УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Др ЈОВАН КАРАМАТА

КОМПЛЕКСАН БРОЈ

СА ПРИМЕНОМ НА ЕЛЕМЕНТАРНУ ГЕОМЕТРИЈУ

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

БЕОГРАД

Штампарија и књиговезница „НАУЧНА КЊИГА", Народног фронта улица број 12 — Телефон 20-732

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник је намењен студентима првог семестра Природно-математичког факултета, како би се што раније упознали са комплексним бројевима и рачуном са њима. Због тога што су комплексни бројеви неопходни у многим дисциплинама, нарочито у алгебри и теорији функција, да би се код ова два предмета избегло понављање, писан је као засебна књига, и треба да да потребно предзнање за ова два предмета.

Други део — примене на елементарну геометрију, има за циљ да покаже да је примена комплексних бројева исто тако реална као и самих реалних бројева. Поред тога што овај део може да послужи и као увод у теорију вектора, његова је сврха да навикне студенте на употребу комплексних бројева и на руковање с њима, због чега овај део не треба сматрати као теоретско излагање већ више као збирку систематски груписаних и обрађених примера.

Земун, новембра 1948 г. *Ј. К.*

САДРЖАЈ

ДЕО I.

АЛГЕБРА КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА

ДЕО I.

АЛГЕБРА КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА

1. Комплексан број

1. 1. Број. (i) *Имагинаран број.* Позитивне и негативне бројеве зовемо *реални бројеви.* Нема реалног броја чији је квадрат, или ма који парни степен негативан; другим речима, квадратни корен, или, уопште, парни корен из негативног броја не постоји у области реалних бројева. Према томе, доклегод оперишемо са реалним бројевима, изрази као

$$1^{\circ}\ \sqrt{-1},\qquad 2^{\circ}\ \sqrt{-4},\qquad 3^{\circ}\ 4+\sqrt{-3},$$

$$4^{\circ}\ \sqrt{-3}-\sqrt{-2},\qquad 5^{\circ}\ 2+\sqrt[6]{-5},\qquad 6^{\circ}\ \sqrt[4]{-4},\ \text{итд},$$

немају смисла, због чега су названи имагинарни бројеви.

Отуда не смемо закључити да ови „бројеви" не могу бити од користи. Не само да се они јављају при решавању квадратне једначине, већ се показало да су они неопходни за решавање опште једначине n-тог степена. При томе се не указује потреба увођења нових врста бројева. Тако, да би квадратна једначина, и, уопште, једначина n-тог степена увек имала решења морамо увођењем *имагинарних бројева* проширити појам реалног броја до појма *комплексног броја.*

Значај комплексног броја не лежи само у алгебри, већ се комплексан број показао неопходан како у многим гранама теориске математике, на пример у теорији функција, теорији бројева, геометрији и др., тако и у примењеној математици, специално у хидродинамици, електрицитету, небеској механици, оптици и др. — У другом делу ћемо показати колико он може бити од користи у елементарној геометрији и истаћи његов значај у аналитичкој геометрији.

(ii) *Имагинарна јединица.* Између свих горе наведених израза који немају смисла у области реалних бројева, најједноставнији по облику је

$$\sqrt{-1}.$$

Тај се израз назива *имагинарна јединица* и обележава словом i.

$$1^{\circ}\qquad i=\sqrt{-1}$$

Према томе се i може дефинисати као „број" чији је квадрат -1, тј.

$$i^2 = -1.$$

Сви остали изрази настали вађењем парног корена из негативних бројева могу се претставити помоћу имагинарне јединице. Тако је, на пример,

2⁰ $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$;

3⁰ $4 + \sqrt{-3} = 4 + \sqrt{3}\,\sqrt{-1} = 4 + i\sqrt{3}$;

4⁰ $\sqrt{-3} - \sqrt{-2} = \sqrt{3}\,\sqrt{-1} - \sqrt{2}\,\sqrt{-1} = i\sqrt{3} - i\sqrt{2} = i(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;

5⁰ $2 + \sqrt[6]{-5} = 2 + \sqrt{\sqrt[3]{-5}} = 2 + \sqrt{-\sqrt[3]{5}} = 2 + \sqrt{-1}\,\sqrt{\sqrt[3]{5}} = 2 + i\sqrt[6]{5}$

6⁰ $\sqrt[4]{-4} = \sqrt{\sqrt{-4}} = \sqrt{\sqrt{4}\,\sqrt{-1}} = \sqrt{2i}$,

а овај последњи израз можемо написати у облику

$$\sqrt{2i} = 1 + i.$$

Заиста је

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$$

(iii) *Комплексан број.* Сви ови изрази, тј. „бројеви", могу се, дакле, у општем случају написати у облику

$$\alpha + i\beta$$

у којем α даје број реалних, а β број имагинарних јединица.

Према томе је имагинаран број одређен са два реална броја α и β. Значи, да је имагинаран број скуп —*комплекс*— од два реална броја. Отуда и потиче назив комплексан број. Називи *имагинаран* и *комплексан* донекле су синоними; уствари под имагинарним бројем подразумевамо број у којем се имагинарна јединица с т в а р н о ј а в љ а, тј. број облика $\alpha + i\beta$ код кога је $\beta \neq 0$, док се под комплексним бројем подразумева скуп свих реалних α и имагинарних бројева $\alpha + i\beta$, са $\beta \neq 0$.

Према томе, комплексан број $\alpha + i\beta$, где је $\beta = 0$, прелази у *реалан број.* Кад је $\alpha = 0$ и $\beta \neq 0$, број се назива *чисто имагинаран* $(i\beta)$.

Дакле, комплексан број може бити реалан (α), чисто имагинаран $(i\beta,\ \beta \neq 0)$, или имагинаран $(\alpha + i\beta,\ \beta \neq 0)$.

Све ове бројеве обележавамо укратко једним словом, рецимо словима a, b, c итд., и стављамо, уопште,

$$a = \alpha + i\beta.$$

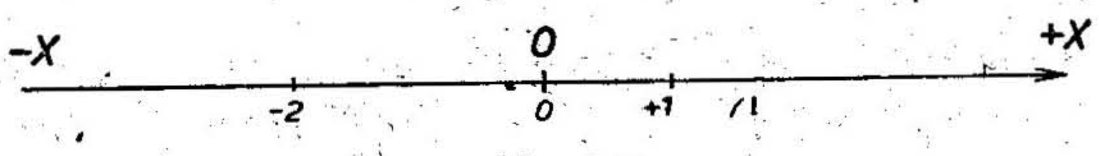
Задаци.

Покажи да је:

1. $\sqrt{-2i} = 1 - i$; **2.** $\sqrt{3+4i} = 2+i$;

3. $(1 \pm i\sqrt{3})^3 = 8$, тј. да је $\sqrt[3]{8}$ или 2, или $-1+i\sqrt{3}$, или $-1-i\sqrt{3}$.

1. 2. Тачка. (i) *Бројна линија. Реална оса.* Реалне бројеве геометриски претстављамо тачкама *бројне линије* (в. сл. 1).



Сл. 1

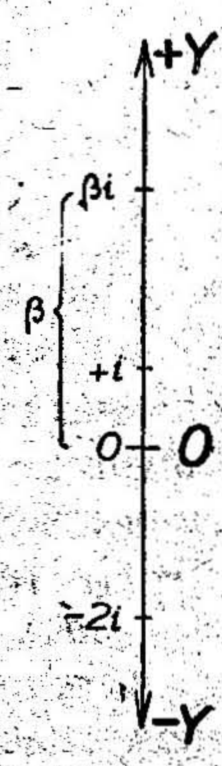
Бројна линија је ориентисана права $-X, O, +X$, где је смер $\overline{O,+X}$ узет за позитиван, тачка O за почетак (нулу), и где једна одређена дуж $\overline{O,+1}$ претставља јединицу.

Тада *свакој тачки A бројне линије одговара један и само један реалан број, мерни број* $\overline{OA}$ *дужи OA са одговарајућим предзнаком, и, обратно, свакој реалном броју одговара једна и само једна тачка бројне линије* (Cantor-ов аксиом).

Из тога разлога можемо речи „тачка“ и „број“ сматрати као синониме и еквивалентно их замењивати једне другима.

С обзиром на комплексне бројеве, назив „бројна линија“ прецизирамо називом *реална бројна линија* или *оса реалних бројева.*

(ii) *Имагинарна оса.* Како се $i = \sqrt{-1}$ не може претставити на реалној бројној линији, то се ни изрази („бројеви“) у којима се јавља i не могу претставити на тој линији. Због тога уводимо осу чисто имагинарних бројева — *имагинарну осу.* Сваки број облика $i\beta$, где је β позитиван или негативан реалан број, можемо једнозначно претставити на једној ориентисаној правој $-Y, O, +Y$ (в. сл. 2) са почетком у тачки O и одређеном дужи $O, +i$ која претставља имагинарну јединицу. На тако дефинисаној имагинарној оси, свакој броју $i\beta$ одговара тачка чије отстојање од почетка O има мерни број β. Ова тачка лежи у смеру $O, +Y$, ако је β позитивно, или у супротном смеру, ако је β негативно.



Сл. 2

(iii) *Комплексна раван.* Да бисмо геометриски претставили комплексан број

$$a = \alpha + i\beta,$$

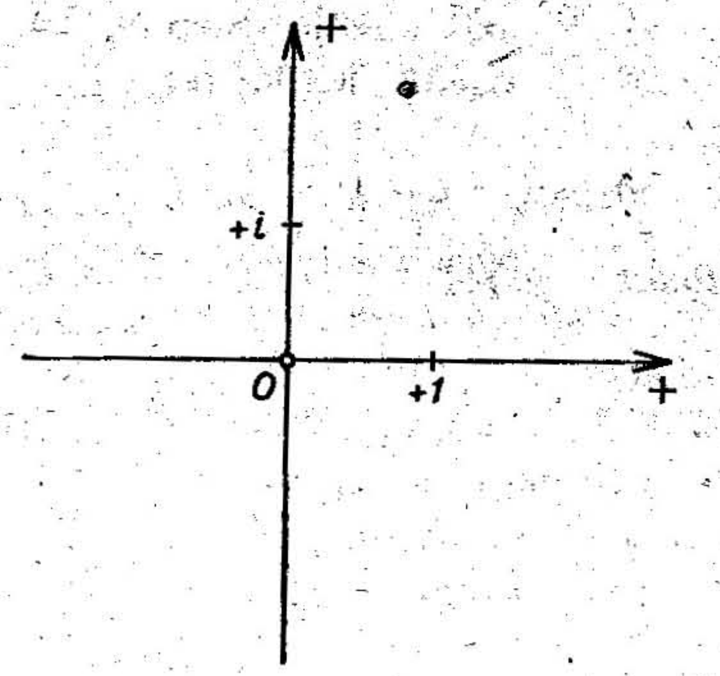
поставимо у равни реалну и имагинарну осу, тако да оне стоје нормално једна на другој, и да им се почетне тачке O поклапају; ово последње зато што је, како на реалној тако и на имагинарној оси, тачка O она тачка која одговара броју нула. При томе се обично узима да су дужи које претстављају њихове јединице међусобно једнаке и да су позитивни смерови тих оса управљени као што то показује сл. **3**.

Раван одређену таквим системом оса (координатним системом) називамо *комплексна* раван.

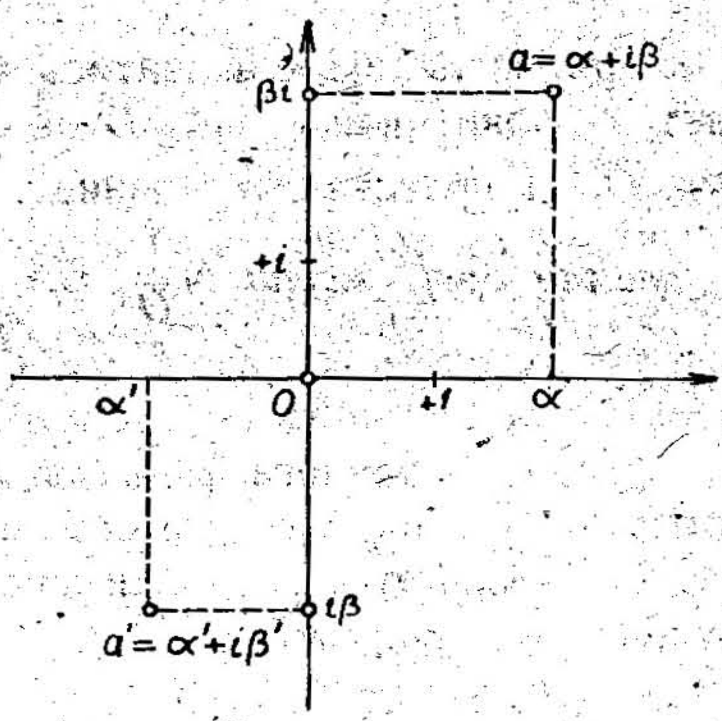
Сваком броју облика

$$a=\alpha+i\beta,$$

где су α и β произвољни реални бројеви можемо тада једнозначно придодати — координирати — једну и само једну тачку комплексне равни.



Сл. 3



Сл. 4

Према Cantor-ову аксиому, бројевима α и $i\beta$ су на одговарајућим осама једнозначно одређене тачке, тако да је α мерни број дужи $\overline{O,\alpha}$ а β мерни број дужи $\overline{O, i\beta}$ (в. сл. 4). Тачка чија је апсциса α и ордината β је геометриски претставник комплексног броја $a=\alpha+i\beta$.

На тај начин *свакој тачки комплексне равни одговара један и само један комплексан број и обратно.*

Отуда се речи *тачка комплексне равни* и *број* и у овом проширеном смислу, тј. комплексан број, могу сматрати као синоними.

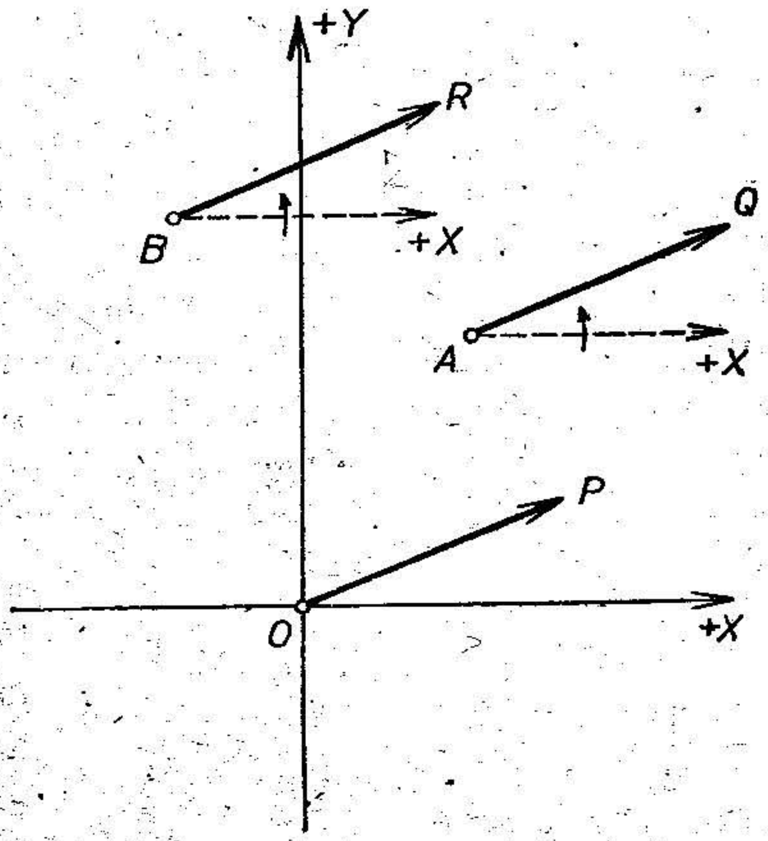
Задаци.

1. Дат је комплексан број – тачка – a; који комплексни бројеви одговарају тачкама које стоје симетрично тачки a у односу на: 1° реалну осу; 2° имагинарну осу и 3° почетак?

2. Где се налазе тачке које одговарају бројевима задатака 1—3 претходне тачке?

3. Који бројеви одговарају чворовима квадратне мреже која прекрива комплексну раван, а чији се један чвор поклапа са почетком?

1.3. Вектор. (i) *Померање.* Поред ове геометриске интерпретације комплексног броја, тј. као тачке комплексне равни, можемо комплексном броју дати још једну исто тако важну, суштински потпуно различиту, геометриску интерпретацију, сматрајући га као појам *померања*, односно као *вектор.* — Уочимо неку тачку равни и померимо је из положаја A у положај Q дуж одређене праве и у одређеном смеру, (в., сл. 5). Ако ово померање сматрамо као појам за себе, видимо да је оно одређено:



Сл. 5

1° *дужином* померања, тј. мерним бројем $\overline{AQ}$ дужи AQ, који се увек узима позитивним;

2° *правцем* праве дуж које се ово померање врши, а који можемо одредити било којим углом који заклапа ова права са једном утврђеном правом, на пример X-осом;

3° *смером* у коме се ово померање врши, а који одређујемо тако што прво пишемо *почетну тачку* A, а затим *крајњу тачку* Q.

Овако дефинисан појам, тј. померање, зовемо још *слободан вектор* или укратко *вектор* и симболички га означавамо са $\overrightarrow{AQ}$.

Према томе, вектор је потпуно одређен дужином померања, правцем и смером у коме се ово померање врши, а не зависи од почетне тачке. Дакле, два вектора $\overrightarrow{AQ}$ и $\overrightarrow{BR}$ (в. сл. 5) сматрамо да су једнаки и стављамо

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BR},$$

ако је

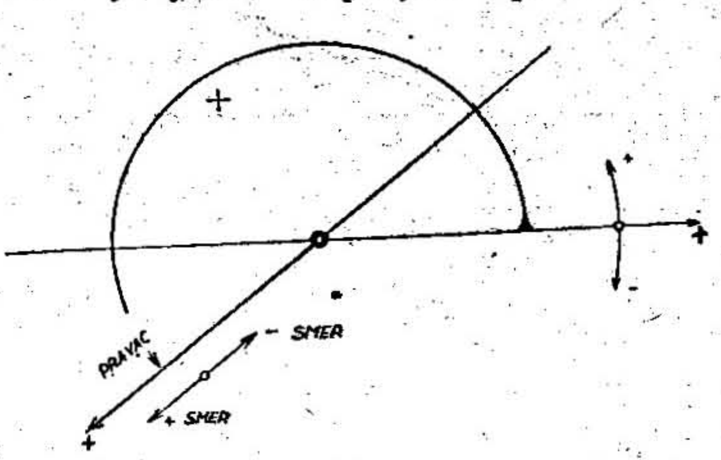
$$\text{дуж } AQ = \text{дуж } BR,$$

и ако имају исти правац и смер.

Овако дефинисан вектор може се, према томе, по вољи транслаторно у равни померати (в. сл. 7).

(ii) *Правац и смер.* Све паралелне праве имају исти правац. Ма која тачка праве дели ту праву на две полуправе супротна смера. За полуправе које су истог правца и смера казаћемо кратко да су истога правца. *Правац полуправе* је, дакле, одређен правцем праве и смером.

Ако у равни оријентишемо углове тако да за позитиван смер узимамо смер супротан смеру кретања казаљке на сату, тада правац полуправе можемо једнозначно одредити једним углом мереним у односу на једну утврђену полуправу. За полуправу у односу на коју меримо углове обично узимамо позитивни део X-осе. Нека је дата полуправа AQ. Величину α угла који одређује њен правац добивамо кад кроз почетну тачку A полуправе AQ повучемо полуправу паралелну позитивном делу X-осе; углом $+XAQ$, тј. углом величине α^0 мереним у позитивном смеру, једнозначно је одређен правац полуправе AQ. Правцу полуправе, поред угла од α^0, одговарају, међутим, и сви углови величине $\alpha^0 \pm k \cdot 360^0$, за свако $k = 0$, $1, 2, \ldots$ — Ако са α означимо величину угла $+XAQ$ мереног у радианима, тада правцу полуправе AQ одговарају сви углови величине $\alpha \pm 2k\pi$ радиана. Правац полуправе је потпуно одређен углом, док је угао одређен правцем само до на $\pm 2k\pi$ радиана.



Сл. 5 а

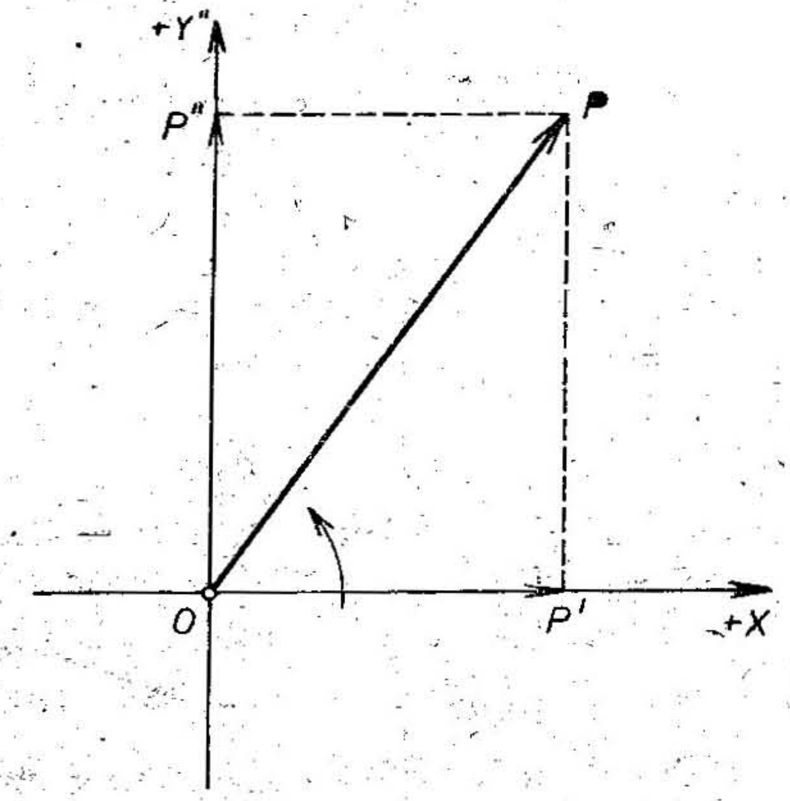
Ако праве у равни оријентишемо знацима + и –, тада правац и смер праве можемо одредити правцем њене полуправе позитивна смера. Нека је α величина угла којим је одређен правац полуправе позитивна смера, тада правцу полуправе супротна, тј. негативна смера, одговара угао величине $\alpha + \pi$, до на $\pm 2k\pi$ радиана (в. сл. 5. а).

(iii) *Правац вектора.* Како је вектором $\overrightarrow{AQ}$ тј. померањем, дат истовремено и правац његове праве, то је њиме одређен правац полуправе истог смера, и, обратно, правцем ове полуправе одређен је правац и смер вектора. Због тога ћемо од сада под *правцем вектора* подразумевати правац његове полуправе. Овако дефинисан појам правца вектора једнозначно одређује и његов смер, јер је појам смера садржан у појму правца вектора. Према томе, два вектора истог правца, тј. два вектора чије полуправе заклапају исте углове са позитивним делом X-осе, имају и исти смер; међутим, правци два вектора супротна смера, тј. два супротна вектора, разликују се за π, односно за $\pi \pm 2k\pi$ радиана.

Уколико се ограничимо на померање у равни и праве дуж којих се ова померања врше оријентишемо у смислу тачке (ii), тада супротан вектор вектора $\overrightarrow{AQ}$ можемо једнозначно одредити предзнаком –, тј. вектором $-\overrightarrow{AQ}$. Према томе, два су вектора супротна, или ако се разликују у предзнаку, или ако им се правци разликују за π до на $\pm 2k\pi$ радиана.

Како је правац вектора $\overrightarrow{AQ}$ једнозначно одређен величином угла $+XAQ=\alpha$, то ћемо од сада због краћег изражавања, под правцем вектора подразумевати сам угао α.

(iv) *Вектор положаја.* Вектор чија је почетна тачка утврђена зове се *везани вектор.* Вектор везан за почетак O координатног система зове се *вектор положаја.*



Сл. 6

Свакој тачки P равни XOY одговара, према томе, један и само један вектор положаја $\overrightarrow{OP}$ (в. сл. 6). Обратно, сваки вектор положаја $\overrightarrow{OP}$ одређује својом крајњом тачком једну и само једну тачку P равни XOY.

Пројекције $\overrightarrow{OP'}$ и $\overrightarrow{OP''}$ вектора $\overrightarrow{OP}$ на X-осу, односно Y-осу, ако их сматрамо векторима, зову се *компоненте вектора* $\overrightarrow{OP}$ у правцу оса. Вектор положаја је овим компонентама једнозначно одређен. Мерни бројеви α и β дужи $\overline{OP'}$ и $\overline{OP''}$ узети са предзнаком $+$, ако се смер компоненте поклапа са позитивним смером осе, а предзнаком $-$ у супротном случају, једнозначно одређују ове компоненте. То су уствари координате тачке P. Овим паром реалних бројева је, према томе, вектор положаја једнозначно одређен, и, обратно, компонентама вектора положаја одређене су координате његове крајње тачке.

(v) Пројекцијама слободног вектора $\overrightarrow{AQ}$ на осе OX и OY одређене су његове компоненте у правцима ових оса. Ове компоненте остају непромење ма где се вектор налазио у равни XOY (в. сл. 7), тј. кадгод је

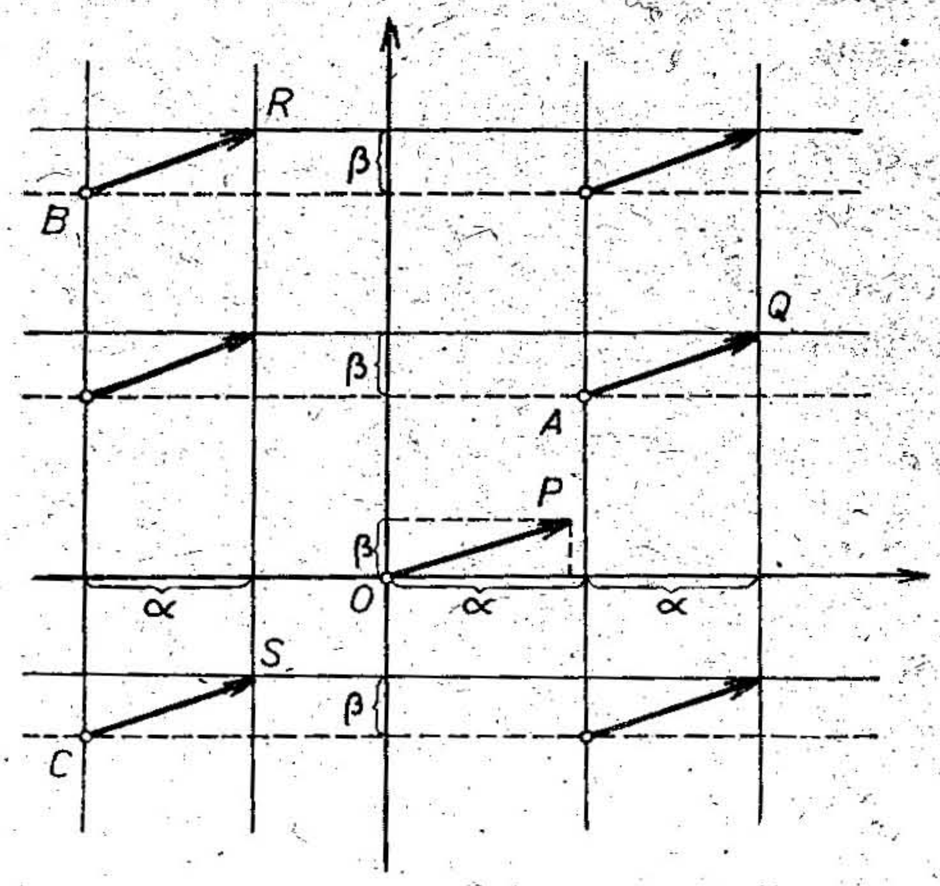
$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{OP}.$$

Обратно, ако компоненте, на пример вектора положаја $\overrightarrow{OP_1}$, произвољно померамо дуж одговарајућих оса, то оне у сваком свом положају претстављају компоненте слободног вектора који је једнак вектору положаја $\overrightarrow{OP_1}$. Како вектору положаја (преко његових компонената) једнозначно одговара пар реалних бројева α и β, то су ова два броја и слободним вектором једнозначно одређена; обратно, паром реалних бројева, као компонентама, слободан вектор је потпуно одређен.

Уочимо сад комплексан број

$$a=\alpha+i\beta;$$

паром реалних бројева α и β одређен је комплексан број a, али је и, обратно, сваким комплексним бројем једнозначно одређен пар реалних бројева. Отуда видимо да је комплексним бројем a (преко пара реалних бројева α и β) једнозначно одређен и један слободан вектор, који ћемо означити са $\vec{a}$. Другим речима, *комплексном броју* a *одговара један и само један вектор* $\vec{a}$, *и обратно, вектору* $\vec{a}$ *одговара један и само један комплексан број* a.



Сл. 7

Ова кореспонденција се успоставља преко вектора положаја. Слободним вектором, односно померањем, једнозначно је одређен вектор положаја, а овим одређена тачка комплексне равни, тј. комплексан број који одговара томе померању. На тај начин можемо комплексне бројеве једнозначно замењивати векторима комплексне равни.

Задаци.

1. Покажи да два слободна вектора $\overrightarrow{AQ}$ и $\overrightarrow{BR}$ можемо дефинисати као ј е д н а к а, тј. ставити

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BR},$$

ако се средина дужи AR поклапа са средином дужи BQ.

2. Нека су теменима квадрата $ABCD$ одређени вектори, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$; ако је правац вектора $\overrightarrow{AB}$ дат углом α, одреди правце осталих вектора.

3. Нека су теменима истостраног троугла ABC одређени вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$; одреди правце вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$, ако се правац вектора $\overrightarrow{BC}$ поклапа са правцем позитивног дела X-осе.

4. Ако су угловима α и β одређени правци кракова неког угла, одреди правац његове симетрале.

5. Нека је α угао, мерен у позитивном смеру, што га заклапају вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, β угао што га заклапају вектори $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ и γ угао између вектора $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DE}$; ако је правац вектора $\overrightarrow{AB}$ одређен углом θ, одреди правце вектора $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DE}$.

6. Који комплексни бројеви одговарају векторима који су паралелни: 1° реалној оси; 2° имагинарној оси и 3° симетралама првог и другог квадранта?

2. Комплекс.

2. 1. Бројни прстен. (i) Ослањајући се искључиво на појам реалног броја може се *комплексан број* и основне рачунске радње са њиме прецизно постулисати полазећи од извесног броја апстрактних дефиниција, односно аксиома.

Ова аксиоматизација је неопходно потребна за даљу изградњу како модерне алгебре тако и других математичких дисциплина.

С обзиром на апстрактност појмова који се овде третирају, читалац може, уколико му је то лакше, ову тачку проучити и после тачке 6.

(ii) Рачун са комплексним бројевима је рачун са *бројним паровима*. Под речи *комплекс* разуме се *уређен пар* реалних бројева a и b, што се симболички обележава са

$$(a, b),$$

и где реч *уређен* значи да комплекси (a, b) и (b, a) нису једнаки. До нас стоји како ћемо дефинисати рачунске операције са тим паровима. Између свих, по вољи бираних операција, уводимо оне које одговарају обичним рачунским операцијама за реалне бројеве.

Тако *збир* два комплекса (a, b) и (c, d) дефинишемо као трећи комплекс облика

$$(a+c,\ b+d)$$

и стављамо

$$(a, b)+(c, d)=(a+c,\ b+d).$$

Производ два комплекса (a, b) и (c, d) дефинишемо као комплекс $(ac-bd,\ bc+ad)$ и пишемо

$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd,\ bc+ad).$$

Ако ставимо

$$(a, b)=a+ib \quad \text{и} \quad (c, d)=c+id,$$

обе овако дефинисане операције своде се на обично сабирање и множење бинома

$$a+ib \quad \text{и} \quad c+id,$$

где i *треба* сматрати као алгебарску величину, с тим да се i^2, гдегод се појави, замени са -1, тј. стави $i^2 = -1$.

Овим се операције са комплексима своде на операције са обичним комплексним бројевима, а ове се, у случају комплекса облика (a, o), своде на операције са реалним бројевима.

Основне рачунске операције, као и њихова правила, прецизно се дефинишу увођењем апстрактних појмова *бројни прстен* и *бројно тело* који садрже као специалан случај комплекс, па, према томе, комплексан и реалан број.

Под бројним прстеном, или укратко прстеном, подразумевамо скуп апстрактних елемената, на пример комплекса, који задовољавају извесне услове — аксиоме прстена — којима је регулисан међусобни однос ових елемената.

Бројни прстен прелази у *бројно тело*, ако његовим аксиомима додамо још два нова аксиома — аксиоме бројног тела.

(iii) *Аксиоми прстена.* Један произвољан скуп Π апстрактних елемената $A, B, C, D, \ldots\ldots$ (о чијој природи ништа не претпостављамо) преставља *бројни прстен*, ако задовољава следеће аксиоме.

1° Сваком уређеном пару елемената A, B скупа Π једнозначно одговара један елемент скупа Π, који обележавамо са $A+B$. Тај се елемент зове *збир* од A и B, тј. $A+B$ настаје операцијом *сабирања* елемената A и B.

2° За три елемента A, B и C из Π је

$$A+(B+C)=(A+B)+C.$$

Ово је *асоцијативни закон сабирања.*

Израз

$$A+(B+C), \quad \text{или} \quad (A+B)+C$$

може се, према томе, писати и краће

$$A+B+C,$$

чиме је назначена независност збира од положаја заграда.

3° За два елемента A и B прстена Π је

$$A+B=B+A.$$

Ова чињеница се назива *комутативни закон сабирања.*

Према 2° је, дакле,

$$A+B+C=A+C+B= \quad \text{итд.}$$

4° За дато A и B постоји један и само један елемент X из Π такав да је

$$A+X=B.$$

Овим је дефинисана операција *одузимања*; X се зове *разлика елемената* B и A. Разлика је овим једнозначно одређена и обележава се са

$$X = B - A.$$

5° Сваком уређеном пару A, B из Π једнозначно одговара нов елемент $A \cdot B$ из Π. Он се назива *производ* од A и B, а кажемо да елемент $A \cdot B$ постаје из A и B операцијом *множења*.

6° За три произвољна елемента A, B и C из Π важи

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C.$$

Ово изража тзв. *асоцијативни закон множења*.

7° *Комутативни закон множења* изражава, да је за два произвољна елемента A и B из Π

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

8° За три произвољна елемента из Π важи

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

што претставља *дистрибутивни закон.*

Аксиомима 1° – 8° дефинисан је скуп Π као *бројни прстен*, без обзира какви су његови елементи. Аксиоми 1°, 2°, 3° и 5° су *аксиоми збира*, 5°, 6° и 7° аксиоми *производа*, а аксиом 8° везује збир са производом.

(iv) а) Из 1°, 2°, 3° и 4° следи егзистенција *елемента нула* $\mathbf{O}$ у бројном прстену Π, тј. постоји у Π један и само један елемент $\mathbf{O}$ такав да је, за сваки елемент A из Π,

$$A + \mathbf{O} = A.$$

За доказ тога пођимо од аксиома 4° који тврди да сваком утврђеном елементу C из Π одговара одређен елемент $\mathbf{O}_C$, такав да је

$$C + \mathbf{O}_C = C.$$

Треба доказати да $\mathbf{O}_C$ не зависи од C.

Нека је A неки други произвољни елемент прстена Π; према 4° постоји једно одређено X из Π тако да је

$$C + X = A. \tag{1}$$

Из

$$C + \mathbf{O}_C = C,$$

следи

$$C + \mathbf{O}_C + X = C + X,$$

или, према 2° и 3°,

$$C + X + \mathbf{O}_C = C + X,$$

дакле, због (1),

$$A + \mathbf{O}_C = A. \tag{2}$$

На основу аксиома 4°

$$A + Y = A$$

једнозначно одређује елемент Y; ако овај елемент означимо са $\mathbf{O}_A$, то мора, према 4° и (2), бити

$$\mathbf{O}_A = \mathbf{O}_C = \mathbf{O}.$$

Овим је установљено да елемент нула прстена Π не зависи од осталих елемената тог прстена, а тиме је успостављена његова егзистенција, и то особином да је за свако A прстена Π

$$A + \mathbf{O} = A. \tag{3}$$

b) За овако дефинисан елемент нула $\mathbf{O}$ прстена Π може се извести особина тога елемента, да је за свако A прстена Π

$$A \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}. \tag{4}$$

Нека је C неки елеменат из Π, тада је, по дефиницији нуле

$$C + \mathbf{O} = C.$$

Множењем овог обрасца елементом A, следи

$$(C + \mathbf{O})\, A = CA,$$

а како је, према 8°

$$(C + \mathbf{O})\, A = CA + \mathbf{O} A$$

то је

$$CA + \mathbf{O}A = CA,$$

тако да је, према дефиницији (3) нуле $\mathbf{O}$,

$$\mathbf{O} \cdot A = \mathbf{O},$$

а, с обзиром на 7°,

$$A \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot A = \mathbf{O}.$$

(v) a) Према 4°, из

$$A + X = \mathbf{O},$$

следи

$$X = \mathbf{O} - A.$$

Ово краће пишемо

$$\mathbf{O} - A = -A \tag{5}$$

и према томе је

$$A + (-A) = \mathbf{O}. \tag{6}$$

b) Слично можемо показати да је

$$B + (-A) = B - A \tag{7}$$

јер је, према (3) и (6),

$$(B - A) + \{A + (-A)\} = B - A,$$

а према 2°,

$$\{(B - A) + A\} + (-A) = B - A;$$

како је, према 4°,

$$\{(B-A)+A\}=B,$$

то је

$$B+(-A)=B-A.$$

c) Даље је

$$A(-B)=(-A)B=-(AB). \tag{8}$$

Из

$$B-B=\mathbf{O},$$

следи, према (4),

$$A(B-B)=A\cdot\mathbf{O}=\mathbf{O},$$

а, према 8°,

$$AB+A(-B)=\mathbf{O}.$$

Дакле, према 4° и (5),

$$A(-B)=\mathbf{O}-AB=-AB.$$

Исто се тако доказује да је

$$(-A)B=-AB.$$

d) Најзад можемо доказати да је

$$-(-A)=A. \tag{9}$$

Из

$$-A-(-A)=\mathbf{O},$$

тј. према (6), из

$$-A+\{-(-A)\}=\mathbf{O} \quad \text{и} \quad -A+A=\mathbf{O},$$

следи, према 4°,

$$-(-A)=A.$$

e) Отуда добивамо још да је

$$(-A)(-B)=(-(-A))B=AB, \tag{10}$$

а специално да је

$$=(-A)^2=(-A)(-A)=A^2. \tag{11}$$

Задаци.

Покажи:

1. Да скуп свих целих бројева сачињава бројни прстен.
2. Да низ природних бројева не сачињава бројни прстен.
3. Да скуп бројева облика $p\cdot 2^{-k}$, где је p цео, а k природан број или нула, сачињава бројни прстен.

2. 2. Бројно тело. (i) *Аксиоми тела.* Ако прстен Π задовољава још следећа два аксиома тада он прелази у *бројно тело.*

9° У прстену Π постоји бар један од нуле $\mathbf{O}$ различит елемент A,

$$A\neq\mathbf{O}.$$

10° Ако су A и B дати из **П**, и ако је $A \neq \mathbf{O}$, тада постоји један и само један елемент Y из **П** такав да је

$$A \cdot Y = B.$$

Овај аксиом дефинише операцију *дељења*, Y је количник елемената B и A и означава се са

$$Y = \frac{B}{A}.$$

(ii) a) Аксиомом 10° одређен је *јединични елемент – јединица* $\mathbf{I}$ тела **T**. Према овом аксиому постоји у телу **T** тачно један елемент $\mathbf{I}$ такав да је за свако A из **T**

$$A \cdot \mathbf{I} = A. \tag{12}$$

Нека је C одређен $\neq \mathbf{O}$ елемент из **T**, тада, према 10°, постоји једно $\mathbf{I}_C$ тако да је

$$C \cdot \mathbf{I}_C = C, \tag{13}$$

и једно Y тако да је

$$Y \cdot C = A. \tag{14}$$

Према (13) је

$$Y(C \cdot \mathbf{I}_C) = Y \cdot C,$$

а према 6° је

$$Y(C \cdot \mathbf{I}_C) = (Y \cdot C)\mathbf{I}_C;$$

отуда

$$(Y \cdot C) \cdot \mathbf{I}_C = Y \cdot C,$$

што, према (14), даје

$$A \cdot \mathbf{I}_C = A. \tag{15}$$

Ако (12) и (13) упоредимо са (15), на основу једнозначности аксиома 10°, добивамо да је

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}.$$

Дакле, јединични елемент $\mathbf{I}$ тела **T** је *независан* од осталих елемената тога тела и једнозначно је одређен из

$$\mathbf{I} \cdot A = A \cdot \mathbf{I} = A. \tag{16}$$

b) Отуда следи да је $\mathbf{I} \neq \mathbf{O}$, и да је

$$\frac{A}{\mathbf{I}} = A.$$

Јер ако ставимо

$$Y = \frac{A}{\mathbf{I}}, \quad \text{тј.} \quad \mathbf{I} \cdot Y = A,$$

тада из 10° и (16) следи да је

$$Y = A.$$

c) Исто тако је

$$A \cdot \frac{1}{A} = 1 \quad \text{и} \quad B \cdot \frac{1}{A} = \frac{B}{A}.$$

Прва од ових једначина дефинише, према 10^0, *реципрочну вредност* $\frac{1}{A}$ елемента A. Другу добивамо ако Y одредимо из

$$AY = B, \quad \text{тј.} \quad Y = \frac{B}{A},$$

и извршимо ове операције:

$$B \cdot \frac{1}{A} = (A \cdot Y) \cdot \frac{1}{A} = Y \cdot \left(A \cdot \frac{1}{A}\right) = Y \cdot 1 = Y = \frac{B}{A}.$$

(iii) Наведимо неколико примера прстена и тела.

1^0. Скуп свих комплексних бројева као и скуп свих реалних бројева образују бројно тело.

2^0. Скуп свих рационалних бројева образује бројно тело.

3^0. Скуп свих целих бројева $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ образује прстен.

4^0. Скуп свих бројева облика $a + b\sqrt{2}$, где су a и b рационални бројеви образује бројно тело. Међутим, скуп бројева облика $a + b\sqrt[3]{2}$, са рационалним a и b, не образује ни бројно тело ни бројни прстен, док скуп свих бројева облика $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где су a, b и c рационални, сачињава бројно тело.

5^0. Скуп свих полинома једне промењиве образује бројни прстен.

6^0. Скуп свих рационалних функција (количника два полинома) образује бројно тело.

Из ових примера се види како појмови бројно тело и прстен нису никако везани за структуру њихових елемената већ за операције којима се ти елементи покоравају. Тако су у примерима 5^0 и 6^0 елементи функције. Чињеницом да скуп свих полинома чини прстен исказано је да се операцијама сабирања, одузимања и множења, извршеним на произвољним полиномима, долази опет до полинома, и да се ове операције покоравају аксиомима прстена.

Задаци.

Докажи:

1. Ако је за елементе A и B тела $\mathbf{T}$

$$A \cdot B = O,$$

тада мора бити или

$$A = O, \quad \text{или} \quad B = O.$$

2. Једини елемент X тела $\mathbf{T}$ за који је

$$X \cdot X = O \quad \text{је} \quad X = O;$$

а једини елементи X тела $\mathbf{T}$ за које је

$$X \cdot X = 1.$$

су

$$X = 1 \quad \text{и} \quad X = -1.$$

3. Ако са P, односно са N, означимо парне, односно непарне, бројеве, *као целину*, тада можемо образовати тело које се састоји из свега два елемента, P и N, од којих један одговара елементу O, а други елементу 1. При томе, под операцијом збира подразумевамо чињеницу да је збир два парна, односно непарна броја, паран ($P+P=P$, $N+N=P$), а збир непарног и парног броја непаран број ($P+N=$ $=N+P=N$), а под операцијом производа чињеницу да је производ два парна или парног и непарног броја паран ($P \cdot P = P$, $P \cdot N =$ $= N \cdot P = P$), а производ два непарна броја непаран ($N \cdot N = N$).

2. 3. Тело комплексних бројева. (i) Уочимо скуп свих бројних парова, тј. комплекса облика

$$X = (x, y),$$

где су x и y реални бројеви. За овако одређене елементе X дефинишимо операције сабирања и множења као у тачки 2. 1. (ii), тј.

збир:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d), \tag{1}$$

производ:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc), \tag{2}$$

где се под $a+c$, односно ac, подразумева обичан збир, односно производ реалних бројева.

Лако је непосредним рачуном проверити да су тада задовољени остали аксиоми тела, тј. $2^0 - 4^0$ и $6^0 - 10^0$, тако да скуп свих комплекса са овако дефинисаним збиром и производом сачињава бројно тело.

Према аксиому 4^0, комплексом $(a-c, b-d)$ дефинисана је разлика:

$$(a, b) - (c, d) = (a-c, b-d) \tag{3}$$

комплексних бројева (a,b) и $(c\ d)$.

Заиста, ако ставимо

$$A = (a, b), \quad B = (c, d) \quad \text{и} \quad X = (x, y),$$

тада је разлика X дефинисана са

$$B + X = A,$$

што, на основу дефиниције (1) збира, даје

$$C + x = a \quad \text{и} \quad d + y = b,$$

а отуда следи

$$x = a - c \quad \text{и} \quad y = b - d.$$

Дакле,

$$X = B - A = (a-c, b-d).$$

Специално за $A = B$, тј. за

$$a = c \quad \text{и} \quad b = d,$$

добивамо елемент нулу и то
$$\mathbf{O}=(0,\ 0). \tag{4}$$

Аксиомом 10° једнозначно је дефинисан количник
$$\frac{(c,\ d)}{(a,\ b)}=\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\ \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right) \tag{5}$$
ако је $(a,\ b)\neq\mathbf{O}$.

Јер, ако ставимо
$$A=(a,\ b),\quad B=(c,\ d)\quad \text{и}\quad Y=(z,\ t),$$
тада је, према аксиому 10°, за $A\neq\mathbf{O}$, количник $Y=B/A$ једнозначно дефинисан из
$$A\cdot Y=B.$$

Отуда је, према дефиницији производа (2),
$$az-bt=c$$
и
$$bz+at=d,$$
што даје
$$z=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}\quad \text{и}\quad t=\frac{ad-bc}{a^2+b^2},$$
јер, због $A\neq\mathbf{O}$, мора бити или $a\neq 0$, или $b\neq 0$, према томе $a^2+b^2\neq 0$.

Дакле,
$$Y=\frac{B}{A}=\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\ \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right).$$

Отуда, ако ставимо $B=A$, добивамо јединични елемент $\mathbf{I}$ посматраног тела. Из
$$A=B,\quad \text{тј.}\quad a=c\quad \text{и}\quad b=d,$$
следи
$$\frac{ac+bd}{a^2+b^2}=1\quad \text{и}\quad \frac{ad-bc}{a^2+b^2}=0,$$
дакле,
$$\mathbf{I}=(1,\ 0). \tag{6}$$

(ii) Комплекс $(a,\ 0)$ се може идентификовати са реалним бројем a и то на основу следећег.

Ако ставимо
$$A=(a,\ 0)\quad \text{и}\quad B=(b,\ 0),$$
тада је, према дефиницијама (1) и (2),
$$A+B=(a+b,\ 0),\quad A\cdot B=(ab,\ 0),$$
према (3) и (5),
$$B-A=(b-a,\ 0),\quad \frac{B}{A}=\left(\frac{b}{a},\ 0\right),\quad \text{са}\quad A\neq\mathbf{O}\quad \text{односно}\quad a\neq 0,$$

а према (4) и (6),

$$\mathbf{O}=(0,0) \quad \text{и} \quad \mathbf{I}=(1,0).$$

Према томе се сабирањем, множењем, одузимањем и дељењем комплекса A и B уствари сабирају, множе, одузимају и деле реални бројеви a и b, а елементима $\mathbf{O}$ и $\mathbf{I}$ одговарају 0 и 1 реалних бројева.

На исти начин, елементу $-\mathbf{I}$ одговара број -1, јер је

$$-\mathbf{I}=\mathbf{O}-\mathbf{I}=(0-1,\ 0-0)=(-1,0).$$

Према томе, можемо уопште ставити

$$(a,0)=a. \tag{7}$$

(iii) Означимо комплекс $(0,1)$ симболом i, тј. ставимо

$$i=(0,1). \tag{8}$$

Из

$$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1, \tag{9}$$

следи дефиниција броја i као последица множења комплекса.

Ако сада, према дефиницији збира и производа (1) и (2), и ознака (7) и (8), комплекс (x,y) напишемо у облику

$$\begin{aligned}(x,y)&=(x,0)+(0,y)=\\&=(x,0)+(0,1)\,(y,0)=\\&=x+iy,\end{aligned}$$

видимо да комплекс (x,y) прелази у комплексан број $x+iy$, где је имагинарна јединица i дефинисана са (9), а због чега се обично ставља

$$i=\sqrt{-1}.$$

Према томе, комплексан број је комплекс реалних бројева (a,b), са дефинисаним операцијама збира и производа, који као бројно тело испуњава аксиоме 1°—10°, а где је комплекс $(a,0)$ идентификован са реалним бројем a.

Задаци.

1. Ако за скуп бројних парова облика (a, b), где су a и b реални бројеви, дефинишемо збир и производ са

$$(a,b)+(a',b')=(a+a',\ b+b'),$$

$$(a,b)\cdot(a',b')=(aa',\ bb'),$$

тада он сачињава бројни прстен, али не и бројно тело.

2. Нека су за скуп бројних парова (a, b), где су a и b реални бројеви, збир и производ дефинисани овако:

$$(a, b)+(a', b')=(a+a', b+b'),$$

$$(a, b)(a', b')=(a'', b''),$$

где је

$$a''=\alpha aa'+\beta ab'+\gamma ba'+\delta bb',$$

$$b''=\alpha_1 aa'+\beta_1 ab'+\gamma_1 ba'+\delta_1 bb',$$

и где су $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и δ_1 одређени реални бројеви. Испитај какви морају бити ови последњи бројеви да би овај скуп сачињавао бројно тело.

3. Нека су за скуп елемената облика:

$$A=(a, b, c)=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4},$$

збир и производ дефинисани овако:

$$(a, b, c)+(a', b', c')=(a+a', b+b', c+c'),$$

$$(a, b, c)(a', b', c')=(a'', b'', c''),$$

где је

$$a''=aa'+2bc'+2cb',$$

$$b''=ab'+ba'+2cc',$$

$$c''=ac'+bb'+ca'.$$

Покажи да су аксиоми тела задовољени за скуп елемената A, код којих су бројеви a, b и c рационални. {Ако ставимо

$$A=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}, \quad B=a'+b'\sqrt[3]{2}+c'\sqrt[3]{4}, \quad Z=x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4},$$

тада је са

$$A\cdot Z=B$$

Z једнозначно одређено, јер детерминанта Δ система

$$ax+2cy+2bz=a',$$

$$bx+ay+2cz=b',$$

$$cx+by+az=c',$$

износи

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{vmatrix}=a^3+2b^3+4c^3-6abc,$$

и за рационалне бројеве a, b и c је увек $\Delta \neq 0$.

$$\Delta=(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})(a+b\varepsilon\sqrt[3]{2}+c\varepsilon^2\sqrt[3]{4})(a+b\varepsilon^2\sqrt[3]{2}+c\varepsilon\sqrt[3]{4}),$$

где је ε трећи јединични корен, (види тачку 7. 1—2.).}

3. Ознаке и особине.

3. 1. Елементи комплексног броја. **(i)** У комплексном броју

$$a = \alpha + i\beta,$$

α се назива *реални део* комплексног броја a и обележава симболом

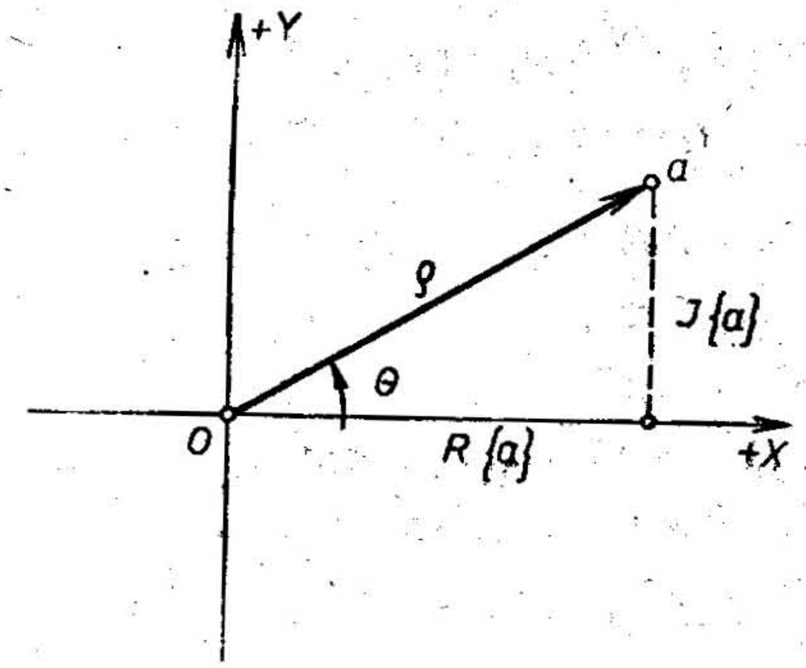
$$\alpha = R\{a\},$$

β се назива *имагинарни део* комплексног броја a и обележава се симболом

$$\beta = J\{a\}.$$

Дакле, $R\{a\}$ и $J\{a\}$ су координате тачке a или компоненте вектора $\vec{a}$ у правцу оса.

(ii) Уочимо комплексан број a (в. сл. 8). Дужина потега $\overline{Oa}$, тј. отстојање ρ тачке A од почетка O назива се *модуо* или *айсолуйна вредносӣ* комплексног броја a и обележава се симболом $|a|$.



Сл. 8

Дакле, $|a|$ је интензитет вектора $\vec{a}$.

$|a|$ је увек позитиван број, а из слике 8 види се да је,

$$\rho = |a| = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2} =$$

$$= +\sqrt{[R\{a\}]^2 + [J\{a\}]^2}.$$

(iii) Угао одређен правцем вектора $\vec{a}$ и позитивним смером реалне осе, тј. $\sphericalangle\,\theta$ мерен у радианима, назива се *аргуменӣ* комплексног броја a и обележава се са

$$arc\,(a),$$

тј. θ је *arcus* — *лук* — комплексног броја a (в. сл. 8).

Ако је дат комплексан број a, тада његов аргумент није једнозначно одређен, већ до на $\pm 2k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots\ldots$ Кад тај адитиван члан нема значаја узима се $k=0$. Тако, на пример, реалан позитиван број има аргумент 0; реалан негативан π, или $-\pi$; чисто имагинаран $i\beta$, са $\beta > 0$, има аргумент $\pi/2$, а са $\beta < 0$, $3\pi/2$, или $-\pi/2$. Сваком од ових аргумената може се додати $\pm 2k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots\ldots$

Из слике 8 видимо да је

$$tg\,\theta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{J\{a\}}{R\{a\}}.$$

Отуда следи да је $arc(a)$ једнак или

$$arc\,tg\,\frac{\beta}{\alpha} \pm 2k\pi,$$

или

$$arc\,tg\,\frac{\beta}{\alpha} + \pi \pm 2k\pi, \quad k=0, 1, 2, \ldots,$$

и можемо га једнозначно одредити, до на $2k\pi$, ако је још познат предзнак од $R\{a\}$ или од $J\{a\}$.

Напомена. Ређе се употребљава ознака $arg(a)$, тј. аргумент од a. У страној литератури налази се и ознака $amp(a)$, тј. *амплитуда* комплексног броја a.

(iv) Сви комплексни бројеви са истим реалним делом налазе се на правој паралелној Y-оси, а они са истим имагинарним делом на правој паралелној реалној оси.

Сви комплексни бројеви a са истим модулом $|a|=r$, налазе се на кругу полупречника r, са средиштем у почетку O. Кад је $r=1$, овај круг називамо *јединични круг.*

Сви комплексни бројеви a са истим аргументом

$$arc(a)=\theta,$$

налазе се на полуправој O, ∞ која заклапа угао θ са позитивним смером реалне осе.

Задаци.

Какав је у комплексној равни међусобни положај тачака:

1. $1+i$, $1-i$, $-1-i$ и $-1+i$;

2. $1+i$, $2+2i$, $3+3i$ итд.

3. 5, $4+i$, $3+2i$, $2+3i$ $1+4i$, $5i$.

Где се налазе комплексни бројеви за које је;

4. $R\{a\}<2$, а где $R\{a\}\leqslant 2$;

5. $J\{a\}>-3$, а где $J\{a\}\geqslant -3$;

6. $-1\leqslant R\{a\}\leqslant 1$; **7.** $2\leqslant J\{a\}\leqslant 3$;

8. $-1<R\{a\}<1$ и $-1<J\{a\}<1$.

Какво значење има $\leqslant$, а какво само $<$?

9. Истострани троугао уписан је у кругу полупречника 1 са средиштем у почетку; ако му једно теме лежи на имагинарној оси, одреди комплексне бројеве који одговарају осталим теменима.

10. Одреди комплексне бројеве који одговарају теменима правилног шестоугла уписаног у кругу полупречника 1 са средиштем у почетку, ако му се једно теме налази у тачки 1.

11. Који је међусобни положај тачака $a=\alpha+i\beta$ и $b=\beta+i\alpha$ и који комплексан број одговара средини дужи $\overline{ab}$?

12. Одреди чисто имагинаран број који одговара оној тачки из које се тачке $+3$ и -1 виде под правим углом.

13. Нађи модуо и аргумент комплексних бројева из задатака 1 – 3, 9 и 10, као и броја $p+\sqrt{1-p^2}$ за $p>1$ и $p<1$.

14. Ако је $R\{a\}=1/\sqrt{2}$ и $|a|=\sqrt{3}$, нађи $J\{a\}$ и $arc(a)$.

15. Дато је $J\{a\}=\sqrt{2}$ и $arc(a)=\pi/6$. Нађи $R\{a\}$ и $|a|$.

16. Који су то бројеви за које је $|a|=R\{a\}$ и $|a|=J\{a\}$?

Где се налазе комплексни бројеви a за које је:

17. $|a|>2$, или $|a|\leqslant 5$, или $2<|a|\leqslant 5$;

18. $\pi/6\leqslant arc\,(a)\leqslant\pi/3$;

19. $-\pi/4<arc(a)<\pi/4$ и $|a|<2$;

20. $|a|+R\{a\}\leqslant 2$.

21. Нека је $k>0$ и

$$R\{a\}=kJ\{a\},\quad J\{b\}=kR\{a\};$$

нађи однос између модула и аргумената бројева a и b.

22. Нађи услов између реалног и имагинарног дела броја a, тако да a буде у углу $\pi/6<\theta<\pi/3$, као и услова да се a налази у троуглу $0,\ 1+i\sqrt{3},\ 1+i/\sqrt{3}$.

3. 2. Тригонометриски облик. (i) Из троугла OAa (в. сл. 8) видимо да је

$$\alpha=R\{a\}=\rho\cos\theta,$$

$$\beta=J\{a\}=\rho\sin\theta,$$

а отуда

$$a=\alpha+i\beta=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta=\rho\,(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Ово је тзв. *тригонометриски облик* комплексног броја a. Због краткоће обележавамо га и са

$$a=\rho\cdot e(\theta),$$

тј. стављамо

$$e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta.$$

(ii) Како је

$$|e(\theta)|=1,$$

за свако θ, то израз $e(\theta)$ називамо *јединица у правцу* θ. Оправданост овог назива можемо донекле видети и из геометриског посматрања, које претставља ранији покушај којим се хтело показати како се наилази на имагинарну јединицу i, прелазећи са оријентисане праве у оријентисану раван.

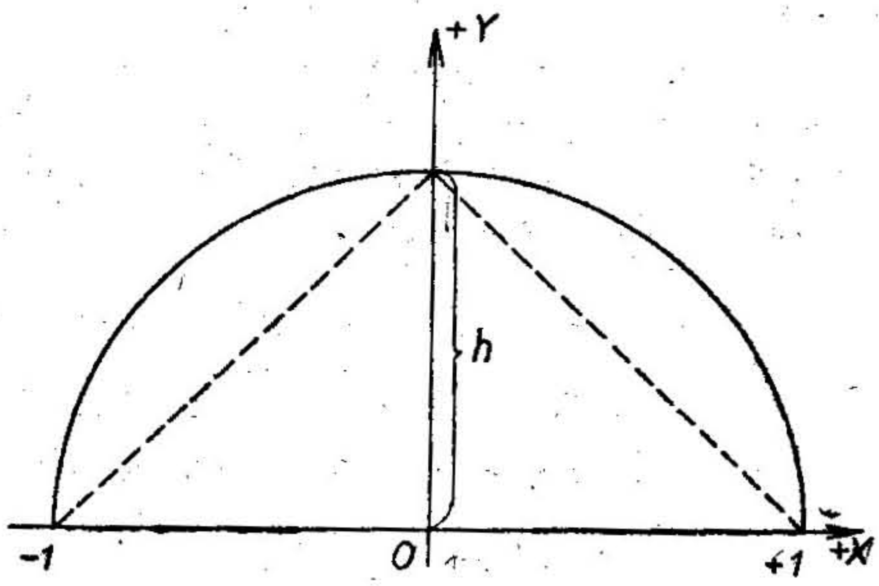
Нека је дата оријентисана права OX (в. сл. 9). Водећи рачуна, не само о апсолутној вредности дужи, већ и о њиховом предзнаку, тј. о оријентацији вектора $O, +1$ и $O, -1$, и стављајући да је h средња геометриска пропорционала из $\overline{O, +1}$ и $\overline{O, -1}$, добивамо

$$h^2 = (+1)(-1) = -1.$$

Дакле,

$$h = \sqrt{-1} = i$$

је јединица у правцу имагинарне осе.



Сл. 9

Слично долазимо до јединице у правцу θ.

Потражимо зато величину дужи $\overline{OM} = x$, која заклапа $\sphericalangle\theta$ са $\overline{OB} = q$, ако се тачка M налази на кругу чији је пречник $\overline{AB} = p + q$ (в. сл. 10). Како је

$$\overline{MC} = x \sin\theta,$$

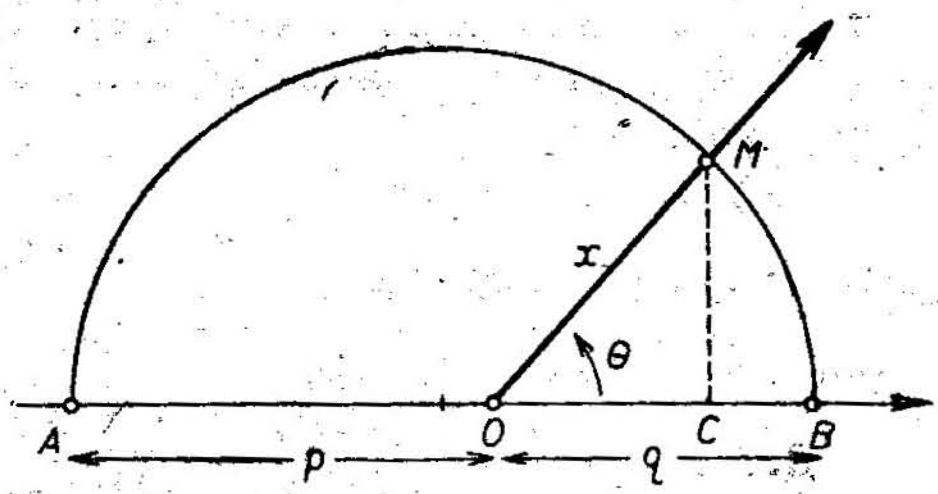
$$\overline{AC} = p + x\cos\theta,$$

и

$$\overline{BC} = q - x\cos\theta,$$

а $\overline{MC}$ средња геометриска пропорционала из $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$, тј.

$$\overline{MC}^2 = \overline{AC} \times \overline{BC},$$



Сл. 10

то заменом горњих вредности добивамо

$$x^2 \sin^2\theta = (p + x\cos\theta)(q - x\cos\theta),$$

$$\therefore\ x^2\sin^2\theta = pq + (q-p)\,x\cos\theta - x^2\cos^2\theta,$$

$$\therefore\qquad x^2 - (q-p)\cos\theta\, x - pq = 0.$$

(„$\therefore$" је скраћеница за „следи").

Стављајући $q = 1$ и $p = -1$, ова једначина постаје

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0,$$

а отуда

$$x = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta =$$

$$= \cos(\pm\theta) + i\sin(\pm\theta) = e(\pm\theta).$$

Дакле,

$$x_1 = e(\theta) \quad \text{и} \quad x_2 = e(-\theta),$$

где друго решење одговара јединици у правцу $-\theta$.

Задаци.

1. Нађи тригонометриски облик бројева из задатка 1 претходне тачке.

2. Напиши у тригонометриском облику бројеве који одговарају теменима правилног n-тоугла уписаног у круг полупречника 1, са средиштем у почетку, тако да се једно теме налази у тачки $+1$, или у тачки $+i$, и то за $n = 3, 4, 6$ и 8.

3. Ако је $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, нађи тригонометриски облик броја b тако да буде: 1° $J\{b\} = R\{a\}$ и $R\{b\} = J\{a\}$; 2° $R\{b\} = R\{a\}$ и $J\{b\} = -J\{a\}$.

4. Нађи реални и имагинарни део бројева

$$\sqrt{2}\,e(\pi/4),\quad \frac{1}{2}\sqrt{2}\,e(-\pi/4),\quad \sqrt{3}\,e\left(\frac{7\pi}{6}\right),\quad 2e\left(-\frac{13\pi}{3}\right).$$

5. Напиши у тригонометриском облику бројеве a, b, c и d, ако је $a = \sqrt{2}$, $d = 4i$, и ако њихови аргументи чине аритметичку, а модули геометриску прогресију.

3. 3. Коњуговано комплексан број. (i) *Два комплексна броја која се разликују само знаком имагинарног дела зову се коњуговано комплексни.*

Ако је

$$a = \alpha + i\beta,$$

његов коњугован број је

$$\alpha - i\beta,$$

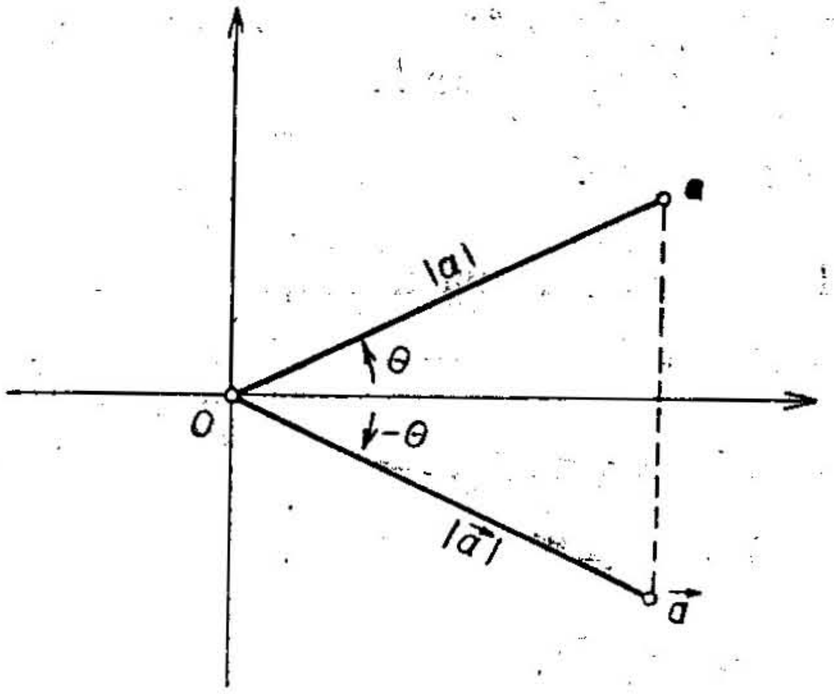
и обележава се са $\bar{a}$, тј.

$$\bar{a} = \alpha - i\beta.$$

Дакле,

$$R\{\bar{a}\} = R\{a\} \quad \text{и} \quad J\{\bar{a}\} = -J\{a\}.$$

Коњуговано комплексни бројеви, тј. тачке које им одговарају су, према томе, симетричне у односу на реалну осу (в. сл. 11).



Сл. 11

(ii) Јасно је, према слици 11, да је

$$|\bar{a}| = |a|$$

и

$$\operatorname{arc}(\bar{a}) = -\operatorname{arc}(a).$$

Према томе, ако ставимо

$$|a| = \rho \quad \text{и} \quad \operatorname{arc}(a) = \theta,$$

то је

$$|\bar{a}| = \rho \quad \text{и} \quad \operatorname{arc}(\bar{a}) = -\theta;$$

дакле,

$$\bar{a} = \rho\, e(-\theta),$$

а специјално

$$\overline{e(\theta)} = e(-\theta).$$

Напоменимо још да је, према дефиницији,

$$\overline{(\bar{a})} = a.$$

Задаци.

1. Ако је $|a| = |b|$, и $arc(b) = \pi/2 + arc(a)$, или $arc(a) + arc(b) = \pi$ изрази $\bar{b}$ помоћу $R\{a\}$ и $J\{b\}$.

2. Изрази a помоћу $|a|$, ако је $|a| = J\{a\} - J\{\bar{a}\}$.

Где се налазе бројеви a за које је:

3. $-1 \leqslant R\{\bar{a}\} \leqslant 1$ и $J\{\bar{a}\} = 2$;

4. $|\bar{a}| = 1$ и $\pi/4 \leqslant arc(\bar{a}) < \pi/2$;

5. $1 < |\bar{a}| \leqslant 2$ и $arc(\bar{a}) = \pi/4$;

6. $|\bar{a}| \geqslant 1$, $R\{a\} \leqslant 2$ и $|arc(a)| \leqslant \pi/3$;

7. Ако је $arc(a) = \pi/6$ и $|a| = |b|$, колики треба да је $arc(b)$, да би било $\bar{b} = -R\{a\} - iJ\{a\}$?

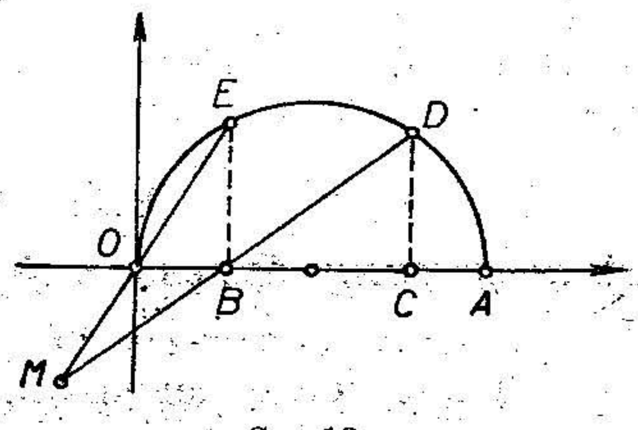
8. Ако су корени једначине

$$z^2 - 2pz + q = 0$$

имагинарни, и ако их означимо са z_1 и z_2, покажи да је $z_2 = \bar{z}_1$,

$$a = R\{z_1\} = R\{z_2\} \quad \text{и} \quad b = |z_1|^2 = |z_2|^2.$$

9. Над $\overline{OA} = 1$ (в. сл. 12) повучен је полукруг; из тачака B и C са $OB = \dfrac{1}{4}$ и $OC = \dfrac{3}{4}$, подигнуте су нормале до пресека E и D са кругом. Нађи комплексан број који одговара тачки пресека M правих OE и BD.



Сл. 12

3. 4. Односи комплексних бројева. (i) Комплексан број $a = \alpha + i\beta$ једнак је нули

$$a = 0,$$

ако му је реални део засебно и имагинарни део засебно једнак нули, тј. ако је

$$\alpha = R\{a\} = 0 \quad \text{и} \quad \beta = J\{a\} = 0.$$

Обратно, из

$$a = 0 \;\therefore\; \alpha = 0 \quad \text{и} \quad \beta = 0.$$

Како је

$$|a| = \sqrt{|R\{a\}|^2 + |J\{a\}|^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

то из

$$a = 0 \;\therefore\; |a| = 0.$$

Исто тако из

$$|a|=0$$

$$\therefore \quad \alpha=R\{a\}=0 \quad \text{и} \quad \beta=J\{a\}=0,$$

тј.

$$a=0,$$

јер је

$$|\alpha^2+\beta^2|=0,$$

само кад је и

$$\alpha=0 \quad \text{и} \quad \beta=0.$$

Сваки комплексан број $a \neq 0$ има одређен аргумент до на $\pm 2k\pi$; једино је аргумент броја нуле неодређен.

(ii) *Два комплексна броја* $a=\alpha+i\beta$ *и* $a'=\alpha'+i\beta'$ *су једнака, ако су им посебно реални делови и посебно имагинарни делови једнаки, тј. из*

$$a=a',$$

$$\therefore \quad R\{a\}=R\{a'\} \quad \text{и} \quad J\{a\}=J\{a'\},$$

или

$$\alpha=\alpha' \quad \text{и} \quad \beta=\beta'.$$

Ако је

$$a=\rho e(\theta), \quad a'=\rho' e(\theta'),$$

тада из $a=a'$, следи

$$\rho=\rho'$$

и

$$\theta=\theta'\pm 2k\pi, \quad k=0, 1, 2, \ldots\ldots,$$

тј. *комплексни бројеви су једнаки ако су им модули једнаки, а аргументи им се разликују за* $\pm 2k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots\ldots$

Дакле, једна једнакост у комплексним бројевима повлачи две једнакости у реалним бројевима, и обратно.

(iii) Код реалних бројева постоје три величинска односа: или је

$$a=b,$$

или

$$a>b,$$

или

$$a<b.$$

Код комплексних бројева постоје само два таква односа; и то, или је $a=b$ или је $a \neq b$. Односи $>$ и $<$ код комплексних бројева немају смисла. Ти се односи могу применити само на њихове модуле или реалне и имагинарне делове. Тако, на пример,

$$|a|<|b|,$$

значи да је тачка a ближа почетку од тачке b.

Задаци.

1. Одреди реалан број t тако да буде $arc(t+it^2)=\pi/3$.

2. Нека је $p>1$ и $a=p+\sqrt{1-p^2}$, одреди p тако да буде
$$arc(a)=\pi/6.$$

3. Ако је
$$a=(u+v)+i(u^2+v^2) \quad \text{и} \quad b=(u^2+v^2)+i(1-v),$$
одреди u и v тако да буде $a=b$, или $a=\overline{b}$.

4. Одреди све бројеве
$$a=t+i\tau \quad \text{и} \quad b=te(\tau),$$
тако да буде
$$a=b.$$

5. Нека је
$$a=1+i\lambda \quad \text{и} \quad b=1+i/\lambda;$$
за које је вредности од λ број a ближи почетку од броја b?

6. Који је од бројева $a=\sqrt{2}\,e(\pi/4)$ и $b=\sqrt{3}\,e(\pi/6)$ ближи правој $x=1/2$?

7. Ако су бројеви a и b такви да је $arc(a)=\pi/6$, $arc(b)=$ $=\frac{2\pi}{3}$ и $J\{a\}=J\{b\}$, који је ближи почетку O, а који правој $y=x\sqrt{3}$?

4. Сабирање и одузимање.

4. 1. Збир. (i) Збир комплексних бројева
$$a=\alpha+i\beta \quad \text{и} \quad a'=\alpha'+i\beta'$$
дефинисаћемо тако што ћемо десне стране горњих израза сматрати као биноме алгебарских величина за које важе основна правила алгебре, тј. сматраћемо i као обичну алгебарску величину.

По дефиницији је
$$a+a'=(\alpha+i\beta)+(\alpha'+i\beta')=(\alpha+\alpha')+i(\beta+\beta'),$$
тј. збир
$$a+a'$$
је онај број чији је реални део једнак збиру реалних делова, а имагинарни део једнак збиру имагинарних делова бројева a *и* a'.

Како за овако дефинисан збир важе асоцијативан и комутативан закон, то се ова дефиниција непосредно проширује и на збир коначног броја комплексних бројева
$$a_k=\alpha_k+i\beta_k,\quad k=1,2,\ldots,n,$$
и то
$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+i(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n).$$

Ово краће пишемо:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu + i \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu .$$

(*ii*) На основу ове дефиниције, збиру $a+a'$ одговара тачка у комплексној равни чија је апсциса

$$\alpha+\alpha' = R\{a\}+R\{a'\},$$

а ордината

$$\beta+\beta' = J\{a\}+J\{a'\},$$

(в. сл. 13).

Како је

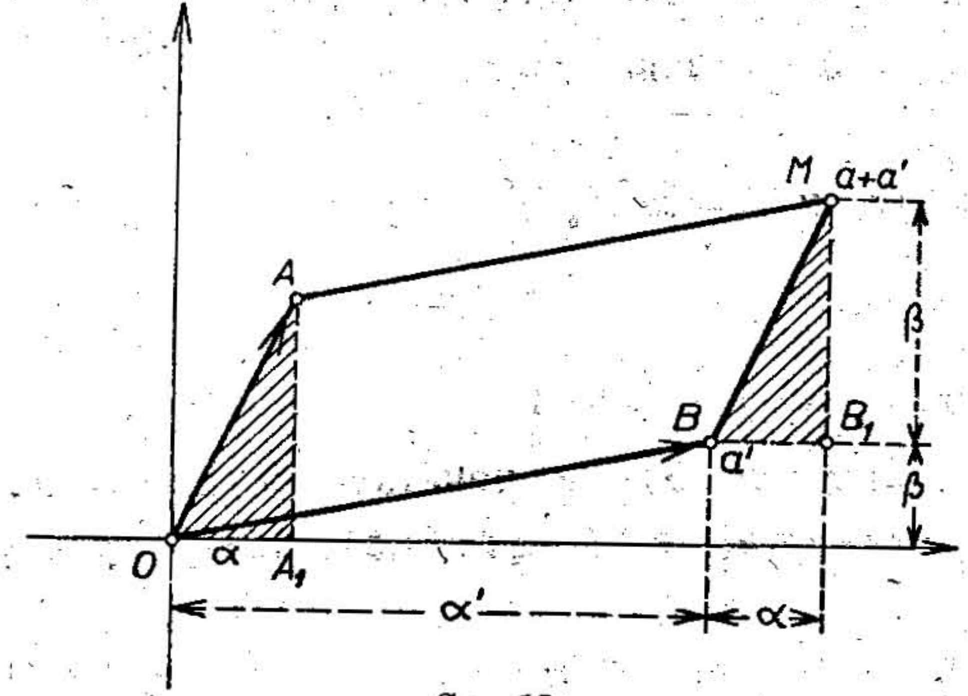
$$\Delta\, OA_1A \cong \Delta\, BB_1M,$$

то је

$$\sphericalangle AOA_1 = \sphericalangle MBB_1$$

и

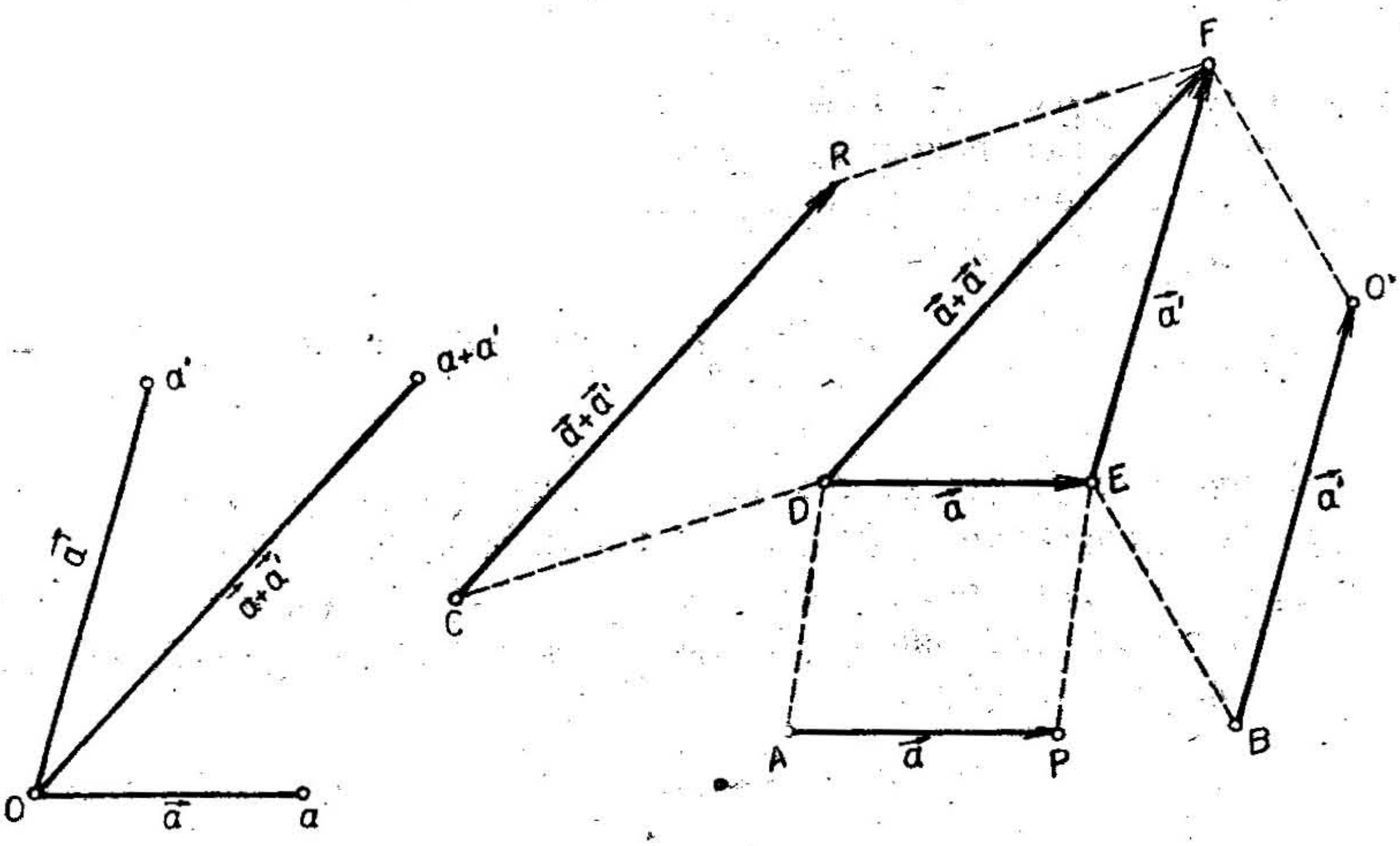
$$\overline{OA} = \overline{BM}.$$



Сл. 13.

Отуда следи да се тачка која одговара збиру $a+a'$, тј. тачка M, добива кад се кроз тачку a, тј. A, повуче права паралелна са $\overline{OB}$, и на њу пренесе дуж величине $|a'|$ у смеру Oa'.

(*iii*) Ако a и a' сматрамо као векторе положаја, овај се поступак своди на транслаторно померање вектора $\vec{a}'$, тако да му почетак



Сл. 14

дође у тачку a, тј. у крај вектора положаја $\vec{a}$. Тада крај овако померeног вектора $\vec{a'}$ одређује тачку збира $a+a'$. Такво сабирање назива се још и *геометриско* или *векторско* сабирање.

Сам поступак сабирања слободних вектора, тј. померања $\vec{a}$ и $\vec{a'}$, приказан је на слици 14.

Померање $\vec{a}=\vec{AP}$ је једнако померању $\vec{DE}$, или вектору положаја $\overrightarrow{O,a}$; померање $\vec{a'}=\vec{BQ}$ једнако је померању $\vec{EF}$, или вектору положаја $\overrightarrow{O,a'}$. Збир померања $\vec{DE}+\vec{EF}$ је померање $\vec{DF}$, а ово је једнако померању $\vec{CR}$, или вектору положаја $\overrightarrow{O,a+a'}$.

(iv) Из слика 15 и 16 видимо, да за овако дефинисан збир важе *комутативни* и *асоцијативни* закони збира.

Тако из слике 15 видимо да је

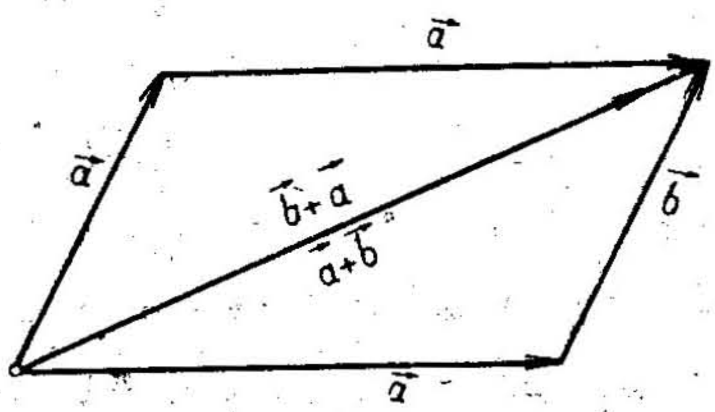
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$

што изражава *комутативни закон*.

Из слике 16 следи да је

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}),$$

што изражава *асоцијативни закон*.

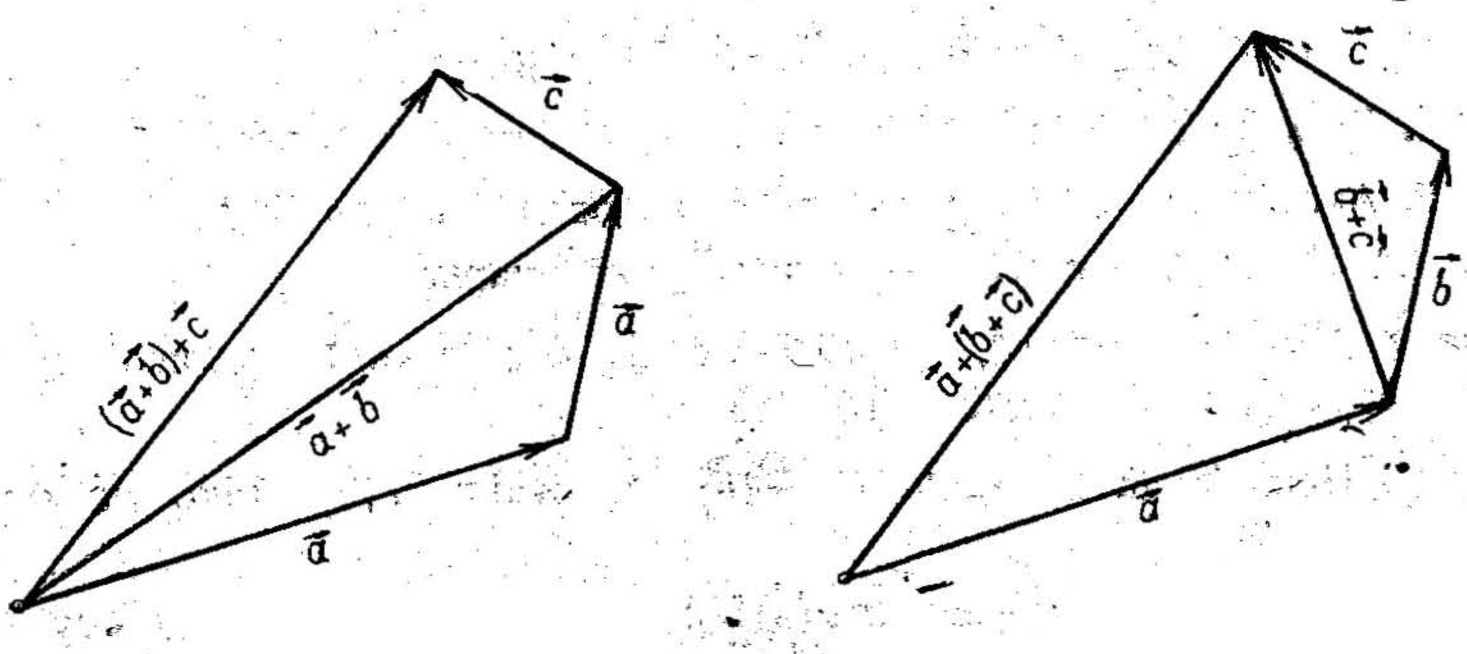


Сл. 15

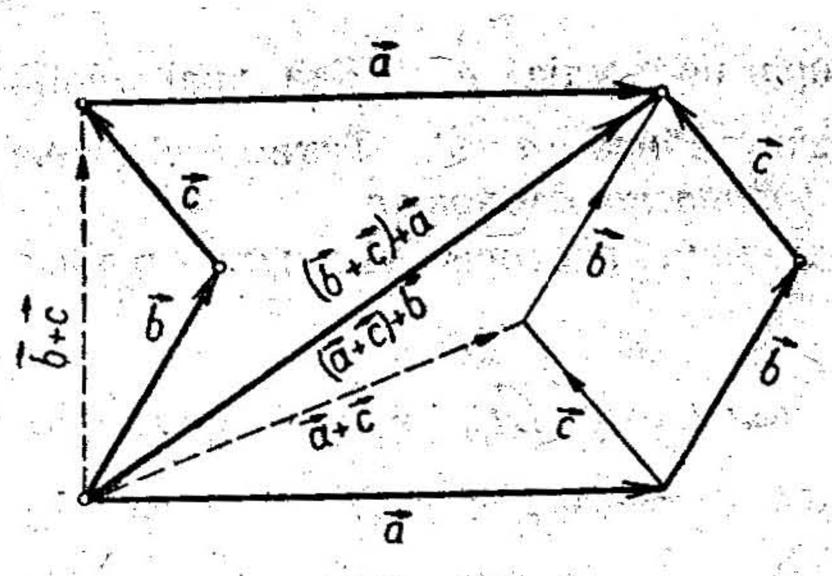
Најзад је на сл. 17 приказан збир

$$(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

Дакле, збир је независан од начина груписања чланова, јер збирови $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ и $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сл. 16), или $(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



Сл. 16



Сл. 17

(сл. 17), доводе увек до истог резултата. Ово се аналитички изражава уклањањем заграда, тако да је

$$(a+b)+c=a+(b+c)=$$
$$=(b+c)+a=a+b+c.$$

Задаци.

1. Одреди збир бројева који одговарају теменима правилног n-тоугла уписаног у круг полупречника 1, са средиштем у почетку O, и то за $n=3, 4, 6$ и 8.

2. Ако ставимо

$$\rho_0 e(\theta_0)=a_0,$$
$$\rho_1 e(\theta_1)=a_0+a_1,$$
$$\rho_2 e(\theta_2)=a_0+a_1+a_2;$$
$$\rho_3 e(\theta_3)=a_0+a_1+a_2+a_3, \quad \text{итд.},$$

одреди модуле ρ_k, $k=1, 2, \ldots$, ако бројеве a_k постепено одређујемо из $a_0=1$, $a_1=e\left(\theta_0+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $a_2=e\left(\theta_1+\dfrac{\pi}{2}\right), \ldots\ldots$

3. Дат је збир $a+b=1-i$; одреди a и b тако да буде:

1° $arc(a)=\pi/6$ и $arc(b)=10\pi/6$;

2° $|a|=1$ и $|b|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3° $arc(a)=\pi/6$ и $|b|=1$, или $|a|=2|b|$;

4° $arc(a)+arc(b)=-\pi/2$ и $|a|=|b|=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

4. Знајући да је $arc(1+a)=\pi/4$ и $|1+a|=4$, одреди a.

5. Ако је $a=1+i$, како треба изабрати b да буде $|a+b|=1$, и да: 1° $\bar{a}+b$, 2° $a+\bar{b}$, буде чисто имагинарно.

6. Ако је $|a|=\sqrt{2}$, $arc(a)=\pi/6$ и $arc(b)=\pi/3$, колики треба да је $|b|$ да буде $arc(a+b)=\pi/4$?

7. Нека је дато $a=1+i$, $R\{b\}=1$. Нађи $J\{b\}$ тако да буде $arc(a+b)=\pi/3$.

8. Ако је $arc(a)=\alpha$, $arc(b)=\beta$ и $arc(a+b)=\gamma$, где су α, β и γ дати углови, покажи да су све праве, које су одређене тачкама a и b, међусобно паралелне.

9. Ако је

$$arc(a)=\alpha, \quad arc(b)=\beta,$$
$$arc(a+b)=\gamma \quad \text{и} \quad arc(b+c)=\delta,$$

где су α, β, γ и δ дати углови, одреди $arc(a+c)$ и $arc(a+b+c)$.

10. Бројеви a, b и c су такви, да је $arc(a)=arc(c)=\pi/6$, $arc(b)=-\pi/3, |a|=1, |c|=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Одреди b тако да буде $J\{a+b+c\}=0$.

4.2. Разлика. (i) Одузимање дефинишемо као инверзну операцију сабирања. Разлика

$$c=a'-a$$

комплексних бројева

$$a'=\alpha'+i\beta' \quad \text{и} \quad a=\alpha+i\beta,$$

је број c који додат броју a даје a', тј.

$$a+c=a'.$$

Према томе, ако ставимо

$$c=\lambda+i\mu,$$

биће

$$\alpha+\lambda=\alpha' \quad \text{и} \quad \beta+\mu=\beta';$$

дакле,

$$\lambda=\alpha'-\alpha \quad \text{и} \quad \mu=\beta'-\beta.$$

Реални део разлике једнак је разлици реалних делова, а имагинарни део разлици имагинарних делова, тј.

$$(\alpha'+i\beta')-(\alpha+i\beta)=(\alpha'-\alpha)+i(\beta'-\beta).$$

Ако ставимо

$$0-a=-a,$$

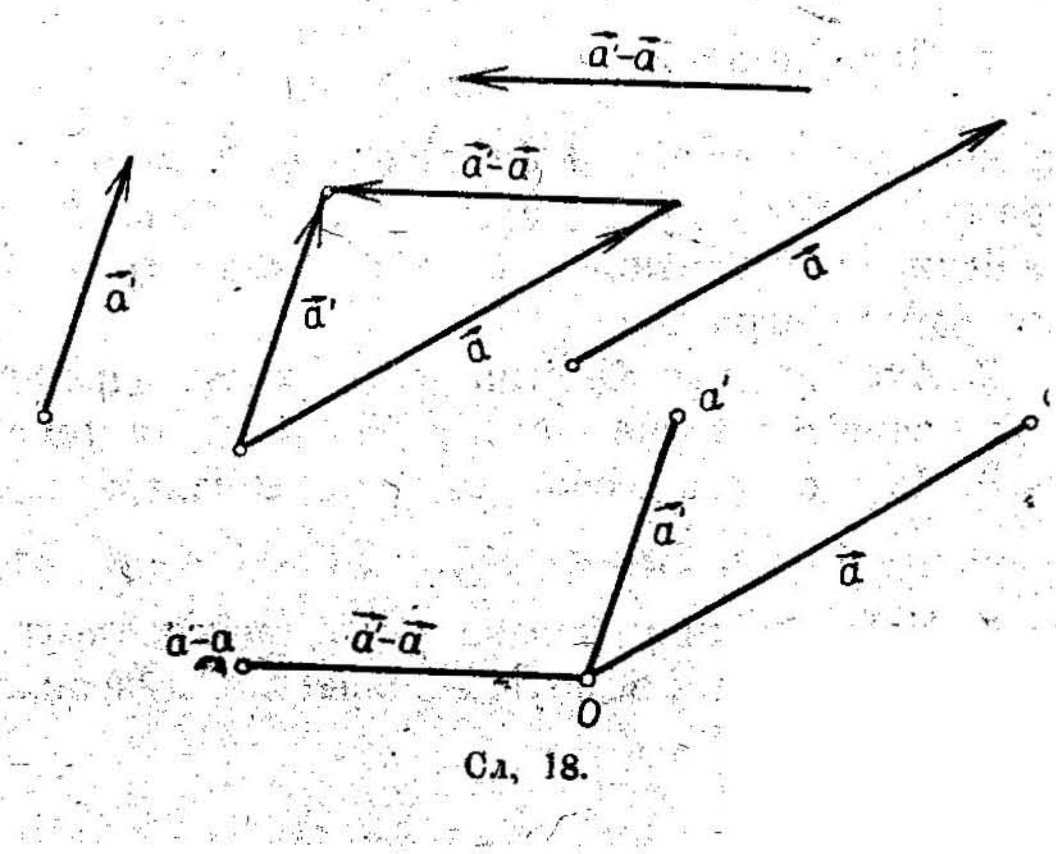
то се разлика $a'-a$ добива и као збир бројева a' и $-a$, тј.

$$a'-a=a'+(-a).$$

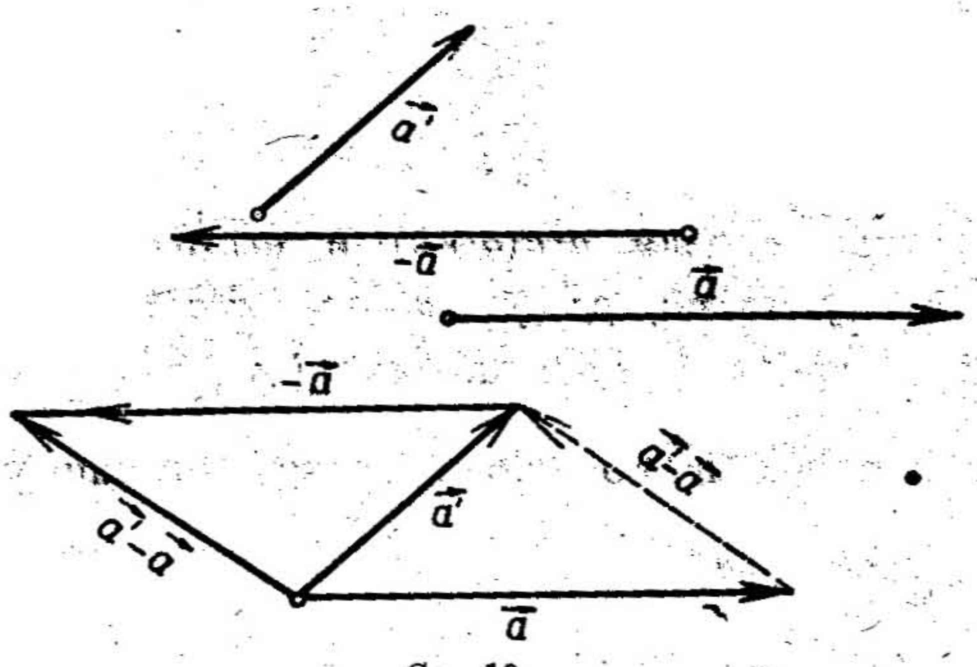
(ii) Сматрајући бројеве a и a' као померања $\vec{a}$ и $\vec{a}'$, разлику

$$\vec{c}=\vec{a}'-\vec{a}$$

(в. сл. 18), добивамо по дефиницији геометриског збира, као померање $\vec{c}$ које треба додати померању $\vec{a}$, да бисмо добили



Сл. 18.

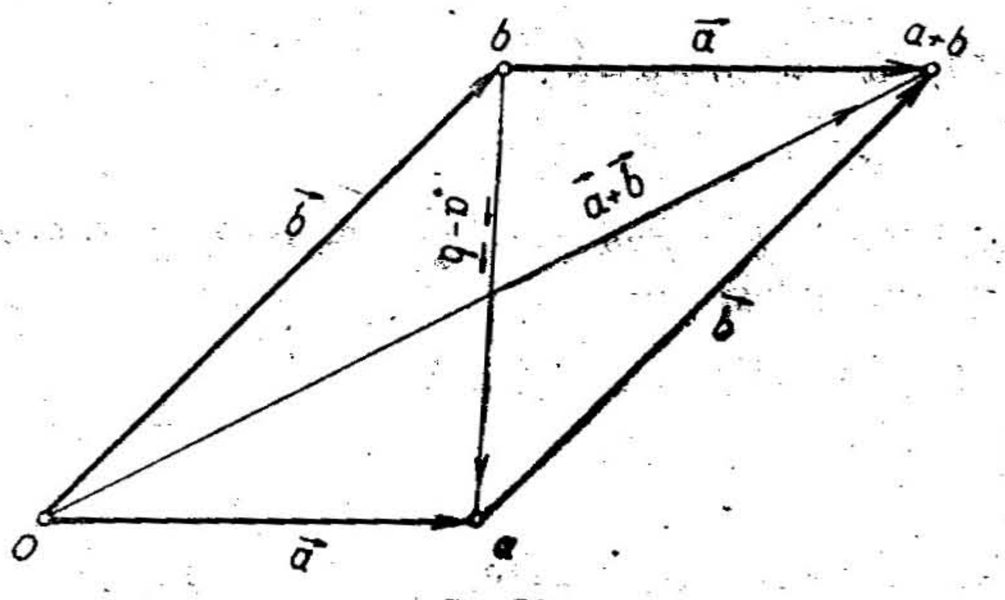


Сл. 19.

померање $\vec{a'}$; или то исто померање добивамо и ако померању $\vec{a'}$ додамо супротно померање, $-\vec{a}$ (в. сл. 19).

Вектори положаја $\vec{a'}$, $\vec{a}$ и $\vec{a'}-\vec{a}$ одређују тада положај одговарајућих тачака a', a и $a'-a$, (в. сл. 19).

(iii) Ако конструишемо збир $\vec{a}+\vec{b}$ и разлику $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, као на слици 20, видимо да су то диагонале паралелограма образованог векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Сл. 20

Према томе, дужине d и d' ових диагонала можемо изразити овако

$$d = |\vec{a}-\vec{b}| \quad \text{и} \quad d' = |\vec{a}+\vec{b}|.$$

Дакле, отстојање d тачака које одговарају бројевима a и b једнако је модулу разлике $a-b$, тј.

$$d = |a-b|.$$

Задаци.

1. Покажи да је
$$a-b+c-d=0$$
потребно и довољно да би тачке a, b, c и d биле темена паралелограма. — Нека су a, b, c, d и a, b', c, d' темена паралелограма са заједничким теменима a и c тада су и b, b' и d, d' темена неког паралелограма.

2. Ако су дати бројеви a, b, и c, одреди све бројеве d тако да одговарајуће тачке a, b, c и d буду темена паралелограма.

3. Ако је дата тачка a, где се налазе све тачке

$$a,\ a+a=2a,\ 2a+a=3a, \ldots,\ (k-1)\,a+a=ka, \quad k=1, 2, 3, \ldots.$$

4. Нађи дужину стране истостраног троугла, као и стране правилног шестоугла и осмоугла и њихових диагонала, кад је полупречник описаног круга 1.

5. Нека је дат угао α и комплексан број c; где ће налазе комплексни бројеви a и b, за које је

$$arc(a+b)=\alpha \quad \text{и} \quad a-b=c?$$

Где леже тачке z у комплексној равни за које је:

6. $arc(z-1)=\pi/3$; **7.** $arc(z-i)=-\pi/3$;

8. $\pi/6 \leqslant arc(z-1-i) \leqslant \pi/3$;

9. $\frac{\pi}{6} \leqslant arc(z+1+i) \leqslant \frac{\pi}{3}$ и $-\frac{5\pi}{6} \leqslant arc(z-1-i) \leqslant -\frac{4\pi}{6}$;

10. $|z-i|=2$; **11.** $|z+i|=2$;

12. $|z-i| \leqslant 1$ и $|z-1| \leqslant 1$;

13. $|z-a|<r$ и $|arc(z-a)|<\alpha$, где су a, r и α дати бројеви, од којих је a комплексан, а r и $\alpha<\pi$ реални и позитивни бројеви?

4. 3. Особине збира и разлике. (i) По дефиницији збира је

$$R\left\{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right\} = \sum_{\nu=1}^{n} R\{a_\nu\} \tag{1}$$

и

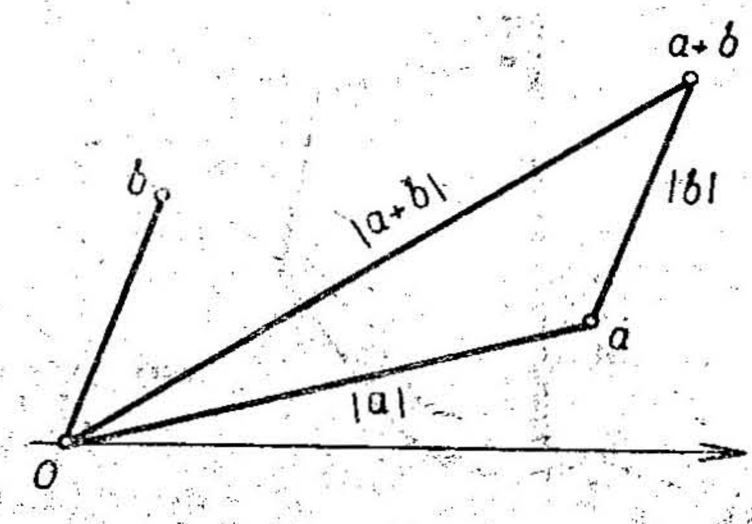
$$J\left\{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right\} = \sum_{\nu=1}^{n} J\{a_\nu\}. \tag{2}$$

Аналогни обрасци за модуо и аргумент не важе.

(ii) Уместо једначина облика (1) и (2) између модула збира и збира модула бројева a и b постоје неједначине:

$$|a|-|b| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|. \tag{3}$$

Како су $|a|$, $|b|$ и $|a+b|$ дужине страна троугла $O, a, a+b$, (в. сл. 21), то прва од неједначина (3) изражава да је разлика двеју страна троугла мања од треће, а друга да је збир двеју страна троугла већи од треће стране.



Сл. 21

Очевидно је, да се у (3) знак једнакости може појавити само ако су аргументи бројева a и b једнаки, или се разликују за π до на $\pm 2k\pi$, тј. ако се аргументи бројева a и b разликују за $\pm k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$.

Аналитички доказ неједначина (3) добивамо овако:

Нека је
$$a = u + iv \quad \text{и} \quad b = x + iy.$$
Из
$$0 \leqslant (uy - vx)^2,$$
$$\therefore \quad 2uvxy \leqslant u^2y^2 + v^2x^2,$$
$$\therefore \quad u^2x^2 + 2uxvy + v^2y^2 \leqslant u^2x^2 + u^2y^2 + v^2x^2 + v^2y^2,$$
тј.
$$(ux + vy)^2 \leqslant (u^2 + v^2)(x^2 + y^2),$$
или
$$ux + vy \leqslant \sqrt{(u^2 + v^2)(x^2 + y^2)}.$$

Ако ову неједначину помножимо са 2 и додамо $u^2 + v^2 + x^2 + y^2$, она се своди на
$$(u + x)^2 + (v + y)^2 \leqslant (\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{x^2 + y^2})^2.$$

Како је
$$|a|^2 = u^2 + v^2, \quad |b|^2 = x^2 + y^2$$
и
$$|a + b|^2 = (u + x)^2 + (v + y)^2,$$
то се ова последња неједначина своди на
$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{4}$$

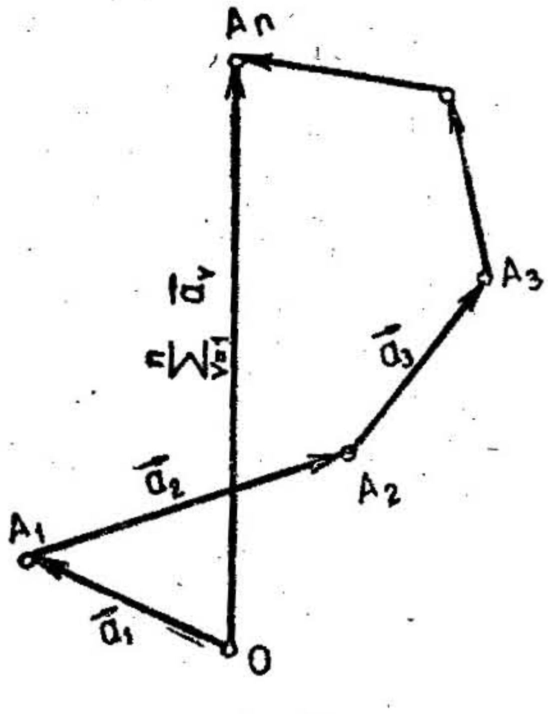
Ако у (4), тј. у
$$|a' + b'| \leqslant |a'| + |b'|,$$
ставимо
$$a' + b' = a \quad \text{и} \quad b' = -b,$$
добивамо
$$|a| \leqslant |a + b| + |b|;$$
дакле,
$$|a| - |b| \leqslant |a + b|.$$

(iii) Нека је дато n бројева a_ν, $\nu = 1, 2, \ldots n$. Према (4) је
$$|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2|,$$
$$|a_1 + a_2 + a_3| \leqslant |a_1 + a_2| + |a_3| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3|, \quad \text{итд.,}$$
тако да индукцијом добивамо, да је уопште
$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|.$$

Другим речима, *апсолутна вредност збира мања је од збира апсолутних вредности.*

Геометриски то исказује евидентну чињеницу (в. сл. 22), да је дужина изломљене линије $O, A_1, A_2 \ldots A_n$ увек већа од дужи $\overline{O, A_n}$.

Знак једнакости наступа само ако су аргументи свих бројева a_ν једнаки до на $\pm 2k\pi$.



Сл. 22

(iv) Непосредно из дефиниције збира и разлике видимо да је

$$\overline{(a+b)}=\bar{a}+\bar{b} \quad \text{и} \quad \overline{(a-b)}=\bar{a}-\bar{b},$$

или, уопште, за n бројева је

$$\overline{\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)}=\sum_{\nu=1}^{n} \overline{a_\nu}.$$

Дакле, *коњугована вредност збира једнака је збиру коњугованих вредности.*

Задаци.

Покажи да је:

1. $a+\bar{a}=2R\{a\}$; **2.** $a-\bar{a}=2iJ\{a\}$;

3. $|R\{a\}|\leqslant|a|$; **4.** $|J\{a\}|\leqslant|a|$;

5. $|R\{a\}|+|J\{a\}|\leqslant|a|\sqrt{2}$.

6. Нека је $0<h<1$; докажи аналитички и геометриски да из

$$|a|\leqslant h,$$

$$\therefore \quad |arc(1+a)|\leqslant arc \sin h.$$

7. Нека је $c=2e(\pi/6)$; одреди бројеве a и b, ако одговарајуће тачке леже симетрично у односу на праву O,c, а на отстојању 1 од тачке c, и ако је: 1° $|a-b|=2$; 2° $|a-b|=\sqrt{2}$.

5. Множење и дељење.

5. 1. Производ. (i) Нека је

$$a=\alpha+i\beta \quad \text{и} \quad a'=\alpha'+i\beta'.$$

Производ aa' комплексних бројева a и a' је комплексан број који се добива множењем бинома $\alpha+i\beta$ и $\alpha'+i\beta'$, сматрајући њихове чланове као обичне алгебарске величине, при чему се i^2 замењује са -1.

Према томе је, по дефиницији,

$$aa'=\alpha\alpha'-\beta\beta'+i(\alpha\beta'+\alpha'\beta),$$

или

$$R\{aa'\}=\alpha\alpha'-\beta\beta',$$

$$J\{aa'\}=\alpha\beta'+\alpha'\beta.$$

(ii) Образовање производа постаје прегледније ако бројеве a и a' посматрамо у тригонометриском облику, тј. ако ставимо

$$a=\rho\, e(\theta), \quad \text{и} \quad a'=\rho' e(\theta').$$

Како је у овом случају

$$\alpha=\rho\cos\theta, \quad \beta=\rho\sin\theta,$$

$$\alpha' = \rho' \cos\theta', \quad \beta' = \rho' \sin\theta',$$

то је, према дефиницији производа и адиционој теореми тригонометриских функција,

$$\begin{aligned} R\{aa'\} &= \rho\rho' \cos\theta \cos\theta' - \rho\rho' \sin\theta \sin\theta' = \\ &= \rho\rho' (\cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta') = \\ &= \rho\rho' \cos(\theta + \theta') \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} J\{aa'\} &= \rho\rho' \cos\theta \sin\theta' + \rho\rho' \cos\theta' \sin\theta = \\ &= \rho\rho' (\cos\theta \sin\theta' + \cos\theta' \sin\theta) \\ &= \rho\rho' \sin(\theta + \theta'). \end{aligned}$$

Отуда је

$$\begin{aligned} aa' &= R\{aa'\} + iJ\{aa'\} = \\ &= \rho\rho' \cos(\theta + \theta') + i\rho\rho' \sin(\theta + \theta') = \\ &= \rho\rho' \{\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')\} = \\ &= \rho\rho' e(\theta + \theta'). \end{aligned}$$

Према томе, кад је $a = \rho e(\theta)$ и $a' = \rho' e(\theta')$, тада је

$$aa' = \rho\rho' e(\theta + \theta').$$

Другим речима, *комплексни бројеви се множе ако им се модули помноже, а аргументи саберу.*

Отуда, *модуо производа једнак је производу модула:*

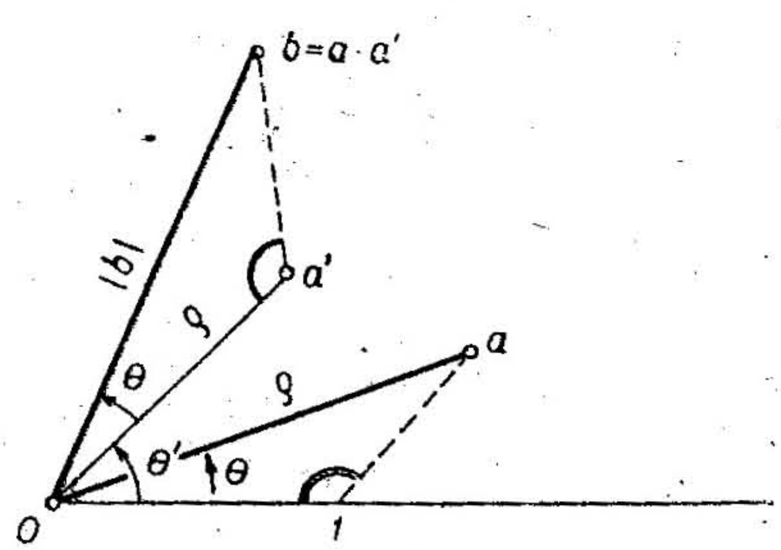
$$|aa'| = |a|\,|a'|,$$

а аргумент производа једнак је збиру аргумената:

$$arc\,(aa') = arc\,(a) + arc\,(a'),$$

или

$$e(\theta)\, e(\theta') = e(\theta + \theta').$$



Сл. 23

(iii) Уочимо тачке које одговарају бројевима

$$a = \rho e(\theta) \text{ и } a' = \rho' e(\theta').$$

Тачку b производа aa' добивамо (в. сл. 23) као треће теме троугла O, a', b, ако овај троугао конструишемо тако да буде сличан троуглу $O, 1, a$.

Заиста, из сличности ових троуглова следи, прво, да је

$$\sphericalangle 1, O, a = \sphericalangle a', O, b,$$

тј.

$$arc(b) = \theta + \theta',$$

друго, да је

$$\rho : 1 = |b| : \rho',$$

тј.

$$|b| = \rho\rho'.$$

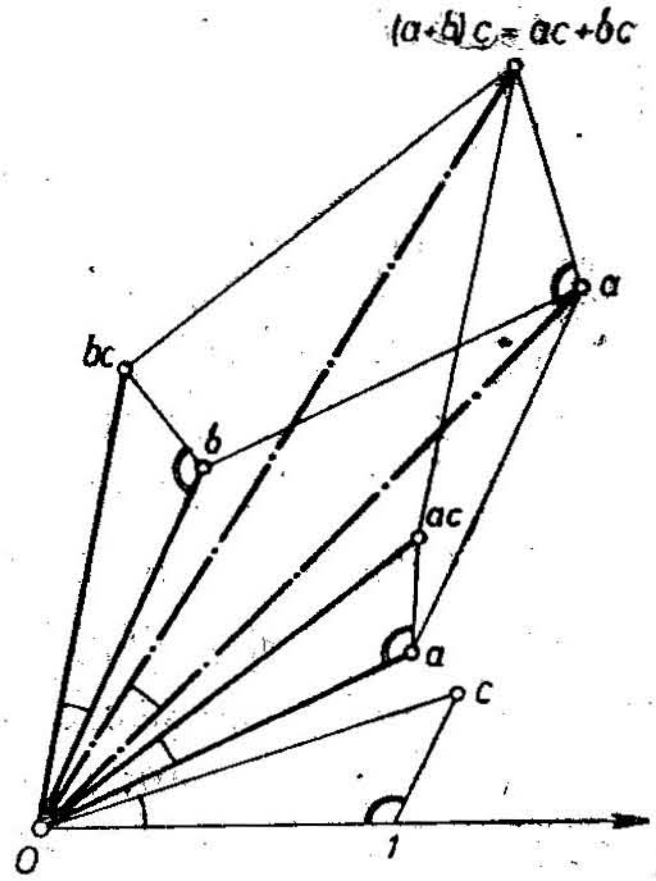
Дакле,

$$b = aa'.$$

(iv) Лако је непосредним рачуном проверити да за овако дефинисани производ важе како *комутативни* и *асоцијативни* закон $ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$, тако и *дистрибутивни* закон

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Овај последњи закон приказан је на слици 24.



Сл. 24

Задаци.

Покажи да је:

1. $|a|^2 = a \cdot \bar{a}$;

2. $R\{a\bar{b}\} = |a|p$, где је p пројекција вектора $\vec{b}$ на правац вектора $\vec{a}$;

3. $J\{a\bar{b}\} = 2P$, где је P површина троугла O, a, b;

4. $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2R\{a\bar{b}\}$, и да овај образац претставља косинусну теорему.

5. Покажи да се из

$$|a+b+c|^2 = (a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$$

може добити анологон косинусне теореме за четвороугао.

6. Нека је $a = 1+i$; одреди b тако да буде

$$R\{\bar{a}b\} = 0 \quad \text{и} \quad |\bar{a}b| = 2.$$

7. Одреди $z^n + \bar{z}^n$ и $z^n - \bar{z}^n$ за $n = 2, 3, 4$, кад је $z = 1+i$, или $z = 2+i$.

8. Одреди $f(z) = 2 + z + 3z^2 - z^3$ и $f(\bar{z})$ за $z = 3+2i$.

9. Покажи да је у једном паралелограму збир квадрата дијагонала једнак збиру квадрата страна, тј. да је

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

Изведи образац за разлику квадрата дијагонала.

10. Покажи да је

$$|b-a|^2+|c-b|^2+|d-c|^2+|a-d|^2=$$
$$=|c-a|^2+|d-b|^2+|a-b+c-d|^2,$$

и дај геометриску интерпретацију; упореди са претходним задатком и задацима 1 и 2 тачке **4. 2.**

11. Полазећи од $|z|^2\cdot|z'|^2=|z\cdot z'|^2$, покажи да за реално a, b, c и d важи идентитет

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

12. Одреди A и B тако да буде

$$(a_1{}^2+b_1{}^2)(a_2{}^2+b_2{}^2)(a_3{}^2+b_3{}^2)=A^2+B^2.$$

Одреди геометриско место тачака z за које је:

13. $R\{(1+i)z\}=0$;

14. $J\{a\bar{z}\}=0$, где је a дати комплексан број;

15. $R\{e(\pi/3)z\}=1$.

Где се налазе тачке z за које је:

16. $-1\leqslant J\{(1+i)z\}\leqslant 1$; **17.** $|arc(\bar{a}z)|\leqslant\pi/6$?

5. 2. Количник. (i) Дељење дефинишемо као инверзну радњу множења.

Нека је $a\neq 0$. Количник z бројева a' и a, тј.

$$z=a'/a,$$

је онај број којим треба помножити a да се добије a', тј.

$$az=a'.$$

Ставимо $a=\alpha+i\beta$, $a'=\alpha'+i\beta'$ и $z=x+iy$. Тада, према дефиницији производа, из

$$az=a'$$

$$\therefore\quad \alpha x-\beta y=\alpha' \quad \text{и} \quad \beta x+\alpha y=\beta'.$$

Како је детерминанта овог система

$$\begin{vmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^2+\beta^2=|a|^2,$$

то је за $a\neq 0$ увек $|a|^2\neq 0$, тако да из горњег система добивамо

$$x=R\left\{\frac{a'}{a}\right\}=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{и} \quad y=J\left\{\frac{a'}{a}\right\}=\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

(ii) Према претходном је

$$\frac{a'}{a}=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha^2+\beta^2}+i\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \text{за} \quad a\neq 0,$$

и ако приметимо да је

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = R\{\bar{a}a'\} \quad \text{и} \quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = J\{\bar{a}a'\},$$

то горњи количник можемо написати и у облику

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{|a|^2} R\{\bar{a}a'\} + \frac{i}{|a|^2} J\{\bar{a}a'\} = \frac{\bar{a}a'}{|a|^2}.$$

Отуда је

$$\frac{a'}{a} = \frac{a'\bar{a}}{a\bar{a}} = \frac{a'\bar{a}}{|a|^2}. \tag{1}$$

(iii) Ако ставимо

$$a = \rho e(\theta) \quad \text{и} \quad a' = \rho' e(\theta'),$$

тј.

$$|a|^2 = \rho^2 \quad \text{и} \quad \bar{a} = \rho e(-\theta),$$

па ове вредности заменимо у израз (1), добивамо за количник a'/a

$$\frac{a'}{a} = \frac{\rho' e(\theta') \cdot \rho e(-\theta)}{\rho^2} = \frac{\rho'}{\rho} e(\theta' - \theta).$$

Дакле,

$$\left|\frac{a'}{a}\right| = \frac{|a'|}{|a|}$$

и

$$arc\left(\frac{a'}{a}\right) = arc(a') - arc(a),$$

тј. *модуо количника два комплексна броја једнак је количнику модула, а аргуменш количника једнак је разлици аргуменаша.*

(iv) Комплексан број $\frac{1}{a}$ је *реципрочна вредносш* броја a.

Према (1) је (са $a' = 1$)

$$\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{|a|^2},$$

као и

$$\frac{a'}{a} = a' \cdot \frac{\bar{a}}{|a|^2} = a' \cdot \left(\frac{1}{a}\right),$$

тако да количник $\frac{a'}{a}$ можемо сматрати и као производ из броја a' и реципрочног броја, $\frac{1}{a}$.

Ако је

$$a = e(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta,$$

биће

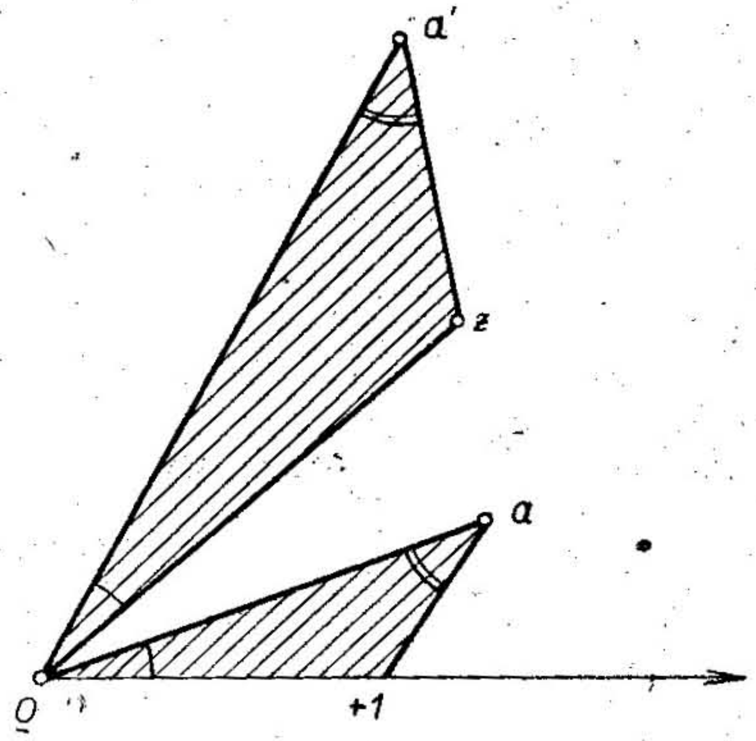
$$\frac{1}{e(\theta)} = e(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e(\theta)}.$$

Специално, за $\theta=\pi/2$ је

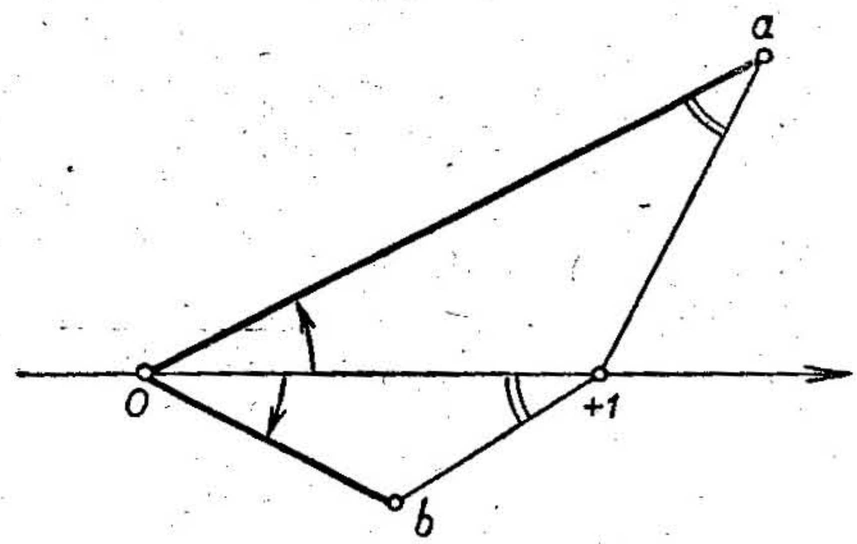
$$\frac{1}{i}=\frac{1}{e(\pi/2)}=e(-\pi/2)=-i.$$

(v) Тачка која одговара броју $z=\dfrac{a'}{a}$ добива се конструкцијом троугла O, z, a' који је сличан троуглу $O, 1, a$ (в. сл. 25). Из сличности ових троуглова следи, према конструкцији производа, да је

$$az=a', \quad \text{тј.} \quad z=a'/a.$$



Сл. 25



Сл. 26

Отуда, стављајући $a'=1$, добивамо (в. сл. 26) и тачку која одговара броју $b=1/a$.

Тачку $b=1/a$ можемо добити и кад одредимо прво радиално реципрочну тачку у односу на јединични круг, тј. ону тачку c за коју је

$$arc(c)=arc(a),$$

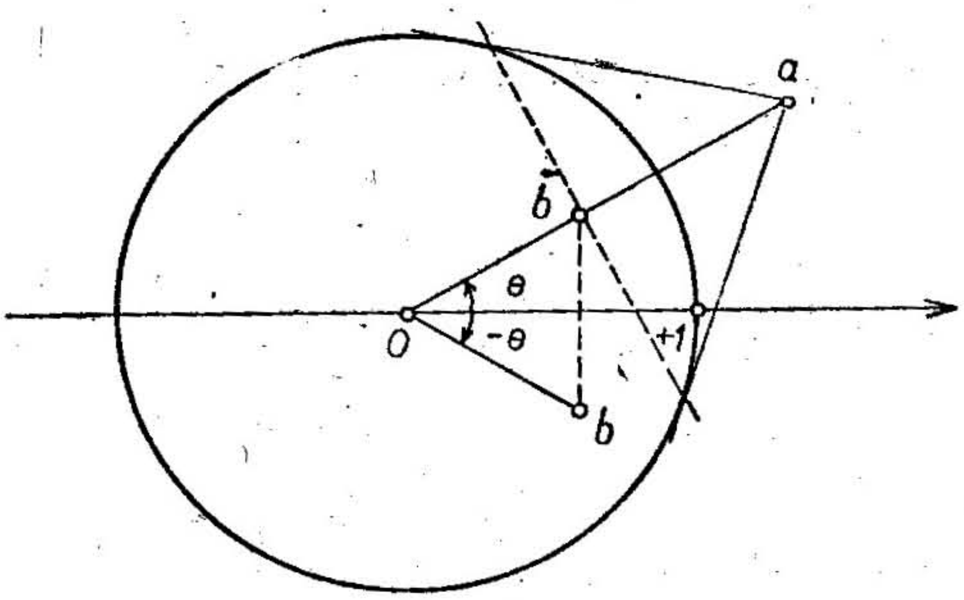
и

$$|c|\cdot|a|=1,$$

а затим одредимо тачки c симетричну тачку $\bar{c}$ у односу на реалну осу, јер је

$$\bar{c}=b, \quad \text{тј.} \quad c=\bar{b},$$

(в. сл. 27).



Сл. 27

Задаци.

1. Покажи да је

$$|a/\bar{a}|=1 \quad \text{и} \quad arc(a/\bar{a})=2\,arc(a),$$

тј. да из

$$a=\rho\, e(\theta) \quad \text{следи} \quad a/\bar{a}=e(2\theta).$$

2. Нека су дати углови α и β; одреди z тако да буде

$$arc(z-1)=\alpha \quad \text{и} \quad arc(z+1)=\beta.$$

На основу претходног задатка ови услови се своде на

$$\frac{z-1}{\bar{z}-1}=e(2\alpha) \quad \text{и} \quad \frac{z+1}{\bar{z}+1}=e(2\beta);$$

реши овај систем по z.

Одреди реални и имагинарни део бројева:

3. $\frac{1}{3+i}$; **4.** $\frac{1}{(1+2i)^2}$; **5.** $\frac{e(\pi/6)}{3-4i}$; **6.** $\frac{1+i\sqrt{2}}{-1+i\sqrt{2}}$;

7. $\frac{1}{1-re(\alpha)}$.

8. Где леже све тачке z за које је $\left|\frac{1}{z}\right|<r$?

9. Одреди z из услова

$$\left|\frac{z}{z+1}\right|=1, \quad \frac{z}{\bar{z}}=i.$$

10. Одреди b из услова

$$J\{ib\}=J\{b\} \quad \text{и} \quad \left|\frac{1+i}{b}\right|=1.$$

11. Изрази $a+\frac{1}{a}+\frac{a}{1-a}$ у облику $x+iy$, где је $a=\alpha+i\beta$.

12. Какав мора бити међусобни положај тачака које одговарају бројевима x и y, ако је

$$x=4\bar{y} \quad \text{и} \quad xy=1?$$

5.3. Особине производа и количника. **(i)** Производ више бројева

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$$

пишемо скраћено

$$a_1 a_2 \ldots a_n=\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu,$$

где Π указује на операцију множења.

Ако овај производ напишемо у облику производа два фактора

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu=\left(\prod_{\nu=1}^{n-1} a_\nu\right) a_n,$$

тада је

$$\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|=\left|\prod_{\nu=1}^{n-1} a_\nu\right| \cdot |a_n|.$$

Отуда, индукцијом, добивамо да је уопште

$$\left|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right| = \prod_{\nu=1}^{n} |a_\nu|. \tag{1}$$

тј. *модуо производа једнак је производу модула.*

(*ii*) Примењујући исти поступак за аргумент производа више бројева долазимо до обрасца

$$arc\left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} arc\,(a_\nu)\,, \tag{2}$$

тј. *аргумент производа једнак је збиру аргумената.*

Ако је

$$a_\nu = \rho_\nu e(\theta_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots . n,$$

тада горњем ставу можемо дати и облик

$$e(\theta_1)\cdot e(\theta_2) \ldots . e(\theta_n) = e(\theta_1 + \theta_2 + \ldots . + \theta_n), \tag{3}$$

што претставља уопштење тзв. Moivre-ова обрасца који ћемо срести код степена.

Напоменимо аналогију која постоји између израза $e(\theta)$ и степена a^θ, јер је и за степен

$$a^{\theta_1}\cdot a^{\theta_2}\cdot \ldots . a^{\theta_n} = a^{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n}.$$

(*iii*) Према дефиницији производа, можемо непосредно проверити да је

$$\overline{ab} = \bar{a}\cdot\bar{b} \quad \text{и} \quad \overline{(a/b)} = \bar{a}/\bar{b}.$$

Ово увиђамо и кад, у односу на реалну осу, нацртамо симетричне слике слика 23 и 25.

Индукцијом добивамо тада да је уопште, за производ од n бројева

$$\overline{\left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)} = \prod_{\nu=1}^{n} \bar{a}_\nu,$$

тј. да је *коњугована вредност производа једнака производу коњугованих вредности.*

(*iv*) Видели смо да је реални и имагинарни део збира и разлике једнак збиру и разлици реалних и имагинарних делова, а да нема аналогног правила за модуо и аргумент. Исто тако је модуо или аргумент производа и количника једнак производу и количнику модула, а збиру и разлици аргумената, док аналогног правила за реални и имагинарни део нема. Међутим, коњугована вредност збира, разлике, производа и количника увек је једнака збиру, разлици, производу и количнику коњугованих вредности. Другим речима, *коњугована вредност једно-рационалног израза се добива коњуговањем свих имагинарних бројева који се у њему јављају.*

Пример:

1° $$\overline{\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)}=\frac{\bar a-\bar b}{1+\bar a\bar b};$$

2° $$\overline{\left(\frac{1+ie(\alpha)}{1-ie(\beta)}\right)}=\frac{1-ie(-\alpha)}{1+ie(-\beta)}.$$

Уопште, ако означимо са $R(x, y, z, \ldots)$ рационални израз у коме су све имагинарне јединице садржане у величинама $x, y, z, \ldots$, тада је

$$\overline{R(x,y,z,\ldots)}=R(\bar x, \bar y, \bar z, \ldots).$$

(v) Како се коњуговане величине лако добивају, од интереса су везе којима се $R\{a\}, J\{a\}, |a|$ и $arc(a)$ изражавају помоћу a и $\bar a$; те везе су:

$$R\{a\}=\frac{a-\bar a}{2},\quad J\{a\}=\frac{a-\bar a}{2i},\quad |a|^2=a\cdot\bar a \quad \text{и} \quad 2arc(a)=arc(a/\bar a),$$

или, кад је $a=\rho e(\theta)$,

$$\rho^2=a\bar a \quad \text{и} \quad e(2\theta)=a/\bar a.$$

Задаци.

1. Покажи да је

$$R\left\{\frac{b}{a}\right\}=\frac{\bar ab+a\bar b}{2|a|^2} \quad \text{и} \quad J\left\{\frac{b}{a}\right\}=\frac{\bar ab-a\bar b}{2i|a|^2}.$$

2. Одреди реалне бројеве x и y тако да буде $ax+by=c$; (1) које услове морају задовољавати комплексни бројеви a и b, да постоји одређено решење? (Изрази овај услов са $\bar a$, a, b и $\bar b$; из (1) следи да је $\bar ax+\bar by=\bar c$.)

3. Из једначине

$$az+b\bar z=c, \tag{2}$$

где су a, b и c дати бројеви, одреди z. Покажи: да задатак није могућ ако је $|a|=|b|$ и $\bar ac-b\bar c\neq 0$; да је задатак неодређен ако је

$$|a|=|b| \quad \text{и} \quad arc(\bar a/b)=arc(\bar c/c),$$

и да се у том случају дата једначина своди на

$$2R\{a\bar cz\}=|c|^2.$$

За $z=x+iy$ горња једначина претставља једначину праве, која пролази кроз тачку $c/2a$ и стоји нормално на вектору $\overrightarrow{\bar ac}$. (Из (2) следи $\bar a\bar z+\bar bz=\bar c$.)

4. Дати су комплексни бројеви a и b и реални бројеви α и β; одреди z из једначина

$$arc(z-a)=\alpha \quad \text{и} \quad arc(z-b)=\beta.$$

Шта претстављају ове једначине геометриски?

Ако са t означимо реалан промењив параметар, са a, b и c дате комплексне бројеве, одреди геометриско место тачака z кад се t мења:

5. $z=e(t)$; 6. $z=3e(t)$; 7. $z=te(\pi/3)$;

8. $z=i+te(\pi/6)$; 9. $z=a+t(b-a)$, $0\leqslant t\leqslant 1$;

10. $z=a+be(t)$; 11. $z=a+bt+ct^2$; 12. $z=ae(t)+be(-t)$;

13. $z=t+e(t)$; 14. $z=ai+at-ibe(-t)$.

Нађи геометриско место тачака z за које је:

15. $R\{ze\left(\frac{\pi}{6}\right)\}=const$; 16. $R\left\{\frac{1}{z}\right\}=const$;

17. $J\left\{\frac{1}{z}\right\}=const$; 18. $|(z-1)(z+1)|=const.$

6. Степеновање.

6. 1. Степен. **(i)** Видели смо да се четири основне рачунске радње, сабирање, одузимање, множење и дељење са комплексним бројевима могу дефинисати као рачунске радње са алгебарским количинама, с тим да се i^2, гдегод се појави, замени са -1.

Како је степеновање целим експонентом само скраћен начин писања множења, јер је, по дефиницији,

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n},$$

то су овим дефинисани и поједини степени броја i. Тако је

$$\begin{aligned}
i^1&=i,\\
i^2&=-1,\\
i^3&=i^2\cdot i=-i,\\
i^4&=i^3\cdot i=-i^2=1,\\
i^5&=i^4\cdot i=i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Дакле, уопште је,

$$i^n=i, \quad \text{или} \quad -1, \quad \text{или} \quad -i, \quad \text{или} \quad +1,$$

према томе да ли је $n-1$, или $n-2$, или $n-3$, или n дељиво са 4.

(ii) Да бисмо у општем случају видели како изгледа n-ти степен комплексног броја облика $x+iy$, испитајмо, најпре, закон образовања појединих чланова степена реалног бинома $(x+y)^n$ у развијеном облику.

За $n=1, 2, 3, \ldots ,$ је

$$
\begin{aligned}
(x+y)^1 &= x+y, \\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3, \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+x^4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Како сваку од ових једначина добивамо ако претходну помножимо са $(x+y)$, то видимо, кад коефициенте тако добивених појединих чланова распоредимо у облику тзв. *Pascal-ова троугла*, да се сваки од њих добива сабирањем она два броја која се налазе непосредно изнад њега.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

(iii) У општем случају n-ти степен бинома $x+y$ у развијеном облику има $n+1$ чланова. Сваки од ових чланова има облик $x^{n-k}y^k$, $k=0, 1, 2, \ldots n$, помножен извесним коефициентом, који обично обележавамо са

$$\binom{n}{k}, \quad \text{(читај } n \text{ над } k)$$

и који се зове *биномни коефицијент*.

Дакле,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \ldots + \binom{n}{n}y^n =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu} y^{\nu}.$$

Ово је тзв. *биномни образац*. Како су у њему коефициенти од x^n и y^n једнаки јединици, то је

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{за свако } n=1, 2, \ldots .$$

Општи облик биномног коефициента је

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

где $n!$ (читај n факториел) претставља производ првих n природних бројева, тј.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n,$$

и где је, по дефиницији, $0! = 1$.

Да бисмо ово увидели, приметимо да је

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left\{\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right\} =$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(k-1)!\,(n-k)!\,k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Дакле, збир два узастопна биномна коефициента истога реда даје онај биномни коефициент наредног реда који се налази непосредно испод њих. Како су први биномни коефициенти једнаки јединици, тј. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ за свако n, то индукцијом закључујемо да $\binom{n}{k}$ претставља k-ти број n-тога реда Pascal-ова троугла, рачунајући при томе први број као нулти.

$$\begin{array}{c} \ldots\ldots\binom{n}{k-1} \quad \binom{n}{k}\ldots\ldots \\ \hline \downarrow \\ \ldots\ldots\ldots\binom{n+1}{k}\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

(iv) Нека је $z = x + iy$ комплексан број. Степен z^n је дефинисан као производ од n једнаких фактора z. Дакле,

$$z^1 = (x+iy)^1 = x+iy,$$

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

У општем случају, на основу биномног обрасца, је

$$z^n = (x+iy)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu}(iy)^\nu =$$

$$= \binom{n}{0}x^n + i\binom{n}{1}x^{n-1}y - \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 - i\binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \binom{n}{4}x^{n-4}y^4 + \ldots.$$

$$= \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{4}x^{n-4}y^4 - \ldots.$$

$$+ i\left\{\binom{n}{1}x^{n-1}y - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \binom{n}{5}x^{n-5}y^5 - \ldots.\right\}.$$

Дакле,

$$R\{z^n\} = \Sigma' \pm \binom{n}{\nu} x^{n-\nu} y^\nu,$$

где Σ' значи да треба сабирати само преко парних индекса ν, а где се предзнаци алтернативно мењају; исто тако је

$$J\{z^n\} = \Sigma'' \pm \binom{n}{\nu} x^{n-\nu} y^\nu,$$

где Σ'' значи да сабирање треба вршити само преко непарних вредности индекса ν, и где се предзнаци такође алтернативно мењају.

(v) Услед тога што је степеновање уствари множење, то је степен z^n лакше проучити, ако посматрамо модуо и аргумент броја z.

На основу правила о производу више бројева (в. тачку **5. 3.** (i) и (ii)), тј. да је модуо производа од n фактора једнак производу модула, и да је аргумент производа од n фактора једнак збиру аргумената, добивамо, када су сви ови фактори међусобно једнаки, да је

$$|z^n| = |\underbrace{z z \ldots z}_{n}| = \underbrace{|z|\,|z| \ldots |z|}_{n} = |z|^n,$$

као и

$$arc(z^n) = arc(\underbrace{z z \ldots z}_{n}) = \underbrace{arc(z) + arc(z) + \ldots + arc(z)}_{n} = n\,arc(z).$$

Дакле,

$$|z^n| = |z|^n \tag{1}$$

и

$$arc(z^n) = n\,arc(z), \tag{2}$$

тј. *модуо степена једнак је степену модула, а аргумент степена једнак је n-тоструком аргументу основе.*

Према томе, ако ставимо

$$z = \rho e(\theta),$$

биће

$$z^n = \rho^n e(n\theta). \tag{3}$$

Задаци.

1. Одреди реални и имагинарни део, модуо и аргумент бројева:

1° $(1+i)^n$ за $n = 1, 2, 3, \ldots$;

2° $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ и $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$, за произвољно n.

2. Ако са $[x]$ означимо највећи цео број који није већи од x, покажи да је

$$i^n = (-1)^{[n/2]} \quad \text{или} \quad i(-1)^{[n/2]},$$

према томе да ли је n паран или непаран.

3. Покажи да је

$$\overline{\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n} = \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^{-n}.$$

4. Покажи да је

$$J\{(1+ix)^4\}=0 \quad \text{за} \quad x=0 \quad \text{или за} \quad x=\pm 1.$$

5. Реши једначине

$$R\{(1+ix)^4\}\pm J\{1-ix)^4\}=0.$$

6.2. Правила степена. (**i**) Нека су n и m природни бројеви. Како је, према обрасцу (3),

$$z^n z^m = \rho^n e(n\theta).\ \rho^m e(m\theta) = \rho^{n+m} e\{(n+m)\theta\} = z^{n+m},$$

то видимо да и за комплексне бројеве важи основно правило степена, тј. да је

$$z^n z^m = z^{n+m}, \tag{4}$$

за целе и позитивне бројеве n и m.

(**ii**) Као и код реалних бројева, стављамо по дефиницији,

$$z^0 = 1, \tag{5}$$

ма какав био комплексан број $z \neq 0$, и

$$z^{-n} = 1/z^n, \quad \text{за} \quad z \neq 0. \tag{6}$$

Овим се основно правило степеновања (4) може проширити и на количник, тј.

$$z^n/z^m = z^{n-m},$$

и то било да је $n >$, или $=$, или $< m$.

Јер, ако је $n=m$, тада је

$$z^n/z^m = 1, \quad \text{а} \quad z^{n-m} = z^0,$$

што је у сагласности са дефиницијом (5). Ако је $n < m$, тада је

$$z^n/z^m = 1/z^{m-n}, \quad \text{а} \quad z^{n-m} = z^{-(m-n)},$$

што је у сагласности са дефиницијом (6).

Према томе, основно правило (4) важи ма какви били цели бројеви n и m.

(**iii**) Обрасци (1) и (2), тј. образац (3) важи и за степеновање нулом и негативним експонентом дефинисаним са (5) и (6).

Заиста, према (5) је

$$z^0 = 1 = 1 \cdot e(0),$$

па је

$$|z^0| = 1 = \rho^0,$$

јер је, по дефиницији, $\rho^0 = 1$ за сваки реалан број ρ, и

$$arc\,(z^0) = 0 = 0 \cdot arc\,(z).$$

Дакле, обрасци (1) и (2) важе и за $n=0$.

На исти начин је, према дефиницији (6) (в. тачку **5.2.** (**iv**)),

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\rho^n e(n\theta)} = \frac{1}{\rho^n} e(-n\theta),$$

па је

$$|z^{-n}| = \frac{1}{\rho^n} = \rho^{-n},$$

јер је, по дефиницији, $\rho^{-n} = 1/\rho^n$, за реално ρ, и

$$arc(z^{-n}) = -n\theta = -n\, arc(z),$$

што казује да обрасци (1) и (2), тј. образац (3) важе и за негативне експоненте.

(**iii**) На основу правила о коњуговању производа више бројева (в. тачку **5. 3** (**iii**), (**iv**)) непосредно видимо да је

$$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n = \overline{z}^n,$$

тј. *коњугована вредност степена једнака је степену коњуговане вредности.*

Ово правило важи за произвољне позитивне и негативне експоненте, а специално је

$$z^{-n} = \overline{z}^n / |z|^{2n}.$$

(**iv**) Moivre-ов образац. — Ако ставимо

$$z = e(\theta) \quad \text{и} \quad z^n = e^n(\theta),$$

правило о аргументу степена, тј. образац (2), можемо написати и у облику

$$e^n(\theta) = e(n\theta). \tag{7}$$

Дакле, n-ти степен јединице у правцу θ једнак је јединици у правцу $n\theta$.

Образац (7) експлицитно написан гласи

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \tag{8}$$

и претставља тзв. Moivre-ов образац.

Слично добивамо да је

$$e^{-n}(\theta) = e(-n\theta) = \overline{e}(n\theta).$$

(**v**) 1° Ако леву страну Moivre-ова обрасца развијемо по биномном обрасцу и упоредимо реалне и имагинарне делове, долазимо непосредно до израза који дају синусе и косинусе вишеструких углова изражене степенима синуса и косинуса једноставног угла. Тако је, на пример,

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1,$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta,$$

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \quad \text{итд.}$$

2° На основу Moivre-ова обрасца можемо и обратно, степене синуса и косинуса једноставног угла линеарно изразити помоћу синуса и косинуса вишеструких углова.

У ту сврху треба поћи од образаца

$$2\cos\theta = e(\theta) + e(-\theta)$$

и

$$2i\sin\theta = e(\theta) - e(-\theta).$$

Ако ове обрасце степенујемо, десну страну развијемо по биномном обрасцу и на тако добивене чланове применимо Moivre-ов образац, добивамо тражене изразе за степене синуса и косинуса.

Тако је, на пример,

$$\begin{aligned}2^4\cos^4\theta &= \{e(\theta) + \bar{e}(\theta)\}^4 = \\ &= e^4(\theta) + 4e^3(\theta)\bar{e}(\theta) + 6e^2(\theta)\bar{e}^2(\theta) + 4e(\theta)\bar{e}^3(\theta) + \bar{e}^4(\theta) = \\ &= e(4\theta) + e(-4\theta) + 4\{e(2\theta) + e(-2\theta)\} + 6 = \\ &= 2\{\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3\};\end{aligned}$$

дакле,

$$8\cos^4\theta = 3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta.$$

2° Слично можемо и прозвод облика

$$\sin^p\theta\cos^q\theta$$

изразити линеарно синусима и косинусима вишеструких углова. На пример,

$$\begin{aligned}64\sin^4\theta\cos^2\theta &= \{e(\theta) - \bar{e}(\theta)\}^4\{e(\theta) + \bar{e}(\theta)\}^2 = \\ &= \{e(\theta) - \bar{e}(\theta)\}^2\{e(2\theta) - \bar{e}(2\theta)\}^2 = \\ &= \{e(2\theta) - 2 + \bar{e}(2\theta)\}\{e(4\theta) - 2 + \bar{e}(4\theta)\} = \\ &= e(6\theta) - 2e(4\theta) - e(2\theta) + 4 + \bar{e}(6\theta) - 2\bar{e}(4\theta) - \bar{e}(2\theta) = \\ &= 2\{2 - \cos 2\theta - 2\cos 4\theta + \cos 6\theta\}.\end{aligned}$$

Дакле,

$$32\sin^4\theta\cos^2\theta = 2 - \cos 2\theta - 2\cos 4\theta + \cos 6\theta.$$

4° На исти начин можемо, применом Moivre-ова обрасца, трансформисати и изразе облика

$$\sin p\theta\sin q\theta,\ \sin p\theta\cos q\theta,\ \cos p\theta\cos q\theta,$$

или компликованије изразе облика

$$\sin p\theta\sin q\theta\sin^r\theta\cos^s\theta,$$

и изразити их било линеарно синусима и косинусима вишеструких углова, било степенима синуса и косинуса једноставног угла. Ове последње трансформације су потребне у интегралном рачуну.

(vi) На основу обрасца

$$a^n = r^n e(n\theta),$$

или из чињенице да је

$$a^n = a \cdot a^{n-1},$$

можемо применом конструкције производа (в. 5. 1 (iii)) и количника (в. 5. 2 (v)) постепено конструисати тачке које одговарају степенима

$$a^1, a^2, a^3, \ldots\ldots\ldots,$$

као и

$$a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, \ldots\ldots\ldots$$

1° Нека је $r>1$ и $0<\alpha<\pi$. Тачке $a^2, a^3 \ldots\ldots$ (в. сл. 28) добивају се конструкцијом сличних троуглова $O1a$, Oaa^2, $Oa^2a^3, \ldots$

Ако сличним поступком у супротном смислу, конструишемо сличне троуглове

$$O1a, Oa^{-1}1, Oa^{-2}a^{-1}, \ldots,$$

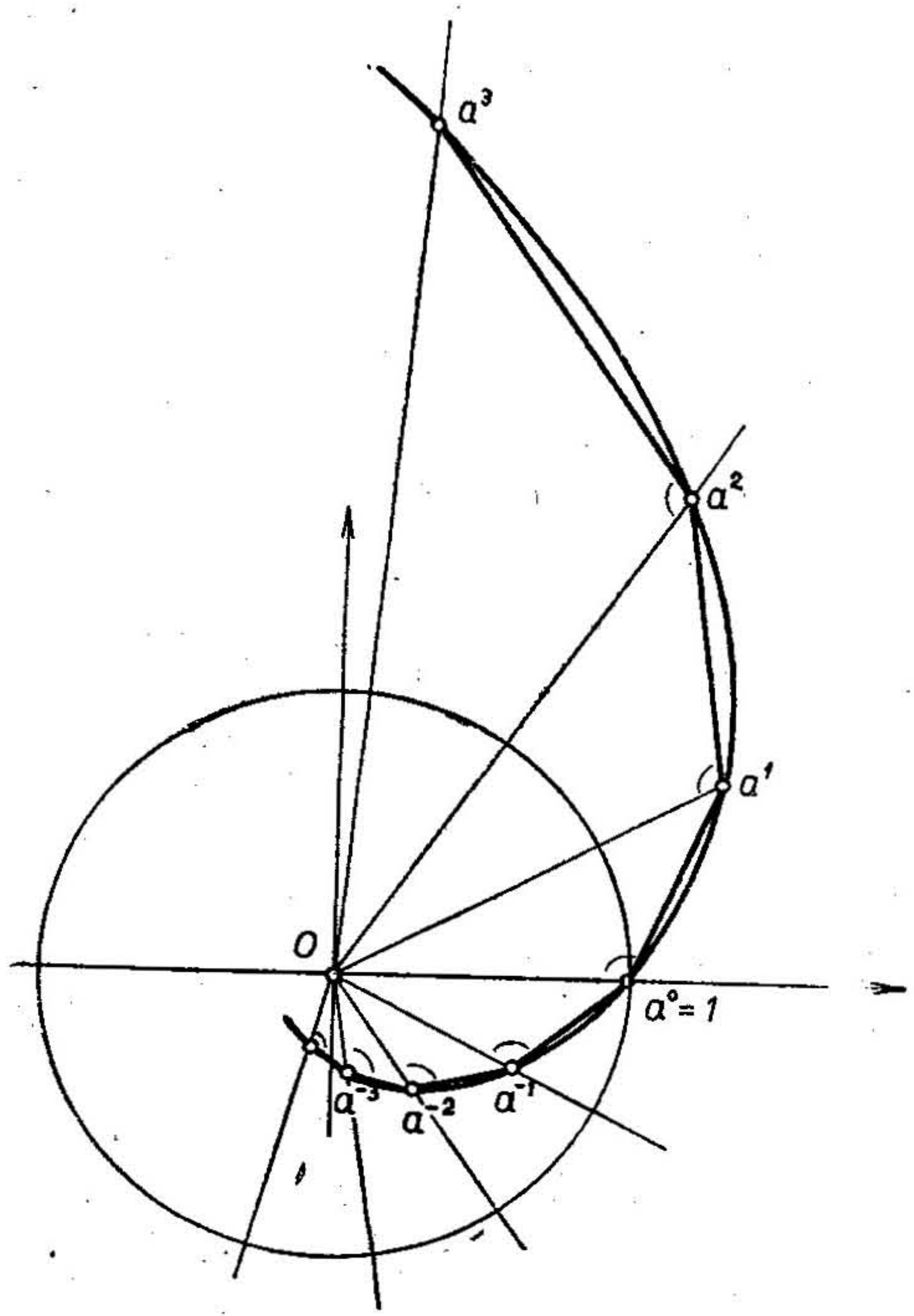
добивамо тачке које одговарају степенима $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, \ldots$, чији су експоненти негативни.

2° Ако ставимо

$$\rho = r^n, \; \theta = n\alpha,$$

и из ових једначина елиминишемо n, добивамо да је

$$\rho = \lambda^\theta \quad \text{са} \quad \lambda = r^{1/\alpha}. \quad (9)$$



Сл. 28.

Отуда видимо да се сви степени a^n налазе на кривој чија је једначина у поларним координатама дата обрасцем (9) и која се зове логаритамска или Bernoulli-ева спирала. (По Bernoulli-у Jacobu I).

3° Ако је $r<1$ и $0<\alpha<\pi$, или $r>1$ и $-\pi<\alpha<0$, тада је спирала супротна смера од спирале дате на сл. 28, и завија се око почетка док θ расте. Ако је, међутим, $r<1$ и $-\pi<\alpha<0$, спирала има, такође, облик слике 28.

У свим овим случајевима модули степена расту или опадају по геометриској, а аргументи по аритметичкој прогресији.

4° Кад је $r=1$ спирала дегенерише на јединични круг, $|z|=1$.

У овом случају ће свим степенима a^n одговарати само коначан број тачака на томе кругу, ако је α/π рационалан број; ако тај количник није рационалан, степени a^n распоређују се свуда густо по кругу.

Задаци.

1. Покажи да је $(1+i)^{4k}$ реалан, а $(1+i)^{4k+2}$ чисто имагинаран број.

2. Покажи да је

$$\binom{5}{0}-\binom{5}{2}+\binom{5}{4}=4\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}$$

и

$$\binom{5}{1}-\binom{5}{3}+\binom{5}{5}=4\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}.$$

3. Изрази линеарно синусом и косинусом вишеструких углова ове изразе:

1^0 $8\sin^4\theta$; 2^0 $32\sin^2\theta\cos^4\theta$; 3^0 $64\sin^4\theta\cos^3\theta$;

4^0 $64\sin^3\theta\cos^4\theta$; 5^0 $\sin 3\theta\cos 3\theta\sin^3\theta\cos^3\theta$.

4. Изрази степенима синуса и косинуса једноставног угла изразе: 1^0 $\sin 2\theta\sin 3\theta$; 2^0 $\cos 2\theta\sin 3\theta$; 3^0 $\cos 2\theta\cos 3\theta$; 4^0 $\sin\theta\sin 2\theta\sin 3\theta\sin 4\theta$.

7. Кореновање.

7. 1 Корен. (i) Кореновање је, као и у реалном, инверзна операција степеновања. По дефиницији, n-ти корен комплексног броја a је сваки онај број

$$z=\sqrt[n]{a},$$

који дигнут на n-ти степен даје a, тј.

$$z^n=a.$$

У скупу реалних и позитивних бројева кореновање је једнозначно одређено. Постоји један и само један позитиван број који је, дигнут на n-ти степен, једнак датом позитивном броју.

Међутим, у телу реалних бројева кореновање са парним експонентом или није одређено, ако је поткорена количина негативна, или, ако је она позитивна, парни корен има две вредности супротнога предзнака.

У телу комплексних бројева, као што ћемо видети, n-ти корен увек постоји и има тачно n, међусобно различитих, вредности.

(ii) Нека је

$$z^n=a,\quad a\neq 0.$$

Претпоставимо да постоје два различита n-та корена из a, и то z_1 и z_2.

Дакле,

$$z^n{}_1=a,\quad z^n{}_2=a,$$

и

$$z_1\neq z_2.$$

Како z_1 мора бити различито од нуле, јер је

$$0^n = 0 \neq a,$$

то, деобом горње две једначине, добивамо

$$\frac{z^n{}_2}{z^n{}_1} = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n = 1.$$

Отуда, ако ставимо

$$\frac{z_2}{z_1} = \varepsilon, \tag{1}$$

мора бити

$$\varepsilon^n = 1. \tag{2}$$

Ова једначина је очевидно задовољена за $\varepsilon = 1$. Када би у телу комплексних бројева ово била једина вредност од ε која задовољава једначину (2), тј. када би 1 био једини n-ти корен из јединице, тада би, према (1), морало бити

$$z_2 = z_1,$$

тако да бисмо имали само једну, или ниједну вредност за z, односно за $\sqrt[n]{a}$.

Уколико у телу комплексних бројева постоје још и други бројеви, ε_k, различити од јединице, који задовољавају једначину (2), тј. такви да је

$$\varepsilon^n{}_k = 1, \quad \text{и} \quad \varepsilon_k \neq 1,$$

тада би из обрасца (1) следила веза

$$z_2 = \varepsilon_k z_1,$$

између појединих z-ова. Отуда бисмо добили и све вредности $\sqrt[n]{a}$, знајући једну од њих.

(*iii*) Посматрајмо једначину (2) којом су одређени n-ти корени из јединице. Из ње следи, уколико има ε-а који су $\neq 1$, да њихов модуо мора увек бити једнак 1; јер је, према **6. 2.** (**i**),

$$|\varepsilon^n| = |\varepsilon|^n = 1,$$

а, како је $|\varepsilon|$ позитиван број, то следи отуда, да мора бити

$$|\varepsilon| = 1,$$

јер је 1 једини реалан и позитиван број чији је n-ти степен једнак јединици.

Према томе, ε мора имати облик

$$\varepsilon = e(\theta),$$

а да би овај број задовољавао једначину (2) мора, према **6. 2.** (**i**), бити

$$e^n(\theta) = e(n\theta) = 1. \tag{3}$$

Како је

$$e(t)=1, \quad \text{кадгод је} \quad t=\pm 2k\pi, \quad k=0, 1, 2, \ldots,$$

то из (3) следи, да мора бити

$$n\theta=\pm 2k\pi,$$

а отуда

$$\theta=\pm\frac{2k\pi}{n}, \quad k=0, 1, 2, \ldots\ldots$$

Према томе је

$$\varepsilon=\varepsilon_k=e\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad \pm k=0, 1, 2, \ldots\ldots \tag{4}$$

Иако броју k можемо дати све вредности $0\pm 1, \pm 2, \ldots,$ ипак је изразима (4) дефинисано само n различитих вредности од ε, и то

$$\varepsilon_k=e\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{са} \quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{5}$$

јер сваки цео позитиван или негативан број k можемо написати у облику

$$k=nq+p, \quad \text{где је} \quad 0\leqslant p\leqslant n-1,$$

и где p може узети само вредности

$$0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1,$$

(p је остатак деобе броја k са n), па је

$$e\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=e\left(\frac{2nq\pi+2p\pi}{n}\right)=$$

$$=e\left(\frac{2p\pi}{n}+2q\pi\right)=e\left(\frac{2p\pi}{n}\right).$$

Према томе, *постоји тачно n различитих n-тих корена из јединице* ε_k, који су дати обрасцима (5).

(iv) Ако постоји једна вредност z_0 од $\sqrt[n]{a}$, то на основу претходних резултата видимо, да их, према (1), мора бити тачно n. Ови корени се међусобно разликују мултипликативним факторима ε_k, и сви су они дати изразима

$$z_k=\varepsilon_k z_0, \quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Ставимо ли

$$a=re(\alpha),$$

тада је по дефиницији

$$z^n{}_0=re(\alpha),$$

а отуда (в. **6. 2 (i)**),

$$|z^n{}_0|=|z_0|^n=r$$

и

$$arc(z^n{}_0)=n\,arc(z_0)=\alpha.$$

Како постоји један и само један позитиван n-ти корен из позитивног броја, то из прве од горњих једначина добивамо

$$|z_0| = \sqrt[n]{r},$$

а из друге

$$arc(z_0) = \frac{\alpha}{n}.$$

Према томе, једна вредност n-тог корена је

$$z_0 = \sqrt[n]{r}\, e\left(\frac{\alpha}{n}\right),$$

а остале $n-1$ вредности су тада дате обрасцем (6).

Према (6) је

$$arc(z_k) = arc(z_0) + arc(\varepsilon_k) = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n},$$

тако да број z_0 има најмањи аргумент, и ову вредност називамо *главна вредност* n-тог корена.

Према томе, ако са

$$\{\sqrt[n]{a}\}$$

означимо главну вредност од $\sqrt[n]{a}$, сви n-ти корени броја a дати су изразима

$$\{\sqrt[n]{a}\}\, \varepsilon_k = \{\sqrt[n]{a}\}\, e\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Дакле, у телу комплексних бројева постоји тачно n вредности n-тог корена.

(v) Јасно је да овај општи случај обухвата и кореновање негативних бројева. Јер, ако је $a < 0$, тада је

$$a = |a|\, e(\pi).$$

Према томе су све вредности $\sqrt[n]{a}$ дате изразима

$$\sqrt[n]{|a|}\, e\left(\frac{\pi}{n}\right) e\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|a|}\, e\left(\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Тако су, на пример, за $n = 2$, обе вредности квадратног корена

$$\sqrt{|a|}\, e\left(\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{|a|}, \quad \sqrt{|a|}\, e\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{|a|},$$

дакле, чисто имагинарне. За $n = 3$, вредности трећег корена су

$$\sqrt[3]{|a|}\, e\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \sqrt[3]{|a|}\, e\left(\frac{3\pi}{3}\right) = -\sqrt[3]{|a|} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{|a|}\, e\left(\frac{5\pi}{3}\right),$$

од којих је, види се, једна реална и негативна, а остале две су имагинарне.

Задаци.

1. Покажи да је: 1° $\sqrt[4]{i}=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right\}$;

2° $|\sqrt[3]{1-i}|=\sqrt[6]{2}$, $arc(\sqrt[3]{1-i})=-arc(i+1)$, или $=arc\{1\pm\sqrt{3}+(1\mp\sqrt{3})i\}$.

2. Одреди реални и имагинарни део квадратних корена бројева 1° $3-4i$; 2° $-7+24i$; 3° $-11+60i$; 4° $5-12i$; 5° $4pq+2i(p^2-q^2)$.

3. Одреди: 1° $\sqrt[4]{1-i}$; 2° $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$; 3° $\sqrt[5]{1+i}$.

7. 2. Јединични корени. (i) n-ти корени из јединице

$$\varepsilon_k=e\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\ldots,n-1,$$

које зовемо још *n-ти јединични корени*, или, укратко, јединични корени, су једине вредности које задовољавају једначину

$$z^n=1.$$

Другим речима, биномна једначина n-тог степена

$$z^n-1=0, \tag{1}$$

у телу комплексних бројева има тачно n корена, и то

$$z_k=e\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

За поједине вредности степена n биномну једначину (1) можемо решити и алгебарским путем, између осталог, кадгод се бином z^n-1 може раставити на факторе нижег степена. Тако је, на пример,

$$z^2-1=(z-1)(z+1),$$
$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1),$$
$$z^4-1=(z^2+1)(z-1)(z+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Из ових једначина видимо, да јединичне корене у овим случајевима можемо изразити и овако

$$n=2:\ +1,\ -1,$$
$$n=3:\ +1,\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$n=4:\ +1,\ -1,\ +i,\ -i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

На тај начин поједине јединичне корене можемо алгебарски изразити свођењем биномне једначине (1) на једначине другог степена. Напоменимо, при томе, да се одређивање 5-ог, 6-ог, 8-ог, 10-ог и још неких јединичних корена може свести на решавање квадратних једначина, док се, на пример, одређивање 7-ог и 9-ог јединичног корена своди на решавање једначине 3-ег степена, а осталих и на једначине вишег степена. У сваком случају одређивање n-тог јединичног корена можемо свести на решавање једначине чији је степен у пола мањи.

(**ii**) Како је (в. **6. 2.** (**i**))

$$e\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=e^k\left(\frac{2\pi}{n}\right), \tag{2}$$

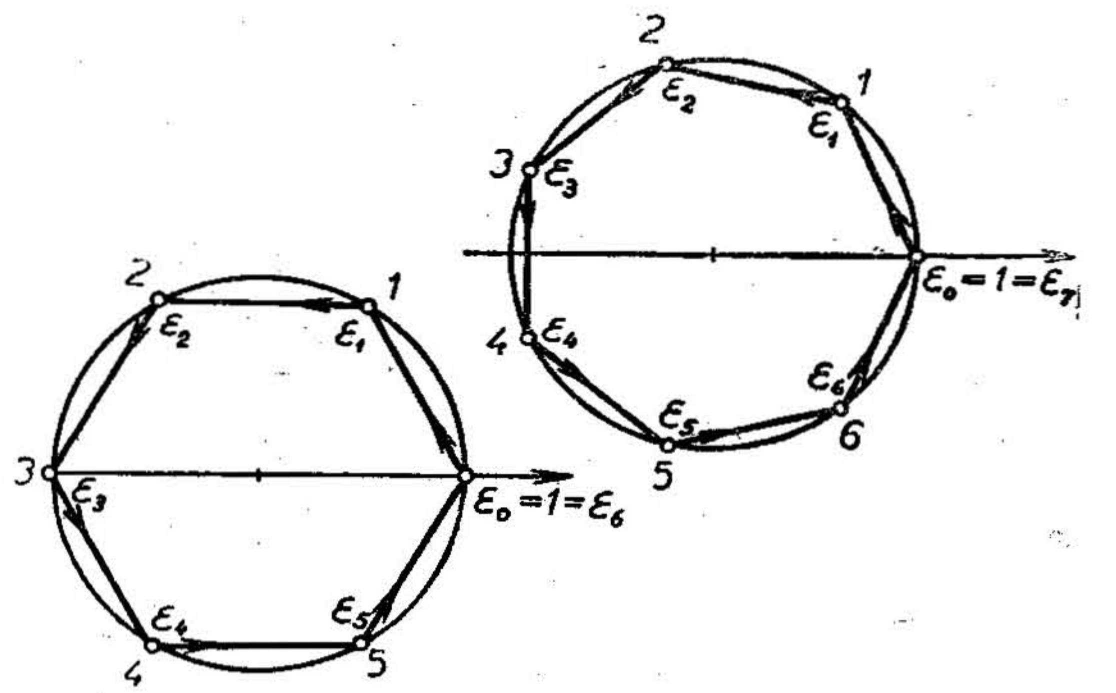
то видимо да свих n јединичних корена добивамо узастопним степеновањем једног од њих и то корена

$$\varepsilon=e\left(\frac{2\pi}{n}\right);$$

дакле,

$$\varepsilon_k=\varepsilon^k, \quad k=0,1,2,\ldots,n-1. \tag{3}$$

Како је поред тога $|\varepsilon|=1$, то у овом случају спирала (в. **6. 2.** (**i**)) на којој се налазе сви степени корена ε дегенерише на јединични круг, а њима одговарајуће тачке се равномерно распоређују по томе кругу. Према томе, тачке које одговарају n-тим јединичним коренима претстављају темена правилног n-тоугла уписаног у јединични круг, чије се једно теме налази на реалној оси, тј. у тачки $\varepsilon_0=\varepsilon^0=1$.



Сл. 29

(**iii**) Степеновањем јединичног корена $\varepsilon_1=e\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ добивамо постепено свих n јединичних корена и то редом, као што је то показано на шестоуглу и седмоуглу слике 29. Међутим, то не мора бити случај, ако место јединичног корена ε_1 узмемо неки други јединични корен и образујемо његове узастопне степене. Тако, на пример, ако за $n=6$ уочимо јединични корен

$$\varepsilon_2=e\left(\frac{2\cdot 2\pi}{6}\right)=e\left(\frac{2\pi}{3}\right),$$

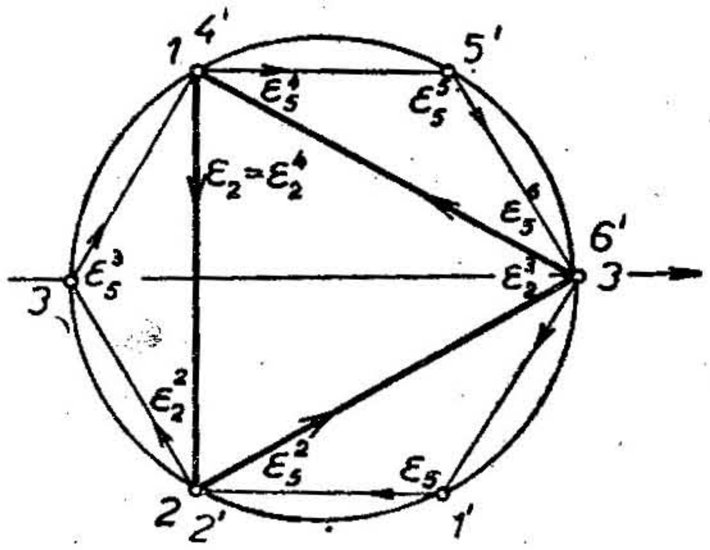
после четвртог степеновања, ε^4_2 постаје

$$\varepsilon^4_2 = e\left(\frac{8\pi}{3}\right) = e\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \varepsilon_2,$$

тако да постепеним степеновањем јединичног корена ε_2 добивамо свега три темена

$$\varepsilon_2, \quad \varepsilon^2_2 = \varepsilon_5 \quad \text{и} \quad \varepsilon^3_2 = \varepsilon_0,$$

правилног шестоугла, док бисмо степеновањем јединичног корена ε_5 поново добили свих 6 темена (в. сл. 30).

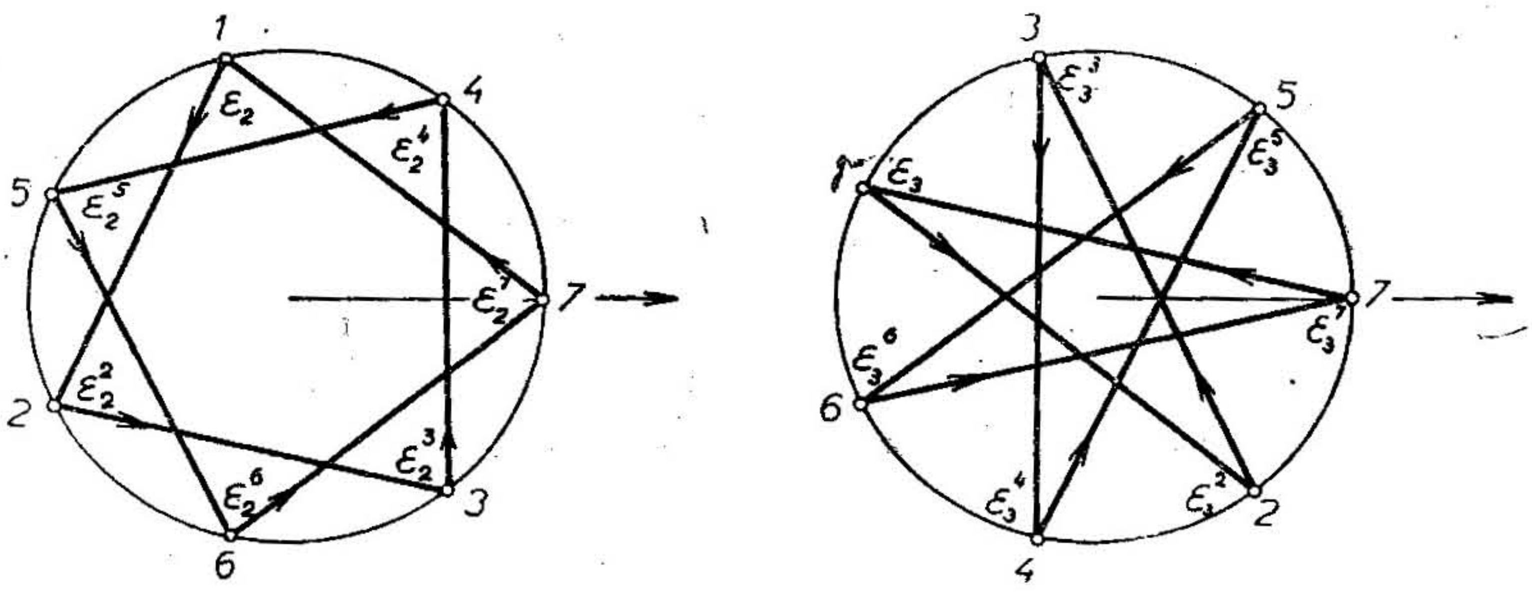


Сл. 30

Међутим, узастопним степеновањем ма ког седмог јединичног корена $\neq 1$, добивамо све седме јединичне корене, с том разликом, што се темена правилног седмоугла повезују другим редом (в. сл. 31).

Док повезивање степена јединичног корена $e\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ даје правилан конвексан n-тоугао, дотле узастопни степени других јединичних корена дају или звездасте n-тоугле, или се распадају на више конвексних или звездастих многоугла нижега реда.

Они n-ти јединични корени који имају ту особину да им њихови узастопни степени дају све n-те јединичне корене, дакле, код којих



Сл. 31

се звездасти полигон не распада на два или више полигона, зову се *примитивни јединични корени.*

Тако су, на пример, кад је n прост број, сви јединични корени, осим $\varepsilon_0 = 1$, примитивни јединични корени.

(iv) Применом обрасца (2), или (3), тј. из чињенице да су сви јединични корени степени првог, можемо лако одредити збирове степена свих јединичних корена, и то свођењем на сабирање геометриске прогресије. Тако је, за $p < n$,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^p{}_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^{\nu p} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (\varepsilon^p)^\nu = \frac{\varepsilon^{np}-1}{\varepsilon^p - 1},$$

а како је

$$\varepsilon^{np} = (\varepsilon^n)^p = 1^p = 1,$$

и

$$\varepsilon^p \neq 1 \quad \text{за} \quad p < n,$$

то је, дакле,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^p{}_\nu = 0 \quad \text{за} \quad p = 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

За $p = n$, очевидно је

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^n{}_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} 1 = n.$$

Задаци.

1. Одреди за $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8$ и 9 бројеве:

1° $\sqrt[n]{-1}$; 2° $\sqrt[n]{i}$; 3° $\sqrt[n]{-i}$ и нацртај их.

2. Нека је: 1° $\sqrt[9]{1}$; 2° $\sqrt[12]{1}$; 3° $\sqrt[15]{1}$. Који су међу овим бројевима трећи јединични корени, а који њихови степени? Који су примитивни корени? Колико има различитих звездастих полигона, а колико од њих се распадају на полигоне нижег реда?

3. Нека је a реално; знајући да $\dfrac{1+ia}{1-ia}$ има облик $e(\alpha)$, реши једначину

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^4 = \frac{1+ia}{1-ia}.$$

4. Растави на линеарне факторе полином

$$x^2 - 2px \cos\alpha + p^2.$$

5. Нека је

$$\varepsilon = e\left(\frac{2\pi}{3}\right);$$

покажи да је

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (x + \varepsilon y + \bar{\varepsilon} z)\,(x + \bar{\varepsilon} y + \varepsilon z);$$

на основу тога растави полином

$$x^3 - 3uvx + (u^3 + v^3)$$

на линеарне факторе.

6. Ако је n прост број, покажи да су сви n-ти јединични корени примитивни осим $\varepsilon_0=1$.

7. 3. Разломљени експоненти. (i) Основна правила корeновања која смо срели код реалних бројева важе и за комплексне бројеве, с том разликом што n-том корену броја a одговарају истовремено n различитих вредности расутих равномерно на кругу полупречника $\sqrt[n]{|a|}$. Ово треба увек имати на уму.

Тако, на пример, образац

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=\sqrt[nm]{a^{m+n}} \tag{1}$$

казује, уствари, да одређеном n-том корену из a,

$$z_1=\sqrt[n]{a}, \tag{2}$$

и одређеном m-том корену из a,

$$z_2=\sqrt[m]{a}, \tag{3}$$

одговара један одређени mn-ти корен из a^{n+m}

$$z_3=\sqrt[nm]{a^{n+m}}, \tag{4}$$

такав да је

$$z_3=z_1\cdot z_2.$$

Заиста, из (1) и (3), по дефиницији, следи

$$z_1^n=a \quad \text{и} \quad z_2^m=a,$$

а отуда

$$z_1^{nm}=a^m \quad \text{и} \quad z_2^{mn}=a^n,$$

тако да, кад ове две једначине измножимо, добивамо

$$z_1^{mn}z_2^{mn}=(z_1z_2)^{mn}=a^{m+n}.$$

Дакле, $z_1\cdot z_2$, тј. z_3, је један mn-ти корен из a^{m+n}, што је изражено једначином (4).

На исти начин треба интерпретисати и опште правило корeновања

$$\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[m]{a^q}=\sqrt[nm]{a^{pm+qn}}, \tag{5}$$

које казује да производ ма ког n-тог корена из a^p и m-тог корена из a^q даје увек одређен mn-ти корен из a^{pm+qn}.

(ii) Ако, као и у реалном, дефинишемо рационални експонент једначином

$$a^{p/n}=\sqrt[n]{a^p},$$

имајући при томе у виду да $\sqrt[n]{a^p}$, према томе и $a^{p/n}$, претставља истовремено n различитих вредности расутих по кругу полупречника $|a|^{p/n}$, тада се једначина (1), односно (5), са овако проширеном интерпретацијом, своди на

$$a^{1/n}\cdot a^{1/m}=a^{1/n+1/m},$$

односно на

$$a^{p/n}\cdot a^{q/m}=a^{p/n+q/m}, \tag{6}$$

тј. на основно правило степеновања са целим позитивним или негативним експонентима наведено у **6. 2. (i)**.

(*iii*) Смисао правила (5), односно (6), као и појам главне вредности корена можемо лакше увидети ако разломљене експоненте геометриски интерпретишемо употребом спирале наведене у **6.2. (vi)**.

При геометриском претстављању целих степена

$$\ldots\ldots\ldots a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ldots\ldots$$

броја $a=re(\alpha)$, добива се, уствари, само низ изолованих тачака поменуте логаритамске спирале S_1, чија је једначина

$$S_1:\qquad \rho=\lambda^{\theta}\ \text{ са }\ \lambda=r^{1/\alpha}.$$

Ако желимо да ову спиралу гушће попунимо, треба између макоја два степена да уведемо низ нових разломљених експонената. На пример, $a^{1/2}$ између a^0 и a^1, или $a^{3/2}$ између a^1 и a^2, итд., или $a^{1/3}$ и $a^{2/3}$ између a^0 и $a^{1/2}$, односно $a^{1/2}$ и a^1 итд.

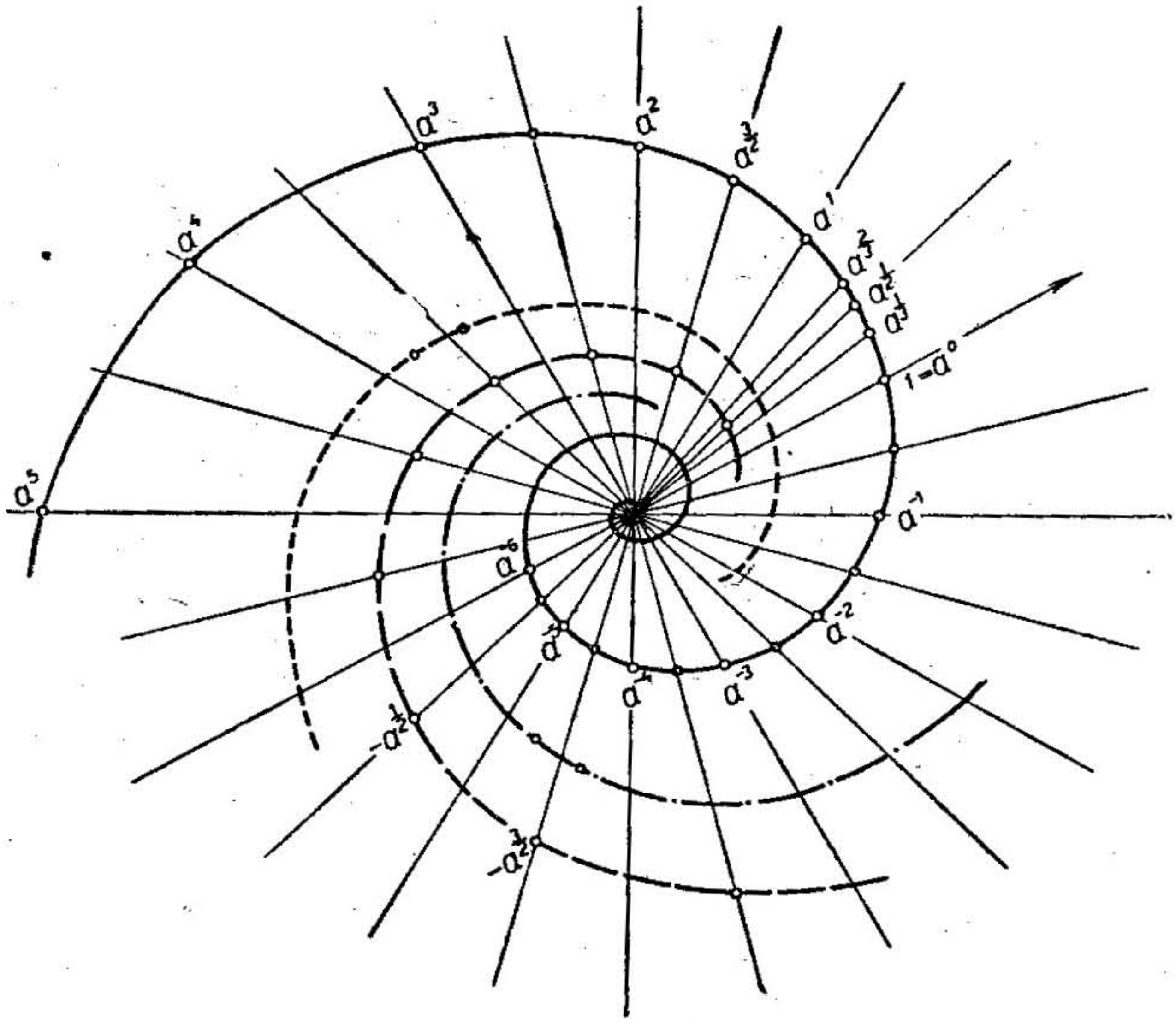
У том случају ћемо на спирали S_1 добити гушће распоређене тачке, јер је разлика аритметичке прогресије по којој расту аргументи мања.

Како је, међутим,

$$a^{1/2}=\pm\sqrt{a},$$

то добивамо две тачке $+\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$ са истим модулом $+\sqrt{|a|}$ и аргументима $e\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ и $e\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)$.

Дакле, на симетрали угла α треба пренети у оба правца $\sqrt{|a|}$. Тачка $+\sqrt{|a|}$ лежи на симетрали угла α и на првобитној спирали између тачака a^0 и a^1, док се, због $-\sqrt{|a|}$, појављује и друга тачка, која се више не налази на овој спирали, већ се она и све тачке $-a^{k/2}$ налазе на једној другој спирали, S_2. Спирала S_2 настаје обртањем спирале S_1 за угао $\frac{2\pi}{2}$. Настављајућитај поступак деобом угла α на $\frac{\alpha}{3}$ и $\frac{2\alpha}{3}$ добићемо, поред двеју нових тачака на првој спирали, још две нове спирале, S'_3 и S''_3, које настају из спирале S_1 обртањем за углове $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$, (в. сл. 32). Уметањем све нових и нових разломљених експонената, с једне стране, згушњавају се тачке на првобитној спирали S_1, а, с друге стране, остале вредности $a^{p/q}$ се расипају по целој комплексној равни, и то по спиралама добивеним обртањем спирале S_1 за углове $\frac{2k\pi}{q}$. Док ове остале вредности тј. тачке, остају



Сл. 32

изоловане на овим спиралама, дотле се главне вредности n-тог корена све више згушњавају на основној спирали S_1 и на овој кривој се постепено свуда густо распоређују.

(iv) Адекватна дефиниција рационалног експонента, тј. једнозначна дефиниција степеновања реалног и позитивног броја, како рационалним тако и ирационалним и имагинарним експонентом, излази из оквира алгебре. За дефиницију ових операција потребан је појам граничног прелаза, како за реалне, тако и за имагинарне бројеве, што спада у област анализе. (Види вежбе 8. 19—21.).

Задаци.

1. Нека је $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$; одреди; $\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\sqrt[4]{\varepsilon}$ и $\sqrt[3]{\varepsilon} \cdot \sqrt[4]{\varepsilon}$ и види колико има ових бројева.

2. Образложи образац

$$\sqrt[p]{a}\,\sqrt[p]{b}=\sqrt[p]{ab}\,.$$

у смислу тачке 7. 3. (ii).

3. Покажи да је

$$\sqrt{z}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2}+x)}\pm i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2}-x)}\,,$$

и дискутуј знакове десне стране. Примери: $z=-1$; $z=i$; $z=5-12\,i$; $z=3+4\,i$; $z=16-30\,i$.

4. Нека су a и b комплексни бројеви; нађи услове да једначина

$$z^2-2\,az+b=0$$

има: 1° реалне корене; 2° чисто имагинарне корене; 3° једнаке корене; 4° коњуговано-комплексне корене; 5° покажи да су

$$|b|=1,\quad |a|\leqslant 1,\quad arc(b)=2\;arc(a)\,,$$

потребни и довољни услови да оба корена буду на јединичном кругу.

5. Реши једначине:

1° $z^5-1=0$; 2° $z^6-1=0$; 3° $z^8-1=0$.

6. Знајући да је $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, израчунај $\cos\frac{\pi}{12}$.

7. Знајући да је $tg\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$, покажи да је

$$tg\frac{\pi}{24}=\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-2\,.$$

8. Образуј обрасце који дају $tg\frac{a}{3}$, $tg\frac{a}{4}$ и $tg\frac{a}{5}$ помоћу $tg\,a$.

9. Покажи да је 1° $tg\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$;

2° $tg\frac{2\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$; 3° $tg\frac{3\pi}{5}=-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$;

4° $tg\frac{4\pi}{5}=-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

8. Вежбе.

8. 1. Опште вежбе.

1. Покажи да је:

1°
$$A=\begin{vmatrix}1, & a, & \bar{a}\\ 1, & b, & \bar{b}\\ 1, & c, & \bar{c}\end{vmatrix}$$

чисто имагинаран број $(\bar{A}=-A)$ и да је $\frac{i}{4}A$ површина троугла a, b, c;

$$2^0 \qquad J\{\bar{a}b\}c+J\{\bar{b}c\}a+J\{\bar{c}a\}b=0,$$

и то узевши у обзир да су оба израза

$$\bar{a}bc+a\bar{b}c+ab\bar{c}$$

и

$$a\bar{b}c+ab\bar{c}+\bar{a}bc$$

међусобно једнака.

2. Реши једначину

$$arc\{ke(\beta)+x\}=\alpha, \tag{1}$$

где су x, k, α и β реални бројеви.

Покажи да се (1) своди на

$$\frac{ke(\beta)+x}{ke(-\beta)+x}=e(2\alpha),$$

и да је

$$x=k\frac{e(2\alpha-\beta)-e(\beta)}{1-e(2\alpha)}=k\frac{e(\beta-\alpha)-e(\alpha-\beta)}{e(\alpha)-e(-\alpha)}=k\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Интерпретиши и провери синусном теоремом.

3. Покажи да се неједначина

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\right|\leqslant|a|,$$

ако је квадрирамо и ставимо

$$a_\nu=z_\nu^2 \quad \text{са} \quad z_\nu=x_\nu+iy_\nu.$$

своди на тзв. Cauchy-еву неједначину

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu y_\nu\right)^2\leqslant\left(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu^2\right),$$

и да су те две неједначине еквивалентне.

4. Покажи да за свако одређено c можемо ставити

$$\prod_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2c)=A^2+B^2c;$$

посматрај специалне случајеве $c=\pm1$.

5. Ако је $f(x,y)$ рационална и симетрична функција, тј.

$$f(x,y)=f(x,y),$$

и ако су јој коефициенти реални, тада је $f(a,\bar{a})$ реално.

Примери: 1^0 x^2+y^2; 2^0 xy; 3^0 $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}$.

6. Реши квадратну једначину

$$x^2-2ax+a^2+b^2=0,$$

$\{x^2-2ax+a^2+b^2=(x-a)^2+b^2\}$.

Примери: 1^0 $x^2-2x+3=0$; 2^0 $x^2+x+1=0$;

3^0 $x^2-x+1+i=0$; 4^0 $x^2-4ix-7-4i=0$.

7. Нека је k реалан и позитиван број. Из

$$a/\bar{b}=i\sqrt{2} \quad \text{и} \quad a\bar{b}=k$$

одреди a и b. Колико решења има задатак?

8. Нека је

$$a=\alpha+\beta e(\theta) \quad \text{и} \quad a'=\alpha'+\beta' e(\theta),$$

где су α, β, α' и β' реални бројеви; докажи да из

$$a'=a \quad .\dot{}. \quad \alpha'=\alpha \quad \text{и} \quad \beta'=\beta,$$

само ако је $0<\theta<\pi$.

9. Зашто је за конструкцију производа две дужи потребно дати јединичну дуж, а за збир није? (Види т. **2. 2.**).

10. Покажи да је трећи аксиом тела, тј. комутативни закон сабирања, последица осталих аксиома тела, ако четврти аксиом, због некомутативности збира, допунимо овако: „За дато A и B постоји један и само један елемент X из **T** такав да је

$$A+X=B,$$

и један само едан елемент Y такав да је

$$Y+A=B.“$$

{Упутство: $(A+B)(\mathbf{1}+\mathbf{1})=(A+B)\mathbf{1}+(A+B)\mathbf{1}=A+B+A+B$;

$(A+B)(\mathbf{1}+\mathbf{1})=A(\mathbf{1}+\mathbf{1})+B(\mathbf{1}+\mathbf{1})=A+A+B+B\}$.

11. Да би једначина

$$az+2b+c\bar{z}=0,$$

била задовољена за бескрајно много вредности од z, тј. да би она претстављала праву линију, потребно је и довољно да корени z_1 и z_2 једначине

$$az^2+2bz+c=0$$

имају или исти модуо $|z_1|=|z_2|$, или исти аргумент $arc(z_1)=arc(z_2)$.

12. Стављајући

$$S=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx,$$

$$S_1=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx,$$

множењем друге једначине са i и сабирањем са првом покажи да је

$$S=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad S_1=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

13. Ако је n цео позитиван број покажи да је

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots\ldots=\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}$$

и

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots\ldots=\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

14. Нека су $A_1, A_2, \ldots. A_n$ темена правилног n-тоугла, уписаног у круг полупречника r и нека је M произвољна тачка; израчунај збир

$$S=\sum_{\nu=1}^{n}\overline{MA_\nu}^2$$

кад се тачка M налази на кругу $(S=2nr^2)$, у кругу и ван круга.

15. Ако је n производ из два проста броја p и q, покажи да има

$$n\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+1$$

n-тих примитивних јединичних корена.

16. Ако са $[x]$ означимо највећи цео број који није већи од x и ставимо $z=x+iy$, покажи да је

1^0 $$R\{z^n\}=\sum_{\nu=0}^{[n/2]}(-1)^\nu\binom{n}{2\nu}x^{n-2\nu}y^{2\nu};$$

2^0 $$J\{z^n\}=\sum_{\nu=0}^{[n/2]}(-1)^\nu\binom{n}{2\nu+1}x^{n-2\nu-1}y^{2\nu+1};$$

3^0 $$R\{z^n\}+J\{z^n\}=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{[\nu/2]}\binom{n}{\nu}x^{n-\nu}y^\nu.$$

4^0 Како гласи одговарајући израз за разлику

$$R\{z^n\}-J\{z^n\}?$$

17. Како се распоређују тачке

$$\left(\frac{4+3i}{5}\right)^n \quad \text{за} \quad n=1, 2, 3, \ldots\ldots$$

18. Покажи да су све нуле полинома

1^0 $R\{(x+i)^n\}$; 2^0 $J\{(x+i)^n\}$; 3^0 $R\{(1+ix)^n\} \pm J\{(1+ix)^n\}$;

4^0 $R\{\bar{a}(1+ix)^n\}$; 5^0 $J\{\bar{a}(1+ix)^n\}$, реалне и одреди их.

8. 2. Степеновање — произвољним експонентом

19. Докажи:

1^0 $|(1+z)^n-1| \leqslant (1+|z|)^n - 1$; {Развијањем по биномном обрасцу и применом неједначине из 4. 3 (ii).}

2^0 За $-1 < x < \dfrac{1}{n-1}$ је $(1+x)^n < 1 + \dfrac{nx}{1+x-nx}$; {Применом Bernoulli-еве неједначине на $\left(1-\dfrac{x}{1+x}\right)^n$, јер је овај израз $=\dfrac{1}{(1+x)^n}$;

— Bernoulli-ева неједначина гласи: $(1+h)^n \geqslant 1+nh$, за $h>-1$ и $n=1, 2, 3, \ldots ,$};

3^0 За произвољно комплексно z

$$\left(1+\frac{z}{n^2}\right)^n \to 1 \quad \text{кад} \quad n \to \infty;$$

{На основу 1^0 и 2^0.}

20. Низ

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

тежи коначној и одређеној граници, кад $n \to \infty$, за сваку реалну вредност од x. Ако ову граничну вредност означимо са $exp(x)$, тј. ставимо

$$exp(x) = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

тада је овим $exp(x)$ једнозначно дефинисан за сваку реалну вредност од x и:

1^0 за произвољно реално x и x' је

$$exp(x+x') = exp(x) \cdot exp(x');$$

2^0 $exp(0)=1$;

3^0 $exp(-x) = 1/exp(x)$;

4^0 Ако вредност $exp(1)$ означимо са e, тј. ставимо $e = exp(1)$, тада је

$$exp\left(\frac{p}{n}\right) = e^{p/n}, \quad \text{за произвољне целе бројеве } p \text{ и } n \neq 0.$$

21. Изрази

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n, \quad n=1, 2, 3, \ldots\ldots$$

су једнозначно одређени и за произвољно комплексно z. Према томе, ако постоји гранична вредност

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

њоме је једнозначно одређено и $exp(z)$, за свако комплексно z, тј.

$$exp(z)=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

1⁰ За чисто имагинарно z, тј. за $z=iy$,

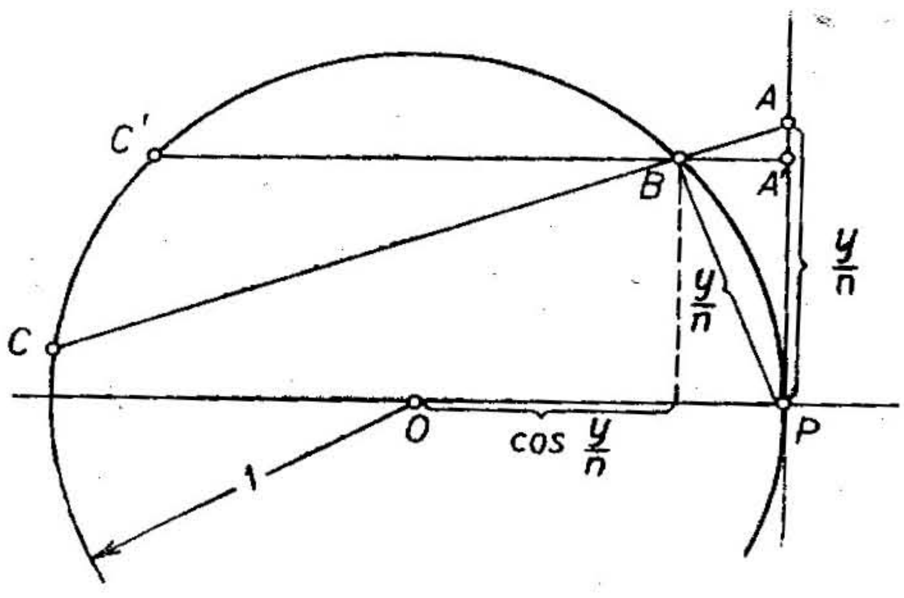
$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n$$

постоји и једнак је

$$e(y)=\cos y+i\sin y;$$

дакле,

$$exp(iy)=\cos y+i\sin y=e(y).$$



Сл. 33

Доказ. Ако ставимо

$$h_n=1+\frac{iy}{n}-e\left(\frac{y}{n}\right),$$

тада је

$$|h_n|<\left(\frac{y}{n}\right). \qquad (1)$$

Јер је

$$\left|\frac{y}{n}\right|^2=\overline{PA}^2=\overline{AB}\,\overline{AC},$$

(види сл. 33),

а

$$\overline{AB}=|h_n| \quad \text{и} \quad \overline{AC}>\overline{A'C'}=1+\cos\frac{y}{n}>1.$$

Даље,

$$\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n=\left[e\left(\frac{y}{n}\right)\frac{1+iy/n}{e(y/n)}\right]^n=e(y)\left[1+\frac{1+iy/n-e(y/n)}{e(y/n)}\right]^n=$$

$$=e(y)\,[1+h_n\,e(-y/n)]^n,$$

а, према **19,3⁰** и (1), цела угласта заграда тежи јединици кад $n\to\infty$.

2⁰ За произвољно комплексно $z=x+iy$, горе дефинисано $exp(z)$ постоји и

$$exp(z)=exp(x)\cdot exp(iy),$$

јер је

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x+iy}{n}+\frac{ixy}{n^2}\right)^n=$$

$$=\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n\left[1+\frac{ixy}{n^2+n(x+iy)}\right]^n.$$

а последњи израз у заградама (према **19,3°**) тежи јединици, кад, $n\to\infty$.

3° За произвољно z и z' је

$$exp(z+z')=exp(z)\cdot exp(z').$$

4° За целе бројеве, p, q, $n\neq 0$ и $m\neq 0$, је

$$exp\left(\frac{p}{n}+i\frac{q}{m}\right)=e^{p/n}e\left(\frac{q}{m}\right)=$$

$$=e^{p/n}\left\{\cos\frac{q}{m}+i\sin\frac{q}{m}\right\}=e^{p/n}e^{q/m}(1),$$

где је

$$e^{q/m}(1)=\sqrt[m]{(\cos 1+i\sin 1)^q},$$

узимајући за корен његову главну вредност.

ДЕО II.

ПРИМЕНА У ГЕОМЕТРИЈИ

1. Тачка, дужи, углови

1. 1. Веза са аналитичком геометријом. (i) Како је свака тачка равни једнозначно одређена комплексним бројем, то се многи проблеми планиметрије и аналитичке геометрије могу решавати комплексним бројевима, и то често лакше и прегледније. Штавише, цела аналитичка геометрија у равни се може извести употребом комплексних бројева. Модерни уџбеници аналитичке геометрије уствари и оперишу искључиво векторима, а ови се, у равни, своде на комплексне бројеве.

Место да сваку тачку равни одредимо са два реална броја, као што је то случај у класичној аналитичкој геометрији, одређујемо је само једним комплексним бројем. Овим се број промењљивих или непознатих, као и број једначина смањује, а самим тим одговарајући аналитички изрази, као и рачун са њима, постају једноставнији. Због тога се до многих резултата брже долази употребом комплексних бројева — вектора, него применом координата тачке, тј. класичним методама аналитичке геометрије.

(ii) *Дуж. Однос дужи.* Овде ћемо са

$$z = x + iy = \rho e(\theta)$$

или са

$$z_k = x_k + iy_k = \rho_k e(\theta_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots n,$$

означавати комплексне бројеве који одговарају тачки Z, односно тачкама Z_k, тако да су x и y, односно x_k и y_k правоугле, а ρ и θ, односно ρ_k и θ_k поларне координате тачака Z односно Z_k. Векторе положаја који одговарају овим бројевима, односно тачкама, означаваћемо са $\overrightarrow{OZ}$ и $\overrightarrow{OZ_k}$, док ћемо обично под $\vec{z}$ и $\vec{z_k}$ подразумевати слободне векторе, тј. померања; са $Z_j\vec{Z_k}$ означаваћемо везан вектор са почетном тачком Z_j и крајњом тачком Z_k (тј. оријентисану дуж), а са $\overline{Z_j Z_k}$ мерни број дужи $Z_j Z_k$.

1° Растојање тачака Z_1 и Z_2 је

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

ово је модуо броја $z_1 - z_2$, тј.

$$d = |z_1 - z_2|.$$

Према томе d^2 можемо писати и у облику

$$d^2 = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 =$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2R\{z_1\bar{z}_2\}.$$

2° Координате средишта Z дужи Z_1Z_2 су

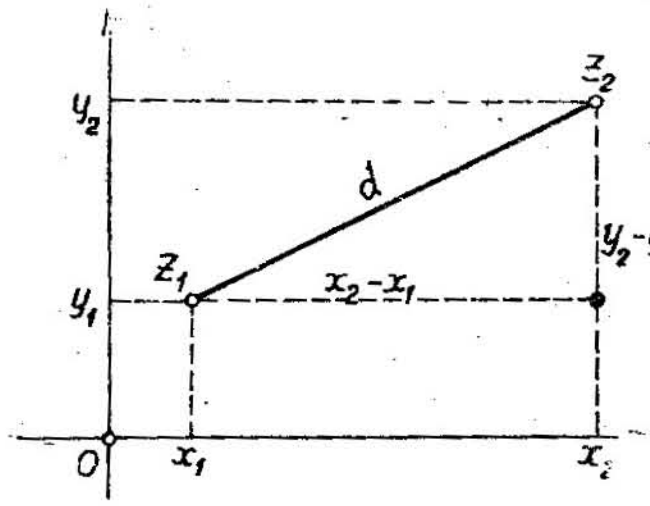
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = R\left\{\frac{z_1 + z_2}{2}\right\}$$

и

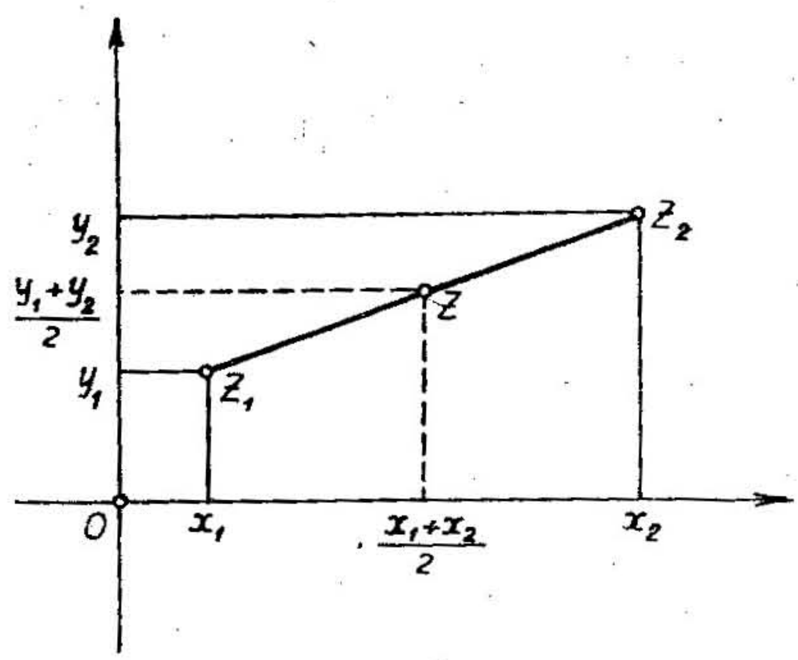
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = J\left\{\frac{z_1 + z_2}{2}\right\};$$

тј.

$$z = x + iy = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$



Сл. 34



Сл. 35

Координате тачке Z која дели дуж Z_1Z_2 у односу $q:p$, тј. тако да је

$$\overline{Z_1Z} : \overline{ZZ_2} = q:p, \qquad (1)$$

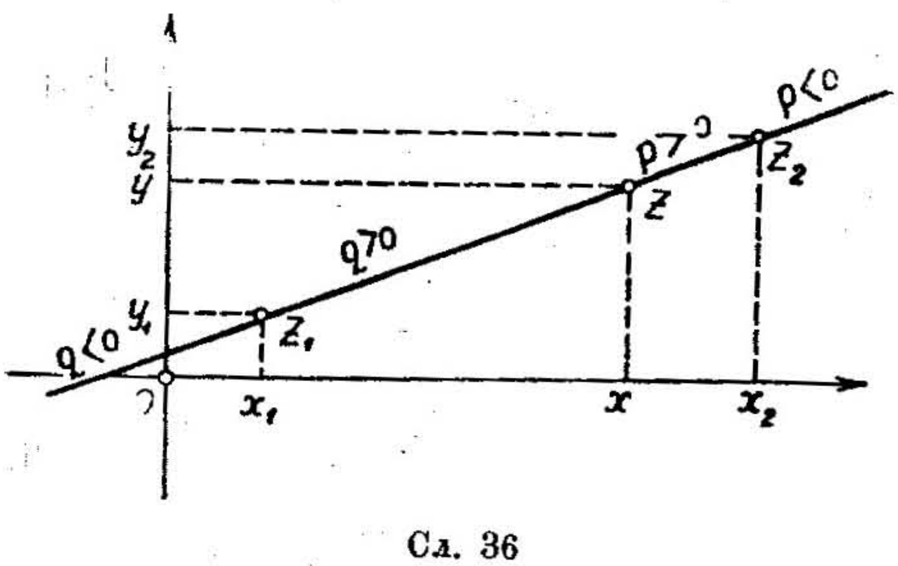
су

$$x = \frac{px_1 + qx_2}{p+q}, \quad y = \frac{py_1 + qy_2}{p+q};$$

дакле,

$$z = x + iy = \frac{pz_1 + qz_2}{p+q}, \qquad (2)$$

са $p > 0$ и $q > 0$.



Сл. 36

У општем случају, било да се тачка Z налази између тачака Z_1 и Z_2, било на продужењу дужи Z_1Z_2 са једне или са друге стране, под *односом* $t=q/p$ по коме тачка Z дели дуж Z_1Z_2 подразумева се однос

$$\overline{Z_1Z} : \overline{ZZ_2} = q : p = t\,.$$

При томе се крајње тачке дужи Z_1Z_2 и тачка Z узимају увек овим редом

$$Z_1, Z, Z_2,$$

и сматра да су дужи Z_1Z и ZZ_2 оријентисане и да су њихови мерни бројеви $\overline{ZZ_1}$ и $\overline{ZZ_2}$ иста или супротна предзнака, према томе да ли су те дужи иста или супротна смера. Тада се тачка Z дата обрасцем (2) са $p+q>0$, налази на продужењу дужи Z_1Z_2, и то са стране тачке Z_2 ако је p негативно, а са стране тачке Z_1 ако је q негативно. Ако ставимо

$$z=\frac{z_1+tz_2}{1+t},$$

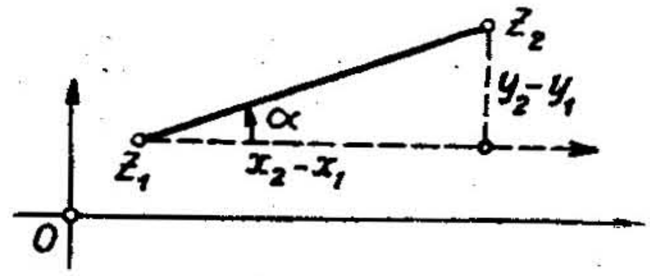
тачка Z се налази са стране тачке Z_2 ако је $t<-1$, са стране тачке Z_1 ако је $-1<t<0$, а између тачака Z_1 и Z_2 ако је $t>0$.

(iii) *Угао.* Углове увек сматрамо да су оријентисани и мерени у позитивном смеру (в. тачку **1. 3.** (ii)дела I). Углом што га заклапа оријентисана дуж са позитивним смером X-осе одређен је правац те дужи; обратно ови углови, као и углови које дужи међусобно заклапају, одређени су њиховим правцима.

1° Нагиб $tg\alpha$ дужи Z_1Z_2 дат је обрасцем

$$tg\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

док је (в. сл. 37)



Сл. 37.

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d} \quad \text{и} \quad \sin\alpha=\frac{y_2-y_1}{d},$$

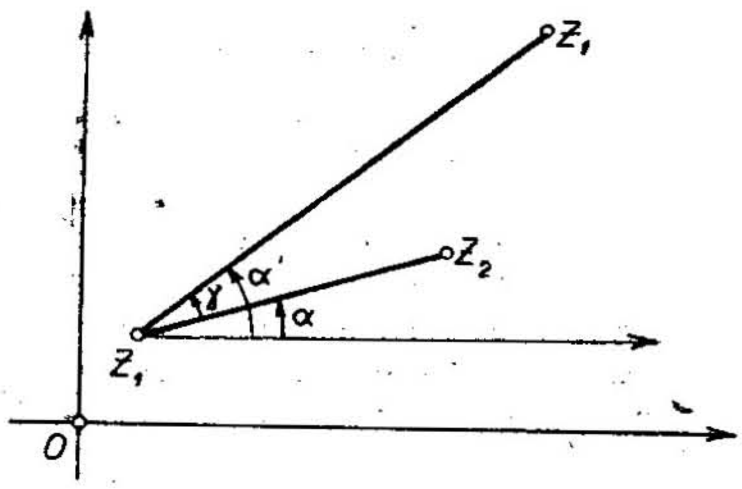
са

$$d=|z_2-z_1|.$$

Множењем другог обрасца са i и сабирањем са првим, добивамо

$$e(\alpha)=\frac{z_2-z_1}{d}=\frac{z_2-z_1}{|z_2-z_1|}.$$

Према томе је



Сл. 38

$$\alpha=arc\,(z_2-z_1) \qquad (3)$$

угао, мерен у позитивном смеру, што га заклапа ориентисана дуж $\overrightarrow{Z_1 Z_2}$ са позитивним смером X-осе, тј. угао којим је одређен правац ориентисане дужи $\overrightarrow{Z_1 Z_2}$.

2° Угао

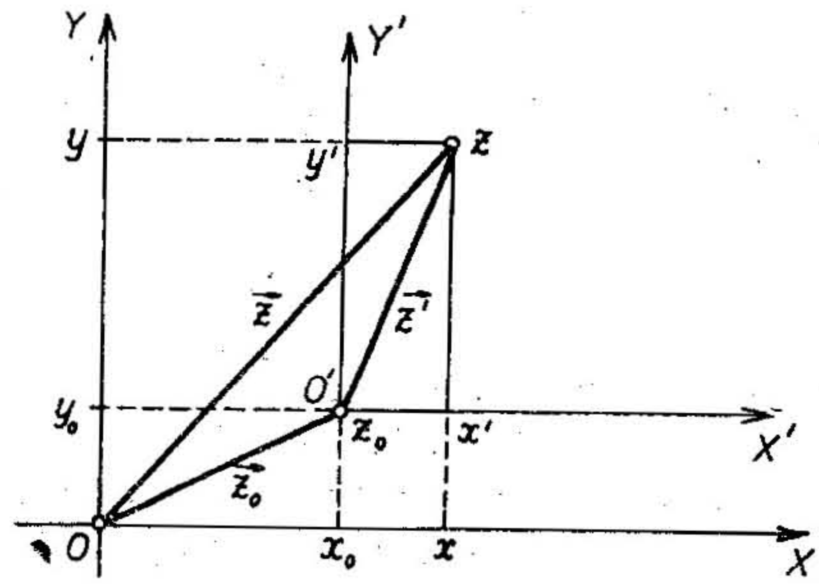
$$\gamma = \alpha' - \alpha,$$

који заклапају ориентисане дужи $Z_1 Z_2$ и $Z_1 Z_3$ (в. сл. 38) дат је обрасцем

$$tg\gamma = \frac{tg\alpha' - tg\alpha}{1 + tg\alpha\, tg\alpha'}.$$

Међутим, како овај угао претставља разлику правaца дужи $\overrightarrow{Z_1 Z_3}$ и $\overrightarrow{Z_1 Z_2}$, то се, према (3), он може краће изразити и овако

$$\gamma = arc\,(z_3 - z_1) - arc\,(z_2 - z_1) = arc\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right).$$



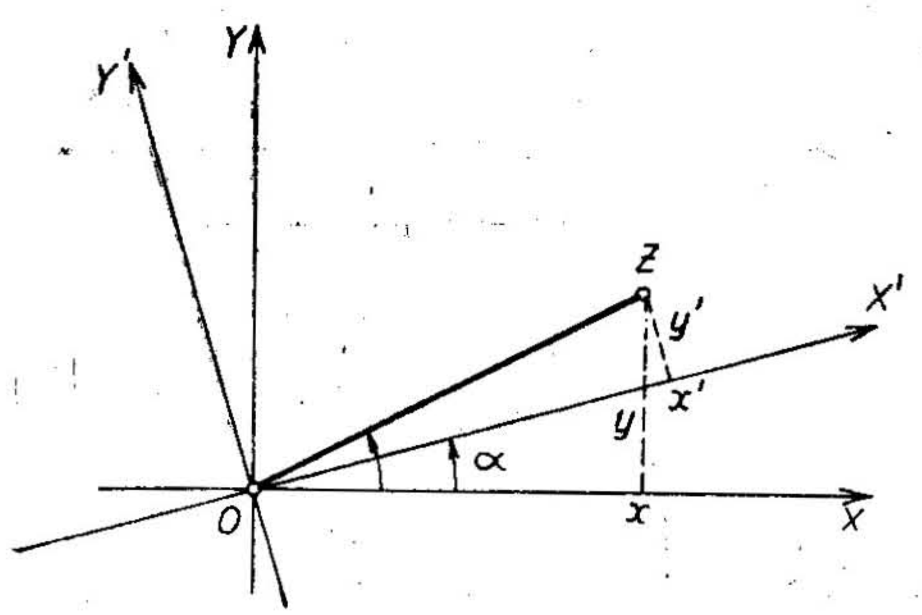
Сл. 39

(iv) *Транслација и ротација.* 1° Извршимо транслацију координатног система XOY у положај $X'O'Y'$ (в. сл. 39) тако да се почетак O' поклопи са тачком Z_0. Ако означимо са x' и y' координате тачке Z у новом координатном систему, тада из

$$\vec{z} = \vec{z}_0 + \vec{z}' \quad \text{тј.} \quad z = z_0 + z',$$

следи

$$x' = x - x_0 \quad \text{и} \quad y' = y - y_0.$$



Сл. 40

2° Извршимо ротацију координатног система XOY око координатног почетка за угао α, тако да дође у положај $X'OY'$. Координате x' и y' тачке Z у односу на координатни систем $X'OY'$ добивамо одузимањем угла α од аргумента броја z, тј. множењем овог броја са $e(-\alpha)$. Дакле,

$$z' = ze(-\alpha) \quad \text{или} \quad z = z'e(\alpha). \tag{4}$$

Отуда добивамо

$$x' + iy' = (x + iy)(\cos\alpha - i\sin\alpha) =$$
$$= x\cos\alpha + y\sin\alpha + i(y\cos\alpha - x\sin\alpha),$$

тј.

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

Обрнуто из друге једначине (4) можемо, слично, изразити x и y, помоћу x' и y'.

(v) *Површина.* 1° Нека су дате тачке Z_1 и Z_2; површина троугла OZ_1Z_2 износи

$$p = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2 - \theta_1).$$

Како је

$$\rho_1 = z_1 e(-\theta_1), \quad \rho_2 = z_2 e(-\theta_2)$$

и

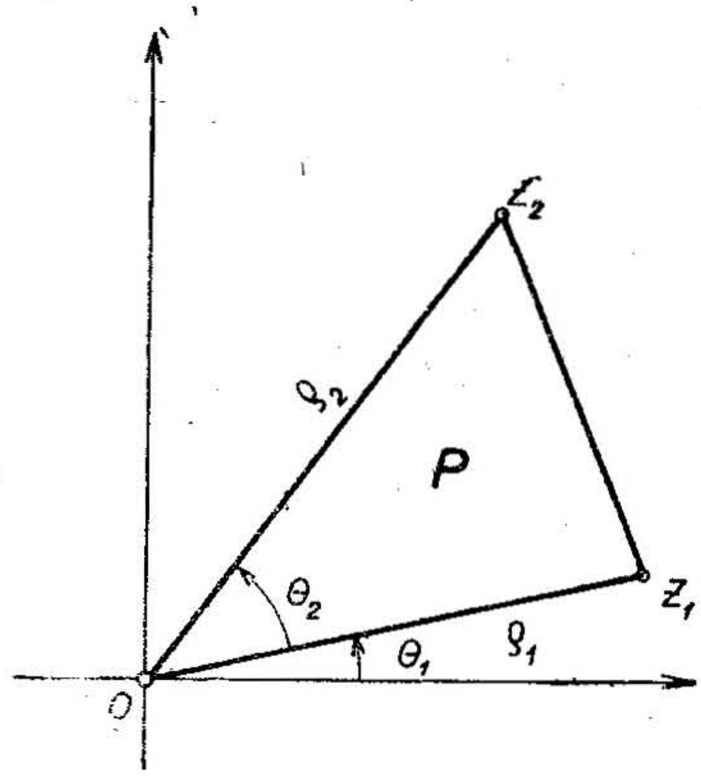
$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{e(\theta_2 - \theta_1) - e(\theta_1 - \theta_2)}{2i},$$

то је

$$P = \frac{z_1 z_2}{4i} e(-\theta_1 - \theta_2)\{e(\theta_2 - \theta_1) - e(\theta_1 - \theta_2)\} =$$

$$= \frac{z_1 z_2}{4i}\{e(-2\theta_1) - e(-2\theta_2)\} =$$

$$= \frac{z_1 z_2}{4i}\left\{\frac{\bar z_1}{z_1} - \frac{\bar z_2}{z_2}\right\} = \frac{\bar z_1 z_2 - z_1 \bar z_2}{4i},$$

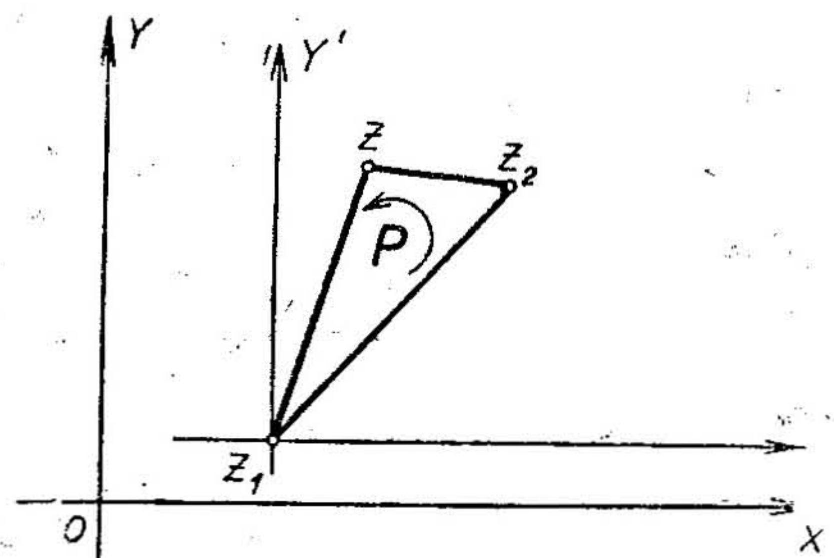


Сл. 41

тј.

$$P = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_1 & \bar z_1 \\ z_2 & \bar z_2 \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad P = \frac{1}{2} J\{\bar z_1 z_2\}. \tag{5}$$

2° Ако су дате три тачке Z_1, Z_2 и Z_3, површину троугла $Z_1Z_2Z_3$ добивамо ако извршимо транслацију координатног система XOY, тако да координатни почетак новог система $X'Z_1Y'$ дође у тачку Z_1. Тада су тачке Z_2 и Z_3 у односу на координатни систем $X'Z_1Y'$ дате бројевима $z_2 - z_1$ и $z_3 - z_1$, тако да површина троугла, према (5), износи



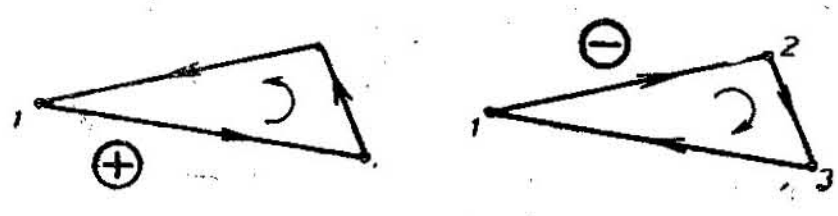
Сл. 42

$$P = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_2 - z_1 & \bar z_2 - \bar z_1 \\ z_3 - z_1 & \bar z_3 - \bar z_1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & z_1 & \bar z_1 \\ 1 & z_2 & \bar z_2 \\ 1 & z_3 & \bar z_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Ако ове две детерминанте скраћено обележимо са $(1, z, \bar{z})$ и $(1, x, y)$, последњу од једначина (6) добивамо на основу правила о збиру детерминаната овако

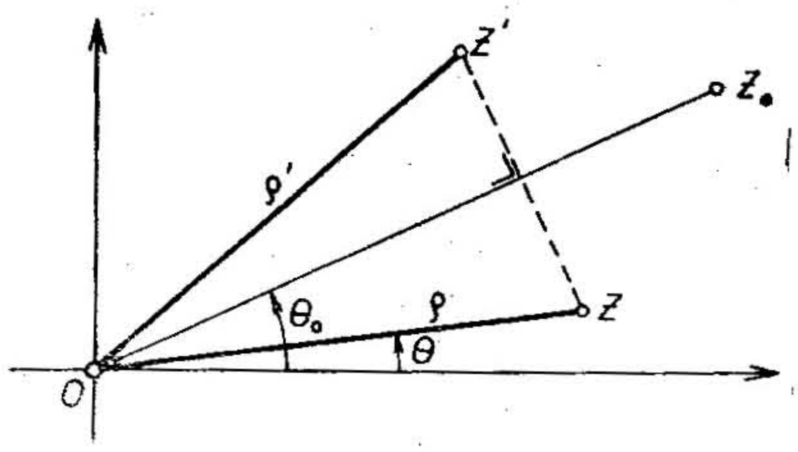
$$
\begin{aligned}
(1, z, \bar{z}) &= (1,\ x+iy,\ x-yi) = \\
&= \underbrace{(1, x, x)}_{0} + (1, x, -iy) + (1, iy, x) + \underbrace{(1, iy, -iy)}_{0} = \\
&= -i(1, x, y) - i(1, x, y) = -2i(1, x, y).
\end{aligned}
$$

Вредност површине P дате обрасцима (6) је позитивна ако је (в. сл. 43) распоред темемена Z_k такав да је смер обилажења троугла супротан смеру кретања казаљке на сату, а негативна у обрнутом случају.



Сл. 43

(vi) Да бисмо показали како се, употребом комплексних бројева, решавају поједини проблеми аналитичке геометрије, навешћемо неколико примера.



Сл. 44

Пр. (1) Дате су тачке Z и Z_0; одреди координате x' и y' тачке Z' симетричне тачки Z, у односу на праву OZ_0. (в. сл. 44).

Нека је

$$z_0 = \rho_0 e(\theta_0),\quad z = \rho e(\theta) \quad \text{и} \quad z' = \rho' e(\theta').$$

Из слике видимо да је

$$\rho' = \rho \quad \text{и} \quad \theta' = \theta_0 + (\theta_0 - \theta) = 2\theta_0 - \theta.$$

Како је

$$e(2\theta_0) = \frac{z_0}{\bar{z}_0} \quad \text{и} \quad e(\theta) = \frac{z}{|z|},$$

то је

$$e(\theta') = \frac{z_0}{\bar{z}_0} \cdot \frac{|z|}{z}.$$

Дакле,

$$z' = \rho e(\theta') = |z| \cdot \frac{z_0}{\bar{z}_0} \frac{|z|}{z} = \frac{z_0 \bar{z}}{\bar{z}_0},$$

или

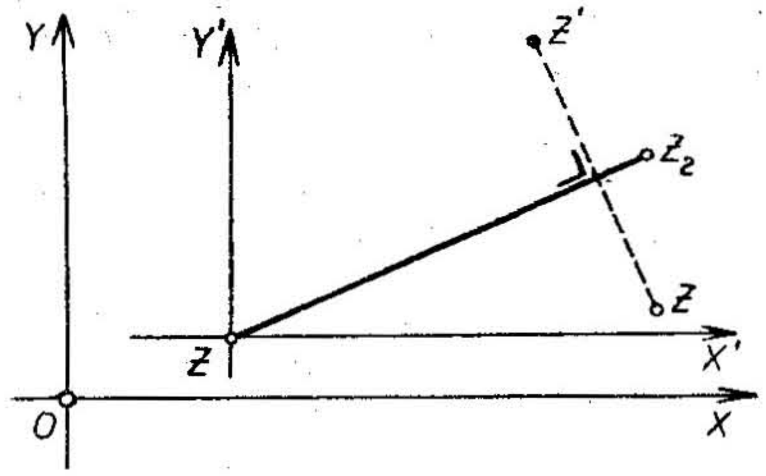
$$z' = \frac{z_0^2 \bar{z}}{|z_0|^2}.$$

Отуда је

$$x' + iy' = \frac{(x_0 + iy_0)^2 (x - iy)}{x_0^2 + y_0^2},$$

тј.

$$x' = \frac{(x_0^2 - y_0^2)x + 2x_0 y_0 y}{x_0^2 + y_0^2}, \qquad y' = \frac{2x_0 y_0 x - (x_0^2 - y_0^2)y}{x_0^2 + y_0^2}.$$



Сл. 45

Пр. (2) Дате су тачке Z_1 и Z_2; одреди тачки Z симетричну тачку Z' у односу на праву Z_1Z_2. (в. сл. 45)

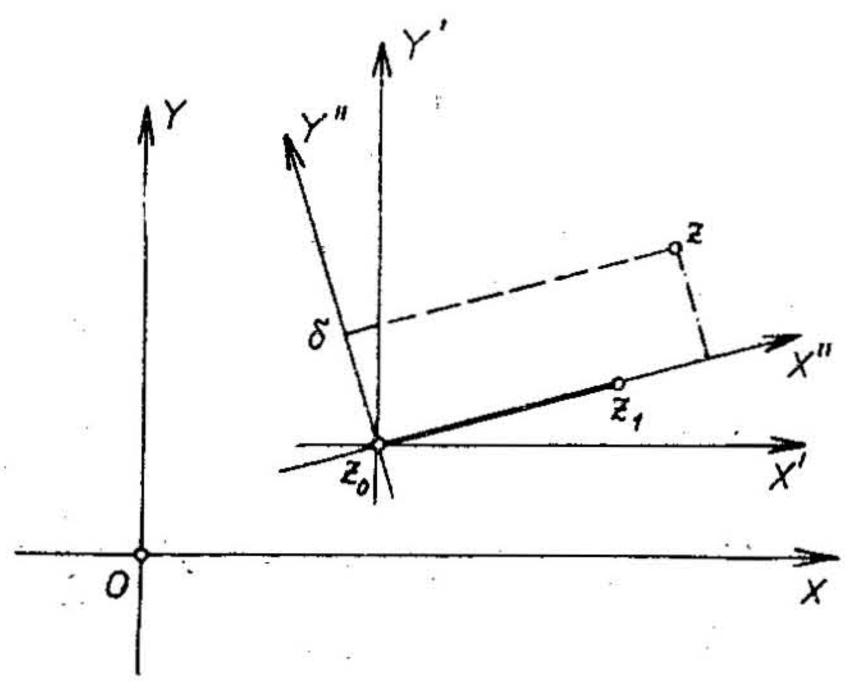
Ако извршимо транслацију координатног система XOY тако да му почетак O дође у тачку Z_1, тада су, у координатном систему $X'Z_1Y'$, тачке Z_1, Z_2 и Z' одређене бројевима

$$z - z_1, \quad z_2 - z_1 \quad \text{и} \quad z' - z_1.$$

Према обрасцу (7) примера (1) је, дакле,

$$z' - z_1 = \frac{(z_2 - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1},$$

$$z' = z_1 + \frac{(z_2 - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$



Сл. 46

Пр. (3) Одреди отстојање δ тачке Z од праве Z_0Z_1.

Транслацијом координатног почетка у тачку Z_0, тачке Z и Z_1 одређене су, у координатном систему $X'Z_0Y'$, бројевима $z - z_0$ и $z_1 - z_0$. Ротацијом координатног система $X'Z_0Y'$ око тачке Z_0 за угао

$$\alpha = arc\,(z_1 - z_0),$$

тачка Z у координатном систему $X''Z_0Y''$ одређена је бројем

$$(z - z_0)\,e(-\alpha) = (z - z_0)\,\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{|z_1 - z_0|},$$

чији имагинарни део даје вредност отстојања δ.

Дакле,

$$\delta = J\{(z - z_0)\,e(-\alpha)\} = \frac{1}{|z_1 - z_0|}\,J\{(z - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)\}.$$

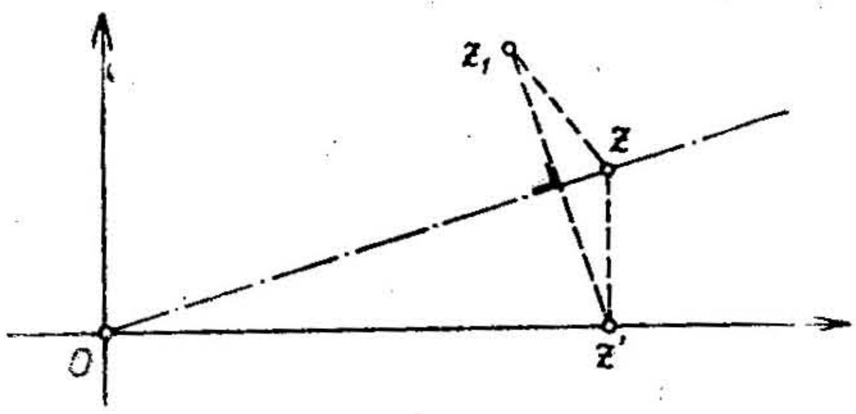
Задаци

Какав је међусобни положај тачака Z_1 и Z_2 ако је

1. $R\{z_1 z_2\} = 0$; **2.** $J\{z_1 z_2\} = 0$;

3. $R\{z_1 \bar{z}_2\} = 0$; **4.** $J\{z_1 \bar{z}_2\} = 0$.

5. Нека је Z' пројекција тачке Z на реалну осу; одреди тачки Z' симетричну тачку Z_1 у односу на праву OZ, (в. сл. 47).



Сл. 47

6. 1° Нека је $z''=z'+a$ и $z'=ze(\alpha)$; тачка Z'' се добива из Z прво ротацијом, а затим транслацијом;

2° Нека је $z''=z'e(\alpha)$ и $z'=z+ae(-\alpha)$, тачка Z'' се добива из Z прво транслацијом, а затим ротацијом.

3° Нека је $z''=ze(\alpha)+a$, $z_0=z_0e(\alpha)+a$, тј.

$$z_0=\frac{a}{1-e(\alpha)},$$

дакле

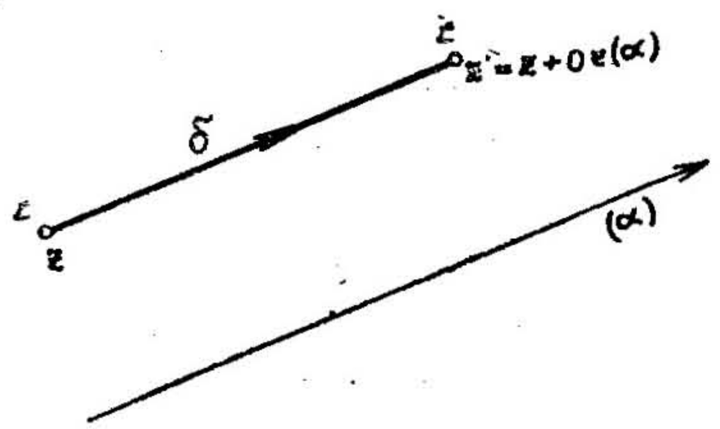
$$z''-z_0=e(\alpha)(z-z_0).$$

Покажи да се Z'' добива из Z с а м о ротацијом око тачке Z_0.

1.2. Неке основне конструкције. (**i**) Овде ћемо показати како се неке основне геометриске операције изражавају алгебарским рачунским радњама са комплексним бројевима, као и обратно.

Сабирање комплексних бројева своди се на геометриско-векторско сабирање, што одговара транслацији, а множење комплексних бројева геометриски претставља ротацију и пропорционално повећање или смањење. Услед тога, кад поједине геометриске операције изражавамо комплексним бројем или претстављамо векторски, можемо их непосредно на слици пратити одговарајућим алгебарским радњама. На тај начин добивени алгебарски изрази могу се и обратно, непосредно геометриски интерпретисати.

(**ii**) Као и у претходној тачки, од сада ћемо стално малим латинским словима означавати комплексне бројеве који одговарају тачкама означеним истим великим латинским словима, тј. са $a, b, c, \ldots, z$, означићемо комплексне бројеве који одговарају тачкама $A, B, C, \ldots, Z$.



Сл. 48

1° Пренети тачку Z у правцу α (в. тачку 1.3. (**ii**) дела I) на отстојање δ у положај Z', значи броју z додати број $\delta e(\alpha)$ (в. сл. 49); дакле,

$$z'=z+\delta e(\alpha).$$

2^0 Дуж AB по величини и правцу, тј. вектор $\overrightarrow{AB}$, дат је разликом

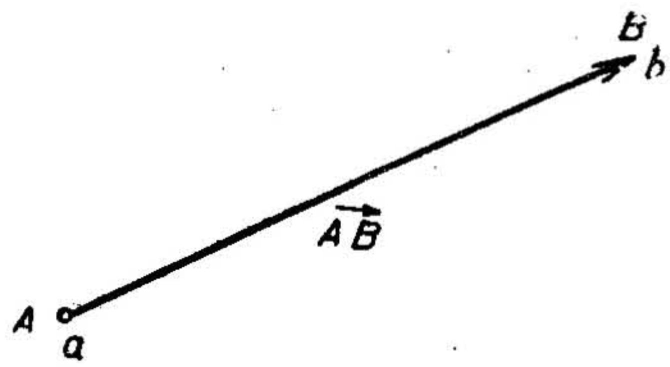
$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}.$$

Величина дужи $\overline{AB}$ је

$$\overline{AB}=|b-a|,$$

а њен правац α дат је са

$$e(\alpha)=\frac{b-a}{|b-a|}.$$



Сл. 49

3^0 Ротирати тачку Z око тачке A за угао α у позитивном смеру значи правцу вектора (в. т. 1. 3. (iii) дела I.)

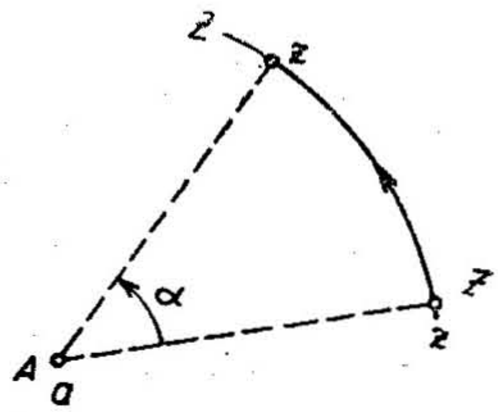
$$\overrightarrow{AZ}=\vec{z}-\vec{a}$$

додати угао α, тј. множити број $z-a$ са $e(\alpha)$ (в. сл. 50); дакле,

$$z'=(z-a)\,e(\alpha).$$

Ако је $\alpha=\pi/2$, тада је $e(\pi/2)=i$; дакле, вектор $\overrightarrow{(z-a)i}$ стоји нормално на $\overrightarrow{(z-a)}$.

4^0 Угао α, мерен у позитивном смеру, што га заклапају оријентисане дужи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ дат је аргументом количника $\dfrac{b-a}{d-c}$ или производа $(b-a)(\bar{d}-\bar{c})$, (в. сл. 51), тј.



Сл. 50

$$\alpha=arc\left(\frac{b-a}{d-c}\right)=arc\,\{(b-a)(\bar{d}-\bar{c})\},$$

или

$$e(\alpha)=\frac{b-a}{d-c}\left|\frac{d-c}{b-a}\right|=\frac{(b-a)(\bar{d}-\bar{c})}{|b-a|\,|d-c|}.$$

Јер ако ставимо

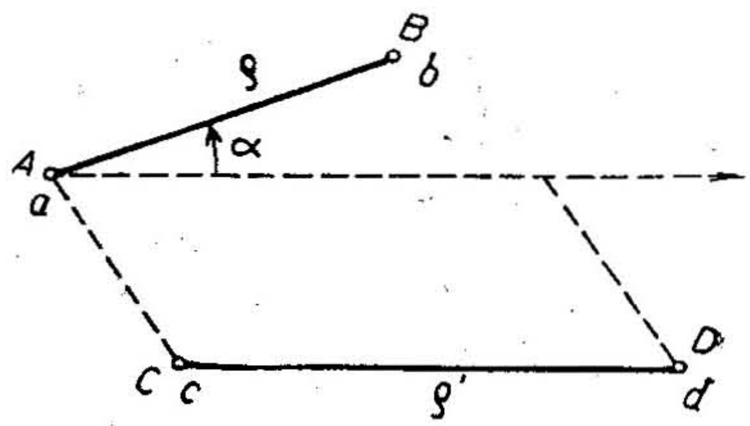
$$b-a=\rho\,e(\theta) \quad \text{и} \quad d-c=\rho'\,e(\theta'),$$

тада је

$$\frac{b-a}{d-c}=\frac{\rho}{\rho'}\,e(\theta-\theta'),$$

или

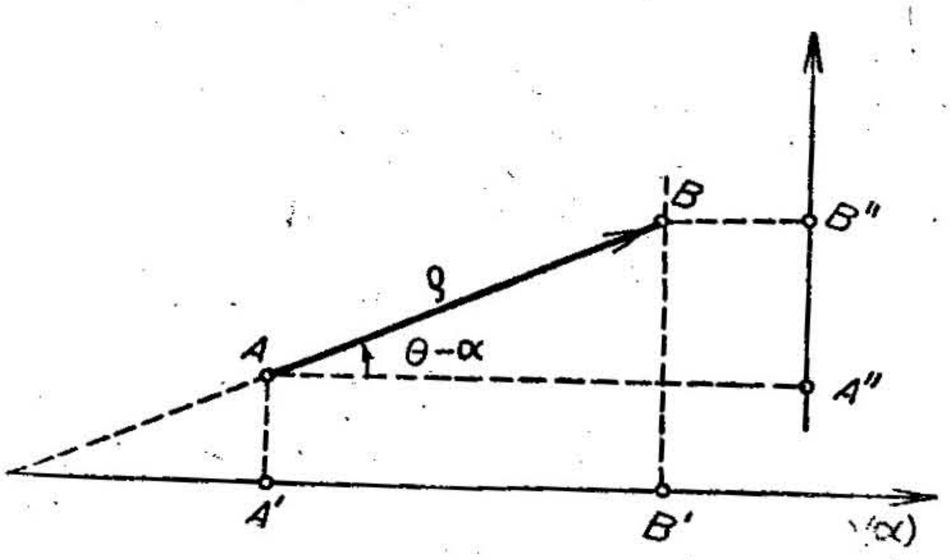
$$(b-a)(\bar{d}-\bar{c})=\rho\rho'\,e(\theta-\theta').$$



Сл. 51

5^0 Величина пројекције $\overline{A'B'}$ дужи AB на полуправу правца α дата је реалним делом производа (в. сл. 52)

$$(b-a)e(-\alpha),$$



Сл. 52

тј.

$$\overline{A'B'} = R\{(b-a)\,e\,(-\alpha)\} =$$
$$= \frac{(b-a)\,e\,(-\alpha) + (\overline{b}-\overline{a})\,e(\alpha)}{2},$$

и то се предзнаком $+$ или $-$, према томе да ли су $A'B'$ и $e(\alpha)$ иста или супротна смера.

Јер ако ставимо

$$b - a = \rho e(\theta),$$

тада је

$$(b-a)\,e\,(-\alpha) = \rho\, e\,(\theta-\alpha) = \rho \cos(\theta-\alpha) + i\rho \sin(\theta-\alpha).$$

6^0 Са ознакама претходне тачке и из истих разлога (в. сл. 52) видимо да је величина пројекције $\overline{A''B''}$ па полуправу која стоји нормално на правац α дата имагинарним делом производа $(b-a)e(-\alpha)$, тј. да је

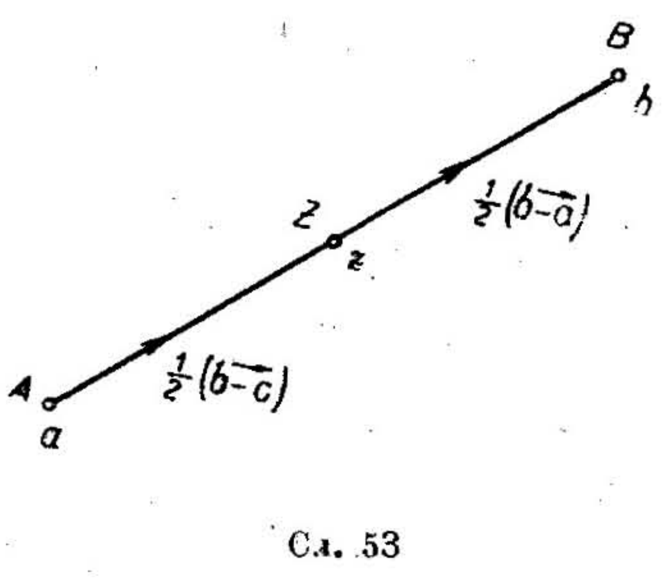
$$\overline{A''B''} = \rho \sin(\theta-\alpha) =$$
$$= J\{(b-a)e(-\alpha)\} = \frac{(b-a)e(-\alpha) - (\overline{b}-\overline{a})\,e(\alpha)}{2i}.$$

7^0 Оријентисана дуж $\overrightarrow{A_1B_1}$, која је истога правца са дужи $\overrightarrow{AB}$ и k пута већа $(k > 1)$, или мања $(0 < k < 1)$, дата је са (в. сл. 53)

$$\overrightarrow{A_1B_1} = k(\vec{b}-\vec{a}),$$

јер је

$$|k(b-a)| = k|b-a|.$$



Сл. 53

8^0 Тачка Z која полови дуж AB дата је са

$$z = \frac{a+b}{2}.$$

Јер је

$$\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

и

$$\vec{z} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}) = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

9^0 Тачка Z која дели дуж AB у размери $q:p$ (в. 1.1 (ii) 3^0), дата је са (в. сл. 54)

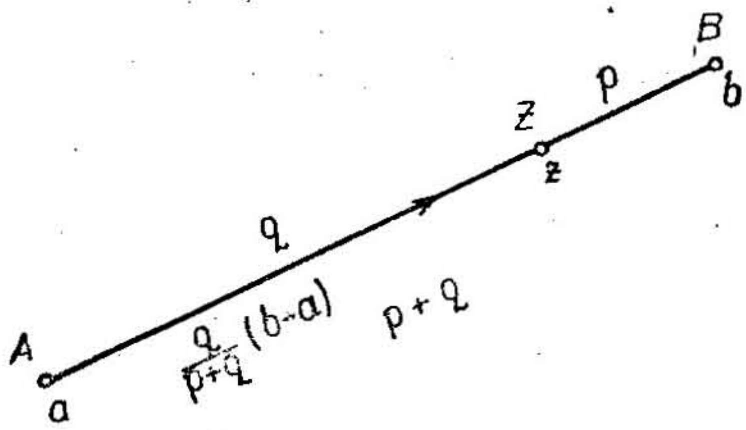
$$z=\frac{pa+qb}{p+q},$$

или, ако ставимо

$$\theta=\frac{p}{p+q}, \text{ са } z=\theta a+(1-\theta)b.$$

Јер је

$$\vec{AZ}=\frac{q}{p+q}(\vec{b}-\vec{a}),$$



Сл. 54

па је

$$\vec{z}=\vec{a}+\frac{q}{p+q}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{p\vec{a}+q\vec{b}}{p+q}.$$

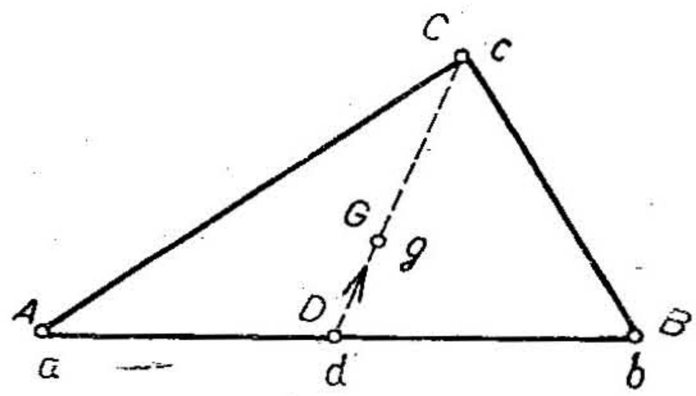
(iii) Покажимо овде на неколико примера како се ове операције примењују на неке сложеније геометриске конструкције.

Пр. (1) Одреди тежиште G троугла ABC, (в. сл. 55).

Ако са D означимо тачку која полови дуж AB, тада тежиште G дели дуж DC у односу $1:2$.

Како је

$$d=\frac{a+b}{2},$$



Сл. 55

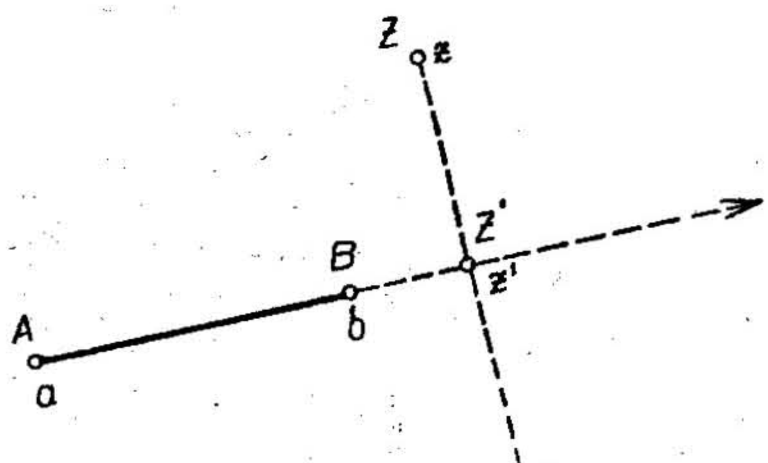
то је

$$g=\frac{2d+c}{3}=\frac{2\frac{a+b}{2}+c}{3}=\frac{a+b+c}{3}.$$

Пр. (2) Одреди пројекцију Z' тачке Z на праву AB, (в. сл. 56).

Нека је α правац вектора $\vec{AB}$, тј.

$$e(\alpha)=\frac{b-a}{|b-a|} \quad \text{или} \quad e(-\alpha)=\frac{\bar{b}-\bar{a}}{|b-a|};$$



Сл. 56

тада је

$$z'-a=|z'-a|\,e(\alpha), \quad \text{тј.} \quad z'=a+|z'-a|\,e(\alpha).$$

Како е $|z'-a|$ величина пројекције дужи AZ на полуправу правца α, то је

$$|z'-a|=R\{(z-a)e(-\alpha)\}=R\{\frac{(z-a)(\bar{b}-\bar{a})}{|b-a|}\}.$$

Према томе је

$$z' = a + e(\alpha) R\left\{\frac{(z-a)(\bar b - \bar a)}{|b-a|}\right\} = a + \frac{b-a}{|b-a|^2}\,\frac{(z-a)(\bar b-\bar a)+(\bar z-\bar a)(b-a)}{2} =$$

$$= a + \frac{z-a}{2} + \frac{\bar z - \bar a}{2}\,\frac{(b-a)^2}{|b-a|^2}.$$

Дакле,

$$z' = \frac{a+z}{2} + \frac{\bar z - \bar a}{2}\,\frac{(b-a)^2}{|b-a|^2}.$$

Пр. (3) Одреди симетричну тачку Z_1 тачке Z у односу на праву дужи AB, (в. сл. 56).

Према претходном задатку, задржавајући исте ознаке, је

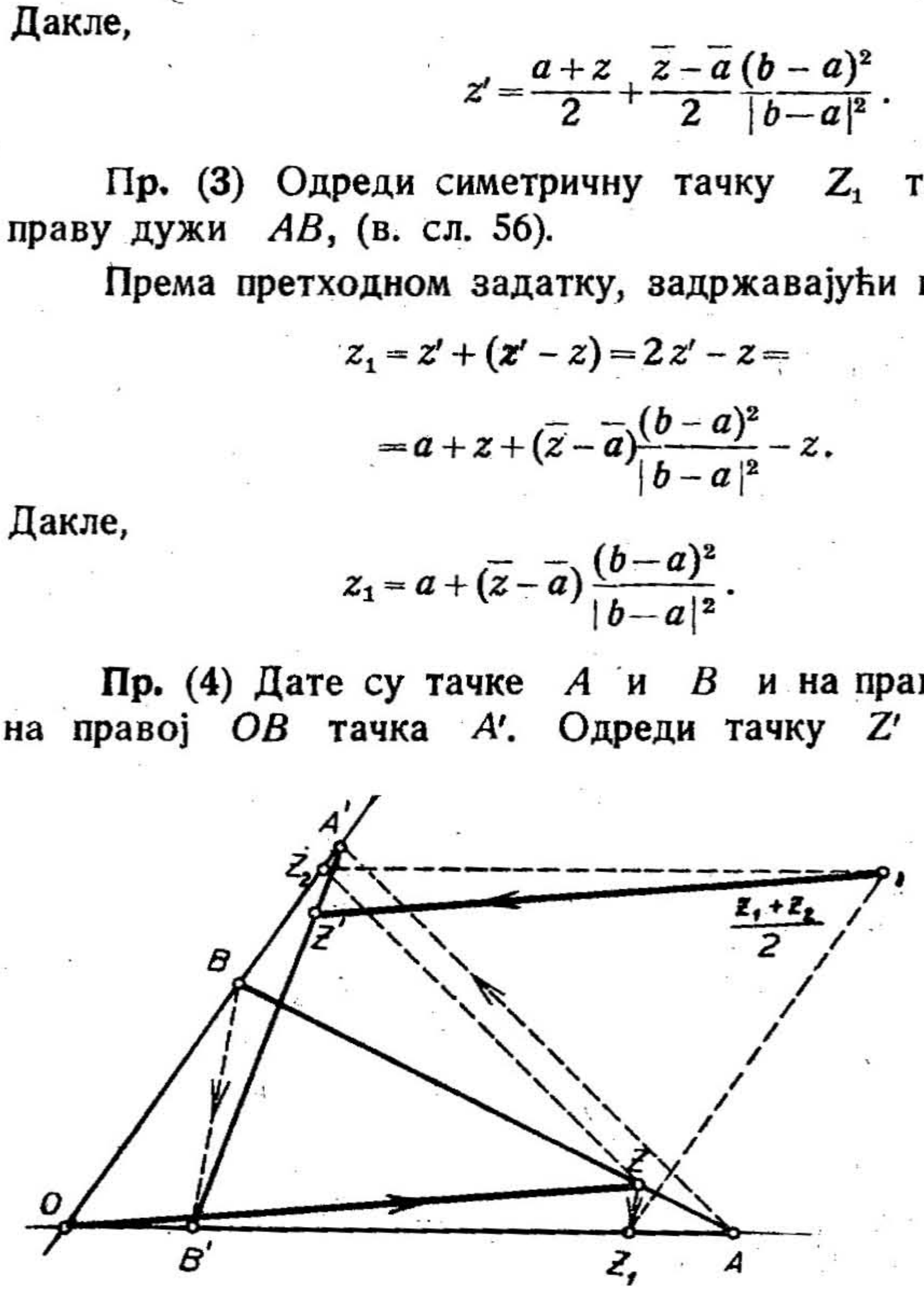
$$z_1 = z' + (z' - z) = 2z' - z =$$

$$= a + z + (\bar z - \bar a)\frac{(b-a)^2}{|b-a|^2} - z.$$

Дакле,

$$z_1 = a + (\bar z - \bar a)\,\frac{(b-a)^2}{|b-a|^2}.$$

Пр. (4) Дате су тачке A и B и на правој OA тачка B', а на правој OB тачка A'. Одреди тачку Z' која дели дуж $A'B'$ у истом односу у коме тачка Z дели дуж AB, (в. сл. 57).



Сл. 57

Обележимо са λ однос BZ/ZA, тада је

$$b - z = \lambda(z-a), \quad (1)$$

и треба одредити z' тако да буде

$$b' - z' = \lambda(z' - a'). \quad (2)$$

Означимо са Z_1 тачку пресека праве OA са правом која пролази кроз тачку Z, а паралелна је дужи BB', а са Z_2 тачку пресека праве OB са правом која пролази кроз тачку Z, а паралелна је дужи AA', тада из сличности троуглова AZZ_1 и ABB', односно BZZ_2 и BBA', следи

$$b' - z_1 = \lambda(z_1 - a) \quad \text{и} \quad b - z_2 = \lambda(z_2 - a'). \quad (3)$$

Елиминацијом бројева a и b добивамо из (1) и (3)

$$b' - (z_1 + z_2 - z) = \lambda\{(z_1 + z_2 - z) - a'\},$$

дакле, према (2), је

$$z' = z_1 + z_2 - z.$$

Отуда се тачка Z' добива конструкцијом приказаном на слици 57.

Задаци

1. Одреди тачке C_1, C_2 и C_3 које се налазе на продужењу дужи AB, а на отстојањима

$$|b-a|, \quad 2|b-a| \quad \text{и} \quad 3|b-a|.$$

2. Дужи AB и CD су нормалне ако је

$$arc\left(\frac{a-b}{c-d}\right) = \pm \pi/2.$$

Како гласи услов паралелности?

3. Где се налазе тачке

$$z_1 = \frac{2a+b}{3}, \quad z_2 = 2a - b \quad \text{и} \quad z_3 = \frac{5a-3b}{2}$$

према тачкама A и B?

Дате су тачке A, B и C; где се налазе тачке:

4. $z_1 = \dfrac{2a+b+c}{4}, \quad z_2 = \dfrac{a+2b+c}{4} \quad$ и $\quad z_3 = \dfrac{a+b+2c}{4};$

5. $z_1 = \dfrac{2a+b-c}{2}, \quad z_2 = \dfrac{-a+2b+c}{2} \quad$ и $\quad z_3 = \dfrac{a-b+2c}{2};$

6. $z = \dfrac{pa+qb+rc}{p+q+r}$ са $p>0$, $q>0$ и $r>0$?

7. У четвороуглу Z_1, Z_2, Z_3, и Z_4 позната су тежишта G_1, G_2, G_3 и G_4 она четири троугла која су образована са по 3 темена четвороугла. Нађи геометриску конструкцију за темена Z_1, Z_2, Z_3 и Z_4.

8. Одреди симетричне тачке G_1, G_2, и G_3 тежишта G троугла ABC у односу на стране AB, BC и CA.

9. Дате су тачке a, $b = a + e(\alpha)$, $c = a + e(\beta)$ и z. Нађи растојање симетричних тачака z' и z'' тачке z, у односу на дужи AB и AC. {Одговор: $|z'' - z'| = 2|z-a|\sin(\beta-\alpha)$.}

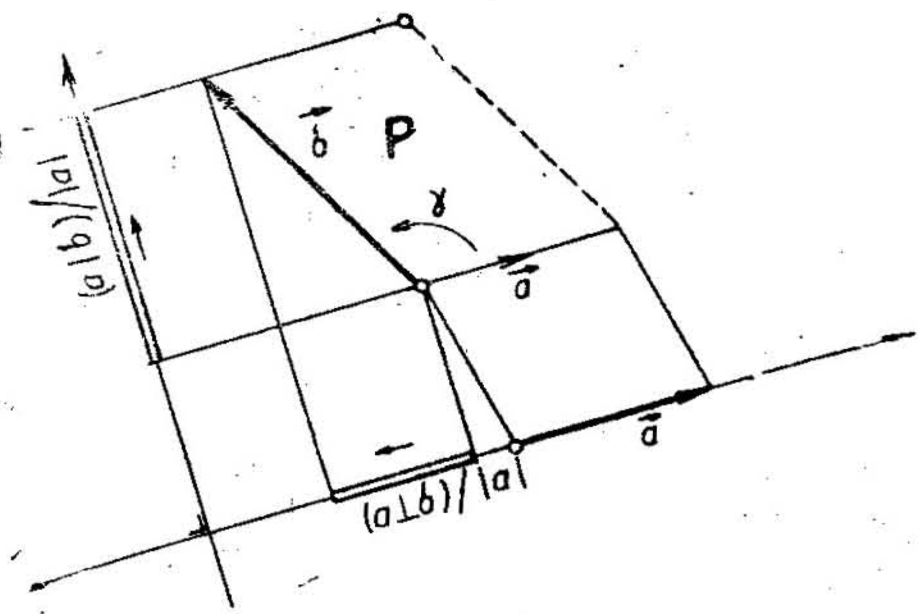
10. Покажи да је

$$w = \frac{ae(\alpha) - b}{e(\alpha) - 1}$$

она тачка симетрале дужи AB из које се ова дуж види под углом α. {$(w-a)\,e(\alpha) = w - b$.}

1. 3. Векторски метод. (i) Употребом слободних вектора, тј. појма померања, примена комплексних бројева у геометрији добива синтетички карактер. Због тога што се транслација своди на сабирање односно одузимање, па је лако изводљива, то координатни почетак не морамо стално задржавати на истом месту већ га можемо, према потреби, у току рачуна стављати у поједине тачке слике; ово постижемо једноставним одузимањем броја који одговара тачки у коју желимо да поставимо координатни почетак. На исти начин ротацију целе слике или њених појединих елемената сводимо на множење или дељење према томе да ли се ова врши у позитивном или негативном смеру. Ако, на пример, желимо да неку дуж ротирамо око једне од њених крајњих тачака за угао α, одузимањем комплексног броја који одговара тој крајњој тачки постављамо почетак координатног система у ту тачку, а затим множењем са $e(\alpha)$ извршимо ову ротацију. Применом оваквих операција не само што рачун постаје прегледнији, већ се и сам карактер координатне геометрије губи. — Са тих разлога рачун са комплексним бројевима претставља донекле спону између синтетичке и аналитичке методе.

(ii) Да бисмо паралелност и нормалност могли лакше алгебарски интерпретисати и поједине геометриске операције рачунски прегледније изводити увешћемо још један нарочити појам производа који се, да бисмо ово постигли, природно намеће.



Сл. 58

Нека су дати вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тј.

$$a = |a|\,e(\varphi), \quad b = |b|\,e(\psi),$$

и нека је

$$\gamma = \psi - \varphi$$

угао мерен у позитивном смеру од вектора $\vec{a}$ према вектору $\vec{b}$. Уочимо производ

$$\bar{a}b = |a|\,|b|\,e(\psi - \varphi) = |a|\,|b|\cos\gamma + i\,|a|\,|b|\sin\gamma\,.$$

Реални део овог производа, тј.

$$R\{\bar{a}b\} = |a|\,|b|\cos\gamma,$$

претставља производ из $|a|$ и ортогоналне пројекције вектора $\vec{b}$ на правац вектора $\vec{a}$, док је имагинарни део, тј.

$$J\{\bar{a}b\} = |a|\,|b|\sin\gamma,$$

једнак производу из $|a|$ и пројекције вектора $\vec{b}$ на правац нормалан на вектор $\vec{a}$; овај последњи можемо претставити и површином P паралелограма одређена векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, (в. сл. 58).

Ове производе, већ и краћег писања ради, означимо са $(a \perp b)$ и $(a|b)$, тј. ставимо, по дефиницији,

$$(a \perp b) = R\{\bar{a}b\} = \frac{\bar{a}b + a\bar{b}}{2} = |a||b|\cos\gamma \tag{1}$$

и

$$(a|b) = J\{\bar{a}b\} = \frac{\bar{a}b - a\bar{b}}{2i} = |a||b|\sin\gamma, \tag{2}$$

или, што је исто,

$$\bar{a}b = (a \perp b) + i(a|b).$$

Употребом ових симбола можемо услов за нормалност и паралелност вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лако изразити, наиме:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{ако је} \quad (a \perp b) = 0, \tag{3}$$

а

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \quad \text{ако је} \quad (a|b) = 0. \tag{4}$$

Специално је

$$(a|a) = 0 \quad \text{и} \quad (a \perp ai) = 0,$$

док је

$$(a \perp a) = (a|ai) = |a|^2.$$

(iii) Овако дефинисани симболи $(a \perp b)$ и $(a|b)$ имају карактер производа. У теорији вектора ови производи одговарају скаларном и векторском производу; овде ћемо ове производе звати *ортогоналан* и *паралелан производ*.

За ортогоналан производ $(a \perp b)$ важи комутативан и дистрибутиван закон, јер је, према (1),

$$(a \perp b) = (b \perp a)$$

и

$$(a + a' \perp b) = (a \perp b) + (a' \perp b).$$

Међутим, за паралелан производ $(a|b)$ комутативан закон не важи, јер је, према (2),

$$(a|b) = -(b|a),$$

док дистрибутиван закон остаје у важности, тј.

$$(a + a'|b) = (a|b) + (a'|b).$$

Асоцијативан закон за ове производе донекле губи свој смисао и то са разлога што су ови производи у в е к реални бројеви. Ако наиме са k означимо неки реалан број, тада је, према (1) и (2),

$$(k \perp a) = k(1 \perp a) \quad \text{и} \quad (k|a) = k(1|a),$$

где, уствари, изрази $(1 \perp a)$ и $(1|a)$ претстављају пројекције вектора $\vec{a}$ на реалну и имагинарну осу, тј.

$$(1 \perp a) = R\{a\} \quad \text{и} \quad (1|a) = J\{a\}.$$

Према томе, ако, на пример, уочимо производе $((a|b)|c)$ и $((a|c)|b)$, биће

$$((a|b)|c) = (a|b)(1|c),$$

док је

$$(a|(b|c)) = (b|c)(a|1),$$

или

$$((a|c)|b) = (a|c)(1|b);$$

први од ових производа је увек једнак нули ако је, на пример, вектор $\vec{a}$ паралелан вектору $\vec{b}$, док то не мора бити случај код друга два производа.

Слично добивамо и кад ове производе комбинујемо са обичним производом, другим речима, ни за овакве мешовите производе не важи закон који би одговарао асоциативном закону. Тако је, например, јасно да је

$$a(b|c) \neq b(a|c),$$

кадгод вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ немају исти правац, или да је

$$(a|bc) \neq (ac|b) \neq c(a|b).$$

Међутим, ако је у овим последњим изразима c реално и ако га означимо са k, према (2) и (1), је

$$(ka|b) = (a|kb) = k(a|b)$$

и (5)

$$(ka \perp b) = (a \perp kb) = k(a \perp b).$$

Ако је пак c чисто имагинаран број, на пример i, тј. ако један од вектора $\vec{a}$ или $\vec{b}$ множењем са i ротирамо за 90^0, тада паралелан производ прелази у ортогоналан и обратно; наиме, према (2) и (1) је

$$(a|bi) = (a \perp b), \quad \text{односно} \quad (ai \perp b) = (a|b).$$

Из ових веза видимо да је довољно увести само један од ових производа, на пример паралелни, јер се ортогонални производ може увек на њега свести.

Приметимо напослетку да паралелан и ортогоналан производ не мењају своју вредност ако оба вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ротирамо за исти угао α, тј. да је, према (2) и (1),

$$(ae(\alpha)|be(\alpha)) = (a|b) \quad \text{и} \quad (ae(\alpha) \perp be(\alpha)) = (a \perp b).$$

Уопште, ако је c произвољан комплексан број, тада је, према овим обрасцима и обрасцима (5),

$$(ac|bc) = |c|^2 (a|b)$$

и

$$(ac \perp bc) = |c|^2 (a \perp b).$$

(iv) Овако дефинисани паралелан и ортогоналан производ веома су подесни за алгебарско изражавање појединих геометриских конструкција и то нарочито оних које добивамо пројектовањем.

Тако, на пример, величину ортогоналне пројекције $\overline{A'B'}$ дужи AB на праву правца α добивамо непосредно ортогоналним производом; ако је наиме дуж AB по величини и правцу дата вектором $\vec{z}$, тада је (в. тачку 1. 2. (ii), 5°)

$$\overline{A'B'} = (z \perp e(\alpha)).$$

Међутим, можемо применом паралелног производа, скоро исто тако једноставно, добити и косу пројекцију вектора $\vec{z}$. Наиме, коса пројекција $\vec{z}'$ вектора $\vec{z}$, у правцу вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$, дата је по величини и правцу изразом

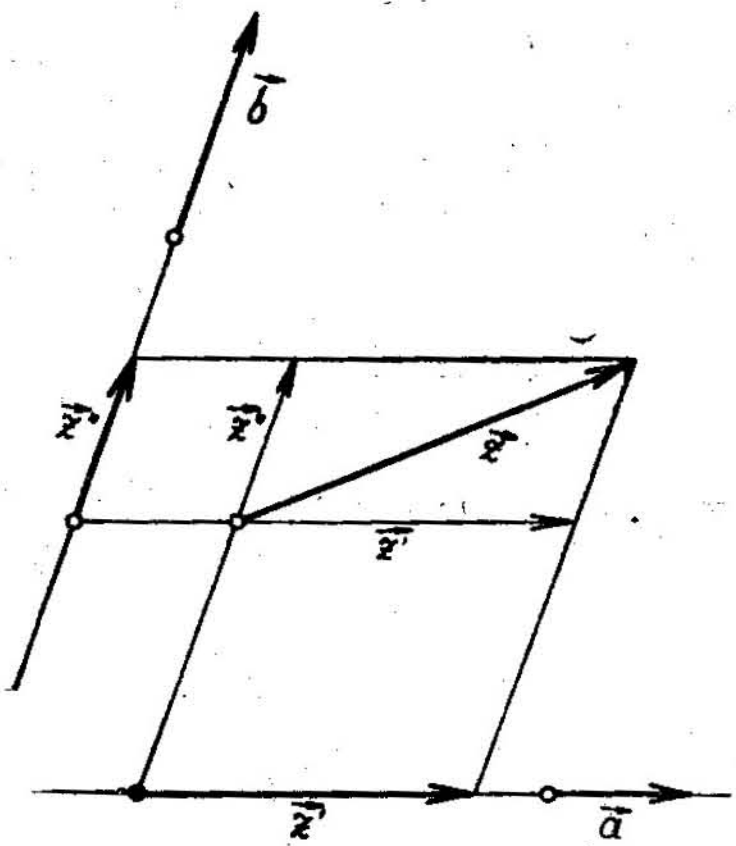
$$z' = \frac{(z \mid b)}{(a \mid b)}\, a;$$

исто је тако његова пројекција $\vec{z}''$ на вектор $\vec{b}$ у правцу вектора $\vec{a}'$ дата изразом

$$z'' = \frac{(z \mid a)}{(b \mid a)}\, b.$$

Другим речима, вектори $\vec{z}'$ и $\vec{z}''$ су компоненте вектора $\vec{z}$ (в. сл. 59) у правцима вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тако да је

$$z' + z'' = z. \qquad (6)$$



Сл. 59

Да бисмо ово показали, помножимо паралелно једначину (6) вектором $\vec{b}$; како је вектор $\vec{z}''$ паралелан вектору $\vec{b}$, то је

$$(z'' \mid b) = 0,$$

тако да после множења преостаје само једначина

$$(z' \mid b) = (z \mid b).$$

Како вектори a и z' имају исти правац, то је z'/a реално, па је према (5),

$$(z' \mid b) = \left(\frac{z'}{a}\, a \mid b\right) = \frac{z'}{a}\,(a \mid b).$$

Отуда добивамо да је

$$\frac{z'}{a}(a \mid b) = (z \mid b),$$

дакле

$$(a \mid b) z' = (z \mid b) a. \tag{7}$$

Замењујући у овом обрасцу a са b добивамо образац за компоненту z'', наиме

$$(b \mid a) z'' = (z \mid a) b. \tag{8}$$

Ако у обрасцу (8) пермутујемо a са b и z са a, обе стране ће променити знак и он постаје

$$(a \mid b) z'' = (a \mid z) b;$$

сабирањем овог обрасца са обрасцем (7), пошто на левој страни извучемо као заједнички фактор $(a \mid b)$ и збир $z' + z''$, према (6), заменимо са z, добивамо

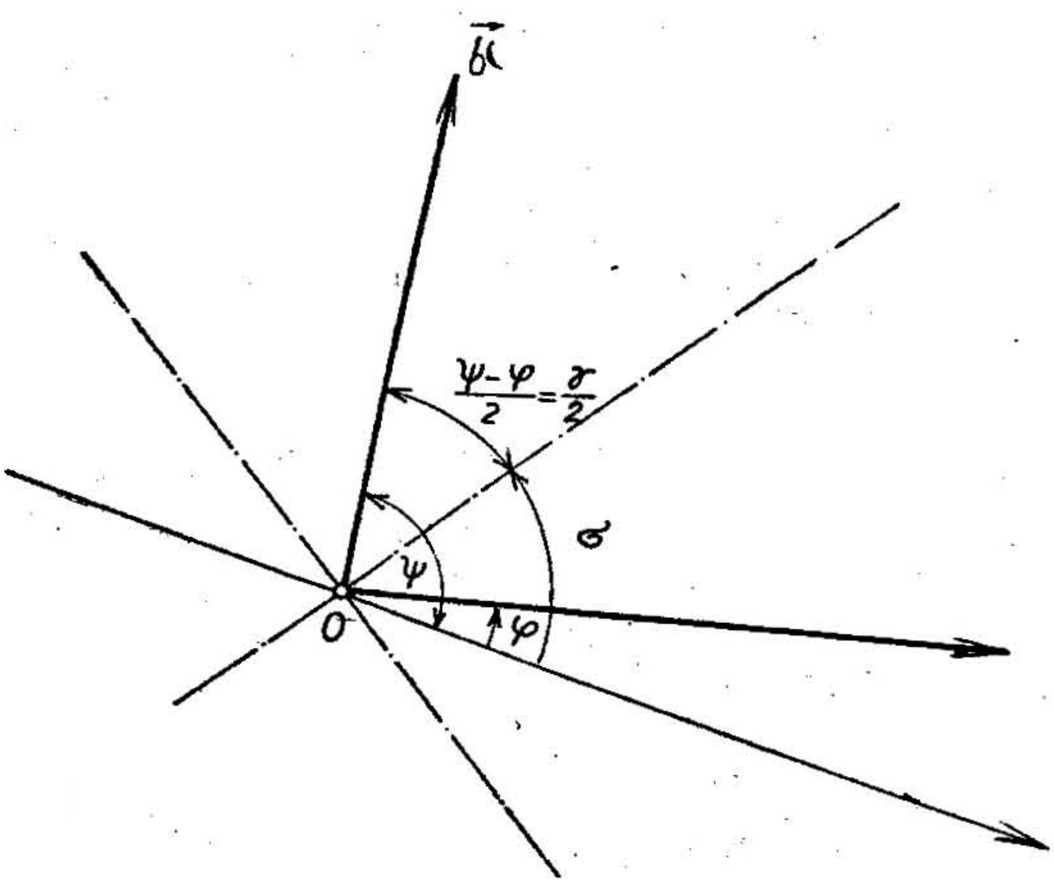
$$(a \mid b) z = (z \mid b) a + (a \mid z) b. \tag{9}$$

Ова веза је карактеристична за паралелан производ. Да бисмо је написали у симетричном облику заменимо z са c и пренесимо све чланове на леву страну; пермутовањем c са b и a са c, последња два члана мењају знак тако да ова веза узима облик

$$(a \mid b) c + (b \mid c) a + (c \mid a) b = 0, \tag{10}$$

где се, дакле, бројеви a, b и c у појединим члановима добивају цикличком пермутацијом.

(v) Пре него што пређемо на примену изложеног, изведимо неколико образаца који се односе на симетралу угла, а који ће нам доцније бити од користи.



Сл. 60

Обележимо са σ правац симетрале унутрашњег угла који заклапају вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тј. угла мерена у позитивном смеру од вектора $\vec{a}$ према вектору $\vec{b}$. Ако ставимо

$$a = |a| \, e(\varphi)$$

и

$$b = |b| \, e(\psi),$$

тада је

$$\sigma = \frac{\varphi + \psi}{2},$$

док је, за $\gamma = \psi - \varphi$, (в. сл. 60),

$$\psi - \sigma = \frac{\psi - \varphi}{2} = \frac{\gamma}{2} \quad \text{и} \quad \sigma - \varphi = \frac{\psi - \varphi}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Према томе је

$$e(-\sigma)(b-a) = |b|\, e(\psi - \sigma) - |a|\, e(\varphi - \sigma) =$$
$$= |b|\, e\left(\frac{\gamma}{2}\right) - |a|\, e\left(-\frac{\gamma}{2}\right).$$

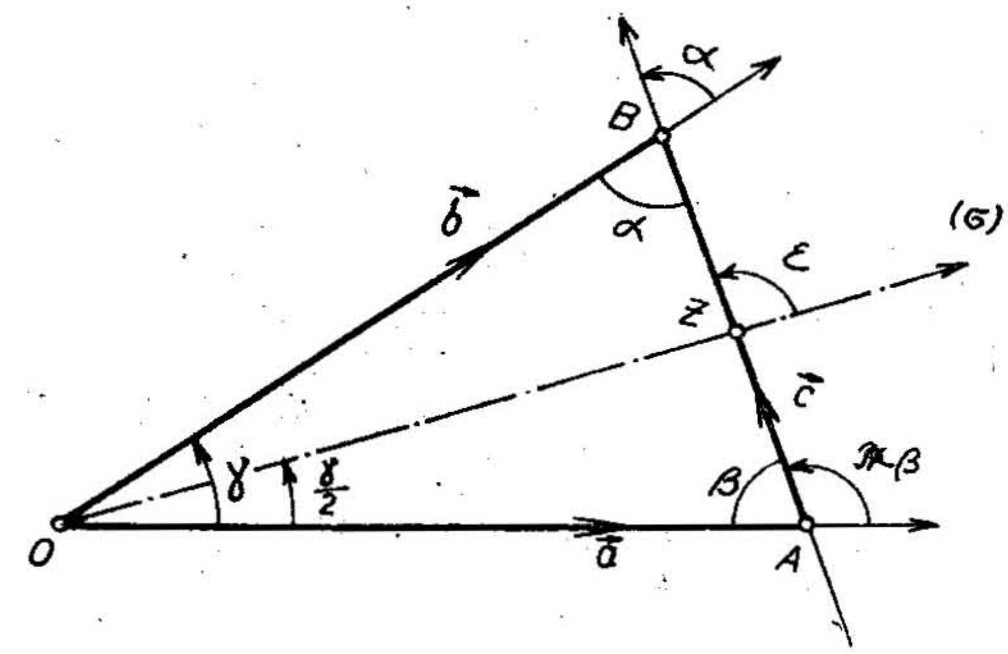
Како је $e(-\sigma)$ коњугована вредност броја $e(\sigma)$, то, на основу образаца (1) и (2), видимо да су величине пројекција вектора $\vec{b} - \vec{a}$ на симетралама унутарњег и спољњег угла дате изразима

$$(e(\sigma) \perp b - a) = \{|b| - |a|\} \cos\frac{\gamma}{2},$$
$$(e(\sigma) \mid b - a) = \{|b| + |a|\} \sin\frac{\gamma}{2}. \tag{11}$$

(vi) Пређимо сад на извођење основних ставова тригонометрије и покажимо да су ови ставови, уствари, непосредна последица множења комплексних бројева односно вектора.

Нека су темена A и B троугла OAB дата бројевима a и b; тада је страна AB по величини и правцу дата бројем

$$c = b - a. \tag{12}$$



Сл. 61

Означимо са $\alpha, \pi - \beta$ и γ углове које заклапају вектори $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$ и $\vec{a}$ и $\vec{b}$, мерене у позитивном смеру тако да су α, β и γ унутарњи углови троугла OAB (в. сл. 61).

1° Ако једначину (12) помножимо са

$$\bar{c} = \bar{b} - \bar{a},$$

тј. ако обе стране ортогонално помножимо саме са собом, према (1), добивамо

$$|c|^2 = (b-a)(\bar{b} - \bar{a}) =$$
$$= (b - a \perp b - a) =$$
$$= |a|^2 + |b|^2 - 2(a \perp b),$$

тј.

$$|c|^2=|a|^2+|b|^2-2|a|\cdot|b|\cos\gamma.$$

2° Ако једначину (12) помножимо паралелно са b, добивамо

$$(b|c)=(b|b)-(b|a)=(a|b),$$

јер је

$$(b|b)=0.$$

Отуда је, према (2),

$$|b||c|\sin\alpha=|a||b|\sin\beta,$$

тј.

$$\frac{\sin\alpha}{|a|}=\frac{\sin\beta}{|c|},$$

3° Ако једначину (12), тј. $b=a+c$, ортогонално помножимо са b, добивамо

$$|b|^2=(b\perp a)+(b\perp c),$$

а отуда, кад скратимо са $|b|$, добивамо, према (1), да је

$$|b|=|a|\cos\gamma+|c|\cos\alpha.$$

4° Ако са σ означимо правац симетрале угла ACB, тј.

$$\sigma=\frac{1}{2}\{arc(a)+arc(b)\},$$

и једначину (12) помножимо паралелно и ортогонално са $e(\sigma)$, тада је, на основу образаца (11),

$$\{|b|+|a|\}\sin\frac{\gamma}{2}=(e(\sigma)|c)=|c|\sin\varepsilon,$$

и

$$\{|b|-|a|\}\cos\frac{\gamma}{2}=(e(\sigma)\perp c)=|c|\cos\varepsilon,$$

где је ε угао што га заклапају вектори $e(\sigma)$ и c, (в. сл. 61), тј.

$$\varepsilon=\alpha+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Према томе је

$$\frac{|b|+|a|}{\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}=\frac{|c|}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{|b|-|a|}{\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}=\frac{|c|}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

Цикличком пермутацијом страна $a\to b\to c\to a\to$ и углова $\alpha\to\beta\to\gamma\to\alpha\to$, сваки од претходних образаца даје групу од по три позната обрасца из тригонометрије.

(vii) Наведимо овде још неколико примера и ставова о троуглу.

Пр. (1) (в. сл. 61). У троуглу OAB одреди тачку пресека Z стране AB са симетралом угла AOB.

Нека је

$$\sigma = \frac{1}{2}\{arc(a) + arc(b)\},$$

правац симетрале OZ, тада је

$$z = |z|\, e(\sigma).$$

Како се Z налази на правој AB, то је

$$(z - a \mid b - a) = 0,$$

или

$$(z \mid b - a) = (a \mid b - a) = (a \mid b).$$

Отуда је

$$|z|\,(e(\sigma) \mid b - a) = (a \mid b),$$

или, према (11),

$$|z|\,\{|a| + |b|\} \sin\frac{\gamma}{2} = |a|\,|b| \sin\gamma,$$

тј.

$$|z| = \frac{2|a|\,|b|}{|a| + |b|} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Према томе је

$$z = H\{|a|, |b|\} \cos\frac{\gamma}{2}\, e(\sigma),$$

где смо са $H(x, y)$ означили хармониску средину бројева x и y.

Пр. (2) (в. сл. 62). Одреди подножје Z, висине троугла OAB, спуштене из темена O на страну AB.

Како је угао OZA прав., то је

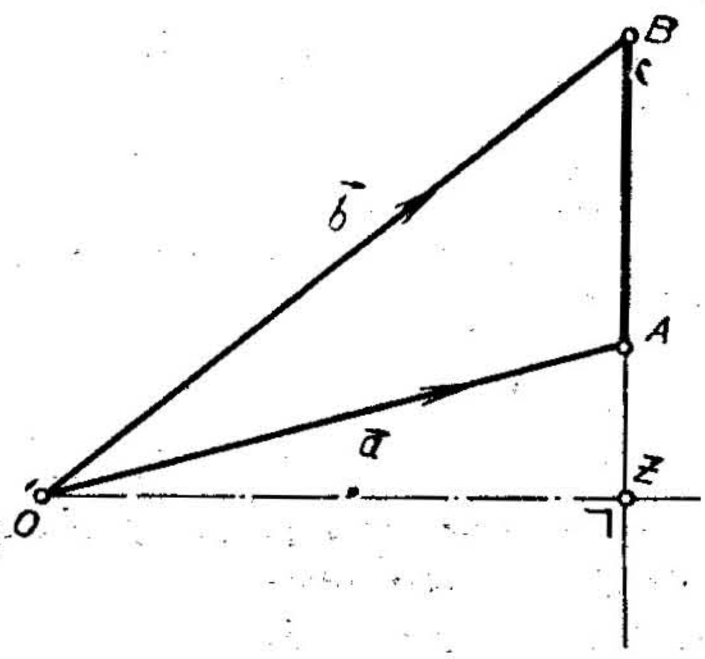
$$(z \perp b - a) = 0. \tag{13}$$

Будући да се тачка Z налази на правој AB, то је

$$(z - a \mid b - a) = 0,$$

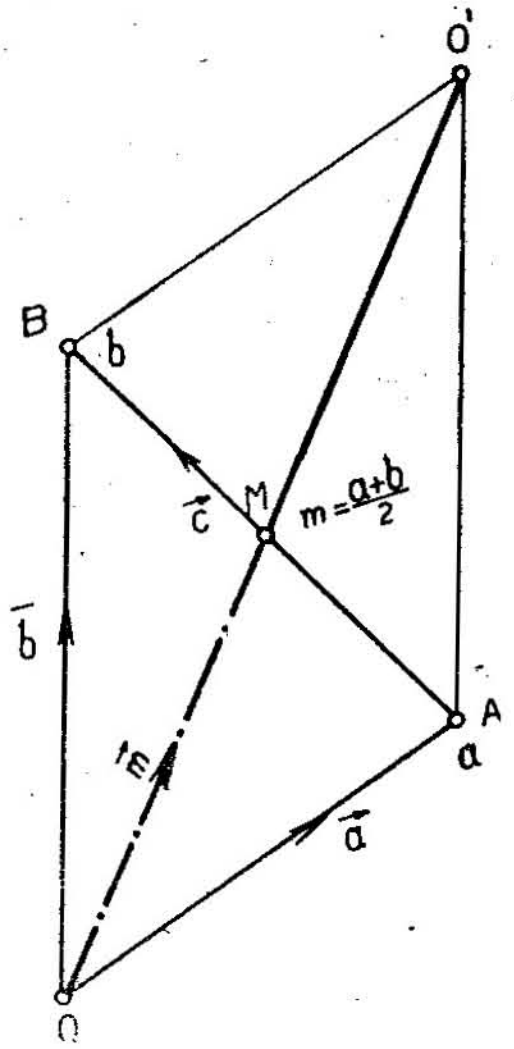
или

$$(z \mid b - a) = (a \mid b).$$



Сл. 62

Ако ову једначину помножимо са i и додамо је једначини (12), добивамо



Сл. 63

$$\bar{z}(b-a)=i(a\,|\,b)\,,$$

или коњуговањем

$$z(\overline{b-a})=-i(a\,|\,b)\,,$$

а отуда

$$z=\frac{(a\,|\,b)}{\bar{a}-\bar{b}}\,i\,.$$

Пр. (3) (в. сл. 63). Ако са M означимо средину стране AB троугла OAB, тада је

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=2\{\overline{OM}^2+\overline{AM}^2\}\,.$$

Како је

$$m=\frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad \overline{AM}=\frac{b-a}{2}\,,$$

то се горња једначина своди на

$$|a|^2+|b|^2=2\left\{\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\right\},$$

или на

$$|a+b|^2+|a-b|^2=2\{|a|^2+|b|^2\}\,. \qquad (14)$$

Овај образац је, међутим, лако проверити, јер је

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2(a\perp b)\,,$$

и

$$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2(a\perp b)\,;$$

сабирањем добивамо образац (14).

Пр. (4) (в. сл. 63). Како је

$$b+a=2m \quad \text{и} \quad b-a=c\,,$$

то је

$$(b-a\perp b+a)=(c\perp 2m),$$

дакле,

$$|b|^2-|a|^2=2(c\perp m)\,.$$

Исто је тако

$$(b+a\,|\,b-a)=(2m\,|\,c)\,,$$

што даје

$$2(a\,|\,b)=2(m\,|\,c)\,,$$

дакле,

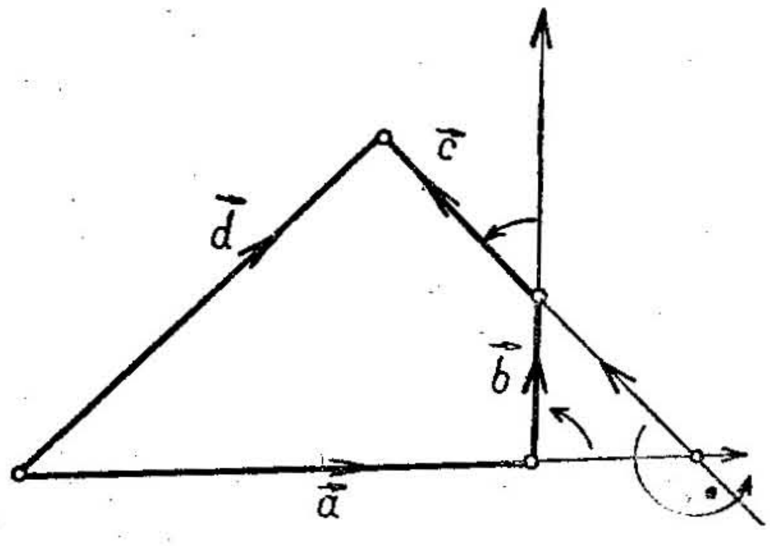
$$(a\,|\,b)=(m\,|\,c)\,.$$

Овај образац казује да је површина паралелограма $OAO'B$ једнака полупроизводу дијагонала и синуса угла што га оне заклапају, јер c одговара једној дијагонали, а m половини друге дијагонале тога паралелограма.

(viii) Сличним посматрањем можемо добити и многе ставове о четвороуглу. Примера ради наведимо овде три таква става.

Пр. (5) (в. сл. 64). Нека су три узастопне стране четвороугла дате по величини и правцу векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$, и $\vec{c}$; четврта страна је тада одређена са

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$



Сл. 64

Како је отуда

$$|d| = |a + b + c|,$$

то квадрирањем, тј. ортогоналним множењем, добивамо

$$|d|^2 = (a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) =$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a \perp b) + 2(b \perp c) + 2(c \perp a).$$

Овај образац претставља код четвороугла аналогон обрасцу из тачке (vi) 1°.

Пр. (6) (в. сл. 65). Ако се дијагонале четвороугла полове, тада је збир квадрата његових страна једнак збиру квадрата дијагонала.

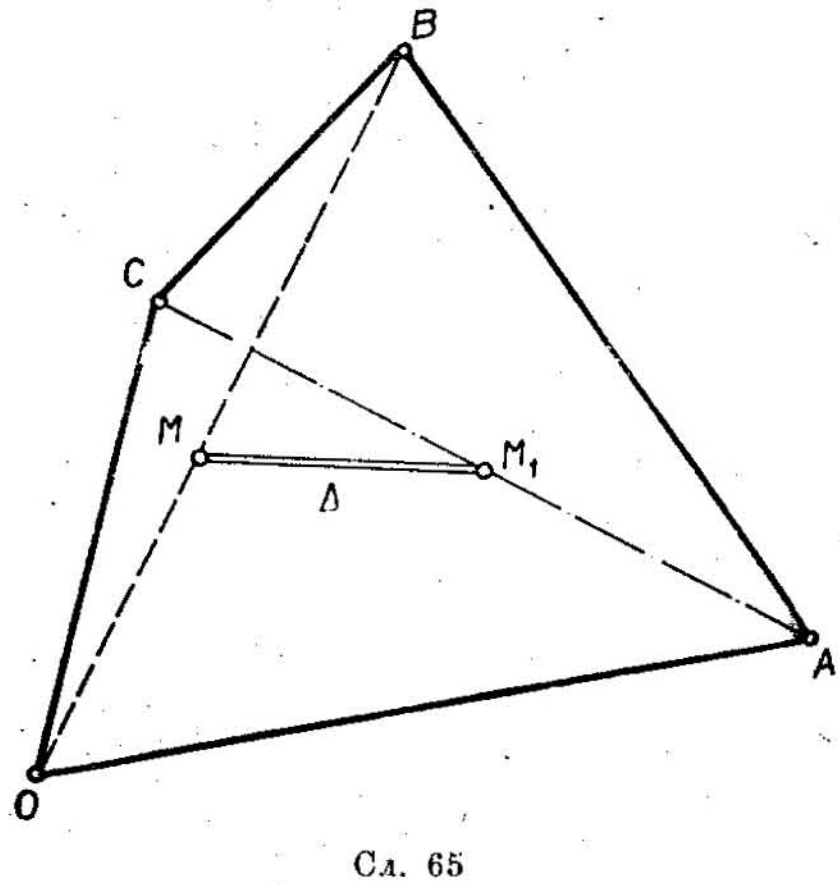
Нека су темена A, B и C четвороугла $OABC$ дата бројевима a, b и c, и нека су M_1 и M_2, тј.

$$m_1 = \frac{a+c}{2}, \quad m_2 = \frac{b}{2},$$

средине дијагонала. Означимо са Δ растојање тачака M_1 и M_2, тј.

$$\Delta = \overline{M_1 M_2} = \left| \frac{a+c}{2} - \frac{b}{2} \right|,$$

тада је



Сл. 65

$$4\Delta^2 = |a + (c-b)|^2 = |a|^2 + |c-b|^2 + 2(a \perp c - b) =$$

$$= |a|^2 + |c-b|^2 + 2(a \perp c) - 2(a \perp b).$$

Како је

$$2(a \perp c) = |a|^2 + |c|^2 - |c-a|^2$$

и

$$2(a \perp b) = |a|^2 + |b|^2 - |b-a|^2,$$

то добивамо

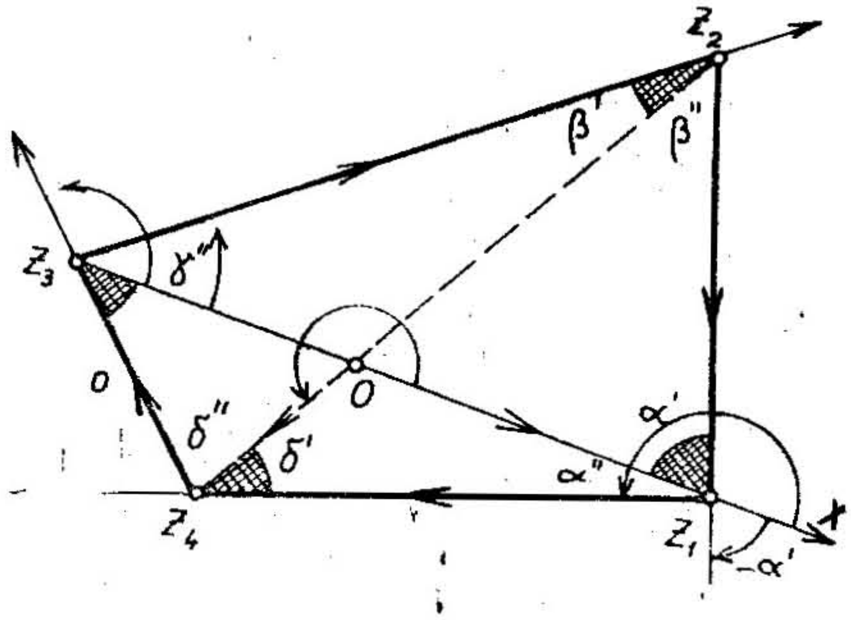
$$4\Delta^2 = |a|^2 + |c-b|^2 - |c-a|^2 + |c|^2 - |b|^2 + |b-a|^2.$$

Дакле,

$$|a|^2 + |b-a|^2 + |c-b|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |c-a|^2 + 4\Delta^2.$$

Ако се дијагонале полове, тада је $\Delta = 0$, што даје горњи став.

Пр. (7) Птолемаиос-ов став, (в. сл. 66). У тетивном четвороуглу збир производа супротних страна једнак је производу дијагонала.



Сл. 66

Нека је дат четвороугао $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$, при чему смо почетак O ставили у пресек дијагонала, а за правац реалне осе, тј. правац нула, узели правац дијагонале OZ_1.

Означимо са $\alpha = \alpha' + \alpha''$, $\beta = \beta' + \beta''$, $\gamma = \gamma' + \gamma''$ и $\delta = \delta' + \delta''$ унутарње углове четвороугла и делове тих углова што их заклапају стране са дијагоналама.

Модули производа

$$z' = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4), \quad z'' = (z_2 - z_3)(z_4 - z_1)$$

и

$$z = (z_1 - z_3)(z_4 - z_2), \tag{15}$$

дају производе супротних страна и производ дијагонала.

Лако је проверити да је

$$z'' - z' = z. \tag{16}$$

Како је, (в. сл. 66),

$$arc(z'') = \gamma'' + (\pi + \alpha''), \quad arc(z') = -\alpha' + (\pi - \gamma'),$$

то је правац σ симетрале угла што га заклапају вектори $\vec{z'}$ и $\vec{z''}$ дат са

$$\frac{1}{2}\{arc(z') + arc(z'')\} = \pi + \frac{\alpha'' + \gamma'' - \alpha' - \gamma'}{2} = \sigma,$$

тако да је

$$arc(z'') - \sigma = \sigma - arc(z') = \frac{\alpha' + \alpha'' + \gamma' + \gamma''}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Према томе је

$$arc(z) = 0 + \{2\pi - (\pi - \alpha'' - \delta')\} = \pi + \alpha'' + \delta',$$

па је

$$arc(z) - \sigma = \frac{\alpha'' + 2\delta' - \gamma'' + \alpha' + \gamma'}{2},$$

а како је

$$\alpha'' + \delta' = \beta' + \gamma'',$$

то је

$$arc\,(z) - \sigma = \frac{\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'}{2} = \rho.$$

Ако једначину (16) помножимо са $e(-\sigma)$, то ће, према другом обрасцу (11), бити

$$(e(\sigma) \,|\, z'' - z') = \{|z''| + |z'|\} \sin\frac{\alpha + \gamma}{2},$$

и

$$(e(\sigma) \,|\, z) = |z| \sin\rho,$$

па је

$$\{|z'| + |z''|\} \sin\frac{\alpha + \gamma}{2} = |z| \sin\rho, \tag{17}$$

тј.

$$|z_1 - z_2|\,|z_3 - z_4| + |z_2 - z_3|\,|z_4 - z_1| = |z_1 - z_3|\,|z_4 - z_2| \frac{\sin\rho}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

Како је код тетивног четвороугла

$$\frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{\pi}{2},$$

то се у овом случају последњи фактор десне стране горњег обрасца своди на јединицу, а добивени образац даје тврђење Птолемаиос-ова става.

Приметимо да се истим поступком из обрасца (16), применом првог обрасца (11), може добити и образац

$$\{|z''| - |z'|\} \cos\frac{\alpha + \gamma}{2} = |z| \cos\rho. \tag{18}$$

Како постоје четвороугли код којих збир углова $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$ износи π, тј. где је $\rho = \frac{\pi}{2}$, а код којих је $\alpha + \gamma \neq \pi$, то је за ове четвороугле

$$\cos\rho = 0, \quad \text{а} \quad \cos\frac{\alpha + \gamma}{2} \neq 0,$$

па је, према (18), за ове четвороугле

$$|z''| - |z'| = 0,$$

односно, према (15),

$$|z_1 z_2|\,|z_3 z_4| = |z_2 - z_3|\,|z_4 - z_1|.$$

Према томе, Птолемаиос-ов став можемо допунити овако:

Ако је у једном четвороуглу $\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=\pi$, тада је или збир производа супротних страна једнак производу дијагонала, или су производи супротних страна међусобно једнаки.

(ix) Поред тога што се паралелним производом могу поједине геометриске операције непосредно алгебарски изражавати и саме рачунске радње прегледније изводити, он долази до изражаја и при извођењу, тј. при алгебарској интерпретацији два основна става пројективне геометрије — Pappos-Pascal-ова и Desargues-ова става.

Pappos-Pascal-ов став, управо његова дегенерација кад се једна од правих налази у бесконачности (тј. у случају паралелизма), гласи: Нека се тачке A, B и C налазе на једној, а A', B' и C' на другој правој (в. сл. 78, тачке (x)); тада из

$$AB' \parallel A'B \quad \text{и} \quad B'C \parallel BC' \quad \therefore \quad CA' \parallel C'A.$$

Desargues-ов став, тј. његова дегенерација којом је карактерисан перспективан положај сличних ликова, гласи: Нека су ABC и $A'B'C'$ троугли такви (в. сл. 85, тачке (x)) да су им хомологе стране AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ паралелне, тада се праве AA', BB' и CC' секу у једној тачки S, (тј. ови се троуглови налазе у перспективном положају).

Да бисмо ове ставове извели комплексним бројевима, тј. векторима, приметимо да се слике 78 и 85 могу рашчланити на четвороугле као што је показано у наредној тачки (x), тако да се ови ставови тада могу формулисати и овако:

Пр. (8) Ако четвороугли $Z_1Z_2Z_3Z_4$ и $Z_1'Z_2'Z_3'Z_4'$ имају такав положај да су им три хомологе стране паралелне, тј.

$$Z_1Z_2 \parallel Z_1'Z_2', \quad Z_2Z_3 \parallel Z_2'Z_3', \quad Z_3Z_4 \parallel Z_3'Z_4',$$

и четврте стране Z_4Z_1 и $Z_4'Z_1'$ биће паралелне, и то

1° (Pappos-Pascal-ов став) или ако су им нехомологе дијагонале паралелне, тј.

$$Z_1Z_3 \parallel Z_2'Z_4' \quad \text{и} \quad Z_2Z_4 \parallel Z_1'Z_3',$$

2° (Desargues-ов став) или ако су им хомологе дијагонале паралелне, тј.

$$Z_1Z_3 \parallel Z_1'Z_3' \quad \text{и} \quad Z_2Z_4 \parallel Z_2'Z_4'.$$

Ако стране ових четвороуглова по величини и правцу сматрамо као векторе и ако ставимо

$$\vec{a}=\overrightarrow{Z_1Z_2}, \quad \vec{b}=\overrightarrow{Z_2Z_3}, \quad \vec{c}=\overrightarrow{Z_3Z_4},$$

односно

$$\vec{a}'=\overrightarrow{Z_1'Z_2'}, \quad \vec{b}'=\overrightarrow{Z_2'Z_3'}, \quad \vec{c}'=\overrightarrow{Z_3'Z_4'},$$

тада су им диагонале дате векторима

$$\overrightarrow{Z_1 Z_3} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{Z_2 Z_4} = \vec{b} + \vec{c},$$

односно

$$\overrightarrow{Z_1' Z_3'} = \vec{a}' + \vec{b}' \quad \text{и} \quad \overrightarrow{Z_2' Z_4'} = \vec{b}' + \vec{c}',$$

а четврте стране са

$$\overrightarrow{Z_1' Z_4'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \text{односно} \quad \overrightarrow{Z_1' Z_4'} = \vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}'.$$

Према томе се ови ставови могу формулисати и овако:

Пр. (9) Нека су вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ паралелни векторима $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$, тј.

$$\vec{a} // \vec{a}', \quad \vec{b} // \vec{b}', \quad \vec{c} // \vec{c}', \tag{19}$$

тада ће им и резултанте бити паралелне, тј.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} // \vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}', \tag{20}$$

ако је: 1^0 (Папос-Pascal-ов став) или

$$\vec{a} + \vec{b} // \vec{b}' + \vec{c}' \quad \text{и} \quad \vec{b} + \vec{c} // \vec{a}' + \vec{b}', \tag{21}$$

2 (Desargues-ов став) или

$$\vec{a} + \vec{b} // \vec{a}' + \vec{b}' \quad \text{и} \quad \vec{b} + \vec{c} // \vec{b}' + \vec{c}'. \tag{22}$$

Доказ Папос-ова става ослања се само на дефиницију и дистрибутивни закон паралелног производа. Међутим, доказ Desargues-ова става добива се из Папос-ова, ослањајући се и на чињеницу да су две праве паралелне ако су оне паралелне трећој правој, или, као што ћемо из другога доказа видети, потребно је још узети у обзир и друге особине паралелног производа.

Претпоставке (19), тј. да су дати вектори паралелни, своде се према дефиницији паралелног производа, на

$$(a \mid a') = 0, \quad (b \mid b') = 0, \quad (c \mid c') = 0, \tag{23}$$

а претпоставке (21), односно (22), на

$$(a + b \mid b' + c') = 0 \quad \text{и} \quad (b + c \mid a' + b') = 0, \tag{24}$$

односно

$$(a + b \mid a' + b') = 0 \quad \text{и} \quad (b + c \mid b' + c') = 0, \tag{25}$$

док се тврђење (20) своди на

$$(a + b + c \mid a' + b' + c') = 0. \tag{26}$$

1° Према томе, за доказ Папос-ова става потребно је показати да из (23) и (24) следи (26). На основу дистрибутивног закона је

$$(a+b\,|\,b'+c')=(a\,|\,b')+(a\,|\,c')+ \\ +(b\,|\,b')+(b\,|\,c'), \tag{27}$$

$$(b+c\,|\,a'+b')=(b\,|\,a')+(b\,|\,b')+ \\ +(c\,|\,a')+(c\,|\,b'), \tag{28}$$

док је

$$(a+b+c\,|\,a'+b'+c')=(a\,|\,a')+(a\,|\,b')+(a\,|\,c')+ \\ +(b\,|\,a')+(b\,|\,b')+(b\,|\,c')+ \\ +(c\,|\,a')+(c\,|\,b')+(c\,|\,c'). \tag{29}$$

Према претпоставци (23) је у (27) и (28) члан $(b\,|\,b')=0$, а у (29) су сви чланови главне дијагонале квадратне шеме једнаки нули. Отуда видимо да је збир три члана који се налазе десно од главне дијагонале квадратне шеме (19), према (27), једнак $(a+b\,|\,b'+c')$, док је, према (28), збир три члана који се налазе лево од главне дијагонале једнак $(b+c\,|\,a'+b')$. Према томе је

$$(a+b+c\,|\,a'+b'+c')=(a+b\,|\,b'+c')+(b+c\,|\,a'+b'). \tag{30}$$

У овом обрасцу је садржан Папос-ов став, јер, као што видимо, из (30) и претпоставака (24) непосредно следи тврђење (26).

2° Desargues-ов став, тј. да из (23) и (25) такође следи (26), можемо доказати ако уведемо три помоћна вектора $\vec{a}''$, $\vec{b}''$ и $\vec{c}''$, тако да они у односу на векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ задовољавају услове Папос-ова става. Тада ће они и у односу на векторе $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ и $\vec{c}'$ задовољавати услове Папос-ова става, тако да Desargues-ов став можемо добити примењујући двапут узастопно Папос-ов став.

Заиста, ако векторе $\vec{a}''$, $\vec{b}''$ и $\vec{c}''$ одредимо тако да буде

$$(a\,|\,a'')=0, \quad (b\,|\,b'')=0, \quad (c\,|\,c'')=0, \tag{31}$$

и

$$(a+b\,|\,b''+c'')=0, \quad (b+c\,|\,a''+b'')=0, \tag{32}$$

тада из (23) и (31) следи

$$(a''\,|\,a')=0, \quad (b''\,|\,b')=0, \quad (c''\,|\,c')=0, \tag{33}$$

а из (25) и (32) следи

$$(a'+b'\,|\,b''+c'')=0 \quad \text{и} \quad (b'+c'\,|\,a'+c'')=0. \tag{34}$$

Како, на основу Папос-ова става, из (31) и (32) следи

$$(a+b+c\,|\,a''+b''+c'')=0,$$

тј. да је

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\,/\!/\,\vec{a}''+\vec{b}''+\vec{c}'',$$

а из (33) и (34) следи

$$(a''+b''+c''\,|\,a'+b'+c')=0,$$

тј. да је

$$\vec{a}''+\vec{b}''+\vec{c}''\,//\,\vec{a}'+\vec{b}'+\vec{c}',$$

то је, дакле, и

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\,//\,\vec{a}'+\vec{b}'+\vec{c}',$$

што даје тврђење Desargues-ова става.

Ако желимо да Desargues-ов став изведемо непосредно, морамо се користити још и овим особинама паралелног производа:

1) За свако реално p је

$$p\,(a\,|\,b)=(pa\,|\,b)=(a\,|\,pb).$$

2) Сваки вектор $\vec{c}$ може се раставити на компоненте у правцима вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тј. постоје два реална броја p и q таква да је

$$\vec{c}=p\,\vec{a}+q\,\vec{b},$$

кадгод је $(a\,|\,b)\neq 0$; овим је изражена чињеница да су вектори $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни.

Уствари, из ових особина следи образац (10), као што смо то у тачки (iv) показали, наиме да између три компланарна вектора постоји веза

$$(a\,|\,b)\,c+(b\,|\,c)\,a+(c\,|\,a)\,b=0. \tag{35}$$

Ако (водећи рачуна о претпоставкама Desargues-ова става) производ (25) рашчланимо тако да се у њему појаве чланови облика (30), тада лако увиђамо да се на основу претпоставака (23), посматрањем квадратне шеме (28), овај производ може рашчланити овако:

$$(a+b+c\,|\,a'+b'+c')=(a+b\,|\,a'+b')+(b+c\,|\,b'+c')+(c+a\,|\,c'+a'). \tag{36}$$

Из овог обрасца видимо да ћемо из претпоставака (30) моћи закључити тврђење (25) ако претходно покажемо да из (23) и (30) следи

$$(c+a\,|\,c'+a')=0, \tag{37}$$

тј. да су тврђења (25) и (37) еквивалентна.

Да бисмо ово показали, приметимо да из претпоставака (23) следи образац

$$(pa+qb+rc\,|\,pa'+qb'+rc')=$$
$$=pb(a+b\,|\,a'+b')+qr\,(b+c\,|\,b'+c')+rp(c+a\,|\,c'+a'),$$

кадгод су p, q и r реални бројеви, а који образац, као и образац (36), добивамо посматрањем квадратне шеме (28). Ако у овом обрасцу ставимо

$$p=(b\,|\,c),\quad q=(c\,|\,a),\quad r=(a\,|\,b),$$

тада први фактор десне стране, према (35), постаје једнак нули, а како су, према претпоставци (30), и прва два члана десне стране једнака нули, то отуда следи да и трећи члан мора бити једнак нули, тј. да је

$$rp(c+a\,|\,c'+a')=0.$$

Према томе, ако је

$$r=(a\,|\,b)\neq 0 \quad \text{и} \quad p=(b\,|\,c)\neq 0,$$

то мора бити

$$(c+a\,|\,c'+a')=0.$$

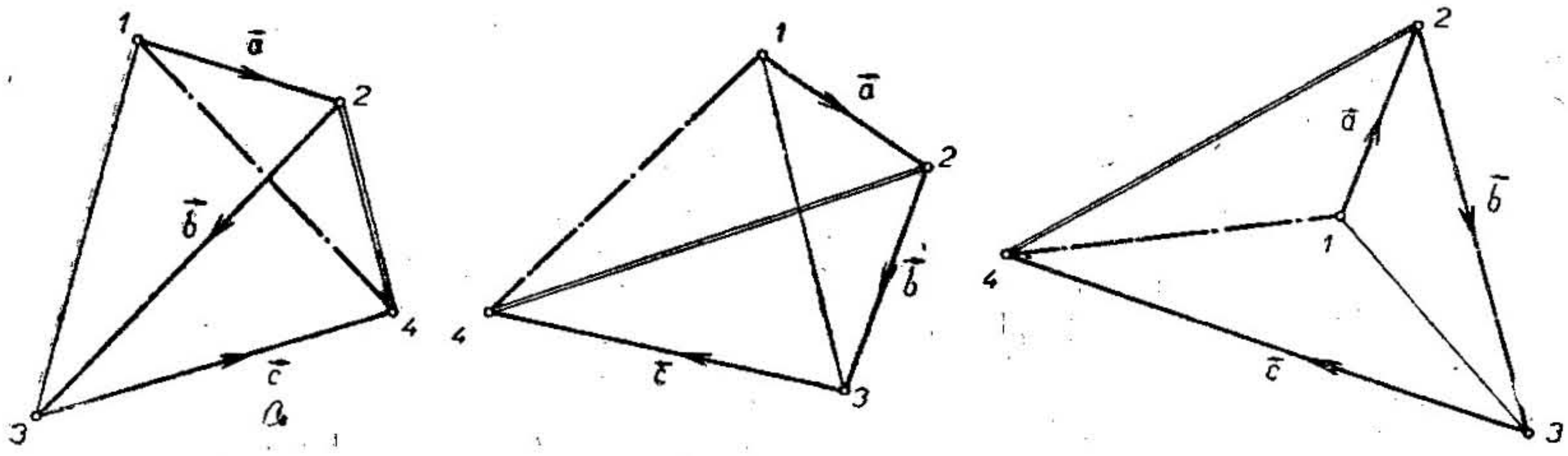
Као што је напред речено, одавде следи Desargues-ов став, тј. тврђење (25).

Напоменимо да Desargues-ов став заиста не важи кад је

$$r=(a\,|\,b)=0 \quad \text{или} \quad p=(b\,|\,c)=0.$$

(**x**) Папос-ов став формулисан у облику примера (8), а нарочито векторски, као у примеру (9), може се планиметриски најразноврсније интерпретисати (поред наведених случајева види и задатке 9—12 ове тачке), док одговарајуће интерпретације Desargues-ова става доводе увек до конструкције сличних ликова.

1° Будући да при извођењу примера (8), односно (9) нисмо ништа претпоставили о облику четвороугла $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$, то он може узети ма који од три облика дата сликама 67, 68 и 69 (где смо краткоће ради место Z_1, Z_2, Z_3 и Z_4 ставили само индексе).

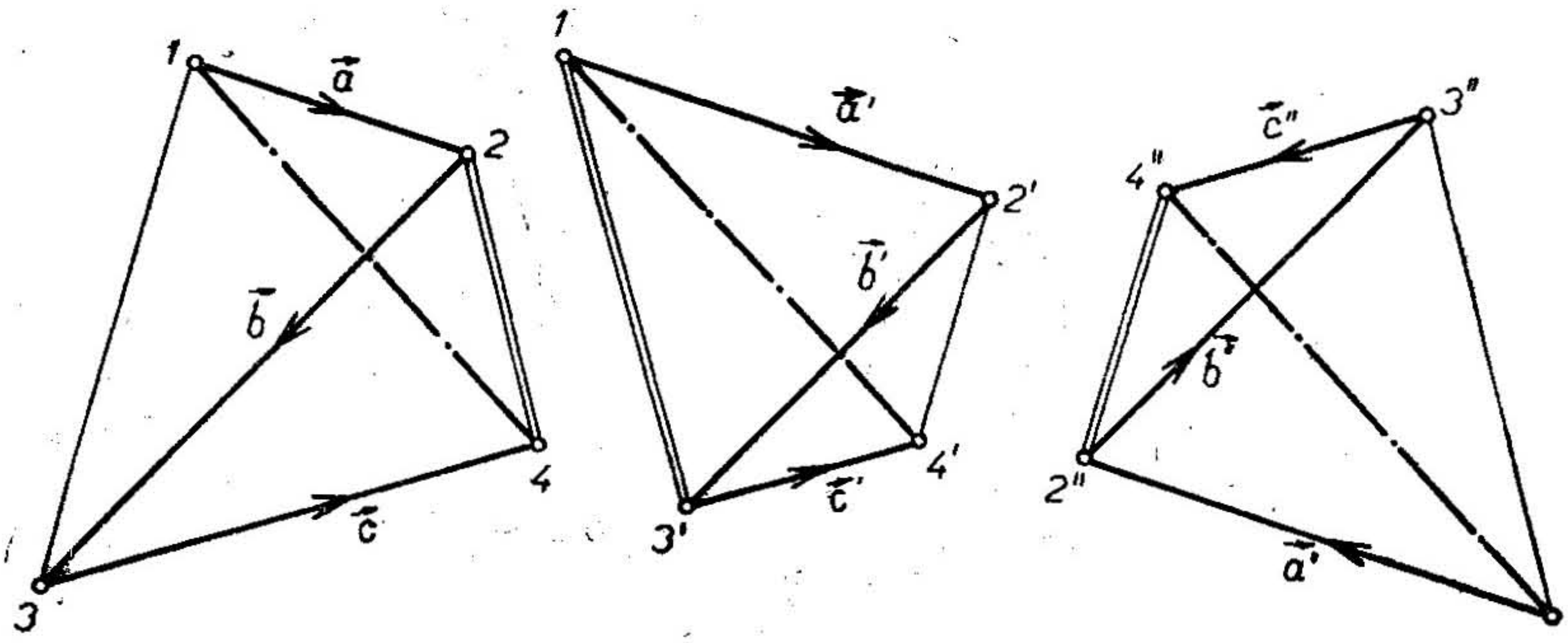


Сл. 67 Сл. 68 Сл. 69

Ако је дата још само једна од страна четвороугла $Z_1' Z_2' Z_3' Z_4'$, тада је овај четвороугао потпуно одређен, ако при томе он задовољава услове примера (8), 1°, тј. ако су задовољени услови (19) и (21). У том случају сваком од горњих четвороуглова одговарају одређени четвороугли (исте врсте). Према томе да ли је смер дате стране $Z_1' Z_2'$ исти или супротан смеру стране $Z_1 Z_2$, добивамо два подударна четвороугла $Z_1' Z_2' Z_3' Z_4'$ и $Z_1'' Z_2'' Z_3'' Z_4''$ који се разликују само положајем, тј. један настаје из другог ротацијом за угао π.

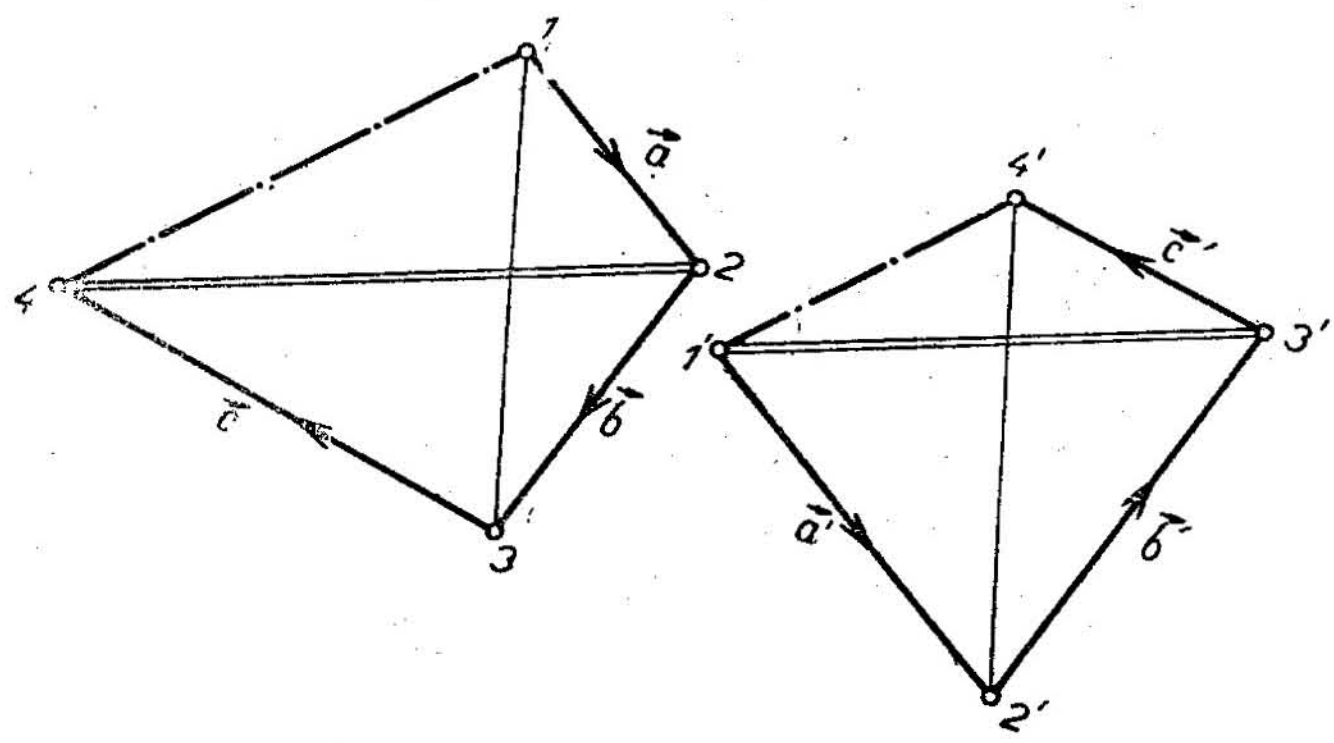
Тако су у сликама 71 и 72 дати четвороугли који одговарају четвороуглу слике 67, односно 70, и то у слици 71 вектор $\vec{a}'$ има исти смер са вектором $\vec{a}$, а у слици 72 супротан смер.

Слика 74 претставља четвороугао који одговара четвороуглу слике 73, односно 68, а на слици 76 дат је четвороугао који одговара четвороуглу слике 75, односно 69.



Сл. 70 Сл. 71 Сл. 72

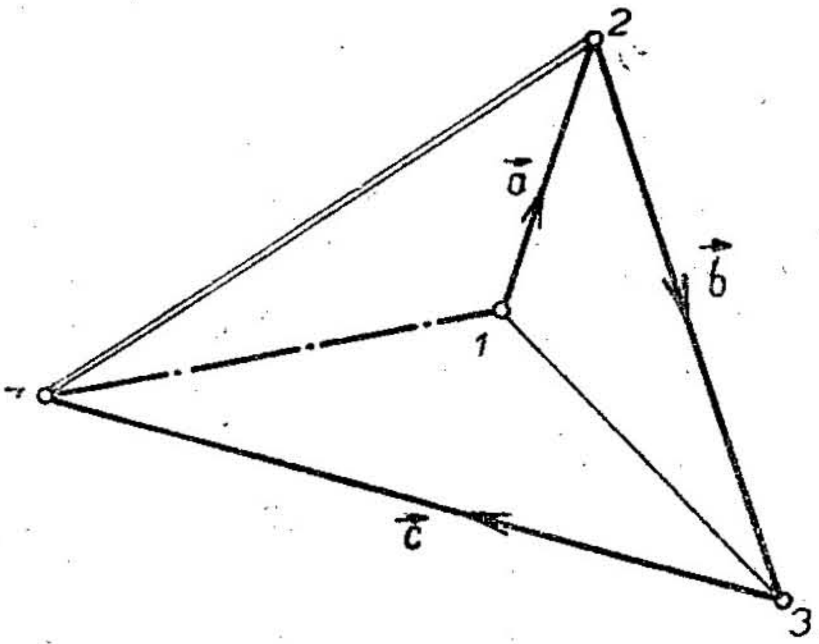
Ако четвороугао $Z_1'Z_2'Z_3'Z_4'$ не конструишемо одвојено већ тако да се једна од паралелних страна или дијагонала поклопи са одговарајућом страном односно дијагоналом датог четвороугла $Z_1Z_2Z_3Z_4$, добивамо низ планиметриских ставова. Ове можемо раздвојити у две



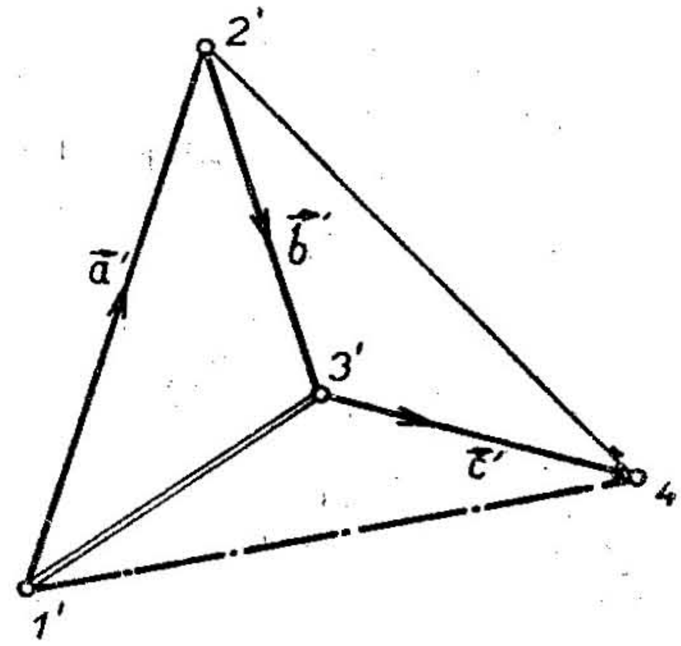
Сл. 73 Сл, 74

групе према томе да ли ће се две од крајњих тачака резултујућих страна Z_1Z_2, односно $Z_1'Z_2'$ поклопити или не. У првом случају добивамо ставове који тврде да после извесних конструкција две праве морају бити паралелне, а у другом, да три тачке морају лежати на једној правој.

Тако, на пример, ако четвороуглу слике 70 доцртамо четвороугао слике 71, тако да се дуж $Z_1'Z_3'$ поклопи са дужи Z_2Z_4, добивамо слику 77 односно 78, а добивени став претставља напред наведени Папос-ов став који гласи:



Сл. 75



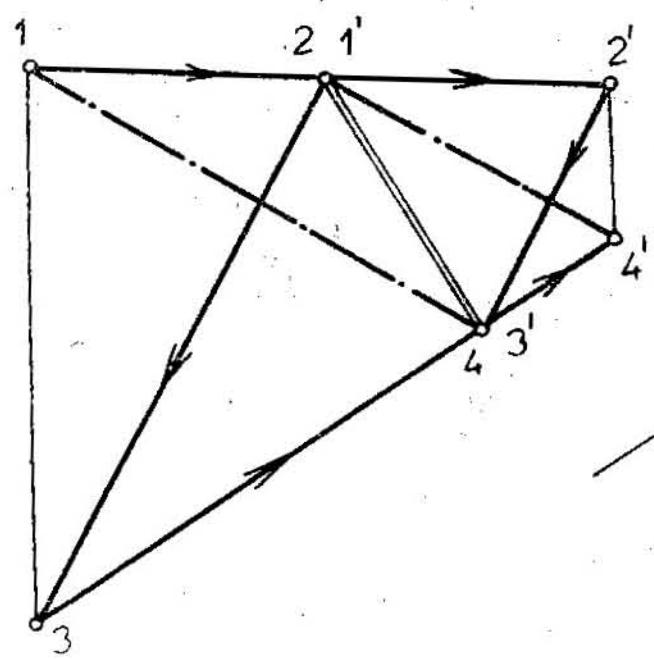
Сл. 76

Ако на једној правој изаберемо тачке A, B, C, а на другој тачке A', B', C', тако да је

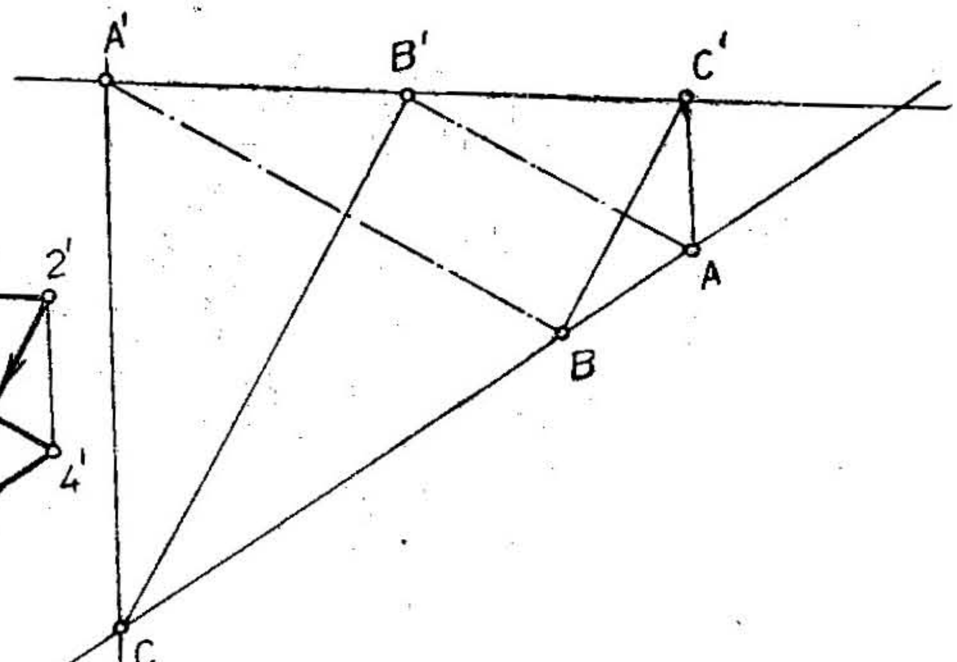
$$A'C \| AC' \quad \text{и} \quad B'C \| BC',$$

тада је и

$$A'B \| AB'.$$



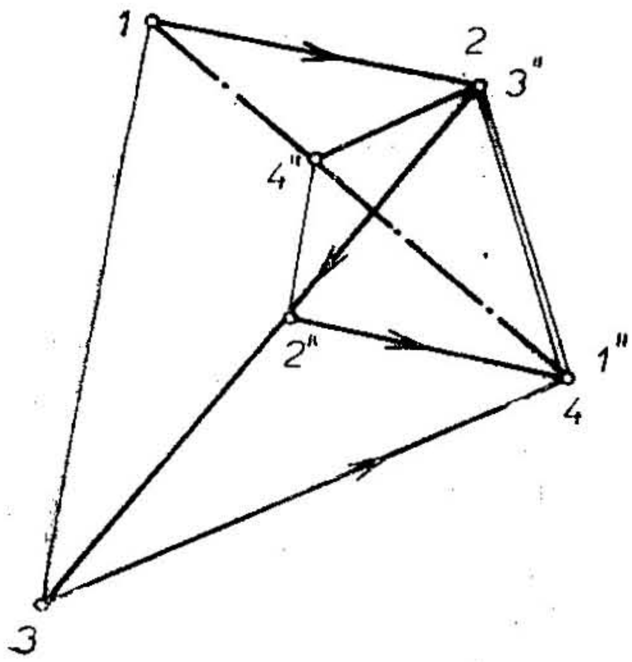
Сл. 77



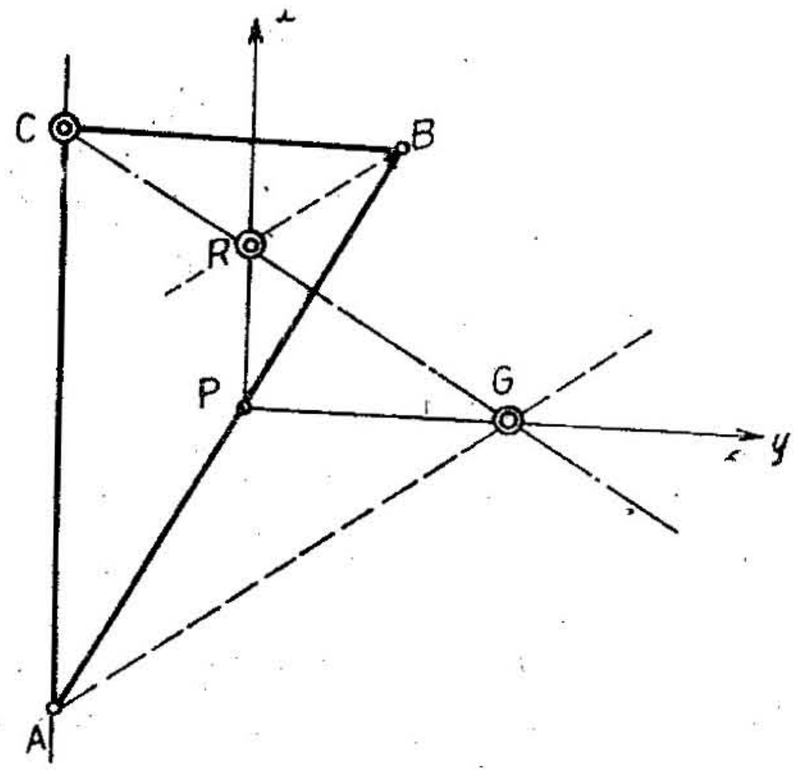
Сл. 78

Ако међутим у четвороугао слике 70 уцртамо четвороугао слике 72, тако да се и у овом случају дуж $Z_3''Z_1''$ поклопи са дужи Z_2Z_4, добивамо слику 79, односно 80, а одговарајући став гласи:

Ако кроз произвољну тачку P стране AB троугла ABC повучемо праву $Px \| AC$ и праву $Py \| CB$, а кроз тачке A и B повучемо две произвољне паралелне праве, прву до пресека G са Py, а другу до пресека R са Px, тада тачке C, R и G леже на једној правој.



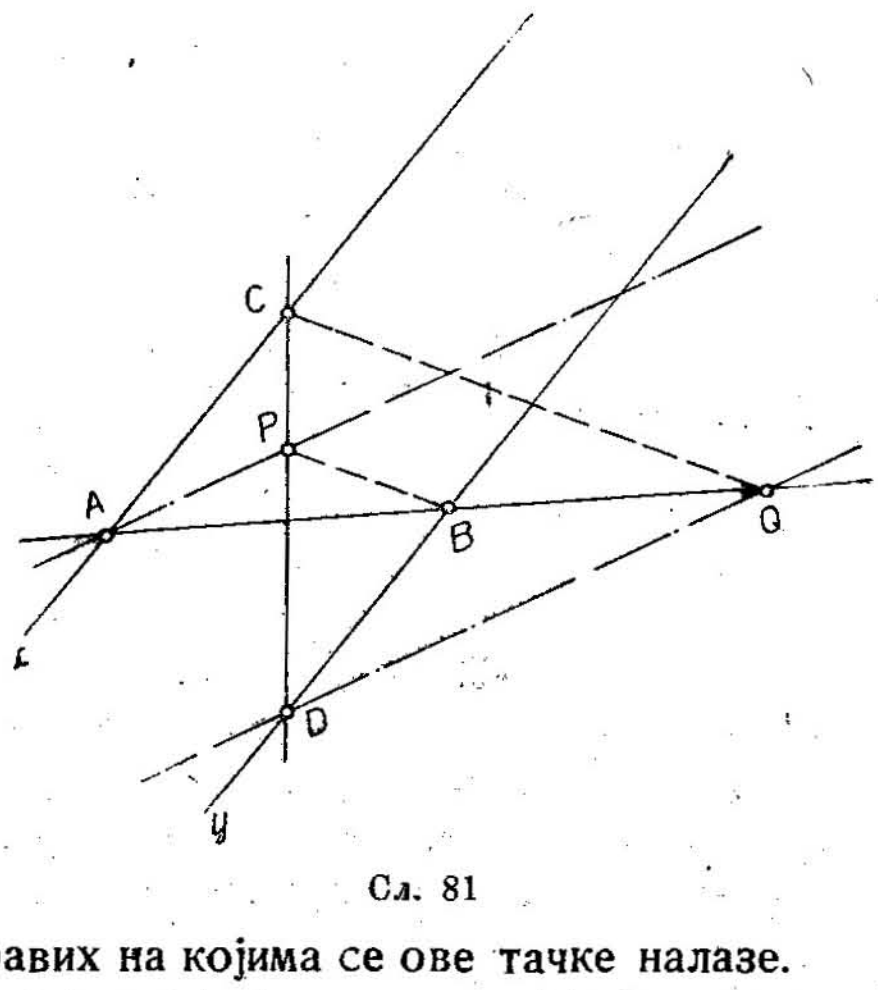
Сл. 79



Сл. 80

Сличан став добивамо и кад четвороуглове слика 73 и 76 тако нацртамо да им се стране Z_2Z_3 и $Z_2'Z_3'$ поклопе (ова заједничка страна, у слици 81, одговара дужи CB). Овим добивамо став који гласи:

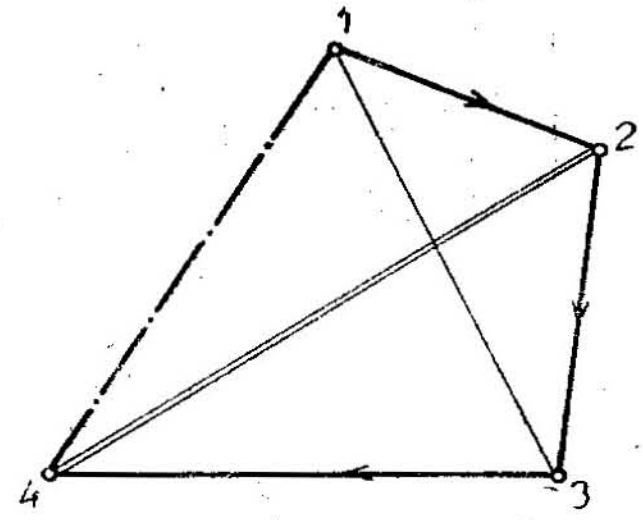
Ако две паралелне праве xx' и yy' пресечемо правама AB и CD и кроз тачке A и D повучемо две паралелне праве, прву до пресека P са CD, а другу до пресека Q са AB, тада је $PB \| CQ$.



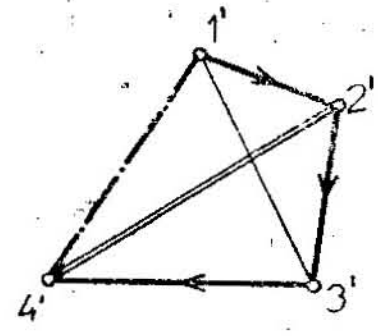
Сл. 81

Напоменимо да слике 80 и 81 претстављају, уствари, онај случај слике 78 Папос-ова става, код кога се две од тачака ABC, односно $A'B'C'$ налазе са друге стране тачке пресека правих на којима се ове тачке налазе.

2° Ако на исти начин конструишемо два четвороугла који задовољавају услове 2° примера (8) или (9), тј. ако четвороугле конструишемо тако да им поред хомологих страна и хомологе дијагонале буду паралелне, тада ћемо увек добити сличне четвороугле. Тако, на пример, ако четвороуглу облика слике 68, тј. четвороуглу слике 82 конструишемо одговарајући четвороугао чије су хомологе стране и дијагонале паралелне, добићемо њему сличан четвороугао дат у слици

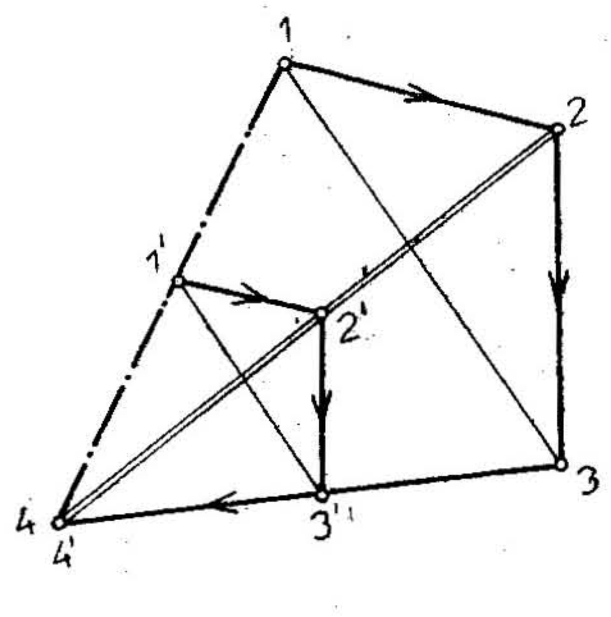


Сл. 82

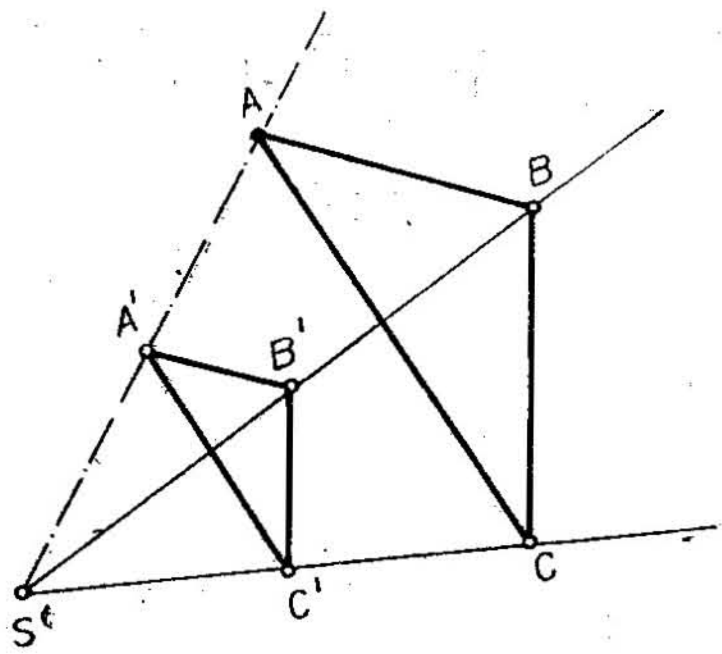


Сл. 83

83. Ако овај последњи четвороугао уцртамо у претходни (в. сл. 84), тако да им се темена Z_4' и Z_4 поклопе, а страну $Z_3' Z_4'$ и дијагоналу $Z_2' Z'_4$ поставимо на хомологу страну $Z_3 Z_4$, односно дијагоналу $Z_2 Z_4$, тада ће и четврта страна $Z_1' Z_4'$ пасти на њој хомологу



Сл. 84



Сл. 85

страну $Z_1 Z_4$. Ово уствари претставља Desargues-ов став (в. сл. 85) који гласи: Ако два троугла ABC и $A'B'C'$ имају такав положај у равни да су им хомологе стране паралелне, и ако праве BB' и CC' продужимо до њихова пресека S, тада и права AA' пролази кроз тачку S.

Иако слика 85, која одговара Desargues-ову ставу, садржи више тачака и правих од слике 78, која одговара Папос-ову ставу (поред тога што је и извођење Desargues-ова става дуже); сама слика је прегледнија. Уосталом, обе слике имају заједничку особину да кроз сваку тачку пролазе по три праве, и да се на свакој правој налазе по три тачке, сматрајући при томе да се паралелне праве секу у једној тачки праве у бесконачности.

Задаци

1. Услов да троугао $Z_1 Z_2 Z_3$ буде истостран је да буде $\Delta = 0$, где је

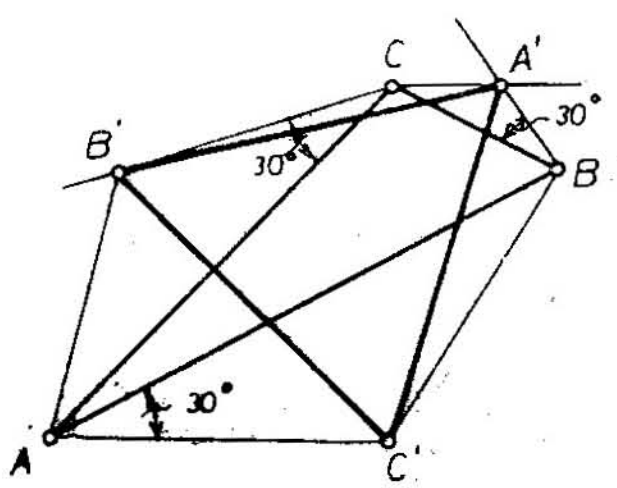
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & z_2 & z_1 \\ 1 & z_3 & z_2 \\ 1 & z_1 & z_3 \end{vmatrix} = z^2{}_1 + z^2{}_2 + z^2{}_3 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 . \tag{38}$$

{Може се и овако доказати: Транслацијом почетка у Z_3 можемо ставити $z_3 = 0$; обртањем можемо z_2 учинити реално и без ограничења (зашто?) ставити $z_2 = 1$. Тада се (38) своди на

$$z^2{}_1 - z_1 + 1 = 0, \tag{39}$$

која једначина одређује треће теме истостраног троугла са дужином стране 1. Обратним поступком из (39) долазимо до обрасца (38).}

2. Ако над странама троугла ABC конструишемо истокраке троуглове $A'BC$, $AB'C$ и ABC' са углом од 120^0 при врховима A', B' и C', покажи да је тада троугао $A'B'C'$ истостран, ма какав био троугао ABC, (в. сл. 86).



Сл. 86

3. 1^0 Троуглови a, b, c и a', b', c' су слични ако је, или

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{b'-a'}{c'-a'},$$

или

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{vmatrix} = 0 .$$

2^0 Ако је $a' = \overline{a}$, $b' = \overline{b}$ и $c' = \overline{c}$, тада су ови троуглови подударни. Међутим је $\Delta = -4iP \neq 0$; Зашто?

3^0 Из 1^0 изведи да тачке a, b и c леже на једној правој ако се могу наћи три реална броја $\varkappa$, λ и μ таква да је

$$\varkappa a + \lambda b + \mu c = 0 \quad \text{и} \quad \varkappa + \lambda + \mu = 0 ,$$

и обрнуто.

4. Ако је G тежиште троугла ABC, а M произвољна тачка равни, докажи да је:

1° $3(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$;

2° $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\,\overline{MG}^2$.

5. Ставимо

$$\bar{a}be(-\alpha)=(a\overset{\alpha}{\perp}b)+i(a\overset{\alpha}{|}b);$$

сматрајући $(a\overset{\alpha}{|}b)$ као симбол за „производ бројева a и b у правцу α“, а $(a\overset{\alpha}{\perp}b)$ као „производ у правцу нормалном на правац α“, покажи:

1° да за ове симболичке производе важи дистрибутиван закон;

2° да уместо комутативног закона имамо

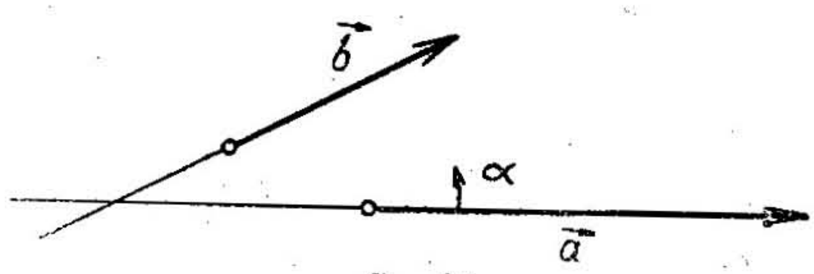
$$(b\overset{\alpha}{|}a)=-(a\overset{-\alpha}{|}b) \quad \text{и} \quad (b\overset{\alpha}{\perp}a)=(a\overset{-\alpha}{\perp}b);$$

3° да је

$$(a\overset{\alpha+\pi/2}{|}b)=(a\overset{\alpha}{\perp}b), \quad \text{и специално} \quad (a\overset{\pi/2}{|}b)=(a\perp b),$$

а

$$(a\overset{\alpha+\pi/2}{\perp}b)=-(a\overset{\alpha}{|}b), \quad \text{и специално} \quad (a\overset{\pi/2}{\perp}b)=-(a|b);$$



Сл. 87

4° да је

$$(a\overset{\alpha}{|}b)=0$$

услов да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заклапају угао α мерен од вектора $\vec{a}$ према вектору $\vec{b}$ у позитивном смеру, (в. сл. 87).

6. Упоређивањем једначине (16) са (12) види, на основу веза (15), какви се ставови могу добити за четвороугле, примењујући на (16) поступке изведене у **1°**, **2°** и **3°** тачке **1. 3** (**vi**). — Поступак из **4°** изведен је у примеру (7), тачке **1. 3.** (**viii**).

7. Покажи да се образац (10) тачке **1. 3.** (**iv**), тј.

$$(a|b)c+(c|a)b+(b|c)a=0,$$

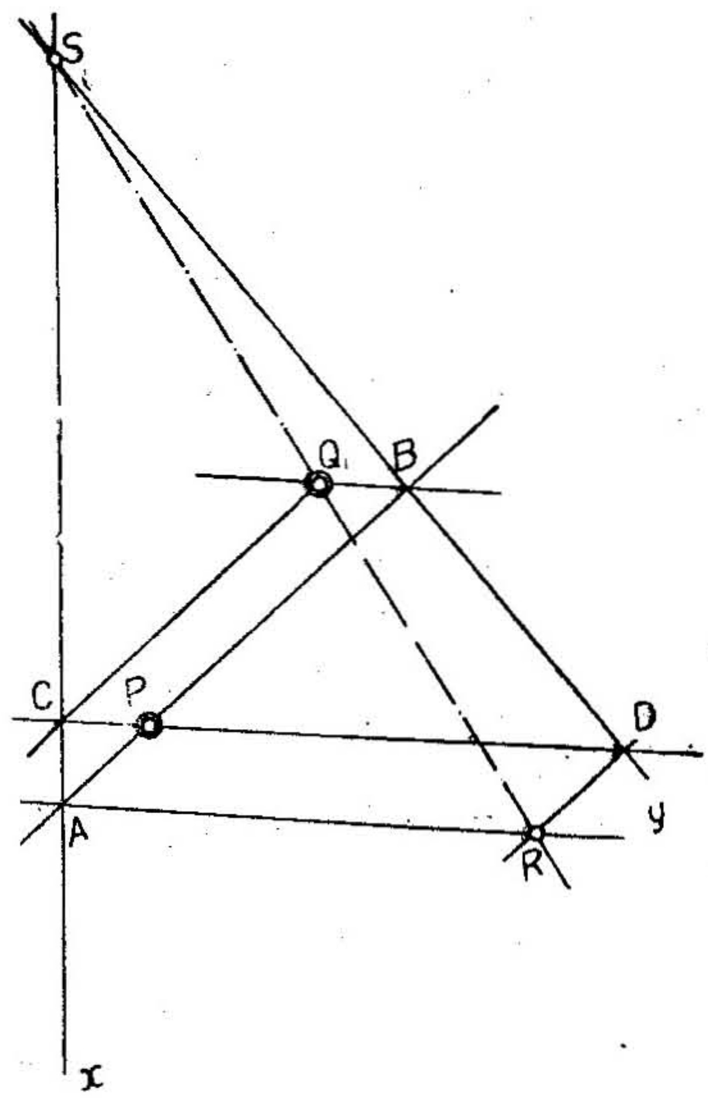
кад га применимо на јединичне векторе, своди на адициону теорему функција синус и косинус.

8. Ако је у петоуглу $Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ тежиште G подједнако удаљено од темена Z_k, тада мора збир јединичних вектора у правцима GZ_k, $k=1, 2, 3, 4, 5$, бити једнак нули. — Ако су дата три узастопна темена таквог петоугла, конструиши остала два и одреди услове када је проблем могућ.

9. Дате су праве Sx и Sy и тачка P између њих (в. сл. 88). Кроз тачку P повуцимо две праве које секу праву Sx у тачкама

A и C, а праву Sy у тачкама B и D. Ако кроз тачке B и C повучемо паралеле са CD и AB и њихов пресек означимо са Q, а кроз тачке A и D паралеле са CD и BA и њихов пресек означимо са R, тада се тачке S, Q и R налазе на једној правој.

10. Нека је P произвољна тачка основе AB трапеза $ABCD$; ако кроз P повучемо праву, паралелну дијагонали AC, до пресека Q са краком BC, и другу праву, паралелну дијагонали BD, до пресека R са краком AD, а затим кроз тачку Q повучемо паралелу дијагонали BD, а кроз тачку R паралелу дијагонали AC, тада се тачка пресека S ових паралела налази на основи CD трапеза. Поред тога, права PS пролази кроз тачку пресека T дијагонала трапеза.



Сл. 88

11. Нека су $ABCD$ и $AB'C'D'$ два паралелограма таква да имају заједничко теме A, и да се теме B' налази на страни AB, а теме D на страни AD'; покажи да се тада праве $B'D$, BD' и CC' секу у једној тачки.

12. Нека је дата полигонална линија $ABCD$ (облика слова Z). Ако кроз тачку A повучемо њој паралелну полигоналну линију $AB'C'D'$ тако да буде $AB'//CD$, $B'C'//BC$ и $C'D'//AB$, и ако се тачка C' налази на правој AC, а дуж $B'D'//BD$, тада се тачке A, D' и D налазе на једној правој.

13. Ако је четвороугао $Z_1Z_2Z_3Z_4$ тетиван, тада ће и сваки четвороугао чије су хомологе стране и нехомологе дијагонале паралелне датом четвороуглу такође бити тетиван.

14. Покажи:

1° да из

$$(z\,|\,a)=(z'\,|\,a) \quad \text{следи да је} \quad \vec{z}-\vec{z}'//\vec{a};$$

2° да из

$$(a\,|\,a')=0, \quad (b\,|\,b')=0 \quad \text{и} \quad (a\,|\,b)=(a'\,|\,b'),$$

следи да је

$$(a+b'\,|\,a'+b)=0 \quad \text{или} \quad (b'-a\,|\,b-a')=0.$$

Које су геометриске интерпретације ових ставова?

15. Покажи да је

$$(a \mid b')(b \mid c')(c \mid a') = (a' \mid b)(b' \mid c)(c' \mid a),$$

кадгод је

$$(a \mid a') = 0, \quad (b \mid b') = 0 \quad \text{и} \quad (c \mid c') = 0.$$

16. Покажи да за четири произвољна броја a, b, a' и b' важи

$$(aa' \mid bb') = (a \mid b)(a' \perp b') + (a \perp b)(a' \mid b').$$

17. Површина P_3 троугла $Z_1Z_2Z_3$ је дата обрасцем

$$2P_3 = (z_1 \mid z_2) + (z_2 \mid z_3) + (z_3 \mid z_1),$$

а површина P_4 четворогла $Z_1Z_2Z_3Z_4$ обрасцем

$$2P_4 = (z_1 \mid z_2) + (z_2 \mid z_3) + (z_3 \mid z_4) + (z_4 \mid z_1)$$

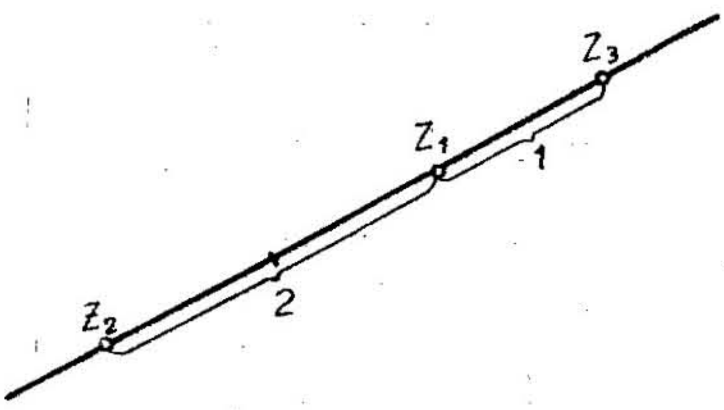
и то са предзнаком $+$ или $-$ према томе да ли је смер обилажења троугла, односно четвороугла позитиван или негативан. — Шта бива кад је четвороугао звездаст? — Измножи производ $(z_3 - z_1 \mid z_4 - z_2)$, упореди са обрасцем за $2P_4$ и објасни геометриски.

1. 4. Троугле координате. (**i**) Ако између бројева z_1, z_2 и z_3 постоји веза облика

$$\varkappa z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3 = 0, \qquad (1)$$

са

$$\varkappa + \lambda + \mu = 0, \qquad (2)$$



Сл. 89

где су $\varkappa$, λ и μ реални бројеви различити од нуле, тада њима одговарајуће тачке Z_1, Z_2 и Z_3 леже на једној правој, и обратно.

Заиста, из (1) и (2) следи

$$z_3 = \frac{\varkappa z_1 + \lambda z_2}{\varkappa + \lambda}, \qquad (3)$$

тј. тачка Z_3 дели дуж Z_1Z_2 у односу $\lambda : \varkappa$.

Обратно, ако се тачке Z_1, Z_2 и Z_3 налазе на истој правој и ако тачка Z_3 дели дуж Z_1Z_2 у односу $\lambda : \varkappa$, тада је z_3 дато обрасцем (3), а који се, са $\varkappa + \lambda = -\mu$, своди на (1) и (2), (в. **1.1** (**ii**) **3°** и **1. 2.** (**ii**) **9°**).

Сва три броја $\varkappa, \lambda$ и μ не могу, због (2), бити истога предзнака, тј. један од њих мора имати супротан предзнак од остала два. Тачка која одговара том броју налази се тада између остале две тачке.

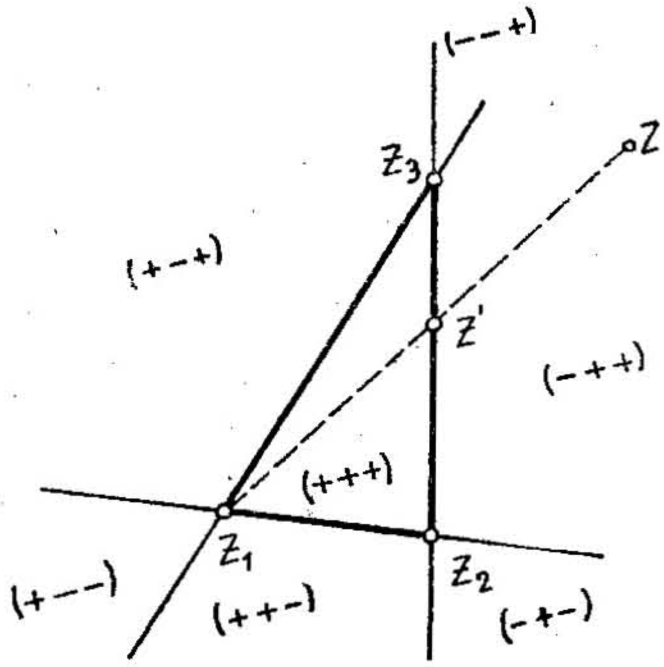
Нека је, на пример, $3z_1 - z_2 - 2z_3 = 0$, тада се тачка Z_1 налази између тачака Z_2 и Z_3 (в. сл. 89).

(ii) Ако су дате три тачке Z_1, Z_2 и Z_3 које не леже на једној правој, тада свакој тачки Z равни једнозначно одговарају три реална броја $\varkappa$, λ и μ, тако да је

$$z = \varkappa z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3, \tag{4}$$

са

$$\varkappa + \lambda + \mu = 1. \tag{5}$$



Сл. 90

Заиста, спојимо тачку Z, на пример, са тачком Z_1 и означимо са Z' тачку пресека правих ZZ_1 и Z_2Z_3. Тада тачка Z дели дуж Z_1Z' у одређеном односу $\nu : \varkappa = \overline{Z'Z} : \overline{ZZ_1}$, где бројеве ν и $\varkappa$ можемо увек тако изабрати да буде $\nu + \varkappa = 1$. Према томе, можемо ставити

$$-z + \varkappa z_1 + \nu z' = 0 \quad \text{са} \quad -1 + \varkappa + \nu = 0.$$

Даље, тачка Z' дели дуж Z_2Z_3 у извесном односу $\mu : \lambda = \overline{Z_3Z'} : \overline{Z'Z_2}$, где ове бројеве можемо увек тако изабрати да буде $\lambda + \mu = \nu$, тако да можемо ставити

$$-\nu z' + \lambda z_2 + \mu z_3 = 0 \quad \text{са} \quad -\nu + \lambda + \mu = 0.$$

Отуда, елиминацијом бројева z' и ν, добивамо

$$-z + \varkappa z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3 = 0 \quad \text{са} \quad -1 + \varkappa + \lambda + \mu = 0,$$

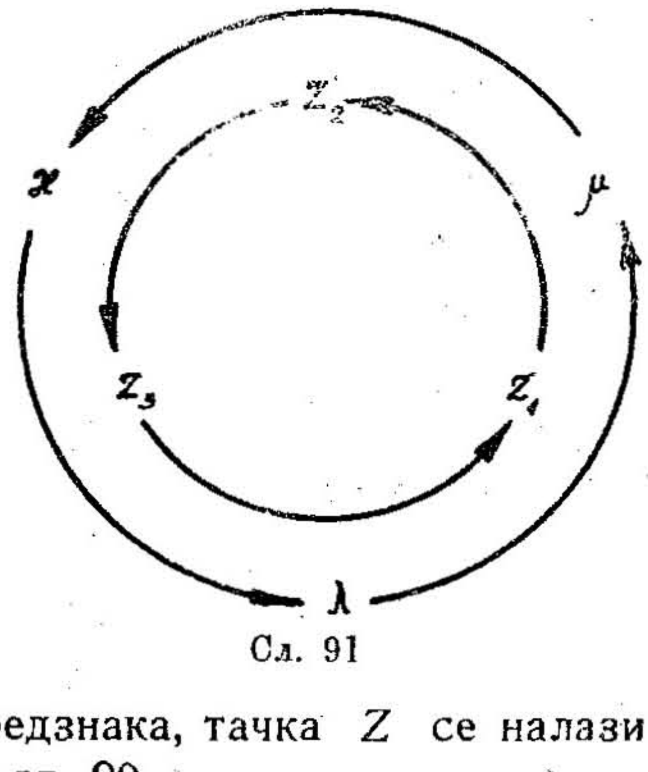
што даје једначине (4) и (5).

Обратно, ако је Z дато са (4) и (5), тада је на правој Z_2Z_3 тачка Z' једнозначно одређена са

$$z' = \frac{\lambda z_2 + \mu z_3}{\lambda + \mu},$$

а тачка Z, на правој Z_1Z', са

$$z = \varkappa z_1 + (\lambda + \mu) z'.$$



Сл. 91

Бројевима $\varkappa$, λ и μ је, дакле, положај тачке Z у односу на троугао $Z_1Z_2Z_3$ потпуно одређен, зато се ови називају троугле координате тачке Z у односу на троугао $Z_1Z_2Z_3$. Због (5), сва три броја $\varkappa$, λ и μ не могу бити истовремено негативна; према седам осталих могућности распореда њихових предзнака, тачка Z се налази у једном од делова равни назначених на сл. 90.

(iii) *Ceva-ов став.* Ако поред тачке Z' (тј. тачке пресека праве ZZ_1 са страном Z_2Z_3) означимо још са Z'' и Z''' тачке пресека правих ZZ_2, односно ZZ_3 са странама Z_3Z_1, односно Z_1Z_2, или продужењима ових страна, тада добивамо за ове тачке, цикличком пермутацијом, (в. сл. 91), да је

$$z' = \frac{\lambda z_2 + \mu z_3}{\lambda + \mu}, \qquad z'' = \frac{\mu z_3 + \varkappa z_1}{\mu + \varkappa}, \qquad z''' = \frac{\varkappa z_1 + \lambda z_2}{\varkappa + \lambda}.$$

Отуда видимо да

тачка	Z'	дели страну	$Z_2 Z_3$	у односу	$t_1 = \mu : \lambda$,
„	Z''	„ „	$Z_3 Z_1$	„ „	$t_2 = \varkappa : \mu$,
„	Z'''	„ „	$Z_1 Z_2$	„ „	$t_3 = \lambda : \varkappa$;

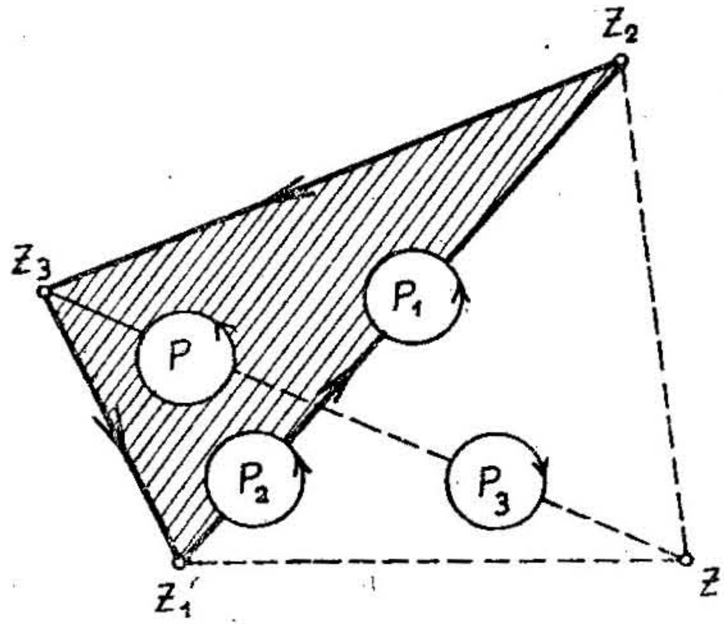
према томе је

$$t_1 t_2 t_3 = 1,$$

што претставља Ceva-ов став, а који можемо формулисати и овако:

Да би се праве $Z_1 Z'$, $Z_2 Z''$ и $Z_3 Z'''$ секле у једној тачки, потребно је и довољно да производ односа по коме тачке Z', Z'' и Z''' деле одговарајуће стране троугла буде једнак 1.

(iv) Означимо са P, P_1, P_2 и P_3 површине троуглова $Z_1 Z_2 Z_3$, $ZZ_2 Z_3$, $ZZ_1 Z_3$ и $ZZ_2 Z_1$, узете са одговарајућим предзнаком према смеру обилажења ових троуглова, а који смерови су одређени смеровима страна $Z_1 Z_2$, $Z_2 Z_3$ и $Z_3 Z_1$ основног троугла (в. сл. 92).



Сл. 92

Бројеви $\varkappa$, λ и μ који, према обрасцима (4) и (5), одређују положај тачке Z у односу на троугао $Z_1 Z_2 Z_3$, су пропорционални површинама P_1, P_2 и P_3, тј.

$$\varkappa = \frac{P_1}{P}, \quad \lambda = \frac{P_2}{P} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{P_3}{P}. \tag{6}$$

Заиста из (4) и (5), коњуговањем једначине (4), добивамо систем једначина

$$\begin{aligned} \varkappa \quad + \lambda \quad + \mu \quad &= 1 \\ \varkappa z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3 &= z \\ \varkappa \bar{z}_1 + \lambda \bar{z}_2 + \mu \bar{z}_3 &= \bar{z} \end{aligned}$$

из кога можемо одредити бројеве $\varkappa$, λ и μ, кадгод је дискриминанта Δ овог система,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}$$

различита од нуле. Како је, према обрасцу (6) тачке **1. 1.** (v),

$$\Delta = -4iP,$$

где је P површина основног троугла, то су из горњег система бројеви $\varkappa$, λ и μ једнозначно одређени кадгод овај троугао ефективно постоји, тј. кад се тачке Z_1, Z_2 и Z_3 не налазе на једној правој.

Како је даље

$$\Delta\varkappa = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z_2 & z_3 \\ \bar{z} & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = -4iP_1,$$

$$\Delta\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z & z_5 \\ \bar{z}_1 & \bar{z} & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = -4iP_2,$$

$$\Delta\mu = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z} \end{vmatrix} = -4iP_3,$$

где су P_1, P_2 и P_3 површине напред наведених троуглова, то је, дакле,

$$\varkappa = \frac{\Delta\varkappa}{\Delta} = \frac{P_1}{P}, \quad \lambda = \frac{\Delta\lambda}{\Delta} = \frac{P_2}{P}, \quad \mu = \frac{\Delta\mu}{\Delta} = \frac{P_3}{P},$$

што доказује тврђење (6).

(v) Наведимо овде неке примене троуглих координата. У ту сврху обележимо са Z_1, Z_2 и Z_3 темена посматраног троугла, а са a, b и c стране узете по величини и правцу, тј.

$$a = z_3 - z_2, \quad b = z_1 - z_3 \quad \text{и} \quad c = z_2 - z_1; \tag{7}$$

тада је

$$a + b + c = 0.$$

Нека је даље Z нека тачка равни одређена у односу на посматрани троугао обрасцима (4) и (5), тј.

$$z = \varkappa z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3 \tag{4}$$

и

$$\varkappa + \lambda + \mu = 1. \tag{5}$$

Приметимо, најзад, да је

$$\begin{aligned} z - z_1 &= (\varkappa z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3) - (\varkappa + \lambda + \mu) z_1 = \\ &= \lambda (z_2 - z_1) + \mu (z_3 - z_1), \end{aligned}$$

тј., према (7),

$$z - z_1 = \lambda c - \mu b,$$

и слично

$$\begin{aligned} z - z_2 &= \varkappa c + \mu a, \\ z - z_3 &= \varkappa b - \lambda a. \end{aligned} \tag{8}$$

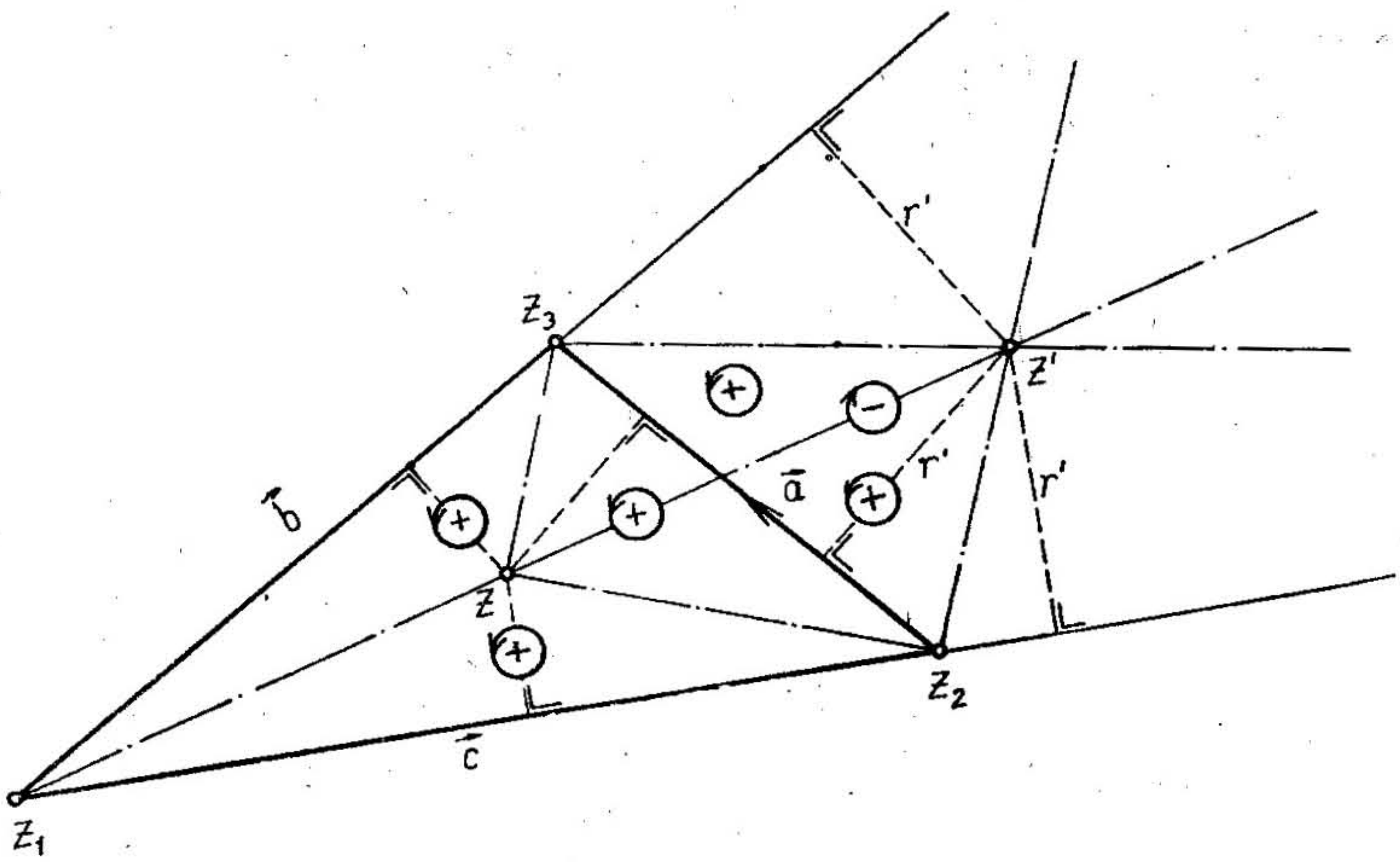
Напоменимо да из ових образаца можемо непосредно извести обрасце (6). Кад први од образаца (8) помножимо паралелно са b, други са c, а трећи са a, добивамо

$$\lambda(b|c)=(b|z-z_1),\quad \mu(c|a)=(c|z-z_2),\quad \varkappa(a|b)=(a|z-z_3),$$

а ови су обрасци истоветни са обрасцима (6).

Пр. (1) (в. сл. 93). Средишта уписаних кругова. — Нека је Z средиште уписаног круга, а r полупречник, тада је

$$2P_1=r|a|,\quad 2P_2=r|b|,\quad 2P_3=r|c| \quad \text{и} \quad 2P=r(|a|+|b|+|c|);$$



Сл. 93

све ове површине су позитивне. Према (4), (5) и (6) је, дакле,

$$z=\frac{|a|z_1+|b|z_2+|c|z_3}{|a|+|b|+|c|}.$$

Ако је Z' средиште полууписаног круга, супротно темену Z_1 а r' његов полупречник, тада је

$$2P_1=-r'|a|,\quad 2P_2=r'|b|,\quad 2P_3=r'|c|,$$

и

$$2P=2P_1+2P_2+2P_3=r'(-|a|+|b|+|c|);$$

при томе је P_1 негативно, јер је смер обилажења супротан смеру обилажења основног троугла, (в. сл. 93).

Према (4), (5) и (6) је, дакле,

$$z'=\frac{-|a|z_1+|b|z_2+|c|z_3}{-|a|+|b|+|c|}.$$

На исти начин добивамо за средишта остала два полууписана круга

$$z''=\frac{|a|z_1-|b|z_2+|c|z_3}{|a|-|b|+|c|}$$

и

$$z'''=\frac{|a|z_1+|b|z_2-|c|z_3}{|a|+|b|-|c|}.$$

Пр. (2) (в. сл. 94). Ортоцентар — пресек висина. Нека је Z тачка пресека висина спуштених из темена Z_2 и Z_3. Тада је

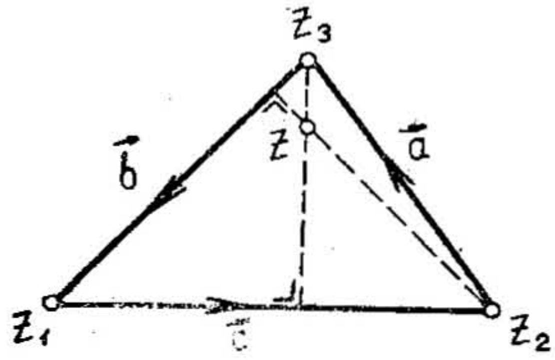
$$z-z_2\perp b \quad \text{и} \quad z-z_3\perp c,$$

тј.

$$(z-z_2\perp b)=0 \quad \text{и} \quad (z-z_3\perp c)=0,$$

или, према (4), (5) и (8),

$$(-\varkappa c+\mu a\perp b)=0, \quad (\varkappa b-\lambda a\perp c)=0.$$



Сл. 94

Отуда добивамо

$$\varkappa(c\perp b)=\mu(a\perp b) \quad \text{и} \quad \varkappa(b\perp c)=\lambda(a\perp c),$$

тј.

$$\varkappa(b\perp c)=\lambda(c\perp a)=\mu(a\perp b).$$

Ако заједничку вредност ових производа означимо са p, тада је

$$\varkappa=\frac{p}{(b\perp c)}, \quad \lambda=\frac{p}{(c\perp a)}, \quad \mu=\frac{p}{(a\perp b)},$$

и, према (5),

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{(b\perp c)}+\frac{1}{(c\perp a)}+\frac{1}{(a\perp b)}.$$

Ови обрасци дају троугле координате ортоцентра, а из њих непосредно следи да је

$$z=\frac{\dfrac{|a|}{\cos\alpha}z_1+\dfrac{|b|}{\cos\beta}z_2+\dfrac{|c|}{\cos\gamma}z_3}{\dfrac{|a|}{\cos\alpha}+\dfrac{|b|}{\cos\beta}+\dfrac{|c|}{\cos\gamma}},$$

односно, применом синусне теореме, да је

$$z=\frac{z_1\,tg\alpha+z_2\,tg\beta+z_3\,tg\gamma}{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma}.$$

Пр. (3) Menelaos-ов став. Нека се тачка Z_1' налази на страни Z_2Z_3, тачка Z_2' на страни Z_3Z_1 и тачка Z_3' на страни Z_3Z_1 троугла $Z_1Z_2Z_3$, или на њиховим продужењима, и нека свака од ових тачака дели одговарајућу страну у односу t_1, t_2, односно t_3. Да би се тачке Z_1', Z_2' и Z_3' налазиле на једној правој потребно је и довољно да буде

$$t_1t_2t_3=-1.$$

Према претпоставци је

$$z_1' = \frac{z_2 + t_1 z_3}{1+t_1},$$

$$z_2' = \frac{z_3 + t_2 z_1}{1+t_2},$$

$$z_3' = \frac{z_1 + t_3 z_2}{1+t_3}.$$

Ако услов, да се тачке Z_1', Z_2' и Z_3' налазе на једној правој, напишемо у облику

$$(z_1' | z_2') + (z_2' | z_3') + (z_3' | z_1') = 0,$$

то, кад у овом изразу сменимо горње вредности за z_1', z_2' и z_3', добивамо да је

$$(z_1' | z_2') + (z_2' | z_3') + (z_3' | z_1') =$$
$$= \frac{(z_2 + t_1 z_3 | z_3 + t_2 z_1)}{(1+t_1)(1+t_2)} + \frac{(z_3 + t_2 z_1 | z_1 + t_3 z_2)}{(1+t_2)(1+t_3)} + \frac{(z_1 + t_3 z_2 | z_2 + t_1 z_3)}{(1+t_3)(1+t_1)};$$

множењем обе стране са $(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)$, добивамо даље да је

$$(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)\{(z_1'|z_2') + (z_2'|z_3') + (z_3'|z_1')\} =$$
$$= (1+t_3)\{(z_2|z_3) - t_2(z_1|z_2) + t_1 t_2 (z_3|z_1)\} +$$
$$+ (1+t_1)\{(z_3|z_1) - t_3(z_2|z_3) + t_2 t_3 (z_1|z_2)\} +$$
$$+ (1+t_2)\{(z_1|z_2) - t_1(z_3|z_1) + t_3 t_1 (z_2|z_3)\} =$$
$$= (1 + t_1 t_2 t_3)\{(z_1|z_2) + (z_2|z_3) + (z_3|z_1)\}.$$

Према томе је

$$(z_1'|z_2') + (z_2'|z_3') + (z_3'|z_1') =$$
$$= \frac{1 + t_1 t_2 t_3}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)} \{(z_1|z_2) + (z_2|z_3) + (z_3|z_1)\}.$$

Како је

$$(z_1|z_2) + (z_2|z_3) + (z_3|z_1) \neq 0,$$

јер се, по претпоставци, тачке Z_1, Z_2 и Z_3 не налазе на једној правој, то ако је лева страна горњег обрасца једнака нули, мора бити

$$1 + t_1 t_2 t_3 = 0,$$

и обратно; овим је Menelaos-ов став доказан.

Напоменимо да се помоћу сличности овај став може брже доказати; међутим, како $(z_1|z_2) + (z_2|z_3) + (z_3|z_1)$ претставља двоструку површину $2P$ троугла $Z_1 Z_2 Z_3$, то, кад се тачке Z_1', Z_2' и Z_3' не налазе на једној правој, горњи образац даје однос површине P' троугла $Z_1' Z_2' Z_3'$ и површине P троугла $Z_1 Z_2 Z_3$, тј,

$$P' : P = (1 + t_1 t_2 t_3) : (1+t_1)(1+t_2)(1+t_3).$$

Као последицу Menelaos-ова и Ceva-ова става (в. т. (iii)) добивамо један став о троуглима за чије формулисање нам је потребан појам хармониског односа. — За четири тачке Z_1, Z_2 и Z', Z'' кажемо да стоје у хармониском односу, ако је однос t' по коме тачка Z' дели дуж Z_1Z_2 једнак супротно означеном односу t'' по коме тачка Z'' дели исту дуж, тј. ако је $t' = -t''$. Ако, дакле, ставимо

$$t' = t \quad \text{и} \quad t'' = -t,$$

тада ће тачке

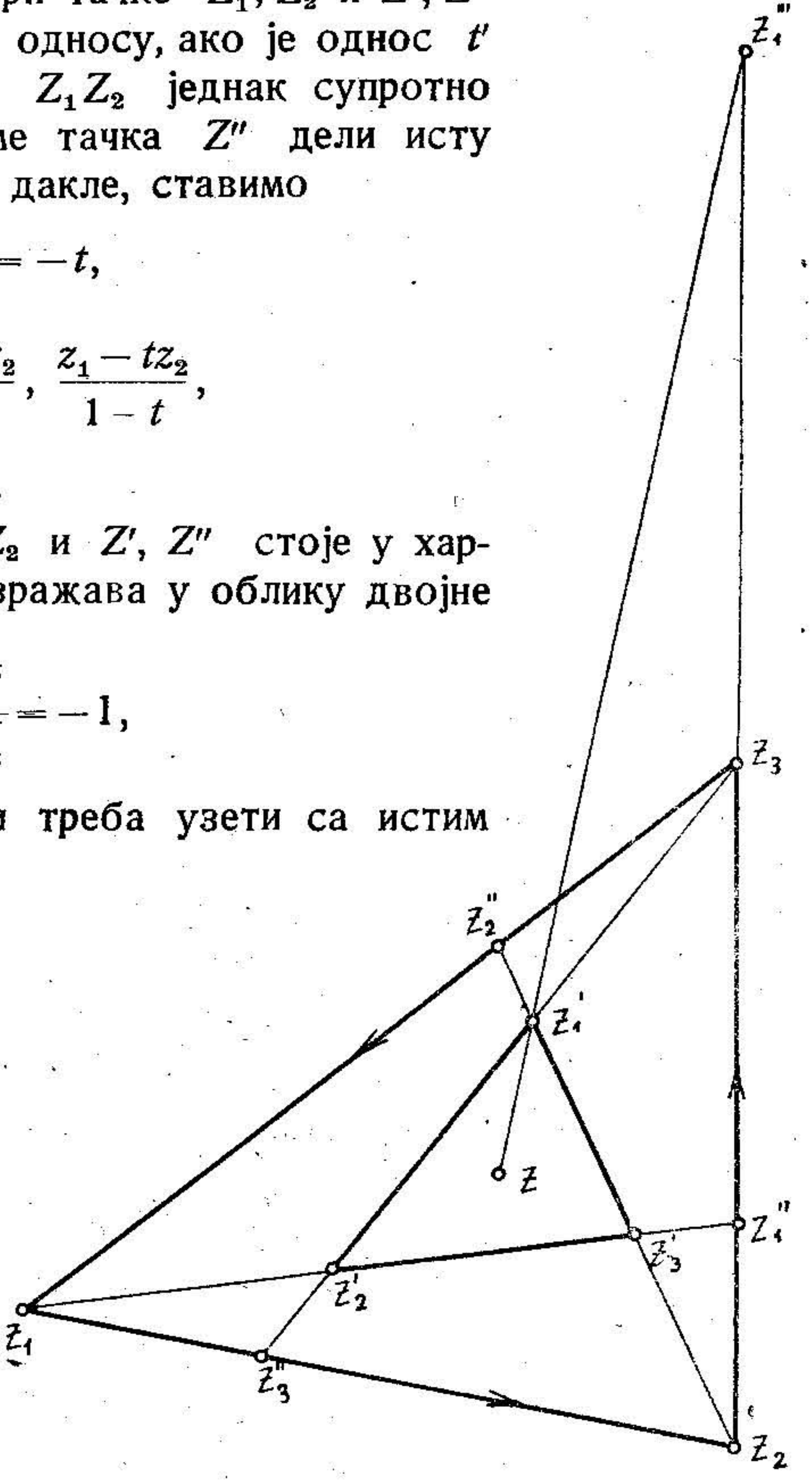
$$z_1, z_2 \quad \text{и} \quad \frac{z_1 + tz_2}{1+t}, \ \frac{z_1 - tz_2}{1-t},$$

стајати у хармониском односу.

Чињеница да тачке Z_1, Z_2 и Z', Z'' стоје у хармониском односу обично се изражава у облику двојне сразмере и то

$$\frac{\overline{Z_1 Z'}}{\overline{Z' Z_2}} : \frac{\overline{Z_1 Z''}}{\overline{Z' Z_2}} = -1,$$

где мерне бројеве ових дужи треба узети са истим или супротним предзнаком према томе да ли су истог или супротног смера.



Сл. 95

Ceva - Menelaos-ов став можемо сад формулисати и овако:

Ако четири тачке сваке од група тачака (Z_1, Z_2, Z_3', Z_3''), (Z_2, Z_3, Z_1', Z_1'') и (Z_3, Z_1, Z_2', Z_2'') стоје у хармониском односу, и ако тачке Z_1'', Z_2'' и Z_3'' леже на једној правој, тада праве Z_1Z_1', Z_2Z_2' и Z_3Z_3' пролазе кроз једну тачку.

Пр. (4) (в. сл. 95). Подели стране троугла $Z_1Z_2Z_3$ тачкама Z_1'', Z_2'' и Z_3'' у истом односу $q:p$, тј. тако да буде

$$\overline{Z_1Z_3''} : \overline{Z_3''Z_2} = \overline{Z_2Z_1''} : \overline{Z_1''Z_3} = \overline{Z_3Z_2''} : \overline{Z_2''Z_1} = q:p, \tag{9}$$

и споји ове тачке са супротним теменима.

Ако је $p \neq q$, тада троугао $Z_1'Z_2'Z_3'$ одређен овим правим има заједничко тежиште Z са датим троуглом, а његова површина P' се односи према површини датог троугла P као што се $(p-q)^2$

односи према p^2+pq+q^2, тј.

$$P'=\frac{(p-q)^2}{k}P \quad \text{где је} \quad k=p^2+pq+q^2.$$

Према (9), тачке Z_1'', Z_2'' и Z_3'' су одређене са

$$(p+q)z_1''=pz_2+qz_3,\quad (p+q)z_2''=pz_3+qz_1,\quad (p+q)z_3''=pz_1+qz_2. \qquad (10)$$

Како се, на пример, тачка Z_1' налази на правама Z_2Z_2'' и Z_3Z_3'', то она дели ове дужи у извесним односима $s:r$ и $s':r'$, тј. ако још ставимо да је

$$r+s=1 \quad \text{и} \quad r'+s'=1, \qquad (11)$$

тада је

$$z_1'=rz_2+sz_2'' \quad \text{и} \quad z_1'=r'z_3+s'z_3''.$$

Отуда је, према (10),

$$(p+q)z_1'=qsz_1+(p+q)rz_2+psz_3$$

и

$$(p+q)z_1'=ps'z_1+qs'z_2+(p+q)r'z_3.$$

Како ове једначине одређују исту тачку Z_1', то одговарајуће троугле координате морају бити једнаке, дакле

$$ps'=qs,\quad qs'=(p+q)r,\quad (p+q)r'=ps.$$

Из ових једначина, са једначинама (11), можемо одредити непознате r, s, r' и s'. Из прве и треће следи

$$s'=\frac{q}{p}s \quad \text{и} \quad r'=\frac{p}{p+q}s,$$

а, заменом у другу једначину (11), добивамо

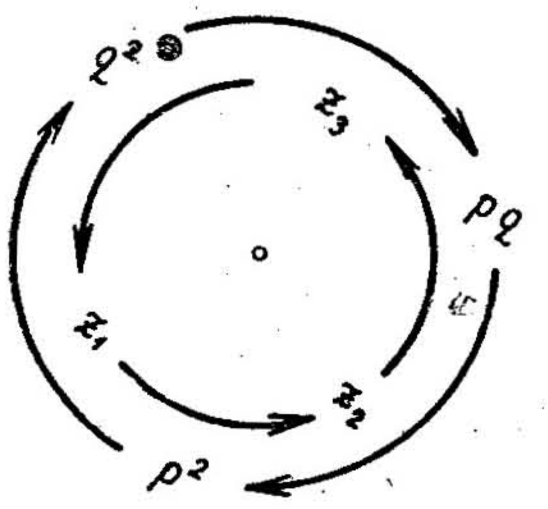
$$s=\frac{p(p+q)}{k}, \quad \text{са} \quad k=p^2+pq+q^2.$$

Отуда је

$$r=1-s=\frac{q^2}{k},\quad \frac{qs}{p+q}=\frac{pq}{k} \quad \text{и} \quad \frac{rs}{p+q}=\frac{p^2}{k},$$

па је, према томе,

$$z_1'=\frac{pqz_1+q^2z_2+p^2z_3}{pq+q^2+p^2}.$$



Сл. 96

Цикличком пермутацијом (в. сл. 96) добивамо остале тачке, тако да је

$$\begin{aligned} kz_1'&=pqz_1+q^2z_2+p^2z_3,\\ kz_2'&=p^2z_1+pqz_2+q^2z_3,\\ kz_3'&=q^2z_1+p^2z_2+pqz_3, \end{aligned} \qquad (12)$$

са

$$k=p^2+pq+q^2.$$

Из ових једначина видимо да је

$$z_1' = z_2' = z_3' = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3},$$

само кад је $p = q$, тј. само у том случају се праве $Z_1 Z_1''$, $Z_2 Z_2''$ и $Z_3 Z_3''$ секу у једној тачки, тј. у тежишту троугла $Z_1 Z_2 Z_3$.

Ако једначине (12) саберемо и скратимо са k добивамо

$$z_1' + z_2' + z_3' = z_1 + z_2 + z_3,$$

која једначина, пошто је поделимо са 3, казује да се тежишта троуглова $Z_1 Z_2 Z_3$ и $Z_1' Z_2' Z_3'$ поклапају.

Разлике између две и две од једначина (12) дају стране a', b' и c' троугла $Z_1' Z_2' Z_3'$. Тако је, на пример,

$$kc' = k(z_2' - z_1') = (p-q)\{pz_1 + qz_2 - (p+q)z_3\} = (p-q)\{p(z_1 - z_3) + q(z_2 - z_3)\},$$

тј. према (7),

$$kc' = (p-q)(pb - qa).$$

На исти начин добивамо за све три стране

$$\begin{aligned} ka' &= (p-q)(pc - qb), \\ kb' &= (p-q)(pa - qc), \qquad (13) \\ kc' &= (p-q)(pb - qa). \end{aligned}$$

Ако ове једначине поделимо са $(p+q)$, видимо да се стране a', b' и c' троугла $Z_1' Z_2' Z_3'$ односе према дужима $Z_1 Z_1''$, $Z_2 Z_2''$ и $Z_3 Z_3''$ као $(p^2 - q^2) : k$.

Из једначина (13) добивамо и површину P' троугла $Z_1' Z_2' Z_3'$, тј.

$$\begin{aligned} 2P' = (a' \mid b') &= \frac{(p-q)^2}{k^2}(pc - qb \mid pa - qc) = \\ &= \frac{(p-q)^2}{k^2}\{p^2(c \mid a) - pq(b \mid a) + q^2(b \mid c)\} = \\ &= \frac{(p-q)^2}{k^2}\{p^2(c \mid a) + pq(a \mid b) + q^2(b \mid c)\}, \end{aligned}$$

а како је

$$(c \mid a) = (a \mid b) = (b \mid c) = 2P,$$

то је, дакле,

$$P = \frac{(p-q)^2}{k^2}(p^2 + pq + q^2)P = \frac{(p-q)^2}{k}P.$$

Приметимо, најзад, да образовањем разлике

$$z_1' - z = z_1' - \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

добивамо
$$k(z_1'-z)=(p-q)\{p(z_3-z)-q(z_2-z)\},$$
тј.
$$z_1'-z=\frac{(p-q)^2}{k}\,\frac{p(z_3-z)-q(z_2-z)}{p-q}.$$

Ова једначина казује да тачка пресека Z_1''' праве ZZ_1' са продужењем стране Z_2Z_3 дели ову страну у односу
$$\overline{Z_2Z_1'''}:\overline{Z_1'''Z_3}=-p:q$$
и да се
$$\overline{ZZ_1'}:\overline{ZZ_1'''}=(p-q)^2:k=P':P.$$

Исто је тако
$$k(z_2'-z)=(p-q)\{p(z_1-z)-q(z_3-z)\}$$
$$k(z_3'-z)=(p-q)\{p(z_2-z)-q(z_1-z)\}.$$

Задаци

1. Нека је
$$z=\varkappa z_1+\lambda z_2+\mu z_3 \quad \text{са} \quad \varkappa+\lambda+\mu=1,$$
где се налазе тачке Z, ако је

1^0 $\varkappa=0$, или $\lambda=0$, или $\mu=0$;

2^0 $\varkappa=\lambda=0$, или $\lambda=\mu=0$, или $\mu=\varkappa=0$.

2. Покажи да су троуглови $Z_1Z_2Z_3$ и $Z_1'Z_2'Z_3'$ из примера (4) слични, само ако је први троугао истостран.

{На основу задатка **3.** тачке **1.3** треба да је
$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1' \\ 1 & z_2 & z_2' \\ 1 & z_3 & z_3' \end{vmatrix}=0,$$
а ова детерминанта се, до на један фактор, своди на израз (38) задатка **1.** тачке **1. 3.**}

3. Покажи да у троуглу $Z_1Z_2Z_3$ постоје две тачке Z' и Z'' (Brocard-ове тачке) такве да је
$$\sphericalangle Z_2Z_1Z_3=\sphericalangle Z_3Z_2Z'=\sphericalangle Z_1Z_3Z'=w,$$
$$\sphericalangle Z''Z_1Z_3=\sphericalangle Z''Z_2Z_1=\sphericalangle Z''Z_3Z_2=w,$$
и да је тада
$$\operatorname{cotg} w=\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma,$$
или
$$\sin^3 w=\sin(\alpha-w)\sin(\beta-w)\sin(\gamma-w),$$
где су α, β и γ углови троугла.

4. Покажи да се обрасци (6) ове тачке могу извести из обрасца
$$a(b\,|\,c)+b(c\,|\,a)+c(a\,|\,b)=0,$$

(в. т. 1.3. (iv)) ако у њему ставимо

$$a=z_1-z,\quad b=z_2-z,\quad c=z_3-z,$$

јер тада добивамо да је

$$z=\frac{z_1(z_2-z\,|\,z_3-z)+z_2(z_3-z\,|\,z_1-z)+z_3(z_1-z\,|\,z_2-z)}{(z_1\,|\,z_2)+(z_2\,|\,z_3)+(z_3\,|\,z_1)}.$$

5. Покажи да је

$$\frac{z_1\sin 2\alpha+z_2\sin 2\beta+z_3\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}$$

средиште описаног круга троугла $Z_1Z_2Z_3$.

6. Нека је дат троугао $Z_1Z_2Z_3$ чије су стране

$$a=z_3-z_2,\quad b=z_1-z_3,\quad c=z_2-z_1.$$

1° Ако је x реалан број, покажи да се тачка

$$z'=z_1+x\left(\frac{c}{|c|}\pm\frac{b}{|b|}\right)$$

налази на симетрали спољњег или унутарњег угла код Z_1, према томе да ли је знак $-$ или $+$.

2° Одреди x тако да се Z' налази на страни Z_2Z_3.

3° Изведи обрасце за средишта уписаних кругова из примера (1).

4° Покажи да тачке пресека симетрала спољних углова са супротним странама леже на правој линији.

5° Покажи да се тежиште троугла $Z_1Z_2Z_3$ налази у пресеку симетрала унутарњих углова оног троугла чија су темена средине страна датог троугла.

7. Докажи да троугао мора бити истостран ако му се тежиште поклапа са средиштем 1° уписаног, 2° описаног круга.

{Задатак под 2° може се и овако доказати: Разлика $3(z_1-z)$, где је Z тежиште троугла, износи $2z_1-z_2-z_3$, тако да је

$$|2z_1-z_2-z_3|^2=|2(z_1-z_3)-(z_2-z_3)|^2=$$
$$=4|z_1-z_3|^2+|z_2-z_3|^2-4(z_1-z_3\perp z_2-z_3),$$

исто је тако

$$|-z_1+2z_2-z_3|^2=4|z_2-z_3|^2+|z_1-z_3|^2-4(z_1-z_3\perp z_2-z_3);$$

отуда следи, ако су тачке Z_1 и Z_2 подједнако удаљене од тежишта Z, да је

$$3|z_1-z_3|^2=3|z_2-z_3|^2.\}$$

8. Докажи да четвороугао код кога је тежиште подједнако удаљено од темена мора бити правоугаоник.

9. Ако су троуглови $Z_1Z_2Z_3$ и $Z_1'Z_2'Z_3'$ такви да је

$$\overline{Z_1Z_2}\cdot\overline{Z_1'Z_2'}=\overline{Z_2Z_3}\cdot\overline{Z_2'Z_3'}=\overline{Z_3Z_1}\cdot\overline{Z_3'Z_1'},$$

тада су оба ова троугла истострана.

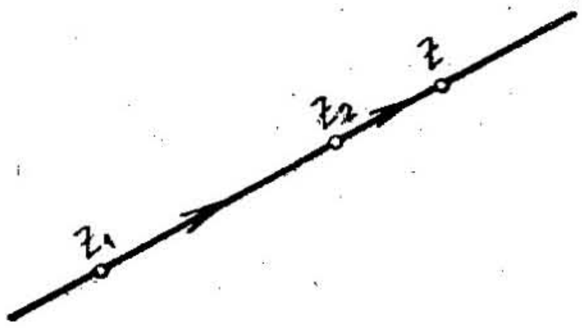
2. Геометриска места

2. 1. Права. (i) Геометриско место је скуп свих оних тачака Z, обично једне криве линије, које имају једну исту геометриску особину, а којом је особином ова крива потпуно одређена. Ако са Z означимо ма коју тачку геометриског места, ова особина се може често лако алгебарски изразити применом комплексних бројева. Тада, тако добивени алгебарски израз, у коме се јавља број z, претставља једначину посматраног геометриског места, и то обично у имплицитном облику. Често се до овог израза лакше долази увођењем реалног промењивог параметра t, а z изрази у зависности од тог параметра. Добивени израз тада претставља параметарску једначину геометриског места из које можемо који пут лакше читати његове особине. Овде ћемо на једном низу примера показати како се у појединим случајевима ово постиже.

(ii) Наведимо прво неколико облика једначине праве линије које добивамо ако је дефинишемо, или непосредно из два услова, или као геометриско место.

1° Једначину праве која пролази кроз тачке Z_1 и Z_2 добивамо ако изразимо да је вектор $\overrightarrow{z-z_1}$ паралелан вектору $\overrightarrow{z_2-z_1}$, дакле

$$(z-z_1|z_2-z_1)=0.$$



Сл. 97

Стављајући

$$z=x+iy, \quad z_1=x_1+iy_1 \quad \text{и} \quad z_2=x_2+iy_2,$$

тј.

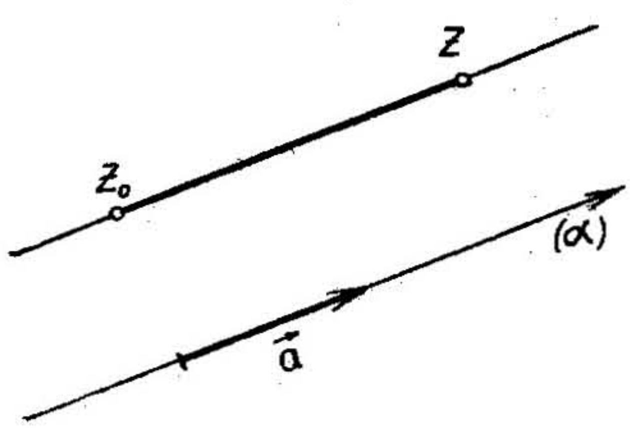
$$z-z_1=(x-x_1)+i(y-y_1)$$

и

$$z_2-z_1=(x_2-x_1)+i(y_2-y_1),$$

добивамо непосредно њену једначину у правоуглим координатима

$$(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0.$$



Сл. 98

2° Једначину праве која пролази кроз тачку Z_0 и има правац α, или је паралелна вектору $\vec{a}=|a|\overrightarrow{e(\alpha)}$, добивамо ако изразимо да је $\overrightarrow{z-z_0}$ паралелно са $\overrightarrow{e(\alpha)}$ или са $\vec{a}$, тј. да је

$$(z-z_0|e(\alpha))=0, \quad \text{или} \quad (z-z_0|a)=0.$$

Ако ставимо

$$z-z_0=(x-x_0)+i(y-y_0)$$

и

$$e(\alpha)=\cos\alpha\,(1+i\,tg\alpha)=\cos\alpha\,(1+im),$$

тада се прва од ових једначина своди на

$$(x-x_0+i(y-y_0)\,|\,1+im)=0,$$

тј. на

$$m(x-x_0)-(y-y_0)=0.$$

Другу једначину можемо написати и у облику

$$(z\,|\,a)=(z_0\,|\,a),$$

или

$$\bar{a}z-a\bar{z}=ik,$$

где је k одређен реалан број, $(k=2(z_0|a))$.

3⁰ Једначина праве која пролази кроз тачку Z_0 и стоји нормално на правац α, или на вектор $\vec{a}$, или на дуж Z_1Z_2, има облик

$$(z-z_0\perp e(\alpha))=0,$$

или

$$(z-z_0\perp a)=0,$$

или

$$(z-z_0\perp z_2-z_1)=0.$$

Другу од ових једначина можемо написати и у облику

$$(z\perp a)=(z_0\perp a),$$

или

$$\bar{a}z+a\bar{z}=k,$$

где је k одређен реалан број, $(k=2(z_0\perp a))$.

4⁰ Симетрала дужи Z_1Z_2 је права која пролази кроз тачку $z_0=\frac{z_1+z_2}{2}$ и нормална је на датој дужи. Дакле, њена једначина је

$$\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\perp z_2-z_1\right)=0,$$

или

$$(z\perp z_2-z_1)=\frac{1}{2}(z_2+z_1\perp z_2-z_1)=\frac{1}{2}(|z_2|^2-|z_1|^2).$$

До исте једначине долазимо ако изразимо да је симетрала дужи Z_1Z_2 геометриско место тачака Z подједнако удаљених од крајева те дужи тј.

$$|z-z_1|=|z-z_2|.$$

Квадрирањем ове једначине добивамо

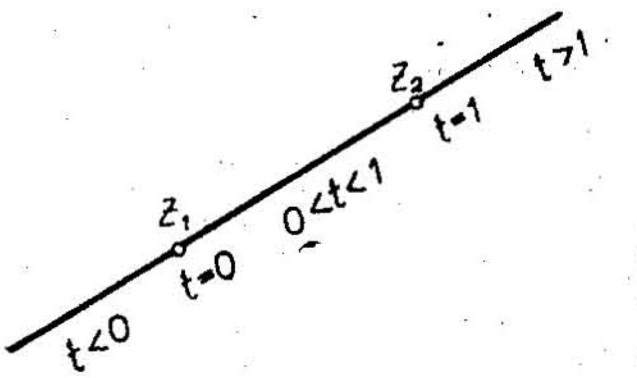
$$|z|^2+|z_1|^2-2(z\perp z_1)=|z|^2+|z_2|^2-2(z\perp z_2),$$

тј.

$$2(z\perp z_2-z_1)=|z_2|^2-|z_1|^2.$$

5^0 Једначину праве која пролази кроз тачку Z_0 и заклапа угао γ са дужи Z_1Z_2 добивамо ако изразимо да је вектор $z-z_0$ паралелан вектору $(z_2-z_1)e(\gamma)$, тј.

$$(z-z_0|(z_2-z_1)e(\gamma))=0.$$



Сл. 99

(iii) 1^0 Изразом

$$z=\frac{pz_1+qz_2}{p+q}$$

је одређена тачка Z праве која пролази кроз тачке Z_1 и Z_2 и дели дуж Z_1Z_2 у односу $q:p$. Ако у овом изразу ставимо

$$q=t \quad \text{и} \quad p=1-t,$$

сматрајући t као реалан параметар, добивамо (в. сл. 99)

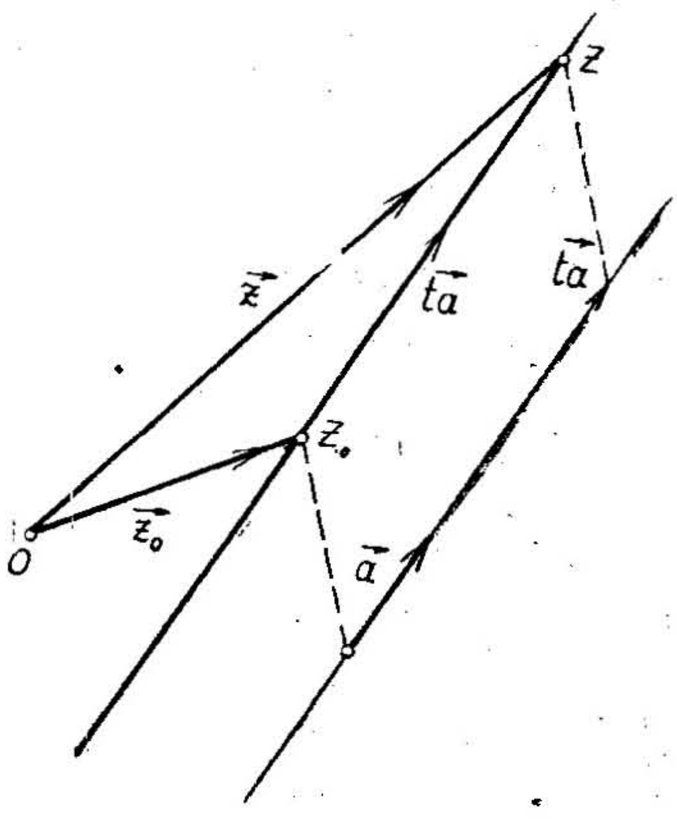
$$z=z_1+t(z_2-z_1).$$

Ово је параметарска једначина праве која пролази кроз тачке Z_1 и Z_2. — Док t варира од 0 до 1 тачка Z се креће од Z_1 до тачке Z_2; за $t>1$, Z се налази са стране тачке Z_2, а за $t<0$, са стране тачке Z_1.

Елиминацијом параметра t, што постижемо множењем паралелно горње једначине са z_2-z_1, добивамо

$$(z|z_2-z_1)=(z_1|z_2-z_1),$$

тј. једначину из тачке (ii) 1^0.



Сл. 100

2^0 Општије, параметарску једначину праве која прелази кроз тачку Z_0, а паралелна је вектору $\vec{a}$, добивамо ако t пута већи (или мањи) вектор $\vec{ta}$ додамо вектору $\vec{z_0}$, тј.

$$z=z_0+ta.$$

Исто је тако

$$z=z_0+te(\alpha),$$

односно

$$z=z_0+t(z_2-z_1),$$

једначина праве која пролази кроз тачку Z_0 и има правац α, односно је паралелна дужи Z_1Z_2.

3^0 Једначине

$$z=z_0+iat,$$

односно

$$z=z_0+ie(\alpha)t,$$

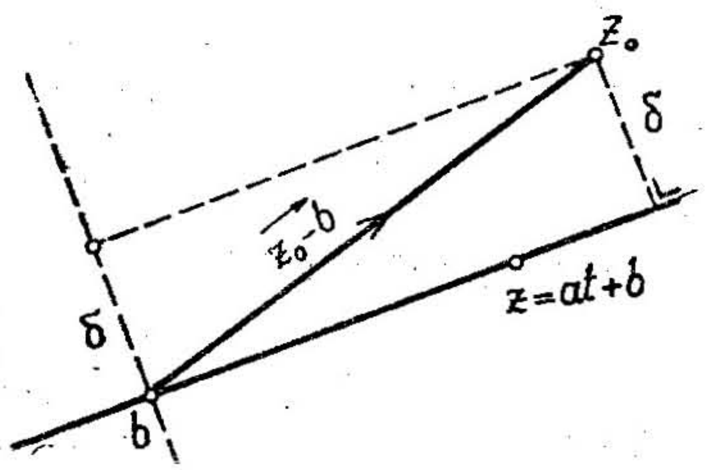
односно
$$z = z_0 + i(z_2 - z_1)t,$$
претстављају праве које пролазе кроз тачку Z_0 и нормалне су на вектор $\vec{a}$, односно правац α, односно дуж $Z_1 Z_2$,

Тако је, на пример,
$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} + i(z_2 - z_1)t$$
једначина симетрале дужи $Z_1 Z_2$.

(iv) Уопште, ако су a и b два комплексна броја, тада
$$z = at + b$$
претставља параметарску једначину праве линије. Њен правац је дат са $arc(a)$, а b је једна тачка те праве линије.

Угао γ што га ова права заклапа са правом
$$z = a't + b'$$
износи, према томе,
$$\gamma = arc(a') - arc(a) = arc(a'/a),$$
или
$$e(2\gamma) = \frac{\bar{a}a'}{a\bar{a}'}.$$

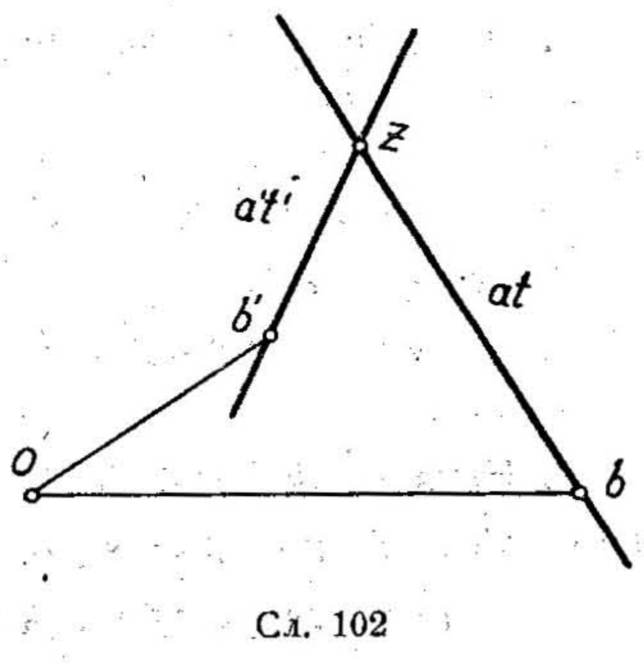
(v) Отстојање δ тачке Z_0 од праве
$$z = at + b.$$



Сл. 101

добивамо као пројекцију вектора $\overrightarrow{z_0 - b}$ на нормалу дате праве, тј. на правац нормалан на вектор $\vec{a}$. Дакле,
$$\delta = \frac{1}{|a|}(a \,|\, z_0 - b).$$

(vi) 1° Тачку пресека Z правих
$$z = at + b \quad \text{и} \quad z = a't + b'$$
добивамо ако одредимо оне вредности t и t' параметара за које је
$$z = at + b \quad \text{и} \quad z = a't' + b'.$$



Сл. 102

Ове две једначине претстављају систем од четири реалне једначине са четири реалне непознате $R\{z\}, J\{z\}$, t и t'.

Елиминацијом броја z добивамо једначину
$$at + b = a't' + b',$$

која са њеном коњугованом једначином

$$\overline{a}t+\overline{b}=\overline{a}'t'+\overline{b}'$$

даје систем из кога можемо одредити t и t', ако дискриминанта овог система, тј.

$$\begin{vmatrix} a & -a' \\ \overline{a} & -\overline{a}' \end{vmatrix} = \overline{a}a' - a\overline{a}' = 2i(a\,|\,a')$$

није једнака нули, тј. ако вектори $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ нису паралелни.

2^0 Ако из првобитног система елиминишемо параметре t и t' и то множењем паралелно прве једначине са a, а друге са a', добивамо реални систем од две једначине

$$(z\,|\,a)=(b\,|\,a) \quad \text{и} \quad (z\,|\,a')=(b'\,|\,a').$$

Како је, према обрасцима (9) или (10) тачке 1. 3. (iv),

$$(a\,|\,a')\,z=(z\,|\,a')\,a-(z\,|\,a)\,a',$$

то, кад у овом обрасцу $(z\,|\,a')$ заменимо са $(b'\,|\,a')$, а $(z\,|\,a)$ са $(b\,|\,a)$, добивамо

$$(a\,|\,a')\,z=(b'\,|\,a')\,a-(b\,|\,a)\,a'.$$

Према томе, тачка пресека посматраних правих је дата изразом

$$z=\frac{(b'\,|\,a')\,a-(b\,|\,a)\,a'}{(a\,|\,a')}.$$

Задаци

1. Нека је k дат реалан број; шта претстављају доње једначине за $k=0$ и $k\neq 0$:

1^0 $R\{z\}=k$; 2^0 $J\{z\}=k$; 3^0 $arc(z)=k$;

4^0 $R\{z\pm\overline{z}\}=k$; 5^0 $J\{z\pm\overline{z}\}=k$.

2. Нека је t реалан параметар; шта описује тачка Z док t варира од $-\infty$ до $+\infty$, или од 0 до 1, или од 0 до ∞, ако је:

1^0 $z=a+iat$; 2^0 $z=ai+at$;

3^0 $z=(i-t)/(i+it)$.

3. Тачка $z=(a'+b't)/(a+bt)$ ће описати праву само ако је $(a\,|\,b)=0$.

4. Нека је k реалан број; какав положај заузима вектор $\vec{a}$ према правама $az+\overline{az}=k$ и $\overline{a}z+a\overline{z}=k$?

5. Одреди тачку пресека правих из претходног задатка.

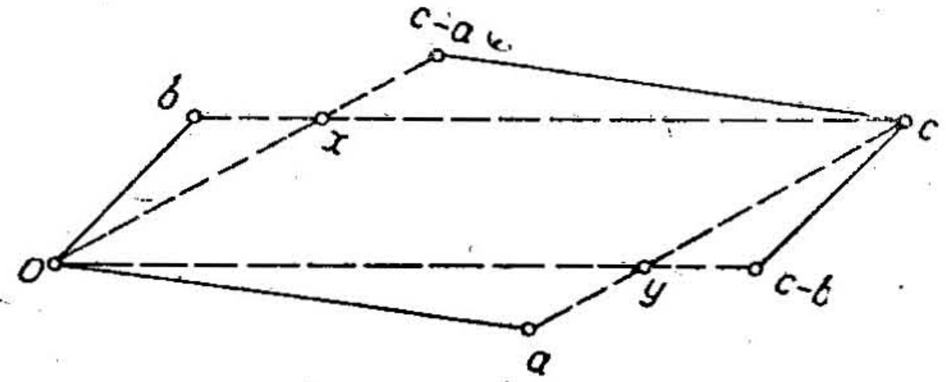
6. Одреди тачку пресека праве која пролази кроз тачку Z_1 и паралелна је правцу α, и праве која пролази кроз тачку Z_2, а стоји нормално на правац α.

7. Дате су праве

$$z = i + t, \quad z = 1 + it, \quad z = 1 + (1 - i)t,$$

одреди: 1^0 симетрале појединих углова које ове праве заклапају; 2^0 геометриско место тачака чији је збир отстојања од прве две праве једнак отстојању од треће праве.

8. Дате су тачке a, b и c (в. сл. 103). Одреди пресек x правих b, c и $O, c - a$, и пресек y правих a, c и $O, c - b$, као и површину троугла O, x, y.



Сл. 103

9. Покажи да се једначина праве која пролази кроз тачке Z_1 и Z_2 може симетрично написати овако

$$(z \mid z_1) + (z_1 \mid z_2) + (z_2 \mid z) = 0.$$

10. Дате су три праве од којих прва пролази кроз тачку Z_1 и паралелна је вектору $\vec{a}$, друга кроз тачку Z_2 и паралелна је вектору $\vec{b}$, а трећа кроз тачку Z_3 и паралелна је вектору $\vec{c}$. Да би се ове праве секле у једној тачки потребно је и довољно да буде

$$(z_1 \mid a)(b \mid c) + (z_2 \mid b)(c \mid a) + (z_3 \mid c)(a \mid b) = 0.$$

Дискутуј случај кад је $(a \mid b) = 0$, и покажи да се тада горњи услов може свести на

$$(z_2 - z_1 \mid b)(c \mid a) = 0.$$

11. Ако троугле координате $\varkappa, \lambda$ и μ задовољавају линеарну везу облика

$p\varkappa + q\lambda + r\mu = 0$, где су p, q и r реални бројеви, тада се тачка

$$z = \varkappa z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3, \quad (\varkappa + \lambda + \mu = 1),$$

налази на правој

$$\begin{vmatrix} z & z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z} & \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \\ 0 & p & q & r \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

12. Нека је

$$z' = \varkappa' z_1 + \lambda' z_2 + \mu' z_3, \quad (\varkappa' + \lambda' + \mu' = 1),$$

$$z'' = \varkappa'' z_1 + \lambda'' z_2 + \mu'' z_3, \quad (\varkappa'' + \lambda'' + \mu'' = 1),$$

$$z''' = \varkappa''' z_1 + \lambda''' z_2 + \mu''' z_3, \quad (\varkappa''' + \lambda''' + \mu''' = 1),$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varkappa' & \lambda' & \mu' \\ \varkappa'' & \lambda'' & \mu'' \\ \varkappa''' & \lambda''' & \mu''' \end{vmatrix},$$

тада је

$$(z' \mid z'') + (z'' \mid z''') + (z''' \mid z') = \Delta \{(z_1 \mid z_2) + (z_2 \mid z_3) + (z_3 \mid z_1)\}.$$

Да би се тачке Z', Z'' и Z''' налазиле на једној правој, потребно је и довољно да буде $\Delta = 0$.

2. 2. Круг. (*i*) Изведимо овде три главна облика имплицитних једначина круга и то из његове три основне особине које га као геометриско место потпуно карактеришу.

1° Геометриско место тачка Z које се налазе на остојању $r > 0$ од тачке A је круг чију једначину, према дефиницији, можемо непосредно написати у облику

$$|z - a| = r.$$

Ако ову једначину квадрирамо, добивамо

$$|z|^2 - 2(a \perp z) + |a|^2 = r^2. \tag{1}$$

Дакле, једначина облика

$$|z|^2 - 2(a \perp z) + p = 0 \tag{2}$$

претставља једначину круга са средиштем у тачки A и полупречником

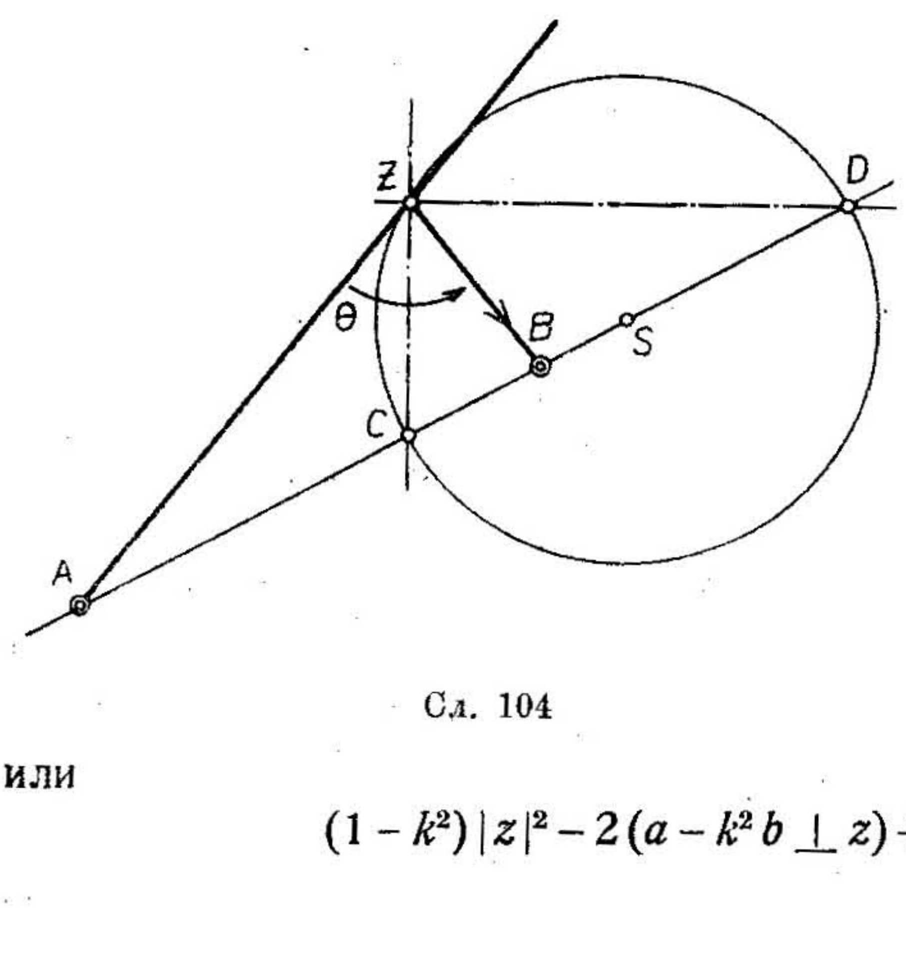
$$r = \sqrt{|a|^2 - p}, \quad \text{за} \quad |a|^2 > p. \tag{3}$$

2° Геометриско место тачака Z чији је количник отстојања од тачака A и B сталан и једнак $k \neq 1$ је тзв. Аполонијев круг.

Његова једначина је, (в. сл. 104),

$$\frac{|z-a|}{|z-b|} = k \neq 1. \tag{4}$$

За $k = 1$, ово је једначина симетрале дужи AB (в. тачку **2. 1.** (**ii**) 4°).



Сл. 104

Квадрирањем једначине (4) добивамо

$$|z-a|^2 - k^2 |z-b|^2 = 0,$$

или

$$(1 - k^2)|z|^2 - 2(a - k^2 b \perp z) + |a|^2 - k^2 |b|^2 = 0.$$

Дакле, према (2) и (3), средиште S Аполонијева круга дато је изразом

$$s=\frac{a-k^2b}{1-k^2};$$

оно се налази на продужењу дужи AB, јер дели ову дуж у односу $-k^2$. Полупречник r износи

$$r=\frac{k}{k^2-1}|b-a|.$$

Крајње тачке пречника C и D су, дакле,

$$c=s-\frac{k}{k^2-1}(b-a)=\frac{a+kb}{1+k} \quad \text{и} \quad d=s+\frac{k}{k^2-1}(b-a)=\frac{a-kb}{1-k};$$

то су тачке пресека симетрала унутарњег и спољњег угла AZB са правом AB.

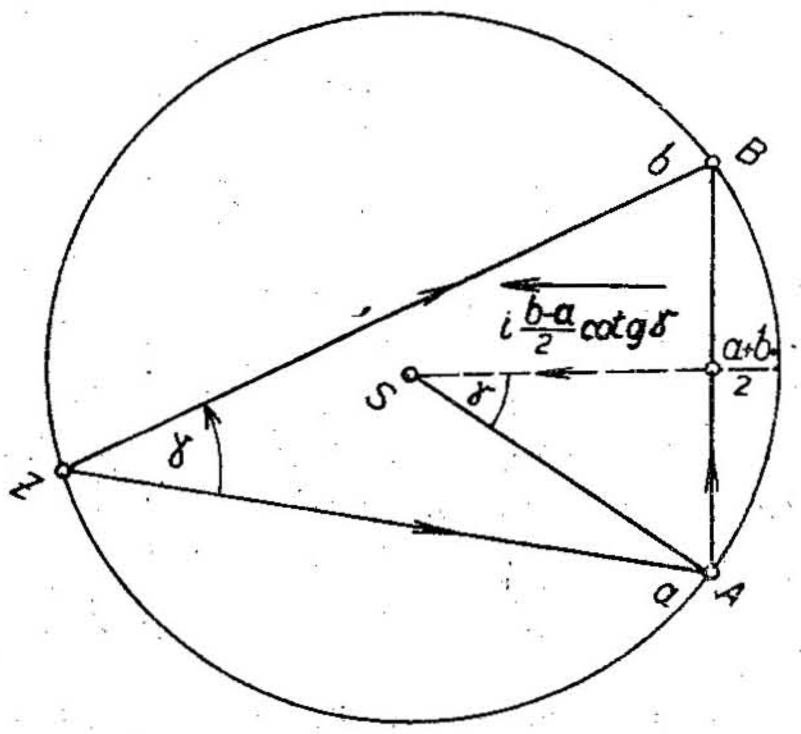
3° Геометриско место тачака Z из којих се тачке A и B виде под сталним углом γ је круг чија је једначина, (в. сл. 105),

$$arc\left\{\frac{b-z}{a-z}\right\}=\gamma,$$

или, што је исто,

$$\frac{b-z}{a-z}\,\frac{\bar{a}-\bar{z}}{\bar{b}-\bar{z}}=e(2\gamma).$$

До ове једначине долазимо и кад изразимо да вектор $\overrightarrow{ZA}$ ротиран за угао γ постаје паралелан вектору $\overrightarrow{ZB}$, дакле,



Сл. 95

$$(e(\gamma)(a-z)\,|\,b-z)=0. \tag{5}$$

Ако овај производ развијемо

$$(e(\gamma)z\,|\,z)-(e(\gamma)a\,|\,z)-(e(\gamma)z\,|\,b)+(e(\gamma)a\,|\,b)=0,$$

и приметимо да је

$$(e(\gamma)z\,|\,z)=|z|^2(e(\gamma)\,|\,1)=-|z|^2\sin\gamma$$

и

$$(e(\gamma)z\,|\,b)=(z\,|\,e(-\gamma)b)=-(e(-\gamma)b\,|\,z),$$

горњу једначину можемо написати и у облику

$$|z|^2\sin\gamma-(e(-\gamma)b-e(\gamma)a\,|\,z)-(e(\gamma)a\,|\,b)=0.$$

Ова једначина, према (2) и (3), претставља круг, чије се средиште S налази у тачки

$$s = i\frac{be(-\gamma) - ae(\gamma)}{2\sin\gamma} = \frac{a+b}{2} + i\,\frac{(b-a)\cos\gamma}{2\sin\gamma},$$

а који, према (5), пролази кроз тачке A и B.

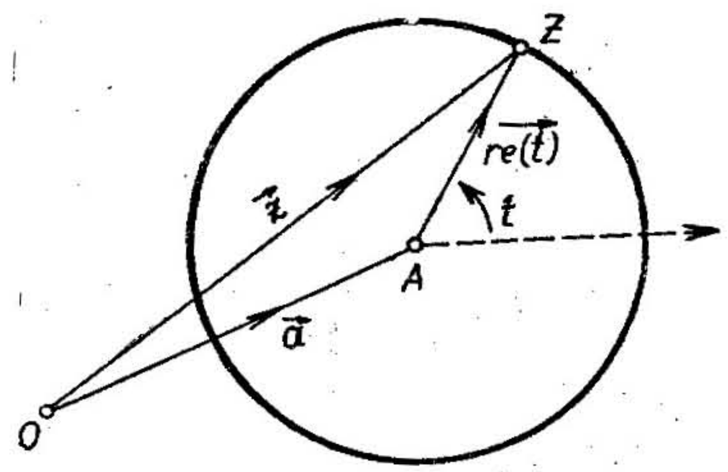
(*ii*) 1° Параметарску једначину круга са средиштем у тачки A и полупречником r добивамо ако за параметар t уведемо угао

$$t = arc\,(z-a);$$

тада непосредно из слике 106 видимо да је

$$z = a + re\,(t),$$

тако да, док параметар t варира од 0 до 2π, тачка Z опише цео круг у позитивном смеру.



Сл. 106

Уосталом, из

$$z - a = re\,(t),$$

следи

$$|z-a| = |re\,(t)| = r,$$

тј. имплицитна једначина круга наведена у тачки (*i*) 1°.

2° Други важан облик параметарске једначине круга добивамо ако једначину Аполонијева круга, (в. сл. 104), изразимо параметарски, уводећи као параметар угао $\theta = \sphericalangle AZB$, тј. угао

$$\theta = arc\left(\frac{b-z}{a-z}\right).$$

Како је, по дефиницији, однос модула бројева $a-z$ и $b-z$ сталан и има вредност k, то је, дакле.

$$\frac{a-z}{b-z} = \left|\frac{a-z}{b-z}\right| e\,(-\theta) = ke\,(-\theta).$$

Отуда добивамо да је

$$z = \frac{a - bke\,(-\theta)}{1 - ke\,(-\theta)}. \qquad (6)$$

Ако бројитељ и именитељ помножимо са $e(\theta/2)$ добивамо

$$z = \frac{ae\,(\theta/2) - bke\,(-\theta/2)}{e\,(\theta/2) - ke\,(-\theta/2)} = \frac{(a-bk)\cos\theta/2 + i\,(a+bk)\sin\theta/2}{(1-k)\cos\theta/2 + i\,(1+k)\sin\theta/2}.$$

Ако затим бројитељ и именитељ поделимо са $\cos\theta/2$ и уведемо нов параметар

$$t = tg\,\theta/2,$$

добивамо коначно параметарску једначину у облику

$$z=\frac{(a-bk)+i(a+bk)t}{(1-k)+i(1+k)t}. \tag{7}$$

Док θ варира од 0 до π, t варира од 0 до ∞, а тачка Z описује полукруг од тачке

$$d=\frac{a-kb}{1-k} \text{ до тачке } c=\frac{a+kb}{1+k}.$$

Док θ варира од π до 2π, или од 0 до $-\pi$, тачка Z опише другу половину круга.

3° Уопште, једначина облика

$$z=\frac{a+bt}{c+dt}, \tag{8}$$

где су a, b, c и d комплексни бројеви, претставља једначину круга ако вектори $\vec{c}$ и $\vec{d}$ нису паралелни, тј. ако је $(c|d)\neq 0$. Јер, ако приметимо да је

$$z-\frac{b\bar{c}-a\bar{d}}{\bar{c}d-c\bar{d}}=\frac{ad-bc}{\bar{c}d-c\bar{d}}\,\frac{\bar{c}+\bar{d}t}{c+dt},$$

и да је

$$\left|\frac{\bar{c}+\bar{d}t}{c+dt}\right|=1,$$

то се, узимањем модула, параметар t сам по себи елиминише и параметарска једначина (8) се своди на имплицитну једначину облика

$$\left|z-\frac{b\bar{c}-a\bar{d}}{\bar{c}d-c\bar{d}}\right|=\left|\frac{ad-bc}{\bar{c}d-c\bar{d}}\right|.$$

То је, дакле, круг са средиштем у тачки

$$\frac{b\bar{c}-a\bar{d}}{\bar{c}d-c\bar{d}}$$

и полупречником

$$\left|\frac{ad-bc}{\bar{c}d-c\bar{d}}\right|.$$

4° Посматрајмо још ово геометриско место.

Нека је дат реалан број δ^2, круг K' са средиштем у тачки O и полупречником r и нека се тачка A налази у њему, (в. сл. 107). Уочимо једну тачку Z' круга K' и на правој $Z'A$ одредимо тачку Z, тако да буде

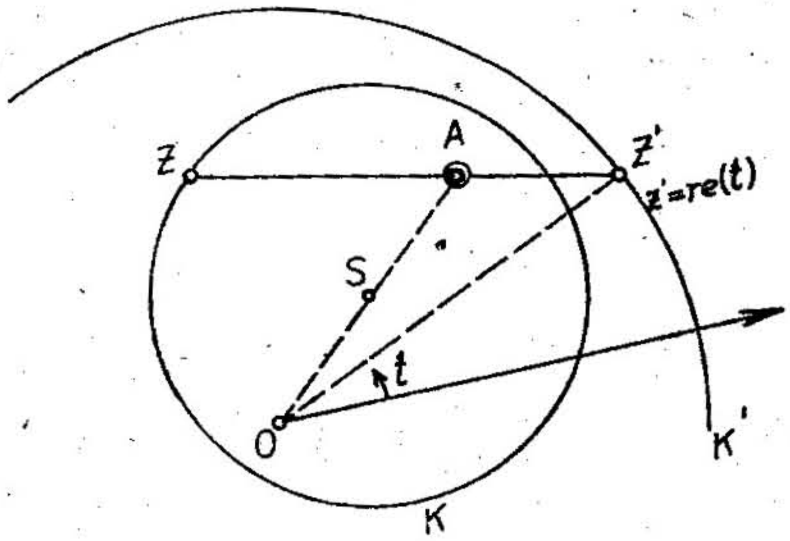
$$\overline{Z'A}\cdot\overline{AZ}=\delta^2.$$

Док се тачка Z' креће по кругу K', геометриско место тачака Z је круг K, чије се средиште S налази на дужи OA и који се цео налази у кругу K', ако је

$$\delta^2 < r^2 - |a|^2,$$

а поклапа се са њиме, ако је

$$\delta^2 = r^2 - |a|^2.$$



Сл. 107

Како $z-a$ и $a-z'$ имају исти аргумент, а производ њихових модула износи δ^2, то је,

$$(z-a)(\bar{a}-\bar{z}')=\delta^2.$$

Ако почетак ставимо у средиште круга K' и аргумент t броја z' изаберемо као параметар, тада је

$$z' = re(t),$$

па је, према томе,

$$z-a=\frac{\delta^2}{\bar{a}-re(-t)} \tag{9}$$

параметарска једначина траженог геометриског места.

Ако левој и десној страни ове једначине додамо $\dfrac{a\delta^2}{r^2-|a|^2}$, добивамо

$$z-a\left(1-\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2}\right)=r\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2}\,\frac{r-ae(-t)}{\bar{a}-re(-t)}=r\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2}\,\frac{a-re(t)}{r-\bar{a}e(t)};$$

како је

$$|r-\bar{a}e(t)|=|r-ae(-t)|=|re(t)-a|=|a-re(t)|,$$

то је

$$\left|\frac{a-re(t)}{r-\bar{a}e(t)}\right|=1,$$

тако да се овим параметар непосредно елиминише и добивамо

$$\left|z-a\left(1-\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2}\right)\right|=r\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2},$$

што претставља једначину круга са средиштем у тачки

$$s=a\left(1-\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2}\right)$$

и полупречником

$$\rho=r\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2}.$$

Ако уведемо параметар τ везом

$$e(\tau)=\frac{a-re(t)}{r-\bar{a}e(t)},$$

једначину (9) можемо написати и у облику

$$z=c+\rho e(\tau).$$

Да бисмо показали да се за

$$\delta^2<r^2-|a|^2,$$

тј. за

$$\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2}<1,$$

круг K налази у кругу K', треба да покажемо да је за свако t, односно τ,

$$|z|<r.$$

Ово добивамо овако:

$$\begin{aligned}|z|&=|c+\rho e(\tau)|<|c|+|\rho e(\tau)|=|c|+\rho=\\&<|a|\left(1-\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2}\right)+r\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2}=\\&<|a|+(r-|a|)\frac{\delta^2}{r^2-|a|^2}<\\&<|a|+(r-|a|)=r.\end{aligned}$$

Ако је, (в. сл. 108),

$$\delta^2=r^2-|a|^2,$$

тада је

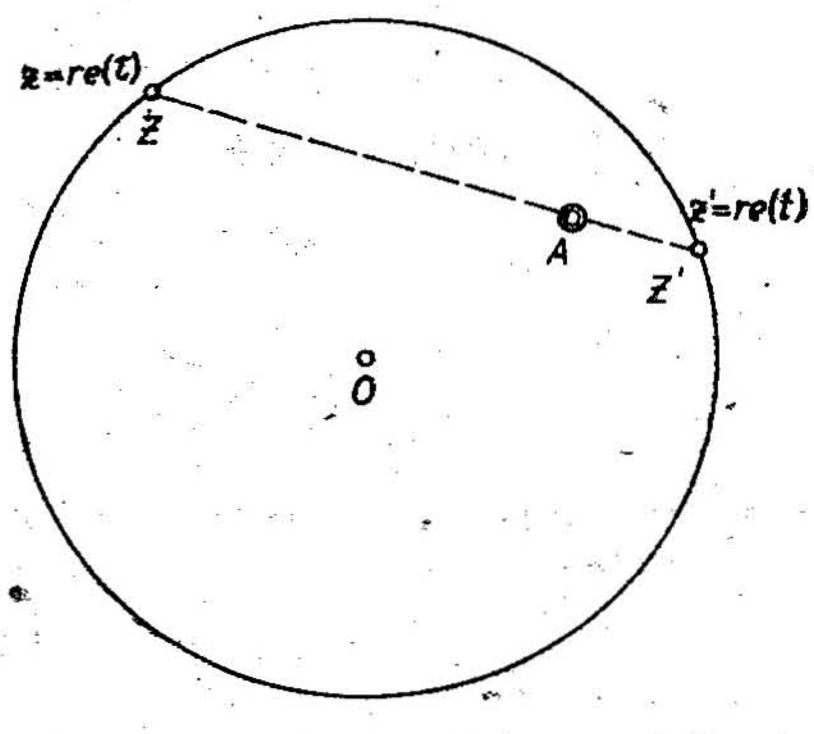
$$s=0 \quad \text{и} \quad \rho=r,$$

тако да се круг K поклапа са кругом K' и

$$z=\frac{a-re(t)}{r-\bar{a}e(t)}r \qquad (10)$$

претставља, такође, параметарску једначину круга K', тј. круга

$$|z|=r.$$



Сл. 108

Отуда видимо да се тачка Z, одређена изразом (10), добива пресеком круга K' са правом која пролази кроз тачке A и Z', (в. сл. 105).

5° Једначине (6), (9) и (10) су специални случајеви једначине облика

$$z = \frac{a + be(t)}{c + de(t)}, \tag{11}$$

где су a, b, c и d произвољни комплексни бројеви.

Ова једначина претставља, такође, параметарску једначину круга, ако је

$$|c| \neq |d|,$$

а праву линију, ако је

$$|c| = |d|.$$

(iii) Наведимо овде још неколико примера.

Пр. (1) (в. сл. 109). Одреди тачке пресека праве

$$z = b + te(\alpha)$$

са кругом

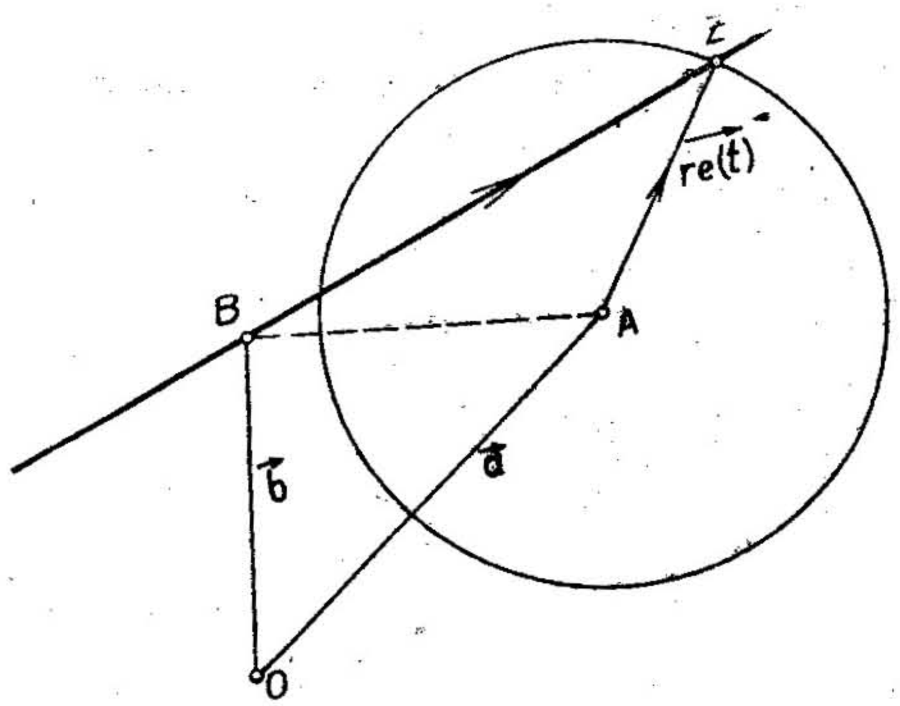
$$z = a + re(t).$$

Нека је Z једна тачка пресека; ако изразимо да вектор

$$z - b = (a + re(t)) - b$$

има правац α, добивамо

$$(e(\alpha) | a - b + re(t)) = 0,$$



Сл. 109

тј.

$$r(e(\alpha)|e(t)) = (e(\alpha)|b - a).$$

Отуда добивамо да је

$$\sin(t - \alpha) = \frac{1}{r}(e(\alpha)|b - a),$$

или

$$\frac{1}{2i}(e(t - \alpha) - e(\alpha - t)) = \frac{1}{r}(e(\alpha)|b - a),$$

из којих једначина можемо одредити непознату t. Ако, краткоће ради, ставимо

$$\frac{1}{r}(e(\alpha)|b - a) = p,$$

и последњу једначину помножимо са $e(t - \alpha)$, добивамо

$$e^2(t - \alpha) - 2ipe(t - \alpha) - 1 = 0,$$

а одатле следи да је

$$e(t - \alpha) = pi \pm \sqrt{1 - p^2}.$$

Да би

$$|pi \pm \sqrt{1-p^2}| = 1,$$

мора бити

$$-1 < p < 1,$$

тј.

$$-r < (e(\alpha) \mid b - a) < r.$$

Према томе, да би дата права додиривала круг, мора бити

$$(e(\alpha) \mid b - a) = \pm r.$$

Пр. (2) (в. сл. 110). Одреди положај тачке Z према тачкама A, B и C, ако је

$$\frac{c-a}{z-a} : \frac{c-b}{z-b} = -1. \qquad (12)$$

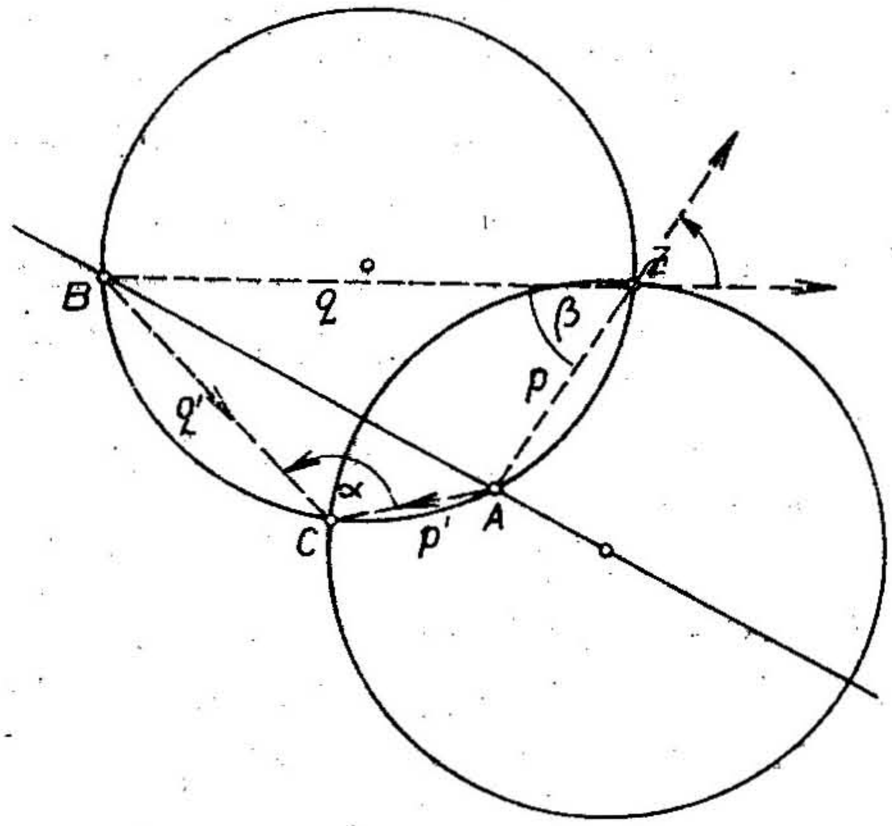
Из услова (12) следи

$$\frac{z-a}{z-b} = -\frac{c-a}{c-b},$$

а отуда, да је

$$arc\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \pi + arc\left(\frac{c-a}{c-b}\right),$$

тј. $\beta = \pi - \alpha$,



Сл. 110

и да је

$$\frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{|c-a|}{|c-b|}, \quad \text{тј.} \quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}.$$

Прва од ових једначина казује да се тачка Z мора налазити на кругу који пролази кроз A, B и C, тј. Z мора са A, B и C да чини тетивни четвороугао, јер су збирови супротних углова суплементни.

Друга једначина казује да се тачка Z налази на Аполонијеву кругу који пролази кроз тачку C. Дакле, тачка Z се налази на пресеку ова два круга.

Пр. (3) Једначина

$$|z^2 + 1| - 2|z| = 0 \qquad (13)$$

претставља два круга.

Пођимо од идентитета (види пример (3), тачке **1.3** (vii))

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2,$$

и ставимо

$$u = z + i \quad \text{и} \quad v = z - i;$$

тада добивамо

$$2|z+i|^2 + 2|z-i|^2 = 4|z|^2 + 4.$$

Ако одавде решимо $4|z|^2$ и заменимо у изразу $|z^2+1|^2-4|z|^2$, он постаје

$$|z^2+1|^2-4|z|^2=|z^2+1|^2-2|z+i|^2-2|z-i|^2+4=$$

$$=(|z^2+1|+2)^2-4|z^2+1|-2|z+i|^2-2|z-i|^2,$$

дакле,

$$|z^2+1|^2-4|z|^2=(|z^2+1|+2)^2-2(|z+i|+|z-i|)^2.$$

Према томе, ако леву и десну страну раставимо на факторе, биће

$$(|z^2+1|+2|z|)(|z^2+1|-2|z|)=$$

$$=(|z+i|-\sqrt{2})(|z-i|-\sqrt{2})\{|z^2+1|+2+\sqrt{2}(|z+i|+|z-i|)\}.$$

Како први фактор леве и последњи фактор десне стране не могу бити једнаки нули, то ће једначина (13) бити задовољена, тј. биће

$$|z^2+1|-2|z|=0,$$

ако је

$$(|z+i|-\sqrt{2})(|z-i|-\sqrt{2})=0,$$

тј. ако је или

$$|z+i|-\sqrt{2}=0, \quad \text{или} \quad |z-i|-\sqrt{2}=0.$$

Дакле, једначина

$$|z^2+1|=2|z|$$

претставља два круга чије су једначине

$$|z+i|=\sqrt{2} \quad \text{и} \quad |z-i|=\sqrt{2}.$$

Задаци

1. Нека је k реална константа; одреди, према тачкама A и B, положај кругова чије су једначине

$$1^0 \quad R\left\{\frac{z-a}{z-b}\right\}=k; \quad 2^0 \quad J\left\{\frac{z-a}{z-b}\right\}=k; \quad 3^0 \quad (z-a \perp z-b)=k;$$

$$4^0 \quad |z-a|^2+|z-b|^2=k; \quad 5^0 \quad \left|\frac{z-b}{1-\bar{a}z}\right|=k; \quad 6^0 \quad \left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|=k.$$

2. Одреди положај и полупречник кругова

$$1^0 \quad z=\frac{1+ti}{1-ti}; \quad 2^0 \quad z=t^2-1+\sqrt{t^4-t^2}, \text{ са } t^2<1.$$

3. Које услове морају задовољавати бројеви a и b да би једначина

$$z=\frac{at^2+(1-t)^2 b}{1-t+t^2}$$

претстављала круг. Одреди у том случају положај који заузима овај круг према тачкама A и B. — Где пресеца права BZ праву OA, а где права AZ праву OB?

4. Ако круг

$$|z-s|=r$$

пролази кроз тачке A, B и C, тада је

$$s=-\Delta_1/\Delta \quad \text{и} \quad r^2-|s|^2=-\Delta_2/\Delta,$$

где је

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & a & \bar{a} \\ 1 & b & \bar{b} \\ 1 & c & \bar{c} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & a & |a|^2 \\ 1 & b & |b|^2 \\ 1 & c & |c|^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a & \bar{a} & |a|^2 \\ b & \bar{b} & |b|^2 \\ c & \bar{c} & |c|^2 \end{vmatrix}.$$

5. Тачке A, B, C и D налазе се на једном кругу ако је

$$R\{a\}\cdot J\{a\}=R\{b\}\cdot J\{b\}=R\{c\}\cdot J\{c\}=R\{d\}\cdot J\{d\},$$

и ако је

$$R\{d\}=R\{a\}\cdot R\{b\}\cdot R\{c\}.$$

6. Једначину круга из чијих се тачака дуж AB види под углом α можемо написати и овако

$$(z-a\overset{\alpha}{|}z-b)=0$$

(види задатак 5. тачке 1. 3.).

7. Ако у четвороуглу $Z_1Z_2Z_3Z_4$ (в. сл. 66, примера (7) тачке 1. 3. (viii)) учврстимо темена Z_1, Z_2 и Z_3 и пустимо да се теме Z_4 креће тако да буде $\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=\pi$, тада се геометриско место темена Z_4 састоји из два круга. — Један од кругова је описан круг око троугла $Z_1Z_2Z_3$, а други Аполонијев круг у односу на темена Z_1 и Z_3, а који пролази кроз тачку Z_2. Друга тачка пресека ових кругова је тачка која је одређена у примеру (2) тачке 2. 2. (iii).

2. 3. Криве. (i) Једначину елипсе и хиперболе можемо добити непосредно из саме дефиниције, наиме, да су то геометриска места чији је збир, односно разлика отстојања од две дате тачке A и B сталан број k. Тако једначина елипсе гласи

$$|z-a|+|z-b|=k, \tag{1}$$

при чему мора бити

$$k>|b-a|,$$

а једначина хиперболе је

$$|z-a|-|z-b|=k. \tag{2}$$

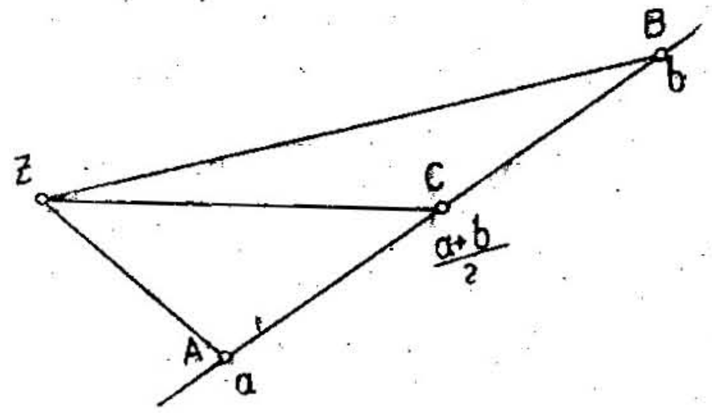
Ове једначине нису згодне за руковање, али се и њима можемо којипут послужити.

1° Нека је C средина дужи AB (в. сл. 111). Геометриско место тачака Z за које је збир

$$\overline{ZC}^2+\overline{ZA}\cdot\overline{ZB}$$

сталан и једнак p, је елипса, са жижама у тачкама A и B. При томе мора бити

$$p>\left|\frac{b-a}{2}\right|^2.$$



Сл. 111

Према дефиницији, једначина геометриског места гласи

$$\left|z-\frac{a+b}{2}\right|^2+|z-a||z-b|=p. \quad (3)$$

Да бисмо ову једначину трансформисали, пођимо од обрасца

$$|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2,$$

и ставимо

$$u+v=z-a \quad \text{и} \quad u-v=z-b,$$

тј.

$$u=z-\frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad v=\frac{b-a}{2},$$

што даје

$$|z-a|^2+|z-b|^2=2\left|z-\frac{a+b}{2}\right|^2+2\left|\frac{b-a}{2}\right|^2.$$

Ако из овог обрасца израз $\left|z-\frac{a+b}{2}\right|^2$ заменимо у једначину (3), добивамо

$$(|z-a|+|z-b|)^2=2p+2\left|\frac{b-a}{2}\right|^2.$$

Ова се једначина, ако ставимо

$$k^2=2p+2\left|\frac{b-a}{2}\right|^2,$$

своди на једначину елипсе (1), чије су жиже у тачкама A и B.

2° Геометриско место тачака Z за које је разлика (в. сл. 111)

$$\overline{ZC}^2-\overline{ZA}\cdot\overline{ZB}$$

стална и једнака q, је хипербола.

Према дефиницији, једначина геометриског места гласи

$$\left|z-\frac{a+b}{2}\right|^2-|z-a||z-b|=q. \quad (4)$$

Истим поступком као и у претходном примеру добивамо да се ова једначина може написати у облику

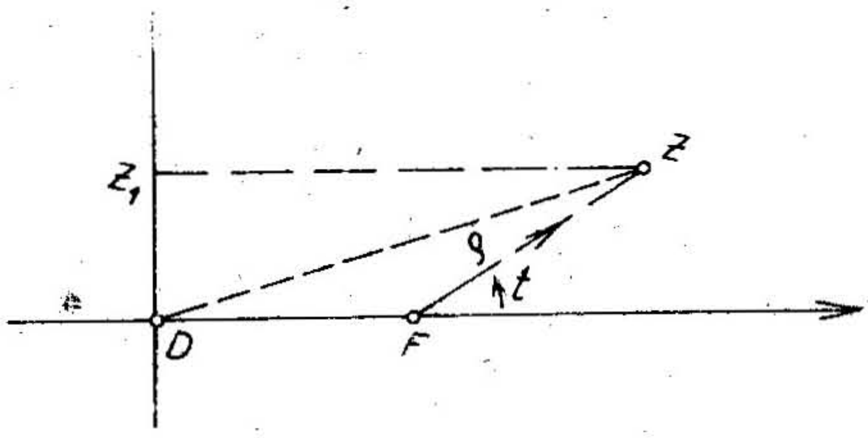
$$(|z-a|-|z-b|)^2=2q+2\left|\frac{b-a}{2}\right|^2,$$

а ова се једначина своди на једначину хиперболе (2).

(ii) Једначину параболе која је дефинисана као геометриско место тачака подједнако удаљених од дате тачке и дате праве, добивамо као специалан случај опште једначине коничних пресека, кад конични пресек дефинишемо овако.

Геометриско место тачака Z (в. сл. 112) чији је однос отстојања од дате тачке F и дате праве сталан и једнак k, је елипса, парабола или хипербола, према томе да ли је $k<1$, $k=1$ или $k>1$.

Означимо са D теме нормале спуштене из тачке F на дату праву и са Z_1 пројекцију тачке Z на ту праву. По дефиницији је



Сл. 112

$$\overline{FZ}=k\overline{Z_1Z}.$$

Означимо даље са α правац дужи DF, тј.

$$\alpha=arc\{f-d\},\quad \text{или}\quad e(\alpha)=\frac{f-d}{|f-d|};$$

тада је

$$\overline{Z_1Z}=(e(\alpha)\perp z-d)=\frac{1}{|f-d|}(f-d\perp z-d).$$

Према томе, једначина геометриског места гласи

$$|z-f|=\frac{k}{|f-d|}(f-d\perp z-d). \tag{5}$$

Ако ову једначину поделимо са $|f-d|$ и приметимо да је

$$\frac{1}{|f-d|^2}(f-d\perp z-d)=\left(\frac{f-d}{|f-d|}\perp\frac{z-d}{|f-d|}\right)=\left(1\perp\frac{z-d}{f-d}\right)=\left(1\perp 1+\frac{z-f}{f-d}\right),$$

једначину (5) можемо тада написати и у облику

$$\left|\frac{z-f}{f-d}\right|=k+k\left(1\perp\frac{z-f}{f-d}\right).$$

Према томе, ако ставимо

$$z' = \frac{z-f}{f-d}, \tag{6}$$

тј. ако координатни почетак померимо у тачку F, извршимо ротацију за угао $-\alpha$ и целу слику смањимо у односу $1 : |f-d|$, тада добивамо за коничне пресеке једначину облика

$$|z'| = k + k(1 \perp z'). \tag{7}$$

(iii) Једначине (5) и (7) можемо написати и у параметарском облику, ако за параметар уведемо угао

$$t = arc\,(z-f).$$

За вектор $\overrightarrow{FZ}$ добивамо тада

$$z-f = |z-f|\,e(\alpha)e(t) = \frac{f-d}{|f-d|}e(t)|z-f|,$$

или, према (5),

$$z-f = \frac{f-d}{|f-d|}e(t)\frac{k}{|f-d|}(f-d \perp z-d),$$

дакле,

$$\frac{z-f}{d-f} = ke(t)\left(1 \perp \frac{z-d}{d-f}\right). \tag{8}$$

Ако у овом обрасцу извршимо смену (6), он постаје

$$z' = ke(t)(1 \perp z' + 1). \tag{9}$$

Једначину (8), или (9), можемо решити по z, или z'. Тако, на пример, ако једначину (9) напишемо у облику

$$z' = ke(t)(1 \perp z') + ke(t) \tag{10}$$

и помножимо је ортогонално са 1, добивамо

$$(1 \perp z') = k(1 \perp e(t))(1 \perp z') + k(1 \perp e(t)) = k\cos t(1 \perp z') + k\cos t.$$

Отуда је

$$(1 \perp z') = \frac{k\cos t}{1-k\cos t},$$

што заменом у (10) даје

$$z' = \frac{ke(t)}{1-k\cos t}.$$

(iv) Геометриска места, тј. криве линије, чије су једначине степена вишег од 2-ог, или су трансцедентне, могу се често лакше испитати ако њихову једначину изразимо комплексним бројевима, јер при геометриској интерпретацији појединих чланова такве једначине можемо непосредно видети облик и особине дотичног геометриског места.

1° Тако, на пример, (в. сл. 113) једначина

$$z=at+bt^2,$$

или

$$z=at+bt^3,$$

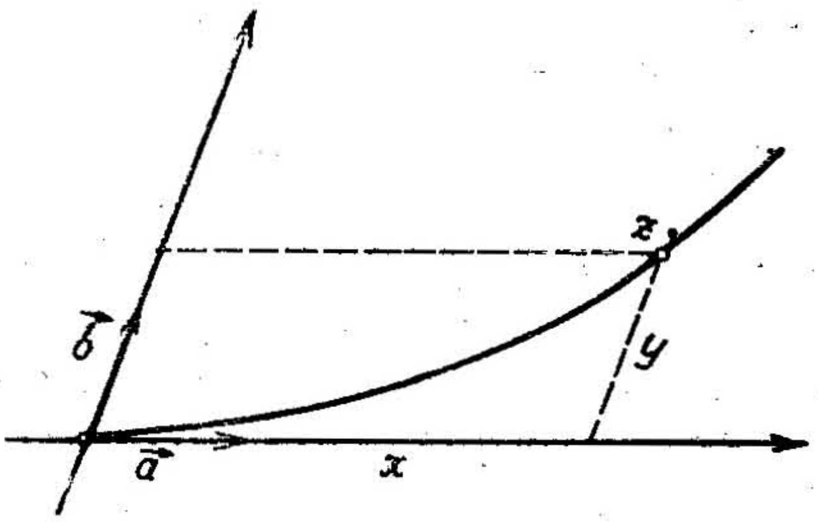
претставља параболу

$$y=kx^2,$$

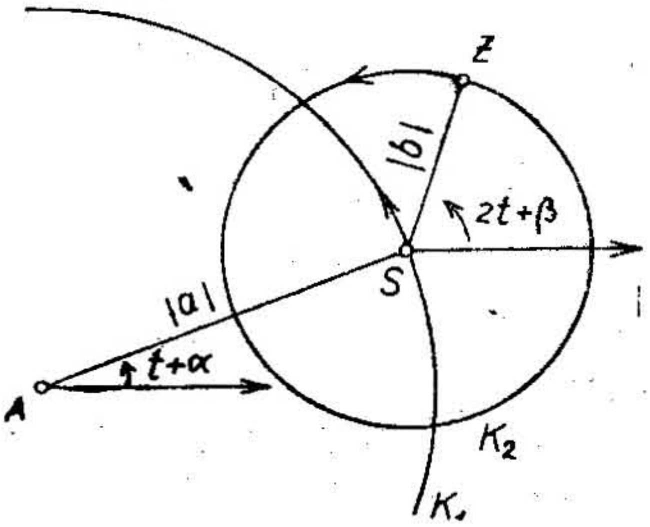
односну кубну параболу

$$y=kx^3$$

у косоуглом координатном систему, чије су координатне осе паралелне векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Сл. 113

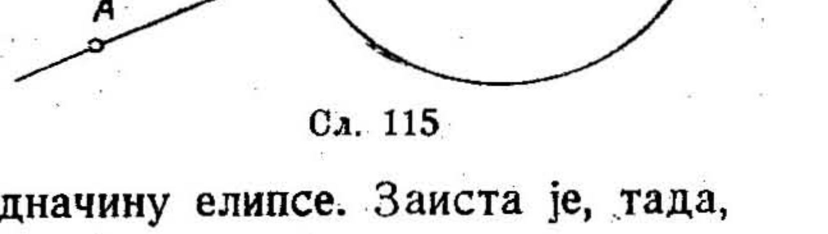


Сл. 114

2° Једначина

$$z=ae(t)+be(kt) \tag{11}$$

претставља геометриско место тачака које описује нека тачка Z круга K_2 (в. сл. 114), када се његово средиште S креће равномерно по кругу K_1 и када се круг K_2 обрће k пута већом угаоном брзином.



Сл. 115

У општем случају тачка Z описује кружну циклоиду. Међутим, кад је $k=-1$, тј. кад се круг K_2 обрће у супротном смеру, једначина (11) претставља параметарску једначину елипсе. Заиста је, тада,

$$z\pm 2\sqrt{ab}=ae(t)+be(-t)\pm 2\sqrt{ab}=$$

$$=(\sqrt{a}\,e(t/2)\pm\sqrt{b}\,e(-t/2))^2,$$

$$|z\pm 2\sqrt{ab}|=|\sqrt{a}\,e(t/2)\pm\sqrt{b}\,e(-t/2)|^2=$$

$$=(\sqrt{a}\,e(t/2)\pm\sqrt{b}\,e(-t/2))(\sqrt{\bar a}\,e(-t/2)\pm\sqrt{\bar b}\,e(t/2))=$$

$$=|a|+|b|\pm(\sqrt{\bar a b}\,e(-t)+\sqrt{a\bar b}\,e(t)).$$

Отуда, ако ове две једначине, тј. ону са знаком $+$ и ону са знаком $-$, саберемо, добивамо коначно да је

$$|z+2\sqrt{ab}|+|z-2\sqrt{ab}|=2(|a|+|b|).$$

Ако још у овој једначини заменимо a и b са $a/2$ и $b/2$, видимо да

$$z=\frac{ae(t)+be(-t)}{2}$$

претставља параметарску једначину елипсе

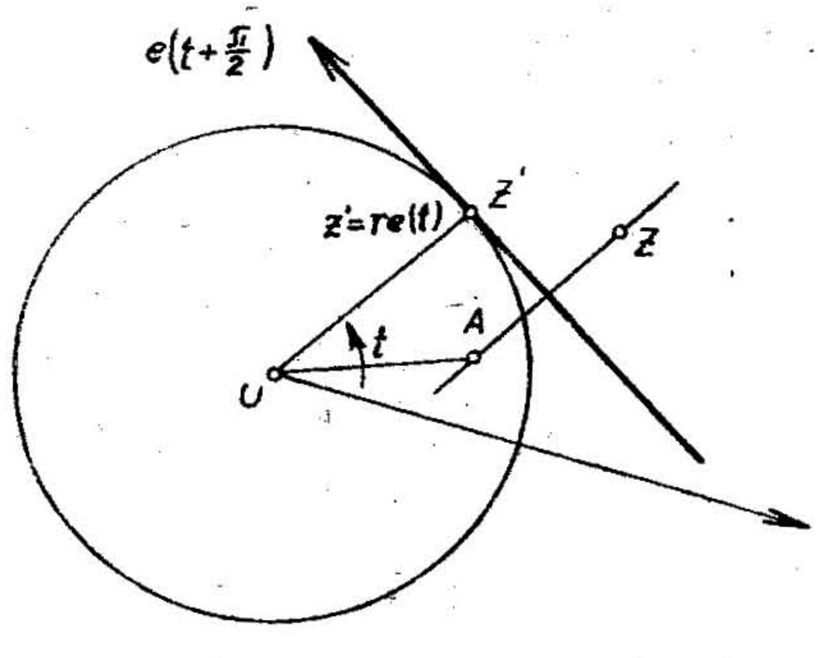
$$|z+\sqrt{ab}|+|z-\sqrt{ab}|=|a|+|b|,$$

са жижама $\pm\sqrt{ab}$, а која пролази кроз тачке

$$\pm\frac{a+b}{2}.$$

3° Геометриско место које описује тачка $z=a+bt+ce(kt)$, док параметар t варира, је крива (циклоида) коју описује нека тачка Z круга K (в. сл. 115), чије се средиште S креће праволинијски, а који се при томе обрће угаоном брзином која је пропорционална брзини средишта S.

(v) Једну од кривих чија једначина има облик (11) добивамо и као геометриско место тачака које су симетричне датој тачки A у односу на тангенте датог круга.



Сл. 116

1° Нека је дати круг

$$|z|^2=r, \quad \text{или} \quad z=re(t),$$

и нека је дата тачка A, на пример, у кругу (в. сл. 116). Повуцимо кроз тачку Z' круга $z'=re(t)$ тангенту и у односу на ову тангенту одредимо симетричну тачку Z тачке A. Ако извршимо ротацију око тачке O, за угао $\pi/2-t$ и транслацију за $-ir$, тада

тачка	z'	прелази у	ir	а затим у O,
„	a	„ „	$iae(-t)$	„ „ „ $iae(-t)-ir$,
„	z	„ „	$ize(-t)$	„ „ „ $ize(-t)-ir$.

Како се при томе тангента кроз Z' поклопила са реалном осом, то је тачка Z постала коњугована тачка тачке A, па је, према томе,

$$ize(-t)-ir=\overline{iae(-t)}-\overline{ir}=-i\bar{a}e(t)+ir.$$

Отуда добивамо да је

$$z = 2re(t) - \bar{a}e(2t), \tag{12}$$

што претставља параметарску једначину траженог геометриског места.

2° Имплицитну једначину ове криве добивамо елиминацијом параметра t из једначине (12), а ово постижемо овако.

Из (12) следи

$$\begin{aligned}|z|^2 = z\bar{z} &= (2re(t) - \bar{a}e(2t))(2re(-t) - ae(-2t)) = \\ &= (2r - \bar{a}e(t))(2r - ae(-t)) = \\ &= 4r^2 - 4r(a \perp e(t)) + |a|^2,\end{aligned}$$

тј.

$$|z|^2 = |a|^2 + 4r(r - (a \perp e(t))). \tag{13}$$

Како је, међутим,

$$\begin{aligned}z - a &= 2re(t) - (\bar{a}e(2t) + a) = \\ &= 2e(t)\left[r - \frac{1}{2}\left\{\bar{a}e(t) + ae(-t)\right\}\right] = \\ &= 2e(t)\{r - (a \perp e(t))\},\end{aligned}$$

то је

$$|z - a| = 2|r - (a \perp e(t))|.$$

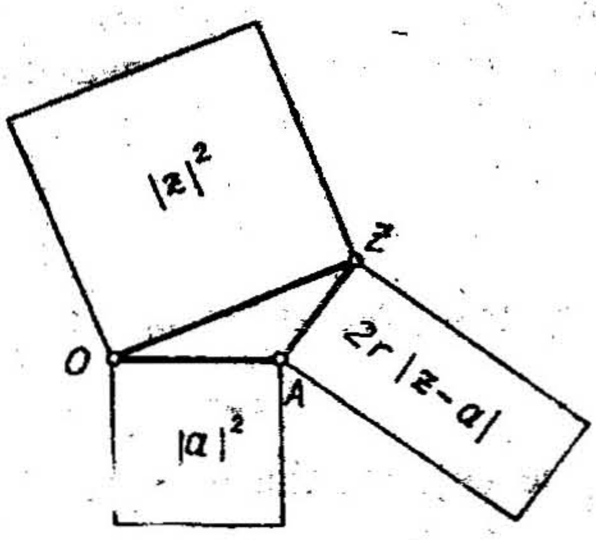
Заменом ове вредности у (13) добивамо да је

$$||z|^2 - |a|^2| = 2r|z - a|, \tag{14}$$

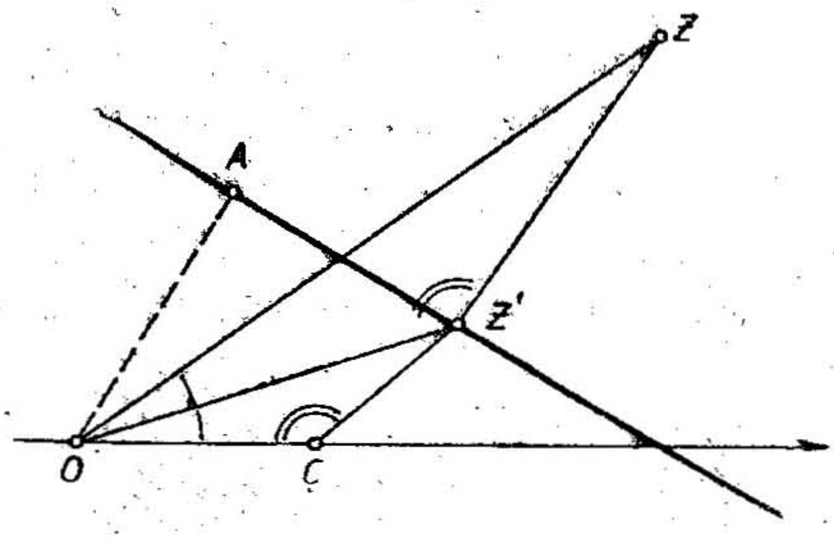
или

$$(|z|^2 - |a|^2)^2 - 4r^2|z - a|^2 = 0.$$

Ово је имплицитна једначина геометриског места, а која претставља алгебарску криву 4-ог степена.



Сл. 117



Сл. 118

3° Једначина (14), тј. $|z|^2 = |a|^2 \pm 2r|z - a|$, казује да је то једначина геометриског места темена Z троуглова OAZ, (в. сл. 117), код којих је квадрат једне стране једнак збиру, или разлици, квадрата друге стране и производа треће стране са $2r$.

Задаци

1. Дата је права $z = a(1+it)$ и тачка C (c реално).

Ако се тачка Z изабере тако да троуглови OCZ' и $OZ'Z$ буду слични (в. сл. 118), тада је геометриско место тачака Z, кад се тачка Z' креће по датој правој, парабола, са жижом у тачки O и директрисом
$$z = ca^2(1+it).$$

2. Покажи да једначине
$$1^0\ z = ae(t) + be(-t);\quad 2^0\ z = \frac{1+it}{1+t+t^2};\quad 3^0\ z = \frac{at + b/t}{2},$$
претстављају елипсе. Шта бива кад је $|a| = |b|$?

3. Једначина
$$z = a + 2bt + ct^2$$
претставља параболу или праву, према томе да ли је $(b|c) \neq 0$ или $= 0$.

4. Ако је
$$z_1^2 + z_2^2 = 1,$$
тада су Z_1 и Z_2 крајње тачке коњугованих пречника елипсе чије су жиже у тачкама -1 и $+1$.

5. Одреди криве чије су једначине:

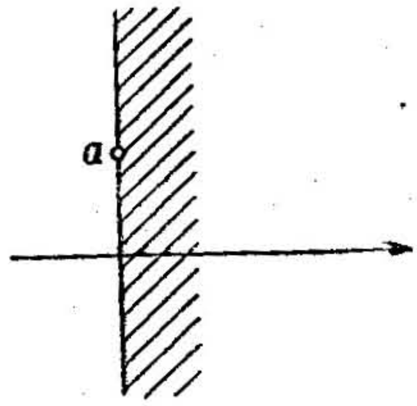
$1^0\ |z-a| \cdot |z-b| = k$; $2^0\ z = e(t) + re(2t)$, са $0 < r \gtreqless 1$;

$3^0\ z = t + re(t)$, са $0 < r \gtreqless 1$; $4^0\ z = \dfrac{t}{t^2+i}$.

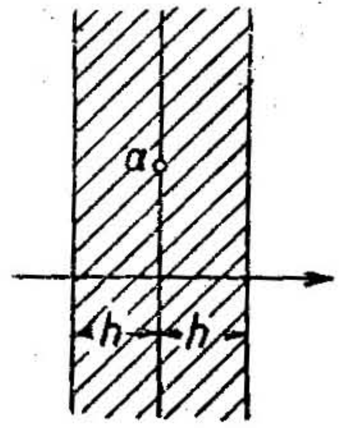
6. Одреди геометриско место тачака Z кад је
$$|R\{az\}| + |J\{az\}| = |a|^2;\quad \text{упореди са}\quad |x| + |y| = 1.$$

2. 4. Области комплексне равни. (i) Реална неједначина у којој фигурише комплексна променљива z обично је задовољена за тачке Z које припадају извесним деловима комплексне равни. Другим речима, поједине области комплексне равни могу се одредити реалним неједначинама које се односе на комплексну променљиву.

1° Тако је, на пример, неједначином
$$R\{z-a\} > 0$$
дефинисана полураван (в. сл. 119), која се налази десно од праве
$$R\{z\} = R\{a\},$$
док је неједначином
$$R\{z-a\} \geqslant 0$$
дефинисана та полураван и све тачке граничне праве.



Сл. 119



Сл. 120

Неједначинама
$$-h \leqslant R\{z-a\} \leqslant h,\quad h > 0,$$

међутим, дефинисана је пруга (в. сл. 120) која се налази између правих:

$$R\{z\} = R\{a\} \pm h,$$

заједно са овим граничним правама.

2° Неједначинама

$$J\{z-a\} > 0 \quad \text{или} \quad -h < J\{z-a\} < h, \quad \text{са} \quad h > 0,$$

дефинисане су сличне области (в. сл. 121 и 122), али ограничене правама које су паралелне реалној оси.

3° Неједначина

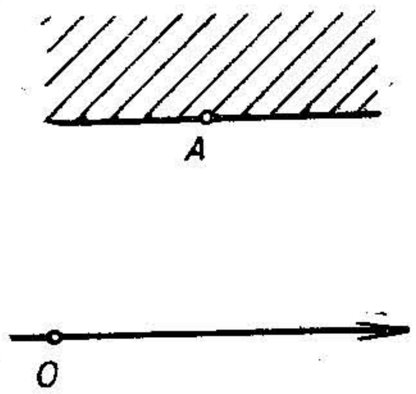
$$|z-a| < r,$$

претставља све тачке у унутрашњости круга (в. сл. 123)

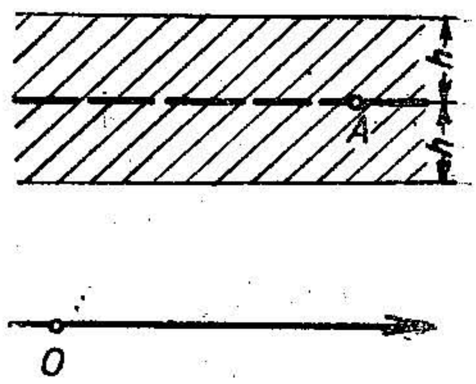
$$|z-a| = r,$$

док неједначина

$$r < |z-a| \leqslant R$$



Сл. 121

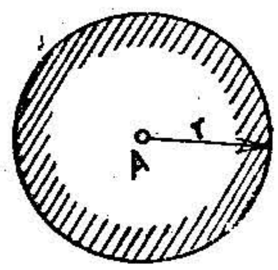


Сл. 122

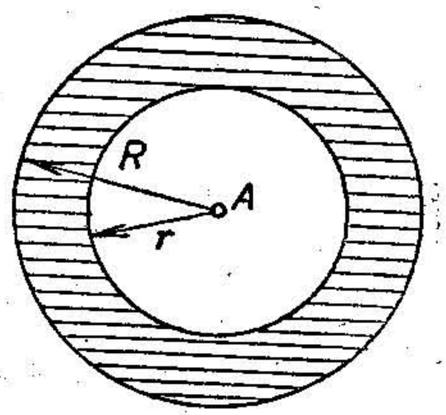
претставља све тачке кружног прстена (в. сл. 124) и све тачке спољњег граничног круга

$$|z-a| = R.$$

Специално, $|z| < 1$ претставља унутрашњост јединичног круга, тј. круга са средиштем у почетку и полупречником 1.



Сл. 123



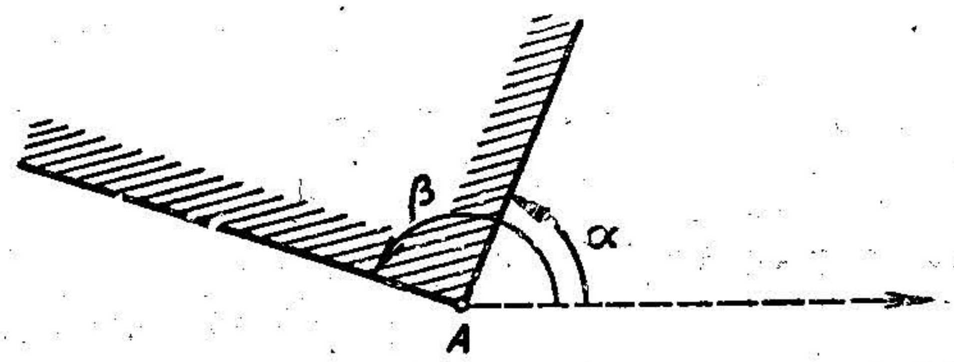
Сл. 124

4° Неједначинама

$$\alpha \leqslant arc\,(z-a) \leqslant \beta$$

одређене су све тачке у унутрашњости угла са теменом у тачки A и крацима који имају правац α и β, заједно са тачкама које леже и на самим крацима (в. сл. 125).

(ii) Уколико овакве неједначине доводе до компликованијих области, ове се могу омеђити деловима кружних и правих линија.

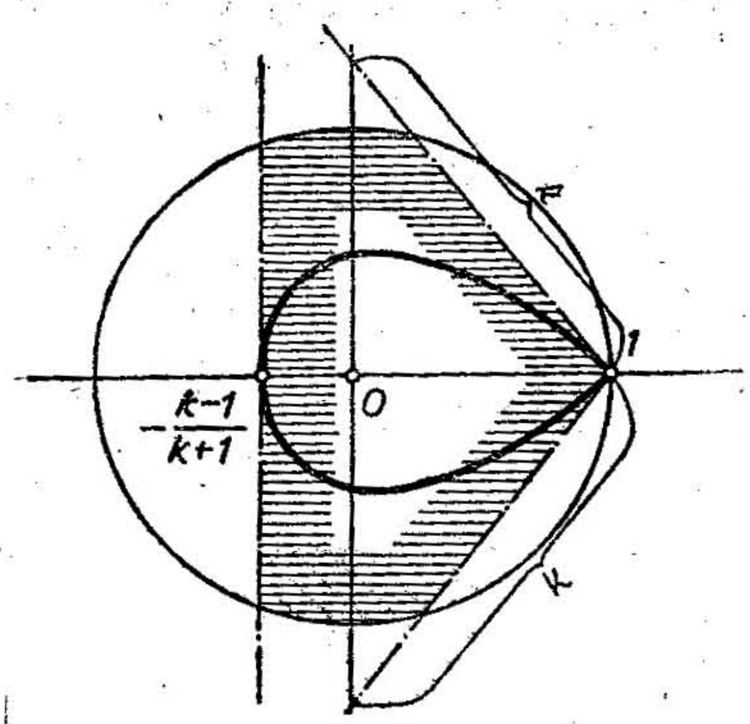


Сл. 125

Тако се, на пример, област дефинисана неједначином

$$|1-z| < k(1-|z|), \quad \text{са} \quad k > 1, \tag{1}$$

налази (в. сл. 126)



Сл. 126

1° у кругу

$$|z| = 1;$$

2° десно од праве

$$R\{z\} = -\frac{k-1}{k+1};$$

3° у углу

$$|arc\,(1-z)| < arc\cos\frac{1}{k}.$$

1° Из троугла $OZ1$ (в. сл. 127) следи

$$1 \leqslant |z| + |1-z|,$$

а отуда је, према (1),

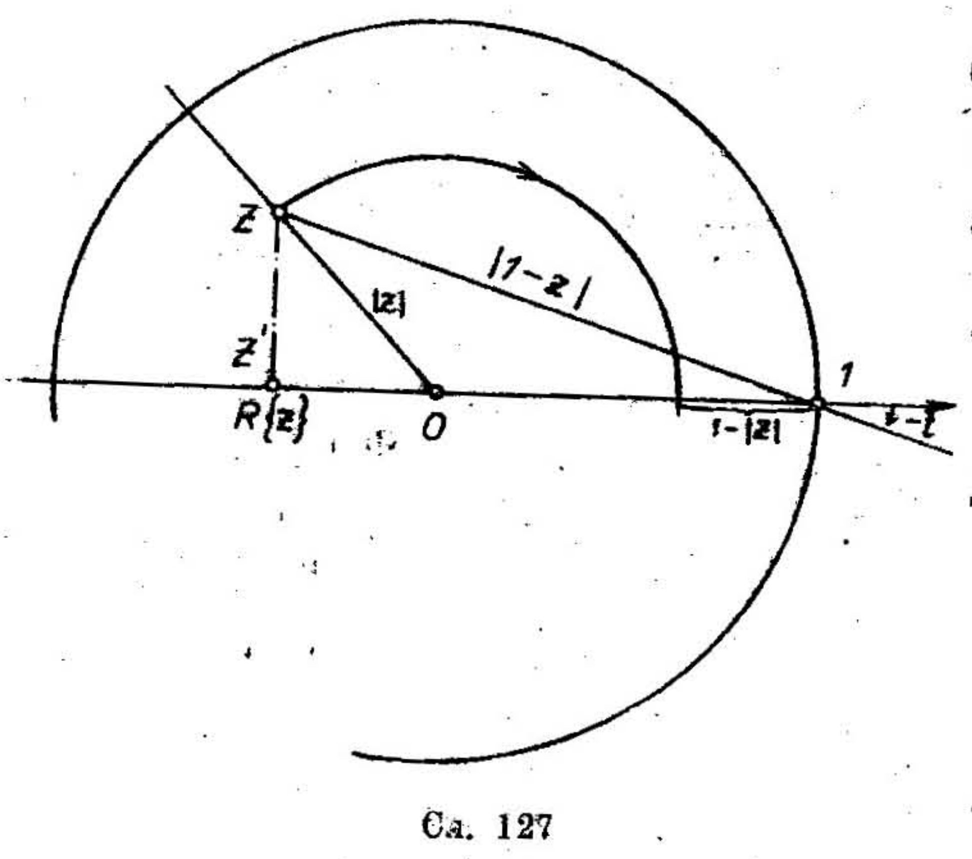
$$1 < |z| + k(1-|z|) = k-(k-1)|z|.$$

Према томе је

$$(k-1)|z| < k-1, \quad \text{тј.} \quad |z| < 1.$$

2° Нека се Z налази лево од имагинарне осе, тј. $R\{z\} < 0$, као на слици, тада из троугла $Z'1Z$ видимо да је

$$1 - R\{z\} \leqslant |1-z|.$$



Сл. 127

Отуда је, према (1),

$$1 - R\{z\} < k(1-|z|) = k - k|z|,$$

а како је

$$-|z| \leqslant R\{z\},$$

то је

$$1 - R\{z\} < k + kR\{z\}.$$

Дакле,

$$R\{z\} > -\frac{k-1}{k+1}.$$

3° Ако ставимо

$$arc\,(1-z) = -t,$$

тада је

$$\cos t = \overline{Z'1}/\overline{Z1}.$$

Како је даље

$$\overline{Z'1} = 1 - \overline{OZ'} \geqslant 1 - |z|,$$

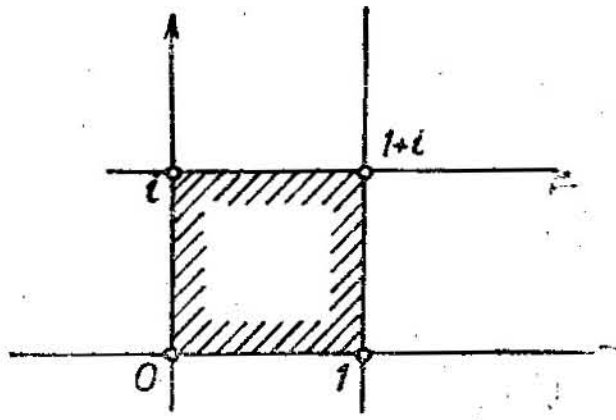
то је

$$\cos t \geqslant \frac{1-|z|}{|1-z|}, \text{ а према (1), } > 1/k,$$

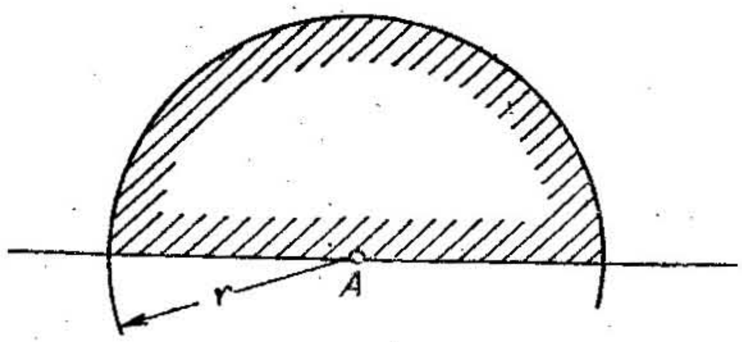
дакле,

$$t = |arc\,(1-z)| < arc\cos\frac{1}{k}.$$

(iii) Уколико је број z дат изразима у којима фигуришу два или више параметара, који варирају у извесним границама, тада се обично тачка Z може налазити само у извесним областима комплексне равни.



Сл. 128



Сл. 129

1° Тачка

$$z = t + it', \quad \text{са} \quad 0 < t < 1 \quad \text{и} \quad 0 < t' < 1,$$

се налази у унутрашњости квадрата (в. сл. 128)

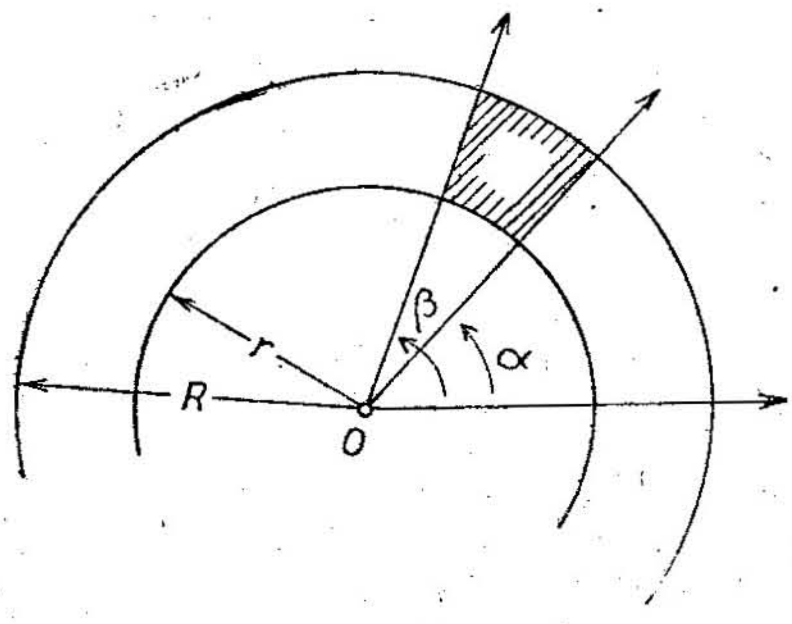
$$0 < R\{z\} < 1 \quad \text{и} \quad 0 < J\{z\} < 1.$$

2° Тачка

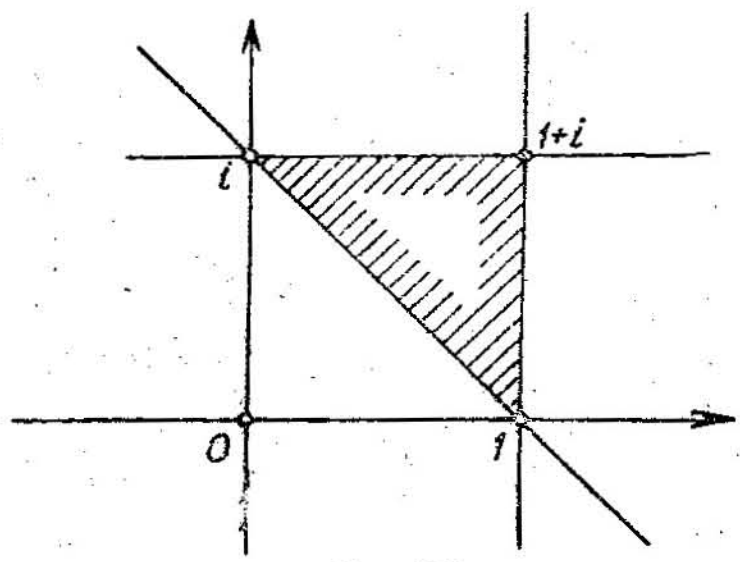
$$z = a + te(t'), \quad \text{са} \quad 0 < t < r \quad \text{и} \quad 0 < t' < \pi,$$

се налази у унутрашњости горњег полукруга (в. сл. 129)

$$|z - a| < r, \quad 0 < arc(z - a) < \pi.$$



Сл. 130



Сл. 131

3° Тачка

$$z = te(t'), \quad \text{са} \quad r < t < R \quad \text{и} \quad \alpha < t' < \beta,$$

се налази у унутрашњости исечка кружног прстена (в. сл. 130)

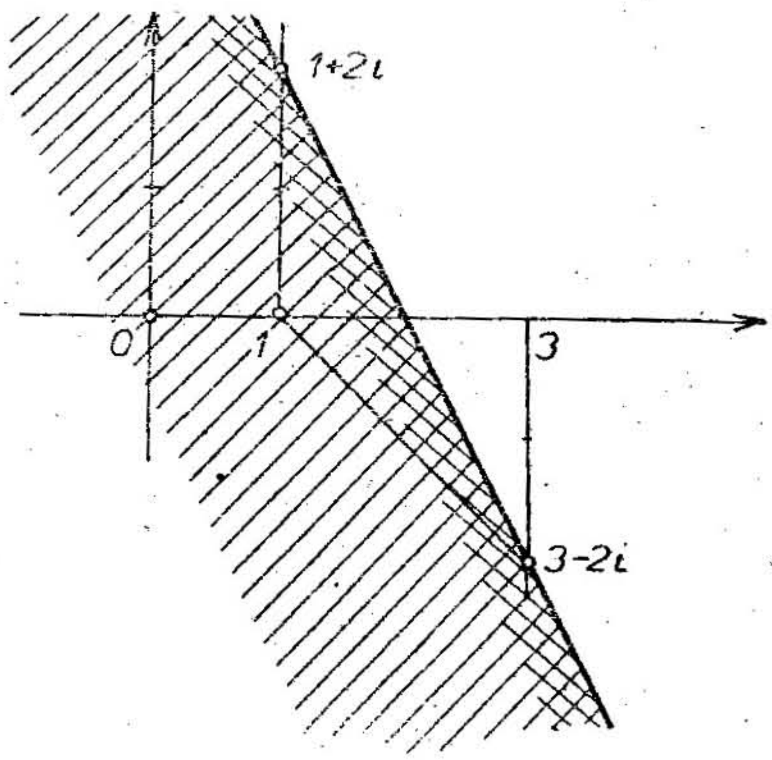
$$r < |z| < R \quad \text{и} \quad \alpha < arc(z) < \beta.$$

4° Тачка

$$z = 1 + i - t - it', \quad \text{са} \quad 0 < t < 1, \quad 0 < t' < 1 \quad \text{и} \quad 0 < t + t' < 1, \tag{1}$$

се налази у унутрашњости троугла $1, 1+i, i$, (в. сл. 131).

Јер, ако ставимо
$$t+t'+t''=1\,,$$
тј.
$$t''=1-t-t',$$
тада је
$$z=(1+i)(t+t'+t'')-t-it'=it+t'+(1+i)t''$$
и то са условима (1) који се своде на
$$t+t'+t''=1 \quad \text{и} \quad t>0,\ t'>0,\ t''>0.$$
Сматрајући t, t' и t'' као троугле координате (в. тачку **1. 4. (ii)**), видимо да се тачка Z налази у унутрашњости поменутог троугла.

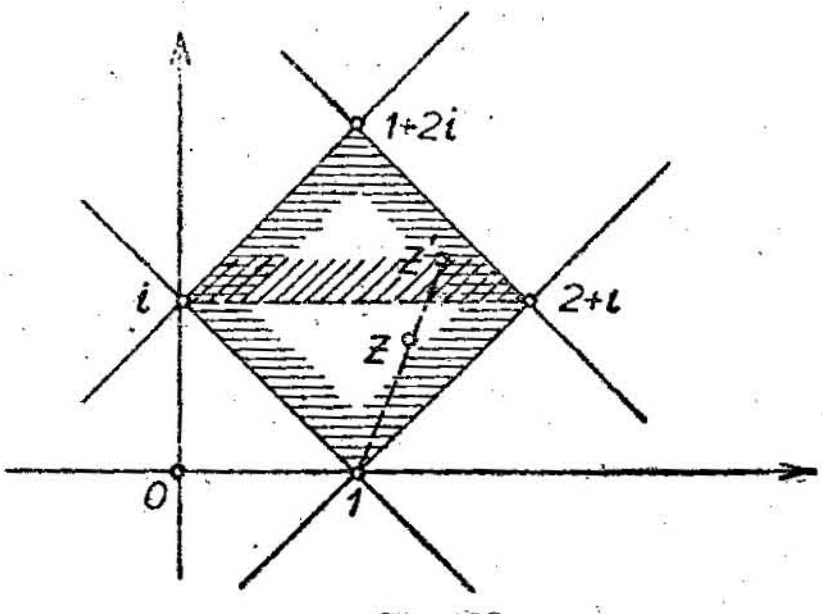


Сл. 132

5° Тачке
$$z=1+it+(1-i)t', \quad \text{са} \quad t+t'\leqslant 2,$$
налазе се на правој која пролази кроз тачке $1+2i$ и $3-2i$, и у полуравни са оне стране те праве са које се налази тачка 1, (в. 132).

Ако ставимо
$$t''=1-\frac{t+t'}{2}, \text{ тј. } 1=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t'+t'',$$
тада се услов своди на $t''\geqslant 0$, а z постаје
$$z=(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t'+t'')+it+(1-i)t'=\left(\frac{1}{2}+i\right)t+\left(\frac{3}{2}-i\right)t'+t'', \quad \text{са} \quad t''\geqslant 0.$$
Ако ставимо још
$$t=2\varkappa, \quad t'=2\lambda \quad \text{и} \quad t''=\mu,$$
тада је
$$z=(1+2i)\varkappa+(3-2i)\lambda+\mu, \quad \text{са} \quad \varkappa+\lambda+\mu=1 \quad \text{и} \quad \mu\geqslant 0.$$

Према томе се тачка Z налази у делу равни за чије је тачке координата $\mu\geqslant 0$, а то је поменута полураван (в. тачку **1. 4. (ii)**, сл. 90).



Сл. 133

6° Тачка
$$z=t+it'+(1+2i)t''+(2+i)t''',$$
$$\text{са} \quad t+t'+t''+t'''=1 \quad \text{и}$$
$$t>0, t'>0, t''>0 \text{ и } t'''>0$$
налази се у квадрату (в. сл. 133)
$$1, 2+i, 1+2i, i.$$

Јер, ако ставимо

$$z=t+(t'+t''+t''')z', \quad \text{са} \quad z'=\frac{it'+(1+2i)t''+(2+i)t'''}{t'+t''+t'''},$$

тада се тачка Z' налази у троуглу $i, 2+i, 1+2i$, а Z је ма која тачка дужи $1, Z'$. Како се Z' може налазити ма где у троуглу, то се тачка Z налази у поменутом квадрату.

(iv) Области комплексне равни могу бити одређене и посредно. Наиме, знајући да се тачка Z' налази у одређеној области, треба одредити област у којој ће се налазити тачка Z, која је на одређен начин везана за тачку Z'.

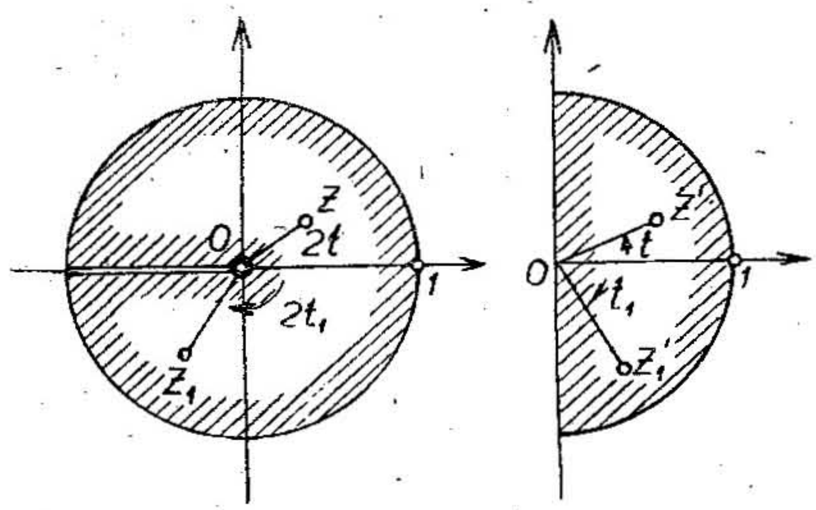
1° Ако се тачка Z' налази у полукругу

$$|z'|<1 \quad \text{и} \quad |arc(z')|<\frac{\pi}{2},$$

тада се тачка

$$z=z'^2$$

налази у целоме кругу $|z|<1$, изузев негативног дела реалне осе (в. сл. 134).



Сл. 134

Јер из

$$|z'|<1 \quad \text{и} \quad z=z'^2,$$

следи

$$|z|<1,$$

а из

$$|arc(z')|<\frac{\pi}{2},$$

следи

$$|arc(z)|=|2\,arc(z')|<\pi,$$

тј.

$$-\pi<arc(z)<\pi.$$

2° Ако се тачка Z' налази у десној полуравни

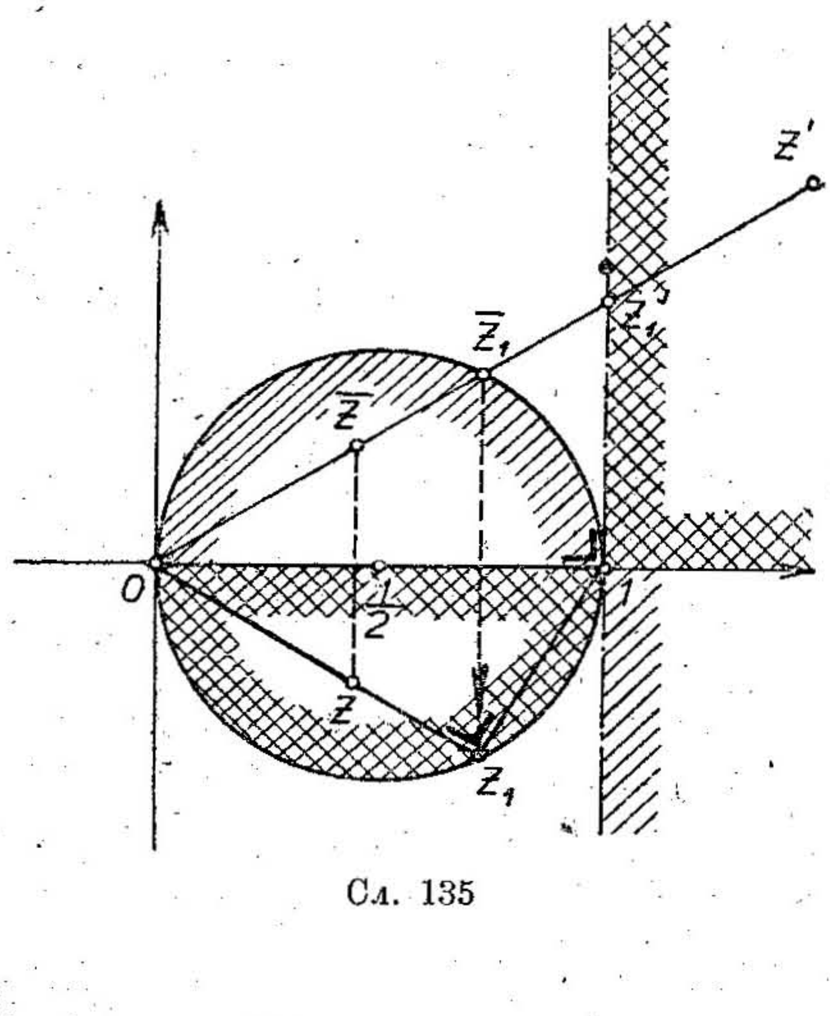
$$R\{z'\}>1,$$

тада се тачка

$$z=1/z'$$

налази у кругу

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}, \text{(в. сл. 135)}.$$



Сл. 135

Ако уочимо једну тачку Z' полуравни $R\{z'\}>1$, спојимо је са почетком O и означимо са Z'_1 тачку пресека са правом $R\{z\}=1$, тада ће се тачка $\bar{z}=1/\bar{z}'$ налазити на делу дужи $O\bar{Z}_1$, при чему је тачка $\bar{Z}_1$ одређена са

$$\bar{z}_1=\frac{1}{\bar{z}'_1},$$

(види део I, тачка **5. 2.** (v) и слике 26 и 27).

Према томе, док се тачка Z' налази у квадранту $R\{z'\}>1$ и $J\{z'\}>0$, тачка Z ће описати област која је омеђена делом реална осе

$$0<R\{z\}<1$$

и кривом коју описује тачка Z_1, док се тачка Z'_1 креће по полуправој

$$R\{z'\}=1,\ \ J\{z'\}>0.$$

Како су троуглови $O\,1\,Z'_1$ и $OZ_1 1$ слични (в. део I. т. **5. 2** (v)), то је угао у Z_1 прав; према томе тачка Z_1 описује полукруг чији је пречник $\overline{O1}$.

На исти начин видимо да ће се тачка Z налазити у горњој половини тога круга кад се тачка Z' налази у квадранту

$$R\{z'\}>1,\ \ J\{z'\}<0.$$

Задаци

1. Где се налазе тачке за које је:

1^0 $R\{1/z\}<k$; 2^0 $(e(\alpha)\perp z)<k$, са $-\pi/2<\alpha<\pi/2$;

3^0 $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|<k$? {в. **2.2** задатак **1. 5^0**}

2. Покажи да се $|z-a|\lesseqgtr|z-\bar{a}|$ своди на $R\{(a+\bar{a})z\}\lesseqgtr 0$, и обратно {в. **2. 2** задатак **1. 6^0**}.

3. Покажи да се $|z-a|\lesseqgtr|1-\bar{a}z|$ своди на $(|1-a|^2)(|z|^2-1)\lesseqgtr 0$, и обратно {в. **2. 2** задатак **1. 5^0**}.

4. Ако су a и b два комплексна броја, где се налазе тачке $z=ax+by$ кад је: 1^0 $0\leqslant x\leqslant 1$ и $0\leqslant y\leqslant 1$; 2^0 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$; 3^0 $-1<x<1$, $-1<y<1$; 4^0 $x^2+y^2\leqslant 1$?

5. Где се налази тачка

$$z=1/z'$$

када је: 1^0 $|z'|>1$; 2^0 $0<arc(z')<\pi/4$; 3^0 $R\{z'\}\geqslant 0$;

4^0 $R\{z'\}\geqslant -1$; 5^0 $R\{z'\}\geqslant 1$ и $J\{z'\}\geqslant 1$;

6^0 $|z'-1|\leqslant 1$; 7^0 $|z'-2|\leqslant 1$?

6. Покажи да је област одређена неједначином

$$|1-z|^2 \leqslant 1-|z|^2$$

круг

$$\left|z-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Отуда закључи да област дефинисана неједначином

$$|1-z|^2 \leqslant 2(1-|z|)$$

садржи све тачке горњег круга.

7. Нека је

$$z=(u+iv)^2, \quad u \text{ и } v \text{ реално}.$$

Кад је

$$u=\text{const.} \quad \text{или} \quad v=\text{const.}$$

тачка Z се налази на конфокалним параболама.

Кад је

$$u_1 < u < u_2 \quad \text{и} \quad v_1 < v < v_2,$$

област у којој се налази тачка Z је четвороугла облика ограничена луковима конфокалних парабола. — Покажи да су диагонале тог четвороугла једнаке. (Ivory-ев став).

8. Покажи да је: 1° неједначина

$$|1+z| \geqslant \frac{1+|z|}{\sqrt{2}}$$

задовољена за свако z за које је

$$R\{z\} \geqslant 0;$$

2° а неједначина

$$|1+z| \geqslant \frac{1+|z|}{2}$$

за

$$R\{z\} \geqslant -\frac{1}{3}, \qquad \text{(види вежбу \textbf{3.1.8})}.$$

9. Нека је $a>0$; покажи да је неједначина

$$|a+z| \geqslant \frac{a+|z|}{2}$$

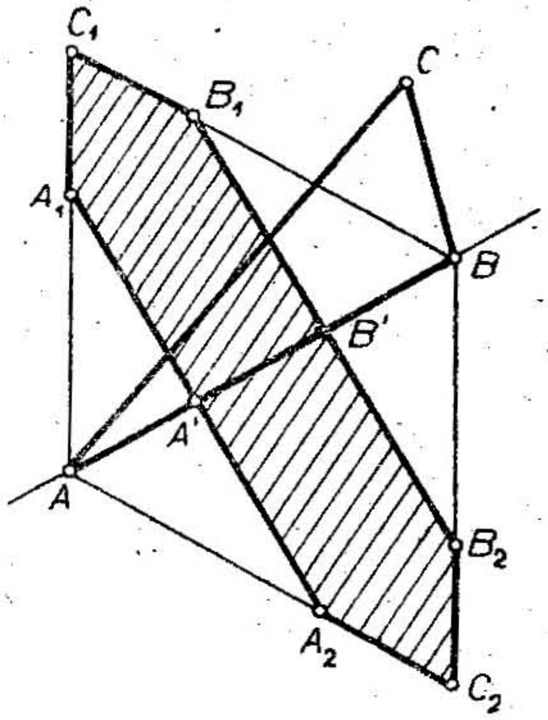
задовољена ако је, или

$$R\{z\} \geqslant -\frac{a}{3},$$

или

$$|arc\, z| \geqslant \frac{2\pi}{3}, \qquad \text{(види вежбу \textbf{3.1.8})}.$$

Последица. Са обе стране дужи AB конструиши истостране троуглове ABC_1 и ABC_2, а затим дуж AB раздели тачкама A' и B' на три једнака дела и повуци кроз ове тачке нормале на дуж AB до пресека A_1 и B_1, односно A_2 и B_2 са странама AC_1 и BC_1, односно AC_2 и BC_2, троуглова ABC_1 и ABC_2. Ако се теме C троугла ABC налази изван шестоугла $A_1C_1B_1B_2C_2A_2$, тада је дужа од страна $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ већа од аритметичке средине остале две стране. На пример, (в. сл. 136),



Сл. 136

$$\overline{AC} \geqslant \frac{1}{2}\{\overline{AB}+\overline{BC}\}.$$

3. Вежбе

3.1. Опште вежбе

1. Нека је $ABCD$ произвољан четвороугао и нека је

$$\alpha' = \sphericalangle BAC, \quad \beta' = \sphericalangle CBD,$$

$$\gamma' = \sphericalangle DCA, \quad \delta' = \sphericalangle ADB,$$

$$\alpha = \sphericalangle BAD, \quad \gamma = \sphericalangle DCB.$$

1° Покажи да је

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} \leqslant \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB}.$$

Када је постигнут знак једнакости?

2° Покажи да је

$$\sin\frac{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'}{2} \geqslant \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Према овој неједначини, кадгод је $\alpha+\gamma=\pi$ мора бити и $\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=\pi$, док обратно не мора бити случај. (В. пример (7) тачке **1. 3. (viii)**).

2. Покажи да је: 1° За произвољне тачке A, B и C увек

$$-\{(a-b)(b-c \perp c-a)+(b-c)(c-a \perp a-b)+(c-a)(a-b \perp b-c)\}=$$

$$=2\{(a-b)(a \perp b)+(b-c)(b \perp c)+(c-a)(c \perp a)\}+$$

$$+\{(a-b)|c|^2+(b-c)|a|^2+(c-a)|b|^2\}.$$

2° Ако се тачке A, B и C налазе на једној правој, тада је

$$(a-b)(a \perp b)+(b-c)(b \perp c)+(c-a)(c \perp a)=$$

$$=(a-b)|c|^2+(b-c)|a|^2+(c-a)|b|^2.$$

3° Из 1° и 2° следи да је

$$3\{(a-b)|c|^2+(b-c)|a|^2+(c-a)|b|^2\}=$$

$$=-\{(a-b)(b-c \perp c-a)+(b-c)(c-a \perp a-b)+(c-a)(a-b \perp b-c)\},$$

кадгод се тачке A, B и C налазе на једној правој. — Овај образац претставља Stewart-ов став јер, ако се, на пример, тачка B налази између тачака A и C, тада се он своди на

$$\overline{AB}\cdot\overline{OC}^2+\overline{BC}\cdot\overline{OA}^2-\overline{AC}\cdot\overline{OB}^2=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}.$$

3. Нека је дат троугао $Z_1Z_2Z_3$ и комплексан број a. Конструиши троугао $Z'Z''Z'''$ чија су темена

$$z'=az_1+\bar{a}z_2, \quad z''=az_2+\bar{a}z_3, \quad z'''=az_3+\bar{a}z_1.$$

Покажи да ће овај троугао бити истостран ако је дати троугао истостран, ма какав био број a.

Покажи да постоје бројеви a такви да троугао $Z'Z''Z'''$ буде истостран, ма какав био троугао $Z_1Z_2Z_3$, (в. задатке **1** и **2** тачке (**1. 3.**).

4. Аритметичка, геометриска и хармониска средина, (в. сл. 137).

Нека су дата два броја a и b и нека је

$$A=\frac{a+b}{2} \qquad \text{аритметичка средина,}$$

$$\pm G=\pm\sqrt{ab} \qquad \text{геометриска} \quad ", $$

$$H=\frac{2ab}{a+b}=\frac{G^2}{A} \qquad \text{хармониска} \quad ".$$

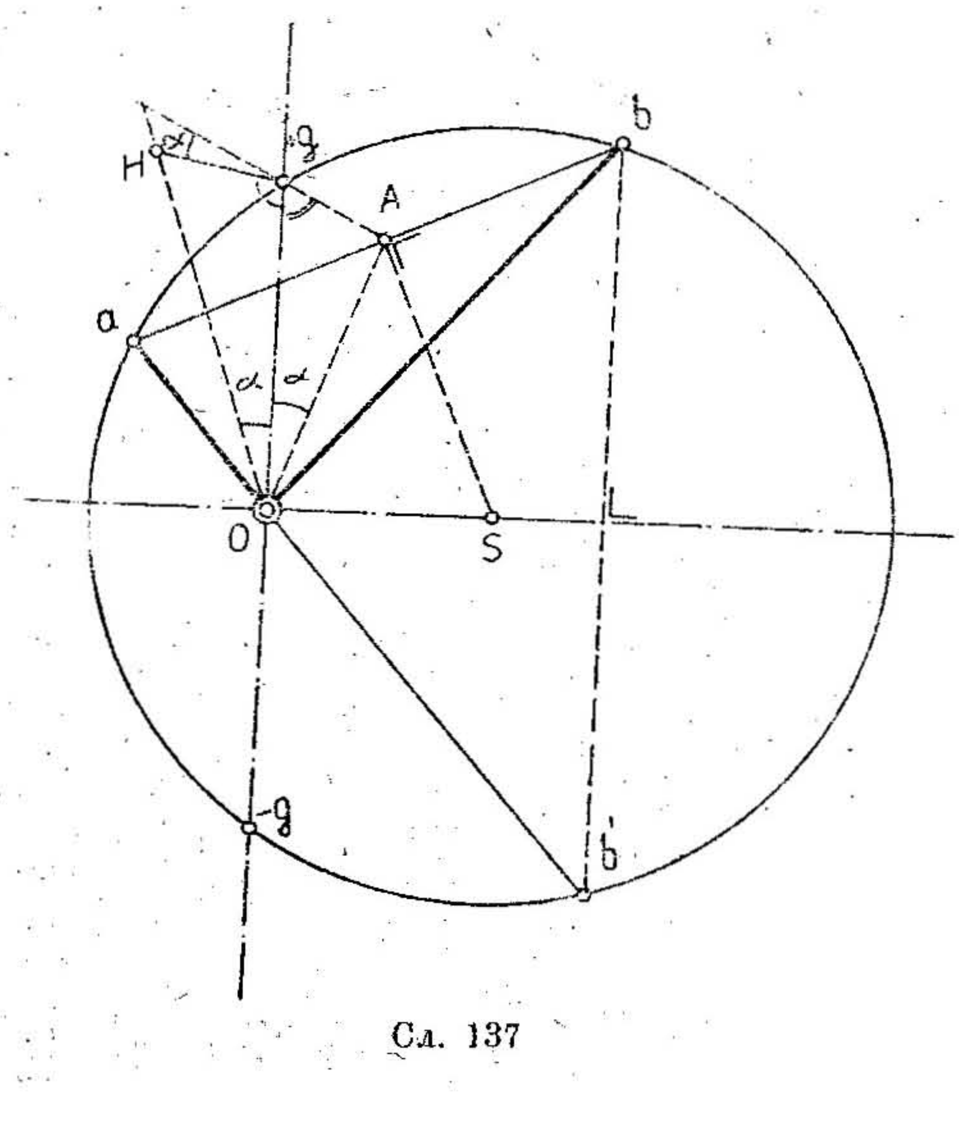
1° A не зависи од положаја координатног система.

2° H и G су независне само од ротације, али зависе од транслације. {Доказ преко обрасца $z'=c+dz$.}

Испитај кретање тачака G и H, у односу на тачке a и b, у зависности од кретања координатног почетка.

3° A се налази на средини дужи ab.

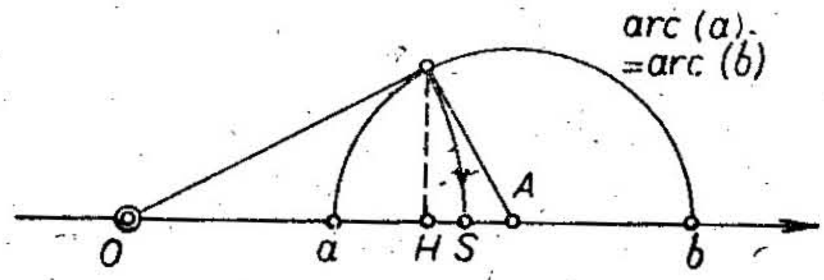
4° $\pm G$ се налази на пресеку симетрале угла aOb са кругом



Сл. 137

који пролази кроз тачке a и b, а чије се средиште S налази на симетрали налеглог угла bOb'. {Доказ следи из $|G|^2=|a||b|=\overline{Oa}\cdot\overline{Ob'}$ и $arc(\pm G)=\frac{1}{2}\{arc(a)+arc(b)\}+\begin{cases}0\\ \pi\end{cases}$.}

5⁰ H је треће теме троугла OGH који је сличан троуглу OAG. {Доказ следи из $G^2=AH$.}

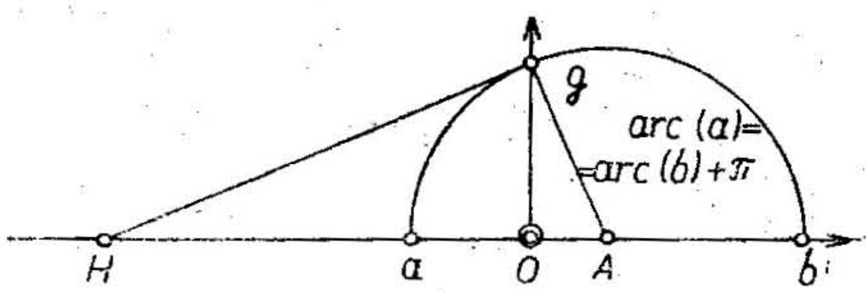


Сл. 138

6⁰ Шта бива кад је

$$arc(a)=arc(b)+\begin{cases}0\\ \pi\end{cases};$$

у каквој вези стоји горња конструкција са конструкцијама одговарајућих средина датих сл. 138 и 139.



Сл. 139

5. Из

$$|u+v|^2+|u-v|^2=2\{|u|^2+|v|^2\}$$

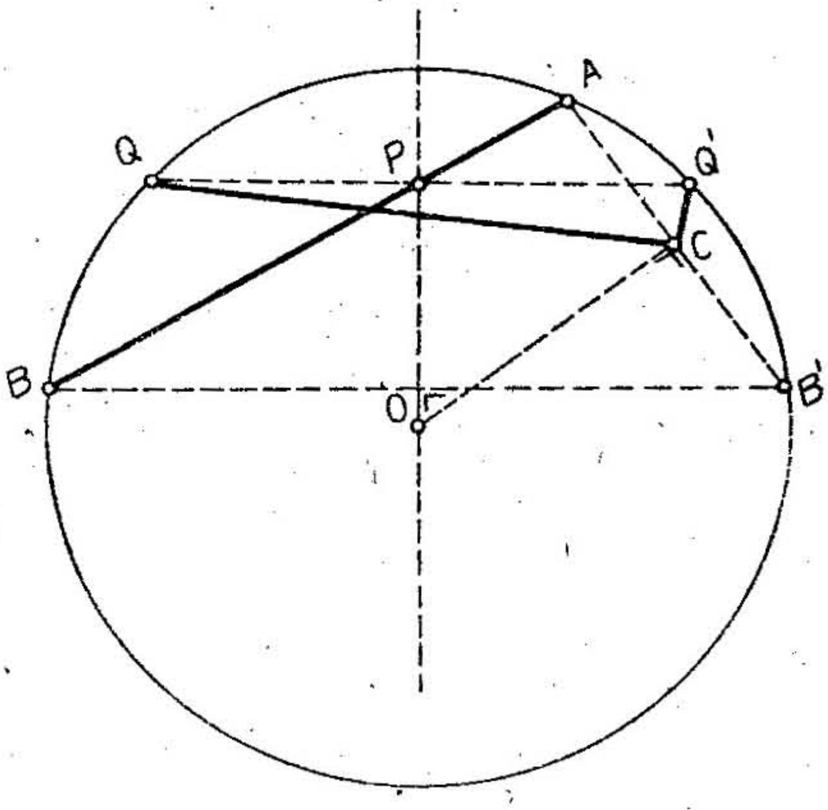
изведи образац

$$\left|\frac{z+z'}{2}-\sqrt{zz'}\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+\sqrt{zz'}\right|=|z|+|z'|.$$

Нека је (в. сл. 140) AB произвољна тетива круга са средиштем у тачки O, P једна тачка те тетиве, QQ' нормала на OP, и B' симетрична тачка тачке B у односу на праву OP. Ако са C означимо средиште дужи AB' покажи да је тада

$$\overline{CQ}+\overline{CQ'}=\overline{AB}.$$

Ако тачке Q и Q' учврстимо и дуж AB обрћемо око тачке P, тачка C описује елипсу са жижама у Q и Q' {види т. **2. 3. (i)**}



Сл. 140

6. Нека су a, b, c, a' и b' дати комплексни бројеви; покажи да

$$z=\frac{a+bt+ct^2}{a'+b't}$$

претставља коничан пресек ако је $(a'|b')=0$.

7. Нека је $p>0$, $q>0$ и t променљив параметар; одреди геометриско место тачака Z: 1^0 $z=pe(t)+e(pt)$; 2^0 $z=pe(t)+e(qt)$.

8. Нека је $a>0$ и $k>1$, тада је неједначина

$$|a+z|\geqslant\frac{a+|z|}{k}$$

задовољена кад год је, или

$$R\{z\}\geqslant\frac{2-k^2}{2(k^2-1)}a,$$

или

$$|arc(z)|\leqslant 2\,arc\cos\frac{1}{k}.$$

{Квадрирањем дате неједначине добивамо њој еквивалентну неједначину

$$(k^2-1)|z|^2-2a|z|+(k^2-1)a^2+2ak^2x\geqslant 0,$$

где је $x=R\{z\}$. Дискусијом ове квадратне неједначине по $|z|$ добивамо прво тврђење; друго тврђење следи из вежбе 15.

$$D=a^2-(k^2-1)^2a^2-2k^2(k^2-1)ax=$$
$$=ak^2\{(2-k^2)a-2(k^2-1)x\}.\}$$

9. Нека је $0<a<2$. Ако кроз тачку 1 повучемо тетиве дужине a јединичног круга, које леже симетрично према реалној оси, тада је неједначина

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}<\frac{4}{a}$$

задовољена за све тачке области која је ограничена овим тетивама и делом круга

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},$$

који се налази између ових тетива. {Упореди са примером наведеним у тачки **2.4. (ii)**}.

10. Ако у примеру (4) тачке **1.4. (v)** сматрамо p или q као променљив параметар, покажи да ће тада свака од тачака Z_1', Z_2', Z_3' описати по једну елипсу E_1, E_2, E_3 које се секу у теменима троугла $Z_1Z_2Z_3$, додирујући стране тог троугла, и у тежишту Z, у коме је тангента на елипсу E_ν паралелна страни супротној темену Z_ν.

Ако сваку од елипса E_ν, пресликамо хомолого (слично) у односу на теме Z_ν, смањујући је упола, добивамо једну те исту елипсу E. Ово је тзв. Steiner-ова елипса која додирује стране троугла у срединама и претставља елипсу највеће површине уписане у тај троугао.

Жиже ове елипсе су нуле изводног полинома, чије се нуле налазе у тачкама Z_1, Z_2, Z_3, тј. полинома

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3).$$

11. Ако

кроз тачку Z_1 повучемо праву p_1 паралелну вектору $\vec{a}$,

„ „ Z_2 „ „ p_2 „ „ $\vec{b}$,

„ „ Z_3 „ „ p_3 „ „ $\vec{c}$,

и ако означимо са

Z' тачку пресека правих p_2 и p_3,

Z'' „ „ „ p_3 „ p_1,

Z''' „ „ „ p_1 „ p_2,

покажи да је тада

$$(a|b)(b|c)(c|a)\{(z'|z'')+(z''|z''')+(z'''|z')\}=$$
$$=\{(z_1|a)(b|c)+(z_2|b)(c|a)+(z_3|c)(a|b)\}^2.$$

Дакле, да би се праве p_1, p_2 и p_3 секле у једној тачки, потребно је и довољно да буде

$$(z_1|a)(b|c)+(z_2|b)(c|a)+(z_3|c)(a|b)=0$$

и

$$(a|b)\neq 0, \quad (b|c)\neq 0, \quad (c|a)\neq 0.$$

3. 2. Вежбе из система тачака. У наредним вежбама подразумеваћемо под

$$m_1,\ m_2, \ldots\ldots m_n$$

n реалних бројева, а под

$$Z_1,\ Z_2, \ldots\ldots Z_n$$

систем тачака одређен комплексним бројевима

$$z_\nu, \quad \nu=1,2,\ldots,n.$$

12. Ако је $m_\nu \geqslant 0$, $\nu=1,2,\ldots n$, тада се тачка

$$z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

налази у најмањем конвексном полигону описаном око тачака Z_ν.

Шта бива у случају ако неки од бројева m_ν постане нула или негативан?

Ако је специално $m_1=m_2=\ldots=m_n$, тачка Z се налази у тежишту полигона

$$Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_n, Z_1.$$

{Ако је $(e(\alpha)|z) \geqslant (e(\alpha)|a)$, тада се тачка Z налази лево од праве која пролази кроз тачку A и има правац α, или лежи на њој.

Ако су Z_p и Z_q два, ма која, узастопна темена најмањег конвексног полигона који садржи све тачке Z_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, и ако је $arc(z_p - z_q) = \alpha$, тада је за све тачке Z_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$(e(\alpha)|z_\nu) \geqslant (e(\alpha)|z_p) = (e(\alpha)|z_q).$$

Према томе, множењем ове неједначине са m_ν и сабирањем, добивамо после деобе са $\Sigma\, m_\nu$, да је и

$$(e(a)|z) \geqslant (e(\alpha)|z_p) = (e(\alpha)|z_q)\}.$$

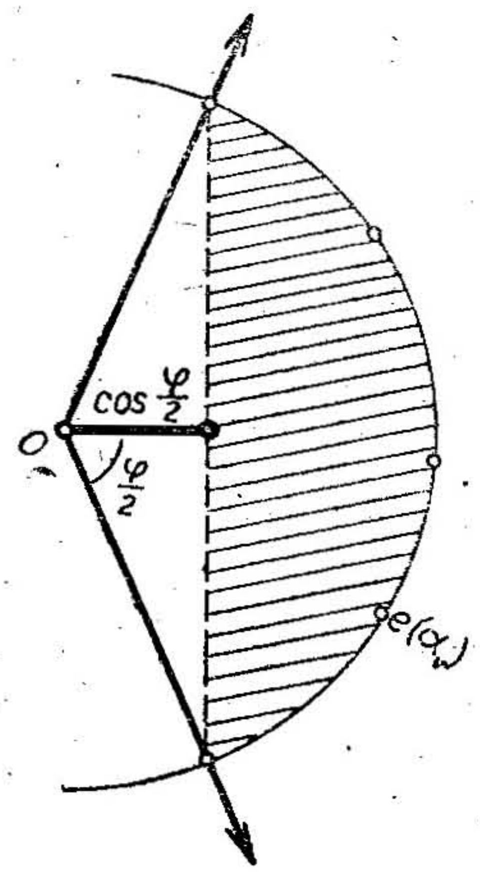
13. Означимо са Z произвољну тачку равни и са W тежиште система Z_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, тј.

$$w = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}.$$

Покажи да је тада

$$1^0 \ \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2 = |w|^2 + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu - w|^2;$$

$$2^0 \ \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |z - z_\nu|^2 = |z - w|^2 + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu - w|^2.$$



Сл. 141

14. Из 1^0 претходне вежбе покажи да је увек

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \right|^2 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2$$

и да је знак једнакости могућ само ако су сви z-ови међусобно једнаки.

Из 2^0 претходне вежбе докажи да збир квадрата отстојања тачке Z од n датих тачака узима своју најмању вредност само када се Z поклопи са тежиштем.

15. Ако се све тачке

$$z_\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

налазе у једном углу чији је отвор $\varphi < \pi$, покажи да је

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \right| \geqslant \cos\frac{\varphi}{2} \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|.$$

Дакле, бројеве z_ν у овом случају не можемо никад тако изабрати да им збир буде једнак нули. {Доказ следи из вежбе 10, ако ставимо

$$z_\nu = r_\nu e(\alpha_\nu),\quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad \text{(в. сл. 141)}$$

и сматрамо бројеве r_ν за бројеве m_ν, а бројеве $e(\alpha_\nu)$ за бројеве z_ν.}

16. Геометриско место тачака Z чији је збир квадрата отстојања од датих тачака Z_ν, помножених са датим бројевима m_ν, сталан, тј.

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |z - z_\nu|^2 = \text{const.}$$

је круг или права, према томе да ли је $\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \neq$ или $= 0$.

На пример,

$$m_1|z - z_1|^2 + m_2|z - z_2|^2 = 0$$

је Аполонијев круг, а

$$|z - z_1|^2 - |z - z_2|^2 = \text{const.}$$

је права линија.

17. Геометриско место тачака Z чији је збир отстојања од n правих линија

$$z = z_\nu + te(\alpha_\nu),\quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

помножен са m_ν сталан, тј.

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (e(\alpha_\nu)\,|\,z - z_\nu) = \text{const.},$$

или

$$J\left\{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu e(-\alpha_\nu)(z - z_\nu)\right\} = \text{const.}$$

је права линија.

За $n = 2$, $\text{const} = 0$ и $m_2 = \pm m_1$ добивамо симетрале угла.

18. На основу претходне вежбе покажи:

Све праве чији је збир отстојања од n датих тачака једнак нули пролазе кроз тежиште тих тачака. {Јер је

$$J\{e(\alpha)(z_1 + z_2 + \dots + z_n - nz)\} = 0,$$

са

$$z = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu.\}$$

19. Да би темена Z_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, n-тоугла била подједнако удаљена од његовог тежишта W, потребно је и довољно да збир јединичних вектора вектора $\overrightarrow{WZ_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, буде једнак нули.

Покажи да се у том случају више од половине узастопних темена не може бирати произвољно близу, тј. да се она не могу налазити у произвољно малом кругу.

20. Ако се темена Z_ν полигона налазе на једном кругу, покажи да ће збир квадрата свих страна и дијагонала узети своју највећу вредност ако се тежиште поклопи са средиштем описаног круга.

21. Ако се темена Z_ν полигона налазе на једном кругу, покажи да ће збир страна и дијагонала узети своју највећу вредност само ако су тачке Z равномерно распоређене по кругу.

22. Нека је P површина полигона $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}, Z_n, Z_1$ са предзнаком + или −, према томе да ли је смер обилажења позитиван или негативан. Тада је

$$2P = (z_1 | z_2) + (z_2 | z_3) + \ldots + (z_{n-1} | z_n) + (z_n | z_1).$$

Шта даје овај образац када се стране полигона пресецају?

ИСПРАВКЕ

(18^4 значи страна 18 ред 4 одозго, а 18_4 страна 18 ред 4 одоздо)

	стоји	треба
9_6	у обрасцу недостаје знак $=$	
13_{19}	према (6)	према (6) и (7)
13_{12}	$=(-A)^2=$	$(-A)^2=$
16_{18}	$(c\ d)$	(c, d)
16_7	$C+x=$	$c+x=$
16_3	$X=B-A=$	$X=A-B=$
17_1	$\frac{B}{A}=\left(\frac{b}{},0\right);$	$\frac{A}{B}=\left(\frac{b}{a},0\right),$
22^{17}	услова	услов
$24^{15,16,26}$	конјуговано	коњуговано
25^{17}	$a=\ldots$ и $b=\ldots$	$p=\ldots.$ и $q=\ldots.$
43^1	једно-	једног
56^{15}	$z^n\ \ 1$	z^n-1
61_8	$\frac{\alpha}{}$	$\frac{\alpha}{3}$
63^9	$z^2=2az+$	z^2-2az+
64_{12}	$\leqslant \vert a\vert,$	$\leqslant \sum_{n=1}^{n} \vert a_\nu\vert,$
64_2	$=f(x,y)$	$=f(y,x)$
66_7	$\sum_{\nu=0}^{n/2]}$	$\sum_{\nu=0}^{[n/2]}$
67^7	**4. 3. (ii)**	**4. 3. (iii)**
68_{12}	$\left(\frac{y}{n}\right)$	$\left(\frac{y}{n}\right)^2$
68_9	(види сл. 33),	(види сл. 33, где је $y/n=\widehat{PB}$),

	стоји	треба
72_{10}	Координате	3° Координате
79^8	3° Ротирати тачку Z	3° Ротирати дуж AZ
82	слика 57 $\frac{z_1+z_2}{2}$	z_1+z_2
87_{15}	$=\frac{(z\|a)}{(b\ a)}b$	$=\frac{(z\|a)}{(b\|a)}b$
117_3	$P=$	$P'=$
127^6	$=\frac{k}{k^2-1}\|b-a\|$	$=k\left\|\frac{b-a}{k^2-1}\right\|$
127	сл. 95	сл. 105
136^6	$\frac{b-a}{2}\Big\|^2$	$\left\|\frac{b-a}{2}\right\|^2$