Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

# Обезбеђење од ризика у финансијској математици

*Студент:*
Бојана Тодић 1015/2015

*Ментор:*
др Слободанка Јанковић

септембар 2016.

# Садржај

# 1 Увод

Учесници на финансијском тржишту се сусрећу са великим бројем финансијских ризика. Ризик представља могућност губитка, неизвесност или могућност било ког исхода који није очекиван. Неизвесност постоји када се не може са сигурношћу знати исход одређеног догађаја. У ситуацијама када ризик постоји, могући исходи су губитак или добитак мањи од очекиваног.

Поставља се питање које мере треба предузети како би се ризици свели на најмању могућу меру. У случајевима када финансијске институције или други учесници на финансијском тржишту не желе да преузму ризик промене каматних стопа или девизног курса, могу да се определе за одређене мере да би се заштитили од ризика. То не спречава да се негативан догађај деси, али уколико се он деси, утицај негативног догађаја ће у том случају бити смањен.

Термин "хеџинг" значи заштиту од ризика. Хеџинг је скуп техника и инструмената којима је сврха обезбеђење од ризика који настаје због скока или пада цена предмета трговања. На финансијским тржиштима потреба за заштитом или хеџингом настаје из два разлога. Први разлог, хеџинг омогућава учесницима на тржишту да елиминишу неке или све ризике са којима се суочавају у обављању њиховог пословања. Други разлог, у области финансијских услуга, делатност многих компанија се састоји у узимању различитих позиција на тржишту вредносних папира у намери да подмире тражњу за вредносним папирима њихових клијената. Као резултат тога, компаније које продају деривате суочавају се са евентуалним губицима. За њих, хеџинг представља стратегије које се спроводе за отклањање или смањивање ризика до којег долази због позиције на тржишту.

Поред увода и закључка, овај рад садржи четири поглавља. У другом поглављу дефинисано је тржиште финансијских деривата, а у трећем је размотрена употреба фјучерс уговора у сврху обезбеђења од ризика. Затим се, у четвртом поглављу, проучавају начини на које се различите опције могу користити за хеџинг, као и за стварање жељених портфолија. На крају, у петом поглављу, разматра се осетљивост цена опција у односу на различите тржишне параметре.

Основни циљ рада је да укаже на могућности помоћу којих финансијски менаџери, улагачи и штедише могу повећати своју добит уз одређени ниво заштите од ризика. Да би се реализовао овај циљ, потребно је дефинисати финансијске деривате, који су на располагању финансијским институцијама и другим учесницима на финансијском тржишту.

# 2 Тржиште финансијских деривата

Од 70-их година XX века ризици пословања финансијских институција и других учесника на финансијском тржишту су све више расли. Такав развој догађаја је приморао учеснике на финансијском тржишту да нађу начин како да смање ризик са којим се сусрећу. Као резултат овога уведени су финансијски деривати. Деривати омогућују финансијским институцијама тзв. "хеџовање", односно деловање у финансијским трансакцијама које би требало да смање или елиминишу ризик.

*Финансијски деривати* су вредносни папири, а њихова вредност зависи, односно изведена је из вредности неких других вредносних папира, који се називају подлога (*underlying asset*). Другим речима, финансијски дериват се дефинише као изведени финансијски инструмент или уговор чија се вредност мења услед промене вредности основних вредносних папира.

Најважнији финансијски деривати који се користе за смањење ризика су форвард уговори (*forwards*), фјучерс уговори (*futures*), опције (*options*) и свапови (*swaps*), а најчешћа подлога су акције.

Ови деривати могу да се користе у банкама за осигурање од губитка тако што се ризик изолује од уговора о продаји. На пример, ако је једна банка купила одређени вредносни папир и жели да се обезбеди од ризика, онда она додатно закључује уговор о заштити од ризика са неким трећим лицем. Значи да једна страна преузима ризик уз одређену надокнаду. Продавац и купац деривата имају сасвим супротна очекивања. Купац деривата се обезбеђује од пада цене вредносног папира. С друге стране, продавац деривата очекује да ће цена вредносног папира порасти. Пошто је реч о уговору који се односи на ризик, само једна страна може бити на добитку, док друга мора бити на губитку.

Обезбеђење од ризика, односно хеџовање представља стратегијско коришћење финансијских инструмената на финансијском тржишту да би се умањио ризик од било којих неповољних промена. Другим речима, инвеститори хеџују једну инвестицију тако што улажу у другу инвестицију.

При трговини вредносним папирима, као и код сваке друге трговине, постоје две стране: купац и продавац. За особу која продаје (на енглеском *writer*) каже се да је у *краткој позицији* (*short position*), док је особа која купује у *дугој позицији* (*long position*).

Финансијски деривати се могу користити за обезбеђење од ризика на основу следећих принципа: елиминисање ризика подразумева упуштање у финансијску трансакцију којом се дуга позиција елиминише на основу додатне кратке позиције, или се кратка позиција елиминише додатном дугом позицијом. Другим речима, уколико је финансијска институција купила неки вредносни папир и самим тим заузела дугу позицију, она се обезбеђује од ризика тако што уговара продају тог вредносног папира у неком будућем времену. Супротно томе, ако је заузела кратку позицију, тако што је продала неки вредносни папир који у будућем периоду мора испоручити, обезбеђење од ризика се обавља тако што уговара куповину тог вредносног папира у неком будућем периоду.

У наставку рада дефинисани су фјучерс уговори и опције, као најзначајнији финансијски деривати и наведене њихове основне карактеристике [1], [4], [5].

## 2.1 Фјучерс уговори

Фјучерс уговори су веома ефикасни у смањивању ризика, јер финансијским институцијама и другим учесницима на финансијском тржишту омогућују хеџинг, односно омогућују им да се упусте у финансијске трансакције које смањују или елиминишу ризик.

**Дефиниција 2.1** *Фјучерс уговор представља уговор којим се странка обавезује да плати уговорену цену у тренутку* $T$ *за робу или вредносне папире, који ће јој бити испоручени у тренутку* $T$*. Цена и време испоруке* $T$ *код фјучерс уговора одређују се у почетном тренутку, тј. у тренутку када се склапа уговор.*

Главни разлог коришћења фјучерс уговора јесте да се ограничи излагање ризику услед било каквих промена цена.

Хеџери купују или продају на тржишту фјучерса, како би обезбедили будућу цену робе која треба да се прода одређеног датума у будућности на трговинском тржишту. Купци фјучерс уговора, тј. носиоци дуге позиције покушавају да осигурају што је могуће нижу цену, јер се плаше пораста цена у будућности због којег неће моћи да купе исту количину жељене робе. Са друге стране, продавци фјучерс уговора, односно носиоци кратке позиције желе да осигурају што је могуће вишу цену, како би избегли могућност пада цена у будућности због којег би робу морали да продају по мањој цени од тренутне [1], [5].

## 2.2 Опције

Разлог због кога се учесници на финансијском тржишту излажу ризику је зарада. Опције представљају изведене хартије од вредности, односно финансијске деривате, који се могу употребљавати за заштиту од ризика при трговању. Обично се користе за обезбеђење од ризика, кад је реч о поседовању права на продају и права на куповину одређене имовине, по унапред утврђеној фиксној цени која се односи на одређени датум у будућности. На тај начин се остварује заштита од нежељених промена цена у будућности. Као што сам назив каже, опција представља избор, где сам власник опције одлучује да ли ће опција бити активирана или не. Тај избор није бесплатан, јер се у случају неизвршења плаћа премија осигурања од могућег финансијског ризика.

**Дефиниција 2.2** *Опција је финансијски уговор којим се стиче право, али не и обавеза, да се купи или прода акција или неки други вредносни папир, под договореним условима.*

Свака опција има уговорену цену или цену по истеку вредносног папира на који се односи $K$ (*strike price* или *exercise price*) и уговорено време до истека опције $T$ (*time to maturity*, *exercise time* или *strike time*).

У зависности од тога да ли се уговор односи на куповину или продају вредносног папира, постоје две врсте опција:

- куповна/кол опција (*call option*) - даје право, али не и обавезу куповине вредносног папира по уговореној цени $K$;
- продајна/пут опција (*put option*) - даје право, али не и обавезу продаје вредносног папира по уговореној цени $K$.

Опције које нису класичне пут или кол опције називају се егзотичне опције. Свака опција која није егзотична зове се ванила опција (*vanilla option*).

Основна подела опција у погледу времена извршења је:

- европске опције - могу да се активирају само у уговорено време $T$;
- америчке опције - могу да се активирају у било ком тренутку времена који је мањи или једнак уговореном времену $T$.

За опције које су исплативе, односно доносе добитак ако се активирају, кажемо да су у новцу (*in the money*), а неисплативе опције су ван новца (*out of the money*). Ако је опција на граници, за њу кажемо да је на новцу (*at the money*) [1], [5].

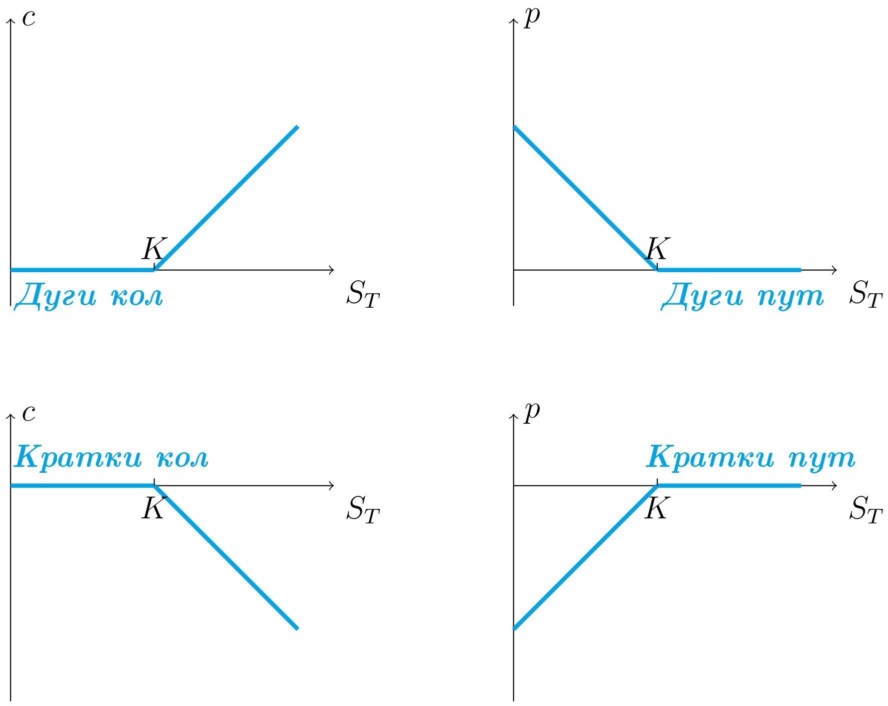
Приликом склапања уговора постоје различити ризици у зависности од позиције. Једини ризик купца опције је цена коју је платио за ту опцију, док, са друге стране, особа која је продала опцију може да има велики губитак, јер мора да прода (ако је у питању кол опција) или да купи (ако је у питању пут опција) акцију по договореним условима, у случају да купац опције реши да активира опцију.

Претпоставимо да имамо европску кол опцију са уговореном ценом $K$ и временом истека $T$. Ако је $S_T$ цена акције у тренутку истека $T$, тада је вредност кол опције у тренутку $T$ једнака:

$$c = \max\{0, S_T - K\}.$$

Претпоставимо да имамо европску пут опцију са уговореном ценом $K$ и временом истека $T$. Ако је $S_T$ цена акције у тренутку истека $T$, тада је вредност пут опције у тренутку $T$ једнака:

$$p = \max\{0, K - S_T\}.$$




Слика 1: Дуга и кратка позиција за европске кол и пут опције

Приметимо да вредност кол опције расте кад расте $S_T$, а опада кад расте $K$. За пут опцију важи супротно. Такође, уочавамо да је цена пут опције ограничена на истеку, а вредност кол опције на истеку је неограничена [6].

### 2.2.1 Одређивање цене опције

Како се опције могу продавати и куповати током свог трајања, основни проблем је одредити цену опције у неком тренутку пре истека.

Прво ћемо дефинисати Брауново[1] кретање или Винеров[2] процес, који се означава као $B(t)$ или $W(t)$ и има веома значајно место у теорији случајних процеса [3], [8].

**Дефиниција 2.3** *Случајни процес $(B_t)_{t\geq 0}$ дефинисан на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ је стандардно Брауново кретање или Винеров процес ако важи:*

1. $B_0 = 0$ *скоро свуда.*
2. $B$ *има независне прираштаје, тј. за* $n = 1, 2, ...$ *и* $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$, *случајне променљиве* $B_0, B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *су независне.*
3. *За* $0 \leq s < t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, *што значи да* $B_t - B_s$ *има нормалну расподелу са математичким очекивањем* $0$ *и дисперзијом* $t - s$, *која је једнака прираштају између* $s$ *и* $t$.
4. *Са вероватноћом* $1$ *процес* $B$ *има непрекидне трајекторије, односно* $B$ *је непрекидан као функција од* $t$, *тј.*

$$P\{B \in C[0, +\infty)\} = 1,$$

*где смо са* $C$ *означили колекцију реалних и непрекидних функција дефинисаних на* $[0, +\infty)$.

Као основни модел процеса кретања цена акција узима се процес геометријског Брауновог кретања, који је дефинисан у наставку.

**Дефиниција 2.4** *Нека је случајни процес $(B_t)_{t\geq 0}$ стандардно Брауново кретање и нека је $\mu \in R$ и $\sigma \in (0, +\infty)$. Тада се процес $(Y_t)_{t\geq 0}$ дефинисан као:*

$$Y_t = exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right], \quad t \in [0, +\infty)$$

*назива геометријско Брауново кретање са параметром дрифта $\mu$ и параметром волатилности $\sigma$.*

[1] Robert Brown (1773-1858), шкотски ботаничар

[2] Norbert Wiener (1894-1964), амерички математичар и информатичар

Процес кретања цена акција $S_t$, где је $0 \leq t \leq T$, који је геометријско Бруново кретање, задовољава стохастичку диференцијалну једначину:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{1}$$

где је $B_t$ Брауново кретање, $\mu$ и $\sigma > 0$ су константе.

За решавање претходне једначине је потребно Итово[3] правило које се користи за решавање стохастичких диференцијалних једначина.

**Теорема 2.1** *(Итово правило) Ако је функција $f \in C^{1,2}(R^+ \times R)$, тада је:*

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)ds$$

*где је $B_t$ процес Брауновог кретања.*

Доказ ове теореме може се наћи у књизи [3].

Итово правило у диференцијалном облику може да се запише као:

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t)dt,$$

односно:

$$df(t, B_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)dB_t.$$

Решавањем стохастичке диференцијалне једначине (1) помоћу Итовог правила добијамо да је цена акције у тренутку $t$ једнака:

$$S_t = S_0 exp\left\{\sigma B_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\right)t\right\}, \quad t \in [0, T],$$

где је $S_0$ реалан позитиван број који представља почетну цену акције.

Нека је $f_t$ цена кол опције или неког другог деривата који се односи на акције чија је цена $S_t$ у тренутку $t$. Променљива $f_t$ зависи од цене акције $S_t$ и времена $t$, тј. $f_t = f(t, S_t)$, па применом Итовог правила за процес $Y_t = f(t, S_t)$ који је функција геометријског Брауновог кретања $S_t$ са параметром дрифта $\mu$ и параметром волатилности $\sigma$, добија се:

$$df_t = \left(\frac{\partial f}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S_t}\sigma S_t dB_t. \tag{2}$$

[3]Kiyosi Itô (1915–2008), јапански математичар

Користећи једначине (1) и (2) и принцип *Risk-Neutral Valuation*[4](процена која је неутрална од ризика), који претпоставља да је каматна стопа $r$ једнака са дрифтом $\mu$ добија се једначина:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS_t\frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2}{\partial S_t^2} - rf = 0,$$

која је позната као Блек[5]-Шолсова[6] диференцијална једначина. Поступак добијања Блек-Шолсове диференцијалне једначине може се наћи у [9].

У наставку треба да одредимо цену европске кол и пут опције са уговореном ценом $K$ и временом доспећа $T$, која нам омогућује да купимо или продамо акцију по цени $K$ у тренутку $T$. Претпостављамо да је каматна стопа константна и једнака $r$ и да се цена акције може апроксимирати геометријским Брауновим кретањем. Формула за цену кол и пут опције дата је у следећој теореми. То је чувена формула Блек-Шолса која је један од најважнијих резултата у финансијској математици.

**Теорема 2.2** *Блек-Шолс формула за цену европске пут и кол опције у тренутку $t$, $0 \leq t \leq T$ са уговореном ценом $K$, временом доспећа $T$, безризичном каматном стопом $r$ може се написати на следећи начин:*

$$c = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

$$p = Ke^{r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1),$$

*где су:*

$$d_1 = \frac{\log\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log\frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

*и $\Phi(x)$ је функција расподеле стандардне нормалне случајне променљиве.*

[4]Према овом принципу, цена опције је једнака садашњој вредности математичког очекивања од добити опције.

[5]Fischer Sheffey Black (1938–1995), амерички економиста

[6]Myron Samuel Scholes (рођен 1941.), канадско-амерички економиста

# 3 Обезбеђење од ризика помоћу фјучерс уговора

Фјучерс уговори су финансијски инструменти погодни за обезбеђење од ризика, односно смањење ризика од губитка.

Многи учесници на тржишту фјучерс уговора су хеџери. Њихов циљ је употреба фјучерс уговора како би умањили ризик са којим се суочавају.

Савршени хеџинг је стратегија обезбеђења од ризика која потпуно елиминише ризик. Особа која жели да користи фјучерс уговор да би се обезбедила од ризика треба да неутралише ризик са којим се суочава на берзи тако што узима еквивалентан, али супротан положај на тржишту фјучерса. Овакве стратегије обезбеђења од ризика су релативно ретке зато што фјучерс уговори, који одговарају условима испоруке, нису увек доступни на тржишту. У највећем броју случајева, стратегије које користе фјучерс уговоре за обезбеђење од ризика треба да буду што ближе савршеном хеџингу, односно да теже потпуној елиминацији ризика [2].

## 3.1 Кратки и дуги хеџинг

*Кратки хеџинг* је стратегија обезбеђења од ризика која укључује кратку позицију у фјучерс уговору, односно поступак којим се продајом фјучерс уговора странка обезбеђује од ризика. Овај поступак се обично користи када хеџер поседује акције или робу и намерава да их прода у неком будућем тренутку. Кратки хеџинг се такође може користити у случају када хеџер тренутно не поседује акције или робу, али ће их имати у неком тренутку у будућности. Да би боље објаснили функцију хеџинга у одређеној ситуацији, навешћемо следеће примере [1].

Наредни пример илуструје употребу кратког хеџинга за обезбеђење од ризика.

**Пример 3.1** *Произвођач нафте је* 15. *маја склопио уговор да ће продати* 1 *милион барела*[7] *сирове нафте по цени која ће важити на берзи* 15. *августа. Произвођач нафте је у позицији где ће зарадити* 10.000 *долара за сваки цент за који скочи цена нафте кроз три месеца и изгубити* 10.000 *за сваки цент за који падне цена нафте.*

*Да би се обезбедио од ризика, произвођач нафте узима кратку позицију у фјучерс уговору чији је датум доспећа* 15. *август.*

[7] 1 барел нафте $= 158,9873$ литара

*Претпоставимо да је тржишна цена једног барела нафте* 15. *маја била* \$80, *а уговорена цена у фјучерс уговору је* \$79. *Сваким фјучерс уговором се доставља* 1.000 *барела нафте, па ће произвођач нафте морати да прода* 1.000 *фјучерс уговора.*

*Да би илустровали шта може да се догоди, претпоставимо да је тржишна цена једног барела нафте* 15. *августа* \$75. *Произвођач нафте тада заради приближно:*

$$\$79 - \$75 = \$4$$

*по барелу, односно 4 милиона долара укупно од кратке позиције фјучерс уговора.*

*Укупна зарада од тржишног уговора и фјучерс уговора је* \$79 *по барелу, тј. укупно* 79 *милиона долара.*

*У другом случају претпоставимо да је тржишна цена нафте* \$85 *по барелу. Произвођач нафте заради* 85 *долара по барелу и изгуби приближно:*

$$\$85 - \$79 = \$6$$

*по барелу од кратке позиције фјучерс уговора. Поново, укупна зарада произвођача је приближно* 79 *милиона долара, што значи да је ова стратегија фиксирала зараду на 79 милиона долара.*

Обезбеђење од ризика које користи дугу позицију фјучерс уговора назива се *дуги хеџинг.* Овакав поступак је погодно користити када компанија зна да ће морати да купи робу или акције у будућности и жели да фиксира цену сада.

Употреба дугог хеџинга је илустрована следећим примером [1].

**Пример 3.2** *Претпоставимо да је сада* 15. *јануар. Прерађивач бакра зна да ће му бити потребно* 100.000 *фунти*[8] *бакра* 15. *маја како би испунио одређени уговор.*

*Прерађивач бакра може да се обезбеди од раста тржишне цене бакра тако што ће заузети дугу позицију у фјучерс уговору чије је време доспећа* 15. *мај. Сваки фјучерс уговор представља достављање* 25.000 *фунти бакра, тако да ће прерађивач бакра морати да заузме дугу позицију у* 4 *фјучерс уговора.*

*Нека је тржишна цена бакра* 15. *јануара једнака* 340 *центи по фунти, а уговорена цена у фјучерс уговору* 320 *центи по фунти.*

*Да би илустровали шта може да се догоди, претпоставимо да је тржишна цена бакра* 15. *маја* 325 *центи по фунти бакра. Прерађивач бакра у том случају заради приближно:*

$$(\$3,25 - \$3,20) \cdot 100.000 = \$5.000$$

*од дуге позиције фјучерс уговора. За* 100.000 *фунти бакра по цени* $\$3,25$ *по фунти треба да плати* \$325.000, *тако да су укупни трошкови прерађивача бакра приближно* $325.000 - 5.000 = 320.000$ *долара.*

[8] 1 фунта = 453,59 грама

*Размотримо другачији исход. Претпоставимо да је тржишна цена бакра* 15. *маја* 305 *центи по фунти. Купујућу по овој цени прерађивач губи приближно:*

$$(\$3,20 - \$3,05) \cdot 100.000 = \$15.000$$

*од дуге позиције фјучерс уговора. Купујући* 100.000 *фунти бакра, по цени* $3,05 *по фунти, произвођач плаћа* $305.000, *па су укупни трошкови прерађивача барка приближно* 305.000 + 15.000 = 320.000 *долара.*

*У оба случаја укупни трошкови су једнаки, што значи да ова стратегија фиксира трошкове на* 320.000 *долара.*

*Из овог примера можемо да закључимо да је за компанију боље да користи фјучерс уговоре, него да* 15. *јануара купи бакар на тржишту. Ако купи бакар на тржишту, платиће* 340 *центи по фунти, а ако користи фјучерс уговоре трошкови су* 320 *центи по фунти.*

У наведеним примерима претпоставили смо да нема дневног поравнања, односно да нема свакодневних исплата током трајања уговора, већ се исплата врши у тренутку истека уговора. У пракси, дневно поравнање има мали утицај на резултат обезбеђења од ризика.

## 3.2 Унакрсни и базни хеџинг

У случају када није могуће купити одговарајући уговор на тржишту фјучерса, као што је приказано у претходним примерима, може се покушати користити фјучерс уговор који се односи на сличну робу или вредносне папире чија је цена у јакој корелационој вези са ценом посматране робе. Исти проблем се може јавити у вези са временом доспећа, јер можда на тржишту не постоји фјучерс уговор са истим временом доспећа као што се захтева. У таквим ситуацијама кажемо да постоји неслагање цене робе или неслагање времена доспећа. Поступак избора другачијег, али повезаног фјучерс уговора зове се унакрсни хеџинг.

Означимо са $S_1(t)$ тренутну цену робе или вредносних папира коју хеџер мора доставити у тренутку $T$ (ако хеџер купује, важи супротно образложење). Претпоставимо затим да не постоји фјучерс уговор који се односи на $S_1$, или да не постоји фјучерс уговор који доспева у тренутку $T$. Уместо тога, постоји фјучерс уговор који се односи на робу или вредносне папире $S_2$, који су у позитивној корелацији са $S_1$ и имају време доспећа $U \geq T$.

Обележимо са $F_2(t, U)$ цену фјучерс уговора у тренутку $t$ који доспева у тренутку $U$ и односи се на $S_2$ које ћемо користити за обезбеђење од ризика.

Да би се обезбедио од ризика, хеџер треба да купи $\delta$ јединица фјучерс уговора $F_2(T,U)$ који се односи на $S_2$. Број $\delta$ се зове хеџ количник. Хеџер треба да користи ону вредност хеџ количника која минимизује дисперзију ризика којем је изложен.

Претпоставимо да хеџер у тренутку $t$ склапа уговор да ће у тренутку $T$ испоручити акције у износу $S_1(t)$.

Размотримо изложеност ризику $X$ по једној акцији $S_1$:

$$X = S_1(t) - S_1(T) + \delta[F_2(T,U) - F_2(t,U)].$$

Постоје две компоненте у овом изразу:

- промена у вредности робе која ће бити испоручене у времену $T$;
- зарада од дуге позиције фјучерс уговора између $t$ и $T$.

У идеалном случају односно, код савршеног хеџинга, ове две компоненте се међусобно неутралишу.

Специјално, ако цена посматраних акција расте, узимањем дуге позиције фјучерса зарада расте, што неутралише пораст цене акције.

У тренутку $t$ обе вредности $S_1(t)$ и $F_2(t,U)$ су познате. Ризик у промењљивој $X$ потиче од вредности:

$$S_1(T) - \delta F_2(T,U)$$

које су непознате. Ове вредности се називају база или основа.

Базни ризик се мери преко дисперзије ризика $X$ у тренутку $t$:

$$D[X] = D[S_1(T)] + \delta^2 D[F_2(T,U)] - 2\delta cov[S_1(T), F_2(T,U)].$$

Пошто су вредности $S_1(t)$ и $F_2(t,U)$ у тренутку $t$ познате, њихове дисперзије и коваријанса су нула.

У наставку је дато $\delta$ које минимизује базни ризик, односно минимизује дисперзију промењљиве $X$:

$$\delta = \frac{cov[S_1(T), F_2(T,U)]}{D[F_2(T,U)]} = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F},$$

где је $\rho$ коефицијент корелације између $S_1(T)$ и $F_2(T,U)$, а $\sigma_S^2$ и $\sigma_F^2$ њихове дисперзије.

Минимална дисперзија је једнака:

$$D[X] = D[S_1(T)] - \frac{cov^2[S_1(T), F_2(T,U)]}{D[F_2(T,U)]}.$$

Ако постоји фјучерс уговор који се односи на акције $S_1$ са временом доспећа $U$, тада је $S_1 = S_2$ и $U = T$, па имамо да је $S_1(T) = F_1(T) = F_2(T,U)$. Ово је случај савршеног хеџинга који смо разматрали раније. У том случају имамо да је $\delta = 1$, па користећи чињеницу да је $cov[S,S] = D[S]$, примећујемо да је $D[X] = 0$, па нема базног ризика.

Размотримо још једну интерпретацију параметра $\delta$. Претпоставимо да имамо две различите врсте акција $S_1$ и $S_2$. Често се претпоставља да постоји следећа линеарна регресија:

$$S_1(T) = a + bF_2(T,U) + \epsilon(T),$$

где су $a$ и $b$ коефицијенти, а $\epsilon$ случајна грешка, која има стандардну нормалну расподелу. Регресионом анализом се добија да је $\delta = b$.

У овом моделу минимални ризик је једнак:

$$X = a+bF_2(T,U)+\epsilon(T)-S_1(t)+b[F_2(t,U)-F_2(T,U)] = a+bF_2(t,U)-S_1(t)+\epsilon(T).$$

Израз $a + bF_2(T,U)$ може се сматрати најбољим за $S_1(U)$, и то се зове циљна цена, док израз $\epsilon(T) = a + bF_2(t,U) - S_1(t)$ одређује основни ризик. Често је однос регресије претпостављен између других величина, као што су промене цене акција $\Delta S_1$ и промене цена фјучерс уговора $\Delta F_2$, уместо $S_1$ и $F_2$ [2].

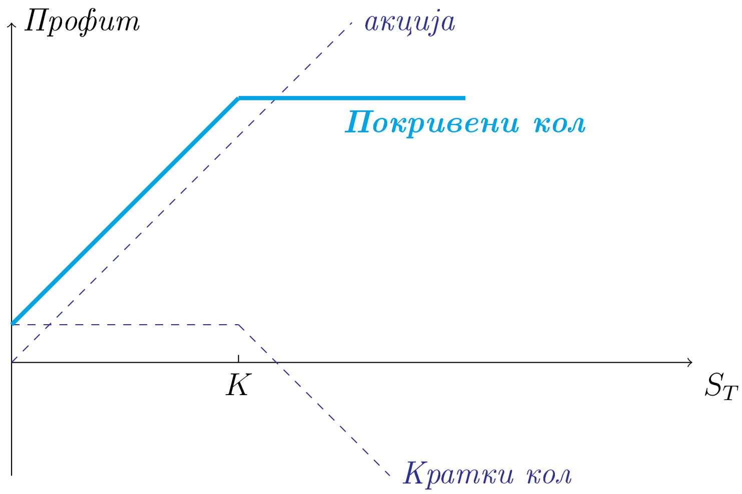
# 4 Портфолио опција као стратегија трговине

Узимањем дуге и кратке позиције за пут и кол опције са различитим временима доспећа и уговореним ценама, може се направити портфолио са веома различитим карактеристикама. Стратегије које комбинују неколико опција, које се односе на исте акције, могу се користити као заштита од ризика. У наставку наводимо неколико примера оваквих портфолија [2]. Сви примери су статички, што значи да се задржава почетна позиција до времена истека. У теорији, свака функција добити може се апроксимирати као комбинација пут и кол опција са различитим уговореним ценама. Међутим, у пракси је ограничен број уговорених цена са којима се тргује.

## 4.1 Покривени кол и заштитни пут

*Покривени кол* (*Covered Call*) је стратегија трговине опцијама којом се инвеститор, који је купио или поседује акцију, обезбеђује од пада цене акције продајом једне кол опције која се односи на ту акцију. Ако се опција не активира, добит инвеститора је увећана за цену продате опције. Уколико се кол опција активира, инвеститор прода акцију, па је његова добит једнака збиру уговорене цене и вредности продате кол опције. У овом случају добит је константна, не зависи од раста цене акције на тржишту.

Укупан профит портфолија у зависности од цене акције у тренутку истека опције $S_T$ приказан је на слици 2.

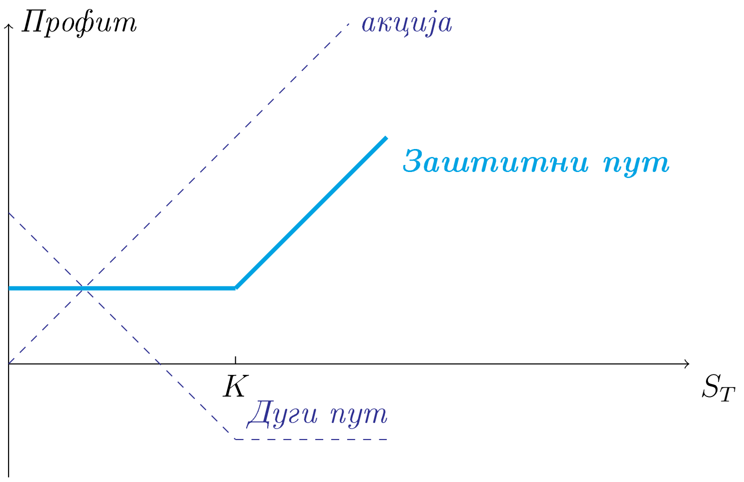



Слика 2: Профит од стратегије покривени кол

Са графика се уочава да је укупан профит овако формираног портфолија ограничен. Стратегија покривени кол нуди делимичо обезбеђење од ризика, само до тачке прелома, тј. само ако је цена акције на истеку мања од уговорене. Обично се користи када инвеститор очекује да цена акције неће прећи неки одређени ниво.

*Заштитни пут* (*Protective put*) је стратегија трговине опцијама којом се инвеститор, који је купио или поседује акцију, обезбеђује од пада цене акције куповином једне пут опције која се односи на ту акцију. Ако се опција активира, инвеститор прода акцију, па је вредност портфолија константна и једнака разлици уговорене цене и цене опције. Уколико се пут опција не активира, добит инвеститора се умањи за вредност купљене опције.

Укупан профит портфолија у зависности од цене акције у тренутку истека опције $S_T$ приказан је на слици 3.




Слика 3: Профит од стратегије заштитни пут

Са графика се уочава да је укупан профит овако формираног портфолија неограничен, а губитак ограничен.

Претходно описане стратегије трговања опцијама инвеститори могу да користе за обезбеђење од неизвесног кретања цена акција на берзи у случају када они поседују или треба да купе акцију. У наставку рада су описане стратегије трговања опцијама за обезбеђење од ризика које користе више различитих опција.

## 4.2 Стратегија бик који се шири

Стратегија *бик који се шири* (*Bull spread*) је стратегија трговања опцијама која се креира куповином једне европске кол опције и продајом једне европске кол опције са уговореном ценом, која је већа од уговорене цене купљене кол опције. Обе опције имају исто време доспећа. Како вредност кол опције опада када уговорена цена расте, вредност продате кол опције је увек мања од вредности купљене опције.

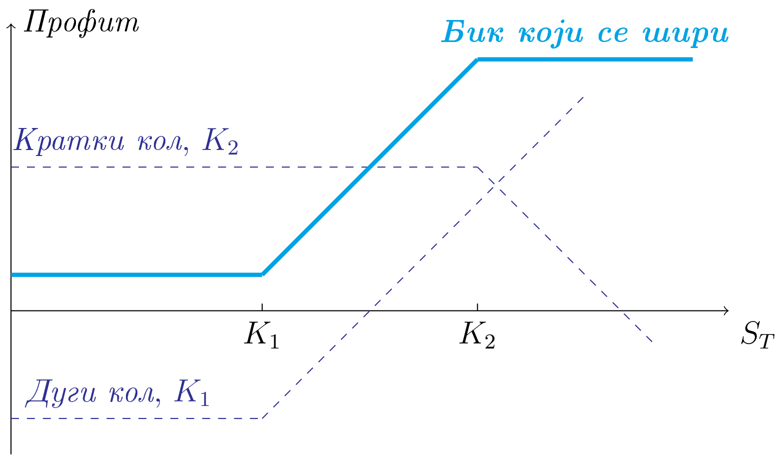
Претпоставимо да је $K_1$ уговорена цена купљене кол опције, $K_2$ уговорена цена продате кол опције и $S_T$ цена акције у тренутку доспећа опције. У тренутку истека $T$ имамо три могућа исхода.

1. Ако је $S_T \leq K_1$, опције се неће активирати, па је вредност портфолија једнака разлици цена опција.

2. Ако је $K_1 < S_T < K_2$, купљена опција ће се активирати. Инвеститор ће купити акцију по цени $K_1$, па је вредност портфолија једнака $S_T - K_1$ увећано за разлику цена опција.

3. Ако је $S_T \geq K_2$, активираће се обе опције, па је профит једнак разлици уговорених цена $K_2 - K_1$ увећаних за разлику цена опција.

График зависности профита портфолија од цене акције у тренутку доспећа приказан је на слици 4.




Слика 4: Профит од стратегије бик који се шири

Са графика се уочава да су добит и губитак овако креираног портфолија ограничени. Максимални добитак се постиже када је цена акције већа од $K_2$, а максимални губитак када је цена акције мања од $K_1$. Ова стратегија се користи када инвеститор очекује да ће цена акције расти.

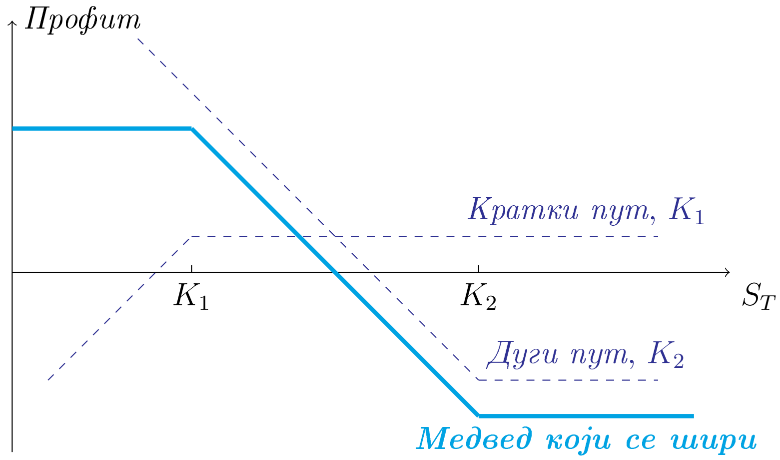
## 4.3 Стратегија медвед који се шири

Стратегија *медвед који се шири* (*Bear Spread*) је стратегија супротна од претходне у смислу да инвесритор који је користи очекује да ће цена акције пасти. Ова стратегија се прави тако што инвеститор купи европску пут опцију и прода европску пут опцију са неком другом уговореном ценом. Уговорена цена купљене опције је већа од уговорене цене продате опције. Обе опције имају исто време доспећа. На почетку инвеститор мора да уложи новац, јер је цена продате пут опције мања него цена купљене опције.

Претпоставимо да је $K_1$ уговорена цена купљене пут опције, $K_2$ уговорена цена продате пут опције и $S_T$ цена акције у тренутку доспећа опције. У тренутку истека $T$ имамо три могућа исхода.

1. Ако је $S_T \leq K_1$, опције ће се активирати, па је профит једнак разлици уговорених цена умањеној за новац уложен на почетку.
2. Ако је $K_1 < S_T < K_2$, купљена опција ће се активирати. Инвеститор ће продати акцију по цени $K_1$, па је вредност портфолија једнака $K_1 - S_T$ умањена за новац уложен на почетку.
3. Ако је $S_T \geq K_2$, неће се активирати опције, па је вредност портфолија једнака разлици цена опција.

График зависности профита од цене акције приказан је на слици 5.



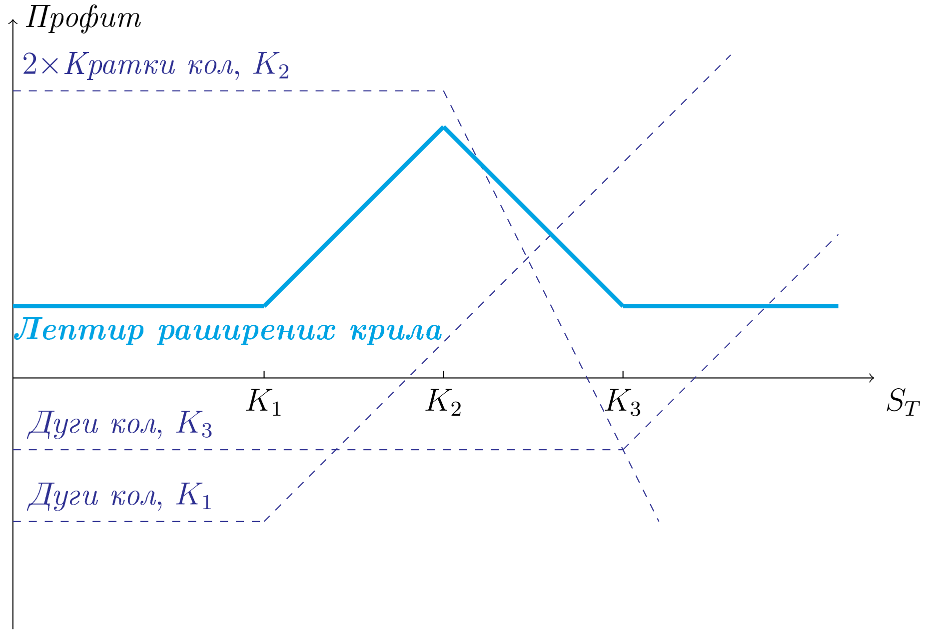

Слика 5: Профит од стратегије медвед који се шири

Са графика се уочава да су добит и губитак овако креираног портфолија ограничени. Максимални добитак се постиже када је цена акције мања од $K_1$, а максимални губитак када је цена акције већа од $K_2$.

## 4.4 Стратегија лептир раширених крила

Стратегија *лептир раширених крила* (*Butterfly Spread*) је стратегија трговања опцијама са три различите уговорене цене и истим временима доспећа. Инвеститор купи европску кол опцију са нижом уговореном ценом $K_1$ и европску кол опцију са вишом уговореном ценом $K_3$ и да прода 2 европске кол опције са уговореном ценом $K_2$, која је на средини између $K_1$ и $K_3$. У тренутку истека $T$ имамо четири могућа исхода.

1. Ако је $S_T \leq K_1$, опције се неће активирати, па је профит једнак новцу који је уложен на почетку за трговину опцијама.
2. Ако је $K_1 < S_T < K_2$, купљена опција са ценом акције $K_1$ ће се активирати. Инвеститор ће купити ту акцију, па је вредност портфолија једнака $S_T - K_1$ умањених за новац уложен на почетку.
3. Ако је $K_2 < S_T < K_3$, активираће се продате опције и купљена опција са ценом акције $K_1$. Инвеститор продаје две акције по цени $K_2$ и купује једну акцију по цени $K_1$. Укупан профит инвеститора је $K_3 - S_T$ умањен за новац уложен на почетку.
4. Ако је $S_T \geq K_3$, активираће се све четири опције, па је вредност портфолија једнака новцу који је уложен на почетку за трговину опцијама.




Слика 6: Профит од стратегије лептир раширених крила

График укупне добити, као функције од $S_T$, приказан на слици 6 асоцира на лептира раширених крила, па отуда потиче назив ове стратегије. Са графика се уочава да су добит и губитак овако креираног портфолија ограничени.

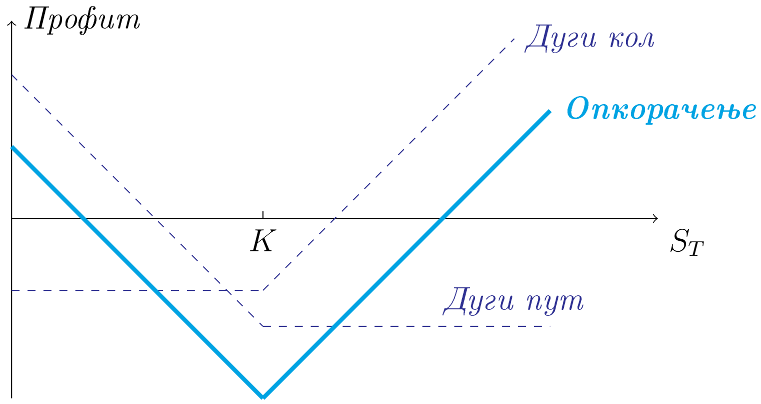
Ова стратегија доводи до профита ако је цена акције у тренутку истека блиска уговореној цени продатих опција $K_2$, па је ову стратегију погодно користити када инвеститор очекује да ће цена акција на тржишту бити око вредности $K_2$.

## 4.5 Стратегија опкорачења и стратегија гушења

Стратегија *опкорачења* (*Straddle*) је стратегија којом инвеститор купује европску пут и европску кол опцију са истим уговореним ценама $K$ и истим временима доспећа $T$.

Ако је цена акције у тренутку истека мања од уговорене цене $K$, активираће се пут опција, а ако је цена акције у тренутку истека већа од уговорене цене $K$, активираће се кол опција. У оба случаја вредност портфолија је једнака $|S_T - K|$ умањена за новац, који је уложен на почетку за куповину опција.

На слици 7 је приказан график зависности профита од промене цене акције у тренутку истека.



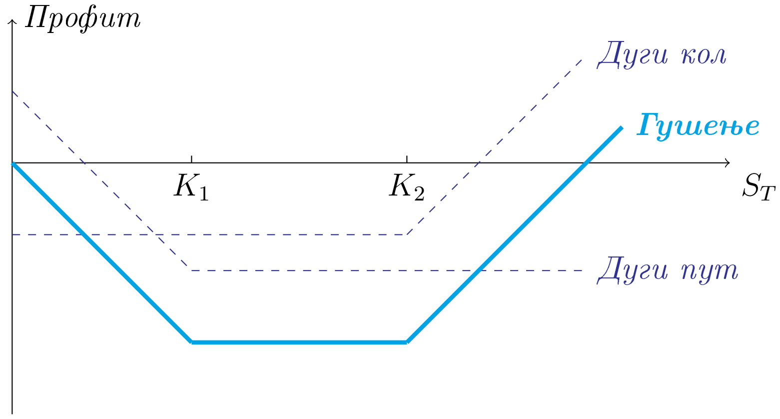

Слика 7: Профит од стратегије опкорачење

Са графика се уочава да је губитак инвеститора ограничен, а добит неограничена. Оваква стратегија инвеститору обезбеђује профит ако постоји велика разлика између уговорене цене и цене акције у тренутку истека, а ако су уговорена цена и цена акције блиске, губитак је ограничен уложеним новцем за куповину опција.

Стратегија *гушења* (*Strangle*) је стратегија којом инвеститор купује европску пут и кол опцију са истим временом доспећа, али са различитим уговореним ценама. Слично као претходна стратегија и овде инвеститор остварује профит ако се цена акције доста разликује од уговорених цена.

Претпоставимо да је $K_1$ уговорена цена купљене пут опције, $K_2$ уговорена цена купљене кол опције и $S_T$ цена акције у тренутку доспећа опције. У тренутку истека $T$ имамо три могућа исхода. Ако је $K_1 < S_T < K_2$, опције се неће активирати, па инвеститор губи новац који је уложио на почетку за куповину опција. Уколико је $S_T \geq K_2$ или $S_T \leq K_1$, активираће се кол или пут опција, па је вредност портфолија $K_1 - S_T$ или $S_T - K_2$ умањена за новац, који је уложен на почетку за куповину опција.

На слици 8 је приказан график зависности профита од промене цене акције у тренутку истека.




Слика 8: Профит од стратегије гушење

Са графика се уочава да је губитак инвеститора ограничен, а добит неограничена. Оваква стратегија инвеститору обезбеђује профит, ако постоји велика разлика између уговорене цене и цене акције у тренутку истека, а ако су уговорена цена и цена акције блиске, губитак је ограничен новцем уложеним за куповину опција.

Све претходно разматране стратегије трговања опцијама се могу обрнути, тако што ће куповина (продаја) у оригиналној стратегији постати продаја (куповина). График добити би био исти, само окренут наопачке. На пример, обрнута стратегија опкорачења (*Straddle*) би довела да ограниченог профита ако би цена акције била између уговорених цена, а иначе може да доведе до неограниченог губитка, што је прилично ризична позиција [7].

# 5 Обезбеђење од ризика помоћу грчких слова

У финансијској математици, грчка слова представљају меру осетљивости промене цене финансијских деривата, најчешће опција, у зависности од промене параметара од којих та цена зависи. Грчка слова су важни инструменти за обезбеђење од ризика. Свако грчко слово мери осетљивост промене вредности портфолија при малој промени параметара, тако се параметри који утичу на ризик могу посматрати одвојено. Веома су корисни за трговце дериватима, а посебно за оне који желе да заштитите своје портфолије од неповољних промена на тржишту.

Грчка слова за европске опције се релативно лако могу израчунати из Блек-Шолс формуле за одређивање цене европске кол опције. Из формуле Блек-Шолса уочавамо да цена опције зависи од тренутне цене акције на коју се опција односи $S$, времена до доспећа $T - t$, уговорене цене $K$, каматне стопе $r$ и волатилности $\sigma$.

Да би се проценио утицај кратке или дуге позиције опције на вредност портфолија, посматраћемо промену цене опције у зависности од промене параметара од којих та цена зависи. Уводимо грчка слова која мере различите димензије ризика за дату позицију опције и користе се у циљу обезбеђења датог портфолија од ризика [1], [5].

Наведимо грчка слова која се користе.

- *Делта* ($\Delta$) представља интензитет промене вредности опције у односу на промену тренутне цене $S$ одговарајуће акције.

- *Гама* ($\Gamma$) представља интензитет промене вредности $\Delta$ опције у односу на промену тренутне цене $\Delta$ одговарајуће акције.

- *Тета* ($\Theta$) представља интензитет промене вредности опције у односу на време $t$.

- *Ро* ($\rho$) представља интензитет промене вредности опције у односу на безризичну каматну стопу $r$.

- *Вега* ($vega$) представља интензитет промене вредности опције у односу на волатилност $\sigma$.

## 5.1 Делта ($\Delta$)

*Делта* ($\Delta$) се дефинише као стопа промене цене опције у односу на промену цене акције или неког другог вредносног папира на који се та опција односи. Претпоставимо да је делта кол опције, која се односи на акцију једнако $0,6$. То значи да ако се цена акције промени за неки мали износ, тада се цена опције промени за око 60% тог износа. Генерално,

$$\Delta(\Pi) = \frac{\partial c}{\partial S},$$

где је $c$ цена кол опције и $S$ цена акције на коју се опција односи.

Претпоставимо да је цена акције једнака 100 долара и цена опције једнака 10 долара и да је инвеститор продао 20 кол опција које се односе на 2.000 акција. Позиција инвеститора може да се обезбеди од ризика куповином $0,6 \cdot 2.000 = 1.200$ акција. Губитак од куповине акција, тада неутралише губитак од опција. На пример, ако цена акције порасте за 1 долар, цена опција порасте за $0,6$ долара, па инвеститор заради 1.200 долара од купљених акција, али и изгуби 1.200 долара од продатих опција. И обрнуто, ако цена акције падне за 1 долар, инвеститор губи 1.200 долара од купљених акција, али добија 1.200 долара од продатих опција. Приметимо да је делта вредност овакве трговине једнака нули. Овакав поступак када је делта вредност једнака нули, назива се делта неутралан.

Важно је приметити да делта вредност опције не остаје константна, па делта неутрална позиција врло кратко штити инвеститора. Овакав поступак обезбеђења од ризика се мора периодично подешавати. У нашем примеру, на крају првог дана цена акције је могла да порасте на 110 долара, што доводи до повећања вредности делте. Претпоставимо да делта расте од $0,60$ до $0,65$, па би било потребно да се купи још додатних $0,05 \cdot 2.000 = 100$ акција како би се инвеститор обезбедио од ризика. Оваква процедура обезбеђења од ризика, где се заштита од ризика подешава свакодневно назива се динамички хеџинг. У супротности са овим је статички хеџинг, где се заштита од ризика подеси на почетку и не прилагођава се при промени цене акција.

### 5.1.1 Делта за европске опције

За европску кол опцију на акцију без дивиденди, користећи формулу Блек-Шолса, важи да је:

$$\Delta(call) = \Phi(d_1),$$

где је $d_1$ дефинисано у теореми 2.2, а $\Phi$ функција расподеле стандардизоване нормалне случајне променљиве. Формула се односи на дугу позицију кол опције. Делта за кратку позицију кол опције је једнака $-\Phi(d_1)$.

Употреба делта хеџинга за кратку позицију европске кол опције подразумева узимање дуге позиције за $\Phi(d_1)$ акција за сваку купљену опцију. Слично, употреба делта хеџинга за дугу позицију европских кол опција подразумева узимање кратке позиције за $\Phi(d_1)$ акција за сваку продату опцију.

За европску пут опцију на акцију без дивиденди делта је једнака:

$$\Delta(put) = \Phi(d_1) - 1.$$

Вредност делта је негативна што значи да дуга позиција пут опције треба да се обезбеди од ризика са дугом позицијом акција на коју се опција односи, а кратка позиција пут опције може да се обезбеди од ризика узимањем кратке позиције за акције на коју се опција односи.

### 5.1.2 Динамички аспект делта хеџинга

Наредни пример описује поступак динамичког делта хеџинга [1].

**Пример 5.1** *Инвеститор је продао европске кол опције за* 300.000 *долара које се односе на* 100.000 *акција без дивиденди. Претпоставимо да је цена акције* 49 *долара, уговорена цена* 50 *долара, безризична каматна стопа* 5% *годишње, волатилност цене акције је* 20% *и време до истека опције је* 20 *недеља. Користећи стандардну нотацију, можемо записати као:*

$$S_0 = 49, \quad K = 50, \quad r = 0.05, \quad \sigma = 0.20, \quad T = 0.3846.$$

*Из Блек-Шолсове формуле добија се да је цена опција око* \$240.000, *односно* $2,40$ *долара по опцији која се односи на једну акцију. Инвеститор тада прода опцију за* 60.000 *више него што она теоријски вреди, али је изложен проблему обезбеђења од ризика.*

*Поступак примене динамичког делта хеџинга је следећи. Користећи формулу Блек-Шолса добија се да је делта европске кол опције у почетном тренутку једнака* $0,522$ *што значи да је потребно позајмити* 2.557.800 *долара за куповину* 52.200 *опција по цени* 49 *долара. У табели 1 уочимо да је цена акције на крају прве недеље пала на* $48,12$ *долара, па је нова вредност делте једнако* $0,458$, *што значи да је потребно продати* $52.200 - 45.800 = 3.400$ *акција. На овај начин инвеститор добија* 308.000 *долара кеша, па је укупна сума трошкова инвеститора једнака* 2.252.370 *долара. Током друге недеље цена акције је пала на* $47,37$ *долара, па се понавља претходни поступак.*

| Недеља | Цена акције | Делта вредност | Купљене акције (10000) | Цена купљених акција ($000) | Кумулативни трошкови ($000) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 49,00 | 0,522 | 0,522 | 2.557,800 | 2.557,800 |
| 1 | 48,12 | 0,458 | 0,064 | -307,968 | 2.252,370 |
| 2 | 47,37 | 0,400 | -0,058 | -274,746 | 1.979,858 |
| 3 | 50,25 | 0,596 | 0,196 | 984,900 | 2.966,722 |
| 4 | 51,75 | 0,693 | 0,097 | 501,975 | 3.471,640 |
| 5 | 53,12 | 0,774 | 0,081 | 430,272 | 3.905,356 |
| 6 | 53,00 | 0,771 | -0,003 | -15,900 | 3.893,331 |
| 7 | 51,87 | 0,706 | -0,065 | -337,155 | 3.560,038 |
| 8 | 51,38 | 0,674 | -0,032 | -164,416 | 3.399,154 |
| 9 | 53,00 | 0,787 | 0,113 | 598,900 | 4.001,426 |
| 10 | 49,88 | 0,550 | -0,237 | -1.182,156 | 2.823,240 |
| 11 | 48,50 | 0,413 | -0,137 | -664,450 | 2.161,591 |
| 12 | 49,88 | 0,542 | 0,129 | 643,452 | 2.807,187 |
| 13 | 50,37 | 0,591 | 0,049 | 246,813 | 3.056,785 |
| 14 | 52,13 | 0,768 | 0,177 | 922,701 | 3.982,519 |
| 15 | 51,88 | 0,759 | -0,009 | -46,692 | 3.939,777 |
| 16 | 52,87 | 0,865 | 0,106 | 560,422 | 4.504,108 |
| 17 | 54,87 | 0,978 | 0,113 | 620,031 | 5.128,607 |
| 18 | 54,62 | 0,990 | 0,012 | 65,544 | 5.199,239 |
| 19 | 55,87 | 1,000 | 0,010 | 55,870 | 5.260,267 |
| 20 | 57,25 | 1,000 | 0,000 | 0.00000 | 5.265,486 |

Табела 1: Симулација динамичког делта хеџинга

*У тренутку истека, опција ће се активирати, јер је цена акције већа од уговорене цене и делта је једнако* 1.

*Укупни трошкови у тренутку истека су једнаки* 5.265.486 *долара. Опција ће се активирати, па ће инвеститор добити новац од продаје акције. Укупан губитак у тренутку истека једнак је* 265.486 *долара.*

*У случају да није коришћен овај поступак обезбеђења од ризика, укупан губитак инвеститора би био једнак* 725.000 *долара.*

Сличан поступак се може применити када се очекује да цена акције у тренутку истека буде мања од уговорене. Тада се тргује са пут опцијама и делта је у тренутку истека једнако 0.

У претходном примеру примећујемо да је цена опције са хеџингом слична цени 240.000 коју даје формула Блек-Шолса. Ако би поступак обезбеђења од ризика био савршен, вредности би биле једнаке за сваки период симулирања цене акције. До ове варијације цена долази због тога што се цена ребалансира једном недељно. Ако би се ребаланс вршио чешће, варијација би се смањила. Наравно, претходни пример је идеалан пример који претпоставља да је волатилност константна и да се трансакције не наплаћују.

### 5.1.3 Делта портфолија

Делта вредност портфолија опција или других финансијских деривата, који се односе на акције чија је цена једнака $S$ може да се изрази као:

$$\Delta(\Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial S},$$

где је $\Pi$ вредност портфолија.

Делта вредност портфолија може да се израчуна на основу делта вредности појединачних опција које чине тај портфолио. Ако се портфолио састоји од количина $\omega_i$ опције $i (1 \leq i \leq n)$, тада делта портфолија може да се израчуна као:

$$\Delta(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i,$$

где је $\Delta_i$ делта вредност $i$-те опције. Формула може да се користи за одређивање позиције коју инвеститор треба да узме на тржишту акција тако да би добио делта неутралан портфолио.

**Пример 5.2** *Претпоставимо да инвеститор има следеће три позиције опција које се односе на акције:*

1. *Дуга позиција за* 100.000 *кол опција са уговореном ценом* 55 *и временом доспећа* 3 *месеца. Делта сваке од опција је* $0,533$.
2. *Кратка позиција за* 200.000 *кол опција са уговореном ценом* 56 *и временом доспећа* 5 *месеци. Делта сваке од опције је* $0,468$.
3. *Кратка позиција за* 50.000 *пут опција са уговореном ценом* 56 *и временом доспећа* 2 *месеца. Делта сваке од ових опција је* $-0,508$.

*Делта вредност целог портфолија је:*

$$100.000 \cdot 0,533 - 200.000 \cdot 0,468 - 50.000 \cdot (-0,508) = -14.900.$$

*Ова вредност значи да ће портфолио бити делта неутралан ако инвеститор купи* 14.900 *акција.*

## 5.2 Тета ($\Theta$)

*Тета* вредност портфолија опција мери промену вредности портфолија у односу на време, што може да се запише као:

$$\Theta(\Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

За европску кол опцију на акцију без дивиденди, из Блек-Шолсове формуле добија се да је:

$$\Theta(call) = -S\Phi'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

где су $d_1$ и $d_2$ дефинисани у теореми 2.2 и $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ густина случајне промењиве са стандардном нормалном расподелом.

За европску пут опцију на акцију без дивиденди тета вредност је једнака:

$$\Theta(put) = -S\Phi'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)\Phi(-d_2)},$$

јер је $\Phi(-d_2) = 1 - \Phi(d_2)$, па је тета вредност пут опције за $rKe^{-rT}$ већа од тета вредности одговарајуће кол опције.

Ове формуле претпостављају да је време мерено у годинама. Обично је потребно пратити промену вредности портфолија дневно. Тета вредност се може мерити по календарском дану или по радном дану. Да би се добила тета вредност по календарском дану формулу за тета треба поделити са 365, а да би се добила тета по радном дану, тета треба поделити са 252, јер постоји 252 радна дана у години.

Тета вредност је обично негативна за опције, јер како време пролази вредност опције се смањује. Када је вредност акције веома мала, тета вредност је блиска нули. За кол опције које су на новцу, тета вредност је велика и негативна вредност. Како вредност акције расте тета тежи $-rKe^{-r(T-t)}$.

Тета и делта представљају различите врсте обезбеђења од ризика. Овде је портфолио осетљив на промену цене акције, али и неосетљив на проток времена. Упркос томе, многи трговци сматрају да је тета вредност корисна зато што, као што ћемо видети касније, у делта неутралном портфолију тета је замена за гаму.

## 5.3 Гама (Γ)

*Гама* вредност портфолија опција, која се односе на акцију, представља промену делта вредности портфолија при промени вредности акција. То је други извод вредности портфолија по цени акције:

$$\Gamma(\Pi) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}.$$

Ако је гама вредност мала, делта вредност се споро мења и релативно ретко је потребно прилагођавати портфолио да остане делта неутралан. Међутим, уколико је гама веома велико (позитивно или негативно), делта је веома осетљива на промену цене акције.

Претпоставимо да је $\Delta S$ промена цене акција за неки мали интервал времена $\Delta t$ и $\Delta \Pi$ одговарајућа промена вредности портфолија. Тада из Тејлорове формуле добијамо да је:

$$\Delta \Pi = \Theta \Delta t + \frac{1}{2} \Gamma \Delta S^2,$$

за делта неутралан портфолио, где је $\Theta$ тета вредност портфолија.

Када је гама позитивно, тета тежи да буде негативно. Вредност портфолија опада ако се $S$ не мења, али расте ако постоји велика позитивна или негативна промена вредности $S$. Ако апсолутна вредност гаме расте, осетљивост промене вредности портфолија расте.

### 5.3.1 Формирање гама неутралног портфолија

Узимање различитих позиција на тржишту акција не може да се користи за промену гама вредности портфолија. Оно што је потребно урадити јесте узимање различитих позиција на тржишту финансијских деривата, као што су опције, које не зависе линеарно од акција.

Претпоставимо да инвеститор има делта неутралан потрфолио чија је гама вредност једнака $\Gamma$ и тргује опцијама чија је гама вредност једнака $\Gamma_T$. Ако је број опција који је додат портфолију једнак $\omega_T$, тада је гама вредност портфолија:

$$\omega_T \Gamma_T + \Gamma.$$

Стога, позиција коју инвеститор треба заузети да би добио гама неутралан портфолио је $-\frac{\Gamma}{\Gamma_T}$. Другим речима, потребно је да купи $\frac{\Gamma}{\Gamma_T}$ опција. Укључујући и опције којима се тргује вероватно ће се променити делта вредност портфолија, тако да је потребно променити и позицију на тржишту акција да би портфолио остао делта неутрлан. Приметимо да је портфолио гама неутралан само кратак период времена. Како време пролази, гама неутралност може да се одржи само ако је позиција опција увек једнака $-\frac{\Gamma}{\Gamma_T}$.

Делта неутралност пружа заштиту за релативно малу промену цена акције између два ребаланса. Гама неутралност пружа заштиту од већих промена цена акција између два ребаланса.

**Пример 5.3** *Претпоставимо да је портфолио делта неутралан и да је његова гама вредност једнака* $-3.000$. *Делта и гама вредност појединих кол опција су* $0,62$ *и* $1,50$, *респективно. Портфолио може бити гама неутралан укључујући дугу позицију за:*

$$\frac{3.000}{1,5} = 2.000$$

*кол опција. Међутим, делта портфолија ће се променити са нуле на вредност* $2.000 \cdot 0,62 = 1.240$. *Због тога* $1.240$ *акција мора да се прода да би портфолио остао делта неутралан.*

### 5.3.2 Одређивање гама вредности за европске опције

За европску кол и пут опцију која се односи на акције без дивиденди гама може да се одреди из формуле Блек-Шолса као:

$$\Gamma(call) = \Gamma(put) = \Phi'(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}},$$

где је $d_1$ дефинисано у теореми 2.2 и $\Phi'(x)$ густина случајне величине са стандардном нормалном расподелом.

Гама вредност дуге позиције је увек позитивна и зависи од $S$. За опције које су на новцу гама расте са смањењем времена до доспећа. Опције које су у новцу имају велике вредности гаме, што значи да је вредност позиције власника опција веома повезана са скоковима цена акција.

## 5.4 Веза између делта, тета и гама

Раније смо поменули да цена финансијског деривата на акцију без дивиденди мора да задовољава Блек-Шолсову диференцијалну једначину:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} = rf,$$

где је $f$ вредност посматраног финансијског деривата.

Вредност портфолија $\Pi$ који се састоји од таквих деривата мора да задовољава диференцијалну једначину:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = r\Pi.$$

Такође, познато нам је:

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2},$$

одакле следи да је:

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi.$$

За делта неутралан портфолио важи да је $\Delta = 0$, па је:

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi.$$

Последња једнакост показује да када је $\Theta$ велико и позитивно, гама портфолија је велики негативан број, и обрнуто. Ово објашњава зашто се тета може у извесној мери сматрати као замена за гама у делта неутралном портфолију.

## 5.5 Вега

До сада смо претпостављали да је волатилност акција на које се финансијски деривати односе константна. У пракси, волатилност се мења током времена. То значи да се вредност деривата мења при промени волатилности, као и због промена цене акција током времена.

*Вега* (*vega*) вредност портфолија финансијских деривата је стопа промене вредности портфолија при промени волатилности акција на које се деривати односе:

$$vega(\Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}.$$

Ако је вега велики позитиван или велики негативан број, вредност портфолија је веома осетљива на мале промене волатилности. Ако је вега блиско нули, волатилност има мали утицај на вредност портфолија.

Вега вредност портфолија може да се мења на сличан начин као гама додавањем позиције при трговини опцијама. Ако је *vega* вега вредност портфолија и $vega_T$ вега вредност опција са којима се тргује, позиција $-\frac{vega}{vega_T}$ на тржишту опција чини портфолио тренутно вега неутралним.

На жалост, портфолио који је гама неутралан не може у општем случају бити и вега неутралан, и обрнуто. Ако хеџер захтева да портфолио буде и гама и вега неутралан, мора да се изврше најмање две независне трговине опцијама које се односе на те акције [1].

**Пример 5.4** *Размотримо делта неутралан портфолио чија је гама вредност* $-5.000$ *и вега једанака* $-8.000$. *Са опцијама приказаним у наредној табели може да се тргује.*

| | делта | гама | вега |
|---|---|---|---|
| портфолио | 0 | -5.000 | -8.000 |
| опција1 | 0,6 | 0,5 | 2,0 |
| опција2 | 0,5 | 0,8 | 1,2 |

*Вега неутралан портфолио може да се добије куповином* 4.000 *опција*1. *На тај начин делта порасте до* 2.400, *па треба продати* 2.400 *акција да би портфолио остао делта неутралан. Гама вредност портфолија се промени са* $-5.000$ *на* $-3.000$.

*Да би се добио гама и вега неутралан портфолио мора се трговати са обе врсте опција. Ако су* $\omega_1$ *и* $\omega_2$ *количине опција*1 *и опција*2 *које су додате портфолију, добијамо да је:*

$$-5.000 + 0,5\omega_1 + 0,8\omega_2 = 0,$$

$$-8.000 + 2,0\omega_1 + 1,2\omega_2 = 0.$$

*Решење овог система једначина је* $\omega_1 = 400$ *и* $\omega_2 = 6.000$. *Гама и вега неутралан портфолио се може добити додавањем* 400 *опција*1 *и* 6.000 *опција*2. *Делта вредност портфолија након ове трговине опцијама је* $400 \cdot 0,6 + 6.000 \cdot 0,5 = 3.240$. *Стога, треба продати* 3.240 *акција како би нови портфолио био и делта неутралан.*

За европске кол и пут опције на акције без дивиденди из формуле Блек-Шолса вега вредност је једнака:

$$vega(call) = vega(put) = S\sqrt{T-t}\Phi'(d_1),$$

где је $d_1$ дефинисано у теореми 2.2 и $\Phi'(x)$ је густина расподеле случајне величине са нормалном расподелом. Вега вредност за европске и америчке опције је увек позитивна.

Израчунавање вега вредности из формуле Блек-Шолса делује мало чудно, јер је једна од претпоставки модела да је волатилност константна. Теоријски би било исправније да се израчуна вега из неког модела који претпоставља да је волатилност стохастичка. Међутим, испоставило се да је вега вредност добијена из модела који претпоставља да је волатилност стохастичка слична као вега вредност добијена из формуле Блек-Шолса. У пракси се показало да рачунање вредности вега из модела који претпоставља да је волатилност константна даје прихватљиве резултате.

Гама неутралност штити од великих промена у цени акција између ребаланса. Вега неутралност штити од промене волатилности $\sigma$. Да би се добио одговор на питање да ли је боље трговати са опцијама у циљу добијања гама или вега заштићеног портфолија зависи од тога да ли желимо да заштитимо портфолио од промене цена акција или нестабилности волатилности.

Када се волатилност мења, имплицирана волатилност опција са краћим временом истека се мења више него волатилност опција са дужим временом истека. Вега портфолија се због тога чешће рачуна у зависности од промене волатилности опција са дужим временом до доспећа.

## 5.6 Ро ($\rho$)

*Ро* вредност протфолија опција је промена вредности портфолија при промени каматне стопе:

$$\rho(\Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

Вредност Ро представља осетљивост вредности портфолија при промени каматне стопе када се други параметри не мењају.

За европску кол опцију на акцију без дивиденди из Блек-Шолсове формуле добија се да је ро једнако:

$$\rho(call) = K(T-t)e^{-rT}\Phi(d_2),$$

где је $d_2$ дефинисано у теореми 2.2.

За европску пут опцију на акцију без дивиденди ро је једнако:

$$\rho(put) = -KTe^{-rT}\Phi(-d_2).$$

# 6 Закључак

Хеџинг је трговачка активност која има за циљ да смањи ризик којем су изложени учесници на финансијском тржишту. Најпознатији финансијски деривати су фјучерси, форварди и опције. Предност финансијских деривата у односу на инструменте из којих су изведени јесте већа флексибилност у заштити позиције.

Најједноставнији алат за обезбеђење од ризика је фјучерс уговор. У неким случајевима трговања фјучерс уговорима, може се обезбедити савршен хеџинг. У другим случајевима, због неусклађености времена доспећа или врсте акција која се користи за заштиту од ризика, користи се унакрсни хеџинг.

Кол и пут опције се могу користити за креирање различитих функција добити које имају ограничен губитак. Користећи комбинације пут и кол опција ради формирања портфолија, као што су стратегија лептир раширених крила, стратегија опкорачења или стратегија гушења, профит се остварује ако цена вредносних папира на које се опције односе остаје у одређеном оквиру, иначе постоји губитак.

Портфолио акција је осетљив на различите врсте ризика, као што су промене каматне стопе, девизног курса, цена акција и слично. Промене вредности портфолија у односу на промене различитих параметара се називају Грчким словима. За опцију је најважнија осетљивост у односу на цену акције, која се назива се делта. Да би портфолио био имун на ризик од промене цене акције, мора да буде делта неутралан. Дакле, пожељно је да делта има малу вредност. У идеалном случају могућа је позиција опције која потпуно ослобађа од ризика делта хеџингом, тј. држи делта вредност акција у одговарајућем портфолију. У пракси, међутим, портфолио може бити изложен другим врстама ризика, као што су: ризик каматних стопа и ризик нестабилности. У таквим случајевима, морамо узети у обзир и друга грчка слова.

Дефинисани циљ овог рада био је да укаже на могућности да финансијски менаџери, улагачи и штедише повећају своју добит уз одређени ниво заштите од ризика. Реализација тог циља је захтевала да се дефинишу и анализирају деривати, који су на располагању финансијским институцијама и другим учесницима на финансијском тржишту. Анализа је показала да су инструменти заштите од ризика погодни за коришћење и пожељни на финансијском тржишту. Потенцијални клијенти треба да препознају свој интерес за овим инструментима, јер финансијски деривати постају тржишни инструменти без којих се не може.

# Литература


[1] John C. Hull, 2003. *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th Edition, Prentice Hall, New Jersey

[2] Jakša Cvitanić, Fernando Zapatero, 2004. *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, Cambridge University Press

[3] J. Michael Steele, 2000. *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer-Verlag New York

[4] John C. Hull, 2007. *Risk Management and Financial Institutions*, 1th Edition, Prentice Hall, New Jersey

[5] Слободанка Јанковић, 2015. *Скрипта за предмет Елементи финансијске математике*

[6] http://www.optionseducation.org/

[7] http://www.montana.edu/ebelasco/agec421/classnotes/strategies.pdf

[8] http://www.math.uah.edu/stat/brown/Geometric.html

[9] http://www.columbia.edu/∼ww2040/4701Sum07/lec0813.pdf

# Биографија

Бојана Тодић је рођена 02. јануара 1993. године у Суботици. Основну школу „Кизур Иштван“ је завршила 2007. године као вуковац и ђак генерације. Исте године уписала је гимназију „Светозар Марковић“ у Суботици и завршила је 2011. године, такође као вуковац. Школске 2011/2012. године уписала је Математички факултет у Београду, смер Статистика, актуарска и финансијска математика и дипломирала јула 2015. године просечном оценом 9,00. Од школске 2015/2016. године је студент мастер студија, смера Статистика, актуарска и финансијска математика. Запослена је као Сарадник у настави на катедри за Вероватноћу и статистику од октобра 2015. године.