UNIVERZITET U BEOGRADU

L. D. LANDAU i E. M. LIFŠIC

MEHANIKA

PREVEO S RUSKOG
DRAGOLJUB POPOVIĆ

IZDAVAČKO PREDUZEĆE
„GRAĐEVINSKA KNJIGA“
BEOGRAD, 1961.

Naslov originala

Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц

Теоретическая физика

Том I

М е х а н и к а

Москва 1958.

Rešenjem Komisije za univerzitetske udžbenike br. 2635 od 19. VI. 1961. godine ova knjiga je odobrena kao univerzitetski udžbenik

Stručna redakcija

Dr. Inž. Dragiša Ivanović

Za preduzeće odgovara glavni urednik *Ljubica Jurela,* urednik *Dragomir Lazin,* tehnički urednik *Emilija Božinović,* korektor *Milan Vrečko,* naslovna strana *Jovanka Ristić-Pršendić,* akademski slikar

Štampa i povez: Izdavačko-štamparsko preduzeće JŽ — Subotica

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Sa ovom knjigom mislimo da počnemo postupno da izdajemo sve tomove naše "Teorijske fizike". Definitivni plan se sada sastoji u sledećem obliku:

1. Mehanika.
2. Teorija polja.
3. Kvantna mehanika (nerelativistička teorija).
4. Relativistička kvantna teorija.
5. Statistička fizika.
6. Hidromehanika.
7. Teorija elastičnosti.
8. Elektromagnetika kontinualnih sredina.
9. Fizička kinematika.

Prvo izdanje prvog toma su 1940. godine objavili L. Landau i L. Pjatigorski. Mada je opšti plan izlaganja ostao isti, knjiga je u suštini prerađena i potpuno iznova napisana.

Zahvaljujemo I. E. Đalošinskom i L. P. Pitaevskom za pomoć pri korekturi knjige.

Moskva, jula 1957. godine. *L. D. Landau, E. M. Lifšic*

GLAVA I

JEDNAČINE KRETANJA

§ 1. Generalisane koordinate

Jedan od osnovnih pojmova mehanike je pojam materijalne tačke[1]. Pod tim imenom se podrazumeva telo, čije se dimenzije mogu zanemariti pri opisivanju njegovog kretanja. Razume se, mogućnost takvog zanemarivanja zavisi od konkretnih uslova pojedinih problema. Tako, planete se mogu smatrati materijalnim tačkama ako se proučava njihovo kretanje oko Sunca, ali se naravno ne mogu uzeti kao materijalne tačke pri tretiranju njihovog rotacionog kretanja (oko svoje ose).

Položaj materijalne tačke u prostoru se određuje njenim vektorom položaja (radijus-vektorom) $\vec{r}$, čije se komponente poklapaju sa njenim Descartes-ovim koordinatama x, y, z. Izvod $\vec{r}$ po vremenu t

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

se naziva brzinom, a drugi izvod $\dfrac{d^2 \vec{r}}{d t^2}$ — ubrzanjem tačke. U daljem izlaganju kao i obično diferenciranje po vremenu često ćemo označavati tačkom iznad slova:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}.$$

Za određiranje položaja sistema od N materijalnih tačaka u prostoru potrebno je uzeti N radijus-vektora, tj. $3N$ koordinata. Uopšte se broj nezavisnih veličina, koje su neophodne za jednoznačno određivanje položaja sistema, naziva brojem njegovih *stepena slobode*; u datom slučaju taj broj iznosi $3N$. Te veličine ne moraju biti obavezno Descartes-ove koordinate tačaka, i u zavisnosti od uslova problema može se pokazati pogodnijim izbor ma kojih drugih koordinata. Ma koje s veličina $q_1, q_2, \cdots, q_s$, koje u potpunosti karakterišu položaj sistema (sa s stepena slobode) nazivaju se *generalisanim koordinatama sistema*, a izvodi q_i — *generalisanim brzinama sistema*.

Poznavanje vrednosti generalisanih koordinata, međutim, još ne određuje „mehaničko stanje" sistema u datom momentu u tom smislu što ne omogućava

---

[1] Umesto izraza „materijalna tačka", često ćemo upotrebljavati izraz „čestica".

da se predvidi polažaj sistema u bilo kom sledećem momentu. Za date vrednosti koordinata sistem može da ima proizvoljne brzine, pa će u zavisnosti od ovih biti i različit položaj sistema u sledećem momentu (tj. u beskonačno malom vremenskom intervalu dt).

Ako jednovremeno znamo sve koordinate i brzine onda se, kako eksperiment pokazuje, u potpunosti određuje stanje sistema i omogućava principijelno da se predvidi njegovo dalje kretanje. S matematičke strane gledišta to znači da se poznavanjem svih koordinata q i brzina $\dot{q}$ u nekom momentu jednoznačno određuje i vrednost ubrzanja $\ddot{q}$ u tom momentu[1].

Relacije koje povezuju ubrzanja sa koordinatama i brzinama nazivaju se: *jednačine kretanja*. U odnosu na funkcije $q(t)$ to su diferencijalne jednačine drugog reda, čijim integriranjem se omogućava principijelno određivanje tih funkcija, tj. trajektorija kretanja mehaničkog sistema.

§ 2. Princip najmanjeg dejstva

Najopštija formulacija zakona kretanja mehaničkih sistema je data takozvanim *principom najmanjeg dejstva* (ili *Hamilton-ovim principom*). Prema tom principu svaki mehanički sistem se karakteriše određenom funkcijom

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t)$$

ili kratko $L(q, \dot{q}, t)$, pri čemu kretanje sistema zadovoljava sledeći uslov.

Neka u momentu $t = t_1$ i $t = t_2$ sistem zauzima određeni položaj, koji se karekteriše dvema izabranim vrednostima koordinata $q^{(1)}$ i $q^{(2)}$.

Tada se sistem, između tih položaja, kreće tako, da integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{2,1}$$

ima najmanju mogućnu vrednost[2]. Funkcija L se naziva *Lagrange-ova funkcija* datog sistema, a integral (2,1) — *dejstvo*.

Činjenica, da Lagrange-ova funkcija sadrži samo q i $\dot{q}$ a ne više izvode $\ddot{q}, \dddot{q}, \cdots$ je posledica ranije iznetog fakta da se mehaničko stanje potpuno određuje datim koordinatama i brzinama.

Prelazimo na izvođenje diferencijalnih jednačina koje rešavaju zadatak određivanje minimuma integrala (2,1). Radi jednostavnijeg pisanja formula pretpostavićemo u početku da sistem ima samo jedan stepen slobode tako da mora biti određena samo jedna funkcija $q(t)$.

---

[1] Radi kratkoće označavanja često ćemo uslovno pod vrednosti q uzimati skup svih koordinata $q_1, q_2, \cdots, q_s$ (i pod $\dot{q}$ analogno skup svih brzina).

[2] Međutim, potrebno je ukazati da tako formulisan princip najmanjeg dejstva ne važi uvek za sve trajektorije kretanja u celini, već samo za svaki njen dovoljno mali mali deo. Za celu trajektoriju se pak može desiti da integral (2,1) ima samo ekstremnu, ali ne obavezno i minimalnu vrednost. Ova okolnost, međutim, nije uopšte bitna pri izođenu jednačina kretanja, pri kojem se koristi samo uslov ekstremnosti.

Neka je $q = q(t)$ upravo ta funkcija za koju S ima minimum. To znači da se S povećava zamenom $q(t)$ ma kojom funkcijom oblika

$$q(t) + \delta q(t), \tag{2,2}$$

gde je $\delta q(t)$ funkcija, koja je mala u celom intervalu od t_1 do t_2 (naziva se *varijacija funkcije* $q(t)$. Kako za $t = t_1$ i $t = t_2$ sve slične funkcije (2,2) moraju imati jedne iste vrednosti $q^{(1)}$ i $q^{(2)}$, onda mora biti:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \tag{2,3}$$

Promena S pri zameni q sa $q + \delta q$ je data sledećom razlikom

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt.$$

Razlaganje te razlike po stepenima δq i $\delta \dot{q}$ (u podintegralnom izrazu) počinje se sa članovima prvog reda. Neophodan uslov da je S[1] minimalno sastoji se u izjednačenju s nulom zbira tih članova. Ona se naziva prva varijacija integrala (ili prosto varijacija). Prema tome princip najmanjeg dejstva se može napisati u obliku

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0, \tag{2,4}$$

ili ako se izvrši variranje:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.$$

Uz napomenu da je $\delta \dot{q} = \dfrac{d}{dt} \delta q$, parcijalno ćemo integrirati drugi član pa dobijamo

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\, dt = 0, \tag{2,5}$$

ali zbog uslova (2,3) prvi član u tom izrazu je jednak nuli. Ostaje integral koji mora biti jednak nuli za proizvoljne vrednosti δq. Ovo je mogućno samo u tom slučaju ako je podintegralni izraz identično jednak nuli. Tako dobivamo jednačinu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Ako postoje više stepena slobode, onda se u principu najmanjeg dejstva mora izvršiti nezavisno variranje s različitih funkcija $q(t)$. Očigledno je da tada dobivamo s jednačina oblika

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, s). \tag{2,6}$$

---

[1] Uopšte — ekstremnosti.

Ovo su tražene diferencijalne jednačine. One se u mehanici nazivaju *Lagrange-ove jednačine*[1]. Ako je poznata Lagrange-ova funkcija datog mehaničkog sistema onda jednačine (2,6) daju vezu između ubrzanja, brzina i koordinata, tj. predstavljaju *jednačine* kretanja sistema.

S matematičkog stanovišta jednačine (2,6) čine sistem od s jednačina drugog reda za s nepoznatih funkcija $q(t)$. Opšte rešenje takvog sistema sadrži $2s$ proizvoljnih konstanti. Za njhovo određivanje, a samim tim za ukupno određivanje kretanja mehaničkog sistema, neophodno je potrebno poznavanje početnih uslova, koji karakterišu stanje sistema u nekom datom momentu vremena; na primer poznavanje početnih vrednosti svih koordinata i brzina.

Neka se mehanički sistem sastoji iz dva dela A i B, od kojih bi svaki, budući da je zatvoren, imao kao Lagrange-ove funkcije respektivno funkcije L_A ili L_B. Tada u limes-u, pri udaljavanju delova toliko daleko, da bi se njihove interakcije mogle zanemariti, Lagrange-ova funkcija celog sistema teži graničnoj vrednosti

$$\lim L = L_A + L_B . \qquad (2, \ )$$

Ovo svojstvo aditivnosti Lagrange-ove funkcije izražava činjenicu da jedačine kretanja delova, između kojih ne postoje interakcije, ne mogu sadržati veličine, koje se odnose na druge delove sistema.

Očevidno je, da se množenje Lagrange-ove funkcije mehaničkog sistema nekom proizvoljnom konstantom samo po sebi ne odražava na jednačine kretanja. Odavde bi se možda reklo da nastaje bitna neodređenost, a naime da se Lagrange-ova funkcija različitih izolovanih mehaničkih sistema može pomnožiti ma kojom različitom konstantom. Međutim, svojstvo aditivnosti uklanja tu neodređenost—ono dopušta samo istovremeno množenje Lagrange-ovih funkcija svih sistema istom konstantom, što se jednostavno svodi na prirodnu proizvoljnost u izboru jedinica merenja te fizičke veličine. Na ovaj problem ćemo se još vratiti u § 4.

Neophodno je učiniti još sledeću opštu napomenu. Posmatrajmo dve funkcije $L'(q, \dot{q}, t)$ i $L(q, \dot{q}, t)$, koje se međusobno razlikuju za totalni izvod po vremenu ma koje funkcije koordinata vremena $f(q,t)$:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \qquad (2,8)$$

Integrali (2,1) koji su izračunati pomoću te dve funkcije povezani su relacijom

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}\, dt = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1),$$

tj. međusobno se razlikuju dopunskim članom, koji nestaje pri variranju dejstva, jer se uslov $\delta S' = 0$ poklapa sa uslovom $\delta S = 0$, i oblik jednačine kretanja ostaje nepromenjen.

Na taj način Lagrange-ova funkcija je određena samo sa tačnošću dodavanja njoj totalnog izvoda od ma koje funkcije koordinata i vremena.

---

[1] U varijacionom računu, gde se tretira formalni problem određivanja ekstremnih vrednosti integrala oblika (2,1), takve jedačine se nazivaju Euler-ove jednačine.

§ 3. Galilej-ev princip relativnosti

Za proučavanje mehaničkih pojava, mora se uzeti neki *sistem referencije*. U različitim sistemima referencije zakoni kretanja imaju, opšte uzevši, različit oblik. Ako se uzme proizvoljni sistem referencije, može se ispostaviti da zakoni sasvim prostih pojava u njemu izgledaju veoma složeni. Prirodno je da nastaje zadatak oko izbora takvog sistema referencije u kome bi zakoni mehanike bili jednostavniji.

U odnosu na proizvoljni sistem referencije prostor je nehomogen i neizotropan. To znači, da, ako ma koje telo uzajamno ne dejstvuje ni sa kojim drugim telima, onda samim tim njegov različit položaj u prostoru i njegova različita orijentacija u mehaničkom pogledu nisu ekvivalentni. Ovo se odnosi u opštem slučaju i na vreme koje će biti nehomogeno, tj. njegovi različiti momenti su neekvivalentni. Komplikovanost, koju bi unosila takva svojstva prostora i vremena u opisivanje mehaničkih pojava, je očigledna. Tako na primer slobodno telo (tj. telo koje se ne podvrgava spoljašnjim dejstvima) ne bi moglo biti u miru: ako je brzina tela u nekom momentu i jednaka nuli, već u sledećem momentu telo bi počelo da se kreće u nekom pravcu.

Međutim, ispostavlja se, da je uvek mogućno naći takav sistem referencije u odnosu na koji bi prostor bio homogen i izotropan, a vreme — homogeno. Takav sistem se naziva *inercijalni*. Specijalno u njemu slobodno telo ako se u nekom momentu nalazi u miru, ostaje u tom stanju neograničeno dugo.

Sada možemo odmah napraviti izvesne zaključke o obliku Lagrange-ove funkcije u inercijalnom sistemu referencije za materijalnu tačku koja se slobodno kreće. Homogenost prostora i vremena označava da ta funkcija ne može da sadrži u eksplicitnom obliku ni radijus-vektor $\vec{r}$ tačke, ni vreme t, tj. L je funkcija samo od $\vec{v}$. Zbog izotropije prostora, Lagrange-ova funkcija ne može zavisiti ni od orijentacije vektora $\vec{v}$, jer je funkcija samo od njegove apsolutne veličine, tj. od kvadrata $\vec{v}^2 = v^2$:

$$L = L(v^2). \tag{3,1}$$

S obzirom da Lagrange-ova funkcija ne zavisi od $\vec{r}$ imaćemo $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ i zbog toga Lagrange-ova jednačina ima oblik:[1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0,$$

odakle je $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{r}} =$ const. Ali kako je $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ funkcija samo kvadrata brzine, onda izlazi da je i

$$v = \text{const.} \tag{3,2}$$

[1] Pod izvodom skalarne veličine po vektoru podrazumeva se vektor, čije su komponente jednake izvodima te veličine po odgovarajućim komponentama vektora.

Na taj način dolazimo do zaključka da se u inercijalnom sistemu referencije svako slobodno kretanje vrši brzinom koja je konstantna po veličini i smeru. Ova konstatacija čini sadržaj takozvanog *zakona inercije*.

Ako uporedo sa inercijalnim sistemom referencije, koji koristimo, uvedemo drugi sistem, koji se u odnosu na prvi kreće pravolinijski i ravnomerno, onda će zakoni slobodnog kretanja u odnosu na taj novi sistem biti isti kao i u odnosu na prvobitni: slobodno kretanje se ponovo vrši sa konstantnom brzinom.

Međutim, eksperiment pokazuje, da će ne samo zakoni slobodnog kretanja u ovom sistemima biti isti, već će oni biti i u svim drugim mehaničkim odnosima u potpunosti ekvivalentni. Na taj način postoji ne jedan, već bekonačno mnogo inercijalnih sistema referencije koji se uzajamno kreću pravolinijski i ravnomerno. U svim ovim sistemima svojstva prostora i vremena su jednaka i jednaki su svi zakoni mehanike. Ova konstatacija čini sadržaj takozvanog *Galilej-evog principa relativnosti* koji je jedan od najvažnijih principa mehanike.

Sve rečeno dovoljno jasno svedoči o isključivosti svojstava inercijalnih sistema referencije zbog kojih se baš ti sistemi moraju po pravilu koristiti pri proučavanju mehaničkih pojava. U daljem izlaganju ćemo uvek posmatrati samo inercijalne sisteme referencije, ako nije naročito suprotno navedeno.

Potpuna mehanička ekvivalentnost celog mnoštva takvih sistema pokazuje u isto vreme da ne postoji samo jedan „apsolutni" sistem referencije koji bi mogli pretpostaviti drugim sistemima.

Koordinate $\vec{r}$ i $\vec{r}'$ jedne iste tačke u dva različita sistema referencije k i k' od kojih se drugi kreće brzinom $\vec{V}$ u odnosu na prvi, povezane su međusobno relacijom

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t. \tag{3,3}$$

Pri tome se podrazumeva da je tok vremena isti u oba sistema referencije

$$t = t'. \tag{3,4}$$

Pretpostavka o apsolutnosti vremena je osnova klasične mehanike[1].

Fomule (3,3) i (3,4) se nazivaju *Galilej-eve transformacije*. Galilej-ev princip relativnosti se može formulisati kao zahtev invarijantnosti jednačine kretanja u mehanici u odnosu na tu transformaciju.

§ 4. Lagrange-ova funkcija slobodne materijalne tačke

Prelazeći na određivanje (definiciju) oblika Langrange-ove funkcije, posmatraćemo u početku najprostiji slučaj — slobodno kretanje materijalne tačke u odnosu na inercijalni sistem referencije. Kako smo već videli, Lagrange-ova funkcija u tom slučaju može da zavisi samo od kvadrata vektora brzine. Za izračunavanje oblika te zavisnosti koristićemo se Galilej-evim principom relativnosti. Ako se inercijalni sistem referencije K kreće u odnosu na inercijalni sistem referencije K' beskonačno malom brzinom $\vec{\varepsilon}$, onda će biti: $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$.

[1] Ona ne važi u mehanici teorije relativnosti.

Pošto jednačina kretanja u svim sistemima referencije mora imati jedan isti oblik, onda Lagrange-ova funkcija $L(v^2)$ pri takvoj transformaciji mora preći u funkciju L', koja, ako se i razlikuje od $L(v^2)$, onda to mora biti za ceo izvod funkcije koordinata i vremena (v. kraj § 2.).

Tada ćemo imati:

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\vec{v}\vec{\varepsilon} + \varepsilon^2).$$

Razlažući ovaj izraz u red po stepenima ε i zanemarajući beskonačno male (članove) viših redova, dobivamo

$$L(v'^2) = L(v'^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\vec{v}\vec{\varepsilon}.$$

Drugi član na desnoj strani ove jednačine biće totalni izvod po vremenu samo u tom slučaju, ako linearno zavisi od brzine $\vec{v}$. Zbog toga $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ ne zavisi od brzine, tj. Lagrange-ova funkcija u posmatranom slučaju je upravo proporcionalna kvadratu brzine:

$$L = av^2.$$

Iz činjenice da Lagrange-ova funkcija takvog oblika zadovoljava Galilej-ev princip relativnosti u slučaju beskonačno male transformacije brzine, izlazi neposredno, da je Lagrange-ova funkcija invarijantna i u slučaju konačne brzine $\vec{V}$ sistema referencije K u odnosu na K'. I zaista biće:

$$L' = av'^2 = a(\vec{v} + \vec{V})^2 = av^2 + 2a\vec{v}\vec{V} + aV^2,$$

ili

$$L' = L + \frac{d}{dt}(2a\vec{r}\vec{V} + aV^2 t).$$

Drugi član je totalni izvod i može se izostaviti.

Konstantu a ćemo označiti kao $\frac{m}{2}$ i tako ćemo Lagrange-ovu funkciju tačke koja se slobodno kreće definitivno napisati u obliku:

$$L = \frac{mv^2}{2}. \tag{4,1}$$

Veličina m se naziva *masa* materijalne tačke. Zbog svojstva aditivnosti, Lagrange-ova funkcija za sistem tačaka, koje uzajamno ne dejstvuju, biće[1]:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}. \tag{4,2}$$

Treba napomeniti, da samo uzimanjem u obzir toga svojstva, data definiciji mase dobiva realni smisao. Kako je već bilo naglašeno u § 2, Lagrange-ovu

[1] Za indekse koji pokazuju redni broj čestice, koristićemo prva slova latinske azbuke, a za indekse uz koordinate, slova $i, k, l, \cdots$.

funkciju uvek možemo pomnožiti sa ma kojom konstantom; ovo se ne odražava na jednačinama kretanja. Za funkcije (4,2) takvo množenje se svodi na promenu jedinice merenja mase; odnos pak masa različitih čestica, koje samo i imaju realni fizički smisao, ostaje pri toj transformaciji nepromenjen.

Lako se može videti da masa ne može biti negativna. U samoj stvari, prema principu najmanjeg dejstva, za stvarno kretanje materijalne tačke iz tačke *1* u tačku *2*, integral

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2}\, dt$$

ima minimum. Ako bi masa bila negativna, onda bi za trajektoriju, po kojoj se čestica u početku brzo udaljava od *1* a zatim brzo približava ka *2*, integral dejstva dobio negativne vrednosti, koje su po apsolutnoj veličini proizvoljne velike tj. ne bi imao minimum[1].

Potrebno je primetiti da je

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}. \tag{4,3}$$

Zbog toga je za sastavljanje Lagrange-ove funkcije dovoljno naći kvadrat dužine elementa luka dl u odgovarajućem koordinatnom sistemu.

U Descartes-ovim koordinatama, na primer, biće $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, i zbog toga je

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{4,4}$$

U cilindarskim koordinatama iznosi: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, odakle je

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \tag{4,5}$$

U sfernim koordinatama je: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$, te je

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2). \tag{4,6}$$

§ 5. Lagrange-ova funkcija za sistem materijalnih tačaka

Posmatraćemo sada sistem materijalnih tačaka, koje međusobno dejstvuju, ali ne deluju na druga strana tela. Takav sistem se naziva *zatvoren*. Ispostavlja se da uzajamno dejstvo među materijalnim tačkama može biti prikazano kada se Lagrange-ovoj funkciji (4.2) za tačke koje uzajamno ne deluju, doda određena funkcija koordinata (koja zavisi od karaktera interakcije)[2].

---

[1] Ograđivanje koje je učinjeno u primedbi na str. 2 nije u suprotnosti sa ovim zaključkom, jer kada je $m < 0$ integral ne bi mogao imati minimum ni za ma kako mali deo trajektorije.

[2] Ova konstatacija se odnosi na klasičnu — nerelativističku — mehaniku na kojoj se ova knjiga i zadržava.

Ako tu funkciju označimo sa $-U$, imaćemo

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots), \tag{5,1}$$

(gde je $\vec{r}_a$ radijus-vektor a-te tačke). Ovo je opšti oblik Lagrange-ove funkcije zatvorenog sistema.

Suma

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

se naziva *kinetička energija*, a funkcija U — *potencijalna energija* sistema. Smisao ovih naziva biće objašnjen u § 6.

Činjenica da potencijalna energija zavisi samo od položaja svih materijalnih tačaka u jednom istom momentu vremena označava da se promena položaja jedne od njih trenutno odražava na sve ostale; može se reći, da se interakcija „rasprostire" trenutno. Neizbežnost takvog karaktera interakcija u klasičnoj mehanici je tesno povezana se osnovnim karakteristikama poslednje — apsolutnošću vremena i Galilej-evim principom relativnosti. Ako se interakcija ne bi prostirala trenutno, nego konačnom brzinom, onda bi ta brzina bila različita u raznim sistemima referencije (koji se kreću jedan u odnosu na drugi), jer apsolutnost vremena automatski označava primenjivost običnog pravila slaganja brzina na sve pojave. Ali bi tada zakoni kretanja tela, koja uzajamno dejsvuju, bili različiti u raznim (inercijalnim) sistemima referencije; što bi bilo u suprotnosti sa principom relativnosti.

U § 3. smo govorili samo o homogenosti vremena. Oblik Lagrange-ove funkcije (5,1) pokazuje da je vreme ne samo homogeno već i izotropno, tj. njegova svojstva su ista u oba pravca. U stvari, zamenom t sa $-t$, Lagrange-ova funkcija se ne menja, a prema tome ni jednačine kretanja. Drugim rečima, ako je u sistemu mogućno neko kretanje, onda je uvek mogućno i obratno kretanje, tj. takvo pri kome sistem prelazi ta ista stanja u obrnutom redu. U tom smislu, sva kretanja koja se vrše po zakonima klasične mehanike su reverzibilna.

Ako znamo Lagrange-ovu funkciju, možemo napisati jednačine kretanja u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}. \tag{5,2}$$

Ako ovde zamenimo (5,1) dobićemo:

$$m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}. \tag{5,3}$$

Jednačine kretanja u ovom obliku se nazivaju *Newton-ove jednačine* i predstavljaju osnovu mehanike sistema čestica koje uzajamno dejsvuju. Vektor

$$\vec{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \tag{5,4}$$

koji se nalazi na desnoj strani jednačine (5,3) se naziva *sila* koja dejstvuje na a-tu tačku. Zajedno sa U ona zavisi samo od koordinata svih čestica, ali ne i od njihovih brzina. Jednačine (5,3) pokazuju prema tome da su i vektori ubrzanja čestica funkcije samo od koordinata.

Potencijalna energija je veličina koja je određena samo s tačnošću dodavanja proizvoljne konstante; takvo dodavanje ne bi izmenilo jednačine kretanja (specijalan slučaj nejednoznačnosti Lagrange-ove funkcije koji je naveden na kraju § 2). Najprirodniji i obično usvojeni kriterijum u izboru te konstante nalazi se u činjenici da potencijalna energija teži nuli pri povećanju rastojanja između čestica.

Ako se za opisivanje kretanja tačaka ne koriste Descartes-ove koordinate, već proizvoljne generalisane koordinate q_i, onda za dobivanje Lagrange-ove funkcije treba izvršiti odgovarajuće transformacije:

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \cdots, q_s), \qquad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad \text{itd.}$$

Zamenjujući ove izraze u funkciju

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

dobićemo traženu Lagrange-ovu funkciju, koja će imati oblik

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q), \tag{5,5}$$

gde su a_{ik} funkcije samo od koordinata. Kinetička energija u generalisanim koordinatama, prema prethodnom, je kvadratna funkcija brzine, ali može da zavisi i od koordinata.

Do sada smo govorili samo o zatvorenim sistemima. Sada ćemo posmatrati sistem A koji nije zatvoren, koji uzajamno deluje sa drugim sistemom B, koji vrši dato kretanje. U tom slučaju se kaže da se sistem A kreće u datom spoljašnjem polju (koje stvara sistem B). Kako se jednačine kretanja dobivaju iz principa najmanjeg dejstva nezavisnim variranjem svake koordinate, (tj. smatrajući ostale da su poznate) možemo se za nalaženje Lagrange-ove funkcije L_A sistema A koristiti Lagrange-ovom funkcijom L celog sistema $A + B$ zamenivši u njoj koordinate q_B datim funkcijama vremena.

Pretpostavljajući da je sistem $A + B$ zatvoren, imaćemo

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

gde prva dva člana predstavljaju kinetičke energije sistema A i B, a treći član— njihovu zajedničku potencijalnu energiju. Ako umesto q_B zamenimo date funkcije vremena i izbacimo član $T(q_B^{(t)}, \dot{q}_B^{(t)})$, koji zavisi samo od vremena (i zbog toga je totalni izvod neke druge funkcije vremena), dobićemo:

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B^{(t)}).$$

Na taj način, kretanje sistema u spoljašnjem polju se opisuje Lagrange-ovom funkcijom običnog tipa, samo s tom razlikom, što sada potencijalna energija može da zavisi eksplicitno od vremena.

Tako, za kretanje jedne čestice u spoljašnjem polju, opšti oblik Lagrange-ove funkcije biće:

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r}, t), \tag{5,6}$$

a jednačina kretanja je:

$$m\dot{\vec{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \tag{5,7}$$

Homogeno polje se naziva takvo polje u čijim svim tačkama na česticu dejstvuje jedna ista sila $\vec{F}$. Potencijalna energija u takvom polju, očigledno, iznosi:

$$U = -\vec{F} \cdot \vec{r}. \tag{5,8}$$

U zaključku ovog paragrafa učinićemo još sledeću napomenu u vezi primene Lagrange-ovih jednačina na različite konkretne zadatke. Često dolazimo do toga da imamo posla sa takvim mehaničkim sistemima kod kojih interakcija između tela (materijalnih tačaka) ima kako se kaže, karakter „veza”, tj. izvesnih ograničenja u vezi sa međusobnim rasporedom tela. U praksi se takve veze ostvaruju povezivanjem tela različitim štapovima, koncima, šarkama i t. sl. Ova okolnost unosi u kretanje novi faktor - kretanje tela se vrši trenjem na mestima njihovih dodira, zbog čega zadatak izlazi, opšte uzev, iz okvira čiste mehanike (v. § 25). Međutim, u mnogim slučajevima trenje u sistemu je toliko slabo da njegov uticaj na kretanje možemo potpuno zanemariti. Ako se pak uz to mogu zanemariti mase „vezivnih elemenata” sistema, onda se uloga poslednjih svodi jednostavno na smanjenje broja stepena slobode s sistema (u odnosu na broj $3N$). Za određivanje njegovog kretanja može se pri tom ponovo koristiti Lagrange-ova funkcija oblika (5,5) sa brojem nezavisnih generalisanih koordinata koji odgovara stvarnom broju stepena slobode.

Zadaci

Naći Lagrange-ovu funkciju sledećih sistema koji se nalaze u homogenom polju teže (ubrzanje teže je g),

Dvostruko klatno u ravni (sl. 1).

Rešenje. Kao koordinate ćemo uzeti uglove φ_1 i φ_2 koje obrazuju konci l_1 i l_2 sa vertikalom. Tada ćemo za tačku m_1 imati:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \qquad U = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1.$$

Da bismo našli kinetičku energiju druge tačke, izrazićemo je u Descartes-ovim koordinatama x_2, y_2 (koordinatni početak se nalazi u tački vešanja; y-osa je uzeta po vertikali naniže) pomoću uglova φ_1 i φ_2:

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \qquad y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2.$$

Posle toga dobivamo:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}[l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2].$$

koji se nalazi na desnoj strani jednačine (5,3) se naziva *sila* koja dejstvuje na a-tu tačku. Zajedno sa U ona zavisi samo od koordinata svih čestica, ali ne i od njihovih brzina. Jednačine (5,3) pokazuju prema tome da su i vektori ubrzanja čestica funkcije samo od koordinata.

Potencijalna energija je veličina koja je određena samo s tačnošću dodavanja proizvoljne konstante; takvo dodavanje ne bi izmenilo jednačine kretanja (specijalan slučaj nejednoznačnosti Lagrange-ove funkcije koji je naveden na kraju § 2). Najprirodniji i obično usvojeni kriterijum u izboru te konstante nalazi se u činjenici da potencijalna energija teži nuli pri povećanju rastojanja između čestica.

Ako se za opisivanje kretanja tačaka ne koriste Descartes-ove koordinate, već proizvoljne generalisane koordinate q_i, onda za dobivanje Lagrange-ove funkcije treba izvršiti odgovarajuće transformacije:

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \cdots, q_s), \qquad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad \text{itd.}$$

Zamenjujući ove izraze u funkciju

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

dobićemo traženu Lagrange-ovu funkciju, koja će imati oblik

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q), \tag{5,5}$$

gde su a_{ik} funkcije samo od koordinata. Kinetička energija u generalisanim koordinatama, prema prethodnom, je kvadratna funkcija brzine, ali može da zavisi i od koordinata.

Do sada smo govorili samo o zatvorenim sistemima. Sada ćemo posmatrati sistem A koji nije zatvoren, koji uzajamno deluje sa drugim sistemom B, koji vrši dato kretanje. U tom slučaju se kaže da se sistem A kreće u datom spoljašnjem polju (koje stvara sistem B). Kako se jednačine kretanja dobivaju iz principa najmanjeg dejstva nezavisnim variranjem svake koordinate, (tj. smatrajući ostale da su poznate) možemo se za nalaženje Lagrange-ove funkcije L_A sistema A koristiti Lagrange-ovom funkcijom L celog sistema $A + B$ zamenivši u njoj koordinate q_B datim funkcijama vremena.

Pretpostavljajući da je sistem $A + B$ zatvoren, imaćemo

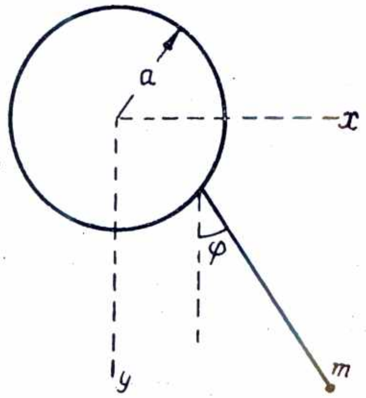
$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

gde prva dva člana predstavljaju kinetičke energije sistema A i B, a treći član— njihovu zajedničku potencijalnu energiju. Ako umesto q_B zamenimo date funkcije vremena i izbacimo član $T(q_B{}^{(t)}, \dot{q}_B{}^{(t)})$, koji zavisi samo od vremena (i zbog toga je totalni izvod neke druge funkcije vremena), dobićemo:

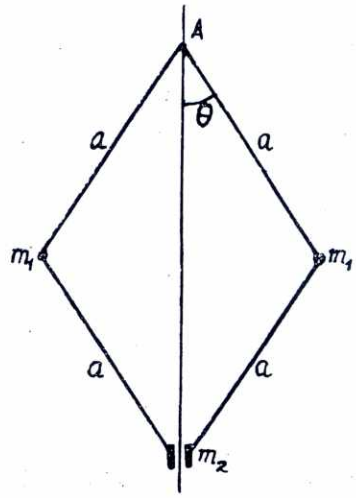
$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B{}^{(t)}).$$

Na taj način, kretanje sistema u spoljašnjem polju se opisuje Lagrange-ovom funkcijom običnog tipa, samo s tom razlikom, što sada potencijalna energija može da zavisi eksplicitno od vremena.

4. Sistem, koji je prikazan na sl. 4; tačka m_2 se kreće po vertikalnoj osi, a ceo sistem rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω ako te ose.



Sl. 3



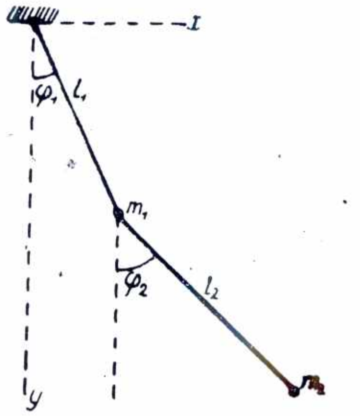
Sl. 4

Rešenje. Uvodimo ugao θ između odsečka a i vertikale i ugao obrtanja φ celog sistema oko ose rotacije: $\dot{\varphi} = \Omega$. Za svaku tačku m_1 element pomeranja biće: $dl_1^2 = a^2\, d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$. Za tačku m_2 rastojanje od tačke vešanja A iznosi $2a \cos\theta$, i zbog toga je $d l_2 = -2a \sin\theta\, d\theta$. Lagrange-ova funkcija je

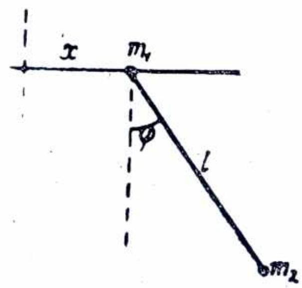
$$L = m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2\theta) + 2m_2 a^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 + 2ga (m_1 + m_2) \cos\theta.$$

Definitivno biće:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$
$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2 .$$



Sl. 1



Sl. 2

2. Klatno je u ravni i ima masu m_2; tačka vešanja (sa masom m_1 u njoj) može da vrši kretanje po horizontalnoj pravoj (sl. 2).

Rešenje. Uvodeći koordinatu x tačke m_1 i ugao φ između konca klatna i vertikale, dobivamo:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi .$$

3. Klatno je u ravni, čija se tačka vešanja:
a) kreće po vertikalnom krugu konstantnom frekvencijom γ (sl. 3);
b) vrši horizontalno oscilovanje po zakonu $a \cos \gamma t$;
c) vrši vertikalno oscilovanje po zakonu $a \cos \gamma t$.

Rešenje.

a) Koordinate tačke m su:

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \varphi, \qquad y = -a \sin \gamma t + l \cos \varphi .$$

Lagrange-ova funkcija biće:

$$L = \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + m l a \gamma^2 \sin(\varphi - \gamma t) + m g l \cos \varphi ;$$

ovde su izostavljeni članovi koji zavise samo od vremena i eliminisan je totalni izvod po vremenu od $m a l \gamma \cos(\varphi - \gamma t)$.

b) Koordinate tačke m su:

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \varphi, \qquad y = l \cos \varphi .$$

Lagrange-ova funkcija (posle eliminisanja totalnih izvoda) biće:

$$L = \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + m l a \gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi + m g l \cos \varphi .$$

c) Analogno biće

$$L = \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + m l a \gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + m g l \cos \varphi .$$

GLAVA II

ZAKONI ODRŽANJA

§ 6. Energija

Pri kretanju mehaničkog sistema menjaju se u toku vremena $2s$ veličina q_i i $\dot{q}_i$ $(i = 1,2,\cdots,s)$, koje određuje njegovo stanje. Međutim, postoje takve funkcije ovih veličina, koje održavaju pri kretanju konstantne vrednosti, koje zavise samo od početnih uslova. Te funkcije se nazivaju *integrali kretanja.*

Broj nezavisnih integrala kretanja za zatvoreni mehanički sistem sa s stepena slobode iznosi $(2s - 1)$. To je očigledno iz sledećih prostih razloga. Opšte rešenje jednačina kretanja sadrži $2s$ proizvoljnih konstanti (v. str. 4). Kako jednačine kretanja zatvorenog sistema ne sadrže vreme eksplicitno, onda je izbor početka računanja vremena potpuno proizvoljan, i jedna od proizvoljnih konstanti u rešavanju jednačina može biti uvek uzeta u obliku aditivne konstante t_0 u vremenu. Ako eliminišemo $t + t_0$ iz $2s$ funkcija

$$q_i = q_i(t + t_0, C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}),$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}),$$

izražavamo $(2s - 1)$ proizvoljnih konstanti $C_1, C_2 \cdots, C_{2s-1}$, u obliku funkcija od q i $\dot{q}$ koje su u stvari integrali kretanja.

Međutim, daleko ja od toga, da svi integrali kretanja igraju podjednako važnu ulogu u mehanici. Među njima postoji nekoliko, čija konstantnost ima vrlo duboko poreklo, povezano sa osnovnim svojstvima prostora i vremena — njihovom homogenošću i izotropnošću. Sve ove, kako se kaže, veličine koje se održavaju imaju važno opšte svojstvo: aditivnost — njhova vrednost za sistem koji se sastoji iz delova, čije se uzajamno dejstvo može zanemariti, jednako je zbiru vrednosti za svaki deo pojedinačno.

Upravo, svojstvo aditivnosti daje odgovarajućim veličinama osobito važnu mehaničku ulogu. Pretpostavimo, na primer, da dva tela uzajamno dejstvuju u toku izvesnog vremena. Kako je pre tako i posle interakcije svaki od aditivnih integrala celog sistema jednak zbiru njihovih vrednosti za oba tela pojedinačno, onda zakoni održanja tih veličina daju odmah mogućnost da se stvori niz zaključaka o stanju tela posle interakcije, ako je poznato njihovo stanje do interakcije.

Počećemo sa zakonom održanja, koji nastaje u vezi *homogenosti vremena.*

Zbog te homogenosti Lagrange-ova funkcija zatvorenog sistema ne zavisi eksiplicitno od vremena. Zbog toga totalni izvod Lagrange-ove funkcije po vremenu može biti napisan u obliku:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

(ako bi L zavisilo eksplicitno od vremena, na desnoj strani jednačine bismo dodali član $\frac{\partial L}{\partial t}$). Zamenjući izvode $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ prema Lagrange-ovoj jednačini sa $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, dobivamo

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right),$$

ili

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0.$$

Odavde se vidi da veličina

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const} \tag{6,1}$$

ostaje nepromenjena pri kretanju zatvorenog sistema, tj. ona je jedan njegov integral kretanja. Ta veličina se naziva *energija sistema.* Aditivnost energije neposredno izlazi iz aditivnosti Lagrange-ove funkcije, pomoću koje se ona izražava linearno prema relaciji (6,1).

Zakon održanja energije ne važi samo za zatvorene sisteme, već i za sisteme koji se nalaze u konstantnom spoljašnjem polju (tj. koje ne zavise od vremena). Jedino iskorišćeno, u navedenom zaključku, svojstvo Lagrange-ove funkcije — nepostojanje eksplicitne zavisnosti od vremena, postoji i u ovom slučaju. Mehanički sistemi, čija se energija održava, ponekad se nazivaju *konzervativni.*

Kako smo videli u § 5., Lagrange-ova funkcija zatvorenog sistema (ili sistema koji se nalazi u konstantnom polju) ima oblik

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

gde je T kvadratna funkcija brzina. Primenjujući na nju poznatu Euler-ovu teoremu o homogenim funkcijama, dobivamo:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Zamenjujući ovu vrednost u (6,1), nalazimo:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q); \tag{6,2}$$

a u Descartes-ovim koordinatama biće;

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots). \tag{6,3}$$

Na taj način energija sistema može biti predstavljena u obliku zbira dva bitno različita člana: kinetičke energije, koja zavisi od brzine, i potencijalne energije, koja zavisi samo od koordinata čestica.

§ 7. Impuls

Drugi zakon održanja nastaje u vezi sa *homogenošću prostora.*

Zbog te homogenosti mehanička svojstva zatvorenog sistema se ne menjaju pri ma kakvom paralelnom pomeranju sistema kao celine u prostoru. S tim u vezi, posmatraćemo beskonačno mali pomeraj $\vec{\varepsilon}$ i uzećemo da Lagrange-ova funkcija ostaje nepromenjena.

Paralelno pomeranje označava transformaciju pri kojoj se sve tačke sistema pomeraju za jednu istu veličinu, tj. njihovi radijus-vektori postaju $\vec{r}_a \to \vec{r}_a + \vec{\varepsilon}$. Promena funkcije L kao rezultat beskonačno male promene koordinata pri nepromenjenim brzinama čestica iznosi

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a = \vec{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a},$$

gde se sumiranje vrši po svim materijalnim tačkama sistema. S obzirom na proizvoljnost $\vec{\varepsilon}$, zahtev da je $\delta L = 0$, ekvivalentan je zahtevu

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0. \tag{7,1}$$

Zbog Lagrange-ove jednačine (5,2) odavde se dobiva:

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0.$$

Na taj način dolazimo do zaključka da u zatvorenom mehaničkom sistemu vektorska veličina

$$\vec{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \tag{7,2}$$

ostaje pri kretanju nepromenjena. Vektor $\vec{P}$ se naziva *impuls* sistema[1]. Diferencirajući Lagrange-ovu funkciju (5,1) nalazimo da se impuls izražava pomoću brzina tačaka na sledeći način:

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a. \tag{7,3}$$

Aditivnost impulsa je očevidna. Sem toga, za razliku od energije, impuls sistema je jednak sumi impulsa

$$\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a$$

---

[1]) Zastareli naziv — količina kretanja.

pojedinih čestica nezavisno od mogućnosti zanemarivanja interakcije među njima.

Zakon održanja sve tri komponente vektora impulsa moguć je samo u odsustvu spoljašnjeg polja. Međutim, pojedine komponente impulsa se mogu održavati i u prisustvu polja, ako potencijalna energija u njemu ne zavisi od ma koje Descartes-ove koordinate. Pri prenosu duž odgovarajuće koordinatne ose, mehanička svojstva sistema se, očigledno, ne menjaju, i na taj način konstatujemo da se projekcija impulsa na tu osu održava. Tako u homogenom polju, koje je orijentisano duž z-ose održavaju se komponente impulsa duž osa x i y.

Polazna jednačina (7,1) ima sama po sebi jednostavan fizički smisao. Izvod $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$ predstavlja silu $\vec{F}_a$, koja dejstvuje na a-tu česticu. Tako jednačina (7,1) označava, da je suma sila, koje dejstvuju na sve čestice zatvorenog sistema jednaka nuli:

$$\sum_a \vec{F}_a = 0. \tag{7,4}$$

Specijalno, u slučaju sistema koji se sastoji iz svega dve materijalne tačke, biće $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$: sila koja dejstvuje na prvu česticu od strane druge (čestice), jednaka je po veličini, ali je suprotnog smera sile kojom prva čestica dejstvuje na drugu. Ova konstatacija je poznata pod nazivom: zakon jednakosti dejstva i protivdejstva (akcije i reakcije).

Ako se kretanje prikazuje generalisanim koordinatima q_i, onda se izvodi Lagrange-ove funkcije po generalisanim brzinama

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7,5}$$

nazivaju *generalisani impulsi*, a izodi po generalisanim koordinatama

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7,6}$$

se nazivaju *generalisane sile*. Sa tim oznakama Lagrange-ove jednačine imaju oblik

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{7,7}$$

U Descartes-ovim koordinatama generalisani impulsi se poklapaju sa komponentama vektora $\vec{p}_a$. U opštem slučaju veličine p_i su linearne homogene funkcije generalisanih brzina $\dot{q}_i$, a nikako se ne svode na proizvode mase i brzine.

Zadatak

Čestica mase m, koja se kreće brzinom $\vec{v}_1$, prelazi iz poluprostora u kome je njena potencijalna energija konstantna i iznosi U_1 u poluprostor gde je ta energija takođe konstatna, ali je jednaka U_2. Odrediti promenu pravca kretanja čestice.

R e š e n j e. Potencijalne energija ne zavisi od koordinata duž osa koje su paralelne graničnoj ravni između poluprostora. Zbog toga se održava projekcija impulsa čestice na tu ravan. Ako označimo sa θ_1 i θ_2 uglove između normale na graničnoj ravni i brzina $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ do i posle prelaza, dobićemo $v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$. Veza između v_1 i v_2 je data zakonom održanja energije, i kao rezultat nalazimo

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}.$$

§ 8. Centar inercije

Impuls zatvorenog mehaničkog sistema ima različite vrednosti u odnosu na različite (inercijalne) sisteme referencije. Ako se sistem referencije K' kreće brzinom $\vec{V}$ u odnosu na sistem referencije K, onda su brzine čestica $\vec{v}_a'$ i $\vec{v}_a$ u odnosu na te sisteme povezane relacijom $\vec{v}_a = \vec{v}_a' + \vec{V}$. Zbog toga je veza među vrednostima impulsa $\vec{P}$ i $\vec{P}'$ tih sistema data formulom

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a m_a \vec{v}_a' + \vec{V} \sum_a m_a,$$

ili

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V} \sum_a m_a. \tag{8,1}$$

Specijalno, uvek postoji takav sistem referencije K' u kome je totalni impuls jednak nuli. Ako u relaciji (8,1) stavimo $\vec{P}' = 0$, nalazimo da je brzina toga sistema referencije jednaka

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\Sigma m_a} = \frac{\Sigma m_a \vec{v}_a}{\Sigma m}. \tag{8,2}$$

Ako je totalni impuls mehaničkog sistema jednak nuli, to znači, da se nalazi u miru u odnosu na odgovarajući sistem referencije. Ovo je u potpunosti prirodna generalizacija pojma mirovanja pojedine materijalne tačke. Respektivno brzina $\vec{V}$, koja je data formulom (8,2), dobiva smisao brzine „kretanja kao celine" mehaničkog sistema sa impulsom koji je različit od nule. Vidimo na taj način, da zakon održanja impulsa dozvoljava prirodno da se formuliše pojam mirovanja i brzine mehaničkog sistema kao celine.

Formula (8,2) pokazuje da je veza među impulsom $\vec{P}$ i brzinom $\vec{V}$ sistema kao celine ista takva kakva bi bila među impulsom i brzinom jedne materijalne tačke mase $\mu = \Sigma m_a$, koja je jednaka sumi masa svih čestica u sistemu. Ova se okolnost može formulisati kao potvrda o *aditivnosti mase.*

Desna strana formule (8.2) može biti predstavljena kao totalni izvod po vremenu izraza

$$\vec{R} = \frac{\Sigma m_a \vec{r}_a}{\Sigma m_a}. \tag{8,3}$$

Možemo reći da je brzina sistema kao celine jednaka brzini pomeranja tačke u prostoru, čiji je radijus-vektor dat izrazom (8,3). Takva tačka se naziva *centar inercije* sistema.

Zakon održanja impulsa zatvorenog sistema se može formulisati kao potvrda činjenice da se njegov centar inercije kreće pravolinijski i ravnomerno. U takvom obliku to je generalizacija zakona inercije koji je izveden u § 3. za jednu slobodnu materijalnu tačku, čiji se „centar inercije" poklapa s njom samom.

Pri proučavanju mehaničkih svojstva zatvorenog sistema, prirodno je koristiti se onim sistemom referencije u kome njegov centar inercije miruje. Samim tim, isključuje se iz posmatranja ravnomerno i pravolinijsko kretanje sistema kao celine koje nije od naročitg interesa.

Energija mehaničkog sistema kao celine u stanju mira se obično naziva njegovom *unutrašnjom energijom* E_u. Ona sadrži u sebi kinetičku energiju relativnog kretanja čestica u sistemu i potencijalnu energiju njihovih interakcija. Totalna energija sistema, koji se kao celina kreće brzinom V, može biti predstavljena u obliku

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_u. \tag{8,4}$$

Mada je ova formula sama po sebi dovoljno očigledna, daćemo takođe i njeno direktno izvođenje.

Energije E i E' mehaničkog sistema u dva sistema referencije K i K' vezane su relacijom

$$E = \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2}\sum_a m_a (\vec{v}'_a + \vec{V})^2 + U =$$

$$= \frac{\mu V^2}{2} + \vec{V}\sum_a m_a \vec{v}'_a + \sum_a \frac{m_a v'^2_a}{2} + U,$$

ili

$$E = E' + \vec{V}\vec{P} + \frac{\mu V^2}{2}. \tag{8,5}$$

Ovom formulom se definiše (određuje) zakon transfomacije energije pri prelazu od jednog sistema referencije na drugi, slično kao što je taj zakon dat za impuls formulom (8,1). Ako se u sistemu K' centar inercije nalazi u miru, onda je $\vec{P} = 0$ i $E' = E_u$, pa se vraćamo na formulu (8,4).

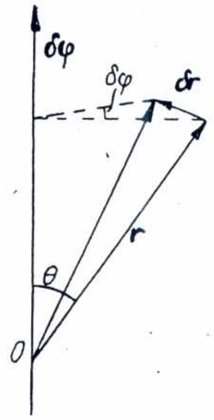
§ 9. Moment impulsa

Sada prelazimo na izvođenje zakona održanja koji je uslovljen *izotropijom prostora*.

Ova izotropija označava da se mehanička svojstva zatvorenog sistema ne menjaju pri ma kakvom obrtanju sistema kao celine u prostoru. S tim u vezi posmatraćemo beskonačno malo obrtanje sistema i uslovićemo da se njegova Lagrange-ova funkcija pri tom ne menja.

Uvešćemo vektor bekonačno malog obrtanja $\delta\vec{\varphi}$, čija je apsolutna veličina jednaka uglu obrtaja $\delta\varphi$, a orijentacija se poklapa sa osom obrtanja (i to tako, da pravac obrtanja odgovara pravilu zavrtnja u odnosu na orijentaciju $\delta\vec{\varphi}$).

Pre svega, naćićemo čemu je, pri takvom obrtanju, jednak priraštaj radijus-vektora koji je povučen iz koordinatnog početka (koji se nalazi na osi rotacije) do ma koje materijalne tačke rotirajućeg sistema. Linearno pomeranje kraja radijus-vektora je vezano sa uglom sledećom relacijom



Sl. 5

$$|\delta \vec{r}| = r \sin\theta \cdot \delta\varphi$$

(sl. 5). Pravac vektora je normalan na ravni, koja prolazi kroz $\vec{r}$ i $\delta\vec{\varphi}$. Otuda jasno izlazi da je

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}. \tag{9,1}$$

Pri obrtanju sisema menja se orijentacija ne samo radijus-vektora, već i brzina svih čestica, pri čemu se svi vektori transformišu po istom zakonu. Prema tome će priraštaj brzine, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, biti

$$\delta\vec{v} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{v}. \tag{9,2}$$

Zamenimo sada ove izraze u uslov nepromenljivosti Lagrange-ove funkcije pri obrtanju

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \partial \vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \delta \vec{v}_a \right) = 0.$$

Izvode $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$ zamenimo, prema definiciji, sa $\vec{p}_a$, a izvode $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}$, prema Lagrange-ovoj jednačini, sa $\dot{\vec{p}}_a$. Tada dobivamo:

$$\sum_a [\dot{\vec{p}}_a (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a) + \vec{p}_a (\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_a)] = 0,$$

ili, vršeći cikličnu permutaciju faktora i iznoseći $\delta\vec{\varphi}$ ispred znaka sume, imaćemo

$$\delta\vec{\varphi} \sum_a (\vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}_a + \vec{v}_a \times \vec{p}_a) = \delta\vec{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = 0.$$

S obzirom na proizvoljnost $\delta\vec{\varphi}$, odavde ćemo dobiti

$$\frac{d}{dt} \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = 0,$$

tj. dolazimo do zaključka da se pri kretanju zatvorenog sistema održava vektorska veličina

$$\vec{M} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a, \tag{9,3}$$

koja se naziva *moment impulsa* sistema, (ili prosto *moment*)[1]. Aditivnost ove veličine je očigledna, pri čemu, kao i kod impulsa, ona ne zavisi od postojanja ili nepostojanja interakcije među česticama.

Ovim se iscrpljuju aditivni integrali kretanja. Na taj način, svaki zatvoreni sistem ima svega sedam takvih integrala: energiju, i po tri komponente vektora impulsa i momenta.

Kako u definiciji momenta ulaze radijus-vektori čestica, onda njegova vrednost, opšte uzevši, zavisi od izbora koordinatnog početka. Radijus-vektori jedne iste tačke $\vec{r}_a$ i $\vec{r}'_a$ u odnosu na početak, koji se nalazi na rastojanju a, su povezani relacijom $\vec{r}_a = \vec{r}'_a + \vec{a}$. Zbog toga ćemo imati:

$$\vec{M} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = \sum_a \vec{r}'_a \times \vec{p}_a + \vec{a} \times \sum_a \vec{p}_a.$$

ili

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{a} \times \vec{P}. \tag{9,4}$$

Iz ove formule se vidi, da samo u tom slučaju kada je sistem kao celina u miru (tj. $\vec{P} = 0$) njegov moment ne zavisi od izbora koordinatnog početka. Ova neodređenost njegove vrednosti se, razumljivo, ne odražava na zakonu održanja momenta, jer se u zatvorenom sistemu impuls takođe održava.

Uvešćemo takođe formulu koja povezuje vrednost momenta impulsa u dva različita inercijalna sistema referencije K i K' od kojih se drugi kreće u odnosu na prvi brzinom $\vec{V}$. Uzećemo da se koordinatni počeci u sistemima K i K' u datom momentu poklapaju. Tada su radijus-vektori čestica u oba sistema jednaki (isti), a brzine su povezane relacijom $\vec{v}_a = \vec{v}_a' + \vec{V}$. Zbog toga će biti:

$$\vec{M} = \sum_a m_a (\vec{r}_a \times \vec{v}_a) = \sum_a m_a (\vec{r}_a \times \vec{v}_a') + \sum_a m_a (\vec{r}_a \times \vec{V}).$$

Prva suma na desnoj strani jednačine je moment $\vec{M}'$ u sistemu $\vec{K}'$. Uvodeći u drugu sumu radijus-vektor centra inercije prema (8,3) dobićemo:

$$\vec{M} = \vec{M}' + \mu (\vec{R} \times \vec{V}). \tag{9,5}$$

Ova formula definiše zakon transformacije momenta impulsa pri prelazu od jednog sistema referencije na drugi, slično tome, kako su za impuls i energiju analogni zakoni dati formulama (8,1) i (8,5).

Ako je $\vec{K}'$ takav sistem referencije u kome se dati mehanički sistem kao celina nalazi u miru, onda je $\vec{V}$ brzina centra inercije ovog, a $\mu \vec{V}$ je njegov ukupni impuls $\vec{P}$ (u odnosu na K). Tada je

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{R} \times \vec{P}. \tag{9,6}$$

[1] Upotrebljava se takođe naziv *rotacioni moment* ili *ugaoni moment*. Upotrebljava se i izraz *moment količine kretanja* (primedba prevodioca).

Drugim rečima, moment impulsa $\vec{M}$ mehaničkog sistema jednak je zbiru iz njegovog „sopstvenog momenta" u odnosu na sistem referencije u kojem on miruje i momenta $\vec{R} \times \vec{P}$ koji je vezan za njegovo kretanje kao celinu.

Mada zakon održanja sve tri komponente momenta (u odnosu na proizvoljni koordinatni početak) važi samo za zatvoreni sistem, on takođe, u izvesnom vidu, može važiti i za sistem koji se nalazi u spoljašnjem polju. Iz ranije navedenog zaključka, očevidno je, da se uvek održava projekcija momenta na takvu osu u odnosu na koju je dato polje simetrično, i zbog toga se mehanička svojstva sistema ne menjaju pri ma kakvom obrtanju oko te ose. Naravno, pri tom moment mora biti definisan u odnosu na ma koju tačku (koordinatni početak) koja se nalazi na toj istoj osi.

Najvažniji slučaj takve vrste je polje sa centralnom simetrijom, tj. polje, u kome potencijalna energija zavisi samo od rastojanja do neke određene tačke (centra) u prostoru. Očevidno je, da se pri kretanju u takvom polju održava projekcija momenta na ma koju osu, koja prolazi kroz centar. Drugim rečima, održava se vektor momenta $\vec{M}$, ali koji je (određen) definisan ne u odnosu na proizvoljnu tačku prostora, već u odnosu na centar polja.

Drugi primer: homogeno polje duž z-ose u kome se održava projekcija momenta M_z, pri čemu koordinatni početak može biti uzet proizvoljno.

Napominjemo, da projekcija momenta na ma koju osu (nazivamo je z-osa) može biti nađena diferenciranjem Lagrange-ove funkcije prema formuli

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \tag{9,7}$$

gde je koordinata φ ugao obrtanja oko z-ose. Ovo je jasno već iz karaktera ranije izloženog izvođenja zakona održanja momenta, ali se u to isto možemo uveriti i direktnim izračunavanjem. U cilindarskim koordinatima r, φ, z imaćemo zamenjujući $x_a = r_a \cos \varphi_a$, $y_a = r_a \sin \varphi_a$):

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a. \tag{9,8}$$

S druge strane, Lagrange-ova funkcija sa tim promenljivim ima oblik

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

i njena zamena u formulu (9,7) dovodi do istog izraza (9,8).

Zadaci

1. Naći izraze za Descartes-ove komponente i apsolutnu veličinu momenta impulsa čestice u cilindarskim koordinatama r, φ, z.

Odgovor:

$$M_x = m \sin \varphi \, (r \dot{z} - z \dot{r}) - m r z \dot{\varphi} \cos \varphi,$$
$$M_y = m \cos \varphi \, (z \dot{r} - r \dot{z}) - m r z \dot{\varphi} \sin \varphi,$$
$$M_z = m r^2 \dot{\varphi},$$
$$M^2 = m^2 r^2 \dot{\varphi}^2 (r^2 + z^2) + m^2 (r \dot{z} - z \dot{r})^2.$$

2. To isto u sfernim koordinatama r, θ, φ.

Odgovor:

$$M_x = mr^2 (\dot\theta \sin\varphi + \dot\varphi \sin\theta \cos\theta \cos\varphi),$$
$$M_y = mr^2 (\dot\theta \cos\varphi - \dot\varphi \sin\theta \cos\theta \sin\varphi),$$
$$M_z = mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot\varphi,$$
$$M^2 = m^2 r^4 (\dot\theta^2 + \sin^2\theta \cdot \dot\varphi^2).$$

3. Koje se komponente impulsa $\vec{P}$ i momenta $\vec{M}$ održavaju pri kretanju u sledećim poljima:

a) Polje beskonačno homogene ravni.
Odgovor: P_x, P_y, M_z (beskonačna ravan — ravan x, y).
b) Polje beskonačno homogenog cilindra.
Odgovor: M_z, P_z (osa cilindra — z - osa).
c) Polje beskonačno homogene prizme.
Odgovor: P_z (strane prizme paralelne z - osi)
d) Polje dve tačke.
Odgovor: M_z (tačke se nalaze na z - osi)
e) Polje beskonačno homogene poluravni.
Odgovor: P_y (beskonačna poluravan — deo ravni x, y koju ograničava y - osa).
f) Polje homogenog konusa.
Odgovor: M_z (osa konusa — z - osa)
g) Polje homogenog kružnog torusa.
Odgovor: M_z (osa torusa — z-osa).
h) Polje beskonačno homogene cilindarske zavojnice.

Rešenje. Lagrange-ova funkcija se ne menja pri obrtanju oko ose zavojnice (z-ose) za ugao $\delta\varphi$ i jednovremenim prenosom duž te ose za rastojanje $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$ (h je hod zavojnice). Zbog toga će biti:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi = \left(\dot P_z \frac{h}{2\pi} + \dot M_z\right)\delta\varphi = 0,$$

odakle izlazi

$$M_z + \frac{h}{2\pi} P_z = \text{const.}$$

§ 10. Mehanička sličnost

Ako se Lagrange-ova funkcija pomnoži ma kojim konstantnim faktorom, očigledno je da se ne menjaju jednačine kretanja. Ova okolnost (na koju je ukazano već u § 2.) daje mogućnost da se u nizu važnih slučajeva donesu neki bitni zaključci o svojstvima kretanja, ne vršeći konkretno integriranje jednačina kretanja.

Ovde dolazi slučaj, kada je potencijalna energija homogena funkcija koordinata, tj. funkcija koja zadovoljava uslov

$$U(\alpha\vec{r}_1, \alpha\vec{r}_2, \cdots, \alpha\vec{r}_n) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n), \tag{10,1}$$

gde je α ma koja konstanta, a k je stepen homogenosti funkcije.

Izvršićemo transformaciju pri kojoj se uporedo sa promenom svih koordinata α - puta istovremeno menja vreme (β - puta):

$$\vec{r}_a \to \alpha\vec{r}_a, \qquad t \to \beta t.$$

Sve brzine $\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt}$ se pri tom menjaju $\frac{\alpha}{\beta}$-puta, a kinetička energija $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$-puta. Potencijalna energija se povećava α^k-puta. Ako su α i β povezane relacijom

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \qquad \text{tj.} \quad \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}},$$

onda se kao rezultat takve transformacije Lagrange-ova funkcija u celini povećava uz konstantni faktor α^k, tj. jednačine kretanja ostaju nepromenjene.

Promena svih koordinata čestica označava za isti broj puta prelaz od jednih trajektorija na druge, koje su geometrijski slične prvim, a od njih se razlikuju samo linearnim dimenzijama.

Na taj način dolazimo do zaključka: ako je potencijalna energija sistema homogena funkcija k-tog stepena Descartes-ovih koordinata, onda jednačine kretanja dopuštaju geometrijski slične trajektorije, pri čemu se sva vremena kretanja (između odgovarajućih tačaka trajektorija) odnose kao

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}, \tag{10,2}$$

gde je $\frac{l'}{l}$ odnos linijskih dimenzija dve trajektorije. Zajedno sa vremenima koja su definisana stepenima odnosa $\frac{l'}{l}$ nalaze se takođe vrednosti ma kojih mehaničkih veličina u odgovarajućim tačkama trajektorija u odgovarajućim momentima. Tako ćemo za brzine, energiju i moment imati:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}, \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}}. \tag{10,3}$$

Radi ilustracije navešćemo nekoliko primera.

Kao što ćemo u daljem izlaganju videti, u slučaju takozvanih malih oscilovanja, potencijalna energija je kvadratna funkcija koordinata ($k = 2$). Iz (10,2) nalazimo da period takvih oscilovanja ne zavisi od njihove amplitude.

U homogenom polju sila, potencijalna energija je linearna funkcija koordinata (v. 5,8), tj, $k = 1$. Iz (10,2) imamo

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

Odavde, na primer, izlazi da se pri padanju u polju teže, kvadrati vremena padanja tela odnose kao njihove početne visine.

Pri njutnovskom privlačenju dve mase, ili kulonovskom uzajamnom dejstvu dva naelektrisanja, potencijalna energija je obrnuto proporcionalna rastojanju između čestica, tj. ona je homogena funkcija stepena $k = -1$. U tim slučajevima je

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}},$$

i možemo konstatovati, na primer, da su kvadrati vremena obrtanja po orbitima proporcionalni kubovima njihovih dimenzija (takozvani *treći Kepler-ov zakon*).

Ako se kretanje sistema, čija je potencijalna energija homogena funkcija koordinata, vrši u ograničenoj oblasti prostora, postoji vrlo jednostavan odnos između srednjih vrednosti, u odnosu na vreme, kinetičke i potencijalne energije. Ovaj odnos je poznat pod imenom *teorema virijala.*

Kako je kinetička energija T kvadratna funkcija brzine, onda je prema Euler-ovoj teoremi o homogenim funkcijama

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_a} \vec{v}_a = 2T,$$

ili, uvodeći impuls $\frac{\partial T}{\partial \vec{v}_a} = \vec{p}_a$:

$$2T = \sum_a \vec{p}_a \vec{v}_a = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \vec{p}_a \vec{r}_a\right) - \sum_a \vec{r}_a \dot{\vec{p}}_a. \tag{10,4}$$

Ovu jednačinu dovešćemo na srednju vrednost po vremenu. Srednjom vrednošću ma koje funkcije od vremena $f(t)$ naziva se veličina

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt.$$

Može se lako videti, ako je $f(t)$ izvod po vremenu $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ ograničene funkcije $F(t)$ (tj. funkcije koja nema beskonačne vrednosti), onda njena srednja vrednost postaje jednaka nuli. I zaista, biće

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt}\, dt = \lim_{\tau \to \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

Pretpostavimo da se sistem kreće u konačnoj oblasti prostora i sa brzinama koje ne postaju beskonačno velike. Tada je veličina $\Sigma \vec{r}_a \vec{p}_a$ ograničena i srednja vrednost prvog člana na desnoj strani jednačine (10,4) postaje jednaka nuli. U drugom članu $\dot{\vec{p}}_a$ zamenjujemo prema Newton-ovim jednačinama sa $-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$ i dobivamo[1]:

$$2\bar{T} = \overline{\sum_a \vec{r}_a \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}}. \tag{10,5}$$

[1]) Izraz na desnoj strani jednačine (10,5) se ponekad naziva virijal sistema.

Ako je potencijalna energija homogena funkcija k-tog stepena svih radijus-vektora $\vec{r}_a$, onda prema Euler-ovoj teoremi jednakost (10,5) prelazi u traženu relaciju

$$2\overline{T} = k\,\overline{U}. \tag{10,6}$$

Kako je $\overline{T} + \overline{U} = \overline{E} = E$, odnos (10,6) se može predstaviti u ekvivalentnim oblicima

$$\overline{U} = \frac{2}{k+2}E, \quad \overline{T} = \frac{k}{k+2}E, \tag{10,7}$$

koji izražavaju $\overline{U}$ i $\overline{T}$ pomoću totalne energije sistema.

Specijalno, za mala oscilovanja ($k = 2$), imaćemo:

$$\overline{T} = \overline{U},$$

tj. srednje vrednosti kinetičke i potencijalne energije se poklapaju. Za Newton-ovu interakciju ($k = -1$), biće

$$2\overline{T} = -\overline{U}.$$

Pri tom je $E = -\overline{T}$ u vezi činjenice da se pri takvoj interakciji kretanje vrši u konačnoj oblasti prostora samo pri negativnoj totalnoj energiji (v. § 15).

Zadaci

1. Kako se odnose vremena kretanja tačaka sa različitim masama pri istoj potencijalnoj energiji, a po istim trajektorijama?

Odgovor:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

2. Kako se menjaju vremena kretanja po istim trajektorijama pri promeni potencijalne energije uz konstantni faktor?

Odgovor:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U}{U'}}.$$

GLAVA III

INTEGRIRANJE JEDNAČINA KRETANJA

§ 11. Jednodimenzionalno kretanje

Jednodimenzionalno se naziva kretanje sistema sa jednim stepenom slobode. Najopštiji oblik Lagrange-ove funkcije takvog sistema, koji se nalazi u konstantnim spoljašnjim uslovima, je

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q), \tag{11,1}$$

gde je $a(q)$ neka funkcija generalisane koordinate q. Specijalno, ako je q Descartes-ova koordinata (nazvaćemo je x), biće

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{11,2}$$

Jednačine kretanja koje odgovaraju ovim Lagrange-ovim funkcijama integriraju se u opštem obliku. Pri tom čak nije neophodno napisati ni samu jednačinu kretanja, već treba odmah poći od njenog prvog integrala, tj. od jednačine koja izražava zakon održanja energije. Tako za Lagrange-ovu funkciju (11,2) imamo

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

Ovo je diferencijalna jednačina prvog reda, koja se integrira razdvajanjem promenljivih. Imaćemo

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]},$$

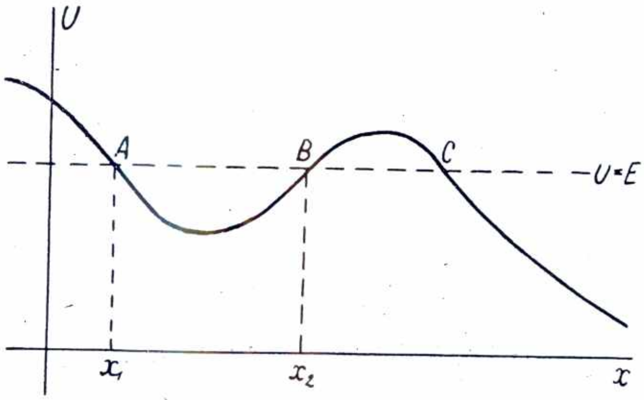
odavde izlazi

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const.} \tag{11,3}$$

Ulogu dve proizvoljne konstante u rešenju jednačine kretanja igraju ovde totalna energija E i konstanta integriranja const.

Kako je kinetička energija suštinski pozitivna veličina, onda je pri kretanju ukupna energija uvek veća od potencijalne, tj. kretanje se može vršiti samo u onim oblastima prostora gde je $U(x) < E$.

Neka, na primer zavisnost $U(x)$ ima oblik prikazan na sl. 6.



Sl. 6

Ako na tom grafikonu povučeno horizontalnu pravu koja odgovara datoj vrednosti totalne energije, odmah ćemo moći objasniti mogućne oblasti kretanja. Tako, za slučaj prikazan na sl. 6 kretanje se može vršiti samo u oblasti AB ili u oblasti desno od C.

Tačke u kojima je potencijalna energija jednaka totalnoj

$$U(x) = E, \tag{11,4}$$

određuju granice kretanja. One se nazivaju *„tačke zastoja"* pošto u njima brzina postaje jednaka nuli. Ako je oblast kretanja ograničena dvema takvim tačkama, onda se kretanje vrši u ograničenoj oblasti prostora, pa se obično naziva *finitno*. Ako pak oblast kretanja nije ograničena, ili je ograničena samo sa jedne strane — kretanje se naziva *infinitno* — čestica odlazi u beskonačnost.

Jednodimenzionalno finitno kretanje je oscilatorno — čestica se periodično kreće između dve granice (na sl. 6 u *„potencijalnoj jami"* AB između tačaka x_1 i x_2). Pri tom, prema opštem svojstvu reverzibilnosti (str. 9), vreme kretanja od x_1 do x_2 jednako je vremenu obratnog kretanja od x_2 do x_1. Zbog toga je period oscilovanja T, tj. vreme za koje tačka prođe od x_1 do x_2 i obratno, jednak dvostrukom vremenu za koji pređe otsečak $x_1 x_2$ ili prema (11,3):

$$T(E) = \sqrt{2m} \int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \tag{11,5}$$

pri čemu su granice x_1 i x_1 koreni jednačine (11,4) za datu vrednost E. Ova formula određuje period kretanja u zavisnosti od totalne energije čestice.

Zadaci

1. Odrediti period oscilovanja matematičkog klatna u ravni (tačka m na kraju konca dužine l u polju teže) u zavisnosti od njegove amplitude.

Rešenje. Energija klatna biće:

$$E = \frac{m l^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos\varphi = -mgl \cos\varphi_0,$$

gde je φ—ugao između konca i vertikale; φ_0 — maksimalni ugao između njih. Izračunavši period kao četvorostruko vreme za koje se izvrši promena ugla od nule do φ_0, nalazimo:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\limits_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

zamenom $\dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} = \sin\xi$ ovaj integral dobiva oblik:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

gde je

$$K(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\xi}}$$

takozvani totalni eliptički integral prve vrste. Kada je $\sin\frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2} \ll 1$ (mala oscilovanja) razvijena funkcija $K(k)$ daje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \cdots\right).$$

Prvi član toga reda odgovara poznatoj elementarnoj formuli.

2. Odrediti period oscilovanja u zavisnosti od energije pri kretanju čestice mase m u poljima sa potencijalnom energijom:

a) $U = A\,|x|^n$.

Odgovor:

$$T = 2\sqrt{2m}\int\limits_0^{\left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{n}}}\frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}} = \frac{2\sqrt{2m}\,E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{n}}}\int\limits_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}.$$

Zamenom $y^n = u$ integral se dovodi na takozvani Euler-ov B-integral, koji se izražava pomoću G-funkcije

$$T = \frac{2\sqrt{2\pi m}\,G\left(\frac{1}{n}\right)}{n\,A^{\frac{1}{n}}\,G\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}\,E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

Zavisnost T od E odgovara zakonu mehaničke sličnosti (10,2), (10,3).

b) $U = -\dfrac{U_0}{\mathrm{ch}^2\alpha x}$, $\quad -U_0 < E < 0$.

Odgovor:

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}.$$

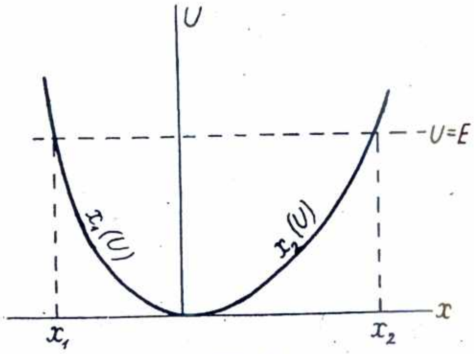
c) $U = U_0\,\mathrm{tg}^2\alpha x$

Odgovor:

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E + U_0}}.$$

§ 12. Određivanje potencijalne energije prema periodu oscilovanja

Razmatraćemo problem o tome, u kom stepenu se može ustanoviti oblik potencijalne energije $U(x)$ polja u kome čestica vrši oscilatorno kretanje prema poznatoj zavisnosti perioda toga kretanja T od energije E. Sa matematičke tačke gledišta, problem je u rešenju integralne jednačine (11,5) u kojoj se $U(x)$ posmatra kao nepoznata, a $T(E)$ kao poznata funkcija.



Sl. 7

Pri tom ćemo unapred pretpostaviti, da tražena funkcija $U(x)$ ima, u posmatranoj oblasti prostora, samo jedan minimum, ostavljajući po strani problem o mogućnosti postojanja rešenja integralne jednačine, koja ne zadovoljava taj uslov. Radi zgodnijeg izračunavanja uzećemo koordinatni početak u položaju minimuma potencijalne energije, a vrednost potencijalne energije u toj tački stavićemo da je jednaka nuli (sl. 7).

Transformisaćemo integral (11,5), smatrajući u njemu koordinatu x kao funkciju od U. Funkcija $x(U)$ je dvoznačna. Svaka vrednost potencijalne energije se ostvaruje za dve različite vrednosti x-a. Shodno tome, integral (11,5), u kome zamenjujemo dx sa $\frac{dx}{dU}dU$, prelazi u sumu dva integrala: od $x = x_1$ do $x = 0$ i od $x = 0$ do $x = x_2$. Napisaćemo zavisnost x od U u te dve oblasti respektivno kao $x = x_1(U)$ i $x = x_2(U)$.

Granice integriranja po dU očigledno biće: E i 0, tako da dobivamo

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m}\int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} =$$

$$= \sqrt{2m}\int_0^E \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU}\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U}}.$$

Podelimo obe strane te jednačine sa $\sqrt{\alpha - E}$, gde je α—parametar i integrirajmo po E od nule do α:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha\int_0^E \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right]\frac{dU\,dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}},$$

ili, menjajući red integriranja:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right]dU\int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}.$$

Integral po dE se izračunava elementarno i ispostavlja se da je jednak π. Posle toga integriranje po dU postaje trivialno i daje

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \pi\sqrt{2m}\left[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)\right],$$

(pri tom je uzeto u obzir da je $x_2(0) = x_1(0) = 0$). Zamenjujući sada α sa U, definitivno nalazimo

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U-E}}. \tag{12,1}$$

Na taj način, prema poznatoj funkciji $T(E)$ određuje se razlika $x_2(U) - x_1(U)$. Same pak funkcije $x_2(U)$ i $x_1(U)$ ostaju neodređene. To znači, da postoji ne jedna, već beskonačno mnogo krivih $U = U(x)$ koje dovode do date zavisnosti perioda od energije i razlikuju se uzajamno takvim deformacijama, koje ne menjaju razliku dve vrednosti x, koje odgovaraju jednoj istoj vrednosti U.

Mnogoznačnost rešenja nestaje ako je potrebno da kriva $U = U(x)$ bude simetrična u odnosu na ordinatnu osu, tj. da bude

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U).$$

U takvom slučaju formula (12,1) daje za $x(U)$ jednoznačni izraz

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U-E}}. \tag{12,2}$$

§ 13. Redukovana masa

Potpuno rešenje u opštem obliku dopušta značajno važan zadatak o kretanju sistema koji se sastoji svega od dve čestice koje uzajamno deluju („*problem dvaju tela*").

Kao prethodni korak u rešavanju toga zadatka, pokazaćemo na koji način on može biti suštinski uprošćen razlaganjem kretanja sistema na kretanje centra inercije i kretanje tačaka u odnosu na ovaj poslednji.

Potencijalna energija uzajamnog dejstva dve čestice zavisi od njihovog rastojanja, tj. od apsolutne veličine razlike njihovih radijus-vektora. Prema tome će Lagrange-ova funkcija takvog sistema biti:

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \tag{13,1}$$

Uvešćemo vektor međusobnog rastojanja među obe tačke:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

i uzmimo koordinatni početak u centru inercije, što daje:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0.$$

Iz poslednje dve jednačine nalazimo:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \tag{13,2}$$

Zamenjujući te izraze u (13,1) dobivamo:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r}), \tag{13,3}$$

gde je uvedena oznaka

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \tag{13,4}$$

a veličina m se naziva *redukovana masa.* Funkcija (13,3) se formalno poklapa sa Lagrange-ovom funkcijom jedne materijalne tačke mase m, koja se kreće u spoljšnjem polju $U(r)$, koje je simetrično u odnosu na nepokretni koordinatni početak.

Na taj način se zadatak o kretanju dve materijalne tačke koje deluju jedna na drugu svodi na rešavanje zadatka o kretanju jedne tačke u datom spoljašnjem polju $U(r)$. Prema rešenju $\vec{r} = \vec{r}(t)$ toga zadatka, trajektorije $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$ i $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$ svake čestice m_1 i m_2 pojedinačno (u odnosu na njihov opšti centar inercije) se dobivaju prema formulama (13,2).

Zadatak

Sistem se sastoji iz jedne čestice mase M i n čestica jednakih masa m. Isključiti kretanje centra inercije i zadatak svesti na problem o kretanju n čestica.

Rešenje. Neka je $\vec{R}$ radijus-vektor čestice M, a $\vec{R}_a$ $(a = 1, 2, \cdots, n)$ radijus-vektori čestica masa m. Uvedimo rastojanja od čestice M do čestice m:

$$\vec{r}_a = \vec{R}_a - \vec{R}$$

i postavimo koordinatni početak u centar inercije:

$$M\vec{R} + m\sum_a \vec{R}_a = 0.$$

Iz ovih jednačina nalazimo:

$$\vec{R} = -\frac{m}{M + nm}\sum_a \vec{r}_a, \qquad \vec{R}_a = \vec{R} + \vec{r}_a.$$

Ako taj izraz zamenimo u Lagrange-ovu funkciju

$$L = \frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{m}{2}\sum \dot{\vec{R}}_a^2 - U,$$

dobivamo:

$$L = \frac{m}{2}\sum \dot{\vec{r}}_a^2 - \frac{m^2}{2(M + nm)}\left(\sum_a \dot{\vec{r}}_a\right)^2 - U.$$

Potencijalna energija zavisi samo od rastojanja između čestica i zbog toga može biti predstavljena kao funkcija vektora $\vec{r}_a$.

§ 14. Kretanje u centralnom polju

Svodeći problem o kretanju dva tela na zadatak o kretanju jednog tela, došli smo do pitanja određivanja kretanja čestice u spoljašnjem polju u kome njegova potencijalna energija zavisi samo od rastojanja r do određene nepokretne tačke; takvo polje se naziva *centralno*. Sila

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r},$$

koja dejstvuje na česticu po apsolutnoj veličini pri tom zavisi takođe samo od r i orijentisana je u svakoj tački duž radijus-vektora.

Kako je već bilo navedeno u § 9., pri kretanju u centralnom polju, održava se moment sistema u odnosu na centar polja. Za jednu česticu biće:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Kako su vektori $\vec{M}$ i $\vec{r}$ uzajamno normalni, konstantnost $\vec{M}$ pokazuje da pri kretanju čestice njen radijus-vektor za celo vreme ostaje u jednoj ravni, koja je normalna na $\vec{M}$.

Na taj način trajektorija kretanja čestice u centralnom polju se u celini nalazi u jednoj ravni. Uvodeći polarne koordinate r i φ napisaćemo Lagrange-ovu funkciju u obliku:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r), \tag{14,1}$$

[uporedi (4,5)].

Ova funkcija ne sadrži u eksplicitnom obliku koordinatu φ. Svaka generalisana koordinata q_i, koja u eksplicitnom obliku ne ulazi u Lagrange-ovu funkciju, naziva se *ciklična*. Zbog Lagrange-ove jednačine za takvu koordinatu imamo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

tj. njen odgovarajući generalisani impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ je integral kretanja. Ova okolnost dovodi do bitnog uprošćavanja zadatka integriranja jednačina kretanja pomoću cilindarskih koordinata.

U datom slučaju generalisani impuls

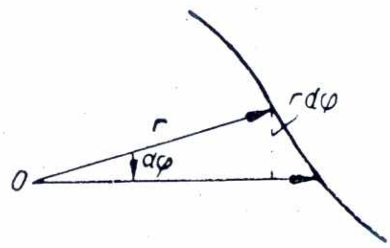
$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

se poklapa sa momentom $M_z = M$ [v.(9,6)] tako da vraćajući se na već poznati zakon održanja momenta:

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \tag{14,2}$$

konstatuje se, da za kretanje jedne čestice u ravni u centralnom polju, taj zakon dozvoljava jednostavnu geometrijsku interpretaciju. Izraz $\frac{1}{2} r \cdot r\, d\varphi$ predstavlja površinu sektora, koji obrazuju dva beskonačno bliska radijus-vektora i element luka trajektorije (sl. 8). Ako ga označimo sa df, moment čestice napisaćemo u obliku

$$M = 2m\dot{f}, \tag{14,3}$$



Sl. 8

gde se izvod $\dot{f}$ naziva *sektorska brzina.* Zbog toga održanje momenta označava konstatnost sektorske brzine—za jednake vremenske intervale radijus-vektor tačke u kretanju opisuje jednake površine (takozvani *drugi Kepler-ov zakon*)[1].

Potpuno rešenje zadatka o kretanju čestice u centralnom polju najprostije se dobiva polazeći od zakona održanja energije i momenta, ne koristeći direktno pri tom same jednačine kretanja. Izražavajući $\dot{\varphi}$ pomoću M iz (14,2) i zamenjujući u izrazu za energiju, dobivamo:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \tag{14,4}$$

Odavde izlazi:

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}, \tag{14,5}$$

a razdvajanjem promenljivih i integriranjem dobivamo:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{const.} \tag{14,6}$$

Dalje, ako relaciju (14,2) napišemo u obliku

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt,$$

i ovde zamenimo dt iz (14,5) integriranjem, dobivamo:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const.} \tag{14,7}$$

Formule (14,6) i (14,7) rešavaju u opštem obliku postavljeni zadatak. Ova druga određuje vezu između r i φ, tj. jednačinu trajektorije. Formula (14,6) određuje u implicitnom obliku rastojanje r tačke u kretanju od centra, kao funkciju vremena. Napominjemo da se ugao φ uvek menja u toku vremena monotono — iz (14,2) se vidi da $\dot{\varphi}$ nikad ne menja znak.

[1] Zakon održanja momenta za česticu koja se kreće u centralnom polju se ponekad naziva *integral površine.*

Izraz (14,4) pokazuje da radijalni deo kretanja možemo smatrati kao ravnomerno kretanje u polju sa „efektivnom" potencijalnom energijom

$$U_{ef} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \tag{14,8}$$

Veličina $\frac{M^2}{2mr^2}$ se naziva centrifugalna energija. Vrednosti r, za koju je

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E, \tag{14,9}$$

određuju granicu oblasti kretanja prema rastojanju od centra. Ako je jednačina (14,9) zadovoljena, radijalna brzina $\dot{r}$ postaje jednaka nuli. To ne znači zastoj čestice (kao pri otvorenom ravnomernom kretanju), jer ugaona brzina $\dot{\varphi}$ ne postaje jednaka nuli. Jednakost $\dot{r} = 0$ označava „povratnu tačku" trajektorije u kojoj funkcija $r(t)$ prelazi od povećanja na smanjenje ili obrnuto.

Ako je oblast dozvoljene promene r ograničena samo jednim uslovom $r \geqslant r_{min}$ onda je kretanje čestice infinitno — njena trajektorije dolazi iz beskonačnosti i odlazi u beskonačnost.

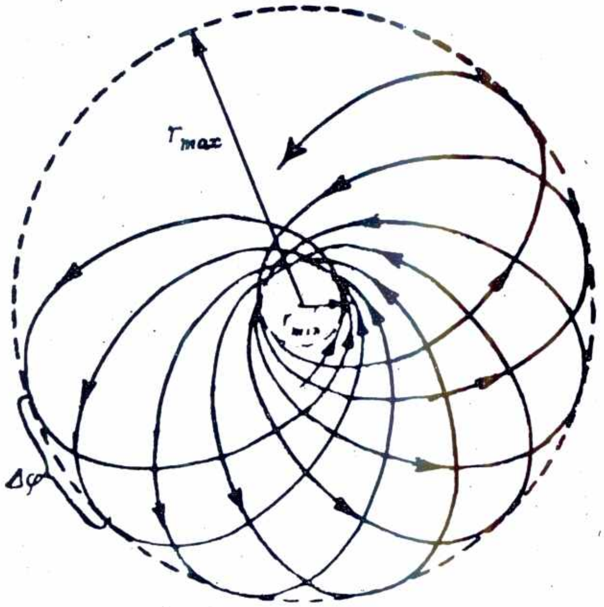
Ako oblast promene r ima dve granice r_{min} i r_{max}, onda je kretanje finitno i trajektorija se u celini nalazi unutar prstena, koji je ograničen krugovima $r = r_{max}$ i $r = r_{min}$. Ovo, međutim, ne znači da je trajektorija uvek zatvorena kriva. Za vreme, u toku koga se, r menja od r_{max} do r_{min} a zatim do r_{max}, radijus-vektor se obrne za ugao $\Delta\varphi$ koji je prema (14,7) jednak

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}\, dr}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \tag{14,10}$$

Uslov da je trajektorija zatvorena nalazi se u činjenici da je taj ugao jednak racionalnom delu 2π, tj. da ima oblik $\Delta\varphi = \frac{2\pi m}{n}$, gde su m i n celi brojevi. Tada se kroz n ponavljanja perioda vremena radijus-vektor tačke, koja učini m celih obrta poklapa sa svojom prvobitnom vrednošću, tj. trajektorija se zatvara. Međutim, takvi slučajevi su izuzetni, i pri proizvoljnom obliku $U(r)$ ugao $\Delta\varphi$ nije racionalni deo od 2π. Zbog toga u opštem slučaju trajektorija ograničenog (finitnog) kretanja nije zatvorena. Ona bezbroj puta prolazi kroz minimalno i maksimalno rastojanje (kao, npr., na sl. 9) i za beskonačno vreme ispunjava ceo prsten između dve granične kružne linije.

Postoje dva tipa centralnih polja u kojima su sve trajektorije finitnih kretanja zatvorene. To su polja u kojima je potencijalna energija čestice proporcionalna sa $\frac{1}{r}$ ili r^2. Prvi sučaj je razmotren u sledećem paragrafu, a drugi odgovara takozvanom prostornom oscilatoru (v. zad. 4 § 23).

U povratnoj tački kvadratni koren (14,5) menja znak [a zajedno s njim i podintegralni izraz u (14,6) i (14,7)]. Ako se ugao φ računa od pravca radijus-vektora, koji je povučen do tačke obrtanja, onda se granični odsečci trajektorije s obe strane te tačke razlikuju samo znakom φ za sve njene vrednosti r. To znači da je trajektorija simetrična u odnosu na navedeni pravac. Počevši, recimo, od ma koje tačke $r = r_{\max}$ pređemo odsečak trajektorije do tačke sa $r = r_{\min}$, zatim ćemo imati simetrično postavljen takav isti odsečak do sledeće tačke sa $r = r_{\max}$ itd., tj. cela trajektorija se dobiva prelaženjem jednakih odsečaka u jednom i drugom pravcu. Ovo se odnosi na infinitne trajektorije koje se sastoje iz dve simetrične grane koje se rasprostiru od tačke obrtanja, $r_{\min}$ do beskonačnosti.



Sl. 9

Postojanje centrifugalne energije (pri kretanju sa $M \neq 0$), koja kada $r \to 0$ postaje beskonačna, kao $\frac{1}{r^2}$ dovodi obično do nemogućnosti prodiranja čestica do centra polja, čak i kada poslednje samo po sebi ima karakter privlačenja: „Padanje" čestice u centar je mogućno samo ako potencijalna energija dosta brzo teži ka $-\infty$ kada $r \to 0$. Iz nejednačine

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0,$$

ili

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2$$

izlazi da r može dobiti vrednost koja teži nuli samo pri uslovu

$$r^2 U(r)\Big|_{r \to 0} < -\frac{M^2}{2m}, \tag{14,11}$$

tj. $U(r)$ mora težiti ka $-\infty$ bilo kao $-\frac{\alpha}{r^2}$ sa $\alpha > \frac{M^2}{2m}$, bilo proporcijalno sa $-\frac{1}{r^n}$ sa $n > 2$.

Zadatak

1. Integrirati jednačine kretanja sfernog klatna—materijalne tačke m, koja se kreće po površini sfere poluprečnika l u polju teže.

R e š e n j e. U sfernim koordinatama s početkom u centru sfere i polarnom osom orijentisanom vertikalno naniže, Lagrange-ova funkcija klatna biće

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2)\, mgl\cos\theta.$$

Koordinata φ je ciklična, pa se zbog toga održava generalisani impuls p_φ, koji se poklapa sa z-komponentom momenta

$$ml^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} = M_z = \text{const.} \tag{1}$$

Energija će biti

$$E = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgl\cos\theta = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta. \tag{2}$$

Određujući odavde $\dot{\theta}$ i razdvajajući promenljive, dobivamo:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}[E - U_{\text{ef}}(\theta)]}}, \tag{3}$$

gde je uvedena „efektivna potencijalna energija“

$$U_{\text{ef}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta.$$

Za ugao φ, koristeći (1) nalazimo vrednost:

$$\varphi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}}\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E - U_{\text{ef}}(\theta)}}. \tag{4}$$

Integrali (3) i (4) dovode do eliptičkih integrala respektivno prve i treće vrste.

Oblast kretanja prema uglu θ određuje se iz uslova $E > U_{\text{ef}}$, a njene granice, jednačinom $E = U_{\text{ef}}$. Poslednja predstavlja kubnu jednačinu od $\cos\theta$, koja u intervalu od -1 do $+1$ ima dva korena koji određuju položaj dve paralelne kružne linije na sferi između kojih se nalazi cela trajektorija.

2. Integrirati jednačine kretanja materijalne tačke, koja se kreće po površini konusa (sa uglom 2α pri vrhu) koji je postavljen vertikalno, sa vrhom naniže, u polju teže,

Rešenje. U sfernim koordinatama s početkom u vrhu konusa i polarnom osom, orijentisanom vertikalno naviše, Lagrange-ova funkcija biće

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha.$$

φ je ciklična koordinata, tako da se ponovo održava

$$M_z = mr^2\sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi}.$$

Energija će biti

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha.$$

Na isti način kao i u zadatku (1), nalazimo

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{ef}}(r)]}},$$

$$\varphi = \frac{M_z}{\sin^2\alpha\sqrt{2m}}\int \frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{\text{ef}}(r)}},$$

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha.$$

Uslov $E = U_{ef}(r)$ predstavlja (pri $M_z \neq 0$) kubnu jednačinu za r, koja ima dva pozitivna korena. Njima se određuje položaj dve horizontalne kružne linije na površini konusa između kojih se nalazi trajektorija.

3. Integrirati jednačine kretanja klatna u ravni čija je tačka vešanja (s masom m_1) sposobna da vrši kretanje u horizontalnom pravcu (v. sl. 2).

R e š e n j e. U Lagrange-ovoj funkciji koja je nađena u zadatku 2 § 5 koordinata x je ciklična. Zbog toga se održava generalisani impuls P_x, koji se poklapa sa horizontalnom komponentom ukupnog impulsa sistema:

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi = \text{const}. \tag{1}$$

Uvek se može smatrati da sistem kao celina miruje: tada je const = 0, i integriranje jednačine (1) daje relaciju

$$(m_1 + m_2) x + m_2 l \sin\varphi = \text{const}, \tag{2}$$

koja izražava nepomičnost centra inercije sistema u horizontalnom pravcu. Koristeći relaciju (1) dobivamo energiju u obliku

$$E = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\varphi\right) - m_2 g l \cos\varphi. \tag{3}$$

Odavde izlazi

$$t = l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2\varphi}{E + m_2 g l \cos\varphi}}\, d\varphi.$$

Ako izrazimo koordinate $x_2 = x + l\sin\varphi$, $y_2 = l\cos\varphi$ čestice m_2 pomoću (2) preko φ, nalazimo da trajektorija te čestice predstavlja odsečak elipse sa horizontalnom poluosom $\frac{l m_1}{m_1 + m_2}$ i vertikalnom l. Kada $m_1 \to \infty$ vraćamo se na obično matematičko klatno koje osciluje po luku kruga.

§ 15. Kepler-ov problem

Najvažniji slučaj centralnih polja su polja u kojima je potencijalna energija obrnuto proporcionalna sa r i shodno tome sile su obrnuto proporcionalne sa r^2. Ovde dolaze gravitaciona i elektrostatička polja. Prva, kako je poznato, imaju karakter privlačenja, a druga mogu biti kako polja privlačenja tako i odbijanja.

U početku ćemo posmatrati polje privlačenja u kome je

$$U = -\frac{\alpha}{r} \tag{15,1}$$

s pozitivnom konstantom α. Grafik „efektivne“ potencijalne energije

$$U_{ef} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{15,2}$$

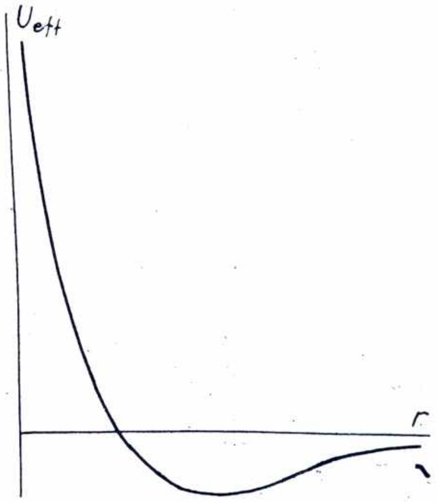
ima oblik koji je prikazan na sl. 10. Kada $r \to 0$ ona postaje $+\infty$, a kada $r \to \infty$ ona teži nuli sa strane negativnih vrednosti. Kada je $r = \frac{M^2}{\alpha m}$ ona ima minimum koji iznosi

$$(U_{ef})_{min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}. \tag{15,3}$$

Iz toga grafika se odmah vidi da će pri $E > 0$ kretanje čestice biti infinitno, a kada je $E < 0$ finitno.

Oblik trajektorije se dobiva pomoću opšte formule (14,7). Zamenjujući u njoj $U = -\frac{\alpha}{r}$ i vršeći elementarno integriranje, dobiva se

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{const.}$$



Sl. 10

Ako početak računanja ugla φ uzmemo tako da je const $= 0$ i uvodeći oznake

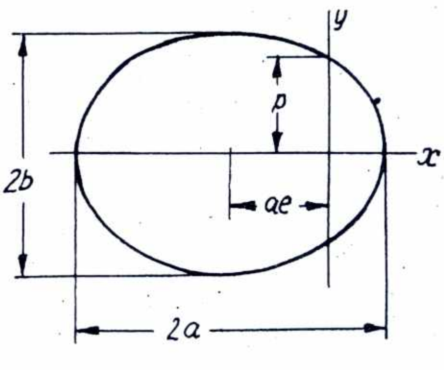
$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \tag{15,4}$$

napisaćemo formulu trajektorije u obliku

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi. \tag{15,5}$$

To je jednačina konusnog preseka sa fokusom u koordinatnom početku; p i e su takozvani *parametar* i *ekscentricitet* orbite. Izbor početka računanja φ, koji smo izvršili, sastoji se, kako se vidi iz (15,5) u tome da je tačka sa $\varphi = 0$ najbliža centru (takozvani *perihel orbite*).

U ekvivalentnom zadatku dva tela, koja uzajamno dejstvuje prema zakonu (15,1), orbita svake čestice takođe predstavlja konusni presek sa fokusom u njihovom zajedničkom centru inercije.



Sl. 11

Iz (15,4) vidi se da je pri $E < 0$ ekscentricitet $e < 1$, tj. orbita je elipsa (sl. 11) i kretanje je finitno u saglasnosti sa onim što je rečeno u početku paragrafa Prema poznatim formulama analitičke geometrije velika i mala poluosa elipse će biti

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{15.6}$$

Najmanje dozvoljena vrednost energije poklapa se sa (15,3), pri čemu je $e = 0$, tj. elipsa se pretvara u krug. Napominjemo, da velika poluosa elipse zavisi samo od energije čestice (ali ne i od momenta). Najmanje i najveće rastojanje do centra polja (fokusa elipse) iznosi:

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \qquad r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e). \tag{15,7}$$

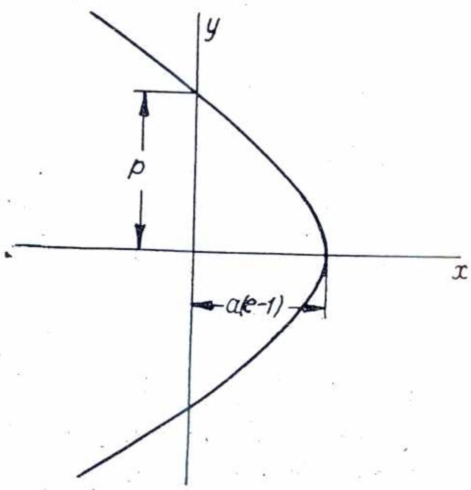
Ovi izrazi [sa a i e iz (15,6) i (15,4)] se mogu dobiti i neposredno kao koreni jednačine $U_{ef}(r) = E$.

Vreme obrtanja po eliptičnoj obrti, tj. period kretanja T, zgodno je odrediti pomoću zakona održanja momenta u obliku „integrala površine" (14,3). Integrirajući tu jednačinu po vremenu od nule do T, dobivamo:

$$2mf = TM,$$

gde je f površina orbite. Za elipsu je $f = \pi ab$ i pomoću formula (15,6) nalazimo

$$T = 2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \qquad (15,8)$$



Sl. 12

Činjenica, da kvadrat perioda mora biti proporcionalan kubu linijskih razmera orbite bila je navedena već u § 10. Napominjemo, takođe, da period zavisi samo od energije čestice.

Kada je $E \geqslant 0$, kretanje je infinitno. Ako je $E > 0$, onda je ekscentricititet $e > 1$, tj. trajektorija je hiperbola, koja obuhvata centar polja (fokus), kako je prikazano na sl. 12.

Rastojanje perihela od centra iznosi

$$r_{\min} = \frac{p}{e+1} = (e-1), \qquad (15,9)$$

gde je

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$$

„poluosa" hiperbole

U slučaju pak $E = 0$, ekscentricitet iznosi $e = 1$, tj. čestica se kreće po paraboli sa rastojanjem perihela $r_{\min} = \frac{p}{2}$. Ovaj slučaj se realizuje ako čestica počinje svoje kretanje iz stanja mira u beskonačnosti.

Zavisnost koordinata čestice od vremena pri kretanju po orbiti može se naći pomoću opšte formule (14,6). Ona se može predstaviti u pogodnom parametarskom obliku na sledeći način.

U početku ćemo posmatrati eliptične orbite. Uvodeći a i e prema (15,4) i (15,6) napisaćemo integral (14,6) koji određuje vreme u obliku

$$t = \sqrt{\frac{2|E|}{m}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|}r - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

Pomoću prirodne zamene

$$r - a = -ae\cos\xi$$

taj integral se dovodi do oblika

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)\,d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi) + \text{const}.$$

Uzimajući početak računanja vremena tako, da const. postaje jednaka nuli, dobiva se definitivno sledeće parametarsko prikazivanje zavisnosti r od t:

$$r = a(1 - e\cos\xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi) \tag{15,10}$$

(u momentu $t = 0$ čestica se nalazi u perihelu). Pomoću tog istog parametra ξ mogu se izraziti i Descartes-ove koordinate čestice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (ose x i y su orijentisane respektivno po velikoj i maloj poluosi elipse). Iz (15,5) i (15,10) imamo:

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e),$$

a y nalazimo kao $\sqrt{r^2 - x^2}$. Definitivno imamo:

$$x = a(\cos\xi - e), \qquad y = a\sqrt{1 - e^2}\sin\xi. \tag{15,11}$$

Celom obrtu po elipsi odgovara promena parametra ξ od nule do 2π.

Potpuno slična izračunavanja za hiperbolične trajektorije dovodi do rezultata

$$\left.\begin{aligned} r &= a(e\,\mathrm{ch}\,\xi - 1), \qquad t = \sqrt{\frac{ma^3}{x}}(e\,\mathrm{sh}\,\xi - \xi), \\ x &= a(e - \mathrm{ch}\,\xi), \qquad y = a\sqrt{e^2 - 1}\,\mathrm{sh}\,\xi, \end{aligned}\right\} \tag{15,12}$$

gde parametar ξ ima vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$.

Pređimo na kretanje u polju odbijanja u kome je

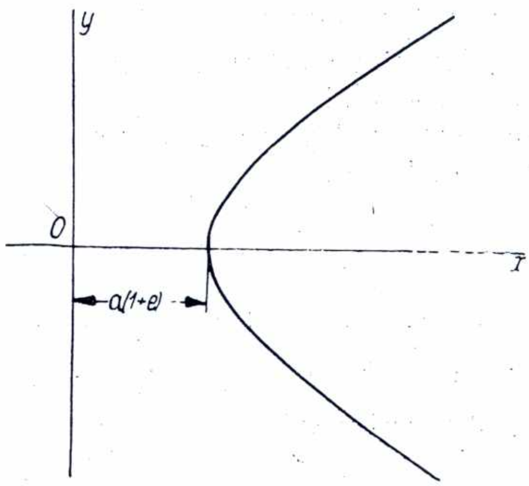
$$U = \frac{\alpha}{r} \tag{15,13}$$

($\alpha > 0$). U tom slučaju efektivna potencijalna energija

$$U_{\text{ef}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

monotono opada od $+\infty$ do nule pri promeni r od nule do ∞. Energija čestice može biti samo pozitivna i kretanje je uvek infinitno. Sva izračunavanja za ovaj slučaj su potpuno analogna ranije izvršenim. Trajektorija je hiperbola (ili parabola kada je $E = 0$):

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \tag{15,14}$$



Sl. 13

[p i e se određuju ranije datim formulama (15,4)]. Ona prolazi mimo centra polja kako je pokazano na sl. 13. Rastojanje perihela biće:

$$r_{\min} = \frac{p}{e - 1} = a(e + 1). \tag{15,15}$$

Zavisnost od vremena je data parametarskim jednačinama

$$r = a(e \operatorname{ch} \xi + 1), \qquad t = \sqrt{\frac{m a^3}{\alpha}} (e \operatorname{sh} \xi + \xi), \tag{15,16}$$
$$x = a(\operatorname{ch} \xi + e), \qquad y = a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} \xi.$$

Na kraju ćemo ukazati da pri kretanju u polju $U = \frac{\alpha}{r}$ (sa ma kojim znakom α) postoji integral kretanja specifičan baš za to polje. Lako se može proveriti neposrednim izračunavanjem da je veličina

$$\vec{V} \times \vec{M} + \frac{\alpha \vec{r}}{r} = \text{const}. \tag{15,17}$$

I zaista njen totalni izvod po vremenu iznosi

$$\dot{\vec{V}} \times \vec{M} + \frac{\alpha \vec{v}}{r} - \frac{\alpha \vec{r}(\vec{v} \cdot \vec{r})}{r^3},$$

ili zamenom $\vec{M} = m \vec{r} \times \vec{v}$:

$$m\vec{r}(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) - m\vec{v}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}}) + \frac{\alpha \vec{v}}{r} - \frac{\alpha \vec{r}(\vec{v} \cdot \vec{r})}{r^3};$$

i ako ovde stavimo prema jednačini kretanja $m\dot{\vec{v}} = \frac{\alpha \vec{r}}{r^3}$, nalazimo, da ovaj izraz postaje jednak nuli.

Napominjemo da su integral kretanja (15,17) kao i integrali M i E jednoznačne funkcije stanja čestice (položaja i brzine). Videćemo u § 50. da je pojava takvog dopunskog jednoznačnog integrala vezana sa takozvanom degeneracijom kretanja.

Zadaci

1. Naći zavisnost koordinata čestice od vremena pri kretanju u polju $U = -\frac{\alpha}{r}$ sa energijom $E = 0$ (po paraboli).

Rešenje: U integralu

$$t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m} r - \frac{M^2}{m^2}}}$$

izvršićemo zamenu

$$r = \frac{M^2}{2m\alpha}(1 + \eta^2) = \frac{p}{2}(1 + \eta^2)$$

i kao rezultat dobivamo sledeće parametarsko prikazivanje tražene zavisnosti.

$$r = \frac{p}{2}(1+\eta^2), \qquad t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\,\frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{2}\right),$$

$$x = \frac{p}{2}(1-\eta^2), \qquad y = p\eta.$$

Parametar η ima vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$.

2. Integrirati jednačine kretanja materijalne tačke u centralnom polju $U = -\frac{\alpha}{r^2}$; $\alpha > 0$.

Rešenje. Prema formulama (14,6) i (14,7) sa odgovarajućim izborom početka izračunavanja φ i t, nalazimo:

a) kada je $E > 0$, $\frac{M^2}{2m} > \alpha$; $\quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2m\alpha}}\cos\left[\varphi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{M^2}}\right]$,

b) kada je $E > 0$, $\frac{M^2}{2m} < \alpha$; $\quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - M^2}}\,\mathrm{sh}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right]$,

c) kada je $E < 0$, $\frac{M^2}{2m} < \alpha$; $\quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - M^2}}\,\mathrm{ch}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right]$.

U sva tri slučaja biće:

$$t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha}\,.$$

U slučajevima b) i c) čestica „pada“ u centar po trajektoriji koja se približava koordinatnom početku kada $\varphi \to \infty$. Padanje sa datog rastojanja r se vrši za konačno vreme koje iznosi

$$\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m} + Er^2} - \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m}}\right\}.$$

3. Dodavanjem potencijalnoj energiji $U = -\frac{\alpha}{r}$ male dopune $\delta U(r)$ trajektorije finitnog kretanja prestaju biti zatvorene i pri svakom obrtanju perihela orbita se pomera za malu ugaonu veličinu $\delta\varphi$. Odrediti $\delta\varphi$ za slučajeve: a) $\delta U = \frac{\beta}{r^2}$; b) $\delta U = \frac{\gamma}{r^3}$.

Rešenje. Pri promeni r od $r_{\min}$ do $r_{\max}$ i ponovo do $r_{\min}$ ugao $\delta\varphi$ se menja za veličinu koja je data formulom (14,10), koju predstavljamo u obliku:

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}\,dr$$

(s ciljem da se izbegne niže fiktivno divergiranje integrala). Stavimo $U = -\frac{\alpha}{r} + \delta U$ i razložimo podintegralnu vrednost po stepenima δU. Nulti član reda daje 2π, a član prvog reda traženi pomeraj $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{2m\delta U\cdot dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{x}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^\pi r^2\delta U\,d\varphi\right), \qquad (1)$$

gde smo od integriranja po dr prešli na integriranje po $d\varphi$ duž trajektorije „neperturbovanog" kretanja.

U slučaju a) integiranje u (1) je trivijalno i daje:

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

[p je parametar neperturbovane elipse iz (15,4)]. U slučaju b) $r^2\,\delta U = \frac{\gamma}{r}$, i ako uzmemo $\frac{1}{r}$ iz (15,5) dobivamo:

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}.$$

GLAVA IV

SUDARI ČESTICA

§ 16. Raspadanje čestica

Već sami po sebi, zakoni održanja impulsa i energije omogućavaju da se u mnogim slučajevima donese niz važnih zaključaka o svojstvima različitih mehaničkih procesa. Pri tom je naročito važna činjenica da ta svojstva apsolutno ne zavise od konkretne vrste interakcija među česticama koje učestvuju u procesu.

Počećemo od procesa koji predstavlja „spontani" (tj. bez dejstva spoljašnjih sila) raspad čestice na dva „sastavna dela" tj. na dve druge čestice koje se posle raspadanja kreću nezavisno jedna od druge.

Taj proces najprostije izgleda kada se posmatra u sistemu referencije u kome je čestica (do raspada) mirovala. Zbog zakona održanja impulsa, zbir impulsa obe nastale čestice kao rezultat raspada takođe je jednak nuli, tj. čestice se udaljuju sa jednakim, a suprotnog smera impulsima. Njihova opšta apsolutna vrednost (označimo je sa p_0) se određuje pomoću zakona o održanju energije

$$E_u = E_{1u} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2u} + \frac{p_0^2}{2m_2},$$

gde su m_1 i m_2 mase čestica, E_{1u} i E_{2u} njihove unutrašnje energije, a E_u unutrašnja energija prvobitne čestice (koja se raspada). Označimo sa ε „energiju raspada", tj. razliku

$$\varepsilon = E_u - E_{1u} - E_{2u}; \tag{16,1}$$

(očevidno je da ta veličina mora biti pozitivna zbog toga, da bi raspad bio uopšte moguć). Tada imamo:

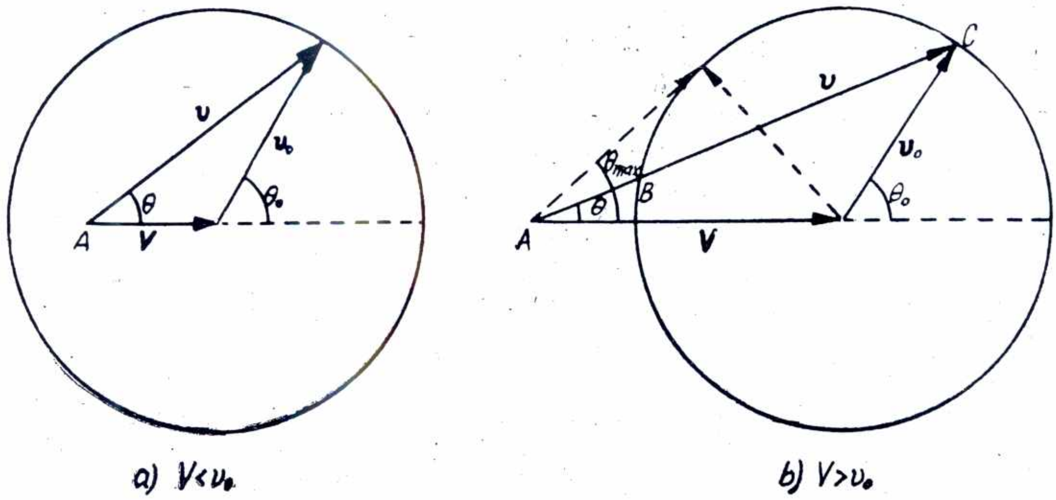
$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_0^2}{2m}, \tag{16,2}$$

čime se i određuje p_0 (m je redukovana masa obeju čestica); brzine čestica su $v_{10} = \frac{q_0}{m_1}$, $v_{20} = \frac{p_0}{m_2}$.

Sada prelazimo na sistem referencije u kome se prvobitna čestica pre raspada kreće brzinom V. Ovaj sistem se obično naziva laboratorijski (ili L-sistem) nasuprot „sistemu centra inercije" (ili C-sistemu), u kome je totalni impuls jednak nuli. Posmatrajmo jednu od raspadajućih čestica i neka su $\vec{v}$ i $\vec{v}_0$ njene brzine u L- i C-sistemu. Iz očigledne jednakosti $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_0$ ili $\vec{v} - \vec{V} = \vec{v}_0$; imaćemo

$$v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta = v_0^2, \tag{16,3}$$

gde je θ ugao pod kojim čestica izleti u odnosu na pravac brzine $\vec{V}$. Ovom jednačinom se određuje zavisnost brzine raspadnute čestice od pravca njenog izleta u L-sistemu. Ona može biti grafički prikazana pomoću dijagrama, koji je prikazan na sl. 14. Brzina $\vec{v}$ je data vektorom koji je povučen kroz ma koju



Sl. 14

tačku kruga poluprečnika v_0[1], iz tačke A, koja se nalazi na rastojanju V od centra kruga. Slučajevima $V < v_0$ i $V > v_0$ odgovaraju respektivno sl. 14, a i b. U prvom slučaju čestica može da izleti pod ma kojim uglom θ. U drugom pak slučaju čestica može da izleti samo unapred pod uglom θ koji ne prelazi vrednost θ_{max}, koja je data jednačinom

$$\sin\theta_{max} = \frac{v_0}{V} \tag{16,4}$$

(pravac tangente na krug, povučene iz tačke A).

Veza među uglovima izletanja θ i θ_0 u L- i C-sistemu je očigledna iz tog istog dijagrama i data je formulom

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_0 \sin\theta_0}{v_0\cos\theta + V}. \tag{16,5}$$

Ako ovu jednačinu rešimo u odosu na $\cos\theta_0$, onda posle elementarnih transformacija, dobivamo:

$$\cos\theta_0 = -\frac{V}{v_0}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}. \tag{16,6}$$

[1]) Tačnije — ma koju tačku sfere poluprečnika v_0 čiji je dijametralni presek krug prikazan na sl. 14.

Kada je $v_0 > V$ veza između θ_0 i θ je jednoznačna kako se vidi iz sl. 14, a. U formuli (16,6) mora se pri tom uzeti znak + pred korenom (tako da bi bilo $\theta_0 = 0$, kada je $\theta = 0$). Ako je $v_0 < V$, onda veza između θ_0 i θ nije jednoznačna, nego svakoj vrednosti θ odgovaraju dve vrednosti θ_0, koje se odnose (na sl. 14, b) na vektore $\vec{v}_0$ povučene iz centra kruga u tačku B ili C, njima odgovaraju dva znaka pred korenom u (16,6).

U fizičkim primenama imamo obično posla sa raspadanjem ne jedne, već mnogih jednakih čestica s čim u vezi nastaju problemi o raspodeli nastalih čestica prema pravcima, energijama i tome slično. Pri tom pretpostavljamo da su prvobitne čestice orijentisane u prostoru haotično, tj. na srednje izotropni način.

U C-sistemu odgovor na te probleme je trivijalan: sve nastale čestice imaju istu energiju (iste vrste), a njihova raspodela prema pravcima izletanja je izotropna. Poslednja konstatacija je povezana sa učinjenom pretpostavkom o haotičnosti orijentacija prvobitnih čestica. Ona označava da je deo broja čestica koje lete u elementu prostornog ugla Ω_0 proporcionalan veličini toga elementa, tj. iznosi $\frac{d\Omega_0}{4\pi}$. Raspodelu po uglovima θ_0 odavde dobivamo, zamenom $d\Omega_0 = 2\pi \sin\theta_0 d\theta_0$, tj.

$$\frac{1}{2}\sin\theta_0\, d\theta_0. \tag{16,7}$$

Raspodela u L-sistemu se dobiva odgovarajućom transformacijom toga izraza. Odredimo, na primer, raspodelu prema kinetičkoj energiji u L-sistemu. Dižući na kvadrat jednačinu $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{V}$, nalazimo

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V\cos\theta_0,$$

odakle izlazi

$$d\cos\theta_0 = \frac{d(v^2)}{2v_0 V}.$$

Uvodeći ovde kinetičku energiju $T = \frac{mv^2}{2}$ (gde je m, m_1 ili m_2 s obzirom na to, koje vrste nastale čestice posmatramo) i zamenjujući u (16,7), dobiva se tražena raspodela

$$\frac{dT}{2mv_0 V}. \tag{16,8}$$

Kinetička energija može imati vrednosti od najmanje $T_{\min} = \frac{m}{2}(v_0 - V)^2$ do najveće $T_{\max} = \frac{m}{2}(v_0 + V)^2$. U tom intervalu čestice su raspoređene prema (16,8) homogeno.

Pri raspadu čestice na više od dva dela, zakoni održanja impulsa i energije ostavljaju, prirodno, znatno veću proizvoljnost u brzinama i pravcima nastalih čestica nego pri raspadanju na dva dela. Specijalno, energije raštrkanih čestica u C-sistemu uopšte nemaju jednu određenu vrednost. Postoji, međutim, gornja granica kinetičke energije koju može pri tom uvesti sa sobom svaka nastala čestica.

Za određivanje te granice posmatraćemo sve nastale čestice izuzev jedne date (sa masom m_1) kao jedan sistem; njegovu „unutrašnju" energiju označićemo sa E'_u, tada će kinetička energija čestice m_1 biti prema (16,1) i (16,2):

$$T_{10} = \frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{M - m_1}{M} (E_u - E_{1u} - E'_u)$$

(M je masa prvobitne čestice). Očigledno je, da će T_{10} imati najveću mogućnu vrednost, kada je E'_u minimalno. Zato je potrebno da se sve nastale čestice, izuzev one sa masom m_1, kreću jednom istom brzinom. Tada se E'_u svodi jednostavno na sumu njihovih unutrašnjih energija, a razlika $E_u - E_{1u} - E'_u$ je energija raspadanja ε. Na taj način biće

$$(T_{10})_{max} = \frac{M - m_1}{M} \varepsilon. \tag{16,9}$$

Zadaci

1. Naći vezu među uslovima izletanja θ_1 i θ_2 (u L-sistemu) čestica koje su postale raspadanjem na dva dela.

Rešenje. U C-sistemu uglovi izletanja čestica su povezani relacijom $\theta_{10} = \pi - \theta_{20}$. Označujući θ_{10} jednostavno sa θ_0 i primenjujući formulu (16,5) na svaku od dve čestice, imaćemo

$$V + v_{10} \cos \theta_0 = v_{10} \sin \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_1,$$

$$V - v_{20} \cos \theta_0 = v_{20} \sin \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_2.$$

Iz te dve jednačine treba eliminisati θ_0. Radi toga u početku određujemo iz njih $\cos \theta_0$ i $\sin \theta_0$, posle čega formiramo sumu $\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 = 1$. Uzimajući takođe u obzir da je $\frac{v_{10}}{v_{20}} = \frac{m_2}{m_1}$ i koristeći (16,2), kao rezultat dobivamo sledeću jednačinu:

$$\frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2 + \frac{m_1}{m_2} \sin^2 \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) = \frac{2\varepsilon}{(m_1 + m_2) V^2} \cdot \sin^2 (\theta_1 + \theta_2).$$

2. Naći raspodelu nastalih pri raspadu čestica prema pravcima izletanja u L-sistemu.

Rešenje. Kada je $v_0 > V$ zamenjujemo (16,6) sa znakom $+$ ispred korena u (16,7) i dobivamo traženu raspodelu u obliku

$$\frac{\sin \theta \, d\theta}{2} \left[2 \frac{V}{v_0} \cos \theta + \frac{1 + \frac{V^2}{v_0^2} \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}} \right] \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

Kada je $v_0 < V$ treba uzeti u obzir obe mogućne veze θ_0 sa θ. Kako pri povećanju θ jedna od njemu odgovarajućih vrednosti θ_0 raste, a druga opada, onda se mora uzeti razlika (a ne zbir) izraza $d \cos \theta_0$ sa dva znaka pred korenom u (16,6). Kao rezultat se dobiva:

$$\sin \theta \, d\theta \frac{1 + \frac{V^2}{v_0^2} \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \theta_{max}).$$

3) Odrediti interval vrednosti koje može imati ugao θ među pravcima izletanja obe nastale čestice u L-sistemu.

Rešenje. Ugao θ je zbir uglova $\theta_1 + \theta_2$, koji se određuje formulom (16,5) (v. zad. 1); najprostije se izračunava tangens toga ugla. Ispitivanje ekstremuma dobivenog izraza dovodi do sledećeg intervala mogućnih vrednosti θ u zavisnosti od relativne veličine V i v_{10} i v_{20} (radi određenosti stavljamo da je uvek $v_{20} > v_{10}$):

$$0 < \theta < \pi, \quad \text{ako je } v_{10} < V < v_{20};$$

$$\pi - \theta_0 < \theta < \pi, \quad \text{ako je } V < v_{10};$$

$$0 < \theta < \theta_0, \quad \text{ako je } V > v_{20},$$

pri čemu je vrednost θ_0 data formulom

$$\sin \theta_0 = \frac{V(v_{10} + v_{20})}{V^2 + v_{10} v_{20}}.$$

§ 17. Elastični sudari čestica

Sudar dve čestice naziva se elastičnim, ako ne vrši promenu njihovog unutrašnjeg stanja. Shodno tome prilikom primena zakona održanja energije na takav sudar mogućno je ne uzimati u obzir unutrašnju energiju čestica.

Najprostiji slučaj sudara je u sistemu referencije u kome se centri inercije obe čestice nalaze u miru (C-sistemu). Razlikovaćemo, kao i u prethodnom paragrafu, pomoću indeksa 0 vrednosti veličina u tom sistemu. Brzine čestica do sudara u C-sistemu su povezane sa njihovim brzinama $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ u laboratorijskom sistemu relacijama:

$$\vec{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}, \qquad \vec{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v},$$

gde je $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ [v. (13,2)].

Zbog zakona održanja impulsa, impulsi obe čestice ostaju posle sudara jednaki po veličini, a suprotno orijentisani, a zbog zakona održanja energije, ostaju nepromenjene i njihove apsolutne veličine. Na taj način, rezultat sudara u C-sistemu se svodi na obrtanje brzina obe čestice koje ostaju uzajamno suprotne i nepromenjene po veličini. Ako sa $\vec{n}_0$ označimo jedinični vektor u pravcu brzine čestice m_1 posle sudara, onda će brzine obe čestice posle sudara (razlikujemo ih pomoću apostrofa) biti:

$$\vec{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0, \qquad \vec{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0. \tag{17,1}$$

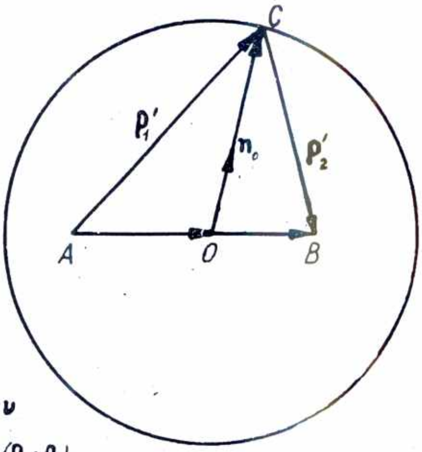
Da bismo se tim ponovo vratili na laboratorijski sistem referencije, mora se tim izrazima dodati brzina centra inercije $\vec{V}$. Na taj način, za brzine čestica u L-sistemu posle sudara dobiva se:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{17,2}$$

Ovim se iscrpljuju podaci koji se mogu dobiti o sudaru, polazeći samo od zakona održanja impulsa i energije. Što se tiče orijentacije vektora $\vec{n}_0$, on zavisi od zakona interakcija čestica i njihovog uzajamnog položaja za vreme sudara.

Dobivene rezultate možemo i geometrijski interpretirati. Pri tom je zgodnije preći od brzina na impulse. Pomnožimo jednačinu (17,2) respektivno sa m_1 i m_2 pa ćemo dobiti:

$$\vec{p}_1' = mv\vec{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2), \qquad \vec{p}_2' = -mv\vec{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) \quad (17,3)$$



$\vec{OC} = mv$

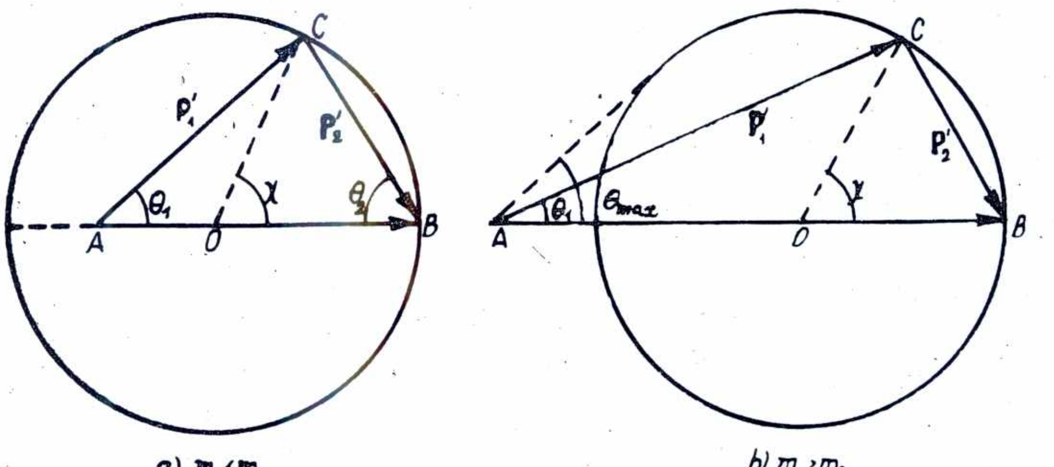
$\vec{AO} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(P_1+P_2)$

$\vec{OB} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(P_1+P_2)$

Sl. 15

$\left(m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right.$ — redukovana masa). Nacrtajmo krug poluprečnika mv i navedeno prikažimo na sl. 15. Ako je jedinični vektor $\vec{n}_0$ orijentisan duž $\overrightarrow{OC}$, onda vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CB}$ daju respektivno impulse $\vec{p}_1'$ i $\vec{p}_2'$. Za date impulse $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2$ poluprečnik kruga i položaj tačaka A i B su nepromenjeni, a tačka C može imati ma koji položaj na krugu.

Posmatraćemo detaljnije slučaj kada je jedna od čestica (neka je to čestica m_2) do sudara bila u miru. U tom slučaju dužina $OB = \frac{m_2}{m_1+m_2}p_1 = mv$ se poklapa sa poluprečnikom, tj. tačka B se nalazi na kružnici. Vektor AB se poklapa sa impulsom $\vec{p}_1$ prve čestice do raštrkavanja. Pri tom se tačka A nalazi unutar (ako je $m_1 < m_2$) ili izvan kružnice (ako je $m_1 > m_2$). Odgovarajući dijagrami su prikazani na sl. 16a i b. Navedeni uglovi θ_1 i θ_2 predstavljaju ugove skretanja



a) $m_1 < m_2$ b) $m_1 > m_2$

$\vec{AB} = p_1$, $AO/OB = m_1/m_2$

Sl. 16

čestica posle sudara u odnosu na pravac udara (pravac $\vec{p}_1$). Centralni ugao, koji je označen na slikama pomoću χ (koji daje pravac $\vec{n}_0$), predstavlja ugao obrtanja prve čestice u sistemu centra inercije.

Iz crteža je očigledno da se uglovi θ_1 i θ_2 mogu izraziti pomoću ugla χ formulama:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2 \cos\chi}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \tag{17,4}$$

Napisaćemo takve iste formule koje određuju apsolutne veličine brzina obe čestice posle sudara pomoću istog ugla χ:

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi}}{m_1 + m_2} v_1, \qquad v_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin\frac{\chi}{2}. \tag{17,5}$$

Zbir $\theta_1 + \theta_2$ je ugao rasipanja čestica posle sudara. Očigledno je da je $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ kada je $m_1 < m_2$ i $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ kada je $m_1 > m_2$.

Slučaj kada se obe čestice posle sudara kreću po istoj pravoj („čeoni sudar") odgovara $\chi = \pi$, tj. položaj tačke C je na prečniku levo od tačke A (sl. 16a; pri tom su $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2'$ uzajamno suprotni) ili između A i O (na sl. 16, b; pri tom su $\vec{p}_1'$ i $\vec{p}_2'$ orijentisani u istom smeru).

Brzine čestica posle sudara u tom slučaju biće

$$\vec{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}, \qquad \vec{v}_2 = \frac{2m}{m_1 + m_2}\vec{v}. \tag{17,6}$$

Vrednost $\vec{v}_2'$ pri tom odgovara najvećoj mogućnosti. Maksimalna energija, koju može dobiti čestica kao rezultat sudara, koja se prvobitno nalazi u miru, preme tome iznosi:

$$E_{2\max} = \frac{m_2 v_{2\,\max}'^2}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \tag{17,7}$$

gde je $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ prvobitna energija čestice koja je naletela.

Kada je $m_1 < m_2$ brzina prve čestice posle sudara može imati ma koji pravac. Ako je pak $m_1 > m_2$, ugao skretanja naletele čestice ne može preći izvesnu maksimalnu vrednost, koja odgovara takvom položaju tačke C (sl. 16, b) za koju je prava AC tangenta na kružnicu. Očevidno da $\sin\theta_{1\max} = \frac{OC}{OA}$ ili

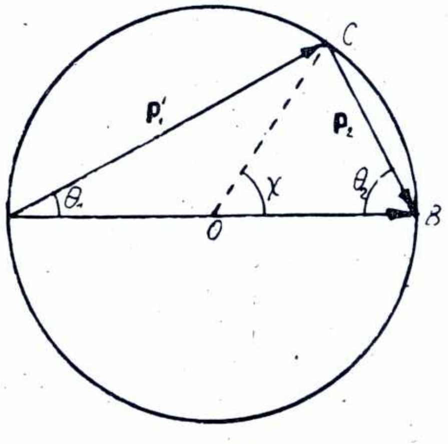
$$\sin\theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{17,8}$$

Naročito je jednostavan sudar čestica (sa istim masama od kojih je jedna u početku u miru). U tom slučaju ne samo tačka B, već i tačka A leži na kružnici sl. 17. Pri tom je

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \tag{17,9}$$

$$v_1' = v\cos\frac{\chi}{2}, \qquad v_2' = v\sin\frac{\chi}{2}. \tag{17,10}$$

Napominjemo da se čestice posle sudara rasršuju pod pravim uglom.



Sl. 17

Zadatak

Izračunati brzine obe čestice posle sudara čestice koja se kreće (m_1) sa nepokretnom (m_2) pomoću njihovih uglova skretanja u L-sistemu.

Rešenje. Iz sl. 16 imamo $p_2' = 2 \cdot \overline{OB} \cdot \cos\theta_2$ ili

$$v_2' = 2v \frac{m}{m_2} \cos\theta_2,$$

Za impuls $p_1' = AC$ imamo jednačinu

$$\overline{OC}^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2 \cdot \overline{AO} \cdot p_1' \cos\theta_1$$

ili

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - \frac{2m_1}{m_2}\frac{v_1'}{v}\cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Odavde izlazi

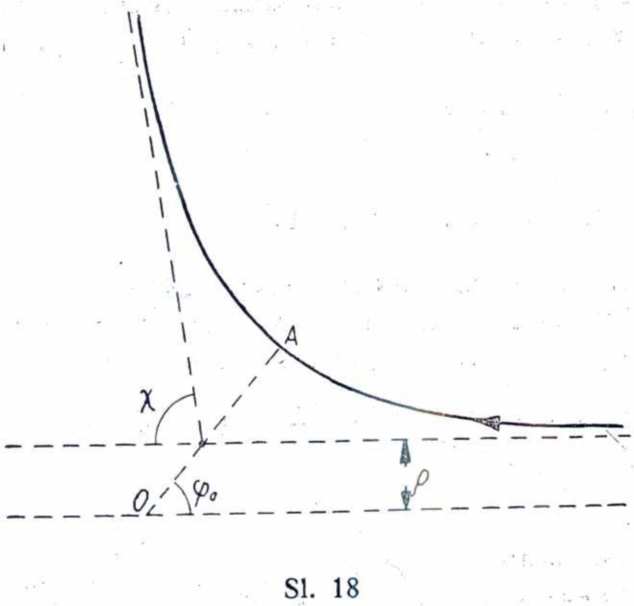
$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2\theta_1}$$

(kada je $m_1 > m_2$, pred korenom su mogućna oba znaka, a kada je $m_2 > m_1$ samo znak $+$).

§ 18. Raštrkavanje čestica

Kako je već u prethodnom paragrafu navedeno, potpuna definicija rezultata sudara dve čestice (definicija ugla χ) zahteva rešenje jednačine kretanja uzimanjem u obzir konkretnog zakona interakcije čestica.

Shodno opštem pravilu, posmatraćemo u početku ekvivalentan zadatak o skretanju jedne čestice mase m u polju $U(r)$ nepokretnog centra sila (koji se nalazi u centru inercije čestice).



Sl. 18

Kao što je navedeno u § 14, trajektorija čestice u centralnom polju je simetrična u odnosu na pravu koja je povučena kroz tačku orbite koja je najbliža centru (OA na sl. 18). Zbog toga obe asimptote orbite seku navedenu pravu pod istim uglovima. Ako te uglove označimo sa φ_0, onda je ugao χ skretanja čestice pri njenom proletanju pored centra, kako vidimo iz crteža

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|. \tag{18,1}$$

Ugao pak φ_0 određuje se prema (14,7) integralom

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \tag{18,2}$$

koji je uzet između položaja čestice koji je najbliži centru, a beskonačno udaljenog. Napominjemo, da je r_{min} rešenje jednačine koja odgovara podkorenom izrazu.

Pri infinitnom kretanju, koji ovde tretiramo, zgodno je uvesti umesto konstanti E i M druge — brzinu v_∞ čestice u beskonačnosti i takozvano *„nišansko rastojanje"* ρ. Poslednje predstavlja dužinu normale spuštene iz centra na pravac v_∞, tj. rastojanje na kome bi čestica prošla pored centra ako ne bi postojalo (sl. 18) polje sila.

Energija i moment se izražavaju pomoću tih veličina prema relacijama:

$$E = \frac{m v_\infty^2}{2}, \qquad M = m\rho v_\infty, \tag{18,3}$$

a formula (18,2) dobiva oblik:

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho \dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\rho^2}{r^2} - \dfrac{2U}{m v_\infty^2}}}. \tag{18,4}$$

Zajedno sa (18,1) ona definiše zavisnost χ od ρ.

U fizičkim primenama obično imamo posla ne sa individualnim skretanjima čestice, već kako se kaže, sa *raspršavanjem* celog snopa istih čestica koje padaju na centar raspršavanja sa istom brzinom $\vec{v}_\infty$. Različite čestice u snopu imaju različita nišanska rastojanja i zbog toga se raspršuju pod različitim uglovima χ. Sa dN označimo broj čestica koje se raspršuju u jedinici vremena u uglove koji se nalaze u intervalu između χ i $\chi + d\chi$. Sam po sebi taj broj nije pogodan za karakteristiku procesa raspršavanja, jer zavisi od gustine upadnog snopa (proporcionalan je gustini). Zbog toga uvodimo relaciju

$$d\sigma = \frac{dN}{n}, \tag{18,5}$$

gde je n — broj čestica koje prelaze u jedinici vremena kroz jedinicu površine poprečnog preseka snopa (pretpostavimo, prirodno, da je snop homogen po celom svom preseku). Ovaj odnos ima dimenzije površine i naziva se *efektivni presek raspršavanja*. On se u stvari (određuje) definiše oblikom rasipajućeg polja i predstavlja veoma važnu karakteristiku procesa raspršavanja.

Smatraćemo da je veza između χ i ρ uzajamno jednoznačna; ovo je slučaj, ako je ugao rasipanja opadajuća funkcija nišanskog rastojanja. U takvom slučaju rasipaju se u dati interval uglova između χ i $\chi + d\chi$ samo one šestice, koje lete sa nišanskim rastojanjem u određenom intervalu između $\rho(\chi)$ i $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$. Broj takvih čestica jednak je proizvodu n površine prstena među krugovima sa poluprečnicima ρ i $\rho + d\rho$ tj. $dN = 2\pi\rho\, d\rho \cdot n$. Zbog toga će efektivni presek biti:

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho. \tag{18,6}$$

Da bismo našli zavisnost efektivnog preseka od ugla rasipanja, dovoljno je taj izraz napisati u obliku

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi. \tag{18,7}$$

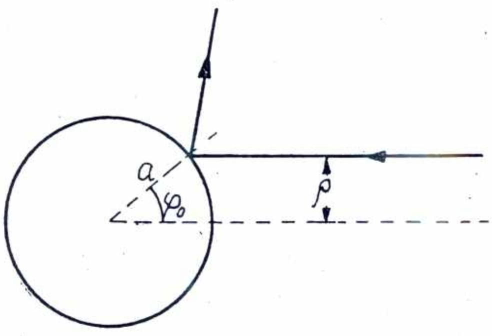
Ovde pišemo apsolutnu vrednost izvoda $\frac{d\rho}{d\chi}$, imajući u vidu da ona može biti negativna (kao što je to obično)[1]. Često se $d\sigma$ ne odnosi na element $d\chi$ ugla u ravni, već na element prostornog ugla $d\Omega$. Prostorni ugao između konusa sa uglovima χ i $\chi + d\chi$ je $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$. Zbog toga ćemo iz (18,7) imati

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\Omega. \tag{18,8}$$

Vraćajući se na stvarni zadatak o rasipanju snopa čestica na druge čestice koje su mirovale, a ne o rasipanju na nepokretni centar sila, možemo reći, da formula (18,7) definiše efektivni presek u zavisnosti od ugla rasipanja u sistemu centra inercije. Za nalaženje pak efektivnog preseka u zavisnosti od ugla rasipanja θ u laboratorijskom sistemu, treba u toj formuli izraziti χ pomoću θ prema formulama (17,4). Pri tom se dobivaju izrazi kako za presek rasipanja upadnog snopa čestica (χ je izraženo pomoću θ_1) tako i za čestice, koje su prvobitno mirovale (χ je izraženo pomoću θ_2).

Zadaci

1. Odrediti efektivni presek čestica koje se raštrkavaju nailazeći na apsolutnu krutu kuglicu poluprečnika a (tj. pri zakonu uzajamnog dejstva $U = \infty$ kada je $r < a$ i $U = 0$ kada je $r > a$).



Sl. 19

Rešenje. Pošto se izvan kuglice čestica kreće slobodno, a u njenu untrašnjost ne može uopšte da prodre, onda se trajektorija sastoji iz dve prave, koje se nalaze simetrično u odnosu na poluprečnik koji je povučen kroz tačku njihovog preseka sa kuglicom (sl. 19). Kako se iz crteža vidi, biće

$$\rho = a\sin\varphi_0 = a\sin\frac{\pi-\chi}{2} = a\cos\frac{\chi}{2}.$$

Zamenjujući u (18,7) ili (18,8), dobiva se:

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2}\sin\chi\, d\chi = \frac{a^2}{4}\, d\Omega, \tag{1}$$

tj. rasipanje u C-sistemu je izotropno. Integrirajući $d\sigma$ po svim uglovima, nalazimo da je ukupni presek $\sigma = \pi a^2$, saglasno tome, je „*nišanska površina*" na koju mora pasti čestica da bi se raspršala, površina preseka kuglice.

Za prelaz na L-sistem treba χ izraziti pomoću θ_1 prema (17,4). Izračunavanja su potpuno analogna navedenim u zad. 2 § 16 [zbog formalne sličnosti formula (17,4) i (16,5)]. Kada je $m_1 < m_2$ (m_1 je masa čestica, m_2 je masa kuglica) dobiva se:

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4}\left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}}\right] d\Omega_1,$$

[1]) Ako je funkcija $\rho(\chi)$ mnogoznačna, onda treba, očevidno, uzeti sumu takvih izraza po svim granama te funkcije.

$(d\Omega_1 = 2\pi \sin\theta_1 \, d\theta_1)$. Ako je $m_2 > m_1$, onda je:

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2\theta_1}} \, d\Omega_1$$

Kada je $m_1 = m_2$, imaćemo:

$$d\sigma_1 = a^2 \, |\cos\theta_2| \, d\Omega_1,$$

što se može dobiti i direktnom zamenom $\chi = 2\theta_1$ [prema (17,9)] u (1).

Za kuglice koje su u početku bile u miru, imamo uvek $\chi = \pi - 2\theta_2$, i zamena u (1) daje:

$$d\sigma_2 = a^2 \, |\cos\theta_2| \, d\Omega_2.$$

2. Za isti slučaj izraziti efektivni presek kao funkciju energije ε koju gube raspršene čestice.

Rešenje. Energija, koju izgubi čestica m_1, paklapa se sa enegrgijom koju prima čestica m_2. Prema (17,5) i (17,7) imaćemo:

$$\varepsilon = E_2' = \frac{2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon_{\max} \sin^2\frac{\chi}{2},$$

odavde će biti:

$$d\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{\max} \sin\chi \, d\chi,$$

i zamenjujući u formulu (1) zadatka 1, dobivamo:

$$d\sigma = \pi a^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}.$$

Ispostavlja se da je raspodela raspršenih čestica po vrednostima ε homogena u celom intervalu ε od nule do $\varepsilon_{\max}$.

3. Kako zavisi efektivni presek od brzine v_∞ čestica pri rasipanju u polju $U \approx r^{-n}$?

Rešenje. Prema (10,3), ako je potencijalna energija homogena funkcija reda $k = -n$, onda će za slične trajektorije biti $\rho \approx v^{-2/n}$ ili

$$\rho = v_\infty^{-\frac{2}{n}} f(\chi)$$

(uglovi skretanja χ za slične trajektorije su isti). Zamenjujući u (18,6) nalazimo da je:

$$d\sigma \approx v_\infty^{-\frac{4}{n}} \, d\Omega.$$

4. Odrediti efektivni presek za „padanje“ čestica u centar polja $U = -\frac{\alpha}{r_2}$.

Rešenje. U centar „padaju“ one čestice za koje je zadovoljen uslov $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$ [v. (14,11)], tj. u kojima nišansko rastojanje ne prelazi vrednost $\rho_{\max} = \sqrt{\frac{2\alpha}{m v_\infty^2}}$. Zbog toga će traženi efektivni presek biti

$$\sigma = \pi \rho_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{m v_\infty^2}.$$

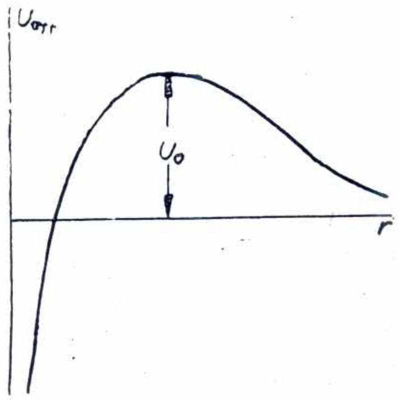
5. To isto za polje $U = -\frac{\alpha}{r^n}$ $(n > 2,\ \alpha > 0)$.

Rešenje. Zavisnost efektivne potencijalne energije

$$U_{\text{ef}} = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

od r ima oblik koji je prikazan na sl. 20 sa maksimalnom vrednošću

$$(U_{\text{ef}})_{\max} \equiv U_0 = \frac{(n-2)\,\alpha}{2}\left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{\alpha n}\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$



Sl. 20

U centar „padaju" one čestice, kod kojih $U_0 < E$. Određujući $\rho_{\max}$ iz uslova $U_0 = E$, dobivamo:

$$\sigma = \pi n (n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

6. Odrediti efektivni presek za padanja čestica (sa masama m_1) na površinu sfernog tela (sa masom m_2 i poluprečnikom R) sa kojim se one privlače prema Newton-ovom zakonu.

Rešenje. Uslov padanja nalazi se u nejednakosti $r_{\min} < R$, gde $r_{\min}$ označava položaj one tačke na trajektoriji čestice najbliže centru sfere. Najveća dopustiva vrednost ρ se određuje iz uslova $r_{\min} = R$, što se svodi na rešenje jednačine $U_{\text{ef}}(R) = E$, ili

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

pri čemu je $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (γ je gravitaciona konstanta), a osim toga je i pretpostavljeno $m \approx m_1$, smatrajući da je $m_2 \gg m_1$. Nalazeći odavde $\rho_{\max}^2$, dobivamo

$$\sigma = \pi R^2\left(1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_\infty^2}\right).$$

Kada $v_\infty \to \infty$ efektivni presek teži, prirodno, geometrijskoj površini preseka sfere.

7. Uspostaviti oblik polja koje rasipa $U(r)$ prema datoj zavisnosti efektivnog preseka od ugla rasipanja pri datoj energiji E, pretpostavljajući da je $U(r)$ monotono opadajuća funkcija r (polje privlačenja) pri čemu je $U(0) > E$, $U(\infty) = 0$ (O. B. Firsov, 1953.).

Rešenje. Integriranje $d\sigma$ po uglu rasipanja određuje prema formuli

$$\int_\chi^\pi \frac{d\sigma}{d\chi}\, d\chi = = \pi\rho^2 \tag{1}$$

kvadrat nišanskog rastojanja, jer funkciju $\rho(\chi)$ [a s njom i $\chi(\rho)$] takođe možemo smatrati datom:

Uvešćemo oznake:

$$s = \frac{1}{r}, \qquad x = \frac{1}{\rho^2}, \qquad w = \sqrt{1 - \frac{U}{E}}. \tag{2}$$

Tada se formule (18,1) i (18,2) pišu u obliku

$$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{x w^2 - s^2}}, \tag{3}$$

gde je $s_0(x)$ rešenje jednačine

$$x w^2(s_0) - s_0^2 = 0.$$

Jednačina (3) je integralna jednačina za funkciju $w(s)$; možemo je rešiti metodom koji je analogan navedenom u § 12. Ako podelimo obe strane (3) sa $\sqrt{\alpha - x}$ i integriramo po dx u granicama od nule do α, nalazimo

$$\int_0^\alpha \frac{\pi - \chi(x)}{2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} = \int_0^\alpha \int_0^{s_0(x)} \frac{ds\, dx}{\sqrt{(x w^2 - s^2)(\alpha - x)}} = \int_0^{s_0(\alpha)} \int_{x(s_0)}^{\alpha} \frac{dx\, ds}{\sqrt{(x w^2 - s^2)(\alpha - x)}} = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w},$$

ili integrirajući parcijalno, na levoj strani jednačine biće

$$\pi \sqrt{\alpha} - \int_0^\pi \sqrt{\alpha - x} \frac{d\chi}{dx} dx = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}.$$

Dobivenu relaciju diferenciraćemo po α, posle čega ćemo umesto $s_0(\alpha)$ napisati prosto s, pa prema tome zamenjujemo α sa $\frac{s^2}{w^2}$. Ako jednačinu napišemo sa diferencijalima, dobivamo

$$\pi d\left(\frac{s}{w}\right) - \frac{1}{2} d\left(\frac{s^2}{w^2}\right) \int_0^{\frac{s^2}{w^2}} \frac{\chi'(x)\, dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}} = \frac{\pi}{w} ds$$

ili

$$\pi d \ln w = d\left(\frac{s}{w}\right) \int^{\frac{s^2}{w^2}} \frac{\chi'(x)\, dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}}.$$

Ova jednačina se integrira neposredno, pri čemu na desnoj strani treba izmeniti red integriranja po dx i $d\left(\frac{s}{w}\right)$. Uzimajući u obzir da pri $s = 0$ (tj. $r \to \infty$) mora biti $w = 1$ (tj. $U = 0$), i vraćajući se na polazne promenljive r i ρ, definitivno dobivamo rezultat (u dva ekvivalentna oblika):

$$w = \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \int_{rw}^{\infty} \operatorname{arg\,ch} \frac{\rho}{rw} \frac{d\chi}{d\rho} d\rho\right\} = \exp\left\{\frac{1}{\pi} \int_{rw}^{\infty} \frac{\chi(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2 w^2}}\right\}. \tag{4}$$

Ovom formulom se određuje zavisnost $w(r)$ u implicitnom obliku [a samim tim i $U(r)$] pri svim $r > r_{min}$, tj. u onoj oblasti vrednosti r koju prelazi raspršena čestica sa datom energijom E.

§ 19. Rutherford-ova formula

Jedna od najvažnijih primena ranije dobivenih formula je raštrkavanje naelektrisanih čestica u Coulomb-ovom polju.

Ako u (18,4) stavimo $U = \frac{\alpha}{r}$ i izvršimo elementarno integriranje, dobićemo:

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\alpha}{m v_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2 \rho}\right)^2}},$$

odavde izlazi:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{tg}^2 \varphi_0,$$

ili, uvodeći prema (17,1) $\varphi_0 = \frac{(\pi - \chi)}{2}$:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2}. \tag{19,1}$$

Diferencirajući ovaj izraz po χ i zamenjujući u (18,7) ili u (18,8), dobivamo:

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}} d\chi, \tag{19,2}$$

ili

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2m v_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}. \tag{19,3}$$

Ovo je takozvana *Rutherford-ova formula*. Napominjemo da efektivni presek ne zavisi od znaka α, jer se dobiveni rezultat odnosi u istoj meri i na Coulomb-ovo polje odbijanja i privlačenja.

Formula (19,3) daje efektivni presek u sistemu referencije u odnosu na koji se nalazi u miru centar inercije čestica, koje se sudaraju. Transformacija na laboratorijski sistem vrši se pomoću formula (17,4). Za čestice, koje su u početku u miru, zamenjujući $\chi = \pi - 2\theta_2$ u (19,2), dobivamo:

$$d\sigma_2 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2} d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^3\theta_2}. \tag{19,4}$$

Za upadne čestice transformacija dovodi u opštem slučaju do veoma glomazne formule. Navešćemo samo dva specijalna slučaja.

Ako je masa m_2 čestice koja vrši rasipanje velika u odnosu na masu m_1 čestice koja nailazi, onda je $\chi \approx \theta_1$, a $m \approx m_1$, te je

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4\frac{\theta_1}{2}}, \tag{19,5}$$

gde je $E_1 = \frac{m_1 v_\infty^2}{2}$ energije čestice koja nailazi.

Ako su mase obe čestice iste ($m_1 = m_2$, $m = \frac{m_1}{2}$), onda je prema (17,9) $\chi = 2\theta_1$, i zamena u (19,2) daje:

$$d\sigma_1 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1} d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1} d\Omega_1. \tag{19,6}$$

Ako su ne samo mase obe čestice jednake, već su i te čestice uopšte identične, onda nema smisla praviti razliku posle rasipanja između čestice koja se je u početku kretala i one koja je bila u miru. Opšti efektivni presek za sve čestice dobivamo sabirajući $d\sigma_1$ i $d\sigma_2$ i zamenjujući θ_1 i θ_2 zajedničkom vrednošću θ:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right) \cos\theta \, d\Omega. \tag{19,7}$$

Vratimo se ponovo na opštu formulu (19,2) i odredimo pomoću nje raspodelu rasutih čestica u odnosu na izgubljenu en rgiju usled sudara. Pri proizvoljnom odnosu između masa čestice (m_1) i čestice (m_2), brzina poslednje se izražava preko ugla rasipanja u C-sistemu pomoću relacije

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \sin\frac{\chi}{2}$$

[vidi (1 /,5)]. Prema tome energija koju ta čestica dobije, a samim tim i energija koju čestica m_1 preda, iznosi:

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin_2\frac{\chi}{2}.$$

Ako odavde izrazimo $\sin\frac{\chi}{2}$ preko ε i zamenimo u (19,2), dobivamo:

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha_2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}. \tag{19,8}$$

Ova formula odgovara na postavljeno pitanje, određujući efektivni presek kao funkciju od gubitka energije ε. Energija pri tom dobiva vrednosti od nule do

$$\varepsilon_{max} = \frac{2m^2 v_\infty^2}{m_2}.$$

Zadaci

1. Naći efektivni presek rasipanja u polju $U = \frac{\alpha}{r^2}$ ($\alpha > 0$).

Rešenje. Ugao skretanja iznosi:

$$\chi = \pi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}}}\right].$$

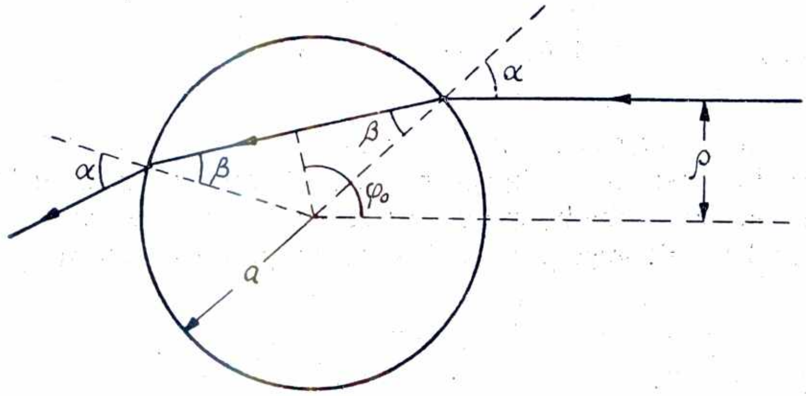
Efektivni presek biće:

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{m v_\infty^2} \frac{\pi - \chi}{\chi^2(2\pi - \chi)^2} \frac{d\Omega}{\sin\chi}.$$

2. Naći efektivni presek rasipanja na sfernoj „potencijalnoj jami" poluprečnika a i „dubine" U_0 (tj. poljem $U = 0$, kada je $r > a$; $U = -U_0$ kada je $r < a$).

Rešenje. Pravolinijska trajektorija čestice „prelama se" pri ulasku u jamu i pri izlasku iz nje. Prema zadatku § 7. upadni uglovi α i prelamanja β (sl. 21) su povezani relacijom:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \quad n = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{mv_\infty^2}}.$$



Sl. 21

Ugao skretanje biće $\chi = 2(\alpha - \beta)$. Zbog toga imamo:

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\chi}{2}\right)}{\sin\alpha} = \cos\frac{\chi}{2} - \operatorname{ctg}\alpha\,\sin\frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}.$$

Ako α eliminišemo iz te jednačine, i prema relaciji $a\sin\alpha = \rho$, koja je očevidna iz crteža, dobićemo vezu između ρ i χ u obliku:

$$\rho^2 = a^2\frac{n^2\sin^2\frac{\chi}{2}}{n^2 + 1 - 2n\cos\frac{\chi}{2}}.$$

Na kraju, diferencirajući tu jednačinu, dobivamo efektivni presek:

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4\cos\frac{\chi}{2}}\frac{\left(n\cos\frac{\chi}{2} - 1\right)\left(n - \cos\frac{\chi}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\chi}{2}\right)^2}\,d\Omega.$$

Ugao χ se menja u granicama od nule (kada je $\rho = 0$) do vrednosti χ_{max} (kada je $\rho = a$), koji se određuje iz

$$\cos\frac{\chi_{max}}{2} = \frac{1}{n}.$$

Totalni efektivni presek, koji se dobiva integriranjem $d\sigma$ po svim uglovima unutar konusa $\chi < \chi_{max}$, jednak je, kao što se vidi, površini geometrijskog preseka πa^2

§ 20. Rasipanje pod malim uglovima

Izračunavanje efektivnog preseka znatno se uprošćava ako posmatramo samo one sudare, koji se vrše na velikim nišanskim rastojanjima, gde je polje U slabo, pa su prema tome uglovi skretanja mali. Pri tom se izračunavanje može vršiti u laboratorijskom sistemu referencije ne uvodeći sistem centra inercije.

Uzećemo x-osu u pravcu prvobitnog impulsa rasutih čestica (čestice m_1), a ravan xy u ravni rasipanja. Ako sa $\vec{p}_1'$ označimo impuls čestice posle rasipanja, očigledno ćemo imati jednakost

$$\sin\theta_1 = \frac{p_{1y}'}{p_1'}.$$

Za male otklone možemo približno zameniti $\sin\theta_1$ sa θ_1, a u imeniocu zameniti q_1' prvobitnim impulsom $p_1 = m_1 v_\infty$;

$$\theta_1 \approx \frac{p_{1y}'}{m_1 v_\infty}. \tag{20,1}$$

Zatim, kako je $\dot{p}_y = F_y$, onda će ukupni priraštaj impulsa duž y-ose biti

$$p_{1y}' = \int_{-\infty}^{\infty} F_y\, dt. \tag{20,2}$$

Pri tom sila ima vrednost:

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dU}{dr}\frac{y}{r}.$$

Kako integral (20,2) već sadrži malu veličinu U, onda se pri njegovom izračunavanju može u toj istoj aproksimaciji smatrati da čestica uopšte ne skreće od svog prvobitnog puta, tj. kreće se pravolinijski (duž prave $y = \rho$) i ravnomerno (brzinom v_∞). Prema tome u (20,2) stavićemo:

$$F_y = -\frac{dU}{dr}\frac{\rho}{r}, \qquad dt = \frac{dx}{v_\infty}$$

i dobivamo:

$$p_{1y}' = -\frac{\rho}{v_\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dU}{dr}\frac{dx}{r}.$$

Na kraju prelazimo od integriranja po dx na integriranje po dr. Kako je za pravolinijski put $r^2 = x^2 + \rho^2$, onda se pri promeni x od $-\infty$ do $+\infty$ r menja od ∞ do ρ i zatim ponovo do ∞. Zbog toga integral po dx prelazi u dvostruki integral po dr od ρ do ∞, pri čemu se dx zamenjuje sa

$$dx = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

Definitivno se za ugao rasipanja (20,1) dobiva sledeći izraz[1]:

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty}\int_{\rho}^{\infty}\frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \tag{20,3}$$

[1]) Ako se izvrši celo izvođenje u C-sistemu, onda za χ dobivamo isti takav izraz sa m umesto m_1 u vezi činjenice da mali uglovi θ_1 i χ moraju biti prema (17,4) vezani relacijom:

$$\theta_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\chi.$$

čime se određuje tražena zavisnost θ_1 od ρ pri slabom skretanju. Efektivni presek rasipanja (u L-sistemu) dobiva se prema istoj formuli kao što je (18,8) (sa θ_1, umesto χ), pri čemu se i ovde $\sin \theta_1$ može zameniti sa θ_1.

Tako je

$$d\sigma = \left| \frac{d\rho}{d\theta_1} \right| \frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1} d\Omega_1.$$

Zadaci

1. Iz formule (20,3) izvesti formulu (18,4).

Rešenje. U cilju da se izbegnu u daljem fiktivno divergenti integrali, formulu (18,4) predstavićemo u obliku

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{\min}}^{R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{m v_\infty^2}}\, dr,$$

pri čemu kao gornju granicu uzimamo veliku konačnu veličinu R, imajući zatim u vidu prelaz $R \to \infty$. S obzirom na malu vrednost U razložićemo koren po stepenima U, a $r_{\min}$ približno zamenjujemo sa ρ:

$$\varphi_0 = \int_{\rho}^{R} \frac{\rho\, dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} + \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{U(r)\, dr}{m v_\infty^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

Prvi integral posle prelaza na limes $R \to \infty$ daje $\frac{\pi}{2}$. Drugi pak integral prethodno transformišemo parcijalno i dobivamo izraz

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{\sqrt{r^2 - \rho^2}}{m v_\infty^2} \frac{dU}{dr} dr = -\frac{2\rho}{m v_\infty^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}},$$

koji je ekvivalentan formuli (20,3).

2. Odrediti efektivni presek rasipanja za male uglove u polju $U = \frac{\alpha}{r^n}$ $(n > 0)$.

Rešenje. Prema formuli (20,3) imaćemo:

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1 v_\infty^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+1} \sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

Zamenom $\frac{\rho^2}{r^2} = u$, integral dovodimo do Euler-ovog B-integrala, i izražavamo ga pomoću G-funkcije

$$\theta_1 = \frac{2\alpha \sqrt{\pi}}{m_1 v_\infty^2 \rho^n} \frac{G\left(\frac{n+1}{2}\right)}{G\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Izražavajući odavde ρ preko θ_1 i zamenjujući u (20,4), dobivamo:

$$d\sigma = \frac{1}{n} \left[\frac{2\sqrt{\pi}\, G\left(\frac{n+1}{2}\right)}{G\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2} \right]^{\frac{2}{n}} \theta_1^{-2\left(1+\frac{1}{n}\right)} d\Omega_1.$$

GLAVA V

MALA OSCILOVANJA

§ 21. Slobodno ravnomerno oscilovanje

Vrlo rasprostranjen tip kretanja mehaničkih sistema predstavljaju takozvana *mala oscilovanja* koja sistem vrši u blizini svoga položaja stabilne ravnoteže. Posmatranje tih kretanja počećemo sa najprostijim slučajem, kada sistem ima samo jedan stepen slobode.

Stabilnoj ravnoteži odgovara takav položaj sistema u kome njegova potencijalna energija $U(q)$ ima minimum; odstupanje od takvog položaja dovodi do pojavljivanja sile $-\frac{dU}{dq}$ koja teži da sistem vrati. Označićemo sa q_0 odgovarajuću vrednost generalisane koordinate. Za mala odstupanja od položaja ravnoteže u redu razlike $U(q) - U(q_0)$ po stepenima $q - q_0$ dovoljno je zadržati prvi član koji nije jednak nuli. U opštem slučaju takav član je drugog reda

$$U(q) - U(q_0) \approx \frac{k}{2}(q - q_0)^2,$$

gde je k pozitivni koeficijent [vrednost drugog izvoda $U''(q)$ kada je $q = q_0$]. Nadalje ćemo potencijalnu energiju računati od njene minimalne vrednosti (tj. stavićemo da je $U(q_0) = 0$) i uvešćemo oznaku

$$x = q - q_0 \tag{21,1}$$

za odstupanje koordinate od njene ravnotežne vrednosti. Na taj način biće:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \tag{21,2}$$

Kinetička energija sistema sa jednim stepenom slobode ima u opštem slučaju oblik:

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2.$$

U toj istoj aproksimaciji dovoljno je zameniti funkciju $a(q)$ jednostavno njenom vrednošću kada je $q = q_0$. Uvodeći radi kratkoće oznaku[1])

$$a(a_0) = m,$$

[1]) Napominjemo, međutim, da se veličina m poklapa sa masom samo ako je x Descartes-ova koordinata čestice.

definitivno dobivamo sledeći izraz za Lagrange-ovu funkciju sistema koji vrši ravnomerna mala oscilovanja[1]:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \tag{21,3}$$

Jednačina kretanja koja odgovara toj funkciji, glasi

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{21,4}$$

ili

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{21,5}$$

gde je uvedena oznaka

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{21,6}$$

Linearna diferencijalna jednačina (21,5) ima dva nezavisna rešenja: $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$, jer je njeno opšte rešenje

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \tag{21,7}$$

Ovaj izraz možemo takođe napisati i u obliku:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \tag{21,8}$$

Kako je $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$, onda upoređenje sa (21,7) pokazuje, da su proizvoljne konstante a i α povezane sa konstantama c_1 i c_2 relacijama

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \tag{21,9}$$

Na taj način u blizini položaja stabilne ravnoteže sistem vrši harmonijsko oscilatorno kretanje. Koeficijent a uz periodični faktor (21,8) se naziva *amplituda* oscilovanja, a argument kosinusa — njegova *faza*; α je prvobitna vrednost faze koja očevidno zavisi od izbora početka računanja vremena. Veličina ω se naziva *ciklična frekvencija* oscilovanja. U teorijskoj fizici, uostalom, naziva se jednostavno *frekvencija*, što ćemo u daljem činiti.

Frekvencija je osnovna karakterissika oscilovanja, koja ne zavisi od početnih uslova kretanja. Prema formuli (21,6) ona se isključivo određuje svojstvima mehaničkog sistema kao takvog. Međutim, napominjemo, da je to svojstvo frekvencije vezano sa pretpostavkom o malim oscilovanima i isčezava pri prelazu na više aproksimacije. S matematičke tačke gledišta ono je vezano sa kvadratnom zavisnošću potencijalne energije od koordinate[2].

Energija sistema, koji vrši mala oscilovanja, iznosi

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

ili, zamenjujući ovde (21,8):

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2. \tag{21,10}$$

[1] Takav sistem se često naziva *linearnim oscilatorom*.

[2] Ono zbog toga ne postoji ako je u funkciji $U(x)$ pri $x = 0$ minimum višeg reda, tj. $U \approx x^n$, $n > 2$ (v. zad. 2a, § 11).

Ona je proporcionalna kvadratu amplitude oscilovanja.

Zavisnost koordinate oscilatornog sistema od vremena često se ispostavlja kao pogodna da se prikaže u obliku realnog dela kompleksnog izraza.

$$x = \mathrm{Re}\{A e^{i\omega t}\}, \tag{21,11}$$

gde je A kompleksna konstanta. Ako je napišemo u oliku

$$A = a e^{i\alpha}, \tag{21,12}$$

vraćamo se na izraz (21,8). Konstanta A se naziva *kompleksna ampituda*. Njen modul se poklapa sa običnom amplitudom, a argument — sa početnom fazom.

Operacija sa eksponencijalnim faktorima je u matemasičkom pogledu prostija nego sa trigometrijskim, jer diferenciranje ne menja njihov oblik. Kako pri tome vršimo samo linearne operacije (sabiranje, množenje konstatnim koeficijentima, diferenciranje, integriranje), možemo uopšte izostaviti oznaku za realni deo, prelazeći na poslednji samo u definitivnom rezultatu izračunavanja.

Zadaci

1. Izraziti amplitudu i početnu fazu oscilovanja pomoću početne vrednosti koordinate i brzine: x_0 i v_0.

Odgovor:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

2. Naći odnos frekvencija ω i ω' oscilovanja dva dvoatomna molekula, koji se sastoje iz atoma različitih izotopa; mase atoma raspektivno iznose m_1, m_2 i m_1' i m_2'.

Rešenje. Kako atomi izotopa uzajamno dejstvuju na isti način, onda je $k = k'$. Ulogu koeficijenta m u kinetičkim energijama molekula igraju njihove redukovane mase. Prema (21,6) nalazimo:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_1' (m_1 + m_2)}}.$$

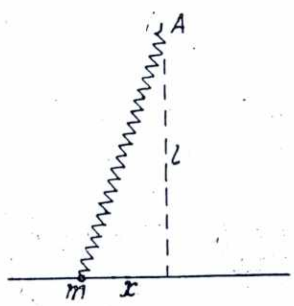
3. Naći frekvenciju oscilovanja tačke mase m koja može da se kreće po pravoj i pričvršćenoj na opruzi, čiji je drugi kraj učvršćen u tački A na rastojanju l od prave. Opruga, koja ima dužinu l istegnuta je silom F.

Rešenje. Potencijalna energija opruge (sa tačnošću do malih veličina višeg reda) jednaka je proizvodu sile F sa izduženjem l opruge, Kada je $x \ll l$, imaćemo:

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l},$$

pa je $U = \dfrac{F x^2}{2l}$. Kako je kinetička energija $\dfrac{m\dot{x}^2}{2}$, onda će biti

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}.$$

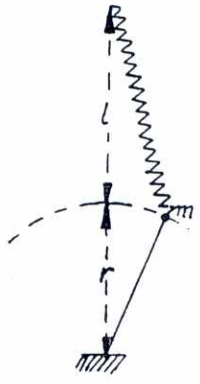


Sl. 22

4. To isto samo ako se tačka kreće po kružnici poluprečnika r (sl. 23.)

Rešenje. U tom slučaju izduženje opruge će biti (kada je $\varphi \ll 1$):

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l + r)^2 - 2r(l + r)\cos\varphi} - l \approx \frac{r(l + r)}{2l}\varphi^2.$$



Sl. 23

Kinetička energija iznosi:

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Odavde će frekvencija biti:

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}.$$

5. Naći frekvenciju oscilovanja klatna prikazanog na sl. 2, čija tačka vešanja može da vrši i kretanje u horizontalnom pravcu.

R e š e n j e. Kada je $\varphi \ll 1$ iz formule dobivene u zadatku 3 § 14, nalazimo:

$$T = \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1 + m)} \dot{\varphi}^2, \qquad U = \frac{m_2 g l}{2} \varphi^2.$$

Odavde izlazi

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}.$$

6. Odrediti oblik krive, pri oscilovanju duž koje (u polju teže) frekvencija oscilovanja ne zavisi od amplitude.

R e š e n j e. Postavljeni uslov zadovoljavaće takva kriva duž koje će pri kretanju potencijalna energija čestica biti $U = \frac{ks^2}{2}$, gde je s dužina luka koji se računa od položaja ravnoteže. Pri tom je kinetička energija $T = \frac{m\dot{s}^2}{2}$ (m je masa čestice), a frekvencija oscilovanja biće $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ nezavisna od prvobitne vrednosti s. Ali u polju teže biće $U = mgy$, gde je y vertikalna koordinata. Zbog toga ćemo imati $\frac{ks^2}{2} = mgy$ ili

$$y = \frac{\omega^2}{2g} s^2.$$

S druge strane je $ds^2 = dx^2 + dy^2$, odakle je:

$$x = \int \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1} \quad dy = \int \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1}\, dy.$$

Integriranje je zgodno izvestiti pošto izvršimo zamenu

$$y = \frac{g}{4\omega^2}(1 - \cos\xi).$$

Tada dobivamo

$$x = \frac{g}{4\omega^2}(\xi + \sin\xi).$$

Te dve jednačine u parametarskom obliku određuju jednačinu tražene krive. Ona predstavlja cikloidu.

§ 22. Prinudna oscilovanja

Prelazimo na posmatranje oscilovanja u sistemu na koji dejstvuje neko promenljivo spoljašnje polje. Takva oscilovanja se nazivaju *prinudna* za razliku od oscilovanja koja smo analizirali u prethodnom paragrafu — takozvana *slobodna* oscilovanja. Kako se prema prethodnom pretpostavlja da su oscilovanja mala, samim tim se podrazumeva, da je spoljašnje polje dosta slabo, u protivnom slučaju bi moglo izazvati suviše veliko pomeranje x.

U tom slučaju pored sopstvene potencijalne energije $\frac{1}{2}kx^2$ sistem ima još potencijalnu energiju $U_e(x,t)$ koja je povezana sa dejstvom spoljašnjeg polja. Razlažući taj dopunski član u red po stepenima male veličine x dobivamo:

$$U_e(x,t) \approx U_e(0,t) + x\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Prvi član je funkcija samo od vremena i zbog toga može biti izbačen u Lagrange-ovoj funkciji (kao totalni izvod po t od neke druge funkcije vremena). U drugom članu $\frac{\partial U_e}{\partial x}$ je spoljašnja „sila" koja dejstvuje na sistemu u ravnotežnom položaju i predstavlja zadatu funkciju vremena, označićemo je sa $F(t)$. Na taj način u potencijalnoj energiji se pojavljuje član $xE(t)$, tako da će Lagrange-ova funkcija sistema biti:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t). \tag{22,1}$$

Odgovarajuća jednačina kretanja je

$$m\ddot{x} + kx = F(t),$$

ili

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t), \tag{22,2}$$

gde smo ponovo uveli frekvenciju ω slobodnih oscilovanja.

Kako je poznato, opšte rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima dobiva se u obliku sume dva izraza: $x = x_0 + x_1$, gde je x_0 opšte rešenje homogene jednačine, x_1 parcijalni integral nehomogene jednačine. U datom slučaju x_0 predstavlja slobodna oscilovanja, koja smo tretirali u prethodnom paragrafu.

Posmatraćemo slučaj koji ima osobiti interes, kada je (prinudna sila) sila koja stvara prinudno oscilovanje takođe prosta periodična funkcija vremena sa nekom frekvencijom γ:

$$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta). \tag{22,3}$$

Parcijalni integral jednačine (22,2) uzećemo u obliku $x_1 = b\cos(\gamma t + \beta)$ sa istim periodičnim faktorom. Zamena u jednačini daje: $b = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$; dodajući rešenje homogene jednačine, dobivamo opšti integral u obliku:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta). \tag{22,4}$$

Proizvoljne konstante a i α se određuju iz početnih uslova.

Na taj način, pod dejstvom periodične sile koja izaziva prinudno oscilovanje. sistem vrši kretanje koje predstavlja zbir dva oscilovanja — sa sopstvenom frekvencijom ω i sa frekvencijom ove sile γ.

Rešenje (22,4) ne primenjuje se za slučaj takozvane *rezonancije*, kada se frekvencija sile koja izaziva prinudno oscilovanje poklapa sa sopstvenom frekvencijom sistema. Za nalaženje opšteg rešenja jednačine kretanja u tom slučaju napisaćemo izraz (22,4) sa odgovarajućim novim oznakama konstanti u obliku:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)].$$

Kada $\gamma \to \omega$, drugi član daje neodređenost oblika $\frac{0}{0}$. Razvijajući ga po L' Hospital-pravilu, dobivamo:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t\sin(\omega t + \beta). \tag{22,5}$$

Na taj način, u slučaju rezonancije amplituda oscilovanja raste linearno u odnosu na vreme (dotle, dok oscilovanja ne prestanu biti mala i sva izložena teorija se ne može primeniti).

Objasnićemo još, kako izgledaju mala oscilovanja u blizini rezonancije, kada je $\gamma = \omega + \varepsilon$, gde je ε mala veličina. Predstavimo opšte rešenje u kompleksnom obliku, kao

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega+\varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t})\, e^{i\omega t}. \tag{22,6}$$

Kako se veličina $A + Be^{i\varepsilon t}$ malo menja u toku perioda $\frac{2\pi}{\omega}$ faktora $e^{i\omega r}$, onda se kretanje u blizini rezonancije može smatrati kao mala oscilovanja, ali sa promenljivom amplitudom[1]).

Ako poslednju označimo sa C, imaćemo:

$$C = |A + Be^{i\varepsilon t}|.$$

Ako A i B prikažemo respektivno u oliku $ae^{i\alpha}$ i $be,^{i\beta}$ dobivamo:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - a). \tag{22,7}$$

Na taj način amplituda osciluje periodično sa frekvencijom ε, menjajući se među granicama

$$|a - b| \leqslant c \leqslant a + b.$$

Ova pojava se naziva *bijenje.*

Jednačina kretanja (22,2) može biti integrirana i u opštem obliku pri proizvoljnoj vrednosti sile $F(t)$. Ovo je lako ostvariti, ako je prethodno napišemo u obliku

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m}F(t),$$

ili

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = \frac{1}{m}F(t), \tag{22,8}$$

1) Menja se takođe „konstantni" član u fazi oscilovanja.

gde je uvedena kompleksna veličina

$$\xi = \dot{x} + i\omega x. \qquad (22,9)$$

Jednačina (22,8) nije drugog, već prvog reda. Bez desnog dela njeno rešenje bi bilo $\xi = Ae^{i\omega t}$ sa konstantom A. Prema opštem pravilu, tražićemo rešenje nehomogene jednačine u obliku $\xi = A(t)e^{i\omega t}$ i za funkciju $A(t)$ dobivamo jednačinu:

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m} F(t)\, e^{-i\omega t}.$$

Ako je integriramo, dobivamo rešenje jednačine (22,9) u obliku:

$$\xi = e^{i\omega t}\left\{\int_0^t \frac{1}{m} F(t)\, e^{-i\omega t} dt + \xi_0\right\}, \qquad (22,10)$$

gde je konstanta integriranja ξ_0 uzeta tako,da predstavlja vrednost ξ u momentu $t = 0$. Ovo je traženo opšte rešenje; funkcija $x(t)$ je data imaginarnim delom izraza (22,10) (podeljenim sa $i\omega$)[1].

Energija sistema, koji vrši prinudna oscilovanja, naravno ne održava se. Sistem dobiva energiju na račun izvora spoljašnje sile. Odredimo totalnu enegiju koju sistem dobiva za sve vreme dejstva sile (od $-\infty$ do $+\infty$) pretpostavljajući da je početna energija jednaka nuli. Prema formuli (22,10) (sa donjom granicom integriranja $-\infty$ umesto nule i sa $\xi(-\infty) = 0$) imamo za $t \to \infty$:

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-i\omega t} dt\right|^2.$$

S druge strane, energija sistema je data izrazom

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}|\xi|^2. \qquad (22,11)$$

Zamenjujući ovde $|\xi(\infty)|^2$, dobivamo traženu predatu energiju u obliku:

$$E = \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-i\omega t} dt\right|^2. \qquad (22,12)$$

Ona se određuje kvadratom modula Fourier-ove kompononte sile $F(t)$ sa frekvencijom, koja koja je jednaka sopstvenoj frekvenciji sistema.

Specijalno, ako spoljašnja sila dejstvuje samo u toku kratkog vremenskog intervala (malog u poređenju sa $\frac{1}{\omega}$), onda možemo staviti da je $e^{-i\omega t} \approx 1$. Tada će biti:

$$E = \frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, dt\right)^2.$$

Ovaj rezultat je od ranije očigledan: on izražava činjenicu da kratkotrajna sila saopštava sistemu impuls $\int F dt$, ne uspevajući da za to vreme izvrši znatno pomeranje.

---

[1]) Razume se, pri tome sila $F(t)$ mora biti napisana u realnom obliku.

Zadaci

1. Odrediti prinudna oscilovanja sistema pod dejstvom sile $F(t)$, ako je u početnom momentu $t = 0$ sistem u miru u položaju ravnoteže ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) za slučajeve

a) $F = \text{const} = F_0$.

Odgovor: $x = \dfrac{F_0}{m\,\omega^2}(1 - \cos\omega t)$; dejstvo konstantne sile dovodi do pomeranja položaja ravnoteže oko koga se vrši oscilovanje.

b) $F = at$.

Odgovor: $x = \dfrac{a}{m\,\omega^3}(\omega t - \sin\omega t)$.

c) $F = F_0 e^{-\alpha t}$.

Odgovor: $x = \dfrac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos\omega t + \dfrac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$,

d) $F = F_0 e^{-\alpha t}\cos\beta t$.

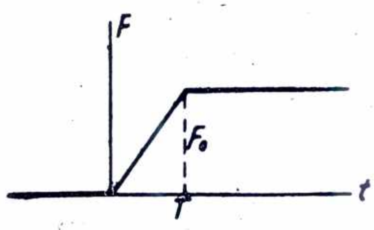
Odgovor:

$$x = \frac{F_0}{m[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]}\Big\{-(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos\omega t +$$

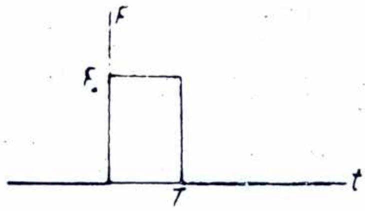
$$+ \frac{\alpha}{\omega}(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)\sin\omega t + e^{-\alpha t}[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos\beta t - 2\alpha\beta\sin\beta t]\Big\}$$

(pri rešavanju silu je zgodno pisati u kompleksnom obliku $F = F_0\, e^{(-\alpha + i\beta)t}$).

2. Odrediti konačnu amplitudu oscilovanja sistema posle dejstva spoljašnje sile, koja se menja po zakonu $F = 0$ kada je $t < 0$, $F = \dfrac{F_0 t}{T}$ kada je $0 < t < T$, $F = F_0$ kada je $t > T$ (sl. 24); do momenta $t = 0$ sistem se nalaz u miru u položaju ravnoteže.



Sl. 24



Sl. 25

Rešenje. U intervalu vremena $0 < t < T$ oscilovanja, koja zadovoljavaju početni uslov, imaju oblik

$$x = \frac{F_0}{m\,T\,\omega^3}(\omega t - \sin\omega t).$$

Kada je $t > T$ tražićemo rešenje u obliku:

$$x = c_1\cos\omega(t - T) + c_2\sin\omega(t - T) + \frac{F_0}{m\,\omega^2}.$$

Iz uslova kontinualnosti x i $\dot{x}$ kada je $t = T$, nalazimo:

$$c_1 = -\frac{F_0}{m\,T\,\omega^3}\sin\omega T, \qquad c_2 = \frac{F_0}{m\,T\,\omega^3}(1 - \cos\omega T).$$

Pri tom će amplituda oscilovanja biti

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{m\,T\,\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

Napominjemo da je ona utoliko manja, ukoliko se sporije "uključuje" sila F_0 (tj. ukoliko je veće T).

3. To isto za slučaj konstantne sile F_0, koja dejstvuje u toku ograničenog vremena T (sl. 25).

R e š e n j e možemo naći kao u zad. 2, ali još jednostavnije koristeći formulu (22,10). Kada je $t > T$ imamo slobodna oscilovanja oko položaja $x = 0$; pri tom

$$\xi = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \int_0^T e^{-i\omega t}\, dt = \frac{F_0}{i m \omega} (1 - e^{-i\omega T})\, e^{i\omega t}.$$

Kvadrat modula ξ daje amplitudu prema formuli $|\xi|^2 = a^2 \omega^2$. Kao rezultat dobivamo:

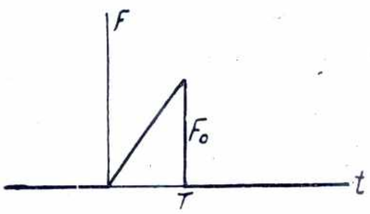
$$a = \frac{2 F_0}{m \omega^2} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

4. To isto u slučaju sile, koja dejstvuje u toku vremena od nule do T prema zakonu $F = \frac{F_0 t}{T}$ (sl. 26).

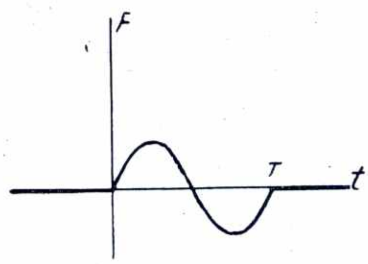
R e š e n j e. Na isti način dobivamo:

$$a = \frac{F_0}{T m \omega^3} \sqrt{\omega^2 T^2 - 2 \omega T \sin \omega T + 2 (1 - \cos \omega T)}.$$

5. To isto u slučaju sile, koja se u toku vremena menja od nule do $T = \frac{2\pi}{\omega}$ po zakonu $F = F_0 \sin \omega t$ (sl. 27).



Sl. 26



Sl. 27

R e š e n j e. Ako zamenimo u (22,10)

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = \frac{F_0}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

integriramo od nule do T, dobivamo:

$$a = \frac{F_0 \pi}{m \omega^2}.$$

§ 23. Oscilovanje sistema sa više stepena slobode

Teorija slobodnih oscilovanja sistema sa nekoliko (s) stepena slobode stvara se analogno onome kako su u § 21 tretirana linearna oscilovanja.

Neka potencijalna energija sistema U kao funkcija generalisanih koordinata q_i $(i = 1, 2, \cdots, s)$ ima minimum kada je $q_i = q_{i0}$. Uvodeći mala pomeranja

$$x_i = q_i - q_{i0} \tag{23,1}$$

i razlažući u odnosu na njih U s tačnošću do članova drugog reda, dobićemo potencijalnu energiju u obliku pozitivno definisanje kvadratne forme:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k, \tag{23,2}$$

gde ponovo računamo potencijalnu energiju od njene minimalne vrednosti. Kako koeficijenti k_{ik} i k_{ki} ulaze u (23,2) pomnoženi jednom istom veličinom $x_i x_k$, onda je jasno, da ih možemo uvek smatrati simetričnim po indeksima

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

U kinetičnu energiju, koja u opštem slučaju ima oblik

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

[vidi (5,5)] stavljamo da je za koeficijente $q_i = q_{i0}$ i, označavajući konstante $a_{ik}(q_0)$ pomoću m_{ik}, dobivamo je u obliku pozitivno definisane kvadratne forme

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \tag{23,3}$$

Koeficijente m_{ik} možemo takođe uvek smatrati simetričnim prema indeksima

$$m_{ik} = m_{ki}.$$

Na taj način, Lagrange-ova funkcija sistema, koji vrši mala slobodna oscilovanja, biće:

$$L = \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k). \tag{23,4}$$

Sastavimo sada jednačine kretanja. Za definisanje izvoda koji u njih ulaze, napisaćemo totalni diferencijal Lagrange-ove funkcije:

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_i dx_k - k_{ik} x_k dx_i).$$

Kako veličina sume, razumljivo, ne zavisi od oznaka indeksa sumiranja, promenićemo u prvom i trećem članu u zagradama i sa k, a k sa i. Uzimajući u obzir pri tom simetričnost koeficijenta m_{ik} i k_{ik}, dobivamo:

$$dL = \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_k dx_i).$$

Odavde je jasno, da je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik} \dot{x}_k, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k k_{ik} x_k.$$

Prema tome Lagrange-ove jednačine biće

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = 0. \qquad (23,5)$$

One predstavljaju sistem s ($i = 1,2, \cdots, s$) linearnih homogenih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Prema opštim pravilima rešenja takvih jednačina tražićemo s nepoznatih funkcija $x_k(t)$ u obliku:

$$x_k = A_k e^{i\omega t}, \qquad (23,6)$$

gde su A_k neke, za sada neodređene, konstante, Zamenjujući (23,6) u sistem (23,5) dobivamo posle skraćivanja sa $e^{i\omega t}$ sistem linearnih homogenih algebarskih jednačina koje moraju zadovoljavati konstante A_k:

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0. \qquad (23,7)$$

Da bi taj sistem imao rešenja različita od nule, njegova determinanta treba da bude jednaka nuli:

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \qquad (23,8)$$

Jednačina (23,8), takozvana *karakteristična* jednačina — predstavlja jednačinu stepena s u odnosu na ω^2. Ona ima u opštem slučaju s različitih realnih pozitivnih korena ω_α^2, $\alpha = 1,2, \cdots, s$) (u specijalnim slučajevima neki od tih korena mogu se poklapati). Tako definisanje veličine ω_α nazivaju se *svojstvene frekvencije* sistema.

Realnost i pozitivnost korena jednačine (23,8) su od ranije očigledni zbog fizičkih razloga. I zaista, postojanje u ω imaginarnog dela, označavalo bi postojanje u vremenskoj zavisnosti od koordinata x_k (a sa njima i brzina $\dot{x}_k$) faktora koji eksponencijalno raste. Ali postojanje takvog faktora u datom slučaju nije dozvoljeno, jer bi dovelo do promene totalne energije $E = U + T$ sistema u toku vremena, što je u protivrečnosti sa zakonom njenog održanja.

U to se možemo uveriti i čisto matematičkim putem. Pomnoživši jednačinu (23,7) sa A_i^* i izvršivši sumiranje po i, dobivamo

$$\sum_{i,k} (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_i^* A_k = 0,$$

odakle je

$$\omega^2 = \frac{\Sigma\, k_{ik} A_i^* A_k}{\Sigma\, m_{ik} A_i^* A_k}.$$

Kvadratni oblici u brojitelju i imenitelju ovog izraz su realni, zbog realnosti i simetričnosti koeficijenata k_{ik} i m_{ik}, pa je

$$\left(\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k\right) = \sum_{i,k} k_{ik} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ki} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_k A_i^*.$$

Oni su takođe u suštini pozitivni, a zbog toga je pozitivno i ω^2[1].

Pošto su nađene frekvencije ω_α, zamenjujući svaku od njih u jednačine (23,7) možemo naći odgovarajuće vrednosti koeficijenata A_k. Ako su svi koreni karakteristične jednačine različiti, onda su, kako je poznato, koeficijenti A_k proporcionalni minorima determinante (23,8) u kojoj je ω zamenjeno odgovarajućom vrednošću ω_α; označimo te minore sa $\Delta_{k\alpha}$. Parcijalno rešenje sistema diferencijalnih jednačina (23,5) ima, prema tome, oblik

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t},$$

gde je C_α — proizvoljna (kompleksna) konstanta.

Opšte rešenje je dato sumom svih s parcijalnih rešenja. Prelazeći na realni deo, napisaćemo ga u obliku

$$x_k = \operatorname{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\} \equiv \sum \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha , \tag{23,9}$$

gde smo uveli oznaku

$$\Theta_\alpha = \operatorname{Re}\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}. \tag{23,10}$$

Na taj način promena svake koordinate predstavlja dodavanje s prostih periodičnih oscilacija $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ sa proizvoljnim amplitudama i fazama, ali koje imaju potpuno određene frekvencije.

Prirodno nastaje pitanje, nije li mogućno uzeti generalisane koordinate tako, da bi svaka od njih vršila samo jedno prosto oscilovanje? Sam oblik opšteg integrala (23,9) ukazuje put za rešenje toga zadatka.

U samoj stvari, posmatrajući s relacija (23,9) kao sistem jednačina sa s nepoznatih veličina Θ_α, možemo rešavajući taj sistem izraziti veličine $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ pomoću koordinata $x_1, x_2, \cdots, x_s$. Prema tome veličine Θ_α možemo smatrati kao nove generalisane koordinate. Te koordinate se nazivaju *normalne* (ili *glavne*), a jednostavna periodična oscilovanja koja one srše, nazivaju se — normalna oscilovanja sistema.

Normalne koordinate Θ_α zadovoljavaju, kako izlazi iz njihov definicije, jednačine

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \tag{23,11}$$

To znači da se u normalnim koordinatama jednačine kretanja raspadaju na s uzajamno nezavisnih jednačina. Ubrzanje svake normalne koordinate zavisi samo od vrednosti te iste koordinate, i za potpuno definisanje njene zavisnosti od vremena, potrebno je znati samo njene početne vrednosti i odgovarajuće brzine. Drugim rečima, normalna oscilovanja sistema su potpuno nezavisna.

---

[1]) Pozitivna određenost kvadratne forme, koja je sastavljena iz koeficijenta k_{ik}, očevidna je iz njihove definicije u (23,2) za realne vrednosti promenljivih. Ali ako napišemo kompleksne veličine A_k u eksplicitnom obliku kao $a_k + ib_k$ dobivamo (ponovo zbog simetričnosti k_{ik}):

$$\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k = \sum_{i,k} k_{ik}(a_i - ib_i)(a_k + ib_k) = \sum_{i,k} k_{ik} a_i a_k + \sum k_{ik} b_i b_k,$$

tj. sumu dva pozitivno definisana oblika.

Iz izloženog je očigledno, da se Lagrange-ova funkcija, koja je izražena pomoću normalnih koordinata, raspada na sumu izraza od kojih svaki odgovara jednodimenzionalnom oscilovanju sa jednom od frekvencija ω_α, tj. ima oblik

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2), \tag{23,12}$$

gde su m_α pozitivne konstante. Sa matematičkog gledišta to znači, da se transformacijom (23,9) obe kvadratne forme — kinetička energija (23,3) i potencijalna (23,2) — jednovremeno dovode na dijagonalni oblik.

Obično se normalne koordinate uzimaju tako, da koeficijenti uz kvadrate brzina u Lagrange-ovoj funkciji budu jednaki jedinici. U tom cilju dovoljno je odrediti normalne koordinate (označićemo ih sada Q_α) jednačinama

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\, \Theta_\alpha. \tag{23,13}$$

Tada će biti

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

Sve izloženo se malo menja u slučaju, kada među korenima karakteristične jednačine postoje koreni koji se mogu skratiti. Opšti oblik (23,9) i (23,10) integrala jednačine kretanja ostaje isti (sa istim brojem s članova), samo s tom razlikom da koeficijenti $\Delta_{k\alpha}$ koji odgovaraju višestrukim (multiplumima) frekvencijama nisu više minori determinante, koji, kao što je poznato, u tom slučaju ostaju jednaki nuli[1]).

Svakoj višestrukoj (ili kako se kaže, *degenerisanoj*) frekvenciji odgovara toliko različitih normalnih koordinata, kojeg je stepena mnogostrukost, ali izbor tih normalnih koordinata nije jednoznačan. Kako u kinetičkoj i potencijalnoj energiji normalne koordinate (sa jednakim ω_α) ulaze sume $\Sigma \dot{Q}_\alpha^2$ i ΣQ_α^2, koje se podjednako transformišu, to ih možemo podvrgnuti ma kakvoj linearnoj transformaciji pri kojoj suma kvadrata ostaje invarijantna.

Vrlo jednostavno je nalaženje normalnih koordinata za trodimenzionalna oscilovanja jedne materijalne tačke, koja se nalazi u konstantnom spoljašnjem polju. Pomerajući koordinatni početak Descartes-ovog sistema u tačku sa minimalnom potencijalnom energijom $U(x, y, z,)$, dobićemo poslednju u obliku kvadratne forme promenljivih x, y, z, a kinetička energija

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

(m je masa čestice), ne zavisi od izbora orijentacije koordinatnih osa. Zbog toga odgovarajućim obrtanjem osa, treba samo potencijalnu energiju dovesti na dijagonalni oblik. Onda je:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2), \tag{23,14}$$

[1]) Nemogućnost nastajanja u opštem integralu članova, koji sadrže uporedo sa eksponencijalnim i stepenske vremenske faktore, očigledna je na osnovu istih fizičkih predstava, koje isključuju postojanje kompleksnih „frekvencija": postojanje takvih članova bi protivrečilo zakonu održanja energije.

a oscilovanja duž osa x, y, z, su glavna sa frekvencijama

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}.$$

U specijalnom slučaju centralno-simetričnog polja ($k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$, $U = \frac{kr^2}{2}$) ove tri frekvencije se poklapaju (vidi zad. 3).

Korišćenje normalnih koordinata daje mogućnost da se zadatak o prinudnim oscilovanjima sistema sa nekoliko stepena slobode svede na zadatke o linearnim prinudnim oscilovanjima. Lagrange-ova funkcija sistema, sa uzimanjem u obzir promenljivih spoljašnjih sila, koje na njega dejstvuju, ima oblik

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)\, x_k, \tag{23,15}$$

gde je L_0 Lagrange-ova funkcija slobodnih oscilovanja. Uvodeći umesto koordinata x_k normalne koordinate, dobivamo

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \sum_\alpha f_\alpha(t)\, Q_\alpha, \tag{23,16}$$

gde je uvedeno označavanje

$$f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}.$$

Prema tome jednačine kretanja

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \tag{23,17}$$

sadržavaće samo po jednu nepoznatu funkciju $Q_\alpha(t)$.

Zadaci

1. Odrediti oscilovanje sistema sa dva stepena slobode ako je njegova Lagrange-ova funkcija

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha x y$$

(dva ista linearna sistema sa sopstvenim frekvencijama ω_0 povezana uzajamnim dejstvom $-\alpha x y$).

Rešenje. Jednačine kretanja biće:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y, \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

Zamena (23,6) daje:

$$A_x(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \qquad A_y(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x.$$

Karakteristična jednačina je $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$, odakle izlazi:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

Kada $\omega = \omega_1$, jednačine (1) daju $A_x = A_y$, a kada je $\omega = \omega_2$, $A_x = -A_y$. Zbog toga biće

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

(koeficijent $\frac{1}{\sqrt{2}}$ odgovara normiranju normalnih koordinata koje je navedeno u tekstu).

Kada je $\alpha \ll \omega_0^2$ (slaba veza) imaćemo;

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\alpha}{2}, \qquad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\alpha}{2}.$$

Promena x i y predstavlja u tom slučaju slaganje dva oscilovanja sa bliskim frekvencijama tj. imaju karakter bijenja sa frekvencijom $\omega_2 - \omega_1 = \alpha$ (v. § 22). Pri tom, u momentu, kada amplituda koordinate prolazi kroz maksimum, amplituda y prolazi kroz minimum i obratno.

2. Odrediti mala oscilovanja dvostrukog klatna u ravni (sl. 1).

Rešenje. Za mala oscilovanja ($\varphi_1 \ll 1, \varphi_2 \ll 1$) Lagrange-ova funkcija koja je nađena u zadatku 1. § 5, dobiva oblik:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2.$$

Jednačine kretanja su:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0,$$
$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0.$$

Posle zamene (23,6), biće:

$$A_1 (m_1+m_2)(g - l_1 \omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 l_2 = 0,$$
$$- A_1 l_1 \omega^2 + A_2 (g - l_2 \omega^2) = 0.$$

Koreni karakteristične jednačine su:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2 m_1 l_1 l_2} \{ (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4 m_1 l_1 l_2]} \}.$$

Kada $m_1 \to \infty$ frekvencije teže limesima $\sqrt{\frac{g}{l_1}}$ i $\sqrt{\frac{g}{l_2}}$, koji odgovaraju nezavisnim oscilovanjima dva klatna.

3. Naći trajektoriju kretanja čestice u centralnom polju $U = \frac{kr^2}{2}$ (takozvani *prostorni oscilator*).

Rešenje. Kao i u svakom centralnom polju, kretanje se vrši u jednoj ravni, koju uzimamo kao ravan x, y. Promena svake od koordinata x, y je prosto oscilovanje sa jednakim frekvencijama $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \qquad y = b \cos(\omega t + \beta),$$

ili

$$x = a \cos\varphi, \qquad y = b \cos(\varphi + \delta) = b \cos\delta \cos\varphi - b \sin\delta \sin\varphi,$$

gde su uvedene oznake $\varphi = \omega t + \alpha$, $\delta = \beta - \alpha$. Ako odavde odredimo $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ i obrazujemo zbir njihovih kvadrata, dobivamo jednačinu trajektorije:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos\delta = \sin^2\delta.$$

Ovo je elipsa sa centrom u koordinatnom početku[1]). Kada je $\delta = 0$ ili π, trajektorija se degeneriše u otsečak prave.

---

[1]) Činjenica da se u polju sa potencijalnom energijom $U = \frac{kr^2}{2}$ kretanje vrši po zatvorenoj krivoj, već je bila pomenuta u § 14.

§ 24. Oscilovanje molekula

Ako imamo posla sa sistemom čestica koje međusobno dejstvuju, ali se ne nalaze u spoljašnjem polju, onda njegovi stepeni slobode nemaju svi oscilatorni karakter. Tipičan primer takvih sistema kretanja su molekuli. Pored kretanja, koja predstavljaju oscilovanja atoma oko njihovih položaja ravnoteže unutar molekula, molekul kao celina može da vrši translatorno i rotaciono kretanje. Translatornom kretanju odgovaraju tri stepena slobode. Toliko isto ima u opštem slučaju rotacionih stepena slobode, tako da od $3n$ stepena n-atomskog molekula svega $3n—6$ odgovaraju oscilatornom kretanju. Izuzetak čine molekuli u kojima su svi atomi postavljeni duš jedne prave. Kako nema smisla govoriti o rotaciji oko te prave, to rotacionih stepena slobode u tom slučaju ima svega dva, tako da oscilatornih ima $3n — 5$.

Pri rešavanju mehaničkog zadatka o oscilovanjima molekula, korisno je od samog početka isključiti iz razmatranja translatorne i rotacione stepene slobode. Da bismo isključili translatorno kretanje treba smatrati da je totalni impuls molekula jednak nuli. Kako taj uslov označava nepokretnost centra inercije molekula onda ga možemo izraziti u obliku konstatnosti triju koordinata poslednjeg. Ako stavimo $\vec{r}_a = \vec{r}_{a0} + \vec{u}_a$ (gde je $\vec{r}_{a0}$ radijus-vektor nepokretnog položaja ravnoteže a-tog atoma, a $\vec{u}_a$ njegovo odstupanje od toga položaja); predstavićemo uslov

$$\sum m_a \vec{r}_a = \text{const} \equiv \sum m_a \vec{r}_{a0}$$

u obliku:

$$\sum m_a \vec{u}_a = 0. \tag{24,1}$$

Da bismo isključili rotaciju molekula, treba staviti da je njegov totalni moment impulsa jednak nuli. Kako moment nije totalni izvod po vremenu od ma koje funkcije koordinata, onda uslov njegovog iščezavanja ne može biti, opšte uzev, izražen u obliku izjednačavanja sa nulom takve funkcije. Međutim, slučaj malih oscilovanja upravo predstavlja izuzetak. U samoj stvari, stavljajući ponovo $\vec{r}_a = \vec{r}_{a0} + \vec{u}_a$ i zanemarujući male veličine drugog reda u odnosu na pomeranje $\vec{u}_a$, predstavićemo moment impulsa molekula u obliku:

$$\vec{M} = \sum m_a (\vec{r}_a \times \vec{v}_a) \approx \sum m_a (\vec{r}_{a0} \times \dot{\vec{u}}_a) = \frac{d}{dt} \sum m_a (\vec{r}_{a0} \times \vec{u}_a).$$

Uslov da on bude jednak nuli u toj aproksimaciji se može, prema tome, predstaviti u obliku

$$\sum m_a (\vec{r}_{a0} \times \vec{u}_a) = 0 \tag{24,2}$$

(koordinatni početak pri tom može biti proizvoljno uzet).

Normalna oscilovanja molekula mogu biti klasificirana prema karakteru kretanja atoma u njima na osnovu rezonovanja vezanih za simetriju položaja atoma u molekulu (u položajima ravnoteže). U tu svrhu postoji opšti metod, osnovan na korišćenju teorije grupa; on je izložen u drugom tomu ovoga kursa[1]. Ovde ćemo analizirati samo izvesne elementarne slučajeve.

[1] Vidi „Kvantna mehanika", t. 3.

Ako se svih n atoma molekula nalaze u jednoj ravni, onda se mogu razlikovati normalna oscilovanja, koja zadržavaju atome u toj ravni, i normalna oscilovanja, pri kojima atomi izlaze iz ravni. Lako je odrediti broj jednih i drugih. Kako za kretanje u ravni postoji svega $2n$ stepena slobode od kojih dva translatorna i jedan rotacioni, onda broj normalnih oscilovanja koja ne izvode atome iz ravni iznosi: $2n - 3$. Ostalih $(3n-6)-(2n-3) = n-3$ oscilatornih stepena slobode odgovaraju oscilovanjima koja izvode atome iz ravni.

U slučaju linearnog molekula možemo razlikovati longitudinalna oscilovanja, koja mu održavaju pravolinijki oblik i oscilovanja, koja izvode atome sa prave linije. Kako kretanju n čestica po liniji odgovara svega n stepena slobode, od kojih je jedan translatorni, onda broj oscilovanja, koja ne izvode sa prave, iznosi $n-1$. Kako je ukupan broj oscilujućih stepena slobode linijskog mole- $3n-5$, to postoje $2n-4$ oscilacije, koje izvode atome sa prave. Međutim, ovim oscilovanjima odgovaraju svega $n-2$ različite frekvencije, jer svako takvo oscilovanje može se realizovati na dva nezavisna načina — u dve uzajamno normalne ravni (koje prolaze kroz osu molekula); na osnovu principa simetrije, očigledno je, da svaki takav par normalnih oscilovanja ima istu frekvenciju.

Zadaci[1]

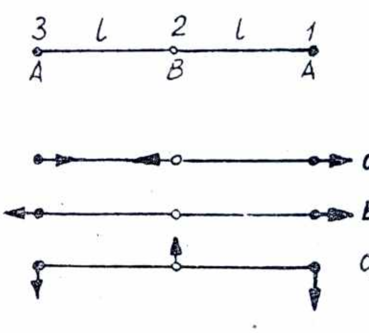
1. Odrediti frekvenciju oscilovanja linearnog troatomskog simetričng molekula AB (sl. 28). Predpostavlja se, da potencijalna energija molekula zavisi samo od rastojanja $A-B$ i $B-A$ i od ugla ABA.

Rešenje. Longitudinalna pomeranja atoma x_1, x_2, x_3 su zbog (24,1) vezana relacijom:

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0.$$

Pomoću nje eliminišemo x_2 iz Lagrange-ove funkcije longitudinalnog kretanja molekula

$$L = \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k_1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$



Sl. 28

posle toga uvodimo nove koordinate:

$$Q_a = x_1 + x_3, \qquad Q_s = x_1 - x_3.$$

Kao rezultat dobivamo:

$$L = \frac{m_A \mu}{4 m_B}\dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2 - \frac{k_1 \mu^2}{4 m_B^2}Q_a^2 - \frac{k_1}{4}Q_s^2$$

($\mu = 2m_A + m_B$ je masa molekula). Odavde se vidi da su Q_a i Q_s normalne koordinate (sa tačnošću do normiranja). Koordinata Q_a odgovara antisimetričnom oscilovanju u odnosu na sredinu molekula ($x_1 = x_3$; sl. 28, a) sa frekvencijom:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_1 \mu}{m_A m_B}}.$$

Koordinata Q_s odgovara simetričnom ($x_1 = -x_3$; sl. 28, b) oscilovanju sa frekvencijom

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}.$$

[1] Izračunavanja oscilovanja složenijih molekula mogu se naći u knjigama: *М. В. Волькенштейн, М. А. Ельяшевич, Б. И. Степанов*, Oscilovanja molekula, Гостехиздат, 1949.; *Б. Герцберг*, Oscilatorni i rotacioni spektri višeatomnih molekula, ИИЛ, 1949.

Transverzalna pomeranja atoma y_1, y_2, y_3 zbog (24,1) i (24,2) su vezana relacijama

$$m_A (y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0, \qquad y_1 = y_3$$

(simetrično oscilovanje savijanja, sl. 28, c). Potencijalnu energiju savijanja molekula napisaćemo u obliku $\frac{k_2 l^2 \delta^2}{2}$, gde je δ odstupanje ugla ABA od vrednosti π; ono se izražava pomoću pomeranja prema relaciji

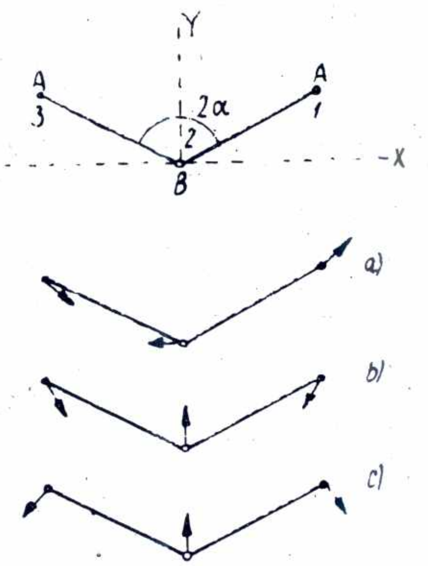
$$\delta = \frac{1}{l} [(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)].$$

Izražavajući sva pomeranja $y_1, y_2 y_3$ pomoću δ, dobićemo Lagrange-ovu funkciju transverzalnog oscilovanja u obliku

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{y}_2^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta_2 = \frac{m_A m_B}{4\mu} l^2 \dot{\delta}^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2,$$

odavde je frekvencija

$$\omega_{s2} = \sqrt{\frac{2 k_2 \mu}{m_A m_B}}.$$



Sl. 29

2. Isto to za molekul ABA trougaonog oblika (sl. 29).

Rešenje. Zbog (24,1) i (24,2) komponente pomeranja $\vec{u}$ atoma u pravcima X i Y (sl, 29) vezane su relacijama

$$m_A (x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0,$$

$$m_A (y_1 + y_2) + m_B y_2 = 0,$$

$$\sin\alpha\, (y_1 - y_3) - \cos\alpha\, (x_1 + x_3) = 0.$$

Promene δl_1 i δl_2 rastojanja $A - B$ i $B - A$ dobivaju se projektovanjem vektora $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ i $\vec{u}_3 - \vec{u}_2$ na pravce linija AB i BA;

$$\delta l_1 = (x_1 - x_2) \sin\alpha + (y_1 - y_2) \cos\alpha,$$

$$\delta l_2 = -(x_3 - x_2) \sin\alpha + (y_3 - y_2) \cos\alpha.$$

Promena ugla ABA se dobiva projektovanjem istih vektora na pravac koji je normalan na odsečke AB i BA:

$$\delta = \frac{1}{l} [(x_1 - x_2) \cos\alpha - (y_1 - y_2) \sin\alpha] + \frac{1}{l} [-(x_3 - x_2) \cos\alpha - (y_3 - y_2) \sin\alpha].$$

Lagrange-ova funkcija molekula biće:

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{\vec{u}}_1^2 + \dot{\vec{u}}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{\vec{u}}_2^2 - \frac{k_1}{2} (\delta l_1^2 + \delta l_2^2) - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2.$$

Uvedimo nove koordinate

$$Q_a = x_1 + x_3, \qquad q_{s1} = x_1 - x_3, \qquad q_{s2} = y_1 + y_3.$$

Komponente vektora $\vec{u}$ se izražavaju pomoću njih prema relacijama

$$x_1 = \frac{1}{2}(Q_a + q_{s1}), \qquad x_3 = \frac{1}{2}(Q_a - q_{s1}), \qquad x_2 = -\frac{m_A}{m_B}Q_a,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(q_{s2} + Q_a \operatorname{ctg}\alpha), \qquad y_3 = \frac{1}{2}(q_{s2} - Q_a \operatorname{ctg}\alpha), \qquad y_2 = -\frac{m_A}{m_B}q_{s2},$$

a za Lagrange-ovu funkciju posle izračunavanja dobivamo

$$L = \frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{q}_{s1}^2 + \frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{q}_{s2}^2 -$$

$$- Q_a^2\frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right) - \frac{q_{s1}^2}{4}(k_1\sin^2\alpha + 2k_2\cos^2\alpha) -$$

$$- q_{s2}^2\frac{\mu}{4m_B^2}(k_1\cos^2\alpha + 2k_2\sin^2\alpha) + q_{s1}q_{s2}\frac{\mu}{2m_B}(2k_2 - k_1)\sin\alpha.$$

Odavde je očigledno, da koordinata Q_a odgovara normalnom oscilovanju sa frekvencijom

$$\omega_a^2 = \frac{k_1}{m_A}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right),$$

koje je antisimetrično u odnosu na osu Y ($x_1 = x_3$, $y_1 = -y_3$; sl. 29a).

Koordinate q_{s1} i q_{s2} istovremeno važe za dva oscilovanja simetrična u odnosu na osu Y: $x_1 = -x_3$, $y_1 = y_3$; sl. 29, b i c, čije se frekvencije ω_{s1} i ω_{s2} određuju kao koreni karakteristične jednačine, koja je kvadratna (po ω^2)

$$\omega^4 - \omega^2\left[\frac{k_1}{m_A}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\cos^2\alpha\right) + \frac{2k^2}{m_A}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)\right] + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2} = 0.$$

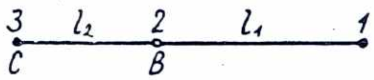
Kada je $2\alpha = \pi$ sve frekvencije se poklapaju sa frekvencijama u zadatku 1.

3. Isto to za linearni nesimetrični molekul ABC (sl. 30).

R e š e n j e. Longitudinalna (x) i transverzalna (y) pomeranja atoma vezani su relacijama

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_C x_3 = 0, \qquad m_A y_1 + m_B y_2 + m_C y_3 = 0,$$

$$m_A l_1 y_1 = m_C l_2 y_3.$$



Sl. 30

Potencijalnu energiju iztezanja i savijanja napisaćemo u obliku:

$$\frac{k_1}{2}(\delta l_1)^2 + \frac{k_1'}{2}(\delta l_2)^2 + \frac{k_2 l^2}{2}\delta^2$$

($2l = l_1 + l_2$). Izračunavanja, koja su analogna izračunavanjima izvršenim u zadatku 2, dovode do vrednosti

$$\omega_t^2 = \frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2}\left(\frac{l_1^2}{m_C} + \frac{l_2^2}{m_A} + \frac{4l^2}{m_B}\right)$$

za frekvenciju transverzalnog oscilovanja i do kvadratne (po ω^2) jednačine

$$\omega^4 - \omega^2\left[k_1\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right) + k_1'\left(\frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C}\right)\right] + \frac{\mu k_1 k_1'}{m_A m_B m_C} = 0$$

za frekvencije ω_{l_1} i ω_{l_2} dva longitudinalna oscilovanja.

§ 25. Prigušena oscilovanja

Do sada smo uvek podrazmevali da se kretanje tela vrši u vakuumu ili da se uticaj sredine na kretanje može zanemariti. U stvari, pri kretanju tela u sredini ova pruža otpor, težeći da uspori kretanje. Energija tela koje se kreće, pri tom na kraju krajeva, prelazi u toplotu, ili kako se kaže, rasipa se (nastaje disipacija).

Proces kretanja u tim uslovima već nije čisto mehanički proces pa je za njegovo analiziranje potrebno uzeti u obzir kretanje same sredine i unutrašnje toplotno stanje, kako sredine, tako i tela. Specijalno, već se ne može konstatovati u opštem slučaju da je ubrzanje tela u kretanju funkcija samo njegovih koordinata i brzine u datom momentu, tj. ne postoje jednačine kretanja u tom smislu, kakav imaju u mehanici. Na taj način zadatak o kretanju tela u sredini već nije zadatak mehanike.

Međutim, postoji određena kategorija slučajeva, kada kretanje u sredini može biti približno opisano pomoću mehaničkih jednačina kretanja uvođenjem u njim određenih dopunskih članova. Ovde dolaze oscilovanja sa frekvencijama, koje su male u odnosu na frekvencije karakteristične za unutrašnje disipativne procese u sredini. Pri ispunjenju toga uslova, može se smatrati da na telo dejstvuje *„sila trenja“*, koja zavisi samo od njegove brzine (za datu homogenu sredinu).

Ako je pri tom ova brzina dosta mala, onda silu trenja možemo razložiti po stepenima u odnosu na nju. Nulti član reda je jednak nuli, jer na nepokretno telo ne dejstvuje nikakva sila trenja, i prvi član, koji nije jednak nuli, proporcionalan je brzini. Na taj način generalisanu silu trenja f_{tr}, koja dejstvuje na sistem, koji vrši linearna mala oscilovanja sa generalisanom koordinantom x, možemo napisati u obliku

$$f_{tr} = -\alpha \dot{x},$$

gde je α pozitivni koeficijent, a znak minus pokazuje da sila dejstvuje u stranu koja je suprotna brzini. Dodajući tu silu na desnu stranu jednačine kretanja, dobivamo [upor. (21,4)]:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}. \tag{25,1}$$

Podelićemo je sa m i uvešćemo oznake

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \qquad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda. \tag{25,2}$$

ω_0 je frekvencija slobodnih oscilovanja sistema u odsustvu trenja. Veličina λ se naziva *eksponent* (ili dekrement) (slabljenja) *prigušivanja* (atenuacije, slabljenja).

Na taj način imamo jednačinu:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{25,3}$$

Prema opštim pravilima rešavanja linearnih jednačina se konstantnim koeficijentima, stavićemo $x = e^{rt}$ i imaćemo za r karakterističnu jednačinu:

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

odavde izlazi

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Opšte rešenje jednačine (25,3) je:

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Ovde treba razlikovati dva slučaja.

Ako je $\lambda < \omega_0$, onda imamo dve kompleksno-konjugovane vrednosti za r. Opšte rešenje jednačine kretanja u tom slučaju može biti predstavljeno u obliku:

$$x = \mathrm{Re}\{A \exp(-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t)\},$$

gde je A proizvoljna kompleksna konstanta. Inače možemo napisati relaciju:

$$x = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \tag{25,4}$$

gde su a i α realne konstante. Kretanje izraženo ovim formulama predstavlja takozvana *prigušena oscilovanja.* Možemo ga smatrati kao harmonijska oscilovanja sa amplitudom koja eksponencijalno opada. Brzina opadanja amplitude se određuje eksponentom λ, a „frekvencija" ω oscilovanja je manja od frekvencije slobodnih oscilovanja u odsustvu trenja; kada je $\lambda \ll \omega_0$ razlika između ω i ω_0 je mala veličina drugog reda. Smanjenje frekvencije pri trenju trebalo je od ranije očekivati, jer trenje uopšte zadržava kretanje.

Ako je $\lambda \ll \omega_0$, onda se za vreme jednog perioda $\frac{2\pi}{\omega}$ amplituda prigušenog oscilovanja skoro ne menja. U tom slučaju, ima smisla posmatrati srednju (u odnosu na period) vrednost kvadrata koordinate i brzine, zanemarujući pri dovođenju na srednju vrednost promenu faktora $e^{-\lambda t}$. Ovi srednji kvadrati, očigledno su proporcionalni sa $e^{-2\lambda t}$. Zbog toga i srednja vrednost energije sistema opada prema zakonu:

$$\bar{E} = E_0 e^{-2\lambda t}, \tag{25,5}$$

gde je E_0 početna vrednost energije.

Neka je sada $\lambda > \omega_0$. Tada su obe vrednosti za r realne, pri čemu su obe negativne.

Opšti oblik rešenja biće

$$x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})\, t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})\, t}. \tag{25,6}$$

Vidimo da se u tom slučaju, koji nastaje pri dosta velikom trenju, kretanje sastoji u monotonom opadanju x, tj. u asimptotskom (kada $t \to \infty$) približavanju položaju ravnoteže bez oscilovanja. Ovaj tip kretanja se naziva *aperiodična atenuacija* (prigušenje).

Na kraju, u specijalnom slučaju, kada je $\lambda = \omega_0$, karakteristična jednačina ima svega jedan (dvostruki) koren $r = -\lambda$. Kao što je poznato, opšte rešenje diferencijalne jednačine u tom slučaju ima oblik:

$$x = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\lambda t}. \tag{25,7}$$

Ovo je specifičan slučaj aperiodične atenuacije. Ona takođe nema oscilatorni karakter, mada i nije, obavezno monotona.

Za sistem sa više stepena slobode, generalisane sile trenja, koje odgovaraju koordinatama x_i, su linearne funkcije brzina oblika

$$f_{i\text{tr}} = -\sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \tag{25,8}$$

Sa čisto mehaničkih pozicija ne mogu se stvoriti nikakvi zaključci o svojstvima simetrije koeficijenta α_{ik} prema indeksima i i k. Metodima statističke fizike se može pokazati[1] da je uvek

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \tag{25,9}$$

Zbog toga izrazi (25,8) mogu biti napisani u obliku izvoda

$$f_{i\text{tr}} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \tag{25,10}$$

kvadratne forme

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \tag{25,11}$$

koja se naziva *disipativna funkcija.*

Sile (25,10) moraju biti dodate na desnu stranu Lagrange-ove jednačine:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \tag{25,12}$$

Disipativna funkcija ima sama po sebi važan fizički smisao—njom se određuje intenzivnost disipacije energije u sistemu. U to se je lako uveriti izračunavši izvod po vremenu mehaničke energije sistema. Imaćemo:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L\right) = \sum_i \dot{x}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = -\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Kako je F kvadratna funkcija brzine, onda zbog Euler-ove teoreme o homogenim funkcijama, suma na desnoj strani jednačine iznosi $2F$. Na taj način biće:

$$\frac{dE}{dt} = -2F, \tag{25,13}$$

tj. brzina promene energije sistema je data dvostrukom disipativnom funkcijom. Kako disipativni procesi dovode do smanjenja energije, onda uvek mora biti $F > 0$. tj. kvadratna forma je suštinski pozitivna.

Jednačina malih oscilovanja pri nastajanju trenja, dobiva se dodavanjem sila (25,8) na desnoj strani jednačine (23,5):

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = -\sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \tag{25,14}$$

Ako u te jednačine stavimo:

$$x_k = A_k e^{rt},$$

[1] Vidi „Statistička fizika", t. 5.

dobivamo posle skraćivanja sa e^{rt} sistem linearnih algebarskih jednačina za konstante A_k:

$$\sum_k (m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}) A_k = 0. \tag{25,15}$$

Izjednačujući sa nulom determinantu tog sistema, nalazimo karakterističnu jednačinu

$$| m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik} | = 0. \tag{25,16}$$

iz koje se određuje vrednost r.

Ovo je jednačina $2s$-tog stepena u odnosu na r. Kako su svi njeni koeficijenti realni, onda su njeni koreni bilo realni, bilo po dva kompleksno konjugovani. Pri tom su realni koreni uvek negativni, a kompleksni imaju negativan realni deo. U protivnom slučaju, koordinate i brzine, a sa njima i energija sistema bi se eksponencijalno povećavale sa vremenom, međutim, kako postoje disipativne sile, mora doći do smanjenja energije.

§ 26. Prinudna oscilovanja pri postojanju trenja

Ispitivanja prinudnih oscilovanja pri postojanju trenja potpuno su analogna posmatranju oscilovanja bez trenja, koje je izvršeno u § 22. Ovde ćemo se zaustaviti iscrpno na slučaju periodične prinudne sile, koji je od posebnog interesa.

Ako desnoj strani jednačine (25,3) dodamo spoljašnju silu $\cos \gamma t$ i podelimo je sa m dobivamo jednačinu kretanja u obliku

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t. \tag{26,1}$$

Rešenje te jednačine je zgodno naći u kompleksnom obliku, zbog čega na desnoj strani umesto $\cos \gamma t$, pišemo $e^{i\gamma t}$:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\lambda t}.$$

Parcijalni integral tražimo u obliku $x = Be^{i\gamma t}$ i za B nalazimo:

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \tag{26,2}$$

Ako B predstavimo u obliku $be^{i\delta}$, za b i δ imaćemo:

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{26,3}$$

Na kraju, ako realni deo odvojimo od izraza $Be^{i\gamma t} = b\,e^{i(\gamma t + \delta)}$, dobivamo parcijalni integral jednačine (26,1), a dodajući njemu opšte rešenje jednačine bez desnog dela (koji pišemo radi određenosti za slučaj kada je $\omega_0 > \lambda$), definitivno dobivamo

$$x = ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta). \tag{26,4}$$

Prva komponenta eksponencijalno opada sa vremenom tako da kroz dosta veliki interval vremena ostaje samo drugi član:

$$x = b\cos(\gamma t + \delta). \tag{26,5}$$

Izraz (26,3) za amplitudu b prinudnog oscilovanja iako raste sa približavanjem frekvencije γ ka ω_0, ipak ne postaje beskonačan kako je to bilo pri rezonanciji bez trenja. Za datu amplitudu sile f, amplituda oscilovanja je maksimalna pri frekvenciji $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$; kada je $\lambda \ll \omega_0$ ta so vrednost razlikuje od ω_0 samo za malu veličinu drugog reda.

Posmatraćemo oblast u blizini rezonancije. Stavimo da je $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, gde je ε mala veličina; smatraćemo takođe da je $\lambda \ll \omega_0$. Tada u (26,2) možemo približno zameniti:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \qquad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0,$$

tako da je:

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0}, \tag{26,6}$$

ili

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \tag{26,7}$$

Napominjemo karakterističnu specifičnost toka promene razlike faza δ među oscilovanjem i silom, koja vrši prinudno kretanje pri promeni frekvencije poslednje. Ta razlika je uvek negativna, tj. oscilovanje „zakašnjava“ u odnosu na spoljašnju silu. Dalje od rezonancije, kada je $\gamma < \omega_0$, δ teži nuli, a kada je $\gamma > \omega_0$ — vrednosti $-\pi$. Promena δ od nule do $-\pi$ nastaje u uskoj (širina $\approx \lambda$) oblasti frekvencija koje su blizu ω_0. Kroz vrednost $-\frac{\pi}{2}$ razlika faza prolazi pri $\gamma = \omega_0$. S tim u vezi napominjemo da se u odsustvu trenja, promena faze prinudnog oscilovanja za veličinu π vrši skokom za $\gamma = \omega_0$ [drugi član u (22,4) menja znak]. Uzimanjem u obzir trenja „rasplinjuje se“ taj skok.

Pri uspostavljanju kretanja, kada sistem vrši prinudna oscilovanja (26,5), njegova energija ostaje nepromenjena. U isto vreme sistem neprekidno apsorbuje (od izvora spoljašnje sile) energiju koja se disipira zahvaljujući postojanju trenja. Označimo sa $I(\gamma)$ količinu energije, koja se apsorbuje prosečno u jedinici vremena kao funkciju frekvencije spoljašnje sile. Prema (25,13) imamo:

$$I(\gamma) = 2\overline{F},$$

gde je $\overline{F}$ srednja vrednost disipativne funkcije (u odnosu na period oscilovanja). Za jednodimenzionalno kretanje izraz (25,11) za disipativnu funkciju svodi se na $F = \frac{a\dot{x}^2}{2} = \lambda m\dot{x}^2$. Ako ovde zamenimo (26,5), dobivamo:

$$F = \lambda m b^2\gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta).$$

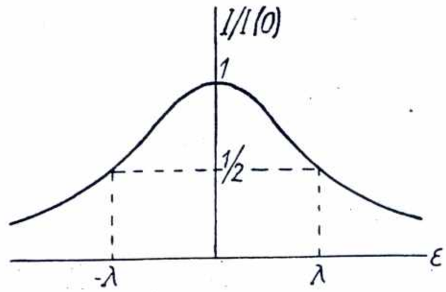
Srednja vrednost u odnosu na vreme kvadrata sinusa iznosi $\frac{1}{2}$, te je zbog toga:

$$I(\gamma) = \lambda m b^2\gamma^2. \tag{26,8}$$

U blizini rezonancije, zamenjujući amplitudu oscilovanja iz (26,7), imaćemo:

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}. \tag{26,9}$$

Takov oblik zavisnosti apsorpcije od frekvencije, naziva se *dispersionim*. Polu-širinom rezonante krive (sl. 31) nazivaju se vrednosti $|\varepsilon|$ za koje se veličina $I(\varepsilon)$ dvaput smanjuje u odnosu na njenu maksimalnu vrednost za $\varepsilon = 0$. Iz formule (26,9) se vidi da se u datom slučaju ta širina poklapa sa eksponentom slabljenja λ Visina maksimuma



Sl. 31

$$I(0) = \frac{f^2}{4m\lambda}$$

obrnuto je proporcionalna sa λ. Na taj način, pri smanjenju eksponenta slabljenja, rezonantna kriva postaje uža i viša, tj. njen maksimum postaje oštriji. Površina pod rezonantnom krivom pri tome ostaje nepromenjena.

Ova površina se može prikazati integralom:

$$\int_0^{\infty} I(\gamma)\, d\gamma = \int_{-\omega_0}^{\infty} I(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Kako $I(\varepsilon)$ brzo opada sa povećanjem $|\varepsilon|$, tako da oblast velikih $|\varepsilon|$ nije bitna, pri integriranju se može $I(\varepsilon)$ napisati u obliku (26,9), a donja granica zameniti sa $-\infty$. Tada će biti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{f^2\lambda}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 + \lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}. \tag{26,10}$$

Zadatak

Odrediti prinudna oscilovanja pri postojanju trenja pod dejstvom spoljašnje sile

$$f = f_0\, e^{\alpha t} \cos \gamma t.$$

Rešenje. Rešićemo jednačinu kretanja u kompleksnom obliku:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t},$$

posle toga ćemo izdvojiti realni deo rešenja. Kao rezultat dobivamo prinudno oscilovanje u obliku:

$$x = b\, e^{\alpha t} \cos(\gamma t + \delta),$$

gde je:

$$b = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\alpha + \lambda)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{2\gamma(\alpha + \lambda)}{\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda}.$$

§ 27. Parametarska rezonancija

Postoje takvi nezatvoreni oscilatorni sistemi u kojima se spoljašnje dejstvo svodi na promenu njihovih parametara u toku vremena[1]).

Parametri linearnog sistema su koeficijenti m i k u Lagrange-ovoj funkciji (21,3). Ako oni zavise od vremena, onda jednačina kretanja glasi:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0. \tag{27,1}$$

Uvođenjem umesto t nove nezavisno promenljive τ prema $d\tau = \frac{dt}{m(t)}$ ova jednačina dobiva oblik:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + mkx = 0.$$

Zbog toga, stvarno, bez ograničenja opštosti, dovoljno je posmatrati jednačinu kretanja u obliku

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2(t)\, x = 0, \tag{27,2}$$

koja bi se dobila iz (27,1) kada je $m = \text{const}$.

Oblik funkcije $\omega(t)$ dat je uslovima zadatka; pretpostavimo da je ta funkcija periodična sa nekom frekvencijom γ (i periodom $T = \frac{2\pi}{\gamma}$). To znači da je:

$$\omega(t + T) = \omega(t),$$

a zbog toga je cela jednačina (27,2) invarijantna u odnosu na transformaciju $t \to t + T$. Odavde izlazi, ako je $x(t)$ rešenje jednačine, onda je i funkcija $x(t + T)$ takođe rešenje. Drugim rečima, ako su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dva nezavisna integrala jednačine (27,2), onda se pri zameni $t \to t + T$ oni transformišu uzajamno linearno. Pri tom se x_1 i x_2 mogu[2]) uzeti tako da bi se njihova promena pri zameni t sa $t + T$ svodila jednostavno na množenja konstantnim faktorom:

$$x_1(t + T) = \mu_1 x_1(t), \qquad x_2(t + T) = \mu_2 x_2(t).$$

Najopštiji oblik funkcija, koje imaju takvo svojstvo, biće:

$$x_1(t) = \mu_1^{\frac{t}{T}}\, \Pi_1(t), \qquad x_2(t) = \mu_2^{\frac{t}{T}}\, \Pi_2(t), \tag{27,3}$$

gde su $\Pi_1(t)$ i $\Pi_2(t)$ čisto periodične funkcije vremena (sa periodom T).

Konstante μ_1 i μ_2 u tim funkcijama moraju biti uzajamno povezane određenom relacijom. I zaista, ako pomnožimo jednačine:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)\, x_1 = 0, \qquad \ddot{x}_2 + \omega^2(t)\, x^2 = 0$$

---

1) Prost primer ovakve vrste je klatno, čija tačka vešanja vrši dato periodično kretanje u vertikalnom pravcu (vidi zad. 3).

2) Ako se samo konstante μ_1 i μ_2 ne poklapaju.

respektivno sa x_2 i x_1 i oduzimajući član po član, dobivamo:

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

ili

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{const.} \tag{27,4}$$

Ali za ma koje funkcije $x_1(t)$ i $x_2(t)$ oblika (27,3) izraz na levoj strani te jednačine množi se sa $\mu_1 \mu_2$ pri promeni argumenta t sa T. Zbog toga je jasno, da održavanje oblika te jednačine (27,4) u svakom slučaju zahteva da bude

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \tag{27,5}$$

Dalje zaključke o konstantama μ_1 u μ_2 možemo stvoriti polazeći od činjenice realnosti koeficijenata jednačine (27,2). Ako je $x(t)$ ma koji integral takve jednačine, onda i konjugovano kompleksna funkcija $x^\star(t)$ mora zadovoljavati tu istu jednačinu. Odavde izlazi, da se par konstanti μ_1 i μ_2 mora poklapati sa parom μ_1^*, μ_2^*, tj. moraju biti ili $\mu_1 = \mu_2^*$ ili da su μ_1 i μ_2 realni. U prvom slučaju uzimajući u obzir (27,5) imamo da je $\mu_1 = \frac{1}{\mu_1{}^\star}$, tj. $|\mu_1|^2 = |\mu^2| = 1$; konstante μ_1 i μ_2 su prema modulu jednake jedinici.

U dugom slučaju dva nezavisna integrala jednačine (27,2) imaju oblik:

$$x_1(t) = \mu^{\frac{t}{T}} \Pi_1(t), \qquad x_2(t) = \mu^{-\frac{t}{T}} \Pi_2(t) \tag{27,6}$$

sa pozitivnim ili negativnim realnim brojem μ različitim od jedinice. Jedna od tih funkcija (prva ili druga kada je $|\mu| = > 1$ ili $|\mu| < 1$) eksponencijalno raste sa vremenom. To znači da stanje mirovanja sistema (u položaju ravnoteže $x = 0$) biće nestabilno: dovoljno je i malo odstupanje od toga stanja da bi nastalo pomeranje x počelo brzo da raste sa vremenom. Ova pojava se naziva *parametarska rezonancija.*

Obratićemo pažnju na to, da, ako su početne vrednosti x i $\dot{x}$ striktno jednake nuli, one ostaju jednake nuli i nadalje, za razliku od obične rezonacije (§ 22) u kojoj se porast pomeranja sa vremenom (koje je proporcionalno sa t) vrši i od početne vrednosti, koja je jednaka nuli.

Objasnićemo uslove nastajanja parametarske rezonancije u važnom slučaju, kada se funkcija $\omega(t)$ malo razlikuje od neke konstante veličine ω_0 i prosta je periodična funkcija

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t), \tag{27,7}$$

gde je konstanta $h \ll 1$ (smatrajući da je h pozitivno, što uvek možemo postići podesnim izborom početka računanja vremena). Kako ćemo dalje videti, najintenzivnije nastaje parametarska rezonancija, ako je frekvencija funkcije $\omega(t)$ blizu dvostrukoj frekvenciji ω_0. Zbog toga ćemo staviti:

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon,$$

gde je $\varepsilon \ll \omega_0$.

Rešenje jednačine kretanja[1]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos (2\omega_0 + \varepsilon) t] x = 0 \tag{27,8}$$

tražićemo u obliku;

$$x = a(t) \cos \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t + b(t) \sin \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t, \tag{27,9}$$

gde su $a(t)$ i $b(t)$ funkcije od vremena koja se sporo menjaju (u odnosu na faktore cos i sin). Takav oblik rešenja, razumljvo, nije tačan, U stvari, funkcija $x(t)$ sadrži takođe članove sa frekvencijama, koje se razlikuju od $\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ za ceo multiplum $(2\omega_0 + \varepsilon)$; međutim, ti članovi su male veličine višeg reda u odnosu nı na h i u prvoj aproksimaciji ih možemo zanemariti (vidi zad. 1).

Zamenićemo (27,9) u (27,8) i izvršićemo izračunavanja zadržavajući samo članove prvog reda po ε. Pri tom pretpostavimo, da je $\dot{a} \approx \varepsilon a$, $\dot{b} \approx \varepsilon b$ (pravilnost ove pretpostavke u uslovima rezonancije se potvrđuje rezultatom). Proizvode trigometrijskih faktora treba razložiti u sumu:

$$\cos \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t \cos (2\omega_0 + \varepsilon) t = \frac{1}{2} \cos \left(3\omega_0 + \frac{3\varepsilon}{2}\right) t + \frac{1}{2} \cos \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t$$

i t. sl., i u vezi sa ranije rečenim, eliminisati članove sa frekvencijom $3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Kao rezultat dobijamo:

$$-\left(2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} b\right) \omega_0 \sin \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t +$$

$$+ \left(2\dot{b} - a\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} a\right) \omega_0 \cos \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t = 0.$$

Zadovoljenje ove jednakosti zahteva da su istovremeno koeficijenti uz svaki faktor sin i cos jednaki nuli. Odavde dobivamo sistem od dve linearne diferencijalne jednačine za funkcije $a(t)$ i $b(t)$. Prema opštim pravilima, tražićemo rešenje koje je proporcionalno sa e^{st}. Tada je:

$$s a + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}\right) b = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2}\right) a - s b = 0,$$

i uslov jednovremenog važenja te dve algebarske jednačine daje:

$$s^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right]. \tag{27,10}$$

[1] Jednačina takvog oblika (sa proizvoljnim vrednosti γ i h) u matematičkoj fizici se naziva Mathieu-jednačinom.

Uslov nastajanja parametarske rezonancije nalazi se u realnosti s (tj. $s^2 > 0$))[1]. Na taj način on postoji u intervalu:

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2} \tag{27,11}$$

oko frekvencije $2\,\omega_0$[2]).

Širina toga intervala je proporcionalna sa h i istog su reda vrednosti izložitelja pojačanja oscilovanja s koja se u njemu ostvaruju.

Parametarska rezonancija takođe postoji za frekvencije γ promene parametra sistema, koje imaju vrednosti približno $\frac{2\omega_0}{n}$, gde je n ma koji ceo broj. Među-tim, širina rezonantnih oblasti (oblasti nestabilnosti) sa povećanjem n brzo se smanjuje — kao h^n (vidi zad. 2). Takođe se smanjuju i vrednosti izložitelje pojačanja oscilovanja u njima.

Pojava parametarske rezonancije postoji i pri slabom trenju u sistemu, ali se oblast nestabilnosti pri tom nešto sužava. Kako smo videli u § 25, trenje dovodi do slabljenja amplitude oscilovanja prema zakonu $e^{-\lambda t}$. Zbog toga pojačanje oscilovanja pri parametarskoj rezonanciji nastaje kao $e^{(s-\lambda)t}$ (sa pozitivnim s koje je dato rešenjem zadatka bez trenja), a granica oblasti nestabilnosti se određuje jednačinom $s - \lambda = 0$. Tako, koristeći s iz (27,10) dobivamo za rezonantnu oblast umesto (27,11), nejednakosti

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} < \varepsilon < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2}. \tag{27,12}$$

Obratimo pažnju na činjenicu, da se rezonancija pri tom ispostavlja mogućnom za amplitude koje nisu ma koliko male, već samo počinjući sa određenim „pragom" h_k, koji u slučaju (27,12) iznosi:

$$h_k = \frac{4\lambda}{\omega_0}.$$

Može se pokazati da je za rezonancije u blizini frekvencija $\frac{2\omega_0}{n}$ veličina praga h_k proporcionalna sa $\lambda^{\frac{1}{n}}$, tj. povećava se sa povećanjem n.

Zadaci

1. Odrediti granice oblasti nestabilnosti pri rezonanciji u blizini $\gamma = 2\omega_0$ sa tačnošću do veličina reda h^2.

Rešenje. Tražićemo rešenje jednačine (27,8) u obliku

$$x = a_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + a_1 \cos 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b_1 \sin 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t,$$

uzimajući u obzir u njoj [u poređenju s (27,9)] takođe i članove sledećeg reda po h. Interesujući se samo za granice oblasti nestabilnosti pretpostavićemo da su koeficijenti a_0, b_1, a_1, b_1 konstantni (u vezi primedbe učinjene u fusnoti [2])). Zamenom u jednačini (27,8) razložićemo

---

[1]) Konstanta μ u (27,6) povezana je sa s relacijom $\mu = -e^{s\pi/\omega_0}$ [zamenom t sa $t + \frac{2\pi}{2\omega_0}$, cos i sin u (27,9) menjaju znak].

[2]) Ako nas interesuju samo granice oblasti rezonancije (a ne interesuje nas izraz sa s unutar nje), onda izračunavanja možemo uprostiti, uz napomenu, da je na tim granicama $s = 0$, tj. koeficijenti a i b u (27,9) su konstantni; pri tom odmah dobivamo vrednost $\varepsilon = \pm \frac{h\omega_0}{2}$ koje odgovaraju granicama oblasti (27,11).

proizvode trigonometrijskih funkcija izostavljajući pri tom članove sa frekvencijama $5\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ koji bi bili potrebni samo pri većoj aproksimaciji.

Dobićemo:

$$\left[-a_0\left(\omega_0\,\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \frac{h\,\omega_0^2}{2}\,a_0 + \frac{h\,\omega_0^2}{2}\,a_1\right]\cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t +$$
$$+\left[-b_0\left(\omega_0\,\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) - \frac{h\,\omega_0^2}{2}\,b_0 + \frac{h\,\omega_0^2}{2}\,b_1\right]\sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t +$$
$$+\left[\frac{h\,\omega_0^2}{2}\,a_0 - 8\,\omega_0^2\,a_1\right]\cos 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t +$$
$$+\left[\frac{h\,\omega_0^2}{2}\,b_0 - 8\,\omega_0^2\,b_1\right]\sin 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t = 0.$$

U članovima sa frekvencijama $\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ zadržane su male veličine prvog i drugog reda, a u članovima sa frekvencijama $3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ članovi prvog reda. Svaki izraz u srednjim zagradama, ponaosob, mora biti jednak nuli. Iz poslednja dva imaćemo

$$a_1 = \frac{h}{16}\,a_0, \qquad b_1 = \frac{h}{16}\,b_0,$$

posle toga iz prva dva nalazimo:

$$\omega_0\,\varepsilon \pm \frac{h\,\omega_0^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{h^2\,\omega_0^2}{32} = 0.$$

Rešavajući ovu jednačinu sa tačnošću do članova reda h^2 dobivamo traženu graničnu vrenost ε:

$$\varepsilon = \pm\,\frac{h\,\omega_0}{4} - \frac{1}{32}\,h^2\,\omega_0.$$

2. Odrediti granice oblasti nestabilnosti pri rezonanciji u blizini $\gamma = \omega_0$.

Rešenje. Ako napišemo $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ dobićemo jednačinu kretanja

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,[1 + h\cos(\omega_0 + \varepsilon)\,t]\,x = 0.$$

Imajući u vidu, da su tražene granične vrednosti $\varepsilon \approx h^2$, tražićemo rešenje u obliku:

$$x = a_0\cos(\omega_0 + \varepsilon)\,t + b_0\sin(\omega_0 + \varepsilon)\,t + a_1\cos 2\,(\omega_0 + \varepsilon)\,t + b_1\sin 2\,(\omega_0 + \varepsilon)\,t + c_1,$$

uzimajući u obzir odmah u njemu članove prva dva reda. Za određivanje granica nestabilnosti, ponovo ćemo pretpostaviti da su koeficijenti konstantni i dobivamo:

$$\left[-2\,\omega_0\,\varepsilon\,a + \frac{h\,\omega_0^2}{2}\,a_1 + h\,\omega_0^2\,c_1\right]\cos(\omega_0 + \varepsilon)\,t +$$
$$+\left[-2\,\omega_0\,\varepsilon\,b_0 + \frac{h\,\omega_0^2}{2}\,b_1\right]\sin(\omega_0 + \varepsilon)\,t + \left[-3\,\omega_0^2\,a_1 + \frac{h\,\omega_0^2}{2}\,a_0\right]\cos 2\,(\omega_0 + \varepsilon)\,t +$$
$$+\left[-3\,\omega_0^2\,b_1 + \frac{h\,\omega_0^2}{2}\,b_0\right]\sin 2\,(\omega_0 + \varepsilon)\,t +$$
$$+\left[c_1\,\omega_0^2 + \frac{h\,\omega_0^2}{2}\,a_0\right] = 0.$$

Odavde nalazimo:

$$a_1 = \frac{h}{6}\,a_0, \qquad b_1 = \frac{h}{6}\,b_0, \qquad c_1 = -\,\frac{h}{2}\,a_0,$$

i zatim dve granice oblasti nestabilnosti:

$$\varepsilon = -\frac{5}{24} h^2 \omega_0, \qquad \varepsilon = \frac{1}{24} h^2 \omega_0.$$

3. Naći uslove parametarske rezonancije za mala oscilovanja klatna u ravni, čija tačka vešanja osciluje u vertikalnom pravcu

Rešenje. Prema Lagrange-ovoj funkciji, koja je nađena u zad. 3,c §5 za mala oscilovanja, imaćemo ($\varphi \ll 1$) jednačinu kretanja:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left(1 + 4\frac{a}{l}\cos(2\omega_0 + \varepsilon) t\right)\varphi = 0$$

(gde je $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$). Odavde izlazi, da ulogu parametra h, koji je uveden u tekstu, igra odnos $4\frac{a}{l}$. Uslov (27,11), na primer, dobiva oblik:

$$|\varepsilon| < \frac{2a\sqrt{g}}{l^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 28. Neharmonijska oscilovanja

Cela ranije izložena teorija malih oscilovanja bazira na razlaganjima potencijalne i kinetičke energije sistema po koordinatama i brzinama sa zadržavanjem samo članova drugog reda; pri tom su jednačine kretanja linearne, te se zbog toga u toj aproksimaciji govori o *linearnim oscilovanjima*. Mada je takvo razlaganje potpuno zakonito pri uslovu dovoljno male vrednosti amplituda oscilovanja, ipak uzimanje u obzir sledećih aproksimacija (takozvanih *neharmonijskih* ili *nelinearnih* oscilacija) dovodi do pojave nekih, mada i slabih, ali kvalitetno novih specifičnosti kretanja.

Izvršićemo razlaganje Lagrange-ove funkcije do članova trećeg reda. U potencijalnoj energiji pri tom pojavluju se članovi trećeg stepena u odnosu na koordinate x_i, a u kinetičkoj energiji — članovi koji sadrže proizvod brzina i koordinata oblika $\dot{x}_i \dot{x}_k x_l$. Ova razlika od ranijeg izraza (23,3) vezana je za zadržavanje članova prvog reda po x u redu funkcije $a_{ik}(q)$. Na taj način Lagrange-ova funkcija će imati oblik:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_i x_k) + \frac{1}{2}\sum_{i,k,l} n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_k x_l - \frac{1}{3}\sum_{i,k,l} l_{ikl} x_i x_k x_l, \qquad (28,1)$$

gde su n_{ikl} i l_{ikl} novi konstantni koeficijenti.

Ako od proizvoljnih x_i pređemo na normalne koordinate (linearne aproksimacije) Q_a, treća i četvrta suma u (28,1) prelaze u analogne sume u kojima će umesto koordinata x_i i brzina $\dot{x}_i$ stajati Q_a i $\dot{Q}_a$. Ako u tim sumama označimo koeficijente sa $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ i $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ dobićemo Lagrange-ovu funkciju u obliku:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{a}(\dot{Q}_a^2 - \omega_a^2 Q_a^2) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha,\beta,\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha,\beta,\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \qquad (28,2)$$

Nećemo u potpunosti pisati jednačine kretanja iz te Lagrange-ove funkcije Bitno je da one imaju oblik:

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_0^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \tag{28,3}$$

gde su f_α homogene funkcije drugog reda od koordinate Q i njihovih izvoda po vremenu,

Primenjujući metod postupnih aproksimacija, tražićemo rešenje ovih jednačina u obliku

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \tag{28,4}$$

gde je $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$, a funkcija $Q_\alpha^{(1)}$ zadovoljava „neperturbovane“ jednačine

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

tj. predstavlja obične harmonijske oscilacije:

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha). \tag{28,5}$$

Zadržavajući u sledećoj aproksimaciji na desnoj strani jednačina (28,3) samo male članove drugog reda za veličine $Q_\alpha^{(2)}$ dobićemo jednačine:

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \tag{28,6}$$

gde na desnoj strani mora biti stavljen izraz (28,5). Kao rezultat dobivamo nehomogene linearne diferencijalne jednačine čije desne strane možemo transformirati u zbirove prostih periodičnih funkcija. Tako, na primer, biće:

$$Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) =$$

$$= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{\cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta) t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta) t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta]\}.$$

Na taj način, na desnim delovima jednačina (28,6) nalaze se članovi koji odgovaraju oscilovanjima sa frekvencijama, koje su jednake sumama i razlikama sopstvenih frekvencija sistema. Rešenje jednačina treba tražiti u obliku koji sadrži iste takve periodične faktore, i dolazimo do zaključka da se u drugoj aproksimaciji na normalna oscilovanja sistema sa frekvencijama ω_α dodaju dopunska oscilovanjma sa frekvencijama

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \tag{28,7}$$

(u taj broj dolaze dvostruke frekvencije $2\omega_\alpha$ i frekvencija 0, koja odgovara konstantnom pomeraju). Ove frekvencije se nazivaju *kombinacione.* Amplitude kombinacionih oscilovanja su proporcionalne proizvodima $a_\alpha a_\beta$ (ili kvadratima a_α^2) odgovarajućih normalnih oscilovanja.

U sledećim aproksimacijama pri uzimanju u obzir članova višeg reda u redu Lagrange-ove funkcije nastaju kombinaciona oscilovanja sa frekvencijama, koje su sume i razlike većeg broja frekvencija ω_α. Osim toga, pak nastaje još i nova pojava.

Stvar je u tome da se već u trećoj aproksimaciji između kombinacionih frekvencija pojavljuju frekvencije koje se poklapaju sa početnim $\omega_\alpha(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta)$. Primenom ranije opisanog metoda na desnoj strani jednačina kretanja će se nalaziti, prema tome, rezonantni članovi koji dovode u rešenju do pojave članova sa amplitudom koja se u toku vremena povećava. Međutim, fizički je očigledno. da u zatvorenom sistemu u odsustvu spoljašnjeg izvora energije ne može nastati spontano povećanje intenziteta oscilovanja.

U stvari u višim aproksimacijama nastaje promena osnovnih frekvencija ω_α u poređenju sa njihovim „nepertubovanim" vrednostima $\omega_\alpha^{(0)}$ koji figurišu u kvadratnom izrazu za potencijalnu energiju. Pojava pak članova koji se povećavaju u rešenju vezana je za red oblika

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)\, t \approx \cos\omega_\alpha^{(0)} t - t\Delta\omega_\alpha \sin\omega_\alpha^{(0)} t,$$

koji očigledno nije dozvoljen, za dosta velike vrednosti t.

Zbog toga pri prelazu na sledeće aproksimacije, metod sukcesivnih aproksimacija mora biti očito izmenjen, tako da bi periodični faktori, koji figuriraju u rešenju od samog početka, sadržavali tačne, a ne približne vrednosti frekvencija. Promena frekvencija se određuje samo kao rezultat rešenja jednačina, upravo iz uslova odsutnosti rezonantnih članova.

Ilustrovaćemo taj metod na neharmonijskim oscilovanjima sa jednim stepenom slobode napisavši Lagrange-ovu funkciju u obliku:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 - \frac{m\alpha}{3}x^3 - \frac{m\beta}{4}x^4. \tag{28,8}$$

Odgovarajuća jednačina kretanja, biće:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \tag{28,9}$$

Tražićemo njeno rešenje u obliku niza sukcesivnih aproksimacija:

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

pri čemu je:

$$x^{(1)} = a\cos\omega t \tag{28,10}$$

sa tačnom vrednošću ω, koju ćemo zatim tražiti u obliku reda $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \cdots$ (početnu fazu u $x^{(1)}$ možemo uvek staviti da je jednaka nuli pogodnim izborom početka računanja vremena). Međutim, pri tom, jednačina kretanja u obliku (28,9) nije sasvim pogodna, jer zamenom u njoj (28,10), leva strana jednačine ne postaje strogo jednaka nuli. Zbog toga ćemo je napisti prethodno u ekvivalentnom obliku:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}. \tag{28,11}$$

Ako stavimo ovde $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$ i eliminišemo članove, koji su male veličine višeg od drugog reda, za $x^{(2)}$ dobićemo jednačinu:

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha a^2\cos^2\omega t + 2\omega_0\omega^{(1)} a\cos\omega t =$$

$$= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2}\cos 2\omega t + 2\omega_0\omega^{(1)} a\cos\omega t.$$

Uslov odsutnosti rezonantnog člana na desnoj strani jednačine daje jednostavno $\omega^{(1)} = 0$ u vezi sa metodom nalaženja druge aproksimacije izloženom u početku paragrafa. Posle toga, rešavajući na običan način nehomogenu linearnu jednačinu, dobivamo:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t. \qquad (28,12)$$

Dalje, ako u (28,11) stavimo $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$, dobivamo jednačinu za $x^{(3)}$:

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)},$$

ili, zamenjujući na desnoj strani izraze (28,10) i (28,12) posle jednostavne transformacije:

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = a^3\left[\frac{\beta}{4} - \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right]\cos 3\omega t + a\left[2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5a^2x^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}a^2\beta\right]\cos\omega t.$$

Izjednačujući sa nulom koeficijent uz rezonantni faktor $\cos\omega t$, nalazimo popravku za osnovnu frekvenciju, koja je proporcionalna kvadratu amplitude oscilovanja:

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2. \qquad (28,13)$$

Kombinovano oscilovanje trećeg reda, biće

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{\beta}{2}\right)\cos 3\omega t. \qquad (28,14)$$

§ 29. Rezonancija nelinearnih oscilovanja

Uzimanje u obzir neharmoničnih članova kod prinudnih oscilovanja sistema, dovodi do nastajanja (pojave) suštinski novih specifičnosti kod rezonantnih pojava.

Ako desnoj strani jednačine (28,9) dodamo spoljašnju periodičnu silu (sa frekvencijom γ), dobićemo:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3. \qquad (29,1)$$

Ovde je takođe napisana sila trenja sa izložiteljem slabljenja λ (u daljem pretpostavljamo da je mali). Strogo govoreći, pri uzimanju u obzir nelinearnih članova u jednačini slobodnih oscilovanja moraju se takođe uzeti u obzir i članovi viših redova u amplitudi sile koja izaziva prinudna oscilovanja, koji odgovaraju njenoj mogućnoj zavisnosti od pomeraja x. Zbog uprošćavanja formula nećemo pisati te članove, jer inače ne menjaju kvalitativno sliku pojave.

Neka je

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

(sa malim ε), tj. nalazimo se u blizine obične rezonancije. Za objašnjenje karaktera nastalog kretanja ne mora se izvršiti neposredno ispitivanje jednačine (29,1), ako se koristimo sledećim razlozima.

U linearnoj aproksimaciji, zavisnost amplitude b prinudnog oscilovanja od amplitude f i frekvencije γ spoljašnje sile, data je u blizini rezonancije formulom (26,7) koju ćemo napisati u obliku:

$$b^2(\varepsilon^2+\lambda^2)=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \tag{29,2}$$

Nelinearnost oscilovanja dovodi do nastajanja zavisnosti njihove sopstvene frekvencije od amplitude; napisaćemo je u obliku:

$$\omega_0+\varkappa b^2, \tag{29,3}$$

gde se konstanta $\varkappa$ izražava na određeni način pomoću koeficijenata neharmoničnosti [v. (28,13)]. Prema tome zamenićemo u formuli (29,2) (tačnije u malu razliku $\gamma-\omega_0$) ω_0 sa $\omega_0+\varkappa b^2$.

Zadržavajući oznaku $\varepsilon=\gamma-\omega_0$, kao rezultat dobićemo jednačinu:

$$b^2[(\varepsilon-\varkappa b^2)^2+\lambda^2]=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \tag{29,4}$$

ili

$$\varepsilon=\varkappa b^2\pm\sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2-\lambda^2}.$$

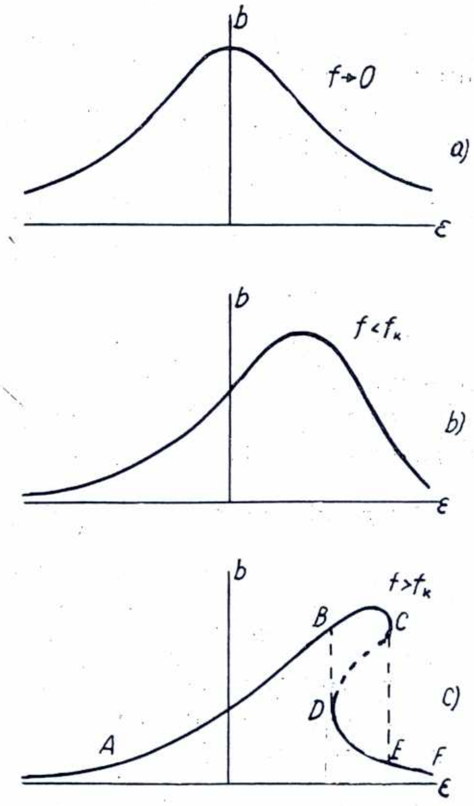
Jednačina (29,4), koja je trećeg stepena u odnosu na b^2, i njeni realni koreni određuju amplitudu prinudnih oscilovanja.

Posmatraćemo zavisnost te amplitude od frekvencije spoljašnje sile pri datoj amplitudi sile f,

Za dosta male vrednosti f, amplituda b je takođe mala, tako da se u (29,4) mogu zanemariti stepeni b veći od drugog, i vraćamo se na zavisnost $b(\varepsilon)$ (29,2), koja se prikazuje simetričnom krivom sa maksimumom u tački $\varepsilon=0$ (sl. 32, a).

Zbog povećanja f, kriva se deformiše, zadržavajući spočetka svoj karakter — sa jednim maksimumom (sl. 32, b); poslednji se pomera (kada je $\varkappa>0$) na stranu pozitivnih vrednosti ε. Od tri korena jednačine (29,4) pri tom je realan samo jedan.

Međutim, počinjući sa određenom vrednošću $f=f_k$ (koju ćemo u daljem odrediti), karakter krive se menja. Za svaku vrednost $f>f_k$ postoji određena oblast frekvencija u kojoj jednačina (29,4) ima tri realna korena; njoj odgovara otsečak $BCDE$ krive na sl. 32, c.



Sl. 32

Granice ove oblasti se određuju uslovom $\frac{db}{d\varepsilon}=\infty$ u tačkama D i C. Ako jednačinu (29,4) diferenciramo po ε, dobivamo:

$$\frac{db}{d\varepsilon}=\frac{-\varepsilon b-\varkappa b^3}{\varepsilon^2+\lambda^2-4\varkappa\varepsilon b^2+3\varkappa^2 b^2}.$$

Zbog toga se položaj tačaka D i C određuje jedovremeno važećim rešenjem jednačine:

$$\varepsilon^2 - 4\varkappa b^2 \varepsilon + 3\varkappa^2 b^4 + \lambda^2 = 0 \tag{29,5}$$

i (29,4); odgovarajuće vrednosti ε-a obe su pozitivne. Najveća vrednost amplitude se dostiže u tački gde je $\frac{db}{d\varepsilon} = 0$. Pri tom je $\varepsilon = \varkappa b^2$, i iz (29,4), imamo

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}; \tag{29,6}$$

ova vrednost se poklapa sa maksimumom koji je dat zavisnošću (29,2).

Može se pokazati (na čemu se dovode nećemo zaustavljati)[1] da od tri realna korena jednačine (29,4) srednji (tj. deo CD krive koji je prikazan na sl. 29, c tačkasto), odgovora nestabilnim oscilovanjima sistema: ma koliko da je slabo dejstvo na sistem, koji se nalazi u takvom stanju, dovelo bi do prelaza na oscilujući režim, koji odgovara većem ili manjem korenu (tj. delovima BC i DE). Na taj način, realnim oscilovanjima sistema odgovaraju samo grane ABC i DEF. Značajna specifičnost pri tom je postojanje oblasti frekvencija koje dozvoljavaju dve različite amplitude oscilovanja. Tako, postepenim povećanjem frekvencije spoljašnje sile amplituda prinudnih oscilovanja raste prema krivoj ABC. U tački C nastaje „prekid" amplitude koja skokom opada do vrednosti koja odgovara tački E, a zatim (pri daljem povećanju frekvencije) menja se duž krive EF. Ako sada ponovo smanjimo frekvenciju, onda se amplituda prinudnih oscilovanja menja duž krive FD, u tački D skokom raste do B, a zatim se smanjuje duž BA.

Napominjemo da za izračunavanje vrednosti f_k, da je to vrednost f, za koju se oba korena kvadratne jednačine (29,5) (po ε) poklapaju. Kada je $f = f_k$ ceo odsečak CD se svodi na prevojnu tačku. Ako izjednačimo sa nulom diskriminantu kvadratne jednačine (29,5) dobićemo $\varkappa^2 b^4 = \lambda^2$; odgovarajući koren jednačine je $\varepsilon = 2\varkappa b^2$. Zamenjujući ove vrednosti za b i ε u (29,4) nalazimo:

$$f_k^2 = \frac{8m^2\omega_0^2\lambda^3}{|\varkappa|}. \tag{29,7}$$

Uporedo sa promenom karaktera rezonantnih pojava za frekvencije $\gamma \approx \omega_0$, nelinearnost oscilovanja dovodi takođe do pojave novih rezonancija u kojima su oscilovanja sa frekvencijom vrlo blizu ω_0, koja se pobuđuju spoljašnjom silom sa frekvencijom koja se bitno razlikuje od ω_0.

Neka je frekvencija spoljašnje sile $\gamma \approx \frac{\omega_0}{2}$, tj.

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} + \varepsilon.$$

U prvoj, linearnoj, aproksimaciji ona u sistemu izaziva oscilovanja sa tom istom frekvencijom i sa amplitudom koja je proporcionalna amplitudi koja je proporcionalna amplitudi sile:

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2}\cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \varepsilon\right)t$$

---

[1] Dokaz se može naći npr. u knjizi: *I. N. Bogoljubov* i *A. Mitropoljski*: Asimptotski metodi u teoriji nelinearnih oscilovanja.

[prema formuli (22,4)]. Ali uzimanjem u obzir nelinearnih članova, u drugoj aproksimaciji, ta oscilovanje dovode do pojave na desnoj strani jednačine kretanja (29,1) člana sa frekvencijom $2\gamma \approx \omega_0$. Upravo, zamenjujući $x^{(1)}$ u jednačini

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

uvodeći cos dvostrukog ugla i zadržavajući na desnoj strani samo rezonantni član, dobivamo:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4}\cos(\omega_0 + 2\varepsilon)t. \tag{29,8}$$

Ova jednačina se razlikuje od jednačine (29,1) samo po tome što se umesto amplitude sile f u njoj nalazi izraz, koji je proporcionalan kvadratu f^2. To znači, da nastaje rezonancija isto takvog karaktera kao i ranije posmatrana rezonancija, sa frekvencijama $\gamma \approx \omega_0$, ali sa manjim intenzitetom. Zavisnost $b(\varepsilon)$ se dobiva zamenom f sa $-\frac{8\alpha f^2}{9m\omega_0^4}$ (i ε sa 2ε) u jednačini (29,4):

$$b^2[(2\varepsilon - \varkappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{16\alpha^2 f^4}{81 m^4 \omega_0^{10}}. \tag{29,9}$$

Neka je sada frekvencija spoljašnje sile:

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon.$$

U prvoj aproksimaciji ćemo imati:

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t.$$

Zamenom $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ u jednačini (29,1) nismo dobili članove, koji imaju karakter rezonantne spoljašnje sile, kao što je to bilo u prethodnom slučaju. Međutim, nastaje rezonancija parametarskog tipa od člana trećeg reda, koji je proporcionalan proizvodu $x^{(1)}x^{(2)}$. Ako od svih nelinearnih članova zadržimo samo ovaj, onda za $x^{(2)}$ dobivamo jednačinu:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)}$$

ili

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2\left[1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t\right]x^{(2)} = 0, \tag{29,10}$$

tj. jednačinu tipa (27,8) (uzimajući u obzir trenje), koja dovodi, kao što nam je već poznato, do nestabilnosti oscilovanja u određenom intervalu frekvencije.

Međutim, za definisanje rezultujuće amplitude oscilovanja, ova jednačina nije dovoljna. Uspostavljanje konačne amplitude je vezano sa efektima nelinearnosti i za njikovo uzimanje u obzir u jednačini kretanja, moraju se zadržati takođe i članovi nelinearni po $x^{(2)}$:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \cdot x^{(2)}. \tag{29,11}$$

Analiza ovog zadatka se može jako uprostiti, ako se naglasi sledeća okolnost. Ako na desnu stranu jednačine (29,11) stavimo

$$x^{(2)} = b\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\delta\right]$$

(gde je b tražena amplituda rezonantnih oscilovanja, δ nije bitno za dalji konstantni pomeraj faze) i ako predstavimo proizvod dva periodična faktora u obliku sume dva kosinusa, ovde dobivamo član:

$$\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-\delta\right]$$

običnog rezonantnog karaktera (u odnosu na sopstvenu frekvenciju sistema ω_0). Prema tome zadatak se ponovo svodi na zadatak koji je analiziran u početku paragrafa, a to je zadatak o običnoj rezonanciji u linearnom sistemu samo s tom razlikom što ulogu amplitude spoljašnje sile igra sada veličina $\frac{\alpha f b}{3\omega_0^2}$ (a umesto ε stoji $\frac{\varepsilon}{2}$). Ako izvršimo tu zamenu u jednačini (29,4), dobivamo

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}-\varkappa b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36m^2\omega_0^6}.$$

Rešavajući ovu jednačinu u odnosu na b, nalazimo sledeće mogućne vrednosti amlitude:

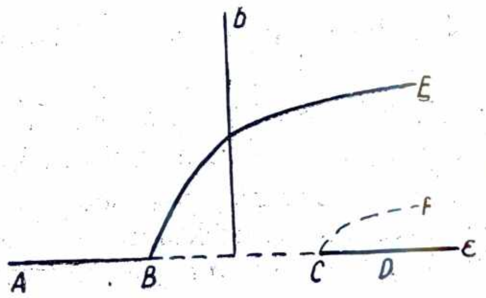
$$b = 0, \tag{29,12}$$

$$b^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right], \tag{29,13}$$

$$b^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right]. \tag{29,14}$$

Na sl. 33 je prikazana ovde dobivena zavisnost b, od ε (za $\varkappa > 0$; kada je $\varkappa < 0$, krive su upravljene na suprotnu stranu). Tačke B i C odgovaraju vrednostima:

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^3}\right)^2-4\lambda^2}.$$



Sl. 33

Na levo od tačke B je mogućna samo vrednost $b = 0$, tj. nema rezonancije i ne pobuđuje se oscilovanje sa frekvencijom $\approx \omega_0$. U intervalu među B i C imamo dva korena: $b = 0$ (odsečak BC na sl. 33) i izraz (29,13) (grana BE). Na kraju, na desno od tačke C postoje sva tri korena (29,12) — (29,14).

Međutim, sve te vrednosti ne odgovaraju stabilnom oscilatornom režimu.

Vrednost $b = 0$ nije stabilna na delu BC[1], i takođe se može pokazati da je uvek nestabilan režim koji odgovara korenu (29,14) (koji se nalazi između druga dva). Na sl. 33 nestabilne vrednosti b su prikazane tačkasto.

Ispitivaćemo, na primer, ponašanje sistema koji je u početku „u miru“[2] sa postepenim smanjenjem frekvencije spoljašnje sile. Da se dostigne tačka C ostaje $b = 0$, a zatim nastaje „prekid“ toga stanja sa prelazom na granu EB. Pri daljem smanjenju ε amplituda oscilovanja se smanjuje do nule u tački B. Pri obratnom pak povećanju frekvencije, amplituda oscilovanja raste duž krive BE[3].

Posmatrani slučajevi rezonancije predstavljaju osnovne slučajeve koji su nastali u nelinearnom oscilujućem sistemu. U višim aproksimacijama pojavljuju se rezonancije i sa drugim frekvencijama. Strogo uzev, rezonancija mora nastati za svaku frekvenciju γ za koju je $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$ (n, m su celi brojevi), tj. za svako $\frac{p\,\omega_0}{q}$, gde su q i q ponovo celi brojevi. Međutim, sa povećanjem stepena aproksimacije, intenzitet rezonantnih pojava (a takođe širina oblasti frekvencija u kojima one moraju postojati) tako brzo opada, da se realno mogu posmatrati samo rezonancije sa frekvencijom $\gamma \approx \frac{p\,\omega_0}{q}$ sa vrednostima p i q, koje nisu tako velike.

Zadatak

Odrediti zavisnost $b(\varepsilon)$ za rezonanciju sa frekvencijama $\gamma \approx 3\,\omega$.

Rešenje. U prvoj aproksimaciji biće

$$x^{(1)} = -\frac{f}{8m\omega_0^2}\cos(3\,\omega_0 + \varepsilon)\,t.$$

Za drugu aproksimaciju ($x^{(2)}$) dobivamo iz (29,1) jednačinu

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)} x^{(2)2},$$

gde je na desnoj strani jednačine napisan samo član koji dovodi do posmatrane rezonancije. Ako u njega stavimo $x^{(2)} = b\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t + \delta\right]$ i izdvajajući iz proizvoda tri kosinusa rezonantni član, na desnoj strani jednačine dobivamo izraz:

$$\frac{3\beta b^2 f}{32m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t - 2\delta\right].$$

---

[1] Ovaj interval upravo odgovara oblasti parametarske rezonancije (27,12), pri čemu upoređenjem (29,10) sa (27,8) imamo $|h| = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}$. Međutim, uslov

$$\left|\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3}\right| > 4\lambda,$$

za koji je mogućno postojanje posmatrane pojave, odgovara nejednakosti $h > h_k$.

[2] Napominjemo da ovde posmatramo samo rezonantna oscilovanja. Njihovo odstupanje ne znači bukvalno sistem u miru u kome će nastajati slaba prinudna oscilovanja sa frekvencijom γ.

[3] Međutim, treba shvatiti da sve izvedene formule važe samo dotle, dok amplituda b (a takođe i ε) ostaje dovoljno mala. U stvari krive BE i CF u svom daljem toku se završavaju sjedinjujući se u nekoj tački; kada se dostigne ta tačka, oscilatorni režim „se prekida“ i postaje $b = 0$.

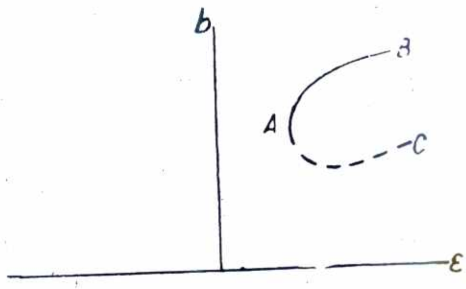
Odavde se vidi, da se zavisnost b od ε dobiva zamenom u jednačini (29,4) f sa $\frac{3\beta b^2 f}{32\,\omega_0^2}$ i ε sa $\frac{\varepsilon}{3}$:

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{3}-\varkappa b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{9\beta^2 f^2}{2^{12}\, m^2\, \omega_0^6}\, b^4 \equiv A b^4.$$

Koreni ove jednačine su:

$$b=0,$$

$$b^2=\frac{\varepsilon}{3\varkappa}+\frac{A}{2\varkappa^2}\pm\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\varkappa}+\frac{A^2}{4\varkappa^2}-\lambda^2}.$$



Sl. 34

Na sl. 34 je grafički prikazan karakter zavisnosti δ od ε (kada je $\varkappa > 0$). Stabilnim režimima odgovaraju samo vrednosti $b = 0$ (apscisna osa) i grana AB. Tački A odgovaraju vrednosti

$$\varepsilon_k=\frac{3\,(4\varkappa^2\lambda^2-A^2)}{4\varkappa A},\qquad b_k^2=\frac{4\varkappa^2\lambda^2+A^2}{4\varkappa^2 A}.$$

Oscilatorni režim postoji samo kada je $\varepsilon > \varepsilon_k$, pri čemu je amplituda $b > b_k$. Kako je stanje $b = 0$ uvek stabilno, onda je za pobuđivanje oscilovanja neophodan početni „impuls“.

Dobivene formule važe samo za male vrednosti ε. Mala vrednost ε omogućena je malom vrednosti λ, ako pri tome amplituda sile zadovoljava uslov $A \approx \lambda$.

§ 30. Kretanje u polju koje brzo osciluje

Posmatraćemo kretanje čestice koja se nalazi jednovremeno pod dejstvom konstantnog polja U i sile

$$f=f_1\cos\omega t+f_2\sin\omega t, \tag{30,1}$$

koja se menja u toku vremena sa velikom frekvencijom ω (f_1, f_2 su funkcije samo od koordinata). Pri tom, pod „velikom“ frekvencijom podrazumevamo takvu frekvenciju koja zadovoljava uslov $\omega \gg \frac{1}{T}$, gde je T red veličine perioda kretanja, koje bi čestica vršila u samom polju U. Po svojoj veličini sila f nije slaba u poređenju sa silama koje dejstvuju u polju U. Međutim, pretpostavićemo da je malo oscilatorno pomeranje čestice, koje je izazvano tom silom (označićemo ga u daljem sa ξ).

Radi uprošćavanja izračunavanja, posmatraćemo u početku jednodimenzionalno kretanje u polju koje zavisi samo od jedne prostorne koordinate x. Tada je jednačina kretanja čestice[1]:

$$m\ddot{x}=-\frac{dU}{dx}+f. \tag{30,2}$$

[1] Koordinata x ne mora biti Descartes-ova, a koeficijent m prema tome nije uvek masa čestice i nije uvek konstantan kako je to pretpostavljeno u (30,2). Takva se pretpostavka, međutim, ne odražava na definitivnom rezultatu (vidi dalje).

Iz karaktera polja koje dejstvuje na česticu, od ranije je jasno, da njegovo kretanje predstavlja pomeranje duž neke trajektorije sa jednovremenim malim oscilacijama (sa frekvencijom ω) oko nje. Shodno ovome predstavićemo funkciju $x(t)$ u obliku zbira

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \tag{30,3}$$

gde $\xi(t)$ predstavlja naznačene male oscilacije.

Srednja vrednost frekvencije $\xi(t)$ za vreme svog perioda $\frac{2\pi}{\omega}$ postaje jednaka nuli, funkcija $X(t)$ za to vreme se menja vrlo malo. Ako takvu srednju vrednost označimo crtom iznad slova, imaćemo: $\overline{x} = X(t)$, tj. funkcija $X(t)$ opisuje srednje, u odnosu na brze oscilacije, „ujednačeno" kretanje čestice. Izvešćemo jednačinu koja određuje tu funkciju[1]).

Zamenjujući (30,3) u (30,2) i razlažući to po stepenima ξ sa tačnošću do članova prvog reda, dobićemo

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi\frac{d^2U}{\partial X^2} + f(X, t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X}. \tag{30,4}$$

U ovoj jednačini figurišu članovi različitog karatera — oscilujući i „ujednačeni"; oni treba da se, očevidno, uzajamno skraćuju u svakoj od tih dve grupe pojedinačno. Za oscilujuće članove dovoljno je napisati:

$$m\ddot{\xi} = f(X, t), \tag{30,5}$$

ostali sadrže mali faktor ξ i zbog toga su mali u poređenju sa napisanim (što se tiče izvoda $\ddot{\xi}$, on je proporcionalan velikoj vrednosti ω^2 i zbog toga nije mali). Integrirajući jednačinu (30,5) sa funkcijom f iz (30,1) (pri čemu se veličina X smatra kao konstanta), dobivamo:

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2}. \tag{30,6}$$

Dovedimo sada jednačinu (30.4) na srednju vrednost po vremenu (u smislu koji je ranije naveden). Kako srednje vrednosti prvih stepena f i ξ postaju jednake nuli, dobivamo jednačinu:

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}},$$

koja sadrži već samo funkciju $X(t)$. Napisaćemo je definitivno u obliku:

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{\text{ef}}}{dX}, \tag{30,7}$$

gde se „efektivna potencijalna energija" određuje pomoću[2])

$$U_{\text{ef}} = U + \frac{1}{2m\omega^2}\overline{f^2} = U + \frac{1}{4m\omega^2}(f_1^2 + f_2^2). \tag{30,8}$$

[1]) Ideju ovog metoda je dao *P. L. Kapica* (1951).

[2]) Ako se izvrše nešto duža izračunavanja, pod uslovom da veličina m zavisi od x, lako se možemo uveriti da će formule (30,7) i (30,8) važiti i u tom slučaju.

Upoređujući ovaj izraz sa (30,6), može se lako videti, da dopunski član (u odnosu na polje U) ne predstavlja ništa drugo, do srednju kinetičku energiju oscilatornog kretanja:

$$U_{ef} = U + \frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}. \tag{30,9}$$

Na taj način, kretanje čestice, koje je dovedeno na srednju vrednost u odnosu na oscilacije, vrši se tako, kako bi bilo, kada bi pored konstantnog polja U, dejstvovalo još i dopunsko konstantno polje, koje kvadratno zavisi od amplitude promenljivog polja.

Dobiveni rezultat se može lako generalisati u slučaju sistema sa ma kojim brojem stepena slobode, koji je opisan generalisanim koordinatama q_i. Za efektivnu potencijalnu energiju se dobiva [umesto (30,8)], izraz:

$$U_{ef} = U + \frac{1}{2\omega^2}\sum_{i,k} a_{ik}^{-1}\overline{f_i f_k} = U + \sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i \dot{\xi}_k}, \tag{30,10}$$

gde su veličine a_{ik} (uopšte uzev — funkcije koordinata) elementi matrice, koja je recipročna matrici koeficijenata a_{ik} u kinetičkoj energiji sistema [vidi (5,5)].

Zadaci

1. Odrediti položaje stabilne ravnoteže klatna, čija tačka vešanja vrši vertikalna oscilovanja sa velikom frekvencijom $\gamma \left(\gamma \gg \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$.

Rešenje. Iz Lagrange-ove funkcije, koja je dobivena u zadatku 3, c § 5, vidi se da je u datom slučaju promenljiva sila

$$f = -m l a \gamma^2 \cos\gamma t \sin\varphi$$

(kao veličina x uzet je ugao φ). Zbog toga će „efektivna potencijalna energija" biti:

$$U_{ef} = mgl\left(-\cos\varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4lg}\sin^2\varphi\right).$$

Položaji stabilne ravnoteže odgovaraju minimumu te funkcije. Pravac vertikalno naniže ($\varphi = 0$) je uvek stabilan. Pri ispunjenju uslova

$$a^2\gamma^2 > 2gl$$

stabilan je takođe i položaj vertikalno naviše ($\varphi = \pi$).

2. To isto za klatno sa tačkom vešanja koja horizontalno osciluje.

Rešenje. Prema Lagrange-ovoj funkciji dobivenoj u zadatku 3, b) § 5, nalazimo da je $f = mla\gamma^2 \cos\gamma t \cos\varphi$, a zatim

$$U_{ef} = mgl\left[-\cos\varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl}\cos^2\varphi\right].$$

Ako je $a^2\gamma^2 < 2gl$, onda je stabilan položaj $\varphi = 0$. Ako je pak $a^2\gamma^2 > 2gl$, onda stabilnoj ravnoteži odgovara vrednost

$$\cos\varphi = \frac{2gl}{a^2\gamma^2}.$$

GLAVA VI

KRETANJE KRUTOG TELA

§ 31. Ugaona brzina

U mehanici možemo *kruto telo* definisati kao sistem materijalnih tačaka čija su međusobna rastojanja nepromenjena. Sistemi koji u prirodi realno postoje, mogu, konačno, pa zadovoljavaju taj uslov samo približno. Ali većina čvrstih tela u običnim uslovima tako malo menjaju svoj oblik i dimenzije da pri izučavanju zakona kretanja krutog tela, posmatranog kao nešto celo, možemo se potpuno ograditi od tih promena.

U daljem izlaganju često ćemo kruto telo smatrati kao diskretan skup materijalnih tačaka čime se postiže izvesno uprošćavanje zaključaka. Međutim, ovo uopšte ne protivreči okolnosti, da kruta tela obično možemo u mehanici tretirati kao kontinulana, ne interesujući se apsolutno za njihovu unutrašnju strukturu. Prelaz od formula, koje sadrže sumiranje po diskretnim tačkama na formule za kontinualno telo ostvaruje se jednostavno zamenom masa čestica masom $\rho\, dV$, koja se nalazi u elementu zapremine dV (ρ je gustina mase) i integriranjem po celoj zapremini tela.

Za opisivanje kretanja krutnog tela uvešćemo dva koordinatna sistema: „nepokretni", tj. inercijalni sistem XYZ i koordinatni sistem koji se kreće $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, za koji se pretpostavlja da je čvrsto vezan sa krutim telom i učestvuje u svim njegovim kretanjima. Početak pokretnog koordinatnog sistema zgodno je postaviti u centar inercije tela.

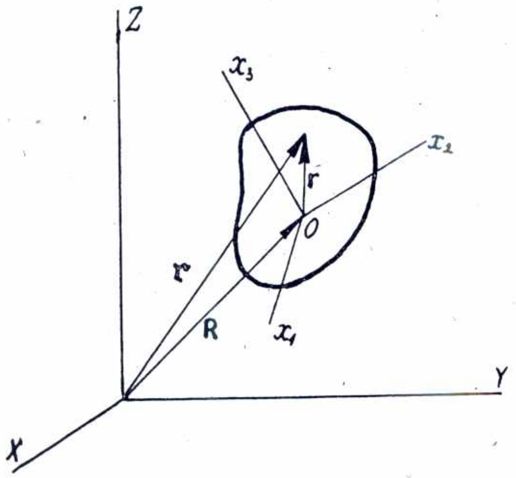
Položaj krutog tela u odnosu na nepokretni koordinatni sistem određuje se potpuno poznavanjem položaja pokretnog sistema.

Neka radijus-vektor $\vec{R}$ pokazuje položaj početka O pokretnog sistema (sl. 35). Orijentacija osa toga sistema u odnosu na nepokretni određuje se pomoću tri nezavisna ugla, tako da zajedno sa tri komponente vektora $\vec{R}$ imamo svega 6 koordinata. Na taj način, svako kruto telo predstavlja mehanički sistem sa šest stepena slobode.

Posmatraćemo proizvoljno, beskonačno malo, pomeranje krutog tela. Možemo ga predstaviti u obliku zbira dva dela. Jedan od njih je beskonačno mali paralelan pomeraj tela, i kao rezultat ovoga, centar inercije prelazi iz početnog položaja u konačni pri nepromenjenoj orijentaciji ose pokretnog koordinatnog sistema. Drugi je beskonačno mala rotacija oko centra inercije posle čega kruto telo dolazi u definitivan položaj.

Označićemo sa $\vec{r}$ radijus-vektor proizvoljne tačke P krutog tela u pokretnom koordinatnom sistemu, a radijus-vektor iste te tačke u nepokretnom sistemu sa $\vec{r}_g$. Tada se beskonačno malo pomeranje $d\vec{r}_g$ tačke P sastoji iz pomeranja $d\vec{R}$ zajedno sa centrom inercije i pomeraja $d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ u odnosu na poslednji pri obrtanju za beskonačno mali ugao $d\vec{\varphi}$ [vidi (9,1)]:

$$d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{\varphi} \times \vec{r}.$$



Sl. 35

Ako ovu jednačinu podelimo sa vremenom dt u toku koga je nastalo posmatramo pomeranje, i uvodeći brzine

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \qquad \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}, \qquad \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\Omega}, \quad (31,1)$$

dobivamo među njima ralaciju:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (31,2)$$

Vektor $\vec{V}$ je brzina centra inercije krutog tela: naziva se takođe i brzinom njegovog *translatornog kretanja*. Vektor $\vec{\Omega}$ se naziva *ugaona brzina* rotacije krutog tela; njen pravac (kao i pravac $d\vec{\varphi}$) se poklapa sa pravcem ose rotacije. Na taj način brzina $\vec{v}$ ma koje tačke tela (u odnosu na nepokretni koordinatni sistem) može biti izražena pomoću translatorne brzine tela i ugaone brzine njegove rotacije.

Potrebno je napomenuti da pri izvođenju formule (31,2) specifična svojstva koordinatnog početka kao centra inercije tela apsolutno nisu uzeti u obzir. Preimućstva toga izbora objasnićemo kasnije pri izračunavanju energije tela u kretanju.

Dopustimo sada da je koordinatni sistem, koji je spojen sa krutim telom, uzet tako, da se njegov koordinatni početak ne nalazi u centru inercije O, već u nekoj tački O' na rastojanju $\vec{a}$ od tačke O. Brzinu pomeranja početka O' toga sistema označićemo sa $\vec{V}'$, a ugaonu brzinu njegove rotacije sa $\vec{\Omega}'$.

Posmatraćemo ponovo ma koju tačku P krutog tela i označimo njen radijus-vektor u odnosu na počesak O' sa $\vec{r}$. Tada je $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$ i zamena u (31,2) daje:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'.$$

S druge strane, prema definiciji $\vec{V}'$ i $\vec{\Omega}'$, mora biti $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\Omega}' \times \vec{r}'$. Zbog toga zaključujemo da je:

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a}, \qquad \vec{\Omega}' = \vec{\Omega}. \quad (31,3)$$

Druga od ovih jednačina je veoma značajna. Vidimo, da se ispostavlja, da je ugaona brzina, kojom rotira u datom momentu koordinatni sistem koji je čvrsto vezan sa telom, apsolutno nezavisna u datom momentu od toga sistema. Svi takvi sistemi rotiraju u datom momentu, oko uzajamno paralelnih osa, sa istom, po apsolutnoj vrednosti, brzinom $\vec{\Omega}$. Ova okolnost nam i daje pravo da $\vec{\Omega}$ nazivamo ugaonom brzinom rotacije krutog tela kao takvog. Brzina translatornog kretanja takvog „apsolutnog" karaktera, uopšte ne postoji.

Iz prave formule (31,3) se vidi, da ako su $\vec{V}$ i $\vec{\Omega}$ (u datom momentu) uzajamno normalni pri ma kakvom izboru koordinatnog početka O, onda su oni (tj. $\vec{V}'$ i $\vec{\Omega}'$) uzajamno normalni i za određeni, u odnosu na ma koji drugi početak O'. Iz formule (31,2) se vidi da se u tom slučaju brzine svih tačaka tela $\vec{V}$ nalaze na jednoj istoj ravni—ravni koja je normalna na $\vec{\Omega}$. Pri tom se uvek može uzeti takav početak O'[1] čija je brzina V' jednaka nuli, tako da kretanje krutog tela (u datom momentu) bude predstavljeno kao čista rotacija oko ose koja prolazi kroz O'. Ovu osu nazivamo *trenutna osa rotacije* tela[2].

U daljem izlaganju ćemo uvek pretpostavljati da je početak pokretnog koordinatnog sistema uzet u centru inercije tela, tako da i osa rotacije tela prolazi kroz taj centar. Pri kretanju tela menjaju se, uopšte uzev, kako apsolutna veličina $\vec{\Omega}$ tako i pravac ose rotacije.

§ 32. Tenzor inercije

Za izračunavanje kinetičke energije krutog tela posmatraćemo ga kao diskretan sistem materijalnih tačaka i napisaćemo:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2},$$

gde se sumiranje vrši po svim tačkama koje sačinjavaju telo. Ovde i nadalje ćemo izbaciti indekse, kojima se označavaju te tačke, u cilju uprošćavanja pisanja formula.

Zamenjujući ovde (31,2), dobivamo:

$$T = \sum \frac{m}{2} [\vec{V} + (\vec{\Omega} \times \vec{r})]^2 = \sum \frac{m}{2} V^2 + \sum m \vec{V} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \sum \frac{m}{2} (\Omega \times r)^2.$$

Brzine $\vec{V}$ i $\vec{\Omega}$ su iste za sve tačke krutog tela. Zbog toga u prvom članu $\frac{V^2}{2}$ iznosimo ispred znaka sume, a suma Σm je masa tela, koju ćemo označiti sa μ. U drugom članu ćemo napisati:

$$\sum m \vec{V} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \sum m \vec{r} (\vec{V} \times \vec{\Omega}) = (\vec{V} \times \vec{\Omega}) \sum m \vec{r}.$$

[1] Naravno, može se ispostaviti da se nalazi i izvan tela.

[2] U opštem slučaju, kada pravci $\vec{V}$ i $\vec{\Omega}$ nisu uzajamno normalni, koordinatni početak se može tako uzeti da $\vec{V}$ i $\vec{\Omega}$ budu paralelni, tj. kretanje (u datom momentu) biće sastavljeno iz rotacije oko neke ose i translatornog pomeranja duž te iste ose.

Odavde je jasno, da ako je početak pokretnog koordinatnog sistema uzet, kako je uslovljeno, u centru inercije, onda taj član postaje jednak nuli, jer je tada $\Sigma mr = 0$ Na kraju, u trećem članu ćemo rastaviti kvadrat vektorskog proizvoda i kao rezultat dobivamo:

$$T = \sum \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \{\Omega^2 r^2 - (\Omega \times)^2\}. \tag{32.1}$$

Na taj način, kinetička energija krutog tela može biti predsavljena u obliku sume dva dela. Prvi član u (32,1) je kinetička energija translatornog kretanja —ona ima takav oblik, kao da je cela masa tela koncentrisana u njegovom centru inercije. Drugi član predstavlja kinetičku energiju rotacionog kretanja sa ugaonom brzinom $\vec{\Omega}$ oko ose koja prolazi kroz centar inercije. Napominjemo, da je mogućnost takvog deljenja kinetičke energije na dva dela uslovljena uzimanjem (izborom) početka koordinatnog sistema, koji je vezan sa telom, baš u njegovom centru inercije.

Napisaćemo kinetičku energiju rotacije sa tenzorskim oznakama, tj. pomoću komponenata x_i, Ω_i i vektora $\vec{r}$ i $\vec{\Omega}$[1]. Imaćemo:

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{2} \sum m \{\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum m \{\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\} = \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \end{aligned}$$

Ovde je iskorišćena identičnost $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$, gde je δ_{ik} jedinični tenzor (čije su komponente jednake jedinici za $i = k$ i nuli za $i \neq k$). Uvodeći tenzor

$$I_{ik} = \sum m (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \tag{32,2}$$

dobivamo definitivni izraz za kinetičku energiju krutog tela u obliku:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k. \tag{32,3}$$

Lagrange-ova funkcija krutog tela dobiva se iz (32,3) oduzimanjem potencijalne energije

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U. \tag{32,4}$$

Potencijalna energija je u opštem slučaju funkcija šest promenljivih, koje određuju položaj krutog tela, na primer, tri koordinate X, Y, Z centra inercije,

---

[1] U ovoj glavi slovima i, k i l se označavaju tenzorski indeksi koji dobivaju vrednosti 1, 2 i 3. Pri tom se uvek primenjuje poznato pravilo sumiranja, prema kome se znaci suma izostavljaju, a po svim dvaput ponovljenim (takozvanim „nemim”) indeksima podrazumevaju se sumiranja po vrednostima 1, 2, 3, tako je $A_i B_i = \vec{A} \times \vec{B}$, $A_l^2 = A_l A_l = \vec{A}^2$ itd. Oznake nemih indeksa, očividno, možemo menjati proizvoljno (samo da se ne bi poklapalo sa oznakama drugih tenzorskih indeksa koji figuriraju u datom izrazu).

i tri ugla koji određuju orijentaciju pokretnih koordinatnih osa u odnosu na nepokretne.

Tenzor I_{ik} se naziva *tenzor momenta inercije* ili jednostavno *tenzor inercije* tela. Kao što je jasno iz definicije (32,2), on je simetričan, tj.

$$I_{ik} = I_{ki}. \tag{32,5}$$

Radi očiglednosti, napisaćemo njegove komponente u eksplicitnom obliku u sledećoj tablici:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \Sigma m(y^2+z^2) & -\Sigma mxy & -\Sigma mxz \\ -\Sigma myx & \Sigma m(x^2+z^2) & -\Sigma myz \\ -\Sigma mzx & -\Sigma mzy & \Sigma m(x^2+y^2) \end{pmatrix}. \tag{32,6}$$

Komponente I_{xx}, I_{yy} i I_{zz} se ponekad nazivaju momenti inercije u odnosu na odgovarajuće ose.

Tenzor inercije je, očigledno, aditivan — momenti inercije tela jednaki su sumama momenata inercije njegovih delova.

Ako kruto telo možemo smatrati kao neprekidno, onda se u definiciji (32,2) suma zamenjuje integralom po zapremini tela:

$$I_{ik} = \int \rho\,(x_l^2\,\delta_{ik} - x_i x_k)\,dV. \tag{32,7}$$

Kao i svaki simetrični tenzor drugog ranga, tenzor inercije se može dovesti na dijagonalni oblik odgovarajućim izborom pravaca osa x_1, x_2, x_3. Ovi pravci se nazivaju *glavne ose inercije*, a odgovarajuće vrednosti komponenata tenzora — *glavni momenti inercije*. Označićemo ih sa I_1, I_2, I_3. Pri takvom izboru osa x_1, x_2, x_3, kinetička energija rotacije se posebno jednostavno izražava:

$$T_R = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2). \tag{32,8}$$

Napominjemo, da svaki od tri glavna momenta inercije ne može biti veći od dva druga. Tako je:

$$I_1 + I_2 = \Sigma m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geqslant \Sigma m(x_1^2 + x_2^2) = I_3. \tag{32,9}$$

Telo, čija su sva tri momenta inercije različita, naziva se *asimetrična čigra*.

Ako su dva glavna momenta inercije uzajamno jednaka, $I_1 = I_2 \neq I_3$, onda se kruto telo naziva *simetrična čigra*. U tom slučaju je izbor pravaca glavnih osa u ravni $x_1 x_2$ proizvoljan.

Ako se pak sva tri glavna momenta inercije poklapaju, onda se telo naziva *sferna čigra*. U tom slučaju je proizvoljan izbor sve tri glavne ose inercije; možemo ih uzeti kao ma koje tri uzajamno normalne ose.

Nalaženje glavnih osa inercije se jako uprošćava ako kruto telo ima jednu ili drugu simetriju; jasno je, da položaj centra inercije i pravci glavnih osa inercije moraju imati istu simetriju.

Tako, ako telo ima ravan simetrije, onda se centar inercije mora nalaziti u toj ravni. U njoj se nalaze dve glavne ose inercije, a treća je normalna na njoj. Očevidan slučaj takve vrste je sistem čestica koje se nalaze u jednoj ravni.

U tom slučaju postoji jednostavan odnos između tri glavna momenta inercije. Ako je ravan sistema uzeta kao ravan $x_1 x_2$, onda, kako je za sve čestice $x_3 = 0$, imaćemo:

$$I_1 = \Sigma m x_2^2, \qquad I_2 = \Sigma m x_1^2, \qquad I_3 = \Sigma m (x_1^2 + x_2^2),$$

tako da je:

$$I_3 = I_1 + I_2. \tag{32,10}$$

Ako telo ima osu simetrije ma koje vrste, onda se centar inercije nalazi na toj osi. S njom se poklapa jedna od glavnih osa inercije, a druge dve su na njoj normalne. Pri tom, ako je red ose simetrije veći od drugog, onda je telo simetrična čigra. U stvari, svaku glavnu osu (koja je normalna na osi simetrije) možemo obrnuti tada za ugao, koji je različit od 180°, tj. izbor ovih osa postaje nejednoznačan, a to je mogućno samo u slučaju simetrične čigre.

Naročit slučaj imamo kod sistema čestica koje se se nalaze duž jedne prave linije. Ako tu pravu uzmemo kao osu x_3, onda je za sve čestice $x_1 = x_2 = 0$, i zbog toga se dva glavna momenta inercije poklapaju, a treći je jednak nuli:

$$I_1 = I_2 = \Sigma m x_3^2, \qquad I_3 = 0. \tag{32,11}$$

Takav sistem nazivamo *rotator*. Karakteristična specifičnost rotatora za razliku od opšteg slučaja proizvoljnog tela je u tome, što on ima svega dva (a ne tri) rotaciona stepena slobode, koji odgovaraju rotacijama oko osa x_1 i x_2; govoriti pak o rotaciji prave oko same sebe, očigledno, nema smisla.

Na kraju, učinićemo još jednu napomenu odnosno izračunavanja tenzora inercije. Mada smo definisani ovaj tenzor u odnosu na koordinatni sistem sa početkom u centru inercije [samo pri takvoj definiciji važi osnovna formula (32,3)], ipak se ponekad ispostavlja kao zgodno za njegovo izračunavanje, izračunati prethodno analogni tenzor:

$$I'_{ik} = \Sigma m (x_l'^2 \delta_{ik} - x_i' x_k'),$$

koji je definisan u odnosu na drugi početak O'. Ako je rastojanje OO' dato vektorom $\vec{a}$, onda je $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$, $x_i = x_i' + a_i$; uzimajući u obzir takođe da je $\Sigma m \vec{r} = 0$, prema definiciji tačke O, nalazimo:

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \tag{32,12}$$

Prema toj formuli, znajući I'_{ik}, lako se može izračunati traženi tenzor I_{ik}.

Zadaci

1. Odrediti glavne momente inercije za molekule, koje posmatramo kao sisteme čestica, koje se nalaze na nepromenjenim međusobnim rastojanjima u sledećim slučajevima:

a) molekul je sastavljen od atoma koji se nalaze na jednoj pravoj.

Odgovor:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu} \sum_{a \neq b} m_a m_b l_{ab}^2, \qquad I_3 = 0,$$

gde je m_a masa atoma, l_{ab} rastojanje između atoma a i b; sumiranje se vrši prema svim parovima atoma u molekulu (pri čemu svaki par vrednosti a i b ulazi u sumu jedanput).

Za dvoatomski molekul suma se svodi na jedan član, dajući od ranije očigledni rezultat – proizvod redukovane mase oba atoma i kvadrata njihovih rastojanja:

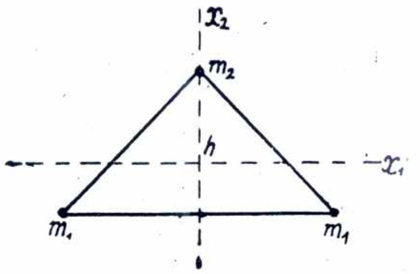
$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

b) Troatomski molekul u obliku ravnostranog trougla (sl. 36).

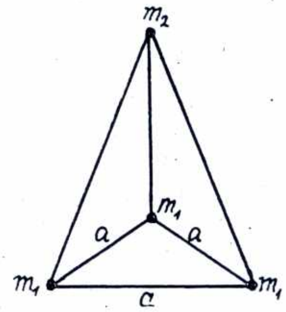
Odgovor: Centar inercije se nalazi na rastojanju $\frac{m_2 h}{\mu}$ od njegove osnove. Momenti inercije biće:

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2, \qquad I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \qquad I_3 = I_1 + I_2.$$

c) Četvoroatomski molekul sa atomima, koji su raspoređeni u vrhovima pravilne trostrane piramide (sl. 37).



Sl. 36



Sl. 37

Odgovor: Centar inercije se nalazi na visini piramide na rastojanju $X_3 = \frac{m_2 h}{\mu}$ od njene osnove. Momenti inercije biće:

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1 m_2}{\mu} h^2 + \frac{m_1 a^2}{2}, \qquad I_3 = m_1 a^2.$$

Kada je $m_1 = m_2$ i $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ dobivamo tetraedarski molekul sa momentima inercije

$$I_1 = I_3 = I_3 = m_1 a^2.$$

2. Odrediti glavne momente inercije neprekidnih homogenih tela.

a) Tanki štap dužine l.

Odgovor: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\mu l^2$, $I_3 = 0$ (debljina štapa se zanemaruje).

b) Kugla poluprečnika R.

Odgovor:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\mu R^2$$

(treba izračunati sumu: $I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho \int r^2 dV$).

c) Kružni cilindar poluprečnika R i visine h.

Odgovor:

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right). \qquad I_3 = \frac{\mu}{2} R^2$$

(x_3 je osa cilindra).

d) Pravougli paralelopiped čije su ivice a, b, c.

O d g o v o r:

$$I_1 = \frac{\mu}{12}(b^2 + c^2), \qquad I_2 = \frac{\mu}{12}(c^2 + a^2), \qquad I_3 = \frac{\mu}{12}(a^2 + b^2)$$

(ose x_1, x_2, x_3 su paralelne ivicama a, b, c).

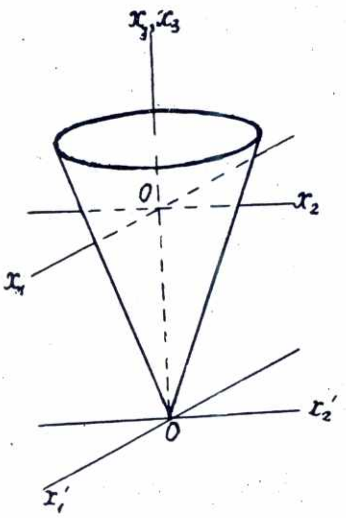
e) Kružni konus visine h i poluprečnika osnove R.

R e š e n j e. Izračunaćemo u početku tenzor I'_{ik} u odnosu na ose sa početkom u vrhu konusa (sl. 38). Izračunavanje se lako izvodi u cilindarskim koordinatama i daje:

$$I'_1 = I'_2 = \frac{3}{5}\mu\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right), \qquad I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

Težište se, kako pokazuju jednostavna izračunavanja, nalazi na osi konusa na rastojanju $a = \frac{3}{4}h$ od vrha. Prema formuli (31,12), nalazi se definitivno:

$$I_1 = I_2 = I'_1 - \mu a^2 = \frac{3}{20}\mu\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right), \qquad I_3 = I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2.$$



Sl. 38

f) Troosni elipsoid sa poluosama a, b, c.

R e š e n j e. Centar inercije se poklapa sa centrom elipsoida, a glavne ose inercije sa njegovim osama. Integriranje po zapremini elipsoida može biti svedeno na integriranje po zapremini sfere transformacijam koordinata: $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$, kojom se svodi jednačina površine elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

na jednačinu površine jedinične sfere:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Tako za moment inercije u odnosu na osu x, dobivamo:

$$I_1 = \rho \iiint (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \rho abc \iiint (b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = abc\frac{1}{2} I' (b^2 + c^2),$$

gde je I' moment inercije kugle jediničnog poluprečnika. Uzimajući u obzir da je zapremina elipsoida jednaka $\frac{4}{3}\pi abc$, definitivno dobivamo momente inercije:

$$I_1 = \frac{\mu}{5}(b^2 + c^2), \qquad I_2 = \frac{\mu}{5}(a^2 + c^2), \qquad I_3 = \frac{\mu}{5}(a^2 + b^2).$$

3. Odrediti frekvenciju malih oscilovanja fizičkog klatna (kruto telo koje osciluje u polju teže oko nepokretne horizontalne ose).

R e š e n j e. Neka je l rastojanje od centra inercije klatna do ose rotacije, a α, β, γ su uglovi između pravaca njegovih glavnih osa inercije i ose rotacije. Kao promenljivu koordinatu uvešćemo ugao φ između vertikale i normale povučene iz centra inercije na osu rotacije. Brzina centra inercije je $V = l\dot{\varphi}$, a projekcije ugaone brzine na glavne ose inercije biće: $\dot{\varphi}\cos\alpha$, $\dot{\varphi}\cos\beta$, $\dot{\varphi}\cos\gamma$. Smatrajući da je ugao φ mali, nalazimo potencijalnu energiju u obliku:

$$U = \mu g l (1 - \cos\varphi) \approx \frac{1}{2}\mu g l \varphi^2.$$

Zbog toga će Lagrange ova funkcija biti:

$$L = \frac{\mu l^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma)\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu g l^2}{2}\varphi^2.$$

Odavde za frekvenciju oscilovanja imamo:

$$\omega^2 = \frac{\mu g l}{\mu l^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos_2\beta + I_3\cos^2\gamma}.$$

4. Naći kinetičku energiju sistema, koji je prikazan na sl. 39. OA i AB su tanki, homogeni štapovi dužine l, spojeni zglavkasto u tački A. Štap OA rotira (u ravni crteža) oko tačke O, a kraj B štapa AB klizi duž ose Ox.

Rešenje. Brzina centra inercije štapa OA (koji se nalazi na njenoj sredini) iznosi $\frac{l\dot{\varphi}}{2}$, gde je φ ugao AOB. Prema tome kinetička energija štapa OA biće:

$$T_1 = \frac{\mu l^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

(μ je masa jednog štapa).

Descartes-ove koordinate centra inercije štapa AB biće: $X = \frac{3l}{2}\cos\varphi$, $X = \frac{l}{2}\sin\varphi$. Kako je ugaona brzina rotacije tog štapa takođe jednaka $\dot{\varphi}$, onda je njegova kinetička energija:

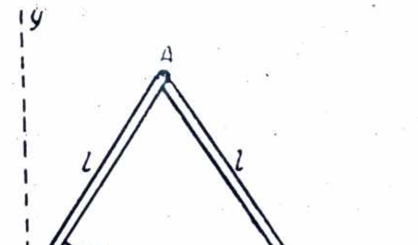
$$T_2 = \frac{\mu}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu l^2}{8}(1 + 8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Totalna kinetička energija sistema biće:

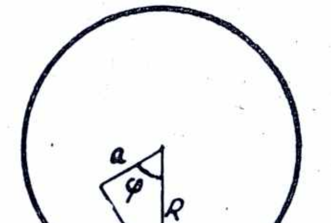
$$T = \frac{\mu l^2}{3}(1 + 3\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2$$

[zamenjeno $I = \frac{\mu l^2}{12}$ prema zad. 2, a].

5. Naći kinetičku energiju cilindra (poluprečnika R), koji se kotrlja po ravni. Masa cilindra je raspoređena po njegovoj zapremini tako da je jedna od glavnih osa inercije paralelna sa osom cilindra i prolazi na rastojanju a od nje; moment inercije u odnosu na tu glavnu osu iznosi I.



Sl. 39



Sl. 40

Rešenje. Uvešćemo ugao φ između vertikale i normale, spuštene iz težišta na osu cilindra (sl. 40).

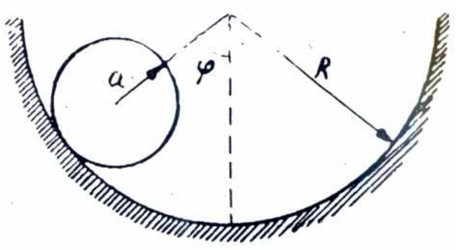
Kretanje cilindra u svakom momentu možemo smatrati kao čistu rotaciju oko trenutne ose, koja se poklapa sa linijom njegovog dodira sa nepokretnom ravni; ugaona brzina te rotacije je $\dot{\varphi}$ (ugaona brzina rotacije oko svih paralelnih osa je ista). Centar inercije se nalazi na rastojanju $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi}$ od trenutne ose i zbog toga je njegova brzina

$$V = \dot{\varphi}\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi}\,.$$

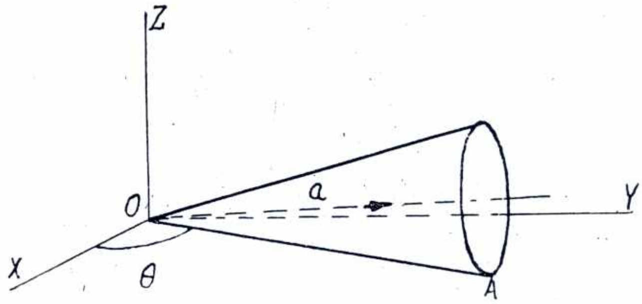
Totalna kinetička energija biće:

$$T = \frac{\mu}{2}(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

6. Naći kinetičku energiju homogenog cilindra poluprečnika a koji se kotrlja po unutrašnjoj strani cilindrične površine poluprečnika R (sl. 41).



Sl. 41



Sl. 42

Rešenje. Uvešćemo ugao φ između linije koja spaja centre oba cilindra i vertikale. Centar inercije cilindra, koji se kotrlja, nalazi se na osi i njegova je brzina $V = \dot{\varphi}(R - a)$. Ugaonu brzinu izračunaćemo kao brzinu čiste rotacije oko trenutne ose, koja se poklapa sa linijom dodira cilindra. Ona iznosi:

$$\Omega = \frac{V}{a} = \dot{\varphi}\frac{R - a}{a}\,.$$

Ako je I_3 moment inercije u odnosu na osu cilindra, onda je

$$T = \frac{\mu}{2}(R - a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{I_3}{2}\frac{(R - a)^2}{a^2}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}\mu(R - a)^2\dot{\varphi}^2$$

(I_3 — iz zadatka 2, c).

7. Naći kinetičku energiju homogenog konusa, koji se kotrlja po ravni.

Rešenje. Označićemo sa θ ugao između linije OA koja dodiruje konus sa ravni i ma koje nepokretne prave u toj ravni (sl. 42). Centar inercije se nalazi na osi konusa, a njegova brzina je $V = a\cos\alpha\cdot\dot{\theta}$, gde je 2α ugao u vrhu konusa, a a je rastojanje centra inercije od vrha. Ugaonu brzinu rotacije izračunaćemo kao brzinu čiste rotacije oko trenutne ose OA:

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \dot{\theta}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Jedna od glavnih osa inercije (x_3-osa) poklapa se sa osom konusa, a drugu (x_2-osu) ćemo uzeti normalno na osi konusa i liniji OA. Tada će projekcije vektora $\vec{\Omega}$ (koji je orijentisan paraleltno sa OA) na glavne ose inercije biti $\Omega\sin\alpha$, $\mathbf{0}$, $\Omega\cos\alpha$. Kao rezultat nalazimo za traženu kinetičku energiju:

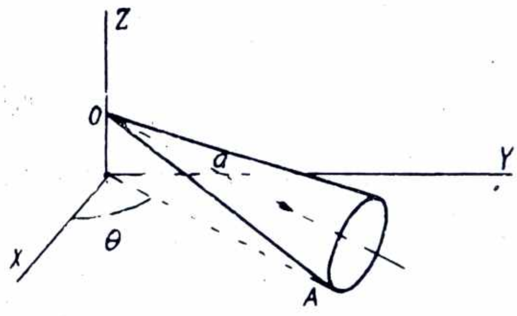
$$T = \frac{\mu a^2}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2}\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot{\theta}^2 = \frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2(1 + 5\cos^2\alpha)$$

[h je visina konusa, I_1, I_2, a—iz zadatka 2, e].

8. Naći kinetičku energiju homogenog konusa čija se osnova kotrlja po ravni, a vrh se konstantno nalazi u tački iznad ravni na visini, koja je jednaka poluprečniku osnove (tako da je osa konusa paralelna sa ravni).

R e š e n j e. Uvešćemo ugao θ među datim pravcima u ravni i projekcije ose konusa na njoj (sl. 43). Tada je brzina centra inercije $V = a\dot{\theta}$ (oznake su iste kao i u zadatku 7). Trenutna osa rotacije je izvodnica konusa OA, koja je povučena kroz tačku njegovog dodira sa ravni. Centar inercije se nalazi na rastojanju $a \sin\alpha$ od te ose pa će zbog toga biti:

$$\Omega = \frac{V}{a \sin\alpha} = \frac{\dot{\theta}}{\sin\alpha}.$$

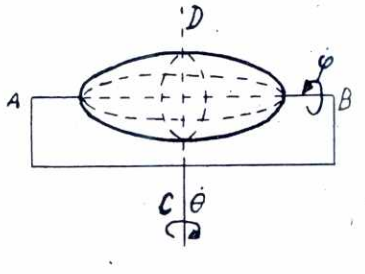


Sl. 43

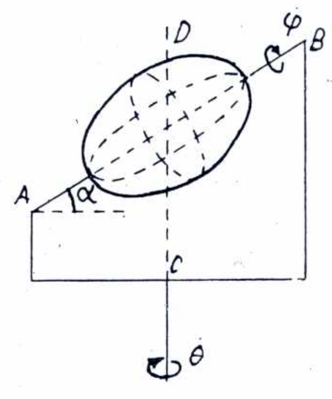
Projekcije vektora $\vec{\Omega}$ na glavne ose inercije (osa x_2 je uzeta normalna na osi konusa i liniji OA) iznosi: $\Omega \sin\alpha = \dot{\theta}$, 0, $\Omega \cos\alpha = \dot{\vec{\theta}} \operatorname{ctg}\alpha$. Zbog toga će kinetička energija biti:

$$T = \frac{\mu a^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2}\dot{\theta}^2 \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{\cos^2\pi} + 5\right).$$

9. Naći kinetičku energiju homogenog troosnog elipsoida koji rotira oko jedne od svojih osa (AB, sl. 44) pri čemu poslednja rotira oko pravca CD, koji je normalan na njoj i prolazi kroz centar elipsoida.



Sl. 44



Sl. 45

R e š e n j e. Ugao obrtanja oko ose CD označimo sa θ, a ugao obrtanja oko ose AB (ugao između CD i ose inercije x_1, koja je normalna na AB) označićemo sa φ. Tada će projekcija $\dot{\Omega}$ na osu inercije biti:

$$\dot{\theta}\cos\varphi, \quad \dot{\theta}\sin\varphi, \quad \dot{\varphi}$$

(pri čemu se osa x_3 poklapa sa AB). Kako je centar inercije, koji se poklapa sa centrom elipsoida, nepomičan, onda će kinetička energija biti:

$$T = \frac{1}{2}(I_1 \cos^2\varphi + I_2 \sin^2\varphi)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}^2.$$

10. To isto, ako je osa AB nagnuta, a elipsoid je simetričan u od nosu na tu osu (sl. 45).

R e š e n j e. Projekcija vektora $\vec{\Omega}$ na osu AB i na druge dve ose inercije, koje su na njoj normalne (koje možemo uzeti proizvoljno), biće

$$\dot{\theta}\cos\alpha \cos\varphi, \quad \dot{\theta}\cos\alpha \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} + \dot{\theta}\sin\alpha.$$

Kinetička energija iznosi:

$$T = \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\theta}\sin\alpha)^2.$$

§ 33. Moment impulsa krutog tela

Veličina momenta impulsa sistema zavisi, kao što znamo, od izbora tačke u odnosu na koju je on definisan. U mehanici krutog tela, najracionalniji izbor te tačke je početak pokretnog koordinatnog sistema, tj. centar inercije tela. U daljem izlaganju ćemo pod $\vec{M}$ podrazumevati moment, koji je definisan baš na taj način.

Prema formuli (9,6) pri uzimanju koordinatnog početka u centru inercije tela, njegov moment $\vec{M}$ se poklapa sa „sopstvenim momentom" koji je vezan samo sa kretanjem tačaka tela u odnosu na centar inercije. Drugim rečima, u definiciji $\vec{M} = \Sigma m(\vec{r} \times \vec{v})$ treba $\vec{v}$ zameniti sa $\vec{\Omega} \times \vec{r}$:

$$\vec{M} = \Sigma m(\vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) = \Sigma m\{r^2\vec{\Omega} - \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})\},$$

ili u tenzorskim oznakama:

$$M_i = \Sigma m\{x_l^2 \Omega_i - x_i x_k \Omega_k\} = \Omega_k \Sigma m\{x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\}.$$

Na kraju, uzimajući u obzir definiciju (32,2) tenzora inercije definitivno dobivamo:

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \tag{33,1}$$

Ako su ose x_1, x_2, x_3 orijentisane duž glavnih osa inercije tela, onda ta formula daje:

$$M_1 = I_1\Omega_1, \qquad M_2 = I_2\Omega_2, \qquad M_3 = I_3\Omega_3. \tag{33,2}$$

Specijalno, za sfernu čigru, kada se sva tri glavna momenta inercije poklapaju, imamo jednostavno:

$$\vec{M} = I\vec{\Omega}, \tag{33,3}$$

tj. vektor momenta je proporcionalan vektoru ugaone brzine i ima s njim istu orijentaciju.

U opštem slučaju proizvoljnog tela, vektor $\vec{M}$, opšte uzev, se ne poklapa po svom pravcu sa vektorom $\vec{\Omega}$ i samo pri rotaciji tela oko ma koje od njegovih glavnih osa inercije $\vec{M}$ i $\vec{\Omega}$ imaju isti pravac.

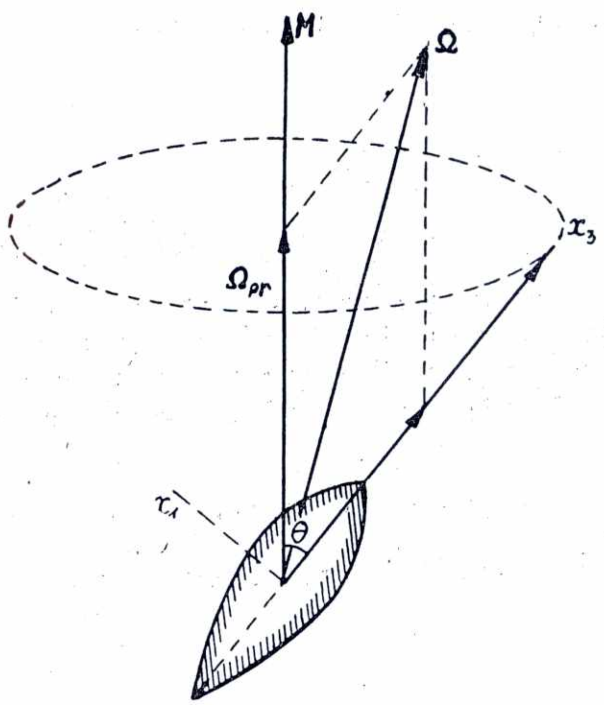
Posmatraćemo slobodno kretanje krutog tela, koje nije podvrgnuto dejstvu ma kakvih spoljašnjih sila. Ravnomerno translatorno kretanje, za koje nemamo nekog interesa, pretpostavićemo da ne postoji, tako da će biti govora o slobodnoj rotaciji tela.

Kao i u svakom zatvorenom sistemu, moment impulsa slobodno rotirajućeg tela je konstantan. Za sfernu čigru uslov $\vec{M} = \text{const}$ dovodi jednostavno do $\vec{\Omega} = \text{const}$. To znači, da je u opštem slučaju slobodna rotacija sferne čigre jednostavno ravnomerno rotiranje oko stalne ose.

Isto tako je jednostavan slučaj rotatora. Ovde je takođe $\vec{M} = I\vec{\Omega}$, pri čemu je vektor $\vec{\Omega}$ normalan na osi rotarora. Zbog toga je slobodno rotiranje rotatora ravnomerna rotacija u jednoj ravni oko pravca koji je normalan na toj ravni.

Zakon održanja momenta je dovoljan i za određivanje složenije slobodne rotacije simetrične čigre.

Koristeći se proizvoljnošću izbora pravca glavnih osa inercije x_1, x_2 (normalnih na osu simetrije čigre x_3) uzećemo osu x_2 koja je normalna na ravni, određenoj konstantnim vektorom $\vec{M}$ i trenutnim položajem ose x_3. Tada je $M_2 = 0$, a iz formula (32,2) je jasno da je i $\Omega_2 = 0$. To znači, da se orijentacije $\vec{M}$ i $\vec{\Omega}$ i ose čigre u svakom momentu nalaze u jednoj ravni (sl. 46). Ali odavde samim tim izlazi da su brzine $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ svih tačaka na osi čigre u svakom momentu normalne na naznačenoj ravni; drugim rečima, osa čigre ravnomerno rotira (vidi dalje) oko pravca $\vec{M}$ opisujući kružni konus (takozvana *regularna precesija* čigre). Jednovremeno sa precesijom sama čigra ravnomerno rotira oko sopstvene ose.



Sl. 46

Ugaone brzine te obe rotacije lako je izraziti pomoću date veličine momenta M i ugla nagiba θ ose čigre prema pravcu $\vec{M}$. Ugaona brzina rotacije čigre oko svoje ose je jednostavno projekcija Ω_3 vektora $\vec{\Omega}$ na tu osu:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta. \tag{33,4}$$

Za određivanje brzine precesije Ω_{pr} treba razložiti vektor $\vec{\Omega}$ po pravilu paralelograma na komponente duž x_3 i $\vec{M}$. Prva od njih ne dovodi ni do kakvog pomeranja same ose čigre te zbog toga druga daje traženu ugaonu brzinu precesije. Iz prikaza na sl. 46 je jasno da je $\sin\theta\,\Omega_{pr} = \Omega_1$, a kako je $\Omega_1 = \frac{M_1}{I_1} = \frac{M\sin\theta}{I_1}$, onda dobivamo:

$$\Omega_{pr} = \frac{M}{I_1}. \tag{33,5}$$

§ 34. Jednačine kretanja krutog tela

Kako kruto telo ima u opštem slučaju šest stepena slobode, onda opšti sistem jednačina kretanja mora sadržati šest nezavisnih jednačina. Možemo ih predstaviti u obliku, kojim se određuju izvodi po vremenu dva vektora: impulsa i momenta tela.

Prva od tih jednačina se jednostavno dobiva sumiranjem jednačina $\dot{\vec{p}} = \vec{f}$ za svaku česticu iz sastava tela, gde je $\vec{p}$ impuls čestice, a $\vec{f}$ sila koja na nju dejstvuje. Uvodeći totalni impuls tela

$$\vec{P} = \Sigma \vec{p} = \mu \vec{V}$$

ukupnu silu koja na njega dejstvuje $\Sigma \vec{f} = \vec{F}$, dobivamo:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \tag{34,1}$$

Iako smo $\vec{F}$ definisali kao sumu svih sila $\vec{f}$, koje dejstvuju na svaku česticu, podrazumevajući tu i sile od drugih čestica tela, faktički u $\vec{F}$ ulaze samo sile koje dejstvuju od strane spoljašnjih izvora. Sve sile interakcije među česticama samog tela se uzajamno poništavaju; u stvari, u odsustvu spoljašnjih sila impuls tela, kao i svakog zatvorenog sistema mora se održavati, tj. mora biti $\vec{F} = 0$.

Ako je U potencijalna energija krutog tela u spoljašnjem polju, onda sila $\vec{F}$ može biti definisana njenim diferenciranjem po koordinatama centra inercije tela:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}}. \tag{34,2}$$

Zaista, pri translatornom pomeranju tela za $\delta \vec{R}$ utoliko se menja i radiujs-vektor r_g svake tačke tela, te je zbog toga promena potencijalne energije

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial r} \delta \vec{r} = \delta \vec{R} \sum \frac{\partial U}{\partial r} = -\delta \vec{R} \sum \vec{f} = -\vec{F} \delta \vec{R}.$$

S tim u vezi napominjemo da jednačinu (34,1) možemo dobiti i kao Lagrange-ovu jednačinu u odnosu na koordinate centra inercije

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}}$$

sa Lagrange-ovom funkcijom (32,4) za koju je

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \mu \vec{V} = \vec{P}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = \vec{F}.$$

Prelazimo na izvođenje druge jednačine kretanja, koja određuje izvod po vremenu momenta impulsa $\vec{M}$. Za uprošćenje izvođenja pogodno je uzeti „nepokretni" (inercijalni) sistem referencije tako da se u datom momentu centar inercije tela u odnosu na njega nalazi u miru. Na taj način dobivena jednačina kretanja važiće samim tim, zbog Galilej-ovog principa relativnosti, i u ma kome drugom inercijalnom sistemu referencije.

Zbog toga ćemo imati:

$$\dot{\vec{M}} = \frac{d}{dt}\sum(\vec{r}\times\vec{p}) = \sum(\dot{\vec{r}}\times\vec{p}) + \sum(\vec{r}\times\dot{\vec{p}}).$$

S obzirom na izabrani sistem referencije (u kome je $\vec{V}=0$) vrednost $\dot{\vec{r}}$ se u datom momentu poklapa sa brzinom $\vec{v}=\dot{\vec{r}}_g$. Kako vektori $\vec{v}$ i $\vec{p}=m\vec{v}$ imaju istu orijentaciju, onda je $\dot{\vec{r}}\times\vec{p}=0$. Ako $\dot{\vec{p}}$ zamenimo silom $\vec{f}$, definitivno dobivamo:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}, \tag{34,3}$$

gde je

$$\vec{K} = \Sigma(\vec{r}\times\vec{f}). \tag{34,4}$$

Vektor $(\vec{r}\times\vec{f})$ se naziva *moment sile* $\vec{f}$, tako da je $\vec{K}$ suma momenata svih sila, koje dejstvuju na telo. Kao i u ukupnoj sili $\vec{F}$, u sumi (34,4) stvarno se moraju uzeti u obzir samo spoljašnje sile; u saglasnosti sa zakonom održanja momenta impulsa suma momenata svih sila, koje dejstvuju unutar zatvorenog sistema mora biti jednaka nuli.

Moment sile, kao i moment impulsa, zavisi, opšte uzev, od izbora koordinatnog početka, u odnosu na koji je definisan. U (34,3) i (34,4) momenti se određuju u odnosu na centar inercije tela.

Pri prenosu koordinatnog početka na rastojanje $\vec{a}$ novi radijus-vektori $\vec{r}'$ tačaka tela vezani su sa starim $\vec{r}$ pomoću relacije $\vec{r}=\vec{r}'+\vec{a}$. Zbog toga je:

$$\vec{K} = \Sigma(\vec{r}\times\vec{f}) = \Sigma(\vec{r}'\times\vec{f}) + \Sigma(\vec{a}\times\vec{f})$$

ili

$$\vec{K} = \vec{K}' + \vec{a}\times\vec{F}. \tag{34,5}$$

Odavde se vidi, specijalno, da veličina momenta sila ne zavisi od izbora koordinatnog početka, ako je ukupna sila $\vec{F}=0$ (u tom slučaju se govori da na telo dejstvuje „*spreg sila*").

Jednačina (34,3) se može smatrati kao Lagrange-ova jednačina

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \Omega} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

u odnosu na „rotirajuće koordinate". U stvari, diferencirajući Lagrange-ovu funkciju (32,4) po komponentama vektora $\vec{\Omega}$, dobivamo

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik}\Omega_k = M_i.$$

Promena potencijalne energije U pri obrtanju tela za beskonačno mali ugao $\delta\vec{\varphi}$, iznosi:

$$\delta U = -\Sigma \vec{f} \cdot \delta \vec{r}_g = -\Sigma \vec{f}(\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}) = -\delta\vec{\varphi}\,\Sigma(\vec{r} \times \vec{f}) = -\vec{K} \cdot \delta\vec{\varphi},$$

odakle je

$$\vec{K} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \tag{34,6}$$

tako da je

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = K.$$

Pretpostavimo, da su vektori $\vec{F}$ i $\vec{K}$ uzajamno normalni. U tom slučaju uvek se može naći takav vektor $\vec{a}$, da bi u formuli (34,5) $\vec{K}'$ bio jednak nuli, pa će biti:

$$\vec{K} = \vec{a} \times \vec{F}. \tag{34,7}$$

Pri tom je izbor $\vec{a}$ nejednoznačan; sabiranjem sa njim ma kog vektora, koji je sa $\vec{F}$ paralelan, ne menja jednakost (34,7), tako da uslov $\vec{K}' = 0$ ne daje definisanu tačku u pokretnom koordinatnom sistemu, već samo definisanu pravu liniju. Na taj način, kada je $\vec{K} \perp \vec{F}$ dejstvo svih sila koje su na njega dodate može biti svedeno na jednu silu $\vec{F}$, koja dejstvuje duž definisane prave linije.

Takav specijalan slučaj homogenog polja sila u kome sila koja dejstvuje na materijalnu tačku ima oblik $\vec{f} = e\vec{E}$, gde je $\vec{E}$ konstantan vektor, koji karakteriše polje, a veličina e karakteriše svojstva čestice u odnosu na dato polje[1]. U tom slučaju imamo:

$$\vec{F} = \vec{E}\Sigma e, \qquad \vec{K} = \Sigma e\vec{r} \times \vec{E}.$$

Pretpostavljajući, da $\Sigma e \neq 0$, uvešćemo radijus-vektor $\vec{r}_0$, koji je definisan prema relaciji:

$$\vec{r}_0 = \frac{\Sigma e\vec{r}}{\Sigma e}. \tag{34,8}$$

Tada dobivamo sledeći jednostavan izraz za totalni moment sila:

$$\vec{K} = \vec{r}_0 \times \vec{F}. \tag{34,9}$$

---

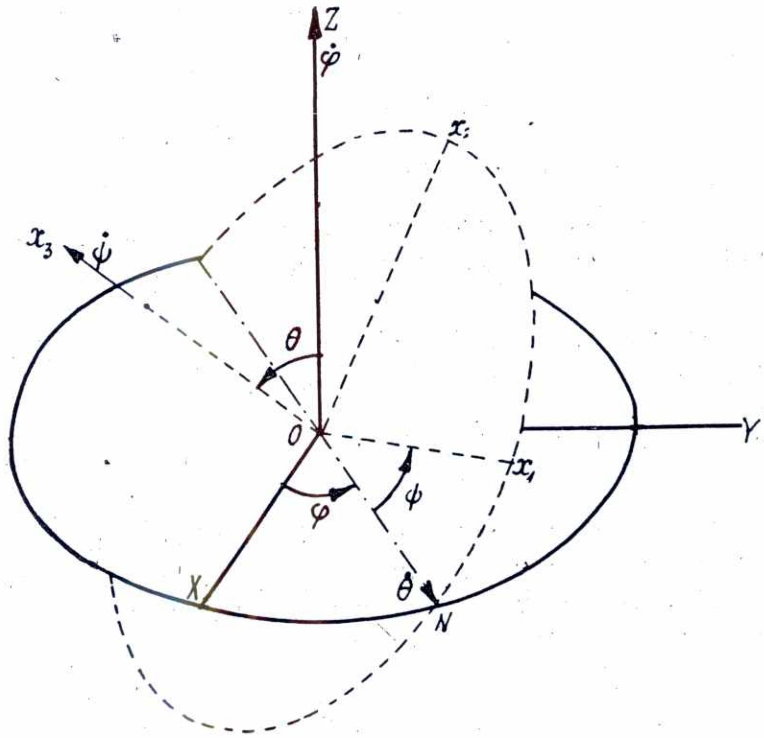
[1]) Tako, u homogenom elekričnom polju $\vec{E}$ je jačina polja, a e naelektrisanje čestice. U homogenom polju teže $\vec{E}$ je ubrzanje sile teže $\vec{g}$: a e je masa čestice m.

Na taj način, pri kretanju krutog tela u homogenom polju uticaj polja se svodi na dejstvo jedne sile $\vec{F}$, „koja dejstvuje" u tački sa radijus-vektorom (34,8). Položaj te tačke u celini se određuje svojstvima samog tela; u polju teže, na primer, ona se poklapa se centrom inercije tela.

§ 35. Euler-ovi uglovi

Kako je nagoveštemo, za opisivanje kretanja krutog tela mogu se koristiti tri koordinate njegovog centra inercije i ma koja tri ugla koji određuju određuju orijentaciju osa x_1, x_2, x_3 pokretnog koordinatnog sistema u odnosu na nepokretni sistem X, Y, Z. Za tu svrhu često se ispostavljaju kao pogodni *Euler*-ovi *uglovi.*

Kako nas momentalno interesuju samo uglovi između koordinatnih osa, uzećemo početak oba sistema u jednoj tački (sl. 47). Pokretna ravan $x_1 x_2$



Sl. 47

preseca nepokretnu XY po nekoj pravoj (ON na sl. 47), koju nazivamo *čvornom linijom.* Ova linija je očigledno normalna kako na osi Z tako i na osi x_3; njen pozitivni pravac uzećemo tako da bi odgovarao pravcu vektorskog proizvoda $(\vec{z} \times \vec{x}_3)$ (gde su $\vec{z}, \vec{x}_3$ jedinični vektori u pravcima osa Z i x_3).

Kao veličine, koje određuju položaj osa x_1, x_2, x_3 u odnosu na ose X, Y, Z uzećemo sledeće uglove: ugao θ između osa Z i x_3, ugao φ među osama X i N, ugao ψ među osama N i x_1. Uglovi φ i ψ se računaju u pravcima, koji se određuju pravilom zavrtnja, respektivno oko osa Z i x_3. Ugao θ uzima vrednosti od nule do π, a uglovi φ i ψ od nule do 2π[1]).

Izrazićemo sada komponente vektora ugaone brzine $\vec{\Omega}$ prema pokretnim osama x_1, x_2, x_3 pomoću Euler-ovih uglova i njihovih izvoda. Zbog toga treba projektovati na te ose ugaone brzine $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$. Ugaona brzina $\dot{\theta}$ je orijentisana po čvornoj liniji ON, i njene komponente po osama x_1, x_2, x_3 iznose:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}\cos\psi, \qquad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi, \qquad \dot{\theta}_3 = 0.$$

Ugaona brzina $\dot{\varphi}$ je orijentisana duž ose Z; njena projekcija na osu x_3 iznosi $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta$, a projekcija na ravan $x_1 x_2$ iznosi $\dot{\varphi}\sin\theta$. Razlažući poslednju na komponente po osama x_1 i x_2, dobivamo:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \qquad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi.$$

Na kraju, ugaona brzina $\dot{\psi}$ je orijentisana po osi x_3.
Sabirajući sve te komponente po svakoj od osa, definitivno dobivamo:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{35,1}$$

Ako su ose x_1, x_2, x_3 uzete po glavnim osama inercije krutog tela, onda kinetičku energiju rotacije, izraženu pomoću Euler-ovih ugiova, dobivamo zamenom (35,1) u (32,8).

Za simetričnu čigru, kod koje je $I_1 = I_2 \neq I_3$, nalazimo posle jednostavnog izračunavanja:

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2. \tag{35,2}$$

Napominjemo da se ovaj izraz može dobiti i jednostavnije koristeći proizvoljnost pravca glavnih osa inercije x_1 i x_2 kod simetrične čigre. Smatrajući da se osa x_1 poklapa sa čvornom osom ON, tj. da je $\psi = 0$, imaćemo za komponente ugaone brzine prostije izraze:

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \qquad \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta, \qquad \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \tag{35,3}$$

Kao jednostavan primer primene Euler-ovih uglova odredićemo pomoću njih već poznato nam slobodno kretanje simetrične čigre.

Uzećemo Z-osu nepokretnog koordinatnog sistema u pravcu konstantnog momenta čigre $\vec{M}$. Osa x_3 pokretnog sistema je orijentisana po osi čigre, a neka

---

1) Uglovi θ i $\varphi - \frac{\pi}{2}$ predstavljaju respektivno polarni ugao i azimut pravca x_3 u odnosu na ose X, Y, Z. U isto vreme θ i $\frac{\pi}{2} - \psi$ su respektivno polarni ugao i azimut pravca Z u odnosu na ose x_1, x_2, x_3.

se osa x_1 poklapa u datom momentu sa čvornom linijom. Tada za komponente vektora $\vec{M}$ pomoću formula (35,3) nalazimo:

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta}, \quad M_2 = I_1\Omega_2 = I_1\dot{\varphi}\sin\theta, \quad M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta - \dot{\psi}).$$

S druge strane, kako je osa x_1 (čvorna linija) normalna na Z-osu, imaćemo:

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M\sin\theta, \quad M_3 = M\cos\theta.$$

Izjednačujući uzajamno ove izraze, dobivamo sledeće jednačine:

$$\dot{\theta} = 0, \quad I_1\dot{\varphi} = M, \quad I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = M\cos\theta. \tag{35,4}$$

Prva od ovih jednačina daje $\theta = \text{const}$, tj. konstantnost ugla nagiba ose čigre prema pravcu $\vec{M}$. Druga određuje [u saglasnosti sa (33,5)] ugaonu brzinu precesije $\dot{\varphi} = \frac{M}{I_1}$. Na kraju, treća određuje ugaona brzinu rotacije čigre oko sopstvene ose:

$$\Omega_3 = \frac{M\cos\theta}{I_3}.$$

Zadaci

1. Dovesti na kvadrature zadatak o kretanju teške, simetrične čigre sa nepokretnom najnižom tačkom (sl. 48).

Rešenje. Uzećemo za zajednički početak pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema nepokretnu tačku čigre O, a Z-osu ćemo upraviti po vertikali (sl. 48). Lagrange-ova funkcija čigre u polju teže biće

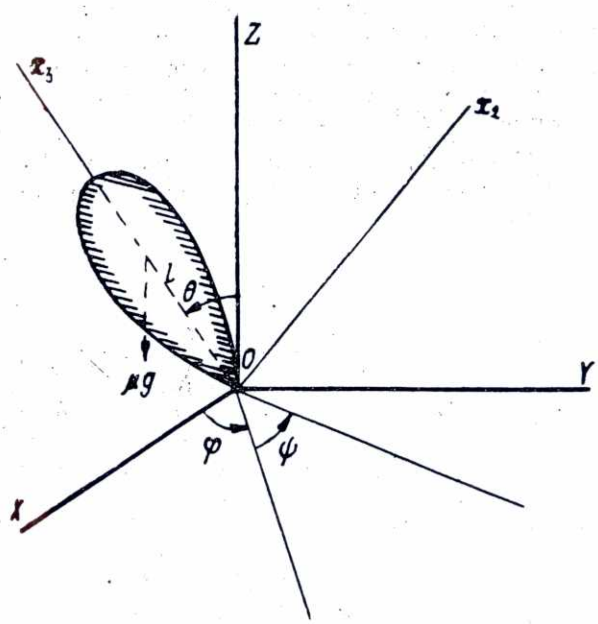
$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3 + \mu l^2}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - \mu g l\cos\theta$$

(μ je masa čigre, l je rastojanje od najniže tačke do centra inercije).

Koordinate ψ i φ su ciklične. Zbog toga imamo dva integrala kretanja:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = I_3'(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = \text{const} \equiv M_3, \tag{1}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = (I_1\sin^2\theta + I_3'\cos^2\theta)\dot{\varphi} + I_3'\dot{\psi}\cos\theta = \text{const} \equiv M_z, \tag{2}$$



Sl. 48

gde je uvedena oznaka $I_3' = I_3 + \mu l^2$ (veličine p_ψ i p_φ predstavljaju komponente momenta rotacije, koji je definisan u odnosu na tačku O, respektivno po osama x_3 i Z). Osim toga, održava se energija

$$E = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3'}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + \mu g l\cos\theta. \tag{3}$$

Iz jednačina (1) i (2), nalazimo:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}, \tag{4}$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3'} - \cos\theta \frac{M_z - M_3 \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}. \tag{5}$$

Eliminišući pomoću tih jednačina $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$ iz jednačine energije (3), dobivamo:

$$E' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{ef}}(\theta),$$

gde su uvedene oznake

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3'} - \mu g l, \qquad U_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} - \mu g l(1 - \cos\theta). \tag{6}$$

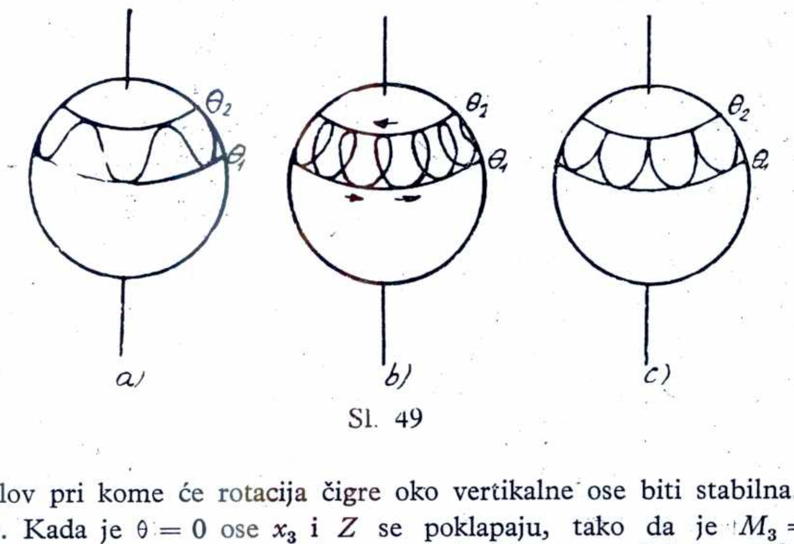
Određujući odavde $\dot{\theta}$ i razdvajajući promenljive, dobivamo:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}[E' - U_{\text{ef}}(\theta)]}} \tag{7}$$

(integral je eliptički). Posle toga se uglovi ψ i φ izražavaju kao funkcije od θ u obliku kvadratura pomoću jednačina (4) i (5).

Oblast promene ugla θ pri kretanju se određuje iz uslova $E' \geqslant U_{\text{ef}}(\theta)$. Funkcija $U_{\text{ef}}(\theta)$ (kada $M_3 \neq M_z$) teži ka $+\infty$ pri vrednostima $\theta = 0$ i $\theta = \pi$, a u intervalu među njima, prolazi kroz minimum. Zbog toga jednačina $E' = U_{\text{ef}}(\theta)$ ima dva korena koji određuju granične uglove θ_2 i θ_2 nagiba ose čigre prema vetikali.

Pri promeni ugla θ od θ_1 do θ_2 znak izvoda $\dot{\varphi}$ ostaje nepromenjen ili se menja s obzirom na činjenicu ostaje li nepromenjen ili se menja u tom intervalu znak razlike $M_z - M_3 \cos\theta$. U prvom slučaju osa čigre vrši precesiono kretanje monotono oko vertikale istovremeno vršeći oscilovanja (takozvanu *nutaciju*) gore i dole (sl. 49, a; linija pokazuje trag, koji bi osa čigre crtala na površini sfere sa centrom u nepokretnoj tački čigre). U drugom slučaju pravac precesije je suprotan sa dva granična kruga, tako da se osa čigre pomera oko vertikale opisujući petlje (sl. 49, b). Na kraju, ako se jedna od vrednosti θ_1 i θ_2 poklapa sa nulom razlike $M_z - M_3 \cos\theta$, na odgovarajućoj graničnoj kružnici $\dot{\varphi}$ i $\dot{\theta}$ istovremeno postaju jednaka nuli, tako da osa čigre opisuje trajektoriju koja je prikazana na sl. 49, c.



Sl. 49

2. Naći uslov pri kome će rotacija čigre oko vertikalne ose biti stabilna.

Rešenje. Kada je $\theta = 0$ ose x_3 i Z se poklapaju, tako da je $M_3 = M_z$, $E' = 0$. Rotacija oko te ose biće stabilna ako vrednost $\theta = 0$ odgovara minimumu funkcije $U_{\text{ef}}(\theta)$. Za male vrednosti θ imaćemo:

$$U_{\text{ef}} \approx \left(\frac{M_3^2}{8I_1} - \frac{\mu g l}{2}\right)\theta^2,$$

odakle nalazimo uslov $M_3^2 > 4 I_1 \mu g l$, ili

$$\Omega_3^2 > \frac{4 I_1 \mu g l}{I_3'^2}.$$

3. Odrediti kretanje čigre u slučaju kada je kinetička energija njene sopstvene rotacije velika u odnosu na energiju u polju teže (takozvana „brza" čigra).

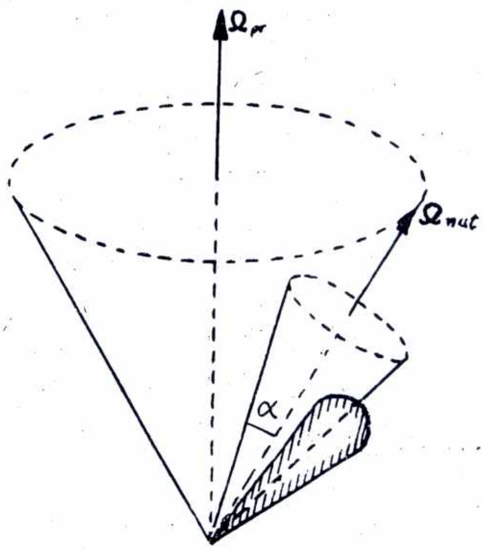
R e š e n j e. U prvoj aproksimaciji, ako se zanemari polje teže, nastaje slobodna precesija ose čigre oko pravca momenta $\vec{M}$ (koja u datom slučaju odgovara nutaciji čigre); ona se vrši prema (33,5) sa ugaonom brzinom

$$\vec{\Omega}_{\text{nut}} = \frac{\vec{M}}{I_1}. \tag{1}$$

U sledećoj aproksimaciji se pojavljuje spora precesija momenta $\vec{M}$ oko pravca vertikale (sl. 50). Za određivanje brzine te precesije dovešćemo tačnu jednačinu kretanja (34,3)

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}$$

na srednju vrednost po periodu nutacije. Moment sila teže, koje dejstvuju na čigru iznosi $\vec{K} = \mu l (\vec{n}_3 \times \vec{g})$, gde je $\vec{n}_3$ jedinični vektor u pravcu ose čigre. Na osnovu simetrije je očigledno da se rezultat dovođenja $\vec{K}$ na srednju vrednost po „konusu nutacije" svodi na zamenu vektora $\vec{n}_3$ njegovom projekcijom $\cos\alpha \frac{\vec{M}}{M}$ na pravac $\vec{M}$. (α je ugao između $\vec{M}$ i ose čigre). Na taj način dobivamo jednačinu:



Sl. 50

$$\frac{d\overline{\vec{M}}}{dt} = -\cos\alpha \frac{\mu l}{M} (\vec{g} \times \vec{M}).$$

Ona pokazuje da vektor $\vec{M}$ vrši precesiju oko pravca $\vec{g}$ (vertikale) sa srednjom vrednošću ugaone brzine koja iznosi:

$$\overline{\vec{\Omega}}_{\text{pr}} = -\frac{\mu l \cos\alpha}{M} \vec{g} \tag{2}$$

(koja je mala u poređenju sa Ω_{nut}).

U posmatranoj aproksimaciji su veličine M i $\cos\alpha$, koje ulaze u formule (1) i (2), konstantne (mada, strogo uzev, nisu integrali kretanja). One su sa istom tačnošću povezane sa veličinama E i M_3 pomoću relacija:

$$M_3 = M\cos\alpha; \qquad E \approx \frac{M^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_3'} + \frac{\sin^2\alpha}{I_1}\right).$$

§ 36. Euler-ove jednačine

Jednačine kretanja koje su navedene u § 34 odnose se na nepokretni koordinatni sistem: izvodi $\frac{d\vec{P}}{dt}$ i $\frac{d\vec{M}}{bt}$ u jednačinama (34,1) i (34,3) predstavljaju promene vektora $\vec{P}$ i $\vec{M}$ u odnosu na taj sistem. Međutim, najprostija veza među komponentama rotacionog momenta $\vec{M}$ krutog tela i komponentama ugaone brzine, postoji u pokretnom koordinantnom sistemu sa osama koje su orijentisane u pravcu glavnih osa inercije. Da bismo se koristili ovom vezom, neophodno je prethodno transformisati jednačine kretanja na pokretne koordinate x_1, x_2, x_3.

Neka je $\frac{d\vec{A}}{dt}$ brzina promene ma koga vektora $\vec{A}$ u odnosu na nepokretni koordinatni sistem. Ako se vekor $\vec{A}$ ne menja u odnosu na rotirajući sistem, onda je njegova promena u odnosu na nepokretni sistem uslovljena samo rotacijom, pa je tada

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

[vidi § 9, gde je bilo naznačeno da formule, kao (9,1) i (9,2), važe za ma koji vektor]. U opštem slučaju na desnoj strani ove jednačine treba (staviti) dodati brzinu promene vektora $\vec{A}$ u odnosu na pokretni sistem; ako tu brzinu označimo sa $\frac{d'\vec{A}}{dt}$, dobivamo:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}. \tag{36,1}$$

Pomoću ove opšte formule, jednačine (34,1) i (34,3) možemo odmah ponovo napisati u obliku:

$$\frac{d'\vec{P}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{P} = \vec{F}, \qquad \frac{d'\vec{M}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{M} = \vec{K}. \tag{36,2}$$

Kako se ovde diferenciranje po vremenu vrši u pokretnom koordinatnom sistemu, možemo neposredno projektovati jednačine na ose ovoga sistema:

$$\left(\frac{d'\vec{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt}, \ldots, \qquad \left(\frac{d'\vec{M}}{dt}\right)_1 = \frac{dM_1}{dt}, \ldots,$$

gde indeksi 1, 2, 3 označavaju komponente po osama x_1, x_2, x_3. Pri tom u prvoj jednačini zamenjujemo $\vec{P}$ sa $\mu\vec{V}$ i dobivamo:

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2\right) &= F_1, \\ \mu\left(\frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3\right) &= F_2, \\ \mu\left(\frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1\right) &= F_3. \end{aligned} \tag{36,3}$$

Pretpostavljajući da su ose x_1, x_2, x_3 uzete po glavnim osama inercije, napisaćemo u drugoj od jednačina (36,2) $M_1 = I_1 \Omega_1$ itd. i dobivamo

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\Omega_2\,\Omega_3 = K_1,$$
$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\Omega_3\,\Omega_1 = K_2, \tag{36,4}$$
$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\Omega_1\,\Omega_2 = K_3.$$

Jednačine (36,4) se nazivaju *Euler-ove jednačine.*

Pri slobodnoj rotaciji je $\vec{K} = 0$, tako da Euler-ove jednačine dobivaju oblik:

$$d\Omega_1 + \frac{I_3 - I_2}{I_1}\,\Omega_2\,\Omega_3 = 0,$$
$$d\Omega_2 + \frac{I_1 - I_3}{I_2}\,\Omega_3\,\Omega_1 = 0, \tag{36,5}$$
$$d\Omega_3 + \frac{I_2 - I_1}{I_3}\,\Omega_1\,\Omega_2 = 0.$$

Kao primer primenićemo ove jednačine na već tretiranu slobodnu rotaciju simetrične čigre. Ako stavimo $I_1 = I_2$ iz treće jednačine ćemo imati $\dot{\Omega}_3 = 0$. tj. $\Omega_3 = \text{const}$. Posle toga ćemo prve dve jednačine napisati u obliku:

$$\dot{\Omega}_1 = -\,\omega\,\Omega_2, \qquad \dot{\Omega}_2 = \omega\,\Omega_1,$$

gde je uvedena konstantna veličina

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}\,. \tag{36,6}$$

Ako drugu jednačinu pomnožimo sa i i saberemo sa prvom, dobićemo:

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + i\Omega_2) = i\,\omega\,(\Omega_1 + i\Omega_2),$$

odavde će biti:

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = A\,e^{i\omega t},$$

gde je A konstanta; poslednju možemo smatrati realnom (ovo se svodi na adekvatan izbor početka računanja vremena) i tada je:

$$\Omega_1 = A\cos\omega t, \qquad \Omega_2 = A\sin\omega t. \tag{36,7}$$

Ovaj rezultat pokazuje da projekcija ugaone brzine na ravan, koja je normalna na osi čigre, rotira u toj ravni sa ugaonom brzinom ω, ostajući konstantnom po veličini ($\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$). Kako je projekcija Ω_3 na osu čigre takođe konstantna, onda zaključujemo da i ceo vektor $\vec{\Omega}$ ravnomerno rotira sa ugaonom brzinom ω oko ose čigre ostajući nepromenjen po veličini. S obzirom na veze $M_1 = I_1\,\Omega_1$, $M_2 = I_2\,\Omega_2$ i $M_3 = I_3\,\Omega_3$ među komponetama vektora $\vec{\Omega}$

i $\vec{M}$ isto takvo pak kretanje očigledno vrši i (u odnosu na osu čigre) vektor momenta $\vec{M}$.

Dobivena slika, razume se, predstavlja samo drugi aspekt onoga kretanja čigre, koje je već bilo analizirano u §§ 33 i 35 u odnosu na nepokretni koordinatni sistem. Specijalno, ugaona brzina rotacije vektora $\vec{M}$ (Z-osa na sl. 48) oko pravca x_3 se poklapa sa ugaonom brzinom u Euler-ovoj funkciji uglova — $\dot{\psi}$.

Pomoću jednačina (35,4) imaćemo:

$$\dot{\psi} = \frac{M\cos\theta}{I_3} - \dot{\varphi}\cos\theta = M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)$$

ili

$$-\dot{\psi} = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

u saglasnosti sa jednačinom (36,6).

§ 37. Asimetrična čigra

Primenićemo Euler-ove jednačine na složeniji zadatak o slobodnoj rotaciji asimetrične čigre, kod koje su sva tri momenta inercije različita. Radi određenosti smatraćemo da je

$$I_3 > I_2 > I_1. \tag{37,1}$$

Dva integrala Euler-ovih jednačina su od ranije poznata. Oni su dati zakonima održanja energije i momenta i izražavaju se jednačinama:

$$\begin{gathered} I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 2E, \\ I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = M^2, \end{gathered} \tag{37,2}$$

gde su energija E i apsolutna veličina momenta M date konstante. Ove dve jednačine izražene pomoću komponenata vektora $\vec{M}$, imaju oblik

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \tag{37,3}$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2. \tag{37,4}$$

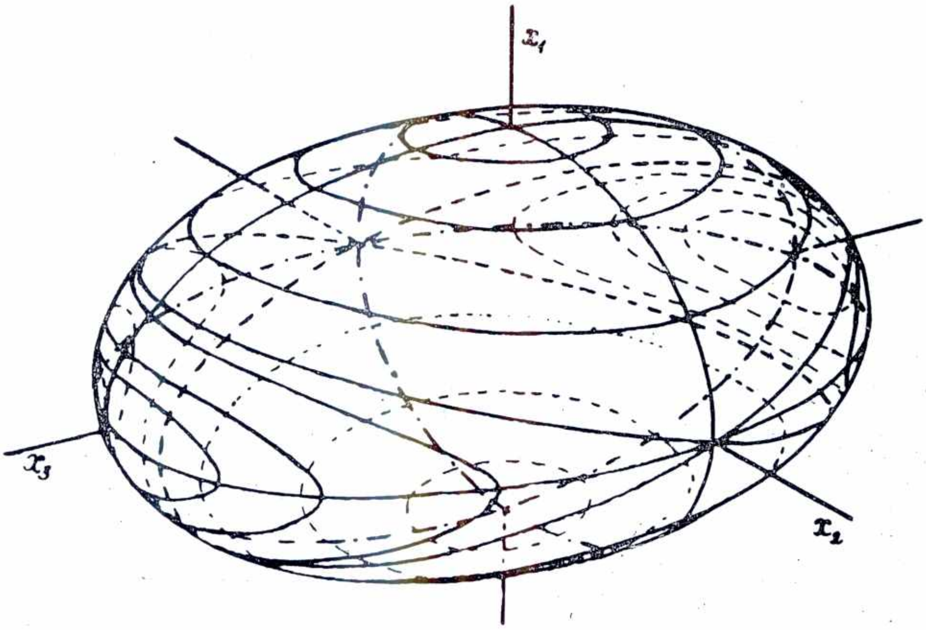
Već se odavde može stvoriti izvestan zaključak o karakteru kretanja čigre. S tim u vezi napominjemo da jednačine (37,3) i (37,4) predstavljaju jednačine površine elipsoida sa poluosama $\sqrt{2EI_1}$, $\sqrt{2EI_2}$, $\sqrt{2EI_3}$ i sfere sa poluprečnikom M sa osama M_1, M_2 i M_3.

Pri pomeranju vektora $\vec{M}$ (u odnosu na ose inercije čigre) njegov kraj se kreće duž linije preseka navedenih površina (na sl. 51 je prikazan niz takvih linija preseka elipsoida sa sferama različitih poluprečnika). Samo postojanje preseka se osigurava očiglednim nejednačinama:

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3, \tag{37,5}$$

koje geometrijski pokazuju da se poluprečnik sfere (37,4) nalazi između najmanje i najveće poluose elipsoida (37,3).

Pratićemo promenu karaktera ovih „trajektorija" vrha vektora $\vec{M}$[1]) zbog promene veličine M (pri datom energiji E). Kada je M^2 samo nešto malo veće



Sl. 51

od $2EI_1$, sfera preseca elipsoid po dvema zatvorenim malim krivim linijama koje okružuju x_1-osu u blizini odgovarajuća dva pola elipsoida; (kada $M^2 \to 2EI_1$ te se krive skupljaju u tačke — polove). Povećavanjem M^2 krive se šire, a kada je $M^2 = 2EI_2$ transformišu se u dve krive u ravni (elipse) koje se uzajamno seku u polovima elipsoida na osi x_2. Daljim povećanjem M^2 ponovo nastaju dve odvojene zatvorene trajektorije, ali koje već okružuju polove na osi x_3; kada $M^2 \to 2EI_3$ one se svode u te dve tačke.

Napominjemo, pre svega, da zatvorenost trajektorija označava periodičnost pomeranja vektora $\vec{M}$ u odnosu na telo čigre; za vreme perioda vektor $\vec{M}$ opisuje izvesnu koničnu površinu vraćajući se u prethodni položaj.

Dalje ćemo napomenuti suštinski različiti karakter trajektorija, koje su blizu različitih polova elipsoida. U blizini osa x_1 i x_3 trajektorije se u celini nalaze u okolini polova a trajektorije koje prolaze u blizini polova na osi x_2 u svom daljem hodu udaljuju se na velika rastojanja od tih tačaka. Takva razlika odgovara različitom karakteru stabilnosti rotacije čigre oko njene tri ose inercije. Rotacija oko osa x_1 i x_3 (koje odgovaraju najvećem i najmanjem od tri momenta inercije čigre) stabilna je tom smislu, što će čigra, pri malom odstupanju od tih stanja. produžiti da vrši kretanje koje je blisko prvobitnom. Rotacija oko ose x_2 nije stabilna, dovoljno je malo odstupanje da bi nastalo kretanje koje dovodi čigru u položaj koji je daleko od prvobitnog.

Da bismo odredili zavisnost komponenata $\vec{\Omega}$ (ili njima proporcionalnih komponenata $\vec{M}$) od vremena primenićemo Euler-ove jednačine (36,6). Izrazićemo

[1]) Analogne krive koje opisuje završna tačka vektora $\vec{\Omega}$ nazivaju se *polhodije*.

Ω_1 i Ω_3 pomoću Ω_2 iz dve jednačine (37,2) i (37,3)

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{I_1(I_3 - I_1)}\{(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2\},$$

$$\Omega_3^2 = \frac{1}{I_3(I_3 - I_1)}\{(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2\} \tag{37,6}$$

i zamenićemo u drugu od jednačina (36,5) pa ćemo imati:

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\Omega_1\Omega_2 = \frac{1}{I_2\sqrt{I_1 I_3}}\{[(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2][(M^2 - $$
$$- 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2]\}^{1/2}. \tag{37,7}$$

Ako u toj jednačini razdvojimo promenljive i integriramo, dobićemo funkciju $t(\Omega_2)$ u obliku eliptičkog integrala. Dovođenjem na standardni oblik radi određenosti uzećemo da je

$$M^2 > 2EI_2$$

(u obrnutom slučaju u svim daljim formulama treba permutovati indekse 1 i 3). Uvešćemo umesto t i Ω_2 nove promenljive

$$\tau = t\sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}}, \qquad s = \Omega_2\sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_2 - M^2}} \tag{37,8}$$

i pozitivni parametar $k^2 < 1$ prema relaciji

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}. \tag{37,9}$$

Tada dobivamo:

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s)^2(1-k^2s^2)}}$$

(uslovno ćemo uzeti početak računanja vremena u momentu kada je $\Omega_2 = 0$). Pretvaranjem ovoga integrala nastaje, kako je poznato, jedna od Jacobi-jevih eliptičkih funkcija

$$s = \operatorname{sn}\tau$$

čime se i definiše zavisnost Ω_3 od vremena.

Funkcije $\Omega_1(t)$ i $\Omega_3(t)$ algebarski se izražavaju pomoću $\Omega_2(t)$ prema jednačinama (37,6). Uzimajući u obzir definicije druge dve eliptičke funkcije

$$\operatorname{cn}\tau = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2\tau}, \qquad \operatorname{dn}\tau = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2\tau},$$

dobivamo definitivno sledeće formule:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_1 I_3 - I_1)}}\operatorname{cn}\tau, \qquad \Omega_3 = \sqrt{\frac{M^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}}\operatorname{dn}\tau. \tag{37,10}$$
$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_2(I_3 - I_2)}}\operatorname{sn}\tau,$$

Funkcije (37,10) su periodične, pri čemu njihov period po promenljivoj τ iznosi, kako je poznato $4K$, gde je K totalni eliptički integral prve vrste:

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}. \tag{37,11}$$

Period pak u odnosu na vreme je, prema tome, dat izrazom

$$T = 4K \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}}. \tag{37,12}$$

Po isteku toga vremena vektor $\vec{\Omega}$ se vraća u svoj prvobitni položaj u odnosu na ose čigre. (Sama čigra pri tom se nikada ne vraća u svoj raniji položaj u odnosu na nepokretni koordinatni sistem — vidi dalje).

Kada je $I_1 = I_2$ formule (37,10), razumljivo, svode se na formule koje su dobivene u prethodnom paragrafu za simetričnu čigru. U stvari, kada $I_1 \to I_2$ parametar $k^2 \to 0$, eliptičke funkcije se transformišu u kružne:

$$\operatorname{sn} \tau \to \sin \tau, \qquad \operatorname{cn} \tau \to \cos \tau, \qquad \operatorname{dn} \tau \to 1,$$

i vraćamo se na formule (36,7).

Kada je $M^2 = 2EI_1$ imamo: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = \text{const}$, tj. vektor $\vec{\Omega}$ je stalno orijentisan duž ose inercije x_2; ovaj slučaj odgovara ravnomernoj rotaciji čigre oko ose x_2. Analogno, kada je $M^2 = 2EI_1$ (pri tom je $\tau \equiv 0$) imamo ravnomernu rotaciju oko ose x_1.

Prelazimo na definisanje apsolutnog kretanja (u odnosu na nepokretni koordinatni sistem X, Y, Z) čigre u prostoru kao funkcije vremena. U tu svrhu uvešćemo Euler-ove uglove ψ, φ, θ između osa čigre x_1, x_2, x_2 i osa X, Y, Z, uzimajući nepokretnu osu Z duž pravca konstantnog vectora $\vec{M}$. Kako su polarni ugao i azimut pravca Z u odnosu na ose x_1, x_2, x_3 jednaki redom θ i $\frac{\pi}{2} - \psi$ (vidi primedbu na str. 122) onda, projektujući vektor $\vec{M}$ na pravce x_1, x_2, x_2, dobivamo:

$$\begin{aligned} M \sin\theta \sin\psi &= M_1 = I_1 \Omega_1, \\ M \sin\theta \cos\psi &= M_2 = I_2 \Omega_2, \\ M \cos\theta &= M_3 = I_3 \Omega_3. \end{aligned} \tag{37,13}$$

Odavde je:

$$\cos\theta = \frac{I_3 \Omega_3}{M}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{I_1 \Omega_1}{I_2 \Omega_2}, \tag{37,14}$$

i koristeći formule (37,10) nalazimo:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \sqrt{\frac{I_3(M^2 - 2EI_1)}{M^2(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau, \\ \operatorname{tg}\psi &= \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}} \frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{sn}\tau}, \end{aligned} \tag{37,15}$$

čime se i definiše zavisnost uglova θ i ψ od vremena; zajedno sa komponentama vektora $\vec{\Omega}$ oni su periodične funkcije sa periodom (37,12).

Ugao φ ne ulazi u formule (37,13) i za njegovo izračunavanje treba uzeti formule (35,1), koje izražavaju komponente $\vec{\Omega}$ pomoću izvoda Euler-ovih uglova po vremenu. Ako $\dot{\theta}$ eliminišemo iz jednačina:

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi,$$

dobivamo:

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_1\sin\psi + \Omega_2\cos\psi}{\sin\theta},$$

posle toga, koristeći formule (37,13), nalazimo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = M\frac{I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2}{I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2}. \tag{37,16}$$

Odavde se funkcija $\varphi(t)$ određuje kvadraturom, ali podintegralni izraz sadrži na složen način eliptičke funkcije. Pomoću niza dosta složenih transformacija ovaj se integral može izraziti pomoću takozvane teta-funkcije. Nećemo vršiti izračunavanja[1], već ćemo samo ukazati na konačni rezultat.

Funkcija $\varphi(t)$ može biti predstavljena (sa tačnošću do proizvoljne aditivne konstante) u obliku zbira dva člana

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \tag{37,17}$$

od kojih je jedan dat formulom:

$$e^{2i\varphi_1(t)} = \frac{\vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T} - i\alpha\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T} + i\alpha\right)}, \tag{37,18}$$

gde je ϑ_{01} — teta-funkcija, a α je realna konstanta, koja je definisana jednačinom:

$$\mathrm{sn}(i2\alpha K) = i\sqrt{\frac{I_2(M^2 - 2EI_1)}{I_1(2EI_3 - M^2)}} \tag{37,19}$$

[K i T su iz (37,11) i (37,12)]. Funkcija na desnoj strani (37,18) je periodična sa periodom $\frac{T}{2}$ tako da se $\varphi_1(t)$ menja za 2π za vreme T. Drugi sabirak (činioc) u (37,17) je dat formulom:

$$\varphi_2(t) = 2\pi\frac{t}{T'}, \quad \frac{1}{T'} = \frac{M}{2\pi I_1} - \frac{i}{\pi T}\frac{\vartheta'_{01}(i\alpha)}{\vartheta_{02}(i\alpha)}. \tag{37,20}$$

---

[1] Možemo ih naći u knjizi *E. T. Whittaker*, Analitička dinamika, ONTI, 1937.

Ova funkcija pokazuje priraštaj 2π za vreme T'. Na taj način, kretanje u odnosu na ugao φ predstavlja zbir dve periodične promene, pri čemu se jedna od perioda (T) poklapa sa periodom promene uglova ψ i θ, a druga (T') je nesamerljiva sa prvom. Poslednja okolnost dovodi do toga da se pri svakom kretanju čigra nikad ne vraća, strogo uzev, u svoj prvobitni položaj.

Zadaci

1. Odrediti slobodnu rotaciju čigre oko ose, koja je blizu ose inercije x_3 (ili x_1).

Rešenje. Neka je osa x_3 blizu pravca $\vec{M}$. Tada su komponente M_1 i M_2 male veličine, a komponenta $M_3 \approx M$ (sa tačnošću do malih veličina prvog reda). Sa istom tom tačnošću napisaćemo prve dve Euler-ove jednačine u obliku:

$$\frac{dM_1}{dt} = \left(1 - \frac{I_3}{I_2}\right)\Omega_0 M_2,$$

$$\frac{dM_2}{dt} = \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)\Omega_0 M_1,$$

gde smo uveli konstantu $\Omega_0 = \frac{M}{I_3}$. Prema opštim pravilima tražićemo rešenje za M_1 i M_2 u obliku koji je proporcionalan sa $e^{i\omega t}$, pa ćemo za frekvenciju ω dobiti vrednost:

$$\omega = \Omega_0 \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right)\left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)}. \tag{1}$$

Za same pak veličine M_1 i M_2 dobivamo:

$$M_1 = Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\cos\omega t; \qquad M_2 = Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\sin\omega t, \tag{2}$$

gde je a proizvoljna mala konstanta. Ovim formulama se definiše kretanje vektora $\vec{M}$ u odnosu na čigru. Na sl. 51 završna tačka vektora $\vec{M}$ opisuje (sa frekvencijom ω) malu elipsu oko polova na osi x_3.

Za definisanje apsolutnog kretanja čigre u prostoru odredićemo njene Euler-ove uglove. U datom slučaju ugao nagiba θ ose x_3 prema osi Z (pravac $\vec{M}$) je mali, i prema formulama (37,14) iznosi:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{M_1}{M_2},$$

$$\theta^2 \approx 2(1 - \cos\theta) = 2\left(1 - \frac{M_3}{M}\right) \approx \frac{M_1^2 + M_2^2}{M^2};$$

zamenjujući (2), dobivamo:

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}}\operatorname{ctg}\omega t,$$

$$\theta^2 = a^2\left[\left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)\cos^2\omega t + \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right)\sin^2\omega t\right]. \tag{3}$$

Napominjemo da će za izračunavanje ugla φ, prema trećoj od formula (35,1) kada je $\theta \ll 1$ biti:

$$\Omega_0 \approx \Omega_3 \approx \dot{\psi} + \dot{\varphi}.$$

Zbog toga ćemo imati:

$$\varphi = \Omega_0 t - \psi \tag{4}$$

(izostavljamo proizvoljnu konstantu integriranja).

Očiglednija predstava o karakteru kretanja čigre dobiva se ako se prati neposredno promena pravca njene tri ose inercije (jedinične vektore duž tih osa označavamo sa $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$). Vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ ravnomerno rotiraju u ravni XY sa frekvencijom Ω_0 istovremeno pokazujući mala oscilovanja sa frekvencijom ω u transverzalnom pravcu; ta oscilovanja se određuju Z-komponentama navedenih vektora, za koje ćemo imati:

$$n_{1Z} \approx \frac{M_1}{M} = a\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\cos\omega t,$$

$$n_{2Z} \approx \frac{M_2}{M} = a\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\sin\omega t.$$

Za vektor $\vec{n}_3$ imaćemo sa istom tačnošću:

$$n_{3x} \approx \theta\sin\varphi, \qquad n_{3y} \approx -\theta\cos\varphi, \qquad n_{3z} \approx 1$$

(polarni ugao i azimut pravca $\vec{n}_3$ u odnosu na ose X, Y, Z su θ i $\varphi - \frac{\pi}{2}$; vidi primedbe na str. 122). Dalje ćemo pisati (koristeći pri tom formule (37,13)):

$$n_{3x} = \theta\sin(\Omega_0 t - \psi) = \theta\sin\Omega_0 t\cos\psi - \theta\cos\Omega_0 t\sin\psi =$$

$$= \frac{M_2}{M}\sin\Omega_0 t - \frac{M_1}{M}\cos\Omega_0 t =$$

$$= a\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1}\sin\Omega_0 t\sin\omega t - a\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\cos\Omega_0 t\cos\omega t,$$

ili definitivno:

$$n_{3x} = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\cos(\Omega_0 + \omega)t +$$

$$+ \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\cos(\Omega_0 - \omega)t.$$

Analogno ćemo dobiti:

$$n_{3y} = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\sin(\Omega_0 + \omega)t +$$

$$+ \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\sin(\Omega_0 - \omega)t.$$

Odavde je očigledno, da kretanje vektora $\vec{n}_3$ predstavlja sabiranje dve rotacije oko ose Z sa frekvencijama $(\Omega_0 \pm \omega)$.

2. Odrediti slobodnu rotaciju čigre kada je $M^2 = 2EI_2$.

Rešenje. Ovaj slučaj odgovara pomeranju završne tačke vektora $\vec{M}$ po krivoj koja prolazi kroz pol na osi x_2, kao što je prikazano na sl. 51.

Jednačina (37,7) dobiva oblik:

$$\frac{ds}{d\tau} = 1 - s^2, \qquad \tau = t\sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}}\,\Omega_0, \qquad s = \frac{\Omega_2}{\Omega_0},$$

gde je uvedena oznaka $\Omega_0 = \frac{M}{I_2} = \frac{2E}{M}$. Integrirajući ovu jednačinu, a zatim koristeći se formulama (37,6) dobivamo:

$$\Omega_1 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\operatorname{ch}\tau},$$

$$\Omega_2 = \Omega_0 \operatorname{th}\tau,$$

$$\Omega_3 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\operatorname{ch}\tau}.$$

Za opisivanje apsolutnog kretanja čigre uvešćemo Euler-ove uglove odredivši θ kao ugao između Z-ose (pravac $\vec{M}$) i ose inercije čigre x_2 (a ne x_3, kao što je u tekstu). U formulama (37,14) i (37,16), koje vezuju komponente vektora $\vec{\Omega}$ sa Euler-ovim uglovima, treba pri tom napraviti cikličku permutaciju indeksa $123 \to 312$. Zamenjujući zatim u te formule izraz (1) dobićemo:

$$\cos\theta = \operatorname{th}\tau, \qquad \varphi = \Omega_0 t + \text{const},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_3 - I_2)}}.$$

Iz dobivenih formula je jasno da se vektor $\vec{\Omega}$ asimptotski (kada $t \to \infty$) približava osi x_2, koja se istovremeno asimptotski približava nepokretnoj osi Z.

§ 38. Dodir krutih tela

Uslove ravnoteže krutog tela, kako izlazi iz jednačina kretanja (34,1) i (34,3), možemo formulisati izjednačavanjem sa nulom svih sila koje na njega dejstvuju kao i totalnog momenta sila:

$$\vec{F} = \Sigma\vec{f} = 0, \qquad \vec{K} = \Sigma(\vec{r} \times \vec{f}) = 0. \tag{38,1}$$

Ovde se sumiranje vrši po svim spoljašnjim silama koje na telo dejstvuju, a $\vec{r}$ predstavlja radijus-vektore „napadnih tačaka" sila; pri tom tačka (koordinatni početak), u odnosu na koju se određuju momenti, može biti uzeta proizvoljno: kada je $\vec{F} = 0$, vrednost $\vec{K}$ ne zavisi od toga izbora [vidi (34,5)].

Ako imamo posla sa sistemom krutih tela koja se uzajamno dodiruju, onda se u ravnoteži uslovi (38,1) moraju ispuniti za svako telo pojedinačno. Pri tom u broj sila moraju biti uključene takođe i sile koje dejstvuju na dato telo od strane drugih tela koja se s njim dodiruju. Te sile koje dejstvuju u tačkama dodira tela nazivaju se *sile reakcije*. Očigledno je da su za svaka dva tela njihove uzajamne sile reakcije jednake po veličini a suprotnog smera.

U opštem slučaju kako veličine tako i smerovi reakcija se određuju kao rezultat zajedničkog rešenja sistema jednačina ravnoteže za sva tela (38,1). U izvesnim slučajevima, međutim, orijentacija sila reakcije data je već uslovima zadatka. Tako, ako dva tela mogu da klize jedno po drugom, onda su sile reakcije među njima orijentisane po normali na površinu.

Ako se tela, koja se dodiruju, kreću relativno jedno prema drugom, onda se osim sila reakcije pojavljuju i sile disipativnog karaktera — *sile trenja.*

Mogućna su dva tipa kretanja tela koja se dodiruju: *klizanje i kotrljanje*. Pri klizanju reakcije su normalne na dodirnu ravan, a sile trenja su orijentisane u pravcu tangente na njih.

Čisto kotrljanje se karakteriše činjenicom da u tačkama dodira nema relativnog kretanja tela; drugim rečima, telo koje se kotrlja, u svakom momentu kao da je pričvršćeno u tačkama dodira. Pri tom je orijentacija sile reakcije proizvoljna, tj. nije obavezno normalna na dodirnu ravan. Trenje pri kotrljanju se pojavljuje u obliku dopunskog momenta sila koji se protivi kotrljanju.

Ako je pri klizanju trenje tako malo da ga možemo potpuno zanemariti, onda se površine tela nazivaju *apsolutno glatke*. Naprotiv, ako svojstva ravni dopuštaju samo čisto kotrljanje tela bez klizanja, a trenje se pri kotrljanju može zanemariti, onda se ravni nazivaju *„apsolutno hrapave"*.

U oba ova slučaja sile trenja na figurišu eksplicitno u zadatku o kretanju tela, te je zbog toga zadatak čisto mehanički. Ako su konkretna svojstva trenja bitna za kretanja, onda poslednje već nije čisto mehanički proces (upor. § 25).

Dodir tela smanjuje broj njihovih stepena slobode u poređenju sa brojem koji bi imala pri slobodnom kretanju. Do sada smo pri analizi zadataka takve vrste uzimali u obzir ovu okolnost uvođenjem koordinata koje odgovaraju neposredno realnom broju stepena slobode. Međutim, pri kotrljanju tela, takav izbor koordinata može se pokazati nemogućnim.

Uslov, koji se nadovezuje na kretanje tela pri kotrljanju, sastoji se u jednakosti brzina dodirnih tačaka (tako, pri kotrljanju tela po nepokretnoj ravni brzina tačke dodira mora biti jednaka nuli). U opštem slučaju takav uslov se izražava *„jednačinama veze"* u obliku:

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0, \tag{38,2}$$

gde su $c_{\alpha i}$ samo funkcije koordinata (indeks α označava jednačine veze). Ako leve strane jednačina nisu totalni izvodi po vremenu ma kojih funkcija koordinata, onda te jednačine ne mogu biti intergrirane. Drugim rečima, ne svode se samo na odnose jedino među koordinatama, kojim bismo se mogli koristiti da bismo izrazili položaj tela pomoću manjeg broja koordinata u vezi sa realnim brojem stepena slobode. Takve veze se nazivaju *neholonomne* (nasuprot *holonomnim*), koje vezuju samo koordinate sistema).

Posmatraćemo, na primer, kotrljanje kugle po ravnoj površini. Kao obično, označićemo sa $\vec{V}$ brzinu translatornog kretanja (brzinu centra kugle), a sa $\vec{\Omega}$ ugaonu brzinu njene rotacije. Brzinu dodira kugle sa ravni dobićemo ako stavimo da je $\vec{r} = -a\vec{n}$ u opštu formulu $\vec{v} = \vec{V} + (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ (a je poluprečnik kugle, $\vec{n}$ je jedinični vektor normale na ravni kotrljanja u tački dodira). Tražena veza predstavlja uslov nepostojanja klizanja u tački dodira, tj. data je jednačinom:

$$\vec{V} - a(\vec{\Omega} \times \vec{n}) = 0. \tag{38,3}$$

Ona se ne može integrirati iako brzina $\vec{V}$ pretstavlja totalni izvod po vremenu radijus-vektora centra kugle, ali zato ugaona brzina nije u opštem slučaju totalni izvod ma kojih koordinata. Na taj način, veza (38,3) je neholonomna[1].

[1] Napominjemo, da bi ista takva veza za kotrljanje cilindra bila holonomna. U tom slučaju osa rotacije zadržava pri kotrljanju konstantni pravac u prostoru, te je zbog toga $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ totalni izvod od ugla obrtanja φ cilindra oko svoje ose. Pri tom se relacija (38,3) integrira i daje vezu između koordinate centra inercije i ugla φ.

Kako se jednačine neholonomnih veza ne mogu iskoristiti za smanjenje broja koordinata, onda postojanje takvih veza neizbežno dovodi do korišćenja koordinata, koje sve nisu nezavisne. Za formiranje Lagrange-ovih jednačina ponovo ćemo se vratiti na princip najmanjeg dejstva.

Postojanje veza u obliku (38,2) omogućava definiciju ograničenja na mogućne vrednosti varijacija koordinata. Naime, ako te jednačine pomnožimo sa δt, nalazimo da varijacije δq_i nisu nezavisne, već su vezane relacijama:

$$\sum_i c_{\alpha i}\,\delta q_i = 0. \tag{38,4}$$

Ova okolnost mora biti uzeta u obzir pri variranju dejstva. Prema opštem Lagrange-ovom metodu za nalaženje uslovnih ekstremuma, treba podintegralnom izrazu varijacije dejstva

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dt$$

dodati jednačinu (38,4) pomnoženu sa neodređenim faktorima (funkcije koordinata) λ_α, a posle toga treba integral izjednačiti sa nulom. Pri tom već možemo smatrati sve varijacije δq_i nezavisnim, i dobivamo jednačine:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i}. \tag{38,5}$$

Zajedno sa jednačinama veze (38,2) one čine potpuni sistem jednačina za nepoznate veličine q_1 i λ_α.

U izloženom metodu sile reakcije uopšte ne postoje; dodiravanje tela u celini je uzeto u obzir jednačinama veza. Međutim, postoji i drugi metod formiranje jednačina kretanja tela koja se dodiruju u kome se sile reakcije uvode eksplicitno. Suština toga metoda (koji čini sadržaj takozvanog *D' Alembert-ovog principa*) sastoji se u tome, da se za svako telo koje se dodiruje uzmu jednačine:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{f}, \qquad \frac{d\vec{M}}{dt} = \sum (\vec{r} \times \vec{f}), \tag{38,6}$$

pri čemu se u broj sila $\vec{f}$ koje dejstvuju na telo uključuju takođe i sile reakcije; ove sile od ranije nisu poznate i određuju se same zajedno sa kretanjem tela kao rezultat rešenja jednačina. Ovaj metod je u istom stepenu primenjiv kako za holonomne tako i za neholonomne veze.

Zadaci

1. Koristeći se D' Alembert-ovim principom, naći jednačine kretanja homogene kugle, koja se kotrlja po površini pod dejstvom spoljašnje sile $\vec{F}$ i momenta sila $\vec{K}$ koje na nju dejstvuju.

Rešenje. Jednačina veze (38,3) je već napisana u tekstu. Uvodeći silu reakcije (koju ćemo označiti sa $\vec{R}$), a koja dejstvuje u tački dodira kugle sa površinom, napisaćemo jednačine

(38,6) u obliku:

$$\mu\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{R}, \tag{1}$$

$$I\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{K} - a(\vec{n}\times\vec{R}) \tag{2}$$

(ovde je uzeto u obzir da je $\vec{P} = \mu\vec{V}$ i da je za sfernu čigru $\vec{M} = I\vec{\Omega}$). Diferencirajući jednačinu veze (38,3) po vremenu, dobivamo:

$$\dot{\vec{V}} = a(\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{n}).$$

Zamenjujući u jednačinu (1) i eliminišući $\dot{\vec{\Omega}}$ pomoću (2), nalazimo jednačinu:

$$\frac{I}{a\mu}(\vec{F}+\vec{R}) = \vec{K}\times\vec{n} - a\vec{R} + a\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{R}),$$

koja povezuje silu reakcije sa $\vec{F}$ i $\vec{K}$. Uzimajući umesto ove jednačine odgovarajuće skalarne jednačine $I = \frac{2}{5}\mu a^2$ (vidi zadatak 2, b, § 32) imaćemo:

$$R_x = \frac{5}{7a}K_y - \frac{2}{7}F_x, \qquad R_y = -\frac{5}{7a}K_x - \frac{2}{7}F_y, \qquad R_z = -F_z.$$

(Ravan x, y je uzeta u ravni kotrljanja). Na kraju, zamenjujući ove izraze u (1) dobićemo jednačine kretanja, koje sadrže već samo datu spoljašnju silu i moment:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7\mu}\left(F_x + \frac{K_y}{a}\right),$$

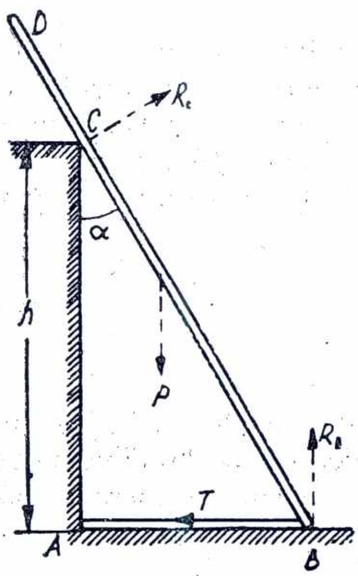
$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7\mu}\left(F_y - \frac{K_x}{a}\right).$$

Komponente Ω_x, Ω_y ugaone brzine izražavaju se u funkciji od V_x i V_y pomoću jednačine veze (38,3), pa za Ω_z imamo jednačinu:

$$\frac{2}{5}\mu a^2\frac{d\Omega_z}{dt} = K_z$$

[z-komponenta jednačine (2)].

2. Homogeni štap BD, težine P i dužine l, naslanja se na zid, kako je pokazano na sl. 52; njegov donji kraj B vezan je žicom AB. Odrediti reakciju oslonca i zatezanje žice.



Sl. 52

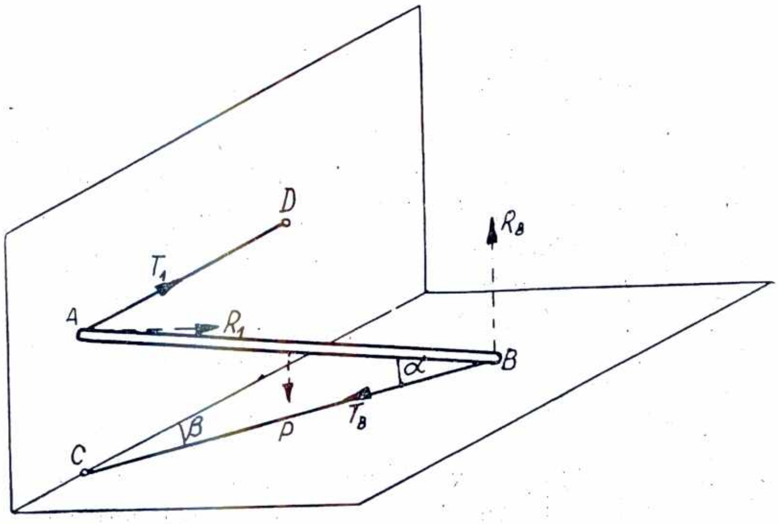
Rešenje. Težina štapa je predstavljena silom $\vec{P}$ koja dejstvuju na njegovu sredinu, i orijentisana je vertikalno naniže. Sile reakcije R_B i R_C orijentisane su respektivno vertikalno uvis i normalno na štap; zatezanje žice T je upravljeno od B ka A. Rešenje jednačina ravnoteže daje:

$$R_C = \frac{Pl}{4h}\sin 2\alpha, \qquad R_B = P - R_C\sin\alpha, \qquad T = R_C\cos\alpha.$$

3. Štap AB, težine P, oslanja se svojim krajevima na horizontalnu i vertikalnu ravan (sl. 53) i pričvršćen je u tom položaju pomoću dve horizontalne žice AD i BC. Žica BC nalazi se u jednoj (vertikalnoj) ravni sa štapom AB. Odrediti reakciju oslonaca i zatezanja žica.

Rešenje. Zatezanja žica T_A i T_B su usmerena od A ka D i od B ka C. Reakcije R_A i R_B su normalne na odgovarajuće ravni. Rešenje jednačina ravnoteže daje:

$$R_B = P, \qquad T_B = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha, \qquad R_A = T_B \sin\beta, \qquad T_A = T_B\cos\beta.$$



Sl. 53

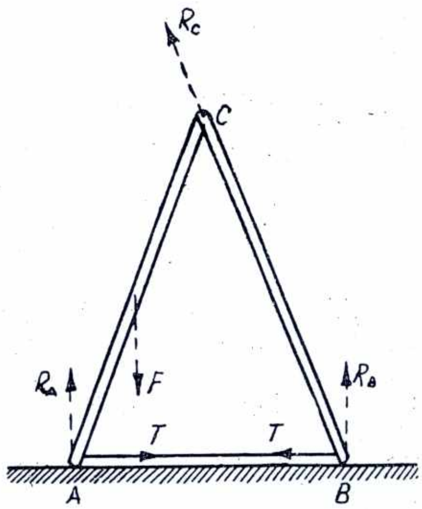
4. Dva štapa dužine l spojena su na vrhu na zglob, a dole su povezani žicom AB (sl. 54). Na sredini jednog štapa dejstvuje sila F (mase štapova zanemarujemo). Odrediti sile reakcije.

Rešenje. Zatezanje žice T dejstvuje u tački A od A ka B, a u tački B od B ka A. Reakcije R_A i R_B u tačkama A i B su normalne na ravni oslonca. Sa $\vec{R}_C$ ćemo označiti silu reakcije u zglobu koja dejstvuje na štap AC. Tada na štap BC dejstvuje reakcija $-\vec{R}_C$. Uslov da je suma momenata sila koje dejstvuju na štap BC $\vec{R}_B, \vec{T}$ i $-\vec{R}_C$ jednaka nuli, dovodi do rezultata da je vektor $\vec{R}_C$ orijentisan duž BC. Ostali uslovi ravnoteže (za svaki štap) dovode do vrednosti:

$$R_A = \frac{3}{4}F, \qquad R_B = \frac{F}{4}, \qquad R_C = \frac{F}{4\sin\alpha},$$

$$T = \frac{1}{4}F\operatorname{ctg}\alpha,$$

gde je α ugao CAB.



Sl. 54

§ 39 Kretanje u neinercijalnom sistemu referencije

Do sada, posmatrajući kretanje ma kog mehaničkog sistema, uzimali smo ga uvek u odnosu na inercijalni sistem referencije. Samo u inercijalnim sistemima referencije Lagrange-ova funkcija, na primer, jedne čestice u spoljašnjem polju ima oblik:

$$L_0 = \frac{m\vec{v}_0^2}{2} - U, \tag{39,1}$$

i odgovarajuća jednačina kretanja biće:

$$m\frac{d\vec{v}_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

(u ovom paragrafu ćemo indeksom nula označavati veličine koje se odnose na inercijalni sistem referencije).

Pozabavićemo se sada problemom, kako će izgledati jednačine kretanja čestice u neinercijalnom sistemu referencije. Kao polazna tačka pri rešenju toga problema, ponovo se pojavljuje princip najmanjeg dejstva, čija primenljivost nije ograničena nikakvim sistemom referencije; zajedno sa njim ostaju na snazi i Lagrange-ove jednačine:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}. \tag{39,2}$$

Međutim, Lagrange-ova funkcija već nema oblik (39,1) i za njeno nalaženje je neophodno izvršiti odgovarajuću transformaciju funkcije L_0.

Ovu transformaciju ćemo izvršiti na dva načina. Posmatraćemo u početku sistem referencije K', koji se kreće u odnosu na inercijalni sistem K_0 translatorno brzinom $\vec{V}(t)$. Brzine $\vec{v}_0$ i $\vec{v}'$ čestice u odnosu na sisteme K_0 i K' uzajamno su povezane relacijom:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}(t). \tag{39,3}$$

Zamenjujući ovaj izraz u (39,1) dobivamo Lagrange-ovu funkciju u sistemu K':

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{v}'\vec{V} + \frac{m}{2}\vec{V}^2 - U.$$

Ali $V^2(t)$ je data funkcija vremena; ona može biti predstavljena kao totalni izvod po t neke druge funkcije, i zbog toga treći član u napisanom izrazu može biti izostavljen. Dalje je $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$, gde je $\vec{r}'$ radijus-vektor čestice u koordinatnom sistemu K'; zbog toga je:

$$m\vec{V}(t)\vec{v}' = m\vec{V}\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}\vec{r}') - m\vec{r}'\frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Zamenjujući ovo u Lagrange-ovu funkciju i ponovo eliminišući totalni izvod po vremenu, definitivno dobivamo:

$$L' = \frac{mv'^2}{2} - m\vec{W}(t)\vec{r}' - U, \tag{39,4}$$

gde je $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ ubrzanje translatornog kretanja sistema referencije K'.

Ako pomoću jednačine (39,4) oformimo Lagrange-ovu jednačinu, dobićemo:

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{W}(t). \tag{39,5}$$

Vidimo, da je u smislu uticaja na jednačine kretanja čestice, ubrzano translatorno kretanje sistema referencije ekvivalentno postojanju homogenog polja sila, pri čemu je sila koja dejstvuje u tom polju jednaka proizvodu mase čestice i ubrzanje $\vec{W}$, a orijentisana je na suprotnu stranu u odnosu na to ubrzanje.

Uvešćemo sada još jedan sistem referencije K, koji ima zajednički početak sa sistemom K', ali u odnosu na njega rotira sa ugaonom brzinom $\vec{\Omega}(t)$; u odnosu pak na inercijalni sistem K_0, sistem K vrši kako translatorno, tako i rotaciono kretanje.

Brzina $\vec{v}'$ čestice u odnosu na sistem K' sastoji se od njene brzine $\vec{v}$, u odnosu na sistem K i brzine $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ njene rotacije zajedno sa sistemom K:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

(radijus-vektori $\vec{r}$ i $\vec{r}'$ čestice u sistemima K i K' se poklapaju). Zamenjujući ovaj izraz u Lagrange-ovu funkciju (39,4) dobićemo:

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}(\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{m}{2}(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 - m\vec{W}\vec{r} - U. \tag{39,6}$$

Ovo je opšti oblik Lagrange-ove funkcije čestice u proizvoljnom neinercijalnom sistemu referencije. Napominjemo da rotiranje sistema referencije dovodi do pojave u Lagrange-ovoj funkciji člana potpuno specifičnog oblika, koji je linearan u odnosu na brzinu čestice.

Za izračunavanje izvoda koji ulaze u Lagrange-ovu jednačinu, napisaćemo totalni diferencijal

$$\begin{aligned} dL &= m\vec{v}\,d\vec{v} + m\,d\vec{v}(\vec{\Omega} \times \vec{r}) + m\vec{v}(\vec{\Omega} \times d\vec{r}) + m(\vec{\Omega} \times \vec{r})(\vec{\Omega} \times d\vec{r}) - \\ &\quad - m\vec{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\,d\vec{r} = \\ &= m\vec{v}\,d\vec{v} + m\,d\vec{v}(\vec{\Omega} \times \vec{r}) + m\,d\vec{r}(\vec{v} \times \vec{\Omega}) + \\ &\quad + m((\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}) \cdot d\vec{r} - m\vec{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Sabirajući članove koji sadrže $d\vec{v}$ i $d\vec{r}$, nalazimo:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m(\vec{v} \times \vec{\Omega}) + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} - m\vec{W} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}.$$

Zamenjujući ove izraze u (39,2), dobivamo traženu jednačinu kretanja:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} + m(\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}) + 2m(\vec{v} \times \vec{\Omega}) + m(\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})). \quad (39,7)$$

Vidimo, da se „sile inercije", koje su uslovljene rotiranjem sistema referencije sastoje od tri dela. Sila $m(\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}})$ je vezana sa neravnomernošću rotacije, a druge dve postoje i pri ravnomernoj rotaciji. Sila $2m(\vec{v} \times \vec{\Omega})$ se naziva *Coriolis-ova sila*; za razliku od svih ranije posmatranih (nedisipativnih) sila, ona zavisi od brzine čestice. Sila $m(\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}))$ se naziva *centrifugalna*. Ona je orijentisana na ravan koja prolazi kroz $\vec{r}$ i $\vec{\Omega}$ normalno na osi rotacije (tj. u pravcu $\vec{\Omega}$) na stranu od ose; centrifugalna sila po veličini iznosi $m\rho\Omega^2$, gde je ρ rastojanje čestice od ose rotacije.

Posmatraćemo specijalno slučaj ravnomerno rotirajućeg koordinatnog sistema, koji nema translatorno ubrzanje. Ako stavimo u (39,6) i (39,7) da je $\vec{\Omega} = \text{const}$ i $\vec{W} = 0$, dobićemo Lagrange-ovu funkciju:

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}(\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{m}{2}(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 - U \quad (39,8)$$

i jednačinu kretanja:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + 2m(\vec{v} \times \vec{\Omega}) + m(\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})). \quad (39,9)$$

Izračunaćemo takođe energiju čestice u ovom slučaju. Zamenom

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (39,10)$$

u $E = \vec{p}\vec{v} - L$, dobivamo:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + U. \quad (39,11)$$

Obratimo pažnju na činjenicu, da u energiji nedostaje član, koji je linearan po brzini. Uticaj rotacije sistema referencije se svodi na dodavanje energiji člana koji zavisi samo od koordinata čestice i koji je proporcionalan kvadratu ugaone brzine. Ova dopunska potencijalna energija $\frac{m}{2}(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2$ naziva se *centrifugalna.*

Brzina $\vec{v}$ čestice u odnosu na sistem referencije koji ravnomerno rotira, vezana je s njegovom brzinom $\vec{v}_0$ u odnosu na inercijalni sistem K_0 pomoću relacije:

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \quad (39,12)$$

Zbog toga se impuls $\vec{p}$ (39,10) čestice u sistemu K poklapa sa njenim impulsom $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$ u sistemu K_0. Zajedno sa njim poklapaju se takođe momenti impulsa $\vec{M}_0 = (\vec{r} \times \vec{p}_0)$ i $\vec{M} = (\vec{r} \times \vec{p})$. Energije čestice u sistemima K i K_0 su različite. Zamenom $\vec{v}$ iz (39,12) u (39,11) dobivamo:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - m\vec{v}_0(\vec{\Omega} \times \vec{r}) + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m(\vec{r} \times \vec{v}_0)\vec{\Omega}.$$

Prva dva člana predstavljaju energiju E_0 u sistemu K_0. Uvodeći u poslednji član moment impulsa, dobićemo:

$$E = E_0 - \vec{M} \cdot \vec{\Omega}. \tag{39,13}$$

Ovom formulom se definiše zakon transformacije energije pri prelazu na ravnomerno rotirajući koordinatni sistem. Iako smo je izveli za jednu česticu, očevidno je, da izvođenje može biti neposredno generalisamo za slučaj ma kog sistema čestica i dovodi do te iste formule (39,13).

Zadaci

1. Naći odstupanje od vertikalnog pravca tela koje slobodno pada, uslovljeno rotacijom Zemlje. (Ugaonu brzinu rotacije smatrati malom).

Rešenje. U polju teže je $U = m\vec{g}\vec{r}$, gde je $\vec{g}$ vektor gravitacionog ubrzanja; zanemarujući u jednačini (39,9) centrifugalnu silu, koja sadrži kvadrat $\vec{\Omega}$, dobićemo jednačinu kretanja u obliku:

$$\dot{\vec{v}} = 2(\vec{v} \times \vec{\Omega}) + \vec{g}. \tag{1}$$

Rešavaćemo ovu jednačinu postupnim aproksimacijama. U tom cilju ćemo staviti da je $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ gde je $\vec{v}_1$ rešenje jednačine $\dot{\vec{v}}_1 = \vec{g}$, tj. $\vec{v}_1 = \vec{g}t + \vec{v}_0$ ($\vec{v}_0$ je početna brzina). Zamenom $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ u (1) i ostavljajući na desnoj strani samo $\vec{v}_1$, dobivamo jednačinu za $\vec{v}_2$:

$$\dot{\vec{v}}_2 = 2(\vec{v}_1 \times \vec{\Omega}) = 2t(\vec{g} \times \vec{\Omega}) + 2(\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}).$$

Integriranjem ćemo imati:

$$\vec{r} = \vec{h} + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} + \frac{t^3}{3}(\vec{g} \times \vec{\Omega}) + t^2(\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}), \tag{2}$$

gde je $\vec{h}$ vektor početnog položaja čestice.

Uzećemo z-osu po vertikali naviše, a x-osu po meridijanu prema polu, tada će bjti:

$$g_x = g_y = 0, \qquad g_z = -g; \qquad \Omega_x = \Omega\cos\lambda, \qquad \Omega_y = 0, \qquad \Omega_z = \Omega\sin\lambda,$$

gde je λ širina (koju uzimamo da je severna radi određenosti). Ako u (2) stavimo $\vec{v}_0 = 0$, nalazimo:

$$x = 0, \qquad y = -\frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda.$$

Zamenjujući ovde vreme padanja $t \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}$, nalazimo definitivno:

$$x = 0, \qquad y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} g\Omega\cos\lambda$$

(negativne vrednosti y odgovaraju odstupanju na istok).

2. Odrediti skretanje od ravni za telo koje je sa Zemlje bačeno sa početnom brzinom $\vec{v}_0$.

Rešenje. Uzećemo ravan xz tako da se brzina $\vec{v}_0$ nalazi u njoj. Početna visina $\vec{h} = 0$. Za bočno odstupanje dobićemo iz (2) (zadatak 1):

$$y = -\frac{t^3}{3} g\Omega_x + t^2 (\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x}),$$

ili, zamenjujući vreme leta $t \approx \frac{2v_{0z}}{g}$, biće:

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3} v_{0z}\,\Omega_x - v_{0x}\,\Omega_z\right).$$

3. Odrediti uticaj koji vrši rotacija Zemlje na mala oscilovanja klatna (takozvano *Foucault-ovo klatno*).

Rešenje. Zanemarujući vertikalno pomeranje klatno kao malu veličinu drugog reda, možemo smatrati da se kretanje tela vrši u horizontalnoj ravni xy. Izostavljajući članove koji sadrže Ω^2, napisaćemo jednačine kretanja u obliku:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x},$$

gde je ω frekvencija oscilovanja klatna ne uzimajući u obzir rotaciju Zemlje. Ako drugu jednačinu pomnožimo sa i i saberemo sa prvom, dobićemo jednu jednačinu

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

za kompleksnu veličinu $\xi = x + iy$. Kada je $\Omega_z \ll \omega$ rešenje ove jednačine ima oblik:

$$\xi = e^{-i\Omega_z t}(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$$

ili

$$x + iy = e^{-i\Omega_z t}(x_0 + iy_0),$$

gde funkcije $x_0(t)$ i $y_0(t)$ daju trajektoriju klatna ne uzimajući u obzir rotaciju Zemlje. Uticaj te rotacije svodi se, prema tome, na obrtanje trajektorije oko vertikale sa ugaonom brzinom Ω_z.

GLAVA VII

KANONSKE JEDNAČINE

§ 40. Hamilton-ove jednačine

Formulisanje zakona mehanike pomoću Lagrange-ove funkcije (i iz nje izvedenih Lagrange-ovih jednačina) pretpostavlja opisivanje mehaničkog stanja sistema pomoću (davanjem) njegovih generalisanih koordinata i brzina. Međutim, takvo opisivanje nije i jedino mogućno. Niz preimućstava, a naročito pri (opisivanju) ispitivanju različitih opštih problema mehanike predstavlja opisivanje pomoću generalisanih koordinata i impulsa sistema. S tim u vezi nastaje problem o nalaženju jednačina kretanja koje odgovaraju takvoj formulaciji mehanike.

Prelaz od jednog skupa nezavisno promenljivih na drugi može se vršiti transformacijom, koja je u matematici poznata pod imenom Legendre-ove transformacije. U datom slučaju ona se svodi na sledeće.

Totalni diferencijal Lagrange-ove funkcije kao funkcije koordinata i brzine iznosi:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Ovaj izraz možemo napisati u obliku.

$$dL = \Sigma \dot{p}_i \, dq_i + \Sigma p_i \, d\dot{q}_i, \tag{40,1}$$

jer (kako) su izvodi $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, prema definiciji, generalisani impulsi, a $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$ zbog Lagrange-ovih jednačina.

Ako drugi član u (40,1) napišemo u obliku:

$$\Sigma p_i \, d\dot{q}_i = d(\Sigma p_i \dot{q}_i) - \Sigma \dot{q}_i \, dp_i,$$

prenoseći totalni diferencijal $d(\Sigma p_i \dot{q}_i)$ na levu stranu jednačine i promenom svih znakova iz (40,1), dobivamo:

$$d(\Sigma p_i \dot{q}_i - L) = - \Sigma \dot{p}_i \, dq_i + \Sigma \dot{q}_i \, dp_i.$$

Veličina koja stoji pod diferencijalom, predstavlja energiju sistema (vidi § 6). Izražena pomoću koordinata i impulsa naziva se *Hamilton-ova funkcija* sistema:

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \tag{40,2}$$

Iz diferencijalne jednačine

$$dH = -\Sigma \dot{p}_i\, dq_i + \Sigma \dot{q}_i\, dp_i, \tag{40,3}$$

u kojoj su nezavisno promenljive koordinate i impulsi, izlaze jednačine:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{40,4}$$

Ovo su sa promenljivim p i q tražene jednačine kretanja takozvane *Hamilton-ove jednačine*. One čine sistem od $2s$ diferencijalnih jednačina prvog reda za $2s$ nepoznatih funkcija $p(t)$ i $q(t)$, koje zamenjuju s jednačina drugog reda Lagrange-ovog metoda. S obzirom na njihovu formalnu jednostavnost i simetriju, ove se jednačine nazivaju takođe *kanonske*.

Totalni izvod Hamilton-ove funkcije po vremenu biće:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i.$$

Zamenom ovde $\dot{p}_i$ i $\dot{q}_i$ iz jednačine (40,4) poslednja dva člana se uzajamno skraćuju tako da izlazi:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{40,5}$$

Specijalno, ako Hamilton-ova funkcija ne zavisi od vremena eksplicitno, onda je $\dfrac{dH}{dt} = 0$, tj. ponovo dolazimo do zakona održanja energije.

Uporedo sa dinamičkim promenljivim q, $\dot{q}$ ili q, p, Lagrange-ove i Hamilton-ove funkcije sadrže različite parametre, tj. veličine koje karakterišu svojstva samog mehaničkog sistema ili spoljašnjeg polja koje na njega dejstvuje. Neka je λ ma koji od tih parametara. Smatrajući ga kao promenljivu veličinu, imaćemo umesto (40,1):

$$dL = \Sigma \dot{p}_i\, dq_i + \Sigma p_i\, d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\, d\lambda,$$

posle čega umesto (40,3) dobivamo:

$$dH = -\Sigma \dot{p}_i\, dq_i + \Sigma \dot{q}_i\, dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda}\, d\lambda.$$

Odavde nalazimo relaciju:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},\,q}, \tag{40,6}$$

koja vezuje parcijalne izvode po parametru λ od Lagrange-ove i Hamilton-ove funkcije. Indeksi uz izvode pokazuju da u jednom slučaju diferenciranje treba vršiti pri konstantnim vrednostima p i q, a u drugom — pri konstantnim q i $\dot{q}$.

Ovaj rezultat može biti predstavljen i u drugom aspektu. Neka Lagrange-ova funkcija ima oblik $L = L_0 + L'$, gde L' predstavlja mali dodatak osnovnoj funkciji L_0. Tada je odgovarajuća dopuna u Hamilton-ovoj funkciji $H = H_0 + H'$ vezana sa L' pomoću relacija:

$$(H')_{p,\,q} = -(L')_{\dot{q},\,q}. \tag{40,7}$$

Napominjemo, da u transformaciji od (40,1) na (40,3) nismo pisali član sa dt, koji uzima u obzir mogućnu eksplicitnu zavisnost Lagrange-ove funkcije od vremena, pošto bi poslednji u datom aspektu igrao samo ulogu parametra, koji nema veze sa izvršenom transformacijom. Analogno formuli (40,6) parcijalni izvodi po vremenu od L i od H su vezani relacijom:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q}. \tag{40,8}$$

Zadaci

1. Naći Hamilton-ovu funkciju za jednu materijalnu tačku u Descartes-ovim, cilindarskim i sfernim koordinatama.

Odgovor: U Descartes-ovim koordinatama x, y, z, biće:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

U cilindarskim koordinatama r, φ, z iznosi:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \varphi, z).$$

U sfernim koordinatama r, θ, φ, je:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi,)$$

2. Naći Hamilton-ovu funkciju čestice u sistemu referencije koji ravnomerno rotira.

Rešenje. Ako u jedn. za energiji (39,11) izrazimo brzinu $\vec{v}$ pomoću impulsa $\vec{p}$ prema (39,10), dobivamo:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \vec{\Omega}(\vec{r} \times \vec{p}) + U.$$

§ 41. Routh-ova funkcija

U izvesnim slučajevima se može pokazati kao celishodno, pri prelazu na nove promenljive, da se ne zamene pomoću impulsa sve generalisane brzine već samo neke od njih. Odgovarajuća transformacija je u potpunosti analogna onoj koja je izvršena u prethodnom paragrafu.

Radi prostijeg pisanja formula pretpostavićemo u početku da postoje svega dve koordinate, koje ćemo označiti kao q i ξ, i izvršimo transformaciju od promenljivih $q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}$ na promenljive $q, \xi, p, \dot{\xi}$, gde je p generalisani impuls, koji odgovara koordinati q.

Diferencijal Lagrange-ove funkcije $L = (q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$ iznosi:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi} = \dot{p}\,dq + p\,d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi},$$

odakle dobivamo

$$d(L - p\dot{q}) = \dot{p}\,dq - \dot{q}\,dp + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}.$$

Uvešćemo funkciju (takozvanu *Routh-ovu funkciju*):

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L, \tag{41,1}$$

u kojoj je brzina $\dot{q}$ izražena preko impulsa p pomoću jednakosti $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$.

Diferencijal iznosi:

$$dR = -\dot{p}\,dq + \dot{q}\,dp - \frac{\partial L}{\partial \xi}\,d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\,d\dot{\xi}. \tag{41,2}$$

Odavde izlazi da je:

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}, \tag{41,3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{41,4}$$

Zamenjujući poslednje jednakosti u Lagrange-ovu jednačinu za koordinatu ξ, dobivamo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \tag{41,5}$$

Na taj način, Routh-ova funkcija postaje Hamilton-ova u odnosu na koordinatu q [jednačine (41,3)] i Lagrange-ova, u odnosu na koordinatu ξ [jednačina (41,5)].

Prema opštoj definiciji energija sistema iznosi:

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L = p\dot{q} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L.$$

Njeno izražavanje preko Routh-ove funkcije dobiva se zamenom ovde (41,1) i (41,4):

$$E = R - \dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{41,6}$$

Generalisanje dobivenih formula u slučaju kada postoji po nekoliko koordinata q i ξ je očigledno.

Primena Routh-ove funkcije može biti celishodna, specijalno, pri postojanju cikličnih koordinata. Ako su koordinate q ciklične, onda one ne ulaze eksplicitno u Lagrange-ovu funkciju, a zbog toga i u Routh-ovu funkciju, tako da će poslednja biti samo funkcija od $p, \xi, \dot{\xi}$. Ali impulsi p, koji odgovaraju cikličnim koordinatama su konstantni (ovo izlazi i iz druge od jednačina (41,3), koja u tom smislu ne daje ništa novo). Posle zamene impulsa p njihovim datim konstantnim vrednostima, jednačine (41,5)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \xi}$$

pretvaraju se u jednačine koje sadrže samo koordinate ξ, tako da se ciklične koordinate samim tim u potpunosti isključuju. Ako su te jednačine rešene i nađene funkcije (t), onda zamenjujući ih na desnoj strani jednačina:

$$\dot{q} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial p},$$

nalazimo direktnim integriranjem funkcije $q(t)$.

Zadatak

Naći Routh-ovu funkciju za simetričnu čigru u spoljašnjem polju $U(\varphi, \theta)$, eliminišući cikličnu koordinatu ψ (ψ, φ, θ su Euler-ovi uglovi).

Rešenje. Lagrange-ova funkcija biće:

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3'}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - U(\varphi, \theta)$$

(uporedi zadatak 1 § 35). Routh-ova funkcija je:

$$R = p_\psi \dot{\psi} - L = \frac{p_\psi^2}{2I_3'} - p_\psi \dot{\varphi}\cos\theta - \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + U(\varphi, \theta).$$

Prvi član u tom izrazu predstavlja konstantu koja može biti izostavljena.

§ 42. Poisson-ove zagrade

Neka je $f(p, q, t)$ neka funkcija koordinata, impulsa i vremena. Uzećemo njen totalni izvod po vremenu

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

Zamenjujući ovde umesto $\dot{q}_k$ i $\dot{p}_k$ njihove izraze iz Hamilton-ovih jednačina (40,4), dobićemo:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H \cdot f\}, \qquad (42,1)$$

gde je uvedeno označavanje:

$$\{Hf\} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right). \qquad (42,2)$$

Izraz (42,2) se naziva *Poisson-ove zagrade* za veličine H i f.

Takve funkcije dinamičkih promenljivih, koje ostaju konstantne pri kretanju sistema, nazivaju se, kao što znamo, integrali kretanja. Vidimo iz (42,1), da se uslov, da veličina f bude integral kretanja $\left(\frac{df}{dt} = 0\right)$, može napisati u obliku:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\} = 0. \qquad (42,3)$$

Ako integral kretanja ne zavisi od vremena eksplicitno, onda je:

$$\{Hf\} = 0, \tag{42,4}$$

tj. njegove Poisson-ove zagrade sa Hamilton-ovim funkcijama moraju biti jednaka nuli.

Za ma koji par veličina f i g, Poisson-ove zagrade se definišu analogno izrazu (42,2):

$$\{fg\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \tag{42,5}$$

Poisson-ove zagrade imaju sledeća svojstva, koja se lako izvode iz definicije.

Ako izmenimo red funkcija, onda zagrade menjaju znak; ako je jedna od funkcija konstantna (c), onda su zagrade jednake nuli:

$$\{fg\} = -\{gf\}, \tag{42,6}$$

$$\{fc\} = 0. \tag{42,7}$$

Dalje je:

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1 g\} + \{f_2 g\}, \tag{42,8}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2 g\} + f_2 \{f_1 g\}. \tag{42,9}$$

Ako uzmemo parcijalni izvod izraza (42,5) po vremenu, dobivamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} g\right\} + \left\{f \frac{\partial g}{\partial t}\right\}. \tag{42,10}$$

Ako se jedna od funkcija f ili g poklapa sa jednim od impulsa ili koordinata, onda se Poisson-ove zagrade jednostavno svode na parcijalni izvod:

$$\{f q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \tag{42,11}$$

$$\{f p_k) = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \tag{42,12}$$

Formulu (42,11), na primer, dobićemo, ako stavimo u (42,5) da je $g = q_k$; cela suma se pri tom svodi na jedan član, tako da je $\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}$, a $\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0$.

Ako u (42,11) i (42,12) stavimo da je funkcija f jednaka q_i i p_i, dobivamo specijalno:

$$\{q_i q_k\} = 0, \qquad \{p_i p_k\} = 0, \qquad \{p_i q_k\} = \delta_{ik}. \tag{42,13}$$

Između Poisson-ovih zagrada, koje su sastavljene od tri funkcije postoji relacija

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0; \tag{42,14}$$

koja se naziva *Jacobi-jeva identičnost.*

Za njeno dokazivanje napominjemo sledeće. Prema definiciji (42,5) Poisson-ove zagrade $\{fg\}$ su bilinearne homogene funkcije izvoda prvog reda veličina f i g. Zbog toga, na primer, zagrade $\{h\{fg\}\}$ predstavljaju linearnu homogenu funkciju izvoda drugog reda od f i g. Cela leva strana jednačine (42,14) je linearna homogena funkcija drugih izvoda od sve tri funkcije f, g, h. Sabraćemo zajedno članove koji sadrže druge izvode od f. Prva zagrada takve članove ne sadrži — u njoj su samo prvi izvodi od f. Sumu drugih i trećih zagrada napisaćemo u simboličnom obliku uvodeći linearne diferencijalne operatore D_1 i D_2 prema relacijama:

$$D_1(\varphi) = \{g\varphi\}, \qquad D_2(\varphi) = \{h\varphi\}.$$

Tada je

$$\{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = \{g\{hf\}\} - \{h\{gf\}\} = D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = \\ = (D_1 D_2 - D_2 D_1) f.$$

Može se lako videti, međutim, da takva kombinacija linearnih diferencijalnih operatora ne može sadržati druge izvode od f. U samoj stvari, opšti oblik linearnih diferencijalnih operatora je:

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

gde su ξ_k i η_k proizvoljne funkcije promenljivih $x_1, x_2, \cdots$. Tada će biti:

$$D_1 D_2 = \sum_{k,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_2 D_1 = \sum_{k,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

a razlika tih proizvoda

$$D_1 D_2 - D_2 D_1 = \sum_{k,l} \left(\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}$$

je ponovo operator, koji sadrži samo jednokratno diferenciranje. Na taj način, na levoj strani jednačine (42,14) uzajamno se skraćuju svi članovi sa drugim izvodima od f, a kako se to isto odnosi, očigledno, i na funkcije g i h onda i ceo izraz identično postaje jednak nuli.

Važno svojstvo Poisson-ovih zagrada sastoji se u tome: ako su f i g dva integrala kretanja, onda su zagrade formirane od njih, takođe integrali kretanja

$$\{fg\} = \text{const.} \qquad (42,15)$$

(takozvana *Poisson-ova teorema*).

Dokaz ove teoreme je sasvim jednostavan, ako f i g ne zavise eksplicitno od vremena. Ako u Jacobi-jevu identičnost stavimo da je $h = H$, dobićemo:

$$\{H\{fg\}\} + \{f\{gH\}\} + \{g\{Hf\}\} = 0.$$

Odavde je očigledno, ako su $\{Hg\} = 0$ i $\{Hf\} = 0$, onda je i $\{H\{fg\}\} = 0$, što je i trebalo dokazati.

Ako pak integrali kretanja f i g zavise eksplicitno od vremena, onda ćemo na osnovu (42,1) napisati:

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \frac{\partial}{\partial t}\{fg\} + \{H\{fg\}\}.$$

Koristeći formulu (42,10) i zamenjujući zagradu $\{H\{fg\}\}$ sa dve druge, pomoću Jacobi-jeve identičnosti, dobićemo:

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} g\right\} + \left\{f \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{f\{gH\}\} - \{g\{Hf\}\} =$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{Hg\}\right\}$$

ili:

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \left\{\frac{df}{dt} g\right\} + \left\{f \frac{dg}{dt}\right\}, \tag{42,16}$$

odakle je očigledno dokazana Poisson-ova teorema u opštem slučaju.

Razumljivo, primenjujući Poisson-ovu teoremu nećemo uvek dobiti nove integrale kretanja, jer je njihov broj uopšte ograničen ($2s - 1$, gde je s – broj stepena slobode). U nekim slučajevima možemo dobiti trivijalan rezultat — Poisson-ove zagrade se svode na konstantu. U drugim slučajevima ponovo se može ispostaviti da je dobiveni integral jednostavno funkcija prvobitnih integrala f i g. Ako ne važi ni jedan ni drugi slučaj, onda Poisson-ove zagrade daju novi integral kretanja.

Zadaci

1. Odrediti Poisson-ove zagrade koje su sastavljene od Descartes-ovih komponenata impulsa $\vec{p}$ i momenta impulsa $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ materijalne čestice.

Rešenje. Pomoću formule (42,12) nalazimo:

$$\{M_x p_y\} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(y p_z - z p_y) = -p_z$$

analogno još dve formule:

$$\{M_x p_x\} = 0, \qquad \{M_x p_z\} = p_y.$$

Ostale zagrade se odavde dobivaju cikličkom permutacijom indeksa x, y, z.

2. Odrediti Poisson-ove zagrade, koje su sastavljene od komponenata $\vec{M}$.

Rešenje. Direktno izračunavanje prema formuli (42,5) daje:

$$\{M_x M_y\} = -M_z, \qquad \{M_y M_z\} = -M_x, \qquad \{M_z M_x\} = -M_y.$$

Kako su impulsi i koordinate različitih čestica uzajamno nezavisne promenljive, to je lako videti da formule koje su dobivene u zadacima 1 i 2 važe i za totalne impulse i moment ma kog sistema čestica.

3. Pokazati da je

$$\{\varphi M_z\} = 0,$$

gde je φ ma koja skalarna funkcija koordinata i impulsa čestice.

Rešenje. Skalarna funkcija može da zavisi od komponenata vektora $\vec{r}$ i $\vec{p}$ samo u kombinacijama $\vec{r}^2 \cdot \vec{p}^2, \vec{r} \cdot \vec{p}$. Zbog toga je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \varphi}{\partial (\vec{r}^2)} 2\vec{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\vec{p} \cdot \vec{r})} \vec{p}$$

i analogno za $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}}$. Tražena relacija se proverava direktnim izračunavanjem prema formuli (42,5) uzimajući u obzir navedena pravila diferenciranja.

4. Pokazati da je

$$\{\vec{f} M_z\} = \vec{n} \times \vec{f},$$

gde je $\vec{f}$ vektorska funkcija koordinata i impulsa čestice, a $\vec{n}$ je jedinični vektor u pravcu z-ose.

R e š e n j e. Proizvoljni vektor $\vec{f}(\vec{r}, \vec{p})$ može se napisati u obliku: $\vec{f} = \vec{r}\varphi_1 + \vec{p}\varphi_2 + (\vec{r} \times \vec{p})\varphi_3$, gde su $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ skalarne funkcije. Tražena relacija se proverava direktnim izračunavanjem pomoću formula (42,9), (42,11) i (42,12) i formule, koja je navedena u zadatku 3.

§ 43. Dejstvo kao funkcija koordinata

Pri formulisanju principa najmanjeg dejstva posmatrali smo integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{43,1}$$

koji je uzet po trajektoriji između dva data položaja $q^{(1)}$ i $q^{(2)}$, koje sistem zauzima u datim momentima t_1 i t_2.

Pri variranju dejstva, upoređivane su vrednosti ovog integrala za bliske trajektorije sa istim vrednostima $q(t_1)$ i $q(t_2)$. Samo jedna od ovih trajektorija odgovara stvarnom kretanju i to ona za koju je integral S minimalan.

Posmatraćemo sada pojam dejstva u drugom aspektu. Naime, posmatraćemo S kao veličinu koja karakteriše kretanje po stvarnim trajektorima i uporedićemo vrednosti koje ona ima za trajektorije koje imaju zajednički početak $q(t_1) = q^{(1)}$, ali prolaze u momentu t_2 kroz različite položaje. Drugim rečima, posmatraćemo integral dejstva za stvarne trajektorije kao funkciju vrednosti koordinata u gornjoj granici integriranja.

Varijacija dejstva pri prelazu od jedne trajektorije na drugu, koja je njoj bliska, data je (pri jednom stepenu slobode) izrazom (2,5):

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\, dt.$$

Kako trajektorije stvarnog kretanja zadovoljavaju Lagrange-ove jednačine, onda integral koji ovde stoji, postaje jednak nuli. U prvom članu stavićemo za donju granicu $\delta q(t_1) = 0$, a vrednost $\delta q(t_2)$ jednostavno ćemo označiti sa δq. Ako takođe zamenimo $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ sa p, definitivno dobivamo $\delta S = p\,\delta q$, ili, u opštem slučaju sa ma kojim brojem stepena slobode:

$$\delta S = \sum_i p_i\,\delta q_i. \tag{43,2}$$

Iz ove relacije izlazi da su parcijalni izvodi dejstva po koordinatama jednaki odgovarajućim impulsima

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \tag{43,3}$$

Analogno možemo dejstvo shvatiti kao eksplicitnu funkciju vremena, smatrajući da trajektorije, koje počinju u datom momentu t_1 u datom položaju $q^{(1)}$, ali koje se završavaju u položaju $q^{(2)}$ u različitim momentima $t_2 = t$. U tom smislu shvaćen parcijalni izvod $\frac{\partial S}{\partial t}$ možemo naći odgovarajućim variranjem integrala. Međutim, jednostavnije je, da se koristi već poznata formula (43,3) postupajući na sledeći način.

Prema samoj definiciji dejstva, njegov totalni izvod po vremenu duž trajektorije iznosi:

$$\frac{dS}{dt} = L. \tag{43,4}$$

S druge strane, smatrajući S kao funkciju koordinata i vremena, u ranije opisanom smislu, i koristeći formulu (43,3), imaćemo:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Upoređujući oba izraza, nalazimo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i,$$

ili definitivno:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \tag{43,5}$$

Formule (43,3) i (43,5) možemo zajedno napisati u obliku izraza:

$$dS = \sum_i p_i \, dq_i - H \, dt \tag{43,6}$$

za totalni diferencijal dejstva kao funkcije koordinata i vremena u gornjoj granici integriranja izraza (43,1). Pretpostavimo sada, da se menjaju koordinate (i vreme) ne samo kraja već i početka kreta ja. Očigledno je da će odgovarajuća promena S biti data razlikom izraza (43,6) na oba kraja, ti.

$$dS = \Sigma p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \Sigma p_i^{(1} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)}. \tag{43,7}$$

Ova relacija već sama po sebi pokazuje, da ako ne bi bilo spoljašnjeg dejstva na sistem u vreme kretanja, njegovo konačno stanje ne može biti proizvoljna funkcija početnog; mogućna su samo takva kretanja za koja je izraz na desnoj strani jednakosti (43,7) totalni diferencijal. Na taj način već sama činjenica postojanja principa najmanjeg dejstva, nezavisno od konkretnog oblika Lagrange-ove funkcije, nameće na ukupnost mogućnih kretanja određena ograničenja. Specijalno, ispostavlja se kao mogućno ustanoviti niz opštih zakonitosti (koje ne zavise od oblika postojećih spoljašnjih polja) za snopove čestica, koje se razleću iz datih tačaka prostora, Izračunavanje ovih zakonitosti sačinjava predmet takozvane *geometrijske optike*[1].

Interesantno je napomenuti da se Hamilton-ove jednačine mogu izvesti formalno iz uslova minimalnosti dejstva, ako napišemo poslednje na osnovu (43,6) u obliku integrala

$$S = \int \left(\sum_i p_i \, dq_i - H \, dt \right) \tag{43,8}$$

i posmatramo koordinate i impulse kao nezavisno varirane veličine. Radi kratkoće pretpostavićemo ponovo da postoji svega jedna koordinata (i jedan impuls); napisaćemo varijaciju dejstva

$$\delta S = \int \left\{ \delta p \, dq + p \, d \, \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \, dt - \frac{\partial H}{\partial q} \delta p \, dt \right\}.$$

Transformacija drugog člana (parcijalno integriranje) daje:

$$\delta S = \int \delta q \left(dp - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + p \, \delta q - \int \delta q \left(dq + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right).$$

Na granicama integriranja treba da stavimo da je $\delta q = 0$, tako da integrirani član otpada. Izraz koji ostaje može biti jednak nuli pri proizvolnjim vrednostima nezavisnih δp i δq samo pri uslovu izjednačenja sa nulom podintegralnih izraza u svakom od dva integrala:

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \qquad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt,$$

tj. posle deljenja sa dt dobićemo Hamilton-ove jednačine.

§ 44. Maupertuis-ov princip

Pomoću principa najmanjeg dejstva definiše se u potpunosti kretanje mehaničkog sistema: rešenjem jednačina kretanja koje proizlaze iz tog principa mogu se naći kako oblik trajektorije, tako i zavisnost položaja na trajektoriji od vremena.

Ako se ograničimo na uži problem o definiciji samo trajektorije (ostavljajući po strani vremenski deo zadatka), ispostavlja se kao mogućno ustanoviti za tu svrhu uprošćeni oblik principa najmanjeg dejstva.

Pretpostavimo da Langrange-ova funkcija, a s njom i Hamilton-ova, ne sadrže vreme u eksplicitnom obliku, tako da se energija sistema održava:

$$H(p, q) = E = \text{const}.$$

Nećemo uporediti u principu najmanjeg dejstva sva virtualna kretanja sistema (između njegova dva data položaja), već samo ona, koja zadovoljavaju zakon održanja energije sa datom vrednošću E. Minimalnost integrala u odnosu na takvo variranje je iako i nedovoljan, ipak neophodan, uslov minimuma dejstva.

[1] Vidi „Teorija polja“, t. 2.

Ako dejstvo napišemo u obliku (43,8) i u njemu zamenimo funkciju $H(p, q)$ konstantom E, dobićemo:

$$S = \int \sum_i p_i \, dq_i - E(t - t_0) \tag{44,1}$$

(označili smo početni moment kretanja sa t_0, a krajnji — jednostavno sa t). Prvi član ovog izraza

$$S_0 = \int \sum_i p_i \, dq_i \tag{44,2}$$

se ponekad naziva *redukovano dejstvo.*

Variranje dejstva pri konstantnoj energiji se očigledno svodi na variranje redukovanog dejstva. Da bismo se koristili takvim varijacionim principom, neophodno je prethodno izraziti impulse, a sa njima i sav podintegralni izraz u (44,2) pomoću kordinata q i njihovih diferencijala dq. U tu svrhu treba koristiti jednačine

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right), \tag{44,3}$$

koje predstavljaju definiciju impulsa, i jednačinu zakona održanja energije

$$E\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = E. \tag{44,4}$$

Ako iz poslednje jednačine izrazimo diferecijal dt pomoću koordinata q i njihovih diferencijala dq i zamenimo u formuli (44,3) izrazićemo impulse pomoću q i dq, pri čemu će energija E igrati ulogu parametra. Na taj način dobiveni varijacioni princip definiše trajektoriju sistema; ovaj princip se obično naziva *Maupertuis-ov princip* (mada su njegovu tačnu formulaciju dali Euler i Lagrange).

Izvešćemo navedena dejstva u eksplicitnom obliku za običan oblik Lagrange-ove funkcije (5,5) kao razlike kinetičke i potencijalne energije:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q).$$

Pri tom su impulsi:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_k,$$

a energija iznosi:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q).$$

Iz poslednje jednačine imamo:

$$dt = \sqrt{\frac{\Sigma a_{ik} \, dq_i \, dq_k}{2(E - U)}} \tag{44,5}$$

i zamenjujući ovaj izraz u

$$\sum_i p_i \, dq_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{dq_k}{dt} dq_i,$$

nalazimo redukovano dejstvo u obliku

$$S_0 = \int \sqrt{2(E - U) \sum_{i,k} a_{ik}\, dq_i\, dq_k}. \tag{44,6}$$

Specijalno, za jednu materijalnu tačku biće kinetička energija:

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2,$$

(gde je m masa čestice, a dl je element dužine trajektorije) i varijacioni princip za određeni oblik trajektorije ima oblik

$$\delta \int \sqrt{2m(E - U)}\, dl = 0, \tag{44,7}$$

gde se integral uzima između dve date tačke prostora. U takvom obliku ga je prikazao Jacobi.

Pri slobodnom kretanju čestice je $U = 0$, i (44,7) daje trivijalan rezultat

$$\delta \int dl = 0,$$

tj. čestica se kreće po najkraćem putu — po pravoj.

Vratimo se ponovo na izraz za dejstvo (44,1) i izvršimo ovog puta njegovo variranje po parametru E. Uslov da je takva varijacija dejstva jednaka nuli, daje izraz:

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} \delta E - (t - t_0)\, \delta E = 0$$

ili

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0. \tag{44,8}$$

Za redukovano dejstvo u obliku (44,6) ova jednakost dovodi do relacije

$$\int \sqrt{\frac{\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k}{2(E - U)}} = t - t_0, \tag{44,9}$$

koja ne predstavlja ništa drugo do integral jednačine (44,5). Zajedno sa jednačinom trajektorije, ona u potpunosti definiše kretanje.

Zadatak

Iz varijacionog principa (44,7) dobiti diferencijalnu jednačinu trajektorije.

Rešenje. Ako izvršimo variranje, imaćemo

$$\delta \int \sqrt{E - U}\, dl = -\int \left\{ \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \frac{\delta \vec{r}}{2\sqrt{E - U}} dl - \sqrt{E - U} \frac{d\vec{r}}{dl} d\delta\vec{r} \right\}.$$

U drugom članu je uzeto u obzir da je $dl^2 = d\vec{r}^2$ i zbog toga je $dl\, d\delta l = d\vec{r}\, d\delta\vec{r}$; ako u ovom članu izvršimo parcijalno integriranje i izjednačimo sa nulom koeficijent uz $\delta\vec{r}$ u podintegralnom izrazu dobićemo diferencijalnu jednačinu trajektorije

$$2\sqrt{E-U}\frac{d}{dl}\left(\sqrt{E-U}\frac{d\vec{r}}{dl}\right)=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}.$$

Ako rastavimo izvod na levoj strani jednačine i uvedemo silu $\vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$, ova jednačina se može prikazati u obliku:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dl^2}=\frac{\vec{F}-(\vec{F}\cdot\vec{t})\vec{t}}{2(E-U)},$$

gde je $\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{dl}$ jedinični vektor tangente na trajektoriju. Razlika $\vec{F}-(\vec{F}\vec{t})\vec{t}$ je komponenta sile $\vec{F}_n$, koja je normalna na trajektoriji. Izvod $\frac{d^2\vec{r}}{dl^2}=\frac{d\vec{t}}{dl}$, kao što je poznato iz diferencijalne geometrije, iznosi $\frac{\vec{n}}{R}$, gde je R poluprečnik krivine trajektorije, a $\vec{n}$ je jedinični vektor glavne normale na njoj. Zamenom takođe $E-U$ sa $\frac{mv^2}{2}$, dobićemo:

$$\vec{n}\frac{mv^2}{R}=\vec{F}_n$$

u vezi sa poznatim izrazom za normalno ubrzanje pri kretanju po krivoj trajektoriji.

§ 45. Kanonske transformacije

Izbor generalisanih koordinata q nije ograničen nikakvim uslovima; one mogu biti ma koje veličine (kojih je s) koje jednoznačno određuju položaj sistema u prostoru. Formalni oblik Lagrange-ovih jednačina (2,6) ne zavisi od ovog izbora i u tom smislu se može reći da su Lagrange-ove jednačine invarijante u odnosu na transformaciju koordinata $q_1, q_2, \cdots$ na ma koje druge nezavisne veličine Q_1, Q_2. Nove koordinate Q su funkcije starih koordinata q, pri čemu dopuštamo i njihov takav izbor pri kome ta veza sadrži u eksplicitnom obliku takođe i vreme, tj. reč je o transformacijama oblika:

$$Q_i=Q_i(q,t) \tag{45,1}$$

(nazivaju se ponekad *tačkaste transformacije*).

Uporedo sa Lagrange-ovim jednačinama pri transformaciji (45,1) zadržavaju, razumljivo, svoj oblik (40,4) i Hamilton-ove jednačine. Poslednje, međutim, dopuštaju u stvari znatno šire klase transformacija. Ova okolnost prirodno je vezana sa činjenicom da u Hamilton-ovom metodu impulsi p igraju uporedo sa koordinatima q ulogu ravnopravnih nezavisnih promenljivih. Zbog toga pojam transformacije može biti proširen tako da u sebe uključi transformaciju svih $2s$ nezavisno promenljivih p i q na nivo promenljive P i Q prema formulama:

$$Q_i=Q_i(p,q,t), \qquad P_i=P_i(p,q,t). \tag{45,2}$$

Takvo proširenje klasa dozvoljenih transformacija je jedna od bitnih preimućstava Hamilton-ovog metoda mehanike.

Međutim, pri proizvoljnim transformacijama oblika (45,2) jednačine kretanja nikad ne zadržavaju svoj kanonski oblik. Izvešćemo sada uslove, koje mora zadovoljiti transformacija da bi jednačine kretanja sa novim promenljivim P i Q imale oblik:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \tag{45,3}$$

sa nekom novom Hamilton-ovom funkcijom $H'(P, Q)$. Takve transformacije se nazivaju *kanonske*.

Formulama za kanonske transformacije se može prići sledećim putem. Na kraju § 43. je bilo pokazano da se Hamilton-ove jednačine mogu dobiti iz principa najmanjeg dejstva, koji je predstavljen u obliku:

$$\delta \int \Big(\sum_i p_i \, dq_i - H \, dt \Big) = 0 \tag{45,4}$$

(pri čemu se variraju nezavisno sve koordinate i impulsi). Za to da bi nove promenljive P i Q takođe zadovoljile Hamilton-ove jednačine, za njih mora takođe važiti princip najmanjeg dejstva

$$\delta \int \Big(\sum_i P_i \, dQ_i - H' \, dt \Big) = 0. \tag{45,5}$$

Ali principi (45,4) i (45,5) su uzajamno ekvivalentni samo pri uslovima da se njihovi podintegralni izrazi razlikuju samo za totalni diferencijal proizvoljne funkcije F koordinata, impulsa i vremena; tada razlika između oba integrala neće biti suštinska pri variranju konstante (razlika vrednosti F na granicama integriranja). Na taj način mora biti:

$$\Sigma p_i \, dq_i - H \, dt = \Sigma P_i \, dQ_i - H' \, dt + dF.$$

Svaka kanonska transformacija se karakteriše svojom funkcijom F, koja sa naziva *izvodna funkcija* (funkcija generatrisa) transformacije.

Ako dobivenu relaciju prepišemo u obliku:

$$dF = \Sigma p_i \, dq_i - \Sigma P_i \, dQ_i + (H' - H) \, dt, \tag{45,6}$$

vidimo da je:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}; \tag{45,7}$$

pri tom se pretpostavlja da je ta izvodna funkcija data kao funkcija starih i novih koordinata (i vremena): $F = F(q, Q, t)$. Pri datoj funkciji F formule (45,7) uspostavljaju vezu među starim (p, q) i novim (P, Q) promenljivim, a takođe daju izraz za novu Hamilton-ovu funkciju.

Može se ispostaviti kao zgodno, da se izvodna funkcija ne izrazi pomoću promenljivih q i Q, već pomoću stare koordinate q i novih impulsa P. Za izvođenje formula kanonskih transformacija, u tom slučaju treba izvršiti u relaciji (45,6) odgovarajuću Legendre-ovu transformaciju. Naime, napisaćemo je u obliku:

$$d(F + \Sigma P_i Q_i) = \Sigma p_i\, dq_i + \Sigma Q_i\, dP_i + (H' - H)\, dt.$$

Izraz, koji stoji pod znakom diferencijala na levoj strani jednačine, je definisan (izražen) preko promenljivih q i P, i on je nova izvodna funkcija. Označimo ga sa $\Phi\,(q,\ P,\ t)$ pa ćemo imati[1]:

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{45,8}$$

Analogno možemo preći na formule kanonskih transformacija, koje su izražene pomoću izvodnih funkcija, koje zavise od promenljivih p i Q ili p i P.

Napominjemo da se veza među novom i starom Hamilton-ovom funkcijom uvek izražava na isti način: razlika $H' - H$ je data parcijalnim izvodom po vremenu izvodne funkcije. Specijalno, ako poslednja ne zavisi od vremena, onda je $H' = H$. Drugim rečima, u tom slučaju za dobivanje nove Hamilton-ove funkcije dovoljno je zameniti u H veličine p i q, izražene pomoću novih promenljivih P i Q.

Širina kanonskih transformacija u znatnoj meri lišava u Hamilton-ovoj metodi pojam generalisanih koordinata i impulsa njihovog prvobitnog smisla. Kako transformacije (45,2) vezuju svaku od veličina P i Q kako sa koordinatama q, tako i sa impulsima p, to promenljive Q već nemaju smisao čisto prostornih koordinata. Razlika između obe grupe promenljivih postaje u osnovi nomenklaturni problem. Ova okolnost se veoma očigledno manifestuje (pojavljuje), na primer, u transformacijama $Q_i = p_i$ i $P_i = -q_i$[2], ne menjajući eksplicitno kanonski oblik jednačina i svodi se jednostavno na uzajamnu zamenu imena koordinata i impulsa.

S obzirom na ovu uslovljenost terminologije, promenljive p i q u Hamiton-ovom metodu često se nazivaju jednostavno *kanonske konjugovane veličine.*

Uslov kanonske konjugovanosti se može izraziti pomoću Poisson-ovih zagrada. U tom cilju dokazaćemo prethodno opštu teoremu o invarijantnosti Poisson-ovih zagrada u odnosu na kanonske transformacije.

Naka su $\{fg\}_{p,q}$ Poisson-ove zagrade veličina f i g u kojoj se diferenciranje vrši po promenljivim p, q, a $\{fg\}_{P,Q}$ su Poisson-ove zagrade tih istih veličina, koje su diferencirane po kanonskim promenljivim P, Q. Tada je:

$$\{fg\}_{p,q} = \{fg\}_{P,Q}. \tag{45,9}$$

U ispravnost toga odnosa se možemo uveriti direktnim izračunavanjem uz korišćenje formula kanonske transformacije. Međutim, može se to postići i bez izračunavanja pomoću sledećeg rezonovanja.

---

[1] Napominjemo da, ako uzmemo izvodnu funkciju u obliku

$$\Phi = \sum_i f_i\,(q, t)\, P_i,$$

(gde su f_i proizvoljne funkcije) dobivamo transformaciju, pri kojoj su nove koordinate $Q_i = f_i\,(q,\ t)$, tj. izražavaju se samo pomoću starih koordinata (ali ne impulsa). Ovo su tačkaste transformacije, koje su prirodno specijalan slučaj kanonskih transformacija.

[2] Njima odgovara izvodna funkcija $F = \Sigma\, q_i\, Q_i$.

Napominjemo, pre svega, da u kanonskim transformacijama (45,7) ili (45,8) vreme igra ulogu parametra. Zbog toga, ako dokažemo teoremu (45,9) za veličine koje ne zavise eksplicitno od vremena, onda će ona važiti i u opštem slučaju. Sada ćemo čisto formalno posmatrati veličinu g kao Hamilton-ovu funkciju nekog fiktivnog sistema. Tada je prema formuli (42,1) $\{fg\}_{p,q} = \frac{df}{dt}$. Ali izvod $\frac{df}{dt}$ je veličina koja može zavisiti samo od svojstva kretanja (našeg fiktivnog sistema) kao takvog, a ne od ovog ili onog izbora promenljivih. Zbog toga se i Poisson-ove zagrade $\{fg\}$ ne mogu promeniti pri prelazu od jednih kanonskih promenljivih na druge.

Iz formula (42,13) i teoreme (44,9), dobićemo:

$$\{Q_i Q_k\}_{p,q} = 0, \qquad \{P_i P_k\}_{p,q} = 0, \qquad \{P_i Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}. \tag{45,10}$$

Ovo su napisani uslovi pomoću Poisson-ovih zagrada, koje moraju zadovoljiti nove promenliive da bi transformacija $p, q \to P, Q$ bila kanonska.

Interensantno je istaći da se promena veličina p, q pri samom kretanju može smatrati kao kanonska transformacija. Smisao navedene konstatacije sastoji se u sledećem. Neka su q_t, p_t vrednosti kanonskih promenljivih u momentu t, a $q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$ njihove vrednosti u drugom momentu $t+\tau$. Poslednje su njene funkcije od prvih (i od veličine intervala τ kao od parametra)

$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, \tau), \qquad p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, \tau).$$

Ako ove formule posmatramo kao transformaciju promenljivih q_t, p_t na promenljive $q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$, onda će ova transformacija biti kanonska; stvarno, veličine $q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$ zadovoljavaju kanonske jednačine kretanja u takvom istom stepenu kao i polazne promenljive q_t, p_t, od kojih se one razlikuju samo početkom računanja vremena.

§ 46. Liouville-ova teorema

Za geometrijsku interpretaciju mehaničkih pojava često se koristi pojam o takozvanom *faznom prostoru* kao i prostoru $2s$ dimenzija, na čije koordinatne ose se nanose vrednosti s generalisanih koordinata i s impulsa datog mehaničkog sistema. Svaka tačka toga prostora odgovara određenom stanju sistema. Pri kretanju sistema fazna tačka, koja ga prikazuje, opisuje u faznom prostoru odgovarajuću liniju koju nazivamo trajektorijom.

Proizvod diferencijala

$$d\Gamma = dq_1 \cdots dq_s \, dp_1 \cdots dp_s$$

se može smatrati kao „element zapremine“ faznog prostora. Posmatraćemo sada integral $\int d\Gamma$, koji je uzet po nekoj oblasti faznog prostora i koji predstavlja njegovu zapreminu. Pokazaćemo da ta veličina ima svojstva invarijantnosti u odnosu na kanonske transformacije: ako se izvrši kanonska transformacija od promenljivih p, q na promenljive P, Q, onda su zapremine uzajamno odgovarajućih oblasti prostora p, q i P, Q jednake:

$$\int \cdots \int dq_1 \cdots dq_s \, dp_1 \cdots dp_s = \int \cdots \int dQ_1 \cdots dQ_s \, dP_1 \cdots dP_s. \tag{46,1}$$

Kako je poznato, transformacija promenljivih u višestrukom intergralu vrši se prema formuli:

$$\int \cdots \int dQ_1 \cdots dQ_s \, dP_1 \cdots dP_s = \int \cdots \int D \, dq_1 \cdots dq_s \, dp_1 \cdots dp_s,$$

gde je

$$D = \frac{\partial (Q_1, \cdots, Q_s, P_1, \cdots, P_s)}{\partial (q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots p_s)} \tag{46,2}$$

takozvani jacobijan transformacije. Zbog toga se dokaz teoreme (46,1) svodi na dokaz činjenice da je jacobijan svake kanonske transformacije jednak jedinici:

$$D = 1. \tag{46,3}$$

Koristićemo se poznatim svojstvom jacobijana, a koji dozvoljava da s njima postupamo u određenom smislu kao sa razlomcima. „Ako podelimo brojitelj i imenitelj" sa $\partial (q_1, \cdots, q_s, P_1, \cdots, P_s)$, dobićemo:

$$D = \frac{\partial (Q_1, \cdots, Q_s, P_1, \cdots, P_s)}{\partial (q_1, \cdots q_s, P_1, \cdots, P_s)} \Bigg/ \frac{\partial (q_1, \cdots q_s, p_1, \cdots, p_s)}{\partial (q_1, \cdots q_s, P_1, \cdots, P_s)}.$$

Prema drugom poznatom pravilu jacobijan, u kome u „brojitelju" i „imenitelju" figurišu iste veličine, svodi se na jacobijan od najmanjeg broja promenljivih, pri čemu pri svim diferenciranjima iste veličine koje ispadaju treba smatrati konstantnim. Zbog toga je

$$D = \frac{\left\{ \dfrac{\partial (Q_1, \cdots, Q_s)}{\partial (q_1, \cdots, p_s)} \right\}_{P = \text{const}}}{\left\{ \dfrac{\partial (p_1, \cdots, p_s)}{\partial (P_1, \cdots, P_s)} \right\}_{q = \text{const}}}. \tag{46,4}$$

Posmatraćemo jakobijan, koji stoji u brojitelju toga izraza. Prema definiciji, to je determinanta ranga s, koja je sastavljena od elemenata $\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_k}$ (element na preseku i-te vrste i k-te kolone).

Ako kanonsku transformaciju prikažemo pomoću funkcije generatrise $\Phi (q,P)$ u obliku (45,8), dobićemo:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \, \partial P_i}.$$

Na isti način nalazimo da i-ti i k-ti element determinante u imenitelju izraza (46,4) iznosi $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \, \partial P_k}$. To znači da se obe determinante razlikuju samo zamenom vrste kolona i obrnuto. Zbog toga su one jednake, tako da je odnos (46,4) jednak jedinici, što je i trebalo dokazati.

Predstavimo sada da se svaka tačka datog dela faznog prostora pomera vremenski prema jednačinama kretanja posmatranog mehaničkog sistema. Samim tim se pomera i deo kao celina. Pri tom njegova zapremina ostaje nepromenjena:

$$\int d\Gamma = \text{const.} \tag{46,5}$$

Ova konstatacija (takozvana *Liouville-ova teorema*) neposredno izlazi iz invarijantnosti fazne zapremine pri kanonskim transformacijama i iz toga, da se sama promena p i q pri kretanju može smatrati (kako je bilo navedeno na kraju prethodnog paragrafa) kao kanonska transformacija.

Potpuno analogno se može dokazati invarijantnost integrala

$$\int\int \sum_i dq_i\, dp_i,$$

$$\int\int\int\int \sum_{i \neq k} dq_i\, dp_i\, dq_k\, dp_k,$$

. . . .

u kojima se integriranje vrši po dvo-, četvoro- itd. dimenzionalnim mnogostrukostima u faznom prostoru.

§ 47. Hamilton-Jacobi-jeva jednačina

U § 43 je bio uveden pojam o dejstvu kao funkciji koordinata i vremena. Bilo je ukazano, da je parcijalni izvod te funkcije $S(q, t)$ po vremenu vezan sa Hamilton-ovom funkcijom relacijom

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0,$$

a njeni parcijalni izvodi po koordinatama se poklapaju sa impulsima. Zamenjujući s tim u vezi, impulse p u Hamilton-ovoj funkciji izvodima $\frac{\partial s}{\partial q}$, dobivamo jednačinu:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \cdots, q_S; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0, \qquad (47,1)$$

koju treba da zadovolji funkcija $S(q, t)$. Ova parcijalna jednačina je prvog reda; nazîva se *Hamilton-Jacobi-jeva jednačina.*

Uporedo sa Lagrange-ovim i kanonskim jednačinama, Hamilton-Jacobi-jeva jednačina je takođe osnova nekog opšteg metoda integriranja jednačina kretanja.

Prelazeći na izlaganje ovoga metoda, prethodno napominjemo da svaka parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda ima rešenje koje zavisi od proizvoljne funkcije; takvo rešenje se naziva opšti integral jednačine. U mehaničkim primenama, međutim, osnovnu ulogu ne igra opšti integral Hamilton-Jacobi-jeve jednačine, već takozvani *totalni integral*; tako se naziva rešenje parcijalne diferencijalne jednačine, koja sadrži toliko proizvoljnih nezavisnih konstanti koliko ima nezavisno promenljivih.

U Hamilton-Jacobi-jevoj jednačini nezavisno promenljive su vreme i koordinate. Zbog toga za sistem sa s-stepena slobode totalni integral ove jednačine treba da sadrži $(s + 1)$ proizvoljnih konstanti. Pri tom, kako funkcija S ulazi u jednačinu samo preko svojih izvoda, onda se jedna od proizvoljnih konstanti sadrži u totalnom integralu aditivno, tj. totalni integral Hamilton-Jacobi-jeve jednačine ima oblik:

$$S = f(t, q_1, \cdots, q_S; \alpha_1, \cdots, \alpha_S) + A, \qquad (47,2)$$

gde su $\alpha_1, \cdots, \alpha_S$ i A proizvoljne konstante[1].

Objasnićemo sada vezu između totalnog integrala Hamilton-Jacobi-jeve jednačine i rešenja jednačina kretanja koja nas interesuju. U tom cilju izvršićemo kanonsku transformaciju od veličina p, q na nove promenljive, pri čemu ćemo funkciju $f(t, q, \alpha)$ uzeti kao funkciju generatrisu, a veličine $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_S$ kao nove impulse. Nove koordinate ćemo označiti sa $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_S$. Kako funkcija generatrisa zavisi od starih koordinata i novih impulsa, moramo se koristiti formulama (45,8):

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \qquad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot$$

Ali kako funkcija f zadovoljava Hamilton-Jacobi-jevu jednačinu, vidimo, da nova Hamilton-ova funkcija postaje identično jednaka nuli:

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Zbog toga kanonske jednačine za nove promenljive imaju oblik: $\dot{\alpha}_i = 0$, $\dot{\beta}_i = 0$, odakle izlazi da je:

$$\alpha_i = \text{const}, \qquad \beta_i = \text{const}. \tag{47,3}$$

S druge strane, s jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

daju mogućnost da se izrazi s koordinata q pomoću vremena i $2s$ konstanti α i β. Samim tim nalazimo opšti integral jednačina kretanja.

Na taj način, rešenje zadatka o kretanju mehaničkog sistema metodom Hamilton-Jacobi-ja svodi se na sledeće operaracije.

Prema Hamilton-ovoj funkciji obrazuje se Hamilton-Jacobi-jeva jednačina i nalazi se totalni integral (47,2) te jednačine. Diferencirajući je po proizvoljnim konstantama α i izjednačujući sa novim konstantama β, dobivamo sistem od s algebarskih jednačina:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \tag{47,4}$$

---

[1] Mada nam nije neophodan opšti integral Hamilton-Jacobi-jeve jednačine, ipak ukazujemo da ga možemo naći ako je poznat totalni integral. U tom cilju veličinu A ćemo smatrati proizvoljnom funkcijom ostalih konstanti:

$$S = f(t, q_1, \cdots, q_S; \alpha_1, \cdots, \alpha_S) + A(\alpha_1, \cdots, \alpha_S).$$

Ako odavde zamenimo veličine α_i funkcijama koordinata i vremena, koje nalazimo iz s uslova $\frac{\partial S}{\partial x_1} = 0$, dobivamo opšti integral, koji zavisi od oblika proizvoljne funkcije $A(a_1 \ldots, \alpha_S)$. Stvarno, za funkciju S koja je dobivena na taj način, imaćemo:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_a + \sum_k \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_a \cdot$$

Ali veličine $\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_a$ zadovoljavaju Hamilton-Jacobi-jevu jednačinu, jer je funkcija $S(t, q; \alpha)$ prema pretpostavci totalni integral ove jednačine. Zbog toga je zadovoljavaju i izvodi $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ ·

čijim rešenjem nalazimo koordinate q kao funkcije vremena i $2s$ proizvoljnih konstanti. Zavisnost impulsa od vremena može se zatim naći prema jednačinama

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}.$$

Ako nemamo totalni integral Hamilton-Jacobi-jeve jednačine, koji zavisi od manjeg broja od s proizvoljnih konstanti, onda, iako pomoću njega ne možemo naći opšti integral jednačina kretanja, ipak možemo u nekoliko uprostiti zadatak oko njegovog nalaženja. Tako, ako je poznata funkcija S, koja sadrži jednu proizvoljnu konstantu α, onda relacija

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{const}$$

daje jednu jednačinu koja povezuje $q_i, \cdots, q_s$ i t.

Hamilton-Jacobi-jeva jednačina dobiva nešto jednostavniji oblik u slučaju kada funkcija H ne zavisi od vremena eksplicitno, tj. sistem je konzervativan. Zavisnost dejstva od vremena svodi se pri tom na komponentu $-Et$:

$$S = S_0(q) - Et \tag{47,5}$$

(vidi § 44.), i zamenom u (47,1) dobivamo za redukovano dejstvo $S_0(q)$ Hamilton-Jacobi-jevu jednačinu u obliku:

$$H\left(q_1, \cdots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \tag{47,6}$$

§ 48. Razdvajanje promenljivih

U nizu važnih slučajeva nalaženje totalnog integrala Hamilton-Jacobi-jeve jednačine može se postići takozvanim *razdvajanjem promenljivih*, čija se suština sastoji u sledećem.

Dopustimo, da ma koja koordinata, označimo je sa q_1, i njoj odgovarajući izvod $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ ulazi u Hamilton-Jacobi-jevu jednačinu samo u obliku neke kombinacije $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$, koja ne sadrži nikakvih drugih koordinata (ili vremena) i izvoda, tj. jednačina ima oblik:

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\} = 0, \tag{48,1}$$

gde q_i označava skup svih koordinata izuzev q_1.

Tražićemo u tom slučaju rešenje u obliku zbira:

$$S = S'(q_i, t) + S_1(q_1). \tag{48,2}$$

Ako ovaj izraz zamenimo u jednačinu (48,1), dobićemo:

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right\} = 0. \tag{48,3}$$

Pretpostavimo da je nađeno rešenje (48,2). Tada posle njegove zamene u jednačini (48,3) poslednja mora postati identičnost, koja važi, specijalno, za ma koje vrednosti koordinate q_1. Ali, promenom q_1 može se promeniti samo funkcija φ; zbog toga identičnost jednakosti (48,3) zahteva da funkcija φ sama po sebi bude konstantna. Na taj način, jednačina (48,3) se razlaže na dve jedačine:

$$\varphi\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1, \tag{48,4}$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\} = 0, \tag{48,5}$$

gde je α_1 proizvoljna konstanta. Prva od ovih je obična diferencijalna jednačina iz koje može biti određena funkcija $S_1(q_1)$ jednostavnim integriranjem. Posle toga ostaje parcijalna diferencijalna jednačina (48,5) ali već sa manjim brojem nezavisno promenljivih.

Ako se na taj način mogu postupno odvojiti sve s koordinate i vreme, onda se nalaženje totalnog integrala Hamilton-Jacobi-jeve jednačine svodi u celini na kvadrature. Za konzervativni sistem reč je stvarno jedino o razdvajanju s promenljivih (koordinata) u jednačini (47,6), i pri potpunom razdvajanju traženi integral jednačine ima oblik:

$$S = \sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \cdots, \alpha_S) - E(\alpha_1, \cdots, \alpha_S)\, t, \tag{48,6}$$

gde svaka od funkcija S_k zavisi samo od tih koordinata, a energija E, kao funkcija proizvoljnih konstanti $\alpha_1, \cdots, \alpha_S$ dobiva se zamenom $S_0 = \Sigma S_k$ u jednačini (47,6).

Specijalni slučaj deljenja je slučaj ciklične promenljve. Ciklična koordinata q_1 potpuno ne ulazi u eksplicitnom obliku u Hamilton-Jakobi-jevu jednačinu. Funkcija $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ se pri tom jednostavno svodi na $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ i iz jednačina (48,4) imamo jednostavno $S_1 = \alpha_1 q_1$, tako da je:

$$S = S'(q_i, t) + \alpha_1 q_1. \tag{48,7}$$

Pri tom konstanta α_1 nije ništa drugo do konstantna vrednost impulsa $p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}$, koja odgovara cikličnoj koordinati. Napominjemo, da odvajanje vremena u obliku člana $-Et$ za konzervativni sistem takođe odgovara metodu odvajanja promenljivih za „cikličnu promenljivu" t.

Na taj način, svi ranije tretirani slučajevi uprošćavanja intergriranja jednačine kretanja, koji su osnovani na korišćenju cikličnih promenljivih, obuhvaćeni su metodom razdvajanja promenljivih u Hamilton-Jacobi-jevoj jednačini. Njima se dodaje još niz slučajeva kada je razdvajanje promenljivih moguće iako koordinate nisu ciklične. Sve ovo dovodi do činjenice, da je Hamilton-Jacobi-jev metod najefikasniji metod nalaženja opšteg integrala jednačine kretanja.

Za razdvajanje promenljivih u Hamilton-Jacobi-jevoj jednačini bitan je pogodan izbor koordinata. Posmatraćemo neke primere razdvajanje promenljivih u različitim koordinatama koji mogu predstavljati fizički interes u vezi zadatka o kretanju materijalne tačke u različitim spoljašnjim poljima.

1. Sferne koordinate. Sa ovim koordinatama (r, θ, φ) Hamilton-ova funkcija biće:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi),$$

i razdvajanje promenljivih je mogućno, ako je:

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2\theta},$$

gde su $a(r)$, $b(\theta)$, i $c(\varphi)$ proizvoljne funkcije. Poslednji član u tom izrazu ne mora biti od fizičkog interesa, te zbog toga posmatramo polje oblika:

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}. \tag{48,8}$$

U ovom slučaju Hamilton-Jacobi-jeva jednačina za funkciju S_0 biće:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2 + 2mb(\theta)\right] + \frac{1}{2mr^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 = E.$$

Uzimajući u obzir cikličnost koordinate φ tražićemo rešenje u obliku:

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\theta),$$

i za funkcije $S_1(r)$ i $S_2(\theta)$ dobivamo jednačine:

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \beta,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E.$$

Integrirajući ih, definitivno dobivamo:

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta^2}{r^2}}\, dr. \tag{48,9}$$

Ovde su proizvoljne konstante p_φ, β, E. Diferencirajući po njima i izjednačujući rezultat diferenciranja sa novim konstantama, nalazimo opšte rešenje jednačina kretanja.

2. Parabolične koordinate. Prelaz na parabolične koordinate ξ, η, φ vrši se od cilindarskih koordinata (koje ćemo u ovom paragrafu označiti kao ρ, φ, z) prema formulama:

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \qquad \rho = \sqrt{\xi\eta}. \tag{48,10}$$

Kordinate ξ i η dobivaju vrednosti od nule do ∞; površine konstantnih ξ i η predstavljaju, kako se je lako uveriti, dve familije rotacionih paraboloida (sa osom z kao osom simetrije). Veza (48,10) se može još predstaviti i u drugom obliku uvodeći poluprečnik:

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta). \tag{48,11}$$

Tada je:

$$\xi = r + z, \qquad \eta = r - z. \tag{48,12}$$

Obrazovaćemo Lagrange-ovu funkciju materijalne tačke sa koordinatama ξ, η, φ. Diferencirajući izraze (48,10) po vremenu i zamenjujući u

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z)$$

(Lagrange-ova funkcija u cilindarskim koordinatama), dobićemo:

$$L = \frac{m}{8}(\xi + \eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right) + \frac{m}{2}\xi\eta\dot{\varphi}^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \tag{48,13}$$

Impulsi iznose:

$$p_\xi = \frac{m}{4\xi}(\xi + \eta)\dot{\xi}, \qquad p_\eta = \frac{m}{4\eta}(\xi + \eta)\dot{\eta}, \qquad p_\varphi = m\xi\eta\dot{\varphi},$$

i Hamilton-ova funkcija biće:

$$H = \frac{2}{m}\,\frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi + \eta} + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \varphi). \tag{48,14}$$

Fizički interensantni slučajevi razdvajanja promenljivih u tim koordinatama odgovaraju potencijalnoj energiji oblika:

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = \frac{a(r + z) + b(r - z)}{2r}. \tag{48,15}$$

Imaćemo jednačinu

$$\frac{2}{m(\xi + \eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi}\right)^2 + \eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial \eta}\right)^2\right] + \frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{a(\ ) + b(\eta)}{\xi + \eta} = E$$

Ciklična koordinata φ definiše se u obliku $p_\varphi \varphi$. Ako zatim pomnožimo jednačinu sa $m(\xi + \eta)$ i pregrupišemo članove, dobićemo:

$$2\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} + 2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial \eta}\right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = 0.$$

Ako stavimo:

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(\ ) + S_2(\eta),$$

dobićemo dve jednačine

$$2\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE(\xi) + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta,$$

$$2\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta$$

i, integrirajući ih, definitivno dobivamo:

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int\sqrt{\frac{mE}{2} + \frac{\beta}{2\xi} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}}\,d\xi + \\ + \int\sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{\beta}{2\eta} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}}\,d\eta \qquad (48,16)$$

s proizvoljnim konstantama p_φ, β, E.

3. Eliptičke koordinate. Ove koordinate ξ, η, φ uvode se prema formulama:

$$\rho = \sigma\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \qquad z = \sigma\xi\eta. \qquad (48,17)$$

Kostanta σ je parametar transformacije. Koordinata ξ dobiva vrednosti od jedinice do ∞, a koordinata η od -1 do $+1$. Geometrijski očigledniji odnosi se dobivaju ako se uvedu rastojanja r_1 i r_2 do tačaka A_1 i A_2 na z-osi sa koordinatama $z = \sigma$ i $z = -\sigma$[1]: $r_1 = \sqrt{(z-\sigma)^2 + \rho^2}$ i $r_2 = \sqrt{(z+\sigma)^2 + \rho^2}$.

Ako ovde zamenimo izraz (48,17), dobivamo:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sigma(\xi - \eta), & r_2 &= \sigma(\xi + \eta), \\ \xi &= \frac{r_2 + r_1}{2\sigma}, & \eta &= \frac{r_2 - r_1}{2\sigma}. \end{aligned}\right\} \qquad (48,18)$$

Transformišući Lagrange-ovu funkciju od cilindarskih na eliptičke koordinate, nalazimo:

$$L = \frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2 - \eta^2)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot\eta^2}{1 - \eta^2}\right) + \\ + \frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)\dot\varphi^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \qquad (48,19)$$

Odavde za Hamilton-ovu funkciju dobivamo:

$$H = \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)}\left[(\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \left(\frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2}\right)p_\varphi^2\right] + \\ + U(\xi, \eta, \varphi). \qquad (48,20)$$

---

[1] Linije konstantnih ξ predstavljaju familiju elipsoida

$$\frac{z^2}{\sigma^2\xi^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2(\xi^2 - 1)} = 1$$

sa fokusima u tačkama A_1 i A_2, a linije konstantnih η predstavljaju familiju hiperboloida koji su sa njima konfokalni

$$\frac{z^2}{\sigma^2\eta^2} - \frac{\rho^2}{\sigma^2(1 - \eta^2)} = 1.$$

Fizički interesantni slučajevi razdvajanja promenljivih odgovaraju potencijalnoj energiji

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{r_1 r_2}\left\{a\left(\frac{r_2 + r_1}{2\sigma}\right) + b\left(\frac{r_2 - r_1}{2\sigma}\right)\right\}, \tag{48,21}$$

gde su $a(\xi)$ i $b(\eta)$ proizvoljne funkcije. Rezultat promenljivih u Hamilton-Jacobi-jevoj jednačini glasi:

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2}{(\xi^2 - 1)^2}}\, d\xi +$$

$$+ \int \sqrt{2m\sigma^2 E - \frac{\beta + 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{p_\varphi^2}{(1 - \eta^2)^2}}\, d\eta. \tag{48,22}$$

Zadaci

1. Naći totalni integral Hamilton-Jacobi-jeve jednačine za kretanje čestice u polju

$$U = \frac{\alpha}{r} - Fz$$

(superpozicija Coulomb-ovog i homogenog polja).

Rešenje. Dato polje se odnosi na tip (48,15), pri čemu je:

$$a(\xi) = \alpha - \frac{F}{2}\xi^2, \qquad b(\eta) = \alpha + \frac{F}{2}\eta^2.$$

Prema formuli (48,16) nalazimo:

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{m\alpha - \beta}{2\xi} - \frac{p_\varphi^2}{4\xi^2} + \frac{mF\xi}{4}}\, d\xi +$$

$$+ \int \sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{m\alpha + \beta}{2\eta} - \frac{p_\varphi^2}{4\eta^2} - \frac{mF\eta}{4}}\, d\eta\,.$$

sa proizvoljnim konstantama p_φ, E, β. Konstanta β ima u datom slučaju određeni smisao; ona izražava održanje veličine (jednoznačne funkcije koordinata i impulsa čestice):

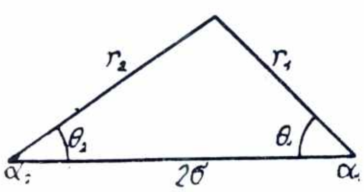
$$\beta = -m\left[\frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\varrho}{m}(z p_\varrho - \rho p_z)\right] - \frac{m}{2}F\rho^2.$$

Izraz u uglastim zagradama predstavlja integral kretanja, koji je specifičan za čisto Coulomb-ovo polje (vidi § 15).

2. To isto u polju

$$U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$$

(Coulomb-ovo polje dva nepokretna centra na međusobnom rastojanju 2σ).



Sl. 55

Rešenje. Dato polje se odnosi na tip (48,21), pri čemu je:

$$a(\xi) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma}\xi, \qquad b(\eta) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma}\eta.$$

Prema formuli (48,22), nalazimo:

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)\xi}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2}{(\xi^2 - 1)^2}}\, d\xi +$$

$$+ \sqrt{2m\sigma^2 E - \frac{\beta + 2m\sigma(\alpha_1 - \alpha_2)\eta}{1 - \eta^2} - \frac{p_\varphi^2}{(1 - \eta^2)^2}}\, d\eta.$$

Konstanta β izražava u datom slučaju održanje sledeće veličine

$$\beta = \sigma^2 p_\varrho^2 - M^2 + 2m\sigma(\alpha_1 \cos\theta_1 + \alpha_2 \cos\theta_2),$$

gde je M totalni moment impulsa čestice, a θ_1 i θ_2 su uglovi koji su naznačeni na sl. 55.

§ 49. Adijabatske invarijante

Posmatraćemo mehanički sistem koji vrši linearno konačno kretanje i karakteriše se nekim parametrom λ, kojim se određuju svojstva samog sistema ili spoljašnjeg polja u kome se on nalazi.

Pretpostavimo da se parametar λ pod uticajem ma kakvih spoljašnjih uzroka sporo menja u toku vremena (kako se kaže adijabatski); pod izrazom „sporo“ imamo u vidu takvu promenu pri kojoj se λ malo menja za vreme perioda T kretanja sistema

$$T\frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \tag{49,1}$$

Takav sistem nije zatvoren i njegova energija E se na održava. Ali zbog sporosti promene λ može se konstantovati da je brzina $\dot{E}$ promene energije proporcionalna brzini $\dot{\lambda}$ promene parametra λ. To znači, da se energija sistema ponaša pri promeni λ kao neka funkcija λ. Drugim rečima, postoji takva kombinacija od E i λ koja ostaje pri kretanju sistema nepromenjena; ovu veličinu nazivamo *adijabatska invarijanta.*

Neka je $H(p, q; \lambda)$ Hamilton-ova funkcija sistema, koja zavisi od parametra λ. Prema formuli (40,5) totalni izvod energije sistema po vremenu biće:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{dt}.$$

Ovu jednačinu ćemo dovesti na srednju vrednost po periodu kretanju, uzimajući u obzir sporost promene λ (a sa njom i $\dot{\lambda}$), $\dot{\lambda}$ možemo izbaciti van znaka za srednju vrednost:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}},$$

a u funkciji $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$ koja je dovedena na srednju vrednost ćemo posmatrati kako se menjaju samo veličine p i q, ali ne i λ. Drugim rečima, dovođenje na srednju vrednost se vrši po takvom kretanju sistema kakvo bi bilo pri datoj konstantnoj vrednosti λ.

Napisaćemo srednju vrednost u eksplicitnom obliku!

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda}\, dt.$$

Prema Hamilton-ovoj jednačini $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, imamo:

$$dt = \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}.$$

Pomoću ove jednačine zamenjujemo integriranje po vremenu integriranjem po koordinati, pri čemu i period T pišemo u obliku:

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}};$$

znakom $\oint$ ovde se označava integriranje po totalnoj promeni koordinate („napred“ i „nazad“ za jedan period[1]). Na taj način biće:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint \frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p}\, dq}{\oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}}. \qquad (49,)$$

Kao što je već bilo navedeno, integriranja se u toj formuli moraju vršiti po trajektoriji kretanja pri datoj konstantnoj vrednosti λ. Duž takve trajektorije Hamilton-ova funkcija zadržava konstantuu vrednost E, a impuls je određena funkcija promenljve koordinate q i dva konstantna nezavisna parametra E i λ. Shvatajući impuls baš kao takvu funkciju $p(q; E, \lambda)$ i diferencirajući jednačinu $H(p, q; \lambda) = E$ po parametru λ, dobivamo:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0,$$

ili

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

Zamenjujući ovo u gornji integral u (49,2) i ako napišemo u donjem podintegralu funkciju u obliku $\frac{\partial p}{\partial E}$, imaćemo:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = -\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}\, dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E}\, dq}, \qquad (49,3)$$

[1]) Ako kretanje sistema predstavlja rotaciju, a kao koordinata q se javlja neki ugao obrtanja φ, onda integriranje po α_φ treba vršiti po „punom obrtu“ tj. od nule do 2π.

ili

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{\overline{\partial E}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0.$$

Ova se jednačina može definitivno napisati u obliku:

$$\frac{\overline{dI}}{dt} = 0, \tag{49,4}$$

gde I označava integral:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq, \tag{49,5}$$

koji je uzet po trajektoriji kretanja za date vrednosti E i λ. Ovaj rezultat pokazuje da veličina I ostaje u posmatranoj aproksimaciji konstantna pri promeni parametra λ, tj. ona je adijabatska invarijanta[1].

Veličina I je funkcija energije sistema (i parametra λ). Napominjemo, da je parcijalni izvod po energiji

$$2\pi \frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq$$

[integral koji stoji u imenitelju u relaciji (49,3)] period kretanja sistema

$$2\pi \frac{\partial I}{\partial E} = T. \tag{49,6}$$

Integralu (49,5) može biti pripisan očigledni geometrijski smisao ako se koristimo pojmom o faznoj trajektoriji sistema. U datom slučaju (jedan stepen slobode) fazni prostor se svodi na dvodimenzionalni koordinatni sistem p, q, a fazna trajektorija sistema, koji vrši periodično kretanje predstavlja zatvorenu krivu u toj ravni. Integral (49,5), koji je uzet duž te krive, predstavlja ravan, koja je zatvorena u njenoj unutrašnjosti. On očevidno može biti napisan u ekvivalentnim oblicima kao krivolinijski integral:

$$I = -\frac{1}{2\pi} \oint q\, dp,$$

ili kao dvodimenzionalni integral po površini:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int dp\, dq.$$

Kao primer odredićemo adijabatske invarijante za linearni oscilator. Njegova Hamilton-ova funkcija biće:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

[1]) Može se pokazati da je razlika I od konstantne vrednosti eksponencijalno mala veličina (ako funkcija $\lambda(t)$ nema singulariteta).

gde je ω — sopstvena frekvencija oscilatora. Jednačina fazne trajektorije je data zakonom održanja energije $H(p, q) = E$. To je elipsa sa poluosama $\sqrt{2mE}$ i $\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$, a njena površina (podeljena sa 2π), biće:

$$I = \frac{E}{\omega}. \tag{49,7}$$

Adijabatska invarijantnost te veličine označava da se pri sporoj promeni parametra oscilatora njegova energija menja proporcionalno frekvenciji.

Pomoću veličine I možemo dati novu formulaciju jednačina kretanja zatvorenog sistema (sa konstantnim parametrima).

Izvršićemo kanonsku transformaciju promenljivih p, q uzevši pri tom veličinu I kao novi „impuls". Ulogu funkcije generatrise mora pri tom igrati „redukovano dejstvo" S_0, koje je izraženo kao funkcija q i I. U stvari, S_0 se određuje za datu energiju sistema. Ali za zatvoreni sistem I je funkcija jedino energije te se zbog toga S_0 može sa istim uspehom izraziti u obliku funkcije $S_0(q, I)$, a parcijalni izvod $\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_E = p$ se poklapa sa izvodom $\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_I$ pri konstantnoj vrednosti I. Zbog toga ćemo imati izraz:

$$p = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial q}, \tag{49.8}$$

koji odgovara prvoj od formula kanonske transformacije (45,8). Druga formula određuje novu „koordinatu", koju ćemo označiti sa w:

$$w = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I}. \tag{49,9}$$

Promenljive I i w se nazivaju *kanonske promenljive*, pri čemu se I u toj vezi naziva *promenljivim dejstvom* a w *ugaonom promenljivom*.

Kako funkcija generatrisa $S_0(q, I)$ ne zavisi eksplicitno od vremena, onda se nova Hamilton-ova funkcija H' poklapa sa starom H, koja je izražena u obliku funkcije novih promenljih. Drugim rečima, H' je energija, koja je izražena u funkciji promenljive dejstva $E(I)$. Respektivno Hamilton-ove jednačine za kanonske promenljive imaju oblik:

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{w} = \frac{dE(I)}{dI}. \tag{49,10}$$

Iz prve imamo, kao što mora da bude, da je $I = \text{const}$; zajedno sa energijom konstantna je i veličina I. Iz druge se vidi da je ugaona promenljiva linearna funkcija vremena:

$$w = \frac{dE}{dI} t + \text{const}. \tag{49,11}$$

Dejstvo $S_0(q, I)$ je nejednoznačna funkcija koordinate. Po isteku svakog perioda ta funkcija se ne vraća na početnu vrednost, već dobiva priraštaj:

$$\Delta S_0 = 2\pi I, \tag{49,12}$$

kao što je očigledno iz formle $S_0 = \int p\,dq$ i definicije (49,5). Za to isto vreme ugaona promenljiva, prema tome, dobiva priraštaj

$$\Delta w = \Delta \frac{\partial S_0}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \Delta S_0 = 2\pi \tag{49,13}$$

(u ovo se možemo uveriti i neposredno pomoću formule (49,11) i izraza (49,6) sa period).

Obratno, ako p i q izrazimo [ili ma koju njihovu jednoznačnu funkciju $F(p, q)$] pomoću kanonskih promenljivih, onda te funkcije ne menjaju svoje vrednosti pri promeni w za 2π (pri datoj vrednosti I). Drugim rečima, svaka jednoznačna funkcija $F(p, q)$, pošto je izražena pomoću kanonske promenljive, je periodična funkcija w sa periodom 2π,

§ 50. Opšta svojstva višedimenzionalnog kretanja

Posmatraćemo sistem sa više stepena slobode koji vrši finitno kretanje (u odnosu na sve koordinate). Pretpostavićemo pri tom da zadatak dopušta potpuno razdvajanje promenljivih u Hamilton-Jacobi-jevoj metodi. To znači da pri odgovarajućem izboru koordinate redukovano dejs vo predstavlja sumu:

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i) \tag{50,1}$$

funkcija od kojih svaka zavisi samo od jedne od koordinata.

Kako su generalisani impulsi:

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = \frac{\partial S_i}{\partial q_i},$$

nda svaka od funkcija S_i može biti predstavljena u obliku:

$$S_i = \int p_i\,dq_i. \tag{50,2}$$

Ove funkcije su nejednoznačne. Zbog finitnosti kretanja, svaka od koordinata može da dobije vrednost samo u određenom konačnom intervalu. Promenom q_i u tom in ervalu „napred" i „nazad" dejstvo dobiva priraštaj:

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i, \tag{50,3}$$

gde je I_i integral:

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i\,dq_i, \tag{50,4}$$

koji je uzet po navedenoj promeni q_i[1].

[1] Napominjemo, međutim, da je ovde reč o formalnoj promeni koordinate q_i u celom dozvoljenom intervalu njenih vrednosti, a ne o promeni za period realnog kretanja (kako je to bilo u slučaju linearnog kretanja). Realno konačno kretanje sistema sa nekoliko stepena slobode ne samo da se ne javlja u opštem slučaju periodičnim u celini, već takođe nije periodična ni promena svake od njenih koordinata pojedinačno (vidi dalje).

Sada ćemo izvršiti kanonsku transformaciju analogno onoj, kako smo uradili u prethodnom paragrafu, za slučaj jednog stepena slobode. Nove promenljive će biti „promenljive dejstva" I_i i „ugaone promenljive"

$$w_i = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k, I)}{\partial I_i}, \tag{50,5}$$

gde je kao funkcija generatrisa ponovo dejstvo, koje je izraženo kao funkcija koordinata i veličina I_i. Jednačine kretanja sa tim promenljivim

$$\dot{I}_i = 0, \qquad \dot{w}_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

daju:

$$I_i = \text{const}, \tag{50,6}$$

$$w_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i} t + \text{const}. \tag{50,7}$$

Nalazimo takođe analogno (49,13) da ukupnoj promeni koordinate q_i („napred" i „nazad") odgovara promena odgovarajuće vrednosti w_i za 2π:

$$\Delta w_i = 2\pi. \tag{50,8}$$

Drugim rečima, veličine $w_i(q, I)$ su nejednoznačne funkcije koordinata koje se promeni poslednjih vraćanjem na prvobitne vrednosti, mogu promenuti za ma koji ceo multiplum od 2π. Ovo svojstvo se može formulisati takođe i kao svojstvo funkcije $w_i(p, q)$ (izraženo pomoću koordinate i impulsa) u faznom prostoru sistema. Kako su same veličine I_i, ako ih izrazimo pomoću p i q jednoznačne funkcije tih promenljivih, to, ako zamenimo $I_i(p, q)$ u $w_i(q, I)$ dobivamo funkfunkcije ciju $w_i(p, q)$ koja se pri obilasku po ma kojoj zatvorenoj krivoj u faznom prostoru može izmeniti za ceo multpilum 2π (računajući tu i nulu).

Odavde izlazi da je svaka jednoznačna funkcija stanja sistema $F(p, q)$[1], budući da je izražena pomoću kanonskih promenljivih, periodična funkcija ugaonih promenljivih sa periodom 2π na svakoj od njih. Možemo je razložiti zbog toga u višestruki Fouerier-ov red oblika:

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_S=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \dots l_S} e^{i(l_1 w_1 + \dots + l_S w_S)} \tag{50,9}$$

($l_1, l_2, \cdots, l_S$ su celi brojevi). Ako ovde zamenimo ugaone promenljive kao funkcije vremena, nalazimo da se vremenska zavisnost F određuje sumom, oblika:

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_S=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \dots l_S} \exp\left\{it\left(l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \cdots + l_S \frac{\partial E}{\partial I_S}\right)\right\}. \tag{50,10}$$

---

[1] „Rotacione koordinate" — uglovi φ (vidi primedbu na str. 172) su nejednoznačno vezane sa stanjem sistema, pošto vrednosti φ, koje se razlikuju za ceo umnožak od 2π, odgovaraju jednom te istom položaju sistema. Zbog toga ako između koordinata q postoje takvi uglovi, onda oni mogu da uđu u funkciju $F(p, q)$ samo u obliku takvih izraza kao $\cos\varphi$ ili $\sin\varphi$, čija je veza sa stanjem sistema jednoznačna.

Svaki od članova ove sume je periodična funkcija vremena sa frekvencijom:

$$l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \cdots + l_S \frac{\partial E}{\partial I_S}. \tag{50,11}$$

Ali kako sve te frekvencije nisu, opšte uzev, celi multiplumi (ili racionalni delovi) ma koje od njih, onda cela suma nije strogo periodična funkcija. Ovo se odnosi, specijalno, i na same koordinate q i impulse p sistema.

Na taj način, kretanje sistema nije u opštem slučaju strogo periodično ni u celini ni po ma kojoj od koordinata. To znači, da, ako je sistem prošao kroz ma koje stanje, onda on ne prolazi ponovo kroz isto u toku ma kog konačnog vremena. Međutim, može se konstatovati, da po isteku dosta dugog intervala vremena on prolazi vrlo blizi toga stanja. Imajući ovo svojstvo u vidu, takvo kretanje se naziva *uslovno periodično*.

U različitim pojedinačnim slučajevima dve (ili više) osnovne frekvencije $\omega_i = \frac{\partial E}{\partial I_i}$ se mogu pokazati uporedive (za proizvoljne veličina I_i). U takvim slučajevima se govori o postanku *degeneracije*, a ako su svih s frekvencija uporedive, onda se kretanje sistema naziva *potpuno degenerisano*. U poslednjem slučaju očigledno je, da je kretanje strogo periodično i samim tim su trejektorije svih čestica zatvorene.

Postojanje degeneracije dovodi, pre svega, do smanjenja broja nezavisnih veličina (I_i) od kojih zavisi energija sistema. Neka su dve frekvencije ω_1 i ω_2 vezane ralacijom

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial I_2}, \tag{50,12}$$

gde su n_1 i n_2 celi brojevi. Odavde izlazi da veličine I_1 i I_2 ulaze u energiju samo u obliku sume $n_2 I_1 + n_1 I_2$.

Veoma važna specifičnost degenerisanih kretanja je uvećanje broja jednoznačnih integrala kretanja u poređenju sa njihovim brojem u opštem slučaju nedegenerisanog sistema (sa istim brojem stepena slobode). U poslednjem slučaju od ukupnog broja $(2s - 1)$ svih integrala kretanja jednoznačni su svega s funkcija stanja sistema, njihov ukupan zbir čine, na primer, s veličina I_i. Ostalih $(s - 1)$ integrala možemo predstaviti u obliku razlike

$$w_i \frac{\partial E}{\partial I_k} - w_k \frac{\partial E}{\partial I_i}. \tag{50,13}$$

Konstantnost ovih veličina izlazi neposredno iz formule (50,7), a i s obzirom na nejednoznačnost ugaonih promenljivih one nisu jednoznačne funkcije stanja sistema.

Pri postojanju pak degeneracije situacija se menja. Tako, s obzirom na vezu (50,12), integral

$$w_i n_k - w_k n_i \tag{50,14}$$

iako je nejednoznačan, njegova se nejednoznačnost ipak svodi na dodavanje ma kog celog multipluma 2π. Zbog toga je dovoljno uzeti trigonometrijsku funkciju te veličine, da bismo dobili novi jednoznačni integral kretanja.

Kao primer degenerisanog kretanja je kretanje u polju $U = -\frac{\alpha}{r}$ (vidi zadatak u ovom paragrafu). Upravo ova okolnost dovodi do pojave novog, specifičnog, jednoznačnog integrala kretanja (15,17), pored dva (posmatramo kretanje baš u ravni) obična jednoznačna integrala, — momenta M i energije E, koji su svojstveni kretanju u ma kome centralnom polju.

Napominjemo, takođe, da pojava dopunskih jednoznačnih integrala dovodi do još jednog svojstva degenerisanih kretanja — oni dozvoljavaju potpuno razdvajannje promenlivih pri različitim, ali ne pri nekom određenom[1] izboru koordinata. Stvarno su veličine I, u koordinatama koje ostvaruju podelu promenljivih, jednoznačni integrali kretanja. Ali pri postojanju degeneracije broj jednoznačnih integrala prelazi s i zbog toga postaje nejednoznačan izbor onih koje hoćemo da dobijemo kao veličine I_i.

Kao primer ponovo ćemo uzeti Kepler-ovo kretanje, koje dozvoljava razdvajanje promenljivih kako u sfernim, tako i u paraboličnim koordinatama.

U prethodnom paragrafu je bilo pokazano da je pri finitnom kretanju promena dejstva adijabatska invarijanta. Ova konstatacija ostaje na snazi i za sistem sa više stepena slobode. Ovde ćemo dati dokaz koji je primenljiv u opštem slučaju.

Označićemo ponovo sa $\lambda(t)$ parametar sistema koji se sporo menja[2]. Pri kanonskoj transformaciji od promenljivih p, q na promenljive I, w kao funkcija generatrisa kao što znamo, biće dejstvo $S_0(q, I)$. Ono zavisi, kao od parametra, od veličine λ, i ako poslednji zavisi od vremena, onda će eksplicitno zavisiti od vremena i funkcija $S_0(q, I; \lambda(t))$. U takvom slučaju nova Hamilton-ova funkcija H' ne poklapa se već sa starom, tj, sa energijom $E(I)$, a prema opštim formulama kanonske transformacije (45,8), imaćemo

$$H' = E(I) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I) + \Lambda\dot{\lambda}.$$

gde je uvedena oznaka

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_I.$$

Hamilton-ove jednačine daju sada:

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H'}{\partial w_i} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}\dot{\lambda}. \tag{50,15}$$

Ako ovu jednačinu dovedemo na srednju vrednost po intervalu vremena, koji je veliki u poređenju sa osnovnim periodama sistema, ali koji je mali u odnosu na vreme suštinske promene parametra λ. U vezi poslednje okolnosti pri dovođenju na srednju vrednost desne strane jednačine, $\dot{\lambda}$ se može izneti ispred znaka za srednju vrednost, a dovođenjem na srednju vrednost veličine $\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}$ možemo smatrati kao da se kretanje sistema vrši pri konstantnoj vrednosti

---

[1] Pri tom ne uzimamo u obzir takve trivijalne promene koordinata, kao što su transformacije oblika $q_1' = q_1'(q_1)$, $q_2' = q_2'(q_1)$.

[2] Radi kratkoće formula pretpostavićemo da postoji samo jedan takav parametar, ali dokaz važi i za proizvoljan broj parametara.

λ, pa zbog toga da ima gore navedena svojstva uslovno periodičnih kretanja.

Dejstvo S_0 je nejednoznačna funkcija koordinata; pri vraćanju koordinata na prvobitne vrednosti S_0 dobivaju cele umnoške od $2\pi I_i$. Izvod pak $\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_I$ je jednoznačna funkcija, jer se diferenciranje vrši pri konstantnim vrednostima I_i i priraštaji koji su pri tom dodati na S_0, izčezavaju. Zbog toga je Λ, koje je izraženo kao funkija ugaonih promenljivih w_i, periodična funkcija. Srednja vrednost izvoda $\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}$ takve funkcije postaje jednaka nuli, te je prema (50,15) i

$$\overline{\frac{\partial I_i}{\partial t}} = -\overline{\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}\right)_I \dot{\lambda}} = 0,$$

čime se i dokazuje adijabatska invarijantnost veličina I_i.

U zaključku ćemo učiniti izvesne primedbe u odnosu na svojstva finitnog kretanja zatvorenih sistema sa više (s) stepena slobode u najopštijem slučaju, koji ne predstavlja razdvajanje promenljivih u odgovarajućoj Hamilton-Jacobi-jevoj jednačini.

Osnovno svojstvo sistema sa promenljivim, koje se mogu razdvojiti, je jednoznačnost integrala kretanja I_i, čiji je broj jednak broju stepena slobode. U opštem pak slučaju sistema sa promenljivim koje se ne mogu razdvojiti, broj jednoznačnih integrala kretanja se ograničava onima čija je kostantnost u stvari izraz svojstva homogenosti i izotropije prostora i vremena, tj ograničava se zakonima održanja energije, impulsa i momenta

Fazna trajektorija sistema prolazi po onim oblastima faznog prostora, koje se definišu datim konstantnim vrednostima jednoznačnih integrala kretanja. Za sistem sa razdvojenim promenljivim sa njegovim s jednoznačnih integrala ovim uslovima se određuje s-dimenzionalna mnogostrukost u faznom prostoru (hiperpovršina). U toku dosta dugog vremena trajektorija sistema pokriva tu superpovršinu sa proizvoljnom gustinom

U sistemu, pak sa promenljivim, koje se ne mogu razdvojiti, sa njegovim manjim (pri istom s-u) brojem jednoznačnih integrala, fazna trajektorija ispunjava u faznom prostoru (u potpunosti ili delimično) oblasti (mnogostrukosti) velikog broja dimenzija.

Na kraju ćemo ukazati da ako se Hamilton-ova funkcija sistema razlikuje od funkcije, koja dozvoljava razdvajanje promenljivih, samo po malim članovima, onda su i svojstva kretanja bliska svojstvima uslovno-periodičnih kretanja, pri čemu je stepen te bliskosti znatno veći nego stepen malih vrednosti dopunskih članova u Hamilton-ovoj funkciji.

Zadatak

Izračunati promenljive dejstva za eliptičko kretanje u polju $U = -\frac{\alpha}{r}$.

Rešenje. U polarnim koordinatama r, φ u ravni kretanja ćemo imati.

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = M,$$

$$I_r = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{max}}^{r_{min}} \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}} \, dr = -M + \alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Odavde energija, izražena pomoću promenljivih dejstava, ima vrednost:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\varphi)^2}.$$

Ona zavisi samo od sume $I_r + I_\varphi$, što označava degeneraciju kretanja—obe osnovne funkcije (po φ i po r) se poklapaju.

Parametri orbite p i e [vidi (15,4)] se izražavaju pomoću I_r, I_φ prema relacijama:

$$p = \frac{I_\varphi^2}{m\alpha}, \qquad e^2 = 1 - \left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi + I_r}\right)^2.$$

Zbog adijabatske invarijantnosti veličina I_r i I_φ, pri sporoj promeni koeficijenta α ili mase m, ekscentričnost orbite ostaje nepromenjena, a njene se dimenzije menjaju obrnuto proporcionalno sa m i α.