Matematički fakultet u Beogradu

Master teza

Primene Banahovih algebri u klasičnoj analizi

Autor:
Nataša Gajić

Mentor:
Profesor dr Miloš Arsenović

22. juli 2016

Sadržaj

1 Početna reč

Glavni cilj ove teze je da prikaže neke primene Banahovih algebri na raznim primerima iz klasične analize. Primeri kojima ćemo najviše pažnje posvetiti su primer Disk algebre kao i primer Algebre Vinera.
Iako ćemo se većinom baviti komutativnim algebrama, zaključci i rešenja do kojih ćemo doći važe i za opštije slučajeve od komutativnih Banahovih algebri.
Zatim ćemo napraviti uvod u Gelfandovu teoriju, koju ćemo zatim koristiti na primenama dveju prethodno pomenutih algebri. Te primene će dovesti do nekih interesantnih primena, koje i jesu centralna tema ovog rada.
Rad ćemo završiti prirodnim prelaskom (uz malo neophodne topologije) sa navodjenjem Korona problema za ograničene analitičke funkcije. U radu ćemo samo formulisati problem, koji je rešen takozvanom *jakom analizom*, ali koja izlazli van granica ovog rada.

2 Uvod

Teorija Banahovih algebri sadrži veliki deo povezivanja izmedju algebarskih svojstava sa jedne strane, a topoloških sa druge. Takodje, teorije Banahovih algebri i holomorfnih funkcija su vrlo usko povezane. Najjednostavniji dokaz fundamentale činjenice da je spektar elementa x, $\sigma(x)$, neprazan koristi Luvilovu teoremu za cele funkcije, dok formula za spektralni radijus, tj. *Gelfandova formula*, $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(a)$, prirodno sledi iz teorema o stepenim redovima. Ovo je jedan od razloga zašto ćemo se ograničiti na razmatranje kompleksnih Banahovih algebri u ovom radu. Teorija realnih Banahovin algebri ne zadovoljava potrebe ovog rada.

3 Kratki istorijat Banahovih algebri

Banahove algebre, kao i Banahovi prostori, su dobili ime po poljskom matematičaru Stefanu Banahu (1892.–1945.) koji je uveo koncept Banhovih prostora, ali Banah sam nikada nije proučavao Banahove algebre, one po njemu nose naziv jer su to algebre koje su istovremeno i Banahovi prostori. Prvi koji ih je precizno definisao je, najverovatnije, bio japanski matematičar Mitio Nagumo 1936., koji ih je definisao pod nazivom ”linearni metrički prstenovi”, ali je matematičar koji je najviše zaslužan za razvoj ove teorije svakako I. M. Gelfand (1913. – 2009.), koji ih je uveo pod nazivom ”normirani prstenovi”. U klasičnom monografu, autori, kada i ako govore o Banahovim

algebrama, govore o njima kao o "Gelfandovim algebrama". Medjutim, 1945. V. Ambrose (1914. – 1995.) ih naziva "Banahovim algebrama", i taj naziv je ostao do danas.
U današnje vreme, kao teorija koja povezuje znaäjne i velike oblasti matematike kao što su analiza, algebra i topologija, teorija Banahovih algebri je vrlo popularana za izučavanje.

4 Elementarna teorija Banahovih algebri

4.1 Opšti pojmovi

Sada ćemo uvesti pojam Banahovih algebri, kao i neka osnovna svojstva, od kojih ćemo dokazati ona koja ćemo koristiti.

Definicija 4.1.1. Normiran prostor A nazivamo *Banahovim prostorom* ako je kompletan u metrici indukovanoj normom.

Definicija 4.1.2. Neka je A vektorski prostor nad kompleksinim poljem K. Ako važe sledeći uslovi

(1) Za svako x, y, z iz A, $x(yz) = (xy)z$

(2) Za svako x, y, z iz A,

$$(x + y)z = xz + yz$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

(3) Za svako x, y, z iz A i za svako α iz K, $\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y$

(4) Za svako x, y, z iz A, $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, gde je $\|\cdot\|$ norma definisana u A

(5) Ako za neke x, y iz A i za svaka dva niza x_n, y_n iz A važi $\|x_n - x\| \to 0$ i $\|y_n - y\| \to 0$, kada $n \to \infty$, onda $\|x_n y_n - xy\| \to 0$, kada $n \to \infty$

(6) Za svako x iz A postoji e iz A, tako da je $xe = ex = x$

onda za A kažemo da je normirana kompleksna algebra.
Ako je A Banahov prostor, onda je A *Banahova algebra.*

Nejednakost (4) čini množenje neprekidnom operacijom u A.
To znači da iz uslova (4) možemo dobiti uslov (5). Pokažimo to.

Dokaz. Neka važi leva strana uslova (5), tj. neka su x_n i y_n proizvoljni nizovi iz A i x i y iz A, tako da $\|x_n - x\| \to 0$ i $\|y_n - y\| \to 0$, kada $n \to \infty$. Posmatramo jednakost

$$x_n y_n - xy = x_n y_n - xy_n + xy_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y).$$

Kada normiramo ovu jednakost, dobijamo

$$\|x_n y_n - xy\| = \|(x_n - x)y_n + x(y_n - y)\| \leq \|(x_n - x)y_n\| + \|x(y_n - y)\| \leq$$
$$\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \to 0,$$

kada $n \to \infty$. Dakle, dobili smo uslov (5). Što znači da nam u prethodnoj definiciji nije neophodan uslov (5). ■

Primetimo da u opštem slučaju A ne mora biti, i nije, komutativna. Navedimo nekoliko jednostavnih primera.

Primer 4.1. Skup svih kompleksnih kvadratnih matrica sa operatorskom ili indukovanom normom je primer nekomutativne Banahove algebre.

Primer 4.2. Neka je X Banahov prostor. $A = B(X)$ je Banahova algebra gde množenje definišemo kao kompoziciju operatora. Takva algebra takodje nije komutativna.
Ovaj primer je uopštenje prehodnog primera.

Primer 4.3. Skup svih linearnih opertora na R^k, ili bilo kom Banahovom prostoru sa normom

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| | x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

gde je X dati Banahov prostor, a A linearni operator na njemu, i sabiranjem i množenjem definisanim na sledeći način:

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x), \ (AB)(x) = A(x)B(x)$$

je Banahova algebra koja nije komutativna za $k > 1$.

Razmotrimo sada uslov (6) iz definicije Banahove algebre. Dakle, pretpostvaljamo da postoji element e iz A, tako da za svako x iz A važi $ex = xe = x$, tj. pretpostavljamo da postoji *jedinični element* u A.

Dokaz. Pretpostavimo da jedinični element e nije jedinstven u A.
To znači da postoji e' iz A, za koji takodje važi $e'x = xe' = x$, za svako x iz A. Odatle vidimo da sa jedne strane važi $e = ee' = e'e = e'$, tj. $e = e'$. *Kontradikcija.*
Dakle, jedinični element e je jedinstven u A. ■

Kolika je norma jediničnog elementa?
Koristeći uslov (4) i definicije dobijamo

$$\|ee\| \leq \|e\|\|e\| = \|e\|^2$$

$$e = ee = e^2$$

$$\|e\| = \|e^2\| \leq \|e\|^2$$

Odakle dobijamo da je $\|e\| \geq 1$.
Zbog jednostavnosti, mi ćemo dodatno pretpostaviti da je

$$\|e\| = 1.$$

Definicija 4.1.3. Ako za neko x iz A postoji element y iz A, tako da je $xy = yx = e$, onda za x kažemo da je invertibilan ili inverzibilan element u A. Takvo y iz A nazivamo inverzom elementa x u A i tradicionalo označavamo sa x^{-1}.

Ako inverz nekog elementa x iz A postoji, onda je on jedinstven. Pokažimo to.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da postoji $y \in A$, tako da je $xy = yx = e$ i $y \neq x^{-1}$. Tada je $y = ye = y(xx^{-1}) = (yx)x^{-1} = ex^{-1} = x^{-1}$, tj. $y = x^{-1}$. *Kontradikcija.*
Dakle, ako postoji inverz nekog elementa, onda je on jedinstven. ∎

Ako su elementi x, y iz A invertibilni, onda su i elementi x^{-1}, xy invertibitlni. Pokažimo to.

Dokaz. Trivijalno je da je element x^{-1} invertibilan, njegov inverz je sam element x.
Posmatrajmo sada element xy iz A. Ako njega pomnožmo sa desne strane prvo sa y^{-1}, pa sa x^{-1}, dobijamo jedinični element.

$$xyy^{-1}x^{-1} = e$$

Analognim postupkom dobijamo

$$y^{-1}x^{-1}xy = e$$

Odakle je, po definiciji, $y^{-1}x^{-1}$ inverz elementa xy. ∎

Iz pokazanog možemo zaključiti da invertibilni elementi u A čine grupu u odnosu na množenje u A.

Definicija 4.1.4. *Spektrom elementa* x *iz* A, u oznaci $\sigma(x)$, nazivamo skup svih kompleksnih brojeva λ, za koje element $x - \lambda e$ nije invertibilan.

4.2 Invertibilni elementi

U ovom odeljku ćemo malo više pažnje posvetiti invertibilnim elementima. Neka je A kompleksna Banahova algebra sa jediničin elementom e, a neka je G skup svih invertibilnih elemenata iz A.

Teorema 4.2.1. *Ako $x \in A$ i $\|x\| < 1$, onda $e + x \in G$,*

$$(e+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \tag{1}$$

i

$$\|(e+x)^{-1} - e + x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}. \tag{2}$$

Dokaz. Prema definiciji kompleske Banahove algebre, znamo da u A važi nejednakost $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. Ako u tu nejednakost stavimo $y = x$, dobijamo $\|x^2\| \leq \|x\|^2$, iz čega indukcijom dobijamo da je $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, za svako n. Neka je

$$s_N = e - x + x^2 - \cdots + (-1)^N x^N \tag{3}$$

niz u A. Pokazaćemo da je niz s_N Košijev.
Neka je s_M takav da je $N > M$.

$$\begin{aligned}
\|s_N - s_M\| &= \|(-1)^N x^N + (-1)^{N-1} x^{N-1} + \cdots + (-1)^{M+1} x^{M+1}\| \leq \\
&\leq \|(-1)^N x^N\| + \|(-1)^{N-1} x^{N-1}\| + \cdots \\
&\quad |(-1)^{M+1} x^{M+1}\| = \\
&= \|x^N\| + \|x^{N-1}\| + \cdots + \|x^{M+1}\| \leq \|x\|^N + \|x\|^{N-1} + \cdots + \|x\|^{M+1} = \\
&\quad \|x\|^{M+1}(\|x\|^{N-M-1} + \|x\|^{N-M-2} + \cdots + 1),
\end{aligned}$$

gde smo drugu nejednakost dobili uz pomoć $\|x^n\| \leq \|x\|^n$. Kako je $\|x\| < 1$, onda $\|x\|^{M+1} \to 0$ za dovoljno veliko M, a iz istog razloga je izraz

$$\|x\|^{N-M-1} + \|x\|^{N-M-2} + \cdots + 1$$

ograničen, odakle sledi da

$$\|x\|^{M+1}(\|x\|^{N-M-1} + \|x\|^{N-M-2} + \cdots + 1) \to 0$$

za dovoljno veliko M, a samim tim i N jer je $N > M$. Dakle, za dovoljno veliko M, tj. za $M > N_0$, za neko N_0, $\|s_N - s_M\| < \varepsilon$, pa je niz s_N Košijev, a pošto radimo u Banahovom prostoru, koji je kompletan, onda niz s_N konvergira u saglasnosti sa normom ka nekom elementu $y \in A$. Posmatrajmo sada sledeća dva izraza

$$(e+x)s_N = es_N + xs_N = s_N + xs_N = s_N + x(e - x + x^2 - \cdots + (-1)^N x^N) =$$
$$= s_N + xe - xx + xx^2 - \cdots + x(-1)^N x^N = s_N + x - x^2 + x^3 - \cdots + (-1)^N x^{N+1},$$

$$s_N(e+x) = s_N e + s_N x = s_N + s_N x = s_N + (e - x + x^2 - \cdots + (-1)^N x^N)x =$$
$$s_N + ex - xx + x^2 x - \cdots + (-1)^N x^N x = s_N + x - x^2 + x^3 - \cdots + (-1)^N x^{N+1}.$$

Vidimo da je

$$(e+x)s_N = e + (-1)^N x^{N+1} = s_N(e+x). \tag{4}$$

Zbog neprekidnosti množenja, kada stavimo da $N \to \infty$, dobijamo $(e+x)y = e = y(e+x)$, jer x^N po normi teži ka 0. To nam pokazuje da je $e + x$ invertibilan element, tj. da $e + x \in G$ i

$$y = (e+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^N x^N.$$

Poslednju stavku teoreme dobijamo iz

$$\|(e+x)^{-1} - (e+x)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - e - x \right\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} x^n \right\| \leq$$
$$\sum_{n-2}^{\infty} \|x^n\| \leq \sum_{n-2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}. \tag{5}$$

■

Teorema 4.2.2. *Neka su $x \in G$, , $\|x^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$, i $\|h\| = \beta < \alpha$. Tada $x + h \in G$ i važi*

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha - \beta)}. \tag{6}$$

Dokaz. Iz uslova teoreme i nejednakosti množenja pod normom dobijamo $\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\|\|h\| = \frac{\|h\|}{\alpha} \leq \frac{\beta}{\alpha} < 1$, odakle, prema prethodnoj teoremi važi, $e + x^{-1}h \in G$. Pošto je $x + h = x(e + x^{-1}h)$, onda $x + h \in G$ i

$$(x+h)^{-1} = (x(e + x^{-1}h))^{-1} = (e + x^{-1}h)^{-1} x^{-1}. \tag{7}$$

Tada je

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = (e + x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = \\ = ((e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h)x^{-1}. \quad (8)$$

Korsiteći (5) iz prethodne teoreme, uz zamenu x sa $x^{-1}h$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| &= \|((e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h)x^{-1}\| \leq \\ &\leq \|(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\| \|x^{-1}\| = \\ &= \|(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\| \frac{1}{\alpha} \leq \frac{\|x^{-1}h\|^2}{\alpha(1 - \|x^{-1}h\|)} \leq \\ &\leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha - \beta)}.\end{aligned}$$

■

Posledica 4.2.2.1. *G je otvoren skup, a preslikavanje $x \to x^{-1}$ je homeomorfizam G na G.*

Dokaz. Ako je $x \in G$ i $\|h\| \to 0$, onda, iz prethodne teoreme sledi da $\|(x + h)^{-1} - x^{-1}\| \to 0$. Pokažimo to.

$$\begin{aligned}\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| &= \|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} - x^{-1}hx^{-1}\| \leq \\ &\leq \|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| + \|-x^{-1}hx^{-1}\| \leq \\ &\leq \frac{\|h\|^2}{\alpha^2(\alpha - \|h\|)} + \|x^{-1}\|^2\|h\| = \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\|h\| \left(\frac{\|h\|}{\alpha - \|h\|} + 1 \right) \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0.\end{aligned}$$

To znači da je preslikavanje $x \to x^{-1}$ neprekidno. To preslikavanje očigledno slika G na G, pa prema *teoremi o otvorenom preslikavanju*, (vidi [3], str. 175), G je otvoren. Pošto je to preslikavanje samo sebi inverz, ono je i homeomorfizam. ■

Posledica 4.2.2.2. *Preslikavanje $x \to x^{-1}$ je diferencijabilno. Njegov diferencijal u proizvoljnoj tački $x \in G$ je linerani operator koji prevodi $h \in A$ na $-x^{-1}hx^{-1}$.*

Dokaz. Ovo tvrdjenje takodje možemo dobiti iz (6) iz prethodne teoreme, koristeći $C - \infty$ diferencijabilnost preslikavanja. Ako napravimo razvoj u stepeni red, korsteći ideju iz dokaza prethodne posledice, dobićemo traženo.

■

Napomenimo da pojam diferencijala transformacije ima smisla u proizvoljnom normiranom linearnom prostoru, a ne samo u C^k. Ako je A komutativna algebra, naš diferencijal preslikava h u $-x^{-2}h$, što se slaže sa činjenicom da je izvod holomorfne funkcije z^{-1} baš $-z^{-2}$.

Posledica 4.2.2.3. *Za svako $x \in A$, njegov spektar $\sigma(x)$ je kompaktan, i $|\lambda| \leq \|x\|$ ako $\lambda \in \sigma(x)$.*

Dokaz. Ako je $\|x\| < \lambda$, onda, prema teoremi 4.2.1 $e - \lambda^{-1}x \in G$. Analogno važi i za $x - \lambda e = -\lambda(e - \lambda^{-1}x)$, pa iz tog razloga $\lambda \notin \sigma(x)$. To pokazuje da je $\sigma(x)$ zatvoren. Posmatrajmo skup $\mathbb{C}\ \sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} | x - \lambda e \in G\}$ i funkciju $\varphi : \mathbb{C} \to A$, $\varphi(\lambda) = x - \lambda e$. Ta funkcija je neprekidna. To znači da je skup $\mathbb{C}\ \sigma(x) = \varphi^{-1}(G)$ otvoren. Odatle vidimo da je $\sigma(x)$ zatvoren. Iz svega toga slede stavke posledice. ■

Lema 4.2.1. *Neka je Φ ogranučeni linearni funkcional na A. Fiksirajmo proizvoljno $x \in A$ i definišimo*

$$f(\lambda) = \Phi[(x - \lambda e)^{-1}], \ , \textit{za svako } \lambda \notin \sigma(x). \tag{9}$$

Tada je f holomorfna na komplementu skupa $\sigma(x)$, i $f(\lambda) \to 0$, kada $\lambda \to \infty$.

Dokaz. Fiksirajmo $\lambda \notin \sigma(x)$ i primenimo teoremu (4.2.2) stavljajući $x - \lambda e$ umesto x i $(\lambda - \mu)e$ umesto h. Važi

$$\|(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} + (\lambda - \mu)(x - \lambda e)^{-2}\| \leq C|\mu - \lambda|^2, \tag{10}$$

za sve μ koji su dovoljno bliski λ, a gde je C neka konstanta koja zavisi od x i λ. Tada

$$\frac{(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1}}{\mu - \lambda} \to (x - \lambda e)^{-2}, \tag{11}$$

kada $\mu \to \lambda$. Ako primenimo Phi na obe strane (1), zbog linearnosti i neprekidnosti funkcionala Φ važiće

$$\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} \to \Phi((x - \lambda e)^{-2}). \tag{12}$$

Iz toga zaključujemo da je f diferencijabilna, pa samim tim i holomorfna van $\sigma(x)$. Konačbo, ako pustimo da $\lambda \to \infty$, dobijamo

$$\frac{1}{\lambda} f(\lambda) = \Phi(\frac{1}{\lambda}(x - \lambda e)^{-1}) = \Phi\left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1} \to \Phi(-e), \tag{13}$$

zbog neprekidnosti inverznog preslikavanja na G. ■

Teorema 4.2.3. *Za svako $x \in A$, $\sigma(x)$ je neprazan i kompaktan.*

Dokaz. Već smo pokazali u (4.2.2.3) da je $\sigma(x)$ kompaktan. Fiksirajmo $x \in A$ i $\lambda_0 \notin \sigma(x)$. Tada je $(x - \lambda_0 e)^{-1} \neq 0$ i teorema Hana-Banaha (vidi [3], str. 184) nam govori da postoji ograničen linearni funkcional Φ na A, takav da je $f(\lambda_0) \neq 0$, gde je f definisano kao u prethodnoj teoremi. Ako bi spektar elementa x bio prazan, prema prethodnoj teoremi bi značilo da je f cela funkcija koja je 0 u beskonačnosti, pa bi, prema Luvilovoj teoremi, $f(\lambda) = 0$, za svako λ, što je *kontradikcija* pretpostavci da je $f(\lambda_0) \neq 0$. Dakle, $\sigma(x)$ nije prazan skup. ∎

(Napomena:**Luviolova teorema** kaže da je svaka ograničena i holomorfna kompleksna funkcija identički konstantna.)

Teorema 4.2.4 (Gelfand-Mazur). *Ako je A kompleksna Banahova algebra sa jedinicom, čiji je svaki nenula element invertibilan, onda je A kompleksno polje do na izometrički izomorfizam.*

Definicija 4.2.1. Algebra čiji je svaki nenula element invertibilan se naziva *algebra sa deljenjem.*

Primetimo da komutativnost algebre A nije deo pretpostavke teoreme, već deo zaključka.

Dokaz. Neka je $x \in A$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tada je bar jedan od elemenata $x - \lambda_1 e$, $x - \lambda_2 e$ invertibilan, jer bi inače važilo da je $0 = x - \lambda_1 e = x - \lambda_2 e$, odakle bi sledilo da je $\lambda_1 = -\lambda_2$, što bi bila *kontradikcija* naše pretpostavke. Dakle, bar jedan od tih elemenata je invertibilan. Iz prethodne teoreme sledi da $\sigma(x)$ sadrži tačno jednu tačku, označimo je sa $\lambda(x)$, za svako $x \in A$. Pošto $x - \lambda(x)e$ nije invertibilan, to znači da je $x - \lambda(x)e = 0$, tj. $x = \lambda(x)e$, pa je preslikavanje $x \mapsto \lambda(x)$ izomorfizam A na kompleksno polje. Ovo preslikavanje je i izometrija jer je $|\lambda(x)| = \|\lambda(x)e\| = \|x\|$, za svako $x \in A$. ∎

Definicija 4.2.2. Za svako x iz A,*spektralni radijus elementa x*, u oznaci $\rho(x)$, je najmanji zatvoreni disk sa centrom u x, a koji sadrži $\sigma(x)$,

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Ponekad se spetralni radijus elementa x naziva i *spektralnom normom elementa x.*

Teorema 4.2.5 (Formula spektralnog radijusa ili Gelfandova formula). *Za svako x iz A je*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(x). \tag{14}$$

Napomenimo da je postojanje ovog limesa deo zaključka teoreme.

Dokaz. Fiksirajmo $x \in A$, a neka je n pozitivan ceo broj, λ kompleksan i pretpostavimo da je $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$. Imamo

$$(x^n - \lambda^n e) = (x - \lambda)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1} e). \tag{15}$$

Pomnožimo obe strane prethodnog izraza sa $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$. Iz toga sledi da je $(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1} e) x^n - \lambda^n e)^{-1}$ inverz za $x - \lambda$, tj. da je $x - \lambda$ invertibilan, pa $\lambda \notin \sigma(x)$.

Dakle, ako je $\lambda \in \sigma(x)$, onda je $\lambda^n \in \sigma(x^n), n = 1, 2, 3, \ldots$ Prethodni stavovi nam daju da je $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$, tj. $|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Iz ovoga i definicije spektralnog radijusa dobijamo da je

$$\rho(x) \leq \lim_{n \to \infty} \inf \|x^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{16}$$

Sada, ako je $\|x\| < |\lambda|$, lako se pokazuje da je

$$(\lambda e - x) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n = e. \tag{17}$$

Dakle, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n = -(x - \lambda e)^{-1}$. Neka je Φ ograničen linearni funkcional na A, a definišimo f kao u teoremi (4.2.1). Primenom Φ na (14), dobijamo

$$f(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(x^n) \lambda^{-n-1}. \tag{18}$$

Ovo će važiti za sve one λ, za koje je $\|x\| < |\lambda|$ zbog uslova za (13). Prema teoremi (4.2.1), f je holomorfna van $\sigma(x)$, tj. na skupu $\{\lambda||\lambda| > \rho(x)\}$. Odatle sledi da stepeni red (14) konvergira za $|\lambda| > \rho(x)$. Iz toga zakuljučujemo da za svaki ograničeni linearni funkcional Φ na A važi

$$\sup_n |\Phi(\lambda^{-n} x^n)| < \infty, \ |\lambda| > \rho(x). \tag{19}$$

Prema posledici Han-Banahove teoreme (vidi [3], str. 187), norma proizvoljnog elementa iz A je jednaka normi tog elementa kao linenarnog funkcionala na dualnom prostoru prostora A, tj. na A^*. Pošto (2) važi za svako Φ, možemo da primenimo teoremu Banah-Štajnhaus(vidi [3], str. 170) i zaključimo da svakom λ , norme veće od $\rho(x)$, odgovara realan broj $C(\lambda)$, takav da je

$$\|\lambda^{-n} x^n| \leq C(\lambda), \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{20}$$

Pomnožimo (1) sa $|\lambda^n|$ i zatim nadjimo n-ti koren. Dobijamo

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| C(\lambda) \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{21}$$

Ako je $|\lambda| > \rho(x)$, biće

$$\rho(x) \geq \lim_{n\to\infty} \sup \|x^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{22}$$

Pošo imamo levu i desnu nejednakost u (13) i (3), sledi

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}, \tag{23}$$

što je i trebalo dokazati. ■

Navedimo ovde neka opažanja.

1. Invertibilnost elementa x iz A je čisto algebarska osobina. Zbog toga su spektar elementa x, $\sigma(x)$, kao i spektralnin radijus, $\rho(x)$, definisani uslovima algebarske strukture od A, bez obraćanja pažnje na metričke ili topološke osobine. Sa druge strane, limes u teoremi formule spektralnog radijusa zavisi od metričkih osobina A. Ovo je jedna vrlo značajnih odlika ove teoreme- bavi se jednakošću dveju veličina koje su dobijene na dva potpuno različita načina.

2. Naša algebra može da bude podalgebra neke veće Banahove algebre B, kao što će to biti slučaj u sledećem primeru. U takvom slučaju, lako se može desiti da neki $x \in A$ ne bude invertibilan u A, a da bude invertibilan u B. Zbog toga, spektar elementa x zavisi od algebre. Koristeći očiglednu notaciju, imamo da je $\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x)$, a inkluzija može biti stroga. Spektralni radijus elementa x ne zavisi od algebre, jer, teorema o formuli spktralnog radijusa pokazuje da on može biti iskazan kroz metričke osobine stepena elementa x, a koji su nezavisni od bilo čega što se dešava van A.

Primer 4.4. Neka je $C(T)$ algebra svih neprekidnih, kompleksnih funkcija na jediničnom krugu T, sa tačka-po-tračka sabiranjem i množenjem i supremum normom, i neka je A skup svih onih funkcija $f \in C(T)$ koje imaju neprekidno produženje F na zatvorenju jediničnog diska U, tako da je F holomorfno na U. Očigledno je da je A podalgebra algebre $C(T)$. Ako je f_n iz A i $\{f_n\}$ unformno konvergira na T, princip maksimalnog modula obezbedjuje da će niz $\{F_n\}$ takodje uniformno konvergirati na $\overline{U}$. Ovo nam govori da je A zatvorena podalgebra od $C(T)$, pa je A Banahova algebra.

Definišimo funkciju f_0 sa $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Tada je $F_0(z) = z$. Spektar od f_0, kao elementa iz A sadrži u sebi zatvoreni jedenični disk. Posmatrano kroz $C(T)$, spektar od f_0 sadrži samo jedinični krug. Prema teoremi o formuli spektralnog radijusa, ova dva spektralna radijusa se poklapaju.

(Napomena:**Princip maksimalnog modula** nam kaže da ako je f holomorfna funkcija, onda $|f|$ nema pravi lokalni maksimum(tj. $|f|$ je konstantna) u domenu funkcije f.)

4.3 Ideali i Homomorfizmi

U daljem radu ćemo se baviti samo komutativnim algebrama.

Definicija 4.3.1. Podskup I komutativne algebre A je *ideal* ako je I potprostor od A, u smislu vektorskog prostora i $xy \in I$ za svako $x \in A$ i $y \in I$.
Ako je $I \neq A$, onda I nazivamo *pravim idealom.*
Maksimalni ideali su oni pravi ideali koji nisu sadžani ni u jednom drugom pravom idealu.
Napomenimo da ni jedan pravi ideal ne sadrži invertibilne elemente.

Definicija 4.3.2. Neka je B kompleksna algebra, različita od A. Preslikavanje φ, $\varphi : A \to B$, je *homomorfizam* ako je φ linearno preslikavanje koje čuva množenje, tj. za koje važi $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, za proizvoljne $x, y \in A$.
Jezgro preslikavanja φ, u oznaci $Ker\varphi$, je skup svih $x \in A$ za koje je $\varphi(x) = 0$.

Jezgro svakog homomorfizma je ideal. Pokažimo to.

Dokaz. Neka je φ proizvoljan homomorfizam. Da bismo pokazali da je $Ker\varphi$ ideal, prvo treba da pokažemo da je $Ker\varphi$ potprostor (u smislu vektorskog prostora) od A.

1. Iz same definicije jezgra znamo da je $Ker\varphi \subseteq A$
2. Neka su x i y proizvoljni elementi iz $Ker\varphi$.
   $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0$ važi prema linarnosti preslikavanja φ. Dakle, $Ker\varphi$ je zatvoren za sabiranje.
3. Analogno se dokazuje da je $Ker\varphi$ zatvoren za skalarno množenje. Neka je K polje skalara i $\alpha \in K$. Zbog linearosti preslikavanja φ važiće $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha \cdot 0 = 0$, za svako $x \in A$.

Dakle, pokazali smo da je $Ker\varphi \subseteq A$. Ostaje nam da pokažemo drugi uslov definicije. Neka su x proizvoljan element iz A i y proizvoljan element iz $Ker\varphi$. Pošto je φ homomorfizam, biće $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x) \cdot 0 = 0$, tj. $xy \in Ker\varphi$. Dakle, $Ker\varphi$ je ideal. ∎

Teorema 4.3.1. *Ako je A komutativna kompleksna algebra sa jedinicom, onda je svaki pravi ideal od A sadržan u nekom maksimalnom idealu.*
Ako je A pride i Banahova algebra, onda je svaki maksimalni ideal od A zatvoren.

Dokaz. Prvi deo tvrdjenja je skoro direktna posledica Zornove leme, i važi u proizvoljnom komutativnom prstenu sa jedinicom. Neka je I pravi ideal od A. Parcijalno uredimo kolekciju $\mathscr{P}$ svih pravih ideala od A koji sadrže I, u smislu inkluzije, i neka je M unija ideala u nekoj maksimalnoj linearno uredjenoj podkolekciji $\mathscr{Q}$ kolekcije $\mathscr{P}$. Pošto je M unija linearno uredjene kolekcije ideala, onda je i M ideal. Za M takodje važi da je $I \subset M$, kao i da je $M \neq A$ jer ni jedan član iz $\mathscr{P}$ ne sadrži jedinični element iz A. Iz maksimalnosti $\mathscr{Q}$ sledi da je M maksimalni ideal od A.

Pretpostavimo sada da je A Banahova algebra. Tada je $\overline{M}$ takodje ideal od A jer. Pošto M ne sadrži ni jedan invertibilni element iz A i pošto je skup svih ivertibilnih elmenata otvoren, imamo da je $\overline{M} \neq A$, a maskimalnost M nam daje da je $\overline{M} = M$. ■

4.3.1 Količnički prostori i količničke algebre

Neka je J potprostor vektorskog prostora A. Dodelimo svakom $x \in A$ *koset*

Definicija 4.3.3.

$$\varphi(x) = x + J = \{x + y \, : \, y \in J\}. \tag{1}$$

Razmotrimo neke osobine takvog preslikavanja.
Neka je $x_1 - x_2 \in J$. Znamo da je $\varphi(x_1) = x_1 + J$, $\varphi(x_2) = x_2 + J$. Za y iz definicije možemo birati proizvoljan element iz J. Biramo $\varphi(x_1) = x_1 + J = x_1 + e = x_1$, $\varphi(x_2) = x_2 + J = x_2 + x_1 - x_2 = x_1$, gde je e jedinični element prostora J. Vidimo da je $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.
Neka sada $x_1 - x_2 \notin J$. Tada se na sličan način pokzuje da je $\varphi(x_1) \cap \varphi(x_2) = \emptyset$. Skup svih koseta označavamo sa A/J. Definišimo operacije sabiranja i množenja skalarom u tom skupu:

Definicija 4.3.4. Sabiranje u A/J definišemo sa:

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi x + y \tag{2}$$

gde su $x, y \in A$.

Definicija 4.3.5. Skalarno množenje u A/J definišemo sa:

$$\lambda\varphi(x) = \varphi\lambda x \tag{3}$$

gde je $x \in A$, a λ skalar.

Pošto je J vektorski prostor, operacije su dobro definisane. To znači da ako je $\varphi(x) = \varphi(x_1)$ i $\varphi(y) = \varphi(y_1)$, onda će biti

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x_1) + \varphi(y_1) \tag{4}$$

i

$$\lambda\varphi(x) = \lambda\varphi(x_1). \tag{5}$$

Takodje, φ je očigledno linearno preslikavanje A na A/J, $\varphi(0) = J$.

Pretpostavimo sada da je A i komutativna algebra, a J pravi ideal od A. Neka $x_1 - x, y_1 - y \in J$. Tada iz

$$x_1y_1 - xy = (x_1 - x)y - 1 + x(y_1 - y) \tag{6}$$

sledi da $x_1y_1 - xy \in J$. Iz tog razloga množenje u A možemo definisati na sledeći način:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy), \tag{7}$$

za $x, y \in A$. Sada bi se lako dalo pokazati da je A/J algebra, a φ homomorfizam A na A/J čije je jezgro J. Ako u A postoji neutral, npr. e, onda je $\varphi(e)$ neutral u A/J, a A/J je polje čiji je J maksimalni ideal. Pokažimo to.

Neka je $x \in A$, tako da $x \notin J$, i neka je

$$I = \{ax + y | a \in A, y \in J\}. \tag{8}$$

Tada je I ideal u A. Pošto $x \in I$, onda je J sadržano u I. Ako je J maksimalni ideal, onda je $I = A$, pa je $ax + y = e$, za neko $a \in A$ i $y \in J$. Iz toga dalje sledi da je $\varphi(e) = \varphi(ax + y) = \varphi(ax) + \varphi(y) = \varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x)$, tj. $\varphi(a)\varphi(x) = \varphi(e)$, a to nam govori da je svaki nenula element iz A/J invertiblan, pa je A/J polje.
Ako J nije maksimalni ideal, onda možemo izabrati x tako da $I \neq A$, tj. $e \notin I$ i tada $\varphi(x)$ nije invertibilno u A/J.

4.3.2 Količničke norme

Neka je A normirani linearni prostor, J njegov zatvoreni potprostor i $\varphi(x) = x + J$ kao u prethodnom odeljku. Definišemo normu klase, tj. koseta $\varphi(x)$ na sledeći način

Definicija 4.3.6.

$$\|\varphi(x)\| = \inf\{\|x + y\|| \; y \in J\}. \tag{9}$$

Napomenimo da je $\|\varphi(x)\|$ najveća donja granica norme elemenata iz koseta $\varphi(x)$, a to je jednako rastojanju x od J. Takvu normu, definisanu u A/J sa 9, nazivamo *količnička norma* u A/J. Količnička norma ima sledeće osobine:

1. A/J je normirani linearni prostor
2. Ako je A Banahov prostor, onda je i A/J Banahov prostor
3. Ako je A komutativna Banahova algebra i J pravi ideal koji je zatvoren, onda je A/J komutativna Banahova algebra

Pokažimo to.

Dokaz. Ako je $x \in J$, onda je $\|\varphi(x)\| = 0$. Ako $x \notin J$, onda je $\|\varphi(x)\| > 0$, jer je J zatvoren. Očigledno važi $\|\lambda\varphi(x)\| = |\lambda|\|\varphi(x)\|$. Ako su x_1 i x_2 iz A i $\varepsilon > 0$, onda postoje $y_1, y_2 \in J$ tako da važi

$$\|x_i + y_i\| < \|\varphi(x_i)\| + \varepsilon, \; i = 1, 2, \tag{10}$$

pa je

$$\|\varphi(x_1 + x_2)\| \leq \|x_1 + x_2 + y_1 + y_2\| < \|\varphi(x_1)\| + \|\varphi(x_1)\| + 2\varepsilon, \tag{11}$$

što je nejednakost trougla, pa smo dokazali da važi prvo tvrdjenje.

Neka je A kompletan i neka je $\{\varphi(x_n)\}$ Košijev niz u A/J. To znači da postoji podniz

$$\|\varphi(x_{n_i}) - \varphi(x_{n_{i+1}})\| < 2^{-i}, \; i = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

i postoje elementi z_i, tako da $z_i - x_{n_i} \in J$ i $\|z_i - z_{i+1}\| < 2^{-i}$.Dakle, $\{z\}i$ je Košijev niz u A, a pošto je A kompletan, onda $\{z\}i$ konvergira u A, tj. postoji $z \in A$ tako da je $\|z_i - z\| \to 0$. Iz toga sledi da $\varphi(x_{n_i})$ teži ka $\varphi(z)$ u A/J. Dakle, dobili smo kovergentan podniz polaznog Košijevog niza, pa je i on samim tim konvergentan. Zbog toga je A/J kompletan, što je bilo drugo tvrdjenje.

Neka su sada $x_1, x_2 \in A$ i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $y_1, y_2 \in J$ tako da važi (10). Primetimo da je očigledno $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \in x_1x_2 + J$. Zato važi

$$\|\varphi(x_1x_2)\| \leq \|(x_1+y_1)(x_2+y_2)\| \leq \|(x_1+y_1)\|\|(x_2+y_2)\| = \|\varphi(x_1)\|\|\varphi(x_2)\|, \tag{13}$$

tj.

$$\|\varphi(x_1x_2)\| \leq \|\varphi(x_1)\|\|\varphi(x_2)\|. \tag{14}$$

Ako je e neutral u A, iskoristimo prethodni izraz, birajući $x_1 \notin J$ i $x_2 = e$. Dobićemo da je $\|\varphi(e)\| \geq 1$. Sa druge strane, $e \in \varphi(e)$, pa važi $\|\varphi(e)\| \leq \|e\| = 1$, prema definiciji količničke norme. To znači da je $\|\varphi(e)\| = 1$. Time smo dokazali i treće tvrdjenje, tj. da je i A/J komutativna Banahova algebra ■

Sa ovime smo završili sa pripremama i sada možemo da izvedemo neke ključne činjenice vezane za komutativne Bahanove algebre.

Neka je, kao i do sada, A komutativna kompleksna Banahova algebra sa jediničnim elementom e. Dodelimo algebri A Δ, skup svih kompleksnih homomorfizama u A. Ti homomorfizmi slikaju A na kompleksno polje i jesu, u stvari, *multiplikativni linearni funkcionali* na A koji nisu identički jednaki nuli. Kao i do sada, $\sigma(x)$ će označavati spektar elementa $x \in A$, a $\rho(x)$ spektralni radijus elementa x. Tada važi sledeća teorema.

Teorema 4.3.2. *Važe iskazi:*

1. *Svaki maksimalni ideal M od A je jezgro nekog homomorfizma h iz Δ.*
2. $\lambda \in \sigma(x)$ *akko je* $h(x) = \lambda$, *za neko* $h \in \Delta$.
3. x *ima inverz u* A *akko je* $h(x) \neq 0$, *za svako* $h \in \Delta$.
4. $h(x) \in \sigma(x)$, *za svako* $x \in A$ *i* $h \in \Delta$.
5. $|h(x)| \leq \rho(x) \leq \|x\|$, *za svako* $x \in A$ *i* $h \in \Delta$.

Dokaz. Ako je M maksimalni ideal od A, onda je A/M polje, a pošto je , prema teoremi (4.3.1), M zatvoren, onda je A/M Banahova algebra. Prema teoremi Gelfand-Mafuz, postoji izomorfiza $j : A/M \to \mathbb{C}$. Neka je $h = j \circ \varphi$, gde je φ homomorfizam A na A/M sa jezgrom M. Tada je $h \in \Delta$ i $kerh = M$. Time smo pokazali prvo tvrdjenje teoreme. Ako $\lambda \in \sigma(x)$, onda $x - \lambda e$ nije invertibilan, pa je skup $\{y \in A|(x - \lambda e)y\}$ pravi ideal od A koji se, prema teoremi (4.3.1) nalazi u nekom maksimalnom idealu, a upravo pokazano tvrdjenje nam kaže da postoji $h \in \Delta$, takvo da je $h(x - \lambda e) = 0$. Pošto je $h(e) = 1$, dobijamo da je $h(x) = \lambda$. Sa druge strane, ako $\lambda \notin \sigma(x)$, onda je $(x - \lambda e)y = e$, za neko $y \in A$. Sledi $h((x - \lambda e)y) = h(x - \lambda e)h(y) = 1$, za svako $h \in \Delta$, pa $h(x - \lambda e) \neq 0$, tj. $h(x) \neq lambda$. Čime je pokazano i drugo tvrdjenje teoreme. Znamo da je x inveritbilno akko $0 \notin sigma(x)$, pa direktnom primenom upravo dokazanog tvdjenja dobijamo i treće tvrdjenje teoreme. (4) je direktna posledica trećeg tvrdjenja. Iz trećeg tvrdjenja ove teoreme sledi da je $|h(x)| \leq \rho(x)$ jer je ρ supremum. A pošto znamo da važi $\rho(x) \leq \|x\|$onda dobijamo i (5) u celini, $|h(x)| \leq \rho(x) \leq \|x\|$. ∎

Napomenimo da nam (5) daje da je norma od h, kao linearnog funkcionala, najviše 1. Specijalno, svako h iz Δ je neprekidno. Pokažimo ovo.

Dokaz. Neka je A Banahova algebra, i neka je, za neko $x_0 \in A, |\varphi(x_0)| > \|x_0\|$, gde je φ kompleksni linearni funkcional na A. Biramo $\lambda = \varphi(x_0)$ i stavimo $x = \frac{x_0}{\lambda}$. Tada je $\|x\| < 1$ i $\varphi(x) = 1$. Iz toga, primenom nejednakosti $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, zaključujemo da je niz elemenata

$$s_n = -x - x^2 - \ldots - x^n$$

Košijev niz u A. Kako je A kompletan kao Banahov prostor, taj niz konvergira u A, tj., postoji $y \in A$, tako da $|y - s_n| \to 0,\ n \to \infty$.

$$x+s_n = x-x-x_2-\ldots-x^n = -x_2-\ldots-x^n = x(-x-x_2-\ldots-x^{n-1}) = xs_{n-1}$$

Iz ovoga dobijamo, ako pustimo da n teži beskonačnosti, da je

$$x + y = xy.$$

Primenom φ na prethodni izraz dobijamo

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y),$$

a pošto je $\varphi(x) = 1$, dobijamo $1 = 0$. *Kontradikcija.*
Dakle, norma linearnog funkcionala je najviše 1. ∎

5 Primeri

Kao što smo već na početku pomenuli, sada ćemo se baviti primerima u kojima se lepo prikazuje korist i moć Banahovih aglebri. Usredsredićemo se najviše na dva primera: na primer *disk algebre* i na primer *algebre Vinera.* U njima ćemo prikazati teoreme čiji iskazi ne uključuju nikakve algebarske koncepte ali se svejedno mogu dokazati koristeći thenike Banahovih algebri. Navedimo za početak nekoliko jednostavnih primera Banahovih algebri.

Primer 5.1. Neka je $A = C(X)$, gde je X kompaktan Hausdorfov prostor sa supremum normom i standardnim tačka-po-tačka množenjem funkcija: $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Ovo je koumatativna Banahova algebra , jer je $fg = gf$ sa jedinicom(konstantna funkcija 1).

Primer 5.2. $C_0(R)$ je komutativna Banahova algebra bez jedinice.

Primer 5.3. L^1 je Banahova algebra ako množenje definišemo konvolucijom. Pošto važi
$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g_1\|,$$
onda je nejednakost norme zadovoljena. Asocijativnost se može direktno pokazati primenom Fubinijeve teoreme, ili primenom Furijeove transformacije. Zbog toga je L_1 komutativna Banahova algebra bez neutrala(što se dobija iz Furijeove transformacije).

5.1 Disk algebra

Teorema 5.1.1. *Neka je $A(U)$ skup svih neprekidnih funkcija na zatvorenju $\overline{U}$ otvorenog jediničnog diska U, čije su restrikcije na U holomorfne funkcije. Neka su f_1, f_2, ..., f_n funkcije iz $A(U)$, takve da je*
$$|f_1| + |f_2| + \ldots + |f_n| > 0 \tag{1}$$
za svako $z \in \overline{U}$.
Tada postoje g_1, g_2, ..., g_n iz $A(U)$ tako da je
$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z)g_i(z) = 1,\ z \in \overline{U}. \tag{2}$$

Dokaz. Pošto su sume, proizvodi i uniformni limesi holomorfnih funkcija holomorfne funkcije, $A(U)$ je Banahova algebra sa supremum normom. Skup svih funkcija $\sum f_i g_i$, označimo ga sa J, gde su g_i proizvoljne funkcije iz $A(U)$ je ideal od $A(U)$. Treba da pokažemo da J sadrži neutral za $A(U)$. Prema teoremi (4.3.1), to je moguće akko se J ne nalazi ni u jednom maksimalnom idealu od $A(U)$. Prema tvdjenju (1) prethodne teoreme, dovoljno je pokazati da ne postoji homomorfizam $h : A(U) \to \mathbb{C}$, takav da je $h(f_i) = 0,\ i = \overline{1, n}$.

Za početak, pokažimo da polinomi čine gust podskup skupa $A(U)$. Neka je $f \in A(U)$ i $\varepsilon > 0$. Pošto je f uniformno neprekidna na $\overline{U}$, postoji $r < 1$, tako da je $|f(z) - f(rz)| < \varepsilon$, za svako $z \in \overline{U}$. Proširenje funkcije $f(rz)$ po stepenima z konvergira ako je $|rz| < 1$, i to konvergira ka $f(rz)$, uniformno po $z \in \overline{U}$, što nam daje polinomnijalnu aproksimaciju. Dakle, polinomi čine gust podskup u $A(U)$.

Neka je sada h kompleksni homomorfizam iz $A(U)$. Stavimo da je $f_0(z) = z$. Tada $f_0 \in A(U)$. Očigledo je da je $\sigma(f_0) = \overline{U}$. Prema tvdjenju (4) prethodne teoreme, postoji $\alpha \in \overline{U}$ tako da je $h(f_0) = \alpha$, pa je $h(f_0^n) = \alpha^n = f_0^n(\alpha),\ n = 1, 2, \ldots,$ što nam govori da je $h(P) = P(\alpha)$, za svaki polinom

P. POšto je h neprekidna i pošto su polinomi gusti u $A(U)$, sledi da je $h(f) = f(\alpha)$ za svako $f \in A(U)$.

Pretpostavka (1) nam daje da je $|f_i(\alpha)| > 0$ za bar jedno i, $i = \overline{1, n}$. Dakle, $h(f_i) \neq 0$. Ovime smo pokazali da svakom $h \in \Delta$ odgovara bar jedna od funkcija f_i, i to ona za koju važi da je $h(f_i) \neq 0$, a to je, kao što smo na početku pomenuli, dovoljno za dokaz teoreme, koji onda sledi iz tvrdjenja (4) prethodne teoreme. ∎

Napomenimo da smo ovime odredili sve maksimalni ideale od $A(U)$, pošto svaki maksimalni ideal predstavlja jezgro nekog homomorfizma $h \in \Delta$. Ako je $\alpha \in \overline{U}$ i ako je M_α skup svih $f \in A(U)$, takvih da je $f(\alpha) = 0$, onda je M_α maksimalni ideal od $A(U)$ i svi maksimalni ideali od $A(U$ se mogu dobiti na ovaj način.

Definicija 5.1.1. Takvo $A(U)$ zovemo *disk algebrom.*

5.2 Algebra sa apsolutno konvergetnim Furijeovim redovima ili Algebra Vinera

Restrikcije elemenata iz $A(U)$ na jediničnom krugu T formiraju zatvorenu podalgebru od $C(T)$. Ovu algebru smo razmatrali u primeru (4.4). U stvari, A je maksimalna podalgebra od $C(T)$. Preciznije, ako je $A \subset B \subset C(T)$ i B je zatvorena podalgebra od $C(T)$.(B je zatvoren u odnosu na supremum normu), onda je ili $B = A$ ili $B = C(T)$.
Jednostavno se dobija(vidi [1], str. 355) da A sadrži tačno one $F \in C(T)$, za koje važi

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta} e^{-in\theta}) d\theta = 0, \; n = -1, -2, \dots \tag{1}$$

Iz tog razloga, prethodno pomenuta teorema maksimalnosti se može iskazati kao teorema aproksimacije:

Teorema 5.2.1. *Neka je $g \in C(T)$ i $\hat{g}(n) \neq 0$ za neko < 0.*
Tada, za svako $f \in C(T)$ i svako $\varepsilon > 0$ postoje odgovarajući polinomi

$$P_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k} e^{ik\theta}, \quad za \; n = 0, 1 \dots, N \tag{2}$$

tako da je

$$\left| f(e^{i\theta}) - \sum_{n=0}^{N} P_n(e^{i\theta}) g^n(e^{i\theta}) \right| < \varepsilon, \; e^{i\theta} \in T. \tag{3}$$

Dokaz. Neka je B zatvorenje u $C = C(T)$ skupa svih funkcija oblika

$$\sum_{n=0}^{N} P_n g^n. \tag{4}$$

Napomenimo da N u prethodnoj jednačini nije fiksno.
Treba da dokažemo da je $B = C$. Pretpostavimo suprotno da je $B \neq C$.

Skup svih funkcija oblika (4) je kompleksna algebra. Njegovo zatvorenje B je zato Banahova algebra. B sadrži funkciju $f_0, f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Iz naše pretpostavke da $B \neq C$ sledi da $\frac{1}{f_0} \notin B$, jer, inače, ako bi $B \neq C$ sledi da $\frac{1}{f_0} \in B$, onda bi B sadržao f_0^n, za svako celobrojno n, pa bi svi trigonometrijski polinomi bili u B, a pošto su triginometrijski polinomi gusti u C (za dokaz, vidi [1], str. 91), onda bi bilo $B = C$. Dakle,$B \neq C$ sledi da $\frac{1}{f_0} \notin B$, što znači da f_0 nije invertibilan u B. Prema teoremi (4.3.2), postoji kompleksni homomorfizam h na B, takav da je $h(f_0) = 0$. Pošto svaki homorofizam na $\mathbb{C}$ ispunjava uslov $h(1) = 1$ i pošto znamo da je $h(f_0) = 0$, iz toga sledi da je

$$h(f_0^n) = h^n(f_0) = 0,\ n = 1, 2, ldots \tag{5}$$

Znamo da je h linearni funkcional na B, norme najviše 1. Teorema Hana-Banaha proširuje h do linearnog funkcionala na C, označićemo ga isto sa h, jednake norme. Pošto je $h(1) = 1$ i $\|h\| \leq 1$, onda je h pozitivan linearan funkcional na C. Pokažimo to.
Neka je $a \in C(T), 0 \leq a \leq 1$, $b = 2a - 1$ i neka je $h(b) = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Primetimo da je $-1 \leq b \leq 1$, pa je $|b + ir|^2 \leq 1 + r^2$, gde je r proizvoljna realna konstanta.

$$(\beta + r)^2 \leq |\alpha + i(\beta + r)^2| = |h(b + ir)|^2 \leq 1 + r^2,$$

što važi jer je $h(1) = 1$ i $\|h\| \leq 1$. Sledi da je $\beta^2 + 2r\beta \leq 1$, za svako realno r, odakle sledi da je $\beta = 0$. Pošto je $\|b\| \leq 1$ očigledno, biramo da je $\|\alpha\| \leq 1$ i dobijamo

$$h(a) = \frac{1}{2}h(1 + b) = \frac{1}{2}(1 + \alpha) \geq 0,$$

pa je h pozitivan.

Specijalno, $h(f)$ je realno, za realno f, pa je $h(\overline{f}) = \overline{h(f)}$. Pošto je f_0^{-n} konjugat od f_0^n, dobijamo da (5) važi i za $n = -1, -2, \ldots$ Sledi

$$h(f_0^n) \quad = \quad \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Pošto su triginometrijski polinomi gusti u C, postoji tačno jedan linearni funkcional na C koji zadovoljava (6). Zbog toga je h dato formulom

$$h(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\theta, \ f \in C. \tag{7}$$

Neka je sada $n > 0$. Tada $gf_0^n \in B$ i pošto je h multiplikativna na B, iz upravo dobijenog oblika $h(f)$ dobijamo

$$\hat{g}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = h(gf_0^n) = h(g)h(f_0^n) = 0, \tag{8}$$

zbog (6). A to je *kontradikcija* pretpostavci teoreme. ■

Navedimo sada *lemu Vinera.*

Teorema 5.2.2 (Lema Vinera). *Neka je*

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad i \ \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty, \tag{9}$$

i $f(e^{i\theta}) \neq 0$, *za svako realno* θ. *Tada važi*

$$\frac{1}{f(e^{i\theta})} = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\theta}, \quad kada \ \sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| < \infty. \tag{10}$$

Dokaz. Neka je A prostor svih kompleksnih funkcija f na jediničnom krugu koji zadovoljava uslov (9), sa normom

$$\|f\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|. \tag{11}$$

Jasno je da je A Banahov prostor. Tačnije, A je izometrički izomorfno prostoru $_1$, tj. prostoru svih kompleksnih funkcija na $\mathbb{Z}$, koje su integrabile u brojačkoj meri. Sa druge strane, A je i komutativna Banahova algebra sa tačka-po-tačka multiplikacijom. Jer, ako je $g \in A$ i $g(e^{i\theta}) = \sum b_n e^{in\theta}$, onda

$$f(e^{i\theta})g(e^{i\theta}) = \sum_n \left(\sum_k c_{n-k} b_k \right) e^{in\theta} \tag{12}$$

i time

$$\|fg\| = \sum_n \left| \sum_k c_{n-k} b_k \right| \leq \sum_n \sum_k |c_{n-k}||b_k| = \\ = \sum_k |b_k| \sum_n |c_{n-k}| = \|f\|\|g\|. \tag{13}$$

Takodje, jednična funkcija, u oznaci 1, je neutral u A i $\|1\| = 1$.

Neka je sada $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Tada $f_0 \in A$, $\frac{1}{f_0} \in A$ i $\|f_0^n\| = 1$ za $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Ako je h prozvoljni kompleksni homomorfizam u A i $h(f_0) = \lambda$, iz $\|h\| \leq 1$ sledi da je

$$|\lambda^n| = |h(f_0^n)| \leq \|f_0^n\| = 1, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{14}$$

pa je $|\lambda| = 1$. Drugim rečima, svakom h odgovara neka tačka $e^{i\alpha} \in T$, takva da je $h(f_0^n) = e^{i\alpha}$. Iz toga sledi da je

$$h(f_0^n) = e^{in\alpha} = f_0^n(e^{i\alpha}), \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{15}$$

Ako je f zadato sa (9), onda je $f = \sum c_n f_0^n$. Ovaj red konvergira u A i pošto je h neprekidni linearni funkcional na A, iz (15) možemo zaključiti da je

$$h(f) = f(e^{i\alpha}), \ f \in A. \tag{16}$$

Naša pretpostavka kaže da f nema nulu u T, što znači da f nije u jezgru nijednog kompleksnog homomorfizma na A, i, prema teoremi (6) sada možemo zaključiti da je f invertibilno u A. A to je baš ono što smo trebali da dokažemo. ■

5.3 Ostali primeri

Za još primera i njihovo iscrpno proučavanje, upućujem čitaoca da na [9] i [10].

6 Prostor maksimalnih ideala

U ovo odeljku ćemo navesti neke osnovne pojmove iz topologije koji će nam trebati u sledećem poglavlju.

Definicija 6.0.1. Neka je X neprazni skup. *Topologija* na skupu X je familija $\mathscr{T}$ njegovih podskupova sa svojstvima:

1. $\emptyset$ i X pripadaju familiji $\mathscr{T}$,
2. $U_1, U_2 \in \mathscr{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}$,
3. $\{U_\alpha | \alpha \in \mathscr{A}\}$ je familija skupova iz $\mathscr{T} \Rightarrow \cup\{U_\alpha | \alpha \in \mathscr{A}\} \in \mathscr{T}$.

Par $(X, \mathscr{T})$ se naziva *topološki prostor*.

Definicija 6.0.2. Neka je $\{X_\alpha | \alpha \in \mathscr{A}\}$ je familija topoloških prostora. *Topološki proizvod prostora* ove familije je topološki prostor, koji čine skup $\sqcap\{X_\alpha | \alpha \in \mathscr{A}\}$ i topologija, generisana subbazom koju čine skupovi

$$\{p_\alpha^{-1}[U] | \alpha \in A, U \in \mathscr{T}_{X_\alpha}\}$$

Definicija 6.0.3. Neka je X topološki prostor. *Mreža* u X je funkcija nekog uredjenog skupa A na X, u oznaci $\{x_\alpha\}$, koja nam kaže da je se elementu $\alpha \in A$ ovom funkcijom dodeljuje element $x_\alpha \in X$.

Teorema 6.0.1 (Teorema Tihonova). *Neka je $\{X_\alpha | \alpha \in \mathscr{A}\}$ je familija topoloških prostora.*
Tada je

$$\sqcap\{X_\alpha\} \text{ je kompaktan akko } (\forall \alpha) X_\alpha \text{ je kompaktan.}$$

Dokaz. Za dokaz pogledati [5], str. $108 - 109$. ■

Definicija 6.0.4. Neka je X linearni normirani prostor. Definišemo slabu* topologiju, ili, kako ćemo je nadalje obeležavati, w^* *topologiju*, pokazujući kako mreža $\{x_d^*\}$ kovergira w^* u X^* ka elementu $x_0^* \in X^*$. Kažemo da $\{x_d^*\}$ kovergira w^* u X^* elementu $x_0^* \in X^*$ ako za svako $x \in X$ važi

$$x_0^* x = \lim_d x_d^* x.$$

Daćemo opis i w^* okoline nule u X^*. Ona je genereisana za $\varepsilon > 0$ i konačnom kolekcijom elemenata iz X, neka su to $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Okolina je oblika

$$W^*(0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = (x^* \in X^* | |x^* x_1|, |x^* x_2|, \ldots, |x^* x_n| \leq \varepsilon).$$

w^* topologija je linarna topologija, pa je dovoljno opisati okolinu nule, a okoline ostalih tačaka iz X^* se mogu dobiti translacijom ove okoline.

Teorema 6.0.2 (Banah-Alaoglu). *U svakom linearnom prostory X, zatvorena jednična lopta, B_{X^*} je w^* kompaktna.*
Štaviše, w^* zatvoreni, ograničeni podskupovi od X^* su w^* kompkatni.

Dokaz. Ako je $x^* \in B_{X^*}$, onda je za svako $x \in B_X$, $|x^* x| \leq 1$. Štaviše, svaki od $x^* \in B_{X^*}$ slika loptu B_X u skup skalara D, modula ne većeg od 1. Zato možemo identifikovati svaki element iz B_{X^*} sa tačkom u prostoru D^{B_X}, što je slika prostora. Teorema Tihonova nam kaže da je taj prostor kompaktan. Sa druge strane, w^* topologija je definisana sa tačka-po-tačka konvergencijom na B_X, pa ova identifikacija B_{X^*} sa podskupom D^{B_X} ostavlja w^* topologiju nepromenjenom. Ostalo nam je još jedino da dokažemo da je B_{X^*} zatvorena u D^{B_X}.

Neka je $\{x_d^*\}$ mreža u B_{X^*} koja kovergira tačka-po-tačka na B_X ka $f \in D^{B_X}$. Sada je lako videti da je f linearna na B_X. Pokažimo to.
Neka je $x_1, x_2 \in B_X$, a a_1, a_2 skalari tako da $a_1x_1 + a_2x_2 \in B_X$. Tada je

$$\begin{aligned} f(a_1x_1 + a_2x_2) = \lim_d x_d^*(a_1x_1 + a_2x_2) = \\ = \lim_d (x_d^*(a_1x_1) + x_d^*(a_2x_2)) = \\ = \lim_d (a_1x_d^*(x_1) + a_2x_d^*(x_2)) = \\ = \lim_d a_1x_d^*(x_1) + \lim_d a_2x_d^*(x_2) = \\ = a_1f(x_1) + a_2f(x_2). \end{aligned}$$

Sledi da je f zaista restrikcija na B_X linearnog funkcionala $x' \in X$. Štaviše, pošto je $f(x)$ modula ne većeg od 1 za $x \in B_X$, $x' \in B_{X^*}$. Time smo dokazali teoremu. ■

7 Korona problem

Korona problem ili Teorema Korona se nadovezuje na prethodna poglavlja pomoću prethodnog poglavlja o prostorima maksimalnih ideala i centralne teoreme.

Posmatrajmo prostor H_∞, definisan sa

$$H_\infty = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} | f \text{ je analitička funkcija}\},$$

sa normom

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Prostor H_∞ je komutativna Banahova algebra nad $\mathbb{C}$. Pokažimo to.

Dokaz. Neka su f i g iz H_∞. Tada je trivijalno $fg \in H_\infty$. Razmortimo i njegovu normu.

$$\|fg\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)g(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} (|f(z)||g(z)|) \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \sup_{z\in\mathbb{D}} |g(z)| = \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Dakle, H_∞ je multiplikativne strukture. Zbog toga ćemo u daljem posmatrati algebraske multiplikativne homomorfizme koji slikaju H_∞ na C. ■

Neka je $L : H_\infty \to \mathbb{C}$ jedan takav homomorfizam. Pošto H_∞ sadrži neutral za množenje, neophodno je da bude $L(1) = 1$. Ako je f iz H_∞, i λ proizvoljan kompleksni broj, modula većeg od $\|f\|_\infty$, onda funkcija $(\lambda - f(z))^{-1} \in H_\infty$. Pošto je $(\lambda - f(z))^{-1}(\lambda - f(z)) = 1$, primenjujući L na obe strane, dobijamo da je $L(\lambda - f) \neq 0$. Zbog uslova kojima smo ograničili λ, vidimo da je $|L(f)| \leq \|f\|_\infty\|$. Naš algebarski multiplikativni homomorfizam L je neprekidan i po normi manji od 1 kao linerni funkcoinal Banahovog prostora H_∞. Pošto smo naglasili da je neophodno da $L(1) = 1$, zaključujemo da je njegova norma baš jednaka 1.
Skup takvih homomorfizama očigledno predstavlja w^* zatvoreni podskup jedinične sfere u dualu prostora H_∞, tj. u H_∞^*, jer je jedinična lopta u H_∞^* w^* kompaktana.

Pošto je $\mathbb{C}$ polje, skup m elemenata iz H_∞ koje L slika u 0 je makisamalni(pravi) ideal u H_∞. To znači da svaki homomorfizam L odredjuje jedan maksimalni ideal, i obrnuto, svaki maksimalni ideal odredjuje jedan homomorfizam od H_∞ na $\mathbb{C}$. Pokažimo to.

Dokaz. Neka je m pravi ideal u H_∞ i $\bar{m}$ njegovo zatvorenje po normi. Neka je $f \in H_\infty$ i $\|1 - f\|_\infty < 1$. Tada $f^{-1} \in H_\infty$, pa m ne može da sadrži f, a da ne sadrži 1, $1 = ff^{-1}$. Pošto je m pravi ideal, dobijamo da je $\|1 - m\|_\infty \geq 1$ i $1 \notin \bar{m}$. Iz ovoga zaključujemo da ako je m pravi maksimalni ideal, onda je $m = \bar{m}$.

Posmatrajmo proizvoljni maksimalni ideal m. Pošto je m, prema upravo pokazanom, zatvoren, količnički prsten H_∞/m je kompletna Banahova algebra nad $\mathbb{C}$. Taj prsten je polje jer je m maksimalni ideal. Medjutim, Gelfandova teorema nam kaže da je jedino kompletno normirano polje nad $\mathbb{C}$ baš $\mathbb{C}$. Dakle, H_∞/m je zaista izomorfan sa $\mathbb{C}$ i kanonski homomorfizam L koji slika H_∞ na H_∞/m je, u stvari, onaj koji slika H_∞/m na $\mathbb{C}$, pa možemo $L(f)$ dodeliti jedinstveni kompleksni broj λ za koji $\lambda - f \in m$. Takav broj sigurno postoji jer smo upravo pokazali da je H_∞/m izomorfno sa $\mathbb{C}$. ■

Na ovaj način, skup multiplikativnih homomorfizama L koji slikaju H_∞/m na $\mathbb{C}$ predstavlja prirodnu "$1 - 1$"korespodenciju sa skupom maksimalnih ideala m u H_∞. Uvedimo jednu oznaku koju ćemo u daljem tekstu koristiti. Ako je m maksimalni ideal kome odgovara multiplikativni homomorfizam L u H_∞, pisaćemo $h(m)$ za $L(h)$, kada je h iz H_∞.

Skup maksimalnih ideala m označimo sa $\mathfrak{M}$. Za $\mathfrak{M}$ biramo topologiju tačka-po-tačka konvergencije maksimalnih ideala m(kao multiplikativnih homomorfizama na H_∞). Tada je $\mathfrak{M}$ kompaktan prema teoremi Banah-Alaoglu. Sada nam je prirodno da posmatramo H_∞ kao Banahovu algebru funkcija, na svom skupu maksimalni ideala $\mathfrak{M}$, asocirajući svako $f \in H_\infty$ funkcijom

$f(m)$, za $m \in \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ zovemo prostorom maksimalnih ideala od H_∞. Ovaj apstrakti pristup problemu se pokazao kao vrlo koristan. Jedan od problema koji se javljaju u ovom pristupu je činjenica da je $\mathfrak{M}$ izuzetno veliki, toliko veliki da ima neke čudne osobine. Postoji, medjutim, jednostavan podskup skupa $\mathfrak{M}$ koji nam odgovara.
Ako je $|z| < 1$, tačka-po-tačka evaluacija

$$f \to f(z)$$

je homomorfizam H_∞ na $\mathbb{C}$. Dakle, svaka tačka z iz otvorenog jediničnog diska odgovara nekom maksimalnom idealu, preciznije, idealu funkcija $f \in H_\infty$ koje se anuliraju u z. Označimo taj maksimalni ideal takodje sa z. Zbog te oznake onda možemo smatrati da je otvoreni jedinični disk $|z| < 1$ podskup od $\mathfrak{M}$.
Sada možemo postaviti cetralno i prirodno pitanje:
Da li je $|z| < 1$ w^*-***gust u*** $\mathfrak{M}$***?***
Ako jeste, onda postoji šansa da možemo saznati preciziniji opis prostora $\mathfrak{M}$. Pretpostavka da je odgovor na ovo pitanje pozitivan je poznata kao Korona pretpostavka, a potraga za dokazom te pretpostvake kao ***Korona problem*** ili ***Korona teorema***. Korona teorema ima dve ekvivalentne formulacije:

1. Ako je $m \in \mathfrak{M}$, onda postoji mreža z_α, tako da je $|z_\alpha| < 1$, kada z_α teži, po α ka $m \in \mathfrak{M}$.

2. Ako $f_1, \ldots, f_n \in H_\infty$ i $\sup_k |f_k(z)| \geq \delta$, za neko $\delta > 0$ i svako z, $|z| < 1$, onda postoje funkcije $g_1, \ldots, g_n \in H_\infty$, tako da je $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n \equiv 1$, za $|z| < 1$.

(Napomena: 1. nam u stvari kaže da je otvoren disk gust u $\mathfrak{M}$.) Pokažimo ovu ekvivalenciju.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je druga stavka tačna. Pretpostavićemo da je $m \in \mathfrak{M}$ i da ne postoji mreža po z, $|z| < 1$,koji w^* teže ka m. Prema definiciji w^* topologije, znamo da postoje $h_1, \ldots, h_n \in H_\infty$ i $\delta > 0$, tako da, za svako z, $|z| < 1$ važi bar jedna od sledećih nejednakosti

$$|h_k(z) - h_k(m)| \geq \delta, \quad , k = \overline{1, n}.$$

Označimo $f_k(z) = h_k(z) - h_k(m)$, f_k je iz H_∞. Tada je $f_k(m) = 0$, za svako k, ali i za svako z, $|z| < 1$, postoji k, tako da je $f_k(z) \geq \delta > 0$. Pošto važi druga stavka, to znači da postoje $g_1, \ldots, g_n \in H_\infty$, tako da je $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n \equiv 1$. Dakle, $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n \equiv 1$. Ali, $f_k(m) = 0$ za svako k. *Kontradikcija.*

Pretpostavimo sada da je prva stavka ekvivalencije tačna. Neka su $f_1, \ldots, f_n$

takve da zadovoljavaju pretpostavku druge stavke ekvivalencije. Pretpostavimo da ne postoje $g_1, \ldots, g_n \in H_\infty$ takve da važi $f_1g_1 + \ldots + f_ng_n \equiv 1$. Tada skup svih suma $f_1g_1 + \ldots + f_ng_n$ konstruiše pravi ideal u H_∞. Pošto $1 \in H_\infty$, ovaj ideal se mora nalaziti u nekom maksimalnom idealu. Korsiteći Zornovu lemu, neka je to maksimalni ideal m. Onda je $f_k(m) = 0$, za svako k. Pošto smo pretpostavili da važi prva stavka, znamo da postoji mreža z_α tačaka, tako da je $|z_\alpha| < 1$ i $f_k(z_\alpha) \xrightarrow{\alpha} f_k(m) = 0$, za $k = \overline{1, n}$, što je *kontradikcija* pretpostavke da je $\sup_k |f_k(z)| \geq \delta$, za neko $\delta > 0$ i svako z, $|z| < 1$. Dakle postoje $g_1, \ldots, g_n \in H_\infty$ takve da važi $f_1g_1 + \ldots + f_ng_n \equiv 1$. Ovim smo pokazali traženu ekvivalenciju, pa i samim tim, ideju da se do Korona problema može doći i putem Banahovih algebri. ■

Korona teoremu je dokazao Karleson 1962., ali se njime nećemo baviti jer se rešava, kao što je na početku pomenuto, takozvanom "teškom analizom"koja izlazi iz okvira ovog rada i oblasti Banahovih algebri.

Kao što se lako da videti, naš problem prirodno ističe iz celokupne priče o Banahovim algrebrama, tj. Banahove aglebre predstavljaju uvodni deo teorije za problem Korona.

8 Zaključak

Kao zaključak, rekla bih da sami primeri, a specijalno uvod u Korona problem, pokazuju korisnost teorije Banahovih algebri, a samim tim i Banahovih prostora, tj. svih prostora koji imaju slična svojstva, pa time i korisnost njihovih proučavanja. Takodje bih naglasila značaj jedne oblasti kao što je ova jer povezuje velike grane matematike kao što su Funkcionalna Analiza, Kompleksna Analiza, Algebra i Topologija.

9 Zahvalnica

Ovom prilikom bih htela da se zahvalim prvo svojim najbližima, čija mi je konstanta podrška i vera osvetlela put u trenucima kada nisam imala samopouzdanja i nisam znala kako bih nastavila dalje. Zatim bih se zahvalila divnim profesorima, a specijalno mom mentoru koji je beskonačnim strpljenjem trpeo moj haotičan raspored i izlazio mi u susret kad god mi je trebala pomoć, koji su mi ne samo podarili znanje nego i svojim primerom pokazali kako treba biti naučnik, profesor i, što je najvažnije, čovek. Nadam se da ću u daljim studijama zadržati sve vrline koje sam od vas pokupila i prikazati naš fakultet u najboljem mogućem svetlu.
Na kraju bih se zahvalila svim prijateljima i kolegama koji su mi bili saputnici i prolazili samnom i lepe i teške trenutke.
Hvala Vam svima! Nadam se ćete nastaviti da mi budete podrška i od sada!

Literatura

[1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU , UK, 1st Edition, 2011.

[2] W. Rudin, *Functional Analysis*. University of Winsconsin, 2nd Edition, 1991.

[3] M. Dostanić, M. Arsenovicć, D. Jocić, *Analiza 3*. Matematički fakultet u Beogradu, Srbija Drugo izdanje, 2012.

[4] M. Marjanović, S. Vrećica, *Topologija*. Zavod za udžbenike, Beograd, Srbija Prvo izdanje, 2011.

[5] P. Koosis, *Introduction to Hp Spaces*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU , UK, 2nd Edition, 1998.

[6] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*. Graduate texts in mathematics 92, 1984.

[7] T.W. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of *Algebras, Volume I:Algebras and Banach Algebras* . Cambridge University Press, 1st Edition, 1994.

[8] T.W. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of *Algebras, Volume II:*Algebras* . Cambridge University Press, 1st Edition, 2001.

[9] N.K. Nikolskii, *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading Volume I: Hardy, Hankel, and Toeplitz* . Université de Bordeaux, 1991-1995.

[10] N.K. Nikolskii, *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading Volume II: Model Operators and Systems* . Université de Bordeaux, 1991-1995.

[11] N.K. Nikolskii, *Treatise on the shift operator* . Springer Series in Soviet Mathematics , 1986.

[12] J.B. Garnett, *Bounded analytic functions* . ACADEMIC PRESS, INC. Ill Fifth Avenue, New York, New York 10003, 1981.

[13] E. Kaniuth, *A Course in Comutative Banach Algebras* . Springer-Velarg, New York, USA 2009.