УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Нада Божић

Тестови симетрије засновани на емпиријској функцији расподеле

— мастер–рад —

Београд, 2016.

Ментор:

др Марко Обрадовић, доцент Математичког факултета, Универзитета у Београду

Чланови комисије:

проф. др Весна Јевремовић, професор Математичког факултета, Универзитета у Београду
др Јелена Јоцковић, доцент Математичког факултета, Универзитета у Београду

Садржај

"Од постанка физике, разматрање симетрије дало нам је изузетно моћан и користан алат у нашем настојању да разумемо природу. Постепено то разматрање постало је окосница теоријске формулације физичких закона."

Цунг -Дао Ли [1]

[1] Tsung-Dao Lee (1923 -), амерички физичар кинеског порекла.

Поглавље 1

Увод

1.1 Симетрија

Кроз историју јављају се различите дефиниције речи симетрија. У старогрчком језику $\sigma\upsilon\mu\mu\xi\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ означава "договор о димензијама". У 16. веку у Француској реч" symmetrie" дефинисала се као "однос делова, пропорција", а 1590. за објашњење симетрије јавља се израз "хармонијско уређење делова".

Посматрајући свет око нас, свуда можемо приметити симетрију. С једне стране то је осећај склада и пропорционалности, а са друге стране добро дефинисан концепт равнотеже код различитих природних наука и уметности.

У геометрији симетрија се дефинише као пресликавање фигуре у односу на праву, тачку или раван, или као особина фигуре да има осу, центар или раван симетрије. У физици симетрија физичког система је скуп трансформација у односу на које физички систем остаје непромењен, тј. инваријантан. У хемији молекули се класификују према њиховој симетрији.

Кажемо да је расподела непрекидне случајне променљиве X симетрична око неке тачке a ако за све реалне бројеве δ важи:

$$f(a-\delta)=f(a+\delta),$$

где је f функција густине расподеле.

Код симетричних расподела, медијана и узорачка средина ће бити једнаке тачки око које се симетрија посматра, а уколико је расподела унимодална или има непаран број мода онда је и једна од мода једнака медијани и узорачкој средини. Такође ће важити да су сви централни моменти непарног степена као и коефицијент асиметрије једнаки нули.

Испитивање симетричности је значајно као предуслов у неким тестовима, као што је Вилкоксонов тест знакова[1] или код упарених података где се недостатак ефекта код третмана своди на испитивање симетрије. Такође код робусних метода значајно је знати да ли је модел симетричан или не, јер ови методи не дају добре резултате код асиметричних модела.

Симетричност расподеле можемо испитати на различите начине, тако што ћемо нпр. нацртати график или упоредити медијану, узорачку средину и моду. Ако бисмо посматрали узорак великог обима могли бисмо из графика или поређењем медијане и узорачке средине да донесемо закључак о симетричности расподеле, док код узорака малог обима, не можемо лако донети закључке о симетричности . Зато морамо на неки други начин испитати симетрију расподеле, а један од начина је тестирање статистичких хипотеза о симетрији. Неки од значајних тестова код статистичких хипотеза о симетрији заснивају се на емпиријској функцији расподеле.

1.2 Емпиријска функција расподеле

Емпиријска функција расподеле $F_n(x)$ је функција расподеле коју формирамо на основу узорка. Она представља релативну фреквенцију догађаја $(X \leq x)$ у низу од n посматрања $X_1, X_2, \ldots X_n$ над обележјем X, па се може дефинисати на следећи начин:

Дефиниција 1.2.1 *Нека је $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ прост случајан узорак обима n за посматрано обележје X. Функцију*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{X_i < x},$$

где је

$$I_{X_i < x} = \begin{cases} 1, & x_i < x, \\ 0, & x_i \geq x, \end{cases}$$

називамо емпиријска функција расподеле.

Ако елементе $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случајног узорка поређамо у варијациони низ $X_{(1)}$, $X_{(2)}$ $\ldots X_{(n)}$, тада емпиријску функцију расподеле можемо дефинисати и као:

[1] Frank Wilcoxon (1892 - 1965), амерички хемичар и статистичар.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < X_{(1)}, \\ \frac{k}{n}, & X_{(k)} \leq x < X_{(k+1)},\ k = 1, 2 \ldots \\ 1, & x \geq X_{(n)}, \end{cases}$$

уколико никоја два елемента узорка нису иста. Таква емпиријска функција је степенаста функција са скоковима $\frac{1}{n}$ у свакој тачки низа x_k. Ако постоје елементи низа који су једнаки онда ће скокови у тачкама x_k бити величине $\frac{n_k}{n}$ где је n_k број вредности x_k у узорку.

Посматрајући израз

$$nF_n(x) = \sum_{i=1}^{n} I_{X_i < x},$$

видимо да је он једнак суми независних и једнако расподељених случајних промењљивих са Бернулијевом расподелом, тако да има биномну $B(n, F(x))$ расподелу.

Одатле следи да је:

$$P\Big\{F_n(x) = \frac{k}{n}\Big\} = \binom{n}{k}[F(x)]^k[1 - F(x)]^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

а исто тако важи:

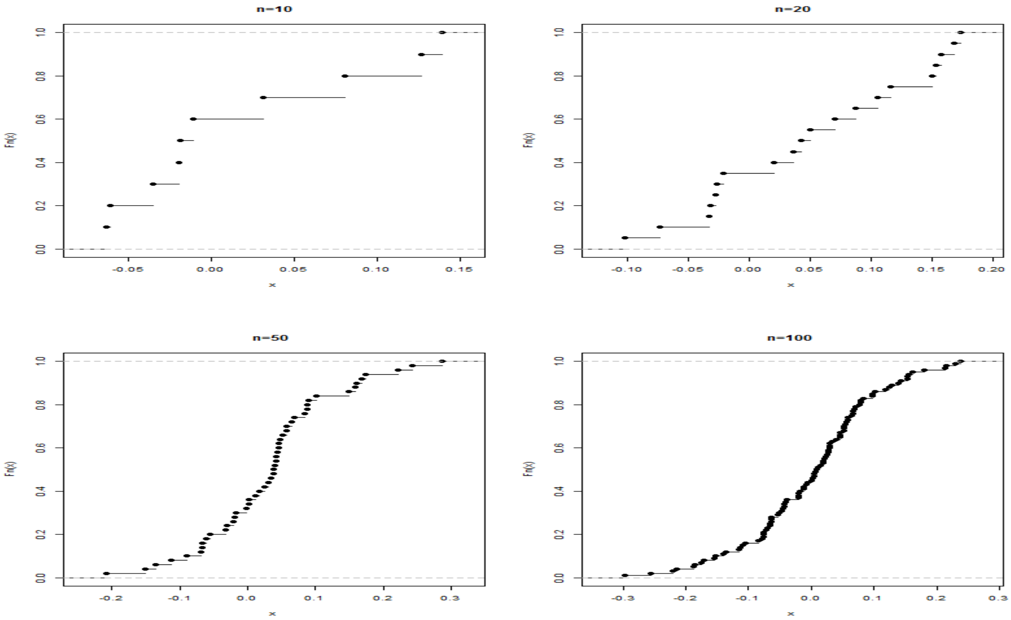
$$E[F_n(x)] = F(x),$$

$$D[F_n(x)] = \frac{[F(x)[1 - F(x)]}{n},$$

$$cov[F_n(x_i), F_n(x_j)] = \frac{[F(x_i)[1 - F(x_j)]}{n}, \quad x_i > x_j.$$

Графици емпиријских функција расподеле стандардне нормалне

расподеле за узорке обима 10, 20, 50 и 100 представљени су на слици 1.1.



Слика 1.1: Емпиријска функција расподеле стандардне нормалне расподеле за узорке обима 10, 20, 50 и 100

Видимо са графика да с повећањем обима узорка емпиријска функција расподеле све више ”личи” на теоријску функцију расподеле. Помоћу емпиријске функције расподеле можемо да проценимо теоријску функцију расподеле. То нам говори и ”централна теорема математичке статистике”, Гливенко и Кантелијева теорема:

Теорема 1.1 (Гливенко и Кантели) *Ако је $F(x)$ теоријска функција расподеле обележја X, а $F_n(x)$ емпиријска функција расподеле добијена на основу простог случајног узорка обима n, тада , униформно по x, функција $F_n(x)$ тежи ка $F(x)$ са вероватноћом 1 тј. важи:*

$$P[\sup_{x\in\mathbf{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0] = 1.$$

Ова теорема нам показује да за довољно велико n, емпиријска функција расподеле тежи теоријској функцији расподеле.

Ако посматрамо статистику $D_n = \sup_{x\in\mathbf{R}} |F_n(x) - F(x)|$ за њу важи следећа теорема:

Теорема 1.2 *Ако је функција расподеле F посматраног обележја непрекидна и ако је:*

$$D_n = \sup_{x\in\mathbf{R}} |F_n(x) - F(x)|,$$

онда за сваки реалан број λ *важи:*

$$P(\sqrt{n}D_n < \lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$

Емпиријска функција расподеле користи се у разним непараметарским тестовима у формирању тест статистика као што су Колмогоровљева [2] и Смирнова [3], Крамерова[4] и Фон Мизесова [5], а такође ћемо је користити у формирању тест статистика у нашим тестовима симетрије. Више о емпиријској функцији расподеле може се прочитати у [5], [7] у [10].

1.3 Монте Карло методе

Монте Карло методе представљају методе којима се генеришу случајни објекати или процеси. Генерисани објекти могу настати "природно", путем моделирања природног система као што је комплексна мрежа путева, транспорт неутрона или кретање берзе у одређеном временском периоду. У многим случајевима, случајни објекти у Монте Карло техникама уведени су "вештачким " путем у циљу решавања чисто детерминистичких проблема. У оба случаја, било да су објекти генерисани моделирањем природног система или "вештачким " путем идеја је да се експеримент понови велики број пута да бисмо добили велики број квантитативних података.

Приликом моделирања стохастичких процеса у Монте Карло методама користе се случајни или псеудослучајни бројеви. Под стохастичким процесом подразумевамо низ стања чији је развој одређен случајним догађајима. Псеудослучајни бројеви су они који су генерисани детерминистичким алгоритмима и који имитирају особине природно случајних бројева. С развојом компјутера псеудослучајни бројеви су добили и већу значајност.

Поступцима у Монте Карло методама долазимо до приближног решења проблема користећи узорке, случајне и псеудослучајне бројеве. У Монте Карло симулацијама проблем се симулира велики број пута. Свака симулација проблема је једнако вероватна, а резултати симулације представљају реализацију проблема.

[2] Андреи Николаевич Колмогоров (1903 - 1987), руски математичар.

[3] Николаи Василевич Смирнов (1900 - 1966), совијетски математичар.

[4] Harald Cramer (1893 - 1985), шведски математичар, актуар и статистичар.

[5] Richard Edler von Mises (1883 - 1953), аустријски научник и математичар.

Као основна примена метода Монте Карло може се навести процена вредности интеграла код функција код којих се интеграл не може израчунати или се тешко израчунава. Како се вероватноћа израчунава интеграцијом, једна од примена метода Монте Карло је и израчунавање вероватноћа одређеног ишода помоћу псеудослучајних бројева.

Монте Карло методе имају широке примене у симулирању модела нпр: симулација најбољег пута за возила, способност система да издржи одређено оптерећење, обезбеђивање оптималног распореда и контроле индустријских система. Затим у моделирању природних процеса као што су транспорт неутрона или симулирање хемијског кретања. У финансијама се користи у анализи ризика, а у статистици за формирање вероватносних модела.

Више о Монте Карло методи може се прочитати у [4] и [3].

Приликом тестирања симетрије, Монте Карло методе користимо код одређивања емпиријског прага значајности и емпиријске моћи теста, тј. израчунавања вероватноће за коју одбацујемо нулту хипотезу. Поступак налажења емпиријске моћи теста је објашњен у поглављу 3.

У поглављу Тестови симетрије дефинисане су тест статистике које ћемо користити у тестирању симетрије.

Последњи део рада је посвећен анализи резултата који су добијени тестирањем моћи теста.

Поглавље 2

Тестови симетрије

2.1 Тестирање статистичких хипотеза

Често у пракси желимо да дођемо до неких закључака о популацији на основу узорка те популације. Зато је корисно извести неке претпоставке о популацији и такве претпоставке се називају статистичке хипотезе. Статистичка хипотеза је свака претпоставка о карактеризацији обележја популације која се може статистички проверити.

Код хипотеза разликујемо нулту хипотезу, у ознаци H_0, као претпоставку о особини обележја коју желимо да проверимо и алтернативну хипотезу, у ознаци H_1, која представља неку претпоставку која оспорава нулту хипотезу. Да би тестирање имало смисла нулта хипотеза се мора дефинисати на такав начин да се може оповргнути.

На основу узорка рачунамо вредности узорачке статистике тј. тест статистике коју смо изабрали за проверу хипотезе (тест статистику ћемо означити са T). Скуп свих вредности тест статистике за коју одбацујемо нулту хипотезу је критична област теста, у ознаци W.

Критична област теста везана је за нулту хипотезу и за ниво или праг значајности за који вршимо тестирање. Праг значајности представља вероватноћу грешке коју дозвољавамо приликом тестирања када је нулта хипотеза исправна, тј. грешку да одбацимо нулту хипотезу као нетачну, уколико је она тачна. Она се такође назива грешка прве врсте. Ниво значајности означава се са α. Он се обично унапред одређује. Вероватноћа грешке прве врсте је:

$$\alpha = P_{H_0}(T \in W).$$

Јасно је да је с мањом грешком мања и вероватноћа да нулта хипотеза буде неправедно одбачена. С друге стране, вероватноћа да тест статистика припада критичној области, уколико је исправна алтернативна хипотеза, назива се моћ теста. Моћ теста представља вероватноћу да одбацимо нулту хипотезу уколико је она нетачна. Комплементарна вероватноћа моћи теста јесте вероватноћа грешке друге врсте, у ознаци β, која представља вероватноћу да се прихвати нетачна нулта хипотеза. Она се рачуна као:

$$\beta = P_{H_1}(T \notin W),$$

а моћ теста је онда:

$$1 - \beta = P_{H_1}(T \in W).$$

Уколико је тешко или немогуће да се израчунају теоријским путем, праг значајности и моћ теста се могу проценити на основу узорка коришћењем Монте Карло метода. Тако процењени праг значајности се назива емпиријски праг значајности, а моћ теста емпиријска моћ теста.

Статистичке хипотезе могу бити параметарске и непараметарске. Код параметарских хипотеза претпостављамо да популација има задату расподелу, најчешће је то нормална расподела и онда тестирамо параметре којима је та расподела описана.

Код непараметарских тестова пре тестирања немамо претпоставке о расподели популације и они се понекад називају тестови слободни од расподеле. Предност непараметарских тестове је што је потребно мање претпоставки него за параметарске тестове, али због тога имају слабију моћ од параметарских тестова.

Тестови симетрије којима се ми бавимо су непараметарски тестови. Они не зависе од расподеле обележја.

Главни циљ овог рада јесте одредити моћ тестова за различите алтернативе и закључити који је тест погоднији у случају којих алтернатива.

Више о тестирању хипотеза се може сазнати у [5], [4], [2] и [10].

2.2 Тест статистике

У овом делу ћемо се упознати са тест статистикама и тестовима које ћемо користити у тестирању симетричности расподеле.

1. **Тест знакова**

   Најстарија и вероватно најпознатија тест статистика у тестовима симетрије је тест статистика E_n која се користи у тесту знакова.

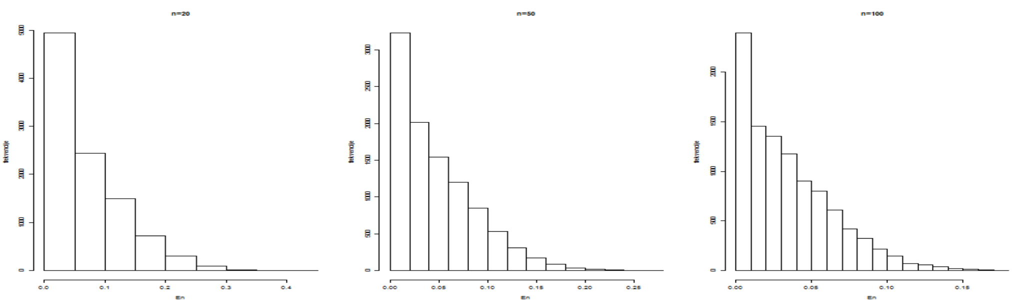
$$E_n = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[I_{x_i > 0} - \frac{1}{2} \right] \right|.$$

Индикатор оних елемената узорка који су већи од нуле имаће вредност 1 а оних елемената који нису већи од нуле вредност 0. Вредност израза $[I_{X_i>0} - \frac{1}{2}]$ ће онда бити $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$. Уколико је расподела симетрична око нуле, требало би бити приближно исти број елемената узорка лево и десно од нуле тј. приближно исти број $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ у суми $\sum_{i=1}^{n}[I_{X_i>0} - \frac{1}{2}]$.

Ако ову тест статистику изразимо преко емпиријске функције расподеле она се дефинише са:

$$E_n = \left| \frac{1}{2} - F_n(0) \right|.$$

Хистограм тест статистике E_n из теста знакова, за узорке обима 20, 50 и 100 дат је на слици 2.1:



Слика 2.1: Хистограм тест статистике E_n за узорке обима 20, 50 и 100

2. **Тест Колмогорова и Смирнова**

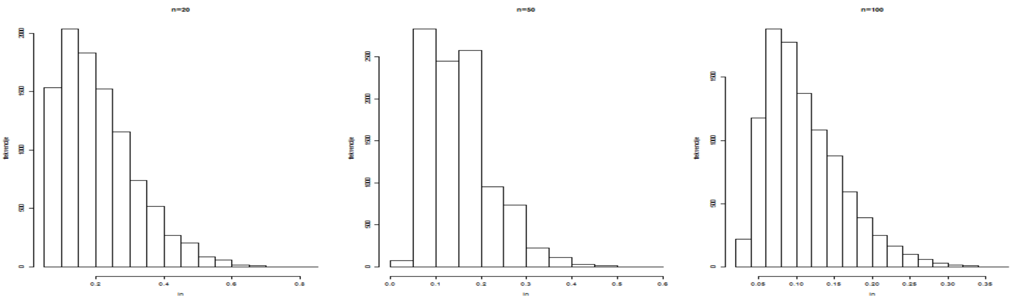
Тест статистику I_n је увео Смирнов (1947) в.[9]. Она одговара Колмогоровљевој тест статистици из Колмогоровљевог теста о хомогености и дефинисана је са:

$$I_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\triangle F_n(x)|,$$

где је $\triangle F_n(x) = |1 - F_n(x) - F_n(-x)|$.

Рачунамо је тако што нађемо емпиријску функцију расподеле за узорак обима n, и затим вредност разлике $|1 - F_n(x) - F_n(-x)|$

за сваки елемент узорка. Добијамо n таквих вредности и максимална од њих биће вредност тест статистике I_n. Код симетричних расподела збир вредности функције расподеле у симетричним тачкама би требало да буде једнак јединици, тако да би највећи број вредности тест статистистике $|\triangle F_n(x)|$ требало да буде распоређен око нуле. Хистограм Колмогоровљеве тест статистике, за узорке обима 20, 50 и 100 је дат са:



Слика 2.2: Хистограм тест статистике I_n за узорке обима 20, 50 и 100

3. **Вотсонов и Дарлингов тест**

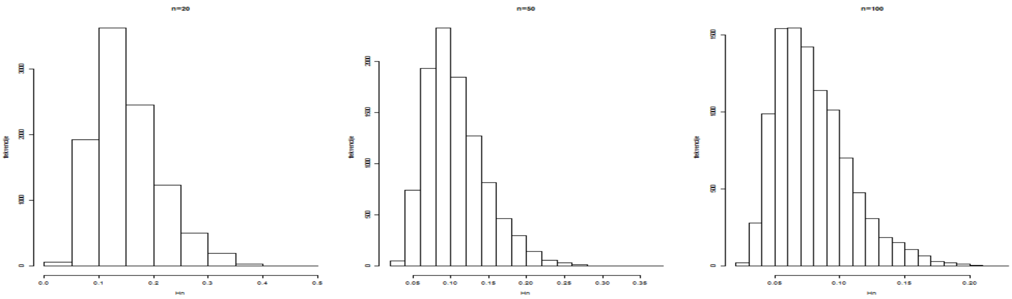
Ова тест статистика H_n је аналогна Вотсоновој[1] и Дарлинговој[2] тест статистици која се користи у тестовима сагласности расподеле. Први пут је поменута од стране Абакумова[3] в.[1]:

$$H_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \triangle F_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \triangle F_n(y) dF_n(y) \right|.$$

Посматрамо израз $1 - F_n(x) - F_n(-x)$ који ћемо означити са $\triangle F_n(x)$. Уколико $\triangle F_n(x)$ посматрамо као функцију од x онда $\triangle F_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \triangle F_n(y) dF_n(y)$ представља математичко очекивање функције $\triangle F(x)$, па је вредност наше тест статистике максимум одступања функције $\triangle F_n(x)$ од њене очекиване вредности.

Хистограм тест статистике Вотсоновог и Дарлинговог теста за узорке обима 20, 50 и 100 приказан је на слици 2.3:

[1] Geoffrey Watson (1921 - 1998), аустралијски статистичар.
[2] Donald Allan Darling (1915 - 2014), амерички статистичар.
[3] Аббакумов Вадим Леонардович, руски математичар.



Слика 2.3: Хистограм тест статистике H_n за узорке обима 20, 50 и 100

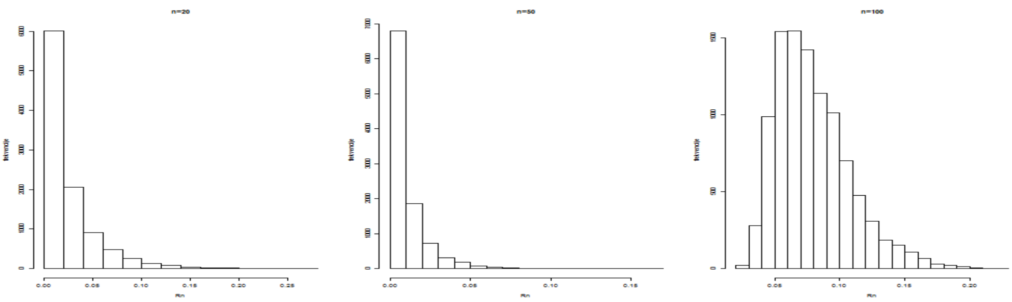
4. **Тест Ченцова**

   Тест статистика ${R_n}^2$ припада ω^2 типу статистика и прво је предложена од стране Ченцова [4](1958) в.[13]:

   $${R_n}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\triangle F_n(x))^2 dF_n(x).$$

   Ова тест статистика представља очекивање квадрата вредности $\triangle F_n(x) = 1 - F_n(x) - F_n(-x)$.

   На слици 2.4 је дат хистограм тест статистике типа ω^2, за узорке обима 20, 50 и 100:



Слика 2.4: Хистограм тест статистике ${R_n}^2$ за узорке обима 20, 50 и 100

[4]Николаи Николаевич Ченцов (1930 - 1992), руски математичар.

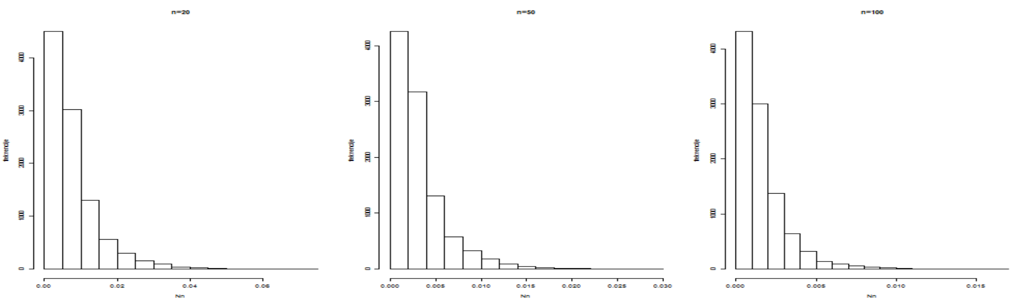
5. **Хилов и Раов тест**

Као аналогија H_n тест статистици, Хил и Рао[5](1977) в.[12] су предложили статистику N_n:

$$N_n{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\triangle F_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \triangle F_n(y) dF_n(y)]^2 dF_n(x).$$

Ова тест статистика представља дисперзију величине $\triangle F_n(x) = 1 - F_n(x) - F_n(-x)$ тј. меру распрострањености вредности случајне променљиве око њеног математичког очекивања који представља средњу вредност функције $\triangle(F_n(x))$. Ако је концентрација вредности око средине велика, дисперзија ће бити мала и обрнуто ако се вредности случајне променљиве значајно расипају око средине, дисперзија је велика.

Приказана преко хистограма, тест статистика N_n Хиловог и Раовог теста за узорке обима 20, 50 и 100 изгледа овако:



Слика 2.5: Хистограм тест статистике N_n за узорке обима 20, 50 и 100

Следећа два теста МО Колмогоровљев тест и МО интегрални тест, су предложени од стране српских математичара Бојане Милошевић и Марка Обрадовића. Они се заснивају на теореми о карактеризацији која нам говори да су статистике поретка $X_{(k;m)}$ и $X_{(m-k+1;m)}$ код непрекидних случајних променљивих $X_1, \dots, X_m$ са заједничком функцијом расподеле $F(x)$, где је $k \leq \frac{m}{2}$, једнако расподељене уколико је X_1 симетрична око нуле в.[6].

[5] Calyampudi Radhakrishna Rao (1920 -), амерички математичар и статистичар индијског порекла.

6. **МО Колмогоровљев тест**

Још једна тест статистика Колмогоровљевог типа је дата са:

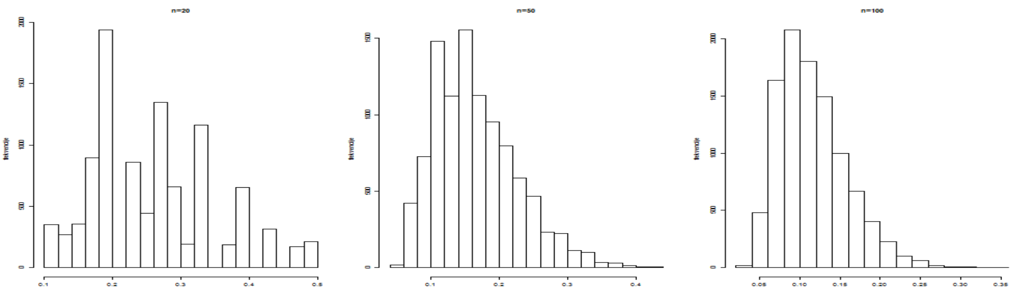
$$K_n^k = \sup_{x \in \mathbf{R}} |(H_n^{(k)}(t) - G_n^{(k)}(t))|,$$

где

$$H_n^{(k)}(t) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{I_{2k}} I\Big\{|X_{(k),X_{i_1},\dots X_{i_{2k}}}| < t\Big\},$$
$$G_n^{(k)}(t) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{I_{2k}} I\Big\{|X_{(k+1),X_{i_1},\dots X_{i_{2k}}}| < t\Big\},$$

представљају U емпиријску функцију расподеле везану за карактеризацију. $X_{(k),X_{i_1},\dots X_{i_{2k}}}$ означава к-ти члан варијационог низа $X_1, X_2, \dots, X_m$, а $I_m = \{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$, в.[6].

Тест који одговара овој статистици зваћемо МО Колмогоровљев тест, а хистограм тест статистике за $k = 1$ и узорке обима 20, 50 и 100 је приказан на следећој слици:



Слика 2.6: Хистограм тест статистике K_n^1 за узорке обима 20, 50 и 100

7. **МО интегрални тест**

Тест статистика Мо интегралног теста је J_n^k:

$$J_n^k = \int_0^\infty (H_n^{(k)}(t) - G_n^{(k)}(t)) dQ_n(t),$$

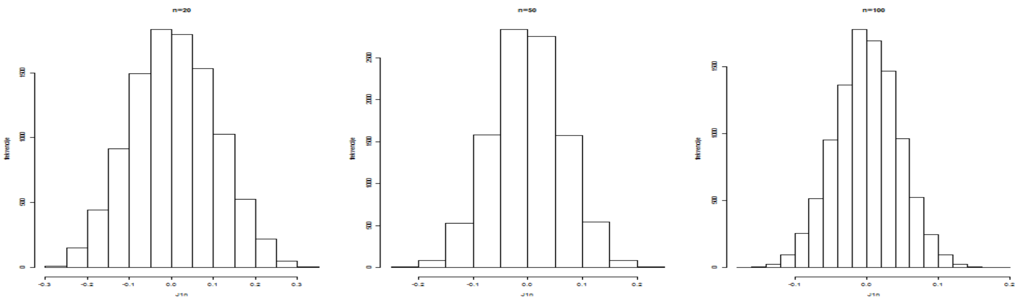
где је Q_n емпиријска функција расподела за узорак $|X_1|, |X_2|, \dots |X_n|$, а као код претходне статистике:

$$H_n^{(k)}(t) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{I_{2k}} I\Big\{|X_{(k),X_{i_1},\dots X_{i_{2k}}}| < t\Big\},$$

$$G_n^{(k)}(t) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{I_{2k}} I\Big\{|X_{(k+1),X_{i_1},\dots X_{i_{2k}}}| < t\Big\},$$

представљају U емпиријску функцију расподеле која је везана за карактеризацију. $X_{(k),X_{i_1},\dots X_{i_{2k}}}$ означава к-ти члан варијационог низа $X_1, X_2, \dots, X_m$, а $I_m = \{(i_1, \dots, i_m) : 1 \le i_1 < \dots < i_m \le n\}$, в.[6].

Хистограм тест статистике МО интегралног теста, за $k = 1$ и узорке обима 20, 50 и 100 је дата на слици **??**:



Слика 2.7: Хистограм тест статистике J_n^1 за узорке обима 20, 50 и 100

Сви наведени тестови су тестови "слободни од расподеле", тј. расподела тест статистика под нултом хипотезом симетрије је увек иста без обзира о којој је симетричној расподели реч.

Тестови симетрије који одговарају поменутим тест статистикама биће редом: тест знакова (за тест статистику E_n), тест Колмогорова (одговара му тест статистика I_n), Вотсонов и Дарлингов тест (за тест статистику H_n), ω^2 тест (одговара тест статистици R_n), Рао и Хил тест (за тест статистику N_n), МО Колмогоровљев тест (одговара му тест статистика K_n^k) и МО интегрални тест (за тест статистику J_n^k).

Поглавље 3

Емпиријско испитивање квалитета тестова симетрије

3.1 Дефинисање статистичких хипотеза

Прво ћемо дефинисати нулту и алтернативну хипотезу, задати праг значајности, а затим на основу тог прага и нулте хипотезе одредити границу критичне области.

Посматрајмо узорак обима n из непрекидне расподеле чија је функција расподеле $F(x)$. Циљ нам је да тестирамо хипотезу да је функција расподеле симетрична око нуле тј. нулта хипотеза је претпоставка да је функција симетрична око нуле:

$$H_0 : 1 - F(x) - F(-x) = 0,$$

а алтернативна хипотеза је претпоставка да функција није симетрична око нуле.

$$H_1 : 1 - F(x) - F(-x) \neq 0.$$

Тестирање нулте хипотезе, тј. симетричности око нуле представља један од честих проблема непараметарске статистике, јер се симетричност јавља као предуслов за даљу примену неких тестова.

С обзиром да су ово непараметарски тестови користићемо Монте Карло методе да бисмо нашли границе критичне области за тест статистике. Пошто су тестови слободни од расподеле, гранична вредност критичне области је једнака за све расподеле које су симетричне око нуле, зато што се граница критичне области налази као квантил расподеле тест статистике који одговара одређеном прагу значајности.

Поступак налажења граница критичне области је следећи:

1. Изаберемо функцију расподеле која је симетрична око нуле.
2. Извучемо прост случајан узорак обима n из те симетричне расподеле.
3. Израчунамо вредност тест статистике.
4. Поновимо корак 2. и корак 3. 100000 пута, да бисмо добили 100000 вредности тест статистике.
5. Задамо праг значајности α.
6. Израчунамо квантил $(1-\alpha)$ реда.
7. Вредност квантила који добијемо је граница наше критичне области.

Све ово ћемо урадити за узорке обима 20, 50 и 100.

За рачунање граничне вредности критичне области користили смо програмски језик R. Изабрали смо униформну расподелу $U(-1,1)$ као симетричну расподелу око нуле за коју рачунамо границу критичне области. Код у програмском језику R може се погледати у поглављу Додаци 2.

У табели 3.1 приказане су границе критичне области наших тест статистика. Све тест статистике осим J_n^k имају једнострану критичну област, док тест статистика МО интегралног теста има двострану критичну област и за тест статистику J_n^k у табели 3.1 приказане су доње и горње границе двостране критичне области.

α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.30	0.18	0.13	0.20	0.14	0.10	0.20	0.12	0.08
Колмогоров	0.55	0.38	0.27	0.45	0.30	0.21	0.40	0.26	0.18
Вотсон и Дарлинг	0.33	0.23	0.17	0.27	0.18	0.13	0.24	0.16	0.12
ω^2 тест	0.13	0.05	0.03	0.09	0.03	0.02	0.06	0.02	0.01
Рао Хил	0.04	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.02	0.01	0.00
МО Колмогоров	0.50	0.33	0.24	0.43	0.28	0.20	0.39	0.25	0.17
МО интегрални	-0.23	-0.16	-0.11	-0.19	-0.13	-0.09	-0.16	-0.11	-0.07
	0.26	0.16	0.11	0.20	0.13	0.09	0.17	0.11	0.07

Табела 3.1: Границе критичне области тестова

3.2 Моћ теста

Када смо нашли границу критичне области за тест статистике ми имамо критичну област сваке од тест статистика. Познавање критичне области одређене тест статистике је неопходно да бисмо одредили моћ теста те статистике за одређене алтернативе.

Моћ теста се може одредити теоријским путем, уколико познајемо расподелу тест статистике или емпиријски ако је расподела тест статистике сложена или није позната. Теоријску моћ теста налазимо тако што теоријски израчунамо вероватноћу да тест статистика припада критичној области, тј. израчунамо $P_{H1}(T \in W)$ где је T тест статистика, а W критична област.

Емпиријску моћ теста рачунамо на основу узорка и за конкретне расподеле, користећи Монте Карло методе, а поступак је следећи:

1. Изаберемо конкретну расподелу за коју желимо да тестирамо симетричност.

2. Извучемо прост случајан узорак обима n.

3. Израчунамо вредност тест статистике за тај узорак.

4. Поновимо корак 2. и корак 3. 100000 пута и добијемо 100000 вредности тест статистике.

5. За задати праг значајности α одредимо колико од тих 100000 вредности припада критичној области, тј. колико њих је веће од граничне вредности критичне области за задати праг значајности.

6. Проценат оних вредности тест статистика који припадају критичној области представља емпиријску моћ теста за ту конкретну алтернативу тј. расподелу.

Моћ теста зависиће од обима узорка, прага значајности и наравно алтернативе тј. расподеле за коју рачунамо моћ. Повећањем обима узорка повећава се и моћ теста. Ако повећамо праг значајности повећаће се и моћ теста, зато што је грешка коју дозвољавамо приликом тестирања већа.

3.3 Емпиријски праг значајности

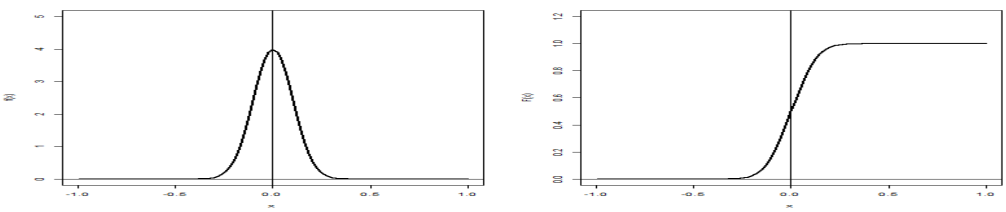
Приликом тестирања прво што морамо да утврдимо јесте да ли су наши тестови симетрије добри и да ли смо на добар начин одредили границе критичне области.

То одређујемо тако што израчунамо емпиријски праг значајности за неке расподеле које су симетричне око нуле. Уколико је емпиријски праг значајности једнак задатом прагу значајности, можемо рећи да је критична област заиста добро одређена, а самим тим су добри и тестови симетрије и требало би да дају коректне резултате.

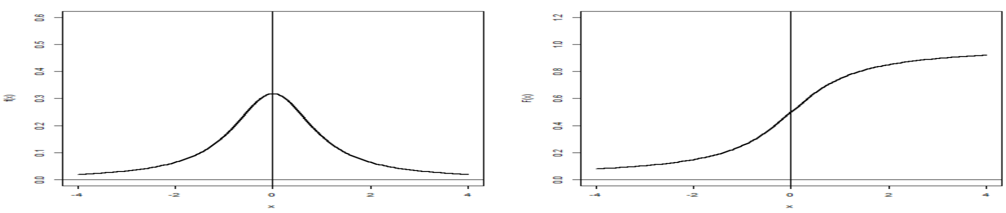
Поступак налажења емпиријског прага значајности је исти као поступак за налажење емпиријске моћи теста, само што ћемо за алтернативне хипотезе изабрати расподеле које су симетричне око нуле.

Обим узорака које посматрамо су 20, 50 и 100, а прагови значајности α су 0.01, 0.05 и 0.1.

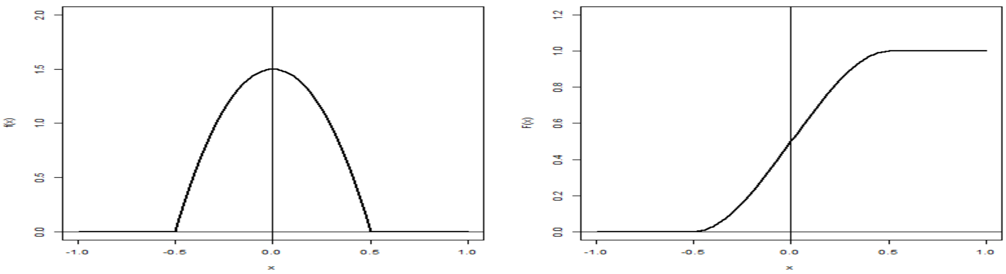
Овако изгледају графици тих расподела:



Слика 3.1: Густина функције расподеле и функција расподеле случајне промењиве са $N(0, 0.1)$ расподелом



Слика 3.2: Густина функције расподеле и функција расподеле случајне промењиве са $C(0, 1)$ расподелом



Слика 3.3: Густина функције расподеле и функција расподеле случајне промењљиве са $B(2,2)$ расподелом

Резултати које смо добили за емпиријски праг значајности су:

	Нормална расподела								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.00	0.01	0.01	0.04	0.03	0.03	0.04	0.07	0.09
Колмогоров	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.06	0.07	0.09	0.12
Вотсон и Дарлинг	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.05	0.09	0.10	0.10
ω^2 тест	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.05	0.10	0.10	0.10
Рао Хил	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.04	0.09	0.09	0.13
МО Колмогоров	0.00	0.01	0.01	0.07	0.05	0.05	0.08	0.10	0.10
МО интегрални	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.05	0.10	0.10	0.11
	Кошијева расподела								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.00	0.01	0.01	0.04	0.03	0.04	0.04	0.07	0.09
Колмогоров	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.06	0.07	0.09	0.12
Вотсон и Дарлинг	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.05	0.09	0.10	0.10
ω^2 тест	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.05	0.10	0.10	0.10
Рао Хил	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.04	0.10	0.10	0.13
МО Колмогоров	0.00	0.01	0.01	0.07	0.04	0.05	0.09	0.10	0.10
МО интегрални	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.05	0.10	0.10	0.10
	Бета расподела								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.00	0.01	0.01	0.04	0.03	0.03	0.04	0.07	0.09
Колмогоров	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.06	0.07	0.09	0.12
Вотсон и Дарлинг	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.05	0.09	0.10	0.10
ω^2 тест	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.05	0.10	0.10	0.10

Рао Хил	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.04	0.09	0.09	0.13
МО Колмогоров	0.00	0.01	0.01	0.07	0.05	0.05	0.09	0.10	0.10
МО интегрални	0.01	0.01	0.01	0.06	0.05	0.05	0.10	0.10	0.10

Табела 3.2: Емпиријски праг значајности

За све тестове и расподеле емпиријски праг значајности је мањи или приближан теоријском прагу значајности. Код теста знакова и МО Колмогоровљевог теста емпиријска моћ теста за узорак обима 20, и праг значајности 0.01 је 0, што није необично с обзиром да рачунамо 99% квантил на узорку малог обима.

Можемо закључити да су наши тестови коректни и примењиви за одређене обиме узорака и задате прагове значајности и да смо коректно одабрали границе критичне области.

Поглавље 4

Моћ тестова симетрије и њихово упоређивање

Наше тестове ћемо тестирати у односу на различите алтернативе. Једна врста алтернатива ће бити нпр. нормална или Кошијева расподела које су померене за мале вредности у десно. Ове расподеле су саме по себи симетричне, али не у нули и изабрали смо их да бисмо открили у којој мери наши тестови реагују на расподеле које су симетричне у близини нуле. Оне се називају и алтернативе положаја.

Као потпуну супротност алтернатива положаја тестираћемо расподеле које нису симетричне, као нпр. експоненцијална расподела, транслиране тако да им је медијана нула. Код ових расподела очекујемо да тестови имају значајну моћ.

На крају тестирамо асиметричне расподеле као хи-квадрат расподелу или гама расподелу такође транслиране за медијану и асиметричне расподеле Фернандеза и Стила. Ове расподеле су асиметричне око нуле у једну или другу страну и желимо да одредимо какве резултате дају наши тестови код расподела са оваквом особином.

Циљ тестирања је одредити који тест је најмоћнији за коју алтернативу и да ли постоје неки тестови који имају велику моћ код свих алтернатива.

4.1 Емпиријска моћ теста

Пошто смо одредили критичну област за тест статистике можемо одредити емпиријку моћ теста према раније описаном поступку у делу 3.2.

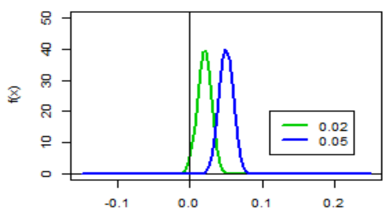
4.1.1 Алтернативе положаја

Алтернативе положаја добијамо када расподеле које су симетричне око нуле померимо за мале вредности од нуле.

Посматраћемо нормалну и логистичку расподелу које су симетричне око нуле, затим бета расподелу коју смо прво транслирали тако да јој је медијана нула, па затим померили од нуле и на крају Кошијеву и Студентову расподелу. Бета расподела је симетрична али не око нуле и зато је транслирамо.

И даље посматрамо узорке обима 20, 50 и 100 и прагове значајности 0.01, 0.05, 0.1.

Резултати нашег тестирања су следећи:



Слика 4.1: Нормална $N(0, 0.1)$ расподела

Код $N(0, 0.1)$ расподеле померене у десно за 0.02 најбољу моћ за узорке обима 100 и све прагове значајности показује МО интегрални тест (0.63, 0.51 и 0.28 за прагове значајности редом 0.1,0.05 и 0.01), затим ω^2 тест и Комогоровљев тест, док остали тестови имају мало мању моћ од ових тестова. Најмању моћ ће имати Раов и Хилов тест и тест знакова (0.44, 0.24 и 0.12 за редом прагове значајности 0.1,0.05 и 0.01). Ово ће такође важити и за узорке обима 50 и праг значајности 0.1.

За узорке обима 50 и праг значајности 0.05 и 0.01, најмању моћ теста 0.12 и 0.05 има МО Колмогоровљев тест, а затим тест знакова и Раов и Хилов тест. Највећу моћ и даље показује МО интегрални тест, 0.11 за праг значајности 0.01 и 0.28 за праг значајности 0.05 а сличне резултате даје и ω^2 тест.

Код узорака обима 20 најбоље реагује МО интегрални тест чија је моћ 0.22, 0.13 и 0.04 за прагове значајности 0.1, 0.05 и 0.01. Тест са најмањом моћи биће МО Колмогоровљев тест за све прагове значајности.

Када померимо $N(0, 0.1)$ расподелу за 0.05, код узорака обима 100 и праг значајности 0.1 сви тестови имају скоро једнаку моћ. За праг значајности 0.05 и 0.01 мало мању моћ ће имати тест знакова и Раов и Хилов тест (0.94 и 0.87 за прагове 0.05 и 0.01) у односу на остале тестове.

За узорке обима 50, највећу моћ има МО интегрални тест (0.97, 0.93 и 0.79 за прагове значајности редом 0.1, 0.05, и 0.01) а затим ω^2 тест, док најмању моћ имају Раов и Хилов тест (0.81, 0.72 и 0.49 за прагове 0.1, 0.05 и 0.01) и тест знакова. Тест Вотсона и Дарлинга и тест Колмогорова су тестови који имају сличне моћи, које су по вредности између најмање и највеће моћи теста.

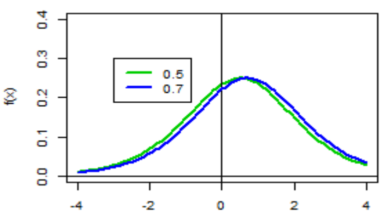
Код узорака обима 20 тест са најбољом моћи је и даље МО интегрални тест (0.68, 0.54 и 0.29 за прагове 0.1,0.05 и 0.01). После њега најмоћнији тестови су тест Вотсона и Дарлинга и ω^2 тест који имају приближне моћи теста. Најмању моћ ће имати МО Колмогоровљев тест.

Нормална расподела $N(0, 0.1)$

	помераj= 0.02								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.01	0.05	0.12	0.09	0.15	0.29	0.09	0.23	0.44
Колмогоров	0.02	0.06	0.16	0.08	0.20	0.41	0.12	0.29	0.55
Вотсон и Дарлинг	0.03	0.07	0.16	0.10	0.20	0.37	0.17	0.30	0.49
ω^2 тест	0.02	0.09	0.20	0.09	0.22	0.42	0.16	0.33	0.56
Рао Хил	0.02	0.06	0.12	0.09	0.16	0.24	0.15	0.24	0.45
МО Колмогоров	0.00	0.05	0.13	0.05	0.12	0.34	0.07	0.23	0.48
МО интегрални	0.04	0.11	0.28	0.13	0.28	0.51	0.22	0.40	0.64
	помераj= 0.05								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.09	0.51	0.88	0.38	0.73	0.96	0.38	0.82	0.99
Колмогоров	0.16	0.59	0.95	0.40	0.84	0.99	0.47	0.90	1.00
Вотсон и Дарлинг	0.20	0.66	0.97	0.44	0.85	0.99	0.55	0.91	1.00
ω^2 тест	0.20	0.72	0.98	0.43	0.89	1.00	0.58	0.94	1.00
Рао Хил	0.14	0.49	0.87	0.34	0.72	0.94	0.46	0.81	0.99
МО Колмогоров	0.00	0.56	0.94	0.26	0.76	0.99	0.36	0.87	0.99
МО интегрални	0.29	0.79	0.99	0.54	0.93	1.00	0.68	0.97	1.00

Табела 4.1: Нормална расподела $N(0, 0.1)$

Код логистичке расподеле $LG(0,1)$ померене за 0.5, за узорке обима 100 једнако добру моћ показују МО интегрални тест (0.87, 0.79 и 0.59 за прагове значајности 0.1, 0.05 и 0.01), ω^2 тест и Колмогоровљев тест који има мању моћ за праг значајности 0.01. Најмању моћ има МО



Слика 4.2: Логистичка $LG(0,1)$ расподела

Колмогоровљев тест 0.74 и 0.34 за прагове значајности 0.1 и 0.01 и Раов и Хилов тест 0.60 за праг значајности 0.05.

Код узорака обима 50 и 20 најмоћнији тест је МО интегрални тест, затим ω^2 тест, док је тест са најмањом моћи МО Колмогоровљев тест, затим тест знакова за праг значајности 0.1, док за праг значајности 0.05 и 0.01 тест знакова има приближне моћи као Раов и Хилов тест.

Код померања логистичке $LG(0,1)$ расподеле за 0.7 тест који има највећу моћ за све узорке и све прагове значајности је МО интегрални тест. Тест ω^2 има једнаку моћ као и МО интегрални тест за узорке обима 50 и 100, док за узорке обима 20 има мало мању моћ од МО интегралног теста али сличну моћ као Вотсонов и Дарлингов тест.

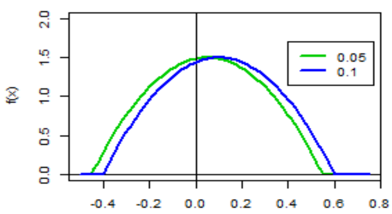
Најмању моћ имаће МО Колмогоровљев тест, а за узорке обима 20 има скоро дупло мању моћ од других тестова.

Логистичка расподела $LG(0,1)$

	померај= 0.5								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.03	0.16	0.40	0.17	0.35	0.64	0.17	0.46	0.78
Колмогоров	0.05	0.18	0.48	0.16	0.42	0.76	0.22	0.53	0.86
Вотсон и Дарлинг	0.06	0.20	0.49	0.19	0.43	0.73	0.28	0.56	0.83
ω^2 тест	0.06	0.24	0.56	0.17	0.46	0.78	0.27	0.59	0.87
Рао Хил	0.05	0.17	0.42	0.17	0.37	0.60	0.25	0.48	0.80
МО Колмогоров	0.00	0.12	0.34	0.08	0.25	0.62	0.12	0.39	0.74
МО интегрални	0.08	0.26	0.59	0.22	0.49	0.79	0.33	0.61	0.87
	померај= 0.7								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.06	0.38	0.76	0.31	0.61	0.91	0.30	0.72	0.96
Колмогоров	0.11	0.42	0.84	0.30	0.71	0.96	0.38	0.80	0.98
Вотсон и Дарлинг	0.13	0.46	0.86	0.34	0.72	0.96	0.44	0.81	0.98
ω^2	0.13	0.52	0.89	0.31	0.75	0.97	0.45	0.84	0.99
Рао Хил	0.11	0.39	0.77	0.29	0.63	0.89	0.40	0.73	0.97
МО Колмогоров	0.00	0.31	0.72	0.15	0.52	0.90	0.22	0.67	0.95
МО интегрални	0.17	0.54	0.89	0.38	0.77	0.97	0.50	0.85	0.99

Табела 4.2: Логистичка расподела $LG(0,1)$

Бета $B_2(2,2)$ расподела је симетрична али није симетрична око нуле.



Слика 4.3: Бета $B_2(2,2)$ расподела

Прво смо транслирали расподелу тако да јој медијана буде нула, а затим померили расподелу за 0.05 и 0.07.

Код помераја 0.05 МО интегрални тест има највећу моћ за узорке свих обима и за све прагове значајности. Сличне моћи, веће од осталих тестова, имаће МО Колмогоровљев тест, ω^2 тест и Вотсонов и Дарлингов тест за узорке обима 50 док ће за узорке обима 100 МО Колмогоровљев тест и ω^2 тест имати мало већу моћ. Најмању моћ за узорке обима 50 и 100 има Раов и Хилов тест.

За узорке обима 20, ако изузмемо МО интегрални тест, за праг значајности 0.01 и 0.05 сви тестови имају приближно једнаку моћ теста, док за праг значајности 0.1 најмању моћ имају МО Колмогоровљев тест и тест знакова.

Код помераја 0.1 најмоћнији тест је и даље МО интегрални тест. Остали тестови имају сличне моћи теста за узорке обима 100, осим теста знакова који има мало мању моћ и Раовог и Хиловог теста који има знатно мању моћ од моћи осталих тестова.

За узорке обима 50 МО Колмогоровљев тест и ω^2 тест су тестови са сличним моћима (0.84, 0.74 и 0.51 за прагове значајности редом 0.1, 0.05 и 0.01). Најмању моћ има Раов и Хилов тест (0.52, 0.41 и 0.21 за прагове 0.1, 0.05 и 0.01), затим тест знакова. Остали тестови се налазе између ових вредности моћи теста.

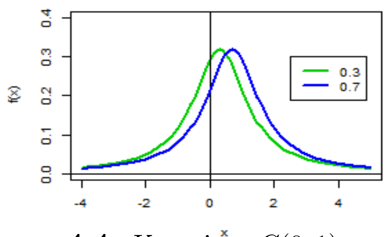
Бета расподела $B_2(2,2)$

	померај= 0.05								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.01	0.05	0.11	0.09	0.14	0.28	0.09	0.22	0.43
Колмогоров	0.02	0.05	0.14	0.09	0.19	0.40	0.12	0.27	0.55
Вотсон и Дарлинг	0.02	0.06	0.17	0.10	0.20	0.37	0.16	0.29	0.49
ω^2 тест	0.02	0.08	0.22	0.09	0.23	0.44	0.17	0.34	0.59
Рао Хил	0.02	0.03	0.07	0.08	0.11	0.15	0.14	0.18	0.34
МО Колмогоров	0.00	0.07	0.21	0.07	0.18	0.47	0.09	0.30	0.60
МО интегрални	0.05	0.16	0.39	0.15	0.36	0.62	0.25	0.48	0.73
	померај= 0.1								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100

Тест знакова	0.05	0.29	0.61	0.25	0.50	0.82	0.25	0.61	0.91
Колмогоров	0.08	0.33	0.74	0.25	0.63	0.94	0.32	0.74	0.98
Вотсон и Дарлинг	0.11	0.46	0.86	0.30	0.70	0.96	0.40	0.79	0.98
ω^2 тест	0.12	0.51	0.89	0.29	0.74	0.97	0.42	0.84	0.99
Рао Хил	0.06	0.21	0.46	0.19	0.41	0.65	0.27	0.52	0.85
МО Колмогоров	0.00	0.53	0.92	0.25	0.74	0.99	0.30	0.85	1.00
МО интегрални	0.23	0.72	0.98	0.48	0.89	1.00	0.61	0.94	1.00

Табела 4.3: Бета расподела $B_2(2,2)$

Код Кошијеве $C(0,1)$ расподеле померене за 0.3, најбољу моћ теста има Раов и Хилов тест (0.70, 0.49 и 0.32 за прагове 0.1, 0.05 и 0.1 и узорак обима 100). Следећи најмоћнији тестови су Колмогоровљев тест и тест Вотсона и Дарлинга, где Колмогровљјев тест има већу моћ за узорке обима 100, а Вотсонов и Дарлингов тест даје боље резултате за узорке обима 20 и 50.



Слика 4.4: Кошијева $C(0,1)$ расподела

Најмању моћ имају МО Колмогоровљев тест и МО интегрални тест.

Ако Кошијеву расподелу померимо за 0.7 добићемо сличне резултате. Тестови са најмањом моћи ће бити МО Колмогоровљев тест и МО интегрални тест за све прагове значајности и узорке свих обима.

Најмоћнији тест је Раов и Хилов тест, затим Вотсонов и Дарлингов тест, а остали тестови, не рачунајући тестове са најмањом моћи, дају приближно једнаке резултате.

Код узорака обима 20, после интегралног теста највећу моћ имају ω^2 тест и Вотсонов и Дарлингов тест.

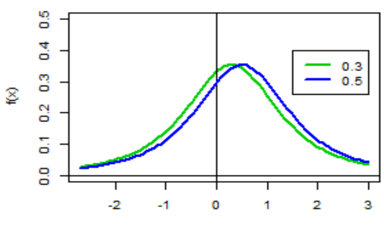
Кошијева расподела $C(0,1)$

	померај= 0.3								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.01	0.08	0.19	0.12	0.21	0.40	0.12	0.30	0.57
Колмогоров	0.03	0.08	0.22	0.10	0.23	0.48	0.14	0.33	0.62
Вотсон и Дарлинг	0.04	0.09	0.22	0.13	0.26	0.46	0.21	0.38	0.60
ω^2	0.02	0.08	0.18	0.08	0.21	0.39	0.16	0.31	0.53
Рао Хил	0.04	0.13	0.32	0.14	0.30	0.49	0.22	0.40	0.70
МО Колмогоров	0.00	0.02	0.03	0.05	0.06	0.13	0.07	0.13	0.23
МО интегрални	0.03	0.05	0.10	0.09	0.15	0.25	0.16	0.23	0.35
	померај= 0.7								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.10	0.54	0.90	0.39	0.75	0.97	0.39	0.84	0.99
Колмогоров	0.15	0.55	0.93	0.35	0.79	0.99	0.44	0.87	1.00
Вотсон и Дарлинг	0.19	0.57	0.92	0.43	0.82	0.98	0.55	0.90	0.99
ω^2 тест	0.13	0.51	0.88	0.30	0.74	0.97	0.44	0.84	1.00
Рао Хил	0.22	0.71	0.97	0.47	0.87	0.99	0.59	0.92	1.00
МО Колмогоров	0.00	0.10	0.35	0.07	0.25	0.64	0.14	0.40	0.77
МО интегрални	0.10	0.26	0.55	0.23	0.48	0.76	0.33	0.59	0.85

Табела 4.4: Кошијева расподела $C(0,1)$

Код Студентове $t(2)$ расподеле и помераја за 0.3 приближно једнаке моћи теста имаће Раов и Хилов тест, тест Вотсона и Дарлинга, тест Колмогорова и ω^2 тест.

Најмању моћ има МО Колмогоровљев тест, а затим тест знакова и МО интегрални тест који имају скоро једнаке моћи.



Слика 4.5: Студентова $t(2)$ расподела

Ако померимо Студентову $t(2)$ расподелу за 0.5 најмању моћ теста има МО Колмогоровљев тест. За узорке обима 100 и 50 МО интегрални тест и тест знакова имаће мању моћ од осталих тестова, чије су моћи међусобно приближно једнаке.

Код узорака обима 20 сви тестови имају сличну моћ теста, осим МО Колмогоровљевог теста и теста знакова за праг значајности 0.1 и 0.01.

Студентова расподела $t(2)$

	помераj= 0.3								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.02	0.10	0.26	0.13	0.25	0.49	0.13	0.36	0.65
Колмогоров	0.03	0.11	0.31	0.12	0.30	0.60	0.17	0.40	0.72
Вотсон и Дарлинг	0.04	0.12	0.30	0.15	0.32	0.55	0.23	0.44	0.68
ω^2 тест	0.03	0.13	0.32	0.11	0.30	0.56	0.20	0.42	0.69
Рао Хил	0.04	0.15	0.36	0.15	0.32	0.53	0.24	0.43	0.74
МО Колмогоров	0.00	0.04	0.12	0.05	0.11	0.31	0.08	0.21	0.43
МО интегрални	0.04	0.10	0.26	0.13	0.26	0.46	0.21	0.36	0.59
	помераj= 0.5								
α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.06	0.37	0.75	0.30	0.60	0.90	0.30	0.71	0.96
Колмогоров	0.10	0.39	0.81	0.28	0.68	0.95	0.36	0.77	0.98
Вотсон и Дарлинг	0.12	0.41	0.80	0.32	0.69	0.94	0.43	0.79	0.97
ω^2 тест	0.11	0.43	0.82	0.27	0.68	0.94	0.40	0.78	0.97
Рао Хил	0.13	0.47	0.84	0.33	0.70	0.93	0.44	0.79	0.98
МО Колмогоров	0.00	0.14	0.45	0.09	0.31	0.72	0.16	0.47	0.82
МО интегрални	0.12	0.32	0.67	0.27	0.57	0.85	0.38	0.68	0.91

Табела 4.5: Студентова расподела $t(2)$

4.1.2 Несиметричне алтернативе

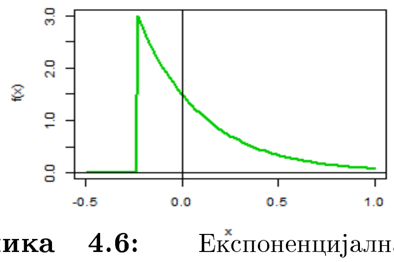
Код несиметричних алтернатива, једна врста расподела су расподеле које личе на експоненцијалну расподелу.

Друга врста расподела су расподеле које су асиметричне на једну или другу страну, као што су гама расподела, хи-квадрат расподела са пет степени слободе и Фернандезове и Стилове расподеле. Прво транслирамо тако да медијана буде нула, све расподеле које нису у близини нуле. Расподеле које нису у близини нуле прво ћемо транслирати за медијану тако да медијана буде нула.

Прво посматрамо расподеле које личе на експоненцијалне.

Ово су резултати које смо добили тестирањем:

Посматрамо експоненцијалну $\varepsilon(3)$ расподелу померену за медијану. Најбољу моћ теста показује МО Колмогоровљев тест, за све узорке и прагове значајности, осим за узорак обима 20 и праг значајности 0.01. Код узорака обима 100 и праг значајности 0.1 велику моћ имају тест Вотсона и Дарлинга и Колмогоровљев тест као и Раов и Хилов тест. За праг значајности 0.01 највећу моћ, после МО Колмогоровљевог теста, има МО интегрални тест који даје добре резултате и код узорака обима 50 и 20 за све прагове значајности и он је најмоћнији тест после МО Колмогоровљевог теста.



Слика 4.6: Експоненцијална $\varepsilon(3)$ расподела

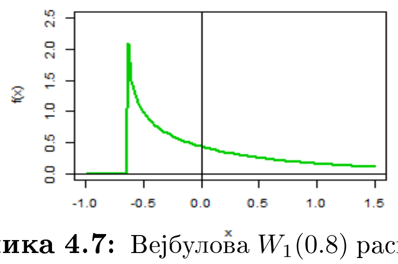
Најмању моћ ће имати тест знакова, чија је моћ приближно једнака задатом прагу значајности. Раов и Хилов тест је тест са малом моћи у односу на остале тестове.

Експоненцијална расподела $\varepsilon(3)$

n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.00	0.01	0.01	0.04	0.03	0.04	0.04	0.07	0.09
Колмогоров	0.01	0.02	0.24	0.05	0.23	0.76	0.08	0.35	0.96
Вотсон и Дарлинг	0.03	0.11	0.47	0.14	0.42	0.88	0.24	0.64	0.97
ω^2 тест	0.01	0.05	0.15	0.06	0.18	0.46	0.14	0.32	0.74
Рао Хил	0.03	0.14	0.45	0.13	0.37	0.71	0.23	0.54	0.94
МО Колмогоров	0.00	0.66	1.00	0.27	0.86	1.00	0.28	0.93	1.00
МО интегрални	0.06	0.28	0.63	0.21	0.52	0.82	0.33	0.64	0.89

Табела 4.6: Експоненцијална расподела $\varepsilon(3)$

Код Вејбулове расподеле $W_1(0.8)$ транслиране тако да је медијана нула, највећу моћ има МО Колмогоровљев тест, који једино не показује добре резултате за узорке обима 20 и праг значајности 0.01. Најмању моћ за све прагове значајности и све посматране узорке има тест знакова чија је моћ, као и код експоненцијалне расподеле, једнака задатом прагу значајности.



Слика 4.7: Вејбулова $W_1(0.8)$ расподела

После овог теста, код узорака обима 100 тест са најбољом моћи је тест Вотсона и Дарлинга за прагове значајности 0.05 и 0.01, док за праг значајности 0.1 сви тестови, осим теста знакова, имају велику моћ. За праг значајности 0.05, довољно велику моћ имају Колмогоровљев и Раов и Хилов тест, док за праг значајности 0.01 знатну моћ показује МО интегрални тест. Најмању моћ теста, после теста знакова, има ω^2 тест.

Код узорака обима 50, посматрано без МО Колмогоровљевог теста, за праг значајности 0.1 највећу моћ има тест Вотсона и Дарлинга, а затим Раов и Хилов тест и МО интегрални тест. За праг значајности 0.05 најмоћнији су МО интегрални тест и тест Вотсона и Дарлинга, док је за праг значајности 0.01 тест са највећом моћи МО интегрални тест. Најмању моћ, не рачунајући тест знакова, има ω^2 тест за прагове значајности 0.1 и 0.05 и Колмогоровљев тест за праг значајности 0.01.

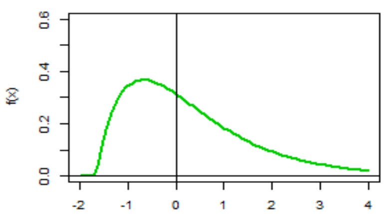
Ако посматрамо узорке обима 20, највећу моћ има МО интегрални тест. Најмању моћ показује тест Колмогорова, а затим ω^2 тест.

Вејбулова расподела $W_1(0.8)$

α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.00	0.01	0.01	0.04	0.03	0.04	0.04	0.06	0.09
Колмогоров	0.01	0.06	0.63	0.07	0.46	0.96	0.11	0.61	1.00
Вотсон и Дарлинг	0.04	0.19	0.82	0.19	0.64	0.99	0.30	0.85	1.00
ω^2 тест	0.02	0.08	0.31	0.08	0.28	0.74	0.17	0.48	0.94
Рао Хил	0.04	0.23	0.74	0.17	0.57	0.93	0.31	0.75	1.00
МО Колмогоров	0.00	0.87	1.00	0.42	0.96	1.00	0.43	0.98	1.00
МО интегрални	0.10	0.42	0.81	0.29	0.67	0.92	0.42	0.77	0.96

Табела 4.7: Вејбулова расподела $W_1(0.8)$

Посматрамо гама $G_2(2,1)$ раподелу транслирану тако да је медијана нула. Најмоћнији тест, осим за узорке обима 20 и праг значајности 0.01, је МО Колмогоровљев тест, и он има знатно већу моћ од осталих тестова за узорке обима 50 и 100. Најмању моћ има тест знакова.



Слика 4.8: Гама $G_2(2,1)$ расподела

Ако изузмемо ова два теста, међу осталим тестовима, највећу моћ показује МО интегрални тест, а затим Раов и Хилов тест и Вотсонв и Дарлингов тест који имају међусобно једнаке моћи.

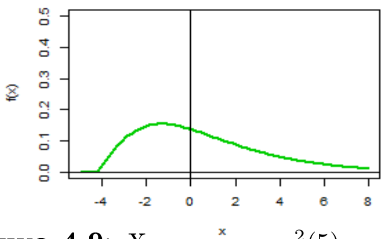
Најмању моћ имају тест Колмогорова и ω^2 тест. ω^2 тест има мању моћ за узорке обима 100 и праг значајности 0.1 и 0.05, док тест Колмогорова има мању моћ за узорке обима 50 и прагове значајности 0.1 и 0.05.

Гама расподела $G_2(2,1)$

α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.00	0.01	0.01	0.04	0.03	0.04	0.04	0.07	0.09
Колмогоров	0.01	0.01	0.02	0.05	0.07	0.19	0.07	0.13	0.46
Вотсон и Дарлинг	0.02	0.05	0.13	0.10	0.20	0.40	0.17	0.34	0.60
ω^2 тест	0.01	0.02	0.05	0.05	0.09	0.17	0.11	0.18	0.34
Рао Хил	0.02	0.06	0.16	0.09	0.19	0.32	0.16	0.29	0.60
МО Колмогоров	0.00	0.66	1.00	0.28	0.86	1.00	0.28	0.92	1.00
МО интегрални	0.06	0.27	0.62	0.22	0.52	0.81	0.34	0.63	0.89

Табела 4.8: Гама расподела $G_2(2,1)$

Код расподеле $\chi^2(5)$, транслиране за медијану тако да је медијана нула, тест са највећом моћи, осим за узорак обима 20 и праг значајности 0.01, је МО Колмогоровљев тест. После њега највећу моћ код узорака обима 100 и праг значајности 0.1 и 0.05 има тест Вотсона и Дарлинга, док код осталих узорака, посебно за прагове значајности 0.01 и 0.05, највећу моћ има МО интегрални тест.



Слика 4.9: Хи-квадрат $\chi^2(5)$ расподела

Тест са најмањом моћи је тест знакова, чија моћ код свих узорака не пралази задати праг значајности. Следећи тест са најмањом моћи, за узорке обима 50 и 100 и праг значајности 0.1 и 0.05 је ω^2 тест, док тест Колмогорова има мању моћ код узорака обима 20 за исте прагове значајности.

Раов и Хилов тест и тест Вотсона и Дарлинга имају исте моћи за узорке обима 20 и све прагове значајности, и за узорке обима 50 и 100 за прагове значајности 0.05 и 0.1.

Хи-квадрат расподела $\chi^2(5)$

α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.00	0.01	0.01	0.04	0.03	0.04	0.04	0.07	0.09
Колмогоров	0.01	0.02	0.24	0.05	0.23	0.76	0.08	0.35	0.96
Вотсон и Дарлинг	0.03	0.11	0.47	0.14	0.42	0.88	0.23	0.64	0.97
ω^2 тест	0.01	0.05	0.15	0.06	0.18	0.46	0.14	0.33	0.74
Рао Хил	0.03	0.14	0.45	0.13	0.37	0.71	0.23	0.54	0.94
МО Колмогоров	0.00	0.65	1.00	0.28	0.85	1.00	0.29	0.92	1.00
МО интегрални	0.06	0.27	0.63	0.22	0.52	0.82	0.34	0.64	0.89

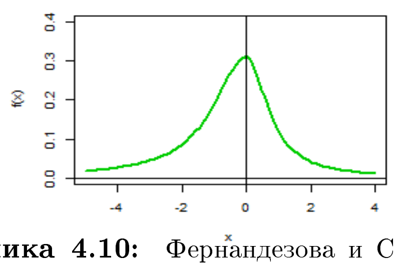
Табела 4.9: Хи-квадрат расподела $\chi^2(5)$

Следеће расподеле које ћемо посматрати су расподеле трансформисане помоћу Фернандезове и Стилове трансформације у асиметричне расподеле в.[11]. Уколико је $f(x)$ густина функције расподеле која је сметрична око нуле, тада је густина функције расподеле настала Фернандезовом и Стиловом трансформацијом дата са:

$$g(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2}{1+\theta+\frac{1}{1+\theta}} f\left(\frac{x}{1+\theta}\right), & x < 0, \theta > 0, \\ \frac{2}{1+\theta+\frac{1}{1+\theta}} f((1+\theta)x), & x \geq 0, \theta > 0, \end{cases}$$

где је θ коефицијент асиметрије. Симетричне функције расподеле које трансформишемо Фернандезовом и Стиловом трансформацијом су Студентова $t(1)$ расподела и нормална $N(0,1)$ расподела.

Прво посматрамо Фернандезову и Стилову трансформацију Студентове $t(1)$ расподеле са коефицијентом асиметрије 0.8. Код узорака обима 100 најмоћнији тест је ω^2 тест (0.86, 0.77 и 0.55 за прагове значајности редом 0.1, 0.05 и 0.01) и једнако моћни тестови су МО интегрални тест и тест Колмогорова, с тим што тест Колмогорова има мало мању моћ за праг значајности 0.01. Најмању моћ 0.70, 0.30 има тест знакова



Слика 4.10: Фернандезова и Стилова трансформација Студентове расподеле $FSt(1;0.8)$

за праг значајности 0.1 и 0.01, док за праг значајности 0.05 тест са најмањом моћи је Раов и Хилов тест 0.52.

Код узорака обима 50 највећу моћ има ω^2 тест за све прагове значајности (0.63, 0.50 и 0.27 за прагове редом 0.1, 0.05 и 0.01),затим за прагове значајности 0.1 и 0.01 МО Колмогоровљев и МО интегрални тест имају незнатно мању моћ од ω^2 тест, док за праг 0.05 МО Колмогоровлјев, МО интегрални и тест Колмогорова имају исту моћ. Најмању моћ теста има тест знакова (0.39, 0.28 и 0.12 за прагове редом 0.1, 0.05 и 0.01).

За узорке обима 20 и праг значајности 0.1 и 0.01 најбоље резултате показује ω^2 тест док за праг значајности 0.05 највећу моћ има МО Колмогоровљев тест. Најмању моћ има тест знакова.

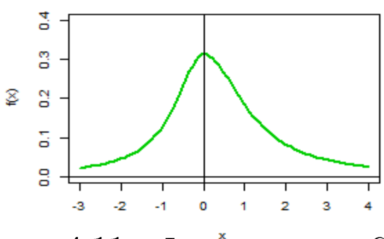
Фернандезова и Стилова трансформација Студентове $t(1)$ расподеле са коефицијентом асиметрије 0.8 $FSt(1;0.8)$

α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.02	0.12	0.30	0.15	0.28	0.54	0.15	0.39	0.70
Колмогоров	0.08	0.17	0.43	0.23	0.44	0.73	0.26	0.54	0.84
Вотсон и Дарлинг	0.05	0.16	0.43	0.17	0.38	0.67	0.25	0.50	0.77
ω^2 тест	0.10	0.27	0.55	0.25	0.50	0.77	0.37	0.63	0.86
Рао Хил	0.04	0.14	0.34	0.15	0.32	0.52	0.23	0.43	0.74
МО Колмогоров	0.00	0.23	0.46	0.31	0.44	0.72	0.36	0.59	0.82
МО интегрални	0.08	0.20	0.53	0.22	0.44	0.73	0.32	0.57	0.84

Следећа расподела коју посматрамо је Фернандезова и Стилова трансформација Студентове $t(1)$ расподеле са коефицијентом асиметрије 1.2.

Највећу моћ теста за све узорке и прагове значајности има МО интегрални тест, а једнако добру моћ има и ω^2 тест. Најмању моћ има тест знакова и МО Колмогоровљев тест.

Остали тестови имају међусобно сличне моћи теста ближе тестовима са великом моћи теста.

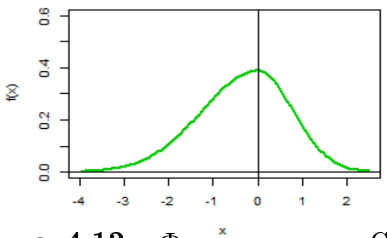


Слика 4.11: Фернандезова и Стилова трансформација Студентове расподеле $FSt(1;1.2)$

Фернандезова и Стилова трансформација Студентове $t(1)$ расподеле са коефицијентом асиметрије 1.2 $FSt(1;1.2)$

α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.01	0.07	0.18	0.11	0.20	0.38	0.11	0.29	0.54
Колмогоров	0.03	0.08	0.24	0.10	0.25	0.52	0.15	0.35	0.66
Вотсон и Дарлинг	0.03	0.10	0.25	0.13	0.27	0.49	0.20	0.38	0.61
ω^2 тест	0.03	0.12	0.30	0.11	0.29	0.54	0.19	0.41	0.67
Рао Хил	0.03	0.09	0.21	0.11	0.22	0.36	0.18	0.32	0.59
МО Колмогоров	0.00	0.07	0.19	0.06	0.16	0.41	0.09	0.27	0.55
МО интегрални	0.05	0.15	0.35	0.15	0.34	0.58	0.24	0.45	0.70

Сада посматрамо Фернандезову и Стилову трансформацију нормалне $N(0,1)$ расподеле са коефицијентом асиметрије 0.8.



Слика 4.12: Фернандезова и Стилова трансформација нормалне расподеле $FSN(0,1;0.8)$

Код ове расподеле за узорке обима 100 и 50 велику моћ има МО Колмогоровљев тест (0.97, 0.94 и 0.80 код узорака обима 100 и 0.82, 0.70 и 0.45 код узорака обима 50 за прагове значајности редом 0.1, 0.05 и 0.01) и МО интегрални тест. Следећи тест са највећом моћи је ω^2 тест, чија је моћ блиска моћима са предходна два теста за праг значајности 0.1, док за прагове 0.05 и 0.01 има мању моћ. Тест који има најмању моћ је Раов и Хилов тест (0.63, 0.38 и 0.22 код узорака обима 100 и 0.34, 0.23 и 0.09 за узорке обима 50 за прагове редом 0.1, 0.05 и 0.01).

За узорке обима 20 МО Колмогоровљев тест има највећу моћ за прагове значајности 0.1 и 0.05, док су за праг значајности 0.01 најмоћнији тестови, са међусобно једнаким моћима МО интегрални тест и ω^2 тест, који имају и знатну моћ за прагове 0.05 и 0.1. Тест са најмањом моћи је тест знакова .

Фернандезова и Стилова трансформација нормалне $N(0,1)$ расподеле са коефицијентом асиметрије 0.8 $FSN(0,1;0.8)$

α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.02	0.12	0.31	0.15	0.29	0.54	0.15	0.39	0.70
Колмогоров	0.08	0.19	0.47	0.24	0.47	0.78	0.28	0.58	0.89
Вотсон и Дарлинг	0.06	0.21	0.55	0.18	0.44	0.76	0.27	0.56	0.85
ω^2 тест	0.12	0.34	0.67	0.29	0.59	0.86	0.42	0.71	0.92
Рао Хил	0.03	0.09	0.22	0.12	0.23	0.38	0.19	0.34	0.63
МО Колмогоров	0.00	0.45	0.80	0.44	0.70	0.94	0.48	0.82	0.97
МО интегрални	0.11	0.37	0.81	0.29	0.65	0.92	0.41	0.76	0.96

Посматрамо Фернандезову и Стилову трансформацију нормалне $N(0,1)$ расподеле са коефицијентом асиметрије 1.2. Најмоћнији тест за све узорке и све прагове значајности је МО интегрални тест.

Слика 4.13: Фернандезова и Стилова трансформација нормалне расподеле $FSN(0,1;1.2)$

Осим МО интегралног теста за узорке обима 50 и 100 велику моћ имају и МО Колмогоровљев тест и ω^2 тест, док најмању моћ за ове узорке има Раов и Хилов тест.

За узорак обима 20 тест знакова, МО Колмогоровљев тест, Раов и Хилов тест и тест Колмогорова имају најмање и међусобно приближно једнаке моћи теста, док ω^2 тест и тест Вотсона и Дарлинга имају мало већу моћ.

Фернандезова и Стилова трансформација нормалне $N(0,1)$ расподеле са коефицијентом асиметрије 1.2 $FSN(0,1;1.2)$

α	0.01			0.05			0.1		
n	20	50	100	20	50	100	20	50	100
Тест знакова	0.01	0.07	0.18	0.11	0.19	0.38	0.11	0.29	0.54
Колмогоров	0.03	0.09	0.25	0.11	0.27	0.55	0.15	0.38	0.71
Вотсон и Дарлинг	0.04	0.12	0.33	0.13	0.30	0.56	0.20	0.41	0.68
ω^2 тест	0.04	0.15	0.39	0.12	0.35	0.63	0.21	0.47	0.76
Рао Хил	0.02	0.06	0.12	0.09	0.16	0.24	0.15	0.25	0.47
МО Колмогоров	0.00	0.15	0.42	0.09	0.30	0.69	0.12	0.45	0.80
МО интегрални	0.07	0.27	0.61	0.22	0.51	0.81	0.33	0.63	0.88

4.2 Теоријска моћ теста

Као што смо раније напоменули, моћ за неке тестове, као нпр. тест знакова можемо одредити и теоријским путем. Теоријски моћ теста за тест знакова рачунамо као вероватноћу :

$$P_{H_1}\{E_n \in W\} = P\left\{\left|\frac{1}{2} - F_n(0)\right| \geq t\right\}$$

Када средимо израз добијамо:

$$\begin{aligned}
P\left\{\left|\frac{1}{2} - F_n(0)\right| \geq t\right\} &= 1 - P\left\{\left|\frac{1}{2} - F_n(0)\right| < t\right\} \\
&= 1 - P\left\{-t < \frac{1}{2} - F_n(0) < t\right\} \\
&= 1 - P\left\{\frac{1}{2} - t < F_n(0) < \frac{1}{2} + t\right\} \qquad (4.1) \\
&= 1 - P\left\{n(\frac{1}{2} - t) < nF_n(0) < n(\frac{1}{2} + t)\right\} \\
&= 1 - \left[F_Y\left(n\left(\frac{1}{2} + t\right)\right) - F_Y\left(n\left(\frac{1}{2} - t\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Где је $Y = nF_n(0)$ случајна промењива са биномном $B(n, F(0))$ расподелом, $F_Y(y) = P(Y < y)$ њена функција расподеле, а $F(0)$ функција расподеле алтернативне расподеле.

Вредност t као границу критичне области добијене теоријским путем рачунамо на следећи начин:

$$t = \frac{F_Y^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}{n} - \frac{1}{2},$$

где је $F_Y^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ квантил реда $1 - \frac{\alpha}{2}$, док је α задати праг значајности.

Границе критичне области добијене теоријским и емпиријским путем приказане су у табели 4.14 и можемо приметити да су једнаке.

Граница критичне области

α	Теоријска			Емпиријска		
0.01	0.30	0.18	0.13	0.30	0.18	0.13
0.05	0.20	0.14	0.10	0.20	0.14	0.10
0.10	0.20	0.12	0.08	0.20	0.12	0.08

Табела 4.14: Теоријска и емпиријска граница критичне области

У табели 4.15 су приказане су теоријске и емпиријске моћи теста за неке алтернативе и праг значајности 0.05 код теста знакова. Табеле за све алтернативе и прагове значајности могу се наћи у Додатку 1.

Теоријска и емпиријска моћ теста знакова за праг значајности 0.05

расподела	померај	Теоријска моћ			Емпиријска моћ		
n		20	50	100	20	50	100
$N(0, 0.1)$	0.02	0.10	0.16	0.30	0.09	0.15	0.29
$LG(0.1)$	0.5	0.18	0.35	0.64	0.17	0.35	0.64
$B_2(2, 2)$	0.05	0.10	0.14	0.27	0.09	0.14	0.28
$C(0, 1)$	0.7	0.40	0.76	0.97	0.39	0.75	0.97
$t(2)$	0.3	0.14	0.25	0.49	0.13	0.25	0.49
$\varepsilon(3)$	0	0.08	0.05	0.05	0.04	0.03	0.04
$G_2(2, 1)$	0	0.08	0.05	0.05	0.04	0.03	0.04
$FSt(1; 0.8)$	0	0.28	0.39	0.62	0.15	0.28	0.54
$FSN(0, 1; 1.2)$	0	0.12	0.20	0.38	0.11	0.19	0.38

Табела 4.15: Теоријска и емпиријска моћ теста знакова за праг значајности 0.05

Може се приметити да теоријска моћ теста одговара добијеној емпиријској моћи теста код скоро свих алтернатива. Једнакост моћи које су добијене емпиријским и теоријским путем је још једна потврда, поред емпиријског прага значајности, да је тестирање коректно и да су добијени резултати ваљани.

4.3 Асимптотска ефикасност тестова

Још један начин упоређивања тестова јесте асимптотска ефикасност тестова, чије су вредности за алтернативе положаја дате у табели 4.16.

тестови симетрије	Нормална расподела	Логистичка расподела	Кошијева расподела
Тест знакова	0.637	0.751	0.814
Колмогоров	0.637	0.751	0.814

Вотсон и Дарлинг	0.955	1.000	0.608
ω^2 тест	0.907	0.988	0.750
Рао Хил	0.486	0.658	1.000
МО Колмогоров	0.764	0.750	0.376
МО интегрални	0.977	0.937	0.358

Табела 4.16: Асимптотска ефикасност тестова за алтернативе положаја

Вредности асимптотске ефикасности тестова симетрије из табеле 4.16 су преузети из [8] и [6].

Можемо приметити да тестови који имају велику асимптотску ефикасност имају и велику моћ теста и обрнуто, тестови са најмањом ефикасношћу су тестови са најмањим моћима.

Код нормалне расподеле највећу асимптотску ефикасност има МО интегрални тест, затим Вотсонов и Дарлингов тест па ω^2 тест, а то су и тестови са највећим моћима. Најмању ефикасност показује Раов и Хилов тест и код нормалне расподеле то је тест са најмањом моћи.
Тест са највећом асимптотском ефикасношћу код логистичке расподеле је тест Вотсона и Дарлинга, а затим ω^2 тест па МО интегрални тест. Ово су и три најмоћнија теста код логистичке расподеле. Тест који има најмању асимптотску ефикасност је Раов и Хилов тест, а то је уједно и најслабији тест што се тиче моћи теста.
Код Кошијеве расподеле Раов и Хилов тест ће имати највећу асимптотску ефикасност, а и највећу моћ. После њега најефикаснији су Колмогоровљев тест, који је најмоћнији после Раовог и Хиловог теста, и тест знакова, који има средњу вредност моћи теста. Тестови који имају најмању ефикасност код Кошијеве расподеле биће МО интегрални тест и МО Колмогоровљев тест, а то су и тестови са најмањом моћи.

Закључак

На основу тестираних алтернатива можемо извести закључке о самим тестовима.

Тест знакова је тест који не даје добре резултате код асиметричних расподела којима је медијана једнака нули. Моћ теста који се добије за такве алтернативе је блиска задатом прагу значајности. С обзиром да тест знакова мери симетричност упоређујући број вредности тест статистике које се налазе са леве и десне стране нуле, не изненађују добијени резултати јер код расподела чија је медијана једнака нули постоји исти број вредности са обе стране нуле. Код алтернатива положаја овај тест је у некој средини што се тиче моћи теста, док је код асиметричних расподела које су настале Фернандезовом и Стиловом трансформацијом тест знакова међу тестовима са најмањом моћи, нпр. код Фернандезове и Стилове трансформације Студентове $t(1)$ расподеле са коефицијентом асиметрије 1.2.

Тест Колмогорова се код већине алтернатива не истиче ни као тест са највећом ни тест са најмањом моћи.

Вотсонов и Дарлингов тест је тест који за неке алтернативе има неку средњу вредност моћи теста као код нормалне $N(0, 0.1)$ расподеле са померајем 0.02 и логистичке расподеле $L(0, 1)$ са померајем 0.7. За друге алтернативе овај тест је међу тестовима са великом моћи, као код Студентове $t(2)$ расподеле са померајем 0.3 и Кошијеве $C(0, 1)$ расподеле са истим померајем.

ω^2 тест показује различите резултате за различите алтернативе. Код асиметричних расподела насталих Фернандезовом и Стиловом трансформацијом неких симетричних расподела он је међу моћнијим тестовима, нпр. код Фернандезове и Стилове трансформације Студентове $t(1)$ са коефицијентом асиметрије 0.8, док код других асиметричних расподела је међу тестовима са најмањом моћи, као код $G(2, 1)$ расподеле.

Раов и Хилов тест такође показује разноврсне резултате. Код расподела Фернандеза и Стила он је међу тестовима са најмањом моћи, нпр. код Фернандезових и Стилових трансформација нормалне $N(0, 1)$

расподеле са коефицијентом асиметрије 0.8. Код осталих асиметричних расподела има средњу вредност моћи, док код неких расподела симетричних око нуле је тест са највећом моћи, нпр. $t(2)$ расподела са померајем 0.5.

МО Колмогоровљев тест показује одличне резултате код тестиране експоненцијалне, хи-квадрат, Вејбулове и гама расподеле и има знатно већу моћ од осталих тестова, што се посебно може приметити код $G(2,1)$ и $\chi^2(5)$ расподеле. Он је такође међу моћнијим тестовима код Фернандезових и Стилових асиметричних расподела. Код алтернатива положаја овај тест има мању моћ у односу на остале тестове, као код Кошијеве $C(0,1)$ расподеле. Код узорака обима 20 и праг значајности 0.01 овај тест не даје исправне резултате.

МО интегрални тест је међу моћнијим тестовима код Фернандезових и Стилових расподела и код других асиметричних расподела, нпр. код $G(2,1)$ расподеле. Код алтернатива положаја ово је такође један од тестова са највећом моћи, нпр. код $B(2,2)$ расподеле са померајем 0.05, осим код Кошијеве $C(0,1)$ расподеле где припада тестовима који имају најмању моћ.

Када сагледамо све тестове и све алтернативе најстабилнији тест је тест Вотсона и Дарлинга који је међу најмоћнијим тестовима или има велику моћ теста код свих алтернатива.
Још један тест који даје добре резултате код свих испитаних алтернатива је МО интегрални тест.

С обзиром на стабилност ових тестова код различитих алтернатива, најбоље је изабрати неки од ова два теста за тестирање хипотезе о симетричности расподеле око нуле.

Додатак 1

Табеле теоријске и емпиријске моћи теста за тест знакова.

Теоријска и емпиријска моћ теста знакова за праг значајности 0.01

расподела	померај	Теоријска моћ			Емпиријска моћ		
n		20	50	100	20	50	100
$N(0, 0.1)$	0.02	0.01	0.05	0.13	0.01	0.05	0.12
$N(0, 0.1)$	0.05	0.09	0.52	0.89	0.09	0.51	0.88
$LG(0.1)$	0.5	0.03	0.16	0.40	0.03	0.16	0.40
$LG(0.1)$	0.7	0.06	0.38	0.76	0.06	0.38	0.76
$B_2(2, 2)$	0.05	0.01	0.05	0.11	0.01	0.05	0.11
$B_2(2, 2)$	0.07	0.02	0.11	0.27	0.02	0.11	0.26
$C(0, 1)$	0.3	0.01	0.08	0.20	0.01	0.08	0.19
$C(0, 1)$	0.7	0.10	0.53	0.90	0.10	0.54	0.90
$t(2)$	0.3	0.02	0.10	0.26	0.02	0.10	0.26
$t(2)$	0.5	0.06	0.37	0.75	0.06	0.37	0.75
$\varepsilon(3)$	0	0.01	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01
$W_1(0.8)$	0	0.01	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01
$G_2(2, 1)$	0	0.01	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01
$\chi^2(5)$	0	0.01	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01
$FSt(1; 0.8)$	0	0.06	0.19	0.38	0.02	0.12	0.30
$FSt(1; 1.2)$	0	0.01	0.07	0.18	0.01	0.07	0.18
$FSN(0, 1; 0.8)$	0	0.06	0.19	0.38	0.02	0.12	0.31
$FSN(0, 1; 1.2)$	0	0.01	0.07	0.18	0.01	0.07	0.18

Табела 4.17: Теоријска и емпиријска моћ теста знакова за праг значајности 0.01

Теоријска и емпиријска моћ теста знакова за праг значајности 0.05

расподела	померај	Теоријска моћ			Емпиријска моћ		
n		20	50	100	20	50	100
$N(0,0.1)$	0.02	0.10	0.16	0.30	0.09	0.15	0.29
$N(0,0.1)$	0.05	0.38	0.74	0.97	0.38	0.73	0.96
$LG(0.1)$	0.5	0.18	0.35	0.64	0.17	0.35	0.64
$LG(0.1)$	0.7	0.30	0.61	0.91	0.31	0.61	0.91
$B_2(2,2)$	0.05	0.10	0.14	0.27	0.09	0.14	0.28
$B_2(2,2)$	0.07	0.14	0.26	0.50	0.13	0.26	0.49
$C(0,1)$	0.3	0.12	0.21	0.40	0.12	0.21	0.40
$C(0,1)$	0.7	0.40	0.76	0.97	0.39	0.75	0.97
$t(2)$	0.3	0.14	0.25	0.49	0.13	0.25	0.49
$t(2)$	0.5	0.30	0.60	0.90	0.30	0.60	0.90
$\varepsilon(3)$	0	0.08	0.05	0.05	0.04	0.03	0.04
$W_1(0.8)$	0	0.08	0.05	0.05	0.04	0.03	0.04
$G_2(2,1)$	0	0.08	0.05	0.05	0.04	0.03	0.04
$\chi^2(5)$	0	0.08	0.05	0.05	0.04	0.03	0.04
$FSt(1;0.8)$	0	0.28	0.39	0.62	0.15	0.28	0.54
$FSt(1;1.2)$	0	0.12	0.20	0.38	0.11	0.20	0.38
$FSN(0,1;0.8)$	0	0.28	0.39	0.62	0.15	0.29	0.54
$FSN(0,1;1.2)$	0	0.12	0.20	0.38	0.11	0.19	0.38

Табела 4.18: Теоријска и емпиријска моћ теста знакова за праг значајности 0.05

Теоријска и емпиријска моћ теста знакова за праг значајности 0.1

расподела	померај	Теоријска моћ			Емпиријска моћ		
n		20	50	100	20	50	100
$N(0, 0.1)$	0.02	0.10	0.24	0.46	0.09	0.23	0.44
$N(0, 0.1)$	0.05	0.38	0.83	0.99	0.38	0.82	0.99
$LG(0.1)$	0.5	0.18	0.46	0.78	0.17	0.46	0.78
$LG(0.1)$	0.7	0.30	0.72	0.96	0.30	0.72	0.96
$B_2(2, 2)$	0.05	0.10	0.22	0.42	0.09	0.22	0.43
$B_2(2, 2)$	0.07	0.14	0.36	0.66	0.13	0.36	0.65
$C(0, 1)$	0.3	0.12	0.30	0.57	0.12	0.30	0.57
$C(0, 1)$	0.7	0.40	0.84	0.99	0.39	0.84	0.99
$t(2)$	0.3	0.14	0.36	0.65	0.13	0.36	0.65
$t(2)$	0.5	0.30	0.71	0.96	0.30	0.71	0.96
$\varepsilon(3)$	0	0.08	0.09	0.11	0.04	0.07	0.09
$W_1(0.8)$	0	0.08	0.09	0.11	0.04	0.06	0.09
$G_2(2, 1)$	0	0.08	0.09	0.11	0.04	0.07	0.09
$\chi^2(5)$	0	0.08	0.09	0.11	0.04	0.07	0.09
$FSt(1; 0.8)$	0	0.28	0.50	0.76	0.15	0.39	0.70
$FSt(1; 1.2)$	0	0.12	0.29	0.54	0.11	0.29	0.54
$FSN(0, 1; 0.8)$	0	0.28	0.50	0.76	0.15	0.39	0.70
$FSN(0, 1; 1.2)$	0	0.12	0.29	0.54	0.11	0.29	0.54

Табела 4.19: Теоријска и емпиријска моћ теста знакова за праг значајности 0.1

Додатак 2

Код у програмском језику R

Ово је код из програмског језика R за налажење границе критичне области за тест знакова, Колмогоровљев тест, тест Вотсона и Дарлинга, ω^2 тест и Рао и Хилов тест.

Налажење границе критичне области

```
# N < −100000
redS< −5
n20< −20
n50< −50
n100< −100
# Kolmogorovljev test
T20< −c()
T50< −c()
T100< −c()
# test znakova
AE20< −c()
AE50< −c()
AE100< −c()
# test Votsona i darlinga
H20< −c()
H50< −c()
H100< −c()
# omega test
R20< −c()
R50< −c()
R100< −c()
# Raov i Hilov test
N20< −c()
```

```
N50< −c()
N100< −c()
# broj cifara na koji zaokruzujemo d< −3
#parametri uniformne raspodele a< −-1
b< −1
for (i in 1:N){
z20< −round(runif(n20,a,b),d)
fn20< −ecdf(z20)(z20)
fns20< −ecdf(z20)(-z20)
o20< −sum(1-fn20-fns20)/n20
T20[ i ]< −max(abs(1-fn20-fns20))
AE20[ i ]< −abs((sum(z20>0)-n20*0.5)/n20)
H20[ i ]< −max(abs(1-fn20-fns20-o20))
R20[ i ]< −(sum((1-fn20-fns20)^ 2))/n20
N20[ i ]< −sum(abs(1-fn20-fns20-o20)^2)/n20 }
for (i in 1:N){
z50< −round(runif(n50, a,b),d)
fn50< −ecdf(z50)(z50)
fns50< −ecdf(z50)(-z50)
o50< −sum(1-fn50-fns50)/n50
T50[ i ]< −max(abs(1-fn50-fns50))
AE50[ i ]< −abs((sum(z50>0)-n50*0.5)/n50)
H50[ i ]< −max(abs(1-fn50-fns50-o50))
R50[ i ]< −(sum((1-fn50-fns50)^2))/n50
N50[ i ]< −sum(abs(1-fn50-fns50-o50)^2)/n50 }
for (i in 1:N) {
z100< −round(runif(n100, a,b),d)
fn100< −ecdf(z100)(z100)
fns100< −ecdf(z100)(-z100)
o100< −sum(1-fn100-fns100)/n100
T100[ i ]< −max(abs(1-fn100-fns100))
AE100[ i ]< −abs((sum(z100>0)-n100*0.5)/n100)
H100[ i ]< −max(abs(1-fn100-fns100-o100))
R100[ i ]< −(sum((1-fn100-fns100)^2))/n100
N100[ i ]< −sum(abs(1-fn100-fns100-o100)^2)/n100 }
S20< −matrix(c(AE20,T20,H20,R20,N20),nrow=redS, byrow=T)
S50< −matrix(c(AE50,T50,H50,R50,N50),nrow=redS, byrow=T)
S100< −matrix(c(AE100,T100,H100,H100,N100),nrow=redS, byrow=T)
brTest< −5
# kvantil reda 0.9
# jednostrana kriticna oblast za prag znacajnosti 0.
```

```
q90S20< −c()
q90S50< −c()
q90S100< −c()
for (j in 1:brTest){
q90S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.9)
q90S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.9)
q90S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.9) }
# kvantil reda 0.95
# jednostrana kriticna oblast za prag znacajnosti 0.05
# deo dvostrane kriticne oblasti za prag znacajnosti 0.1
q95S20< −c()
q95S50< −c()
q95S100< −c()
for (j in 1:brTest){
q95S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.95)
q95S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.95)
q95S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.95)}
# kvantil reda 0.99
# jednostrana kriticna oblast za prag znaajnosti 0.01
q99S20< −c()
q99S50< −c()
q99S100< −c()
for (j in 1:brTest){
q99S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.99)
q99S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.99)
q99S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.99)}
redQ< −3
kolQ< −5
ImeReda< −c(”20”,”50”,”100”)
ImeKolone< −c(”En”,”In”,”Hn”,”Rn”,”Nn”)
q99S< −round(matrix(c(q99S20,q99S50,q99S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q99S)< −ImeReda
colnames(q99S)< −ImeKolone
q95S< −round(matrix(c(q95S20,q95S50,q95S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q95S)< −ImeReda
colnames(q95S)< −ImeKolone
q90S< −round(matrix(c(q90S20,q90S50,q90S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q90S)< −ImeReda
colnames(q90S)< −ImeKolone
print(”Tabela za kvantil reda 0.99 ”)
print(t( q99S))
```

```
print("Tabela za kvantil reda 0.95 ")
print(t(q95S))
print("Tabela za kvantil reda 0.90 ")
print( t(q90S))
q< −cbind(t(q99S),t(q95S),t(q90S))
```

Налажење граница критичне области за МО КОлмогоровљев тест и МО интегрални тест.

```
# Nalazenje granica kriticne oblasti za MO Kolmogorovljev test i MO integralni test.
nasaSimetrijaK< −function(x,n,k){
x=sort(x)
y< −abs(x)
T2< −0
t2< −c()
T3< −0
t3< −c()
for(j in k:(n-k)){
T2=T2+(n-n∗ecdf(y)(y[ j ]))∗choose(n-j,k)∗choose(j-1,k-1)
T3=T3+(n-n∗ecdf(y)(y[ j ]))∗choose(n-j,k-1)∗choose(j-1,k)
t2=c(t2,rep(y[ j ],choose(n-j,k)∗choose(j-1,k-1)))
t3=c(t3,rep(y[ j ],choose(n-j,k-1)∗choose(j-1,k))) }
T=(T2-T3)/(n∗choose(n,2∗k))
t=ks.test(t2,t3)statistic
return(c(T,t))}
tablicaH0=function(N,n,a,b,k){
T=c()
t=c()
for(i in1 : N){
x=runif(n,a,b)
pp=nasaSimetrijaK(x,n,k)
T=c(T,pp[1])
t=c(t,pp[2])
}
return(list(JJ=T,KK=t))
}
T120< −tablicaH0(100000,20,-1,1,1)
J120< −T120[1]
K120< −T120[2]
J120< −as.numeric(unlist(J120))
K120< −as.numeric(unlist(K120))

T150< −tablicaH0(100000,50,-1,1,1)
J150< −T150[1]
K150< −T150[2]
J150< −as.numeric(unlist(J150))
K150< −as.numeric(unlist(K150))
```

```
T1100< −tablicaH0(100000,100,-1,1,1)
J1100< −T1100[1]
K1100< −T1100[2]
J1100< −as.numeric(unlist(J1100))
K1100< −as.numeric(unlist(K1100))
redS< −2
brTest< −2
S20< −matrix(c(J120,K120),nrow=redS, byrow=T)
S50< −matrix(c(J150,K150),nrow=redS, byrow=T)
S100< −matrix(c(J1100,K1100),nrow=redS, byrow=T)

# kvantil reda 0.005
q005S20< −c()
q005S50< −c()
q005S100< −c()
for (j in 1:brTest){
q005S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.005)
q005S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.005)
q005S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.005)}
# kvantil reda 0.995
q995S20< −c()
q995S50< −c()
q995S100< −c()
for (j in 1:brTest){
q995S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.995)
q995S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.995)
q995S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.995) }
# kvantil reda 0.025
q025S20< −c()
q025S50< −c()
q025S100< −c()
for (j in 1:brTest){
q025S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.025)
q025S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.025)
q025S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.025) }
# kvantil reda 0.975
q975S20< −c()
q975S50< −c()
q975S100< −c()
for (j in 1:brTest){
q975S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.975)
q975S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.975)
q975S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.975)
}
# kvantil reda 0.05
q05S20< −c()
q05S50< −c()
q05S100< −c()
for (j in 1:brTest){
```

```
q05S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.05)
q05S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.05)
q05S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.05) }
# kvantil reda 0.90
q90S20< −c()
q90S50< −c()
q90S100< −c()
for (j in 1:brTest) {
q90S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.9)
q90S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.9)
q90S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.9) }
# kvantil reda 0.95
q95S20< −c()
q95S50< −c()
q95S100< −c()
for (j in 1:brTest){
q95S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.95)
q95S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.95)
q95S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.95) }
# kvantil reda 0.99
q99S20< −c()
q99S50< −c()
q99S100< −c()
for (j in 1:brTest) {
q99S20[ j ]< −quantile(S20[j, ],0.99)
q99S50[ j ]< −quantile(S50[j, ],0.99)
q99S100[ j ]< −quantile(S100[j, ],0.99)}
redQ< −3
kolQ< −2
ImeReda< −c(”20”,”50”,”100”)
ImeKolone< −c(”J1n”,”K1n”)
q005S< −round(matrix(c(q005S20,q005S50,q005S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q005S)< −ImeReda
colnames(q005S)< −ImeKolone
q995S< −round(matrix(c(q995S20,q995S50,q995S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q995S)< −ImeReda
colnames(q995S)< −ImeKolone
q025S< −round(matrix(c(q025S20,q025S50,q025S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q025S)< −ImeReda
colnames(q025S)< −ImeKolone
q975S< −round(matrix(c(q975S20,q975S50,q975S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q975S)< −ImeReda
colnames(q975S)< −ImeKolone
q05S< −round(matrix(c(q05S20,q05S50,q05S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q05S)< −ImeReda
colnames(q05S)< −ImeKolone
q99S< −round(matrix(c(q99S20,q99S50,q99S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q99S)< −ImeReda
colnames(q99S)< −ImeKolone
```

```
q95S< −round(matrix(c(q95S20,q95S50,q95S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q95S)< −ImeReda
colnames(q95S)< −ImeKolone
q90S< −round(matrix(c(q90S20,q90S50,q90S100),nrow=redQ,byrow=T),3)
rownames(q90S)< −ImeReda
colnames(q90S)< −ImeKolone

   q< −cbind(t(q99S),t(q95S),t(q90S))
q1< −cbind (t(q005S),t(q995S),t(q025S),t(q975S),t(q05S),t(q95S))
```

Налажење емпиријске моћи теста

```
лат    N< −100000
n20< −20
n50< −50
n100< −100
T20< −c()
T50< −c()
T100< −c()
AE20< −c()
AE50< −c()
AE100< −c()
H20< −c()
H50< −c()
H100< −c()
R20< −c()
R50< −c()
R100< −c()
N20< −c()
N50< −c()
N100< −c()
# broj cifara na koji zaokruzujemo d< −3
m< −0
s< −1
L< −list()
r< −c(0.5,0.7)
nj< −length(r)
for(j in 1:nj){
for (i in 1:N){
z20< −round(rlogis(n20, m,s),d)+r[ j ]
fn20< −ecdf(z20)(z20)
fns20< −ecdf(z20)(-z20)
o20< −sum(1-fn20-fns20)/n20
T20[ i ]< −max(abs(1-fn20-fns20))
AE20[ i ]< −abs((sum(z20>0)-n20*0.5)/n20)
H20[ i ]< −max(abs(1-fn20-fns20-o20))
R20[ i ]< −(sum((1-fn20-fns20)ˆ2))/n20
```

```
N20[ i ]<-sum(abs(1-fn20-fns20-o20)^2)/n20 }

    for (i in 1:N){
z50<-round(rlogis(n50, m,s),d)+r[ j ]
fn50<-ecdf(z50)(z50)
fns50<-ecdf(z50)(-z50)
o50<-sum(1-fn50-fns50)/n50
T50[ i ]<-max(abs(1-fn50-fns50))
AE50[ i ]<-abs((sum(z50>0)-n50*0.5)/n50)
H50[ i ]<-max(abs(1-fn50-fns50-o50))
R50[ i ]<-(sum((1-fn50-fns50)^2))/n50
N50[ i ]<-sum(abs(1-fn50-fns50-o50)^2)/n50}

    for (i in 1:N) {
z100<-round(rlogis(n100, m,s),d)+r[ j ]
fn100<-ecdf(z100)(z100)
fns100<-ecdf(z100)(-z100)
o100<-sum(1-fn100-fns100)/n100
T100[ i ]<-max(abs(1-fn100-fns100))
AE100[ i ]<-abs((sum(z100>0)-n100*0.5)/n100)
H100[ i ]<-max(abs(1-fn100-fns100-o100))
R100[ i ]<-(sum((1-fn100-fns100)^2))/n100
N100[ i ]<-sum(abs(1-fn100-fns100-o100)^2)/n100}
nasaSimetrijaK<-function(x,n,k){
x=sort(x)
y<-abs(x)
T2<-0
t2<-c()
T3<-0
t3<-c()
for(j in k:(n-k)){
T2=T2+(n-n*ecdf(y)(y[ j ]))*choose(n-j,k)*choose(j-1,k-1)
T3=T3+(n-n*ecdf(y)(y[ j ]))*choose(n-j,k-1)*choose(j-1,k)
t2=c(t2,rep(y[ j ],choose(n-j,k)*choose(j-1,k-1)))
t3=c(t3,rep(y[ j ],choose(n-j,k-1)*choose(j-1,k)))}
T=(T2-T3)/(n*choose(n,2*k))
t=ks.test(t2,t3)statistic
return(c(T,t))}

    tablicaH1logis<-function(N,n,a,b,k,pom){
J=c()
K=c()
for(i in 1:N){
x=rlogis(n,a,b)+pom
p=nasaSimetrijaK(x,n,k)
J=c(J,p[1])
K=c(K,p[2])}
return(list(JJ=J,KK=K))}
T120<-tablicaH1logis(10000,20,0,1,1,0.7)
```

```
J120< −T120[1]
K120< −T120[2]
J120< −as.numeric(unlist(J120))
K120< −as.numeric(unlist(K120))
T150< −tablicaH1logis(10000,50,0,1,1,0.7)
J150< −T150[1]
K150< −T150[2]
J150< −as.numeric(unlist(J150))
K150< −as.numeric(unlist(K150))
T1100< −tablicaH1logis(10000,100,0,1,1,0.7)
J1100< −T1100[1]
K1100< −T1100[2]
J1100< −as.numeric(unlist(J1100))
K1100< −as.numeric(unlist(K1100))
CAE99< −c(0.300,0.180,0.130)
CT99< −c( 0.550,0.380,0.270)
CH99< −c(0.330,0.226,0.165)
CR99< −c(0.133,0.054,0.028)
CN99< −c(0.035,0.014,0.007)
CAE95< −c(0.200,0.140,0.100)
CT95< −c( 0.450,0.300,0.210)
CH95< −c(0.267,0.181,0.133)
CR95< −c(0.085,0.033,0.017)
CN95< −c(0.022,0.009,0.005)
CAE90< −c(0.200,0.120,0.080)
CT90< −c( 0.400,0.260,0.180)
CH90< −c(0.238,0.160,0.117)
CR90< −c(0.061,0.024,0.012)
CN90< −c(0.017,0.007,0.003)
CJ1005< −c(-0.227 ,-0.164, -0.113 )
CJ1995< −c(0.256 ,0.162, 0.113)
CJ1025< −c( -0.185 ,-0.125, -0.089)
CJ1975< −c(0.204, 0.125, 0.088)
CJ105< −c(-0.160, -0.107, -0.073)
CJ195< −c(0.174 ,0.107 ,0.074)
CK199< −c( 0.495 ,0.330 ,0.239)
CK195< −c( 0.433 ,0.282 ,0.195)
CK190< −c(0.389 ,0.247 ,0.174)
MAE99< −c(sum(AE20>CAE99[1]),sum(AE50>CAE99[2]),sum(AE100>CAE99[3]))/N
MT99< −c(sum(T20>CT99[1]),sum(T50>CT99[2]),sum(T100>CT99[3]))/N
MH99< −c(sum(H20>CH99[1]),sum(H50>CH99[2]),sum(H100>CH99[3]))/N
MR99< −c(sum(R20>CR99[1]),sum(R50>CR99[2]),sum(R100>CR99[3]))/N
MN99< −c(sum(N20>CN99[1]),sum(N50>CN99[2]),sum(N100>CN99[3]))/N
MK199< −c(sum(K120>CK199[1]),sum(K150>CK199[2]),sum(K1100>CK199[3]))/N
MJ199< −c(sum(J120>CJ1995[1]),sum(J150>CJ1995[2]),sum(J1100>CJ1995[3]))/N
+c(sum(J120¡CJ1005[1]),sum(J150¡CJ1005[2]),sum(J1100¡CJ1005[3]))/N

M99< −rbind(MAE99,MT99,MH99,MR99,MN99,MK199,MJ199)
rownames(M99)< −c(”En”,”In”,”Hn”,”Rn”,”Nn”,”Kn”,”Jn”)
```

```
colnames(M99)< −c(”20”,”50”,”100”)
print(”Moc testa za prag znacajnosti 0.01 ”)
print(M99)

MAE95< −c(sum(AE20>CAE95[1]),sum(AE50>CAE95[2]),sum(AE100>CAE95[3]))/N
MT95< −c(sum(T20>CT95[1]),sum(T50>CT95[2]),sum(T100>CT95[3]))/N
MH95< −c(sum(H20>CH95[1]),sum(H50>CH95[2]),sum(H100>CH95[3]))/N
MR95< −c(sum(R20>CR95[1]),sum(R50>CR95[2]),sum(R100>CR95[3]))/N
MN95< −c(sum(N20>CN95[1]),sum(N50>CN95[2]),sum(N100>CN95[3]))/N
MK195< −c(sum(K120>CK195[1]),sum(K150>CK195[2]),sum(K1100>CK195[3]))/N
MJ195< −c(sum(J120>CJ1975[1]),sum(J150>CJ1975[2]),sum(J1100>CJ1975[3]))/N
+c(sum(J120¡CJ1025[1]),sum(J150¡CJ1025[2]),sum(J1100¡CJ1025[3]))/N
M95< −rbind(MAE95,MT95,MH95,MR95,MN95,,MK195,MJ195)
rownames(M95)< −c(”En”,”In”,”Hn”,”Rn”,”Nn”,”Kn”,”Jn”)
colnames(M95)< −c(”20”,”50”,”100”)
print(”Moc testa za prag znacajnosti 0.01 ”)
print(M95)

MAE90< −c(sum(AE20>CAE90[1]),sum(AE50>CAE90[2]),sum(AE100>CAE90[3]))/N
MT90< −c(sum(T20>CT90[1]),sum(T50>CT90[2]),sum(T100>CT90[3]))/N
MH90< −c(sum(H20>CH90[1]),sum(H50>CH90[2]),sum(H100>CH90[3]))/N
MR90< −c(sum(R20>CR90[1]),sum(R50>CR90[2]),sum(R100>CR90[3]))/N
MN90< −c(sum(N20>CN90[1]),sum(N50>CN90[2]),sum(N100>CN90[3]))/N
MK190< −c(sum(K120>CK190[1]),sum(K150>CK190[2]),sum(K1100>CK190[3]))/N
MJ190< −c(sum(J120>CJ195[1]),sum(J150>CJ195[2]),sum(J1100>CJ195[3]))/N
+c(sum(J120¡CJ105[1]),sum(J150¡CJ105[2]),sum(J1100¡CJ105[3]))/N

M90< −rbind(MAE90,MT90,MH90,MR90,MN90,MK190,MJ190)
rownames(M90)< −c(”En”,”In”,”Hn”,”Rn”,”Nn”,”Kn”,”Jn”)
colnames(M90)< −c(”20”,”50”,”100”)
print(”Moc testa za prag znacajnosti 0.01 ”)
print(M90)
M< −cbind(M99,M95,M90)
L[[ j ]]< −M
j< −j+1 }
```

Литература

[1] Abbakumov V.L. Asymptotic Efficiency of Nonparametic Symmetry Tests. Ph.D. Thesis, Leningrad University, Leningrad, 1987.

[2] Балабан В., Димитријевић Д., Методи статистичке анализе, Виша школа за примењену информатику и статистику, 1980.

[3] Kalos M.H., Whitlock P.A., Monte Carlo methods, WILEY-BLACKWELL, second revised and enlarged edition.

[4] Малишић Ј., Јевремовић В., Статистичке методе у метеорологији и инжењерству, Математички факултет, 2014.

[5] Меркле М., Вероватноћа и статистика, Академска мисао, треће измењено и допуњено издање 2010.

[6] Милошевић Б., Обрадовић М., Characterization based symmetry tests and their symptotic effciencies, Statistics & probability letters, 119:155-162, 2016.

[7] Младеновић П., Вероватноћа и статистика, Математички факултет, четврто издање 2008.

[8] Nikitin Ya., Asymptotic efficiency of nonparametric tests, Cambridge University Press, 1995.

[9] Smirnov N.V. On the test of symmetry for the distribution of random variable. Dokl. Akad. Nauk SSSR 56:13-16, 1947.

[10] Стојановић С. М., Математичка статистика, Научна књига, 1980.

[11] Fernandez C., Steel M. F. J., On Bayesian modeling of fat tails and skewness. J. Am. Statist. Assoc. 93 (441), 359-371 1998.

[12] Hill D.L.,Rao P.V. Tests of symmetry based on Cramer-von Mises statistics. Biometrika 64:484-94, 1977.

[13] Chentsov N.N. Applying the Methods of the Theory of Random Processes to Statistical Criteria. Ph.D. Thesis, Moscow, 1958.

Биографија

Нада Божић је рођена у Београду 1983. године.
Трећу београдску гимназију завршила је 2002. године у Београду.
Дипломирала је на смеру Статистика, актуарска и финансијска математика, Математичког факултета, Универзитета у Београду 2014. године.
Има четрнаест година искуства у индивидуалном раду из области математике са ученицима основних и средњих школа и припреми ученика основних и средњих школа за пријеми испит.
Радила је у Републичком заводу за статистику на попису становништва 2002. године и у истраживању "Структуре расхода и прихода пословања правних лица и предузетника" 2012. године.
Од јануара до априла 2015. радила је као наставник математике на замени у основној школи "Иван Гундулић".
Од априла 2015. ради у Републичком заводу за статистику, у одсеку Национални рачуни, цене и пољопривреда, група за статистику државних финансија.