Елементарна теорија множина

По предавању
Dr. JOBAHA КАРАМАТЕ

УДРУЖЕЊЕ СТУДЕНАТА МАТЕМАТИКЕ
— БЕОГРАД 1935. —

ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРИЈА
МНОЖИНА

I ОПШТИ ДЕО

§ 1 Кратак увод у теорију множина. - Гоњен доказима извесних ставова из теорије трансцендентних бројева, а вероватно и другим идејама на која је наишао у својој пракси, крајем 19 века халешки математичар Георг Кантор поставља основу једне нове математичке дисциплине, која се убрзо развија у "теорију множина или скупова", и постаје основ целокупне математике.

И ако математичка анализа оперише на сваком кораку са појмом бескрајности, све до Кантора, па и данас тај је појам стварао код нас претставу о нечем несвршеном или некој величини која се ни на какав начин не да упоређивати: једном речи био је, као што је и сам Гаус говорио, само „façon de parler".

Канторова је заслуга у томе што је теоријом множина омогућио да се бар са извесног гледишта добије јаснија претстава о бескрајном, и што је штавише, створио математичку могућност да се са тим појмом оперише, апстрактно, али ипак потпуно прецизно. Не узевши у обзир њене примене, теорија множина, већ само по овом свом задатку заузима угледно место у апстрактној математици.

§ 2 Дефиниција множине. Примери.- Ако изведену количину објеката посматрамо као целину, онда се таква целина назива скупом објеката, а појединачни објекти тог скупа називају се његовим елементима. Да би овај скуп претстављао једну множину у математичком смислу, треба да има једну једину особину, тј. да нам је по његовом саставу дата могућност да распознамо да ли један произвољно изабран елеменат припада или не припада томе скупу. При томе је важно напоменути да врста самих објеката при дефиницији множине не игра никакву улогу.

Тако је шума множина дрвета, стадо множина оваца, варош множина кућа, народ множина људи, књига множина речи, права линија множина тачака итд. Множине можемо чисто апстрактно градити и од самих појмова.

Специјалне врсте множина које у математици

играју главну улогу су множине бројева и тачака.

§ 3 Коначне и бесконачне множине. Једна је множина коначна, ако садржи коначан број елемената. Шума, стадо, варош, народ, књига и други примери су за такве множине. Ако уочимо све целе позитивне бројеве мање од М, они, посматрани као целина претстављају једну коначну множину. Коначним се множинама овде нећемо бавити, јер је за саму теорију множина баш и карактеристично то што се бави бескрајним множинама и покушава да за њих створи законе; док коначне множине спадају више у предмет комбинаторике.

Бескрајна је множина она која садржи бесконачно много елемената. Најбољи су примери за такве множине, множина свих бројева, свих рационалних бројева, свих алгебарских бројева, па најзад и свих реалних бројева.

Према Канторовом аксиому који каже да су број и тачка два еквивалентна појма, јер сваком броју одговара по једна тачка и свакој тачки по један број, у примере за бескрајне множине можемо уврстити и множину свих тачака једне праве линије или једног њеног сегмента, као и множине тачака са нарочитом карактеристиком.

§ 4 Еквиваленција множина. Уочимо две коначне множине А и В да бисмо видели која множина садржи више елемената, можемо елементе сваке множине пребројати и мерне бројеве упоредити. Ми можемо међутим поступити и на други начин; узмимо најпре један елеменат множине А и ставимо му насупрот један елеменат множине В, затим уочимо један други елеменат множине А и ставимо му насупрот неки други елеменат множине В, и тако продужимо све док се елементи једне од множина не исцрпе. Она множина чији се елементи први утроше несумњиво је мања. Ако се деси да се елементи обе множине утроше истовремено каже се да су те две множине еквивалентне.

Тако можемо еквиваленцију множина дефинисати на следећи начин. Две су множине А и В еквивалентне, ако између њиних елемената можемо успоставити биунивоку кореспонденцију, тј. ако свакоме елементу множине А одговара само један елеменат множине В а у исто време и обр-

нуто. Ако су множине А и В еквивалентне пишемо $A \equiv B$. Ако је множина А већа, пишемо $A \succ B$, у противном се пише $A \prec B$.*)

Множина кућа и кућних бројева је леп пример за еквиваленцију две коначне множине. Нуза коначне множине је еквиваленцију или нееквиваленцију могућно испитати и на први начин изнесен у овом параграфу. За две беокрајне множине то је апсолутно немогуће. Ту је једино могућ начин кореспондирања. Код коначних множина све се то своди на појам броја и то ординалног или редног броја. Код бесконачних множина, на које се може применити једино метода кореспондирања, а код којих је такође могућ и случај нееквиваленције, овај поступак доводи до појма кардиналног броја о чему ћемо говорити доцније.

Уочимо у овом члану још само један важан моменат. Из тога што у коначности две еквивалентне множине морају имати исти број елемената, излази да једна коначна множина не може никад

*) Знак $\succ$ и знак $\subset$ нису исти, јер скуп свих парних бројева припада окупу свих целих бројева, док су та два скупа еквивалентна.

бити еквивалентна једној својој парцијалној множини,тј. множини која је настала из ње саме испуштањем извесног броја елемената по неком правилу.

Код бесконачних множина је то могуће. Отога се и каже да у бесконачности "целина може б. ти једнака једном свом делу".Да бисмо то показали уочимо две бескрајне множине и то множину свих природних бројева и множину свих парних бројева из природнога низа. Између те две множине можемо успоставити еквиваленцију методом кореспондирања.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots \end{array}$$

Ма ком елементу n из прве множине одговара потпуно одређени елеменат $m=2n$ друге множине и обрнуто, ма ком елементу m друге множине одговара само један и потпуно одређен елеменат $n=\frac{1}{2}m$ из прве множине.

Из особине да две на изглед различите бескрајне множине могу бити и еквивалентне, може

се поставити следећа строжија дефиниција бескрајне множине: једна је множина бескрајна,ако постоји макар једна њена парцијална множина са којом би она била еквивалента. Ако ни једна таква парцијална множина не постоји,онда је дата множина коначна.

Као важан пример за две еквивалентне бескрајне множине напоменимо још множину свих реалних бројева и множину свих тачака праве линије,јер се између елемената ове две множине може на лак начин успоставити биунивока кореспонденција, ако смо једном за свагда на правој изабрали тачку која ће одговарати 0 и тачку која ће одговарати јединици из множине реалних бројева.

§ 5 Пребројиве и непребројиве множине. Ако уочимо две бескрајне множине N и M, од којих је N множина природних бројева и ако установимо да су те две множине еквивалентне, онда се за множину M каже да је пребројива. Према томе,једна је множина пребројива ако је еквивалентна множини природних бројева,тј.ако се између елемената те множине природних бројева може успоставити узајамна и једнозначна кореспонденција :

$$\begin{array}{l} N = (1, 2, 3, 4, \dots p, \dots) \\ \quad\;\; \updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow \qquad\; \updownarrow \\ M = (m_1, m_2, m_3, m_4, \dots m_p, \dots) \end{array}$$

Значи, ако је једна бескрајна множина пребројива, њене елементе можемо уредити и по том се сваки њен елеменат мора појавити на тачно одређеном месту, тако елеменат m_p тачно на p-том месту, где је p један број из множине природних бројева.

У прошломе смо члану видели једну пребројиву множину, то је била множина свих парних позитивних бројева. У идућем ћемо члану показати још неколике пребројиве множине.

Једна је множина непребројива, ако је немогуће ма на какав начин успоставити биунивоку кореспонденцију између њених чланова и елемената множине природних бројева. Краће, непребројива је свака бескрајна множина која није еквивалентна множини природних бројева.

Доказ да овакве бескрајне множине постоје, њихове примере и разлику по којој оне у свој бескрајности отступају од такође бескрајних али пребројивих множина, видећемо у наредним параграфима. Ти ставови претстављају суштину ове теорије.

§ 6 Множина свих целих бројева је пребројива. Напред смо видели једну пребројиву множину која је на први поглед мања од множине природних бројева. Биће утолико више од интереса да видимо неколике множине које су на први поглед веће од поменуте, али за које се може доказати да су такође пребројиве. Таква је на првоме месту множина свих целих позитивних и негативних бројева. Ако њене елементе упоредимо по величини, изгледа нам да није пребројива, јер ни за један њен елеменат нисмо у стању да покажемо који је по реду, пошто му претходи бескрајно много других. Ако ту множину напишемо уређену на следећи довитљив начин*) видимо одмах да је она пребројива, јер кореспонденцију ове множине са множином природних бројева мо-

*)
$$\begin{array}{cccccccc} 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \end{array}$$

жемо установити по следећем правилу. Сваки позитиван елеменат m дате множине је $(2n-1)$-ви по реду, а сваки негативан ($-n$) је $2n$ -ти по реду. Што елементе дате множине можемо да нумеришемо, доказ је да је можемо пребројати.

И уопште да бисмо доказали да је једна множина пребројива, као што се из примера види, довољно је макар само да можемо да је уредимо тако, да смо у стању рећи који је елеменат у њој први, који други, који n -ти итд., тј. довољно је да можемо да је пребројимо.

<u>§ 7 Множина рационалних бројева је пребројива.</u> јер И ако много гушћа од множине природних бројева, да се нанизати по извесном правилу, тј. да се пребројати. То можемо постићи на три начина. Прво, ако све рационалне бројеве распоредимо у редове по величини њиховог именитеља, а у сваком реду по величини бројитеља:

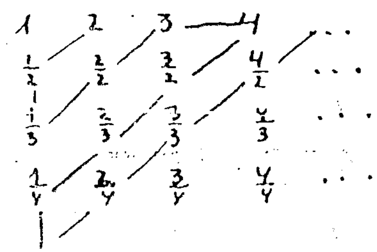
$$1$$
$$\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{2}{2}$$
$$\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3} \quad \tfrac{3}{3}$$
$$\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{2}{4} \quad \tfrac{3}{4} \quad \tfrac{4}{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\tfrac{1}{n} \quad \tfrac{2}{n} \quad \tfrac{3}{n} \quad \cdots\cdots \quad \tfrac{n}{n}$$

Изоставимо ли све разломке који се понављају и напишемо ли остале у продужењу испод природног низа, видимо да смо успоставили биунивоку кореспонденцију ових бројева са бројевима из природног низа, јер нисмо ни један рационалан број изоставили, па се према томе свакоме зна своје место. На први начин је показана пребројовст рационалних бројева између 0 и 1, а из ове се као логичка последица закључује и пребројивост свох рационалних бројева уопште.

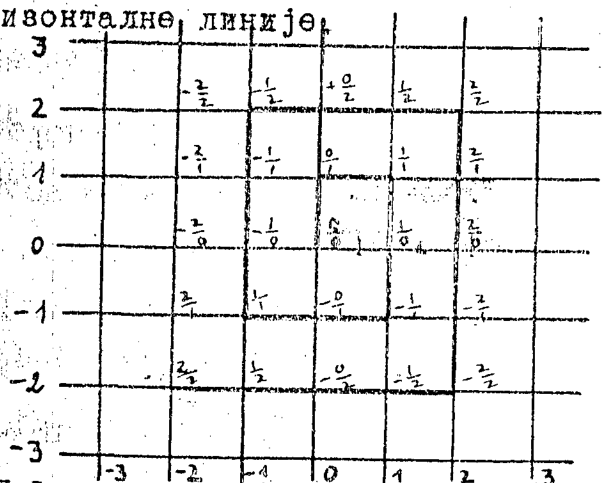
Ако све рационалне позитивне бројеве поређамо у овакву схему,*) а затим их нанижемо по изломљеној линији и изоставимо све који се понављају, можемо лако уочити правило по коме се они ређају. На тај начин је доказана и непосредно пребројивост свих позитивних рационалних бројева.

Пребројивост множине свих рационалних бројева може се доказати, ако се они уреде на је-

*)



дан други начин, тако да се постигне њихова нумерација, а то се може постићи овако. Повући ћемо бесконачно много вертикалних и бесконачно много хоризонталних правих и све ове праве означићемо бројевима, као што је учињено на слици. Сваку ћемо пресечну тачку, затим означити једним рационалним бројем чији је бројитељ нумера вертикалне, а именитељ нумера хоризонталне линије.



Сл. 1.

Пођемо ли од броја $0/0$ спирално и поређамо све те бројеве у низ

$$\frac{0}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, -\frac{1}{1}, -\frac{0}{1}, \ldots,$$

па изоставимо све бројеве који нису одређени, као $\frac{n}{0}$ и који се понављају, тада ћемо добити поредак у коме је обухваћена множина свих по-

зитивних и негативних рационалних бројева, али уређена тако, да се свакоме вна одговарајуће место одређено бројем природног низа. Дакле, множина рационалних бројева је пребројива.

§ 8 Множина алгебарских бројева је пребројива. - Алгебарски је сваки број који може бити корен једне алгебарске једначине са рационалним коефицијентима. Према томе је множина алгебарских бројева скуп свих реалних корена свих алгебарских једначина. Да бисмо доказали да је ова множина пребројива, доказаћемо најпре да је пребројива множина свих алгебарских једначина. Да бисмо то пак, доказали потребно је да све ове једначине на неки начин уредимо. У ту ћемо сврху увести појам висине једне алгебарске једначине.

Ако је општа алгебарска једначина са целим коефицијентима

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots a_1 x + a_0 = 0,$$

њеном се висином зове израз

$$h = (n-1) + |a_n| + |a_{n-1}| + \dots |a_0| .$$

Тако је на пример висина једначине

$$4x^4 - 2x + 1 = 0$$

$$h = 3+4+2+1 = 10 .$$

Из саме је дефиниције очигледно да свака једначина може имати само једну висину и да једну исту висину може имати само коначан број једначина ма колики велики он био.

Све алгебарске једначине можемо сада уредити по њиховој висини, почев од оних чија је висина 1. Једначине,пак, исте висине можемо уредити ма на какав други начин, рецимо по висини њиховог степена. Ако смо и ово учинили, онда је систем свих алгебарских једначина уређен, тј. доказано је да је множина свих алгебарских једначина пребројива.

Замислимо сада на место сваке алгебарске једначине њене реалне корене и то уређене по величини. Ако у свакоме поретку изоставимо све бројеве који се понављају,онда добијамо множину алгебарских бројева уређену тако да сваки број има једно и потпуно одређено место,што није ништа друго до успостављање биунивоке кореспонденције са множином природних бројева. Дакле је и множина свих алгебарских бројева пребројива.

§ 9 Множина свих реалних бројева је непребројива.- Да би се доказало до постоје и множине које нису пребројиве, довољно је показати да постоји једна таква множина. То ћемо доказати за множину свих реалних бројева од 0 - 1.

Пре него што пређемо на сам доказ, уочимо да се сваки реалан број може написати у облику децималног разломка. И то сваки рационалан број као коначан или бесконачно периодичан разломак, а сваки ирационалан број као бесконачан и непериодичан разломак. Ну пример

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}4999\dots$$

показује да се и рационалним бројевима који претстављају коначне децималне разломке може привидно дати облик бесконачног периодичног разломка. Из тога излази да се сви реални бројеви могу једнозначно написати у облику бесконачних децималних разломака.

Ако то учинимо и све ове бројеве уредимо било на који начин само под претпоставком да је између њих и бројева из природног низа успостављена биунивока кореспонденција.

$$\begin{array}{ccl} 1 & \longleftrightarrow & 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots, \\ 2 & \longleftrightarrow & 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots, \\ 3 & \longleftrightarrow & 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots, \\ 4 & \longleftrightarrow & 0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots, \\ \vdots & & \ldots\ldots\ldots, \\ \vdots & & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

изгледало би да је и множина свих реалних бројева пребројива. Међутим и поред тога што смо узели у обзир бесконачно много реалних бројева и старали се да их све до једног уредимо, ма колико их узели и ма како их уредили, увек можемо наћи један реалан број који нисмо убројали. Такав је например број

$$0,b_1b_2b_3b_4\ldots$$

где је $b_1\neq a_{11}$, $b_2\neq a_{22}$, $b_3\neq a_{33}$, $b_4\neq a_{44}$, ..., зато што се разликује од свакога броја који је убројан. Ако и овај број прикључимо уређеној множини истим, тзв. "дијагоналним поступком",

можемо пронаћи један реалан број који ни овај пут нисмо урачунали, а одмах се види да смо, продужујући поступак, у стању наћи и бесконачно много оваквих бројева.

Показавши да све реалне бројеве не можемо никад пребројати доказали смо и да су они непребројиви. Ну како је непребројив њихов скуп који се цео садржи између 0 и 1, то је непребројива и множина свих реалних бројева.

§ 10 Доказ егзистенције трансцендентних бројева. Доказ егзистенције трансцендентних бројева је непосредна последица доказа о непребројивости множине свих реалних бројева и пребројивости свих алгебарских бројева.

И ако су обе бесконачне, множина је свих алгебарских бројева, као што смо видели пребројива, дакле мања од множине свих реалних бројева, која је непребројива. Из овога доказаног факта Кантор је извукао два закључка. С једне стране и бесконачности се међу собом разликују и могу бити мање или веће, што значи да појам бесконачности ни пошто није магловит, већ потпуно одређен. С друге стране, осим алгебарских, морају постојати још неки други реални бројеви чија је множина куд и камо већа од множине алгебарских бројева, шта више она је непребројива, пошто од двеју пребројивих множина не би никад постала непребројива множина, као што је то случај са множином свих реалних бројева. А пошто се у математици сваки реалан број, који није алгебарски, дефинише као трансцендентан то је множина свих трансцендентних бројева непребројива, тј. трансцендентни бројеви не само да постоје, него су куд и камо многобројнији од алгебарских.

Конкретно доказати који бројеви нису алгебарски претставља проблем своје врсте. Тако је Лувил пре Канторове теорије дао доказ да су извесни бројеви трансцендентни, доказавши да не могу бити корени ни једне алгебарске једначине с рационалним коефицијентима. С друге стране докази да су број π и број e трансцендентни дошли су тек много доцније, што потврђује да се теоријом множина може доказати егзистенција једне непребројиве множине трансцендентних бро

јева, али да се не може извадити ни један број који тој множини припада.

§ 11 Моћ једне множине. Појам кардиналног броја. Величина једне множине цени се по броју њених елемената, па се и однос између две множине сматра однос бројева њиних елемената.

Ако су две множине коначне ми им можемо елементе изборјати и видети која је множина по броју својих елемената мања, која већа, и јесу ли еквивалентне.

Ако су две уочене множине бесконачне, елементи им се не могу изборјати, али се оне ипак могу упоређивати у извесном смислу, може се пак рећи, као што смо видели, која је множина по броју елемената мања, која већа и јесу ли еквивалентне.

Број елемената једне множине зове се моћ те множине или њен кардиналан број.

Код коначних множина је моћ или кардиналан број једнак самоме редном броју њених елемената, који се зове још и ординалан број.

Бескрајним се множинама број елемената не