Универзитет у Београду
Математички факултет

АСИМПТОТСКЕ КООРДИНАТЕ НА ПСЕУДОСФЕРИЧНИМ ПОВРШИМА И ЊИХОВА ПРИМЕНА У КОНСТРУКЦИЈИ НОВИХ ПРИМЕРА ПОВРШИ

Мастер рад

Аутор
Димитрије Шпадијер, 1019/2015

Ментор
др Мирослава Антић

Београд
21. септембар 2016.

Садржај

Предговор **1**

Увод **2**

1 Криве у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ **4**

2 Површи у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ **10**
2.1 Дефиниција површи. Основни појмови 10
2.2 Прва и друга основна форма. Метрика на површи 14
2.3 Криве на површи. Гаусова и средња кривина 21
2.4 Изометрије површи 30

3 Асимптотске координате на псеудосферичним површима **32**
3.1 Чебишовљева локална карта 33
3.2 Репараметризација псеудосферичних површи 38
3.3 О угаоној функцији псеудосферичних површи 42

4 Ротационе површи константе негативне Гаусове кривине **44**
4.1 Ротационе површи 44
4.2 Миндингове ротационе псеудосферичне површи 47
4.3 Чебишовљева параметризација 54

5 Трансформације псеудосферичних површи **59**
5.1 Бјанкијева трансформација 59
5.1.1 Куенова површ 63
5.1.2 Псеудосфера као Бјанкијева трансформација 66
5.2 Беклундова трансформација 69
5.2.1 Динијева површ 71

6 Хилбертова теорема и закључак **73**

Литература **76**

Предговор

У овом раду приказана је теорија псеудосферичних површи. На њима локално важе аксиоме хиперболичке геометрије, па су изузетно значајне, не само у историји, јер је њиховим открићем почео развој нееуклидских геометрија, него и због тога што у еуклидском простору дају модел на којем можемо проучавати хиперболичку раван. Оно што ове површи разликује од осталих модела хиперболичке равни јесте чињеница да је на њима метрика наслеђена из еуклидског простора. Другим речима, ако је хиперболичка дуж део неке криве у еуклидском простору, онда је њена дужина у хиперболичкој мери једнака дужини криве у еуклидској мери. Такође, хиперболичка мера угла једнака је одговарајућој еуклидској мери тог угла. Циљ рада јесте пронаћи погодан координатни систем на псеудосферичним површима у којем се њихове особине једноставно изводе и помоћу којег се одређним трансформацијама могу направити нови примери овакких површи.

Рад се састоји од шест поглавља. У првом и другом поглављу укратко је изложена теорија кривих и површи, коју је аутор слушао на курсу Геометрија 3. Докази нису дати, а могу се пронаћи у [6]. Посебно су обрађени појмови нормалне кривине и главних кривина, јер се преко њих дефинише Гаусова кривина, а она је за све псеудосферичне површи константна и негативна. У трећем поглављу уведен је Чебишовљев координатни систем, који је најпогоднији за развој теорије псеудосферичних површи. У четвртом поглављу доказано је да постоје три врсте ротационих псеудосферичних површи. У петом поглављу уведене су трансформације којима се од познатих псеудосферичних површи конструишу њихови нови примери. Коначно, у шестом поглављу дата је, као додатак, Хилбертова теорема која говори о томе да не постоји псеудосферична површ која би била модел целе хиперболичке равни.

Аутор се овим путем захваљује ментору, доц. др Мирослави Антић, на помоћи и подршци у изради овог рада. Такође, аутор се захваљује члановима комисије, проф. др Мирјани Ђорић и проф. др Зорану Ракићу, на примедбама, сугестијама и указаним грешкама. Искуство ментора и чланова комисије помогло је да овај рад буде овакав какав је сад. На крају, аутор се захваљује породици и пријатељима, који су га бодрили током израде рада и који су присуствовали његовој одбрани.

Увод

Псеудосферичне површи су, како им име каже, површи које по некој својој особини подсећају на псеудосферу. Кад помињемо псеудосферу, морамо прво поменути трактрису. То је крива која представља путању којом се крећу колица која човек вуче канапом крећући се праволинијски тако да је канап увек затегнут, а у почетном тренутку је нормалан на путању којом се човек креће. Ова крива има особину да је у свакој њеној тачки одсечак тангенте од те тачке до пресечне тачке са путањом којом се човек креће константан (то је, у ствари, дужина канапа). Ротацијом трактрисе око праве која садржи путању којом се човек креће добија се површ псеудосфера. Њене особине проучаваћемо у наредним поглављима. Велики је историјски значај псеудосфере, јер она представља, додуше само локално, први непротивречни модел хиперболичке равни.

Позната је чињеница да се још од Еуклидовог доба сматрало да је Пети Еуклидов постулат, због своје комплексности у формулацији и значењу, пре теорема него постулат, тј. да се може доказати из осталих Еуклидових аксиома и постулата. Многим математичарима ово није пошло за руком. Све до XIX века проблем доказивости Петог постулата био је отворен. У великом броју безуспешних покушаја да се докаже Пети постулат, коришћена су извесна тврђења чији докази нису дати, а за која се касније испоставило да су његови еквиваленти, тј. да је претпоставка да неко од тих тврђења важи исто што и претпоставка да важи Пети Еуклидов постулат. Неки од њих су:
1. Ако је $ABCD$ четвороугао коме су углови $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle ABC$ прави и ивице AD и BC подударне, онда су углови $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle BCD$ такође прави. (Ђ. Ђ. Сакери, 05.09.1667 — 25.10.1733, италијански математичар)
2. Права нормална на једном краку оштрог угла сече његов други крак.
3. Око сваког троугла може се описати круг.
4. Ако четвороугао има три права угла, онда је његов четврти угао такође прав. (Ј. Х. Ламберт, 26.08.1728 — 25.09.1777, швајцарски математичар)
5. Збир углова троугла једнак је збиру два права угла. (А. М. Лежандр, 18.09.1752 — 10.01.1833, француски математичар)
6. Постоје тачка B и права a, која је не садржи, такве да у њима одређеној равни не постоји више од једне праве која садржи тачку B и са правом a нема заједничких тачака. (Џ. Плејфер, 10.03.1748 — 20.07.1819, шкотски математичар)
У својим радовима о Петом Еуклидовом постулату, руски математичар Николај Иванович Лобачевски (01.12.1792 — 24.02.1856) и мађарски ма-

тематичар Јанош Бољај (15.12.1802 — 27.01.1860), потпуно независно један од другог, дошли су до запањујућих резултата. Наиме, они су открили постојање сасвим нове геометрије, другачије од уобичајене еуклидске која је до тада била једина која се користила. О радовима обојице знао је само Карл Фридрих Гаус (30.04.1777 — 23.02.1855), немачки математичар који је и сам проучавао тај проблем, али никоме од њих није помињао радове оног другог. До свог великог открића дошли су тако што су уместо Петог постулата претпоставили да важи његова негација, очекујући да ће се у неком моменту доћи до противречности, али се то није догодило. Зато су и дошли до закључка да Пети постулат можда ипак није теорема као што се до тада мислило, јер су успели да изграде сасвим нову геометрију која је непротивречна. Међутим, није им успело да пронађу њен модел, па нису успешно доказали постојање те нове непротивречне геометрије, коју данас зовемо хиперболичком геометријом. Еуђенио Белтрами (16.11.1835 — 18.02.1900), италијански математичар, доказао је ову чињеницу 1868. године (у ствари, доказао је непротивречност хиперболичке планиметрије) тако што је утврдио да су на псеудосфери локално (у некој околини њене произвољне тачке) задовољене све аксиоме и постулати еуклидске планиметрије осим Петог постулата и да је, штавише, задовољена његова негација, што значи да се на псеудосфери локално остварује раван Лобачевског и Бољаја, тј. хиперболичка раван, а то без сумње доказује њену непротивречост. Овим је и званично решен проблем Петог Еуклидовог постулата, тј. доказано је да је још Еуклид пре више од 2000 година схватио да се не може доказати да се две праве секу ако произвољна права која их обе сече гради с њима с једне своје стране углове чији је збир мањи од збира два права угла (ово је оригинална формулација овог постулата), већ да се то мора претпоставити.

Како је псеудосфера локално модел хиперболичке равни, у овом раду проучаваћемо површи које са псеудосфером деле управо ту особину да се у околини произвољне њене тачке реализује геометрија равни (планиметрија) Лобачевског и Бољаја, односно хиперболичка планиметрија. За то проучавање користићемо Диференцијалну геометрију, па зато следећа два поглавља посвећујемо описивању основних појмова и тврђења Диференцијалне геометрије који су нам неопходни и које ћемо непрестано користити у овом раду.

1 Криве у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$

Дефиниција 1.1. *Крива* у простору $\mathbb{R}^3$ јесте пресликавање $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ класе $\boldsymbol{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$, где је $I \subseteq \mathbb{R}$ неки отворени интервал у $\mathbb{R}$. За криву α такође кажемо да је класе $\boldsymbol{C}^k$.

Приметимо одмах да овде криву не дефинишемо као скуп тачака у $\mathbb{R}^3$, већ као пресликавање. Директну слику овог пресликавања, тј. скуп $\alpha(I)$, зовемо *трагом* криве α. Дакле, крива овде описује начин на који се нека честица креће у простору. Ако замислимо да та честица, док се креће по некој путањи, у свакој тачки остави неки траг који после можемо видети, онда траг криве представља управо ту путању по којој се честица креће.

Да би постојало кретање, мора постојати и нека брзина. За свако $t \in I$ тачка $\alpha(t)$ у простору уједно представља и радијус вектор (вектор положаја) честице у тренутку t, тако да ако узмемо $h > 0$ такво да $t - h, t + h \in I$, вектори $\alpha(t) - \alpha(t - h)$ и $\alpha(t + h) - \alpha(t)$ представљају промену вектора положаја од тренутка $t - h$ до тренутка t, односно од тренутка t до тренутка $t + h$. Ако то поделимо са h и узмемо граничну вредност кад $h \to 0$, добијамо брзину у тренутку t. Зато смо у почетку претпоставили диференцијабилност пресликавања α.

Дефиниција 1.2. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ крива. *Вектор брзине* те криве у тачки $t \in I$ јесте вектор $\alpha'(t)$, тј. извод криве α у тачки t.

Најчешће се узима да вектор брзине ни у једној тачки није нула вектор, тј. $(\forall t \in I)\ \alpha'(t) \neq \mathbf{0}$. Такве криве зовемо *регуларним* кривима.

Када две криве имају исти траг, требало би на неки начин сматрати да су оне једнаке. Зато уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.3. Криве $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ и $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ класе $\boldsymbol{C}^k$ јесу *еквивалентне* ако постоји дифеоморфизам $\phi : J \longrightarrow I$ класе $\boldsymbol{C}^k$ такав да је $\beta = \alpha \circ \phi$. Такође, крива β јесте *репараметризација* криве α и обратно.

Лако се доказује да је овако уведена релација једна релација еквиваленције, као и да је крива еквивалентна регуларној кривој регуларна.

Дефиниција 1.4. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ крива. *Векторско поље* дуж криве α јесте непрекидно пресликавање $V : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ које свакој тачки $t \in I$ додељује вектор $V(t)$ у тачки $\alpha(t)$.

Специјално, *векторско поље брзине* дуж криве α јесте њен извод, а *тангентно векторско поље* дуж регуларне криве α јесте пресликавање $\boldsymbol{T} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ дато са $\boldsymbol{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$.

Тангентно векторско поље $\boldsymbol{T}$ дуж регуларне криве α је добро дефинисано и јединично, јер је $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ за свако $t \in I$ и интензитет вектора $\boldsymbol{T}(t)$ једнак је $\|\boldsymbol{T}(t)\| = \left\|\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}\right\| = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\|\alpha'(t)\| = 1$.

Један од разлога зашто разматрамо регуларне криве, тј. захтевамо да векторско поље брзине ни у једној тачки није нула вектор, јесте тај да бисмо у свакој тачки криве α имали тангенту. Вектор брзине је увек тангентан на кривој, па је тангента у произвољној тачки криве права која пролази кроз ту тачку и чији је вектор правца управо вектор брзине. Код кривих је често значајан услов да је вектор брзине увек јединични.

Дефиниција 1.5. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна крива и нека су $a, b \in I$ такви да је $a < b$. *Дужина лука* криве α на интервалу $[a, b]$ једнака је

$$\boldsymbol{L}(\alpha) = \int\limits_a^b \|\alpha'(t)\| \mathrm{d}t.$$

Став 1.1. *Дужина лука криве не зависи од параметризације. Другим речима, ако је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна крива, $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ њена репараметризација ($\beta = \alpha \circ \phi$) и $c, d \in J$, $c < d$, такви да је $\phi([c, d]) = [a, b]$, онда је $\boldsymbol{L}(\alpha) = \boldsymbol{L}(\beta)$.*

Неки појам јесте *геометријски* ако не зависи од параметризације. Исто кажемо и за својства која не зависе од параметризације. Дужина лука криве, на основу претходног става, јесте геометријско својство криве.

Дефиниција 1.6. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна крива и $a, b \in I$, $a < b$. *Функција дужине лука* криве α на интервалу $[a, b]$ јесте функција $\boldsymbol{s} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ дата са $\boldsymbol{s}(t) = \int\limits_a^t \|\alpha'(u)\| \mathrm{d}u$.

Из дефиниције видимо да је $\boldsymbol{s}(a) = 0$ и $\boldsymbol{s}(b) = \boldsymbol{L}(\alpha)$, тј. да функција дужине лука представља дужину пута који честица пређе од тренутка a до тренутка t. Такође, извод ове функције (на интервалу (a, b)) јесте фунцкија $\boldsymbol{s}'(t) = \|\alpha'(t)\|$, што није ништа друго него брзина (тачније, њен интензитет) честице у тренутку t. Означавамо је такође са $\boldsymbol{v}(t)$. У тачкама a и b можемо посматрати десни, односно леви извод функције $\boldsymbol{s}$, који ће представљати почетну брзину (у тренутку a), односно крајњу брзину (у тренутку b).

Став 1.2. *Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна крива. Тада постоји репараметризација $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ криве α таква да је у свакој тачки $s \in J$ вектор брзине $\beta'(s)$ криве β јединични вектор.*

Дефиниција 1.7. Криву α која има својство да јој је у свакој тачки вектор брзине јединични зовемо *природно параметризованом кривом.*

За природно параметризоване криве такође кажемо да су параметризоване дужином лука. Заиста, функција дужине лука природно параметризоване криве $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (на произвољном интервалу $[a,b] \subset I$) дата је са

$$\boldsymbol{s}(t) = \int\limits_a^t \|\alpha'(u)\| \mathrm{d}u = \int\limits_a^t \mathrm{d}u = t - a,$$

тј. колико се параметар t помери, толики се пут пређе на кривој. Зато се уместо t параметар код природно параметризованих кривих најчешће означава са s.

Став 1.3. *Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива. Ако је крива $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ репараметризација криве α ($\beta = \alpha \circ \phi$) која је такође природно параметризована, онда је пресликавање ϕ облика $\phi(s) = as + b$, где је $a \in \{-1, 1\}$, $b \in \mathbb{R}$.*

Дакле, закључујемо да је природна параметризација неке криве јединствена до на смер кретања и почетну вредност параметра.

Као што брзина кретања честице представља промену вектора положаја честице у јединици времена, тако имамо убрзање које представља промену брзине кретања честице у јединици времена.

Дефиниција 1.8. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна крива класе $\boldsymbol{C}^2$. *Вектор убрзања* те криве у тачки $t \in I$ јесте вектор $\alpha''(t)$, тј. извод векторског поља брзине криве α у тачки t. *Векторско поље убрзања* криве α јесте други извод криве α.

Дакле, надаље претпостављамо да је свака крива класе $\boldsymbol{C}^2$. Штавише, нећемо се ограничавати само на други извод, већ ћемо сматрати да је крива класе $\mathbf{C}^k$ за неко $k \geq 2$ које је довољно велико тако да сви изводи који се буду јављали буду дефинисани. Такође, захтеваћемо да векторска поља дуж криве буду диференцијабилна.

Ако је α природно параметризована крива, њен вектор брзине је у свакој тачки константног интензитета (јер је јединични), али то не значи да нема вектора убрзања, јер вектор брзине мења правац. Приметимо да се код природно параметризоване криве тангентно векторско поље $\boldsymbol{T}$ поклапа са векторским пољем брзине, јер је $\boldsymbol{T}(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \frac{\alpha'(s)}{1} = \alpha'(s)$. То значи да је $\boldsymbol{T}'(s) = \alpha''(s)$, тј. да је векторско поље убрзања извод тангентног векторског поља. Међутим, извод тангентног векторског поља је у свакој тачки $s \in I$ управан на одговарајућем тангентном вектору.

Дефиниција 1.9. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива. *Кривина* криве α у тачки $s \in I$ јесте интензитет вектора убрзања у тој тачки, тј. $\boldsymbol{\kappa}(s) = \|\boldsymbol{T}'(s)\|$.

Уочимо да права има кривину која је у свакој тачки једнака нули. Права има природну параметризацију облика $\alpha(s) = su + v$ за неки вектор $u \in \mathbb{R}^3$, $\|u\| = 1$ и неку тачку $v \in \mathbb{R}^3$, па диференцирањем два пута добијамо да је $\alpha''(s) \equiv 0$, што значи да је $\boldsymbol{\kappa}(s) \equiv 0$. Важи и обрнуто, тј. ако је $\boldsymbol{\kappa}(s) \equiv 0$, онда је та крива део праве. Уколико кривина криве није једнака нули, ненула векторско поље $\boldsymbol{T}'$ нормално је на $\boldsymbol{T}$. Тада имамо јединствено одређен јединични вектор $\boldsymbol{N}(s) = \frac{\boldsymbol{T}'(s)}{\|\boldsymbol{T}'(s)\|}$. Да бисмо у свакој тачки криве имали ортонормиран репер, посматрајмо још вектор $\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s)$. По дефиницији векторског производа у $\mathbb{R}^3$, овај вектор је нормалан и на вектору $\boldsymbol{T}(s)$ и на вектору $\boldsymbol{N}(s)$, а интензитет му је $\|\boldsymbol{B}(s)\| = \|\boldsymbol{T}(s)\| \cdot \|\boldsymbol{N}(s)\| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Дефиниција 1.10. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива и нека је за свако $s \in I$ кривина $\boldsymbol{\kappa}(s) \neq 0$. *Векторско поље главних нормала* криве α јесте векторско поље $\boldsymbol{N}(s) = \frac{\boldsymbol{T}'(s)}{\|\boldsymbol{T}'(s)\|}$, а *векторско поље бинормала* криве α јесте векторско поље $\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s)$. Такође, *торзија* криве α јесте функција $\boldsymbol{\tau}(s) = -\langle \boldsymbol{B}'(s), \boldsymbol{N}(s)\rangle$.

Дефиниција 1.11. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива таква да је $(\forall s \in I)\ \boldsymbol{\kappa}(s) \neq 0$. *Френе–Сереов репер* криве α јесте ортонормирани репер $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$.

Теорема 1.1 (Френеове формуле)**.** *Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива таква да је $(\forall s \in I)\ \boldsymbol{\kappa}(s) \neq 0$. Тада важи*

$$\begin{array}{rcccc} \boldsymbol{T}'(s) & = & & \boldsymbol{\kappa}(s)\boldsymbol{N}(s) & \\ \boldsymbol{N}'(s) & = & -\boldsymbol{\kappa}(s)\boldsymbol{T}(s) & & +\ \boldsymbol{\tau}(s)\boldsymbol{B}(s) \\ \boldsymbol{B}'(s) & = & & -\boldsymbol{\tau}(s)\boldsymbol{N}(s) & \end{array}.$$

Став 1.4. *Природно параметризована крива* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, за коју важи* $(\forall s \in I)$ $\boldsymbol{\kappa}(s) \neq 0$*, припада некој равни ако и само ако је* $\boldsymbol{\tau}(s) \equiv 0$*. Штавише, тада је* $\boldsymbol{B}(s) \equiv u$*, за неки јединични вектор* $u \in \mathbb{R}^3$ *и крива* α *припада равни чији вектор нормале колинеаран са* u*.*

Шта ћемо са кривином, торзијом и Френе–Сереовим репером кривих које нису природно параметризоване?

Дефиниција 1.12. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна крива и нека је $\widetilde{\alpha} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ њена репараметризација која је природно параметризована. Ако су $\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}, \widetilde{\boldsymbol{\tau}}, \widetilde{\boldsymbol{T}}, \widetilde{\boldsymbol{N}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}$ редом кривина, торзија, тангентно векторско поље, векторско поље главних нормала и векторско поље бинормала криве $\widetilde{\alpha}$ и $\boldsymbol{s}$ функција дужине лука криве α таква да је $\alpha = \widetilde{\alpha} \circ \boldsymbol{s}$, онда су кривина, торзија, тангентно векторско поље, векторско поље нормала и векторско поље бинормала криве α дати са

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{s}(t)),\ \boldsymbol{\tau}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{s}(t)),$$

$$\boldsymbol{T}(t) = \widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s}(t)),\ \boldsymbol{N}(t) = \widetilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{s}(t)),\ \boldsymbol{B}(t) = \widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{s}(t)).$$

Једноставно се доказује да овако дефинисано тангентно векторско поље $\boldsymbol{T}$ задовољава $\boldsymbol{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$, тј. да представља исти појам који смо дефинисали на почетку поглавља.

Нажалост, претходном дефиницијом нисмо обезбедили да сви претходно дефинисани појмови буду геометријски. Наиме, ако је $\beta = \alpha \circ \phi$ и $\phi'(t) < 0$ за свако $t \in J$, вектори Френе–Сереовог репера мењају смер, а торзија мења знак. То понекад можемо занемарити и рећи да су ови појмови геометријски до на смер кретања по кривој.

Теорема 1.2 (Уопштене Френеове формуле)**.** *Нека је* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *регуларна крива таква да је* $(\forall t \in I)$ $\boldsymbol{\kappa}(t) \neq 0$ *и нека је* $\boldsymbol{v}(t)$ *интензитет вектора брзине у тачки* $t \in I$*. Тада важи*

$$\begin{array}{rclccc} \boldsymbol{T}'(t) & = & & \boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{\kappa}(t)\boldsymbol{N}(t) & & \\ \boldsymbol{N}'(t) & = & -\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{\kappa}(t)\boldsymbol{T}(t) & & + & \boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{\tau}(t)\boldsymbol{B}(t) \\ \boldsymbol{B}'(t) & = & & -\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{\tau}(t)\boldsymbol{N}(t) & & \end{array}.$$

Став 1.5. *Вектори брзине и убрзања регуларне криве* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *дати су следећим изразима:*

$$\begin{array}{rcl} \alpha'(t) & = & \boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{T}(t), \\ \alpha''(t) & = & \boldsymbol{v}'(t)\boldsymbol{T}(t) + \boldsymbol{v}(t)^2\boldsymbol{\kappa}(t)\boldsymbol{N}(t). \end{array}$$

Природна параметризација сваке криве, теоријски гледано, увек постоји. Нажалост, у пракси је код веома малог броја кривих ту параметризацију могуће експлицитно одредити, тј. изразити је елементарним функцијама. То представља проблем, зато што смо Френе–Сереов репер, кривину и торзију произвољне криве дефинисали преко одговарајућих појмова њене природне репараметризације. Међутим, ипак је могуће израчунати их директно, тј. без репараметризације.

Став 1.6. *Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна крива и нека су њена торзија и Френе–Сереов репер дефинисани. Онда важи*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},\\
\boldsymbol{B}(t) &= \frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|},\\
\boldsymbol{N}(t) &= \boldsymbol{B}(t)\times\boldsymbol{T}(t),\\
\boldsymbol{\kappa}(t) &= \frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3},\\
\boldsymbol{\tau}(t) &= \frac{[\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2}.
\end{aligned}$$

Дакле, сада можемо израчунати Френе–Сереов репер, кривину и торзију произвољне криве без налажења њене природне репараметризације.

2 Површи у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$

2.1 Дефиниција површи. Основни појмови

Као и криве, површи ћемо посматрати као пресликавања. Међутим, пошто су површи ипак сложеније од кривих, приступићемо им на мало другачији начин.

Дефиниција 2.1. *Елементарна површ* (*локална површ*, *закрпа*) у простору $\mathbb{R}^3$ јесте 1–1 пресликавање $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ класе $\boldsymbol{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$, где је $U \subseteq \mathbb{R}^2$ неки отворен, повезан подскуп скупа $\mathbb{R}^2$. За елементарну површ r такође кажемо да је класе $\boldsymbol{C}^k$.

Криве, тј. трагови кривих, јесу објекти димензије 1, јер их описујемо једним параметром, па пошто су површи објекти димензије 2, потребна су нам два параметра. Најчешће ћемо их означавати са u и v и зваћемо их *(локалним) координатама* у U. Као и код кривих, директну слику елементарне површи, тј. скуп тачака $r(U)$, зовемо *трагом* елементарне површи r. Разлог због којег тражимо да пресликавање буде 1–1 (осим што онда траг нема самопресецања) биће ускоро јасан.

Дефиниција 2.2. Нека су r_1, r_2, r_3 координатна пресликавања елементарне површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, тј. нека је $r(u,v) = (r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v))$. *Јакобијева матрица* елементарне површи r у тачки $(u_0,v_0) \in U$ јесте матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial r_1}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial r_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial r_2}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial r_3}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial r_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}.$$

Вектор чије координате формирају прву колону ове матрице означаваћемо са $r_u(u_0,v_0)$, а вектор чије координате формирају другу колону са $r_v(u_0,v_0)$.

Као што је код кривих био случај, исти скуп тачака често параметризујемо разним функцијама. Зато уводимо следеће две дефиниције.

Дефиниција 2.3. *Координатна трансформација* класе $\boldsymbol{C}^k$ јесте дифеоморфизам $\phi : V \longrightarrow U$ класе $\boldsymbol{C}^k$, где су $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ отворени, повезани подскупови скупа $\mathbb{R}^2$.

Дефиниција 2.4. Елементарне површи $r_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ и $r_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ класе $\boldsymbol{C}^k$ јесу *еквивалентне* уколико постоји координатна трансформација $\phi : V \longrightarrow U$ класе $\boldsymbol{C}^k$ таква да је $r_2 = r_1 \circ \phi$.

И за овако уведену релацију лако се доказује да је релација еквиваленције.

Оно што нам је од пресудног значаја за даље проучавање површи јесу криве чији трагови природају трагу неке елементране површи. Кренимо од најједноставнијег примера таквих кривих.

Дефиниција 2.5. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ елементарна површ и нека је $(u_0, v_0) \in U$ произвољна тачка. Означимо са $U_{v_0} = \{u \in \mathbb{R} \mid (u, v_0) \in U\}$ и $U_{u_0} = \{v \in \mathbb{R} \mid (u_0, v) \in U\}$ редом пројекције скупа U на правима $v = v_0$ и $u = u_0$. Крива $\alpha : U_{v_0} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ дата са $\alpha(u) = r(u, v_0)$ зове се *u–параметарска* или *u–координатна* крива, а крива $\beta : U_{u_0} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ дата са $\beta(v) = r(u_0, v)$ зове се *v–параметарска* или *v–координатна* крива.

Ако на трагу елементарне површи замислимо трагове координатних кривих као мрежу, добијамо на њему координатни систем. У Диференцијалној геометрији чешће се посматра инверз пресликавања r и назива *координатном картом*, па је то један од разлога зашто тражимо да елементарна површ буде 1–1 пресликавање. Сетимо се још да смо криву звали регуларном ако је у свакој њеној тачки вектор брзине ненула вектор, чиме постижемо да је у свакој тачки регуларне криве дефинисана њена тангента. Слично, на елементарним површима желимо да у свакој тачки имамо тангентну раван.

Дефиниција 2.6. Елементарна површ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ јесте *регуларна* ако су за свако $(u, v) \in U$ вектори $r_u(u, v)$ и $r_v(u, v)$ линеарно независни.

Еквивалентно, елементарна површ је регуларна ако је у свакој тачки $(u, v) \in U$ ранг одговарајуће Јакобијеве матрице једнак 2. Пошто се налазимо у $\mathbb{R}^3$, још један еквивалентан услов јесте да је за свако $(u, v) \in U$ вектор $r_u(u, v) \times r_v(u, v)$ ненула вектор.

Став 2.1. *Елементарна површ $r_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ еквивалентна регуларној елементарној површи $r_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ такође је регуларна.*

Став 2.2 ([1], стр. 292 — 293)**.** *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и нека је $(u_0, v_0) \in U$. Онда постоји околина $U_{(u_0,v_0)}$ тачке (u_0, v_0) таква да је $r : U_{(u_0,v_0)} \longrightarrow r(U_{(u_0,v_0)})$ рестрикција дифеоморфизма отворених скупова у $\mathbb{R}^3$.*

Дефиниција 2.7. Регуларна елементарна површ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ јесте *својствена* ако је $r : U \longrightarrow r(U)$ хомеоморфизам, тј. ако је $r^{-1} : r(U) \longrightarrow U$ непрекидно пресликавање.

Став 2.3. *Нека је* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *крива чији траг припада трагу својствене елементарне површи* $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. *Онда постоје јединствене диференцијабилне функције* $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *такве да важи*

$$\alpha(t) = r(u(t), v(t)).$$

Дефиниција 2.8. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ елементарна површ и $P \in r(U)$ произвољна тачка на њеном трагу. *Тангентни вектор* на елементарној површи r у тачки P јесте вектор $X \in \mathbb{R}^3$ у тачки P за који постоји крива (не мора бити регуларна) $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (без умањења општости можемо узети да $I \ni 0$) таква да је $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$ за неке диференцијабилне функције $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(0) = P$ и $\alpha'(0) = X$.

Другим речима, вектор $X \in \mathbb{R}^3$ тангентан је на елементарној површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ у тачки $P \in r(U)$ ако постоји крива чији траг припада трагу површи r, која пролази кроз тачку P и чији је вектор брзине у тачки P баш вектор X.

Став 2.4. *Скуп свих тангентних вектора на регуларној елементарној површи* $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *у тачки* $P = r(u_0, v_0) \in r(U)$ *јесте векторски простор над пољем* $\mathbb{R}$ *чија је база* $r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)$.

Дефиниција 2.9. Скуп свих тангентних вектора на регуларној елементарној површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ у тачки $P = r(u_0, v_0)$ називамо *тангентним простором* на r у тачки P и обележавамо га са $T_P r$. Раван која садржи тачку P и паралелна је векторима $r_u(u_0, v_0)$ и $r_v(u_0, v_0)$ називамо *тангентном равни* на r у тачки P.

Дакле, сада видимо главни разлог због којег тражимо да пресликавање r буде 1–1 и вектори $r_u(u, v)$ и $r_v(u, v)$ буду линеарно независни за свако $(u, v) \in U$, а он је да бисмо обезбедили да у свакој тачки регуларне елементарне површи имамо тангентни простор и тангентну раван.

Напомена 2.1. Тангентна раван и тангентни простор не представљају исти појам. Наиме, тангентни простор је векторски потпростор векторског простора $\mathbb{R}^3$, док је тангентна раван **афини** потпростор еуклидског (афиног) простора $\mathbb{R}^3$.

Последица. *Нека је* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *крива чији траг припада трагу својствене регуларне елементарне површи* $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. *Тада постоје јединствене диференцијабилне функције* $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *такве да је*

$$\alpha'(t) = u'(t) r_u(u(t), v(t)) + v'(t) r_v(u(t), v(t)).$$

Дефиниција 2.10. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ. Вектор $Z \in \mathbb{R}^3$ у тачки $P \in r(U)$ јесте *нормалан* (*уӣраван*, *орӯоīоналан*) на r у тачки P ако је $\langle Z, X\rangle = 0$ за све тангентне векторе $X \in T_P r$ на r у тачки P.

Као и код кривих, сматраћемо да су површи класе $\mathbf{C}^k$ за неко $k \geq 2$ које је довољно велико тако да сви изводи који се буду јављали буду дефинисани.

Дефиниција 2.11. *Векӯорско ӯоље* на регуларној елементарној површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ јесте диференцијабилно пресликавање $V : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ које свакој тачки $(u, v) \in U$ додељује вектор $V(u, v) \in \mathbb{R}^n$ у тачки $P = r(u, v)$. Кажемо да је V *ӯанīенӯно векӯорско ӯоље* ако је $V(u, v) \in T_P r$ за свако $(u, v) \in U$, а да је V *нормално векӯорско ӯоље* ако је $V(u, v)$ нормално на r у тачки P за свако $(u, v) \in U$.

Векторска поља r_u и r_v јесу примери тангентних векторских поља. Што се нормалних векторских поља тиче, истичемо оно које свакој тачки додељује јединични нормални вектор.

Дефиниција 2.12. Пресликавање $\boldsymbol{n} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ дато са

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{\|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\|}$$

називамо *јединичним нормалним векӯорским ӯољем* на регуларној елементарној површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Став 2.5. *Танīенӯни ӯросӯор и ӯанīенӯна раван су īеомеӯријски ӯојмови.*

Приметимо да јединично нормално векторско поље није геометријски појам, јер се променом места координатама u и v мења његов смер. Понекад то можемо занемарити и рећи да је јединично нормално векторско поље геометријски појам до на одабир стране регуларне елементарне површи. Међутим, права која пролази кроз тачку $P = r(u_0, v_0)$ и паралелна је вектору $\boldsymbol{n}(u_0, v_0)$ (зовемо је *нормалом* на r у тачки P) остаје иста, па је она геометријски појам.

Став 2.6. *Свако ӯанīенӯно векӯорско ӯоље на елеменӯарној реīуларној ӯоврши $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ може се на јединсӯвен начин ӯредсӯавиӯи у облику*

$$V(u, v) = V_1(u, v) r_u(u, v) + V_2(u, v) r_v(u, v),$$

īде су $V_1, V_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције. Такође, ӯар диференцијабилних функција $V_1, V_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$ одређује јединсӯвено ӯанīенӯно векӯорско ӯоље на r.

Дефиниција 2.13. *Регуларна йоврш* класе $\boldsymbol{C}^k$ у $\mathbb{R}^3$ јесте скуп $M \subset \mathbb{R}^3$ такав да за сваку тачку $P \in M$ постоји околина $U(P)$ (у $\mathbb{R}^3$) тачке P и својствена регуларна елементарна површ $r : U \longrightarrow U(P) \cap M$ која се назива *локалном картом* или *локалним координатним системом* и ако су $r_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ и $r_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ локалне карте такве да је $r_1(U) \cap r_2(V) \neq \emptyset$, пресликавање ${r_2}^{-1} \circ r_1 : {r_1}^{-1}(r_1(U) \cap r_2(V)) \longrightarrow {r_2}^{-1}(r_1(U) \cap r_2(V))$ јесте координатна трансформација класе $\boldsymbol{C}^k$.

Претходно дефинисани појам се у Диференцијалној геометрији назива *диференцијабилном многострукошћу* класе $\boldsymbol{C}^k$, димензије 2. Дакле, елементарне површи нам у општем случају служе за локално проучавање површи (зато их понекад зовемо и локалним површима). Такође, у страној литератури можемо наћи и израз закрпа, који можемо разумети замишљајући да је површ сачињена од закрпа, при чему захтевамо да у заједничком простору двеју закрпа прелазак из једног у други локални координатни систем, односно пресликавање ${r_2}^{-1} \circ r_1$, буде дифеоморфизам класе $\boldsymbol{C}^k$.

2.2 Прва и друга основна форма. Метрика на површи

Дефиниција 2.14. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и $P \in r(U)$ произвољна тачка. Билинеарна форма

$$\boldsymbol{I}_P(V, W) = \langle V, W \rangle_P,$$

где је $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ рестрикција скаларног производа у $\mathbb{R}^3$ на тангентном простору $T_P r$ у тачки P, назива се *првом основном (фундаменталном) формом* регуларне елементарне површи r у тачки P.

Дакле, прва основна форма је рестрикција скаларног производа на тангентном простору регуларне елементарне површи. Она је геометријски појам. У општем случају (када имамо површ сачињену од више закрпа или, још општије, диференцијабилну многострукост), прва основна форма не мора бити рестрикција скаларног производа амбијентног простора $\mathbb{R}^n$ у којем се површ налази (ако јесте, кажемо да је *наслеђена*), али мора бити позитивно дефинитна.

Вектори $r_u(u_0, v_0)$ и $r_v(u_0, v_0)$ чине базу тангентног простора $T_P r$ у тачки $P = r(u_0, v_0)$. Та база у општем случају није ортонормирана, па зато уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 2.15. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и $P = r(u_0, v_0)$ произвољна тачка. Скаларе

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(u_0, v_0) &= \boldsymbol{I}_P(r_u(u_0, v_0), r_u(u_0, v_0)), \\
\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(u_0, v_0) &= \boldsymbol{I}_P(r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)), \\
\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(u_0, v_0) &= \boldsymbol{I}_P(r_v(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0))
\end{aligned}$$

зовемо *коефицијентима* прве основне форме у тачки P.

Коефицијенти прве основне форме зависе од параметризације, па нису геометријски појмови. У околини тачке P дефинишу се функције $\boldsymbol{E}(u, v)$, $\boldsymbol{F}(u, v)$ и $\boldsymbol{G}(u, v)$ које тачки $(u, v) \in U$ додељују одговарајуће коефицијенте прве основне форме у тачки $r(u, v)$. Оне су диференцијабилне као композиција таквих и важи

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}^2 = \|r_u\|^2 \|r_v\|^2 - \langle r_u, r_v \rangle^2 = \|r_u \times r_v\|^2 > 0.$$

Често се са $\boldsymbol{I}_P(V)$ означава и квадратна форма индукована првом основном формом (чак се негде може пронаћи да се прва основна форма дефинише управо као квадратна форма). Онда за произвољан вектор $V = \lambda r_u(u_0, v_0) + \mu r_v(u_0, v_0) \in T_P r$, $P = r(u_0, v_0)$, важи

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_P(V) &= \boldsymbol{I}_P(\lambda r_u(u_0, v_0) + \mu r_v(u_0, v_0)) \\
&= \lambda^2 \boldsymbol{I}_P(r_u(u_0, v_0)) + 2\lambda\mu \boldsymbol{I}_P(r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)) + \mu^2 \boldsymbol{I}_P(r_v(u_0, v_0)) \\
&= \lambda^2 \boldsymbol{E}(u_0, v_0) + 2\lambda\mu \boldsymbol{F}(u_0, v_0) + \mu^2 \boldsymbol{G}(u_0, v_0).
\end{aligned}$$

Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ крива чији траг припада трагу регуларне елементарне површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Тада је $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$. На интервалу $[a, b] \subset I$ њена функција дужине лука једнака је

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}(t) &= \int_a^t \|\alpha'(\tau)\| \mathrm{d}\tau = \int_a^t \sqrt{\boldsymbol{I}_{\alpha(\tau)}(\alpha'(\tau))} \mathrm{d}\tau \\
&= \int_a^t \sqrt{\boldsymbol{I}_{\alpha(\tau)}(u'(\tau) r_u(u(\tau), v(\tau)) + v'(\tau) r_v(u(\tau), v(\tau)))} \mathrm{d}\tau \\
&= \int_a^t \sqrt{(u'^2 \boldsymbol{E} + 2u'v' \boldsymbol{F} + v'^2 \boldsymbol{G})} \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Следи да је $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\boldsymbol{E}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\boldsymbol{F}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{G}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}$. Ово се другачије обележава са

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}^2 = \boldsymbol{E}\mathrm{d}u^2 + 2\boldsymbol{F}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \boldsymbol{G}\mathrm{d}v^2$$

и такође се назива првом основном формом.

Обично *метриком* називамо пресликавање које мери растојање између двеју тачака неког скупа. Растојање између двеју тачака представља најкраћи пут који честица мора прећи крећући се од једне ка другој тачки. Зато имамо следећу дефиницију.

Дефиниција 2.16. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ. Пресликавање $\boldsymbol{\rho} : r(U) \times r(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ дато са

$$\boldsymbol{\rho}(P, Q) = \inf \boldsymbol{L}(\alpha),$$

где се инфимум узима по скупу свих кривих α чији трагови припадају $r(U)$, а дужина $\boldsymbol{L}$ се узима на интервалу $[a, b]$ таквом да је $\alpha(a) = P$ и $\alpha(b) = Q$, називамо *растојањем* (*метриком*) на регуларној елементарној површи r.

У Диференцијалној геометрији се прва основна форма назива (Римановом) метриком, а пресликавање $\boldsymbol{\rho}$ растојањем.

Кад имамо скаларни производ, имамо и угао. Нека су $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ и $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ криве чији трагови припадају трагу регуларне елементарне површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ и секу се у тачки $P = r(u_0, v_0)$. Онда имамо да је $\alpha(t) = r(u_1(t), v_1(t))$, $\beta = r(u_2(t), v_2(t))$ и $\alpha(t_0) = \beta(t_1) = P$ за неке $t_0 \in I$ и $t_1 \in J$. Угао између кривих α и β у тачки P јесте онај конвексни угао $\varphi \in [0, \pi]$ за који важи

$$\cos \varphi = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_1) \rangle_P}{\|\alpha'(t_0)\|_P \|\beta'(t_1)\|_P}.$$

Специјално, за угао φ између координатних кривих $\alpha(u) = r(u, v_0)$ и $\beta(v) = r(u_0, v)$ у тачки $P = r(u_0, v_0)$ важи

$$\cos \varphi = \frac{\langle r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0) \rangle_P}{\|r_u(u_0, v_0)\|_P \|r_v(u_0, v_0)\|_P} = \frac{\boldsymbol{F}(u_0, v_0)}{\sqrt{\boldsymbol{E}(u_0, v_0)\boldsymbol{G}(u_0, v_0)}},$$

што потврђује чињеницу да је $\boldsymbol{F}^2 < \boldsymbol{EG}$, тј. $\boldsymbol{EG} - \boldsymbol{F}^2 > 0$.

Дефиниција 2.17. Регуларна елементарна површ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ чије су координатне криве у свакој тачки ортогоналне, тј. важи $\boldsymbol{F} \equiv 0$, назива се *ортогоналном* регуларном елементарном површи.

Касније ћемо видети да свака регуларна елементарна површ има репараметризацију која је ортогонална. Штавише, под неким додатним условима, постојаће репараметризације чије координатне криве задовољавају нека друга својства.

Како се мери површина на површима? Кад меримо површину неког компактног скупа K у равни, направимо правоугаону мрежу од правих паралелних координатним осама тако да тачка $(u, v) \in K$ одређује правоугаоник с теменима (u, v), $(u+\mathrm{d}u, v)$, $(u, v+\mathrm{d}v)$ и $(u+\mathrm{d}u, v+\mathrm{d}v)$. Рачунамо граничне вредности збирова површина правоугаоника те мреже који се цели налазе у том компактном скупу и правоугаоника који имају заједничких тачака с тим компактним скупом. Доказује се да су те граничне вредности једнаке и њихова вредност је $\iint\limits_K \mathrm{d}u\mathrm{d}v$, где $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ представља површину сваког правоугаоника те мреже. За рачунање површине компактног скупа S на трагу регуларне елементарне површи r, прво направимо правоугаону мрежу на скупу $r^{-1}(S) \subset U$, на исти начин као малопре. Пресликајмо ову правоугану мрежу на скуп S пресликавањем r. Правоугаоник одређен теменом (u, v) слика се у искривљени правоугаоник одређен теменом $r(u, v)$ којег можемо апроксимирати паралелограмом у тангентној равни чија су темена $r(u, v)$, $r(u, v) + r_u(u, v)\mathrm{d}u$, $r(u, v) + r_v(u, v)\mathrm{d}v$ и $r(u, v) + r_u(u, v)\mathrm{d}u + r_v(u, v)\mathrm{d}v$, чија је површина $\|r_u(u, v)\mathrm{d}u \times r_v(u, v)\mathrm{d}v\| = \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{\boldsymbol{E}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Површина скупа S дефинише се као заједничка гранична вредност збира површина искривљених правоугаоника мреже који се цели налазе у скупу S и искривљених правоугаоника који имају заједничких тачака са скупом S, а пошто површину искривљеног правоугаоника апроксимирамо површином паралелограма у тангентној равни, добијамо да је површина скупа S дата следећом дефиницијом.

Дефиниција 2.18. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и $S \subset r(U)$ компактан скуп. *Површина* скупа S једнака је

$$\boldsymbol{P}(S) = \iint\limits_{r^{-1}(S)} \sqrt{\boldsymbol{E}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Став 2.7. *Површина компактног скупа на трагу регуларне елементарне површи јесте геометријски појам.*

Метрика говори о унутрашњим својствима површи. Сви појмови и својства површи који се дефинишу преко коефицијената прве основе форме зависе само од њене метрике, а не и од амбијентног простора у којем се површ налази, па их зато зовемо *унутрашњим* појмовима и својствима површи. Површина компактног скупа на површи, према томе, јесте унутрашње својство површи.

Дефиниција 2.19. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ, $\boldsymbol{n} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ њено јединично нормално векторско поље и $P = r(u_0, v_0)$ произвољна тачка. Скаларе

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}(u_0, v_0) &= \langle r_{uu}(u_0, v_0), \boldsymbol{n}(u_0, v_0)\rangle, \\ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(u_0, v_0) &= \langle r_{uv}(u_0, v_0), \boldsymbol{n}(u_0, v_0)\rangle, \\ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(u_0, v_0) &= \langle r_{vv}(u_0, v_0), \boldsymbol{n}(u_0, v_0)\rangle \end{aligned}$$

зовемо *коефицијентима* друге основне форме регуларне елементарне површи r у тачки P. Билинеарна форма $\boldsymbol{II}_P : T_P r \longrightarrow \mathbb{R}$ дата са

$$\boldsymbol{II}_P(V, W) = V_1 W_1 \boldsymbol{e} + (V_1 W_2 + V_2 W_1)\boldsymbol{f} + V_2 W_2 \boldsymbol{g},$$

где је $V = V_1 r_u(u_0, v_0) + V_2 r_v(u_0, v_0)$ и $W = W_1 r_u(u_0, v_0) + W_2 r_v(u_0, v_0)$, назива се *другом основном (фундаменталном) формом* регуларне елементарне површи r у тачки P.

Из Линеарне алгебре знамо да је за билинеарну форму довољно задати њену матрицу у произвољној бази. За тачку $P = r(u_0, v_0)$ регуларне елементарне површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ матрица $\begin{bmatrix} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f} & \boldsymbol{g} \end{bmatrix}$ јесте матрица друге основне форме у бази $r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)$. Може се доказати да коефицијенти $\boldsymbol{e}_R$, $\boldsymbol{f}_R$ и $\boldsymbol{g}_R$ репараметризације $R = r \circ \phi$ регуларне елементарне површи r дефинишу исту билинеарну форму, па следи да је $\boldsymbol{II}_P$ геометријски појам. Она зависи од вектора $\boldsymbol{n}(u_0, v_0)$ амбијентног простора $\mathbb{R}^3$, па следи да није унутрашњи појам.

У околини тачке P дефинишу се функције $\boldsymbol{e}(u, v)$, $\boldsymbol{f}(u, v)$ и $\boldsymbol{g}(u, v)$ које тачки $(u, v) \in U$ додељују одговарајуће коефицијенте друге основне форме у тачки $r(u, v)$. Оне су диференцијабилне као композиција таквих. За разлику од прве основне форме, друга основна форма не мора бити позитивно дефинитна, али јесте симетрична. Из $\langle r_u, \boldsymbol{n}\rangle = 0$ диференцирањем редом по u, v добијамо

$$\begin{aligned} \langle r_{uu}, \boldsymbol{n}\rangle + \langle r_u, \boldsymbol{n}_u\rangle &= 0, \\ \langle r_{uv}, \boldsymbol{n}\rangle + \langle r_u, \boldsymbol{n}_v\rangle &= 0, \end{aligned}$$

па је $\boldsymbol{e} = -\langle r_u, \boldsymbol{n}_u\rangle$ и $\boldsymbol{f} = -\langle r_u, \boldsymbol{n}_v\rangle$. Такође, из $\langle r_v, \boldsymbol{n}\rangle = 0$ диференцирањем редом по u, v добијамо

$$\begin{aligned} \langle r_{uv}, \boldsymbol{n}\rangle + \langle r_v, \boldsymbol{n}_u\rangle &= 0, \\ \langle r_{vv}, \boldsymbol{n}\rangle + \langle r_v, \boldsymbol{n}_v\rangle &= 0, \end{aligned}$$

па је $\boldsymbol{f} = -\langle r_v, \boldsymbol{n}_u\rangle$ и $\boldsymbol{g} = -\langle r_v, \boldsymbol{n}_v\rangle$.

Посматрајмо шта се дешава са векторима r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}, $\boldsymbol{n}_u$ и $\boldsymbol{n}_v$ у тачки $(u_0, v_0) \in U$. Пошто је $r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)$ база тангентног простора $T_P r$ у тачки $P = r(u_0, v_0)$ и вектор $\boldsymbol{n}(u_0, v_0)$ управан на овим векторима, следи да су $r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0), \boldsymbol{n}(u_0, v_0)$ линеарно независни, па чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$. Дакле, у тачки (u_0, v_0) важи

$$r_{uu} = \boldsymbol{\Gamma}_{11}^1 r_u + \boldsymbol{\Gamma}_{11}^2 r_v + \eta \boldsymbol{n}, \tag{2.1}$$
$$r_{uv} = \boldsymbol{\Gamma}_{12}^1 r_u + \boldsymbol{\Gamma}_{12}^2 r_v + \varphi \boldsymbol{n}, \tag{2.2}$$
$$r_{vv} = \boldsymbol{\Gamma}_{22}^1 r_u + \boldsymbol{\Gamma}_{22}^2 r_v + \omega \boldsymbol{n}, \tag{2.3}$$
$$\boldsymbol{n}_u = \boldsymbol{\beta}_1^1 r_u + \boldsymbol{\beta}_1^2 r_v + \xi \boldsymbol{n}, \tag{2.4}$$
$$\boldsymbol{n}_v = \boldsymbol{\beta}_2^1 r_u + \boldsymbol{\beta}_2^2 r_v + \psi \boldsymbol{n}. \tag{2.5}$$

Израчунајмо прво коефицијенте $\boldsymbol{\beta}_i^j$, $i, j \in \{1, 2\}$. Скаларним множењем једначине (2.4) редом са $r_u, r_v, \boldsymbol{n}$ добијамо

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{e} &= \boldsymbol{\beta}_1^1 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\beta}_1^2 \boldsymbol{F} + 0, \\ -\boldsymbol{f} &= \boldsymbol{\beta}_1^1 \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\beta}_1^2 \boldsymbol{G} + 0, \\ 0 &= \quad 0 + \quad 0 + \xi, \end{aligned}$$

па закључујемо да је $\xi = 0$ и да је, на основу Крамеровог правила,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_1^1 &= \frac{\boldsymbol{fF} - \boldsymbol{eG}}{\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2}, \\ \boldsymbol{\beta}_1^2 &= \frac{\boldsymbol{eF} - \boldsymbol{fE}}{\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2}. \end{aligned}$$

Слично добијамо

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_2^1 &= \frac{\boldsymbol{gF} - \boldsymbol{fG}}{\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2}, \\ \boldsymbol{\beta}_2^2 &= \frac{\boldsymbol{fF} - \boldsymbol{gE}}{\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2}. \end{aligned}$$

Дефиниција 2.20. Једнакости

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_u &= \boldsymbol{\beta}_1^1 r_u + \boldsymbol{\beta}_1^2 r_v, \\ \boldsymbol{n}_v &= \boldsymbol{\beta}_2^1 r_u + \boldsymbol{\beta}_2^2 r_v \end{aligned}$$

називају се *Вајнгартеновим једнакостима.*

Остаје нам још да решимо систем (2.1)–(2.3). Прво, из $\langle r_u, r_u\rangle = \boldsymbol{E}$ диференцирањем редом по u, v добијамо

$$\begin{aligned} 2\langle r_{uu}, r_u\rangle &= \boldsymbol{E}_u,\\ 2\langle r_{uv}, r_u\rangle &= \boldsymbol{E}_v. \end{aligned}$$

Затим, из $\langle r_v, r_v\rangle = \boldsymbol{G}$ диференцирањем редом по u, v добијамо

$$\begin{aligned} 2\langle r_{uv}, r_v\rangle &= \boldsymbol{G}_u,\\ 2\langle r_{vv}, r_v\rangle &= \boldsymbol{G}_v. \end{aligned}$$

Коначно, из $\langle r_u, r_v\rangle = \boldsymbol{F}$ диференцирањем редом по u, v добијамо

$$\begin{aligned} \langle r_{uu}, r_v\rangle + \langle r_u, r_{uv}\rangle &= \boldsymbol{F}_u,\\ \langle r_{uv}, r_v\rangle + \langle r_u, r_{vv}\rangle &= \boldsymbol{F}_v, \end{aligned}$$

па је $\langle r_{uu}, r_v\rangle = \boldsymbol{F}_u - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_v$ и $\langle r_{vv}, r_u\rangle = \boldsymbol{F}_v - \frac{1}{2}\boldsymbol{G}_u$. Помножимо сада једначину (2.1) редом скаларно са $r_u, r_v, \boldsymbol{n}$ и добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_u &= \boldsymbol{\Gamma}_{11}^1\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\Gamma}_{11}^2\boldsymbol{F} + 0,\\ \boldsymbol{F}_u - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_v &= \boldsymbol{\Gamma}_{11}^1\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Gamma}_{11}^2\boldsymbol{G} + 0,\\ \boldsymbol{e} &= \quad 0 + \quad 0 + \eta, \end{aligned}$$

па закључујемо да је $\eta = \boldsymbol{e}$ и да је, на основу Крамеровог правила,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_u\boldsymbol{G} - \left(\boldsymbol{F}_u - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_v\right)\boldsymbol{F}}{\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2} = \frac{\boldsymbol{E}_u\boldsymbol{G} - 2\boldsymbol{F}_u\boldsymbol{F} + \boldsymbol{E}_v\boldsymbol{F}}{2(\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2)},\\ \boldsymbol{\Gamma}_{11}^2 &= \frac{\left(\boldsymbol{F}_u - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_v\right)\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_u\boldsymbol{F}}{\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2} = \frac{2\boldsymbol{F}_u\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_v\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_u\boldsymbol{F}}{2(\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2)}. \end{aligned}$$

Слично добијамо да је $\varphi = \boldsymbol{f}$, $\omega = \boldsymbol{g}$ и да је

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_{12}^1 &= \frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{G} - \frac{1}{2}\boldsymbol{G}_u\boldsymbol{F}}{\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2} = \frac{\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_u\boldsymbol{F}}{2(\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2)},\\ \boldsymbol{\Gamma}_{12}^2 &= \frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{G}_u\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{F}}{\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2} = \frac{\boldsymbol{G}_u\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_v\boldsymbol{F}}{2(\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2)},\\ \boldsymbol{\Gamma}_{22}^1 &= \frac{\left(\boldsymbol{F}_v - \frac{1}{2}\boldsymbol{G}_u\right)\boldsymbol{G} - \frac{1}{2}\boldsymbol{G}_v\boldsymbol{F}}{\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2} = \frac{2\boldsymbol{F}_v\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_u\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_v\boldsymbol{F}}{2(\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2)},\\ \boldsymbol{\Gamma}_{22}^2 &= \frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{G}_v\boldsymbol{E} - \left(\boldsymbol{F}_v - \frac{1}{2}\boldsymbol{G}_u\right)\boldsymbol{F}}{\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2} = \frac{\boldsymbol{G}_v\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{F}_v\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}_u\boldsymbol{F}}{2(\mathbf{EG} - \boldsymbol{F}^2)}. \end{aligned}$$

Дефиниција 2.21. Једнакости

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \mathbf{\Gamma}_{11}^{1} r_u + \mathbf{\Gamma}_{11}^{2} r_v + \boldsymbol{e}\boldsymbol{n}, \\ r_{uv} &= \mathbf{\Gamma}_{12}^{1} r_u + \mathbf{\Gamma}_{12}^{2} r_v + \boldsymbol{f}\boldsymbol{n}, \\ r_{vv} &= \mathbf{\Gamma}_{22}^{1} r_u + \mathbf{\Gamma}_{22}^{2} r_v + \boldsymbol{g}\boldsymbol{n} \end{aligned}$$

називају се *Гаусовим једнакостима*, а функције $\mathbf{\Gamma}_{ij}^{k}$, $i, j, k \in \{1, 2\}$, $i \leq j$, називају се *Кристофеловим симболима* (друге врсте).

Приметимо да Кристофелови симболи зависе само од коефицијената прве основне форме, па су унутрашњи појмови.

2.3 Криве на површи. Гаусова и средња кривина

Као што смо већ рекли, површи ћемо проучавати посматрајући криве на њој. Говорићемо да крива припада регуларној елементарној површи, мислећи при томе на њихове трагове. На основу става 2.2, свака тачка регуларне елементарне површи има околину на којој је r рестрикција дифеоморфизма отворених скупова у $\mathbb{R}^3$, па је самим тим и хомеоморфизам, тј. својствена регуларна елементарна површ. Дакле, следи да сваку криву α на r можемо, на основу става 2.3, локално представити у облику $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, за неке диференцијабилне функције u и v. За почетак ћемо се ограничити на природну параметризацију, а после ћемо све уведено проширити на произвољне регуларне криве.

Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива која припада регуларној елементарној површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, тј. нека локално важи $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$. Пошто је вектор $\boldsymbol{T}'(s)$ управан на вектору $\boldsymbol{T}(s)$, следи да је

$$\boldsymbol{T}'(s) = \boldsymbol{\kappa}_n(s)\boldsymbol{n}(u(s), v(s)) + \boldsymbol{\kappa}_g(s)\boldsymbol{S}(s),$$

где је $\boldsymbol{S}(s) = \boldsymbol{n}(u(s), v(s)) \times \boldsymbol{T}(s)$.

Дефиниција 2.22. Вектор $\boldsymbol{S}(s)$ називамо *вектором унутрашње нормале* природно параметризоване криве α на регуларној елементарној површи r. Скаларе $\boldsymbol{\kappa}_n(s)$ и $\boldsymbol{\kappa}_g(s)$ називамо редом *нормалном* и *геодезијском кривином* криве α у тачки $P = \alpha(s)$.

Наравно, пошто је $\boldsymbol{T}'(s) = \boldsymbol{\kappa}(s)\boldsymbol{N}(s)$ и пошто су вектори $\boldsymbol{n}(u(s), v(s))$ и $\boldsymbol{S}(s)$ су јединични и међусобно нормални, следи да је

$$\boldsymbol{\kappa}(s)^2 = \|\boldsymbol{T}'(s)\|^2 = \boldsymbol{\kappa}_n(s)^2 + \boldsymbol{\kappa}_g(s)^2.$$

Став 2.8. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$, природно параметризована крива која јој припада. Тада је*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\kappa}_n &= \boldsymbol{e} \cdot (u')^2 + 2\boldsymbol{f} \cdot u'v' + \boldsymbol{g} \cdot (v')^2, \\
\boldsymbol{\kappa}_g \boldsymbol{S} &= (\boldsymbol{\Gamma}_{11}^1 \cdot (u')^2 + 2\boldsymbol{\Gamma}_{12}^1 \cdot u'v' + \boldsymbol{\Gamma}_{22}^1 \cdot (v')^2 + u'')r_u \\
&+ (\boldsymbol{\Gamma}_{11}^2 \cdot (u')^2 + 2\boldsymbol{\Gamma}_{12}^2 \cdot u'v' + \boldsymbol{\Gamma}_{22}^2 \cdot (v')^2 + v'')r_v.
\end{aligned}$$

Последица. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$, природно параметризована крива која јој припада. Тада је*

$$\boldsymbol{\kappa}_n(s) = \boldsymbol{II}_{\alpha(s)}(\alpha'(s), \alpha'(s)).$$

Претходну једнакост краће записујемо са $\boldsymbol{\kappa}_n = \boldsymbol{II}(\alpha', \alpha')$, при чему је $\boldsymbol{II}$ друга основна форма која делује у одговарајућој тачки. Такође, по дефиницији је $\boldsymbol{\kappa}_n = \langle \alpha'', \boldsymbol{n} \rangle$.

Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна крива која није природно параметризована и припада регуларној елементарној површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ и нека је $\widetilde{\alpha} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ природна репараметризација криве α ($\alpha = \widetilde{\alpha} \circ \boldsymbol{s}$, где је $\boldsymbol{s}$ функција дужине лука криве α). Ако су $\widetilde{\boldsymbol{\kappa}_n}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\kappa}_g}$ редом нормална и геодезијска кривина криве $\widetilde{\alpha}$, онда су $\boldsymbol{\kappa}_n = \widetilde{\boldsymbol{\kappa}_n} \circ \boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{\kappa}_g = \widetilde{\boldsymbol{\kappa}_g} \circ \boldsymbol{s}$ редом *нормална* и *геодезијска кривина* криве α.

Теорема 2.1. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, крива која јој припада. Тада је*

$$\boldsymbol{\kappa}_n = \frac{\boldsymbol{II}(\alpha', \alpha')}{\boldsymbol{I}(\alpha', \alpha')}.$$

Доказ. Нека је $\boldsymbol{s}$ функција дужине лука криве α и $\alpha = \widetilde{\alpha} \circ \boldsymbol{s}$, тј. нека је $\widetilde{\alpha}$ природна репараметризација криве α. Тада је $\boldsymbol{T}(t) = \widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s}(t))$, односно ако ставимо да је $s = \boldsymbol{s}(t)$, добијамо $\widetilde{\boldsymbol{T}}(s) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{s}^{-1}(s))$. Диференцирањем по s добијамо $\widetilde{\boldsymbol{T}}'(s) = \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{s}^{-1}(s)) \cdot (\boldsymbol{s}^{-1})'(s)$. Како је $(\boldsymbol{s}^{-1})'(s) = \frac{1}{\boldsymbol{s}'(\boldsymbol{s}^{-1}(s))}$ и $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{v}$ (интензитет вектора брзине), следи да је

$$\widetilde{\alpha}''(s) = \widetilde{\boldsymbol{T}}'(s) = \frac{\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{s}^{-1}(s))}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s}^{-1}(s))}.$$

Враћањем $s = \boldsymbol{s}(t)$ добијамо $\widetilde{\alpha}''(\boldsymbol{s}(t)) = \frac{\boldsymbol{T}'(t)}{\boldsymbol{v}(t)}$, па ако скаларно помножимо са $\boldsymbol{n}(u(t), v(t))$ добијамо $\widetilde{\boldsymbol{\kappa}_n}(\boldsymbol{s}(t)) = \frac{\langle \boldsymbol{T}'(t), \boldsymbol{n}(u(t), v(t)) \rangle}{\boldsymbol{v}(t)}$, односно $\boldsymbol{\kappa}_n = \frac{\langle \boldsymbol{T}', \boldsymbol{n} \rangle}{\boldsymbol{v}}$. У свакој тачки криве важи $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{n} \rangle = 0$, па следи да је $\langle \boldsymbol{T}', \boldsymbol{n} \rangle + \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{n}' \rangle = 0$. Дакле, $\langle \boldsymbol{T}', \boldsymbol{n} \rangle = -\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{n}' \rangle$, па је $\boldsymbol{\kappa}_n = -\frac{\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{n}' \rangle}{\boldsymbol{v}}$. Пошто је $\boldsymbol{T} = \frac{\alpha'}{\boldsymbol{v}} = \frac{u' r_u + v' r_v}{\boldsymbol{v}}$ и $\boldsymbol{n}' = u' \boldsymbol{n}_u + v' \boldsymbol{n}_v$, добијамо

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\kappa}_n &= -\frac{\langle u' r_u + v' r_v, u' \boldsymbol{n}_u + v' \boldsymbol{n}_v \rangle}{\boldsymbol{v}^2} \\
&= -\frac{(u')^2 \langle r_u, \boldsymbol{n}_u \rangle + u'v'(\langle r_u, \boldsymbol{n}_v \rangle + \langle r_v, \boldsymbol{n}_u) + (v')^2 \langle r_v, \boldsymbol{n}_v \rangle}{\boldsymbol{v}^2} \\
&= -\frac{(u')^2(-\boldsymbol{e}) + u'v'(-\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}) + (v')^2(-\boldsymbol{g})}{\boldsymbol{v}^2} \\
&= \frac{\boldsymbol{e} \cdot (u')^2 + 2\boldsymbol{f} \cdot u'v' + \boldsymbol{g} \cdot (v')^2}{\|\alpha'\|^2},
\end{aligned}$$

односно $\boldsymbol{\kappa}_n = \frac{\boldsymbol{II}(\alpha', \alpha')}{\boldsymbol{I}(\alpha', \alpha')}$. □

Појмови нормалне и геодезијске кривине изузетно су значајни. Претходном теоремом доказали смо да нам је за нормалну кривину довољан само вектор брзине криве. Зато се уводи следећа дефиниција.

Дефиниција 2.23. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и $V \in T_P r \setminus \{0\}$ произвољан тангентан вектор у тачки $P \in r(U)$. *Нормална кривина* површи r у правцу тангентног вектора V једнака је

$$\boldsymbol{\kappa}_n(V) = \frac{\boldsymbol{II}_P(V, V)}{\boldsymbol{I}_P(V, V)}.$$

Наравно, нормална кривина површи у правцу неког тангентног вектора јесте геометријски појам и имамо да за свако $\lambda \neq 0$ важи

$$\boldsymbol{\kappa}_n(\lambda V) = \frac{\boldsymbol{II}_P(\lambda V, \lambda V)}{\boldsymbol{I}_P(\lambda V, \lambda V)} = \frac{\lambda^2 \boldsymbol{II}_P(V, V)}{\lambda^2 \boldsymbol{I}_P(V, V)} = \frac{\boldsymbol{II}_P(V, V)}{\boldsymbol{I}_P(V, V)} = \boldsymbol{\kappa}_n(V),$$

па је довољно посматрати нормалну кривину само у правцу јединичних вектора $V \in T_P r$. Пошто је скуп јединичних вектора у $T_P r$ компактан и $\boldsymbol{\kappa}$ непрекидно пресликавање, следи да оно достиже најмању и највећу вредност. Означавамо их са $\boldsymbol{k}_1(P)$ и $\boldsymbol{k}_2(P)$ и зовемо их *главним кривинама* регуларне елементарне површи r у тачки $P = r(u_0, v_0)$. Тангентни вектор у којем се достиже нека од главних кривина (не мора бити јединични вектор) назива се *главним вектором.* Нека је $V^0 = V_1^0 r_u + V_2^0 r_v$ јединични главни вектор и означимо одговарајућу главну кривину са $\boldsymbol{\kappa}_n^0$. Дакле, $\boldsymbol{E} {V_1^0}^2 + 2\boldsymbol{F} V_1^0 V_2^0 + \boldsymbol{G} {V_2^0}^2 = 1$ и $\boldsymbol{e} {V_1^0}^2 + 2\boldsymbol{f} V_1^0 V_2^0 + \boldsymbol{g} {V_2^0}^2 = \boldsymbol{\kappa}_n^0$. Пресликавање $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ дато са

$$f(V_1, V_2) = \frac{\boldsymbol{e} V_1^2 + 2\boldsymbol{f} V_1 V_2 + \boldsymbol{g} V_2^2}{\boldsymbol{E} V_1^2 + 2\boldsymbol{F} V_1 V_2 + \boldsymbol{G} V_2^2}$$

достиже локални екстремум у тачки (V_1^0, V_2^0). Следи да су у тој тачки парцијални изводи једнаки 0, тј.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial V_1}(V_1^0, V_2^0) &= \frac{(2\boldsymbol{e}V_1^0 + 2\boldsymbol{f}V_2^0)\cdot 1 - \boldsymbol{\kappa}_n^0 \cdot (2\boldsymbol{E}V_1^0 + 2\boldsymbol{F}V_2^0)}{1^2} = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial V_2}(V_1^0, V_2^0) &= \frac{(2\boldsymbol{f}V_1^0 + 2\boldsymbol{g}V_2^0)\cdot 1 - \boldsymbol{\kappa}_n^0 \cdot (2\boldsymbol{F}V_1^0 + 2\boldsymbol{G}V_2^0)}{1^2} = 0.
\end{aligned}$$

Дакле, добијамо

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\kappa}_n^0\boldsymbol{E})V_1^0 + (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\kappa}_n^0\boldsymbol{F})V_2^0 &= 0,\\
(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\kappa}_n^0\boldsymbol{F})V_1^0 + (\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\kappa}_n^0\boldsymbol{G})V_2^0 &= 0,
\end{aligned}$$

па пошто је $(V_1^0, V_2^0) \neq (0,0)$, следи да је детерминанта овог система линеарних једначина једнака 0. Дакле

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e} - \boldsymbol{\kappa}_n^0\boldsymbol{E} & \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\kappa}_n^0\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\kappa}_n^0\boldsymbol{F} & \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\kappa}_n^0\boldsymbol{G} \end{vmatrix} = 0,$$

тј. $\boldsymbol{eg} - \boldsymbol{\kappa}_n^0(\boldsymbol{eG} + \boldsymbol{gE}) + {\boldsymbol{\kappa}_n^0}^2\boldsymbol{EG} - (\boldsymbol{f}^2 - 2\boldsymbol{fF}\boldsymbol{\kappa}_n^0 + \boldsymbol{F}^2{\boldsymbol{\kappa}_n^0}^2) = 0$. Добијамо квадратну једначину

$$(\boldsymbol{EG} - \boldsymbol{F}^2){\boldsymbol{\kappa}_n^0}^2 - (\boldsymbol{eG} + \boldsymbol{gE} - 2\boldsymbol{fF})\boldsymbol{\kappa}_n^0 + \boldsymbol{eg} - \boldsymbol{f}^2 = 0$$

по $\boldsymbol{\kappa}_n^0$ коју задовољавају обе главне кривине $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$, па их можемо рачунати преко коефицијената прве и друге основне форме. Такође, главне кривине су геометријски појмови.

Вратимо се једнакостима $\frac{\partial f}{\partial V_1}(V_1^0, V_2^0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial V_2}(V_1^0, V_2^0) = 0$. Поделимо обе једнакости са 2 и помножимо прву једнакост са $\boldsymbol{F}V_1^0 + \boldsymbol{G}V_2^0$, а другу са $\boldsymbol{E}V_1^0 + \boldsymbol{F}V_2^0$. Тиме смо изједначили коефицијенте уз $\boldsymbol{\kappa}_n^0$, па одузимањем друге једнакости од прве добијамо

$$(\boldsymbol{e}V_1^0 + \boldsymbol{f}V_2^0)(\boldsymbol{F}V_1^0 + \boldsymbol{G}V_2^0) - (\boldsymbol{f}V_1^0 + \boldsymbol{g}V_2^0)(\boldsymbol{E}V_1^0 + \boldsymbol{F}V_2^0) = 0.$$

Даљим сређивањем добијамо

$$(\boldsymbol{eF} - \boldsymbol{fE}){V_1^0}^2 + (\boldsymbol{eG} + \boldsymbol{fF} - \boldsymbol{fF} - \boldsymbol{gE})V_1^0V_2^0 + (\boldsymbol{fG} - \boldsymbol{gF}){V_2^0}^2 = 0,$$

односно

$$\begin{vmatrix} -{V_2^0}^2 & V_1^0V_2^0 & -{V_1^0}^2 \\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \end{vmatrix} = 0,$$

па и главне векторе можемо рачунати преко коефицијената прве и друге основне форме.

Став 2.9. *Нека је* $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *регуларна елементарна површ, нека је* $P = r(u_0, v_0)$ *тачка таква да је* $\boldsymbol{k}_1(P) \neq \boldsymbol{k}_2(P)$ *и нека су* $V, W \in T_P r$ *главни вектори који одговарају редом главним кривинама* $\boldsymbol{k}_1(P)$ *и* $\boldsymbol{k}_2(P)$. *Онда је* $\boldsymbol{I}_P(V, W) = \boldsymbol{II}_P(V, W) = 0$.

Доказ. Без умањења општости претпоставимо да су V и W јединични. Нека је $V = V_1 r_u(u_0, v_0) + V_2 r_v(u_0, v_0)$ и $W = W_1 r_u(u_0, v_0) + W_2 r_v(u_0, v_0)$. Доказали смо да је тада

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}(u_0,v_0)V_1 + \boldsymbol{f}(u_0,v_0)V_2 - \boldsymbol{k}_1(P)\cdot(\boldsymbol{E}(u_0,v_0)V_1 + \boldsymbol{F}(u_0,v_0)V_2) &= 0,\\
\boldsymbol{f}(u_0,v_0)V_1 + \boldsymbol{g}(u_0,v_0)V_2 - \boldsymbol{k}_1(P)\cdot(\boldsymbol{F}(u_0,v_0)V_1 + \boldsymbol{G}(u_0,v_0)V_2) &= 0,\\
\boldsymbol{e}(u_0,v_0)W_1 + \boldsymbol{f}(u_0,v_0)W_2 - \boldsymbol{k}_2(P)\cdot(\boldsymbol{E}(u_0,v_0)W_1 + \boldsymbol{F}(u_0,v_0)W_2) &= 0,\\
\boldsymbol{f}(u_0,v_0)W_1 + \boldsymbol{g}(u_0,v_0)W_2 - \boldsymbol{k}_2(P)\cdot(\boldsymbol{F}(u_0,v_0)W_1 + \boldsymbol{G}(u_0,v_0)W_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Помножимо прву једнакост са W_1, другу са W_2 и саберимо их. Добијамо

$$\boldsymbol{e}(u_0,v_0)V_1W_1 + \boldsymbol{f}(u_0,v_0)(V_2W_1 + V_1W_2) + \boldsymbol{g}(u_0,v_0)V_2W_2$$

$$-\boldsymbol{k}_1(P)\cdot(\boldsymbol{E}(u_0,v_0)V_1W_1 + \boldsymbol{F}(u_0,v_0)(V_2W_1 + V_1W_2) + \boldsymbol{G}(u_0,v_0)V_2W_2) = 0,$$

односно $\boldsymbol{II}_P(V,W) - \boldsymbol{k}_1(P)\boldsymbol{I}_P(V,W) = 0$. Слично, из треће и четврте једнакости добијамо $\boldsymbol{II}_P(V,W) - \boldsymbol{k}_2(P)\boldsymbol{I}_P(V,W) = 0$. Одузимањем претходно добијених једнакости добијамо $(\boldsymbol{k}_2(P) - \boldsymbol{k}_1(P))\boldsymbol{I}_P(V,W) = 0$, па пошто је $\boldsymbol{k}_2(P) - \boldsymbol{k}_1(P) \neq 0$, следи да је $\boldsymbol{I}_P(V,W) = 0$, а одмах затим и да је $\boldsymbol{II}_P(V,W) = 0$. □

Дефиниција 2.24. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ крива која припада регуларној елементарној површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Ако је за свако $t \in I$ вектор $\alpha'(t)$ главни, ту криву називамо *линијом кривине*. Регуларну елементарну површ чије су координатне криве линије кривине називамо *главном* регуларном елементарном површи.

Став 2.10. *Нека је* $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *регуларна елементарна површ. Ако је* r *главна и* $\boldsymbol{k}_1(P) \neq \boldsymbol{k}_2(P)$ *у свакој тачки* $P \in r(U)$, *онда важи* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} \equiv 0$. *Обратно, ако важи* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} \equiv 0$, *онда је* r *главна.*

Доказ. Ако је r главна и важи $\boldsymbol{k}_1(P) \neq \boldsymbol{k}_2(P)$ у свакој тачки $P = r(u, v)$, онда су вектори $r_u(u, v)$ и $r_v(u, v)$ главни и на основу претходног става следи $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}(r_u, r_v) = 0$ и $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{II}(r_u, r_v) = 0$ у свакој тачки $(u, v) \in U$. Обратно, нека је $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} \equiv 0$. Вектор $V = V_1 r_u + V_2 r_v$ је главни ако и само ако важи

$$0 = \begin{vmatrix} -V_2^2 & V_1V_2 & -V_1^2 \\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -V_2^2 & V_1V_2 & -V_1^2 \\ \boldsymbol{e} & 0 & \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{E} & 0 & \boldsymbol{G} \end{vmatrix} = V_1V_2(\boldsymbol{g}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}\boldsymbol{G}),$$

па како за вектор r_u важи $V_1 = 1$ и $V_2 = 0$, а за вектор r_v важи $V_1 = 0$ и $V_2 = 1$, следи да су вектори r_u и r_v главни вектори. Дакле, r је главна регуларна елементарна површ. $\square$

Осим линија кривине, истичемо још две врсте кривих на површи.

Дефиниција 2.25. Тангентни вектор $V \in T_P r$ регуларне елементарне површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ у чијем је правцу нормална кривина једнака 0 назива се *асимптотским вектором.* Крива $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ која припада површи r, таква да је за свако $t \in I$ вектор $\alpha'(t)$ асимптотски, називамо *асимптотском линијом.* Регуларну елементарну површ чије су координатне криве асимптотске линије називамо *асимптотском* регуларном елементарном површи.

Наравно, асимптотске криве имају у свакој тачки нормалну кривину једнаку 0. А шта ћемо с кривима којима је геодезијска кривина у свакој тачки једнака 0?

Дефиниција 2.26. Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива која припада регуларној елементарној површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Ако је у свакој њеној тачки геодезијска кривина једнака 0, кажемо да је она *геодезијска линија.*

На основу става 2.8 одмах следи следећа важна теорема.

Теорема 2.2. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$, природно параметризована крива која јој припада. Тада је α геодезијска линија ако и само ако важи*

$$\begin{cases} u'' + \mathbf{\Gamma}_{11}^1 \cdot (u')^2 + 2\mathbf{\Gamma}_{12}^1 \cdot u'v' + \mathbf{\Gamma}_{22}^1 \cdot (v')^2 = 0 \\ v'' + \mathbf{\Gamma}_{11}^2 \cdot (u')^2 + 2\mathbf{\Gamma}_{12}^2 \cdot u'v' + \mathbf{\Gamma}_{22}^2 \cdot (v')^2 = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Систем диференцијалних једначина (2.6) служи за одређивање геодезијских линија. Ако претпоставимо да $I \ni 0$ и задамо услове $\alpha(0) = P$, $P = r(u_0, v_0)$ и $\alpha'(0) = V \in T_P r$, $\|V\| = 1$, систем има јединствено решење. То тврди следећа теорема.

Теорема 2.3. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ, нека је $P \in r(U)$ произвољна тачка и нека је $V \in T_P r$ произвољни јединични тангентни вектор у тачки P. Онда постоји јединствена геодезијска линија $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $I \ni 0$, таква да је $\alpha(0) = P$ и $\alpha'(0) = V$.*

О најважнијем својству геодезијских линија говори следећа теорема.

Теорема 2.4. *Нека је $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива на регуларној елементарној површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, нека је $[a, b] \subset I$ и нека је $\alpha(a) = P$ и $\alpha(b) = Q$. Ако је $\boldsymbol{\rho}(P, Q) = b - a$, онда је α геодезијска линија.*

Дакле, ако је α крива која остварује најкраће растојање између двеју тачака на површи, онда је α геодезијска. Обратно не мора да важи глобално, али важи локално. Дакле, геодезијске линије локално остварују накраће растојање.

Дефиниција 2.27. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и $P \in r(U)$ произвољна тачка. *Гаусова кривина* површи r у тачки P једнака је $\boldsymbol{K}(P) = \boldsymbol{k}_1(P)\boldsymbol{k}_2(P)$, а *средња кривина* је $\boldsymbol{H}(P) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}_1(P) + \boldsymbol{k}_2(P))$.

Гаусова и средња кривина регуларне елементарне површи јесу геометријски појмови. На основу Вијетових формула долазимо до следећег тврђења.

Став 2.11. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ. Тада је*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= \frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}^2}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}^2}, \\ \boldsymbol{H} &= \frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{f}\boldsymbol{F}}{2(\boldsymbol{E}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}^2)}. \end{aligned}$$

Површ којој је у свакој тачки средња кривина једнака 0 назива се *минималном површи.*

Дефиниција 2.28. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и $P \in r(U)$ произвољна тачка. Тачка P је *елиптичка* ако је $\boldsymbol{K}(P) > 0$, *хиперболичка* ако је $\boldsymbol{K}(P) < 0$, *параболичка* ако је $\boldsymbol{K}(P) = 0$ и бар једна од главних кривина $\boldsymbol{k}_1(P), \boldsymbol{k}_2(P)$ различита од 0, *планарна* ако је $\boldsymbol{k}_1(P) = \boldsymbol{k}_2(P) = 0$, а *умбиличка* ако је $\boldsymbol{k}_1(P) = \boldsymbol{k}_2(P)$.

У умбиличким тачкама сваки тангентни вектор је главни. При томе, у планарним тачкама сваки тангентни вектор је уједно и асимптотски, док у умбиличким тачкама које нису планарне нема асимптотских вектора.

Став 2.12. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и тачка $P = r(u_0, v_0)$ произвољна. Тада је P умбиличка тачка ако и само ако је $\frac{\boldsymbol{e}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{E}(u_0,v_0)} = \frac{\boldsymbol{f}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{F}(u_0,v_0)} = \frac{\boldsymbol{g}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{G}(u_0,v_0)}$ (подразумевамо да је $\boldsymbol{f}(u_0, v_0) = 0$ ако је $\boldsymbol{F}(u_0, v_0) = 0$).*

Доказ. Тачка P је умбиличка ако и само ако је сваки тангентни вектор $V \in T_P r$ главни, тј. ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} -V_2^2 & V_1V_2 & -V_1^2 \\ \boldsymbol{e}(u_0,v_0) & \boldsymbol{f}(u_0,v_0) & \boldsymbol{g}(u_0,v_0) \\ \boldsymbol{E}(u_0,v_0) & \boldsymbol{F}(u_0,v_0) & \boldsymbol{G}(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где је $V = V_1 r_u(u_0,v_0) + V_2 r_v(u_0,v_0)$. Ако важи $\frac{\boldsymbol{e}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{E}(u_0,v_0)} = \frac{\boldsymbol{f}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{F}(u_0,v_0)} = \frac{\boldsymbol{g}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{G}(u_0,v_0)}$, онда су друга и трећа врста претходне детерминанте сразмерне, па је она увек једнака 0, тј. сваки тангентни вектор је главни. Обратно, нека је сваки тангентни вектор главни. Вектор $r_u(u_0,v_0)$ је главни, па је

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \boldsymbol{e}(u_0,v_0) & \boldsymbol{f}(u_0,v_0) & \boldsymbol{g}(u_0,v_0) \\ \boldsymbol{E}(u_0,v_0) & \boldsymbol{F}(u_0,v_0) & \boldsymbol{G}(u_0,v_0) \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{f}(u_0,v_0)\boldsymbol{E}(u_0,v_0) - \boldsymbol{e}(u_0,v_0)\boldsymbol{F}(u_0,v_0), \end{aligned}$$

тј. $\frac{\boldsymbol{e}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{E}(u_0,v_0)} = \frac{\boldsymbol{f}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{F}(u_0,v_0)}$. Слично, вектор $r_v(u_0,v_0)$ је главни, па добијамо $\frac{\boldsymbol{g}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{G}(u_0,v_0)} = \frac{\boldsymbol{f}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{F}(u_0,v_0)}$. Ако је $\boldsymbol{F}(u_0,v_0) \neq 0$, доказ је завршен. Претпоставимо да је $\boldsymbol{F}(u_0,v_0) = 0$. Због $\boldsymbol{E}(u_0,v_0) > 0$ и $\boldsymbol{G}(u_0,v_0) > 0$ следи да је $\boldsymbol{f}(u_0,v_0) = 0$, па пошто је и вектор $r_u(u_0,v_0) + r_v(u_0,v_0)$ главни, добијамо

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \boldsymbol{e}(u_0,v_0) & 0 & \boldsymbol{g}(u_0,v_0) \\ \boldsymbol{E}(u_0,v_0) & 0 & \boldsymbol{G}(u_0,v_0) \end{vmatrix} = \boldsymbol{g}(u_0,v_0)\boldsymbol{E}(u_0,v_0) - \boldsymbol{e}(u_0,v_0)\boldsymbol{G}(u_0,v_0),$$

тј. $\frac{\boldsymbol{e}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{E}(u_0,v_0)} = \frac{\boldsymbol{g}(u_0,v_0)}{\boldsymbol{G}(u_0,v_0)}$, што је и требало доказати. $\square$

Следећу теорему, која нам даје могућност да бирамо какве ће бити координатне криве, дајемо без доказа. Доказ се може пронаћи у [3] на стр. 183 — 185.

Теорема 2.5. *Нека је P произвољна тачка регуларне површи M. Онда постоји њена околина чија је параметризација ортогонална. Ако је P хиперболичка тачка, онда постоји њена околина чија је параметризација асимптотска, а ако P није умбиличка тачка, онда постоји њена околина чија је параметризација главна.*

Да ли је познавање прве и друге основне форме довољно за једнозначно одређивање регуларне елементарне површи? Другим речима, ако су дате две билинеарне форме $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{II}$, да ли постоји регуларна елементарна површ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ чија је прва основна форма $\boldsymbol{I}$ и друга основна форма $\boldsymbol{II}$ и да ли је јединствена ако постоји?

Пре него што формулишемо теорему која даје одговор на ово питање, морамо дефинисати један појам.

Дефиниција 2.29. Једнакости

$$\begin{aligned}
(\mathbf{\Gamma}_{11}^1 r_u + \mathbf{\Gamma}_{11}^2 r_v + \boldsymbol{e}\boldsymbol{n})_v &= (\mathbf{\Gamma}_{12}^1 r_u + \mathbf{\Gamma}_{12}^2 r_v + \boldsymbol{f}\boldsymbol{n})_u\\
(\mathbf{\Gamma}_{22}^1 r_u + \mathbf{\Gamma}_{22}^2 r_v + \boldsymbol{g}\boldsymbol{n})_u &= (\mathbf{\Gamma}_{12}^1 r_u + \mathbf{\Gamma}_{12}^2 r_v + \boldsymbol{f}\boldsymbol{n})_v\\
(\boldsymbol{\beta}_1^1 r_u + \boldsymbol{\beta}_1^2 r_v)_v &= (\boldsymbol{\beta}_2^1 r_u + \boldsymbol{\beta}_2^2 r_v)_u
\end{aligned}$$

називају се *Гаус–Петерсон–Кодацијевим једнакостима.*

Претходне једнакости представљају, на основу Гаусових и Вајнгартенових једнакости, једнакости мешовитих парцијалних извода $r_{uuv} = r_{uvu}$, $r_{vvu} = r_{uvv}$ и $n_{uv} = n_{vu}$. Диференцирањем претходних израза по u и v добијамо развијени облик Гаус–Петерсон–Кодацијевих једнакости

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{\Gamma}_{11}^1}{\partial v} + \mathbf{\Gamma}_{11}^1\mathbf{\Gamma}_{12}^1 + \mathbf{\Gamma}_{11}^2\mathbf{\Gamma}_{22}^1 + \boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}_2^1 &= \frac{\partial \mathbf{\Gamma}_{12}^1}{\partial u} + \mathbf{\Gamma}_{12}^1\mathbf{\Gamma}_{11}^1 + \mathbf{\Gamma}_{11}^2\mathbf{\Gamma}_{12}^1 + \boldsymbol{f}\boldsymbol{\beta}_1^1,\\
\mathbf{\Gamma}_{11}^1\mathbf{\Gamma}_{12}^2 + \frac{\partial \mathbf{\Gamma}_{11}^2}{\partial v} + \mathbf{\Gamma}_{11}^2\mathbf{\Gamma}_{22}^2 + \boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}_2^2 &= \mathbf{\Gamma}_{12}^1\mathbf{\Gamma}_{11}^2 + \frac{\partial \mathbf{\Gamma}_{12}^2}{\partial u} + \mathbf{\Gamma}_{12}^2\mathbf{\Gamma}_{12}^2 + \boldsymbol{f}\boldsymbol{\beta}_1^2,\\
\mathbf{\Gamma}_{11}^1\boldsymbol{f} + \mathbf{\Gamma}_{11}^2\boldsymbol{g} + \boldsymbol{e}_v &= \mathbf{\Gamma}_{12}^1\boldsymbol{e} + \mathbf{\Gamma}_{12}^2\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_u,\\
\frac{\partial \mathbf{\Gamma}_{22}^1}{\partial u} + \mathbf{\Gamma}_{22}^1\mathbf{\Gamma}_{11}^1 + \mathbf{\Gamma}_{22}^2\mathbf{\Gamma}_{12}^1 + \boldsymbol{g}\boldsymbol{\beta}_1^1 &= \frac{\partial \mathbf{\Gamma}_{12}^1}{\partial v} + \mathbf{\Gamma}_{12}^1\mathbf{\Gamma}_{12}^1 + \mathbf{\Gamma}_{12}^2\mathbf{\Gamma}_{22}^1 + \boldsymbol{f}\boldsymbol{\beta}_2^1,\\
\mathbf{\Gamma}_{22}^1\mathbf{\Gamma}_{11}^2 + \frac{\partial \mathbf{\Gamma}_{22}^2}{\partial u} + \mathbf{\Gamma}_{22}^2\mathbf{\Gamma}_{12}^2 + \boldsymbol{g}\boldsymbol{\beta}_1^2 &= \mathbf{\Gamma}_{12}^1\mathbf{\Gamma}_{12}^2 + \frac{\partial \mathbf{\Gamma}_{12}^2}{\partial v} + \mathbf{\Gamma}_{12}^2\mathbf{\Gamma}_{22}^2 + \boldsymbol{f}\boldsymbol{\beta}_2^2,\\
\mathbf{\Gamma}_{22}^1\boldsymbol{e} + \mathbf{\Gamma}_{22}^2\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}_u &= \mathbf{\Gamma}_{12}^1\boldsymbol{f} + \mathbf{\Gamma}_{12}^2\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}_v,\\
\frac{\partial \boldsymbol{\beta}_1^1}{\partial v} + \boldsymbol{\beta}_1^1\mathbf{\Gamma}_{12}^1 + \boldsymbol{\beta}_1^2\mathbf{\Gamma}_{22}^1 &= \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_2^1}{\partial u} + \boldsymbol{\beta}_2^1\mathbf{\Gamma}_{11}^1 + \boldsymbol{\beta}_2^2\mathbf{\Gamma}_{12}^1,\\
\boldsymbol{\beta}_1^1\mathbf{\Gamma}_{12}^2 + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_1^2}{\partial v} + \boldsymbol{\beta}_1^2\mathbf{\Gamma}_{22}^2 &= \boldsymbol{\beta}_2^1\mathbf{\Gamma}_{11}^2 + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_2^2}{\partial u} + \boldsymbol{\beta}_2^2\mathbf{\Gamma}_{12}^2,\\
\boldsymbol{\beta}_1^1\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\beta}_1^2\boldsymbol{g} &= \boldsymbol{\beta}_2^1\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\beta}_2^2\boldsymbol{f}.
\end{aligned}$$

Теорема 2.6 (Бонеова Основна теорема за површи)**.** *Нека су $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{II}$ симетричне билинеарне форме, нека је $\boldsymbol{I}$ позитивно дефинитна и нека њихови коефицијенти задовољавају Гаус–Петерсон–Кодацијеве једнакости. Тада постоји регуларна елементарна површ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ чија је прва основна форма $\boldsymbol{I}$ и друга основна форма $\boldsymbol{II}$. Она је јединствена до на директну изометрију еуклидског простора $\mathbb{R}^3$.*

За крај овог одељка, наводимо један веома важан резултат.

Теорема 2.7 (Гаусова Бриљантна теорема)**.** *Гаусова кривина регуларне елементарне површи дата је изразом*

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{\boldsymbol{E}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}_{12}^2}{\partial u} + \boldsymbol{\Gamma}_{11}^1\boldsymbol{\Gamma}_{12}^2 + \boldsymbol{\Gamma}_{11}^2\boldsymbol{\Gamma}_{22}^2 - \boldsymbol{\Gamma}_{12}^1\boldsymbol{\Gamma}_{11}^2 - {\boldsymbol{\Gamma}_{12}^2}^2\right).$$

Доказ. Из Вајнгартенових једнакости следи да је

$$\boldsymbol{f\beta}_1^2 - \boldsymbol{e\beta}_2^2 = \frac{\boldsymbol{efF} - \boldsymbol{f}^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{efF} + \boldsymbol{egE}}{\boldsymbol{EG} - \boldsymbol{F}^2} = \frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{eg} - \boldsymbol{f}^2)}{\boldsymbol{EG} - \boldsymbol{F}^2} = \boldsymbol{EK},$$

па теорема следи из друге Гаус–Петерсон–Кодацијеве једнакости. □

Као што знамо, Кристофелови симболи зависе само од коефицијената прве основне форме, па је, према томе, Гаусова кривина унутрашње својство регуларне елементарне површи.

2.4 Изометрије површи

Изометрије су једна од најважнијих пресликавања у геометрији, јер нам дају концепте кретања и подударности. До сада смо изометрије посматрали као трансформације неког простора у себе, а сада нас занима како се две површи сликају изометрично једна на другу.

Дефиниција 2.30. Нека су M и N регуларне површи. Пресликавање $F : M \longrightarrow N$ јесте *диференцијабилно* ако за сваку тачку $P \in M$ постоје околине $U(P) \subseteq M$ и $V(F(P)) \subseteq N$ и локалне површи $r : U \longrightarrow U(P)$ и $R : V \longrightarrow V(F(P))$ такве да је пресликавање

$$R^{-1} \circ F \circ r : r^{-1}(U(P) \cap F^{-1}(V(F(P)))) \longrightarrow R^{-1}(V(F(P)))$$

диференцијабилно. *Диференцијал* пресликавања F у тачки P јесте пресликавање $\mathrm{d}F(P) : T_P r \longrightarrow T_{F(P)}R$ дефинисано на следећи начин. Ако је $V \in T_P r$ и $\alpha : I \longrightarrow U(P)$, $I \ni 0$, крива таква да је $\alpha(0) = P$, $\alpha'(0) = V$, онда је

$$\mathrm{d}F(P)(V) = (F \circ \alpha)'(0).$$

Пресликавање F јесте *дифеоморфизам* ако је F бијекција и пресликавања F и F^{-1} јесу диференцијабилна.

Дефиниција диференцијала $\mathrm{d}F(P)$ не зависи од избора криве α која пролази кроз тачку P чији је вектор брзине у тачки P вектор $V \in T_P r$. Доказ ове чињенице нећемо давати.

Дефиниција 2.31. Нека су M и N регуларне површи. Пресликавање $F : M \longrightarrow N$ јесте *локална изометрија* ако је диференцијабилно и у свакој тачки $P \in M$ његов диференцијал $\mathrm{d}F(P)$ јесте изометрија одговарајућих тангентних простора.

Дефиниција 2.32. Нека су M и N регуларне површи. Пресликавање $F : M \longrightarrow N$ јесте *изометрија* ако је дифеоморфизам и локална изометрија. За површи M и N тада кажемо да су *изометричне*.

Следећи став је тривијална последица претходних дефиниција.

Став 2.13. *Ако је пресликавање $F : M \longrightarrow N$ изометрија, онда оно чува растојање између тачака, тј. важи*

$$(\forall P, Q \in M)\ \boldsymbol{\rho}_M(P, Q) = \boldsymbol{\rho}_N(F(P), F(Q)).$$

Дефиниција 2.33. Површи M и N јесу *локално изометричне* ако за сваку тачку $P \in M$ постоји околина $U(P) \subseteq M$ која је изометрична неком отвореном скупу у N.

Наравно, ако постоји локална изометрија $F : M \longrightarrow N$, онда су површи M и N локално изометричне (теорема о инверзној функцији).

Пошто је $\mathrm{d}F(P)$ изометрија одговарајућих тангентних простора, следи да чува скаларни производ, тј. метрику (прву основну форму). То не значи да F чува коефицијенте прве основне форме, јер они зависе од параметризације, али увек постоје репараметризације у којима су ти коефицијенти једнаки. Зато за својства површи која зависе само од коефицијената прве основе форме кажемо да су унутрашња, јер се она, уз евентуалну репараметризацију, чувају локалним изометријама. Специјално, чува се вредност Гаусове кривине (она је геометријски појам). Што се обратног тврђења тиче, важи следећа теорема.

Теорема 2.8 (Миндинг)**.** *Нека су $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ и $R : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларне елементарне површи и $a \in \mathbb{R}$ произвољна константа. Ако важи*

$$(\forall P \in r(U))(\forall Q \in R(V))\ \boldsymbol{K}_r(P) = \boldsymbol{K}_R(Q) = a,$$

онда су површи $r(U)$ и $R(V)$ локално изометричне.

Доказ ове теореме може се пронаћи у [4] на стр. 292 — 294.

3 Асимптотске координате на псеудосферичним површима

У уводу смо споменули да псеудосферичне површи имају извесну особину којом подсећају на псеудосферу. Такође, споменули смо криву трактрису, која је путања колица која човек, који се креће праволинијски, вуче канапом ка себи, а канап је у почетном тренутку нормалан на путању којом ће се човек кретати. Ротацијом трактрисе око праве која садржи путању којом се човек креће добијамо површ која се назива *псеудосфером.* Нека се човек и колица крећу у xOz равни еуклидског простора $\mathbb{R}^3$ тако да се у почетном тренутку човек налази у тачки $(0, 0, 0)$, а колица у тачки $(a, 0, 0)$ за неко $a > 0$ и нека се човек креће у позитивном смеру z–осе. Видећемо да тада трактриса има параметризацију дату са $\alpha(t) = a\left(\sin t, 0, \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Често се домен пресликавања α проширује на $(0, \pi)$, јер је скуп тачака $\alpha\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ осносиметричан скупу тачака $\alpha\left(\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right)$ у односу на x–осу, па се траг $\alpha((0, \pi))$ назива трактрисом. Приметимо да пресликавање α дефинисано на интервалу $(0, \pi)$ није регуларно у тачки $\frac{\pi}{2}$. Ротацијом око z–осе добијамо елементарну површ $r(u, v) = a\left(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)$, $u \in (0, \pi)$, $v \in (0, 2\pi)$, која није регуларна у тачкама $\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$, $v \in (0, 2\pi)$ и чији је траг псеудосфера.

Постоји неколико разлога зашто се баш ова површ назива псеудосфером. За почетак, сетимо се да смо површину компактног скупа S на трагу регуларне елементарне површи $R : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ дефинисали са $\boldsymbol{P}(S) = \iint\limits_{R^{-1}(S)} \sqrt{\boldsymbol{EG} - \boldsymbol{F}^2} \mathrm{d}\widetilde{u} \mathrm{d}\widetilde{v}$. Ако је S_n низ компактних скупова на $R(V)$ који теже ка $R(V)$ и ако постоји коначна гранична вредност $\lim\limits_{n \to \infty} \boldsymbol{P}(S_n)$ низа њихових површина, онда се та гранична вредност сматра површином скупа $R(V)$ (несвојствени двојни интеграл). За псеудосферу, чија је параметризација r дата у претходном пасусу, може се показати да је $\boldsymbol{P}(r(U)) = 4\pi a^2$, што је израз за површину сфере полупречника a. Такође, није тешко доказати да је Гаусова кривина сфере полупречника a у свакој тачки P једнака $\boldsymbol{K}(P) = \frac{1}{a^2}$, а за псеудосферу ћемо видети да је $\boldsymbol{K}(P) = -\frac{1}{a^2}$ у свакој тачки $P \in r(U)$. Дакле, псеудосфера неким својим особинама подсећа на сферу, па отуд и њено име.

Један од најпознатијих модела хиперболичке равни јесте Поенкареов диск модел. То је диск у равни с центром у координатном почетку и полупречником a, а његова метрика је $\mathrm{d}\boldsymbol{s}^2 = \frac{4a^4(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}$ и она је пример метрике која није наслеђена из амбијентног простора. Нагласимо чињеницу да је Поенкареов диск метрички комплетан, што је један од услова да буде модел хиперболичке планиметрије. Рачуном се добија да је Гаусова кривина једнака $\boldsymbol{K}(P) = -\frac{1}{a^2}$ у свакој тачки P Поенкареовог диска. На основу теореме 2.8 следи следеће важно тврђење.

Став 3.1. *Псеудосфера је локално изометрична хиперболичкој равни.*

Заједничка особина свих псеудосферичних површи јесте управо њихова локална изометричност хиперболичкој равни, односно константна негативна Гаусова кривина. Локална карта псеудосфере коју смо малопре видели није најпогоднија за даље проучавање оваквих површи, па сада уводимо нови тип локалних карата (Чебишовљеве локалне карте).

Напоменимо да не постоји површ у $\mathbb{R}^3$ која је (глобално) изометрична хиперболичкој равни. Ова чињеница следи из Хилбертове теореме, која се може пронаћи у поглављу 6, па се псеудосферичним површима највише постиже у погледу локалног представљања хиперболичке планиметрије у простору $\mathbb{R}^3$.

3.1 Чебишовљева локална карта

Постоје две врсте Чебишовљевих локалних карата. Прва врста је Чебишовљева асимптотска локална карта, тј. она чије су координатне криве асиптотске линије, а друга врста је Чебишовљева главна локална карта, тј. она чије су координатне криве линије кривине.

Дефиниција 3.1. Нека је $a > 0$ произвољно. Регуларна елементарна површ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, чија метрика $\mathrm{d}\boldsymbol{s}^2 = \boldsymbol{E}\mathrm{d}u^2 + 2\boldsymbol{F}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \boldsymbol{G}\mathrm{d}v^2$ има особину да је $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{G} \equiv a^2$, назива се *Чебишовљевом локалном картом* или *Чебишовљевом мрежом* полупречника a.

Понекад се захтева да буде $a = 1$ да би координатне криве биле параметризоване дужином лука, али ми то овде нећемо захтевати. Локалне координате u и v зваћемо *Чебишовљевим координатама.*

Пошто је прва основна форма позитивно дефинитна, односно важи $\boldsymbol{F}^2 < \boldsymbol{EG} = a^2 \cdot a^2 = a^4$, следи да у свакој тачки $(u, v) \in U$ постоји јединствени угао $\omega(u, v) \in (0, \pi)$ такав да је $\boldsymbol{F}(u, v) = a^2 \cos\omega(u, v)$. Тада је метрика дата са

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}^2(u, v) = a^2(\mathrm{d}u^2 + 2\cos\omega(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2).$$

Као што нам је познато, за угао $\varphi(u_0, v_0)$ између координатних кривих у тачки (u_0, v_0) важи

$$\cos\varphi(u_0, v_0) = \frac{\boldsymbol{F}(u_0, v_0)}{\sqrt{\boldsymbol{E}(u_0, v_0)\boldsymbol{G}(u_0, v_0)}} = \frac{a^2\cos\omega(u_0, v_0)}{a^2} = \cos\omega(u_0, v_0),$$

па следи да је угао између координатних кривих подударан углу $\omega(u_0, v_0)$. Зато функцију $\omega(u, v)$ називамо *угаоном функцијом* Чебишовљеве локалне карте.

Погледајмо сад како изгледају Кристофелови симболи Чебишовљеве локалне карте.

Став 3.2. *Кристофелови симболи Чебишовљеве локалне карте дати су следећим изразима:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_{11}^1 &= (\operatorname{ctg}\omega)\cdot\omega_u, & \boldsymbol{\Gamma}_{11}^2 &= -\frac{1}{\sin\omega}\cdot\omega_u,\\
\boldsymbol{\Gamma}_{12}^1 &= 0, & \boldsymbol{\Gamma}_{12}^2 &= 0,\\
\boldsymbol{\Gamma}_{22}^1 &= -\frac{1}{\sin\omega}\cdot\omega_v, & \boldsymbol{\Gamma}_{22}^2 &= (\operatorname{ctg}\omega)\cdot\omega_v.
\end{aligned}$$

Доказ. Како је $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{G} \equiv a$, следи $\boldsymbol{E}_u = \boldsymbol{E}_v = \boldsymbol{G}_u = \boldsymbol{G}_v \equiv 0$, па су Кристофелови симболи дати изразима

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_{11}^1 &= -\frac{\boldsymbol{F}_u\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}^2}, & \boldsymbol{\Gamma}_{11}^2 &= \frac{\boldsymbol{F}_u\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}^2},\\
\boldsymbol{\Gamma}_{12}^1 &= 0, & \boldsymbol{\Gamma}_{12}^2 &= 0,\\
\boldsymbol{\Gamma}_{22}^1 &= -\frac{\boldsymbol{F}_v\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}^2}, & \boldsymbol{\Gamma}_{22}^2 &= \frac{\boldsymbol{F}_v\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}^2}.
\end{aligned}$$

Како је $\boldsymbol{F} = a^2\cos\omega$, следи да је $\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}^2 = a^4 - a^4\cos^2\omega = a^4\sin^2\omega$, $\boldsymbol{F}_u = -a^2\sin\omega\cdot\omega_u$ и $\boldsymbol{F}_v = -a^2\sin\omega\cdot\omega_v$, па добијамо

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_{11}^1 &= -\frac{-a^2\sin\omega\cdot\omega_u\cdot a^2\cos\omega}{a^4\sin^2\omega} = (\operatorname{ctg}\omega)\cdot\omega_u,\\
\boldsymbol{\Gamma}_{11}^2 &= \frac{-a^2\sin\omega\cdot\omega_u\cdot a^2}{a^4\sin^2\omega} = -\frac{1}{\sin\omega}\cdot\omega_u,\\
\boldsymbol{\Gamma}_{12}^1 &= 0,\\
\boldsymbol{\Gamma}_{12}^2 &= 0,\\
\boldsymbol{\Gamma}_{22}^1 &= -\frac{-a^2\sin\omega\cdot\omega_v\cdot a^2}{a^4\sin^2\omega} = -\frac{1}{\sin\omega}\cdot\omega_v,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{22}^2 \;=\; \frac{-a^2\sin\omega\cdot\omega_v\cdot a^2\cos\omega}{a^4\sin^2\omega} = (\operatorname{ctg}\omega)\cdot\omega_v,$$

као што смо и тврдили. □

Приметимо да су Кристофелови симболи $\mathbf{\Gamma}_{12}^1$ и $\mathbf{\Gamma}_{12}^2$ (тзв. *мешовити* Кристофелови симболи) Чебишовљеве локалне карте идентички једнаки нули. Овај услов је и довољан да постојећу локалну карту репараметризујемо Чебишовљевом локалном картом. Другим речима, важи следеће тврђење.

Став 3.3. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ таква да је $\mathbf{\Gamma}_{12}^1 = \mathbf{\Gamma}_{12}^2 \equiv 0$. Тада постоји њена репараметризација $R : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ која је Чебишовљева локална карта.*

Доказ. Нека је $\mathbf{\Gamma}_{12}^1 = \mathbf{\Gamma}_{12}^2 \equiv 0$. Из Гаусових једнакости закључујемо да је

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_u\boldsymbol{F}}{2(\mathbf{EG}-\boldsymbol{F}^2)} &\equiv 0,\\ \frac{\boldsymbol{G}_u\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{F}}{2(\mathbf{EG}-\boldsymbol{F}^2)} &\equiv 0,\end{aligned}$$

па је $\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_u\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}_u\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{F} \equiv 0$. Посматрајмо ово као систем линеарних једначина по непознатима $\boldsymbol{G}_u$ и $\boldsymbol{E}_v$. Детерминанта система једнака је $\boldsymbol{EG}-\boldsymbol{F}^2$, па је позитивна. На основу Крамеровог правила следи да систем има јединствено решење (тривијално решење). Дакле,

$$\boldsymbol{G}_u = \boldsymbol{E}_v \equiv 0,$$

па следи да је $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(u)$ и $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(v)$, односно да $\boldsymbol{E}$ зависи само од променљиве u, а $\boldsymbol{G}$ само од променљиве v. Нека је $a > 0$ произвољно и нека су пресликавања $p(u) = \frac{1}{a}\int\sqrt{\boldsymbol{E}(u)}\mathrm{d}u$ и $q(v) = \frac{1}{a}\int\sqrt{\boldsymbol{G}(v)}\mathrm{d}v$ (примитивне функције) дефинисана редом на пројекцијама скупа U на u–оси и на v–оси. Пошто важи $p'(u) = \frac{1}{a}\sqrt{\boldsymbol{E}(u)} > 0$ и $q'(v) = \frac{1}{a}\sqrt{\boldsymbol{G}(v)} > 0$, следи да су пресликавања p и q строго растућа, па постоје њихова инверзна пресликавања p^{-1} и q^{-1} са доменима A и B редом. Дефинишимо скуп $V = \{(\widetilde{u},\widetilde{v}) \in A\times B \mid (p^{-1}(\widetilde{u}), q^{-1}(\widetilde{v})) \in U\}$ и пресликавање $R : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ са $R(\widetilde{u},\widetilde{v}) = r(p^{-1}(\widetilde{u}), q^{-1}(\widetilde{v}))$. Тада је $R_{\widetilde{u}}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = r_u(p^{-1}(\widetilde{u}), q^{-1}(\widetilde{v}))\cdot(p^{-1})'(\widetilde{u})$ и $R_{\widetilde{v}}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = r_v(p^{-1}(\widetilde{u}), q^{-1}(\widetilde{v}))\cdot(q^{-1})'(\widetilde{v})$, па је R регуларна елементарна површ. Пошто је

$$(p^{-1})'(\widetilde{u}) \;=\; \frac{1}{p'(p^{-1}(\widetilde{u}))} = \frac{a}{\sqrt{\boldsymbol{E}(p^{-1}(\widetilde{u}))}},$$

$$(q^{-1})'(\widetilde{v}) \;=\; \frac{1}{q'(q^{-1}(\widetilde{v}))} = \frac{a}{\sqrt{\boldsymbol{G}(q^{-1}(\widetilde{v}))}},$$

следи да су коефицијенти $\boldsymbol{E}_R$ и $\boldsymbol{G}_R$ регуларне елементарне површи R једнаки

$$\boldsymbol{E}_R(\widetilde{u},\widetilde{v}) = \left(\frac{a}{\sqrt{\boldsymbol{E}(p^{-1}(\widetilde{u}))}}\right)^2 \cdot \boldsymbol{E}(p^{-1}(\widetilde{u})) = a^2,$$
$$\boldsymbol{G}_R(\widetilde{u},\widetilde{v}) = \left(\frac{a}{\sqrt{\boldsymbol{G}(q^{-1}(\widetilde{v}))}}\right)^2 \cdot \boldsymbol{G}(q^{-1}(\widetilde{v})) = a^2.$$

Према томе, R је Чебишовљева локална карта. □

Став 3.4. *Нека је $R : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Чебишовљева локална карта и нека је локална површ $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ дата са $r(u,v) = R\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. Онда је метрика на r облика*

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_r^2 = (a\cos\theta)^2\mathrm{d}u^2 + (a\sin\theta)^2\mathrm{d}v^2,$$

где је $\theta = \frac{\omega}{2}$. Обратно, ако коефицијенти прве основе форме површи r задовољавају да је $\boldsymbol{F} \equiv 0$ и $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G} \equiv a^2$ за неку константу $a > 0$, онда је са $R(\widetilde{u},\widetilde{v}) = r(\widetilde{u}+\widetilde{v}, \widetilde{u}-\widetilde{v})$ дефинисана Чебишовљева локална карта.

Доказ. Како је $r_u = \frac{1}{2}(R_{\widetilde{u}} + R_{\widetilde{v}})$ и $r_v = \frac{1}{2}(R_{\widetilde{u}} - R_{\widetilde{v}})$, следи да је

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_r &= \frac{1}{4}(\boldsymbol{E}_R + 2\boldsymbol{F}_R + \boldsymbol{G}_R) = \frac{a^2}{4}(2+2\cos\omega) = a^2\cos^2\frac{\omega}{2} = a^2\cos^2\theta,\\
\boldsymbol{F}_r &= \frac{1}{4}(\boldsymbol{E}_R - \boldsymbol{G}_R) = 0,\\
\boldsymbol{G}_r &= \frac{1}{4}(\boldsymbol{E}_R - 2\boldsymbol{F}_R + \boldsymbol{G}_R) = \frac{a^2}{4}(2-2\cos\omega) = a^2\sin^2\frac{\omega}{2} = a^2\sin^2\theta,
\end{aligned}$$

за $\theta = \frac{\omega}{2}$. Обратно, нека је r таква да је $\boldsymbol{F} \equiv 0$ и $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G} \equiv a^2$ и R локална површ дата са $R(\widetilde{u},\widetilde{v}) = r(\widetilde{u}+\widetilde{v}, \widetilde{u}-\widetilde{v})$. Онда имамо да је $R_{\widetilde{u}} = r_u + r_v$ и $R_{\widetilde{v}} = r_u - r_v$, па је $\boldsymbol{E}_R = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{G} \equiv a^2$ и $\boldsymbol{G}_R = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{G} \equiv a^2$, што значи да је R Чебишовљева локална површ. Штавише, у свакој тачки $(u,v) \in U$ постоји јединствени угао $\theta(u,v) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ такав да важи $\boldsymbol{E}(u,v) = a^2\cos^2\theta(u,v)$ и $\boldsymbol{G}(u,v) = a^2\sin^2\theta(u,v)$, па имамо дефинисану диференцијабилну функцију $\theta : U \longrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Следи да је

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{G} = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2\cos 2\theta = a^2\cos\omega,$$

за $\omega = 2\theta$ (приметимо да онда $\omega : V \longrightarrow (0,\pi)$). □

Дефиниција 3.2. Локална површ r из претходног става назива се *Чебишовљевом локалном картом друге врсте.* Функцију θ такође називамо *угаоном функцијом.*

У овом раду биће нам од интереса како Чебишовљеве локалне карте (прве врсте), тако и Чебишовљеве локалне карте друге врсте. Израчунајмо Кристофелове симболе Чебишовљеве локалне карте друге врсте.

Став 3.5. *Кристофелови симболи Чебишовљеве локалне карте друге врсте дати су следећим изразима:*

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^1_{11} &= -\operatorname{tg}\theta\cdot\theta_u = \mathbf{\Gamma}^1_{22}, & \mathbf{\Gamma}^2_{11} &= \operatorname{ctg}\theta\cdot\theta_v = \mathbf{\Gamma}^2_{22},\\ \mathbf{\Gamma}^1_{12} &= -\operatorname{tg}\theta\cdot\theta_v, & \mathbf{\Gamma}^2_{12} &= \operatorname{ctg}\theta\cdot\theta_u. \end{aligned}$$

Доказ. Како је $\boldsymbol{F}\equiv 0$, следи да су Кристофелови симболи дати изразима

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^1_{11} &= \frac{\boldsymbol{E}_u\boldsymbol{G}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{E}_u}{2\boldsymbol{E}}, & \mathbf{\Gamma}^2_{11} &= -\frac{\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{E}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = -\frac{\boldsymbol{E}_v}{2\boldsymbol{G}},\\ \mathbf{\Gamma}^1_{12} &= \frac{\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{G}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{E}_v}{2\boldsymbol{E}}, & \mathbf{\Gamma}^2_{12} &= \frac{\boldsymbol{G}_u\boldsymbol{E}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{G}_u}{2\boldsymbol{G}},\\ \mathbf{\Gamma}^1_{22} &= -\frac{\boldsymbol{G}_u\boldsymbol{G}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = -\frac{\boldsymbol{G}_u}{2\boldsymbol{E}}, & \mathbf{\Gamma}^2_{22} &= \frac{\boldsymbol{G}_v\boldsymbol{E}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{G}_v}{2\boldsymbol{G}}. \end{aligned}$$

Како је $\boldsymbol{E} = a^2\cos^2\theta$, $\boldsymbol{E}_u = -2a^2\cos\theta\sin\theta\cdot\theta_u$, $\boldsymbol{E}_v = -2a^2\cos\theta\sin\theta\cdot\theta_v$, $\boldsymbol{G} = a^2\sin^2\theta$, $\boldsymbol{G}_u = 2a^2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta_u$ и $\boldsymbol{G}_v = 2a^2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta_v$, добијамо

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^1_{11} &= \frac{-2a^2\cos\theta\sin\theta\cdot\theta_u}{2a^2\cos^2\theta} = -\operatorname{tg}\theta\cdot\theta_u,\\ \mathbf{\Gamma}^2_{11} &= -\frac{-2a^2\cos\theta\sin\theta\cdot\theta_v}{2a^2\sin^2\theta} = \operatorname{ctg}\theta\cdot\theta_v,\\ \mathbf{\Gamma}^1_{12} &= \frac{-2a^2\cos\theta\sin\theta\cdot\theta_v}{2a^2\cos^2\theta} = -\operatorname{tg}\theta\cdot\theta_v,\\ \mathbf{\Gamma}^2_{12} &= \frac{2a^2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta_u}{2a^2\sin^2\theta} = \operatorname{ctg}\theta\cdot\theta_u,\\ \mathbf{\Gamma}^1_{22} &= -\frac{2a^2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta_u}{2a^2\cos^2\theta} = -\operatorname{tg}\theta\cdot\theta_u,\\ \mathbf{\Gamma}^2_{22} &= \frac{2a^2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta_v}{2a^2\sin^2\theta} = \operatorname{ctg}\theta\cdot\theta_v, \end{aligned}$$

као што смо и тврдили. □

С обзиром на то да су нам у средишту интересовања псеудосферичне површи, а њихова главна особина је константна негативна Гаусова кривина, израчунајмо Гаусове кривине Чебишовљевих локалних карата (обе врсте).

Став 3.6. *Гаусова кривина Чебишовљеве локалне карте прве врсте једнака је*

$$\boldsymbol{K} = -\frac{\omega_{uv}}{a^2 \sin\omega},$$

а Гаусова кривина Чебишовљеве локалне карте друге врсте једнака је

$$\boldsymbol{K} = \frac{-\theta_{uu} + \theta_{vv}}{a^2 \sin\theta \cos\theta}.$$

Доказ. На основу теореме 2.7 имамо да је Гаусова кривина Чебишовљеве локалне карте једнака

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{\omega_{uv}\sin\omega - \omega_u \cos\omega\cdot\omega_v}{\sin^2\omega} - \frac{\omega_u\omega_v\cos\omega}{\sin^2\omega}\right) = -\frac{\omega_{uv}}{a^2\sin\omega}$$

и да је Гаусова кривина Чебишовљеве локалне карте друге врсте једнака

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K} &= \frac{1}{a^2\cos^2\theta}\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\theta_v^2 + \operatorname{ctg}\theta\cdot\theta_{vv} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\theta_u^2 - \operatorname{ctg}\theta\cdot\theta_{uu}\right.\\
&- \left.\theta_u^2 + \operatorname{ctg}^2\theta\cdot\theta_v^2 + \theta_v^2 - \operatorname{ctg}^2\theta\cdot\theta_u^2\right)\\
&= \frac{1}{a^2\cos^2\theta}\left(\frac{-1+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\theta_v^2 + \frac{1-\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\theta_u^2\right.\\
&+ \left.\operatorname{ctg}\theta\cdot(\theta_{vv}-\theta_{uu})\right) = \frac{-\theta_{uu}+\theta_{vv}}{a^2\sin\theta\cos\theta},
\end{aligned}$$

као што смо и тврдили. □

3.2 Репараметризација псеудосферичних површи

У овом одељку показаћемо да се свака псеудосферична површ може параметризовати Чебишовљевим локалним картама, тј. да за сваку тачку P псеудосферичне површи M постоје околина $U(P) \subset M$ и Чебишовљева локална карта $r : U \longrightarrow U(P)$ којом се та околина параметризује. Почнимо од следећег тврђења.

Став 3.7. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ главна регуларна елементарна површ, нека је њена метрика дата са $\mathrm{d}\boldsymbol{s}^2 = \boldsymbol{E}\mathrm{d}u^2 + \boldsymbol{G}\mathrm{d}v^2$, нека њене главне кривине $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ одговарају редом векторима r_u и r_v и нека је њена Гаусова кривина једнака $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 \equiv -\frac{1}{a^2}$, за неко $a > 0$. Онда пресликавање $\boldsymbol{E}(1+a^2{\boldsymbol{k}_1}^2)$ зависи само од променљиве u, а пресликавање $\boldsymbol{G}(1+a^2{\boldsymbol{k}_2}^2)$ зависи само од променљиве v.*

Доказ. Пошто главна кривина $\boldsymbol{k}_1$ одговара вектору r_u, а $\boldsymbol{k}_2$ одговара вектору r_v, следи да је

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{\kappa}_n(r_u) = \frac{\boldsymbol{II}(r_u, r_u)}{\boldsymbol{I}(r_u, r_u)} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{E}},\\ \boldsymbol{k}_2 &= \boldsymbol{\kappa}_n(r_v) = \frac{\boldsymbol{II}(r_v, r_v)}{\boldsymbol{I}(r_v, r_v)} = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{G}}.\end{aligned}$$

Диференцирањем $\boldsymbol{k}_1$ по v добијамо $\boldsymbol{k}_{1v} = \frac{\boldsymbol{e}_v\boldsymbol{E}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{E}_v}{\boldsymbol{E}^2}$, а диференцирањем $\boldsymbol{k}_2$ по u добијамо $\boldsymbol{k}_{2u} = \frac{\boldsymbol{g}_u\boldsymbol{G}-\boldsymbol{g}\boldsymbol{G}_u}{\boldsymbol{E}^2}$. Из става 2.10 и чињенице да је $\boldsymbol{k}_1 \neq \boldsymbol{k}_2$ јер је $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 < 0$ у свим тачкама $P \in r(U)$ следи да је $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} \equiv 0$, па из Гаус–Петерсон–Кодацијевих једнакости у развијеном облику добијамо да је $\boldsymbol{e}_v = \frac{\boldsymbol{E}_v}{2}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{E}} + \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{G}}\right) = \frac{\boldsymbol{E}_v}{2}\cdot(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)$ и $\boldsymbol{g}_u = \frac{\boldsymbol{G}_u}{2}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{E}} + \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{G}}\right) = \frac{\boldsymbol{G}_u}{2}\cdot(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)$. Према томе,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_{1v} &= \frac{\frac{\boldsymbol{E}_v}{2}\cdot(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}\boldsymbol{E}_v}{\boldsymbol{E}^2} = \frac{\boldsymbol{E}_v}{2\boldsymbol{E}}\cdot\left(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2 - 2\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{E}}\right) = \frac{\boldsymbol{E}_v}{2\boldsymbol{E}}\cdot(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1),\\ \boldsymbol{k}_{2u} &= \frac{\frac{\boldsymbol{G}_u}{2}\cdot(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{G} - \boldsymbol{g}\boldsymbol{G}_u}{\boldsymbol{G}^2} = \frac{\boldsymbol{G}_u}{2\boldsymbol{G}}\cdot\left(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2 - 2\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{G}}\right) = \frac{\boldsymbol{G}_u}{2\boldsymbol{G}}\cdot(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2).\end{aligned}$$

Искористимо сада чињеницу да је $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 \equiv -\frac{1}{a^2}$. Добијамо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_{1v} &= \frac{\boldsymbol{E}_v}{2\boldsymbol{E}}\cdot\left(-\frac{1}{a^2\boldsymbol{k}_1} - \boldsymbol{k}_1\right) = -\frac{\boldsymbol{E}_v\cdot(1+a^2{\boldsymbol{k}_1}^2)}{2a^2\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{E}},\\ \boldsymbol{k}_{2u} &= \frac{\boldsymbol{G}_u}{2\boldsymbol{G}}\cdot\left(-\frac{1}{a^2\boldsymbol{k}_2} - \boldsymbol{k}_2\right) = -\frac{\boldsymbol{G}_u\cdot(1+a^2{\boldsymbol{k}_2}^2)}{2a^2\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{G}}.\end{aligned}$$

Сређивањем претходних израза добијамо

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{E}_v}{\boldsymbol{E}} &= -\frac{2a^2\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_{1v}}{1+a^2{\boldsymbol{k}_1}^2},\\ \frac{\boldsymbol{G}_u}{\boldsymbol{G}} &= -\frac{2a^2\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_{2u}}{1+a^2{\boldsymbol{k}_2}^2},\end{aligned}$$

па интеграцијом по v, односно по u, добијамо

$$\begin{aligned}\ln\boldsymbol{E} &= -\ln(1+a^2{\boldsymbol{k}_1}^2) + A(u),\\ \ln\boldsymbol{G} &= -\ln(1+a^2{\boldsymbol{k}_2}^2) + B(v).\end{aligned}$$

Дакле, $\boldsymbol{E}(1+a^2{\boldsymbol{k}_1}^2) = e^{A(u)}$ и $\boldsymbol{G}(1+a^2{\boldsymbol{k}_2}^2) = e^{B(v)}$. □

Докажимо сада да за сваку закрпу псеудосферичне површи постоји репараметризација која је главна и код које су пресликавања из претходног тврђења идентички једнака a^2.

Теорема 3.1. *Нека је $R : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ главна регуларна елементарна површ са метриком $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_R^2 = \boldsymbol{E}_R \mathrm{d}\widetilde{u}^2 + \boldsymbol{G}_R \mathrm{d}\widetilde{v}^2$ и Гаусовом кривином $\boldsymbol{K}_R \equiv -\frac{1}{a^2}$ за неко $a > 0$. Онда постоји њена репараметризација $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ облика $r(u,v) = R(p(u), q(v))$ чије су главне кривине $\boldsymbol{k}_1 = \frac{a^2 - \boldsymbol{E}}{a^2 \boldsymbol{E}}$ и $\boldsymbol{k}_2 = \frac{a^2 - \boldsymbol{G}}{a^2 \boldsymbol{G}}$.*

Доказ. Нека су p и q неодређене функције и нека је $r(u,v) = R(p(u), q(v))$. Тада је $r_u(u,v) = p'(u) R_{\widetilde{u}}(p(u), q(v))$ и $r_v(u,v) = q'(v) R_{\widetilde{v}}(p(u), q(v))$, па је $\boldsymbol{E}(u,v) = p'(u)^2 \boldsymbol{E}_R(p(u), q(v))$, $\boldsymbol{F}(u,v) = 0$ и $\boldsymbol{G}(u,v) = q'(v)^2 \boldsymbol{G}_R(p(u), q(v))$. Параметризација R јесте главна, па је на основу претходног става

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_R(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \cdot (1 + a^2 \boldsymbol{k}_{1R}(\widetilde{u}, \widetilde{v})^2) = e^{A(\widetilde{u})},\\ \boldsymbol{G}_R(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \cdot (1 + a^2 \boldsymbol{k}_{2R}(\widetilde{u}, \widetilde{v})^2) = e^{B(\widetilde{v})},\end{aligned}$$

за неке диференцијабилне функције A и B. Сређивањем добијамо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_{1R}(\widetilde{u}, \widetilde{v})^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{e^{A(\widetilde{u})}}{\boldsymbol{E}_R(\widetilde{u}, \widetilde{v})} - 1\right),\\ \boldsymbol{k}_{2R}(\widetilde{u}, \widetilde{v})^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{e^{B(\widetilde{v})}}{\boldsymbol{G}_R(\widetilde{u}, \widetilde{v})} - 1\right),\end{aligned}$$

па пошто важи $\boldsymbol{k}_i(u,v) = \boldsymbol{k}_{iR}(p(u), q(v))$, $i \in \{1,2\}$, стављајући $\widetilde{u} = p(u)$ и $\widetilde{v} = q(v)$ добијамо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_1(u,v)^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{p'(u)^2 e^{A(p(u))}}{\boldsymbol{E}(u,v)} - 1\right),\\ \boldsymbol{k}_2(u,v)^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{q'(v)^2 e^{B(q(v))}}{\boldsymbol{G}(u,v)} - 1\right).\end{aligned}$$

Дакле, довољно је за функције p и q узети решења диференцијалних једначина $p'(u)^2 e^{A(p(u))} \equiv a^2$ и $q'(v)^2 e^{B(q(v))} \equiv a^2$. □

Претходна теорема нам је од изузетног значаја, јер нам даје постојање Чебишовљеве локалне карте за сваку псеудосферичну површ. Пре него што то потврдимо, сетимо се следећег. Нека су V_1 и V_2 јединични главни вектори у некој тачки такви да је $\boldsymbol{\kappa}_n(V_1) = \boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{\kappa}_n(V_2) = \boldsymbol{k}_2$ и нека је X произвољан јединични тангентни вектор. Постоји јединствени угао $\theta \in [0, 2\pi)$ такав да је $X = \cos\theta \cdot V_1 + \sin\theta \cdot V_2$ и то је оријентисани угао од вектора V_1 ка вектору X. Нормална кривина у правцу вектора X једнака је

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa}_n(X) &= \cos^2\theta \cdot \boldsymbol{II}(V_1, V_1) + 2\cos\theta \sin\theta \cdot \boldsymbol{II}(V_1, V_2) + \sin^2\theta \cdot \boldsymbol{II}(V_2, V_2)\\ &= \boldsymbol{k}_1 \cos^2\theta + \boldsymbol{k}_2 \sin^2\theta.\end{aligned}$$

Да би X био асимптотски вектор, мора да важи $\boldsymbol{\kappa}_n(X) = 0$, односно $\boldsymbol{k}_1 \cos^2\theta + \boldsymbol{k}_2 \sin^2\theta = 0$. Осим угла θ, ову једнакост задовољавају још углови $\pi - \theta$, $\pi + \theta$ и $-\theta$. С обзиром на то да су вектори који одговарају угловима θ и $\pi + \theta$ колинеарни, као и вектори који одговарају угловима $-\theta$ и $\pi - \theta$, следи да уколико има асимптотских праваца, има их тачно два. Ако је Гаусова кривина у посматраној тачки негативна, тј. главне кривине су супротних знакова, онда постоје тачно два асимптотска правца и угао између њих је $2\theta \pmod{\pi}$.

Сада можемо доказати следећу важну теорему.

Теорема 3.2. *Нека је $M \subset \mathbb{R}^3$ површ таква да је $\boldsymbol{K}(P) = -\frac{1}{a^2}$ за сваку тачку $P \in M$. Нека је ω диференцијабилно пресликавање које свакој тачки додељује угао између асимптотских праваца у тој тачки и нека је $\theta = \frac{\omega}{2}$. Тада за околину $U(P)$ сваке тачке P постоји главна закрпа $r : U \longrightarrow U(P)$ таква да важи:*
(1) метрика је $\mathrm{d}\boldsymbol{s}^2 = (a\cos\theta)^2\mathrm{d}u^2 + (a\sin\theta)^2\mathrm{d}v^2$;
(2) главне кривине су $\boldsymbol{k}_1 = \frac{\alpha}{a}\operatorname{tg}\theta$ и $\boldsymbol{k}_2 = -\frac{\alpha}{a}\operatorname{ctg}\theta$, за неко $\alpha \in \{-1, 1\}$;
(3) средња кривина је $\boldsymbol{H} = -\frac{\alpha}{a}\operatorname{ctg} 2\theta$;
(4) друга основна форма је $\boldsymbol{II} = \alpha a \sin\theta\cos\theta(\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2)$.

Доказ. Свака тачка P псеудосферичне површи јесте хиперболичка, па на основу теореме 2.5 постоји околина $U(P)$ тачке P и локална карта $R : V \longrightarrow U(P)$ која је главна. На основу претходне теореме постоји њена репараметризација $r : U \longrightarrow U(P)$ чије главне кривине задовољавају једнакости ${\boldsymbol{k}_1}^2 = \frac{a^2 - \boldsymbol{E}}{a^2\boldsymbol{E}}$ и ${\boldsymbol{k}_2}^2 = \frac{a^2 - \boldsymbol{G}}{a^2\boldsymbol{G}}$. Пошто је $\omega = 2\theta$ угао између асимптотских праваца, следи да је $\boldsymbol{k}_1\cos^2\theta + \boldsymbol{k}_2\sin^2\theta = 0$. Због $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 \equiv -\frac{1}{a^2}$, следи да је ${\boldsymbol{k}_1}^2\cos^2\theta - \frac{1}{a^2}\sin^2\theta = 0$, па је ${\boldsymbol{k}_1}^2 = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^2\theta$, тј. $\boldsymbol{k}_1 = \frac{\alpha}{a}\operatorname{tg}\theta$, за неко $\alpha \in \{-1, 1\}$. Одмах следи да је $\boldsymbol{k}_2 = -\frac{\alpha}{a}\operatorname{ctg}\theta$, па важи (2).

Како је $a^2{\boldsymbol{k}_1}^2 = \frac{a^2}{\boldsymbol{E}} - 1$, следи да је $\boldsymbol{E} = \frac{a^2}{1 + \operatorname{tg}^2\theta} = a^2\cos^2\theta$. Слично, из $a^2{\boldsymbol{k}_2}^2 = \frac{a^2}{\boldsymbol{G}} - 1$, следи да је $\boldsymbol{G} = \frac{a^2}{1 + \operatorname{ctg}^2\theta} = a^2\sin^2\theta$. Како је $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 < 0$, следи да је $\boldsymbol{k}_1 \neq \boldsymbol{k}_2$, па на основу става 2.10 важи $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} \equiv 0$. Дакле, доказали смо да важи и (1).

Средња кривина је једнака

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2) = \frac{\alpha}{2a}(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{ctg}\theta) = \frac{\alpha}{2a\cos\theta\sin\theta} \cdot (\sin^2\theta - \cos^2\theta) \\
&= -\frac{\alpha}{a\sin 2\theta}\cos 2\theta = -\frac{\alpha}{a}\operatorname{ctg} 2\theta,
\end{aligned}
$$

па важи и (3).

Код главних закрпа важи $\boldsymbol{k}_1 = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{E}}$, $\boldsymbol{k}_2 = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{G}}$ и доказали смо да је $\boldsymbol{f} \equiv 0$. Следи да је $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{E} = \alpha a \sin\theta\cos\theta$ и $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{G} = -\alpha a \sin\theta\cos\theta$. Према томе, друга основна форма је једнака

$$\boldsymbol{II} = \alpha a \sin\theta\cos\theta(\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2),$$

па важи и (4). $\square$

Дефиниција 3.3. Закрпу (локалну карту) из претходне теореме називамо *Чебишовљевом главном локалном картом* полупречника $a > 0$ са *угаоном функцијом* θ.

С обзиром на став 3.4, имамо и следећу дефиницију.

Дефиниција 3.4. Репараметризацију Чебишовљеве главне локалне карте из става 3.4 која је Чебишовљева локална карта прве врсте називамо *Чебишовљевом асимптотском локалном картом* полупречника $a > 0$ са *угаоном функцијом* $\omega = 2\theta$.

Дакле, околина сваке тачке произвољне псеудосферичне површи има параметризацију која је асимптотска Чебишовљева локална карта. Краће, кажемо да у околини сваке тачке произвољне псеудосферичне површи имамо асимптотске координате. Сада желимо да нађемо асимптотске координате на псеудосфери, а затим да видимо како изгледају трансформације једних псеудосферичних површи у друге.

3.3 О угаоној функцији псеудосферичних површи

Сетимо се да је Гаусова кривина Чебишовљеве локалне карте дата са $\boldsymbol{K} = -\frac{\omega_{uv}}{a^2\sin\omega}$. Пошто је код псеудосферичних површи $\boldsymbol{K} \equiv -\frac{1}{a^2}$, закључујемо да угаона функција мора задовољавати парцијалну диференцијалну једначину $\omega_{uv} = \sin\omega$. Увођењем смене $\widetilde{u} = u + v$, $\widetilde{v} = u - v$, $\omega(u, v) = 2\theta(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, добијамо

$$\begin{aligned} \omega_u &= 2\,(\theta_{\widetilde{u}} \cdot 1 + \theta_{\widetilde{v}} \cdot 1) = 2(\theta_{\widetilde{u}} + \theta_{\widetilde{v}}); \\ \omega_{uv} &= 2(\theta_{\widetilde{u}\widetilde{u}} \cdot 1 + \theta_{\widetilde{u}\widetilde{v}} \cdot (-1) + \theta_{\widetilde{u}\widetilde{v}} \cdot 1 + \theta_{\widetilde{v}\widetilde{v}} \cdot (-1)) = 2(\theta_{\widetilde{u}\widetilde{u}} - \theta_{\widetilde{v}\widetilde{v}}), \end{aligned}$$

па је $2 \cdot (\theta_{\widetilde{u}\widetilde{u}} - \theta_{\widetilde{v}\widetilde{v}}) = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, односно $\theta_{\widetilde{u}\widetilde{u}} - \theta_{\widetilde{v}\widetilde{v}} = \sin\theta\cos\theta$.

Дефиниција 3.5. Парцијална једначина $\omega_{uv} = \sin\omega$ и њој еквивалентна једначина $\theta_{uu} - \theta_{vv} = \sin\theta\cos\theta$ називају се *синус–Гордоновом једначином.*

Дакле, угаоне функције свих псеудосферичних површи јесу решења синус–Гордонове једначине. О постојању и јединствености решења ове једначине наводимо без доказа следећу теорему.

Теорема 3.3. *Нека су $\phi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције такве да је $\phi(0) = \psi(0)$. Тада синус–Гордонова једначина $\omega_{uv} = \sin\omega$ има јединствено решење ω које задовољава услове $\omega(u, 0) = \phi(u)$ и $\omega(0, v) = \psi(v)$.*

Природно је да нас занимају решења синус–Гордонове једначине која зависе само од једног параметра. На пример, ако посматрамо главну Чебишовљеву локалну карту r чија угаона функција θ зависи само од параметра u, онда дуж произвољне v–параметарске криве $r(u_0, v)$ асимптотски правци граде с њом подударне углове. Стога имамо следеће тврђење.

Став 3.8. *Нека је пресликавање θ решење синус–Гордонове једначине $\theta_{uu} - \theta_{vv} = \sin\theta\cos\theta$ које зависи само од променљиве u. Тада постоји константа b таква да важи $\theta_u^2 = b^2 - \cos^2\theta$.*

Доказ. С обзиром на то да θ зависи само од променљиве u, имамо да је $\theta_{vv} \equiv 0$, па једначина има облик $\theta_{uu} = \sin\theta\cos\theta$. Помножимо обе стране са $2\theta_u$ и добијамо

$$2\theta_u\theta_{uu} = 2\sin\theta\cos\theta \cdot \theta_u = -(-2\cos\theta\sin\theta \cdot \theta_u).$$

Интеграцијом по u добијамо $\theta_u^2 = b^2 - \cos^2\theta$, јер пресликавања θ и θ_u зависе само од променљиве u. □

4 Ротационе површи константе негативне Гаусове кривине

4.1 Ротационе површи

Ротационе површи чине најпрепознатљивију класу површи. Заиста, многи предмети из свакодневног живота представљају ротационе површи, на пример лопте, чаше, флаше, вазе, конзерве, стубови итд. Такође, споменули смо да се псеудосфера добија ротацијом трактрисе, па је и она ротациона површ. Наравно, овде нас занимају ротационе површи константне негативне Гаусове кривине, али ћемо пре тога видети нека заједничка својства свих ротационих површи.

Дефиниција 4.1. Нека је Π раван у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$, нека је l права те равни и нека је C траг неке криве $\alpha : I \longrightarrow \Pi$. Ротацијом скупа C око праве l добијамо скуп M који се назива *ротационом површи* генерисаном скупом C, који се назива *профилном кривом.* Права l назива се *осом ротације* површи M.

Најчешће се за раван Π узима xOz–раван, а за праву l z–оса. Често се и за криву α чији траг $C = \alpha(I)$ ротирамо око праве l каже да је профилна крива. Пишемо $\alpha = (\varphi, \psi)$ имајући у виду да то значи да је $\alpha(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t))$ за $t \in I$.

Дефиниција 4.2. Елементарна површ $r : I \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ дата са $r(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u))$ назива се *стандардном параметризацијом* ротационе површи M чија је профилна крива $\alpha = (\varphi, \psi)$ 1–1 пресликавање, а њен траг припада xOz–равни и ротира се око z–осе.

Наравно, примећујемо да трагу $r(I \times (0, 2\pi))$ недостаје сама профилна крива $\alpha(I)$. Зато ротациона површ M има бар још једну локалну карту, на пример $R : I \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ која има исти облик као и r.

Најтипичнији пример ротационе површи јесте сфера, чија је профилна крива полукруг. Планета Земља је приближно сферног облика, па сфере веома често поистовећујемо са површином наше планете. Ако узмемо да је z–оса управо Земљина оса ротације и да су тачке пресека z–осе и сфере северни и јужни пол, онда је профилна крива сфере меридијан Земље. Такође, како сви меридијани Земље настају ротацијом произвољног меридијана око z–осе и како све u–параметарске криве настају ротацијом криве $r(u, 0)$, у аналогији са сфером називамо их *меридијанима* ротационе површи. У пресеку површине Земље и равни која је нормална на z–оси налазе се паралеле Земље. Како су v–параметарске криве произвољне ротационе површи такође у пресеку те површи и равни која је нормална на z–оси, називамо их *паралелама* ротационе површи.

На Земљи су меридијани управни на паралелама. Докажимо да ово важи за произвољну ротациону површ. Штавише, важи и више од тога.

Став 4.1. *Нека је $r : I \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ стандардна параметризација ротационе површи за чију профилну криву $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha = (\varphi, \psi)$, важи $(\forall t \in I)\ \varphi(t) > 0$. Тада је r главна регуларна елементарна површ.*

Доказ. На основу става 2.10, довољно је доказати да је $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} \equiv 0$. Из

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= (\varphi'(u) \cos v, \varphi'(u) \sin v, \psi'(u)), \\ r_v(u, v) &= (-\varphi(u) \sin v, \varphi(u) \cos v, 0), \end{aligned}$$

следи да је $\boldsymbol{F}(u, v) = -\varphi(u)\varphi'(u) \cos v \sin v + \varphi(u)\varphi'(u) \sin v \cos v + 0 = 0$. Израчунајмо јединично нормално векторско поље. Како је векторски производ базних тангентних вектора једнак

$$\begin{aligned} & (-\psi'(u)\varphi(u) \cos v, -\psi'(u)\varphi(u) \sin v, \varphi'(u)\varphi(u) \cos^2 v + \varphi'(u)\varphi(u) \sin^2 v) \\ = \ & \varphi(u)(-\psi'(u) \cos v, -\psi'(u) \sin v, \varphi'(u)), \end{aligned}$$

а његов интензитет једнак

$$\begin{aligned} \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| &= \varphi(u)\sqrt{\psi'(u)^2 \cos^2 v + \psi'(u)^2 \sin^2 v + \varphi'(u)^2} \\ &= \varphi(u)\sqrt{\psi'(u)^2 + \varphi'(u)^2}, \end{aligned}$$

следи да је $\boldsymbol{n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\psi'(u)^2+\varphi'(u)^2}}(-\psi'(u) \cos v, -\psi'(u) \sin v, \varphi'(u))$. Такође, $r_{uv}(u, v) = (-\varphi'(u) \sin v, \varphi'(u) \cos v, 0)$, па је

$$\boldsymbol{f}(u, v) = \frac{\varphi'(u)\psi'(u) \sin v \cos v - \varphi'(u)\psi'(u) \cos v \sin v + 0}{\sqrt{\psi'(u)^2 + \varphi'(u)^2}} = 0.$$

Према томе, r јесте главна регуларна елементарна површ. □

Приметимо да је услов $(\forall t \in I)\ \varphi(t) > 0$ битан да би r била регуларна (траг криве $(-\varphi, \psi)$ јесте осносиметричан трагу криве (φ, ψ) у односу на z–осу). Израчунајмо и остале коефицијенте прве и друге основне форме, главне кривине, Гаусову и средњу кривину. При томе, означимо са $\boldsymbol{k}_m$

главну кривину која одговара меридијанима, а са $\boldsymbol{k}_p$ главну кривину која одговара паралелама. Добијамо:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(u,v) &= \varphi'(u)^2\cos^2 v + \varphi'(u)^2\sin^2 v + \psi'(u)^2 = \varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2,\\
\boldsymbol{G}(u,v) &= \varphi(u)^2\sin^2 v + \varphi(u)^2\cos^2 v = \varphi(u)^2,\\
r_{uu}(u,v) &= (\varphi''(u)\cos v, \varphi''(u)\sin v, \psi''(u)),\\
r_{vv}(u,v) &= (-\varphi(u)\cos v, -\varphi(u)\sin v, 0),\\
\boldsymbol{e}(u,v) &= \frac{-\varphi''(u)\psi'(u)\cos^2 v - \varphi''(u)\psi'(u)\sin^2 v + \psi''(u)\varphi'(u)}{\sqrt{\psi'(u)^2+\varphi'(u)^2}}\\
&= \frac{\psi''(u)\varphi'(u) - \varphi''(u)\psi'(u)}{\sqrt{\psi'(u)^2+\varphi'(u)^2}},\\
\boldsymbol{g}(u,v) &= \frac{\varphi(u)\psi'(u)\cos^2 v + \varphi(u)\psi'(u)\sin^2 v + 0}{\sqrt{\psi'(u)^2+\varphi'(u)^2}} = \frac{\varphi(u)\psi'(u)}{\sqrt{\psi'(u)^2+\varphi'(u)^2}},\\
\boldsymbol{k}_m(u,v) &= \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{E}} = \frac{\psi''(u)\varphi'(u) - \varphi''(u)\psi'(u)}{(\psi'(u)^2+\varphi'(u)^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\boldsymbol{k}_p(u,v) &= \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{G}} = \frac{\psi'(u)}{\varphi(u)\sqrt{\psi'(u)^2+\varphi'(u)^2}},\\
\boldsymbol{K}(u,v) &= \frac{\psi''(u)\varphi'(u)\psi'(u) - \varphi''(u)\psi'(u)^2}{\varphi(u)(\psi'(u)^2+\varphi'(u)^2)^2},\\
\boldsymbol{H}(u,v) &= \frac{(\psi''(u)\varphi'(u) - \varphi''(u)\psi'(u))\varphi(u) + \psi'(u)(\varphi'(u)^2+\psi'(u)^2)}{2\varphi(u)(\psi'(u)^2+\varphi'(u)^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Приметимо да смо доказали следећу чињеницу.

Став 4.2. *Коефицијен̄ти ӣрве и друӷе основне форме, ӷлавне кривине, Гаусова кривина и средња кривина ӣроизвољне роѿационе ӣоврши кон-сѿанѿни су дуж ӣаралела.*

Као што знамо, профилну криву је могуће природно параметризовати. У том случају се претходни изрази знатно упрошћавају, јер важи да је $\varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2 = 1$. Добијамо:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(u,v) &= 1,\\
\boldsymbol{G}(u,v) &= \varphi(u)^2,\\
\boldsymbol{e}(u,v) &= \psi''(u)\varphi'(u) - \varphi''(u)\psi'(u),\\
\boldsymbol{g}(u,v) &= \varphi(u)\psi'(u),\\
\boldsymbol{k}_m(u,v) &= \psi''(u)\varphi'(u) - \varphi''(u)\psi'(u),\\
\boldsymbol{k}_p(u,v) &= \frac{\psi'(u)}{\varphi(u)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}(u,v) &= \frac{\psi''(u)\varphi'(u)\psi'(u)-\varphi''(u)\psi'(u)^2}{\varphi(u)}, \\ \boldsymbol{H}(u,v) &= \frac{(\psi''(u)\varphi'(u)-\varphi''(u)\psi'(u))\varphi(u)+\psi'(u)}{2\varphi(u)}. \end{aligned}$$

Штавише, диференцирањем идентитета $\varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2 = 1$ добијамо $2\varphi'(u)\varphi''(u) + 2\psi'(u)\psi''(u) = 0$, па следи да је $\psi'(u)\psi''(u) = -\varphi'(u)\varphi''(u)$, што додатно упрошћава Гаусову кривину. Добијамо:

$$\boldsymbol{K}(u,v) = \frac{-\varphi'(u)\varphi'(u)\varphi''(u)-\varphi''(u)\psi'(u)^2}{\varphi(u)} = -\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)}.$$

4.2 Миндингове ротационе псеудосферичне површи

Фердинанд Готлибович Миндинг (11.01.1806 — 13.05.1885) био је руско–немачки математичар који је својим радом доста допринео развоју Диференцијалне геометрије. Наставио је Гаусов рад проучавајући површи; специјално, проучавао је ротационе површи константне кривине и то отприлике у исто време када је Лобачевски проучавао проблем Петог Еуклидовог постулата. Пронашао је геодезијске линије на псеудосфери. Миндингови резултати у геометрији геодезијских троуглова на површима константне кривине из 1840. године утицао је на Белтрамијев рад о нееуклидским геометријама из 1868. године у којем је доказао да је псеудосфера локални модел хиперболичке планиметрије.

У овом одељку пратићемо Миндингов приступ ротационим површима константне негативне кривине које, као што знамо, локално реализују хиперболичку планиметрију. Он се питао коју криву треба узети за профилну криву ротационе површи да би та површ имала константну кривину. Без умањења општости претпоставимо да је та крива природно параметризована, да њен траг припада xOz–равни и да се она ротира око z–осе. Означимо је са $\alpha = (\varphi, \psi)$, где је $\varphi > 0$.

За даљи рад потребне су нам следеће функције. Оне имају везе са функцијом дужине лука елипсе, која није елементарна функција.

Дефиниција 4.3. *Елиптички интеграл друге врсте* јесте функција дефинисана са

$$\mathrm{E}(\phi, m) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-m\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Комплетан елиптички интеграл друге врсте јесте функција дефинисана са

$$\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}, m\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta.$$

За $m = 1$ добијамо $\mathrm{E}(\phi, 1) = \int\limits_0^{\phi} \cos\theta\mathrm{d}\theta = \sin\phi$, па је елиптички интеграл друге врсте, на неки начин, уопштење синусне функције. Одговарајуће уопштење хиперболичке синусне функције је онда дато са

$$\int\limits_0^{\phi} \sqrt{1 - m\sinh^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

(хиперболичка синусна функција се добија за $m = -1$). Уведимо смену $x = i\theta$. Користећи чињеницу да је $\sinh(-ix) = \frac{e^{-ix}-e^{ix}}{2} = -i\sin x$ добијамо да је претходни интеграл једнак

$$\int\limits_0^{i\phi} \sqrt{1 - m(-i\sin x)^2}\cdot(-i)\mathrm{d}x = -i\int\limits_0^{i\phi} \sqrt{1 + m\sin^2 x}\mathrm{d}x = -i\mathrm{E}(i\phi, -m).$$

Дакле, доказали смо да важи

$$-i\mathrm{E}(i\phi, -m) = \int\limits_0^{\phi} \sqrt{1 - m\sinh^2\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Нека је M ротациона површ чија је Гаусова кривина у свакој тачки једнака $-\frac{1}{a^2}$, за неко $a > 0$. Тада свака тачка површи M има околину која је подскуп ротационе површи чија стандардна параметризација $r(u, v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u))$ има профилну криву $\alpha = (\varphi, \psi)$ чија је природна параметризација*

(1) $\alpha(u) = \begin{cases} \left(ae^{-u/a}, \int\limits_0^u \sqrt{1 - e^{-\frac{2t}{a}}}\mathrm{d}t\right), & u > 0 \\ \left(ae^{u/a}, \int\limits_0^u \sqrt{1 - e^{\frac{2t}{a}}}\mathrm{d}t\right), & u < 0 \end{cases}$

(2) $\alpha(u) = \left(b\cosh\frac{u}{a}, -ia\mathrm{E}\left(\frac{iu}{a}, -\frac{b^2}{a^2}\right)\right)$, $-a\,\mathrm{arsinh}\,\frac{a}{b} < u < a\,\mathrm{arsinh}\,\frac{a}{b}$, *за неку константу* $b > 0$ *или*

(3) $\alpha(u) = \left(b\sinh\frac{u}{a}, -i\sqrt{a^2 - b^2}\mathrm{E}\left(\frac{iu}{a}, -\frac{b^2}{a^2-b^2}\right)\right)$, $0 < u < a\,\mathrm{arsinh}\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, *за неку константу* $0 < b < a$.

Доказ. Из претходног одељка знамо да је Гаусова кривина ротационе површи у стандардној параметризацији чија је профилна крива природно параметризована дата са

$$\boldsymbol{K}(u,v) = -\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)}.$$

Како је $\boldsymbol{K} \equiv -\frac{1}{a^2}$, следи да је функција φ решење линеарне диференцијалне једначине другог реда

$$\varphi''(u) - \frac{\varphi(u)}{a^2} = 0.$$

Према томе, $\varphi(u) = Ae^{\frac{u}{a}} + Be^{-\frac{u}{a}}$, за неке $A, B \in \mathbb{R}$ такве да је $\varphi(u) > 0$.
(1) Нека је нпр. $B = 0$. Тада мора бити $A > 0$ да би било $\varphi(u) > 0$. Можемо без умањења општости претпоставити да је $A = a$ (ако није, транслирамо параметар u за $-a\ln\frac{a}{A}$, односно посматрамо нови параметар $\widetilde{u} = u - a\ln\frac{a}{A}$ и онда је $\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) = \varphi(u) = Ae^{\frac{\widetilde{u}}{a}+\ln\frac{a}{A}} = Ae^{\frac{\widetilde{u}}{a}} \cdot \frac{a}{A} = ae^{\frac{\widetilde{u}}{a}}$). Због природне параметризације важи $\psi'(u)^2 = 1 - \varphi'(u)^2 = 1 - e^{\frac{2u}{a}}$, па је $u < 0$ и

$$\psi(u) = \int_0^u \psi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^u \sqrt{1 - e^{\frac{2t}{a}}}\mathrm{d}t.$$

Ако је пак $A = 0$, рефлексијом параметра u ($\widetilde{u} = -u$, $\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) = \varphi(u) = Be^{\frac{\widetilde{u}}{a}}$) добијамо претходни случај.
(2) Нека су и A и B различити од нуле. Можемо без умањења општости претпоставити да је $|A| = |B|$ (ако није, транслирамо параметар u за $-a\ln\sqrt{|\frac{B}{A}|}$, односно узмемо нови параметар $\widetilde{u} = u - a\ln\sqrt{|\frac{B}{A}|}$ и онда је $\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) = \varphi(u) = Ae^{\frac{\widetilde{u}}{a}}\sqrt{|\frac{B}{A}|} + Be^{-\frac{\widetilde{u}}{a}}\sqrt{|\frac{A}{B}|}$ и важи $|A|\sqrt{|\frac{B}{A}|} = \sqrt{|AB|}$ и $|B|\sqrt{|\frac{A}{B}|} = \sqrt{|AB|}$). Нека је $A = B = \frac{b}{2}$. Онда мора бити $b > 0$ да би било $\varphi(u) > 0$ и важи $\varphi(u) = \frac{b}{2} \cdot 2\cosh\frac{u}{a} = b\cosh\frac{u}{a}$. Због природне параметризације важи $\psi'(u)^2 = 1 - \varphi'(u)^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}\sinh^2\frac{u}{a}$. Следи да је $-a\operatorname{arsinh}\frac{a}{b} < u < a\operatorname{arsinh}\frac{a}{b}$ и

$$\psi(u) = \int_0^u \psi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sinh^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x = a\int_0^{\frac{u}{a}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sinh^2 t}\mathrm{d}t.$$

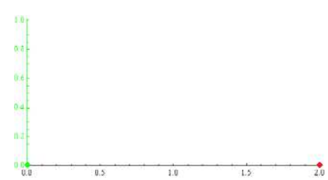
На основу изведене особине елиптичког интеграла друге врсте следи да је $\psi(u) = -ia\mathrm{E}\left(\frac{iu}{a}, -\frac{b^2}{a^2}\right)$.

(3) Нека је $A = -B = \frac{b}{2}$. Онда је $\varphi(u) = \frac{b}{2} \cdot 2\sinh\frac{u}{2} = b\sinh\frac{u}{a}$, па узмимо да је $u > 0$ и $b > 0$ да би било $\varphi(u) > 0$. Због природне параметризације важи $\psi'(u)^2 = 1 - \varphi'(u)^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}\cosh^2\frac{u}{a} = 1 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\sinh^2\frac{u}{a}$, па је $\sinh^2\frac{u}{a} < \frac{a^2-b^2}{b^2}$. Према томе, $0 < b < a$, $0 < u < a\,\mathrm{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ и

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \int_0^u \psi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\sinh^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{u}{a}} \sqrt{a^2 - b^2 - b^2\sinh^2 t}\mathrm{d}t = \sqrt{a^2-b^2}\int_0^{\frac{u}{a}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2-b^2}\sinh^2 t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

На основу изведене особине елиптичког интеграла друге врсте следи да је $\psi(u) = -i\sqrt{a^2-b^2}\mathrm{E}\left(\frac{iu}{a}, -\frac{b^2}{a^2-b^2}\right)$. $\square$

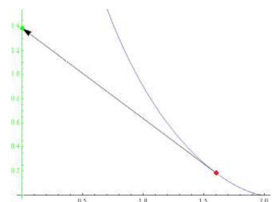
Где је овде псеудосфера? Рекли смо да је профилна крива псеудосфере трактриса, али ниједан од претходна три типа профилни кривих на први поглед не делује као трактриса. Међутим, оно што је кључно јесте то да параметризација трактрисе коју смо видели у поглављу 3 није природна! Сада ћемо извести поменуту параметризацију трактрисе и доказати да је њена природна репараметризација облика (1).



Слика 1: Почетни положај човека и колица.

Нека се у xOz–равни човек налази у координатном почетку, а колица у тачки $(a, 0)$, $a > 0$. Нека је канап којим човек вуче колица затегнут у сваком тренутку. Онда је његова дужина увек једнака a. Када човек почне да се креће у позитивном смеру z–осе, колица имају у сваком тренутку вектор брзине усмерен према човеку и налазе се на растојању a од њега. Нека је $\alpha(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ функција која описује положај колица у произвољном тренутку t. Онда је $\varphi'(t) < 0$ и $\psi'(t) > 0$, јер се по x–оси колица све више приближавају човеку, па им се x–координата смањује, а пошто се z–координата човека повећава, повећава се и z–координата колица. Можемо закључити да су онда у тренутку t колица, пројекција колица на z–оси и човек темена правоуглог троугла чија је катета која је паралелна x–оси једнака $\varphi(t)$, а хипотенуза једнака a (то је растојање од човека до колица у сваком тренутку). Према томе, z–координата човека је у тренутку t једнака $\psi(t)+\sqrt{a^2-\varphi(t)^2}$, а вектор од колица до човека једнак је $\left(0,\psi(t)+\sqrt{a^2-\varphi(t)^2}\right)-(\varphi(t),\psi(t)) = \left(-\varphi(t),\sqrt{a^2-\varphi(t)^2}\right)$. Овај вектор је истог смера као и вектор брзине колица $(\varphi'(t),\psi'(t))$, па постоји скалар $\lambda(t)>0$ такав да је $\left(-\varphi(t),\sqrt{a^2-\varphi(t)^2}\right)=\lambda(t)(\varphi'(t),\psi'(t))$. Следи да је $\lambda(t)=-\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$ и $\sqrt{a^2-\varphi(t)^2}=-\frac{\varphi(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Функција φ је опадајућа, па има инверзну функцију φ^{-1} за коју важи $(\varphi^{-1})'(\varphi(t))=\frac{1}{\varphi'(t)}$. Ако у претходној једначини ставимо $\varphi(t)=x$ и $z(x)=\psi(\varphi^{-1}(x))$, добијамо

$$\sqrt{a^2-x^2}=-x\psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x)=-xz'(x).$$



Слика 2: Положај човека и колица у произвољном тренутку.

Следи да је $z(x)=-\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x$. Овај интеграл се најлакше решава увођењем смене $x=a\sin t$. Дакле, можемо узети да је $\varphi(t)=a\sin t$, па пошто је φ опадајућа и $\varphi>0$, узмимо $t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Претходни интеграл онда постаје

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= z(\varphi(t))=-\int\frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}{a\sin t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t\\
&= a\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t=a\cdot\left(\int\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t-\int\sin t\mathrm{d}t\right)\\
&= a\int\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t+a\cos t.
\end{aligned}$$

Увођењем смене $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=u$, $\mathrm{d}t=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$ и коришћењем тригонометријског идентитета $\sin t=\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}=\frac{2u}{1+u^2}$ добијамо да је

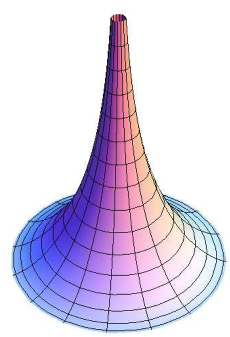
$$\int\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t=\int\frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln u+c=\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+c,$$

за неку константу c (пошто је $\frac{t}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, следи да је $u\in(1,+\infty)$). Дакле, $\psi(t)=a\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+a\cos t+c$. Пошто је $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)=(a,0)$, следи да је

$0 = \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + a\cos\frac{\pi}{2} + c = a\ln 1 + 0 + c = c$, тј. $c = 0$.

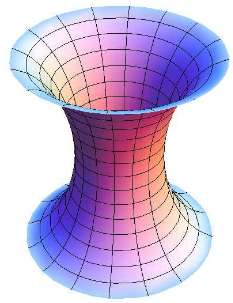
Дакле, параметризација трактрисе је $\alpha(t) = \big(a\sin t, a\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} + a\cos t\big)$, где је $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Потражимо функцију дужине лука. Вектор брзине је $\alpha'(t) = \left(a\cos t, a\frac{\cos^2 t}{\sin t}\right) = a\cos t(1, \operatorname{ctg} t)$, па следи да је интензитет брзине једнак $\|\alpha'(t)\| = -a\cos t\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t} = -a\cos t \cdot \frac{1}{\sin t} = -a\operatorname{ctg} t$. Следи да је $\boldsymbol{s}(t) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{t}(-a\operatorname{ctg} u)\mathrm{d}u = -a\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{\cos u \mathrm{d}u}{\sin u} = -a\ln\sin u|_{\frac{\pi}{2}}^{t} = -a\ln\sin t$, па је $t = \boldsymbol{s}^{-1}(s) = \pi - \arcsin e^{-\frac{s}{a}}$. Према томе, добијамо да је природна репараметризација дата са $\widetilde{\varphi}(s) = \varphi(\boldsymbol{s}^{-1}(s)) = a\sin(\boldsymbol{s}^{-1}(s)) = ae^{-\frac{s}{a}}$ и $\widetilde{\psi}(s) = \psi(\boldsymbol{s}^{-1}(s)) = a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\pi - \arcsin e^{-\frac{s}{a}}}{2} + \cos\left(\pi - \arcsin e^{-\frac{s}{a}}\right)\right)$. Функција $\widetilde{\varphi}$ се поклапа с функцијом φ криве из дела (1) теореме 4.1, а може се проверити да се увођењем смене $t = \pi - \arcsin e^{-\frac{u}{a}}$ у одређени интеграл $\int\limits_0^s \sqrt{1 - e^{-\frac{2u}{a}}}\mathrm{d}u$ добија функција $\widetilde{\psi}(s)$, па је поменута крива трактриса.

Природну параметризацију трактрисе можемо добити на још један начин. Вратимо се једначини $\sqrt{a^2 - \varphi(t)^2} = -\frac{\varphi(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Квадрирањем добијамо $a^2 - \varphi(t)^2 = \frac{\varphi(t)^2\psi'(t)^2}{\varphi'(t)^2}$. Пошто желимо природну параметризацију, важи $\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 = 1$, па је $a^2 - \varphi(t)^2 = \frac{\varphi(t)^2\left(1-\varphi'(t)^2\right)}{\varphi'(t)^2} = \frac{\varphi(t)^2}{\varphi'(t)^2} - \varphi(t)^2$. Добијамо једначину $a^2 = \frac{\varphi(t)^2}{\varphi'(t)^2}$, па пошто знамо да је $\varphi(t) > 0$ и $\varphi'(t) < 0$, следи $a = -\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$, тј. $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -\frac{1}{a}$. Интеграцијом по t добијамо да је $\ln\varphi(t) = -\frac{t}{a} + c$, за неку константу c. У тренутку $t = 0$ колица се налазе у тачки $(a, 0)$, па је $\varphi(0) = a$. Следи $\ln a = 0 + c$, тј. $c = \ln a$, па добијамо да је $\ln\frac{\varphi(t)}{a} = -\frac{t}{a}$, тј. $\varphi(t) = ae^{-\frac{t}{a}}$.



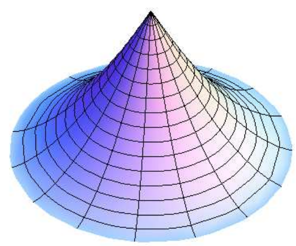
Слика 3: Слика псеудосфере.

Шта је осталим површима из теореме 4.1? Погледајмо како изгледа ротациона површ чија је профилна крива облика (2) из теореме 4.1.



Слика 4: Слика Миндингове калем–површи.

Ова површ личи на постоље око којег се намотава конац или калем, па отуд назив *Миндинīова калем–īоврш*. Погледајмо и како изгледа ротациона површ чија је профилна крива облика (3) из теореме 4.1.



Слика 5: Слика Миндингове кров–површи.

Ова површ личи на кров неке куле, па је зато називамо *Миндинīовом кров–īоврши.* Дакле, псеудосфере, Миндингове калем–површи и Миндингове кров–површи јесу три основна типа ротационих површи константне негативне Гаусове кривине, тј. ротационих псеудосферичних површи. Оне се могу видети и у свакодневном животу. На пример, узмимо исечак сфере између двеју паралела подједнако удаљених од екватора и на горњи крај залепимо псеудосферу, а на доњи кружни цилиндар и добићемо куполу. Уместо псеудосфере, на горњи крај можемо залепити Миндингову кров–површ и добити куполу са врхом. Такође, ако узмемо кружни цилиндар и на горњи крај залепимо полусферу, а на доњи доњу половину Миндингове калем–површи, добићемо звоно.

Поред тога, ове три врсте ротационих површи значајне су саме по себи за хиперболичку геометрију. Пре тога, напоменимо да није тешко доказати да су меридијани ротационе површи увек геодезијске линије.

Такође, није тешко доказати да су у произвољном моделу хиперболичке равни једине геодезијске линије праве. Дакле, меридијани ових ротационих површи су делови хиперболичких правих. У хиперболичкој геометрији две разне праве могу да се секу, да буду паралелне или да буду хиперпаралелне, па уместо две имамо три врсте праменова правих. Ако узмемо Миндингову кров–површ без једног меридијана и изометрично је развијемо у хиперболичку раван, видимо да сви меридијани пролазе кроз врх кров–површи, па припадају правима елиптичког прамена. Паралеле су у свим тачкама ортогоналне на меридијанима, па како су кругови чији је центар теме тог прамена једине криве које су у свим тачкама ортогоналне на елиптичком прамену правих, следи да паралеле припадају концентричним хиперболичким круговима. Дакле, Миндингова кров–површ је подскуп хиперболичког диска. Како на псеудосфери сви меридијани имају заједничку асимптоту (z–осу), следи да кад се псеудосфера без једног меридијана развије изометрично у хиперболичку раван, меридијани припадају паралелним правима, тј. правима параболичког прамена. Криве које су у свим тачкама ортогоналне на параболичком прамену правих јесу орицикли, па следи да су паралеле на псеудосфери садржане у орициклима. Наравно, сама псеудосфера без једног меридијана садржана је у унутрашњости орицикла који одговара граничној паралели. Коначно, ако узмемо Миндингову калем–површ без једног меридијана, можемо доказати да је паралела $r(0, v)$ једина паралела која је геодезијска линија. Сви меридијани су нормални на овој паралели, па следи да припадају хиперпаралелним правима, тј. правима хиперболичког прамена. Криве које су у свим тачкама ортогоналне на параболичком прамену правих јесу еквидистанте и права која је њихова заједничка основа, па следи да су паралеле $r(u_0, v)$, $u_0 \neq 0$, садржане у еквидистантама. Сама Миндингова калем–површ без једног меридијана садржана је у пресеку унутрашњости двеју еквидистаната са истом основом и истом висином.

4.3 Чебишовљева параметризација

Прво ћемо утврдити како изгледају Чебишовљеве главне параметризације ротационих површи константне негативне Гаусове кривине у општем случају, а затим ћемо видети како изгледају за сваку од претходне три врсте тих површи. Наравно, једноставно ћемо доћи и до њихових асиптотских координата. Сетимо се да смо за угаону функцију θ рекли да је природно захтевати да зависи само од променљиве u. Такође, сетимо се да смо доказали да су коефицијенти прве и друге основне форме ротационе површи у стандардној параметризацији константни дуж паралела, тј. да зависе само од промењиве u. То значи да дуж паралела асимптотски правци граде подударне углове са главним правцима, а ти углови су управо θ!

Теорема 4.2. *Нека је M ротациона површ чија је Гаусова кривина у свакој тачки једнака $-\frac{1}{a^2}$ и нека је θ угаона функција која задовољава $\theta_u^2 = b^2 - \cos^2\theta$ и $\theta_v \equiv 0$, за неко $b > 0$. Онда је Чебишовљева локална карта на M дата са*

$$r(u,v) = \left(\frac{a}{b}\sin\theta(u)\cos(bv), \frac{a}{b}\sin\theta(u)\sin(bv), \psi(u)\right),$$

где је $\psi'(u) = \pm\frac{a}{b}\cos^2\theta(u)$.

Доказ. Потражимо Чебишовљеву локалну карту површи M у облику $r(u,v) = (\varphi(u)\cos(\alpha v), \varphi(u)\sin(\alpha v), \psi(u))$, за неко $\alpha > 0$ и неке непознате функције φ и ψ. Ова параметризација личи на стандардну параметризацију ротационе површи чија је профилна крива (φ, ψ), с тим што уз параметар v имамо коефицијент α. Ово незнатно мења изразе за коефицијенте прве и друге основне форме и главне кривине које смо извели за стандардну параметризацију ротационе површи. Само треба помножити r_v и r_{uv} са α, а r_{vv} са α^2, што значи да $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{g}$ треба помножити са α^2, док се изрази за главне кривине не мењају. Коефицијенти прве основне форме су $\boldsymbol{E}(u,v) = \varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2 = a^2\cos^2\theta$ и $\boldsymbol{G}(u,v) = \alpha^2\varphi(u)^2 = a^2\sin^2\theta$, па је $\varphi(u) = \frac{a}{\alpha}\sin\theta(u)$. Према томе, важи $\varphi'(u) = \frac{a}{\alpha}\cos\theta(u)\theta_u(u)$, односно $\varphi'(u)^2 = \frac{a^2}{\alpha^2}\cos^2\theta(u)\cdot(b^2 - \cos^2\theta(u))$. Да би параметризација r била Чебишовљева, узмимо $\alpha = b$ и $\psi'(u)^2 = \frac{a^2}{\alpha^2}\cos^4\theta(u)$. Дакле, добијамо да је $\varphi(u) = \frac{a}{b}\sin\theta(u)$ и $\psi'(u) = \pm\frac{a}{b}\cos^2\theta(u)$. $\square$

Размотримо сада специјални случај претходне теореме када је $b = 1$. За то ће нам требати следеће једноставно тврђење. Ако је $\delta \in \{1, -1\}$ и $u = \ln\left(\delta \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$, онда је

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cosh u} &= \frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{2}{\delta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \delta\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}} = 2\delta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \delta\sin\theta,\\
-\operatorname{tgh} u &= -\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{\delta\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}{\delta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \delta\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}} - \frac{\delta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\delta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \delta\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}\\
&= \frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + 1} - \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta.
\end{aligned}$$

Теорема 4.3. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Чебишовљева главна локална карта полупречника $a > 0$ дата са $r(u,v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u))$, чија је*

угаона функција θ решење система парцијалних диференцијалних једначина $\theta_u^2 = \sin^2\theta$ и $\theta_v \equiv 0$. Тада важи:
(1) Гаусова кривина је у свакој тачки $P \in r(U)$ једнака $-\frac{1}{a^2}$;
(2) профилна крива $\alpha = (\varphi, \psi)$ дата је функцијама $\varphi(u) = \frac{\alpha a}{\cosh(u+C)}$ и $\psi(u) = \beta a(u+B-\mathrm{tgh}(u+C))$, где су $\alpha, \beta \in \{1, -1\}$ и $B, C \in \mathbb{R}$ константе;
(3) до на изометрију еуклидског простора $\mathbb{R}^3$, пресликавање r јесте репараметризација псеудосфере полупречника a;
(4) угаона функција је дата са $\theta(u) = 2\delta \operatorname{arctg} e^{\gamma(u+C)}$, где су $\gamma, \delta \in \{1, -1\}$.

Доказ. Услови $\theta_u^2 = \sin^2\theta$ и $\theta_v \equiv 0$ говоре нам да угаона функција θ задовољава синус–Гордонову једначину, па је Гаусова кривина једнака $\boldsymbol{K} \equiv -\frac{1}{a^2}$. Нека је $\gamma \in \{1, -1\}$ и нека је $\theta_u = \gamma \sin\theta$. Дељењем са $\sin\theta$ и интеграцијом по u добијамо $\gamma(u + C) = \int \frac{\theta'(u)}{\sin\theta(u)} \mathrm{d}u = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{\theta(u)}{2}\right|$, тј. $\mathrm{tg}\,\frac{\theta(u)}{2} = \delta e^{\gamma(u+C)}$ за неко $\delta \in \{1, -1\}$ и $C \in \mathbb{R}$. Према томе, следи да је $\theta(u) = 2\delta \operatorname{arctg} e^{\gamma(u+C)}$.

Из $\delta\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta(u)}{2} = e^{\gamma(u+C)}$ следи да је $\sin\theta(u) = \delta\frac{1}{\cosh(\gamma(u+C))} = \delta\frac{1}{\cosh(u+C)}$ и $\cos\theta(u) = -\,\mathrm{tgh}(\gamma(u+C)) = -\gamma\,\mathrm{tgh}(u+C)$, па да би r била Чебишовљева, мора бити $\boldsymbol{G}(u, v) = \varphi(u)^2 = a^2 \sin^2\theta(u)$. Следи да је $\varphi(u) = \alpha a \sin\theta(u) = \alpha a\delta\frac{1}{\cosh(u+C)}$. Преозначимо $\alpha\delta$ са α и добијамо $\varphi(u) = \alpha a\frac{1}{\cosh(u+C)}$. Takoђе, да би параметризација r била Чебишовљева, на основу претходне теореме је $\psi'(u) = \beta a \cos^2\theta(u) = \beta a\,\mathrm{tgh}^2(u + C)$, за неко $\beta \in \{1, -1\}$. Интеграцијом по u добијамо $\psi(u) = \beta a(u + B - \mathrm{tgh}(u + C))$ за неко $B \in \mathbb{R}$. Дакле, добили смо

$$r(u, v) = a\left(\alpha\frac{\cos v}{\cosh(u + C)}, \alpha\frac{\sin v}{\cosh(u + C)}, \beta(u + B - \mathrm{tgh}(u + C))\right).$$

Остаје још да докажемо да се неком изометријом еуклидског простора $\mathbb{R}^3$ траг ове локалне карте може сликати у канонску псеудосферу полупречника a. Транслација за вектор $(0, 0, a\beta(C - B))$ и транслација параметра u за C (тј. увођење новог параметра $\widetilde{u} = u + C$ којег ћемо опет обележавати са u) дају

$$r(u, v) = a\left(\alpha\frac{\cos v}{\cosh u}, \alpha\frac{\sin v}{\cosh u}, \beta(u - \mathrm{tgh}\,u)\right).$$

Уведимо сада смену $u = \ln\mathrm{tg}\,\frac{\widetilde{u}}{2}$, $v = \widetilde{v} + \frac{\pi(\alpha-1)}{2}$. Имамо да је $\frac{1}{\cosh u} = \sin\widetilde{u}$ и $-\,\mathrm{tgh}\,u = \cos\widetilde{u}$. Такође, ако је $\alpha = 1$, онда је $\alpha\cos v = \cos(\widetilde{v} + 0) = \cos v$, а ако је $\alpha = -1$, онда је $\alpha\cos v = -\cos(\widetilde{v} - \pi) = \cos\widetilde{v}$. Према томе, важи $\alpha\cos v = \cos\widetilde{v}$, што значи да се r репараметризује са

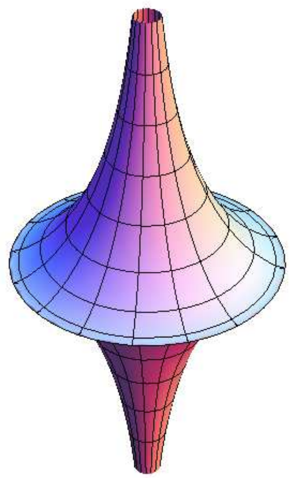
$$R(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = a\left(\sin\widetilde{u}\cos\widetilde{v}, \sin\widetilde{u}\sin\widetilde{v}, \beta\left(\ln\mathrm{tg}\,\frac{\widetilde{u}}{2} + \cos\widetilde{u}\right)\right).$$

Евентуална рефлексија у односу на раван xOy уклања β, па је траг локалне карте r заиста псеудосфера. $\square$

Дефиниција 4.4. *Чебишовљева главна параметризација* псеудосфере полупречника a јесте пресликавање $r : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ дато са

$$r(u, v) = a\left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, u - \operatorname{tgh} u\right).$$

Угаона функција је дата са $\theta(u, v) = 2\delta \operatorname{arctg} e^{\gamma u}$, за неке $\gamma, \delta \in \{1, -1\}$.



Слика 6: Слика псеудосфере у Чебишовљевој главној мрежи.

Приметимо да је ово и даље стандардна параметризација ротационе површи. Дакле, нашли смо нову параметризацију трактрисе, а то је $\alpha(t) = a\left(\frac{1}{\cosh t}, t - \operatorname{tgh} t\right)$, $t \in (0, +\infty)$. Споменули смо да се понекад за трактрису узима како путања којом се крећу колица, тако и њена симетрична слика у односу на осу управну на путањи којом се човек креће, па проширујемо домен за u на $\mathbb{R}$, уз губитак регуларности. Такође, домен за v можемо проширити на $\mathbb{R}$, али онда губимо инјективност локалне карте.

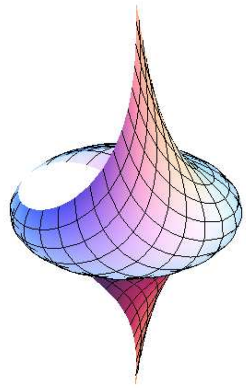
Увођењем смене $u = \widetilde{u} + \widetilde{v}$, $v = \widetilde{u} - \widetilde{v}$, од Чебишовљеве главне локалне карте добијамо Чебишовљеву асимптотску локалну карту.

Дефиниција 4.5. *Чебишовљева асимптотска параметризација* псеудосфере полупречника a јесте пресликавање r дато са

$$r(u, v) = a\left(\frac{\cos(u - v)}{\cosh(u + v)}, \frac{\sin(u - v)}{\cosh(u + v)}, u + v - \operatorname{tgh}(u + v)\right).$$

Угаона функција је дата са $\omega(u, v) = 4\delta \operatorname{arctg} e^{\gamma(u+v)}$, за неке $\gamma, \delta \in \{1, -1\}$.

Као и малопре, домен можемо проширити на $\mathbb{R}^2$, али онда губимо регуларност и инјективност.



Слика 7: Слика псеудосфере у Чебишовљевој асимптотској мрежи.

За Чебишовљеве параметризације Миндинговых кров–површи и калем–површи, потребне су нам Јакобијеве елиптичке функције cn, am и dn, као и елиптички интеграл друге врсте E. Следеће две теореме су директне последице теореме 4.2.

Теорема 4.4. *Миндингова кров–површ има Чебишовљеву главну параметризацију дату са*

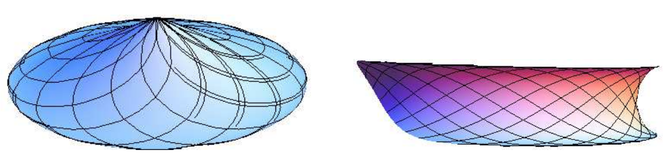
$$r(u,v) = (\varphi(u)\cos(bv), \varphi(u)\sin(bv), \psi(u)),$$

где је $\varphi(u) = \frac{a}{b}\mathrm{cn}\left(bu, \frac{1}{b^2}\right)$ *и* $\psi(u) = \alpha a\left(bu - \mathrm{E}\left(\mathrm{am}\left(bu, \frac{1}{b^2}\right), \frac{1}{b^2}\right)\right)$, *за неко* $\alpha \in \{1, -1\}$ *и* $b > 1$.

Теорема 4.5. *Миндингова калем–површ има Чебишовљеву главну параметризацију дату са*

$$r(u,v) = \frac{a}{b}\left(\mathrm{dn}(u,b^2)\cos(bv), \mathrm{dn}(u,b^2)\sin(bv), \alpha\left(u - \mathrm{E}\left(\mathrm{am}(u,b^2), b^2\right)\right)\right),$$

за неко $\alpha \in \{1, -1\}$ *и* $0 < b < 1$.



Слика 8: Слика Миндингове кров–површи и калем–површи у Чебишовљевој асимптотској мрежи.

5 Трансформације псеудосферичних површи

Осим ротационих псеудосферичних површи (псеудосфера, Миндингових калем–површи и Миндингових кров–површи), постоји много других површи у $\mathbb{R}^3$ чија је Гаусова кривина у свакој тачки једнака $-\frac{1}{a^2}$, за неко $a > 0$. Желимо да од познатих површи конструишемо нове, па су нам од значаја пресликавања која трансформишу једну псеудосферичну површ у другу. Та пресликавања имају једноставан облик када су закрпе на површи коју трансформишемо Чебишовљеве локалне карте. Ово последње поглавље посвећујемо управо овим трансформацијама.

5.1 Бјанкијева трансформација

Ова врста трансформације псеудосферичних површи носи име по италијанском математичару Луиђију Бјанкију (18.01.1856 — 06.06.1928), који је проучавао групе изометрија Риманових многострукости као Лијеве групе димензије 3.

Дефиниција 5.1. Нека је M површ у $\mathbb{R}^3$ чија је Гаусова кривина у свакој тачки једнака $-\frac{1}{a^2}$, за неко $a > 0$. За површ N са јединичним нормалним векторским пољем $\boldsymbol{n}_N$ кажемо да је *Бјанкијева трансформација* површи M ако постоји пресликавање $\Phi : M \longrightarrow N$ такво да за сваку тачку $P \in M$ важи:
(1) $\|\Phi(P) - P\| = a$,
(2) вектор $\Phi(P) - P$ паралелан је неком тангентном вектору на M у тачки P и
(3) вектор $\boldsymbol{n}_N(\Phi(P))$ паралелан је неком тангентном вектору на M у тачки P и нормалан на вектору $\Phi(P) - P$.

Бјанки је овакву површ N називао *комплементарном површи* површи M. Геометријски се Бјанкијевом трансформацијом свака тачка P површи M слика у тачку Q површи N такву да је вектор $\overrightarrow{PQ}$ паралелан неком тангентном вектору на површи M у тачки P, паралелан неком тангентном вектору на површи N у тачки Q и да је његов интензитет једнак a, а тангентна раван на површи M у тачки P управна је на тангентној равни на површи N у тачки Q.

Став 5.1. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Чебишовљева главна локална карта на површи $M \subset \mathbb{R}^3$ чија је Гаусова кривина $\boldsymbol{K}(P) = -\frac{1}{a^2}$ за свако $P \in M$,*

$\theta : U \longrightarrow \mathbb{R}$ њена угаона функција и $\widetilde{r} = \Phi \circ r$ регуларна елементарна површ која задовољава особине (1) *и* (2) *из претходне дефиниције. Онда постоји пресликавање $\widetilde{\theta} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ такво да је*

$$\widetilde{r} = r + \frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta} r_u + \frac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta} r_v. \tag{5.1}$$

Доказ. Вектор $\widetilde{r}(u,v) - r(u,v) = \Phi(P) - P$, $P = r(u,v)$, паралелан је неком тангентном вектору из $T_P r$, па је

$$\widetilde{r}(u,v) - r(u,v) = A(u,v) r_u(u,v) + B(u,v) r_v(u,v),$$

за неке функције $A, B : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Пошто је $\|\widetilde{r}(u,v) - r(u,v)\| = a$ и r Чебишовљева главна локална карта, следи да је

$$\begin{aligned} a^2 &= A(u,v)^2 \cdot \boldsymbol{E}(u,v) + 2A(u,v)B(u,v)\boldsymbol{F}(u,v) + B(u,v)^2 \cdot \boldsymbol{G}(u,v) \\ &= A^2(u,v) \cdot a^2 \cos^2\theta(u,v) + B^2(u,v) \cdot a^2 \sin^2\theta(u,v). \end{aligned}$$

Дакле, важи $(A(u,v)\cos\theta)^2 + (B(u,v)\sin\theta)^2 = 1$, па постоји функција $\widetilde{\theta} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ таква да је $A\cos\theta = \cos\widetilde{\theta}$ и $B\sin\theta = \sin\widetilde{\theta}$, тј. $A = \frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta}$ и $B = \frac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta}$. Следи да је $\widetilde{r} = r + \frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta} r_u + \frac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta} r_v$. □

Дефиниција 5.2. Пресликавање $\widetilde{\theta}$ из претходног става назива се *угаоном функцијом* Бјанкијеве трансформације у односу на θ.

Из услова (3) у дефиницији Бјанкијеве трансформације изводимо следећи систем парцијалних диференцијалних једначина које се називају *Бјанки–Дарбуовим једначинама.*

Теорема 5.1. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Чебишовљева главна локална карта на површи $M \subset \mathbb{R}^3$ чија је Гаусова кривина у свакој тачки једнака $-\frac{1}{a^2}$ и нека је $\widetilde{r}$ регуларна елементарна површ дата са* (5.1)*. Тада је $\widetilde{r}$ Бјанкијева трансформација од r ако и само ако важи*

$$\begin{cases} \widetilde{\theta}_u + \theta_v = \sin\widetilde{\theta}\cos\theta, \\ \theta_u + \widetilde{\theta}_v = -\cos\widetilde{\theta}\sin\theta. \end{cases}$$

Доказ. Нека је $\widetilde{r}$ дата са (5.1). Диференцирањем по u добијамо

$$\widetilde{r}_u = r_u + \left(\frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta}\right)_u r_u + \frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta} r_{uu} + \left(\frac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta}\right)_u r_v + \frac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta} r_{uv}.$$

На основу става 3.5 следи да је

$$\begin{array}{rcl} r_{uu} & = & -\operatorname{tg}\theta\cdot\theta_u r_u+\operatorname{ctg}\theta\cdot\theta_v r_v+\boldsymbol{e}\boldsymbol{n} \\ r_{uv} & = & -\operatorname{tg}\theta\cdot\theta_v r_u+\operatorname{ctg}\theta\cdot\theta_u r_v \end{array}$$

па пошто је

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta}\right)_u & = & \dfrac{-\sin\widetilde{\theta}\cdot\widetilde{\theta}_u\cos\theta+\cos\widetilde{\theta}\sin\theta\cdot\theta_u}{\cos^2\theta} \\ & = & \dfrac{-\sin\widetilde{\theta}\cdot\widetilde{\theta}_u+\cos\widetilde{\theta}\operatorname{tg}\theta\cdot\theta_u}{\cos\theta}, \\ \left(\dfrac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta}\right)_u & = & \dfrac{\cos\widetilde{\theta}\cdot\widetilde{\theta}_u\sin\theta-\sin\widetilde{\theta}\cos\theta\cdot\theta_u}{\sin^2\theta} \\ & = & \dfrac{\cos\widetilde{\theta}\cdot\widetilde{\theta}_u-\sin\widetilde{\theta}\operatorname{ctg}\theta\cdot\theta_u}{\sin\theta}, \\ \boldsymbol{e} & = & -a\sin\theta\cos\theta, \end{array}$$

следи да је

$$\widetilde{r}_u=\frac{\cos\theta-\sin\widetilde{\theta}(\widetilde{\theta}_u+\theta_v)}{\cos\theta}r_u+\frac{\cos\widetilde{\theta}(\widetilde{\theta}_u+\theta_v)}{\sin\theta}r_v-a\sin\theta\cos\widetilde{\theta}\cdot\boldsymbol{n}.$$

Слично се добија да је

$$\widetilde{r}_v=-\frac{\sin\widetilde{\theta}(\theta_u+\widetilde{\theta}_v)}{\cos\theta}r_u+\frac{\sin\theta+\cos\widetilde{\theta}(\theta_u+\widetilde{\theta}_v)}{\sin\theta}r_v+a\sin\widetilde{\theta}\cos\theta\cdot\boldsymbol{n}.$$

Претпоставимо да је $\widetilde{r}$ Бјанкијева трансформација. Тада јединично нормално векторско поље задовољава особину (3), па је $\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}=Ar_u+Br_v$ и $\langle\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}},\widetilde{r}-r\rangle=0$, тј.

$$A\frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta}a^2\cos^2\theta+B\frac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta}a^2\sin^2\theta=0.$$

Пошто је $\|\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}\|=1$, следи и $A^2\cdot a^2\cos^2\theta+B^2\cdot a^2\sin^2\theta=1$. Из прве једначине је $A=-B\operatorname{tg}\widetilde{\theta}\operatorname{tg}\theta$, па заменом у другу добијамо

$$\frac{1}{a^2}=B^2\operatorname{tg}^2\widetilde{\theta}\operatorname{tg}^2\theta\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta=B^2\sin^2\theta(\operatorname{tg}^2\widetilde{\theta}+1)=B^2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\widetilde{\theta}}.$$

Дакле, $B^2=\frac{\cos^2\widetilde{\theta}}{a^2\sin^2\theta}$, па је $B=\pm\frac{\cos^2\widetilde{\theta}}{a^2\sin^2\theta}$. Узмимо нпр. да је $B=\frac{\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta}$, па је онда $A=-\frac{\sin\widetilde{\theta}}{a\cos\theta}$, тј.

$$\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}=-\frac{\sin\widetilde{\theta}}{a\cos\theta}r_u+\frac{\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta}r_v$$

(одредили смо $\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}$ до на смер, за тачан смер треба израчунати $\widetilde{r}_u \times \widetilde{r}_v$). Пошто је $\langle \boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}, \widetilde{r}_u \rangle = 0$ и $\langle \boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}, \widetilde{r}_v \rangle = 0$, добијамо

$$\begin{aligned} a(-\cos\theta \sin\widetilde{\theta} + \widetilde{\theta}_u + \theta_v) &= 0, \\ a(\theta_u + \widetilde{\theta}_v + \cos\widetilde{\theta} \sin\theta) &= 0, \end{aligned}$$

одакле директно следе Бјанки–Дарбуове једначине.

Обратно, претпоставимо да важе Бјанки–Дарбуове једначине. Онда је

$$\begin{aligned} \widetilde{r}_u &= \frac{\cos\theta - \sin\widetilde{\theta}\cos\theta\sin\widetilde{\theta}}{\cos\theta} r_u + \frac{\cos\widetilde{\theta}\cos\theta\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta} r_v - a\sin\theta\cos\widetilde{\theta}\cdot\boldsymbol{n} \\ &= \cos^2\widetilde{\theta}\cdot r_u + \cos\widetilde{\theta}\sin\widetilde{\theta}\operatorname{ctg}\theta\cdot r_v - a\sin\theta\cos\widetilde{\theta}\cdot\boldsymbol{n}, \\ \widetilde{r}_v &= -\frac{\sin\widetilde{\theta}\cdot(-\cos\widetilde{\theta}\sin\theta)}{\cos\theta} r_u + \frac{\sin\theta - \cos\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}\sin\theta}{\sin\theta} r_v + a\sin\widetilde{\theta}\cos\theta\cdot\boldsymbol{n} \\ &= \sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}\operatorname{tg}\theta\cdot r_u + \sin^2\widetilde{\theta}\cdot r_v + a\sin\widetilde{\theta}\cos\theta\cdot\boldsymbol{n}. \end{aligned}$$

Дефинишимо векторско поље V на $\widetilde{r}$ са $V = -\frac{\sin\widetilde{\theta}}{a\cos\theta} r_u + \frac{\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta} r_v$. Из

$$\begin{aligned} \langle V, \widetilde{r}_u \rangle &= -\frac{\sin\widetilde{\theta}}{a\cos\theta}\cos^2\widetilde{\theta}\cdot a^2\cos^2\theta + \frac{\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta}\cos\widetilde{\theta}\sin\widetilde{\theta}\operatorname{ctg}\theta\cdot a^2\sin^2\theta = 0 \\ \langle V, \widetilde{r}_v \rangle &= -\frac{\sin\widetilde{\theta}}{a\cos\theta}\sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}\operatorname{tg}\theta\cdot a^2\cos^2\theta + \frac{\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta}\sin^2\widetilde{\theta}\cdot a^2\sin^2\theta = 0, \end{aligned}$$

следи да је V нормално векторско поље. Пошто је $\langle V, V \rangle = 1$, следи да је, уз евентуалну промену смера, V јединично нормално векторско поље на регуларној елементарној површи $\widetilde{r}$, тј. да је $\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}} = -\frac{\sin\widetilde{\theta}}{a\cos\theta} r_u + \frac{\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta} r_v$. У свакој тачки $(u,v) \in U$ вектор $\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}(u,v)$ паралелан је неком тангентном вектору из $T_P r$, $P = r(u,v)$, а важи и

$$\langle \boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}, \widetilde{r} - r \rangle = -\frac{\sin\widetilde{\theta}}{a\cos\theta}\cdot\frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta} a^2\cos^2\theta + \frac{\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta}\cdot\frac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta} a^2\sin^2\theta = 0,$$

па следи да је $\widetilde{r}$ Бјанкијева трансформација од r. $\square$

Теорема 5.2. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Чебишовљева главна локална карта на површи $M \subset \mathbb{R}^3$ чија је Гаусова кривина у свакој тачки једнака $-\frac{1}{a^2}$, за неко $a > 0$. Нека је $\widetilde{r}$ Бјанкијева трансформација од r са углоаном функцијом $\widetilde{\theta}$. Онда је $\widetilde{r}$ Чебишовљева главна локална карта константне Гаусове кривине $-\frac{1}{a^2}$ и $\widetilde{\theta}$ је њена угаона функција.*

Доказ. Одредимо коефицијенте прве основне форме регуларне елементарне површи $\widetilde{r}$. Из доказа претходне теореме следи да је

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_u &= \cos^2\widetilde{\theta}\cdot r_u + \cos\widetilde{\theta}\sin\widetilde{\theta}\operatorname{ctg}\theta\cdot r_v - a\sin\theta\cos\widetilde{\theta}\cdot \boldsymbol{n},\\
\widetilde{r}_v &= \sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}\operatorname{tg}\theta\cdot r_u + \sin^2\widetilde{\theta}\cdot r_v + a\sin\widetilde{\theta}\cos\theta\cdot \boldsymbol{n},
\end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\widetilde{r}} &= \cos^4\widetilde{\theta}\cdot a^2\cos^2\theta + \cos^2\widetilde{\theta}\sin^2\widetilde{\theta}\operatorname{ctg}^2\theta\cdot a^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta\cos^2\widetilde{\theta},\\
&= a^2\cos^2\widetilde{\theta}(\cos^2\theta(\cos^2\widetilde{\theta}+\sin^2\widetilde{\theta})+\sin^2\theta) = a^2\cos^2\widetilde{\theta},\\
\boldsymbol{F}_{\widetilde{r}} &= \cos^2\widetilde{\theta}\sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}\operatorname{tg}\theta\cdot a^2\cos^2\theta + \cos\widetilde{\theta}\sin\widetilde{\theta}\operatorname{ctg}\theta\sin^2\widetilde{\theta}\cdot a^2\sin^2\theta\\
&- a\sin\theta\cos\widetilde{\theta}\cdot a\sin\widetilde{\theta}\cos\theta\\
&= a^2\sin\theta\cos\theta\sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}(\cos^2\widetilde{\theta}+\sin^2\widetilde{\theta}-1) = 0,\\
\boldsymbol{G}_{\widetilde{r}} &= \sin^2\widetilde{\theta}\cos^2\widetilde{\theta}\operatorname{tg}^2\theta\cdot a^2\cos^2\theta + \sin^4\widetilde{\theta}\cdot a^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\widetilde{\theta}\cos^2\theta\\
&= a^2\sin^2\widetilde{\theta}(\sin^2\theta(\cos^2\widetilde{\theta}+\sin^2\widetilde{\theta})+\cos^2\theta) = a^2\sin^2\widetilde{\theta}.
\end{aligned}$$

Дакле, $\widetilde{r}$ је Чебишовљева главна локална карта и $\widetilde{\theta}$ је њена угаона функција. Диференцирањем Бјанки–Дарбуових једначина добијамо

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}_{uu} + \theta_{uv} &= (\cos\theta\sin\widetilde{\theta})_u = -\sin\theta\cdot\theta_u\sin\widetilde{\theta} + \cos\theta\cos\widetilde{\theta}\cdot\widetilde{\theta}_u,\\
\theta_{uv} + \widetilde{\theta}_{vv} &= (-\cos\widetilde{\theta}\sin\theta)_v = \sin\widetilde{\theta}\cdot\widetilde{\theta}_v\sin\theta - \cos\widetilde{\theta}\cos\theta\cdot\theta_v,
\end{aligned}$$

па одузимањем друге добијене једначине од прве добијамо

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}_{uu} - \widetilde{\theta}_{vv} &= -\sin\theta\sin\widetilde{\theta}\cdot(\theta_u+\widetilde{\theta}_v) + \cos\theta\cos\widetilde{\theta}\cdot(\widetilde{\theta}_u+\theta_v)\\
&= -\sin\theta\sin\widetilde{\theta}\cdot(-\cos\widetilde{\theta}\sin\theta) + \cos\theta\cos\widetilde{\theta}\cos\theta\sin\widetilde{\theta}\\
&= \sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = \sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}.
\end{aligned}$$

Следи да угаона функција $\widetilde{\theta}$ задовољава синус–Гордонову једначину, па је Гаусова кривина регуларне елементарне површи $\widetilde{r}$ у свакој тачки једнака $-\frac{1}{a^2}$. □

5.1.1 Куенова површ

Сада ћемо применити Бјанкијеву трансформацију на псеудосферу да бисмо конструисали нови пример псеудосферичне површи. Прво израчунајмо угаону функцију нове површи.

Став 5.2. *Нека је r Чебишовљева главна параметризација псеудосфере са угаоном функцијом $\theta(u,v) = 2\operatorname{arctg} e^u$ и $\widetilde{r}$ њена Бјанкијева трансформација. Онда је њена угаона функција дата са*

$$\widetilde{\theta}(u,v) = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{v}{\cosh u}\right).$$

Доказ. Пошто је $u = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, следи да је $\cos\theta = -\operatorname{tgh} u$ и $\sin\theta = \frac{1}{\cosh u}$. Такође, $\theta_u = \frac{2e^u}{1+e^{2u}} = \frac{2}{e^{-u}+e^u} = \frac{1}{\cosh u}$ и $\theta_v = 0$, па су Бјанки–Дарбуове једначине дате са

$$\begin{aligned} \widetilde{\theta}_u &= -\operatorname{tgh} u \sin\widetilde{\theta}, \\ \frac{1}{\cosh u} + \widetilde{\theta}_v &= -\frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cosh u}. \end{aligned}$$

Напишимо прву једначину у облику $\frac{\widetilde{\theta}_u}{\sin\widetilde{\theta}} = -\operatorname{tgh} u$ и интегралимо је по u. Добијамо да је $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right| = -\int \frac{\sinh u}{\cosh u}\mathrm{d}u = -\ln\cosh u + A(v)$, односно да је $\left|\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right| = \frac{e^{A(v)}}{\cosh u}$. Према томе, важи $\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2} = \frac{A_1(v)}{\cosh u}$, за неку функцију $A_1(v)$. Сређивањем друге Бјанки–Дарбуове једначине добијамо да је $\widetilde{\theta}_v = -\frac{1+\cos\widetilde{\theta}}{\cosh u} = -\frac{2\cos^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}}{\cosh u}$, односно $\frac{1}{2}\cdot\frac{\widetilde{\theta}_v}{\cos^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}} = -\frac{1}{\cosh u}$. Из $\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2} = \frac{A_1(v)}{\cosh u}$ диференцирањем по v добијамо $\frac{1}{2}\cdot\frac{\widetilde{\theta}_v}{\cos^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}} = \frac{A_1'(v)}{\cosh u}$, па је $\frac{A_1'(v)}{\cosh u} = -\frac{1}{\cosh u}$. Дакле, $A_1'(v) = -1$, па је $A_1(v) = -v - c$, за неко $c \in \mathbb{R}$. Према томе, $\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2} = -\frac{v+c}{\cosh u}$, па је $\widetilde{\theta}(u,v) = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{v+c}{\cosh u}\right)$. С обзиром на то да вредност угаоне функције θ не зависи од параметра v, транслирајмо га за c (тј. уведимо нови параметар $\widetilde{v} = v + c$ који ћемо поново означавати са v) и добијамо да је $\widetilde{\theta}(u,v) = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{v}{\cosh u}\right)$. $\square$

Сада ћемо добити параметризацију нове површи.

Теорема 5.3. *Нека је $r(u,v) = a\left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, u - \operatorname{tgh} u\right)$ Чебишовљева главна параметризација псеудосфере. Онда је њена Бјанкијева трансформација $\widetilde{r}(u,v)$ дата са*

$$a\left(\frac{2\cosh u(\cos v + v\sin v)}{\cosh^2 u + v^2}, \frac{2\cosh u(\sin v + v\cos v)}{\cosh^2 u + v^2}, u - \frac{\sinh 2u}{\cosh^2 u + v^2}\right).$$

Доказ. На основу става 5.1 следи да је $\widetilde{r} = r + \frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta}r_u + \frac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta}r_v$. Угаона функција псеудосфере је $\theta(u,v) = 2\operatorname{arctg} e^u$, па из доказа претходног става знамо да је $\cos\theta = -\operatorname{tgh} u$ и $\sin\theta = \frac{1}{\cosh u}$. Такође, на основу претходног става је $\widetilde{\theta}(u,v) = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{v}{\cosh u}\right)$, тј. $\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2} = -\frac{v}{\cosh u}$, па следи да је

$$\begin{aligned} \cos\widetilde{\theta} &= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}} = \frac{\cosh^2 u - v^2}{\cosh^2 u + v^2}, \\ \sin\widetilde{\theta} &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}} = -\frac{2v\cosh u}{\cosh^2 u + v^2}. \end{aligned}$$

Тангентни вектори r_u и r_v једнаки су

$$\begin{aligned} r_u &= a\left(-\frac{\sinh u\cos v}{\cosh^2 u}, -\frac{\sinh u\sin v}{\cosh^2 u}, \operatorname{tgh}^2 u\right), \\ r_v &= a\left(-\frac{\sin v}{\cosh u}, \frac{\cos v}{\cosh u}, 0\right), \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} \frac{r_u}{\cos\theta} &= a\left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, -\operatorname{tgh} u\right), \\ \frac{r_v}{\sin\theta} &= a(-\sin v, \cos v, 0). \end{aligned}$$

За прву координату нове површи $\widetilde{r}$ добијамо

$$\begin{aligned} & a\left(\frac{\cos v}{\cosh u} + \cos\widetilde{\theta}\frac{\cos v}{\cosh u} + \sin\widetilde{\theta}\cdot(-\sin v)\right) = a\cdot\frac{\cos v}{\cosh u}(1+\cos\widetilde{\theta}) \\ + & \ a\cdot\frac{2v\cosh u\sin v}{\cosh^2 u + v^2} = a\cdot\frac{\cos v}{\cosh u}\cdot\frac{2\cosh^2 u}{\cosh^2 u+v^2} \\ + & \ a\cdot\frac{2v\cosh u\sin v}{\cosh^2 u + v^2} = a\cdot\frac{2\cosh u(\cos v + v\sin v)}{\cosh^2 u + v^2}, \end{aligned}$$

за другу координату добијамо

$$\begin{aligned} & a\left(\frac{\sin v}{\cosh u} + \cos\widetilde{\theta}\frac{\sin v}{\cosh u} + \sin\widetilde{\theta}\cos v\right) = a\cdot\frac{\sin v}{\cosh u}(1+\cos\widetilde{\theta}) \\ + & \ a\cdot\frac{2v\cosh u\cos v}{\cosh^2 u + v^2} = a\cdot\frac{\sin v}{\cosh u}\cdot\frac{2\cosh^2 u}{\cosh^2 u+v^2} \\ + & \ a\cdot\frac{2v\cosh u\cos v}{\cosh^2 u + v^2} = a\cdot\frac{2\cosh u(\sin v + v\cos v)}{\cosh^2 u + v^2}, \end{aligned}$$

а за трећу координату добијамо

$$\begin{aligned} & a\left(u - \operatorname{tgh} u + \cos\widetilde{\theta}\cdot(-\operatorname{tgh} u) + \sin\widetilde{\theta}\cdot 0\right) = au - a(1+\cos\widetilde{\theta})\operatorname{tgh} u \\ = & \ au - a\cdot\frac{2\cosh^2 u}{\cosh^2 u + v^2}\cdot\operatorname{tgh} u = a\left(u - \frac{2\sinh u\cosh u}{\cosh^2 u+v^2}\right), \end{aligned}$$

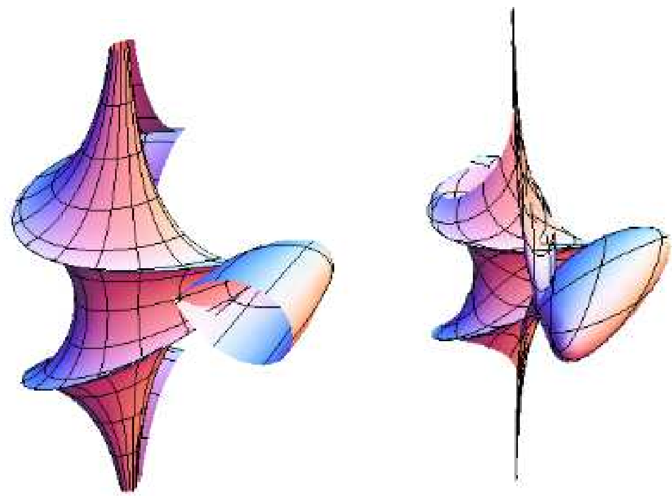
па је параметризације нове површи $\widetilde{r}(u,v)$ дата са

$$a\left(\frac{2\cosh u(\cos v + v\sin v)}{\cosh^2 u + v^2}, \frac{2\cosh u(\sin v + v\cos v)}{\cosh^2 u + v^2}, u - \frac{\sinh 2u}{\cosh^2 u + v^2}\right),$$

као што смо и тврдили. □

Дефиниција 5.3. Траг површи чија је параметризација дата претходном теоремом назива се *Куеновом површи.*

Наравно, пресликавање из претходне теореме јесте Чебишовљева главна мрежа. Увођењем смене $u = \widetilde{u} + \widetilde{v}$, $v = \widetilde{u} - \widetilde{v}$, добијамо Чебишовљеву асимптотску мрежу.



Слика 9: Слика Куенове површи редом у Чебишовљевој главној и Чебишовљевој асимптотској мрежи.

5.1.2 Псеудосфера као Бјанкијева трансформација

Пре него што будемо видели да псеудосферу можемо видети као Бјанкијеву трансформацију неке површи r, потребан нам је аналогон Френе–Сереовог репера за површи. Као што знамо, Френе–Сереов репер произвољне криве јесте покретан координатни систем, тј. координатни систем који се креће по кривој. Чињеница да је он ортонормиран од изузетног је значаја. На површима такође имамо покретан координатни систем и то је $r_u, r_v, \boldsymbol{n}$, али он у општем случају није ортонормиран. Ако је r ортогонална локална површ, овај координатни систем је ортогоналлан, али и даље вектори r_u и r_v не морају бити јединични. Зато уводимо следећи координатни систем.

Дефиниција 5.4. Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ локална површ чија је метрика дата са $\mathrm{d}\boldsymbol{s}^2 = \boldsymbol{E}\mathrm{d}u^2 + \boldsymbol{G}\mathrm{d}v^2$ и нека су функције $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ дате са $\boldsymbol{E}_1 = \frac{r_u}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}$ и $\boldsymbol{E}_2 = \frac{r_v}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}$. Тада ортонормирани репер $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{n}$ називамо *покретним ортонормираним репером* локалне површи r.

Код кривих имамо Френеове формуле за рачунање извода Френе–Сереовог репера $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$. Сад ћемо извести формуле за парцијалне изводе покретног ортонормираног репера $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{n}$ ортогоналне регуларне елементарне површи $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Теорема 5.4. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ локална површ чија је метрика дата са $\mathrm{d}\boldsymbol{s}^2 = \boldsymbol{E}\mathrm{d}u^2 + \boldsymbol{G}\mathrm{d}v^2$. Парцијални изводи функција $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{n}$ задовољавају једнакости*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{1u} &= -\frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{E}}\right)_v}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_2 + \frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{n}, &\quad \boldsymbol{E}_{1v} &= \frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{G}}\right)_u}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{E}_2 + \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{E}_{2u} &= \frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{E}}\right)_v}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_1 + \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{n}, &\quad \boldsymbol{E}_{2v} &= -\frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{G}}\right)_u}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{E}_1 + \frac{\boldsymbol{g}}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{n}_u &= -\frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{E}_1 - \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_2, &\quad \boldsymbol{n}_v &= -\frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{E}_1 - \frac{\boldsymbol{g}}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_2.
\end{aligned}$$

Доказ. Како је $\boldsymbol{E}_1 = \frac{r_u}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}$, тј. $\sqrt{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{E}_1 = r_u$, диференцирањем по u добијамо $\left(\sqrt{\boldsymbol{E}}\right)_u \boldsymbol{E}_1 + \sqrt{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{E}_{1u} = r_{uu}$. Кристофелови симболи ортогоналне локалне површи дати су са

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}^1_{11} &= \frac{\boldsymbol{E}_u\boldsymbol{G}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{E}_u}{2\boldsymbol{E}}, &\quad \boldsymbol{\Gamma}^2_{11} &= -\frac{\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{E}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = -\frac{\boldsymbol{E}_v}{2\boldsymbol{G}},\\
\boldsymbol{\Gamma}^1_{12} &= \frac{\boldsymbol{E}_v\boldsymbol{G}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{E}_v}{2\boldsymbol{E}}, &\quad \boldsymbol{\Gamma}^2_{12} &= \frac{\boldsymbol{G}_u\boldsymbol{E}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{G}_u}{2\boldsymbol{G}},\\
\boldsymbol{\Gamma}^1_{22} &= -\frac{\boldsymbol{G}_u\boldsymbol{G}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = -\frac{\boldsymbol{G}_u}{2\boldsymbol{E}}, &\quad \boldsymbol{\Gamma}^2_{22} &= \frac{\boldsymbol{G}_v\boldsymbol{E}}{2\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{G}_v}{2\boldsymbol{G}},
\end{aligned}$$

па је $\left(\sqrt{\boldsymbol{E}}\right)_u \boldsymbol{E}_1 + \sqrt{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{E}_{1u} = \frac{\boldsymbol{E}_u}{2\boldsymbol{E}}r_u - \frac{\boldsymbol{E}_v}{2\boldsymbol{G}}r_v + \boldsymbol{e}\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{E}_u}{2\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{E}_1 - \frac{\boldsymbol{E}_v}{2\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{e}\boldsymbol{n}$. Дакле, $\boldsymbol{E}_{1u} = -\frac{\boldsymbol{E}_v}{2\sqrt{\boldsymbol{E}}\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_2 + \frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{n} = -\frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{E}}\right)_v}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_2 + \frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{n}$. Такође, диференцирањем $\sqrt{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{E}_1 = r_u$ по v добијамо

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{E}}\right)_v \boldsymbol{E}_1 + \sqrt{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{E}_{1v} = r_{uv} = \frac{\boldsymbol{E}_v}{2\boldsymbol{E}}r_u + \frac{\boldsymbol{G}_u}{2\boldsymbol{G}}r_v + \boldsymbol{f}\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{E}_v}{2\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{E}_1 + \frac{\boldsymbol{G}_u}{2\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{f}\boldsymbol{n},$$

па је $\boldsymbol{E}_{1v} = \frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{G}}\right)_u}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{E}_2 + \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{n}$. Слично добијамо да је $\boldsymbol{E}_{2u} = \frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{E}}\right)_v}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_1 + \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{E}_{2v} = -\frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{G}}\right)_u}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{E}_1 + \frac{\boldsymbol{g}}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{n}$. Коефицијенти Вајнгартенових једнакости једнаки су

$$\boldsymbol{\beta}^1_1 = -\frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = -\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{E}}, \qquad \boldsymbol{\beta}^2_1 = -\frac{\boldsymbol{f}\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}} = -\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{G}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2^1 = -\frac{\boldsymbol{fG}}{\boldsymbol{EG}} = -\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{E}}, \qquad \boldsymbol{\beta}_2^2 = -\frac{\boldsymbol{gE}}{\boldsymbol{EG}} = -\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{G}},$$

па из $\boldsymbol{n}_u = -\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{E}}r_u - \frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{G}}r_v$ и $\boldsymbol{n}_v = -\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{E}}r_u - \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{G}}r_v$ добијамо $\boldsymbol{n}_u = -\frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{E}_1 - \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_2$ и $\boldsymbol{n}_v = -\frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{E}_1 - \frac{\boldsymbol{g}}{\sqrt{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{E}_2$. □

Специјално за Чебишовљеве главне локалне карте имамо следеће изразе за парцијалне изводе покретног ортонормираног репера.

Последица. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Чебишовљева главна локална карта. Онда је*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{1u} &= \theta_v \boldsymbol{E}_2 - \sin\theta\cdot\boldsymbol{n}, & \boldsymbol{E}_{1v} &= \theta_u \boldsymbol{E}_2, \\ \boldsymbol{E}_{2u} &= -\theta_v \boldsymbol{E}_1, & \boldsymbol{E}_{2v} &= -\theta_u \boldsymbol{E}_1 + \cos\theta\cdot\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}_u &= \sin\theta\cdot\boldsymbol{E}_1, & \boldsymbol{n}_v &= -\cos\theta\cdot\boldsymbol{E}_2. \end{aligned}$$

Посматрајмо пресликавање $r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ дато са $r(u,v) = (0,0,\alpha a u)$, за неко $\alpha \in \{1,-1\}$ и $a > 0$. Ово пресликавање није елементарна површ јер није 1–1, али га свеједно третирајмо као елементарну површ. Потражимо како изгледа њена Бјанкијева трансформација. Добијамо да је $r_u = (0,0,\alpha a)$ и $r_v = (0,0,0)$, па је $\boldsymbol{E} = a^2$ и $\boldsymbol{G} = 0$. Дакле, $\cos\theta = \alpha$ и $\sin\theta = 0$. За регуларне површи имамо да је Бјанкијева трансформација $\widetilde{r} = r + \frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta}r_u + \frac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta}r_v = r + a\cos\widetilde{\theta}\cdot\frac{r_u}{a\cos\theta} + a\sin\widetilde{\theta}\cdot\frac{r_v}{a\sin\theta}$, па пошто за површ r не можемо дефинисати покретни ортогонални репер на уобичајени начин, дефинишимо га са $\boldsymbol{E}_1 = (0,0,1)$, $\boldsymbol{E}_2 = (\cos v, \sin v, 0)$ и $\boldsymbol{n} = (-\sin v, \cos v, 0)$. Пошто је $\theta_u = \theta_v = 0$, из Бјанки–Дарбуових једначина добијамо

$$\begin{aligned} \widetilde{\theta}_u &= \cos\theta\sin\widetilde{\theta} = \alpha\sin\widetilde{\theta}, \\ \widetilde{\theta}_v &= -\sin\theta\cos\widetilde{\theta} = 0, \end{aligned}$$

па је $\ln\left(\beta\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right) = \alpha u$. Извели смо да је онда $\cos\widetilde{\theta} = -\operatorname{tgh}(\alpha u) = -\alpha\operatorname{tgh}u$ и $\sin\widetilde{\theta} = \frac{\beta}{\cosh(\alpha u)} = \frac{\beta}{\cosh u}$, па следи да је $\widetilde{r} = r - \alpha a\operatorname{tgh}u\boldsymbol{E}_1 + \frac{\beta a}{\cosh u}\boldsymbol{E}_2$, тј.

$$\widetilde{r} = a\left(\beta\frac{\cos v}{\cosh u}, \beta\frac{\sin v}{\cosh u}, \alpha(u - \operatorname{tgh}u)\right).$$

Препознајемо да је ово Чебишовљева главна параметризација псеудосфере. Дакле, Бјанкијевом трансформацијом површи r (чији је траг права, конкретно z–оса) добили смо псеудосферу.

5.2 Беклундова трансформација

Бјанкијева трансформација из претходног одељка се може уопштити и добити Беклундова трансформација, која носи име по шведском математичару Алберту Виктору Беклунду (11.01.1845 — 23.02.1922), ректору Универзитета у Лунду од 1907. до 1909. године. То уопштавање прецизирамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 5.5. Нека је M површ у $\mathbb{R}^3$ чија је Гаусова кривина у свакој тачки једнака $-\frac{1}{a^2}$, за неко $a > 0$. За површ N са јединичним нормалним векторским пољем $\boldsymbol{n}_N$ кажемо да је *Беклундова трансформација* површи M с *нагибним углом* σ ако постоји пресликавање $\Phi : M \longrightarrow N$ такво да за сваку тачку $P \in M$ важи:
(1) $\|\Phi(P) - P\| = a\cos\sigma$,
(2) вектор $\Phi(P) - P$ паралелан је неком тангентном вектору на M у тачки P,
(3) вектор $\boldsymbol{n}_N(\Phi(P))$ нормалан је на вектору $\Phi(P) - P$ и
(4) тангентна раван на M у тачки P и тангентна раван на N у тачки $\Phi(P)$ секу се под углом $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

На исти начин као став 5.1 доказује се следеће тврђење.

Став 5.3. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Чебишовљева главна локална карта на површи $M \subset \mathbb{R}^3$ чија је Гаусова кривина $\boldsymbol{K}(P) = -\frac{1}{a^2}$ за свако $P \in M$, $\theta : U \longrightarrow \mathbb{R}$ њена угаона функција и $\widetilde{r} = \Phi \circ r$ регуларна елементарна површ која задовољава особине* (1) *и* (2) *из претходне дефиниције. Онда постоји пресликавање $\widetilde{\theta} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ такво да је*

$$\widetilde{r} = r + \cos\sigma\left(\frac{\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta}r_u + \frac{\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta}r_v\right). \tag{5.2}$$

Дефиниција 5.6. Пресликавање $\widetilde{\theta}$ из претходног става назива се *угаоном функцијом* Беклундове трансформације с нагибним углом σ у односу на θ.

Бјанки–Дарбуове једначине уопштавају се следећим једначинама, које називамо *Беклунд–Дарбуовим једначинама*.

Теорема 5.5. *Нека је $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Чебишовљева главна локална карта на површи $M \subset \mathbb{R}^3$ чија је Гаусова кривина у свакој тачки једнака $-\frac{1}{a^2}$*

и нека је $\widetilde{r}$ регуларна елементарна површ дата са (5.2). Тада је $\widetilde{r}$ Беклундова трансформација од r с нагибним углом σ ако и само ако њихове угаоне функције задовољавају једначине

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}_u + \theta_v &= \frac{\sin\widetilde{\theta}\cos\theta + \alpha\sin\sigma\cos\widetilde{\theta}\sin\theta}{\cos\sigma}, \\
\theta_u + \widetilde{\theta}_v &= -\frac{\cos\widetilde{\theta}\sin\theta + \alpha\sin\sigma\sin\widetilde{\theta}\cos\theta}{\cos\sigma},
\end{aligned}$$

за неко $\alpha \in \{-1, 1\}$.

Доказ. Слично као у доказу теореме 5.1 добијамо да су тангентни вектори $\widetilde{r}_u$ и $\widetilde{r}_v$ дати са

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_u &= \frac{\cos\theta - \cos\sigma\sin\widetilde{\theta}(\widetilde{\theta}_u + \theta_v)}{\cos\theta} r_u + \frac{\cos\sigma\cos\widetilde{\theta}(\widetilde{\theta}_u + \theta_v)}{\sin\theta} r_v \\
&- a\cos\sigma\sin\theta\cos\widetilde{\theta}\cdot \boldsymbol{n}, \\
\widetilde{r}_v &= -\frac{\cos\sigma\sin\widetilde{\theta}(\theta_u + \widetilde{\theta}_v)}{\cos\theta} r_u + \frac{\sin\theta + \cos\sigma\cos\widetilde{\theta}(\theta_u + \widetilde{\theta}_v)}{\sin\theta} r_v \\
&+ a\cos\sigma\sin\widetilde{\theta}\cos\theta\cdot \boldsymbol{n}.
\end{aligned}$$

Претпоставимо да је $\widetilde{r}$ Беклундова трансформација од r. Тада његово јединично нормално векторско поље $\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}} = Ar_u + Br_v + C\boldsymbol{n}$ задовољава особину (3), па је $\langle \boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}, \widetilde{r} - r\rangle = 0$ и $|\langle \boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}, \boldsymbol{n}\rangle| = 1\cdot 1\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right) = \sin\sigma$ (не знамо да ли нормални вектори граде исти угао као и тангентне равни или њему суплементан угао). Такође, $\|\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}\| = 1$, па добијамо

$$\begin{aligned}
\sin\sigma &= |\langle \boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}, \boldsymbol{n}\rangle| = |C|, \\
0 &= \langle \boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}, \widetilde{r} - r\rangle = A\cdot\frac{\cos\sigma\cos\widetilde{\theta}}{\cos\theta}\cdot a^2\cos^2\theta + B\cdot\frac{\cos\sigma\sin\widetilde{\theta}}{\sin\theta}\cdot a^2\sin^2\theta \\
&= a^2\cos\sigma\cdot\left(A\cos\widetilde{\theta}\cos\theta + B\sin\widetilde{\theta}\sin\theta\right) \\
1 &= \langle \boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}, \boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}\rangle = A^2\cdot a^2\cos^2\theta + B^2\cdot a^2\sin^2\theta + C^2.
\end{aligned}$$

Следи да је $C^2 = \sin^2\sigma$ и $A = -B\operatorname{tg}\widetilde{\theta}\operatorname{tg}\theta$. Заменом у трећу једначину добијамо

$$\begin{aligned}
\cos^2\sigma &= 1 - \sin^2\sigma = B^2\operatorname{tg}^2\widetilde{\theta}\operatorname{tg}^2\theta\cdot a^2\cos^2\theta + B^2\cdot a^2\sin^2\theta \\
&= B^2a^2\sin^2\theta(\operatorname{tg}^2\widetilde{\theta} + 1) = B^2\cdot\frac{a^2\sin^2\theta}{\cos^2\widetilde{\theta}}.
\end{aligned}$$

Према томе, $B^2 = \frac{\cos^2\sigma\cos^2\widetilde{\theta}}{a^2\sin^2\theta}$, па добијамо да је $B = \pm\frac{\cos\sigma\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta}$. За сваку тачку $(u, v) \in U$ постоје тачно две равни које садрже тачку $\widetilde{r}(u, v)$, паралелне су вектору $\widetilde{r}(u, v) - r(u, v)$ и секу тангентну раван на r у тачки

$r(u,v)$ под углом $\frac{\pi}{2}-\sigma$, па ако одаберемо $B=\frac{\cos\sigma\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta}$ и $A=-\frac{\cos\sigma\sin\widetilde{\theta}}{a\cos\theta}$, добијамо два могућа јединична нормална векторска поља (са евентуално промењеним смером)

$$\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}}=-\frac{\cos\sigma\sin\widetilde{\theta}}{a\cos\theta}r_u+\frac{\cos\sigma\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta}r_v+\alpha\sin\sigma\cdot\boldsymbol{n},$$

за неко $\alpha\in\{-1,1\}$. Скаларним множењем са $\widetilde{r}_u$ и $\widetilde{r}_v$ добијамо

$$\begin{aligned}0&=\langle\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}},\widetilde{r}_u\rangle=a\cos\sigma(-\sin\widetilde{\theta}\cos\theta+\cos\sigma(\widetilde{\theta}_u+\theta_v)-\alpha\sin\sigma\sin\theta\cos\theta),\\0&=\langle\boldsymbol{n}_{\widetilde{r}},\widetilde{r}_v\rangle=a\cos\sigma(\cos\sigma(\theta_u+\widetilde{\theta}_v)+\cos\widetilde{\theta}\sin\theta+\alpha\sin\sigma\sin\theta\cos\theta),\end{aligned}$$

одакле следе Беклунд–Дарбуове једначине.

Обратно, претпоставимо да важе Беклунд–Дарбуове једначине. Онда добијамо да су тангентни вектори $\widetilde{r}_u$ и $\widetilde{r}_v$ једнаки

$$\begin{aligned}\widetilde{r}_u&=(\cos^2\widetilde{\theta}-\alpha\sin\sigma\sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}\operatorname{tg}\theta)r_u+(\cos\widetilde{\theta}\sin\widetilde{\theta}\operatorname{ctg}\theta+\alpha\sin\sigma\cos^2\widetilde{\theta})r_v\\&-a\cos\sigma\cos\widetilde{\theta}\sin\theta\boldsymbol{n},\\\widetilde{r}_v&=(\sin\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta}\operatorname{tg}\theta+\alpha\sin\sigma\sin^2\widetilde{\theta})r_u+(\sin^2\widetilde{\theta}-\alpha\sin\sigma\cos\widetilde{\theta}\sin\widetilde{\theta}\operatorname{ctg}\theta)r_v\\&+a\cos\sigma\sin\widetilde{\theta}\cos\theta\boldsymbol{n}.\end{aligned}$$

Посматрајмо векторско поље $V=-\frac{\cos\sigma\sin\widetilde{\theta}}{a\cos\theta}r_u+\frac{\cos\sigma\cos\widetilde{\theta}}{a\sin\theta}r_v+\alpha\sin\sigma\cdot\boldsymbol{n}$. Једноставно се проверава да је $\langle V,\widetilde{r}_u\rangle=0$ и $\langle V,\widetilde{r}_v\rangle=0$, па следи да је, уз евентуалну промену смера, V јединично нормално векторско поље регуларне елементарне површи $\widetilde{r}$. Такође се једноставно проверава да је $\langle V,\widetilde{r}-r\rangle=0$ и $|\langle V,\boldsymbol{n}\rangle|=|\alpha\sin\sigma|=\sin\sigma$, па следи да је $\widetilde{r}$ Беклундова трансформација од r. □

Сада се слично као раније доказује следећа теорема.

Теорема 5.6. *Нека је $r:U\longrightarrow\mathbb{R}^3$ Чебишовљева главна локална карта на површи $M\subset\mathbb{R}^3$ чија је Гаусова кривина у свакој тачки једнака $-\frac{1}{a^2}$, за неко $a>0$. Нека је $\widetilde{r}$ Беклундова трансформација од r с нагибним углом σ и угаоном функцијом $\widetilde{\theta}$. Онда је $\widetilde{r}$ Чебишовљева главна локална карта константне Гаусове кривине $-\frac{1}{a^2}$ и $\widetilde{\theta}$ је њена угаона функција.*

5.2.1 Динијева површ

Као у пододељку 5.1.2 посматрајмо пресликавање $r:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ дато са $r(u,v)=(0,0,\alpha au)$ за неко $a>0$ и неко $\alpha\in\{-1,1\}$ и доделимо му покретни ортонормирани репер $\boldsymbol{E}_1 = (0,0,1)$, $\boldsymbol{E}_2 = (\cos v, \sin v, 0)$, $\boldsymbol{n} = (-\sin v, \cos v, 0)$. Сетимо се да онда угаона функција θ задовољава $\cos\theta = \alpha$ и $\sin\theta = 0$. Напишимо (5.2) у облику

$$\widetilde{r} = r + a\cos\sigma\left(\cos\widetilde{\theta}\frac{r_u}{a\cos\theta} + \sin\widetilde{\theta}\frac{r_v}{a\sin\theta}\right) = r + a\cos\sigma(\cos\widetilde{\theta}\boldsymbol{E}_1 + \sin\widetilde{\theta}\boldsymbol{E}_2).$$

Угаону функцију $\widetilde{\theta}$ добијамо из Беклунд–Дарбуових једначина

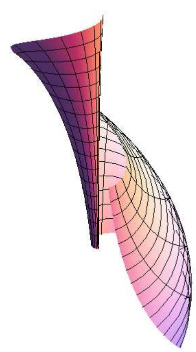
$$\widetilde{\theta}_u = \frac{\sin\widetilde{\theta}\cdot\alpha}{\cos\sigma}, \quad \widetilde{\theta}_v = -\frac{\beta\sin\sigma\sin\widetilde{\theta}\cdot\alpha}{\cos\sigma},$$

за неко $\beta \in \{-1, 1\}$. Одаберимо $\beta = 1$. Из прве једначине добијамо $\frac{\widetilde{\theta}_u}{\sin\widetilde{\theta}} = \frac{\alpha}{\cos\sigma}$, па интеграцијом по u добијамо $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right| = \frac{\alpha u}{\cos\sigma} + A(v)$. Диференцирањем овога по v добијамо $\frac{\widetilde{\theta}_v}{\sin\widetilde{\theta}} = A'(v)$, па из друге једначине добијамо да је $A'(v) = -\alpha\operatorname{tg}\sigma$. Дакле, $A(v) = -\alpha v\operatorname{tg}\sigma + c$, за неко $c \in \mathbb{R}$, па је $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right| = \alpha\frac{u - v\sin\sigma}{\cos\sigma} + c$. Следи да је $\left|\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right| = e^c \cdot e^{\alpha\frac{u-v\sin\sigma}{\cos\sigma}}$. Узмимо да је $\alpha = 1$ и одаберимо угаону функцију $\widetilde{\theta}$ тако да важи $\operatorname{tg}\frac{\widetilde{\theta}}{2} = e^{\frac{u-v\sin\sigma}{\cos\sigma}}$. Онда је $\cos\widetilde{\theta} = -\operatorname{tgh}\left(\frac{u-v\sin\sigma}{\cos\sigma}\right)$, $\sin\widetilde{\theta} = \frac{1}{\cosh\left(\frac{u-v\sin\sigma}{\cos\sigma}\right)}$ и

$$\widetilde{r}(u,v) = a\left(\frac{\cos\sigma\cos v}{\cosh\left(\frac{u-v\sin\sigma}{\cos\sigma}\right)}, \frac{\cos\sigma\sin v}{\cosh\left(\frac{u-v\sin\sigma}{\cos\sigma}\right)}, u - \cos\sigma\operatorname{tgh}\left(\frac{u-v\sin\sigma}{\cos\sigma}\right)\right).$$

Дефиниција 5.7. Траг површи чија је параметризација дата претходним пресликавањем назива се *Динијевом површи*.

Ово пресликавање је Чебишовљева главна локална мрежа, а увођењем смене $u = \widetilde{u} + \widetilde{v}$, $v = \widetilde{u} - \widetilde{v}$, добија се одговарајућа Чебишовљева асимптотска локална мрежа.



Слика 10: Слика Динијеве површи у Чебишовљевој главној мрежи.

6 Хилбертова теорема и закључак

Откриће хиперболичке геометрије од огромног је историјског значаја, не само због решавања две хиљаде година старог питања да ли се Пети Еуклидов постулат може доказати из осталих аксиома и постулата, већ и због тога што се од тада еуклидска геометрија није више сматрала јединoм исправном геометријом и почеле су да се проучавају нееуклидске геометрије. Поред еуклидске и хиперболичке геометрије, трећа најпознатија нееуклидска геометрија јесте елиптичка геометрија, у којој сваке две праве неке равни имају заједничких тачака. Занимљиво је рећи да свака површ која је локално изометрична оваквој равни такође има у свакој тачки исту Гаусову кривину, али је она, за разлику од Гаусове кривине псеудосферичних површи, позитивна, док еуклидска раван има у свакој тачки Гаусову кривину једнаку 0.

Развој нееуклидских геометрија веома је значајан за физику XX века. На пример, ако се задају ограничења брзини светлости, сабирање брзина захтева коришћење хиперболичке геометрије. Ајнштајнова Општа теорија релативности описује простор као генерално раван (еуклидски), али и елиптички закривљен у областима у близини којих је присутна материја, а с обзиром на то да се васиона шири, чак се и простор где не постоји материја или маса може описивати уз помоћ хиперболичког модела.

Још једно веома значајно питање јесте питање проналажења модела нееуклидских планиметрија у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$; у овом раду конкретно хиперболичке планиметрије. Другим речима, занима нас да ли постоје површи које су (глобално) изометричне хиперболичкој равни. Одговор на ово питање дао је Давид Хилберт (23.01.1862 — 14.02.1943), немачки математичар који је, између осталог, остао запамћен у свету математике по томе што је први дао строгу аксиоматску основу за заједнички развој еуклидске и хиперболичке геометрије и што је доказао еквиконзистентност геометрије и аритметике реалних бројева, односно да једна од ових теорија важи ако и само ако важи и друга.

Теорема 6.1 (Хилберт)**.** *Не постоји регуларна површ $M \subset \mathbb{R}^3$ која је изометрична хиперболичкој равни.*

Доказ. На основу теореме 3.2, свака тачка површи која има константну негативну Гаусову кривину има околину коју можемо параметризовати Чебишовљевом асимптотском локалном картом. Зато претпоставимо да је $M \subset \mathbb{R}^3$ регуларна површ која је изометрична хиперболичкој равни и

$r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ њена Чебишовљева асимптотска локална карта са угаоном функцијом ω. Онда за све $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ важи $0 < \omega(u,v) < \pi$ и угаона функција ω задовољава синус–Гордонову једначину, тј. важи $\omega_{uv} = \sin\omega$. Постоји тачка $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ таква да је $\omega_u(u_0, v_0) \neq 0$, јер је у супротном функција ω_u константна, па је $0 < \sin\omega = \omega_{uv} \equiv 0$, што је немогуће. Уз евентуалну транслацију параметра u за u_0 и параметра v за v_0 и рефлексију параметра u (тј. увођење параметра $\widetilde{u} = -u$) можемо претпоставити да је $(u_0, v_0) = (0,0)$ и да је $\omega_u(0,0) > 0$.

Поново користећи да је $\sin\omega > 0$ добијамо да је $\frac{\partial\omega_u}{\partial v} = \omega_{uv} > 0$, односно да је функција ω_u строго растућа по параметру v. Дакле, за произвољно $u \in \mathbb{R}$ и $v_1 < v$ важи $\omega_u(u, v_1) < \omega_u(u,v)$. Ако узмемо $u = 0$, добијамо $0 < \omega_u(0,0) < \omega_u(0, v_1)$ за $v_1 > 0$. Фиксирајмо $v_1 > 0$. Следи да постоји $\delta > 0$ такво да је $\omega_u(u, v_1) > 0$ за све $u \in (-\delta, \delta)$. Одаберимо $a > 0$ такво да је $3a = \frac{\delta}{2}$. Онда је $\omega_u(u, v_1) > 0$ за све $u \in [0, 3a]$, па на интервалу $[0, 3a]$ функција $\omega_u(u, v_1) > 0$ достиже најмању вредност m, која је такође позитивна. За произвољно $v > v_1$ на основу Лагранжове теореме о средњој вредности постоје $\Theta_1, \Theta_2 \in (0,1)$ такви да је

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega(a,v) - \omega(0,v)}{a - 0} &= \omega_u(a\Theta_1, v), \\
\frac{\omega(3a,v) - \omega(2a,v)}{3a - 2a} &= \omega_u(2a + a\Theta_2, v).
\end{aligned}
$$

Пошто је функција ω_u строго растућа по параметру v, следи да за свако $v > v_1$ важи

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega(a,v) - \omega(0,v)}{a} &> \omega_u(a\Theta_1, v_1) \geq m, \\
\frac{\omega(3a,v) - \omega(2a,v)}{a} &> \omega_u(2a + a\Theta_2, v_1) \geq m,
\end{aligned}
$$

па добијамо да је

$$
\begin{aligned}
\omega(a,v) - \omega(0,v) &> ma, \\
\omega(3a,v) - \omega(2a,v) &> ma.
\end{aligned}
$$

Одавде следи да је

$$
\begin{aligned}
\omega(a,v) &> \omega(0,v) + ma > ma, \\
\omega(2a,v) &< \omega(3a,v) - ma < \pi - ma.
\end{aligned}
$$

Због $\omega_u(u,v) > \omega_u(u, v_1) > 0$ за свако $u \in [0, 3a]$ и свако $v > v_1$ следи да је $\omega(u,v)$ растућа по параметру u на интервалу $[0, 3a]$. Према томе,

важи
$$\omega(a,v) \le \omega(u,v) \le \omega(2a,v)$$
за све $u \in [a,2a]$ и $v > v_1$, што заједно с претходно добијеним неједнакостима даје

$$ma < \omega(u,v) < \pi - ma, \quad u \in [a,2a],\ v > v_1.$$

Према томе, $\sin\omega(u,v) > \sin(ma) = M$ за $u \in [2a,3a]$, $v > v_1$ и неко $0 < M < 1$. Фиксирајмо $v > v_1$ и посматрајмо двојни интеграл функције ω_{uv} по правоугаонику P чија су темена (a,v_1), $(2a,v_1)$, $(2a,v)$ и (a,v). Добијамо да је

$$\begin{aligned}\iint\limits_P \omega_{uv}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \int\limits_a^{2a}\int\limits_{v_1}^{v} \omega_{uv}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= (\omega(2a,v)-\omega(a,v)) - (\omega(2a,v_1)-\omega(a,v_1)) < \pi\end{aligned}$$

јер је $\omega(u,v_1)$ растућа по параметру u, па је $\omega(2a,v_1)-\omega(a,v_1) > 0$, а такође је и $\omega(a,v) > 0$. С друге стране, важи

$$\iint\limits_P \omega_{uv}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_P \sin\omega(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v > M\cdot a\cdot(v-v_1),$$

па ако узмемо $v = v_1 + \frac{\pi}{aM}$ добијамо да је исти двојни интеграл већи од π. Ово, наравно, није могуће, па следи да је претпоставка погрешна, односно да не постоји површ $M \subset \mathbb{R}^3$ која је (глобално) изометрична хиперболичкој равни. $\square$

Дакле, можемо закључити да су у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ једине површи на којима можемо видети хиперболичку планиметрију управо псеудосферичне површи и на њима се она види само локално, тј. види се само део хиперболичке равни. Наравно, осим површи које смо видели у овом раду постоји још много примера других псеудосферичних површи и користећи Беклундову трансформацију (или Бјанкијеву као њен специјални случај) увек можемо од неке познате псеудосферичне површи направити нову, а нови примери псеудосферичних површи увек су занимљиви.

Литература

[1] Alfred Gray, Elsa Abbena, Simon Salamon: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica®, Third edition*, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[2] Andrey Popov: *Lobachevsky Geometry and Modern Nonlinear Problems*, Birkhäuser, 2014.

[3] Manfredo Perdigão do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice–Hall, 1976.

[4] John Snygg: *A New Approach to Differential Geometry using Clifford's Geometric Algebra*, Birkhäuser, 2012.

[5] Зоран Лучић: *Еуклидска и хиперболичка геометрија, Друго издање*, Total design и Математички факултет, 1997.

[6] Мирјана Ђорић: *Геометрија 3 — материјали за студенте*

[7] Википедија, слободна енциклопедија: `https://www.wikipedia.org/`

[8] Wolfram Mathworld, the web's most extensive mathematics resource: `http://mathworld.wolfram.com/`