; дато *место* је дакле m-*тог реда*.	посебна вредност $u = a$ опредељује дакле n тангената криве линије, т. ј. са тачке $u = a$ могуће је потегнути n тангената на криву. Но како се еквација сваке тачке трансформацијом координата може представити у облику $u = a$, то се види да се на криву φ са сваке тачке може потегнути n реалних или имагинарних тангената. Бројем тих тангената је опредељена *врста* криве линије; дата *обвојница* је дакле n-*те врсте*.
Две праве секу се у једној јединој тачци (x, y), т. ј. *права је место првога реда.*	Две тачке могу се спојити само једном јединим правом (u, v), т. ј. *тачка је*

Јасно је да осим праве и нема више места првога реда.

обвојница прве врсте. Јасно је да осим тачке и нема више обвојница прве врсте.

99. *Наћи еквацију тачке, која по напремици* $\lambda = m : n$ *дели раздаљину двеју тачака.*

Нека су

$$ux_1 + vy_1 + 1 = o, \; ux_2 + vy_2 + 1 = o \qquad (6)$$

еквације датих тачака (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Ми знамо да су координате оне тачке, која по напремици λ дели раздаљину између двеју тачака (x_1, y_1) и (x_2, y_2), ово:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \qquad (7)$$

с тога је еквација те тачке овог облика:

$$u\,\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + v\,\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + 1 = o$$

или

$$u\,(x_1 + \lambda x_2) + v\,(y_1 + \lambda y_2) + (1 + \lambda) = o$$

или

$$(ux_1 + vy_1 + 1) + \lambda\,(ux_2 + vy_2 + 1) = o. \qquad (8)$$

Свакој специјалној вредности параметра λ одговара по једна одређена тачка праве и обратно, свакој специјалној тачци праве одговара по једна одређена вредност параметра. Еквација (8) је дакле *еквација низа тачака који одређују две основне тачке (6).* По облику те еквације види се, да је она линеарно састављена из еквација основних тачака. У њој је параметром λ представљена напремица одсечака на које нека општа тачка низа дели раздаљину двеју основних тачака његових. Кад је $\lambda = -1$, онда општа тачка низа лежи у бескрајности, т. ј. еквација тачке која на низу у бескрајности лежи јесте

$$(ux_1 + vy_1 + 1) - (ux_2 + vy_2 + 1) = o;$$

ово је дакле аналитички еквиваленат оне тачке која *споља полови* раздаљину датих двеју тачака. Тачку, која ту раздаљину *изнутра полови* опредељује параметар $\lambda = + 1$, т. ј. њезина еквација

$$(ux_1 + vy_1 + 1) + (ux_2 + vy_2 + 1) = o$$

разликује се од еквације тачке што лежи у бескрајности само знаком параметра λ.

Кад би еквације основних тачака низа биле овог облика:

$$A_1u + B_1v + C_1 = o, \ A_2u + B_2v + C_2 = o,$$

представљао би линеаран агрегат

$$(A_1u + B_1v + C_1) + \mu\,(A_2u + B_2v + C_2) = o \qquad (9)$$

тих еквација једну од тачака поменутог низа. То се веома лако може доказати.

Нека су u и v координате оне праве, која представља поменути низ тачака.

И једна и друга основна тачка низа лежи на тој правој (u, v); према томе ће полиноми $A_1u + B_1v + C_1$ и $A_2u + B_2v + C_2$, а с њима и поменути линеаран агрегат њихов, у исти мах бити $= o$, т. ј. тачка која је аналитички опредељена еквацијом (9) мора лежати на правој (u, v), а то смо и тврдили.

Геометријски значај параметра μ је такођер лако наћи. Еквација (9) може се написати у овом облику:

$$\left(\frac{A_1}{C_1}u + \frac{B_1}{C_1}v + 1\right) + \mu\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{A_2}{C_2}u + \frac{B_2}{C_2}v + 1\right) = o;$$

па како је

$$x_1 = \frac{A_1}{C_1}, \ y_1 = \frac{B_1}{C_1},$$

а

$$x_2 = \frac{A_2}{C_2}, \ y_2 = \frac{B_2}{C_2},$$

то је јасно да је еквација (9) еквивалентна са еквацијом

$$(ux_1 + vy_1 + 1) + \mu \frac{C_2}{C_1} (ux_2 + vy_2 + 1) = o.$$

Параметар $\mu \frac{C_2}{C_1} = \lambda$ ове еквације представља, као што знамо, напремицу одсечака на које општа тачка низа дели раздаљину двеју сталних тачака, т. ј. параметар

$$\mu = \frac{C_1}{C_2} \lambda$$

не представља непосредно поменуту напремицу — он је с њом само сразмеран:

$$\mu = k\lambda.$$

Ако бисмо полиноме датих еквација општег облика обележили симболима U_1, U_2, ... тако, да је у опште

$$U_i \equiv A_i u + B_i v + C_i ,$$

биле би еквације

$$U_1 = o, \ U_2 = o$$

еквације основних тачака низа, а

$$U_1 + \mu U_2 = o \qquad (10)$$

еквација неке опште тачке у низу $(U_1 U_2)$.

Према томе би између четири тачке

$$U_1 = o, U_1 = o, U_1 - \mu U_2 = o, U_1 + \mu U_2 = o,$$

последње две биле хармонијски коњуговане према првим двема основним тачкама низа.

На исти начин могли бисмо еквације нормалног облика обележити симболима

$$\alpha = o, \ \beta = o.$$

Према томе би низ $(\alpha\beta)$ био представљен еквацијом

$$\alpha + \lambda\beta = o.$$

Напомена. Поменуте две еквације $U_1 + \mu U_2 = o$ и $\alpha + \lambda\beta = o$ могли бисмо геометријски протумачити и на основу овог начела: *ако су* $\varphi\,(u, v) = o$ *и* $\psi\,(u, v) = o$ *еквације двеју кривих, онда ће све заједничке тангенте њихове бити уједно и тангенте криве*

$$\varphi\,(u, v) + \mu\psi\,(u, v) = o.$$

Полиноми $\varphi\,(u, v)$ и $\psi\,(u, v)$ не ће на име у исти мах бити равни нули; кад је $\varphi\,(u, v) = o$, $\psi\,(u, v)$ је у опште веће или мање од нуле и обратно, кад је $\psi\,(u, v) = o$, биће у опште $\varphi\,(u, v) \gtrless o$. Но има једна система тангената — а то су заједничке тангенте кривих φ и ψ — за које је *у исти мах* и $\varphi\,(u, v)$ и $\psi\,(u, v) = o$. За те тангенте (u, v) биће и полином $\varphi\,(u, v) + \mu\psi\,(u, v)$ раван нули, т. ј. заједничке тангенте кривих φ и ψ су уједно и тангенте криве $\varphi\,(u, v) + \mu\psi\,(u, v) = o$.

100. **Теорема.** *Кад три тачке леже на једној правој, онда полиноми њихових еквација морају бити везани међу собом једном линеарном, идентичном релацијом.*

Нека су

$$U = o,\ U' = o,\ U'' = o$$

еквације датих тачака. Еквација низа (UU') је

$$\mu U + \mu' U' = o.$$

У том низу треба да буде и тачка $U'' = o$, т. ј. кад општа тачка у низу при свом кретању падне на тачку $U'' = o$, онда ће се полином $\mu U + \mu' U'$ њезине еквације разликовати од полинома U'' само једним сталним чинитељем — μ'' тако да је, као што смо и тврдили,

$$\mu U + \mu' U' \equiv - \mu'' U''$$

или

$$\mu U + \mu' U' + \mu'' U'' \equiv o.$$

Та теорема може се и обрнути, т. ј. *кад међу полиномима еквација трију тачака постоји идентична еквација*

$$\mu U + \mu' U' + \mu'' U'' \equiv o, \qquad (11)$$

онда те три тачке леже на једној правој.

Еквација (11) је идентична; према томе је

$$\mu U + \mu' U' \equiv - \mu'' U''.$$

Но како ће полином $\mu U + \mu' U'$ бити $= o$ кад у њему сменимо u и v координатама праве која спаја тачку $U = o$ с тачком $U' = o$, то је јасно да ће за исто u и исто v и полином U'' бити $= o$, а то ће рећи, да ће и тачка U'' лежати на оној правој, на којој леже тачке U и U'.

Напомена. Напишимо еквације трију тачака у развијеном облику:

$$\left.\begin{array}{l} Au + Bv + C = o, \\ A'u + B'v + C' = o, \\ A''u + B''v + C'' = o. \end{array}\right\} . \qquad (12)$$

Те три тачке (упор. чл. 69.) могу бити колинеарне само ако је детерминанта системе њихових еквација $= o$, т. ј. ако је

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = o$$

И то је једна од погодаба под којима би три тачке (12) биле колинеарне.

101. *Ако између четири тачке* $p_1u + p_2v + p_3 = o$, $q_1u + q_2v + q_3 = o$, $r_1u + r_2v + r_3 = o$, $s_1u + s_2v + s_3 = o$ *по три не леже на једној правој, онда између полинома њихових еквација мора постојати једна идентична релација*

$$p\,(p_1u + p_2v + p_3) + q\,(q_1u + q_2v + q_3) + r\,(r_1u + r_2v + r_3)$$
$$+ s\,(s_1u + s_2v + s_3) \equiv o\,;$$

p, q, r, s *су у тој релацији сталне количине.*

Непознате количине p, q, r, s биле би (упор. чл. 70.) сразмерне са минорима проширене детерминанте

$$\left\|\begin{array}{cccc} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \end{array}\right\|,$$

а ти минори нису $= o$, јер између дате четири тачке по три не леже на једној правој; с тога ће коефицијенти $p : q : r : s$ имати одређене вредности, па ће према томе и поменута идентична релација постојати.

102. Узмимо сад некакав троугао ABC. Нека су

$$\alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o$$

еквације његових темена. Према томе биће

$$\beta + \gamma = o,\ \gamma + \alpha = o,\ \alpha + \beta = o$$

еквације тачака које полове (изнутра) стране троуглове, а

$$\beta - \gamma = o,\ \gamma - \alpha = o,\ \alpha - \beta = o$$

еквације тачака које леже на странама троугловим у бескрајности т. ј. еквације тачака, које споља полове стране троуглове.

Збир ових последњих је ово:

$$(\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) + (\alpha - \beta) \equiv o,$$

т. ј. *ма које три тачке у бескрајности леже на једној правој.*

Међу тим ми видимо да су идентично равне нули и ове еквације:

$$(\beta + \gamma) - (\gamma + \alpha) + (\alpha - \beta) \equiv o,$$

$$(\gamma + \alpha) - (\alpha + \beta) + (\beta - \gamma) \equiv o,$$

$$(\alpha + \beta) - (\beta + \gamma) + (\gamma - \alpha) \equiv o,$$

т. ј. *права која спаја средине двеју страна некого троугла иде паралелно са трећом страном његовом* — она на име сече трећу страну у бескрајности.

103. *Дат је троугао ABC и дата је права H. На тој правој леже три тачке L, M, N. Треба доказати да се праве AD, BE, CF (сл. 60.) секу у једној тачци.*

Нека су

$$\alpha = o, \beta = o, \gamma = o$$

еквације темена A, B, C, а

$$m\beta - n\gamma = o, \; n\gamma - l\alpha = o, \; l\alpha - m\beta = o \quad (13)$$

еквације тачака L, M, N. (Те три еквације могу бити еквације тачака L, M, N, јер је збир њихов $\equiv o$).

Најпре ћемо наћи еквације тачака D, E, F. Почећемо са тачком F.

Тачка F лежи с једне стране на правој која спаја тачке

$$\alpha = o, \; m\beta - n\gamma = o, \quad (14)$$

а с друге стране на правој која спаја тачке

$$\beta = o, \; n\gamma - l\alpha = o. \quad (14^*)$$

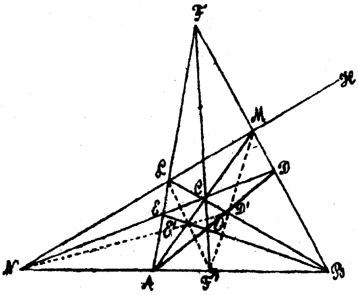
С тога ће еквација тачке F линеарно бити састављена и из еквација тачака (14) и из еквација тачака (14*). Еквација тачке F биће дакле овог облика:

$$F \cdot \cdot \cdot l\alpha + m\beta - n\gamma = o.$$

Сличним путем би се дало доказати да су еквације тачака D и E овог облика:

$$D \cdot \cdot \cdot m\beta + n\gamma - l\alpha = o,$$

$$E \cdot \cdot \cdot n\gamma + l\alpha - m\beta = o.$$



Сл. 60.

Праве CF, AD, BE што спајају тачке F, D, E са теменима троугла ABC, опредељене су еквацијама

$$CF \cdot \cdot \cdot \gamma = o, \quad l\alpha + m\beta - n\gamma = o,$$

$$AD \cdot \cdot \cdot \alpha = o, m\beta + n\gamma - l\alpha = o,$$

$$BE \cdot \cdot \cdot \beta = o, n\gamma + l\alpha - m\beta = o;$$

према томе ће линеарни агрегати

$$(l\alpha + m\beta - n\gamma) + 2n\gamma = o,$$

$$(m\beta + n\gamma - l\alpha) + 2l\alpha = o,$$

$$(n\gamma + l\alpha - m\beta) + 2m\beta = o$$

тих еквација представљати по једну специјалну тачку низова (*CF*), (*AD*), (*BE*). Свака између тих еквација је међу тим идентична са еквацијом

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o, \qquad (15)$$

т. ј. праве *CF*, *AD*, *BE* се заиста секу у једној тачци — у тачци *O*.

Кад се има у виду то како је постала тачка *O*, биће нам јасно уједно и то, како се може конструјисати нека тачка $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ кад је дат троугао *ABC*. Треба на име најпре потегнути праву *H*; та права спаја тачке (13). Та права ће сећи стране троуглове у тачкама *L*, *M*, *N*. Тачке *L*, *M*, *N* спојићемо са теменима *A*, *B*, *C*. У пресеку тих правих добићемо тачке *F* (*AL*, *BM*), *D* (*BM*, *CN*); *E* (*CN*, *AL*). Тачка $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ лежаће у пресеку правих *CF*, *AD*, *BE*.

Прим. 1. Доказати да се свака тачка $Au + Bv + C = o$ може представити еквацијом $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$.

Прим. 2. Доказати да су низови ($ACE'M$), ($BAF'N$), ($CBD'L$) хармонијски.

Дефин. Тачка *O* је *трилинеаран пол праве LMN*. (Види чл. 91.).

104. *Наћи еквацију центројида троугла ABC.*

У овом случају биле би еквације тачака D', E', F'

$$\beta + \gamma = o, \ \gamma + \alpha = o, \ \alpha + \beta = o,$$

па како су те тачке хармонијски коњуговане с тачкама *L*, *M*, *N*, а према паровима *BC*, *CA*, *AB*, биће еквације тачака *L*, *M*, *N* ово:

$$\beta - \gamma = o, \ \gamma - \alpha = o, \ \alpha - \beta = o.$$

Према томе је еквација центројида ово:

$$\alpha + \beta + \gamma = o.$$

Прим. Наћи еквацију орто-центра.

Одг. $$\alpha \, tgA + \beta \, tgB + \gamma \, tgC = o.$$

105. *Кад се праве што спајају темена троугла ABC са теменима троугла A'B'C' — два и два која једно другом одговарају — секу у једној тачци O, онда и тачке, у којима се секу две и две стране — оне које једна другој одговарају — леже на једној правој.*

Нека су

$$\alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o$$

еквације темена̑ A, B, C, а

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

еквација тачке O.

Тачка A' лежи на правој што спаја тачку O са тачком A; еквација њезина је дакле:

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma) + \mu\alpha = o$$

или

$$A' \cdot \cdot \cdot\ l'\alpha + m\beta + n\gamma = o.$$

Сличним путем би се дало доказати да су еквације тачака B' и C' овог облика:

$$B' \cdot \cdot \cdot\ l\alpha + m'\beta + n\gamma = o,$$

$$C' \cdot \cdot \cdot\ l\alpha + m\beta + n'\gamma = o.$$

Из последње три еквације добићемо, кад одузмемо другу од прве, трећу од друге и најпосле прву од треће, ово:

$$(l' - l)\,\alpha + (m - m')\,\beta = o,$$

$$(m' - m)\,\beta + (n - n')\,\gamma = o,$$

$$(n' - n)\,\gamma + (l - l')\,\alpha = o.$$

Збир ових еквација је идентично раван нули, то јест тачке, које оне представљају, леже на једној правој. Но како је прва међу овим еквацијама с једне стране линеарно састављена из еквација тачака A' и B', а с друге стране линеарно састављена из еквација тачака A и B, јасно је да та еквација аналитички представља тачку L (сл. 59.) у пресеку правих $A'B'$ и AB. Из сличних разлога су и осталим двема еквацијама представљене тачке M и N, а то ће рећи да су тачке L, M, N заиста колинеарне.

106. Кад се упореде резултати до којих смо помоћу тангенцијалних координата дошли са неким резултатима које смо добили помоћу паралелних координата, видеће се да између тих резултата има неке одређене узајамности. По тој узајамности види се да се геометријске теореме веома лако могу преносити из пунктуалне геометрије у тангенцијалну геометрију; треба просто у појединим теоремама место речи тачка, права, место, тачке у којима се секу праве и т. д. узимати речи права, тачка, обвојница, праве које спајају тачке и т. д. Такве две теореме зову се *дуалне* или *колеративне* теореме, а начело по коме се могу *удвајати* те теореме, *начело дуалитета* или *начело корелације.*[1])

Напомена. Као што поједине теореме имају своје корелативне теореме, тако и поједини проблемати, слике и т. д. имају своје корелативне проблемате, слике и т. д.

+ТРИЛИНЕАРНЕ КООРДИНАТЕ ТАЧКЕ

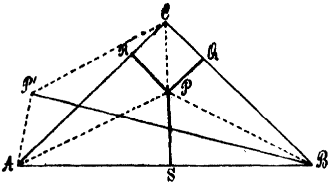
107. Потегнућемо у равни три праве BC, CA и AB. Оне ће поделити раван на седам различитих поља; једно између тих поља је и површина троугла ABC. Дужине страна тог троугла ћемо обележити са a, b, c : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, а угле са A, B, C.

Положај ма које тачке P биће потпуно одређен нормалама $PQ = \alpha$, $PR = \beta$, $PS = \gamma$, које су са те тачке

---

[1]) Начело корелације применио је у геометрији први **Poncelet** *(Annales de Mathématiques, VIII, 1817 – 1818)* као опште начело за удвајање геометријских истина и то на основу теорије полова и полара. Мало касније, али на другом основу, применили су га **Chasles**, **Gergonne** и **Möbius**. По **Chasles-у** *(Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la Science, la dualité et l' homographie)* се то начело и зове начело дуалитета.

P спуштене на дате три праве BC, CA, AB. Нормале α, β, γ називају се *нормалне* или (у ужем смислу) *трилинеарне* координате тачке P; троугао ABC назива се *основни троугао (triangle of reference)*, а праве BC, CA, AB називају се *основне стране* тог троугла.



Сл. 61.

Јасно је да нормале PQ, PR, PS морају на различитим странама основних страна имати различите знаке. Те знаке ћемо одредити по овом правилу: *свака координата α тачке P је позитивна кад тачка P и теме A леже на истој страни праве BC; у противном случају је координата α негативног знака.* По сличним правилима одређују се и знаци координата̂ β и γ те исте тачке P. Према томе се види, да би координате свију тачака, које леже баш на самој површини основног троугла, биле позитивног знака.

Кад се тачка P налази на страни BC, онда је управна $\alpha = o$; према томе је

$$\alpha = o$$

еквација стране BC у трилинеарној координатној системи. Сличним путем би се могло доказати, да су

$$\beta = o, \ \gamma = o$$

еквације осталих двеју основних правих CA и AB.

108. Спојивши тачку P (сл. 61.) са теменима A, B, C, добићемо три троугла PBC, PCA и PAB. Двојна површина оног првог троугла је $a\alpha$, а двојне површине осталих двају су $b\beta$ и $c\gamma$. Биће дакле

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\,(PBC + PCA + PAB).$$

Ако сад са A означимо површину основног троугла, биће

$$PBC + PCA + PAB = A,$$

т. ј. нормалне координате α, β, γ везане су међу собом релацијом

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2A. \qquad (1)$$

Добро је поменути да та линеарна релација постоји између координата свију тачака бескрајне равни; за тачку P' је на прилику (тачка P' лежи изван троугла ABC)

$$P'BC - P'CA + P'AB = A,$$

па како је у овај мах координата β те тачке негативна, биће опет

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2A.$$

Ако са R обележимо полупречник круга, који је описан око основног троугла, биће

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R,$$

а по томе је јасно, да се релација (1) може се написати и у овом облику:

$$\alpha sinA + \beta sinB + \gamma sinC = \frac{A}{R} = const. \qquad (2)$$

Из тих релација види се, да у трилинеарној системи и *није толико реч о апсолутним вредностима појединих координата, колико о напремицама у којима стоје две од њих према трећој*; кад знамо на име те напремице, онда лако можемо наћи и сваку координату за се.

Нека је н. пр.

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{z} \; (= \rho).$$

Количник ϱ тих напремица моћи ћемо на основу једног простог правила Опште Аритметике написати у овом облику:

$$\varrho = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{ax + by + cz},$$

па како је $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2A$, биће

$$\varrho = \frac{2A}{ax + by + cz};$$

с тога је

$$\alpha = \frac{2xA}{ax + by + cz},$$

$$\beta = \frac{2yA}{ax + by + cz},$$

$$\gamma = \frac{2zA}{ax + by + cz}.$$

Напомена. Помоћу образаца (1) и (2) моћи ћемо сваку еквацију преобразити у хомогену еквацију. Тако би се н. пр. нехомогена еквација

$$\alpha\beta^2 = k\gamma$$

помоћу обрасца (1) преобразила у ову хомогену:

$$\alpha\beta^2 = k\gamma\left(\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{2A}\right)^2$$

или

$$4A^2\alpha\beta^2 = k\gamma\,(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2.$$

109. У трилинеарној системи не морамо одредити положај тачци баш самим нормалама α, β, γ. Напротив, ми можемо ма у ком правцу према основним правима потегнути три праве са неке тачке P и на тим правима одмерити раздаљине α', β', γ' те тачке од основних правих; тим раздаљинама биће такођер потпуно

одређен положај тачци у равни, т. ј. и те раздаљине α', β', γ' можемо узети за трилинеарне координате једне тачке. Оне су везане веома простим релацијама са нормалама α, β, γ. Ако на име означимо са $(\alpha\alpha')$, $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$ угле, које граде праве α и α', β и β', γ и γ' једна с другом, добићемо ово:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{sin\,(\alpha\alpha')}, \quad \beta' = \frac{\beta}{sin\,(\beta\beta')}, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{sin\,(\gamma\gamma')},$$

па ако је

$$\frac{1}{sin\,(\alpha\alpha')} = \varkappa, \quad \frac{1}{sin\,(\beta\beta')} = \lambda, \quad \frac{1}{sin\,(\gamma\gamma')} = \mu,$$

биће даље

$$\alpha' = \varkappa\alpha, \quad \beta' = \lambda\beta, \quad \gamma' = \mu\gamma. \qquad (3)$$

Из ових релација је

$$\alpha = \frac{\alpha'}{\varkappa}, \quad \beta = \frac{\beta'}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{\gamma'}{\mu},$$

па како је $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2A$, биће и

$$\frac{a\alpha'}{\varkappa} + \frac{b\beta'}{\lambda} + \frac{c\gamma'}{\mu} = 2A. \qquad (4)$$

Ово је она релација, којом су везане међу собом координате α', β', γ', а и та нам релација казује да је тачка $(\alpha', \beta', \gamma')$ потпуно опредељена и кад се знају само напремице двеју координата према трећој.

Кад бисмо узели да је

$$\frac{\alpha'}{x} = \frac{\beta'}{y} = \frac{\gamma'}{z} \; (= \varrho),$$

било би

$$\varrho x = \alpha', \quad \varrho y = \beta', \quad \varrho z = \gamma',$$

а по тим еквацијама се види, да бисмо трилинеарне координате неке тачке могли обележити и бројевима

x, y, z *или управо њиховим напремицама* $x : y : z$[1]. Кад се имају у виду еквације (3), онда је јасно да је

$$\varrho x = \varkappa\alpha,\ \varrho y = \lambda\beta,\ \varrho z = \mu\gamma \qquad (5)$$

или

$$x : y : z = \varkappa\alpha : \lambda\beta : \mu\gamma.$$

Свака специјална система вредности параметара $\varkappa, \lambda, \mu$ опредељује по једну координатну систему; јасно је према томе да трилинеарних координатних система има бескрајно много.

Кад би еквације страна основног троугла биле овог облика:

$$a_1X + b_1Y + c_1 = o,$$

$$a_2X + b_2Y + c_2 = o,$$

$$a_3X + b_3Y + c_3 = o,$$

онда бисмо нормале α, β, γ, које су са неке тачке (X, Y) спуштене на основне стране, могли овако изразити:

$$\alpha = \frac{a_1X + b_1Y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

$$\beta = \frac{a_2X + b_2Y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$

$$\gamma = \frac{a_3X + b_3Y + c_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}.$$

Именитељи ових разломака су сталне количине, које зависе *само* од положаја основних правих; они дакле не стоје ни у каквој вези са положајем тачке (X, Y). Ако их обележимо са $\varkappa, \lambda, \mu$:

---

[1] Трилинеарне координате x, y, z неке тачке бележе се често једним писменом, које има уза се по једну казаљку. Тако би н. пр. x_1, x_2, x_3 или y_1, y_2, y_3 и т. д. биле координате неке тачке; тачка (x_1, x_2, x_3) била би тачка x, тачка (y_1, y_2, y_3) тачка y и т. д.

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \varkappa, \ \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \lambda, \ \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \mu,$$

биће

$$a_1X + b_1Y + c_1 = \varkappa\alpha,$$

$$a_2X + b_2Y + c_2 = \lambda\beta,$$

$$a_3X + b_3Y + c_3 = \mu\gamma,$$

а по тој системи еквација се јасно види, да бисмо могли узети за трилинеарне координате тачке (X, Y) — X и Y су паралелне координате те тачке — позитивне или негативне бројеве $a_1X + b_1Y + c_1$, $a_2X + b_2Y + c_2$, $a_3X + b_3Y + c_3$ или управо њихове напремице; у том случају било би

$$\left.\begin{aligned} \varrho x &= a_1X + b_1Y + c_1, \\ \varrho y &= a_2X + b_2Y + c_2, \\ \varrho z &= a_3X + b_3Y + c_3\,; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

по чинитељу ϱ се и у овај мах види то, да нас се не тичу апсолутне вредности трију координата, већ само њихове напремице.

Напомена. Еквације основних страна су

$$x = o, \ y = o, \ z = o,$$

а еквације темена су

$$y = o, \ \ z = o,$$

$$z = o, \ \ x = o,$$

$$x = o, \ \ y = o.$$

110. Из еквација (6) добивамо непосредно, једном простом супституцијом, трилинеарне координате $x : y : z$ неке тачке, чим знамо паралелне координате X и Y те

тачке. Но ми ћемо доказати да се помоћу тих еквација (6) могу, и обратно, изразити координате X, Y координатама $x : y : z$. Детерминанта системе тих еквација није $= o$, јер се основне стране не секу у једној тачци:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq o;$$

према томе је јасно да ћемо из системе еквација (6) добити само *једну* вредност за X, и *једну* вредност за Y, а на овај начин.

Означићемо са α_i, β_i, γ_i миноре елемената a_i, b_i, c_i у детерминанти D. Кад саберемо еквације (6), помножив их пре тога по реду којим једна за другом долазе, најпре са α_1, α_2, α_3, за тим са β_1, β_2, β_3 и најпосле са γ_1, γ_2, γ_3, добићемо ово:

$$\varrho\,(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z) = DX,$$

$$\varrho\,(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z) = DY,$$

$$\varrho\,(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z) = D,$$

а услед тога је

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z}, \\ Y &= \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

То би били они обрасци помоћу којих бисмо могли свакад наћи паралелне координате неке тачке чим знамо трилинеарне координате те исте тачке. По тим обрасцима види се, да се свака крива може представити једном еквацијом која постоји између трилинеарних координата.

Ако је на име еквација криве у паралелним координатама овог облика:

$$F(X, Y) = o,$$

биће она у поменутим трилинеарним координатама овог облика:

$$F\left(\frac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z}, \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z}\right) = o,$$

а ово је једна хомогена еквација између трију промењивих x, y, z:

$$f(x, y, z) = o.$$

Степен те еквације је исти онолики, колики је и степен дате еквације; према томе је јасно *да се свака алгебарска крива m-тог реда може представити аналитички једном хомогеном еквацијом m-тог степена између трилинеарних координата x, y, z.* Обратном трансформацијом (6) преобразила би се еквација $f(x, y, z) = o$ у еквацију $F(X, Y) = o$, т. ј. *свака хомогена еквација m-тог степена између три променљиве x, y, z представља у опште једну алгебарску криву m-тог реда.* Према томе је у трилинеарној координатној системи *свака права аналитички опредељена једном хомогеном линеарном еквацијом*

$$lx + my + nz = o. \qquad (8)$$

Кад би у некој специјалној трилинеарној системи координате биле нормале α, β, γ, онда бисмо еквацију праве могли написати и у овом облику:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o. \qquad (9)$$

Ми смо у осталом већ једном приликом (чл. 91.) поменули, да се свака права може представити еквацијом $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$. По спољашњем облику нема никакве разлике између ове последње еквације и оне горње еквације (9), а сва разлика лежи у томе, што у еквацији (9) α, β, γ представљају трилинеарне (и то нормалне) координате неке тачке, а у оној другој еквацији су α, β, γ само симболи неких линеарних функција промењивих X и Y, које нам и опет представљају нормале које су са ма које тачке праве спуштене на три праве $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$.

111. Међу правим линијама нарочито је важна *права у бескрајности.* Ми можемо, не улазећи тим у метафизичку природу тог питања, доказати тај *аналитички* факат, да *све тачке у бескрајности леже на једној правој.*

Узмимо на име две праве. Нека су еквације њихове ово:

$$lx + my + nz = o, \quad l'x + m'y + n'z = o.$$

Координате тачке (x, y, z) што лежи у пресеку правих добићемо кад решимо еквације тих правих. Биће дакле

$$x : y : z = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}$$

Ми знамо међу тим да је

$$\varrho x = \varkappa\alpha, \quad \varrho y = \lambda\beta, \quad \varrho z = \mu\gamma;$$

према томе је јасно, да су трилинеарне координате x, y, z везане међу собом овом основном, линеарном релацијом:

$$\frac{ax}{\varkappa} + \frac{by}{\lambda} + \frac{cz}{\mu} = \frac{2A}{\varrho}. \qquad (10)$$

Ову еквацију ћемо придружити датим двема еквацијама. Координате тачке у пресеку правих задовољиће, дакле, у исти мах ове три еквације:

$$lx + my + nz = o,$$

$$l'x + m'y + n'z = o,$$

$$\frac{ax}{\varkappa} + \frac{by}{\lambda} + \frac{cz}{\mu} = \frac{2A}{\varrho},$$

а из тих еквација, кад се детерминанта системе означи са D:

$$D = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ \frac{a}{\varkappa} & \frac{b}{\lambda} & \frac{c}{\mu} \end{vmatrix},$$

добива се ово:

$$\varrho x = \frac{2A}{D}(mn' - m'n), \varrho y = \frac{2A}{D}(nl' - n'l),$$

$$\varrho z = \frac{2A}{D}(lm' - l'm).$$

И у овај мах су дакле, опредељене само напремице у којима стоје координате тачке у пресеку датих правих. Кад се те еквације имају у виду, онда је могуће на веома лак начин наћи аналитичку погодбу, под којом ће дате праве бити паралелне, а с тим напоредо извести и еквацију праве у бескрајности. Кад су на име дате две праве паралелне, онда мора бар једна између координата тачке у пресеку бити бескрајна. Према томе *ће дате праве бити паралелне ако је* $D = o$. Кадгод је међу тим $D = o$, онда свакад у исти мах постоји оваква система линеарних хомогених еквација:

$$lx + my + nz = o,$$

$$l'x + m'y + n'z = o,$$

$$\frac{ax}{\varkappa} + \frac{by}{\lambda} + \frac{cz}{\mu} = o,$$

а по тој системи еквација се види, да ће тачка у пресеку првих двеју правих (та тачка лежи у овај мах у бескрајности, јер су те две праве паралелне) лежати уједно и на оној трећој правој

$$\frac{ax}{\varkappa} + \frac{by}{\lambda} + \frac{cz}{\mu} = o. \qquad (11)$$

Та права (11) сече дакле оне прве две праве у бескрајности, а у тачци која лежи у пресеку тих двеју правих.

Кад се има на уму то, да се ова линеарна еквација (11) не мења кад праве, што иду паралелно једна с другом, мењају свој положај, онда је јасно да ће заиста све тачке у бескрајности лежати на једној правој; еквација те праве је поменута еквација (11).

Ако $\frac{a}{\varkappa}$, $\frac{b}{\lambda}$, $\frac{c}{\mu}$ означимо са a', b', c', биће еквација праве у бескрајности овог облика:

$$a'x + b'y + c'z = o.$$

Према томе се види да линеаран агрегат

$$(lx + my + nz) + \mu\,(a'x + b'y + c'z) = o \qquad (12)$$

еквација

$$lx + my + nz = o, \; a'x + b'y + c'z = o,$$

представља све праве које иду паралелно са правом $lx + my + nz = o$. Све те праве пролазиће на име кроз тачку што лежи у пресеку правих

$$lx + my + nz = o, \; a'x + b'y + c'z = o;$$

та тачка лежи у бескрајности; према томе ће се све те праве сећи са правом $lx + my + nz = o$ у бескрајности, т. ј. оне ће бити с њом паралелне, а то смо и тврдили.

112. Између свију трилинеарних координата се најчешће употребљавају ове:

1-во. Хесеове хомогене координате. Оне стоје у овој вези са паралелним координатама X, Y неке тачке:

$$x : y : z = X : Y : 1 ,$$

т. ј. паралелне координате неке тачке опредељене су у тој системи напремицама $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$:

$$X = \frac{x}{z}, \ Y = \frac{y}{z} \cdot$$

Помоћу тих веома простих образаца преобразила би се н. пр. линеарна нехомогена еквација

$$AX + BY + C = o$$

у хомогену линеарну екваоију

$$Ax + By + Cz = o.$$

Ова трилинеарна система је *најпростија*, јер се она готово ничим не разликује од паралелне системе. Ми можемо на име доказати ово: *две основне стране те системе поклапају две осовине паралелне системе, а трећа основна страна њезина лежи у бескрајности.*

Узмимо троугао (1 2 3). Нека су

$$x = o, \ y = o, \ z = o$$

еквације његових страна.

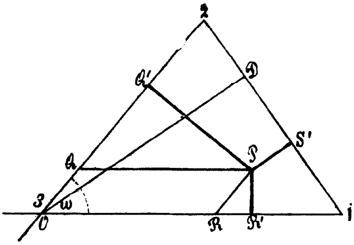
У том троуглу ћемо сматрати стране (23) и (31) за осовине Y и X неке паралелне, косе системе под углом ω. Координате неке тачке P биле би дакле у једној координатној системи ово:

$$X = OR, \ Y = PR,$$

а у другој ово:

$$x : y : z = \varkappa\alpha : \lambda\beta : \mu\gamma.$$

Потегнимо са почетка O паралелне системе нормалу $\delta = OD$ на трећу страну основног троугла. Ако параметри $\varkappa$, λ, μ имају ове специјалне вредности:



Сл. 62.

$$\varkappa = \frac{1}{sin\omega}, \quad \lambda = \frac{1}{sin\omega}, \quad \mu = \frac{1}{\delta},$$

биће

$$\varkappa\alpha = \frac{\alpha}{sin\omega}, \quad \lambda\beta = \frac{\beta}{sin\omega}, \quad \mu\gamma = \frac{\gamma}{\delta}$$

или

$$\varkappa\alpha = X, \quad \lambda\beta = Y, \quad \mu\gamma = \frac{\gamma}{\delta},$$

а с тим и

$$x : y : z = X : Y : \frac{\gamma}{\delta} \cdot$$

Кад се страна (21) основног троугла одмиче све даље и даље од почетка O али тако, да се при том кретању правац њезин не мења, тежиће количник $\frac{\gamma}{\delta}$ све више и више јединици као граници својој. Кад страна (21) буде у бескрајности, биће $lim \frac{\gamma}{\delta} = 1$, а у том случају је

$$x : y : z = X : Y : 1.$$

Заиста је дакле Хесеова хомогена координатна система таква трилинеарна система, у којој једна основна страна лежи у бескрајности. Но отуд се види уједно и то, да Декартова система није ништа друго него једна веома специјална трилинеарна система. —

У овој трилинеарној системи је еквација праве у бескрајности ово:

$$z = o.$$

Прим. 1. Наћи хомогене координате тачке $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$.

Како је

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} : 1 = 10 : 12 : 15 = 20 : 24 : 30 = \ldots,$$

биће хомогене координате тачке $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$ ово: 10, 12, 15 или 20, 24, 30 и т. д.; чак је јасно да су и $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, 1 хомогене координате дате тачке, јер је

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} : 1 = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} : 1.$$

Прим. 2. Хомогене координате неке тачке су 6, 4, 2; наћи паралелне координате те тачке.

Одг. 3, 2.

Прим. 3. Доказати да су 1, $\sqrt{-1}$, o и 1, $-\sqrt{-1}$, o хомогене координате имагинарних накружних тачака I и J.

2-го. Нормалне координате. — То су нормале α, β, γ или управо њихове напремице $\alpha : \beta : \gamma$.

У тој системи је

$$\varrho x = \alpha, \varrho y = \beta, \varrho z = \gamma \quad (\varkappa = \lambda = \mu = 1)$$

па је према томе еквација праве у бескрајности овог облика:

$$ax + by + cz = o$$

или

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = o.$$

Но како су стране a, b, c основног троугла сразмерне са синусима углова A, B, C, биће и

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C = o$$

или

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = o$$

еквације праве у бескрајности (чл. 92.).

Прим. 1. Наћи нормалне координате темена основног троугла.

За теме A је $\beta = o$, $\gamma = o$; с тога ће се основни образац (1) преобразити у овај: $a\alpha = 2A$. Координате темена A, B, C су дакле ово:

$$\frac{2A}{a},\ o,\ o;\ o,\ \frac{2A}{b},\ o;\ o,\ o,\ \frac{2A}{c}.$$

Прим. 2. Наћи нормалне координате тачке на средини основне стране BC.

Одг. $o, \frac{A}{b}, \frac{A}{c}$.

Прим. 3. Наћи координате подножја управне са A на BC.

Одг. $o, \frac{2A}{a} \cos C, \frac{2A}{a} \cos B.$

Прим. 4. Наћи нормалне координате средишта круга, који је уписан у основни троугао.

Ако су α, β, γ координате ин-центра, биће $\alpha = \beta = \gamma$, па је према томе и

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{1} = \frac{\gamma}{1} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} = \frac{2A}{a + b + c} = r,$$

т. ј. координате ин-центра су $r : r : r$ или $1 : 1 : 1$.

Прим. 5. Координате средишта (споља) уписаних кругова су

$$- r_a : r_a : r_a \text{ или } - 1 : 1 : 1 \text{ и т. д.}$$

Прим. 6. Наћи координате тачке у којој се секу висине.

Еквације висина CF и AD могле би се (чл. 89.) написати у овом облику:

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{\cos A}} - \frac{\beta}{\frac{1}{\cos B}} = o, \quad \frac{\beta}{\frac{1}{\cos B}} - \frac{\gamma}{\frac{1}{\cos C}} = o.$$

За све тачке прве висине је дакле

$$\alpha : \beta = \frac{1}{cosA} : \frac{1}{cosB},$$

а за све тачке друге висине је

$$\beta : \gamma = \frac{1}{cosB} : \frac{1}{cosC};$$

према томе је за ону тачку што лежи у пресеку висинâ:

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{cosA} : \frac{1}{cosB} : \frac{1}{cosC},$$

т. j. координате ортоцентра су $\frac{1}{cosA} : \frac{1}{cosB} : \frac{1}{cosC}$ или $secA : secB : secC$.

Прим. 7. Доказати да су нормалне координате

1-во, тежишта ово: $\frac{1}{sinA} : \frac{1}{sinB} : \frac{1}{sinC}$ или $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$;

2-го, циркум-центра ово: $cosA : cosB : cosC$.

Прим. 8. Наћи координате α, β, γ тачке која по напремици $m : n = \lambda$ дели дуж што спаја тачку $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ с тачком $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

Одг. Координате тачке (α, β, γ) су ово:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2}{1 + \lambda}, \quad \beta = \frac{\beta_1 + \lambda\beta_2}{1 + \lambda}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma\lambda_2}{1 + \lambda}$$

или

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha_1 + \lambda\alpha_2 : \beta_1 + \lambda\beta_2 : \gamma_1 + \lambda\gamma_2.$$

Напом. Координате тачке на средини између $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ су

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \quad \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$$

или

$$\alpha_1 + \alpha_2 : \beta_1 + \beta_2 : \gamma_1 + \gamma_2.$$

Прим. 9. Ако су у паралелној системи

$$Xcos\alpha + Ysin\alpha - p = o, \quad Xcos\beta + Ysin\beta - q = o,$$
$$Xcos\gamma + Ysin\gamma - r = o$$

еквације страна основног троугла, доказати —

1-во; да су трилинеарне координате неке тачке (X, Y) ово:

$$\alpha = p - X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\ \beta = q - X\cos\beta - Y\sin\beta,\ \gamma = r - X\cos\gamma - Y\sin\gamma$$

(претпоставља се да почетак паралелне системе лежи у основном троуглу);

2-го; да између углова α, β, γ и углова A, B, C постоје ове релације:

$$\beta - \alpha = 180^0 - C,\ \gamma - \beta = 180^0 - A,\ \alpha - \gamma = -(180^0 + B),$$

т. j. да je

$$\cos(\beta - \gamma) = -\cos A,\ \cos(\gamma - \alpha) = -\cos B,\ \cos(\alpha - \beta) = -\cos C,$$

а

$$\sin(\gamma - \beta) = \sin A,\ \sin(\alpha - \gamma) = \sin B,\ \sin(\beta - \alpha) = \sin C;$$

3-ће; да je

$$(l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma)^2 + (l\sin\alpha + m\sin\beta + n\sin\gamma)^2$$
$$= l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2lm\cos C.$$

3-ће. БАРИЦЕНТРИЧНЕ ИЛИ АРЕАЛНЕ КООРДИНАТЕ. — Спојићемо неку тачку P са теменима A, B, C основног троугла и добићемо тим путем три троугла BPC, CPA, APB. Напремице њихових површина према површини основног троугла називају се *барицентричне или ареалне координате* тачке P. Према томе ће барицентричне координате тачке P бити ово:

$$\alpha' = \frac{a\alpha}{2A},\ \beta' = \frac{b\beta}{2A},\ \gamma' = \frac{c\gamma}{2A}.$$

У овој системи je дакле

$$x : y : z = a\alpha : b\beta : c\gamma$$

или

$$\varrho x = a\alpha,\quad \varrho y = b\beta,\quad \varrho z = c\gamma,$$

па je с тога и

$$\varkappa : \lambda : \mu = a : b : c,$$

а по томе се види, да je у овој трилинеарној системи права у бескрајности представљена еквацијом

$$x + y + z = o.$$

Прим. 1. Наћи барицентричне координате темена̂ основног троугла.

Одг. $1, o, o; o, 1, o; o, o, 1.$

Прим. 2. Наћи барицентричне координате тачке на средини основне стране BC.

Одг. $o, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$

Прим. 3. Наћи барицентричне координате подножја управне са A на BC.

Одг. $o, \frac{b\cos C}{a}, \frac{c\cos B}{a}.$

Прим. 4. Наћи барицентричне координате ин-центра.

Одг. $\frac{a}{a+b+c} : \frac{b}{a+b+c} : \frac{c}{a+b+c}$ или $a : b : c$ или $\sin A : \sin B : \sin C.$

Прим. 5. Барицентричне координате —

1-во, ортоцентра су $\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C,$

2-го, тежишта су $1 : 1 : 1,$

3-ће, циркум-центра су $\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C.$

Прим. 6. Наћи барицентричне координате тачке која по напремици $m : n = \lambda$ дели дуж што спаја тачку (x_1, y_1, z_1) с тачком (x_2, y_2, z_2).

Одг. Координате тачке (x, y, z) су ово:

$$x : y : z = x_1 + \lambda x_2 : y_1 + \lambda y_2 : z_1 + \lambda z_2$$

или

$$\varrho x = x_1 + \lambda x_2, \varrho y = y_1 + \lambda y_2, \varrho z = z_1 + \lambda z_2.$$

Напомене. 1-во. Хомогеним координатама су одвојене паралелне координате од општих трилинеарних. Оне се нарочито често употребљавају кад хоћемо брзо да преобразимо неку нехомогену еквацију у хомогену или обрнуто, хомогену у нехомогену.

2-го. Кадгод од сад без икакве напомене будемо говорили о трилинеарним координатама, свакад треба у њима сматрати нормалне координате α, β, γ или њихове напремице $\alpha : \beta : \gamma = x : y : z$. Те нормалне координате бележићемо онако како нам је најподесније — или са α, β, γ, или са x, y, z, или са x_1, x_2, x_3 и т. д.

3-ће. Координате $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ називају се барицентричне с тога, што је тачка P тежиште (барицентар) масâ, које су сразмерне са површинама BPC, CPA, APB а леже у теменима A, B, C основног троугла ABC (прим. 12. стр. 21.).

113. *Наћи еквацију праве, која спаја дату тачку* P_1 (x_1, y_1, z_1) *с датом тачком* P_2 (x_2, y_2, z_2).

Јасно је да ма у којој трилинеарној системи детерминанта

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = o \qquad (13)$$

мора бити еквација поменуте праве. Ево доказа: 1-во, кад бисмо развили детерминанту добили бисмо једну линеарну еквацију $Lx + My + Nz = o$, а ова нам, као што знамо, мора представљати једну праву; 2-го, кад бисмо у детерминанти сменили x, y, z са x_1, y_1, z_1 или са x_2, y_2, z_2, били би елементи двају редова те детерминанте једнаки, па би с тога детерминанта била $\equiv o$, а то значи да тачке (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) леже на правој $Lx + My + Nz = o$, q. e. d.

Ми ћемо сад претпоставити да у еквацији (13) x, y, z обележавају најпре хомогене, за тим нормалне и најпосле барицентричне координате неке тачке.

1-во. *Нека су x, y, z хомогене координате.* Доказаћемо да се координате сваке тачке праве (13) могу изразити једним променљивим параметром. — Детерминанта (13) је $= o$; с тога ће с њом заједно морати постојати овакве три линеарне хомогене релације између елемената трију колона:

$$\left.\begin{aligned} Ax + Bx_1 + Cx_2 &= o, \\ Ay + By_1 + Cy_2 &= o, \\ Az + Bz_1 + Cz_2 &= o. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

У тим релацијама не може коефицијенат A бити $= o$; кад би на име било $A = o$, онда би, као што се види из последњих трију еквација, било

$$x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2,$$

а то ће рећи, да би се у том случају тачке (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) поклапале, па према томе у том случају тим двема тачкама и не би била опредељена једна права. Но кад A није $= o$, онда ћемо моћи разрешити еквације (14), сматрајући у њима x, y, z као непознате. Биће дакле

$$x = mx_2 + nx_1, \quad y = my_2 + ny_1, \quad z = mz_2 + nz_1; \qquad (15)$$

према томе смо већ изразили хомогене координате x, y, z тачака праве (13) променљивим параметрима m и n. Ако еквације (15) поделимо са n, па $m : n$ означимо са λ, добићемо ово:

$$\varrho x = x_1 + \lambda x_2, \quad \varrho y = y_1 + \lambda y_2, \quad \varrho z = z_1 + \lambda z_2. \qquad (16)$$

Пита се само још то, шта геометријски значи параметар λ? — По дефиницији хомогених координата јасно је, да су паралелне координате тачке P (x, y, z) ово: $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$. Ако би сад случајно било $z_1 = z_2 = 1$, онда би паралелне координате тачке P имале ову вредност:

$$\frac{x}{z} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{y}{z} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

а по тим обрасцима се види, да је параметром λ обележена напремица одсечака P_1P и PP_2:

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} \cdot$$

Кад је $z_1 \gtrless 1$, $z_2 \gtrless 1$, онда ћемо на овај начин сазнати шта λ геометријски значи. Поделићемо еквације (16) са z_1 и означићемо количник $\frac{\lambda z_2}{z_1}$ са λ':

$$\frac{\lambda z_2}{z_1} = \lambda' \quad \text{или} \ \lambda = \frac{z_1\lambda'}{z_2};$$

тим путем ћемо добити ово:

$$\varrho' x = \frac{x_1}{z_1} + \lambda' \frac{x_2}{z_2}, \ \varrho' y = \frac{y_1}{z_1} + \lambda' \frac{y_2}{z_2}, \ \varrho' z = 1 + \lambda'.$$

По дефиницији хомогених координата биће паралелне координате тачака P_1 (x_1, y_1, z_1) и P_2 $(x_2, y_2 \ z_2)$ ово:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{z_1}, \ \ \eta_1 = \frac{y_1}{z_1},$$

$$\xi_2 = \frac{x_2}{z_2}, \ \ \eta_2 = \frac{y_2}{z_2};$$

према томе би паралелне координате тачке P биле ово:

$$\frac{x}{z} = \frac{\xi_1 + \lambda'\xi_2}{1 + \lambda'}, \ \ \frac{y}{z} = \frac{\eta_1 + \lambda'\eta_2}{1 + \lambda'},$$

а по тим обрасцима се види да је у овај мах

$$\lambda' = \frac{P_1P}{PP_2} \cdot$$

Према томе је јасно, да је

$$\lambda = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{P_1P}{PP_2} = k \, \frac{P_1P}{PP_2},$$

т. ј. параметар λ у овај мах није раван напремици одсечака P_1P и PP_2, већ је само с њом сразмеран. — Координате двеју тачака, које су хармонијски коњуговане према тачкама (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), биле би ово:

$$x : y : z = x_1 + \lambda x_2 : y_1 + \lambda y_2 : z_1 + \lambda z_2,$$

$$x : y : z = x_1 - \lambda x_2 : y_1 - \lambda y_2 : z_1 - \lambda z_2.$$

Обрасци (16) су веома важни. Они ће нам често требати, а касније ћемо доказати, да је обрасцима њиховог облика у свима трилинеарним системама представљена општа тачка низа $(P_1\, P_2)$.

2-го. *Нека су x, y, z нормалне координате.* — У овој системи могли бисмо еквацију (13) овако написати:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = o. \qquad (17)$$

Развијен облик те детерминанте је дакле $L\alpha + M\beta + N\gamma = o$. Да видимо шта геометријски значе коефицијенти L, M, N. По детерминанти се види, да је

$$L = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1,\ M = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1,\ N = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Ми ћемо само за један часак узети основну страну AB за осовину x, а основну страну AC за осовину y неке паралелне системе и обележићемо паралелне координате тачке P_1 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ са ξ_1, η_1, а тачке P_2 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ са ξ_2, η_2. Двојна површина $2A_p$ троугла AP_1P_2 била би ово:

$$2A_p = (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\, sin A\ ;$$

но како је

$$\beta_1 = \xi_1 sin A, \qquad \beta_2 = \xi_2 sin A,$$

$$\gamma_1 = \eta_1 sin A, \qquad \gamma_2 = \eta_2 sin A,$$

биће

$$L = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\,sin^2A = 2A_p \cdot sinA.$$

Сличним путем би се дало доказати, да је

$$M = 2A_q \cdot sinB,\ N = 2A_r \cdot sinC;$$

са A_q и A_r смо означили површине троуглова BP_1P_2, CP_1P_2. Ти троугли имају заједничку основу са троуглом AP_1P_2, па ће с тога њихове површине A_p, A_q, A_r бити сразмерне са управнима p, q, r које су са теменâ A, B, C спуштене на праву P_1P_2. Еквација (17) може се дакле написати у овом облику:

$$(p \cdot sinA)\,\alpha + (q \cdot sinB)\,\beta + (r \cdot sinC)\,\gamma = o$$

или

$$pa\alpha + qb\beta + rc\gamma = o. \qquad (18)$$

3-ће. *Нека је система барицентрична.* — У тој системи је $x : y : z = a\alpha : b\beta : c\gamma$. Кад се има у виду еквација (18), јасно је да се у овој системи еквација (13) може написати у овом облику:

$$px + qy + rz = o; \qquad (19)$$

дакле, *кад је права дата у барицентричној координатној системи, онда су коефицијенти p, q, r који се у еквацији праве јављају, сразмерни са нормалама, које су на праву спуштене са теменâ A, B, C основног троугла.*

Прим. 1. Наћи еквацију праве што спаја ортоцентар са тежиштем.

Одг. $\alpha\, sin2A\, sin\,(B-C) + \beta\, sin2B\, sin\,(C-A)$
$+ \gamma\, sin2C\, sin\,(A-B) = o.$

Прим. 2. Наћи еквацију праве што спаја ин-центар са циркум-центром.

Одг. $\alpha\,(cosB—cosC) + \beta\,(cosC—cosA) + \gamma\,(cosA—cosB) = o.$

Прим. 3. Доказати да орто-центар, тежиште и циркум-центар леже на једној правој (—на Ајлеровој правој).

Координате орто-центра су $\frac{1}{cosA} : \frac{1}{cosB} : \frac{1}{cosC}$ или $cosBcosC : cosCcosA : cosAcosB$, а координате тежишта су $sinBsinC : sinCsinA : sinAsinB$. Према томе је

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ cosBcosC & cosCcosA & cosAcosB \\ sinBsinC & sinCsinA & sinAsinB \end{vmatrix} = o$$

еквација праве која спаја орто-центар с тежиштем.

Координате циркум-центра су ово: $cosA : cosB : cosC$, а горња детерминанта ће бити $\equiv o$, кад у њој сменимо α, β, γ са $cosA$, $cosB$, $cosC$, јер је

$$cosA = cos\,[180^0 - (B + C)] = sinBsinC - cosBcosC$$ и т. д.

Напом. На Ајлеровој правој лежаће и тачка $cos\,(B - C) : cos\,(C - A) : cos\,(A - B)$, јер је

$$cos\,(B - C) = cosBcosC + sinBsinC$$ и т. д.

Та тачка је хармонијски коњугована с циркум-центром, а према ортоцентру и тежишту.

Прим. 4. Доказати да је $cL - aN = 2A\,(\beta_1 - \beta_2)$. —

$$\begin{vmatrix} c & a \\ N & L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & o & -a \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} o & o & -a \\ a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a} \begin{vmatrix} o & o & -a \\ 2A & \beta_1 & \gamma_1 \\ 2A & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 2A\,(\beta_1 - \beta_2).$$

По аналогији је и $aM - bL = 2A\,(\gamma_1 - \gamma_2)$, $bN - cM = 2A\,(\alpha_1 - \alpha_2)$.

114. *Наћи дужину управне са* $(\alpha', \beta', \gamma')$ *на* $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$.

Трилинеарне координате α, β, γ ћемо помоћу образаца (прим. 9. стр. 224.) $\alpha = p - xcos\alpha - ysin\alpha$ и т. д. преобразити у паралелне. Еквација праве $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ биће у паралелној системи овог облика:

$$(l cos\alpha + m cos\beta + n cos\gamma)\, x + (l sin\alpha + m sin\beta + n sin\gamma)\, y$$
$$- (lp + mq + n\gamma) = o$$

или

$$\Sigma l\, (x cos\alpha + y sin\alpha - p) = o. \qquad (20)$$

Нека су x', y' паралелне координате тачке $(\alpha', \beta', \gamma')$. Управна са тачке (x', y') на праву (20) јесте ово:

$$\frac{\Sigma l\, (x' cos\alpha + y' sin\alpha - p)}{\sqrt{(\Sigma l cos\alpha)^2 + (\Sigma l sin\alpha)^2}},$$

па како је по апсолутној вредности

$$\Sigma l\, (x' cos\alpha + y' sin\alpha - p) = l\alpha' + m\beta' + n\gamma',$$

а

$$(\Sigma l cos\alpha)^2 + (\Sigma l sin\alpha)^2 = l^2 + m^2 + n^2$$
$$- 2mn cosA - 2nl cosB - 2lm cosC,$$

биће дужина управне ово:

$$\frac{l\alpha' + m\beta' + n\gamma'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn cosA - 2nl cosB - 2lm cosC}}. \qquad (21)$$

Квадратан корен оног израза што стоји у именитељу могли бисмо обележити са K:

$$K = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn cosA - 2nl cosB - 2lm cosC};$$

према томе би управна са тачке $(\alpha', \beta', \gamma')$ на праву $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ била ово:

$$l\alpha' + m\beta' + n\gamma'/K. \qquad (22)$$

Овај образац биће много простији, ако пређемо са нормалних координата α, β, γ на барицентричне координате x, y, z. У том случају би еквација праве била овог облика:

$$px + qy + rz = o;$$

полином $l\alpha' + m\beta' + n\gamma'$ био би дакле сразмеран са полиномом $px' + qy' + rz'$. Према томе је управна са тачке (x', y', z') на праву $px + qy + rz = o$ ово:

$$k(px' + qy' + rz')/K.$$

Како K не зависи од положаја тачке $(\alpha', \beta', \gamma')$, биће $\frac{k}{K} = \lambda = const.$, па ће с тога управна бити

$$\lambda(px' + qy' + rz').$$

Дужина управне са темена A $(1, o, o)$ је дакле λp; па како је та управна управо $= p$, биће $\lambda = 1$. Према томе је дужина управне са тачке (x', y', z') на праву $px + qy + rz = o$ ово:

$$px' + qy' + rz'. \tag{23}$$

115. *Наћи угао φ између правих*

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o, \quad l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = o.$$

У паралелној координатној системи биле би еквације тих двеју правих овог облика:

$$Ax + By + C = o, \quad A'x + B'y + C' = o,$$

а тангента угла φ је

$$tg\varphi = \frac{AB' - A'B}{AA' + BB'}.$$

Бројитељ овог разломка је детерминанта

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

или

$$D = \begin{vmatrix} l cos\alpha + m cos\beta + n cos\gamma & l sin\alpha + m sin\beta + n sin\gamma \\ l' cos\alpha + m' cos\beta + n' cos\gamma & l' sin\alpha + m' sin\beta + n' sin\gamma \end{vmatrix}.$$

Та детерминанта је производ ових двеју детерминаната:

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \\ sin\alpha & sin\beta & sin\gamma \end{vmatrix},$$

па је с тога

$$D = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} cos\beta & cos\gamma \\ sin\beta & sin\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} cos\gamma & cos\alpha \\ sin\gamma & sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} cos\alpha & cos\beta \\ sin\alpha & sin\beta \end{vmatrix}$$

или

$$D = (mn' - m'n)\ sinA + (nl' - n'l)\ sinB + (lm' - l'm)\ sinC$$

или

$$D = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ sinA & sinB & sinC \end{vmatrix}.$$

Именитељ $AA' + BB'$ оног разломка ћемо означити са E:

$$E = (\Sigma l cos\alpha)\ (\Sigma l' cos\alpha) + (\Sigma l sin\alpha)\ (\Sigma l' sin\alpha) = ll' + mm' + nn'$$
$$-(mn' + m'n)\ cosA - (nl' + n'l)\ cosB - (lm' + l'm)\ cosC.$$

Према свему томе је

$$tg\varphi = \frac{D}{E}\cdot \qquad (24)$$

Напомене. 1-во. Праве $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$, $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = o$ су паралелне, ако је

$$D = (mn' - m'n)\ sinA + \cdot \cdot \cdot = o.$$

2-го. Праве $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$, $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = o$ секу се под правим углом, ако је

$$E = ll' + mm' + nn' - \cdot \cdot \cdot = o.$$

Прим. 1. Права $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ је управна на основној страни γ, ако је $n = m\cos A + l\cos B$.

Прим. 2. Тангента угла, који зетвара права $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ са страном β, је

$$tg\varphi = \frac{l\sin C - n\sin A}{m - n\cos A - l\cos C}.$$

Прим. 3. Ако еквација $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = o$ представља две праве што се секу под правим углом, доказати да је

$$a + b + c - 2f\cos A - 2g\cos B - 2h\cos C = o.$$

Прим. 4. Ако та иста еквација представља две напоредније, доказати да је

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \sin A \\ h & b & f & \sin B \\ g & f & c & \sin C \\ \sin A & \sin B & \sin C & o \end{vmatrix} = o.$$

Дефин. Права DE сече страну AC троугла ABC у тачци D, а страну BC у тачци E; DE биће антипаралелна са основом AB, ако је угао D троугла CDE = углу B троугла ABC — права DE ће другим речима бити антипаралелна са основом AB, ако су троугли CDE и CBA обрнуто слични.

Прим. 5. Ако је права $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ антипаралелна са страном $\gamma = o$, доказати да је

$$l\sin A - m\sin B - n\sin(A - B) = o.$$

По дефиницији је $tgB = tgD$,

па како је (прим. 2.)

$$tgD = \frac{l\sin C - n\sin A}{m - n\cos A - l\cos C},$$

биће

$$\sin B\,(m - n\cos A - l\cos C) = \cos B\,(l\sin C - n\sin A)$$

или

$$l \sin (B + C) - m \sin B - n \sin (A - B) = o$$

или, како је $\sin (B + C) = \sin A$,

$$l \sin A - m \sin B - n \sin (A - B) = o.$$

116. *Наћи раздаљину* r *између датих двеју тачака* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

Узмимо само за један часак стране AB и AC за осовине x и y паралелне координатне системе и означимо са ξ_1, η_1 и ξ_2, η_2 паралелне координате тачака $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. У тој координатној системи биће

$$r^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + 2 (\xi_1 - \xi_2) (\eta_1 - \eta_2) \cos A ;$$

међу тим је $\xi_1 = \frac{\beta_1}{\sin A}$, $\eta_1 = \frac{\gamma_1}{\sin A}$ и т. д., па је с тога

$$r^2 \sin^2 A = (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + 2 (\beta_1 - \beta_2) (\gamma_1 - \gamma_2) \cos A.$$

Но ми смо доказали (прим. 4. стр. 232.) да је

$$cL - aN = 2\mathit{\Delta} (\beta_1 - \beta_2), \quad aM - bL = 2\mathit{\Delta} (\gamma_1 - \gamma_2)$$

или

$$\beta_1 - \beta_2 = (cL - aN)/2\mathit{\Delta}, \quad \gamma_1 - \gamma_2 = (aM - bL)/2\mathit{\Delta};$$

према томе је

$$4\mathit{\Delta}^2 r^2 \sin^2 A = (cL - aN)^2 + (aM - bL)^2$$
$$+ 2 (cL - aN) (aM - bL) \cos A$$

$$= a^2 (L^2 + M^2 + N^2 - 2MN\cos A - 2NL\cos B - 2LM\cos C),$$

а одатле је

$$r = \frac{R}{\mathit{\Delta}} \sqrt{L^2 + M^2 + N^2 - 2MN\cos A - 2NL\cos B - 2LM\cos C}. \qquad (25)$$

117. *Наћи површину троугла* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.

Узећемо стране α и β за осовине паралелне координатне системе и означићемо координате теменâ са ξ_1, η_1 и т. д.

Према томе ће бити $\xi_1 sinC = \alpha_1$, $\eta_1 sinC = \beta_1$ и т. д. Површина A' троугла биће

$$A' = \frac{sinC}{2} \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

или, кад се у детерминанти смени ξ_1 са $\frac{\alpha_1}{sinC}$, η_1 са $\frac{\beta_1}{sinC}$ и т. д.,

$$A' = \frac{1}{2sinC} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{R}{2AsinC} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \frac{A}{R} & \frac{A}{R} & \frac{A}{R} \end{vmatrix}.$$

Међу тим је (чл. 108.)

$$\frac{A}{R} = \alpha_1 sinA + \beta_1 sinB + \gamma_1 sinC = \alpha_2 sinA + \beta_2 sinB + \gamma_2 sinC = \ldots;$$

ако сад помножимо елементе прве врсте са $sinA$, а елементе друге врсте са $sinB$, па их одузмемо од елемената треће врсте, добићемо ово:

$$A' = \frac{R}{2AsinC} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 sinC & \gamma_2 sinC & \gamma_3 sinC \end{vmatrix} = \frac{R}{2A} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

или

$$A' = \frac{R\,(\alpha_1\beta_2\gamma_3)}{2A}. \qquad (26)$$

Кад α_1, β_1, γ_1 и т. д. не обележавају баш саме нормале, већ само њихове напремице, онда бисмо морали сменити α_1 са $\varrho_1\alpha_1$, β_1 са $\varrho_1\beta_1$, γ_1 са $\varrho_1\gamma_1$ и т. д. па би према томе у том случају површина A' била опредељена овим обрасцем:

$$A' = \frac{R\varrho_1\varrho_2\varrho_3\,(\alpha_1\beta_2\gamma_3)}{2A}, \qquad (27)$$

а факторе ϱ бисмо (чл. 108.) одређивали помоћу обрасца

$$\varrho = \frac{2A}{ax + by + cz}.$$

Прим. 1. Наћи погодбу под којом су тачке $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ колинеарне.

Одг. Погодба је ово: $(\alpha_1, \beta_2, \gamma_3) = o$.

Прим. 2. Ако су x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 барицентричне координате темена̂ једног троугла, доказати да је његова површина ово:

$$A \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Прим. 3. Еквације страна̂ неког троугла су $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$, $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = o$, $l''\alpha + m''\beta + n''\gamma = o$. Наћи површину тог троугла. —

$$A' = Aabc \frac{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ a & b & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \\ a & b & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l'' & m'' & n'' \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}}.$$

Прим. 4. Стране неког троугла су $b\beta + c\gamma = o$, $c\gamma + a\alpha = o$, $a\alpha + b\beta = o$. Наћи површину тог троугла.

Одг. $A' = 4A$.

118. *Наћи релацију која постоји између управних p, q, r са теменâ A, B, C на неку праву.*

Еквација те праве биће (чл. 113.) ово:

$$pa\alpha + qb\beta + rc\gamma = o.$$

По обрасцу (21) је дужина управне са $A \left(\frac{2A}{a}, o, o\right)$ на праву $pa\alpha + qb\beta + rc\gamma = o$ ово:

$$\frac{2pA}{\sqrt{a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 - 2bcqr\cos A - 2carp\cos B - 2abpq\cos C}};$$

међу тим је та управна управо $= p$; према томе је

$$p = \frac{2pA}{\sqrt{a^2p^2 + b^2q^2 + \cdot \cdot \cdot}}$$

или

$$a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 - 2bcqr\cos A - 2carp\cos B - 2abpq\cos C = 4A^2. \quad (28)$$

То би већ била она релација коју смо тражили. — Ову релацију многи бележе овако:

$$\{ap, bq, cr\} = 2A.$$

Разнолики примери. Теореме и проблеме.

1. Наћи координате оне тачке, у којој се секу три праве $l\alpha = m\beta = n\gamma$.

Еквације тих правих су

$$l\alpha - m\beta = o, \; m\beta - n\gamma = o, \; n\gamma - l\alpha = o,$$

па су према томе координате тачке у пресеку ово: $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$.

2. Доказати да су праве $l\alpha - m\beta = o$ и $m\alpha - l\beta = o$ једнако нагнуте према правој што полови угао $(\alpha\beta)$ (— према бисектору угла $(\alpha\beta)$).

3. Ако се три праве што полазе са темена A, B, C неког троугла секу у једној тачци P, сећи ће се у једној тачци P' и оне три

праве, које полазе са темена A, B, C, а граде исте онакве угле са бисекторима углова A, B, C као и праве AP, BP, CP. — Тачке P и P' називају се *исогонално коњуговане тачке* троугла ABC.

Ако су еквације првих трију правих

$$l\alpha - m\beta = o, \; m\beta - n\gamma = o, \; n\gamma - l\alpha = o,$$

биће еквације других трију ово:

$$m\alpha - l\beta = o, \; n\beta - m\gamma = o, \; l\gamma - n\alpha = o$$

или

$$\frac{\alpha}{l} - \frac{\beta}{m} = o, \; \frac{\beta}{m} - \frac{\gamma}{n} = o, \; \frac{\gamma}{n} - \frac{\alpha}{l} = o,$$

а те три праве се секу у једној тачци.

4. α, β, γ и α', β', γ' су трилинеарне координате двеју исогонално коњугованих тачака; доказати да је

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

5. Наћи координате тачке која је исогонално коњугована с тежиштем троугла ABC.

Одг. $sinA : sinB : sinC$.

Примедба. — Енглески писци зову ту тачку *symmedian point*.

6. Доказати да је ортоцентар исогонално коњугована тачка циркум-центра.

7. Претпоставићемо да се праве $\frac{b}{c}\,\alpha = \frac{c}{a}\,\beta = \frac{a}{b}\,\gamma$ секу у тачци K и означићемо са K' исогонално коњуговану тачку. Доказати да су угли KAB, KBC, KCA, $K'BA$, $K'CB$, $K'AC$ једнаки.

Угао KAB ћемо означити са ω; према томе је $CAK = A - \omega$. Еквација праве AK је $\frac{c}{a}\,\beta = \frac{a}{b}\,\gamma$, па како је $\beta : \gamma = sin\,(A - \omega) : sin\omega$, биће

$$\frac{c}{a}\,sin\,(A - \omega) = \frac{a}{b}\,sin\omega$$

или

$$cot\omega = cotA + \frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{a}\,sinA \; ;$$

међу тим је

$$\frac{a}{b} = \frac{sinA}{sinB} = \frac{sin\,(B + C)}{sinB}, \;\; \frac{c}{a} = \frac{sinC}{sinA},$$

па је према томе и

$$cot\omega = cotA + \frac{sin\,(B+C)}{sinBsinC} = cotA + cotB + cotC.$$

Сличним путем би се могло доказати да и котагенте углова *KBC*, *KCA* и т. д. имају исту вредност.

Тачке K и K' називају се *Brocard-ове* тачке, а угао ω *Brocard-ов* угао троугла *ABC*.

8. Праве $lx - my = o$ и $mx - ly = o$ секу страну *AB* основног троугла у двема тачкама, које су једнако удаљене од средине стране *AB* (претпоставља се да су x, y, z барицентричне координате неке тачке).

Јер ако права $lx - my = o$ сече страну *AB* у тачци D, биће $BDC \cdot l = CDA \cdot m$; према томе је $BD : DA = m : l$, а одатле је $(l + m)\, DA = l \cdot BA$. Сличним путем би се дало доказати, да ће бити $(l + m)\, BD' = l \cdot BA$, ако тачку у пресеку праве $mx - ly = o$ са страном *AB* означимо са D'. Кад се упореде та два резултата, онда се види да је $BD' = DA$, а то ће рећи, да су тачке D и D' једнако удаљене од средине стране *AB*. — Тачке D и D' називају се *исотомски коњуговане тачке*.

9. x, y, z и x', y', z' су барицентричне координате двеју исотомски коњугованих тачака; доказати да је

$$xx' = yy' = zz'.$$

10. Доказати да је у барицентричним координатама

$$ycotB - zcotC = o$$

еквација управне са A на *BC*.

11. Наћи трилинеарне координате имагинарних накружних тачака I и J у бескрајности.

Тачке I и J леже, као што знамо, на изотропним правима $Y - iX = o$ и $Y + iX = o$ у бескрајности. По тим двема еквацијама се види да количник Y/X има сталну вредност i или $-i$ за све тачке изотропних правих; тај количник имаће дакле ту вредност и кад X и Y нарасту преко сваке границе, т. ј. биће и $lim\,\frac{Y}{X} = i$ или $= -i$. Како између трилинеарних координата α, β, γ и паралелних координата X и Y неке тачке постоје ове релације: $\alpha = p - Xcos\alpha - Ysin\alpha$ и т. д., биће

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{Xcos\alpha + Ysin\alpha - p}{Xcos\gamma + Ysin\gamma - r}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{Xcos\beta + Ysin\beta - q}{Xcos\gamma + Ysin\gamma - r}.$$

Ми ћемо сад поделити и бројитељ и именитељ количника с десне стране ових еквација са X и претпоставићемо да су X и Y паралелне координате имагинарне накружне тачке I. У том специјалном случају преобразиће се последњи обрасци у ове:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{cos\alpha+isin\alpha}{cos\gamma+isin\gamma},\quad \frac{\beta}{\gamma}=\frac{cos\beta+isin\beta}{cos\gamma+isin\gamma}. \qquad (a)$$

Како је по Ајлеровом обрасцу у опште $e^{ix}=cosx+isinx$, биће

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\gamma}},\quad \frac{\beta}{\gamma}=\frac{e^{i\beta}}{e^{i\gamma}},$$

па су према томе трилинеарне координате тачке I ово: $e^{i\alpha}:e^{i\beta}:e^{i\gamma}$.

Сличним путем би се дало доказати да су $e^{-i\alpha}:e^{-i\beta}:e^{-i\gamma}$ трилинеарне координате тачке J.

Обрасце под (a) можемо и овако написати:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=cos\,(\alpha-\gamma)+i\,sin\,(\alpha-\gamma),\quad \frac{\beta}{\gamma}=cos\,(\beta-\gamma)+i\,sin\,(\beta-\gamma),$$

па како је $cos\,(\alpha-\gamma)=-cosB$, $sin\,(\alpha-\gamma)=sinB$ и т. д., биће трилинеарне координате тачке I ово:

$$I\cdot\cdot\quad \frac{\alpha}{\gamma}=-cosB+isinB,\quad \frac{\beta}{\gamma}=-cosA-isinA. \qquad (b)$$

Трилинеарне координате тачке J биле би ово:

$$J\cdot\cdot\quad \frac{\alpha}{\gamma}=-cosB-isinB,\quad \frac{\beta}{\gamma}=-cosA+isinA. \qquad (c)$$

12. Наћи еквацију изотропних правих које се гранају са тачке $(\alpha', \beta', \gamma')$.

Еквација праве што спаја тачку $(\alpha', \beta', \gamma')$ с тачком I је ово:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ e^{i\alpha} & e^{i\beta} & e^{i\gamma} \end{vmatrix}=o$$

или $Xe^{i\alpha}+Ye^{i\beta}+Ze^{i\gamma}=o$, где је $X=\beta\gamma'-\beta'\gamma$ и т. д. Еквација оне друге изотропне праве која се грана према тачци J била би овог облика: $Xe^{-i\alpha}+Ye^{-i\beta}+Ze^{-i\gamma}=o$. Производ еквација изотропних правих је дакле

$$X^2+Y^2+Z^2-2YZcosA-2ZXcosB-2XYcosC=o.$$

13. Праве $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ и $\frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} = o$ секу стране AB, BC, CA основног троугла у тачкама L, M, N и L', M', N'; доказати да су праве AM и AM', BN и BN', CL и CL' исогонално коњуговане.

14. Наћи еквацију праве, која пролази кроз тачку $(\alpha', \beta', \gamma')$, а иде паралелно са правом $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$.

Еквација те праве је

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & m\sin C - n\sin B \\ \beta & \beta' & n\sin A - l\sin C \\ \gamma & \gamma' & l\sin B - m\sin A \end{vmatrix} = o. \qquad (a)$$

Ту еквацију ћемо добити чим елиминирамо l', m', n' из еквација $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = o$, $l'\alpha' + m'\beta' + n'\gamma' = o$ и $l'\,(m\sin C - n\sin B) + m'\,(n\sin A - l\sin C) + n'\,(l\sin B - m\sin A) = o$, (ово је погодба под којом права $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = o$ иде паралелно са правом $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$).

Проблема би се могла и друкчије решити. — Свака права, која иде паралелно са правом $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$, може се представити оваквом еквацијом (чл. 111.):

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma) + \mu\,(a\alpha + b\beta + c\gamma) = o,$$

па би према томе еквација праве која пролази кроз $(\alpha', \beta', \gamma')$, а иде паралелно са правом $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ била ово:

$$\frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l\alpha' + m\beta' + n\gamma'} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a\alpha' + b\beta' + c\gamma'}$$

или

$$\frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l\alpha' + m\beta' + n\gamma'} = \frac{\alpha\sin A + \beta\sin B + \gamma\sin C}{\alpha'\sin A + \beta'\sin B + \gamma'\sin C}.$$

15. Наћи еквацију праве која пролази кроз теме A и иде паралелно са страном BC основног троугла.

Одг. $b\beta + c\gamma = o$.

16. Наћи еквацију управне са $(\alpha', \beta', \gamma')$ на $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$.

Одг.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & l - m\cos C - n\cos B \\ \beta & \beta' & m - n\cos A - l\cos C \\ \gamma & \gamma' & n - l\cos B - m\cos A \end{vmatrix} = o.$$

17. Доказати да је

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2-\alpha_3 & \beta_2-\beta_3 & \gamma_2-\gamma_3 \end{vmatrix} = o$$

еквација праве која пролази кроз тачку $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, а иде паралелно с правом што спаја тачку $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ с тачком $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. —

При доказу треба имати у виду еквацију (a) у прим. 14. и резултате у прим. 4. стр. 232.

18. Доказати да су еквације управних на средини страна основног троугла ово:

$$\beta sinB - \gamma sinC + \alpha sin\,(B - C) = o,$$

$$\gamma sinC - \alpha sinA + \beta sin\,(C - A) = o,$$

$$\alpha sinA - \beta sinB + \gamma sin\,(A - B) = o.$$

19. Доказати да је Ајлерова права управна на правој $\alpha cosA + \beta cosB + \gamma cosC = o$.

20. Наћи синусе углова, које права $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ затвара са странама α, β, γ.

Одг. $sin\varphi_\alpha = \dfrac{nsinB - msinC}{K}$, $sin\varphi_\beta = \dfrac{lsinC - nsinA}{K}$,

$$sin\varphi_\gamma = \frac{msinA - lsinB}{K},$$

где је (чл. 114.)

$$K = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mncosA - 2nlcosB - 2lmcosC}.$$

21. Место средишта средњих раздаљина оних тачака, у којима праве што иду паралелно са $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ секу стране основног троугла, јесте права.

Одг. Еквација места је ово:

$$\frac{\alpha}{nsinB - msinC} + \frac{\beta}{lsinC - nsinA} + \frac{\gamma}{msinA - lsinB} = o.$$

22. Тачке D, E, F су подножја висина основног троугла ABC; доказати

1-во; да су трилинеарне координате тежишта троугла DEF ово: $\sin^2 A \cos(B - C) : \sin^2 B \cos(C - A) : \sin^2 C \cos(A - B)$.

2-го; да су трилинеарне координате ортоцентра троугла DEF ово: $\cos 2A \cos(B - C) : \cos 2B \cos(C - A) : \cos 2C \cos(A - B)$.

23. λ, μ, ν су синуси углова, које права $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ затвара са странама α, β, γ; доказати

1-во; да је $\mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cos A = \sin^2 A$ и т. д.

2-го; да је $\lambda^2 \sin 2A + \mu^2 \sin 2B + \nu^2 \sin 2C = 2\sin A \sin B \sin C$.

24. Нека су α_1, β_1, γ_1, и α_2, β_2, γ_2 координате двеју тачака; доказати да је квадрат њихове раздаљине ово:

$$r^2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \sin 2A + (\beta_1 - \beta_2)^2 \sin 2B + (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \sin 2C}{2\sin A \sin B \sin C}.$$

25. Доказати да се релација $\{ap, bq, cr\} = 2\boldsymbol{A}$ може написати и у овом облику:

$$a^2 (p - q)(p - r) + b^2 (q - r)(q - p) + c^2 (r - p)(r - q) = 4\boldsymbol{A}^2.$$

26. Доказати, да је и у нормалним и у барицентричним координатама трилинеарна полара пола $(\alpha', \beta', \gamma')$ ово:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} + \frac{\gamma}{\gamma'} = o.$$

27. $l\alpha = m\beta = n\gamma$ су три праве које се секу у једној тачци; доказати, да је

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

трилинеарна полара тачке у пресеку (упор. чл. 91.).

+ ТРИПУНКТУАЛНЕ ТАНГЕНЦИЈАЛНЕ КООРДИНАТЕ. ТРАНСФОРМАЦИЈА КООРДИНАТНИХ СИСТЕМА.

119. Узећемо у равни три тачке A, B, C. Положај које му драго праве L биће потпуно определен раздаљинама p, q, r те праве од појединих тачака A, B, C. Те раздаљине се називају *трипунктуалне тангенцијалне координате (three-point line co-ordinates)* или *хомогене координате праве* L; тачке A, B, C називају се *основне тачке*, а троугао ABC назива се *основни троугао*.

Између тих нормала p, q, r постоји, као што смо мало час доказали (чл. 118.), једна релација овог облика:

$$a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 - 2bcqr\cos A - 2carp\cos B - 2abpq\cos C = 4A^2 \quad (1)$$

или

$$\{ ap, bq, cr \} = 2A, \quad (2)$$

а по тој релацији се види, да и у овој системи није толико реч о апсолутним вредностима појединих координата, колико о напремицама у којима стоје две од њих према трећој.

120. Свака права има своју позитивну и своју негативну страну; на различитим странама те праве имаће и координате p, q, r различите знаке, а знаке њихове ћемо одредити овим правилом: *координата p је позитивна кад теме A лежи на позитивној страни праве; у противном случају је координата p негативног знака.* Слична правила постоје и за знаке координата q и r те исте праве.

Јасно је да положај праве не морамо одредити баш самим нормалама p, q, r. Напротив, ми можемо ма у ком правцу са основних тачака према правој повући три праве и на тим правима одмерити раздаљине p', q', r' праве од основних тачака; тим дужима p', q', r' биће такођер потпуно определен положај праве у равни, т. ј. и те дужи p', q', r' можемо узети за трипунктуалне координате неке праве. Оне су везане веома простим релацијама са управнима p, q, r. Ако на име означимо са (pp'), (qq'), (rr') угле које граде p и p', q и q', r и r', добићемо ово:

$$p' = \frac{p}{\sin(pp')}, \quad q' = \frac{q}{\sin(qq')}, \quad r' = \frac{r}{\sin(rr')},$$

па је с тога

$$p' = \varkappa' p, \; q' = \lambda' q, \; r' = \mu' r. \quad (3)$$

Из ових релација је

$$p = \frac{p'}{\varkappa'}, \quad q = \frac{q'}{\lambda'}, \quad r = \frac{r'}{\mu'},$$

па како је $\{ ap, bq, cr \} = 2A$, биће и

$$\left\{ \frac{ap'}{\varkappa'}, \quad \frac{bq'}{\lambda'}, \quad \frac{cr'}{\mu'} \right\} = 2A. \qquad (4)$$

Ово је она релација, којом су везане координате p', q', r', а и та нам релација казује, да је права (p', q', r') потпуно опредељена и кад се знају само напремице двеју координата према трећој. Кад бисмо узели да је

$$\frac{p'}{u} = \frac{q'}{v} = \frac{r'}{w} \; (= \sigma),$$

било би

$$\sigma u = p', \; \sigma v = q', \; \sigma w = r',$$

а по тим еквацијама се види, *да бисмо трипунктуалне координате неке праве могли обележити и бројевима* u, v, w *или управо њиховим напремицама* $u : v : w$.[1] Кад се имају у виду еквације (3), онда је јасно, да је

$$\sigma u = \varkappa' p, \; \sigma v = \lambda' q, \; \sigma w = \mu' r \qquad (5)$$

или

$$u : v : w = \varkappa' p : \lambda' q : \mu' r.$$

Кад би еквације основних тачака биле овог облика:

$$\alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 = o,$$

$$\alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2 = o,$$

$$\alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3 = o,$$

---

[1] Координате u, v, w неке праве бележе се често једним писменом, које има уза се по једну казаљку. Тако би н. пр. u_1, u_2, u_3 или v_1, v_2, v_3 и т. д. биле координате неке праве; права (u_1, u_2, u_3) била би права u, а права (v_1, v_2, v_3) права v и т. д.

онда бисмо раздаљине p, q, r неке праве (U, V) од основних тачака могли овако изразити:

$$p = \frac{\alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1}{\gamma_1 \sqrt{U^2 + V^2}},$$

$$q = \frac{\alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2}{\gamma_2 \sqrt{U^2 + V^2}},$$

$$r = \frac{\alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3}{\gamma_3 \sqrt{U^2 + V^2}}.$$

Количине γ_1, γ_2, γ_3 које се јављају у именитељима ових разломака зависе само од положаја основних тачака; оне не стоје ни у каквој вези са положајем праве (U, V). Ако их обележимо са $\varkappa'$, λ', μ':

$$\gamma_1 = \varkappa', \ \gamma_2 = \lambda', \ \gamma_3 = \mu',$$

биће

$$\frac{\alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \varkappa' p,$$

$$\frac{\alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \lambda' q,$$

$$\frac{\alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \mu' r.$$

Кад се има на уму то, да се и у овај мах води рачун о напремицама координата, а не о њиховим апсолутним вредностима, онда је јасно, да бисмо и позитивне или негативне бројеве $\alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1$, $\alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2$, $\alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3$ могли сматрати као трипунктуалне координате праве (U, V) тако, да је

$$\left.\begin{aligned}\sigma u &= \alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1,\\ \sigma v &= \alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2,\\ \sigma w &= \alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3,\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(у овај мах се $\sqrt{U^2 + V^2}$ налази у чинитељу σ).

Напомена. По еквацијама (6) се види да су

$$u = o, \quad v = o, \quad w = o$$

еквације основних тачака. Еквације правих које спајају основне тачке су

$$v = o, \quad w = o,$$

$$w = o, \quad u = o,$$

$$u = o, \quad v = o.$$

121. Из еквација (6) добивамо непосредно, једном простом супституцијом, трипунктуалне координате $u : v : w$ неке праве, чим знамо обичне (нехомогене) координате U и V те праве; но ми ћемо доказати да се помоћу еквација (6) могу, и обратно, изразити координате U, V координатама $u : v : w$. Детерминанта системе тих еквација није $= o$, јер основне три тачке нису колинеарне, па ћемо услед тога из системе еквација (6) добити по *једну* вредност за U, и по *једну* вредност за V. Пре него што бисмо разрешили ту систему еквација, претпоставићемо да су основне тачке A, B, C наше трипунктуалне системе уједно и темена основног троугла ABC неке трилинеарне координатне системе. Нека су у тој трилинеарној системи

$$x = o, \quad y = o, \quad z = o$$

еквације основних страна; у паралелној системи биле би еквације тих страна н. пр. ово:

$$BC \cdot\cdot\cdot a_1X + b_1Y + c_1 = o,$$

$$CA \cdot\cdot\cdot a_2X + b_2Y + c_2 = o,$$

$$AB \cdot\cdot\cdot a_3X + b_3Y + c_3 = o.$$

Јасно је да су овом системом еквација опредељене и основне тачке *A*, *B*, *C* наше трипунктуалне системе; те тачке леже на име у пресеку правих *CA* и *AB*, *AB* и *BC*, *BC* и *CA*. — Те исте тачке су међу тим опредељене и овим еквацијама:

$$A \cdot\cdot\cdot \alpha_1U + \beta_1V + \gamma_1 = o,$$

$$B \cdot\cdot\cdot \alpha_2U + \beta_2V + \gamma_2 = o,$$

$$C \cdot\cdot\cdot \alpha_3U + \beta_3V + \gamma_3 = o,$$

а тим еквацијама су уједно опредељене и стране *BC*, *CA*, *AB* основног троугла *ABC*; две последње системе еквација разликују се дакле само обликом, спољашњом формом, јер су тим двема системама — кад посредно, кад непосредно — опредељене и стране и темена основног троугла *ABC*.

По еквацији тачке *A* види се, да су паралелне координате *X*, *Y* те тачке ово:

$$X = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}, \quad Y = \frac{\beta_1}{\gamma_1};$$

та иста тачка је с друге стране опредељена овим двема еквацијама:

$$a_2X + b_2Y + c_2 = o,$$

$$a_3X + b_3Y + c_3 = o;$$

координате те тачке могу се дакле написати и у овом облику:

$$X = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}, \qquad Y = \frac{c_2a_3 - c_3a_2}{a_2b_3 - a_3b_2};$$

услед тога је

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}, \quad \frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{c_2a_3 - c_3a_2}{a_2b_3 - a_3b_2},$$

а с тим и

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = b_2c_3 - b_3c_2 : c_2a_3 - c_3a_2 : a_2b_3 - a_3b_2.$$

Међу тим су агрегати $b_2c_3 - b_3c_2$ и т. д. минори елемената a_1, b_1, c_1 детерминанте

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

т. ј. коефицијенти α_1, β_1, γ_1, који се јављају у еквацији тачке A, сразмерни су са минорима елемената прве врсте детерминанте D.

Сличним путем би се дало доказати, да су и коефицијенти α_2, β_2, γ_2 и α_3, β_3, γ_3 сразмерни с минорима елемената a_2, b_2, c_2 и a_3, b_3, c_3. — Ми бисмо могли чак претпоставити, да су α_1, β_1, γ_1 и т. д. једнаки с минорима елемената a_1, b_1, c_1 и т. д.; ако н. пр. коефицијенти α_1, β_1, γ_1 нису једнаки с оним минорима који им одговарају, а ми ћемо помножити еквацију $\alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 = o$ оним чинитељем којим се те две врсте количина разликују, па ћемо их тим путем изједначити и т. д.

Имајући све то на уму вратићемо се нашој првобитној проблеми и разрешићемо систему еквација (6). — Сабраћемо еквације (6), помножив их пре тога по реду којим једна за другом долазе, најпре са a_1, a_2, a_3, за тим са b_1, b_2, b_3 и најпосле са c_1, c_2, c_3 и добићемо тим путем ово:

$$\sigma(a_1u + a_2v + a_3w) = DU,$$

$$\sigma(b_1u + b_2v + b_3w) = DV,$$

$$\sigma(c_1u + c_2v + c_3w) = D;$$

услед тога је

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{a_1u + a_2v + a_3w}{c_1u + c_2v + c_3w}, \\ V &= \frac{b_1u + b_2v + b_3w}{c_1u + c_2v + c_3w}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

То би били обрасци помоћу којих бисмо могли наћи координате U и V неке праве, кад знамо координате u, v, w те исте праве. По тим обрасцима види се да се свака крива може представити једном хомогеном еквацијом која постоји између координата u, v, w.

Ако је на име нехомогена еквација криве овог облика:

$$\Phi(U, V) = o,$$

биће она у трипунктуалној, хомогеној координатној системи праве овог облика:

$$\Phi\left(\frac{a_1u + a_2v + a_3w}{c_1u + c_2v + c_3w}, \quad \frac{b_1u + b_2v + b_3w}{c_1u + c_2v + c_3w}\right) = o,$$

а ово је једна хомогена еквација

$$\varphi(u, v, w) = o,$$

т. ј. *свака крива линија n-те врсте може се представити једном хомогеном еквацијом n-тог степена између промењљивих координата u, v, w.* Јасно је да и обратно, *свака хомогена еквација n-тог степена између координата u, v, w представља у опште једну алгебарску криву n-те врсте.* Према томе је линеарна хомогена еквација

$$lu + mv + nw = o \qquad (8)$$

еквација тачке.

Из релација које постоје између трилинеарних координата x, y, z неке тачке (чл. 109. (6)) и паралелних координата те тачке с једне, и између хомогених координата u, v, w неке праве (чл. 120. (6)) и нехомогених координата U и V те исте праве с друге стране, види се да ће и у поменутим двема хомогеним системама линеарна еквација

$$ux + vy + wz = o$$

сачувати свој дуалан карактер. Ако на име помножимо еквације (6) у чл. 120. (оним редом којим једна за другом долазе) еквацијама (6) које њима одговарају у трилинеарној системи (чл. 109.) добићемо ово:

$$\begin{aligned}\rho\sigma(ux + vy + wz) = {} & (a_1X + b_1Y + c_1)(\alpha_1U \\ & + \beta_1V + \gamma_1) + (a_2X + b_2Y + c_2)(\alpha_2U + \beta_2V \\ & + \gamma_2) + (a_3X + b_3Y + c_3)(\alpha_3U + \beta_3V + \gamma_3)\end{aligned}$$

или

$$\rho\sigma(ux + vy + wz) = D(UX + VY + 1),$$

јер је

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = D, \ldots a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = o, \ldots;$$

кад је дакле

$$UX + VY + 1 = o,$$

мора бити и

$$ux + vy + wz = o \qquad (9)$$

т. ј. кад тачка (x, y, z) лежи на правој (u, v, w), мора и права (u, v, w) пролазити кроз тачку (x, y, z), q. e. d.

Прим. 1. Еквације основног троугла су

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o, \quad x\cos\beta + y\sin\beta - q = o, \quad x\cos\gamma + y\sin\gamma - r = o;$$

U и V су нехомогене, а u, v, w хомогене координате неке праве. Преобразити еквацију $U^2 + V^2 = o$ из нехомогене у хомогену систему.

У овај мах је

$$U = -\frac{u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma}{pu + qv + rw}, \quad V = -\frac{u\sin\alpha + v\sin\beta + w\sin\gamma}{pu + qv + rw},$$

па ће се с тога еквација $U^2 + V^2 = o$ преобразити у ову:

$$(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)^2 + (u\sin\alpha + v\sin\beta + w\sin\gamma)^2 = o,$$

а та се еквација може (види прим. 9. ad 3. р. 224.) и овако написати:

$$u^2 + v^2 + w^2 - 2vw\cos A - 2wu\cos B - 2uv\cos C = o.$$

Прим. 2. Наћи еквацију фокојида̂ I и J.

Трилинеарне нормалне координате фокојида̂ су (прим. 11. стр. 242.) ово:

$$I\left(e^{i\alpha},\ e^{i\beta},\ e^{i\gamma}\right),\quad J\left(e^{-i\alpha},\ e^{-i\beta},\ e^{-i\gamma}\right).$$

Еквације тих тачака су дакле ово:

$$I \cdot \cdot \cdot\ ue^{i\alpha} + ve^{i\beta} + we^{i\gamma} = o,$$

$$J \cdot \cdot \cdot\ ue^{-i\alpha} + ve^{-i\beta} + we^{-i\gamma} = o.$$

Обе те тачке моћи ћемо дакле представити овом еквацијом:

$$\left(ue^{i\alpha} + ve^{i\beta} + we^{i\gamma}\right)\left(ue^{-i\alpha} + ve^{-i\beta} + we^{-i\gamma}\right) = o$$

или

$$(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)^2 + (u\sin\alpha + v\sin\beta + w\sin\gamma)^2 = o$$

или

$$u^2 + v^2 + w^2 - 2vw\cos A - 2wu\cos B - 2uv\cos C = o.$$

Напом. Види прим. 1.

122. Између хомогених координата праве нарочито су важне Хесеове хомогене координате. Оне стоје у овој вези са координатама U, V неке праве:

$$u : v : w = U : V : 1,$$

т. ј. координате U, V неке праве опредељене су у овој системи напремицама $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$:

$$U = \frac{u}{w}, \quad V = \frac{v}{w}.$$

Помоћу тих веома простих образаца преобразила би се н. пр. линеарна нехомогена еквација

$$AU + BV + C = o$$

у хомогену екваsuccију

$$Au + Bv + Cw = o;$$

у овој екваcији су коефицијенти A, B, C хомогене, Хесеове координате оне тачке коју аналитички представља последња екваcија.

Прим. Наћи хомогене координате праве у бескрајности.

У Хесеовој системи написаћемо екваcију неке праве у овом облику:

$$ux + vy + wz = o.$$

То би била екваcија праве (u, v, w). Ако та права лежи бескрајности, онда је јасно да ће координате те праве бити ово: $u = o$, $v = o$, $w \gtreqless o$. Екваcија праве у бескрајности је, као што знамо, у Хесеовој координатној системи ово: $z = o$. Да би се дакле екваcија $ux + vy + wz = o$ могла идентификовати са екваcијом $z = o$, потребно је а и довољно је, да постоје ове погодбе:

$$u = o, \; v = o, \; w \gtreqless o.$$

123. *Наћи екваcију тачке која лежи у пресеку правих* (u_1, v_1, w_1) *и* (u_2, v_2, w_2).

Јасно је да ма у којој хомогеној системи детерминанта

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = o$$

мора бити екваcија поменуте тачке. Ми ћемо претпоставити да је система Хесеова хомогена система. Координате ма ког зрака у прамену биле би (упор. с чл. 113.) ово:

$$\sigma u = u_1 + \lambda u_2, \ \sigma v = v_1 + \lambda v_2, \ \sigma w = w_1 + \lambda w_2. \qquad (10)$$

Параметар λ који се у овим обрасцима јавља је у опште сразмеран са напремицом синуса оних углова, на које зрак (u, v, w) дели угао између зракова (u_1, v_1, w_1) и (u_2, v_2, w_2).

Координате двају зракова, који су хармонијски коњуговани према сталним зрацима, биле би ово:

$$u : v : w = u_1 + \lambda u_2 : v_1 + \lambda v_2 : w_1 + \lambda w_2,$$

$$u : v : w = u_1 - \lambda u_2 : v_1 - \lambda v_2 : w_1 - \lambda w_2.$$

124. Узмимо сад три системе: једну ортогоналну паралелну и две опште трилинеарне. Еквације основних страна — у ортогоналној системи осовина̂ — су ово:

$$X = o, \quad Y = o,$$

$$x = o, \quad y = o, \quad z = o,$$

$$x' = o, \quad y' = o, \quad z' = o.$$

Између координата x', y', z' неке тачке и координата X, Y те исте тачке постоје ове релације (чл. 109.):

$$\left.\begin{aligned} \varrho' x' &= a_1' X + b_1' Y + c_1', \\ \varrho' y' &= a_2' X + b_2' Y + c_2', \\ \varrho' z' &= a_3' X + b_3' Y + c_3'. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

С друге стране знамо опет да је (чл. 110.)

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z}, \\ Y &= \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Сменивши X и Y овим вредностима у еквацијама (11), добићемо ово:

$$\left.\begin{aligned} \varrho' x' &= l_1 x + m_1 y + n_1 z, \\ \varrho' y' &= l_2 x + m_2 y + n_2 z, \\ \varrho' z' &= l_3 x + m_3 y + n_3 z. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Може се доказати да детерминанта

$$M = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

системе линеарних еквација (13) није равна нули, а ево и доказа. Коефицијенти l, m, n који се јављају у еквацијама (13) имају ове вредности:

$$l_1 = a_1'\alpha_1 + b_1'\beta_1 + c_1'\gamma_1, \quad m_1 = a_1'\alpha_2 + b_1'\beta_2 + c_1'\gamma_2,$$
$$n_1 = a_1'\alpha_3 + b_1'\beta_3 + c_1'\gamma_3,$$

. . . .

По томе се види да је детерминанта $M =$ производу ових двеју детерминаната:

$$(a_1' b_2' c_3') = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}$$

и

$$(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Ми знамо међу тим да су α_1, β_1, γ_1 и т. д. минори елемената a_1, b_1, c_1 и т. д. детерминанте

$$(a_1 b_2 c_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

с тога ће бити

$$(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3) = (a_1 b_2 c_3)^2,$$

па је према томе и

$$M = (a_1' b_2' c_3') \, (a_1 b_2 c_3)^2.$$

Основне стране оних двеју трилинеарних система о којима је реч не секу се међу тим у једној тачци; то значи да детерминанте $(a_1' b_2' c_3')$ и $(a_1 b_2 c_3)$ — ни обе заједно, ни посебице — не могу бити $= o$, а кад оне не могу бити $= o$, не може бити $= o$ ни њихов производ M.

Кад се то има у виду, онда је јасно да ће у системи еквација (13) свакој системи количина x', y', z' одговарати *само једна* система количина x, y, z; обратно ће свакој системи количина x, y, z одговарати само једна система количина x', y', z'. Помоћу еквација (13) моћи ћемо дакле наћи трилинеарне координате x', y', z' неке тачке кад знамо трилинеарне координате x, y, z те исте тачке и обратно, а то значи да ћемо помоћу еквацијâ (13) моћи трансформовати једну трилинеарну систему у другу.

Но осим тога види се из тих еквација још и то, како су везане координате u', v', w' нове системе са координатама u, v, w старе системе и обратно. Кад се на име пређе из једне системе у другу, мораће се општа линеарна еквација

$$ux + vy + wz = o \qquad (14)$$

преобразити у еквацију

$$u'x' + v'y' + w'z' = o, \qquad (15)$$

и обратно, ова последња у ону прву. Међу тим ће се еквација (15) »линеарном супституцијом« (13) преобразити у ову:

$$(l_1u'+l_2v'+l_3w')\,x+(m_1u'+m_2v'+m_3w')\,y$$
$$+(n_1u'+n_2v'+n_3w')\,z=o,$$

а кад се тај резултат поменуте супституције упореди са еквацијом (14), онда се види да је

$$\left.\begin{aligned} \sigma u &= l_1u' + l_2v' + l_3w', \\ \sigma v &= m_1u' + m_2v' + m_3w', \\ \sigma w &= n_1u' + n_2v' + n_3w'. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Ако у детерминанти M линеарне супституције (13) обележимо миноре елемената l_i, m_i, n_i са λ_i, μ_i, ν_i, добићемо, кад будемо решили системе (13) и (16), ово:

$$\left.\begin{aligned} \rho x &= \lambda_1x'+\lambda_2y'+\lambda_3z', \\ \rho y &= \mu_1x'+\mu_2y'+\mu_3z', \\ \rho z &= \nu_1x'+\nu_2y'+\nu_3z'. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

У новој системи $(x'y'z')$ су

$$x'=o, \quad y'=o, \quad z'=o$$

еквације основних страна.

$$\left.\begin{aligned} \sigma'u' &= \lambda_1u+\mu_1v+\nu_1w, \\ \sigma'v' &= \lambda_2u+\mu_2v+\nu_2w, \\ \sigma'w' &= \lambda_3u+\mu_3v+\nu_3w. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

У новој системи $(u'v'w')$ су

$$u'=o, \quad v'=o, \quad w'=o$$

еквације основних темена.

Ако се сад узму напоредо детерминанте линеарних супституција (13) и (18), видеће се на први поглед да су те две детерминанте реципрочне — елементи који се налазе у врстама (колонама) друге детерминанте су минори елемената који се налазе у врстама (колонама) прве детерминанте. Услед тога ће супституција (18) бити инверсна супституција супституције (13). *Кад су дакле координате једне тачке трансформоване линеарном супституцијом* (13), *биће координате праве трансформоване инверсном супституцијом* (18). Како је у трилинеарној системи (xyz) нека крива представљена еквацијом $f\ (x,\ y,\ z) = o$, а у хомогеној системи (uvw) еквацијом $\varphi\ (u,\ v,\ w) = o$, то је уједно јасно и то, да ће облици f и φ бити *контраваријанте*[1]).

Ако сад не изгубимо из вида еквације (13), биће нам јасно, да су у старој системи (xyz) еквације основних страна нове системе ово:

$$l_1x + m_1y + n_1z = o,$$

$$l_2x + m_2y + n_2z = o,$$

$$l_3x + m_3y + n_3z = o,$$

Ако сад не изгубимо из вида еквације (18), биће нам јасно, да су у старој системи (uvw) еквације основних темена нове системе ово:

$$\lambda_1u + \mu_1v + \nu_1w = o,$$

$$\lambda_2u + \mu_2v + \nu_2w = o,$$

$$\lambda_3u + \mu_3v + \nu_3w = o,$$

а по тим еквацијама се види, да су у *старој* координатној системи координате

нових страна ово:

$$\begin{array}{lll} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3. \end{array}$$

нових темена ово:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2 \\ \lambda_3, & \mu_3, & \nu_3. \end{array}$$

Сличним путем би се могло доказати, да су у *новој* координатној системи координате

---

[1]) Специјална функција $ux + vy + wz$ преобразиће се поменутим супституцијама у обликом сасвим *сличну* функцију $u'x' + v'y' + w'z'$ (ово се разликује од оне само тим, што је помножена неким сталним чинитељем). Та функција пада дакле у групу оних функција, које је **Силвестер** назвао *конкомитантама*; по **Salmon-у** могли бисмо те функције звати *диварцијантама*. Види у Салмоновој *Вишој Алгебри* чл. 129.—133.

старих страна ово:

$$\begin{matrix} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3. \end{matrix}$$

старих темена ово:

$$\begin{matrix} l_1, & l_2, & l_3 \\ m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3. \end{matrix}$$

125. Ми знамо да детерминанта

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = o \quad (19)$$

ма у којој општој системи представља праву, која спаја тачку (x_1, y_1, z_1) с тачком (x_2, y_2, z_2).

На основу те еквације доказаћемо, да се координате x, y, z неке тачке што лежи на правој (19) могу овако изразити:

$$\rho x = x_1 + \lambda x_2,$$

$$\rho y = y_1 + \lambda y_2,$$

$$\rho z = z_1 + \lambda z_2.$$

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = o \quad (20)$$

ма у којој општој системи представља тачку, која лежи у пресеку праве (u_1, v_1, w_1) с правом (u_2, v_2, w_2).

На основу те еквације доказаћемо, да се координате u, v, w неке праве која пролази кроз тачку (20) могу овако изразити:

$$\sigma u = u_1 + \lambda u_2,$$

$$\sigma v = v_1 + \lambda v_2,$$

$$\sigma w = w_1 + \lambda w_2.$$

Ако су на име у Хесеовој хомогеној трилинеарној системи x_1', y'_1, z_1' и x_2', y_2', z_2' координате датих тачака P_1 и P_2, а x', y', z' координате неке тачке P која лежи на низу P_1P_2, биће (чл. 113. (16))

$$\rho' x' = x_1' + \lambda x_2', \quad \rho' y' = y_1' + \lambda y_2', \quad \rho' z' = z_1' + \lambda z_2'. \qquad (\alpha)$$

Пређимо сад са те специјалне трилинеарне системе $(x'y'z')$ на нашу општу трилинеарну систему (xyz). Према обрасцима (17) чл. 124., биће

$$\varrho x = \lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z', \qquad (\beta)$$

па је с тога и

$$\varrho x_1 = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 y_1' + \lambda_3 z_1',$$

а

$$\varrho x_2 = \lambda_1 x_2' + \lambda_2 y_2' + \lambda_3 z_2'.$$

Ако сад саберемо последње две еквације, помножив пре тога другу неким параметром λ, добићемо ово:

$$\varrho (x_1 + \lambda x_2) = \lambda_1 (x_1' + \lambda x_2') + \lambda_2 (y_1' + \lambda y_2') \\ + \lambda_3 (z_1' + \lambda z_2').$$

На десној страни ове еквације сменићемо сад $x_1' + \lambda x_2'$ и т. д. са $\varrho' x'$ и т. д.; тим путем преобразиће се та еквација у ову:

$$\varrho (x_1 + \lambda x_2) = \varrho' (\lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z'),$$

а ту еквацију моћи ћемо, имајући у виду релацију (β), овако написати:

$$\varrho' x = x_1 + \lambda x_2.$$

У овом обрасцу можемо још, ако хоћемо, место ϱ' написати ϱ — ни ϱ ни ϱ' немају неку одређену вредност, а оба та фактора казују нам само то, да је у трилинеарним системама реч само о напремицама координата — па ћемо онда добити да је

$$\varrho x = x_1 + \lambda x_2,$$

а то смо и тврдили. Но поред тога јасно је уједно и то, да параметар λ геометријски значи ма у којој трилинеарној системи оно исто што и пре, т. ј. или је

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2},$$

или је

$$\lambda = k\frac{P_1P}{PP_2}. —$$

Сличним путем бисмо могли доказати и да је

$$\varrho y = y_1 + \lambda y_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, \ \sigma u = u_1 + \lambda u_2, \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Кад се има на уму то, да еквација

$$ux + vy + wz = o$$

обележава погодбу под којом ма у којој системи тачка (x, y, z) лежи на правој (u, v, w), и обратно, права (u, v, w) пролази кроз тачку (x, y, z), онда је јасно, да је еквација ма које

тачке низа (12) овог облика:

$$(x_1+\lambda x_2)\,u+(y_1+\lambda y_2)\,v+(z_1+\lambda z_2)\,w=o$$

или

$$(x_1u+y_1v+z_1w)+\lambda\,(x_2u+y_2v+z_2w)=o$$

или

$$U_1 + \lambda U_2 = o,$$

где је

$$U_1 \equiv x_1u + y_1v + z_1w,$$

$$U_2 \equiv x_2u + y_2v + z_2w.$$

праве прамена (12) овог облика:

$$(u_1+\lambda u_2)\,x+(v_1+\lambda v_2)\,y+(w_1+\lambda w_2)\,z=o$$

или

$$(u_1x+v_1y+w_1z)+\lambda\,(u_2x+v_2y+w_2z)=o$$

или

$$U_1 + \lambda U_2 = o,$$

где је

$$U_1 \equiv u_1x + v_1y + w_1z,$$

$$U_2 \equiv u_2x + v_2y + w_2z.$$

И у овај мах би дакле еквација ма ког елемента

у низу (U_1U_2) била линеарно састављена из еквација основних елемената тог низа.

у прамену (U_1U_2) била линеарно састављена из еквација основних елемената тог прамена.

* * *

+ ОДЕЉАК ЧЕТВРТИ

Анхармонијска или двојна напремица. Пројективни низови и прамени. Инволуција.

126. Узмимо четири тачке A, B, C, D на једном низу. Две између њих, н. пр. тачке A и B, опредељују потпуно низ. Остале две тачке деле дуж AB по напремицама $\frac{AC}{CB}$, $\frac{AD}{DB}$. Напремица тих напремицâ:

$$\alpha = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

назива се по Шалу *(Aperçu historique etc.)* *анхармонијска*, а по Мебијусу *(Der barycentrische Calcul, 1827.)* *двојна напремица* тачака A, B, C, D[1]; тачке A и B, C и D називају се *коњуговане*, уз то су A и C прве, B и D друге тачке првог и другог пара. При таквом распореду тачака, бележи се двојна напремица симболом $(ABCD)$:

$$\alpha = (ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Кад би н. пр. тачке A и C, B и D биле коњуговане, а A и B прве, C и D друге тачке првог и другог

---

[1] Мебијусова дефиниција је ово: „Ein Doppelschnittsverhältniss *(ratio bissectionalis) ist das Verhältniss zwischen den zwei Verhältnissen, nach welchen eine gerade Linie, in Bezug auf zwei in ihr liegende Punkte, als Grenzpunkte, in zwei anderen Punkten geschnitten wird.*“ — Назив Мебијусов је прихватио **Steiner** *(Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, 1832.)* и данас га махом употребљавају немачки писци.

пара, онда бисмо двојну напремицу бележили симболом $(ACBD)$ и т. д. Четири писмена A, B, C, D имају међу тим 24 различите пермутације (у овај мах 24 различита распореда); ми се можемо дакле запитати, како ће стајати двојне напремице, које тим различитим распоредима одговарају, према двојној напремици $\alpha = (ABCD)$.

На први поглед се види, да је

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC} = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{DB}{CB} : \frac{DA}{CA}$$

или

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA), \qquad (1)$$

а те релације нам казују да ће уз ма коју пермутацију писмена постојати још три пермутације, којима одговарају исте вредности двојне напремице.

Даље се види, да је

$$\left(\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}\right)\left(\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}\right) = 1$$

или

$$(ABCD)\,(ABDC) = 1 \qquad (2)$$

или

$$(ABDC) = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\alpha}\,.$$

Према основној релацији (1) биће дакле

$$(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{\alpha}\,.$$

Сличним путем ћемо доказати да је

$$(ACBD) + (ABCD) = 1. \qquad (3)$$

Ми знамо на име да је

$$AB + BC = AC, \quad AD = AB + BD.$$

Помножив ове две релације, добићемо ово:

$$AB \cdot AD + BC \cdot AD = AC \cdot AB + AC \cdot BD$$

или

$$AB\,(AD - AC) + BC \cdot AD - AC \cdot BD = o\,;$$

поделимо сад ту еквацију производом $CB \cdot AD$; резултат дељења ће бити ово:

$$\frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} + \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = 1$$

или

$$\left(\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD}\right) + \left(\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}\right) = 1,$$

т. ј. заиста је

$$(ACBD) + (ABCD) = 1$$

или

$$(ACBD) = 1 - (ABCD)$$

или

$$(ACBD) = 1 - \alpha.$$

Према основној релацији (1) је дакле

$$(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - \alpha.$$

До сад имамо 12 различитих пермутација писменâ A, B, C, D — четири добивамо из распореда $ABCD$, четири из распореда $ABDC$ и четири из распореда $ACBD$; свима тим пермутацијама одговарају *само три* различите вредности двојне напремице, а те су ово: $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ и $1 - \alpha$.

127. Из двојне напремице $(ABCD)$ добивамо, као што мало час доказасмо, променом унутрашњих елемената B и C двојну напремицу $(ACBD) = 1 - \alpha$; према томе ћемо из двојне напремице $(ABDC) = \frac{1}{\alpha}$ променом

унутрашњих елемената B и D добити двојну напремицу $(ADBC) = 1 - \frac{1}{\alpha}$ тако, да је

$$(ADBC) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot$$

По двојној напремици $(ABDC) = \frac{1}{\alpha}$ види се даље, да се променом двају последњих елемената C и D у двојној напремици $(ABCD) = \alpha$ вредност напремице мења у $\frac{1}{\alpha}$; према томе ћемо из двојних напремица $(ACBD) = 1 - \alpha$ и $(ADBC) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$ променом двају последњих елемената добити ово:

$$(ACDB) = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad (ADCB) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot$$

Кад бисмо сад поред сваке у реду ових напремица $(ADBC)$, $(ACDB)$, $(ADCB)$ по обрасцу (1) написали још три — оне три које су с њима једнаке — онда бисмо добили 12 различитих пермутација којима, кад их узмемо четири и четири, одговарају само ове три вредности $\frac{\alpha - 1}{\alpha}, \frac{1}{1 - \alpha}, \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot$ Оним осталим пермутацијама — а и тих је на број 12 — писмена A, B, C, D одговарају само ове три различите вредности: $\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1 - \alpha$, т. ј. двојна напремица четирију тачака има свега *шест различитих* вредности Њих ћемо написати у два реда овако:

$$(ABCD) = \alpha, \ (ACDB) = \frac{1}{1 - \alpha}, \ (ADBC) = \frac{\alpha - 1}{\alpha},$$

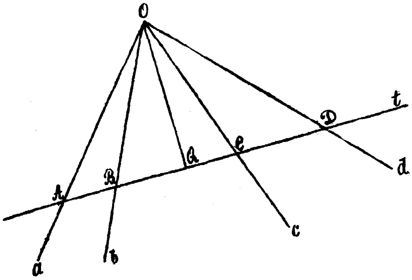
$$(ABDC) = \frac{1}{\alpha}, \ (ACBD) = 1 - \alpha, \ (ADCB) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot$$

Напомена. Двојна, анхармонијска напремица је *хармонијска*, кад је $(ABCD) = -1$. У том случају је на име (чл. 6.)

$$AC : CB = - AD : DB.$$

128. *Двојна напремица тачака A, B, C, D у којима нека трансверзала t сече четири зрака a, b, c, d прамена O не зависи од положаја трансверзале. (**Pappus**. Mathematicae collectiones, VII. 129.).*

Потегнимо на име са темена O праменова нормалу $p = OQ$ на трансверзалу t. Двојне површине троуглова AOC, BOC, AOD, BOD ћемо моћи изразити овако:



Сл 63.

$$p \cdot AC = OA \cdot OC \sin (ac), \quad p \cdot BC = OB \cdot OC \sin (bc),$$

$$p \cdot AD = OA \cdot OD \sin (ad), \quad p \cdot BD = OB \cdot OD \sin (bd).$$

Кад помножимо ове релације унакрст, добићемо ово:

$$p^2 \cdot AC \cdot BD = OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD \cdot \sin (ac) \sin (bd),$$

$$p^2 \cdot BC \cdot AD = OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD \cdot \sin (bc) \sin (ad) ;$$

поделимо сад прву еквацију другом; резултат дељења је

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin (ac)}{\sin (bc)} : \frac{\sin (ad)}{\sin (bd)} .$$

Десна страна ове еквације не зависи од положаја трансверзале t, т. ј. *двојна напремица тачака* A, B, C, D *је стална*,

$$(ABCD) = const.$$

Количник

$$\frac{sin\,(ac)}{sin\,(bc)} : \frac{sin\,(ad)}{sin\,(bd)}$$

зове се *двојна напремица четирију зракова* a, b, c, d *прамена* O; та напремица бележи се симболом $(abcd)$:

$$\alpha = (abcd) = \frac{sin\,(ac)}{sin\,(bc)} : \frac{sin\,(ad)}{sin\,(bd)} \,.$$

Свакад је дакле, ма како да лежи трансверзала t,

$$(ABCD) = (abcd).$$

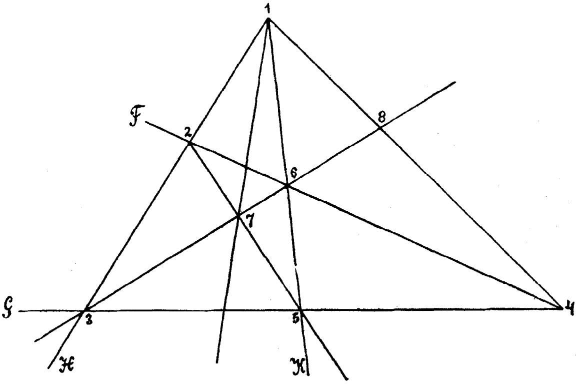
Кад је н. пр. $(ABCD) = -1$, биће и $(abcd) = -1$ или (упор. чл. 86. (1))

$$sin\,(ac) : sin\,(cb) = -\,sin\,(ad) : sin\,(db),$$

т. ј. кад тачке A, B, C, D хармонијски леже, лежаће хармонијски и зраци a, b, c, d и обратно, кад зраци a, b, c, d леже хармонијски, лежаће хармонијски и тачке A, B, C, D, ма како да лежи трансверзала t.

129. Дефиниције. I. *Тетраграм је слика, која се добива кад се узму четири праве од којих се три и три не секу у једној тачци, па се продуже у бескрајност. Те праве зову се стране, а тачке у којима се оне — две и две — секу, темена тетраграмова. Теменâ има свега шест — то су супротни парови 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6. Праве што спајају супротна темена зову се дијагонале; дијагоналâ има три; то су праве (14), (25) и (36). Троугао који дијагонале граде зове се дијагоналан троугао.*

II. *Тетрастигмат је слика, која се добива кад се узму четири тачке A, B, C, D од којих три и три не леже на једној правој, па се споје правим линијама. Те тачке зову се темена, а праве које их спајају — два и два — називају се стране тетрастигматове. Странâ има свега шест — то су супротни парови AB и CD, BC и AD, CA и BD. Тачке у пресеку супротних страна називају дијагоналне тачке; дијагоналних тачака има на број три. Троугао који они граде зове се дијагоналан троугао.*



Сл. 64.

III. *Тетраграм чије су дијагонале стране основног троугла зове се нормалан тетраграм; тетрастигмат чије су дијагоналне тачке темена основног троугла назива се нормалан тетрастигмат.*

Прве две дефиниције су Штајнерове[1]; Штајнер назива тетраграм „*vollständiges Vierseit*“, а тетрастигмат „*vollständiges Viereck*“.

Теореме. I. *Тачке у којима једна дијагонала тетраграмова сече остале две дијагонале његове, леже хармонијски према двама теменима која леже на тој дијагонали.*

II. *Праве, које спајају једну дијагоналну тачку тетрастигматову са осталим двема дијагоналним тач-*

---

[1] **Steiner**. *Systematische Entwickelung*, Gesam. Werke. I. p. 288.

кама његовим, леже хармонијски према двема странама које се секу у тој дијагоналној тачци.

Те две теореме одговарају једна другој дуално, а доказаћемо их овако. — Ми смо на једном месту (чл. 70.) доказали ову теорему: ако се између четири праве $F = o$, $G = o$, $H = o$, $K = o$ по три не секу у једној тачци, онда ће између полинома њихових еквација морати постојати једна идентична релација

$$fF + gG + hH + kK \equiv o\,,$$

а ту релацију ћемо моћи написати и у овом облику:

$$F + G + H + K \equiv o\,;$$

треба само претпоставити да је ово ново F идентично са чланом fF, т. ј. треба претпоставити да се већ *a priori* у полиному еквације праве F садржи и коефицијенат f и т. д. Узмимо сад да су $F = o$ и т. д. еквације страна тетраграмових. Како је

$$F + G \equiv -(H + K),$$

то је јасно, да ће еквације $F + G = o$ и $H + K = o$ представљати исту праву. По склопу тих еквација види се, да ће та права пролазити и кроз тачку у пресеку супротних страна F и G, и кроз тачку у пресеку супротних страна H и K — еквације $F + G = o$ и $H + K = o$ представљају дакле дијагоналу (14). На исти начин се види да еквације $F + H = o$ и $G + K = o$ представљају дијагоналу (25), а еквације $F + K = o$ и $G + H = o$ дијагоналу (36); биће дакле еквације дијагонала ово:

$$(14) \equiv F + G \equiv -(H + K) = o,$$

$$(25) \equiv F + H \equiv -(G + K) = o,$$

$$(36) \equiv F + K \equiv -(G + H) = o.$$

Према томе је $(25) - (36) \equiv H - K$; међу тим $(25) - (36) = o$ мора представљати једну праву у пресеку дијагонала (25) и (36); $H - K = o$ представља опет једну праву у пресеку страна H и K. Еквација $H - K = o$ представља дакле праву (17), а та права је хармонијски коњугована с правом $H + K = o$ а према правима $H = o$ и $K = o$. Према томе је $(3\ 6\ 7\ 8) = -1$ т. ј. тачке 7 и 8 су хармонијски коњуговане према тачкама 3 и 6, а то смо и тврдили у првој теореми.

Ону другу теорему могли бисмо такођер на веома прост начин доказати. Ако су $P = o$, $Q = o$, $R = o$, $S = o$ еквације темена тетрастигматових, биле би

$$P + Q \equiv -(R + S) = o,$$

$$P + R \equiv -(Q + S) = o,$$

$$P + S \equiv -(Q + R) = o$$

еквације дијагоналних тачака. Четврта хармонијска тачка према теменима $P = o$, $Q = o$ и дијагоналној тачци $P + Q = o$ је тачка

$$P - Q \equiv (P + R) - (Q + R) = o,$$

а та тачка лежи на оној правој, која спаја остале две дијагоналне тачке, q. e. d.

Прим. Стране једног тетраграма су $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ (1), $l\alpha + m\beta - n\gamma = o$ (2), $l\alpha - m\beta + n\gamma = o$ (3), $-l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ (4). **Доказати да је тај тетраграм нормалан.** —

Како је

$$(1) - (2) \equiv 2n\gamma, \quad (3) + (4) \equiv 2n\gamma,$$

то је јасно да је $\gamma = o$ једна дијагонала тетраграмова. Сличним путем би се могло доказати да су $\beta = o$ и $\alpha = o$ такођер дијагонале тог тетраграма, т. ј. и т. д.

130. Нека су сад

$$A_1 = o, \quad A_2 = o$$

еквације тачака A и B; еквације осталих двеју тачака C и D низа (AB) биле би овог облика:

$$A_1 + \lambda A_2 = o, \quad A_1 + \lambda' A_2 = o,$$

па како је

$$\lambda = k \frac{AC}{CB}, \quad \lambda' = k \frac{AD}{DB},$$

биће

$$\lambda : \lambda' = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

т. ј. количник $\lambda : \lambda'$ параметара λ и λ' представља двојну напремицу тачака A, B, C, D:

$$\lambda : \lambda' = (ABCD) = \alpha. \qquad (4)$$

Кад би еквације

$$A_1 = o, \; A_2 = o, \; A_1 + \lambda A_2 = o, \; A_1 + \lambda' A_2 = o$$

представљале четири зрака a, b, c, d прамена O, били би параметри λ и λ' сразмерни са напремицом синуса:

$$\lambda = k \frac{\sin (ac)}{\sin (cb)}, \quad \lambda' = k \frac{\sin (ad)}{\sin (db)},$$

па је с тога

$$\lambda : \lambda' = \frac{\sin (ac)}{\sin (cb)} : \frac{\sin (ad)}{\sin (db)} = \frac{\sin (ac)}{\sin (bc)} : \frac{\sin (ad)}{\sin (bd)},$$

т. ј. у овом случају представљао би количник $\lambda : \lambda'$ параметара λ и λ' двојну напремицу четирију зракова a, b, c, d:

$$\lambda : \lambda' = (abcd) = \alpha. \qquad (5)$$

Узмимо сад да су еквације тачака на низу (еквације зракова у прамену) овог облика:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 + \lambda_1 A_2 = o, & A_1 + \lambda_2 A_2 = o, \\ A_1 + \lambda_3 A_2 = o, & A_1 + \lambda_4 A_2 = o, \end{array}\right\} \qquad (6)$$

и потражимо двојну напремицу тих четирију тачака (зракова) (6). У овај мах међу датим тачкама (зрацима) нема основних елемената низа (прамена), јер су еквације основних елемената $A_1 = o$ и $A_2 = o$. Међу тим ако претпоставимо само за један часак да је

$$A_1 + \lambda_1 A_2 = A_1', \quad A_1 + \lambda_2 A_2 = A_2',$$

а с тим и

$$(\lambda_1 - \lambda_2) A_2 = A_1' - A_2', \quad (\lambda_2 - \lambda_1) A_1 = \lambda_2 A_1' - \lambda_1 A_2'$$

или

$$A_2 = \frac{A_1' - A_2'}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad A_1 = \frac{\lambda_2 A_1' - \lambda_1 A_2'}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

биће нам јасно, да ћемо еквације датих елемената моћи написати у овом облику:

$$A_1' = o, \quad A_2' = o,$$

$$A_1' + \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} A_2' = o, \quad A_1' + \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_2} A_2' = o.$$

Последње две еквације су линеарно састављене из првих двеју; прве две тачке (прва два зрака) могли бисмо дакле сматрати као основне тачке (основне зраке), па би према томе двојна напремица датих четирију тачака (зракова) била ово:

$$\alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_2} \qquad (7)$$

или

$$\alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}. \qquad (8)$$

Специјалан случај. 1-во. Нека су x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 координате датих тачака A, B, C, D а θ угао који гради носиља тих тачака, т. ј. права на којој леже те тачке, са осовином x. Ако се узме да је $\frac{1}{cos\theta} = \mu$, биће

$$AC = \mu (x_3 - x_1), \quad AD = \mu (x_4 - x_1),$$

$$BC = \mu (x_3 - x_2), \quad BD = \mu (x_4 - x_2);$$

према томе је

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2},$$

т. ј. двојна напремица тачака (x_1, y_1) и т. д. је

$$\alpha = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}. -$$

Тачке ће лежати хармонијски ако је $\alpha = -1$, т. ј. ако је (чл. 7.)

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) + (x_4 - x_1)(x_3 - x_2) = o.$$

2-го. Нека је $A_1 \equiv y$, $A_2 \equiv x$, $\lambda_i \equiv m_i$. У том случају биле би еквације зракова a, b, c, d овог облика:

$$y - m_1 x = o, \quad y - m_2 x = o,$$

$$y - m_3 x = o, \quad y - m_4 x = o,$$

а двојна напремица њихова била би

$$\alpha = \frac{m_1 - m_3}{m_2 - m_3} : \frac{m_1 - m_4}{m_2 - m_4}. -$$

Зраци ће лежати хармонијски ако је $\alpha = -1$, т. ј. ако је (чл. 87.)

$$(m_3 - m_1)(m_4 - m_2) + (m_4 - m_1)(m_3 - m_2) = o.$$

Прим. Наћи двојну напремицу по којој некакав угао деле две изотропне праве што се гранају из темена тог угла

Узмимо краке датог угла за осовине координатне системе. У тој системи биле би еквације изотропних правих ово:

$$x + y(cos\omega - i sin\omega) = o, \quad x + y(cos\omega + i sin\omega) = o$$

или

$$y + x(\cos\omega + i\sin\omega) = o, \quad y + x(\cos\omega - i\sin\omega) = o.$$

Према томе је

$$\alpha = \frac{\cos\omega + i\sin\omega}{\cos\omega - i\sin\omega}$$

или

$$\alpha = \cos 2\omega + i\sin 2\omega. -$$

Кад ће изотропне праве хармонијски лежати према крацима датог угла?

131. Кад свакој тачци једнога низа одговара *само једна* тачка другога низа и обратно, онда се каже да су низови тачака *пројективни*. — Две тачке A и A' које једна другој (пројективно) одговарају, могле би се звати *спрегнуте тачке* пројективних низова. Ако је сад бројем x одмерена раздаљина неке тачке A првога низа од неког почетка O који такођер на том низу лежи, а бројем x' раздаљина тачке A' другога низа од неког почетка O' који на другом низу лежи, онда ће између тих двају бројева морати постојати оваква билинеарна релација:

$$axx' + bx + cx' + d = o; \qquad (9)$$

из те билинеарне релације добивамо на име да је

$$x = -\frac{cx' + d}{ax' + b},$$

а

$$x' = -\frac{bx + d}{ax + c},$$

а по тим двема релацијама се види, да заиста свакој тачци првога низа одговара само једна тачка другога низа и обратно.

У билинеарној релацији (9) има свега три параметра, а то ће рећи да је у двама низовима могуће пројективно спрегнути само три — ма која три — пара тачака; свакој четвртој тачци једнога низа мора већ одговарати једна сасвим одређена тачка првога низа.

Кад би на име спрегнуте тачке биле определене параметрима x_1 и x_1', x_2 и x_2', x_3 и x_3', онда би између тих параметара морале постојати ове релације:

$$ax_1x_1' + bx_1 + cx_1' + d = o,$$

$$ax_2x_2' + bx_2 + cx_2' + d = o,$$

$$ax_3x_3' + bx_3 + cx_3' + d = o.$$

Из ове три релације могли бисмо определити непознате параметре $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$. Кад бисмо их израчунали, па тим вредностима сменили $a:b:c:d$ у еквацији (9), добили бисмо овакву једну билинеарну релацију:

$$\begin{vmatrix} x\,x' & x & x' & 1 \\ x_1x_1' & x_1 & x_1' & 1 \\ x_2x_2' & x_2 & x_2' & 1 \\ x_3x_3' & x_3 & x_3' & 1 \end{vmatrix} = o, \qquad (10)$$

а по томе се види да би у поменутом случају параметарска еквација пројективних низова заиста била потпуно определена.

132. Између тачака двају пројективних низова нарочито су важне тачке K и L', које пројективно одговарају тачкама што на једном и другом низу леже у бескрајности. Те тачке зову се *супротне тачке* низова.

Раздаљину тачке K од почетка O добићемо овако: узећемо да је у релацији (9) $x' = \infty$. Биће дакле

$$OK = -\frac{c}{a}.$$

Сличним путем бисмо добили да је

$$OL' = -\frac{b}{a}.$$

Ако сад узмемо тачку K за почетак од кога се на првом низу одмеравају раздаљине, биће $OK = o$, па је с тога и $c = o$. Сличним путем бисмо добили да је $b = o$, кад бисмо тачку L' узели за почетак од кога се на другом низу одмеравају раздаљине. У овом случају имала би релација (9) овај прост облик:

$$axx' + d = o$$

или

$$xx' = m = const., \qquad (11)$$

т. ј. *производ раздаљина ма које две спрегнуте тачке пројективних низова од супротних тачака њихових K и L' је стална количина.* (**Steiner**. *Systematische Entwickelung etc.).*

133. *У двама пројективним низовима је двојна напремица четирију тачака једнога низа равна двојној напремици четирију спрегнутих тачака другога низа.*

Узмимо ма где на првом низу четири тачке A, B, C, D; тачке које овима пројективно одговарају на другом низу, означићемо са A', B', C', D'. Ако узмемо на једном низу тачку K, а на другом тачку L' за почетак, добићемо ово:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{KC - KA}{KC - KB} : \frac{KD - KA}{KD - KB}.$$

По релацији (11) види се међу тим да је

$$KA \cdot L'A' = KB \cdot L'B' = KC \cdot L'C' = KD \cdot L'D' = m,$$

или

$$KA = \frac{m}{L'A'},\quad KB = \frac{m}{L'B'},\quad KC = \frac{m}{L'C'},\quad KD = \frac{m}{L'D'},$$

па је услед тога и

$$(ABCD) = \frac{L'A' - L'C'}{L'B' - L'C'} : \frac{L'A' - L'D'}{L'B' - L'D'}$$

или

$$(ABCD) = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$$

или

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

а то смо и тврдили.

Обратно, *два низа су пројективна кад је двојна напремица четирију тачака једнога низа равна двојној напремици четирију спрегнутих тачака другога низа.*

Ту теорему ћемо доказати овако. Узећемо да су са x_1, x_2, x_3, x означене раздаљине тачака A, B, C, D од неког почетка O, а са x_1', x_2', x_3', x' раздаљине тачака A', B', C', D' од неког почетка O'. Двојна напремица првих четирију тачака је

$$(ABCD) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x}{x_2 - x},$$

а двојна напремица осталих четирију спрегнутих тачака је

$$(A'B'C'D') = \frac{x_1' - x_3'}{x_2' - x_3'} : \frac{x_1' - x'}{x_2' - x'}.$$

Ми смо претпоставили да су те две двојне напремице једнаке, т. ј. претпоставили смо да је

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{x_1' - x_3'}{x_2' - x_3'} : \frac{x_1' - x'}{x_2' - x'}$$

или

$$(x_1 - x_3)(x_2' - x_3')(x_2 - x)(x_1' - x')$$
$$= (x_1' - x_3')(x_2 - x_3)(x_2' - x')(x_1 - x),$$

а та еквација се може написати у овом облику:

$$axx' + bx + cx' + d = o.$$

134. Кад сваком зраку једнога прамена одговара *само један* зрак другога прамена и обратно, онда се каже да су прамени *пројективни*. — Два зрака a и a' који један другом (пројективно) одговарају, могли бисмо звати *спрегнутим зрацима* пројективних прамена. Ако је са m означен коефицијенат који одређује правац једнога зрака првог прамена, а са m' коефицијенат који одређује правац спрегнутог зрака другог прамена, онда ће између тих двају коефицијената постојати оваква билинеарна релација:

$$amm' + bm + cm' + d = o, \qquad (12)$$

а по тој релацији се види, да је у двама. праменима могуће пројективно спрегнути само три — ма која три — пара зракова; сваком четвртом зраку једнога прамена мора већ одговарати један сасвим одређен зрак другога прамена.

135. *Ако зраци a, b, c, d, · · · неког прамена O секу неку праву у тачкама A, B, C, D, · · · а спрегнути зраци a', b', c', d', · · · прамена O' другу неку праву у тачкама A', B', C', D', · · · онда је и низ тачака A, B, C, D, · · · пројективан с низом тачака A', B', C', D' · · ·*

Свакој тачци једнога низа одговараће на име само *једна једина* тачка другога низа, т. ј. низови ће бити пројективни.

Кад се та теорема има на уму, онда се уједно може тврдити и то, *да је у двама пројективним праменима двојна напремица четирију зракова једнога прамена равна двојној напремици четирију спрегнутих зракова другога прамена.*

На првом месту је

$$(abcd) = (ABCD);$$

даље је

$$(a'b'c'd') = (A'B'C'D');$$

како су низови тачака A, B, C, D и A', B', C', D' пројективни, биће

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

па је према томе и

$$(abcd) = (a'b'c'd').$$

Обратно, *два прамена су пројективна кад је двојна напремица четирију зракова једнога прамена равна двојној напремици четирију спрегнутих зракова другога прамена.*

Та теорема могла би се доказати врло лако (упор. корелативну теорему чл. 133.).

Напомене. 1-во. Кад сваком зраку једнога прамена одговара *само једна* тачка некога низа и обратно, онда се каже да су прамен и низ *пројективни.* Тако би н. пр. зраци $a, b, c, d, \cdot\ \cdot\ \cdot$ поменутог прамена O пројективно одговарали тачкама $A, B, C, D, \ldots$ и обратно, а двојна напремица четирију елемената једне слике — низа или прамена — била би равна двојној напремици четирију спрегнутих елемената друге слике.

2-го. Узећемо да су

$$A_1+\lambda_1 A_2=o,\ A_1+\lambda_2 A_2=o,\ A_1+\lambda_3 A_2=o,\ A_1+\lambda A_2=o$$

еквације четирију елемената једне, а

$$A_1'+\lambda_1'A_2'=o,\ A_1'+\lambda_2'A_2'=o,\ A_1'+\lambda_3'A_2'=o,\ A_1'+\lambda'A_2'=o$$

еквације четирију спрегнутих елемената друге слике (низа или прамена); ако су те две слике пројективне, биће двојне напремице четирију елемената једне, равне двојној напремици четирију спрегнутих елемената друге слике:

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_2-\lambda}=\frac{\lambda_1'-\lambda_3'}{\lambda_2'-\lambda_3'}:\frac{\lambda_1'-\lambda'}{\lambda_2'-\lambda'}$$

или

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2' - \lambda_3')(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_1' - \lambda')$$
$$= (\lambda_1' - \lambda_3')(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2' - \lambda')(\lambda_1 - \lambda)$$

или

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = o. \qquad (13)$$

136. Ако пресечемо четири зрака a, b, c, d прамена O двема трансверзалама — првом трансверзалом у тачкама A, B, C, D, а другом у тачкама A', B', C', D' — биће с једне стране

$$(ABCD) = (abcd),$$

а с друге стране

$$(A'B'C'D') = (abcd),$$

па је с тога и

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

а то ће рећи да су низови $A, B, C, D, \ldots$ и $A', B', C', D', \ldots$ пројективни. Праве што спајају два и два спрегнута елемента тих низова секу се у једној тачци — ти пројективни низови су, као што се то каже, *у перспективном положају*. Тачка O, која лежи у пресеку правих што спајају спрегнуте елементе, зове се *средиште перспективе* (чл. 93.). У пресеку низова леже две тачке, једна тачка припада једном, друга другом низу. Но како оне обе заједно леже на једном зраку прамена O, то је јасно, да су те две тачке спрегнуте тачке. —

Ако четири тачке A, B, C, D једнога низа $\boldsymbol{A}$ спојимо правим линијама a, b, c, d и a', b', c', d' са двема тачкама O и O', биће с једне стране

$$(abcd) = (ABCD),$$

а с друге стране

$$(a'b'c'd') = (ABCD),$$

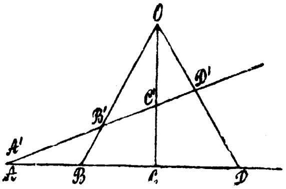
па је с тога и

$$(abcd) = (a'b'c'd'),$$

т. ј. прамени, који се добивају кад се споје неке две тачке O и O' са тачкама једнога низа, јесу пројективни. Тачке у којима се секу два и два спрегнута зрака тих прамена, леже на једној правој — ти пројективни прамени су, као што се то каже, *у перспективном положају*. Права $\mathbf{A}$, која спаја тачке у којима се секу спрегнути елементи, зове се *осовина перспективе*. На правој, која спаја темена O и O', леже два зрака — један зрак припада једном, а други другом прамену. Но како се оба та зрака секу у једној тачци низа $\mathbf{A}$, то је јасно, да су та два зрака спрегнути зраци.

137. *Пројективни низови су у перспективном положају, кад у тачци, у којој се они секу, леже две спрегнуте тачке.*

Нека су A, B, C, D и A', B', C', D' спрегнуте тачке двају низова $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$.



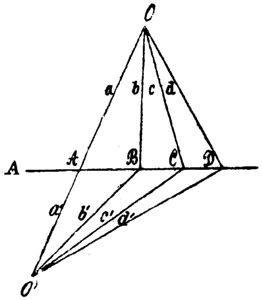
Сл. 65.

Између датих тачака поклапа, рецимо, тачка A тачку A'.

Праве што спајају тачке B и B', C и C' секу се у тачци O. Ту тачку спојићемо правом OD са тачком

137.* *Пројективни прамени су у перспективном положају, кад на правој, која спаја темена њихова, леже два спрегнута зрака.*

Нека су a, b, c, d и a', b', c', d' спрегнути зраци двају прамена O и O'.



Сл. 66.

Између датих зракова поклапа, рецимо, зрак a зрак a'.

Тачке у којима се секу зраци b и b', c и c' леже на правој $\mathbf{A}$. Ту праву пресећи ћемо зраком d у тачци

D; ако она сече низ $\mathbf{A}'$ у тачци D'', биће

$$(ABCD) = (A'B'C'D'');$$

како је међу тим

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

— претпоставили смо да су низови $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ пројективни — биће и

$$(A'B'C'D') = (A'B'C'D''),$$

а по томе се види да тачка D'' мора поклапати тачку D'. Кад се дакле ма у ком правцу из тачке O потегне један зрак, свакад ће тачке у којима он сече и један и други низ бити спрегнуте т.ј. пројективни низови биће у поменутом случају у перспективном положају.

D; ако кроз D пролази зрак d'' прамена O', биће

$$(abcd) = (a'b'c'd'');$$

како је међу тим

$$(abcd) = (a'b'c'd')$$

— претпоставили смо да су прамени O и O' пројективни — биће и

$$(a'b'c'd') = (a'b'c'd''),$$

а по томе се види да зрак d'' мора поклапати зрак d'. Кад се дакле споји ма која тачка низа $\mathbf{A}$ са теменима O и O' свакад ће ти зраци бити спрегнути т. ј. пројективни прамени биће у поменутом случају у перспективном положају.

138. Да видимо сад како ћемо у опште, ма у која два пројективна

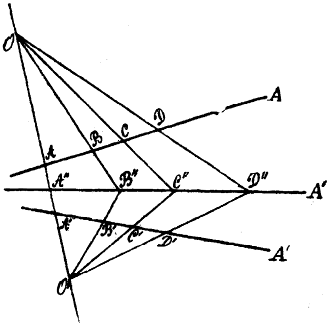
низа $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ одредити уза сваку тачку једног низа ону, која њој у другом одговара.

Нэка су A, B, C и A', B', C' системе спрегнутих тачака у једном и другом низу; та три пара спрегнутих тачака потпуно опредељују пројективне низове $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$.

прамена O и O' одредити уза сваки зрак једног прамена онај, који њему у другом одговара.

Нека су a, b, c и a', b', c' системе спрегнутих зракова у једном и другом прамену; та три пара спрегнутих зракова потпуно опредељују пројективне прамене O и O'.

Кад знамо та три пара тачака, наћи ћемо остале парове D и D' и т. д. овако.



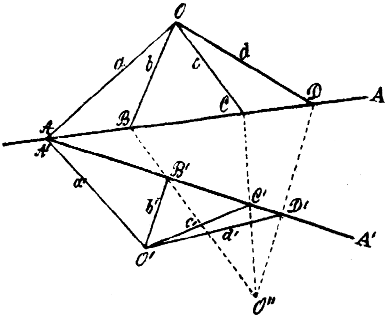
Сл. 67.

Спојићемо тачке A и A' једном правом и узећемо на њој ма где две тачке O и O'. Потегнимо сад праве OB и $O'B'$, OC и $O'C'$; у пресеку њиховом добићемо тачке B'', C'', а с овима и праву **A''**. Ако спојимо ма коју тачку D'' те праве са тачкама O и O', *биће тачке D и D', у којима праве OD'', и $O'D''$, секу низове **A** и **A'** спрегнуте тачке.* Низови **A''** **A**, и **A''** и **A'** су на име у перспективном положају, а то ће рећи да су двојне напремице њихових тачака A, B,...; A', B',...; A'' B'',... једнаке:

$$(A''B''C''D'') = (ABCD),$$

$$(A''B''C''D'') = (A'B'C'D'),$$

Кад знамо та три пара зракова, наћи ћемо остале парове d и d' и т. д. овако.



Сл. 68.

Повући ћемо из тачке у пресеку зракова a и a' ма у ком правцу две праве **A** и **A'**. Ове ће сећи зраке прамена O и O' у тачкама A, B, C и A', B', C'; спојивши тачке B и B', C и C' правим линијама добићемо тачку O''. Ако праве **A** и **A'** пресечемо неким зраком $O''D'D$ прамена O'' *биће праве OD и $O'D'$, које спајају темена O и O' са тачкама D и D', спрегнути зраци.* Прамени O'' и O, и O'' и O' су на име у перспективном положају, а то ће рећи да су двојне напремице њихових зракова a, b,...; a', b',...; a'', b'',... једнаке:

$$(a''b''c''d'') = (abcd),$$

$$(a''b''c''d'') = (a'b'c'd'),$$

па је према томе, као што смо и тврдили, и

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

па је према томе, као што смо и тврдили, и

$$(abcd) = (a'b'c'd').$$

139. Супротним тачкама K и L' одговарају дуално у пројективним праменима краци k и l' или k' и l оних правих углова, које граде међу собом зраци k и l, k' и l' појединих праменова (зраци k и k', l и l' су спрегнути).

Ако узмемо осим поменута два пара спрегнутих зракова k и k', l и l' још два пара, a и a', b и b', биће

$$(klab) = (k'l'a'b')$$

или

$$\frac{sin\ (ka)}{sin\ (la)} : \frac{sin\ (kb)}{sin\ (lb)} = \frac{sin\ (k'a')}{sin\ (l'a')} : \frac{sin\ (k'b')}{sin\ (l'b')}\ .$$

Како је међу тим

$$\begin{aligned}(ka) &= (kl) + (la) = 90^\circ + (la),\\ (kb) &= (kl) + (lb) = 90^\circ + (lb),\\ (k'a') &= (k'l') + (l'a') = 90^\circ + (l'a'),\\ (k'b') &= (k'l') + (l'b') = 90^\circ + (l'b'),\end{aligned}$$

биће и

$$\frac{cos\ (la)}{sin\ (la)} : \frac{cos\ (lb)}{sin\ (lb)} = \frac{cos\ (l'a')}{sin\ (l'a')} : \frac{cos\ (l'b')}{sin\ (l'b')}$$

или

$$cot\ (la) : cot\ (lb) = cot\ (l'a') : cot\ (l'b').$$

Сличним путем могло би се доказати да је и

$$\begin{aligned}cot\ (la) : cot\ (lb) &= -\ tg\ (ka) : -\ tg\ (kb),\\ cot\ (l'a') : cot\ (l'b') &= -\ tg\ (k'a') : -\ tg\ (k'b').\end{aligned}$$

Последње три сразмере можемо уједно овако написати :

$$\frac{tg\,(lb)}{tg\,(la)} = \frac{tg\,(l'b')}{tg\,(l'a')} = \frac{tg\,(k'a')}{tg\,(k'b')} = \frac{tg\,(ka)}{tg\,(kb)}; \qquad (14)$$

према томе је јасно (треба имати у виду само другу и четврту напремицу) да је

$$tg\,(ka)\;tg\,(l'a') = tg\,(kb)\;tg\,(l'b')$$

или

$$tg\,(ak)\;tg\,(a'l') = tg\,(bk)\;tg\,(b'l'). \qquad (15)$$

Но како су са a и a', b и b' означена ма која два пара спрегнутих зракова, то се по последњој релацији (15) види, *да је производ тангената оних углова, које граде ма која два спрегнута зрака пројективних праменова са зрацима k и l' стална количина.* То исто правило може се применити и на тангенте оних углова, које граде два спрегнута зрака са зрацима k' и l, јер је (треба само имати у виду прву и трећу између напремица (14))

$$tg\,(al)\;tg\,(a'k') = tg\,(bl)\;tg\,(b'k') = const.$$

140. Узмимо сад да два пројективна низа леже на једној правој. Оне тачке те праве, на којима би лежала два спрегнута елемента датих низова, зваћемо *двојним тачкама* и доказаћемо да *два пројективна низа која леже на једној правој имају две двојне тачке*[1].

Ако су на име K и L' супротне, а A и A' две спрегнуте тачке датих низова биће (11):

$$AK \cdot A'L' = m;$$

у овој релацији је $m = const.$ — Узмимо сад тачку O за почетак од кога ћемо одмеравати раздаљине појединих тачака и означимо са a, k, a', l' бројеве којима

---

[1] У овај мах није реч о оној правој — носиљи двају низова — на којој би се по три тачке једнога низа поклапале са оним тачкама другога низа које им пројективно одговарају. У том случају би на име на свакој тачци дате праве лежале по две спрегнуте тачке: ти низови били би *конгруентни*, а свака тачка заједничке носиље би била двојна тачка.

су одмерене дужи OA, OK, OA', OL'; како је $AK=k-a$, $A'L' = l' - a'$, биће и

$$(k - a)(l' - a') = m.$$

Нека је сад тачка A двојна тачка. У том случају ће бити $a = a' = x$, па је према томе и

$$(k - x)(l' - x) = m$$

или

$$x^2 - (k + l')x + kl' - m = o, \qquad (16)$$

т. ј. број x, којим је одмерена раздаљина двојне тачке од почетка O, мора бити корен једне сасвим одређене квадратне еквације; ова има само два (реална или имагинарна) корена; јасно је дакле, да у пројективним низовима који леже на једној правој, заиста има само две (реалне или коњуговано комплексне) двојне тачке E и F. Ако су e и f корени еквације (16), биће

$$\frac{e+f}{2} = \frac{k+l'}{2}.$$

Лева страна ове еквације представља раздаљину средине двојних тачака, а десна страна њезина раздаљину средине супротних тачака од почетка O; ова последња средина је свакад реална; јасно је дакле, *да је тачка што лежи на средини између две (реалне или имагинарне) двојне тачке свакад реална.*

До још једне важне особине двојних тачака можемо доћи овим путем.

Кад се има на уму то, да двојне тачке саме себи пројективно одговарају, онда је јасно, да ће бити

$$(EFAB) = (EFA'B')$$

или

$$\frac{EA}{FA} : \frac{EB}{FB} = \frac{EA'}{FA'} : \frac{EB'}{FB'}$$

или

$$\frac{EA}{FA} : \frac{EA'}{FA'} = \frac{EB}{FB} : \frac{EB'}{FB'}$$

или, најпосле,

$$(EFAA') = (EFBB') = const.,$$

т. ј. *двојна напремица двеју двојних тачака и двеју спрегнутих тачака пројективних низова јесте стална количина;* она се на име не мења кад се у њој елементи A и A' замене другим којим паром спрегнутих елемената B и B'.

141. Пројективним низовима који леже на једној правој одговарају дуално *концентрични* пројективни прамени, т. ј. прамени са заједничким теменом O, а двојним тачкама *двојни зраци.* Двојни зраци су дакле они зраци, на којима леже два спрегнута елемента концентричних пројективних прамена. — *Два концентрична пројективна прамена имају свакад два двојна зрака.*

Ако су на име k и l' краци оних правих углова, који пројективно одговарају један другом у једном и другом прамену, а a и a' два спрегнута зрака њихова, биће (15):

$$tg\,(ak)\,tg\,(a'l') = m;$$

у овој релацији је $m = const.$ — Ако са a, k, a', l' означимо баш саме угле које граде зраци a, k, a', l' са неким сталним зраком прамена, моћи ћемо последњи образац и овако написати:

$$tg\,(k - a)\,tg\,(l' - a') = m.$$

Узмимо сад да је зрак a двојан зрак. У том случају је $a = a' = x$, па је према томе и

$$tg\,(k - x)\,tg\,(l' - x) = m, \qquad (17)$$

т. ј. тангента угла x којим је одређен положај двојног зрака према сталном зраку, мора бити корен једне сасвим одређене квадратне еквације; ова има два (реална или имагинарна) корена; јасно је дакле, да у пројективним концентричним праменима има заиста само два (реална или имагинарна) двојна зрака.

Та теорема може се у осталом доказати и чисто пројективним путем. — Пресецимо само концентричне пројективне прамене једном трансверзалом. На тој трансверзали добићемо два пројективна низа тачака; ако дакле трансверзала сече зраке a, b, 'с, d у тачкама A, B, C, D, а зраке a', b', c', d' у тачкама A', B', C', D', онда ће бити

$$(ABCD) = (A'B'C'D') \qquad (18)$$

и обратно, ако кроз тачке A, B, C, D пролазе зраци a, b, c, d, а кроз тачке A', B', C', D' зраци a', b', c', d', онда ће бити

$$(abcd) = (a'b'c'd'). \qquad (19)$$

Из релације (18) види се ово: кад трансверзала сече зрак a у тачци A, а зрак a' у тачци A', онда тачке A и A' једна другој пројективно одговарају. То исто се може применити и на тачке B и B', C и C', D и D', кад се узму напоредо са зрацима b и b', c и c', d и d'. Напротив, по напремицама (19) се види ово: кад кроз тачку A пролази зрак a, а кроз тачку A' зрак a', онда зраци a и a' један другом пројективно одговарају. То исто вреди и зраке b и b', c и c', d и d', кад се узму напоредо са тачкама B и B', C и C', D и D'. По овој другој пропозицији види се дакле да ће зрак a онда бити двојан зрак пројективних, концентричних прамена̂, кад је тачка A, кроз коју он пролази, двојна тачка низова који леже на трансверзали. Двојних зракова у концентричним пројективним праменима има дакле само онолико, колико у пројективним низовима на трансверзали има двојних тачака, т. ј. има их свега два. Кад се има на уму она прва пропозиција, јасно је да ће обратно сваком двојном зраку у концентричним пројективним праменима одговарати по једна двојна тачка пројективних низова што се налазе на оној трансверзали, која сече пројективне концентричне прамене.

Како двојни зраци e и f сами себи пројективно одговарају, биће

$$(efab) = (efa'b')$$

или

$$\frac{\sin(ea)}{\sin(fa)} : \frac{\sin(eb)}{\sin(fb)} = \frac{\sin(ea')}{\sin(fa')} : \frac{\sin(eb')}{\sin(fb')}$$

или

$$\frac{\sin(ea)}{\sin(fa)} : \frac{\sin(ea')}{\sin(fa')} = \frac{\sin(eb)}{\sin(fb)} : \frac{\sin(eb')}{\sin(fb')},$$

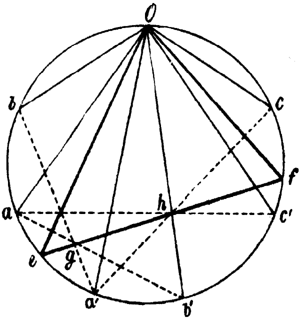
а по том се види, да је

$$(efaa') = (efbb') = const.,$$

т. ј. *двојна напремица двају двојних зракова и двају спрегнутих зракова концентричних пројективних прамена̂ јесте стална количина*; она се на име не мења кад у њој елементе a и a' заменимо другим којим паром спрегнутих елемената b и b'.

142. По оном што мало час рекосмо о вези која постоји између двојних зракова двају концентричних прамена и двојних тачака двају пројективних низова види се ово двоје: 1-во, да се двојне тачке двају пројективних низова (на заједничкој носиљи) могу конструкцијом наћи, чим знамо двојне зраке двају пројективних концентричних прамена и 2-го, да се двојни зраци двају пројективних концентричних прамена могу конструкцијом наћи, чим знамо двојне тачке двају пројективних низова на једној носиљи. С тога ћемо ми покушати, да конструкцијом нађемо само један пар двојних елемената, н. пр. само двојне зраке, па ћемо непосредно за тим показати, на који начин се могу конструјисати и двојне тачке двају пројективних низова на једној носиљи. — Повуцимо само кроз заједничко теме O пројективних прамена један — ма какав — круг. Тај круг сећи ће зраци a, b, c једног и зраци a', b', c' другог прамена (то су три пара спрегнутих зракова) у тачкама a, b, c с једне, и a', b', c' с друге стране.

Узмимо сад тачку *a* за теме прамену *a* (*a'*, *b'*, *c'*), а тачку *a'* за теме прамену *a'* (*a*, *b*, *c*). Кад узмемо на ум то, да су угли које граде два и два зрака прамена *O* (*a*, *b*, *c*) једнаки с углима што леже између зракова прамена *a'* (*a*, *b*, *c*), биће нам јасно, да је прамен *O* (*a*, *b*, *c*) пројективан са праменом *a'* (*a*, *b*, *c*). Из истог разлога је и прамен *O* (*a'*, *b'*, *c'*) пројективан са праменом *a* (*a'*, *b'*, *c'*). Но како су — то смо претпоставили — прамени *O* (*a*, *b*, *c*) и *O* (*a'*, *b'*, *c'*) пројективни, то је јасно да је и прамен *a* (*a'*, *b'*, *c'*) пројективан са праменом *a'* (*a*, *b*, *c*). У ова два пројективна прамена поклапају се спрегнути зраци *aa'* и *a'a*, т. ј. ти прамени су у перспективном положају. Осовина перспективе биће права *gh*, која круг сече у тачкама *e* и *f*.

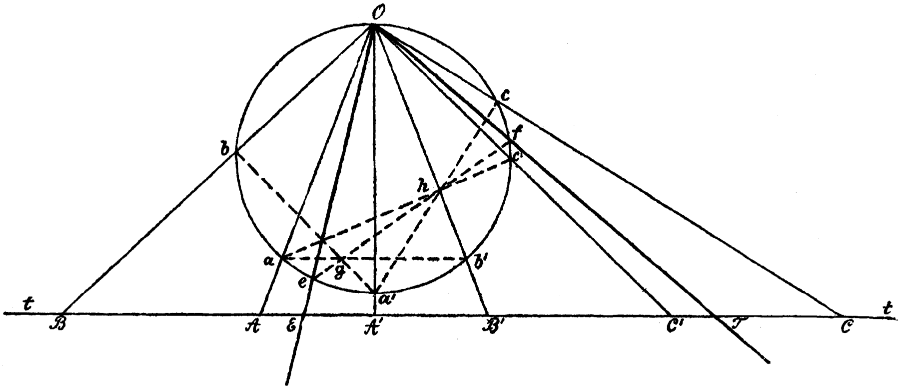


Сл. 69.

У свакој тачци те осовине секу се по два спрегнута зрака прамена *a* (*a'*, *b'*, *c'*) и *a'* (*a*, *b*, *c*); према томе ће зраци *ae* и *a'e* један другом пројективно одговарати у праменима *a* (*a'*, *b'*, *c'*) и *a'* (*a*, *b*, *c*). Међу тим зраку *ae* одговара пројективно зрак *Oe* у прамену *O* (*a'*, *b'*, *c'*), а зраку *a'e* тај исти зрак *Oe* у прамену *O* (*a*, *b*, *c*). На зраку *Oe* леже дакле два зрака, који један другом пројективно одговарају у концентричним праменима *O* (*a*, *b*, *c*) и *O* (*a'*, *b'*, *c'*) — зрак *Oe* је дакле двојни зрак тих прамена. Сличним путем би се могло доказати, да је и зрак *Of* двојни зрак поменутих двају прамена *O* (*a*, *b*, *c*) и *O* (*a'*, *b'*, *c'*).

Лако ћемо сад, кад знамо двојне зраке Oe и Of, конструјисати и двојне тачке E и F двају пројективних низова на једној носиљи.

У овај мах треба само из неке тачке O потегнути ка датим тачкама A, B, C и A', B', C' једног и другог низа (те тачке су спрегнуте) зраке OA, OB, OC и OA', OB', OC'. Тим путем ћемо добити два пројективна концентрична прамена O (A, B, C) и O (A', B', C'), које сече заједничка носиља t датих пројективних низова. Двојни зраци Oe и Of сећи ће заједничку носиљу низова (трансверзалу) у тачкама E и F т. ј. тачке E и F ће бити двојне тачке пројективних низова на заједничкој носиљи t.



Сл. 70.

143. Узмимо сад да два пројективна низа имају исту основу, т. ј. да низови леже на једној правој. Свака тачка те праве биће тачка и једног и другог низа. — На тој заједничкој основи одмераваћемо од истог почетка раздаљине x и x' двеју спрегнутих тачака. Како су низови пројективни, постојаће између x и x' у опште оваква билинеарна релација:

$$axx' + bx + cx' + d = o. \qquad (20)$$

Означимо сад са x раздаљину неке тачке A од почетка; тој тачци A као тачци *првога* низа одговара *у другом* низу нека тачка, која у раздаљини $-\frac{bx+d}{ax+c}$ лежи од почетка. Међу тим тој истој тачци A као тачци *другога* низа одговараће пројективно *у првом* низу нека тачка, која у раздаљини $-\frac{cx+d}{ax+b}$ лежи од почетка. Према томе је јасно, да су тачке, које пројективно одговарају тачци A као тачци једног и другог низа, у опште *различите* две тачке заједничке основе. Но ако је $b = c$, онда ће раздаљине поменутих двеју тачака од почетка бити *једнаке*, т. ј. кад постоји погодба $b = c$, онда ће те две тачке пасти на исту тачку заједничке основе, н. пр. на тачку A'. Било дакле да је тачка A тачка првога, било да је она тачка другога низа, свакад ће она тачка, која њој пројективно одговара, пасти на исту тачку A' заједничке основе. Тачке A и A' су *коњуговане*; за њих се каже да једна другој *инволуторно* одговарају.

Но како је, кад је $b = c$, билинеарна релација (20) симетрична с обзиром на x и x' — та релација је у овом случају овог облика:

$$axx' + b\,(x + x') + d = o \quad — \qquad (21)$$

то је уједно јасно и то, да ће она узајамност која постоји између тачака A и A', постојати у опште између свију спрегнутих тачака датих низова; све тачке тих низова, кад се узму две и две, одговараће на име једна другој инволуторно: дати низови ће, као што се то каже, бити *у инволуцији*.

По погодбеној релацији (21) види се уједно и то, *да инволуцију тачака потпуно опредељују два пара спрегнутих елемената.* Означимо само са x_1, x_1', и са x_2, x_2' параметре који одређују два пара тачака у инволуцији. Кад се има у виду релација (21) биће јасно да ће ти параметри међу собом бити везани овим релацијама:

$$ax_1x_1' + b\,(x_1 + x_1') + d = o,$$

$$ax_2x_2' + b\,(x_2 + x_2') + d = o.$$

Из тих двеју релација могли бисмо определити непознате коефицијенте $a:b:c$. Кад бисмо их израчунали, па њиховим вредностима сменили $a:b:c$ у основној погодбеној билинеарној релацији (21), добили бисмо овакву једну билинеарну релацију:

$$\begin{vmatrix} x\,x' & x+x' & 1 \\ x_1x_1' & x_1+x_1' & 1 \\ x_2x_2' & x_2+x_2' & 1 \end{vmatrix} = o, \qquad (22)$$

а по тој релацији се види, да би у поменутом случају параметарска еквација двају низова у инволуцији заиста била потпуно опредељена.

Напомене. 1-во. Узмимо да су раздаљине x и x' двеју спрегнутих тачака од заједничког почетка корени ове квадратне еквације:

$$a'x^2 + 2b'x + c' = o; \qquad (23)$$

производ корена те еквације је

$$xx' = \frac{c'}{a'},$$

а збир њихов је

$$x + x' = -\frac{2b'}{a'}\,.$$

Ако су тачке x и x' у инволуцији, биће

$$axx' + b\,(x + x') + d = o$$

или

$$ac' + da' - 2bb' = o. \qquad (24)$$

2-го. Узмимо да су раздаљине x и x' двеју тачака корени ове квадратне еквације:

$$(a'x^2 + 2b'x + c') + \mu\,(a''x^2 + 2b''x + c'') = o$$

или

$$(a' + \mu a'')\,x^2 + 2\,(b' + \mu b'')\,x + (c' + \mu c'') = o; \qquad (25)$$

кад се претпостави, да μ као параметар има бескрајно много вредности, онда ће нам последње две еквације представљати бескрајно много парова тачака. Ми ћемо на основу релације (24) доказати, да ће све те тачке једна другој инволуторно одговарати, ако су ове четири тачке:

$$a'x^2 + 2b'x + c' = o, \quad a''x^2 + 2b''x + c'' = o \qquad (26)$$

— две и две — коњуговане. Кад се има у виду релација (24), јасно је да ће тачке (25) инволуторно једна другој одговарати ако је

$$a\,(c' + \mu c'') + d\,(a' + \mu a'') - 2b\,(b' + \mu b'') = o$$

или

$$(ac' + da' - 2bb') + \mu\,(ac'' + da'' - 2bb'') = o,$$

а ова релација постоји кадгод је

$$ac' + da' - 2bb' = o, \quad ac'' + da'' - 2bb'' = o,$$

т. ј. кадгод су тачке (26) коњуговане.

Инволуција, о којој је у овај мах реч, зове се често *квадратном инволуцијом*; у тој инволуцији опредељење су две и две коњуговане тачке једном квадратном еквацијом.

144. По оном, што мало час рекосмо, јасно је да ће спрегнуте тачке

$$a'\,x^2 + 2b'\,x + c' = o,$$

$$a''\,x^2 + 2b''\,x + c'' = o,$$

$$a'''x^2 + 2b'''x + c''' = o$$

— свега их је на број шест — бити у инволуцији ако је

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = o. \qquad (27)$$

Ако на име дате тачке — две и две — једна другој инволуторно одговарају, биће (24)

$$ac' + da' - 2bb' = o,$$

$$ac'' + da'' - 2bb'' = o,$$

$$ac''' + da''' - 2bb''' = o,$$

а система ових линеарних хомогених еквација постоји само кад је, као што смо и тврдили, елиминанта њезина (27) равна нули. То би био један начин, којим би (аналитички) била обележена инволуција шесторих тачака. —

Инволуцију шесторих тачака можемо међу тим обележити и неким релацијама, које постоје између одсечака тих тачака на заједничкој основи. Ми можемо на име доказати то, да ће између дужи, које на заједничкој основи одсецају шесторе тачке A и A', B и B', C и C' у инволуцији, постојати ове релације:

$$\left.\begin{aligned} AB' \cdot BC' \cdot CA' &= AC' \cdot BA' \cdot CB' \\ AB' \cdot BC \cdot C'A' &= AC \cdot BA' \cdot C'B' \\ BC' \cdot CA \cdot A'B' &= BA \cdot CB' \cdot A'C' \\ CA' \cdot AB \cdot B'C' &= CB \cdot AC' \cdot B'A'. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Узмимо само на заједничкој носиљи четири тачке и то тако, да две између њих н. пр. тачке A и A' буду коњуговане, а остале две н. пр. тачке B и C' да не буду коњуговане. Тачкама A, B, A', C' првога низа одговараће пројективно тачке A', B', A, C другога низа; биће дакле

$$(ABA'C') = (A'B'AC)$$

или

$$\frac{AA'}{BA'} : \frac{AC'}{BC'} = \frac{A'A}{B'A} : \frac{A'C}{B'C}$$

или

$$\frac{AA'}{BA'} \cdot \frac{BC'}{AC'} = \frac{A'A}{B'A} \cdot \frac{B'C}{A'C} \cdot$$

Кад се има у виду то, да је $AA' = - A'A$, биће даље

$$\frac{BC'}{BA' \cdot AC'} = - \frac{B'C}{B'A \cdot A'C}$$

или

$$\frac{BC'}{BA' \cdot AC'} = \frac{CB'}{AB' \cdot CA'}$$

или

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB',$$

а ово је прва међу поменутим релацијама (28). Сличним путем би се могло доказати да и остале три релације постоје.

145. Између тачака двају пројективних низова у инволуцији нарочито су важне супротне тачке K и L'. Помоћу релације (20) можемо доказати ову теорему: *супротне тачке двају пројективних низова у инволуцији поклапају се у једној тачци заједничке основе и обратно, ако се супротне тачке пројективних низова који имају заједничку основу поклапају, онда су низови у инволуцији.*

По поменутој релацији, види се на име да је

$$x' = - \frac{bx + d}{ax + c}, \quad x = - \frac{cx' + d}{ax' + b};$$

према томе ће x' и x бити ∞, само ако је

$$ax + c = o \quad \text{и} \quad ax' + b = o$$

или

$$x = -\frac{c}{a}, \quad \text{а} \quad x' = -\frac{b}{a}.$$

У првој релацији представља x раздаљину супротне тачке K од неког почетка O; у другој релацији представља x' раздаљину оне друге супротне тачке L' од тог истог почетка; с тога је

$$OK = -\frac{c}{a}, \quad OL' = -\frac{b}{a};$$

међу тим је $b = c$ кад су низови инволуторни; с тога ће бити и $OK = OL'$, а то смо у првом делу поменуте теореме и тврдили.

Обратно, ако се претпостави да је $OK = OL'$; онда мора бити $b = c$, т. ј. онда морају пројективни низови бити у инволуцији, а то смо и тврдили у другом делу поменуте теореме.

Тачка O', на којој леже супротне тачке пројективних низова у инволуцији, зове се *средиште инволуције*. Кад бисмо од те тачке одмеравали раздаљине појединих тачака инволуторних низова, било би $b = c = o$; у том случају би инволуција тачака била обележена овом простом релацијом:

$$axx' + d = o$$

или

$$xx' = k^2 = const., \tag{29}$$

а по тој релацији се види *да је производ раздаљина двеју коњугованих тачака од средишта O' стална количина.* Та стална количина се зове *степен инволуције*; она је позитивна кад се коњуговане тачке налазе на једној страни централне тачке; напротив, степен инволуције је негативан, кад су коњуговане тачке одвојене централном тачком.

Поменути резултат добија се непосредно и из релације

$$(ABO'\infty) = (A'B'\infty O').$$

Одатле је

$$O'A \cdot O'A' = O'B \cdot O'B', \qquad (30)$$

а по томе се опет види, да се производ раздаљина двеју спрегнутих тачака од централне тачке не мења.

146. Осим супротних тачака, важне су и двојне тачке E и F низова у инволуцији. У свакој двојној тачци поклапају се два елемента, који један другом одговарају, т. ј. у двојним тачкама је $x = x'$, па ће с тога у инволуцији раздаљине двојних тачака од средишта инволуције бити опредељене еквацијом

$$x^2 = k^2.$$

Кад се има у виду релација (30), онда се може написати ово:

$$\overline{O'E}^2 = \overline{O'F}^2 = O'A \cdot O'A'; \qquad (31)$$

према томе је јасно ово:

1-во, да су двојне тачке реалне ако је степен инволуције позитиван т. ј. ако две — ма које две — коњуговане тачке A и A' низова у инволуцији леже на истој страни централне тачке;

2-го, да су двојне тачке имагинарне ако је степен инволуције негативан т. ј. ако централна тачка лежи између коњугованих тачака A и A';

3-ће, да двојне тачке леже у истој раздаљини од централне тачке инволуције;

4-то, да ма које две коњуговане тачке хармонијски деле дуж која спаја двојне тачке. —

Треће правило јасно је већ и по томе, што је, као што смо доказали, средина двојних тачака уједно и средина супротних тачака, а ове у овај мах обе заједно леже на једној тачци — на централној тачци инволуције.

147. Инволуцију тачака опредељују, као што смо мало час поменули, потпуно два пара спрегнутих тачака; нека су раздаљине тих елемената од неког заједничког почетка представљене коренима ових квадратних еквација:

$$a'x^2 + 2b'x + c' = o, \quad a''x^2 + 2b''x + c'' = o. \qquad (32)$$

Свака инволуција има своје две одређене, реалне или имагинарне двојне тачке; према томе је јасно, да ће двојне тачке оне инволуције, која је опредељена еквацијама (32), такођер имплицитно бити опредељене тим двема еквацијама. Ево начина којим ћемо наћи те двојне тачке. —

Узмимо само за један часак да је инволуција тачака (32) обележена релацијом

$$axx' + b(x + x') + d = o.$$

У том случају били би (чл. 143. (24)) коефицијенти a, b, d алгебарски на овај начин везани са коефицијентима a', b', c' с једне, и коефицијентима a'', b'', c'' с друге стране:

$$ac' + da' - 2bb' = o,$$

$$ac'' + da'' - 2bb'' = o,$$

а из ових двеју еквација је

$$a : d : b = 2(a'b'' - a''b') : 2(b'c'' - b''c') : (a'c'' - a''c').$$

Ми знамо међу тим да су двојне тачке оне тачке заједничке основе, у којима се поклапају по две коњуговане тачке низова; за сваку двојну тачку је дакле $x = x'$, па ће с тога раздаљине тих тачака од заједничког почетка бити представљене овом еквацијом:

$$axx + b(x + x) + d = o$$

или

$$ax^2 + 2bx + d = o.$$

Но како су непознати коефицијенти a, $2b$, d сразмерни са овим количинама:

$$2(a'b'' - a''b'),\ 2(a'c'' - a''c'),\ 2(b'c'' - b''c'),$$

јасно је, да ће раздаљине двојних тачака од почетка бити опредељене овом квадратном еквацијом:

$$(a'b''-a''b')\,x^2+(a'c''-a''c')\,x+(b'c''-b''c')=o. \qquad (33)$$

Ако нехомогене полиноме квадратних еквација (32) преобразимо помоћу једне нове променљиве y у хомогене тако, да је

$$u \equiv a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,\ v \equiv a''x^2 + 2b''xy + c''y^2,$$

онда ћемо еквацију (33) моћи написати у овом лепшем облику:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = o.$$

Додатак. Корени квадратне еквације $ax^2 + 2bx + d = o$ су или реални и различити, или реални и једнаки или коњуговано имагинарни.

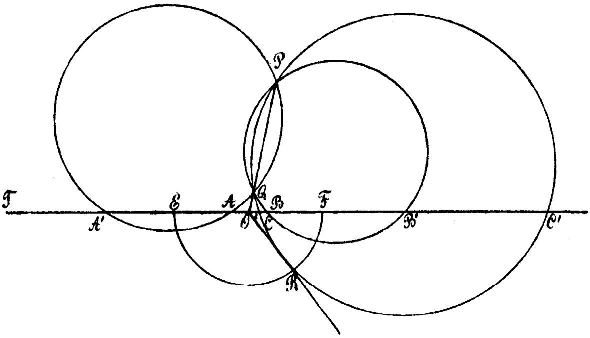
У првом случају је дискриминанта $b^2 - ad > o$; инволуторни низови имају две различите двојне тачке — инволуција је, као што се то каже, *хиперболична*. У другом случају је $b^2 - ad = o$; двојне тачке се поклапају, а инволуција је *параболична*. У трећем случају је $b^2 - ad < o$; двојне тачке су имагинарне, а инволуција је *елиптична*.

148. Ми ћемо сад да покажемо, како се могу конструјисати; 1-во, централна тачка; 2-го, један пар коњугованих тачака и 3-ће, двојне тачке, ако их у опште има.

Нека су тога ради A и A', B и B' парови коњугованих тачака, које опредељују инволуцију на основи T. Изван те основе ћемо узети негде једну тачку P и потегнућемо кроз тачке (A, A', P) и (B, B', P) два круга. Ови ће се сећи у тачкама P и Q. Ако правом PQ спојимо тачку P с тачком Q, биће тачка O' у којој та права сече основу T централна тачка инволуције, јер је

$$O'P \cdot O'Q = O'A \cdot O'A' = O'B \cdot O'B' = const.$$

Потегнимо сад један круг кроз тачке P, Q и кроз неку тачку C дате основе. Тачка C' у којој тај круг сече основу је коњугована тачка тачке C, јер је производ $O'C \cdot O'C'$ степен инволуције.



Сл. 71.

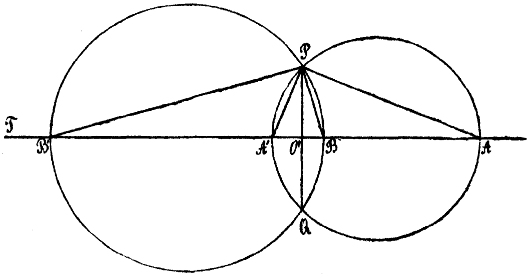
Најпосле, ако бисмо ма на који од кругова, н. пр. на круг што пролази кроз тачке P, Q, C повукли из тачке O' тангенту $O'R$, па ако бисмо њом као полупречником описали један круг око тачке O', биле би тачке E и F у којима он сече основу двојне тачке, јер је

$$\overline{O'E}^2 = \overline{O'F}^2 = \overline{O'R}^2 = O'C \cdot O'C'.$$

Напомена. Кад би тачка P лежала на једној, а тачка Q на другој страни дате основе, биле би двојне тачке имагинарне. У поменутом случају су на име спрегнуте тачке одвојене централном тачком. Та инволуција била би елиптична.

Напротив, кад би основа *T* пролазила било кроз тачку *P*, било кроз тачку *Q*, онда би инволуција била параболична. У том случају би се на име двојне тачке поклапале. — Инволуција тачака *A* и *A'*, *B* и *B'* и т. д. сл. 71. је хиперболична.

149. До коњугованих тачака елиптичне инволуције можемо доћи на овај начин: обртаћемо један прав угао око темена његова, па ће нам краци његови сећи заједничку основу у двема тачкама, које су у елиптичној инволуцији. Узмимо само да је инволуција дата тачкама *A* и *A'*, *O'* и ∞. Како је инволуција елиптична, а тачка *O'* централна тачка, јасно је да ће тачке *A* и *A'* лежати с једне и с друге стране тачке *O'*.



Сл. 72.

Опишимо око одсечка *AA'* као пречника један круг и повуцимо кроз тачку *O'* управну *PQ* на основу *T*. Угао *A'PA* био би прав угао, а краци његови *A'P* и *AP* секли би основу *T* у двема коњугованим тачкама. Повуцимо сад кроз тачке *P*, *Q* и кроз неку — ма коју — тачку *B* основе *T* један круг. Тај круг ће сећи основу *T* још у једној тачци — у тачци *B'*. Како је с једне стране

$$\overline{O'P}^2 = O'A \cdot O'A',$$

а с друге стране

$$\overline{O'P}^2 = O'B \cdot O'B',$$

биће и

$$O'A \cdot O'A' = O'B \cdot O'B',$$

а по том се већ види, да тачка B' инволуторно одговара тачци B, јер је производ раздаљинâ тих двеју тачака од централне тачке = производу раздаљинâ тачака A и A' од те исте тачке. Међу тим је угао $B'PB$ прав; према томе ће краци правог угла, који се обрће око свог темена P, заиста сећи основу T у двема тачкама, које су у елиптичној инволуцији.

150. Инволуторним низовима тачака одговарају дуално *инволуторни прамени зракова*; то су на име они концентрични пројективни прамени, у којима су спрегнути зраци коњуговани, т. ј. прамени, у којима неком зраку a — био он елеменат првог или другог прамена — свакад пројективно одговара један и исти зрак a' другог или првог прамена. По тој дефиницији види се да релација

$$amm' + bm + cm' + d = o,$$

која постоји између параметара m и m' спрегнутих зракова, мора бити симетрична функција тих параметара; према томе ће и у овај мах бити $b = c$, т. ј. кад зраци, које опредељују параметри m и m', инволуторно један другом одговарају, онда је

$$amm' + b(m + m') + d = o. \qquad (34)$$

151. Резултати до којих дођосмо посматрајући инволуторне низове, постоје махом и овде.

И у овај мах н. пр. опредељују инволуцију два пара коњугованих елемената; и у овај мах има два двојна, реална или имагинарна зрака; и у овај мах су ма која два коњугована зрака хармонијски коњугована према двојним зрацима и т. д., и т. д. —

Прим. 1. Наћи погодбу под којом ће три пара правих

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = o, \quad a''x^2 + 2b''xy + c''y^2 = o,$$
$$a'''x^2 + 2b'''xy + c'''y^2 = o$$

бити у инволуцији. —

Нека је

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = o$$

еквација двојних зракова. Ти зраци леже хармонијски према поменутим паровима, па је с тога

$$ca' - 2bb' + ac' = o,$$

$$ca'' - 2bb'' + ac'' = o,$$

$$ca''' - 2bb''' + ac''' = o,$$

т. ј. погодба је ово:

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = o.$$

Прим. 2. Доказати да ће зраци a и a', b и b', c и c' инволуторно један другом одговарати, ако је

$$\sin(ab') \cdot \sin(bc') \cdot \sin(ca') = \sin(ac') \cdot \sin(ba') \cdot \sin(cb')$$

$$\sin(ab') \cdot \sin(bc) \cdot \sin(c'a') = \sin(ac) \cdot \sin(ba') \cdot \sin(c'b')$$

$$\sin(bc') \cdot \sin(ca) \cdot \sin(a'b') = \sin(ba) \cdot \sin(cb') \cdot \sin(a'c')$$

$$\sin(ca') \cdot \sin(ab) \cdot \sin(b'c') = \sin(cb) \cdot \sin(ac') \cdot \sin(b'a').$$

152. *У концентричним инволуторним праменима имају два коњугована зрака, који се секу под правим углом.* Ти зраци зову се *осовинама инволуције.*

Ако у инволуторним праменима има осовинâ, онда ће параметри m и m', који опредељују правац тих осовина, међу собом бити везани овим двема релацијама:

$$mm' + 1 = o,$$

$$amm' + b(m + m') + d = o.$$

Ако сменимо у другој еквацији m' са $-\dfrac{1}{m}$, добићемо ову квадратну екваицју:

$$bm^2 + (d - a)\, m + b = o. \qquad (35)$$

Коренима ове квадратне еквације биће дакле представљени параметри m и m' који одређују осовине. Но како та еквација постоји кадгод постоји и релација (34), јасно је да ће и осовине инволуције свакад постојати.

Из последње еквације се уједно види и ово: *ако се у инволуторним праменима коњуговани зраци двају парова секу под правим углом, онда ће се они у опште и у сваком другом пару сећи под правим углом.*

У овом случају имала би квадратна еквација (35) више од два корена; према томе мора бити $a = d$, а $b = o$. Кад постоје те погодбе, преобразиће се општа релација (34) у ову специјалну:

$$mm' + 1 = o,$$

а по овој релацији се види, да се коњуговани зраци ма у ком пару секу под правим углом.

Ова важна инволуција зове се *ортогонална инволуција.* Осовине те инволуције нису определене. Правац двојних зракова те инволуције је определен овом квадратном еквацијом:

$$m^2 + 1 = o,$$

а по томе се види, *да су у ортогоналној инволуцији двојни зраци изотропне праве*; коефицијенат који одређује правац тих зракова је на име $m = +i$ или $m = -i$.

◆

КЊИГА ТРЕЋА

КРУГ

ОДЕЉАК ПРВИ

Еквације круга

153. Претпоставићемо да је система ортогонална и узећемо *ма где* на кругу једну тачку $P\ (x,\ y)$. Нека је $C\ (\alpha,\ \beta)$ средиште, а r полупречник. Биће

$$CP = r$$

или

$$\overline{CP^2} = r^2;$$

с тога је еквација круга овог облика:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \qquad (1)$$

или

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = o. \qquad (2)$$

По тој еквацији види се ово: 1-во, *да је еквација круга другог степена, т. ј. да је круг крива другог реда*; 2-го, *да су коефицијенти који стоје у еквацији уз* x^2 *и* y^2 *једнаки*; 3-ће, *да у еквацији нема члана у ком би се јављао производ* xy. *Према томе ће општа квадратна еквација*

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o \qquad (3)$$

у ортогоналној системи представљати круг само ако је

$$a = b, \quad h = o.$$

Општа еквација круга била би дакле овог облика:

$$a\,(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = o. \qquad (4)$$

Специјални случајеви. 1-во. Нека је почетак координатне системе у средишту. У том случају биће

$$x^2 + y^2 = r^2$$

еквација круга, јер је у овом случају $\alpha = o$, $\beta = o$.

2-го. Ако почетак лежи на периферији, биће еквација круга овог облика:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = o,$$

јер је у овом случају $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$. У овој еквацији нема апсолутног члана; *свака еквација круга, у којој нема апсолутног члана, представљаће један од оних кругова који пролазе кроз почетак.* Јер ако је н. пр. еквација круга овог облика:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = o,$$

јасно је да ће бити и

$$o^2 + o^2 + 2g\,.\,o + 2f\,.\,o = o,$$

а по томе се види, да тачка (o, o), т. ј. почетак, заиста лежи на кругу. — Поменута теорема могла би се из сличних разлога применити на еквацију сваке друге криве: *ако у еквацији криве нема апсолутног члана, онда крива пролази кроз почетак координатне системе.*

3-ће. Ако почетак лежи на периферији, и ако особина x пролази кроз средиште, биће еквација круга ово:

$$(x - \alpha)^2 + (y - o)^2 = r^2$$

или

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$$

или

$$x^2 + y^2 = 2rx,$$

јер је у овом случају $\alpha = r$.

4-то. Ако почетак лежи на периферији, и ако особина y пролази кроз средиште, биће еквација круга ово:

$$(x - o)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

или

$$x^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

или

$$x^2 + y^2 = 2ry,$$

јер је у овом случају $\beta = r$. —

Ако је система коса под углом ω, биће

$$\overline{CP}^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2\,(x - \alpha)\,(y - \beta)\,cos\omega,$$

па је с тога еквација круга ово:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2\,(x-\alpha)\,(y-\beta)\,cos\omega=r^2 \qquad (5)$$

или

$$x^2+y^2+2xycos\omega-2\,(\alpha+\beta cos\omega)\,x-2\,(\beta+\alpha cos\omega)\,y$$
$$+\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta cos\omega-r^2=o. \qquad (6)$$

Према томе ће општа квадратна еквација (3) моћи у косој системи представљати круг само ако је

$$a = b, \quad h = acos\omega$$

или

$$a = b = \frac{h}{cos\omega}\cdot$$

Напомена. По Хесе-у *(Analytische Geometrie, p. 182.)* каже се, да је еквација круга *нормалног облика*, кад су у тој еквацији коефицијенти, који стоје уз x^2 и y^2, $= 1$; такве би биле ове еквације:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

или

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

или

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$$

и т. д.; све друге еквације биле би *општег облика*; еквације општег облика биле би дакле еквације, које би се, тек кад се помноже неким сталним коефицијентом, прерушиле у нормалан облик. —

У косој системи је еквација

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2\,(x - \alpha)\,(y - \beta)\cos\omega = r^2$$

и т. д. нормалног облика.

154. *Наћи средиште и полупречник круга*

$$a\,(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = o. \qquad (7)$$

Ову еквацију прерушићемо у нормалан облик и написаћемо је овако:

$$\left(x + \frac{g}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{f}{a}\right)^2 = \frac{g^2 + f^2 - ac}{a^2}.$$

Кад се та еквација упореди са основном еквацијом (1), видеће се ово:

1-во, да су координате средишта

$$\alpha = -\frac{g}{a}, \quad \beta = -\frac{f}{a};$$

2-го, да је полупречник круга

$$r = \frac{\sqrt{g^2 + f^2 - ac}}{a}.$$

Према последњем обрасцу јасно је 1-во, да је круг (7) реалан, ако је $g^2 + f^2 - ac > o$; 2-го, да је круг имагинаран, ако је $g^2 + f^2 - ac < o$; 3-ће, да се круг претвара у једну тачку, ако је $g^2 + f^2 - ac = o$. — У овом последњем случају је еквација круга овог облика:

$$\left(x + \frac{g}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{f}{a}\right)^2 = o;$$

та еквација представља нам међу тим две изотропне праве, које се из тачке $\left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right)$ гранају у бескрајност; према томе можемо рећи, да ће под погодбом $g^2 + f^2 - ac = o$ еквација (7) представљати две изотропне праве, које се секу у реалној тачци $\left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right)$.

Кад би координатна система била коса, била би општа еквација круга овог облика:

$$a\,(x^2 + y^2 + 2xycos\omega) + 2gx + 2fy + c = o, \qquad (8)$$

а средиште и полупречник тог круга нашли бисмо овако: поредићемо еквацију (8) са еквацијом (6); тим путем ћемо добити ове релације:

$$\alpha + \beta cos\omega = -\frac{g}{a}, \quad \beta + \alpha cos\omega = -\frac{f}{a}, \qquad (9)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta cos\omega - r^2 = \frac{c}{a}; \qquad (10)$$

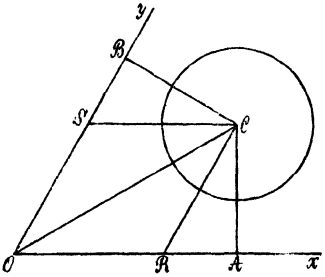
детерминанта системе првих двеју еквација није равна нули ($1 - cos^2\omega$ је веће од нуле), па ћемо с тога из првих двеју еквација моћи определити координате α и β средишта. Коренима тих двеју еквација могли бисмо сменити α и β у трећој релацији, па бисмо добили и вредност полупречника r.

Конструкцијом бисмо на овај начин нашли средиште круга (8). — Претпоставићемо за један часак да је средиште C (α, β) круга познато. Ако ортогонално пројицирамо потег OC на осовине, па одмах за тим на осовинама одмеримо и координате средишта: $OR = \alpha$, $OS = \beta$, биће

$$OA = OR + RA,\ OB = OS + SB$$

или

$$OA = \alpha + \beta cos\omega,\ OB = \beta + \alpha cos\omega;$$



Сл. 73.

према обрасцима (9) биће дакле

$$OA = -\frac{g}{a},\ \ OB = -\frac{f}{a},$$

а по томе се види како се може конструјисати средиште: треба наћи тачке $A\left(-\frac{g}{a}, o\right)$ и $B\left(o, -\frac{f}{a}\right)$; у тим тачкама треба подићи нормале AC и BC на осовине; средиште круга је тачка у пресеку тих двеју нормала.

Напомена. У еквацијама којима је опредељено средиште било у једној, било у другој системи нема апсолутног члана c; *два круга имају дакле исто средиште, кад се њихове еквације разликују само у апсолутном члану.*

Прим. 1. Наћи средиште и полупречник круга

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y = 16.$$

У овој еквацији је $a = 1$, $g = -2$, $f = -4$, $c = -16$, па су с тога координате средишта ово:

$$\alpha = 2,\ \beta = 4,$$

а полупречник је

$$r = 6.$$

До истих резултата могли бисмо доћи и овим путем. Прерушићемо дату еквацију у ову:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 6^2,$$

а по тој еквацији се види и т. д.

Прим. 2. Прерушити у облик $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ ове еквације:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 6y - 7 = o,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = o,$$

$$(3) \qquad 9(x^2 + y^2) - 42x + 36y = 59.$$

Одг. (1) $\quad x^2 + (y - 3)^2 = 4^2,$

(2) $\quad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2^2,$

(3) $\quad \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + (y + 2)^2 = 1^2.$

Прим. 3. Наћи средиште и полупречник ових кругова:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = o,$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y = o,$$

$$4x^2 + 4y^2 + 12ax - 6ay - a^2 = o.$$

Одг. $\quad (2, -2),\ 3\ ;\ (-1, 3), \sqrt{10}\ ;\ \left(-\frac{3a}{2}, \frac{3a}{4}\right), \ \frac{7a}{4}.$

Прим. 4. Шта представља еквација

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = o\,?$$

Одг. Две изотропне праве

$$(x - 3) + i\,(y - 4) = o, \quad (x - 3) - i\,(y - 4) = o,$$

које се секу у реалној тачци $(3, 4)$.

Прим. 5. Наћи дужину корде коју круг

$$x^2 + y^2 - 5x - 6y + 6 = o$$

исеца на осовини x.

Еквација осовине x је $y = o$; с тога ће апсцисе тачака, у којима осовина x сече круг, бити корени ове квадратне еквације: $x^2 - 5x + 6 = o$. Тачке у којима осовина x сече дат круг биће дакле $(2, 0)$ и $(3, 0)$, па је према томе и одсечак $= \sqrt{(3-2)^2 + (o-o)^2} = 1.$

Прим. 6. Тачка $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ лежи на кругу

$$x^2 + y^2 = r^2. \text{ —}$$

Та тачка зове се «тачка θ», а круг моћи ћемо представити и овим *двем* вацијама:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

у којима се јавља *један* параметар θ.

Прим. 7. Корде круга $x^2 + y^2 = r^2$ пролазе кроз сталну тачку (x', y'); наћи место срединâ њихових.

Ако су $(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$, $(r\cos\beta,\ r\sin\beta)$ тачке на крајевима неке између поменутих корада, биће еквација те корде овог облика:

$$x\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + y\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ми ћемо дакле морати елиминирати α и β из ових трију еквација:

$$x'\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + y'\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = r\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$2x = r(\cos\alpha + \cos\beta),\quad 2y = r(\sin\alpha + \sin\beta).$$

Резултат елиминације је

$$x^2 + y^2 - xx' - yy' = o,$$

т. ј. место срединâ поменутих корада је круг један, који пролази кроз тачку (x', y').

Прим. 8. Доказати да је полупречник круга

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 + 2gx + 2fy + c = o \qquad (\alpha)$$

опредељен обрасцем $\triangle + r^2\sin^2\omega = o$; у том обрасцу је $\triangle$ дискриминанта квадратне еквације (α).

У овај мах ће се еквације (9) и (10) преобразити у ове:

$$\alpha + \beta\cos\omega + g = o,\quad \beta + \alpha\cos\omega + f = o,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\omega - r^2 - c = o.$$

Прву између ових двеју еквација помножићемо са α, а другу са β и одузећемо од збира њихова трећу еквацију. Резултат је ово:

$$g\alpha + f\beta + c + r^2 = o.$$

Из ове еквације и првих двеју елиминираћемо α и β; резултат елиминације је ово:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & g \\ \cos\omega & 1 & f \\ g & f & c + r^2 \end{vmatrix} = o$$

или

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & g \\ \cos\omega & 1 & f \\ g & f & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & o \\ \cos\omega & 1 & o \\ g & f & r^2 \end{vmatrix} = o$$

или

$$\triangle + r^2 sin^2 \omega = o,$$

а то смо и тврдили. По овом обрасцу види се ово троје: 1-во, да је круг реалан, ако је $\triangle < o$; 2-го, да је круг имагинаран, ако је $\triangle > o$; 3-ће, да ће се круг (α) изметнути у систему двеју (изотропних) правих, ако је дискриминанта $\triangle$ еквације $(\alpha) = o$.

Прим. 9. Ако еквација

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y = o$$

представља круг, доказати да је $\omega = 60^0$ и наћи средиште и полупречник.

Одг. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$; $\frac{1}{3}\sqrt{21}$.

Прим. 10. Средиште круга је (1, — 2), полупречник је 5, а угао координатне системе је 120^0. Наћи еквацију круга.

Одг. $x^2 - xy + y^2 - 4x + 5y - 18 = o.$

155. *Моћ неке тачке с обзиром на круг је или позитивна, или = о или негативна; у првом случају је тачка изван периферије, у другом случају је тачка накружна, а у трећем случају је тачка у периферији.*

1-во. *Нека тачка (x', y') лежи изван круга.* Ако је еквација круга овог облика:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = o,$$

биће моћ тачке $P\,(x', y')$ ово:

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 - r^2$$

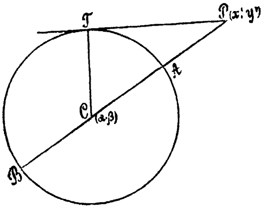
или

$$\overline{CP}^2 - r^2,$$

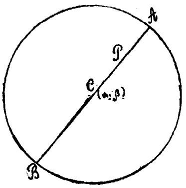
а то је позитивна количина јер је $CP > r$. Ако је PT тангента која је са тачке P повучена на круг, биће угао PTC прав, па је с тога

$$\overline{CP}^2 - r^2 = \overline{PT}^2,$$

т. ј. *квадрат тангенте, која је из неке тачке* (x', y') *повучена на круг чија је еквација нормалног облика, добива се кад се у полиному еквације координате* x *и* y *смене са* x' *и* y'.



Сл. 74.



Сл. 75.

2-го. *Нека је тачка* (x', y') *накружна.* — У овом случају мора бити моћ $(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 - r^2$ тачке $(x', y') = o$.

3-ће. *Нека тачка* (x', y') *лежи у периферији.* — У овом случају је

$$CP^2 - r^2 = -(r^2 - \overline{CP}^2)$$

или

$$CP^2 - r^2 = -(r - CP)(CP + r) = -AP \cdot PB,$$

а $-AP \cdot PB$ је негативна количина.

156. *Наћи поларну еквацију круга.*

Први метод. — Сменићемо у еквацији

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$$

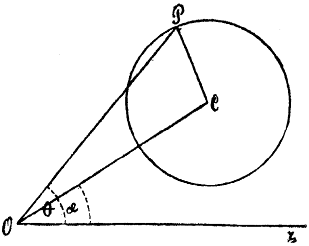
x и y са $\rho \cos\theta$ и $\rho \sin\theta$ и добићемо тим путем поларну еквацију круга. Ево те еквације:

$$\varrho^2 + 2\varrho\,(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = o. \qquad (11)$$

Кад круг пролази кроз почетак координатне системе, онда је $c = o$, па је с тога у том случају поларна еквација круга ово:

$$\varrho + 2\,(g\cos\theta + f\sin\theta) = o. \qquad (12)$$

Други метод. — Нека је O пол, а Oz поларна осовина. У тој системи означићемо са d, α координате средишта C, са r полупречник PC, а са ϱ, θ координате ма које накружне тачке P. Како је



Сл. 76.

$$\overline{CP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - 2OP \cdot OC\cos COP,$$

биће

$$r^2 = \varrho^2 + d^2 - 2\varrho d\cos\,(\theta - \alpha) \qquad (13)$$

поларна еквација круга; та еквација може се и овако написати:

$$\varrho^2 - 2\varrho d\cos\,(\theta - \alpha) + d^2 - r^2 = o. \qquad (14)$$

Ако је права OC поларна осовина, биће $\alpha = o$; услед тога је поларна еквација круга овог облика:

$$\varrho^2 - 2\varrho d\cos\theta + d^2 - r^2 = o. \qquad (15)$$

Специјални случајеви. 1-во. Нека је пол на периферији. — У том случају биће поларна еквација круга ово:

$$\varrho = 2r\cos\,(\theta - \alpha),$$

јер је $d = r$. — Еквација (15) преобразила би се у овом случају у ову еквацију:

$$\varrho = 2r \cos \theta.$$

2-го. Нека је пол на периферији, а поларна осовина тангента круга. — Еквација круга биће ово:

$$\varrho = 2r \sin \theta,$$

јер је у овом случају $d = r$, а $\alpha = 90^\circ$.

3-ће. Нека је пол у средишту. — У овом случају је

$$\varrho = r$$

еквација круга.

Прим. 1. Нека права $OP'P$ сече круг у двема тачкама P' и P. Са C ћемо означити средиште; доказати да је

$$OP \cdot OP' = \overline{OC}^2 - \overline{CP}^2. -$$

$\overline{OC}^2 - \overline{CP}^2$ је $= d^2 - r^2$; по еквацији (14) види се да је $OP \cdot OP' = d^2 - r^2$, па је с тога и $OP \cdot OP' = \overline{OC}^2 - \overline{CP}^2$.

Прим. 2. Кроз неку накружну тачку O повући ћемо дијаметар d и узећемо тај дијаметар за поларну осовину. Повуцимо сад из тачке O три корде OA, OB, OC које затварају угле α, β, γ са дијаметром и опишимо око њих као дијаметара кругове. Наћи еквације тих кругова.

Биће

$$\varrho = OA \cos(\theta - \alpha),\ \varrho = OB \cos(\theta - \beta),\ \varrho = OC \cos(\theta - \gamma),$$

па како је

$$OA = d \cos \alpha,\ OB = d \cos \beta,\ OC = d \cos \gamma,$$

биће еквације кругова ово:

$$\varrho = d \cos \alpha \cos(\theta - \alpha),\ \varrho = d \cos \beta \cos(\theta - \beta),\ \varrho = d \cos \gamma \cos(\theta - \gamma).$$

Прим. 3. Доказати да еквација

$$\varrho = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta$$

представља један круг; наћи полупречник његов и поларне координате средишта.

Дата еквација се може овако написати:

$$\varrho^2 = 2a(\varrho \cos\theta) + 2b(\varrho \sin\theta);$$

према томе је у паралелним координатама еквација овог облика:

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by,$$

т. ј дата еквација заиста представља круг. Полупречник тог круга је $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а поларне координате средишта су ово:

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = arctg\,\frac{b}{a}\cdot$$

157. Треба знати три линеарне погодбе, па да круг буде определен.

Нека је н. пр. еквација круга овог облика:

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = o.$$

Сваком погодбом биће определена по једна линеарна релација која постоји између параметара $\frac{g}{a}$, $\frac{f}{a}$, $\frac{c}{a}$; три погодбе треба дакле знати, па да параметри $\frac{g}{a}$, $\frac{f}{a}$, $\frac{c}{a}$ буду определени, а то смо и тврдили.

ОДЕЉАК ДРУГИ

Појам

158. *Наћи еквацију кругова који пролазе кроз дате две тачке (a, o) и (a', o) осовине x.*

Нека је

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$$

еквација тих кругова. Апсцисе a и a' оних двеју тачака, у којима тај круг сече осовину x, биће корени ове квадратне еквације:

$$x^2 + 2gx + c = o;$$

према томе је

$$2g = -(a + a'), \quad c = aa',$$

па је с тога

$$x^2 + y^2 - (a + a')\,x + 2fy + aa' = o$$

еквација оних кругова, који пролазе кроз дате две тачке осовине x.

Сличним путем могло би се доказати, да је

$$x^2 + y^2 + 2gx - (b + b')\,y + bb' = o$$

еквација оних кругова, који пролазе кроз две сталне тачке (o, b) и (o, b') осовине y.

У свакој између тих двеју еквација имамо по један неопредељен параметар — у првој параметар f, а у другој параметар g — а то ће рећи да има бескрајно много кругова који пролазе кроз две сталне тачке прве, или кроз две сталне тачке друге осовине.

Прим. Наћи еквацију онога круга који неку праву сече у тачкама A и A', а другу неку праву у тачкама B и B'.

Те две праве сећи ће се у опште под неким углом ω. Узмимо те две праве за осовине. Нека је у тој системи

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$$

еквација оног круга о коме је у овај мах реч. Ако су a и a' апсцисе, а b и b' ординате тачака у пресеку, биће

$$x^2 + 2gx + c \equiv x^2 - (a + a')\,x + aa',$$

$$y^2 + 2fy + c \equiv y^2 - (b + b')\,y + bb',$$

па је с тога

$$2g = -(a + a'),\quad 2f = -(b + b'),\quad c = aa' = bb';$$

еквација круга који пролази кроз тачке A и A', B и B' биће дакле ово:

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - (a + a')\,x - (b + b')\,y + aa' = o.$$

159. *Нека права сече један круг у тачкама A и B. Наћи еквацију круга који је описан око корде AB као дијаметра.*

Нека су еквације праве и круга ово:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o,\quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Ако из ових двеју еквација елиминирамо најпре y, па онда x, добићемо ове две квадратне еквације:

$$x^2 - 2px\cos\alpha + p^2 - r^2\sin^2\alpha = o, \qquad (1)$$

$$y^2 - 2py\sin\alpha + p^2 - r^2\cos^2\alpha = o. \qquad (2)$$

Прва квадратна еквација представља две праве које иду паралелно са осовином y, а поред тога пролазе и кроз тачке A и B; друга еквација представља опет две праве које иду паралелно са осовином x, а поред тога још и пролазе кроз тачке A и B. Јасно је да ће нам збир еквација (1) и (2) морати представљати једно место, које пролази кроз тачке у којима праве (1) секу праве (2). Свега имају четири такве тачке; оне су темена једног правоугаоника, а једна дијагонала његова је корда AB. Међу тим је еквација, која се добива кад се саберу еквације (1) и (2), овог облика:

$$x^2 + y^2 - 2p\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) - r^2 = o; \qquad (3)$$

та еквација представља као што видимо један круг, који би, по оном што мало час рекосмо, морао бити описан око дијагонале AB као дијаметра.

Прим. 1. Права $3x + y - 25 = o$ сече круг $x^2 + y^2 - 65 = o$ у тачкама A и B. Наћи круг који је описан око корде AB као дијаметра. —

Нормалан облик еквације дате праве је ово:

$$\frac{3x + y - 25}{\sqrt{3^2 + 1}} = o$$

или

$$\frac{3x + y - 25}{\sqrt{10}} = o,$$

па је с тога еквација, коју тражимо, овог облика:

$$x^2 + y^2 - \frac{2 \cdot 25}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3x + y - 25}{\sqrt{10}} - 65 = o$$

или

$$x^2 + y^2 - 15x - 5y + 60 = o.$$

Прим. 2. Наћи погодбу под којом ће се део који круг $x^2 + y^2 - r^2 = o$ исеца на правој $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o$ из тачке (x', y') видети под правим углом.

Одг. Тачка (x', y') мораће лежати на периферији круга (3), па ће с тога погодба бити ово:

$$x'^2 + y'^2 - 2p\,(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p) - r^2 = o.$$

Прим. 3. Дата је нека тачка P (x', y'). Корда AB датог неког круга тако се креће, да је угао APB прав. Наћи место средине корде AB.

Ако је AB дијаметар круга (3), биће његова средина средиште круга (3). Управна p, која је са средишта датог круга спуштена на корду AB, пролазиће кроз средину (x, y) те корде, па је услед тога

$$x = p \cos \alpha, \quad y = p \sin \alpha, \quad x^2 + y^2 = p^2;$$

заменимо сад у погодбеној релацији, коју смо мало час написали у прим. 2., $p \cos \alpha$ са x и т. д.; тим путем ћемо добити ову еквацију:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + x^2 + y^2 - r^2 = o,$$

а то је еквација једнога круга.

160. *Наћи еквацију круга који пролази кроз три дате тачке* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

Нека је само за један часак

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = o \qquad (4)$$

еквација оног круга о коме је у овај мах реч. Тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) леже на том кругу; с тога ће бити

$$a(x_1^2 + y_1^2) + 2gx_1 + 2fy_1 + c = o,$$

$$a(x_2^2 + y_2^2) + 2gx_2 + 2fy_2 + c = o,$$

$$a(x_3^2 + y_3^2) + 2gx_3 + 2fy_3 + c = o.$$

Из ове три линеарне погодбене релације ћемо израчунати вредности непознатих параметара $\frac{g}{a}$, $\frac{f}{a}$, $\frac{c}{a}$, па ћемо их за тим сменити у еквацији (4). Тим путем бисмо већ добили еквацију оног круга који пролази кроз три тачке. Но, место да идемо тим заметним путем, а ми ћемо просто из еквације (4) и последњих трију погодбених релација елиминирати непознате параметре a, $2g$, $2f$, c. Елиминанта системе тих еквација већ ће бити еквација оног круга који пролази кроз дате три тачке; она је овог облика:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = o. \qquad (5)$$

— Кад знамо еквацију круга који пролази кроз три дате тачке P_1, P_2, P_3, наћи ћемо лако погодбу под којом ће четири тачке P_1, P_2, P_3, P_4 лежати на једном кругу. Треба само у еквацији (5) сменити x и y координатама x_4 и y_4 оне четврте накружне тачке P_4, па ћемо одмах добити поменуту погодбу. Та погодбена еквација биће дакле ово:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = o. \qquad (6)$$

Елементи прве колоне ове детерминанте представљају квадрате раздаљина појединих тачака P_1, P_2, P_3, P_4 од почетка O координатне системе:

$$\overline{OP}_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \; (i = 1, 2, 3, 4),$$

а минорима тих елемената су представљене двојне површине $2A_1$, $2A_2$, $2A_3$, $2A_4$ троуглова $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_1$, $P_4P_1P_2$, $P_1P_2P_3$. Ако сад развијемо детерминанту (6) по елементима прве колоне, биће

$$\overline{OP}_1^2 \cdot P_2P_3P_4 - \overline{OP}_2^2 \cdot P_3P_4P_1 + \overline{OP}_3^2 \cdot P_4P_1P_2 - \overline{OP}_4^2 \cdot P_1P_2P_3 = o$$

или

$$\overline{OP}_1^2 \cdot A_1 - \overline{OP}_2^2 \cdot A_2 + \overline{OP}_3^2 \cdot A_3 - \overline{OP}_4^2 \cdot A_4 = o. \qquad (7)$$

Према томе се може тврдити ово: ако око четвороугла $P_1P_2P_3P_4$ опишемо један круг и ако поред тога ма где у равни узмемо једну тачку O, онда ће између раздаљина OP_i и површина оних четирију троуглова, које добивамо конструкцијом дијагонала у датом четвороуглу, постојати релација (7). —

Сви чланови на левој страни еквације (7) мењаће се, ако се тачка O буде кретала по равни; алгебарски збир тих чланова биће међу тим у сваком специјалном случају = o. Ми ћемо сад претпоставити, да тачка O лежи на тачци P_1, за тим на тачци P_2, па на тачци P_3 и најпосле и на тачци P_4. У сваком специјалном случају добићемо по једну релацију, а свега ће их бити четири на број; ево их:

$$o \,.\, A_1 - d_{12}A_2 + d_{13}A_3 - d_{14}A_4 = o,$$

$$d_{21}A_1 - o \,.\, A_2 + d_{23}A_3 - d_{24}A_4 = o,$$

$$d_{31}A_1 - d_{32}A_2 + o \,.\, A_3 - d_{34}A_4 = o,$$

$$d_{41}A_1 - d_{42}A_2 + d_{43}A_3 - o \,.\, A_4 = o.$$

У овим еквацијама смо са $d_{ik} = d_{ki}$ означили квадрат корде $P_iP_k = P_kP_i$. Ако из системе ових еквација елиминирамо A_1, A_2, A_3, A_4, добићемо ово:

$$\begin{vmatrix} o & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & o & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & o & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & o \end{vmatrix} = o, \qquad (8)$$

а то је, као што видимо, опет једна релација која постоји између раздаљина двеју и двеју тачака у групи четирију тачака периферије једнога круга.

До те важне релације можемо доћи и на овај веома прост начин (*Cayley. Cambridge and Dublin mathem. Journal II.*). — Помножимо најпре елементе друге и треће колоне детерминанте (6) са — 2; даље, помножимо детерминанту коју смо тим путем добили, детерминантом

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y^2_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix};$$

резултат тог множења биће већ детерминанта (8).

Примери. Теореме и проблеме.

1. **Наћи еквацију круга, који пролази кроз почетак, а одсеца делове 3 и 4 на осовинама.**

Одг. $x^2 + y^2 = 3x + 4y$.

2. **Наћи еквацију круга, који пролази кроз тачке** $(o, o), (2, 3), (3, 4)$.

Одг. $x^2 + y^2 = 23x - 11y$.

3. **Наћи еквацију круга, који пролази кроз тачке** $(o, 1), (o, 5), (3, 2)$.

Одг. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = o$.

4. **Треба еквацији неког круга додати еквацију једне праве; доказати, да ће збир тих двеју еквација такођер представљати један круг.**

5. **Наћи тачке у којима права** $3x + y - 25 = o$ **сече круг** $x^2 + y^2 - 65 = o$.

Одг. $(7, 4), (8, 1)$; **тачке у пресеку су реалне и различите.**

6. **Наћи тачке у којима права** $x + y - 7 = o$ **сече круг** $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 3$.

Одг. $(3, 4), (3, 4)$; **тачке у пресеку су реалне; оне се поклапају, а права** *додирује* **круг.**

7. **Наћи тачке у којима права** $x + y - 12 = o$ **сече круг** $x^2 + y^2 - 25 = o$.

Одг. **Тачке у пресеку су коњуговано имагинарне, а координате њихове су** $x = \frac{1}{2} (12 \pm \sqrt{-94})$, $y = \frac{1}{2} (12 \mp \sqrt{-94})$.

8. **Наћи еквацију круга чији дијаметар спаја тачку** (x', y') **с тачком** (x'', y'').

Одг. $(x - x')(x - x'') + (y - y')(y - y'') = o$.

9. Наћи корду коју круг

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = o$$

исеца на правој

$$3x + 4y + 5 = o. -$$

Средиште круга је (2, 1), а полупречник му је 5. Нека је C средиште; означимо крајеве корде са A и B и спустимо управну CD на AB; тачка D половиће корду AB, па ће с тога бити $AB = 2AD$. Како је $CD = \perp$ са (2, 1) на

$$(3x + 4y + 5 = o) = 3,$$

биће и

$$AB = 2AD = 2\sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CD}^2} = 2\sqrt{25 - 9} = 8.$$

10. У неком троуглу ABC је дата основа AB и дат је угао C који према основи лежи. Наћи место темена C.

Нека су x', y'; x'', y'' координате тачака A и B. Еквација стране AC биће ово:

$$y - y' = m(x - x'),$$

а еквација стране BC биће ово:

$$y - y'' = m'(x - x'').$$

Та страна затвара са страном AC угао C, па је с тога

$$tgC = \frac{m - m'}{1 + mm'},$$

а одатле је

$$m' = \frac{m - tgC}{1 + mtgC}.$$

Према томе ћемо еквацију стране BC моћи и овако написати:

$$(1 + mtgC)(y - y'') = (m - tgC)(x - x'').$$

Из ове еквације и еквације стране AC елиминираћемо непознат параметар m, па ћемо добити еквацију места тачака C:

$$(x - x')(x - x'') + (y - y')(y - y'')$$
$$+ \cot C\,[(y' - y'')x - (x' - x'')y + x'y'' - x''y'] = o,$$

а та се еквација, као што видимо, састоји из еквације $K = o$ оног круга, који је описан око дијаметра AB и из еквације $U = o$ стране AB. Ту еквацију можемо дакле и овако написати:

$$K + U\cot C = o.$$

Кад је угао C прав, биће еквација места темена C ово: $K = o$.

11. Дати су страна AB и угао C према њој; доказати да је место орто-центара круг

$$K - U \cot C = o.$$

12. Наћи место средиштâ оних кругова, који пролазе кроз дате две тачке (x_1, y_1) и $(x_2. y_2)$.

Еквацију кругова који пролазе кроз дате две тачке можемо овако написати:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda[(x-x_1)(y-y_2)-(x-x_2)(y-y_1)]=o;$$

по тој еквацији се на име види, да место, које она представља, пролази кроз тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2); поред тога је еквација квадратна, коефицијенти који стоје уз x^2 и y^2 су једнаки, а члана у ком би се јављало xy нема, т. ј. горња еквација заиста представља један круг који пролази кроз тачке (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Напишимо еквацију у развијеном облику:

$$x^2+y^2-[x_1+x_2+\lambda(y_2-y_1)]\,x-[y_1+y_2+\lambda(x_1-x_2)]\,y+\ldots=o.$$

Координате средишта тог круга су

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \lambda(y_2 - y_1)}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + \lambda(x_1 - x_2)}{2}.$$

Из ових двеју еквација треба елиминирати λ, па ћемо добити еквацију места средиштâ:

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

а то је еквација управне на средини праве што спаја тачку (x_1, y_1) с тачком (x_2, y_2).

13. У неком троуглу ABC дата је основа $AB = 2a$, и дат је збир квадрата осталих двеју страна BC и CA. Наћи место темена C.

За осовину x узећемо праву AB, а за осовину y управну на AB у средини дужи AB. Ако је $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 2m^2 = const.$, биће еквација места темена C ово:

$$[(a + x)^2 + y^2] + [(a - x)^2 + y^2] = 2m^2$$

или

$$x^2 + y^2 = m^2 - a^2,$$

т. ј. теме C описаће један круг.

14. Дато је n тачака; збир квадрата раздаљинâ тих тачака од неке тачке (x, y) је $= m^2 = const.$ Наћи место тачака (x, y).

Ако су x_1, y_1; x_2, y_2; ... координате датих тачака, биће еквација места ово:

$$[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]+[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]+\ldots=m^2$$

или

$$n(x^2+y^2)-2x\Sigma x_i-2y\Sigma y_i+\Sigma x_i^2+\Sigma y_i^2=m^2.$$

Место тачака (x, y) је дакле један круг, а средиште тога круга је тежиште системе датих тачака.

Да смо били претпоставили, да је m_1 пута квадрат раздаљине прве тачке од тачке $(x, y)+m_2$ пута квадрат раздаљине друге тачке од исте тачке $(x, y)+\ldots=m^2$, онда би место тачака (x, y) опет било један круг, а средиште тог круга било би тачка

$$\alpha=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m},\quad \beta=\frac{\Sigma my}{\Sigma m},$$

т. ј. средиште круга би било уједно и средиште сразмерних раздаљина датих тачака.

15. Наћи дужину тангенте која је са тачке (13, 8) повучена на круг

$$x^2+y^2+22x-2y=278.$$

Одг. 15.

16. A, B, C су три тачке на периферији једнога круга; са неке тачке O те периферије спустићемо управне на стране троугла ABC; доказати да подножја управних леже на једној правој ***(Симсонова права)***.

Нека је тачка O пол, а дијаметар d који пролази кроз O поларна осовина системе. Еквација круга биће

$$\varrho=d\cos\theta.$$

Нека су α, β, γ поларни угли тачака A, B, C. Како су $d\cos\beta$ и β координате тачке B, а $d\cos\gamma$ и γ координате тачке C, биће еквација праве BC ово;

$$d\cos\beta\cos\gamma=\varrho\cos(\beta+\gamma-\theta).$$

Еквација управне са O на праву BC биће

$$o=\varrho\sin(\beta+\gamma-\theta),$$

па су с тога координате подножја те управне ово:

$$\varrho=d\cos\beta\cos\gamma,\ \theta=\beta+\gamma.$$

Сличним путем би се дало доказати, да су

$$\varrho=d\cos\gamma\cos\alpha,\ \theta=\gamma+\alpha,$$

$$\varrho = d \cos\alpha \cos\beta, \; \theta = \alpha + \beta$$

координате подножја осталих двеју управних.

Јасно је да те три тачке леже на правој

$$d \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \varrho \cos(\alpha + \beta + \gamma - \theta). -$$

Координате подножја могли бисмо определити и на овај начин. Спојићемо тачке A, B, C са тачком O и описаћемо око корада OA, OB, OC као дијаметара кругове. Еквације тих кругова биће (прим. 2. чл. 156.) ово:

$$\varrho = d \cos\alpha \cos(\theta - \alpha), \quad \varrho = d \cos\beta \cos(\theta - \beta), \quad \varrho = d \cos\gamma \cos(\theta - \gamma).$$

Последња два круга секу се управо у оној тачци у којој управна са O на BC продире страну BC; тачка у пресеку тих двају кругова биће дакле прво између поменутих трију подножја, а координате његове ћемо наћи овако. За тачку у пресеку тих двају кругова је

$$d \cos\beta \cos(\theta - \beta) = d \cos\gamma \cos(\theta - \gamma)$$

или

$$\cos\beta \cos(\theta - \beta) = \cos\gamma \cos(\theta - \gamma),$$

а по тој релацији се види, да θ мора бити $= \beta + \gamma$; сменивши θ са $\beta + \gamma$ било у еквацији једног, било у еквацији другог круга, добићемо потег подножја, а то је $d \cos\beta \cos\gamma$; према томе су координате једног подножја ово:

$$\varrho = d \cos\beta \cos\gamma, \; \theta = \beta + \gamma.$$

Сличним путем могли бисмо наћи и координате осталих двају подножја. Према свем томе моћи ћемо првобитну теорему овако изменити: ако се из накружне тачке O ма у ком правцу повуку три корде, па око тих корада као дијаметара опишу кругови, онда ће се ти кругови сећи у тачци O и још у три тачке, које леже на једној правој.

17. Два круга секу се у тачци O; кроз тачку O повући ћемо ма у ком правцу једну праву; ова ће сећи први круг у тачци A, а други круг у тачци B. Наћи место средине дужи AB.

Тачку O ћемо узети за почетак ортогоналне координатне системе. Нека су еквације датих двају кругова овог облика:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = o, \; x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y = o$$

или, у поларним координатама, ово:

$$\varrho + 2g \cos\theta + 2f \sin\theta = o, \; \varrho + 2g' \cos\theta + 2f' \sin\theta = o.$$

Ако је сад корда OAB из пола O повучена у правцу θ, биће

$$OA = -2g\cos\theta - 2f\sin\theta,\quad OB = -2g'\cos\theta - 2f'\sin\theta.$$

Нека је C средина дужи AB, а $OC = \varrho$; биће

$$2\varrho = OA + OB,$$

па је с тога еквација места ово:

$$2\varrho = -2(g+g')\cos\theta - 2(f+f')\sin\theta = o$$

или

$$\varrho + (g+g')\cos\theta + (f+f')\sin\theta = o$$

или, у паралелним координатама,

$$x^2 + y^2 + (g+g')x + (f+f')y = o,$$

а то је еквација једног круга, који такођер пролази кроз тачку O.

18. Наћи погодбу под којом ће се део, који круг

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$$

исеца на правој $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o$, из почетка координатне системе видети под правим углом.

Елиминираћемо из обадвеју еквација најпре y, па одмах за тим x и сабраћемо квадратне еквације које тим путем будемо добили. Та последња еквација представљаће онај круг, који је описан око корде коју дат круг исеца на датој правој; па како тај круг мора пролазити кроз почетак, јасно је, да апсолутан члан његове еквације мора бити $= o$, т. ј. погодба коју тражимо је ово:

$$2p^2 + 2p(g\cos\alpha + f\sin\alpha) + c = o.$$

19. Координате тачке A су $-a, o$, а координате тачке B су $+a, o$; наћи место тачке P која се тако креће, да је

$$PA = 2PB. -$$

Биће и

$$\overline{PA}^2 = 4\,\overline{PB}^2,$$

па је с тога и

$$(x+a)^2 + y^2 = 4\,[(x-a)^2 + y^2]$$

или

$$3(x^2+y^2) - 10ax + 3a^2 = o;$$

место је круг; средиште његово је $\left(\frac{5}{3}a,\ o\right)$, а полупречник $\frac{4}{3}a$.

20. Нека је $PA = n\,PB$; наћи место тачке P.

Одг. Круг; средиште је $\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}a,\ o\right)$, а полупречник $\frac{2n}{n^2-1}a$.

21. Наћи круг који пролази кроз почетак и кроз тачке у којима права $2x + 3y + 4 = o$ сече круг

$$x^2 + y^2 + 3x + 4y + 2 = o.$$

Одг. $2 (x^2 + y^2) + 4x + 5y = o$.

22. Наћи круг чији је дијаметар заједничка корда кругова

$$x^2 + y^2 - 23x + 11y = o, \quad x^2 + y^2 - 12x + 11 = o.$$

Одг. $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 18 = o$.

23. Дата је основа c неког троугла и $ab \sin (C - \alpha)$, где је α дат угао; доказати да је место темена C један круг.

Мак-Кêј.

Ако страну AB узмемо за осовину x, A за почетак, а $ab \sin (C - \alpha)$ означимо са k^2, биће еквација места темена C ово:

$$x^2 + y^2 - cx - cy \cot \alpha + k^2 \operatorname{cosec} \alpha = o.$$

24. A и B су две сталне тачке, а две тачке R и S се крећу по правој AB тако да је

$$\overline{AR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SB}^2 = k^2 = const.$$

Ако је PRS равностран троугао, наћи место тачке P.

25. Кроз неку тачку O повући ћемо три праве напоредо са странама a, b, c неког троугла; те напоредници ће сећи остале две стране у тачкама B и C, C' и A', A'' и B''; нека је збир

$$BO \cdot OC + C'O \cdot OA' + A''O \cdot OB'' = k^2 = const.;$$

наћи место тачке O.

26. Нека права сталне величине креће се по кругу; наћи место које ће описати ма која тачка те праве.

ТАНГЕНТА, НОРМАЛА И ПОЛАРА

161. A и B су (сл. 77.) две тачке криве MN; претпоставићемо да се тачка B без престанка приближује тачци A; права AT, којом ће бити обележен положај секанте AB кад тачка B при свом кретању најпосле падне на тачку A, назива се *тангента* криве у тачци A. —

Права, која под правим углом сече тангенту у додирној тачци A, назива се *нормала* криве у тачци A.

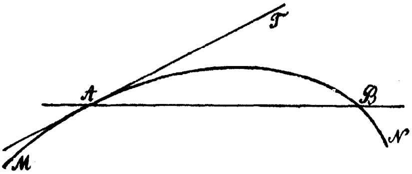
162. *Наћи еквацију тангенте круга*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

у тачци A $(x'\ y')$ тог круга.

Осим тачке A узећемо на кругу још једну тачку B (x'', y''). Еквација секанте AB биће ово:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'};$$



Сл. 77.

та права биће тангента круга у тачци (x', y') кад тачка B падне на тачку A, т. ј. кад је $x' = x''$, $y' = y''$; у том случају добићемо на десној страни еквације праве AB ово:

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{o}{o};$$

праву вредност тог количника $\frac{o}{o}$ наћи ћемо овако. Тачке A и B су накружне; с тога је

$$x'^2 + y'^2 = r^2,\ x''^2 + y''^2 = r^2,$$

па је према томе и

$$x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$$

или

$$-(y''^2 - y'^2) = x''^2 - x'^2$$

или

$$-(y'' + y')(y'' - y') = (x'' + x')(x'' - x')$$

или најпосле

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = - \frac{x'' + x'}{y'' + y'}.$$

Дакле, кад су тачке A и B накружне, онда се еквација корде AB може написати у овом облику:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = - \frac{x'' + x'}{y'' + y'}.$$

Узмимо сад да је $x' = x''$, $y' = y''$, т. ј. узмимо да права AB дира круг у тачци (x', y'). У том случају биће еквација праве AB ово:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = - \frac{x'}{y'}$$

или

$$xx' + yy' = x'^2 + y'^2$$

или

$$xx' + yy' = r^2,$$

јер је $x'^2 + y'^2 = r^2$.

Према томе је еквација тангенте у тачци (x', y') овог облика:

$$xx' + yy' = r^2. \qquad (1)$$

Напомена. Паралелним померањем осовина преобразила би се еквација $x^2 + y^2 = r^2$ у еквацију

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

а еквација $xx' + yy' - r^2 = o$ у еквацију

$$(x - \alpha)(x' - \alpha) + (y - \beta)(y' - \beta) = r^2; \qquad (2)$$

ова последња еквација била би дакле еквација тангенте круга $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.

163. *Наћи еквацију нормале у накружној тачци* (x', y').

Коефицијенат који одређује правац тангенте $xx' + yy' = r^2$ је $-\frac{x'}{y'}$, па је према томе еквација нормале ово:

$$y - y' = \frac{y'}{x'} (x - x')$$

или

$$x'y - y'x = o. \qquad (3)$$

По овој еквацији се види да нормала пролази кроз средиште круга, а то ће рећи да је угао између тангенте и полупречника који спаја додирну тачку са средиштем прав угао, што се у осталом потпуно слаже са познатом Евклидовом теоремом (III. 16.).

164. *Наћи еквацију тангенте круга*

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$$

у тачци A (x', y') *тог круга.*

Нека је и тачка B (x'', y'') нека тачка круга. Еквација секанте AB биће

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Како су A и B накружне тачке, биће

$$x'^2 + y'^2 + 2gx' + 2fy' + c = o, \qquad (4)$$

$$x''^2 + y''^2 + 2gx'' + 2fy'' + c = o.$$

Одузмимо те две еквације, па ћемо добити ово:

$$(x'' - x') (x' + x'' + 2g) + (y'' - y') (y' + y'' + 2f) = o$$

или

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = - \frac{x' + x'' + 2g}{y' + y'' + 2f}.$$

Еквација секанте AB је дакле ово:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = - \frac{x' + x'' + 2g}{y' + y'' + 2f};$$

кад сменимо у овој еквацији x'' са x', а y'' са y', добићемо еквацију тангенте у тачци (x', y'):

$$\frac{y - y'}{x - x'} = - \frac{x' + g}{y' + f},$$

а та се еквација може и овако написати:

$$(x - x')(x' + g) + (y - y')(y' + f) = o$$

или

$$xx' + yy' + gx + fy = x'^2 + y'^2 + gx' + fy'.$$

По еквацији (4) види се међу тим да је

$$x'^2 + y'^2 + gx' + fy' = -(gx' + fy' + c);$$

услед тога је еквација тангенте ово:

$$xx' + yy' + g(x + x') + f(y + y') + c = o. \quad (5)$$

Ако дату еквацију круга напишемо у овом облику:

$$xx + yy + g(x + x) + f(y + y) + c = o,$$

па је упоредимо са еквацијом (5), видећемо одмах на који начин постаје еквација тангенте из еквације круга.

Прим. 1. Наћи тангенту круга $x^2 + y^2 = 25$ у тачци (3, 4).

Одг. $3x + 4y = 25$.

Прим. 2. Наћи еквацију тангенте круга

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = o$$

у тачци (5, 4) тог круга.

Еквација тангенте је

$$x(5) + y(4) - 2(x + 5) - 3(y + 4) + 3 = o$$

или

$$3x + y = 19.$$

Прим. 3. Наћи екваци|у нормале круга

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$$

у тачци $(x' y')$.

Нормала спаја средиште $(-g, -f)$ са (x', y'), па је с тога њезина екваци|а

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ -g & -f & 1 \end{vmatrix} = o$$

или

$$(y' + f)\,x - (x' + g)\,y + gy' - fx' = o.$$

Прим. 4. Наћи екваци|у круга који додирује осовине у раздаљини a од почетка.

Одг. У ортогоналној координатној системи је екваци|а круга ово:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = o,$$

а у косој системи ово:

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = o.$$

[*Напом.* До тих екваци|а можемо доћи и кад у екваци|и круга (чл. 158.) који пролази кроз четири тачке A и A', B и B' узмемо да је $a = a' = b = b'$],

Прим. 5. Осовина y је тангента круга, а осовина x пролази кроз додирну тачку. Наћи екваци|у круга.

Одг. $x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2rx\sin\omega = o$.

[*Напом.* У овом случају требало би узети у прим. чл. 158. да је $a = b = b' = o$, а $a' = 2r\sin\omega$.]

165. *Повући тангенту из неке тачке (h, k) на круг $x^2 + y^2 = r^2$.*

Узмимо да је $P'A$ једна од оних тангената, које је могуће повући на круг из тачке P' (h, k). Ако су x', y' координате додирне тачке A, биће екваци|а тангенте $P'A$ ово:

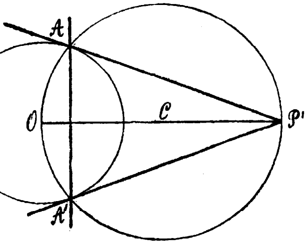
$$xx' + yy' = r^2.$$

Та тангента пролази и кроз тачку (h, k), па је услед тога

$$hx' + ky' = r^2;$$

међу тим је тачка A (x', y') накружна тачка; према томе ће бити

$$x'^2 + y'^2 = r^2.$$



Сл. 78.

Ако из последњих двеју еквација елиминирамо најпре y', па онда x', добићемо ове две квадратне еквације:

$$\left.\begin{aligned} (h^2 + k^2)\, x'^2 - 2r^2hx' + r^4 - k^2r^2 = o, \\ (h^2 + k^2)\, y'^2 - 2r^2ky' + r^4 - h^2r^2 = o. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Корени тих еквација су ово:

$$x' = \frac{r^2h \pm rk\sqrt{h^2 + k^2 - r^2}}{h^2 + k^2},$$

$$y' = \frac{r^2k \mp rh\sqrt{h^2 + k^2 - r^2}}{h^2 + k^2},$$

а по тим еквацијама се види, да имају у опште две додирне тачке, а услед тога и две тангенте. *Из сваке тачке могу се дакле повући на круг у опште две тангенте;* те тангенте су реалне и различите ако је $h^2 + k^2 - r^2 > o$, т. ј. ако тачка (h, k) лежи изван круга; оне су имагинарне, ако је $h^2 + k^2 - r^2 < o$, т. ј. ако тачка (h, k) лежи у периферији и најпосле, оне се поклапају, ако је $h^2 + k^2 - r^2 = o$, т. ј. ако тачка (h, k) лежи на периферији круга.

Прим. Наћи координате тачака у којима тангенте из $(1, 2)$ на

$$x^2 + y^2 = 4$$

додирају круг.

Одг. $(o, 2)$, $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

166. Сменимо сад у еквацијама (6) x' са x, а y' са y. Тим путем добићемо ове две еквације

$$(h^2 + k^2)\, x^2 - 2r^2hx + r^4 - k^2r^2 = o,$$

$$(h^2 + k^2)\, y^2 - 2r^2ky + r^4 - h^2r^2 = o;$$

прва између ових еквација представља две праве које иду паралелно са осовином y, а пролазе кроз додирне тачке A и A'; друга еквација представља две праве које иду паралелно са осовином x, а пролазе кроз поменуте тачке A и A'. — Саберимо сад те две еквације, па ћемо добити ово:

$$(h^2+k^2)\,(x^2+y^2-r^2)-2r^2\,(hx+ky-r^2) = o, \qquad (7)$$

а то је, као што видимо, *еквација оног круга, који је описан око додирне корде AA' као дијаметра.*

Помножимо сад еквацију $x^2+y^2-r^2=o$ са h^2+k^2 и одузмимо ту еквацију од еквације (7); тим путем бисмо дошли до ове еквације:

$$hx + ky - r^2 = o, \qquad (8)$$

а та еквација мора нам представљати једно место које пролази кроз оне тачке у којима круг (7) сече круг $x^2 + y^2 - r^2 = o$. Како је међу тим еквација (8) линеарна, јасно је да ће њом аналитички бити представљена управо додирна корда AA'. То би се у осталом могло и овако доказати. Мало час (чл. 165.) смо доказали да су координате тачке (h, k) везане са координатама додирне тачке A (x', y') овом релацијом:

$$hx' + ky' - r^2 = o.$$

Из сличних разлога морале би координате исте тачке (h, k) бити везане са кординатама x'', y'' оне друге додирне тачке овом релацијом:

$$hx'' + ky'' - r^2 = o;$$

кад се те две последње релације имају у виду, јасно је да ће права $hx + ky - r^2 = o$ заиста пролазити кроз додирне тачке A и A'. — Корда AA' назива се *полара* тачке (h, k), а тачка (h, k) назива се *пол* праве AA'.

По еквацији поларе види се да је полара у сваком случају реална права. Кад бисмо у еквацији поларе сменили координате h, k пола са x', y', била би еквација поларе по облику иста онаква каква је и еквација тангенте. Еквација

$$xx' + yy' = r^2$$

представља дакле и тангенту и полару; у првом случају су параметрима x', y' обележене координате додирне тачке, а у другом случају нам x', y' представљају координате ма које тачке (ма ког пола) у равни. Према томе можемо рећи, *да је полара ма које накружне тачке тангента круга у тој тачци.*

Напомене. 1-во. Ако је

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

еквација круга, биће

$$(x - \alpha)(x' - \alpha) + (y - \beta)(y' - \beta) = r^2$$

еквација поларе.

2-го. Управна са пола (x', y') на полару $xx' + yy' = r^2$ је права

$$x'y - y'x = o,$$

т. ј. *управне са пола на полару тог пола пролазе кроз средиште* и обратно, *праве што спајају неку тачку са средиштем круга стоје управно на полари те тачке.*

Прим. 1. Наћи пол праве

$$Ax + By + C = o. \qquad (\alpha)$$

Нека су x', y' координате пола; полара те тачке била би ово

$$xx' + yy' - r^2 = o. \qquad (\beta)$$

Еквације (α) и (β) представљаће исту праву, ако је

$$\frac{x'}{A} = \frac{y'}{B} = -\frac{r^2}{C}$$

$$\therefore \qquad x' = -\frac{Ar^2}{C}, \quad y' = -\frac{Br^2}{C}.$$

Прим. 2. Наћи полове правих

$$2x - 3y = 5, \quad x + y = 1$$

с обзиром на круг

$$x^2 + y^2 = 50.$$

Одг. (20, —30), (50, 50).

Прим. 3. Наћи погодбу под којом ће полара тачке (h, k) с обзиром на круг

$$x^2 + y^2 = 9$$

додиривати круг

$$x^2 + y^2 = 6y.$$

Одг. $h^2 + 6k = 9$.

167. Конструкција тангената. Нека је $x^2 + y^2 - r^2 = o$ еквација круга, а $xx' + yy' - r^2 = o$ полара оне тачке из које смо ради да повучемо тангенте на круг. Ако одузмемо еквацију поларе од еквације круга, добићемо ово:

$$x^2 + y^2 - x'x - y'y = o$$

или

$$\left(x - \frac{x'}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 = \left(\frac{x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y'}{2}\right)^2,$$

а та нам еквација представља један круг који пролази (сл. 78.) кроз тачке A и A' у којима полара сече круг $x^2 + y^2 - r^2 = o$. Координате средишта C тог круга су

$$\alpha = \frac{x'}{2}, \quad \beta = \frac{y'}{2},$$

т. ј. средиште круга полови дуж OP', а полупречник његов је $\frac{OP'}{2}\cdot$ Ево нам дакле конструкције оних двеју тангената, које се могу повући из тачке P' на круг: треба спојити тачку P' са средиштем O датог круга, дуж OP' преполовити у тачци C, па око тачке C полупречником $\frac{OP'}{2}$ описати један круг; тачке A и A' у којима тај круг сече дат круг биће додирне тачке.

168. *Наћи екваціју тангенте која иде паралелно са неком правом* $y = mx$.

Нека је

$$x^2 + y^2 = r^2$$

еквација круга, а

$$y = mx + b$$

еквација једне секанте која иде паралелно са датом правом. Елиминираћемо y и добићемо једну квадратну екваціју, чији ће корени бити апсцисе тачака у којима права $y = mx + b$ сече круг. Ево те квадратне екваціје:

$$x^2 + (mx + b)^2 = r^2$$

или

$$(1 + m^2)\, x^2 + 2mbx + b^2 - r^2 = o.$$

Ако су корени ове екваціје једнаки, онда ће права $y = mx + b$ додиривати круг, а ти корени ће бити једнаки ако је дискриминанта квадратне екваціје $= o$, т. ј. ако је

$$\begin{vmatrix} mb & 1 + m^2 \\ b^2 - r^2 & mb \end{vmatrix} = o$$

или

$$b^2 = r^2 (1 + m^2)$$

или

$$b = \pm r \sqrt{1 + m^2}.$$

Према томе ће еквација оне тангенте, која иде паралелно са правом $y = mx$, бити овог облика:

$$y = mx \pm r \sqrt{1 + m^2},$$

а по томе се види, да имају свега две такве тангенте. —

То би се у осталом могло и овако доказати. По Евклиду је $\perp$ са средишта на тангенту $= r$; ако је дакле $y = mx + b$ тангента, биће управна са (o, o) на $[y = mx + b] = r$, т. ј.

$$\frac{b}{\pm \sqrt{1 + m^2}} = r$$

или

$$b = \pm r \sqrt{1 + m^2},$$

а то смо и мало час добили.

Прим. Наћи оне две тангенте круга

$$x^2 + y^2 = 25,$$

које иду паралелно са правом $3y - 4x = o$.

У овом случају је $r = 5$, $m = \frac{4}{3}$, па је с тога $b = \pm \frac{25}{3}$. Према томе су еквације двеју тангената ово:

$$3y - 4y + 25 = o, \quad 3x - 4y - 25 = o.$$

169. *Наћи еквацију двеју тангената које су из тачке* (x', y') *повучене на круг* $x^2 + y^2 = r^2$.

Први метод. — Узећемо било на једној, било на другој тангенти *ма где* једну тачку (h, k). Еквација праве која спаја тачку (x', y') са тачком (h, k) је ово:

$$(y' - k)\, x - (x' - h)\, y + x'k - y'h = o\,;$$

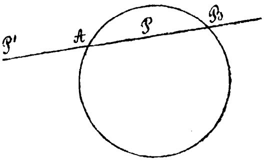
ако је ова права тангента — а то треба да буде — биће управна са средишта (o, o) на њу $= r$, т. ј. биће

$$\frac{x'k - y'h}{\sqrt{(y' - k)^2 + (x' - h)^2}} = r.$$

Ово је дакле она релација, којом су везане координате h, k ма које тачке оних тангената, које су са тачке (x', y') повучене на круг. Сменимо у тој релацији h и k са x и y, па ћемо добити еквацију поменутих двеју тангената:

$$r^2\, [(x - x')^2 + (y - y')^2] = (xy' - x'y)^2.$$

Други метод. Повуцимо са тачке (x', y') ма у ком правцу према кругу једну секанту $P'APB$ и узмимо на тој секанти *ма где* једну тачку $P\,(x, y)$. Координате ма које тачке те секанте биће



Сл. 79.

$$x'' = \frac{x' + \lambda x}{1 + \lambda}, \quad y'' = \frac{y' + \lambda y}{1 + \lambda}. \tag{9}$$

Свакој вредности параметра λ одговара по једна тачка праве $P'P$ и обратно; оне вредности тог параметра, којима би биле одређене тачке A и B добићемо на овај начин. Како тачке A и B леже на кругу, биће

$$\left(\frac{x' + \lambda x}{1 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{y' + \lambda y}{1 + \lambda}\right)^2 = r^2$$

или

$$(x' + \lambda x)^2 + (y' + \lambda y)^2 - r^2 (1 + \lambda)^2 = o$$

или

$$(x'^2 + y'^2 - r^2) + 2\lambda (xx' + yy' - r^2) + \lambda^2 (x^2 + y^2 - r^2) = o; \quad (10)$$

добили смо дакле једну квадратну еквацију, а коренима те еквације опредељене су вредности параметра λ, које одређују накружне тачке A и B.

Узмимо сад да је права $P'P$ било једна, било друга тангента. У том случају ће тачка B лежати на оној истој тачци периферије, на којој лежи и A; корени горње квадратне еквације биће дакле једнаки, т. ј. дискриминанта њезина биће равна нули:

$$(xx' + yy' - r^2)^2 - (x'^2 + y'^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2) = o.$$

У овој погодбеној релацији обележавају нам x, y координате ма које тачке оних двеју тангената, које су из тачке (x', y') повучене на круг, т. ј. та квадратна еквација је еквација тих двеју тангената.

Напом. Овај метод је *Јоахимсталов.*

Прим. 1. Наћи еквацију тангената које су из почетка координатне системе повучене на круг

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o.$$

Одг. Еквација тангената је

$$c(x^2 + y^2) = (gx + fy)^2.$$

Прим. 2. Доказати да ће поменуте две тангенте (прим. 1.) бити уједно и тангенте круга

$$c(x^2 + y^2) + 2gr^2x + 2fr^2y + r^4 = o.$$

170. Дефиниција. Кроз тачку P' (x', y') повући ћемо ма у ком правцу према кругу једну секанту, која сече круг у тачкама A и B; на тој секанти ће нека тачка P бити хармонијски коњугована с тачком P', а према

тачкама A и B. Тачке P и P' називају се *коњуговане тачке* или *хармонијски полови*.

Теорема. *Место хармонијских полова тачке P' је полара тачке P'.*

Ево доказа. Нека су x, y координате тачке P, а x', y' координате тачке P'. Мало час смо поменули, како се налазе координате тачака A и B: треба разрешити еквацију (10):

$$(x'^2+y'^2-r^2)+2\lambda\,(xx'+yy'-r^2)+\lambda^2\,(x^2+y^2-r^2)=o,$$

па коренима те еквације сменити λ у еквацијама (9). Ми смо претпоставили да су тачке P и P' хармонијски коњуговане према тачкама A и B; према томе ће и обратно тачке A и B бити хармонијски коњуговане према тачкама P и P'. Ако су дакле

$$U=o,\ U'=o$$

(нормалне) еквације тачака P и P', биће

$$U-\lambda U'=o,\ U+\lambda U'=o$$

еквације тачака A и B. Параметри λ, који се јављају у тим еквацијама, били би управо једнаки с коренима горње квадратне еквације. Ти корени су у овај мах једнаки, али противно означени; с тога ће поменута квадратна еквација морати бити чиста, т. ј. мораће бити

$$xx'+yy'-r^2=o.$$

Ово је дакле она релација, која ће постојати између координата x, y свију хармонијских полова тачке P', па како је то уједно и еквација поларе тачке P' (x', y'), јасно је да поменута теорема заиста постоји[1]).

---

[1]) Теорију полова и полара развили су **Monge**, **Brianchon** и **Poncelet**, али се заметак те теорије налази у делима **Desargues-овим** и **De la Hire-овим**. Реч *пол* употребио је, у оном смислу у ком је ми данас узимамо, први **Servois** у Жергоновим Аналима, I. св. 1810., а реч *полара* сам **Gergonne** 1812. г. у III. св. својих Анала. — Види **Cantor**, I. c. II. p. 621. и III. p. 123. и *Пројективну Геометрију* знаменитог талијанског геометра **Л. Кремоне.**

171. Узмимо сад две тачке $A(x', y')$ и $B(x'', y'')$. Поларе тих тачака су

$$xx' + yy' - r^2 = o, \; xx'' + yy'' - r^2 = o.$$

Помоћу тих еквација доказаћемо на врло лак начин ову важну теорему: *ако тачка A лежи на полари тачке B, лежаће и тачка B на полари тачке A.*

Претпоставићемо да тачка A лежи на полари $xx'' + yy'' - r^2 = o$; како су x' и y' координате тачке A, биће

$$x'x'' + y'y'' - r^2 = o,$$

а по тој погодбеној релацији види се да и тачка (x'', y'') лежи на полари $xx' + yy' - r^2 = o$, q. e. d.

Ако се сад тачка A креће по полари пола B, кретаће с њом и њезина полара; та полара мора међу тим пролазити и кроз тачку B, т. ј. *кад се нека тачка креће по једној правој, онда се полара те тачке обрће око пола те праве* и обратно. *место полова оних полара које се секу у једној тачци, јесте полара тачке у пресеку тих полара.* Према свему томе види се још и ово двоје: 1-во, *да је полара тачке C у којој се секу поларе полова A и B, права која спаја полове A и B*; 2-го, *да је права, која спаја полове A и B, полара оне тачке C у којој се секу поларе датих полова.*

172. Нека су x', y'; x'', y''; x''', y''' координате тачака A, B, C. Те три тачке градиће један троугао ABC. Свако теме тог троугла има своју полару: теме A полару a, теме B полару b, а теме C полару c. Те три поларе ће градити троугао $A'B'C'$. Свако теме тог троугла лежи у пресеку двеју полара: A' у пресеку полара b и c, B' у пресеку полара c и a, C' у пресеку полара a и b; кад се буду имале на уму мало час поменуте теореме, јасно ће нам бити, да су тачке A', B', C' полови страна BC, CA, AB датог троугла. За слику ABC каже се да *се преобразила* или *трансформовала* у слику $A'B'C'$. Обратном трансформацијом могли бисмо прећи са слике $A'B'C'$ на слику ABC. Троугао

$A'B'C'$ назива се по *Poncelet-у поларно узајамна слика (поларан троугао)* основног троугла ABC. — Троугао ABC зове се *аутополаран* или *коњугован*, ако су стране BC, CA, AB, које леже према теменима A, B, C, уједно и поларе темена A, B, C.

Ми ћемо сад спојити темена A и A', B и B', C и C' и наћи ћемо еквације правих AA', BB', CC' овако.

Узмимо најпре праву AA'. Она пролази кроз тачку A', т. ј. кроз тачку што лежи у пресеку полара $xx'' + yy'' - r^2 = o$ и $xx''' + yy''' - r^2 = o$. Еквација те праве биће дакле овог облика:

$$(xx'' + yy'' - r^2) + \mu\,(xx''' + yy''' - r^2) = o.$$

Та права пролази међу тим и кроз тачку $A\,(x', y')$, па је с тога и

$$(x'x'' + y'y'' - r^2) + \mu\,(x'x''' + y'y''' - r^2) = o$$

или

$$\mu = -\frac{x'x'' + y'y'' - r^2}{x'x''' + y'y''' - r^2};$$

према томе је еквација праве AA' ово:

$$(x'x''' + y'y''' - r^2)\,(xx'' + yy'' - r^2)$$
$$- (x'x'' + y'y'' - r^2)\,(xx''' + yy''' - r^2) = o.$$

Сличним путем би се могло доказати да су еквације правих BB' и CC' ово:

$$(x''x' + y''y' - r^2)\,(xx''' + yy''' - r^2)$$
$$- (x''x''' + y''y''' - r^2)\,(xx' + yy' - r^2) = o,$$

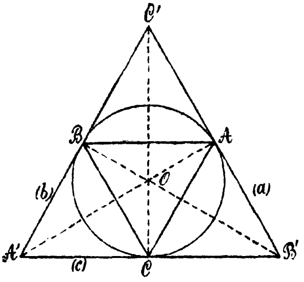
$$(x'''x'' + y'''y'' - r^2)\,(xx' + yy' - r^2)$$
$$- (x'''x' + y'''y' - r^2)\,(xx'' + yy'' - r^2) = o.$$

Збир ових трију еквација је $\equiv o$, т. ј. *праве AA', BB', CC', које спајају темена основног троугла са теме-*

нима поларног троугла, секу се у једној тачци, т. ј. троугли ABC и $A'B'C'$ су у перспективи.

Из ове опште теореме може се извести ова специјална: *ако око неког круга опишемо троугао $A'B'C'$, сећи ће се праве, које спајају додирне тачке A, B, C са супротним теменима A', B', C', у једној тачци.*

Спојивши додирне тачке, добили бисмо троугао ABC. Поларе теменâ A, B, C су стране $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ датог троугла $A'B'C'$. Троугли ABC и $A'B'C'$ су дакле поларно узајамни, т. ј. праве AA', BB', CC' секу се у једној тачци, а то смо и тврдили.



Сл. 80.

$^{+}$173. Вредно је поменути још једну еквацију која ће обухватити готово све досад поменуте еквације тангенте. Претпоставићемо да је еквација круга ово:

$$f(x, y) = o.$$

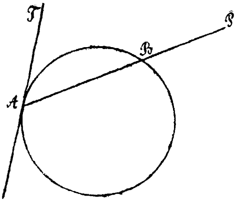
У овој еквацији сменићемо x и y са $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, помножићемо целу еквацију са z^2 и добићемо тим путем једну хомогену еквацију круга. Ми ћемо је обележити овим симболом:

$$f(x, y, z) = o,$$

а претпоставићемо *vice versa* да ће се ова еквација преобразити непосредно у еквацију $f(x, y) = o$ кад у њој сменимо z јединицом, $z = 1$.

Узмимо сад на секанти AB *ма где* једну тачку P и означимо координате њезине са x, y, z. Нека су уз то x', y', z' и x'', y'', z'' хомогене координате накружних тачака A и B. Тачке A и P сматраћемо као основне тачке низа (AP); једна тачка тог низа је и тачка B; биће дакле

$$\rho x'' = x' + \lambda x, \ \rho y'' = y' + \lambda y, \ \rho z'' = z' + \lambda z.$$



Сл 81.

Међу тим тачка B лежи на кругу $f(x, y, z) = o$: с тога ће бити

$$f(x' + \lambda x, y' + \lambda y, z' + \lambda z) = o.$$

Леву страну ове еквације развићемо и добићемо ово:

$$f(x', y', z') + \lambda (xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'}) + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} (xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'})^{(2)} = o;$$

међу тим је

$$(xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'})^{(2)} = 2f(x, y, z),$$

па је услед тога и

$$f(x', y', z') + \lambda (xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'}) + \lambda^2 f(x, y, z) = o.$$

Из ове квадратне еквације добићемо две вредности за λ. Тим двема посебним вредностима опредељене су две посебне тачке A и B секанте AB — оне две, у којима секанта сече круг. Но како тачка A лежи на кругу, биће $f(x', y', z') = o$; према томе је један од корена квадратне еквације $= o$. Онај други корен добива се дакле из еквације

$$(xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'}) + \lambda f\,(x, y, z) = o.$$

Сад ћемо претпоставити да се секанта *ABP* обрће око тачке *A* тако, да тачка *B* најпосле падне на тачку *A*, претпоставићемо дакле да је права *AP* тангента круга у тачци *A* (x', y', z'). У том специјалном случају биће $= o$ и онај параметар λ, којим је опредељена тачка *B*, а тај параметар ће бити $= o$ — то се види по последњој еквацији — само ако је

$$xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} = o. \qquad (11)$$

Ово је дакле она релација, која мора постојати између координата тачака *A* и *P*, кад је права *AP* тангента круга у тачци *A*, па како тачка *P* лежи ма где на правој *AP*, јасно је, да је еквација (11) аналитички еквиваленат тангенте у хомогеној координатној системи, а у тачци (x', y', z'). — Кад бисмо узели да је $z = z' = 1$, онда бисмо добили нехомогену еквацију тангенте у тачци (x, y').

Еквација (11) је уједно и еквација поларе тачке (x', y', z'); она би се могла и овако написати:

$$x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z = o, \qquad (12)$$

јер је у сваком тернерном квадратном облику f

$$xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} \equiv x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z.$$

Напомена. Кад би еквација $f\,(x, y, z) = o$ била хомогена еквација ма које друге криве другога реда, била би поново еквација тангенте у тачци (x', y', z') ово:

$$xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} = o; \qquad (13)$$

доказ тај у свему би се слагао са мало час поменутим доказом, а разлике би било само у томе, што у овом случају тачке *A* и *B* не би биле накружне, већ би то биле две специјалне тачке оне криве другога реда, о којој је у овај мах реч.

Чак бисмо могли доказати и то, *да би еквација (13) била еквација тангенте ма које криве* $f(x, y, z) = o$ *другога реда* (било круга, било осталих кривих) *ма у којој другој трилинеарној координатној системи.* И тај би доказ био идентичан са мало час поменутим доказом; разлике има само у томе, што би у овај мах са x', y', z' и x'', y'', z'' биле обележене трилинеарне координате тачака A и B. Тако бисмо н. пр. у нормалној координатној системи (трилинеарној координатној системи у ужем смислу) еквацију кривих другога реда могли овако написати:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = o,$$

а еквацију тангенте у тачци $(\alpha', \beta', \gamma')$ овако:

$$\alpha f'_{\alpha'} + \beta f'_{\beta'} + \gamma f'_{\gamma'} = o. \qquad (14)$$

Прим. **Наћи** еквацију тангенте круга $x^2 + y^2 - r^2 = o$, а у тачци (x', y').

Хомогена еквација круга била би ово:

$$x^2 + y^2 - r^2 z^2 = o;$$

с тога је

$$f'_x = 2x,\ f'_y = 2y,\ f'_z = -2r^2 z,$$

а

$$f'_{x'} = 2x',\ f'_{y'} = 2y',\ f'_{z'} = -2r^2 z';$$

хомогена еквација тангенте у тачци (x', y', z') је дакле овог облика:

$$xx' + yy' - r^2 zz' = o,$$

а та ће се еквација преобразити, ако је $z = z' = 1$, у познату нехомогену еквацију

$$xx' + yy' - r^2 = o.$$

Примери

1. Наћи еквацију праве која круг

$$x^2 + y^2 + 4x + 5y = o$$

дира у почетку.

Одг. $4x + 5y = o$, т. ј. линеаран део $4x + 5y$ еквације круга, $= o$ представља тангенту у почетку; зашто?

2. Наћи еквацију тангенте и нормале круга

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5$$

у тачци $(-2, 3)$.

Одг. $3x - y + 9 = o$, $x + 3y - 7 = o$.

3. Дат је круг

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = o;$$

наћи тангенте које иду паралелно са правом $y = x$.

Одг. $x - y \pm \sqrt{2} = o$.

4. Наћи еквацију тангенте круга

$$x^2 + 2xy \cos \omega + y^2 = a^2,$$

а у тачци (x', y').

Одг. $xx' + (xy' + x'y) \cos \omega + yy' = a^2$.

5. Са A, B, C, D ћемо означити четири колинеарне тачке, а са a, b, c, d поларе тих тачака; доказати да је $(ABCD) = (abcd)$.

6. На периферији круга узећемо ма где једну тачку O и спојићемо је зрацима a, b, c, d са сталним тачкама A, B, C, D; доказати да је двојна напремица $(abcd) = const.$

7. Нека тангента датог круга сече четири сталне тангенте тог круга у тачкама A, B, C, D. Доказати да је $(ABCD) = const.$

8. Свака страна дијагоналног троугла једног тетрастигмата, који је уписан у круг, је полара супротног темена.

ТАНГЕНЦИЈАЛНА ЕКВАЦИЈА КРУГА. ПРОБЛЕМЕ.

174. Нека су α, β паралелне координате средишта, r полупречник, а u, v координате ма које тангенте датог круга. Тангенцијална еквација круга биће (чл. 97.) ово:

$$(\alpha u + \beta v + 1)^2 - r^2 (u^2 + v^2) = o \qquad (1)$$

или

$$(\alpha^2 - r^2) u^2 + 2\alpha\beta uv + (\beta^2 - r^2) v^2 + 2\alpha u + 2\beta v + 1 = o; \qquad (2)$$

ова еквација је другог степена, т. ј. *круг је крива друге врсте*. Према томе ће општа квадратна еквација

$$Au^2 + 2Huv + Bv^2 + 2Gu + 2Fv + C = o \qquad (3)$$

представљати круг (2) под овим погодбама:

$$\frac{A}{\alpha^2 - r^2} = \frac{H}{\alpha\beta} = \frac{B}{\beta^2 - r^2} = \frac{G}{\alpha} = \frac{F}{\beta} = \frac{C}{1} = \lambda;$$

имамо дакле свега шест погодаба:

$$\left.\begin{array}{lll} A = \lambda(\alpha^2 - r^2), & B = \lambda(\beta^2 - r^2), & C = \lambda, \\ F = \lambda\beta, & G = \lambda\alpha, & H = \lambda\alpha\beta. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Из ових погодбених релација елиминираћемо четири непознате α, β, r и λ, па ћемо тим путем добити свега две погодбене релације:

$$FG - HC = o, \; G^2 - AC = F^2 - BC;$$

ово су дакле оне погодбе под којима општа квадратна еквација (3) представља круг. — Из еквација (4) могу се у осталом определити и координате средишта и полупречник круга; биће на име

$$\alpha = \frac{G}{C}, \; \beta = \frac{F}{C},$$

а

$$r = \frac{1}{C}\sqrt{G^2 - AC} \text{ или } r = \frac{1}{C}\sqrt{F^2 - BC}.$$

Специјалан случај. Нека средиште круга лежи у почетку; у том случају била би тангенцијална еквација круга ово:

$$r^2(u^2 + v^2) - 1 = o, \qquad (5)$$

јер је $\alpha = \beta = o$.

175. На основу еквације (1) тврдим, *да су праве које спајају средиште ма ког круга са фокојидима*

имагинарне тангенте круга, а доказаћу ту теорему овако. —

Еквација (1) круга је агрегат ових двеју еквација:

$$u^2 + v^2 = o, \quad \alpha u + \beta v + 1 = o; \qquad (6)$$

према томе ће (чл. 99.) све праве, које додирују обвојнице (6), бити уједно и тангенте круга (1). Лева страна еквације $u^2 + v^2 = o$ може се међу тим представити производом двеју линеарних функција:

$$u^2 + v^2 = (u + iv)(u - iv),$$

а по томе се види, да еквација $u^2 + v^2 = o$ представља једну сингуларну криву друге врсте; она ће на име бити еквација двеју имагинарних тачака у бескрајности:

$$u + iv = o, \quad u - iv = o.$$

Све заједничке тангенте обвојница̂ (тачака)

$$u + iv = o, \quad \alpha u + \beta v + 1 = o$$

и

$$u - iv = o, \quad \alpha u + \beta v + 1 = o$$

биће дакле и тангенте круга (1), т. ј. две имагинарне праве које се гранају из средишта $\alpha u + \beta v + 1 = o$ према тачкама $u + iv = o$ и $u - iv = o$ јесу заиста тангенте круга, а то смо и тврдили. Тим двема тангентама је одређен правац *имагинарних асимптота* круга; асимптоте свију кругова имају дакле исти правац.

Еквације тих асимптота определићу на овај начин. Свака права може се представити еквацијом овог облика:

$$ux + vy + 1 = o; \qquad (7)$$

узмимо да је том еквацијом представљена она асимптота која се грана према тачци $u + iv = o$. Та асимптота (u, v) пролази кроз средиште (α, β), па је с тога

$$\alpha u + \beta v + 1 = o; \tag{8}$$

она пролази и кроз тачку $u + iv = o$, па ће с тога између тангенцијалних координата u и v те асимптоте постојати и ова релација:

$$u + iv = o. \tag{9}$$

Кад бисмо сад разрешили последње две еквације, сматрајући параметре u и v као непознате, па заједничким коренима тих двеју еквација сменили u и v у еквацији (7), добили бисмо већ еквацију оне асимптоте о којој је у овај мах реч. Место тог заметног пута одабраћемо овај краћи који води истом резултату — елиминираћемо из еквација (7), (8) и (9) непознате параметре u и v. Према томе је еквација асимптоте ово:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ 1 & i & o \end{vmatrix} = o$$

или

$$\begin{vmatrix} x - \alpha & y - \beta \\ 1 & i \end{vmatrix} = o$$

или

$$(y - \beta) - i (x - \alpha) = o$$

или

$$(x - \alpha) + i (y - \beta) = o.$$

Сличним путем могло би се доказати да је

$$(x - \alpha) - i (y - \beta) = o$$

еквација оне друге имагинарне асимптоте. Према томе *су асимптоте круга оне две изотропне праве, које пролазе кроз средиште круга;* те две асимптоте могу се представити и овом еквацијом:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = o.$$

Специјалан случај. Кад би средиште лежало у почетку координатне системе, била би еквација асимптота ово:

$$x^2 + y^2 = o \qquad (10)$$

или

$$x + iy = o, \; x - iy = o. \qquad (11)$$

Узмимо сад да се мења положај координатне системе обртањем око почетка; у том случају се неће променити еквација (10), а с њом ни еквације (11), јер су те „ортогоналне трансформације“ обележене релацијом

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

У свакој тој системи биће међу тим осовине $x = o$ и $y = o$ хармонијски коњуговане према правима (11), т. ј. *две праве које се у средишту круга секу под правим углом, леже хармонијски према асимптотама круга.*

176. *Наћи еквацију тачке у којој тангента (u', v') дира круг*

$$r^2 (u^2 + v^2) - 1 = o.$$

Сем тангенте (u', v') узећемо још једну тангенту и означићемо њезине координате са u'', v''. Еквација тачке у пресеку тих двеју тангената биће ово:

$$\frac{v - v'}{u - u'} = \frac{v'' - v'}{u'' - u'}; \qquad (12)$$

та тачка биће додирна тачка ако тангента (u'', v'') поклапа тангенту $(u' \, v')$, т. ј. ако је $u' = u''$, $v' = v''$; у том случају ће десна страна еквације (12) бити овог облика:

$$\frac{v'' - v'}{u'' - u'} = \frac{o}{o};$$

праву вредност тог количника наћи ћемо овако. Праве (u', v') и (u'', v'') су тангенте круга; с тога је

$$r^2\,(u'^2 + v'^2) - 1 = o, \; r^2\,(u''^2 + v''^2) - 1 = o,$$

па је према томе и

$$u'^2 + v'^2 = u''^2 + v''^2$$

или

$$-\,(v''^2 - v'^2) = u''^2 - u'^2$$

или

$$-\,(v'' + v')\,(v'' - v') = (u'' + u')\,(u'' - u')$$

или, најпосле,

$$\frac{v'' - v'}{u'' - u'} = -\,\frac{u'' + u'}{v'' + v'}\,.$$

Дакле, ако су праве (u', v') и (u'', v'') тангенте датог круга, онда се еквација тачке што лежи у њиховом пресеку може овако написати:

$$\frac{v - v'}{u - u'} = -\,\frac{u'' + u'}{v'' + v'}\,.$$

Узмимо сад да је $u' = u''$, $v' = v''$. У том случају представљаће последња еквација еквацију додирне тачке; она ће бити овог облика:

$$\frac{v - v'}{u - u'} = -\,\frac{u'}{v'}$$

или

$$uu' + vv' = u'^2 + v'^2$$

или

$$r^2\,(uu' + vv') - 1 = o, \tag{13}$$

јер је $u'^2 + v'^2 = \frac{1}{r^2}$. —

Ако почетак координатне системе није у средишту, онда ћемо еквацију додирне тачке наћи на овај начин.

У овом случају је еквација круга ово:

$$(\alpha u + \beta v + 1)^2 - r^2\,(u^2 + v^2) = o \tag{14}$$

или

$$(\alpha^2 - r^2)\, u^2 + 2\alpha\beta uv + (\beta^2 - r^2)\, v^2$$
$$+ 2\alpha u + 2\beta v + 1 = o,$$

а еквација тачке у којој се секу две тангенте (u', v') и (u'', v'') била би ово:

$$(\alpha^2 - r^2)\,(u - u')\,(u - u'') + 2\alpha\beta\,(u - u')\,(v - v'')$$
$$+ (\beta^2 - r^2)\,(v - v')\,(v - v'') = (\alpha u + \beta v + 1)^2 - r^2\,(u^2 + v^2);$$

та еквација представља нам на име једну криву, коју додирују праве (u', v') и (u'', v''); даље, кад бисмо развили ту еквацију, уверили бисмо се да би из ње, кад се сведе све што се може, нестало чланова у којима се јављају u^2, v^2, uv; та еквација била би дакле линеарна т. ј. њом би заиста била представљена тачка у којој се секу тангенте (u', v') и (u'', v''). — Пођимо сад даље, узмимо на име да је $u' = u''$, $v' = v''$; у том случају ће нам поменута еквација представљати додирну тачку; према томе ће еквација тачке у којој права (u', v') дира круг (14), бити ово:

$$(\alpha^2 - r^2)\,(u - u')^2 + 2\alpha\beta\,(u - u')\,(v - v') + (\beta^2 - r^2)\,(v - v')^2$$
$$= (\alpha u + \beta v + 1)^2 - r^2\,(u^2 + v^2). \qquad (15)$$

Ту еквацију ћемо мало преобразити; права (u', v') је тангента датог круга, па је с тога

$$(\alpha^2 - r^2)\, u'^2 + 2\alpha\beta u'v' + (\beta^2 - r^2)\, v'^2$$
$$+ 2\alpha u' + 2\beta v' + 1 = o$$

или

$$(\alpha^2 - r^2)\, u'^2 + 2\alpha\beta u'v' + (\beta^2 - r^2)\, v'^2$$
$$= - (2\alpha u' + 2\beta v' + 1).$$

Сад ћемо измножити чланове еквације (15), редуковаћемо у њој све што се може и сменићемо

$(\alpha^2-r^2)\,u'^2+2\alpha\beta u'v'+(\beta^2-r^2)\,v'^2$ са $-(2\alpha u'+2\beta v'+1)$; тим путем преобразиће се еквација (15) у ову:

$$(\alpha u+\beta v+1)\,(\alpha u'+\beta v'+1)-r^2\,(uu'+vv')=o. \qquad (16)$$

Ова еквација била би дакле еквација оне тачке у којој права (u', v') дира круг (14).

Напом. Овај метод је *Барнсајдов (Burnside).*

177. *Наћи еквацију пола праве* (u', v').

Нека је

$$r^2\,(u^2+v^2)-1=o$$

еквација круга. Полара (u', v') тог круга сече круг, рецимо, у тачкама A и B. Повуцимо у тим двема тачкама тангенте (u'', v'') и (u''', v'''). Еквација прве тачке A била би ово:

$$r^2\,(uu''+vv'')-1=o,$$

а еквација друге тачке B била би ово:

$$r^2\,(uu'''+vv''')-1=o.$$

Обе те тачке леже на правој (u', v'), па је с тога и

$$r^2\,(u'u''+v'v'')-1=o,$$

$$r^2\,(u'u'''+v'v''')-1=o,$$

а по тим двема еквацијама се види да ће и *vice versa* тангенте (u'', v'') и (u''', v''') пролазити кроз тачку

$$r^2\,(uu'+vv')-1=o. \qquad (17)$$

Међу тим је тачка у којој се секу тангенте (u'', v'') и (u''', v''') управо пол поларе (u', v'); с тога ће еквација (17) бити аналитички еквиваленат пола праве (u', v').

Кад би еквација круга била овог облика:

$$(\alpha u + \beta v + 1)^2 - r^2 (u^2 + v^2) = o,$$

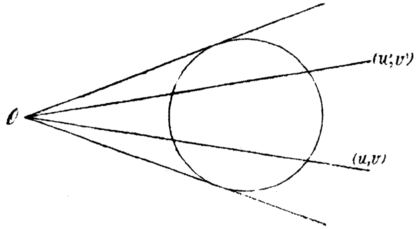
била би еквација пола праве (u', v') ово:

$$(\alpha u + \beta v + 1)(\alpha u' + \beta v' + 1) - r^2 (uu' + vv') = o, \quad (18)$$

јер је еквација пола праве (u', v') по облику иста онаква, каква је и еквација тачке у којој права (u', v') дира круг.

178. *Наћи еквацију двеју тачака у којима права (u', v') сече круг $r^2 (u^2 + v^2) - 1 = o$.*

Узмимо на правој (u', v') ма где једну тачку O и повуцимо кроз њу *ма у ком правцу* према кругу једну праву (u, v). Из тачке O могу се у опште повући две тангенте на круг; те тангенте биле би два специјална зрака оног прамена чије теме лежи у тачци O. Координате ма ког зрака тог прамена биће



Сл. 82.

$$u'' = \frac{u' + \lambda u}{1 + \lambda}, \quad v'' = \frac{v' + \lambda v}{1 + \lambda}; \quad (19)$$

ми ћемо претпоставити да су са u'', v'' означене координате оних тангената које су повучене из тачке O на круг. Јасно је да ће у том случају бити

$$r^2 (u''^2 + v''^2) - 1 = o$$

или

$$r^2 \left[\left(\frac{u' + \lambda u}{1 + \lambda} \right)^2 + \left(\frac{v' + \lambda v}{1 + \lambda} \right)^2 \right] - 1 = o$$

или

$$r^2 (u' + \lambda u)^2 + r^2 (v' + \lambda v)^2 - (1 + \lambda)^2 = o$$

или

$$[r^2 (u'^2 + v'^2) - 1] + 2\lambda [r^2 (uu' + vv') - 1]$$
$$+ \lambda^2 [r^2 (u^2 + v^2) - 1] = o. \quad (20)$$

Добили смо дакле једну квадратну еквацију, а корени те еквације представљају оне вредности параметра λ, којима су у прамену O опредељене тангенте датог круга.

Узмимо сад да тачка O лежи на кругу и то на једној од оних двеју тачака, у којима права (u', v') сече круг. У том случају ће се две тангенте, које су из O повучене на круг, поклапати; корени квадратне еквације биће једнаки, т. ј. дискриминанта те еквације биће равна нули:

$$[r^2 (uu' + vv') - 1]^2 - [r^2 (u'^2 + v'^2) - 1]$$
$$\times [r^2 (u^2 + v^2) - 1] = o. \quad (21)$$

У овој погодбеној релацији обележавају нам u, v координате ма кога зрака прамена O; u и v су дакле координате ма које од оних правих што пролазе кроз тачке, у којима права (u', v') сече круг, а то ће рећи да је квадратна еквација (21), еквација поменутих двеју тачака.

179. Дефиниција. Из ма које тачке O праве (u', v') повући ћемо две праве, које дирају круг у тачкама A и B; у прамену, који је одређен тачком O у којој се секу те две тангенте, ће нека права (u, v) бити хармонијски коњугована с правом (u', v'), а према тангентама OA и OB. Праве (u, v) и (u', v') називају се *коњуговане праве* или *хармонијске поларе*.

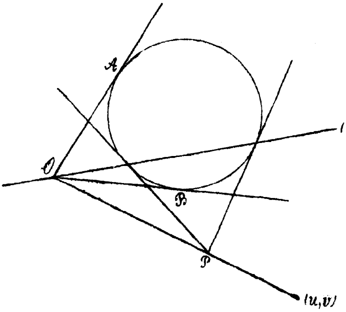
Теорема. *Хармонијске поларе (u, v) праве (u', v') ће заогрнути пол праве (u', v').*

Ево доказа. — Мало час смо поменули, како се налазе координате тангената OA и OB, кад су познате координате u, v и u', v' двају зракова прамена O: треба разрешити еквацију (20):

$$[r^2(u'^2 + v'^2) - 1] + 2\lambda\,[r^2(uu' + vv') - 1]$$
$$+ \lambda^2\,[r^2(u^2 + v^2) - 1] = o,$$

па коренима те еквације сменити λ у еквацијама (19). Ми смо претпоставили да су праве (u, v) и (u', v') хармонијски коњуговане према тангентама OA и OB; према томе ће и обратно праве OA и OB хармонијски бити коњуговане према правима (u, v) и (u', v'). Ако су дакле

$$U = o, \quad U' = o$$



Сл. 83.

(нормалне) еквације правих (u, v) и (u', v'), биће

$$U - \lambda U' = o, \quad U + \lambda U' = o$$

еквације тангената OA и OB. Параметри λ, који се јављају у тим еквацијама били би управо једнаки с коренима поменуте квадратне еквације. Ти корени су у овај мах једнаки, али противно означени; с тога ће квадратна еквација морати бити чиста, т. ј. мораће бити

$$r^2(uu' + vv') - 1 = o.$$

Ово је дакле она релација, која ће постојати између координата u, v свију хармонијских полара праве (u', v'), па како је то уједно и еквација пола P праве (u', v'), јасно је да поменута теорема заиста постоји.

⁺180. Још ћемо поменути једну еквацију додирне тачке, која ће обухватити све досад поменуте еквације додирних тачака, а и све остале еквације које нисмо поменули. Претпоставићемо да је еквација круга ово:

$$\varphi\,(u, v) = o.$$

У овој еквацији сменићемо u и v са $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, помножићемо целу еквацију са w^2 и добићемо тим путем хомогену еквацију круга. Ми ћемо је обележити овим симболом:

$$\varphi\,(u, v, w) = o,$$

а претпоставићемо *vice versa* да ће се ова еквација преобразити непосредно у еквацију $\varphi\,(u, v) = o$ кад у њој сменимо w јединицом, $w = 1$.

Повуцимо сад из тачке O, у којој се (сл. 83.) секу две тангенте OA и OB, ма у ком правцу једну праву OP и означимо хомогене координате њезине са u, v, w. Нека су уз то u', v', w' и u'', v'', w'' хомогене координате тангената OA и OB. Праве OA и OP сматраћемо као основне праве прамена (OA, OP); један зрак тог прамена је и права OB; биће дакле

$$\varrho u'' = u' + \lambda u,\ \varrho v'' = v' + \lambda v,\ \varrho w'' = w' + \lambda w.$$

Права OB је међу тим тангента круга $\varphi\,(u, v, w) = o$; с тога ће бити

$$\varphi\,(u' + \lambda u, v' + \lambda v, w' + \lambda w) = o.$$

Леву страну ове еквације развићемо и добићемо ово:

$$\varphi\,(u', v', w') + \lambda\,(u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'}) \\ + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2}\,(u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'})^{(2)} = o;$$

међу тим је

$$(u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'})^{(2)} = 2\varphi\,(u, v, w),$$

па је услед тога и

$$\varphi(u', v', w') + \lambda(u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'}) + \lambda^2\varphi(u, v, w) = o.$$

Из ове квадратне еквације добићемо две вредности за λ. Тим двема посебним вредностима су одређена два посебна зрака прамена (OA, OP) — она два, која додирују круг. Но како је права (u', v', w') тангента круга, биће већ $\varphi(u', v', w') = o$; према томе је један од корена квадратне еквације $= o$. Онај други корен добива се дакле из еквације

$$(u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'}) + \lambda\varphi(u, v, w) = o.$$

Сад ћемо гретпоставити да тачка O лежи на кругу; у том случају ће се тангенте OA и OB поклапати, а тачка O ће бити додирна тачка. У том специјалном случају биће $= o$ и онај други параметар λ, којим је одређена тангента OB, а тај параметар ће бити $= o$ — то се види по последњој еквацији — само ако је

$$u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'} = o. \qquad (22)$$

Ово је дакле она релација, која мора постојати између координата правих OA и OP, кад је тачка O додирна тачка, па како је права OP (u, v, w) једна — ма која — од оних правих, које се секу у тачци O, јасно је, да је еквација (22) аналитички еквиваленат додирне тачке у хомогеној координатној системи. — Кад бисмо узели да је $w = w' = 1$, онда бисмо добили нехомогену еквацију оне тачке у којој права (u', v') дира круг.

Еквација (22) је уједно и еквација пола праве (u', v', w'); она би се могла и овако написати:

$$u'\varphi'_u + v'\varphi'_v + w'\varphi'_w = o, \qquad (23)$$

јер је у сваком тернерном квадратном облику φ

$$u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'} \equiv u'\varphi'_u + v'\varphi'_v + w'\varphi'_w.$$

Напомена. Кад би $\varphi(u, v, w) = o$ *била* хомогена еквација ма које друге криве друге врсте, била би опет еквација тачке у којој права (u', v', w') дира криву ово:

$$u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'} = o. \qquad (24)$$

Чак бисмо могли доказати, *да би та иста еквација била еквација додирне тачке и у свакој другој хомогеној тангенцијалној системи.* — Упор. оно, што смо у сличној једној прилици поменули у чл. 173.

Прим. Нека је

$$Au^2 + 2Huv + Bv^2 + 2Gu + 2Fv + C = o$$

еквација круга; наћи еквацију тачке у којој права (u', v') дира тај круг.

Хомогена еквација круга била би ово:

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv = o;$$

с тога је

$$\frac{1}{2}\varphi'_u = Au + Hv + Gw, \ \frac{1}{2}\varphi'_v = Hu + Bv + Fw,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_w = Gu + Fv + Cw;$$

према томе је хомогена еквација додирне тачке ово:

$$u'(Au + Hv + Gw) + v'(Hu + Bv + Fw) + w'(Gu + Fv + Cw) = o$$

или

$$u(Au' + Hv' + Gw') + v(Hu' + Bv' + Fw') + w(Gu' + Fv' + Cw') = o.$$

Сад ћемо претпоставити да је $w = w' = 1$; тим путем добићемо нехомогену еквацију тачке у додиру; ево те еквације:

$$u(Au' + Hv' + G) + v(Hu' + Bv' + F) + (Gu' + Fv' + C) = o$$

или

$$Auu' + H(u'v + uv') + Bvv' + G(u + u') + F(v + v') + C = o. \quad (\alpha)$$

Ако дату еквацију напишемо овако:

$$Auu + H(uv + uv) + Bvv + G(u + u) + F(v + v) + C = o,$$

па је упоредимо са еквацијом (α), видећемо одмах на који начин постаје еквација тачке у додиру из еквације круга.

◆

ОДЕЉАК ТРЕЋИ

Системе кругова. Радикална осовина.

181. Узмимо да је

$$K_1 \equiv (x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 - r_1^2,$$

$$K_2 \equiv (x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 - r_2^2,$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\qquad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

а

$$U_1 \equiv \alpha_1 u + \beta_1 v + 1,$$

$$U_2 \equiv \alpha_2 u + \beta_2 v + 1,$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Према томе ће

$$K_1 = o, \quad K_2 = o$$

бити еквације двају кругова, а

$$U_1 = o, \quad U_2 = o$$

еквације средишта тих кругова. — Да видимо сад шта ће нам представљати еквација

$$K_1 + \lambda K_2 = o. \tag{1}$$

Ми тврдимо, да нам та еквација представља један круг, који пролази кроз тачке у којима се секу кругови $K_1 = o$ и $K_2 = o$. Ево доказа: 1-во, еквација (1) је линеарно састављена из еквација $K_1 = o$ и $K_2 = o$, т. ј. еквација (1) представља једно место које пролази кроз тачке у којима се секу кругови $K_1 = o$ и $K_2 = o$;

2-го, еквацијом (1) је симболички представљена ова квадратна еквација:

$$(1+\lambda)\,x^2+(1+\lambda)\,y^2-2\,(\alpha_1+\lambda\alpha_2)\,x-2\,(\beta_1+\lambda\beta_2)\,y$$
$$+[(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-r_1{}^2)+\lambda\,(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2-r_2{}^2)]=o, \qquad (2)$$

а та еквација представља један круг. Како у еквацији (1) λ нема одређену вредност — λ је параметар — јасно је уједно и то, да еквација (1) и не представља управо један круг, већ читаву систему кругова који пролазе кроз (реалне или имагинарне) тачке у којима се секу кругови K_1 и K_2. Еквација (1) биће дакле *еквација једног прамена кругова* или еквација тако зване *коаксалне системе кругова*; кругови K_1 и K_2 су *основни кругови* те коаксалне системе. Јасно је да је сваком специјалном вредношћу параметра λ опредељен један једини круг коаксалне системе.

Да видимо сад како ћемо наћи средиште и полупречник круга $K_1+\lambda K_2$. Помножићемо еквацију (2) тог круга са $\frac{1}{1+\lambda}$; тим путем ћемо добити ово:

$$x^2+y^2-\frac{2\,(\alpha_1+\lambda\alpha_2)}{1+\lambda}\,x-\frac{2\,(\beta_1+\lambda\beta_2)}{1+\lambda}\,y$$
$$+\frac{(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-r_1{}^2)+\lambda\,(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2-r_2{}^2)}{1+\lambda}=o. \qquad (3)$$

Ова еквација је нормалног облика; према томе су координате средишта круга $K_1+\lambda K_2$ ово:

$$\alpha=\frac{\alpha_1+\lambda\alpha_2}{1+\lambda},\ \beta=\frac{\beta_1+\lambda\beta_2}{1+\lambda}. \qquad (4)$$

Апсолутан члан еквације (3) је као што видимо ово:

$$\frac{(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2-r_1{}^2)+\lambda\,(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2-r_2{}^2)}{1+\lambda},$$

па је према томе

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2) + \lambda(\alpha_2^2 + \beta_2^2 - r_2^2)}{1 + \lambda}$$

или

$$r^2 = \frac{(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)^2 + (\beta_1 + \lambda\beta_2)^2}{(1 + \lambda)^2} - \frac{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2) + \lambda(\alpha_2^2 + \beta_2^2 - r_2^2)}{1 + \lambda}$$

или

$$r^2 = \frac{r_2^2\lambda^2 - \{[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2] - r_1^2 - r_2^2\}\lambda + r_1^2}{(1 + \lambda)^2}.$$

Ако означимо раздаљину C_1C_2 средишта $C_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $C_2(\alpha_2, \beta_2)$ основних кругова са (12), биће

$$(12)^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2,$$

па је услед тога и

$$r^2 = \frac{r_2^2\lambda^2 - [(12)^2 - r_1^2 - r_2^2]\lambda + r_1^2}{(1 + \lambda)^2}. \text{ —} \qquad (5)$$

Како су

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2}{1 + \lambda}, \quad \beta = \frac{\beta_1 + \lambda\beta_2}{1 + \lambda}$$

координате средишта круга $K_1 + \lambda K_2$, биће еквација тог средишта ово:

$$\frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2}{1 + \lambda} u + \frac{\beta_1 + \lambda\beta_2}{1 + \lambda} v + 1 = o$$

или

$$(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) u + (\beta_1 + \lambda\beta_2) v + (1 + \lambda) = o$$

или

$$(\alpha_1 u + \beta_1 v + 1) + \lambda(\alpha_2 u + \beta_2 v + 1) = o$$

или, у симболу,

$$U_1 + \lambda U_2 = o; \qquad (6)$$

та еквација је линеарно састављена из еквација $U_1 = o$ и $U_2 = o$, т. ј. *средишта свију кругова коаксалне сис-*

теме леже на правој која спаја средишта основних кругова.

182. Ми знамо да полиноми K_1 и K_2 еквација кругова $K_1 = o$ и $K_2 = o$ представљају квадрате тангената које су из тачке (x, y) повучене на кругове K_1 и K_2. Према томе казује нам еквација $K_1 + \lambda K_2 = o$ да је квадрат тангенте која је повучена из тачке (x, y) на круг $K_1 = o$ λ пута (или управо $-\lambda$ пута) толики, колики је квадрат тангенте која је из те исте тачке (x, y) повучена на круг $K_2 = o$; дакле, *кад се нека тачка креће тако, да је напремица тангената које су из ње повучене на два дата круга стална, онда ће та тачка описати један круг, који припада коаксалној системи кругова.*

183. Узмимо сад да је $\lambda = -1$. Том специјалном вредношћу одређен је у прамену $K_1 + \lambda K_2 = o$ круг

$$K_1 - K_2 = o; \qquad (7)$$

средиште тог круга је представљено овом еквацијом:

$$U_1 - U_2 = o, \qquad (8)$$

т. ј. средиште круга (7) лежи у бескрајности. По обрасцу (5) види се, да је полупречник тог круга бескрајан; тај круг ће дакле оним делом својим који не лежи у бескрајности представљати једну праву, а то се у осталом види и по еквацији његовој. Еквација је та овог облика:

$$K_1 - K_2 \equiv 2\,(\alpha_2 - \alpha_1)\,x + 2\,(\beta_2 - \beta_1)\,y$$
$$+ \alpha_1{}^2 - \alpha_2{}^2 + \beta_1{}^2 - \beta_2{}^2 + r_2{}^2 - r_1{}^2 = o, \qquad (9)$$

а та еквација је линеарна. Права, коју та еквација представља, назива се *радикална осовина* или *заједничка секанта* кругова K_1 и K_2; и она пролази кроз две основне тачке прамена $K_1 + \lambda K_2$; те основне тачке могу бити реалне, а могу бити и имагинарне, па како ће нам еквација (9) и у првом и у другом случају представљати једну реалну праву, јасно је да *два круга свакад имају реалну радикалну осовину.*

Напомене. 1-во. Нека су основни кругови концентрични. У том случају је $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, па је према томе еквација радикалне осовине ово:

$$o \cdot x + o \cdot y + r_2^2 - r_1^2 = o,$$

т. ј. *радикална осовина концентричних кругова је права у бескрајности.*

2-го. Нека је $K = o$ еквација ма ког круга коаксалне системе, а $U = o$ еквација радикалне осовине. У том случају моћи ћемо све остале кругове коаксалне системе представити еквацијом

$$K + \lambda U = o, \qquad (10)$$

јер је радикална осовина кругова $K = o$ и $K + \lambda U = o$ ово: $\lambda U = o$ или $U = o$, а то смо и претпоставили.

Прим. 1. Наћи радикалну осовину кругова

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9 = o, \; x^2 + y^2 - 3x + 2y - 6 = o.$$

Одг. $x - 6y + 15 = o$.

Прим. 2. Наћи круг који пролази кроз тачку (2, 3), а припада коаксалној системи кругова, коју опредељују мало час поменута два круга у прим. 1.

Одг. $x^2 + y^2 + 4x - 40y + 99 = o$.

Прим. 3. Доказати да су кругови

$$x^2+y^2+4x+y-3=o, \; x^2+y^2-x-y-1=o, \; x^2+y^2+14x+5y-7=o$$

коаксални.

Прим. 4. Наћи дужину заједничке корде кругова

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = o, \; x^2 + y^2 + 8x + 14y = o.$$

Радикална осовина тих кругова је $3x + 4y + 5 = o$, а први круг исеца на тој правој корду (прим. 9. стр. 329.) чија је дужина $= 8$. Према томе ће и дужина заједничке корде бити 8.

Прим. 5. **Доказати да је радикална осовина двају кругова уједно и радикална осовина сваког пара кругова оне коаксалне системе, коју одређују дата два круга.**

*184. *Наћи тачке у којима се секу два круга.*

Нека су

$$K_1 = o, \quad K_2 = o \qquad (11)$$

еквације датих кругова. Алгебарски бисмо наш задатак овако могли формулисати: наћи заједничке корене еквација (11). Система еквација (11) била би, на први поглед бар, еквивалентна (чл. 67.) са системом

$$K_1 = o, \quad K_1 - K_2 = o \qquad (12)$$

или са системом

$$K_2 = o, \quad K_1 - K_2 = o; \qquad (13)$$

како права $K_1 - K_2 = o$ сече било један, било други круг у двема реалним или имагинарним тачкама, изгледа као да се и основни кругови K_1 и K_2 секу само у две, реалне или имагинарне тачке.

Из Алгебре се међу тим зна, да еквације $K_1 = o$ и $K_2 = o$ имају четири пара заједничких корена; кад се тај алгебарски факат искаже језиком Аналитичне Геометрије, онда ће нам јасно бити, да мора бити четири такве тачке у којима се секу два круга; системе еквација (11) и (12) нису дакле еквивалентне са системом датих еквација (11). Тај аналитички факат може се, као што ћемо одмах видети, протумачити тим, што се еквација круга $K_1 + \lambda K_2 = o$ никад — па дакле ни кад је $\lambda = -1$ — не може идентификовати са еквацијом *једне* праве. Ми смо само поменули то, да ће круг $K_1 - K_2 = o$ оним својим делом који не лежи у бескрајности представљати радикалну осовину, а онај део његов који лежи у бескрајности нисмо ни узимали у рачун. Ја тврдим међу тим *да ће круг $K_1 - K_2 = o$ оним својим делом који лежи у бескрајности представљати праву у бескрајности.*

Да бих то доказао, преобразићу нехомогене еквације основних кругова у хомогене, сменићу другим речима у тим еквацијама x и y са $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ и помножићу их са z^2. Тим путем преобразиле би се еквације основних кругова K_1 и K_2 у ове хомогене две еквације:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 xz - 2\beta_1 yz + (\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 - r_1{}^2)\, z^2 = o,$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_2 xz - 2\beta_2 yz + (\alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 - r_2{}^2)\, z^2 = o.$$

Одузмимо сад другу еквацију од прве; разлика њихова је ово:

$$z\,[2\,(\alpha_2 - \alpha_1)\, x + 2\,(\beta_2 - \beta_1)\, y \\ + (\alpha_1{}^2 - \alpha_2{}^2 + \beta_1{}^2 - \beta_2{}^2 + r_2{}^2 - r_1{}^2)\, z] = o,$$

а ова еквација представља *две праве:*

1-во, праву

$$z = o,$$

т. ј. праву у бескрајности;

2-го, праву

$$2\,(\alpha_2 - \alpha_1)\, x + 2\,(\beta_2 - \beta_1)\, y \\ + (\alpha_1{}^2 - \alpha_2{}^2 + \beta_1{}^2 - \beta_2{}^2 + r_2{}^2 - r_1{}^2)\, z = o,$$

т. ј. радикалну осовину коаксалне системе. Према свему томе види се да ће права у бескрајности бити саставни део круга $K_1 - K_2 = o$, а то смо и тврдили. Радикална осовина моћи ће се дакле геометријски идентификовати са кругом бескрајног полупречника тек уз праву у бескрајности. — Према томе је јасно *да се два круга секу у четири тачке:* две између тих четирију тачака су опредељене системом еквација (12) или системом еквација (13), а остале две тачке су опредељене системом ових двеју еквација:

$$z = o,\ x^2 + y^2 - 2\alpha_1 xz - 2\beta_1 yz + (\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 - r_1{}^2)\, z = o,$$

или системом ових двеју екваци̂ја:

$$z = o, x^2 + y^2 - 2\alpha_2 xz - 2\beta_2 yz + (\alpha_2^2 + \beta_2^2 - r_2^2) z^2 = o.$$

И једна и друга система ових еквација је еквивалентна са системом

$$z = o, \quad x^2 + y^2 = o, \qquad (14)$$

т. ј. тачке у којима права $z = o$ сече и један и други круг леже у пресеку праве $z = o$ са сингуларном кривом $x^2 + y^2 = o$, а то ће рећи, у пресеку праве $z = o$ са двема изотропним правима $x + iy = o$ и $x - iy = o$; еквација те сингуларне криве не зависи, као што видимо, од параметара α, β, r, т. ј. облик њезине еквације се не мења кад се мења облик еквације круга. Права у бескрајности сече дакле све кругове у двема сталним тачкама I и J — у оним двема имагинарним тачкама, у којима права у бескрајности сече изотропне праве; те две сталне имагинарне тачке у бескрајности називају се, као што знамо (чл. 82.), *фокојидима*; *сви кругови пролазе дакле кроз две сталне имагинарне тачке I и J праве у бескрајности, кроз два фокојида бескрајне равни.*

Еквацију тих тачака ћемо наћи овако. Елиминираћемо из системе еквација

$$\begin{aligned} ux + vy + wz &= o, \\ x \pm iy &= o, \\ z &= o \end{aligned}$$

непознате параметре x, y, z, па ћемо добити еквацију тачака I и J. Ево те еквације:

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ 1 & \pm i & o \\ o & o & 1 \end{vmatrix} = o$$

или

$$\begin{vmatrix} u & v \\ 1 & \pm i \end{vmatrix} = o,$$

т. ј. еквације фокојида су ово:

$$u - iv = o, \; u + iv = o;$$

те две еквације можемо уједно и овако написати:

$$u^2 + v^2 = o,$$

а по тој еквацији се види (чл. 175.), да фокојиди опредељују правац имагинарних асимптота.

Ако све резултате сведемо уједно, моћи ћемо рећи ово: *два круга секу се у опште у четири тачке; у двема од тих тачака сече радикална осовина дате кругове, остале две тачке су две сталне, имагинарне накружне тачке у бескрајности (два фокојида).*

185. Еквацијом

$$K_1 - K_2 = o$$

је обележена једна веома важна геометријска особина тачака радикалне осовине. Полиноми K_1 и K_2 представљају, као што знамо, квадрате оних тангената, које су повучене из неке — ма које — тачке (x, y) на кругове K_1 и K_2. Ако је тачка (x, y) једна тачка радикалне осовине, онда је $K_1 - K_2 = o$ или $K_1 = K_2$, т. ј. *тангенте, које су ма из које тачке радикалне осовине двају кругова повучене на та два круга, су једнаке*, или, *радикална осовина двају кругова је место оних тачака, из којих се могу повући једнаке тангенте на кругове.*

Још до једне важне геометријске особине радикалне осовине доћи ћемо овим путем. Написаћемо скраћену еквацију $K_1 - K_2 = o$ радикалне осовине у развијеном облику:

$$2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y$$
$$+ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 + r_2^2 - r_1^2 = o.$$

Коефицијенат који одређује правац те праве је

$$m = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_2 - \beta_1} = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Како су α_1 и β_1, α_2 и β_2 координате средишта датих двају кругова, биће еквација праве која спаја средишта овог облика:

$$(\beta_1 - \beta_2)x - (\alpha_1 - \alpha_2)y + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = o;$$

коефицијенат којим је одређен правац те праве је

$$m' = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2};$$

како је

$$1 + mm' = 1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = o,$$

јасно је *да права што спаја средишта двају кругова сече под правим углом радикалну осовину тих кругова*

Конструкција радикалне осовине. 1-во. Ако се дати кругови секу у реалним тачкама, а ми ћемо просто те две тачке спојити једном правом; та права била би радикална осовина поменутих двају кругова.

2-го. Ако се дати кругови секу у имагинарним тачкама, а ми ћемо повући једну праву, која дира и један и други круг — први круг у тачци P_1, а други круг у тачци P_2 — преполовићемо дуж P_1P_2 и добићемо тим путем на тангенти P_1P_2 тачку P; та тачка мораће бити тачка радикалне осовине, јер је $PP_1 = PP_2$. Управна са тачке P на централу, т. ј. на праву што спаја средишта датих двају кругова, биће радикална осовина.

186. Узмимо сад праву на којој леже средишта кругова једне коаксалне системе за осовину x, а њихову заједничку секанту за осовину y координатне системе Ако са α означимо апсцису средишта неког — ма ког — круга коаксалне системе, а са r његов полупречник, биће еквација тог круга ово:

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2 \qquad (15)$$

или

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - r^2 = o$$

или, ако $\alpha^2 - r^2$ означимо са a^2, и

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + a^2 = o. \qquad (16)$$

Количина a^2, која се јавља у овој екваци, је *стална*; та еквација представља на име систему кругова, који се секу у радикалној осовини у двема одређеним, сталним, реалним или имагинарним тачкама, а ординате тих двеју тачака добићемо, ако потражимо ординате оних тачака, у којима заједничка секанта кругова, а то ће рећи права $x = o$, сече поменуту систему кругова; тога ради смените у екваци (16) x овом вредношћу: $x = o$, па ћемо добити ово:

$$y^2 + a^2 = o.$$

Те две тачке су, као што смо поменули, сталне, па ће с тога бити сталне и њихове ординате, а то ће рећи, да је $a^2 = const.$ Из последње квадратне екваци види се уједно и то, да се кругови прамена (16) секу *у реалним тачкама* кад је a^2 *негативно*, *а у имагинарним тачкама* кад је a^2 *позитивно*.

Кад се има у виду да је $\alpha^2 - r^2 = a^2$ или $r^2 = \alpha^2 - a^2$, моћи ће се еквација (15) прамена о коме је у овај мах реч, овако написати:

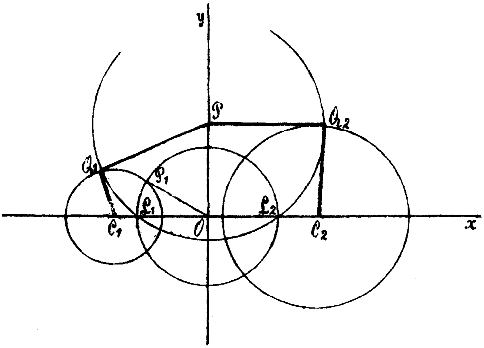
$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2 - a^2. \qquad (17)$$

1-во. *Узмимо да је a^2 негативно*, т. ј. узмимо да се кругови коаксалне системе секу у реалним тачкама.

У овом случају, биће разлика $\alpha^2 - a^2$ позитивна, па ма параметар α имао ма какву вредност; према томе ће средишта кругова (17) моћи лежати ма где на осовини x, другим речима, ма где на централној линији коаксалне системе.

2-го. *Узмимо да је a^2 позитивно,* т. ј. узмимо да се кругови коаксалне системе секу у имагинарним тачкама. У овом случају биће $\alpha^2 - a^2$ позитивно само ако је по апсолутној вредности $\alpha > a$; према томе ће средишта кругова (17) моћи лежати на осовини x, т. ј. на централној линији, само изван оних двеју тачака централне линије чије су апсцисе $x = -a$ и $x = +a$. Кад се α мења између $-a$ и $+a$, онда су кругови (17) имагинарни, јер је разлика $\alpha^2 - a^2$ негативна; ако је $\alpha^2 - a^2 = o$, т. ј. ако је $\alpha = \pm a$, онда еквација (17) представља две тачке или управо два круга бескрајно малог полупречника Ти кругови припадају такођер коаксалној системи кругова (17), па како средишта тих кругова на централној линији издвајају средишта реалних кругова коаксалне системе (17) од средишта имагинарних кругова те системе, то их је ***Poncelet*** (*Traité des propriétés projectives des figures, I. p. 41.*) назвао *граничним тачкама* или *граничним круговима* системе кругова (17). *Граничне тачке коаксалне системе су дакле реалне, кад се основни кругови секу у имагинарним тачкама; оне су имагинарне, кад се основни кругови, а с њима заједно и сви остали кругови коаксалне системе секу у реалним тачкама.*

Конструкција граничних тачака. Почетак координатне системе има своју одређену моћ с обзиром на сваки круг коаксалне системе. Ту моћ добићемо овако: пребацићемо у еквацији (17) све чланове на леву страну и сменићемо у полиному $f(x, y)$ те еквације x и y координатама почетка; према томе је моћ почетка координатне системе с обзиром на кругове наше коаксалне системе ово: $f(o, o) = a^2$, па како је $a^2 = const.$, биће и моћ с обзиром на све кругове стална. Та моћ почетка је међу тим (чл. 155.) равна квадрату тангенте, која је из почетка повучена на поједине кругове коаксалне системе, па како је $a^2 = const.$, биће и све тангенте једнаке. Повуцимо сад са тачке O тангенту на један круг дате коаксалне системе, н. пр. тангенту OP_1 на први основни круг и опишимо том тангентом као полупречником један круг око почетка. Тачке L_1 и L_2, у којима тај круг сече заједничку централу кругова коаксалне системе, биће граничне тачке те системе, јер је $OL_1 = OL_2 = OP_1$.



Сл. 84.

187. *Поларе неке тачке* (x', y') *с обзиром на све кругове коаксалне системе пролазе кроз једну сталну тачку.*

Ту теорему доказаћемо овако. Написаћемо еквацију кругова коаксалне системе у овом облику (15):

$$(x - \alpha)^2 + y^2 - r^2 = o.$$

Према томе ће еквација поларе тачке (x', y') бити ово:

$$(x - \alpha)(x' - \alpha) + yy' - r^2 = o$$

или

$$xx' + yy' + \alpha^2 - r^2 - \alpha(x + x') = o$$

или најпосле — како је $\alpha^2 - r^2 = a^2$ —

$$(xx' + yy' + a^2) - \alpha(x + x') = o. \qquad (18)$$

Ова екваци̧ја је линеарно састављена из ових двеју екваци̧ја:

$$xx' + yy' + a^2 = o, \quad x + x' = o, \qquad (19)$$

а то ће рећи, да праве, које представља екваци̧ја (18), пролазе све од реда кроз једну тачку — тачку у којој се секу праве (19), а то смо и тврдили.

Узмимо сад једну граничну тачку н. пр. тачку L_2 (a, o) за пол. Екваци̧ја поларе те тачке, а с обзиром на кругове наше коаксалне системе, биће ово:

$$(x \cdot a + y \cdot o + a^2) - \alpha\,(x + a) = o$$

или

$$a\,(x + a) - \alpha\,(x + a) = o$$

или

$$(a - \alpha)\,(x + a) = o$$

или

$$x + a = o,$$

а то је, као што видимо, екваци̧ја једне праве, која пролази кроз граничну тачку L_1, а стоји управно на централној линији кругова коаксалне системе, т. ј. *полара једне граничне тачке с обзиром на ма који круг коаксалне системе је стална; она пролази кроз другу граничну тачку, а стоји управно на заједничкој централи системе кругова.*

188. *Тангенте, које су повучене ма из које тачке радикалне осовине једне системе кругова на све кругове те системе, имају исту дужину.*

Ако су $K_1 = o$ и $K_2 = o$ нормалне екваци̧је двају кругова, биће K_1 и K_2 квадрати оних тангената које су из неке — ма које — тачке (x, y) равни повучене на кругове $K_1 = o$ и $K_2 = o$. Екваци̧ја $K_1 + \lambda K_2 = o$ општег круга коаксалне системе $(K_1 K_2)$ није нормална; ево на име њезиног развијеног облика (чл. 181.):

$$(1 + \lambda)\,x^2 + (1 + \lambda)\,y^2 - 2\,(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)\,x - \cdot\ \cdot\ \cdot = o.$$

Еквација $K_1 + \lambda K_2 = o$ преобразиће се дакле у еквацију нормалног облика тек кад је поделимо са $1 + \lambda$. Према томе ће тек количником $\frac{K_1 + \lambda K_2}{1 + \lambda}$ бити представљен квадрат дужине оне тангенте, која је из тачке (x, y) повучена на круг $K_1 + \lambda K_2 = o$. — Узмимо сад да тачка (x, y) лежи ма где на радикалној осовини $K_1 - K_2 = o$ кругова коаксалне системе. За све тачке радикалне осовине је $K_1 = K_2$, па је с тога за сваку тачку радикалне осовине

$$\frac{K_1 + \lambda K_2}{1 + \lambda} = K_1 = K_2,$$

а то ће рећи, да су тангенте, које су повучене из неке тачке радикалне осовине на ма који круг коаксалне системе заиста једнаке — оне су исте онолике, колике су и тангенте, које су повучене са те исте тачке радикалне осовине на основне кругове коаксалне системе.

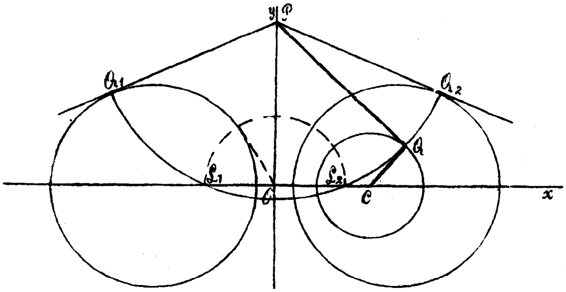
Повуцимо сад из неке тачке P радикалне осовине тангенте на све кругове коаксалне системе. Кад се има на уму последња теорема, јасно ће нам бити, да ће тачке у којима оне дирају све кругове коаксалне системе лежати на периферији једнога круга, који је око тачке P описан тангентом $PQ_1 = PQ_2 = \cdot\ \cdot\ \cdot$; тај круг ће сећи све кругове коаксалне системе под правим углом — то ће бити један од *ортогоналних кругова* коаксалне системе[1]; јасно је да ће тај ортогоналан круг пролазити кроз граничне тачке, јер су и оне два специјална круга коаксалне системе.

Што вреди за тачку P, вреди у опште ма за коју тачку радикалне осовине; сваку тачку радикалне осовине можемо сматрати као средиште једног ортогоналног круга коаксалне системе, т. ј. *радикална осо-*

---

[1] Угао, који затварају две криве међу собом, је одмерен углом који лежи између тангената, што су на обе криве повучене у тачци у којој се секу те две криве. Према томе ће се криве сећи *ортогонално*, ако је угао, који затварају тангенте, што су повучене на обе криве у тачци у пресеку њихову, прав.

вина је место средишта ортогоналних кругова коаксалне системе. Сви ти кругови пролазе међу тим и кроз граничне тачке коаксалне системе, т. ј. *права што спаја граничне тачке једне коаксалне системе кругова је радикална осовина системе ортогоналних кругова.* Ако су граничне тачке прве системе реалне, биће граничне тачке друге системе имагинарне и обратно.



Сл. 85.

Кад се кругови једне коаксалне системе секу у имагинарним тачкама, онда ћемо на овај начин конструкцијом наћи кругове, који припадају тој системи. Повући ћемо из неке — ма које — тачке P радикалне осовине тангенте PQ_1 и PQ_2 на основне кругове и описаћемо дужима $PQ_1 = PQ_2$ један круг око тачке P; тај круг ће бити један од поменутих ортогоналних кругова коаксалне системе. Из средишта P тог круга повући ћемо ма у ком правцу један полупречник PQ и спустићемо у крајњој тачци Q једну $\perp$ на PQ. Та управна ће сећи заједничку централу кругова коаксалне системе у тачци C; дуж QC биће полупречник, а тачка C биће средиште једнога од оних кругова који припадају поменутој коаксалној системи.

189. *Радикалне осовине трију кругова — два и два круга имају по једну радикалну осовину, а три круга имају три радикалне осовине — секу се у једној тачци.*

Нека су

$$K_1 = o, \; K_2 = o, \; K_3 = o$$

еквације трију кругова. Еквације радикалних осовина тих трију кругова биће ово:

$$K_1 - K_2 = o,\ K_2 - K_3 = o,\ K_3 - K_1 = o;$$

како је збир тих трију еквација идентично раван нули:

$$(K_1 - K_2) + (K_2 - K_3) + (K_3 - K_1) \equiv o,$$

јасно је да се поменуте три радикалне осовине заиста секу у једној тачци. Та заједничка тачка радикалних осовина зове се *радикално средиште* трију кругова.

Прим. 1. Доказати да ће тачке у којима права

$$Ax + By + C = o$$

сече круг

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$$

лежати на периферији истога круга са тачкама у којима осовина x **сече круг**

$$x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = o,$$

ако је

$$2C(g - g') = A(c - c'). -$$

Доказ треба извести на основу тога што се праве $y = o$ **и** $Ax + By + C = o$ **морају у овом случају сећи на радикалној осовини датих двају кругова.**

Прим. 2. Свака права која пролази кроз средиште једног од двају ортогоналних кругова, сече та два круга у четири тачке, које хармонијски леже.

Узмимо да права која је повучена из средишта O **круга** K **сече круг** K **у тачкама** A **и** B, **а круг** K' **у тачкама** C **и** D. **Како се кругови** K **и** K' **секу под правим углом, биће тангента која је повучена из средишта** O **на круг** K' = **полупречнику круга** K; **с тога је**

$$OC \cdot OD = \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2,$$

т. ј. и т. д.

190. *Наћи угао у пресеку двају кругова.*

Нека су r и r' полупречници датих кругова, а d раздаљина њихових средишта. Оба средишта спојићемо полупречницима r и r' са једном од оних тачака, у којима се секу дати кругови и повући ћемо тангенте у тој тачци на оба круга. Угао у пресеку тих кругова биће упрàво онај угао φ, који ће поменуте две тангенте затварати међу собом. Те две тангенте сећи ће под правим углом полупречнике r и r', а то ће рећи, да ће угао φ, о коме је у овај мах реч, бити = углу који лежи између полупречника r и r', који су повучени према једној од оних тачака, у којима се секу дата два круга. Према томе је по Carnot-овом обрасцу

$$\partial^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi.$$

Ако су сад еквације датих кругова ово:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o,$$

$$x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = o,$$

биће координате α и β, α' и β' средишта њихових ово: $\alpha = -g$, $\beta = -f$ и $\alpha' = -g'$, $\beta' = -f'$, па је с тога

$$\partial^2 = (g - g')^2 + (f - f')^2,$$

а с тим и

$$(g - g')^2 + (f - f')^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi; \quad (20)$$

међу тим је

$$r^2 = g^2 + f^2 - c, \; r'^2 = g'^2 + f'^2 - c',$$

па ако тим вредностима сменимо r^2 и r'^2 у релацији (20), а ми ћемо добити ово:

$$(g-g')^2+(f-f')^2=(g^2+f^2-c)+(g'^2+f'^2-c')-2rr'\cos\varphi$$

или, после редукције,

$$c + c' + 2rr'\cos\varphi - 2gg' - 2ff' = o, \quad (21)$$

а одатле је лако израчунати φ.

Напомене. 1-во. Ако се кругови секу под правим углом, биће $\varphi = 90^0$; у том случају ће се релација (21) преобразити у ову релацију:

$$2gg' + 2ff' - c - c' = o; \qquad (22)$$

том релацијом је дакле аналитички обележена погодба под којом се дати кругови секу ортогонално.

2-го. Кругови ће се додиривати ако је

$$c' \pm 2rr' - 2gg' - 2ff' + c = o; \qquad (23)$$

знак плус треба узети кад се кругови *изнутра* додирују, јер је у том случају $\varphi = o$, а знак минус треба узети кад се кругови *споља* додирују, јер је у том случају $\varphi = 180^0$.

191. Дефиниција. *Под узајамном моћи двају кругова разумевамо разлику која постоји између квадрата раздаљине средишта тих кругова и збира квадрата полупречника њихових.*

Нека су

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = o,$$

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = o$$

еквације двају кругова; узајамна моћ тих кругова бележи се са π_{12}; према дефиницији је дакле

$$\pi_{12} = \delta^2 - (r_1^2 + r_2^2)$$

или, како је

$$\delta^2 - (r_1^2 + r_2^2) = - 2r_1r_2 cos\varphi,$$

$$\pi_{12} = - 2r_1r_2 cos\varphi. \qquad (24)$$

С друге стране је по релацији (21)

$$- 2r_1r_2 cos\varphi = c_1 + c_2 - 2g_1g_2 - 2f_1f_2;$$

с тога се узајамна моћ датих двају кругова може и овако изразити:

$$\pi_{12} = c_1 + c_2 - 2g_1g_2 - 2f_1f_2. \qquad (25)$$

Напомене. 1-во. Ако се дати кругови секу ортогонално, биће $\varphi = 90^\circ$, т. ј. $\cos\varphi = o$, па је с тога узајамна моћ таквих двају кругова $= o$.

2-го. Ако се кругови додирују, биће $\varphi = 180^\circ$ или $\varphi = o$, т. ј. $\cos\varphi = -1$ или $\cos\varphi = 1$, па је с тога узајамна моћ таквих двају кругова $\pm\ 2r_1r_2$.

192. *Наћи еквацију круга, који дата три круга сече под датим углима* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Нека су

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = o$$

и т. д.

еквације датих трију кругова, а

$$K \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o \qquad (26)$$

еквација оног круга, који дате кругове сече под углима $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Ако са $\pi_{01}, \pi_{02}, \pi_{03}$ означимо узајамну моћ кругова K и K_1 и т. д., биће

$$c_1 - \pi_{01} - 2gg_1 - 2ff_1 + c = o,$$

$$c_2 - \pi_{02} - 2gg_2 - 2ff_2 + c = o,$$

$$c_3 - \pi_{03} - 2gg_3 - 2ff_3 + c = o.$$

Еквацију круга, који дате кругове сече под углима $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ добићемо, кад елиминирамо непознате параметре g, f, c из системе последњих трију релација и еквације (26); еквација тог круга биће дакле ово:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & -x & -y & 1 \\ c_1 - \pi_{01} & g_1 & f_1 & 1 \\ c_2 - \pi_{02} & g_2 & f_2 & 1 \\ c_3 - \pi_{03} & g_3 & f_3 & 1 \end{vmatrix} = o. \qquad (27)$$

Ако ову детерминанту развијемо по елементима прве врсте, добићемо једну овакву еквацију:

$$A(x^2 + y^2) + 2Gx + 2Fy + C = o.$$

У тој еквацији коефицијенти A, G, F, C имају сасвим одређене вредности; тако би н. пр. коефицијенат C био ово:

$$C = \begin{vmatrix} c_1 - \pi_{01} & g_1 & f_1 \\ c_2 - \pi_{02} & g_2 & f_2 \\ c_3 - \pi_{03} & g_3 & f_3 \end{vmatrix}$$

и т. д.

Како је $\pi_{01} = -2rr_1 cos\varphi_1$ и т. д., јасно је да ће се r, т. ј. полупречник круга (27), линеарно јављати у коефицијенту C. Сличним путем могло би се доказати, да се r у првом степену јавља и у коефицијентима G и F. — Међу тим је (чл. 154.)

$$A^2r^2 = G^2 + F^2 - AC,$$

па како се, као што мало час поменусмо, r линеарно јавља у коефицијентима G, F и C, јасно је, да ће последња еквација бити једна потпуна квадратна еквација с обзиром на r; r ће дакле имати две вредности; ма којом између њих да сменимо r у еквацији (27), добићемо један круг, који дате кругове K_1, K_2, K_3 сече под датим углима φ_1, φ_2, φ_3.

193. *Наћи еквацију круга, који под правим углом сече дата три круга.*

Ова проблема је само специјалан случај последње општије проблеме. У овај мах је на име $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 90^\circ$, а $\pi_{01} = \pi_{02} = \pi_{03} = o$, па је с тога еквација круга, који под правим углом сече дате кругове — тај круг се често назива и *ортотомски круг* — овог облика:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & -x & -y & 1 \\ c_1 & g_1 & f_1 & 1 \\ c_2 & g_2 & f_2 & 1 \\ c_3 & g_3 & f_3 & 1 \end{vmatrix} = o. \quad (28)$$

Ова еквација може се, видећемо одмах, написати у једном необично лепом облику, а до тог облика доћи ћемо овим путем.

Помножићемо другу колону детерминанте (28) са x, а трећу са y и додаћемо по врстама збир елемената тих двеју колона елементима прве колоне. Тим путем преобразиће се еквација (28) у ову:

$$\begin{vmatrix} o & -x & -y & 1 \\ g_1x+f_1y+c_1 & g_1 & f_1 & 1 \\ g_2x+f_2y+c_2 & g_2 & f_2 & 1 \\ g_3x+f_3y+c_3 & g_3 & f_3 & 1 \end{vmatrix} = o.$$

У овој новој детерминанти помножићемо елементе четврте колоне са x и додаћемо их по врстама елементима друге колоне; за тим ћемо помножити елементе четврте колоне са y и додаћемо их по врстама елементима треће колоне и на послетку ћемо развити детерминанту по елементима прве врсте. Резултат тих операција је ово:

$$\begin{vmatrix} g_1x+f_1y+c_1 & x+g_1 & y+f_1 \\ g_2x+f_2y+c_2 & x+g_2 & y+f_2 \\ g_3x+f_3y+c_3 & x+g_3 & y+f_3 \end{vmatrix} = o;$$

ако још потиснемо у овој детерминанти елементе прве колоне на место елемената треће колоне, а ми ћемо добити ово:

$$\begin{vmatrix} x+g_1 & y+f_1 & g_1x+f_1y+c_1 \\ x+g_2 & y+f_2 & g_2x+f_2y+c_2 \\ x+g_3 & y+f_3 & g_3x+f_3y+c_3 \end{vmatrix} = o. \quad (29)$$

Сменимо сад у еквацијама датих трију кругова x са $\frac{x}{z}$, а y са $\frac{y}{z}$ и помножимо еквације са z^2. Тим путем преобразиће се дате нехомогене еквације у три хомогене еквације, које бисмо могли означити овим симболима:

$$f(x, y, z) = o, \quad \varphi(x, y, z) = o, \quad \psi(x, y, z) = o$$

тако, да је

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + 2g_1xz + 2f_1yz + c_1z^2 = o$$

и т. д.

У тој хомогеној координатној системи била би еквација (29) овог облика:

$$\begin{vmatrix} x+g_1z & y+f_1z & g_1x+f_1y+c_1z \\ x+g_2z & y+f_2z & g_2x+f_2y+c_2z \\ x+g_3z & y+f_3z & g_3x+f_3y+c_3z \end{vmatrix} = o. \quad (30)$$

Удвојени елементи ове детерминанте су делимични диференцијални количници хомогених функција f, φ, ψ; тако је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x+g_1z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+f_1z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(g_1x+f_1y+c_1z)$$

и т. д.

па се према томе еквација (30) ортотомског круга може овако написати:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = o \qquad (31)$$

или

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} = o. \qquad (32)$$

Кад се има у виду то, да су детерминанте (31) и (32) *функционалне детерминанте* или *јакобијани*[1]) облика f, φ, ψ, онда бисмо ортотомски круг могли звати *јакобијанком* датих трију кругова.

Напомена. Средиште једнога круга који под правим углом сече два круга налази се на радикалној осовини тих двају кругова (чл. 188.); радикално средиште трију кругова биће дакле средиште њихове јакобијанке.

194. Ако су K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 и $K_6, K_7, K_8, K_9, K_{10}$ две системе од по пет кругова, биће

$$\begin{vmatrix} \pi_{16} & \pi_{17} & \pi_{18} & \pi_{19} & \pi_{1\,10} \\ \pi_{26} & \pi_{27} & \pi_{28} & \pi_{29} & \pi_{2\,10} \\ \pi_{36} & \pi_{37} & \pi_{38} & \pi_{39} & \pi_{3\,10} \\ \pi_{46} & \pi_{47} & \pi_{48} & \pi_{49} & \pi_{4\,10} \\ \pi_{56} & \pi_{57} & \pi_{58} & \pi_{59} & \pi_{5\,10} \end{vmatrix} = o. \qquad (33)$$

---

[1]) **Jakobi** *(De determinantibus functionalibus, Crelle's Journal für die reine und angew. Mathem. t. 22. p. 319—352)* се први, још као професор у Кенигсбергу, бавио о функционалним детерминантама; по њему се оне тако и зову. **Sylvester** је те детерминанте у *Философским Трансакцијама* од год. 1853. св. 143. назвао *јакобијанима*; назив Силвестров је убрзо, год. 1856., прихватио **Cayley** *(Note sur une formule pour la réversion des séries, Crelle's Journal, t. 52. p. 276--284.)*, па га данас употребљавају махом енглески и француски писци.

Ова важна теорема зове се *Фробенијусова теорема.* (***G. Frobenius.*** *Anwendungen auf die Geometrie des Maasses, Crelle's Journal, t. 79.)* — Доказ те теореме је веома прост. Помножићемо ове две *сужене* детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2g_1 & 2f_1 & c_1 \\ 1 & 2g_2 & 2f_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2g_5 & 2f_5 & c_5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} c_6 & -g_6 & -f_6 & 1 \\ c_7 & -g_7 & -f_7 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{10} & -g_{10} & -f_{10} & 1 \end{vmatrix};$$

производ тих детерминаната је управо = детерминанти (33), јер је

$$\pi_{16} = c_1 + c_6 - 2g_1g_6 - 2f_1f_6$$

и т. д.

Како је производ сужених детерминаната $= o$, јасно је да поменута Фробенијусова теорема заиста постоји.

Напомена. Детерминанта (33) бележи се овим симболом:

$$\Pi\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \end{pmatrix} = o.$$

195. Узмимо сад да се кругови K_1 и K_6, K_2 и K_7 и т. д. поклапају и означимо угао у пресеку кругова K_α и K_β са $\overline{\alpha\beta}$. Како је у опште

$$\pi_{\alpha\beta} = -2r_\alpha r_\beta \cos\overline{\alpha\beta},$$

биће по Фробенијусовој теореми

$$\begin{vmatrix} r_1r_1\cos\overline{11} & r_1r_2\cos\overline{12} & r_1r_3\cos\overline{13} & r_1r_4\cos\overline{14} & r_1r_5\cos\overline{15} \\ r_2r_1\cos\overline{21} & r_2r_2\cos\overline{22} & r_2r_3\cos\overline{23} & r_2r_4\cos\overline{24} & r_2r_5\cos\overline{25} \\ r_3r_1\cos\overline{31} & r_3r_2\cos\overline{32} & r_3r_3\cos\overline{33} & r_3r_4\cos\overline{34} & r_3r_5\cos\overline{35} \\ r_4r_1\cos\overline{41} & r_4r_2\cos\overline{42} & r_4r_3\cos\overline{43} & r_4r_4\cos\overline{44} & r_4r_5\cos\overline{45} \\ r_5r_1\cos\overline{51} & r_5r_2\cos\overline{52} & r_5r_3\cos\overline{53} & r_5r_4\cos\overline{54} & r_5r_5\cos\overline{55} \end{vmatrix} = o$$

или

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\overline{12} & \cos\overline{13} & \cos\overline{14} & \cos\overline{15} \\ \cos\overline{21} & 1 & \cos\overline{23} & \cos\overline{24} & \cos\overline{25} \\ \cos\overline{31} & \cos\overline{32} & 1 & \cos\overline{34} & \cos\overline{35} \\ \cos\overline{41} & \cos\overline{42} & \cos\overline{43} & 1 & \cos\overline{45} \\ \cos\overline{51} & \cos\overline{52} & \cos\overline{53} & \cos\overline{54} & 1 \end{vmatrix} = o. \qquad (34)$$

Ако пети круг сече прва четири под правим углом, биће $\cos\overline{15} = \cos\overline{25} = \cos\overline{35} = \cos\overline{45} = \cos 90^\circ = o$, па ће се с тога у том специјалном случају детерминанта (34) преобразити у ову:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\overline{12} & \cos\overline{13} & \cos\overline{14} \\ \cos\overline{21} & 1 & \cos\overline{23} & \cos\overline{24} \\ \cos\overline{31} & \cos\overline{32} & 1 & \cos\overline{34} \\ \cos\overline{41} & \cos\overline{42} & \cos\overline{43} & 1 \end{vmatrix} = o. \qquad (35)$$

Кад би пети круг додиривао прва четири круга, онда би се детерминанта (34) преобразила у ову:

$$\begin{vmatrix} o & \sin^2\frac{1}{2}\overline{12} & \sin^2\frac{1}{2}\overline{13} & \sin^2\frac{1}{2}\overline{14} \\ \sin^2\frac{1}{2}\overline{21} & o & \sin^2\frac{1}{2}\overline{23} & \sin^2\frac{1}{2}\overline{24} \\ \sin^2\frac{1}{2}\overline{31} & \sin^2\frac{1}{2}\overline{32} & o & \sin^2\frac{1}{2}\overline{34} \\ \sin^2\frac{1}{2}\overline{41} & \sin^2\frac{1}{2}\overline{42} & \sin^2\frac{1}{2}\overline{43} & o \end{vmatrix} = o; \qquad (36)$$

у овом случају били би на име косинуси углова $\overline{15}$, $\overline{25}$, $\overline{35}$ и $\overline{45}$ сви од реда $= 1$, па би с тога детерминанта (34) била заоквирена све самим јединицама (те јединице би биле елементи пете врсте и пете колоне. Кад бисмо сад елементе прве четири колоне помножили са -1, па им додали елементе пете колоне, па кад бисмо за тим у детерминанти сменили $1-\cos\overline{\alpha\beta}$ са $2\sin^2\frac{1}{2}\overline{\alpha\beta}$, па целу детерминанту скратили са 8 и развили је по елементима пете врсте, добили бисмо у резултату детерминанту (36).

Примери

1. Круг K сече ортогонално кругове K_1, K_2, K_3; доказати да ће K ортогонално сећи и круг $\lambda_1K_1+\lambda_2K_2+\lambda_3K_3$.

2. Наћи погодбу под којом ће полупречник круга $\lambda_1K_1+\lambda_2K_2+\lambda_3K_3$ бити $= o$.

Ако је R полупречник круга $\lambda_1K_1+\lambda_2K_2+\lambda_3K_3$, биће

$$R^2(\Sigma\lambda)^2=(\Sigma\lambda g)^2+(\Sigma\lambda f)^2-\Sigma\lambda\cdot\Sigma\lambda c;$$

како је по претпоставци $R=o$, биће и

$$(\Sigma\lambda g)^2+(\Sigma\lambda f)^2-\Sigma\lambda\cdot\Sigma\lambda c=o.$$

Кад бисмо овај скраћен израз написали у развијеном облику, видели бисмо да је коефицијенат који стоји уз λ_1^2 ово: $g_1^2+f_1^2-c_1$, т. ј. r_1^2, а коефицијенат уз $\lambda_1\lambda_2$ ово: $2g_1g_2+2f_1f_2-c_1-c_2$ т. ј. $-\pi_{12}$. Према томе је погодба коју тражимо ово:

$$\lambda_1^2r_1^2+\lambda_2^2r_2^2+\lambda_3^2r_3^2-\pi_{12}\lambda_1\lambda_2-\pi_{23}\lambda_2\lambda_3-\pi_{31}\lambda_3\lambda_1=o.$$

3. Ако четири круга $K_1\equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=o$ и т. д. ортогонално секу некакав пети круг, онда мора бити

$$\begin{vmatrix} c_1 & f_1 & g_1 & 1 \\ c_2 & f_2 & g_2 & 1 \\ c_3 & f_3 & g_3 & 1 \\ c_4 & f_4 & g_4 & 1 \end{vmatrix}=o.$$

4. A, B, C, D су средишта четирију коортогоналних кругова; t_1, t_2, t_3, t_4 су тангенте које су повучене са неке — ма које — тачке равни на њих, а (ABC) је троугао чија су темена тачке A, B, C и т. д.; доказати да је

$$t_1^2(BCD) - t_2^2(CDA) + t_3^2(DAB) - t_4^2(ABC) = o.$$

5. Кругови K_1, K_2, K_3, K_4 припадају једној, а кругови K_5, K_6, K_7, K_8 другој системи; доказати да је

$$\begin{vmatrix} o & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pi_{15} & \pi_{16} & \pi_{17} & \pi_{18} \\ 1 & \pi_{25} & \pi_{26} & \pi_{27} & \pi_{28} \\ 1 & \pi_{35} & \pi_{36} & \pi_{37} & \pi_{38} \\ 1 & \pi_{45} & \pi_{46} & \pi_{47} & \pi_{48} \end{vmatrix} = o.$$

Lachland

6. Наћи јакобијанку кругова

$$x^2 + y^2 = a^2,\ (x - b)^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + (y - c)^2 = a^2.$$

Одг. $x^2 + y^2 - bx - cy + a^2 = o.$

7. Наћи еквацију круга који пролази кроз тачку $(2, o)$, а сече ортогонално кругове

$$x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 2y + 8.$$

Одг. $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = o.$

8. Наћи релацију којом су везани угли под којима се секу четири круга.

Ако су r, r', r'', r''' полупречници четирију кругова, а $\frac{1}{r} = \varrho$, $\frac{1}{r'} = \varrho'$ и т. д., биће

$$\begin{vmatrix} o & \varrho & \varrho' & \varrho'' & \varrho''' \\ \varrho & 1 & \cos\overline{21} & \cos\overline{31} & \cos\overline{41} \\ \varrho' & \cos\overline{12} & 1 & \cos\overline{32} & \cos\overline{42} \\ \varrho'' & \cos\overline{13} & \cos\overline{23} & 1 & \cos\overline{43} \\ \varrho''' & \cos\overline{14} & \cos\overline{24} & \cos\overline{34} & 1 \end{vmatrix} = o.$$

9. Наћи еквацију круга који под углом θ сече три круга.

Одг. Ако је r полупречник тог круга, а $2r\cos\theta = \lambda$, биће еквација његова ово:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & -x & -y & 1 \\ c_1 & g_1 & f_1 & 1 \\ c_2 & g_2 & f_2 & 1 \\ c_3 & g_3 & f_3 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} o & -x & -y & 1 \\ r_1 & g_1 & f_1 & 1 \\ r_2 & g_2 & f_2 & 1 \\ r_3 & g_3 & f_3 & 1 \end{vmatrix} = o.$$

10. Треба доказати да су граничне тачке кругова

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o,\ x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = o$$

одређене двема еквацијама

$$x = -\frac{g + \lambda g'}{1 + \lambda},\ y = -\frac{f + \lambda f'}{1 + \lambda},$$

у којима је параметар λ један од корена ове квадратне еквације:

$$(g + \lambda g')^2 + (f + \lambda f')^2 = (1 + \lambda)(c + \lambda c').$$

ЗАЈЕДНИЧКЕ ТАНГЕНТЕ. ОСОВИНЕ СЛИЧНОСТИ.

196. Нека су

$$K_1 \equiv (x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 - r_1{}^2 = o,$$

$$K_2 \equiv (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 - r_2{}^2 = o$$

еквације двају кругова. На првом кругу ћемо узети тачку (x_1, y_1), а на другом кругу тачку (x_2, y_2); прву тачку ћемо спојити полупречником r_1 са средиштем C_1 (α_1, β_1), а другу полупречником r_2 са средиштем C_2 (α_2, β_2). Ако угле, које затварају полупречници r_1 и r_2 са осовином x, означимо са θ_1 и θ_2, биће

$$x_1 - \alpha_1 = r_1 cos\,\theta_1,\ y_1 - \beta_1 = r_1 sin\,\theta_1, \quad (1)$$

$$x_2 - \alpha_2 = r_2 cos\,\theta_2,\ y_2 - \beta_2 = r_2 sin\,\theta_2. \quad (2)$$

Повуцимо још тангенте на кругове K_1 и K_2 у поменутим двема тачкама (x_1, y_1) и (x_2, y_2); еквације тих двеју тангената су

$$(x-\alpha_1)(x_1-\alpha_1)+(y-\beta_1)(y_1-\beta_1)-r_1^2=o,$$

$$(x-\alpha_2)(x_2-\alpha_2)+(y-\beta_2)(y_2-\beta_2)-r_2^2=o,$$

а те две еквације могу се, кад се имају у виду релације (1) и (2), написати овако:

$$(x-\alpha_1)\cos\theta_1+(y-\beta_1)\sin\theta_1-r_1=o,$$

$$(x-\alpha_2)\cos\theta_2+(y-\beta_2)\sin\theta_2-r_2=o.$$

Ове две еквације представљаће једну и исту праву — заједничку тангенту кругова K_1 и K_2 — само ако је

$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\alpha_1\cos\theta_1+\beta_1\sin\theta_1+r_1}{\alpha_2\cos\theta_2+\beta_2\sin\theta_2+r_2}.$$

Ако заједничку вредност ових количника означимо са λ, биће

$$\cos\theta_1=\lambda\cos\theta_2,\quad \sin\theta_1=\lambda\sin\theta_2 \qquad (3)$$

и

$$\alpha_1\cos\theta_1+\beta_1\sin\theta_1+r_1=\lambda(\alpha_2\cos\theta_2+\beta_2\sin\theta_2+r_2). \qquad (4)$$

Тај непознат коефицијенат λ определићемо помоћу првих двеју еквација (3); квадрираћемо и сабраћемо те две еквације. У резултату је

$$\lambda^2=1 \quad \text{или} \quad \lambda=\pm 1.$$

1-во. Нека је $\lambda=+1$. У овом случају добићемо из еквација (3) ово:

$$\cos\theta_1=\cos\theta_2,\quad \sin\theta_1=\sin\theta_2,$$

па је према томе

$$\theta_1=\theta_2.$$

Како је $\lambda=+1$, а $\theta_1=\theta_2$, биће поменута релација (4) у овај мах овог облика:

$$\alpha_1 cos\,\theta_1 + \beta_1 sin\,\theta_1 + r_1 = \alpha_2 cos\,\theta_1 + \beta_2 sin\,\theta_1 + r_2$$

или

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\,cos\,\theta_1 + (\beta_1 - \beta_2)\,sin\theta_1 + r_1 - r_2 = o. \quad (5)$$

Обратно, кадгод постоји ова релација, биће и $\lambda = + 1$ а $\theta_1 = \theta_2$, т. ј. релацијом |5) је аналитички обележена једна од оних погодаба под којима кругови K_1 и K_2 имају заједничку тангенту.

2-го. Нека је $\lambda = - 1$. У овом случају добићэмо из еквација (3) ово:

$$cos\,\theta_1 = - cos\,\theta_2,\ \ sin\,\theta_1 = - sin\,\theta_2,$$

па је према томе

$$\theta_1 = \pi + \theta_2.$$

Како је $\lambda = - 1$, а $\theta_2 = - (\pi - \theta_1)$, биће погодбена релација (4) у овај мах овог облика:

$$\alpha_1 cos\,\theta_1 + \beta_1 sin\,\theta_1 + r_1 = \alpha_2 cos\,\theta_1 + \beta_2 sin\,\theta_1 - r_2$$

или

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\,cos\,\theta_1 + (\beta_1 - \beta_2)\,sin\,\theta_1 + r_1 + r_2 = o, \quad (6)$$

па је с тога и овом релацијом обележена једна од оних погодаба под којима кругови K_1 и K_2 имају заједничку тангенту.

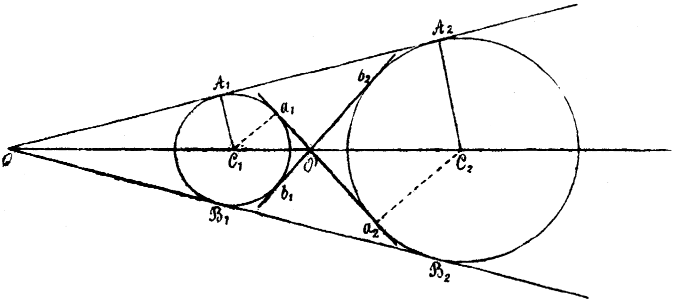
Напишимо сад еквацију (5) у овом облику:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\,\sqrt{1 - sin^2\theta_1} + (\beta_1 - \beta_2)\,sin\,\theta_1 + r_1 - r_2 = o$$

и узмимо да нам је у тој еквацији $sin\,\theta_1$ непозната. Та еквација је квадратна, па ће с тога $sin\,\theta_1$, а с њим и θ_1 имати две вредности. Из сличних разлога добићемо за θ_1 две вредности и из еквације (6). Према томе је јасно да *два круга имају четири заједничке тангенте*. Корени прве еквације опредељују правац *спољашњих (директних)* тангената A_1A_2 и B_1B_2, а корени друге еквације правац *унутрашњих (трансверзалних)* тангената

$a_1 a_2$ и $b_1 b_2$. Тачка O, у којој се секу прве две тангенте, зове се *спољашње средиште сличности*, а тачка O', у којој се секу унутрашње тангенте, *унутрашње средиште сличности*.

Помоћу еквација (1) и (2), (5) и (6) и еквација кругова K_1 и K_2 могли бисмо израчунати и координате додирних тачака. Ако смо н. пр. ради да нађемо координате тачака A_1 и B_1, и a_1 и b_1, у којима заједничке тангенте дирају круг K_1, а ми ћемо овако радити. Из еквација (1) добићемо ово:



Сл. 86.

$$\cos\theta_1 = \frac{x_1 - \alpha_1}{r_1}, \quad \sin\theta_1 = \frac{y_1 - \beta_1}{r_1};$$

тим вредностима сменићемо $\cos\theta_1$ и $\sin\theta_1$ у погодбеним релацијама (5) и (6). Резултат те супституције је ово:

$$(\alpha_1-\alpha_2)(x_1-\alpha_1)+(\beta_1-\beta_2)(y_1-\beta_1)+r_1(r_1-r_2)=o, \quad (7)$$

$$(\alpha_1-\alpha_2)(x_1-\alpha_1)+(\beta_1-\beta_2)(y_1-\beta_1)+r_1(r_1+r_2)=o. \quad (8)$$

У првој релацији (7) су x_1 и y_1 координате тачака у којима заједничке спољашње тангенте дирају круг K_1, а у другој релацији (8) су x_1 и y_1 координате тачака у којима тај исти круг дирају заједничке унутрашње тангенте. Те тачке леже међу тим на кругу K_1, па је с тога и

$$(x_1-\alpha_1)^2+(y_1-\beta_1)^2-r_1^2=o. \qquad (9)$$

Према томе ће заједнички корени x_1 и y_1 еквација (7) и (9) представљати координате тачака A_1 и B_1, а заједнички корени еквација (8) и (9) координате тачака a_1 и b_1. Те исте координате добили бисмо и кад бисмо разрешили ове две системе еквација:

$$(\alpha_1-\alpha_2)(x-\alpha_1)+(\beta_1-\beta_2)(y-\beta_1)+r_1(r_1-r_2)=o, \qquad (10)$$

$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-r_1^2=o$$

и

$$(\alpha_1-\alpha_2)(x-\alpha_1)+(\beta_1-\beta_2)(y-\beta_1)+r_1(r_1+r_2)=o, \qquad (11)$$

$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-r_1^2=o,$$

а по томе се јасно види, да је еквацијом (10) аналитички представљена додирна корда A_1B_1, т. ј. полара спољашњег средишта сличности с обзиром на круг K_1, а еквацијом (11) додирна корда a_1b_1, т. ј. полара унутрашњег средишта сличности с обзиром на круг K_1. — Те две еквације (10) и (11) моћи ћемо у осталом после мале трансформације написати у још једном важном облику.

Лева страна P еквације (10) може се овако написати:

$$P\equiv(\alpha_1-\alpha_2)x+(\beta_1-\beta_2)y-\alpha_1^2$$
$$+\alpha_1\alpha_2-\beta_1^2+\beta_1\beta_2+r_1^2-r_1r_2$$
$$=\frac{1}{2}\{K_2-K_1-[(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2-(r_2-r_1)^2]\}$$

па како је

$$(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2=\overline{21}^2,$$

биће и

$$2P\equiv K_2-K_1-[\overline{21}^2-(r_2-r_1)^2];$$

с тога се еквација прве поларе (10) може написати и у овом облику:

$$K_2 - K_1 - [\overline{21}^2 - (r_2 - r_1)^2] = o. \qquad (12)$$

Сличним путем дало би се доказати да је

$$K_2 - K_1 - [\overline{21}^2 - (r_2 + r_1)^2] = o \qquad (13)$$

еквација поларе $a_1 b_1$.

Прим 1. Наћи заједничке тангенте кругова

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = o, x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = o.$$

Средишта тих кругова су (2, 1) и (—2, —1), а полупречници њихови су 1 и 3. Према томе ће еквације полара спољашњег и унутрашњег средишта сличности с обзиром на први круг бити ово:

$$2x + y = 6, \quad 2x + y = 3.$$

Прва полара сече први круг у тачкама (2, 2) и $\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$, а друга полара сече тај круг у тачкама (1, 1) и $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Тангенте у првим двема тачкама биће заједничке спољашње, а тангенте у другим двема тачкама биће заједничке унутрашње тангенте датих двају кругова. Еквације првих двеју су

$$y = 2, \quad 4x - 3y = 10,$$

а еквације других двеју су

$$x = 1, \quad 3x + 4y = 5.$$

Прим. 2. Наћи заједничке спољашње тангенте кругова

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = o, \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$$

Одг. $x + 2 = o$, $y + 1 = o$.

Прим. 3. Доказати да тангенте са почетка координатне системе на круг

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

дирају уједно и круг

$$(x - \lambda\alpha)^2 + (y - \lambda\beta)^2 = (\lambda r)^2.$$

Прим. 4. Нека права, која је са почетка O повучена, сече та два круга у тачкама P, Q и R, S; доказати да је

$$OP : OR = OQ : OS = 1 : \lambda.$$

Напишимо само у еквацији првога круга $\varrho \cos\theta$ место x, а $\varrho \sin\theta$ место y, па ћемо добити ово:

$$\varrho^2 - 2\varrho\,(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = o; \quad (a)$$

ако је са θ означен угао под којим је повучена права $OPQRS$, биће корени ове квадратне еквације управо OP и OQ. — Кад бисмо сад и у еквацији другог круга сменили x и y са $\varrho\cos\theta$ и $\varrho\sin\theta$, добили бисмо једну сличну квадратну еквацију, чији би корени били λ пута већи од корена еквације (a); па како су корени те нове квадратне еквације управо OR и OS, јасно је и т. д.

Прим. 5. Наћи дужину заједничке спољашње тангенте кругова

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o, \; x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = o.$$

Одг. Ако са r и r' означимо полупречнике кругова, биће дужина заједничке спољашње тангенте

$$= \sqrt{c + c' - 2gg' - 2ff' + rr'}.$$

197. *Наћи координате спољашњег и унутрашњег средишта сличности двају кругова.*

Означимо координате спољашњег средишта O са x', y' и напишимо еквацију (10) додирне корде A_1B_1 овако:

$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\,r_1}{r_2 - r_1}\,(x - \alpha_1) + \frac{(\beta_1 - \beta_2)\,r_1}{r_2 - r_1}\,(y - \beta_1) - r_1^2 = o.$$

Та додирна корда је, као што смо поменули, уједно и полара тачке O (x', y') с обзиром на круг K_1; услед тога моћи ћемо ту додирну корду аналитички представити и овом еквацијом:

$$(x' - \alpha_1)(x - \alpha_1) + (y' - \beta_1)(y - \beta_1) - r_1^2 = o.$$

Кад се упореде последње две еквације, биће нам јасно да мора бити

$$x' - \alpha_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\,r_1}{r_2 - r_1}, \; y' - \beta_1 = \frac{(\beta_1 - \beta_2)\,r_1}{r_2 - r_1};$$

према томе су координате спољашњег средишта сличности ово:

$$x' = \frac{\alpha_1 r_2 - \alpha_2 r_1}{r_2 - r_1}, \ y' = \frac{\beta_1 r_2 - \beta_2 r_1}{r_2 - r_1}. \quad (14)$$

Сличним путем бисмо нашли да су координате унутрашњег средишта сличности ово:

$$x' = \frac{\alpha_1 r_2 + \alpha_2 r_1}{r_2 + r_1}, \ y' = \frac{\beta_1 r_2 + \beta_2 r_1}{r_2 + r_1}. \quad (15)$$

Еквације (14) и (15) могу се, кад се узме да је $\lambda = \frac{r_1}{r_2}$, и овако написати:

$$x' = \frac{\alpha_1 - \lambda\alpha_2}{1 - \lambda}, \ y' = \frac{\beta_1 - \lambda\beta_2}{1 - \lambda}$$

и

$$x' = \frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2}{1 + \lambda}, \ y' = \frac{\beta_1 + \lambda\beta_2}{1 + \lambda},$$

а по томе се види, да *средишта сличности хармонијски деле раздаљину средишта̂ двају кругова.* —

Ту теорему могли бисмо доказати и на овај елегантан начин. Нека су

$$(\alpha_1 u + \beta_1 v + 1)^2 - r_1^2 (u^2 + v^2) = o,$$

$$(\alpha_2 u + \beta_2 v + 1)^2 - r_2^2 (u^2 + v^2) = o$$

еквације кругова K_1 и K_2. Ако је

$$U_1 \equiv \alpha_1 u + \beta_1 v + 1, \ U_2 \equiv \alpha_2 u + \beta_2 v + 1,$$

биће еквације поменутих двају кругова уједно и овог облика:

$$U_1^2 - r_1^2 (u^2 + v^2) = o, \ U_2^2 - r_2^2 (u^2 + v^2) = o.$$

Поделимо сад прву између ових двеју еквација са r_1^2, а другу са r_2^2 и одузмимо другу еквацију од прве. У резултату ћемо добити ово:

$$\frac{U_1^2}{r_1^2} - \frac{U_2^2}{r_2^2} = o. \qquad (16)$$

Све заједничке тангенте кругова K_1 и K_2 биће уједно (види напом. у чл. 99.) и тангенте криве (16). Како је

$$\frac{U_1^2}{r_1^2} - \frac{U_2^2}{r_2^2} \equiv \left(\frac{U_1}{r_1} - \frac{U_2}{r_2}\right)\left(\frac{U_1}{r_1} + \frac{U_2}{r_2}\right),$$

јасно је да ће еквацијом (16) бити представљене управо ове две тачке:

$$\frac{U_1}{r_1} - \frac{U_2}{r_2} = o, \quad \frac{U_1}{r_1} + \frac{U_2}{r_2} = o\,; \qquad (17)$$

заједничке тангенте кругова K_1 и K_2 пролазиће дакле и кроз тачке (17), т. ј. еквације (17) су еквације спољашњег и унутрашњег средишта сличности кругова K_1 и K_2. Те две еквације могу се написати и у овом облику:

$$U_1 - \lambda U_2 = o, \quad U_1 + \lambda U_2 = o,$$

а по тим двема еквацијама се види, да су спољашње и унутрашње средиште сличности две хармонијски коњуговане тачке према тачкама $U_1 = o$ и $U_2 = o$, т. ј. према средиштима кругова K_1 и K_2.

198. Узмимо сад три круга

$$K_1 = o, \quad K_2 = o, \quad K_3 = o.$$

Два и два круга имаће по једно спољашње и по једно унутрашње средиште сличности: кругови K_1 и K_2 средишта O_{12} и O'_{12}, кругови K_2 и K_3 средишта O_{23} и O'_{23}, и кругови K_3 и K_1 средишта O_{31} и O'_{31}.

Кад се имају у виду обрасци (14), биће јасно да су координате спољашњих средишта сличности O_{12}, O_{23}, O_{31} ово:

$$x' = \frac{\alpha_1 r_2 - \alpha_2 r_1}{r_2 - r_1}, \quad y' = \frac{\beta_1 r_2 - \beta_2 r_1}{r_2 - r_1},$$

$$x'' = \frac{\alpha_2 r_3 - \alpha_3 r_2}{r_3 - r_2}, \quad y'' = \frac{\beta_2 r_3 - \beta_3 r_2}{r_3 - r_2},$$

$$x''' = \frac{\alpha_3 r_1 - \alpha_1 r_3}{r_1 - r_3}, \quad y''' = \frac{\beta_3 r_1 - \beta_1 r_3}{r_1 - r_3}.$$

Према томе ће еквација праве која спаја прва два средишта сличности бити ово:

$$\begin{aligned} &[r_1 (\beta_2 - \beta_3) + r_2 (\beta_3 - \beta_1) + r_3 (\beta_1 - \beta_2)]\, x \\ &- [r_1 (\alpha_2 - \alpha_3) + r_2 (\alpha_3 - \alpha_1) + r_3 (\alpha_1 - \alpha_2)]\, y \\ &= r_1 (\beta_2 \alpha_3 - \beta_3 \alpha_2) + r_2 (\beta_3 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_3) + r_3 (\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1) \end{aligned}$$

или

$$\begin{vmatrix} o & x & y & 1 \\ r_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ r_2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ r_3 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = o. \qquad (18)$$

Ова еквација се не ће изменити кад се у детерминанти, која се налази на левој страни њезиној, помери ред којим долазе узастопце последње три врсте на овај начин:

$$\begin{vmatrix} o & x & y & 1 \\ r_2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ r_3 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \\ r_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \end{vmatrix} = o. \qquad (19)$$

Та детерминанта постала је дакле из детерминанте (18) померањем врста; но ту исту детерминанту добили бисмо из детерминанте (18) и кад бисмо променили казаљку 1 у 2, 2 у 3, а 3 у 1 *(cyclische Vertauschung)*, па како се том променом казаљака координате тачке O_{12} мењају у координате тачке O_{23}, а координате тачке O_{23} у координате тачке O_{31}, јасно је да ће еквација (19) представљати уједно и једну праву која спаја тачку O_{23} с тачком O_{31}, а то ће рећи да *спољашња средишта сличности трију кругова леже на једној правој*; та права назива се *спољашња осовина сличности* кругова K_1, K_2, K_3. Коефицијенат који одређује правац те праве је, као што се из развијеног облика детерминанте (18) види, ово:

$$\frac{r_1(\beta_2-\beta_3)+r_2(\beta_3-\beta_1)+r_3(\beta_1-\beta_2)}{r_1(\alpha_2-\alpha_3)+r_2(\alpha_3-\alpha_1)+r_3(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot - \qquad (20)$$

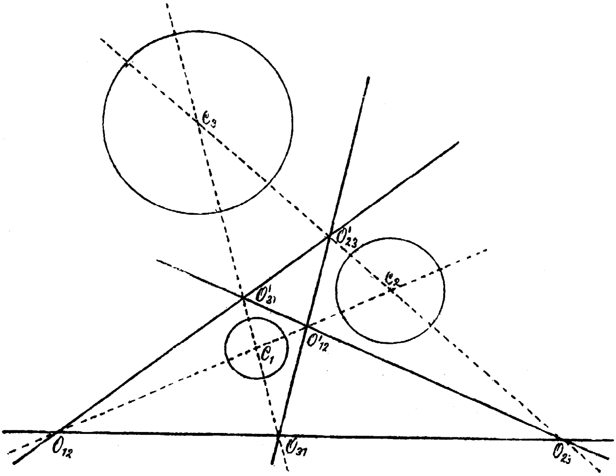
Пођимо сад даље. Поређењем образаца (14) и (15) увидели бисмо да се ти обрасци разликују само знаком полупречника r_1; ако дакле хоћемо да добијемо еквацију праве која спаја унутрашња средишта сличности O'_{12} и O'_{23}, а ми треба само да у еквацији (18) сменимо r_1 са $-r_1$, а r_2 са $-r_2$. Према томе би еквација те праве била овог облика:

$$\begin{vmatrix} o & x & y & 1 \\ -r_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ -r_2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ r_3 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = o,$$

а по симетричном облику те еквације види се да на правој коју она представља, лежи и тачка O_{31}. Сличним путем дало би се доказати да су тачке O'_{23}, O'_{31}, O_{12} с једне, и O'_{31}, O'_{12}, O_{23} с друге стране такође колинеарне. Према томе *имају још три праве, на којима леже три (по два унутрашња и једно спољашње) средишта сличности кругова* K_1, K_2, K_3. Те три праве називају се такође *осовинама сличности;* три круга имају дакле свега *четири* осовине сличности. У осталом то бисмо могли доказати и на овај елегантан начин.

Нека су

$$U_1^2 - r_1^2 (u^2 + v^2) = o, U_2^2 - r_2^2 (u^2 + v^2) = o,$$
$$U_3^2 - r_3^2 (u^2 + v^2) = o$$



Сл. 87.

еквације кругова K_1, K_2, K_3. Кад се имају у виду еквације (17), биће јасно да су еквације тачака O_{12}, O_{23}, O_{31} ово:

$$\frac{U_1}{r_1} - \frac{U_2}{r_2} = o, \quad \frac{U_2}{r_2} - \frac{U_3}{r_3} = o, \quad \frac{U_3}{r_3} - \frac{U_1}{r_1} = o,$$

а еквације тачака O'_{12}, O'_{23}, O'_{31} ово:

$$\frac{U_1}{r_1} + \frac{U_2}{r_2} = o, \quad \frac{U_2}{r_2} + \frac{U_3}{r_3} = o, \quad \frac{U_3}{r_3} + \frac{U_1}{r_1} = o.$$

Како је с једне стране

$$\left(\frac{U_1}{r_1} - \frac{U_2}{r_2}\right) + \left(\frac{U_2}{r_2} - \frac{U_3}{r_3}\right) + \left(\frac{U_3}{r_3} - \frac{U_1}{r_1}\right) \equiv o,$$

а с друге стране

$$\left(\frac{U_1}{r_1}-\frac{U_2}{r_2}\right)+\left(\frac{U_2}{r_2}+\frac{U_3}{r_3}\right)-\left(\frac{U_3}{r_3}+\frac{U_1}{r_1}\right)\equiv o,$$

. . . .

то је јасно да су заиста по три и три средишта сличности кругова K_1, K_2, K_3 колинеарна.

Напомена. Претпоставићемо да један од кругова K_1, K_2, K_3, н. пр. круг K_1 додирује кругове K_2 и K_3 и означићемо додирне тачке са A и B. На веома лак начин ћемо доказати, *да ће у том случају једно (спољашње или унутрашње) средиште сличности кругова K_2 и K_3 лежати на додирној корди AB.* — Тачка A, као додирна тачка кругова K_1 и K_2, била би једно (унутрашње или спољашње) средиште сличности тих двају кругова; из сличних разлога би и тачка B била једно од средишта сличности кругова K_1 и K_3. Додирна корда AB спајала би дакле два средишта сличности, па ће на њој из оних разлога, које мало час поменусмо, морати лежати и једно средиште сличности кругова K_2 и K_3, а то смо и тврдили.

199. *Определити пол спољашње осовине сличности.*

Еквација поларе спољашњег средишта сличности кругова K_1 и K_2 с обзиром на круг K_1 је (чл. 196.) ово:

$$K_2 - K_1 - [\overline{21}^2 - (r_2 - r_1)^2] = o. \qquad (21)$$

По аналогији је

$$K_3 - K_1 - [\overline{31}^2 - (r_3 - r_1)^2] = o \qquad (22)$$

еквација поларе спољашњег средишта сличности кругова K_1 и K_3 с обзиром на круг K_1. Та два средишта сличности леже на једној правој — на спољашњој осовини сличности; поларе тих средишта сличности сећи ће се дакле у једној тачци — у полу спољашње осовине сличности. Према томе је пол спољашње осовине сличности опредељен системом еквација (21) и (22).

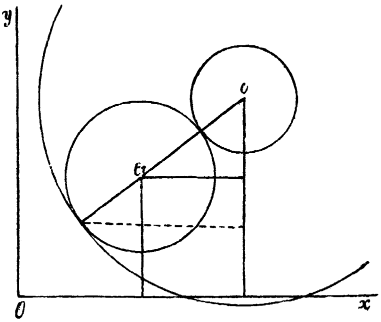
200. *Наћи круг K који дира дата три круга.*

Та проблема се назива Аполонијева проблема. Она је решена на много начина. Аналитичким путем су је најлепше решили **Gergonne** *(Annales de Mathématiques. t. VII.)*, **Casey** *(Proceedings of the Royal Irish Academy. 1866.)* и **Hesse** *(Analytische Geometrie)*. Ми ћемо ту проблему решити онако како ју је Хесе решио, а у једном примеру ћемо укратко приказати и знаменити Кезеов метод.

Нека су

$$K_1 = o, \; K_2 = o, \; K_3 = o$$

еквације датих кругова. Да бисмо мисли што боље средили и закључке доконали, претпоставићемо да кругови K_1, K_2, K_3 не леже један у другом. Координате средишта C круга K ћемо обележити са x и y, а полупречник



Сл. 88.

његов са r. Кругови K и K_1 додириваће се споља, ако је централа њихова равна збиру полупречника, т. ј. ако је

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = (r + r_1)^2$$

или

$$K_1 + r_1^2 = (r + r_1)^2.$$

Та иста два круга додириваће се изнутра, ако је централа њихова равна разлици полупречника, т. ј. ако је

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = (r - r_1)^2$$

или

$$K_1 + r_1^2 = (r - r_1)^2.$$

Кад дакле круг K дира, споља или изнутра, осим круга K_1 и кругове K_2 и K_3, онда ће координате његова средишта и полупречник му r бити опредељени системом ових еквација:

$$K_1 + r_1^2 = (r \pm r_1)^2,$$

$$K_2 + r_2^2 = (r \pm r_2)^2,$$

$$K_3 + r_3^2 = (r \pm r_3)^2.$$

Кад се знаци, који стоје испред r_1, r_2 и r_3 у овим еквацијама, комбинују на све начине, онда је јасно да *у опште* има *осам* таквих кругова који додирују на различите начине кругове K_1, K_2, K_3. Круг K додирује на име

1-во	сва три круга споља	I
2-го	сва три круга изнутра	
3-ће	споља K_1, изнутра K_2 и K_3	II
4-то	изнутра K_1, споља K_2 и K_3	
5-то	споља K_2, изнутра K_3 и K_1	III
6-то	изнутра K_2, споља K_3 и K_1	
7-мо	споља K_3, изнутра K_1 и K_2	IV
8-мо	изнутра K_3, споља K_1 и K_2	

Тако би н. пр. еквацијама

$$K_1 + r_1^2 = (r + r_1)^2, K_2 + r_2^2 = (r + r_2)^2, K_3 + r_3^2 = (r + r_3)^2 \quad (23)$$

био опредељен круг један, који кругове K_1, K_2, K_3 споља додирује (у овом случају би сва три круга лежала изван периферије круга K); те еквације бисмо могли разрешити с обзиром на непознате x, y и r, па бисмо тим уједно решили донекле и дату проблему.

Избегавајући мучан посао тих алгебарских операција, поћи ћемо са Хесеом овим путем. Одузећемо у системи еквација (23) трећу од друге, прву од треће и другу од прве. У резултату ћемо добити ово:

$$\begin{aligned} K_2 - K_3 &= 2r\,(r_2 - r_3), \\ K_3 - K_1 &= 2r\,(r_3 - r_1), \qquad\qquad (24) \\ K_1 - K_2 &= 2r\,(r_1 - r_2). \end{aligned}$$

Помножимо сад ове еквације, по реду којим једна за другом долазе, са r_1, r_2, r_3 и саберимо их; збир ће бити ово:

$$r_1\,(K_2 - K_3) + r_2\,(K_3 - K_1) + r_3\,(K_1 - K_2) = o. \qquad (25)$$

Ова еквација је линеарна, она дакле представља једну праву; но како је она линеарно састављена из еквација радикалних осовина кругова K_1, K_2, K_3, јасно је да ће права коју она представља пролазити кроз радикално средиште тих трију кругова. Кад се поред тога има на уму то, да је та еквација одређеним низом алгебарских операција постала из системе еквација (24), а то ће рећи из оне системе еквација, у којој су са x и y биле означене координате средишта круга K, онда је јасно уједно и то, да ће на правој (25) осим радикалног средишта поменутих трију кругова морати лежати и средиште круга K.

Кад бисмо сад у еквацијама (23) и (24) сменили r_1, r_2, r_3 са $-r_1$, $-r_2$, $-r_3$, добили бисмо две нове системе еквација; тим системама били би опредељени средиште и полупречник онога круга, који изнутра додирује дате кругове (у овом случају би круг K обгрлио кругове K_1, K_2, K_3). Како се том супституцијом не мења еквација (25), јасно је да на правој (25) мора лежати и средиште оног другог круга групе I.

Кад бисмо сад написали скраћену еквацију (25) у развијеном облику, видели бисмо да је коефицијенат који одређује правац те праве ово:

$$-\frac{r_1(\alpha_2-\alpha_3)+r_2(\alpha_3-\alpha_1)+r_3(\alpha_1-\alpha_2)}{r_1(\beta_2-\beta_3)+r_2(\beta_3-\beta_1)+r_3(\beta_1-\beta_2)}\cdot$$

С друге стране знамо међу тим (чл. 198. (20)) да количник

$$\frac{r_1(\beta_2-\beta_3)+r_2(\beta_3-\beta_1)+r_3(\beta_1-\beta_2)}{r_1(\alpha_2-\alpha_3)+r_2(\alpha_3-\alpha_1)+r_3(\alpha_1-\alpha_2)}$$

представља коефицијенат који одређује правац спољашње осовине сличности кругова K_1, K_2, K_3. Производ тих двају коефицијената је раван негативној јединици, т. ј. права (25) стоји управно на спољашњој осовини сличности датих кругова.

Сличним путем би се могло доказати да два и два средишта осталих кругова група II, III и IV леже на једној од оних правих, које су управно повучене из радикалног средишта на остале три осовине сличности. Ми можемо дакле тврдити ово: *на свакој правој, која је управно повучена из радикалног средишта трију кругова на четири осовине сличности, леже два и два средишта оних кругова који дате кругове додирују.*

Покушајмо сад да определимо тачку у којима круг K споља додирује круг K_1. Нека су x' и y' координате додирне тачке. Та тачка лежи између средишта C (x, y) и C_1 (α_1, β_1) у раздаљини r од првог, а у раздаљини r_1 од другог круга; с тога су њезине координате ово:

$$x'=\frac{r_1x+r\alpha_1}{r_1+r},\quad y'=\frac{r_1y+r\beta_1}{r_1+r};$$

према томе је

$$x = \frac{(r + r_1)\,x' - r\alpha_1}{r_1}, \quad y = \frac{(r + r_1)\,y' - r\beta_1}{r_1}. \qquad (26)$$

Кад бисмо овим вредностима сменили x и y у линеарном полиному $Ax + By + C$, преобразио би се тај полином у овај:

$$\frac{r + r_1}{r_1}(Ax' + By' + C) - \frac{r}{r_1}(A\alpha_1 + B\beta_1 + C). \qquad (27)$$

Сменимо сад вредностима (26) x и y у линеарним полиномима $K_3 - K_1$, $K_1 - K_2$ последњих двеју еквација системе (24). Према обрасцу (27) прећи ће полином $K_3 - K_1$ поменутом супституцијом у полином

$$P' = \frac{r + r_1}{r_1}\{[(x' - \alpha_3)^2 + (y' - \beta_3)^2 - r_3^2] - [(x' - \alpha_1)^2 + (y' - \beta_1)^2 - r_1^2]\} - \frac{r}{r_1}[(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2 - r_3^2 + r_1^2].$$

Изразе, који стоје у првој загради, добијамо из полинома еквација $K_3 = o$ и $K_1 = o$ кад у овима сменимо x и y са x' и y'. Те изразе ћемо бележити симболима K'_3 и K'_1, па ће према томе бити

$$P' = \frac{r + r_1}{r_1}(K'_3 - K'_1) - \frac{r}{r_1}[\overline{31}^2 - (r_3^2 - r_1^2)].$$

Сличним путем би се дало доказати, да би се полином $K_1 - K_2$ поменутом супституцијом (26) преобразио у овај:

$$P'' = \frac{r + r_1}{r_1}(K'_1 - K'_2) + \frac{r}{r_1}[\overline{21}^2 - (r_2^2 - r_1^2)].$$

Према томе је јасно да ће се супституцијом (26) последње две еквације у системи (24) преобразити у ове две линеарне еквације које постоје између x' и y':

$$\frac{r + r_1}{r_1}(K'_3 - K'_1) - \frac{r}{r_1}[\overline{31}^2 - (r_3^2 - r_1^2)] = 2r\,(r_3 - r_1),$$

$$\frac{r+r_1}{r_1}(K'_1-K'_2)+\frac{r}{r_1}[\overline{21}^2-(r_2{}^2-r_1{}^2)]=2r(r_1-r_2)\,;$$

те две еквације су линеарне, а у њима су са x' и y' означене координате оне тачке у којој круг K споља дира круг K_1. Ако сменимо у тим двема еквацијама x' и y' са x и y, добићемо ове две линеарне еквације:

$$\frac{r+r_1}{r_1}(K_3-K_1)-\frac{r}{r_1}[\overline{31}^2-(r_3{}^2-r_1{}^2)]=2r(r_3-r_1), \qquad (28)$$

$$\frac{r+r_1}{r_1}(K_1-K_2)+\frac{r}{r_1}[\overline{21}^2-(r_2{}^2-r_1{}^2)]=2r(r_1-r_2). \qquad (29)$$

Те две еквације представљају свака за се по једну праву, а обе заједно опредељују координате додирне тачке (x', y'), т. ј. *тачка у којој круг K споља дира круг K_1 лежи у пресеку правих (28) и (29).* Ако сад сведемо у еквацијама (28) и (29) све што се може, а ми ћемо их моћи овако написати:

$$\frac{K_3-K_1}{\overline{31}^2-(r_3-r_1)^2}-\frac{r}{r+r_1}=o, \qquad (30)$$

$$\frac{K_2-K_1}{\overline{21}^2-(r_2-r_1)^2}-\frac{r}{r+r_1}=o. \qquad (31)$$

Одузмимо ове две еквације, другу од прве; резултат је ово:

$$\frac{K_3-K_1}{\overline{31}^2-(r_3-r_1)^2}-\frac{K_2-K_1}{\overline{21}^2-(r_2-r_1)^2}=o. \qquad (32)$$

Ту исту еквацију добили бисмо и кад бисмо одузели ове две еквације:

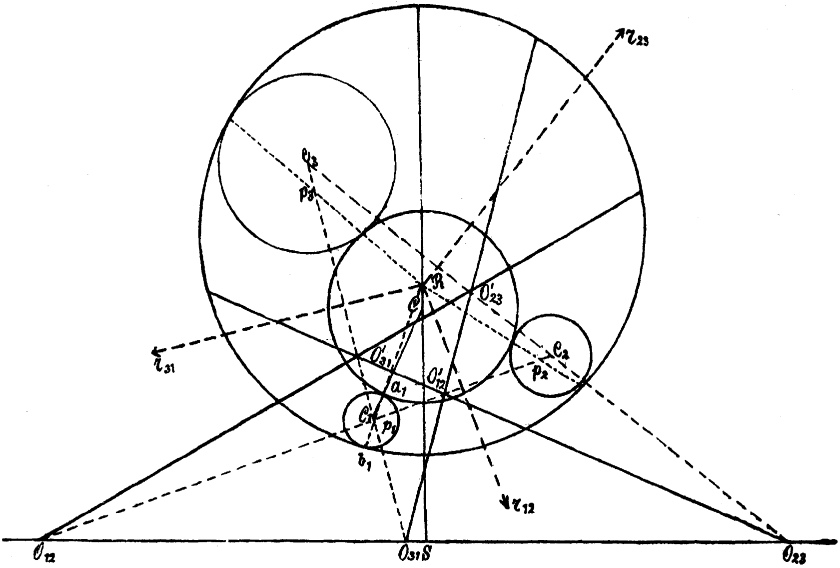
$$\frac{K_3-K_1}{\overline{31}^2-(r_3-r_1)^2}-1=o, \quad \frac{K_2-K_1}{\overline{21}^2-(r_2-r_1)^2}-1=o, \qquad (33)$$

а те две еквације опредељују, као што знамо, пол p_1 спољашње осовине сличности с обзиром на круг K_1 (чл. 199.). Према томе ћемо моћи определити положај праве (32) овако:

1-во. Еквација (32) је линеарно састављена из еквација радикалних осовина $K_3—K_1=o$ и $K_2—K_1=o$; те две радикалне осовине секу се међу тим у радикалном средишту датих кругова, па ће с тога права (32) пролазити кроз радикално средиште.

2-го. Еквација (32) је линеарно састављена из еквација (33), па ће с тога права, коју она представља, пролазити кроз пол p_1 спољашње осовине сличности.

3-ће. Еквација (32) је најпосле линеарно састављена и из еквација (30) и (31), па ће с тога она представљати једну праву која пролази и кроз додирну тачку (x', y').



Сл. 89.

Како се међу тим еквација (32) не мења кад у њој променимо знаке испред r_1, r_2, r_3, то се уједно види и то, да права (32) пролази и кроз ону тачку у којој други у групи кругова I додирује круг K_1. — Према свему томе можемо дакле тврдити ово: *права што спаја пол p_1 спољашње осовине сличности са радикалним средиштем R сече круг K_1 у оним двема тачкама a_1* и *b_1, у којима тај круг додирују кругови K групе I.*

Сличним путем могли бисмо, тражећи полове p_2 и p_3 спољашње осовине сличности с обзиром на кругове K_2 и K_3, наћи тачке у којима ће кругови K групе I додиривати кругове K_2 и K_3. Тим путем бисмо добили три и три тачке које припадају првом или другом у групи кругова I, па бисмо онда лако могли и нацртати та два круга. — Средиште једног од тих двају кругова, н. пр. оног, који споља дира дате кругове, наћи ћемо овако. Повући ћемо полупречник c_1a_1 круга K_1 ка додирној тачци a_1 и продужићемо га; тим путем ћемо добити праву c_1a_1C. Тачка C, у којој та права сече праву RS која је из радикалног средишта R управно повучена на спољашњу осовину сличности, била би средиште првог круга групе I.

Примењујући све ово и на остале три осовине сличности, добили бисмо и остале три групе кругова II, III и IV. —

Кад кругови K_1, K_2, K_3 леже један ван другог, онда су кругови група I, II, III и IV сви реални; а кад поменута три круга леже један у другом, онда су кругови група I, II, III, IV имагинарни.

Примери. Теореме и проблеме.

1. Некакав потег, који је из спољашњег или унутрашњег средишта сличности O двају кругова повучен, сече први круг у тачкама P и Q, а други круг у тачкама P' и Q'. Доказати да је

$$OP : OP' = OQ : OQ' = r : r'. —$$

Узмимо на потегу OP неку тачку P' тако, да је $OP = m \cdot OP'$. Паралелне координате тачке P' добићемо, ако паралелне координате тачке P поделимо са m; према томе ће нам јасно бити то, да ће тачка P' описивати криву $f\ (mx,\ my) = o$, кад тачка P описује криву $f\ (x, y) = o$.

Повуцимо сад из средишта сличности O две тангенте на дате кругове означимо раздаљине додирних тачака од тачке O са a и a' и узмимо те две тангенте за координатне осовине. У тој системи биће еквације датих кругова (види прим. 4. чл. 164.) ово:

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = o.$$

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2a'x - 2a'y + a'^2 = o.$$

Друга еквација постаје из прве кад се у овој смени x са $\frac{a}{a'}x$, а y са $\frac{a}{a'}y$, т. ј. други круг постаје из првог круга кад се на сваком потегу његову OP нађе једна тачка P' тако, да је $OP = \frac{a}{a'} \cdot OP'$ или $OP : OP' = a : a'$, па како је $a : a' = r : r'$, јасно је и т. д.

2. $K_1 = o$ и $K_2 = o$ су два круга, а r_1 и r_2 су њихови полупречници. Доказати да су средишта сличности тих кругова средишта кругова

$$\frac{K_1}{r_1} \pm \frac{K_2}{r_2} = o. \qquad (\alpha)$$

3. Доказати да кругови (α) у прим. 2. полове угао између кругова K_1 и K_2.

4. Доказати да је

$$\frac{K_1}{r_1^{\,2}} - \frac{K_2}{r_2^{\,2}} = o$$

еквација круга чији је дијаметар = дужи која везује средишта сличности кругова K_1 и K_2. — Тај круг се зове *круг сличности* двају кругова K_1 и K_2.

Напом. По еквацији круга сличности види се да тангенте, које су повучене ма из које тачке круга сличности на кругове K_1 и K_2, стоје у сталној напремици $r_1 : r_2$.

5. Узећемо три круга; два и два имају по један круг сличности; скупа ће дакле бити три круга сличности. Доказати да су ти кругови коаксални.

6. Наћи место средишта оних кругова који три дата круга секу под једнаким углима (исогонално).

Одг. Место је управна са радикалног средишта на једну од осовина сличности.

7. Кругови, који исогонално секу три дата круга, су коаксални; њихова радикална осовина је једна од осовина сличности датих кругова.

Доказ те теореме је прост; треба само имати у виду еквацију (види прим. 9. чл. 195.) кругова који исогонално секу три круга.

8. *Кезеова теорема.* Ако четири круга додирују некакав пети круг, онда су дужине њихових заједничких тангената везане међу собом релацијом

$$\overline{12} \cdot \overline{34} \pm \overline{23} \cdot \overline{14} \pm \overline{31} \cdot \overline{24} = o,$$

у којој је са $\overline{12}$ означена дужина заједничке тангенте t_{12} кругова K_1 и K_2 и т. д. —

Како је $sin^2 \frac{1}{2}\overline{12} = t_{12}{}^2/4r_1r_2$ и т. д., моћи ће се поједини синуси у детерминанти (36) чл. 195. сменити дужинама заједничких тангената t_{12}, t_{13}, t_{14} и т. д. Означивши те тангенте са $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$ и т. д. добићемо дакле да је

$$\begin{vmatrix} o & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 \\ \overline{21}^2 & o & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & o & \overline{34}^2 \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \overline{43}^2 & o \end{vmatrix} = o, \qquad (\beta)$$

а та је детерминанта, кад се развије, равна производу ових четирију фактора:

$$\overline{12} \cdot \overline{34} \pm \overline{23} \cdot \overline{14} \pm \overline{31} \cdot \overline{24}.$$

9. Наћи еквацију кругова који додирују три дата круга.

Кад бисмо претпоставили да се један од кругова, о којима је било говора у прим. 8., н. пр. круг K_4 претворио у једну тачку $P(x, y)$, морала би та тачка бити једна тачка периферије оног круга, који дира остала три круга K_1, K_2, K_3. У том случају би квадрати дужина заједничких тангената $\overline{14}^2$, $\overline{24}^2$, $\overline{34}^2$ били = моћима тачке P с обзиром на кругове K_1, K_2, K_3, па бисмо с тога у еквацији (β) могли $\overline{14}^2$, $\overline{24}^2$, $\overline{34}^2$ сменити са K_1, K_2, K_3. Узмимо још да је $\overline{23}^2 = l$, $\overline{31}^2 = m$, $\overline{12}^2 = n$. Еквација (β) биће према свему томе у овај мах овог облика:

$$\begin{vmatrix} o & n & m & K_1 \\ n & o & l & K_2 \\ m & l & o & K_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 & o \end{vmatrix} = o \qquad (\gamma)$$

или

$$l^2K_1{}^2+m^2K_2{}^2+n^2K_3{}^2-2lmK_1K_2-2mnK_2K_3-2nlK_3K_1=o \qquad (\delta)$$

или

$$\sqrt{lK_1}\pm\sqrt{mK_2}\pm\sqrt{nK_3}. \qquad (\varepsilon)$$

Све те еквације (γ), (δ), (ε) су четвртог степена; оне дакле представљају по два круга који додирују кругове K_1, K_2, K_3. Кад су $\overline{23}$, $\overline{31}$, $\overline{12}$ заједничке спољашње тангенте кругова K_1, K_2, K_3, онда нам те еквације представљају два круга који споља и изнутра (сл. 89.) дирају дате кругове.

Напом. **Ово решење Аполонијеве проблеме је Кезеово (упор. чл. 200.). — Еквација $\sqrt{lK_1}+\sqrt{mK_2}+\sqrt{nK_3}=o$ назива се *норма* еквације (δ).**

ИНВЕРСНЕ СЛИКЕ КРУГА

201. Нека је O средиште, а r полупречник круга K; тачку O узећемо за почетак поларне координатне системе, спојићемо је са неком тачком P и одабраћемо на потегу OP једну тачку P' тако, да је производ потега тачака P и P' раван квадрату полупречника r:

$$OP\cdot OP'=r^2=const.$$

или

$$\varrho\varrho'=r^2=const. \qquad (1)$$

Тачке P и P' називају се *инверсне тачке*; *једна тачка је инверсна слика друге*. Тачка O назива се *почетак или средиште инверсије*, круг K је *главни круг*, а стална количина r^2 назива се *модуо инверсије или трансформације*. Кад би се тачка P кретала по некој одређеној кривој C, описивала би и тачка P' такође неку одређену криву C'; криве C и C' називају се *инверсне криве*. Ако је

$$\varrho=f(\theta) \qquad (2)$$

еквација криве C у поларним координатама, биће

$$\varrho'=\frac{r^2}{f(\theta)} \qquad (3)$$

еквација криве C' у тој истој координатној системи. — По дефиницији су поларне координате двеју инверсних тачака везане овим релацијама:

$$\varrho\varrho' = r^2, \quad \theta = \theta';$$

према томе су паралелне координате x, y и x', y' тачака P и P' везане овим релацијама:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = r^2, \; y : x = y' : x',$$

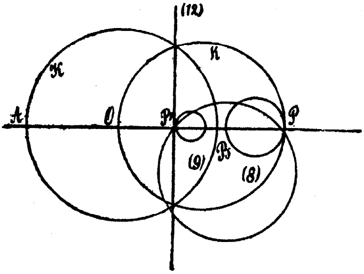
па је с тога

$$x = \frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \; y = \frac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2} \tag{4}$$

или, обратно,

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \; y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \cdot \tag{5}$$

Ако се узме да су апсцисе и ординате одмерене полупречником r као јединицом мере, онда ће се обрасци (4) и (5) преобразити у ове:



Сл. 90.

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \; y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \tag{6}$$

и

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \; y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \tag{7}$$

Ово су дакле они обрасци, помоћу којих ћемо моћи трансформовати еквацију $f(x, y) = o$ криве C у еквацију $\varphi(x', y') = o$ инверсне слике њезине C' и обратно, еквацију $\varphi(x', y') = o$ криве C' у еквацију $f(x, y) = o$ њезине инверсне слике C.

Из еквације $OP \cdot OP' = r^2$ види се (чл. 7. (12)) и то, *да су инверсне тачке P и P' хармонијски коњуговане према крајним тачкама A и B дијаметра AB.* Како свакој тачци праве AB хармонијски одговара само једна једина тачка те праве, то ће нам бити јасно уједно и то, да ће свакој тачци праве AB одговарати, као инверсна слика, само једна једина тачка те праве. Инверсна слика посебне тачке O (ова изнутра полови дуж AB) биће тачка што на правој AB лежи у бескрајности и обратно, инверсна слика тачке што на правој AB лежи у бескрајности биће тачка O, а то ће рећи, да је инверсна слика поменуте тачке у бескрајности почетак инверсије. Но како се почетак инверсије не мења кад се дијаметар AB обрће око њега, то се види и то, *да је почетак инверсије инверсна слика свију тачака у бескрајности* и обратно, *да је свака тачка у бескрајности инверсна слика почетка инверсије.* Почетак инверсије је дакле једна једина тачка која нема само једну инверсну слику.

202. Теорема. *Инверсна слика круга је круг.*

Нека је

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + a^2 = o \qquad (8)$$

еквација датог круга Кад би са R био означен полупречник тог круга, било би $a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$. Имајући у виду обрасце (6) добићемо на веома лак начин еквацију инверсне слике тог круга: просто ћемо сменити у еквацији (8) x са $\frac{x'}{x'^2 + y'^2}$, а y са $\frac{y'}{x'^2 + y'^2}$. Резултат те супституције је ово:

$$x'^2 + y'^2 - 2\frac{\alpha}{a^2}x' - 2\frac{\beta}{a^2}y' + \frac{1}{a^2} = o, \qquad (9)$$

а по тој еквацији се види да је инверсна слика круга заиста један круг. — Координате средишта круга (9) су

$$\alpha' = \frac{\alpha}{a^2}, \ \beta' = \frac{\beta}{a^2}; \qquad (10)$$

према томе се види, *да средишта инверсних кругова нису инверсне тачке.*

Полупречник R' круга (9) наћи ћемо овако. Ми знамо да је

$$\frac{1}{a^2} = \alpha'^2 + \beta'^2 - R'^2;$$

кад сменимо α' са $\frac{\alpha}{a^2}$, β' са $\frac{\beta}{a^2}$, добићемо да је

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{a^4} - R'^2,$$

а одатле је

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^4 R'^2;$$

како је $a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$, то ће најпосле бити

$$R'^2 = \frac{R^2}{a^4} \cdot — \qquad (11)$$

Узмимо сад да је

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = o,$$

т. ј. узмимо да дат круг (8) пролази кроз почетак инверсије. У овом специјалном случају преобразиће се квадратна еквација (9) у ову линеарну еквацију:

$$- 2\alpha x' - 2\beta y' + 1 = o, \qquad (12)$$

а то ће рећи, *да је инверсна слика круга k који пролази кроз почетак инверсије права.* Обрнутом трансформацијом преобразила би се еквација праве (12) у еквацију једног круга који пролази кроз почетак инверзије, т. ј. *инверсна слика праве је круг који пролази кроз средиште инверсије.*

Како је по претпоставци полупречник r главног круга K раван јединици, $r = 1$, биће еквација главног круга ово:

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (K)$$

Међу тим је еквација оног круга k, који пролази кроз почетак инверсије, овог облика:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = o; \qquad (k)$$

према томе је јасно, да је еквација радикалне осовине кругова K и k ово:

$$-2\alpha x - 2\beta y + 1 = o,$$

а то ће рећи *да је инверсна слика (12) круга k радикална осовина кругова k и K.*

203. *Наћи инверсну слику главнога круга.*

Еквација главног круга је ово:

$$x^2 + y^2 = 1;$$

услед тога је еквација његове инверсне слике ово:

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

а то је, као што видимо, поново еквација главног круга, т. ј. *главни круг се инверсијом не ће променити.* —

Сем главног круга има још читава једна система кругова, који се инверсијом не ће изменити. Њих ћемо наћи на овај начин. Узећемо еквацију круга (8) и еквацију његове инверсне слике (9). Те две еквације представљаће један и исти круг само ако је $a^2 = 1$; ово је на име она погодба, као што се из образаца (10) и (11) види, под којом ће бити $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, а $R' = R$ Но како круг (8) под погодбом $a^2 = 1$ (упор. чл. 190.)

ортогонално сече главни круг, то је јасно, *да се ниједан ортогоналан круг главног круга инверсијом не ће променити.*

Напомене. 1-во. Криве које се инверсијом не мењају назвао је **Moutard** *аналагматичким кривима.*

2-го. Има апарата помоћу којих се могу непосредно нацртати инверсне слике C' неке криве C. Најважнији је међу њима *обртач (inverseur)* **Peaucellier-ов.** Тај апарат је нарочито важан с тога, што се помоћу њега може тачно преобразити кретање по периферији једнога круга у кретање по некој правој, а то се помоћу познатог **Уатовог (Watt)** паралелограма само приближно може извести. Опис тог обртача налази се у Лорановој *Анализи*, t. II. p. 43.

Примери. Теореме и проблеме.

1. Еквација главног круга је $x^2 + y^2 = r^2$. Наћи еквацију инверсне слике праве $Ax + By + C = o$.

Одг. Инверсна слика је круг

$$C(x^2 + y^2) + Ar^2x + Br^2y = o.$$

2. Главни круг је $x^2 + y^2 = r^2$. Наћи инверсну слику круга $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$.

Одг. Инверсна слика је круг

$$c(x^2 + y^2) + 2gr^2x + 2fr^2y + r^4 = o.$$

3. Спољашње средиште сличности двају инверсних кругова је средиште инверсије

При доказу те теореме треба имати у виду оба примера у чл. 169.

4. Тачке A' и B' су инверсне слике тачака A и B, а p и p' су дужине управних са почетка на AB и $A'B'$. Доказати да је $p : p' = AB : A'B'$.

5. Два инверсна круга и њихов главни круг јесу кругови једне коаксалне системе.

Инверсна слика круга $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$ је, као што смо мало час доказали ово: $c(x^2 + y^2) + 2gr^2x + 2fr^2y + r^4 = o$:

ако прву сквацију помножимо са r^2, па је за тим одузмемо од друге, а ми ћемо добити ово: $(c - r^2)(x^2 + y^2 - r^2) = o$, па како је $x^2 + y^2 - r^2 = o$ еквација главног круга и т. д.

6. Инверсна слика коаксалне системе кругова је коаксална система.

7. Инверсна слика системе правих које се секу у једној тачци је коаксална система кругова.

8. Инверсна слика системе концентричних кругова је коаксална система, а средиште инверсије је једна од граничних тачака те системе.

Нека је $x^2 + y^2 - r^2 = o$ еквација главног круга, а $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = o$ еквација системе концентричних кругова. Инверсна слика те системе кругова је $K - R^2K' = o$, где је

$$K \equiv (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) - 2\alpha r^2 x - 2\beta r^2 y + r^4,$$

а

$$K' \equiv x^2 + y^2.$$

Према томе се већ види да је инверсна слика системе концентричних кругова заиста једна коаксална система. Онај други део поменуте теореме доказаћемо овако. Како су полупречници основних кругова $K = o$ и $K' = o$ коаксалне системе равни нули, то је јасно да су ти основни кругови уједно и граничне тачке коаксалне системе, а једна од тих тачака пада на средиште инверсије.

9. Инверсна слика једне коаксалне системе, која има реалне граничне тачке, јесте система концентричних кругова, а инверсна слика једне коаксалне системе, која има имагинарне граничне тачке, јесте прамен линија.

* * *

КЊИГА ЧЕТВРТА

ОДЕЉАК ПРВИ

Разредба кривих другога реда

204. Општа еквација другога степена између двеју промењљивих x и y је овог облика:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o. \quad (1)$$

Та еквација представља, као што знамо (чл. 24.), криве другога реда.

Узмимо да коефицијенат b није раван нули и напишимо еквацију (1) у овом облику:

$$by^2 + 2\,(hx + f)\,y + ax^2 + 2gx + c = o.$$

Ако ту еквацију разрешимо, биће

$$y = -\frac{hx+f}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(h^2-ab)\,x^2 + 2\,(hf-bg)\,x + f^2-bc}$$

или

$$y = mx + n \pm R; \quad (2)$$

у овој еквацији је

$$m = -\frac{h}{b},\ n = -\frac{f}{b},\ R = \frac{1}{b}\sqrt{\delta x^2 + 2px + q},$$

а у изразу под кореном је

$$\delta = h^2 - ab,\ p = hf - bg,\ q = f^2 - bc.$$

По експлицитном облику (2) еквације кривих другога реда види се, да криве могу имати реалних тачака само у оним границама променљиве x, у којима количина R има реалне вредности.

Напомене. 1-во. Леву страну еквације (1) означаваћемо по некад са $f(x, y)$, или са S или по *Cayley-у* са $(a, b, c, f, g, h)(x, y, 1)^2$. Кадгод од сад будемо помињали криву S, или криву $f(x, y)$, свакад ваља претпоставити, да је то крива другога реда чија је еквација ово: $S = o$ или $f(x, y) = o$.

2-го. На другом једном месту ћемо доказати, да је место тачака, у којима нека раван сече купу (конус) чија је основа круг, једна крива другога реда и обратно, да се свака крива другога реда може сматрати као један од пресека поменуте купе. Услед тога се криве другога реда зову и *конични пресеци (section conic)*, а ми ћемо их кад и кад звати и просто *пресецима.*

3-ће. Свакад се претпоставља да је паралелна система ортогонална; кад је паралелна система локсогонална, онда ћемо то нарочито поменути, као што смо то и досад свакад помињали.

205. Често ћемо морати паралелно померати осовине координатне системе. С тога ћемо одмах овој Књизи у почетку потражити ону еквацију, у коју би се преобразила општа еквација (1), кад се паралелним померањем осовинâ почетак нове координатне системе премести у тачку (x', y'). Трансформовану еквацију добићемо дакле овако: сменићемо просто x и y у еквацији (1) са $x + x'$ и $y + y'$. Према томе ће трансформована еквација бити овог облика:

$$a(x + x')^2 + 2h(x + x')(y + y') + b(y + y')^2$$
$$+ 2g(x + x') + 2f(y + y') + c = o$$

или

$$ax^2+2hxy+by^2+2(ax'+hy'+g)x+2(hx'+by'+f)y$$
$$+ax'^2+2hx'y'+by'^2+2gx'+2fy'+c=o \cdot \cdot \cdot (3)$$

Ако полином еквације (1) означимо са $f(x, y)$, биће

$$f'_x(x, y) = 2(ax + hy + g),$$

$$f'_y(x, y) = 2(hx + by + f).$$

Према томе би се еквација (3) могла написати и у овом облику;

$$ax^2+2hxy+by^2+xf'_x(x', y')+yf'_y(x', y')+f(x', y')=o, \quad (4)$$

а по тој еквацији се види ово: *1-во, паралелним померањем осовина не мењају се прва три члана опште еквације $f(x, y) = o$; 2-го, коефицијенте који у трансформованој еквацији стоје уз x и y добивамо из делимичних диференцијалних количника функције $f(x, y)$, кад у овима сменимо x и y координатама новог почетка; 3-ће, апсолутан члан трансформоване еквације добива се, кад се у функцији $f(x, y)$ координате x и y смене координатама новог почетка.*

Напом. — Упореди прим. 1. стр. 33. —

Ако симболе $f'_x(x', y')$ и $f'_y(x', y')$ означимо са $f'_{x'}$ и $f'_{y'}$, а $f(x', y')$ са c', онда ћемо еквацију (4) моћи и овако написати:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + xf'_{x'} + yf'_{y'} + c' = o. \quad (4^*)$$

206. Ако у еквацији (1) сменимо x са $\rho \cos\theta$, а y са $\rho \sin\theta$, онда ћемо добити поларну еквацију кривих другога реда. Према томе би поларна еквација кривих другога реда била ово:

$$(a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta)\rho^2$$
$$+ 2(g\cos\theta + f\sin\theta)\rho + c = o.$$

Ова квадратна еквација има два корена; ти корени су реални или имагинарни бројеви, а тим бројевима су одмерене дужине потега оних двеју тачака, у којима права што полази из почетка координатне системе, а затвара угао θ са поларном осовином, сече криву. Један од корена те еквације биће бескрајан[1]), т. ј. *једна од тачака у којима поменута права сече криву лежаће у бескрајности*, ако је

$$a \cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta = o$$

или

$$a + 2htg\theta + btg^2\theta = o; \qquad (5)$$

она друга тачка у пресеку *у опште* не ће лежати у бескрајности, а раздаљина њезина од почетка је

$$\rho = -\frac{c}{2\,(g\cos\theta + f\sin\theta)}.$$

Еквација (5) је међу тим квадратна, а корени њезини су реални или имагинарни; има дакле свега два правца у којима се из почетка координатне системе могу повући две реалне или имагинарне праве од којих свака сече криву у једној тачци у бескрајности. Еквације тих двеју правих добићемо на веома прост начин: просто ћемо сменити у еквацији (5) $tg\theta$ са $\frac{y}{x}$ и помножићемо за тим целу еквацију са x^2. Према томе би еквација поменутих двеју правих била ово:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = o. \qquad (6)$$

---

[1]) Лако се може доказати да је један корен квадратне еквације $ax^2 + 2bx + c = o$ бескрајан, ако је коефицијенат што стоји уз x^2 раван нули. Сменимо само у тој еквацији x са $\frac{1}{x'}$. Трансформована еквација биће ово: $cx'^2 + 2bx' + a = o$. Ако претпоставимо да је $a = o$, биће један корен трансформоване еквације $= o$, а други корен би био $= -\frac{2b}{c}$. Према томе је у том случају један корен првобитне еквације ∞, а други корен је $-\frac{c}{2b}$. — Кад би у првобитној еквацији било $a = b = o$, онда би оба корена те еквације била бескрајна.

Кад се имају у виду те две праве, онда се криве другога реда могу на овај начин поделити на три разреда:

1-во. Ако је $h^2 - ab < o$, онда су праве (6) имагинарне, т. ј. нема правца у којима би се могле повући две реалне праве које би секле криву у бескрајности; разред коме припадају те криве назива се *разред елипсâ.*

2-го. Ако је $h^2 - ab > o$, онда су праве (6) реалне, т. ј. у овом случају се могу у два различита правца повући из почетка координатне системе две праве, које би криву пресекле у бескрајности; разред коме такве криве припадају назива се *разред хипербола̂.*

3-ће. Ако је $h^2 - ab = o$, онда су праве (6) реалне, али се поклапају т. ј. у овом случају могу се из почетка повући две праве у једном и истом правцу (једна двојна права у том правцу) које би криву секле у бескрајности; разред коме такве криве припадају назива се *разред парабола̂.*

Напомена. Како свака тачка може бити почетак координатне системе, то је јасно уједно и то, да се из сваке тачке равни могу повући по две праве које се сусрећу с кривом у бескрајности. Кад бисмо узастопце у сваку од тих тачака преместили почетак, не би се, као што смо мало час видели, тим премештањем промениле вредности коефицијената a, h, b; према томе је јасно да би правци оних двеју правих које секу криву у бескрајности, били свакад одређени еквацијом (5). — Бином $h^2 - ab$ називају многи писци *карактеристичним биномом* дате еквације (1), а правац у коме треба повући праве, па да крива буде пресечена и у једној тачци у бескрајности, *асимптотним правцем.* Према томе елипсе имају два имагинарна асимптотна правца, хиперболе два реална, а параболе један реалан асимптотни правац

Прим. Наћи асимптотни правац парабола̂.

Одг. Асимптотни правац је одређен параметром $m = -\frac{h}{b}$.

Разред елипсӣ.

207. У овом разреду кривих је $\delta = h^2 - ab < o$, а по тој релацији се види 1-во, да коефицијенти a и b у овом разреду не могу бити $= o$ ни посебице, ни оба у исти мах и 2-го, да ти коефицијенти морају бити истога знака.

Напишимо сад еквацију кривих у експлицитном облику (2)

$$y = mx + n \pm R \qquad (7)$$

и нацртајмо сем тога (сл. 91.) праву D која је аналитички представљена еквацијом

$$Y = mx + n.$$

Кад се та еквација упореди са еквацијом (7), биће јасно да је

$$y = Y \pm R,$$

а по томе се види, да су ординате y тачака дате криве за R веће (мање) од ордината Y тачака праве D. Услед тога ћемо тачке криве (7) моћи овако конструкцијом наћи: узећемо ма где на правој D једну тачку p; за тим ћемо додати на ординату тачке p и одузети од ње дужи $Pp = P'p$ које су одмерене оном бројном вредношћу корена R, коју тај корен има кад је $x =$ броју који представља апсцису тачке p. Тачке P и P' биле би већ тачке места (7). За тим ћемо узети на правој D једну тачку q и одмерићемо на ординати те тачке изнад и испод тачке q дужи $Qq = Q'q$; број којим су представљене дужи $Qq = Qq'$ добићемо исто онако, као што смо мало час добили број који представља дужи $Pp = P'p$. Тачке Q и Q' биле би такође тачке места (7), а сличним путем могли бисмо наћи и остале тачке места (7). Права D половиће корду PP' у тачци p, а корду QQ' у тачци q; та права ће у осталом половити и све остале корде које иду паралелно с кордом PP' и назива се из тог разлога (чл. 219.) *ди-*

јаметар криве; корде PP', QQ', . . . називају се *ординате* дијаметра D; оне су паралелне са осовином y па се с тога каже, да је дијаметар D *коњугован* или *спрегнут* с правцем осовине y.

Пођимо сад даље и покушајмо да се мало боље упознамо са обликом оних кривих које припадају овоме разреду. — Ми смо већ поменули на једном месту, да крива може имати реалних тачака својих само у оним границама променљиве x, у којима корен R има реалне вредности. Те границе ћемо потражити у овај мах, а на овај начин. Ми знамо да је

$$R = \frac{1}{b} \sqrt{\partial x^2 + 2px + q}\,;$$

ако су дакле x' и x'' корени еквације

$$\partial x^2 + 2px + q = o, \tag{8}$$

биће у опште

$$R = \frac{1}{b} \sqrt{\partial\,(x - x')\,(x - x'')},$$

а у овом разреду ћемо R моћи написати и мало друкчије. Ми знамо на име да је у овом разреду $\partial = h^2 - ab < o$; с тога ћемо моћи узети да је $\partial = -\lambda^2$, па ћемо према томе у овом разреду моћи R написати у овом облику:

$$R = \frac{\lambda}{b} \sqrt{(x - x')\,(x'' - x)}. — \tag{9}$$

Дискриминанта еквације (8) је $p^2 - \partial q$; па како је (чл. 204.)

$$p = hf - bg, \quad q = f^2 - bc,$$

биће дискриминанта поменуте еквације (8) овог облика:

$$p^2 - \partial q = (hf - bg)^2 - (h^2 - ab)\,(f^2 - bc)$$

или

$$p^2 - \partial q = -\,b\,(abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2)$$

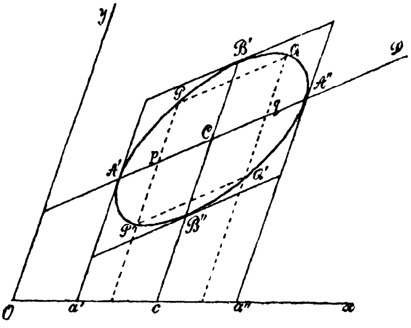
или

$$p^2 - \delta q = - b\Delta.$$

Кад знамо дискриминанту еквације (8), онда ће нам јасно бити ово: 1-во, да су корени те еквације реални и неједнаки кад је $- b\Delta > o$; 2-го, да су корени реални и једнаки кад је $- b\Delta = o$ и 3-ће, да су корени еквације (8) имагинарни кад је $- b\Delta < o$.

1-во. *Нека су корени* x' *и* x'' *реални и неједнаки,* $x'' > x'$, *т. ј. нека је* $- b\Delta > o$.

По еквацији (9) види се да је R реално само за оне вредности променљиве x, које леже између $x = x'$ и $x = x''$; према томе ће крива имати својих реалних тачака само између напоредница $x = x'$ и $x = x''$. Кад је $x = x' = Oa'$, биће $R = o$; кад x расте, биваће с њим заједно веће и R, али само донекле — за посебну вредност $x = x'' = Oa''$ је поново $R = o$, т. ј. у размаку (x', x'') мора R имати свој максимум. Ту највећу вредност корена R наћи ћемо овако. По еквацији (9) види се, да ће R имати највећу вредност онда, кад производ $(x - x')(x'' - x)$ буде имао највећу вредност, па како је збир чинитељâ тога производа сталан,



Сл. 91.

$$(x - x') + (x'' - x) = x'' - x' = const.,$$

биће јасно, да ће производ $(x - x')(x'' - x)$ имати највећу вредност, кад је

$$x - x' = x'' - x,$$

т. ј. кад је

$$x = \frac{x' + x''}{2}.$$

Према томе ће и највећа вредност количине R бити ово:

$$R = \frac{\lambda}{b}\sqrt{\left(\frac{x' + x''}{2} - x'\right)\left(x'' - \frac{x' + x''}{2}\right)}$$

или

$$R = \frac{\lambda(x'' - x')}{2b}.$$

Повуцимо сад праву $x = \frac{x' + x''}{2}$; та права иде паралелно са осовином y и полови на осовини x дуж $a'a''$. Изнад и испод тачке C у којој та права сече дијаметар D одмерићемо на њој дужи

$$CB' = CB'' = \frac{\lambda(x'' - x')}{2b}.$$

Тачке B' и B'' биће тачке криве; кроз те тачке повући ћемо две праве паралелно са дијаметром D. Те две напореднице градиће са двема напоредницама $A'a'$ и $A''a''$ један паралелограм. Према оном што досад рекосмо јасно је, да ће све тачке криве (7) у овом случају лежати у том паралелограму. Крива (7) биће дакле у овај мах ограничена са свију страна; она се назива *елипса*.

Одаберимо сад међу ординатама дијаметра D две ординате PP' и QQ' које у истој раздаљини $d = Cp = Cq$ леже с једне и с друге стране тачке C; еквације тих ордината биће ово:

$$x = \frac{x' + x''}{2} - d, \quad x = \frac{x' + x''}{2} + d.$$

Ако једном између ових двеју вредности, н. пр. оном првом, сменимо x у изразу којим је R одређено, добићемо ово:

$$R = \frac{\lambda}{b}\sqrt{\left[\left(\frac{x' + x''}{2} - d\right) - x'\right]\left[x'' - \left(\frac{x' + x''}{2} - d\right)\right]}$$

или

$$R = \frac{\lambda}{b}\sqrt{\left(\frac{x'' - x'}{2} - d\right)\left(\frac{x'' - x'}{2} + d\right)}.$$

По овом обрасцу се види да се R не мења кад у њему сменимо d са $-d$. Како би се том супституцијом еквација корде PP' преобразила у еквацију корде QQ', то је јасно уједно и то, да су дужи Pp, $P'p$, Qq, $Q'q$ једнаке тако, да је и $PP' = QQ'$. Те две корде су међу тим паралелне, па је с тога слика $PP'Q'Q$ један паралелограм. Према томе је јасно ово двоје: 1-во, да права $B'B''$ дели две паралелне корде PQ и $P'Q'$ на два једнака дела и 2-го, да тачка C полови корде PQ' и $P'Q$. Ту особину сачуваће права $B'B''$ и тачка C и онда кад се једнаке, а паралелне корде PP' и QQ' буду и кретале по равни криве — права $B'B''$ половиће две и две паралелне корде, а тачка C половиће све корде које кроз њу пролазе. Тачка C назива се из тог разлога *средиште* елипсе, а права $B'B''$ је један од дијаметара те криве. Тај дијаметар полови корде које иду напоредо са дијаметром D, а за тај дијаметар D знамо, да он полови корде које иду паралелно са дијаметром $B'B''$; дијаметри D и $B'B''$ су услед тога *коњуговани (спрегнути) дијаметри.*

2-го. *Нека су корени* x' *и* x'' *реални и једнаки,* $x' = x''$, *т. ј. нека је* $-b\Delta = o$ *или* $\Delta = o$.

У овом случају је

$$R = \frac{\lambda}{b}\sqrt{-(x - x')^2}$$

или

$$R = \frac{\lambda(x - x')i}{b}.$$

Према томе је јасно да се еквација (7) дате криве у овај мах овако може написати:

$$y = mx + n \pm \frac{\lambda\,(x - x')\,i}{b},$$

а по тој еквацији се види, да је y реално само кад је $x = x'$, т. ј. у овом случају дата еквација представља једну реалну тачку

$$x = x',\ y = mx' + n,$$

или управо *две коњуговано имагинарне праве* које се у тој реалној тачци секу.

3-ће. *Нека су корени x' и x'' имагинарни, т. ј. нека је $-b\Delta < o$.*

Корени еквације (8) биће у овом случају коњуговано комплексни; н. пр. ако је $x' = r + is$, биће $x'' = r - is$; према томе ће у овом случају бити

$$\partial x^2 + 2px + q \equiv \partial\,[(x - r)^2 + s^2],$$

т. ј. за све вредности промењиве x имаће трином $\partial x^2 + 2px + q$ знак свога првога члана; тај трином биће дакле негативан, па ће с тога за све вредности промењиве x и R бити имагинарно, а то ће рећи, да ће у овом случају дата еквација представљати једно имагинарно место, једну *имагинарну елипсу.*

Прим. 1. Шта представља еквација

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 8y + 9 = o?$$

У овом случају је $h^2 - ab = -4 < o$, $-b\Delta = -4 \cdot -16 = 64 > o$, па ће према томе дата еквација представљати једну реалну елипсу. Та елипса лежи између напоредница $x = 1$ и $x = 5$, еквација дијаметра D је $y = \frac{1}{2}x + 1$, а R ће имати највећу вредност кад је $x = 3$.

Прим. 2. Шта представља еквација

$$4x^2 - 2xy + y^2 - 14x + 2y + 13 = o?$$

$h^2 - ab$ је у овом случају $= -3 < o$, а $\triangle$ је $= o$, па ће према томе дата еквација представљати две коњуговано имагинарне праве које се секу у тачци (2, 1) праве $y = x - 1$.

Прим. 3. Шта представља еквација

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 6 = o?$$

У овај мах је $h^2 - ab = -1 < o, -b\triangle = -1 \cdot 1 = -1 < o$, па ће према томе дата еквација представљати једну имагинарну елипсу.

Прим. 4. Шта представља еквација

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 2y + \lambda = o,$$

кад се параметар λ мења?

Одг. Еквација представља 1-во, реалну елипсу кад је $\lambda < \frac{13}{4}$; 2-го, две коњуговано имагинарне праве кад је $\lambda = \frac{13}{4}$; 3-ће, имагинарну елипсу кад је $\lambda > \frac{13}{4}$.

Прим. 5. Шта представља еквација

$$ax^2 + by^2 + lx + my + n = o,$$

кад су коефицијенти a и b истога знака?

Одг. Еквација представља елипсу; дијаметар D те елипсе је паралелан са осовином x.

Разред хипербола̂

208. У овом разреду кривих је $\partial = h^2 - ab > o$; ∂ је дакле позитивно, $\partial = \lambda^2$, па је с тога у разреду хипербола̂

$$R = \frac{\lambda}{b}\sqrt{(x - x')(x - x'')}, \tag{10}$$

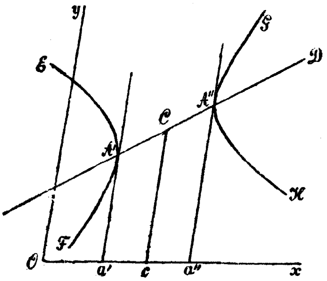
т. ј. експлицитна еквација кривих које припадају разреду хипербола је овог облика:

$$y = mx + n \pm \frac{\lambda}{b}\sqrt{(x - x')(x - x'')}. \tag{11}$$

Границе у којима се може x кретати, па да R, а с R-ом и y буде реално, одредићемо овако.

1-во. *Нека су корени* x' *и* x'' *реални и неједнаки,* $x'' > x'$, *т. ј. нека је* $- b\Delta > o$.

По еквацији (10) види се да је R имагинарно само за оне вредности променљиве x, које леже између $x = x'$ и $x = x''$; према томе ће крива имати својих реалних тачака само изван напоредница $x = x'$ и $x = x''$. Кад је $x = x' = Oa'$ или $x = x'' = Oa''$ биће $R = o$; кад се x мења од своје вредности $x = x'$ па до $x = -\infty$ или од вредности $x = x''$ па до $x = +\infty$, онда ће се мењати и R — оно ће бивати све веће и веће и нарастиће преко сваке границе. Крива (11) гранаће се дакле у овај мах у бескрајност; гране њезине



Сл. 92.

$A'E$ и $A''G$ шире се у правцу позитивних, а гране $A'F$ и $A''H$ у правцу негативних ордината с једне и с друге стране дијаметра D; та крива назива се *хипербола.* — Тачка C која лежи на средини дужи $A'A''$ била би, као што би се лако могло доказати, средиште хиперболино, а праве D и Cc биле би коњуговани дијаметри њезини.

2-го. *Нека су корени* x' *и* x'' *реални и једнаки,* $x' = x''$, *т. ј. нека је* $- b\Delta = o$ *или* $\Delta = o$.

У овом случају је

$$R = \frac{\lambda (x - x')}{b} \cdot$$

Према томе је јасно да се еквација (11) дате криве у овај мах може овако написати:

$$y = mx + n \pm \frac{\lambda\,(x - x')}{b},$$

а та нам еквација представља две реалне праве, које се секу у тачци

$$x = x',\ y = mx' + n.$$

Како је $\lambda = \sqrt{\delta} = \sqrt{h^2 - ab}$, могле би се еквације тих двеју правих и овако написати:

$$y = mx + n \pm \frac{\sqrt{h^2 - ab}}{b}\,(x - x').$$

3-ће. *Нека су корени x' и x'' имагинарни, т. ј. нека је $-\,b\Delta < o$.*

У овом случају ће трином $\delta x^2 + 2px + q$ имати знак свога првог члана, ма променљива x имала ма какву вредност; тај трином биће дакле позитиван, па ће с тога и R за све вредности променљиве x бити реално. Кад је $x = -\infty$ биће $R = +\infty$; на исти начин је $R = +\infty$ и кад је $x = +\infty$. Кад се дакле x без прекида мења од $-\infty$ до $+\infty$, онда ће се без прекида мењати и R од $+\infty$ до $+\infty$ и имаће негде у тим границама свој минимум.

Да бисмо што лакше нашли ону вредност променљиве x, за коју ће R бити минимум, написаћемо R у овом облику:

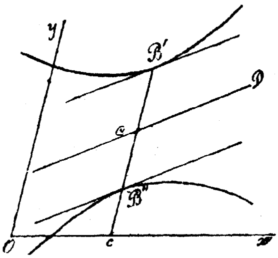
$$R = \frac{1}{b}\sqrt{\delta\left(x + \frac{p}{\delta}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{\delta}\right)}\cdot$$

У изразу под кореном има члан $q - \frac{p^2}{\delta}$ *позитивну* вредност. У овом случају је на име дискриминанта $-\,b\Delta$ еквације $\delta x^2 + 2px + q = o$ мања од нуле,

$-b\Delta < o$, па како је $-b\Delta = p^2 - \partial q$, то је јасно да је у овај мах управо $p^2 - \partial q$ мање од нуле; међутим је

$$p^2 - \partial q \equiv \partial\left(\frac{p^2}{\partial} - q\right),$$

па како је $\partial > o$, а $\partial\left(\frac{p^2}{\partial} - q\right) < o$, биће и $\frac{p^2}{\partial} - q < o$, а то ће рећи, да је $q - \frac{p^2}{\partial} > o$, а то смо и тврдили.



Сл. 93.

Кад се то има у виду, биће јасно да ће R имати најмању вредност кад је

$$x + \frac{p}{\partial} = o \quad \text{или} \quad x = -\frac{p}{\partial};$$

према томе ће најмања вредност R-ова бити ово:

$$R = \frac{1}{b}\sqrt{q - \frac{p^2}{\partial}}.$$

Нацртајмо сада дијаметар D и повуцимо праву Cc коју аналитички представља еквација $x = -\frac{p}{\partial}\cdot$ На тој правој одмерићемо изнад и испод тачке C дужи

$$CB' = CB'' = \frac{1}{b}\sqrt{q - \frac{p^2}{\partial}};$$

тачке B' и B'' биће тачке дате криве. Повуцимо најпосле кроз те две тачке две праве паралелно са дијаметром D. Између тих двеју напоредница крива не ће имати својих реалних тачака. Напротив, крива ће се изван тих двеју напоредница гранати у бескрајност; једна од тих грана ће ићи у правцу позитивних, а друга у правцу негативних ордината; та крива је такођер *хипѐрбола*.

209. Општа квадратна еквација (1) може се написати у експлицитном облику (2) само ако је $b \gtrless o$. По релацији $h^2 - ab > o$ види се међу тим ово: 1-во, да коефицијенти a и b у разреду хипербола могу бити и нули равни — или посебице или оба у исти мах — и 2-го, да коефицијенат h не сме бити раван нули, кад је било $b = o$, било $a = o$, било и $b = o$ и $a = o$. Кад се дакле претпостави да је $b = o$, онда ће нам јасно бити, да се облик кривих у разреду хипербола не може одредити на основу еквације (2). У том случају бисмо оваквом анализом еквацијâ определили облик криве.

Кад је $b = o$, онда ће општа квадратна еквација (1) бити овог облика:

$$ax^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = o. \qquad (12)$$

У тој еквацији се y јавља линеарно, па је с тога

$$y = -\frac{ax^2 + 2gx + c}{2\,(hx + f)}. \qquad (13)$$

Кад се подели бројитељ именитељем, биће даље

$$y = mx + n + \frac{r}{2\,(hx + f)}$$

или

$$y = mx + n + R, \qquad (14)$$

где је

$$R = \frac{r}{2\,(hx + f)}.$$

Узмимо сад да је еквацијом

$$Y = mx + n$$

представљена права $L'M'$. Еквацију криве (14) моћи ћемо у овом случају овако написати:

$$y = Y + R,$$

а по тој еквацији се види, да се тачке те криве добивају на овај начин: треба просто ординатама различитих тачака праве $L'M'$ додати неку дуж која би била одмерена неким бројем који је раван алгебарској вредности R-овој.

Свега може бити у овај мах два случаја: или је $r \gtrless o$, или је $r = o$.

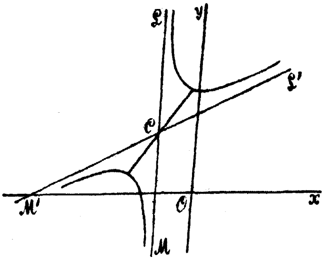
1-во. *Нека је* $r \gtrless o$.

У овом случају биће R бескрајно само кад је

$$hx + f = o$$

или

$$x = -\frac{f}{h}\cdot$$



Сл. 94.

Да бисмо тачно омеђили крај у коме се крива мора налазити, претпоставићемо да су количине r, f, h позитивне и повући ћемо праву LM, која је аналитички представљена еквацијом $x = -\frac{f}{h}\cdot$ Узмимо сад да се

x мења од $-\frac{f}{h}$ до $+\infty$. У том случају ће се R мењати од $+\infty$ до o, јер је

$$R = \frac{r}{2\,(hx + f)} = \frac{r}{2h\left(x + \frac{f}{h}\right)}\,.$$

Кад бисмо све те *позитивне* вредности R-ове додали ординатама појединих тачака праве $L'M'$, а у границама које се протежу од $x = -\frac{f}{h}$ до $x = +\infty$, добили бисмо једну грану криве, која тежи да се својим двама крајевима у бескрајности приљуби уз праве LM и $L'M'$. Услед тога су праве LM и $L'M'$ асимптоте те гране, а цела грана лежи у углу LCL'.

Узмимо даље да се x мења од $-\infty$ до $-\frac{f}{h}$. У том случају ће се R мењати од o до $-\infty$, па кад бисмо и у овај мах све те *негативне* вредности R-ове алгебарски додали ординатама тачака праве $L'M'$, а у границама које се протежу од $x = -\infty$ до $x = -\frac{f}{h}$, добили бисмо и другу грану криве. Праве LM и $L'M'$ биле би асимптоте двају крајева те гране, а цела грана би лежала у углу MCM'.

И ова крива је *хипербола*; кад дакле у општој еквацији кривих другога реда нема члана у ком би се јављао квадрат променљиве y и кад је сем тога $h \gtrless o$, онда ће једна асимптота оне хиперболе, коју та посебна еквација представља, ићи паралелно са осовином y.

Напомене. 1-во. Ако је $h \gtrless o$, а $a = o$, онда једна асимптота иде паралелно са осовином x.

2-го. Ако је $h \gtrless o$, $b = o$, $f = o$, онда је сама осовина y асимптота криве.

3-ће. Ако је $h \gtrless o$, $a = o$, $g = o$, онда је сама осовина x асимптота хиперболе.

4-то. Ако је $h \gtrless o$, а $a = o$, $b = o$, $g = o$, $f = o$, онда су обе осовине координатне системе асимптоте. Кад дакле узмемо асимптоте криве за осовине координатне системе, онда је еквација хиперболе овог облика:

$$2hxy + c = o \tag{15}$$

или

$$xy = k^2. \tag{15*}$$

2-го. *Нека* је $r = o$.

У овом случају може се у разломљеном изразу (13) без остатка поделити бројитељ именитељем; према томе је у овај мах

$$ax^2 + 2gx + c \equiv - 2 (mx + n) (hx + f). \tag{16}$$

Напишимо сад еквацију (12) у овом облику:

$$ax^2 + 2gx + c + 2 (hx + f) y = o.$$

Кад се има у виду идентична релација (16), биће јасно да ће се последња еквација моћи и овако написати:

$$(y - mx - n) (hx + f) = o,$$

т. ј. кад је $h \gtrless o$, а $b = o$ и $r = o$, онда ће се крива у разреду хипербола изметнути у систему двеју реалних правих; еквације тих правих су

$$y - mx - n = o, \; hx + f = o.$$

Напомена. Лако би се дало доказати да у овом последњем случају мора $\triangle$ бити $= o$. — Ако је на име у општој квадратној еквацији $b = o$, онда ће дискриминанта те еквације имати ову вредност:

$$\triangle = 2fgh - af^2 - ch^2,$$

т. ј. $\triangle$ *у опште* није $= o$. Но ако је $r = o$, онда се трином $ax^2 + 2gx + c$ без остатка може поделити са

$hx + f$, а то значи да је $x = -\frac{f}{h}$ корен квадратне еквације

$$ax^2 + 2gx + c = o.$$

Кад у овој еквацији сменимо x са $-\frac{f}{h}$, а ми ћемо добити ово:

$$\frac{af^2}{h^2} - 2\frac{fg}{h} + c = o$$

или

$$2fgh - af^2 - ch^2 = o;$$

дакле, кад је $b = o$ и $r = o$, онда је и $\triangle = o$, а то смо и тврдили.

Прим. 1. Шта представља еквација

$$3x^2 - 8xy + 4y^2 - x + 4y + 5 = o?$$

Одг. Та еквација представља једну хиперболу, јер је $h^2 - ab = 4 > o$.

У овај мах је $\partial x^2 + 2px + q \equiv 4\,(x^2 - 3x - 4)$; према томе ће се хипербола гранати изван напоредницâ $x = -1$ и $x = 4$; еквација дијаметра D је $y = x - \frac{1}{2}$.

Прим. 2. Шта представља еквација

$$x^2 - 2xy + 4x - 2y + 3 = o?$$

Одг. Еквација представља једну криву у разреду хипербола, која се изметнула у ове две праве:

$$x = -1 \text{ и } x - 2y + 3 = o.$$

Прим. 3. Шта представља еквација

$$x^2 - 2xy + 2x - 4y - 2 = o?$$

Одг. Та еквација представља једну хиперболу; једна асимптота те хиперболе је паралелна са осовином y, а еквација те асимптоте је $x = -2$; еквација оне друге асимптоте је $y = \frac{1}{2}x$.

Прим. 4. Шта представља еквација

$$3x^2 - 12xy + 9y^2 + 22x - 24y + 3\lambda + 3 = o,$$

кад се параметар λ мења?

Одг. Та еквација свакад представља једну хиперболу; само кад је $\lambda = \frac{4}{3}$ представљаће та еквација две праве, које се секу у тачци $\left(3, \frac{10}{3}\right)$; еквације тих двеју правих су

$$3x - 3y + 1 = o, \ x - 3y + 7 = o.$$

Разред парабола̂

210. У овом разреду кривих је $\partial = h^2 - ab = o$, а по тој релацији се види да је

$$ax^2 + 2hxy + by^2 \equiv (x\sqrt{a} + y\sqrt{b})^2.$$

Према томе је јасно, да ће општа квадратна еквација (1) представљати криве у разреду парабола само ако се прва три члана те еквације могу написати у облику квадрата једнога бинома; општа еквација парабола̂ биће дакле овог облика:

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2gx + 2fy + c = o. \quad (17)$$

Ми знамо да је у опште $R = \frac{1}{b}\sqrt{\partial x^2 + 2px + q}$, па како је у овом разреду кривих $\partial = o$, биће у овај мах

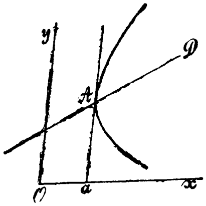
$$R = \frac{1}{b}\sqrt{2px + q}. \quad (18)$$

Кад се то има у виду, биће нам јасно да се експлицитна еквација кривих у разреду парабола може овако написати:

$$y = mx + n \pm \frac{1}{b}\sqrt{2px + q}. \quad (19)$$

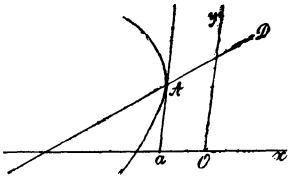
Границе у којима се x може кретати, па да R, а с R-ом и y буде реално, наћи ћемо овако.

1-во. *Нека је* $p > o$. По еквацији (18) види се да је R реално само за оне вредности променљиве x, које леже између $-\frac{q}{2p}$ и $+\infty$, т. ј. место ће имати својих тачака само у оном крају, који лежи *у десно* од праве $x = -\frac{q}{2p}$. Кад је $x = -\frac{q}{2p} = Oa$, биће $R = o$; кад се x мења од те вредности $x = -\frac{q}{2p}$ па до $+\infty$, мењаће се с њим напоредо и R и нарастиће преко сваке границе. Крива линија гранаће се дакле и изнад и испод дијаметра D у бескрајност; та крива назива се *парабола*.



Сл. 95.

2-го. *Нека је* $p < o$. Кад је $p < o$, биће R реално само за оне вредности променљиве x, које леже између $-\frac{q}{2p}$ и $-\infty$, т. ј. место има својих реалних тачака само у крају који лежи *у лево* од праве $x = -\frac{q}{2p}$.



Сл. 96.

У поменутом размаку $\left(-\frac{q}{2p}, -\infty\right)$ растиће R од o и нарастиће преко сваке границе; та крива је такођер *парабола*.

3-ће. *Нека је* $p = o$. У овом случају је

$$R = \frac{1}{b}\sqrt{q},$$

па је услед тога еквација кривих у разреду парабола овог облика:

$$y = mx + n \pm \frac{1}{b}\sqrt{q}; \qquad (20)$$

кад се има у виду да је $q = f^2 - bc$, а $m = -\frac{h}{b}$, $n = -\frac{f}{b}$, биће јасно да се еквација (20) може и овако написати:

$$hx + by + f \mp \sqrt{f^2 - bc} = o, \qquad (21)$$

т. ј. кад је $p = o$, онда ће се криве у разреду параболâ изметнути у систему *двеју паралелних правих; те две праве су реалне и различите кад је* $f^2 - bc > o$; *оне се поклапају (еквација представља двојну праву) кад је* $f^2 - bc = o$, *а имагинарне су кад је* $f^2 - bc < o$.

Напомене. 1-во. Како је у последњем случају и $p = o$ и $\partial = o$, то је јасно да ће бити и $- b\Delta = p^2 - \partial q = o$, а по томе се види, да је управо у том случају $\Delta = o$, јер b није $= o$; у прва два случаја је $\Delta \gtrless o$.

2-го. Ако миноре елемената $a, b, c, \cdot \cdot \cdot$ дискриминанте Δ означимо са $A, B, C, \cdot \cdot \cdot$, биће (чл. 83.)

$$A = bc - f^2, \; B = ca - g^2, \; C = ab - h^2,$$

$$F = gh - af, \; G = hf - bg, \; H = fg - ch.$$

Према томе је $\partial = - C$, $p = G$, $q = - A$. Кад се две праве поклапају, онда је $\partial = o$, $p = o$, $q = o$, а то ће рећи да је у том случају

$$C = o,\ G = o,\ A = o.$$

Кадгод су међу тим та три минора $= o$, онда ће уједно — то би се врло лако могло доказати — бити $= o$ и остала три минора H, B, F, т. ј. *кад општа квадратна еквација представља једну двојну праву, онда су и сви минори елемената њезине дискриминанте равни нули.*

211. По релацији $h^2 - ab = o$ види се, да један између коефицијената a и b може бити $= o$; у том случају морало би бити и $h = o$. Узмимо н. пр. да је у општој еквацији кривих $b = o$ и $h = o$. Под том погодбом биће општа квадратна еквација овог облика:

$$ax^2 + 2gx + 2fy + c = o.$$

Да видимо какве ће бити те криве по облику.

1-во. Ако је $f \gtrless o$, биће

$$y = -\frac{ax^2 + 2gx + c}{2f}. \qquad (22)$$

Да бисмо мисли средили, претпоставићемо да је $-\frac{a}{f}$ *позитивна* количина; то је слободно претпоставити, јер кад количник $-\frac{a}{f}$ не би био позитиван, а ми бисмо му променили знак тим, што бисмо помножили целу еквацију (22) негативном јединицом; разуме се да би се у том случају променио правац y-â.

Ако са x' и x'' означимо корене еквације

$$ax^2 + 2gx + c = o, \qquad (23)$$

биће

$$y = -\frac{a\,(x - x')\,(x - x'')}{2f}. \qquad (24)$$

a) Нека су корени x' и x'' реални и неједнаки, $x'' > x'$.

По еквацији (24) види се, да ће крива коју та еквација аналитички представља, сећи осовину x у двема реалним тачкама (сл. 97.) A' (x', o) и A'' (x'', o). Кад се x мења од $-\infty$ до $x = x'$, мењаће се y од $+\infty$ до нуле а тачка (x, y) описаће лук CA'. За оне вредности променљиве x, које леже између x' и x'', биће y негативно; оно ће у први мах по апсолутној вредности својој растити, али само до неког извесног максимума, па ће даље опет опадати и биће $= o$ кад x буде $= x''$. Кад се дакле x мења у размаку (x', x''), онда тачка (x, y) описује лук $A'BA''$. Кад x прекорачи вредност $x = x''$, онда ће y без престанка и без прекида растити; кад је $x = +\infty$, биће и $y = +\infty$. Кад се дакле x мења у размаку $(x'', +\infty)$, онда тачка (x, y) описује лук $A''D$. На целом путу описаће према томе покретна тачка (x, y) лук CBD, а крива је и у овај мах једна *парабола*. —

Максимум ординате тачака лука $A'BA''$ наћи ћемо овако. Написаћемо еквацију (24) у овом облику:

$$y = \frac{a\,(x - x')\,(x'' - x)}{2f};$$

збир чинитеља $x - x'$ и $x'' - x$ има сталну вредност $x'' - x' = const.$, т. ј. y ће имати највећу вредност кад је

$$x'' - x = x - x' \quad \text{или} \quad x = \frac{x' + x''}{2};$$

највећа ордината лука $A'BA''$ је дакле она, која пролази кроз средину дужи $A'A''$.

b) Нека су корени x' и x'' реални и једнаки, $x' = x''$.

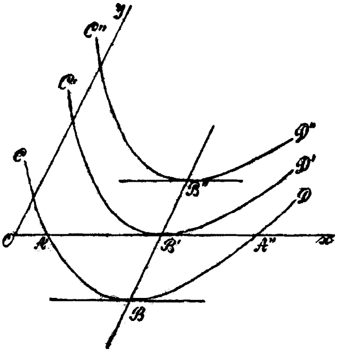
У овај мах биће

$$y = -\frac{a\,(x - x')^2}{2f};$$

према томе ће у овај мах y свакад бити позитивно, а најмања вредност његова је $y = o$. У опште ће y, кад се x буде мењало у размаку $(-\infty, +\infty)$ најпре опадати од $+\infty$ до нуле, па ће после поново растити од нуле до $+\infty$. Крива је и у овај мах једна парабола коју осовина x дира у тачци B'.

c) *Нека су корени* x' *и* x'' *имагинарни.*

И у овом случају ће y бити позитивно, а никад не ће бити $= o$. Еквација (22) представљаће параболу



Сл. 97.

$C''B''D''$ која не сече осовину x. Како се y без прекида мења од $+\infty$ до $+\infty$, то ће y морати негде имати своју најмању вредност. Тај минимум ћемо наћи овако. Написаћемо еквацију (22) у овом облику:

$$y = -\frac{(ax + g)^2 - (g^2 - ca)}{2af}.$$

Како су корени еквације (23) у овај мах имагинарни, биће дискриминанта те еквације *негативна*; биће дакле

$$g^2 - ca < o;$$

с тога ће оба члана у бројитељу оног израза, којим је опредељено y, бити *позитивне* вредности; y ће дакле имати најмању вредност кад је

$$ax + g = o \quad \text{или} \quad x = -\frac{g}{a}.$$

2-го. Ако је $f = o$, онда ће се у овај мах (по претпоставци је и $b = o$ и $h = o$) општа еквација кривих преобразити у ову еквацију:

$$ax^2 + 2gx + c = o,$$

а та еквација представља систему *двеју правих које иду паралелно са осовином* y; *те две праве су реалне и различите кад је* $g^2 - ca > o$; *оне се поклапају кад је* $g^2 - ca = o$, *а имагинарне су кад је* $g^2 - ca < o$.

Напомена. У последњем случају је $\triangle = o$; у пређашња три случаја је $\triangle \gtrless o$. — И у овај мах ће сви минори елемената дискриминанте $\triangle$ бити $= o$, кад еквација представља једну двојну праву, т. ј. кад је $g^2 - ca = o$.

Прим. 1. Шта представља еквација

$$x^2 + 2xy + y^2 + x - 2y + 1 = o?$$

Одг. Еквација представља параболу која додирује осовину y у тачци (o, 1); та парабола се протеже у бескрајност у правцу негативних апсциса.

Прим. 2. Шта представља еквација

$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y + 2 = o?$$

Одг. Еквација представља једну параболу која се изметнула у две напоредннце $y = x - 1$ и $y = x - 2$.

Прим. 3. Шта представља еквација

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 4(2 - \lambda)x - 2y + \lambda - 6 = o,$$

кад се у њој параметар λ мења?

Одг. Еквација представља у опште параболе; само кад је $\lambda = 3$, представљаће та еквација две напоредннце, а еквације њихове биће ово:

$$2x - y - 1 = o, \quad 2x - y + 3 = o.$$

212. Кад се има на уму све што досад рекосмо о разредби кривих другога реда, онда ће нам на први поглед пасти у очи једна карактеристична разлика између кривих појединих разреда које се распадају у систему правих. Криве првога разреда (елипсе) могу се на име изметнути само у две коњуговано имагинарне праве; криве другога разреда (хиперболе) могу се изметнути само у две реалне праве које се у једној тачци секу; криве трећега разреда (параболе) могу се изметнути само у две паралелне, реалне или имаги-

нарне праве. — У свима тим случајевима је $\triangle = o$, а то се у осталом потпуно слаже с оним што поменусмо у чл. 83.

213. У свакој општој еквацији кривих другога реда имамо свега *шест* коефицијената a, b, c, f, g, h. Јасно је да ће у еквацији остати само *пет* параметара, кад се еквација подели једним између поменутих коефицијената a, b, c, . . . Кад су ти параметри познати, онда је крива другога реда потпуно одређена. Но на исти начин би крива била одређена и кад бисмо знали онолико геометријских погодаба, колико их мора бити, па да се вредности непознатих параметара могу израчунати. Ми знамо (чл. 56.) да је нека геометријска погодба проста или линеарна, кад јој одговара само *једна* релација између параметара; *с тога је потребно знати у опште пет линеарних погодаба кад хоћемо да крива другога реда буде одређена.* Но ако је нека геометријска погодба обележена двема, трима и т. д. релацијама између параметара, т. ј. ако је, као што се то каже, геометријска погодба *двојна*, *тројна* и т. д. онда ће број тих погодаба бити мањи; н. пр. кад знамо једну двојну геометријску погодбу, онда треба у опште знати још три линеарне погодбе које немају никакве ближе везе са датом двојном погодбом, ако се хоће да крива буде потпуно одређена и т. д.[1])

Кад се из системе релацијâ, које постају услед појединих геометријских погодаба, израчунавањем добива само једна одређена система вредности за непознате параметре, онда има само једна једина крива другога реда, која ће одговарати захтевима поменутих погодаба, а ако те релације не могу напоредо постојати једна с другом (relations incompatibles), онда није могуће наћи криву другога реда која би одговарала захтевима тих погодаба. Најпосле, ако је број простих погодаба мањи од пет, онда ће свакад бар још један параметар остајати неодређен, а то ће рећи, да ће у том случају

---

[1]) На пример дати средиште значи, као што ћемо касније видети, дати једну двојну погодбу; дати асимптоте значи дати четири линеарне погодбе. Но дати средиште и једну асимптоту не значи дати четири линеарне погодбе, већ само три, јер средиште и асимптоте нису независни елементи с тога, што средиште лежи на асимптоти.

бити бескрајно много кривих другога реда, које ће одговарати захтевима датих гогодаба.

Напомена. У разреду парабола је $h^2 - ab = o$, т. ј. кад општа еквација представља параболу, онда је већ имплицитно дата једна релација између њезиних параметара. Према томе у опште треба знати четири линеарне погодбе, па да парабола буде опредељена.

Примери

1. Шта представља еквација

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy = o?$$

Одг. Како у еквацији нема апсолутног члана, то ће еквација представљати једну криву другог реда, која пролази кроз почетак.

2. Доказати да је круг једна специјална елипса.

У косој системи представљаће општа еквација један круг ако је $a = b$, $h = a \cos \omega$; услед тога је $h^2 - ab = - a^2 \sin^2 \omega < o$, а то ће рећи, да је и т. д.

3. Наћи погодбу под којом ће почетак координатне системе лежати у спољашњем или у унутрашњем крају криве другога реда

Дефин. Спољашњи крај криве је онај део бескрајне равни, из ког се могу повући реалне две тангенте на криву, а унутрашњи крај је онај, из кога се могу повући само имагинарне тангенте.

Погодбу ћемо наћи овако. Потражићемо апсцисе оних тачака у којима нека права $y = mx$, што пролази кроз почетак, сече криву $ax^2 + 2hxy + \cdot \cdot \cdot = o$. Тим путем ћемо добити једну квадратну еквацију. За тим ћемо претпоставити да су корени те еквације једнаки, т. ј. претпоставићемо да је права $y = mx$ тангента криве; погодба под којом ће корени поменуте квадратне еквације бити једнаки, биће ово:

$$(f^2 - bc) m^2 + 2 (fg - ch) m + g^2 - ca = o. \qquad (\alpha)$$

Корени m' и m'' ове еквације су коефицијенти који опредељују правац тангената. Тангенте су дакле реалне кад су и корени реални, а имагинарне кад су они имагинарни. Међу тим је дискриминанта еквације (α) ово:

$$(fg - ch)^2 - (f^2 - bc)(g^2 - ca)$$

или

$$- c\Delta ;$$

према томе се могу повући две реалне тангенте на криву кад је $-c\Delta > o$, а две имагинарне кад је $- c\Delta < o$, т. ј. почетак координатне системе лежи у спољашњем крају кад је $c\Delta < o$, а у унутрашњем крају кад је $c\Delta > o$.

4. **Наћи погодбу под којом ће нека тачка (a, b) лежати у спољашњем или у унутрашњем крају криве.**

Узмимо да тачка (a, b) лежи изван криве и да почетак такођер лежи у истом крају. У том случају биће $c\Delta < o$; како тачке (o, o) и (a, b) леже у истом крају криве, то ће количине $f(o, o) = c$ и $f(a, b)$ бити количине истога знака, т. ј. кад је $c\Delta < o$, биће и $f(a, b)\Delta < o$.

Напротив, ако почетак лежи у кривој, то ће бити $c\Delta > o$; како тачке (o, o) и (a, b) у овај мах леже у различитим крајевима криве, то ће количине $f(o, o) = c$ и $f(a, b)$ бити количине различитог знака, т. ј. како је $c\Delta > o$, биће поново $f(a, b)\Delta < o$. Према томе ће тачка (a, b) лежати у спољашњем крају криве ако је $f(a, b)\Delta < o$. Сличним путем би се могло доказати да је тачка (a, b) тачка унутрашњег краја кад је $f(a, b)\Delta > o$. Дакле, кад су количине $f(a, b)$ и Δ различитог знака, онда тачка (a, b) лежи у спољашњем крају, а кад су количине $f(a, b)$ и Δ истога знака, онда тачка (a, b) лежи у унутрашњем крају.

5. Шта представља еквација

$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2 = o?$$

У овој еквацији је $h^2 - ab = \lambda^2 - 1$, т. ј. еквација представља елипсе кад је $|\lambda| < 1$, хиперболе кад је $|\lambda| > 1$, а параболе кад је $\lambda = \pm 1$.

У овај мах је

$$\Delta = 1 - 5\lambda^2,$$

па је с тога

$$- b\Delta = 5\lambda^2 - 1.$$

1-во. Нека је $|\lambda| < 1$. Еквација ће представљати реалну елипсу кад је $5\lambda^2 - 1 > o$, т. ј. кад λ лежи између -1 и $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ с једне, и $+1$ и $+\frac{1}{\sqrt{5}}$ с друге стране; еквација ће представљати две коњуговано имагинарне праве кад је $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, а имагинарну елипсу кад је $5\lambda^2 - 1 < o$, т. ј. кад λ лежи између $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $+\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2-го. Нека је $|\lambda| > 1$. Еквација ће представљати хиперболе, а λ се може мењати између $-\infty$ и -1 с једне, и $+1$ и $+\infty$ с друге стране.

3-ће. Нека је $\lambda = \pm 1$. Еквација представља и у једном и у другом случају једну параболу.

6. Координате неке тачке A су a' и b'. Шта представља еквација

$$(2\alpha - a')\,x^2 - 2b'xy + a'y^2 + (a'^2 + b'^2 - 2a'\alpha - \alpha^2 + r^2)\,x + a'\,(\alpha^2 - r^2) = o\ ?$$

У овој еквацији је

$$h^2 - ab = a'^2 + b'^2 - 2a'\alpha,$$

т. ј. еквација ће у опште представљати криве из сва три разреда. Ако је на име $h^2 - ab = o$, онда ће тачка A описати један круг, н. пр. круг K. Средиште тог круга је C (α, o), полупречник његов је α, а то ће рећи, да круг додирује осовину y. Кад је $h^2 - ab < o$, онда тачка A лежи у кругу K, а кад је $h^2 - ab > o$, онда тачка A лежи изван круга K. Према томе ће дата еквација представљати елипсе кад тачка A лежи у кругу K, хиперболе кад тачка A лежи ван круга K, а параболе кад је тачка A накружна.

У овај мах је

$$\triangle = -\frac{1}{4}\,a'\,[(a' - \alpha)^2 + b'^2 - r^2]^2\,;$$

према томе се јасно види да је $\triangle = o$ само у два маха — или кад је

$$a' = o,$$

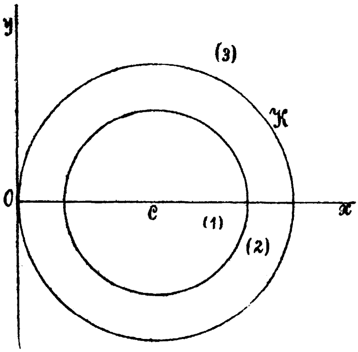
или кад је

$$(a' - \alpha)^2 + b'^2 - r^2 = o \,— \qquad (\beta)$$

а то ће рећи, да се криве које представља дата еквација могу изметнути у две праве само у ова два случаја: 1-во, кад тачка A описује осовину y, и 2-го, кад тачка A лежи ма где на кругу (β). Средиште тог круга је такођер тачка C, а полупречник његов је r. Тај круг дели с кругом K раван у опште у три краја — у крајеве (1), (2) и (3), а делиће је у два краја само кад се та два круга поклапају. Ми ћемо претпоставити да осовина y не сече круг (β), т. ј. претпоставићемо да је полупречник круга (β) мањи од полупречника круга K.—

Већ смо поменули да ће дата еквација представљати елипсе кад тачка A лежи у кругу K. Да видимо само хоће ли те елипсе бити реалне, или имагинарне или да се не ће како год изметнути у систему двеју правих. У општој еквацији се при том испитивању обраћамо овом производу — $b\triangle$, тражимо на име да ли је тај производ $>$ од нуле, $= o$ или $<$ од нуле. У овај мах је $b = a'$, па ћемо с тога испитивати производ — $a'\triangle$. Кад се има на уму то, да је a' позитивно и у крају (1) и у крају (2), и кад се има у виду израз који представља дискриминанту Δ, онда је јасно да је Δ у опште $< o$ за све тачке поменутих двају крајева. Услед тога ће у опште за све тачке тих двају крајева бити $- a'\Delta > o$, т. ј. дата еквација представљаће реалне елипсе кад се тачка A буде кретала по крајевима (1) и (2). На граници тих крајева, т. ј. на периферији круга (β) је међу тим $\Delta = o$; с тога је и $- a'\Delta = o$, т. ј. дата еквација представљаће две коњуговано имагинарне праве кад тачка A буде лежала ма где на периферији круга (β)

У том правцу могли бисмо и даље анализовати дату еквацију, па бисмо тим путем могли сазнати шта све може представљати та еквација кад се тачка A налази било у појединим тачкама, било на појединим кривима, било у читавим крајевима бескрајне равни Све те резултате моћи ћемо најбоље прегледати у овој таблици:



Сл. 98.

Тачка A лежи	*Еквација представља*
у крају (1) и (2)	елипсу
на кругу (β)	две коњуговано имагинарне праве
на кругу K	параболу
у крају (3)	хиперболу
на осовини y	две праве које се секу
у тачци O	две паралелне праве

Сличним путем могли бисмо одредити и облик оних местâ које представља дата еквација и кад осовина y додирује или кад сече круг (β).

7. Наћи једну криву другога реда која пролази кроз пет тачака (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5).

Нека је еквација те криве ово:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o. \qquad (\gamma)$$

Како тачке (x_1, y_1) и т. д. леже на тој кривој, то бисмо у овај мах добили свега пет релација у којима би се јављали коефицијенти a, b, c, f, g, h. Те релације биле би ово:

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + \cdot\cdot\cdot = o, \quad ax_2^2 + \cdot\cdot\cdot = o \text{ и т. д.}$$

Из тих релација могли бисмо израчунати $a : b : c : f : g : h$, па тим вредностима сменити $a : b : c : \cdot \cdot$ у еквацији (γ). Тим путем добићемо еквацију коју тражимо. Ево те еквације:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = o.$$

Има дакле само једна једина крива која пролази кроз пет тачака.

Напом. Свака права сече криву другога реда у две тачке. Кад би дакле у системи датих тачака три тачке лежале на једној правој, онда би се крива изметнула у систему двеју правих, а на тим правима лежале би дате тачке.

8. Наћи еквацију кривих другога реда које пролазе кроз четири тачке A, A', B, B'.

Спојићемо тачку A с тачком A', а тачку B с тачком B' и узећемо праве AA' и BB' за координатне осовине. Апсцисе тачака A и A' означићемо са a и a', а ординате тачака B и B' с b и b'. У тој системи биће еквација кривих овог облика:

$$bb'x^2 + 2\lambda xy + aa'y^2 - bb'(a + a')x - aa'(b + b')y + aa'bb' = o$$

или

$$x^2/aa' + 2\lambda xy/aa'bb' + y^2/bb' - (1/a + 1/a')x - (1/b + 1/b')y + 1 = o$$

или

$$(x/a + y/b - 1)(x/a' + y/b' - 1) + (2\lambda/aa'bb' - 1/ab' - 1/a'b)xy = o,$$

а та се еквација може написати и у овом облику:

$$LM + kxy = o. \qquad (\delta)$$

9. $L = o$ и $M = o$, $R = o$ и $S = o$ су еквације супротних страна једнога четвороугла. Треба доказати да еквација $LM = kRS$ представља криве другога реда које су описане око поменутог четвороугла.

10. Наћи погодбу под којом ће две еквације $S = o$ и $S' = o$ представљати једну и исту криву другога реда.

Напишимо дате две еквације у овом облику:

$$S \equiv by^2 + 2\,(hx + f)\;y + ax^2 + 2gx + c = o,$$

$$S' \equiv b'y^2 + 2\,(h'x + f')\;y + a'x^2 + 2g'x + c' = o.$$

Ако те две еквације представљају једну и исту криву, онда ће оне имати једнаке корене — једнаке y-е — кад апсцисе x и у једној и у другој еквацији имају исту вредност. Биће дакле

$$\frac{b}{b'} = \frac{hx + f}{h'x + f'} = \frac{ax^2 + 2gx + c}{a'x^2 + 2g'x + c'};$$

те сразмере ће постојати кадгод x и у једној и у другој еквацији буде имало исту вредност; оне дакле не ће зависити од вредности променљиве x, па ће према томе бити

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{f}{f'} = \frac{g}{g'} = \frac{h}{h'}.$$

То би већ била тражена погодба. — Ако заједничку вредност појединих напремица означимо са μ; биће нам јасно да ће се поменута погодба аналитички и овако моћи формулисати: кад еквације $S = o$ и $S' = o$ представљају једну и исту криву, онда је $S \equiv \mu S'$.

11. Кроз неку дату тачку може се повући само једна једина крива другога реда која дате две праве дира у датим двема тачкама.

Нека је $m\,(x - x') + n\,(y - y') = o$ еквација једне од датих двеју правих. Крива $f\,(x, y) \equiv ax^2 + 2hxy + \cdot\;\cdot\;\cdot = o$ додириваће ту праву у тачци (x', y') прво, ако та крива пролази кроз тачку (x', y') и друго, ако је коефицијенат што одређује правац тангенти повученој у тачци (x', y') једнак с коефицијентом што одређује правац датој правој. Према томе ћемо већ добити ове две погодбе:

$$f\,(x', y') = o, \quad mf'_x\,(x', y') - nf'_y\,(x', y') = o.$$

Сличне две погодбене еквације добили бисмо с тога што крива $f\,(x, y) = o$ дира још једну праву у датој тачци. Досад имамо дакле четири погодбене еквације. Тим еквацијама треба придружити још ону једну погодбену еквацију која се добива с тога, што крива $f\,(x, y)$ пролази још и кроз једну дату тачку, па из системе тих петорих по непознатима a, b, c, f, g, h линеарних еквација израчунати $a : b : c : f : g : h$.

* * *

ОДЕЉАК ДРУГИ

Средиште, асимптоте, дијаметри и осовине кривих другога реда.

214. Дефин. *Тачка која полови све оне корде неке криве другога реда, које кроз њу пролазе, назива се средиште криве.*

По тој дефиницији је јасно, да ће две тачке на крајевима сваке корде која пролази кроз средиште, симетрично лежати према средишту.

215. Узмимо да почетак координатне системе лежи у средишту. Ако су у тој координатној системи x и y координате тачке на једном крају неке корде која пролази кроз средиште, биће према оном, што мало час рекосмо, $-x$ и $-y$ координате тачке на другом крају те корде. Оба краја те корде леже међу тим на кривој; еквација криве не сме се дакле у том случају променити кад се у њој координате x и y смене координатама $-x$ и $-y$. Према томе ће у еквацији $(a, b, c, f, g, h)(x, y, 1)^2 = o$ у овај мах морати бити $f = o$, $g = o$, т. ј. *кад је почетак координатне системе уједно и средиште криве, онда у еквацији кривих нема чланова првога степена и обратно.*

216. *Наћи средиште криве другога реда.*

Нека је еквација криве ово:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o.$$

Помераћемо паралелно осовине тако, да почетак нове системе буде тачка (x', y'). Трансформована еквација биће ово (чл. 205. 4*.):

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + xf'_{x'} + yf'_{y'} + c' = o.$$

Ако сад претпоставимо да почетак (x', y') нове координатне системе лежи у средишту, онда у трансформованој еквацији не ће бити чланова првога степена; према томе ће у том случају бити

$$f'_{x'} = o, \ f'_{y'} = o.$$

Како је

$$f'_{x'} = 2\,(ax' + hy' + g), \ f'_{y'} = 2\,(hx' + by' + f),$$

то је јасно да ће у поменутом случају бити управо

$$ax' + hy' + g = o, \ hx' + by' + f = o. \quad (1)$$

Тим двема еквацијама су дакле опредељене координате x' и y' средишта. Кад их разрешимо, добићемо координате средишта; ево тих координата:

$$x' = \frac{hf - bg}{ab - h^2}, \ y' = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

или

$$x' = \frac{G}{C}, \ y' = \frac{F}{C}.$$

По еквацијама (1) види се, да средиште лежи у пресеку правих

$$ax + hy + g = o, \ hx + by + f = o. \quad (2)$$

Те две праве могу се сећи, могу бити паралелне и могу се поклапати.

1-во. *Нека су праве (2) секу.*

У овом случају је

$$\frac{a}{h} \neq \frac{h}{b}$$

или

$$h^2 - ab \neq o.$$

Према томе се види да елипсе и хиперболе имају једно једино средиште, које не лежи у бескрајности. С тога се криве из тих двају разреда називају *централне криве (централни пресеци).*

2-го. *Нека су праве (2) паралелне.*

У овом случају је

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$$

или

$$h^2 - ab = o.$$

Под том погодбом је $x' = \infty, y' = \infty$, па како општа еквација представља параболу кад је $h^2 - ab = o$, а то је јасно, да средиште параболâ лежи у бескрајности.

3-ће. *Нека се праве (2) поклапају.*

Крива ће у овом случају имати бескрајно много средишта, која леже на једној правој, а лако се може доказати, да се та крива другога реда састоји из системе двеју напоредница. — Праве (2) поклапаће се на име ако је

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}\,.$$

По овим сразмерама се види да су елементи прве врсте дискриминанте Δ сразмерни са елементима друге врсте; према томе ће бити и $\Delta = o$ и $h^2 - ab = o$, а то ће рећи, да се крива (парабола) изметнула у систему двеју напоредница. Еквације тих двеју напоредницâ су (чл. 210. (21)) ово:

$$hx + by + f \mp \sqrt{f^2 - bc} = o.$$

Те две праве су паралелне са правом $hx + by + f = o$ на којој, као што мало час поменусмо, леже средишта криве; права $hx + by + f = o$, носиља средиштâ двеју напоредница, лежи дакле на средини између тих напоредница.

Напомена. Кад је дато средиште криве, онда су непосредно дате две релације између параметара који се јављају у еквацији криве. С тога ће крива потпуно бити опредељена кад знамо још три линеарне погодбе; дати средиште криве значи дакле, дати једну двојну геометријску погодбу.

Прим. 1. Наћи средишта кривих

$$3x^2 + 5xy + y^2 - 3x + 2y + 21 = o,$$

$$5x^2 + 2xy + y^2 - 10x + 2y + 10 = o,$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 6y - 10 = o. -$$

Средишта су тачке $\left(-\frac{16}{13}, \frac{27}{13}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, (∞, ∞).

[*Напом.* Упор. прим. 8. стр. 35.]

Прим. 2. Наћи средиште криве

$$5x^2 + 11xy + 2y^2 - 13x + 10y - 28 = o. -$$

Средиште је $(-2, 3)$; то је управо тачка што лежи у пресеку оних двеју правих које представља дата еквација.

217. Кад су криве другога реда централне, онда се паралелним померањем осовина̂ почетак нове координатне системе може преместити у средиште. У тој новој системи била би еквација централних пресека ово:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c' = o. \qquad (3)$$

Апсолутан члан c' имаће у овај мах једну специјалну вредност, а ту вредност ћемо наћи овако. У опште је

$$c' = ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2gx' + 2fy' + c$$

или

$$c' = (ax' + hy' + g)\, x' + (hx' + by' + f)\, y' + gx' + fy' + c$$

Кад се имају у виду еквације (1), јасно ће нам бити да је у овај мах

$$c' = gx' + fy' + c,$$

па како је

$$x' = \frac{G}{C}, \quad y' = \frac{F}{C},$$

биће даље

$$c' = \frac{gG + fF + cC}{C}$$

или

$$c' = \frac{\Delta}{ab - h^2}.$$

Дакле, кад почетак координатне системе лежи у средишту, онда ће еквација централних кривих бити у опште овог облика:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + \frac{\Delta}{ab - h^2} = o. \qquad (4)$$

Прим. Преместити паралелним померањем осовинâ почетак координатне системе у средиште и наћи у тој системи еквацију кривих

$$x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = o,$$

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 18x - 36y + 9 = o,$$

$$xy - \beta x - \alpha y = o. -$$

Средишта тих кривих су $(-3, -1)$, $(1, 2)$, (α, β), а трансформоване еквације су ово:

$$x^2 + 2xy - y^2 = 22,$$

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 = 36,$$

$$xy = \alpha\beta$$

218. Повуцимо сад из почетка под углом θ један потег према кривој. Тај ће потег сећи криву у две реалне или имагинарне тачке које у опште не леже у бескрајности. Но ако је

$$a + 2htg\theta + btg^2\theta = o, \qquad (5)$$

онда ће (чл. 206.) једна од тачака у пресеку бити у бескрајности, а она друга тачка лежи од почетка у раздаљини

$$\varrho = -\frac{c}{2\,(g\cos\theta + f\sin\theta)}\,.$$

По томе се види да и та друга тачка у неком специјалном случају може лежати у бескрајности; то ће бити онда, кад је $g = o$, $f = o$, т. ј. кад почетак координатне системе лежи у средишту криве. Према томе ће оне две праве, које су из средишта повучене у правцима које опредељује еквација (5), сећи криву у двема тачкама које се у бескрајности поклапају. Те две праве називају се *асимптоте* криве; елипса има имагинарне, а хипербола реалне асимптоте; у првом случају је на име $h^2 - ab < o$, а у другом случају је $h^2 - ab > o$. Обе те асимптоте биле би у тој координатној системи представљене еквацијом

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = o. \qquad (6)$$

Како почетак лежи у средишту, биће еквација кривих овог облика:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + \frac{\Delta}{ab - h^2} = o, \qquad (7)$$

т. ј. *кад почетак лежи у средишту, онда се еквација асимптота добива из еквације кривих просто кад се у овој последњој изостави апсолутан члан.*

Напомена. Кад су дате асимптоте једне криве, то значи да су нам дате четири линеарне погодбе. Кад бисмо на име тачку у пресеку тих асимптота узели за почетак координатне системе, биле би асимптоте представљене еквацијом (6), а еквација криве разликовала би се од те еквације само у томе што би се у њој поред оног израза који стоји на левој страни еквације (6) јављао још један непознат параметар; тај непознат параметар могли бисмо определити чим би нам била дата још једна линеарна погодба, па би према томе у том случају и крива била потпуно одређена.

Прим. 1. Наћи асимптоте криве

$$f(x, y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o. -$$

Ако са x' и y' означимо координате средишта те криве, биће еквација асимптота ово:

$$a(x - x')^2 + 2h(x - x')(y - y') + b(y - y')^2 = o.$$

Прим. 2. Треба доказати да су праве

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = o$$

паралелне са асимптотама криве $(a, b, c, f, g, h)(x, y, 1)^2$.

Прим. 3. Наћи асимптоте хиперболе

$$6x^2 - xy - y^2 - x + 3y + 2 = o.$$

Одг. Асимптоте су ове две праве:

$$2x - y + 1 = o, \quad 3x + y - 2 = o.$$

Прим 4. Нека хипербола пролази кроз тачку (1, 2), а асимптоте су јој ове две праве:

$$x + 2y - 1 = o, \quad 3x - y + 1 = o.$$

Наћи еквацију те хиперболе.

Одг. $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 2x + 3y - 9 = o.$

Дефин. *Хипербола чије се асимптоте секу под правим углом зове се равнострана хипербола.*

Прим. 5. Наћи погодбу под којом ће општа еквација представљати равнострану хиперболу.

Одг. У ортогоналној системи је погодба ово:

$$a + b = o,$$

а у косој системи је погодба ово:

$$a + b - 2h\cos\omega = o.$$

Прим. 6. Доказати да су хиперболе

$$C(x^2 - y^2) - 2Gx + 2Fy + A - B = o,$$

$$Cxy - Fx - Gy + H = o$$

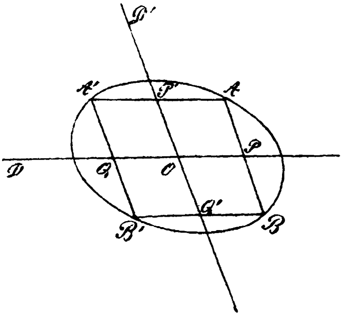
концентричне и равностране.

219. *Наћи место средина̂ корада које иду паралелно са правом* $y = mx + b$.

Преместићемо почетак координатне системе у неку тачку $P(x', y')$; трансформована еквација биће ово:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + xf'_{x'} + yf'_{y'} + f(x', y') = o.$$

Кроз ту тачку P повући ћемо једну праву напоредо са правом $y = mx + b$; еквација те праве биће у новој координатној системи ово: $y = mx$. Према томе ће апсцисе тачака, у којима та права сече криву, бити корени ове квадратне еквације:



Сл. 99.

$$(a + 2hm + bm^2)\,x^2 + (f'_{x'} + mf'_{y'})\,x + f(x', y') = o. \qquad (8)$$

Ако претпоставимо да коефицијенат који стоји уз x^2 није $= o$, биће нам јасно да ће права $y = mx$ сећи криву у двема тачкама A и B које не леже у бескрајности. Узмимо сад да тачка P лежи на средини корде AB. У том случају ће квадратна еквација (8) морати имати два једнака, али противно означена корена; еквација (8) биће дакле чиста квадратна еквација, па је услед тога

$$f'_{x'} + mf'_{y'} = o$$

или, како је

$$f'_{x'} = 2\,(ax' + hy' + g),\; f'_{y'} = 2\,(hx' + by' + f),$$

то ће у поменутом случају управо бити

$$ax' + hy' + g + m(hx' + by' + f) = o.$$

Ово је дакле она релација која постоји између координата тачке P што лежи на средини једне од оних корада које иду напоредо са датом правом. Ако у тој релацији свуда место x' и y' напишемо x и y, добићемо ову еквацију:

$$ax + hy + g + m(hx + by + f) = o, \qquad (9)$$

а по тој еквацији се види, *да је место средина̂ паралелних корада једна права.* Та права назива се *дијаметар* криве, а корде које она полови називају се *ординате* дијаметра. Како је еквација (9) линеарно састављена из ових двеју еквација:

$$ax + hy + g = o, \quad hx + by + f = o, \qquad (10)$$

то је јасно да ће дијаметар (9) пролазити кроз тачку у којој се секу праве које представљају еквације (10). Те две праве секу се међу тим (чл. 216.) у средишту кривих, т. ј. *сви дијаметри кривих другога реда пролазе кроз средиште.*

Напишимо сад еквацију (9) дијаметра у овом облику:

$$(a + mh)\, x + (h + mb)\, y + g + mf = o,$$

и означимо коефицијенат којим је одређен правац те праве са m'. По последњој еквацији видећемо на први поглед да је

$$m' = -\frac{a + mh}{h + mb}, \qquad (11)$$

па је према томе и

$$bmm' + h(m + m') + a = o, \qquad (12)$$

а по тој релацији се види како су аналитички везани параметри m' и m који одређују правац дијаметру и његовим ординатама.

Ако је $h^2 - ab = o$, биће

$$-\frac{a}{h} = -\frac{h}{b} = -\frac{a + mh}{h + mb} = const., \qquad (13)$$

па ма параметар m имао ма какву вредност; кад се дакле има у виду еквација (11), биће јасно да је у овај мах управо

$$m' = const.,$$

а то значи, *да су дијаметри у разреду парабола̂ паралелни*; ти дијаметри сећи ће се дакле у бескрајности у једној тачци — у средишту параболином.

Напомена. Кад је дат лук једног коничног пресека, онда се лако геометријском конструкцијом може наћи средиште криве, а уједно и одредити врста криве. — Повући ћемо две паралелне корде AB и $A'B'$ и наћи ћемо тачке P и Q које их полове. Права PQ биће један дијаметар. Сличним путем ћемо наћи још један дијаметар $P'Q'$ криве. Ако су ти дијаметри паралелни, онда је крива парабола, а ако се дијаметри секу у некој тачци O, онда је крива или елипса или хипербола; крива је елипса кад је лук њезин с конкавном страном својом окренут према средишту O; у противном случају била би крива хипербола.

Прим. 1. Шта представљају еквације

$$ax + hy + g = o, \ hx + by + f = o?$$

Одг. Прва еквација представља један дијаметар што полови корде које иду паралелно са осовином x, а друга представља дијаметар што полови корде које иду паралелно са осовином y.

Прим. 2. Дата је елипса

$$5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = o.$$

Нађи екваций дијаметра који полови корде што иду напоредо са правом $y = 2x - 1$.

Одг. $4x + y + 1 = o$.

Прим. 3. Доказати да дијаметри параболини имају асимптотни правац.

Коефицијенат који одређује правац дијаметара параболиних је $-\frac{h}{b}$, а то је уједно и вредност коефицијента који одређује асимптотни правац парабола.

Прим. 4. Наћи место средина корада које пролазе кроз неку сталну тачку (x', y'). —

Треба елиминирати m из ових двеју еквација:

$$y - y' = m(x - x'),$$

$$f'_x + mf'_y = o.$$

Еквација места биће ово:

$$(y - y')\, f'_y + (x - x')\, f'_x = o.$$

220. Тражећи еквацију дијаметра претпоставили смо да трином $a + 2hm + bm^2$ није $= o$, претпоставили смо другим речима, да ординате дијаметра не иду у асимптотним правцима криве.

Дефиниција. *Дијаметри који полове корде што иду паралелно са асимптотним правцима криве називају се сингуларни дијаметри.*

1-во. Кад је крива о којој је реч елипса, онда еквација $a + 2hm + bm^2 = o$ има само имагинарне корене, а то ће рећи, да сваком реалном правцу корада одговара по један једини дијаметар који је представљен еквацијом (9); тај дијаметар не може бити сингуларан дијаметар криве.

2-го. Кад је крива о којој је реч хипербола, онда еквација $a + 2hm + bm^2 = o$ има два реална корена; ти корени одређују асимптотне правце криве. Ако се претпостави да је коефицијенат m који одређује правац ордината дијаметрових = било једном, било другом корену поменуте еквације, биће јасно да ће у опште једна од тачака A и B (сл. 99.) лежати у бескрајности; према томе ће и средина корде AB бити у бескрајности, а то ће рећи, да се тачка P у овај мах не може преместити у средину корде AB.

Поред свега тога ће и у овај мах општа еквација (9) дијаметара представљати једну сасвим одређену праву. У овај мах је на име $h^2 - ab > o$; услед тога коефицијенти $a + mh$ и $h + mb$, који у еквацији (9) стоје уз x и y, не могу у исти мах бити $= o$, а по томе се види, да еквација (9) заиста представља једну сасвим одређену праву. Лако би се могло доказати да та еквација у овај мах представља једну од асимптота дате криве. Коефицијенат који одређује правац праве (9) је (11)

$$m' = -\frac{a + mh}{h + mb}.$$

Међу тим је у овај мах $a + 2hm + bm^2 = o$, а одатле је

$$m = -\frac{a + mh}{h + mb};$$

према томе се види да је $m = m'$, т. ј. коефицијенат m који одређује правац ордината сингуларног дијаметра је управо раван коефицијенту који у овај мах одређује правац праве (9), па како та права пролази кроз средиште, то је јасно да ће та права заиста бити асимптота криве, а то смо и тврдили. Еквација асимптоте добива се дакле из еквације дијаметара, кад се у овој m смени вредношћу једнога корена еквације $a + 2hm + bm^2 = o$. С аналитичке стране биле би дакле и асимптоте неки специјални дијаметри криве. Но ми ћемо показати да се и с геометријске стране асимптоте могу сматрати као дијаметри.

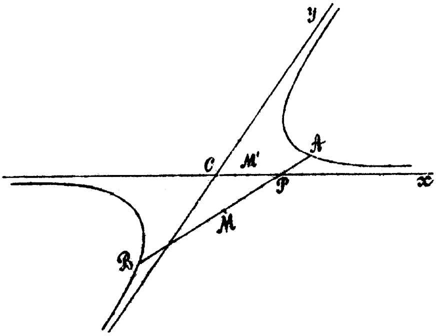
Права, која је ма из које тачке једне асимптоте повучена у правцу те асимптоте, сећи ће на име криву у двема тачкама у бескрајности. Ми можемо дакле замислити да на асимптоти лежи бесконачно много корада које све иду у правцу асимптота. Но ми ћемо доказати, да свака између тих корада има своју одређену средину која лежи на самој асимптоти, т. ј. доказаћемо да је асимптота заиста један дијаметар криве.

Узећемо асимптоте за координатне осовине. У тој системи биће (чл. 209. (15*)) еквација хиперболе ово:

$$xy = k^2.$$

Повуцимо сад кроз неку тачку P (a, o) асимптоте Cx једну корду AB која затвара угао θ са том асимптотом и означимо средину те корде са M. Еквација корде AB биће ово:

$$y = m (x - a).$$



Сл. 100.

Кад елиминирамо y из те еквације и еквације $xy = k^2$, а ми ћемо добити квадратну еквацију

$$x^2 - ax - \frac{k^2}{m} = o;$$

корени x_1 и x_2 те еквације представљају апсцисе тачака A и B, па како је $x_1 + x_2 = a$, биће и $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a}{2}$, а по томе се види, да је апсциса x' средине M ово: $x' = \frac{a}{2}$. Према томе су координате средине M ово:

$$x' = \frac{a}{2}, \quad y' = - \frac{ma}{2}.$$

Узмимо сад да се корда AB по правцу своме све мање и мање разликује од правца асимптоте, узмимо дакле, да θ бива све мање и мање. У том случају биваће и m све мање и мање; кад је θ у граници $= o$, биће и m у граници $= o$, т. ј. кад је корда APB повучена баш у правцу саме асимптоте Cx, онда су координате њезине средине ово:

$$x' = \frac{a}{2}, \quad y' = o,$$

а по томе се види, да ће средина корде APB у том случају бити нека тачка M' која лежи на средини дужи CP. То што рекосмо за средину корде која је из тачке P у правцу асимптоте повучена, могли бисмо поновити и за средине свију осталих корада које би биле повучене у асимптотном правцу и ма из друге које тачке асимптоте; све су те средине одређене, а место њихово је сама асимптота Cx. Асимптоте полове дакле систему паралелних корада које иду у асимптотном правцу, т. ј. *асимптоте су сингуларни дијаметри криве.*

3-ће. Кад је крива о којој је реч парабола, онда еквација $a + 2hm + bm^2 = o$ има два једнака корена:

$$m = -\frac{h}{b} = -\frac{a}{h}.$$

Све корде, које би ишле у том асимптотном правцу, секле би криву само у једној тачци у бескрајности, па би с тога средине свију тих корада такођер биле у бескрајности. Према томе је јасно да би и сингуларан дијаметар параболе лежао у бескрајности. То се у осталом види и по општој еквацији (9) дијаметара.

Кад се на име претпостави да је $m = -\frac{h}{b}$, онда ће еквација (9) имати овај специјалан облик:

$$hf - bg = o.$$

Како ће криве у разреду парабола бити параболе само ако је по апсолутној вредности $hf - bg > o$, то ћемо последњу еквацију моћи и овако написати:

$$const. = o,$$

а по томе се види *да је сингуларан дијаметар параболе заиста права у бескрајности.*

221. *Ако дијаметар D полови корде (сл. 99.) које иду напоредо са дијаметром D', онда ће и дијаметар D' половити корде које иду напоредо са дијаметром D.* Таква два дијаметра називају се *коњуговани дијаметри.*

Ту теорему ћемо врло лако доказати. Претпоставићемо да је са m' означен коефицијенат који одређује правац дијаметру D, а са m коефицијенат који одређује правац ордината тога дијаметра. Између тих двају коефицијената постоји, као што знамо, ова релација:

$$bmm' + h(m + m') + a = o.$$

Повуцимо сад дијаметар D' у правцу ордината дијаметра D и означимо са m'' коефицијенат који одређује правац ордината тога дијаметра D'. Јасно је да ће између коефицијената m и m'' постојати ова релација:

$$bmm'' + h(m + m'') + a = o.$$

Кад се та релација упореди са оном првом, видеће се на први поглед да је

$$m'' = m';$$

то значи, да дијаметар D' на равне чести дели корде које иду напоредо са дијаметром D, а то смо и тврдили.

Напомена. Сви дијаметри параболини су паралелни; с тога параболе немају коњугованих дијаметара.

Прим. 1. Наћи погодбу под којом ће праве

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = o \qquad (\alpha)$$

бити коњуговани дијаметри централне криве

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = o.$$

Нека је

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 \equiv b'(y - mx)(y - m'x)$$

$$m + m' = -\frac{2h'}{b'}, \quad mm' = \frac{a'}{b'}.$$

Праве $y - mx = o$ и $y - m'x = o$ су коњуговани дијаметри ако је

$$bmm' + h(m + m') + a = o,$$

т. ј. праве (α) ће бити коњуговани дијаметри ако је

$$\frac{ba'}{b'} - \frac{2hh'}{b'} + a = o$$

или

$$ab' + a'b - 2hh' = o. \qquad (\beta)$$

Како су (прим. чл. 87.) под погодбом (β) праве (α) хармонијски коњуговане према правима $ax^2 + 2hxy + by^2 = o$, т. ј. према асимптотама дате криве, то се види да *коњуговани дијаметри хармонијски леже према асимптотама.*

Прим. 2. Наћи еквацију заједничких коњугованих дијаметара двеју централних кривих

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1, \quad a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 1.$$

Одг. Еквација заједничких коњугованих дијаметара је

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ b & -h & a \\ b' & -h' & a' \end{vmatrix} = o.$$

По тој еквацији се види да две концентричне криве другога реда имају један пар заједничких коњугованих дијаметара.

222. Дефиниција. *Осовине кривих другога реда су дијаметри који стоје управно на својим ординатама.*

а. *Осовине елипсе или хиперболе.* По дефиницији су осовине коњуговани дијаметри који се секу под правим углом, а еквацију тих коњугованих дијаметара ћемо добити на овај начин.

Претпоставићемо да почетак координатне косе системе лежи у средишту криве и означићемо са m и m'

коефицијенте који одређују правац коњугованих дијаметара. Ти коефицијенти су као што знамо, међу собом везани овом релацијом:

$$bmm' + h(m + m') + a = o,$$

па како се у овај мах дијаметри секу под правим углом, те ће уједно бити и

$$mm' + (m + m')\cos\omega + 1 = o.$$

Кад се реше последње две еквације, добиће се ово:

$$mm' = \frac{h - a\cos\omega}{b\cos\omega - h},\quad m + m' = \frac{a - b}{b\cos\omega - h}.$$

Према томе ће коефицијенти који одређују правац осовина бити корени ове квадратне еквације:

$$m^2 - \frac{a - b}{b\cos\omega - h}m + \frac{h - a\cos\omega}{b\cos\omega - h} = o$$

или

$$(h - b\cos\omega)m^2 + (a - b)m + a\cos\omega - h = o. \qquad (14)$$

Ако у овој еквацији сменимо m са $\frac{y}{x}$, а ми ћемо добити еквацију осовинâ у косој системи. Ево те еквације:

$$(a\cos\omega - h)x^2 + (a - b)xy + (h - b\cos\omega)y^2 = o. \qquad (15)$$

Напомене. 1-во. У ортогоналној системи су оба правца осовинâ одређена еквацијом

$$hm^2 + (a - b)m - h = o. \qquad (14^*)$$

2-го. У ортогоналној системи, чији почетак лежи у средишту, била би еквација осовинâ ово:

$$-hx^2 + (a - b)xy + hy^2 = o; \qquad (15^*)$$

та еквација (чл. 81.) представља међу тим праве које полове угле између правих $ax^2 + 2hxy + by^2 = o$, т. ј. *осовине централних кривих полове угле између асимитота.*

3-ће. Кад би крива другога реда имала више од две осовине, морала би еквација (14) имати више од два корена; та еквација би дакле била идентична, па би према томе било

$$a = b = \frac{h}{\cos\omega};$$

у том случају би сваки дијаметар био једна осовина криве, а крива би била круг.

b. *Осовина параболе.* Сви коефицијенти m', који одређују правац дијаметара, имају ову вредност: $m' = -\frac{h}{b}\cdot$ То је дакле и коефицијенат који одређује правац осовини. Ако са m означимо коефицијенат који одређује правац ордината осовине, биће у косој системи

$$-m\frac{h}{b} + \left(m - \frac{h}{b}\right)\cos\omega + 1 = o,$$

а одатле је

$$m = \frac{b - h\cos\omega}{h - b\cos\omega}.$$

Према томе је у косој системи еквација осовине ово:

$$(ax+hy+g)(h-b\cos\omega)+(hx+by+f)(b-h\cos\omega)=o. \quad (16)$$

Напомена. У ортогоналној системи била би еквација осовине параболине ово:

$$h(ax + hy + g) + b(hx + by + f) = o. — \quad (16^*)$$

Тачке у којима осовине секу криву зову се *темена* криве.

Прим. 1. Почетак системе није у средишту. Доказати да је у косој системи еквација осовина ово:

$$(h - b\cos\omega)(f'_x)^2 - (a - b)f'_xf'_y + (a\cos\omega - h)(f'_y)^2 = o.$$

Прим. 2. Наћи еквацију осовина елипсе

$$2x^2 + y^2 = 2xy + 2y.$$

Одг. $x^2 + xy - y^2 - 4x + 3y - 1 = o$.

Прим 3. Наћи осовине хиперболе $y(x - a) = 1$.

Одг. $x + y - a = o$, $x - y - a = o$.

223. Имајући у виду поменуте резултате, моћи ћемо у неким специјалним случајевима унапред одредити облик еквација кривих другога реда.

1-во. *Нека општа еквација представља елипсу или хиперболу.*

Ако је почетак у средишту, биће еквација централних кривих ово:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c' = o.$$

У тој системи могли бисмо обртањем померити осовине тако, да осовине нове координатне системе буду један пар коњугованих дијаметара. У том случају преобразила би се дата еквација кривих у ову еквацију:

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + c' = o.$$

Но како су осовине системе коњуговани дијаметри криве, то ће свакој апсциси одговарати две једнаке, али различито означене вредности y-ове; на исти начин ће и свакој ординати одговарати две једнаке, али различито означене апсцисе. У овој системи мораће дакле бити $h' = o$, т. ј. *кад се ма који пар коњугованих дијаметара узме за координатне осовине, онда је еквација централних кривих овог облика:*

$$a'x^2 + b'y^2 + c' = o. \qquad (17)$$

2-го. *Нека општа еквација представља параболу.*

Трансформоваћемо систему тако, да једна осовина, н. пр. осовина x, буде један дијаметар параболе; за осовину y ћемо узети праву, која је кроз тачку у којој нова осовина x сече криву, напоредо повучена са ординатама поменутог дијаметра. Како почетак координатне системе лежи на параболи, то је јасно да у трансформованој еквацији већ не ће бити апсолутног члана. Трансформована еквација биће дакле овог облика:

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y = o.$$

Свакој апсциси x одговараће по два једнака, али различито означена y-а, па ће с тога бити и $h' = o$ и $f' = o$. Но како је крива парабола, то ће се релација $h'^2 - a'b' = o$ у овај мах преобразити у ову: $- a'b' = o$, а по томе се види, да је или $a' = o$, или $b' = o$, или $a' = b' = o$; међу тим b' не може бити $= o$, јер у том случају не би било чланова у којима се јавља y. С тога је $a' = o$, а еквација параболе је овог облика:

$$b'y^2 + 2g'x = o. \qquad (18)$$

По тој еквацији се види, да осовина y дира параболу у почетку координатне системе; права $x = o$, т. ј. осовина y сече на име криву у почетку у две тачке које се поклапају.

Напомена. У еквацији (17) има свега два неодређена параметра; кад су нам дакле дата два коњугована дијаметра, то значи да нам је дата једна тројна геометријска погодба. — Кад би нам био дат само један дијаметар и уз то и правац његових ордината, онда би то значило да нам је дата једна двојна геометријска погодба. Кад бисмо на име узели тај дијаметар за осовину x, а ма коју између правих које иду паралелно са ординатама његовим за осовину y, могли бисмо написати еквацију криве у овом облику:

$$a'x^2 + b'y^2 + 2g'x + c' = o,$$

а у тој еквацији има, као што се види, само три не одређена параметра.

ОДЕЉАК ТРЕЋИ

Редукција опште еквације другога степена

224. Ми смо видели да се трансформацијом координатних система општа еквација елипсе или хиперболе може преобразити у ову еквацију:

$$a'X^2 + b'Y^2 + c' = o.$$

Коефицијенти a', b', c' који се јављају у тој еквацији имају у свакој посебној координатној системи одређене вредности, а те вредности ћемо наћи на овај начин.

Најпре ћемо паралелним померањем осовина̂ преместити почетак у средиште C кривих. Том трансформацијом преобразиће се, као што знамо, општа еквација у ову:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c' = o, \qquad (1)$$

где је

$$c' = \frac{\Delta}{ab - h^2}\,.$$

Обрнимо сад осовине Cx и Cy координатне системе за угао α око средишта. Еквација (1) преобразиће се у том случају (чл. 17. екв. (5)) у ову:

$$a\,(Xcos\alpha - Ysin\alpha)^2 + 2h\,(Xcos\alpha - Ysin\alpha)\,(Xsin\alpha + Ycos\alpha)$$
$$+ b\,(Xsin\alpha + Ycos\alpha)^2 + c' = o,$$

а та еквација се може написати у овом облику:

$$a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + c' = o; \qquad (2)$$

у тој еквацији је

$$\left.\begin{aligned} a' &= a\cos^2\alpha + 2h\cos\alpha\sin\alpha + b\sin^2\alpha, \\ h' &= (b - a)\sin\alpha\cos\alpha + h(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ b' &= a\sin^2\alpha - 2h\cos\alpha\sin\alpha + b\cos^2\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ако се сад претпостави да је $h' = o$, т. ј. да је

$$(b - a)\sin\alpha\cos\alpha + h(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = o$$

или

$$tg2\alpha = \frac{2h}{a - b}, \qquad (4)$$

онда ће се еквација (2) преобразити у ову:

$$a'X^2 + b'Y^2 + c' = o. \qquad (5)$$

Још нам остаје да се мало боље упознамо са углом α за који се морају осовине координатне системе обрнути, ако се хоће да у трансформованој еквацији коефицијенат h' буде $= o$. По еквацији (5) види се (чл. 223.) да осовине CX и CY нове системе морају бити коњуговани дијаметри криве, па како је система ортогонална, то је јасно да су координатне осовине баш саме осовине криве. То се у осталом види и по еквацији (4); та еквација може се написати и у овом облику:

$$htg^2\alpha + (a - b)\,tg\alpha - h = o,$$

а том еквацијом су, као што знамо, одређена оба правца (чл. 222. (14*)) осовина̂ дате криве.

Вратимо се сад системи еквација̂ (3) и саберимо прву и трећу. У резултату добићемо ово:

$$a' + b' = a + b.$$

Даље се види да се прва и трећа међу поменутим еквацијама (3) могу овако написати:

$$2a' = a + b + 2h \sin 2\alpha + (a - b) \cos 2\alpha,$$

$$2b' = a + b - 2h \sin 2\alpha - (a - b) \cos 2\alpha.$$

Помножимо ове две еквације; производ њихов је

$$4a'b' = (a + b)^2 - [2h \sin 2\alpha + (a - b) \cos 2\alpha]^2,$$

па како је

$$4h'^2 = [2h \cos 2\alpha - (a - b) \sin 2\alpha]^2,$$

то је јасно да је

$$4\,(a'b' - h'^2) = (a + b)^2 - 4h^2 - (a - b)^2 = 4\,(ab - h^2)$$

или

$$a'b' - h'^2 = ab - h^2.$$

Према томе су изрази $a + b$ *и* $ab - h^2$ *инваријанте, т. ј. то су функције коефицијената које се при прелазу са једне ортогоналне системе на другу не мењају.* Кад је $h' = o$, т. ј. кад су осовине нове координатне системе осовине криве, онда ће бити

$$a' + b' = a + b, \quad a'b' = ab - h^2.$$

По тим еквацијама се види *да су непознати коефицијенти* a' *и* b' *корени ове квадратне еквације*:

$$k^2 - (a + b)\,k + ab - h^2 = o. \qquad (6)$$

Корени ове еквације су реални1), а знаци њихови су или једнаки или различити. У првом случају представља еквација елипсу, а у другом хиперболу, јер је

---

1) Кад бисмо у триному еквације (6) сменили k овим вредностима: $k = -\infty, a, b, +\infty$, онда би трином имао овакве знаке: $+, -, -, +$, т. ј. еквација (6) има два реална корена; један од тих корена лежи између $-\infty$ и a, а други између b и $+\infty$.

у првом случају $a'b' = ab - h^2 > o$, а у другом случају је $a'b' = ab - h^2 < o$.

Напомена. Кад би еквација (1) представљала централне криве у косој системи под углом ω, онда бисмо овако трансформовали ту еквацију. Најпре бисмо прешли из дате системе xCy у неку ортогоналну систему $x'Cy'$ чија осовина апсциса̂ поклапа осовину апсциса̂ старе системе; обрасци помоћу којих ћемо трансформовати еквацију (1) биће у овај мах (чл. 17.) ово:

$$x = \frac{x' \sin\omega - y' \cos\omega}{\sin\omega}, \quad y = \frac{y'}{\sin\omega}.$$

Еквација (1) преобразиће се том трансформацијом у еквацију

$$a''x'^2 + 2h''x'y' + b''y'^2 + c' = o;$$

у тој еквацији имају коефицијенти a'', h'', b'' ове вредности:

$$a'' = a,\ h'' = \frac{h\sin\omega - a\sin\omega\cos\omega}{\sin^2\omega},\quad b'' = \frac{b - 2h\cos\omega + a\cos^2\omega}{\sin^2\omega}.$$

Сад би још требало прећи из ортогоналне системе $x'Cy'$ у ортогоналну XCY; у тој новој системи била би еквација криве ово:

$$a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + c' = o.$$

Према оном што мало час рекосмо јасно је да је

$$a' + b' = a'' + b'',\ a'b' - h'^2 = a''b'' - h''^2,$$

па како је

$$a'' + b'' = \frac{a + b - 2h\cos\omega}{\sin^2\omega},\ a''b'' - h''^2 = \frac{ab - h^2}{\sin^2\omega},$$

биће и

$$a' + b' = \frac{a + b - 2h\cos\omega}{\sin^2\omega},\ a'b' - h'^2 = \frac{ab - h^2}{\sin^2\omega}.$$

Леви делови ових еквација се не мењају, кад се мењају ортогоналне системе; према томе се ни десни делови тих еквација не ће променити при прелазу са косих система на косе, т. ј. *изрази*

$$\frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin^2\omega}, \quad \frac{ab-h^2}{\sin^2\omega}$$

јесу инваријанте; они се не мењају кад се при трансформацији опште еквације прелази из једне системе у другу.

Кад је $h' = o$, онда је

$$a' + b' = \frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin^2\omega}, \quad a'b' = \frac{ab-h^2}{\sin^2\omega},$$

т. ј. кад је првобитна система коса, онда су коефицијенти a' и b' који се јављају у сведеној еквацији (5) криве корени ове квадратне еквације:

$$k^2 - \frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin^2\omega}\, k + \frac{ab-h^2}{\sin^2\omega} = o.$$

225. Поменуте две теореме доказао је **Бул (Boole)** овако.

Нека је ω угао косе системе xCy, а ω' угао косе системе XCY. Хомогена квадратна функција $ax^2 + 2hxy + by^2$ преобразиће се, кад се пређе из прве системе у другу, у хомогену квадратну функцију

$$a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2,$$

а хомогена функција $x^2 + 2xy\cos\omega + y^2$ у функцију

$$X^2 + 2XY\cos\omega' + Y^2.$$

Према томе ће се поменутом трансформацијом функција

$$U = ax^2 + 2hxy + by^2 - k\,(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2)$$

преобразити у функцију

$$U' = a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 - k(X^2 + 2XY\cos\omega' + Y^2).$$

Те две функције биће идентично једнаке; ако је за неку посебну вредност параметра k први израз потпун квадрат, биће за ту исту вредност тог параметра и други израз потпун квадрат. Први израз U је потпун квадрат ако је

$$(a - k)(b - k) = (h - k\cos\omega)^2$$

или

$$k^2 - \frac{a + b - 2h\cos\omega}{sin^2\omega} k + \frac{ab - h^2}{sin^2\omega} = o,$$

а други израз U' је потпун квадрат ако је

$$k^2 - \frac{a' + b' - 2h'\cos\omega'}{sin^2\omega'} k + \frac{a'b' - h'^2}{sin^2\omega'} = o.$$

Последње две квадратне еквације имају исте корене, па је с тога

$$\frac{a+b-2h\cos\omega}{sin^2\omega} = \frac{a'+b'-2h'\cos\omega'}{sin^2\omega'}, \quad \frac{ab-h^2}{sin^2\omega} = \frac{a'b'-h'^2}{sin^2\omega'},$$

а то смо и мало час тврдили.

Прим. Наћи еквације осовина.

Нека је првобитна система коса. Преместићемо почетак у средиште C паралелним померањем осовинâ и обрнућемо осовине Cx и Cy тако, да нове осовине CX и CY буду осовине криве. Тим обртањем преобразиће се функција $ax^2+2hxy+by^2$ у функцију $a'X^2+b'Y^2$, а функција $x^2 + 2xy\cos\omega + y^2$ у функцију $X^2 + Y^2$. Услед тога ће се у овај мах функција

$$U = (a - k)x^2 + 2(h - k\cos\omega)xy + (b - k)y^2$$

преобразити у функцију

$$U' = (a' - k)X^2 + (b' - k)Y^2.$$

Функција U' биће потпун квадрат кад је $k=a'$, или кад је $k=b'$; према томе ће и функција U бити потпун квадрат кад је $k = a'$ или

$k = b'$. Кад се узме да је $k = a'$, онда еквација $U' = o$ представља осовину CX у систему XCY; према томе ћемо еквацију те осовине у систему xCy добити кад у еквацији $U = o$ сменимо k посебном вредношћу a'. Како је међу тим функција U потпун квадрат кад је $k = a'$, то је јасно уједно и то, да ће и диференцијални количници $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ бити $= o$ кадгод је $U = o$. Према томе ћемо еквацију осовине CX моћи наћи и на овај начин: сменићемо било у једном, било у другом делимичном диференцијалном количнику k вредношћу $k = a'$. У систему xCy је дакле еквација осовине CX ово:

$$(a - a')\,x + (h - a' \cos\omega)\,y = o$$

или

$$(h - a' \cos\omega) \cdot x + (b - b')\,y = o.$$

Сличним путем би се дало доказати да је у систему xCy еквација осовине CY ово:

$$(a - b')\,x + (h - b' \cos\omega)\,y = o$$

или

$$(h - b' \cos\omega)\,x + (b - b')\,y = o.$$

226. Напишимо сад редуковану еквацију централних коничних пресека:

$$a'X^2 + b'Y^2 + c' = o. \qquad (7)$$

По тој еквацији види се непосредно да су координате тачака у којима осовине секу криву (7) — а те тачке су темена криве — ово:

$$X = \pm \sqrt{-\frac{c'}{a'}}, \quad Y = o; \quad X = o, \quad Y = \pm \sqrt{-\frac{c'}{b'}}.$$

1-во. *Нека је крива (7) елипса.* — У том случају биће коефицијенти a' и b' истога знака; ми ћемо претпоставити да су ти коефицијенти позитивни.

Ако је $c' = o$, онда еквација (7) представља једну реалну тачку или управо две коњуговано имагинарне праве које се у тачци (o, o) секу.

Ако је c' позитивно, онда еквација (7) представља једно имагинарно место — једну имагинарну елипсу.

Ако је, најпосле, c' негативно, онда еквација (7) представља једну елипсу која у реалним тачкама сече своје осовине. Ако узмемо да је

$$a^2 = -\frac{c'}{a'},\ b^2 = -\frac{c'}{b'},$$

биће еквација елипсе ово:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1\,; \tag{8}$$

бројеви $2a$ и $2b$ представљају дужине осовина̂.

2-го. *Нека је крива (7) хиперболa.* — У том случају биће коефицијенти a' и b' различитог знака; ми ћемо претпоставити да је $a' > o$, а $b' < o$.

Ако је коефицијенат $c' = o$, онда еквација (7) представља две реалне праве које се секу у тачци (o, o).

Ако коефицијенат c' није $= o$, онда еквација (7) представља једну хиперболу. Да бисмо мисли средили, а ми ћемо претпоставити да је c' негативно. У том случају биле би реалне само оне тачке, у којима осовина X сече криву; тачке у којима осовина Y сече криву биле би имагинарне. Ако узмемо да је

$$a^2 = -\frac{c'}{a'},\ -b^2 = -\frac{c'}{b'},$$

биће еквација хиперболе ово:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1\,; \tag{9}$$

број $2a$ представља дужину реалне, а број $2b$ дужину т. зв. имагинарне осовине криве.

Напомена. Еквација (7) могла би као што знамо представљати елипсу или хиперболу у читавом једном низу координатних система; еквација елипсе или хиперболе биће на име тог облика кадгод се узме један пар коњугованих дијаметара за осовине системе. Ако са $2a'$ означимо дужину једног дијаметра, а са $2b'$ дужину дијаметра с којим је онај први коњугован, онда ћемо екваццију (7) моћи написати у једном од ових облика:

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} = 1, \qquad (10)$$

$$\frac{X^2}{a'^2} - \frac{Y^2}{b'^2} = 1. \qquad (11)$$

Прва екваација представља елипсу, а друга хиперболу.

Прим. 1. Дата је елипса или хипербола својом општом екваццијом. Наћи дужине осовина̂ тих кривих.

Одг. 1-во. У ортогоналној системи су квадрати полуосовина̂ корени ове екваације:

$$\varrho^2 + \frac{\triangle\,(a+b)}{C^2}\,\varrho + \frac{\triangle^2}{C^3} = o. \qquad (\alpha)$$

2-го. У косој системи су квадрати полуосовина̂ корени ове екваације:

$$\varrho^2 + \frac{\triangle\,(a+b-2h\cos\omega)}{C^2}\,\varrho + \frac{\triangle^2}{C^3}\,\sin^2\omega = o. \qquad (\beta)$$

Прим. 2. Доказати да су осовине равностране хиперболе једнаке.

Општа екваација представљаће (види прим. 5. чл. 218.) у ортогоналној системи равнострану хиперболу ако је $a + b = o$. Према томе ће екваација (α) бити чиста, т. ј. и т. д.

227. Узмимо сад да је општом квадратном екваацијом представљена једна парабола. Ми знамо да се та екваација трансформацијама координатних система може преобразити у ову екваацију:

$$b'Y^2 + 2g'X = o.$$

Коефицијенти b', g' имају у свакој посебној координатној системи одређене вредности, а те вредности ћемо израчунати овако.

По претпоставци је $h^2 - ab = o$ или $b = \frac{h^2}{a}$; с тога се општа квадратна еквација може написати у овом облику:

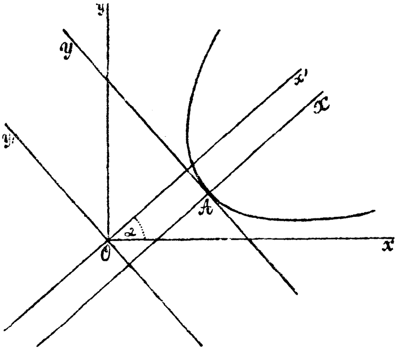
$$\frac{1}{a}(ax + hy)^2 + 2gx + 2fy + c = o. \qquad (12)$$

Обрнимо сад осовине око почетка за угао α. У том случају преобразићемо еквацију (12) помоћу ових образаца:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Према томе ће у системи $x'Oy'$ еквација параболе (12) бити овог облика:

$$\frac{1}{a}[(a\cos\alpha + h\sin\alpha)x' + (-a\sin\alpha + h\cos\alpha)y']^2$$
$$+ 2g(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2f(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + c = o.$$



Сл. 101.

Узмимо сад да је

$$a\cos\alpha + h\sin\alpha = o$$

или

$$tg\alpha = -\frac{a}{h}. \qquad (13)$$

Кад се та погодба има у виду, биће јасно да ће се последња еквација криве преобразити у ову:

$$\frac{1}{a}(-a\,sin\,\alpha + h\,cos\,\alpha)^2\,y'^2 + 2g\,(x'cos\,\alpha - y'sin\,\alpha)$$
$$+ 2f\,(x'sin\,\alpha + y'cos\,\alpha) + c = o\,;$$

у тој еквацији нема чланова у којима се јављају x'^2 и $x'y'$, па се с тога та еквација може овако написати:

$$b'y'^2 + 2g'x' + 2f'y' + c = o. \qquad (14)$$

Ми ћемо претпоставити да је $\alpha < \pi$; осим угла α има још бесконачно много углова чије ће тангенте бити $= -\frac{a}{h}$; ти угли биће за $k\pi$ већи или мањи од угла α. Према томе је јасно да ће нова осовина Ox' моћи имати само два правца, или правац који је одређен углом α, или правац који је одређен углом $\alpha + \pi$. Та осовина Ox' биће у осталом један дијаметар параболин, јер је коефицијенат који одређује правац дијаметара параболиних управо $= -\frac{a}{h}$.

Коефицијенти b', g', f' који се јављају у еквацији (14) имају ове вредности:

$$b' = \frac{1}{a}(-a\,sin\,\alpha + h\,cos\,\alpha)^2,\ g' = g\,cos\,\alpha + f\,sin\,\alpha,$$
$$f' = -g\,sin\,\alpha + f\,cos\,\alpha,$$

па како је[1]

$$sin\,\alpha = \frac{-a}{\pm\sqrt{a^2 + h^2}},\quad cos\,\alpha = \frac{h}{\pm\sqrt{a^2 + h^2}},$$

биће и

---

[1] Ми смо претпоставили да је $\alpha < \pi$; према томе је $sin\,\alpha$ позитивна количина, т. ј. знак плус треба узети испред корена у именитељу кад је a негативно, а знак минус кад би a било позитивно. Кад би осовина позитивних апсциса затварала угао $\alpha + \pi$ са осовином Ox, а не угао α, онда би испред корена требало узети знак плус кад је a позитивно, а знак минус кад је a негативно.

$$b' = \frac{1}{a}\left(\frac{a^2 + h^2}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right)^2 = a + \frac{h^2}{a} = a + b,$$

а

$$g' = \frac{gh - af}{\pm\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad f' = \frac{ag + hf}{+\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Јасно је да би коефицијенат g' могао бити $= o$; у том случају не би у еквацији (14) било члана у коме би се јављала променљива x' — еквација би дакле представљала две праве које иду напоредо са осовином Ox', т. ј. она и не би представљала праву параболу. С тога ћемо узети да је $g' \gtrless o$ и преместићемо почетак системе паралелним померањем осовина у неку тачку A (α, β). У том случају преобразиће се еквација (14) у еквацију

$$b'(Y + \beta)^2 + 2g'(X + \alpha) + 2f'(Y + \beta) + c = o$$

или

$$b'Y^2 + 2g'X + 2(b'\beta + f')Y$$
$$+ b'\beta^2 + 2g'\alpha + 2f'\beta + c = o. \quad (15)$$

Узмимо сад да је

$$b'\beta + f' = o, \quad b'\beta^2 + 2g'\alpha + 2f'\beta + c = o; \quad (16)$$

кад се има у виду прва еквација, моћи ћемо другу еквацију и овако написати:

$$2g'\alpha + f'\beta + c = o.$$

Из прве еквације ћемо добити вредност ординате β тачке A, $\beta = -\frac{f'}{b'}$, а та вредност није бесконачна, јер b' није $= o$; из последње еквације добићемо одређену вредност за α, а та вредност такођер није ∞, јер g' није $= o$. Према томе је јасно да се може наћи у равни једна тачка A (α, β) чије би координате биле везане релацијама (16). Кад те релације постоје, онда се еквација (15) параболе може овако написати:

$$b'Y^2 + 2g'X = o, \qquad (17)$$

а то је већ најпростија еквација параболина. По тој еквацији види се да почетак A система XAY лежи на параболи; то се у осталом види и по другој еквацији системе (16). Осовина AX те системе је паралелна са осовином Ox' системе $x'Oy'$; према томе је осовина AX такођер један дијаметар параболин; друга осовина AY је међу тим тангента криве у тачци A (чл. 223.), па како је система ортогонална, то ће координатна осовина AX бити осовина параболе. —

Коефицијенат g' може као што знамо имати два знака. Да видимо дакле како ће крива у једном, а како у другом случају лежати према осовини позитивних апсциса. Да бисмо мисли средили и закључке доконали претпоставићемо да је b' *позитивно*. Ако је g' *позитивно*, онда ће се парабола гранати у правцу *негативних* апсциса, т. ј. *осовина позитивних апсциса* биће онај део осовине параболине који лежи *изван лука* параболиног; напротив, ако је g' *негативно*, онда ће *осовина позитивних апсциса* бити онај део осовине параболине који лежи *у луку* параболином. — Обично се узима за осовину позитивних апсциса онај део осовине параболине који лежи у луку.

Редукована еквација (17) параболе пише се махом у овом облику:

$$Y^2 = 2pX. \qquad (18)$$

У тој еквацији је

$$p = -\frac{g'}{b'};$$

та стална количина p зове се *параметар* параболин. Ако у количнику $-\frac{g'}{b'}$ сменимо количине g' и b' вредностима које оне имају, а ми ћемо добити вредност параметра p. Кад се има у виду само апсолутна вредност тог параметра, биће

$$p = \frac{a(af - gh)}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (19)$$

Напомена. Ко хоће на широј основи да проучи питање о редукцији опште квадратне еквације, тај нека чита одељак *Invariants* у изврсном делу *Leçons de Géométrie analytique*, par ***E. Pruvost,*** *I. p. 222.* или VIII. прилог ***G. Darboux-a*** у Геометрији ***Bourdon-овој,*** p. 559.

Примери

1. Угао координатне системе је $\omega = 60^0$. **Наћи редуковану еквацију елипсе**

$$4x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x + 3y + 1 = o. -$$

У овај мах је

$$ab - h^2 = 4,\ \triangle = -13,\ c' = -\frac{13}{4},\ cos\omega = \frac{1}{2},\ sin^2\omega = \frac{3}{4},$$

$$a + b - 2hcos\omega = 4.$$

Средиште C је одређено еквацијама

$$4x + 2y - 1 = o,\ 4x + 4y + 3 = o;$$

према томе су координате средишта ово:

$$x = \frac{5}{4},\ y = -2.$$

Коефицијенте a' и b' добићемо кад разрешимо квадратну еквацију

$$\frac{3}{4}k^2 - 4k + 4 = o;$$

биће дакле $a' = 4$, $b' = 4/3$.

Дакле, кад су осовине координатне системе осовине CX и CY криве, онда ће се дата еквација преобразити у ову еквацију:

$$4X^2 + \frac{4}{3}Y^2 - \frac{13}{4} = o.$$

Еквације осовинâ CX и CY биће (прим. чл. 225.) ово:

$$y = o, \quad 2x + y = o.$$

Осовине координатне системе у којој те две еквације представљају осовине криве пролазе кроз средиште, а иду паралелно са осовинама првобитне системе. Како су координате средишта познате, биће у првобитној системи еквације тих осовина ово:

$$y + 2 = o, \quad 4x + 2y - 1 = o.$$

2. Угао координатне системе је $\omega = 60^0$. Наћи редуковану еквацију хиперболе

$$2x^2 + 2xy + x + 4y - 5 = o. -$$

У овај мах је

$$ab - h^2 = -1, \triangle = -1, c' = 1, \cos\omega = \frac{1}{2}, \sin^2\omega = \frac{3}{4},$$
$$a + b - 2h\cos\omega = 1.$$

Средиште C је одређено еквацијама

$$4x + 2y + 1 = o, \quad x + 2 = o,$$

т. ј. координате средишта су

$$x = -2, \quad y = \frac{7}{2}.$$

Коефицијенти a' и b' биће корени квадратне еквације

$$\frac{3}{4}k^2 - k - 1 = o;$$

према томе је $a' = 2$, $b' = -\frac{2}{3}$. Редукована еквација хиперболе је дакле

$$2X^2 - \frac{2}{3}Y^2 + 1 = o.$$

Еквације осовинâ су у системи xCy ово:

$$y = o, \quad 2x + y = o,$$

а у првобитној системи ово:

$$2y - 7 = o, \quad 4x + 2y - 1 - o.$$

3. Система је ортогонална. Наћи редуковану еквацију параболе

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 8x + 156y - 36 = o. -$$

У овај мах је

$$b' = 25, \; g' = \pm 50.$$

Ако узмемо да је $g' = -50$, т. ј. ако узмемо да осовина позитивних апсциса лежи у луку параболином, биће редукована еквација ово:

$$Y^2 = 4X.$$

4. Доказати да еквација

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{x}{b}} = 1$$

представља једну параболу. Наћи параметар те параболе.

Одг. Параметар је $p = \dfrac{2a^2b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

5. Угао координатне системе је $\omega = 60^0$. Наћи редуковану еквацију параболе $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y - 1 = o$. —

Одг. Редукована еквација је

$$2Y^2 - \frac{5}{\sqrt{3}} X = o.$$

Еквација осовине параболине је

$$2x + 4y + 1 = o,$$

а координате темена су

$$x = -\frac{1}{4}, \; y = -\frac{1}{8}.$$

Према томе је тангента у темену ово:

$$x + \frac{1}{4} = o.$$

6. Општа квадратна еквација представља параболу, а угао координатне системе је ω. Доказати да је параметар те параболе ово:

$$p = \frac{a(af - gh)\sin^2\omega}{(a^2 + h^2 - 2ah\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

Напом. Количник којим је опредељено p може се и овако написати:

$$\frac{(-\triangle)^{\frac{1}{2}}\sin^2\omega}{(a + b - 2h\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

7. Осовине централних коничних пресека су највећи и најмањи полудијаметри. —

Кад је почстак у средишту биће еквација кривих ово :

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + \frac{\triangle}{C} = .$$

У тој истој системи биће еквација неког круга ово :

$$x^2 + y^2 - r^2 = o.$$

Поделимо прву еквацију са $\frac{\triangle}{C}$, а другу са r^2 и саберимо те две еквације. Тим путем добићемо хомогену квадратну еквацију

$$\left(ar^2 + \frac{\triangle}{C}\right) x^2 + 2r^2hxy + \left(br^2 + \frac{\triangle}{C}\right) y^2 = o, \qquad (\alpha)$$

која представља две праве — заједничке дијаметре дате криве и датог круга. Јасно је да ће r бити или максимум или минимум кад се те две праве поклапају; те две праве поклапају се међу тим кад је дискриминанта еквације (α) равна нули, т. ј. кад је

$$r^4 + \frac{\triangle(a + b)}{C^2} r^2 + \frac{\triangle^2}{C^3} = o,$$

а тим је доказана горња теорема. (Упор. прим. 1. чл. 226.).

8. Наћи редуковане еквације ових коничних пресека :

(1) $x^2 - xy + y^2 = 1$, (2) $xy = k^2$,

(3) $2x^2 - 2xy + y^2 = 2x$, (4) $(3x + 4y)^2 + 22x + 46y + 9 = o$.

Одг. (1) $x^2 + 3y^2 = 2$, (2) $y^2 - x^2 = k^2$,

(3) $(3 - \sqrt{5})\,x^2 + (3 + \sqrt{5})\,y^2 = 2$, (4) $5y^2 = 2x$.

9. Доказати ово : 1-во. да је збир квадрата двају коњугованих полудијаметара сталан и раван збиру квадрата полуосовинâ ; 2-го, да је површина троугла који добијамо спајањем крајњих тачака двају коњугованих полудијаметара стална и равна површини троугла који добијамо спајањем теменâ. —

Кад су осовине координатне системе осовине криве, биће еквација кривих ово :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а кад су координатне осовине два коњугована дијаметра, онда је еквација кривих ово:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Кад бисмо трансформацијом координатних система прешли из прве системе у другу, преобразила би се прва еквација у другу, па како су инваријанте

$$\frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin^2\omega},\quad \frac{ab-h^2}{\sin^2\omega}$$

опште квадратне еквације у првој еквацији овог облика:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},\quad \frac{1}{a^2b^2},$$

а у другој еквацији овог облика:

$$\frac{\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}}{\sin^2\omega'},\quad \frac{\frac{1}{a'^2b'^2}}{\sin^2\omega'}$$

(ω' је угао између коњугованих дијаметара), биће и

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}}{\sin^2\omega'},\quad \frac{1}{a^2b^2}=\frac{\frac{1}{a'^2b'^2}}{\sin^2\omega'};$$

одатле је

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,\quad a'b'\sin\omega'=ab,$$

а тим би биле доказане обе теореме.

Напом. Збирови $a'^2+b'^2$ и a^2+b^2 су алгебарски; кад дакле дате еквације представљају хиперболу, онда је разлика квадрата двају коњугованих полудијаметара стална.

ОДЕЉАК ЧЕТВРТИ

Тангента и полара

228. *Наћи еквацију тангенте у тачци* (x', y') *криве* (a, b, c, f, g, h) $(x, y, 1)^2 = o$.

Еквацију тангенте ћемо наћи по *Барнсајдовом* методу. — Узмимо на датој кривој две тачке P' (x', y') и P'' (x'', y''). Еквација

$$a(x-x')(x-x'')+2h(x-x')(y-y'')+b(y-y')(y-y'')$$
$$=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \quad (1)$$

представља секанту $P'P''$. Кад бисмо на име развили све производе на левој страни еквације, па за тим свели све што се може, видели бисмо да је еквација (1) линеарна; та еквација нам дакле већ из тог разлога представља једну праву. Кад бисмо даље у изразу што стоји на левој страни те еквације сменили x и y са x' и y', видели бисмо да је тај израз идентично $= o$; но исто би тако и израз на десној страни те еквације био $= o$ кад бисмо и у њему сменили x и y са x' и y', јер тачка (x', y') лежи на датој кривој. Према томе је јасно да тачка (x', y') лежи на правој (1). Сличним путем би се дало доказати да и тачка (x'', y'') лежи на правој (1), т. ј. еквација (1) је заиста еквација секанте $P'P''$. Узмимо сад да је $x' = x''$, $y' = y''$. У том случају ће еквација (1) бити еквација тангенте; еквација тангенте у тачци (x', y') је дакле ово:

$$a(x-x')^2+2h(x-x')(y-y')+b(y-y')^2$$
$$=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c,$$

а та еквација ће се, кад развијемо све чланове у изразу на левој страни, па за тим сведемо све што се може, преобразити у ову:

$$2ax'x+2h\,(y'x+x'y)+2by'y+2gx+2fy+c$$
$$=ax'^2+2hx'y'+by'^2\,; \qquad (1^*)$$

како тачка (x', y') лежи на кривој биће

$$ax'^2+2hx'y'+by'^2=-2gx'-2fy'-c.$$

Према томе ћемо еквацију (1^*) моћи и овако написати:

$$2ax'x+2h\,(y'x+x'y)+2by'y+2gx+2fy+c$$
$$=-2gx'-2fy'-c.$$

И то би била еквација тангенте у тачци (x', y'), а та еквација се може овако написати:

$$ax'x+h\,(y'x+x'y)+by'y+g\,(x+x')$$
$$+f\,(y+y')+c=o \qquad (2)$$

или

$$(ax'+hy'+g)\,x+(hx'+by'+f)\,y+gx'+fy'+c=o. \qquad (3)$$

Напомена. Кад бисмо општу квадратну еквацију $f\,(x, y)=o$ помоћу линеарне јединице $z=1$ преобразили у хомогену квадратну еквацију, онда бисмо (чл. 173.) еквацију тангенте могли и овако написати:

$$xf'_{x'}+yf'_{y'}+zf'_{z'}=o. \qquad (4)$$

Та еквација би се непосредно преобразила у еквацију (3) чим бисмо у њој сменили z и z' са 1.

Прим. 1. Тангента на крају једнога дијаметра је паралелна са ординатама тог дијаметра.

Еквација дијаметра је

$$(ax + hy + g) + m(hx + by + f) = o;$$

ако тај дијаметар сече криву у тачци (x', y'), биће и

$$(ax' + hy' + g) + m(hx' + by' + f) = o,$$

а одатле је

$$m = -\frac{ax' + hy' + g}{hx' + by' + f}.$$

По еквацији (3) види се да је то уједно и коефицијенат који одређује правац тангенте у тачци (x', y'), т. ј. и т. д.

Прим. 2. Доказати да се из сваке тачке могу повући две тангенте на криву другога реда, т. ј. доказати да је свака крива другога реда уједно и крива друге врсте.

Напом. Види чл. 165.

Прим. 3. Наћи еквацију тангенте криве

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy = o$$

у почетку координатне системе.

Одг. $gx + fy = o$.

Прим. 4. Кад ће осовина x бити тангента криве $f(x, y) = o$ у почетку координатне системе?

Одг. Кад је $c = o$, $g = o$, $f \gtrless o$.

Прим. 5. Тангента криве у некој тачци и нормала криве у тој истој тачци су осовине координатне системе. Наћи еквацију кривих другога реда.

Одг. Еквација је ово:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy = o$$

или, ако претпоставимо да је $f = -1$,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 2y.$$

Напом. Слободно је претпоставити да је $f = -1$, јер облик и димензије коничног пресека зависе само од напремица коефицијената $a, h, \ldots$

Прим. 6. Наћи еквацију тангенте кривих

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px$$

у тачци (x', y') тих кривих.

Одг. $\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1, \quad yy' = p(x + x')$.

229. *Наћи погодбу под којом ће права* $ux + vy + w = o$ *бити тангента криве* $f(x, y) = o$.

Први метод. Елиминираћемо y из еквације $ux + vy + w = o$ и еквације $f(x, y) = o$. Тим путем добићемо ову квадратну еквацију:

$$(av^2 - 2huv + bu^2)\, x^2 + 2\,(gv^2 - hvw - fvu + buw)\, x$$
$$+ (cv^2 - 2fvw + bw^2) = o.$$

Корени те квадратне еквације били би апсцисе тачака у којима права $ux + vy + w = o$ сече криву. Та права биће тангента криве, кад се тачке у којима она сече криву поклапају; у том случају ће корени поменуте квадратне еквације бити једнаки, т. ј. биће

$$(av^2 - 2huv + bu^2)(cv^2 - 2fvw + bw^2)$$
$$= (gv^2 - hvw - fvu + buw)^2.$$

Та погодбена релација може се и овако написати:

$$(bc - f^2)\, u^2 + (ca - g^2)\, v^2 + (ab - h^2)\, w^2 + 2\,(gh - af)\, vw$$
$$+ 2\,(hf - bg)\, wu + 2\,(fg - ch)\, uv = o.$$

Коефицијенти који у овој еквацији стоје уз $u^2, v^2, w^2, \ldots$ јесу минори елемената $a, b, c, \ldots$ дискриминанте Δ; ми ћемо их обележити са $A, B, C, \ldots$ као и пређе (чл. 83.), па ћемо с тога ту погодбу моћи написати и у овом облику:

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv = o. \quad (5)$$

Ова еквација је, као што ћемо одмах видети, необично важна. Јасно је да ће се параметри $u : v : w$

у еквацији дате праве мењати кад се та права креће по равни; јасно је даље и то, да ће та права бити тангента дате криве кадгод су параметри $u : v : w$ међу собом везани релацијом (5). *Еквација* (5) *биће дакле тангенцијална еквација криве.* По тој еквацији се види непосредно, како се некакав коничан прѣсек као крива другога реда може аналитички представити као крива друге врсте.

Други метод. Права $ux + vy + w = o$ биће тангента криве у некој тачци (x', y') кад су коефицијенти u, v, w сразмерни са коефицијентима који се у еквацији (3) јављају, т. ј. кад је

$$\frac{ax' + hy' + g}{u} = \frac{hx' + by' + f}{v} = \frac{gx' + fy' + c}{w}$$

Ако заједничку вредност ових количника означимо са μ, биће

$$ax' + hy' + g = \mu u,$$

$$hx' + by' + f = \mu v,$$

$$gx' + fy' + c = \mu w.$$

Како међу тим додирна тачка (x', y') лежи на датој правој, то ће бити и

$$ux' + vy' + w = o.$$

Последње четири линеарне еквације постоје дакле кад дата права додирује дату криву у тачци (x', y'). Кад из тих еквација елиминирамо непознате параметре x', y', μ, добићемо ову погодбу:

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & o \end{vmatrix} = o; \qquad (6)$$

та, *количинама* u, v, w *заоквирена детерминанта* (*geränderte Determinante*), била би већ тангенцијална еквација дате криве. Кад бисмо развили детерминанту на левој страни еквације (6) добили бисмо еквацију (5).

Напомене. 1-во. По еквацијама (5) и (6) види се ово: кад је нека права тангента криве $f(x, y) = o$, онда само једна погодба постоји између коефицијената еквације $f(x, y) = o$; дати једну тангенту криве значи дакле дати једну линеарну, геометријску погодбу.

2-го. Дата еквација $ux + vy + w = o$ представља праву $\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$. Ако је $w = 1$, онда ће се та еквација преобразити у еквацију $ux + vy + 1 = o$, а погодба под којом ће та права (u, v) дирати коничан пресек била би ово:

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & 1 \\ u & v & 1 & o \end{vmatrix} = o. \qquad (6^*)$$

То би дакле била тангенцијална, нехомогена еквација криве.

3-ће. Општа еквација $f(x, y) = o$ представља параболу кад је $ab - h^2 = o$, т. ј. кад је $C = o$. Према томе је тангенцијална еквација параболâ ово:

$$Au^2 + Bv^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv = o.$$

По тој еквацији се види да је права $o \cdot x + o \cdot y + w = o$ тангента криве, т. ј. *права у бескрајности јесте тангента параболина.*

Прим. 1. Наћи тангенцијалну еквацију елипсе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Одг. $a^2u^2 + b^2v^2 = 1$.

Прим. 2. Наћи тангенцијалну екваццију параболе

$$y^2 = 2px.$$

Одг. $pv^2 - 2u = o$.

230. *Наћи екваццију двеју тангената које су из тачке* (x', y') *повучене на криву* $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o$.

Ту проблему решићемо по Јоахимсталову методу (види чл. 169.). Повући ћемо из дате тачке $P' (x', y')$ ма у ком правцу једну праву и узећемо на тој правој *ма где* једну тачку $P (x, y)$. Тачке у којима секанта $P'P$ сече криву означићемо са A и B. Координате ма које тачке те секанте биће ово:

$$x'' = \frac{x' + \lambda x}{1 + \lambda}, \quad y'' = \frac{y' + \lambda y}{1 + \lambda}.$$

Ако тим вредностима координата̂ x'' и y'' сменимо x и y у екваццији $ax^2 + 2hxy + \cdot \cdot \cdot = o$, добићемо једну екваццију која се овако може написати:

$$S\lambda^2 + 2P\lambda + S' = o; \qquad (7)$$

то би била позната Јоахимсталова екваццција. У тој екваццији је

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c,$$

$$S' = ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2gx' + 2fy' + c,$$

$$P = ax'x + h(y'x + x'y) + by'y + g(x + x') + f(y + y') + c.$$

Корени λ и λ' квадратне екваццције (7) јесу оне вредности параметра λ, које одређују на правој $P'P$ две посебне тачке A и B. Те две тачке поклапаће се кад је права $P'P$ тангента криве. У том случају ће бити $\lambda = \lambda'$, а погодба под којом су корени екваццције (7) једнаки је ово:

$$P^2 - SS' = o \qquad (8)$$

или

$$[ax'x+h(y'x+x'y)+by'y+g(x+x')+f(y+y')+c]^2$$
$$=(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c)$$
$$\times(ax'^2+2hx'y'+by'^2+2gx'+2fy'+c). \qquad (9)$$

Кад је дакле права $P'P$ било једна, било друга тангента криве, онда ће координате x и y неке њезине тачке P међу собом бити везане релацијом (9), па како тачка P може бити ма која тачка праве $P'P$, то је јасно да ће квадратном еквацијом (9) бити представљене оне две тангенте које се могу повући на криву из тачке P' (x', y').

Прим. 1. Наћи еквацију двеју тангената које су из почетка координатне системе повучене на криву $S = o$.

Одг. $Bx^2 - 2Hxy + Ay^2 = o$.

Напом. Та еквација може се добити непосредно из еквације (9), а може се добити и кад се у еквацији (α) прим. 3. стр. 455. смени m са $\frac{y}{x}$.

Прим. 2. Наћи место тачака из којих се могу повући на криву $S = o$ по две тангенте које се секу под правим углом.

Еквација (9) биће, кад се развије, овог облика:

$$(Cy'^2-2Fy'+B)x^2+(Cx'^2-2Gx'+A)y^2-2(Cx'y'-Fx'-Gy'+H)xy$$
$$+\cdot\cdot\cdot = o.$$

Те две тангенте сећи ће се под правим углом ако је збир коефицијената који стоје уз x^2 и y^2 раван нули, т. ј. ако је

$$(Cy'^2 - 2Fy' + B) + (Cx'^2 - 2Gx' + A) = o,$$

а та еквација може се, кад се запете изоставе, овако написати:

$$C(x^2 + y^2) - 2Gx - 2Fy + A + B = o.$$

Тражено место је дакле круг; тај круг назива се *ортоптички круг*.

Напом. Кад је крива $S = o$ парабола, онда је $C = o$, т. ј. место тачака, из којих се могу на параболу повући по две тангенте које се секу под правим углом, је једна права. Касније ћемо доказати да је та права управница параболина.

Прим. 3. Помоћу линеарне јединице преобразићемо екваџију $S = o$ у хомогену екваџију. Доказати да се тангенте које су из неке тачке повучене на криву могу представити овом екваџијом:

$$(xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'})^2 - 4f(x, y, z)\,f(x', y', z') = o.$$

Прим. 4. Две тангенте, које су на криву $S = o$ повучене из неке тачке што лежи на тој кривој, поклапају се.

Кад тачка (x', y') лежи на кривој, онда екваџија (9) представља једну двојну праву, т. ј. и т. д.

231. Тачке P', P секанте $P'P$ и тачке A, B у којима та секанта сече криву $S = o$ имају једну одређену двојну напремицу. Ако тачке P' и P узмемо за основне тачке низа, биће координате тачака A и B ово:

$$\frac{x' + \lambda x}{1 + \lambda}, \ \frac{y' + \lambda y}{1 + \lambda}; \ \frac{x' + \lambda' x}{1 + \lambda'}, \ \frac{y' + \lambda' y}{1 + \lambda'}.$$

Према томе ће поменута двојна напремица имати свега ове две различите вредности:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

и

$$\alpha' = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Међу тим је

$$\lambda + \lambda' = -\frac{2P}{S}, \quad \lambda\lambda' = \frac{S'}{S},$$

па је с тога и

$$(\lambda + \lambda')^2 - 2\lambda\lambda' = \frac{4P^2}{S^2} - \frac{2S'}{S}$$

или

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = \frac{4P^2 - 2SS'}{S^2};$$

према томе је

$$\alpha + \alpha' = \frac{\lambda^2 + \lambda'^2}{\lambda\lambda'} = \frac{4P^2 - 2SS'}{SS'},$$

па како је

$$\alpha\alpha' = 1,$$

то је јасно да су количине α и α' корени квадратне еквације

$$\alpha^2 - \frac{4P^2 - 2SS'}{SS'}\alpha + 1 = o,$$

а та еквација се може и овако написати:

$$(\alpha + 1)^2 SS' - 4P^2\alpha = o. \qquad (10)$$

Овом еквацијом одређене су двојне напремице поменуте четири тачке. Узмимо сад да се тачка P' (x', y') не мења и повуцимо кроз њу бескрајно много правих. Свака од тих правих сећи ће криву у две тачке A и B, а на свакој од њих биће једна једина тачка P која ће са остале три тачке P', A и B имати једну одређену двојну напремицу α. Ако се дакле претпостави да је $\alpha = const.$, онда ће јасно бити, да ће место тачака P бити једна крива другога реда, која је аналитички представљена еквацијом (10); свакој специјалној вредности параметра α одговара по једна таква крива другога реда, а између тих кривих има једна на коју нарочиту пажњу треба обратити. Ту специјалну криву добићемо кад претпоставимо да је $\alpha = -1$. У том случају ће се крива (10) изметнути у једну (двојну) праву, а еквација те праве је

$$P = o$$

или

$$ax'x + h(y'x + x'y) + by'y + g(x + x') \\ + f(y + y') + c = o. \qquad (11)$$

Ми знамо међу тим да ће под погодбом $\alpha = -1$ тачке A и B хармонијски делити дуж $P'P$; под том истом погодбом ће дакле и тачке P' и P бити хармонијски коњуговане према тачкама A и B. Према томе је јасно *да је место тачака* P, *које су с тачком* P' *хармонијски коњуговане према тачкама* A *и* B, *једна права.* Тачка P', назива се *пол*, а права $P = o$ *полара* тачке P'.— Тачке P' и P називају се и *коњуговане тачке* или *хармонијски полови*; према томе је *место хармонијских полова тачке* P' *полара тачке* P' (чл. 170.).

Напомене. 1-во. Полара почетка координатне системе је ово:

$$gx + fy + c = o.$$

Кад је почетак у средишту, онда је $g = o$, $f = o$; у том случају биће полара средишта ово:

$$o \cdot x + o \cdot y + c = o,$$

т. ј. *полара средишта је права у бескрајности.*

2-го. *Ако тачка* A *лежи на полари тачке* B, *лежаће и тачка* B *на полари тачке* A. — Такве две поларе називају се *коњуговане* или *хармонијске поларе.*

Доказ те теореме исти као и у чл. 171.

3-ће. *Кад се нека тачка креће по једној правој, онда се полара те тачке обрће око пола те праве.* (Види чл. 171.).

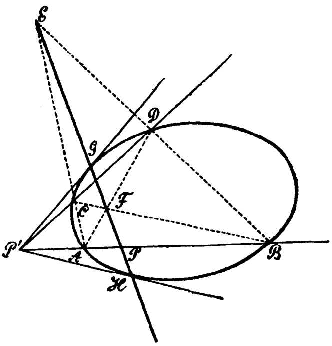
4-то. *Кад се поларе тачака* A *и* B *секу у тачци* C, *онда је тачка* C *пол праве* AB. (Види чл. 171.).

5-то. Кад бисмо помоћу линеарне јединице преобразили еквацију $f(x, y) = o$ у хомогену еквацију $f(x, y, z) = o$, онда бисмо еквацију поларе могли овако написати:

$$xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} = o.$$

Конструкција поларе. Из тачке P' повући ћемо ма у ком правцу према кривој две секанте; ове ће сећи криву у четири тачке — у тачкама A, B, C, D. У пресеку правих AC и BD добићемо тачку E, а у пресеку правих AD и BC тачку F. Тачке P', E, F биће дијагоналне тачке тетрастигмата $ABCD$.

Кад бисмо замислили да је тачка E спојена с тачком P' једном правом, добили бисмо један хармонијски прамен четирију зракова који се гранају из тачке E. Према томе ће права EF сећи секанте $P'AB$ и $P'CD$ у тачкама које су хармонијски коњуговане с тачком P' према паровима A, B и C, D, т. ј. права EF биће полара тачке P'. Јасно је да су и остале две стране FP' и $P'E$ дијагоналног троугла EFP' поларе дијагоналних тачака E и F. *Дијагоналан троугао је дакле аутополаран троугао* (чл. 172.). — Полара EF сече криву у тачкама G и H. Како тачка G лежи на полари, биће та тачка с тачком P' хармонијски коњугована према оним двема тачкама у којима секанта $P'G$ сече криву; једна од тих тачака је међу тим баш сама тачка G, па ће услед тога (чл. 6.) у тој тачци морати лежати и друга од поменутих двеју тачака. Права $P'G$ сећи ће дакле криву у двема тачкама које се поклапају, т. ј. права $P'G$ биће тангента криве. Сличним путем би се могло доказати да је и права $P'H$ тангента криве. Према томе *су праве, које спајају пол са тачкама у којима полара сече криву, тангенте криве.* Кад се дакле тачке G и H, у којима полара EF неке тачке P' сече криву, споје с тачком P', правима $P'G$ и $P'H$, онда су те две праве тангенте криве. То би била најсавршенија конструкција тангената.



Сл. 102.

Прим. 1. Пол (x', y') лежи на кривој. Наћи полару тог пола.

Одг. Полара те тачке је тангента криве у тој тачци.

Прим. 2. Права која је кроз неку тачку P' повучена напоредо са једном асимптотом сече криву у тачци A, а полару тачке P' у тачци P. Доказати да је $P'A = AP$.

Одг. Како су тачке A и ∞ хармонијски коњуговане према тачкама P' и P, то је јасно да ће и т. д.

Прим. 3. Свака полара је паралелна са ординатама оног дијаметра, који кроз пол пролази.

Прим. 4. Доказати да је тачка која на неком дијаметру у бескрајности лежи, пол оног дијаметра, који је коњугован с датим дијаметром.

Прим. 5. Права у бескрајности је место полова оних правих које се у средишту секу.

Прим. 6. Поларе свију тачака једне тангенте секу се у додирној тачци.

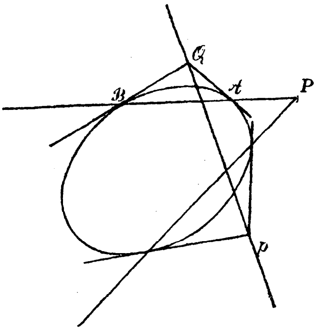
Прим. 7. Поларе тачака које леже на једној асимптоти иду напоредо са том асимптотом.

Прим. 8. Полара тачке која у бескрајности лежи на асимптоти је сама асимптота.

Асимптота је тангента криве у бескрајности, т. ј. и т. д.

Прим. 9. Ако кроз ма коју тачку P равни повучемо једну секанту PAB (сл. 103.), то ће се тангенте које су на криву повучене у тачкама A и B сећи на полари p тачке P.

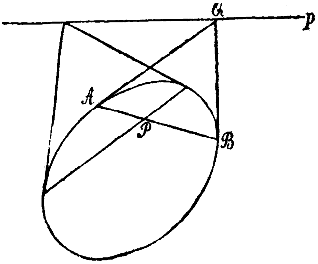
Поменуте две тангенте сећи ће се у опште у једној тачци Q. Та тачка Q биће пол праве PAB. Кад би се секанта PAB обртала око тачке P, онда би полови њезини лежали сви од реда на једној правој — на полари пола P.



Сл. 103.

Прим. 10. Ако из различитих тачака једне праве p (сл. 104.) повучемо тангенте на криву, то ће се праве које спајају две и две додирне тачке сећи у полу P праве p

Ако на име из тачке Q повучемо две тангенте QA и QB на



Сл. 104.

криву, биће тачка Q пол корде AB, па како тачке Q све од реда леже на једној правој, то је јасно да ће се и њихове поларе све од реда сећи у једној тачци P — у полу дате праве p.

Прим. 11. Наћи пол праве $lx + my + n = o$.

Нека је $S = o$ еквација криве. Еквација поларе тачке (x', y') биће ово:

$$(ax' + hy' + g)\,x + \cdot \cdot \cdot = o\,;$$

према томе је јасно да је пол (x', y') одређен овим еквацијама:

$$\frac{ax' + hy' + g}{l} = \frac{hx' + by' + f}{m} = \frac{gx' + fy' + c}{n}.$$

Кад је $\triangle \gtrless o$, онда свакој правој одговара само један пол, а кад је $\triangle = o$ — у том случају ће се крива S изметнути у систему двеју правих — онда има бескрајно много тачака које имају једну и исту полару. (Види чл. 72. напом. 1. и 2.).

Прим. 12. Наћи погодбу под којом ће две праве $ux + vy + wz = o$ и $u'x + v'y + w'z = o$ бити хармонијске поларе с обзиром на криву $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = o$.

Нека су x', y', z' координате пола прве поларе. Еквације

$$ux + vy + wz = o, \; xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} = o$$

представљаће једну и исту праву ако је

$$f'_{x'} = \mu u, \; f'_{y'} = \mu v, \; f'_{z'} = \mu w. \qquad (\alpha)$$

Како пол (x', y', z') лежи на полари $u'x + v'y + w'z$, биће и

$$u'x' + v'y' + w'z' = o.$$

Тражену погодбу ћемо добити кад из последње еквације и еквација (α) елиминирамо x', y', z', μ. Погодба је ово:

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u' & v' & w' & o \end{vmatrix} = o. \qquad (\beta)$$

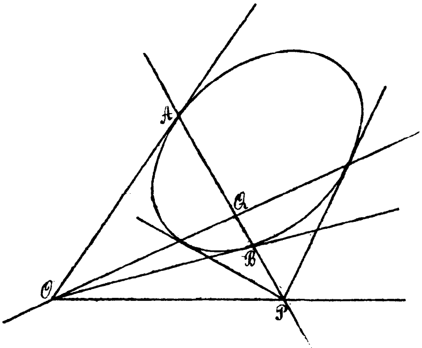
Кад бисмо са $\varphi(u, v, w) = o$ означили тангенцијалну еквацију дате криве, могли бисмо погодбу (β) написати и у овом облику:

$$u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'} = o.$$

Напом. У горњим еквацијама је $z = z' =$ линеарној јединици.

Прим 13. Из тачке O у којој се секу две хармонијске поларе OP и OQ повучене су на криву две тангенте OA и OB. Доказати да су праве OP и OQ хармонијски коњуговане према тангентама OA и OB.

Узмимо да тачка O лежи у спољашњем крају криве. Ако су тачке P и Q полови датих хармонијских полара, биће права PQ полара пола O.



Сл. 105.

Како пол O лежи изван криве, јасно је да ће права PQ сећи криву у двема тачкама A и B, па како су тачке P и Q хармонијски полови, то је јасно уједно и то, да су тачке A и B хармонијски коњуговане према тачкама P и Q; прамен O $(AQBP)$ је дакле хармонијски, а то смо и тврдили.

14. Две праве OP и OQ су хармонијски коњуговане према двема тангентама које су са тачке O повучене на криву. Доказати да су праве OP и OQ хармонијске поларе.

ЖИЖЕ И УПРАВНИЦЕ

232. Нека су α, β координате неке тачке F, а $lx + my + n = o$ еквација неке праве D. Јасно је да ће еквација

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (lx + my + n)^2 \quad (1)$$

представљати један коничан пресек. Раздаљина PF ма које тачке P (x, y) тог коничног пресека од тачке F (α, β) стоји, као што ћемо одмах видети, у једној веома тесној вези са раздаљином PQ те исте тачке P од праве D. Ту везу ћемо уочити чим напишемо еквацију (1) у овом облику:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (l^2 + m^2)\,\frac{(lx + my + n)^2}{l^2 + m^2}\,.$$

Како је

$$\overline{PF}^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

а

$$\overline{PQ}^2 = \frac{(lx + my + n)^2}{l^2 + m^2},$$

то је јасно да ће за све тачке дате криве бити

$$\overline{PF}^2 = (l^2 + m^2)\,\overline{PQ}^2;$$

према томе је

$$\frac{PF}{PQ} = \sqrt{l^2 + m^2} = const.,$$

т. ј. *дата крива другога реда је место тачака P за које је напремица у којој стоји раздаљина PF према раздаљини*

PQ стална количина. — Стална тачка F назива се *жижа*, стална права D *управница*, а стална количина $\sqrt{l^2+m^2}=e$ *ексцентрицитет* криве. Дуж PF је *потег* (*radius vector*) тачке P.

Кад бисмо развили еквацију (1), добили бисмо ову еквацију:

$$(1-l^2)\,x^2-2lmxy+(1-m^2)\,y^2-2\,(\alpha+ln)\,x$$
$$-2\,(\beta+mn)\,y+\alpha^2+\beta^2-n^2=o. \qquad (2)$$

По том развијеном облику види се да бином $\partial = h^2 - ab$ у овај мах има ову вредност:

$$\partial = l^2 + m^2 - 1 = e^2 - 1\,;$$

еквација (1) представљаће дакле елипсу ако је $e < 1$, хиперболу ако је $e > 1$, а параболу ако је $e = 1$. Из истог тог обрасца $\partial = e^2 - 1$ види се уједно и то, да ће и обратно ексцентрицитет сваке елипсе бити < 1 и т. д., а то значи ово: 1-во, *да су све тачке једне елипсе ближе жижи него управници*; 2-го, *да су све тачке једне хиперболе ближе управници него жижи*; 3-ће, *да су све тачке једне параболе једнако удаљене од жиже и управнице.*

Напомене. 1-во. Ми знамо да је раздаљина неке тачке од тачке (x, y) изражена једном ирационалном целом функцијом координата x и y. По еквацији (1) види се међу тим да је

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \pm\,(lx+my+n)$$

или

$$PF = \pm\,(lx+my+n),$$

т. ј. *кад је нека тачка жижа једног коничног пресека, онда се раздаљина те тачке од ма које тачке (x, y) криве може изразити једном линеарном, рационалном функцијом координатâ x и y.* — То би била чисто алгебарска дефиниција жижâ кривих другога реда.

2-го. У еквацији (1) има свега пет непознатих параметара α, β, l, m, n; та еквација може дакле представљати све криве другога реда. Кад су нам познате координате α и β жиже, онда у еквацији остаје само још три непозната параметра; дати жижу значи, дакле, дати једну двојну геометријску погодбу. — Кад је позната управница, онда можемо наћи вредности напремицâ $l : m : n$; у еквацији криве остало би још три непозната параметра. Дати управницу значи, дакле, дати једну двојну геометријску погодбу.

Прим. 1. Наћи еквацију параболе чија је жижа (1, 1), а управница $3x + 4y = o$.

Еквација параболе је ово:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{3x + 4y}{\pm 5}$$

или, у рационалном облику,

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 50x - 50y + 50 = o.$$

Прим. 2. Наћи еквацију елипсе чија је жижа (1, o), управница $x - 4 = o$, а ексцентрицитет $\frac{1}{2}$.

Одг. $3x^2 + 4y^2 = 12$.

Прим. 3. Доказати да жиже леже на осовинама кривих другога реда. —

Узмимо да је крива (2) парабола. Ако у изразу што стоји с леве стране еквације осовине те параболе сменимо x и y са α и β, а ми ћемо добити ово: $l^2 + m^2 - 1$; како је $l^2 + m^2 - 1 = o$ кад еквација (2) представља параболу, то је јасно да жижа (α, β) лежи на осовини параболе. Сличним путем би се могло доказати и да жиже елипсе или хиперболе леже на осовинама.

233. *Наћи жиже криве*

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o. —$$

Ако су α, β координате жижâ, онда се еквација криве може написати и у овом облику:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (lx + my + n)^2 = o.$$

Како та еквација представља исту ону криву, коју представља и еквација $f(x, y) = o$, то је јасно (прим. 10. стр. 460.) да ће бити

$$f(x, y) \equiv \mu[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (lx + my + n)^2]$$

или

$$f(x, y) - \mu[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2] \equiv -\mu(lx + my + n)^2.$$

По овој идентичној релацији види се да функција

$$F(x, y) = f(x, y) - \mu[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]$$

мора бити потпун квадрат једне линеарне функције кад су у тој функцији са α и β означене координате жижа. С тога ћемо тражити погодбе под којима ће функција $F(x, y)$ бити потпун квадрат. Да бисмо што лакше те погодбе нашли, а ми ћемо у полиному F сменити x са $x' + \alpha$, а y са $y' + \beta$; тим путем добићемо ово:

$$F(x' + \alpha, y' + \beta) = f(x' + \alpha, y' + \beta) - \mu(x'^2 + y'^2),$$

па како је (чл. 205.)

$$f(x' + \alpha, y' + \beta) = ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta),$$

биће и

$$F(x' + \alpha, y' + \beta) = (a-\mu)x'^2 + 2hx'y' + (b-\mu)y'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta)$$

или

$$F(x' + \alpha, y' + \beta) = (a-\mu)x'^2 + 2(hy' + \tfrac{1}{2}f'_\alpha)x' + (b-\mu)y'^2 + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta). \quad (3)$$

Тражећи поменуту погодбу имаћемо у виду свега два случаја; претпоставићемо најпре да је $a - \mu \gtrless o$, а за тим да је $a - \mu = o$.

1-во. Нека је $a - \mu \gtrless o$. Полином (3) биће потпун квадрат ако је

$$\left(hy' + \frac{1}{2} f'_\alpha\right)^2 = (a - \mu) \left[(b - \mu) y'^2 + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta)\right]$$

или

$$[h^2 - (a - \mu)(b - \mu)] y'^2 + [hf'_\alpha - (a - \mu) f'_\beta] y'$$
$$+ \frac{1}{4} (f'_\alpha)^2 - (a - \mu) f(\alpha, \beta) = o.$$

Ова релација мора постојати ма параметар y' имао ма какву вредност. Полином F биће дакле потпун квадрат, ако је

$$\left.\begin{aligned} h^2 - (a - \mu)(b - \mu) &= o, \\ hf'_\alpha &= (a - \mu) f'_\beta, \\ (f'_\alpha)^2 &= 4 (a - \mu) f(\alpha, \beta). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

У овим погодбеним еквацијама имамо свега три непознате α, β, μ; једну између њих н. пр. непознату μ можемо елиминирати, па ћемо тим путем добити две еквације у којима ће се јављати непознате α и β. — Узмимо најпре да је $f'_\beta \gtrless o$. По другој у системи еквација (4) види се да ће у том случају бити и $h \gtrless o$ и $f'_\alpha \gtrless o$. Ако елиминирамо μ најпре из прве и друге еквације системе (4), па за тим из друге и треће, а ми ћемо добити ове две погодбене еквације:

$$(a - b) f'_\alpha f'_\beta = h \left[(f'_\alpha)^2 - (f'_\beta)^2\right],$$

$$f'_\alpha f'_\beta = 4h\, f(\alpha, \beta).$$

Како коефицијенат h није $= o$, то бисмо систему ових двеју еквација могли заменити овим двема еквацијама:

$$\left.\begin{aligned} 4(a - b) f(\alpha, \beta) &= (f'_\alpha)^2 - (f'_\beta)^2, \\ 4h\, f(\alpha, \beta) &= f'_\alpha f'_\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Те две погодбене релације постоје чак и онда, кад је $f'_\beta = o$. Ако се на име претпостави да је $f'_\beta = o$, онда ће се из обеју система (4) и (5) добити да је или

$$f'_\alpha = o, \quad f(\alpha, \beta) = o,$$

или

$$h = o, \quad (f'_\alpha)^2 = 4(a - b) f(\alpha, \beta).$$

2-го. Нека је $a - \mu = o$. У овом случају биће полином F линеарна функција променљиве x'; тај полином може дакле бити потпун квадрат само ако он у опште и не зависи од x'. Биће дакле

$$hy' + \frac{1}{2} f'_\alpha = o,$$

па како та релација мора постојати ма параметар y имао ма какву вредност, то ће морати бити

$$h = o, \quad f'_\alpha = o.$$

Кад се има у виду то, да је у овај мах $\mu = a$, биће јасно да ће полином F бити управо овог облика:

$$(b - a) y'^2 + y' f'_\beta + f(\alpha, \beta),$$

а тај трином биће потпун квадрат ако је

$$4(a - b) f(\alpha, \beta) = -(f'_\beta)^2. \qquad (6)$$

Напомена. Кад је $a - \mu = o$, онда мора бити $h = o$, $f'_\alpha = o$. Међу тим кад се претпостави да је $h = o$, $f'_\alpha = o$, онда се из системе еквација (5) добива управо еквација (6); према томе је јасно да ће координате жижâ у свима случајевима бити одређене системом еквација (5).

234. Ако у еквацијама (5) сменимо α и β са x и y, добићемо ове две еквације:

$$\left.\begin{aligned} 4\,(a-b)\,f\,(x,y) &= (f'_x)^2-(f'_y)^2, \\ 4h\,f(x,y) &= f'_x f'_y. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Те две еквације представљају у опште две криве; јасно је да су тачке, у којима се те две криве секу, управо жиже (α, β) дате криве $f\,(x, y) = o$. Кад се у системи еквација (7) место симбола $f\,(x, y)$, f'_x, f'_y напишу они изрази које ти симболи представљају, добићемо ове две еквације:

$$\left.\begin{aligned} C\,(x^2-y^2)-2Gx+2Fy+A-B &= o, \\ Cxy-Fx-Gy+H &= o; \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

у тим еквацијама су са $A, B, C, \cdot\ \cdot\ \cdot$ означени минори елемената $a, b, c, \cdot\ \cdot\ \cdot$ дискриминанте Δ. По тим еквацијама види се ово двоје:

1-во. Ако је $C = ab - h^2 \gtrless o$, т. ј. ако је крива $f\,(x, y) = o$ елипса или хипербола, онда ће еквације (8) представљати две хиперболе — тако зване *фокалне хиперболе.* Те две хиперболе су (прим. 6. чл. 218.) равностране и концентричне, а средиште њихово је уједно и средиште криве $f\,(x, y) = o$. Кад бисмо паралелним померањем осовина преместили почетак системе у средиште криве $f\,(x, y)$, видели бисмо да су асимптоте прве хиперболе представљене еквацијом $x^2 - y^2 = o$, а асимптоте друге хиперболе еквацијом $xy = o$. Према томе су асимптоте прве хиперболе праве које полове угао нове ортогоналне системе, а асимптоте друге хиперболе баш саме осовине те системе. Те две хиперболе ће се сећи у двема реалним тачкама; па како се криве другога реда секу у четири тачке (чл. 21.), то би остале две тачке биле имагинарне, т. ј. *елипса и хипербола имају две реалне и две имагинарне жиже.*

Координате тих жижа ћемо наћи овако. Написаћемо еквације (8) у овом облику:

$$(Cx-G)^2+(Cy-F)^2 = (BC-F^2)-(CA-G^2),$$

$$(Cx - G)(Cy - F) = FG - CH;$$

како су изрази $BC - F^2$, $CA - G^2$, $FG - CH$ минори елемената A, B, H детерминанте

$$\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix},$$

биће

$$BC - F^2 = \Delta a,\ CA - G^2 = \Delta b,\ FG - CH = \Delta h,$$

па се с тога еквације поменутих двеју хипербола могу и овако написати:

$$(Cx - G)^2 - (Cy - F)^2 = \Delta(a - b),$$

$$(Cx - G)(Cy - F) = \Delta h.$$

Према томе су координате жижа одређене овим двема еквацијама:

$$(Cx-G)^2 = \tfrac{1}{2}\Delta(R+a-b),\ (Cy-F)^2 = \tfrac{1}{2}\Delta(R+b-a); \qquad (9)$$

у тим еквацијама је са R означен корен $\pm\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$, а по томе се види да је R по апсолутној вредности веће од $a - b$. Кад се то има у виду, онда је јасно да ће изрази који стоје на десним странама еквација (9) бити позитивни, кад се испред корена, којим је одређено R, узме знак дискриминанте Δ; у противном случају били би ти изрази негативни. У првом случају добићемо из еквација (9) координате реалних, а у другом координате имагинарних жижа.

2-го. Ако је $C = ab - h^2 = o$, т. ј. ако је крива $f(x, y) = o$ парабола, онда ће еквације (8) бити линеарне; свака од њих представљаће по једну праву, па како се две праве секу само у једној тачци, то је јасно, да параболе имају само једну жижу. Координате те жиже су

$$x=\frac{FH+\frac{1}{2}(A-B)G}{F^2+G^2},\quad y=\frac{GH+\frac{1}{2}(B-A)F}{F^2+G^2}.$$

Прим. 1. Наћи реалне жиже криве

$$20x^2-32xy+20y^2=9.$$

У овај мах је $C=144$, $G=o$, $F=o$, $\triangle=-1296$, $R=\pm 32$, па су с тога жиже ово: $(1, 1)$, $(-1,-1)$.

Прим. 2. Наћи реалне жиже криве

$$32x^2-24xy-20x+12y+11=o.$$

Одг. $(o,-1)$, $(1, 2)$.

Прим. 3. Доказати да су жиже криве

$$ax^2+2hxy+by^2=1$$

одређене екваціјама

$$\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}=\frac{1}{h^2-ab}.$$

Прим. 4. Наћи екваціју коничних пресека који имају једну заједничку жижу.

Претпоставићемо да почетак координатне системе лежи на заједничкој жижи. Ако је e ексцентрицитет, а $\gamma\equiv x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=o$ екваціја управнице, биће тражена екваціја овог облика:

$$x^2+y^2=e^2\gamma^2. \qquad (\alpha)$$

Прим. 5. Доказати да се свака тачка криве (α) може представити овим двема екваціјама:

$$x=e\gamma\cos\varphi,\quad y=e\gamma\sin\varphi.$$

Прим. 6. Доказати да у екваціјама $x=e\gamma\cos\varphi$, $y=e\gamma\sin\varphi$ неке тачке P коничног пресека (α) угао φ значи угао који потег те тачке затвара са осовином x.

Прим. 7. Наћи екваціју праве која криву (α) дира у тачци $(e\gamma\cos\varphi,\ e\gamma\sin\varphi)$.

Екваціја корде која спаја тачку φ с тачком φ' је ово:

$$x\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}+y\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}=e\gamma\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2},$$

па је с тога екваџија тангенте у тачци φ ово:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = e\gamma.$$

Прим. 8. Наћи место тачака Q, у којима се секу тангенте PQ и $P'Q$ што су повучене на криву на крајевима P и P' једне корде PP', која се из жиже види под сталним углом $2\theta = \varphi - \varphi'$. —

Екваџије тангената PQ и $P'Q$ су

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = e\gamma, \; x \cos \varphi' + y \sin \varphi' = e\gamma.$$

Како је $2\theta = \varphi - \varphi'$, то ћемо координате тачке Q што лежи у пресеку тих двеју тангената моћи овако изразити:

$$x = \frac{e\gamma}{\cos \theta} \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}, \quad y = \frac{e\gamma}{\cos \theta} \sin \frac{\varphi + \varphi'}{2}.$$

Место тачака Q добићемо кад из ових двеју екваџија елиминирамо непознате параметре φ и φ'. Екваџија места је ово:

$$x^2 + y^2 = \frac{e^2\gamma^2}{\cos^2\theta},$$

т. ј. место тачака Q је једна крива другога реда која има исту жижу и исту управницу као и дата крива; ексцентрицитет те криве је $\frac{e}{\cos \theta}$.

ЗАЈЕДНИЧКЕ СЕКАНТЕ, ПРАМЕНИ И МРЕЖЕ КРИВИХ ДРУГОГА РЕДА.

235. Две криве $S = o$, $S' = o$ другога реда секу се у опште у *четири* тачке. Координате тих тачака јесу заједнички корени двеју алгебарских екваџија $S = o$, $S' = o$. Ти корени или су сви од реда реални, или су сви од реда имагинарни (у том случају биће два и два пара коренâ коњуговано комплексни бројеви) или су, најпосле, два пара заједничких корена реална, а остала два (коњуговано) имагинарна. Према томе ће и тачке у којима се секу криве $S = o$ и $S' = o$ бити или све реалне, или све имагинарне или две реалне, а две имагинарне. Кад се те четири тачке 1, 2, 3, 4 споје правима, добићемо три пара правих 12, 34; 13, 24; 14, 23. Све те праве пролазиће кроз заједничке тачке кривих S и S', па се с тога те праве називају *заједничке секанте* кривих S и S'.

Две заједничке секанте у једном пару називају се кад и кад и *коњугованим* заједничким секантама, а тачка у којој се коњуговане секанте секу *средиштем* тих секаната. Свега дакле има *три пара* заједничких секаната.

Кад се криве S и S' секу у четири реалне тачке, онда су сва три пара заједничких секаната реална; кад се криве S и S' секу у четири имагинарне тачке, онда има само један реалан пар заједничких секаната; између имагинарних тачака 1, 2, 3, 4 биће на име две и две коњуговане, па ће с тога праве које спајају такве две тачке бити реалне; најпосле, кад се криве S и S' секу у две реалне и две (коњуговано) имагинарне тачке, онда ће такође имати само један пар реалних заједничких секаната; једну од тих секаната добићемо спајањем двеју реалних тачака, а другу спајањем двеју коњуговано имагинарних. *Ма како дакле да леже две криве другога реда, свакад те криве имају бар један пар реалних заједничких секаната.*

Напомена. Тачке 1, 2, 3, 4 опредељују потпуно слику једног тетрастигмата. Дијагоналан троугао тог тетрастигмата биће (чл. 231.) аутополаран троугао криве $S = o$ и криве $S' = o$. *Две криве другога реда имају дакле један заједнички аутополаран троугао.*

236. *Ако су*

$$S = o, \quad S' = o$$

еквације двеју кривих другога реда, биће

$$S - kS' = o$$

(k је неодређен параметар) еквација свију кривих другога реда, које пролазе кроз тачке у којима се секу криве S и S'. (Види чл. 67.).

Дефиниција. Система кривих $S - kS' = o$ назива се *прамен* кривих $S = o$ и $S' = o$, а система кривих $lS + l'S' + l''S'' = o$ *мрежа* кривих $S = o, S' = o, S'' = o$;

претпоставља се само, да три стална конична пресека S, S', S'', који одређују мрежу $lS + l'S' + l''S''$, не припадају истом прамену.

Прим. 1. Наћи еквацију кривих другога реда које пролазе кроз две дате тачке A и A' осовине x, и две дате тачке B и B' осовине y. —

Нека је $OA = a$, $OA' = a'$, $OB = b$, $OB' = b'$. Праве AB и $A'B'$ могли бисмо сматрати као једну сингуларну криву другога реда, а координатне осовине као другу неку сингуларну криву другога реда. Према томе би еквација кривих другога реда, које су описане око тачака A, A', B, B', била ово:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1\right)=kxy. \qquad (\alpha)$$

Напом. Види прим. 8. чл. 213.

Прим. 2. Наћи еквацију кривих другога реда које додирују осовину x у тачци (a, o), а осовину y у тачци (o, b).

Ако се претпостави да је у еквацији (α) $a' = a$, $b' = b$, добићемо тражену еквацију

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2=kxy.$$

237. *Наћи заједничке секанте кривих S и S'.*

Сваки пар заједничких секаната могли бисмо сматрати као једну сингуларну криву прамена $S - kS'$. Погодба под којом ће се крива $S - kS' = o$ изметнути у систему двеју правих је међу тим ово:

$$\begin{vmatrix} a - ka' & h - kh' & g - kg' \\ h - kh' & b - kb' & f - kf' \\ g - kg' & f - kf' & c - kc' \end{vmatrix} = o \qquad (1)$$

или

$$\Delta - k\Theta + k^2\Theta' - k^3\Delta' = o. \qquad (2)$$

У тој еквацији су Δ и Δ' дискриминанте еквација̂ $S = o$ и $S' = o$; са Θ је означен овај израз:

$$\Theta = (bc - f^2)\, a' + (ca - g^2)\, b' + (ab - h^2)\, c'$$
$$+ 2\, (gh - af)\, f' + 2\, (hf - bg)\, g' + 2\, (fg - ch)\, h'$$

или

$$\Theta = Aa' + Bb' + Cc' + 2Ff' + 2Gg' + 2Hh'$$

или

$$\Theta = a'\Delta'_a + b'\Delta'_b + c'\Delta'_c + f'\Delta'_f + g'\Delta'_g + h'\Delta'_h,$$

а са Θ' овај израз:

$$\Theta' = A'a + B'b + C'c + 2F'f + 2G'g + 2H'h.$$

Еквација (2) има три корена k', k'', k'''; еквација $S - kS' = o$ представљаће дакле по две праве — по један пар заједничких секаната — кад је $k = k', k'', k'''$. Према томе су еквације тих трију парова секаната ово:

$$S - k'S' = o, \quad S - k''S' = o, \quad S - k'''S' = o.$$

Еквације тих секаната могли бисмо у осталом добити и на овај начин. Елиминираћемо из еквације $S - kS' = o$ и еквације (2) параметар k. Резултанта тих двеју еквација је ова еквација шестог степена:

$$\Delta S'^3 - \Theta S'^2 S + \Theta' S' S^2 - \Delta' S^3 = o. \qquad (3)$$

Јасно је да ће том еквацијом бити представљена сва три пара заједничких секаната.

Кад еквација $S = o$ представља две праве, биће $\Delta' = o$. У том случају преобразиће се еквација (2) у ову квадратну еквацију:

$$\Delta - k\Theta + k^2\Theta' = o; \qquad (4)$$

та еквација има свега два корена, т. ј. кроз тачке у којима праве S' секу криву S могу се повући само два пара заједничких секаната. Еквације тих двају парова добићемо кад из еквације $S - kS' = o$ и еквације (4) елиминирамо k; та еквација биће дакле овог облика:

$$\Delta S'^2 - \Theta S'S + \Theta' S^2 = o.$$

Кад еквација $S' = o$ представља једну двојну праву, биће

$$S' \equiv (ux + vy + w)^2$$

или

$$a'x^2 + 2h'xy + \cdot \cdot \cdot \equiv u^2x^2 + 2uvxy + \cdot \cdot \cdot \quad (5)$$

И у овај мах ће бити $\Delta' = o$, али ће осим тога и минори A', B', C', $\cdot \cdot \cdot$ елемената a', b', c', $\cdot \cdot \cdot$ дискриминанте Δ' бити $= o$. Према томе је јасно да је у овај мах и $\Theta' = o$. — По идентичној релацији (5) види се међу тим да је

$$a' = u^2, \qquad b' = v^2, \qquad c' = w^2$$

$$f' = vw, \qquad g' = wu, \qquad h' = uv,$$

па је с тога

$$\Theta = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv.$$

Ако ту специјалну вредност количине Θ означимо са Σ, преобразиће се еквација (2) у овај мах у ову линеарну еквацију:

$$\Delta - k\Sigma = o;$$

у том случају може се дакле повући само један пар заједничких секаната. Јасно је да су те секанте тангенте криве S у оним двема тачкама у којима ту криву сече права $ux + vy + w$. Еквација тих двеју тангената је

$$\Delta (ux + vy + w)^2 - \Sigma S = o.$$

Напомена. Еквација (2) је веома важна. О њој се бавио ***Lamé*** *(Examen des différentes méthodes)*, па ћемо с тога ту еквацију звати *Ламеова еквација.*

Разнолики примери

1. Праве $y - ax = o$, $y - bx = o$ су асимптоте неке хиперболе која пролази кроз тачку (o, c). Наћи еквацију те хиперболе.

Одг. $abx^2 - (a + b)xy + y^2 = c^2$.

2 Наћи криву другога реда која пролази кроз тачке (o, o), $(1, -2)$, $(o, -1)$ и додирује две праве $2x - y = o$, $x - y - 1 = o$.

Одг. $6x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y = o$.

3. Доказати да се кроз четири тачке могу повући две параболе.

4. Наћи еквацију двеју парабола које дирају осовину x у тачци $(4, o)$, а секу осовину y у тачкама $(o, 2)$, $(o, 8)$.

Одг. $(x \pm y)^2 - 8x - 10y + 16 = o$.

5. Наћи место средиштâ кривих другога реда које дирају осовине у тачкама (a, o), (o, b).

Одг. Место је права $y = \dfrac{b}{a} x$.

6. Доказати да еквација

$$Cf(x, y) - \triangle = o$$

представља асимптоте криве $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + \cdot \cdot \cdot = o$. —

Преместићемо почетак у неку тачку (x', y') праве $y = mx$. Та права секла би криву у двема тачкама, а апсцисе тих тачака су (чл. 219.) корени ове квадратне еквације:

$$(a + 2hm + bm^2)\, x^2 + (f'_{x'} + mf'_{y'})\, x + f(x', y') = o.$$

Ако је права $y = mx$ асимптота, биће оба корена те еквације бескрајна, па је с тога у том случају $a + 2hm + m^2 = o$ и $f'_{x'} + mf'_{y'} = o$. Кад из тих двеју погодбених еквација елиминирамо m, па у резултату напишемо свуда x и y место x' и y', а ми ћемо добити ову еквацију:

$$a(hx + by + f)^2 - 2h(ax + hy + g)(hx + by + f)$$
$$+ b(ax + hy + g)^2 = o;$$

та еквација ће представљати обе асимптоте, а може се написати у овом облику: $Cf(x, y) - \triangle = o$.

7. Све корде које се из неке сталне тачке O коничног пресека виде под правим углом, секу се у једној сталној тачци M нормале која је на коничан пресек повучена у тачци O.

Frégier-ова теорема.

Узећемо тачку O за почетак, тангенту у тачци O за осовину x, а нормалу за осовину y. У тој системи биће еквација криве ово (прим. 5. чл. 228):

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 2y. \qquad (\alpha)$$

Ако се корда PQ те криве из тачке O види под правим углом, биће $OP \perp OQ$, па се с тога те две праве могу представити овом еквацијом:

$$x^2 + \lambda xy - y^2 = o. \qquad (\beta)$$

Помножимо еквацију (β) са a и одузмимо је за тим од (α). У резултату добићемо ово:

$$(2h - a\lambda)\, xy + (a + b)\, y^2 - 2y = o. \qquad (\gamma)$$

Јасно је да ће том еквацијом бити опредељено једно место које пролази кроз тачке у којима се секу криве (α) и (β). Како је

$$(2h - a\lambda)\, xy + (a + b)\, y^2 - 2y \equiv y\, [(2h - a\lambda)\, x + (a + b)\, y - 2],$$

представљаће еквација (γ) тангенту $y = o$ у тачци O и корду PQ; еквација корде PQ је дакле ово:

$$(2h - a\lambda)\, x + (a + b)\, y - 2 = o,$$

а та права одсеца на осовини y део

$$OM = \frac{2}{a + b} = const.;$$

тај одсечак не зависи од параметра λ, а то смо и тврдили.

Напом. Стална тачка M назива се *Frégier-ова тачка.*

8. Нека права што пролази кроз тачку $O\,(x', y')$ сече криву $S = o$ у тачкама A и B. Наћи дужину одсечака OA и OB. —

Са θ ћемо означити угао који права затвара са осовином x; ма коју тачку те праве моћи ћемо аналитички представити овим двема еквацијама:

$$x = x' + \varrho \cos\theta, \quad y = y' + \varrho \sin\theta.$$

Ако у еквацији $S = o$ сменимо x и y са $x' + \varrho cos\theta$ и $y' + \varrho sin\theta$, добићемо ову квадратну еквацију:

$$(a cos^2\theta + 2h cos\theta sin\theta + b sin^2\theta)\, \varrho^2$$
$$+ 2\, [(ax' + hy' + g)\, cos\theta + (hx' + by' + f)\, sin\theta]\, \varrho + f\,(x', y') = o.$$

Бројеви којима су одмерени одсечци OA и OB биће корени ове квадратне еквације:

9. Из неке тачке O повући ћемо две секанте OAB и OCD. Прва секанта сече криву другога реда у тачкама A и B, а друга у тачкама C и D. Правац тих секаната не ћемо мењати, а мењаћемо положај тачке O. Доказати да напремица $OA \cdot OB : OC \cdot OD$ не зависи од положаја тачке O.

Њутнова теорема.

Ако прва секанта затвара угао са θ са осовином x, а друга угао θ', биће (види прим. 8.)

$$OA \cdot OB = f(x', y')/(a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta),$$

$$OC \cdot OD = f(x', y')/(a\cos^2\theta' + 2h\cos\theta'\sin\theta' + b\sin^2\theta').$$

Према томе је

$$\frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \frac{a\cos^2\theta' + 2h\cos\theta'\sin\theta' + b\sin^2\theta'}{a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta};$$

напремица $OA \cdot OB : OC \cdot OD$ не зависи од положаја тачке O, а не мења се докле год се правци θ и θ' не мењају. Кад бисмо дакле напоредо са OAB и OCD из неке тачке O' повукли две секанте $O'A'B'$ и $O'C'D'$ од којих прва криву сече у A' и B', а друга у тачкама C' и D', било би

$$OA \cdot OB : OC \cdot OD = O'A' \cdot O'B' : O'C' \cdot O'D'.$$

10. Доказати да је напремица $OA \cdot OB : OC \cdot OD$ равна напремици квадрата оних полудијаметара, који иду напоредо са секантама OAB и OCD.

11. Доказати да је напремица двеју тангената које су повучене из неке тачке на коничан пресек равна напремици полудијаметара који иду напоредо са тим двема тангентама.

12. Нека крива другога реда сече стране троугла ABC у тачкама a и a', b и b', c и c'. Доказати да је

$$Ba \cdot Ba' \cdot Cb \cdot Cb' \cdot Ac \cdot Ac' = Ca \cdot Ca' \cdot Ab \cdot Ab' \cdot Bc \cdot Bc'. \quad (\alpha)$$

Carnot *(Géométrie de position).*

Са α, β, γ ћемо означити полудијаметре који иду напоредо са странама троугла. Биће

$$Ba \cdot Ba' : Bc \cdot Bc' = \alpha^2 : \gamma^2,$$

$$Ac \cdot Ac' : Ab \cdot Ab' = \gamma^2 : \beta^2,$$

$$Cb \cdot Cb' : Ca \cdot Ca' = \beta^2 : \alpha^2.$$

Кад помножимо ове сразмере, добићемо (α).

13. Две тачке O и O' спојићемо правима са теменима датог троугла ABC. Тачке a и a', b и b', c и c' у којима те праве секу супротне стране троуглове леже на једном коничном пресеку.

Steiner *(Annales de Gergonne, t. XIX.).*

По једном познатом правилу (прим. 2. чл. 74.) биће

$$Ba \cdot Cb \cdot Ac = - Ca \cdot Ab \cdot Bc,$$

$$Ba' \cdot Cb' \cdot Ac' = - Ca' \cdot Ab' \cdot Bc'.$$

Кад се помноже те две релације добићемо поменути Карнотов образац (α), т. ј. и т. д.

14. X и Y су линеарне функције координата x и y. Шта представљају еквације

$$X^2 + Y^2 = 1,\ X^2 - Y^2 = 1,\ Y^2 + X = o\,?$$

15. Сви конични пресеци који пролазе кроз тачке у којима се секу две равностране хиперболе јесу равностране хиперболе.

16. Наћи еквацију параболе која дира осовину x у тачци (a, o), а осовину y у тачци (o, b).

Одг. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1.$

Напом. Ту параболу ћемо у идућа два три примера звати «парабола (a, b)».

17. Наћи погодбу под којом ће права

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

бити тангента параболе (a, b). —

У тачкама у којима дата права сече параболу (a, b) је

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2.$$

Та еквација је квадратна с обзиром на непознату $\sqrt{\frac{x}{y}}$. Корени њезини биће једнаки ако је

$$\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{ab}\,;$$

одатле је

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}=1,$$

а то је уједно и тражена погодба.

18. Наћи погодбу под којом ће изотропна права

$$y=-x(\cos\omega+i\sin\omega)+c$$

бити тангента параболе (a, b).

Одг. Погодба је ово:

$$c=ab/(a+b\cos\omega-ib\sin\omega).$$

19. Наћи осовину параболе (a, b).

Одг. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2+2ab\cos\omega}=o.$

20. Наћи погодбу под којом ће права

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

додиривати криву

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2=2kxy.$$

Одг. Погодба је ово:

$$k=2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{n}\right).$$

21. Наћи место средишта коничних пресека који пролазе кроз четири дате тачке A, A', B, B'.

Еквацију коничних пресека што пролазе кроз тачке A, A', B, B' можемо написати у овом облику (прим. 8. чл. 213.):

$$bb'x^2+2\lambda xy+aa'y^2-bb'(a+a')x-aa'(b+b')y+aa'bb'=o. \quad (\alpha)$$

Средиште те криве је одређено овим двема еквацијама:

$$2\lambda x+2aa'y-aa'(b+b')=o,\quad 2bb'x+2\lambda y-bb'(a+a')=o.$$

Кад из тих двеју еквација елиминирамо λ, добићемо тражено место. Ево његове еквације:

$$2bb'x^2-2aa'y^2-bb'(a+a')x+aa'(b+b')y=o, \quad (\beta)$$

а то је еквација једног коничног пресека који пролази кроз почетак координатне системе, а то ће рећи кроз тачку у којој се секу две супротне стране AA' и BB' тетрастигмата $AA'BB'$; та тачка је једна дијагонална тачка тетрастигмата $AA'BB'$. Та крива сече осовине у тачкама $\left(\frac{a+a'}{2}, o\right)$ и $\left(o, \frac{b+b'}{2}\right)$, она другим речима пролази кроз средине дужи AA' и BB'. До сличних резултата дошли бисмо и да смо били узели за осовине координатне системе ма који између осталих двају парова супротних страна тетрастигмата $AA'BB'$. Крива (β) пролазила би дакле кроз три дијагоналне тачке тетрастигмата и кроз средине његових шест страна, па се с тога та крива назива *коничан пресек деветорих тачака (nine-point conic).*

Напом. Ако је система ортогонална и ако је $aa' = -bb'$, онда је место (β) средиштâ један круг, а конични пресеци (α) су равностране хиперболе. Супротне стране тетрастигмата $AA'BB'$, као специјалне криве прамена (α) равностраних хипербола, секле би се у овај мах под правим углом. Према томе би темена A, A', B, B' тако лежала, да би свако теме било ортоцентар оног троугла који граде остали три темена, а подножја висина тог троугла биле би дијагоналне тачке тог специјалног тетрастигмата. Дакле, *ако је B' ортоцентар троугла $AA'B$, онда подножја висинâ, средине странâ AA', $A'B$, BA и средине правих AB', $A'B'$, BB' које спајају ортоцентар са теменима A, A', B леже на једном кругу.* Тај круг назива се *круг деветорих тачака.* Еквација тог круга је ово:

$$2(x^2 + y^2) - (a + a')x - (b + b')y = o. - \qquad (\gamma)$$

Ко хоће да се још боље упозна са теоријом коничних пресека деветорих тачака, тај нека чита ***Clifford's,*** *Mathematical Papers, p.* 579.

22. Кад конични пресеци пролазе кроз четири сталне тачке, онда дијаметри који су коњуговани с датим правцем пролазе кроз неку сталну тачку.

Lamé.

Ако узмемо да је (α) у прим. 21. еквација коничних пресека који пролазе кроз четири тачке, биће тачка P, у којој се секу дијаметри који су коњуговани с правцем m, одређена овим двема еквацијама:

$$y + mx = o, \quad 2bb'x + 2maa'y - bb'(a + a') - maa'(b + b') = o.$$

Напом. Место тачака P је место средишта коничних пресека који су описани око четири дате тачке.

23. Дат је један прамен кривих S и S' другога реда. Доказати да поларе неке дате тачке пролазе кроз једну сталну тачку.

24. Неку праву $ux + vy + w = o$ сматраћемо као полару свију кривих прамена $S - kS'$. Наћи место полова те праве.

Одг. Место је коничан пресек

$$\begin{vmatrix} ax + hy + g & a'x + h'y + g' & u \\ hx + by + f & h'x + b'y + f' & v \\ gx + fy + c & g'x + f'y + c' & w \end{vmatrix} = o.$$

25. Из неке тачке P спустићемо управне PK и PL на две сталне праве; наћи место тачака P кад KL пролази кроз једну сталну тачку.

26. Дата је основа и дат је збир страна једног троугла. Наћи место средишта уписаног круга.

27. Дата је основа и дат је збир страна једног троугла. Наћи место центројида.

28. Наћи место средишта кругова који додирују неку сталну праву и пролазе кроз неку сталну тачку.

29. Наћи погодбу под којом ће осовине кривих

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o,$$

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = o$$

бити паралелне.

Одг. Погодба је ово: $h'(a - b) = h(a' - b')$.

30. Доказати да је

$$\Theta = \begin{vmatrix} a' & h & g \\ h' & b & f \\ g' & f & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h' & g \\ h & b' & f \\ g & f' & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h & g' \\ h & b & f' \\ g & f & c' \end{vmatrix}.$$

ОДЕЉАК ПЕТИ

Криве друге врсте

238. Општа еквација кривих друге врсте је ово:

$$Au^2 + 2Huv + Bv^2 + 2Gu + 2Fv + C = o.$$

У тој еквацији има свега пет параметара. Ту еквацију бележићемо често са $\varphi(u, v) = o$, или са $\Sigma = o$ или са $(A, B, C, F, G, H)(u, v, 1)^2 = o$, а дискриминанту њезину са **D**:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}.$$

239. *Наћи еквацију тачке у којој тангента* (u', v') *дира криву* $(A, B, C, F, G, H)(u, v, 1)^2 = o$.

Еквацију додирне тачке наћи ћемо по *Барнсајдовом* методу. — Узмимо две тангенте (u', v') и (u'', v'') дате криве. Еквација

$$A(u-u')(u-u'')+2H(u-u')(v-v'')+B(v-v')(v-v'')$$
$$=Au^2+2Huv+Bv^2+2Gu+2Fv+C \quad (1)$$

представља тачку у пресеку тангената (u', v') и (u'', v''). Та еквација је на име линеарна; даље, кад се у њој координате u и v смене са u' и v' или са u'' и v'', онда ће се видети да су изрази који стоје на десној и на левој страни те еквације $\equiv o$; еквација (1) представља дакле једну тачку у којој се секу праве (u', v') и (u'', v''), а то смо и тврдили. Узмимо сад да је $u' = u''$, $v' = v''$. У том случају ће еквација (1) бити еквација додирне тачке; еквација тачке у којој права (u', v') дира дату криву биће дакле ово:

$$A(u-u')^2+2H(u-u')(v-v')+B(v-v')^2$$
$$=Au^2+2Huv+Bv^2+2Gu+2Fv+C,$$

а та еквација, кад се мало трансформује (в. чл. 228.), може се написати у овом облику:

$$Au'u+H(v'u+u'v)+Bvv'+G(u+u')+F(v+v')+C=o \quad (2)$$

или

$$(Au'+Hv'+G)u+(Hu'+Bv'+F)v+Gu'+Fv'+C=o. \quad (3)$$

Напомена. Кад бисмо општу квадратну еквацију $\varphi(u, v) = o$ помоћу линеарне јединице $w = 1$ преобразили у хомогену квадратну еквацију, онда бисмо (чл. 180.) еквацију додирне тачке могли и овако написати:

$$u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'} = o. \quad (4)$$

Та еквација преобразила би се непосредно у еквацију (3), чим бисмо у њој сменили w и w' са 1.

240. *Наћи погодбу под којом ће тачка $ux+vy+z=o$ лежати на кривој $\varphi(u, v) = o$.*

Први метод. Елиминираћемо v из еквације $ux+vy+z = o$ и еквације $\varphi(u, v) = o$. Тим путем добићемо ову квадратну еквацију:

$$(Ay^2-2Hxy+Bx^2)u^2+2(Gy^2-Hyz-Fyx+Bxz)u$$
$$+(Cy^2-2Fyz+Bz^2)=o.$$

Ова еквација има два корена u' и u''; то значи да се из дате тачке могу повући две тангенте на криву

$\varphi(u, v)$. Кад та тачка лежи на кривој, онда се поменуте две тангенте поклапају; у том случају биће корени квадратне еквације једнаки, т. ј. биће

$$(Ay^2 - 2Hxy + Bx^2)(Cy^2 - 2Fyz + Bz^2)$$
$$= (Gy^2 - Hyz - Fyx + Bxz)^2.$$

Та погодбена релација може се и овако написати:

$$(BC-F^2)\,x^2+(CA-G^2)\,y^2+(AB-H^2)\,z^2+2\,(GH-AF)\,yz$$
$$+2\,(HF-BG)\,zx+2\,(FG-CH)\,xy=o.$$

Коефицијенти који у овој еквацији стоје уз $x^2, y^2, z^2,\ldots$ јесу минори елемената $A, B, C,\ldots$ дискриминанте $\mathbf{D}$; ми ћемо их обележити са $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},\ldots$, па ћемо с тога погодбу под којом тачка (x, y) лежи на кривој $\varphi(u, v)$ моћи написати и у овом облику:

$$\mathfrak{a}x^2 + \mathfrak{b}y^2 + \mathfrak{c}z^2 + 2\mathfrak{f}yz + 2\mathfrak{g}zx + 2\mathfrak{h}xy = o. \quad (5)$$

Ова еквација је, као што ћемо одмах видети, врло важна. Јасно је да ће се параметри $x : y : z$ у еквацији дате тачке мењати кад се та тачка креће по равни; јасно је даље и то, да ће та тачка бити тачка криве кадгод су параметри $x : y : z$ међу собом везани релацијом (5). *Еквација (5) биће дакле пунктуална еквација криве.* По тој еквацији види се непосредно, како се некакав коничан пресек као крива друге врсте може аналитички представити као крива другога реда.

Други метод. Тачка $ux + wy + z = o$ биће тачка у којој нека права (u', v') дира криву, кад су коефицијенти x, y, z сразмерни са коефицијентима који се у еквацији (3) јављају, т. ј. кад је

$$\frac{Au' + Hv' + G}{x} = \frac{Hu' + Bv' + F}{y} = \frac{Gu' + Fv' + C}{z}.$$

Ако заједничку вредност ових количника означимо са μ, биће

$$Au' + Hv' + G = \mu x,$$

$$Hu' + Bv' + F = \mu y,$$

$$Gu' + Fv' + C = \mu z.$$

Како међу тим тангента (u', v') пролази кроз дату тачку, то ће бити и

$$u'x + v'y + z = o.$$

Последње четири линеарне еквације постоје дакле кад права (u', v') дира дату криву у датој тачци. Кад из тих еквација елиминирамо непознате параметре u', v', μ, добићемо ову погодбу:

$$\begin{vmatrix} A & H & G & x \\ H & B & F & y \\ G & F & C & z \\ x & y & z & o \end{vmatrix} = o; \qquad (6)$$

та, *количинама* x, y, z *заоквирена детерминанта*, била би већ пунктуална еквација дате криве.

Напомена. Дата еквација $ux + vy + z = o$ представља тачку $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$. Ако је $z = 1$, онда ће се та еквација преобразити у еквацију $ux + vy + 1 = o$, а погодба под којом та тачка (x, y) лежи на коничном пресеку била би ово:

$$\begin{vmatrix} A & H & G & x \\ H & B & F & y \\ G & F & C & 1 \\ x & y & 1 & o \end{vmatrix} = o. \qquad (6^*)$$

То би дакле била пунктуална, нехомогена еквација криве.

Прим. Преобразићемо пунктуалну еквацију $S = o$ неког коничног пресека у тангенцијалну еквацију $\Sigma = o$, а ову у пунктуалну еквацију $\mathbf{S} = o$. Доказати да је

$$\mathbf{S} = \Delta s.$$

241. *Наћи еквацију двеју тачака у којима права* (u', v') *сече криву* $Au^2 + 2Huv + Bv^2 + 2Gu + 2Fv + C = o$.

Узмимо ма где на датој правој једну тачку P и повуцимо из те тачке *ма у ком правцу* једну праву (u, v). Те две праве одређују потпуно један прамен; теме тог прамена је тачка P, а координате ма ког зрака тога прамена су ово:

$$u'' = \frac{u' + \lambda u}{1 + \lambda}, \quad v'' = \frac{v' + \lambda v}{1 + \lambda}.$$

Ако тим вредностима координата u'' и v'' сменимо u и v у еквацији $Au^2 + 2Huv + \cdot \cdot \cdot = o$, добићемо једну еквацију која се може овако написати:

$$\Sigma\lambda^2 + 2\Pi\lambda + \Sigma' = o; \qquad (7)$$

у тој еквацији је

$$\Sigma = Au^2 + 2Huv + Bv^2 + 2Gu + 2Fv + C,$$

$$\Sigma' = Au'^2 + 2Hu'v' + Bv'^2 + 2Gu' + 2Fv' + C,$$

$$\Pi = Au'u + H(v'u + u'v) + Bv'v + G(u + u') + F(v + v') + C.$$

Корени λ и λ' квадратне еквације (7) јесу оне вредности параметра λ, које у прамену одређују две тангенте што су на криву повучене из темена P праменова. Те две тангенте поклапаће се кад тачка P лежи на кривој. У том случају ће бити $\lambda = \lambda'$, а погодба под којом су корени еквације (7) једнаки је ово:

$$\Pi^2 - \Sigma\Sigma' = o \qquad (8)$$

или

$$[Au'u+H(v'u+u'v)+Bv'v+G(u+u')+F(v+v')+C]^2$$
$$=(Au^2+2Huv+Bv^2+2Gu+2Fv+C)$$
$$\times(Au'^2+2Hu'v'+Bv'^2+2Gu'+2Fv'+C). \qquad (9)$$

Кад је дакле тачка P било једна, било друга од оних двеју тачака у којима дата права (u', v') сече дату криву, онда ће координате u и v неке — ма које — праве која кроз P пролази међу собом бити везане релацијом (9); та релација (9) је дакле еквација оних двеју тачака у којима права (u', v') сече криву $\Sigma = o$. Том релацијом је уједно обележена погодба под којом се две праве (u', v') и (u, v) секу на кривој.

Прим. 1. Наћи еквацију двеју тачака у којима права у бескрајности сече криву $\Sigma = o$.

Одг. $\mathfrak{b}u^2 - 2\mathfrak{h}uv + \mathfrak{a}v^2 = o.$

Прим. 2. Помоћу линеарне јединице преобразићемо еквацију $\Sigma = o$ у хомогену еквацију $\varphi(u, v, w) = o$. Доказати да се две тачке у којима нека права сече криву могу представити овом еквацијом:

$$(u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'})^2 - 4\varphi(u, v, w)\,\varphi(u', v', w') = o. \qquad (\alpha)$$

Та иста погодба може се написати у другом једном лепом аналитичком облику, који ћемо добити овако.

Нека је

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + \cdots = o$$

пунктуална еквација коничног пресека. Ако се праве (u, v, w) и (u', v', w') секу на кривој у тачци (x', y', z'), онда ће полара тачке (x', y', z') пролазити кроз тачку (x', y', z'). С тога ће у опште постојати једна оваква идентична релација:

$$xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} \equiv 2\lambda(ux + vy + wz) + 2\lambda'(u'x + v'y + w'z),$$

а по томе се види да је

$$ax' + hy' + gz' - \lambda u - \lambda' u' = o,$$
$$hx' + by' + fz' - \lambda v - \lambda' v' = o,$$
$$gx' + fy' + cz' - \lambda w - \lambda' w' = o.$$

Како уз то и праве (u, v, w) и (u', v', w') пролазе кроз тачку (x', y', z'), то ће бити и

$$ux' + vy' + wz' = o,$$

$$u'x' + v'y' + w'z' = o.$$

Кад из тих пет последњих екваци‌ја елиминирамо параметре $x', y', z', \lambda, \lambda'$, а ми ћемо добити тражену погодбу:

$$R = \begin{vmatrix} a & h & g & u & u' \\ h & b & f & v & v' \\ g & f & c & w & w' \\ u & v & w & o & o \\ u' & v' & w' & o & o \end{vmatrix} = o. \qquad (\beta)$$

Лако би се погодба (α) аналитички могла извести из погодбе (β).— Помножимо само елементе првих трију колона са $\frac{1}{2}\varphi'_u$, $\frac{1}{2}\varphi'_v$, $\frac{1}{2}\varphi'_w$, а елементе четврте колоне са $-\triangle$; саберимо сад по врстама елементе првих трију колона и додајмо их по врстама елементима четврте колоне. Прва три елемента четврте колоне биће $= o$, јер је — као што би се лако могло доказати —

$$\frac{1}{2}(a\varphi'_u + h\varphi'_v + g\varphi'_w) = \triangle u,$$

$$\frac{1}{2}(h\varphi'_u + b\varphi'_v + f\varphi'_w) = \triangle v,$$

$$\frac{1}{2}(g\varphi'_u + f\varphi'_v + c\varphi'_w) = \triangle w.$$

Даље, помножићемо елементе првих трију колона са $\frac{1}{2}\varphi'_{u'}$, $\frac{1}{2}\varphi'_{v'}$, $\frac{1}{2}\varphi'_{w'}$, а елементе пете колоне са $-\triangle$, сабраћемо по врстама елементе првих трију колона и додаћемо их елементима пете колоне. — Узмимо сад да је

$$P = u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'} = u'\varphi'_u + v'\varphi'_v + w'\varphi'_w.$$

Кад се има у виду да смо целу детерминанту R помножили са $\triangle^2$, биће јасно да је

$$R\triangle^2 = \begin{vmatrix} a & h & g & o & o \\ h & b & f & o & o \\ g & f & c & o & o \\ u & v & w & \varphi(u, v, w) & \frac{1}{2}P \\ u' & v' & w' & \frac{1}{2}P & \varphi(u', v', w') \end{vmatrix}$$

или

$$R\triangle^2 = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi(u, v, w) & \frac{1}{2}P \\ \frac{1}{2}P & \varphi(u', v', w') \end{vmatrix}$$

или

$$4R\triangle = 4\varphi(u, v, w)\,\varphi(u', v', w') - (u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'})^2,$$

а по томе се види да су погодбе (α) и (β) заиста идентичне.

242. Праве (u', v') и (u, v) које одређују један прамен и две тангенте криве $\Sigma = o$ које се из темена P тога прамена гранају имају једну одређену двојну напремицу. Ако праве (u', v') и (u, v) узмемо за основне зраке прамена, биће координате поменутих двеју тангената ово:

$$\frac{u' + \lambda u}{1 + \lambda}, \quad \frac{v' + \lambda v}{1 + \lambda}; \quad \frac{u' + \lambda' u}{1 + \lambda'}, \quad \frac{v' + \lambda' v}{1 + \lambda'}.$$

Према томе ће двојна напремица имати свега ове две различите вредности:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

и

$$\alpha' = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

а то ће рећи, да су (чл. 231.) бројеви који представљају двојне напремице поменутих четирију зракова корени ове еквације:

$$(\alpha + 1)^2 \Sigma\Sigma' - 4\Pi^2\alpha = o. \qquad (10)$$

Узмимо сад да права (u', v') не мења свој положај и повуцимо из свију тачака те праве по две тангенте на криву. Тим путем добићемо на правој (u', v') бескрајно много прамена, а у сваком том прамену по три зрака — сталну праву (u', v') и две тангенте. Јасно је да ће се у сваком од тих прамена моћи наћи један једини зрак (u, v) који ће са остала три зрака тог прамена — са сталном правом и с двема тангентама — имати одређену двојну напремицу α. Ако се дакле претпостави да је $\alpha = const.$, онда ће нам јасно бити, да ће обвојница зракова (u, v) бити једна крива друге врсте, која је аналитички представљена еквацијом (10); свакој специјалној вредности параметра α одговара по једна таква крива друге врсте, а између тих кривих има једна на коју нарочиту пажњу треба обратити. Ту специјалну криву добићемо кад претпоставимо да је $\alpha = -1$. У том случају ће се крива (10) изметнути у једну (двојну) тачку, а еквација те тачке је

$$\Pi = o$$

или

$$Au'u + H(v'u + u'v) + Bv'v + G(u + u') \\ + F(v + v') + C = o. \qquad (11)$$

Ми знамо међу тим да ће под погодбом $\alpha = -1$ поменуте две тангенте хармонијски лежати према зрацима (u', v') и (u, v). Према томе је јасно *да је обвојница правих (u, v), које су с правом (u', v') хармонијски коњуговане према двема тангентама што су ма из које тачке праве (u', v') повучене на криву, једна тачка.* Права (u', v') је *полара,* а тачка (11) *пол* праве $(u' v')$. — Праве (u', v') и (u, v) називају се и *коњуговане праве* или *хармонијске поларе*; према томе ће (чл. 179.) *обвојница хармонијских полара праве (u', v') бити пол праве (u', v').*

Напомене. 1-во. Пол праве у бескрајности је ово:

$$Gu + Fv + C = o.$$

То је еквација средишта, јер поларе свију тачака у бескрајности пролазе кроз средиште. Према томе су пунктуалне координате средишта ово (чл. 216.)

$$x = \frac{G}{C}, \quad y = \frac{F}{C}.$$

2-го. Кад бисмо помоћу линеарне јединице преобразили еквацију φ (u, v) $= o$ у хомогену еквацију φ $(u, v, w) = o$, онда бисмо еквацију пола могли овако написати:

$$u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'} = o.$$

Примери

1. Доказати да криве Σ и Σ' имају *четири* заједничке тангенте. —

Дефиниција. Тачке у којима се секу заједничке тангенте кривих Σ и Σ' зову се по Шалу *(Sections coniques) омбиликалним тачкама.* Ако се две заједничке тангенте кривих Σ и Σ' секу у омбиликалној тачци A, а остале две у омбиликалној тачци B, онда се каже да су тачке A и B *коњуговане омбиликалне тачке.*

2. Доказати да две криве друге врсте имају три пара омбиликалних тачака.

Напом. Свака омбиликална тачка је једно теме оног тетраграма који одређују заједничке тангенте.

3. Доказати да две криве Σ и Σ' свакад имају један пар реалних омбиликалних тачака.

Кад криве имају четири реалне тангенте, онда су сва три пара омбиликалних тачака реална; кад криве имају четири имагинарне тангенте, онда су реалне оне две омбиликалне тачке, које леже у пресеку двеју коњуговано имагинарних тангената; а кад криве имају две реалне и две имагинарне тангенте, онда су реалне оне две омбиликалне тачке које постају у пресеку двеју реалних и двеју коњуговано имагинарних тангената.

4. Наћи координате асимптотâ криве $\Sigma = o$. —

Преобразићемо дату еквацију помоћу линеарне јединице у хомогену еквацију, па ћемо разрешити ове две еквације:

$$\varphi\ (u, v, w) = o, \ \varphi'_w = o$$

с обзиром на непознате $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$.

5. Наћи погодбе под којима ће еквација $\Sigma = o$ представљати елипсе, хиперболе или параболе.

6. Са ω ћемо означити угао координатне системе. Наћи погодбу под којом ће еквација $\Sigma = o$ представљати равнострану хиперболу.

Одг. $BC - F^2 + CA - G^2 - 2(FG - CH) \cos \omega = o.$

7. Наћи погодбе под којима ће у косој системи еквација $\Sigma = o$ представљати један круг.

Одг. $BC - F^2 = CA - G^2 = \frac{FG - CH}{\cos \omega}.$

8. Наћи погодбу под којом ће коничан пресек $\Sigma = o$ додиривати осовину y.

Кад у еквацији

$$Au^2 + 2Huv + Bv^2 + 2Gu + 2Fv + C = o$$

сменимо v нулом, $v = o$, добићемо квадратну еквацију

$$Au^2 + 2Gu + C = o. \qquad (\alpha)$$

Корени u' и u'' те еквације одређују оне две тангенте дате криве, које иду напоредо са осовином y; у пунктуалним координатама биле би на име еквације тих двеју правих ово:

$$u'x + o \cdot y + 1 = o, \quad u''x + o \cdot y + 1 = o.$$

Кад коничан пресек дира осовину y, онда је један корен бескрајан, а погодба под којом ће један корен еквације (α) бити бескрајан јесте ово: $A = o.$

9. Доказати да ће осовина x под погодбом $B = o$ бити тангента криве $\Sigma = o.$

10. Наћи еквације коничних пресека који дирају координатне осовине.

Одг. $2Huv + 2Gu + 2Fv + C = o.$

11. Наћи еквацију коничних пресека који су уписани у тетраграм $AA'BB'$.

За осовине координатне системе ћемо узети стране AA' и BB'; почетак координатне системе означићемо са O. Нека је $OA = a$, $OA' = a'$, $OB = b$, $OB' = b'$. Еквације страна тетраграмових биће

$$x = o, \; y = o, \; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = o, \; \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 = o.$$

Ако су u', v' тангенцијалне координате стране AB, а u'', v'' тангенцијалне координате стране $A'B'$, биће еквација коничних пресека који су уписани у тетраграм ово:

$$(u - u')(v - v'') + \lambda (u - u'')(v - v') = o. \qquad (\alpha)$$

То се види по овоме. Кад бисмо развили израз на левој страни, видели бисмо да у њему нема чланова у којима би се јављало u^2 и v^2, а то значи, да су осовине координатне системе — две стране AA' и BB' тетраграмове — тангенте криве (α).

Даље, кад бисмо у изразу с леве стране еквације (α) сменили u и v са u' и v' или са u'' и v'', видели бисмо да је тај израз $\equiv o$, а то значи, да су и остале две стране тетраграма тангенте криве (α). Како је еквација (α) квадратна и како у њој имамо један неодређен параметар λ, то је јасно да та еквација *de facto* представља коничне пресеке који су уписани у тетраграм $AA'BB'$, као што смо и тврдили.

Како је $u' = -\frac{1}{a}$, $v' = -\frac{1}{b}$ и т. д. то ћемо еквацију (α) моћи и овако написати:

$$\left(u + \frac{1}{a}\right)\left(v + \frac{1}{b'}\right) + \lambda\left(u + \frac{1}{a'}\right)\left(v + \frac{1}{b}\right) = o$$

или

$$(1 + \lambda)\,uv + \left(\frac{1}{b'} + \frac{\lambda}{b}\right)u + \left(\frac{1}{a} + \frac{\lambda}{a'}\right)v + \frac{1}{ab'} + \frac{\lambda}{a'b} = o. \quad (\beta)$$

12. Место средишта коничних пресека који су уписани у један тетраграм јесте једна права која пролази кроз средине дијагонала.

Њутнова теорема.

Еквација средишта коничног пресека (β) (прим. 11.) је ово:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b'} + \frac{\lambda}{b}\right)u + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{\lambda}{a'}\right)v + \frac{1}{ab'} + \frac{\lambda}{a'b} = o$$

или

$$\left(\frac{u}{2b'} + \frac{v}{2a} + \frac{1}{ab'}\right) + \lambda\left(\frac{u}{2b} + \frac{v}{2a'} + \frac{1}{a'b}\right) = o.$$

Та еквација представља један низ тачака. Носиљу тог низа, т. ј праву на којој леже средишта, добићемо кад разрешимо ове две еквације:

$$\frac{u}{2b'} + \frac{v}{2a} + \frac{1}{ab'} = o, \quad \frac{u}{2b} + \frac{v}{2a'} + \frac{1}{a'b} = o.$$

Према томе су координате оне праве на којој леже средишта ово:

$$u = \frac{2\,(b - b')}{a'b' - ab}, \quad v = \frac{2\,(a - a')}{a'b' - ab}.$$

Еквација те праве је дакле у пунктуалним координатама ово:

$$2\,(b - b')\,x + 2\,(a - a')\,y + a'b' - ab = o,$$

а та права пролази кроз средине дијагонала̂ тетраграмових.

Дефин. Права која спаја средине дијагонала̂ једнога тетраграма назива се *њутнијанка*.

13. Σ и Σ' су две криве друге врсте. Шта представља еквација $\Sigma - k\Sigma' = o$?

Одг. Еквација $\Sigma - k\Sigma' = o$ представља све криве које додирују заједничке тангенте кривих Σ и Σ'.

Дефин. Система кривих $\Sigma - k\Sigma' = o$ назива се *тангенцијалан прамен* коничних пресека Σ и Σ', а система кривих $l\Sigma + l'\Sigma' + l''\Sigma'' = o$ *тангенцијална мрежа* коничних пресека Σ, Σ', Σ''; претпоставља се само да ти конични пресеци Σ, Σ', Σ'' не припадају истом прамену.

14. Доказати да еквација $\Sigma = o$ представља две тачке кад је дискриминанта те еквације $= o$. — Кад ће еквација $\Sigma = o$ представљати једну двојну тачку?

15. Наћи омбиликалне тачке коничних пресека Σ и Σ'.

16. Неку тачку $ux + vy + z = o$ сматраћемо као пол свију кривих прамена $\Sigma - k\Sigma'$. Наћи обвојницу полара те тачке.

◆

КЊИГА ПЕТА

ГЛАВНИЈЕ ОСОБИНЕ ЕЛИПСЕ, ХИПЕРБОЛЕ И ПАРАБОЛЕ.

ОДЕЉАК ПРВИ

О елипси

243. Претпоставићемо да су осовине координатне системе уједно и осовине елипсе. У тој системи биће, као што знамо, еквација елипсе овог облика:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=o. \qquad (1)$$

Помоћу те еквације одредили смо већ у један мах (чл. 31.) облик елипсе.

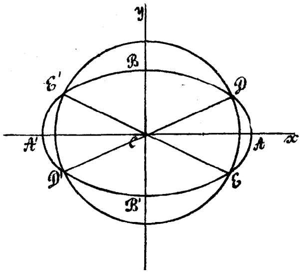
Означимо сад са P неку тачку дате елипсе, а са C средиште њезино. Да бисмо сазнали како се мења PC, преобразићемо помоћу образаца $x=\rho cos\theta$, $y=\rho sin\theta$ еквацију (1) у поларну еквацију елипсе. Том трансформацијом бисмо добили еквацију

$$\frac{\rho^2 cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2 sin^2\theta}{b^2}-1=o,$$

а та се еквација може и овако написати:

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2sin^2\theta+b^2cos^2\theta}=\frac{a^2b^2}{a^2-(a^2-b^2)\,cos^2\theta}. \qquad (2)$$

По тој еквацији види се да ρ по апсолутној вредности својој расте кад именитељ $a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2\theta$ опада. Именитељ је најмањи кад је $\theta = o$, т. ј. потег максимум је $\rho = \pm a$, а то значи *да од свију тачака елипсиних најдаље од средишта леже темена A и A'*. Кад се θ мења од o до 90°, онда именитељ расте, т. ј. потег ρ је све мањи и мањи; посебном углу $\theta = 90^\circ$ одговара потег минимум $\rho = \pm b$, а то значи *да су од свију тачака елипсиних најближа средишту темена B и B'*. —



Сл. 106.

Кад бисмо у еквацији (2) сменили θ овим двема вредностима: θ' и $180^\circ - \theta'$, видели бисмо да потег ρ има две једнаке вредности, т. ј. *дијаметри, који затварају једнаке угле са једном осовином, јесу и сами једнаки*. На основу те теореме могли бисмо геометријском конструкцијом наћи осовине кад знамо средиште. Треба око средишта описати један круг који сече елипсу у четири реалне тачке (полупречник круга треба да буде мањи од половине велике, а већи од половине мале осовине). Тим путем добили бисмо крајеве D и D', E и E' једнаких дијаметара, а с њима и дијаметре DD', EE'. Праве AA' и BB' које полове угле између тих дијаметара биле би осовине елипсе.

Узмимо сад једно теме, н. пр. теме A' за почетак, велику осовину за осовину x, а праву која пролази кроз A' и иде напоредо са малом осовином за осовину y неке ортогоналне координатне системе. У тој системи добићемо еквацију елипсе на овај начин: просто ћемо сменити x у еквацији (1) дате елипсе са $x - a$. Биће дакле у поменутој системи еквација елипсе ово:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} = o$$

или

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

или, ако $\frac{b^2}{a}$ означимо са p,

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2. \qquad (3)$$

Напомена. Поларна еквација (2) могла би се и овако написати:

$$\varrho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 cos^2\theta}; \qquad (4)$$

у тој еквацији је

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Количина e назива се *ексцентрицитет* елипсе.

Прим. Некакав круг сече елипсу у четири тачке A, B, C, D. Доказати да ће праве што спајају две и две између поменуте четири тачке једнако бити нагнуте према једној осовини елипсе.

Узмимо да се праве AB и CD секу у тачци O. На основу Њутнове теореме може се доказати (прим. 10. стр. 530.) да је напремица $OA \cdot OB : OC \cdot OD$ равна напремици квадрата оних полудијаметара, који иду напоредо са секантама OAB и OCD. Како у овај мах тачке A, B и C, D леже уједно и на кругу, биће

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD;$$

с тога ће полудијаметри који иду напоредо са секантама OAB и OCD бити једнаки, а ти полудијаметри су једнако нагнути према осовинама, т. ј. и т. д.

244. *Лепшу слику о облику елипсе добићемо на овај начин. Описаћемо око средишта C полупречником a један круг. Еквација тог круга биће ово :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Ордината $y = PQ$ неке тачке P (x, y) дате елипсе има ову вредност :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

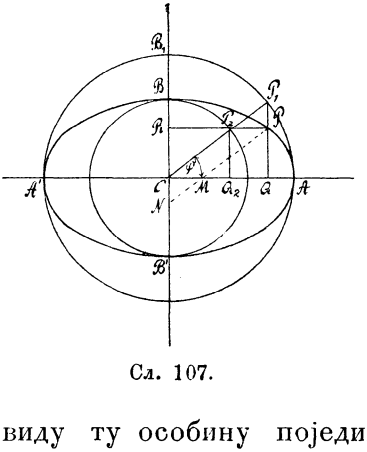
С друге стране види се да ордината $y_1 = P_1Q$ накружне тачке P_1, која има исту апсцису $x = CQ$ као и тачка P, има ову вредност :

$$y_1 = + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Према томе је

$$\frac{y}{y_1} = \frac{PQ}{P_1Q} = \frac{b}{a} = const.,$$

т. ј. *напремица у којој стоје ординате PQ и P_1Q — те две ординате иду паралелно са малом осовином елипсе — је стална количина.* —



Сл. 107.

Имајући у виду ту особину појединих тачака P, могли бисмо геометријском конструкцијом наћи колико год хоћемо тачака неке елипсе, кад јој знамо велику осовину $2a$ и малу осовину $2b$. Описаћемо на име око средишта C два круга — један полупречником a, а други полупречником b — и повући ћемо из средишта ма у ком правцу један потег. Овај ће сећи већи круг у тачци P_1, а мањи круг у тачци P_2. Ако из тачке P_2 повучемо једну праву паралелно са великом осовином, а из тачке P_1 једну праву паралелно са малом осовином, добићемо у пресеку тих правих једну тачку P; та тачка мора бити тачка дате елипсе. —

Сличним путем могло би се доказати да је и напремица апсциса $x = PR$ и $x_1 = P_2R$ — те две апсцисе иду напоредо са великом осовином елипсе — стална количина:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{PR}{P_2R} = \frac{a}{b} = const.$$

Круг AB_1A' назива се *главни круг*. Доказаћемо *да је елипса ортогонална пројекција свог главног круга*. — Обрнимо само главни круг око осовине AA', а за угао ω чији је косинус $= \frac{b}{a}$; при том кретању обртаће се ордината $y_1 = P_1Q$ круга око тачке Q и затвараће при том обртању непрестано прав угао са осовином AA'. Ортогонална пројекција ординате y_1 биће дакле $y_1 cos\,\omega$ или $\frac{b}{a}\,y_1$, т. ј. пројекција ординате P_1Q је ордината $y = PQ$, а то ће рећи да је и тачка P пројекција тачке P_1. То исто вреди и за све остале тачке дате елипсе, кад се узму напоредо са тачкама, које им на главном кругу одговарају. —

Кад се има у виду поменута конструкција елипсе, биће јасно да се свака тачка елипсе аналитички може представити оваквим двема еквацијама:

$$x = a\,cos\varphi, \quad y = b\,sin\varphi. \qquad (5)$$

У тим еквацијама јавља се као што видимо један угао $\varphi = P_1CQ$ који се мења од нуле до 360^0. Кад бисмо га елиминирали, добили бисмо еквацију (1) елипсе. Угао φ назива се *ексцентрична аномалија.*

Напомене. 1-во. *Лако би се дало доказати да се, и обратно, сваки круг може сматрати као ортогонална пројекција једне елипсе.* Кад бисмо на име обрнули елипсу око мале осовине за угао ω чији је косинус $= \frac{b}{a}$, онда би апсциса $x_1 = P_2R$ била пројекција апсцисе $x = PR$, т. ј. тачка P_2 круга P_2BB' била би пројекција тачке P дате елипсе ABA'.

2-го. Ако са ϱ означимо потег који спаја средиште са тачком P, са φ ексцентричну аномалију, а са Δ (φ) израз $\sqrt{1 - e^2 sin^2 \varphi}$, онда је

$$\varrho = a\Delta\ (\varphi).$$

245. Повуцимо сад из тачке P праву PN (сл. 107.) паралелно са правом P_1C и продужимо је дотле, док у тачци M не пресече велику осовину, а у тачци N малу осовину елипсе; јасно је да су дужи PN и P_1C по величини једнаке. Из сличних троуглова PQM и P_1QC је

$$PM : P_1C = PQ : P_1Q\ ;$$

како је $PQ : P_1Q = b : a$, а $P_1C = a$, биће $PM = b$. Дакле, *кад повучемо ма из које тачке P једну праву PN тако, да је одсечак PN који лежи између тачке P и тачке N у којој та права сече малу осовину, раван половини велике осовине, онда је део PM што на тој правој лежи између тачке P и велике осовине управо раван половини мале осовине* или другим речима, *кад по крацима једног правог угла ACB' клизе крајеви једне сталне дужи MN, онда ма која тачка те дужи описује једну елипсу.* На основу тог начела је конструјисана једна справа помоћу које се описује елипса; та справа се зове *елиптичан компас*, а овако изгледа: два крака AC и $B'C$ секу се под правим углом; ти краци су дуж својих страна урезани тако да се по њима може кретати један озиб MN. Тај озиб је избушен на многим местима.

Писаљка која је утврђена у некој тачци P покретног озиба описаће једну елипсу кад се озиб буде кретао по сталним крацима. Полуосовине те елипсе биће PN и PM. — Тачка у средини тог озиба описала би један круг, т. ј. једну елипсу за коју је $a = b$.

246. *Нађи површину елипсе.*

Елипсу ћемо сматрати као ортогоналну пројекцију главног круга. Површина A_k главног круга је $a^2\pi$. Према томе је површина A_e елипсе ово:

$$A_e = A_k \cos\omega = a^2\pi\cos\omega$$

или, како је $\cos\omega = \frac{b}{a}$,

$$A_e = \pi ab.$$

Примери

1. Нађи координате тачке на средини корде коју елипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$ исеца на правој $Ax + By + C = o$.

Одг. $- ACa^2/(a^2A^2 + b^2B^2), \; - BCb^2/(a^2A^2 + b^2B^2)$.

2. A и A' су темена на великој осовини неке елипсе, а P је нека тачка чија је ексцентрична аномалија φ. Нађи еквације правих AP и $A'P$.

Одг. $\frac{x}{a}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}, \; -\frac{x}{a}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{y}{b}\cos\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi}{2}$.

[*Напом.* Треба имати на уму то, да су ексцентричне аномалије теменâ A и A' ово: o и π.].

3. P и Q су две тачке неке елипсе; AP и $A'Q$ секу се у тачци K, а $A'P$ и AQ у тачци K'. Доказати да је $KK' \perp$ на AA'.

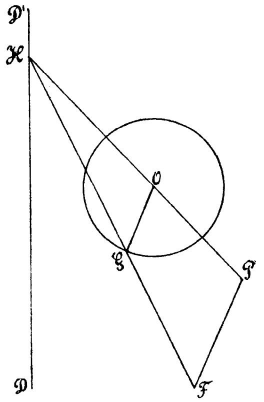
4. P је тачка неке елипсе; нађи место тачака у којима се секу права $A'P$ и управна из A на AP.

Одг. Место је једна права.

5. P, Q, R су три тачке неке елипсе, а P_1, Q_1, R_1 су три тачке које на главном кругу одговарају тачкама P, Q, R. Доказати да је

$$\triangle PQR : \triangle P_1Q_1R_1 = b : a.$$

6. Тачка F и некакав круг чије је средиште тачка O, лежи на једној страни неке праве DD'. Из тачке F повући ћемо према кругу ма у ком правцу једну праву FGH, која круг сече у тачци G, а праву DD' у тачци H. Спојићемо тачку H са средиштем O и продужићемо ту праву; за тим ћемо повући праву FP паралелно са полупречником GO. Тачка P у којој FP сече праву HO описаће једну елипсу.



Сл. 108.

Р. Бошковић.

7. CB је сталан дијаметар неког датог круга. Тај дијаметар ћемо продужити до неке сталне тачке A и добићемо тим путем праву ABC. Из тачке A повући ћемо ма у ком правцу према кругу једну праву која сече круг у тачкама D и E; спојићемо тачку C с тачком D правом CDF и одмерићемо на тој правој, почевши од тачке C, дуж $CF = AE$. Место тачака F је елипса.

У. Хемилтон.

8. Некакав круг сече елипсу у четири тачке A, B, C, D, а ексцентричне аномалије тих тачака су α, β, γ, δ. Доказати да је

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2n\pi.$$

Јоахимстал.

Еквације секаната AB и CD су на име ово:

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\gamma+\delta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}=\cos\frac{\gamma-\delta}{2}$$

те две секанте су једнако нагнуте према великој осовини елипсе — у овај мах осовини x — па је с тога

$$tg \frac{\alpha + \beta}{2} = tg \frac{\gamma + \delta}{2} ;$$

кад се то има у виду, биће јасно да је

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = n\pi - \frac{\gamma + \delta}{2} ,$$

т. ј. заиста је $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2n\pi$.

ТАНГЕНТА И НОРМАЛА

247. Еквација тангенте елипсе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$$

у тачци P (x', y') те елипсе је (прим. 6. чл. 228.) ово:

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = o. \qquad (1)$$

Коефицијенат који одређује правац те тангенте је $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$, па је с тога еквација нормале у тачци (x', y') овог облика:

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'} (x - x') \qquad (2)$$

или

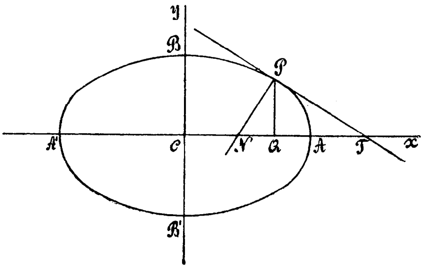
$$\frac{x - x'}{\frac{x'}{a^2}} = \frac{y - y'}{\frac{y'}{b^2}} \qquad (3)$$

или, најпосле,

$$\frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2 ; \qquad (4)$$

у последњој еквацији је $c^2 = a^2 - b^2$.

Нека су T и N тачке у којима тангента PT и нормала PN секу осовину x. Одсечке CT и CN тих правих



Сл. 109.

на осовини x добићемо овако: сменићемо у еквацији (1) тангенте и еквацији (4) нормале y овом вредношћу: $y = o$. Биће дакле

$$CT = \frac{a^2}{x'}, \quad CN = \frac{c^2}{a^2} x' = e^2 x'$$

$$\left(e^2 \text{ је квадрат ексцентрицитета, } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right).$$

Ако претпоставимо да је $a^2 = b^2$, т. ј. ако претпоставимо да дата еквација $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$ представља један круг, онда ће одсечак CN бити $= o$, а по томе се види да нормале круга пролазе кроз средиште његово (упор. чл. 163.).

У ужем смислу назива се дуж PT *тангента*, а дуж PN *нормала* тачке P. Део, који на осовини x лежи између тангенте и ординате додирне тачке, назива се *суб-тангента*, а део те осовине, који лежи између нормале и ординате подножја те нормале, *суб-нормала* тачке P; QT је дакле суб-тангента, а QN суб-нормала. Из слике се види да је

$$QT = CT - x', \quad QN = x' - CN,$$

па је с тога

$$QT = \frac{a^2 - x'^2}{x'}, \quad QN = x' - \frac{c^2}{a^2} x' = \frac{b^2}{a^2} x'. -$$

Ако са φ означимо ексцентричну аномалију тачке P, биће $x' = a \cos\varphi$, $y' = b \sin\varphi$, па је с тога еквација тангенте у тачци φ ово:

$$\frac{x}{a} \cos\varphi + \frac{y}{b} \sin\varphi - 1 = o. \qquad (5)$$

Та еквација може се у осталом и овако добити. Ми знамо (прим. 5. стр. 108.) да је еквација секанте која спаја тачку φ дате елипсе с тачком φ' ово:

$$\frac{x}{a} \cos\frac{\varphi + \varphi'}{2} + \frac{y}{b} \sin\frac{\varphi + \varphi'}{2} = \cos\frac{\varphi - \varphi'}{2} \cdot \qquad (6)$$

Ако сад претпоставимо да је $\varphi = \varphi'$, т. ј. ако узмемо да је секанта (6) постала тангента у тачци φ, добићемо из еквације (6) управо еквацију (5). — Јасно је да ће еквација нормале у тачци φ бити ово:

$$a \sin\varphi \cdot x + b \cos\varphi \cdot y = c^2 \sin\varphi \cos\varphi. \qquad (7)$$

Прим. 1. Дата је елипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$. Наћи еквацију тангенте која иде напоредо са правом $y = mx$.

Одг. $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

[*Напом*. Треба тражити погодбу под којом ће права $y = mx + n$ бити тангента дате елипсе. Види чл. 168.].

Прим. 2. Дата је елипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$. Наћи еквацију нормале која иде напоредо са правом $y = mx$. —

Еквација нормале биће у опште овог облика:

$$y = mx + n.$$

Ако ту еквацију упоредимо са еквацијом (4) нормале, добићемо ове погодбе:

$$\frac{mx'}{a^2} = \frac{y'}{b^2} = -\frac{n}{c^2},$$

па је с тога

$$\frac{x'}{a} = -\frac{an}{c^2 m}, \quad \frac{y'}{b} = -\frac{bn}{c^2};$$

како тачка (x', y') лежи на елипси, биће

$$\frac{a^2 n^2}{c^4 m^2} + \frac{b^2 n^2}{c^4} - 1 = 0$$

или

$$n^2 (a^2 + b^2 m^2) = c^4 m^2;$$

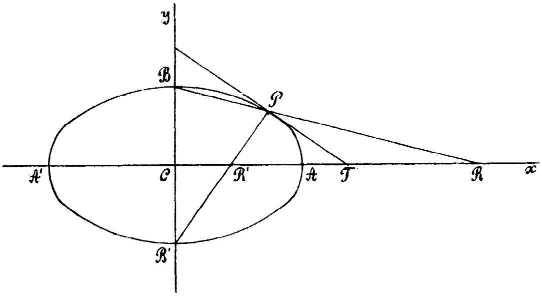
према томе је

$$n = \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}},$$

т. ј. еквација нормале је ово:

$$y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}.$$

248. Конструкција тангенте у тачци P. — Спојићемо тачку P са теменима B и B' правима BPR и $B'R'P$. Те две праве сећи ће осовину x у тачкама R и R', а еквације њихове су ово:



Сл. 110.

$$x' (y - b) = x (y' - b).$$

$$x' (y + b) = x (y' + b);$$

према томе је

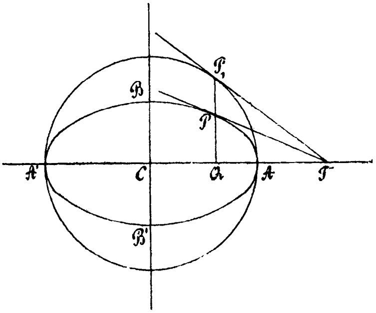
$$CR = \frac{bx'}{b - y'}, \quad CR' = \frac{bx'}{b + y'},$$

па је с тога и

$$\frac{CR + CR'}{2} = \frac{b^2x'}{b^2 - y'^2} = \frac{b^2x'}{b^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)} = \frac{a^2}{x'}.$$

Бројем a^2/x' је дакле одмерена апсциса тачке T која полови дуж RR'. Међу тим је тим истим бројем одмерен и одсечак CT тангенте PT на осовини x (чл 247.), а по томе се види да се права, која дира елипсу у некој тачци P може овако конструјисати: треба повући праве BPR и $B'R'P$, па преполовити дуж RR'; означимо са T тачку на средини дужи RR'; права PT биће тангента.

Ево још једне лепе конструкције Како је $CT = \frac{a^2}{x'}$, јасно је да одсечак тангенте на осовини x не зависи од величине мале осовине; кад бисмо нацртали неколико елипси које имају једну и исту велику осовину $2a$, онда би све тангенте, што су повучене на те елипсе у тачкама које имају исту апсцису, пролазиле кроз неку заједничку тачку T осовине x. Једна од поменутих елипси биће и главни круг елипсе. Тангенту у тачци P добићемо дакле на овај начин. Повући ћемо тангенту у накружној тачци P_1. Та тангента ће сећи



Сл. 111.

осовину AA' у тачци T. Тачку T спојићемо с тачком P; права PT биће тангента елипсе у тачци P. — Лако се може доказати и то, да је тангента PT пројекција тангенте P_1T. Кад бисмо на име обрнули круг око осовине AA' за угао θ чији је косинус $= \frac{b}{a}$, онда би тачка P била управо пројекција тачке P_1; при том обртању не би се тачка T тангенте P_1T покренула са свога првобитног положаја, а по томе се види да је PT заиста пројекција тангенте P_1T.

249. *Повући тангенту из неке тачке (x', y') на елипсу.*

Јасно је да ће полара тачке (x', y') сећи елипсу у оним двема тачкама, у којима је дирају тангенте што су из тачке (x', y') повучене на елипсу. Те две тачке наћи ћемо дакле овако. Разрешићемо систему ових двеју еквација:

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = o,$$

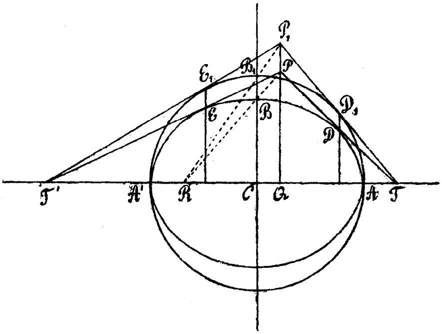
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o.$$

Ако елиминирамо y, добићемо ову квадратну еквацију:

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right) - 2\frac{xx'}{a^2} + 1 - \frac{y'^2}{b^2} = o,$$

а корени те еквације биће апсцисе оних тачака у којима поменуте две тангенте дирају елипсу. Кад бисмо узели да је у тој еквацији $\frac{x}{a}$ непозната, видели бисмо да су корени те еквације реални само ако је $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 > o$, т. ј. само ако тачка (x', y') лежи изван елипсе.

Конструкција тангената. Сматраћемо елипсу као ортогоналну пројекцију круга и потражићемо у равни круга тачку P_1 која одговара тачци P у равни елипсе. Спојићемо тога ради тачку P с теменом B правом PB и продужићемо ту праву до тачке R у којој ова сече осовину AA'. Кад се има у виду то, да је BR пројекција праве B_1R, биће јасно да ће тачка P_1, у којој се секу праве RB_1 и QP, бити она тачка која у равни круга одговара тачци P у равни елипсе. Тангенте P_1T и P_1T', које су из тачке P_1 повучене на главни круг, секу осовину AA' у тачкама T и T'. Праве PT и PT' биће дакле тангенте елипсе, јер су те две праве пројекције тангената P_1T и P_1T' главнога круга. Додирне тачке D и E биће тачке, у којима праве D_1D и E_1E што иду напоредо са малом осовином, секу елипсу.



Сл. 112.

250. *Повући из дате тачке* P (x', y') *нормалу на елипсу.*

Еквација нормале је ово:

$$\frac{x-X}{\frac{X}{a^2}}=\frac{y-Y}{\frac{Y}{b^2}};$$

у овој еквацији су са X и Y означене координате оне тачке, у којој нормала продире криву. Ако је на тој нормали и дата тачка P (x', y'), биће

$$\frac{a^2(x'-X)}{X}=\frac{b^2(y'-Y)}{Y}\;(=\mu),$$

па је према томе

$$X=\frac{a^2x'}{\mu+a^2},\quad Y=\frac{b^2y'}{\mu+b^2}\,. \tag{8}$$

Тим двема еквацијама било би одређено подножје нормале. Непознат параметар μ, који се јавља у тим еквацијама, одредићемо овако: сменићемо у еквацији $x^2/a^2+y^2/b^2-1=o$ параметре x и y са $a^2x'/(\mu+a^2)$ и $b^2y'/(\mu+b^2)$, и добићемо тим путем еквацију

$$f(\mu)=\frac{a^2x'^2}{(\mu+a^2)^2}+\frac{b^2y'^2}{(\mu+b^2)^2}-1=o. \tag{9}$$

Ова погодбена еквација је четвртог степена, т. ј. из сваке тачке могу се у опште повући четири нормале на елипсу. Унапред можемо рећи да ће само реалним коренима еквације (9) одговарати реалне нормале. Ако смо дакле ради да одговоримо на ово питање: колико се реалних нормала може повући из неке тачке P на елипсу, онда морамо пре тога решити друго једно питање — морамо на име бити на чисто с тим, колико реалних корена има еквација (9). С тога ћемо морати испитати аналитичку природу полинома $f(\mu)$.

На првом месту поменућемо то, да ће функција $f(\mu)$ имати своје прекиде само кад је $\mu=-a^2$ и $\mu=-b^2$. Диференцирањем те функције добићемо међу тим ово:

$$\frac{1}{2}f'(\mu)=-\frac{a^2x'^2}{(\mu+a^2)^3}-\frac{b^2y'^2}{(\mu+b^2)^3};$$

према томе ће $f'(\mu)$ бити $=o$, ако је

$$\frac{(ax')^{\frac{2}{3}}}{\mu+a^2}=-\frac{(by')^{\frac{2}{3}}}{\mu+b^2}=-\frac{(ax')^{\frac{2}{3}}+(by')^{\frac{2}{3}}}{c^2}, \tag{10}$$

а по томе се види да се један реалан корен $\mu = \mu'$ еквације $f'(\mu) = o$ може овако изразити:

$$\mu' = -a^2 + c^2 (ax')^{\frac{2}{3}} : \left[(ax')^{\frac{2}{3}} + (by')^{\frac{2}{3}}\right]$$

или

$$\mu' = -b^2 - c^2 (bx')^{\frac{2}{3}} : \left[(ax')^{\frac{2}{3}} + (by')^{\frac{2}{3}}\right];$$

тај корен μ' лежи дакле између $-a^2$ и $-b^2$. —

Да видимо сад како ће се мењати $f(\mu)$ кад се μ мења. Цео крај у ком ће се кретати аргуменат μ поделићемо на три мања краја: у првом крају биће вредности које леже између $-\infty$ и $-a^2-h$ (h је врло мала, позитивна количина); у другом крају биће вредности које леже између $-a^2+h$ и $-b^2-h$; у том крају се негде налази и специјална вредност μ'; најпосле ће у трећем крају бити све вредности што леже између $-b^2+h$ и $+\infty$. — Кад се μ буде мењало од $-\infty$ до $-a^2-h$, биће $f(\mu)$ позитивно; функција $f(\mu)$ ће дакле у том крају *без прекида* растити од -1 до $+\infty$, па је услед тога та функција у један мах морала проћи и кроз нулу, а то ће рећи, да између $-\infty$ и $-a^2-h$ лежи један реалан корен еквације (9). Кад се μ буде мењало од $-b^2+h$ до $+\infty$, биће $f'(\mu)$ негативно, па ће с тога функција $f(\mu)$ без прекида опадати од $+\infty$ до -1, т. ј. између $-b^2+h$ и $+\infty$ има еквација (9) још један реалан корен. Кад се μ буде мењало између $-a^2+h$ и μ', биће $f'(\mu)$ негативно, т. ј. функција $f(\mu)$ ће опадати; кад је $\mu = \mu'$, биће $f'(\mu) = o$, па ако се μ и даље буде мењало од μ' до $-b^2-h$, биће $f'(\mu)$ позитивно, т. ј. функција $f(\mu)$ ће без прекида растити кад се μ мења између μ' и $-b^2-h$. У том размаку $(-a^2+h, -b^2-h)$ имаће дакле функција $f(\mu)$ најмању вредност кад је $\mu = \mu'$; но како се функција $f(\mu)$ и у том крају без прекида мења, биће уједно јасно и то, да ће еквација (9) у томе крају имати два реална корена само ако је $f(\mu') \leqq o$; у првом случају били би корени неједнаки, а у другом једнаки. Кад се уоче сви резултати до којих смо поменутом анализом дошли, онда ћемо моћи рећи ово: *еквација*

(9) *има свакад два реална корена,* од којих један лежи у првом, а други у трећем крају, а то значи, *да се из сваке тачке равни могу повући најмање две реалне нормале на елипсу.*

Да бисмо сазнали кад ће $f(\mu')$ бити $< o$, наћи ћемо из еквација (10) вредности количника̂ $1/(\mu + a^2)$ и $1/(\mu + b^2)$ и смениђемо тим вредностима $1/(\mu + a^2)$ и $1/(\mu + b^2)$ у полиному еквације (9). Јасно је да ће оно $f(\mu)$ које тим путем будемо добили бити управо $= f(\mu')$; с тога ће бити

$$f(\mu') = \frac{\left[(ax')^{\frac{2}{3}} + (by')^{\frac{2}{3}}\right]^3}{c^4} - 1,$$

т. ј. све четири нормале биће реалне и различите само ако је

$$\frac{\left[(ax')^{\frac{2}{3}} + (by')^{\frac{2}{3}}\right]^3}{c^4} - 1 < o$$

или

$$\left[\left(\frac{ax'}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by'}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3 - 1 < o$$

или

$$(u + v)^3 - 1 < o, \qquad (11)$$

где је

$$u = \left(\frac{ax'}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v = \left(\frac{by'}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Како је међу тим

$$(u + v)^3 - 1 = (u + v - 1)(u + v - \alpha)(u + v - \alpha')$$

— са α и α' су означени коњуговано-имагинарни кубни корени јединице:

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} -$$

биће јасно да се неједнакост (11) може и овако написати:

$$(u + v - 1)(u + v - \alpha)(u + v - \alpha') < o.$$

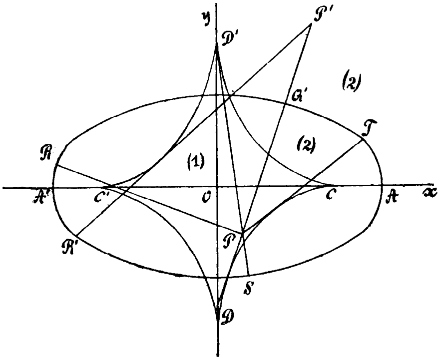
Производ двају чинитеља $u + v - \alpha$ и $u + v - \alpha'$ је позитиван, јер су ти чинитељи коњуговано комплексни бројеви. Према томе се последња неједнакост не ће пореметити ако та два чинитеља из производа просто уклонимо. Све четири нормале биће дакле реалне само ако је

$$u + v - 1 < o$$

или

$$\left(\frac{ax'}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by'}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 < o.$$

Ту неједнакост протумачићемо геометријски овако. Написаћемо у изразу који стоји с леве стране њезине x место x', а y место y' и претпоставићемо да је тај израз $= o$. Тим путем добићемо еквацију



Сл. 113.

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = o, \qquad (12)$$

а уз ову еквацију и еквацију

$$F(x, y) = (ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}} = o, \qquad (13)$$

која аналитички представља криву $CDC'D'$, која има четири завратне тачке C, D, C', D'. Та крива је, као што ћемо касније видети, т. зв. *еволута* дате елипсе. По слици се види да је еволута $CDC'D'$ затворена крива, која дели раван на два краја, на унутрашњи крај (1) и спољашњи крај (2). У унутрашњем крају је почетак системе, па како је $F(o, o) = -c^{\frac{4}{3}} < o$, биће јасно да су уједно и моћи свију осталих тачака првога краја негативне, а по томе се види да су моћи свију тачака другога краја позитивне. За све тачке првога краја је дакле $F(x, y) < o$, а за све тачке другога краја је $F(x, y) > o$. Према томе можемо рећи ово: *из неке тачке* (x, y) *која не лежи на еволути могу се повући на елипсу или четири или две реалне нормале; у првом случају лежи поменута тачка у унутрашњем, а у другом случају у спољашњем крају еволуте.* Кад би тачка (x, y) лежала на еволути, онда би било $F(x, y) = o$; услед тога је и $f(\mu') = o$, т. ј. сви корени еквације $f(\mu) = o$ били би у овом случају реални, али би два корена била једнака. *Из тачака које леже на еволути могу се дакле повући само три различите нормале на елипсу.*

251. *Подножја нормалâ, које су из неке тачке* $P(x', y')$ *повучене на елипсу, леже на једној равностраној хиперболи која пролази кроз средиште елипсе и кроз тачку* P; *асимптоте те хиперболе су паралелне са осовинама елипсе.*

Нормала пролази кроз тачку $P(x', y')$, па је с тога

$$\frac{a^2x'}{X} - \frac{b^2y'}{Y} = c^2$$

или

$$c^2XY + b^2y'X - a^2x'Y = o. \qquad (14)$$

Ако се претпостави да X и Y у овој еквацији представљају координате неке опште тачке, биће јас да та еквација представља једну хиперболу, а тим већ био доказан један део поменуте теореме. Онај други део те теореме може се такође лако доказати. По еквацији (14) види се на име да је хипербола о којој је у овај мах реч равнострана, јер у еквацији (14) нема чланова у којима би се јављали квадрати променљивих X и Y, а система је ортогонална; та хипербола пролази, као што се јасно види, кроз средиште (o, o) дате елипсе и кроз дату тачку P (x', y'), а асимптоте њезине су паралелне са правима $X = o$, $Y = o$, т. ј. са осовинама елипсе, q. e. d. —

Хипербола (14) зове се *Аполонијева хипербола*, јер је Аполоније помоћу ње повлачио нормале на елипсу.

Напомена. Како је $c^2 = a^2 - b^2$, биће јасно да је лева страна еквације (14) хомогена функција полуосовинâ a и b; с тога се еквација (14) не ће променити кад се осовине мењају сразмерно. Касније ћемо међу тим видети да су у *хомотетичних* коничних пресека осовине паралелне, а дужине осовинâ сразмерне. Ево нам дакле једне нове теореме: *подножја нормала које су из неке тачке P повучене на концентричне и хомотетичне елипсе леже на једној равностраној хиперболи која пролази кроз заједничко средиште и кроз тачку P; асимптоте те хиперболе су паралелне са осовинама елипсе.* — Између тих концентричних и хомотетичних елипси пролази једна кроз тачку P, а једну представља баш само заједничко средиште; кад се то двоје има у виду, онда је јасно зашто равнострана хипербола пролази и кроз средиште и кроз тачку P.

252. На овом месту могли бисмо рећи коју реч и о тако званом *Јоахимсталовом кругу*. Пре тога поменућемо међу тим ово основно правило: *тачке у којима се секу два конична пресека — свега имају четири такве тачке — моћи ће лежати на једном кругу само ако су осовине тих коничних пресека паралелне.* — То правило доказаћемо овако. Претпоставићемо да осовине координатне системе иду напоредо са осовинама првог коничног пресека; еквација тог пресека биће овог облика:

$$ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + c = o, \qquad (15)$$

а екваџија оног другог коничног пресека је у опште овог облика:

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = o. \qquad (16)$$

Помножимо сад леву страну еквације (15) неким параметром μ и додајмо тај производ левој страни еквације (16). Тим путем добићемо еквацију

$$(a' + \mu a)\, x^2 + 2h'xy + (b' + \mu b)\, y^2 + 2\,(g' + \mu g)\, x$$
$$+ 2\,(f' + \mu f)\, y + c' + \mu c = o. \qquad (17)$$

Како μ нема одређену вредност, биће јасно да ће еквацијом (17) бити представљени сви они конични пресеци, који пролазе кроз тачке у којима се секу дати конични пресеци (15) и (16). Та еквација представљаће један круг, ако је

$$a' + \mu a = b' + \mu b, \quad h' = o\,;$$

поменуте четири тачке у којима се секу дати конични пресеци (15) и (16) лежаће дакле на једном кругу ако је $\mu = (a' - b')/(b - a)$, и ако је $h' = o$, т. ј. ако осовине коничног пресека (16) иду напоредо са осовинама координатне системе, па како осовине координатне системе иду напоредо са осовинама коничног пресека (15), то је уједно и доказано поменуто правило.

Узмимо сад да нам је дата нека тачка $P\,(x_1, y_1)$. Из те тачке моћи ћемо повући на елипсу у опште четири нормале; подножја тих нормалâ означићемо са A, B, C, D. Нека су сад x', y' координате тачке D, а x, y координате тачака A, B, C. Тачка (x_1, y_1) лежи и на првој, и на другој, и на трећој, и на четвртој нормали, па је према томе и

$$\frac{a^2x_1}{x'} - \frac{b^2y_1}{y'} = c^2 \qquad (18)$$

и

$$\frac{a^2x_1}{x} - \frac{b^2y_1}{y} = c^2; \qquad (19)$$

по првој релацији види се на име да нормала која је на елипсу повучена у тачци D (x', y') пролази кроз тачку P (x_1, y_1), а по другој релацији се види да нормале које су на елипсу повучене у тачкама A, B, C такође пролазе кроз тачку P. Та четири подножја леже у осталом и на елипси, па је с тога и

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = o \qquad (20)$$

и

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o. \qquad (21)$$

Одузмимо сад екваsucc (19) од еквације (18), и еквацију (21) од еквације (20). Тим путем добићемо ове две еквације:

$$\frac{a^2x_1}{xx'}(x - x') - \frac{b^2y_1}{yy'}(y - y') = o,$$

$$\frac{x + x'}{a^2}(x - x') + \frac{y + y'}{b^2}(y - y') = o.$$

Ако се из тих двеју еквација елиминирају разлике $(x - x')$ и $(y - y')$, добиће се ово:

$$\frac{xx'(x + x')}{a^4x_1} + \frac{yy'(y + y')}{b^4y_1} = o. \qquad (22)$$

У тој еквацији x и y представљају координате посебних тачака A, B, C; но ако се претпостави да x и y представљају координате неке опште тачке, биће јасно да ће том еквацијом бити представљен један коничан пресек који пролази кроз тачке A, B, C. Тај коничан просек пролази, као што се непосредно види из еквације (22), и кроз тачку D' $(-x', -y')$, а то ће рећи кроз тачку која лежи на другом крају оног дијаметра, што пролази кроз тачку $D\,(x', y')$. Осовине те криве (22) иду међу тим напоредо са осовинама елипсе; с тога ће тачке A, B, C, D' лежати на једном кругу, на т. зв. Јоахимсталовом кругу. Ево нам дакле познате Јоахимсталове теореме: *ако се из неке тачке* $P\,(x_1, y_1)$ *што лежи на нормали* PD, *која је у тачци* $D\,(x', y')$ *повучена на елипсу, повуку још три нормале на елипсу, онда подножја тих трију нормала и тачка* $(-x', -y')$ *леже на једном кругу.* —

Еквацију Јоахимсталова круга добићемо овако. Помножићемо леву страну еквације $x^2/a^2+y^2/b^2-1=o$ са μ и додаћемо тај производ полиному еквације (22). Тим путем добићемо еквацију

$$\left(\mu+\frac{x'}{a^2x_1}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\mu+\frac{y'}{b^2y_1}\right)\frac{y^2}{b^2}+\frac{x'^2}{a^4x_1}\,x+\frac{y'^2}{b^4y_1}\,y-\mu=o; \quad (23)$$

та еквација представља све коничне пресеке што пролазе кроз четири тачке у којима се секу дата елипса и крива (22). Један између тих коничних пресека је и поменути Јоахимсталов круг, а погодба под којом еквација (23) представља један круг је ово:

$$\frac{\mu}{a^2}+\frac{x'}{a^4x_1}=\frac{\mu}{b^2}+\frac{y'}{b^4y_1};$$

према томе је

$$\mu=\frac{a^2b^2}{c^2}\left(\frac{x'}{a^4x_1}-\frac{y'}{b^4y_1}\right),$$

па је с тога еквација Јоахимсталова круга ово:

$$\frac{b^2y_1x'-a^2x_1y'}{c^2}\,(x^2+y^2)+\frac{b^2y_1x'^2}{a^2}\,x+\frac{a^2x_1y'^2}{b^2}\,y$$
$$-\frac{b^4y_1x'-a^4x_1y'}{c^2}=o.$$

По еквацији (18) види се међу тим да је

$$a^2x_1y' - b^2y_1x' = c^2x'y';$$

услед тога је јасно да се поменута екваација Јоахимсталова круга може написати у овом облику.

$$x^2+y^2-\frac{b^2y_1x'}{a^2y'}x-\frac{a^2x_1y'}{b^2x'}y+\frac{b^4y_1x'-a^4x_1y'}{c^2x'y'}=o. \quad (24)$$

Та екваација може се у осталом и овако написати:

$$x^2+y^2+xx'+yy'=\left(a^2+\frac{b^2y_1}{y'}\right)\frac{xx'}{a^2}+\left(b^2+\frac{a^2x_1}{x'}\right)\frac{yy'}{b^2}$$
$$+b^2+\frac{a^2x_1}{x'}\cdot \quad (25)$$

По екваацији (18) види се да је

$$a^2+\frac{b^2y_1}{y'}=b^2+\frac{a^2x_1}{x'}\ (=u);$$

према томе могли бисмо екваацију (25) и овако написати:

$$x^2+y^2+xx'+yy'=u\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+1\right). \quad (26)$$

Та екваација је међу тим линеарно састављена из ових двеју екваација:

$$x^2+y^2+xx'+yy'=o, \quad (27)$$

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+1=o. \quad (28)$$

Према томе ће Јоахимсталов круг пролазити и кроз тачке у којима права (28), а то ће рећи, тангента елипсе у тачци D' $(-x', -y')$ сече круг (27). Тај круг (27) је описан око дијаметра CD' (C је средиште дате елипсе) и сече поменуту тангенту у двема тачкама — у тачци

D' и у подножју управне која је из средишта C спуштена на тангенту. Ево нам дакле једне нове, т. зв. ***Лагерове (Laguerre) теореме:*** *Јоахимсталов круг пролази кроз подножје управне која је из средишта спуштена на тангенту у тачци* $(-x', -y')$.

Примери

1. Доказати да ће еквацијом $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ бити представљена једна тангента елипсе $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$, ако је

$$p = \sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha}.$$

2. Наћи место темена правог угла који је описан око елипсе, т. ј. наћи еквацију ортоптичког круга дате елипсе.

Еквација једног крака тог угла је

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha}.$$

Ако у тој еквацији сменимо α са $\pi/2 + \alpha$, добићемо и еквацију оног другог крака. Ево те еквације:

$$-x \sin\alpha + y \cos\alpha = \sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}.$$

Из тих двеју еквација елиминираћемо α квадрирањем и сабирањем. Еквација ортоптичког круга елипсе $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$ биће дакле ово:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

[*Напом.* Види прим. 2. чл. 230.]

3. Ексцентрична аномалија неке тачке O је α. Наћи координате Фрежијерове тачке која тој тачци O одговара.

Одг. Координате Фрежијерове тачке су

$$x = \frac{ac^2 \cos\alpha}{a^2 + b^2}, \quad y = -\frac{bc^2 \sin\alpha}{a^2 + b^2}.$$

4. Наћи место Фрежијерових тачака које одговарају појединим тачкама елипсе $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$.

Одг. Место је елипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

5. Доказати да се нормала у некој тачци O елипсе може овако конструјисати : треба из тачке O повући ма у ком правцу корду $OP \perp$ на корду OQ, и корду $OP' \perp$ на корду OQ'; за тим треба спојити тачку O с тачком M у којој се секу корде PQ и $P'Q'$ (т. ј. с Фрежијеровом тачком, која одговара тачци O) ; права OM биће нормала елипсе у тачци O.

ДИЈАМЕТРИ

253. *Наћи еквацију дијаметра који полови корде што иду напоредо са правом* $y = mx$.

Први метод. Еквација дијаметра коничног пресека $f(x, y) = o$ је, као што знамо (чл. 219.), ово:

$$f'_x(x, y) + mf'_x(x, y) = o.$$

Како је у овај мах

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

биће еквација дијаметра, што полови корде које иду напоредо с правом $y = mx$, ово:

$$\frac{2x}{a^2} + m\frac{2y}{b^2} = o$$

или

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x. \tag{1}$$

Други метод. Нека су x', y' и x'', y'' координате тачака на крајевима једне од оних корада што иду напоредо са правом $y = mx$. Кад се то претпостави, биће јасно да је

$$m = \frac{y' - y''}{x' - x''}. \tag{2}$$

Ако су x, y координате тачке што лежи на средини поменуте корде, биће

$$2x = x' + x'',\quad 2y = y' + y''. \qquad (3)$$

Међу тим је

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,\quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

па је с тога и

$$\frac{x'^2 - x''^2}{a^2} + \frac{y'^2 - y''^2}{b^2} = o$$

или

$$\frac{(x' - x'')(x' + x'')}{a^2} + \frac{(y' - y'')(y' + y'')}{b^2} = o.$$

Та релација постоји између координата x', y' и x'', y'' оних тачака, што леже на крајевима једне од поменутих корада. Поделимо сад ту релацију са $x' - x''$. Кад се имају у виду обрасци (2) и (3), биће јасно да је

$$\frac{2x}{a^2} + m\frac{2y}{b^2} = o\,;$$

таква релација постоји између координата̂ тачке што лежи на средини ма које између поменутих корада; то је дакле еквација дијаметра, а ту исту еквацију смо добили и мало час. —

Овај метод је *Парсеров (Purser).*

254. По еквацији (1) дијаметра види се да је коефицијенат који одређује правац тог дијаметра ово:

$$m' = -\frac{b^2}{a^2 m}\,;$$

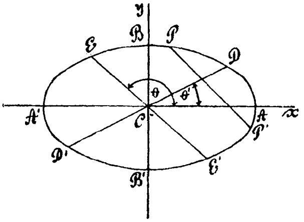
према томе је

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}\,. \qquad (4)$$

Како је $m = tg\,\theta$, а $m' = tg\,\theta'$, биће јасно да је и

$$tg\,\theta \cdot tg\,\theta' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot \qquad (4^*)$$

Овим простим обрасцем обележена је једна врло важна особина дијаметара. Како је параметром $m = tg\theta$ одређен правац свију корада PP' које полови дијаметар



Сл. 114.

DD', то је тим параметром уједно одређен и правац дијаметра EE', који је коњугован с дијаметром DD'. По обрасцу (4) или (4*) види се да је производ параметара $m = tg\,\theta$ и $m' = tg\,\theta'$ негативан, а то значи, да ће дијаметар DD' затварати оштар угао са осовином AA' кад дијаметар EE' с њом затвара туп угао и обратно; према томе је јасно *да коњуговани полудијаметри* CD *и* CE *никад не могу лежати на истој страни мале осовине.* Кад се један од њих крене са положаја CA према полуосовини CB, крену̂ће се онај други са положаја CB према полуосовини CA'.

Напомена. Кад бисмо узели ма који пар коњугованих дијаметара $2a'$ и $2b'$ за осовине каординатне системе, била би еквација елипсе овог облика:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = o.$$

Еквација дијаметра се по облику не би изменила, па би према томе и у овај мах било $mm' = -\frac{b'^2}{a'^2}\cdot$

255. Конструкција коњугованих дијаметара. Узмимо да су нам позната два коњугована полудијаметра CD

и CE. Нека су x', y' координате тачке D у којој полудијаметар CD продире елипсу, и нека је уз то θ' угао који тај полудијаметар затвара са великом осовином, а φ' ексцентрична аномалија којом је одређена тачка D. Јасно је да је

$$x' = a \cos \varphi', \; y' = b \sin \varphi',$$

па је према томе и

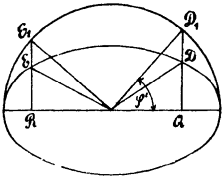
$$tg \theta' = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{a} \, tg \varphi'.$$

Даље, нека су x'', y'' координате тачке E, и нека је уз то θ угао који затвара полудијаметар CE са великом осовином, а φ ексцентрична аномалија тачке E. Јасно је да је и

$$tg \theta = \frac{y''}{x''} = \frac{b}{a} \, tg \varphi.$$

Како је међу тим

$$tg \theta \cdot tg \theta' = - \frac{b^2}{a^2},$$



Сл. 115.

биће јасно да је и

$$tg \varphi \cdot tg \varphi' = - 1$$

или

$$\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' = o$$

или

$$\cos(\varphi - \varphi') = o,$$

а по томе се види да је

$$\varphi - \varphi' = 90^{\circ}.$$

Ево дакле конструкције дијаметра CE који је коњугован с дијаметром CD. Продужићемо у правцу позитивних ординатâ ординату тачке D до тачке D_1 у којој та ордината сече главни круг елипсе; за тим ћемо спојити тачку D_1 са средиштем C и подићи ћемо у тачци C управну CE_1 на праву CD_1. Ту управну ћемо продужити до тачке E_1 у којој она сече главни круг. Ордината E_1R те тачке E_1 сећи ће елипсу у тачци E, а права CE биће већ тражени дијаметар.

256. *Дате су координате x', y' тачке D што лежи на крају дијаметра DD'. Наћи координате x'', y'' крајних тачака E и E' дијаметра EE', који је коњугован с дијаметром DD'.*

Како је правац дијаметра DD' одређен коефицијентом $m' = tg\,\theta' = \frac{y'}{x'}$, а правац дијаметра EE' коефицијентом $m = tg\,\theta = \frac{y''}{x''}$, биће

$$\frac{y'}{x'} \cdot \frac{y''}{x''} = -\frac{b^2}{a^2},$$

па је према томе и

$$\frac{\frac{x'}{a}}{\frac{y''}{b}} = -\frac{\frac{y'}{b}}{\frac{x''}{a}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}}{\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2}}}.$$

Како тачке (x', y'), (x'', y'') леже на елипси, биће

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,\quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

па је с тога

$$\frac{\frac{x'}{a}}{\frac{y''}{b}} = -\frac{\frac{y'}{b}}{\frac{x''}{a}} = \pm 1,$$

а по томе се види да је

$$\frac{x''}{a} = \mp \frac{y'}{b}, \quad \frac{y''}{b} = \pm \frac{x'}{a}$$

или

$$x'' = \mp \frac{ay'}{b}, \quad y'' = \pm \frac{bx'}{a}, \qquad (5)$$

где горње знаке треба узети кад је реч о тачци E (сл. 114. чл. 254.), а доње знаке кад је реч о тачци E'. Обрасци (5) називају се често и Шалови обрасци, јер их је Шал први приказао у своме класичном делу *Aperçu historique*, p. 822.

257. Аполонијеве теореме. — I. *Збир квадрата двају коњугованих дијаметара је сталан и раван збиру квадратâ осовинâ елипсиних.*

II. *Површина троугла који се добива спајањем крајних тачака двају коњугованих полудијаметара је стална и равна површини троугла који се добива спајањем теменâ са средиштем.*

Ad. I. Са a' и b' означићемо дужине коњугованих полудијаметара CD и CE, $CD = a'$, $CE = b'$. Услед тога биће

$$a'^2 = x'^2 + y'^2,$$

а

$$b'^2 = x''^2 + y''^2.$$

Кад се имају у виду Шалови обрасци, биће јасно да се овај други образац може и овако написати:

$$b'^2 = \frac{a^2y'^2}{b^2} + \frac{b^2x'^2}{a^2}.$$

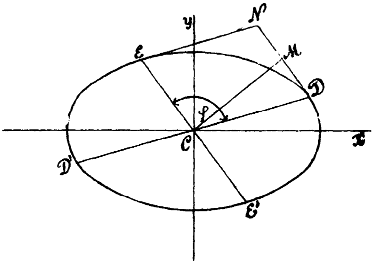
Међу тим је

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2),$$

па је с тога и

$$a'^2 = x'^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2) = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x'^2 = b^2 + e^2 x'^2 \qquad (6)$$

с једне, и



Сл. 116.

$$b'^2 = (a^2 - x'^2) + \frac{b^2}{a^2}x'^2 = a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x'^2 = a^2 - e^2 x'^2 \qquad (6^*)$$

с друге стране. Према томе је

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 = const.,$$

а то смо и тврдили.

Ad. II. Повући ћемо у тачкама *D* и *E* тангенте *DN* и *EN* на елипсу. Како тангенте на крајевима дијаметра иду напоредо са ординатама тог дијаметра, биће јасно да ће слика *CDNE* бити један паралелограм; две стране тог паралелограма су два коњугована полудијаметра $CD = a'$, $CE = b'$. Повуцимо сад нормалу $p = CM$ из темена *C* на супротну страну *DN*. Ако угао између дијаметара означимо са φ, биће

$$p = a' sin\, \varphi. \qquad (7)$$

Како је међу тим еквација тангенте у тачци $D\,(x', y')$ ово:

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1=o,$$

биће јасно да је

$$p=\frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}=\frac{ab}{\sqrt{\frac{b^2x'^2}{a^2}+\frac{a^2y'^2}{b^2}}}=\frac{ab}{\sqrt{x''^2+y''^2}},$$

па је с тога

$$p=\frac{ab}{b'}\,. \tag{7*}$$

Ако се тај образац (7*) упореди са обрасцем (7), биће јасно да је

$$a'b'sin\,\varphi=ab=const.,$$

а то смо и тврдили.

У осталом та теорема би се могла и на овај начин доказати. Двојна површина троугла DCE је

$$2A=x'y''-x''y',$$

па како је $x''=-\frac{ay'}{b}$, $y''=\frac{bx'}{a}$, биће

$$2A=\frac{bx'^2}{a}+\frac{ay'^2}{b}=ab\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right)=ab.$$

Напомена. Како је

$$p=\frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}=\frac{ab}{b'},$$

биће јасно да је

$$\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}=\frac{b'}{ab}\,.$$

Тај образац није згорег уочити.

258. Коњуговани дијаметри по величини у опште нису једнаки; кад један од њих расте од $2b$ до $2a$, други опада од $2a$ до $2b$. Према томе се види да ће у целом колу парова коњугованих дијаметара бити *један пар једнаких дијаметара.* Узмимо само за један часак да смо нашли тај пар коњугованих дијаметара. Како су ти дијаметри једнаки, биће они једнако нагнути према малој осовини CB, па је с тога

$$\theta + \theta' = 180^\circ,$$

а по томе се види да је и

$$tg\,\theta' = - tg\,\theta.$$

Међу тим је $tg\,\theta \cdot tg\,\theta' = -\frac{b^2}{a^2}$, па како је у овај мах $tg\,\theta' = - tg\,\theta$, биће и

$$tg^2\theta = \frac{b^2}{a^2}$$

или

$$tg\,\theta = \pm \frac{b}{a},$$

т. ј. *једнаки коњуговани дијаметри су дијагонале оног четвороугла чије су стране тангенте елипсе у теменима њезиним* A, A', B, B'.

Означимо дужину једнаких полудијаметара са a'. Како је у опште $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, биће у овај мах $a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

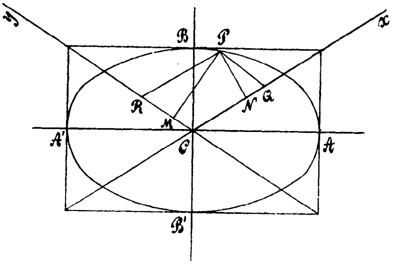
Ако те једнаке коњуговане дијаметре узмемо за осовине координатне системе, биће еквација елипсе овог облика

$$x^2 + y^2 = a'^2$$

или, како је $a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$,

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}\,. \tag{8}$$

У овој специјалној *косој* системи има, као што видимо, еквација елипсе исти облик као и еквација круга у ортогоналној системи. — Еквацијом (8) је у осталом обележена једна важна геометријска особина тачака елипсиних. По тој еквацији види се на име *да је збир квадрата раздаљина ма које тачке елипсине од двају коњугованих једнаких дијаметара стална количина.* Нека су $x = PR$ и $y = PQ$ координате неке тачке P



Сл. 117.

дате елипсе, а PM и PN раздаљине те тачке од коњугованих једнаких дијаметара. Ако са φ означимо угао који лежи између тих дијаметара, биће

$$PM = PR \sin\varphi,\ PN = PQ \sin\varphi$$

или

$$PM = x \sin\varphi,\ PN = y \sin\varphi,$$

па је према томе и

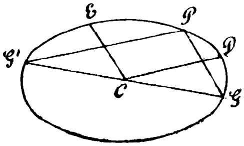
$$\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = (x^2 + y^2)\sin^2\varphi = \frac{(a^2 + b^2)\sin^2\varphi}{2} = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}\,,$$

а $2a^2b^2/(a^2 + b^2)$ је стална количина.

259. Дефин. Нека је P нека тачка дате елипсе, а GCG' један дијаметар њезин; корде PG и PG' називају се *суплементарне корде.*

Дијаметри, који иду напоредо са суплементарним кордама PG и PG', јесу коњуговани дијаметри.

Повуцимо на име два дијаметра, дијаметре CD и CE, напоредо са суплементарним кордама PG и PG' и загледајмо у троугао GPG'. Дијаметар CD дели страну GG' тог троугла на две равне чести; тај дијаметар иде међу тим напоредо са страном PG' тог троугла. Услед тога ће тај дијаметар CD делити на равне чести и корду PG, а сем ње и све остале корде које иду напоредо са дијаметром CE. Из сличних разлога дели и дијаметар CE на две једнаке чести корду PG' а сем ње и све остале корде које иду напоредо са дијаметром CD. По томе се види да су дијаметри CD и CE заиста коњуговани. — То би се могло и аналитички овако доказати.



Сл. 118.

Нека су $y = mx$ и $y = m'x$ еквације дијаметара CE и CD.

Нека је α ексцентрична аномалија тачке G, а β ексцентрична аномалија тачке P. Ексцентрична аномалија тачке G' биће $\pi + \alpha$. Према томе је еквација корде PG ово:

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

па је с тога

$$m = - \frac{b}{a} \cot \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Кад бисмо у том обрасцу сменили α са $\pi + \alpha$, добили бисмо коефицијенат m' који одређује правац корде PG'. Према томе је

$$m' = -\frac{b}{a}\cot\frac{\pi + \alpha + \beta}{2}$$

или

$$m' = \frac{b}{a}\,tg\,\frac{\alpha + \beta}{2}\,.$$

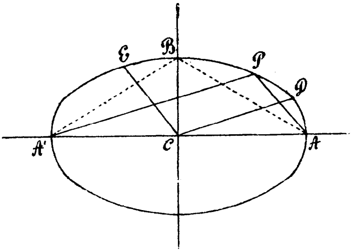
По томе се види да је

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}\,,$$

т. ј. дијаметри CD и CE који иду напоредо са двема суплементарним кордама су коњуговани, а то смо и тврдили.

260. *Одредити границе у којима се мења угао φ што лежи између два коњугована дијаметра.*

Угао φ, о коме је у овај мах реч, биће $=$ углу који лежи између суплементарних корада што иду напоредо са датим коњугованим дијаметрима. Дата проблема биће дакле решена чим одмеримо границе у којима се може мењати угао што лежи између поменутих суплементарних корада. Да бисмо добили што простији резултат, претпоставићемо да су суплементарне корде PA и PA' повучене из теменâ A и A' велике осовине.



Сл. 119.

Ако прва корда са осовином AA' — у овај мах са осовином x — затвара угао θ, а друга угао θ', биће

$$\varphi = \theta - \theta',$$

па је с тога и

$$tg\varphi = \frac{tg\theta - tg\theta'}{1 + tg\theta tg\theta'} .$$

Означимо сад координате тачке P са x', y'. Јасно је да ће коефицијенти који одређују правац корада PA и PA' бити ово:

$$tg\theta = \frac{y'}{x' - a}, \quad tg\theta' = \frac{y'}{x' + a};$$

према томе је

$$tg\varphi = \frac{\frac{y'}{x' - a} - \frac{y'}{x' + a}}{1 \quad + \frac{y'^2}{x'^2 - a^2}}$$

или

$$tg\varphi = \frac{2ay'}{y'^2 - (a^2 - x'^2)} .$$

Међу тим, како тачка P (x', y') лежи на елипси, биће

$$a^2 - x'^2 = \frac{a^2y'^2}{b^2},$$

а кад се то има у виду, биће јасно да је

$$tg\varphi = -\frac{2ab^2}{(a^2 - b^2)\,y'} . \qquad (9)$$

Кад се тачка P креће по горњој половини ABA' елипсе, биће ордината y' њезина позитивна; тангента угла φ биће у том случају негативна, т. ј. угао φ био би туп угао. На луку AB прве четврти мења се y' од O до b; апсолутна вредност количника који се налази на десној страни еквације (9), опадаће у том случају, т. ј. угао φ ће растити. Тај угао је најмањи ($\varphi = 90^\circ$), кад је $y' = o$, а највећи кад је $y' = b$; у том случају је $\varphi = \sphericalangle ABA'$, а

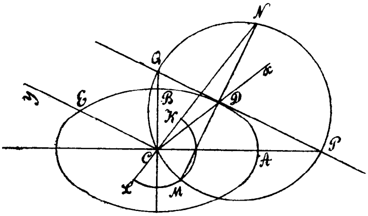
$$tg\varphi = -\frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Кад се тачка P буде по луку BA' кренула из тачке B према тачци A', онда ће се угао φ смањивати и биће минимум ($\varphi = 90^0$), кад тачка P буде дошла у тачку A'.

Према томе се види да је угао φ, који затварају два коњугована полудијаметра CD и CE што леже на истој страни велике осовине, у опште туп; границе у којима се он мења су ово: угао 90^0 као минимум, и угао ABA' као максимум Како међу тим једнаки коњуговани дијаметри иду напоредо са суплементарним кордама AB и BA' биће јасно уједно и то, *да је угао φ који затварају једнаки коњуговани полудијаметри што леже на истој страни велике осовине максимум.* Према томе је угао $180^0 - \varphi$ минимум међу углима које затварају једнаки коњуговани полудијаметри што леже с исте стране мале осовине.

261. *Производ двеју дужи DP и DQ, које одсецају ма која два коњугована дијаметра CA и CB на сталној тангенти PDQ је сталан и раван квадрату полудијаметра CE који иде напоредо са тангентом.*

Дијаметар CD који пролази кроз додирну тачку D је коњугован са дијаметром CE. Та два дијаметра CD и CE узећемо у овај мах за координатне осовине. Ако је $CD = a'$, $CE = b'$, биће еквација елипсе ово:



Сл. 120.

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = o,$$

а еквација тангенте у тачци D ово:

$$x = a'.$$

Узмимо сад да су x', y' координате тачке A. Еквација дијаметра CA је

$$y = \frac{y'}{x'} x,$$

а еквација тангенте у тачци A је

$$\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} - 1 = o,$$

па како дијаметар CB иде напоредо са тангентом у тачци A, а пролази кроз почетак системе, биће еквацији дијаметра CB ово:

$$\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = o \quad \text{или} \quad y = -\frac{b'^2 x'}{a'^2 y'} x.$$

Ако смо сад ради да нађемо одсечке DP и DQ, а ми ћемо у еквацијама дијаметара CA и CB сменити x са a'. Тим путем добићемо ово:

$$DP = \frac{y'}{x'} a', \quad DQ = -\frac{b'^2}{a'} \cdot \frac{x'}{y'},$$

па је с тога по апсолутној вредности и

$$DP \cdot DQ = b'^2,$$

а то смо и тврдили.

262. *Наћи правац и величину осовина кад су дата два коњугована дијаметра.*

Нека су CA и CB (сл. 120.) осовине елипсе. Око одсечка PQ као дијаметра описаћемо један круг; тај круг ће пролазити и кроз тачку C, јер је угао PCQ

прав угао. Одсечак $DM = DN$ нормале која је у тачци D повучена на елипсу је $=$ полудијаметру $CE = b'$, јер је с једне стране

$$DP \cdot DQ = \overline{DM}^2 = \overline{DN}^2,$$

а с друге стране је

$$DP \cdot DQ = \overline{CE}^2 = b'^2.$$

Кад се то има у виду, онда је лако одредити правац осовина̂ кад су дата два коњугована дијаметра CD и CE. Повући ћемо на име кроз тачку D праву PDQ паралелно са дијаметром CE, одмерићемо на нормали у тачци D дужи $DM = DN = b'$ и описаћемо круг MCN који пролази кроз тачке M, C, N. Права PDQ биће тангента елипсе, а средиште круга MCN лежи на тој тангенти. Тај круг ће сећи тангенту у тачкама P и Q; праве CP и CQ биће осовине криве.

Да видимо сад још како ће наћи дужине осовина. По Аполонијевим теорематима је

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

$$a'b' sin \varphi = ab,$$

па је услед тога и

$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' sin\varphi = a'^2 + b'^2 - 2a'b' cos\ (90^0 - \varphi),$$

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' sin\varphi = a'^2 + b'^2 - 2a'b' cos\ (90^0 + \varphi).$$

Ми ћемо претпоставити да је угао φ који лежи између коњугованих дијаметара оштар. Кад се то има у виду, биће јасно да разлика $a - b$ осовина̂ представља страну CM троугла CDM; две стране тог троугла су на име $CD = a'$, $DM = b'$, а угао CDM између тих страна је $90^0 - \varphi$. Сем тога је јасно и то, да збир $a + b$ осовина̂ представља страну CN троугла CDN; две стране тог троугла су на име $CD = a'$, $DN = b'$, а угао CDN што лежи између тих двеју страна је суплеменат угла.

$CDM = 90^0 - \varphi$. Опишимо сад око тачке C полупречником $CM = a - b$ један круг. Јасно је да ће дуж $LN = (a + b) + (a - b) = 2a$ представљати велику, а дуж $KN = (a + b) - (a - b) = 2b$ малу осовину дате елипсе. Тачка P лежи на средини лука MPN, т. ј. велика осовина полови угао MCN; мала осовина полови дакле његов суплеменат. — Ова конструкција је Шалова (*Aperçu historique*, p. 362.).

ЖИЖЕ И УПРАВНИЦЕ

263. На једном месту (чл. 233.) доказали смо ово: ако је $f(x, y) = o$ еквација неке криве другога реда и ако су α и β координате жижâ те криве, онда функција

$$F(x, y) = f(x, y) - \mu\,[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] \qquad (1)$$

мора бити потпун квадрат једне линеарне функције. Узмимо сад да је еквацијом $f(x, y) = o$ представљена елипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o, \qquad (a > b)$$

и потражимо жиже те елипсе. По поменутом правилу нашем мора функција

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \mu\,[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] \quad (1)$$

бити потпун квадрат једне линеарне функције. Како међу тим у функцији $F(x, y)$ нема члана у ком би се јављао производ xy, то се на први поглед види да функција $F(x, y)$ може бити квадрат једне линеарне функције само ако је $F(x, y)$ функције *једне* променљиве.

1-во. *Нека је $F(x, y)$ функција променљиве x.* У том случају мора бити

$$\beta = o, \quad \mu = \frac{1}{b^2},$$

па је с тога

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 + \frac{2\alpha}{b^2} x - \frac{\alpha^2}{b^2} - 1. \quad (2)$$

Израз који се налази на десној страни последње еквације биће потпун квадрат само ако је

$$\frac{\alpha^2}{b^4} = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{b^2} + 1\right),$$

т. ј. ако је

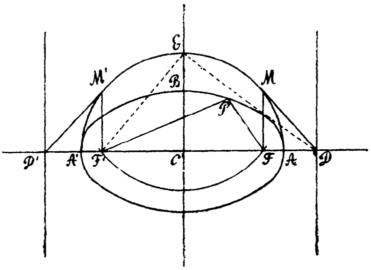
$$\alpha = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm c.$$

Према томе су координате жижâ ово:

$$\alpha = \pm c, \quad \beta = o,$$

а по томе се види да елипса има две реалне жиже, које леже на великој осовини у раздаљини c с десне и с леве стране средишта.

Конструкција жижâ. Описаћемо око темена B полупречником a један круг. Тачке F и F' у којима тај



Сл. 121.

круг сече велику осовину су жиже елипсине, јер је $\overline{CF}^2 = \overline{CF'}^2 = a^2 - b^2 = c^2$. —

Сменимо сад у изразу што стоји на десној страни еквације (2) α са $\pm$ c. Резултат те супституције биће

$$F(x, y) = -\frac{1}{b^2}\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2$$

кад је $\alpha = + c$, а

$$F(x, y) = -\frac{1}{b^2}\left(\frac{cx}{a} + a\right)^2$$

кад је $\alpha = - c$. Ако у еквацији (1) сменимо β нулом, μ са $\frac{1}{b^2}$, а $F(x, y)$ са $- 1/b^2 (cx/a - a)^2$ или са $- 1/b^2 (cx/a + a)^2$, а ми ћемо добити ово:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \equiv \frac{1}{b^2}\left[(x - c)^2 + y^2 - \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2\right]$$

или ово:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \equiv \frac{1}{b^2}\left[(x + c)^2 + y^2 - \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2\right].$$

По томе се види да се еквација дате елипсе може написати овако:

$$(x - c)^2 + y^2 - \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = o, \qquad (3)$$

или овако:

$$(x + c)^2 + y^2 - \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2 = o. \qquad (4)$$

Узмимо сад на елипси ма где једну тачку $P(x, y)$. Квадрати раздаљина̂ те тачке од жижа̂ $F(c, o)$ и $F'(- c, o)$ биће ово:

$$\overline{PF}^2 = (x - c)^2 + y^2,$$

$$\overline{PF'}^2 = (x + c)^2 + y^2.$$

Ако узимамо у виду еквације (3) и (4), биће нам јасно ово:

a) да је

$$PF = \pm\left(\frac{cx}{a} - a\right),\ PF' = \pm\left(\frac{cx}{a} + a\right);$$

b) да је

$$\frac{cx}{a} - a = o \quad \text{или} \quad x = \frac{a^2}{c}$$

еквација управнице која одговара жижи F, а

$$\frac{cx}{a} + a = o \quad \text{или} \quad x = -\frac{a^2}{c}$$

еквација управнице која одговара жижи F'; управнице иду дакле напоредо са малом осовином, а леже у истој раздаљини с десне и с леве стране средишта;

c) да је ексцентрицитет

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Конструкција управницâ. Одмерићемо на малој осовини дуж $CE = a$ и спојићемо крајну тачку E са жижом F'. Нормала ED, која је у тачци E повучена на праву $F'E$, сече велику осовину у тачци D, а та тачка D је подножје управнице која одговара жижи F, јер је $CD \cdot CF' = \overline{CE}^2$ или $CD = \frac{a^2}{c}$. На исти начин бисмо нашли и другу управницу. — Ево још једне конструкције. Описаћемо главни круг око велике осовине и продужићемо праве $x = c$ и $x = -c$ до тачака M и M' у којима те праве секу главни круг. Тачке D и D' у којима тангенте, што су повучене на круг у тачкама M и M', секу велику осовину, биле би подножја управницâ.

2-го. *Нека је $F(x, y)$ функција променљиве y.* У том случају мора бити

$$\alpha = o,\ \mu = \frac{1}{a^2},$$

па је с тога

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 + \frac{2\beta}{a^2} y - \frac{\beta^2}{a^2} - 1.$$

Израз који се налази на десној страни ове еквације биће потпун квадрат само ако је

$$\beta = \pm \sqrt{b^2 - a^2} = \pm ci.$$

Према томе су координате жижа̂ и ово:

$$\alpha = o, \quad \beta = \pm ci;$$

те две жиже су имагинарне, а леже на малој осовини елипсе. *Елипса има дакле четири жиже; две су реалне, а две имагинарне: прве две леже на великој осовини у раздаљини* $+ c$ *и* $- c$ *од средишта, а друге две на малој осовини у раздаљини* $+ ci$ *и* $- ci$.

Прим. 1. Доказати да је ексцентрицитет круга $= o$.

Прим. 2. Доказати да су управнице поларе жижа̂.

Координате жиже F су c, o; с тога је еквација поларе те жиже ово:

$$\frac{cx}{a^2} + \frac{o \cdot y}{b^2} - 1 = o$$

или

$$x = \frac{a^2}{c} \text{ т. ј. и т. д.}$$

264. *Збир раздаљина̂ ма које тачке P дате елипсе од двеју жижа̂ те елипсе је сталан.*

Мало час смо доказали да је

$$PF = \pm \left(\frac{cx}{a} - a\right) = \pm (ex - a),$$

$$PF' = \pm \left(\frac{cx}{a} + a\right) = \pm (ex + a).$$

Како је у овај мах реч само о апсолутној величини раздаљина PF и PF', то ћемо знаке испред заграде одабрати тако, да PF и PF' буду позитивне количине. Ми знамо да је $e < 1$ и да се x мења само између $-a$ и $+a$. Услед тога биће $|ex| < a$. Разлика $ex - a$ биће дакле негативна, а збир $ex + a$ свакад позитиван. Према томе ћемо испред разлике $ex - a$ узети знак $-$, а испред збира $ex + a$ знак $+$; биће дакле

$$PF = a - ex, \quad PF' = a + ex,$$

па је према томе и

$$PF + PF' = 2a = const., \tag{5}$$

а то смо и тврдили.

Напомене. 1-во. На основу еквације (5) извели смо једном приликом (чл. 31.) еквацију елипсе.

2-го. Кад се има у виду поменута особина, биће јасно да се елипса може овако нацртати. Утврдићемо крајеве једнога конца у двема тачкама F и F' равни, затегнућемо конац једном писаљком и кретаћемо писаљку тако, да конац свакад буде затегнут. При том кретању описаће писаљка елипсу; велика осовина те елипсе је онолика, колики је и конац, а жиже њезине су F и F'.

Прим. 1. Доказати да је збир раздаљинâ QF и QF' жижâ од неке тачке Q што лежи у унутрашњем крају елипсе мањи од $2a$.

Продужимо само дуж $F'Q$ (сл. 122.) до тачке P дате елипсе. Тачка P лежи на елипси, па је с тога

$$PF + PF' = PF + (PQ + QF') = 2a$$

или

$$(PF + PQ) + QF' = 2a.$$

Како је међу тим $PF + PQ > QF$, биће јасно да је и $QF + QF' < 2a$, а то смо и тврдили.

Прим. 2. Доказати да је збир раздаљинâ RF и RF' жижâ од неке тачке R што лежи у спољашњем крају елипсе већи од $2a$.

Најпре је

$$PF + PF' = PF + (RF' - RP) = 2a$$

или

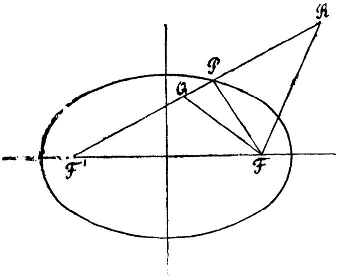
$$(PF - RP) + RF' = 2a,$$

па како је

$$PF - RP < RF,$$

биће уједно и

$$RF + RF' > 2a.$$

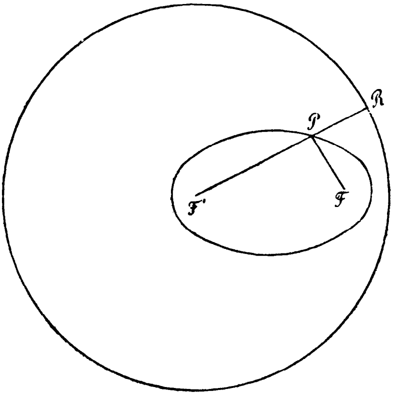


Сл. 122.

Прим. 3. Ексцентрична аномалија неке тачке P је φ. Доказати да је

$$PF = a(1 - e\cos\varphi),\ PF' = a(1 + e\cos\varphi).$$

265. Продужимо сад потег $F'P$ неке тачке P дате елипсе за дуж $PF = PR$, која лежи у спољашњем крају



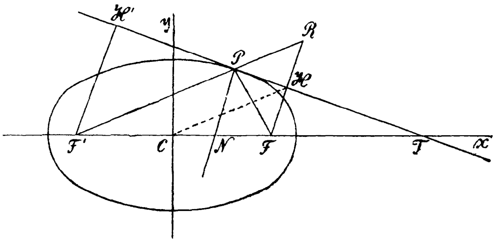
Сл. 123.

елипсе. Дуж $F'R$ се не ће мењати, кад се тачка P буде кретала по елипси; та дуж је на име $= 2a$. Према томе ће у томе случају тачка R описати један круг; средиште тог круга биће F', а полупречник његов је $F'R = 2a$. Тај круг назива се *круг управник* жиже F'. Јасно је да и жижа F има свој круг управник. Како су дужи PF и PR једнаке, то се уједно види и то, *да је елипса место тачака које у истој раздаљини леже од жиже F и од круга управника жиже F'.*

266. *Наћи раздаљину FH жиже F од тангенте PH.*

Нека су x', y' координате тачке P у којој тангента PH дира елипсу. Еквација тангенте је

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = o.$$



Сл. 124.

Према томе се види, да је раздаљина FH жиже F (c, o) од тангенте ово:

$$FH = \frac{1 - \frac{cx'}{a^2}}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}},$$

па како је (напом. чл. 257.)

$$\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}} = \frac{b'}{ab},$$

биће

$$FH = \frac{ab}{b'}\left(1 - \frac{cx'}{a^2}\right) = \frac{b}{b'}(a - ex') = \frac{b}{b'}PF. \qquad (6)$$

Сличним путем бисмо нашли, да је раздаљина $F'H'$ жиже F' $(-c, o)$ од тангенте PH ово:

$$F'H' = \frac{b}{b'}(a + ex') = \frac{b}{b'}PF'. \qquad (7)$$

Кад се имају у виду последња два обрасца (6) и (7), биће јасно да је

$$FH \cdot F'H' = \frac{b^2}{b'^2}(a^2 - e^2x'^2);$$

како је међу тим (чл. 257. (6*))

$$a^2 - e^2x'^2 = b'^2,$$

биће

$$FH \cdot F'H' = b^2 = const.,$$

т. ј. *производ раздаљина двеју жижа F и F' од ма које тангенте је сталан и раван квадрату мале полуосовине.*

267. *Тангента која је на елипсу повучена у тачци P затвара једнаке угле са потезима PF и PF' те тачке.*

Кад се имају у виду правоугли троугли (сл. 124.) PHF и $PH'F'$, биће јасно да је

$$\sin FPH = \frac{FH}{PF}, \quad \sin F'PH' = \frac{F'H'}{PF'};$$

према обрасцима (6) и (7) је дакле

$$\sin FPH = \frac{b}{b'}, \quad \sin F'PH' = \frac{b}{b'},$$

а по томе се види да је $\sphericalangle FPH = \sphericalangle F'PH'$, а то смо и тврдили. —

Поменута теорема могла би се и овако доказати. Апсциса тачке T у којој тангента PH продире осовину x је

$$CT = \frac{a^2}{x'},$$

па је с тога

$$TF = \frac{a^2}{x'} - c = \frac{a^2 - cx'}{x'},$$

а

$$TF' = \frac{a^2}{x'} + c = \frac{a^2 + cx'}{x'}.$$

Према томе је

$$\frac{TF}{TF'} = \frac{a^2 - cx'}{a^2 + cx'}. \tag{8}$$

Како је међу тим

$$PF = a - ex' = \frac{a^2 - cx'}{a},$$

а

$$PF' = a + ex' = \frac{a^2 + cx'}{a},$$

то се види да је и

$$\frac{PF}{PF'} = \frac{a^2 - cx'}{a^2 + cx'}.$$

Кад се та еквација упореди са еквацијом (8), видеће се да је

$$\frac{TF}{TF'} = \frac{PF}{PF'}.$$

Према томе ће тангента PT *споља* половити угао што лежи између потега PF и PF', а то значи да су угли FPH и $F'PH'$ једнаки.

Повуцимо сад на елипсу нормалу PN. Угли FPN и $F'PN$ су комплементи једнаких углова FPH и $F'PH'$. Према томе су и угли FPN и $F'PN$ једнаки, т. ј. *нормала полови угао* FPF' *што лежи између потега* PF *и* PF' *те тачке.*

Напомена. Кад би у једној жижи било једно светло тело, одбијали би се о елипсу зраци које то тело расипа под једним углом, који би био раван углу под којим зраци падају на елипсу. Нека је FP један од поменутих зракова. Повуцимо тангенту у тачци P. Како ће се тај зрак одбити под истим углом, под којим је и ударио о елипсу, биће јасно да ће одбијен зрак ићи у правцу потега PF'. То што вреди за тај зрак FP, вредиће у опште и за све остале зраке. Сви ти зраци одбиће се о елипсу према жижи F' тако, да ће се у жижи F' видети јака, светла слика оног тела што светли у жижи F. Са те особине називају се тачке F и F' жижама.

268. *Подножница жиже је главни круг елипсе.*

Продужимо потег $F'P$ (сл. 124. чл. 266.) за дуж $PF = PR$. Тангента у тачци P половиће угао на темену P равнокраког троугла FPR; с тога ће тангента пролазити кроз средину H стране RF и биће управна на тој страни. Тачка H биће дакле пројекција жиже F на тангенти у тачци P. Ако спојимо тачку H са средиштем C, биће дуж CH равна половини стране $F'R = 2a$ троугла $F'RF$, јер права CH пролази кроз средине C и H страна FF' и RF тог троугла. — Доказали смо дакле да је

$$CH = a,$$

а то значи да је место пројекцијâ H жиже F један круг; полупречник тог круга је a.

Прим. Доказати аналитички да је подножница жиже главни круг елипсе. —

Напом. **Треба из еквацијâ**

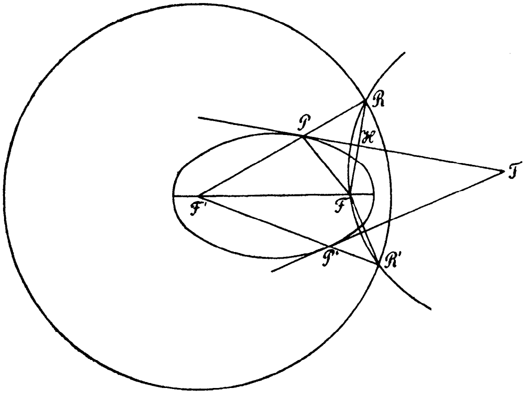
$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \quad y = -\frac{1}{m}(x - c)$$

елиминирати параметар m.

269. *Конструкција тангенте дате елипсе у датој тачци њезиној* P. — Продужићемо (сл. 124. чл. 266.) потег $F'P$ за дуж $PF = PR$ и повући ћемо кроз тачку P праву PHT управно на основу RF троугла FPR. Права PHT биће тангента, јер та права дели на два једнака дела угао на темену P равнокраког троугла FPR.

270. *Конструкција тангената које се на елипсу могу повући из неке тачке* T *што не лежи на елипси.*

Описаћемо око тачке T један круг полупречником



Сл. 125.

TF; тај круг сећи ће круг управник који одговара жижи F' у тачкама R и R'. Те две тачке спојићемо са жижом F и спустићемо из тачке T управне на FR и FR'. Те две управне биће тангенте, а тачке P и P' у којима оне секу $F'R$ и $F'R'$ биће додирне тачке. —

Напомена. Круг управник и круг који је око тачке T описан полупречником TF сећи ће се ако је

$$TF' < 2a + TF,$$

$$2a < TF + TF',$$

$$TF < 2a + TF'.$$

Прва и последња неједнакост постоје, јер је у троуглу TFF'

$$TF' < 2c + TF, \quad TF < 2c + TF',$$

па како је $a > c$, то је *a fortiori*

$$TF' < 2a + TF, \quad TF < 2a + TF'.$$

Она друга неједнакост постоји само кад тачка T лежи у спољашњем крају елипсе, а то значи, да се само из спољашњег краја могу повући две реалне тангенте на елипсу. То смо у осталом већ досад и аналитички доказали.

Кад тачка T лежи на елипси, онда је

$$2a = TF + TF';$$

поменута два круга ће се додиривати, тачке R и R' ће се поклапати, т. ј. из тачака које леже на елипси може се у ствари на елипсу повући само једна тангента.

Кад тачка T лежи у елипси, онда је

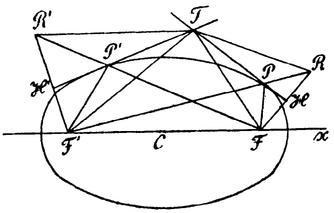
$$2a > TF + TF';$$

кругови ће се у том случају сећи у имагинарним тачкама, т. ј. проблема се не може решити.

271. *Тангенте, што су из тачке T повучене на елипсу, једнако су нагнуте према правима које спајају тачку T са жижама.*

Продужићемо потег $F'P$ за дуж $PF = PR$, а потег FP' за дуж $P'F' = P'R'$. Тангенте елипсе у тачкама P и P' биће управне на правима RF и $R'F'$. Кад се има на уму да је $TR = TF$, $TR' = TF'$, $RF' = R'F = 2a$, биће јасно да су троугли $R'TF$ и RTF' једнаки; у тим једнаким троуглима биће и угли $R'TF$ и RTF' једнаки. Ако од тих једнаких углова одузмемо њихов заједнички део $F'TF$, добићемо опет два једнака угла $R'TF'$ и RTF; према томе је јасно да ће и половине тих углова бити једнаке; биће дакле $\sphericalangle H'TF' = \sphericalangle HTF$, а то смо и тврдили.

Узмимо сад уз дату елипсу још једну елипсу која има исте жиже F и F' као и она прва; за такве две елипсе каже се да су *конфокалне.* Ако ова друга елипса пролази кроз тачку T, онда ће тангента што је на њу повучена у тачци T затварати једнаке угле са потезима TF и TF'. Према оном што смо мало час доказали, биће јасно да та тангента затвара једнаке угле и са правима TP и TP'. Дакле, *тангенте TP и TP', што су на дату елипсу повучене из тачке T неке конфокалне елипсе, једнако су нагнуте према тангенти која је у тачци T повучена на ту елипсу.*



Сл. 126.

272. *Права FT, што спаја жижу F са тачком T у којој се секу две тангенте елипсине, полови угао PFP' између потега FP и FP', који спајају жижу F са додирним тачкама P и P'.*

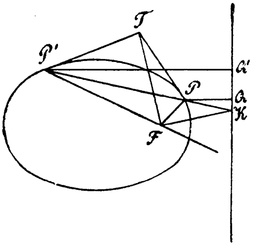
Троугли (сл. 126. чл. 271.) $R'TF$ и RTF' су једнаки; биће дакле и угли $R'FT$ и $F'RT$ једнаки, па како је $\sphericalangle F'RT = \sphericalangle PFT$, биће и $\sphericalangle R'FT = \sphericalangle PFT$, а то смо и тврдили.

Кад би тачка T лежала на управници жиже F, пролазила би корда што спаја додирне тачке P и P' кроз F; та би корда била, као што се то каже, *фокална корда.* Угао PFP' имао би у том случају 180°, а по томе се види *да је права што спаја жижу са полом ма које фокалне корде управна на тој корди.*

273. *Права FK, која спаја жижу F са тачком K у којој нека трансверзала PP' елипсе сече управницу што одговара жижи F, полови спољашњи угао на темену F троугла PFP'.*

Нека су PQ и $P'Q'$ раздаљине тачака P и P' од управнице; биће

$$e = \frac{PF}{PQ} = \frac{P'F}{P'Q'},$$



Сл. 127.

па је с тога и

$$\frac{PF}{P'F} = \frac{PQ}{P'Q'}.$$

У сличним троуглима PQK и $P'Q'K$ је међу тим

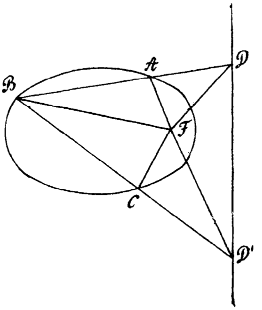
$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{PK}{P'K};$$

према томе је и

$$\frac{PF}{P'F} = \frac{PK}{P'K},$$

а по тој сразмери се види да тачка K дели праву PP' по напремици у којој стоји страна PF према страни $P'F$, па како тачка K споља дели одсечак PP', биће јасно да и права FK споља полови угао троугла PFP' на темену његову F. —

На основу те теореме може се конструјисати управница кад су познате жижа F и три тачке A, B, C криве. Спојићемо жижу F са тачкама A и B и преполовићемо спољашњи угао троугла AFB на темену његову F. Права FD, што полови поменути угао, сећи ће секанту AB у тачци D, а тачка D биће једна тачка управнице. Како сем тачака A и B знамо још и тачку C дате криве, то бисмо могли сличним путем наћи још једну тачку D' управнице. Према томе би права DD' била управница.



Сл. 128.

Напомена. Поменута теорема могла би се и овако доказати. Тачка T (сл. 127.) је пол поларе PP'. Према томе ће права FT половити угао PFP'. Међу тим, како се у тачци K секу полара PP' тачке T и полара (управница) жиже F, то је јасно да ће тачка K бити пол фокалне корде FT. С тога ће права KF бити $\perp$ на FT, па како FT изнутра полови угао PFP', половиће права FK споља тај угао.

274. *Пол поларне координатне системе лежи у жижи. Наћи поларну еквацију елипсе.*

Велику осовину AA' узећемо за поларну осовину, а жижу F за пол. Ако је x' апсциса неке тачке P, биће

$$\varrho = PF = a - ex'.$$

Међу тим је

$$FQ = x' - c = \varrho \cos\theta ;$$

с тога је

$$x' = c + \varrho \cos\theta .$$

Поларна еквација елипсе је дакле овог облика:

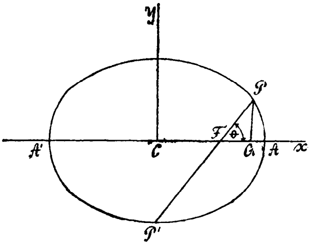
$$\varrho = a - e\,(c + \varrho \cos\theta)$$

или

$$\varrho\,(1 + e\cos\theta) = a\,(1 - e^2)$$

или

$$\varrho = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} . \tag{9}$$



Сл. 129.

Ако је $\theta = 90^\circ$, биће $\varrho = a\,(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} = p$, па се с тога поларна еквација (9) може и овако написати:

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} . - \tag{10}$$

Стална количина p назива се *параметар* елипсе.[1]

275. *Хармонијска средина одсечака FP и FP' жиже F на фокалној корди PP' је стална количина.*

Одсечак FP је потег тачке P, а одсечак FP' потег

---

[1] **Многи писци називају параметром *(latus rectum)* количину $2p$ и бележе је са p. У том случају била би поларна еквација елипсе овог облика:**

$$\varrho = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\theta} .$$

тачке P'; ако је θ поларан угао прве тачке, биће $180^\circ + \theta$ поларан угао друге тачке. Према томе је

$$FP = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \quad FP' = \frac{p}{1 - e\cos\theta};$$

по томе се види да је и

$$\frac{1}{FP} + \frac{1}{FP'} = \frac{2}{p} = const.,$$

а то смо и тврдили.

Примери. Теореме и проблеме.

1. **Тангенте на крајевима ма ког дијаметра су паралелне.**

Еквације тангената су

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = o, \quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + 1 = o,$$

т. ј. и т. д.

2. **Наћи пол (x', y') праве $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o$ с обзиром на елипсу $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$.**

Одг. Координате пола су

$$x' = \frac{a^2\cos\alpha}{p}, \quad y' = \frac{b^2\sin\alpha}{p}.$$

3. **Поларе тачака P с обзиром на елипсу $x^2/a^2+y^2/b^2-1=o$ додирују круг $x^2 + y^2 = r^2$. Наћи место полова тих полара. —**

Одг. Место је елипса

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{r^2}.$$

4. **Тангента у тачци P елипсе $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$ сече круг $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ у тачкама Q и R. Доказати да су CQ и CR коњуговани дијаметри елипсе. —**

Нека је

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}$$

еквација дате тангенте. Еквација правих CQ и CR биће (види прим. 35. стр. 173.) ово:

$$(a^2 + b^2)(x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 - (a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha)(x^2 + y^2) = o.$$

Ако ову еквацију напишемо у овом облику:

$$(y - mx)(y - m'x) = o,$$

видећемо да је

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2},$$

т. j. и т. д.

5. Ако ортогонално пројицирамо два коњугована дијаметра на једној (малој или великој) осовини елипсе, биће збир квадрата тих пројекција $=$ квадрату те осовине.

Ако су на име x', y' координате тачке на крају једног, а x'', y'' координате тачке на крају другог дијаметра, биће

$$x'^2 + x''^2 = x'^2 + \frac{a^2 y'^2}{b^2} = x'^2 + a^2 - x'^2 = a^2,$$

$$y'^2 + y''^2 = y'^2 + \frac{b^2 x'^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2) + \frac{b^2 x'^2}{a^2} = b^2.$$

6. Наћи место тачака N (сл. 116.) у којима се секу тангенте што су повучене на елипсу на крајевима двају коњугованих дијаметара CD и CE.

Ако квадрирамо и саберемо еквације

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = o, \quad \frac{xx''}{a^2} + \frac{yy''}{b^2} - 1 = o,$$

добићемо ово:

$$\frac{x^2}{a^4}(x'^2 + x''^2) + \frac{y^2}{b^4}(y'^2 + y''^2) = 2\ ;$$

производâ xy нема у изразу с леве стране јер је $x''y'' = -x'y'$. Међу тим, како је $x'^2 + x''^2 = a^2$, а $y'^2 + y''^2 = b^2$, биће еквација места ово:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2.$$

7. У некој тачци P дате елипсе повући ћемо тангенту на елипсу и спојићемо тачку P са жижом F; за тим ћемо из средишта C повући праву CD напоредо са потегом PF додирне тачке. Ако тачку, у којој та права сече тангенту означимо са D, биће $CD = a$. —

Ту дуж CD добили бисмо на име кад бисмо поделили раздаљину средишта од тангенте синусом оног угла који лежи између потега и тангенте, т. ј. кад бисмо поделили $\frac{ab}{b'}$ са $\frac{b}{b'}$, а по томе се види да је заиста $CD = a$.

8. Из средишта је спуштена управна на тангенту у тачци (x', y'). Потег што спаја додирну тачку (x', y') са жижом (c, o) сече управну у тачци P. Наћи место тачака P. —

Треба елиминирати x', y' из еквација

$$y^2 = \frac{a^2y'}{b^2x'}x, \quad y = \frac{y'}{x'-c}(x-c), \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = o.$$

Резултат је ово:

$$x^2 + y^2 - 2cx - b^2 = o,$$

т. ј. место тачака P је круг.

9. Из жиже је повучена управна на тангенту у тачци (x', y'), а из средишта је повучен потег ка додирној тачци. Управна сече потег у тачци P. Наћи место тачака P. —

Треба елиминирати x', y' из еквација

$$y = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x-c), \quad y = \frac{y'}{x'}x.$$

У резултату ћемо добити ово:

$$x = \frac{a^2}{c},$$

т. ј. место тачака P је управница која одговара жижи (c, o).

10. PN је дужина нормале која је у тачци $P(x', y')$ повучена на елипсу, а p је дужина управне што је из средишта спуштена на тангенту у тачци P доказати да је $PN \cdot p = b^2$. —

$$\overline{PN}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QN}^2 = y'^2 + \frac{b^4}{a^4}x'^2 = b^4\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right),$$

па како је (види напом. у чл. 257.)

$$\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}} = \frac{1}{p},$$

биће јасно да је и

$$\overline{PN}^2 \cdot p^2 = b^4$$

или

$$PN \cdot p = b^2, \qquad (\alpha)$$

а то смо и тврдили. — Кад се има у виду да је $p = \frac{ab}{b'}$, биће јасно да ћемо образац (α) моћи и овако написати:

$$PN = \frac{bb'}{a}. \qquad (\beta)$$

Продужимо сад нормалу PN до тачке N' у којој она сече малу осовину. Сличним путем бисмо нашли да је и

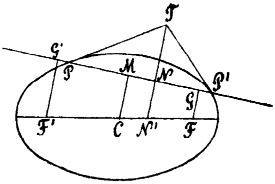
$$PN' = \frac{ab'}{b};$$

према томе је

$$PN \cdot PN' = b'^2,$$

а тим обрасцем је формулисана једна нова теорема; која?

11. На корду PP' треба спустити управне FG, $F'G'$, CM и TN из жижâ F и F', средишта C и пола $T(x', y')$ корде PP'. Доказати да је $CM \cdot TN' = b^2$, а $TN' \cdot NN' = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - e^2x'^2)$.



Сл. 130.

Напом. Кад тачка T лежи на елипси, онда је $TN' = NN' =$ нормали тачке T. У том специјалном случају преобразио би се други образац у образац (β) прим. 10.

12. MM' је полара тачке T, P је нека тачка елипсе $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$, TG је управна из T на тангенту у тачци P, PN је на нормали одсечак између тачке P и велике осовине, а PM је управна из P на полару. Доказати да се $PN \cdot TG$ мења као и PM.

Ако су x', y' координате тачке P, а x'', y'' координате тачке T, биће

$$TG\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}} = \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} - 1, \quad PM\sqrt{\frac{x''^2}{a^4} + \frac{y''^2}{b^4}} = \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} - 1,$$

па како је (прим. 10.)

$$\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}} = \frac{PN}{b^2},$$

биће и

$$\frac{PN \cdot TG}{b^2} = PM \sqrt{\frac{x''^2}{a^4} + \frac{y''^2}{b^4}} \cdot -$$

Том теоремом је непосредно доказан ***Хемилтонов*** *закон о сили* (*Proceedings of the Royal Irish Academy*, № LVII. v. III.).

13. a и b су полуосовине, а a' и b' су коњуговани полудијаметри. Доказати

$$(a' + b')^2 = a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin\varphi},\ (a' - b')^2 = a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin\varphi},$$

а

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 = c^2.$$

14. Ексцентрична аномалија тачке D на крају полудијаметра CD је φ. Наћи дужине коњугованих полудијаметара CD и CE.

Одг.
$$a'^2 = x'^2 + y'^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$
$$b'^2 = x''^2 + y''^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

15. Ексцентричне аномалије тачака P и P' су φ и φ', а b' је полудијаметар што иде напоредо са кордом PP'. Доказати да је дужина d корде PP' ово: $d = 2b'\sin\frac{\varphi - \varphi'}{2}$. —

Како је

$$d^2 = a^2(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 + b^2(\sin\varphi - \sin\varphi')^2,$$

биће

$$d = 2\sin\frac{\varphi - \varphi'}{2}\left[a^2\sin^2\frac{\varphi + \varphi'}{2} + b^2\cos^2\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Узмимо сад да је $\frac{\varphi + \varphi'}{2}$ ексцентрична аномалија неке тачке D. Биће јасно да израз (види други обр. у прим. 14.)

$$a^2\sin^2\frac{\varphi + \varphi'}{2} + b^2\cos^2\frac{\varphi + \varphi'}{2}$$

представља квадрат половине дијаметра EE' који је коњугован с дијаметром DCD' што пролази кроз тачку D. Еквација тангенте у тачци D је ово:

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\varphi + \varphi'}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\varphi + \varphi'}{2} - 1 = o,$$

а еквација корде PP' је ово:

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\varphi + \varphi'}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\varphi + \varphi'}{2} - \cos\frac{\varphi - \varphi'}{2} = o;$$

према томе је тангента у тачци D паралелна са кордом PP'. Но како тангента у тачци D иде напоредо и са дијаметром EE', то ће и дијаметар EE' ићи напоредо са кордом PP', т. ј. и т. д.

16. Ексцентричне аномалије тачака P_1, P_2, P_3 су $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Доказати да је површина троугла који затварају тангенте што су на елипсу повучене у тачкама $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ово:

$$A = ab\, tg\, \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\, tg\, \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}\, tg\, \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2},$$

а површина троугла $P_1P_2P_3$ ово:

$$A' = 2ab \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} \sin \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}.$$

17. P_1, P_2, P_3 су три тачке дате елипсе. Око троугла $P_1P_2P_3$ је описан један круг. Наћи полупречник тог круга.

Ако су d_1, d_2, d_3 стране, а A' површина троугла $P_1P_2P_3$, биће

$$r = \frac{d_1d_2d_3}{4A'},$$

па како је (прим. 15.)

$$d_1 = 2b_1 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}, \quad d_2 = 2b_2 \sin \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}, \quad d_3 = 2b_3 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2},$$

биће и

$$r = \frac{b_1b_2b_3}{ab}.$$

Напом. Са b_1, b_2, b_3 означене су половине дијаметара који иду напоредо са појединим странама d_1, d_2, d_3.

18. Тачци P дате елипсе одговара тачка P_1 главног круга те елипсе. Наћи место тачака у којима права CP_1 сече нормалу што је на елипсу повучена у тачци P.

Еквација нормале је

$$\frac{ax}{\cos \varphi} - \frac{by}{\sin \varphi} = c^2,$$

где је са φ означена ексцентрична аномалија тачке P.

Ако у овој еквацији сменимо x и y са $\varrho \cos \varphi$ и $\varrho \sin \varphi$, добићемо ово:

$$(a - b)\varrho = c^2 \quad \text{или} \quad \varrho = a + b;$$

то би била тражена еквација, т. ј. место које се у овај мах тражи је круг. Тај круг је концентричан са елипсом, а полупречник му је $a + b$.

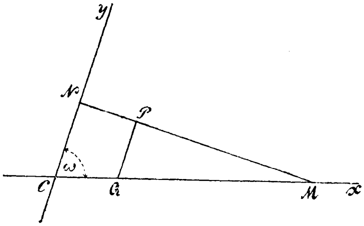
19. Стална дуж MN клизи по двема одређеним правима Cx и Cy, које међу собом затварају угао ω. Наћи место ма које тачке P праве MN.

Нека је $MN = l$, $PM = b$, $PN = a$. Праве Cx и Cy узећемо за осовине. Ако промењиве одсечке CM и CN дужи MN на осовинама означимо са m и n, биће

$$x = CQ = \frac{am}{l}, \quad y = PQ = \frac{bn}{l},$$

а

$$m^2 + n^2 - 2mn \cos\omega = l^2.$$



Сл. 131.

Ако елиминирамо m и n, добићемо ово:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos\omega = 1,$$

т. ј. место тачака P је елипса; средиште те елипсе је у почетку координатне системе.

20. Темена A и B неког датог троугла ABC клизе по двема датим правима Cx и Cy. Доказати да ће треће теме C описати једну елипсу. (**Schooten**. *Organica conicorum descriptio,* 1646.).

21. Наћи подножницу средишта елипсе $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$.

Одг. У поларним координатама је еквација подножнице ово:

$$\varrho^2 = a^2 cos^2\theta + b^2 sin^2\theta,$$

а у паралелним координатама је еквација подножнице ово:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

22. Нека елипса клизи по крацима једног правог угла. Наћи место средишта.

Ако краке узмемо за осовине, биће еквација места ово:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

т. ј. место је круг.

23. CD и CE су коњуговани полудијаметри. Наћи место тачке на средини корде DE.

Одг. Место је елипса

$$\frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}=1.$$

24. Наћи еквацију корде коју полови дата тачка (x', y').

Одг. $$\frac{x'}{a^2}(x-x')+\frac{y'}{b^2}(y-y')=o. \qquad (\gamma)$$

25. Корде неке елипсе пролазе кроз тачку (h, k). Наћи место њихових средина̂.

Најпре треба аналитички обележити тај факт, да корда (γ) пролази кроз тачку (h, k), па онда у тој погодбеној релацији сменити x' и y' са x и y. Место средина̂ (x, y) биће дакле елипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{hx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}.$$

Напом. Та проблема могла би се решити и по оном општем обрасцу који се налази у прим. 4. стр. 471.

26. Корде елипсе $x^2/a^2+y^2/b^2-1=o$ додирују концентричан круг $x^2+y^2=r^2$. Наћи место тачака што леже на средини корада.

Одг. $$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=r^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right).$$

27. Наћи место тачака што леже на средини нормала̂ PN.

Одг. Место је елипса

$$4b^2x^2+4(1+e^2)^2a^2y^2=a^2b^2(1+e^2)^2.$$

28. Збир обрнутих вредности двеју фокалних корада PP' и QQ', што стоје управно једна на другој, је стална количина.

$$PF=\frac{p}{1+e\cos\theta},\quad P'F=\frac{p}{1-e\cos\theta};$$

$$\therefore \qquad PP'=PF+P'F=\frac{2p}{1-e^2\cos^2\theta}.$$

Корду QQ' што стоји $\perp$ на PP' добићемо кад у последњем обрасцу сменимо θ са $90^0+\theta$. Биће дакле

$$QQ'=\frac{2p}{1-e^2\sin^2\theta}.$$

Према томе је

$$\frac{1}{PP'}+\frac{1}{QQ'}=\frac{2-e^2}{2p}=const.$$

29. Жижа је пол системе, а $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$ су поларни угли двеју тачака. Доказати да се еквација корде што спаја те две тачке може овако написати:

$$\frac{p}{\varrho}=e\cos\theta+\sec\beta\cos(\theta-\alpha).$$

Напом. Еквација тангенте у тачци α је ово:

$$\frac{p}{\varrho}=e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha).$$

30. Тангента што је повучена из тачке T на елипсу дира елипсу у тачци P, а део PT тангенте види се из жиже под сталним углом δ. Наћи место тачке T.

Одг. Еквација места је

$$\frac{p}{\varrho}=\cos\delta+e\cos\theta.$$

31. $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$ су ексцентричне аномалије двеју тачака. Наћи координате x и y тачке у којој се секу нормале што су на елипсу повучене у тачкама $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$.

Одг. $$x=\frac{c^2\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{a\cos\beta},$$

$$y=-\frac{c^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{b\cos\beta}.$$

Дефин. Круг који пролази кроз три тачке што узастопце једна за другом долазе на некој кривој зове се *круг кривине*.

32. *Наћи координате средишта круга кривине у тачци α дате елипсе.*

Узмимо три тачке α, β, γ. Координате циркум-центра троугла $(\alpha\beta\gamma)$ су (види прим. 4. обр. (α) чл. 58.) ово:

$$x=\frac{c^2}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2},\quad y=-\frac{c^2}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Кад те три тачке узастопце долазе једна за другом на елипси, онда је $\alpha=\beta=\gamma$, т. ј. координате средишта круга кривине у тачци α су ово:

$$x = \frac{c^2 cos^3 \alpha}{a}, \quad y = - \frac{c^2 sin^3 \alpha}{b}. \qquad (\delta)$$

Исте те обрасце добићемо, као што ћемо одмах видети, и ако претпоставимо да је у прим. 31. у граници $\beta = o$, т. ј. ако претпоставимо да тачке $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$ узастопце долазе једна за другом на елипси, а по томе се види *да је средиште кривине тачка у пресеку двеју нормала које узастопце долазе једна за другом.*

33. Наћи еквацију еволуте дате елипсе $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$.

Дефин. *Еволута* је место средиштâ кругова кривине. —

Дату проблему ћемо овако решити. Елиминираћемо α из еквацијâ (δ). Еквација еволуте биће

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

34. Наћи полупречник r круга кривине у тачци α. —

Ако са p означимо управну из средишта на тангенту у тачци α, биће

$$r = \frac{b'^2}{p};$$

полупречник круга кривине или просто полупречник кривине је на имо дуж што спаја тачку $(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ с тачком

$$\left(\frac{c^2 cos^3 \alpha}{a}, \ - \frac{c^2 sin^3 \alpha}{b}\right).$$

35. Спојићемо (сл. 109.) средиште C с тачком P. Управна из N на PN сећи ће CP у тачци L. Управна LM из L на велику осовину пролазиће кроз средиште круга кривине у тачци P.

Mannheim.

Троугли CPT и CLN су слични; ако са M означимо тачку у којој управна LM сече осовину, видећемо да су и троугли CLM и CPQ слични; с тога је

$$CT : CN = CP : CL = CQ : CM,$$

па како је $CT = \frac{a^2}{x'}$, $CN = e^2 x'$, $CQ = x'$, биће и

$$CM = \frac{e^2 x'^3}{a^2} = \frac{c^2 cos^3 \alpha}{a},$$

а по томе се види да CM представља апсцису средишта круга кривине.

36. Еквација тангената које се могу повући из тачке (x', y') на елипсу је

$$\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)^2,$$

а угао φ који оне затварају одређује се по обрасцу

$$tg\varphi=\frac{2\sqrt{b^2x'^2+a^2y'^2-a^2b^2}}{x'^2+y'^2-a^2-b^2}.$$

37. Круг $x^2+y^2+2gx+2fy+c=o$ пролази кроз крајеве трију полудијаметара елипсе $x^2/a^2+y^2/b^2-1=o$. Доказати да круг

$$x^2+y^2+\frac{2fb}{a}x-\frac{2ga}{b}y-(a^2+b^2+c)=o$$

пролази кроз крајеве трију коњугованих полудијаметара.

R. A. Roberts.

38. Која је највећа између свију елипси које су уписане у један паралелограм?

39. Која је најмања између свију елипси које су описане око једног паралелограма?

40. Некакав паралелограм је описан око елипсе, а једно теме његово клизи по управници. Доказати 1-во, да ће супротно теме описати другу управницу, и 2-го, да остала два темена леже на једном кругу чији је дијаметар раван великој осовини елипсе.

41. Збир квадрата нормала које су повучене на крајевима двају коњугованих дијаметара једне елипсе је сталан.

42. У тачкама P и Q повучене су нормале на елипсу. Управна из средине M корде PQ на PQ пролази кроз средине оних дужи које нормале исецају на осовинама.

Laguerre.

43. Троугао PQR је описан око елипсе, а додирне тачке његових страна су p, q, r. Права PS, што спаја теме P с тачком S у којој дијаметар Cp сече корду qr, пролази кроз средину стране QR.

44. Кроз неку одређену тачку P дате елипсе повући ћемо ма у ком правцу једну корду PQ и повући ћемо у тачци Q тангенту на елипсу. Та тангента сећи ће дијаметар што иде напоредо са кордом PQ у тачци R. Наћи место тачака R.

45. Еквација места из кога се на елипсу могу повући тангенте које међу собом затварају некакав дат угао је овог облика:

$$(x^2 + y^2)^2 = ax^2 + by^2 + c.$$

Darboux.

46. F и F' су жиже елипсе, а P и P' су тачке у којима елипсу дирају тангенте TP и TP'. Ако на тангенти TP одмеримо дуж $TQ = TF$, а на тангенти TP' дуж $TQ' = TF'$, биће дуж QQ' равна фокалној осовини.

47. Управна из жиже F на ма који дијаметар сече дијаметар, који је коњугован с оним првим, у једној тачци што лежи на управници која одговара жижи F.

48. Наћи површину елипсе $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$.

49. Између свију парова коњугованих дијаметара је збир осовина минимум, а збир једнаких коњугованих дијаметара максимум.

50. Из неке сталне тачке спустићемо управне на дијаметре елипсе. Место тачака у којима управне секу коњуговане дијаметре је Аполонијева хипербола.

Шал.

51. Ако жижу F спојимо с крајевима једне корде која иде напоредо са великом осовином, биће збир потега раван великој осовини.

52. Из средишта C је спуштена управна CR на нормалу PN у тачци P. Ако нормала сече осовине у тачкама N и N', биће $PN \cdot PR = b^2$, $PN' \cdot PR = a^2$.

◆

ОДЕЉАК ДРУГИ

О хиперболи

276. Претпоставићемо да су осовине координатне системе уједно и осовине хиперболе. У тој системи биће, као што знамо, еквација хиперболе овог облика:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = o. \qquad (1)$$

Помоћу те еквације одредили смо већ у један мах (чл. 32.) приближно облик хиперболе. Осовина x сече дату хиперболу (1) у двема реалним тачкама A и A', које од средишта леже у раздаљини $+a$ и $-a$. Та осовина AA' назива се *трансверзална осовина* хиперболе; дужина њезина је одмерена бројем $2a$. Осовина y сече хиперболу (1) у двема имагинарним тачкама, а координате тих тачака су $x=o, y=bi$ и $x=o, y=-bi$. Та осовина се зове *коњугована* или *имагинарна осовина* хиперболе. Јасно је да на осовини y имају две тачке B и B' које леже у раздаљини $+b$ и $-b$ од средишта C хиперболиног. По аналогији се каже да је $2b = BB'$ дужина имагинарне осовине.

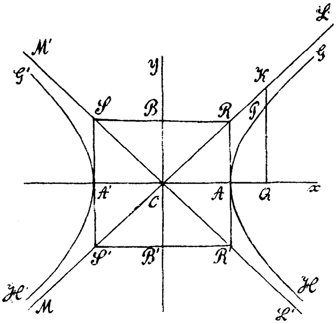
Ако трансверзалну осовину узмемо за поларну осовину системе, а средиште C за пол, биће поларна еквација хиперболе ово:

$$\rho^2 = \frac{a^2b^2}{b^2cos^2\theta - a^2sin^2\theta}$$

$$= \frac{a^2b^2}{b^2 - (a^2 + b^2)\, sin^2\theta} = \frac{a^2b^2}{(a^2 + b^2)\, cos^2\theta - a^2}\,. \qquad (2)$$

По тој еквацији види се да је ϱ минимум кад је именитељ $b^2 - (a^2 + b^2) \, sin^2\theta$ максимум; ϱ ће дакле бити минимум кад је $\theta = o$ или $\theta = 180^\circ$, а то значи *да су од свију тачака хиперболиних темена* A *и* A' *најближа средишту.* Узмимо да је θ најпре $= o$ и да постепено расте. У том случају растиће и ϱ, и биће бескрајно кад је

$$sin \, \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{или} \quad tg \, \theta = \frac{b}{a}.$$



Сл. 132.

Нека је $\sphericalangle \, LCx$ тај угао θ чија је тангента $= \frac{b}{a}\cdot$ Узмимо сад да θ и даље расте; именитељ $b^2 - (a^2 + b^2) \, sin^2\theta$ биће негативан, па ће према томе и ϱ^2 бити негативно, а то ће рећи да ће потези ϱ сећи криву само у имагинарним тачкама; међу тим ако θ без прекида и даље расте, то ће најпосле θ тако нарастити, да ће бити

$$sin \, \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{а} \quad tg \, \theta = - \frac{b}{a};$$

у том случају ће ϱ поново бити реално, али бескрајно. Кад θ пређе ту границу, онда ће ϱ бивати све мање и мање и биће најпосле минимум кад је $\theta = 180^\circ$. Нека је $\sphericalangle \, M'Cx$ онај угао, чија је тангента $= - \frac{b}{a}\cdot$

Јасно је према свему овоме да хипербола неће имати реалних тачака у углу *M'CL*. Сличним путем дало би се доказати да хипербола не ће имати реалних тачака ни у углу *L'CM*. — Праве *LM* и *L'M'* биће *асимптоте* хиперболине; те асимптоте издвајају, као што видимо, крајеве у којима хипербола има реалних тачака од крајева у којима их она нема, а еквације њихове су ово:

$$y = \frac{b}{a} x, \quad y = -\frac{b}{a} x. — \qquad (3)$$

То се у осталом види и по овоме. На једноме месту (чл. 218. стр. 466.) доказали смо на име ову теорему: кад почетак лежи у средишту, онда се еквација асимптотâ добива из еквације кривих просто кад се у овој последњој изостави апсолутан члан. Кад се има у виду дата еквација (1) хиперболе, биће јасно да је у овај мах еквација асимптота ово:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = o,$$

а та је еквација, као што се јасно види, еквивалентна са системом еквација (3).

Кад се тачка *P* одмиче по луку *AG* све даље и даље, онда ће разлика *PK* ордината тачака праве *CL* и тачака лука *AG* бивати све мања и мања, а *lim* (*PK*) биће $= o$, као што ћемо одмах и доказати. Та дуж *PK* има на име ову вредност:

$$PK = QK - QP = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

а по томе се види да је $PK = o$ кад је x бескрајно. Асимптота *CL* приљубиће се дакле тек у бескрајности уз лук *AG* дате хиперболе.

Кад се имају у виду еквације (3) асимптота, биће нам јасно уједно и то, да су асимптоте хиперболине дијагонале четвороугла *RR'S'S*, који се добива кад се из крајева A и A', B и B' осовина повуку праве напоредо са осовинама BB' и AA'.

Ако су осовине хиперболине једнаке, онда је хипербола (прим. 2. чл. 226.) равнострана. Еквација равностране хиперболе била би дакле у овај мах овог облика:

$$x^2 - y^2 = a^2. — \qquad (4)$$

Узмимо сад једно теме, н. пр. теме A за почетак, трансверзалну осовину за осовину x, а праву која пролази кроз A и иде напоредо са коњугованом осовином за осовину y неке ортогоналне системе. У тој системи добићемо еквацију хиперболе на овај начин: сменићемо у еквацији (1) дате хиперболе x са $x + a$. У поменутој системи биће дакле еквација хиперболе ово:

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = o,$$

а та се еквација може написати и у овом облику:

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2; \qquad (5)$$

у тој еквацији је са p означена количина $\frac{b^2}{a}$ ·

Напомене. 1-во. Поларна еквација хиперболе може се написати и овом облику:

$$\rho^2 = \frac{b^2}{e^2 cos^2\theta - 1}; \qquad (6)$$

у тој еквацији је

$$e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}.$$

Количина e назива се *ексцентрицитет* хиперболе.

2-го. Ако са θ означимо угао који затвара асимптота CL са позитивним правцем осовине x, биће угао међу асимптотама 2θ, па како је

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

биће и

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{e};$$

према томе је

$$e = \sec\theta,$$

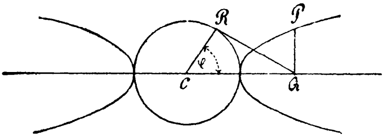
а по томе се види да се угао међу асимптотама може израчунати чим знамо ексцентрицитет хиперболе.

Прим. 1. Доказати да се свака хипербола може сматрати као ортогонална пројекција једне равностране хиперболе чија је трансверзална осовина иста онолика колика је и трансверзална осовина дате хиперболе.

Прим. 2. Нека елипса и нека хипербола имају исте осовине по величини и по положају. Доказати да асимптоте хиперболине иду у правцу једнаких коњугованих дијаметара.

277. *Изразити координате неке тачке дате хиперболе једним параметром.*

Нека су $x = CQ$, $y = PQ$ координате неке тачке P дате хиперболе. Опишимо око средишта C један круг



Сл. 133.

полупречником $CR = a$ и повуцимо из подножја Q ординате PQ тангенту QR на тај круг. Ако угао QCR означимо са φ, биће $x/a = \sec\varphi$, па како је $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = o$, то је $y/b = tg\,\varphi$. Координате тачке P су дакле ово:

$$x = a \sec\varphi,\ y = b tg\varphi. \qquad (7)$$

Прим. 1. Доказати да је $PQ : QR = b : a$,

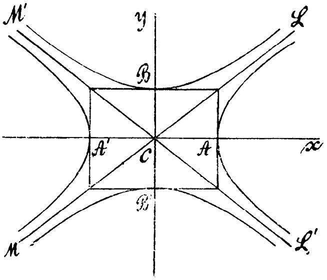
Прим. 2. Ако је са ϱ означен потег који је из средишта повучен према некој тачци P, биће

$$\varrho = a \sqrt{1 + e^2 tg^2 \varphi}.$$

278. Дефиниција. *Ако две хиперболе имају исто средиште и исте осовине и ако је трансверзална осовина једне хиперболе коњугована осовина друге и обратно, онда се каже да су те две хиперболе коњуговане.* —

По тој дефиницији се види да су еквације двеју коњугованих хипербола ово:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = o, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = o.$$



Сл. 134.

Те две хиперболе имају, као што се непосредно по њиховим еквацијама види, исте асимптоте. Једна између тих хипербола лежи у углима LCL' и MCM', а друга у углима LCM' и $L'CM$.

Напомена. Многи резултати које смо поменули у Одељку о елипси могу се применити и на хиперболу, само што у овај мах у обрасцима који се јављају у том Одељку треба сменити b^2 са $- b^2$.

ТАНГЕНТА И НОРМАЛА

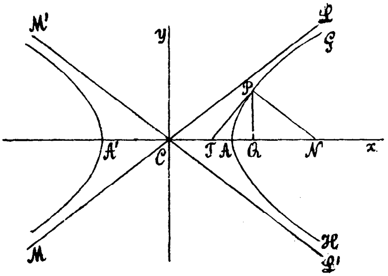
279. Еквација праве која хиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$$

дира у тачци $P(x', y')$ је (прим. 6. чл. 228.) ово:

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - 1 = o. \qquad (1)$$

Коефицијенат који одређује правац те тангенте је $\frac{b^2x'}{a^2y'}$, па је према томе еквација нормале у тачци (x', y') овог облика:



Сл. 135.

$$\frac{x - x'}{\frac{x'}{a^2}} = - \frac{y - y'}{\frac{y'}{b^2}} \qquad (2)$$

или

$$\frac{a^2x}{x'} + \frac{b^2y}{y'} = c^2; \qquad (3)$$

у последњој еквацији је $c^2 = a^2 + b^2$. —

Одсечци CT и CN тангенте и нормале на осовини x су одмерени овим бројевима:

$$CT = \frac{a^2}{x'} , \quad CN = \frac{c^2}{a^2} x' = e^2 x' ;$$

према томе могу се суб-тангента QT и суб-нормала QN тачке P овако изразити:

$$QT = x' - CT = x' - \frac{a^2}{x'} = \frac{x'^2 - a^2}{x'} ,$$

а

$$QN = CN - x' = \frac{c^2}{a^2} x' - x' = \frac{b^2}{a^2} x' . -$$

Кад би тачка P била одређена углом φ, кад би другим речима било $x' = a \sec\varphi$, $y' = b tg\varphi$, онда би еквација тангенте у тачци P била овог облика:

$$\frac{x}{a} \sec\varphi - \frac{y}{b} tg\varphi - 1 = o.$$

Напомена. Коефицијенат који одређује правац тангенте у тачци (x', y') је ово:

$$m = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} = \frac{b}{a \sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}}} .$$

Узмимо сад да се тачка P креће по луку AG и да је при том кретању пошла из темена A у правцу који води к тачци што на луку AG лежи у бескрајности. У први мах биће $x' = a$, па је с тога и $m = \infty$, т. ј. тангента што је у темену A повучена на хиперболу сече трансверзалну осовину под правим углом; за тим ће x' бивати све веће и веће и најпосле ће нарастити преко сваке границе. У том случају ће се m без прекида смањивати и биће најпосле $= b/a$. Дакле, кад је $x' = \infty$, онда је $m = b/a =$ коефицијенту који одређује правац асимптоти CL. Угао PTx, који затвара тангента са осовином x, биће дакле у поменутом случају најпре $= \sphericalangle 90^0$, па је за тим све мањи и мањи и најпосле је $= \sphericalangle LCx$. Напоредо с тим углом опада и одсечак $CT = a^2/x'$ и то од a до нуле, а по томе се види да ће се тангента PT по положају своме тим мање разликовати од положаја асимптоте, штогод је тачка P по луку AG даље одмакла од темена A; кад тачка P на томе луку лежи у бескрајности, онда је та тангента баш сама асимптота CL хиперболе, а то се у осталом потпуно слаже с оним, што смо пре на једном месту (чл. 218.) поменули.

280. *Повући тангенту из неке тачке (x', y') на хиперболу.*

Апсцисе тачака, у којима тангенте што су из тачке (x', y') повучене на хиперболу, дирају ту хиперболу, биће (упор. чл. 249.) корени ове квадратне еквације:

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right) - 2\frac{xx'}{a^2} + 1 + \frac{y'^2}{b^2} = o, \quad (4)$$

а ти корени су реални кад је $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 < o$, т. ј. кад тачка (x', y') лежи у истом оном крају равни у коме лежи и средиште. Тај крај био би дакле спољашњи крај хиперболе. Кад би тачка (x', y') лежала у оном делу спољашњег краја, који је ограничен гранама и асимптотама хиперболиним, онда би количина $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}$ била позитивна. Кад би на име тачка (x', y') лежала било на једној, било на другој асимптоти, било би $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = o$; у тој еквацији била би са y' означена ордината оне тачке у којој права $x = x'$ сече било једну, било другу асимптоту. Међу тим је јасно, да је ордината ма које тачке оног одсечка праве $x = x'$, који лежи између ма које асимптоте и лука хиперболиног, мања од ординате оне тачке у којој права $x = x'$ сече ту асимптоту, па ће према томе бити јасно уједно и то, да је поменута количина $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}$ заиста позитивна, кад тачка (x', y') лежи у оном делу спољашњег краја који је омеђен гранама криве и њиховим асимптотама.

Узмимо сад да тачка (x', y') заиста лежи у поменутом делу спољашњег краја, т. ј. узмимо да је $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} > o$. У том случају биће оба корена еквације (4) *истога* знака, а то значи да ће обе додирне тачке лежати на истој (десној или левој) грани хиперболиној. Напротив, ако је $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} < o$, т. ј. ако тачка (x', y') лежи у спољашњем крају, али изван асимптота, онда ће корени еквације (4) имати *различите* знаке; у том случају лежаће једна додирна тачка на једној, а друга на другој грани хиперболиној. Из тачака које леже у углу LCM' или у углу $L'CM$ могу се дакле повући на хиперболу две реалне тангенте; једна од тих тангената дира десну, а друга леву грану хиперболину.

281. *Повући из дате тачке $P(x', y')$ нормалу на хиперболу.*

Координате тачке, у којој нормала што је повучена на хиперболу из тачке (x', y') продире криву, биле би ово (упор. чл. 250.):

$$X = \frac{a^2x'}{\mu + a^2}, \quad Y = -\frac{b^2y'}{\mu - b^2}. \tag{5}$$

Како та тачка (X, Y) лежи на хиперболи, биће

$$f(\mu) = \frac{a^2x'^2}{(\mu + a^2)^2} - \frac{b^2y'^2}{(\mu - b^2)^2} - 1 = o, \tag{6}$$

па је с тога и

$$\frac{1}{2}f'(\mu) = -\frac{a^2x'^2}{(\mu + a^2)^3} + \frac{b^2y'^2}{(\mu - b^2)^3};$$

јасно се види да ће функција $f(\mu)$ имати своје прекиде само на местима $\mu = -a^2$ и $\mu = b^2$ и да ће $f'(\mu)$ бити $= o$, ако је

$$\frac{(ax')^{\frac{2}{3}}}{\mu + a^2} = \frac{(by')^{\frac{2}{3}}}{\mu - b^2} = \frac{(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}}}{c^2}; \tag{7}$$

реалан корен $\mu = \mu'$ еквације $f'(\mu) = o$ може се дакле овако изразити:

$$\mu' = -a^2 + c^2 (ax')^{\frac{2}{3}} : \left[(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}}\right]$$

или

$$\mu' = \quad b^2 + c^2 \ (by')^{\frac{2}{3}} : \left[(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}}\right],$$

а по томе се види ово: 1-во, да је $\mu' > b^2$, ако је $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} > o$ и 2-го, да је $\mu' < -a^2$, ако је $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} < o$.

1-во. *Нека је* $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} > o$. — У овај мах је $\mu' > b^2$. Ако се μ мења од $-\infty$ до $-a^2 - h$ (са h је означена нека врло мала, позитивна количина), биће $f'(\mu)$ позитивно; $f(\mu)$ ће дакле без прекида растити од -1 до $+\infty$, па је услед тога та функција $f(\mu)$ морала у један мах проћи и кроз нулу, а то ће рећи да између $-\infty$ и $-a^2 - h$ лежи један реалан корен еквације $f(\mu) = o$. Сличним путем се може доказати да ће еквација (6) имати један реалан корен и у размаку $(-a^2 + h,\ b^2 - h)$. Кад се μ буде мењало даље, од $b^2 + h$ до μ', биће $f'(\mu)$ позитивно, т. ј. $f(\mu)$ ће у размаку $(b^2 + h,\ \mu')$ без прекида растити. Кад је $\mu = \mu'$, онда је $f'(\mu) = o$, а за све остале вредности параметра μ, које леже између μ' и $+\infty$ је $f'(\mu)$ негативно; у размаку $(\mu', +\infty)$ ће дакле $f(\mu)$ без прекида опадати, а у размаку $(b^2 + h, +\infty)$ имаће функција $f(\mu)$ свој максимум $f(\mu')$. У том размаку мења се функција $f(\mu)$ без прекида од $-\infty$ до -1; кад се дакле има у виду оно што мало час поменусмо, биће јасно да ће еквација $f(\mu) = o$ у размаку $(b^2 + h, +\infty)$ имати два реална корена само ако је $f(\mu') \geqq o$; у првом случају су корени различити, а у другом једнаки. Дакле, ако је $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} > o$, онда еквација (6) има свакад два реална корена, а може имати и сва четири корена реална. То значи, *да се под погодбом* $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} > o$ *из* *тачке* (x', y') *на хиперболу могу повући или две, или четири реалне нормале.*

2-го. *Нека је* $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} < o$. У овај мах је $\mu' < -a^2$. Ако се μ буде мењало од $-\infty$ до μ' и од μ' до $-a^2 - h$, мењаће се $f(\mu)$ без прекида од -1 до $+\infty$. У томе размаку биће $f'(\mu)$ само једанпут $= o$ и то онда, кад је $\mu = \mu'$; функција $f(\mu)$ имаће дакле у целом размаку $(-\infty, -a^2 - h)$ само један — и то негативан — минимум $f(\mu')$, па ће с тога функција $f(\mu)$ у целом том размаку само једанпут проћи кроз нулу.

Сличним путем би се дало доказати и ово: 1-во, да ће еквација $f(\mu) = o$ имати само један реалан корен и у размаку $(-a^2 + h, b^2 - h)$ и, 2-го, да еквација $f(\mu) = o$ нема реалних корена у размаку $(b^2 + h, +\infty)$.

Дакле, ако је $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} < o$, онда еквација (6) има само два реална корена, а то значи, *да се под погодбом* $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} < o$ *из тачке* (x', y') *на хиперболу могу повући само две реалне нормале.* —

Узев све резултате скупа, моћи ћемо рећи ово: *свакад се на хиперболу из неке тачке* (x', y') *могу повући најмање две реалне нормале.* —

Вратимо се сад оном првом случају, т. ј. узмимо да је $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} > o$. — Да бисмо сазнали кад ће $f(\mu')$ бити $> o$, наћи ћемо из еквација (7) вредности количника̂ $1/(\mu + a^2)$ и $1/(\mu - b^2)$ и сменићемо тим вредностима $1/(\mu + a^2)$ и $1/(\mu - b^2)$ у полиному еквације (6). Јасно је да ће оно $f(\mu)$ које тим путем будемо добили бити управо $= f(\mu')$; с тога ће бити

$$f(\mu') = \frac{\left[(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}}\right]^3}{c^4} - 1,$$

т. ј. све четири нормале биће реалне и различите само ако је

$$\frac{\left[(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}}\right]^3}{c^4} - 1 > o.$$

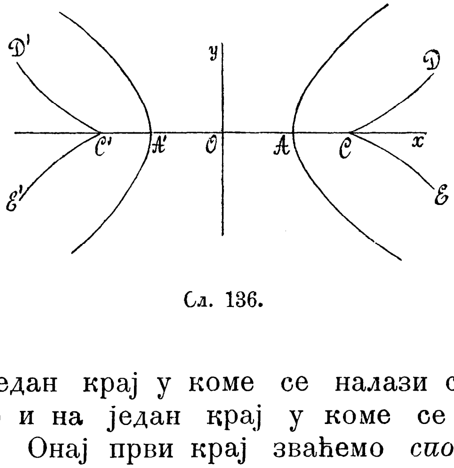
Могло би се доказати (види чл. 250.) да ће та неједнакост постојати кадгод је

$$(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}} > o,$$

а ту неједнакост ћемо геометријски протумачити овако. Написаћемо у изразу који стоји с леве стране њезине x место x', а y место y' и претпоставићемо да је тај израз $= o$. Тим путем добићемо еквацију

$$F(x, y) = (ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}} = o,$$

која аналитички представља т. зв. *еволуту* дате хиперболе. Та еволута састоји се из две гране DCE и $D'C'E'$, има две завратне тачке C и C' на трансверзалној особини хиперболиној, грана се у бескрајност у правцу позитивних и негативних апсциса и дели бескрајну раван на један крај у коме се налази средиште O хиперболино и на један крај у коме се не налази средиште O. Онај први крај зваћемо *спољашњим*, а онај други *унутрашњим* крајем. Јасно је да је у спо-



Сл. 136.

љашњем крају $F(x, y) < o$, а да је обратно $F(x, y) > o$ у унутрашњем крају еволуте, а то значи, *да се из неке тачке (x, y) која не лежи на еволути могу на хиперболу повући или четири или две реалне нормале; у првом случају лежи поменута тачка у унутрашњем, а у другом случају у спољашњем крају еволуте.*

То правило постоји и кад је $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} < o$. Под том погодбом могу се као што знамо на хиперболу повући само две реалне нормале; но ако је $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} < o$, то је a *fortiori* $(ax')^{\frac{2}{3}} - (by')^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}} < o$, а под том погодбом лежи тачка (x', y') у спољашњем крају еволуте.

Напомена. И у овај мах могли бисмо све оно, што смо у чл 251. поменули о подножјима нормала које су из неке тачке повучене на елипсу, поновити и применити на подножја нормала које би из неке тачке биле повучене на хиперболу.

282. Јоахимсталова теорема. *Ако се из неке тачке $P(x_1, y_1)$ што лежи на нормали PD, која је у тачци $D(x', y')$ повучена на хиперболу, повуку још три нормале на хиперболу, онда подножја тих трију нормала и тачка $(-x', -y')$ леже на кругу*

$$x^2 + y^2 + xx' + yy' = u\left(\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} + 1\right).$$

У тој еквацији круга је са u означена ова количина:

$$u = a^2 - \frac{b^2 y_1}{y'} = \frac{a^2 x_1}{x'} - b^2.$$

Тај круг зове се Јоахимсталов круг хиперболе, а доказ теореме је исти као и у чл. 252.; треба само свуда писати $-b^2$ место b^2.

Напомена. Јоахимсталов круг пролази и кроз подножје управне која је из средишта спуштена на тангенту у тачци $(-x', -y')$.

Примери

1. Права $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = o$ је тангента хиперболе $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = o$, ако је

$$p = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha}.$$

2. Доказати да је еквација ортоптичког круга хиперболе $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = o$ ово:

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

3. A и A' су темена елипсе $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$, а PQ је једна корда њезина која иде напоредо са малом осовином. Наћи место тачке што лежи у пресеку корада AP и $A'Q$.

Одг. Хипербола $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = o$.

4. AOB и COD су две праве које се секу под правим углом. Наћи место неке тачке P која се креће тако, да је

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Одг. Ако дате праве узмемо за осовине координатне системе и ако је $AB = 2a$. $CD = 2b$, биће еквација места ово:

$$2(x^2 - y^2) = a^2 - b^2,$$

т. ј. место тачака P је равнострана хипербола.

5. Управна, што је из средишта C повучена на неку тангенту равностране хиперболе $x^2 - y^2 = a^2$, сече тангенту у тачци P, а криву у тачци Q. Доказати да је $CP \cdot CQ = a^2$.

ДИЈАМЕТРИ

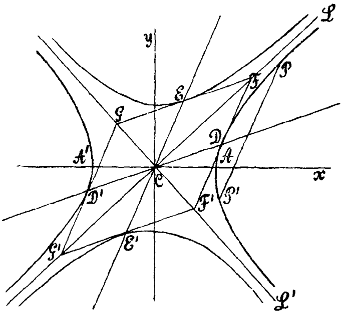
283. Узмимо да еквација $y = mx$ представља праву ECE' што пролази кроз почетак координатне системе и повуцимо корду PP' напоредо са том правом $y = mx$. Еквација дијаметра који полови корду PP' биће (чл. 253.) ово:

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Ако са m' означимо коефицијенат који одређује правац томе дијаметру DCD', биће јасно да је

$$mm' = \frac{b^2}{a^2}\,; \tag{1}$$

по томе се види да коефицијенти $m = tg\,\theta$ и $m' = tg\,\theta'$ који одређују правац двају коњугованих дијаметара ECE' и DCD' имају исти знак, а то ће рећи да су угли



Сл. 137.

θ и θ' у исти мах или оштри или тупи. Према томе ће коњуговани полудијаметри CD и CE који леже на истој страни трансверзалне осовине уједно лежати и на истој страни коњуговане осовине.

По релацији (1) види се и то, да је $m < \frac{b}{a}$ кад је $m' > \frac{b}{a}$ и обратно; како је међу тим угао LCx који затвара асимптота CL са трансверзалном осовином $= tg^{-1}\,\frac{b}{a}$, биће јасно да ће коњуговани полудијаметри CD и CE бити раздвојени асимптотом CL. Између два коњугована дијаметра сећи ће дакле само један хиперболу у реалним тачкама. Јасно је да се угао између коњугованих дијаметара мења од 90^0 до 0^0. Кад је тај угао $= 0^0$, онда се коњуговани дијаметри поклапају на асимптоти.

284. *Дате су координате* x', y' *тачке* D *што лежи на крају дијаметра* DD'. *Наћи координате* x'', y'' *крајева дијаметра који је коњугован са дијаметром* DD'.

Те тачке биће, као што мало час поменусмо, имагинарне, ако су координате тачке D реалне, а координате њихове биће (чл. 256.) ово:

$$x'' = \pm \frac{ay'i}{b}, \quad y'' = \pm \frac{bx'i}{a} \cdot$$

Дефин. Реалне тачке

$$x = \pm \frac{ay'}{b}, \quad y = \pm \frac{bx'}{a} \qquad (2)$$

зову се *крајеви* оног имагинарног дијаметра који је коњугован са дијаметром DD'. Те крајеве означићемо у дијаграмату (чл. 283.) са E и E'. Дуж EE' представљала би *дужину* коњугованог имагинарног дијаметра EE'.

Теорема. *Крајеви имагинарних дијаметара леже на коњугованој хиперболи.*

Имајући у виду обрасце (2), а не водећи рачуна о знаку, биће јасно да је

$$x' = \frac{ay}{b}, \quad y' = \frac{bx}{a} \cdot$$

Тачка $D\,(x', y')$ лежи међу тим на хиперболи; с тога је и

$$\frac{\left(\frac{ay}{b}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{bx}{a}\right)^2}{b^2} - 1 = o$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = o,$$

а по томе се види да крајеви (x, y) имагинарних дијаметара заиста леже на коњугованој хиперболи.

Прим. Координате тачке D су $a \sec\varphi$, $b \operatorname{tg}\varphi$. Наћи координате тачке E и еквацију коњугованог дијаметра ECE'.

Одг. Координате тачке E су ово: $a \operatorname{tg}\varphi$, $b \sec\varphi$, а еквација дијаметра ECE' је ово:

$$\frac{x}{a}\sec\varphi - \frac{y}{b}\operatorname{tg}\varphi = o.$$

285. *Дијаметри DCD' и ECE' су коњуговани. Први сече хиперболу у тачкама D и D', а други коњуговану хиперболу у тачкама E и E'. Ако повучемо тангенте DF и EF у тачкама D и E, биће једна дијагонала паралелограма $CDFE$ асимптота хиперболина.*

Ако су $a \sec\varphi$, $b \operatorname{tg}\varphi$ координате тачке D (сл. 137.), биће $a \operatorname{tg}\varphi$, $b \sec\varphi$ координате тачке E, а еквације тангената DF и EF су ово:

$$\frac{x}{a}\sec\varphi - \frac{y}{b}\operatorname{tg}\varphi - 1 = o, \qquad (3)$$

$$\frac{x}{a}\operatorname{tg}\varphi - \frac{y}{b}\sec\varphi + 1 = o; \qquad (4)$$

прва тангента иде напоредо са дијаметром ECE', а друга са дијаметром DCD'. Ако саберемо еквације (3) и (4), добићемо ову еквацију:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)(\sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi) = o$$

или

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = o.$$

Јасно је да је том еквацијом представљена дијагонала CF; то је у осталом и еквација једне асимптоте хиперболине, а по томе се види да поменута теорема заиста постоји.

Прим. 1. Доказати да је $\overline{CD}^2 - \overline{CE}^2 = a^2 - b^2$. —

Како је

$$\overline{CD}^2 = a^2 sec^2\varphi + b^2 tg^2\varphi,$$

$$\overline{CE}^2 = a^2 tg^2\varphi + b^2 sec^2\varphi,$$

биће

$$\overline{CD}^2 - \overline{CE}^2 = (a^2 - b^2)(sec^2\varphi - tg^2\varphi) = a^2 - b^2.$$

Прим. 2. Површина троугла који се добива спајањем крајних тачака двају коњугованих полудијаметара CD и CE је стална и равна површини троугла који се добива спајањем темена са средиштем.

Означимо површину троугла CDE са $\boldsymbol{A}$. Биће

$$2\boldsymbol{A} = (a\, sec\, \varphi \cdot b\, sec\, \varphi - a\, tg\, \varphi \cdot b\, tg\, \varphi) = ab.$$

[*Напом.* Последње две Аполонијеве теореме могле би се исто онако доказати као и у чл. 257.].

Прим. 3. Доказати да су коњуговани дијаметри равностране хиперболе једнаки, а да све друге хиперболе немају једнаких коњугованих дијаметара.

Прим. 4. Дуж DE (сл. 137.) полови једна асимптота и иде напоредо са другом асимптотом.

Тачка на средини дужи DE је ово:

$$x = \frac{a}{2}(sec\, \varphi + tg\, \varphi),\ y = \frac{b}{2}(sec\, \varphi + tg\, \varphi),$$

а та тачка лежи на асимптоти $x/a - y/b = o$. — Даље, еквација праве DE је

$$(bx + ay)(sec\, \varphi - tg\, \varphi) = ab,$$

а та права иде напоредо са асимптотом $x/a + y/b = o$.

Прим. 5. Доказати да асимптоте равностране хиперболе полове угле између коњугованих дијаметара.

Прим. 6. Дијаметри, који иду напоредо са двема суплементарним кордама, јесу коњуговани дијаметри.

[*Напом.* Доказ исти као и у чл. 259.].

Прим. 7. Са φ је означен угао који међу собом затварају две суплементарне корде PA и PA' што су из темена A и A' повучене према тачци $P(x', y')$. Доказати да је

$$tg\, \varphi = \frac{2ab^2}{(a^2 + b^2)\, y'}.$$

Напом. Како је угао између суплементарних корада = углу између двају коњугованих дијаметара, биће јасно да је угао максимум између коњугованих дијаметара 90^0, а угао минимум o^0, а то се потпуно слаже са оним што смо поменули у чл. 283.

Прим. 8. Производ двеју дужи које одсецају ма која два коњугована дијаметра на некој сталној тангенти је сталан и раван квадрату полудијаметра што иде напоредо са тангентом.

Напом. Види доказ у чл. 261.

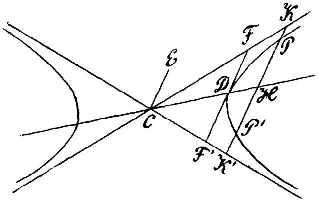
286. *Делови KP и K'P' секанте KK', који леже између хиперболе и њезиних асимптота, јесу једнаки.*

Узећемо за осовине координатне системе два коњугована дијаметра од којих један, н. пр. дијаметар *CD*, пролази кроз средину *H* (*x*, *o*) корде *PP'*. У тој системи биће еквација хиперболе ово:

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1 = o,$$

а еквације асимптота су

$$y = \frac{b'}{a'}x, \; y = -\frac{b'}{a'}x.$$



Сл. 138.

Према томе је $KH = \frac{b'}{a'}x$, $K'H = -\frac{b'}{a'}x$, па како нас се тичу само апсолутне величине дужи̑ *KH* и *K'H*, биће јасно да је *KH* = *K'H*, а услед тога је и

$$KH - PH = K'H - P'H$$

или

$$KP = K'P'.$$

Ако се сад секанта KK' помера и ако јој се при том померању правац не мења, биће та секанта у један мах и тангента гране PDP' хиперболине. У том положају означићемо је са FF'. Према поменутом правилу биће јасно *да су делови тангенте који леже између додирне тачке и асимптота једнаки,* $FD = F'D = CE = b'$.

287. *Производ одсечака KP и PK' секанте KK' који леже између тачке P криве и асимптотâ је раван квадрату полудијаметра који иде напоредо са секантом.*

Еквацију хиперболе ћемо написати у овом облику:

$$y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x^2 - a'^2),$$

а еквацију асимптота овако:

$$y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}x^2.$$

Према томе је

$$\overline{PH}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(\overline{CH}^2 - a'^2), \quad \overline{KH}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\overline{CH}^2;$$

услед тога је и

$$\overline{KH}^2 - \overline{PH}^2 = b'^2 \quad \text{или} \quad (KH - PH)(KH + PH) = b'^2,$$

па како је

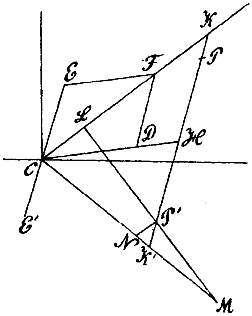
$$KH - PH = KP, \quad KH + PH = PK'.$$

то је и

$$KP \cdot PK' = b'^2,$$

а то смо и тврдили.

288. Имајући у виду поменуте особине хиперболине, моћи ћемо геометријском конструкцијом наћи колико год хоћемо тачака хиперболиних кад знамо само једну тачку њезину *P* и асимптоте *CK* и *CK'*. — Повући ћемо на име ма у ком правцу кроз дату тачку *P* секанту *KK'* које сече асимптоте у тачкама *K* и *K'* и одмерићемо, почевши од тачке *K'*, на тој секанти дуж *K'P'* = *KP*. Тачка *P'* била би већ једна тачка хиперболина. Кад бисмо у другом ком правцу повукли једну секанту било кроз тачку *P*, било кроз тачку *P'*, добили бисмо опет једну тачку криве и т. д. Но сем тога могли бисмо наћи и дужину двају коњугованих дијаметара кад знамо правац једног од тих двају дијаметара. Узмимо да је н. пр. правом *EE'* обележен правац једног дијаметра. Кроз тачку *P* повући ћемо секанту *KK'* напоредо са правом *EE'*; ако је *H* тачка на средини дужи *KK'*, биће јасно да је правом *CH* обележен правац оног дијаметра који је коњугован са дијаметром *EE'*. Како је дужина полудијаметра *CE* геометријска средина између одсечака *KP* и *PK'*, то би нам већ један дијаметар био потпуно познат. Ако сад кроз тачку *E* повучемо праву *EF* напоредо са дијаметром *CH*, а кроз тачку *F* праву *FD* напоредо с првим дијаметром *CE*, биће јасно да ће дуж *CD* представљати половину оног другог дијаметра.



Сл. 139.

Конструкција тангенте. Ако су нам познате асимптоте и сем њих једна тачка *P'* хиперболина, онда ћемо тангенту у тачци P' овако конструјисати. Повући ћемо кроз тачку P' праву $P'N$ напоредо са једном асимптотом, а на другој асимптоти ћемо одмерити дуж $CM = 2CN$ и спојићемо тачку M са тачком P'. Права $P'M$ биће тангента хиперболе у тачци P', јер је $P'M = P'L$.

289. *Наћи еквацију хиперболе кад су осовине координатне системе асимптоте хиперболе.*

Како почетак координатне системе лежи у средишту, биће еквација хиперболе овог облика:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = o.$$

Апсцисе тачака у којима осовина x — у овај мах једна асимптота — сече хиперболу, биће корени ове еквације:

$$ax^2 + c = o.$$

Корени те еквације су бескрајни, па је с тога $a = o$. На исти начин дало би се доказати и да је $b = o$. Према томе ће еквација хиперболе у поменутој координатној системи бити ово:

$$2hxy + c = o,$$

а та еквација се може написати и у овом облику:

$$xy = k^2.$$

Ту исту еквацију добили смо у осталом већ у један мах (чл. 209.).

Сталну количину k^2 ћемо одредити овако. Трансверзална осовина полови угао између асимптота; с тога су координате темена A једнаке: $x = CH = AH = y$, па је према томе

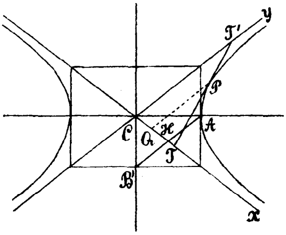
$$CH \cdot AH = \overline{AH}^2 = k^2.$$

Како је

$$AH = \frac{AB'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

биће и

$$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{c^2}{4}.$$



Сл. 140.

Напомене. 1-во. Ако су асимптоте осовине координатне системе и ако су x, y координате тачке D (сл. 137.), биће $-x$, y координате тачке E (прим. 4. чл. 285.). Према томе је еквација коњуговане хиперболе (т. ј. еквација места тачака E) ово:

$$xy = -\frac{a^2 + b^2}{4}.$$

2-го. Ако су p и q управне што су из неке тачке P хиперболине спуштене на асимптоте Cx и Cy, биће

$$p = y \sin 2\theta, \quad q = x \sin 2\theta,$$

где је са 2θ означен угао између асимптота. Услед тога је

$$pq = xy \sin^2 2\theta = k^2 \sin^2 2\theta = const.,$$

т. ј. *производ управних што су из неке тачке хиперболине спуштене на хиперболу је стална количина.*

Ако су дакле еквације асимптота̂ неке хиперболе ово:

$$Ax + By + C = o, \ A'x + B'y + C' = o,$$

биће еквација саме хиперболе ово:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} = const.$$

или

$$(Ax + By + C)\,(A'x + B'y + C') = c,$$

где је c нека стална количина.

Еквација коњуговане хиперболе је дакле ово:

$$(Ax + By + C)\,(A'x + B'y + C') = -c.$$

У свима координатним паралелним системама разликују се дакле еквације двеју коњугованих хипербола од еквације асимптота само једном сталном количином; вредности те сталне количине су једнаке, али различито означене.

Прим. 1. Наћи еквације асимптота хиперболе $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = o$. —

По оном што мало час рекосмо мораће се еквација хиперболе разликовати од еквације асимптота само неком сталном количином λ; биће дакле еквација асимптота ово:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda = o,$$

а та еквација представља две праве (прим. 21. стр. 165.) ако је

$$\lambda = \frac{\triangle}{h^2 - ab} = -\frac{\triangle}{C}.$$

Према томе је еквација асимптота (прим. 6. стр. 528.) ово:

$$Cf(x, y) - \triangle = o.$$

Прим. 2. Дата је хипербола $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + \cdot \cdot \cdot = o$. Наћи еквацију коњуговане хиперболе.

Одг. $Cf(x, y) - 2\triangle = o$.

Прим. 3. Асимптоте су осовине координатне системе. Доказати да се еквација тангенте у тачци (x', y') може овако написати:

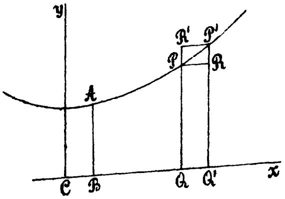
$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 2.$$

Прим. 4. Доказати да је (сл. 140.) $PT = PT'$. —

Координате тачака T и T' су $2x'$, o и o, $2y'$, а тачка на средини дужи TT' је (x', y'), т. ј. и т. д.

290. *Наћи површину која је затворена једним луком хиперболиним, једном асимптотом и двема правима које иду напоредо са другом асимптотом.*

Пре него што решимо ту проблему, доказаћемо једну претечну теорему. — Претпоставићемо да је система коса, означићемо угао њезин са ω и узећемо неку криву AP, која би у тој координатној системи била представљена еквацијом $y = f(x)$. Јасно је да је



Сл. 141.

површина $A = ABQP$, која је затворена луком AP дате криве, сталном ординатом AB, променљивом ординатом $y = PQ$ и осовином x, нека функција апсцисе x. Доказаћемо ову теорему: *извод површине A је $= y \sin \omega$.*

Повећајмо само апсцису $x = CQ$ тачке P за један мали део $\Delta x = QQ'$. Кад x порасте за Δx, порастиће (алгебарски) y за Δy, а A за ΔA; биће дакле $x + \Delta x = CQ'$, $y + \Delta y = P'Q'$, а $A + \Delta A = ABQ'P'$; према томе је у овај мах прираштај површине ово: $\Delta A = PQQ'P'$. Претпоставићемо да је прираштај Δx апсцисе тако мали, да ординате тачака лука PP' или све расту или све опадају; да бисмо мисли средили узећемо да ординате поменутих тачака расту.

Повуцимо сад из тачака P и P' две праве PR и $P'R'$ напоредо са осовином x и продужимо ординату

QP. Тим путем добићемо два паралелограма $PQQ'R$ и $R'QQ'P'$; први паралелограм је мањи, а други већи од приараштаја ΔA. Биће дакле

$$y \Delta x \sin \omega < \Delta A < (y + \Delta y) \Delta x \sin \omega$$

или

$$y \sin \omega < \frac{\Delta A}{\Delta x} < (y + \Delta y) \sin \omega.$$

Узмимо сад да Δx без прекида опада и да је најпосле Δx мање од сваке, па и најмање количине. У том случају ће количник $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ бити први извод функције A; биће дакле

$$A' = \lim \frac{\Delta A}{\Delta x};$$

но како је количник $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ сузбијен између своје доње границе $y \sin \omega$ и горње границе $(y + \Delta y) \sin \omega$ с једне, и како је с друге стране $\lim (y + \Delta y) \sin \omega$ такођер $= y \sin \omega$, то је јасно да је и

$$A' = y \sin \omega$$

или

$$A' = f(x) \sin \omega.$$

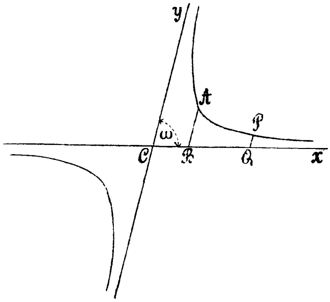
По том обрасцу види се непосредно како се израчунава површина A; треба просто наћи првобитну (примитивну) функцију $F(x) + C$ (C је стална количина) функције $f(x) \sin \omega$, т. ј. треба наћи неку функцију $F(x) + C$ чији је извод управо $= f(x) \sin \omega$. Та функција $F(x) + C$ биће $= A$. —

То правило применићемо на израчунавање површине $ABQP$, која је затворена луком AP хиперболе $xy = k^2$, делом BQ једне њезине асимптоте, и двема правима AB и PQ које иду напоредо са оном другом асимптотом. Из еквације $xy = k^2$ дате хиперболе добива се ово $y = k^2/x$, па је с тога

$$A' = y \sin \omega = k^2 \sin \omega \cdot \frac{1}{x};$$

но како је $\frac{1}{x}$ извод функције $\log_e x$, то је јасно да је $k^2 \sin \omega \cdot \frac{1}{x}$ први извод функције $k^2 \sin \omega \log_e x$. Према томе је

$$A = k^2 \sin \omega \log_e x + C.$$



Сл. 142.

Сталну количину C одредићемо овако. Површина A је $= o$, кад је $x = CB = a$; према томе је

$$o = k^2 \sin \omega \log_e a + C,$$

па је с тога

$$C = - k^2 \sin \omega \log_e a,$$

а по томе се види да је

$$A = k^2 \sin \omega \log_e \left(\frac{x}{a}\right).$$

Кад је хипербола равнострана, онда је $\sin \omega = 1$. Ако се претпостави да је сем тога и $k^2 = 1$, биће јасно да је

$$A = \log_e \left(\frac{x}{a}\right);$$

у том случају ће површина, коју будемо рачунали од апсцисе $a = 1$, бити = природном логаритму апсцисе x:

$$A = log_e x.$$

Са те особине називају се природни логаритми и хиперболичним логаритмима. — Но ако се претпостави да је само $k = a = 1$, онда ће површина A имати ову вредност:

$$A = sin\,\omega\, log_e x,$$

а по том обрасцу се види да се ω може тако одабрати, да A буде логаритам апсцисе у некој логаритамској системи чија би основа била већа од основе e природне системе.

ЖИЖЕ И УПРАВНИЦЕ

291. Претпоставићемо да је еквација хиперболе овог облика:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = o.$$

Координате жижâ означићемо са α и β. Функција (чл. 263.)

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 - \mu\,[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]$$

може бити потпун квадрат једне линеарне функције само ако је $F(x, y)$ функција једне променљиве.

1-во. *Нека је $F(x, y)$ функција променљиве x.* У том случају мора бити

$$\beta = o,\ \mu = -\frac{1}{b^2},$$

па ће с тога полином $F(x, y)$ бити потпун квадрат само ако је

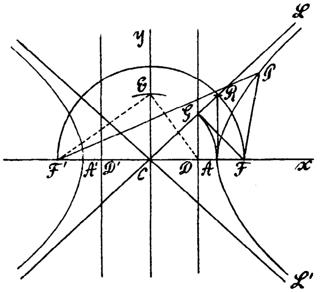
$$\alpha = \pm\sqrt{a^2 + b^2} = \pm c.$$

Према томе су координате жижа̂ ово :

$$\alpha = \pm c, \ \beta = o,$$

а по томе се види да хипербола има две реалне жиже, које леже на трансверзалној осовини у раздаљини c с десне и с леве стране средишта.

Конструкција жижа̂. У темену A повући ћемо $AR = b \perp$ на трансверзалну осовину и описаћемо полупречником CR круг око средишта C. Тачке F и F'



Сл. 143.

у којима тај круг сече трансверзалну осовину биле би жиже хиперболине, јер је $CF = CF' = CR = \sqrt{a^2 + b^2} = c$.—

Лако би се дало доказати (чл. 263.) да се дата еквација хиперболе може написати овако :

$$(x - c)^2 + y^2 - \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = o,$$

или овако :

$$(x + c)^2 + y^2 - \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2 = o,$$

а по томе се види ово :

a) да је

$$PF = \pm \left(\frac{cx}{a} - a\right), \; PF' = \pm \left(\frac{cx}{a} + a\right);$$

b) да еквације

$$x = \frac{a^2}{c}, \quad x = -\frac{a^2}{c}$$

представљају управнице — прва управницу која одговара жижи F, а друга управницу што одговара жижи F';

c) да је ексцентрицитет

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

Конструкција управница̂. Одмерићемо на коњугованој осовини дуж $CE = a$ и спојићемо крајну тачку E са жижом F'; $\perp$ на $F'E$ у тачци E сече трансверзалну осовину у подножју D управнице која одговара жижи F. — Ево још једне конструкције. Описаћемо око средишта C полупречником a један круг, и означићемо са G тачку у којој он сече асимптоту CL. Кроз ту тачку у којој он сече асимптоту CL. Кроз ту тачку G пролазила би већ једна управница. Троугли CAR и CGF су на име конгруентни, јер је $CA = CG$, $CF = CR$, а угао C између једнаких страна $CA = CG$ и $CF = CR$ је у исти мах угао и једног и другог троугла. С тога је угао G прав, па је према томе $\overline{CG}^2 = CD \cdot CF$ или $CD = \overline{CG}^2 : CF = a^2/c$, а то ће рећи да је заиста права GD управница.

2-го. *Нека је $F(x, y)$ функција променљиве y.* У том случају добили бисмо ово:

$$\alpha = o, \; \beta = + ci;$$

то би дакле биле координате имагинарних двеју жижа хиперболиних. *Хипербола има дакле четири жиже; две* *су реалне, а две имагинарне; прве две леже на трансверзалној осовини у раздаљини $+ c$ и $- c$ од средишта, а друге две на коњугованој осовини у раздаљини $+ ci$ и $- ci$.*

292. *Разлика раздаљина ма које тачке P дате хиперболе од двеју жижâ те хиперболе је стална.*

Раздаљина ма које тачке P дате криве од жиже F је

$$PF = \pm \left(\frac{cx}{a} - a\right) = \pm (ex - a),$$

а раздаљина те исте тачке од жиже F' је

$$PF' = \pm \left(\frac{cx}{a} + a\right) = \pm (ex + a).$$

1-во. Ако тачка P лежи на десној грани хиперболе, биће све апсцисе позитивне, па како је $e > 1$, а $x \geqq a$, биће јасно да је за све тачке десне гране

$$PF = - a + ex, \; PF' = a + ex,$$

па је према томе и

$$PF' - PF = 2a = const.$$

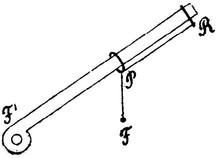
2-го. Ако тачка P лежи на левој грани хиперболе, биће све апсцисе негативне; у овом случају је дакле

$$PF = a - ex, \; PF' = - a - ex,$$

а по томе се види да је у овај мах

$$PF - PF' = 2a = const. -$$

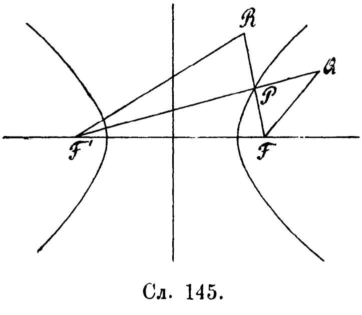
На основу те особине може се хипербола механички овако нацртати. Узећемо један врстар и утврдићемо га на једном крају његову F' тако, да се може обртати око те тачке. На другом крају R тог врстара утврдићемо један конац, промолићемо га кроз један покретан прстен P и привезаћемо га за сталну тачку F. Писаљка која је утврђена у P описаће хиперболу кад се врстар буде обртао око тачке F' и кад у исти мах прстен буде клизио по њему тако, да је конац свакад затегнут. Дужина конца се на име не мења: $RP + PF = A = const.$, а не мења се ни дужина врстара: $RP + PF' = B = const.$; с тога се не ће мењати ни разлика тих двеју дужина: $PF—PF' = A—B = const.$ Тачке F и F' су жиже хиперболине, а разлика $A — B$ представља трансверзалну осовину хиперболину.



Сл. 144.

Прим. 1. Доказати да је разлика раздаљина QF и QF' жижа од неке тачке Q што лежи у унутрашњем крају хиперболе већа од $2a$.

Како је (сл. 145.)



Сл. 145.

$$PQ + PF > QF,$$

биће и

$$(PQ + PF') + PF > QF + PF'$$

или

$$QF' + PF > QF + PF',$$

па је према томе и

$$QF' - QF > PF' - PF = 2a.$$

Прим. 2. Доказати да је разлика раздаљина RF и RF' жижа од неке тачке R што лежи у спољашњем крају хиперболе мања од $2a$.

Најпре је (сл. 145.)

$$RF' - RP < PF';$$

с тога је и

$$RF' - (RP + PF) < PF' - PF$$

или

$$RF' - RF < PF' - PF = 2a.$$

Прим. 3. Координате тачке P су $a\sec\varphi$, $btg\varphi$. Ако тачка P лежи на десној грани хиперболиној, биће

$$PF = a(e\sec\varphi - 1),\ PF' = a(e\sec\varphi + 1),$$

а ако P лежи на левој грани, онда је

$$PF = -a(e\sec\varphi - 1),\ PF' = -a(e\sec\varphi + 1).$$

Прим. 4. Координате тачке P су $a\sec\varphi$, $btg\varphi$, а b' је дужина полудијаметра који је коњугован са полудијаметром CP. Доказати да је $b'^2 = PF \cdot PF'$.

Како је (прим. 1. чл. 285.)

$$b'^2 = a^2tg^2\varphi + b^2\sec^2\varphi = a^2(e^2\sec^2\varphi - 1),$$

биће јасно да је заиста $b'^2 = PF \cdot PF'$.

293. Круг који је око жиже F' описан полупречником $F'Q = 2a$ назива се *круг управник*; тај круг управник одговара жижи F', но исто тако има и жижа F свој круг управник.

Како је (сл. 146.)

$$PF' - PF = 2a = F'Q,$$

биће

$$PF = PF' - F'Q = PQ,$$

а по томе се види *да се хипербола може сматрати као место тачака које у истој раздаљини леже од неког круга и неке тачке F која лежи изван тог круга.*

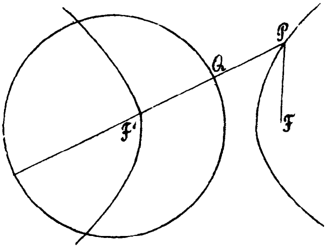
294. *Наћи раздаљину FH жиже F од тангенте PH.*

Нека су $a \sec \varphi$, $b tg \varphi$ координате тачке P. Еквација тангенте у тој тачци P биће ово:

$$\frac{x}{a} \sec \varphi - \frac{y}{b} tg \varphi - 1 = o$$

или

$$b \sec \varphi \cdot x - a \, tg \varphi \cdot y - ab = o.$$



Сл. 146.

Према томе се види, да је раздаљина FH жиже $F(ae, o)$ од тангенте ово:

$$FH = \frac{ab\,(e \sec \varphi - 1)}{(b^2 \sec^2 \varphi + a^2 tg^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ab\,(e \sec \varphi - 1)}{a\,(e^2 \sec^2 \varphi - 1)^{\frac{1}{2}}};$$

према томе је

$$FH = b \left(\frac{e \sec \varphi - 1}{e \sec \varphi + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

или (прим. 3. чл. 292.)

$$FH = b \sqrt{\frac{PF}{PF'}}. \qquad (1)$$

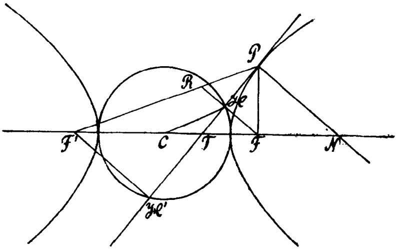
Сличним путем дало би се доказати да је и

$$F'H' = b \sqrt{\frac{PF'}{PF}}. \qquad (2)$$

Ако помножимо последња два обрасца, добићемо ово:

$$FH \cdot F'H' = b^2 = const.,$$

т. ј. *производ раздаљина двеју жижâ F и F' од ма које тангенте је сталан и раван квадрату коњуговане полуосовине.*



Сл. 147.

Напомена. Раздаљину FH жиже F од тангенте PH дате хиперболе могли бисмо исто онако наћи, као што смо нашли раздаљину FH жиже F од тангенте PH дате елипсе (чл. 266.).

295. *Тангента која је повучена на хиперболу у тачци P полови угао под којим се из те тачке виде жиже F и F'.*

Ако са b' означимо половину оног дијаметра који је коњугован са CP, биће (прим. 4 чл. 292.)

$$b'^2 = PF \cdot PF'.$$

Према обрасцима (1) и (2) биће дакле јасно да је

$$FH = \frac{b}{b'} PF, \quad F'H' = \frac{b}{b'} PF'.$$

Међу тим је (сл. 147.)

$$\sin FPH = \frac{FH}{PF}, \quad \sin F'PH' = \frac{F'H'}{PF'},$$

па је с тога и

$$\sin FPH = \frac{b}{b'}, \quad \sin F'PH' = \frac{b}{b'},$$

а по томе се види да је $\sphericalangle FPH = \sphericalangle F'PH'$.

Могло би се у осталом као и у чл. 267. доказати да је

$$\frac{TF}{TF'} = \frac{PF}{PF'},$$

а по тој релацији се види да ће тангента *изнутра* половити угао FPF' троугла FPF'. —

Напомене. 1-во. Нормала PN полови споља угао P троугла FPF'.

2-го. *Кад елипса и хипербола имају исте жиже F и F', онда се оне секу ортогонално.* Означимо на име једну од оних тачака у којима се секу дате две криве са P. Тангента што је на елипсу повучена у тачци P половиће споља угао P троугла FPF'; та тангента биће дакле уједно у тачци P и нормала хиперболе, па ће се с тога та тангента под правим углом сећи са тангентом која је на хиперболу повучена у тачци P.

296. *Подножница жиже је круг који је описан око трансверзалне осовине као дијаметра.*

На потегу PF' (сл. 147.) одмерићемо у правцу PF' дуж $PR = PF$. Тангента у тачци P половиће угао на темену P равнокраког троугла FPR. Та тангента пролазиће дакле кроз средину H стране RF и биће $\perp$ на RF. Тачка H биће дакле пројекција жиже F на тангенти у тачци P. Ако спојимо H са C, биће

$$CH = \frac{1}{2} F'R = \frac{1}{2} (PF' - PF) = a,$$

а по томе се види да је место тачака H заиста круг који је описан око C полупречником a.

297. *Конструкција тангенте дате хиперболе у датој тачци њезиној P.* — Одмерићемо на потегу PF' (сл. 147.) у правцу PF' дуж $PR = PF$ и повући ћемо из тачке P праву $PHT \perp$ на RF. Та права биће тангента хиперболе у тачци P.

298. *Конструкција тангената које се на хиперболу могу повући из неке тачке T што не лежи на хиперболи.*

Описаћемо око тачке T један круг полупречником TF, спојићемо са жижом F тачке R и R' у којима тај круг сече круг управник жиже F' и спустићемо из тачке T управне на FR и FR'. Те две управне биће тангенте, а тачке P и P' у којима оне секу $F'R$ и $F'R'$ биле би додирне тачке.

299. *Управна, која је из жиже повучена на асимтоту, је $= b$.*

Са θ ћемо означити угао који затвара асимптота са трансверзалном осовином. Раздаљина FH жиже $F(c, o)$ од асимптоте биће $= c \sin\theta$, па како је $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, а $\sin\theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$, биће и

$$FH = c \sin\theta = b,$$

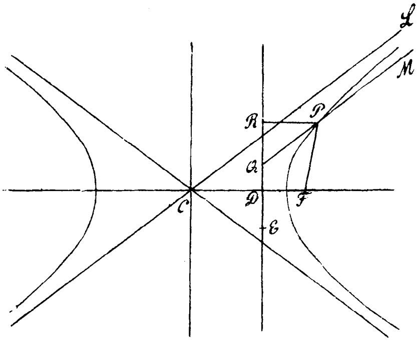
а то смо и тврдили. — Ту теорему могли бисмо у осталом и овако доказати. У чл. 294. доказали смо на име да је производ раздаљина FH и $F'H'$ двеју жижа хиперболиних од ма које тангенте раван квадрату коњуговане полуосовине. Како асимптоте пролазе кроз средину фокалне раздаљине FF', биће $FH = F'H'$; но како су асимптоте уједно и тангенте хиперболине, то је јасно да је $\overline{FH}^2 = b^2$, т. ј. и т. д.

300. Повуцимо сад из неке тачке P дате хиперболе праву PQ напоредо са асимптотом CL, а до тачке Q у којој та права сече управницу жиже F: сем тога спустимо из тачке P управну PR на поменуту управницу. Како је ексцентрицитет хиперболе $= c/a$, биће

$$\frac{PF}{PR} = \frac{c}{a},$$

па како је $PR = PQ\cos\theta$, а $\cos\theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$, биће јасно да је и

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{c}{a}\cos\theta = 1.$$



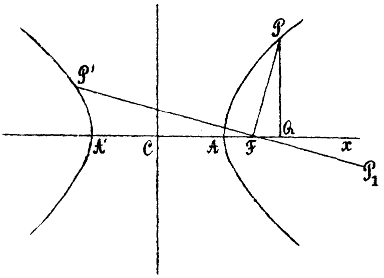
Сл. 148.

Према томе је $PF = PQ$, т. ј. *фокалан потег PF неке тачке хиперболине је исти ополики колика је и дуж PQ коју управница DR одсеца на правој PQ што је из тачке P напоредо повучена с асимптотом.*

Конструкција хиперболе. Узећемо један врстар EQM који је савијен у тачци Q. У сталним тачкама M и F привезаћемо крајеве једног конца који је управо толики, колики је и крак MQ врстара и затегнућемо тај конац једном писаљком која се налази у тачци P. Узмимо сад да се крак EQ врстара креће по правој DR. Ако је конац свакад затегнут, онда ће писаљка што се налази у тачци P описати један лук хиперболин, јер је у сваком положају врстара $PF = PQ$. Тачка F била би жижа, а права DR управница хиперболина; једна асимптота хиперболина иде напоредо са краком MQ датог врстара.

301. *Пол поларне координатне системе лежи у жижи. Наћи поларну екваци̂ју хиперболе.*

Трансверзалну осовину AA' узећемо за поларну осовину, а жижу F за пол. За све тачке P десне гране хиперболине је



Сл. 149.

$$\rho = PF = -a + ex,$$

а за све тачке P' леве гране је

$$\rho' = P'F = a - ex.$$

Према томе би поларна екваци̂ја десне гране хиперболине (чл. 274.) била ово:

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}, \tag{3}$$

а поларна екваци̂ја леве гране била би ово:

$$\rho' = -\frac{p}{1 + e\cos\theta'}. \tag{4}$$

Потези ρ и ρ' су позитивни; но ако се претпостави да потези појединих тачака хиперболиних могу бити и негативни, онда ће, као што ћемо одмах доказати, ма која између поменутих екваци̂ја (3) и (4) представљати обе гране хиперболине. Поларан угао свију тачака што леже на полуправој FP' биће $\theta' = \sphericalangle QFP'$, а поларан угао свију тачака што леже на полуправој FP_1 биће $180^\circ + \theta'$. Сменимо сад у еквацији (3) θ са $180^\circ + \theta'$. Тим путем добићемо ово:

$$\varrho = \frac{p}{1 + e \cos \theta'},$$

па како је по еквацији (4) $p/(1 + e \cos \theta') = - \varrho'$, биће и

$$\varrho = - \varrho',$$

а по томе се види да потег ϱ у овај мах има негативну вредност $-\varrho'$. Тај потег не ћемо дакле одмерити на полуправој FP_1, већ у противном правцу, у правцу FP', па ћемо услед тога тим путем добити тачку P' леве гране хиперболине. — Сличним путем може се доказати да оно ϱ', које се јавља у еквацији (4) може представљати потег једне тачке десне стране хиперболине, а по себи се разуме да би то ϱ' у том случају било негативно.

Примери. Теореме и проблеме.

1. **Праве које су из неке тачке хиперболине повучене напоредо са асимптотама затварају са асимптотама један паралелограм чија је површина стална.**

Угао између асимптота означићемо са 2θ, а асимптоте ћемо узети за координатне осовине. Еквација хиперболе биће $xy = k^2$, а површина A поменутог паралелограма је ово:

$$A = xy \sin 2\theta = k^2 \sin 2\theta;$$

но како је

$$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}, \quad \sin 2\theta = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

биће и

$$A = \frac{ab}{2} = const.,$$

а то смо и тврдили

2. Из неке сталне тачке (α, β) повући ћемо тангенте на систему хипербола које имају исте асимптоте. Наћи место додирних тачака.

Сваку у системи поменутих хипербола моћи ћемо представити еквацијом $xy = k^2$, а тангенту у додирној тачци (x', y') еквацијом

$$\frac{x}{2x'} + \frac{y}{2y'} = 1.$$

Како та тангента пролази кроз сталну тачку (α, β), биће и

$$\frac{\alpha}{2x'} + \frac{\beta}{2y'} = 1,$$

или

$$2x'y' - \beta x' - \alpha y' = o,$$

па је с тога еквација места додирних тачака ово:

$$2xy - \beta x - \alpha y = o,$$

т. ј. место које тражимо је хипербола.

3. Наћи место тачака за које је разлика квадрата раздаљина од двеју сталних правих стална количина $= m^2$.

Сталне две праве ћемо узети за координатне осовине, а угао међу њима означићемо са ω. Еквација места биће

$$x^2 - y^2 = \frac{m^2}{sin^2\omega},$$

т. ј. место је равнострана хипербола.

4. Наћи место средишта кругова који споља додирују два стална дата круга.

Нека су C_1 и C_2 средишта, а r_1 и r_2 полупречници датих кругова. Ако је C средиште, а r полупречник круга који споља додирује дате кругове, биће

$$CC_1 = r + r_1, \ CC_2 = r + r_2,$$

па је с тога и

$$CC_1 - CC_2 = r_1 - r_2 = const.,$$

т. ј. место средишта C је хипербола; жиже те хиперболе су C_1 и C_2, а дужина трансверзалне осовине је $r_1 - r_2$.

5. Дате су две тачке $[a\,sec\,(\alpha + \beta), b\,tg\,(\alpha + \beta)]$ и $[a\,sec\,(\alpha - \beta), b\,tg\,(\alpha - \beta)]$ на хиперболи $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = o$. Доказати да су координате тачке у којој се секу нормале у тачкама $(\alpha + \beta)$ и $(\alpha - \beta)$ ово:

$$\frac{c^2}{a} \cdot \frac{cos\beta}{cos\alpha cos\,(\alpha+\beta)\,cos\,(\alpha-\beta)}, \quad -\frac{c^2}{b} \cdot tg\alpha\, tg\,(\alpha+\beta)\, tg\,(\alpha-\beta).$$

6. Наћи координате тачке у којој се секу две нормале што узастопце долазе једна за другом на хиперболи.

Одг. $\frac{c^2}{a} sec^3\alpha, -\frac{c^2}{b} tg^3\alpha.$

7. Наћи еквацију еволуте хиперболине.

Одг. $(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$

8. Доказати да је површина троугла који нека тангента затвара са асимптотама стална.

9. Наћи коњуговану хиперболу хиперболе

$$xy = xx' + yy'.$$

Одг. $xy - xx' - yy' + 2x'y' = o.$

10. Кроз неку сталну тачку (x', y') је повучена једна права која сече осовине у тачкама A и B. Наћи место средине дужи AB.

Одг. Место је хипербола

$$2xy = x'y + y'x.$$

11. Некакав круг сече хиперболу $xy = k^2$ у четири тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2), · · · Доказати да је

$$x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = k^4.$$

12. Нека тангента сече асимптоте у тачкама P и P'. Доказати да тачке P, P', F, F' леже на једном кругу.

Напом. F и F' су жиже.

13. Наћи еквацију ортоптичког круга хиперболе $xy = k^2$.

Еквација двеју тангената које су из тачке (x', y') повучене на хиперболу $xy = k^2$ је ово:

$$(x'y - y'x)^2 + 4k^2\,(x - x')\,(y - y') = o,$$

а те две праве се секу под правим углом ако је

$$x'^2 + 2x'y'cos\,\omega + y'^2 = 4k^2cos\,\omega.$$

Еквација поменутог круга је дакле ово:

$$x^2 + 2xy\,cos\,\omega + y^2 = 4k^2cos\,\omega.$$

14. e и e' су ексцентрицитети двеју коњугованих хипербола. Доказати да је

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1.$$

15. Жижа F' је почетак неке ортогоналне системе, а фокална осовина је осовина x. Доказати да је еквација асимптота ово:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=e^2.$$

16. Доказати да је фокалан потег PF неке тачке P, који иде напоредо са асимптотом $=$ половини параметра.

17. Асимптоте неке хиперболе што пролази кроз три дате тачке (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') иду напоредо са двема сталним правима. Доказати да је еквација хиперболе ово:

$$\begin{vmatrix} xy & x & y & 1 \\ x'y' & x' & y' & 1 \\ x''y'' & x'' & y'' & 1 \\ x'''y''' & x''' & y''' & 1 \end{vmatrix}=o.$$

[*Напом.* Дате две сталне праве су осовине координатне системе.].

18. Ако ортогонално пројицирамо два коњугована дијаметра на једној (трансверзалној или коњугованој) осовини, биће разлика квадрата тих пројекција $=$ квадрату те осовине.

19. P_1, P_2, P_3 су три тачке равностране хиперболе $xy=1$. Доказати

1-во, да је површина троугла $P_1P_2P_3=$

$$\frac{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{2x_1x_2x_3};$$

2-го, да је површина троугла $Q_1Q_2Q_3$ који затварају тангенте у тачкама P_1, P_2, P_3 ово:

$$\frac{2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)};$$

3-ће, да ће бити, кад тежиште троугла $P_1P_2P_3$ лежи на асимптоти, $Q_1Q_2Q_3=4P_1P_2P_3$.

20. Дате су две праве Ox и Oy. Нека секанта BC сече их у тачкама B и C тако, да је површина троугла $BOC = m^2 = const.$ Наћи место тежишта троугла BOC.

Сталне две праве узећемо за осовине координатне системе. Ако су x и y координате тежишта, биће $x = \frac{OB}{3}$, $y = \frac{OC}{3}$, па како је површина A троугла BOC стална, биће

$$A = \frac{OB \cdot OC \sin \omega}{2} = m^2,$$

па је према томе и

$$xy = \frac{2m^2}{9 \sin \omega},$$

т. ј. место тежишта је хипербола, а асимптоте те хиперболе су дате две сталне праве.

21. Круг, који је описан око аутополарног троугла ABC равностране хиперболе, пролази кроз средиште те хиперболе.

Узмимо страну AB за осовину x, а страну AC за осовину y. Ако напишемо погодбе под којима ће поларе темена B и C бити координатне осовине, добићемо из тих погодаба координате темена B и C; биће на име $-f/h$, o координате темена B, а o, $-g/h$ координате темена C. Еквација круга који пролази кроз три темена A, B, C је према томе

$$h(x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega) + fx + gy = o.$$

Како је дата хипербола равнострана, биће $\cos \omega = (a + b) \div 2h$, па се с тога еквација поменутог круга може овако написати:

$$(hx + by + f)x + (ax + hy + g)y = o,$$

а та еквација је састављена из ових двеју линеарних еквација $ax + hy + g = o$ и $hx + by + f = o$; те две линеарне еквације одређују међу тим средиште хиперболино, т. ј. и т. д.

22. Из неке тачке хиперболе $x^2 - y^2 = a^2 + b^2$ повучене су две тангенте на хиперболу $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$. Доказати да четири тачке у којима оне секу осовине леже на једном кругу.

23. Свака корда неке хиперболе дели на једнаке делове онај део једне или друге асимптоте, који лежи између тангената што су повучене на крајевима те корде.

24. Дата је основа једног троугла и разлика $\alpha - \beta$ углова на основи. Наћи место трећега темена.

25. Дата је основа AB неког троугла ABC и разлика $AC-BC$ осталих двеју страна. Наћи место темена C.

26. Кроз сваку тачку P неке равни пролазе по две хиперболе, а еквације тих хипербола су ово: $a^2xy + ay + x = o$ (са a означен је један променљив параметар). На којој кривој мора се налазити тачка P кад се поменуте две хиперболе секу под правим углом.

Одг. Тачка P мора се налазити на кривој $x^4 + y^3 = o$.

27. Хипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ сече ортогонално све коничне пресеке који пролазе кроз крајеве осовина елипсе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$$

28. «Бошковићев круг» сече (види прим. 6. стр. 555.) праву DD'. Доказати да је место тачака P једна хипербола.

29. A и A' су две тачке које леже на осовини x, а на различитим странама координатног почетка O. Тачке A и A' спојићемо са неком тачком J осовине y. Управна AP на AJ сече $A'J$ у тачци P. Наћи место тачака P.

30. Средиште дате равностране хиперболе узећемо за средиште инверсије. Наћи инверсну слику хиперболе.

Одг. Инверсна слика је лемниската.

31. Дат је један коничан пресек S и један променљив круг S' што дира S у датој тачци O. Наћи место тачака у којима се секу заједничке тангенте кривих S и S'.

32. Дата је равнострана хипербола $y^2 - x^2 - 2xy + 2y + 1 = o$ и дат је круг $x^2 + y^2 = 1$. Доказати 1-во, да те две криве имају једну заједничку тангенту AD у тачци $A(1, o)$; 2-го, да се те две криве ортогонално секу у тачци $B(o, -1)$; 3-ће, да је права AB један дијаметар дате хиперболе; 4-то, да се праве AF и EB, које спајају A и B са крајевима F и E неке корде EF датог круга која иде напоредо са AD, секу на хиперболи.

Brocard.

◆

ОДЕЉАК ТРЕЋИ

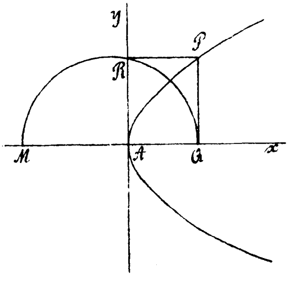
О параболи

302. Нека је осовина параболина осовина ортогоналне координатне системе, а тангента у темену нека је осовина y. У тој системи биће, као што знамо, еквација параболе овог облика:

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Помоћу те еквације одредили смо већ у један мах (чл. 33.) облик параболе.

По еквацији (1) види се да је ордината ма које тачке параболине геометријска средина између $2p$ и апсцисе те тачке. Кад се то има у виду, онда је лако геометријском конструкцијом наћи једну тачку параболину. Одмерићемо на негативном делу осовине x део



Сл. 150.

$AM = 2p$ и повући ћемо кроз сталну тачку M некакав круг чије средиште лежи на осовини параболиној. Тај круг ће сећи осовину x у тачци Q, а осовину y у тачци

R; за тим ћемо повући у тачци Q праву $QP \perp$ на осовину x, а у тачци R праву $RP \perp$ на осовину y. Тачка P, у којој се секу те две управне, била би тачка параболина. Сличним путем могли бисмо добити и остале тачке параболине.

Парабола и хипербола личе једна на другу у толико, у колико обе те криве имају гране које се протежу у бескрајност. Међу тим се те две врсте грана битно разликују једна од друге; гране хиперболине дивергирају и теже да се састану са двема асимптотама у бескрајности, а гране параболине немају асимптота. Узмимо на име најпре једну праву која иде напоредо са осовином параболином; та права биће дијаметар криве, а еквација њезина је $y = b$. Та права сече параболу у двема тачкама, једна од тих тачака је у бескрајности, а координате оне друге тачке су $b^2/2p, b$. Та друга тачка у опште није у бескрајности, а биће у бескрајности само ако је и b бескрајно. По томе се види да парабола већ нема асимптота које би ишле напоредо са осовином. Сличним путем доказаћемо, да ни остале праве које не иду напоредо са осовином параболином не могу бити асимптоте. Еквација такве једне праве била би ово: $y = mx + b$; разлика ордината тачака те праве и ордината оних тачака параболе $y^2 = 2px$ које имају исту апсцису, била би ово:

$$mx + b - \sqrt{2px}$$

или

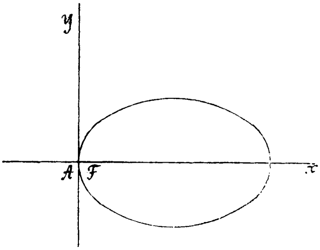
$$x\left(m + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2p}{x}}\right). \qquad (2)$$

Узмимо сад да x расте и да је најпосле x нарасло преко сваке границе. У том случају ће први чинитељ производа (2) бити бескрајан; граница другог чинитеља је m (а m није $= o$), а по томе се види да ће и поменута разлика у ординатама бити бескрајна. Између правих које не иду напоредо са осовином нема дакле такођер ни једне која би била асимптота параболина.

303. Још потпунију слику о облику параболином добићемо овако. Узећемо једну елипсу и претпоставићемо 1-во, да велика осовина те елипсе без престанка расте и 2-го, да се теме A и жижа F те елипсе не мењају, кад јој се мења осовина. У системи xAy (сл. 151.) биће еквација те елипсе овог облика:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2. \qquad (3)$$

Тачке A и F — то смо претпоставили — су сталне, па је с тога и $AF = m = const.$ Јасно је да је



Сл. 151.

$$m = a - c = a - \sqrt{a^2 - b^2};$$

према томе је

$$b^2 = 2am - m^2.$$

Сменимо сад у еквацији (3) b^2 са $2am - m^2$. Та еквација преобразиће се у еквацију

$$y^2 = \left(4\,m - \frac{2m^2}{a}\right) x - \left(\frac{2m}{a} - \frac{m^2}{a^2}\right) x^2. \qquad (4)$$

У таквом облику могли бисмо дакле свакад написати еквацију дате елипсе. Узмимо сад да a расте и да је најпосле $lim a = \infty$. У том случају биће сви чланови који стоје на десној страни еквације (4) равни нули сем оног првог члана, па ће се с тога еквација (4) преобразити у ову еквацију:

$$y^2 = 4mx. \qquad (5)$$

Том еквацијом је међу тим представљена једна парабола. *Свака парабола може се дакле сматрати као граница једне елипсе.* — Сличним путем могло би се доказати да се парабола може сматрати као граница којој тежи једна грана хиперболина.

304. Кад бисмо из еквација

$$x = a\,tg^2\varphi,\ y = 2a\,tg\,\varphi \qquad (6)$$

елиминирали параметар φ, добили бисмо еквацију $y^2 = 4ax$, која нам, као што знамо, представља једну параболу. (У тој еквацији је са a означена раздаљина жиже од темена; мало час смо ту раздаљину означили са m). Према томе се свака тачка параболина може изразити једним јединим параметром (углом) φ. Тачку која је тим параметром одређена зваћемо *тачка* φ, а сам угао φ *унутрашњим углом* (*intrinsic angle*) тачке φ.

ТАНГЕНТА И НОРМАЛА

305. Еквација тангенте параболе

$$y^2 = 2px$$

у тачци $P\,(x', y')$ те параболе је (прим. 6. чл. 228.) ово:

$$yy' = p\,(x + x'). \qquad (1)$$

Коефицијенат који одређује правац те тангенте је $\frac{p}{y'}$, па је с тога еквација нормале у тачци (x', y') овог облика:

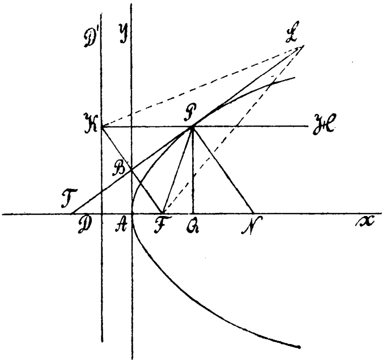
$$y - y' = -\frac{y'}{p}\,(x - x') \qquad (2)$$

или

$$\frac{x - x'}{-p} = \frac{y - y'}{y'}. \qquad (3)$$

Јасно је да еквација (1) представља и полару тачке (x', y').

Апсцису тачке T у којој тангента PT продире осовину, добићемо овако: сменићемо у еквацији (1) тангенте y овом вредношћу: $y = o$. Биће дакле $AT = -x'$. Према томе је суб-тангента $QT = 2QA$, т. ј. *суб-тангента ма које тачке параболине је толика иста, колика је и двојна апсциса те тачке.*



Сл. 152.

Конструкција тангенте у тачци P. Одмерићемо на спољашњем делу осовине део $AT = AQ$ — тачка Q је ортогонална пројекција тачке P на осовини параболиној — и спојићемо тачку T с тачком P. Права PT биће тангента у тачци P.

Како је апсциса тачке N у којој нормала сече осовину ово: $x = AN = p + x'$, биће суб-нормала QN тачке P ово:

$$QN = AN - AQ = p = const.$$

а по томе се види *да су суб-нормале свију тачака параболиних једнаке*

Напомена. Тангента параболе $y^2 = 4ax$ у тачци (x', y') је ово:

$$yy' = 2a(x + x').$$

Ако са φ означимо унутрашњи угао тачке P, биће $x' = a\,tg^2\varphi$, $y' = 2a\,tg\,\varphi$, па је с тога еквација тангенте у тачци φ ово:

$$x - y\,tg\,\varphi + a\,tg^2\varphi = o \qquad (4)$$

или

$$y = x\cot\varphi + a\,tg\,\varphi, \qquad (5)$$

а по тој еквацији види се да је угао $\varphi = \sphericalangle PBy$, који тангента PT затвара са сталном правом Ay, која параболу дира у темену. *Унутрашњи угао φ неке тачке је дакле угао, који тангента што је у тој тачци повучена на параболу, затвара са тангентом у темену.*

306. *Повући тангенту из неке тачке P (x', y') на параболу.*

Означимо са x и y координате тачака у којима тангенте што су из тачке P повучене на параболу дирају параболу. Јасно је да ће те координате бити одређене системом ових двеју еквација:

$$yy' = p(x + x'),\ y^2 = 2px;$$

с тога је

$$x = \frac{y^2}{2p},\quad y = y' \pm \sqrt{y'^2 - 2px'}.$$

Према томе су додирне тачке реалне само ако је $y'^2 - 2px' \geqq o$, т. ј. само ако тачка (x', y') лежи изван параболе или баш на самој параболи. У првом случају су обе тангенте различите, а у другом случају се те тангенте поклапају.

Напомена. Врло лако се може доказати, да је количина $y^2 - 2px$ позитивна кад се тачка (x, y) налази у спољашњем крају параболе. Повуцимо само тога ради једну праву QR напоредо са осовином x. Функција $y^2 - 2px$ биће равна $= o$ кад x и y представљају координате оне тачке Q, у којој поменута права QR

сече параболу. Кад из тачке Q пођемо по правој QR у правцу позитивних апсциса, а тим смо ушли у унутрашњи крај параболе, биће апсцисе свију тачака те праве веће од апсцисе тачке Q, па како су све те апсцисе позитивне и како се уз то ордината y није променила, биће јасно да ће количина $y^2 - 2px$ у унутрашњем крају бити негативна. У спољашњем крају мора дакле (чл. 28.) количина $y^2 - 2px$ имати позитиван знак.

307. *Повући из дате тачке* $P(x', y')$ *нормалу на параболу.*

Еквација нормале је ово:

$$\frac{x - X}{-p} = \frac{y - Y}{Y};$$

у тој еквацији су са X и Y означене координате подножја нормале. Ако је на тој нормали и дата тачка $P(x', y')$, биће

$$\frac{x' - X}{-p} = \frac{y' - Y}{Y} \; (= \mu - 1), \qquad (6)$$

па је према томе и

$$X = x' - p + p\mu, \quad Y = \frac{y'}{\mu}. \qquad (7)$$

Тим двема еквацијама било би одређено подножје нормале. У тим еквацијама јавља се непознат параметар μ, а тај параметар ћемо одредити овако: смениhемо у еквацији $y^2 = 2px$ параметре x и y са $x' - p + p\mu$ и y'/μ, и добићемо тим путем еквацију

$$\frac{y'^2}{\mu^2} = 2p\,(x' - p + p\mu);$$

та еквација може се написати и у овом облику:

$$\frac{y'^2}{\mu^3} - \frac{2p\,(x' - p)}{\mu} - 2p^2 = o. \qquad (8)$$

Ова погодбена еквација је трећега степена, а по томе се види да се из сваке тачке могу у опште повући три нормале на параболу. Један корен те еквације је свакад реалан, т. ј. *из сваке тачке равни може се повући бар једна реална нормала на параболу.*

Сви корени еквације (8) биће реални само ако је

$$\frac{p^4}{y'^4} - \left[\frac{2p\,(x' - p)}{3y'^2}\right]^3 \leqq o$$

или

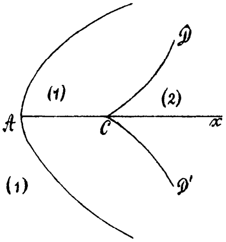
$$y'^2 - \frac{8\,(x' - p)^3}{27p} \leqq o; \qquad (9)$$

у првом случају били би сви корени различити, а у другом би два корена била једнака.

Ту неједнакост (9) протумачићемо геометријски овако. Написаћемо у изразу који стоји с леве стране те неједнакости свуда x место x', а y место y' и претпоставићемо да је тај израз $=o$. Тим путем добићемо еквацију

$$y^2 - \frac{8\,(x - p)^3}{27p} = o, \qquad (10)$$

која аналитички представља криву DCD', која има једну завратну тачку C. Та крива је еволута параболина, а назива се *семикубна парабола.* Она дели раван на два краја; крај (1) у коме се налази теме параболино звaћемо спољашњим крајем, а крај (2) унутрашњим крајем еволуте. Моћ почетка је позитивна; с тога су и моћи свију тачака краја (1) позитивне, а моћи свију тачака краја (2) негативне. Према свему томе моћи ћемо рећи ово: *из неке тачке (x, y) која не лежи на еволути могу се повући на параболу или три или једна реална нормала; у првом случају лежи поменута тачка у унутрашњем, а у другом случају у спољашњем крају еволуте.* Кад би тачка (x, y) лежала на еволути, онда би моћи тих тачака биле $= o$; услед тога би сви корени еквације (8) били реални, али би два корена била једнака. *Из тачака које леже на еволути могу се дакле повући само две различите нормале на параболу.*



Сл. 153.

Напомена. У еквацији (8) нема члана у коме би се јављао квадрат непознате $1/\mu$. С тога је збир корена $1/\mu_1$, $1/\mu_2$, $1/\mu_3$ те еквације $= o$. Но како су ординате подножја оних нормала које се могу повући на параболу из неке тачке (x', y') према обрасцима (7) ово: y'/μ_1, y'/μ_2, y'/μ_3, то је јасно да је збир тих ордината $= o$, т. ј. *ако се три нормале параболине секу у једној тачци, онда тежиште троугла чија су темена подножја поменутих нормала лежи на осовини параболиној.* — Та теорема могла би се непосредно и овако доказати. По еквацији нормала, које су у тачкама (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) неке параболе повучене на параболу, види се да ће се те нормале сећи у једној тачци ако је

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{y_i}{p} & y_i + \frac{y_i x_i}{p} \end{vmatrix} = o, \quad (i = 1, 2, 3)$$

а та се детерминанта лако може преобразити у ову:

$$\begin{vmatrix} 1 & y_i & y_i^3 \end{vmatrix} = o. \qquad (11)$$

Ако развијемо ту детерминанту добићемо ово:

$$(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 + y_2 + y_3) = o;$$

како су подножја различита, то је јасно да је $y_1 + y_2 + y_3 = o$, т. ј. и т. д.

308. *Подножја нормала које су из неке тачке* $P(x', y')$ *повучене на параболу леже на једној равностраној хиперболи која пролази кроз тачку* P; *осовина параболина је асимптота те хиперболе.*

Нормала пролази кроз тачку $P(x', y')$, па је с тога

$$\frac{x' - X}{-p} = \frac{y' - Y}{Y}$$

или

$$XY + (p - x')Y - py' = o; \qquad (12)$$

ако претпоставимо да X и Y у тој еквацији представљају координате неке опште тачке, биће јасно да та еквација представља једну хиперболу која пролази кроз тачку $P(x', y')$, а чија је асимптота осовина параболина. — Хипербола (12) назива се Аполонијева хипербола.

309. *Ако се из неке тачке* $P(x', y')$ *повуку три нормале на параболу, онда подножја тих нормала и теме параболино леже на кругу*

$$x^2 + y^2 - (p + x')x - \frac{y'}{2}y = o. \qquad (13)$$

Напишимо еквацију Аполонијеве хиперболе у овом облику:

$$xy + (p - x')y - py' = o.$$

Из те еквације и еквације $y^2 = 2px$ дате параболе елиминираћемо x и добићемо ову еквацију:

$$y^3 + 2p(p - x')y - 2p^2y' = o. \qquad (14)$$

Корени те еквације представљаће ординате подножја поменутих трију нормала, а ту исту еквацију (14) добили бисмо и кад бисмо елиминирали x из еквације (13) и еквације $y^2 = 2px$. Тим би дакле већ било доказано да поменута три подножја заиста леже на једном кругу. Јасно је у осталом и то да тај круг (13) пролази и кроз теме A параболино. —

Круг (13) зове се *Јоахимсталов круг*, а координате његова средишта су

$$\alpha = \frac{p + x'}{2}, \quad \beta = \frac{y'}{4}. \qquad (15)$$

Примери

1. Нека тангента параболе $y^2 = 2px$ иде напоредо са правом $y = mx$. Наћи еквацију те тангенте.

Одг. $y = mx + \frac{p}{2m}$.

2. Нормала параболе $y^2 = 2px$ иде напоредо са правом $y = mx$. Наћи еквацију те нормале.

Одг. $y = mx - \left(mp + \frac{m^3p}{2}\right)$.

3. Наћи угао φ који затварају тангенте што су на параболу повучене из тачке (x', y').

Одг. $tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{y'^2 - 2px'}}{p + 2x'}$.

4. Наћи место тачака из којих се на параболу $y^2 = 2px$ могу повући тангенте које међу собом затварају дат угао φ.

Одг. Еквација места је

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 sec^2\varphi,$$

а то је еквација једне хиперболе чији је ексцентрицитет $= sec\,\varphi$.

ДИЈАМЕТРИ

310. *Наћи еквацију дијаметра који полови корде што иду напоредо са правом $y = mx$.*

Први метод. Нека је еквација параболе ово:

$$f(x, y) = y^2 - 2px = o.$$

Како је еквација дијаметра криве $f(x, y) = o$ ово: $f'_x(x, y) + mf'_y(x, y) = o$, биће јасно да је у овај мах еквација дијаметра ово:

$$y = \frac{p}{m}. \tag{1}$$

Други метод. Нека су (x', y'), (x'', y'') крајеви једне од оних корада што иду напоредо са правом $y = mx$, а (x, y) тачка на средини те корде. Биће

$$m = \frac{y' - y''}{x' - x''}, \tag{2}$$

а

$$2x = x' + x'', \quad 2y = y' + y''. \tag{3}$$

Тачке (x', y'), (x'', y'') леже међу тим на параболи; с тога је

$$y'^2 = 2px', \quad y''^2 = 2px'',$$

а по томе се види да је и

$$y'^2 - y''^2 = 2p(x' - x'')$$

или

$$(y' - y'')(y' + y'') = 2p(x' - x'').$$

Поделимо сад ту еквацију са $x' - x''$. Ако узимамо у виду еквације (2) и (3) биће јасно да је

$$my = p;$$

таква релација постоји између координата тачке што лежи на средини ма које између поменутих корада; то је дакле еквација дијаметра, а ту еквацију смо добили и мало час. — Овај метод је Парсеров (чл. 253.).

По еквацији (1) види се да сви дијаметри параболини иду напоредо са осовином параболином (чл. 219.).

311. На једном месту (чл. 223.) доказали смо да се еквација параболе у некој специјалној координатној системи може написати у овом облику:

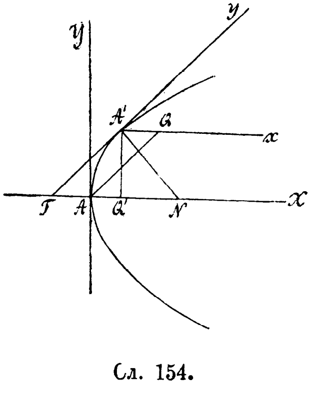
$$b'y^2 + 2g'x = o\,; \qquad (4)$$

осовина x те системе је један дијаметар параболин, а осовина y иде напоредо са ординатама тог дијаметра. Осовина y је дакле тангента параболе у тачци у којој је продире поменути дијаметар, а система је у опште коса (та система је ортогонална само онда, кад је поменути дијаметар уједно и осовина параболе). Ако количину $-\, g'/b'$ означимо са p', онда ћемо еквацију (4) моћи написати у овом облику:

$$y^2 = 2p'x.$$

Количина p', која се јавља у тој еквацији, је $=$ параметру p параболином, ако је система ортогонална[1]. Иначе се она разликује од тог параметра, а ми ћемо је одредити овако.

1-ви метод. Нека су a и b координате почетка A' нове системе $xA'y$ у старој системи XAY. Ако из темена A повучемо праву AQ напоредо са тангентом $A'T$, т. ј. напоредо са осовином y нове системе, видећемо да је



Сл. 154.

---

[1] Многи писци зову количину p' *параметром* параболиним, а количину p *главним параметром*.

$$A'Q = AT = AQ',$$

па су према томе координате темена A у новој системи ово:

$$x = A'Q = a, \ y = - A'T = - \sqrt{4a^2 + b^2}.$$

У тој системи је међу тим еквација параболина овог облика:

$$y^2 = 2p'x\ ;$$

ако дакле сменимо x и y у тој еквацији са a и $- \sqrt{4a^2 + b^2}$, добићемо ово:

$$4a^2 + b^2 = 2p'a,$$

а по томе се види да је

$$p' = 2a + p,$$

јер је $b^2 = 2pa$.

2-ги метод. Повуцимо нормалу $A'N$ у тачци A'. Кад се има у виду еквација $y^2 = 2p'x$, биће јасно да је

$$p' = \frac{\overline{AQ}^2}{2A'Q} = \frac{\overline{A'T}^2}{TQ'} = TN,$$

а по томе се види да је p' = одсечку који на осовини параболе леже између тангенте и нормале у тачци A'.

3-ћи метод. Ако са ω означимо угао $yA'x$ између нових осовина, биће

$$p' = TN = \frac{A'N}{sin\,\omega}, \quad A'N = \frac{Q'N}{sin\,\omega} = \frac{p}{sin\,\omega}.$$

Према томе је

$$p' = \frac{p}{sin^2\omega}.$$

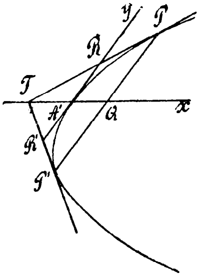
У новој координатној системи $xA'y$ може се дакле еквација параболе написати у овом облику:

$$y^2 = \frac{2p}{sin^2\omega} x.$$

312. Ако и даље задржимо мало час поменуту косу систему $xA'y$, биће еквација поларе тачке (x', y') ово:

$$yy' = p'(x + x').$$

Ако тачка (x', y') лежи на дијаметру $A'x$ — у овај мах на осовини x — биће $y' = o$. У том случају је еквација поларе ово: $x = -x'$, а по томе се види ово:



Сл. 155.

1-во, *да полара неке тачке T дијаметра $A'x$ иде напоредо са тангентом на крају A' тог дијаметра*, и 2-го, *да тачка A' полови суб-тангенту TQ оних двеју тачака у којима полара PP' тачке T сече параболу.* —

Имајући у виду те две особине параболине, моћи ћемо геометријском конструкцијом наћи колико год хоћемо тачака параболиних, кад знамо само две тангенте TP и TP' и тачке P и P' у којима те тангенте дирају параболу. Треба само спојити тачке P и P' и наћи средину Q дужи (корде) PP'. Тачка A' што лежи на средини дужи TQ била би већ једна тачка параболина. Права $RA'R'$, која пролази кроз тачку A' и иде напоредо са кордом PP', била би тангента параболе у тачци

A'. Та тангента сече тангенту TP у тачци R, а тангенту TP' у тачци R'. Из тачке R и тачке R' гранају се дакле по две тангенте параболине, а додирне тачке тих тангената су познате. Кад се има у виду оно што мало час рекосмо, биће јасно да је сваким паром тих тангената одређена по једна тачка параболина и т. д.

ЖИЖЕ И УПРАВНИЦЕ

313. Нека је еквација параболе ово:

$$y^2 - 2px = o.$$

Координате α и β жижâ наћи ћемо овако: тражићемо погодбе под којима ће функција

$$F(x, y) = y^2 - 2px - \mu[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2] \quad (1)$$

бити потпун квадрат једне линеарне функције. У функцији $F(x, y)$ нема члана у ком би се јављао производ xy, па ће с тога та функција зависити само од једне променљиве.

1-во. *Нека је $F(x, y)$ функција променљиве x.* У овом случају мора бити

$$\beta = o, \ \mu = 1.$$

Према томе је у овај мах

$$F(x, y) = -x^2 - 2(p-\alpha)x - \alpha^2. \quad (2)$$

Трином који стоји на десној страни последње еквације биће потпун квадрат само ако је

$$\alpha = \frac{p}{2}.$$

Парабола има дакле само једну реалну жижу; координате те жиже су

$$\alpha = \frac{p}{2}, \ \beta = o,$$

т. ј. реална жижа лежи на осовини у унутрашњем крају параболином, а у раздаљини $\frac{p}{2}$ од темена. —

Сменимо сад у изразу што стоји на десној страни еквације (2) α са $p/2$. Резултат те супституције биће ово:

$$F(x, y) = -\left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Ако даље у еквацији (1) сменимо β нулом, μ са 1, а $F(x, y)$ са $-\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, а ми ћемо добити ово:

$$y^2 - 2px \equiv \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2;$$

еквација дате параболе може се дакле у овом облику написати:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

а по том облику види се ово:

a) да је фокалан потег PF ма које тачке P параболине ово (сл. 152.):

$$PF = x + \frac{p}{2};$$

b) да је

$$x + \frac{p}{2} = o \quad \text{или} \quad x = -\frac{p}{2}$$

еквација управнице; управница је дакле једна права, која стоји управно на осовини, а у раздаљини $AD = -\frac{p}{2}$ од темена A (сл. 152.);

c) да је ексцентрицитет

$$e = 1.$$

2-го. *Нека је* $F(x, y)$ *функција променљиве* y. То се у опште у овај мах не може ни претпоставити, јер се непознати параметри α и μ не могу тако одредити, да у полиному (1) не буде чланова у којима би се јављала променљива x.

Напомене. 1-во. Нека је φ унутрашњи угао неке тачке P параболине, т. ј. нека је $x = atg^2\varphi$, $y = 2atg\varphi$. Фокалан потег PF те тачке P моћи ћемо овако изразити:

$$PF = x + \frac{p}{2} = x + a = atg^2\varphi + a = a\sec^2\varphi.$$

2-го. Управница је полара жиже, а све тачке параболине су једнако удаљене од жиже и од управнице.

3-ће. Како је суб-нормала QN тачке P (сл. 152.) стална, $QN = p$, биће

$$FN = (AQ - AF) + QN = \left(x - \frac{p}{2}\right) + p = x + \frac{p}{2},$$

а по томе се види да је $FN = PF$.

Прим. 1. Нека тачка Q лежи у унутрашњем крају параболе. Доказати да та тачка ближе лежи жижи него управници.

Најпре је (сл. 156.)

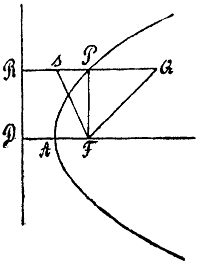
$$QF < QP + PF,$$

па како је $PF = PR$, то је и

$$QF < QP + PR = QR.$$

Прим. 2. Нека тачка S лежи у спољашњем крају параболе. Доказати да је та тачка ближа управници него жижи.

Како је



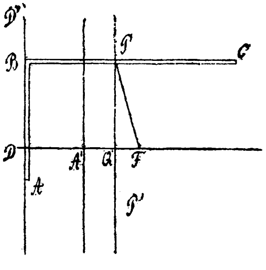
Сл. 156.

$$PR = PF < PS + SF,$$

биће и

$$RS = PR - PS < SF.$$

314. Конструкција параболе. Одмерићемо на некој правој $DA'QF$ дуж $A'F = A'D = \frac{p}{2}$ и повући ћемо у тачци D праву $DD' \perp$ на ту праву. Тачку F моћи ћемо према томе узети за жижу, праву DD' за управницу,



Сл. 157.

тачку A' за теме, а праву $DA'QF$ за осовину параболину. Узмимо сад на осовини $DA'QF$ с десне стране тачке A' ма где једну тачку Q и повуцимо кроз њу праву QP напоредо са управницом DD'. Нека је QD раздаљина те тачке Q од управнице DD'. Узмимо сад дуж QD за полупречник и опишимо тим полупречником круг око тачке F. Тај круг сећи ће праву QP у тачкама P и P'. Те две тачке биће тачке параболине, јер су те две тачке једнако удаљене од жиже F и управнице DD' те параболе.

Механички моћи ћемо на овај начин нацртати параболу. Узећемо један врстар ABC чији се краци AB и BC секу под правим углом. За тим ћемо у жижи F и крају C крака BC утврдити један конац који је исти толики, колики је и крак BC, затегнућемо тај конац једном писаљком што се налази у тачци P и вући ћемо други крак AB дуж управнице. При том кретању описала би писаљка P један лук параболин, јер је ма у ком положају врстара $PF = BP$.

315. *Тангента параболе у тачци P затвара једнаке угле са осовином и са потегом PF додирне тачке.*

У троуглу TFP (сл. 152.) је

$$TF = TA + AF = x' + \frac{p}{2} = PF.$$

Троугао TFP је дакле равнократ, а то значи да је угао PTF = углу FPT. —

На основу те теореме могли бисмо непосредно доказати и ову теорему: *нормала полови угао између потега подножја њезиног P и оне праве PH која је кроз тачку P напоредо повучена са осовином.*

Како је (сл. 152.) $\sphericalangle LPH = \sphericalangle PTF$, биће и $\sphericalangle FPT = \sphericalangle LPH$, а услед тога су и комплементи FPN и NPH тих једнаких углова такођер једнаки.

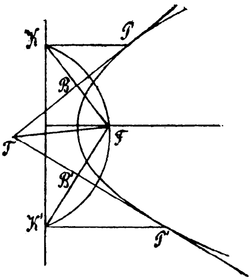
316. *Подножница жиже је тангента у темену параболином.*

Повуцимо кроз додирну тачку P тангенте PT (сл. 152.) праву PK напоредо са осовином, а до тачке K у којој та напоредница сече управницу DD'. Троугао FPK биће равнокрак, јер је $PF = PK$, па како је $\sphericalangle KPT = \sphericalangle FPT$, биће јасно да ће тангента PT половити основу KF троугла FPK у тачци B. Тангента PT биће дакле $\perp$ на KF, а тачка B биће пројекција жиже F на тангенти. Та тачка B лежи на тангенти што је у темену A повучена на параболу, а са ових разлога: 1-во, B је средина дужи KF; 2-го, A је средина дужи DF; 3-ће, тангента у темену иде напоредо са управницом.

317. *Конструкција тангенте дате параболе у датој тачци P те параболе.* — Кроз тачку P повући ћемо (сл. 152.) једну праву напоредо са осовином, а до тачке K у којој та напоредница сече управницу; спојићемо за тим тачку K са жижом F и спустићемо из тачке P управну на KF. Та управна биће тангента параболе у тачци P.

318. *Повући на параболу тангенте из неке тачке T која лежи ван параболе.* —

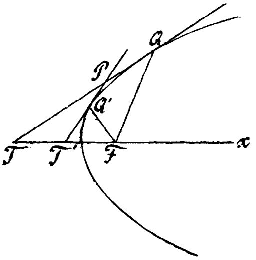
Описаћемо око тачке T један круг полупречником TF; тај круг сећи ће управницу у тачкама K и K'. Те две тачке спојићемо са жижом F и спустићемо из тачке T управне TB и TB' на FK и FK'. Те две управне биће тангенте, а тачке P и P', у којима их секу праве KP и $K'P'$ што су из тачака K и K' повучене напоредо са осовином, биле би додирне тачке.



Сл. 158.

319. *Угао између двеју тангената је раван половини угла који затварају два потега што везују додирне тачке са жижом.*

Повуцимо тангенте у тачкама Q и Q' и означимо са P тачку у којој се те две тангенте секу. Троугли



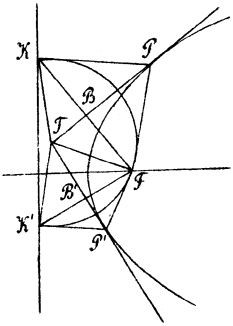
Сл. 159.

TFQ и $T'FQ'$ су равнокраки; $\sphericalangle\, QTF$ је дакле $= \sphericalangle\, FQT$, а $\sphericalangle\, Q'T'F$ је $= \sphericalangle\, FQ'T'$. По томе се види да је $\sphericalangle\, QFx = 2QTF$, а $Q'Fx = 2Q'T'F$, па је с тога и $Q'Fx - QFx = 2\,(Q'T'F - QTF)$ или $Q'FQ = 2TPT'$, а то смо и тврдили.

Напомена. Кад тачка P лежи на управници, онда је корда QQ' фокална корда. У том случају ће угао између тангената бити прав. Према томе је јасно *да се тангенте, које су ма из које тачке управнице параболине повучене на параболу, секу под правим углом*; управница је дакле место темена једног правог угла, који је описан око параболе. То би се у осталом могло лако и аналитички доказати.

320. *Права FT што спаја жижу са тачком T у којој се секу две тангенте параболине, полови угао између потега PF и $P'F$ додирних тачака P и P'.*

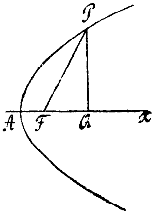
Из тачака P и P' спустићемо управне PK и $P'K'$ на управницу. Тачке K, K', F лежаће, као што знамо на једном кругу који је око тачке T описан полупречником TF. Тангенте PT и $P'T$ су управне на KF и $K'F$ и полове дужи KF и $K'F$ у тачкама B и B'. Услед тога је $\sphericalangle\, PFT = \sphericalangle\, TKP$, а $\sphericalangle\, P'FT = \sphericalangle\, TK'P'$. Како је троугао KTK' равнокрак, биће угли TKK' и $TK'K$ на основи његовој KK' једнаки; с тога су и комплементи тих углова једнаки, а то значи да је $\sphericalangle TKP = \sphericalangle TK'P'$, но како је $\sphericalangle TKP = \sphericalangle PFT$, а $\sphericalangle TK'P' = \sphericalangle P'FT$, то је и $\sphericalangle PFT = \sphericalangle P'FT$, а то смо и тврдили.



Сл. 160.

321. *Пол поларне координатне системе лежи у жижи. Наћи поларну еквацију параболе.*

Осовину параболе узећемо за поларну осовину. Ако је x' апсциса неке тачке P, биће



Сл. 161.

$$\varrho = PF = x' + \frac{p}{2},$$

па како је

$$x' = AQ = AF + FQ = \frac{p}{2} + \varrho \cos \theta,$$

биће и

$$\varrho = \left(\frac{p}{2} + \varrho \cos \theta\right) + \frac{p}{2}$$

или

$$\varrho = \frac{p}{1 - cos\,\theta}\,.$$

То би већ била поларна еквација параболина у поменутој координатној системи. У тој еквацији је са θ означен угао QFP. Кад бисмо са θ означили угао AFP, онда би поларна еквација параболина била овог облика:

$$\varrho = \frac{p}{1 + cos\,\theta}$$

или

$$\varrho = \frac{p}{2}\,sec^2\frac{\theta}{2}\,. \text{ —}$$

Угао $\theta = AFP$ назива се у Астрономији *права аномалија* тачке P.

Прим. 1. Поларна еквација нормале у некој тачци, чија је права аномалија α, биће

$$\frac{p}{\varrho} = 2\,cot\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right). \text{ —} \qquad (a)$$

Ако се на име узме да је $\theta = \alpha$, добиће се ово: $\varrho = \frac{p}{2} sec^2\frac{\alpha}{2}$, а то ће рећи да права (a) пролази кроз тачку α. Даље, ако узмемо да је $\theta = \pi$, добићемо исту вредност за ϱ, а то ће рећи да права (a) пролази и кроз неку тачку N осовине параболине, чији је потег FN управо раван потегу PF тачке α. Услед тога ће та тачка N бити тачка (напом. 3. чл. 313.) у којој нормала у тачци α продире осовину, т. ј. и т. д.

Прим. 2. Унутрашњи угао φ неке тачке P је $=$ половини праве аномалије θ те тачке. —

Како је (сл. 161.)

$$cos\,QFP = \frac{QF}{PF} = \frac{a\,tg^2\varphi - a}{a\,sec^2\varphi} = -cos\,2\,\varphi,$$

биће и

$$\sphericalangle\ AFP = \theta = 2\,\varphi.$$

322. *Наћи површину параболичног одсечка.*

Узмимо да смо ради да нађемо (сл. 155.) површину параболичног одсечка $PA'P'$, т. ј. површину која је затворена луком $PA'P'$ и кордом PP' дате параболе. Ако за осовину x узмемо дијаметар који је коњугован с правцем корде PP', а за осовину y тангенту на крају тог дијаметра, биће еквација параболе овог облика:

$$y^2 = 2p'x.$$

Најпре ћемо наћи површину $A'PQ$. Ако ту површину означимо са A, биће према оном што смо доказали у чл. 290.

$$A' = y \sin\omega = \sqrt{2p'x} \cdot \sin\omega = (2p')^{\frac{1}{2}} \sin\omega \cdot x^{\frac{1}{2}},$$

а по томе се види да је

$$A = \frac{2}{3} (2p')^{\frac{1}{2}} \sin\omega \cdot x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Сталну количину C одредићемо овако. Површина A је $= o$, кад је $x = o$; с тога је и $C = o$, т. ј. у опште је

$$A = \frac{2}{3} (2p')^{\frac{1}{2}} \sin\omega \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{2p'x} \cdot \sin\omega \cdot x$$

или

$$A = \frac{2}{3} xy \sin\omega.$$

Сличним путем бисмо нашли и површину $A'QP'$ и видели бисмо да је та површина $=$ површини A. Површина S целокупног параболичног одсечка $PA'P'$ била би дакле ово:

$$S = \frac{4}{3} xy \sin\omega.$$

Напомена. Ако на крајевима P и P' корде PP' повучемо тангенте, добићемо троугао PTP'. Површина Σ тог троугла је ово: $\Sigma = TQ \cdot PQ \sin\omega = 2xy \sin\omega$, па је према томе и

$$S = \frac{2}{3} \Sigma,$$

т. ј. *површина S параболичног одсечка $PA'P'$ је управо равна двема трећинама површине оног троугла, који корда PP' затвара са двема тангентама PT и $P'T$ што су на параболу повучене на крајевима корде PP'.*

Примери. Теореме и проблеме.

1. Наћи еквацију параболе чија је жижа $(1, o)$, а управница $3x - 4y = o$.

Одг. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 50x + 25 = o$.

2. Наћи координате жижа̂, еквације управница̂ и дужине параметара ових парабола:

$$(y - 1)^2 = 4(x - 2), \quad x^2 + 4y + 8 = o.$$

Одг. $(3, 1)$, $x = 1, 2$; $(o, -3)$, $y = -1, 2$.

3. PFP' је фокална корда; PA сече управницу у Q. Доказати да QP' иде напоредо са осовином параболе.

4. Ординате трију тачака A, B, C параболе $y^2 = 2px$ су y_1, y_2, y_3. Доказати да је површина троугла ABC ово:

$$\frac{1}{4p}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1).$$

5. Стране $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ уписаног троугла ABC граде угле θ_1, θ_2, θ_3 са осовином параболе. Доказати да се површина троугла ABC може овако изразити:

$$\frac{abc \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3}{4p}.$$

6. Доказати да се полупречник круга, који је описан око троугла ABC што је уписан у параболу, може овако изразити:

$$r = \frac{p}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3}.$$

[*Напом.* θ_1, θ_2, θ_3 имају исто значење као и у прим. 5.].

7. Тангенте што су на параболу повучене у тачкама A, B, C затварају троугао PQR. Доказати да је површина троугла PQR равна половини површине троугла ABC.

8. Ортоцентар троугла PQR чије су стране тангенте параболине лежи на управници.

Нека су $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ унутрашњи угли додирних тачака. Тангенте у тачкама φ'', φ''' секу се у темену R троугла PQR, а координате темена R су $a \, tg \, \varphi'' \, tg \, \varphi'''$, $a \, (tg \, \varphi'' + tg \, \varphi''')$. Еквација управне што је из R спуштена на страну PR — тангенту у тачци φ' — биће ово :

$$y - a \, (tg \, \varphi'' + tg \, \varphi''') = - tg \, \varphi' \, (x - a \, tg \, \varphi'' \, tg \, \varphi''');$$

с тога је ордината тачке у којој та управна сече управницу $x = -a$ ово :

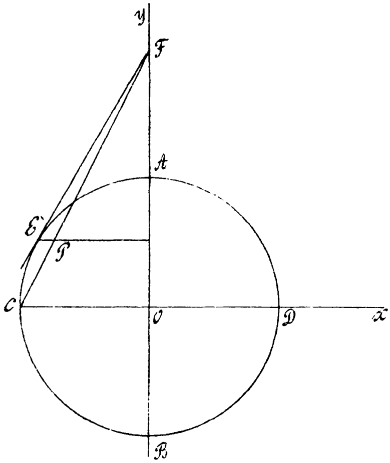
$$y = a \, (tg \, \varphi' + tg \, \varphi'' + tg \, \varphi''') + a \, tg \, \varphi' \, tg \, \varphi'' \, tg \, \varphi''',$$

а по симетрији тога израза види се да ће толике бити и ординате оних тачака у којима управница сече остале две висине.

9. Круг који је описан око троугла PQR, чије су стране тангенте параболине, пролази кроз жижу.

10. Дат је један круг и дијаметар AB тог круга. Тај дијаметар сече у тачци F тангенту што је на круг повучена у некој тачци E. Тачку F спојићемо с крајем C дијаметра CD што стоји $\perp$ на AB. Корда EP што је из E повучена напоредо са CD сече CF у тачци P. Доказати да је место тачака P парабола. —

Нека су x', y' координате тачке E. Еквација тангенте EF је



Сл. 162.

$xx' + yy' - r^2 = o$; према томе је $OF = r^2/y'$. Права CF одсеца дакле на осовинама делове $-r$ и r^2/y'. С тога је еквација праве CF ово :

$$\frac{yy'}{r^2} - \frac{x}{r} = 1.$$

Из те еквације и еквације $y = y'$ праве EP елиминираћемо y'. Резултат биће ово: $y^2 = r(r + x)$, т. ј. место тачака P је парабола.

11. Ортогонална пројекција жиже F на нормали PN је Q. Наћи место тачака Q.

Одг. Ако жижу узмемо за пол, а осовину параболину за поларну осовину, биће еквација места тачака Q ово:

$$\varrho = \frac{p \cos \omega}{2 \sin^2 \omega};$$

у тој еквацији је са p означен параметар параболин.

У паралелним координатама била би еквација места ово:

$$y^2 = \frac{p}{2} x.$$

12. Из сталне тачке (x', y') су повучене тангенте на систему парабола које имају исто теме и исту осовину. Наћи место додирних тачака. —

Треба елиминирати p из еквација̂

$$yy' = p(x + x'), \quad y^2 = 2px.$$

У резултату добићемо ово:

$$xy + x'y - 2y'x = o,$$

т. ј. место додирних тачака је хипербола.

13. Две тангенте параболе $y^2 = 4ax$ граде угле θ и θ' са осовином те параболе, а претпоставља се 1-во, да је $tg\,\theta\, tg\,\theta' = const. = c$; 2-го, да је $cot\theta + cot\theta' = const. = c$; 3-ће, да је $sin\theta sin\theta' = const. = c$ Наћи у сваком посебном случају место тачке у којој се секу поменуте две тангенте.

Одг. 1-во, место је права $x = a/c$; 2-го, место је права $y = ac$; 3-ће, место је круг $x^2 + y^2 - 2ax = a^2(1 - c^2)/c^2$.

14. Наћи еквацију корде коју полови дата тачка (x', y').

Одг. $(y - y')\, y' = p(x - x')$.

[*Напом.* Претпоставља се да је еквација параболе ово: $y^2 = 2px$].

15. Корде параболе $y^2 = 2px$ пролазе кроз тачку (h, k). Наћи место средина тих корада.

Одг. Место је парабола $y\,(y - k) = p\,(x - h)$.

16. Некакав круг сече параболу $y^2 = 2px$ у четири тачке; ординате тих тачака означићемо са y_1, y_2, y_3, y_4. Доказати да је $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = o$.

17. Наћи место жижâ параболâ које пролазе кроз неку дату тачку B и сем тога имају заједничко теме A.

За почетак ортогоналне системе узећемо теме A, а за осовину x те системе праву што везује теме с датом тачком $B\,(b, o)$. Фокална еквација параболе биће ово:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta - p)^2.$$

Та права пролази кроз теме. Услед тога ћемо добити ове две погодбе:

$$\alpha^2 + \beta^2 = p^2,$$

$$\frac{\cos\theta}{\alpha} = \frac{\sin\theta}{\beta} = \pm\frac{1}{p};$$

по првој релацији види се да почетак координатне системе лежи на параболи, а по другој релацији се види да права, што спаја жижу са почетком, сече управницу под правим углом; обе те релације казују нам дакле да је почетак A теме параболино. Сем тога, дата парабола пролази и кроз тачку $B\,(b, o)$; услед тога је и

$$b\sin^2\theta - 2\alpha + 2p\cos\theta = o.$$

Ако из последње три еквације елиминирамо p и θ, добићемо ове две еквације:

$$4\alpha\,(\alpha^2 + \beta^2) = b\beta^2, \quad \beta = o;$$

прва представља цисоjиду, а друга осовину x.

18. Наћи место средиштâ кругова који додирују дат круг K, а деле други један дат круг K' на два једнака дела. —

Нека су C и C' средишта кругова K и K', а r и r' полупречници. Са d ћемо означити раздаљину средишта C и C'. Ако је C почетак ортогоналне координатне системе, а CC' осовина x, биће еквација места средиштâ поменутих кругова ово:

$$x^2 + y^2 = \left[\frac{2dx - (d^2 - r^2 + r'^2)}{2r}\right]^2;$$

место је дакле један коничан пресек; једна жижа тог пресека лежи у почетку. Тај коничан пресек је круг кад је $d = o$, елипса кад је $d < r$, хипербола кад је $d > r$, а парабола кад је $d = r$.

19. Наћи координате средишта круга кривине у тачци φ.

Означимо тангенте трију унутрашњих углова φ, φ', φ'' са t, t', t''. Координате циркум-центра троугла $(\varphi\,\varphi'\varphi'')$ су (види стр. 102. прим. 5. под 2.) ово:

$$x = \frac{a}{2}(t^2 + t'^2 + t''^2 + tt' + t't'' + t''t + 4),$$

$$y = -\frac{a}{4}(t + t')(t' + t'')(t'' + t).$$

Према томе су координате средишта круга кривине ово:

$$x = a(3t^2 + 2), \quad y = -2at^3.$$

20. Наћи еквацију еволуте параболине.

Одг. Еквација еволуте (семикубне параболе) је

$$4(x - 2a)^3 = 27ay^2.$$

Та еквација може се написати и у овом облику:

$$y^2 - \frac{8(x - p)^3}{27p} = o.$$

21. Наћи полупречник кривине у тачци φ дате параболе $y^2 = 4ax$.

Одг. $r = 2a\sec^3\varphi$.

Конструкција полупречника кривине. Спустићемо из тачке P управну PK на управницу и продужићемо нормалу у тачци P до тачке L у којој ова сече управницу. Ако је φ унутрашњи угао тачке P, биће $PL = PK\sec\varphi = PF\sec\varphi = a\sec^3\varphi$; према томе је $r = 2PL$.

22. Наћи еквацију круга кривине у тачци φ.

Одг. $x^2 + y^2 - 2a(3t^2 + 2)x + 4at^3y = 3a^2t^4$.

Ако су x', y' паралелне координате тачке φ, онда се еквација круга кривине може написати у овом облику:

$$x^2 + y^2 - 2x(3x' + 2a) + \frac{2x'y'}{a}y - 3x'^2 = o.$$

23. Доказати да се кроз неку тачку (h, k) могу повући четири круга кривине на параболу.

24. Наћи место средишта Јоахимсталових кругова који додирују параболу.

Јоахимсталов круг пролази, као што знамо, кроз подножја трију нормала које су на параболу повучене из неке тачке (α, β). Ако тај круг дира параболу, онда ће две између тих трију нормала узастопце долазити једна за другом, а тачка (α, β) у којој се те две нормале секу биће средиште круга кривине. Но како су координате средишта Јоахимсталова круга ово:

$$x = \frac{\alpha + 2a}{2}, \quad y = \frac{\beta}{4},$$

биће координате средишта кривине ово:

$$\alpha = 2(x - a), \quad \beta = 4y,$$

па је с тога еквација траженог места ово:

$$2(x - 2a)^3 = 27ay^2.$$

25. (α, β), (α', β'), (α'', β'') су подножја трију нормала које су из неке тачке повучене на параболу. Доказати да је

$$\beta\beta'(\alpha - \alpha') + \beta'\beta''(\alpha' - \alpha'') + \beta''\beta(\alpha'' - \alpha) = o.$$

26. Наћи место темена правих углова чији су краци нормале параболе $y^2 = 4ax$.

Одг. Место је парабола $y^2 = a(x - 3a)$.

27. Тангенте, што су повучене на параболу у тачкама P и P' секу осовину у тачкама T и T'. Ако је F жижа, доказати да је

$$TT' = PF - P'F.$$

28. Крајеви неке корде параболине виде се из темена њезиног под правим углом. Наћи место средине те корде.

29. Одсечак параболе $y^2 = 4ax$ на правој $y = mx + b$ је дијаметар једнога круга. Наћи еквацију тог круга.

Одг. $n^2(x^2 + y^2) + 2(bm - 2a)x - 4amy + 4abm + b^2 = o.$

30. Наћи угао под којим се секу параболе $y^2 = 4ax$ и $y^2 = 4bx$.

31. Наћи заједничке тангенте параболе $y^2 = 4ax$ и круга $2(x^2 + y^2) = 9ax$.

Одг. $12y \pm 16x \pm 9a = o.$

32. Средине корада параболиних леже на сталној правој $Ax + By + C = o$. Наћи место полова тих корада.

Одг. Место је парабола

$$A(y^2 - px) + p(By + C) = o.$$

33. TP и TQ су две тангенте неке параболе: TL је управна из T на осовину, а управна из T на PQ сече осовину у M. Доказати да је $2LM = latus\ rectum\ (= 2p)$.

34. Корда AB гради са осовином параболе $y^2 = 4ax$ некакав угао $\theta = const.$ На тој корди AB наћи ћемо неку тачку O за коју је $AO \cdot OB = const. = \delta^2$. Наћи место тачака O.

Одг. Место тачака O је парабола

$$y^2 - 4ax + \delta^2 sin^2\theta = o.$$

[*Напом.* Треба имати у виду да су бројеви којима су одмерени одсечци OA и OB корени ове квадратне еквације:

$$\varrho^2 sin^2\theta + 2\,(y\,sin\,\theta - 2a\,cos\,\theta)\,\varrho + y^2 - 4ax = o.$$

Види прим. 8. стр. 529.].

35. Нека парабола чији је *latus rectum* $= 4a$ клизи по крацима једног правог угла. Наћи криву коју ће описати жижа.

Одг. Треба наћи дужине управних што су из жиже (a, o) повучене на тангенте (краке правог угла)

$$y = mx + \frac{a}{m}, \quad y = -\frac{x}{m} - am.$$

Те дужине ћемо означити са x и y и елиминираћемо m. Жижа ће дакле описати криву

$$x^2y^2 = a^2\,(x^2 + y^2).$$

36. Жижа параболина лежи у средишту инверсије. Наћи инверсну слику дате параболе.

Одг. Инверсна слика је кардиојида.

37. Тангента и нормала у некој тачци параболиној су хармонијски коњуговане према фокалном потегу и дијаметру који пролази кроз ту тачку.

[*Напом.* По тој теореми види се да је $TF = FN$.]

38. Управна AQ из темена A на тангенту у тачки P сече параболу у тачци R. Доказати да је $AQ \cdot AR = 4a^2$.

* * *

ОДЕЉАК ЧЕТВРТИ

Конфокални конични пресеци

323. Конични пресеци који имају исте жиже називају се *конфокални* или *хомофокални* конични пресеци. — Најпре ћемо се забавити с коничним конфокалним пресецима који имају одређено средиште. Узећемо тога ради елипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=o \qquad (1)$$

и потражићемо еквацију коничних пресека који имају исте жиже као и та елипса (1); ту елипсу звaћемо „елипса (a, b)“. Координате жижâ те елипсе су, као што знамо, ово: $x=\pm\sqrt{a^2-b^2}$, $y=o$. Кад бисмо сад у еквацији (1) сменили a^2 и b^2 са $a^2-\lambda$ и $b^2-\lambda$, добили бисмо еквацију

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1=o. \qquad (2)$$

Та еквација представљаће систему коничних пресека, кад се у њој сматра λ као параметар, а сви ти конични пресеци имаће исте жиже као и елипса (a, b). По еквацији (2) види се на име да су координате жижâ коничних пресека (2) ово: $x=\pm\sqrt{a^2-b^2}$, $y=o$, а то ће рећи да су криве (1) и (2) конфокалне. Да видимо сад још које коничне пресеке представља еквација (2), кад се λ мења од $-\infty$ до $+\infty$. Да бисмо мисли средили и закључке доконали, претпоставићемо да је $a>b$. Кад се то има у виду, биће јасно ово:

1-во, да ће еквација (2) представљати елипсе кад се λ буде мењало од $-\infty$ до b^2; 2-го, да ће еквација (2) представљати хиперболе, кад се λ буде мењало између b^2 и a^2 и најпосле 3-ће, да ће еквација (2) представљати поново све саме имагинарне елипсе, кад се λ буде мењало од a^2 до $+\infty$.

Означимо сад са a' и b' дужину полуосовина коничног пресека (2); биће

$$a'^2 = a^2 - \lambda, \ b'^2 = b^2 - \lambda,$$

па је према томе и

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 = c^2,$$

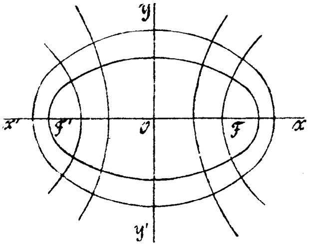
а по томе се види да се еквација (2) може написати и у једном од ова три облика:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = o, \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{a'^2 - c^2} - 1 = o, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{b'^2 + c^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = o. \tag{5}$$

Не ће бити згорег на овом месту поменути и то, како стоје једна према другој конфокалне криве (2), кад се параметар λ мења. — Узмимо и разгледајмо оне елипсе које представља еквација (2). Кад је $\lambda = -\infty$, биће полуосовине a' и b' бескрајне, кад се λ без прекида мења од $-\infty$ до b^2, онда се осовине тих елипси смањују тако, да је дужина велике полуосовине елипсине управо c, а дужина мале полуосовине нула кад је $\lambda = b^2$ или $b'^2 = o$. Једна у системи конфокалних елипси је дакле и онај део FF' осовине x, који лежи између заједничких жижâ F и F'. Напротив, ако узмемо да се λ мења a^2 до $b^2 < a^2$, онда ће еквација (2) представљати све саме хиперболе; они угли између асимптота, у којима леже гране тих хипербола, опадаће при том мењању параметра од 180° до o; па како доњој граници $\lambda = b^2$ одговара једна хипербола чија је трансверзална осовина $= 2c$, то је јасно да ће једну у системи конфокалних хипербола представљати и две полуправе Fx и $F'x'$.



Сл. 163.

324. Узмимо сад да нека тачка (x', y') лежи на једном између конфокалних пресека (2); у том случају биће

$$\frac{x'^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y'^2}{b^2 - \lambda} - 1 = o$$

или

$$(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) - x'^2(b^2 - \lambda) - y'^2(a^2 - \lambda) = o. \quad (6)$$

Ова еквација је квадратна по непознатој λ, а корени њезини су реални, као што ћемо одмах доказати. Смени́ћемо у полиному еквације (6) λ са $-\infty$, b^2, a^2. Тим путем добићемо ове резултате:

$$+\infty, \; -y'^2(a^2 - b^2), \; + x'^2(a^2 - b^2);$$

знаци се, као што видимо, наизменце мењају, т. ј. еквација (6) има *de facto* два реална корена; један корен те еквације лежи између $-\infty$ и b^2, а други између b^2 и a^2. По томе се види *да кроз тачку (x', y') пролазе само два конична конфокална пресека; један* *између тих пресека је елипса, а други хипербола.* Ако корене еквације (6) означимо са λ' и λ'', онда ћемо еквације тих двеју кривих моћи овако написати:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda'} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda'} - 1 = o, \quad \frac{x^2}{a^2 - \lambda''} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda''} - 1 = o.$$

Сменимо сад у овим двема еквацијама x и y координатама x' и y' оне тачке кроз коју пролазе те две конфокалне криве, одузмимо другу еквацију од прве и поделимо разлику са $\lambda' - \lambda''$. У резултату добићемо ово:

$$\frac{x'^2}{(a^2 - \lambda')(a^2 - \lambda'')} + \frac{y'^2}{(b^2 - \lambda')(b^2 - \lambda'')} = o.$$

По тој еквацији види се да се тангенте

$$\frac{xx'}{a^2 - \lambda'} + \frac{yy'}{b^2 - \lambda'} - 1 = o, \quad \frac{xx'}{a^2 - \lambda''} + \frac{yy'}{b^2 - \lambda''} - 1 = o$$

секу под правим углом. Према томе је јасно *да се конфокални конични пресеци секу ортогонално* (види чл. 295.).

Кад бисмо у обрасцима $a'^2 = a^2 - \lambda$, $b'^2 = b^2 - \lambda$ сменили λ поменутим двема вредностима λ' и λ'', добили бисмо тим и дужине полуосовина̂ оних двеју конфокалних коничних пресека који се секу у тачци (x', y'). У осталом до истих резултата дошли бисмо и не тражећи корене еквације (6), а на овај начин. Сменићемо у еквацијама (4) и (5) x и y са x' и y' и добићемо тим путем ове две еквације:

$$a'^4 - (x'^2 + y'^2 + c^2)\, a'^2 + x'^2 c^2 = o, \qquad (7)$$

$$b'^4 - (x'^2 + y'^2 - c^2)\, b'^2 - y'^2 c^2 = o. \qquad (8)$$

Означимо корене прве еквације са a'^2 и a''^2, а корене друге еквације са b'^2 и b''^2. Она прва два корена представљала би квадрате трансверзалних полуосовина, она друга два квадрате осталих двеју полуосовина поменутих двају конфокалних коничних пресека што пролазе кроз тачку (x', y'), па како је по првој еквацији

$$x'^2 c^2 = a'^2 a''^2,$$

а по другој еквацији

$$-y'^2 c^2 = b'^2 b''^2 = (a'^2 - c^2)(a''^2 - c^2),$$

то се уједно види и то, да се паралелне координате x', y' неке тачке могу изразити и трансверзалним полуосовинама a' и a'' оних двеју конфокалних коничних пресека, који пролазе кроз ту тачку. *Lamé* је назвао полуосовине a' и a'' *елиптичним координатама* тачке (x', y'). Кад су познате елиптичне координате неке тачке, онда се паралелне координате x', y' те исте тачке израчунавају помоћу ових образаца:

$$x'^2 = \frac{a'^2 a''^2}{a^2 - b^2}, \quad -y'^2 = \frac{b'^2 b''^2}{a^2 - b^2}, \tag{9}$$

или помоћу ових:

$$x'^2 = \frac{a'^2 a''^2}{a^2 - b^2}, \quad -y'^2 = \frac{(a'^2 - c^2)(a''^2 - c^2)}{a^2 - b^2}. \tag{10}$$

Прим. 1. Доказати да су елиптичне координате неке тачке P ово:

$$a' = \frac{1}{2}(PF + PF'), a'' = \frac{1}{2}(PF - PF').$$

Прим. 2. Доказати да је

$$x'^2 + y'^2 = a'^2 + b''^2 = a''^2 + b'^2.$$

Прим. 3. Означимо са P неку тачку кроз коју пролазе два конфокална конична пресека — елипса (a', b') и хипербола (a'', b''). У тој тачци моћи ћемо повући тангенту и на елипсу (a', b') и на хиперболу и спустићемо из заједничког средишта кривих конфокалне системе управне p' и p'' на поменуте две тангенте. Доказати да је

$$p'^2 = \frac{a'^2 b'^2}{a'^2 - a''^2}, \quad -p''^2 = \frac{a''^2 b''^2}{a'^2 - a''^2}.$$

Шта се види по тим обрасцима?

325. Узмимо сад да права $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o$ додирује криву (2). У том случају биће

$$(a^2 - \lambda)\cos^2\alpha + (b^2 - \lambda)\sin^2\alpha = p^2,$$

па је према томе и

$$\lambda = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha - p^2.$$

Како λ има само једну једину вредност, то је јасно *да свака права додирује само једну једину криву система конфокалних коничних пресека.*

326. *Праву $x/m + y/n - 1 = o$ сматраћемо као полару сваке посебне криве конфокалне системе $x^2/(a^2-\lambda) + y^2/(b^2 - \lambda) - 1 = o$. Наћи место половâ те праве.*

Означимо координате пола дате праве са x', y'. Еквација поларе те тачке биће у опште овог облика:

$$\frac{xx'}{a^2 - \lambda} + \frac{yy'}{b^2 - \lambda} - 1 = o,$$

па како та еквација представља исту ону праву, коју представља и еквација $x/m + y/n - 1 = o$, биће јасно да је

$$\frac{1}{m} = \frac{x'}{a^2 - \lambda}, \quad \frac{1}{n} = \frac{y'}{b^2 - \lambda}.$$

Из тих двеју еквација треба елиминирати λ. У резултату ћемо добити ово:

$$mx' - ny' = a^2 - b^2,$$

па је према томе еквација места половâ ово:

$$mx - ny = a^2 - b^2, \qquad (11)$$

т. ј. место полова је једна права која се под правим углом сече са датом правом.

Напомене. 1-во. Један пол дате праве биће и она тачка T у којој та права дира једну криву дате системе. По томе се види да ће права (11) бити нормала те криве у тачци T.

2-го. Ако тангента у тачци T сече једну у системи датих конфокалних кривих у тачкама P и Q, биће јасно да ће се тангенте у P и Q сећи на нормали у тачци T.

Прим. 1. Из тачке (x', o) велике осовине елипсе $x^2/a^2+y^2/b^2-1=o$ повући ћемо тангенте на систему конфокалних коничних пресека. Наћи место додирних тачака. —

Треба елиминирати a'^2 из еквација

$$\frac{xx'}{a'^2}-1=o, \quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{a'^2-c^2}-1=o.$$

Место додирних тачака биће круг

$$x'(x^2+y^2)-x(c^2+x'^2)+c^2x'=o.$$

Прим. 2. Наћи место тачака из којих се могу повући на два конфокална конична пресека тангенте што се секу под правим углом.

Одг. Место је круг

$$x^2+y^2=a^2+b^2-\lambda.$$

Прим. 3. Доказати да је трансверзална осовина ма које хиперболе конфокалне системе мања од трансверзалне (велике) осовине ма које елипсе те системе.

Напом. Само је трансверзална осовина оне хиперболе, која се састоји из двеју полуправих Fx и $F'x'$ равна трансверзалној осовини оне елипсе, која се састоји из дужи FF'.

Прим. 4. φ је ексцентрична аномалија неке тачке дате елипсе (a, b). Наћи еквацију оне конфокалне хиперболе која пролази кроз тачку φ. —

Сменићемо x' и y' у еквацији (6) са $a\cos\varphi$ и $b\sin\varphi$ (чл. 324.). Један корен λ те еквације је у овај мах $=o$, а други има ову вредност: $a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi$. Према томе је $a'^2=a^2$, $b'^2=b^2$, а

$$a''^2=a^2-(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)= \quad c^2\cos^2\varphi,$$

$$b''^2=b^2-(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)=-c^2\sin^2\varphi.$$

Кроз тачку φ пролазиће дакле ова конфокална хипербола:

$$\frac{x^2}{\cos^2\varphi} - \frac{y^2}{\sin^2\varphi} = c^2.$$

Дефин. *Сарегнуте тачке* су оне тачке конфокалних елипси, које имају исту ексцентричну аномалију φ. Тако би н. пр биле спрегнуте ове две тачке: $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, $(a'\cos\varphi, b'\sin\varphi)$ елипси (a, b) и (a', b').

Прим. 5. Доказати да спрегнуте тачке системе конфокалних елипси леже на једној хиперболи.

Како је $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 = \cdot\ \cdot\ \cdot = c^2$, биће јасно да све спрегнуте тачке леже на хиперболи која пролази кроз тачку φ (прим. 4.) дате елипсе (a, b).

327. Конфокалне параболе. Параболе које имају исту жижу и исту осовину називају се *конфокалне параболе.*

Ако узмемо жижу за почетак ортогоналне координатне системе, а заједничку осовину параболâ за осовину x, биће еквација конфокалних парабола ово:

$$y^2 = 2px + p^2. \qquad (12)$$

Те параболе гранају се у позитивном правцу осовине x, кад је p позитивно, а у противном правцу кад је p негативно.

328. Грêвсова теорема. *Ако ма из које тачке T једне елипсе повучемо две тангенте TP и TQ на једну конфокалну елипсу, биће разлика између збира тангената и лука, који те тангенте затварају, стална количина.*

Узећемо на датој елипси сем тачке T још и ону тачку њезину T', која непосредно за тачком T долази на елипси; из те тачке T' повући ћемо такођер тангенте $T'P'$ и $T'Q'$ на конфокалну елипсу и спустићемо управне TR и $T'R'$ на $T'P'$ и TQ. Тачке P и P' лежаће на конфокалној елипси једна поред друге. Према томе моћи ћемо сматрати дуж $P'R$ као наставак дужи (лука) PP', а троугао TPR као равнокрак троугао. Биће дакле

$$TP = PP' + P'R,$$

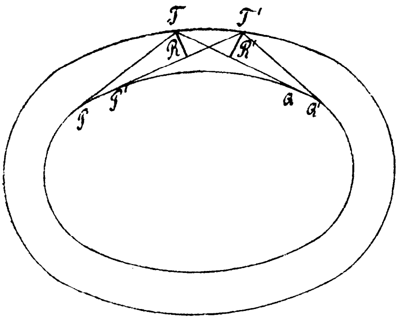
па како је

$$T'P' = P'R + RT',$$

биће и

$$TP - T'P' = PP' - RT'. \qquad (13)$$

Сличним путем добили бисмо и да је



Сл. 164.

$$TQ - T'Q' = TR' - QQ'.$$

Кад се има у виду да су угли $TT'R$ и $T'TR'$ једнаки (чл. 271.), биће јасно да је и $TR' = RT'$. Према томе је и

$$TQ - T'Q' = RT' - QQ'. \qquad (14)$$

Саберимо сад (13) и (14); збир ће бити ово:

$$(TP + TQ) - (T'P' + T'Q') = PP' - QQ',$$

па како је

$$PP' - QQ' = (PP' + P'Q) - (P'Q + QQ') = PQ - P'Q',$$

биће и

$$(TP + TQ) - (T'P' + T'Q') = PQ - P'Q'$$

или

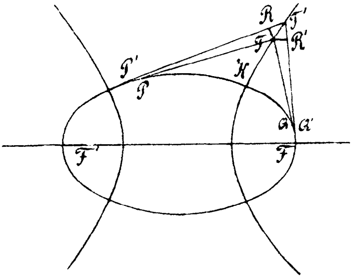
$$TP + TQ - PQ = T'P' + T'Q' - P'Q',$$

а то смо и тврдили.

Напомена. Гревсова теорема може се применити и на конфокалне хиперболе и параболе.

329. Мак-Калахова и Шалова теорема. *Ако из неке тачке T једне хиперболе повучемо две тангенте TP и TQ на једну конфокалну елипсу, биће разлика лукова PK и QK на које хипербола дели лук PQ равна разлици тангената TP и TQ.*

Узећемо на датој хиперболи сем тачке T још и тачку T' која на хиперболи непосредно стоји уз тачку T и спустићемо управне TR и TR' на тангенте $T'P'$ и $T'Q'$. По слици види се да је



Сл. 165.

$$T'P' = T'R + RP' = T'R + P'T$$

или

$$T'P' - P'T = T'R;$$

како је

$$P'T = TP + PP' = TP + (P'K - PK),$$

биће и

$$(T'P' - P'K) - (TP - PK) = T'R. \qquad (15)$$

Сличним путем дало би се доказати и да је

$$(T'Q' - Q'K) - (TQ - QK) = T'R'. \qquad (16)$$

Замислимо сад да је тачка T' спојена са жижама. Јасно је да ће права $T'T$, која у тачци T' дира хиперболу, половити угао између потега $T'F$ и $T'F'$. Ти исти потези затвараће међу тим (чл. 271.) и једнаке угле са тангентама $T'P'$ и $T'Q'$; према томе ће тангента $T'T$

половити и угао $P'T'Q'$; управне TR и TR' биће дакле једнаке, па је с тога и $T'R = T'R'$. Одузмимо сад (16) од (15). Разлику моћи ћемо овако написати:

$$(TP - PK) - (TQ - QK) = (T'P' - P'K) - (T'Q' - Q'K),$$

а по тој релацији види се да је разлика између разликâ $TP - PK$ и $TQ - QK$ стална; како је та разлика $= o$ кад тачка T лежи на тачци K, биће јасно да ће она у опште бити $= o$; биће дакле

$$TP - PK = TQ - QK$$

или

$$TP - TQ = PK - QK,$$

а то смо и тврдили.

330. Фањанова теорема. *Елиптичан квадранат може се поделити на два дела тако, да је разлика лукова равна разлици полуосовина.*[1])

Ова теорема може се непосредно доказати помоћу Мак-Калахове и Шалове теореме. Треба само повући тангенте TA и TB на крајевима A и B велике и мале осовине и кроз тачку T, у којој се те две тангенте секу, повући једну конфокалну хиперболу; тачку у којој та хипербола сече квадранат AB означићемо са K. Према мало час поменутој теореми биће

$$BK - AK = TB - TA = a - b.$$

Та хипербола пролази кроз тачку $T(a, b)$. С тога је еквација њезина ово:

$$\frac{x^2}{a^2 - ab} + \frac{y^2}{b^2 - ab} - 1 = o.$$

Према томе су координате тачке K ово:

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{a + b}}, \quad y = \sqrt{\frac{b^3}{a + b}}.$$

---

[1]) То је управо само део једне општије »Фањанове теореме«. Види: **Enneper-Müller.** *Elliptische Functionen,* p. 514.

Примери. Теореме и проблеме.

1. **Доказати да се у свакој тачци равни по две конфокалне параболе секу ортогонално. —**

Кад бисмо у еквацији $y^2 = 2px + p^2$ конфокалних парабола сменили x и y са x' и y', добили бисмо једну квадратну еквацију по непознатој p. Производ коренâ те еквације је $pp' = -y'^2$, па како је коефицијентом p/y' одређен правац тангенте што је повучена на параболу која је одређена параметром p, а коефицијентом p'/y' правац тангенте што је повучена на параболу која је одређена параметром p', то је јасно да се те две тангенте секу ортогонално.

2. **Наћи место тачака из којих се могу на две конфокалне параболе $y^2 = 4a(x+a)$ и $y^2 = 4b(x+b)$ повући две тангенте што се секу под правим углом.**

Одг. Место је права $x + a + b = o$.

3. **Праве TP и TQ дирају два конфокална конична пресека (a, b) и (a', b') у тачкама $P(x', y')$ и $Q(x'', y'')$. Ако је $TP \perp TQ$, онда права што спаја средиште с тачком T полови корду PQ.**

Еквације тангената биће

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = o, \quad \frac{xx''}{a'^2} + \frac{yy''}{b'^2} - 1 = o.$$

Према томе ће еквација

$$\left(\frac{x'}{a^2} - \frac{x''}{a'^2}\right) x + \left(\frac{y'}{b^2} - \frac{y''}{b'^2}\right) y = o$$

представљати праву што спаја тачку T са средиштем. На тој правој лежаће средина корде PQ само ако је $x'x''/a^2a'^2 + y'y''/b^2b'^2 = o$, т. ј. само ако се тангенте TP и TQ секу под правим углом.

4. **Са p и p' су означене управне што су из средишта повучене на паралелне тангенте двају конфокалних коничних пресека. Доказати да је $p^2 - p'^2 = const.$**

Ако су

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = o, \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p' = o$$

еквације двеју паралелних тангената ових конфокалних коничних пресека:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o, \quad x^2/(a^2 - \lambda) + y^2/(b^2 - \lambda) - 1 = o,$$

биће

$$p^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha, \quad p'^2 = (a^2 - \lambda) \cos^2\alpha + (b^2 - \lambda) \sin^2\alpha,$$

а по томе се види и т. д.

5. На систему конфокалних коничних пресека повучене су паралелне тангенте. Доказати да је место њихових додирних тачака једна равнострана хипербола.

6. Корда $PP' = d$ елипсе (a, b) додирује конфокалан коничан пресек $(\sqrt{a^2 - \lambda}, \sqrt{b^2 - \lambda})$. Доказати да је $d = 2b'^2 \sqrt{\lambda}/ab$, т. ј. доказати да је дужина корде PP' сразмерна са квадратом полудијаметра b' што иде напоредо са кордом PP'.

Burnside.

Ако су φ и φ' ексцентричне аномалије тачака P и P', биће еквација корде PP' ово:

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2} + \frac{y}{b} \sin \frac{\varphi + \varphi'}{2} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} = o;$$

с тога је (види прим. 15. стр. 611.)

$$b'^2 = a^2 \sin^2 \frac{\varphi + \varphi'}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\varphi + \varphi'}{2}. \qquad (\alpha)$$

Како корда PP' дира криву $(\sqrt{a^2 - \lambda}, \sqrt{b^2 - \lambda})$, биће

$$\frac{a^2 - \lambda}{a^2} \cos^2 \frac{\varphi + \varphi'}{2} + \frac{b^2 - \lambda}{b^2} \sin^2 \frac{\varphi + \varphi'}{2} = \cos^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2}.$$

Ту погодбену релацију моћи ћемо, имајући у виду (α), написати у овом облику:

$$\sin^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{b'^2 \lambda}{a^2 b^2},$$

па како је (прим. 15. стр. 611.) $d = 2b' \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2}$, биће јасно да је и т. д.

7. Тангенте из T на елипсу $(\sqrt{a^2 - \lambda}, \sqrt{b^2 - \lambda})$ секу конфокалну елипсу (a, b) у тачкама P и P', Q и Q'. Доказати д

$$\frac{1}{TP} - \frac{1}{TP'} = \frac{1}{TQ} - \frac{1}{TQ'}.$$

M. Roberts.

Ако са b' и b'' означимо полудијаметре елипсе (a, b) што иду напоредо са TP и TQ, биће

$$\frac{1}{TP} - \frac{1}{TP'} = \frac{PP'}{TP \cdot TP'} = \frac{2b'^2 \sqrt{\lambda}}{ab \cdot TP \cdot TP'},$$

$$\frac{1}{TQ} - \frac{1}{TQ'} = \frac{QQ'}{TQ \cdot TQ'} = \frac{2b''^2 \sqrt{\lambda}}{ab \cdot TQ \cdot TQ'},$$

па како је (прим. 10. стр. 530.) $TP \cdot TP' : TQ \cdot TQ' = b'^2 : b''^2$, биће јасно да је и т. д.

8. Наћи у елиптичним координатама еквацију ортоптичког круга елипсе (a, b).

Одг. Еквација ортоптичког круга је

$$a'^2 + a''^2 = 2a^2.$$

9. Наћи тангенцијалну еквацију централних конфокалних коничних пресека.

Одг. $a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = \lambda\,(u^2 + v^2)$.

10. Елиптичне координате неке тачке су a', a''. Наћи угао φ који затварају тангенте што су из те тачке повучене на елипсу (a, b).

Ако су x' и y' паралелне координате дате тачке, биће (прим. 36. стр. 617.)

$$tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{b^2x'^2 + a^2y'^2 - a^2b^2}}{x'^2 + y'^2 - a^2 - b^2}.$$

Кроз дату тачку пролазиће, као што знамо, само два конфокална конична пресека, а вредности параметра λ које их одређују биће (чл. 324.) корени ове квадратне еквације:

$$(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) - x'^2(b^2 - \lambda) - y'^2(a^2 - \lambda) = o.$$

Производ коренâ λ' и λ'' те еквације имаће ову вредност:

$$\lambda'\lambda'' = a^2b^2 - b^2x'^2 - a^2y'^2,$$

а збир њихов је

$$\lambda' + \lambda'' = a^2 + b^2 - x'^2 - y'^2,$$

па како је $\lambda' = a^2 - a'^2$, $\lambda'' = a^2 - a''^2$, биће и

$$(a'^2 - a^2)(a^2 - a''^2) = b^2x'^2 + a^2y'^2 - a^2b^2$$

с једне, а

$$(a'^2 - a^2) + (a''^2 - a^2) = x'^2 + y'^2 - a^2 - b^2$$

с друге стране.

Према томе је

$$tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{(a'^2 - a^2)(a^2 - a''^2)}}{(a'^2 - a^2) + (a''^2 - a^2)}.$$

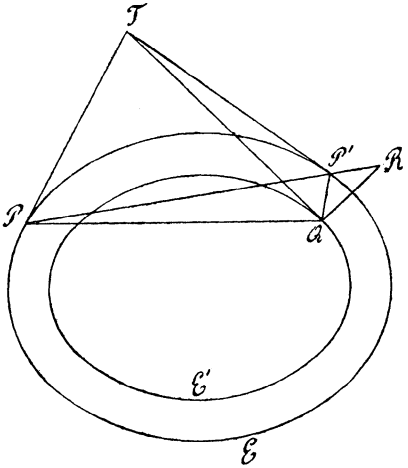
па је с тога и

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{a^2 - a''^2}{a'^2 - a^2}}.$$

Како је трансверзална осовина ма које хиперболе у системи конфокалних коничних пресека мања од велике осовине ма које елипсе те системе, биће $a^2 - a''^2 > o$; угао φ биће дакле реалан само ако је $a'^2 - a^2 > o$, т. ј. само ако дата тачка лежи изван елипсе (a, b).

11. E и E' су две конфокалне елипсе. Из неке тачке T повући ћемо тангенте TP и TP' на елипсу E и тангенту TQ на елипсу E'. Доказати да тангента TQ полови угао PQP'.

Мак-Кêј.



Сл. 166.

Повући ћемо у тачци Q нормалу QR на елипсу E' и продужићемо је до тачке R у којој она сече корду PP'.

Ако се узме да је TQ полара елипсе E, биће јасно да ће пол те праве лежати на нормали QR (чл. 326. напом. 2.). Како међу тим права TQ пролази и кроз T, биће јасно да ће пол њезин морати лежати и на полари PP' тачке T. Тачка R биће дакле пол праве TQ. Прамен T $(PP'QR)$ биће дакле хармонијски; услед биће и прамен Q $(PP'TR)$ хармонијски, па како је угао TQR прав, то ће TQ морати половити угао PQP', а то смо и тврдили.

12. Из тачке T неке елипсе (a', b') конфокалне системе коничних пресека повући ћемо тангенте TP и TP' на елипсу (a, b) те системе. Наћи угао ψ који са тангентама TP и TP' затвара тангента што је у тачци T повучена на елипсу (a', b').

Како је $\psi = 90^0 - \varphi/2$, биће

$$cot\,\psi = \sqrt{\frac{a^2 - a''^2}{a'^2 - a^2}},$$

па је према томе и

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{a'^2 - a^2}{a'^2 - a''^2}}, \quad \cos\psi = \sqrt{\frac{a^2 - a''^2}{a'^2 - a''^2}}.$$

13. a' и a'' су елиптичне координате неке тачке, а φ је угао који затварају тангенте што су из те тачке повучене на елипсу (a, b). Доказати да је

$$a'^2\sin^2\frac{\varphi}{2} + a''^2\cos^2\frac{\varphi}{2} = a^2.$$

14. Из неке тачке T елипсе (a', b') повући ћемо тангенте на две елипсе конфокалне системе. Те тангенте ће затварати угле ψ и ψ' са тангентом што је у T повучена на елипсу (a', b'). Доказати да наизменица синуса тих углова не мења своју вредност, кад се тачка T креће по елипси (a', b').

15. Нека права је полара елипсе (a, b), а пол те поларе лежи на ортоптичком кругу њезином $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Доказати да ће та права заогрнути једну конфокалну елипсу кад се пол њезин буде кретао по периферији ортоптичког круга.

16. P и Q су две тачке неке елипсе, а P' и Q' су две спрегнуте тачке неке конфокалне елипсе. Доказати да је $PQ' = P'Q$.

Ivory.

17. P и Q су тачке елипсе (a, b), а P' и Q' су спрегнуте тачке елипсе (a', b'). Тангенте у P' и Q секу се у T. Доказати да је PQ' полара елипсе $(\sqrt{aa'}, \sqrt{bb'})$, а да је T пол те поларе.

18. Два конична пресека имају једну заједничку жижу, а осовине им се секу под углом α. Доказати да ће се ти конични пресеци додиривати ако је

$$(p - p')^2 = p^2e'^2 + p'^2e^2 - 2ee'pp'\cos\alpha.$$

[*Напом.* У овој погодбеној релацији су p и p' параметри, а e и e' ексцентрицитети поменутих коничних пресека.]

* * *

КЊИГА ШЕСТА

ОДЕЉАК ПРВИ

Различити облици скраћених еквација коничних пресека.

331. Две криве $S = o$ и $S' = o$ другога реда имају у опште четири заједничке тачке; то су тачке у којима се те две криве секу. У неким специјалним случајевима могу се неке од тих тачака — кад и кад и све четири — поклапати. Кад се две такве тачке поклапају, онда се криве S и S' *додирују*. Јасно је да ће права која спаја те две тачке бити заједничка тангента коничних пресека S и S'. Тај додир назива се *додир првога реда*. У том случају сећи ће се криве S и S' још у двема, реалним или имагинарним тачкама.

Кад се три заједничке тачке кривих S и S' поклапају, онда је додир јачи. У том случају каже се да су криве S и S' *у оскулацији*; додир њихов зове се *додир другога реда*. Јасно је да се две криве S и S', које су у оскулацији, могу сећи само у једној јединој тачци. Јасно је да ће круг, који је с неким коничним пресеком у оскулацији, бити круг кривине у тој тачци коничног пресека.

Најпосле, може се догодити да се све четири заједничке тачке кривих S и S' поклапају. У том случају се каже да су криве *у хипероскулацији*; додир њихов зове се *додир трећега реда*. Јасно је да се конични пресеци, који су у хипероскулацији, не секу ни у једној тачци.

Напомена. Кад се два конична пресека додирују у двема тачкама у којима нека права L сече један између тих коничних пресека, онда се каже да су ти конични пресеци *у двојном додиру* дуж праве L. — Хипероскулација је један специјалан двојни додир. Кад је на име нека крива S' у хипероскулацији са кривом S, онда је права L тангента криве S у додирној тачци.

Прим. 1. Наћи погодбу под којом ће конични пресеци

$$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = o,$$
$$S' \equiv a'x + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x = o$$

у почетку координатне системе бити у оскулацији.

По еквацијама $S = o$ и $S' = o$ види се да осовина y дира обе криве у почетку. Криве S и S' сећи ће се дакле само још у двема тачкама. Еквацију заједничке секанте наћи ћемо овако. Помножићемо прву еквацију са b', а другу са b и одузећемо други производ од првог. Резултат је ово:

$$x\,[(ab' - a'b)\,x + 2\,(hb' - h'b)\,y + 2\,(gb' - g'b)] = o.$$

Та еквација представља, као што се јасно види, две праве, које пролазе кроз заједничке тачке кривих S и S'. Од тих двеју заједничких секаната једна представља осовину y, а то ће рећи, заједничку тангенту кривих S и S' у почетку, а еквација друге заједничке корде је ово:

$$(ab' - a'b)\,x + 2\,(hb' - h'b)\,y + 2\,(gb' - g'b) = o.$$

Та права пролазиће кроз почетак ако је $gb' - g'b = o$; т. ј. криве S и S' биће у оскулацији ако је $gb' - g'b = o$.

Прим. 2. Наћи еквацију круга који је са кривом $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = o$ у почетку у оскулацији.

Еквација круга који у почетку дира осовину y је (прим. 5. чл. 164.) ово:

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2rx\sin\omega = o,$$

а тај круг биће у оскулацији са кривом $S = o$, ако је

$$g = -rb\sin\omega.$$

Према томе је еквација круга кривине у почетку ово:

$$b\,(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + 2gx = o.$$

Полупречник круга кривине у почетку је

$$r = \frac{-g}{b\sin\omega}.$$

Напом. **У идућим проблемама одређиваћемо полупречник кривине не обзирући се при том на знак, а по обрасцу** $r = \frac{g}{b \sin \omega}$.

332. Сви конични пресеци који пролазе кроз тачке у којима се секу криве S и S' могу се, као што знамо, представити овом еквацијом:

$$S - kS' = o. \qquad (1)$$

Та општа еквација преобразиће се у неким специјалним случајевима у специјалне еквације које нарочито треба поменути.

Претпоставићемо најпре да еквација $S' = o$ представља две праве $L = o$ и $M = o$. У том случају преобразила би се еквација (1) у ову специјалну еквацију:

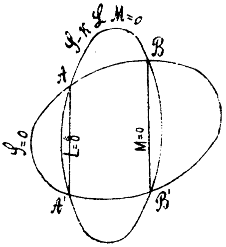
$$S - kLM = o. \qquad (2)$$

Јасно је *да ће та еквација представљати коничне пресеке који пролазе кроз оне четири тачке у којима криву S секу праве L и M.*

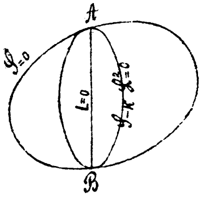
Кад би еквација $S' = o$ представљала једну двојну праву, т. ј. кад би еквације $L = o$ и $M = o$ представљале једну и исту праву, онда би се еквација (1) могла овако написати:

$$S - kL^2 = o, \qquad (3)$$

а та еквација представља коничне пресеке који су у двојном додиру с кривом S дуж праве L. Узмимо на име само за један часак да еквације $L = o$ и $M = o$ представљају две различите праве и означимо са A и A' тачке у којима криву S сече права L, а са B и B' тачке у којима је сече права M. Штогод су праве I и M ближе једна другој, то ће све ближе бити једна другој и тачке A и B с једне, и A' и B' с друге стране. Кад се те две праве најпосле поклопе, поклопиће се у исти мах и тачке A и B, и A' и B'. Секанте AB и $A'B'$ биће дакле тангенте криве (3) у тачкама A и B



Сл. 167.



Сл. 168.

у којима криву S сече права $L = o$, а по томе се види да ће еквација $S - kL^2 = o$ заиста представљати једну криву другога реда, која је дуж праве L у двојном додиру са кривом S, као што смо то и тврдили. Кад права L сече криву S у реалним тачкама, онда ће и еквација (3) представљати криве које имају реалан двојни додир с кривом S, а кад права L сече криву у двема имагинарним тачкама, онда еквација $S - kL^2 = o$ представља коничне пресеке који су у имагинарном двојном додиру с кривом S.[1])

Напомена. Често се узима да се параметар k који се јавља у еквацији (3) већ *a priori* налази у полиному L, па се с тога еквација коничних пресека који су у двојном додиру с кривом S, а дуж праве L, пише у овом облику:

$$S - L^2 = o. \qquad (4)$$

Прим. 1. Наћи еквацију елипсе која пролази кроз средиште елипсе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а која је уз то у двојном додиру са датом елипсом дуж корде AB што везује теме A велике са темeном B мале осовине.

---

[1]) **Додирне тачке су у том случају две коњуговано имагинарне тачке, а права L која их спаја, је реална.**

Еквација корде AB је ово:

$$bx + ay - ab = o;$$

према томе је еквација тражене криве ово:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 - k(bx + ay - ab)^2 = o.$$

Ова крива пролази кроз средиште, па је с тога $k = -1$, т. ј. еквација тражене елипсе је ово:

$$b^2x^2 + abxy + a^2y^2 = ab(bx + ay).$$

Прим. 2. Наћи еквацију круга који је у двојном додиру са истом елипсом, а на крајевима *latus rectum*-a те елипсе.

Одг. $x^2 + y^2 - 2ae^3x = a^2(1 - e^2 - e^4)$.

333. Кад се има у виду оно што мало час рекосмо о еквацијама кривих другога реда које су у двојном додиру са неком кривом S, онда ће нам јасно бити *да ће еквација*

$$LM = R^2 \qquad (5)$$

представљати коничне пресеке који додирују праве $L = o$ *и* $M = o$ *у тачкама у којима их сече права* $R = o$. Кад бисмо еквације $L = o$, $M = o$, $R = o$ написали у нормалном облику, онда би се еквација (5) преобразила у ову еквацију:

$$\alpha\beta = \lambda\gamma^2, \qquad (6)$$

а по тој еквацији се види, *да се производ управних које су спуштене ма из које тачке коничног пресека на две тангенте његове мења као квадрат управне која је из исте тачке спуштена на додирну корду.*

Прим. Доказати да је права у бескрајности тангента параболина.

Еквацију параболе $y^2 = 2px$ можемо написати у овом облику:

$$y^2 = x(o \cdot x + o \cdot y + 2p),$$

а по тој еквацији се види да осовину $y = o$ додирује парабола у једној тачци у којој је сече осовина $x = o$, и у другој једној тачци у којој је сече права $o \cdot x + o \cdot y + 2p = o$.

334. Узмимо сад да се крива $S = o$ изметнула у систему правих $\alpha = o$, $\gamma = o$, а крива $S' = o$ у систему правих $\beta = o$, $\delta = o$. Јасно је да ће екваћија

$$\alpha\gamma - k\beta\delta = o \tag{7}$$

представљати коничне пресеке који пролазе кроз четири тачке $\alpha\beta$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, т. ј. *екваћија (7) представља коничне пресеке који су описани око четвороугла чије су стране*

$$\alpha = o, \ \beta = o, \ \gamma = o, \ \delta = o.$$

На основу екваћије (7) доказаћемо ову веома важну ***Chasles-ову*** теорему[1]:

Ако се из четири сталне тачке неког коничног пресека повуку четири праве према једној петој тачци његовој, онда се двојна напремица тих правих не мења кад се пета тачка креће по коничном пресеку.

Нека су A, B, C, D четири тачке неког коничног пресека, а $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$, $\delta = o$ нормалне екваћије страна AB, BC, CD, DA четвороугла $ABCD$. Екваћију датог коничног пресека моћи ћемо написати у мало час поменутом облику (7). По тој екваћији се види, да је

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = k = const. \tag{8}$$

Узмимо сад ма где на коничном пресеку једну тачку O. Двојну површину $2\varDelta$ троугла AOB моћи ћемо овако изразити:

$$2\varDelta = OA \cdot OB \cdot sin\, AOB = \alpha \cdot AB;$$

према томе је јасно да α, а то ће рећи нормала која је из тачке O повучена на страну $\alpha = o$, има ову вредност:

---

[1] Та теорема могла би се звати *основна теорема* у теорији коничних пресека. На основу те теореме и оне која је корелативна с њом (ту ћемо касније поменути) извео је Шâл у своме класичном делу *Traité des sections coniques* теорију тих пресека. Он сâм на једноме месту *(Aperçu historique, p. 339.)* каже, да се та теорема може сматрати »comme étant, en quelque sorte, un centre, d'où dérivent la plupart des propriétés des coniques, même les plus générales etc.«

$$\alpha = \frac{OA \cdot OB \cdot sin\, AOB}{AB} .$$

Сличним путем нашли бисмо и вредности које представљају остале три нормале β, γ, δ. Сменивши тим вредностима $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ у еквацији (8), добићемо ово:

$$\frac{sin\, AOB \cdot sin\, COD}{sin\, BOC \cdot sin\, AOD} = k \cdot \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD} .$$

Израз који стоји на десној страни ове еквације се не мења и не зависи од положаја тачке O на кривој, а израз који стоји на левој страни те еквације представља двојну напремицу прамена ($O \cdot ABCD$); кад се то има у виду, онда је јасно да поменута теорема постоји.

Прим. Доказати да сви кругови пролазе кроз фокојиде.

Нека је еквација круга ово:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o.$$

Ту еквацију можемо овако написати:

$$(x + iy)(x - iy) = (-2gx - 2fy - c)(o \cdot x + o \cdot y + 1),$$

а по тој еквацији се види и т. д.

335. Пођимо сад даље и узмимо да се праве $L = o$ и $M = o$ секу у једној тачци A (x', y') криве $S = o$. Ако са C и D означимо оне друге две тачке у којима криву S секу праве L и M, биће јасно да ће еквација

$$S - kLM = o \qquad (9)$$

представљати једну криву која криву S дира у тачци A, а сече у тачкама C и D. Кад би еквација $T = o$ представљала тангенту у тачци A, а еквација $R = o$ корду CD, онда бисмо еквацију коничних пресека, који криву S дирају у тачци A, а секу у тачкама C и D, могли и овако написати:

$$S - kTR = o. \qquad (10)$$

Еквације (9) и (10) биле би дакле еквације коничних пресека који су у додиру првога реда са кривом S. Узмимо сад да и корда R пролази кроз тачку A (x', y'), т. ј. узмимо да је R оваквог облика:

$$R \equiv lx + my - lx' - my'.$$

У том случају поклапале би се у тачци A три заједничке тачке коничних пресека S и $S - kTR$. Ти конични пресеци биће у оскулацији; *еквација коничних пресека, који су у тачци (x', y') у оскулацији са кривом S, јесте дакле овог облика:*

$$S - kT\,(lx + my - lx' - my') = o. \qquad (11)$$

Кад би најпосле и права $R = o$ била тангента криве S у тачци (x', y'), онда би се све четири заједничке тачке коничних пресека S и $S - kTR$ поклапале у тачци (x', y'). Ти конични пресеци били би у тачци (x', y') у хипероскулацији; *еквација коничних пресека, који су у хипероскулацији са кривом S, јесте дакле овог облика:*

$$S - kT^2 = o. \qquad (12)$$

Напомена. Еквација коничних пресека који су у двојном додиру са кривом S истог је тог облика, ког је и еквација коничних пресека који су са кривом S у хипероскулацији. Разлика је између тих двеју еквација у томе, што је у овој последњој са T означена тангента у додирној тачци, а у оној првој је са L означена додирна корда. То се у осталом потпуно слаже са нашом напоменом у чл. 331.

Прим. 1. Кроз сваку тачку коничног пресека може се повући једна парабола која је у тој тачци у хипероскулацији са коничним пресеком.

Кроз четири тачке могу се повући две параболе. Биће јасно да поменута теорема постоји чим се претпостави да те четири тачке узастопце долазе на кривој једна за другом. Једна од тих двеју парабола биће представљена еквацијом $T^2 = o$, а друга еквацијом $S - kT^2 = o$[1]).

---

[1]) Она прва еквација $T^2 = o$ представља управо две праве које се поклапају, а то ће рећи, једну сингуларну криву из разреда параболâ.

Тај параметар k може се лако израчунати. Нека је $T \equiv px+qy+r=o$ еквација тангенте криве $(a, b, c, f, g, h)(x, y, 1)^2 = o$ у тачци (x', y'). У том случају представљаће $S - kT^2 = o$ једну параболу ако је

$$k = \frac{ab - h^2}{aq^2 + bp^2 - 2hpq}.$$

Прим. 2. Наћи еквацију једне равностране хиперболе која је у почетку координатне системе у хипероскулацији са кривом

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 2y. \qquad (\alpha)$$

Одг $ax^2 + 2hxy + (2h \cos \omega - a)\, y^2 = 2y.$

Прим. 3. Наћи еквацију параболе која је у почетку у хипероскулацији са кривом (α) у прим 2.

Прим. 4. Еквација коничног пресека, који је у оскулацији са коничним пресеком $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = o$, а у почетку координатне системе, је ово:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = x\,(lx + my). \qquad (\beta)$$

Та крива (β) је круг ако је

$$a - l = b, \quad 2h - m = 2b \cos \omega.$$

Према томе је круг кривине датог коничног пресека у почетку (види прим. 2. чл. 331.) ово:

$$b\,(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2) + 2gx = o.$$

336. *Наћи полупречник кривине у некој тачци $A\,(x', y')$ централних коничних пресека.*

Дијаметар који пролази кроз тачку A узећемо за осовину x, а спрегнут дијаметар за осовину y. Еквација централних коничних пресека биће ово:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

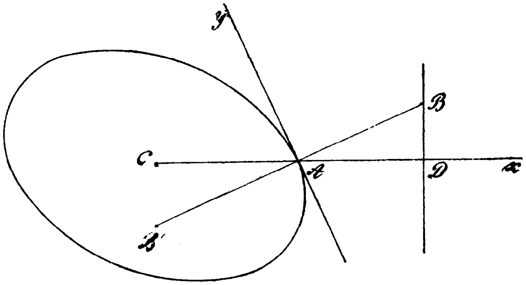
Ако паралелним померањем преместимо осовину y у тачку A, онда ће нова осовина y бити тангента криве у A, а еквацију криве добићемо овако: сменићемо просто x са $x + a'$ у последњој еквацији. Према томе ће еквација криве у новој системи бити ово:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{2x}{a'} = o,$$

па је услед тога (прим. 2. чл. 331.) полупречник кривине у тачци A ово:

$$r = \frac{b'^2}{a' \sin \omega} \cdot \qquad (13)$$

Конструкција круга кривине. Нека је BD полара тачке A с обзиром на ортоптички круг датог коничног пресека. Нормала AB у A сећи ће ту полару у тачци B. Тачка B' која симетрички лежи према тачци B на нормали AB биће средиште круга кривине.



Сл. 169.

Кад се на име има у виду образац (13), биће јасно да је

$$a'^2 + b'^2 = a'^2 + ra' \sin \omega,$$

па како је

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

биће и

$$a'^2 + ra' \sin \omega = a^2 + b^2.$$

Кад бисмо сад управну у C на CD узели за осовину y, била би еквација ортоптичког круга ово:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Како је с једне стране BD полара тачке A с обзиром на тај круг, и како с друге стране тачка D лежи на осовини x координатне системе, то је јасно да је

$$CA \cdot CD = a^2 + b^2;$$

с тога је

$$a'^2 + ra' \sin \omega = CA \cdot CD$$

или

$$a' + r \sin \omega = CD;$$

одатле је

$$r \sin \omega = CD - a' = AD,$$

а по томе се види да је $r = AB$. — Та конструкција је *Steiner*-ова (*Crelle's Journal, t. XXX.* и *Gesam. Werke, II. 341.*)

337. *Повући корду кривине у некој тачци $A\ (x', y')$ коничног пресека.*

Претпоставићемо да круг који је у тачци A у оскулацији сече коничан пресек у тачци D. Корда кривине, која одговара тачци A, била би корда AD. Ту корду ћемо конструјисати овако.

Нека су CQ и AQ координате тачке A. Ако је $CM = - 2CQ$, $CN = - 2AQ$, биће корда AD, која спаја додирну тачку A са тачком D праве MN, тражена корда кривине.

Ако су на име $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ексцентричне аномалије оних четирију тачака у којима некакав круг сече елипсу, биће (прим. 8. стр. 555.) $\alpha + \beta + \gamma + \delta = o$ или $2n\pi$. Узмимо сад да су тачке α, β, γ ексцентричне аномалије трију тачака у којима је некакав круг у оскулацији са елипсом; у том случају биће $\alpha = \beta = \gamma$, па је с тога $\delta = - 3\alpha$, а по томе се види ово. Ако је α ексцентрична аномалија тачке A, биће координате тачке D ово:

$$X = a \cos (- 3\alpha), \quad Y = b \sin (- 3\alpha)$$

или

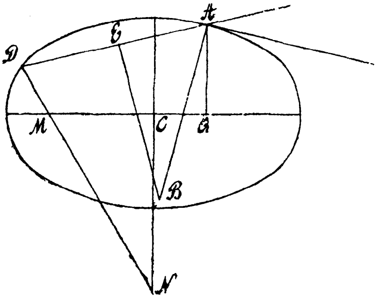
$$X = a \cos 3\alpha, \quad Y = - b \sin 3\alpha,$$

па како је

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

биће и

$$X = \frac{4x'^3}{a^2} - 3x', \quad Y = \frac{4y'^3}{b^2} - 3y'. \qquad (14)$$



Сл. 170.

Према томе је

$$\frac{X}{x'} + \frac{Y}{y'} + 2 = o.$$

Та релација постоји дакле између координата тачке D. Кад бисмо у тој релацији сматрали X и Y као променљиве, представљала би нам та еквација праву MN, а по томе се види да корда кривине заиста пролази кроз тачку D праве MN.

Напомене. 1-во. Круг кривине у тачци A пролази кроз тачку A и тачку D, а средиште његово лежи на нормали која је у тачци A повучена на криву. Према томе ћемо круг кривине у тачци A моћи овако конструјисати. Повући ћемо корду AD кривине и нормалу у тачци A; на средини E корде AD повући ћемо једну управну. Тачка B у којој та управна сече нормалу биће средиште круга кривине, а дуж AB полупречник.

2-го. Како су координате тачке A ово: $a \cos \alpha$, $b \sin \alpha$, а координате тачке D ово : $a\cos(-3\alpha)$, $b\sin(-3\alpha)$, биће еквација корде AD ово:

$$\frac{x}{a}\cos\alpha - \frac{y}{b}\sin\alpha = \cos 2\alpha. \qquad (15)$$

Кад се та еквација упореди са еквацијом

$$\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\sin\alpha - 1 = o$$

тангенте у тачци A, видеће се, *да су корда кривине и тангента у некој тачци елипсе једнако нагнуте према великој осовини те елипсе.*

338. *Кроз тачку $P(\alpha, \beta)$ која лежи ма где у равни неког коничног пресека пролазе четири корде кривине, а све четири тачке оскулације леже на периферији једнога круга.* (Најберг.)

Како је $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, то се еквација (15) корде AD кривине може овако написати:

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = o.$$

Ако та корда пролази кроз тачку $P(\alpha, \beta)$, биће

$$\frac{\alpha x'}{a^2} - \frac{\beta y'}{b^2} - \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = o. \qquad (16)$$

Обратно, кадгод између координата α, β тачке P и координата x', y' тачке A датог коничног пресека постоји релација (16), свакад ће одсечак AD праве AP бити корда кривине онога круга који је у оскулацији са кривом у тачци $A(x', y')$. Јасно је да има четири такве тачке (x', y'). Кад бисмо на име у еквацији (16) сменили x' и y' са x и y, добили бисмо ову еквацију:

$$H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = o,$$

која представља једну хиперболу. Та хипербола сече дат коничан пресек у четири тачке; према томе има свега четири тачке дате криве за које је полином H раван нули. Те четири тачке у којима хипербола H сече дат коничан пресек биле би тачке оскулације.

Још нам остаје да докажемо, да те четири тачке леже на једном кругу. Нека је

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Еквација свију кривих, које пролазе кроз тачке у којима хипербола H сече дат коничан пресек, била би овог облика:

$$S - kH = o,$$

а та еквација представља један круг кад је

$$k = -\frac{c^2}{a^2 + b^2};$$

између кривих прамена $S - kH$ биће дакле једна крива круг, а кад се то има у виду, онда је јасно да је и други део теореме доказан. Еквација тог круга је

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) = o. \quad (17)$$

339. *На сваком коничном пресеку имају три тачке чији кругови кривине пролазе кроз једну тачку A коничног пресека; те три тачке и тачка A леже на периферији једнога круга. (Штајнерова теорема).* [1])

Претпоставићемо да тачка $P(\alpha, \beta)$ лежи на тачци $A(x', y')$ датог коничног пресека. Еквација круга (17) биће у овом случају овог облика:

$$x^2 + y^2 - xx' - yy' + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right) = o. \quad (18)$$

---

[1]) **Steiner.** *Crelle's Journal, t. XXXII.* и *Gesam. Werke, II. p. 377.*

Тај круг пролази кроз тачку A, па ће с тога на датом пресеку бити још три тачке B, C, D у којима ће он сећи тај пресек. Према оној теореми, коју смо мало час доказали, пролазиће кроз тачку A четири корде кривине; једна корда је корда онога круга који је у оскулацији с датим коничним пресеком у A, а остале три корде биће корде кривине трију кругова, који су са датим коничним пресеком у оскулацији у тачкама B, C, D.

Напомена. Означимо за један часак са X, Y координате тачке A коничног пресека. Координате тачака B, C, D добили бисмо, кад бисмо разрешили еквације (14) трећега степена. У тим еквацијама нема другог члана; с тога ће збир апсциса и збир ордината тачака B, C, D бити $= o$, а по томе се види, *да је центројид троугла BCD средиште коничног пресека.*

340. Узмимо сад сем тачке A (x', y') на коничном пресеку још и тачку $(-x', -y')$ која лежи на другом крају оног дијаметра што пролази кроз тачку A и повуцимо у тачци $(-x', -y')$ нормалу на криву. Еквација те нормале је ово:

$$-\frac{a^2x}{x'}+\frac{b^2y}{y'}=c^2;$$

према томе је јасно да је једна тачка те нормале ово

$$x_1=-\frac{c^2x'}{2a^2},\quad y_1=\frac{c^2y'}{2b^2}. \qquad (19)$$

Из тачке (x_1, y_1) можемо повући још три нормале на криву, а по Јоахимсталовој теореми лежаће подножја тих нормала и тачка (x', y') на једноме кругу. Еквација тог круга је ово (чл. 252.):

$$x^2+y^2-xx'-yy'-u\left(-\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}+1\right)=o,$$

а у тој еквацији је

$$u = a^2 - \frac{b^2 y_1}{y'} = b^2 - \frac{a^2 x_1}{x'} ;$$

кад се имају у виду еквације (19), биће јасно да је у овај мах

$$u = \frac{a^2 + b^2}{2} .$$

Према томе ћемо еквацију Јоахимсталова круга моћи написати у овом облику:

$$x^2 + y^2 - xx' - yy' + \frac{a^2 + b^2}{2} \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 \right) = o ;$$

та еквација је идентична са еквацијом Штајнерова круга (18), т. ј, *тачке B, C, D, у којима су три круга кривине што пролазе кроз A у оскулацији са елипсом или са хиперболом, и тачка која лежи на другом крају дијаметра што пролази кроз A, јесу подножја четирију нормала које се секу у једној тачци.*

Прим. 1. Доказати да се може повући шест кругова кривине неког датог коничног пресека тако, да ти кругови ортогонално секу некакав дат круг.

Прим. 2. Кроз неку тачку у равни може се повући шест кругова који су у оскулацији са датим коничним пресеком.

Casey.

Прим. 3. Средишта шесторих кругова кривине који пролазе кроз неку дату тачку леже на једном коничном пресеку.

Malet.

341. Вратимо се сад скраћеној еквацији $S—kLM=o$ која представља коничне пресеке што пролазе кроз тачке у којима праве L и M секу S и узмимо да еквација $S = o$ представља један круг. У том случају представљаће S квадрат тангенте која је из неке тачке (x, y) повучена на круг. По еквацији $S - kLM = o$ види се да је напрэмица $S : LM = k = const.$, т. ј. *кад је квадрат тангенте која је из неке тачке (x, y) повучена на сталан круг S у сталној напремици са производом*

раздаљинâ те исте тачке од двеју сталних правих L и M, онда та тачка (x, y) описује један коничан пресек што пролази кроз четири тачке у којима праве L и M секу круг S.

Кад се праве L и M поклапају, онда ће коничан пресек $S - kL^2$ бити у двојном додиру са кривом S, а дуж корде L; у том случају је $S : L^2 = k = const.$, т. ј. *кад је тангента која је из неке тачке (x, y) повучена на сталан круг S у сталној напремици са раздаљином те исте тачке од сталне праве L, онда тачка (x, y) описује један коничан пресек који је у двојном додиру са кругом S дуж праве L*; и обратно, *кад је некакав круг у двојном додиру са коничним пресеком, онда ће тангента која је ма из које тачке тог коничног пресека повучена на круг бити у сталној напремици према раздаљини те тачке од додирне корде.* По **Graves-у** (*Hermathena*, t. VI. 1888.) зове се круг који је у двојном додиру са неким коничним пресеком *фокалан круг.* Кад се претпостави да је полупречник датог фокалног круга $= o$, биће јасно да еквација $S = o$ представља жижу, а еквација $L = o$ управницу коничног пресека $S - kL^2 = o$. Према томе *се жижа неког коничног пресека може сматрати као бескрајно мали круг који је са коничним пресеком у имагинарном двојном додиру дуж управнице.*

342. Нека је почетак координатне системе у жижи. Ако је $y \equiv x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = o$ еквација управнице, биће еквација коничног пресека ово:

$$x^2 + y^2 = e^2 y^2;$$

та еквација може се написати у облику:

$$(x + iy)(x - iy) = e^2 y^2,$$

а по тој еквацији се види, *да су изотропне праве које се гранају из жиже тангенте коничног пресека*; *додирна корда тих тангената је управница.* Према томе *су жиже коничног пресека тачке у којима се секу тангенте које су на коничан пресек повучене из фокоидâ* *бескрајне равни.* То је *Пликерова* дефиниција жижа[1]. Из сваког фокојида полазе по две тангенте на криву, па ће с тога конични пресеци имати четири жиже, *две реалне* и *две имагинарне (anti-foci)*; реалне жиже леже у пресеку двеју коњуговано имагинарних тангената. Те четири имагинарне тангенте одређиваће потпуно један имагинаран тетраграм, а по томе се види *да су сви конфокални конични пресеци уписани у исти имагинаран тетраграм; од шест темена тог тетраграма два темена су два фокојида, два темена су две реалне,* а *остала два две имагинарне жиже коничних конфокалних пресека.*

Ако су $\Sigma = o$ и $\Sigma' = o$ тангенцијалне еквације двају коничних пресека, биће, као што знамо, $\Sigma - k\Sigma' = o$ тангенцијална еквација коничних пресека који додирују заједничке тангенте кривих Σ и Σ'. Ако се узме да је $\Sigma' = u^2 + v^2$, т. ј. ако се узме да еквација $\Sigma' = o$ представља фокојиде, биће јасно да ће тангенцијалном еквацијом

$$\Sigma - k\,(u^2 + v^2) = o$$

бити представљени сви конични пресеци који имају исте жиже као и $\Sigma = o$.

Напомена. Права у бескрајности је тангента параболина; на тој правој леже оба фокојида па ће с тога парабола имати три жиже у бескрајности — једну реалну и две имагинарне.

Прим. Одредити жиже криве $(a, b, c, f, g, h)\,(x, y, 1)^2 = o$. —

Ако су x', y' координате жиже, биће

$$x - x' + i\,(y - y') = o$$

еквација једне од оних двеју изотропних правих које кроз ту жижу пролазе. Нека права $ux + vy + w = o$ биће међу тим тангента криве ако је $(A, B, C, F, G, H)\,(u, v, w)^2 = o$; према томе ће изотропна права $x + iy - x' - iy' = o$ бити тангента дате криве ако је $(A, B, C, F, G, H)\,(1, i, - x' - iy')^2 = o$. У тој погодбеној еквацији ћемо

---

[1] **Plücker**. *Crelle's Journal, t. X.* — Пликерова дефиниција је општа, у колико се она може применити и на жиже кривих вишега реда.

имати један реалан и један имагинаран део, а и један и други ће морати бити $= o$. Ако у тим деловима свуда место x' и y' напишемо x и y, а ми ћемо добити ове две еквације:

$$C(x^2 - y^2) - 2Gx + 2Fy + A - B = o,$$

$$Cxy - Fx - Gy + H = o.$$

Те две еквације представљају, као што знамо (чл. 234.) две фокалне хиперболе, а тачке у којима се те две хиперболе секу јесу жиже.

343. *Кад су два конична пресека у двојном додиру са неким трећим, онда се две заједничке корде тих двају коничних пресека са двема додирним кордама секу у једној тачци. Те четири корде граде хармонијски прамен.*

Нека је $S = o$ еквација оног коничног пресека, с којим су у двојном додиру остала два; еквације тих двају пресека биће

$$S - L^2 = o, \; S - M^2 = o. \qquad (20)$$

Ако одузмемо леву страну прве еквације од леве стране друге, добићемо коничан пресек

$$L^2 - M^2 = o \qquad (21)$$

који пролази кроз тачке у којима се секу криве (20). [redacted] две заједничке корде кривих (20). Те праве $L + M = o$ и $L - M = o$ пролазе кроз тачку у којој се секу додирне корде $L = o$ и $M = o$ и граде са овима хармонијски прамен, а то смо и тврдили.

Прим. У теменима једнога четвороугла око кога је описан један коничан пресек повући ћемо на тај пресек тангенте. Тим путем добићемо један четвороугао у који је коничан пресек уписан. Доказати 1-во, да се дијагонале једног и другог четвороугла секу у једној тачци и 2-го, да је прамен тих дијагонала хармонијски.—

Доказ те теореме је прост. Треба претпоставити да еквације (20) представљају по две праве које коничан пресек $S = o$ дирају дуж правих $L = o$ и $M = o$.

344. *Кад су три конична пресека у двојном додиру са неким четвртим, онда ће шест њихових заједничких*

корада[1]*) бити стране једног тетрастигмата; у сваком темену тог тетрастигмата сећи ће се по три заједничке корде.*

У овом случају биће еквације трију коничних пресека ово:

$$S - L^2 = o, \; S - M^2 = o, \; S - N^2 = o,$$

а еквације поменутих корада ово:

$$L^2 - M^2 = o, \; M^2 - N^2 = o, \; N^2 - L^2 = o.$$

Те корде могу се поделити на четири разреда тако, да у сваком разреду буду по три корде које се секу у једној тачци. Еквације корада појединих разреда јесу ово:

$$\begin{aligned} L &= M = N, \\ -L &= M = N, \\ L &= -M = N, \\ L &= M = -N. \end{aligned}$$

Тачке у којима се секу три и три корде биле би темена, а саме те корде $L - M$, $M - N$, $N - L$ и т. д. биле би стране једног тетрастигмата.

Прим. 1. У сваком хексагону који је описан око једног коничног пресека секу се три дијагонале што спајају супротна темена у једној тачци.

Brianchon.

Напом. Треба претпоставити да еквације $S-L^2=o$, $S-M^2=o$, $S-N^2=o$ представљају по две праве; те праве биле би стране описаног хексагона.

Прим. 2 Кад су три конична пресека у двојном додиру са неким четвртим, онда између дванаест тачака, у којима се та три конична пресека секу, шест и шест леже на једном коничном пресеку.

---

[1]) Свега има 18 заједничких корада: три пара заједничких корада имају први и други, три пара други и трећи, и три пара трећи и први коничан пресек.

По идентичним релацијама

$$S + LM + MN + NL \equiv S - L^2 + (L + M)(L + N)$$
$$\equiv S - M^2 + (M + N)(M + L) \equiv S - N^2 + (N + L)(N + M)$$

види се ово: 1-во да коничан пресек $S + LM + MN + NL$ пролази кроз две заједничке тачке кривих $S - L^2$ и $S - M^2$ — кроз оне две тачке на име, које спаја корда $L + M$; 2-го, да тај коничан пресек пролази кроз тачке у којима се криве $S - M^2$ и $S - N^2$ секу са кордом $M + N$ и 3-ће, да тај пресек пролази и кроз оне две заједничке тачке кривих $S - N^2$ и $S - L^2$ које спаја корда $N + L$. —

Лако би се дало доказати да има још три конична пресека на којима леже по шест од поменутих дванаест тачака; требало би само мењати знаке који стоје испред L, M, N и узимати по три заједничке корде које се не секу у једној тачци.

345. *Наћи општу еквацију коничних пресека који су у двојном додиру са коничним пресецима S и S'.*

Нека су $L = o$, $M = o$ еквације једног пара заједничких корада кривих S и S' и нека је $S - S' = LM$. Тражена еквација била би овог облика:

$$k^2L^2 - 2k(S + S') + M^2 = o. \qquad (22)$$

Та еквација може се на име написати у једном од овиx двају облика:

$$(kL + M)^2 - 4kS = o, \quad (kL - M)^2 - 4kS' = o,$$

а по тим еквацијама се види да је коничан пресек (22) у двојном додиру и са кривом S и са кривом S'; прву криву дира тај пресек дуж корде $kL + M$, а другу дуж корде $kL - M$.

Како криве S и S' имају у опште три пара заједничких корада, то *у опште има три различита системата коничних пресека који су у двојном додиру са кривима S и S'*. Кад једна од еквација $S = o$ и $S' = o$ представља пар правих, онда има само две различите системе кривих које су у двојном додиру са S и S', а кад обе еквације $S = o$ и $S' = o$ представљају по две праве, онда постоји само једна таква система кривих.

Еквација (22) је квадратна по непознатој k; кроз сваку тачку пролазе дакле по две криве система (22) које су у двојном додиру са кривима S и S'; то исто вреди и за криве остала два система.

Прим. 1. Наћи еквацију коничних пресека који су у двојном додиру са круговима K и K'.

Одг. $k^2 - 2k(K + K') + (K - K')^2 = o.$ $\quad(\alpha)$

Прим. 2. Наћи корде дуж којих је некакав коничан пресек у двојном додиру са круговима K и K'.

Одг. $K - K' + k = o,\ K - K' - k = o.$

Напом. Те корде су паралелне са радикалном осовином кругова K и K'.

Прим. 3. Доказати да се еквација (α) у прим. 1. може овако написати:

$$\sqrt{K} \pm \sqrt{K'} = \sqrt{k}. \qquad (\beta)$$

По тој еквацији види се ово: *ако је збир (разлика) тангената које су повучене из неке тачке (x, y) на два круга сталан (стална), онда ће тачка (x, y) описати један коничан пресек који је у двојном додиру са круговима.*

Прим. 4. Шта нам казује еквација (β) кад се претпостави да у њој K и K' представљају кругове бескрајно малог полупречника?

Прим. 5. Дата су три круга K, K', K''. Заједничке тангенте кругова K' и K'', K'' и K, K и K' означићемо са L и L', M и M', N и N'. Ако се тангенте L, M, N секу у једној тачци, сећи ће се у једној тачци и тангенте L', M', N'.

246. *Кад три конична пресека S, S', S'' имају једну заједничку корду, онда се праве које спајају остале две и две заједничке тачке кривих S и S', S и S'', S' и S'' секу у једној тачци.*

Узмимо да се криве S и S' секу у тачкама A, B, C, D, криве S и S'' у тачкама A, B, C', D', а криве S' и S'' у тачкама A, B, C'', D''. Нека је $L = o$ еквација корде AB, $M = o$ еквација корде CD, а $N = o$ еквација корде $C'D'$. Кад се то има у виду, биће јасно да ћемо криве S' и S'' моћи представити овим еквацијама:

$$S - kLM = o, \quad S - k'LN = o.$$

Ако одузмемо леву страну прве еквације од леве стране друге, добићемо ово:

$$L\,(kM - k'N) = o,$$

а по томе се види да је $kM - k'N = o$ еквација корде $C''D''$. Јасно је да се корде M, N и $kM - k'N$ секу у једној тачци.

Напомена. Кад поменуту теорему мало сузимо, онда ћемо добити једну познату теорему. Претпоставићемо да су криве S, S', S'' кругови. Ти кругови имају једну заједничку секанту — то је права у бескрајности; остале три заједничке корде двају и двају кругова су радикалне осовине њихове; према нашој теореми мораће се те три радикалне осовине сећи у једној тачци, а то смо у осталом (чл. 189.) већ у један мах доказали.

347. *У сваком хексагону, који је уписан у некакав коничан пресек, леже три тачке у којима се секу три пара супротних страна на једној правој.*

То је позната *Паскалова*[1]) теорема; права на којој леже поменуте три тачке зове се *Паскалова права.*

Темена хексагонова означићемо са 1, 2, 3, 4, 5, 6. Нека је

$$L_{ik} = o$$

еквација стране која спаја теме i с теменом k. Како је коничан пресек описан око тетрагона 1 2 3 4 и 4 5 6 1, то се тај коничан пресек може представити овим еквацијама[2]):

$$L_{12}L_{34} - L_{23}L_{14} = o, \quad L_{45}L_{61} - L_{56}L_{14} = o; \qquad (23)$$

с тога је

$$L_{12}L_{34} - L_{23}L_{14} \equiv L_{45}L_{61} - L_{56}L_{14},$$

---

[1]) **Pascal.** *Essai sur les coniques, 1640.* — То је једно мало делце од 6 страна.

[2]) Еквације (23) биле би у опште овог облика:

$$L_{12}L_{34} - kL_{23}L_{14} = o, \quad L_{45}L_{61} - k'L_{56}L_{14} = o;$$

ми смо претпоставили да се параметри k и k' имплицитно јављају у полиномима L, па их с тога нисмо ни писали. То исто вреди и за ону идућу

па је према томе и

$$L_{12}L_{34} - L_{45}L_{61} \equiv (L_{23} - L_{56}) L_{14}. \qquad (24)$$

По еквацији

$$L_{12}L_{34} - L_{45}L_{61} = o \qquad (25)$$

види се да је коничан пресек који та еквација представља описан око тетрагона чија су темена ове тачке: 1, 4, $L_{12} \cdot L_{45}$, $L_{34} \cdot L_{61}$. Кад се има у виду идентична релација (24), биће јасно да еквација (25) управо представља две праве; једна између тих правих је L_{14}, а друга $L_{23} - L_{56}$. Према оном што мало час рекосмо пролазиле би те праве кроз тачке 1, 4, $L_{12} \cdot L_{45}$, $L_{34} \cdot L_{61}$, па како једна између тих правих — права L_{14} — пролази кроз тачке 1 и 4, пролазиће она друга права $L_{23} - L_{56}$ кроз остале две тачке $L_{12} \cdot L_{45}$, $L_{34} \cdot L_{61}$. Та права пролази у осталом и кроз тачку $L_{23} \cdot L_{56}$, а то ће рећи да тачке $L_{12} \cdot L_{45}$, L_{23} L_{56}, $L_{34} \cdot L_{61}$ у којима се секу две и две супротне стране заиста леже на једној правој. Еквација те Паскалове праве је $L_{23} - L_{56} = o$.

Напомене. 1-во. Тачке 1, 2, 3, 4, 5, 6 могу се на оволико различитих начина спојити једна с другом колико има пермутација из шест елемената. Према томе би свега било 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 уписаних хексагона. Сви ти хексагони нису различити, а лако се може доказати да се сваки између њих свега дванаест пута јавља. Кад се н. пр. теме 1 веже најпре са теменом 2, па с теменом 3 и т. д. или обратно, најпре с теменом 6, па с теменом 5 и т. д., онда ће се добити хексагони 1 2 3 4 5 6 и 1 6 5 4 3 2 који имају исте супротне стране. На исти начин добићемо исте хексагоне и прелазећи с једног темена на друго; тако би н. пр. хексагони 1 2 3 4 5 6, 2 3 4 5 6 1, 3 4 5 6 1 2, 4 5 6 1 2 3, 5 6 1 2 3 4, 6 1 2 3 4 5 такође имали исте супротне стране. Прави

еквацију. Полиноми $L_{12}L_{34} - L_{23}L_{14}$ и $L_{45}L_{61} - L_{56}L_{14}$ нису у опште идентични, већ су само сразмерни. Ми смо претпоставили да се фактор којим се та два полинома разликују већ имплицитно налази у једном од тих полинома тако, да је *de facto*

$$L_{12}L_{34} - L_{23}L_{14} \equiv L_{45}L_{61} - L_{56}L_{14}.$$

број различитих хексагона добићемо дакле кад производ 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 поделимо са 12 т. ј. различитих хексагона има свега 60, па с тога *има шездесет Паскалових правих*.

2-го. Како је коничан пресек описан око тетрагона 2 3 5 6, то се он може представити и овом еквацијом:

$$L_{25}L_{36} - L_{23}L_{56} = o.$$

Полином те еквације је идентично једнак с полиномима еквацијâ (23); с тога је

$$L_{12}L_{34} - L_{25}L_{36} \equiv (L_{14} - L_{56})\, L_{23},$$

$$L_{45}L_{61} - L_{25}L_{36} \equiv (L_{14} - L_{23})\, L_{56},$$

а по тим двема идентичним релацијама види се ово: 1-во, да тачке у којима се секу супротне стране хексагона 1 4 3 6 5 2 леже на правој $L_{14} - L_{56}$ и 2-го, да тачке у којима се секу супротне стране хексагона 1 6 3 2 5 4 леже на правој $L_{14} - L_{23}$. Међутим се три Паскалове праве

$$L_{23} - L_{56} = o,\ L_{56} - L_{14} = o,\ L_{14} - L_{23} = o$$

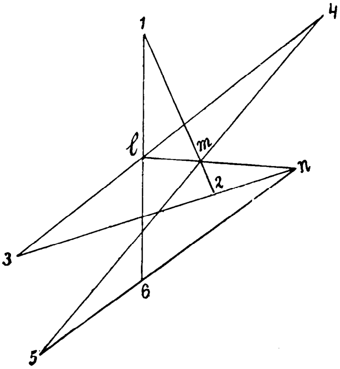
секу у једној тачци, т. ј. *Паскалове праве трију хексагона 1 2 3 4 5 6, 1 4 3 6 5 2, 1 6 3 2 5 4 који се добивају мењањем местâ парних бројева 2, 4, 6 секу се у једној тачци*. Та теорема је *Штајнерова*[1]; тачке у којима се секу по три Паскалове праве зову се *Штајнерове тачке*. Свега *има двадесет Штајнерових тачака*.

348. На основу Паскалове теореме лако ћемо наћи колико год хоћемо тачака неког коничног пресека, кад

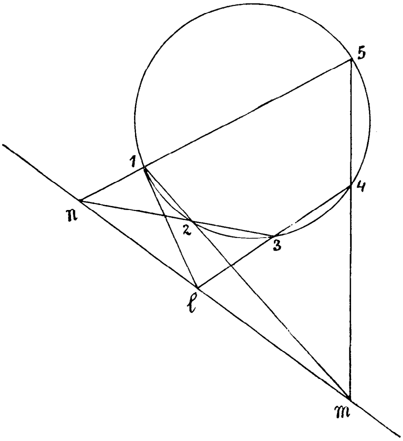
---

[1] **Steiner** *(Annales de Gergonne, t. XVIII.* и *Gesam. Werke, I. p. 224.).* је почео први испитивати особине »мистичног хексаграма«. Осим њега бавили су се тим нарочито **Cayley** *(Crelle's, Journal, t. XXXI.* и *XXXIV.* и *Mathem. Papers, I. p. 322.* и *356.)* и **Kirkman** *(Cambridge and Dublin Mathem. Journal, t. V.).* Ко хоће темељније да проучи питање о Паскалову хексаграму, нека чита *Analytische Geometrie, von* **O. Hesse** и прву ноту у француском преводу **Салмонових** *Коничних Пресека.* — Треба поменути још и то, да се о том хексаграму одмах после Штајнера бавио **Plücker** у својој познатој расправи *»Über ein neues Princip der Geometrie« (Crelle's Journal, t. V.).*

знамо пет тачака његових. Означимо само дате тачке са 1, 2, 3, 4, 5 и повуцимо из једне од тих тачака,



Сл. 171.



Сл. 172.

н. пр. из тачке 1 ма у ком правцу једну праву 16. Та права сече криву већ у једној тачци — у тачци 1 — ону другу тачку у којој се права сече са кривом, наћи ћемо овако. Продужићемо праве 16 и 34, 12 и 45 и означићемо са l и m тачке у којима се оне секу; за тим ћемо продужити праву 23 до тачке n у којој та права сече праву lm. Спојићемо тачку n с тачком 5; права $n5$ сећи ће праву 16 у тачци 6; та тачка 6 биће тражена тачка.

Кад би тачка 6 пала на тачку 1, била би страна 16 хексагона тангента коничног пресека у тачци 1. С тога ћемо конструкцијом овако наћи тангенту у некој тачци 1 криве. Наћи ћемо тачке m и n у којима се секу стране 12 и 45, 23 и 15 и тачку l у којој страна 34 сече праву mn. Спојићемо за тим l са 1; права $1l$ биће тангента криве у тачци 1.

Примери

1. Доказати да су средишта кривине у тачкама (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) параболе $y^2 = 2px$ колинеарна ако је

$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = o.$$

2. Кад ће еквација $\alpha\gamma = k\beta\delta$ представљати један круг?

Одг. Кад је $k = -1$.

Напом. Претпоставља се да почетак координатне системе лежи у тетрагону који затварају стране $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

3. Са $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ћемо означити линеарне функције променљивих x и y. Протумачити еквацију

$$(\alpha + l\delta)(\beta + m\delta)(\gamma + n\delta) = (\alpha - l\delta)(\beta - m\delta)(\gamma - n\delta).$$

Одг. Еквација представља праву $\delta = o$ и коничан пресек

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta + lmn\delta^2 = o.$$

Тај коничан пресек пролази кроз шест тачака $(\alpha + l\delta,\ \beta - m\delta), \ldots$

4. Тачка (x', y') је средиште криве

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 2y.$$

Место жижâ те криве је хипербола

$$xy = x'y + y'x.$$

5. Доказати да осовина параболе дели корду кривине по напремици 1 : 3.

Curtis.

Напом. Збир ордината y_1, y_2, y_3, y_4 тачака у којима некакав круг сече параболу је $= o$; треба узети да је $y_2 = y_3 = y_4$.

6. $TP, TQ, T'P', T'Q'$ су тангенте коничног пресека, а P, Q, P', Q' су додирне тачке. Доказати да тачке T, P, Q, T', P', Q' леже на једном коничном пресеку.

7. Некакав коничан пресек је у двојном додиру с неким другим коничним пресеком. Трећи један коничан пресек пролази кроз две додирне тачке и сече и један и други дат коничан пресек још у двема тачкама. Корде које спајају те тачке секу се у једној тачци додирне корде.

Еквације тих трију коничних пресека могу се овако написати:

$$S = o,\ S - L^2 = o,\ S - LM = o;$$

услед тога је и т. д.

8. S, S', S'' су три конична пресека, а L и L', M и M' су заједничке коњуговане секанте кривих S и S', S и S''. Доказати да четири тачке у којима се секу криве S' и S'', и четири тачке у којима секанте једнога пара секу секанте другога пара леже на једном коничном пресеку.

9. Два конична пресека су уписана у један угао. Доказати да две заједничке секанте пролазе кроз тачку у којој се секу додирне корде.

Ако су $L = o$, $M = o$ краци датог угла, биће еквације, поменутих двају коничних пресека ово:

$$LM = R^2, \ LM = R'^2;$$

кад се одузму те две еквације, добиће се ово:

$$R^2 - R'^2 = o,$$

а та еквација представља две праве које пролазе кроз тачку у којој се секу додирне корде R и R'.

10. Претпоставићемо да права $L = o$ сече криву S и криву S' и повући ћемо коничне пресеке s и s' који су у двојном додиру с кривима S и S' дуж праве L. Доказати да се s и s' секу у четири тачке које леже на једном коничном пресеку што пролази кроз тачке у којима се секу S и S'.

11. Дата су два круга K и K' и некакав коничан пресек S. Кроз тачке у којима се секу S и K повући ћемо коничан пресек s, а кроз тачке у којима се секу S и K' повући ћемо коничан пресек s'. Доказати да тачке у којима се секу s и s' леже на периферији једнога круга који пролази кроз заједничке тачке датих кругова.

Еквације коничних пресека s и s' су ово:

$$S - kK = o, \quad S - k'K' = o,$$

па је с тога

$$kK - k'K' = o$$

еквација једног коничног пресека који пролази кроз тачке у којима се секу s и s'; та еквација представља међу тим један круг, т. ј. и т. д.

12. Доказати да се поларе неке тачке с обзиром на криве $LM = kR^2$ секу у једној тачци додирне корде R.

13. Кад су два конична пресека у двојном додиру, онда свака тачка додирне корде има исту полару с обзиром на обе криве.

14. Нека равнострана хипербола је у хипероскулацији са једном параболом. Доказати да је место средиштâ тих хипербола једна парабола.

СКРАЋЕНЕ ТАНГЕНЦИЈАЛНЕ ЕКВАЦИЈЕ

349. Нека су

$$\Sigma = o, \ \Sigma' = o$$

тангенцијалне еквације двају коничних пресека. Сви конични пресеци који додирују четири заједничке тангенте кривих Σ и Σ' могу се, као што знамо, представити овом еквацијом:

$$\Sigma - k\Sigma' = o. \qquad (1)$$

Та општа еквација преобразиће се под неким одређеним погодбама у специјалне еквације, од којих ћемо неке одмах на овом месту поменути.

Претпоставићемо најпре да еквација $\Sigma' = o$ представља две тачке $P = o$ и $Q = o$. У том случају преобразила би се општа еквација (1) у ову специјалну еквацију:

$$\Sigma - kPQ = o. \qquad (2)$$

Јасно је *да ће та еквација представљати коничне пресеке који дирају оне четири тангенте, које су на криву Σ повучене из тачака P и Q.*

Кад би еквација $\Sigma' = o$ представљала једну двојну тачку, т. ј. кад би еквације $P = o$ и $Q = o$ представљале једну и исту тачку, онда би се еквација (1) могла овако написати:

$$\Sigma - kP^2 = o; \qquad (3)$$

та еквација (3) представљала би коничне пресеке који су у двојном додиру с кривом Σ дуж поларе тачке P.

Кад бисмо најпосле претпоставили да и еквација $\Sigma = o$ представља две тачке, онда би се еквација (3) могла овако написати:

$$RS - kP^2 = o; \qquad (4)$$

јасно је, *да та еквација представља коничне пресеке који дирају праве што везују тачке P и R, P и S.*

Напомена. Често се k не пише у еквацијама (2), (3), (4). У таквим случајевима претпоставља се да се параметар k већ *a priori* налази у полиномима поред којих се он јавља у поменутим еквацијама.

350. *Кад су два конична пресека у двојном додиру са неким трећим, онда две омбиликалне тачке тих двају коничних пресека леже на правој што спаја полове додирних корада. Те две омбиликалне тачке леже хармонијски према половима додирних корада.*

Нека је $\Sigma = o$ еквација оног коничног пресека, с којим су у двојном додиру остала два; еквације тих двају пресека биће

$$\Sigma - P^2 = o, \quad \Sigma - Q^2 = o.$$

Према томе је

$$P^2 - Q^2 = o$$

еквација двеју омбиликалних тачака, а те омбиликалне тачке хармонијски деле раздаљину полова P и Q. —

Та теорема је корелативна са оном коју смо поменули у чл. 343.

351. *Кад су три конична пресека у двојном додиру са неким четвртим, онда ће њихове омбиликалне тачке — а на број их је шест — бити темена једнога тетраграма; по три омбиликалне тачке лежаће на свакој страни тог тетраграма.*

У овом случају биће еквације трију коничних пресека ово:

$$\Sigma - P^2 = o, \; \Sigma - Q^2 = o, \; \Sigma - R^2 = o,$$

а еквације поменутих трију парова омбиликалних тачака ово:

$$P^2 - Q^2 = o, \; Q^2 - R^2 = o, \; R^2 - P^2 = o.$$

Те омбиликалне тачке могу се поделити на четири разреда тако, да у сваком разреду буду по три омбиликалне тачке које леже на једној правој. Еквације омбиликалних тачака појединих разреда јесу ово:

$$\begin{aligned} P &= \quad Q = \quad R, \\ -P &= \quad Q = \quad R, \\ P &= -Q = \quad R, \\ P &= \quad Q = -R. \end{aligned}$$

Праве на којима леже по три и три омбиликалне тачке биле би стране, а саме омбиликалне тачке $P - Q$, $Q - R$, $R - P$ и т. д. биле би темена једног тетраграма. —

Та теорема је корелативна с оном коју смо поменули у чл 344.

352. *Кад три конична пресека* Σ, Σ', Σ'' *имају две заједничке тангенте, онда тачке у којима се секу остале две и две заједничке тангенте кривих* Σ *и* Σ', Σ *и* Σ'', Σ' *и* Σ'' *леже на једној правој.*

Означимо са a, b, c, d заједничке тангенте кривих Σ и Σ', са a, b, c', d' заједничке тангенте кривих Σ и Σ'', а са a, b, c'', d'' заједничке тангенте кривих Σ' и Σ''. Нека је $P = o$ еквација омбиликалне тачке (a, b), $Q = o$ еквација омбиликалне тачке (c, d), а $R = o$ еквација омбиликалне тачке (c', d'). Кад се то има у виду, биће јасно да ћемо криве Σ' и Σ'' моћи представити овим еквацијама:

$$\Sigma - kPQ = o, \quad \Sigma - k'PR = o.$$

Ако одузмемо леву страну прве еквације од леве стране друге, добићемо ово:

$$P\,(kQ - k'R) = o,$$

а по томе се види да је $kQ—k'R = o$ еквација омбиликалне тачке (c'', d''). Јасно је да су омбиликалне тачке Q, R, $kQ—k'R$ колинеарне.

Та теорема је корелативна са оном теоремом коју смо поменули у чл. 346.

353. *У сваком хексагону који је описан око некаквог коничног пресека секу се три дијагонале што спајају три пара супротних темена у једној тачци.*

То је позната *Бријаншонова*[1] теорема; тачка у којој се секу поменуте три дијагонале назива се *Бријаншонова тачка.*

Стране хексагонове означићемо са 1, 2, 3, 4, 5, 6. Нека је

$$P_{ik} = o$$

еквација тачке у којој страна *i* сече страну *k*. Како је коничан пресек уписан у четвороугао чије су стране 1, 2, 3, 4 и 4, 5, 6, 1, то се тај коничан пресек може представити овим еквацијама:

$$P_{12}P_{34} - P_{23}P_{14} = o, \quad P_{45}P_{61} - P_{56}P_{14} = o; \qquad (5)$$

с тога је

$$P_{12}P_{34} - P_{23}P_{14} \equiv P_{45}P_{61} - P_{56}P_{14},$$

па је према томе и

$$P_{12}P_{34} - P_{45}P_{61} \equiv (P_{23} - P_{56})\, P_{14}.$$

Еквације

$$P_{12}P_{34} - P_{45}P_{61} = o, \qquad (P_{23} - P_{56})\, P_{14} = o$$

представљаће дакле једну и исту обвојницу, т. ј. прва еквација представљаће две тачке као и друга. Једна између тих тачака је тачка у којој се секу праве $P_{12} \cdot P_{61}$ и $P_{34} \cdot P_{45}$ — то је тачка P_{14} — а друга између тих тачака је тачка у којој се секу праве $P_{12} \cdot P_{45}$ и $P_{34} \cdot P_{61}$ — то је тачка $P_{23}-P_{56}$. Та тачка лежи у осталом, као што се по њезиној еквацији види, и на правој $P_{23} \cdot P_{56}$, а то ће рећи, да се три дијагонале описаног хексагона, што спајају супротна темена P_{12} и P_{45}, P_{23} и P_{56}, P_{34} и P_{61} заиста секу у једној тачци. Еквација те Бријаншонове тачке је $P_{23} - P_{56} = o$.

---

[1] **Brianchon** *(Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XIII. 1806.* и у *Mémoire sur les lignes du second ordre, 1817.).*

Напомена. 1-во. Тангенте 1, 2, 3, 4, 5, 6 одређују свега на број шездесет различитих описаних хексагона, па с тога *има шездесет Бријаншонових тачака.*

2-го. Како је коничан пресек уписан у тетрагон чије су стране 2, 3, 5, 6, то се он може представити и овом еквацијом:

$$P_{25}P_{36} - P_{23}P_{56} = o.$$

Полином те еквације је идентичан с полиномима еквацијâ (5); с тога је

$$P_{12}P_{34} - P_{25}P_{36} \equiv (P_{14} - P_{56}) P_{23},$$

$$P_{45}P_{61} - P_{25}P_{36} \equiv (P_{14} - P_{23}) P_{56},$$

а по тим двема идентичним релацијама види се ово: 1-во, да се дијагонале које спајају супротна темена хексагона чије су стране 1, 4, 3, 6, 5. 2 секу у тачци $P_{14} - P_{56}$ и 2-го, да се дијагонале које спајају супротна темена хексагона чије су стране 1, 6, 3, 2, 5, 4 секу у тачци $P_{14} - P_{23}$. Међу тим су три Бријаншонове тачке

$$P_{23} - P_{56} = o, \; P_{56} - P_{14} = o, \; P_{14} - P_{23} = o$$

колинеарне, т. ј. *Бријаншонове тачке трију хексагона 1 2 3 4 5 6, 1 4 3 6 5 2, 1 6 3 2 5 4 који се добивају мењањем местâ парних бројева 2, 4, 6 леже на једној правој.* Та теорема је *Штајнерова*[1]); праве на којима леже по три Бријаншонове тачке звале би се *Штајнерове праве.* Свега *има двадесет Штајнеровиx правих.* —

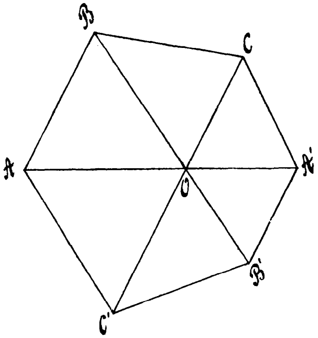
Бријаншонова и Паскалова теорема су корелативне.

354. На основу Бријаншонове теореме лако ћемо наћи колико год хоћемо тангената неког коничног пресека, кад знамо пет тангената његових. Означимо само дате тангенте са *AB*, *BC*, *CA'*, *A'B'*, *B'C'* и узмимо на једној од тих тангената, н. пр. на тангенти *AB* ма где једну тачку *A*. Кроз ту тачку пролази већ једна

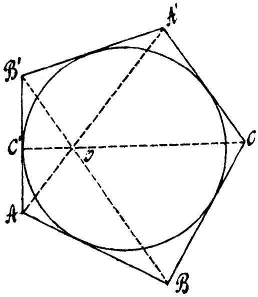
---

[1]) **Steiner** *(Annales de Gergonne, t. XVIII.* и *Gesam. Werke, I. p. 224.).*

тангента коничног пресека — то је тангента AB — ону другу тангенту која се још може повући на криву из



Сл. 173.



Сл. 174.

те тачке наћи ћемо овако. Спојићемо A са A', B са B' и означићемо тачку у којој се секу праве AA' и BB' са O. Ту тачку O везаћемо с тачком C правом CO; та права сећи ће тангенту $B'C'$ у тачци C'. Права AC' биће тражена тангента.

Кад би се тангента $B'C'$ поклапала са тангентом AC', била би тачка C' додирна тачка. С тога ћемо конструкцијом овако наћи тачку у којој нека тангента AB' дира криву. Повући ћемо праве AA' и BB' и спојићемо тачку O у којој се те две праве секу са тачком C; права CO сећи ће AB' у тачци C'; тачка C' биће тачка у којој AB' дира криву.

Примери

1. Шта представља еквација

$$(a_1 u + b_1 v + 1)(a_2 u + b_2 v + 1) = k(u^2 + v^2)\,? \qquad (\alpha)$$

Одг. Систему конфокалних кривих. Заједничке жиже су

$$a_1 u + b_1 v + 1 = o, \quad a_2 u + b_2 v + 1 = o.$$

2. Може ли се из еквације (α) прочитати каква геометријска особина коничних пресека?

Одг. Еквација (α) казује *да је производ управних које су из жижа повучене на ма коју тангенту коничног пресека стална количина.*

3. Наћи еквацију коничних пресека који су у двојном додиру са коничним пресецима Σ и Σ'.

4. Σ, Σ', Σ'' су три конична пресека, а P и P', Q и Q' су коњуговане омбиликалне тачке кривих Σ и Σ', Σ и Σ''. Доказати да су четири заједничке тангенте кривих Σ' и Σ'' и четири праве PQ, PQ', $P'Q$, $P'Q'$ тангенте једног и истог коничног пресека

5. Права која спаја две омбиликалне тачке двају коничних пресека има исти пол с обзиром на обе криве и обратно, права која има исти пол с обзиром на два конична пресека спаја две омбиликалне тачке тих коничних пресека.

6. Доказати да је место полова једне сталне праве с обзиром на криве $RS - kP^2 = o$ једна права која пролази кроз тачку $P = o$.

7. Шта геометријски значи еквација $RS - kP^2 = o$?

8. Кад су два конична пресека у двојном додиру онда свака права што пролази кроз пол додирне корде има исти пол с обзиром на обе криве.

СЛИЧНИ КОНИЧНИ ПРЕСЕЦИ

355. Узећемо да су нам дате две сталне праве Ox и $O'x'$ и претпоставићемо да се око сталних тачака O и O' обрћу два потега OP и $O'P'$ тако, да је угао који затвара потег OP са Ox исти онолики, колики је и угао који затвара $O'P'$ са $O'x'$. На тим двема обртницама правима OP и $O'P'$ узећемо две тачке P и P' и претпоставићемо да је свакад

$$O'P' = kOP. \qquad (k = const.).$$

Ако тачка P описује неку криву, описиваће и тачка P' неку криву — увеличану или смањену слику оне прве криве.

Такве две криве називају се *сличне криве.* Те криве биће *хомотетичне* (по Шалу *semblable et semblablement placé* или *homothétique*) ако су поменуте две обртнице паралелне. Кад се тачке O и O' и праве обртнице поклапају, онда се тачка O назива *средиште сличности.*

356. *Све параболе су сличне криве.*

Узмимо само две параболе. Темена тих парабола ћемо означити са O и O', а осовине са Ox и $O'x'$. Ако су O и O' полови, а Ox и $O'x'$ поларне осовине двеју координатних система, биће еквације поменутих парабола ово:

$$\rho \sin^2\theta = 2p\cos\theta,\quad \rho'\sin^2\theta' = 2p'\cos\theta'.$$

Ако се узме да је $\theta = \theta'$, биће

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{p'}{p} = const.,$$

а по томе се види да поменута теорема заиста постоји.

Напомена. Параболе су хомотетичне ако су им осовине паралелне.

357. *Две елипсе или хиперболе биће сличне ако је напремица осовинâ једне криве равна напремици осовинâ друге криве.*

Нека су

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

еквације двају централних коничних пресека. Ако са ρ и ρ' означимо потеге који једнаке угле затварају са трансверзалним осовинама, биће

$$\frac{\rho'^2}{\rho^2} = \frac{\dfrac{\cos^2\theta}{a^2} - \dfrac{\sin^2\theta}{b^2}}{\dfrac{\cos^2\theta}{a'^2} - \dfrac{\sin^2\theta}{b'^2}}.$$

Дате две криве биће сличне ако је количник $\frac{\rho'^2}{\rho^2} = const.$, а тај количник не ће зависити од θ само ако је

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'},$$

а то смо и тврдили.

Напомене. 1-во. *Ексцентрицитети сличних коничних пресека су једнаки и обратно.*

Ми знамо на име да је

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}, \quad e'^2 = 1 + \frac{b'^2}{a'^2},$$

па како је $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, то је јасно да је и $e = e'$ и обратно.

2-го. *Асимптоте сличних коничних пресека затварају једнаке угле и обратно.*

Угао између асимптотâ прве криве је на име $= 2tg^{-1}\frac{b}{a}$, а угао између асимптотâ друге криве је $= 2tg^{-1}\frac{b'}{a'}$. Како је у овај мах $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, то је јасно да су и поменута два угла једнака.

3-ће. *Асимптоте хомотетичних пресека су паралелне и обратно.*

Угао који затвара једна асимптота са трансверсалном осовином је

$$tg^{-1}\frac{b}{a};$$

осовине су међу тим сразмерне; с тога је

$$tg^{-1}\frac{b}{a} = tg^{-1}\frac{b'}{a'},$$

па како осовине хомотетичних кривих морају бити паралелне, то је јасно да ће им и асимптоте бити паралелне.

358. *Наћи погодбу под којом ће два конична пресека* $(a, b, c, f, g, h)\,(x, y, 1)^2 = o$ *и* $(a', b', c', f', g', h')\,(x, y, 1)^2 = o$ *бити слична.*

Погодба је, као што смо мало час поменули, ово: треба угли између (реалних или имагинарних) асимптота да буду једнаки. Ми знамо међу тим, да су еквације оних правих, које пролазе кроз почетак и иду напоредо са асимптотама прве криве ово:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = o, \qquad (1)$$

а еквације оних правих, које пролазе кроз почетак и иду напоредо са асимптотама друге криве, ово:

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = o. \qquad (2)$$

Тангента угла који лежи између правих (1) је

$$tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b},$$

а тангента угла који лежи између правих (2) је

$$tg\,\varphi' = \frac{2\sqrt{h'^2 - a'b'}}{a' + b'}.$$

Дате две криве биће сличне ако је $tg\,\varphi = tg\,\varphi'$, т. ј. ако је

$$\frac{ab - h^2}{(a + b)^2} = \frac{a'b' - h'^2}{(a' + b')^2}. - \qquad (3)$$

У косој координатној системи била би погодба (3) овог облика:

$$\frac{ab - h^2}{(a + b - 2h\cos\omega)^2} = \frac{a'b' - h'^2}{(a' + b' - 2h'\cos\omega)^2}. \qquad (4)$$

359. *Наћи погодбу под којом ће конични пресеци* $(a, b, c, f, g, h)\,(x, y, 1)^2 = o$ *и* $(a', b', c', f', g', h')\,(x, y, 1)^2 = o$ *бити хомотетични.*

У овом случају биће асимптоте датих кривих паралелне; еквације (1) и (2) представљале би дакле по две праве које се поклапају. Погодба под којом ће се те праве поклапати, т. ј. погодба под којом ће дате криве бити хомотетичне биће ово:

$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = \frac{b}{b'} \cdot \qquad (5)$$

Према томе јасно је *да се еквације двају хомотетичних коничних пресека могу написати тако, да у њима чланови у којима се јављају* x^2, xy, y^2 *буду једнаки.* Ако је дакле $S = o$ еквација неког коничног пресека, онда је $S - kL = o$ — L је линеарна функција промењивих x и y — еквација неког коничног пресека, који је хомотетичан с оним првим

Прим. 1. Доказати да се еквације двају хомотетичних, концентричних коничних пресека могу написати у овом облику:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = o, \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + c' = o.$$

Напом. **Претпоставља се да почетак координатне системе лежи у средишту.**

Прим. 2. Доказати да су сви кругови хомотетични конични пресеци.

360. Еквације $S = o$ и $S - kL = o$ представљају, као што мало час поменусмо, два хомотетична пресека. Како се еквација $S - kL = o$ може и овако написати:

$$S - (o \cdot x + o \cdot y + k)\, L = o,$$

то се види *да ће права у бескрајности бити заједничка корда двају хомотетичних пресека.* Два хомотетична конична пресека секу се дакле свакад у двема тачкама у бескрајности: такве две криве могу се дакле сећи само у двема тачкама које нису у бескрајности. — Кад су криве хиперболе, онда је поменуто правило и са чисто геометријског гледишта сасвим јасно. Асимптоте хомотетичних хипербола су на име паралелне, а то ће рећи, да се асимптоте двеју хомотетичних хипербола у бескрајности секу. Како ће се свака асимптота у бескрајности приљубити уз саму грану хиперболину, то је јасно да ће тачка, у којој се секу две паралелне асимптоте, бити заједничка тачка двеју хипербола. — Сад ће нам уједно бити јасно и то, зашто се два круга могу сећи само у двема тачкама које нису у бескрајности. Сви кругови су на име хомотетичне криве, т. ј. сви кругови морају имати по две заједничке тачке у бескрајности. Те тачке ће бити имагинарне, јер су и асимптоте кругова имагинарне.

361. Ако су два конична пресека S и S' и концентрична и хомотетична, биће њихове еквације ово:

$$S\equiv ax^2+2hxy+by^2+c=o, \quad S'\equiv ax^2+2hxy+cy^2+c'=o,$$

па како је

$$S'=S+(o\cdot x+o\cdot y+1)^2\,(c'-c),$$

то је јасно *да су два хомотетична и концентрична конична пресека у двојном додиру дуж праве у бескрајности.* У овом случају би се асимптоте коничних пресека поклапале, па би с тога асимптоте биле заједничке тангенте обеју кривих у истим тачкама у бескрајности.

Напомена. Сви концентрични кругови су у двојном додиру дуж праве у бескрајности.

Примери

1. Претпоставићемо да нека корда једне елипсе додирује једну концентричну и хомотетичну елипсу. Доказати да додирна тачка полови корду.

2. Тачка O је стална, а тачка P се креће по неком коничном пресеку. Доказати да тачка на средини дужи OP описује један хомотетичан коничан пресек.

3. Два хомотетична и концентрична конична пресека одсецају једнаке делове на некој правој.

4. Два слична конична пресека имају једну заједничку жижу. Доказати да се две њихове заједничке корде секу под правим углом.

5. Дата су три хомотетична конична пресека. Доказати да се њихове заједничке корде које нису у бескрајности секу у једној тачци.

6. Кроз почетак O координатне системе повући ћемо потеге према коничном пресеку и на сваком потегу OP ћемо одмерити једну дуж OP', која је сразмерна са OP. Наћи место тачака P'.

Одг. Место тачака P' је коничан пресек; тај коничан пресек је хомотетичан с датим пресеком.

Напом. Јасно је да је тачка O средиште сличности.

7. Дата су три хомотетична пресека. Доказати да су њихова средишта сличности — свега их је на број шест — супротна темена једног тетраграма.

8. $\triangle$ и $\triangle'$ су дискриминанте еквација двају хомотетичних коничних пресека, а k је напремица сличности. Доказати да је $\triangle' = k^2 \triangle$.

9. Осовине двеју једнаких парабола се поклапају, а темена су им различита. Доказати да су те две параболе у бескрајности у хиперoccулацији.

◆

ОДЕЉАК ДРУГИ

Општа еквација другог степена.

362. Општа еквација коничних пресека је у трилинеарној системи овог облика:

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = o. \quad (1)$$

Тернеран квадратан облик који се налази на левој страни ове еквације бележићемо симболички са $f(\alpha, \beta, \gamma)$, са S или са $(a, b, c, f, g, h)(\alpha, \beta, \gamma)^2$.

Еквација корде која спаја две тачке $(\alpha', \beta', \gamma')$ и $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ коничног пресека (1) је ово:

$$\begin{aligned} &a(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'') + b(\beta - \beta')(\beta - \beta'') \\ &+ c(\gamma - \gamma')(\gamma - \gamma'') + 2f(\beta - \beta')(\gamma - \gamma'') \\ &+ 2g(\gamma - \gamma')(\alpha - \alpha'') + 2h(\alpha - \alpha')(\beta - \beta'') = f(\alpha, \beta, \gamma). \quad (2) \end{aligned}$$

Место, које та еквација представља, пролази на име кроз тачке $(\alpha', \beta', \gamma')$ и $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, а еквација је линеарна, т. ј. заиста је еквацијом (2) представљена корда која спаја тачку $(\alpha', \beta', \gamma')$ с тачком $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Та корда ће спајати две тачке које се поклапају, кад је $\alpha' = \alpha'', \beta' = \beta'', \gamma' = \gamma''$; еквација тангенте у тачци $(\alpha', \beta', \gamma')$ биће дакле овог облика:

$$\begin{aligned} &a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' \\ &+ f(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + g(\gamma\alpha' + \gamma'\alpha) + h(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = o \quad (3) \end{aligned}$$

или

$$(a\alpha' + h\beta' + g\gamma')\,\alpha + (h\alpha' + b\beta' + f\gamma')\,\beta + (g\alpha' + f\beta' + c\gamma')\,\gamma = o \qquad (4)$$

или

$$\alpha f'_{\alpha'} + \beta f'_{\beta'} + \gamma f'_{\gamma'} = o. \qquad (5)$$

Ми смо у осталом доказали већ у један мах да ће нам еквација (5) представљати еквацију тангенте у тачци $(\alpha', \beta', \gamma')$ коничног пресека (чл. 173.). — Јасно је да ће последње три еквације, свака посебице, представљати и полару тачке $(\alpha', \beta', \gamma')$.

Напомена. По Аронхолду бележе се координате неке тачке једним писменом које има казаљку уза се, а еквација $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = o$ неке праве бележи се овим симболом $a_x = o$. — Општа квадратна еквација $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = o$ бележи се по Аронхолду са $a_x^2 = o$. По том симболу види се како се добива развијен облик опште трилинеарне еквације $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdot \cdot \cdot = o$; треба просто трином $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ подићи на квадрат, па у развијеном облику тог квадрата свуда место производа a_ia_k писати коефицијенте a_{ik} $(= a_{ki})$.

1-во. Јоахимсталова еквација (чл. 230. (7)), из које се израчунава напремица одсечака на које коничан пресек $a_x^2 = o$ дели раздаљину тачака y и z, а то ће рећи раздаљину тачака (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3), јесте према томе овог облика:

$$\lambda^2 a_z^2 + 2\lambda a_z \cdot a_y + a_y^2 = o.$$

2-го. Еквација поларе тачке y с обзиром на $a_x^2 = o$ је

$$a_x \cdot a_y = o.$$

3-ће. Еквација двеју тангената, које су из тачке y повучене на коничан пресек $a_x^2 = o$, је овог облика:

$$a_y^2 \cdot a_x^2 - (a_x \cdot a_y)^2 = o.$$

Прим. 1. Наћи погодбу под којом ће еквација $a_x^2 = o$ представљати две праве. —

Кад $a_x^2 = o$ представља две праве, онда поларе свију тачака пролазе кроз тачку у којој се секу те две праве. Поларе темена $(1, o, o), (o, 1, o), (o, o, 1)$ основног троугла су међу тим ово:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = o, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = o,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = o, \qquad (\alpha)$$

а те три праве секу се у једној тачци ако је

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = o,$$

т. ј. еквација $a_x^2 = o$ представља две праве ако је дискриминанта те еквације равна нули. —

Кад бисмо разрешили систему еквација (α), добили бисмо координате тачке у којој се секу поменуте праве. Координате те тачке су дакле ово:

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_{i_1} : A_{i_2} : A_{i_3}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

где су $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$ минори елемената $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ дискриминанте $\triangle$.

Прим. 2. Како се по Аронхолду симболички представља погодба под којом су праве

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = o$$

хармонијски коњуговане према правима

$$b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = o?$$

Одг. Еквације датих правих писале би се по Аронхолду овако:

$$(a_1x_1 + a_2x_2)^2 = o, \quad (b_1x_1 + b_2x_2)^2 = o,$$

а погодба под којом су оне хармонијски коњуговане представљала би се симболички овако (види прим. у чл. 87.):

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = o.$$

363. *Наћи пол праве* $u\alpha + v\beta + w\gamma = o$ *с обзиром на коничан пресек* $(a, b, c, f, g, h)\ (\alpha, \beta, \gamma)^2 = o.$

Кад упоредимо еквацију $u\alpha + v\beta + w\gamma = o$ са еквацијом (4) поларе, видећемо да је

$$a\alpha' + h\beta' + g\gamma' = \mu u,$$

$$h\alpha' + b\beta' + f\gamma' = \mu v,$$

$$g\alpha' + f\beta' + c\gamma' = \mu w.$$

Кад се та система еквација реши, добиће се ово:

$$\left.\begin{aligned} \rho\alpha' &= Au + Hv + Gw, \\ \rho\beta' &= Hu + Bv + Fw, \\ \rho\gamma' &= Gu + Fv + Cw. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

У овим еквацијама је $\rho = \Delta/\mu$, а $A, B, C, \cdot \cdot \cdot$ су, као и пређе, минори елемената $a, b, c, \cdot \cdot \cdot$ дискриминанте Δ.

Помоћу еквација (6) наћи ћемо на веома леп начин тангенцијалну еквацију коничног пресека S. Ми знамо на име ово: кад пол $(\alpha', \beta', \gamma')$ лежи на својој полари (u, v, w), онда је полара тангента коничног пресека у тачци $(\alpha', \beta', \gamma')$ и обратно, кад права (u, v, w) додирује криву у тачци $(\alpha', \beta', \gamma')$, онда је та права полара додирне тачке. Ако сад саберемо еквације (6), помноживши пре тога прву са u, другу са v, а трећу са w, добићемо овај резултат:

$$\rho\,(u\alpha' + v\beta' + w\gamma') = Au^2 + Bv^2 + Cw^2$$
$$+ 2Fvw + 2Gwu + 2Huv.$$

Узмимо сад да тачка $(\alpha', \beta', \gamma')$ лежи на својој полари, узмимо другим речима да је права (u, v, w) тангента криве у тачци $(\alpha', \beta', \gamma')$. У том случају биће

$$u\alpha' + v\beta' + w\gamma' = o,$$

па је услед тога и

$$\Sigma \equiv Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv = o. \qquad (7)$$

Јасно је да је еквација (7) тангенцијална еквација датог коничног пресека. Та еквација може се, као што знамо, написати и у овом облику:

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & o \end{vmatrix} = o. \qquad (8)$$

Напомена. Кад би еквација коничног пресека била ово: $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdot \cdot \cdot = o$, била би тангенцијална еквација његова ово:

$$A_{11}u_1^2 + A_{22}u^2_2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 + 2A_{12}u_1u_2 = o.$$

Ту еквацију могли бисмо овим симболима означити:

$$(A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3)^2 = o$$

или

$$A_u^2 = o. —$$

Диференцијални количници функције A_u^2 по промењивима u_1, u_2, u_3 су пунктуалне координате пола праве $u_x = o$ с обзиром на $a_x^2 = o$, као што су диференцијални количници функције a_x^2 по промењивима x_1, x_2, x_3 тангенцијалне координате поларе тачке x с обзиром на $a_x^2 = o$.

364. *Дата су два конична пресека $a_x^2 = o$ и $b_x^2 = o$. Нађи место тачака из којих се на $a_x^2 = o$ и $b_x^2 = o$ могу повући две и две тангенте од којих прве две хармонијски леже према другим двема и обратно.*[1]

---

[1] О тој проблеми бавио се **Staudt** *(Nürnberger Programm, 1834.)*, али је значај њезин у теорији коничних пресека уочио тек **Salmon** *(Cambridge and Dublin Mathem. Journ., IX. p. 30.)*.

Нека је x једна таква тачка. Повуцимо из те тачке на $a_x^2 = o$ две тангенте и узмимо на тим тангентама ма где једну тачку y. Тангенцијалне координате тих тангената су ово:

$$x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

С тога ћемо еквацију тих двеју тангената добити овако: просто ћемо у еквацији $A_u^2 = o$ сменити u_1, u_2, u_3 са $x_2 y_3 - x_3 y_2$, $x_3 y_1 - x_1 y_3$, $x_1 y_2 - x_2 y_1$. Еквација пара тангената је дакле

$$[A_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + A_2 (x_3 y_1 - x_1 y_3) + A_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1)]^2 = o$$

или

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 = o.$$

Ако сад узмемо да је $y_3 = o$, добићемо еквацију

$$[(A_2 x_3 - A_3 x_2)\, y_1 + (A_3 x_1 - A_1 x_3)\, y_2]^2 = o; \qquad (9)$$

та еквација представља две праве које се гранају из темена (1, 2) основног троугла према оним двема тачкама у којима поменуте две тангенте секу страну y_3 основног троугла.

На исти начин могло би се доказати да су еквацијом

$$[(B_2 x_3 - B_3 x_2)\, y_1 + (B_3 x_1 - B_1 x_3)\, y_2]^2 = o \qquad (10)$$

представљене две праве које се из истог темена (1, 2) основног троугла гранају према оним двема тачкама, у којима страну y_3 секу две тангенте што су из поменуте тачке x повучене на $b_x^2 = o$. Те две праве биће хармонијски коњуговане према правима (9) под овом погодбом (види прим. 2. чл. 362.):

$$\begin{vmatrix} A_2x_3 - A_3x_2 & A_3x_1 - A_1x_3 \\ B_2x_3 - B_3x_2 & B_3x_1 - B_1x_3 \end{vmatrix}^2 = o,$$

а та погодба се може и овако написати:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}^2 = o. \qquad (11)$$

Кад се има у виду то, да су праве (9) хармонијски коњуговане према правима (10) кадгод су прве две тангенте хармонијски коњуговане према другим двема и обратно, онда ће нам бити јасно и то, да ће еквација (11) бити аналитички еквиваленат оног места које ми и тражимо. Тражено место је дакле један коничан пресек.

На исти начин могли бисмо доказати да обвојницу правих $u_x = o$, које хармонијски секу коничне пресеке $a_x^2 = o$ и $b_x^2 = o$, представља ова еквација:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 = o, \qquad (12)$$

а и то је, као што видимо, еквација једног коничног пресека.

Коничан пресек (11) зове се *пунктуалан хармонијски коничан пресек* кривих a_x^2 и b_x^2, а коничан пресек (12) *тангенцијалан хармонијски коничан пресек* кривих a_x^2 и b_x^2.

Кад се развију еквације (11) и (12), добиће се ово:

$$\mathsf{F} \equiv \Sigma\,(A_{22}B_{33} + A_{33}B_{22} - 2A_{23}B_{23})\, x_1^2$$
$$+ 2\Sigma\,(A_{12}B_{13} + A_{13}B_{12} - A_{11}B_{23} - A_{23}B_{11})\, x_2x_3 = o \qquad (13)$$

и

$$\Phi \equiv \Sigma\,(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})\,u_1{}^2$$
$$+ 2\Sigma\,(a_{12}b_{13} + a_{13}b_{12} - a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11})\,u_2u_3 = o \quad (14)$$

Прим. Наћи пунктуалан и тангенцијалан хармонијски коничан пресек коничних пресека

$$a_1x_1{}^2 + a_2x_2{}^2 + a_3x_3{}^2 = o, \; b_1x_1{}^2 + b_2x_2{}^2 + b_3x_3{}^2 = o.$$

Одг. Пунктуалан хармонијски коничан пресек је

$$a_1b_1\,(a_2b_3 + a_3b_2)\,x_1{}^2 + a_2b_2\,(a_3b_1 + a_1b_3)\,x_2{}^2 + a_3b_3\,(a_1b_2 + a_2b_1)\,x_3{}^2 = o,$$

а тангенцијалан хармонијски коничан пресек је

$$(a_2b_3 + a_3b_2)\,u_1{}^2 + (a_3b_1 + a_1b_3)\,u_2{}^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\,u_3{}^2 = o.$$

Примери

1 Наћи координате средишта коничног пресека $f(a, \beta, \gamma) = o$.

Напом. Средиште је пол праве у бескрајности.

2. Кад ће општа еквација представљати елипсу, кад хиперболу, а кад параболу?

Треба елиминирати γ из дате еквације $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$ и еквације $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = o$ праве у бескрајности. Тим путем добићемо ово:

$$(a\sin^2 C + c\sin^2 A - 2g\sin C\sin A)\,\alpha^2 + 2\,(h\sin^2 C + c\sin A\sin B$$
$$- f\sin C\sin A - g\sin B\sin C)\,\alpha\beta + (b\sin^2 C + c\sin^2 B - 2f\sin B\sin C)\,\beta^2 = o.$$

Та еквација представља две праве које се гранају из темена $(\alpha\beta)$ основног троугла према оним двема тачкама у којима права у бескрајности сече коничан пресек. Крива $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$ биће елипса кад су те две праве имагинарне, т. ј. кад права у бескрајности сече криву у двема имагинарним тачкама; крива $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$ биће парабола кад се поменуте две праве поклапају, т. ј кад је права у бескрајности тангента криве и т. д. Крива $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$ биће дакле елипса, парабола или хипербола како је кад

$$A\sin^2 A + B\sin^2 B + C\sin^2 C + 2F\sin B\sin C + 2G\sin C\sin A$$
$$+ 2H\sin A\sin B > = < o. \quad (\alpha)$$

Напом. Писмена A, B, C имају у горњем изразу двојно значење; као коефицијенти представљају та писмена миноре елемената a, b, c дискриминанте $\triangle$, а као угли представљају та писмена угле основног троугла.

3. У каквој вези стоји израз (α) са тангенцијалном еквацијом коничног пресека $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$?

4. Наћи погодбу под којом ће општа еквација $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$ представљати једну равнострану хиперболу.

Одг. Погодба је ово:

$$a + b + c - 2f \cos A - 2g \cos B - 2h \cos C = o.$$

5. Наћи еквацију двеју тангената које су повучене на коничан пресек $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$ у тачкама у којима га сече права $u\alpha + v\beta + w\gamma = o$. —

Еквација

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = k(u\alpha + v\beta + w\gamma)^2$$

представља, као што знамо, коничне пресеке који су у двојном додиру са $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$ дуж праве $u\alpha + v\beta + w\gamma = o$. Та еквација представљаће пар правих ако је

$$(a - ku^2)(b - kv^2)(c - kw^2) + 2(f - kvw)(g - kwu)(h - kuv) - \cdot \cdot \cdot = o.$$

Кад се та еквација развије, видеће се да су коефицијенти који стоје уз k^3 и k^2 идентично $= o$; с тога ће k имати само једну вредност:

$$k = \frac{\triangle}{\Sigma}\cdot$$

Тражена еквација биће дакле овог облика:

$$\Sigma f(\alpha, \beta, \gamma) = \triangle (u\alpha + v\beta + w\gamma)^2.$$

Напом. Сличну еквацију смо добили и у чл. 237.

6. Наћи еквацију асимптотâ криве $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$. —

Асимптоте су тангенте коничног пресека у оним тачкама у којима га сече права у бескрајности, па је према томе еквација асимптотâ ово:

$$\begin{vmatrix} a & h & g & sinA \\ h & b & f & sinB \\ g & f & c & sinC \\ sinA & sinB & sinC & o \end{vmatrix} f(\alpha, \beta, \gamma) = \triangle (\alpha sinA + \beta sinB + \gamma sinC)^2.$$

7. Наћи погодбу под којом ће општа еквација $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$ представљати један круг.

Нека су α, β, γ координате тачке на крају полудијаметра ϱ_a који иде напоредо са страном BC основног троугла, а α', β', γ' координате средишта. У том случају биће

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta' + \varrho_a \sin C, \ \gamma = \gamma' - \varrho_a \sin B\ ;$$

с тога је и

$$f(\alpha', \beta' + \varrho_a \sin C, \gamma' - \varrho_a \sin B) = o.$$

Ова еквација је квадратна по непознатој ϱ_a, па како је збир коренâ њезиних $= o$, биће

$$f(\alpha', \beta', \gamma') + \varrho_a^2 f(o, \sin C, -\sin B) = o$$

или

$$f(\alpha', \beta', \gamma') + \varrho_a^2 (b \sin^2 C + c \sin^2 B - 2f \sin B \sin C) = o.$$

Том еквацијом је одређен полудијаметар ϱ_a. Сличним начином добили бисмо још две еквације којима би били одређени полудијаметри ϱ_b и ϱ_c. Ако је коничан пресек круг, биће

$$\varrho_a = \varrho_b = \varrho_c,$$

т. ј. погодбе под којима општа еквација $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$ представља круг биће ово:

$$f(o, \sin C, -\sin B) = f(\sin C, o, -\sin A) = f(\sin B, -\sin A, o).$$

8. Нека права дира коничан пресек $b_x^2 = o$. Наћи место полова тих правих с обзиром на коничан пресек $a_x^2 = o$.

Полара тачке y с обзиром на $a_x^2 = o$ је

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) = o$$

или

$$Y_1 x_1 + Y_2 x_2 + Y_3 x_3 = o,$$

где је

$$Y_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \qquad \text{и т. д.}$$

Та полара биће тангента коничног пресека $b_x^2 = o$ ако је

$$(B_1 Y_1 + B_2 Y_2 + B_3 Y_3)^2 = o$$

или

$$B_y^2 = o,$$

т. ј. место полова је један коничан пресек.

9. Место полова тангената коничног пресека a_x^2 с обзиром на $x_1^2 + x_1^2 + x_3^2 = o$ јесте

$$A_x^2 = o.$$

10. Дате су три тачке A, B, C. Поларе тих тачака с обзиром на коничан пресек $a_x^2 = o$ граде троугао $A'B'C'$. Доказати да су троугли ABC и $A'B'C'$ у перспективи.

Нека су y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3; w_1, w_2, w_3 координате темена̂ A, B, C.

Поларе тих темена̂ биће ово:

$$a_x \cdot a_y = o, \quad a_x \cdot a_z = o, \quad a_x \cdot a_w = o,$$

а права AA' која спаја теме A с тачком A' у којој се секу поларе темена̂ z и w је ово:

$$(a_x \cdot a_z)(a_y \cdot a_w) - (a_x \cdot a_w)(a_y \cdot a_z) = o.$$

Сличним путем дало би се доказати да су еквације правих BB' и CC' ово:

$$(a_x \cdot a_w)(a_z \cdot a_y) - (a_x \cdot a_y)(a_z \cdot a_w) = o,$$

$$(a_x \cdot a_y)(a_w \cdot a_z) - (a_x \cdot a_z)(a_w \cdot a_y) = o.$$

Збир последњих трију еквација је $\equiv o$, т. ј. и т. д. (Види чл. 172.)

11. Наћи еквацију пола праве v с обзиром на $A_u^2 = o$.

Одг. $A_u \cdot A_v = o$.

12. Наћи еквацију двеју тачака у којима нека права v сече криву $A_u^2 = o$.

Одг. $A_v^2 \cdot A_u^2 - (A_u \cdot A_v)^2 = o$.

СПЕЦИЈАЛНЕ ПУНКТУАЛНЕ И ТАНГЕНЦИЈАЛНЕ ЕКВАЦИЈЕ.

365. *Наћи еквацију коничних пресека који су описани око основног троугла.*

Општа еквација коничних пресека је овог облика:

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = o. \quad (1)$$

Координате темена A основног троугла су $\dfrac{2A}{a}$, o, o. Како крива (1) пролази кроз то теме, то је јасно да ће коефицијенат a, који стоји уз α^2 у еквацији (1), бити $= o$. Имајући у виду да темена B и C основног троугла такођер треба да леже на кривој (1), могли бисмо доказати да су и коефицијенти b и $c = o$. Према томе се види да бисмо еквацију коничних пресека, који су описани око основног троугла, могли у опште написати у овом облику:

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = o \qquad (2)$$

или

$$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = o. \qquad (3)$$

Напишимо сад еквацију (2) овако:

$$\gamma\,(l\beta + m\alpha) + n\alpha\beta = o. \qquad (4)$$

По тој еквацији види се да крива (4) пролази кроз ове четири тачке: 1-во, кроз тачке у којима страна γ сече стране α и β, т. ј. кроз темена A и B и 2-го, кроз тачке у којима права $l\beta + m\alpha = o$ сече стране α и β. Та права $l\beta + m\alpha = o$ пролази међу тим кроз теме C (α, β). Према томе је јасно да права $l\beta + m\alpha = o$ или $l/\alpha + m/\beta = o$ дира криву (4) у темену C основног троугла. — Сличним путем могло би се доказати да су и праве $m/\beta + n/\gamma = o$ и $n/\gamma + l/\alpha = o$ тангенте коничног пресека (4) у теменима A и B основног троугла.

Прим. Наћи погодбу под којом ће права $u\alpha + v\beta + w\gamma = o$ дирати коничан пресек $l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = o$.

Одг. Погодба је ово:

$$\sqrt{lu} + \sqrt{mv} + \sqrt{nw} = o.$$

То би дакле била *тангенцијална еквација* коничног пресека $l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = o$.

366. *Наћи еквацију круга који је описан око основног троугла.*

Сви кругови пролазе кроз фокојиде I и J бескрајне равни.

Координате имагинарне тачке I су (прим. 11. стр. 242.) ово:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\cos B + i\sin B, \quad \frac{\beta}{\gamma} = -\cos A - i\sin A.$$

Узмимо сад да еквација (2) представља један круг. Ако у тој еквацији сменимо $\alpha : \beta : \gamma$ координатама тачке I, добићемо ово:

$$-l(\cos B + i \sin B) - m(\cos A - i \sin A) + n = o.$$

Јасно је да реалан и имагинаран део ове еквације посебице морају бити $= o$; биће дакле

$$-l \cos B - m \cos A + n = o, \qquad (5)$$

и

$$-l \sin B + m \sin A = o.$$

По овој другој погодбеној релацији је дакле

$$\frac{l}{\sin A} = \frac{m}{\sin B} = \mu$$

или

$$l = \mu \sin A, \quad m = \mu \sin B.$$

Сменимо сад у еквацији (5) l и m са $\mu \sin A$ и $\mu \sin B$. Добићемо ово:

$$n = \mu \sin(A + B) = \mu \sin C.$$

Према томе је $\mu = n/\sin C$, а кад се то има у виду биће јасно да је и

$$\frac{l}{\sin A} = \frac{m}{\sin B} = \frac{n}{\sin C}.$$

Услед тога ће еквација круга, који је описан око основног троугла, бити ово:

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = o \qquad (6)$$

или

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = o. \qquad (7)$$

Напомена. Еквације (6) и (7) могу се и овако написати:

$$\frac{\sin A}{\alpha} + \frac{\sin B}{\beta} + \frac{\sin C}{\gamma} = o \qquad (6^*)$$

и

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = o. \qquad (7^*)$$

Прим. 1. Са k ћемо означити једну сталну количину. Доказати да еквација

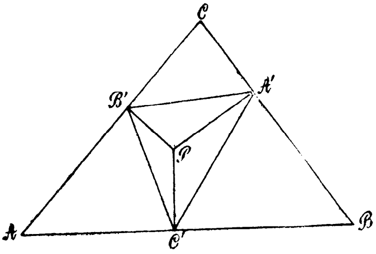
$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = k$$

представља један круг који има исто средиште као и круг $\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = o$.

Прим. 2. Наћи тангенцијалну еквацију круга који је описан око основног троугла.

Одг. $$\sqrt{au} + \sqrt{bv} + \sqrt{cw} = o.$$

367. Геометријски би се еквација (6) могла овако протумачити. Ако су A', B', C' ортогоналне пројекције неке тачке P на појединим странама основног троугла, онда ће дужи PA', PB', PC' бити управо нормалне координате α, β, γ тачке P. Двојне површине троуглова $B'PC'$, $C'PA'$, $A'PB'$ биле би дакле ово: $\beta\gamma \sin A, \gamma\alpha \sin B$, $\alpha\beta \sin C$. Према томе ће двојна површина троугла $A'B'C'$ бити ово:



Сл. 175.

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C.$$

По еквацији (6) види да ће та површина бити $= o$ кад тачка P лежи на кругу. Пројекције A', B', C' неке накружне тачке P су дакле колинеарне и леже на Симсоновој правој (прим. 16. стр. 331.).

368. Теорема. *Сваки круг може се представити оваквом еквацијом:*

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C$$
$$+ (l\alpha + m\beta + n\gamma)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) = o. — \qquad (8)$$

Сваки круг пролази на име кроз фокојиде, а ти фокојиди леже, као што знамо, на правој у бескрајности. Кад се има у виду то, да еквација $\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = o$ представља круг, а еквација $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin A = o$ праву у бескрајности, биће јасно да изрази $\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C$ и $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$ посебице морају бити $= o$ кад се у њима α, β, γ смене координатама фокојида̂. С тога ће и агрегат (8) тих израза у том случају бити $= o$, т. ј. еквација (8) представљаће *de facto* један круг. У тој еквацији има међу тим три неодређена параметра l, m, n; ти параметри могу се дакле одредити тако, да круг (8) мора пролазити кроз три дате тачке, а по томе се види да еквација (8) може представљати сваки круг у равни.

Напомене. 1-во. Еквација (8) може се написати и у овом облику:

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta + (l\alpha + m\beta + n\gamma)(a\alpha + b\beta + c\gamma) = o. \qquad (8^*)$$

Са a, b, c су у тој еквацији означене дужине страна основног троугла.

2-го. Радикална осовина кругова (8) и (6) је

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o.$$

3-ће. Кад бисмо сем круга (8) узели још један круг, чија би еквација била сличног облика, била би еквација радикалне осовине тих кругова ово:

$$(l - l')\alpha + (m - m')\beta + (n - n')\gamma = o.$$

Прим. 1. Наћи круг који пролази кроз средине странâ основног троугла.

Координате средине стране BC су $\alpha : \beta : \gamma = o : \sin C : \sin B$. Ако та тачка лежи на кругу (8), биће

$$\sin A \sin B \sin C + 2 \sin B \sin C (m \sin C + n \sin B) = o.$$

или

$$2m \sin C + 2n \sin B = - \sin A.$$

Како и средине осталих двеју основних страна леже на том кругу, то ћемо добити још ове две погодбене релације:

$$2n \sin A + 2l \sin C = - \sin B, \quad 2l \sin B + 2m \sin A = - \sin C.$$

Ако последње три погодбене еквације решимо по непознатима $2l$, $2m$, $2n$, добићемо ово:

$$2l = - \cos A, \quad 2m = - \cos B, \quad 2n = - \cos C.$$

Према томе је еквација круга, који у овај мах тражимо, ово:

$$2(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C)$$
$$-(\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) = o \qquad (a)$$

или

$$\alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C$$
$$- 2\beta\gamma \sin A - 2\gamma\alpha \sin B - 2\alpha\beta \sin C = o. \qquad (b)$$

[*Напом.* Круг, који пролази кроз средине страна неког троугла, је круг деветорих тачака (прим. 21. стр. 532). Према томе последње две еквације представљају круг деветорих тачака.].

Прим. 2. Општа квадратна еквација $a\alpha^2 + b\beta^2 + \cdot \cdot \cdot = o$ представља један круг. Доказати да је радикална осовина тог круга и круга који је описан око основног троугла ово:

$$a\alpha/\sin A + b\beta/\sin B + c\gamma/\sin C = o.$$

Прим. 3. Нека права $OP P_1 P_2 P_3$ обрће се око сталне тачке O и сече стране неког датог троугла у тачкама P_1, P_2, P_3. На тој правој узећемо једну тачку P тако, да је

$$\left(\frac{1}{OP_1} - \frac{1}{OP}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{OP_2} - \frac{1}{OP}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{OP_3} - \frac{1}{OP}\right)^{-1} = o.$$

Место тачака P је конични пресек који је описан око датог троугла. **(*Cotes-ова теорема.*)**

Прим. 4. Тежиште троугла ABC је средиште описаног коничног пресека. Наћи еквацију тог пресека у барицентричним координатама.

Одг. $yz + zx + xy = o$.

369. *Наћи еквацију коничних пресека који су уписани у основни троугао.*

Страна $\alpha = o$ основног троугла сече коничан пресек $a\alpha^2 + b\beta^2 + \cdot\cdot\cdot = o$ у опште у двема тачкама. Јасно је да ће те тачке бити одређене системом ових двеју еквација:

$$\alpha = o, \quad b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma = o.$$

Ова последња еквација $b\beta^2 + \cdot\cdot\cdot = o$ представља две праве које спајају теме $A\,(\beta, \gamma)$ са оним двема тачкама, у којима страна $\alpha = o$ сече коничан пресек. Ако се узме да еквација $b\beta^2 + \cdot\cdot\cdot = o$ представља једну двојну праву, биће јасно да ће у том случају страна α бити тангента коничног пресека. Погодба под којом еквација $b\beta^2 + \cdot\cdot\cdot = o$ представља двојну праву је ово: $f^2 = bc$, па ће с тога том релацијом $f^2 = bc$ бити уједно обележена и погодба под којом ће страна α основног троугла дирати коничан пресек $a\alpha^2 + b\beta^2 + \cdot\cdot\cdot = o$. Сличним путем дало би се доказати да ће остале две стране β и γ дирати коничан пресек $a\alpha^2 + b\beta^2 + \cdot\cdot\cdot = o$ ако је $g^2 = ca$, а $h^2 = ab$.

По тим погодбеним еквацијама $f^2 = bc$, $g^2 = ca$, $h^2 = ab$ види се да коефицијенти a, b, c еквације (1) у овај мах имају исте знаке. Могли бисмо дакле претпоставити да су сва та три коефицијента позитивна, да је н. пр.

$$a = l^2, \quad b = m^2, \quad c = n^2.$$

Према томе би било

$$f = \pm mn, \quad g = \pm nl, \quad h = \pm lm.$$

Општи облик еквације коничних пресека, који су уписани у основни троугао, је дакле ово:

$$l^2\alpha^2+m^2\beta^2+n^2\gamma^2\pm 2mn\beta\gamma\pm 2nl\gamma\alpha\pm 2lm\alpha\beta=o. \qquad (9)$$

У тој еквацији је број чланова који имају позитиван знак или паран или непаран; у првом случају би полином еквације (9) био потпун квадрат линеарне функције $l\alpha\pm m\beta\pm n\gamma$, па би с тога у том случају еквација (9) представљала једну двојну праву. У оном другом случају представљала би еквација (9) прави коничан пресек, а еквације тих коничних пресека биле би ово:

$$\left.\begin{aligned} &l^2\alpha^2+m^2\beta^2+n^2\gamma^2-2mn\beta\gamma-2nl\gamma\alpha-2lm\alpha\beta=o,\\ &l^2\alpha^2+m^2\beta^2+n^2\gamma^2-2mn\beta\gamma+2nl\gamma\alpha+2lm\alpha\beta=o,\\ &l^2\alpha^2+m^2\beta^2+n^2\gamma^2+2mn\beta\gamma-2nl\gamma\alpha+2lm\alpha\beta=o,\\ &l^2\alpha^2+m^2\beta^2+n^2\gamma^2+2mn\beta\gamma+2nl\gamma\alpha-2lm\alpha\beta=o. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Норма тих четирију еквација биће ово:

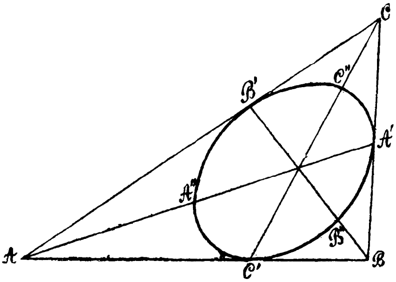
$$\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=o. \qquad (11)$$

Та норма преобразиће се у једну од четирију еквација системе (10) кад се степеновањем ослободи корена̂, и то у прву кад се узме да параметри l, m, n имају исти знак (н. пр. $l=L^2, m=M^2, n=N^2$), у другу кад се узме да су параметри m и n позитивни, а параметар l негативан или обратно (н. пр. да је $l=-L^2$, $m=M^2$, $n=N^2$) и т. д. Ако узимамо све те случајеве у виду, биће јасно да ћемо еквацију (11) моћи написати у једном од ових четирију облика:

$$\left.\begin{aligned} &L\sqrt{\alpha}+M\sqrt{\beta}+N\sqrt{\gamma}=o,\\ &L\sqrt{-\alpha}+M\sqrt{\beta}+N\sqrt{\gamma}=o,\\ &L\sqrt{\alpha}+M\sqrt{-\beta}+N\sqrt{\gamma}=o,\\ &L\sqrt{\alpha}+M\sqrt{\beta}+N\sqrt{-\gamma}=o. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Прва између ових еквација представља, као што ћемо одмах видети, један коничан пресек који је *de facto* уписан у основни троугао. Тачка A', у којој страна $\alpha = o$ дира тај пресек била би на име одређена системом ових двеју еквација:

$$\alpha = o, \quad M^2\beta - N^2\gamma = o.$$



Сл. 176.

По еквацији $M^2\beta^2 - N^2\gamma = o$ види се да координате β и γ додирне тачке A' имају исте знаке, а то значи да тачка A' лежи између тачака B и C. Сличним путем би се могло доказати да и тачке B' и C' леже између темена̂ основног троугла. Напротив, кад бисмо потражили координате тачака у којима остала три конична пресека дирају стране основног троугла, нашли бисмо да су ти конични пресеци *спопа уписани* (*conique ex-inscrite*) у основни троугао, т. ј нашли бисмо да само једна додирна тачка лежи између темена̂ троуглових; остале две лежале би на странама основног троугла спопа, изван темена̂ тог троугла. Први између тих коничних пресека дира страну BC између темена B и C, други страну CA између темена C и A, а трећи страну AB између темена A и B.

Прим. 1. Са α, β, γ означене су координате средишта коничног пресека $\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma}$. Доказати да је

$\alpha/(n \sin B + m \sin C) = \beta/(l \sin C + n \sin A) = \gamma/(m \sin A + l \sin B)$.

Прим. 2. Доказати да тачке, у којима се са супротним странама основног троугла секу тангенте што су (сл. 176.) на коничан пресек повучене у тачкама A'', B'', C'', леже на једној правој.

Прим. 3. Наћи погодбу под којом ће права $u\alpha + v\beta + w\gamma = o$ дирати коничан пресек $\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = o$.

Одг. Погодба је ово:

$$\frac{l}{u}+\frac{m}{v}+\frac{n}{w}=o$$

или

$$lvw+mwu+nuv=o.$$

То би дакле била *тангенцијална еквација* коничних пресека, која одговара еквацији $\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=o$.

Прим. 4. Наћи погодбу под којом ће три праве $u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma=o$, $u_2\alpha+v_2\beta+w_2\gamma=o$, $u_3\alpha+v_3\beta+w_3\gamma=o$ дирати коничан пресек $\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=o$.

Одг. Погодба је ово:

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{u_i} & \frac{1}{v_i} & \frac{1}{w_i}\end{vmatrix}=o. \qquad (i=1,2,3)$$

Прим. 5. Наћи погодбу под којом ће еквација $\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=o$ представљати параболу.

Прим. 6. Једна жижа коничних пресека $\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=o$ креће се по правој $u\alpha+v\beta+w\gamma=o$. Наћи место које ће описати друга жижа.

Одг. Место је коничан пресек $u/\alpha+v/\beta+w/\gamma=o$.

[*Напом.* Ако су координате жижâ ово: α', β', γ' и $\alpha'', \beta'', \gamma''$, биће (чл. 266.)

$\alpha'\alpha''=\beta'\beta''=\gamma'\gamma''=$ квадрату мале полуосовине.]

370. *Наћи еквацију круга који је уписан у основни троугао.*

Јасно је да је круг о коме је у овај мах реч потпуно одређен. Према томе ће коефицијенти L, M, N који се јављају у еквацијама (12) у овај мах имати одређене вредности. Те вредности ћемо наћи овако.

Означићемо поново са A', B', C' тачке у којима круг дира стране BC, CA, AB основног троугла и имаћемо у виду најпре круг који је заиста уписан у основни троугао. Координате тачке A' су одређене овом системом еквација: $\alpha=o, M^2\beta-N^2\gamma=o$, па је према томе

$$N^2/M^2 = \beta/\gamma = A'C\sin C/(A'B\sin B),$$

па како је

$$A'C = r\cot\frac{C}{2}, \quad A'B = r\cot\frac{B}{2},$$

биће и

$$N^2/M^2 = \cos^2\frac{C}{2} \bigg/ \cos^2\frac{B}{2}.$$

Сличну вредност бисмо нашли и за L^2/M^2. Према томе би еквација уписаног круга била ово:

$$\cos\frac{A}{2}\sqrt{\alpha} + \cos\frac{B}{2}\sqrt{\beta} + \cos\frac{C}{2}\sqrt{\gamma} = o. \qquad (13)$$

Сличним путем бисмо нашли да су еквације оних кругова који су споља уписани у основни троугао ово:

$$\cos\frac{A}{2}\sqrt{-\alpha} + \sin\frac{B}{2}\sqrt{\beta} + \sin\frac{C}{2}\sqrt{\gamma} = o,$$

$$\sin\frac{A}{2}\sqrt{\alpha} + \cos\frac{B}{2}\sqrt{-\beta} + \sin\frac{C}{2}\sqrt{\gamma} = o,$$

$$\sin\frac{A}{2}\sqrt{\alpha} + \sin\frac{B}{2}\sqrt{\beta} + \cos\frac{C}{2}\sqrt{-\gamma} = o.$$

Напомена. Те исте еквације добили бисмо и по оном методу, по коме смо нашли еквацију круга који је описан око основног троугла.

371. Фајербахова теорема. *Круг деветорих тачака неког троугла додирује кругове који су уписани у тај троугао.*

Са A', B', C' означићемо средине датог троугла ABC и узећемо троугао $A'B'C'$ за основни троугао. У тој системи биће еквација круга деветорих тачака троугла ABC ово:

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = o, \qquad (14)$$

а еквација ма ког другог круга била би у опште овог облика:

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta - (a\alpha + b\beta + c\gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) = o. \quad (15)$$

Стране BC, CA, AB датог троугла ABC иду напоредо са странама $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ основног троугла и пролазе кроз темена A', B', C' основног троугла. С тога су еквације странâ BC, CA, AB (прим. 15. стр. 244.) ово:

$$b\beta + c\gamma = o, \quad c\gamma + a\alpha = o, \quad a\alpha + b\beta = o.$$

Страна $b\beta + c\gamma = o$ сече круг (15) у двема тачкама, а координате тих тачака одређене су системом ових двеју еквација:

$$b\beta + c\gamma = o, \quad (a\beta + b\alpha)\left(-\frac{b}{c}\beta\right) + c\alpha\beta - \left(u\alpha + v\beta - \frac{w}{c}b\beta\right)a\alpha = o.$$

Ако се претпостави да страна $b\beta + c\gamma = o$ дира круг (15), биће јасно да ће у том случају еквација $(a\beta + b\alpha)\left(-\frac{b}{c}\beta\right) + \ldots = o$ представљати једну двојну праву; страна BC дираће дакле круг (15) ако је

$$4\left(-\frac{ab}{c}\right)(-ua) = \left(-\frac{b^2}{c} + c - av + \frac{awb}{c}\right)^2$$

или

$$\pm 2\sqrt{abc}\,\sqrt{au} = c^2 - b^2 + abw - cav.$$

Сличним путем могли бисмо доказати да ће стране CA и AB дирати круг (15) ако је

$$\pm 2\sqrt{abc}\,\sqrt{bv} = a^2 - c^2 + bcu - abw,$$

$$\pm 2\sqrt{abc}\,\sqrt{cw} = b^2 - a^2 + cav - bcu.$$

То су дакле погодбе под којима ће круг (15) бити уписан у троугао ABC. Ако саберемо те три погодбене релације добићемо ово:

$$\pm\sqrt{au}\pm\sqrt{bv}\pm\sqrt{cw}=o.$$

То је међу тим погодба под којом права $u\alpha+v\beta+w\gamma=o$ дира (чл. 365.) круг (14), па како је права $u\alpha+v\beta+w\gamma=o$ радикална осовина кругова (14) и (15), биће јасно уједно и то, да ће се и кругови (14) и (15) додиривати, а то смо и тврдили.

372. Теорема. *Кад темена двају троуглова леже на једном коничном пресеку, онда стране тих троуглова дирају један коничан пресек.*

Нека су ABC и $A'B'C'$ дати троугли. Троугао ABC узећемо за основни троугао и претпоставићемо да су еквације страна̂ оног другог троугла ово:

$$u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma=o,\quad u_2\alpha+v_2\beta+w_2\gamma=o,$$

$$u_3\alpha+v_3\beta+w_3\gamma=o.$$

Еквација коничног пресека који је описан око $A'B'C'$ биће овог облика:

$$l(u_2\alpha+v_2\beta+w_2\gamma)(u_3\alpha+v_3\beta+w_3\gamma)+m(u_3\alpha+v_3\beta+w_3\gamma)(u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma)+n(u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma)(u_2\alpha+v_2\beta+w_2\gamma)=o.$$

Ако тај коничан пресек пролази кроз тачке A, B, C, биће

$$lu_2u_3+mu_3u_1+nu_1u_2=o,\quad lv_2v_3+mv_3v_1+nv_1v_2=o,$$

$$lw_2w_3+mw_3w_1+nw_1w_2=o$$

или

$$l/u_1 + m/u_2 + n/u_3 = o, \; l/v_1 + m/v_2 + n/v_3 = o,$$

$$l/w_1 + m/w_2 + n/w_3 = o.$$

Ако елиминирамо l, m, n добићемо погодбу под којом ће поменута темена — а на број их је шест — лежати на једном коничном пресеку. Та погодба биће дакле ово:

$$\left| \frac{1}{u_i} \quad \frac{1}{v_i} \quad \frac{1}{w_i} \right| = o, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

а то је уједно и погодба под којом ће (прим. 4. чл. 369.) стране троугла $A'B'C'$ дирати један коничан пресек који је уписан у основни троугао ABC. q. e. d.

На основу те теореме могли бисмо одмах доказати и ову теорему: *ако су дата два конична пресека S и S' и ако се може наћи један троугао ABC који је уписан у S, а описан око S', онда има бескрајно много таквих троуглова.*

Узмимо само на коничном пресеку S' ма где једну тачку и повуцимо у тој тачци тангенту на S'. Та тангента сећи ће S у тачкама A' и B'. Из тих тачака повући ћемо тангенте на S' и означићемо тачку у којој се оне секу са C'. Стране троуглова ABC и $A'B'C'$ дирају коничан пресек S'. С тога ће темена A, B, C, A', B', C' лежати на једном коничном пресеку. Но како тачке A, B, C, A', B' леже на S, то је јасно да ће и тачка C' лежати на S, јер се зна да има само један једини коничан пресек који пролази кроз поменутих пет тачака.

373. *Основни троугао трилинеарне системе је аутополаран троугао коничног пресека. Наћи еквацију тог коничног пресека.*

Еквација коничног пресека је у опште овог облика: $a\alpha^2 + b\beta^2 + \cdot \cdot \cdot = o$; с тога ће еквација полара̂ темена̂ основног троугла бити овог облика:

$$a\alpha+h\beta+g\gamma=o, \quad h\alpha+b\beta+f\gamma=o, \quad g\alpha+f\beta+c\gamma=o. \qquad (16)$$

Како је основни троугао аутополаран, то ће свака између поменутих трију полара бити једна страна основног троугла; полара $a\alpha + h\beta + g\gamma = o$ темена A биће страна BC основног троугла, а то ће рећи страна $\alpha = o$ и т. д. Погодбе под којима ће прва у системи еквација (16) представљати страну $\alpha = o$, друга страну $\beta=o$, а трећа страну $\gamma=o$, биће дакле ово: $f=g=h=o$. Према томе ће еквација коју тражимо у опште бити овог облика:

$$l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 = o. \qquad (17)$$

Јасно је да ће та еквација представљати једну реалну криву само ако коефицијенти l, m, n немају исти знак; један између тих коефицијената мора дакле бити негативан (позитиван), а остала два била би позитивна (негативна). Ми ћемо претпоставити да је $l=L^2$, $m=M^2$, $n = - N^2$. Према томе ће се еквација (17) преобразити у ову:

$$L^2\alpha^2 + M^2\beta^2 - N^2\gamma^2 = o. \qquad (18)$$

По тој еквацији види се да тачке у којима страна $\alpha=o$ сече коничан пресек леже на правима $M\beta + N\gamma = o$ и $M\beta - N\gamma = o$. Те две праве гранају се из темена A, а свака од њих сече коничан пресек у двема тачкама које се поклапају. С тога ћа еквације $M\beta + N\gamma = o$, $M\beta - N\gamma = o$ представљати тангенте што су из темена A повучене на коничан пресек. Из сличних разлога су и праве $L\alpha + N\gamma = o$ и $L\alpha - N\gamma = o$ тангенте коничног пресека. Те тангенте секу се у темену B основног троугла. Тангенте што су из темена C повучене на коничан пресек биле би имагинарне; еквација тих двеју тангената је $L^2\alpha^2 + M^2\beta^2 = o$, а корда која спаја додирне тачке њихове је страна γ основног троугла. Та страна не ће сећи коничан пресек, јер је она полара темена C из кога се на коничан пресек могу повући само две имагинарне тангенте.

Прим. 1. Нађи погодбу под којом ће права $u\alpha+v\beta+w\gamma=o$ дирати коничан пресек $l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2=o$.

Одг. Погодба је ово:

$$\frac{u^2}{l}+\frac{v^2}{m}+\frac{w^2}{n}=o.$$

То би дакле била *тангенцијална еквација* која одговара еквацији $l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2=o$.

Прим. 2. Нађи погодбу под којим ће еквација $l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2=o$ представљати 1-во, параболу, 2-го, равнострану хиперболу.

Прим. 3. Нађи еквацију ортоптичког круга коничног пресека $l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2=o$.

Одг. $$l\,(m+n)\,\alpha^2+m\,(n+l)\,\beta^2+n\,(l+m)\,\gamma^2+2mn\cos A\cdot\beta\gamma$$
$$+2nl\cos B\cdot\gamma\alpha+2lm\cos C\cdot\alpha\beta=o.$$

Прим. 4. Узећемо једну тангенту коничног пресека $a_x^2=o$ и сматраћемо ту тангенту као полару коничног пресека $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Нађи место пола.

Одг. Место је $1_x^2=o$.

374. *Основни троугао трилинеарне системе је аутополаран троугао круга. Нађи еквацију тог круга.*

Средиште је пол праве у бескрајности; с тога ће у датој трилинеарној системи средиште коничног пресека (17) бити одређено системом ових еквација:

$$\frac{l\alpha}{\sin A}=\frac{m\beta}{\sin B}=\frac{n\gamma}{\sin C}.$$

Узмимо сад да еквација (17) представља један круг. У том случају ће права што спаја неку тачку са средиштем круга бити управна на полари те тачке. Ако је дакле O средиште, биће $AO\perp BC$, $BO\perp CA$, $CO\perp AB$, т. ј. средиште O биће ортоцентар аутополарног троугла ABC. Како су координате ортоцентра (прим. 6. стр. 223.) $\sec A:\sec B:\sec C$, биће у овај мах

$$\frac{l\sec A}{\sin A}=\frac{m\sec B}{\sin B}=\frac{n\sec C}{\sin C}$$

или

$$\frac{l}{sin^2A} = \frac{m}{sin^2B} = \frac{n}{sin^2C},$$

па је с тога у датој координатној системи еквација круга овог облика:

$$\alpha^2 sin\,2A + \beta^2 sin\,2B + \gamma^2 sin\,2C = o. \qquad (19)$$

Напомена. Круг (19), круг који је описан око основног троугла и круг деветорих тачака су кругови коаксалне системе, а њихова радикална осовина је ова права:

$$\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C = o.$$

[Треба имати у виду еквацију (19) и еквације (a) и (b) у прим. 1. чл. 368.].

375. Узмимо сад две тангенте неког коничног пресека за две стране основног троугла, а корду што спаја додирне тачке тих тангената за трећу страну тог троугла. У тој системи биће еквација коничног пресека (чл. 333.) овог облика:

$$\alpha\beta = \gamma^2. \qquad (20)$$

Ако повучемо из темена (α, γ) праву $\alpha = \gamma tg\varphi$, а из темена (β, γ) праву $\beta = \gamma cot\varphi$, биће јасно да ће се те две праве сећи на коничном пресеку (20), јер је $\alpha\beta = \gamma^2 tg\,\varphi\, cot\,\varphi = \gamma^2$. Према томе ће координате ма које тачке коничног пресека (20) бити ово: 1, $cot^2\varphi$, $cot\,\varphi$ или $tg\,\varphi$, $cot\,\varphi$, 1. Ту тачку зваћемо *тачком* φ коничног пресека (20).

376. Еквација корде која спаја тачку φ с тачком φ_1 биће ово:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ tg\varphi & cot\varphi & 1 \\ tg\varphi_1 & cot\varphi_1 & 1 \end{vmatrix} = o$$

или

$$(\alpha - \gamma tg\varphi) - (\gamma - \beta tg\varphi)\, tg\varphi_1 = o$$

или у симболу

$$L - Mtg\varphi_1 = o.$$

Из сличних разлога би и еквације корада што спајају тачку φ с тачкама $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ биле овог облика:

$$L - Mtg\varphi_2 = o, \quad L - Mtg\varphi_3 = o, \quad L - Mtg\varphi_4 = o.$$

Јасно је да четири последње праве граде један прамен; теме тог прамена је тачка φ, а двојна напремица његова је (чл. 130.) ово:

$$(tg\varphi_1 - tg\varphi_3)\,(tg\varphi_2 - tg\varphi_4) : (tg\varphi_2 - tg\varphi_3)\,(tg\varphi_1 - tg\varphi_4)$$

или

$$sin\,(\varphi_1 - \varphi_3)\,sin\,(\varphi_2 - \varphi_4) : sin\,(\varphi_2 - \varphi_3)\,sin\,(\varphi_1 - \varphi_4), \qquad (21)$$

а та двојна напремица не зависи од положаја тачке φ. То би дакле опет био један доказ познате Шалове теореме (чл. 334.).

Напомена. Двојна напремица (21) поменутог прамена назива се просто *двојна напремица четирију тачака коничног пресека.*

377. Еквација тангенте у тачци φ је ово:

$$\alpha\, cot\,\varphi + \beta\, tg\,\varphi = 2\gamma. \qquad (22)$$

Ако из те еквације и еквације $a \cot \varphi_1 + \beta \, tg \varphi_1 = 2\gamma$ тангенте у тачци φ_1 елиминирамо γ, добићемо еквацију

$$\alpha (\cot \varphi - \cot \varphi_1) + \beta (tg \varphi - tg \varphi_1) = o;$$

како је

$$\frac{tg \varphi - tg \varphi_1}{\cot \varphi - \cot \varphi_1} = - tg \varphi \, tg \varphi_1,$$

биће јасно да ћемо последњу еквацију моћи написати и у овом облику:

$$\alpha \cot \varphi - \beta \, tg \varphi_1 = o.$$

То је еквација једне праве која спаја теме (α, β) основног троугла са тачком у којој се секу поменуте две тангенте. Из сличних разлога ће еквације оних правих, које спајају теме (α, β) са тачкама у којима тангенту у тачци φ секу тангенте у тачкама $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ бити овог облика:

$$\alpha \cot \varphi - \beta \, tg \varphi_2 = o, \quad \alpha \cot \varphi - \beta \, tg \varphi_3 = o, \quad \alpha \cot \varphi - \beta \, tg \varphi_5 = o.$$

Јасно је да четири последње праве граде један прамен; теме тог прамена је тачка (α, β), а двојна напремица његова је (чл. 128.) равна двојној напремици четирију тачака у којима тангенту у тачци φ секу тангенте што су на коничан пресек повучене у тачкама $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Та двојна напремица има ову вредност:

$$\sin (\varphi_1 - \varphi_3) \sin (\varphi_2 - \varphi_4) : \sin (\varphi_2 - \varphi_3) \sin (\varphi_1 - \varphi_4), \qquad (23)$$

а та двојна напремица не зависи од положаја тангенте. То значи *да је двојна напремица четирију тачака у којима нека покретна тангента сече четири сталне тангенте коничног пресека стална.*

Напомене. 1-во. Двојна напремица (23) поменутог низа назива се просто *двојна напремица четирију тангената.*

2-го. Двојне напремице (23) и (21) су једнаке, т. ј. *двојна напремица четирију тангената је равна двојној напремици четирију додирних тачака.*

3-ће. Ако права $u\alpha + v\beta + w\gamma = o$ дира коничан пресек $\alpha\beta = \gamma^2$, онда ће коефицијенти u, v, w бити сразмерни са коефицијентима $cot\,\varphi$, $tg\,\varphi$, — 2 еквације (22). Према томе ће бити

$$4uv = w^2.$$

Јасно је да је то *тангенцијална еквација* коничног пресеке $\alpha\beta = \gamma^2$.

378. Пођимо даље и означимо са θ некакав сталан угао. Јасно је да ће тачке $tg\,\varphi\, cot\,\theta$, $cot\,\varphi\, tg\,\theta$, 1 и $tg\,\varphi\, tg\,\theta$, $cot\,\varphi\, cot\,\theta$, 1 лежати на коничном пресеку $\alpha\beta = \gamma^2$. Ако прву између тих тачака назовемо тачка ψ, а другу тачка ψ', онда ћемо координате тих тачака моћи и овако написати: $tg\,\psi$, $cot\,\psi$, 1 и $tg\,\psi'$, $cot\,\psi'$, 1, па је према томе у овај мах $tg\,\psi : tg\,\psi' = cot\,\theta : tg\,\theta = const.$ *Ако се φ мења, мењаће се и те две тачке, а корда која их спаја заогрнуће један коничан пресек који је у двојном додиру са датим коничним пресеком.* Еквација те корде је на име ово:

$$\alpha\, cot\,\varphi + \beta\, tg\,\varphi = \gamma\, (tg\,\theta + cot\,\theta)\, ;$$

како је $tg\,\theta + cot\,\theta = 2\, cosec\, 2\,\theta$, то ћемо еквацију поменуте корде моћи написати у овом облику:

$$\alpha\, cot\,\varphi + \beta\, tg\,\varphi = cosec\, 2\,\theta \cdot 2\gamma.$$

Ако ту еквацију упоредимо са еквацијом (22), видећемо да је то еквација тангенте коничног пресека

$$\alpha\beta = cosec^2\, 2\,\theta \cdot \gamma^2,$$

а тај пресек је у двојном додиру са датим коничним пресеком дуж корде γ.

Прим. 1. Конични пресеци S и S' су у двојном додиру, а четири праве дирају S' у тачкама a, b, c, d и секу S у тачкама A, B, C, D и A', B', C', D'. Доказати да је двојна напремица четирију тачака A, B, C, D једнака с двојном напремицом тачака A', B', C', D' и с двојном напремицом тачака a, b, c, d. ***(Таунзендова теорема.)***

Прим. 2. Доказати да ће се тангенте што су у тачкама φ и φ' повучене на $\alpha\beta = \gamma^2$ сећи на једној сталној правој што пролази кроз теме (α, β) ако је $tg\,\varphi \cdot tg\,\varphi' = const.$

Тангенте у φ и φ' секу се на правој $\alpha - \beta\, tg\,\varphi\, tg\,\varphi' = o$, т. ј. и т. д.

Прим. 3. Некакав троугао је описан око коничног пресека, а два темена тог троугла крећу се дуж двеју сталних правих. Наћи место трећег темена.

Нека су φ, φ', φ'' додирне тачке, а $\alpha - k\beta = o$, $\alpha - k'\beta = o$ еквације двеју сталних правих. Како се тангенте у φ и φ', φ и φ'' секу на тим двема сталним правима, биће $tg\varphi tg\varphi' = k$, $tg\varphi tg\varphi'' = k'$. Услед тога су еквације тангената у тачкама φ' и φ'' ово:

$$\alpha\, tg\,\varphi + k^2\beta \cot\varphi = 2k\gamma, \quad \alpha\, tg\,\varphi + k'^2\beta \cot\varphi = 2k'\gamma.$$

Из тих двеју еквација треба елиминирати φ. Резултат је ово:

$$\alpha\beta\,(k + k')^2 = 4kk'\gamma^2,$$

т. ј. место трећег темена датог троугла је један коничан пресек који је у двојном додиру са датим коничним пресеком.

379. *Сваки коничан пресек који хармонијски дели две дијагонале неког тетраграма, делиће хармонијски и трећу дијагоналу његову.* (Хесе.)

Узмимо да су стране неког тетраграма праве DE, EM, MN и ND (сл. 58.). Дијагоналан троугао тог тетраграма је троугао ABC, а супротна темена су тачке D и M, E и N, F и L. Тај троугао ABC узећемо за основни троугао координатне системе и претпоставићемо да су трилинеарне координате x, y, z неке тачке везане са нормалним координатама α, β, γ те исте тачке овим релацијама:

$$x : y : z = l\alpha : m\beta : n\gamma.$$

Према томе би (чл. 91.) еквације страна тетраграмових биле ово: $x \pm y \pm z = o$. У тој координатној системи биће еквација коничног пресека у опште овог облика:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2fxy = o, \quad (24)$$

а погодба под којом ће тачке (x, y, z) и (x', y', z') бити хармонијски полови била би ово:

$$(ax' + hy' + gz')\, x + (hx' + by' + fz')\, y + (gx' + fy' + cz')\, z = o.$$

По тој погодбеној релацији јасно је да ће супротна темена D $(o, 1, 1)$ и M $(o, -1, 1)$ бити хармонијски полови само ако је

$$b - c = o.$$

Из сличних разлога биће и супротни парови E $(1, o, 1)$ и N $(1, o, -1)$, F $(1, 1, o)$ и L $(1, -1, o)$ хармонијски полови само ако је

$$a - c = o, \quad b - a = o.$$

Она прва погодба $b - c = o$ постоји међу тим кадгод и последње две постоје јер је $b - c \equiv (a - c) + (b - a)$, а кад се то има у виду биће јасно да је тим и поменута теорема доказана.

Дефиниција I. *Конични пресек и тетраграм су коњуговани, кад полара неког темена тог тетраграма пролази кроз супротно теме.* — По тој дефиницији види се да ће тачке, у којима некакав коничан пресек сече дијагонале коњугованог тетраграма, хармонијски делити раздаљину супротних темена̂ што леже на тој дијагонали. Поменуту Хесеову теорему могли бисмо дакле према тој новој дефиницији и овако формулисати: *кад су два пара супротних темена̂ неког тетраграма коњугована према неком коничном пресеку, онда су и остала два темена тетраграмова таква.*

Дефиниција II. *Коничан пресек и тетрастигмат су коњуговани, кад пол неке стране тог тетрастигмата* *лежи на супротној страни.* — Према тој дефиницији одговарала би Хесеовој теореми дуално ова теорема: *кад су два пара супротних стрaнâ неког тетрастигмата коњугована према неком коничном пресеку, онда су и остале две стране тетрастигматове такве.*

Прим. 1. Супротна темена неког тетраграма који је коњугован с коничним пресеком $a_x^2 = o$ су (сл. 58.) D и M, E и N, F и L; основни троугао је FNM, а еквације страна NM, MF, FN су $x_1 = o$, $x_2 = o$, $x_3 = o$. Доказати да је еквација четврте стране тетраграмове ово:

$$\frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{31}} + \frac{x_3}{a_{12}} = o.$$

Напом. Ту еквацију ћемо у идућем примеру означити са $x_4 = o$.

Прим. 2. Стране неког тетраграма су $x_1 = o$, $x_2 = o$, $x_3 = o$, $x_4 = o$. Доказати да се еквација коничног пресека који је коњуговап са тетраграмом може написати у овом облику:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 = o.$$

Ево доказа. Како је $x_4 \equiv x_1/a_{23} + x_2/a_{31} + x_3/a_{12}$, биће

$$x_4^2 \equiv \Sigma \frac{x_1^2}{a_{23}^2} + 2 \Sigma \frac{x_1 x_2}{a_{23} \cdot a_{31}} = \Sigma \frac{x_1^2}{a_{23}^2} + \frac{2}{a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}} \Sigma a_{12} x_1 x_2.$$

Еквација коничног пресека може се дакле написати овако:

$$\Sigma a_{11} x_1^2 + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \left(x_4^2 - \Sigma \frac{x_1^2}{a_{23}^2} \right) = o$$

или

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 = o.$$

Напом. Ако је тетрастигмат, чија су темена одређена еквацијама $U_1 = o$, $U_2 = o$, $U_3 = o$, $U_4 = o$, коњугован с коничним пресеком, онда се еквација тог коничног пресека може написати у овом облику:

$$\lambda_1 U_1^2 + \lambda_2 U_2^2 + \lambda_3 U_3^2 + \lambda_4 U_4^2 = o.$$

380. *Конични пресеци описани око теменâ једног тетрастигмата.*

Нека су D, O, E, F (сл. 60.) темена тетрастигматова, а $u = o$, $v = o$, $w = o$ еквације теменâ A, B, C дијагоналног троугла ABC. Ми ћемо претпоставити да су у тој трипунктуалној координатној системи еквације темена̂ тетрастигматових ово[1]):

$$u \pm v \pm w = o.$$

Према томе су тангенцијалне координате страна̂ FD, DO, OE, EF ово: $(1, o, 1)$, $(o, -1, 1)$, $(1, o, -1)$, $(o, 1, 1)$, а то значи да су пунктуалне еквације тих страна ово:

$$FD \cdot \cdot \cdot x + z = o, \quad DO \cdot \cdot \cdot y - z = o,$$

$$OE \cdot \cdot \cdot x - z = o, \quad EF \cdot \cdot \cdot y + z = o.$$

Еквација коничних пресека описаних око темена̂ тетрастигматових биће дакле

$$x^2 - z^2 = k\,(y^2 - z^2)$$

или

$$x^2 - ky^2 - (1 - k)\,z^2 = o,$$

а та се еквација под погодбом

$$a + b + c = o$$

може написати у овом симетричнијем облику:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = o.$$

По тој еквацији види се *да је дијагоналан троугао неког тетрастигмата аутополаран троугао свију око темена̂ тетрастигматових описаних коничних пресека.*

Корелативна теорема. *Дијагоналан троугао неког тетраграма је аутополаран троугао свију у стране тетраграмове уписаних коничних пресека.*

---

[1]) У чл. 103. су темена тетрастигматова представљена овим еквацијама: $la \pm m\beta \pm n\gamma = o$. Но како трипунктуалне тангенцијалне координате не морају бити (чл. 120.) баш саме нормале или боље рећи напремице тих нормала, то је јасно да ћемо у некој посебној координатној системи тетрастигмат моћи представити и еквацијама $u \pm v \pm w = o$.

Прим. 1. Наћи место средиштâ коничних пресека уписаних у тетраграм $l\alpha \pm m\beta \pm n\gamma = o$.

Одг. Место је права

$$\frac{l^2\alpha}{\sin A} + \frac{m^2\beta}{\sin B} + \frac{n^2\gamma}{\sin C} = o$$

Та права је њутнијанка тетраграмова. (Види прим. 12. стр. 546.)

Прим. 2. Наћи место средиштâ коничних пресека описаних око тетрастигмата $lu \pm mv \pm nw = o$.

Одг. $$\frac{l^2 \sin A}{\alpha} + \frac{m^2 \sin B}{\beta} + \frac{n^2 \sin C}{\gamma} = o.$$

(Види прим. 21. стр. 532.)

381. Теорема. *Свакој тачци у равни одговара једна тачка која је хармонијски коњугована према свима коничним пресецима описаним око теменâ неког тетрастигмата. Ако се једна од тих тачака креће по некој датој правој, онда ће место оне друге тачке бити један коничан пресек описан око дијагоналног троугла тетрастигматова.*

Ако узмемо дијагоналан троугао тетрастигмата за основни троугао, моћи ћемо (чл. 380.) еквацију коничних пресека описаних око теменâ тетрастигматових написати у овом облику:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = o,$$

а под погодбом $a+b+c=o$. Полара неке тачке (x', y', z') је

$$axx' + byy' + czz' = o\,;$$

на тој правој лежи и тачка $(1/x', 1/y', 1/z')$ јер је, као што поменусмо, $a + b + c = o$, па су с тога тачке (x', y', z') и $(1/x', 1/y', 1/z')$ коњуговане према свима коничним пресецима описаним око теменâ тетрастигматових. Ако се сад прва тачка (x', y', z') креће по сталној правој (u, v, w), биће

$$ux' + vy' + wz' = o.$$

Према томе ће координате x, y, z оне друге тачке међу собом бити везане овим релацијама:

$$\frac{u}{ax} = \frac{v}{by} = \frac{w}{cz} (= k);$$

с тога је и

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = k\,(a + b + c);$$

но како је $a + b + c = o$, то је уједно и

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = o$$

или

$$uyz + vzx + wxy = o,$$

а то је еквација једног коничног пресека описаног око дијагоналног троугла.

Корелативна теорема. *Свакој правој у равни одговара једна права која је хармонијски коњугована према свима коничним пресецима уписаним у стране једног тетраграма. Ако се једна од тих правих обрће око неке дате тачке, онда ће она друга права заогрнути један коничан пресек уписан у дијагоналан троугао тетраграмов.*

Примери

[У свима примерима је са ABC означен основни троугао.]

1. Двојна напремица четирију колинеарних тачака је једнака с двојном напремицом њихових полара. —

Нека су α', β', γ' и $\alpha'', \beta'', \gamma''$ координате двеју тачака оне праве на којој леже четири тачке, а $P' = o$, $P'' = o$ еквације полара тих двеју тачака. Еквација поларе тачке $\alpha' + \lambda\alpha''$, $\beta' + \lambda\beta''$, $\gamma' + \lambda\gamma''$ биће $P' + \lambda P'' = o$, т. ј. и т. д.

2. Ако су x_1, x_2, x_3, x_4 четири стране неког тетраграма, онда ће еквација коничног пресека, који дира праву $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$ и који је сем тога уписан у тетраграм, бити овог облика:

$$\Sigma (a_1 - a_4)^2 (a_2 - a_3)^2 (x_1x_4 + x_2x_3) = o.$$

Cayley.

3. Наћи екваццју круга који пролази кроз средишта споља уписаних кругова.

Одг. $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + (a + b + c)(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = o.$

4. Наћи екваццју круга чији је дијаметар BC.

Одг. $\alpha^2 \cos A = \beta\gamma + \alpha (\beta \cos B + \gamma \cos C).$

5. Одредити λ тако, да еквација $\alpha^2 = \lambda\beta\gamma$ представља параболу. Наћи управницу те параболе.

Одг. $\lambda = 4bc/a^2$; $a\alpha \cos A = c\beta + b\gamma.$

6. Поларе тачака на средини странâ основног троугла према уписаном коничном пресеку затварају троугао чија је површина стална и равна површини основног троугла.

Faure.

7. Наћи еквацију коничног пресека који дира праве $\alpha, \beta, \gamma,$ $l\alpha + m\beta + n\gamma,$ $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma.$

Одг. $$\sqrt{\lambda\alpha} + \sqrt{\mu\beta} + \sqrt{\nu\gamma} = o,$$

а коефицијенти λ, μ, ν су одређени овом системом еквација:

$$\frac{\lambda}{l} + \frac{\mu}{m} + \frac{\nu}{n} = o, \quad \frac{\lambda}{l'} + \frac{\mu}{m'} + \frac{\nu}{n'} = o.$$

8. Доказати да су конични пресеци

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = o, \quad \sin\frac{A}{2}\sqrt{\alpha} + \sin\frac{B}{2}\sqrt{\beta} + \sin\frac{C}{2}\sqrt{\gamma} = o$$

конфокални.

Lemoine.

9. Наћи место жижâ параболâ уписаних у основни троугао ABC.

10. Наћи место жижâ коничних пресека уписаних у тетраграм

$$l\alpha \pm m\beta \pm n\gamma = o.$$

Одг. $$(\alpha \sin A + \cdot \cdot \cdot)(l^2\alpha^2 \cot A + \cdot \cdot \cdot)$$
$$= (\beta\gamma \sin A + \cdot \cdot \cdot)(l^2\alpha/\sin A + \cdot \cdot \cdot).$$

Koehler.

11. Један између двају концентричних и сличних коничних пресека је уписан, а други је описан око неког троугла. Место заједничког средишта састоји се из два круга.

Faure.

12. Конични пресеци су описани око неког троугла тако, да се нормале повучене у теменима секу у једној тачци. Наћи (a), место тачака у којима се секу нормале и (b), место средиштâ тих пресека.

Одг. (a) $x\,(y^2-z^2)\,(\cos B\cos C - \cos A) + y\,(z^2-x^2)$

$\times\,(\cos C\cos A-\cos B) + z\,(x^2-y^2)\,(\cos A\cos B-\cos C) = o.$

(b) $bcx\,(y^2-z^2) + cay\,(z^2-x^2) + abz\,(x^2-y^2) = o.$

Напом. Много врло лепих сличних примера има у збирци Келеровој[1]).

* * *

---

[1]) **Koehler.** *Exercices de Géométrie Analytique etc.*

ОДЕЉАК ТРЕЋИ

Метод идентичности

382. При доказивању неких особина коничних пресека често није згорег писати еквације криве у два различита облика. Кад се та два облика изједначе, добива се једна идентична релација која се после малих алгебарских трансформација може тумачити на различите начине. У тумачењу тих идентичних релација огледао би се *метод идентичности*. Тај метод у осталом за нас није нов; ми смо се њим досад, не истичући његову важност, већ неколико пута служили, а у овај мах ћемо га нарочито применити при доказу некојих важнијих теорема.

383. *Ако је некакав троугао уписан у коничан пресек, онда тачке, у којима се стране тог троугла секу са тангентама што су на супротним теменима повучене, леже на једној правој.*

Нека су

$$L_1 = o, \quad L_2 = o, \quad L_3 = o$$

еквације страна уписаног троугла, а

$$T_1 = o, \quad T_2 = o, \quad T_3 = o$$

еквације тангената повучених на теменима $(L_2 L_3)$, $(L_3 L_1)$, $(L_1 L_2)$.

Јасно је да ће се коничан пресек моћи представити једном од ових двеју еквација[1]):

$$T_1T_2 + L_3^2 = o, \quad L_1L_2 + L_3T_3 = o.$$

Према томе је

$$T_1T_2 + L_3^2 \equiv L_1L_2 + L_3T_3,$$

па је с тога и

$$T_1T_2 - L_1L_2 \equiv L_3 (T_3 - L_3).$$

По томе се види да ће еквација $T_1T_2 - L_1L_2 = o$ представљати две праве; једна од тих правих је права L_3, т. ј. права што спаја тачке (T_1L_2) и (T_2L_1). По како место $T_1T_2 - L_1L_2$ пролази кроз тачке (T_1L_2), (T_2L_1), (T_1L_1), (T_2L_2), биће јасно да ће она друга права што припада томе месту, а то је права $T_3 - L_3$, пролазити кроз тачке (T_1L_1) и (T_2L_2). Та права пролази међу тим, као што се јасно види по склопу њезине еквације, и кроз тачку (T_3L_3); тачке (T_1L_1), (T_2L_2) и (T_3L_3) леже дакле на једној правој, а то смо и тврдили.

Корелативна теорема. *Ако је некакав троугао описан око коничног пресека, онда се праве што спајају темена са додирним тачкама супротних странâ секу у истој тачци.* (Види прим. 10. стр. 763.).

384. *Кад је некакав четвороугао уписан у коничан пресек, онда тачке у којима се секу тангенте повучене на супротним теменима леже на правој што спаја тачке у којима се секу супротне стране.*

Нека су

$$L_1 = o, \quad L_2 = o, \quad L_3 = o, \quad L_4 = o$$

еквације странâ уписаног четвороугла, а

---

[1]) За те еквације, као и за многе друге које ће се у будуће јављати, вреди у опште исто оно, што смо у дну стр. 735. под 2) рекли о еквацијама (23) чл. 346.

$$T_1 = o, \quad T_2 = o, \quad T_3 = o, \quad T = o$$

еквације тангената повучених на теменима $(L_4 L_1)$, $(L_1 L_2)$, $(L_2 L_3)$, $(L_3 L_4)$. Сем тога узећемо да је $D_1 = o$ еквација дијагонале што спаја теме $(L_4 L_1)$ са теменом $(L_2 L_3)$, а $D_2 = o$ еквација дијагонале што спаја супротна темена $(L_1 L_2)$ и $(L_3 L_4)$. Према томе бисмо еквацију коничног пресека могли написати у једном од овиx двају облика:

$$L_2 T_1 + L_1 D_1 = o, \quad L_4 T_3 + L_3 D_1 = o;$$

с тога је

$$L_2 T_1 + L_1 D_1 \equiv L_4 T_3 + L_3 D_1$$

или

$$L_2 T_1 - L_4 T_3 \equiv (L_3 - L_1)\, D_1,$$

а по тој еквацији се види да на правој што спаја тачке $(L_2 L_4)$ и $(L_1 L_3)$ лежи и тачка $(T_1 T_3)$. Треба још само доказати, да на тој истој правој лежи и тачка $(T_2 T_4)$. Тога ради написаћемо еквацију коничног пресека на ова два различита начина:

$$L_4 T_2 + L_1 D_2 = o, \quad L_2 T_4 + L_3 D_2 = o.$$

Према томе је и

$$L_4 T_2 + L_1 D_2 \equiv L_2 T_4 + L_3 D_2$$

или

$$L_4 T_2 - L_2 T_4 \equiv (L_3 - L_1)\, D_2,$$

а по тој еквацији се јасно види да и тачка $(T_2 T_4)$ лежи на правој што спаја тачку $(L_2 L_4)$ с тачком $(L_1 L_3)$.

Корелативна теорема. *Кад је некакав четвороугао описан око коничног пресека, онда се дијагонале и корде што спајају додирне тачке супротних странâ секу у једној и истој тачци.* (Види прим. чл. 343.).

385. *Ако коничан пресек S пролази кроз осам заједничких тачака коничних пресека S_1 и S_2, S_3 и S_4, онда ће тачке у којима се секу конични пресеци S_1 и S_3, S_2 и S_4 такођер лежати на једном коничном пресеку.*

Коничан пресек S моћи ћемо представити једном од ових двеју еквација:

$$kS_1 - lS_2 = o, \quad mS_3 - nS_4 = o.$$

С тога ће бити

$$kS_1 - lS_2 \equiv mS_3 - nS_4$$

или

$$kS_1 - mS_3 \equiv lS_2 - nS_4,$$

т. ј. и т. д.

Напомена. Ако у коничан пресек упишемо хексагон 1 2 3 4 5 6 и ако узмемо да конични пресеци S_1, S_2, S_3, S_4 представљају стране 14 и 23, 12 и 34, 14 и 56, 45 и 61, онда ће се коничан пресек $kS_1 - mS_3$ изменути у систему двеју правих — у праву 14 и праву што пролази кроз тачке (23, 56), (12, 45), (34, 16), а то би био један нов доказ познате Паскалове теореме.

КОРЕЛАТИВНА ТЕОРЕМА. *Ако коничан пресек Σ дира осам заједничких тангената коничних пресека Σ_1 и Σ_2, Σ_3 и Σ_4, онда ће заједничке тангенте коничних пресека Σ_1 и Σ_3, Σ_2 и Σ_4 такођер дирати један коничан пресек.*

386. ХЕСЕОВА ТЕОРЕМА. *Ако су $U_1 = o$, $U_2 = o$, . . . $U_6 = o$ еквације шесторих тачака једног коничног пресека, онда је свакад могуће одредити шест коефицијената $\lambda_1, \lambda_2, \cdot \cdot \cdot \lambda_6$ тако, да збир $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i U_i^2$ буде $\equiv o$.*

Та теорема је у теорији коничних пресека необично важна и ми ћемо је мало касније применити, а доказаћемо је овако.

Претпоставићемо да нам је дат коничан пресек $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$. Ако на том пресеку леже тачке $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdot\ \cdot\ \cdot\ (x_6, y_6)$, биће

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} - 1 = 0, \\ &\frac{x_2{}^2}{a^2} + \frac{y_2{}^2}{b^2} - 1 = 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\frac{x_6{}^2}{a^2} + \frac{y_6{}^2}{b^2} - 1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ако је сад $U_i \equiv x_i u + y_i v + 1$, биће и $\Sigma\lambda_i U_i^2 \equiv \Sigma\lambda_i\,(x_i u + y_i v + 1)^2$; јасно је да ће тај збир моћи бити идентично раван нули само ако су коефицијенти што стоје уз u^2, uv, v^2, u, v заједно са апсолутним чланом $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot + \lambda_6$ посебице равни нули. Биће дакле

$$\lambda_1 x_1{}^2 + \lambda_2 x_2{}^2 + \cdot\ \cdot\ \cdot + \lambda_6 x_6{}^2 = 0, \qquad (2)$$

$$\lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0, \qquad (3)$$

$$\lambda_1 y_1{}^2 + \lambda_2 y_2{}^2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0, \qquad (4)$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0, \qquad (5)$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0, \qquad (6)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0. \qquad (7)$$

Поделимо сад еквацију (2) са a^2, а еквацију (4) са b^2, саберимо две добивене еквације и одузмимо од збира њихова еквацију (7). У резултату добићемо ово:

$$\frac{\Sigma\lambda_i x_i{}^2}{a^2} + \frac{\Sigma\lambda_i y_i{}^2}{b^2} - \Sigma\lambda_i = 0. \qquad (8)$$

Ту исту релацију добили бисмо и кад бисмо прву еквацију системе (1) помножили са λ_1, другу са λ_2 и т. д., па их после сабрали. По томе се види да ће поменута релација (8), кад тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdot \cdot \cdot$ (x_6, y_6) леже на датом коничном пресеку, бити идентична релација, а то значи да ће између еквација (2), (4) и (7) само две бити независне (она трећа је свакад алгебарска последица тих двеју). Те две еквације придружићемо еквацијама (3), (5) и (6) и израчунаћемо из тих пет еквација вредности $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \cdot \cdot \cdot$ за које ће збир $\Sigma\lambda_i U_i^2$ бити $\equiv o$.

Обратно, *ако су полиноми* $U_1, U_2, \cdot \cdot \cdot U_6$ *еквација̂ шесторих тачака међу собом везани идентичном релацијом* $\Sigma\lambda_i U_i^2 \equiv o$, *онда те тачке леже на једном коничном пресеку.*

Ако је на име $\Sigma\lambda_i U_i^2 \equiv o$, онда ће свакад постојати погодбе (2), (3), $\cdot \cdot \cdot$ (7); уз те погодбе постојаће, ма параметри a и b имали ма какве вредности, и погодба (8). Ми ћемо претпоставити да су бројевима a и b одређене полуосовине коничног пресека

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$$

што пролази кроз првих пет тачака (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \dots (x_5, y_5)$. Напишимо сад погодбену релацију (8) у овом облику:

$$\lambda_1 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) + \lambda_2 \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1\right) + \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \lambda_6 \left(\frac{x_6^2}{a^2} + \frac{y_6^2}{b^2} - 1\right) = o. \quad (9)$$

Тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2) $\cdot \cdot \cdot$ (x_5, y_5) леже међу тим према нашој претпоставци на коничном пресеку $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = o$. С тога ће по погодбеној релацији (9) бити и

$$\frac{x_6^2}{a^2} + \frac{y_6^2}{b^2} - 1 = o,$$

а то значи да ће под погодбом $\Sigma\lambda_i U_i^2 \equiv o$ и тачка (x_6, y_6) лежати на коничном пресеку.

Корелативна теорема. *Ако су* $U_1 = o$, $U_2 = o$, $\cdot\cdot\cdot U_6 = o$ *еквације шесторих тангената једног коничног пресека, онда је свакад могуће одредити шест коефицијената* $\lambda_1, \lambda_2, \cdot\cdot\cdot \lambda_6$ *тако, да збир* $\Sigma\lambda_i U_i^2$ *буде* $\equiv o$ и обратно, *ако су полиноми* $U_1, U_2, \cdot\cdot\cdot U_6$ *еквацијâ шесторих правих међу собом везани идентичном релацијом* $\Sigma\lambda_i U_i^2 \equiv o$, *онда су те праве тангенте једног коничног пресека.*

Напомена. Ако је $U_i \equiv x_i u + y_i v + 1$, онда $\Sigma\lambda_i U_i^2 \equiv o$ представља хомогену линеарну релацију којом су међу собом везани квадрати раздаљинâ праве (u, v) од шесторих тачака $U_i = o$ коничног пресека. А ако је $U_i \equiv u_i x + v_i y + 1$, онда $\Sigma\lambda_i U_i^2 \equiv o$ представља хомогену линеарну релацију којом су међу собом везани квадрати раздаљинâ тачке (x, y) од шесторих тангената $U_i = o$ коничног пресека.

387. *Ако шест тачака неког коничног пресека поделимо у две групе од по три тачке, онда ће тачке појединих група бити темена двају аутополарних троуглова неког другог коничног пресека.* (Хесе.)

Нека су $U_1 = o$, $U_2 = o, \cdot\cdot\cdot$ еквације шесторих тачака. Те тачке леже на једном коничном пресеку; с тога је $\Sigma\lambda_i U_i^2 \equiv$, а то значи да су еквације

$$\lambda_1 U_1^2 + \lambda_2 U_2^2 + \lambda_3 U_3^2 = o, \quad \lambda_4 U_4^2 + \lambda_5 U_5^2 + \lambda_6 U_6^2 = o$$

идентичне. Те две еквације представљају дакле једну и исту криву — један и исти коничан пресек — а по тим еквацијама се види да су троугли $(U_1 U_2 U_3)$ и $(U_4 U_5 U_6)$ аутополарни троугли тог коничног пресека. Обратно, *темена двају аутополарних троуглова неког коничног пресека јесу уједно и тачке неког другог коничног пресека.*

Еквације

$$\lambda_1 U_1^2 + \lambda_2 U_2^2 + \lambda_3 U_3^2 = o, \quad \lambda_4 U_4^2 + \lambda_5 U_5^2 + \lambda_6 U_6^2 = o$$

биле би на име идентичне, па ће с тога бити и $\Sigma\lambda_i U_i^2 \equiv o$, т. ј. и т. д.

Корелативна теорема. *Ако шест тангената неког коничног пресека поделимо у две групе од по три тангенте, онда ће тангенте појединих група бити стране двају аутополарних троуглова неког другог коничног пресека* и обратно, *стране двају аутополарних троуглова неког коничног пресека јесу уједно и тангенте неког другог коничног пресека.*

Специјалан случај. Нека је дат коничан пресек равнострана хипербола. У Хесеовој хомогеној системи биће еквација њезина $x^2-y^2=a^2z^2$, а еквација поларе тачке (x', y', z') биће

$$xx'-yy' = a^2zz'.$$

Означимо сад са I и J фокоиде бескрајне равни, а са O средиште хиперболе. Лако се може доказати да је троугао IOJ аутополаран троугао равностране хиперболе. Прво и прво је O пол праве у бескрајности. Даље, ако су 1, i, o координате тачке I, биће њезина полара према равностраној хиперболи одређена еквацијом

$$x-iy = o,$$

т. ј. полара тачке I је изотропна права што спаја фокоид J са средиштем O. Но како је O пол праве IJ, а I пол праве OJ, биће и J пол праве OI, т. ј. троугао IOJ је заиста аутополаран троугао равностране хиперболе.

Нека је сад ABC други некакав аутополаран троугао хиперболе. Према нашој теореми лежаће темена A, B, C, O, I, J на једном коничном пресеку, т. ј. *круг описан око аутополарног троугла ABC равностране хиперболе пролази кроз средиште те хиперболе.* Види прим. 21. стр. 663.

Даље, опишимо око неке параболе троугао PQR. Троугао IOJ биће такођер описан око те параболе, ако је O жижа њезина. Према нашој теореми биће троуглови PQR и IOJ аутополарни троуглови неког коничног пресека, а темена тих аутополарних троуглова леже на једном коничном пресеку, т. ј. *круг описан око троугла PQR, чије су стране тангенте параболине, пролази кроз жижу параболину.* Види прим. 9. стр. 691. —

388. Узмимо сад поново ма где на коничном пресеку шест тачака Q, R, S, T, P, P'. Прве четири потпуно одређују тетрастигмат $QRST$, а последње две неку транс-

верзалу PP' коничног пресека. Ако су $U_1 = o$, $U_2 = o$, . . . еквације тих шесторих тачака, биће $\Sigma\lambda_iU_i^2 \equiv o$, т. ј. еквације

$$\lambda_1U_1^2 + \lambda_2U_2^2 + \lambda_3U_3^2 + \lambda_4U_4^2 = o, \quad \lambda_5U_5^2 + \lambda_6U_6^2 = o$$

су идентичне. Те две еквације представљаће дакле једну и исту криву; прва између њих представља један коничан пресек (види прим. 2. чл. 379.) који је коњугован с тетрастигматом $QRST$, а по другој еквацији $\lambda_5U_5^2 + \lambda_6U_6^2 = o$ види се да се тај коничан пресек изметнуо у две тачке E и F хармонијски коњуговане према тачкама P и P'. Означимо сад са A и A', B и B', C и C' тачке у којима супротне стране QT и RS, QR и ST, QS и RT тетрастигматове секу трансверзалу PP'. Како су тетрастигмат $QRST$ и коничан пресек (а то ће рећи тачке E и F) коњуговани, морају тачке A и A' бити хармонијски коњуговане према тачкама E и F, а такве морају бити и тачке B и B', C и C'. Дакле, *на свакој трансверзали коничног пресека имају две тачке E и F хармонијски коњуговане према тачкама у којима ту трансверзалу секу две и две супротне стране уписаног тестрастигмата.* То је позната *Десаргова теорема.* —

Ту теорему можемо и друкчије формулисати. Узмимо да су тачке A и A', B и B' коњуговане тачке неког инволуторног низа. Како коњуговане тачке хармонијски деле дуж која спаја двојне тачке (чл. 146.), биће јасно да ће у овај мах тачке E и F бити двојне тачке инволуције. Но како су тачке E и F хармонијски коњуговане и према тачкама P и P', то ће и тачке P и P' бити коњуговане, па ћемо с тога Десаргову теорему моћи и овако формулисати: *кад је некакав четвороугао уписан у коничан пресек, онда ће шесторе тачке у којима ма која трансверзала сече криву и два пара супротних страна бити у инволуцији.*

Корелативна теорема. *Кад је некакав четвороугао описан око коничног пресека, онда ће тангенте повучене на криву ма из које тачке равни и два пара правих што спајају ту тачку са супротним теменима бити у инволуцији.*

389. Дефиниција. *Ако је некакав коничан пресек уписан у аутополаран троугао (описан око аутополарног троугла) неког коничног пресека, онда се каже да је први коничан пресек хармонијски уписан у други коничан пресек (хармонијски описан око другог коничног пресека).*

Касније ћемо доказати (чл. 420.) да ће коничан пресек S' бити хармонијски описан око коничног пресека S и обрнуто, да ће коничан пресек S хармонијски бити уписан у S' ако је (чл. 237.) инваријанта

$$\Theta = Aa' + Bb' + Cc' + 2Ff' + 2Gg' + 2Hh'$$

облика $S—kS'$ равна нули, а сад ћемо доказати ову теорему:

Ако су $S_1 \equiv a_x^2 = o$, $S_2 \equiv b_x^2 = o$, $\cdot \cdot \cdot S_6 \equiv f_x^2 = o$ *еквације шесторих око истог коничног пресека хармонијски описаних коничних пресека, онда је свакад могуће одредити шест коефицијената* $\lambda_1, \lambda_2, \cdot \cdot \cdot \lambda_6$ *тако, да збир* $\sum\limits_{i=1}^{6} \lambda_i S_i$ *буде* $\equiv o$.

Нека је $S \equiv ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + \cdot \cdot \cdot = o$ еквација оног коничног пресека, око кога су хармонијски описани конични пресеци $S_1, S_2, \cdot \cdot \cdot S_6$. Према томе што мало час рекосмо биће

$$Aa_{11} + Ba_{22} + Ca_{33} + \cdot \cdot \cdot = o,$$

$$Ab_{11} + Bb_{22} + Cb_{33} + \cdot \cdot \cdot = o,$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Ако из тих еквација елиминирамо коефицијенте A, B, C, $\cdot \cdot \cdot$, добићемо ову детерминанту:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = o.$$

Ако сад помножимо прву колону са $x_1{}^2$, другу са $x_2{}^2$, трећу са $x_3{}^2$, четврту са $2x_2x_3$, пету са $2x_3x_1$ и најпосле шесту са $2x_1x_2$, биће јасно да ћемо последњу детерминанту после мале трансформације (треба просто у појединим врстама сабрати елементе свију колона̂ сем прве колоне, па збир њихов додати елементима прве колоне) моћи написати у овом облику:

$$\begin{vmatrix} S_1 & a_{22} & a_{33} & a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ S_2 & b_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_3 & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_4 & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_5 & e_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_6 & f_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = o.$$

Означимо сад миноре елемената $S_1, S_2, \cdot \cdot \cdot S_6$ са $\lambda_1, \lambda_2, \cdot \cdot \cdot \lambda_6$ и напишимо детерминанту у развијеном облику; резултат ће бити ово:

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 + \lambda_5 S_5 + \lambda_6 S_6 = o,$$

а то смо и тврдили.

Ако се претпостави да еквације $S_1 = o$, $S_2 = o$, $\cdots S_6 = o$ представљају по две праве U_1 и U_1', U_2 и U_2', $\cdots U_6$ и U_6', онда ћемо према поменутој теореми моћи рећи ово: *ако су праве* U_1 *и* U_1', U_2 *и* U_2', $\cdots U_6$ *и* U_6' *коњуговане према истом коничном пресеку, онда су полиноми њихових еквација међу собом везани овом идентичном релацијом* $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i U_i U_i' \equiv o$. (П. Серетова теорема.)

Корелативна теорема. *Ако су тачке* U_1 *и* U_1', U_2 *и* U_2', $\cdots U_6$ *и* U_6' *коњуговане према истом коничном пресеку, онда су полиноми њихових еквација међу собом везани овом идентичном релацијом:* $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i U_i U_i' \equiv o$.

Напомена. Релација $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i U_i U_i' \equiv o$ преобразиће се у познату идентичну релацију $\Sigma \lambda_i U_i^2 \equiv o$, кад се праве (тачке) U_i и U_i' поклапају.

* * *

ОДЕЉАК ЧЕТВРТИ

Метод узајамних полара

390. Познато је да се у геометрији теореме деле на две врсте: једне су *дескриптивне*, а друге *метричке*. Дескриптивне су теореме оне, које немају никакве везе са дужином дужи или величином углова; у њима се води рачун само о релативном положају правих или тачака. Те теореме могу се у опште по начелу корелације удвајати. То удвајање је веома просто и стоји, као што знамо, у тесној вези са начелима пунктуалне и тангенцијалне геометрије.

Ми смо међу тим на једном месту узгред споменули, да је начело корелације применио у геометрији први Понселе и то на основу особинâ полова и полара коничних пресека. О том Понселетову методу, који се зове *метод узајамних полара*, бавићемо се укратко у овом одељку, а у суштину тог метода загледаћемо овако.

Узмимо некакав коничан пресек S и у равни његовој неку слику F. Свака права a, b, c, $\cdot\ \cdot\ \cdot$ те слике има према коничном пресеку S свој пол A', B', C', ... као што и свака тачка A, B, C, $\cdot\ \cdot\ \cdot$ слике F има према коничном пресеку S своју полару a', b', c', $\cdot\ \cdot\ \cdot$ Према томе бисмо помоћу коничног пресека S добили у равни још једну слику — слику F'. Свакој тачци слике F *одговара* по једна одређена права слике F' и обратно, свакој правој слике F *одговара* по једна одређена тачка слике F'. Слике F и F' биле би с тога већ корелативне слике. Јасно је међу тим да би се обратно слика F'

преобразила у слику F. *Слика F' била би дакле (чл. 172.) поларна слика слике F, као што би и слика F била поларна слика слике F'.* Са те узајамности зову се слике F и F' *поларно узајамним сликама.* Коничан пресек S зове се *помоћни конични пресек.*

Пођимо сад даље и узмимо неку криву Σ и на тој кривој неколико тачака $A, B, C, \cdot \cdot \cdot$ Означимо тангенте што су на криву повучене у тачкама $A, B, C, \ldots$ са $a, b, c, \cdot \cdot \cdot$ Те тангенте имају према коничном пресеку S своје полове $A', B', C', \cdot \cdot \cdot$, а место тих полова биће нека крива Σ' — поларна слика криве Σ. Обрнуто, крива Σ' има своје тангенте, а место полова тих тангената је, као што ћемо одмах доказати, крива Σ. Тачка (a, b) у којој се секу тангенте a и b криве Σ јесте на име пол секанте $A'B'$ криве Σ'. Ако се сад претпостави да се тангента b без границе приближила тангенти a, онда ће и тачка (a, b) бити тачка у којој ће криву Σ дирати две тангенте a и b што се у граници поклапају. У исти мах ће секанта $A'B'$ криве Σ' постати тангента те криве. Дакле, пол ма које тангенте криве Σ' лежи на кривој Σ, а то смо и тврдили. Према томе се види да је свака између кривих Σ и Σ' у исти мах и место полова тангената оне друге криве и обвојница полара̂ тачака те друге криве. С тога су криве Σ и Σ' *поларно узајамне* криве.

Последица (1) — *Тачци у којој се секу две криве одговара заједничка тангента поларних кривих.*

Последица (2) — *Ако се две криве додирују, додирују се и њихове поларне криве.* Јер првобитне криве имају у овај мах и заједничку тачку и заједничку тангенту у тој тачци. Поларне криве имаће дакле заједничку тангенту и заједничку тачку у којој ће та тангента дирати обе поларне криве.

391. Теорема. *Поларна крива неке криве m-тог реда је крива m-те врсте и обратно, поларна крива неке криве m-те врсте је крива m-тог реда.*

Криву m-тог реда сече на име нека права у m тачака. Свакој таквој тачци одговара по једна тангента поларне криве, а све те тангенте секу се у једној тачци — у полу дате праве. Кад је дакле нека крива Σ m-тог реда, онда је њена поларна крива Σ' m-те врсте и обратно.

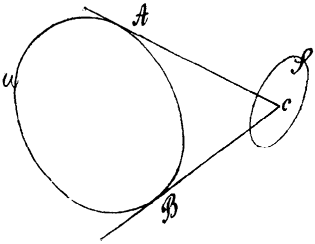
Према тој теореми јасно је *да је поларно узајамна слика неког коничног пресека један коничан пресек.* С тога се по методу узајамних полара и могу удвајати дескриптивне особине коничних пресека. При том удвајању треба само свакад имати у виду елементе који се трансформацијом мењају. Тако би н. пр. тачци неке криве одговарала тангента поларне криве, тангенти неке криве тачка поларне криве, системи колинеарних тачака прамен линија, месту тачака обвојница, уписаном полигону описан полигон, правој што спаја две тачке тачка у којој се секу две праве и т. д. и т. д.

Примена. Доказали смо (прим. 7. стр. 459.) ову теорему: кроз пет датих тачака може се повући само један једини коничан пресек. Корелативна теорема била би ово: *има само један једини коничан пресек који дира пет датих правих.* — По методу узајамних полара доказаћемо овако ту теорему.

Нека су A, B, C, D, E дате праве, а a', b', c' d', e' полови тих правих према неком коничном пресеку S. Кроз те тачке може се повући само један једини коничан пресек Σ'; његова поларно узајамна слика биће некакав коничан пресек Σ који дира дате праве A, B, C, D, E. Има дакле један коничан пресек који дира дате праве. Но ми тврдимо да сем тог коничног пресека Σ више нема ни једног јединог коничног пресека који би дирао поменуте праве. Сваком коничном пресеку који дира праве A, B, C, D, E одговара на име по један коничан пресек који пролази кроз тачке a', b', c', d', e', а кроз те тачке пролази само један једини коничан пресек, т. ј. и т. д.

392. Лако се може одредити разред поларног коничног пресека Σ'. У главном водићемо рачун о овим случајевима.

1-во. *Нека помоћни конични пресек има средиште.* — Означимо средиште са C. Ако то средиште лежи изван коничног пресека Σ, онда ћемо на коничан пресек Σ моћи повући две реалне тангенте CA и CB. Јасно је да су те две тангенте уједно и дијаметри помоћног коничног пресека S. Према томе ће (прим. 4. чл. 231.) полови тих тангената бити тачке у којима дијаметри што су коњуговани с правцем CA и с правцем CB секу праву у бескрајности. Права у бескрајности сећи ће дакле коничан пресек Σ' у двема реалним тачкама, т. ј. кад средиште помоћног коничног пресека лежи изван коничног пресека Σ, онда је поларна слика тог коничног пресека хипербола. Поларе додирних тачака A и B дирају криву Σ' у бескрајности, т. ј. те две поларе су асимтоте хиперболине, а средиште хиперболино је пол корде AB.



Сл. 177.

Кад средиште C лежи на кривој Σ, онда је крива Σ' парабола, јер је полара тачке C тангента која криву Σ' дира у бескрајности.

Најпосле, кад средиште C лежи у кривој Σ, онда је поларна крива Σ' елипса, јер та поларна крива нема реалних тачака у бескрајности.

2-го. *Нека је помоћни конични пресек парабола.* — Према једној нашој теореми (чл. 312.) знамо да полара ма које тачке неког дијаметра параболиног иде напоредо са тангентом што је на параболу повучена на крају тог дијаметра, а то ће рећи у тачци у којој дијаметар сече параболу. По томе се види да ће се поларе двеју тачака једног и истог дијаметра сећи у бескрајности, т. ј. пол неког дијаметра биће у бескрајности на тангенти што је на криву повучена на крају тог дијаметра. Према томе ће поларна крива коничног пресека Σ бити хипербола ако је на криву Σ могуће повући тангенте које би ишле напоредо са осовином параболином. Кад је коничан пресек Σ елипса онда се такве две тангенте свакад могу повући; но ако је коничан пресек Σ хипербола, онда ће се на хиперболу моћи повући поменуте две тангенте напореднице само ако је дијаметар хиперболе, који иде напоредо са осовином параболином, имагинаран.

Узмимо сад да је коничан пресек Σ парабола.

Ако осовине помоћне параболе S и дате параболе Σ нису паралелне, онда ће коничан пресек Σ' бити хипербола. У том случају моћи ћемо на име на параболу Σ повући једну тангенту напоредо са осовином параболе S. Означимо ту тангенту са AT, а додирну тачку њезину са A. Пол A' те тангенте (т. ј. једна тачка поларне криве Σ') биће у бескрајности, а полара додирне тачке A (т. ј. тангента поларне криве у тачци A') лежаће у коначној раздаљини од криве Σ'. Крива Σ' биће дакле у овај мах хипербола; једна асимптота те хиперболе је полара тачке A. — Другу асимптоту нашли бисмо овако. Повући ћемо кроз тачку A дијаметар AB параболе Σ. Напоредо са тим дијаметром повући ћемо систему корада помоћне параболе S. Дијаметар CD параболе S, који полови систему тих корада, биће друга асимптота поменуте хиперболе, а ево доказа. Тачка у којој ће параболу Σ дирати тангента што иде напоредо са тангентом AT лежи на име у бескрајности на дијаметру AB, па ће с тога полара те тачке бити дијаметар CD параболе S.

Најпосле, ако се претпостави да су осовине парабола̂ S и Σ паралелне, онда се лако може доказати да је поларна слика коничног пресека Σ једна парабола. Додирне тачке двеју тангената параболе Σ, које иду напоредо са осовином параболе S, леже на име у бескрајности, а у правцу осовине те параболе. Према томе ће и поларе тих додирних тачака лежати у бескрајности, а те поларе су, као што знамо, тангенте коничног пресека Σ'.

393. *Нaћи еквацију поларно узајамне слике коничног пресека.*

Нека је $\varphi(x, y, z) = o$ хомогена еквација помоћног коничног пресека S, а

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = o$$

хомогена еквација коничног пресека Σ.

Ако су x, y, z координате неке тачке поларне слике Σ', биће еквација поларе те тачке ово:

$$X\varphi'_x + Y\varphi'_y + Z\varphi'_z = o.$$

Та полара је међу тим тангента криве Σ. Према томе биће

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \varphi'_x \\ h & b & f & \varphi'_y \\ g & f & c & \varphi'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & o \end{vmatrix} = o.$$

То је дакле еквација поларне криве Σ'.

Напомена. Ако еквације кривих S и Σ нису хомогене, онда ни еквација поларно узајамне слике не ће бити хомогена. Разуме се да би у том случају требало у горњим еквацијама просто свуда сменити z посебном вредношћу $z = 1$.

Прим 1. Дата су два конична пресека

$$S \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = o, \quad S' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = o.$$

S' је помоћни конични пресек. Наћи поларну слику криве S.

Одг. Еквација поларне слике је

$$\frac{x_1^2}{a_{11}}+\frac{x_2^2}{a_{22}}+\frac{x_3^2}{a_{33}}=o$$

или

$$a_{22}a_{33}x_1^2+a_{33}a_{11}x_2^2+a_{11}a_{22}x_3^2=o.$$

Напом. Поларно узајамна слика криве S' према кривој S била би ово:

$$a_{11}^2x_1^2+a_{22}^2x_2^2+a_{33}^2x_3^2=o.$$

Прим. 2. Наћи поларно узајамну слику коничног пресека $2lx_1x_2=x_3^2$ према коничном пресеку $2mx_1x_2=x_3^2$.

Одг. $$lx_3^2-2m^2x_1x_2=o.$$

Прим. 3. Доказати да су елипсе (a, b) и (a', b') поларно узајамне према елипси $(\sqrt{aa'}, \sqrt{bb'})$.

Прим. 4. Наћи поларно узајамну слику криве

$$a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2+a_3x_3^2-2a_2a_3x_2x_3-2a_3a_1x_3x_1-2a_1a_2x_1x_2=o$$

према кривој

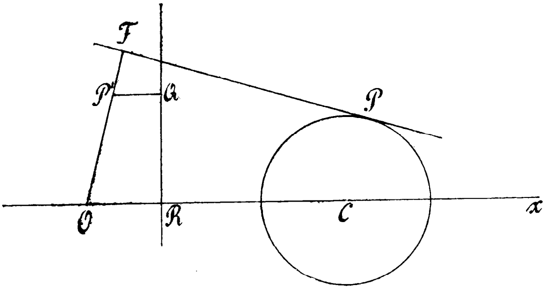
$$\frac{a_1x_1^2}{b_{23}}+\frac{a_2x_2^2}{b_{31}}+\frac{a_3x_3^2}{b_{12}}=o.$$

Одг. $$b_{23}x_2x_3+b_{31}x_3x_1+b_{12}x_1x_2=o.$$

394. Досад смо претпостављали да је помоћна крива S ма какав коничан пресек. Да би нам резултати били што простији узећемо одсад свакад круг за помоћни коничан пресек. Кад нам помоћни коничан пресек не би био круг, онда ћемо то нарочито поменути.

Зна се (чл. 166.) да праве што спајају неку тачку са средиштем круга стоје управно на полари те тачке; то значи да ће пол неке праве лежати на управној што је из средишта повучена на праву. Даље, ако узмемо за осовину x ону праву што спаја пол са средиштем круга $x^2+y^2=r^2$, биће јасно да ће еквација поларе бити ово: $xx'=r^2$, па како је у еквацији $xx'=r^2$ са x означена раздаљина поларе од средишта, а са x' раздаљина пола од средишта, биће јасно да је производ тих двеју раздаљина $=$ *const.*

Имајући то у виду моћи ћемо врло простом геометријском конструкцијом наћи колико год хоћемо тачака поларно узајамне слике неке криве. Повуцимо само у некој тачци P дате криве тангенту PT и означимо са O средиште помоћног круга. Пол те тангенте лежаће према ономе што мало час поменусмо на управној OT. На тој управној наћи ћемо једну тачку P', за коју је $OT \cdot OP' = r^2 = const.$ Тачка P' (то је инверсна слика тачке T) била би пол тангенте PT, т. ј. тачка P' била би тачка узајамно поларне слике дате криве. Поларно узајамна слика дате криве била би дакле место тачака P'.



Сл. 178.

Јасно је да ће сваком посебном вредношћу количине r бити одређена по једна поларно узајамна крива Σ'. Облик тих кривих не ће међу тим зависити од појединих вредности количине r, јер би све те криве биле сличне. Нас се међу тим махом тиче само облик, а не тичу нас се димензије криве. Кад се дакле тражи поларна слика неке криве према неком кругу, онда је довољно знати само средиште круга, јер дужина полупречника може бити ма каква стална количина.

Напомена. Тачка T је ортогонална пројекција тачке O на тангенти PT криве Σ. Релација $OT \,.\, OP' = r^2 = const.$ казује нам дакле да *је поларно узајамна слика неке криве према неком кругу инверсна слика подножнице те криве.* Разуме се да је круг инверсије баш сам помоћни круг.

Прим. 1. Наћи поларно узајамну слику неке криве $f(x, y)=o$. —

Ако је $x^2+y^2=r^2$ еквација помоћног круга, биће еквација поларе неке тачке (x', y') криве $f(x, y)=o$ ово: $xx'+yy'=r^2$. Означимо сад са u и v тангенцијалне координате праве која дира поларно узајамну слику у некој тачци. Еквација те праве је $ux+vy+1=o$. Ако та права корелативно одговара тачци (x', y'), биће

$$u=-\frac{x'}{r^2}, \quad v=-\frac{y'}{r^2};$$

с тога је $x'=-r^2u$, $y'=-r^2v$, т. ј. тангенцијална еквација поларно узајамне слике била би ово: $f(-r^2u, -r^2v)=o$. Кад би дата крива била одређена тангенцијалном еквацијом $\varphi(u, v)=o$, онда би пунктуална еквација поларно узајамне слике била ово: $\varphi\left(-\frac{x}{r^2}, -\frac{y}{r^2}\right)=o$. — Ако је полупречник помоћног круга $=1$, онда се еквација поларно узајамне слике неке криве добива по овом правилу: *ако је $f(x, y)=o$ пунктуална еквација неке криве, онда је $f(-u, -v)=o$ тангенцијална еквација поларно узајамне криве, а ако је $\varphi(u, v)=o$ тангенцијална еквација неке криве, онда је $\varphi(-x, -y)=o$ пунктуална еквација те криве.*

Прим. 2. Наћи погодбе под којима ће еквација

$$\Sigma\equiv Au^2+2Huv+Bv^2+2Gu+2Fv+C=o$$

представљати елипсе, хиперболе или параболе. —

Тај исти пример имали смо већ једанпут (прим. 5. стр. 545.). Помоћу мало час поменутог правила решићемо на веома лак начин тај пример. Пунктуална еквација поларно узајамне слике Σ' криве Σ била би ово:

$$\Sigma'\equiv Ax^2+2Hxy+By^2-2Gx-2Fy+C=o.$$

Дискриминанте еквацијâ Σ и Σ' су једнаке. Ми ћемо их означити са $\triangle$ и претпоставићемо да је $\triangle\neq o$ Јасно је да је и обратно крива Σ поларно узајамна слика криве Σ'. Ми знамо међу тим (прим. 3. стр. 455.) да ће почетак координатне системе — а то је у овај мах средиште помоћног круга — бити у унутрашњем крају криве Σ' ако је $C\triangle>o$, а у спољашњем крају ако је $C\triangle<o$; на самој кривој било би средиште ако је $C=o$. Према томе ће коничан пресек Σ припадати разреду елипси ако је $C\triangle>o$, разреду хипербола ако је $C\triangle<o$, а разреду парабола ако је $C=o$.

Напом. Кад је $\triangle=o$, онда еквација $\Sigma'=o$ представља две праве; еквација $\Sigma=o$ представљала би нам дакле према начелу корелације две тачке, што нам је у осталом и иначе познато.

395. Теорема. *Поларно узајамна слика неког круга* Σ *према неком кругу* S, *чије је средиште* O, *јесте коничан пресек чија је жижа тачка* O; *управница тог пресека је полара средишта круга* Σ.

Нека је (сл. 178.) $\alpha = OC =$ раздаљини средиштâ O и C. Централу OC узећемо за осовину x, а тачку O за почетак ортогоналне координатне системе. У тој системи биће еквација круга Σ ово:

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2.$$

С тога је еквација поларно узајамне слике Σ' тог круга према помоћном кругу $x^2 + y^2 = r^2$ ово:

$$(R^2 - \alpha^2)\, x^2 + R^2 y^2 + 2 r^2 \alpha x - r^4 = o$$

или

$$R^2\, (x^2 + y^2) - (\alpha x - r^2)^2 = o.$$

У тој еквацији представљају x и y координате ма које тачке P' криве Σ'. Означимо сад раздаљину тачке P' од праве $\alpha x - r^2 = o$ са $P'Q$. Јасно је да нам последња еквација казује да је напремица у којој стоји раздаљина OP' према раздаљини $P'Q$ стална, а то значи да тачка P' описује један коничан пресек чија је жижа тачка O (средиште помоћног круга), а управница права $\alpha x - r^2 = o$, т. ј. полара средишта $C\,(\alpha, o)$ круга Σ према кругу S. То смо у осталом и тврдили.

Напомена. Средиште поларно узајамне слике одговара корелативно корди што спаја додирне тачке двеју тангената што су повучене из средишта O на круг Σ.

Последица. Система концентричних кругова преобразиће се у систему коничних пресека који имају исту жижу и исту управницу.

396. Теорема. *Поларно узајамне слике коаксалне системе кругова према неком кругу, чије је средиште било једна било друга гранична тачка те системе, јесу конфокални конични пресеци.*

Нека је L_1 једна гранична тачка коаксалне системе кругова. Ако ту тачку узмемо за средиште помоћног круга, биће јасно да ће према мало час поменутој теореми та тачка бити жижа свих коничних пресека у које су се по начелу узајамних полара преобразили кругови коаксалне системе. Како ће међу тим (чл. 187.) полара граничне тачке L_1 бити једна и иста права према свима круговима коаксалне системе, биће јасно (напом чл. 395.) да ће конични пресеци, у које су се преобразили кругови коаксалне системе, бити концентрични, а то значи да ће ти конични пресеци сем жиже L_1 имати још једну заједничку жижу.

397. Поменули смо да се по методу узајамних полара могу удвајати дескриптивне теореме коничних пресека и доказали смо то, а сад ћемо видети *да се чак и неке метричке теореме могу удвајати* кад се за помоћни коничан пресек узме један круг. То долази отуда што 1-во, *раздаљина средишта O помоћног круга (сл. 178.) од неке тачке* P' *криве* Σ' *опада (расте), кад раздаљина OT средишта од поларе која одговара тачци* P' *расте (опада)* и 2-го, *што је угао између двеју правих слике* Σ *једнак углу под којим се из средишта O виде полови* A' *и* B' *тих двеју правих.* Оно прво је јасно с тога, што је (чл. 394.) $OT \cdot OP' = r^2 = const.$, а оно друго с тога, што је права a (т. ј. полара тачке A') ⊥ на OA', а права b (т. ј. полара тачке B') ⊥ на OB'.

Ево неколико примера по којима ће се видети како се метричке особине могу удвајати, кад се некакав круг узме за помоћни коничан пресек.

(1) Збир раздаљинâ неко тачке унутрашњег краја неког круга од двеју паралелних тангената јесте стална количина.	(1') Збир обрнутих вредности делова које одсеца жижа неке елипсе на фокалној корди јесте стална количина.

Корелативну теорему оне прве теореме је врло лако доказати. Треба просто узети да је поменута тачка унутрашњег краја датог круга Σ средиште помоћног круга S, па применити прво између мало час поменутих двају правила.

(2) Место темена̂ углова сталне величине описаних око неког круга јесте концентричан круг.	(2*) Обвојница корада неког коничног пресека, које се из жиже виде под сталним углом, јесте коничан пресек који са првим коничним пресеком има заједничку жижу и заједничку управницу.
(3) Корда што спаја тачке у којима краци углова сталне величине дирају круг, заогрће концентричан круг.	(3*) Место тачака у којима се секу тангенте што су повучене на један коничан пресек, а на крајевима корада које се из жиже виде под сталним углом, јесте један коничан пресек који са датим коничним пресеком има заједничку жижу и заједничку управницу.

Обе теореме (2) и (3) преобразили бисмо у корелативне теореме (2*) и (3*) помоћу другог, у почетку овог члана поменутог правила.

Сем поменута два правила има још једно треће правило по коме се могу метричке особине круга удвајати. Ево тог правила: *раздаљина OA неке тачке A од средишта O помоћног круга стоји према раздаљини OB тачке B од средишта тог круга, као што стоји раздаљина AM тачке A од поларе тачке B према раздаљини BN тачке B од поларе тачке A.* (САЛМОНОВА ТЕОРЕМА.)

Нека је $x^2 + y^2 = r^2$ еквација помоћног круга. Ако су x', y' и x'', y'' координате тачака A и B, биће

$$AM = \frac{x'x'' + y'y'' - r^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2}};$$

с тога је

$$AM \cdot OB = x'x'' + y'y'' - r^2.$$

По симетрији израза $x'x'' + y'y'' - r^2$ види се да је и

$$BN \cdot OA = x'x'' + y'y'' - r^2.$$

Према томе је $AM \cdot OB = BN \cdot OA$, па је с тога $OA : OB = AM : BN$, а то смо и тврдили[1]).

Ево и примера на коме ћемо применити то правило:

(4) У сваком четвороуглу уписаном у некакав круг је производ раздаљинâ ма које накружне тачке од двеју супротних страна једнак производу раздаљинâ те исте тачке од осталих двеју страна.

(4*) У сваком четвороуглу описаном око неког коничног пресека стоји производ раздаљина двају супротних теменâ од ма које тангенте у сталној напремици према производу раздаљинâ двају осталих теменâ од те исте тангенте.

Кад бисмо теорему (4*) даље удвајали по методу узајамних полара, онда бисмо добили т. зв. Папусову теорему: *у сваком четвороуглу уписаном у некакав коничан пресек је напремица, у којој стоји производ раздаљина ма које тачке криве од двеју супротних страна према производу раздаљина те исте тачке од двеју осталих страна, стална количина.*

У осталом [види чл. 334. екв. (8)] јасно је да је та теорема аналитички формулисана овим обрасцем:

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = const.$$

398. Узмимо сад на једној правој четири тачке A, B, C, D. Поларе a, b, c, d тих тачака сећи ће се у једној тачци. Тачкама A, B, C, D датог низа одговарао би дакле дуално прамен зракова a, b, c, d. Ако је поново круг помоћан коничан пресек, биће (прим. 5. стр. 355.) двојна напремица тачака A, B, C, D једнака с двојном напремицом зракова a, b, c, d; биће дакле $(ABCD) = (abcd)$.[2]) Према томе бисмо, знајући хармо-

---

[1]) Та теорема може се и чисто геометријским путем доказати. Види **Pruvost**. *Géométrie analytique*, p. 485. — Како је (сл. 178.) QR полара тачке C, а PT полара тачке P', биће према поменутој теореми $OP' : P'Q = OC : CP$, па како је $OC : CP = const.$, биће јасно да тачка P' — поларна слика тангенте PT — описује један коничан пресек чија је жижа тачка O, а управница права QR. Ту теорему смо у осталом аналитички већ у један мах (чл. 395.) доказали.

[2]) Треба у овом посебном случају имати у виду само то, да су поларе нормале оних правих, које спајају полове са средиштем помоћног круга; та теорема је у осталом у општем случају доказана у прим. 1. стр. 789.

нијске особине круга, по начелу узајамних полара могли наћи читав један низ корелативних особина коничних пресека. Ево неколико примера[1]:

(1) Крајеви дијаметра неког круга су хармонијски коњуговане тачке према средишту и тачци што на том дијаметру у бескрајности лежи.	(1*) Тангенте повучене ма из које тачке управнице неког коничног пресека су хармонијски коњуговане према управници и правој што спаја ту тачку управнице са жижом.
(2) Тачке у којима се секу заједничке тангенте двају кругова и средишта тих кругова леже хармонијски на централи тих кругова.	(2*) Заједничке секанте двају коничних пресека који имају заједничку жижу и управнице тих коничних пресека секу се у једној тачци и граде хармонијски прамен.
(3) Ако спојимо четири сталне накружне тачке са неком петом тачком тог круга, онда се двојна напремица прамена, који се тим путем добива, не мења кад се пета тачка креће по кругу.	(3*) Четири сталне тангенте секу покретну тангенту неког коничног пресека у четири тачке које имају сталну двојну напремицу.

Теорему (3) поменули смо у прим 6. стр. 355., а теорему (3*) доказали смо у чл. 377. —

Из ово неколико примера види се већ од какве је важности у геометрији метод узајамних полара. Поменућемо само још то, да је Шал при удвајању неких метричких теорема узимао *параболу*, а не круг[2]).

Примери

1. Тангенте повучене на круг на крајевима неке корде су једнако нагнуте према тој корди.	1*. Права што спаја жижу коничног пресека са тачком у којој се секу две тангенте полови угао под којим се из жиже види корда што спаја додирне тачке.
2. У кругу је тангента управна на полупречнику који пролази кроз додирну тачку.	2*. Угао под којим се из жиже види одсечак што на тангенти лежи између додирне тачке и управнице јесте прав угао.

---

[1]) Ти и још неки идући примери узети су из изврсног дела: **Carnoy.** *Géométrie analytique*, p. 386—387.

[2]) Види **Chasles.** *Mémoire sur la transformation parabolique des relations métriques des figures* и *Géométrie supérieure p. 407.*

3. Полупречници што су у кругу повучени према крајевима неке корде, затварају једнаке угле са том кордом.	3*. Права што спаја жижу коничног пресека са тачком у којој се секу две тангенте полови угао између правих које спајају жижу са тачкама у којима те тангенте секу управницу.
4. Права што спаја средиште круга са тачком у којој се секу две тангенте његове полови угао између тих тангената.	4*. Права што спаја жижу неког коничног пресека са тачком у којој нека секанта сече управницу полови угао између правих што спајају жижу са тачкама у којима секанта сече коничан пресек.
5. Права што спаја пол неке праве са средиштем круга је управна на тој правој.	5*. Угао под којим се из жиже неког коничног пресека види нека тачка T и тачка K у којој полара те тачке T сече управницу јесте прав угао.
6. Из неке сталне тачке повући ћемо тангенте на систему концентричних кругова. Место додирних тачака је круг који пролази кроз сталну тачку и заједничко средиште кругова.	6*. Из тачака у којима нека стална права сече систему коничних пресека који имају заједничку жижу и заједничку управницу повући ћемо тангенте на те коничне пресеке. Обвојница тих тангената је коничан пресек који дира сталну праву и заједничку управницу и има једну заједничку жижу са датим коничним пресецима.
7. Тангенте повучене на круг на крајевима дијаметра су паралелне.	7*. Ако ма из које тачке управнице неког коничног пресека повучемо тангенте на тај коничан пресек, онда ће корда што спаја додирне тачке бити фокална корда.
8. Два конфокална конична пресека секу се под правим углом.	8*. Заједничка тангента двају кругова види се ма из које граничне тачке тих кругова под правим углом.

9. Дата је нека стална права. Та права има према сваком коничном пресеку неке конфокалне системе свој пол, а место тих полова је (чл. 326.) нека нормала те праве. — Преобразити ту теорему по начелу узајамних полара.

10. Наћи помоћан круг за који би се Диоклова Цисоида

$$x\,(x^2+y^2)=ay^2$$

преобразила сама у себе.

G. Fouret.

11. Дата су два круга, а њихове поларно узајамне слике према неком трећем кругу су два конична пресека. Кругови чији су дијаметри фокалне осовине тих коничних пресека секу се под истим углом као и дати кругови.

Faure.

12. Поларна слика коничног пресека S_1 према коничном пресеку S_2 је $\boldsymbol{\Sigma}_1$, а поларна слика коничног пресека S_2 према пресеку S_1 је $\boldsymbol{\Sigma}_2$. Тачке у којима се секу конични пресеци S_1 и S_2, $\boldsymbol{\Sigma}_1$ и $\boldsymbol{\Sigma}_2$ леже на једном коничном пресеку.

Faure.

13. Наћи поларно узајамну слику елипсе (a, b) према кругу чије је средиште тачка (x', y'), а полупречник r.

Одг. $$(xx' + yy' + r^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

14. Доказати да је поларно узајамна слика параболе према кругу чије средиште лежи на управници те параболе равнострана хипербола.

15. Доказати да су ове две теореме поларно узајамне:

Ортоцентар троугла описаног око параболе лежи на управници.	Ортоцентар троугла уписаног у равнострану хиперболу лежи на хиперболи.

16. Преобразити по методу узајамних полара ову теорему: сваки коничан пресек што пролази кроз тачке у којима се секу две равностране хиперболе јесте равнострана хипербола.

17. Преобразити по методу узајамних полара ову теорему: производ одсечака корада неког круга повучених кроз неку сталну тачку O је стална количина.

18. Дата је трилинеарна еквација $(a, b, c, f, g, h)(\alpha, \beta, \gamma)^2 = o$ неког коничног пресека. Наћи тангенцијалну еквацију поларно узајамне слике према неком кругу. —

Нека је O средиште помоћног круга, ABC нека је основни троугао, а $A'B'C'$ нека је поларна слика троугла ABC. Ако је A' пол стране BC, биће $OA' \perp BC$. Узмимо сад да нам је ма где у равни дата нека тачка $P(\alpha, \beta, \gamma)$ и означимо у систему $A'B'C'$ тангенцијалне координате поларе те тачке са u, v, w. Ако је $OA' = \varkappa$, $OB' = \lambda$, $OC' = \mu$, биће према познатој Салмоновој теореми (чл. 397.)

$$\alpha = OP \cdot \frac{u}{\varkappa}, \text{ и т. д.} \qquad (1)$$

Према томе је тражена тангенцијална еквација поларно узајамне слике ово:

$$(a, b, c, f, g, h)\left(\frac{u}{\varkappa}, \frac{v}{\lambda}, \frac{w}{\mu}\right)^2 = o.$$

19. Дата је тангенцијална еквација $(A, B, C, F, G, H)(u, v, w)^2 = o$ неког коничног пресека. Наћи пунктуалну еквацију поларно узајамне слике према неком кругу.

Нека су u, v, w управне спуштене из темена A', B', C' основног троугла $A'B'C'$ на неку тангенту коничног пресека. Ако су k, l, m пунктуалне координате средишта O помоћног круга према троуглу ABC — поларној слици троугла $A'B'C'$ — биће $k \cdot OA' = r^2$, где је r полупречник помоћног круга. Узмимо поново да је $OA' = \varkappa$; биће дакле $k\varkappa = r^2$. Ако сад из те еквације и из еквације (1) у прим. 18. елиминирамо $\varkappa$, добићемо ово:

$$u = \frac{r^2}{OP} \cdot \frac{\alpha}{k}.$$

Сличним путем бисмо добили и вредности количина v, w. Пунктуална еквација поларно узајамне слике дате криве била би дакле ово:

$$(A. B, C, F, G, H)\left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{l}, \frac{\gamma}{m}\right)^2 = o.$$

20. Еквација круга описаног око основног троугла је

$$\frac{\sin A}{\alpha} + \frac{\sin B}{\beta} + \frac{\sin C}{\gamma} = o. \qquad (2)$$

Међу тим је

$$A = 180^0 - B'OC', \; B = 180^0 - C'OA', \; C = 180^0 - A'OB'.$$

Ако означимо угле $B'OC'$, $C'OA'$ и $A'OB'$ са φ, ψ и χ, биће $A = 180^0 - \varphi$, $B = 180^0 - \psi$, $C = 180^0 - \chi$. Еквација поларне слике круга (2) је дакле ово:

$$\sin\varphi \cdot \frac{\varkappa}{u} + \sin\psi \cdot \frac{\lambda}{v} + \sin\chi \cdot \frac{\mu}{w} = o. \qquad (3)$$

Како кругу описаном око троугла одговара коничан пресек који је уписан у троугао и чија је жижа средиште круга, биће јасно да нам еквација (3) представља тангенцијалну еквацију тог коничног пресека.

21. Дата је жижа (k, l, m) неког коничног пресека који дира стране троугла ABC. Наћи пунктуалну еквацију тог коничног пресека.

Одг. Ако са φ, ψ, χ означимо угле BOC, COA, AOB, биће тражена еквација овог облика:

$$\sin\varphi\sqrt{\frac{\alpha}{k}}+\sin\psi\sqrt{\frac{\beta}{l}}+\sin\chi\sqrt{\frac{\gamma}{m}}=o.$$

Напом. Треба имати у виду да је дат коничан пресек поларно узајамна слика круга описаног око троугла $A'B'C'$ — поларно узајамне слике троугла ABC.

22. Некакав троугао је уписан у дату елипсу (a, b) тако, да је жижа елипсина средиште оног круга који је уписан у поменути троугао. Наћи полупречник тог круга.

Одг. Полупречник круга је $= b^2/(a+\sqrt{2a^2-b^2})$.

◆

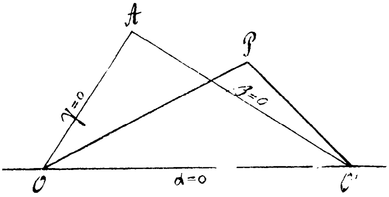
ОДЕЉАК ПЕТИ

Анхармонијске особине коничних пресека.

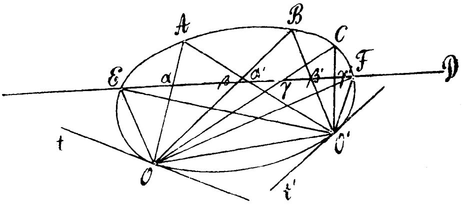
399. Са теоријом пројективних праменова и низова стоје, као што ћемо одмах видети, у тесној вези криве другог степена. Доказаћемо на име ове две основне теореме:

Теорема 1-ва. *Место тачака у којима се секу спрегнути зраци двају пројективних праменова јесте коничан пресек; тај коничан пресек пролази кроз темена пројективних праменова.*

Нека су O и O' темена датих пројективних праменова, а OA и $O'A$ два одређена спрегнута зрака.



Сл. 179.



Сл. 180.

Даље, нека су $\alpha = o, \beta = o, \gamma = o$ еквације правих OO', $O'A$, AO. Повуцимо сад ма у ком правцу два спрегнута зрака OP и $O'P$. Њихове еквације биће овог облика:

$$\gamma = m\alpha, \quad \beta = m'\alpha. \qquad (1)$$

Ми смо међу тим претпоставили да су прамени O и O' пројективни С тога ће параметри m и m' међу собом бити везани оваквом билинеарном релацијом:

$$amm' + bm + cm' + d = o.$$

Како зраку OA одговара пројективно зрак $O'A$, то ће вредности $m = o$ одговарати вредност $m' = o$, а по томе се види да ће у горњој билинеарној релацији бити $d = o$. У овај мах ће дакле параметри m и m' међу собом бити везани овом билинеарном релацијом:

$$amm' + bm + cm' = o.$$

Ако сад из те еквације и еквација̂ (1) елиминирамо параметре m и m', добићемо еквацију

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = o.$$

Место тачака P је дакле коничан пресек; тај коничан пресек пролази кроз темена основног троугла OAO', а то ће рећи и кроз темена O и O' датих праменова.

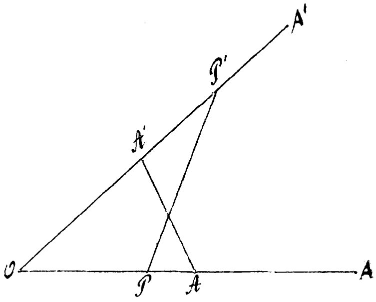
Напомене. 1-во. Права OO' што спаја темена O и O' је зрак и једног и другог прамена. Права $O't'$, која пројективно одговара правој OO' као зраку првог прамена, биће тангента коничног пресека у тачци O'; исто би тако и права Ot, која пројективно одговара правој $O'O$ као зраку другог прамена, била тангента коничног пресека у тачци O.

2-го. Ако права OO' сама себи пројективно одговара као зрак једног и другог прамена, т. ј. ако су прамени O и O' у перспективном положају, онда ће — као што се јасно види — и права OO' бити саставни део места тачака у којима се секу по два спрегнута зрака праменова O и O'. *Коничан пресек изметнуће се дакле у две праве кад су прамени O и O' у перспективном положају; једна од тих правих је права што* *спаја темена O и O', а друга је права осовина перспективе.* —

3-ће. Кад знамо пет тачака O, O'. A, B, C коничног пресека, онда ћемо наћи колико год хоћемо тачака тог коничног пресека овако. Повући ћемо из темена O прамена O (A, B, C) ма у ком правцу један зрак и потражићемо у прамену O' (A, B, C) зрак који том зраку пројективно одговара. Тачка у којој се секу та два зрака била би већ једна нова тачка коничног пресека. — Помоћу Паскалове теореме се та проблема брже решава (чл. 348.).

Теорема. 2-га. *Обвојница правих које спајају спрегнуте тачке двају пројективних низова јесте коничан пресек; тај коничан пресек дира дате две носиље тачака.*

Нека су $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A'}$ носиље датих пројективних низова, а A и A' две одређене спрегнуте тачке. Даље,



Сл. 181.

нека су $u = o$, $v = o$, $w = o$ еквације тачака O, A', A. Узмимо сад ма где на носиљама две спрегнуте тачке P и P'. Њихове еквације биће овог облика:

$$w = mu, \quad v = m'u. \qquad (2)$$

Ми смо међу тим претпоставили да су низови $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A'}$ пројективни. С тога ће параметри m и m' међу собом бити везани оваквом билинеарном релацијом:

$$amm' + bm + cm' + d = o.$$

Како тачци A пројективно одговара тачка A', то ће вредности $m = o$ одговарати вредност $m' = o$, а по томе се види да ће у горњој билинеарној релацији бити $d = o$. У овај мах ће дакле параметри m и m' међу собом бити везани овом билинеарном релацијом:

$$amm' + bm + cm' = o.$$

Ако сад из те еквације и еквација̂ (2) елиминирамо параметре m и m', добићемо еквацију

$$avw + bwu + cuv = o.$$

Обвојница правих PP' је дакле коничан пресек; тај коничан пресек дира стране основног троугла AOA', а то ће рећи, и носиље **A** и **A'** датих низова.

Напомене. 1-во Тачка O у којој се секу носиље **A** и **A'** је тачка и једног и другог низа. У тачци T' низа **A'**, која пројективно одговара тачци O као тачци првог низа, дираће носиља **A'** коничан пресек; исто би тако у тачци T низа **A**, која пројективно одговара тачци O као тачци другог низа, дирала носиља **A** коничан пресек.

2-го. Ако тачка O сама себи пројективно одговара као тачка једног и другог низа, т. ј. ако су низови **A** и **A'** у перспективном положају, онда ће — као што се јасно види — и тачка O бити саставни део обвојнице правих које спајају по две спрегнуте тачке низова **A** и **A'**. *Коничан пресек изметнуће се дакле у две тачке кад су низови* **A** *и* **A'** *у перспективном положају; једна од тих тачака је тачка у којој се секу носиље* **A** *и* **A'**, *а друга је тачка центар перспективе.*

3-ће. Кад знамо пет тангената коничног пресека, онда је лако наћи колико год хоћемо тангената тог коничног пресека. Треба просто на носиљи **A** узети ма где једну тачку, па потражити на носиљи A' тачку која тој тачци пројективно одговара. Права која спаја те две тачке била би већ једна нова тангента коничног пресека. — Помоћу Бријаншонове теореме се та проблема брже решава (чл. 354.).

400. *Дате су петоре тачке O, O', A, B, C неког коничног пресека. Наћи тачке у којима коничан пресек сече нека права D.*

Спојићемо ма које две између поменутих пет тачака, н. пр. тачке O и O', са остале три тачке A, B, C и добићемо тим путем три пара спрегнутих зракова (OA, $O'A$), (OB, $O'B$), (OC, $O'C$); ти парови потпуно одређују два пројективна прамена O и O'. Место тачака у којима се секу два и два спрегнута зрака био би коничан пресек који пролази кроз пет датих тачака.

Зраци OA, OB, OC и $O'A$, $O'B$, $O'C$ пројективних праменова O (A, B, C) и O' (A, B, C) секу праву D у тачкама α, β, γ и α', β', γ' (сл. 180.), а тачкама α, β, γ с једне и α', β', γ' с друге стране била би на заједничкој носиљи D одређена два пројективна низа. Двојне тачке E и F тих пројективних низова биле би тачке у којима права D сече поменути коничан пресек, а те двојне тачке могу се одредити конструктивним путем (чл. 142.).

Напомена. Јасно је да ће двојне тачке E и F бити имагинарне кад права D не сече коничан пресек који пролази кроз пет тачака. — Двојне тачке ће се поклапати ако права D дира коничан пресек.

Разред криве. Ако из темена O повучемо зраке OA', OB', OC', . . . напоредо са зрацима $O'A$, $O'B$, $O'C$, . . ., добићемо два концентрична пројективна прамена O (A,B,C) и O (A', B', C'). Двојни зраци Oe и Of тих пројективних праменова су или имагинарни, или су реални и различити, или се поклапају. У првом случају биће коничан пресек што пролази кроз пет тачака O, O', A, B, C елипса, у другом хипербола, а у трећем парабола. — Ево доказа. Потражићемо тачке у којима права у бескрајности сече коничан пресек онако исто као што смо мало час тражили тачке у којима права D сече криву. Тим путем добићемо на правој у бескрајности два пројективна низа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ и $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$, а двојне тачке E и F тих низова на заједничкој основи биле би тачке у којима права у бескрајности сече коничан пресек. Како међу тим зраци OA', OB', OC', $\cdot\ \cdot\ \cdot$ прамена O (A', B', C') иду напоредо са зрацима $O'A$, $O'B$, $O'C$, $\cdot\ \cdot\ \cdot$ прамена O' (A, B, C), то ће ти зраци OA', OB', OC', $\cdot\ \cdot\ \cdot$ сећи праву у бескрајности у истим оним тачкама α', β', γ', $\cdot\ \cdot\ \cdot$ у којима је секу и зраци $O'A$, $O'B$, $O'C$, $\cdot\ \cdot\ \cdot$ Према томе ће и двојни зраци Oe и Of концентричних прамена O (A, B, C) и O (A', B', C') сећи праву у бескрајности у поменутим двема тачкама E и F. Ти двојни зраци биће дакле имагинарни (реални) кад су и тачке E и F имагинарне (реалне), т. ј. и т. д.

401. *Дате су петоре тангенте неког коничног пресека. Повући на криву тангенте из дате тачке.*

Нека је T дата тачка и нека су A и A' две између поменутих пет тангената. Те две тангенте сећи ће остале три тангенте у тачкама A, B, C и A', B', C'. Како тачке A и A', B и B', C и C' пројективно једна другој одговарају, то ће и концентрични прамени T (A, B, C) и T (A', B', C') бити пројективни. Двојни зраци тих праменова биће тангенте које се из тачке T могу повући на коничан пресек.

402. Теорема. *Сваки коничан пресек може се сматрати као место тачака у којима се секу по два и два спрегнута зрака двају пројективних праменова.*

Узмимо пет тачака O, O', A, B, C ма где на датом коничном пресеку. Тачке O и O' спојићемо са осталим тачкама и добићемо тим путем три пара правих, а тим правима се већ могу потпуно одредити два пројективна прамена O (A, B, C) и O' (A, B, C). Место тачака у којима се секу спрегнути зраци тих пројективних праменова биће, као што знамо, један коничан пресек S који пролази кроз тачке O, O', A, B, C. Како кроз пет тачака пролази само један једини коничан пресек, биће јасно да ће S бити управо дат коничан пресек.

Сличним путем могли бисмо доказати и *да се сваки коничан пресек може сматрати као обвојница правих које спајају спрегнуте тачке двају пројективних низова.*

Како тачке *O*, *O'*, *A*, *B*, *C* могу бити ма које тачке датог коничног пресека и како сем тога ма које две између поменутих пет тачака могу бити темена двају пројективних праменова,

Како тангенте *o*, *o'*, *a*, *b*, *c* могу бити ма које тангенте датог коничног пресека и како сем тога ма које две између поменутих пет тангената могу бити носиље двају пројективних низова,

биће јасно да ћемо уз наше основне две теореме добити још и ова правила:

Праве које спајају ма које две тачке неке криве другог реда са осталим тачкама те криве одређују два пројективна прамена.

Ако се из четири сталне тачке неког коничног пресека повуку четири праве према некој петој тачци његовој, онда се двојна напремица тих правих не мења кад се пета тачка креће по коничном пресеку. (Шал.)

Тангенте неке криве друге врсте секу ма које две тангенте те криве хомографички.

Ако четири сталне тангенте неког коничног пресека пресечемо у четири тачке неком петом тангентом, онда се двојна напремица тих тачака не мења кад се пета тангента креће по коничном пресеку. (Шал.)

Напомена. Последње две Шалове теореме доказали смо ми у осталом већ и аналитичким путем (чл. 334. и чл. 377.).

403. Из поменутих теорема може се извести читав један низ важних особина коничних пресека. Ми ћемо неколико тих особина поменути.

1. *Ако се два угла aop и ao'p сталне величине обрћу око својих темена o и o' тако, да тачка a у којој се секу краци oa и o'a описује неку праву, онда ће тачка p у којој се секу остала два крака op и o'p описати један коничан пресек који пролази кроз темена o и o'.* (Њутнова теорема.)

Прво и прво је јасно да су прамени (o, a) и (o', a) пројективни; даље, како се угли не мењају, биће и прамени (o, a) и (o, p) с једне, и (o', a) и (o', p) с друге стране пројективни. С тога су и прамени (o, p) и (o', p) пројективни, т. ј. место тачака p је коничан пресек; тај коничан пресек пролази кроз темена o и o'.

Напом. Место тачака p је коничан пресек и кад се тачка a креће по ма каквом коничном пресеку (а не по правој као мало час) који пролази кроз темена o и o'. (Шалова теорема.)

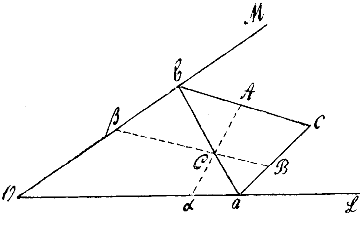
Прамени (o, a) и (o', a) биће на име и у том случају пројективни, па ће с тога бити пројективни и прамени (o, p) и (o', p).

2. Повући ћемо из неке сталне тачке o ма у ком правцу некакав зрак oaa' који дате две сталне праве **A** и **A'** сече у тачкама a и a' и одмерићемо на тим правима, почев од тачака a и a', две сталне дужи ap и $a'p'$, а у неком одређеном правцу. Права pp' загрнуће један коничан пресек који дира праве **A** и **A'**. —

Треба само имати у виду да су низови тачака p и p' пројективни.

3. *Три стране bc, ca, ab неког троугла abc, који се по облику мења, обрћу се око три сталне тачке A, B, C, а два темена a и b тог троугла крећу се по двема сталним правима OL и OM. Доказати да ће теме c описати један коничан пресек који пролази кроз тачке A и B.* (Мак-Лоренова и Брекенрицева теорема.)

Прамени (C, a) и (C, b) су пројективни. С тога су пројективни и прамени (B, a) и (A, b). Тачка c описаће дакле коничан пресек који пролази кроз тачке A и B. — Лако се може доказати да тај коничан пресек пролази и кроз тачку O у којој се секу сталне две праве и кроз тачке α и β у којима се сталне две праве секу са правима AC и BC. Поменути коничан пресек је дакле потпуно одређен, јер он пролази кроз пет тачака O, A, B, α, β.



Сл. 182.

Напомене. 1-во. Место тачака c је коничан пресек и кад страна ab заогрће некакав коничан пресек (а не пролази кроз тачку C као што смо мало час претпоставили) који дира сталне праве OL и OM. (Шалова теорема.)

Низови тачака a и b биће на име у том случају пројективни, па ће с тога бити пројективни и прамени (B, a) и (A, b) т. ј. и т. д.

2-го. Ако су тачке A, B, C колинеарне, онда права AB сама себи пројективно одговара; прамени (B, a) и (A, b) биће у перспективном положају, а место тачака c биће једна права (види прим. 37. стр. 174.).

4. *Три темена A, B, C неког троугла ABC, који се по облику мења, крећу се по трима сталним правима a, b, c, а две стране BC и CA тог троугла обрћу се око двеју сталних тачака l и m. Доказати да ће трећа страна AB тог троугла заогрнути један коничан пресек који дира стране a и b.* —

Та је теорема корелативна са мало час поменутом Мак-Лореновом и Брекенрицевом теоремом.

Напомене. 1-во Обвојница стране AB је коничан пресек и кад теме C описује некакав коничан пресек (а не праву c као што смо мало час претпоставили) који пролази кроз сталне тачке l и m.

2-го. Ако се стране a, b, c секу у једној тачци, онда ће обвојница стране AB бити једна тачка.

5. Ако теореме поменуте у прим. 3. и 4. проширимо, добићемо ова два општа правила:

а) *Неки полигон има n страна. Стране тог полигона обрћу се око n сталних тачака, а сва темена његова сем темена p крећу се по сталним правима. Место темена p јесте коничан пресек.*

b) *Неки полигон има n темена. Темена тог полигона крећу се по сталним правима, а све стране његове сем стране P обрћу се око сталних тачака. Обвојница стране P јесте коничан пресек.*

6. У неком коничном пресеку је двојна напремица четирију дијаметара једнака с двојном напремицом четирију дијаметара који су с њима коњуговани. —

Сваки дијаметар је полара оне тачке у којој коњугован дијаметар сече праву у бескрајности. Међу тим је (прим. 1. чл. 381.) двојна напремица четирију колинеарних тачака једнака с двојном напремицом њихових полара, а то ће рећи и т. д.

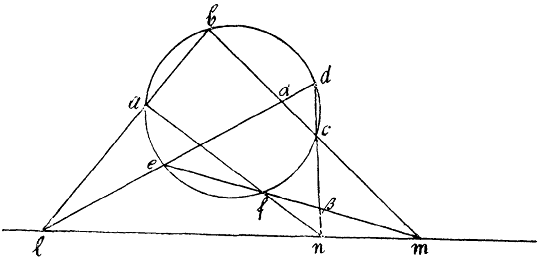
7. Доказати Паскалову теорему помоћу анхармонијских особина коничног пресека. —

Нека су a, b, c, d, e, f тачке неког коничног пресека.

Супротне стране ab и ed, bc и ef, cd и af секу се у тачкама l, m, n. Доказаћемо да су те три тачке колинеарне. Узмимо само тачке f и b за темена пројективних праменова. Према Шаловој теореми биће

$$f\,(acde) = b\,(acde).$$

Први прамен $(f \cdot acde)$ сече својим зрацима праву cd у тачкама n, c, d, β. С тога је



Сл. 185.

$$f\,(acde) = (ncd\beta).$$

Други прамен $(b \cdot acde)$ сече међу тим својим зрацима праву de у тачкама l, α, d, e, па је с тога

$$b\,(acde) = (l\alpha de).$$

Но како је $f\,(acde) = b\,(acde)$, биће и

$$(ncd\beta) = (l\alpha de).$$

Низови тачака n, c, d, β и l, α, d, e су дакле пројективни; ти низови секу се међу тим у тачци d, а та тачка у поменутим низовима одговара пројективно сама себи. Низови n, c, d, β и l, α, d, e су дакле у перспективном положају, т. ј. праве ln, $c\alpha$, βe секу се у једној тачци — у тачци m, а то значи да су тачке l, m, n колинеарне. —

Сличним путем могли бисмо помоћу анхармонијских особина тангената доказати Бријаншонову теорему.

8. *Уписати у некакав коничан пресек један полигон чије би стране пролазиле кроз дате тачке.* —

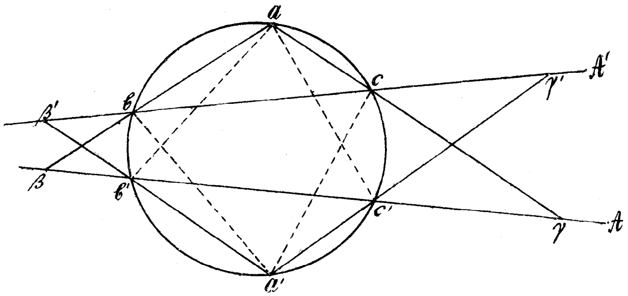
Јасно је да би проблема била решена чим бисмо знали једно теме уписаног полигона. То теме наћи ћемо овако. Узећемо ма где на коничном пресеку једну тачку a и спојићемо је једном правом са једном од датих тачака. Та права сећи ће коничан пресек у тачци α_1.

Ту тачку α_1 спојићемо са другом једном тачком дате системе и добићемо тим путем на коничном пресеку неку тачку α_2. Ту тачку α_2 спојићемо са трећом тачком дате системе и добићемо на коничном пресеку тачку α_3 и т. д. Најпосле ћемо тачку α_{n-1} спојити једном правом са последњом тачком дате системе. Та права или ће пролазити кроз тачку a и онда би проблема сасвим *случајно* била решена или, што је вероватније, не ће пролазити кроз тачку a, већ ће сећи коничан пресек у другој некој тачци a'. Сад ћемо узети још две тачке b и c на коничном пресеку, сматраћемо њих као темена уписаног полигона, покушаћемо као и мало час да нацртамо полигон и доћи ћемо тим путем најпосле до тачака b' и c'. Добили смо дакле шест тачака a и a', b и b', c и c'. Нађимо сад неку тачку X за коју је $(Xabc) = (Xa'b'c')$. Тачка X биће тражена тачка.[1]

9. Кад темена двају троуглова леже на једном коничном пресеку, онда стране тих троуглова дирају један коничан пресек (чл. 372.). —

Ево како ћемо помоћу Шалових теорема доказати ту теорему. — Нека су abc и $a'b'c'$ дати троугли. По Шаловој теореми је

$$a\,(bcb'c') = a'\,(bcb'c').$$



Сл. 184.

Зраци прамена $(a \cdot bcb'c')$ секу праву $b'c'$ у тачкама β, γ, b', c', а зраци прамена $(a' \cdot bcb'c')$ секу праву bc у тачкама b, c, β', γ'. С тога је

$$a\,(bcb'c') = (\beta\gamma b'c'),$$

а

$$a'\,(bcb'c') = (bc\beta'\gamma'),$$

па како је $a\,(bcb'c') = a'\,(bcb'c')$, биће и

---

[1] О тој проблеми бавили су се многи геометри, међу којима ћемо поменути ове: *Pappus*, *Lagrange*, *Giordano di Ottaiano*, *Malfatti*, *Euler*, *Poncelet*, *Cayley* и др. Види **Poncelet**. *Traité des propriétés projectives des figures*, I., чл. 557.

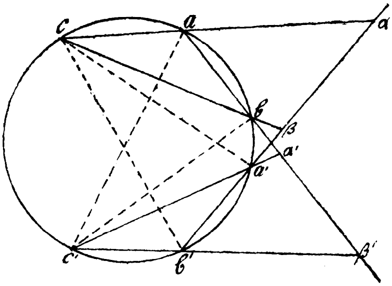
$$(\beta\gamma b'c') = (bc\beta'\gamma').$$

Тачке β, γ, b', c' низа A одговарају дакле пројективно тачкама b, c, β', γ' низа A' Праве βb, γc, $b'\beta'$, $c'\gamma'$ су према томе тангенте неког коничног пресека који дира носиље A и A', а тим би и наша теорема била доказана. —

Сличним путем могли бисмо помоћу Шалових основних теорема доказати и корелативну теорему.

10. **Кад су два троугла аутополарни троугли према неком датом коничном пресеку, онда 1-во, темена тих троуглова леже на једном коничном пресеку и 2-го, стране тих троуглова дирају некакав коничан пресек** (чл. 387.).

Нека је S дат коничан пресек и нека су abc и $a'b'c'$ аутополарни троугли тог коничног пресека.



Сл. 185.

Полови правих ca и cb према датом коничном пресеку S су b и a; пол праве ca' је тачка β' у којој се секу поларе ab и $c'b'$ тачака c и a', а пол праве cb' је тачка α' у којој се секу поларе ab и $c'a'$ тачака c и b'. Полови зракова прамена $(c \cdot aba'b')$ су дакле тачке b, a, β', α'. С тога ће бити

$$c\,(aba'b') = (ba\beta'\alpha'),$$

па како је

$$(ba\beta'\alpha') = c'\,(ba\beta'\alpha'),$$

биће и

$$c\,(aba'b') = c'\,(ba\beta'\alpha').$$

Јасно јо међу тим да је

$$c'\,(ba\beta'\alpha') = c'\,(ab\alpha'\beta') = c'\,(aba'b');$$

према томе је и

$$c\,(aba'b') = c'\,(aba'b'),$$

а по томе се види да тачке a, b, c, a', b', c' заиста леже на једном коничном пресеку, т. ј. заиста су темена двају аутополарних троуглова неког коничног пресека уједно и тачке неког другог коничног пресека.

Даље, како је двојна напремица прамена $(c \cdot aba'b')$ уједно и једнака с двојном напремицом четирију тачака α, β, a', b', биће и

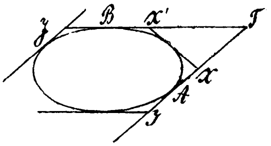
$$(ba\beta'\alpha') = (\alpha\beta a'b'),$$

па је с тога и

$$(ab\alpha'\beta') = (\alpha\beta a'b').$$

Праве $a\alpha$, $b\beta$, $\alpha'a'$, $\beta'b'$ су дакле тангенте једног коничног пресека који дира и носиље тачака a, b, α', β' и α, β, a', b', т. ј. заиста су стране двају аутополарних троуглова неког коничног пресека уједно и тангенте неког другог коничног пресека.

11. AT и BT су две сталне тангенте неког коничног пресека, XX' је нека промењива тангента, а тангенте што иду напоредо са BT и AT секу AT и BT у тачкама I и J. Доказати да је $IX \cdot JX' = IA \cdot JT = IT \cdot JB$.



Сл. 186.

12. Две сталне тангенте параболине дели нека трећа тангента сразмерно.

Напом. Тачке I и J биле би у овај мах у бескрајности.

13. Две паралелне тангенте неког централног коничног пресека дирају коничан пресек у тачкама I и J, а секу неку промењиву тангенту у тачкама X и X'. Доказати да је $IX \cdot JX' = const.$

14. *Конични пресеци описани око четири сталне тачке одређују ма на којој трансверзали два инволуторна низа тачака.* (Стурмова теорема.)

Нека је дата трансверзала tt осовина x координатне системе. Даље, узмимо да се конични пресеци S и S' секу у тачкама Q, R, S, T и повуцимо кроз те четири тачке некакав коничан пресек прамена

(SS'). Еквација тог коничног пресека биће $S + kS' = o$. Апсцисе четирију тачака у којима трансверзала — у овај мах осовина x — сече коничне пресеке S и S' биће одређене овим двема еквацијама:

$$ax^2 + 2gx + c = o, \; a'x^2 + 2g'x + c' = o,$$

а те четири тачке су у инволуцији (чл. 143. напом. 2.) са тачкама

$$ax^2 + 2gx + c + k\,(a'x^2 + 2g'x + c') = o$$

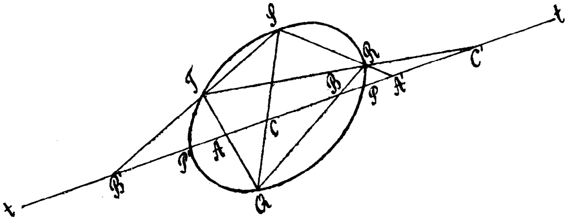
у којима трансверзала сече коничан пресек $S + kS' = o$ поменутог прамена.

Корелативна теорема. *Тангенте повучене из неке тачке T на коничне пресеке који дирају четири сталне праве одређују два инволуторна прамена.*

Напомена. Из Стурмове теореме добива се непосредно и Десаргова теорема. Треба само сматрати супротне стране QR и ST, QT и RS као два посебна конична пресека прамена (SS').

15. Доказати Десаргову теорему помоћу анхармонијских особина коничних пресека. —

Нека су A и A', B и B' тачке у којима трансверзала tt сече две и две супротне стране, а P и P' тачке у којима та трансверзала



Сл. 187.

сече коничан пресек описан око темена Q, R, S, T. По Шаловој теореми биће

$$Q\,(PRTP') = S\,(PRTP')\,;$$

с тога је и

$$(PBAP') = (PA'B'P'),$$

па је према томе и

$$(PBAP'] = (P'B'A'P),$$

а по томе се види да су тачке P и P' коњуговане, т. ј. шесторе тачке A и A', B и B', P и P' су у инволуцији.

Сличним путем бисмо помоћу анхармонијских особина могли доказати и корелативну теорему.

16. *Повући коничан пресек који пролази кроз четири дате тачке, а уз то дира дату праву tt.*

Нека су Q, R, S, T дате четири тачке. Кроз те четири тачке може се повући бескрајно много коничних пресека. Тачке A и A', B и B' (сл. 187.) одређују потпуно два низа у инволуцији. Двојне тачке те инволуције биће тачке у којима ће конични пресеци што пролазе кроз четири тачке дирати праву tt. Свега имају две двојне тачке па с тога *имају и два конична пресека (реална или имагинарна) који пролазе кроз четири тачке, а дирају дату неку праву.* Те двојне тачке одредићемо конструктивним путем (чл. 148.), па ће онда сваки од поменутих коничних пресека бити одређен системом од пет тачака.

Напом. Кад би трансверзала tt била права у бескрајности, онда бисмо нашу проблему могли овако формулисати: *повући параболу која пролази кроз четири дате тачке.* Имају дакле две параболе које пролазе кроз четири дате тачке (прим. 3. стр. 528.).

17. *Повући коничан пресек који дира четири дате праве q, r, s, t, а уз то пролази кроз дату тачку T.*

Има бескрајно много коничних пресека који дирају четири дате праве. Те четири праве затвараће један тетрагон. Праве што спајају тачку T са два и два супротна темена тог тетрагона и тангенте Tp и Tp' повучене на један од коничних пресека уписаних у тај тетрагон биће према једној нашој теореми — та је теорема корелативна са Десарговом теоремом — у инволуцији. Но ако коничан пресек пролази кроз тачку T, онда ће се тангенте Tp и Tp' поклапати и представљаће двојни зрак инволуторних праменова. Како инволуторни прамени имају два двојна зрака, *имаће и два конична пресека (реална или имагинарна) који дирају четири праве, а пролазе кроз дату тачку.* Те двојне зраке лако ћемо одредити конструктивним путем. Пресећи ћемо зраке инволуторних праменова једном трансверзалом и одредићемо на тој трансверзали двојне тачке инволуторних низова. Те двојне тачке спојићемо са теменом инволуторних праменова и добићемо тим путем двојне зраке инволуције. Ма који од поменута два конична пресека био би у том случају одређен системом од пет тангената.

Напом. Кад би једна од датих четирију тангената била права у бескрајности, онда бисмо овако могли формулисати нашу проблему: *повући параболу која дира три дате праве и сем тога пролази кроз неку дату тачку.*

18. *Конични пресеци који дирају дате две праве у датим двема тачкама одређују на ма којој трансверзали инволуторне*

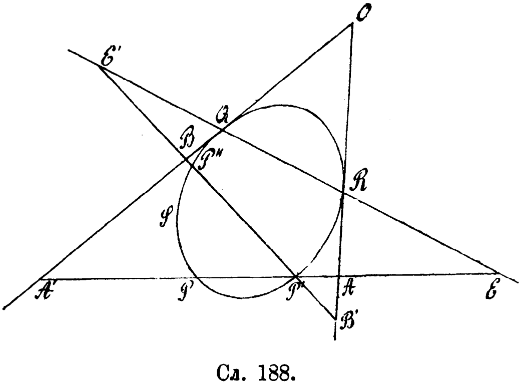
низове; једна двојна тачка те инволуције лежи на корди што спаја додирне тачке.

Та теорема је само специјалан случај теореме Десаргове. Треба на име само претпоставити да се (сл. 187.) тачке Q и T, R и S поклапају. У том случају би праве QT и RS дирале коничне пресеке у тачкама Q и R, па како се праве QR и ST поклапају, то би се поклапале и коњуговане тачке B и B' у некој тачци E заједничке основе. Тачка E у којој би корда QR секла трансверзалу била би дакле двојна тачка инволуције одређене тачкама P и P', A и A'.

Корелативна трорема. *Тангенте повучене из неке сталне тачке T на коничне пресеке који дирају две дате праве q и r у датим тачкама одређују инволуторне прамене; један зрак те инволуције пролази кроз тачку O у којој се секу дате праве q и r.*

19. *Повући коничан пресек који пролази кроз три дате тачке P, P', P'' и сем тога дира дате две праве OQ и OR.*

Узмимо да је проблема решена, па нека је S онај коничан пресек који пролази кроз дате три тачке, а дира дате две праве. Према мало



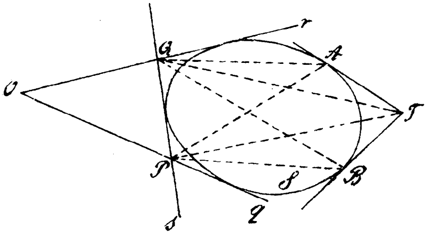
Сл. 188.

час поменутој теореми биће тачке A и A', P и P' у инволуцији, а једна од двеју двојних тачака те инволуције биће тачка E. Из истих разлога биће и тачке B и B', P' и P'' у инволуцији, а једна од њезиних двојних тачака биће тачка E'.

Имајући све то у виду повући ћемо коничан пресек S овако. Спојићемо тачке P и P', P' и P'' и означићемо тачке у којима те праве секу дате две праве са A и A', B и B'. Тачке A и A', P и P' биће у инволуцији; двојне тачке те инволуције одредићемо конструктивним путем и означићемо их са E и F. Исто ће тако и тачке B и B', P' и P'' бити у инволуцији, а двојне тачке те инволуције означићемо са E' и F'. Како корда која спаја тачке у којима крива дира праве OQ и OR мора пролазити кроз једну од двојних тачака E и F и кроз једну од двојних тачака E' и F', биће јасно да ће та корда морати бити једна од четирију правих EE', FF', EF', FE'. Кад бисмо дакле знали која од те четири праве спаја поменуте додирне тачке, онда бисмо добили још две тачке кроз које коничан пресек мора пролазити, па бисмо према томе, познавајући пет тачака коничног пресека, могли лако повући тражени пресек S. Свака између поменуте четири праве сече међу тим дате две праве у двема тачкама, а ми тврдимо, да ће сваки коничан пресек који пролази кроз те две и две тачке и кроз дате три тачке дирати дате праве у тим двема тачкама; доказаћемо дакле, да *имају четири (реална или имагинарна) конична пресека који дирају дате две праве, а пролазе кроз дате три тачке*. Узмимо н. пр. праву EE'. Та права сече сталне две праве у тачкама Q и R. Кроз тачку P' моћи ћемо (прим. 11. стр. 460.) повући само један коничан пресек који дира дате две праве у тачкама Q и R. Тај коничан пресек пролазиће кроз још једну тачку праве AA', која је у инволуторним низовима, које одређују тачке A и A' и двојна тачка E, коњугована с тачком P'; тај коничан пресек мораће дакле пролазити и кроз тачку P. Сличним путем би се дало доказати да ће тај коничан пресек морати пролазити и кроз тачку P''.

20. *Повући коничан пресек који дира дате три праве q, r, s и сем тога пролази кроз дате две тачке A и B.*

Узмимо да је проблема решена и означимо са S коничан пресек који дира дате три праве и пролази кроз дате две тачке. Праве PO



Сл. 189.

и PQ, PA и PB биће у инволуцији, а један од двојних зракова те инволуције биће права PT. Исто ће тако и праве QO и QP, QA и QB бити у инволуцији, а један од двојних зракова те инволуције биће права QT. Како тачка у којој се секу тангенте повучене на криву у тачкама A и B мора лежати на једном од двојних зракова прве инволуције и на једном од двојних зракова друге инволуције, биће јасно да ће та тачка бити једна од оне четири тачке у којима двојни зраци једне секу двојне зраке друге инволуције. Кад бисмо дакле знали у којој се између поменутих четирију тачака секу тангенте повучене на криву у тачкама A и B, онда бисмо добили још две тангенте коничног пресека, па бисмо према томе, познавајући пет тангената коничног пресека, лако могли повући тај пресек. Из сваке тачке поменуте групе четирију тачака могу се међу тим повући две праве према датим двема тачкама A и B, а доказаћемо да ће сваки коничан пресек, који дира те две и две праве и сем тога и дате три праве, пролазити баш кроз саме две тачке A и B; доказаћемо дакле, да *имају четири (реална или имагинарна) конична пресека који пролазе кроз дате две тачке, а дирају дате три праве.* Узмимо н. пр. тачку T. Ту тачку спајају са сталним двема тачкама A и B праве TA и TB, а има само један једини коничан пресек који дира праву q у некој тачци те праве, а поменуте две праве TA и TB у одређеним тачкама A и B. На тај коничан пресек може се из тачке P повући још једна тангента, која је у инволуторним праменима, које одређују праве PA и PB и двојни зрак PT, коњугована са тангентом PO; тај коничан пресек дираће дакле и праву PQ. Сличним путем би се дало доказати да ће тај коничан пресек дирати и праву QO.

21. Колико парабола има које дирају четири дате праве, а колико их има које пролазе кроз две тачке, а дирају две праве?

22. Доказати да су коњуговани дијаметри елипсе или хиперболе у инволуцији и одредити конструктивним путем двојне зраке једне и друге инволуције.

Напом. Двојни зраци прве инволуције су имагинарни, а двојни зраци друге инволуције су асимптоте хиперболине. Са тог разлога се инволуција тачака или зракова, у којој би двојни елементи били имагинарни (реални) зове елиптична (хиперболична) инволуција (чл. 147.).

23. Тачке у којима нека трансверзала сече коаксалну систему кругова су инволуцији. Тачке у којима та трансверзала дира два круга коаксалне системе су двојне тачке, а тачка у којој трансверзала сече радикалну осовину системе је централна тачка инволуције.

24. Конични пресеци који имају заједнички аутополаран троугао одређују на свакој трансверзали, која пролази кроз једно од темена тог троугла, систему тачака у инволуцији.

25. Три конична пресека су описана око неког тетрагона. Доказати да ће сваку заједничку тангенту двају коничних пресека трећи делити хармонијски.

Напом. Треба имати у виду да ће тачке у којима тангента дира два конична пресека бити двојне тачке инволуције.

26. Из тачке у којој се секу две заједничке секанте двају коничних пресека повући ћемо тангенту на један од тих двају пресека. Доказати да ту тангенту онај други коничан пресек хармонијски дели.

Напом. Та теорема је само специјалан случај теореме поменуте у прим. 25.

ОДЕЉАК ШЕСТИ

Метод пројекција.

404. Дефиниције. Дата нам је нека слика F у равни Π. Тачке те слике спојићемо с неком тачком O која лежи у простору изван равни Π и добићемо тим путем један конус. Тај конус ћемо пресећи неком равни π. Слика f која се добива у пресеку зове се *централна пројекција* или *перспектива* дате слике. Тачка O зове се *средиште пројицирања*, а раван π *раван пројекције*. Раван Π зваћемо првобитном равни. — Кад бисмо раван π узели за првобитну раван, а раван Π за раван пројекције, онда би слика F била пројекција слике f.

Кад средиште пројицирања лежи у бескрајности, онда се пројекције појединих слика зову *паралелне пројекције*. Посебан случај паралелне пројекције била би *ортогонална пројекција*.

Права по којој се секу равни Π и π зове се *осовина пројицирања*.

Пројекција неке тачке A равни Π је тачка a, у којој права OA што спаја средиште пројицирања са тачком A, сече раван пројекције. — Пројекција ма које тачке осовине пројицирања јесте сама та тачка.

Напомена. Тачке првобитне равни Π бележићемо великим писменима $A, B, C, \cdots P, \cdots$, а њихове пројекције малим писменима $a, b, c, \cdots p, \cdots$

Теорема. *Пројекција праве је права.*

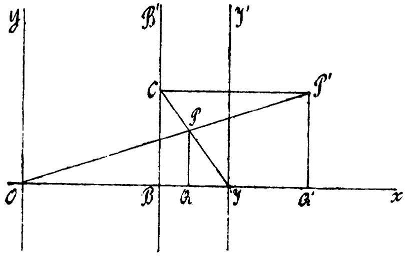
Ако на име спојимо све тачке неке праве са тачком O, добићемо једну раван, а та раван сече раван π по једној правој, т. ј. и т. д. — Свака права и њезина пројекција секу се на осовини пројицирања.

Последица (1). — Ако се система неких правих сече у некој тачци P, сећи ће се и њихове пројекције у тачци p, т. ј. у пројекцији тачке P.

Последица (2). — Корди PP' неке криве одговара корда pp' пројекције те криве. Ако су тачке P и P' две суседне тачке првобитне криве, биће и тачке p и p' суседне тачке њезине пројекције.

Према томе је јасно 1-во, *да ће пројекција неке равне криве m-тог реда бити крива истога реда* и 2-го, *да је пројекција тангенте неке криве тангента пројекције.* — У опште ће се пројекције двеју кривих додиривати само ако се те две криве дирају и обратно.

Напомена. Сем поменуте дефиниције, пројекције има још једна,[1]) коју ћемо такође поменути. *Нека је O почетак и нека су Ox и Oy осовине координатне системе. Повући ћемо две праве BB' и II' напоредо са осовином y координатне системе и спојићемо тачку P с тачком I. Права PI сећи ће праву BB' у тачци C. За тим ћемо из тачке C повући праву CP' напоредо са осовином x. Тачка P' у којој CP' сече праву OP зове се пројекција тачке P.*



Сл. 190.

---

[1]) Види **Casey.** *Analytical Geometry*, p. 349.

Ако је $OI = a$, $BI = c$ и ако су x, y координате тачке P, а x', y' координате тачке P', биће

$$x = \frac{ax'}{c + x'}, \quad y = \frac{ay'}{c + x'} .$$

По тим обрасцима може се свакад наћи еквација пројекције неке криве чим се зна еквација те криве. Ми ћемо се међу тим држати оне прве дефиниције јер геометријско сродство између неке слике и њезине пројекције много јаче пада у очи по првој дефиницији него по другој.

405. Повуцимо сад кроз средиште пројицирања једну раван напоредо са првобитном равни Π. Та раван сећи ће раван пројекције по некој правој Δ. Пројекције свих тачака што у бескрајности леже у равни Π, лежаће на правој Δ. — Даље повуцимо кроз средиште пројицирања једну раван напоредо са равни пројекције. Та раван сећи ће првобитну раван по правој Δ'. Пројекције свију тачака те праве биће у бескрајности. Праве Δ и Δ' зову се *супротне осовине (Gegenaxen)* равни Π и π. Супротна осовина Δ лежи дакле у равни пројекције, а супротна осовина Δ' у првобитној равни Π. Јасно је да супротне осовине иду напоредо са осовином пројицирања.

ТЕОРЕМА. 1. *Пројекције двеју паралелних правих равни Π секу се у једној тачци супротне осовине Δ.*

Тачка у којој се секу две напореднице равни Π лежи на име у бескрајности, а пројекција те тачке лежи на супротној осовини Δ у равни π.

ТЕОРЕМА 2. *Пројекције двеју правих равни Π, које се секу у једној тачци супротне осовине Δ', јесу паралелне праве.*

Пројекције свију тачака осовине Δ' леже на име у бескрајности, т. ј. и т. д.

Те две теореме могли бисмо и овако формулисати: 1-во, *централним пројицирањем мења се система пара-*

лелних правих у прамен чије теме лежи на супротној осовини Δ; 2-го, *централним пројицирањем мења се прамен, чије теме лежи на супротној осовини Δ', у систему паралелних правих.*

406. Оне особине неке слике, које имају и све пројекције те слике зову се *пројективне* особине. *Све дескриптивне особине неке слике биле би дакле пројективне.* Ако се на име претпостави да се у првобитној слици праве секу у једној тачци, сећи ће се и њихове пројекције у једној тачци; ако се претпостави да су неке тачке у првобитној слици колинеарне, биће јасно да ће и пројекције тих тачака бити колинеарне и т. д. Но сем дескриптивних особина геометријских слика *има и метричких особина које су пројективне.* Тако би н. пр. (чл. 136.) *двојна напремица $(ABCD)$ четирију колинеарних тачака A, B, C, D била једнака с двојном напремицом $(abcd)$ њихових пројекција.*

Исто би тако и *двојна напремица четирију зракова неког прамена била пројективна.* — Узмимо само да раван Σ у којој леже четири зрака OA, OB, OC, OD поменутог прамена сече раван пројекције у тачкама A, B, C, D и означимо пројекцију темена O тог прамена са o. Биће $O\,(ABCD) = (ABCD) = o\,(ABCD)$, т. ј. и т. д.

У опште ће свака релација, којом су међу собом везане раздаљине AB, CD, DE, AC, BE, $\cdot\;\cdot\;\cdot$ (колинеарних или неколинеарних) тачака A, B, C, D, E, $\cdot\;\cdot\;\cdot$, бити пројективна ако се та релација може преобразити у једну релацију која би зависила само од углова под којима се из средишта O пројицирања виде поједине раздаљине AB, CD, DE, AC, BE, $\cdot\;\cdot\;\cdot$ Да видимо само кад ће се та трансформација моћи извршити. Спустимо из тачке O управну p на одсечак AB. Биће (чл. 128.)

$$AB = \frac{OA \cdot OB \sin(AOB)}{p}.$$

Сличним путем нашли бисмо и обрасце којима би били одређени одсечци CD, DE, AC, BE, $\cdot\;\cdot\;\cdot$ Сменимо сад $AB, \ldots$ у датој релацији са $\frac{OA \cdot OB \sin(AOB)}{p}, \cdots$ Ако се после супституције та релација може написати у овом облику:

$$Mf(\sin AOB, \sin COD, \cdots) = o,$$

онда ће та релација бити пројективна. Тако би н. пр. ова метричка релација:

$$k \cdot AB \cdot CD \cdot EF + l \cdot AC \cdot BE \cdot DF$$
$$+ m \cdot AD \quad CE \cdot BF = o,$$

којом су међу собом везане раздаљине шесторих колинеарних тачака A, B, C, D, E, F, била пројективна, јер се после супституције из свију чланова те релације може извући заједнички фактор $M = \frac{OA \,.\, OB \,.\, OC \,.\, OD \,.\, OE \,.\, OF}{p^6}$ тако, да би се та релација преобразила у ову:

$$M(\sin AOB \sin COD \sin EOF + \cdots) = o.$$

Прим. 1. Доказати да је Цевина теорема (прим. 2. стр. 144.) пројективна.

Прим. 2. Доказати да је Карнотова теорема (прим. 12. стр. 530.) пројективна.

Прим. 3. Доказати по методу пројекција Карнотову теорему. — Доказаћемо касније да пројекција круга може бити ма какав коничан пресек. Узмимо сад да круг сече стране BC, CA, AB неког троугла ABC у тачкама a и a', b и b', c и c'. Јасно је да је $Ba \cdot Ba' = Bc \cdot Bc'$, $Cb \cdot Cb' = Ca \cdot Ca'$, $Ac \cdot Ac' = Ab \cdot Ab'$. С тога је и

$$Ba \cdot Ba' \cdot Cb \cdot Cb' \cdot Ac \cdot Ac' = Ca \cdot Ca' \cdot Ab \cdot Ab' \cdot Bc \cdot Bc'.$$

Та је релација пројективна, с тога ће пројекције одсечака Ba, Ba', $\cdots$ међу собом бити везане истом таквом релацијом, па како пројекција круга може бити ма који коничан пресек, биће јасно и т. д.

407. Имајући у виду последњи пример, биће нам јасно како треба по методу пројекција доказивати про-

јективне теореме. Треба просто између свију пројекција неке слике тражити ону која је по свом облику *најпростија*, па наћи њезине пројективне особине. Све те особине биле би особине свију пројекција, па уједно и особине дате првобитне слике.

Да применимо то начело још и на овим примерима.

Прим. 1. Наћи хармонијске особине тетрастигмата $ABCD$. —

Означимо дијагоналне тачке (AD, BC), (AB, DC), (AC, BD) са E, F, G. Тачке A, B, C, D, E, F, G спојићемо са неком тачком O у простору и сматраћемо ту тачку O за средиште пројицирања. Тачке O, E, F одређују потпуно раван OEF у простору. Напоредо са том равни повући ћемо једну раван и узећемо је за раван пројекције. Према томе би супротна осовина Δ' у овај мах била дијагонала EF. Да видимо сад у шта ће се пројицирањем изменити $ABCD$? Прво и прво биће јасно да ће пројекција праве EF бити у бескрајности. Даље, како се стране AD и BC секу у тачци E праве Δ', то ће пројекције тих двеју правих бити две паралелне праве ad и bc које се у бескрајности секу у тачци e. Из сличних разлога биле би и пројекције стран̂а AB и DC паралелне и сећи ће се у бескрајности у тачци f. Према томе ће пројекције темен̂а A, B, C, D тетрастигматових *бити темена једног паралелограма*. Дијагонале ac и bd тог паралелограма биле би пројекције стран̂а AC и BD. Те дијагонале секу се у тачци g — пројекцији тачке G; па како тачка g полови дијагоналу ac, биће јасно да праву ac хармонијски деле ове четири тачке a, g, c и тачка у којој ac сече праву ef у бескрајности. То значи да страну AC тетрастигматову хармонијски деле ове четири тачке: A, G, C и тачка у којој AC сече дијагоналу EF, а по томе се види да четири праве (две стране и две дијагонале) што се гранају из дијагоналне тачке E граде хармонијски прамен.

Прим. 2. Кад се стране AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ двају троуглова ABC и $A'B'C'$ секу у три тачке L, M, N (сл. 59.) које леже на једној правој H, онда и праве AA', BB', CC' пролазе кроз једну тачку. —

Ту теорему доказали смо већ аналитички у чл. 93. Да видимо како ћемо је просто доказати по методу пројекција. Пројицираћемо слику тако, да пројекција праве H буде у бескрајности. Тим путем добићемо два хомотетичка троугла abc и $a'b'c'$; стране aa', bb', cc' сећи ће се дакле у једној тачци o, а тим би и наша теорема била доказана.

408. *Пројекција коничног пресека је коничан пресек.*

Нека су A, B, C, D четири сталне тачке, а P нека покретна тачка датог коничног пресека. Спојићемо тачку P с тачкама A, B, C, D и добићемо један прамен чија ће двојна напремица $P\ (ABCD)$ имати сталну вредност. Узмимо сем тога да зраке PA, PB, PC, PD тог прамена сече нека права у тачкама A', B', C', D'. Пројекције тачака A, B, C, D, P, A', B', C', D' означићемо са $a, b, c, d, p, a', b', c', d'$, а средиште пројицирања са O. Биће

$$P\ (ABCD) = (A'B'C'D') = O\ (A'B'C'D') = (a'b'c'd') = p\ (abcd),$$

па како је $P\ (ABCD) = const.$, биће и $p\ (abcd) = const.$, а то значи да ће место тачака p бити коничан пресек који пролази кроз тачке a, b, c, d.

Напомена (1). У чл. 204. поменули смо само да је место тачака, у којима нека раван сече конус чија је основа круг, једна крива другога реда и обратно. Та тврдња била би сад доказана, у колико је она само специјалан случај мало час поменуте теореме.¹)

Напомена (2). Особине полова и полара су пројективне. — То је јасно. Треба само имати у виду две последице поменуте у чл. 404. и две теореме поменуте у чл. 406., које нам казују да су двојне напремице тачака и зракова пројективне.

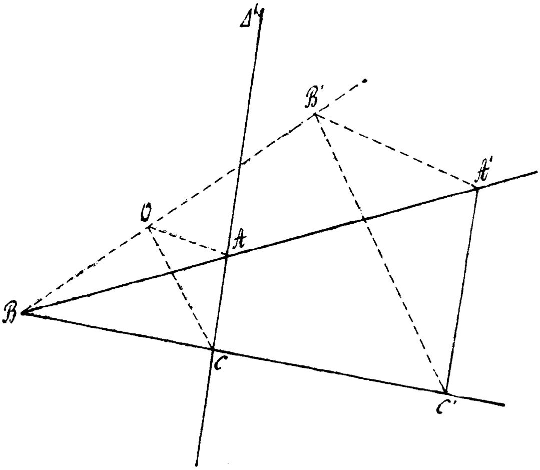
409. Узмимо да краци неког датог угла ABC леже у првобитној равни. Нека је O средиште пројицирања, а Δ' права чија пројекција лежи у бескрајности, т. ј. права по којој првобитну раван сече раван OAC што је кроз средиште пројекције напоредо повучена са равни пројекције. Тачку B спојићемо с теменом и означићемо тачку у којој права BO сече раван пројекције са B'. Даље, означимо са A' и C' тачке у којима краци BA и BC продиру раван пројекције. Јасно је да ће пројекције свију тачака крака BA лежати на правој $B'A'$; пројекција посебне тачке A крака BA била би тачка што у бескрајности лежи на правој $B'A'$. Из сличних разлога би пројекција крака BC била права

---

¹) Ко хоће да види како се елементарним путем доказује да је место тачака, у којима нека раван сече конус чија је основа круг, једна крива другога реда, нека види елегантан и поучан метод *Dandelin-ов* у делу *Géométrie analytique* par **Briot et Bouquet** p. 251.

$B'C'$; пројекција посебне тачке C крака BC била би тачка што у бескрајности лежи на правој $B'C'$. Угао ABC изменио би се дакле пројицирањем у угао $A'B'C'$.

Јасно је међу тим да су праве $B'A'$ и OA паралелне; то су на име две праве по којима раван OBA сече две паралелне равни — раван пројекције и раван



Сл. 191.

OAC. — Из сличних разлога су и праве $B'C'$, и OC паралелне. Према томе је угао $A'B'C'$ једнак с углом AOC, т. ј. угао ABC мења се централним пројицирањем у угао AOC.

410. *У некој равни дата је нека права и дата су два угла* α *и* β. *Дата права може се пројицирати тако, да јој пројекција буде у бескрајности, а угли могу се у исти мах пројицирати тако, да им пројекције буду друга два дата угла* α' *и* β'.

Означимо дату праву са Δ' и узмимо да та права сече краке датог угла α у тачкама R и S, а краке оног другог угла β у тачкама T и V. Повуцимо сад кроз Δ' неку раван Σ и опишимо у тој равни око RS одсечак неког круга тако, да угли на периферији буду управо једнаки с једним од датих углова, н. пр. с углом α'. Даље, опишимо и око TV у поменутој равни Σ један одсечак неког другог круга тако, да угли на периферији буду управо једнаки с углом β'. Та два одсечка сећи ће се у некој тачци O. Ту тачку O узећемо за средиште пројицирања, а неку раван што иде напоредо са равни Σ за раван пројекције. Према ономе што рекосмо у чл. 409. јасно је да се дата слика може пројицирати онако како смо тврдили.

Напомена. Ако се одсечци кругова описаних око RS и TV секу у имагинарној тачци, онда ће пројекције кракова бити имагинарне. Реалне праве могу се дакле пројицирањем изменити у имагинарне и обратно.

411. *Дат је некакав коничан пресек и у његовој равни нека права. Дата права може се пројицирати тако, да јој пројекција буде у бескрајности, а коничан пресек може се у исти мах пројицирати у круг.*

Означимо дат коничан пресек са S, а ма коју његову пројекцију са s. Нека је Δ' дата права, а C пол те праве према коничном пресеку S. Из те тачке C повући ћемо два пара хармонијских полара пресека S; даље, пројицираћемо праву Δ' тако, да јој пројекција буде права у бескрајности и у исти мах (чл. 410.) пројицираћемо угле које међу собом затварају две и две хармонијске поларе тако, да пројекције тих углова буду прави угли.

Како је Δ' полара тачке C, биће права у бескрајности полара тачке c — пројекције тачке C — према пројекцији s коничног пресека S, а по томе се види да ће c бити средиште коничног пресека s. Да видимо још шта ће бити са пројекцијама поменутих хармонијских полара коничног пресека S. Прво и прво ће се пројекције појединих парова хармонијских полара сећи под правим углом у тачци c. Даље, како је c средиште коничног пресека s, то ће те пројекције појединих парова хармонијских полара коничног пресека S бити два и два коњугована дијаметра коничног пресека s. Према томе ће се два пара коњугованих дијаметара коничног пресека s сећи под правим углом, т. ј. коничан пресек s биће круг.

Напомене. 1-во. Пројекција пола праве $\varDelta'$ је средиште пројекције коничног пресека. С тога ћемо горњу теорему моћи и овако формулисати: *Дат је некакав коничан пресек и нека тачка у његовој равни. Коничан пресек може се пројицирати у круг чије је средиште пројекција дате тачке.*

2-го. Анхармонијске особине тачака и тангената неког коничног пресека су пројективне. Према томе се уз сваку особину круга, која се може сматрати као последица анхармонијских особина његових тачака или тангената, може наћи непосредно и једна особина свију коничних пресека.[1]

Последица. — *Два конична пресека могу се пројицирањем изменити у концентричне коничне пресеке.* — Треба на име само једну страну њиховог заједничког аутополарног троугла пројицирати тако, да пројекција те стране буде права у бескрајности.

412. *Ма које две тачке могу се пројицирати тако, да им пројекције буду два фокојида бескрајне равни.*

Нека су P и Q дате две тачке. Повуцимо некакав коничан пресек кроз те две тачке. Праву PQ пројицираћемо тако, да јој пројекција буде права у бескрајности, а коничан пресек пројицираћемо тако, да му пројекција буде круг. Како првобитан коничан пресек пролази кроз тачке P и Q, пролазиће и пројекција његова — т. ј. поменути круг — кроз пројекције p и q тих двеју тачака. Те тачке p и q леже у бескрајности с тога, што је пројекција праве PQ права у бескрајности. Сви кругови пролазе међу тим само кроз две имагинарне тачке праве у бескрајности; тачке p и q биће дакле те две имагинарне тачке, т. ј. тачке p и q биће фокојиди бескрајне равни.

Последица (1). — *Конични пресеци што пролазе кроз четири сталне тачке могу се пројицирањем изменити у коаксалну систему кругова.*

---

[1] Види **John Wellesley Russell.** *Pure Geometry.* 1893.

Нека су P, Q, R, S дате четири тачке. Нека пројекција праве PQ буде права у бескрајности, а пројекција једног коничног пресека дате системе нека буде круг, т. ј. нека пројекције тачака P и Q буду фокојиди. Јасно ће бити да ће и пројекције осталих коничних пресека пролазити кроз фокојиде, а то значи, да су и пројекције осталих коничних пресека дате системе кругови. Сви ти кругови мораће међу тим пролазити и кроз пројекције r и s тачака R и S, т. ј. заиста се конични пресеци што пролазе кроз четири сталне тачке могу пројицирањем изменити у коаксалну систему кругова. Радикална осовина тих кругова је права rs.

Последица (2). — *Конични пресеци који су у двојном додиру дуж праве* PQ *могу се пројицирањем изменити у систему концентричних кругова.*

Сви концентрични кругови су (чл. 361.) у двојном додиру дуж праве у бескрајности. С тога треба пројицирањем изменити један од датих коничних пресека у круг тако, да пројекција корде PQ буде права у бескрајности.

Последица (3). — *Конични пресеци уписани у некакав тетраграм могу се пројицирањем изменити у систему конфокалних коничних пресека.*

У чл. 342. доказали смо на име да су сви конфокални конични пресеци уписани у један имагинаран тетраграм. С тога у овај мах треба супротна темена 1 и 4 тетраграма $FGHK$ (сл. 64.), у који су уписани конични пресеци, пројицирати тако, да пројекције њихове буду фокојиди бескрајне равни.

Примери

1. Доказати Паскалову теорему. —

Нека је $ABCDEF$ уписан хексагон. Коничан пресек изменићемо пројицирањем у круг, а праву $\varDelta'$ што спаја тачку (AB, DE) с тачком (BC, EF) у праву у бескрајности. Хексагону $ABCDEF$ одговараће Хексагон $abcdef$ уписан у круг. Како се стране AB и DE, BC и EF секу на правој $\varDelta'$, биће њихове пројекције ab и de, bc и ef паралелне. Супротне стране ab и de, bc и ef уписаног хексагона $abcdef$ су дакле паралелне; с тога су и остале две стране af и cd такођер паралелне. Пројекције AF и CD тих страна сећи ће се дакле на правој Δ', т. ј. и т. д.

2. Тачка у којој корда неког круга дира концентричан круг лежи на средини те корде.

2'. Кад су два конична пресека у двојном додиру дуж праве PQ, онда ће заједничка корда PQ и један од тих двају коничних пресека хармонијски делити ма коју тангенту другог коничног пресека.

3. Четири корде AOA', BOB', COC', DOD' неког коничног пресека секу се у једној тачци. Ако је P нека тачка коничног пресека, биће

$$P\,(ABCD) = P\,(A'B'C'D').—$$

Треба просто пројицирањем преобразити дат коничан пресек у круг чије је средиште пројекција тачке O.

4. Две стране неког троугла уписаног у некакав коничан пресек пролазе кроз две сталне тачке P и Q. Доказати да је обвојница треће стране некакав коничан пресек који је у двојном додиру са датим коничним пресеком.—

Треба пројицирањем преобразити коничан пресек у круг, а праву PQ у праву у бескрајности. Међу тим је позната ова теорема: ако две стране неког троугла уписаног у круг иду напоредо са двема сталним правима, онда ће трећа страна тог троугла заогрнути један концентричан круг, т. ј. и т. д.

5. Доказати Десаргову теорему.—

Пројицирањем преобразићемо коничне пресеке у коаксалну систему кругова и означићемо заједничку корду тих кругова са rs. Узмимо сад да нека права t сече rs у тачци o, а кругове у тачкама a и a', b и b', c и c' и т. д. Биће

$$oa \cdot oa' = ob \cdot ob' = oc \cdot oc' = \cdot\ \cdot\ \cdot\ ;$$

тачке a и a', b и b', c и c', $\cdot\ \cdot\ \cdot$ праве t су дакле у инволуцији, а средиште инволуције је тачка o. Тим је уједно и Десаргова теорема доказана.

6. Кад стране двају троуглова дирају један коничан пресек, онда и темена тих троуглова леже на једном коничном пресеку.

И та нам је теорема позната (чл. 372.), а доказаћемо је по методу пројекција овако. Нека су A, B, C темена једног, а A', B', C' темена другог троугла. Пројицирањем преобразићемо тачке B' и C' у фокојиде b' и c'. Права што спаја фокојиде b' и c', т. ј. права у бескрајности биће тангента пројекције датог коничног пресека, а то значи да је пројекција датог коничног пресека парабола. Даље, како су $A'B'$

и $A'C'$ тангенте датог коничног пресека, биће пројекција a' темена A' жижа параболина. Око параболе су дакле описана два троугла: реалан троугао abc и имагинаран троугао $a'b'c'$. Међу тим ће круг описан око троугла abc пролазити кроз жижу a' (прим. 9. стр. 691.); тај круг пролази у осталом и кроз фокојиде b' и c', т. ј. на том кругу што лежи у равни пројекције имамо свега шест тачака a, b, c, a', b', c'. Према томе ћемо и на коничном пресеку чија је пројекција поменути круг такођер имати шест тачака.

413. Особине углова, који се по величини не мењају, преображавају се по методу пројекција помоћу ова два правила:

Правило 1-во. *Пројекције кракова правога угла су праве хармонијски коњуговане према правима што спајају пројекцију темена датог угла са пројекцијама фокојидâ.*

Нека су на име $x = o$, $y = o$ еквације кракова правога угла. Еквације изотропних правих што се гранају из темена тог угла биле би $x - iy = o$, $x + iy = o$; те две праве граде хармонијски прамен са датим двема правима, па ће с тога и пројекције тих четирију правих градити исти такав прамен.

Правило 2-го. *Из неке тачке O повући ћемо две праве — једну ма у ком правцу, а другу тако, да је угао који óна затвара с оном првом правом сталан. Двојна напремица прамена, који граде пројекције тих двеју правих и праве што спајају пројекцију темена O са пројекцијама фокојидâ, јесте стална количина.*

Нека су $x = o$, $y = o$ еквације двеју правих што међу собом затварају сталан угао ω. Двојна напремица прамена, који граде те две праве — два крака угла ω — и две изотропне праве што се гранају из тачке O јесте (види прим. чл. 130.) $\alpha = cos\, 2\,\omega + i\, sin\, 2\,\omega$, па како је $\omega = const.$, биће и $\alpha = const.$ С тога ће и двојна напремица пројекције тог прамена бити стална, а то смо и тврдили.

Прим. 1. Ако су A и B две сталне тачке, а P промењљива тачка неког круга, онда је угао APB сталан. —

Ако ту теорему преобразимо по методу пројекција, добићемо ову теорему: ако четири сталне тачке a, b, i, j неког коничног пресека спојимо са променљивом тачком p тог коничног пресека, биће двојна напремица p $(abij)$ стална.

Напом. Са i и j означили смо у овом примеру, а тако ћемо бележити и даље, пројекције фокојида̂ I и J.

Прим. 2. Управница параболе је место темена једног правог угла описаног око параболе. —

Ако ту теорему преобразимо по методу пројекција̂ добићемо ову теорему: место тачака у којима се секу две и две тангенте неког коничног пресека, које хармонијски деле одсечак ij неке дате тангенте, јесте права; та права је полара тачке f у којој се секу тангенте повучене на коничан пресек из тачака i и j.

Напом. Из тачака i и j могу се повући по две тангенте на коничан пресек. Но тангента ij поклапа тангенту ji. С тога је тачка f она тачка, у којој се секу две тангенте if и jf што се не поклапају.

Прим. 3. Место тачака из којих се на параболу могу повући тангенте које затварају сталан угао међу собом јесте хипербола; једна жижа и управница (која тој жижи одговара) те хиперболе јесте жижа и управница параболе (прим. 4. стр. 675.). —

Тој теореми одговара по методу пројекција ова теорема: означићемо са i и j две дате тачке неке сталне тангенте ij коничног пресека и повући ћемо на коничан пресек две тангенте које ту тангенту ij секу у тачкама a и b тако, да је $(abij) = const.$; место тачака у којима се секу те тангенте јесте коничан пресек који додирује први коничан пресек у оним тачкама у којима га дирају тангенте повучене из тачака i и j. —

Тим двема теоремама су генерализоване теореме поменуте у прим. 2.

414. У чистој геометрији је оно што је реално тачно издвојено од оног што је имагинарно. У Аналитичној Геометрији је та подела више формална; н. пр. ми кажемо у Аналитичној Геометрији да свака права сече круг у двема (реалним или имагинарним) тачкама, па држећи се закона формалне алгебре у сваком посебном случају одређујемо и координате тих тачака. Оно дакле што вреди за имагинарне елементе геометријске вреди и за реалне елементе и обратно. С тога се, на прилику, кад је реч о правој и о кругу, и може формулисати оваква општа теорема: свака права сече круг у двема тачкама. То начело, по коме се особине неких слика, чији су елементи (тачке и праве) реални, не мењају и кад је један део (или и сви) тих

елемената имагинаран, примљено је и као начело чисте геометрије и зове се *начело непрекидности.* Да узмемо један пример. Ми смо (прим. 2. стр. 851.) поменули ове две теореме:

(α) Тачка у којој корда неког круга дира концентричан круг лежи на средини те корде.

(β) Кад су два конична пресека у двојном додиру дуж неке праве PQ, онда ће и т. д.

Ми знамо међу тим да су концентрични кругови *у имагинарном двојном додиру*, па ипак нисмо, држећи се ћутке поменутог начела непрекидности, теорему (β) овако формулисали: кад су два конична пресека у имагинарном двојном додиру и т. д.

Напомена. Творац метода пројекцијâ јесте ***Poncelet***. Он га је приказао у своме класичном делу *Traité des propriétés projectives des figures*, које се може сматрати као основа модерне геометрије.

Примери

1. Место средишта кругова који дирају два дата круга је хипербола. Жиже те хиперболе су средишта датих двају кругова.

2. Место средиштâ коничних пресека уписаних у тетраграм је њутнијанка тог тетраграма.

3. Круг описан око аутополарног троугла неке равностране хиперболе пролази кроз средиште те хиперболе.

1*. Два конична пресека S и S' пролазе кроз тачке A и B, а C и C' су полови праве AB према тим пресецима. Место полова праве AB према коничним пресецима што дирају S и S' и пролазе кроз A и B јесте коничан пресек, који дира четири праве CA, CB, $C'A$, $C'B$.

2*. Место полова неке сталне праве према коничним пресецима уписаним у исти тетраграм јесте права; та права сече сваку дијагоналу тог тетраграма у некој тачци која је хармонијски коњугована с тачком у којој ту исту дијагоналу сече стална права.

3*. Шест темена двају аутополарних троуглова неког коничног пресека леже на истом коничном пресеку.

4. Нека су I и J две сталне тачке неке равни, а A, B, C, D ма какве четири тачке те исте равни; нека је даље

$$f(A, B) \equiv \sqrt{\text{површ. } AIB \cdot \text{површ. } AIB / (\text{површ. } IAJ \cdot \text{површ. } IBJ)}.$$

Доказати да је метричка релација

$$f(A, B) \div f(C, D) \qquad (\alpha)$$

пројективна. —

Нека су $a, b, \cdots$ пројекције тачака $A, B, \cdots$; даље, нека су P, p управне спуштене из средишта O пројицирања на равни Π и π. Волумени тространих пирамида које имају заједничко теме O, а основице AIB и aib, стајаће један према другом као $OA \,.\, OI \,.\, OB : Oa \,.\, Oi \,.\, Ob$; биће дакле

$$P \cdot \text{површ. } AIB : p \cdot \text{површ. } aib = OA \cdot OI \cdot OB : Oa \quad Oi \cdot Ob\,;$$

према томе је

$$\text{површ. } AIB = \frac{p}{P} \cdot \frac{OA \cdot OI \cdot OB}{Oa \cdot Oi \cdot Ob} \cdot \text{површ. } aib.$$

Сличне вредности добили бисмо и за остале површине. Ако тим вредностима сменимо површ. AIB и т. д. у изразу (α), добићемо овај израз $f(a, b) \div f(c, d)$, т. ј. и т. д.

5. Наћи вредност коју има $f(A, B)$, кад су тачке I и J фокоjиди бескрајне равни. —

Координате тачака I и J су k, ki и $k, -ki$, где је $k = \infty$. С тога је

$$f(A, B) = -AB/(2k^3)^3).$$

6. Генерализација Птоломејеве теореме. Тачке a, b, c, d, i, j леже на једном коничном пресеку; ако је $12 \equiv \sqrt{\text{површ. } aib \cdot \text{површ. } ajb}$ и т. д. биће

$$\overline{12} \cdot \overline{34} + \overline{23} \cdot \overline{14} + \overline{31} \quad \overline{24} = o.$$

7. Некакав коничан пресек је уписан у троугао ABC; L и M су додирне тачке страна BC и AC. Ако нека тангента сече BC и AC у тачкама P и Q, биће $(CBLP) = (MACQ)$.

Напом. Последња четири примера узета су из дела *Analytical Geometry by* ***W. J. Johnston*** p. 423—424.

8. Пројицирањем преобразити ову теорему: конфокални конични пресеци секу се под правим углом.

* * *

ОДЕЉАК СЕДМИ

Инваријанте и коваријанте коничних пресека.

415. Дефиниција I. Нека су

$$x = o,\ y = o,\ z = o$$

еквације страна̑ троугла ABC, а

$$x' = o,\ y' = o,\ z' = o$$

еквације страна̑ троугла $A'B'C'$. Оба та троугла одређују посебице по једну трилинеарну координатну систему. Ако су у првој трилинеарној системи координате неке тачке означене са x, y, z, а у другој системи са x', y', z', биће (чл. 124.)

$$\left.\begin{aligned} \varrho x &= \lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z', \\ \varrho y &= \mu_1 x' + \mu_2 y' + \mu_3 z', \\ \varrho z &= \nu_1 x' + \nu_2 y' + \nu_3 z'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Помоћу тих еквација може се хомогена еквација $f(x, y, z) = o$ неке криве преобразити у хомогену еквацију овог облика:

$$f(\lambda_1 x' + \cdot\cdot\cdot,\ \mu_1 x' + \cdot\cdot\cdot,\ \nu_1 x' + \cdot\cdot\cdot) = o.$$

Ова друга еквација била би дакле еквација дате криве у трилинеарној координатној системи $A'B'C'$. Означимо ту еквацију са $\varphi(x', y', z') = o$. Облик $f(x, y, z)$ преобразио се дакле линеарном супституцијом (1) у облик $\varphi(x', y', z')$. Детерминанта

$$M = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix}$$

те супституције зове се *модуо трансформације* или *модуо супституције.*

Дефиниција II. Нека се облик $f(x, y, z, a_0, a_1, a_2 \ldots)$ датом линеарном супституцијом преобразио у облик $\varphi(x', y', z', a_0', a_1', a_2' \cdot \cdot \cdot)$. Ако се сад нека функција Π коефицијената $a_0, a_1, a_2, \cdot \cdot \cdot$ разликује од те исте функције Π коефицијената $a_0', a_1', a_2', \cdot \cdot \cdot$ само тим, што је она прва функција помножена неким степеном модула супституције, онда је функција Π *инваријанта.* Функција Π биће дакле инваријанта ако је

$$\Pi(a_0', a_1', a_2', \cdot \cdot \cdot) = M^p \Pi(a_0, a_1, a_2, \cdot \cdot \cdot).$$

Дефиниција III. Ако се нека функција Π коефицијената $a_0, a_1, a_2, \cdot \cdot \cdot$ и променљивих $x, \cdot \cdot \cdot$ разликује од те исте функције Π коефицијената $a_0', a_1', a_2', \cdot \cdot \cdot$ и променљивих $x', \cdot \cdot \cdot$ само тим, што је она прва функција помножена неким степеном модула супституције, онда се функција Π зове *коваријанта.* Функција Π биће дакле коваријанта ако је

$$\Pi(a_0', a_1', a_2', \ldots, x', \ldots) = M^p \Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots, x, \ldots).$$

Дефиниција IV. Кад се пунктуалне координате преображавају линеарном супституцијом (1), онда ће се (чл. 124.) тангенцијалне координате преобразити инверсном супституцијом:

$$\sigma u = l_1 u' + l_2 v' + l_3 w',$$

$$\sigma v = m_1 u' + m_2 v' + m_3 w',$$

$$\sigma w = n_1 u' + n_2 v' + n_3 w'.$$

Ако се сад нека функција Π коефицијената $a_0, a_1, a_2, \ldots$ облика $f(x, y, z, a_0, a_1, a_2, \cdot \cdot \cdot)$ и променљивих u, v, w разликује од те исте функције Π коефицијената $a_0', a_1', a_2', \ldots$ облика $\varphi(x', y', z', a_0', a_1', a_2', \ldots)$ и променљивих u', v', w' само тим, што је она прва функција помножена неким степеном модула супституције, онда се функција Π зове *контраваријанта.* Функција Π биће дакле контраваријанта ако је

$$\Pi(a_0', a_1', a_2', \ldots, u', \ldots) = M^p \Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots, u, \ldots).$$

Дефиниција V. Ако се нека функција Π коефицијената $a_0, a_1, a_2, \cdot \cdot \cdot$, променљивих $x, \cdot \cdot \cdot$ и променљивих $u, \cdot \cdot \cdot$ разликује од те исте функције Π коефицијената $a_0', a_1', a_2', \cdot \cdot \cdot$, променљивих $x', \cdot \cdot \cdot$ и променљивих $u', \cdot \cdot \cdot$ само тим, што је она прва функција помножена неким степеном модула супституције, онда се функција Π зове *мешовита конкомитанта.* Функција Π биће дакле конкомитанта ако је

$$\Pi(a_0', a_1', a_2', \ldots, x', \ldots, u', \ldots) = M^p \Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots, x, \ldots, u \ldots).$$

Те функције зову немачки писци по *Clebsch*-у и *Aronhold*-у „Zwischenformen.“

Дефиниција VI. *Конкомитантом* зваћемо у опште све функције (биле оне инваријанте, биле оне коваријанте, биле оне контраваријанте или мешовите конкомитанте) које се не ремете линеарним супституцијама.[1]

---

[1] Творац теорије инваријаната је **Cayley.** Та теорија је веома духовито примењена у теорији бројева, у Аналитичној Геометрији и Вишој Анализи. У Енглеској су се поред Келе-а нарочито њом бавили **Sylvester** и **Salmon,** у Француској **Hermite** и **Halphen,** у Немачкој **Hesse, Clebsch, Aronhold** и **Gordan.**

416. Узећемо сад два конична пресека $S \equiv a_x^2 = o$ и $S' \equiv b_x^2 = o$. Та два конична пресека одређују прамен $S - kS' = o$ коничних пресека. Доказали смо (чл. 235.) да свега има три пара заједничких секаната тог прамена. Те секанте — две и две — представљаће такође по један коничан пресек прамена $S—kS'$, а вредности параметра k којима су у прамену $S—kS'$ одређене по две и две коњуговане секанте биће, као што знамо (чл. 237.), корени k', k'', k''' Ламеове еквације

$$\Delta - k\Theta + k^2\Theta' - k^3\Delta' = o. \qquad (2)$$

У тој еквацији су Δ и Δ' дискриминанте еквација $a_x^2 = o$ и $b_x^2 = o$, а са Θ и Θ' су означени ови изрази:

$$\Theta = A_{11}b_{11} + A_{22}b_{22} + A_{33}b_{33} + 2A_{23}b_{23} + 2A_{31}b_{31} + 2A_{12}b_{12},$$

$$\Theta' = B_{11}a_{11} + B_{22}a_{22} + B_{33}a_{33} + 2B_{23}a_{23} + 2B_{31}a_{31} + 2B_{12}a_{12}.$$

По Аронхолду могли бисмо дакле те изразе симболички овако представити:

$$\Theta = A_b^2, \quad \Theta' = B_a^2.$$

Узмимо сад да се линеарном супституцијом (1) облик S преобразио у облик S, а облик S' у облик S'. Јасно је да ће у новој координатној трилинеарној системи еквација прамена $S—kS' = o$ бити овог облика: $\bar{S}—kS' = o$. Параметар k се том линеарном супституцијом *није изменио*. Ако дакле еквација $S—kS'=o$ представља по две праве кад је $k = k', k'', k'''$, онда ће еквација $\bar{S}—k\bar{S}' = o$ представљати такође по две праве кад је $k = k', k'', k'''$, а то значи да су корени оне Ламеове еквације која одговара облику $\bar{S}—k\bar{S}'$ једнаки с коренима еквације (2). Према томе ће и напремице коефицијената, који се јављају уз исте степене непознате k и у једној и у другој еквацији, бити јед-

---

Ко хоће да се упозна боље са том теоријом, нека чита **Салмона** *(Modern Higher Algebra)*, **Clebsch-а** *(Vorlesungen über Geometrie)* и **Гордана** *(Invariantentheorie)*.

наке, т. ј. *коефицијенти Δ, Θ, Θ', Δ' који се јављају уз поједине степене непознате k у Ламеовој еквацији јесу инваријанте.*[1]) Те инваријанте су, као што ћемо видети, основни изрази у теорији двају коничних пресека.

Напомена. Дискриминанта Ламеове еквације је

$$4\,(3\Delta\Theta'-\Theta^2)\,(3\Delta'\Theta-\Theta'^2)-(9\Delta\Delta'-\Theta\Theta')^2$$

или

$$3\,[\Theta^2\Theta'^2+18\Theta\Theta'\Delta\Delta'-27\Delta^2\Delta'^2-4\Delta\Theta'^3-4\Delta'\Theta^3].$$

Према једној познатој теореми Више Алгебре је дискриминанта једнака с производом квадрата разлике корена̂ дате еквације. С тога ће сви корени Ламеове еквације бити реални кад је дискриминанта њезина позитивна, а само један корен њезин биће реалан кад јој је дискриминанта негативна. У првом случају тачке у којима се секу S и S' или су све четири реалне или све четири имагинарне, а у другом случају су две тачке реалне, а две имагинарне.

417. ИЗРАЧУНАВАЊЕ ИНВАРИЈАНАТА. Између облика S и S' узећемо оне који се најчешће јављају и израчунаћемо њихове инваријанте.

1-во. Израчунати инваријанте коничних пресека

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=o,\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=o.$$

Одг. $\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}$, $\Theta=a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}$
$+a_{33}a_{11}$, $\Theta'=a_{11}+a_{22}+a_{33}$, $\Delta'=1$.

Ламеова еквација је дакле у овај мах овог облика:

$$a_{11}a_{22}a_{33}-k\,(a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11})$$
$$+k^2\,(a_{11}+a_{22}+a_{33})-k^3=o,$$

---

[1]) Чисто алгебарским путем могло би се доказати да је дискриминанта облика S једнака с производом $(\lambda_1\mu_2\nu_3)^2\,\Delta$; даље, да је израз Θ у новој координатној системи једнак с производом $(\lambda_1\mu_2\nu_3)^2\,\Theta$ и т. д.

т. ј. еквација $S—kS' = o$ представља по две праве кад k има једну од ове три вредности: a_{11}, a_{22}, a_{33}.

2-го. Наћи Ламеову еквацију коничних пресека

$$a_x^2 = o, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = o.$$

Одг. $\Delta—k(A_{11}+A_{22}+A_{33})+k^2(a_{11}+a_{22}+a_{33})—k^3=o.$

3-ће. Израчунати инваријанте двају кругова

$$x^2 + y^2 = r^2, (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r'^2.$$

Одг. $\Delta = -r^2$, $\Theta = \alpha^2 + \beta^2 - 2r^2 - r'^2$, $\Theta' = \alpha^2 + \beta^2 - 2r'^2 - r^2$, $\Delta' = -r'^2$.

Према томе је Ламеова еквација овог облика:

$$-r^2 - k(\alpha^2 + \beta^2 - 2r^2 - r'^2) + k^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2r'^2 - r^2) + k^3r'^2 = o.$$

Један корен те еквације је $k=1$, јер се круг $S—S'$ може сматрати као један пар заједничких секаната прамена $S—kS'$; једна секанта била би радикална осовина, а друга секанта била би права у бескрајности. Остала два корена добићемо овако: поделићемо полином Ламеове еквације са $k—1$ и тражићемо вредности за које ће квадратан трином, који се тим дељењем буде добио, бити раван нули.

4-то. Наћи Ламеову еквацију која одговара кругу

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

и елипси

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Одг. У овај мах је

$$\Delta = -r^2, \ \Theta = \alpha^2/a^2 + \beta^2/b^2 - 1 - r^2(a^2 + b^2)/(a^2b^2),$$

$$\Theta' = (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - r^2)/(a^2b^2),\ \Delta' = -1/(a^2b^2),$$

па је с тога Ламеова еквација ово:

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - k} + \frac{\beta^2}{b^2 - k} + \frac{r^2}{k} - 1 = o.$$

5-то. Израчунати инваријанте коничних пресека

$$y^2 = 4ax,\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Одг. $\Delta = -4a^2$, $\Theta = -4a\,(a + \alpha)$,

$$\Theta' = \beta^2 - 4a\alpha - r^2,\ \Delta' = -r^2.$$

6-то. Израчунати инваријанте Θ и Θ' коничних пресека

$$S \equiv (a, b, c, f, g, h)\ (x, y, 1)^2 = o, \quad S' \equiv 2xy = o. -$$

У овом случају представља S' две праве; с тога ће бити $\Delta' = o$. Ламеова еквација је квадратна, а овог облика:

$$\Delta - 2k\,(fg - ch) - ck^2 = o.$$

Према томе је

$$\Theta = 2\,(fg - ch), \quad \Theta' = -c.$$

Кад је $\Theta' = o$, онда ће тачка (x, y) лежати на коничном пресеку S, а кад је $\Theta = o$, т. ј. кад је $fg - ch = o$, онда ће праве $x = o$ и $y = o$ бити хармонијске поларе, па како особине инваријаната не зависе од избора координатних осовина, то ће бити јасно ово: 1-во, *кад је $\Delta' = o$, т. ј. кад S' представља две праве, онда се те две праве секу на коничном пресеку S ако је и $\Theta' = o$*; 2-го, *ако је $\Delta' = o$, т. ј. ако S' представља две праве, онда ће те две праве бити хармонијске поларе према коничном пресеку S, ако је и $\Theta = o$.* — На другом једном месту видећемо шта нам казују погодбе $\Theta = o$ и $\Theta' = o$ и кад није $\Delta' = o$.

7-мо. *Један коничан пресек је уписан, а други је описан око основног троугла. Израчунати инваријанте тих коничних пресека.* —

Нека је

$$S \equiv a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2$$
$$+ a_3^2x_3^2 - 2a_2a_3x_2x_3 - 2a_3a_1x_3x_1 - 2a_1a_2x_1x_2,$$

а

$$S' \equiv 2\,(b_{23}x_2x_3 + b_{31}x_3x_1 + b_{12}x_1x_2) = o.$$

Биће

$$\Delta = -4a_1^2a_2^2a_3^2,\ \Theta = 4a_1a_2a_3\,(a_1b_{23} + a_2b_{31} + a_3b_{12}),$$

$$\Theta' = -(a_1b_{23} + a_2b_{31} + a_3b_{12})^2,\ \Delta' = 2b_{12}b_{23}b_{31},$$

а по томе се види да је

$$\Theta^2 = 4\Delta\Theta'. \qquad (3)$$

Дакле, кад је основни троугао описан око S, а уписан у S', онда ће коефицијенти њихових еквација морати међу собом бити везани погодбеном релацијом (3). Та погодба је *Келеова*[1]. Јасно је међу тим да та погодбена релација не зависи од избора осовина. Кад бисмо на име линеарном супституцијом (1) трансформовали координате, добили бисмо *ту исту* погодбу $\Theta^2 = 4\Delta\Theta'$, јер је ново Θ управо једнако с производом $(\lambda_1\mu_2\nu_3)^2\,\Theta$ и т. д. Но то значи да ће и основни троугао нове трилинеарне системе бити описан око S, а уписан у S'; дакле, *кад има један троугао који се може описати око S, а уписати у S', онда их има и бескрајно много.* Ту смо теорему у осталом већ на други један начин доказали (чл. 372.). Како је међу тим (чл. 393.

---

[1] Келе се, ослањајући се на теорију елиптичних функција, у своме раду *Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon*, *Philos. Magazine VI. p. 99.* (у том раду има и погрешака које је сам Келе запазио и исправио у истој свесци Философског Магазина стр. 376.) бавио о овом питању: кад се некакав полигон може описати око неког коничног пресека и у исти мах уписати у други некакав коничан пресек и добио је опште погодбе. Види **Cayley**. *Collected Mathematical Papers.* II. p. 87. и 91.

прим. 4.) коничан пресек S' поларно узајамна слика коничног пресека S према коничном пресеку

$$S'' \equiv \frac{a_1 x_1^{\,2}}{b_{23}} + \frac{a_2 x_2^{\,2}}{b_{31}} + \frac{a_3 x_3^{\,2}}{b_{12}} = o,$$

то је јасно да ће онај троугао, који је описан око S, а уписан у S', бити аутополаран троугао коничног пресека S''. Дакле, *ако се некакав троугао може описати око коничног пресека S, а уписати у коничан пресек S', онда је тај троугао аутополаран троугао неког одређеног коничног пресека S''.*

Примена. Наћи погодбу под којом ће се некакав троугао моћи описати око круга $x^2+y^2=r^2$, а уписати у круг $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r'^2$. —

Означимо раздаљину средиштâ датих кругова са d. Инваријанте Δ, Θ, Θ' имаће (чл. 417.) ове вредности:

$$\Delta = -r^2,\ \Theta = d^2-2r^2-r'^2,\ \Theta' = d^2-2r'^2-r^2.$$

Тражена погодба је дакле ово:

$$(d^2-2r^2-r'^2)^2 = -4r^2\,(d^2-2r'^2-r^2)$$

или

$$d^2 = r'^2 \pm 2rr'.$$

418. *Наћи погодбу под којом се два конична пресека дирају.*

Узмимо да се конични пресеци S и S' секу у тачкама A, B, C, D и означимо корене Ламеове еквације са k', k'', k'''. Еквације коњугованих парова $AB \cdot CD$, $BC \cdot AD$, $AC \cdot BD$ заједничких секаната биће ово:

$$S - k'S' = o,\ S - k''S' = o,\ S - k'''S' = o.$$

Но ако се између поменуте четири тачке две, н. пр. тачке A и B, поклапају, онда ће се поклапати и парови корада $BC \cdot AD$ и $CA \cdot BD$; корда BC поклапаће на име корду AC, а корда AD корду BD тако, да ћемо имати управо само два пара различитих корада. Конични пресеци S и S' додириваће се у том случају у тачци A, а Ламеова еквација имаће два једнака корена.

С тога ће дискриминанта те еквације бити равна нули, т. ј. биће (чл. 416.)

$$\Theta^2\Theta'^2+18\Theta\Theta'\Delta\Delta'-27\Delta^2\Delta'^2-4\Delta\Theta'^3-4\Delta'\Theta^3=o. \quad (4)$$

Кад су конични пресеци S и S' у оскулацији, онда ће се три тачке, н. пр. тачке A, B, C, поклапати. Ламеова еквација имала би три једнака корена, т. ј. полином те еквације био би потпун куб. *Погодба под којом ће два конична пресека бити у оскулацији јесте дакле ово:*

$$\frac{3\Delta}{\Theta}=\frac{\Theta}{\Theta'}=\frac{\Theta'}{3\Delta'},$$

а те погодбене релације могу се и овако написати:

$$3\Delta\Theta' = \Theta^2,\ 3\Delta'\Theta = \Theta'^2,\ 9\Delta\Delta' = \Theta\Theta'. \quad (5)$$

Напомена. Кад је $\Delta' = o$, онда S' представља две праве. Погодба под којом ће једну од тих двеју правих дирати S је дакле

$$\Theta^2 = 4\Delta\Theta'.$$

Ту смо погодбу у осталом већ у један мах добили — то је погодба (3) — и доказали смо тада, да ће се под том погодбом некакав троугао, чија темена леже на коничном пресеку S', моћи описати око S. Јасно је да је наш случај само специјалан случај тог општијег.

Прим. 1. Наћи погодбу под којом ће се додиривати кругови $x^2+y^2=r^2$ и $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r'^2$. —

Одг. Ако са d означимо раздаљину средиштâ датих кругова, биће тражена погодба ово: $d=r\pm r'$.

Прим. 2. Наћи погодбу под којом ће елипса

$$X^2/a^2+Y^2/b^2=1$$

дирати Аполонијеву хиперболу

$$2\,(c^2XY+b^2yX-a^2xY)=o.$$

Одг. Погодба ће бити ово:

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = o. \qquad (\alpha)$$

Како Аполонијева хипербола пролази (чл. 251.) кроз подножја нормалâ повучених на елипсу из тачке (x, y), биће јасно да ће се у овај мах — Аполонијева хипербола дира у овај мах елипсу — две нормале поклапати. С тога ће тачка (x, y) бити средиште кривине, т. ј. еквација (α) представља еволуту елипсину.

Прим. 3. Наћи погодбу под којом ће елипса

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$$

дирати круг

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 = r^2.-$$

Одг. Погодба је ово:

$$27a^4b^4r^4 + 4\,(a^2b^2 + b^2r^2 + r^2a^2 - b^2x^2 - a^2y^2)^3$$

$$- 4a^2b^2r^2\,(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - r^2)^3 + 18a^2b^2r^2\,(x^2$$
$$+ y^2 - a^2 - b^2 - r^2)\,(a^2b^2 + b^2r^2 + r^2a^2 - b^2x^2 - a^2y^2)$$

$$-(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - r^2)^2\,(a^2b^2 + b^2r^2 + r^2a^2 - b^2x^2 - a^2y^2)^2 = o.-$$

Узмимо сад да се круг котрља по елипси. Јасно је да ће круг свакад дирати елипсу, а раздаљина његова средишта од елипсе биће свакад $= r$. Горња погодбена еквација представљаће дакле место средишта тог круга. То место је крива осмог реда. Конструктивним путем може се то место овако одредити. Треба повући нормалу у тачци P дате елипсе и на тој нормали одмерити дуж $PQ = r$. Место тачака Q биће поменута крива осмог реда. Могло би се доказати[1]) да су тангенте повучене на елипсу у тачци P и на поменуту криву у тачци Q паралелне. Такве две криве зову се *паралелним кривима*. Елипса и поменуто место осмога реда су дакле паралелне криве и имају исту еволуту.

Напомена. Поменуту еквацију осмог степена могли бисмо уредити по степенима количине r. Тим путем бисмо добили једну еквацију четвртог степена по непознатој r^2. Узмимо да коефицијенат који се у тој еквацији јавља уз r^6 не мења своју вредност и ако се количине x и y мењају, т. ј. узмимо да је

$$(a^2 - 2b^2)\,x^2 + (2a^2 - b^2)\,y^2 + c^2\,(a^2 + b^2) = const. \qquad (\beta)$$

Та еквација представља један коничан пресек, па како је са r означена раздаљина тачке (x, y) од дате елипсе, одмерена на нормалама — а свега има четири такве нормале — што пролазе кроз тачку

---

[1]) Види **J. Bertrand.** *Calcul différentiel*, p 12.

(x, y), биће јасно да је коничан пресек (β) место тачака за које је збир квадрата нормалних раздаљинâ од датог коничног пресека $= const.$

Прим. 4. Средишта шесторих кругова кривине неког коничног пресека, који пролазе кроз неку дату тачку, леже на једном коничном пресеку. —

Та теорема је *Malet-ова ;* ми смо је већ једном поменули (прим. 3. чл. 310.), а ево како ћемо је доказати помоћу наших погодбених релација (5) — Нека је дата тачка почетак координата и нека осовине координатне системе иду напоредо са осовинама датог коничног пресека. Еквација коничног пресека биће

$$aX^2 + bY^2 + 2gX + 2fY + c = o,$$

а еквација круга кривине

$$X^2 + Y^2 - 2Xx - 2Yy = o.$$

Наћи ћемо инваријанте Δ, Θ, Θ', Δ'. Биће

$$\Delta = abc - af^2 - bg^2,$$

$$\Theta = 2bgx + 2afy + bc - f^2 + ca - g^2,$$

$$\Theta' = -(bx^2 + ay^2 - 2gx - 2fy - c),$$

$$\Delta' = -(x^2 + y^2).$$

Кад су криве S и S' у оскулацији, онда је једна од погодаба ово : $3\Delta\Theta' = \Theta^2$, а та погодба је у овај мах овог облика :

$$3\,(abc - af^2 - bg^2)\,(bx^2 + ay^2 - 2gx - 2fy - c)$$
$$+\,(2bgx + 2afy + bc - f^2 + ca - g^2)^2 = o\,; \qquad (\gamma)$$

тачка (x, y) лежи дакле на једном коничном пресеку т. ј. и т. д.

Последица (1). Ако је почетак координатне системе у средишту коничног пресека и ако је коничан пресек равнострана хипербола, онда ће еквација равностране хиперболе бити $a\,(x^2 - y^2) + c = o$. У ту исту еквацију преобразиће се у том случају и еквација (γ), т. ј. средишта свих кругова кривине неке равностране хиперболе, који пролазе кроз средиште те хиперболе, леже на хиперболи.

Последица (2). Ако је коничан пресек S парабола, онда ће и (γ) бити парабола, јер је у том случају или $a = o$, или $b = o$.

419. *Наћи погодбу под којом ће се у S' моћи уписати некакав троугао чије стране дирају $S + k_1 S'$, $S + k_2 S'$, $S + k_3 S'$.* (ПОНСЕЛЕТОВА ПРОБЛЕМА.)

Нека је

$$S \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(1 + k_1 a_{23}) x_2 x_3 - 2(1 + k_2 a_{31}) x_3 x_1 \\ - 2(1 + k_3 a_{12}) x_1 x_2,$$

$$S' \equiv 2(a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{12} x_1 x_2).$$

Јасно је да је страна x_1 тангента пресека $S + k_1 S'$; даље, да је страна x_2 тангента пресека $S + k_2 S'$ и најпосле, да је страна x_3 уписаног троугла тангента пресека $S + k_3 S'$.

У овај мах су инваријанте облика $S + kS'$ ово:

$$\Delta = -(2 + k_1 a_{23} + k_2 a_{31} + k_3 a_{12})^2 - 2 k_1 k_2 k_3 a_{23} a_{31} a_{12},$$

$$\Theta = 2(a_{23} + a_{31} + a_{12})(2 + k_1 a_{23} + k_2 a_{31} + k_3 a_{12}) \\ + 2 a_{23} a_{31} a_{12} (k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1),$$

$$\Theta' = -(a_{23} + a_{31} + a_{12})^2 - 2(k_1 + k_2 + k_3) a_{23} a_{31} a_{12},$$

$$\Delta' = 2 a_{23} a_{31} a_{12}.$$

С тога је тражена погодба ово:

$$[\Theta - \Delta'(k_2 k_3 + k_3 k_1 + k_1 k_2)]^2 \\ = 4(\Delta + k_1 k_2 k_3 \Delta')[\Theta' + \Delta'(k_1 + k_2 + k_3)].$$

Последица. Нека је $k_1 = k_2 = o$, а $k_3 = k$. У том случају преобразиће се наша погодба у ову простију:

$$\Theta^2 = 4\Delta(\Theta' + k\Delta').$$

То би дакле била погодба под којом ће некакав троугао уписан у S' својим двема странама дирати S, а својом трећом страном дирати $S + kS'$. Ако из те погодбене релације и еквације $S + kS' = o$ елиминирамо k, добићемо еквацију

$$4\Delta\Delta' S + (\Theta^2 - 4\Delta\Theta') S' = o.$$

Та еквација представљаће дакле обвојницу треће стране.

419 *bis*. *Наћи погодбу под којом ће темена неког троугла описаног око Σ' лежати на коничним пресецима $\Sigma + p_1\Sigma'$, $\Sigma + p_2\Sigma'$, $\Sigma + p_3\Sigma'$.*

Та проблема одговара корелативно мало час поменутој проблеми. Погодба је ово:

$$[\theta - \delta' (p_2p_3 + p_3p_1 + p_1p_2)]^2$$
$$= 4(\delta + p_1p_2p_3\delta')[\theta' + \delta'(p_1 + p_2 + p_3)].$$

У тој погодби су $\delta, \theta, \theta', \delta'$ инваријанте тангенцијалног прамена $\Sigma + p\Sigma'$.

Последица. Нека је $p_1 = p_2 = o$, а $p_3 = p$. Погодбена релација преобразиће се у ову:

$$\theta^2 = 4\delta(\theta' + p\delta').$$

То би дакле била погодба под којом ће два темена неког троугла описаног око Σ' лежати на коничном пресеку Σ, а треће теме на пресеку $\Sigma + p\Sigma'$.

Ако су $S = o$ и $S' = o$ пунктуалне еквације коничних пресека Σ и Σ', биће

$$\delta = \Delta^2,\ \theta = \Delta\Theta',\ \theta' = \Delta'\Theta,\ \delta' = \Delta'^2,$$

па ће се с тога последња погодбена релација преобразити у ову:

$$\Theta'^2 = 4\Delta'(\Theta + p\Delta').$$

420. а) Хармонијски описани конични пресеци. — Нека је основни троугао трилинеарне системе аутополаран троугао коничног пресека S. У тој системи биће еквација S-ова ово:

$$S \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = o.$$

Даље, нека је $S' \equiv b_x^2$. Инваријанта Θ биће у овај мах ово:

$$\Theta = a_{22}a_{33}b_{11} + a_{33}a_{11}b_{22} + a_{11}a_{22}b_{33}.$$

Узмимо сад да је пресек S' хармонијски описан око S, т. ј. узмимо да је (чл. 389.) тај коничан пресек описан око нашег основног троугла, а то ће рећи око једног аутополарног троугла пресека S. У том случају биће $b_{11} = o$, $b_{22} = o$, $b_{33} = o$, па ће с тога и инваријанта Θ бити $= o$. *Коничан пресек S' биће дакле хармонијски описан око S ако је $\Theta = o$.*

b) Хармонијски уписани конични пресеци. — Нека је основни троугао трилинеарне системе аутополаран троугао криве S'. У тој системи биће еквација пресека S' ово:

$$S' \equiv b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = o.$$

Даље, нека је $S \equiv a_x^2$. Инваријанта Θ биће у овај мах ово:

$$\Theta = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\, b_{11} + (a_{33}a_{11} - a_{31}^2)\, b_{22} + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\, b_{33}.$$

Узмимо сад да су изрази $a_{22}a_{33} - a_{23}^2$, $a_{33}a_{11} - a_{31}^2$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ равни нули. У том случају биће и $\Theta = o$. Но кад је $a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = o$ и т. д., онда се еквација S-ова може овако написати:

$$\sqrt{a_{11}x_1} + \sqrt{a_{22}x_2} + \sqrt{a_{33}x_3} = o.$$

Према томе је у овом случају основни троугао — а то ће рећи један аутополаран троугао пресека S' — описан око S; с тога је крива S хармонијски уписана у S'. Дакле, *коничан пресек S биће хармонијски уписан у S' ако је $\Theta = o$.*

Последица (1). Ако је крива S хармонијски описана око S', онда ће крива S' хармонијски бити уписана у S. Та два конична пресека везана су у том случају погодбом $\Theta' = o$.

Последица (2). Ако конични пресеци S и S' хармонијски описују пресек S'', онда ће и сви конични пресеци прамена $S—kS'$ хармонијски описивати S''.

Последица (3). Ако три конична пресека S, S', S'' хармонијски описују коничан пресек S''', онда ће и сваки коничан пресек мреже $lS + l'S' + l''S''$ хармонијски описивати S'''.

Последица (4). Ако је $\Sigma \equiv \alpha_u{}^2 = o$ тангенцијална еквација неког коничног пресека, а $S' \equiv b_x{}^2 = o$ пунктуална еквација другог неког коничног пресека, онда ће бити $b_\alpha{}^2 = o$ ако је пресек Σ хармонијски уписан у S'. Ако је на име пунктуална еквација коничног пресека Σ ово: $a_x{}^2 = o$, онда ће погодба бити ово: $\Theta = (a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2)\ b_{11} + \cdot\ \cdot\ \cdot = o$, а коефицијенти $a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2, \cdot\ \cdot\ \cdot$ који се јављају у том изразу су уједно и коефицијенти тангенцијалне еквације $\Sigma = o$.

Последица (5). Ако су $S = o$, $S' = o$, $S'' = o$ пунктуалне екваціје трију коничних пресека, а $\Sigma = o$, $\Sigma' = o$, $\Sigma'' = o$ тангенцијалне екваціје неких других трију коничних пресека, па ако су сва три последња конична пресека хармонијски уписана у сва три прва, онда ће и сваки коничан пресек тангенцијалне мреже $p\Sigma + p'\Sigma' + p''\Sigma''$ хармонијски бити уписан у сваки коничан пресек пунктуалне мреже $lS + l'S' + l''S''$ и обратно, сваки коничан пресек пунктуалне мреже $lS + l'S' + l''S''$ биће хармонијски описан око ма ког коничног пресека тангенцијалне мреже $p\Sigma + p'\Sigma' + p''\Sigma''$. У том случају каже се да су мреже $p\Sigma + p'\Sigma' + p''\Sigma''$ и $lS + l'S' + l''S''$ *коњуговане мреже.*¹)

421. Још неке особине хармонијских коничних пресека наћи ћемо овако. Узећемо троугао ABC и означићемо са $A'B'C'$ поларно узајамну слику тог троугла према неком датом коничном пресеку S. Троугли ABC и $A'B'C'$ биће хомолошки (прим. 10. стр. 763.). Средиште хомологије зваћемо *полом,* а осовину хомо-

---

¹) **Clebsch.** *Vorlesungen über Geometrie*, p. 521.

логије *осовином троугла ABC* и бележићемо пол са O, а осовину са H. Ако је $A'B'C'$ поларно узајамна слика троугла ABC према коничном пресеку S', онда ћемо пол бележити са O', а осовину са H'.

Теорема. *Ако је коничан пресек S' хармонијски описан око S, онда ће пол O неког троугла уписаног у S' лежати на пресеку S', а осовина H' неког троугла описаног око S биће тангента пресека S.* (Салмонова теорема.)

Узећемо за основни троугао трилинеарне системе један од троуглова уписаних у S'. Еквације кривих S и S' биће у тој систэми

$$S \equiv a_x^2 = o, \quad S' \equiv b_{12}x_1x_2 + b_{23}x_2x_3 + b_{31}x_3x_1 = o,$$

а еквације поларâ појединих теменâ основног троугла биће према коничном пресеку S (прим. 1. чл. 362.) ово:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = o, a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$
$$+ a_{23}x_3 = o, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = o.$$

Како су еквације правих AA', BB', CC' ово:

$$A_{13}x_2 - A_{12}x_3 = o, A_{12}x_3 - A_{23}x_1 = o, A_{23}x_1 - A_{13}x_2 = o,$$

биће координате пола O ово: $1/A_{23}$, $1/A_{31}$, $1/A_{12}$, а тачка $(1/A_{23}, 1/A_{31}, 1/A_{12})$ лежаће на коничном пресеку S' ако је

$$A_{12}b_{12} + A_{23}b_{23} + A_{31}b_{31} = o\,;$$

но како је у овај мах $\Theta = o$ и како је

$$\Theta = A_{12}b_{12} + A_{23}b_{23} + A_{31}b_{31},$$

биће јасно да ће тачка O заиста лежати на коничном пресеку S'.

Даље, ако је тангенцијална еквација коничног пресека S ово:

$$A_{23}/u_1 + A_{31}/u_2 + A_{12}/u_8 = o,$$

а пунктуална еквација коничног пресека S' ово:

$$S' \equiv b_x^2 = o,$$

онда ће осовина H' основног троугла бити права

$$x_1/b_{23} + x_2/b_{31} + x_3/b_{12} = o,$$

а та ће права дирати S ако је

$$A_{23}b_{23} + A_{31}b_{31} + A_{12}b_{12} = o,$$

т. ј. ако је $\Theta = o$. Осовина H' заогрће, дакле коничан пресек S.

Прим. 1. Наћи погодбу под којом ће круг $(X-x)^2+(Y-y)^2=r^2$ бити хармонијски описан око коничног пресека

$$(a, b, c, f, g, h)(X, Y, 1)^2 = o -$$

Одг. Погодба је ово:

$$C(x^2 + y^2) - 2Gx - 2Fy + A + B - Cr^2 = o,$$

а то је еквација ортоптичког круга кад је $r = o$.

Прим. 2. Наћи погодбу под којом ће круг

$$(ux + vy + 1)^2 = r^2(u^2 + v^2)$$

бити хармонијски уписан у коничан пресек $(a, b, c, f, g, h)(X, Y, 1)^2 = o$. —

Одг. Погодба је ово:

$$(a, b, c, f, g, h)(x, y, 1)^2 - r^2(a + b) = o.$$

Дакле, ако је полупречник круга дат, онда ће место његова средишта бити коничан пресек — концентричан и хомотетичан са датим коничним пресеком.

Прим. 3. Квадрат тангенте повучене из средишта неког коничног пресека на круг описан око аутополарног троугла, јесте сталан. *(Форова теорема.)*

У овај мах је (чл. 417. под 4.)

$$\Theta' = (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - r^2)/(a^2b^2),$$

па како је $\Theta' = o$, биће и

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = a^2 + b^2 = const.,$$

т. ј. и т. д.

Прим. 4. Четири равностране хиперболе имају једну заједничку тачку, а хармонијски су описане око истог коничног пресека. Тачке у којима се секу две и две између поменуте четири хиперболе леже на једној равностраној хиперболи. *(Картисова теорема.)*

Узећемо заједничку тачку за почетак координатне системе. Еквације четирију хипербола биће

$$S_1 \equiv a_1 (x^2 - y^2) + 2h_1 xy + 2g_1 x + 2f_1 y = o,$$

. . . .

Нека је сем тога $(a, b, c, f, g, h)(x, y, 1)^2 = o$ еквација датог коничног пресека. Како су криве $S_1, S_2, \cdots$ хармонијски описане око тог коничног пресека, добићемо четири погодбене релације овог облика:

$$(A - B) a_i + 2Hh_i + 2Gg_i + 2Ff_i = o, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Елиминанта те системе је

$$\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & g_1 & f_1 \\ a_2 & h_2 & g_2 & f_2 \\ a_3 & h_3 & g_3 & f_3 \\ a_4 & h_4 & g_4 & f_4 \end{vmatrix} = o.$$

Помножимо сад елементе прве колоне са $x^2 - y^2$, елементе друге колоне са $2xy$, елементе треће колоне са $2x$, а елементе четврте колоне са $2y$ и додајмо елементе друге, треће и четврте колоне елементима прве.

Добићемо ово:

$$\begin{vmatrix} S_1 & h_1 & g_1 & f_1 \\ S_2 & h_2 & g_2 & f_2 \\ S_3 & h_3 & g_3 & f_3 \\ S_4 & h_4 & g_4 & f_4 \end{vmatrix} \equiv o.$$

а та се релација може и овако написати:

$$k_1 S_1 + k_2 S_2 + k_3 S_3 + k_4 S_4 \equiv o.$$

По томе се види да еквације $k_1S_1+k_2S_2=o$ и $k_3S_3+k_4S_4=o$ представљају исту равнострану хиперболу; она прва пролази кроз тачке у којима се секу S_1 и S_2, а ова друга кроз тачке у којима се секу S_3 и S_4 и т. д.

Прим. 5. Два хомотетична конична пресека су хармонијски описана око неког трећег коничног пресека S. Заједничка корда првих двају пролази кроз средиште пресека S. *(Картисова теорема.)*

422. Дефиниција. *Нека су* $F\equiv -l\alpha+m\beta-n\gamma=o$, $G\equiv l\alpha+m\beta+n\gamma=o$, $H\equiv l\alpha-m\beta-n\gamma=o$, $K\equiv -l\alpha-m\beta+n\gamma=o$ *еквације четирију страна неког нормалног тетраграма. Коничан пресек* $F^2+G^2+H^2+K^2=o$ *зове се коничан пресек четрнаесторих тачака. Тај коничан пресек зваћемо пресеком* Π. —

Како је $F+G+H+K\equiv o$, биће

$$F^2+G^2+H^2+K^2\equiv-2\,(FG+FH+FK+GH+GK+HK),$$

па се с тога еквација пресека Π може и овако написати:

$$FG+FH+FK+GH+GK+HK=o$$

или овако:

$$GK+FH+(G+K)\,(F+H)=o$$

или најпосле, како је $F+H\equiv-(G+K)$, и овако:

$$GK+FH=(G+K)^2.$$

По тој еквацији види се да је Π у двојном додиру са коничним пресеком $GK+FH$ дуж праве $G+K=o$, т. ј. да је Π дуж дијагонале (сл. 58.) FL у двојном додиру са коничним пресеком $GK+FH$ описаним око темена̂ D и M, E и N што леже на осталим двема дијагоналама. Но кад некакав коничан пресек пролази кроз два пара супротних темена тетраграмових, онда су остала два темена хармонијски полови тог коничног пресека. Тачке F и L су дакле хармонијски коњуговане према тачкама у којима дијагонала FL сече пресек $GK+FH$, па како у тим истим тачкама та дијагонала сече и пресек *П*, биће јасно да ће поменуте две тачке F и L бити хармонијски полови и пресека *П*.

Напишимо сад еквацију $FG + FH + \cdot \cdot \cdot = o$ пресека *П* овако:

$$HK + FG + (H + K) (F + G) = o$$

или, како је $F + G \equiv -(H + K)$, овако:

$$HK + FG = (H + K)^2.$$

По тој еквацији види се да је *П* у двојном додиру са пресеком $HK + FG$ дуж дијагонале EN. Тај пресек $HK+FG$ пролази међу тим кроз тачке L, F, D, M, па ће с тога тачке E и N бити хармонијски полови тог коничног пресека. Те тачке биће дакле хармонијски коњуговане према оним двема тачкама у којима дијагонала EN сече коничан пресек $HK + FG$, па ће с тога тачке E и N бити уједно и хармонијски полови пресека *П*.

Доказали смо дакле да су два пара $F \cdot L$, $E \cdot N$ супротних темена тетраграмових коњугована према пресеку *П*. По Хесеовој теореми биће дакле и остала два супротна темена D и M коњугована према оним двема тачкама у којима пресек *П* сече дијагонала DM тетраграмова.

Даље, подигнимо на квадрат еквације $l\alpha \pm m\beta \pm n\gamma = o$ и саберимо их. Добићемо овај резултат:

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 = o,$$

т. ј. основни троугао ABC је аутополаран троугао пресека *П*. С тога ће *П* сваку страну тог троугла, а то ће рећи сваку дијагоналу тетраграмову, сећи хармонијски. Темена A и B основног троугла лежала би дакле хармонијски према тачкама у којима *П* сече дијагоналу FL и т. д., а по томе се види *да ће пресек П сећи дијагонале тетраграмове у двојним тачкама инволуција̂ одређених паровима $A \cdot B$, $F \cdot L$; $B \cdot C$, $D \cdot M$; $C \cdot A$, $E \cdot N$.*

Како је $K \equiv -(F + G + H)$, то ћемо еквацију пресека *П* моћи и овако написати:

$$F^2 + G^2 + H^2 + (F + G + H)^2 = o$$

или овако:

$$F^2 + G^2 + H^2 + FG + FH + GH = o.$$

Према томе ће права $H = o$ сећи коничан пресек *П* у оним двема тачкама P и Q у којима праву $H = o$ секу праве

$$F^2 + G^2 + FG = o. \qquad (6)$$

Те две праве секу се у тачци N; еквације њихове су посебице овог облика: $F + kG = o$, а вредности параметра k којима су одређена та два посебна зрака NP и NQ добићемо овако. Поделићемо еквацију (6) са G^2 и сменићемо у њој F/G са $-k$. Добићемо тим путем ову квадратну еквацију:

$$k^2 - k + 1 = o,$$

а корени k' и k'' те еквације су два имагинарна корена кубне еквације $k^3 + 1 = o$. Еквације зракова NP и NQ биће дакле $F + k'G = o$ и $F + k''G = o$, па како је еквација дијагонале NE ово: $F + G = o$, биће и

$$N(FMPE) = (FMPE) = k',$$

$$N(FMQE) = (FMQE) = k''.$$

Те две двојне напремице неће мењати своју вредност кад се еквације стра̑на̑ тетраграмових мењају услед трансформација̑ координатних система, јер се може доказати да је израз $F^2 + G^2 + FG$ коваријанта. Хесијан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} \end{vmatrix}$$

неког облика $f(x_1, x_2)$ је на име коваријанта[1]), а $-4(F^2 + G^2 + FG)$ је хесијан облика $FG(F + G)$. Према томе ће у прамену $F + kG = o$ свакад зраци NP и NQ бити одређени имагинарним кубним коренима негативне јединице, па ће с тога положај тачака P и Q у којима Π сече страну тетраграмову H бити тачно одређен чим је дат тетраграм. На исти начин могло би се доказати да би положај оних тачака, у којима Π сече остале стране тетраграмове такођер био тачно одређен кад је дат тетраграм. *Коничан пресек Π пролази дакле кроз четрнаест одређених тачака.* По две између тих четрнаест тачака леже на свакој страни, а по две на свакој дијагонали тетраграмовој.

Напомена. Коничном пресеку Π одговара дуално *коничан пресек четрнаесторих правих.* Тај коничан пресек дира четрнаест одређених правих. По две између тих правих пролазе кроз дијагоналне тачке, а по две кроз темена неког тетрастигмата.

423. *Наћи погодбу под којом ће права $u_x = o$ пролазити кроз једну између четирију тачака у којима се секу пресеци $S \equiv a_x^2 = o$ и $S' \equiv b_x^2 = o$.*

Ту проблему могли бисмо и овако формулисати: наћи тангенцијалну еквацију четирију тачака у којима се секу пресеци S и S', а решићемо је овако. Погодба под којом ће нека права $u_x = o$ дирати коничан пресек $S + kS'$ биће ово:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + kb_{11} & a_{12} + kb_{12} & a_{13} + kb_{13} & u_1 \\ a_{21} + kb_{21} & a_{22} + kb_{22} & a_{23} + kb_{23} & u_2 \\ a_{31} + kb_{31} & a_{32} + kb_{32} & a_{33} + kb_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & o \end{vmatrix} = o$$

или, ако развијемо детерминанту, ово:

---

[1]) Види **Clebsch**. *Vorlesungen über Geometrie*, p. 176.

$$\Sigma + k\Phi + k^2\Sigma' = o. \qquad (7)$$

У тој погодбеној релацији су Σ и Σ' полиноми тангенцијалних еквација коничних пресека S и S', а Φ је полином еквације тангенцијалног хармонијског коничног пресека (види чл. 364.) тих пресека; са Φ је дакле означен овај полином:

$$\Phi \equiv \Sigma\,(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})\,u_1{}^2$$
$$+ 2\Sigma\,(a_{12}b_{13} + a_{13}b_{12} - a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11})\,u_2u_3 = o,$$

а то ће рећи овај полином:

$$\begin{aligned}\Phi \equiv{} & (a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})\,u_1{}^2 + (a_{33}b_{11} \\ & + a_{11}b_{33} - 2a_{31}b_{31})\,u_2{}^2 + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})\,u_3{}^2 \\ & + 2\,(a_{12}b_{13} + a_{13}b_{12} - a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11})\,u_2u_3 + 2\,(a_{23}b_{21} \\ & + a_{21}b_{23} - a_{22}b_{31} - a_{31}b_{22})\,u_3u_1 + 2\,(a_{31}b_{32} \\ & \qquad + a_{32}b_{31} - a_{33}b_{12} - a_{12}b_{33})\,u_1u_2.\end{aligned}$$

Еквација (7) је квадратна по непознатој k; с тога имају два конична пресека прамена $S + kS'$ што дирају дату праву u_x (види прим. 16. чл. 403.). Но ако права u_x пролази кроз једну од четирију заједничких тачака пресека S и S', онда ће бити само један коничан пресек који ће дирати ту праву и пролазити кроз заједничке тачке пресека S и S'. У том случају ће се дакле поменута два конична пресека поклапати. Према томе ће еквација (7) имати два једнака корена, па ће с тога дискриминанта њезина бити једнака с нулом. Биће дакле

$$\Phi^2 - 4\Sigma\Sigma' = o, \qquad (8)$$

а јасно је да је то еквација заједничких тачака пресека S и S'.

Напомена. Ако линеарном супституцијом

$$\sigma u_1 = l_1v_1 + l_2v_2 + l_3v_3, \quad \sigma u_2 = m_1v_1 + \ldots, \quad \sigma u_3 = n_1v_1 + \ldots$$

преобразимо Σ и Σ' у $\bar{\Sigma}$ и $\bar{\Sigma}'$, биће јасно да ће она функција $\bar{\Phi}$, која постаје из $\bar{\Sigma}$ и $\bar{\Sigma}'$ исто онако као што постаје функција Φ из Σ и Σ', бити у опште овог облика:

$$\bar{\Phi} = C \cdot \Phi$$

(где је са C означена нека стална количина), јер еквација $\bar{\Phi} = o$ мора у новој координатној системи представљати исту ону криву коју еквација $\Phi = o$ представља у старој системи; функција Φ је дакле контраваријанта коничних пресека S и S', као што су и Σ и Σ' контраваријанте тих пресека (чл. 124.).

Последица. Еквација (8) је овог облика: $RS - kP^2 = o$; према свом облику представља дакле та еквација обвојницу коју дирају и заједничке тангенте кривих $\Phi \cdot \Sigma$ и $\Phi \cdot \Sigma'$. Дакле, *осморе тангенте повучене на криве Σ и Σ' у њиховим заједничким тачкама заогрћу тангенцијалан хармонијски коничан пресек тих кривих.*

Прим. 1. Наћи еквације заједничких тачака коничних пресека

$$S \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = o, \quad S' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = o. \text{ —}$$

У овај мах је

$$\Phi = (a_{22} + a_{33})\, u_1^2 + (a_{33} + a_{11})\, u_2^2 + (a_{11} + a_{22})\, u_3^2 = o,$$

па су с тога еквације поменутих четирију тачака ово:

$$u_1 \sqrt{a_{22} - a_{33}} \pm u_2 \sqrt{a_{33} - a_{11}} \pm u_3 \sqrt{a_{11} - a_{22}} = o. \qquad (\alpha)$$

Прим. 2. Наћи еквацију коничног пресека четрнаесторих правих, одређеног системом четирију заједничких тачака коничних пресека S и S' (прим. 1.) и доказати да је тај коничан пресек хармонијски уписан и у S и у S'. —

Одг. Еквација коничног пресека четрнаесторих правих је

$$(a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33})\, x_1^2 + (a_{22} - a_{33})(a_{22} - a_{11})\, x_2^2 + (a_{33} - a_{11})(a_{33} - a_{22})\, x_3^2 = o, \qquad (\beta)$$

т. ј. и т. д.

Напом. Тангенцијална еквација коничног пресека (β) је ово:

$$(a_{22} - a_{33})\, u_1^2 + (a_{33} - a_{11})\, u_2^2 + (a_{11} - a_{22})\, u_3^2 = o,$$

а та се еквација добива кад се еквације (α) квадрирају, па за тим саберу.

424. *Наћи еквацију четирију заједничких тангената коничних пресека* $S \equiv a_x^2 = o$ *и* $S' \equiv b_x^2 = o$.

Нека су $\Sigma \equiv A_u^2 = o$, $\Sigma' \equiv B_u^2 = o$ тангенцијалне еквације пресекâ S и S'. Погодба под којом ће конични пресеци тангенцијалне мреже $\Sigma + k\Sigma'$ пролазити кроз тачку $x_u = o$ биће ово:

$$\begin{vmatrix} A_{11} + kB_{11} & A_{12} + kB_{12} & A_{13} + kB_{13} & x_1 \\ A_{21} + kB_{21} & A_{22} + kB_{22} & A_{23} + kB_{23} & x_2 \\ A_{31} + kB_{31} & A_{32} + kB_{32} & A_{33} + kB_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & o \end{vmatrix} = o$$

или, ако развијемо детерминанту, ово:

$$\mathbf{S} + kF + k^2\mathbf{S}' = o.$$

У тој еквацији је (види прим. у чл. 240.) $\mathbf{S} = \Delta a_x^2$, а $\mathbf{S}' = \Delta' b_x^2$; са F је означен полином еквације пунктуалног хармонијског коничног пресека коничних пресека S и S' (види чл. 364.), т. ј. са F је означен овај израз:

$$\begin{aligned} F \equiv (A_{22}B_{33} + A_{33}B_{22} - 2A_{23}B_{23})\, x_1^2 + (A_{33}B_{11} \\ + A_{11}B_{33} - 2A_{31}B_{31})\, x_2^2 + (A_{11}B_{22} \\ + A_{22}B_{11} - 2A_{12}B_{12})\, x_3^2 + 2\,(A_{12}B_{13} \\ + A_{13}B_{12} - A_{11}B_{23} - A_{23}B_{11})\, x_2x_3 \\ + 2\,(A_{23}B_{21} + A_{21}B_{23} - A_{22}B_{31} - A_{31}B_{22})\, x_3x_1 \\ + 2\,(A_{31}B_{32} + A_{32}B_{31} - A_{33}B_{12} - A_{12}B_{33})\, x_1x_2. \end{aligned}$$

Према томе се поменута погодба може и овако написати:

$$\Delta a_x^2 + kF + k^2\Delta' b_x^2 = o. \qquad (9)$$

Та еквација је квадратна по непознатој k; с тога имају два конична пресека тангенцијалног прамена

$\Sigma + k\Sigma'$ што пролазе кроз дату тачку x_u (види прим. 17. чл. 403.).

Но ако тачка x_u лежи на једној од заједничких тангената пресека, онда ће се та два конична пресека прамена $\Sigma + k\Sigma'$ поклапати. У том случају ће дискриминанта еквације (9) бити једнака с нулом. Биће дакле

$$F^2 - 4\Delta\Delta' a_x{}^2 b_x{}^2 = o, \qquad (10)$$

а јасно је да је то еквација заједничких четирију тангената коничних пресека S и S'.

Напомена. Ако линеарном супституцијом

$$\rho x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3, \quad \rho x_2 = \mu_1 y_1 + \ldots, \quad \rho x_3 = \nu_1 y_1 + \ldots$$

преобразимо $S \equiv a_x{}^2$ и $S' \equiv b_x{}^2$ у $\overline{S}$ и $\overline{S'}$, биће јасно да ће она функција $\overline{F}$, која постаје из $\overline{S}$ и $\overline{S'}$ исто онако као што постаје функција F из S и S', бити у опште овог облика:

$$\overline{F} = C \cdot F$$

(где је са C означена нека стална количина), јер еквација $\overline{F} = o$ мора у новој системи представљати исту ону криву коју еквација $F = o$ представља у старој системи; функција F је дакле коваријанта пресекâ S и S', као што су и облици $a_x{}^2$ и $b_x{}^2$ коваријанте.

Последица. Еквација (10) је овог облика: $LM = R^2$; према свом облику мора дакле та еквација представљати место тачака које дира пресеке $a_x{}^2$ и $b_x{}^2$ у тачкама у којима их сече F. Дакле, *осморе тачке, у којима заједничке тангенте кривих S и S' дирају те криве, леже на пунктуалном хармонијском коничном пресеку тих кривих.*

Прим. 1. Наћи еквације заједничких тангената коничних пресека

$$S = a_{11}x_1{}^2 + a_{22}x_2{}^2 + a_{33}x_3{}^2 = o, \; S' \equiv x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = o.$$

Одг. Еквације заједничких тангената су ово:

$$x_1 \sqrt{a_{11}(a_{22}-a_{33})} \pm x_2 \sqrt{a_{22}(a_{33}-a_{11})} \pm x_3 \sqrt{a_{33}(a_{11}-a_{22})} = o.$$

Прим. 2. Четири заједничке тангенте коничних пресека S и S' одређују један тетраграм. Доказати да је коничан пресек четрнаесторих тачака хармонијски описан и око S и око S'.

Прим. 3. Два темена неког променљивог троугла описаног око S' крећу се по пресеку S. Наћи место трећег темена.

Погодба под којом два темена неког троугла описаног око Σ' леже на коничном пресеку Σ, а треће теме на коничном пресеку $\Sigma + p\Sigma'$, јесте (чл. 419 *bis*) ово:

$$\Theta'^2 = 4\Delta'(\Theta + p\Delta').$$

Из те еквације и пунктуалне еквације $\Delta S + kF + k^2\Delta' S' = o$ криве $\Sigma + p\Sigma'$ елиминираћемо p и добићемо еквацију траженог места:

$$16\Delta^3 \Delta S + 4\Delta'(\Theta'^2 - 4\Delta'\Theta) F + (\Theta'^2 - 4\Delta'\Theta)^2 S' = o. \quad (\alpha)$$

425. Теорема. *Ако је $\Theta = o$, онда је коваријанта F коничних пресека S и S' поларно узајамна слика криве S према кривој S', а ако је $\Theta' = o$, онда је F поларно узајамна слика криве S' према кривој S.*

Нека је

$$S \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = o, \quad S' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = o.$$

У овај мах је

$$\Theta = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11},$$

а

$$F = a_{11}(a_{22}+a_{33})\, x_1^2 + a_{22}(a_{33}+a_{11})\, x_2^2 + a_{33}(a_{11}+a_{22})\, x_3^2.$$

Међу тим је поларно узајамна слика пресека S према пресеку S' (прим. 1. чл. 393.) ово:

$$a_{22}a_{33}x_1^2 + a_{33}a_{11}x_2^2 + a_{11}a_{22}x_3^2 = o.$$

То значи да је у опште еквација поларно узајамне слике пресека S према пресеку S' ово:

$$\Theta S' = F. \qquad (11)$$

Дакле, кад је $\Theta = o$, онда је F поларно узајамна слика пресека S према пресеку S'.

Сличним путем могло би се доказати да је у опште еквација поларно узајамне слике пресека S' према пресеку S' ово:

$$\Theta' S = F. \qquad (12)$$

Дакле, кад је $\Theta' = o$, онда је F поларно узајамна слика пресека S' према пресеку S.

Напомена. У еквацијама (11) и (12) јављају се као што видимо облици S и S' и њихова коваријанта F.

Исто се тако (прим. 3. чл. 424.) у еквацији (α) јављају исти облици. То је правило опште. Пунктуална еквација неког коничног пресека, чије се везе са пресецима S и S' не ремете линеарним супституцијама, биће на име у опште функција обликâ S, S', F, као год што ће и тангенцијална еквација таквих коничних пресека бити у опште функција обликâ $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\Sigma}'$, $\boldsymbol{\Phi}$.

Прим. 1. Наћи пунктуалну еквацију тангенцијалног хармонијског коничног пресека кривих

$$S \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = o, \quad S' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = o. -$$

Тангенцијална еквација траженог пресека је (види прим. у чл. 364.)

$$\Phi \equiv (a_{22} + a_{33})\, u_1^2 + (a_{33} + a_{11})\, u_2^2 + (a_{11} + a_{22})\, u_3^2 = o,$$

а његова пунктуална еквација је

$$\Theta S' + \Theta' S - F = o.$$

Напом. Кад је $\Theta = \Theta' = o$, онда еквације $\Phi = o$ и $F = o$ представљају једну и исту криву. — Имају ли још каквих особина конични пресеци S и S' за које је $\Theta = \Theta' = o$?

Прим. 2. Свести опште еквације $S = o$ и $S' = o$ на ове облике:

$$a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 = o,\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = o. -$$

Како је

$$S \equiv a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2, \quad S' \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

биће и дискриминанта облика $S-kS'$ једнака с дискриминантом облика

$$a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 - k\ (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

С тога ће (види чл. 417. под 1.) коефицијенти a_{11}, a_{22}, a_{33} бити корени Ламеове еквације кривих S и S'. Ти коефицијенти били би дакле већ познате количине.

Треба дакле још израчунати y_1, y_2, y_3, а ево како ћемо те параметре одредити. Коваријанта F пресекâ S и S' је

$$\equiv a_{11}\ (a_{22} + a_{33})\ y_1^2 + a_{22}\ (a_{33} + a_{11})\ y_2^2 + a_{33}\ (a_{11} + a_{22})\ y_3^2 = o.$$

С тога ћемо имати три еквације

$$a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 \equiv S,\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \equiv S',$$

$$a_{11}\ (a_{22} + a_{33})\ y_1^2 + a_{22}\ (a_{33} + a_{11})\ y_2^2 + a_{33}\ (a_{11} + a_{22})\ y_3^2 \equiv F;$$

према томе је

$$(a_{11} - a_{22})\ (a_{11} - a_{33})\ y_1^2 \equiv a_{11}S + a_{22}a_{33}S' - F, \qquad (\alpha)$$

$$(a_{22} - a_{33})\ (a_{22} - a_{11})\ y_2^2 \equiv a_{22}S + a_{33}a_{11}S' - F, \qquad (\beta)$$

$$(a_{33} - a_{11})\ (a_{33} - a_{22})\ y_3^2 \equiv a_{33}S + a_{11}a_{22}S' - F, \qquad (\gamma)$$

а тим је проблема решена.

Напом. По последњим еквацијама види се да се заиста све коваријанте пресека S и S' могу изразити функцијама облика S и S' и њихове коваријанте F.

Прим. 3. Доказати да еквација

$$\Theta'S + \Theta S' - 3F = o$$

представља коничан пресек четрнаесторих правих, одређен системом заједничких четирију тачака пресекâ S и S'. —

Треба просто сабрати еквације (α), (β), (γ) и имати у виду еквацију коничног пресека четрнаесторих правих (види прим. 2. чл. 423.).— Еквација $\Theta'S + \Theta S' - 3F = o$ је *Гунделфингерова еквација.*

426. Двојни додири. Коничан пресек $F = o$ пролази као што знамо кроз тачке у којима заједничке тангенте пресекâ S и S' дирају S и S'. Ако се дакле

S и S' додирују у некој тачци A, то ће и F у тој истој тачци дирати пресеке S и S'. Кад би се дакле пресеци S и S' додиривали у двема тачкама A и B дуж праве AB, онда би и коничан пресек F дуж те исте праве био у двојном додиру са пресецима S и S', па би с тога еквација тог коничног пресека била овог облика: $lS + l'S' = o$, т. ј. *кад су пресеци* S *и* S' *у двојном додиру, онда је коваријанта* F *један од коничних пресека прамена* $lS + l'S'$.

То исто могло би се доказати и чисто аналитичким путем. Узмимо на име да се тангенте повучене на S и S' у тачкама A и B секу у C. Ако је ABC основни троугао трилинеарне системе, биће

$$S \equiv a_{33}x_3{}^2 + 2a_{12}x_1x_2, \qquad S' \equiv b_{33}x_3{}^2 + 2b_{12}x_1x_2,$$

па је с тога и

$$F \equiv -2a_{12}b_{12}\,[a_{33}b_{33}x_3{}^2 + (a_{12}b_{33} + a_{33}b_{12})\,x_1x_2].$$

Еквација криве F је дакле

$$a_{33}b_{33}x_3{}^2 + (a_{12}b_{33} + a_{33}b_{12})\,x_1x_2 = o,$$

т. ј. и т. д.

427. Теорема. *Ако су пресеци* S *и* S' *у двојном додиру, онда је јакобијан функција* S, S', F *идентично раван нули.*

Означимо јакобијан функција̂ S, S', F са $J(S, S', F)$. Биће

$$J(S, S', F) = \begin{vmatrix} S_1 & S_1' & F_1 \\ S_2 & S_2' & F_2 \\ S_3 & S_3' & F_3 \end{vmatrix};$$

у тој детерминанти су S_1, S_1', F_1 делимични изводи функција̂ S, S', F по промењивој x_1 и т. д.

Како је $F \equiv lS + l'S'$, биће

$$J(S, S', F) = \begin{vmatrix} S_1 & S_1' & lS_1 + l'S_1' \\ S_2 & S_2' & lS_2 + l'S_2' \\ S_3 & S_3' & lS_3 + l'S_3' \end{vmatrix},$$

а та је детерминанта идентично равна нули, као што смо и тврдили.

Могло би се доказати да ће криве S и S' бити у двојном додиру и кад је детерминанта

$$\begin{vmatrix} \Sigma & \Phi & \Sigma' \\ 3\Delta & 2\Theta & \Theta' \\ \Theta & 2\Theta' & 3\Delta' \end{vmatrix} \equiv o. \qquad (13)$$

Кад се на име S и S' додирују, онда Ламеова еквација има два једнака корена; тај двојни корен Ламеове еквације биће дакле и корен изведене еквације, другим речима тај корен биће заједнички корен ових двеју еквација:

$$\Delta + k\Theta + k^2\Theta' + k^3\Delta' = o, \qquad (14)$$

$$\Theta + 2k\Theta' + 3k^2\Delta' = o. \qquad (15)$$

Но ако се узме да су криве S и S' у двојном додиру, онда ћемо сем тих двеју погодаба добити још једну. У том случају ће на име еквација $S + kS' = o$ представљати једну двојну праву (дуж те двојне праве биће пресеци S и S' у двојном додиру) кад се у њој смени k посебном вредношћу заједничког корена поменутих двеју еквација. Поларно узајамна слика те праве биће једна тачка, па је с тога и

$$\Sigma + k\Phi + k^2\Sigma' = o.$$

Ако из те еквације и еквацијâ (14) и (15) елиминирамо k, добиће̂мо у резултату идентичну релацију (13).

428. Контраваријанте. Нека су $\Sigma \equiv A_u^2 = o$ и $\Sigma' \equiv B^2 = o$ тангенцијалне еквације двају пресека ρ и $\rho' = o$. [illegible] S и S' чије су пунктуалне еквације ово: u. Ламеова еквација тангенцијалног прамена $\Sigma + k\Sigma'$ била би ово:

$$\delta + k\theta + k^2\theta' + k^3\delta' = o. \qquad (16)$$

Ако корене те еквације означимо са k', k'', k''', онда ће еквација $\Sigma + k\Sigma' = o$ представљати по две тачке кад у њој k има ове вредности: k', k'', k'''. Те тачке су супротна темена тетраграма одређеног системом четирију заједничких тангената пресекâ Σ и Σ'.

Кад еквације $\Sigma = o$ и $\Sigma' = o$ представљају праве коничне пресеке, т. ј. кад те две еквације не представљају по две (реалне или имагинарне) тачке, онда ће се горња Ламеова еквација моћи и овако написати:

$$\Delta^2 + k\Delta\Theta' + k^2\Delta'\Theta + k^3\Delta'^2 = o;$$

према томе ће у том случају бити

$$\theta = \Delta\Theta', \quad \theta' = \Delta'\Theta,$$

као што смо то у осталом већ једном поменули (чл. 419 *bis.*). У опште је међу тим

$$\theta = \alpha_{11}B_{11} + \alpha_{22}B_{22} + \alpha_{33}B_{33} + 2\alpha_{23}B_{23} + 2\alpha_{31}B_{31} + 2\alpha_{12}B_{12},$$

$$\theta' = \beta_{11}A_{11} + \beta_{22}A_{22} + \beta_{33}A_{33} + 2\beta_{23}A_{23} + 2\beta_{31}A_{31} + 2\beta_{12}A_{22}$$

или симболички

$$\theta = \alpha^2{}_B, \quad \theta' = \beta^2{}_A,$$

а у тим изразима означени су са $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \beta_{11}, \beta_{22}, \ldots$ минори елемената $A_{11}, A_{22}, \cdot\cdot\cdot, B_{11}, B_{22}, \cdot\cdot\cdot$ у дискриминантама δ и δ'.

Узмимо сад да еквација $\Sigma = o$ представља један прави коничан пресек; сем тога узмимо да је $\Sigma' \equiv u^2 + v^2$, т. ј. узмимо да нехомогена еквација $\Sigma' = o$ представља фокојиде бескрајне равни. У том случају биће $\delta' = o$, па ће се с тога Ламеова еквација преобразити у ову еквацију:

$$\delta + k\theta + k^2\theta' = o. \qquad (17)$$

У тој еквацији имају инваријанте θ и θ' ове вредности:

$$\theta = \alpha_{11} + \alpha_{22} = \Delta\,(a_{11} + a_{22}),$$

$$\theta' = A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2.$$

Ако се сад претпостави да је $\theta = o$, биће јасно да ће у том случају бити $a_{11} + a_{22} = o$, јер Δ не може бити $= o$ с тога, што Σ представља један прави коничан пресек. Међу тим ће под погодбом $a_{11} + a_{22} = o$ коничан пресек Σ у нехомогеној системи представљати једну равнострану хиперболу. Кад је дакле инваријанта θ тангенцијалног прамена $\Sigma + k\,(u^2 + v^2)$ равна нули, онда ће еквација $\Sigma = o$ представљати једну равнострану хиперболу; па како особине инваријаната не зависе од избора осовина, биће јасно да ће инваријанта θ тангенцијалног прамена, који одређују коничан пресек Σ и фокојиди бескрајне равни, у свима координатним системама бити равна нули, кадгод $\Sigma = o$ представља равнострану хиперболу. На прилику, у трилинеарној системи је тангенцијална еквација фокојидâ ово (прим. 2. чл. 121.):

$$u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 - 2u_2u_3\cos A_1 - 2u_3u_1\cos A_2 - 2u_1u_2\cos A_3 = o.$$

Ако је у тој системи тангенцијална еквација неког коничног пресека Σ ово: $A_u{}^2 = o$, биће

$$\theta = \Delta\,(a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{23}\cos A_1 - 2a_{31}\cos A_2 - 2a_{12}\cos A_3).$$

Дакле, ако је Σ равнострана хипербола, онда мора бити (види прим. 4. стр. 762.)

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{23}cosA_1 - 2a_{31}cosA_2 - 2a_{12}cosA_3 = o.$$

Даље, узмимо да је у еквацији (17) инваријанта $\theta' = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = o$. У том случају представљаће Σ једну параболу; дакле, кад је ма у којој системи инваријанта θ' прамена, одређеног коничним пресеком Σ и фокојидима бескрајне равни, равна нули, онда еквација $\Sigma = o$ представља једну параболу. У општој трилинеарној нормалној системи представљаће према томе еквација $A_и^2 = o$ параболу ако је (види прим. 2. стр. 761.)

$$A_{11}sin^2A_1 + A_{22}sin^2A_2 + A_{33}sin^2A_3$$
$$+ 2A_{23}sinA_2sinA_3 + 2A_{31}sinA_3sinA_1 + 2A_{12}sinA_1sinA_2 = o.$$

429. *Коваријанта F фокојидâ и неког коничног пресека јесте ортоптички круг тог коничног пресека.*

Коваријанта F била би на име у овај мах место тачака из којих се на дат коничан пресек могу повући по две тангенте хармонијски коњуговане према двема изотропним правима што се из тих тачака гранају. Те две тангенте биће дакле у овај мах управне, т. ј. еквација $F = o$ заиста ће представљати ортоптички круг. Еквацију тог ортоптичког круга добићемо овако: просто ћемо сменити у еквацији $F = o$ (чл. 424.) B_{11}, B_{22}, B_{33}, · · · коефицијентима који се јављају уз u_1^2, u_2^2, u_3^2, · · · у тангенцијалној еквацији фокојидâ. Еквација ортоптичког круга пресека $A_и^2 = o$ биће дакле ово:

$$(A_{22} + A_{33} + 2A_{23}cosA_1)\,x_1^2 + (A_{33} + A_{11}$$
$$+ 2A_{31}cosA_2)\,x_2^2 + (A_{11} + A_{22} + 2A_{12}cosA_3)\,x_3^2$$
$$+ 2\,(A_{11}cosA_1 - A_{12}cosA_2 - A_{13}cosA_3 - A_{23})\,x_2x_3$$
$$+ 2\,(A_{22}cosA_2 - A_{23}cosA_3 - A_{21}cosA_1 - A_{31})\,x_3x_1$$
$$+ 2\,(A_{33}cosA_3 - A_{31}cosA_1 - A_{32}cosA_2 - A_{12})\,x_1x_2 = o,$$

а та еквација заиста представља круг, јер се она може написати у овом облику (чл. 368.):

$$(A_{sinA})^2 \cdot (x_2 x_3 sinA_1 + x_3 x_1 sinA_2 + x_1 x_2 sinA_3)$$
$$= sinA_1 sinA_2 sinA_3 (x_1 sinA_1 + x_2 sinA_2 + x_3 sinA_3) [x_1 (A_{22} + A_{33}$$
$$+ 2A_{23} cosA_1)/sinA_1 + \cdot \cdot \cdot].$$

Ако се узме да је $\theta' = (A_{sinA})^2 = o$, онда еквација $A_u^2 = o$ представља параболу. У том случају би ортоптички круг својим делом, који није у бескрајности, представљао управницу параболину, а еквација управницина била би овог облика:

$$x_1 (A_{22} + A_{33} + 2A_{23} cosA_1)/sinA_1 + \cdot \cdot \cdot = o.$$

430. Жиже. Узећемо поново да еквација $\Sigma' = o$ представља фокојиде, а еквација $\Sigma = o$ некакав коничан пресек и повући ћемо из фокојидâ I и J тангенте на коничан пресек Σ. Тим тангентама биће одређен један тетраграм. Два супротна темена тог тетраграма биће фокојиди I и J, а остала четири темена његова — свакад два и два супротна — биће у тангенцијалном прамену

$$\Sigma + k (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - \cdot \cdot \cdot) = o \qquad (18)$$

одређена коренима k' и k'' Ламеове еквације

$$\delta + k\theta + k^2\theta' = o \qquad (19)$$

тог прамена. Ми знамо међу тим да су та четири темена (чл. 342.) — од којих су два свакад реална, а два имагинарна — жиже пресека Σ. Дакле, ако смо ради да нађемо жиже пресека Σ, а ми ћемо најпре решити екваију (19) и сменићемо за тим у екваији (18) k најпре са k', па онда са k''. И у једном и у другом случају моћи ће се полином екваије (18) раставити на производ двеју линеарних функција овог облика:

$$(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) (u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3).$$

Према томе би координате жижâ биле x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3. У једном случају су те координате реалне, а у другом имагинарне. У осталом могли бисмо жиже одредити и по овом методу.

Ако еквација $\Sigma' = o$ представља фокојиде, онда ће еквација $\Sigma + k\Sigma' = o$ бити тангенцијална еквација свију коничних пресека који имају исте жиже као и Σ. Да би нам резултати били што простији, узећемо обичну картезијеву координатну систему. У тој системи биће $\Sigma' \equiv u^2 + v^2$, па ће с тога пунктуална еквација конфокалних коничних пресека $\Sigma + k(u^2 + v^2)$ бити ово:

$$\Delta S + k[A_{33}(x^2+y^2) - 2A_{31}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22}] + k^2 = o. \quad (20)$$

У тој еквацији је са S означен полином пунктуалне еквације коничног пресека Σ, а полином који се јавља уз k јесте полином пунктуалне еквације ортоптичког круга пресека Σ. Еквација заједничких тангената конфокалних коничних пресека (20) биће дакле

$$[A_{33}(x^2 + y^2) - 2A_{31}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22}]^2 = 4\Delta S.$$

Ако сад растворимо последњу еквацију на производ ових двају фактора:

$$[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2][(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2],$$

биће јасно да ће α, β и α', β' бити координате жижâ коничног пресека Σ, јер еквације

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = o, \quad (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 = o$$

представљају по две и две изотропне праве — у овај мах две и две заједничке тангенте конфокалних пресека — што се гранају из тачака (α, β) и (α', β').

Напомена. Кад еквација $\Sigma = o$ представља параболу, онда ће бити $\theta' = o$. С тога ће Ламеова еквација тангенцијалног прамена $\Sigma + k(u^2 + v^2)$ у овај мах бити линеарна,[1] а овог облика:

---

[1] Та еквација била би управо и у овај мах квадратна, а овог специјалног облика:

$$\delta + k\theta + k^2 \cdot o = o.$$

Један корен те еквације био би дакле бескрајан, па би с тога ека-

$$\delta + k\theta = o,$$

а та еквација може се, како је $\delta = \Delta^2$, а $\theta = \Delta\,(a_{11} + a_{22})$, и овако написати:

$$\Delta + k\,(a_{11} + a_{22}) = o. \qquad (21)$$

Имагинарне жиже биће у бескрајности, а реалне две жиже добићемо овако: елиминираћемо k из еквације (21) и из еквације $\Sigma + k\,(u^2 + v^2) = o$. Елиминанта системе тих двеју еквација представљаће жиже. Еквација жижâ параболиних је дакле ово:

$$(a_{11} + a_{22})\,\Sigma - \Delta\,(u^2 + v^2) = o$$

или

$$(a_{11}+a_{22})\,(A_{11}u^2+2A_{12}uv+A_{22}v^2+2A_{31}u+2A_{23}v) \\ - \Delta\,(u^2 + v^2) = o.$$

Та еквација може се растворити на два фактора. Први фактор $2\,(a_{11} + a_{22})\,(A_{31}u + A_{23}v) = o$ представља реалну жижу у бескрајности, а други фактор

$$\frac{(a_{11} + a_{22})\,A_{11} - \Delta}{2\,(a_{11} + a_{22})\,A_{31}}\,u + \frac{(a_{11} + a_{22})\,A_{22} - \Delta}{2\,(a_{11} + a_{22})\,A_{23}}\,v + 1 = o$$

представља ону другу жижу. Координате те жиже су дакле оьо:

$$\frac{(a_{11} + a_{22})\,A_{11} - \Delta}{2\,(a_{11} + a_{22})\,A_{31}}, \quad \frac{(a_{11} + a_{22})\,A_{22} - \Delta}{2\,(a_{11} + a_{22})\,A_{23}}.$$

У трилинеарној координатној системи била би еквација жижâ параболиних ово

$$\theta\Sigma - \delta\,(u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 - \cdot\ \cdot\ \cdot\ ) = o\,;$$

ција жижâ, одређених тим кореном Ламеове еквације, била ово: $\Sigma' = o$, т. ј. те две жиже су имагинарне, то су два фокојида бескрајне равни, а кад то узимамо у виду, онда ће нам бити јасно уједно и то, зашто се тачке I и J зову фокојидима.

координате жиже, која лежи у бескрајности, су познате, јер је та жижа пол праве у бескрајности; координате оне друге жиже биће ово:

$$(\theta A_{11}-\delta)/\theta'_1,\ (\theta A_{22}-\delta)/\theta'_2,\ (\theta A_{33}-\delta)/\theta'_3,$$

где су са $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ означени делимични диференцијални количници инваријанте $\theta' = (A_{sinA})^2$ по количинама $sinA_1$, $sinA_2$, $sinA_3$.

Пунктуалне и тангенцијалне мреже.

431. Нека су $S_1 = o$, $S_2 = o$, $S_3 = o$ пунктуалне еквације трију коничних пресека. Збир коничних пресека одређених еквацијом

$$l_1S_1 + l_2S_2 + l_3S_3 = o \qquad (22)$$

зове се (чл. 236.) пунктуална мрежа кривих $S_1 = o$, $S_2 = o$, $S_3 = o$. У тој еквацији су l_1, l_2, l_3 коефицијенти који један од другог не зависе. Кад би ти коефицијенти били везани једном линеарном, хомогеном релацијом

$$a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3 = o,$$

онда би еквација (22) имала само два линеарна коефицијента. У том случају представљала би та еквација један пунктуалан прамен, а тај прамен би припадао мрежи коју одређују конични пресеци S_1, S_2, S_3.

Између коничних пресека мреже (22) има их бескрајно много који се састоје из две и две праве. Тачке у којима се секу по две и две такве праве зову се *двојне тачке* мреже.

Напомена. Пунктуалним мрежама одговарају корелативно тангенцијалне мреже, а двојним тачкама пунктуалне мреже *двојне праве* тангенцијалне мреже. Између коничних пресека тангенцијалне мреже има их на име бесконачно много који се састоје из две и две тачке.

Праве што спајају по две и две такве тачке биле би поменуте двојне праве.

432. Теорема. *Место двојних тачака пунктуалне мреже коничних пресека јесте једна крива трећега реда. Та крива зове се јакобијанка пунктуалне мреже.*[1]

Ево доказа. Означимо са $S_i^{(k)}$ делимичан извод функције S_i по променљивој x_k. Кад нека еквација другога степена представља две праве, онда поларе свих тачака пролазе кроз тачку у којој се секу те две праве. Поларе темена̂ основног троугла су у овај мах ове праве:

$$l_1 S_1^{(1)} + l_2 S_2^{(1)} + l_3 S_3^{(1)} = o,$$

$$l_1 S_1^{(2)} + l_2 S_2^{(2)} + l_3 S_3^{(2)} = o,$$

$$l_1 S_1^{(3)} + l_2 S_2^{(3)} + l_3 S_3^{(3)} = o,$$

а двојне тачке мреже $l_1 S_1 + l_2 S_2 + l_3 S_3 = o$ леже на тим правима. Место двојних тачака добићемо овако: елиминираћемо непознате коефицијенте l_1, l_2, l_3 из система последњих трију еквација. То место биће дакле ова крива:

$$\begin{vmatrix} S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} \\ S_3^{(1)} & S_3^{(2)} & S_3^{(3)} \end{vmatrix} = o,$$

а та је крива трећега реда. Лева страна те еквације је, као што видимо, јакобијан функција̂ S_1, S_2, S_3. Тај јакобијан бележићемо са $J(S_1, S_2, S_3)$ као и пређе; еквацију јакобијанке бележићемо дакле симболички овако:

$$J(S_1, S_2, S_3) = o.$$

---

[1] По неки писци зову ту исту криву и *хесијанком*. Између јакобијанака и хесијанака има у опште разлике, но кад су основне криве S_1, S_2, S_3 неке мреже криве истога реда, онда је хесијанка оно исто што и јакобијанка. Види **Clebsch.** *Vorlesungen über Geometrie*, p. 381.

Корелативна теорема. *Обвојница двојних правих тангенцијалне мреже* $l_1\Sigma_1 + l_2\Sigma_2 + l_3\Sigma_3 = o$ *јесте једна крива треће врсте. Та крива зове се келеанка тангенцијалне мреже.*[1]

Еквација келеанке је

$$J\,(\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3) = o.$$

У тој еквацији је $\Sigma_i^{(k)}$ делимичан извод функције Σ_i по променљивој u_k.

Напомена. Јакобијанка је кубна коваријанта, а келеанка је кубна контраваријанта коничних пресека S_1, S_2, S_3. Она прва бележи се често просто са J, а ова друга са Γ.

433. Теорема. *Јакобијанка је место тачака чије се поларе према свима коничним пресецима пунктуалне мреже секу у једној тачци.*

Узмимо најпре основне коничне пресеке S_1, S_2, S_3. Поларе неке тачке x према појединим коничним пресецима S_1, S_2, S_3 биће ово:

$$P_1 \equiv S_1^{(1)}y_1 + S_1^{(2)}y_2 + S_1^{(3)}y_3 = o,$$

$$P_2 \equiv S_2^{(1)}y_1 + S_2^{(2)}y_2 + S_2^{(3)}y_3 = o,$$

$$P_3 \equiv S_3^{(1)}y_1 + S_3^{(2)}y_2 + S_3^{(3)}y_3 = o,$$

а те три праве сећи ће се у једној тачци ако је $J\,(S_1,\ S_2,\ S_3) = o$, т. ј. ако тачка x лежи на јакобијанци коничних пресека S_1, S_2, S_3. Но ако се поларе P_1, P_2, P_3 секу у једној тачци, онда и полара

$$l_1P_1 + l_2P_2 + l_3P_3 = o$$

---

[1] Име је та крива добила по Келеу, јер је он први испитивао особине њене у своме мемоару: *A memoir on curves of the third order, Philos. Transact., vol. CXLVII, 1857.* или *Collected Mathem. Papers, II. p. 381.*

тачке x према ма ком коничном пресеку пунктуалне мреже мора пролазити кроз ту тачку, т. ј. и т. д.

Корелативна теорема. *Келеанка је обвојница правих чији полови према свима коничним пресецима тангенцијалне мреже леже на једној правој.*

434. Теорема. *Јакобијанка пунктуалне мреже коничних пресека је место двојних тачака инволуторних низова тачака по којима нека права сече пресеке пунктуалне мреже.*

Нека је на име A тачка јакобијанке $J\ (S_1,\ S_2,\ S_3)$. Поларе те тачке према свима кривима пунктуалне мреже секу се у једној тачци B. Јасно је да ће се и обратно поларе тачке B сећи у тачци A. Тачка B биће према томе такођер тачка јакобијанке. Па како су тачке A и B хармонијски коњуговане према двема и двема тачкама у којима права AB сече поједине пресеке пунктуалне мреже, биће уједно јасно и то, да ће тачке A и B бити двојне тачке инволуције тих тачака у којима AB сече поједине пресеке, т. ј. и т. д. Ако дакле некакав коничан пресек мреже дира праву AB, онда ће додирна тачка бити или тачка A или тачка B. У том случају поклапале би се на име оне две тачке у којима поменути коничан пресек сече праву AB, па како су те две тачке хармонијски коњуговане према тачкама A и B, то ће те две тачке, обе у исти мах, поклапати или тачку A, или тачку B.

Корелативна теорема. *Келеанка тангенцијалне мреже коничних пресека је обвојница двојних зракова инволуторних праменова чији су зраци тангенте повучене из темена праменова на пресеке тангенцијалне мреже.*

435. Теорема. *Два прамена што припадају истој мрежи имају свакад један заједнички коничан пресек.* (Шалова теорема.)

Узмимо два прамена пунктуалне мреже

$$l_1S_1 + l_2S_2 + l_3S_3 = o.$$

Ти прамени биће у мрежи одређени овим двема релацијама :

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 = o,$$

$$b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 = o,$$

а из тих двеју еквација могуће је свакад наћи једну заједничку систему вредности коефицијената l_1, l_2, l_3.

436. Мрежу коничних пресека одређују три конична пресека. На прилику, пунктуалну мрежу

$$l_1 S_1 + l_2 S_2 + l_3 S_3 = o$$

одређују основни конични пресеци S_1, S_2, S_3. Но *ту исту мрежу можемо одредити и системом ма која три конична пресека те мреже само ако сва та три конична пресека не припадају истом прамену.*

Узмимо на име три конична пресека U_1, U_2, U_3 дате мреже. Нека је

$$U_1 \equiv a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_3 S_3 = o,$$

$$U_2 \equiv b_1 S_1 + b_2 S_2 + b_3 S_3 = o,$$

$$U_3 \equiv c_1 S_1 + c_2 S_2 + c_3 S_3 = o.$$

Та три конична пресека не ће припадати истом прамену, ако детерминанта $(a_1 b_2 c_3)$ није равна нули, и ми ћемо претпоставити да је $(a_1 b_2 c_3) \neq o$. У том случају моћи ћемо израчунати S_1, S_2, S_3 из системе последњих трију еквација и добићемо ово :

$$S_1 \equiv \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3,$$

$$S_2 \equiv \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3,$$

$$S_3 \equiv \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \gamma_3 U_3.$$

Сменивши сад S_1, S_2, S_3 тим изразима у датој еквацији мреже, преобразиһемо општу еквацију мреже у ову еквацију:

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 + m_3 U_3 = o,$$

т. ј. дата мрежа може се одредити и системом коничних пресека U_1, U_2, U_3, а то смо у осталом и тврдили.

437. Узмимо сад да су

$$S_1 \equiv a_x^2 = o, \; S_2 \equiv b_x^2 = o, \; S_3 \equiv c_x^2 = o$$

еквације основних трију коничних пресека пунктуалне мреже. Еквација јакобијанке те мреже биһе ово:

$$\begin{aligned} J(S_1, S_2, S_3) \equiv (a_{11} a_{31} a_{12})\, x_1^3 + (a_{22} a_{12} a_{23})\, x_2^3 + (a_{33} a_{23} a_{31})\, x_3^3 \\ -[(a_{11} a_{22} a_{31}) + (a_{11} a_{12} a_{23})] x_1^2 x_2 - [(a_{33} a_{11} a_{12}) + (a_{11} a_{23} a_{31})] x_1^2 x_3 \\ -[(a_{11} a_{22} a_{23}) + (a_{22} a_{31} a_{12})] x_2^2 x_1 - [(a_{22} a_{33} a_{12}) + (a_{22} a_{23} a_{31})] x_2^2 x_3 \\ -[(a_{33} a_{11} a_{23}) + (a_{33} a_{31} a_{12})] x_3^2 x_1 - [(a_{22} a_{33} a_{31}) + (a_{33} a_{12} a_{23})] x_3^2 x_2 \\ -[(a_{11} a_{22} a_{33}) + 2(a_{23} a_{31} a_{12})] x_1 x_2 x_3 = o. \end{aligned}$$

У тој еквацији представља $(a_{11} a_{31} a_{12})$ детерминанту ових деветорих елемената: a_{11}, a_{31}, a_{12}, b_{11}, b_{31}, b_{12}, c_{11}, c_{31}, c_{12}. Исто тако и остали символи $(a_{22} a_{12} a_{23})$, . . представљају посебице сваки по једну детерминанту треһег степена. По Аронхолду могли бисмо еквацију јакобијанке овако символички написати:

$$(a_1 b_2 c_3)\; a_x \cdot b_x \cdot c_x = o.$$

Та крива може се у неким специјалним случајевима (чл. 25.) изметнути у систему кривих нижега реда и то или у једну праву и један коничан пресек или у систему трију правих. Те сингуларне појаве разгледаһемо на овом месту.

1-во. Узеһемо да основни конични пресеци S_1, S_2, S_3 имају једну заједничку корду и означиһемо крајеве те корде са A и B. Поларе неке тачке P праве AB према коничним пресецима S_1, S_2, S_3 пролазиће све од реда кроз једну и исту тачку праве AB, на име кроз ону тачку Q, која је с тачком P хармонијски коњугована према тачкама A и B. Према томе ће права AB бити саставни део јакобијанке; јакобијанка се у овај мах изметнула у једну праву и један коничан пресек. Имајући то у виду биће нам јасно, зашто је јакобијанка трију кругова круг (чл. 193.); сви кругови пролазе на име кроз фокојиде I и J бескрајне равни, па ће с тога основни кругови мреже имати заједничку корду.

2-го. Ако се један од основних коничних пресека мреже састоји из једне двојне праве, онда ће се опет јакобијанка изметнути у једну праву и један коничан пресек. Нека је на име

$$S_3 \equiv L^2 \equiv (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^2.$$

У том случају биће

$$J\,(S_1, S_2, S_3) \equiv 2L \cdot \begin{vmatrix} S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix},$$

т. ј. јакобијанка ће се изметнути у праву L, и у коничан пресек

$$\begin{vmatrix} S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = o. \qquad (23)$$

Јасно је да је тај коничан пресек место тачака чије се поларе према пресецима S_1, S_2 секу на правој u_x.

Кад еквација $L = o$ представља праву у бескрајности, *онда ће коничан пресек (23) бити место средишта коничних пресека прамена* $S_1 - kS_2 = o$.

Полара тачке x према коничном пресеку $S_1 - kS_2 = o$ биће на име ово:

$$(S_1^{(1)} - kS_2^{(1)})\, y_1 + (S_1^{(2)} - kS_2^{(2)})\, y_2 + (S_1^{(3)} - kS_2^{(3)})\, y_3 = o.$$

Но ако је тачка x средиште коничног пресека $S_1 - kS_2 = o$, онда ће та полара бити права у бескрајности, а еквација те праве је

$$y_1 sinA_1 + y_2 sinA_2 + y_3 sinA_3 = o.$$

Последње две линеарне еквације представљаће дакле једну и исту праву, па је с тога

$$S_1^{(1)} - kS_2^{(1)} = \mu sinA_1,\ S_1^{(2)} - kS_2^{(2)} = \mu sinA_2,$$
$$S_1^{(3)} - kS_2^{(3)} = \mu sinA_3.$$

Ако сад из тих погодбених еквација елиминирамо k и μ, добићемо ову еквацију:

$$\begin{vmatrix} S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} \\ sinA_1 & sinA_2 & sinA_3 \end{vmatrix} = o,$$

а тим је теорема доказана.

3-ће. Ако основни конични пресеци имају три заједничке тачке, онда ће се њихова јакобијанка састојати из три праве. Те три праве биће стране оног троугла чија су темена поменуте три тачке.

4-то. Ако три конична пресека имају један заједнички аутополаран троугао, онда се њихова јакобијанка састоји из три праве.

Еквације тих коничних пресека су на име овог облика:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = o,\ b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$$
$$+ b_{33}x_3^2 = o,\ c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 = o,$$

а еквација њихове јакобијанке је ово:

$$x_1x_2x_3 = o,$$

т. ј. јакобијанка поменутих трију коничних пресека састоји се из страна аутополарног троугла.

Корелативно, могло би се доказати да ће се келеанка тангенцијалне мреже у неким приликама моћи изметнути у систему трију тачака или у једну тачку и један коничан пресек и то овако:

1-во. Ако основни конични пресеци Σ_1, Σ_2, Σ_3 имају две заједничке тангенте, онда се келеанка састоји из тачке у којој се секу те тангенте и из једне обвојнице друге врсте.

2-го. Ако се један од основних коничних пресека тангенцијалне мреже састоји из једне двојне тачке, онда ће се келеанка изметнути у ту тачку и у једну обвојницу друге врсте.

3-ће. Ако основни конични пресеци тангенцијалне мреже имају три заједничке тангенте, онда се њихова келеанка састоји из три тачке. Те три тачке биће темена оног троугла чије су стране поменуте три заједничке тангенте основних коничних пресека тангенцијалне мреже.

4-то. Ако три конична пресека имају заједнички аутополаран троугао, онда келеанку тих пресека представљају темена аутополарног троугла.

438. Узмимо сад два конична пресека S и S' и њихову коваријанту F. Та коваријанта и S и S' имају један заједнички аутополаран троугао; то се види по еквацијама кривих S, S' и F (види чл. 425.). Према томе ће еквација $J(S, S', F) = o$ представљати стране заједничког

аутополарног троугла, а криве S и S' имаће сем квадратне коваријанте F још једну кубну коваријанту, на име коваријанту J. Дакле, ако смо ради да нађемо еквације страна заједничког аутополарног троугла коничних пресекâ S и S', а ми ћемо наћи јакобијан $J(S, S', F)$, па нашавши јакобијан, узети да је $J = o$.

Корелативно, поменута два конична пресека имаће сем квадратне контраваријанте $\boldsymbol{\Phi}$ још једну кубну контраваријанту, на име контраваријанту $\boldsymbol{\Gamma}$, а еквација $\boldsymbol{\Gamma} = J(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}', \boldsymbol{\Phi}) = o$ представљаће темена аутополарног троугла кривих S и S'.

Прим. 1. Изразити јакобијан J функцијом обликâ S, S', F. — Ако је

$$S \equiv a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2, \quad S' \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

биће

$$F \equiv a_{11}(a_{22} + a_{33})\, y_1^2 + a_{22}(a_{33} + a_{11})\, y_2^2 + a_{33}(a_{11} + a_{22})\, y_3^2,$$

а

$$J \equiv (a_{11} - a_{22})(a_{22} - a_{33})(a_{33} - a_{11})\, y_1 y_2 y_3.$$

Према обрасцима (α), (β), (γ) у прим. 2. чл. 425. биће дакле

$$J^2 + (a_{11}S + a_{22}a_{33}S' - F)(a_{22}S + a_{33}a_{11}S' - F)(a_{33}S + a_{11}a_{22}S' - F) = o$$

или

$$\begin{aligned} J^2 \equiv F^3 - F^2(\Theta S' + \Theta' S) + F(\Delta'\Theta S^2 + \Delta\Theta' S'^2) \\ + (\Theta\Theta' - 3\Delta\Delta')\, SS' - \Delta\Delta'(\Delta' S^3 + \Delta S'^3) \\ + SS'[\Delta'(2\Delta\Theta' - \Theta^2)\, S + \Delta(2\Delta'\Theta - \Theta'^2)\, S']. \end{aligned}$$

Прим. 2. Изразити контраваријанту $\boldsymbol{\Gamma}$ функцијом обликâ $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\Sigma}'$, $\boldsymbol{\Phi}$.

439. *Наћи обвојницу правих које три конична пресека S_1, S_2, S_3 секу у инволуцији.*

Нека су

$$S_1 \equiv a_x^2 = o, \quad S_2 \equiv b_x^2 = o, \quad S_3 \equiv c_x^2 = o$$

дата три конична пресека неке пунктуалне мреже. Претпоставићемо да та три конична пресека потпуно одређују мрежу и повући ћемо кроз четири заједничке тачке

A, *B*, *C*, *D* пресека̂ S_1 и S_2 некакав коничан пресек $l_1S_1 + l_2S_2$. Како кроз те четири тачке не пролази коничан пресек S_3, то ће пресек $l_1S_1 + l_2S_2$ сећи S_3 у неке друге четири тачке *P*, *Q*, *P'*, *Q'*. Спојићемо тачке *P* и *Q*, *P'* и *Q'* и добићемо две праве *PQ* и *P'Q'*. Јасно је да ће праве *PQ* и *P'Q'* сећи коничне пресеке S_1, S_2, $l_1S_1 + l_2S_2$ у инволуцији. Но како су тачке *P* и *Q*, *P'* и *Q'* уједно и тачке основног пресека S_3 дате мреже, то ће те две праве *PQ* и *P'Q'* сећи уједно и дата три конична пресека у инволуцији. Наше је да према датој проблеми нађемо обвојницу тих двеју правих.

Нека су

$$u_x \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = o, \quad u'_x \equiv u'_1x_1 + u'_2x_2 + u'_3x_3 = o$$

еквације правих *PQ* и *P'Q'*. По претпоставци су те две праве заједничке секанте пресека̂ $l_1S_1 + l_2S_2$ и S_3. Према томе је јасно да се може наћи нека количина l_3 којом треба помножити S_3, па да буде

$$l_1S_1 + l_2S_2 + l_3S_3 \equiv u_x \cdot u'_x$$

или

$$l_1a_x^2 + l_2b_x^2 + l_3c_x^2 \equiv u_x \cdot u'_x.$$

По тој релацији се види да ће коефицијенти који се с леве и с десне стране те идентичне релације јављају уз x_1^2, x_2^2, x_3^2, . . . x_1x_2 бити једнаки. Биће дакле

$$l_1a_{11} + l_2b_{11} + l_3c_{11} - u_1u'_1 = o,$$

$$l_1a_{22} + l_2b_{22} + l_3c_{22} - u_2u'_2 = o,$$

. . . .

$$2l_1a_{12} + 2l_2b_{12} + 2l_3c_{12} - u_1u'_2 - u_2u'_1 = o.$$

Ако из тих еквација елиминирамо $l_1, l_2, l_3, u'_1, u'_2, u'_3$, добићемо еквацију обвојнице праве u_x:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} & u_1 & o & o \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & o & u_2 & o \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & o & o & u_3 \\ 2a_{23} & 2b_{23} & 2c_{23} & o & u_3 & u_2 \\ 2a_{31} & 2b_{31} & 2c_{31} & u_3 & o & u_1 \\ 2a_{12} & 2b_{12} & 2c_{12} & u_2 & u_1 & o \end{vmatrix} = o. \quad (24)$$

Јасно је да је та обвојница уједно и обвојница праве u'_x, па како те две праве припадају мрежи $l_1S_1 + l_2S_2 + l_3S_3$ бићe јасно уједно и то, да ће та еквација представљати обвојницу свих пари правих што припадају мрежи $l_1S_1 + l_2S_2 + l_3S_3$. Крива (24) зове се *Хермитова крива пунктуалне мреже.*[1]) *(Hermite'sche Curve des Netzes.)*

Узмимо сад да је дата пунктуална мрежа коњугована са мрежом $p_1\Sigma_1 + p_2\Sigma_2 + p_3\Sigma_3$ и претпоставимо да се некакав коничан пресек мреже $p_1\Sigma_1 + p_2\Sigma_2 + p_3\Sigma_3$ састоји из двеју тачака P и Q. Права PQ биће према томе двојна права тангенцијалне мреже, т. ј. права PQ биће тангента келеанке те тангенцијалне мреже. Но како су мреже $l_1S_1 + l_2S_2 + l_3S_3$ и $p_1\Sigma_1 + p_2\Sigma_2 + p_3\Sigma_3$ коњуговане, то ће тачке P и Q бити хармонијски полови свих коничних пресека пунктуалне мреже, па ће с тога тачке у којима PQ сече коничне пресеке те мреже бити у инволуцији; двојне тачке те инволуције биле би тачке P и Q. Но та иста права PQ је уједно и тангента Хермитове криве. Према томе можемо рећи ово: *келеанка неке тангенцијалне мреже је идентична са Хермитовом кривом коњуговане мреже.*

Корелативно, *место тачака из којих се на три конична пресека $\Sigma_1 \equiv A_u{}^2 = o$, $\Sigma_2 \equiv B_u{}^2 = o$, $\Sigma_3 \equiv C_u{}^2 = o$ могу повући тангенте у инволуцији јесте Хермитова*

---

[1]) **Hermite.** *Crelle's Journal,* t. 57. и **Clebsch.** *Vorlesungen über Geometrie, p. 519.*

крива тангенцијалне мреже (Hermite'sche Curve des Gewebes), а еквација њезина је ово:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & x_1 & o & o \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} & o & x_2 & o \\ A_{33} & B_{33} & C_{33} & o & o & x_3 \\ 2A_{23} & 2B_{23} & 2C_{23} & o & x_3 & x_2 \\ 2A_{31} & 2B_{31} & 2C_{31} & x_3 & o & x_1 \\ 2A_{12} & 2B_{12} & 2C_{12} & x_2 & x_1 & o \end{vmatrix} = o. \quad (25)$$

Даље, јакобијанка неке пунктуалне мреже је идентична са Хермитовом кривом коњуговане мреже.

Напомена. Еквација (24) бележи се по Аронхолду симболички овако:

$$H(a, b, c) \equiv (abu)(bcu)(cau) = o,$$

а еквација (25) овако:

$$H(A, B, C) \equiv (ABx)(BCx)(CAx) = o.$$

440. ТЕОРЕМА. *Има бескрајно много тетраграма коњугованих према коничним пресецима S_1, S_2, S_3.*

Ако је на име тетраграм који одређују четири праве x_1, x_2, x_3, x_4 коњугован са коничним пресецима S_1, S_2, S_3, онда ће се еквације тих коничних пресека моћи написати у овом облику:

$$S_1 \equiv m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 + m_4 x_4^2 = o,$$

$$S_2 \equiv n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + n_3 x_3^2 + n_4 x_4^2 = o,$$

$$S_3 \equiv p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + p_4 x_4^2 = o.$$

У свакој између тих трију еквација имамо по три независна параметра; сем тога имамо у еквацијама правих x_1, x_2, x_3, x_4 по два независна параметра. У еквацијама $m_1x_1^2 + \cdot \cdot \cdot = o$, $n_1x_1^2 + \cdot \cdot \cdot = o, \ldots$ имамо дакле свега $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 =$ седамнаест параметара, док у оним еквацијама, којима обично представљамо пресеке S_1, S_2, S_3 имамо свега $3 \cdot 5 =$ петнаест параметара, а тим је теорема доказана.

Корелативно, *има бескрајно много тетрастигмата коњугованих према коничним пресецима* Σ_1, Σ_2, Σ_3.

Додатак. Ако је некакав тетраграм коњугован с коничним пресецима S_1, S_2, S_3, онда ће његова шестора темена лежати на јакобијанци тих коничних пресека и корелативно, ако је некакав тетрастигмат коњугован с коничним пресецима Σ_1, Σ_2, Σ_3, онда ће његове шесторе стране додиривати келеанку тих коничних пресека.

441. *Наћи погодбу под којом три конична пресека* S_1, S_2, S_3 *имају једну заједничку тачку.*

Узмимо четири праве x_1, x_2, x_3, x_4. Између тих правих ће три, н. пр. праве x_1, x_2, x_3, одређивати један троугао. Ако тај троугао узмемо за основни троугао, онда ћемо свакад полином x_4 еквације оне четврте праве моћи изразити једном линеарном функцијом полинома̂ x_1, x_2, x_3 тако, да је $x_4 \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$. Да би та релација имала више симетрије, претпоставићемо да се коефицијенти u_1, u_2, u_3 имплицитно јављају у симболима x_1, x_2, x_3 и написаћемо ту релацију овако:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = o.$$

Како има бескрајно много тетраграма коњугованих према пресецима S_1, S_2, S_3, то ћемо претпоставити да стране x_1, x_2, x_3, x_4 одређују такав један тетраграм. Еквације тих пресека биће с тога ово:

$$m_1x_1^2 \cdot \cdot \cdot = o,\ n_1x_1^2 + \cdot \cdot \cdot = o,\ p_1x_1^2 + \cdot \cdot \cdot = o.$$

Решивши ту систему еквација по непознатима x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, добићемо ово:

$$x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : x_4^2 = (m_2 n_3 p_4) : (m_3 n_4 p_1) : (m_4 n_1 p_2) : (m_1 n_2 p_3)$$

или, ако детерминанте $(m_2 n_3 p_4)$, $(m_3 n_4 p_1)$, $\cdot\ \cdot\ \cdot$ означимо са A_1, A_2, $\cdot\ \cdot\ \cdot$, ово:

$$x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : x_4^2 = A_1 : A_2 : A_3 : A_4.$$

Према томе је и

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \sqrt{A_1} : \sqrt{A_2} : \sqrt{A_3} : \sqrt{A_4},$$

па како је $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = o$, то ћемо тражену погодбу моћи овако написати:

$$\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3} + \sqrt{A_4} = o.$$

У рационалном облику била би та погодба овог облика:

$$(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 - 2A_1A_2 - 2A_1A_3$$
$$-2A_1A_4 - 2A_2A_3 - 2A_2A_4 - 2A_3A_4)^2 = 64A_1A_2A_3A_4. \quad (26)$$

Десни члан ове погодбене еквације је инваријанта; то је на име инваријанта чија је вредност равна нули кад дата три конична пресека имају један заједнички аутополаран троугао. Јер ако је $A_1A_2A_3A_4 = o$, онда један између фактора A_1, A_2, A_3, A_4, н. пр. фактор A_4, мора бити раван нули. Но ако је тај фактор раван нули, онда ће еквације пресека̑ S_1, S_2, S_3 бити у опште овог облика:

$$lx_1^2 + mx_2^2 + nx_3^2 = o,$$

т. ј. пресеци S_1, S_2, S_3 имали би у том случају један заједнички аутополаран троугао. Могло би се доказати да ће поменута инваријанта бити равна нули чим се могу одредити три коефицијента l_1, l_2, l_3 тако, да полином $l_1S_1 + l_2S_2 + l_3S_3$ буде идентично једнак с квадратом неке линеарне функције.

Напомена. Леви члан поменуте погодбене еквације (26) је квадрат познате једне Силвестерове инваријанте мреже $l_1S_1 + l_2S_2 + l_3S_3$.¹)

442. Професор *Гордан*²) доказао је *да два конична пресека* S_1 *и* S_2 *имају свега двадесет конкомитаната.* Те конкомитанте су ово: четири инваријанте $\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Theta}', \boldsymbol{\Delta}'$ Ламеове еквације; четири коваријанте S_1, S_2, F, J; четири контраваријанте $\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Gamma}$ и осам мешовитих конкомитаната. Те мешовите конкомитанте могу се сматрати као коваријанте коничних пресека S_1 и S_2 и праве u_x, а ево их свих осам:

1-во. Јакобијан

$$N \equiv \begin{vmatrix} S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Тај јакобијан смо имали већ у један мах, а еквација $N = o$ представља место тачака чије се поларе секу на правој u_x (чл. 437.). Ако су криве S_1 и S_2 дате еквацијама канонског облика, т. ј. ако су еквације пресека̂ S_1 и S_2 овог облика:

$$S_1 \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = o, \quad S_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = o,$$

онда ће еквација $N = o$ бити ово:

$$u_1 (a_{22} - a_{33}) x_2x_3 + u_2 (a_{33} - a_{11}) x_3x_1 + u_3 (a_{11} - a_{22}) x_1x_2 = o.$$

2-го. Корелативно конкомитанти N одговара конкомитанта

---

¹) **Salmon.** *Конични пресеци*, француски превод, p. 623.

²) **Clebsch.** l. c. p. 290.

$$N' \equiv \begin{vmatrix} \Sigma_1^{(1)} & \Sigma_1^{(2)} & \Sigma_1^{(3)} \\ \Sigma_2^{(1)} & \Sigma_2^{(2)} & \Sigma_2^{(3)} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix},$$

а еквација $N' = o$ као пунктуална еквација представља праву што спаја полове праве u_x према пресецима S_1 и S_2. Та иста еквација представља као тангенцијална еквација обвојницу правих чији су полови према пресецима S_1 и S_2 колинеарни са тачком $u_x = o$. Ако су криве S_1 и S_2 дате еквацијама канонског облика, онда се еквација $N' = o$ може овако написати:

$$a_{11}(a_{22} - a_{33})\, u_2 u_3 x_1 + a_{22}(a_{33} - a_{11})\, u_3 u_1 x_2$$
$$+ a_{33}(a_{11} - a_{22})\, u_1 u_2 x_3 = o.$$

3-ће. Узећемо ма какву праву $u_x = o$. Наћи ћемо за тим пол те праве према коничном пресеку S_1, па за тим полару тог пола према коничном пресеку S_2. Ако су пресеци S_1 и S_2 дати канонским еквацијама, биће еквација те поларе ово:

$$K \equiv a_{11} u_1 x_1 + a_{22} u_2 x_2 + a_{33} u_3 x_3 = o.$$

Облик K је мешовита конкомитанта. Та конкомитанта има према пресеку S_2 исти пол као и права u_x према пресеку S_1.

4-то. Мешовита конкомитанта је права K' чији је пол према пресеку S_1 исти као и пол праве u_x према пресеку S_2. Кад су еквације S_1 и S_2 канонске, онда је еквација праве K' ово:

$$K' \equiv a_{22} a_{33} u_1 x_1 + a_{33} a_{11} u_2 x_2 + a_{11} a_{22} u_3 x_3 = o.$$

5-то. Мешовита је конкомитанта овај јакобијан[1]:

---

[1] По **Донкину** (*Филос. Трансакције*, *I. p. 72.*) бележе се јакобијани као флуксије тако, да је

$$J(f_1, \cdot \cdot \cdot f_n) = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial (f_1, \cdot \cdot \cdot f_n)}{\partial (x_1, \cdot \cdot \cdot x_n)}.$$

$$J(S_1, K, u_x) = \frac{\partial(S_1, K, u_x)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}.$$

6-то. Мешовита је конкомитанта овај јакобијан:

$$J(S_2, K', u_x) = \frac{\partial(S_2, K', u_x)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}.$$

7-мо. Мешовита је конкомитанта јакобијан:

$$J(\Sigma_1, K, u_x) = \frac{\partial(\Sigma_1, K, u_x)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}.$$

8-мо. Мешовита конкомитанта је јакобијан:

$$J(\Sigma_2, K', u_x) = \frac{\partial(\Sigma_2, K', u_x)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}.$$

Ако су еквације пресека̂ S_1 и S_2 канонске, онда ће последње четири конкомитанте бити ово:

$$u_2 u_3 (a_{22} - a_{33}) x_1 + u_3 u_1 (a_{33} - a_{11}) x_2 + u_1 u_2 (a_{11} - a_{22}) x_3 = o,$$

$$u_2 u_3 a_{11}^2 (a_{22} - a_{33}) x_1 + u_3 u_1 a_{22}^2 (a_{33} - a_{11}) x_2 + u_1 u_2 a_{33}^2 (a_{11} - a_{22}) x_3 = o,$$

$$x_2 x_3 a_{11} (a_{22} - a_{33}) u_1 + x_3 x_1 a_{22} (a_{33} - a_{11}) u_2 + x_1 x_2 a_{33} (a_{11} - a_{22}) u_3 = o,$$

$$x_2 x_3 a_{22} a_{33} (a_{22} - a_{33}) u_1 + x_3 x_1 a_{33} a_{11} (a_{33} - a_{11}) u_2 + x_1 x_2 a_{11} a_{22} (a_{11} - a_{22}) u_3 = o.$$

Све остале конкомитанте система облика̂ S_1 и S_2 могу се изразити функцијама поменутих двадесет конкомитаната те системе.

ИМЕНА ПОМЕНУТИХ ПИСАЦА

(Бројевима су означене стране.)

◆